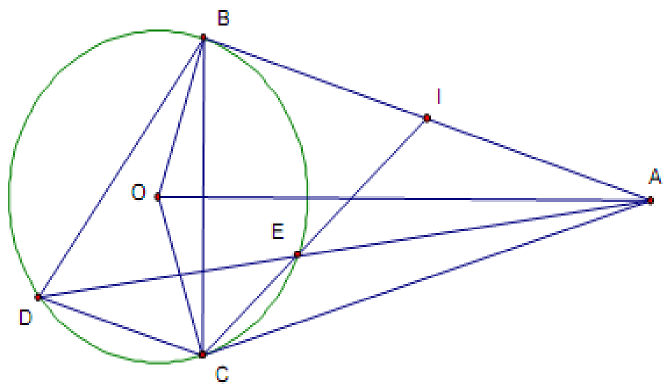
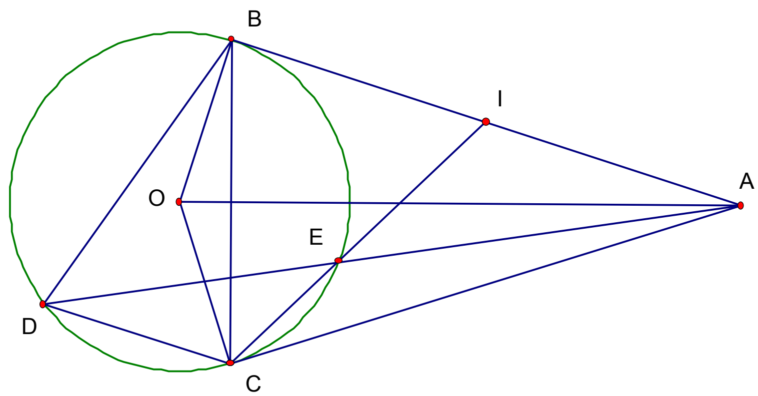
100 BÀI TẬP HÌNH HỌC 9
ÔN THI VÀO THPT



Bài 51: Cho (O), từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O), vẽ hai tt AB và AC với đường tròn. Kẻ dây CD//AB. Nối AD cắt đường tròn (O) tại E.

1. C/m ABOC nội tiếp.
2. Chứng tỏ AB^2=AE.AD.
3. C/m góc $\widehat{AOC}=\widehat{ACB}$ và ΔBDC cân.
4. CE kéo dài cắt AB ở I. C/m IA=IB.



Hình 51

1/C/m: ABOC nt:(HS tự c/m)

2/C/m: AB^2=AE.AD. Chứng minh ΔADB ∽ ΔABE, vì có $\hat{E}$ chung.

Sđ $\widehat{ABE}=\frac{1}{2}$sđ cung $\overset{\frown}{BE}$ (góc giữa tt và 1 dây)

Sđ $\widehat{BDE}=\frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{BE}$ (góc nt chắn $\overset{\frown}{BE}$)

3/C/m $\widehat{AOC}=\widehat{ACB}$

* Do ABOC nt⇒ $\widehat{AOC}=\widehat{ABC}$ (cùng chắn cung AC); vì AC = AB (t/c 2 tt cắt nhau) ⇒ ΔABC cân ở A⇒ $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}\Rightarrow\widehat{AOC}=\widehat{ACB}$

* sđ $\widehat{ACB}=\frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{BEC}$ (góc giữa tt và 1 dây); sđ $\widehat{BDC}=\frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{BEC}$ (góc nt)

⇒ $\widehat{BDC}=\widehat{ACB}$ mà $\widehat{ABC}=\widehat{BDC}$ (do CD//AB) ⇒ $\widehat{BDC}=\widehat{BCD}$ ⇒ ΔBDC cân ở B.

4/ Ta có $\hat{I}$ chung; $\widehat{IBE}=\widehat{ECB}$ (góc giữa tt và 1 dây; góc nt chắn cung BE)⇒ ΔIBE∽ΔICB⇒$\frac{IE}{IB}=\frac{IB}{IC}$⇒ IB^2=IE.IC❶

Xét 2 ΔIAE và ICA có $\hat{I}$ chung; sđ $\widehat{IAE}=\frac{1}{2}$sđ $(\overset{\frown}{DB}-\overset{\frown}{BE})$ mà ΔBDC cân ở B⇒

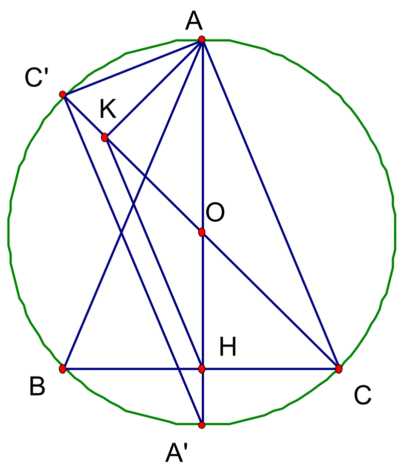
$\overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{BC}$⇒sđ $\widehat{IAE}$=sđ ($\overset{\frown}{BC}$-$\overset{\frown}{BE}$) = $\frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{CE}$= sđ $\widehat{ECA}$

⇒ ΔIAE∽ΔICA⇒$\frac{IA}{IC}=\frac{IE}{IA}$ ⇒IA^2=IE.IC ❷Từ ❶và❷⇒$IA^2=IB^2$⇒ IA=IB

Bài 52:

Cho ΔABC (AB=AC); BC=6; Đường cao AH=4(cùng đơn vị độ dài), nội tiếp trong (O) đường kính AA'.

1. Tính bán kính của (O).
2. Kẻ đường kính CC'. Tứ giác ACA'C' là hình gì?
3. Kẻ $AK \perp CC'$. C/m AKHC là hình thang cân.
4. Quay ΔABC một vòng quanh trục AH. Tính diện tích xung quanh của hình được tạo ra.



Hình 52

1/Tính OA:ta có BC=6; đường cao AH=4 $\Rightarrow$ AB=5; $\Delta ABA'$ vuông ở B$\Rightarrow BH^2=AH.A'H$

$\Rightarrow A'H=\dfrac{BH^2}{AH}=\dfrac{9}{4}$

$\Rightarrow AA'=AH+HA'=\dfrac{25}{4}$

$\Rightarrow AO=\dfrac{25}{8}$

2/ACA'C' là hình gì?

Do O là trung điểm AA' và CC'$\Rightarrow$ACA'C' là Hình bình hành. Vì AA'=CC'(đường kính của đường tròn)$\Rightarrow$AC'A'C là hình chữ nhật.

3/ C/m: AKHC là thang cân:

◆ ta có $\widehat{AKC}=\widehat{AHC}=1v \Rightarrow$ AKHC nội tiếp.$\Rightarrow \widehat{HKC}=\widehat{HAC}$(cùng chắn cung HC) mà ΔOAC cân ở O$\Rightarrow \widehat{OAC}=\widehat{OCA} \Rightarrow \widehat{HKC}=\widehat{HCA} \Rightarrow$HK//AC$\Rightarrow$AKHC là hình thang.

◆ Ta lại có:$\widehat{KAH}=\widehat{KCH}$ (cùng chắn cung KH)$\Rightarrow$ $\widehat{KAO}+\widehat{OAC}=\widehat{KCH}+\widehat{OCA} \Rightarrow$Hình thang AKHC có hai góc ở đáy bằng nhau.Vậy AKHC là thang cân.

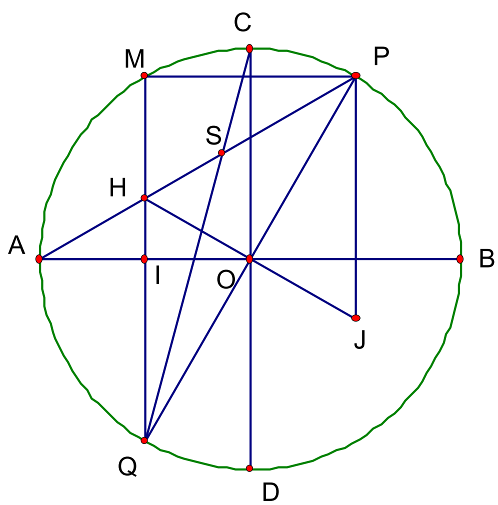
4/ Khi Quay Δ ABC quanh trục AH thì hình được sinh ra là hình nón. Trong đó BH là bán kính đáy; AB là đường sinh; AH là đường cao hình nón.

$S_{xq}=\dfrac{1}{2}p.d=\dfrac{1}{2}.2\pi.BH.AB=15\pi$

$V=\dfrac{1}{3}B.h=\dfrac{1}{3}\pi BH^2.AH=12\pi$

Bài 53:Cho(O) và hai đường kính AB; CD vuông góc với nhau. Gọi I là trung điểm OA. Qua I vẽ dây MQ⊥OA (M∈ cung AC ; Q∈ AD). Đường thẳng vuông góc với MQ tại M cắt (O) tại P.

1. C/m: a/ PMIO là thang vuông.
   b/ P; Q; O thẳng hàng.
2. Gọi S là Giao điểm của AP với CQ. Tính Góc $\widehat{CSP}$.
3. Gọi H là giao điểm của AP với MQ. Cmr:
   a/ MH.MQ= MP^2.
   b/ MP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔQHP.



Hình 53

1/ a/ C/m MPOI là thang vuông.
Vì OI⊥MI; CO⊥IO(gt) ⇒CO//MI mà MP⊥CO ⇒MP⊥MI⇒MP//OI⇒MPOI là thang vuông.
b/ C/m: P; Q; O thẳng hàng:
Do MPOI là thang vuông ⇒$\widehat{IMP}$=1v hay $\widehat{QMP}$=1v⇒ QP là đường kính của (O)⇒ Q; O; P thẳng hàng.
2/ Tính góc CSP:
Ta có
sđ $\widehat{CSP}$=$\frac{1}{2}$sđ(AQ+CP) (góc có đỉnh nằm trong đường tròn) mà cung CP = CM và CM=QD ⇒ CP=QD ⇒ sđ $\widehat{CSP}$=$\frac{1}{2}$sđ(AQ+CP)= sđ $\widehat{CSP}$=$\frac{1}{2}$sđ(AQ+QD) =$\frac{1}{2}$sđAD=45^o. Vậy $\widehat{CSP}$=45^o.

3/ a/ Xét hai tam giác vuông: MPQ và MHP có : Vì Δ AOM cân ở O; I là trung điểm AO; MI⊥AO⇒ΔMAO là tam giác cân ở M⇒ ΔAMO là tam giác đều ⇒ cung AM=60^o và MC = CP =30^o ⇒ cung MP = 60^o. ⇒ cung AM=MP ⇒ góc $\widehat{MPH}$= $\widehat{MQP}$ (góc nt chắn hai cung bằng nhau.)⇒ ΔMHP∽ΔMQP⇒ đpcm.

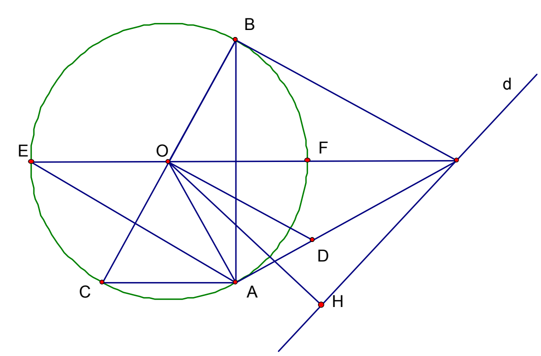
b/ C/m MP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp Δ QHP.

Gọi J là tâm đtròn ngoại tiếp ΔQHP.Do cung AQ=MP=60^o⇒ ΔHQP cân ở H và $\widehat{QHP}$=120^o⇒J nằm trên đường thẳng HO⇒ ΔHPJ là tam giác đều mà $\widehat{HPM}$=30^o⇒$\widehat{MPH}$+$\widehat{HPJ}$=$\widehat{MPJ}$=90^o hay JP⊥MP tại P nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔHPQ ⇒đpcm.

Bài 54:

Cho (O;R) và một cát tuyến d không đi qua tâm O.Từ một điểm M trên d và ở ngoài (O) ta kẻ hai tiếp tuyến MA và MB với đường tròn; BO kéo dài cắt (O) tại điểm thứ hai là C.Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O xuống d.Đường thẳng vuông góc với BC tại O cắt AM tại D.

1. C/m A; O; H; M; B cùng nằm trên 1 đường tròn.
2. C/m AC//MO và MD=OD.
3. Đường thẳng OM cắt (O) tại E và F. Chứng tỏ MA^2=ME.MF
4. Xác định vị trí của điểm M trên d để ΔMAB là tam giác đều.Tính diện tích phần tạo bởi hai tt với đường tròn trong trường hợp này.



Hình 54

1/Chứng minh $\widehat{OBM}=\widehat{OAM}=\widehat{OHM}$=1v

2/◆ C/m AC//OM: Do MA và MB là hai tt cắt nhau ⇒$\widehat{BOM}=\widehat{OMB}$ và MA=MB ⇒MO là đường trung trực của AB⇒MO⊥AB.

Mà $\widehat{BAC}$=1v (góc nt chắn nửa đtròn ⇒CA⊥AB. Vậy AC//MO.

◆C/mMD=OD. Do OD//MB (cùng ⊥CB)⇒$\widehat{DOM}=\widehat{OMB}$(so le) mà $\widehat{OMB}=\widehat{OMD}$(cmt)⇒DOM=DMO⇒ΔDOM cân ở D⇒đpcm.

3/C/m: MA^2=ME.MF: Xét hai tam giác AEM và MAF có góc $\widehat{M}$ chung.

Sđ $\widehat{EAM}=\frac{1}{2}$ sd cungAE(góc giữa tt và 1 dây)

Sđ $\widehat{AFM}=\frac{1}{2}$ sđcungAE(góc nt chắn cungAE) ⇒$\widehat{EAM}=\widehat{AFM}$

⇒ΔMAE∽ΔMFA⇒đpcm.

4/◆Vì AMB là tam giác đều⇒góc $\widehat{OMA}=30^o$⇒OM=2OA=2OB=2R

◆Gọi diện tích cần tính là S.Ta có S=$S_{OAMB}-S_{quạt\ AOB}$

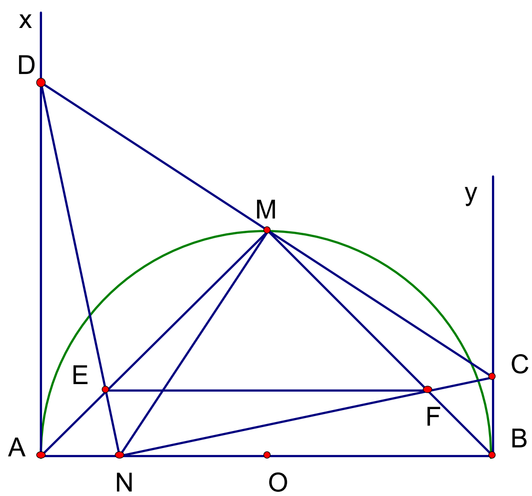
Ta có AB=AM=$\sqrt{OM^2-OA^2}$ =R$\sqrt{3}$⇒S AMBO=$\frac{1}{2}$BA.OM= $\frac{1}{2}$.2R. R$\sqrt{3}$=

$R^2\sqrt{3}$⇒ $S_{quạt}=\frac{\pi R^2.120}{360}=\frac{\pi R^2}{3}$⇒S= $R^2\sqrt{3}-\frac{\pi R^2}{3}=\frac{(3\sqrt{3}-\pi)R^2}{3}$

Bài 55:

Cho nửa (O) đường kính AB, vẽ các tiếp tuyến Ax và By cùng phía với nửa đường tròn. Gọi M là điểm chính giữa cung AB và N là một điểm bất kỳ trên đoạn AO. Đường thẳng vuông góc với MN tại M lần lượt cắt Ax và By ở D và C.

1. C/m $\widehat{AMN}=\widehat{BMC}$.
2. C/m$\Delta ANM=\Delta BMC$.
3. DN cắt AM tại E và CN cắt MB ở F.C/m $FE\perp Ax$.
4. Chứng tỏ M cũng là trung điểm DC.



Hình 55

1/C/m $\widehat{AMN}=\widehat{BMA}$.

Ta có $\widehat{AMB}$=1v(góc nt chắn nửa đtròn) và do $NM\perp DC \Rightarrow \widehat{NMC}$=1v vậy:
$\widehat{AMB}=\widehat{AMN}+\widehat{NMB}=\widehat{NMB}+\widehat{BMC}$=1v$\Rightarrow$ $\widehat{AMN}=\widehat{BMA}$.

2/C/m $\Delta ANM=\Delta BCM$:

Do cung AM=MB=90^o.$\Rightarrow$dây AM=MB và $\widehat{MAN}=\widehat{MBA}=45^o$.($\Delta AMB$ vuông cân ở M)$\Rightarrow\widehat{MAN}=\widehat{MBC}=45^o$.

Theo c/mt thì $\widehat{CMB}=\widehat{AMN}\Rightarrow$ $\Delta ANM=\Delta BCM$(gcg)

3/C/m $EF\perp Ax$.

Do ADMN nt$\Rightarrow\widehat{AMN}=\widehat{AND}$(cùng chắn cung AN)
Do MNBC nt$\Rightarrow\widehat{BMC}=\widehat{CNB}$(cùng chắn cung CB)
Mà $\widehat{AMN}=\widehat{BMC}$ (chứng minh câu 1)
$\Rightarrow$ $\widehat{AND}=\widehat{CNB}$

Ta lại có $\widehat{AND}+\widehat{DNA}$=1v$\Rightarrow\widehat{CNB}+\widehat{DNA}$=1v $\Rightarrow\widehat{ENC}$=1v mà $\widehat{EMF}$=1v $\Rightarrow$EMFN nội tiếp $\Rightarrow\widehat{EMN}=\widehat{EFN}$(cùng chắn cung NE)$\Rightarrow$ $\widehat{EFN}=\widehat{FNB}$
$\Rightarrow$ EF//AB mà $AB\perp Ax \Rightarrow EF\perp Ax$.

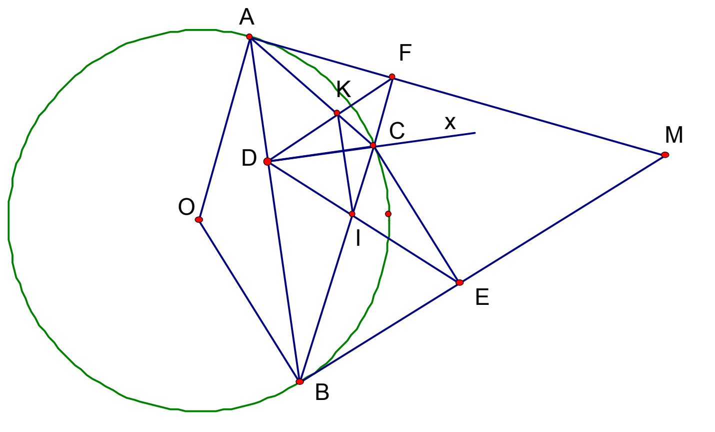
4/C/m M cũng là trung điểm DC:

Ta có $\widehat{NCM}=\widehat{MBN}=45^o$.(cùng chắn cung MN).
$\Rightarrow\Delta NMC$ vuông cân ở M$\Rightarrow$ MN=NC. Và ΔNDC vuông cân ở N$\Rightarrow\widehat{NDM}=45^o$.
$\Rightarrow\Delta MND$ vuông cân ở M$\Rightarrow$ MD=MN$\Rightarrow$ MC= DM $\Rightarrow$đpcm.

Bài 56:

Từ một điểm M nằm ngoài (O) kẻ hai tiếp tuyến MA và MB với đường tròn. Trên cung nhỏ AB lấy điểm C và kẻ CD⊥AB; CE⊥MA; CF⊥MB. Gọi I và K là giao điểm của AC với DE và của BC với DF.

1. C/m AECD nt.
2. C/m:CD^2=CE.CF
3. Cmr: Tia đối của tia CD là phân giác của góc $\widehat{FCE}$.
4. C/m IK//AB.



Hình 56

1/C/m: AECD nt: (dùng phương pháp tổng hai góc đối)

2/C/m: CD^2=CE.CF.

Xét hai tam giác CDF và CDE có:

-Do AECD nt⇒$\widehat{CED}=\widehat{CAD}$(cùng chắn cung CD)

-Do BFCD nt⇒$\widehat{CDF}=\widehat{CBF}$(cùng chắn cung CF)

Mà sđ $\widehat{CAD}=\frac{1}{2}$ sđ cung BC(góc nt chắn cung BC)

Và sđ $\widehat{CBF}=\frac{1}{2}$ sđ cung BC(góc giữa tt và 1 dây)⇒$\widehat{FDC}=\widehat{DEC}$❶

Do AECD nt và BFCD nt ⇒$\widehat{DCE}+\widehat{DAE}=\widehat{DCF}+\widehat{DBF}$=2v.Mà $\widehat{MBD}=\widehat{DAM}$(t/c hai tt cắt nhau)⇒$\widehat{DCF}=\widehat{DCE}$❷.Từ ❶và ❷⇒ΔCDF∽ΔCED⇒đpcm.

3/Gọi tia đối của tia CD là Cx,Ta có góc $\widehat{xCF}=180^o-\widehat{FCD}$ và $\widehat{xCE}=180^o-\widehat{ECD}$.Mà theo cmt có: $\widehat{FCD}=\widehat{ECD}$⇒ $\widehat{xCF}=\widehat{xCE}$.⇒đpcm.

4/C/m: IK//AB.

Ta có $\widehat{CBF}=\widehat{FDC}=\widehat{DAC}$(cmt)

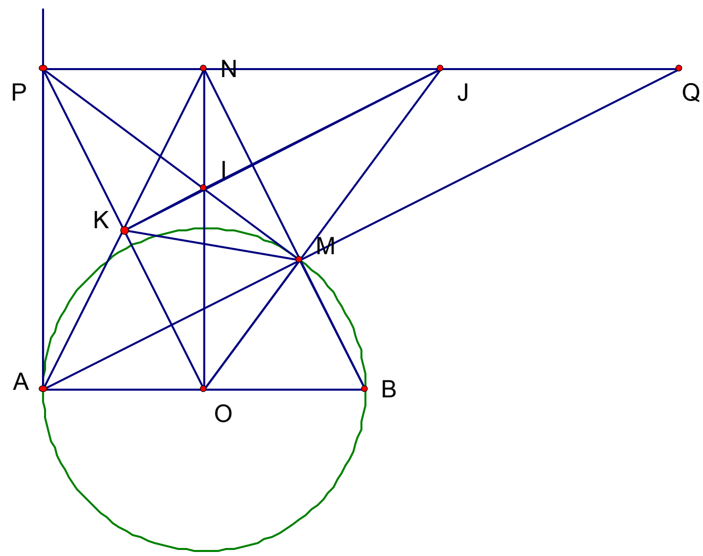
Do ADCE nt⇒$\widehat{CDE}=\widehat{CAE}$(cùng chắn cung CE)

$\widehat{ABC}+\widehat{CAE}$(góc nt và góc giữa tt... cùng chắn 1 cung)⇒$\widehat{CBA}=\widehat{CDI}$.trong ΔCBA có $\widehat{BCA}+\widehat{CBA}+\widehat{CAD}$=2v hay $\widehat{KCI}+\widehat{KDI}$=2v⇒DKCI nội tiếp⇒ $\widehat{KDC}=\widehat{KIC}$ (cùng chắn cung CK)⇒$\widehat{KIC}=\widehat{BAC}$⇒KI//AB.

Bài 57:

Cho (O; R) đường kính AB, Kẻ tiếp tuyến Ax và trên Ax lấy điểm P sao cho P>R. Từ P kẻ tiếp tuyến PM với đường tròn.

1. C/m BM/ / OP.
2. Đường vuông góc với AB tại O cắt tia BM tại N. C/m OBPN là hình bình hành.
3. AN cắt OP tại K; PM cắt ON tại I; PN và OM kéo dài cắt nhau ở J. C/m I; J; K thẳng hàng.



Hình 57

1/ C/m:BM//OP:

Ta có MB⊥AM (góc nt chắn nửa đtròn) và OP⊥AM (t/c hai tt cắt nhau)

⇒ MB//OP.

2/ C/m: OBNP là hình bình hành:

Xét hai Δ APO và OBN có $\widehat{A}=\widehat{O}$=1v; OA=OB(bán kính) và do NB//AP ⇒ $\widehat{POA}=\widehat{NBO}$ (đồng vị)⇒ΔAPO=ΔONB⇒ PO=BN. Mà OP//NB (Cmt) ⇒ OBNP là hình bình hành.

3/ C/m:I; J; K thẳng hàng:

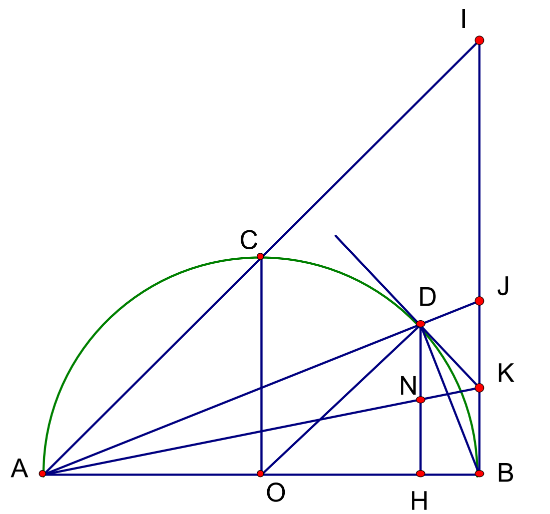
Ta có: PM⊥OJ và PN//OB(do OBNP là hbhành) mà ON⊥AB⇒ON⊥OJ⇒I là trực tâm của ΔOPJ⇒IJ⊥OP.

-Vì PNOA là hình chữ nhật ⇒P; N; O; A; M cùng nằm trên đường tròn tâm K, mà MN//OP⇒ MNOP là thang cân⇒$\widehat{NPO}=\widehat{MOP}$, ta lại có $\widehat{NOM}=\widehat{MPN}$ (cùng chắn cung NM) ⇒ $\widehat{IPO}=\widehat{IOP}$ ⇒ΔIPO cân ở I. Và KP=KO⇒IK⊥PO. Vậy K; I; J thẳng hàng.

Bài 58: Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB; đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt nửa đường tròn tại C. Kẻ tiếp tuyến Bt với đường tròn. AC cắt tiếp tuyến Bt tại I.

1. C/m ΔABI vuông cân
2. Lấy D là 1 điểm trên cung BC, gọi J là giao điểm của AD với Bt. C/m AC.AI=AD.AJ.
3. C/m JDCI nội tiếp.
4. Tiếp tuyến tại D của nửa đường tròn cắt Bt tại K. Hạ DH⊥AB. Cmr: AK đi qua trung điểm của DH.

Hình 58



1/C/m ΔABI vuông cân(Có nhiều cách-sau đây chỉ C/m 1 cách):

-Ta có $\widehat{ACB}$=1v(góc nt chắn nửa đtròn)⇒ΔABC vuông ở C.Vì OC⊥AB tại trung điểm O⇒$\widehat{AOC}=\widehat{COB}$=1v

⇒ cung AC=CB=90^o. ⇒$\widehat{CAB}$=45 ^{o}. (góc nt bằng nửa số đo cung bị chắn)

ΔABC vuông cân ở C. Mà Bt⊥AB có góc $\widehat{CAB}$=45^o ⇒ ΔABI vuông cân ở B.

2/C/m: AC.AI=AD.AJ.

Xét hai ΔACD và AIJ có góc A chung sđ góc $\widehat{CDA}=\frac{1}{2}$ sđ cung AC =45^o.

Mà Δ ABI vuông cân ở B⇒$\widehat{AIB}$=45^o.⇒$\widehat{CDA}=\widehat{AIB}$⇒ ΔADC∽ΔAIJ⇒đpcm

3/ Do $\widehat{CDA}=\widehat{CIJ}$ (cmt) và $\widehat{CDA}+\widehat{CDJ}$=2v⇒ $\widehat{CDJ}+\widehat{CIJ}$=2v⇒CDJI nội tiếp.

4/Gọi giao điểm của AK và DH là N Ta phải C/m:NH=ND

-Ta có:$\widehat{ADB}$=1v và DK=KB(t/c hai tt cắt nhau) ⇒$\widehat{KDB}=\widehat{KBD}$.Mà $\widehat{KBD}+\widehat{DJK}$= 1v và $\widehat{KDB}+\widehat{KDJ}$=1v⇒$\widehat{KJD}=\widehat{JDK}$⇒ΔKDJ cân ở K ⇒KJ=KD ⇒KB=KJ.

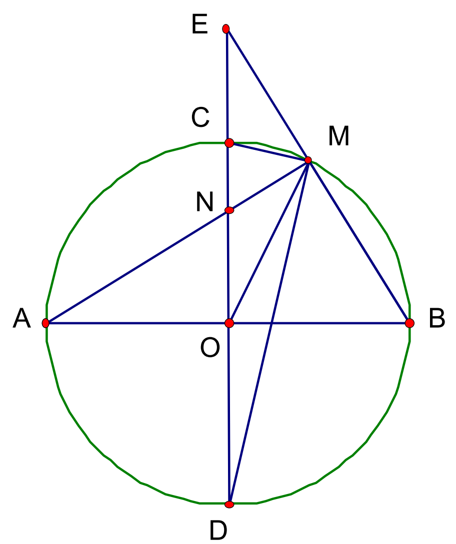
-Do DH⊥ và JB⊥AB(gt)⇒DH//JB. Áp dụng hệ quả Ta lét trong các tam giác AKJ và AKB ta có:

$\frac{DN}{JK}=\frac{AN}{AK};\frac{NH}{KB}=\frac{AN}{AK}\Rightarrow\frac{DN}{JK}=\frac{NH}{KB}$ mà JK=KB⇒DN=NH.

Bài 59:

Cho (O) và hai đường kính AB; CD vuông góc với nhau. Trên OC lấy điểm N; đường thẳng AN cắt đường tròn ở M.

1. Chứng minh: NMBO nội tiếp.
2. CD và đường thẳng MB cắt nhau ở E. Chứng minh CM và MD là phân giác của góc trong và góc ngoài góc AMB
3. C/m hệ thức: AM.DN=AC.DM
4. Nếu ON=NM. Chứng minh MOB là tam giác đều.



Hình 59

1/C/m NMBO nội tiếp:Sử dụng tổng hai góc đối)

2/C/m CM và MD là phân giác của góc trong và góc ngoài góc AMB:

-Do AB⊥CD tại trung điểm O của AB và CD.⇒Cung AD=DB=CB=AC=90^o.

⇒sđ $\widehat{AMD}=\frac{1}{2}$sđcungAD=45^o.

sđ DMB=$\frac{1}{2}$sđcung DB=45^o.⇒AMD=DMB=45^o.Tương tự CAM=45^o ⇒EMC=CMA=45^o.Vậy CM và MD là phân giác của góc trong và góc ngoài góc AMB.

3/C/m: AM.DN=AC.DM.

Xét hai tam giác ACM và NMD có CMA=NMD=45^o.(cmt)

Và CAM=NDM(cùng chắn cung CM)⇒ΔAMC∽ΔDMN⇒đpcm.

4/Khi ON=NM ta c/m ΔMOB là tam giác đều.

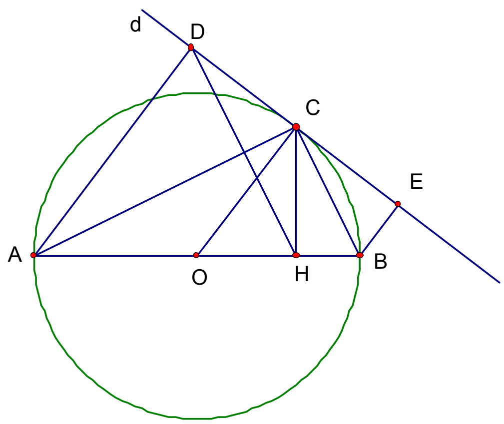
Do MN=ON⇒ΔNMO vcân ở N⇒NMO=NOM.Ta lại có: NMO+OMB=1v và NOM+MOB=1v⇒OMB=MOB.Mà OMB=OBM ⇒OMB=MOB=OBM⇒ΔMOB là tam giác đều.

Bài 60:

Cho (O) đường kính AB, và d là tiếp tuyến của đường tròn tại C. Gọi D; E theo thứ tự là hình chiếu của A và B lên đường thẳng d.

1. C/m: CD=CE.
2. Cmr: AD+BE=AB.
3. Vẽ đường cao CH của ΔABC.Chứng minh AH=AD và BH=BE.
4. Chứng tỏ:CH^2=AD.BE.
5. Chứng minh:DH//CB.

Hình 60



1/C/m: CD=CE:

Do AD⊥d;OC⊥d;BE⊥d ⇒AD//OC//BE.Mà OH=OB⇒OC là đường trung bình của hình thang ABED⇒ CD=CE.

2/C/m AD+BE=AB.

Theo tính chất đường trung bình của hình thang ta có:OC= $\frac{BE+AD}{2}$ ⇒BE+AD=2.OC=AB.

3/C/m BH=BE.Ta có:

sđ $\widehat{BCE}$= $\frac{1}{2}$ sdcung CB(góc giữa tt và một dây)

sđ $\widehat{CAB}$= $\frac{1}{2}$ sđ cung CB(góc nt)⇒$\widehat{ECB}$=$\widehat{CAB}$;ΔACB cuông ở C⇒$\widehat{HCB}$=$\widehat{HCA}$

⇒$\widehat{HCB}$=$\widehat{BCE}$⇒ ΔHCB=ΔECB(hai tam giác vuông có 1 cạnh huyền và 1 góc nhọn bằng nhau) ⇒HB=BE.

-C/m tương tự có AH=AD.

4/C/m: CH^2=AD.BE.

ΔACB có $\widehat{C}$=1v và CH là đường cao ⇒CH^2=AH.HB. Mà AH=AD;BH=BE

⇒ CH^2=AD.BE.

5/C/m DH//CB.

Do ADCH nội tiếp ⇒ $\widehat{CDH}$=$\widehat{CAH}$ (cùng chắn cung CH) mà $\widehat{CAH}$=$\widehat{ECB}$ (cmt) ⇒ $\widehat{CDH}$=$\widehat{ECB}$ ⇒DH//CB.

Bài 61:

Cho ΔABC có: $\widehat{A}$=1v.D là một điểm nằm trên cạnh AB.Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E.các đường thẳng CD;AE lần lượt cắt đường tròn tại các điểm thứ hai F và G.

1. C/m CAFB nội tiếp.
2. C/m AB.ED=AC.EB
3. Chứng tỏ AC//FG.
4. Chứng minh rằng AC;DE;BF đồng quy.

Hình 61

1/C/m CAFB nội tiếp(Sử dụng Hai điểm A; Fcùng làm với hai đầu đoạn thẳng BC)

2/C/m ΔABC và ΔEBD đồng dạng.

3/C/m AC//FG:

Do ADEC nội tiếp ⇒$\widehat{ACD}$=$\widehat{AED}$(cùng chắn cung AD).

Mà $\widehat{DFG}$=$\widehat{DEG}$(cùng chắn cung GD)⇒$\widehat{ACF}$=$\widehat{CFG}$⇒AC//FG.

4/C/m AC; ED; FB đồng quy:

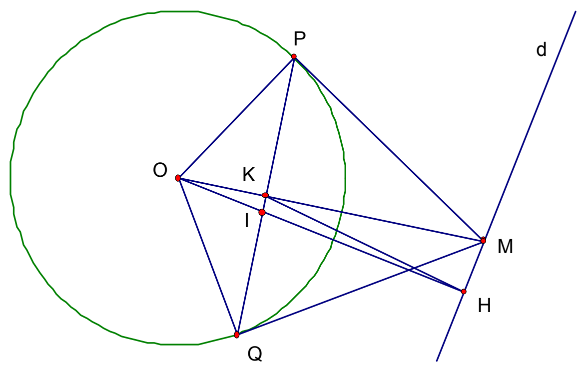
AC và FB kéo dài cắt nhau tại K.Ta phải c/m K; D; E thẳng hàng.

BA⊥CK và CF⊥KB; AB∩CF=D⇒D là trực tâm của ΔKBC⇒KD⊥CB. Mà DE⊥CB(góc nt chắn nửa đường tròn)⇒Qua điểm D có hai đường thẳng cùng vuông góc với BC⇒Ba điểm K;D;E thẳng hàng.⇒đpcm.

Bài 62:

Cho (O;R) và một đường thẳng d cố định không cắt (O).M là điểm di động trên d.Từ M kẻ tiếp tuyến MP và MQ với đường tròn..Hạ OH⊥d tại H và dây cung PQ cắt OH tại I;cắt OM tại K.

1. C/m: MHIK nội tiếp.
2. 2/C/m OJ.OH=OK.OM=R^2.
3. CMr khi M di động trên d thì vị trí của I luôn cố định.



Hình 62

1/C/m MHIK nội tiếp. (Sử dụng tổng hai góc đối)

2/C/m: OJ.OH=OK.OM=R^2.

-Xét hai tam giác OIM và OHK có $\widehat{O}$ chung.

Do HIKM nội tiếp⇒$\widehat{IHK}=\widehat{IMK}$(cùng chắn cung IK) ⇒ΔOHK∽ΔOMI

$\Rightarrow \frac{OH}{OM}=\frac{OK}{OI}$ ⇒OH.OI=OK.OM ❶

OPM vuông ở P có đường cao PK.áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông có:OP^2=OK.OM❷.Từ ❶và ❷⇒đpcm.

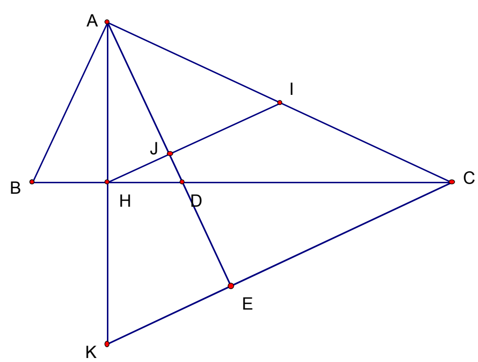
4/Theo cm câu2 ta có OI=$\frac{R^2}{OH}$ mà R là bán kính nên không đổi.d cố định nên OH không đổi ⇒OI không đổi.Mà O cố định ⇒I cố định.

Bài 63:

Cho Δ vuông ABC($\widehat{A}$=1v) và AB<AC.Kẻ đường cao AH.Trên tia đối của tia HB lấy HD=HB rồi từ C vẽ đường thẳng CE$\perp$AD tại E.

1. C/m AHEC nội tiếp.
2. Chứng tỏ CB là phân giác của góc $\widehat{ACE}$ và ΔAHE cân.
3. C/m HE^2=HD.HC.
4. Gọi I là trung điểm AC.HI cắt AE tại J.Chứng minh: DC.HJ=2IJ.BH.
5. EC kéo dài cắt AH ở K.Cmr AB//DK và tứ giác ABKD là hình thoi.

Hình 63



1/C/m AHEC nt (sử dụng hai điểm E và H...)

2/C/m CB là phân giác của ACE

Do AH$\perp$DB và BH=HD

$\Rightarrow\Delta$ABD là tam giác cân ở A $\Rightarrow\widehat{BAH}=\widehat{HAD}$ mà $\widehat{BAH}=\widehat{HCA}$ (cùng phụ với góc $\widehat{B}$).

Do AHEC nt $\Rightarrow\widehat{HAD}=\widehat{HCE}$ (cùng chắn cung HE)

$\Rightarrow\widehat{ACB}=\widehat{BCE}$

$\Rightarrow$đpcm

-C/m ΔHAE cân: Do $\widehat{HAD}=\widehat{ACH}$(cmt) và $\widehat{AEH}=\widehat{ACH}$(cùng chắn cung AH) $\Rightarrow\widehat{HAE}=\widehat{AEH}\Rightarrow\Delta$AHE cân ở H.

3/C/m: HE^2=HD.HC.Xét 2 ΔHED và HEC có $\widehat{H}$ chung.Do AHEC nt $\Rightarrow\widehat{DEH}=\widehat{ACH}$(cùng chắn cung AH) mà $\widehat{ACH}=\widehat{HCE}$(cmt) $\Rightarrow\widehat{DEH}=\widehat{HCE}$ $\Rightarrow\Delta HED\backsim\Delta HCE\Rightarrow$đpcm.

4/C/m DC.HJ=2IJ.BH:

✸Do HI là trung tuyến của tam giác vuông AHC$\Rightarrow$HI=IC$\Rightarrow\Delta$IHC cân ở I $\Rightarrow\widehat{IHC}=\widehat{ICH}$.Mà $\widehat{ICH}=\widehat{HCE}(cmt)\Rightarrow\widehat{IHC}=\widehat{HCE}\Rightarrow$HI//EC.Mà I là trung điểm của AC$\Rightarrow$JI là đường trung bình của ΔAEC$\Rightarrow$JI=$\frac{1}{2}$EC.

✸Xét hai ΔHJD và EDC có: -Do HJ//Ecvà EC$\perp$AE$\Rightarrow$HJ$\perp$JD $\Rightarrow\widehat{HJD}=\widehat{DEC}$=1v và $\widehat{HDJ}=\widehat{EDC}$(đđ)$\Rightarrow\Delta$JDH~$\Delta$EDC$\Rightarrow\frac{JH}{EC}=\frac{HD}{DC}$

$\Rightarrow$JH.DC=EC.HD mà HD=HB và EC=2JI$\Rightarrow$đpcm

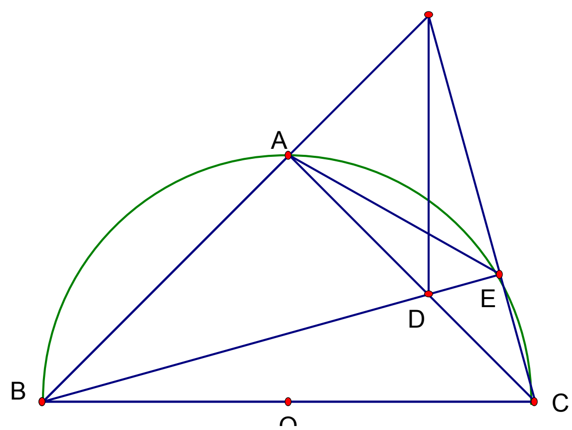
5/Do AE$\perp$KC và CH$\perp$AK AE và CH cắt nhau tại D$\Rightarrow$D là trực tâm của ΔACK$\Rightarrow$KD$\perp$AC mà AB$\perp$AC(gt)$\Rightarrow$KD//AB

-Do CH$\perp$AK và CH là phân giác của ΔCAK(cmt)$\Rightarrow\Delta$ACK cân ở C và AH=KH;Ta lại có BH=HD(gt),mà H là giao điểm 2 đường chéo của tứ giác ABKD$\Rightarrow$ ABKD là hình bình hành.Nhưng DB$\perp$AK$\Rightarrow$ ABKD là hình thoi.

Bài 64:

Cho tam giác ABC vuông cân ở A.Trong góc $\widehat{B}$,kẻ tia Bx cắt AC tại D,kẻ CE $\perp$Bx tại E.Hai đường thẳng AB và CE cắt nhau ở F.

1. C/m FD$\perp$BC,tính góc $\widehat{BFD}$
2. C/m ADEF nội tiếp.
3. Chứng tỏ EA là phân giác của góc $\widehat{DEF}$
4. Nếu Bx quay xung quanh điểm B thì E di động trên đường nào?



Hình 64

1/ C/m: FD$\perp$BC: Do $\widehat{BEC}$=1v;$\widehat{BAC}$=1v(góc nt chắn nửa đtròn).Hay BE$\perp$FC; và CA$\perp$FB.Ta lại có BE cắt CA tại D$\Rightarrow$D là trực tâm của ΔFBC$\Rightarrow$FD$\perp$BC.

Tính góc $\widehat{BFD}$:Vì FD$\perp$BC và BE$\perp$FC nên $\widehat{BFD}=\widehat{ECB}$(Góc có cạnh tương ứng vuông góc).Mà $\widehat{ECB}=\widehat{ACB}$(cùng chắn cung AB) mà $\widehat{ACB}=45^o\Rightarrow\widehat{BFD}=45^o$

2/C/m:ADEF nội tiếp:Sử dụng tổng hai góc đối.

3/C/m EA là phân giác của góc $\widehat{DEF}$.

Ta có $\widehat{AEB}=\widehat{ACB}$(cùng chắn cung AB).Mà $\widehat{ACB}=45^o$(ΔABC vuông cân ở A) $\Rightarrow\widehat{AEB}=45^o$.Mà $\widehat{DEF}=90^o\Rightarrow\widehat{FEA}=\widehat{AED}=45^o\Rightarrow$EA là phân giác...

4/Nếu Bx quay xung quanh B :

-Ta có $\widehat{BEC}$=1v;BC cố định.

-Khi Bx quay xung quanh B Thì E di động trên đường tròn đường kính BC.

-Giới hạn:Khi Bx$\equiv$ BC Thì E$\equiv$C;Khi Bx$\equiv$AB thì E$\equiv$A. Vậy E chạy trên cung phần tư AC của đường tròn đường kính BC.

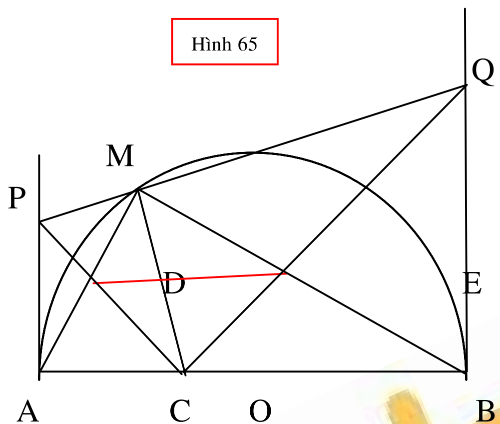
Bài 65:

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Trên nửa đường tròn lấy điểm M, Trên AB lấy điểm C sao cho AC<CB. Gọi Ax; By là hai tiếp tuyến của nửa đường tròn. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với MC cắt Ax ở P; đường thẳng qua C và vuông góc với CP cắt By tại Q. Gọi D là giao điểm của CP với AM; E là giao điểm của CQ với BM.

1/cm: ACMP nội tiếp.

2/Chứng tỏ AB//DE

3/C/m: M; P; Q thẳng hàng.



1/Chứng minh:ACMP nội tiếp(dùng tổng hai góc đối)

2/C/m AB//DE:

Do ACMP nội tiếp ⇒$\widehat{PAM}=\widehat{CPM}$(cùng chắn cung PM)

Chứng minh tương tự,tứ giác MDEC nội tiếp⇒$\widehat{MCD}=\widehat{DEM}$(cùng chắn cung MD).Ta lại có:

Sđ $\widehat{PAM}=\frac{1}{2}$ sđ cung AM(góc giữa tt và 1 dây)

Sđ $\widehat{ABM}=\frac{1}{2}$ sđ cung AM(góc nội tiếp)

⇒$\widehat{ABM}=\widehat{MED}$⇒DE//AB

3/C/m M;P;Q thẳng hàng:

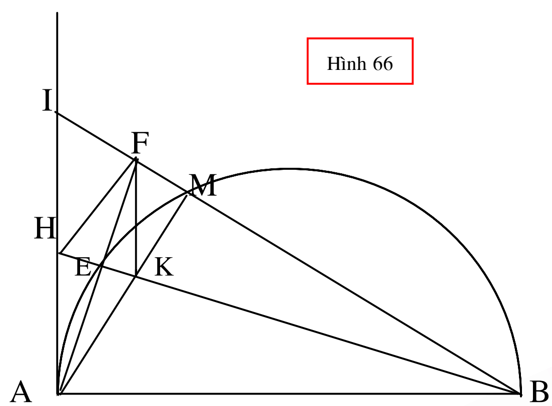
Do $\widehat{MPC}+\widehat{MCP}$=1v(tổng hai góc nhọn của tam giác vuông PMC) và $\widehat{PCM}+\widehat{MCQ}$=1v ⇒$\widehat{MPC}=\widehat{MCQ}$.

Ta lại có ΔPCQ vuông ở C⇒$\widehat{MPC}+\widehat{PQC}$=1v⇒$\widehat{MCQ}+\widehat{CQP}$=1v hay $\widehat{CMQ}$=1v⇒$\widehat{PMC}+\widehat{CMQ}$=2v⇒P;M;Q thẳng hàng.

Bài 66:

Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB và một điểm M bất kỳ trên nửa đường tròn. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đưởng tròn, người ta kẻ tiếp tuyến Ax.Tia BM cắt tia Ax tại I. Phân giác góc $\widehat{IAM}$ cắt nửa đường tròn tại E; cắt tia BM tại F; Tia BE cắt Ax tại H; cắt AM tại K.

1. C/m: IA^2=IM.IB .
2. C/m: ΔBAF cân.
3. C/m AKFH là hình thoi.
4. Xác định vị trí của M để AKFI nội tiếp được.



1/C/m: IA^2=IM.IB: (chứng minh hai tam giác IAB và IAM đồng dạng)

2/C/m ΔBAF cân:

Ta có sđ $\widehat{EAB}=\frac{1}{2}$sđ cung BE(góc nt chắn cung BE)

Sđ $\widehat{AFB}=\frac{1}{2}$ sđ (AB -EM)(góc có đỉnh ở ngoài đtròn)

Do AF là phân giác của góc $\widehat{IAM}$ nên $\widehat{IAM}=\widehat{FAM}$⇒cung AE=EM

⇒ sđ $\widehat{AFB}=\frac{1}{2}$sđ(AB-AE)= $\frac{1}{2}$sđ cung BE⇒$\widehat{FAB}=\widehat{AFB}$⇒đpcm.

3/C/m: AKFH là hình thoi:

Do cung AE=EM(cmt)⇒$\widehat{MBE}=\widehat{EBA}$⇒BE là phân giác của Δcân $\widehat{ABF}$

⇒ BH⊥FA và AE=FA⇒E là trung điểm ⇒HK là đường trung trực của FA

⇒AK=KF và AH=HF.

Do AM⇒BF và BH⊥FA⇒K là trực tâm của ΔFAB⇒FK⊥AB mà AH⊥AB

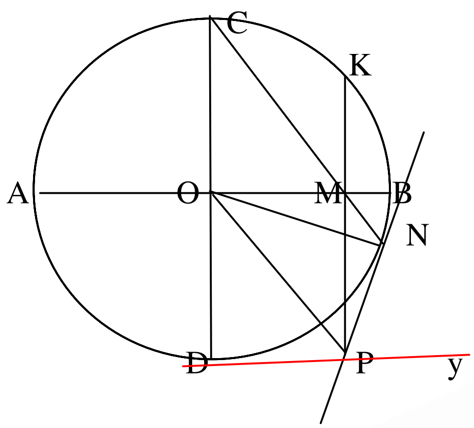
⇒AH//FK ⇒Hình bình hành AKFH là hình thoi.

5/ Do FK//AI⇒AKFI là hình thang.Để hình thang AKFI nội tiếp thì AKFI phải là thang cân⇒góc I=IAM⇒ΔAMI là tam giác vuông cân ⇒ΔAMB vuông cân ở M⇒M là điểm chính giữa cung AB.

Bài 67:

Cho (O; R) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm M(Khác A; O; B). Đường thẳng CM cắt (O) tại N. Đường vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N của đường tròn tại P. Chứng minh:

1. COMNP nội tiếp.
2. CMPO là hình bình hành.
3. CM.CN không phụ thuộc vào vị trí của M.
4. Khi M di động trên AB thì P chạy trên đoạn thẳng cố định.



Hình 67

1/c/m:OMNP nội tiếp:(Sử dụng hai điểm M;N cùng làm với hai đầu đoạn OP một góc vuông.

2/C/m:CMPO là hình bình hành:

Ta có: CD⊥AB;MP⊥AB⇒CO //MP.❶

Do OPNM nội tiếp⇒$\widehat{OPM}=\widehat{ONM}$(cùng chắn cung OM).

ΔOCN cân ở O ⇒$\widehat{ONM}=\widehat{OCM}$⇒$\widehat{OCM}=\widehat{OPM}$.

Gọi giao điểm của MP với (O) là K.Ta có $\widehat{PMN}=\widehat{KMC}$(đ đ) ⇒$\widehat{OCM}=\widehat{CMK}$ ⇒$\widehat{CMK}=\widehat{OPM}$⇒CM//OP❷.Từ ❶ và ❷ ⇒CMPO là hình bình hành.

3/Xét hai tam giác OCM và NCD có:$\widehat{CND}$=1v(góc nt chắn nửa đtròn) ⇒NCD là tam giác vuông.⇒Hai tam giác vuông COM và CND có góc C chung. ⇒ΔOCM~ΔNCD⇒CM.CN=OC.CD❸

Từ ❸ ta có CD=2R;OC=R.Vậy❸ trở thành:CM.CN=$2R^2$ không đổi.vậy tích CM.CN không phụ thuộc vào vị trí của vị trí của M.

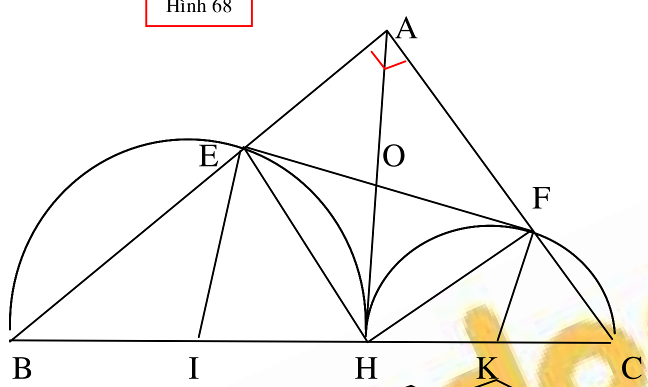
4/Do COPM là hình bình hành⇒MP//=OC=R⇒Khi M di động trên AB thì P di động trên đường thẳng xy thoả mãn xy//AB và cách AB một khoảng bằng R không đổi.

Bài 68:

Cho ΔABC có A=1v và AB>AC, đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A vẽ hai nửa đường tròn đường kính BH và nửa đường tròn đường kính HC. Hai nửa đường tròn này cắt AB và AC tại E và F. Giao điểm của FE và AH là O. Chứng minh:

1. AFHE là hình chữ nhật.
2. BEFC nội tiếp
3. AE. AB=AF. AC
4. FE là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn.
5. Chứng tỏ:BH. HC=4. OE.OF.

Hình 68



1/ C/m: AFHE là hình chữ nhật. $\widehat{BEH}=\widehat{HCF}$(góc nt chắn nửa đtròn); $\widehat{EAF}$=1v(gt) ⇒đpcm.

2/ C/m: BEFC nội tiếp: Do AFHE là hình chữ nhật.⇒ΔOAE cân ở O ⇒$\widehat{AEO}=\widehat{OAE}$. Mà $\widehat{OAE}=\widehat{FCH}$(cùng phụ với góc B)⇒$\widehat{AEF}=\widehat{ACB}$ mà $\widehat{AEF}+\widehat{BEF}$=2v⇒$\widehat{BEF}+\widehat{BCE}$=2v⇒đpcm

3/ C/m: AE.AB=AF.AC: Xét hai tam giác vuông AEF và ACB có $\widehat{AEF}=\widehat{ACB}$(cmt) ⇒$\Delta AEF \sim \Delta ACB$⇒đpcm

4/ Gọi I và K là tâm đường tròn đường kính BH và CH.Ta phải c/m FE⊥IE và FE⊥KF.

-Ta có O là giao điểm hai đường chéo AC và DB của hcnhật AFHE⇒EO=HO; IH=IK cùng bán kính); AO chung⇒ $\Delta IHO=\Delta IEO$ ⇒$\widehat{IHO}=\widehat{IEO}$ mà $\widehat{IHO}$=1v (gt)⇒ $\widehat{IEO}$=1v⇒ IE⊥OE tại điểm E nằm trên đường tròn. ⇒đpcm. Chứng minh tương tự ta có FE là tt của đường tròn đường kính HC.

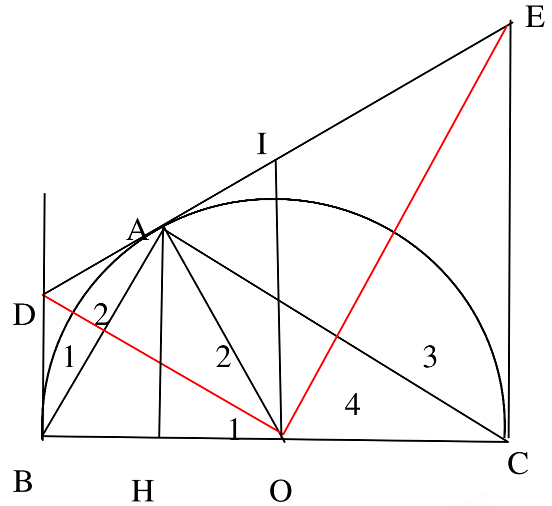
5/ Chứng tỏ:BH.HC=4.OE.OF.

Do ΔABC vuông ở A có AH là đường cao. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC có:AH^2=BH.HC. Mà AH=EF và AH=2.OE=2.OF(t/c đường chéo hình chữ nhật)⇒ BH.HC = $AH^2=(2.OE)^2$=4.OE.OF

Bài 69:

Cho ΔABC có $A=1v$ $AH\perp BC$.Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC;d là tiếp tuyến của đường tròn tại điểm A.Các tiếp tuyến tại B và C cắt d theo thứ tự ở D và E.

1. Tính góc $\widehat{DOE}$.
2. Chứng tỏ DE=BD+CE.
3. Chứng minh:$DB.CE=R^2$.(R là bán kính của đường tròn tâm O)
4. C/m:BC là tiếp tuyến của đtròn đường kính DE.



Hình 69

1/Tính góc $\widehat{DOE}$: ta có $D_1=D_2$ (t/c tiếp tuyến cắt nhau);OD chung⇒Hai tam giác vuông DOB bằng DOA⇒$O_1=\widehat{O_2}$.Tương tự $O_3=\widehat{O_4}$.⇒$\widehat{O_1}+\widehat{O_4}=\widehat{O_2}+\widehat{O_3}$.

Ta lại có $\widehat{O_1}+\widehat{O_2}+\widehat{O_3}+\widehat{O_4}=2v$⇒ $\widehat{O_1}+\widehat{O_4}=\widehat{O_2}+\widehat{O_3}=1v$ hay $\widehat{DOC}=90^o$.

2/Do DA=DB;AE=CE(tính chất hai tt cắt nhau) và DE=DA+AE

⇒DE=DB+CE.

3/Do ΔDE vuông ở O(cmt) và $OA\perp DE$(t/c tiếp tuyến).Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông DOE có :$OA^2=AD.AE$.Mà AD=DB;AE=CE;OA=R(gt)

⇒$R^2=AD.AE$.

4/Vì DB và EC là tiếp tuyến của (O)⇒$DB\perp BC$ và $DE\perp BC$⇒BD//EC.Hay BDEC là hình thang.

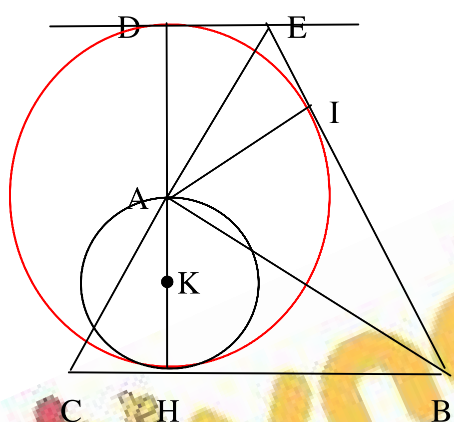
Gọi I là trung điểm DE⇒I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDOE.Mà O là trung điểm BC⇒OI là đường trung bình của hình thang BDEC⇒OI//BD.

Ta lại có $BD\perp BC$⇒$OI\perp BC$ tại O nằm trên đường tròn tâm I⇒BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔDOE.

Bài 70:

Cho $\Delta ABC(\widehat{A}=1v)$; đường cao AH.Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH.Gọi HD là đường kính của đường tròn (A;AH).Tiếp tuyến của đường tròn tại D cắt CA tại E.

1. Chứng minh ΔBEC cân.
2. Gọi I là hình chiếu của A trên BE.C/m:AI=AH.
3. C/m:BE là tiếp tuyến của đường tròn
4. C/m:BE=BH+DE.
5. Gọi đường tròn đường kính AH có Tâm là K.Và AH=2R.Tính diện tích của hình được tạo bởi đường tròn tâm A và tâm K.



Hình 70

1/C/m:ΔBEC cân:.Xét hai tam giác vuông ACH và AED có:AH=AD(bán kính);$\widehat{CAH}$=DAE(đ đ).Do DE là tiếp tuyến của (A)$\Rightarrow$HD$\perp$DE và DH$\perp$CB gt)$\Rightarrow$DE//CH$\Rightarrow$DEC=ECH$\Rightarrow\Delta ACH=\Delta AED\Rightarrow$CA=AE$\Rightarrow$A là trung điểm CE có BA$\perp$CE$\Rightarrow$BA là đường trung trực của CE$\Rightarrow\Delta BCE$ cân ở B.

2/C/m:AI=AH. Xét hai tam giác vuông AHB và AIB(vuông ở H và I) có AB chung và BA là đường trung trực của Δcân BCE(cmt) $\Rightarrow$ABI=ABH $\Rightarrow\Delta AHB=\Delta AIB\Rightarrow$AI=AH.

3/C/m:BE là tiếp tuyến của (A;AH).Do AH=AI$\Rightarrow$I nằm trên đường tròn (A;AH) mà BI$\perp$AI tại I$\Rightarrow$BI là tiếp tuyến của (A;AH)

4/C/m:BE=BH+ED.

Theo cmt có DE=CH và BH=BI;IE=DE(t/c hai tt cắt nhau).Mà BE=BI+IE $\Rightarrow$đpcm.

5/Gọi S là diện tích cần tìm.Ta có:

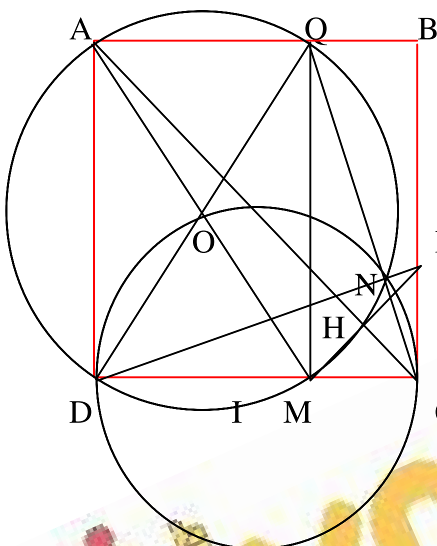
$S=S_{(A)}-S_{(K)}=\pi AH^2-\pi AK^2=\pi R2-$

Bài 71:

Trên cạnh CD của hình vuông ABCD,lấy một điểm M bất kỳ.Đường tròn đường kính AM cắt AB tại điểm thứ hai Q và cắt đường tròn đường kính CD tại điểm thứ hai N.Tia DN cắt cạnh BC tại P.

1. C/m:Q;N;C thẳng hàng.
2. CP.CB=CN.CQ.
3. C/m AC và MP cắt nhau tại 1 điểm nằm trên đường tròn đường kính AM.

Hình 71



1/C/m:Q;N;C thẳng hàng:

Gọi Tâm của đường tròn đường kính AM là O và đường tròn đường kính DC là I.

-Do AQMD nội tiếp nên ADM+AMQ=2v

Mà ADM=1v

⇒AQM=1v và DAQ=1v⇒AQMD là hình chữ nhật.

⇒DQ là đường kính của (O)

⇒QND=1v(góc nt chắn nửa đường tròn

-Do DNC=1v(góc nt chắn nửa đtròn tâm I)⇒QND+DNC=2v⇒đpcm.

2/C/m: CP.CB=CN.CQ.C/m hai tam giác vuông CPN và CBQ đồng dạng (có góc C chung)

3/Gọi H là giao điểm của AC với MP.Ta phải chứng minh H nằm trên đường tròn tâm O,đường kính AM.

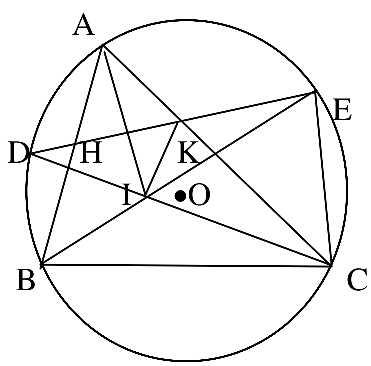
-Do QBCM là hcnhật⇒ΔMQC=ΔBQC.

Xét hai tam giác vuông BQC và CDP có:QCB=PDC(cùng bằng góc MQC); DC=BC(cạnh hình vuông)⇒ΔBQC=ΔCDP⇒ΔCDP=ΔMQC⇒PC=MC.Mà C=1v⇒ΔPMC vuông cân ở C⇒MPC=45^o và DBC=45^o(tính chất hình vuông) ⇒MP//DB.Do AC⊥DB⇒MP⊥AC tại H⇒AHM=1v⇒H nằm trên đường tròn tâm O đường kính AM.

Bài 72:

Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn tâm O.D và E theo thứ tự là điểm chính giữa các cung AB;AC.Gọi giao điểm DE với AB;AC theo thứ tự là H và K.

1. C/m:ΔAHK cân.
2. Gọi I là giao điểm của BE với CD.C/m:AI⊥DE
3. C/m CEKI nội tiếp.
4. C/m:IK//AB.
5. ΔABC phải có thêm điều kiện gì để AI//EC.



Hình 72

1/C/m:ΔAKH cân:

sđ AHK=$\frac{1}{2}$sđ(DB+AE)

sđ AKD=$\frac{1}{2}$sđ(AD+EC)

(Góc có đỉnh nằm trong đường tròn)

Mà Cung AD+DB; AE=EC(gt)

⇒AHK=AKD⇒đpcm.

2/c/m:AI⊥DE

Do cung AE=EC⇒ABE=EBC(góc nt chắn các cung bằng nhau)⇒BE là phân giác của góc ABC.Tương tự CD là phân giác của góc ACB.Mà BE cắt CD ở I⇒I là giao điểm của 3 đường phân giác của ΔAHK⇒AI là phân giác tứ 3 mà ΔAHK cân ở A⇒AI⊥DE.

3/C/m CEKI nội tiếp:

Ta có DEB=ACD(góc nt chắn các cung AD=DB) hay KEI=KCI⇒đpcm.

4/C/m IK//AB

Do KICE nội tiếp⇒IKC=IEC(cùng chắn cung IC).Mà IEC=BEC=BAC(cùng chắn cung BC)⇒BAC=IKC⇒IK//AB.

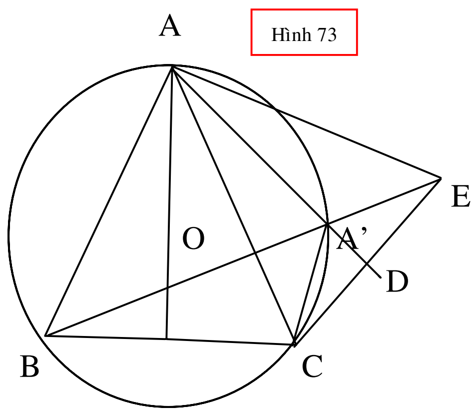
5/ΔABC phải có thêm điều kiện gì để AI//EC:

Nếu AI//EC thì EC⊥DE (vì AI⊥DE)⇒DEC=1v⇒DC là đường kính của (O) mà DC là phân giác của ACB(cmt)⇒ΔABC cân ở C.

Bài 73:

Cho ΔABC(AB=AC) nội tiếp trong (O),kẻ dây cung AA' và từ C kẻ đường vuông góc CD với AA',đường này cắt BA' tại E.

1. C/m góc DA'C=DA'E
2. C/m ΔA'DC=ΔA'DE
3. Chứng tỏ AC=AE.Khi AA' quay xung quanh A thì E chạy trên đường nào?
4. C/m BAC=2.CEB



1/C/m DA'C=DA'E

Ta có DA'E=AA'B (đđ

Và sđAA'B=sđ $\frac{1}{2}$ AB

CA'D=A'AC+A'CA

(góc ngoài ΔAA'C)

Mà sđ A'AC= $\frac{1}{2}$ sđA'C

SđA'CA= $\frac{1}{2}$ sđAC

⇒sđCA'D= $\frac{1}{2}$ sđ(A'C+AC)= $\frac{1}{2}$ sđ AC.Do dây AB=AC⇒Cung AB=AC

⇒DA'C=DA'E.

2/C/m ΔA'DC=ΔA'DE.

Ta có CA'D=EA'D(cmt);A'D chung; A'DC=A'DE=1v⇒đpcm.

3/Khi AA' quay xunh quanh A thì E chạy trên đường nào?

Do ΔA'DC=ΔA'DE⇒DC=DE⇒AD là đường trung trực của CE

⇒AE=AC=AB⇒Khi AA' quay xung quanh A thì E chạy trên đường tròn tâm A;bán kính AC.

4/C/m BAC=2.CEB

Do ΔA'CE cân ở A'⇒A'CE=A'EC.Mà BA'C=A'EC+A'CE=2.A'EC(góc ngoài ΔA'EC).

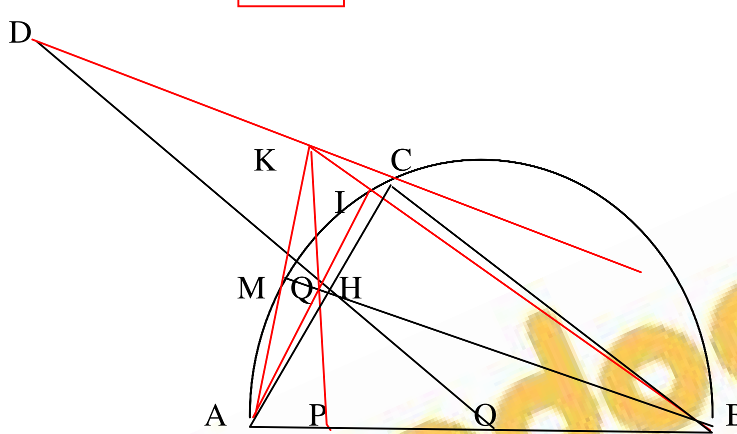
Ta lại có BAC=BA'C(cùng chắn cung BC)⇒BAC=2.BEC.

Bài 74:

Cho ΔABC nội tiếp trong nửa đường tròn đường kính AB.O là trung điểm AB;M là điểm chính giữa cung AC.H là giao điểm OM với AC>

1. C/m:OM//BC.
2. Từ C kẻ tia song song và cung chiều với tia BM,tia này cắt đường thẳng OM tại D.Cmr:MBCD là hình bình hành.
3. Tia AM cắt CD tại K.Đường thẳng KH cắt AB ở P.Cmr:KP⊥AB.
4. C/m:AP.AB=AC.AH.
5. Gọi I là giao điểm của KB với (O).Q là giao điểm của KP với AI. C/m A;Q;I thẳng hàng.

Hình 74



1/C/m:OM//BC. Cung AM=MC(gt)⇒COM=MOA(góc ở tâm bằng sđ cung bị chắn).Mà ΔAOC cân ở O⇒OM là đường trung trực của ΔAOC⇒OM⊥AC.MàBC⊥AC(góc nt chắn nửa đường tròn)⇒đpcm.

2/C/m BMCD là hình bình hành:Vì OM//BC hay MD//BC(cmt) và CD//MB (gt) ⇒đpcm.

3/C/ KP⊥AB.Do MH⊥AC(cmt) và AM⊥MB(góc nt chắn nửa đtròn); MB//CD(gt)⇒AK⊥CD hay MKC=1v⇒MKCH nội tiếp⇒MKH=MCH(cùng chắn cung MH).Mà MCA=MAC(hai góc nt chắn hai cung MC=AM) ⇒HAK=HKA⇒ΔMKA cân ở H⇒M là trung điểm AK.Do ΔAMB vuông ở M ⇒KAP+MBA=1v.mà MBA=MCA(cùng chắn cung AM)⇒MBA=MKH hay KAP+AKP=1v⇒KP⊥AB.

4/Hãy xét hai tam giác vuông APH và ABC đồng dạng(Góc A chung)

5/Sử dụng Q là trực tâm cuỉa ΔAKB.

Bài 75:

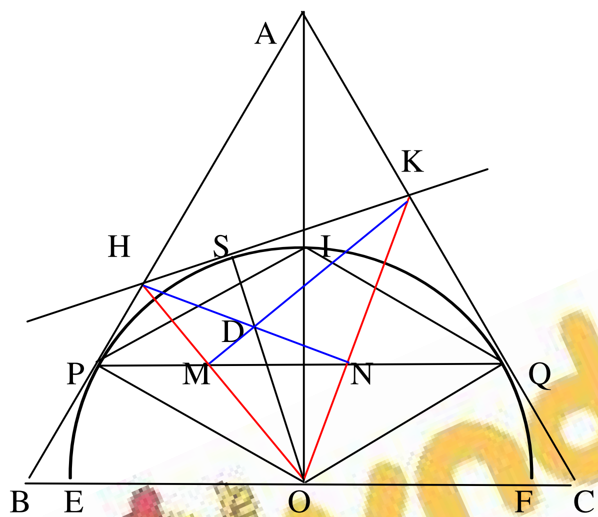
Cho nửa đường tròn tâm O đường kính EF.Từ O vẽ tia Ot⊥ EF, nó cắt nửa đường tròn (O) tại I. Trên tia Ot lấy điểm A sao cho IA=IO.Từ A kẻ hai tiếp tuyến AP và AQ với nửa đường tròn;chúng cắt đường thẳng EF tại B và C (P;Q là các tiếp điểm).

1.Cmr ΔABC là tam giác đều và tứ giác BPQC nội tiếp.

2.Từ S là điểm tuỳ ý trên cung PQ.vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn;tiếp tuyến này cắt AP tại H,cắt AC tại K.Tính sđ độ của góc HOK

3.Gọi M; N lần lượt là giao điểm của PQ với OH; OK. Cm OMKQ nội tiếp.

4.Chứng minh rằng ba đường thẳng HN; KM; OS đồng quy tại điểm D, và D cũng nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔHOK.



Hình 75

1/Cm ΔABC là tam giác đều:Vì AB và AC là hai tt cắt nhau ⇒Các ΔAPO; AQO là các tam giác vuông ở P và Q.Vì IA=IO(gt)⇒PI là trung tuyến của tam giác vuông AOP⇒PI=IO.Mà IO=PO(bán kính)⇒PO=IO=PI⇒ΔPIO là tam giác đều⇒POI=60^o.⇒OAB=30^o.Tương tự OAC=30^o⇒BAC=60^o.Mà ΔABC cân ở A(Vì đường caoAO cũng là phân giác) có 1 góc bằng 60^o ⇒ABC là tam giác đều.

2/Ta có Góc HOP=SOH;Góc SOK=KOC (tính chất hai tt cắt nhau)

⇒Góc HOK=SOH+SOK=HOP+KOQ.Ta lại có:

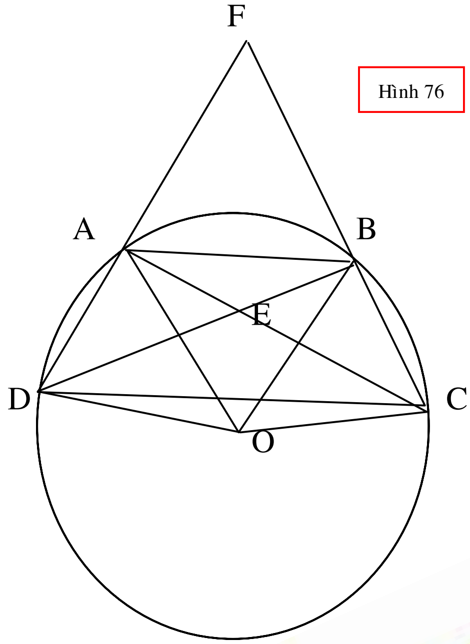
POQ=POH+SOH+SOK+KOQ=180^o-60^o=120^o⇒HOK=60^o.

3/

Bài 76:

Cho hình thang ABCD nội tiếp trong (O),các đường chéo AC và BD cắt nhau ở E.Các cạnh bên AD;BC kéo dài cắt nhau ở F.

1. C/m:ABCD là thang cân.
2. Chứng tỏ FD.FA=FB.FC.
3. C/m:Góc AED=AOD.
4. C/m AOCF nội tiếp.



1/ C/m ABCD là hình thang cân:

Do ABCD là hình thang $\Rightarrow$AB//CD$\Rightarrow$BAC=ACD (so le).Mà BAC=BDC(cùng chắn cung BC)$\Rightarrow$BDC=ACD

Ta lại có ADB=ACB(cùng chắn cung AB)$\Rightarrow$ADC=BCD

Vậy ABCD là hình thang cân.

2/c/m FD.FA=FB.FC

C/m Hai tam giác FDB và ΔFCA đồng dạng vì Góc F chung và FDB=FCA(cmt)

3/C/m AED=AOD:

•C/m F;O;E thẳng hàng: Vì ΔDOC cân ở O$\Rightarrow$O nằm trên đường trung trực của Dc.Do ACD=BDC(cmt)$\Rightarrow\Delta$EDC cân ở E$\Rightarrow$E nằm tren đường trung trực của DC.Vì ABCD là thang cân $\Rightarrow\Delta$FDC cân ở F$\Rightarrow$F nằm trên đường trung trực của DC$\Rightarrow$F;E;O thẳng hàng.

•C/m AED=AOD.

Ta có:Sđ AED=$\frac{1}{2}$sđ(AD+BC)= $\frac{1}{2}$.2sđAD=sđAD vì cung AD=BC(cmt)

Mà sđAOD=sđAD(góc ở tâm chắn cung AD)$\Rightarrow$AOD=AED.

4/Cm: AOCF nội tiếp:

$$+\begin{cases}\text{Sđ AFC}=\frac{1}{2}\text{sđ(DmC-AB)}\\ \text{Sđ AOC=SđAB+sđ BC}\end{cases}$$

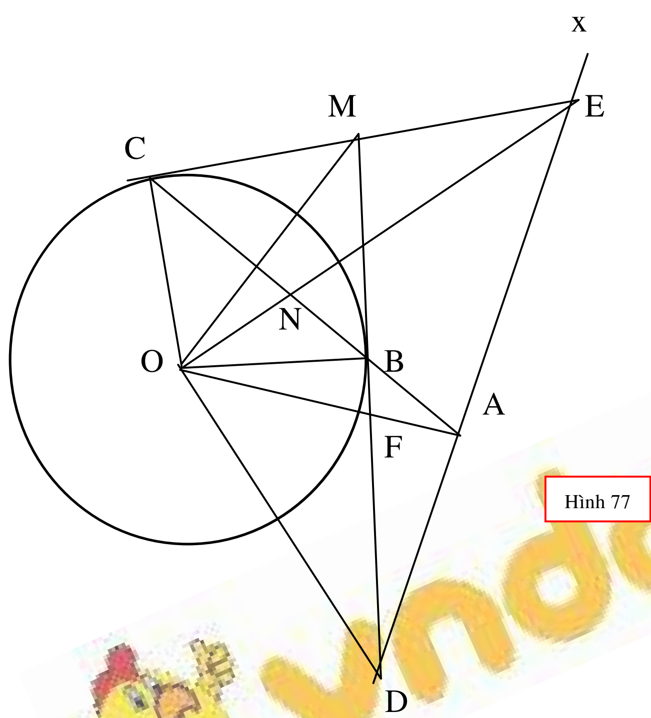
Sđ (AFC+AOC) =$\frac{1}{2}$sđ DmC-$\frac{1}{2}$sđAB+sđAB+sđBC❶.

Mà sđ DmC=360^o-AD-AB-BC❷.Từ❶và ❷$\Rightarrow$sđ AFC+sđ AOC=180^o.$\Rightarrow$đpcm

Bài 77:

Cho (O) và đường thẳng xy không cắt đường tròn.Kẻ OA⊥xy rồi từ A dựng đường thẳng ABC cắt (O) tại B và C.Tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt xy tại D và E.Đường thẳng BD cắt OA;CE lần lượt ở F và M;OE cắt AC ở N.

1. C/m OBAD nội tiếp.
2. Cmr: AB.EN=AF.EC
3. So sánh góc AOD và COM.
4. Chứng tỏ A là trung điểm DE.



Hình 77

1/C/m OBAD nt:

-Do DB là tt⇒OBD=1v;OA⊥xy(gt)⇒OAD=1v⇒đpcm.

2/Xét hai tam giác:ABF và ECN có:

-ABF=NBM(đ đ);Vì BM và CM là hai tt cắt nhau⇒NBM=ECB⇒FBA=ECN.

-Do OCE+OAE=2v⇒OCEA nội tiếp⇒CEO=CAO(cùng chắn cung OC)

⇒ΔABF~ΔECN⇒đpcm.

3/So sánh;AOD với COM:Ta có:

-DĐoABO nt⇒DOA=DBA(cùng chắn cung).DBA=CBM(đ đ)

CBM=MCB(t/c hai tt cắt nhau).Do BMCO nt⇒BCM=BOM⇒DOA=COM.

4/Chứng tỏ A là trung điểm DE:

Do OCE=OAE=1v⇒OAEC nt⇒ACE=AOE(cùng chắn cung AE)

⇒DOA=AOE⇒OA là phân giác của góc DOE.Mà OA⊥DE⇒OA là đường trung trực của DE⇒đpcm

Bài 78:

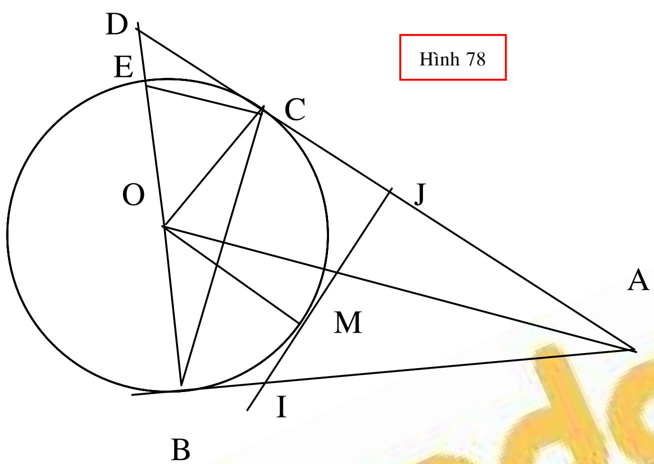
Cho (O;R) và A là một điểm ở ngoài đường tròn.Kẻ tiếp tuyến AB và AC với đường tròn. OB kéo dài cắt AC ở D và cắt đường tròn ở E.

1/ Chứng tỏ EC // với OA.

2/ Chứng minh rằng: 2AB.R=AO.CB.

3/ Gọi M là một điểm di động trên cung nhỏ BC, qua M dựng một tiếp tuyến với đường tròn, tiếp tuyến này cắt AB và AC lần lượt ở I,J .Chứng tỏ chu vi tam giác AI J không đổi khi M di động trên cung nhỏ BC.

4/ Xác định vị trí của M trên cung nhỏ BC để 4 điểm J,I,B,C cùng nằm trên một đường tròn.



1/C/m EC//OA:Ta có BCE=1v(góc nt chắn nửa đt) hay CE⊥BC.Mà OA là phân giác của Δcân ABC⇒OA⊥BC⇒OA//EC.

2/xét hai tam giác vuông AOB và ECB có:

-Do OCA+OBA=2v⇒ABOC nt⇒OBC=OAC(cùng chắn cung OC).

mà OAC=OAB (tính chất hai tt cắt nhau)⇒EBC=BAO⇒ΔBAO~ΔCBE

⇒.Ta lại có BE=2R⇒đpcm.

3/Chứng minh chu vi ΔAIJ không đổi khi M di động trên cung nhỏ BC.

Gọi P là chu vi Δ AIJ .Ta có P=JI+IA+JA=MJ+MI+IA+JA.

Theo tính chất hai tt cắt nhau ta có:MI=BI;MJ=JC;AB=AC

⇒P=(IA+IB)+(JC+JA)=AB+AC=2AB không đổi.

4/Giả sử BCJI nội tiếp⇒BCJ+BIJ=2v.MặI+JBI=2v⇒JIA=ACB.Theo chứng minh trên có ACB=CBA⇒CBA=JIA hay IJ//BC.Ta lại có BC⊥OA⇒JI⊥OA

Mà OM⊥JI ⇒OM≡ OA⇒M là điểm chính giữa cung BC.

Bài 79:

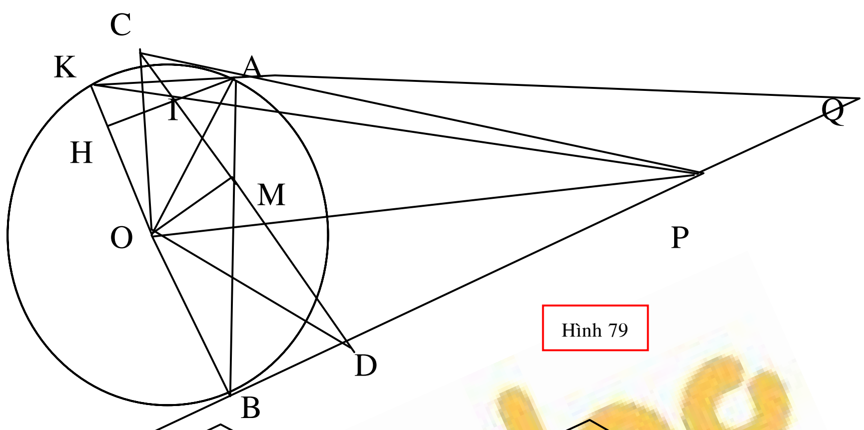
Cho(O),từ điểm P nằm ngoài đường tròn,kẻ hai tiếp tuyến PA và PB với đường tròn.Trên đoạn thẳng AB lấy điểm M,qua M dựng đường thẳng vuông góc với OM,đường này cắt PA,PB lần lượt ở C và D.

1/Chứng minh A,C,M,O cùng nằm trên một đường tròn.

2/Chứng minh:$\widehat{COD}=\widehat{AOB}$.

3/Chứng minh:Tam giác COD cân.

4/Vẽ đường kính BK của đường tròn,hạ AH ⊥BK.Gọi I là giao điểm của AH với PK.Chứng minh AI=IH.



Hình 79

1/C/m ACMO nt: Ta có $\widehat{OAC}$=1v(tc tiếp tuyến).Và $\widehat{OMC}$=1v(vì OM⊥CD-gt)

2/C/m $\widehat{COD}=\widehat{AOB}$.Ta có:

Do OMAC nt⇒$\widehat{OCM}=\widehat{OAM}$(cùng chắn cung OM).

Chứng minh tương tự ta có OMDB nt⇒$\widehat{ODM}=\widehat{MBO}$(cùng chắn cung OM)

Hai tam giác OCD và OAB có hai cặp góc tương ứng bằng nhau ⇒Cặp góc còn lại bằng nhau⇒$\widehat{COD}=\widehat{AOB}$.

3/C/m ΔCOD cân:

Theo chứng minh câu 2 ta lại có góc $\widehat{OAB}=\widehat{OBA}$(vì ΔOAB cân ở O)

⇒$\widehat{OCD}=\widehat{ODC}$⇒ΔOCD cân ở O.

4/Kéo dài KA cắt PB ở Q.

Vì AH⊥BK; QB⊥BK⇒AH//QB. Hay HI//PB và AI//PQ. Áp dụng hệ quả định lý Talét trong các tam giác KBP và KQP có:

❶

❷

❸

Bài 80:

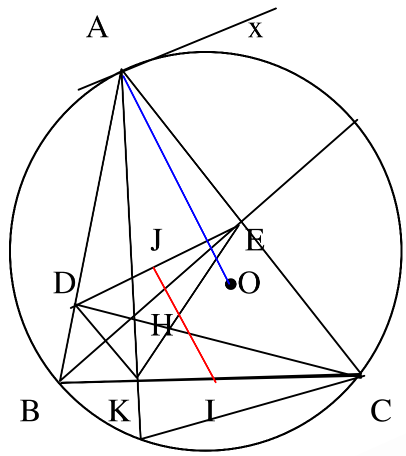
Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O. Ba đường cao AK; BE; CD cắt nhau ở H.

1/Chứng minh tứ giác BDEC nội tiếp.

2/Chứng minh :AD.AB=AE.AC.

3/Chứng tỏ AK là phân giác của góc $\widehat{DKE}$.

4/Gọi I; J là trung điểm BC và DE. Chứng minh: OA//JI.



Hình 80

1/C/m:BDEC nội tiếp:

Ta có: $\widehat{BDC}=\widehat{BEC}$=1v(do CD;BE là đường cao)⇒Hai điểm D và E cùng làm với hai đầu đoạn BC...⇒đpcm

2/c/m AD.AB=AE.AC.

Xét hai tam giác ADE và ABC có Góc $\widehat{BAC}$ chung .

Do BDEC nt ⇒$\widehat{EDB}+\widehat{ECB}$=2v.Mà $\widehat{ADE}+\widehat{EDB}$=2v⇒$\widehat{ADE}=\widehat{ACB}$

⇒ΔADE~ΔACB⇒đpcm.

$$\left.\begin{array}{l}\text{3/Do HKBD nt}\Rightarrow\widehat{HKD}=\widehat{HBD}\text{(cùng chắn cung DH).}\\ \text{Do BDEC nt}\Rightarrow\widehat{HBD}=\widehat{DCE}\text{ (cùng chắn cung DE)}\\ \text{Dễ dàng c/m KHEC nt}\Rightarrow\widehat{ECH}=\widehat{EKH}\text{(cùng chắn cungHE)}\end{array}\right\}\ \widehat{HKD}=\widehat{EKH}$$

4/C/m JI//AO. Từ A dựng tiếp tuyến Ax.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ta có sđ }\widehat{xAC}=\frac{1}{2}\text{sđ cung AC (góc giữa tt và một dây)}\\ \text{.Mà sđ}\widehat{ABC}=\frac{1}{2}\text{sđ cung AC (góc nt và cung bị chắn)}\\ \text{Ta lại có góc }\widehat{AED}=\widehat{ABC}\text{(cùng bù với góc }\widehat{DEC}\text{)}\end{array}\right\}\ \widehat{xAC}=\widehat{AED}$$

Vậy Ax//DE.Mà AO⊥Ax(t/c tiếp tuyến)⇒AO⊥DE.Ta lại có do BDEC nt trong đường tròn tâm I ⇒DE là dây cung có J là trung điểm ⇒JI⊥DE(đường kính đi qua trung điểm của dây không đi qua tâm)Vậy IJ//AO

Bài 81:

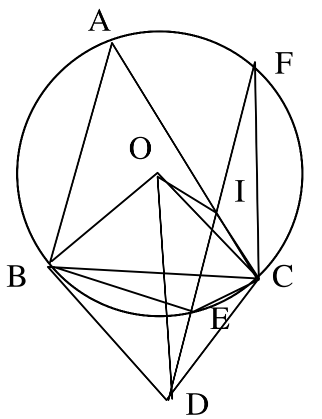
Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O.Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn cắt nhau tại D.Từ D kẻ đường thẳng song song với AB,đường này cắt đường tròn ở E và F,cắt AC tại I(Enằm trên cung nhỏ BC)

1/Chứng minh BDCO nội tiếp.

2/Chứng minh:DC^2=DE.DF

3/Chứng minh DOCI nội tiếp được trong đường tròn.

4/Chứng tỏ I là trung điểm EF.



Hình 81

1/C/m: BDCO nội tiếp

Vì BD và DC là hai tiếp tuyến $\Rightarrow \widehat{OBD}=\widehat{OCD}$=1v

$\Rightarrow \widehat{OBD}+\widehat{OCD}$=2v

$\Rightarrow$BDCO nội tiếp.

2/Cm: :DC^2=DE.DF

Xét hai tam giác DCE và DCF có: $\widehat{D}$ chung

Sđ$\widehat{ECD}=\frac{1}{2}$sđ cung EC (góc giữa tiếp tuyến và một dây)

Sđ $\widehat{DFC}=\frac{1}{2}$sđ cung EC (góc nt và cung bị chắn)$\Rightarrow\widehat{EDC}=\widehat{DFC}$

$\Rightarrow\Delta DCE\sim\Delta DFC\Rightarrow$đpcm.

3/Cm: DCOI nội tiếp:Ta có sđ $\widehat{DIC}=\frac{1}{2}$sđ(AF+EC).

Vì FD//AD $\Rightarrow$Cung AF=BE $\Rightarrow$sđ $\widehat{DIC}=\frac{1}{2}$sđ(BE+EC)= $\frac{1}{2}$sđ cung BC

Sđ $\widehat{BOC}$=sđ cung BC.Mà $\widehat{DOC}=\frac{1}{2}\widehat{BOC}\Rightarrow$sđ $\widehat{DOC}=\frac{1}{2}$sđBC$\Rightarrow\widehat{DOC}=\widehat{DIC}$

$\Rightarrow$Hai điểm O và I cùng làm với hai đầu đoạn thẳng DC những góc bằng nhau $\Rightarrow$đpcm.

4/C/m I là trung điểm EF.

Do DCIO nội tiếp$\Rightarrow\widehat{DIO}=\widehat{DCO}$ (cùng chắn cung DO).Mà $\widehat{DCO}$=1v(tính chất tiếp tuyến)$\Rightarrow\widehat{DIO}$=1v hay OI$\perp$FE.Đường kính OI vuông góc với dây cung FE nên phải đi qua trung điểm của FE$\Rightarrow$đpcm.

Bài 82:

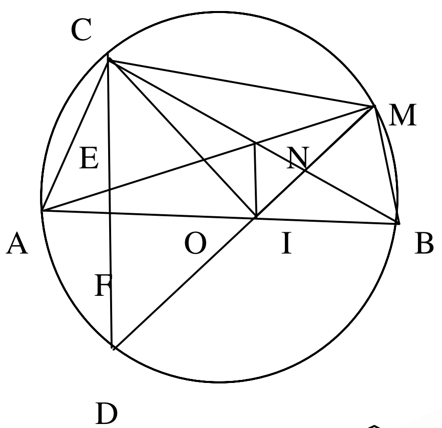
Cho đường tròn tâm O,đường kính AB và dây CD vuông góc với AB tại F. Trên cung BC,lấy điểm M.AM cắt CD tại E.

1/Chứng minh AM là phân giác của góc $\widehat{CMD}$.

2/Chứng minh tứ giác EFBM nội tiếp được trong một đường tròn.

3/Chứng tỏ AC^2=AE.AM

4/Gọi giao điểm của CB với AM là N;MD với AB là I.Chứng minh NI//CD.



Hình 82

1/C/m AM là phân giác của góc $\widehat{CMD}$: Ta có: Vì OA⊥CD và ΔCOD cân ở O ⇒OA là phân giác của góc $\widehat{COD}$. Hay $\widehat{COA}=\widehat{AOD}$⇒cung AC=AD ⇒góc $\widehat{CMA}=\widehat{AMD}$(hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)⇒đpcm.

2/cm EFBM nội tiếp: Vì CD⊥AB(gt)⇒$\widehat{EFB}$=1v;và $\widehat{EMB}$=1v(góc nt chắn nửa đường tròn)⇒ $\widehat{EFB}+\widehat{EMB}$=2v⇒đpcm.

3/Cm: AC^2=AE.AM.

Xét hai tam giác:ACM và ACE có $\widehat{A}$ chung.Vì cung AD=AC⇒hai góc $\widehat{ACD}=\widehat{AMC}$(hai góc nt chắn hai cung bằng nhau)

⇒ΔACE~ΔAMC⇒đpcm

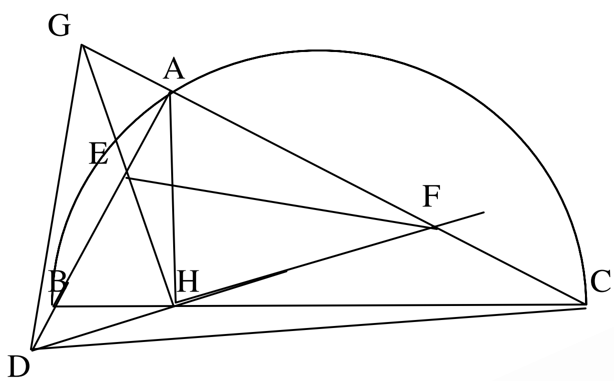
4/Cm NI//CD:

Vì cung AC=AD⇒góc $\widehat{AMD}=\widehat{CBA}$(hai góc nt chắn hai cung bằng nhau) Hay $\widehat{NMI}=\widehat{NBI}$ ⇒Hai điểm M và B cung làm với hai đầu đoạn thẳng NI những góc bằng nhau ⇒NIBM nội tiếp ⇒Góc $\widehat{NIB}+\widehat{NMB}$=2v mà $\widehat{NMB}$=1v(cmt) ⇒$\widehat{NIB}$=1v hay NI⊥AB.Mà CD⊥AB(gt)⇒NI//CD.

Bài 83:

Cho ΔABC có $\widehat{A}=1v$;Kẻ $AH\perp BC$.Qua H dựng đường thẳng thứ nhất cắt cạnh AB ở E và cắt đường thẳng AC tại G.Đường thẳng thứ hai vuông góc với đường thẳng thứ nhất và cắt cạnh AC ở F,cắt đường thẳng AB tại D.

1. C/m:AEHF nội tiếp.
2. Chứng tỏ:HG.HA=HD.HC
3. Chứng minh $EF\perp DG$ và $\widehat{FHC}=\widehat{AFE}$.
4. Tìm điều kiện của hai đường thẳng HE và HF để EF ngắn nhất.



Hình 83

1/Cm AEHF nội tiếp: Ta có $\widehat{BAC}=1v$(góc nt chắn nửa đtròn) $\widehat{FHE}=1v$
$\Rightarrow \widehat{BAC}+\widehat{FHE}=2v\Rightarrow$đpcm.

2/Cm: HG.HA=HD.HC. Xét hai Δ vuông HAC và HGD có:$\widehat{BAH}=\widehat{ACH}$ (cùng phụ với góc ABC).Ta lại có $\widehat{GAD}=\widehat{GHD}=1v\Rightarrow$GAHD nội tiếp $\Rightarrow\widehat{DGH}=\widehat{DAH}$ (cùng chắn cung DH $\Rightarrow\widehat{DGH}=\widehat{HAC}\Rightarrow\Delta HCA\sim\Delta HGD\Rightarrow$đpcm.

3/•C/m:$EF\perp DG$:Do $GH\perp DF$ và $DA\perp CG$ và AD cắt GH ở E $\Rightarrow$E là trực tâm của $\Delta CDG\Rightarrow$EF là đường cao thứ 3 của $\Delta CDG\Rightarrow FE\perp DG$.

• C/m:$\widehat{FHC}=\widehat{AFE}$:

Do AEHF nội tiếp $\Rightarrow\widehat{AFE}=\widehat{AHE}$(cùng chắn cung AE).Mà $\widehat{AHE}+\widehat{AHF}=1v$ và $\widehat{AHF}+\widehat{FHC}=1v\Rightarrow\widehat{AFE}=\widehat{FHC}$.

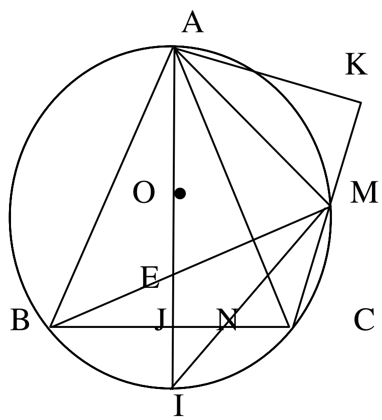
4/ Tìm điều kiện của hai đường thẳng HE và HF để EF ngắn nhất:

Do AEHF nội tiếp trong đường tròn có tâm là trung điểm EF .Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEHF$\Rightarrow$IA=IH$\Rightarrow$Để EF ngắn nhất thì I;H;A thẳng hàng hay AEHF là hình chữ nhật $\Rightarrow$HE//AC và HF//AB.

Bài 84:

Cho ΔABC (AB=AC) nội tiếp trong (O).M là một điểm trên cung nhỏ AC, phân giác góc BMC cắt BC ở N,cắt (O) ở I.

1. Chứng minh A;O;I thẳng hàng.
2. Kẻ AK⊥ với đường thẳng MC. AI cắt BC ở J.Chứng minh AKCJ nội tiếp.
3. C/m:KM.JA=KA.JB.



Hình 84

1/C/m A;O;I thẳng hàng:

Vì $\widehat{BMI}=\widehat{IMC}$(gt)

⇒ cung IB=IC ⇒Góc $\widehat{BAI}=\widehat{IAC}$(hai góc nt chắn hai cung bằng nhau)⇒AI là phân gíc của Δ cân ABC

⇒AI⊥BC.Mà ΔBOC cân ở O⇒ có các góc ở tâm chắn các cung bằng nhau

⇒OI là phân giác của góc $\widehat{BOC}$

⇒đpcm

2/C/m AKCJ nội tiếp: Theo cmt ta có AI là đường kính đi qua trung điểm của dây BC ⇒AI⊥BC hay $\widehat{AJC}$=1v mà $\widehat{AKC}$=1v(gt)⇒$\widehat{AJC}+\widehat{AKC}$=2v ⇒đpcm.

3/Cm: KM.JA=KA.JB Xét hai tam giác vuông JAB và KAM có:

Góc $\widehat{KMA}=\widehat{MAC}+\widehat{MCA}$(góc ngoài tam giác AMC)

Mà sđ $\widehat{MAC}=\frac{1}{2}$ sđ cung MC và sđ$\widehat{MCA}=\frac{1}{2}$ sđ cung AM

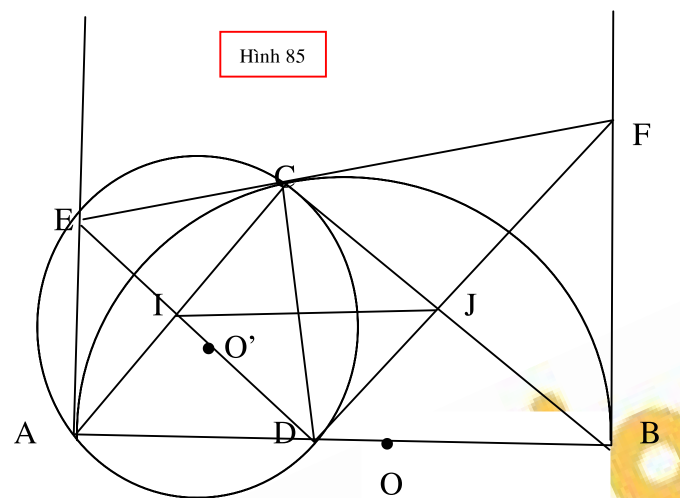
⇒sđ$\widehat{KMA}=\frac{1}{2}$sđ(MC+AM)= $\frac{1}{2}$sđAC=sđ góc $\widehat{ABC}$ Vậy góc $\widehat{ABC}=\widehat{KMA}$

⇒ΔJBA~ΔKMA⇒đpcm.

Bài 85:

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB.Gọi C là một điểm trên nửa đường tròn.Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C,kẻ hai tiếp tuyến Ax và By. Một đường tròn (O’) qua A và C cắt AB và tia Ax theo thứ tự tại D và E. Đường thẳng EC cắt By tại F.

1. Chứng minh BDCF nội tiếp.
2. Chứng tỏ:CD^2=CE.CF và FD là tiếp tuyến của đường tròn (O).
3. AC cắt DE ở I;CB cắt DF ở J.Chứng minh IJ//AB
4. Xác định vị trí của D để EF là tiếp tuyến của (O)



1/Cm:BDCF nội tiếp:

Ta có $\widehat{ECD}$=1v(góc nt chắn nửa đường tròn tâm O’)⇒$\widehat{FCD}$=1v và $\widehat{FBD}$=1v(tính chất tiếp tuyến)⇒đpcm.

2/•C/m: CD^2=CE.CF .Ta có

Do CDBF nt⇒$\widehat{DFC}$=$\widehat{CBD}$(cùng chắn cung CD).Mà $\widehat{CED}$=$\widehat{CAD}$(cùng chắn cung CD của (O’). Mà $\widehat{CAD}$+$\widehat{CBD}$=1v (vì góc $\widehat{ACB}$=1v-góc nt chắn nửa đt)

⇒$\widehat{CED}$+$\widehat{CFD}$=1v nên $\widehat{EDF}$=1v hay ΔEDF là tam giác vuông có DC là đường cao.Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có CD^2=CE.CF.

•Vì ΔEDF vuông ở D(cmt)⇒FD⊥ED hay FD⊥O’D tại điểm D nằm trên đường tròn tâm O’.⇒đpcm.

3/C/m IJ//AB.

Ta có $\widehat{ACB}$=1v(cmt) hay $\widehat{ICJ}$=1v và $\widehat{EDF}$=1v (cmt) hay $\widehat{IDJ}$=1v ⇒ICJD nt

$\widehat{CJI}$=$\widehat{CDI}$(cùng chắn cung CI).Mà $\widehat{CFD}$=$\widehat{CDI}$ (cùng phụ với góc $\widehat{FED}$).

Vì BDCF nt (cmt)⇒$\widehat{CFD}$=$\widehat{CBD}$ (cùng chắn cung CD)⇒$\widehat{CJI}$=$\widehat{CBD}$ ⇒đpcm.

4/ Xác định vị trí của D để EF là tiếp tuyến của (O).

Ta có CD⊥EF và C nằm trên đường tròn tâm O.Nên để EF là tiếp tuyến của (O) thì CD phải là bán kính ⇒D≡O.

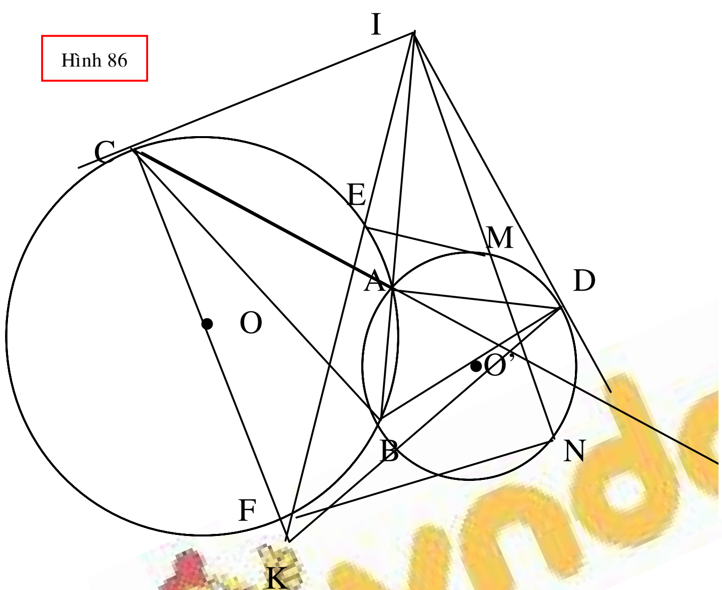
Bài 86:

Cho (O;R và (O';r) trong đó R>r, cắt nhau tại Avà B. Gọi I là một điểm bất kỳ trên đường thẳng AB và nằm ngoài đoạn thẳng AB. Kẻ hai tiếp tuyến IC và ID với (O) và (O'). Đường thẳng OC và O'D cắt nhau ở K.

1. Chứng minh ICKD nội tiếp.
2. Chứng tỏ:IC^2=IA.IB.
3. Chứng minh IK nằm trên đường trung trực của CD.
4. IK cắt (O) ở E và F; Qua I dựng cát tuyến IMN.

   a/ Chứng minh:IE.IF=IM.IN.

   b/ E; F; M; N nằm trên một đường tròn.



Hình 86

1/C/m ICKD nt: Vì CI và DI là hai tt của hai đtròn ⇒ICK=IDK=1v ⇒đpcm.

2/C/m: IC^2=IA.IB.

Xét hai tam giác ICE và ICBcó góc I chung và sđ ICE= $\frac{1}{2}$ sđ cung CE (góc giữa tt và 1 dây)

Sđ $\widehat{CBI}$= $\frac{1}{2}$ sđ CE (góc nt và cung bị chắn)⇒$\widehat{ICE}$=$\widehat{IBC}$⇒ΔICE~ΔIBC⇒đpcm.

3/Cm IK nằm trên đường trung trực của CD.

Theo chứng minh trên ta có: IC^2=IA.IB❶.

Chứng minh tương tự ta có:ID^2=IA.IB ❷

$\left.\right\}$ IC=ID⇒I nằm trênđường trung trực của CD

-Hai tam giác vuông ICK và IDK có Cạnh huyền IK chung và cạnh góc vuông IC=ID ⇒ΔICK=ΔIDK⇒CK=DK⇒K nằm trên đường trung trực của CD.⇒đpcm.

4/ a/Bằng cách chứng minh tương tự như câu 2 ta có:

IC^2=IE.IF và ID^2=IM.IN Mà IC=ID (cmt)⇒IE.IF=IM.IN.

b/ C/m Tứ giác AMNF nội tiếp: Theo chứng minh trên có E.Ì=IM.IN.Áp dụng tính chất tỉ lệ thức ta có: $\frac{IF}{IM}=\frac{IN}{IE}$ .Tức là hai cặp cạnh của tam giác IFN tương ứng tỉ lệ với hai cặp cạnh của tam giác IME.Hơn nữa góc $\widehat{EIM}$ chung

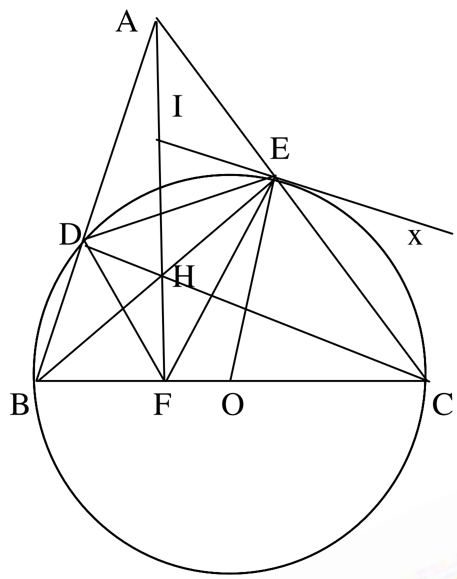
⇒ΔIEM~ΔINF⇒$\widehat{IEM}$=$\widehat{INF}$.Mà $\widehat{IEM}$+$\widehat{MEF}$=2v⇒$\widehat{MEF}$+$\widehat{MNF}$=2v⇒đpcm.

✂✂☎📖☎✂✂

Bài 87:

Cho∆ABC có 3 góc nhọn.Vẽ đường tròn tâm O đường kính BC.(O) cắt AB;AC lần lượt ở D và E.BE và CD cắt nhau ở H.

1. Chứng minh:ADHE nội tiếp.
2. C/m:AE.AC=AB.AD.
3. AH kéo dài cắt BC ở F.Cmr:H là tâm đường tròn nội tiếp ∆DFE.
4. Gọi I là trung điểm AH.Cmr IE là tiếp tuyến của (O)



Hình 87

1/Cm:ADHE nội tiếp: Ta có BDC=BEC=1v(góc nt chắn nửa đường tròn) ⇒ADH+AEH=2v⇒ADHE nt.

2/C/m:AE.AC=AB.AD. Ta chứng minh ∆AEB và ∆ADC đồng dạng.

3/C/m H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF:

Ta phải c/m H là giao điểm 3 đường phân giác của tam giác DEF.

-Tứ giác BDHF nt⇒HED=HBD(cùng chắn cung DH).Mà EBD=ECD (cùng chắn cung DE).Tứ gáic HECF nt⇒ECH=EFH(cùng chắn cung HE) ⇒EFH=HFD⇒FH là phân giác của DEF.

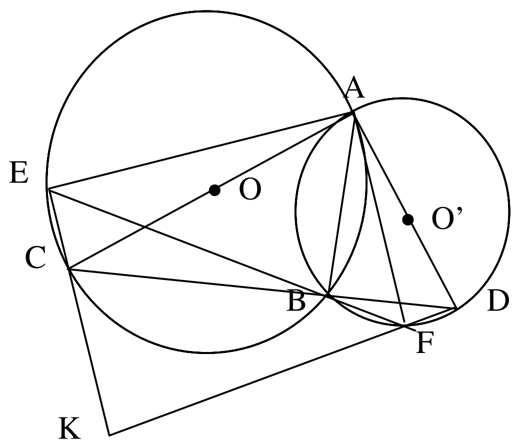
-Tứ gáic BDHF nt⇒FDH=HBF(cùng chắn cung HF).Mà EBC=CDE(cùng chắn cung EC)⇒EDC=CDF⇒DH là phân giác của góc FDE⇒H là…

4/ C/m IE là tiếp tuyến của (O):Ta có IA=IH⇒IA=IE=IH=$\frac{1}{2}$AH (tính chất trung tuyến của tam giác vuông)⇒∆IAE cân ở I⇒IEA=IAE.Mà IAE=EBC (cùng phụ với góc ECB) và AEI=xEC(đối đỉnh)Do ∆OEC cân ở O⇒ OEC=OCE ⇒xEC+CEO =EBC +ECB=1v Hay xEO=1v Vậy OE⊥IE tại điểm E nằm trên đường tròn (O)⇒đpcm.

Bài 88:

Cho(O;R) và (O';r) cắt nhau ở Avà B.Qua B vẽ cát tuyến chung CBD⊥AB (C∈(O)) và cát tuyến EBF bất kỳ(E∈(O)).

1. Chứng minh AOC và AO'D thẳng hàng.
2. Gọi K là giao điểm của các đường thẳng CE và DF.Cmr:AEKF nt.
3. Cm:K thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔACD.
4. Chứng tỏ FA.EC=FD.EA.



Hình 88

1/C/m AOC và AO'D thẳng hàng:

-Vì AB⊥CD ⇒Góc ABC=1v⇒AC là đường kính của (O)⇒A;O;C thẳng hàng.Tương tự AO'D thẳng hàng.

2/C/m AEKF nt: Ta có AEC=1v(góc nt chắn nửa đường tròn tâm O.Tương tự AFD=1v hay AFK=1v ⇒AEK+AFK=2v⇒đpcm

3/Cm: K thuộc đường tròn ngoại tếp ΔACD.

Ta có EAC=EBC(cùng chắn cung EC).Góc EBC=FBD(đối đỉnh).Góc FBD=FAD(cùng chắn cung FD).Mà EAC+ECA=90^o ⇒ADF=ACE và ACE+ACK=2v⇒ADF+ACK=2v⇒K nằm trên đường tròn ngoại tiếp ...

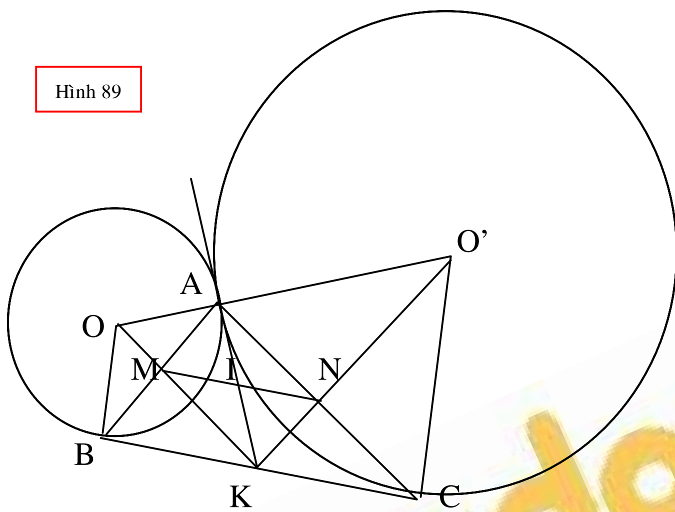
4/C/m FA.EC=FD.EA.

Ta chứng minh hai tam giác vuông FAD và EAC đồng dạng vì EAC=EBC(cùng hcắn cung EC)EBC=FBD(đối đỉnh) FBD=FAD(cùng chắn cung FD)⇒EAC=FAD⇒đpcm.

Bài 89:

Cho ΔABC có A=1v.Qua A dựng đường tròn tâm O bán kính R tiếp xúc với BC tại B và dựng (O';r) tiếp xúc với BC tại C.Gọi M;N là trung điểm AB;AC,OM và ON kéo dài cắt nhau ở K.

1. Chứng minh:OAO' thẳng hàng
2. CM:AMKN nội tiếp.
3. Cm AK là tiếp tuyến của cả hai đường tròn và K nằm trên BC.
4. Chứng tỏ $4MI^2$=Rr.



1/C/m AOO' thẳng hàng:

-Vì M là trung điểm dây AB⇒OM⊥AB nên OM là phân giác của góc AOB hay BOM=MOA. Xét hai tam giác BKO và AKO có OA=OB=R; OK chung và BOK=AOK (cmt) ⇒ΔKBO=ΔKAO ⇒ góc OBK=OAK mà OBK=1v ⇒OAK=1v. Chứng minh tương tự ta có O'AK=1v Nên OAK+O'AK=2v ⇒đpcm.

2/Cm:AMKN nội tiếp:Ta có Vì AMK=1v(do OMA=1v) và ANK=1v ⇒AMK+ANK=2v ⇒đpcm. Cần lưu ý AMKN là hình chữ nhật.

3/C/m AK là tiếp tuyến của (O) và O')

-Theo chứng minh trên thì Góc OAK=1v hay OA⊥AK tại điểm A nằm trên đường tròn (O)⇒đpcm.Chứng minh tương tự ta có AK là tt của (O')

-C/m K nằm trên BC:

Theo tính chất của hai tt cắt nhau ta có:BKO=OKA và AKO'=O'KC.

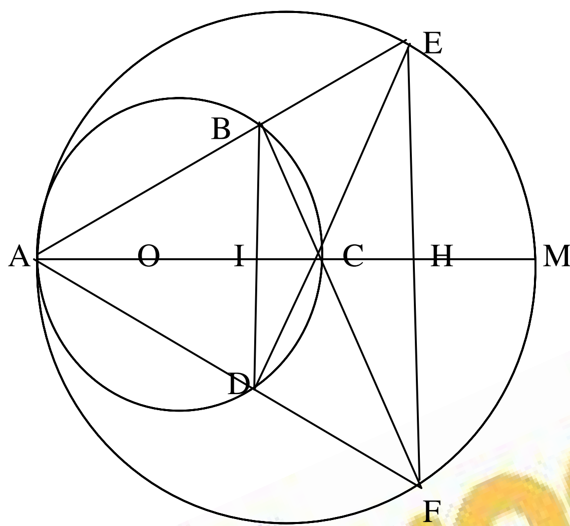
Nhưng do AMKN là hình chữ nhật⇒MKN=1v hay OKA+O'KA=1v tức có nghĩa góc BKO+O'KC=1v vậy BKO+OKA+AKO'+O'KC=2v⇒K;B;C thẳng hàng ⇒đpcm

4/ C/m: $4MI^2$=Rr. Vì ΔOKO' vuông ở K có đường cao KA.Áp dụng hệ thue=ức lượng trong tam giác vuông có AK2=OA.O'A.Vì MN=AK và MI=IN hay MI=$\frac{1}{2}$AK⇒đpcm

Bài 90:

Cho tứ giác ABCD (AB>BC) nội tiếp trong (O) đường kính AC; Hai đường chéo AC và DB vuông góc với nhau. Đường thẳng AB và CD kéo dài cắt nhau ở E; BC và AD cắt nhau ở F.

1. Cm:BDEF nội tiếp.
2. Chứng tỏ:DA.DF=DC.DE
3. Gọi I là giao điểm DB với AC và M là giao điểm của đường thẳng AC với đường tròn ngoại tiếp ΔAEF. Cmr: DIMF nội tiếp.
4. Gọi H là giao điểm AC với FE. Cm: AI.AM=AC.AH.



Hình 90

1/ Cm:DBEF nt: Do ABCD nt trong (O) đường kính AC⇒ABC=ADC=1v (góc nt chắn nửa đường tròn)⇒ FBE=EDF=1v⇒đpcm.

2/ C/m DA.DF=DC.DE:

Xét hai tam giác vuông DAC và DEF có: Do BF⊥AE và ED⊥AF nên C là trực tâm của ΔAEF⇒Góc CAD=DEF(cùng phụ với góc DFE)⇒đpcm.

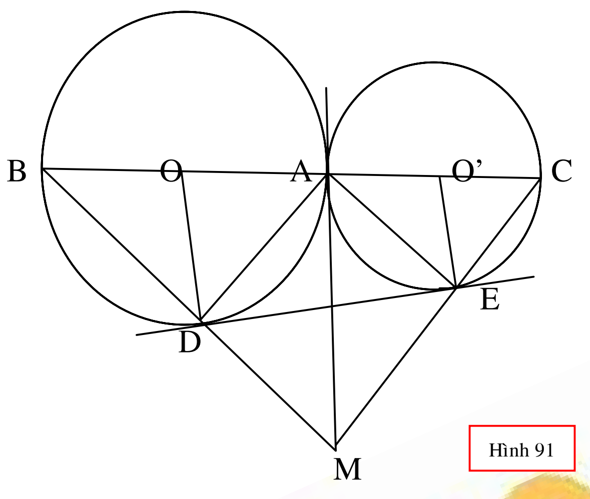
3/ Cm:DIMF nt: Vì AC⊥BD(gt) ⇒DIM=1v và I cũng là trung điểm của DB(đường kính vuông góc với dây DB)⇒ΔADB cân ở A⇒ AEF cân ở A (Tự c/m yếu tố này)⇒Đường tròn ngoại tiếp ΔAEF có tâm nằm trên đường AM ⇒góc AFM=1v(góc nt chắn nửa đường tròn)⇒DIM+DFM=2v⇒đpcm.

4/

Bài 91:

Cho (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A.Đường thẳng OO' cắt (O) và (O') tại B và C (khác A). Kẻ tiếp tuyến chung ngoài DE(D∈(O)); DB và CE kéo dài cắt nhau ở M.

1. Cmr: ADEM nội tiếp.
2. Cm: MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.
3. ADEM là hình gì?
4. Chứng tỏ:MD.MB=ME.MC.



Hình 91

1/Cm:ADEM nt: Vì AEC=1v và ADB=1v(góc nt chắn nửa đtròn) ⇒ADM+AEM=2v⇒đpcm.

2/C/m MA là tiếp tuyến của hai đường tròn;

-Ta có sđADE=$\frac{1}{2}$sđ cungAD=sđ DBA.Và ADE=AME(vì cùng chắn cung AE do tứ giác ADME nt)⇒ABM=AMC.

Tương tự ta có AMB=ACM⇒Hai tam giác ABM và ACM có hai cặp góc tương ứng bằng nhau⇒Cặp góc cònlại bằng nhau.Hay BAM=MAC.Ta lại có BAM+MAC=2v⇒BAM=MAC=1v hay OA⊥AM tại điểm A nằm trên đtròn....

3/ADEM là hình gì?

Vì BAM=1v⇒ABM+AMB=1v.Ta còn có MA là tt của đtròn⇒DAM=MBA (cùng bằng nửa cung AD).Tương tự MAE=MCA.Mà theo cmt ta có ACM=AMB Nên DAM+MAE=ABM+ACM=ABM+AMB=1v.Vậy DAE=1v nên ADEM là hình chữ nhật.

4/Cm: MD.MB=ME.MC .

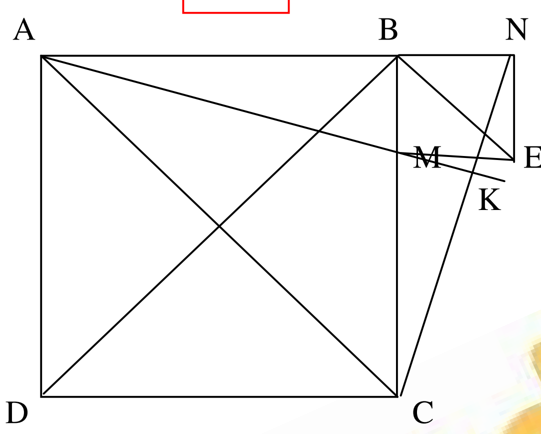
Tam giác MAC vuông ở A có đường cao AE.Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:MA^2=ME.MC.Tương tự trong tam giác vuông MAB có MA^2=MD.MB⇒đpcm.

Bài 92:

Cho hình vuông ABCD.Trên BC lấy điểm M. Từ C hạ CK⊥ với đường thẳng AM.

1. Cm: ABKC nội tiếp.
2. Đường thẳng CK cắt đường thẳng AB tại N.Từ B dựng đường vuông góc với BD, đường này cắt đường thẳng DK ở E. Cmr: BD.KN=BE.KA
3. Cm: MN//DB.
4. Cm: BMEN là hình vuông.

Hình 92



1/Cm: ABKC nội tiếp: Ta có ABC=1v (t/c hình vuông); AKC=1v(gt) ⇒ đpcm.

2/Cm: BD.KN=BE.KA.Xét hai tam giác vuông BDE và KAN có:

Vì ABCD là hình vuông nên nội tiếp trong đường tròn có tâm là giao điểm hai đường chéo.Góc AKC=1v⇒A;K;C nằm trên đtròn đường kính AC.Vậy 5 điểm A;B;C;D;K cùng nằm trên một đường tròn.⇒Góc BDK=KDN (cùng chắn cung BK)⇒ΔBDE~ΔKAN⇒$\frac{BD}{KA}=\frac{BE}{KN}$⇒đpcm.

3/ Cm:MN//DB.Vì AK⊥CN và CB⊥AN ;AK cắt BC ở M⇒M là trực tâm của tam giác ANC⇒NM⊥AC.Mà DB⊥AC(tính chất hình vuông)⇒MN//DB.

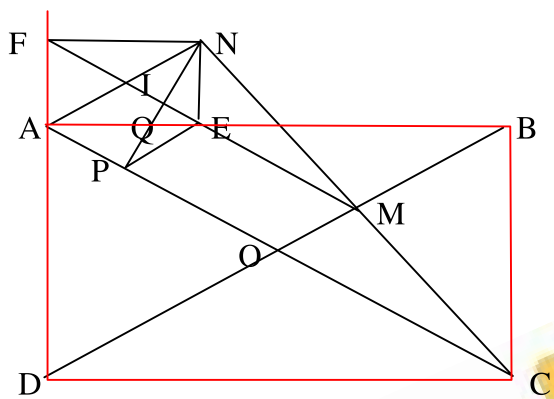
4/Cm:BNEM là hình vuông:

Vì MN//DB⇒DBM=BMN(so le) mà DBM=45°⇒BMN =45°⇒ΔBNM là tam giác vuông cân⇒BN=BM.Do BE⊥DB(gt)và BDM=45°⇒MBE=45°⇒ΔMBE là tam giác vuông cân và BM là phân giác của tam giác MBN;Ta dễ dàng c/m được MN là phân giác của góc BMN⇒BMEN là hình thoi lại có goác B vuông nên BMEN là hình vuông.

Bài 93:

Cho hình chữ nhật ABCD(AB>AD)có AC cắt DB ở O. Gọi M là 1 điểm trên OB và N là điểm đối xứng với C qua M. Kẻ NE; NF và NP lần lượt vuông góc với AB; AD; AC; PN cắt AB ở Q.

1. Cm: QPCB nội tiếp.
2. Cm: AN//DB.
3. Chứng tỏ F; E; M thẳng hàng.
4. Cm: ∆PEN là tam giác cân.



1/C/m QPCB nội tiếp:Ta có:NPC=1v(gt) và QBC=1v(tính chất hình chữ nhật).⇒đpcm.

2/Cm:AN//DB   vì O là giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật⇒O là trung điểm AC.Vì C và N đối xứng với nhau qua M⇒M là trung điểm NC ⇒OM là đường trung bình của ∆ANC⇒OM//AN hay AN//DB.

3/Cm:F;E;M thẳng hàng.

Gọi I là giao điểm EF và AN.Dễ dàng chứng minh được AFNE là hình chữ nhật⇒∆AIE và OAB là những tam gíc cân⇒IAE=IEA và ABO=BAO.Vì AN//DB⇒ IAE=ABO(so le)⇒IEA=EAC⇒EF//AC hay IE//AC❶

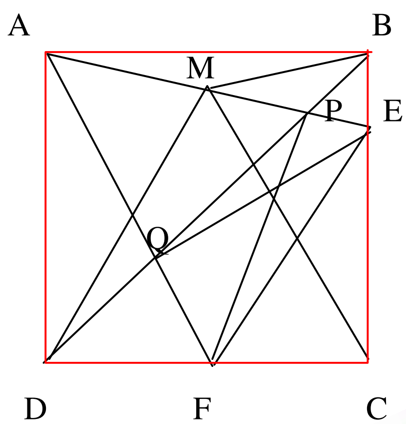
Vì I là trung điểm AN;M là trung điểm NC⇒IM là đường trung bình của ∆ANC⇒MI//AC ❷.Từ ❶và ❷Ta có I;E;M thẳng hàng.Mà F;I;E thẳng hàng ⇒F;F;M thẳng hàng.

4/C/m∆PEN cân:Dễ dàng c/m được ANEP nội tiếp⇒PNE=EAP(cùng chắn cung PE).Và PNE=EAN(cùng chắn cung EN).Theo chứng minh câu 3 ta có thể suy ra NAE=EAP⇒ENP=EPN⇒∆PEN cân ở E.

Bài 94:

Từ đỉnh A của hình vuông ABCD,ta kẻ hai tia tạo với nhau 1 góc bằng 45^o. Một tia cắt cạnh BC tại E và cắt đường chéo DB tại P. Tia kia cắt cạnh CD tại F và cắt đường chéo DB tại Q.

1. Cm:E; P; Q; F; C cùng nằm trên 1 đường tròn.
2. Cm:AB.PE=EB.PF.
3. Cm:$S_{\Delta AEF}=2S_{\Delta APQ}$.
4. Gọi M là trung điểm AE.Cmr: MC=MD.



1/Cm:E;P;Q;C;F cùng nằm trên một đường tròn:

Ta có QAE=45^o.(gt) và QBC=45^o(t/c hình vuông)⇒ABEQ nội tiếp ⇒ABE+AQE=2v mà ABE=1v⇒AQE=1v❶.Ta có ΔAQE vuông ở Q có góc QAE=45^o⇒ΔAQE vuông cân⇒AEQ=45^o.Ta lại có EAF=45^o(gt) và PDF=45^o ⇒APFD nội tiếp⇒APF+ADF=2v mà ADF=1v⇒APF=1v❷ và ECF=1v ❸ .Từ ❶❷❸⇒E;P;Q;F;C cùng nằm trên đường tròn đường kính EF.

2/Chứng minh: AB.PE=EB.PF.Xét hai tam giác vuông ABE có:

$\left.\begin{array}{l}\text{-Vì ABEQ nt⇒BAE=BQE(Cùng chắn cung BE)}\\ \text{-Vì QPEF nt⇒PQE=PEF(Cùng chắn cung PE)}\end{array}\right\}\Rightarrow BAE=PFE$

⇒đpcm.

3/Cm: :$S_{\Delta AEF}=2S_{\Delta APQ}$.

Theo cm trên thì ΔAQE vuông cân ở Q⇒AE=$\sqrt{AQ^2+QE^2}=\sqrt{2}\,AQ$

Vì QPEF nt ⇒PEF=AQP(cùng phụ với góc PQF);Góc QAP chung

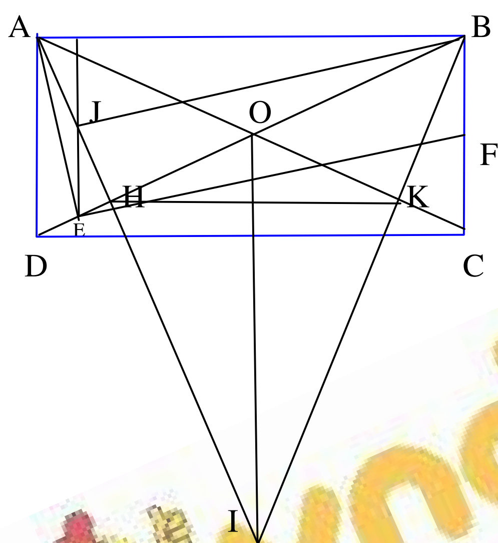
⇒ΔAQP~ΔAEF⇒$\frac{S_{AEF}}{S_{AQP}}=\left(\frac{AE}{AQ}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$=2⇒đpcm.

4/Cm: MC=MD.Học sinh chứng minh hai ΔMAD=MBC vì có BC=AD; MBE=MEB=DAE;AM=BM.

Bài 95:

Cho hình chữ nhật ABCD có hai đường chéo cắt nhau ở O.Kẻ AH và BK vuông góc với BD và AC.Đường thẳng AH và BK cắt nhau ở I.Gọi E và F lần lượt là trung điểm DH và BC.Từ E dụng đường thẳng song song với AD.Đường này cắt AH ở J.

1. C/m:OHIK nội tiếp.
2. Chứng tỏ KH⊥OI.
3. Từ E kẻ đườngthẳng song song với AD.Đường này cắt AH ở J.Chứng tỏ:HJ.KC=HE.KB
4. Chứng minh tứ giác ABFE nội tiếp được trong một đường tròn.



1/Cm:OHIK nt (Hs tự chứng minh)

2/Cm HK⊥OI.

Tam giác ABI có hai đường cao DH và AK cắt nhau ở O ⇒OI là đường cao thứ ba ⇒OI⊥AB.

Ta có OKIH nt⇒OKE=OIE(cùng chắn cung OH).Vì OI⊥AB và AD⊥AB ⇒OI//AD⇒OIH=HAD(so le).Mà HAD=HBA(cùng phụ với góc D).Do ABCD là hình chữ nhật nên ABH+ACE ⇒OKH=OCE⇒HK//AB.Mà OI⊥AB ⇒OI⊥KH.

3/Cm: HJ.KC=HE.KB .

Chứng minh hai tam giác vuông HJE và KBC đồng dạng

4/Chứng minh ABFE nội tiếp:

VìAH⊥BE;EJ//AD và AD⊥AB⇒EJ⊥AB⇒BJ là đường cao thứ ba của tam giác ABE⇒BJ⊥AE Vì E là trung điểm DH;EJ//AD⇒EJ là đường trung bình của tam giác ADH⇒EJ//=$\frac{1}{2}$AB;BF=$\frac{1}{2}$BC mà BC//=AD⇒JE//=BF⇒BJEF là hình bình hành⇒JB//EF.Mà BJ⊥AE⇒EF⊥AE hay AEF=1v;Ta lại có ABF=1v⇒ABFE nt.

Bài 96:

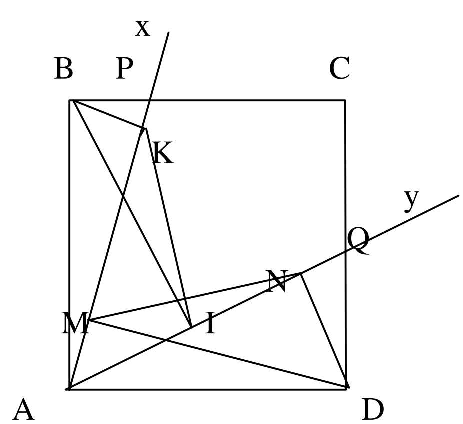
Cho ΔABC, phân giác góc trong và góc ngoài của các góc B và C gặp nhau theo thứ tự ở I và J.Từ J kẻ JH; JP; JK lần lượt vuông góc với các đường thẳng AB; BC; AC.

1. Chứng tỏ A; I; J thẳng hàng.
2. Chứng minh: BICJ nt.
3. BI kéo dài cắt đường thẳng CJ tại E. Cmr:AE⊥AJ.
4. C/m: AI.AJ=AB.AC.

Bài 97:

Từ đỉnh A của hình vuông ABCD ta kẻ hai tia Ax và Ay sao cho: Ax cắt cạnh BC ở P,Ay cắt cạnh CD ở Q.Kẻ BK⊥Ax;BI⊥Ay và DM⊥Ax,DN⊥Ay .

1. Chứng tỏ BKIA nội tiếp
2. Chứng minh AD^2=AP.MD.
3. Chứng minh MN=KI.
4. Chứng tỏ KI⊥AN.



Bài 98:

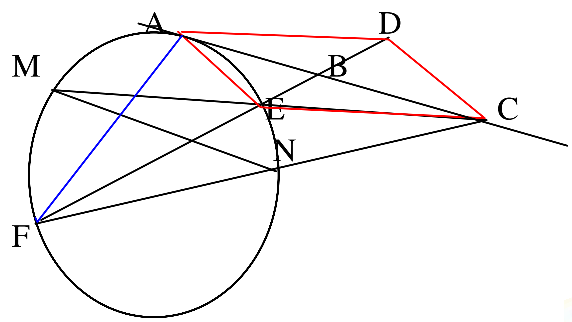
Cho hình bình hành ABCD có góc A>90°.Phân giác góc A cắt cạnh CD và đường thẳng BC tại I và K.Hạ KH và KM lần lượt vuông góc với CD và AM.

1. Chứng minh KHDM nt.
2. Chứng minh:AB=CK+AM.

Bài 99:

Cho(O) và tiếp tuyến Ax.Trên Ax lấy điểm C và gọi B là trung điểm AC. Vẽ cát tuyến BEF.Đường thẳng CE và CF gặp lại đường tròn ở điểm thứ hai tại M và N.Dựng hình bình hành AECD.

1. Chứng tỏ D nằm trên đường thẳng EF.
2. Chứng minh AFCD nội tiếp.
3. Chứng minh:CN.CF=4BE.BF
4. Chứng minh MN//AC.



1/Chứng minh D nằm trên đường thẳng EF:Do ADCE là hình bình hành nên E;B;D thẳng hàng.Mà F;E;B thẳng hàng⇒đpcm.

2/Cm:AFCD nội tiếp:

-Do ADCE là hình bình hành⇒BC//AE⇒góc BCA=ACE(so le)

-sđCAE=$\frac{1}{2}$sđcung AE(góc giữa tt và một dây) và sđ AFE=$\frac{1}{2}$sđ cung AE

⇒CAE=AFE.⇒BCN=BFA⇒AFCD nội tiếp.

2/Cm CN.CF=4BE.BF.

-Xét hai tam gáic BAE và BFA có góc ABF chung và AFB=BAE(chứng minh trên)⇒ΔBAE~ΔBFA⇒$\frac{AB}{BF}=\frac{BE}{AB}$⇒$AB^2$=BE.BF❶

Tương tự hai tam giác CAN và CFA đồng dạng⇒AC^2=CN.CF❷.Nhưng ta lại có AB=$\frac{1}{2}$AC.Do đó❶ trở thành:$\frac{1}{4}AC^2$=BE.BF hay AC^2=4BE.BF❸.

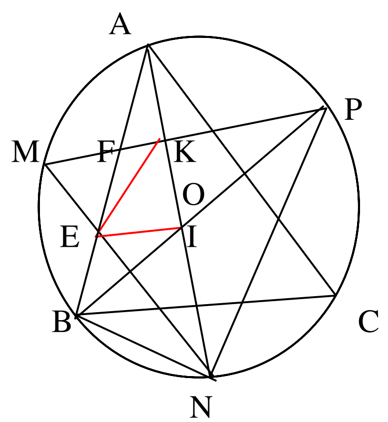
Từ ❶ và ❸⇒đpcm.

4/cm MN//AC. Do ADCE là hbh⇒BAC=ACE(so le).Vì ADCF nt ⇒DAC=DFC(cùng chắn cung DC).Ta lại có EMN=EFN(cùng chắn cung EN)⇒ACM=CMN⇒MN//AC.

Bài 100:

Trên (O) lấy 3 điểm A;B;C.Gọi M;N;P lần lượt theo thứ tự là điểm chính giữa cung AB;BC;AC .AM cắt MP và BP lần lượt ở K và I.MN cắt AB ở E.

1. Chứng minh ΔBNI cân.
2. PKEN nội tiếp.
3. Chứng minh AN.BD=AB.BN
4. Chứng minh I là trực tâm của ΔMPN và IE//BC.



1/C/m ΔBNI cân

Ta có

sđ$\widehat{BIN}$=$\frac{1}{2}$sđ(AP+BN)

sđ$\widehat{IBN}$=$\frac{1}{2}$sđ(CP+CN)

Mà Cung AP=CP; BN=CN(gt)

⇒$\widehat{BIN}$=$\widehat{IBN}$⇒ΔBNI cân ở N.

2/Chứng tỏ PKEN nội tiếp:

Vì cung AM=MB⇒$\widehat{ANM}$=MPB hay $\widehat{KPE}$=$\widehat{KNE}$⇒Hai điểm P;N cùng làm với hai đầu đoạn thẳng KE...⇒đpcm.

3/C/m AN.DB=AB.BN.

Xét hai tam giác BND và ANB có góc $\widehat{N}$ chung;Góc $\widehat{NBD}$=$\widehat{NAB}$(cùng chắn cung NC=NB)⇒đpcm.

4/ •Chứng minh I là trực tâm của ΔMNP: Gọi giao điểm của MP với AB;AC lần lượt ở F và D.Ta có:

sđ $\widehat{AFD}$=$\frac{1}{2}$ sđ cung (AP+MB)(góc có đỉnh ở trong đường tròn.)

sđ $\widehat{ADF}$=$\frac{1}{2}$ sđ cung(PC+AM) (góc có đỉnh ở trong đường tròn.)

Mà Cung AP=PC;MB=AM⇒$\widehat{AFD}$=$\widehat{ADF}$⇒ΔAFD cân ở A có AN là phân giác của góc $\widehat{BAC}$(Vì Cung BN=NC nên $\widehat{BAN}$=$\widehat{NAC}$)⇒AN⊥MP hay NA là đường cao của ΔNMP.Bằng cách làm tương tự như trên ta chứng minh được I là trực tâm của tam gáic MNP.

•C/m IE//BC.Ta có ΔBNI cân ở N có NE là phân giác ⇒NE cũng là đường trung trực của BI⇒EB=EI⇒ΔBEI cân ở E.Ta có EBI=$\widehat{EIB}$.Do $\widehat{EBI}$=$\widehat{ABP}$=$\widehat{PBC}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau PA=PC).Nên PBC=EIB⇒$\widehat{EI//BC}$.

Hết

50 BÀI TOÁN HÌNH HỌC ÔN THI VÀO 10 CÓ ĐÁP ÁN
GV: CÔ MAI QUỲNH

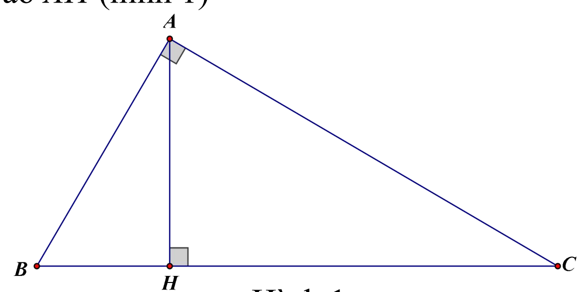
TÓM TẮT LÝ THUYẾT HÌNH 9

1. Hệ thức cơ bản trong tam giác vuông

Một tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH (hình 1)

Ta có:

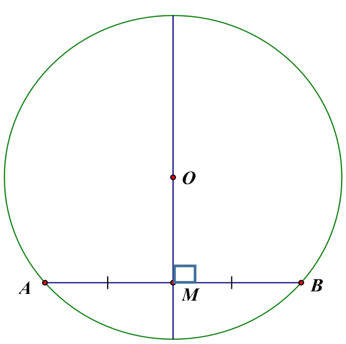
- $AB^2 = BH.BC$ và $AC^2 = CH.BC$
- $AH^2 = HB.HC$
- $AH.BC = AB.AC$
- $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$
- $\sin B = \dfrac{AC}{BC}; \cos B = \dfrac{AB}{BC}; \tan B = \dfrac{AC}{AB}; \cot B = \dfrac{AB}{AC}$
- α là góc nhọn thì $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- α, β là hai góc nhọn và $\alpha + \beta = 90^o$ thì $\sin\alpha = \cos\beta; \tan\alpha = \cot\beta$.



Hình 1

2. Đường tròn

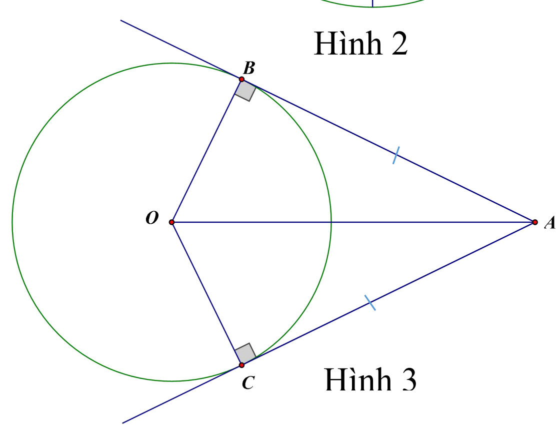
- **Đường kính và dây cung**: (hình 2)
  - Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính
  - Trong một đường tròn đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.
  - Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.



Hình 2

- **Tiếp tuyến của đường tròn** (hình 3)
  - AB, AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C

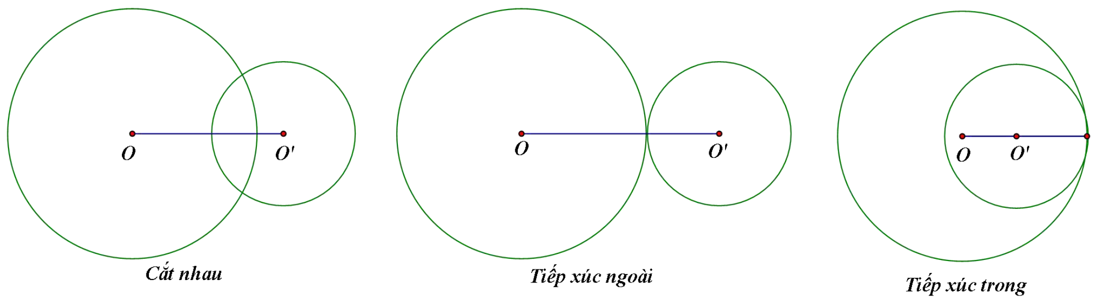
$$\begin{cases} AB = AC \\ AO \text{ là phân giác } \widehat{BAC} \\ OA \text{ là phân giác } \widehat{BOC} \end{cases}$$



Hình 3

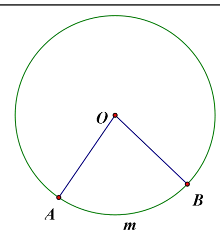
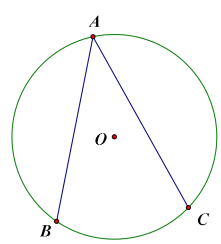
- **Vị trí tương đối của hai đường tròn** (hình 4)

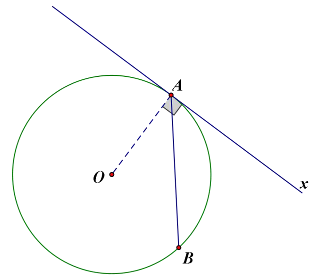
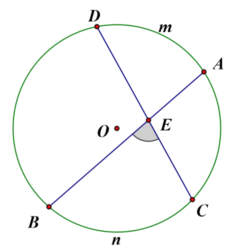
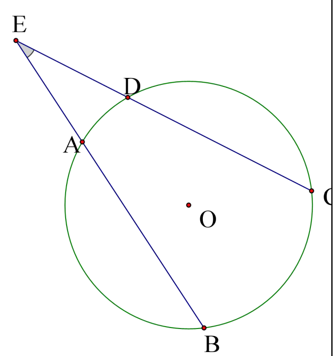
- Hai đường tròn *(O; R)* và *(O'; r)* với $R \geq r$
  Cắt nhau $\Leftrightarrow R - r < OO' < R + r$
  Tiếp xúc ngoài $\Leftrightarrow OO' = R + r$
  Tiếp xúc trong $\Leftrightarrow OO' = R - r$



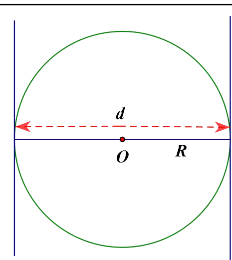
Hình 4

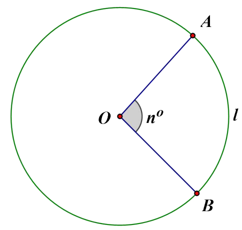
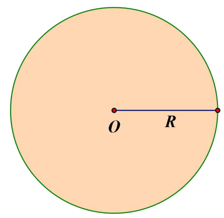
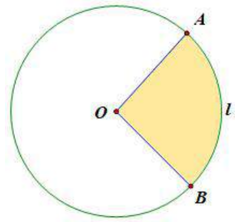
3. Các loại góc liên quan đến đường tròn

Tên góc	**Định nghĩa**	**Hình vẽ**	**Công thức tính số đo**
Góc ở tâm	Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là góc ở tâm		$sđ\,\widehat{AOB} = sđ\,\overset{\frown}{AmB}$
Góc nội tiếp	Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai chứa hai dây cung của đường tròn đó		$sđ\,\widehat{BAC} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{BC}$

Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung			$sđ\,\widehat{BAx} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{AB}$
Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn			$sđ\,\widehat{BEC} = \frac{sđ\,\overset{\frown}{BnC} + sđ\,\overset{\frown}{Am}}{2}$
Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn			$sđ\,\widehat{BEC} = \frac{sđ\,\overset{\frown}{BC} - sđ\,\overset{\frown}{AD}}{2}$

4. Công thức tính trong đường tròn

	Hình vẽ	**Công thức tính**
Độ dài đường tròn		$C = 2\pi R$ hay $C = \pi d$

Độ dài cung tròn		$l = \dfrac{\pi R n}{180}$
Diện tích hình tròn		$S = \pi R^2$
Diện tích hình quạt		$S_{quat} = \dfrac{\pi R^2 n}{360}$ hay $S_{quat} = \dfrac{lR}{2}$

5. Chứng minh một tứ giác nội tiếp

- Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (gọi tắt là tứ giác nội tiếp).
- Một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180^o thì tứ giác đó nội tiếp đường tròn.
- Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc α thì nội tiếp đường tròn.
- Tứ giác có bốn đỉnh cách đều một điểm (mà ta có thể xác định được) thì nội tiếp đường tròn. Điểm đó gọi là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

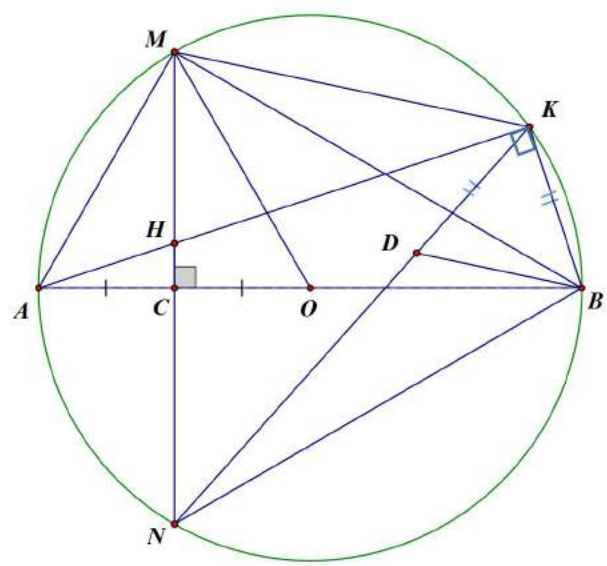
Chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

50 BÀI TẬP CHỌN LỌC

Câu 1. Cho đường tròn *(O)* đường kính $AB = 2R$, C là trung điểm của OA và dây MN vuông góc với OA tại C. Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ BM, H là giao điểm của AK và MN.

1. Chứng minh tứ giác $BCHK$ nội tiếp.
2. Tính tích $AH.AK$ theo R.
3. Xác định vị trí của điểm K để tổng $(KM + KN + KB)$ đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó?

Giải:



1. Chứng minh tứ giác $BHCK$ nội tiếp.

$MN \perp AC$

$\widehat{AKB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{HCB} = 90°$

Xét tứ giác $BCHK$ có:

$\widehat{HCB} + \widehat{AKB} = 90° + 90° = 180°$ mà 2 góc ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $BCHK$ nội tiếp.

2. Tính $AH.AK$ theo R.

Xét tam giác ΔACH và ΔAKB có:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{ACH} = \widehat{AKB} = 90° \\ \widehat{A}\ \ chung \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ACH \# \ \Delta AKB\ (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AK} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH.AK = AC.AB$$

Mà $AC = \frac{1}{4}R$ và $AB = 2R \Rightarrow AH.AK = \frac{R^2}{2}$.

3. Xác định vị trí của K để $(KM + KN + KB)$ max

* Chứng minh ΔBMN đều:

ΔAOM cân tại M (MC vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến)

Mà $OA = OM = R \Rightarrow \Delta AOM$ đều $\Rightarrow \widehat{MOA} = 60°$

ΔMBN cân tại B vì $\begin{cases} MC = CN \\ BC \perp MN \end{cases}$

$\Rightarrow CM = CN$

Mặt khác: $\widehat{MBA} = \frac{1}{2}\widehat{MOA} = 30°$ (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{MA}$) $\Rightarrow \widehat{MBN} = 60°$

ΔMBN cân tại B lại có $\widehat{MBN} = 60°$ nên ΔMBN là tam giác đều

* Chứng minh $KM + KB = KN$

Trên cạnh NK lấy điểm D sao cho $KD = KB$.

$\Rightarrow \Delta KDB$ là tam giác cân mà $\widehat{NKB} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{NB} = 60°$

$\Rightarrow \Delta KDB$ là tam giác đều $\Rightarrow KB = BD$.

Ta có: $\widehat{DMB} = \widehat{KMB}$ (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{AB}$)

$\widehat{BDN} = 120°$ (kề bù với $\widehat{KBD}$ trong ΔKDB đều)

$\widehat{MKB} = 120°$ (góc nội tiếp chắn cung $240°$)

$\Rightarrow \widehat{MBK} = \widehat{DBN}$ (tổng các góc trong tam giác bằng $180°$)

Xét ΔBDN và ΔBKM có:

$$\left.\begin{array}{l} BK = BD\ (cmt) \\ \widehat{BDN} = \widehat{BKM}\ (cmt) \\ MB = MN \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BDN = \Delta BKN\ (c.g.c)$$

$\Rightarrow ND = MK$ (2 cạnh tương ứng)

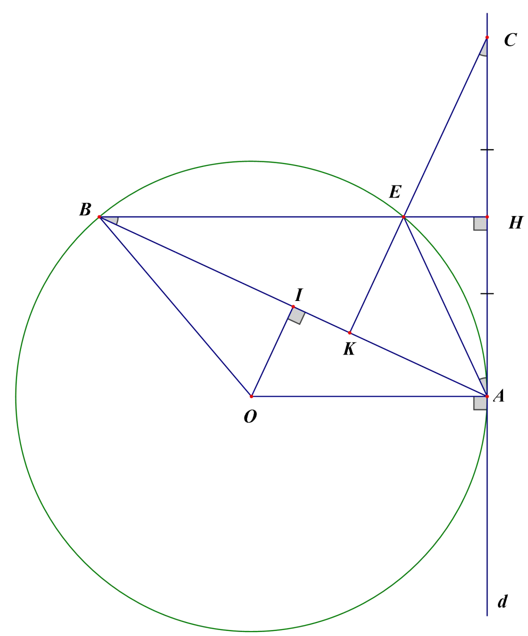
$\Rightarrow KM + KN + KB = 2KN$

$\Rightarrow (KM + KN + KB)\max = 4R$ khi KN là đường kính $\Rightarrow K, O, N$ thẳng hàng

$\Rightarrow K$ là điểm chính giữa cung BM.

Vậy với K là điểm chính giữa cung BM thì $(KM + KN + KB)$ đạt giá trị max bằng $4R$.

Câu 2. Cho đường tròn $(O;R)$ tiếp xúc với đường thẳng d tại A. Trên d lấy điểm H không trùng với điểm A và $AH < R$. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với d, đường thẳng này cắt đường tròn tại hai điểm E và B (E nằm giữa B và H).



1. Chứng minh $\widehat{ABE} = \widehat{EAH}$ và $\Delta ABH \# \Delta EAH$.
2. Lấy điểm C trên d sao cho H là trung điểm của đoạn thẳng AC, đường thẳng CE cắt AB tại K. Chứng minh $AHEK$ là tứ giác nội tiếp.
3. Xác định vị trí điểm H để $AB = R\sqrt{3}$.

Giải:

1. Chứng minh: $\widehat{ABE} = \widehat{EAH}$

$\widehat{ABE} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{EA}$ (t/c góc nội tiếp)

$\widehat{HAE} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{EA}$ (t/c góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{HAE}$

Xét ΔABH và ΔEAH có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{AHB} = 90^\circ \\ \widehat{ABE} = \widehat{HAE}\ (cmt)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABH \# \ \Delta EAH\ (g.g)$$

2. Xét $\Delta HEC = \Delta HEA\ (c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{CAE}$ mà $\widehat{CAE} = \widehat{ABE}$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{ABE}$

Mặt khác: $\widehat{ABE} + \widehat{CAK} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ACE} + \widehat{CAK} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta AHK$ vuông tại K

Xét tứ giác $AHEK$ có: $\widehat{EHK} = \widehat{AKE} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{EHK} + \widehat{AKE} = 180^\circ$ mà 2 góc ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $AHEK$ nội tiếp.

3. Hạ $OI \perp AB \Rightarrow AI = IB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Xét ΔAOI vuông tại I có $\cos \widehat{OAI} = \dfrac{AI}{OA} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{OAI} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BAH} = 60^\circ$

ΔAHB vuông tại H có: $\widehat{BAH} = 60^\circ \Rightarrow \cos\ \widehat{BAH} = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{AH}{R\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow AH = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

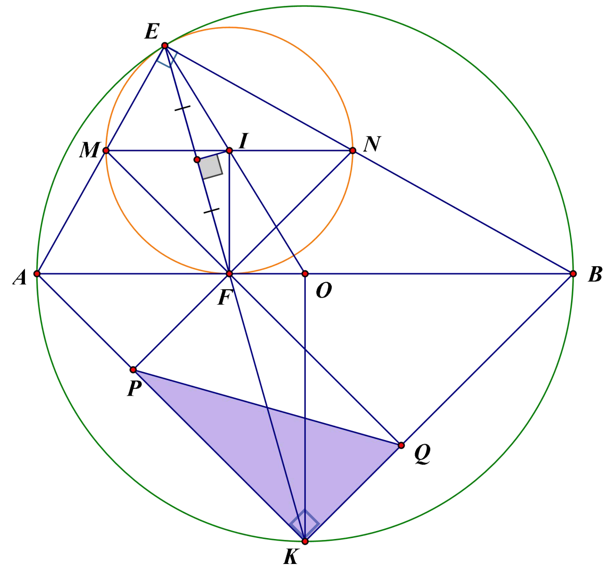
Vậy cần lấy điểm H sao cho độ dài $AH = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ thì $AB = R\sqrt{3}$

Câu 3. Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$ và E là điểm bất kì trên đường tròn đó (E khác A và B). Đường phân giác góc AEB cắt đoạn thẳng AB tại F và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K.

1. Chứng minh $\Delta KAF \# \ \Delta KEA$.
2. Gọi I là giao điểm của đường trung trực đoạn EF với OE, chứng minh đường tròn (I) bán kính IE tiếp xúc với đường tròn (O) tại E và tiếp xúc với đường thẳng AB tại F.
3. Chứng minh $MN // AB$, trong đó M và N lần lượt là giao điểm thứ hai của AE, BE với đường tròn (I).

4. Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác KPQ theo R khi E chuyển động trên đường tròn (O), với P là giao điểm của NF và AK; Q là giao điểm của MF và BK.

Giải:



1. Chứng minh $\Delta KAF \# \Delta KEA$

$\widehat{KAB} = \widehat{KEB}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{KB}$)

Xét ΔKAF và ΔKEA có:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{KAB} = \widehat{AEK}\,(cmt) \\ \widehat{K}\ chung \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta KAF \# \Delta AEK\,(g.g)$$

2. * Đường tròn $(I;IE)$ và đường tròn $(O;OE)$

I, O, E thẳng hàng $\Leftrightarrow IE + IO = OE$

$\Rightarrow IO = OE - IE$

Vậy $(I;IE)$ và $(O;OE)$ tiếp xúc trong tại E.

* Chứng minh $(I;IE)$ tiếp xúc với AB tại F

Dễ dàng chứng minh: ΔEIF cân tại I ($I \in$ trung trực của EF)

ΔEOK cân tại $O \Rightarrow \widehat{EFI} = \widehat{EKO}\ (= \widehat{OEF})$

mà 2 góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow IF \,//\, OK$ (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng //)

Có : $\overset{\frown}{AK} = \overset{\frown}{KB}\ (\widehat{AEK} = \widehat{KEB}) \Rightarrow AK = KB$

$\Rightarrow \Delta AKB$ cân tại K

$\Rightarrow OK \perp AB$

Vì $\left.\begin{array}{l} OK \perp AB \\ OK \,//\, IF \end{array}\right\} \Rightarrow IF \perp AB$

$\Rightarrow (I;IE)$ tiếp xúc với AB tại F.

3. $\widehat{AEB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{MEN} = 90^\circ$ mà $\widehat{MEN}$ là góc nội tiếp đường tròn $(I;IE)$

$\Rightarrow MN$ là đường kính $(I;IE)$

$\Rightarrow \Delta EIN$ cân tại I

Lại có: ΔEOB cân tại $O \Rightarrow \widehat{INE} = \widehat{OBE}$ mà 2 góc này vị trí đồng vị

$\Rightarrow MN \,//\, AB$ (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng //).

4. Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi ΔKPQ theo R khi E chuyển động trên (O)

$\widehat{MFE} = \widehat{MNE}$ (góc nội tiếp (I) cùng chắn cung ME)

$\widehat{AKE}=\widehat{ABE}$ (góc nội tiếp (O) cùng chắn cung AE)

Mà $\widehat{MNE}=\widehat{ABE}\ (cmt)\Rightarrow \widehat{MFE}=\widehat{AKE}$, hai góc này lại ở vị trí đồng vị

$\Rightarrow MQ//AK$ (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng //)

Chứng minh tương tự: $NP//BK$

Tứ giác $PFQK$ có: $MQ//AK$

$NP//BK$

$\widehat{PKQ}=90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow$ Tứ giác $PFQK$ là hình chữ nhật

Ta có: $\widehat{MFA}=\widehat{QFB}$ (đối đỉnh) ở

$\widehat{KAB}=\widehat{KBA}$ (ΔAKB cân) mà $\widehat{MFA}=\widehat{KAB}\Rightarrow \Delta FQB$ vuông cân tại Q.

Chu vi $\Delta KPQ=KP+PQ+KQ$

Mà $PK=FQ$ ($PFQK$ là hình chữ nhật) và $FQ=QB$ (ΔBFQ cân tại Q)

$\Rightarrow P_{KPQ}=QB+QK+FK=KB+FK$

Mặt khác: ΔAKB cân tại $K\Rightarrow K$ là điểm chính giữa cung AB

$FK\ge FO$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên)

$\Rightarrow KB+FK\ge KB+FO$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow KB+FK=KB+FO$

$\Leftrightarrow FK=FO$

$\Rightarrow$ E là điểm chính giữa cung AB

$\Rightarrow FO=R$

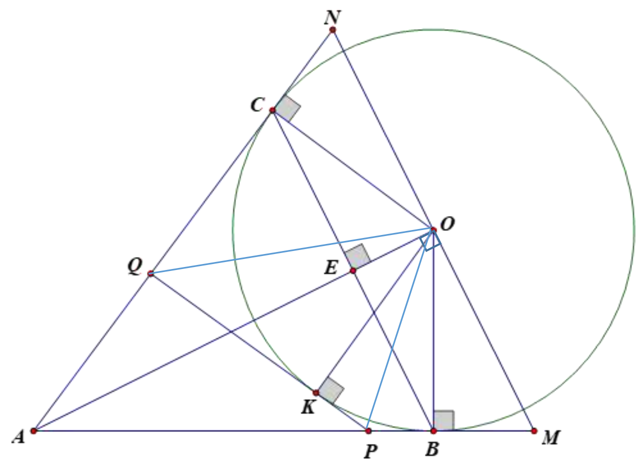
Áp dụng định lý Pi-ta-go trong ΔFOB tính được $BK=R\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Chu vi ΔKPQ nhỏ nhất $=R+R\sqrt{2}=R(\sqrt{2}+1)$.

Câu 4. Cho $(O;R)$ và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm).

1. Chứng minh $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.
2. Gọi E là giao điểm của BC và OA. Chứng minh BE vuông góc với OA và $OE.OA=R^2$.
3. Trên cung nhỏ BC của $(O;\ R)$ lấy điểm K bất kì (K khác B và C). Tiếp tuyến tại K của $(O;\ R)$ cắt AB, AC theo thứ tự tại P và Q. Chứng minh tam giác APQ có chu vi không đổi khi K chuyển động trên cung nhỏ BC.
4. Đường thẳng qua O và vuông góc với OA cắt các đường thẳng AB, AC theo thứ tự tại M, N. Chứng minh $PM+QN\ge MN$.

Giải:



1. Chứng minh $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.

Xét tứ giác $ABOC$ có:

$\widehat{ABO} = 90^o$ (tính chất tiếp tuyến)

$\widehat{ACO} = 90^o$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow \widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^o + 90^o = 180^o$

Mà hai góc này ở vị trí đối diện nên tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

2. $AB = AC$ (tính chất của 2 tiếp tuyến cắt nhau tại 1 điểm)

$\Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A.

Mà AO là tia phân giác $\widehat{BAC}$ (t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau tại 1 điểm)

nên AO là đường cao của ΔABC hay $AO \perp BC$.

Xét ΔABO vuông ở B có BE là đường cao, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông $\Rightarrow OB^2 = OE.OA$, mà $OB = R \Rightarrow R^2 = OE.OA$.

3. $PK = PB$ (tính chất của 2 tiếp tuyến cắt nhau tại 1 điểm).

$KQ = QC$ (tính chất của 2 tiếp tuyến cắt nhau tại 1 điểm).

Xét chu vi $\Delta APQ = AP + AQ + QP$

$= AP + AQ + PK + KQ$

$= AP + PK + AQ + QC$

$= AB + AC$

$= 2AB$

Mà (O) cố định, điểm A cố định nên AB không thay đổi.

4. $\Delta OMP \# \Delta QNO \Rightarrow \dfrac{MP}{ON} = \dfrac{OM}{QN} \Rightarrow MP.QN = ON.OM = \dfrac{MN^2}{4}$

$\Rightarrow MN^2 = 4MP.QN$

$MN = 2\sqrt{MP.QN} \le MP + NQ$ (Theo bất đẳng thức Cô-si)

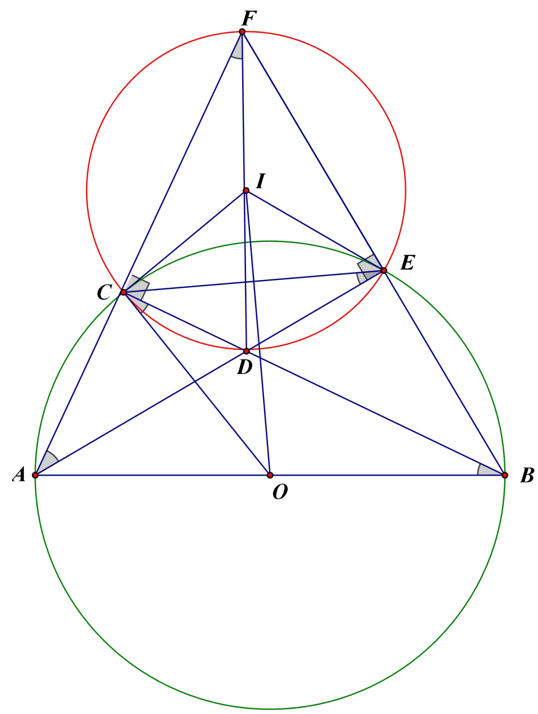
Hay $MP + NQ \ge MN$ (đpcm).

Câu 5. Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$ và điểm C thuộc đường tròn đó (C khác A, B). Lấy điểm D thuộc dây BC (D khác B, C). Tia AD cắt cung nhỏ BC tại điểm E, tia AC cắt BE tại điểm F.

1. Chứng minh $FCDE$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $DA.DE = DB.DC$.

3. Chứng minh $\widehat{CFD} = \widehat{OCB}$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $FCDE$. C hứng minh IC là tiếp tuyến của đường tròn (O).
4. Cho biết $DF = R$, chứng minh $\tan \widehat{AFB} = 2$.

Giải:



1. Chứng minh $FCDE$ là tứ giác nội tiếp.

$\widehat{ACE} = \widehat{AEB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Tứ giác $FCDE$ có :

$\widehat{FCD} + \widehat{FDE} = 180^o$

Mà 2 góc này ở vị trí đối nhau nên $\Rightarrow$ Tứ giác $FCDE$ là tứ giác nội tiếp

2. Chứng minh $DA.DE = DB.DC$

Xét ΔACD và ΔBED có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ACD} = \widehat{BED} = 90^o \\ \widehat{ADC} = \widehat{BDE}\ (đ.đ)\end{array}\right\} \Delta ACD \# \ \Delta BED(g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{BD}{ED} \Rightarrow AD.ED = CD.BD \text{ (đpcm)}.$$

3. * Chứng minh $\widehat{CFD} = \widehat{OCB}$

Vì tứ giác $FCDE$ là tứ giác nội tiếp (I) nên

$\widehat{CFD} = \widehat{CEA}$ (góc nội tiếp (I) cùng chắn cung CD)

Mà $\widehat{CED} = \widehat{CBA}$ (góc nội tiếp (O) cùng chắn cung CA)

$\Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{CBA}$

Lại có ΔOCB cân tại O nên $\widehat{CBA} = \widehat{OCB}$

$\Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{OCB}$ (1)

ΔICF cân tại I: $\widehat{CFD} = \widehat{ICF}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ICF} = \widehat{OCB}$

* Chứng minh IC là tiếp tuyến (O):

Ta có: $\widehat{ICF} + \widehat{ICB} = 90^o$ (vì $\widehat{DIC}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{OCB} + \widehat{BCI} = 90^o$

$\Rightarrow OC \perp CI \Rightarrow IC$ là tiếp tuyến của (O).

4. Ta có 2 tam giác vuông $\Delta ICO \# \ \Delta FEA(g.g)$

$\widehat{CAE} = \frac{1}{2}\widehat{COE} = \widehat{COI}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{CE}$) $\Rightarrow \widehat{CIO} = \widehat{AFB}$

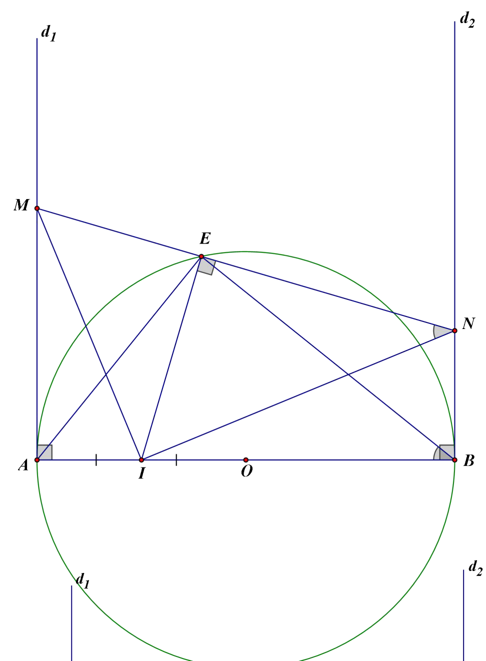
Mà $\tan\widehat{CIO} = \dfrac{CO}{CI} = \dfrac{R}{\frac{R}{2}} = 2$

$\Rightarrow \tan\widehat{AFB} = \tan\widehat{CIO} = 2.$

Câu 6. Cho đường tròn (O), đường kính $AB = 2R$. Gọi d_1 và d_2 là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại hai điểm A và B. Gọi I là trung điểm của OA và E là điểm thuộc đường tròn (O) (E không trùng với A và B). Đường thẳng d đi qua E và vuông góc với EI cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại M, N.

1. Chứng minh $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $\widehat{ENI} = \widehat{EBI}$ và $\widehat{MIN} = 90^o$.
3. Chứng minh $AM.BN = AI.BI$.
4. Gọi F là điểm chính giữa của cung AB không chứa E của đường tròn (O). Hãy tính diện tích của tam giác MIN theo R khi ba điểm E, I, F thẳng hàng.

Giải:



1. Chứng minh $AMEI$ nội tiếp.

Xét tứ giác $AMEI$ có:

$\widehat{MAI} + \widehat{MEI} = 90° + 90° = 180°$ mà 2 góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $AMEI$ nội tiếp.

2. * Chứng minh $\widehat{ENI} = \widehat{EBI}$.

Xét tứ giác $ENBI$ có:

$\widehat{IEN} + \widehat{IBN} = 90° + 90° = 180°$ mà 2 góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $ENBI$ nội tiếp

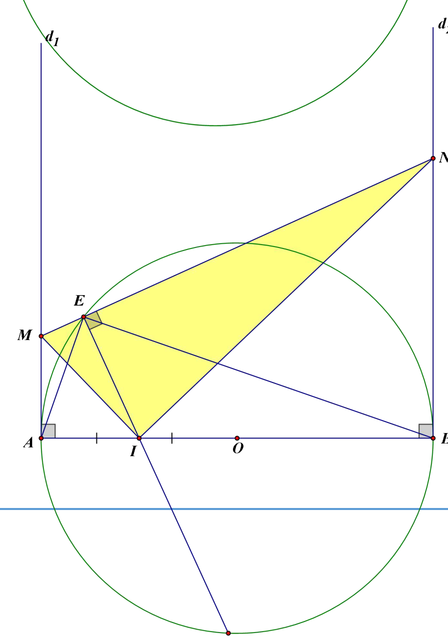
$\Rightarrow \widehat{ENI} = \widehat{EBI}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{EI}$)

* Chứng minh $\widehat{MIN} = 90°$

Tứ giác $ENBI$ nội tiếp nên $\widehat{EMI} = \widehat{EAI}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung EI)

Lại có: $\widehat{AEB} = 90° \Rightarrow \widehat{EAI} + \widehat{EBI} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{EMI} + \widehat{ENI} = 90° \Rightarrow \Delta MNI$ vuông tại I. Vậy $\widehat{MIN} = 90°$.



3. Chứng minh $AM.BN = AI.BI$

Xét ΔAMI và ΔBNI có: $\widehat{MAI} = \widehat{NBI} = 90°$

$\widehat{AIM} = \widehat{BNI}$ (cùng phụ với góc $\widehat{BIN}$)

$\Rightarrow \Delta AMI \# \ \Delta BIN\ (g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AI} = \dfrac{BI}{BN} \Rightarrow AM.BN = AI.BI.$

4. Ta có hình vẽ

Khi E, I, F thẳng hàng $\widehat{AEF} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AF} = 45°$

$\widehat{AMI} = \widehat{AEI} = 45°$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AI}$)

$\Rightarrow \Delta MAI$ vuông cân tại A.

$\Rightarrow AM = AI = \dfrac{R}{2} \Rightarrow MI = \sqrt{AM^2 + AI^2} = \sqrt{\dfrac{R^2}{4} + \dfrac{R^2}{4}} = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ (Định lí Pi-ta-go).

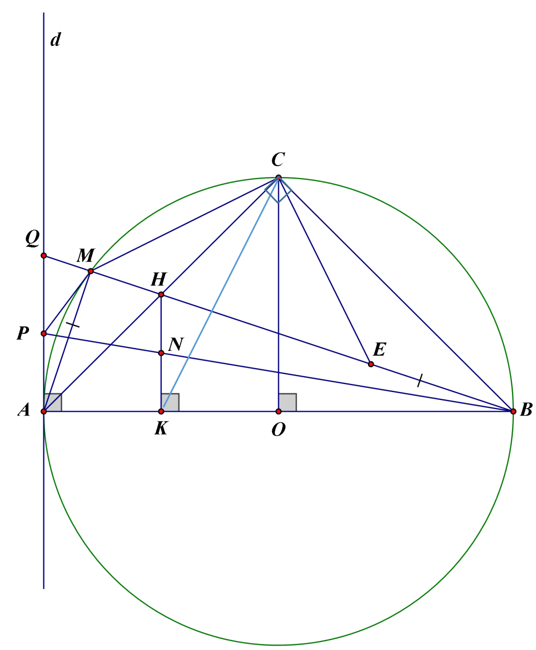
Chứng minh tương tự:

ΔBIN vuông cân tại B

$\Rightarrow BI = BN = \dfrac{3R}{4} \Rightarrow IN = \sqrt{BI^2 + BN^2} = \sqrt{\dfrac{9R^2}{16} + \dfrac{9R^2}{16}} = \dfrac{3R\sqrt{2}}{2}$

$S_{MIN} = \dfrac{1}{2} MI.NI = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{R\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{3R\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3R^2}{4}$ (đơn vị diện tích).

Câu 7. Cho đường tròn (*O; R*), đường kính *AB*. Bán kính *CO* vuông góc với *AB*, *M* là điểm bất kì trên cung nhỏ *AC* (*M* khác *A* và *C*), *BM* cắt *AC* tại *H*. Gọi *K* là hình chiếu của *H* trên *AB*.



1. Chứng minh tứ giác *CBKH* là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $\widehat{ACM} = \widehat{ACK}$
3. Trên đoạn thẳng *BM* lấy điểm *E* sao cho *BE* = *AM*. Chứng minh tam giác *ECM* là tam giác vuông cân tại *C*.
4. Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn (*O*) tại điểm *A*. Cho *P* là một điểm nằm trên d sao cho hai điểm *P, C* nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ *AB* và $\dfrac{AP.MB}{MA} = R$. Chứng minh đường thẳng *PB* đi qua trung điểm của đoạn thẳng *HK*.

Giải:

1. Chứng minh tứ giác *CBKH* là tứ giác nội tiếp:

Xét tứ giác $CBKH$ ta có:

$\widehat{BKH} = 90^0$

$\widehat{HCB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{BKH} + \widehat{HCB} = 180^o$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $CBKH$ nội tiếp.

2. Chứng minh $\widehat{ACM} = \widehat{ACK}$

Tứ giác $CBKH$ nội tiếp nên: $\widehat{HCK} = \widehat{HBK}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung HK)

Tứ giác $MCBA$ nội tiếp (O) nên: $\widehat{MCA} = \widehat{HKB}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MA)

$\Rightarrow \widehat{HCK} = \widehat{MCA}$

$\Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{ACK}$ (Đpcm).

3. Chứng minh ΔECM vuông cân tại C.

Vì $CD \perp AB$ nên CO là đường trung trực của $AB \Rightarrow CA = CB$

Xét ΔAMC và ΔBEC có:

$\widehat{MAC} = \widehat{MBC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MC)

$MA = BE\ (gt)$

$CA = CB$(cmt)

$\Rightarrow \Delta AMC = \Delta BEC(c.g.c) \Rightarrow \widehat{MCA} = \widehat{ECB}$ (2 góc tương ứng) và $CM = CE$ (2 cạnh tương ứng)

Mặt khác: $\widehat{ECB} + \widehat{EAC} = \widehat{BCA} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{MCA} + \widehat{ECA} = 90^o$

Xét ΔEMC có:

$\left.\begin{array}{l}\widehat{MCE} = 90^o \\ CM = CE\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ECM$ vuông cân tại C (Đpcm).

4. Chứng minh PB đi qua trung điểm của HK

Theo đề bài: $\dfrac{AP.MB}{MA} = R \Leftrightarrow \dfrac{AP}{AM} = \dfrac{R}{MB} = \dfrac{BO}{BM}$

Mà $\widehat{PAM} = \dfrac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{AM}$ (t/c góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\widehat{MBA} = \dfrac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{AM}$ (t/c góc nội tiếp chắn cung AM)

$\Rightarrow \widehat{PAM} = \widehat{MBA} \Rightarrow \Delta PAM \# \Delta OMB(c.g.c)$ (Hệ quả)

$\Rightarrow \dfrac{PA}{PM} = \dfrac{OB}{OM} = 1 \Rightarrow PA = PM$

Vậy cần lấy điểm $P \in d$ sao cho $PA = PM$ (1)

Gọi N là giao điểm của PB và HK, Q là giao điểm của BM với d

Xét ΔQMA vuông tại M có: $PA = PM \Rightarrow \Delta PMA$ cân tại $P \Rightarrow \widehat{PAM} = \widehat{PMA}$

$\widehat{PMA} + \widehat{PMQ} = 90^o$

$\widehat{PAM} + \widehat{PQM} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{PMQ} = \widehat{PQM} \Rightarrow \Delta PMQ$ cân tại P $\Rightarrow PM = PQ$ (2)

Từ (1) và (2)$\Rightarrow PM = PA = PQ.$

Vì $AQ \,//\, HK$ (cùng vuông góc AB) nên:

$\frac{NK}{PA} = \frac{BN}{BP}$ (Định lí Ta-let trong ΔABP)

$\frac{BN}{BP} = \frac{NH}{PQ}$ (Định lí Ta-let trong ΔPBQ)

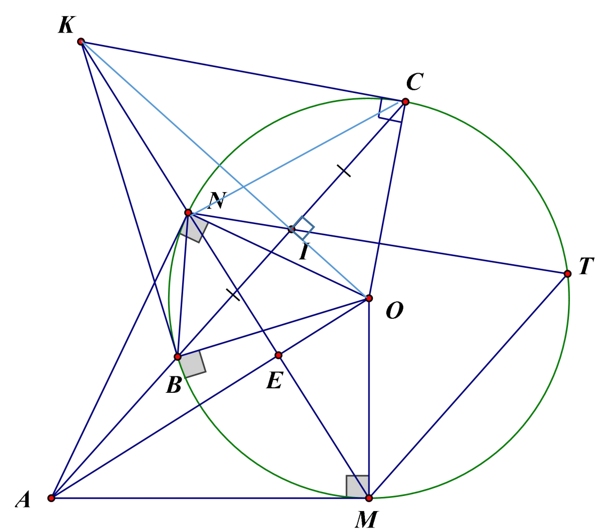
$\Rightarrow \frac{NK}{PA} = \frac{NH}{PQ}$ mà $PA = PQ(cmt) \Rightarrow NK = NH$

$\Rightarrow N$ là trung điểm của HK.

Vậy với $P \in d$ mà $\frac{AP.MB}{MA} = R$ thì PB đi qua trung điểm của HK.

Câu 8. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O). Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C ($AB < AC$, d không đi qua tâm O)

1. Chứng minh tứ giác $AMON$ nội tiếp.
2. Chứng minh $AN^2 = AB.AC$. Tính độ dài đoạn thẳng BC khi AB = 4cm, AN = 6cm.
3. Gọi I là trung điểm BC. Đường thẳng NI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T. Chứng minh: $MT \,//\, AC$.
4. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại K. Chứng minh K thuộc một đường thẳng cố định khi d thay đổi và thỏa mãn điều kiện đầu bài.



Giải:

1. Chứng minh tứ giác $AMON$ nội tiếp.

Ta có $AM \perp OM$ (AM là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow \widehat{OMA} = 90^o$

$AN \perp ON$ (AN là tiếp tuyến của *(O)*)

$\Rightarrow \widehat{ONA} = 90^o$

Xét tứ giác *AMON* có:

$\widehat{OMA} + \widehat{ONA} = 90^o + 90^o = 180^o$

mà hai góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ tứ giác *AMON* là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp).

2. Chứng minh $AN^2 = AB.AC.$ Tính độ dài đoạn thẳng *BC* khi *AB* = 4cm*;* *AN* = 6cm.

Xét *(O)*: $\widehat{ANB} = \widehat{BCN}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung *BN*).

Xét ΔANB và ΔACN:

$\widehat{CAN}$ chung

$\widehat{ANB} = \widehat{BCN}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ANB \# \ \Delta ACN$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AB}{AN}$ (tính chất hai tam giác đồng dạng).

$\Rightarrow AN^2 = AB.AC$ (Đpcm).

* Tính độ dài đoạn thẳng *BC* khi *AB* = 4cm*;* *AN* = 6cm.

Ta có $AN^2 = AB.AC$ (cmt) mà *AB* = 4cm, *AN* = 6cm nên: $4.AC = 6^2 \Leftrightarrow AC = 9$ (cm) mà $AB + BC = AC$ nên $BC = 5$ cm.

3. Chứng minh *MT // AC.*

Xét (*O*): *I* là trung điểm của dây *BC*

$\Rightarrow OI \perp BC$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây)

Tứ giác *OIAN* nội tiếp vì $\widehat{ANO} = \widehat{AIO} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{AIN} = \widehat{AON}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AN}$) mà hai góc cùng nhìn cạnh *AO* **(1)**

AM, AN là hai tiếp tuyến (*O*) cắt nhau tại *A*.

$\Rightarrow OA$ là phân giác $\widehat{MON}$ (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \widehat{AON} = \dfrac{1}{2}\widehat{MON}$

Mà $\widehat{MTN} = \dfrac{1}{2}\widehat{MON}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung *MN).*

$\Rightarrow \widehat{MTN} = \widehat{AON}$ **(2)**

Từ **(1)** và **(2)** ta có: $\widehat{MTN} = \widehat{AIN}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị

$\Rightarrow MT // AC$ (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song).

4. Hai tiếp tuyến (*O*) tại *B* và *C* cắt nhau ở *K*. Chứng minh *K* thuộc một đường thẳng cố định khi d thay đổi thỏa mãn điều kiện đề bài.

* MN cắt OA tại E.

Ta chứng minh được $MN \perp OA \Rightarrow EM \perp OA$

Ta chứng minh được $OI.OK = OE.\ OA\ (= OB^2 = OM^2 = R^2)$

Từ đó chứng minh được $\Delta OEK \# \ \Delta OIA$ (c.g.c)

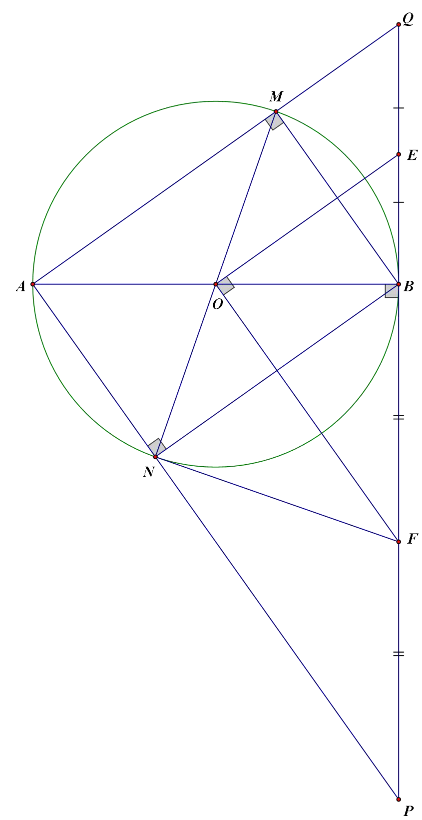
$\Rightarrow \widehat{OEK} = \widehat{OIA} = 90^o$

$\Rightarrow EK \perp OA$ mà $EM \perp OA \Rightarrow EM$ trùng EK.

K thuộc MN cố định (đpcm).

Câu 9. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB cố định. Vẽ đường kính MN của đường tròn (O; R). (M khác A, M khác B). Tiếp tuyến của đường tròn (O; R) tại B cắt các đường thẳng AM, AN lần lượt tại các điểm Q, P.

1. Chứng minh tứ giác $AMBN$ là hình chữ nhật.
2. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.
3. Gọi E là trung điểm của BQ. Đường thẳng vuông góc với OE tại O cắt PQ tại F. Chứng minh F là trung điểm của BP và ME // NF
4. Khi đường kính MN quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính MN để tứ giác $MNPQ$ có diện tích nhỏ nhất.



Giải:

1. Chứng minh tứ giác $AMBN$ là hình chữ nhật.

Ta có $\widehat{AMB} = \widehat{MBN} = \widehat{BNA} = \widehat{NAM} = 90^o$ (4 góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AMBN$ là hình chữ nhật.

2. Ta có $\widehat{ANM} = \widehat{ABM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

$\widehat{ABM} = \widehat{MQB}$ (2 góc cùng phụ với góc $\widehat{QBM}$)

$\Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{MQB}$

Mà $\widehat{ANM} + \widehat{MNP} = 180^o \Rightarrow \widehat{MQB} + \widehat{MNP} = 180^o$; hai góc này lại ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow MNPQ$ là tứ giác nội tiếp.

3. * Chứng minh F là trung điểm của BP.

E là trung điểm của BQ, O là trung điểm của AB

$\Rightarrow OE$ là đường trung bình của ΔABQ

$\Rightarrow OE // AQ$ (tính chất đường trung bình của tam giác)

Mà $OE \perp OF$; $AQ \perp AP$

$\Rightarrow OF // AP$

Lại có O là trung điểm của $AB \Rightarrow OF$ là đường trung bình của ΔABP.

$\Rightarrow F$ là trung điểm của BP.

* Chứng minh $ME // NF$

ΔNPB vuông tại N, có F là trung điểm của cạnh $BP \Rightarrow NF = BF = FB = \frac{1}{2}BP$ (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền)

Xét ΔONF và ΔOBF có:

$$\left.\begin{array}{l} ON = OB = R \\ OF\ chung \\ FN = FB\ (cmt) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ONF = \Delta OBF\ (c.c.c)$$

$\Rightarrow \widehat{ONF} = \widehat{OBF} = 90^o$ (2 góc tương ứng)

$\Rightarrow ON \perp NF$

Chứng minh tương tự ta có $OM \perp ME$

$\Rightarrow ME // NF$ (cùng vuông góc với MN).

4. $2S_{MNPQ} = 2S_{APQ} - 2S_{AMN} = 2R.PQ - AM.AN$

$\Delta ABP \# \Delta QBA \Rightarrow \frac{AB}{QB} = \frac{BP}{BA} \Rightarrow AB^2 = BP.QB$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có: $PB + BQ \geq 2\sqrt{PB.QB} = 2\sqrt{(2R)^2} = 4R$

Ta có: $AM.AN \leq \frac{AM^2 + AN^2}{2} = \frac{MN^2}{2} = 2R^2$

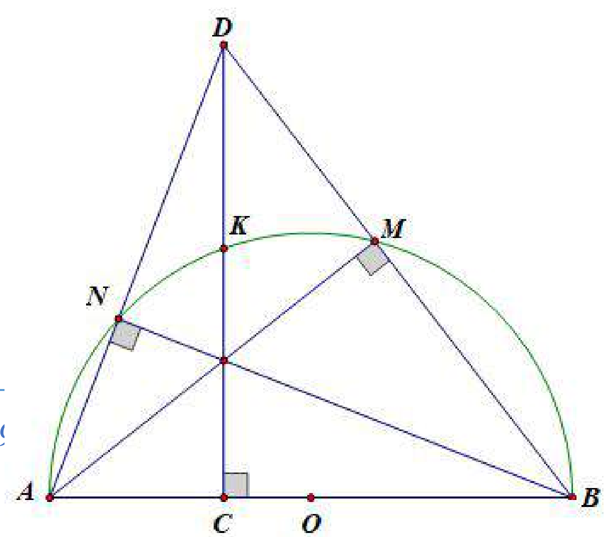
$$2S_{MNPQ} \geq 2R.4R - 2R^2 = 6R^2$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} \geq 3R^2$$

Dấu bằng xảy ra khi $AM = AN$ và $PQ = BP$. Hay MN vuông góc với AB.

Vậy để tứ giác $MNPQ$ có diện tích nhỏ nhất thì đường kính MN vuông góc với đường kính AB.

Câu 10. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Lấy điểm C trên đoạn thẳng AO (C khác A, C khác O). Đường thẳng đi qua C vuông góc với AB cắt nửa đường tròn tại K. Gọi M là điểm bất kì nằm trên cung KB (M khác K, M khác B). Đường thẳng CK cắt đường thẳng AM, BM lần lượt tại H và D. Đường thẳng BH cắt nửa đường tròn tại



điểm thứ hai là N.

1. Chứng minh tứ giác $ACMD$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $CA.CB = CH.CD$.
3. Chứng minh ba điểm A, N, D thẳng hàng và tiếp tuyến tại N của đường tròn đi qua trung điểm của DH.
4. Khi M di động trên cung KB, chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Giải:

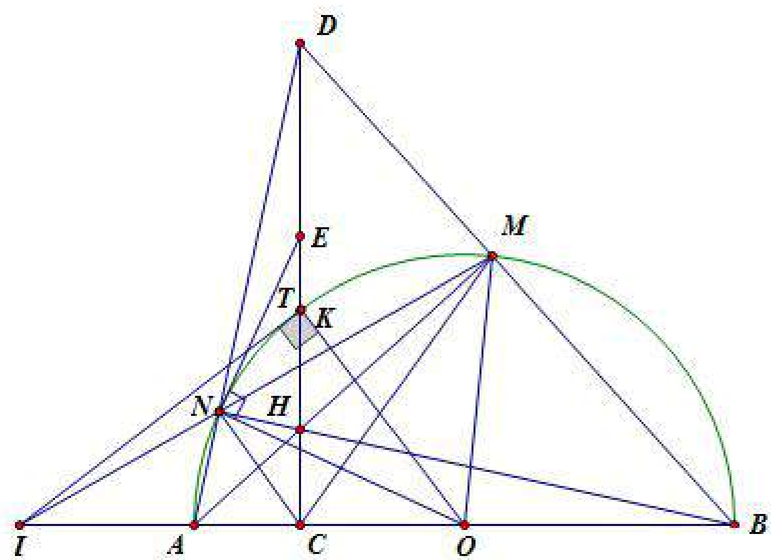
1. Chứng minh tứ giác nội tiếp

Chứng minh được $\widehat{AMD} = 90^o$

Vì $\widehat{ACD} = \widehat{AMD} = 90^o$ mà hai góc này cùng nhìn cạnh DA (nên M, C thuộc đường tròn đường kính AD).

Vậy tứ giác $ACMD$ nội tiếp.

2. Chứng minh $CA.CB = CH.CD$



Xét

ΔCAH và ΔCDB có:

$\widehat{ACH} = \widehat{DCB} = 90^o$ (1)

Mặt khác $\widehat{CAH} = \widehat{CDB}$ (cùng phụ với góc $\widehat{CBM}$) (2)

Từ (1) và (2)

$\Rightarrow \Delta CAH \# \Delta CDB\ (g.g)$

$\Rightarrow CA.CB = CH.CD$ (Đpcm).

3.

* Chứng minh A, N, D thẳng hàng

Vì AM và DC là đường cao của tam giác ABD nên H là trực tâm ΔABD

$\Rightarrow AD \perp BH;\ AN \perp BH$

Nên A, N, D thẳng hàng

* Gọi E là giao điểm của CK và tiếp tuyến tại N.

Ta có: $BN \perp DN, ON \perp EN$

$\Rightarrow \widehat{DNE} = \widehat{BNO}$ mà $\widehat{BNO} = \widehat{OBN}, \widehat{OBN} = \widehat{EDN}$

$\Rightarrow \widehat{DNE} = \widehat{EDN} \Rightarrow \Delta DEN$ cân tại $E \Rightarrow ED = EN$ (3)

Ta có: $\widehat{ENH} = 90^o - \widehat{END} = 90^o - \widehat{NDH} = \widehat{EHN}$

$\Rightarrow \Delta HEN$ cân tại $E \Rightarrow EH = EN$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow E$ là trung điểm của HD (Đpcm).

4. Chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định.

Gọi I là giao điểm của MN và AB, kẻ IT là tiếp tuyến của nửa đường tròn với T là tiếp điểm $\Rightarrow IN.IM = IT^2$ (5)

Mặt khác: $EM \perp OM$ (vì $\Delta ENO = \Delta EMO$ và $EN \perp ON$)

$\Rightarrow N, C, O, M$ cùng thuộc 1 đường tròn $\Rightarrow IN.IM = IO.IC$ (6)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow IC.IO = IT^2$

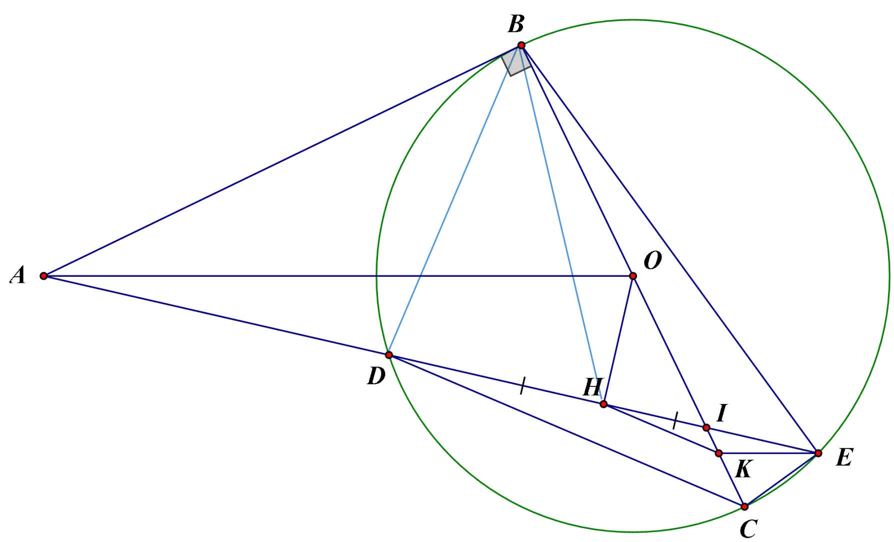
$\Rightarrow \Delta ICT \# \ \Delta ITO \Rightarrow CT \perp IO \Rightarrow T \equiv K$

$\Rightarrow I$ là giao điểm của tiếp tuyến tại K của nửa đường tròn và đường thẳng AB

$\Rightarrow I$ cố định (Đpcm).

Câu 11. Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (O) (B là tiếp điểm) và đường kính BC. Trên đoạn thẳng CO lấy điểm I (I khác C, I khác O). Đường thẳng IA cắt (O) tại hai điểm D và E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng DE.

1. Chứng minh bốn điểm A, B, O, H cùng nằm trên một đường tròn.
2. Chứng minh $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BD}{BE}$.
3. Đường thẳng d đi qua điểm E song song với AO, d cắt BC tại điểm K. Chứng minh: $HK // DC$.
4. Tia CD cắt AO tại điểm P, tia EO cắt BP tại điểm F. Chứng minh tứ giác $BECF$ là hình chữ nhật



Giải:

1. Chứng minh bốn điểm A B, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

Chứng minh được $\widehat{ABO} = 90^o$

Chứng minh được $\widehat{AHO} = 90°$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABOH$ nội tiếp

Suy ra bốn điểm A, B, O, H cùng nằm trên đường tròn đường kính AO.

2. Chứng minh $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{BD}{BE}$

Chứng minh được $\widehat{ABD}=\widehat{AEB}$

Xét ΔABD và ΔAEB có: $\widehat{EAB}$ chung

Chứng minh được $\Delta ABD \backsim \Delta AEB\ (g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AE}=\dfrac{BD}{BE}$ (Đpcm).

3. Chứng minh $KH \,//\, DC$

Tứ giác $ABOH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OBH}=\widehat{OAH}$ mà $\widehat{OAH}=\widehat{HEK}$ (do EK//AO)

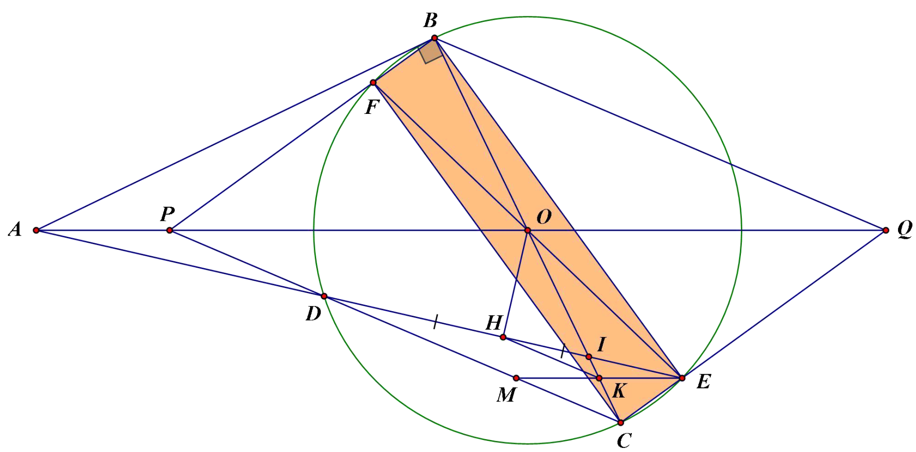
$\Rightarrow \widehat{HBK}=\widehat{HEK}$.

Suy ra tứ giác $BHKE$ nội tiếp

Chứng minh được $\widehat{BKH}=\widehat{BCD}$ (cùng bằng $\widehat{BEH}$)

Kết luận $HK \,//\, DC$.

4. Chứng minh tứ giác $BECF$ là hình chữ nhật.



Gọi giao điểm tia CE và tia AO là Q, tia EK và CD cắt nhau tại điểm M

Xét ΔEDM có $HK \,//\, DM$ và H là trung điểm của đoạn DE, suy ra K là trung điểm của đoạn thẳng ME.

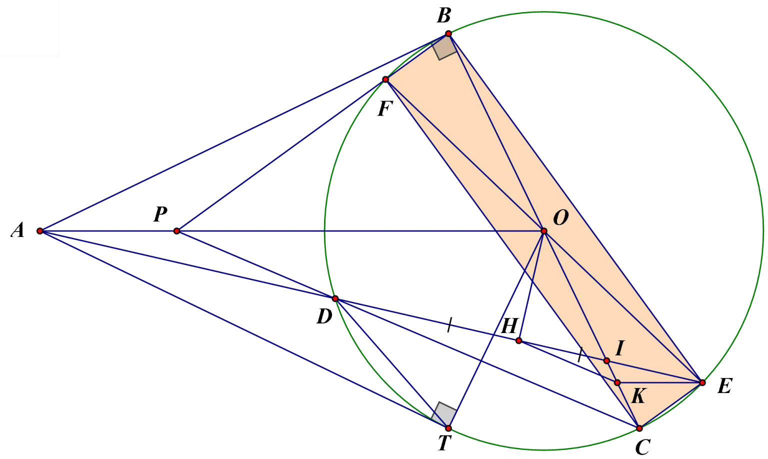
Có $ME \,//\, PQ \Rightarrow \dfrac{KE}{OQ}=\dfrac{MK}{OP}$ (cùng bằng $\dfrac{CK}{CO}$) suy ra O là trung điểm của đoạn PQ

Có: $OP=OQ; OB=OC$. Suy ra tứ giác $BPCQ$ là hình bình hành. Suy ra $CE \,//\, BF$.

Chứng minh được $\Delta COE=\Delta BOF$ (g.c.g) $\Rightarrow OE=OF$

Mà $OB=OC=OE \Rightarrow OB=OC=OE=OF$ Suy ra tứ giác $BECF$ là hình chữ nhật.

Cách 2:



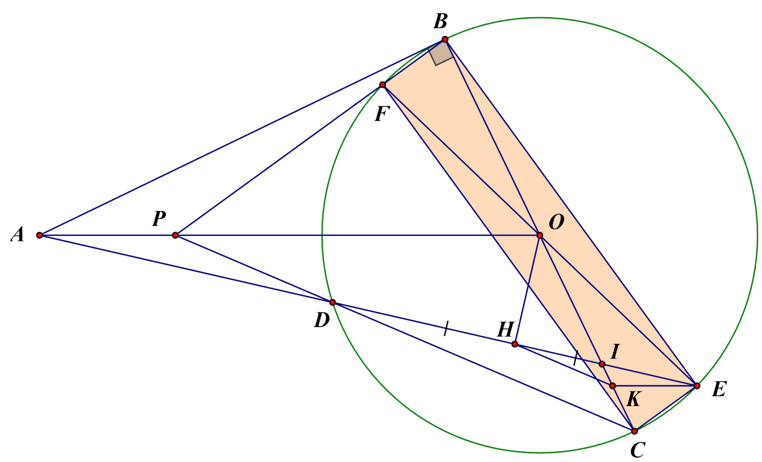
Kẻ tiếp tuyến AT với (O), chứng minh $APDT$ nội tiếp $(\widehat{PAT}+\widehat{PDT}=180°)$

dẫn đến $\widehat{ATP}=\widehat{CBE}$ (1), chứng minh $\Delta TAP=\Delta BAP$ (g.c.g) $\Rightarrow \widehat{ATP}=\widehat{ABP}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ABP}=\widehat{EBC}$

Dẫn đến $\widehat{EBF}=90° \Rightarrow EF$ là đường kính $\Rightarrow BECF$ là hình chữ nhật (Đpcm).

Cách 3:



Chứng minh $\Delta EHB \# \Delta COP$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{EB}{CP}=\dfrac{EH}{CO}=\dfrac{ED}{CB}$

$\Rightarrow \Delta EDB \# \Delta CBP$

$\Rightarrow \widehat{EDP}=\widehat{CBP}$

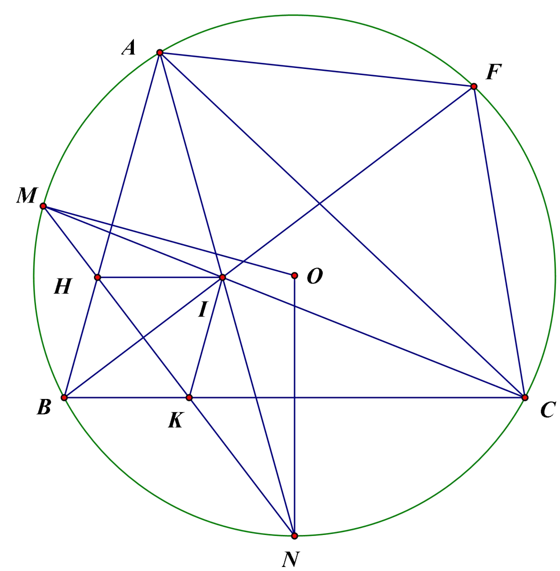
$\widehat{EDB}+\widehat{CDE}=90°, \widehat{CDE}=\widehat{EBC} \Rightarrow \widehat{EBP}=90° \Rightarrow BECF$ là hình chữ nhật (Đpcm).

Câu 12. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ AB và cung nhỏ BC. Hai dây AN và CM cắt nhau tại điểm I. Dây MN cắt các cạnh AB và BC lần lượt tại các điểm H và K.

1. Chứng minh bốn điểm *C, N, K, I* thuộc cùng một đường tròn..
2. Chứng minh $NB^2 = NK.\text{NM}$.
3. Chứng minh tứ giác *BHIK* là hình thoi.
4. Gọi *P* và *Q* lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác *MBK*, tam giác *MCK* và *E* là trung điểm của đoạn *PQ*. Vẽ đường kính *ND* của đường tròn (*O*). Chứng minh ba điểm *D, E, K* thẳng hàng.

Giải:

1. Chứng minh bốn điểm *C, N, K, I* thuộc cùng một đường tròn.



Ta có: $\widehat{MCB} = \widehat{ANM}$ (2 góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).

$\Rightarrow \widehat{ICK} = \widehat{INK}$

Mà hai góc này ở cùng nhìn cạnh *IK* trong tứ giác *IKNC* từ hai đỉnh kề nhau

$\Rightarrow IKNC$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow C, N, K, I$ thuộc cùng một đường tròn.

2. Chứng minh $NB^2 = NK.\text{NM}$.

$\widehat{BMN} = \widehat{NBC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau).

Xét ΔNBK và ΔNMB có:

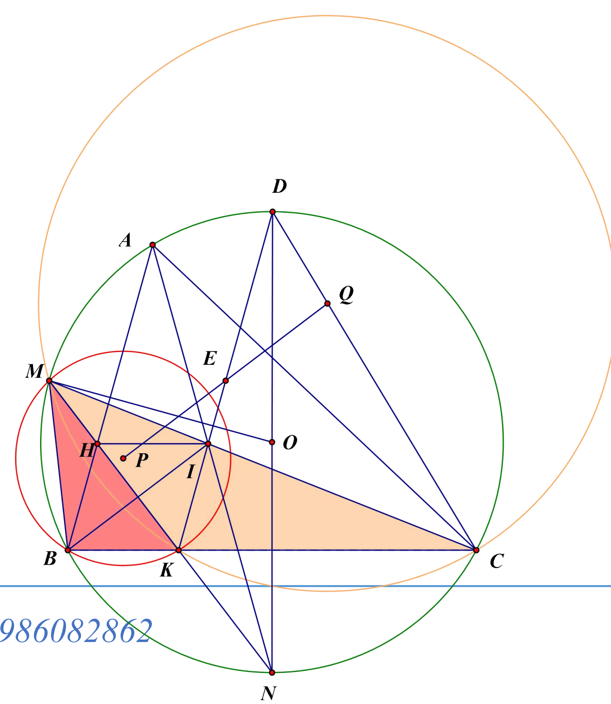
$\widehat{MNB}$ chung

$\widehat{BMN} = \widehat{NBC}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta NBK \# \ \Delta NMB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{NB}{NK} = \dfrac{NM}{NB} \Rightarrow NB^2 = NK.NM$ (đpcm).

3. Chứng minh tứ giác *BHIK* là hình thoi



Nối *BI* cắt đường tròn (*O*) tại $F \Rightarrow AF = FC$

Ta có $\widehat{BMH} = \widehat{HMI}$ (vì cùng nhìn cung *BN* = *NC*)

$\widehat{MBI} = \dfrac{1}{2}\left(sđ\,\overset{\frown}{MA} + sđ\,\overset{\frown}{AF}\right)$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{MF}$)

$\widehat{MIB} = \dfrac{1}{2}\left(sđ\,\overset{\frown}{MB} + sđ\,\overset{\frown}{FC}\right)$ (góc có đỉnh bên trong đường tròn)

Mà $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MC}; \overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{CF}$ nên $\widehat{MBI} = \widehat{MIB}$

$\Rightarrow \Delta BMI$ cân tại M có MN là phân giác

$\Rightarrow MN$ là đường trung trực của BI.

$\Rightarrow HK \perp BI, BH = HI, BK = KI$ (1)

Mặt khác $\widehat{HBF} = \widehat{FBC}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung $AF = FC$)

$\Rightarrow \Delta BHK$ có BF là phân giác cũng là đường cao

$\Rightarrow \Delta BHK$ cân tại $B \Rightarrow BH = BK$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $BHIK$ là hình thoi.

4. Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng

$\widehat{QCK} = 90^o - \widehat{CMK}$

$\Rightarrow \widehat{QCK} = 90^o - \widehat{CBN}$

$\Rightarrow \widehat{QCK} = 90^o - \widehat{BCN}$

$\Rightarrow CQ \perp CN$ nên C, D, Q thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta có D, B, P
thẳng hàng.

Lại có $\widehat{CKQ} = 90^o - \widehat{CMK}$

$\Rightarrow \widehat{KBP} = 90^o - \widehat{BMK}$

Mà $\widehat{CMK} = \widehat{BMK}$ nên $\widehat{CKQ} = \widehat{KBP}$

Hay KQ // DP.

Tương tự KP // DQ

Nên $KPDQ$ là hình bình hành. Hình bình hành $KPDQ$ có hai
đường chéo KD và PQ cắt nhau
tại trung điểm mỗi đường. Nên D, E, K thẳng hàng (Đpcm).

Câu 13. Cho đường tròn $(O; R)$ với dây cung AB không đi qua tâm. Lấy S là một điểm bất kì trên tia đối của tia AB (S khác A). Từ điểm S vẽ hai tiếp tuyến SC, SD với đường tròn $(O; R)$ sao cho điểm C nằm trên cung nhỏ AB (C, D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB.

1. Chứng minh năm điểm C, D, H, O, S thuộc đường tròn đường kính SO.
2. Khi $SO = 2R$, hãy tính độ dài đoạn thẳng SD theo R và tính số đo $\widehat{CSD}$.
3. Đường thẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng SC, cắt đoạn thẳng CD tại điểm K. Chứng minh tứ giác $ADHK$ là tứ giác nội tiếp và đường thẳng BK đi qua trung điểm của đoạn thẳng SC.

4. Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng BD và F là hình chiếu vuông góc của điểm E trên đường thẳng AD. Chứng minh rằng, khi điểm S thay đổi trên tia đối của tia AB thì điểm F luôn thuộc một đường tròn cố định.

Giải:

1. Chứng minh năm điểm C, D, H, O, S thuộc đường tròn đường kính SO.

SD, SC là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$

$\Rightarrow OD \perp SD, OC \perp SC$

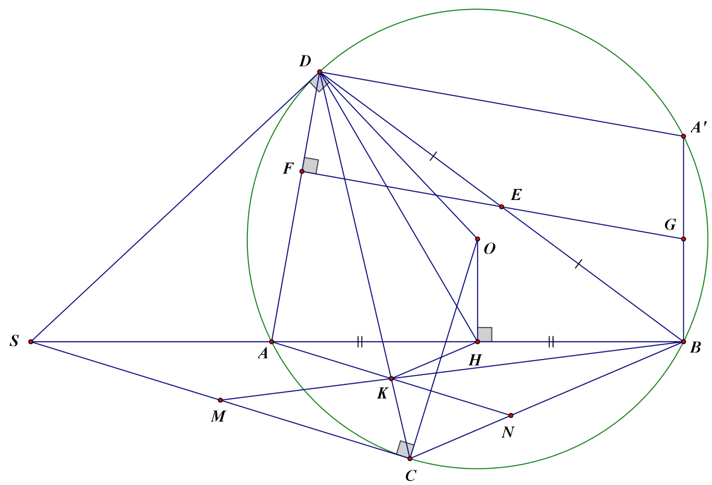
$\Rightarrow D, C$ thuộc đường tròn đường kính SO (1)

Mặt khác H là trung điểm của AB

$\Rightarrow OH \perp AB \Rightarrow \widehat{SHO} = 90^o$

$\Rightarrow H$ thuộc đường tròn đường kính SO (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow C, D, H, O, S$ cùng thuộc đường tròn đường kính SO.



2. Tính độ dài đoạn thẳng SD theo R và số đo góc $\widehat{CSD}$.

Xét ΔSDO có:

$SO^2 = SD^2 + DO^2$

$\Rightarrow SD^2 = SO^2 - DO^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$

$\Rightarrow SD = R\sqrt{3}$

Ta có: $\sin \widehat{DSO} = \dfrac{DO}{SO} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{DSO} = 30^o \Rightarrow \widehat{CSD} = 60^o$.

3. Vì S, D, O, H cùng thuộc một đường tròn nên $SHOD$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{SOD} = \dfrac{1}{2}\widehat{COD}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{SD}$) (3)

Lại có: $\widehat{AKD} = \widehat{SCD}$ (đồng vị) nên $\widehat{AKD} = \dfrac{1}{2}sđ\ \overset{\frown}{CD} = \dfrac{1}{2}\widehat{COD}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AKD} \Rightarrow ADHK$ nội tiếp.

Gọi M là giao điểm của BK và SC.

Gọi N là giao điểm của AK và BC.

Ta có: $\widehat{KHA} = \widehat{CBS}$ vì $\widehat{KHA} = \widehat{ADK}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AK}$)

$\widehat{ADK} = \widehat{CBS}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$)

$\Rightarrow HK // BC$ mà H là trung điểm AB nên K là trung điểm của AN. Suy ra $AK = KN$.

Có: $\dfrac{AK}{SM} = \dfrac{KN}{CM} = \dfrac{BK}{BM}$ mà $AK = KN$ nên $SM = CM$ nên M là trung điểm của SC.

4. Chứng minh rằng, khi điểm S thay đổi trên tia đối của tia AB thì điểm F luôn thuộc một đường tròn cố định.

Kẻ đường kính AA' của đường tròn tâm O.

Ta có $\widehat{ADA'} = 90^o \Rightarrow DA' \perp DA$ mà $EF \perp DA \Rightarrow EF // DA'$.

Kéo dài EF cắt BA' tại G.

$EG // DA', E$ là trung điểm của BD nên G là trung điểm của BA'.

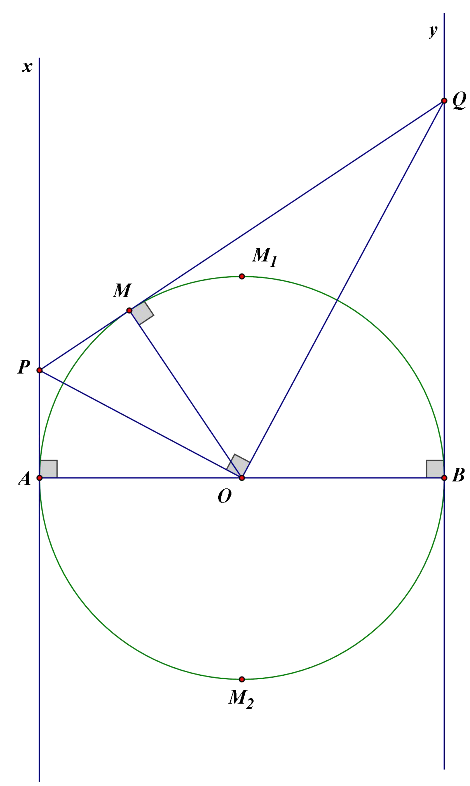
AA' là đường kính đường tròn tâm O nên A' cố định $\Rightarrow BA'$ cố định. Vậy G cố định.

Mà $\widehat{AFG} = 90^o \Rightarrow F$ thuộc đường tròn đường kính AG cố định (đpcm).

Câu 14. Cho đường tròn (O), đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By của đường tròn. M là một điểm trên đường tròn (M khác A, B). Tiếp tuyến tại M của đường tròn cắt Ax, By lần lượt tại P, Q.

1. Chứng minh rằng: Tứ giác $APMO$ nội tiếp.
2. Chứng minh rằng: $AP + BQ = PQ$.
3. Chứng minh rằng: $AP.BQ = AO^2$.
4. Khi điểm M di động trên đường tròn (O), tìm các vị trí của điểm M sao cho diện tích tứ giác $APQB$ nhỏ nhất.

Giải:



1. Xét tứ giác $APMQ$, ta có $\widehat{OAP} = \widehat{OMP} = 90^o$ (vì PA, PM là tiếp tuyến của (O))

Vậy tứ giác $APMO$ nội tiếp.

2. Ta có: $AP = MP$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm)

$BQ = MQ$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm)

$\Rightarrow AP + BQ = MP + MQ = PQ(Đpcm)$.

3. Ta có OP là phân giác $\widehat{AOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm)

OQ là phân giác $\widehat{BOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm)

Mà $\widehat{AOM} + \widehat{BOM} = 180^o$ (hai góc kề bù) $\Rightarrow \widehat{POQ} = 90^o$

Xét ΔPOQ có: $\widehat{POQ} = 90^o$ (cmt)

$OM \perp PQ$ (PQ là tiếp tuyến của (O) tại M)

Áp dụng hệ thức lượng vào ΔPOQ vuông tại O có đường cao OM

$\Rightarrow MP.MQ = OM^2$ (hệ thức lượng)

Lại có $MP = AP; MQ = BQ$ (cmt); $OM = OA$ (bán kính)

Do đó $AP.BQ = AO^2\left(Đpcm\right)$.

4. Tứ giác $APQB$ có: $AP//BQ\left(AP \perp AB; BQ \perp AB\right)$, nên tứ giác $APQB$ là hình thang vuông.

$$\Rightarrow S_{APQB} = \frac{\left(AP + BQ\right).AB}{2} = \frac{PQ.AB}{2}$$

Mà AB không đổi nên S_{APQB} đạt GTNN $\Leftrightarrow PQ$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow PQ = AB \Leftrightarrow PQ//AB \Leftrightarrow OM \perp AB$

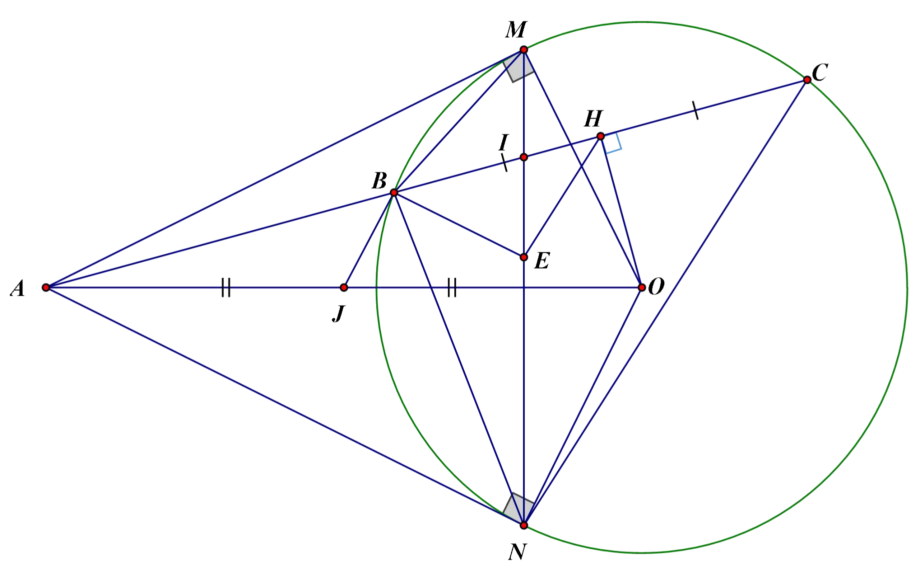
$\Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$

Tức M trùng M_1 hoặc M_2 thì S_{APQB} đạt GTNN là $\dfrac{AB^2}{2}$.

Câu 15. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến AM, AN với các đường tròn $(O)\left(M, N \in (O)\right)$. Qua A vẽ một đường thẳng cắt đường tròn (O) tại hai điểm B, C phân biệt (B nằm giữa A, C). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC.

1. Chứng minh tứ giác $ANHM$ nội tiếp được trong đường tròn.
2. Chứng minh $AN^2 = AB.AC$.
3. Đường thẳng qua B song song với AN cắt đoạn thẳng MN tại E. Chứng minh $EH//NC$.

Giải:

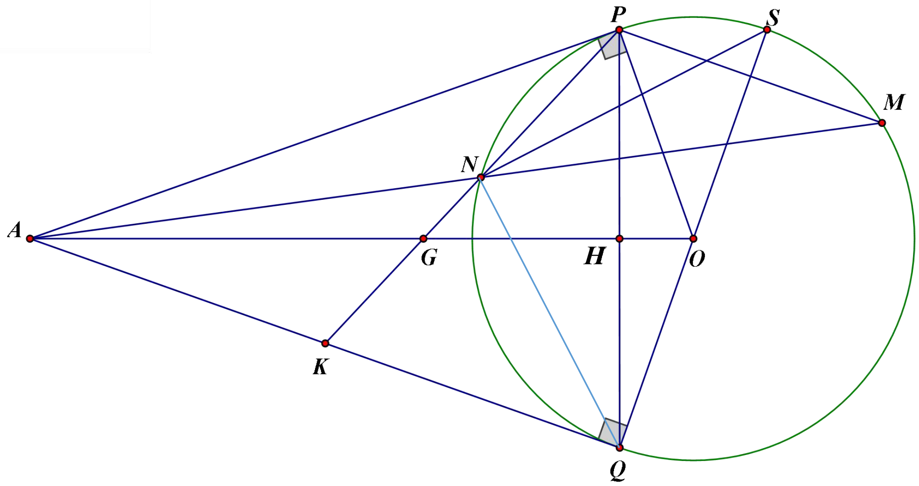


1. Vì AN, AM là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{ANO} = \widehat{AMO} = 90^o$
$\Rightarrow A; M; O; N \in$ đường tròn đường kính AO
Gọi J là trung điểm của AO
Vì H là trung điểm của BC nên $OH \perp BC \Rightarrow \widehat{AHO} = 90^o$
$\Rightarrow H, O \in$ đường tròn đường kính AO
Suy ra A, O, M, N, H thuộc đường tròn tâm J đường kính AO
Suy ra $AMHN$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.
2. Có $\widehat{ANB} = \widehat{ACN}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung $\overset{\frown}{BN}$ và góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{BN}$)
Xét ΔANB và ΔACN có:
$\widehat{ANB} = \widehat{ACN}$ (cmt)
$\widehat{BAN}$ chung
$\Rightarrow \Delta ANB \# \Delta ACN (g.g)$
$\Rightarrow \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AB}{AN} \Rightarrow AN^2 = AB.AC.$
3. Gọi I là giao điểm của MN và AC
Ta có MN là trục đẳng phương của đường tròn (J) và (O).
$I \in MN$ nên phương trình tích của I đối với (J) và (O) bằng nhau.
$\Rightarrow IA.IH = IB.IC \Rightarrow \dfrac{IB}{IA} = \dfrac{IH}{IC}$
Vì $BE // AN$ nên $\dfrac{IB}{IA} = \dfrac{IE}{AN} \Rightarrow \dfrac{IE}{IN} = \dfrac{IH}{IC} \Rightarrow EH // NC.$

Câu 16. Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm A sao cho $OA = 3R$. Qua A kẻ 2 tiếp tuyến AP và AQ với đường tròn $(O; R)$ (P, Q là 2 tiếp điểm). Lấy M thuộc đường tròn $(O; R)$ sao cho PM song song với AQ. Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng AM với đường tròn $(O; R)$. Tia PN cắt đường thẳng AQ tại K.

1. Chứng minh tứ giác $APOQ$ là tứ giác nội tiếp và $KA^2 = KN.KP$
2. Kẻ đường kính QS của đường tròn $(O; R)$. Chứng minh NS là tia phân giác của $\widehat{PNM}$.
3. Gọi G là giao điểm của 2 đường thẳng AO và PK. Tính đội dài đoạn thẳng AG theo bán kính R.

Giải:



1. Ta có: $\widehat{APO}=\widehat{AQO}=90^o$

Trong tứ giác $APOQ$ có tổng hai góc đối bằng 180^0

Suy ra tứ giác $APOQ$ nội tiếp đường tròn

$PM//AQ \Rightarrow \widehat{PMN}=\widehat{KAN}$ (so le trong)

Mà $\widehat{PMN}=\widehat{APK}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung $\overset{\frown}{PN}$ và góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{PN}$)

$\Rightarrow \widehat{KAN}=\widehat{APK}$

Xét ΔKAN và ΔKPA có:

$\widehat{K}$ chung

$\widehat{KAN}=\widehat{KPA}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta KAN \# \Delta KPA(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{KA}{KP}=\dfrac{KN}{KA} \Rightarrow KA^2=KN.KP(Đpcm)$.

2. Ta có: $AQ \perp QS$ (AQ là tiếp tuyến của (O) ở Q)

Mà $PM//AQ$ (giả thiết) nên $PM \perp QS$

Đường kính $QS \perp PM$ nên QS đi qua điểm chính giữa $\overset{\frown}{PM}$ nhỏ

$sđ\overset{\frown}{PS}=sđ\overset{\frown}{SM} \Rightarrow \widehat{PNS}=\widehat{SNM}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Hay NS là tia phân giác $\widehat{PNM}$ $(Đpcm)$.

3. Gọi H là giao điểm của PQ và AO

$\Rightarrow AH \perp PQ$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại 1 điểm)

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AOQ ta có:

$$OQ^2=OH.OA \Rightarrow OH=\frac{OQ^2}{OA}=\frac{R^2}{3R}=\frac{1}{3}R$$

$\Rightarrow AH = OA - OH = 3R - \frac{1}{3}R = \frac{8}{3}R$

$\widehat{KPQ} = \frac{1}{2} sđ \overparen{NQ}$ (góc nội tiếp chắn $\overparen{NQ}$)

$\widehat{NQK} = \frac{1}{2} sđ \overparen{NQ}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung $\overparen{NQ}$)

$\Rightarrow \widehat{NQK} = \widehat{KPQ}$

Xét ΔKNQ và ΔKQP có:

$\widehat{NQK} = \widehat{KPQ}$ (cmt)

$\widehat{K}$ chung

$\Rightarrow \Delta KNQ \# \Delta KQP(g.g)$

$\Rightarrow \frac{KN}{KQ} = \frac{KQ}{KP} \Rightarrow KQ^2 = KN.KP$

Mà $AK^2 = NK.KP$ nên $AK = KQ$

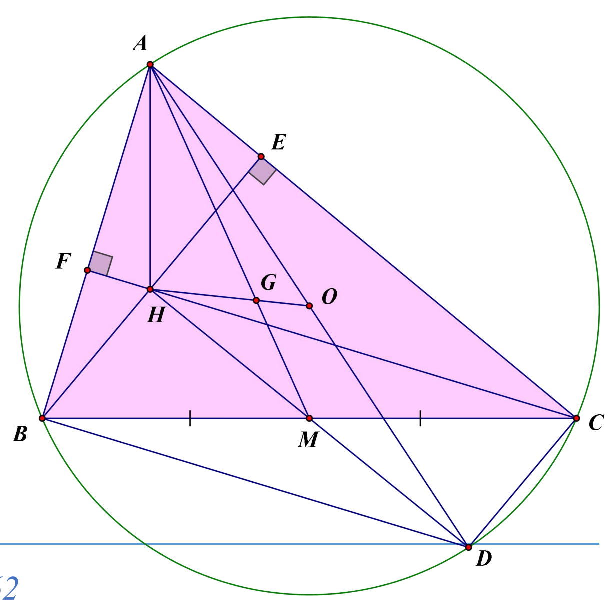
Vậy ΔAPQ có các trung tuyến AH và PK cắt nhau ở G nên G là trọng tâm

$\Rightarrow AG = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}.\frac{8}{3}R = \frac{16}{9}R.$

Câu 17. Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Tia AO cắt đường tròn (O) tại D.

1. Chứng minh tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn;
2. Chứng minh tứ giác $BHCD$ là hình bình hành;
3. Gọi M là trung điểm của BC, tia AM cắt HO tại G. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác BAC.

Giải:



1. Xét tứ giác $BCEF$ có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^0$ (cùng nhìn cạnh BC)

$\Rightarrow$ Tứ giác $BCEF$ là tứ giác nội tiếp.

2. Ta có: $\widehat{ACD} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow DC \perp AC$

Mà $HE \perp AC$; suy ra $BH // DC$ (1)

Chứng minh tương tự: $CH // BD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BDCD$ là hình bình hành.

3. Ta có M là trung điểm của BC suy ra M trung điểm HD.

Do đó $AM,\ HO$ là các đường trung tuyến của $\Delta AHD \Rightarrow G$ là trọng tâm của ΔAHD

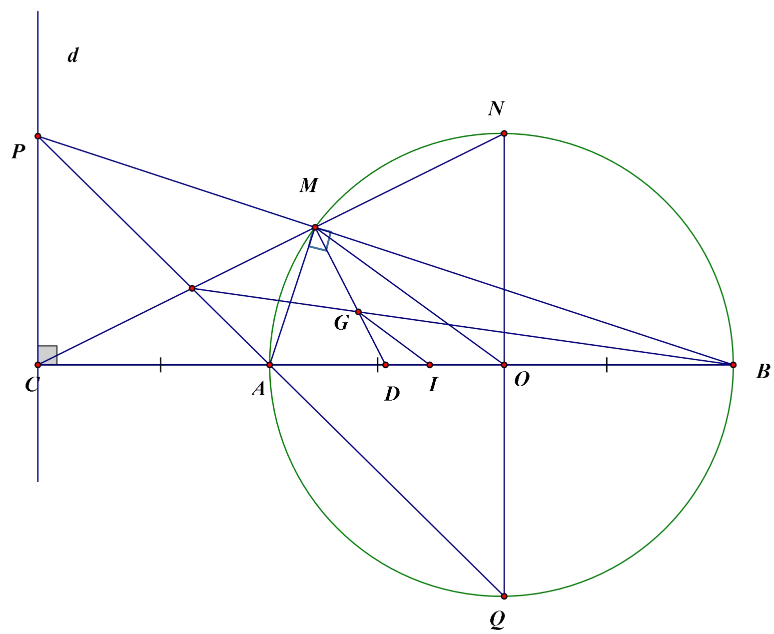
$\Rightarrow \dfrac{GM}{AM} = \dfrac{1}{3}$

Xét tam giác ABC có M trung điểm của BC và $\dfrac{GM}{AM} = \dfrac{1}{3}$

Suy ra G là trọng tâm của ΔABC.

Câu 18. Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính AB cố định. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C sao cho $AC = R.$ Qua C kẻ đường thẳng d vuông góc với $CA.$ Lấy điểm M bất kì trên (O) không trùng với $A, B.$ Tia BM cắt đường thẳng d tại $P.$ Tia CM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là $N,$ tia PA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là Q.

1. Chứng minh tứ giác $ACPM$ là tứ giác nội tiếp;
2. Tính $BM.BP$ theo $R.$
3. Chứng minh hai đường thẳng PC và NQ song song;
4. Chứng minh trọng tâm G của tam giác CMB luôn nằm trên một đường tròn cố định khi M thay đổi trên (O).



Giải:

1. Ta có AB là đường kính của $(O), M \in (O) \Rightarrow \widehat{AMB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$\Rightarrow \widehat{AMB} = 90^o \Rightarrow \widehat{AMP} = 90^o.$

Mặt khác

$\widehat{ACP} = 90^o\,(gt) \Rightarrow \widehat{AMP} + \widehat{ACP} = 180^o$

mà hai góc ở vị trí đối nhau

Suy ra tứ giác $ACPM$ nội tiếp đường tròn.

2. Xét ΔBAM và ΔBPC có:

$\widehat{AMB} = \widehat{BCP} = 90^o$

$\widehat{MBA}$ chung

$\Rightarrow \Delta BAM \# \Delta BPC\,(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{BA}{BP}$

$\Rightarrow BM.BP = BA.BC = 2R.3R = 6R^2.$

3. Ta có:

$AMNQ$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MNQ} = \widehat{PAM}$ (góc trong tại một đỉnh và góc ngoài tại đỉnh đối diện) (1)

$AMPC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PCM} = \widehat{PAM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{PM}$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{MNQ} = \widehat{PCM}$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow PC//NQ$.

4. Gọi D là trung điểm của $BC \Rightarrow D$ là điểm cố định

Qua G kẻ đường thẳng song song với MO cắt AB tại I

G là trọng tâm ΔBCM nên $G \in MD$ và $MG = \frac{2}{3}MD$ (tính chất trọng tâm trong tam giác)

Do $GI//MO$

Áp dụng định lý Ta-lét cho ΔDMO ta có $I \in DO$ và $\frac{OI}{OD} = \frac{MG}{MD} = \frac{2}{3} \Rightarrow OI = \frac{2}{3}OD$

Mà O, D là hai điểm cố định nên I cố định

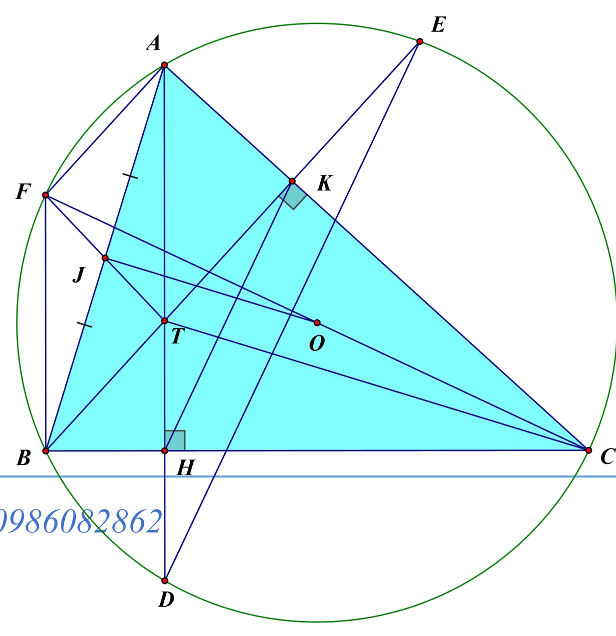
Do $GI//MO$ nên theo định lý Ta-lét ta có: $\frac{GI}{MO} = \frac{DG}{DM} = \frac{1}{3} \Rightarrow IG = \frac{1}{3}MO = \frac{R}{3}$

$\Rightarrow G$ luôn cách điểm I cố định một khoảng $\frac{R}{3}$ không đổi.

$\Rightarrow$ Khi M di động, điểm G luôn nằm trên đường tròn tâm I, bán kính $\frac{R}{3}$.

Câu 19. Cho ΔABC có ba góc nội tiếp đường tròn (O), bán kính R. Hạ đường cao AH, BK của tam giác. Các tia AH, BK lần lượt cắt (O) tại các điểm thứ hai là D, E.

1. Chứng minh tứ giác $ABHK$ nội tiếp đường tròn. Xác định tâm đường tròn đó.
2. Chứng minh. $HK//DE$.
3. Cho (O) và dây AB cố định, điểm C di chuyển trên (O) sao cho ΔABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔCHK không đổi.



Giải:

1. Tứ giác $ABHK$ có $\widehat{AKB} = \widehat{AHB} = 90^o$, mà hai góc cùng nhìn cạnh AB

Suy ra tứ giác $ABHK$ nội tiếp đường tròn đường kính AB.

2. Theo câu trên tứ giác $ABHK$ nội tiếp

(J) với J là trung điểm của AB

Nên $\widehat{BAH} = \widehat{BKH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BH}$ của (J))

Mà $\widehat{BAH} = \widehat{BAD}$ (A, H, K thẳng hàng)

$\widehat{BAD} = \widehat{BED}$ (hai góc cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$ của (O))

Suy ra $\widehat{BKH} = \widehat{BED}$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $HK // DE$.

3. Gọi T là giao điểm của hai đường cao AH và BK

Tứ giác $CHTK$ có $\widehat{CHT} = \widehat{CKT} = 90^o$

Suy ra tứ giác $CHTK$ nội tiếp đường tròn đường kính CT

Do đó CT là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔCHK (*)

Gọi F là giao điểm của CO với (O) hay CF là đường kính của (O)

Ta có: $\widehat{CAF} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa (O)) $\Rightarrow FA \perp CA$

Mà $BK \perp CA$ (gt)

Nên $BK // FA$ hay $BT // FA$ (1)

Ta có: $\widehat{CBF} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa (O)) $\Rightarrow FB \perp CB$

Mà $AH \perp CB$ (gt)

Nên $AH // FB$ hay $AT // FB$ (2)

Từ (1) và (2) ta có tứ giác $AFBT$ là hình bình hành (hai cặp cạnh đối song song)

Do J là trung điểm của đường chéo AB

Nên J cũng là trung điểm của đường chéo FT (tính chất đường chéo hình bình hành)

Xét ΔCTF có O là trung điểm của FC, J là trung điểm của FT

Nên OJ là đường trung bình của ΔCTF

$\Rightarrow OJ = \frac{1}{2}CT$ (**)

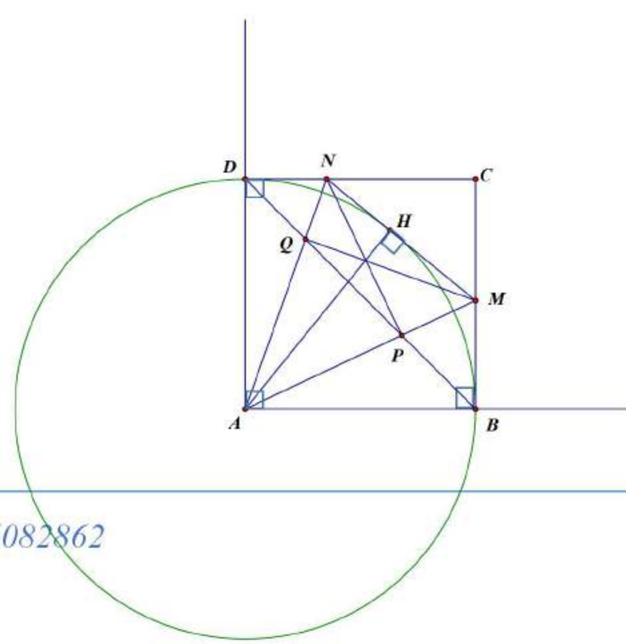
Từ (*) và (**) ta có độ dài của OJ bằng độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔCHK

Mà độ dài của OJ là khoảng cách từ tâm O đến dây AB (J là trung điểm của dây AB)

Do (O) và dây AB cố định nên độ dài OJ không đổi.

Vậy độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔCHK không đổi.

Câu 20. Cho $\widehat{xAy} = 90^o$, vẽ đường tròn tâm A bán kính R. Đường tròn này cắt Ax, Ay thứ tự tại B và D. Các tiếp tuyến với đường tròn (A) kẻ từ B và D cắt nhau tại C.



1. Tứ giác $ABCD$ là hình gì? Chứng minh?
2. Trên BC lấy điểm M tùy ý (M khác B và C)

kẻ tiếp tuyến MH với đường tròn (A), (H là tiếp điểm). MH cắt CD tại N. Chứng minh rằng $\widehat{MAN}=45^0$.

3. $P;Q$ thứ tự là giao điểm của $AM;AN$ với BD. Chứng minh rằng $MQ;NP$ là các đường cao của ΔAMN.

Giải:

1. Theo tính chất tiếp tuyến ta có:

$\widehat{CBA}=\widehat{ADC}=90^o$

Xét tứ giác $ABCD$ có:

$$\begin{cases}\widehat{BAD}=90^o\\ \widehat{CBA}=\widehat{ADC}=90^o\,(cmt)\end{cases}$$

$\Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật.

Ta có $AB=AC=R$ nên $ABCD$ là hình vuông.

2. Xét ΔADN vuông và ΔAHN vuông có:

$$\begin{cases}AN\ chung\\ AD=AH=R\end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta ADN=\Delta AHN$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{DAN}=\widehat{HAN}$

Tương tự: $\widehat{DAN}+\widehat{HAN}+\widehat{HAM}+\widehat{BAM}=\widehat{xAy}=90^o$

$\Rightarrow 2.\widehat{HAN}+2.\widehat{HAM}=90^o$

$\Rightarrow \widehat{HAN}+\widehat{HAM}=45^o$

$\Rightarrow \widehat{MAN}=45^o$.

3. Xét ΔBCD vuông có: $BC=CD=R$

$\Rightarrow \Delta BCD$ vuông cân tại $C \Rightarrow \widehat{CBD}=45^o$

Ta có A, B là hai đỉnh cùng nhìn QM một góc 45^o

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABMQ$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{AQM}+\widehat{ABM}=180^o$

$\Rightarrow \widehat{AQM}=180^o-\widehat{ABM}=180^o-90^o=90^o$

$\Rightarrow MQ\perp AN \Rightarrow MQ$ là đường cao của ΔAMN (đpcm)

Tương tự $ADNP$ là tứ giác nội tiếp

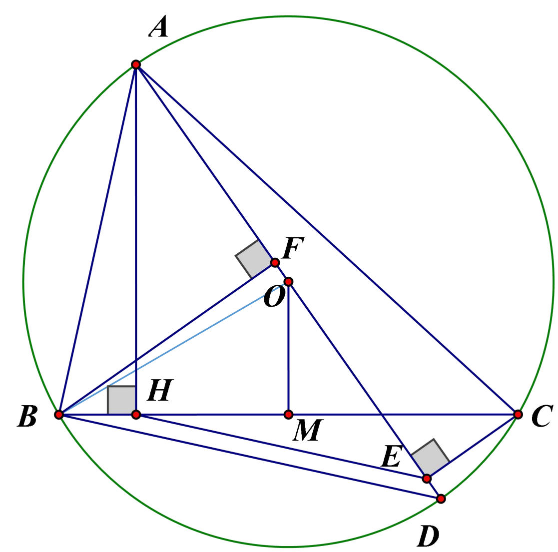
$\Rightarrow NP\perp AM \Rightarrow NP$ là đường cao trong ΔAMN

Vậy MQ, NP là các đường cao trong ΔAMN (đpcm)

Câu 21. Cho $\Delta ABC\left(AB<AC\right)$ có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn $\left(O;R\right)$. Vẽ đường cao AH của ΔABC, đường kính AD của đường tròn. Gọi E,F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ C và B xuống đường thẳng AD. M là trung điểm của BC.

1. Chứng minh các tứ giác $ABHF$ và $BMFO$ nội tiếp.
2. Chứng minh $HE//BD$.
3. Chứng minh $S_{ABC}=\dfrac{AB.AC.BC}{4R}$ (S_{ABC} là diện tích ΔABC).

Giải:



1. Theo đề bài ta có: $\widehat{AHB}=\widehat{BFA}=90^o$ mà 2 góc cùng nhìn cạnh AB

Vậy tứ giác $ABHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AB.

Có M là trung điểm là BC mà BC là dây cung nên $OM\perp BC$

Khi đó $\widehat{BFO}=\widehat{BMO}=90^o$ mà 2 góc ở vị trí đối nhau

Vậy tứ giác $BMOF$ nội tiếp đường tròn đường kính OB.

2. Theo đề bài: $\widehat{AEC}=\widehat{AHC}=90^o\Rightarrow ACEH$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra: $\widehat{CHE}=\widehat{CAE}=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{EC}$)

Lại có: $\widehat{CAE}=\widehat{CAD}=\widehat{CBD}=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{DC}$)

Nên $\widehat{CHE}=\widehat{CBD}$ mà chúng ở vị trí đồng vị suy ra: $HE//BD$.

3. Ta có: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}BC.AH=\dfrac{1}{2}BC.AB.\sin\widehat{ABC}\left(AH=AB.\sin\widehat{ABC}\right)$

Mặt khác trong ΔABC có: $\widehat{ABD}=90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên $AB=AD.\sin\widehat{ADB}=2R\sin\widehat{ACB}$ ($\widehat{ADB}=\widehat{ACB}$ vì hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$)

Tương tự ta có: $\begin{cases}AC=2R.\sin\widehat{ABC}\\BC=2R.\sin\widehat{BAC}\end{cases}$

Ta có: $AB.AC.BC=8R^3.\sin\widehat{ACB}.\sin\widehat{ABC}.\sin\widehat{BAC}\left(1\right)$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AB.\sin\widehat{ABC} = \frac{1}{2}.2R.\sin\widehat{BAC}.2R.\sin\widehat{ACB}.\sin\widehat{CBA} = 2R^2.\sin\widehat{BAC}.\sin\widehat{ACB}.\sin\widehat{CBA}(2)$$

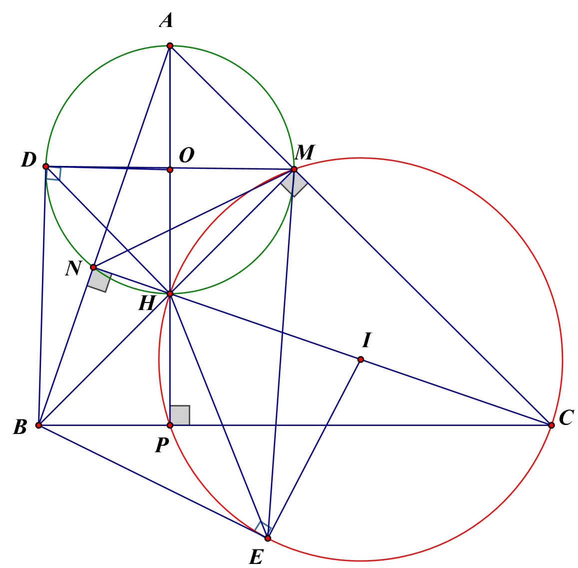
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{S_{ABC}}{AB.BA.CA} = \dfrac{1}{4R}$

Vậy $S_{ABC} = \dfrac{AB.AC.BC}{4R}$.

Câu 22. Cho ΔABC nhọn $(AB < AC)$ ba đường cao AP, BM, CN của ΔABC cắt nhau tại H.

1. Chứng minh tứ giác $BCMN$ nội tiếp.
2. Chứng minh $\Delta ANM \quad \Delta ACB$.
3. Kẻ tiếp tuyến BD với đường tròn đường kính AH (D là tiếp điểm) kẻ tiếp tuyến BE với đường tròn đường kính CH (E là tiếp điểm). Chứng minh $BD = BE$.
4. Giả sử AB = 4cm; AC = 5cm; BC = 6cm. Tính MN.

Giải:



1. Ta có: $\widehat{BMC} = \widehat{BNC} = 90^o$

Mà hai đỉnh M, N cùng nhìn BC

$\Rightarrow$ Tứ giác $BCMN$ nội tiếp đường tròn.

2. Xét ΔANM và ΔACB có:

$\widehat{A}$ chung

$\widehat{ANM} = \widehat{ACB}$ (cùng bù với $\widehat{BNM}$)

Suy ra $\Rightarrow \Delta ANM\ \#\ \Delta ACB$ (g.g).

3. Gọi O là tâm đường tròn đường kính AH

Gọi I là tâm đường tròn đườn kính CH

Xét ΔBDH và ΔBMD có:

$\widehat{B}$ chung

$\widehat{BDH} = \widehat{BMD}$ (cùng phụ với $\widehat{MDH}$)

Suy ra: $\Delta BDH\ \#\ \Delta BMD$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BD}{BM} = \dfrac{BH}{BD} \Rightarrow BD^2 = BM.BH$ (1)

Ta có: $\widehat{EMC} = \widehat{EHC}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{EC}$)

Mà $\widehat{HME} + \widehat{EMC} = 90^o$ (gt) $\Rightarrow \widehat{HME} + \widehat{EHI} = 90^o$

Lại có $\widehat{IHE} = \widehat{HEI}$ do ΔHIE cân tại I

$\Rightarrow \widehat{HME} + \widehat{HEI} = 90^o$

Xét ΔBHE và ΔBEM có:

$\widehat{HBE}$ chung

$\widehat{BEH} = \widehat{BME}$ (cùng phụ với $\widehat{HEI}$)

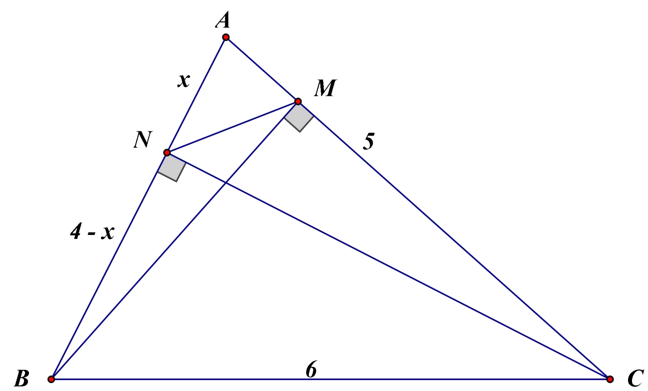
Suy ra: $\Delta BHE \# \Delta BEM$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{BH}{BE} = \frac{BE}{BM} \Rightarrow BE^2 = BM.BH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $BE = BD$.

4. Đặt $AN = x$; $NB = 4 - x$ $(0 < x < 4)$

Áp dụng định lý Pi-ta-go ta có:



$CN^2 = AC^2 - AN^2$

Mà $CN^2 = BC^2 - BN^2$

$\Rightarrow AC^2 - AN^2 = BC^2 - BN^2$

$\Leftrightarrow 5^2 - x^2 = 6^2 - (4-x)^2$

$\Leftrightarrow 25 - x^2 = 36 - 16 + 8x - x^2$

$\Leftrightarrow 25 - 36 + 16 = 8x$

$\Leftrightarrow 8x = 5$

$\Leftrightarrow x = 0,625$

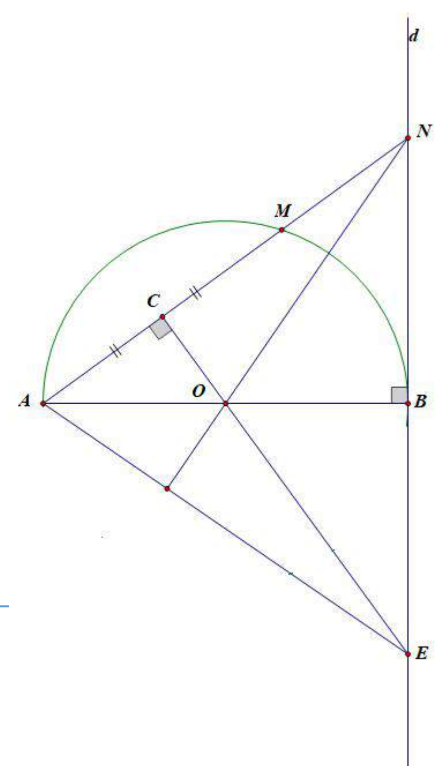
Vậy $AN = 0,625$

Lại có: $\Delta ANM \# \Delta ACB$ (cmt)

$\Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

$\Rightarrow MN = \frac{AN.BC}{AC} = \frac{0,625.6}{5} = 0,75$ (cm).

Câu 23. Cho nửa đường tròn O đường kính $AB = 2R$. Điểm M di chuyển trên nửa đường tròn (M khác A và B) C là trung điểm của dây cung AM. Đường thẳng d là tiếp tuyến với nửa đường tròn tại B. Tia AM cắt d tại điểm N Đường thẳng OC cắt d tại E.



1. Chứng minh: tứ giác $OCNB$ nội tiếp.
2. Chứng minh: $AC.AN = AO.AB$.
3. Chứng minh: NO vuông góc với AE.
4. Tìm vị trí điểm M sao cho $(2.AM + AN)$ nhỏ nhất.

Giải:

1. Theo tính chất dây cung ta

có: $OC \perp AM \Rightarrow \widehat{OCN} = 90^o$

BN là tiếp tuyến của (O) tại $B \Rightarrow OB \perp BN \Rightarrow \widehat{OBN} = 90^o$

Xét tứ giác $OCNB$ có tổng góc đối: $\widehat{OCN} + \widehat{OBN} = 90^o + 90^o = 180^o$

Do đó tứ giác $OCNB$ nội tiếp.

2. Xét ΔACO và ΔABN có:

$\widehat{CAO}$ chung

$\widehat{ACO} = \widehat{ABN} = 90^o$

Suy ra $\Rightarrow \Delta ACO \# \Delta ABN(g.g) \Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AO}{AN}$

Do đó: $AC.AN = AO.AB$ (đpcm).

1. Theo chứng minh trên ta có:

$OC \perp AM \Rightarrow EC \perp AN \Rightarrow EC$ là đường cao của ΔANE (1)

$OB \perp BN \Rightarrow AB \perp NE \Rightarrow AB$ là đường cao của ΔAME (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow O$ là trực tâm của ΔANE (vì O là gia điểm của AB và EC)

$\Rightarrow NO$ là đường cao thứ ba của ΔANE

Suy ra $NO \perp AE$ (đpcm).

2. Ta có: $2.AM + AN = 4AC + AN$ (vì C là trung điểm của AM)

$4AC.AN = 4AO.AB = 4R.2R = 8R^2$

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương ta có:

$4AC + AN \geq 2\sqrt{2AC.AN} = 2.\sqrt{8R^2} = 4\sqrt{2}R$

Suy ra tổng $2.AM + AN$ nhỏ nhất bằng $4\sqrt{2}R$ khi $4AC = AN$

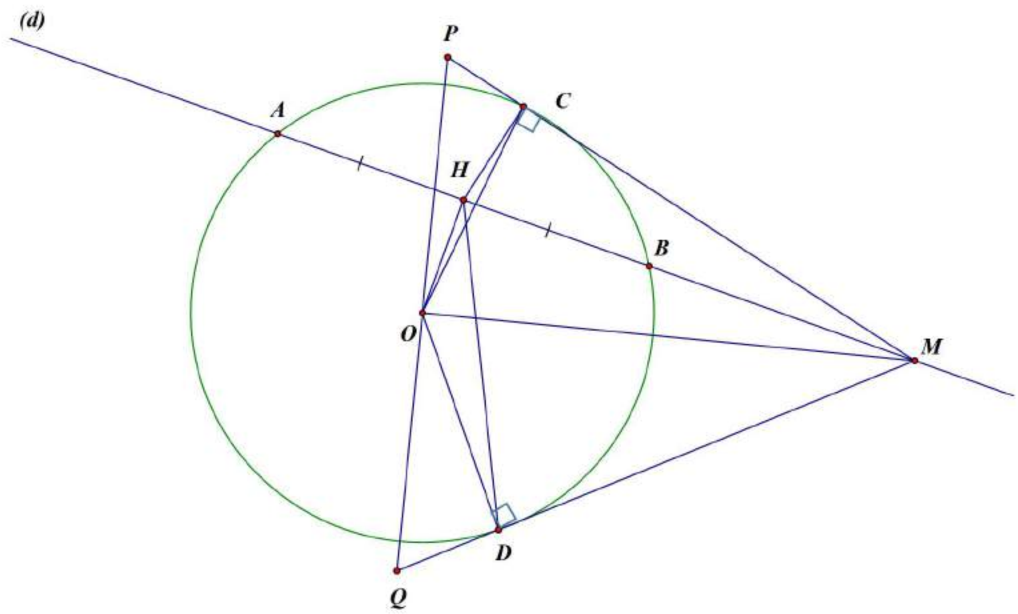
$\Rightarrow AN = 2AM \Rightarrow M$ là trung điểm của AN

Khi đó ΔABN vuông tại B có BM là đường trung tuyến nên $AM = MB \Rightarrow AM = BM$

Vậy với M là điểm chính giữa của nửa đường tròn đường kính AB thì $2AM + AN$ nhỏ nhất bằng $4\sqrt{2}R$.

Câu 24. Cho đường tròn tâm O bán kính R và đường thẳng (d) không đi qua O, cắt đường tròn (O) tại 2 điểm A, B. Lấy điểm M bất kỳ trên tia đối BA, qua M kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn (C, D là các tiếp điểm).

1. Chứng minh tứ giác $MCOD$ nội tiếp đường tròn.
2. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB. Chứng minh HM là phân giác của $\widehat{CHD}$.
3. Đường thẳng đi qua O và vuông góc với MO cắt các tia MC, MD theo thứ tự tại P, Q. Tìm vị trí của điểm M trên (d) sao cho diện tích ΔMPQ nhỏ nhất.



Giải:

1. Xét tứ giác $MCOD$ có:

$MC \perp OD \Rightarrow \widehat{OCM} = 90^o$; $MD \perp OD \Rightarrow \widehat{ODM} = 90^o$

Suy ra tứ giác $MCOD$ nội tiếp đường tròn.

2. Ta có H là trung điểm của $AB \Rightarrow OH \perp AB \Rightarrow \widehat{MHO} = 90^o \Rightarrow H$ thuộc đường kính MO

$\Rightarrow$ 5 điểm $D; M; C; H; O$ cùng thuộc đường tròn đường kính MO

$\Rightarrow \widehat{DHM} = \widehat{DOM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MD)

$\widehat{CHM} = \widehat{COM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MC)

Lại có $\widehat{DOM} = \widehat{COM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \widehat{DHM} = \widehat{CHM} \Rightarrow HM$ là phân giác $\widehat{CHD}$.

3. Ta có: $S_{MPQ} = 2S_{MOP} = OC.MP = R.(MC + CP) \geq 2R\sqrt{CM.CP}$

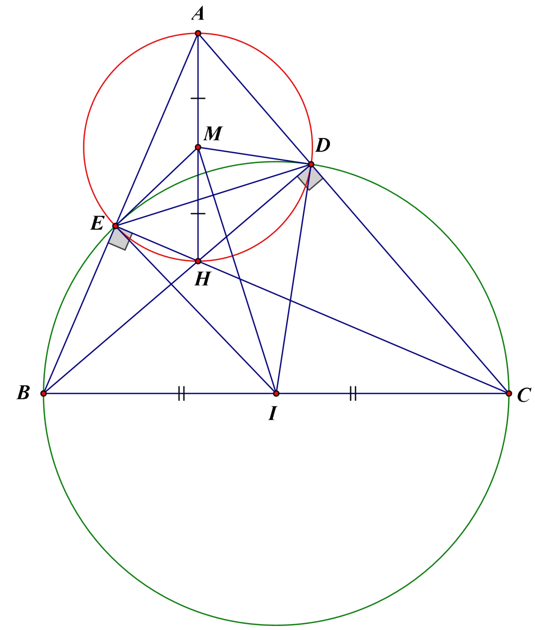
Mặt khác, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông OMP ta có:

$CM.CP = OC^2 = R^2$ không đổi $\Rightarrow S_{MPQ} \geq 2R^2$

Dấu “ = “ xảy ra $\Leftrightarrow CM = CP = R\sqrt{2}$. Khi đó M là giao điểm *(d)* với đường tròn tâm O bán kính $R\sqrt{2}$.

Vậy M là giao điểm của *(d)* với đường tròn tâm O bán kính $R\sqrt{2}$ thì diện tích ΔMRT nhỏ nhất.

Câu 25. Cho ΔABC có ba góc đều nhọn, hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H (D thuộc $AC; E$ thuộc AB).



1. Chứng minh tứ giác $ADHE$ nội tiếp được trong một đường tròn;
2. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của AH và BC. Chứng minh MI vuông góc với ED.

Giải:

1. Tứ giác $ADHE$ có: $AD \perp DH\left(gt\right)$; $AE \perp EH\ \left(gt\right)$

Nên $\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^o$

Do đó: $\widehat{AEH} + \widehat{ADH} = 180^o$ mà 2 góc ở vị trí đối diện

Vậy tứ giác $ADHE$ nội tiếp đường tròn.

2. Tứ giác $BEDC$ có:

$\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^o$ (gt) nên cùng nội tiếp đường tròn tâm I đường kính BC (1)

Tương tự: Tứ giác $ADHE$ nội tiếp đường tròn tâm M đường kính AH và E, D là giao điểm của I và đường tròn

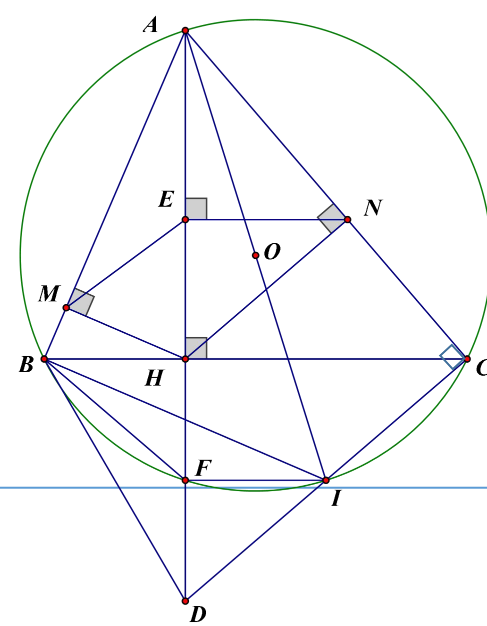
Dễ dàng chứng minh $\Delta EMI = \Delta DMI\ \left(c.c.c\right)$

$\Rightarrow MI$ là phân giác $\widehat{DME}$

Mà ΔDMI cân tại $M\left(MD = ME\right)$

$\Rightarrow MI \perp DE\ \left(Đpcm\right)$.

Câu 26. Cho ΔABC có ba góc đều nhọn $\left(AB < AC\right)$ nội tiếp trong đường tròn tâm O, kẻ đường cao AH. Gọi M, N là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC. Kẻ NE vuông góc với AH. Đường vuông góc với AC tại C cắt đường tròn tại I và cắt tia AH tại D. Tia AH cắt đường tròn tại F .



1. Chứng minh $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \widehat{BIC}$ và tứ giác $DENC$ nội tiếp được trong một đường tròn.
2. Chứng minh hệ thức $AM.AB = AN.AC$ và tứ giác $BFIC$ là hình thang cân.
3. Chứng minh: tứ giác $BMED$ nội tiếp được trong một đường tròn.

Giải:

1. Vì $ABIC$ là tứ giác nội tiếp

nên: $\widehat{ABC}=\widehat{AIC};\widehat{ACB}=\widehat{AIB}$

$\Rightarrow \widehat{ABC}+\widehat{ACB}=\widehat{AIC}+\widehat{AIB}=\widehat{BIC}$

Vì $NE\perp AD;NC\perp CD$ nên s $\widehat{NED}=\widehat{NCD}=90^o$

$\Rightarrow \widehat{NED}+\widehat{NCD}=180^o$ mà 2 góc ở vị trí đối nhau

Suy ra tứ giác $DENC$ là tứ giác nội tiếp.

2. Áp dụng hệ thức lượng trong hai tam giác vuông AHB và AHC có:

$AM.AB=AH^2;AN.AC=AH^2\Rightarrow AM.AB=AN.AC$

Có $\widehat{IAC}=90^o-\widehat{AIC};\ \widehat{BAF}=90^o-\widehat{ABH};\ \widehat{AIC}=\widehat{ABH}\Rightarrow \widehat{IAC}=\widehat{BAF}$

Suy ra số đo hai cung IC và BF bằng nhau $\Rightarrow IC=BF$

Mặt khác vì $ABFI$ và $ABIC$ nội tiếp nên $\widehat{BAF}=\widehat{BIF};\ \widehat{IAC}=\widehat{IBC};\ \widehat{BIF}=\widehat{IBC}$

Suy ra $IF//BC\Rightarrow BCIF$ là hình thang

Vì $\widehat{BAF}=\widehat{CAI}\Rightarrow \widehat{BAI}=\widehat{CAF}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{FC}=\overset{\frown}{BI}\Rightarrow FC=BI$

Hình thang $BCIF$ có $FC=BI\Rightarrow BCIF$ là hình thang cân.

3. Có $\Delta AEN\#\ AGD(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AN}{AD}\Rightarrow AE.AD=AN.AC=AM.AB\Rightarrow \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AM}{AD}$

Xét ΔAME và ΔADB có:

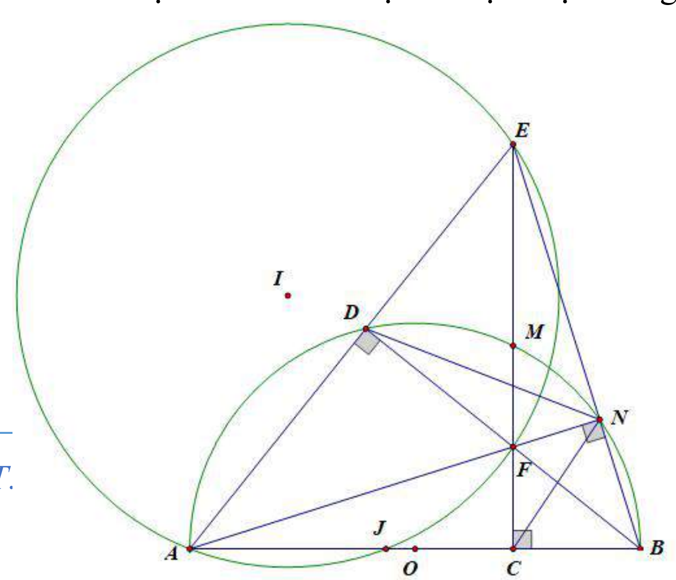
$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AM}{AD}$ (cmt); $\widehat{MAE}$ chung

Suy ra $\Delta AME\#\ ADB(c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{AME}=\widehat{ADB}\Rightarrow \widehat{BME}+\widehat{ADB}=180^o$ mà 2 góc ở vị trí đối diện

Suy ra $BMED$ nội tiếp đường tròn.

Câu 27. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB.$ Gọi C là điểm cố định thuộc đoạn thẳng OB (C khác O và B). Dựng đường thẳng d vuông góc với AB tại điểm $C,$ cắt nửa đường tròn (O) tại điểm $M.$ Trên cung nhỏ MB lấy điểm N bất kỳ (N khác M và B), tia AN cắt đường thẳng d tại điểm $F,$ tia BN cắt đường thẳng d tại điểm $E.$ Đường thẳng AE cắt



nửa đường tròn (O) tại điểm D (D khác A).

1. Chứng minh: $AD.AE = AC.AB$.
2. Chứng minh: Ba điểm B, F, D thẳng hàng và F là tâm đường tròn nội tiếp ΔCDN.
3. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAEF. Chứng minh rằng điểm I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi điểm N di chuyển trên cung nhỏ MB.

Giải:

1. Có $\widehat{ADB} = \widehat{ANB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét ΔADB và ΔACE có:

$\widehat{ADB} = \widehat{ACE} = 90^o$

$\widehat{EAC}$ chung

$\Rightarrow \Delta ADB \# \Delta ACE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AB}{AE} \Rightarrow AD.AE = AC.AB\ (Đpcm)$

2. Có $AN \perp EB$; $EC \perp AB$, EC giao AN tại F nên F là trực tâm của $\Delta AEB \Rightarrow BF \perp EA$

Mà $BD \perp EA \Rightarrow B, D, F$ thẳng hàng

Tứ giác $ADFC$ có hai góc đối bằng 90^o nên tứ giác $ADFC$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra $\widehat{DCF} = \widehat{DAF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overparen{DF}$)

Tương tự ta có: $\widehat{NCF} = \widehat{NBF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overparen{NF}$)

Mà $\widehat{DAF} = \widehat{NBF}$ (cùng phụ với $\widehat{AEB}$) $\Rightarrow \widehat{DCF} = \widehat{NCF}$

Suy ra CF là phân giác $\widehat{DCN}$

Tương tự cùng có DF là phân giác $\widehat{NDC}$

Vậy F là tâm đường tròn nội tiếp ΔDCN

2. Gọi J là giao điểm của (I) với đoạn AB

Có $\widehat{FAC} = \widehat{CEB} = 90^o - \widehat{ABE} \Rightarrow \Delta FAC \# \Delta BEC(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{FC}{BC} = \dfrac{AC}{EC} \Rightarrow CF.CE = BC.AC \quad (1)$

Vì $AEFJ$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{FJC} = \widehat{FEA} = 180^o - \widehat{AJF}$

$\Rightarrow \Delta CFJ \# \Delta CAE(g.g) \Rightarrow \dfrac{CF}{CA} = \dfrac{CJ}{CE} \Rightarrow CF.CE = CA.CJ \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $BC.AC = CA.CJ \Rightarrow BC = CJ \Rightarrow C$ là trung điểm của BJ (vì $J \neq B$)

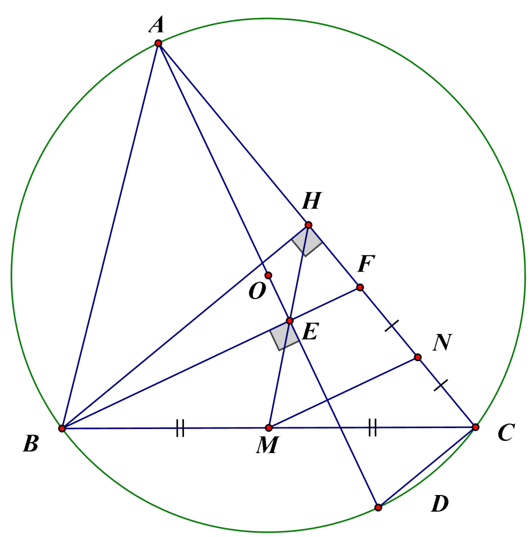
Suy ra J là điểm cố định

Có $IA = IJ$ nên I luôn thuộc đường trung trực của AJ là đường thẳng cố định.

Câu 28. Cho ΔABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp (O), vẽ đường kính AD. Đường thẳng đi qua B vuông góc với AD tại E và cắt AC tại F. Gọi H là hình chiếu của B trên AC và M là trung điểm của BC.

1. Chứng minh $CDEF$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $\widehat{MHC} + \widehat{BAD} = 90^o$.
3. Chứng minh $\dfrac{HC}{HF} + 1 = \dfrac{BC}{HE}$.

Giải:



1. Có $\widehat{ACD} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Vì $BE \perp AD$ nên $\widehat{FED} = 90^o \Rightarrow \widehat{FED} + \widehat{FCD} = 180^o$ mà hai góc ở vị trí đối nhau

Suy ra tứ giác $CDEF$ là tứ giác nội tiếp.

2. Vì M là trung điểm cạnh huyền BC của tam giác vuông BHC nên

$MH = MC = MB \Rightarrow \Delta MHC$ cân tại M (tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)

$\Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MCH}$

Vì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên:

$\widehat{BAD} = \widehat{BCD} \Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{MHC} = \widehat{BCD} + \widehat{MCH} = \widehat{DCH} = 90^o$.

3. Vì $BE \perp AE, BH \perp AH$ nên $\widehat{BEA} = \widehat{BHA} = 90^o \Rightarrow ABEH$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{BHE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$)

Mà theo ý 2 ta có: $\widehat{BAE} = 90^o - \widehat{MHC} = \widehat{BHM} \Rightarrow \widehat{BHE} = \widehat{BHM}$

Suy ra H, E, M thẳng hàng.

Gọi N là trung điểm của FC.

$\Rightarrow NM$ là đường trung bình của ΔBFC

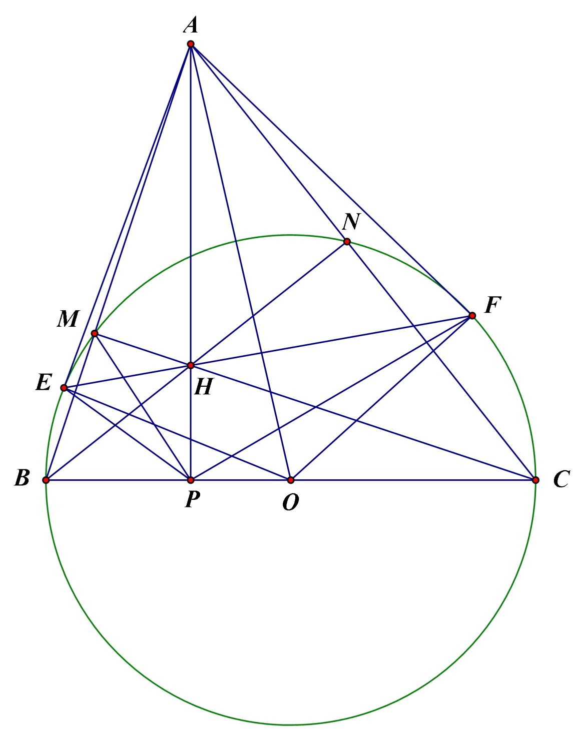
$\Rightarrow MN // BF$ nên ta có:

$\frac{BC}{HE}=\frac{2HM}{HE}=\frac{2HN}{HF}=\frac{2(HF+FN)}{HF}=\frac{2HF+FC}{HF}=\frac{HF+HC}{HF}=1+\frac{HC}{HF}$ (đpcm).

Câu 29. Cho ΔABC nhọn. Đường tròn tâm O đường kính BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại các điểm $M, N\left(M \neq B, N \neq C\right)$. Gọi H là giao điểm của BN và CM; P là giao điểm của AH và BC.

1. Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp được trong một đường tròn.
2. Chứng minh $BM.BA = BP.BC$.
3. Trong trường hợp đặc biệt khi ΔABC đều cạnh bằng $2a$. Tính chu vi đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$ theo a.
4. Từ điểm A kẻ các tiếp tuyến AE và AF của đường tròn tâm O đường kính BC (E,F là các tiếp điểm). Chứng minh ba điểm E, H, F thẳng hàng.

Giải:



1. Ta có: $\widehat{AMH}=90^o$; $\widehat{ANH}=90^o$ nên M và N cùng thuộc đường tròn đường kính AH

Vậy tứ giác $AMHN$ nội tiếp đường tròn.

2. Tứ giác $AMPC$ có $\widehat{APC}=90^0$ (do H là trực tâm của ΔABC) và $\widehat{AMC}=90^o$

$\Rightarrow \Delta BMC \# \Delta BPA(g.g)$

$\Rightarrow \frac{BM}{BP}=\frac{BC}{BA}\cdot$ Từ đó suy ra $BM.BA = BP.BC$.

3. Đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$ có đường kính AH

ΔABC đều nên trực tâm H cũng là trọng tâm

$\Rightarrow AH=\frac{2}{3}\cdot AP=\frac{2}{3}\cdot\frac{AB\sqrt{3}}{2}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Chu vi đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$ bằng: $\pi.AH=\frac{2\pi a\sqrt{3}}{3}$

Vậy chu vi đường tròn ngoại tiếp tức giác $AMHN$ bằng $\frac{2\pi a\sqrt{3}}{3}\cdot$

4. Ta có: $AH.AP = AM.AB = AE^2 \Rightarrow \frac{AH}{AE}=\frac{AE}{AP}$

Xét ΔAHE và ΔAEP có:

$\frac{AH}{AE}=\frac{AE}{AP}$ (cmt); $\widehat{EAP}$ chung

Nên $\Delta AHE \# \Delta AEP$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{AHE}=\widehat{AEP}$ (1)

Tương tự ta có: $\widehat{AHF}=\widehat{AFP}$ (2)

Mặt khác: Tứ giác *AFOP* và *AEOF* nội tiếp đường tròn đường kính *AO* nên năm điểm *A, E, P, O, F* cùng thuộc đường tròn đường kính *AO*.

Suy ra tứ giác *AEPF* nội tiếp đường tròn nên: $\widehat{AEP}+\widehat{AFP}=180^o$ (3)

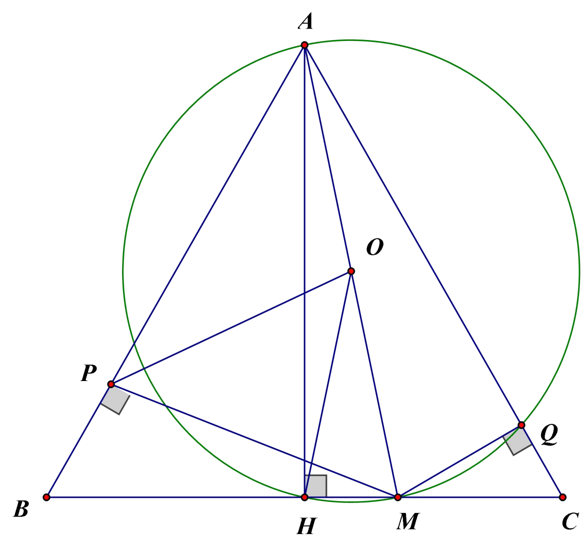
Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{AHE}+\widehat{AHF}=\widehat{AEP}+\widehat{AFP}=180^o \Rightarrow \widehat{EHF}=180^o$

Vậy ba điểm *E, H, F* thẳng hàng.

Câu 30. Cho ΔABC đều có đường cao AH. Trên cạnh BC lấy điểm M tùy ý (M không trùng với B,C,H). Gọi P,Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên AB,AC.

1. Chứng minh tứ giác $APMQ$ nội tiếp được đường tròn và xác định tâm O của đường tròn này.
2. Chứng minh $OH \perp PQ$.
3. Chứng minh $MP+MQ=AH$.

Giải:



1. Xét tứ giác $APMQ$

   có: $\widehat{APM}=\widehat{AQM}=90^o$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{APM}+\widehat{AQM}=180^o \Rightarrow$ Tứ giác $APMQ$ nội tiếp trong đường tròn đường kính AM

Gọi O là trung điểm của AM

$\Rightarrow$ tứ giác $APMQ$ nội tiếp trong đường tròn tâm O đường kính AM.

2. Ta có: $\widehat{AHM}=90^o$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AHM}$ nội tiếp

   chắn $\frac{1}{2}$ đường tròn đường kính AM

$\Rightarrow H$ thuộc đường tròn (O)

Ta có: $\widehat{HPQ}=\widehat{HAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{HQ}$)

$\widehat{HQP}=\widehat{HAB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{HP}$)

Mà $\widehat{HAC}=\widehat{HAB}$ (ΔABC đều nên AH vừa là đường cao vừa là đường phân giác)

$\Rightarrow \widehat{HPQ}=\widehat{HQP} \Rightarrow \Delta HPQ$ cân tại $H \Rightarrow HP=HQ$ (1)

Mà $OP=OQ$ (do $P,Q\in(O)$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OH$ là đường trung trực của $PQ \Rightarrow OH \perp PQ$.

1. $S_{MAC} = \frac{1}{2}MQ.AC = \frac{1}{2}MQ.BC$

Ta có: $S_{MAB} = \frac{1}{2}.MP.AB = \frac{1}{2}.MP.BC$ (do $AB = BC$)

$S_{MAC} = \frac{1}{2}MQ.AC = \frac{1}{2}MQ.BC$ (do $AC = BC$)

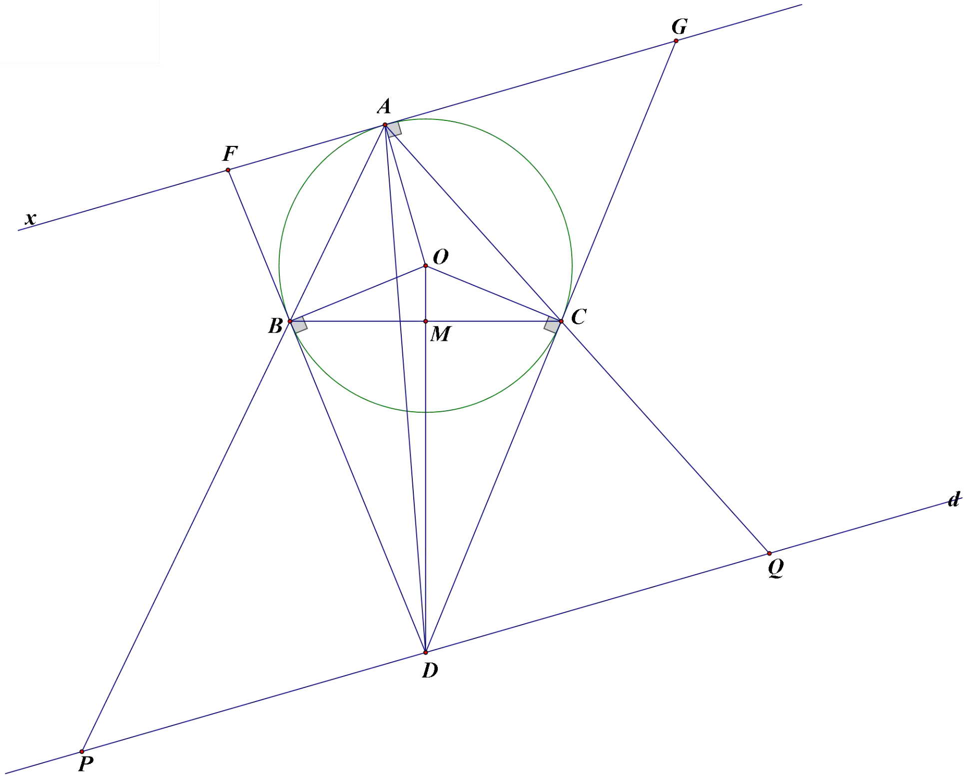
$S_{ABC} = \frac{1}{2}.AH.BC$ (do $AC = BC$)

$S_{MAB} + S_{MAC} = S_{ABC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}.MP.BC + \frac{1}{2}.MQ.BC = \frac{1}{2}.AH.BC \Leftrightarrow MP + MQ = AH$ (đpcm).

Câu 31. Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) có bán kính $R = 3$ cm. Các tiếp tuyến với (O) tại B và C cắt nhau tại D.

1. Chứng minh tứ giác $OBDC$ nội tiếp đường tròn;
2. Gọi M là giao điểm của BC và OD. Biết $OD = 5$ (cm). Tính diện tích ΔBCD
3. Kẻ đường thẳng d đi qua D và song song với đường tiếp tuyến với (O) tại A, d cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại P, Q. Chứng minh $AB.AP = AQ.AC$.
4. Chứng minh $\widehat{PAD} = \widehat{MAC}$.

Giải:



1. Do DB, DC là các tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow \widehat{OBD} = \widehat{OCD} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{OBD} + \widehat{OCD} = 90^o + 90^o = 180^o$ mà 2 góc ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $OBDC$ là tứ giác nội tiếp.

2. Áp dụng định lý Pi-ta-go vào ΔOBD vuông tại B

$\Rightarrow DB = \sqrt{OD^2 - OB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4(cm)$

Ta có: $OB = OC = R, BD = DC$ (2 tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow O; D$ thuộc trung trực $BC \Rightarrow OD$ là trung trực $BC \Rightarrow OD \perp BC$

Áp dụng hệ thức lượng vào ΔOBD vuông, ta có:

$$DM.DO = BD^2 \Rightarrow DM = \frac{BD^2}{DO} = \frac{4^2}{5} = \frac{16}{5}(cm)$$

$$BM.OD = OB.BD \Rightarrow BM = \frac{OB.BD}{OD} = \frac{3.4}{5} = \frac{12}{5}(cm)$$

Vậy $S_{DBC} = \frac{1}{2}DM.BC = DM.BM = \frac{16}{5}.\frac{12}{5} = 7,68(cm^2)$

3. Ta có: $\widehat{APQ} = \widehat{BAx}$ (2 góc so le trong do $Ax // PQ$)

Mà $\widehat{xAB} = \widehat{ACB}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và cung $\overset{\frown}{AB}$ và góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AB}$)

$\Rightarrow \widehat{APQ} = \widehat{ACB}$

Xét ΔABC và ΔAQP có:

$\widehat{PAQ}$ chung; $\widehat{APQ} = \widehat{ACB}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ABC \# \Delta AQP$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AQ} = \dfrac{AC}{AP} \Rightarrow AB.AP = AC.AQ.$

4. Kéo dài BD cắt tiếp tuyến đi qua A của đường tròn (O) tại F

Ta có: $\widehat{DBP} = \widehat{ABF}$ (đối đỉnh)

Mà $\widehat{ABF} = \widehat{ACB}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung, góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AB}$)

$\widehat{ACB} = \widehat{APD}$ (do $\Delta ABC \# \Delta AQP$)

$\Rightarrow \widehat{DBP} = \widehat{APD} = \widehat{BPD} \Rightarrow \Delta DBP$ cân tại $D \Rightarrow DB = DP$

Tương tự kéo dàu DC cắt tiếp tuyến đi qua A của đường tròn (O) tại G

Ta chứng minh $\widehat{DCQ} = \widehat{ACG} = \widehat{ABC} = \widehat{DQC} \Rightarrow \Delta DCQ$ cân tại D

Lại có $DB = DC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow DP = DQ \Rightarrow D$ là trung điểm PQ

Ta có: $\Delta ABC \# \Delta AQP$ (cmt) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AQ} = \dfrac{AC}{AP} = \dfrac{BC}{PQ} = \dfrac{2MC}{2PD} \Rightarrow \dfrac{AC}{AP} = \dfrac{MC}{PD}$

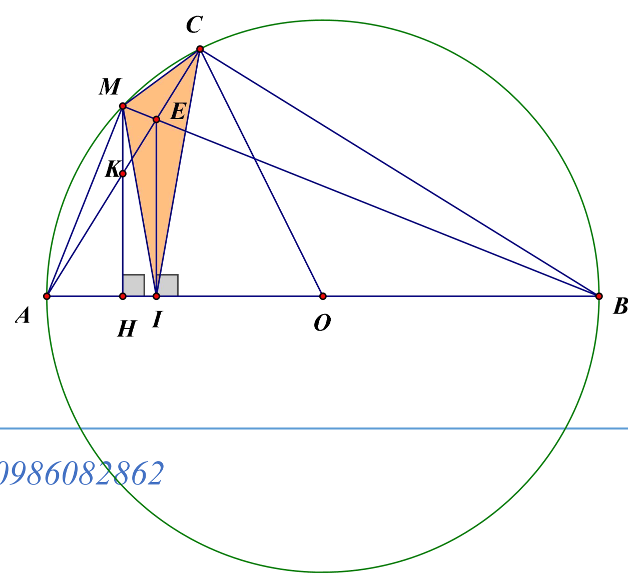
Xét ΔAMC và ΔADP có:

$\widehat{ACM} = \widehat{APD}$ ($\widehat{ACB} = \widehat{APQ}$ - cmt); $\dfrac{AC}{AP} = \dfrac{MC}{PD}$

$\Rightarrow \Delta AMC \# \Delta ADP$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{PAD} = \widehat{MAC}$ (đpcm).

Câu 32. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Điểm C cố định trên nửa đường tròn. Điểm M thuộc cung AC $(M \neq A; \text{C})$. Hạ $MH \perp AB$ tại H. Nối MB cắt CA tại E. Hạ $EI \perp AB$ tại I. Gọi K là giao điểm của AC và MH. Chứng minh:

1. $BHKC$ và $AMEI$ là các tứ giác nội tiếp.
2. $AK.AC = AM^2$.
3. $AE.AC + BE.BM$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.
4. Khi M chuyển động trên cung AC thì đường tròn ngoại tiếp tam giác IMC đi qua hai điểm cố định.



1. Chứng minh tứ giác tứ giác $BHKC$ và $AMEI$ là tứ giác nội tiếp

$\widehat{AMB} = \widehat{KCB} = 90^o$ (2 góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Tứ giác $BHKC$ có:

$\widehat{KHB}+\widehat{KCB}=180^o$

Mà 2 góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $BHKC$ là tứ giác nội tiếp.

Tứ giác $AMEI$ có:

$\widehat{AMB}+\widehat{EIA}=180^o$

Mà 2 góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

2. Xét ΔAHK và ΔACB có:

$\widehat{AHK}=\widehat{ACK}=90^o$

$\widehat{CAB}$ chung

$\Rightarrow \Delta AHK \# \Delta ACB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AH}{AC}=\dfrac{AK}{AB} \Rightarrow AH.AB=AC.AK \quad (1)$

Áp dụng hệ thức lượng trong ΔAMB vuông tại M, có MH là đường cao, ta có:

$AH.AB=AM^2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $\Rightarrow AK.AC=AM^2\left(Đpcm\right)$

3. Xét ΔAEI và ΔABC có:

$\widehat{AIE}=\widehat{ACB}=90^o$

$\widehat{CAB}$ chung

$\Rightarrow \Delta AEI \# \Delta ABC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AI}=\dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AE.AC=AB.AI \quad (3)$

Xét ΔBEI và ΔBAM có:

$\widehat{BIE}=\widehat{BMA}=90^o$

$\widehat{ABM}$ chung

$\Rightarrow \Delta BEI \# \Delta BAM$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BE}{BI}=\dfrac{BA}{BM} \Rightarrow BE.BM=BI.BA \quad (4)$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow AE.AC+BE.BM=AB(AI+BI)$

$\Rightarrow AE.AC+BE.BM=AB^2=4R^2$

Vậy $AE.AC+BE.BM$ không phụ thuộc vào M.

4. Khi M chuyển động trên cung AC thì đường tròn ngoại tiếp tam giác IMC đi qua hai điểm cố định.

Tứ giác $BCEI$ có:

$\widehat{BCE}+\widehat{EIB}=90^o$

Mà 2 góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ tứ giác $BCEI$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{EIC}=\widehat{EBC}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung EC).

Từ câu 1, ta có tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{EIM}=\widehat{EAM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung ME).

Mà $\widehat{EBC}=\widehat{EAM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MC)

$\widehat{MIC}=\widehat{EIC}+\widehat{EIM}=2.\widehat{EAM}=\widehat{MOC}$ mà 2 đỉnh cùng nhìn cạnh MC

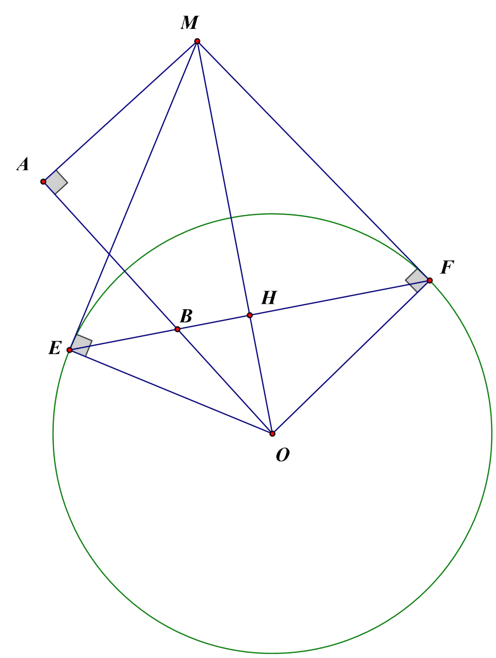
$\Rightarrow M,C,I,O$ thuộc cùng 1 đường tròn

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác IMC đi qua hai điểm cố định O và C.

Câu 33. Cho đường tròn$(O;\ R)$và điểm A cố định ở ngoài đường tròn. Vẽ đường thẳng $d\perp OA$ tại A. Trên d lấy điểm M. Qua M kẻ 2 tiếp tuyến ME, MF tới đường tròn (O). Nối EF cắt OM tại H, cắt OA tại B.

1. Chứng minh $ABHM$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $OA.OB=OH.OM=R^2$.
3. Chứng minh tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác MEF thuộc một đường tròn cố định khi M di chuyển trên d.
4. Tìm vị trí của M để diện tích ΔHBO lớn nhất.

Giải:



1. Chứng minh $ABHM$ là tứ giác nội tiếp.

Có $ME=MF$ và MO là phân giác của $\widehat{EMF}$ nên $MO\perp EF$ tại H. Mà $MA\perp OA\Rightarrow MABH$ là tứ giác nội tiếp.

2. $\Delta OHB\,\#\,\Delta OAM\Rightarrow OB.OA=OH.OM$

ΔEMO vuông tại $E\Rightarrow OH.OM=OE^2=R^2$.

3. Có $I\in MO; EI$ là phân giác $\widehat{MEH}$.

Mà $\widehat{MEI}+\widehat{IEO}=90^o$

$\widehat{IEH}+\widehat{OIE}=90^o\Rightarrow \widehat{OIE}=\widehat{IEO}$

$\Rightarrow \Delta OIE$ cân tại $O\Rightarrow OI=OE=R\Rightarrow I\in(O;R)$.

4. Vì $OB.OA=R^2\Rightarrow OA=\dfrac{R^2}{OA}\Rightarrow B$ cố định.

$\widehat{OHB}=90^o\Rightarrow H\in$ đường tròn đường kính OB.

Gọi K là trung điểm $OB \Rightarrow KB = KO = HK$.

Hạ $HN \perp OB$

S_{HBO} max $\Leftrightarrow HN$ max. Mà $HN \le HK$. Dấu "=" xảy ra khi $H \equiv K$.

Vậy S_{HBO} max $\Leftrightarrow \Delta HBO$ vuông cân tại $H \Leftrightarrow MO$ tạo với OA một góc 45^o.

Câu 34. Cho (O; R) và điểm A thuộc đường tròn. Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn. Trên Ax lấy điểm H sao cho $AH < R$. Dựng đường thẳng $d \perp Ax$ tại H. Đường thẳng d cắt đường tròn tại E và B (E nằm giữa H và B).

1. Chứng minh $\Delta ABH \# \Delta EAH$.
2. Lấy điểm C thuộc Ax sao cho H là trung điểm AC. Nối CE cắt AB tại K. Chứng minh $AHEK$ là tứ giác nội tiếp.
3. Tìm vị trí của H trên Ax sao cho $AB = R\sqrt{3}$.

Giải :

1. Chứng minh $\Delta AHB \# \Delta EAH$

Ta có: $\widehat{EAH} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overparen{AE}$ (t/c góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$\widehat{ABE} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overparen{AE}$ (góc nội tiếp chắn cung $\overparen{AE}$)

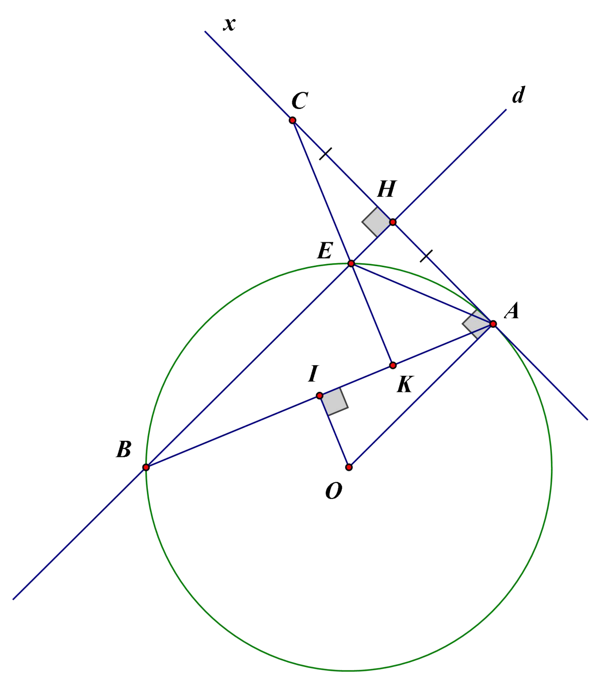
Xét ΔAHB và ΔEAH có:

$\widehat{EAH} = \widehat{ABE}$ (cmt)

$\widehat{AHB}$ chung

$\Rightarrow \Delta AHB \# \Delta EAH (g.g)$.

2. Chứng minh $AHEK$ là tứ giác nội tiếp



Ta có: $\left.\begin{matrix} EH \perp AC \\ AH = HC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta EAC$ cân tại E

$\Rightarrow \widehat{ECH} = \widehat{EAC} \Rightarrow \widehat{KCA} = \widehat{ABH}$

Mà $\widehat{ABH} + \widehat{BAH} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{KCA} + \widehat{BAH} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{CKA} = 90^o$

Xét tứ giác $AHEK$ có:

$\widehat{AKE} + \widehat{EHA} = 90^o + 90^o = 180^o$

Mà 2 góc này ở vị trí đối diện

$\Rightarrow AHEK$ là tứ giác nội tiếp.

3. Tìm vị trí của H trên Ax sao

cho $AB = R\sqrt{3}$

Kẻ $OI \perp AB$ tại I

$\Rightarrow AI = IB = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \cos\widehat{OAI} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{OAI} = 30^o \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^o$

$\Rightarrow AH = AB.\cos 60^o = R\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Vậy cần lấy điểm H trên Ax sao cho $AH = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ thì $AB = R\sqrt{3}$.

Câu 35. Cho ΔABC vuông ở A. Trên cạnh AC lấy 1 điểm M, dựng đường tròn tâm (O) có đường kính MC. Đường thẳng BM cắt đường tròn tâm (O) tại D, đường thẳng AD cắt đường tròn tâm (O) tại S

1. Chứng minh tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp và CA là tia phân giác của góc $\widehat{BCS}$.
2. Gọi E là giao điểm của BC với đường tròn (O). Chứng minh các đường thẳng BA, EM, CD đồng quy.
3. Chứng minh M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

Giải:

1. Ta có $\widehat{BAC} = 90^o$ (giả thiết)

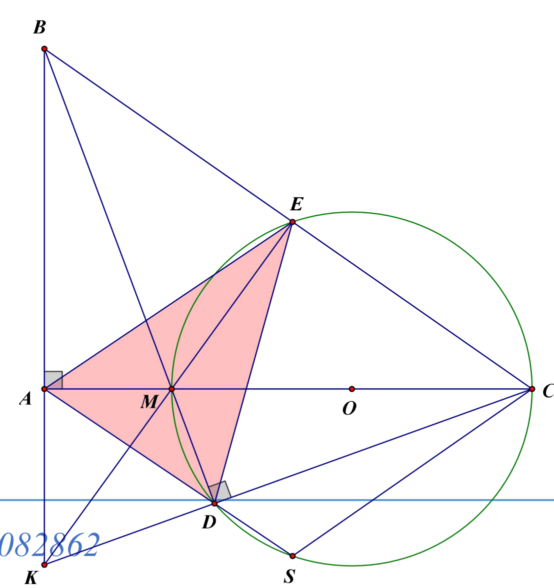
$\widehat{MDC} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

A, D nhìn BC dưới góc 90^o nên tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ (cùng chắn cung AB). (1)

Ta có tứ giác $DMCS$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACS}$ (cùng bù với $\widehat{MDS}$). (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{ACS} \Rightarrow CA$ là phân giác $\widehat{BCS}$.



2. Giả sử BA cắt CD tại K. Ta có $BD \perp CK, CA \perp BK$.

$\Rightarrow M$ là trực tâm ΔKBC. Mặt khác $\widehat{MEC} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow K, M, E$ thẳng hàng hay BA, EM, CD đồng quy tại K.

3. Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{DBC}$ (cùng chắn cung DC). (3)

Mặt khác tứ giác $BAME$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{MBE}$ (cùng chắn cung ME). (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{DAM} = \widehat{MAE}$ hay AM là tia phân giác của $\widehat{DAE}$.

Chứng minh tương tự ta có: $\widehat{ADM} = \widehat{MDE}$ hay DM là tia phân giác $\widehat{ADE}$.

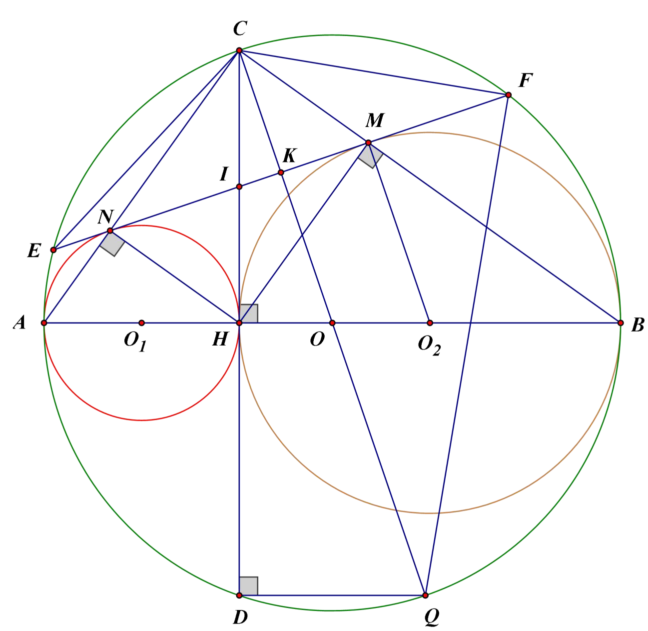
Vậy M là tâm đường tròn nội tiếp ΔADE.

* **<u>Lưu ý</u>**: *Để chứng minh ba đường thẳng đồng quy, một phương pháp thường dùng là chứng minh ba đường thẳng ấy hoặc là ba đường cao, hoặc là ba đường trung tuyến, hoặc là ba đường phân giác của một tam giác.*

Câu 36. Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính AB. Điểm H thuộc đoạn OA. Kẻ dây CD vuông góc với AB tại H. Vẽ đường tròn (O_1) đường kính AH và đường tròn (O_2) đường kính BH. Nối AC cắt đường tròn (O_1) tại N. Nối BC cắt đường tròn (O_2) tại M. Đường thẳng MN cắt đường tròn $(O;R)$ tại E và F.

1. Chứng minh $CMHN$ là hình chữ nhật.
2. Cho $AH = 4$ cm, $BH = 9$ cm. Tính MN.
3. Chứng minh MN là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1) và (O_2).
4. Chứng minh $CE = CF = CH$.

Giải:



1. Chứng minh $CMHN$ là hình chữ nhật:

Ta có: $\widehat{AMH} = \widehat{ACB} = \widehat{HNB} = 90^o$ (các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow \widehat{MCN} = \widehat{CMH} = \widehat{CNH} = 90^o$

$\Rightarrow CMHN$ là hình chữ nhật.

2. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ACB:

$CH^2 = AH.HB = 4.9 = 36$

Suy ra $CH = 6 \Rightarrow MN = 6\ (cm)$.

3. Gọi I là giao điểm của CH và MN. Theo tính chất hình chữ nhật:

$IM = IN = IC = IH \Rightarrow \Delta IMH$ cân tại I $\Rightarrow \widehat{IMH} = \widehat{IHM}$

Lại có: $O_2M = O_2H \Rightarrow \widehat{O_2MH} = \widehat{O_2HM}$

$\Rightarrow \widehat{O_2MI} = \widehat{O_2HI} = 90^o$.

Chứng minh tương tự: $\widehat{O_1NI} = 90^o$

Do đó MN là tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2).

4. OC cắt MN tại K, cắt $(O;\ R)$ tại $Q \Rightarrow \widehat{CDQ} = \widehat{CFQ} = 90^o$.

Có $OC = OB = R \Rightarrow \widehat{OCB} = \widehat{OBC}$

Mà $O_2M = O_2B = R_2 \Rightarrow \widehat{O_2MB} = \widehat{OBN} \Rightarrow \widehat{O_2MB} = \widehat{OCB}$

$\Rightarrow O_2M \,//\, OC \Rightarrow OC \perp MN$ tại K.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông FCQ: $CF^2 = CK.CQ$ (1)

Có $\Delta CKI \,\#\, \Delta CDQ\ (g.g) \Rightarrow CK.CQ = CI.CD$ (2)

Mà $OH \perp CD \Rightarrow HC = HD$

Do đó $CI.CD = \dfrac{1}{2}CH.2CH = CH^2$ (3)

Từ (1); (2) và (3) $\Rightarrow CF^2 = CH^2 \Rightarrow CF = CH$

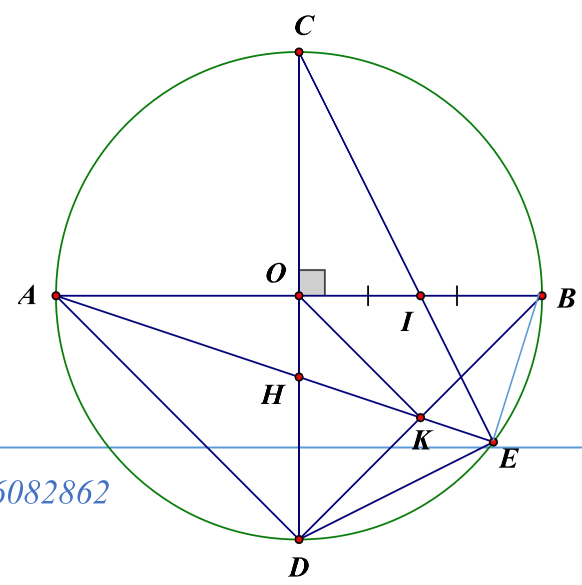
Có $OK \perp EF \Rightarrow KE = KF \Rightarrow \Delta CEF$ cân tại $C \Rightarrow CE = CF$.

Vậy $CE = CF = CH$.

Câu 37. Cho đường tròn $(O;R)$ có hai đường kính vuông góc AB và CD. Gọi I là trung điểm của OB. Tia CI cắt đường tròn $(O;\ R)$ tại E. Nối AE cắt CD tại H; nối BD cắt AE tại K.

1. Chứng minh tứ giác $OIED$ nội tiếp.
2. Chứng minh $AH.AE = 2R^2$.
3. Tính $\tan \widehat{BAE}$.
4. Chứng minh OK vuông góc với BD.

Giải:



1. Ta có CD là đường kính của đường tròn (O; R) nên $\widehat{CED} = 90^o$

Theo giả thiết $\widehat{BOD} = 90^o$

Do đó: $\widehat{IED} + \widehat{IOD} = 180^o$

Suy ra tứ giác $OIED$ là tứ giác nội tiếp.

2. $\Delta AOH \,\#\, \Delta AEB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AO}{AE} = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AE.AH = AO.AB = 2R^2$

3. Ta có: $\widehat{BEC}=\dfrac{1}{2}\widehat{BOC}=45^o$

$\widehat{AEC}=\dfrac{1}{2}\widehat{AOC}=45^o$

Suy ra EI là phân giác $\widehat{AEB}$

Do đó $\Rightarrow \dfrac{EB}{EA}=\dfrac{IB}{IA}=\dfrac{1}{3}$

Vậy $\tan\widehat{BAE}=\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{1}{3}$

4. Xét ΔOHA vuông tại O, ta có $OH=OA.\tan\widehat{OAH}=\dfrac{OA}{3}=\dfrac{OD}{3}$ vì vậy H là trọng tâm của tam giác DAB.

Do đó AK là đường trung tuyến của tam giác DAB.

Suy ra $KB=KD$. Vì vậy $OK\perp DB$ (quan hệ đường kính – dây cung).

Câu 38. Cho đường tròn tâm O, bán kính R, đường kính AD. Điểm H thuộc đoạn OD. Kẻ dây $BC\perp AD$ tại H. Lấy điểm M thuộc cung nhỏ AC, kẻ $CK\perp AM$ tại K. Đường thẳng BM cắt CK tại N.

1. Chứng minh $AH.AD=AB^2$.
2. Chứng minh tam giác CAN cân tại A.
3. Giả sử H là trung điểm của OD. Tính R theo thể tích hình nón có bán kính đáy là HD, đường cao BH.
4. Tìm vị trí của M để diện tích tam giác ABN lớn nhất.

Giải:

1. Tam giác ABD vuông tại $B, BH\perp AD$ nên $AH.AD=AB^2$.
2. Do $AH\perp BC\Rightarrow HB=HC\Rightarrow\Delta ABC$ cân tại A do đó $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}$.

Mà $\widehat{ACB}=\widehat{AMB}$ nên $\widehat{ABC}=\widehat{AMB}$

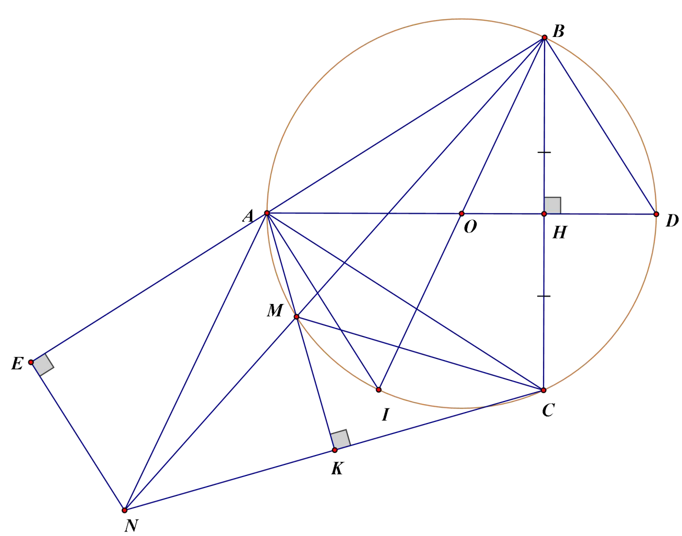
$\Rightarrow\widehat{ABC}=\widehat{KMN}$ (1)

Tứ giác $ABCM$ nội tiếp đường tròn ($O;\ R$

nên $\widehat{ABC}=\widehat{KMC}$ (cùng bù với $\widehat{AMC}$) (2)

Từ (1) và (2)$\Rightarrow\widehat{KMN}=\widehat{KMC}$.

Lại có $MK\perp CN$ (giả thiết) $\Rightarrow\Delta MCN$ cân tại $M\Rightarrow KC=KN$.



Tam giác CAN có $AK \perp CN$ và $KC = KN$ nên ΔACN cân tại A.

3. Khi $OH = HD$, tam giác BOD cân tại $B \Rightarrow BO = BD$, mà $OB = OD = R$ nên tam giác OBD đều $\Rightarrow \widehat{BOH} = 60^o \Rightarrow BH = OB.\sin 60^o = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích hình nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi.r^2.h$

Trong đó: $r = HD = \dfrac{R}{2}, h = BH = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V = \dfrac{1}{3}\pi\cdot\dfrac{R^2}{4}\cdot\dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi R^3\sqrt{3}}{2}$.

4. Hạ $NE \perp AB$. Vì AB không đổi nên S_{ABN} lớn nhất khi NE lớn nhất.

Ta có: $AN = AC$ không đổi.

Mà $NE \le NA$, dấu bằng xảy ra khi $E \equiv A$. Lấy I đối xứng với B qua O. Khi $E \equiv A$ thì $\widehat{NAB} = 90^o$ do đó NA đi qua I.

Mặt khác AM là phân giác của $\widehat{NAC}$ nên M là điểm chính giữa của cung nhỏ IC.

Vậy điểm M cần tìm là điểm chính giữa cung nhỏ IC.

Câu 39. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính BC. Điểm A thuộc nửa đường tròn $(AC \le AB)$. Dựng về phía ngoài ΔABC một hình vuông $ACED$. Tia EA cắt nửa đường tròn tại F. Nối BF cắt ED tại K.

1. Chứng minh rằng 4 điểm B, C, D, K thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh $AB = EK$.
3. Cho $\widehat{ABC} = 30^o; BC = 10cm$. Tính diện tích hình viên phần giới hạn bởi dây AC và cung nhỏ AC.
4. Tìm vị trí điểm A để chu vi tam giác ΔABC lớn nhất.

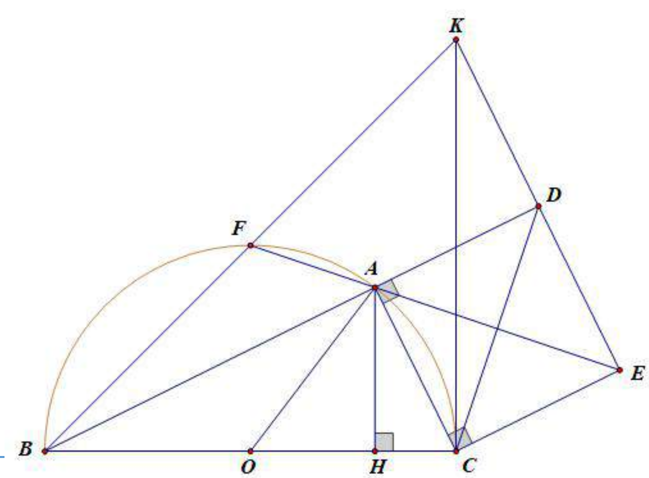
Giải:

1. $ACED$ là hình vuông $\Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{CDE} = 45^o$

Tứ giác $BCAF$ nội tiếp đường tròn $(O) \Rightarrow \widehat{FBC} = \widehat{CAE}$ (cùng bù với góc $\widehat{CAF}$)

$\Rightarrow \widehat{FBC} = \widehat{CDE} \Rightarrow \widehat{FBC} + \widehat{CDK} = 180^o$

$\Rightarrow BCDK$ là tứ giác nội tiếp.



2. Có: $\widehat{BAC} = 90^o = \widehat{CEK}$.

Mà tứ giác $BCDK$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{CKD} \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{ECK}$.
Lại có: $AC = CE$ (cạnh hình vuông)
Suy ra $\Delta ABC = \Delta EKC$ (cạnh góc vuông – góc nhọn) $\Rightarrow AB = EK$

3. Vì $\widehat{ABC} = 30^o$ nên $\widehat{AOC} = 60^o$, do đó tam giác OAC là tam giác đều.

Kẻ $AH \perp BC$, ta có $AH = OA.\sin 60^o = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Gọi diện tích hình viên phân là S, ta có: $S = S_{quat\ AOC} - S_{AOC}$

$$S = \frac{60^o}{360^o}.\pi.R^2 - \frac{1}{2}OC.AH$$
$$= \frac{\pi R^2}{6} - \frac{\sqrt{3}R^2}{4} = R^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{25(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}\,(cm^2).$$

4. Chu vi ΔABC lớn nhất $\Leftrightarrow AB + AC$ lớn nhất. Áp dụng BĐT $2(x^2 + y^2) \ge (x+y)^2$

   Ta có: $(AB + AC)^2 \le 2(AB^2 + AC^2) = 2BC^2 = 8R^2 \Rightarrow AB + AC \le 2\sqrt{2}R$.

Dấu "=" xảy ra khi $AB = AC \Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa nửa đường tròn đường kính BC.

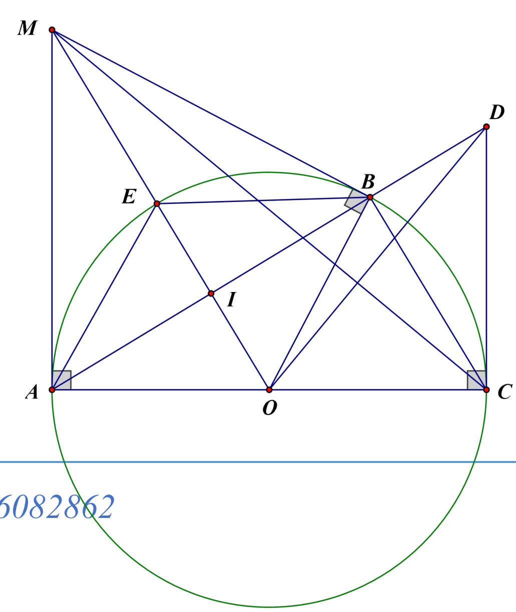
Câu 40. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AC cố định. Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn tại A. Lấy M thuộc Ax, kẻ tiếp tuyến MB với đường tròn tại B (B khác A). Tiếp tuyến của đường tròn tại C cắt AB tại D. Nối OM cắt AB tại I, cắt cung nhỏ AB tại E.

1. Chứng minh $OIDC$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh tích $AB.AD$ không đổi khi M di chuyển trên Ax.
3. Tìm vị trí điểm M trên Ax để $AOBE$ là hình thoi.
4. Chứng minh $OD \perp MC$.

Giải:

1. Có $MA = MB; OA = OB = R$ nên OM là trung trực của AB nên $OI \perp AB$ và $IA = IB$

Lại có $OC \perp CD$ nên $\widehat{OID} + \widehat{OCD} = 180^o \Rightarrow OIDC$ là tứ giác nội tiếp.



2. Có $\widehat{ABC} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Mà ΔACD vuông tại C nên $AB.AD = AC^2$ không đổi.

3. $AOBE$ là hình thoi

   $\Leftrightarrow AE = EB = BO = OA \Leftrightarrow \Delta AOE$ đều

$\Leftrightarrow \widehat{AOE} = 60^o$

ΔAOM vuông tại A nên $AM = OA.\tan 60^o = R\sqrt{3}$.

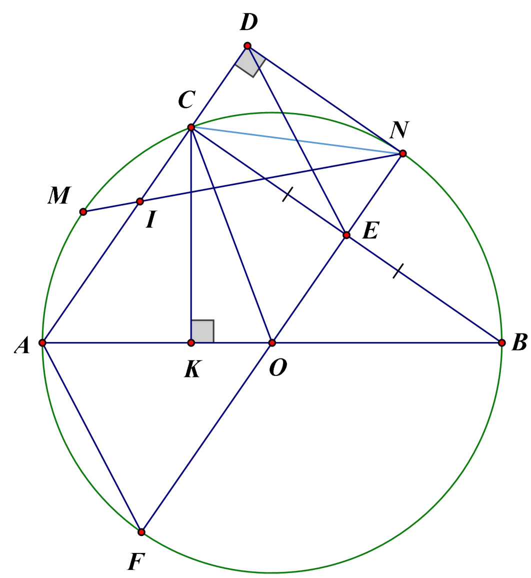
4. $\widehat{AMO} = \widehat{BAC}$ (cùng phụ với $\widehat{MAB}$), $\widehat{MAO} = \widehat{OCD} = 90^o$

Nên $\Delta AMO \# \Delta CAD(g.g) \Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AO}{CD}$

Mà $OA = OC = R$, suy ra $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{OC}{CD} \Rightarrow \tan \widehat{MCA} = \tan \widehat{ODC}$

$\Rightarrow \widehat{MCA} = \widehat{ODC} \Rightarrow \widehat{ODC} + \widehat{MCD} = 90^o$. Do đó $OD \perp MC$.

Câu 41. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn. Gọi M và N là điểm chính giữa các cung nhỏ AC và BC. Nối MN cắt AC tại I. Hạ $ND \perp AC$. Gọi E là trung điểm BC. Dựng hình bình hành $ADEF$.



1. Tính $\widehat{MIC}$.
2. Chứng minh DN là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$.
3. Chứng minh rằng F thuộc đường tròn $(O;R)$.
4. Cho $\widehat{CAB} = 30^o; R = 30cm$. Tính thể tích hình tạo thành khi cho ΔABC quay một vòng quanh AB.

Giải:

1. $\widehat{MIA} = \dfrac{1}{2}(sđ\,\overset{\frown}{MA} + sđ\,\overset{\frown}{CN}) = \dfrac{1}{4}sđ\,\overset{\frown}{AB} = 45^o \Rightarrow \widehat{MIC} = 135^o$

2. Có: $\overset{\frown}{NC} = \overset{\frown}{NB} \Rightarrow ON \perp BC$ tại E.

Lại có: $\widehat{ACB} = 90^o \Rightarrow \widehat{DCE} = 90^o$.

Mà $ND \perp CD\ (gt) \Rightarrow CEND$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow DN \perp ON$ tại $N \Rightarrow DN$ là tiếp tuyến của (O).

3. Theo tính chất hình chữ nhật ta có: $\widehat{EDC} = \widehat{NCD}$

Mà $\widehat{EDC} = \widehat{F} \Rightarrow \widehat{F} = \widehat{DNC} \Rightarrow \widehat{F} + \widehat{ACN} = 180^o$. $ON // AC$ (cùng $\perp CB$)

$\Rightarrow N, E, O, F$ thẳng hàng. Suy ra $ACNF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow F \in (O)$

4. Hạ $CK \perp AB$. Tam giác ABC có $\widehat{A} = 30^o, \widehat{C} = 90^o$ nên $\widehat{B} = 60^o$

Do đó, ΔOBC là tam giác đều $\Rightarrow BK = KO = \dfrac{R}{2};\ BC = R;\ CK = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Khi quay ΔABC một vòng quanh AB có hai hình nón tạo thành: hình nón đỉnh A, và hình nón đỉnh B cùng có tâm hình tròn đáy là K, bán kính CK.

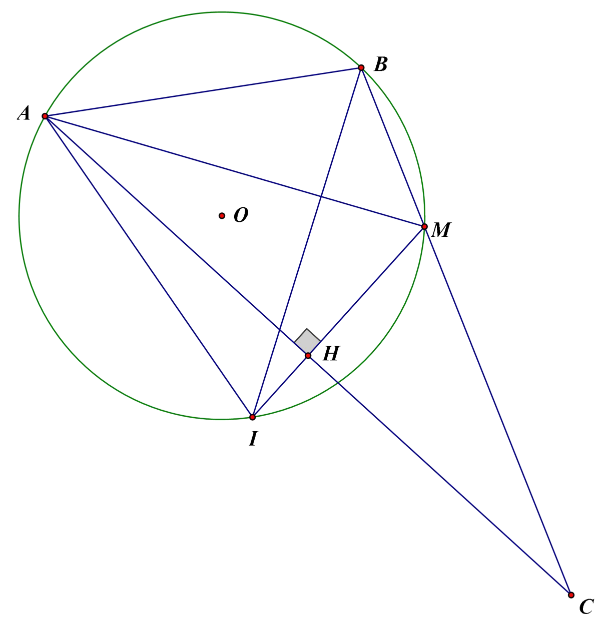
Gọi thể tích tạo thành là V, ta có:

$$V = \frac{1}{3}\pi.CK^2.AK + \frac{1}{3}\pi.CK^2.BK = \frac{1}{3}\pi.CK^2(AK + BK)$$

$$= \frac{1}{3}\pi.CK^2.AB = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{3R^2}{4}\cdot 2R = \frac{\pi R^3}{2} = 500\pi\ (cm^3)$$

Câu 42. Cho đường tròn $(O;R)$ với dây AB cố định. Gọi I là điểm chính giữa cung lớn AB. Điểm M thuộc cung nhỏ IB. Hạ $AH \perp IM; AH$ cắt BM tại C.

1. Chứng minh ΔIAB và ΔMAC là tam giác cân.
2. Chứng minh C thuộc một đường tròn cố định khi M chuyển động trên cung nhỏ IB.
3. Tìm vị trí của M để chu vi ΔMAC lớn nhất.



Giải:

1. Vì $\overset{\frown}{IA} = \overset{\frown}{IB} \Rightarrow IA = IB \Rightarrow \Delta IAB$ cân tại I.

Tứ giác $ABMI$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{IMC}$ (cùng bù với $\widehat{IMB}$)

Ta có:

$\widehat{IAB} = \widehat{IBA}; \widehat{IBA} = \widehat{IMA}; \widehat{IAB} = \widehat{IMC} \Rightarrow \widehat{IMA} = \widehat{IMC}$

Lại có: $MH \perp AC \Rightarrow \Delta MAC$ cân tại M.

2. Từ chứng minh trên $\Rightarrow MI$ là đường trung trực của AC

$\Rightarrow IC = IA$ không đổi $\Rightarrow C$ thuộc đường tròn $(I; IA)$

3. Chu vi $\Delta MAC = MA + MC + AC = 2(MA + AH)$

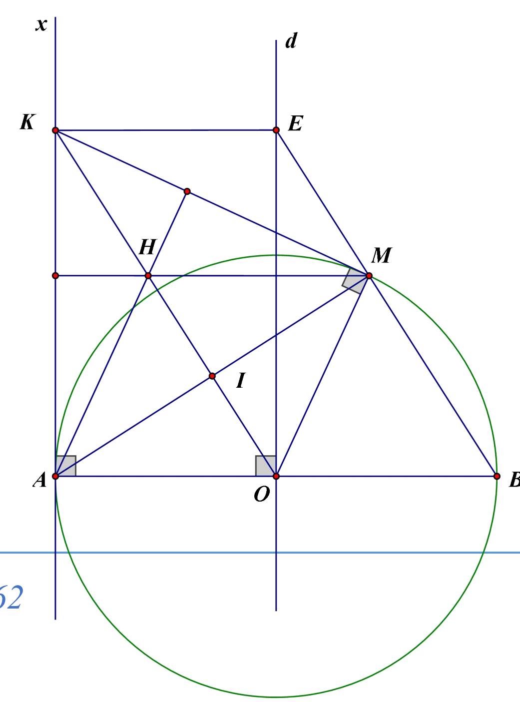
Có $\widehat{HMA} = \widehat{IBA}$ (không đổi và $\widehat{IBA} < 90^o$)

Đặt $\widehat{HMA} = \widehat{IAB} = \alpha$. Ta có: $AH = MA.\sin\alpha$

Vậy chu vi $\Delta MAC = 2MA(1 + \sin\alpha)$

Chu vi ΔMAC lớn nhất khi MA lớn nhất $\Leftrightarrow A, O, M$ thẳng hàng.

Câu 43. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn. Trên Ax lấy điểm $K\,(AK \geq R)$. Qua K kẻ tiếp tuyến KM với đường tròn (O). Đường thẳng $d \perp AB$ tại O, d cắt



MB tại E.

1. Chứng minh $KAOM$ là tứ giác nội tiếp;
2. OK cắt AM tại I. Chứng minh $OI.OK$ không đổi khi K chuyển động trên Ax;
3. Chứng minh $KAOE$ là hình chữ nhật;
4. Gọi H là trực tâm của ΔKMA. Chứng minh rằng khi K chuyển động trên Ax thì H thuộc một đường tròn cố định.

Giải:

1. $\widehat{KAO} = \widehat{KMO} = 90^o \Rightarrow KAOM$ nội tiếp.
2. Theo tính chất tiếp tuyến: $KA = KM$

KO là phân giác của $\widehat{AKM} \Rightarrow KO \perp AM$ tại I

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào tam giác vuông AOK ta có

$OI.OK = OA^2 = R^2$

3. Có $OK \,//\, BM$ (cùng $\perp AM$) $\Rightarrow \widehat{KOA} = \widehat{EBO}$.

Mà $OA = OB = R$; $\widehat{KAO} = \widehat{EOB} = 90^o$

$\Rightarrow \Delta AKO = \Delta OEB$ $(c.g.c)$

$\Rightarrow AK = OE$, mà $AK \,//\, OE$, $\widehat{KAO} = 90^o$

$\Rightarrow AKEO$ là hình chữ nhật.

4. H là trực tâm của $\Delta KMA \Rightarrow AH \perp KM, MH \perp KA \Rightarrow AH \,//\, OM, MH \,//\, OA$.

Do đó $AOMH$ là hình bình hành $\Rightarrow AH = OM = R$.

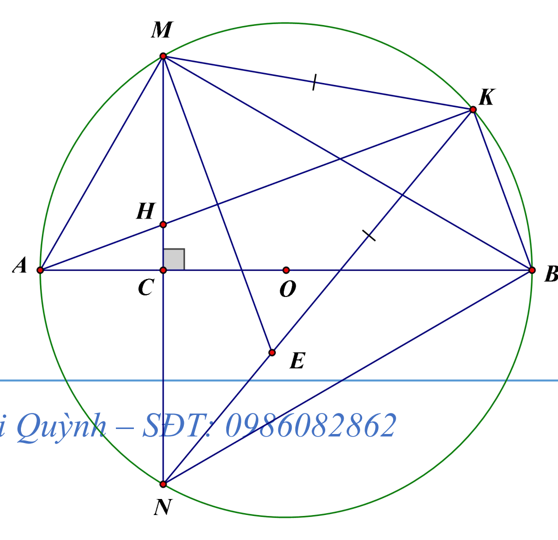
Vậy H thuộc đường tròn $(A; R)$.

Câu 44. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Gọi C là trung điểm của OA. Dây $MN \perp AB$ tại C. Trên cung MB nhỏ lấy điểm K. Nối AK cắt NM tại H.

1. Chứng minh $BCHK$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh tích $AH.AK$ không đổi khi K chuyển động trên cung nhỏ MB.
3. Chứng minh ΔBMN là tam giác đều.
4. Tìm vị trí điểm K để tổng $KM + KN + KB$ lớn nhất.

Giải:

1. Có



$\widehat{BKA}=90^o$; $\widehat{MCB}=90^o \Rightarrow \widehat{HCB}+\widehat{HKB}=180^o$ nên tứ giác $BCHK$ là tứ giác nội tiếp.

2. $\Delta ACH \# \Delta AKB(g.g) \Rightarrow \dfrac{AC}{AK}=\dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AH.AK=AB.AC=R^2$

3. Vì $OC \perp MN \Rightarrow CM=CN \Rightarrow \Delta BMN$ cân tại B.

ΔMAB vuông tại M $\Rightarrow AM^2=AC.AB=R^2$

$\Rightarrow AM=R$. Do đó $\sin\widehat{MBA}=\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MAB}=30^o$

Mà $\widehat{MCB}=\widehat{NCB}$ (tính chất tam giác cân) $\Rightarrow \widehat{MNB}=60^o$

Do đó ΔMNB là tam giác đều.

4. Trên KN lấy E sao cho $KE=KM$

Vì tam giác BMN đều nên $\widehat{MBN}=60^o \Rightarrow \widehat{MKN}=60^o \Rightarrow \Delta KME$ đều.

Do đó $ME=MK$ và $\widehat{KME}=60^o$.

Lại có: $MB=MN$ và $\widehat{KMB}=\widehat{EMN}$ (cùng cộng với $\widehat{BME}=60^o$)

$\Rightarrow \Delta KMB=\Delta EMN\ (c.g.c) \Rightarrow KB=EN.$

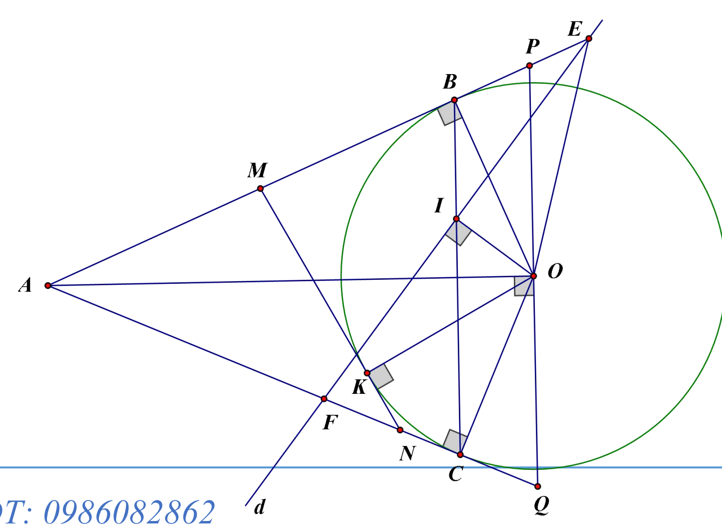
Từ đó $KM+KB=KN \Rightarrow S=KM+KN+KB=2KN$

S lớn nhất $\Leftrightarrow KN$ lớn nhất $\Leftrightarrow K, O, N$ thẳng hàng.

Câu 45. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A ở ngoài đường tròn. Qua A kẻ 2 tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (B và C là 2 tiếp điểm). I là một điểm thuộc đoạn BC $(IB<IC)$. Kẻ đường thẳng $d \perp OI$ tại I. Đường thẳng d cắt AB, AC lần lượt tại E và F.

1. Chứng minh $OIBE$ và $OIFC$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh I là trung điểm EF.
3. K là một điểm trên cung nhỏ BC. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại K cắt AB; AC tại M và N. Tính chu vi ΔAMN nếu $OA=2R$.
4. Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt AB, AC tại P và Q . Tìm vị trí của A để S_{APQ} nhỏ nhất.

Giải :



1. Có $OB \perp AB, OC \perp AC$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow \widehat{OIE}=\widehat{OBE}=90^o \Rightarrow OIBE$ nội tiếp

$\widehat{OIF}+\widehat{OCF}=180^o \Rightarrow OIFC$ nội tiếp.

2. Tứ giác $OIBE$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{OEI} = \widehat{OBI}$. Tương tự $\widehat{OFI} = \widehat{OCI}$. Mà $OB = OC = R$

$\Rightarrow \widehat{OBI} = \widehat{OCI} \Rightarrow \widehat{OEI} = \widehat{OFI}$

$\Rightarrow \Delta OEF$ cân tại O. Mà $OI \perp EF \Rightarrow IE = IF$ (Đpcm)

3. Có $MK = MB$, $NK = NC$

Suy ra chu vi $\Delta AMN = AC + AB = 2AC = 2\sqrt{AO^2 - OC^2} = 2\sqrt{3R^2} = 2R\sqrt{3}$

4. Có AO là phân giác của $\widehat{PAQ}$, $PQ \perp AO \Rightarrow \Delta APQ$ cân tại $A \Rightarrow S_{APQ} = 2S_{AOQ}$

$S_{APQ} = AQ.OC$ mà $OC = R$ không đổi, do đó S_{APQ} nhỏ nhất $\Leftrightarrow AQ$ nhỏ nhất.

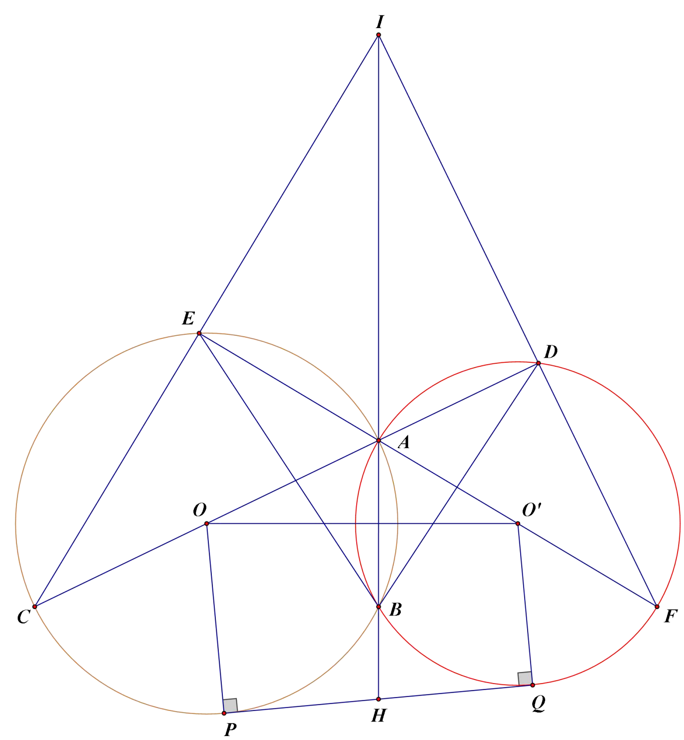
ΔOAQ vuông tại O $\Rightarrow AC.CQ = OC^2 = R^2$.

Mà $AQ = AC + CQ \geq 2\sqrt{AC.CQ} = 2R$, dấu "=" xảy ra khi $AC = CQ$

S_{APQ} min $\Leftrightarrow AC = CQ \Leftrightarrow \Delta OQA$ vuông cân tại $O \Leftrightarrow \widehat{A} = 45^o \Leftrightarrow OA = R\sqrt{2}$

Câu 46. Cho 2 đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B phân biệt. Đường thẳng OA cắt $(O);(O')$ lần lượt tại điểm thứ hai C, D. Đường thẳng $O'A$ cắt $(O);(O')$ lần lượt tại điểm thứ hai E, F.

1. Chứng minh 3 đường thẳng AB, CE và DF đồng quy tại một điểm I.
2. Chứng minh tứ giác $BEIF$ nội tiếp được trong một đường tròn.
3. Cho PQ là tiếp tuyến chung của (O) và $(O')\left(P \in (O), Q \in (O')\right)$. Chứng minh đường thẳng AB đi qua trung điểm của đoạn thẳng PQ.



Giải:

1. Ta có: $\widehat{ABC} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{ABF} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên B, C, F thẳng hàng.

Có $AB; CE$ và DF là 3 đường cao của ΔACF nên chúng đồng quy.

2. Do $\widehat{IEF} = \widehat{IBF} = 90^o$ suy ra $BEIF$ nội tiếp đường tròn.
3. Gọi H là giao điểm của AB và PQ

Ta chứng minh được $\Delta AHP\# \Delta PHB \Rightarrow \dfrac{HP}{HB}=\dfrac{HA}{HP} \Rightarrow HP^2 = HA.HB$

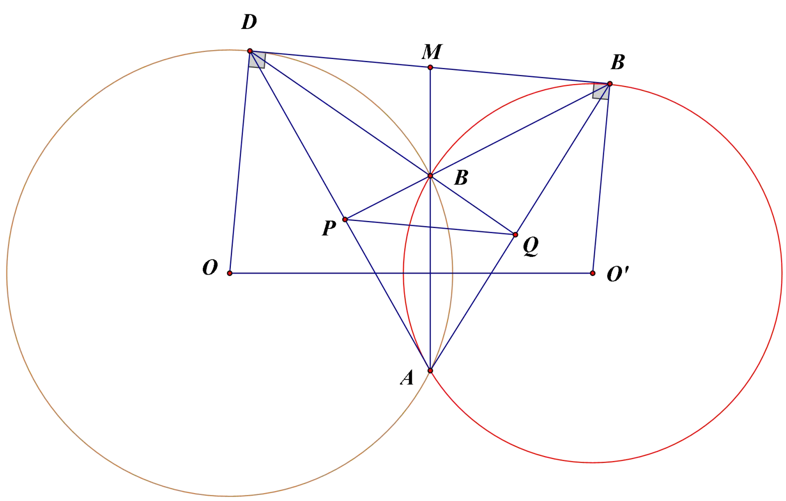
Tương tự, $HQ^2 = HA.HB$

Vậy $HP = HQ$ hay H là trung điểm của PQ.

Câu 47. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ với $R > R'$ cắt nhau tại A và B. Kẻ tiếp tuyến chung DE của hai đường tròn với $D \in (O)$ và $E \in (O')$ sao cho B gần tiếp tuyến đó hơn so với A.

1. Chứng minh rằng $\widehat{DAB} = \widehat{BDE}$.
2. Tia AB cắt DE tại M. Chứng minh M là trung điểm của DE.
3. Đường thẳng EB cắt DA tại P, đường thẳng DB cắt AE tại Q. Chứng minh rằng PQ song song với AB.

Giải:



1. Ta có $\widehat{DAB} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{DB}$ (góc nội tiếp)

$\widehat{BDE} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{DB}$ (góc giữa tiếp tuyến và dây cung).

Suy ra $\widehat{DAB} = \widehat{BDE}$.

2. Xét ΔDMB và ΔAMD có:

$\widehat{DMA}$ chung,

$\widehat{DAM} = \widehat{BDM}$

Nên $\Delta DMB \# \Delta AMD$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MD}{MB} = \dfrac{MA}{MD}$ hay $MD^2 = MA.MB$.

Tương tự ta cũng có: $\Delta EMB \# \ \Delta AME \Rightarrow \dfrac{ME}{MB} = \dfrac{MA}{ME}$ hay $ME^2 = MA.MB$.

Từ đó: $MD = ME$ hay M là trung điểm của DE.

3. Ta có $\widehat{DAB} = \widehat{BDM}$, $\widehat{EAB} = \widehat{BEM}$

$\Rightarrow \widehat{PAQ} + \widehat{PBQ} = \widehat{DAB} + \widehat{EAB} + \widehat{PBQ} = \widehat{BDM} + \widehat{BEM} + \widehat{DBE} = 180^o$

$\Rightarrow$ Tứ giác $APBQ$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PQB} = \widehat{PAB}$.

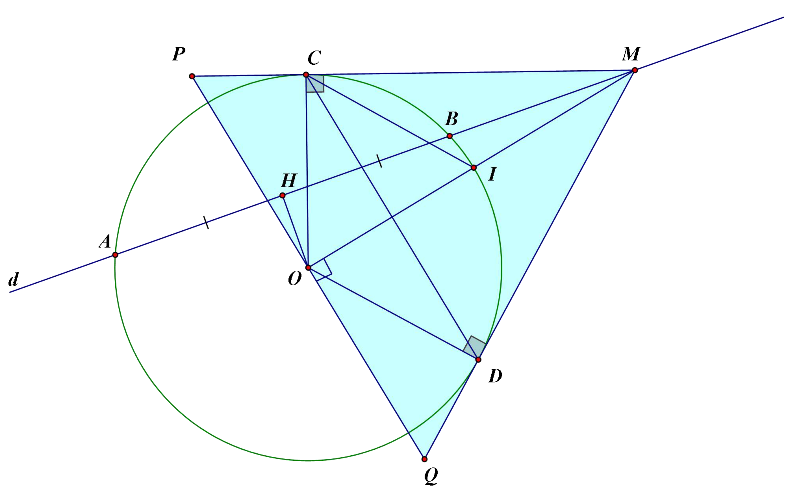
Kết hợp với $\widehat{PAB} = \widehat{BDM}$ suy ra $\widehat{PQB} = \widehat{BDM}$.

Hai góc này ở vị trí so le trong nên PQ song song với AB.

Câu 48. Cho đường trong $(O;R)$ và đường thẳng d không qua O cắt đường tròn tại hai điểm A, B. Lấy một điểm M trên tia đối của tia BA kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn (C, D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB;

1. Chứng minh rằng các điểm M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.
2. Đoạn OM cắt đường tròn tại I. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD.
3. Đường thẳng qua O, vuông góc với OM cắt các tia MC, MD thứ tự tại P và Q. Tìm vị trí của điểm M trên d sao cho diện tích tam giác MPQ bé nhất.

Giải:



1. Vì H là trung điểm của AB nên $OH \perp AB$ hay $\widehat{OHM} = 90^o$.

Theo tính chất của tiếp tuyến ta lại có $OD \perp DM$ hay $\widehat{ODM} = 90^o$.

Suy ra các điểm M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

2. Theo tính chất tiếp tuyến, ta có $MC = MD \Rightarrow \Delta MCD$ cân tại M

$\Rightarrow$ MI là một đường phân giác của $\widehat{CMD}$.

Mặt khác I là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{CD}$ nên $\widehat{DCI} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{DI} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{CI} = \widehat{MCI}$

$\Rightarrow$ CI là phân giác của $\widehat{MCD}$. Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp ΔMCD.

3. Ta có ΔMPQ cân ở M, có MO là đường cao nên diện tích của nó được tính:

$$S = 2S_{OQM} = 2.\frac{1}{2}.OD.QM = R(MD + DQ).$$

Từ đó S nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $MD + DQ$ nhỏ nhất.

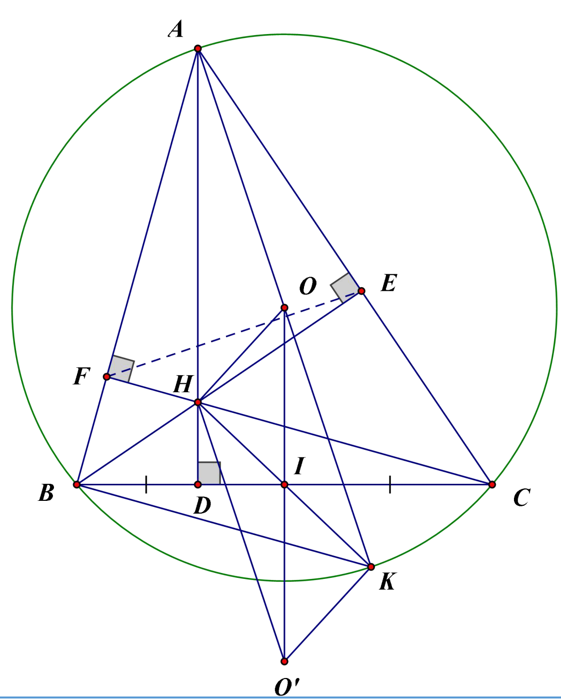
Mặt khác, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông OMQ ta có $DM.DQ = OD^2 = R^2$ không đổi nên $MD + DQ$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $DM = DQ = R$.

Khi đó $OM = R\sqrt{2}$ hay M là giao điểm của d với đường tròn tâm O bán kính $R\sqrt{2}$.

Câu 49. Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Ba đường cao $AD; BE; CF$ cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm BC, vẽ đường kính AK.

1. Chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng.
2. Chứng minh $DA.DH = DB.DC$.
3. Cho $\widehat{BAC} = 60^0; S_{ABC} = 20cm^2$. Tính S_{ABC}.
4. Cho BC cố định; A chuyển động trên cung lớn BC sao cho ΔABC có ba góc nhọn. Chứng minh điểm H luôn thuộc một đường tròn cố định.

Giải:



1. Vì B và C thuộc đường tròn đường kính AK: $\widehat{ABK} = \widehat{ACK} = 90^o$

Do đó $BH // CK$ và $CH // BK$ $\Rightarrow BHCK$ là hình bình hành

Mà I là trung điểm BC nên I là trung điểm của HK

Suy ra $H; I; K$ thẳng hàng.

2. Ta có $\widehat{HBD} = \widehat{DAC}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$) nên $\Delta DBH \# \Delta DAC(g.g)$

Suy ra $\frac{DB}{DA} = \frac{HD}{DC} \Rightarrow DB.DC = DA.DH$.

3. Vì $\widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90^o \Rightarrow \Delta AEB \# \Delta AFC(g.g)$

Suy ra $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$; $\widehat{BAC}$ chung

$\Rightarrow \Delta AEF \# \Delta ABC(c.g.c)$

Do đó $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{AE}{AF}\right)^2$

Mà $\dfrac{AE}{AB} = cos\widehat{BAC} = cos60^o = \dfrac{1}{2}$

Suy ra $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow S_{ABC} = 4S_{AEF} = 80cm^2$.

4. Lấy *O'* đối xứng với *O* qua *I* suy ra *O'* cố định.
Ta có $IH = IK; OK = OA = R$ nên OI là đường trung bình của ΔKHA

Do đó $OI // AH$ và $OI = \dfrac{1}{2}AH$

Suy ra $OO' // AH, OO' = AH$ nên $OO'HA$ là hình bình hành

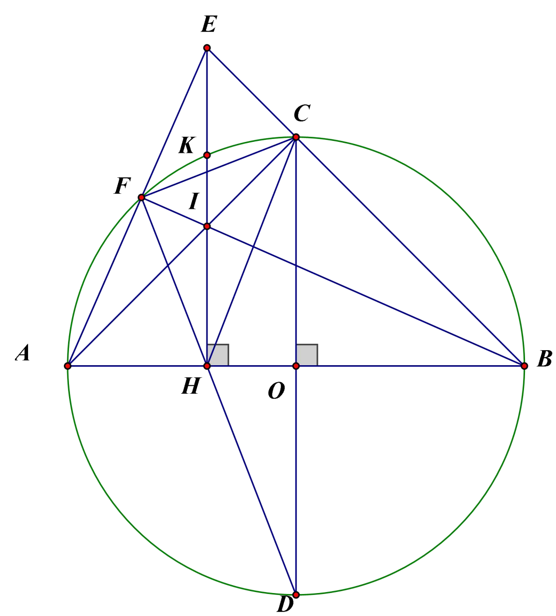
Do đó $O'H = OA = R$ (không đổi)

Vậy *H* thuộc đường tròn (*O';R*) cố định.

Câu 50. Cho đường tròn (*O; R*) có hai đường kính vuông góc là *AB* và *CD*. Lấy *K* thuộc cung nhỏ *AC*, kẻ $KH \perp AB$ tại *H*. Nối *AC* cắt *HK* tại *I*, tia *BC* cắt *HK* tại *E*; nối *AE* cắt đường tròn (*O;R*) tại *F*.

1. Chứng minh *BHFE* là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh *EC.EB = EF.EA*.
3. Cho *H* là trung điểm *OA*. Tính theo *R* diện tích ΔCEF.
4. Cho *K* di chuyển trên cung nhỏ *AC*. Chứng minh đường thẳng *FH* luôn đi qua một điểm cố định.

Giải:



1. Do *F* thuộc đường tròn đường kính *AB* nên $\widehat{AFB} = 90^o$

Suy ra $\widehat{BFE} = \widehat{BHE} = 90^o \Rightarrow BHFE$ là tứ giác nội tiếp.

2. Có $\widehat{ECA} = \widehat{EFB} = 90^o; \widehat{AEC}$ chung

Nên

$\Delta ECA \# \Delta EFB(g.g) \Rightarrow \dfrac{EC}{EF} = \dfrac{EA}{EB} \Rightarrow EC.EB = EA.EF.$

3. Từ chứng minh trên suy ra *AC, BF, EH* là 3 đường cao của ΔEAB nên chúng cắt nhau tại I.

Do đó $\dfrac{EC}{EF} = \dfrac{EA}{EB}$ và $\widehat{AEB}$ chung nên $\Delta ECF \# \Delta EAB$

(cạnh – góc – cạnh)

$\frac{S_{ECF}}{S_{EAB}} = \left(\frac{EC}{EA}\right)^2$ (1)

Vì $OB = OC = R$ nên ΔOBC vuông cân tại $O \Rightarrow \widehat{OBC} = 45^o$.

Do đó ΔHBE vuông cân tại $H \Rightarrow EH = HB = \frac{3R}{2}$.

Mà $AH = \frac{R}{2}$ nên $AE^2 = AH^2 + HE^2 = \frac{R^2}{4} + \frac{9R^2}{4} = \frac{10R^2}{4} \Rightarrow AE = \frac{R\sqrt{10}}{2}$

Tương tự $BE^2 = HB^2 + HE^2 = \frac{9R^2}{2} \Rightarrow BE = \frac{3R}{\sqrt{2}}$

Lại có: $OC // EH$ (cùng $\perp AB$) nên $\frac{EC}{EB} = \frac{HO}{HB} = \frac{1}{3} \Rightarrow EC = \frac{1}{3}EB = \frac{R}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \left(\frac{EC}{EA}\right)^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow S_{ECF} = \frac{1}{5}S_{EAB} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot EH \cdot AB = \frac{3R^2}{10}$

4. Các tứ giác $BEFH$ và $AHCE$ nội tiếp nên $\widehat{AEB} = \widehat{CHB}; \widehat{AEB} = \widehat{AHF} \Rightarrow \widehat{AHF} = \widehat{CHB}$

Suy ra $\widehat{AHF} = \widehat{DHB}$.

Có $HO \perp OC, OC = OD$ nên ΔHCD cân tại H nên $\widehat{AHF} = \widehat{DHB}$

Do đó $\widehat{AHF} = \widehat{DHB}$ mà $\widehat{AHF} + \widehat{FHB} = 180^o \Rightarrow \widehat{DHB} + \widehat{FHB} = 180^o$

Suy ra *F; H; D* thẳng hàng. Suy ra *FH* đi qua *D* cố định.

Xem tiếp tài liệu tại: https://vndoc.com/tai-lieu-hoc-tap-lop-9