PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TP BẮC GIANG

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VĂN HÓA CẤP THÀNH PHỐ
NĂM HỌC 2017-2018
MÔN THI: TOÁN 8
Thời gian: 150 phút không kể thời gian giao đề

Bài 1: (5,0 điểm)

1. Cho biểu thức $M=\dfrac{x^4+2}{x^6+1}+\dfrac{x^2-1}{x^4-x^2+1}-\dfrac{x^2+3}{x^4+4x^2+3}$
   a) Rút gọn M
   b) Tìm giá trị lớn nhất của M
2. Cho x, y là số hữu tỉ khác 1 thỏa mãn $\dfrac{1-2x}{1-x}+\dfrac{1-2y}{1-y}=1$

Chứng minh $M=x^2+y^2-xy$ là bình phương của một số hữu tỷ.

Bài 2. (4,0 điểm)

1. Tìm số dư trong phép chia $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033$ cho $x^2+12x+30$
2. Cho x, y, z thỏa mãn $x+y+z=7;\quad x^2+y^2+z^2=23;\quad xyz=3$

Tính giá trị của biểu thức $H=\dfrac{1}{xy+z-6}+\dfrac{1}{yz+x-6}+\dfrac{1}{zx+y-6}$

Bài 3. (4,0 điểm)

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $3x^2+3xy-17=7x-2y$
2. Giải phương trình: $(3x-2)(x+1)^2(3x+8)=-16$

Bài 4. (6 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Trên cạnh AB lấy M $(0<MB<MA)$ và trên cạnh BC lấy N sao cho $MON=90^0$. Gọi E là giao điểm của AN với DC, gọi K là giao điểm của ON với BE.

1) Chứng minh ΔMON vuông cân
2) Chứng minh MN song song với BE
3) Chứng minh CK vuông góc với BE
4) Qua K vẽ đường song song với OM cắt BC tại H. Chứng minh:
   $\dfrac{KC}{KB}+\dfrac{KN}{KH}+\dfrac{CN}{BH}=1$

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho $x, y>0$ thỏa mãn $x+2y\ge 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $H=x^2+2y^2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{24}{y}$

vndoc

ĐÁP ÁN

Bài 1.

1.

a)

$$M=\frac{x^4+2}{\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)}+\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}-\frac{x^2+3}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)}$$

$$=\frac{x^4+2}{\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)}+\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^4+2+\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)-\left(x^4-x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)}=\frac{x^4+2+x^4-1-x^4+x^2-1}{\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)}$$

$$=\frac{x^4+x^2}{\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)}=\frac{x^2.\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)}=\frac{x^2}{x^4-x^2+1}$$

Vậy $M=\dfrac{x^2}{x^4-x^2+1}$ với mọi x

b) Ta có : $M=\dfrac{x^2}{x^4-x^2+1}$ với mọi x

- Nếu $x=0$ ta có $M=0$
- Nếu $x\neq 0$, chia cả tử và mẫu của M cho x^2 ta có: $M=\dfrac{1}{x^2+\dfrac{1}{x^2}-1}$

Ta có: $x^2+\dfrac{1}{x^2}-1=\left(x^2-2.x.\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)+1=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+1\geq 1$

Nên ta có: $M=\dfrac{1}{x^2+\dfrac{1}{x^2-1}}\leq 1$. Dấu $"="$ xảy ra khi $x=1$.

Vậy M lớn nhất là $M=1$ khi $x=1$

2.

Ta có $\dfrac{1-2x}{1-x}+\dfrac{1-2y}{1-y}=1\Leftrightarrow(1-2x)(1-y)+(1-2y)(1-x)=(1-x)(1-y)$

$$\Leftrightarrow 1-y-2x+2xy+1-x-2y+2xy=1-x-y+xy\Leftrightarrow x+y=\frac{3xy+1}{2}$$

Ta có : $M=x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy=\left(\dfrac{3xy+1}{2}\right)^2-3xy=...=\left(\dfrac{3xy-1}{2}\right)^2$

vndoc

Vì $x, y \in \mathbb{Q}$ nên $\dfrac{3xy-1}{2}$ là số hữu tỷ , Vậy M là bình phương của một số hữu tỷ.

Bài 2.

1)

Ta có: $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033=....=(x^2+12x+27)(x^2+12x+35)+2033$

Đặt $x^2+12x+30=t$, ta có: $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033=(t-3)(t+5)+2033$

$=t^2+2t-15+2033=t(t+2)+2018$

Vậy ta có $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033=(x^2+12x+30)(x^2+12x+32)+2018$

Vậy số dư trong phép chia $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033$ cho $x^2+12x+30$ là 2018.

2) Vì $x+y+z=7 \Rightarrow z=-x-y+7 \Rightarrow xy+z-6=...=xy-x-y+1=(x-1)(y-1)$

Tương tự ta có: $yz+x-6=(y-1)(z-1); zx+y-6=(z-1)(y-1)$

Vậy $H=\dfrac{1}{(x-1)(y-1)}+\dfrac{1}{(y-1)(z-1)}+\dfrac{1}{(z-1)(x-1)}=\dfrac{z-1+x-1+y-1}{(x-1)(y-1)(z-1)}$

$=\dfrac{(x+y+z)-3}{xyz-(xy+yz+xz)+(x+y+z)-1}=\dfrac{7-3}{3-(xy+yz+xz)+7-1}=\dfrac{4}{9-(xy+yz+xz)}$ Ta có: $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz) \Rightarrow 7^2=23+2(xy+yz+xz)$

$\Rightarrow xy+yz+xz=13$

Vậy $H=\dfrac{4}{9-13}=-1$

Bài 3.

1) Ta có:

$3x^2+3xy-17=7x-2y \Leftrightarrow 3xy+2y=-3x^2+7x+17 \Leftrightarrow (3x+2)y=-3x^2+7x+17$ Vì x nguyên nên $2x+3\neq 0$ nên ta có:

$y=\dfrac{-3x^2+7x+17}{3x+2}=\dfrac{-3x^2-2x+9x+6+11}{2}$

$=\dfrac{-x(3x+2)+3(3x+2)+11}{3x+2}=-x+3+\dfrac{11}{3x+2}$

Vì x, y nguyên nên ta có $\dfrac{11}{3x+2}$ nguyên $\Rightarrow 11 \vdots 3x+2 \Rightarrow 3x+2=\pm 1; \pm 11$

- Xét các trường hợp ta tìm được $x=-1; y=-1; x=-3; y=5$ thỏa mãn và kết luận

2) Ta có: $(3x-2)(x+1)^2(3x+8)=-16 \Leftrightarrow (3x-2)(3x+3)^2(3x+8)=-144$

Đặt $3x+3=t \Rightarrow 3x-2=t-5; 3x+8=t+5$

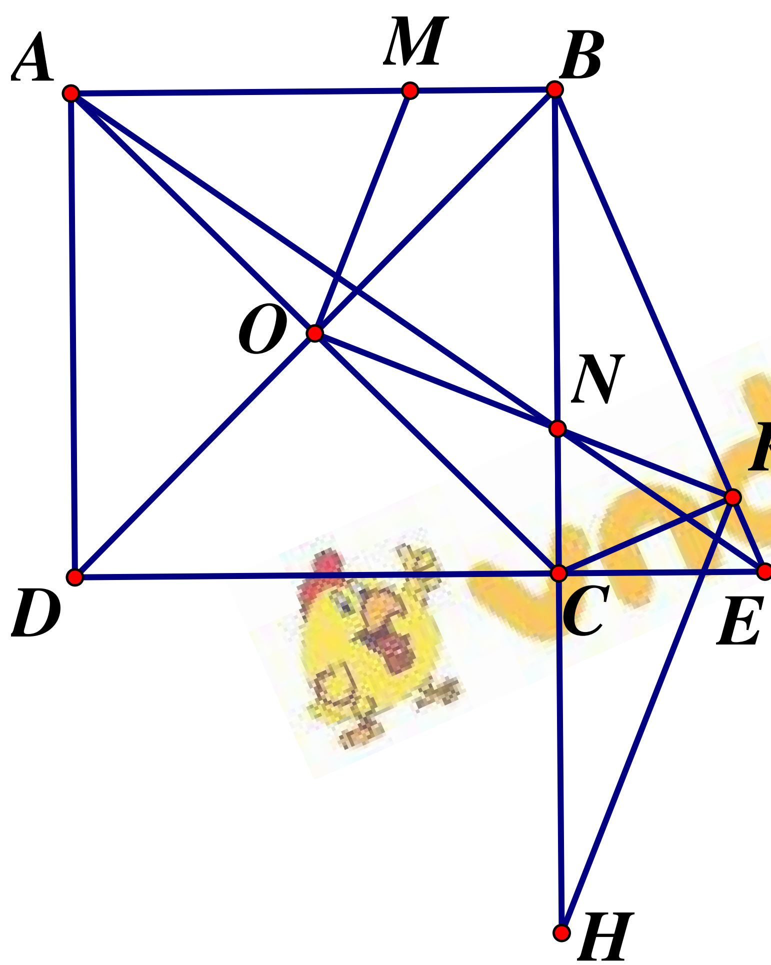
Ta có phương trình: $(t-5)t^2(t+5)=-144$

$\Leftrightarrow t^4-25t^2+144=0 \Leftrightarrow (t^2-9)(t^2-16)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2=9 \\ t^2=16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\pm 3 \\ t=\pm 5 \end{array}\right.$

Xét các trường hợp ta tìm được $x=0; x=-2; x=\frac{2}{3}; x=-\frac{8}{3}$

Bài 4.



1) Ta có : $BOC=90^0 \Rightarrow CON+BON=90^0$; vì

$MON=90^0 \Rightarrow BOM+BON=90^0 \Rightarrow BOM=CON$

Ta có BD là phân giác $ABC \Rightarrow MBO=CBO=\frac{BOC}{2}=45^0$

Tương tự ta có: $NCO = DCO = \dfrac{BOC}{2} = 45^0$. Vậy ta có : $MBO = NCO$

Xét ΔOBM và ΔOCN có $OB = OC; BOM = CON; MBO = NCO$

$\Rightarrow \Delta OBM = \Delta OCN \Rightarrow OM = ON$

Xét ΔMON có $MON = 90^0; OM = ON \Rightarrow \Delta MON$ vuông cân

2) $\Delta OBM = \Delta OCN \Rightarrow MB = NC$ mà $AB = BC \Rightarrow AB - MB = BC - NC$

$\Rightarrow AM = BM \Rightarrow \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{BN}{NC}$

Ta có: $AB // CD \Rightarrow AM // CE \Rightarrow \dfrac{AN}{NE} = \dfrac{BN}{NC}$

Vậy ta có: $\Rightarrow \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{NE} \Rightarrow MN // BE$ (Theo định lý Talet đảo)

3) Vì $MN // BE \Rightarrow BKN = MNO = 45^0$ (đồng vị và có tam giác MON vuông cân)

$\Rightarrow \Delta BNK \sim \Delta ONC$ (vì có $BNK = ONK; BKN = OCN = 45^0$) $\Rightarrow \dfrac{NB}{NK} = \dfrac{NO}{NC}$

- Xét $\Delta BNO; \Delta KNC$ có $BNO = CNK; \dfrac{NB}{NK} = \dfrac{NO}{NC} \Rightarrow \Delta BNO \sim \Delta KNC$

  $\Rightarrow NKC = NBO = 45^0$

  Vậy ta có: $BKC = BKN + CKN = 45^0 + 45^0 = 90^0 \Rightarrow CK \perp BE$

4) – Vì $KH // OM$ mà $MK \perp OK \Rightarrow MK \perp KH \Rightarrow NKH = 90^0$ mà

$NKC = 45^0 \Rightarrow CKH = 45^0 \Rightarrow BKN = NKC = CKH = 45^0$

Xét ΔBKC có $BKN = NKC \Rightarrow KN$ là phân giác trong của ΔBKC, mà $KH \perp KN$

$\Rightarrow KH$ là phân giác ngoài của $\Delta BKC \Rightarrow \dfrac{KC}{KB} = \dfrac{HC}{HB}$

Chứng minh tương tự ta có : $\dfrac{KN}{KH} = \dfrac{BN}{BH}$

Vậy ta có $\dfrac{KC}{KB} + \dfrac{KN}{KH} + \dfrac{NC}{BH} = \dfrac{HC}{HB} + \dfrac{BN}{BH} + \dfrac{CN}{BH} = ... = \dfrac{BH}{BH} = 1$

Bài 5

Ta có: $H = x^2 + 2y^2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{24}{y}$

$= \left(x^2 - 2x + 1\right) + \left(2y^2 - 8y + 8\right) + \left(\dfrac{1}{x} + x - 2\right) + \left(\dfrac{24}{y} + 6y - 24\right) + \left(x + 2y\right) + 17$

$=(x-1)^2+2(y-2)^2+\dfrac{(x-1)^2}{x}+\dfrac{6(y-2)^2}{y}+(x+2y)+17$

$\geq 0+0+0+0+5+17=22$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (x-1)^2=2(y-2)^2=\dfrac{(x-1)^2}{x}=\dfrac{6(y-2)^2}{y}=0$ và $x+2y=5$

$\Leftrightarrow x=1$ và $y=2$. Vậy H nhỏ nhất là $H=22 \Leftrightarrow x=1, y=2$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BẮC GIANG	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VĂN HÓA CẤP TỈNH NĂM HỌC 2012-2013**
	MÔN: TOÁN LỚP 8
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	**Ngày thi: 30/3/2013**

Câu 1. (4,5 điểm)

1) Phân tích biểu thức sau thành nhân tử: $P=2a^3+7a^2b+7ab^2+2b^3$
2) Cho $x^2+x=1$. Tính giá trị biểu thức $Q=x^6+2x^5+2x^4+2x^3+2x^2+2x+1$

Câu 2. (4,5 điểm)

1) Cho biểu thức $R=\left(\dfrac{x-1}{x^2-2x}+\dfrac{x+1}{x^2+2x}-\dfrac{4}{x^3-4x}\right):\dfrac{4026}{x}$. Tìm x để biểu thức xác định, khi đó hãy rút gọn biểu thức
2) Giải phương trình sau: $|x-2|(x-1)(x+1)(x+2)=4$

Câu 3. (4,0 điểm)

1) Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh n^3-n chia hết cho 24
2) Tìm số tự nhiên n để $n^2+4n+2013$ là một số chính phương.

Câu 4. (6,0 điểm)

1) Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D. Biết $CD=2AB=2AD$ và $BC=a\sqrt{2}$
   a) Tính diện tích hình thang $ABCD$ theo a
   b) Gọi I là trung điểm của BC, H là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống AC. Chứng minh $HDI=45^0$

2) Cho tam giác ABC có $BC=a, CA=b, AB=c$. Độ dài các đường phân giác trong của tam giác kẻ từ các đỉnh A, B, C lần lượt là l_a, l_b, l_c. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho hai số không âm a và b thỏa mãn: $a^2+b^2=a+b.$ Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S=\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1)

Ta có: $P=2\left(a^3+b^3\right)+7ab(a+b)$

$=2(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)+7ab(a+b)$

$=(a+b)\left(2a^2+2b^2+5ab\right)$

$=(a+b)\left(2a^2+4ab+2b^2+ab\right)$

$=(a+b)\left[2a(a+2b)+b(a+2b)\right]$

$=(a+b)(2a+b)(a+2b)$

Kết luận $P=(a+b)(2a+b)(a+2b)$

2)

Ta có:

$Q=x^2.\left(x^4+2x^3+x^2\right)+\left(x^4+2x^3+x^2\right)+x^2+x+x+1$

$=x^2\left(x^2+x\right)^2+\left(x^2+x\right)^2+x+2$

$=x^2+x+3=4$

Vậy $Q=4$

Câu 2.

1)

Ta có: $R=\left[\dfrac{x-1}{x(x-2)}+\dfrac{x+1}{x(x+2)}-\dfrac{4}{x\left(x^2-4\right)}\right].\dfrac{x}{4026}$

ĐK: $x\left(x^2-4\right)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq \pm 2 \end{cases}$

Khi đó:

$$R=\frac{1}{4026}.\left(\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$$

$$=\frac{1}{4026}.\frac{(x-1)(x+2)+(x+1)(x-2)-4}{x^2-4}$$

$$=\frac{1}{4026}.\frac{2(x^2-4)}{x^2-4}=\frac{1}{2013}$$

Vậy R xác định khi $\begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq \pm 2 \end{cases}$ và $R=\frac{1}{2013}$

2) +Nếu $x\geq 2$, phương trình đã cho trở thành :

$$(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)=4$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4)=4$$

$$\Leftrightarrow x^4-5x^2=0 \Leftrightarrow x^2.(x^2-5)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(ktm) \\ x=\sqrt{5}(tm) \\ x=-\sqrt{5}(ktm) \end{array}\right.$$

+)Nếu $x<2$, phương trình đã cho trở thành:

$$(2-x)(x-1)(x+1)(x+2)=4$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1)(x+2)=-4$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4)=-4$$

$$\Leftrightarrow x^4-5x^2+8=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=0 \text{ vô nghiệm}$$

Phương trình có một nghiệm $x=\sqrt{5}$

Câu 3.

1) Ta có: $n^3-n=n(n-1)(n+1)$

Vì $n-1;n;n+1$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên có một trong ba số đó chia hết cho 3.

Do đó $(n^3-n)\vdots 8$ (2)

vndoc

Vì 3 và 8 là hai số nguyên tố cùng nhau nên kết hợp với $(1);(2)$ suy ra

$(n^3-n)\vdots 24 \quad (dpcm)$

2) Giả sử $n^2+4n+2013=m^2\,(m\in\mathbb{N})$

Suy ra $(n+2)^2+2009=m^2 \Leftrightarrow m^2-(n+2)^2=2009$

$\Leftrightarrow (m+n+2)(m-n-2)=2009$

Mặt khác $2009=2009.1=287.7=49.41$ và $m+n+2>m-n-2$ nên có các trường hợp sau:

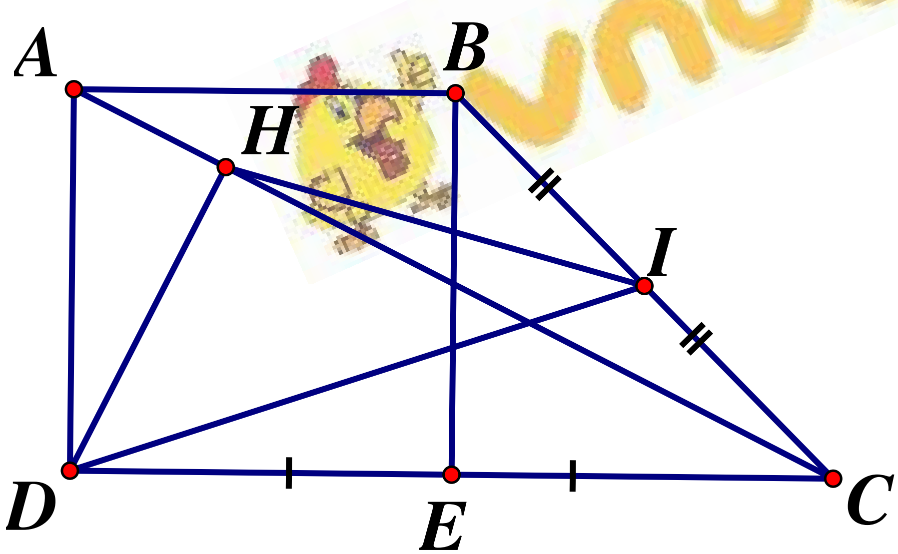
$TH1:\begin{cases} m+n+2=2009 \\ m-n-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1005 \\ n=1002 \end{cases}$

$TH2:\begin{cases} m+n+2=287 \\ m-n-2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=147 \\ n=138 \end{cases}$

$TH3:\begin{cases} m+n+2=49 \\ m-n-2=41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=45 \\ n=2 \end{cases}$

Vậy các số cần tìm là $1002;138;2$

Câu 4.



1)

a) Gọi E là trung điểm của CD, chỉ ra $ABED$ là hình vuông và BEC là tam giác vuông cân

Từ đó suy ra $AB=AD=a, BC=2a$

vndoc

Diện tích của hình thang $ABCD$ là $S = \frac{(AB + CD).AD}{2} = \frac{(a + 2a).a}{2} = \frac{3a^2}{2}$

b) $ADH = ACD(1)$ (hai góc nhọn có cặp cạnh tương ứng vuông góc)

Xét hai tam giác ADC và IBD vuông tại D và B có:

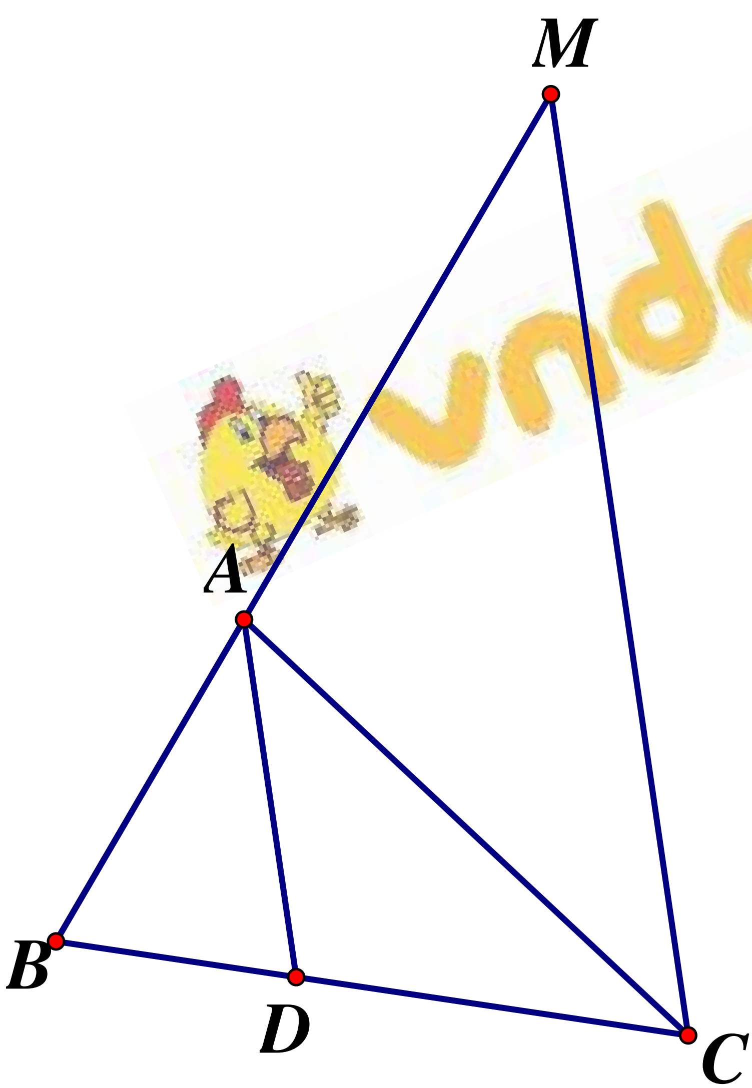
$\frac{AD}{DC} = \frac{IB}{BC} = \frac{1}{2}$, do đó hai tam giác ADC và IBD đồng dạng

Suy ra $ACD = BDI$ (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow ADH = BDI$

Mà $ADH + BDH = 45^0 \Rightarrow BDI + BDH = 45^0$ hay $HDI = 45^0$

2)



Gọi AD là đường phân giác trong góc A, qua C kẻ đường thẳng song song với AD cắt đường thẳng AB tại M

Ta có: $BAD = AMC$ (hai góc ở vị trí đồng vị)

$DAC = ACM$ (hai góc ở vị trí so le trong)

Mà $BAD = DAC$ nên $AMC = ACM$ hay ΔACM cân tại A, suy ra $AM = AC = b$

Do $AD//CM$ nên $\dfrac{AD}{CM} = \dfrac{BA}{BM} = \dfrac{c}{b+c}$

Mà $CM < AM + AC = 2b \Rightarrow \dfrac{c}{b+c} > \dfrac{AD}{2b} \Rightarrow \dfrac{1}{l_a} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$ (1)

Tương tự ta có: $\dfrac{1}{l_b} > \left(\dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{a}\right)$ (2); $\dfrac{1}{l_c} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$ (3)

Cộng $(1);(2);(3)$ vế theo vế ta có điều phải chứng minh

Câu 5.

Ta có: $a^2 + 1 \ge 2a; b^2 + 1 \ge 2b \Rightarrow a^2 + b^2 + 2 \ge 2a + 2b \Rightarrow a + b \le 2$

Chứng minh được với hai số dương x, y thì $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \ge \dfrac{4}{x+y}$

Do đó: $S = 2 - \left(\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1}\right) \le 2 - \dfrac{4}{a+1+b+1} \le 1$

Vậy $GTLN$ của S là 1, đạt được khi $a = b = 1$

UBND HUYỆN NHO QUAN

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI

Năm học 2018 – 2019

MÔN: TOÁN 8

(Thời gian làm bài 120 phút)

Đề thi gồm 05 câu, trong 01 trang

Câu 1 (5,0 điểm).

1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a, $x^4 + 2x^2y + y^2 - 9$

b, $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24$

2. Cho biểu thức $A = \left(\frac{1-x^3}{1-x}-x\right):\frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3}$

a, Rút gọn biểu thức A.

b, Tính giá trị của biểu thức A khi $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

c, Tìm giá trị của x, để A < 0.

Câu 2 (4,0 điểm).

1. Giải phương trình sau: $\frac{x+2}{x-2}-\frac{1}{x}=\frac{2}{x(x-2)}$

2. Tìm cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn phương trình:

$$5x^4+10x^2+2y^6+4y^3-6=0$$

Câu 3 (3,0 điểm).

1. Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9.

2. Cho phương trình $\frac{2x-m}{x-2}+\frac{x-1}{x+2}=3$. Tìm m nguyên để phương trình có nghiệm dương.

Câu 4 (6,0 điểm). Cho hình bình hành $ABCD$ (có $AC > BD$), O là giao điểm của AC và BD. Gọi E,F lần lượt là hình chiếu của B và D xuống đường thẳng AC. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của C xuống đường thẳng AB và AD. Chứng minh:

a, Tứ giác $BEDF$ là hình bình hành ?

b, $CH.CD=CK.CB$

vndoc

c, $AB.AH + AD.AK = AC^2$

Câu 5 (2,0 điểm).

1. Cho $x + y = 1$ và $xy \neq 0$. Tính: $P = \frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} + \frac{2(x - y)}{x^2y^2 + 3}$

2. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 6$. Chứng minh rằng $\frac{x+y}{xyz} \geq \frac{4}{9}$

---------------**Hết**---------------

UBND HUYỆN NHO QUAN

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HƯỚNG DẪN CHẤM KSCL HỌC SINH GIỎI

Môn: Toán 8

Năm học 2018 - 2019

(HDC gồm 05 trang)

Câu	**Đáp án**	**Điểm**
Câu 1 **(5,0 điểm)**	**1. (2,0 điểm)**	
	a, $x^4 + 2x^2y + y^2 - 9 = (x^4 + 2x^2y + y^2) - 9$	**0,25**
	$= (x^2 + y)^2 - 9$	**0,5**
	$= (x^2 + y - 3)(x^2 + y + 3)$	**0,25**
	b, (x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24 $= (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) - 24$	**0,25**
	$= (x^2 + 7x + 11 - 1)(x^2 + 7x + 11 + 1) - 24$ $= [(x^2 + 7x + 11)^2 - 1] - 24$	**0,25**
	$= (x^2 + 7x + 11)^2 - 5^2$	**0,25**

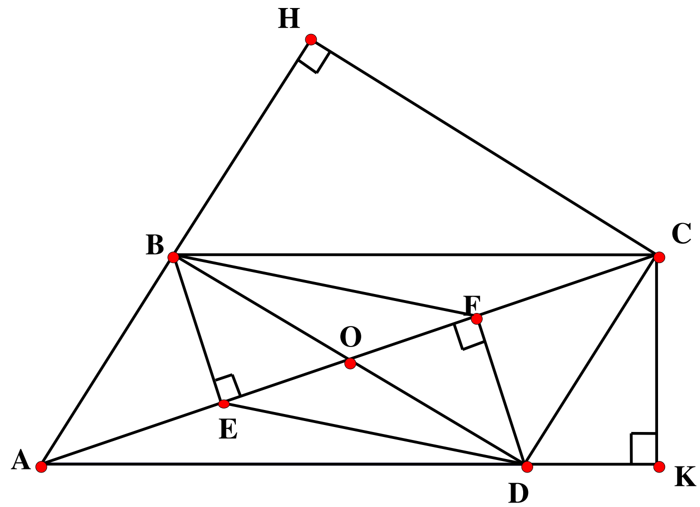
	$= (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 16)$	
	$= (x + 1)(x + 6))(x^2 + 7x + 16)$	**0,25**
	2. (3,0 điểm)	
	a) **(1,25 điểm)**	
	ĐKXĐ: $x \neq \pm 1$	**0,25**
	Với $x \neq \pm 1$, ta có: $A=\dfrac{1-x^3-x+x^2}{1-x}:\dfrac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-x+x^2)-x(1+x)}$	**0,25**
	$=\dfrac{(1-x)(1+x+x^2)-x(1-x)}{1-x}:\dfrac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-2x+x^2)}$	**0,25**
	$=\dfrac{(1-x)(1+x^2)}{1-x}:\dfrac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-x)^2}$	**0,25**
	$= (1+x^2):\dfrac{1}{1-x}$ $= (1+x^2)(1-x)$	**0,25**
	b) **(1,0 điểm)**	
	Ta có: $\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9} \Leftrightarrow x-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$ hoặc $x-\dfrac{2}{3}=\dfrac{-1}{3}$	**0,25**
	$\Leftrightarrow x=1$ (không TMĐK) hoặc $x=\dfrac{1}{3}$ (TMĐK)	**0,25**
	Với $x=\dfrac{1}{3}$, ta có: $A = \left[1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\right]\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{10}{9}.\dfrac{2}{3}=\dfrac{20}{27}$	**0,25**

	Vậy khi $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$ thì $A=\frac{20}{27}$	**0,25**
	c) (0,75 điểm)	
	Ta có: A < 0 $\Leftrightarrow$ $(1+x^2)(1-x)<0$ (1) Mà $1+x^2>0$ với mọi $x\neq\pm1$	**0,25**
	Nên (1) $\Leftrightarrow$ $1-x<0\Leftrightarrow x>1$	**0,25**
	Vậy với x > 1 thì A < 0	**0,25**
Câu 2 **(4 điểm)**	**2.1) (2,0 điểm)**	
	ĐKXĐ: x ≠ 0; x ≠ 2	**0,25**
	$\frac{x+2}{x-2}-\frac{1}{x}=\frac{2}{x(x-2)}$ $\Leftrightarrow\ \frac{x(x+2)-(x-2)}{x(x-2)}=\frac{2}{x(x-2)}$	**0,25**
	$\Rightarrow\ x(x+2)-(x-2)=2$	**0,25**
	$\Leftrightarrow\ x^2+2x-x+2=2$	**0,25**
	$\Leftrightarrow\ x^2+x=0$	**0,25**
	$\Leftrightarrow\ x(x+1)=0$	**0,25**
	$\Rightarrow$ x = 0 (loại) hoặc x = - 1(nhận)	**0,25**
	Vậy phương trình có nghiệm x = - 1	**0,25**
	2.2) (2,0điểm)	
	$5x^4+10x^2+2y^6+4y^3-6=0$	
	$\Leftrightarrow\left(5x^4+10x^2+5\right)+\left(2y^6+4y^3+2\right)=13$	**0,25**

vndoc

	$\Leftrightarrow 5(x^4+2x^2+1)+2(y^6+2y^3+1)=13$	
	$\Leftrightarrow 5(x^2+1)^2+2(y^3+1)^2=13$	**0,25**
	Vì: $\begin{cases} x\in Z \\ y\in Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+1\in Z \\ y^3+1\in Z \end{cases}$	**0,25**
	Mà $5(x^2+1)^2\le 13 \Rightarrow x^2+1\le 1$	**0,25**
	Mặt khác $x^2+1\ge 1$ với mọi x $\Rightarrow x^2+1=1$ $\Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$	**0,25**
	Với $x=0$, ta có: $5+2(y^3+1)^2=13$ $\Rightarrow 2(y^3+1)^2=8 \Rightarrow (y^3+1)^2=4$	**0,25**
	$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y^3+1=2 \\ y^3+1=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y^3=1 \\ y^3=-3 \end{array}\right.$	**0,25**
	Vì y $\in$Z nên $y^3=1 \Rightarrow y=1$ Vậy phương trình có một nghiệm nguyên $(x;y)=(0;1)$	**0,25**
Câu 3 **(3 điểm)**	**3.1. (1,5 điểm)**	
	Gọi hai số thỏa mãn đầu bài là x, y $\Rightarrow$ $x+y\,\vdots\,3$	**0,25**
	Ta có: $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ $=(x+y)\left[(x^2+2xy+y^2)-3xy\right]$	**0,25**
	$=(x+y)\left[(x+y)^2-3xy\right]$	**0,25**
	Vì $x+y\,\vdots\,3$ nên $(x+y)^2-3xy\,\vdots\,3$	**0,25**

	$\Rightarrow (x+y)\left[(x+y)^2-3xy\right] \vdots 9$	**0,25**
	Vậy nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9.	**0,25**
	3.2. (1,5điểm)	
	ĐKXĐ: $x \neq \pm 2$	**0,25**
	$\frac{2x-m}{x-2}+\frac{x-1}{x+2}=3$ $\Rightarrow (2x-m)(x+2)+(x-1)(x-2)=3(x^2-4)$ $\Leftrightarrow x(1-m)=2m-14\,(*)$	**0,25**
	Nếu m = 1 thì phương trình (*) có dạng 0 = -12 vô nghiệm.	**0,25**
	Nếu $m \neq 1$ phương trình (*) trở thành $x=\frac{2m-14}{1-m}$	**0,25**
	Khi đó phương trình đã cho có nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m-14}{1-m} \neq 2 \\ \frac{2m-14}{1-m} \neq -2 \\ \frac{2m-14}{1-m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 4 \\ 1<m<7 \end{cases}$	**0,25**
	Mà m nguyên. Vậy $m \in \{2;3;5;6\}$ thì thỏa mãn đầu bài	**0,25**
Câu 4 **(6,0 điểm)**		

		0,25
	a) (2,0 điểm).	
	Ta có : BE $\perp$ AC (gt); DF $\perp$ AC (gt) $\Rightarrow$ BE // DF (1)	0,75
	Xét ΔBEO và ΔDFO Có: $BEO = DFO = 90^0$ OB = OD (t/c hình bình hành) $EOB = FOB$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \Delta BEO = \Delta DFO$ (cạnh huyền – góc nhọn)	0,75
	$\Rightarrow$ BE = DF (2)	0,25
	Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Tứ giác BEDF là hình bình hành (đpcm)	0,25
	b) (1,75 điểm).	
	Ta có: ABCD là hình bình hành (gt) $\Rightarrow ABC = ADC$	0,25
	Mà $ABC + HBC = ADC + KDC = 180^0$	0,25
	$\Rightarrow HBC = KDC$	0,25
	Xét ΔCBH và ΔCDK có:	0,5

	$BHC = DKC = 90^0$ $HBC = KDC$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \Delta CBH \sim \Delta CDK(g-g)$	
	$\Rightarrow \dfrac{CH}{CB} = \dfrac{CK}{CD}$	0,25
	$\Rightarrow CH.CD = CK.CB$ (đpcm)	0,25
	c) (2,0 điểm).	
	Xét ΔAFD và ΔAKC Có: $AFD = AKC = 90^0$ FAD chung $\Rightarrow \Delta AFD \sim \Delta AKC(g-g)$	0,5
	$\Rightarrow \dfrac{AF}{AD} = \dfrac{AK}{AC} \Rightarrow AD.AK = AF.AC$ (3)	0,25
	Xét ΔCFD và ΔAHC Có: $CFD = AHC = 90^0$ $FCD = HAC$ (so le trong) $\Rightarrow \Delta CFD \sim \Delta AHC(g-g)$	0,5
	$\Rightarrow \dfrac{CF}{CD} = \dfrac{AH}{AC}$	0,25
	Mà : CD = AB $\Rightarrow \dfrac{CF}{AB} = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow AB.AH = CF.AC$ (4)	0,25
	Từ(3) và (4) $\Rightarrow AB.AH + AD.AK = CF.AC + AF.AC$ $= (CF + AF)AC = AC^2$ (đpcm).	0,25
Câu 5	**5.1(1,0 điểm)**	

(2,0điểm)	Ta có: $\frac{x}{y^3-1}-\frac{y}{x^3-1}=\frac{x^4-x-y^4+y}{(y^3-1)(x^3-1)}$ $=\frac{(x^4-y^4)-(x-y)}{xy(y^2+y+1)(x^2+x+1)}$	**0,25**
	$=\frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)-(x-y)}{xy(x^2y^2+y^2x+y^2+yx^2+xy+y+x^2+x+1)}$ $=\frac{(x-y)(x^2+y^2-1)}{xy\left[x^2y^2+xy(x+y)+x^2+y^2+xy+2\right]}$ $=\frac{(x-y)(x^2-x+y^2-y)}{xy\left[x^2y^2+(x+y)^2+2\right]}$	**0,25**
	$=\frac{(x-y)\left[x(x-1)+y(y-1)\right]}{xy(x^2y^2+3)}$ $=\frac{(x-y)\left[x(-y)+y(-x)\right]}{xy(x^2y^2+3)}$ (do x + y = 1 $\Rightarrow$ y - 1= -x và x – 1 = - y) $=\frac{(x-y)(-2xy)}{xy(x^2y^2+3)}$ $=\frac{-2(x-y)}{x^2y^2+3}$	**0,25**
	$\Rightarrow P=\frac{-2(x-y)}{x^2y^2+3}+\frac{2(x-y)}{x^2y^2+3}=0$	**0,25**
	5.2(1,0 điểm)	
	Ta có: $(x+y)^2\geq 4xy$ (1)	**0,25**
	$\Rightarrow\left[(x+y)+z\right]^2\geq 4(x+y)z$	**0,25**

vndoc

	$\Leftrightarrow 36 \ge 4(x+y)z$ (vì $x+y+z=6$)	
	$\Leftrightarrow 36(x+y) \ge 4(x+y)^2 z$ (vì x, y dương nên x + y dương) (2)	**0,25**
	Từ (1) và (2), ta có: $36(x+y) \ge 16xyz$ $\Leftrightarrow x+y \ge \frac{4}{9}xyz \Leftrightarrow \frac{x+y}{xyz} \ge \frac{4}{9}$ (đpcm)	**0,25**

Lưu ý khi chấm bài:

- *Trên đây chỉ là sơ lược các bước giải, lời giải của học sinh cần lập luận chặt chẽ, hợp logic. Nếu học sinh trình bày cách làm khác mà đúng thì cho điểm các phần theo thang điểm tương ứng.*
- *Với bài 4, nếu học sinh vẽ hình sai hoặc không vẽ hình thì không chấm.*

UBND HUYỆN YÊN LẠC
PHÒNG GD & ĐT

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI GIAO LƯU HSG LỚP 8 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2014-2015
MÔN: TOÁN 8
Thời gian : 120 phút

Câu 1. (2,5 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{x^2+3x}{x^3+3x^2+9x+27} + \dfrac{3}{x^2+9}\right) : \left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{6x}{x^3-3x^2+9x-27}\right)$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn P

b) Với $x > 0$ thì P không nhận những giá trị nào ?

c) Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

Câu 2. (2 điểm)

Cho biểu thức $M = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

Chứng minh rằng:

a) Nếu a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì $M > 1$

b) Nếu $M = 1$ thì hai trong ba phân thức đã cho của biểu thức M bằng 1, phân thức còn lại bằng -1

Câu 3. (2 điểm)

a) Cho n là tổng của hai số chính phương. $CMR: n^2$ cũng là tổng của hai số chính phương

b) Cho đa thức $A = ax^2 + bx + c$. Xác định hệ số b biết rằng khi chia A cho $x-1$, chia A cho $x+1$ đều có cùng một số dư

Câu 4. (2,5 điểm)

a) Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BD; I và J thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng DH và BC. Tính số đo của góc AIJ

b) Cho tam giác ABC nhọn trực tâm H, trên đoạn BH lấy điểm M và trên đoạn CH lấy điểm N sao cho $AMC = ANB = 90^0$. Chứng minh rằng $AM = AN$

Câu 5 (1 điểm)

a) Cho $a,b,c > 0$

CMR: $\frac{a}{3a^2+2b^2+c^2} + \frac{b}{3b^2+2c^2+a^2} + \frac{c}{3c^2+2a^2+b^2} \le \frac{1}{6}.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

b) Cho đa giác đều gồm 1999 cạnh. Người ta sơn các đỉnh của đa giác bằng hai màu xanh và đỏ. Chứng minh rằng tồn tại ba đỉnh được sơn cùng một màu tạo thành một tam giác cân

vndoc

ĐÁP ÁN

Câu 1

a) ĐKXĐ: $x \neq \pm 3,\qquad P = \dfrac{x+3}{x-3}$

b) Ta có: $P = \dfrac{x+3}{x-3} \Rightarrow x = \dfrac{3(P+1)}{P-1}$

Để $x > 0$ thì $\dfrac{3(P+1)}{P-1} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{P+1}{P-1} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P > 1 \\ P < -1 \end{array}\right.$

Vậy $x > 0$ thì P không nhận những giá trị từ -1 đến 1, $P \notin [-1;1]$

c) Ta có $P = \dfrac{x+3}{x-3} = 1 + \dfrac{6}{x-3}$

P có giá trị nguyên $\Leftrightarrow x-3 \in Ư(6) = \{\pm1;\pm2;\pm3;\pm6\}$

Từ đó tính được $x \in \{0;1;2;4;5;6;9\}$ (Chú ý loại $x = -3$)

Câu 2

2a)

Vì a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác nên $a,b,c > 0$ và

$a+b-c > 0; a+c-b > 0; c+b-a > 0$

Đặt $A = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}; B = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}; C = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

Ta cần chứng minh : $M = A+B+C > 1$ hay $(A-1)+(B-1)+(C+1) > 0$

Ta có:

$$A-1 = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} - 1 = \frac{a^2+b^2-c^2-2ab}{2ab} = \frac{(a-b-c)(a-b+c)}{2ab}$$

$$B-1 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - 1 = \frac{b^2+c^2-a^2-2bc}{2bc} = \frac{(b-c-a)(b-c+a)}{2bc}$$

$$C-1 = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} - 1 = \frac{c^2+a^2-b^2+2ca}{2ca} = \frac{(c+a-b)(c+a+b)}{2ca}$$

Suy ra

$(A-1)+(B-1)+(C+1)$

$$=\frac{(a-b-c)(a-b+c)}{2ab}+\frac{(b-c-a)(b-c+a)}{2bc}+\frac{(c+a-b)(c+a+b)}{2ca}$$

$$=\frac{c(a-b-c)(a-b+c)+a(b-c-a)(b-c+a)+b(c+a-b)(c+a+b)}{2abc}$$

$$=\frac{c(a-b-c)(a-b+c)-a(a-b+c)(b-c+a)+b(a-b+c)(c+a+b)}{2abc}$$

$$=\frac{(a-b+c)\left[c(a-b-c)-a(b-c+a)+b(c+a+b)\right]}{2abc}$$

$$=\frac{(a-b+c)\left[c(a-b-c)-a(b-c+a)+b(c+a+b)\right]}{2abc}$$

$$=\frac{(a-b+c)\left(ca-cb-c^2-ab+ac-a^2+bc+ba+b^2\right)}{2abc}$$

$$=\frac{(a-b+c)\left(bc-ba+b^2-c^2+ca-cb+ac-a^2+ab\right)}{2abc}$$

$$=\frac{(a-b+c)(b-c+a)(c-a+b)}{2abc}>0 \text{(đúng)}$$

Từ đó suy ra $M-1>0$ đúng vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác hay $M>1$

Câu 2b

$$M=1 \Leftrightarrow M-1=0 \Leftrightarrow \frac{(a-b+c)(b-c+a)(c-a+b)}{2abc}=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b+c)(b-c+a)(c-a+b)=0$$

Ta xét ba trường hợp:

TH1: Nếu $a-b+c=0$ thì

$$A-1=0; B-1=\frac{(b-c-a)(b-c+a)}{2bc}=\frac{-(a-b+c)(b-c+a)}{2bc}=0; C+1=0$$

Suy ra $A=1; B=1; C=-1$

TH2: Nếu $b-c+a=0$ thì

vndoc

$$A+1=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+1=\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{2ab}=\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2ab}=0;$$

$$C-1=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}-1=\frac{c^2+a^2-b^2-2ca}{2ca}=\frac{(c-a-b)(c-a+b)}{2ca}=\frac{-(b-c+a)(c-a+b)}{2ca}=0$$

$B-1=0\Rightarrow A=-1;B=1;C=1$

TH3: Nếu $c-a+b=0$ thì

$$A-1=\frac{(a-b-c)(a-b+c)}{2ab}=\frac{-(c-a+b)(a-b+c)}{2ab}=0;$$

$$C-1=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}-1=\frac{c^2+a^2-b^2-2ca}{2ca}=\frac{(c-a-b)(c-a+b)}{2ca}=\frac{-(b-c+a)(c-a+b)}{2ca}=0$$

$$B+1=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+1=\frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{2bc}=\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}=0$$

Suy ra $A=1;B=-1;C=1$

Như vậy trường hợp nào cũng có hai trong ba phân thức A, B, C bằng 1, phân thức còn lại bằng -1

Câu 3

3a) Đặt $N=a^2+b^2$ với $a,b\in\mathbb{N}$

Khi đó $N^2=a^4-2a^2b^2+b^2+4a^2b^2=\left(a^2-b^2\right)^2+\left(2ab\right)^2$ là tổng của hai số chính phương.

3b)

Giả sử $\begin{array}{l} A=ax^2+bx+c=(x-1)P+R \quad (1) \\ A=ax^2+bx+c=(x+1)Q+R \quad (2) \end{array}$

Cho $x=1$ thì từ (1) ta có: $a+b+c=R$

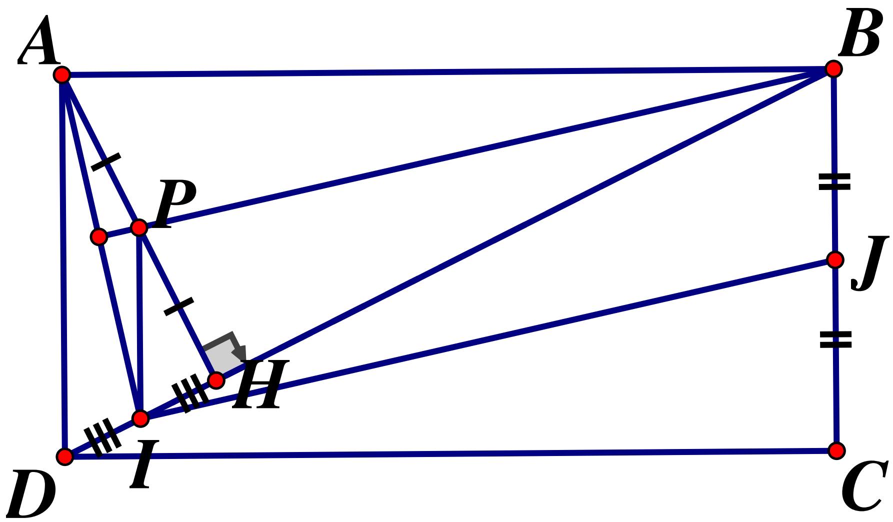
Cho $x=-1$ thì từ (2) ta có: $a-b+c=R$

Do đó : $a+b+c=a-b+c\Leftrightarrow 2b=0\Rightarrow b=0$

Câu 4

vndoc

4a)



Gọi P là trung điểm của AH $\Rightarrow PI$ là đường trung bình của tam giác AHD

$\Rightarrow PI // AD$

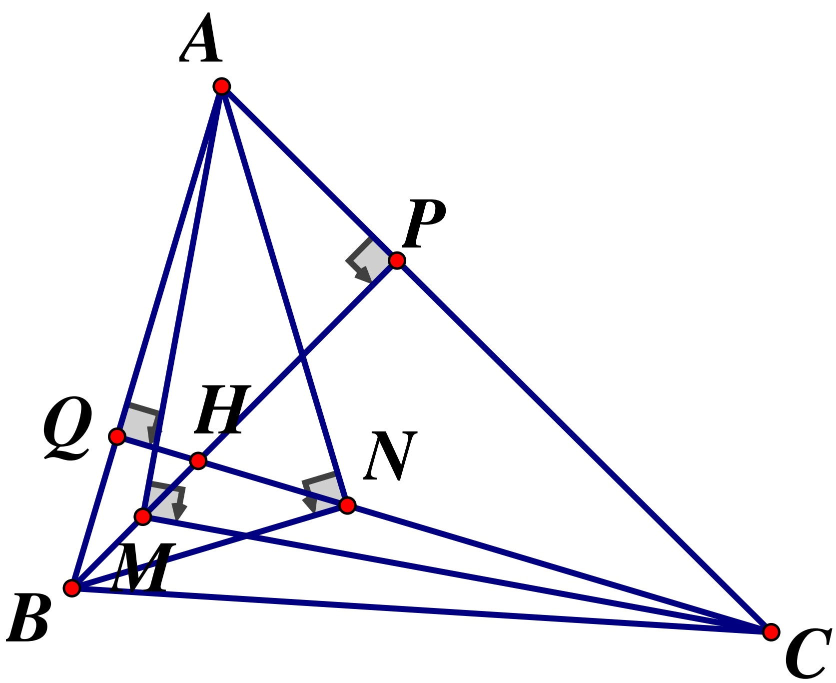
Mà $AD \perp AB$ nên $IP \perp AB$ và P là trực tâm ΔABI

Từ đó ta có tứ giác $BPIJ$ là hình bình hành $\Rightarrow BP // IJ$

Mà $BP \perp AI$ nên $JI \perp AI$

Câu 4b

vndoc



Gọi P,Q lần lượt là chân các dường cao kẻ từ B và C.

Tam giác vuông AMC có đường cao $MP \Rightarrow AM^2 = AP.AC$

Tam giác vuông ANB có đường cao $NQ \Rightarrow AN^2 = AQ.AB$

Xét tam giác vuông APB và AQC có:

A chung; $APB = AQC = 90^0 \Rightarrow \Delta APB \sim \Delta AQC(g.g)$

$\Rightarrow AP.AC = AQ.AB \Rightarrow AM^2 = AN^2 \Rightarrow AM = AN$

Câu 5

5a)

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM với $a,b,c > 0$ ta có

$$\frac{18a}{3a^2+2b^2+c^2}=\frac{18a}{2\left(a^2+b^2\right)+a^2+c^2}\le\frac{18a}{2.2\sqrt{(ab)^2}+2\sqrt{(ac)^2}}=\frac{18a}{4ab+2ac}$$

$$\frac{18a}{3a^2+2b^2+c^2}\le\frac{18a}{4ab+2ac}=\frac{18a}{2a.(2b+c)}=\frac{9}{2b+c}$$

Áp dụng BĐT Cauchy Schwarz $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}$.

Ta có: $\frac{(2+1)^2}{2b+c}\le\frac{2^2}{2b}+\frac{1^2}{c}=\frac{2}{b}+\frac{1}{c}$

Suy ra : $\frac{18a}{3a^2+2b^2+c^2}\le\frac{9}{(2b+c)}=\frac{(2+1)^2}{2b+c}\le\frac{2}{b}+\frac{1}{c}$

Tương tự:

$$\frac{18b}{3b^2+2c^2+a^2}\le\frac{9}{(2c+a)}=\frac{(2+1)^2}{2c+a}\le\frac{2}{c}+\frac{1}{a}$$

$$\frac{18c}{3c^2+2a^2+b^2}\le\frac{9}{2a+b}=\frac{(2+1)^2}{2a+b}\le\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta có:

$$\frac{18a}{3a^2+2b^2+c^2}+\frac{18b}{3b^2+2c^2+a^2}+\frac{18c}{3c^2+2a^2+b^2}\le\frac{2}{c}+\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}+\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$$

$$\frac{a}{3a^2+2b^2+c^2}+\frac{b}{3b^2+2c^2+a^2}+\frac{c}{3c^2+2a^2+b^2}\le\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}+\frac{3}{c}\right):18=\frac{1}{6}.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\Rightarrow DPCM$$

5b)

Ta có đa giác 1999 cạnh nên có 1999 đỉnh. Do đó phải tồn tại 2 đỉnh kề nhau là P và Q được sơn bởi cùng một màu – màu đỏ (Theo nguyên lý Dirichle)

Vì đa giác đã cho là đa giác đều có số đỉnh lẻ, nên phải tồn tại một đỉnh nào đó nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng PQ.Giả sử đỉnh đó là A.

Nếu A tô màu đỏ thì ta có tam giác APQ là tam giác cân có 3 đỉnh A, P, Q được tô cùng màu đỏ.

Nếu A tô màu xanh, lúc đó gọi B và C là các đỉnh khác của đa giác kề với P và Q.

Nếu cả hai đỉnh B và C được tô màu xanh thì tam giác ABC cân và có 3 đỉnh cùng tô màu xanh.

Nếu ngược lại, một trong hai đỉnh B và C mà tô màu đỏ thì tam giác BPQ hoặc tam giác CPQ là tam giác cân có 3 đỉnh được tô màu đỏ

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN HOẰNG HÓA

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 8
NĂM HỌC 2016-2017
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 21/04/2017

Câu 1. (4 điểm)

Cho biểu thức $P = \left[\dfrac{2}{3x} - \dfrac{2}{x+1}.\left(\dfrac{x+1}{3x} - x - 1\right)\right] : \dfrac{x-1}{x}$

a) Rút gọn P
b) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để P có giá trị nguyên
c) Tìm x để $P \le 1$

Câu 2. (4,5 điểm)

a) Giải phương trình: $x^3 - 6x - x + 30 = 0$
b) Giải bất phương trình sau: $x - 1 - \dfrac{x-1}{3} \le \dfrac{2x+3}{2} + \dfrac{x}{3} - 1$
c) Cho biết $\dfrac{x}{x^2 - x + 1} = \dfrac{2}{3}$.Hãy tính giá trị của biểu thức: $Q = \dfrac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$

Câu 3. (5,0 điểm)

a) Tìm x, y thỏa mãn đẳng thức: $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$
b) Cho $a, b, c \in \mathbb{Z}$, thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh $a^5 + b^5 + c^5 \vdots 30$
c) Chứng minh rằng: $\left(a - \dfrac{1}{b}\right)\left(b - \dfrac{1}{c}\right)\left(c - \dfrac{1}{a}\right) \ge \left(a - \dfrac{1}{a}\right)\left(b - \dfrac{1}{b}\right)\left(c - \dfrac{1}{c}\right)$, trong đó a, b, c là các số thực không nhỏ hơn 1.

Câu 4. (4,5 điểm) Cho tam giác nhọn ABC. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

a) Tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC

b) $BH.BE + CH.CF = BC^2$

c) $AD.HD \le \dfrac{BC^2}{4}$

d) Gọi I, K, Q, R lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ E xuống AB, AD, CF, BC. Chứng minh bốn điểm I, K, Q, R cùng nằm trên một đường thẳng.

Câu 5. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC. Trên tia đối của các tia BA, CA lấy theo thứ tự các điểm D, E sao cho $BD = CE = BC$. Gọi O là giao điểm của BE và CD. Qua O vẽ đường thẳng song song với tia phân giác của góc A, đường thẳng này cắt AC ở K. Chứng minh $AB = CK$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) ĐKXĐ: $x \ne 0; x \ne \pm 1$

Ta có:

$$P = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1}.\frac{x+1}{3x} + \frac{2}{x+1}.(x+1)\right].\frac{x}{x-1} = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{3x} + 2\right].\frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x-1}$$

Vậy $P = \dfrac{2x}{x-1}$

b) Ta có: $P = 2 + \dfrac{2}{x-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-1 \in Ư(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$

Từ đó suy ra $x \in \{2; 0; 3; -1\}$

Kết hợp với ĐKXĐ được $x \in \{2; 3\}$

c) $P \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x-1} \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x-1} - 1 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} \le 0$

Mà $x-1 < x+1$ nên $x-1 < 0$ và $x+1 \ge 0 \Leftrightarrow x < 1$ và $x \ge -1$

Kết hợp với ĐKXĐ được $-1 < x < 1$ và $x \ne 0$

Câu 2.

a) Ta có: $x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2)(x-5) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ x+2=0 \\ x-5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-2 \\ x=5 \end{array}\right.$$

b) $x-1-\frac{x-1}{3}\le \frac{2x+3}{2}+\frac{x}{3}-1\Leftrightarrow 6x-6-2x+2\le 6x+9+2x-6$

$\Leftrightarrow 4x\ge -7\Leftrightarrow x\ge \frac{-7}{4}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left\{ x/x\ge \frac{-7}{4} \right\}$

c) Từ $\frac{x}{x^2-x+1}=\frac{2}{3}\Rightarrow x\ne 0$, do đó : $\frac{x^2-x+1}{x}=\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}-1=\frac{3}{2}\Rightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x} \right)^2-1=\frac{25}{4}-1=\frac{21}{4}$

Lại có: $\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+1=\left(x^2+\frac{1}{x^2} \right)-1=\frac{21}{4}$

Suy ra $Q=\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{4}{21}$

Câu 3.

a)

$5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2=0$

$\Leftrightarrow 25x^2+25y^2+40xy+10y-10x+10=0$

$\Leftrightarrow (5x+4y-1)^2+9(y+1)^2=0$

Do $(5x+4y-1)^2\ge 0$ và $9(y+1)^2\ge 0$ với mọi x,y

Nên $(5x+4y-1)^2=9(y+1)^2=0$

Suy ra $x=1;y=-1$

b)

Ta có: $a^5-a=a(a^2-1)(a^2+1)=a(a^2-1)(a^2-4+5)$

$=(a-2)(a-1)a.(a+1)(a+2)+5(a-1).a.(a+1)$

Do $(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$ là tích 5 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho cả $2;3;5$, do đó chia hết cho 30

Lại có $(a-1)a(a+1)$ chia hết cho 6 nên $5(a-1)a(a+1)$ chia hết cho 30

Từ đó suy ra a^5-a chia hết cho 30

Tương tự b^5-b chia hết cho 30 và c^5-c chia hết cho 30.

Từ đó suy ra $(a^5+b^5+c^5)-(a+b+c)=(a^5-a)+(b^5-b)+(c^5-c)$ chia hết cho 30

Mà $a+b+c=0$ nên $a^5+b^5+c^5$ chía hết cho 30.

$$c)\left(a-\frac{1}{b}\right)\left(b-\frac{1}{c}\right)\left(c-\frac{1}{a}\right)\ge\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(b-\frac{1}{b}\right)\left(c-\frac{1}{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{(ab-1)(bc-1)(ca-1)}{abc}\ge\frac{\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)\left(c^2-1\right)}{abc}$$

$$\Leftrightarrow(ab-1)(bc-1)(ca-1)\ge\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)\left(c^2-1\right)$$

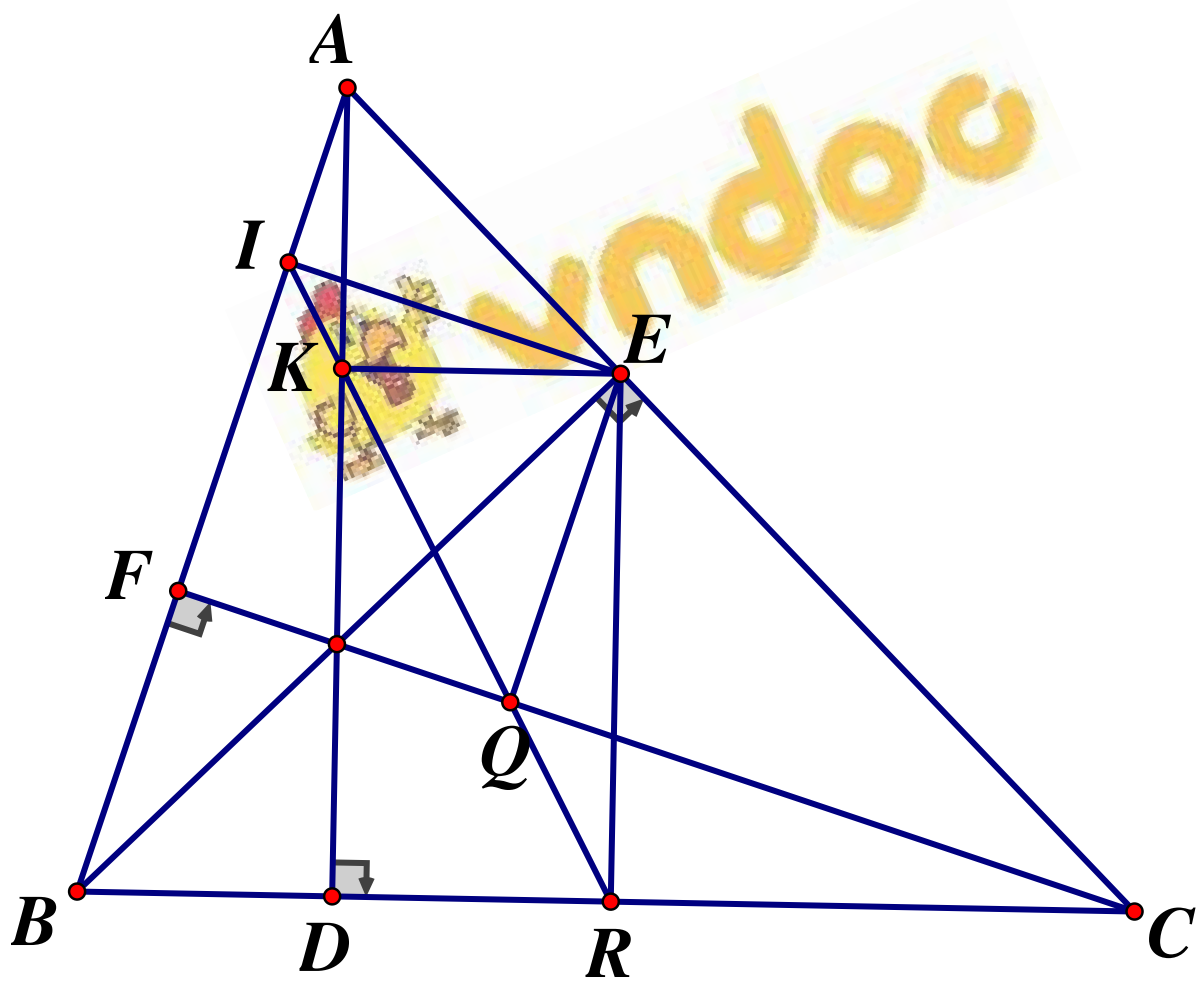
$$\Leftrightarrow a^2b^2c^2-abc(a+b+c)+(ab+bc+ca)\ge a^2b^2c^2+a^2+b^2+c^2-\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)-2abc(a+b+c)\ge 2\left(a^2+b^2+c^2\right)-2(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow(ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ca-ab)^2\ge(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

$$\Leftrightarrow(a-c)^2\left(b^2-1\right)+(b-a)^2\left(c^2-1\right)+(c-b)^2\left(a^2-1\right)\ge 0$$ (đúng với mọi $a,b,c\ge 1$)

Câu 4.



vndoc

a) Ta có: $\Delta AEB \sim \Delta AFC(g.g) \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$

Từ đó suy ra $\Delta AEF \sim \Delta ABC(c.g.c)$

b) $\Delta BDH \sim \Delta BEC(g.g) \Rightarrow \frac{BD}{BE} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow BH.BE = BC.BD \quad (1)$

$\Delta CDH \sim \Delta CFB(g.g) \Rightarrow \frac{CD}{CF} = \frac{CH}{BC} \Rightarrow CH.CF = BC.CD \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $BH.BE + CH.CF = BC.BD + BC.CD = BC^2$

c) Chứng minh được $\Delta DBH \sim \Delta DAC(g.g) \Rightarrow \frac{DH}{DC} = \frac{DB}{DA} \Rightarrow DH.DA = DC.DB$

Lại có: $DC.DB \le \frac{(DC+DB)^2}{4} = \frac{BC^2}{4}$

Do đó: $AD.HD \le \frac{BC^2}{4}$

d) Từ giả thiết suy ra $EI//CF, EK//BC, EQ//AB, ER//AD$

Áp dụng định lý Talet ta có:

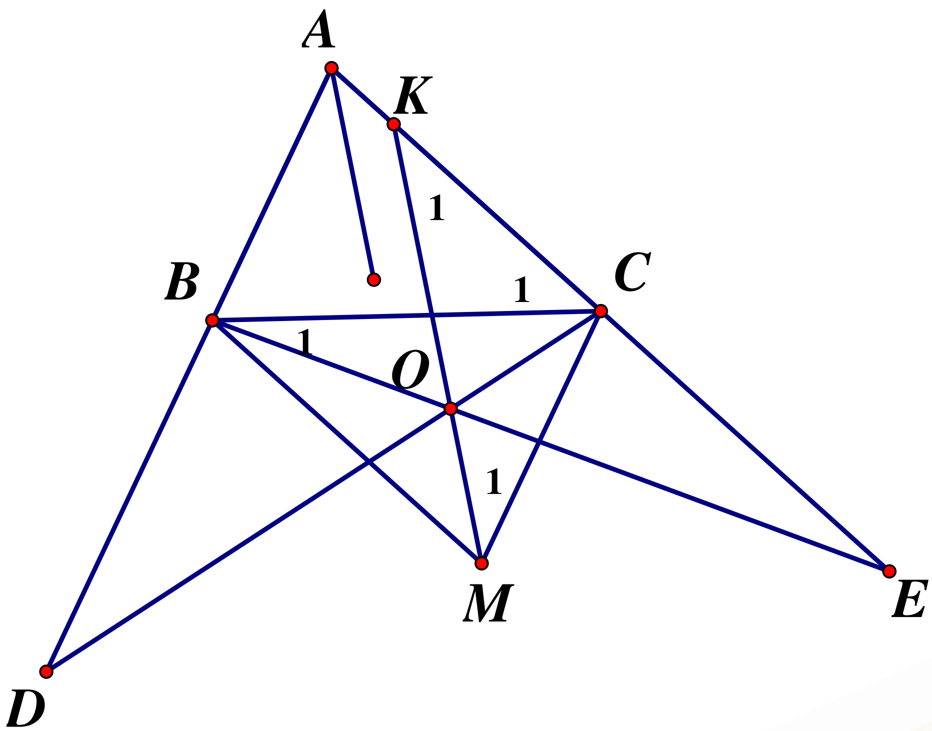
$* \frac{AI}{AF} = \frac{AE}{AC} = \frac{AK}{AD} \Rightarrow IK//DF \quad (3)$

$* \frac{BF}{BI} = \frac{BH}{BE} = \frac{BD}{BR} \Rightarrow IR//DF \quad (4)$

$* \frac{CR}{CD} = \frac{CE}{CA} = \frac{CQ}{CF} \Rightarrow RQ//DF \quad (5)$

Từ $(3);(4);(5)$ suy ra bốn điểm I, K, Q, R thẳng hàng

Câu 5.



Vẽ hình bình hành $ABMC \Rightarrow AB = CM\,(1)$

Ta có: $B_1 = \frac{1}{2}C_1 = \frac{1}{2}CMB$ nên BO là tia phân giác của CBM

Tương tự CO là tia phân giác của BCM

Do đó MO là tia phân giác của BMC

Suy ra OM song song với tia phân giác của A, suy ra K,O,M thẳng hàng

Ta có: $M_1 = \frac{1}{2}BMC = \frac{1}{2}BAC = K_1$

Nên tam giác KMC cân tại $C \Rightarrow CK = CM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $CK = AB$

UBND HUYỆN VŨ THƯ
PHÒNG GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO

ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
Môn: TOÁN – Lớp 8
Năm học: 2016-2017

Bài 1. (3 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^3-1}{x^2-x} + \frac{x^2-4}{x^2-2x} - \frac{2-x}{x}\right) : \frac{x+1}{x}$ với $x \neq 0; x \neq 1; x \neq 2; x \neq -1$

1) Rút gọn biểu thức A.
2) Tính A biết x thỏa mãn $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$.

vndoc

Bài 2. (4 điểm)

1. Tìm m sao cho phương trình ẩn x: $(m-1)x+3m-2=0$ có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x \ge 1$
2. Giải phương trình $x^2+\dfrac{9x^2}{(x+3)^2}=40$

Bài 3. (4 điểm)

1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2+8y^2+4xy-2x-4y=4$

2) Cho đa thức $h(x)$ bậc 4, hệ số của bạ cao nhất là 1, biết $h(1)=2; h(2)=5$; $h(4)=17; h(-3)=10$. Tìm đa thức $h(x)$

Bài 4. (2 điểm)

Cho hai số dương a,b thỏa mãn: $a^2+b^2=2$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $M=\dfrac{a^3}{2016a+2017b}+\dfrac{b^3}{2017a+2016b}$

Bài 5. (4 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD(AC>BD)$, hình chiếu vuông góc của C lên AB, AD lần lượt là E và F. Chứng minh:

1) $CE.CD=CB.CF$ và ΔABC đồng dạng với ΔFCE

2) $AB.AE+AD.AF=AC^2$

Bài 6 (2 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhâu tại O. Một đường thẳng kẻ qua A cắt cạnh BC tại M và cắt đường thẳng CD tại N. Gọi K là giao của OM và DN.Chứng minh CK vuông góc với BN.

Bài 7 (1 điểm)

Cho hình vuông ABCD có 13 đường thẳng bất kỳ có cùng tính chất là mỗi đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác có tỉ số diện tích là $\dfrac{2}{5}$.Chứng minh rằng có ít nhất 4 đường thẳng trong 13 đường thẳng đó cùng đi qua một điểm.

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1.1

$$A=\left(\frac{x^2+x+1}{x}+\frac{x+2}{x}-\frac{2-x}{x}\right).\frac{x}{x+1}=\frac{x^2+3x+1}{x+1}$$

1.2

$x^3-4x^2+3x=0$

$\Leftrightarrow x(x-1)(x-3)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(ktm) \\ x=1(ktm) \\ x=3(tm) \end{array}\right.$

Thay $x=3$ vào biểu thức có $A=\dfrac{3^2+3.3+1}{3+1}=\dfrac{19}{4}$

Vậy $A=\dfrac{19}{4}$

Câu 2.

2.1

$m=1$ phương trình đã cho trở thành 1=0 (vô lý) nên phương trình vô nghiệm, loại

$m\neq 1$ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{-3m+2}{m-1}$

$x\geq 1\Leftrightarrow \dfrac{-3m+2}{m-1}\geq 1\Leftrightarrow \dfrac{-4m+3}{m-1}\geq 0\Leftrightarrow ....\Leftrightarrow \dfrac{3}{4}\leq m\leq 1$

Kết hợp điều kiện ta có $\dfrac{3}{4}\leq m<1$ thì $(m-1)x+3m-2=0$ có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x\geq 1$

2.2

ĐKXĐ: $x\neq -3$

$x^2+\dfrac{9x^2}{(x+3)^2}=40\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{3x}{x+3}\right)^2+\dfrac{6x^2}{x+3}=40\Leftrightarrow \left(\dfrac{x^2}{x+3}\right)+\dfrac{6x^2}{x+3}-40=0$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{x^2}{x+3}+10\right).\left(\dfrac{x^2}{x+3}-4\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{x+3}=-10 \\ \dfrac{x^2}{x+3}=4 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+10x+30=0 \\ x^2-4x-12=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+5)^2=-5(VN) \\ (x-2)^2=16\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6(tm) \\ x=-2(tm) \end{array}\right. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm phương trình $S=\{-2;6\}$

Câu 3.

3.1

$x^2+8y^2+4xy-2x-4y=4 \Leftrightarrow (x+2y-1)^2+4y^2=5$

Do $4y^2 \vdots 4; (x+2y-1)^2 \geq 0; 4y^2 \geq 0 \ \ \forall x, y$ nên $\begin{cases} 4y^2=4 \\ (x+2y-1)^2=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-1 \end{array}\right. \\ (x+2y-1)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1 \\ (x+1)^2=1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-1 \\ (x-3)^2=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} y=-1 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$ thỏa mãn x, y nguyên

Vậy $(x;y) \in \{(0;1);(-2;1);(2;-1);(4;-1)\}$

3.2

Xét $g(x)=x^2+1$ có $g(1)=2; g(2)=5; g(4)=17; g(-3)=10$

Ta có $f(x)=h(x)-g(x)$ thì $f(x)$ bậc 4 hệ số của x^4 là 1 và

$f(1)=f(2)=f(4)=f(-3) \Rightarrow f(x)=(x-1)(x-2)(x-4)(x+3)$

$\Rightarrow f(x)=(x^2-3x+2)(x^2-x-12)=x^4-4x^3-7x^2+34x-24$

$\Rightarrow h(x)=x^4-4x^3-6x^2+34x-23$

Vậy $h(x)=x^4-4x^3-6x^2+34x-23$

Câu 4.

$$M=\left[\frac{a^3}{2016a+2017b}+\frac{a(2016a+2017b)}{4033^2}\right]+$$

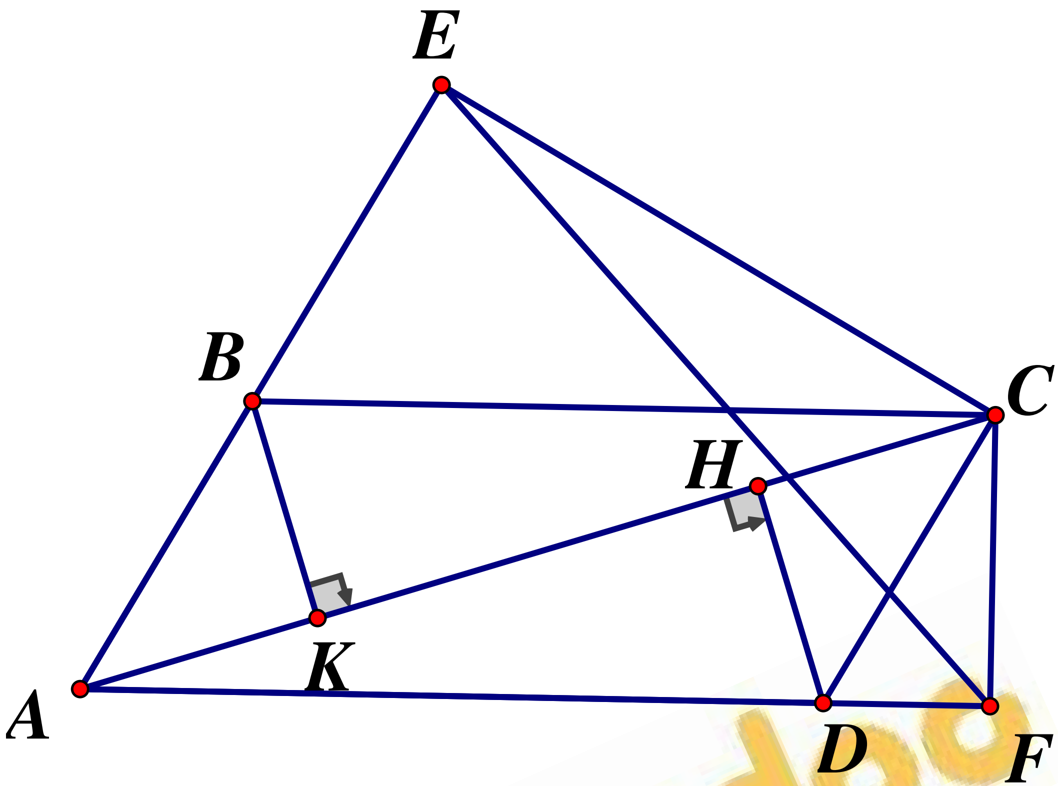
$$+\left[\frac{b^3}{2017a+2016b}+\frac{b(2017a+2016b)}{4033^2}\right]-\frac{2016(a^2+b^2)+4034ab}{4033^2}$$

$$\geq \frac{2a^2}{4033}+\frac{2b^2}{4033}-\frac{2016(a^2+b^2)+4034.\frac{a^2+b^2}{2}}{4033^2}=\frac{a^2+b^2}{4033}=\frac{2}{4033}$$

$M \geq \frac{2}{4033}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=1$

Vậy GTNN của $M = \frac{2}{4033} \Leftrightarrow a = b = 1$

Câu 5.



5.1

Chứng minh $\Delta EBC \sim \Delta FDC (g.g) \Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{BC}{DC}, DC = AB \Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{BC}{BA}$

Chứng minh $ABC = FCE \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta FCE$

5.2

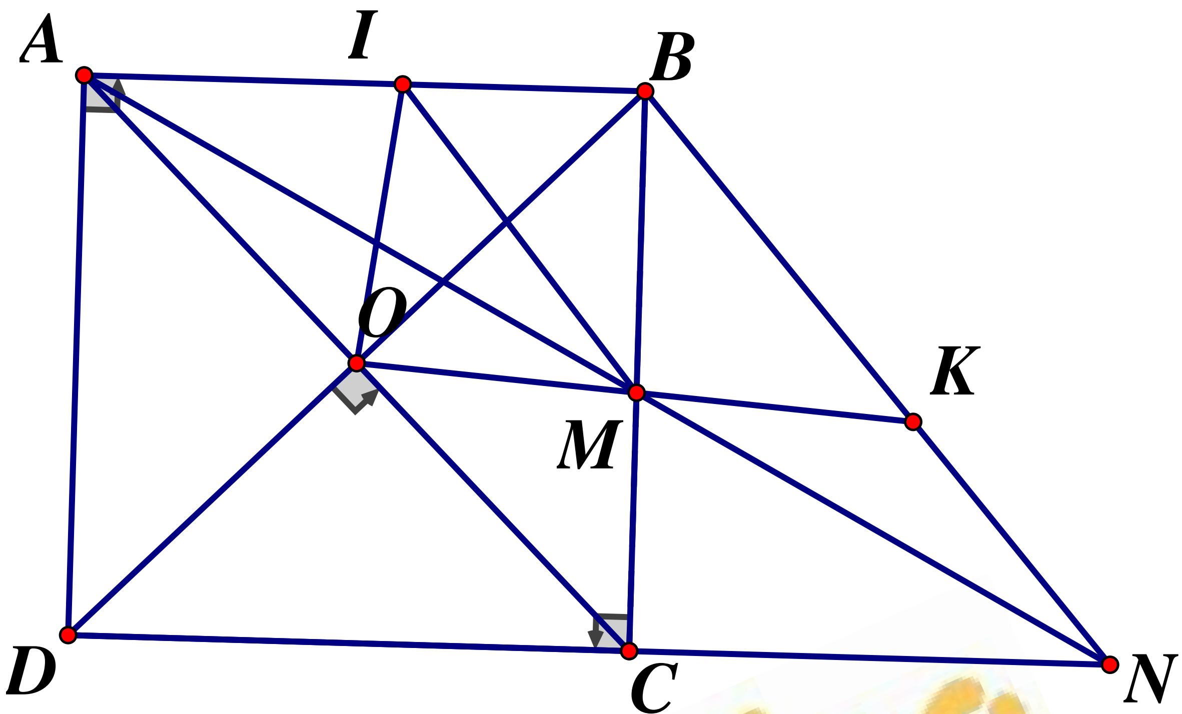
H, K là hình chiếu vuông góc của D, B lên AC

Chứng minh $AB.AE = AK.AC; \quad AD.AF = AH.AC$

Chứng minh $KC = AH$

$\Rightarrow AB.AE = AD.AF = AC^2$

Câu 6.



Trên cạnh AB lấy I sao cho $IB = CM$.

Xét ΔIBO và ΔMCO có: $IB = CM; IBO = MCO = 45^0; BO = CO$

$\Rightarrow \Delta IBO = \Delta MCO(c.g.c) \Rightarrow OI = OM, IOB = MOC$

$\Rightarrow BOI + BOM = BOM + MOC = 90^0 \Rightarrow MOI = 90^0$

$\Rightarrow \Delta MOI$ vuông cân tại O nên $OMI = OIM = 45^0$

Vì $IB = CM, AB = CB$ nên $\dfrac{BI}{BA} = \dfrac{CM}{CB}$ (1) và $AB // CN$ nên $\dfrac{CM}{CB} = \dfrac{NM}{NA}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{BI}{BA} = \dfrac{NM}{NA} \Rightarrow IM // BN$ (Talet đảo) do đó $OKB = OMI = 45^0$ (đồng vị)

$\Delta OMC \sim \Delta BMK(g.g) \Rightarrow \dfrac{MC}{MK} = \dfrac{MO}{MB}$

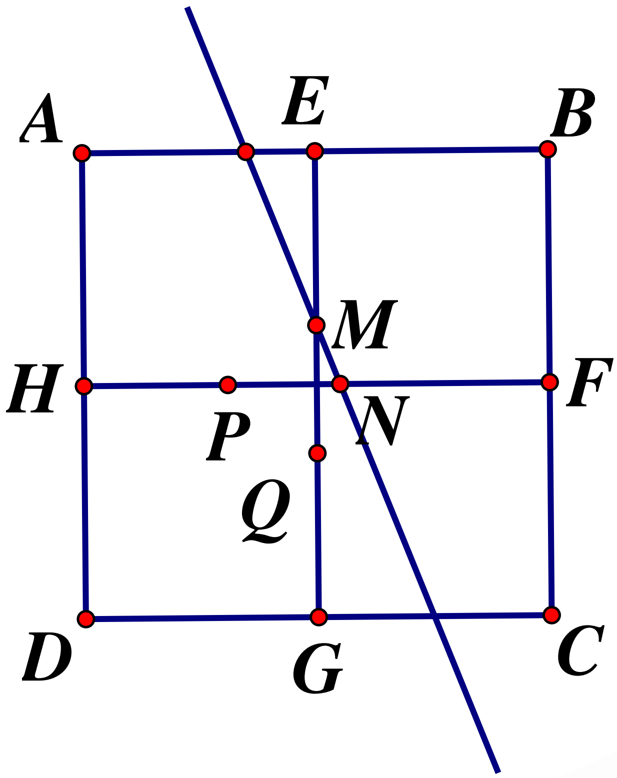
Xét ΔCMK và ΔOMB có: $\dfrac{MC}{MK} = \dfrac{MO}{MB}(cmt)$ và $CMK = OMB$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta CMK \sim \Delta OMB(c.g.c) \Rightarrow MKC = MOB$ mà $MBO = 45^0 \Rightarrow MKC = 45^0$

$\Rightarrow CKB = MKB + MKC = 45^0 + 45^0 = 90^0$

Vậy CK vuông góc với BN

Câu 7.



Đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác nên đường thẳng phải cắt hai cạnh đối của hình vuông và không đi qua đỉnh hình vuông. E, F, G, H là trung điểm AB, BC, CD, DA

Xét một đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác, cắt HF tại N

Nên tỉ số diện tích hai tứ giác tạo thành bằng $\frac{NF}{NH}$.

Nếu tỉ số diện tích hai tứ giác tạo thành là $\frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{NH}{NF} = \frac{2}{5}$.Như vậy N cố định và có 4 điểm vai trò như điểm N là M, N, P,Q như hình vẽ

Có 13 đường thẳng mỗi đường phải đi qua 1 trong 4 điểm phân biệt M, N, P, Q

$13 = 3.4 + 1$Theo nguyên tắc Dirichle sẽ tồn tại ít nhất 4 đường thẳng cùng đi qua một điểm trong 4 điểm M,N,P,Q.

ĐỀ THI OLYMPIC HUYỆN

MÔN TOÁN LỚP 8

Năm học 2015-2016

(Thời gian làm bài : 120 phút)

vndoc

Bài 1. Phân tích thành nhân tử: x^4-6x^2-7x-6

Bài 2. Cho x,y,z là các số thực không âm. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$x^4+y^4+z^4$ biết $x+y+z=2$

Bài 3. Cho x,y,a,b là những số thực thỏa mãn:

$$\frac{x^4}{a}+\frac{y^4}{b}=\frac{x^2+y^2}{a+b} \text{ và } x^2+y^2=1$$

Chứng minh: $\dfrac{x^{2006}}{a^{1003}}+\dfrac{y^{2006}}{b^{1003}}=\dfrac{2}{(a+b)^{1003}}$

Bài 4. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a+b}{bc+a^2}+\frac{b+c}{ac+b^2}+\frac{c+a}{ab+c^2}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Bài 5. Cho tam giác vuông cân $ABC(AB=AC)$. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM=2MA$, trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C vẽ đường thẳng Bx vuông góc với AB, trên Bx lấy điểm N sao cho $BN=\frac{1}{2}AB$. Đường thẳng MC cắt NA tại E, đường thẳng BE cắt đường thẳng AC tại F.

a) Chứng minh $AF=AM$.

b) Gọi H là trung điểm của FC. Chứng minh $EH=BM$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

x^4-6x^2-7x-6
$=x^4+2x^3-2x^3-4x^2-2x^2-4x-3x-6$
$=x^3(x+2)-2x^2(x+2)-2x(x+2)-3(x+2)$
$=(x+2)(x^3-2x^2-2x-3)$
$=(x+2)(x^3-3x^2+x^2-3x+x-3)$
$=(x+2)\left[x^2(x-3)+x(x-3)+(x-3)\right]$
$=(x+2)(x-3)(x^2+x+1)$

Bài 2.

Áp dụng công thức Bunhiacopski ta có:

$(x+y+z)^4\le\left[(x+y+z)^2\right]^2\le\left[3(x+y+z)^2\right]^2$
$\le 9(x^2+y^2+z^2)^2\le 27(x^4+y^4+z^4)$
$\Rightarrow 16\le 27(x^4+y^4+z^4)\Rightarrow x^4+y^4+z^4\ge\dfrac{16}{27}$

Vậy GTNN của $x^4+y^4+z^4$ là $\dfrac{16}{27}\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{2}{3}$

Bài 3.

Từ giả thiết suy ra:

$\dfrac{x^4}{a}+\dfrac{y^4}{b}=\dfrac{(x^2+y^2)^2}{a+b}\Leftrightarrow(bx^4+ay^4)(a+b)=ab(x^2+y^2)^2$
$\Leftrightarrow b^2x^4+a^2y^4-2abx^2y^2=0\Leftrightarrow(bx^2-ay^2)^2=0$
$\Leftrightarrow bx^2-ay^2=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{a}=\dfrac{y^2}{b}=\dfrac{x^2+y^2}{a+b}=\dfrac{1}{a+b}$
$\Leftrightarrow\dfrac{x^{2006}}{a^{1003}}=\dfrac{y^{2006}}{b^{1003}}=\dfrac{1}{(a+b)^{1003}}\Leftrightarrow\dfrac{x^{2006}}{a^{1003}}+\dfrac{y^{2006}}{b^{1003}}=\dfrac{2}{(a+b)^{1003}}$ *(dpcm)*

Bài 4.

Ký hiệu vế trái là A, vế phải là B, xét hiệu $A-B$

$$\frac{a+b}{bc+a^2}-\frac{1}{a}+\frac{b+c}{ac+b^2}-\frac{1}{b}+\frac{c+a}{ab+c^2}-\frac{1}{c}$$
$$=\frac{a^2+ab-bc-a^2}{a\left(bc+a^2\right)}+\frac{b^2+bc-ac-b^2}{b\left(ac+b^2\right)}+\frac{c^2+ac-ab-c^2}{c\left(ab+c^2\right)}$$
$$=\frac{b(a-c)}{a\left(bc+a^2\right)}+\frac{c(b-a)}{b\left(ac+b^2\right)}+\frac{a(c-b)}{c\left(ab+c^2\right)}$$

Do a,b,c bình đẳng nên giả sử $a\ge b\ge c$, khi đó $b(a-c)\ge 0, c(b-a)\le 0$, $a(c-b)\le 0$

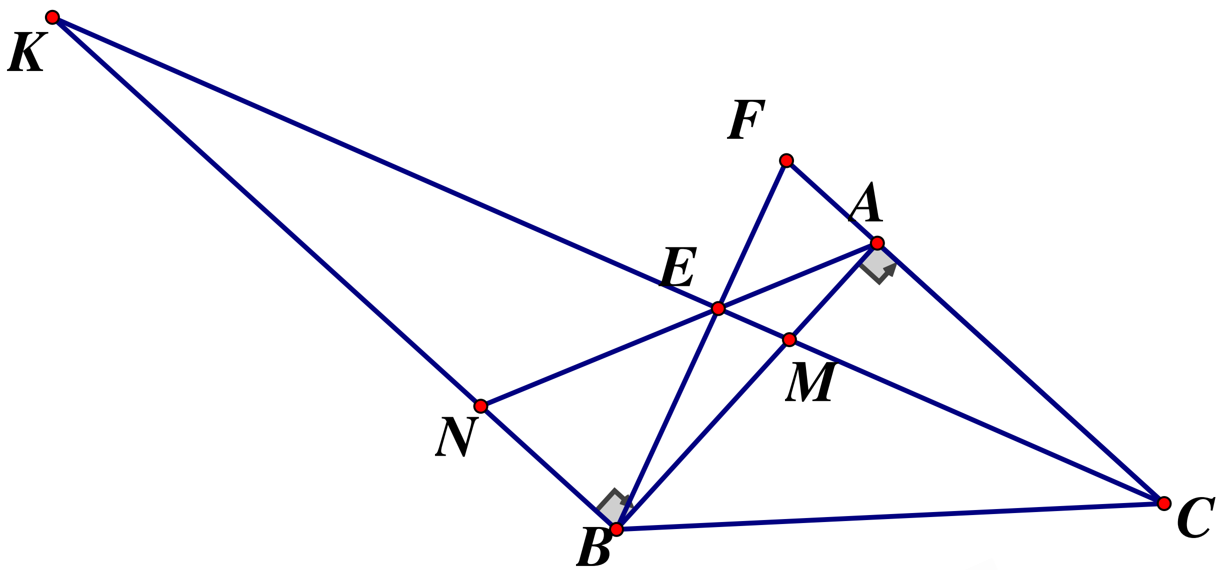
$$a^3\ge b^3\ge c^3 \Rightarrow abc+a^3\ge abc+b^3\ge abc+c^3 \Rightarrow \frac{b(a-c)}{a\left(bc+a^2\right)}\le\frac{b(a-c)}{b\left(ac+b^2\right)}$$

$$\Rightarrow A-B\le\frac{b(a-c)}{b\left(ac+b^2\right)}+\frac{c(b-a)}{b\left(ac+b^2\right)}+\frac{a(c-b)}{c\left(ab+c^2\right)}=\frac{ab-ac}{b\left(ac+b^2\right)}+\frac{ac-ab}{c\left(ab+c^2\right)}$$
$$=\frac{a(b-c)}{b\left(ac+b^2\right)}-\frac{a(b-c)}{c\left(ab+c^2\right)}$$

Mà $\frac{1}{b\left(ac+b^2\right)}\le\frac{1}{c\left(ab+c^2\right)}$ nên $A-B\le 0$ đpcm

vndoc

Bài 5.



a) Đường thẳng EC cắt đường thẳng BN tại K.

Ta có: $AC \perp AB(gt), KB \perp AB(gt) \Rightarrow FC//KB$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AF}{NB}=\dfrac{AE}{EN}\\ \dfrac{AC}{NK}=\dfrac{AE}{EN}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AF}{NB}=\frac{AC}{NK} \Rightarrow \frac{AF}{AB}=\frac{AC}{NK} \Rightarrow AF=\frac{AB^2}{2NK} \qquad (1)$$

$$\frac{AC}{BK}=\frac{AM}{MB}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AC}{KN+NB}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AB}{KN+\dfrac{AB}{2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2AB}{2KN+AB}=\frac{1}{2} \Rightarrow 4AB=2KN+AB \Rightarrow KN=\frac{3}{2}AB \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AF=\dfrac{AB^2}{3AB}=\dfrac{AB}{3} \Rightarrow AF=AM$ (Đpcm)

b) Từ chứng minh trên suy ra $\Delta AFB=\Delta AMC \Rightarrow ABF=ACM$

Mà $ABF+AFB=90^0 \Rightarrow ACM+AFB=90^0$

$\Rightarrow FEC=90^0 \Rightarrow EH=\dfrac{FC}{2}=FH$

Mà $FH = FA + AH = \frac{AC}{3} + \frac{AC}{3} = \frac{2AC}{3} = BM \Rightarrow EH = BM\left(dfcm\right)$

PHÒNG GD & ĐT HUYỆN KHOÁI CHÂU	ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN Năm học: 2016-2017 Môn: Toán – Lớp 8 (Thời gian làm bài: 120' – không kể giao đề)

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (5,0 điểm)

Chọn và chép lại đáp án đúng vào bài làm của mình với mỗi câu hỏi sau đây:

Câu 1. Cho $3\left(a+b\right)=2\left(3a-b\right)$. Tỉ số của hai số a và b bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

Câu 2. Giá trị của biểu thức

$A = x^{2017} - 2017x^{2016} + 2017x^{2015} - 2017x^{2014} + ... - 2017x^2 + 2017x - 2017$ tại $x = 2016$ là

A. 2016 B. 2017 C. -1 D. 1

Câu 3. Cho $m = UCLN\left(63;72\right); n = BCNN\left(9;15\right)$. Tìm hai số a,b sao cho $a+b=m; a^2-b^2=n.$

A. $a=5;b=4$ B. $a=9;b=5$ C. $a=7;b=2$ D. $a=7;b=5$

Câu 4. Tìm a, biết : a tỉ lệ thuận với b theo hệ số tỉ lệ 2; b tỉ lệ nghịch với c theo hệ số tỉ lệ 6 và $c^2-6c=-9$

A. $a=2$ B. $a=4$ C. $a=6$ D. $a=12$

Câu 5. Cho $a+b+c=6$ và $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$. Giá trị của biểu thức: $A=\left(1-a\right)^{2017}+\left(b-1\right)^{2017}+\left(c-2\right)^{2017}$ bằng:

A. -1 B. 0 C. 1 D. 6

Câu 6. Cho $\left(x+3\right)^2+\left(y-2\right)^2=0$. Tính $\left(x+y\right)^{2016}+\left(x+y\right)^{2017}$ được kết quả là:

A. -2 B. 0 C. 1 D. 2

Câu 7. Tìm m để đa thức $x^4-3x^3+6x^2-7x+m$ chia hết cho đa thức $x-2$

A. $m=-2$ B. $m=0$ C. $m=2$ D. $m=4$

Câu 8. Số nghiệm của phương trình: $x^3-3x+2=0$ là mấy ?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 9. Cho số nguyên x thỏa mãn phương trình $2x^2-3x-2=0$. Chữ số tận cùng của $\left(4-x\right)^{2017}$ là chữ số:

vndoc

A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

Câu 10. Tìm ĐKXĐ của phương trình : $\frac{x^2+1}{2x^2-3x+1}=\frac{x}{x+1}$

A. $x\neq -1$ B. $x\neq -1; x\neq \frac{1}{2}$ C. $x\neq \pm 1$ D. $x\neq \pm 1; x\neq \frac{1}{2}$

Câu 11. Giải phương trình : $\frac{2x^2+10x+12}{x^3-4x}=0$

A. $x\in\{-2;-3\}$ B. $x\in\{0;\pm 2\}$ C. $x\in\{-3\}$ D. $x\in\{0;2\}$

Câu 12. Giải phương trình : $|x+5|=3x-7$

A. $x\in\{6\}$ B. $x\in\left\{6;\frac{1}{2}\right\}$ C. $x\in\left\{6;-\frac{1}{2}\right\}$ D. $x\in\{-6\}$

Câu 13. Cho $a=(-2)^{2018}; b=-3.(-2)^{2017}$. Kết luận nào sau đây là đúng ?

A. $a>b$ B. $a<b$ C. $a<-b$ D. $-a>b$

Câu 14. Tìm x, biết $\frac{2x+1}{x-1}<1$

A. $x<-2$ B. $x>-2$ C. $-2<x<1$ D. $-2<x<-1$

Câu 15. Cho $\Delta ABC=\Delta MNP$, biết $AB=3cm, NP=5cm$. Chu vi tam giác ABC có thể bằng

A. 9 cm B. 9,5 cm C.10 cm D. 13 cm

Câu 16. Cho tam giác ABC có: $AB=8cm, AC=18cm, BC=13cm$, trung tuyến AM, phân giác AD. Độ dài đoạn thẳng DM là :

A. 2,5 cm B. 4 cm C. 4,5 cm D. 6,5 cm

Câu 17. Cho tam giác ABC, phân giác AD biết $AC=9, BC=10, AB=3a, BD=2a$. Tìm a

A. $a=2$ B. $a=3$ C. $a=4,5$ D. $a=5$

Câu 18. Cho tam giác ABC có $A=120^0$, AB = 6cm, $AC=12cm$. Độ dài đường phân giác AD bằng:

A. 2cm B. 3cm C.4cm D. 6 cm

Câu 19. Cho tam giác ABC với đường phân giác AD thỏa mãn $\frac{1}{AD}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$. Số đo góc BAC bằng:

A. 45^0 B. 60^0 C. 90^0 D. 120^0

Câu 20. Cho hình thang $ABCD(AB//CD)$, O là giao điểm của AC và BD. Qua O kẻ đường thẳng song song với hai đáy, cắt AD và BC lần lượt tại M và N. Biết $AB = 4cm$, $CD = 12cm$. Độ dài đoạn thẳng MN bằng:

A. $4cm$ B. $6cm$ C. $8cm$ D. $10cm$

II. PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

Bài 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức : $A = \left(\frac{2017}{x-1} - \frac{2016}{x+1} - \frac{2014+2016}{x^2-1}\right) : \frac{x^2-4}{x^2-1}$

a) Tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức được xác định
b) Rút gọn biểu thức A
c) Tìm x để $A \geq 0$ và biểu diễn tập các giá trị tìm được của x trên trục số
d) Tìm tất cả các số nguyên x để A có giá tri là số nguyên.

Bài 2. (1,0 điểm)

Giải các phương trình sau:

$a)\ \frac{101-x^2}{2015} - 1 = \frac{100-x^2}{2016} - \frac{x^2-99}{2017}$ $b)\ (4x-7)^2(2x-5)(x-1) = -1$

Bài 3. (0,5 điểm)

Cho $x \neq \pm y$ và $\frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^4}{x^4+y^4} + \frac{8y^8}{x^8-y^8} = 2016$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$?

Bài 4. (1,5 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, BD và CE là hai đường cao cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng: $\Delta HED \sim \Delta HBC$
b) Chứng minh rằng: $\Delta ADE \sim \Delta ABC$
c) Gọi M là trung điểm của BC, qua H kẻ đường thẳng vuông góc với HM, cắt AB tại I, cắt AC tại K. Chứng minh tam giác IMK là tam giác cân

ĐÁP ÁN

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

1C	2C	3C	4B	5B	6B	7A	8C	9A	10D
11C	12A	13B	14C	15D	16A	17A	18C	19D	20B

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. a) ĐKXĐ: $x \neq \pm 1; x \neq \pm 2$

b) Rút gọn được: $A = \dfrac{x+3}{x^2-4}$

c) Để $A \geq 0$ thì

$$A = \frac{x+3}{x^2-4} = \frac{x+3}{(x-2)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x < -2 \text{ hoặc } x > 2$$

Học sinh tự biểu diễn trên trục số

d)
$$x+3 \vdots (x^2-4) \Rightarrow (x^2+3x) \vdots (x^2-4) \Leftrightarrow (x^2-4)+(3x+4) \vdots (x^2-4)$$
$$\Rightarrow (3x+4) \vdots (x^2-4); (3x+9) \vdots (x^2-4) \Rightarrow 5 \vdots (x^2-4)$$

x^2-4	-5	-1	1	5
x^2	-1	3	5	9
x	Loại	Loại	Loại	± 3

Thử lại, chỉ có $x = -3$ là thỏa mãn. Vậy $x = -3$

Bài 2.

a)

$$\frac{101-x^2}{2015} - 1 = \frac{100-x^2}{2016} - \frac{x^2-99}{2017}$$

$$\Leftrightarrow \frac{101-x^2}{2015} + 1 = \frac{100-x^2}{2016} + 1 - \frac{x^2-99}{2017} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2116-x^2}{2015} = \frac{2116-x^2}{2016} + \frac{2116-x^2}{2017}$$

$$\Leftrightarrow (2116-x^2)\left(\frac{1}{2015} - \frac{1}{2016} - \frac{1}{2017}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2116 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 46$$

vndoc

2b) $(4x-7)^2(2x-5)(x-1)=-1 \Leftrightarrow (16x^2-56x+49)(2x^2-7x+5)=-1$

Đặt $2x^2-7x+5=a$ thì $16x^2-56x+49=8a+9$

Ta có phương trình: $a(8a+9)=-1 \Leftrightarrow 8a^2+9a+1=0$

$\Leftrightarrow (a+1)(8a+1)=0 \Leftrightarrow a=-1$ hoặc $a=\frac{-1}{8}$

$+) 2x^2-7x+5=-1 \Leftrightarrow 2x^2-7x+6=0 \Leftrightarrow (x-2)(2x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{3}{2} \end{array}\right.$

$+) 2x^2-7x+5=\frac{-1}{8} \Leftrightarrow 16x^2-56x+41=0 \Leftrightarrow (4x-7)^2=8 \Leftrightarrow s=\frac{\pm\sqrt{8}+7}{4}$

Vậy $S=\left\{2;\frac{3}{2};\frac{\pm\sqrt{8}+7}{4}\right\}$

Bài 3.

$\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^4}{x^4+y^4}+\frac{8y^8}{x^8-y^8}=2016$

$\Leftrightarrow \frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^4(x^4-y^4)+8y^8}{x^8-y^8}=2016$

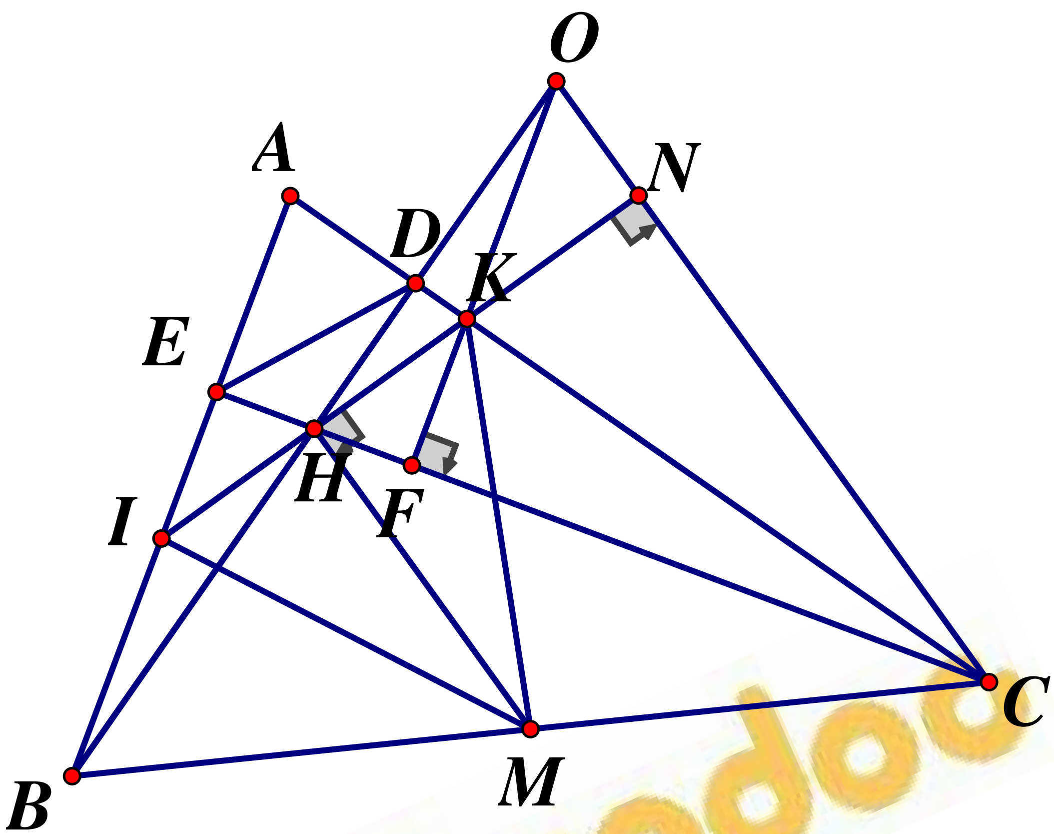
$\Leftrightarrow \frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^4}{x^4-y^4}=2016$

$\Leftrightarrow \frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2-y^2}=2016$

$\Leftrightarrow \frac{y}{x-y}=2016$

$\Leftrightarrow \frac{x}{y}=\frac{2017}{2016}$

Bài 4.



a) $\Delta BHE \sim \Delta CHD\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{HE}{HB} = \dfrac{HD}{HC} \Rightarrow \Delta HED \sim \Delta HBC(c.g.c)$

b) $\Delta ABD \sim \Delta ACE(g.g) \Rightarrow \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC(c.g.c)$

c) Kẻ $KF \perp CE$.Gọi O là giao điểm của KF và HD $\Rightarrow O$ là trực tâm tam giác CHO

$\Rightarrow HK \perp CO \Rightarrow MH$ là đường trung bình của tam giác BCO

$\Rightarrow HB = HO \Rightarrow \Delta BEH = \Delta OFH$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow HE = HF \Rightarrow \Delta HEI = \Delta HFK\left(gcg\right)$

$\Rightarrow HI = HK \Rightarrow \Delta MIK$ cân tại M (vì có đường cao đồng thời là đường trung tuyến)

PHÒNG GD & ĐT BỈM SƠN **ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN NĂM HỌC 2014-2015**

Môn: TOÁN 8

Thời gian: 120 phút (không kể chép đề)

vndoc

Bài 1. (3đ) Cho a,b,c là các số hữu tỷ khác 0 thỏa mãn $a+b+c=0$

Chứng minh rằng: $M=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ là bình phương của một số hữu tỷ

Bài 2. (5 điểm)

Rút gọn biểu thức sau và tìm giá tri nguyên của x để biểu thức có giá trị nguyên:

$$M=\left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8}-\frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3}\right)\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)$$

Bài 3. (3 điểm)

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $3^x+4^x=5^x$

Bài 4. (6 điểm)

a) Cho tam giác ABC có $BAC=120^0$. Các phân giác AD,BE và CF

Chứng minh rằng $\frac{1}{AD}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$

b) Tính FDE

Bài 5. (3 điểm)

Cho a,b,c là các số không âm và không lớn hơn 2 thỏa mãn $a+b+c=3$

Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2\le 5$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

Ta có:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-2.\frac{a+b+c}{abc}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$$

Vậy M là bình phương của một số hữu tỉ

Bài 2.

$$M=\left(\frac{x^2-2x}{2\left(x^2+4\right)}-\frac{2x^2}{4.(2-x)+x^2.(2-x)}\right).\frac{x^2-x-2}{x^2}$$

$$M=\left[\frac{x^2-2x}{2\left(x^2+4\right)}+\frac{2x^2}{\left(x^2+4\right)(x-2)}\right].\frac{\left(x^2-2\right).(x+1)}{x^2}$$

$$M=\frac{x^2.(x-2)^2+4x^2}{2(x-2)\left(x^2+4\right)}.\frac{(x-2)(x+1)}{x^2}=\frac{x\left(x^2-4x+4+4x\right)}{2(x-2)\left(x^2+4\right)}.\frac{(x-2)(x+1)}{x^2}$$

$$M=\frac{x\left(x^2+4\right)}{2(x-2)\left(x^2+4\right)}.\frac{(x-2)(x+1)}{x^2}=\frac{x+1}{2x}$$

Để M xác định thì $\begin{cases}2x^2+8\neq 0\\ \left(x^2+4\right)(x-2)\neq 0\\ x^2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x\neq 2\end{cases}$

Khi đó M nguyên thì $2M$ nguyên hay $\dfrac{x+1}{x}$nguyên . Mà

$$\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x\in U(1)=\{\pm 1\}$$

Với $x=-1$ thỏa mãn (*) và $M=0\in\mathbb{Z}$

Với $x=1$thỏa mãn $(*)$và $M=1\in\mathbb{Z}$

Vậy $x=1;x=-1$ thỏa mãn điều kiện bài ra.

Bài 3.

Phương trình đã cho có thể viết lại là : $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1$

Ta thấy $x=2$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Với $x\neq 2$ ta xét:

Nếu $x>2$ thì $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x>1$

Với $x<2$ dễ thấy $x=0;x=1$ không phải là nghiệm của phương trình

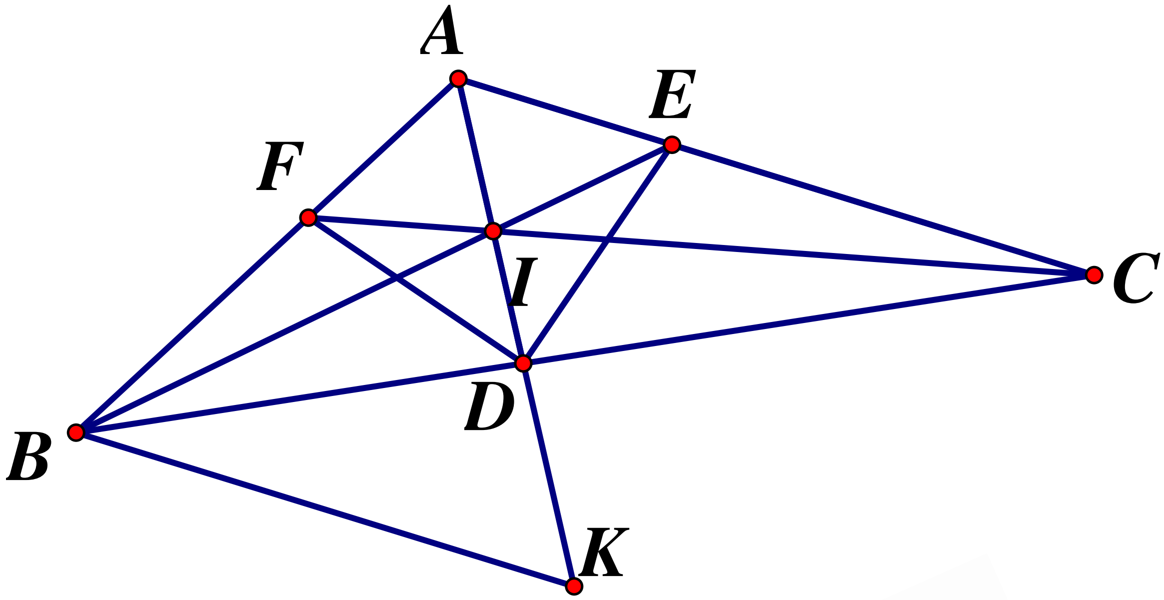
Với $x<0$ ta đặt $x=-y$ thì $y>0$ nên $y\geq 1$. Ta có:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^{-y}+\left(\frac{4}{5}\right)^{-y}=1\Leftrightarrow\left(\frac{5}{3}\right)^y+\left(\frac{5}{4}\right)^y=1$$

Phương trình này vô nghiệm vì $\left(\frac{5}{3}\right)^y+\left(\frac{5}{4}\right)^y\geq\frac{5}{3}+\frac{5}{4}>1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$

Bài 4.



a) Từ B kẻ $BK//AC$ cắt AD tại K, ta có tam giác ABK đều

Do đó:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}=\frac{DK}{DA}=\frac{AB-AD}{AD}=AC.\left(AB-AD\right)\Rightarrow\frac{1}{AD}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$$

b) Áp dụng tính chất đườn phân giác tính được $BD=\dfrac{BC.AB}{AB+AC}$

Từ (a) suy ra $AD=\dfrac{AB.AC}{AB+AC}$

Suy ra $\dfrac{DA}{DB}=\dfrac{CA}{CB}=\dfrac{EA}{EB}$ nên DE là phân giác của BDA

Chứng minh tương tự được DF là phân giác ADC

Từ đó suy ra $EDF=90^0$

Bài 5.

Từ giả thiết ta có:

$(2-a)(2-b)(2-c)\ge 0 \Leftrightarrow 8+2(ab+bc+ca)-4(a+b+c)-abc\ge 0$

Cộng hai vế với $a^2+b^2+c^2$, sau đó thu gọn ta được:

$(a+b+c)^2 \ge a^2+b^2+c^2+abc+4 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+abc\le 5$

Mà $abc\ge 0$ nên $a^2+b^2+c^2\le 5$

Dấu bằng xảy ra khi trong ba số a,b,c có một số bằng 0, một số bằng 2, một số bằng 1.

UBND THÀNH PHỐ MÓNG CÁI **PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP THÀNH PHỐ** **LỚP 8 THCS NĂM HỌC 2011-2012**

Bài 1. (4,0 điểm)

Cho biểu thức $M=\left(\dfrac{x^2-2x}{2x^2+8}-\dfrac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3}\right).\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)$

a) Rút gọn M
b) Tìm x nguyên để M có giá trị là số nguyên dương
c) Tìm x để $M\ge -3$

Bài 2. (6,0 điểm)

a) Cho x,y là hai số dương và $x^{2010}+y^{2010}=x^{2011}+y^{2011}=x^{2012}+y^{2012}$. Tính giá trị của biểu thức $S=x^{2020}+y^{2020}$
b) Giải phương trình: $\dfrac{x-2015}{2010}+\dfrac{x+2007}{2012}=\dfrac{x+2006}{2011}+\dfrac{x-2018}{2013}$
c) Tìm x và y thỏa mãn: $y^2+2(x^2+1)=2y(x+1)$

Bài 3. (4,0 điểm)

a) Chứng minh $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ac}{b}+\dfrac{ab}{c}\ge a+b+c$ với mọi số dương a,b,c.
b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $L=x^4-4x^3+7x^2-12x+20$

Bài 4. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A $\left(AC > AB\right)$. Vẽ đường cao $AH\left(H \in BC\right)$. Trên tia đối của tia BC lấy điểm K sao cho $KH = HA$. Qua K kẻ đường thẳng song song với AH, cắt đường thẳng AC tại P.

a) Chứng minh : Tam giác AKC đồng dạng với tam giác BPC

b) Gọi Q là trung điểm của BP. Chứng minh tam giác BHQ đồng dạng với tam giác BPC.

c) Tia AQ cắt BC tại I. Chứng minh $\frac{AH}{HB} - \frac{BC}{IB} = 1$

vndoc

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) $2x^2+8=2\left(x^2+4\right)\neq 0;8-4x+2x^2-x^3=\left(2-x\right)\left(x^2+4\right)\neq 0$ và $x\neq 0$

M xác định $\Leftrightarrow x\neq 2;x\neq 0$

$$M=\left(\frac{x^2-2x}{2\left(x^2+4\right)}-\frac{2x^2}{\left(2-x\right)\left(x^2+4\right)}\right).\frac{x^2-x-2}{x^2}$$

$$=\frac{\left(x^2-2x\right)\left(2-x\right)-4x^2}{2\left(2-x\right)\left(x^2+4\right)}.\frac{\left(x+1\right)\left(x-2\right)}{x^2}$$

$$=\frac{-x\left(x^2+4\right)}{2\left(2-x\right)\left(x^2+4\right)}.\frac{\left(x+1\right)\left(x-2\right)}{x^2}=\frac{x+1}{2x}$$

b) Với $x\neq 2;x\neq 0,M$ có giá trị nguyên dương $\Leftrightarrow M=\frac{x+1}{2x}$ có giá trị nguyên dương

$\Rightarrow 2M=\frac{2x+2}{2x}=1+\frac{1}{x}$ nguyên dương

$x\in\mathbb{Z};2M\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{1}{x}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x$ là ước của $1\Rightarrow x=\pm 1$(Thỏa mãn điều kiện)

Thử lại: Với $x=1$ ta có: $M=\frac{x+1}{2x}$ có giá trị bằng 1(Thỏa mãn)

Với $x=-1$ ta có: $M=\frac{x+1}{2x}$ có giá trị bằng 0 (không thỏa mãn)

Vậy $x=1$

c)

$M\geq -3\Leftrightarrow x\neq 2;x\neq 0;\frac{x+1}{2x}\geq -3$

$\frac{x+1}{2x}\geq -3\Leftrightarrow\frac{x+1}{2x}+3\geq 0\Leftrightarrow\frac{7x+1}{2x}\geq 0$

Ta có: $\begin{cases}7x+1\geq 0\\2x>0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}7x+1\leq 0\\2x<0\end{cases}$. Giải được $x>0$ hoặc $x\leq\frac{-1}{7}$

vndoc

Kết hợp với điều kiện ta có: $M \geq -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$ hoặc $x \leq \frac{-1}{7}$

Câu 2.

2a) Có $x^{2012} + y^{2012} = \left(x^{2011} + y^{2011}\right)(x+y) - \left(x^{2010} + y^{2010}\right).xy$

Do x, y là hai số dương và $x^{2010} + y^{2010} = x^{2011} + y^{2011} = x^{2012} + y^{2012}$

Nên $x^{2010} + y^{2010} = x^{2011} + y^{2011} = x^{2012} + y^{2012} = m > 0$

$$m = m(x+y) - mxy \Leftrightarrow 1 = x + y - xy \Leftrightarrow (x-1)(1-y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array}\right.$$

Với $x = 1 \Rightarrow y^{2010} = y^{2011} \Leftrightarrow y = 0$ (loại) hoặc $y = 1$

Với $y = 1 \Rightarrow x^{2010} = x^{2011} \Leftrightarrow x = 0(ktm)$ hoặc $x = 1$

2b.

$$\frac{x-2015}{2010} + \frac{x+2007}{2012} = \frac{x+2006}{2011} + \frac{x-2018}{2013}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-2015}{2010} + 1\right) + \left(\frac{x+2007}{2012} - 1\right) = \left(\frac{x+2006}{2011} - 1\right) + \left(\frac{x-2018}{2013} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-5}{2010} + \frac{x-5}{2012} - \frac{x-5}{2011} - \frac{x-5}{2013} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\left(\frac{1}{2010} + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2011} - \frac{1}{2013}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 5\left(Do \quad \frac{1}{2010} + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2011} - \frac{1}{2013} \neq 0\right)$$

2c.

$$y^2+2\left(x^2+1\right)=2y\left(x+1\right)\Leftrightarrow y^2-2y\left(x+1\right)+2\left(x^2+1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\left[y^2-2y\left(x+1\right)+\left(x+1\right)^2\right]+\left(x^2-2x+1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\left(y-x-1\right)^2+\left(x-1\right)^2=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}y-x-1=0\\x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$$

Câu 3.

3a. Với mọi số dương a,b,c ta có:

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\ge a+b+c\Leftrightarrow\frac{\left(bc\right)^2}{abc}+\frac{\left(ac\right)^2}{abc}+\frac{\left(ab\right)^2}{abc}\ge a+b+c$$
$$\Leftrightarrow\left(bc\right)^2+\left(ac\right)^2+\left(ab\right)^2\ge a^2bc+b^2ac+c^2ab$$
$$\Leftrightarrow 2\left(bc\right)^2+2\left(ac\right)^2+2\left(ab\right)^2-2a^2bc-2b^2ac-2c^2ab\ge 0$$
$$\Leftrightarrow\left[\left(ac\right)^2-2a^2bc+\left(ab\right)^2\right]+\left[\left(bc\right)^2-2b^2ac+\left(ab\right)^2\right]+\left[\left(ac\right)^2-2c^2ab+\left(bc\right)^2\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(ac-ab\right)^2+\left(bc-ab\right)^2+\left(ac-bc\right)^2\ge 0$$

BĐT cuối đúng nên ta có điều phải chứng minh.

3b.

$$L=x^4-4x^3+7x^2-12x+20=x^4-4x^3+4x^2+3x^2-12x+12+8$$
$$=x^2\left(x^2-4x+4\right)+3\left(x^2-4x+4\right)+8=\left(x-2\right)^2\left(x^2+3\right)+8$$

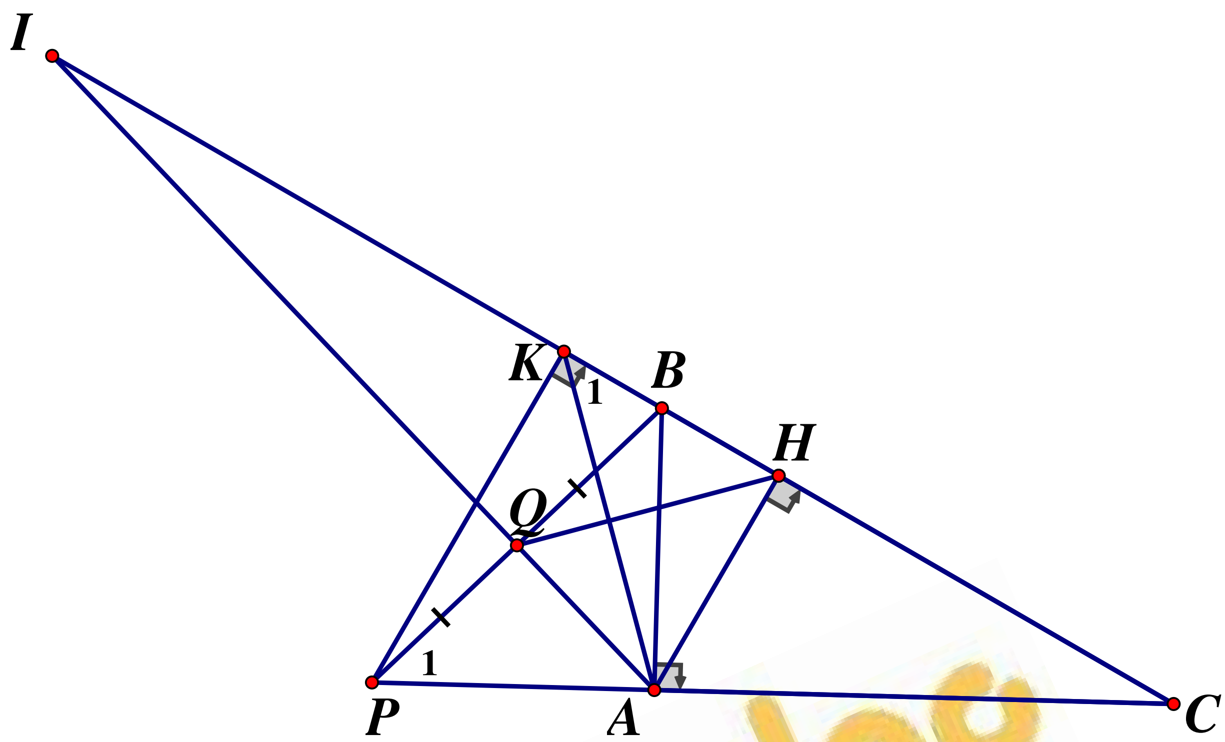
Do $\left(x-2\right)^2\ge 0(\forall x);\left(x^2+3\right)>0\left(\forall x\right)\Rightarrow L\ge 8\quad\forall x$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\left(x-2\right)^2=0\Leftrightarrow x=2$. Vậy với $x=2$ thì L có giá trị nhỏ nhất.

Giá trị nhỏ nhất của L là 8

vndoc

Câu 4.



a) $PK//AH \Rightarrow \Delta CKP \sim \Delta CAB \Rightarrow \dfrac{CK}{CP} = \dfrac{CA}{CB}$

Suy ra $\Delta AKC \sim \Delta BPC(c.g.c)$ (1)

b) ΔAKH vuông cân tại H $\Rightarrow K_1 = 45^0$. Từ (1) $\Rightarrow K_1 = P_1 = 45^0 \Rightarrow \Delta BAP$ vuông cân tại A $\Rightarrow BP = AB\sqrt{2}$

Chứng minh $\Delta BHA \sim \Delta BAC \Rightarrow \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{AB}{BC}$

$\Rightarrow \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{\sqrt{2}AB}{\sqrt{2}BC} \Rightarrow \dfrac{BH}{\sqrt{2}AB} = \dfrac{AB}{\sqrt{2}BC} \Rightarrow \dfrac{BH}{\sqrt{2}AB} = \dfrac{\sqrt{2}AB}{2BC}$

$\Rightarrow \dfrac{BH}{BP} = \dfrac{BP}{2BC} \Rightarrow \dfrac{BH}{BP} = \dfrac{BQ}{BC}$ $(BP = 2BQ)$

ΔBHQ và ΔBPC có: $\dfrac{BH}{BP} = \dfrac{BQ}{BC}$; PBC chung $\Rightarrow \Delta BHQ \sim \Delta BPC(c.g.c)$

vndoc

c) ΔBAP vuông cân tại A, AQ là trung tuyến nên cũng là phân giác $\Rightarrow AI$ là phân giác ngoài của $\Delta ABC \Rightarrow \dfrac{IC}{IB} = \dfrac{AC}{AB}$ (2)

$\Delta ABC \sim \Delta HBA \Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AH}{HB}$ (3)

Từ (2) và (3) ta có:

$$\frac{IC}{IB} = \frac{AH}{HB} \Rightarrow \frac{IB+BC}{IB} = \frac{AH}{HB} \Rightarrow 1 + \frac{BC}{IB} = \frac{AH}{HB}$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{HB} - \frac{BC}{IB} = 1 (dfcm)$$

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH HƯNG YÊN

Năm học: 2013-2014

Môn: TOÁN 8

Bài 1 (2,0 đ) Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$$

$$b) \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$$

Bài 2 (2,0 đ).

a) Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác

Chứng minh rằng : $A = \dfrac{a}{b+c-a} + \dfrac{b}{a+c-b} + \dfrac{c}{a+b-c} \geq 3$

b) Cho $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ và $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} = 0$

Chứng minh rằng: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Bài 3. (1,0 đ) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình*

Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11. Nếu bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu lên 4 đơn vị thì sẽ được phân số nghịch đảo của phân số đã cho. Tìm phân số đó.

Bài 4 (3,0 đ)

Cho ΔABC vuông tại A $(AC > AB)$, đường cao $AH (H \in BC)$. Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HA = HD$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

1. Chứng minh rằng hai tam giác BEC và ADC đồng dạng. Tính độ dài đoạn BE theo $m = AB$
2. Gọi M là trung điểm của đoạn BE. Chứng minh rằng hai tam giác BHM và BEC đồng dạng. Tính số đo góc AHM
3. Tia AM cắt BC tại G. Chứng minh $\frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$

Bài 5. (1,0 đ)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$

Bài 6 (1,0 đ)

Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$a)\frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-214}{86} - 1 + \frac{x-132}{84} - 2 + \frac{x-54}{82} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-300}{86} + \frac{x-300}{84} + \frac{x-300}{82} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-300)\left(\frac{1}{86} + \frac{1}{84} + \frac{1}{82}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 300$$

b) Ta có:

$$x^2 + 9x + 20 = (x+4)(x+5)$$

$$x^2 + 11x + 30 = (x+6)(x+5)$$

$$x^2 + 13x + 42 = (x+6)(x+7)$$

ĐKXĐ: $x \neq -4; x \neq -5; x \neq -6; x \neq -7$

Phương trình trở thành:

vndoc

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)}+\frac{1}{(x+5)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+7)}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow 18(x+7)-18(x+4)=(x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2)=0$$

Từ đó tìm được $x=-13; x=2$

Câu 2.

a.

Đặt $b+c-a=x>0; c+a-b=y>0; a+b-c=z>0$

Từ đó suy ra $a=\frac{y+z}{2}; b=\frac{x+z}{2}; c=\frac{x+y}{2}$

Thay vào ta được: $A=\frac{y+z}{2x}+\frac{x+z}{2y}+\frac{x+y}{2z}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\right]$

Từ đó suy ra $A\geq\frac{1}{2}(2+2+2)$ hay $A\geq 3$

b.

Từ $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0\Leftrightarrow\frac{ayz+bxz+cxy}{xyz}=0\Leftrightarrow ayz+bxz+cxy=0$

Ta có:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\Leftrightarrow\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2.\left(\frac{xy}{ab}+\frac{xz}{ac}+\frac{yz}{bc}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2.\frac{cxy+bxz+ayz}{abc}=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (dpcm)$$

Câu 3.

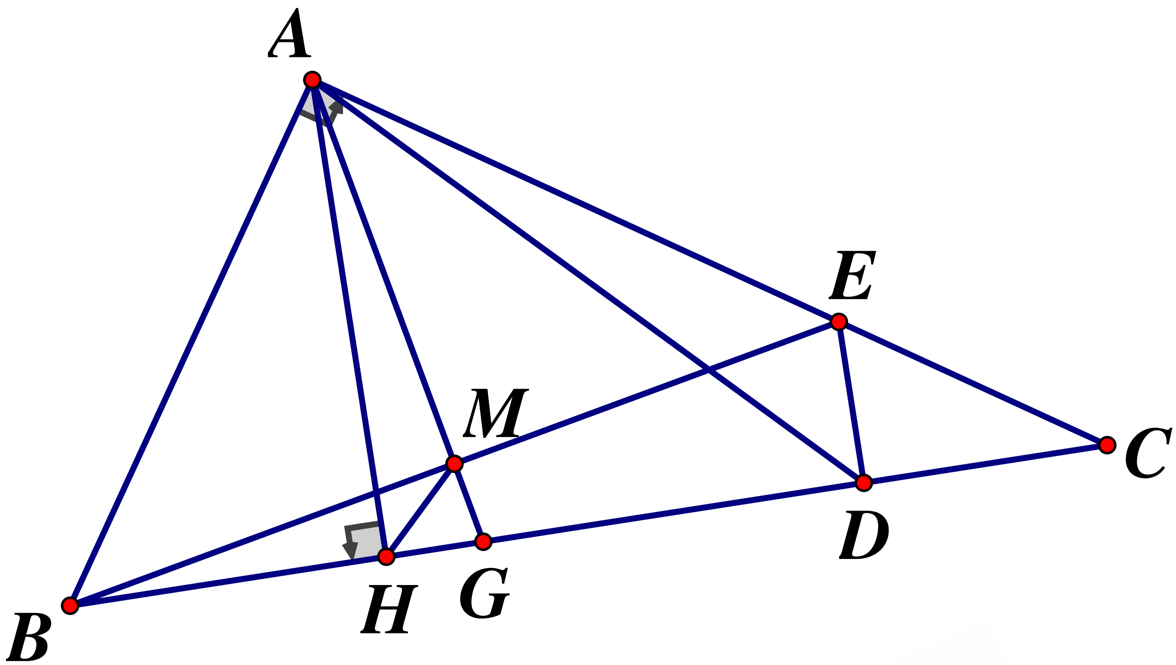
Gọi tử số của phân số cần tìm là x thì mẫu số cua phân số cần tìm là $x+11$. Phân số cần tìm là $\frac{x}{x+11}\left(x\neq -11\right)$

Khi bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu số lên 4 đơn vị ta được phân số: $\frac{x-7}{x+15}\left(x\neq -15\right)$

Theo bài ta có phương trình: $\frac{x}{x+11}=\frac{x+15}{x-7}\Rightarrow x=-5$(thỏa mãn)

Từ đó ta tìm được phân số $\frac{-5}{6}$

Câu 4.



1) Hai tam giác ADC và BEC có:

C chung; $\dfrac{CD}{CE}=\dfrac{CA}{CB}$ (hai tam giác vuông CDE và CAB đồng dạng)

Do đó : $\Delta BEC \sim \Delta ADC$

Suy ra : $BEC = ADC = 135^0$ (vì ΔAHD vuông cân tại H theo giả thiết)

Nên $AEB = 45^0$ do đó ΔABE vuông cân tại A. suy ra $BE = AB\sqrt{2} = m\sqrt{2}$

2) Ta có: $\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{AD}{AC}\left(Do\Delta BEC \sim \Delta ADC\right)$

Mà $AD = AH\sqrt{2}$ (tam giác AHD vuông cân tại H)

Nên $\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{AH\sqrt{2}}{AC}=\dfrac{BH}{AB\sqrt{2}}=\dfrac{BH}{BE}\left(\Delta ABH \sim \Delta CBA\right)$

Do đó $\Delta BHM \sim \Delta BEC(c.g.c)$, suy ra $BHM = BEC = 135^0 \Rightarrow AHM = 45^0$

3) ΔABE vuông cân tại A, nên tia AM còn là tia phân giác BAC

Suy ra : $\dfrac{GB}{GC}=\dfrac{AB}{AC}$, mà $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{ED}{DC}\left(\Delta ABC \sim \Delta DEC\right)=\dfrac{AH}{HC}\left(ED//AH\right)=\dfrac{HD}{HC}$

Do đó: $\frac{GB}{GC}=\frac{HD}{HC}\Rightarrow\frac{GB}{GB+GC}=\frac{HD}{HD+HC}\Rightarrow\frac{GB}{BC}=\frac{HD}{AH+HC}$

Câu 5.

$A=\frac{2010x+2680}{x^2+1}$

$=\frac{335x^2-335+335x^2+2010x+3015}{x^2+1}=-335+\frac{335(x+3)^2}{x^2+1}\geq-335$

Vậy GTNN của A là -335 khi $x=-3$

Câu 6.

Gọi các cạnh của tam giác vuông là x,y,z; trong đó cạnh huyền là z

(x,y,z là các số nguyên dương)

Ta có: $xy=2(x+y+z)(1)$ và $x^2+y^2=z^2(2)$

Từ (2) suy ra $z^2=(x+y)^2-2xy$, t hay (1) vào ta có:

$z^2=(x+y)^2-4(x+y+z)$

$z^2+4z=(x+y)^2-4(x+y)$

$z^2+4z+4=(x+y)^2+4$

$(z+2)^2=(x+y-2)^2$, suy ra $z+2=x+y-2$

$z=x+y-4$, thay vào (1) ta được:

$xy=2(x+y+x+y-4)$

$xy-4x-4y=-8$

$(x-4)(y-4)=8=1.8=2.4$

Từ đó ta tìm được các giá trị của x,y,z là:

$(x;y;z)=\{(5;12;13);(12;5;13);(6;8;10);(8;6;10)\}$

TRƯỜNG THCS BẠCH SAM

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI 8
Môn: TOÁN
Năm học: 2016-2017

Bài 1. (2 điểm)

Cho biểu thức : $C=\left(\frac{1}{1-x}+\frac{2}{x+1}-\frac{5-x}{1-x^2}\right):\frac{1-2x}{x^2-1}$

a) Rút gọn biểu thức C
b) Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức B là số nguyên.

Bài 2. (2 điểm)

a) Tìm các số nguyên a và b để đa thức $A(x)=x^4-3x^3+ax+b$ chia hết cho đa thức $B(x)=x^2-3x+4$
b) Cho $x,y,z>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}$$

Câu 3. (2 điểm)

a) Tìm x,y,z thỏa mãn phương trình sau:

$$9x^2+y^2+2z^2-18x+4z-6y+20=0$$

b) Cho $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ và $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Câu 4. (3 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A $(AC>AB)$, đường cao AH. Trong nửa mặt phẳng bờ AH có chứa C, vẽ hình vuông $AHKE$. Gọi P là giao điểm của AC và KE

a) Chứng minh ΔABP vuông cân
b) Gọi Q là đỉnh thứ tư của hình bình hành $APQB$, gọi I là giao điểm của BP và AQ. Chứng minh H,I,E thẳng hàng.
c) Tứ giác $HEKQ$ là hình gì ?

Câu 5. (1 điểm)

Tính diện tích hình thang $ABCD\left(AB//CD\right)$, biết $AB=42cm, A=45^0; B=60^0$, chiều cao của hình thang bằng $18cm$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

vndoc

a) ĐKXĐ: $x \neq \pm 1; x \neq \frac{1}{2}$

$$C = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2}\right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$$

$$= \frac{1+x+2(1-x)-5+x}{(1-x)(1+x)} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{1-2x}$$

$$= \frac{-2}{2x-1}$$

b) B có giá trị nguyên khi x là số nguyên thì $\frac{-2}{2x-1}$ có giá trị nguyên

$$\Leftrightarrow 2x-1 \text{ là Ư}(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=1 \\ 2x-1=-1 \\ 2x-1=2 \\ 2x-1=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1(ktm) \\ x=0(tm) \\ x=\frac{3}{2}(tm) \\ x=\frac{-1}{2}(tm) \end{array}\right.$$

Đối chiếu ĐK thì có $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{3}{2} \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$ thỏa mãn

Câu 2.

a) Ta có:

$$A(x) = B(x).(x^2-1) + (a-3)x + b + 4$$

Để $A(x) \vdots B(x)$ thì $\begin{cases} a-3=0 \\ b+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases}$

b) Đặt $y+z=a; z+x=b; x+y=c \Rightarrow x+y+z=\frac{a+b+c}{2}$

$$\Rightarrow x=\frac{-a+b+c}{2}; y=\frac{a-b+c}{2}; z=\frac{a+b-c}{2}$$

$$P=\frac{-a+b+c}{2a}+\frac{a-b+c}{2b}+\frac{a+b-c}{2c}$$
$$=\frac{1}{2}.\left(-1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-1+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}-1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)$$
$$=\frac{1}{2}.\left[-3+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\right]\geq\frac{3}{2}$$
$$MinP=\frac{3}{2}\Leftrightarrow a=b=c\Leftrightarrow x=y=z$$

Câu 3.

a)

$$9x^2+y^2+2z^2-18x+4z-6y+20=0$$
$$\Leftrightarrow\left(9x^2-18x+9\right)+\left(y^2-6y+9\right)+2\left(z^2+2z+1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 9(x-1)^2+(y-3)^2+2(z+1)^2=0(*)$$

Do: $(x-1)^2\geq 0;(y-3)^2\geq 0;(z+1)^2\geq 0$

Nên : $(*)\Leftrightarrow x=1;y=3;z=-1$

Vậy $(x,y,z)=(1;3;-1)$

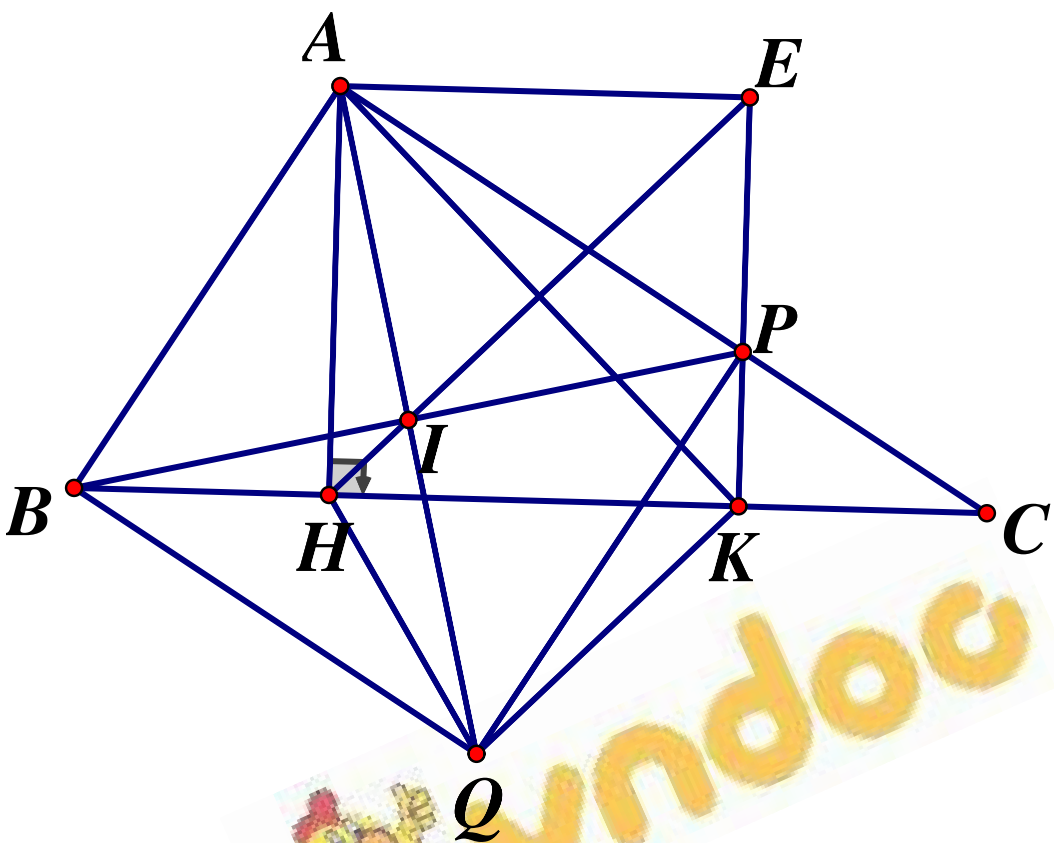
b) Từ:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0\Leftrightarrow\frac{ayz+bxz+cxy}{xyz}=0\Leftrightarrow ayz+bxz+cxy=0$$

Ta có:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\Leftrightarrow\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=1$$
$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2.\left(\frac{xy}{ab}+\frac{xz}{ac}+\frac{yz}{bc}\right)=1$$
$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2.\frac{cxy+bxz+ayz}{abc}=1$$
$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(dfcm)$$

Câu 4.



a) Chứng minh được: $\Delta BHA = \Delta PEA (g.c.g)$

$\Rightarrow AB = AP$ mà $BAP = 90^0 (gt)$ vậy ΔBPA vuông cân

b) Ta có: $HA = HK \Rightarrow H$ nằm trên đường trung trực của AK

Ta có: $AE = KE \Rightarrow E$ nằm trên dường trung trực của KA

ΔPBK vuông có $IB = IP$ (tính chất đường chéo hình bình hành $ABQP$)

$\Rightarrow IK = IP = IB (*)$

Ta có $ABQP$ là hình bình hành (giả thiết), có $BA = AP$ (ΔBPA vuông cân tại A)

$\Rightarrow APQB$ là hình thoi, mà $BAP = 90^0 (gt)$

$\Rightarrow APQB$ là hình vuông nên $PI = IA (**)$

Từ $(*)(**)$ suy ra $IK = IA$ nên I nằm trên đường trung trực của AK

Vậy H, I, E thẳng hàng

c) Ta có: $APQB$ là hình vuông (cmt) nên $AP = BQ$ mà $IK = \frac{PB}{2} \Rightarrow IK = \frac{AQ}{2}$

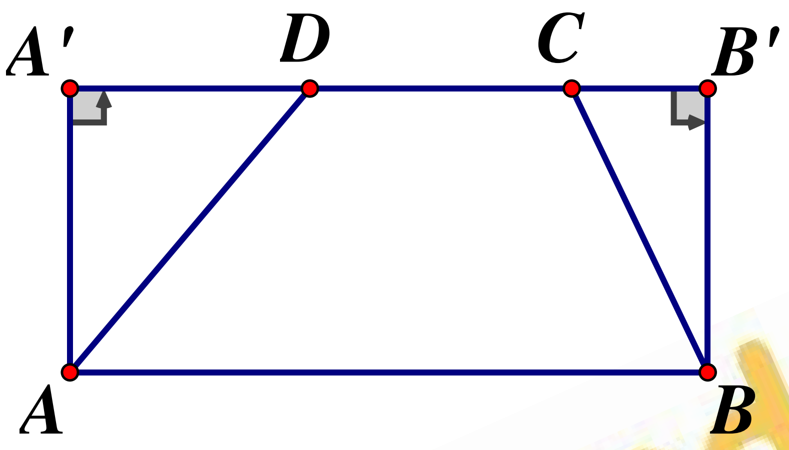
ΔAKQ có $AI = IQ$ (tính chất đường chéo hình vuông)

Mà $IK = \frac{AQ}{2}(cmt) \Rightarrow \Delta AKQ$ vuông ở K

$\Rightarrow AK \perp KQ$ mà $AK \perp HE$ (EAHK là hình vuông) $\Rightarrow QK // HE$

Vậy $HEKQ$ là hình thang

Câu 5.



Qua A và B kẻ AA' và BB' vuông góc với CD.

Tứ giác $ABB'A'$ là hình chữ nhật và $AA' = BB' = 18cm, A'AB = 90^0$

$DAB = 45^0 \Rightarrow A'AD = 45^0$. Do đó $\Delta A'AD$ vuông cân $\Rightarrow A'D = A'A = 18cm$

$B'BA = 90^0, CBA = 60^0 \Rightarrow B'BC = 30^0$

vì thế trong tam giác vuông $B'BC$ ta có $B'C = \frac{BC}{2}$.

Theo định lý Pytago ta có:

$B'C^2 = BC^2 - B'B^2$

$\Rightarrow B'C^2 = 4B'C^2 - B'B^2$

$\Rightarrow 3B'C^2 = B'B^2$

$\Rightarrow B'C = \frac{B'B}{\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}}(cm)$

Suy ra :

$$CD = A'B' - A'D - B'C = 42 - 18 - \frac{18}{\sqrt{3}} = 24 - \frac{18}{\sqrt{3}}(cm)$$

Vậy $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD).A'A = \frac{1}{2}.\left(42 + 24 - \frac{18}{\sqrt{3}}\right).18 \approx 498,6\left(cm^2\right)$

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2013-2014
MÔN THI: TOÁN 8
Ngày thi: 12/04/2014

Câu 1. (4 điểm)

Cho biểu thức : $A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1}.\left(\frac{x+1}{3x} - x - 1\right)\right] : \frac{x-1}{x}$

a) Rút gọn biểu thức A
b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (4 điểm)

a) Chứng minh rằng: $A = \left[n^3\left(n^2 - 7\right)^2 - 36n\right] \vdots 7 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
b) Cho $P = n^4 + 4$. Tìm tất cả các số tự nhiên n để P là số nguyên tố.

Câu 3. (4 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$
b) Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Câu 4. (6 điểm)

Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB kẻ hai tia Ax và By cùng vuông góc với AB. Trên tia Ax lấy điểm C$(C \neq A)$. Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với OC, đường thẳng này cắt By tại D. Từ O hạ đường vuông góc OM xuống CD (M thuộc CD).

a) Chứng minh $OA^2 = AC.BD$
b) Chứng minh tam giác AMB vuông.
c) Gọi N là giao điểm của BC và AD. Chứng minh $MN // AC$.

Câu 5. (2 điểm)

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$.Chứng minh rằng:

$$\frac{a+bc}{b+c}+\frac{b+ca}{c+a}+\frac{c+ab}{a+b}\ge 2$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) $A=\left[\dfrac{2}{3x}-\dfrac{2}{x+1}.\left(\dfrac{x+1}{3x}-x-1\right)\right]:\dfrac{x-1}{x}$

$A=\left[\dfrac{2}{3x}-\dfrac{2}{x+1}.\dfrac{(x+1)-3x(x+1)}{3x}\right]:\dfrac{x-1}{x}$

$A=\left[\dfrac{2}{3x}-\dfrac{2(1-3x)}{3x}\right].\dfrac{x}{x-1}$

$A=2.\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{2x}{x-1}$

b) Với $x\neq 0; x\neq \pm 1$. Ta có: $A=\dfrac{2x}{x-1}=2+\dfrac{2}{x-1}$

Để $A\in\mathbb{Z}$ thì $(x-1)$ phải là ước của $2\Rightarrow x-1\in\{\pm1;\pm2\}$

Xét từng trường hợp tìm x, đối chiếu điều kiện $\Rightarrow x\in\{2;3\}$

Câu 2.

a) Ta có:

$A=\left[n^3\left(n^2-7\right)^2-36n\right]$

$=n\left[n\left(n^2-7\right)-6\right]\left[n\left(n^2-7\right)+6\right]=n\left(n^3-7n-6\right)\left(n^3-7n+6\right)$

$=n\left(n^3-n-6n-6\right)\left(n^3-n-6n+6\right)=n\left[n\left(n^2-1\right)-6(n+1)\right]\left[n\left(n^2-1\right)-6(n-1)\right]$

$=n(n+1)\left(n^2-n-6\right)(n-1)\left(n^2+n-6\right)=n(n+1)(n+2)(n-3)(n-1)(n-2)(n+3)$

Do đó A là tích của 7 số nguyên liên tiếp nên $A\,\vdots\,7\quad\forall n\in\mathbb{Z}$

b)

$P=n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=\left(n^2+2\right)-(2n)^2$

$=\left(n^2-2n+2\right)\left(n^2+2n+2\right)=\left[(n-1)^2+1\right].\left[(n+1)^2+1\right]$

Vì n là số tự nhiên nên $(n+1)^2+1\geq 2$. Như vậy muốn P là số nguyên tố thì phải có $(n-1)^2+1=1$ hay $(n-1)^2=0\Rightarrow n=1$

Khi đó $P=5$ là số nguyên tố.

vndoc

Câu 3.

a) $x^2+9x+20=(x+4)(x+5)$

$x^2+11x+30=(x+6)(x+5)$

$x^2+13x+42=(x+6)(x+7)$

TXĐ: $x\neq\{-4;-5;-6;-7\}$

Phương trình trở thành:

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)}+\frac{1}{(x+5)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+7)}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow 18(x+7)-18(x+4)=(x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-13\\x=2\end{array}\right.$$

$S=\{-13;2\}$

b) Đặt $b+c-a=x>0;c+a-b=y>0;a+b-c=z>0.$ Ta có $x,y,z>0$

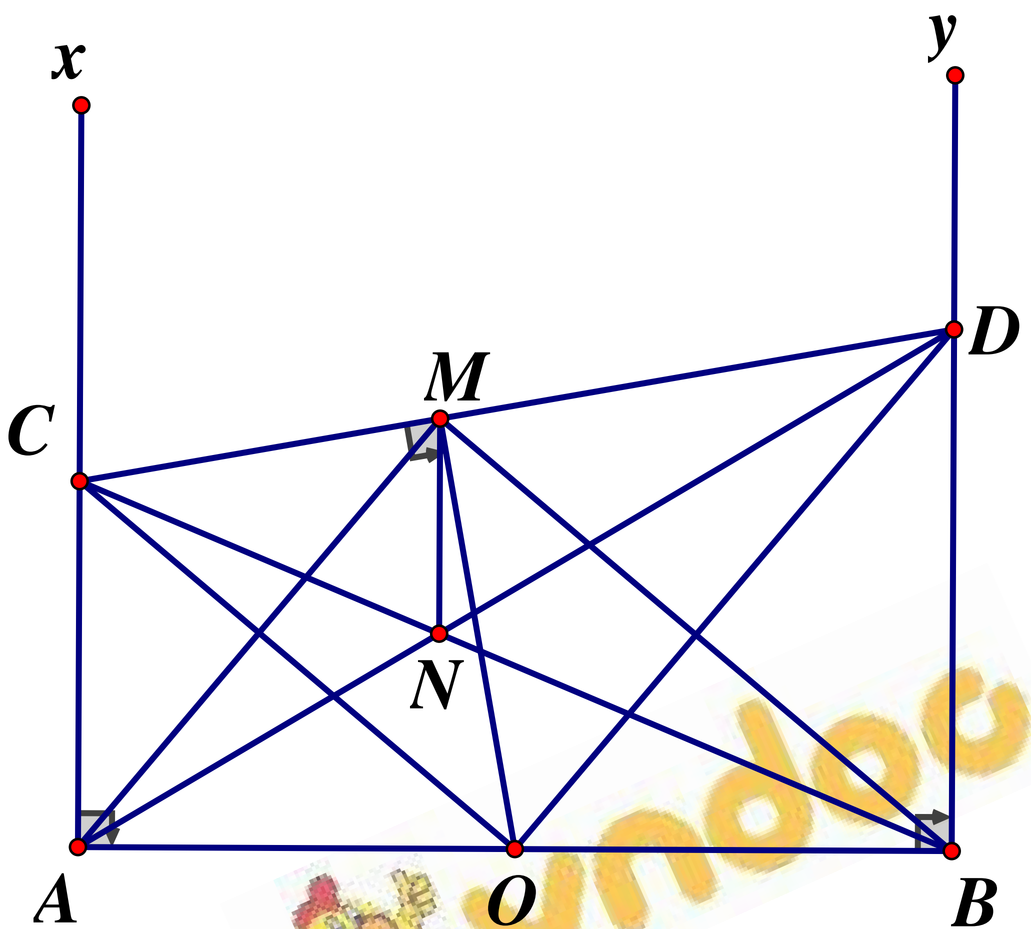
Từ đó suy ra $a=\dfrac{y+z}{2};b=\dfrac{x+z}{2};c=\dfrac{x+y}{2};$

Thay vào ta được $A=\dfrac{y+z}{2x}+\dfrac{x+z}{2y}+\dfrac{x+y}{2z}=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)+\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}\right)+\left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}\right)\right]$

Từ đó suy ra $A\geq\dfrac{1}{2}(2+2+2)=3$ *hay* $A\geq 3$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Câu 4.



a) Xét ΔACO và ΔBOD có: $A = B = 90^0$; $COA = ODB$ (cùng phụ với DOB)

Nên $\Delta ACO \sim \Delta BOD\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{AO}{AC} = \dfrac{BD}{BO} \Rightarrow AO.BO = AC.BD$

Mà $AO = BO$ nên $AO^2 = AC.BD$

b) Xét ΔCMO và ΔOMD có: $CMO = OMD = 90^0$; $OCM = DOM$ (cùng phụ với COM) $\Rightarrow \Delta CMO \sim \Delta OMD(g.g) \Rightarrow \dfrac{CO}{OD} = \dfrac{OM}{MD}$ (1)

Mà $\Delta ACO \sim \Delta BOD \Rightarrow \dfrac{CO}{OD} = \dfrac{AO}{BD} \Rightarrow \dfrac{CO}{OD} = \dfrac{OB}{BD}\left(2\right)$ (Do $AO = OB$)

Từ (1) và (2) ta có $\dfrac{OM}{MD} = \dfrac{OB}{BD} \Rightarrow \Delta OMD \sim \Delta OBD$

$\Rightarrow MOD = BOD \Rightarrow \Delta OMD = \Delta OBD$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow OM = OB = OA$ suy ra ΔAMB vuông tại M

c) Ta có: $AC//BD$ (cùng $\perp AB$) $\Rightarrow \dfrac{CN}{NB} = \dfrac{AC}{BD}$

Mà $BD = MD$ (hai cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau)

Tương tự ta chứng minh : $AC = CM$

Nên $\dfrac{CN}{BN} = \dfrac{CM}{DM} \Rightarrow MN//BD//AC$

Câu 5.

Nhận xét có: $a + bc = a(a+b+c) + bc = (a+b)(c+a)$

Tương tự có: $b + ca = (b+a)(b+c)$; $c + ab = (c+a)(c+b)$

Do đó $VT = \dfrac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \dfrac{(b+a)(b+c)}{c+a} + \dfrac{(c+a)(c+b)}{a+b}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có:

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(b+a)(b+c)}{c+a} \geq 2(a+b)$$

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq 2(a+c)$$

$$\frac{(b+a)(b+c)}{a+c} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq 2(b+c)$$

Vậy $2.VT \geq 4(a+b+c) = 4$ hay $VT \geq 2$ $(dfcm)$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$

UBND HUYỆN GIA VIỄN	**ĐỀ THI KHẢO SÁT**
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI LỚP 8**
	Môn: TOÁN
ĐỀ CHÍNH THỨC	**Năm học: 2014-2015**
	Thời gian: 150 phút (không kể giao đề)

Câu 1. (5 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \dfrac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3}\right).\left(1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)$

a) Tìm x để giá trị của A được xác định. Rút gọn biểu thức A.
b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (4 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $x(x+2)(x^2+2x+2)+1=0$

b) $y^2+4^x+2y-2^{x+1}+2=0$

c) $\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}+\dfrac{x^2+16x+72}{x+8}=\dfrac{x^2+8x+20}{x+4}+\dfrac{x^2+12x+42}{x+6}$

Câu 3. (3 điểm)

1) Tìm số tự nhiên n để p là số nguyên tố biết: $p=n^3-n^2+n-1$

2) Tìm a,b sao cho $f(x)=ax^3+bx^2+10x-4$ chia hết cho đa thức $g(x)=x^2+x-2$

3) Cho $4a^2+b^2=5ab$ và $2a>b>0$. Tính $P=\dfrac{ab}{4a^2-b^2}$

Câu 4. (6,5 điểm) Cho hình vuông $ABCD$, trên tia đối của tia CD lấy điểm M bất kỳ $(CM<CD)$, vẽ hình vuông $CMNP$ (P nằm giữa B và C), DP cắt BM tại H, MP cắt BD tại K.

a) Chứng minh: DH vuông góc với BM.

b) Tính $Q=\dfrac{PC}{BC}+\dfrac{PH}{DH}+\dfrac{KP}{MK}$

c) Chứng minh: $MP.MK+DK.BD=DM^2$

Câu 5. (1,5 điểm)

1) Cho $x,y>0$. Chứng minh rằng : $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}+4\geq 3\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$B=xy(x-2)(y+6)+12x^2-24x+3y^2+18y+2045$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a)

Giá trị của A được xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+8\neq 0 \\ 8-4x+2x^2-x^3\neq 0 \\ x\neq 0 \end{cases}$

vndoc

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 \neq -8 \\ 4(2-x)+x^2(2-x) \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \neq -4 \\ (2-x)\left(4+x^2\right) \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Ta có:

$$A=\left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8}-\frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3}\right)\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)$$

$$=\left[\frac{x^2-2x}{2\left(x^2+4\right)}-\frac{2x^2}{4(2-x)+x^2(2-x)}\right].\left(\frac{x^2-x+2}{x^2}\right)$$

$$=\frac{\left(x^2-2x\right)(2-x)-4x^2}{2\left(x^2+4\right)(2-x)}.\frac{x^2+x-2x-2}{x^2}$$

$$=\frac{2x^2-x^3-4x+2x^2-4x^2}{2\left(x^2+4\right)(2-x)}.\frac{x(x+1)-2(x+1)}{x^2}$$

$$=\frac{-x\left(x^2+4\right)}{2\left(x^2+4\right)(2-x)}.\frac{(x-2)(x+1)}{x^2}=\frac{x+1}{2x}$$

b)

$*\dfrac{x+1}{2x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x+1 \vdots 2x \Rightarrow 2x+2 \vdots 2x$ mà $2x \vdots 2x$

$\Rightarrow 2 \vdots 2x \Rightarrow 1 \vdots x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1(tm) \\ x=-1(tm) \end{array}\right.$

Vậy $A=\dfrac{x+1}{2x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-1$

Câu 2.

a)

$x(x+2)(x^2+2x+2)+1=0$

$\Leftrightarrow (x^2+2x)(x^2+2x+2)+1=0$

$\Leftrightarrow (x^2+2x)^2+2(x^2+2x)+1=0$

$\Leftrightarrow (x^2+2x+1)^2=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^4=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-1$

b)

$y^2+4^x+2y-2^{x+1}+2=0$

$\Leftrightarrow y^2+2y+1+(2^x)^2-2.2^x+1=0$

$\Leftrightarrow (y+1)^2+(2^x-1)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y+1=0 \\ 2^x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=0 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;-1)$

c)

$$\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+16x+72}{x+8}=\frac{x^2+8x+20}{x+4}+\frac{x^2+12x+42}{x+6} \quad (1)$$

ĐKXĐ: $x\neq -2; x\neq -4; x\neq -6; x\neq -8$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2+2}{x+2}+\frac{(x+8)^2+8}{x+8}=\frac{(x+4)^2+4}{x+4}+\frac{(x+6)^2+6}{x+6}$$

$$\Leftrightarrow x+2+\frac{2}{x+2}+x+8+\frac{8}{x+8}=x+4+\frac{4}{x+4}+x+6+\frac{6}{x+6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x+2}-\frac{4}{x+4}=\frac{6}{x+6}-\frac{8}{x+8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+8-4x-8}{(x+2)(x+4)}=\frac{6x+48-8x-48}{(x+6)(x+8)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x}{(x+2)(x+4)}=\frac{-2x}{(x+6)(x+8)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ (x+2)(x+4)=(x+6)(x+8) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 8x=-40 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-5 \end{array}\right. (tm)$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=0; x=-5$

Câu 3.

1) Biến đổi được $p=(n^2+1)(n-1)$

Nếu $n=0;1$ không thỏa mãn đề bài

Nếu $n=2$ thỏa mãn đề bài vì $p=(2^2+1)(2-1)=5$

Nếu $n>3$ không thỏa mãn đề bài vì khi đó p có từ 3 ước trở lên là $1; n-1>1$ và $n^2+1>n-1>1$

Vậy $n=2$ thì $p=n^3-n^2+n-1$ là số nguyên tố.

2) $*g(x)=x^2+x-2=(x-1)(x-2)$

$*f(x)=ax^3+bx^2+10x-4 \vdots g(x)$

$\Leftrightarrow f(x)=ax^3+bx^2+10x-4=(x-1)(x-2)Q(x)$ (1) $(\forall x \in \mathbb{R})$

- Thay $x_1=1; x_2=2$ vào (1) ta có:

$a+b+6=0$ và $8a+4b+16=0 \Rightarrow a=2$ và $b=-8$

Vậy $f(x)=ax^3+bx^2+10x-4 \vdots g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-8 \end{cases}$

3)

Biến đổi được:

$$4a^2+b^2=5ab \Leftrightarrow (4a-b)(a-b) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=4a \\ b=a \end{array}\right.$$

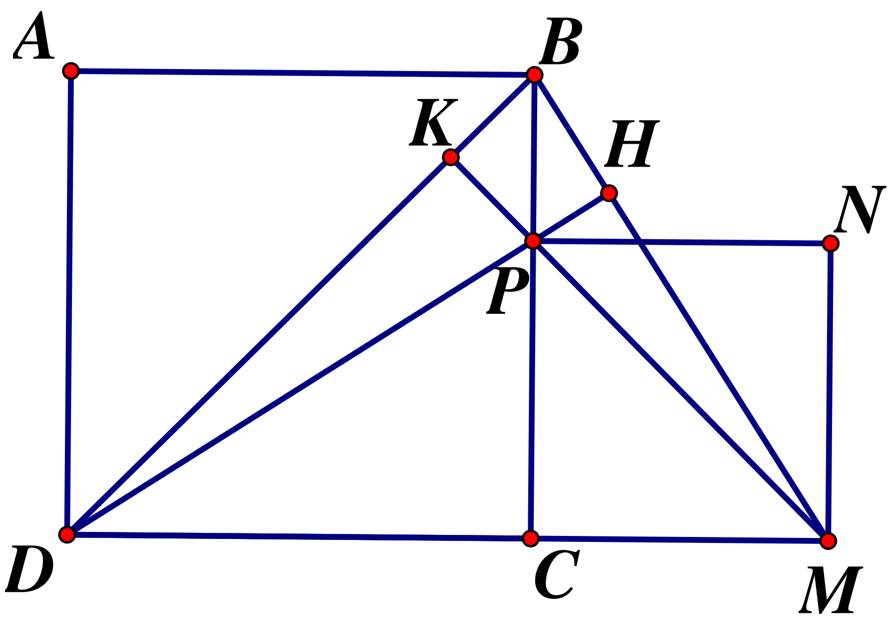
Mà $2a>b>0 \Rightarrow 4a>2b>b$ nên $a=b$

Ta có: $P=\frac{a^2}{4a^2-a^2}=\frac{1}{3}$

Vậy $4a^2+b^2=5ab$ và $2a>b>0$ thì $P=\frac{1}{3}$

vndoc

Câu 4.



a) Chứng minh được : DH vuông góc với BM

Chứng minh được: $CD = BC; PC = CM; DCB = BCM = 90^0$

$\Rightarrow \Delta DPC = \Delta BMC(c.g.c) \Rightarrow BHP = 90^0$

b) Chứng minh được: $MP \perp BD \Rightarrow \dfrac{PC}{BC} = \dfrac{\frac{1}{2}DM.PC}{\frac{1}{2}DM.BC} = \dfrac{S_{\Delta PDM}}{S_{\Delta BDM}}$

Tương tự $\dfrac{PH}{DH} = \dfrac{\frac{1}{2}.DB.KP}{\frac{1}{2}.DB.MK} = \dfrac{S_{PBM}}{S_{BDM}}; \dfrac{PH}{DH} = \dfrac{\frac{1}{2}DB.KP}{\frac{1}{2}DB.MK} = \dfrac{S_{PBD}}{S_{BDM}}$

$\Rightarrow Q = \dfrac{S_{PDM} + S_{PBM} + S_{PBD}}{S_{BDM}} = 1.$

c) Chứng minh: $\Delta MCP \sim \Delta MKD(g.g) \Rightarrow MP.MK = MC.MD$ (1)

Chứng minh: $\Delta DBC \sim \Delta DKM(g.g) \Rightarrow DK.BD = DC.DM$ (2)

Từ $(1) \& (2)$

$\Rightarrow MP.MK + DK.BD = DM.(MC + DC)$

$\Rightarrow MP.MK + DK.BD = DM^2$

Câu 5.

1)

Học sinh chứng minh $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ với mọi $x,y>0$

$\Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\geq 0; \frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1\geq 1$

$\Rightarrow \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1\right)\geq 0$

$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)-2.\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+2\geq 0$

$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+4\geq 3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x=y>0$

2)

$B=xy(x-2)(y+6)+12x^2-24x+3y^2+18y+2045$

$*) x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0\Rightarrow x^2-2x+3\geq 2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ (1)

$y^2+6y+9=(y+3)^2\geq 0\Rightarrow y^2+6y+12\geq 3$ với mọi $y\in\mathbb{R}$ (2)

$+B=xy(x-2)(y+6)+12x^2-24x+3y^2+18y+2045$

$=(x^2-2x)(y^2+6y)+12(x^2-2x)+3(y^2+6y)+36+2009$

$=(x^2-2x)(y^2+6y+12)+3(y^2+6y+12)+2009$

$=(x^2-2x+3)(y^2+6y+12)+2009$ (3)

Từ $(1),(2),(3)\Rightarrow B\geq 2.3+2009\Rightarrow B\geq 2015$

$*) B=2015\Leftrightarrow x=1\ \&\ y=-3$

$*) MinB=2015\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=-3\end{cases}$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 8

vndoc

Thời gian: 150 phút

Bài 1: (1 điểm) Phân tích đa thức thành nhân tử

$a) x^4 + 1 - 2x^2$ $\qquad$ $b) - x^2 - 28x - 27$

Bài 2: (2 điểm) Giải phương trình

a) $-2|-3x+4|-2=0$ $\qquad$ b) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2x^2-5}{x^3-1}=\dfrac{4}{x^2+x+1}$

Bài 3 (1 điểm)

Với giá trị nào của x thì $\dfrac{x-1}{x+1}>0$

Bài 4 (2 điểm)

Hai người làm chung một công việc trong 12 ngày thì xong. Năng suất làm việc trong một ngày của người thứ hai chỉ bằng $\dfrac{2}{3}$ người thứ nhất. Hỏi nếu làm riêng, mỗi người làm trong bao lâu sẽ xong công việc

Bài 5 (3,5 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC.M là giao điểm của CE và DF.

a) Chứng minh CE vuông góc với DF

b) Chứng minh $\dfrac{CM.CE}{CF}=a$

c) Tính diện tích ΔMDC theo a

Bài 6. (0,5 điểm)

Cho $x+\dfrac{1}{x}=3$. Tính giá trị biểu thức $A=x^3+\dfrac{1}{x^3}$

vndoc

ĐÁP ÁN

Bài 1.

$a) x^4 - 1 + 2x^2 = \left(x^2+1\right)^2$

$b) - x^2 - 28x - 27 = -\left(x+1\right)\left(x+27\right)$

Bài 2.

$a) - 2\left|-3x+4\right| - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left|-3x+4\right| = -1$ (khẳng định sai vì $\left|-3x+4\right| \ge 0 \forall x$)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

b) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2x^2-5}{x^3-1} = \dfrac{4}{x^2+x+1}$ ĐKXĐ: $x \ne 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+x+1}{x^3-1} + \dfrac{2x^2-5}{x^3-1} = \dfrac{4\left(x-1\right)}{x^3-1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+x+1+2x^2-5}{x^3-1} = \dfrac{4\left(x-1\right)}{x^3-1}$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 3x = 0$

$\Leftrightarrow 3x\left(x-1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & (tm) \\ x = 1 & (ktm) \end{array}\right.$

Vậy $S = \left\{0\right\}$

Bài 3.

$$+\frac{x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1>0 \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>-1 \end{cases} \Rightarrow x>1 \\ \begin{cases} x-1<0 \\ x+1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ x<-1 \end{cases} \Rightarrow x<-1 \end{array}\right.$$

Vậy $x > 1$ hoặc $x < -1$

Bài 4.

Gọi x (ngày) là thời gian để người thứ nhất hoàn thành công việc $\left(x>0\right)$.

Một ngày người thứ nhất làm được $\dfrac{1}{x}$ (công việc)

vndoc

Một ngày người thứ hai làm được $\dfrac{2}{3x}$(công việc)

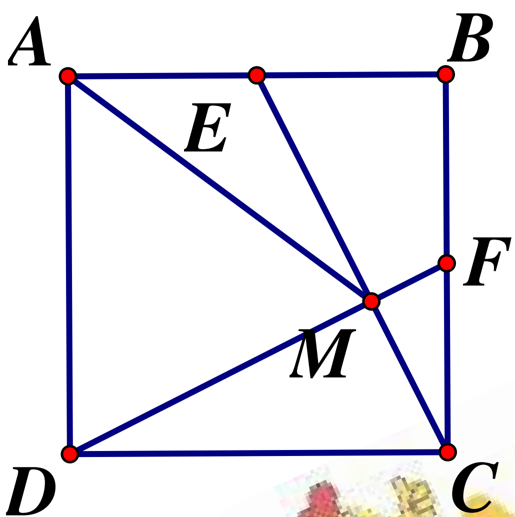
Một ngày hai người làm chung được $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{3x}$(công việc)

Theo bài ta có phương trình $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{3x}=\dfrac{1}{12}\Leftrightarrow x=20$

Vậy người thứ nhất làm xong trong 20 ngày

Người thứ hai làm xong trong 30 ngày.

Bài 5.



a) $\Delta BEC=\Delta CFD(c.g.c)\Rightarrow ECB=FDC$

ΔCDF vuông tại C $\Rightarrow DFC+FDC=90^0\Rightarrow DFC+ECB=90^0\Rightarrow\Delta CMF$ vuông tại M

Hay $CE\perp DF$

b) Xét ΔCMF và ΔCBE có: $CMF=CBE=90^0$; MCF chung

$\Rightarrow\Delta CMF\sim\Delta CBE(g-g)$

$\Rightarrow\dfrac{CM}{BC}=\dfrac{CF}{CE}\Rightarrow\dfrac{CM.CE}{CF}=BC$

Mà $BC=a$ do đó: $\dfrac{CM.CE}{CF}=a$

c) $\Delta CMD\sim\Delta FCD(g.g)\Rightarrow\dfrac{CD}{FD}=\dfrac{CM}{FC}$

Do đó: $\frac{S_{\Delta CMD}}{S_{\Delta FCD}} = \left(\frac{CD}{FD}\right)^2 \Rightarrow S_{\Delta CMD} = \left(\frac{CD}{FD}\right)^2 .S_{\Delta FCD}$

Mà: $S_{\Delta FCD} = \frac{1}{2}.CF.CD = \frac{1}{4}CD^2$

Vậy: $S_{\Delta CMD} = \frac{CD^2}{FD^2}.\frac{1}{4}.CD^2.$

Trong ΔDCF theo Pitago ta có:

$$DF^2 = CD^2 + CF^2 = CD^2 + \left(\frac{1}{2}BC^2\right) = CD^2 + \frac{1}{4}CD^2 = \frac{5}{4}.CD^2$$

Do đó: $S_{\Delta MCD} = \frac{CD^2}{\frac{5}{4}CD^2}.\frac{1}{4}CD^2 = \frac{1}{5}CD^2 = \frac{1}{5}a^2$

Bài 6.

$$A = x^3 + \frac{1}{x^3} = x^3 + 3.x^2.\frac{1}{x} + 3.x.\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 3^3 - 3.3 = 18$$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI HUYỆN

Năm học : 2012-2013

Bài 1. (4 điểm)

Cho biểu thức : $A = \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x\right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3}$ $(x \neq \pm 1)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = -1\frac{2}{3}$

c) Tìm giá trị của x để $A < 0.$

Bài 2 (3 điểm)

Cho $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 4.(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

Chứng minh rằng $a = b = c$

Bài 3 (3 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình:*

Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11.Nếu bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu số lên 4 đơn vị thì sẽ được phân số nghịch đảo của phân số đã cho. Tìm phân số đó

Bài 4 (2 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 4a + 5$

Bài 5 (3 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A có góc ABC bằng 60^0, phân giác BD. Gọi M, N, I theo thứ tự là trung điểm của BD, BC, CD

a) Tứ giác $AMNI$ là hình gì ? Chứng minh.

b) Cho $AB = 4cm$. Tính các cạnh của tứ giác $AMNI$

Bài 6. (5 điểm)

Hình thang ABCD $(AB//CD)$ có hai đường chéo cắt nhau tại O. Đường thẳng qua O và song song với đáy AB cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự ở M, N

a) Chứng minh rằng $OM = ON$

b) Chứng minh rằng $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$

c) Biết $S_{AOB} = 2008^2$ (dvdt); $S_{COD} = 2009^2 (dvdt)$. Tính S_{ABCD}

vndoc

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) Với $x \neq \pm 1$ thì:

$$A = \frac{1-x^3-x+x^2}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-x+x^2)-x(1+x)}$$

$$= \frac{(1-x)(1+x+x^2-x)}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-2x+x^2)}$$

$$= (1+x^2) : \frac{1}{1-x} = (1+x^2).(1-x)$$

b) Tại $x = -1\frac{2}{3} = \frac{-5}{3}$ thì

$$A = \left[1+\left(-\frac{5}{3}\right)^2\right] - \left[1-\left(-\frac{5}{3}\right)\right] = \left(1+\frac{25}{9}\right).\left(1+\frac{5}{3}\right) = 10\frac{2}{27}$$

c) Với $x \neq \pm 1$ thì $A < 0$ khi và chỉ khi $(1+x^2)(1-x) < 0$ (1)

Vì $1+x^2 > 0$ với mọi x nên (1) xảy ra khi và chỉ khi $1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$

Bài 2.

Biến đổi đẳng thức để được

$$a^2+b^2-2ab+b^2+c^2-2bc+c^2+a^2+2ac = 4a^2+4b^2+4c^2-4ab-4ac-4bc$$

Biến đổi để có: $(a^2+b^2-2ac)+(b^2+c^2-2bc)+(a^2+c^2-2ac)=0$

Biến đổi để có: $(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=0(*)$

Vì $(a-b)^2 \geq 0; (b-c)^2 \geq 0; (a-c)^2 \geq 0$ với mọi a, b, c

Nên $(*)$ xảy ra khi và chỉ khi $(a-b)^2=0; (b-c)^2=0; (a-c)^2=0$

Từ đó suy ra $a=b=c$

Bài 3.

Gọi tử số của phân số cần tìm là x thì mẫu số của phân số cần tìm là $x+11$

Phân số cần tìm là $\frac{x}{x+11}(x \neq -11)$

Khi bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu số lên 4 đơn vị thì ta được phân số $\frac{x-7}{x+15}$

Theo bài ta có phương trình : $\frac{x}{x+11}=\frac{x+15}{x-7}$

Giải phương trình và tìm được $x=-5\,(tm)$

Từ đó phân số cần tìm là $-\frac{5}{6}$

Bài 4.

Biến đổi để có:

$A=a^2\left(a^2+2\right)-2a\left(a^2+2\right)+\left(a^2+2\right)+3$

$=\left(a^2+2\right)\left(a^2-2a+1\right)+3=\left(a^2+2\right)(a-1)^2+3$

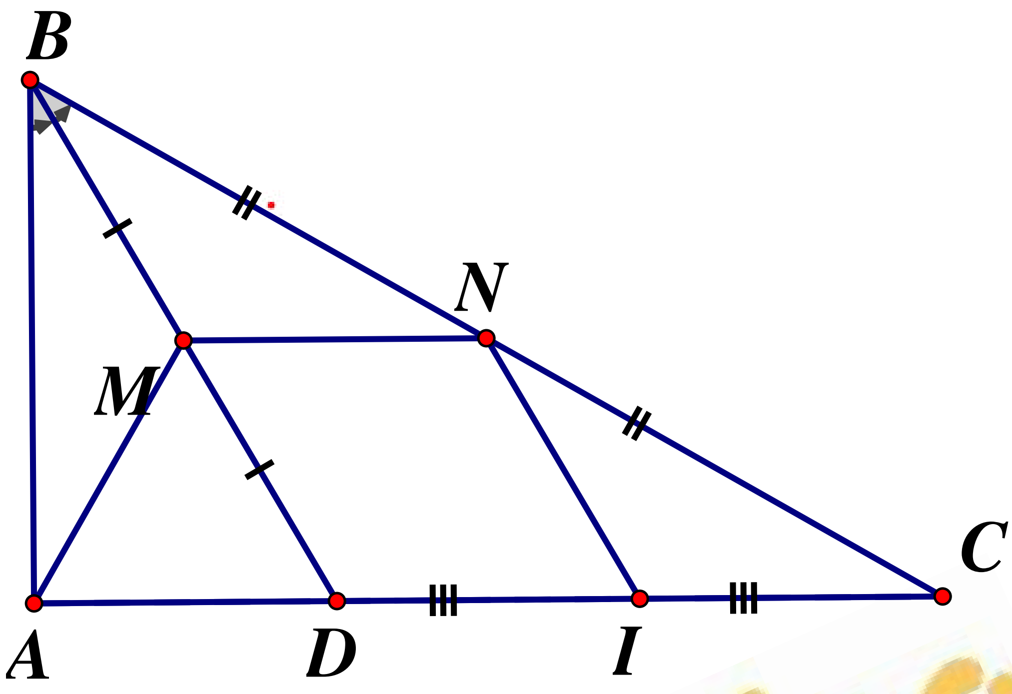
Vì $a^2+2>0 \forall a$ và $(a-1)^2 \geq 0 \forall a$ nên $\left(a^2+2\right)(a-1)^2 \geq 0 \forall a$

Do đó: $\left(a^2+2\right)(a-1)^2+3 \geq 3 \quad \forall a$

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $a-1=0 \Leftrightarrow a=1$

vndoc

Bài 5.



a) Chứng minh được AMNI là hình thang
Chứng minh AN = MI từ đó suy ra tứ giác AMNI là hình thang cân

b) Tính được $AD = \frac{4\sqrt{3}}{3}cm; BD = 2AD = \frac{8\sqrt{3}}{3}cm$

$AM = \frac{1}{2}BD = \frac{4\sqrt{3}}{3}cm$

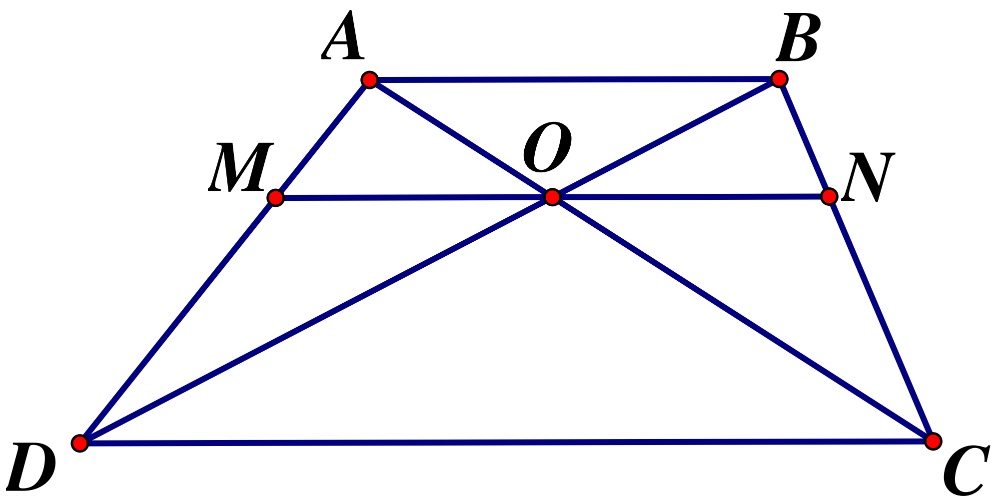
Tính được $NI = AM = \frac{4\sqrt{3}}{3}cm$

$DC = BC = \frac{8\sqrt{3}}{3}cm, MN = \frac{1}{2}DC = \frac{4\sqrt{3}}{3}cm$

Tính được $AI = \frac{8\sqrt{3}}{3}cm$

vndoc

Bài 6.



a) Lập luận để có: $\frac{OM}{AB}=\frac{OD}{BD};\frac{ON}{AB}=\frac{OC}{AC};\frac{OD}{DB}=\frac{OC}{AC}$(Định lý Ta let)

$\Rightarrow \frac{OM}{AB}=\frac{ON}{AB}\Rightarrow OM=ON$

b) Xét ΔABD có: $\frac{OM}{AB}=\frac{DM}{AD}(1)$, Xét ΔADC có : $\frac{OM}{DC}=\frac{AM}{AD}(2)$

Từ $(1),(2)\Rightarrow OM.\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}\right)=\frac{AM+DM}{AD}=\frac{AD}{AD}=1$

Chứng minh tương tự : $ON.\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}\right)=2\Rightarrow \frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{2}{MN}$

c)

$\frac{S_{AOB}}{S_{AOD}}=\frac{OB}{OD},\frac{S_{BOC}}{S_{DOC}}=\frac{OB}{OD}\Rightarrow S_{AOB}.S_{DOC}=S_{BOC}.S_{AOD}$

Chứng minh được: $S_{AOD}=S_{BOC}\Rightarrow S_{AOB}.S_{DOC}=\left(S_{AOD}\right)^2$

Thay số để có $2008^2.2009^2=\left(S_{AOD}\right)^2\Rightarrow S_{AOD}=2008.2009$

Do đó : $S_{ABCD}=2008^2+2.2008.2009+2009^2=\left(2008+2009\right)^2=4017^2(dvdt)$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 8

HUYỆN NAM SƠN-Năm học 2017-2018

Câu 1. (4,0 điểm)

Chứng minh rằng:

a) $A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{11}$ chia hết cho 40

b) $B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{100^2} < 1$

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Cho $a + b + c = 0$, chứng minh rằng : $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

b) So sánh hai số sau: $C = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ và $D = 2^{32}$

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $E = 2x^2 - 8x + 1$

Câu 4. (3,0 điểm)

Chứng minh rằng trong một tứ giác, tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi của tứ giác ấy.

Câu 5. (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại $A(AB < AC)$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Qua I vẽ IM vuông góc với AB tại M và IN vuông góc với AC tại N.

a) Chứng minh tứ giác $AMIN$ là hình chữ nhật

b) Gọi D là điểm đối xứng của I qua N. Chứng minh tứ giác $ADCI$ là hình thoi.

c) Đường thẳng BN cắt DC tại K. Chứng minh rằng $DK = \frac{1}{3}DC$.

Câu 6. (1,0 điểm)

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

vndoc

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a)

$A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{11}$

$= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + (3^8 + 3^9 + 3^{10} + 3^{11})$

$= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^4.(1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^8.(1 + 3 + 3^2 + 3^3)$

$= 40 + 3^4.40 + 3^8.40$

$= 40.(1 + 3^4 + 3^8) \vdots 40$

Vậy $A \vdots 40$

b)

$B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{100^2}$

$= \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + ... + \frac{1}{100.100}$

$< \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{99.100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} < 1$

Vậy $B < 1$

Câu 2.

a)

Ta có: $a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c$

Mặt khác

$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

$\Rightarrow (-c)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(-c)$

$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \ (dfcm)$

b)

$C = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$(2-1)C = (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$C = (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$C = (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$C=\left(2^8-1\right)\left(2^8+1\right)\left(2^{16}+1\right)$

$C=\left(2^{16}-1\right)\left(2^{16}+1\right)=2^{32}-1$

Vì $2^{32}-1<2^{32}$ nên $C<D$

Câu 3.

a)

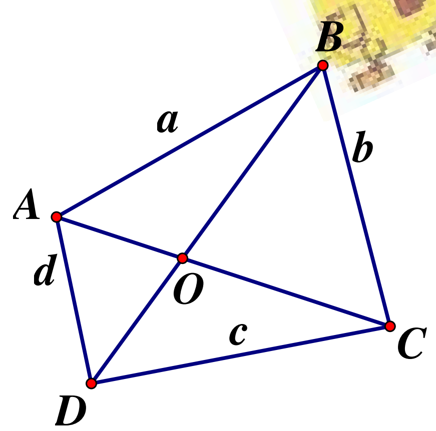
$$\begin{aligned}
&x^4+2019x^2+2018x+2019\\
&=x^4+\left(x^2+2018x^2\right)+2018x+\left(2018+1\right)+x^3-x^3\\
&=\left(x^4+x^3+x^2\right)+\left(2018x^2+2018x+2018\right)-\left(x^3-1\right)\\
&=x^2\left(x^2+x+1\right)+2018\left(x^2+x+1\right)-\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)\\
&=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+2018-x+1\right)\\
&=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+2019\right)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&E=2x^2-8x+1\\
&=2x^2-8x+8-7\\
&=2\left(x-2\right)^2-7\geq -7 \qquad (\forall x)
\end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $E=-7 \Leftrightarrow x=2$

Câu 4.



Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD của tứ giác $ABCD$.

Đặt $AB=a, BC=b, CD=c, DA=d$

Xét ΔAOB, ta có: $OA+OB>AB$ (quan hệ giữa ba cạnh của tam giác)

Xét ΔCOD, ta có: $OC + OD > CD$ (quan hệ giữa ba cạnh của tam giác)

Suy ra :

$OA + OB + OC + OD > AB + CD$

$\Rightarrow AC + BD > AB + CD$

$\Rightarrow AC + BD > a + c$ (1)

Chứng minh tương tự : $AC + BD > AD + BC \Rightarrow AC + BD > d + b$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$2(AC + BD) > a + b + c + d \Rightarrow AC + BD > \dfrac{a+b+c+d}{2}$ (*)

Xét ΔABC, ta có: $AC < a + b$

Xét ΔADC, ta có: $AC < d + c$

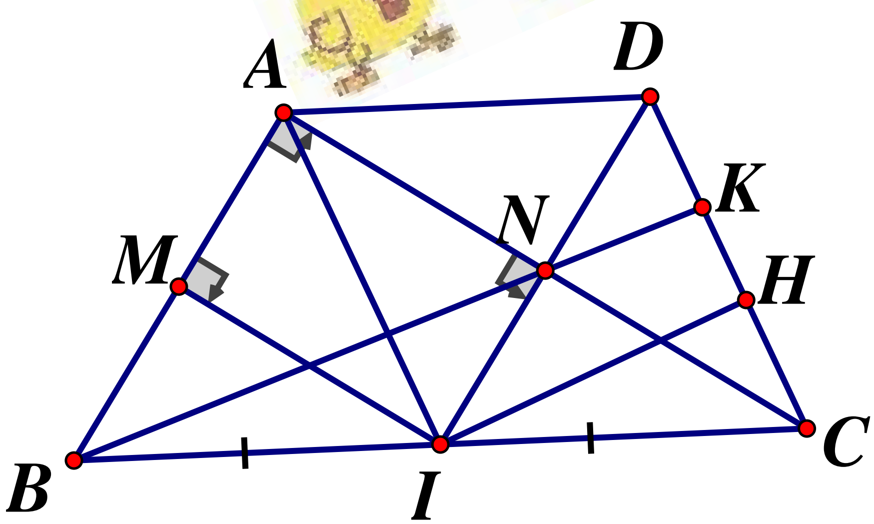
Suy ra : $2AC < a + b + c + d \Rightarrow AC < \dfrac{a+c+d+b}{2}$ (3)

Chứng minh tương tự: $BD < \dfrac{a+c+d+b}{2}$ (**) (4)

Từ $(3);(4)$ suy ra $AC + BD < a + b + c + d$

Từ $(*)$ và (**) suy ra $\dfrac{a+c+d+b}{2} < AC + BD < a + b + c + d$ $(dfcm)$

Câu 5.



a) Xét tứ giác $AMNI$ có:

vndoc

$\widehat{MAN} = 90^0$ (vì ΔABC vuông ở A)

$\widehat{AMI} = 90^0$ (Vì IM vuông góc với AB)

$\widehat{ANI} = 90^0$ (Vì IN vuông góc với AC)

Vậy tứ giác $AMIN$ là hình chữ nhật (vì có 3 góc vuông)

b) ΔABC vuông tại A, có AI là trung tuyến nên $AI = IC = \frac{1}{2}BC$

Do đó ΔAIC cân tại I, có đường cao IN đồng thời là trung tuyến

$\Rightarrow NA = NC$

Mặt khác : $NI = ND$ (tính chất đối xứng) nên $ADCI$ là hình bình hành (1)

Mà $AC \perp ID$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $ADCI$ là hình thoi.

c) Kẻ qua I đường thẳng IH song song với BK cắt CD tại H

$\Rightarrow IH$ là đường trung bình ΔBKC

$\Rightarrow H$ là trung điểm của CK hay $KH = HC$ (3)

Xét ΔDIH có N là trung điểm của DI, $NK // IH \left(IH // BK\right)$

Do đó K là trung điểm của DH hay $DK = KH$ (4)

Từ $(3),(4) \Rightarrow DK = KH = HC \Rightarrow DK = \frac{1}{3}DC$

Câu 6.

Ta có:

$\left(\frac{1}{2}a - b\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + b^2 \geq ab$ (1)

$\left(\frac{1}{2}a - c\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + c^2 \geq ac$ (2)

$\left(\frac{1}{2}a - d\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + d^2 \geq ad$ (3)

$\left(\frac{1}{2}a - e\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + e^2 \geq ae$ (4)

Ta cộng $(1),(2),(3),(4)$ vế theo vế ta được:

vndoc

$4.\frac{1}{4}a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq ab + ac + ad + ae$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC : 2011-2012
Môn : Toán 8
Thời gian: 150 phút

Bài 1. (2 điểm) Giải các phương trình sau:

1) $2x^2 - x = 3 - 6x$
2) $(x+2).(x^2 - 3x + 5) = (x+2).x^2$

Bài 2. (3 điểm) Cho biểu thức: $A = \frac{2x-9}{x^2 - 5x + 6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+4}{3-x}$

1) Rút gọn A
2) Tính giá trị của A biết $2x - x^2 = 1$
3) Có giá trị nào của x để $A = 1$ không ?
4) Tìm x nguyên để A nhận giá trị là số nguyên.

Bài 3. (2 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình*

Một xe đạp, một xe máy và một ô tô cùng đi từ A đến B. Khởi hành lần lượt lúc 5 giờ, 6 giờ, 7 giờ và vận tốc theo thứ tự là $15km/h; 45km/h$ và $60km/h$.

Hỏi lúc mấy giờ ô tô cách đều xe đạp và xe máy.

Bài 4. (2,5 điểm)

Cho hình thang $ABCD$ ($AB//CD, AB < CD$). Gọi N và M theo thứ tự là trung điểm của các đường chéo AC, BD. Chứng minh rằng:

1) $MN//AB$
2) $MN = \frac{CD - AB}{2}$

Bài 5. (0,5 điểm)

Cho $x + \frac{1}{x} = 3$. Tính giá trị biểu thức $A = x^3 + \frac{1}{x^3}$

vndoc

ĐÁP ÁN

Bài 1.

1) $2x^2 - x = 3 - 6x \Leftrightarrow (2x-1)(x+3) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 1 = 0$ hoặc $x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = -3 \end{array}\right.$

Vậy $x = \dfrac{1}{2}$ hoặc $x = -3$

2) $(x+2).(x^2 - 3x + 5) = (x+2).x^2$

$\Leftrightarrow (x+2)(5-3x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=0 \\ 5-3x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\dfrac{5}{3} \end{array}\right.$

Vậy $x \in \left\{-2; \dfrac{5}{3}\right\}$

Bài 2.

1) Rút gọn được $A = \dfrac{x+4}{x-3}$

2) ĐKXĐ: $x \neq 2$ và $x \neq 3$

$2x - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Thay $x = 1$ vào, tính được $A = \dfrac{-5}{2}$

3) $A = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x+4}{x-3} = 1 \Leftrightarrow x + 4 = x - 3 \Leftrightarrow 0x = -7$ (vô nghiệm)

Vậy không có giá trị nào của x để $A = 1$

4) $A = \dfrac{x+4}{x-3} = 1 + \dfrac{7}{x-3}$

Để $A \in \mathbb{Z}$ thì $x - 3 \in Ư(7) = \{-7; -1; 1; 7\} \Rightarrow x \in \{-4; 2; 4; 10\}$

Thử lại và kết hợp với ĐKXĐ ta được $x \in \{-4; 4; 10\}$

Bài 3.

- Gọi thời gian để ô tô cách đều xe đạp và xe máy kể từ lúc xe đạp chạy là x (giờ). Điều kiện $x > 2$

Khi đó: Xe đạp đi được : $15x(km)$

Xe máy đi được : $45(x-1)(km)$

Ô tô đi được: $60(x-2)(km)$

vndoc

Khi ô tô bắt đầu chạy thì xe đạp đã bị xe máy vượt qua

Hiệu quãng đường đi được của xe máy và ô tô là: $45(x-1)-60(x-2)$

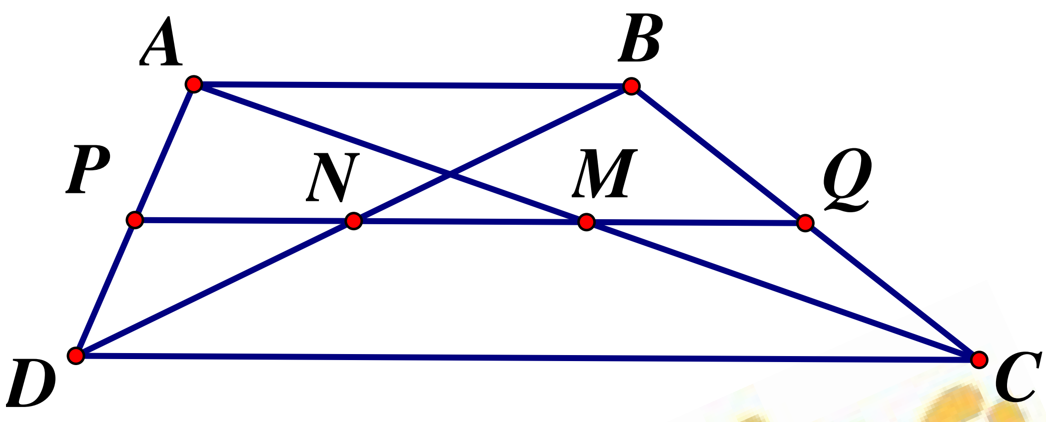
Hiệu quãng đường đi được của ô tô và xe đạp: $60.(x-2)-15x$

Theo đề bài ta có phương trình: $45(x-1)-60(x-2)=60(x-2)-15x$

Giải phương trình tìm được $x=3,25$ giờ $=3$ giờ 15 phút

Vậy lúc 8 giờ 15 phút thì ô tô cách đều xe đạp và xe máy.

Bài 4



1) Gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm của AD và BC

   Chứng minh được $\frac{AP}{AD}=\frac{AN}{AC} \Rightarrow PN // AB$ (định lý Talet đảo)

   Mà $PM // AB$ (đường trung bình)

   $\Rightarrow P, M, N$ thẳng hàng (Tiên đề Ơ clit)

   Vậy $MN // AB$

2) Tương tự $\Rightarrow P, M, N, Q$ thẳng hàng

   Rút ra ta được: $PQ=\frac{AB+CD}{2}$ (1); $PM=\frac{AB}{2}$ (2); $NQ=\frac{AB}{2}$ (3)

   Từ $(1),(2),(3)$ suy ra $MN=PQ-(PM+NQ)=\frac{CD-AB}{2}$

Bài 5.

$$A=x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3.\left(x+\frac{1}{x}\right)=3^3-3.3=18$$

PHÒNG GD & ĐT	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN**
YÊN PHONG	**NĂM HỌC: 2013-2014**
	MÔN THI: TOÁN 8
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	**Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian giao đề)**

Bài 1. (5 điểm)

vndoc

Cho biểu thức $A=\left(\frac{1}{1-x}+\frac{2}{x+1}-\frac{5-x}{1-x^2}\right):\frac{1-2x}{x^2-1}$

a) Rút gọn biểu thức A
b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên
c) Tìm x để $|A|=A$

Bài 2. (4 điểm) Giải các phương trình sau:

$a) x^3-x^2-12x=0$

$b) \frac{x-214}{86}+\frac{x-132}{84}+\frac{x-54}{82}=6$

Bài 3 (5 điểm)

Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D. Biết $CD=2AB=2AD$ và $BC=a\sqrt{2}$ .Gọi E là trung điểm của CD.

a) Tứ giác $ABED$ là hình gì ? Tại sao ?
b) Tính diện tích hình thang $ABCD$ theo a
c) Gọi I là trung điểm của BC, H là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống AC. Tính góc HDI

Bài 4. (4 điểm)

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A=x^2-2xy+2y^2-4y+5$
b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: $B=\frac{3(x+1)}{x^3+x^2+x+1}$

Bài 5. (2 điểm)

a) Cho a,b,c là 3 cạnh của tam giác, p là nửa chu vi.

CMR: $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge 2.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

b) Cho a,b,c,d là các số dương. Chứng minh rằng: $\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+a}>\frac{a-d}{a+b}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) ĐKXĐ: $x \neq \pm 1; x \neq \frac{1}{2}$

$$A = \left(\frac{1 + x + 2(1-x) - (5-x)}{1-x^2}\right) \cdot \frac{x^2-1}{1-2x}$$

$$= \frac{-2}{1-x^2} \cdot \frac{x^2-1}{1-2x} = \frac{2}{1-2x}$$

b) A nguyên, mà x nguyên nên $2 \vdots (1-2x)$

Từ đó tìm được $x = 1$ và $x = 0$

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow x = 0$

$$|A| = A \Leftrightarrow A > 0$$

c) Ta có:

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1-2x} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

Kết hợp với điều kiện : $-1 \neq x < \frac{1}{2}$

Câu 2

a) $x^3 - x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x(x-4)(x+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \\ x = -3 \end{array}\right.$

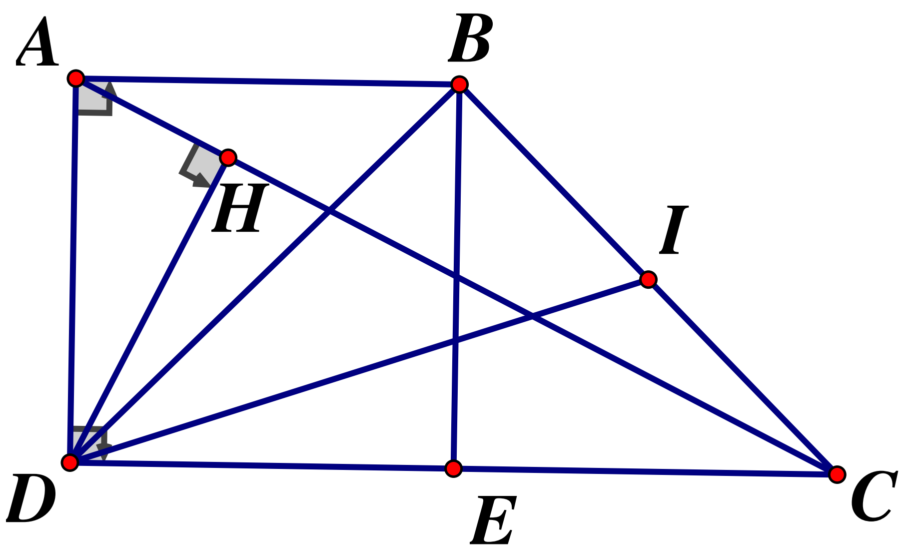
b) $\dfrac{x-214}{86} + \dfrac{x-132}{84} + \dfrac{x-54}{82} = 6$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-214}{86} - 1\right) + \left(\frac{x-132}{84} - 2\right) + \left(\frac{x-54}{82} - 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-300}{86} + \frac{x-300}{84} + \frac{x-300}{82} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-300)\left(\frac{1}{86} + \frac{1}{84} + \frac{1}{82}\right) \Leftrightarrow x - 300 = 0 \Leftrightarrow x = 300$$

Câu 3.



a) Chỉ ra $ABED$ là hình bình hành $\left(AB//DE, AB = DE\right)$

Chỉ ra ABED là hình thoi (AB=AD)

Chỉ ra $ABED$ là hình vuông $\left(BAD = 90^0\right)$

b) Chỉ ra ΔBEC vuông cân

Từ đó suy ra $AB = AD = a, DC = 2a$

Diện tích của hình thang $ABCD$ là : $S = \dfrac{\left(AB + CD\right).AD}{2} = \dfrac{\left(a + 2a\right).a}{2} = \dfrac{3a^2}{2}$

c) $ACH = ACD$ (1) (cùng phụ với góc HDC)

Xét ΔADC và ΔIBD vuông tại D và B có:

$\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{IB}{BD} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \Delta ADC \sim \Delta IBC$

Suy ra $ACD = BDI$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $ADH = BDI$

Mà $ADH + BDI = 45^0 \Rightarrow BDI + BDH = 45^0$ hay $HDI = 45^0$

Câu 4.

a)

Ta có:

$$A = x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 4y + 4 + 1$$

$$= (x-y)^2 + (y-2)^2 + 1$$

Do $(x-y)^2 \geq 0; (y-2)^2 \geq 0$

Nên $A = (x-y)^2 + (y-2)^2 + 1 \geq 1$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 2$

Vậy GTNN của A là $1 \Leftrightarrow x = y = 2$

b) $B = \dfrac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1} = \dfrac{3(x+1)}{x^2(x+1) + x + 1} = \dfrac{3(x+1)}{(x^2+1)(x+1)} = \dfrac{3}{x^2+1}$

Do $x^2 + 1 \geq 1$ nên $B = \dfrac{3}{x^2+1} \leq 3$. Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$

Vậy $GTLN$ của B là $3 \Leftrightarrow x = 0$

Câu 5

a)

Ta có:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{p-a+p-b} = \frac{2}{c}$$

$$\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{p-a+p-c} = \frac{2}{a}$$

$$\frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a} \geq \frac{4}{p-c+p-a} = \frac{2}{b}$$

Cộng từng vế ta có điều phải chứng minh

b)

Ta có:

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} \geq \frac{a-b}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+d}{c+d} + \frac{c+a}{d+a} + \frac{d+b}{a+b} \geq 4$$

Xét

$$\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{c+a}{d+a}+\frac{d+b}{a+b}-4$$
$$=(a+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\right)+(b+d)\left(\frac{1}{c+d}+\frac{1}{a+b}\right)-4$$
$$\geq (a+c).\frac{4}{a+b+c+d}+(b+d).\frac{4}{a+b+c+d}-4=0$$
$\Rightarrow$ đpcm

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=d$

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 8 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2014-2015
Môn: TOÁN

Bài 1. Chứng minh rằng $11^{10}-1$ chia hết cho 100

Bài 2. Phân tích đa thức thành nhân tử:

$P=x^2(y-z)+y^2.(z-x)+z^2.(x-y)$

Bài 3. Cho biểu thức $Q=1+\left(\frac{x+1}{x^3+1}-\frac{1}{x-x^2-1}-\frac{2}{x+1}\right):\frac{x^3-2x^2}{x^3-x^2+x}$

a) Rút gọn Q

b) Tính giá trị của Q biết $\left|x-\frac{3}{4}\right|=\frac{5}{4}$

c) Tìm giá trị nguyên của x để Q có giá trị nguyên

Bài 4. Tìm giá trị của m để cho phương trình $6x-5m=3+3mx$ có nghiệm số gấp ba nghiệm số của phương trình: $(x+1)(x-1)-(x+2)^2=3$

Bài 5. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn phương trình:

$x^2-25=y(y+6)$

Bài 6. Cho hình vuông $ABCD$, M là điểm bất kỳ trên cạnh BC. Trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa C dựng hình vuông $AMHN$. Qua M dựng đường thẳng d song song với AB, d cắt AH ở E, cắt DC ở F

a) Chứng minh rằng $BM=ND$

b) Chứng minh rằng $N;D;C$ thẳng hàng

c) $EMFN$ là hình gì

d) Chứng minh $DF+BM=FM$ và chu vi tam giác MFC không đổi khi M thay đổi vị trí trên BC.

ĐÁP ÁN

Bài 1.

$11^{10}-1=(11-1)\left(11^9+11^8+......+11+1\right)=10.\left(11^9+11^8+......+11+1\right)$

Vì $10 \vdots 10$

Và $\left(11^9+11^8+.....+11+1\right)$ có chữ số tận cùng bằng 0

Nên $\left(11^9+11^8+....+11+1\right)$ chia hết cho 10

Vậy $11^{10}-1$ chia hết cho 100

Bài 2.

$x^2.(y-z)+y^2.(z-x)+z^2(x-y)$

$=x^2(y-z)+y^2z-y^2x+z^2x-z^2y$

$=x^2(y-z)+yz(y-z)+x\left(y^2-z^2\right)$

$=(y-z)\left(x^2+yz-xy-xz\right)$

$=(y-z)\left[x(x-y)-z(x-y)\right]$

$=(y-z)(x-y)(x-z)$

Bài 3.

a) ĐKXĐ: $x\neq 0;-1;2$

$$Q=1+\left(\frac{x+1}{x^3+1}-\frac{1}{x-x^2-1}-\frac{2}{x+1}\right):\frac{x^3-2x^2}{x^3-x^2+x}$$

$$=1+\frac{x+1+x+1-2\left(x^2-x+1\right)}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}.\frac{x^2-x+1}{x(x-2)}$$

$$=1+\frac{-2x^2+4x}{(x-1)(x^2-x+1)}.\frac{x^2-x+1}{x(x-2)}$$

$$=1+\frac{-2}{x+1}=\frac{x-1}{x+1}$$

b) $\left|x-\frac{3}{4}\right|=\frac{5}{4}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\quad(ktm)\\ x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Với $x=-\frac{1}{2}\Rightarrow Q=-3$

c) $Q\in\mathbb{Z}$ với $x\in\{-3;-2;1\}$

Bài 4

$(x+1)(x-1)-(x+2)^2=3$

$\Leftrightarrow x^2-1-x^2-4x-4=3$

$\Leftrightarrow -4x=8\Leftrightarrow x=-2$

Để phương trình $6x-5m=3+3mx$ có nghiệm gấp ba lần nghiệm của phương trình $(x+1)(x-1)-(x+2)^2=3$ hay $x=-6$

Ta có

$6.(-6)-5m=3+3m.(-6)$

$\Leftrightarrow -5m+18m=39$

$\Leftrightarrow 13m=39\Leftrightarrow m=3$

Vậy với $m=3$ thì phương trình $6x-5m=3+3mx$ có nghiệm số gấp ba nghiệm số của phương trình $(x+1)(x-1)-(x+2)^2=3$

Bài 5.

$x^2-25=y(y+6)$

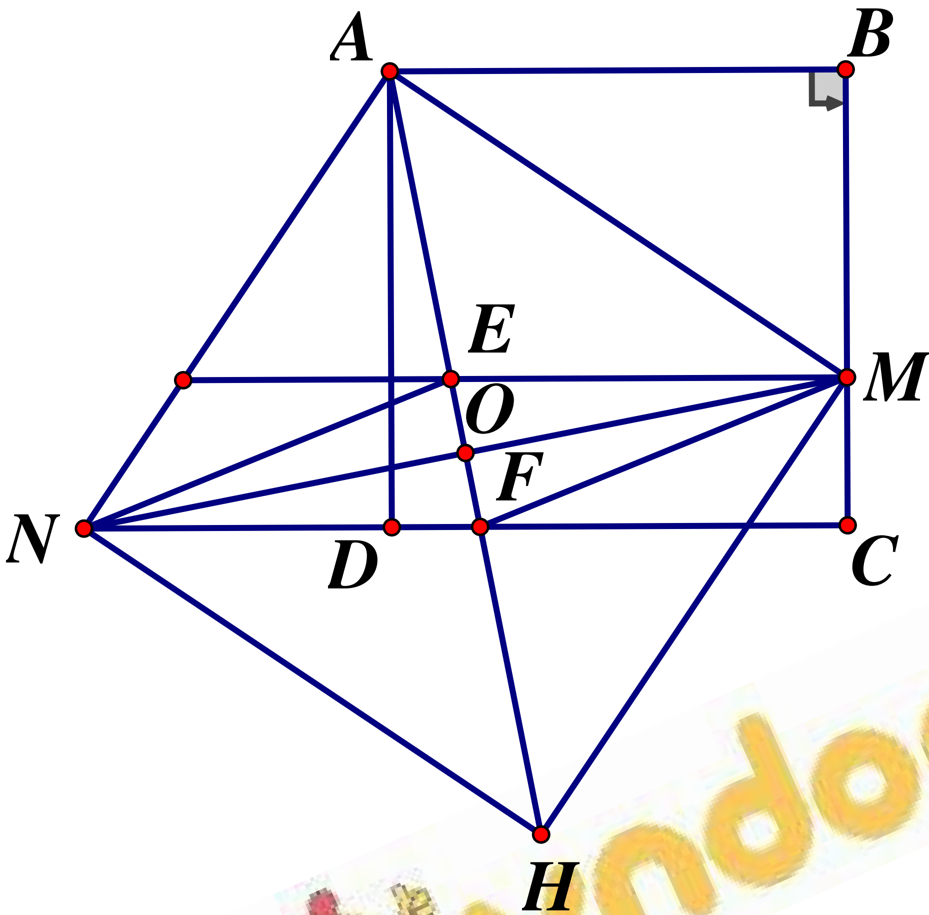
$\Leftrightarrow x^2-(y+3)^2=16$

$\Leftrightarrow (x+y+3)(x-y-3)=\left[\begin{array}{l}(\pm4).(\pm4)\\(\pm2).(\pm8)\\(\pm1).(\pm16)\end{array}\right.$

$x-y$	**7**	**-1**	**5**	**1**	**11**	**-5**	**4**	**2**	**19**	**-13**
$x+y$	1	**-7**	**5**	**-11**	**-1**	**5**	**13**	**-19**	**-2**	**-4**

Vậy các cặp số nguyên phải tìm là:
$(4;-3);(-4;-3);(5;0);(-5;-6);(5;-6);(-5;0)$

Bài 6.



a) $ABCD$ là hình vuông (gt) $\Rightarrow BAM + MAD = 90^0$ (1)

Vì $AMHN$ là hình vuông (gt) $\Rightarrow DAN + MAD = 90^0\left(2\right)$

Từ (1) và (2) suy ra $BAM = DAN$

Ta có: $\Delta AND = \Delta AMB \quad (c.g.c) \Rightarrow B = NDA$ và $BM = ND$

b) $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow FDA = 90^0$

$\Rightarrow NDA + FDA = NDC$

$\Rightarrow 90^0 + 90^0 = NDC$

$\Rightarrow NDC = 180^0$

Suy ra $N;D;C$ thẳng hàng

c) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AH và MN của hình vuông $AMHN$

$\Rightarrow O$ là tâm đối xứng của hình vuông $AMHN$

$\Rightarrow AH$ là đường trung trực của đoạn MN, mà $E,F \in AH$

$\Rightarrow EN = EM$ và $FM = FN$ (3)

Tam giác vuông EOM = tam giác vuông $FON\left(OM = ON; N_1 = M_3\right)$

$\Rightarrow AOM = NOH \Rightarrow EM = NF\,(4)$

Từ $(3),(4) \Rightarrow EM = NE = NF = FM \Rightarrow MENF$ là hình thoi (5)

d) Từ (5) suy ra $FM = FN = FD + DN$ mà $DN = MB(cmt)$

$\Rightarrow MF = DF + BM$

Gọi chu vi tam giác MCF là p và cạnh hình vuông $ABCD$ là a

$p = MC + CF + MF = MC + CF + BM + DF\,(Do MF = DF + MB)$

$= (MC + MB) + (CF + FD) = BC + CD = a + a = 2a$

Hình vuông $ABCD$ cho trước $\Rightarrow a$ không đổi $\Rightarrow p$ không đổi

PHÒNG GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
HUYỆN NGA SƠN

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 6,7,8 THCS CẤP HUYỆN
NĂM HỌC: 2016-2017
Môn thi: TOÁN 8
Thời gian làm bài: 150 phút
Ngày thi: 04/04/2017

Câu 1. (4 điểm)

Cho biểu thức $M = \left[\dfrac{(a-1)^2}{3a + (a-1)^2} - \dfrac{1 - 2a^2 + 4a}{a^3 - 1}\right] : \dfrac{a^3 + 4a}{4a^2}$

a) Rút gọn M
b) Tìm a để $M > 0$
c) Tìm giá trị của a để biểu thức M đạt giá trị lớn nhất.

Câu 2. (5 điểm)

1) Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{x+2}{98} + \dfrac{x+4}{96} = \dfrac{x+6}{94} + \dfrac{x+8}{92}$

b) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

2) Tìm m để phương trình sau vô nghiệm

$$\frac{1-x}{x-m} + \frac{x-2}{x+m} = \frac{2(x-m)-2}{m^2 - x^2}$$

3) Tìm a,b sao cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$

Câu 3. (4 điểm)

1) Cho $x + y + z = 1$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 1$. Tính $A = x^{2015} + y^{2015} + z^{2015}$

2) Một người dự định đi xe máy từ A đến B với vận tốc $30km/h$, nhưng sau khi đi được 1 giờ người ấy nghỉ hết 15 phút, do đó phải tăng vận tốc thêm $10km/h$ để đến B đúng giờ đã định. Tính quãng đường AB ?

Câu 4. (5 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có AC cắt BD tại O, M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC (M khác B, C). Tia AM cắt đường thẳng CD tại N. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $BE = CM$

a) Chứng minh ΔOEM vuông cân

b) Chứng minh : $ME // BN$

c) Từ C kẻ $CH \perp BN \left(H \in BN\right)$. Chứng minh rằng ba điểm O, M, H thẳng hàng.

Câu 5. (2 điểm)

Cho số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=2016$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2a+3b+3c+1}{2015+a} + \frac{3a+2b+3c}{2016+b} + \frac{3a+3b+2c-1}{2017+c}$$

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2 điểm)

a) Điều kiện: $a \neq 0; a \neq 1$

Ta có: $M = \left[\dfrac{(a-1)^2}{3a+(a-1)^2} - \dfrac{1-2a^2+4a}{a^3-1} + \dfrac{1}{a-1}\right] : \dfrac{a^3+4a}{4a^2}$

$$= \left[\frac{(a-1)^2}{a^2+a+1} - \frac{1-2a^2+4a}{(a-1)(a^2+a+1)} + \frac{1}{a-1}\right] . \frac{4a^2}{a(a^2+4)}$$

$$= \frac{(a-1)^3 - 1 + 2a^2 - 4a + a^2 + a + 1}{(a-1)(a^2+a+1)} . \frac{4a}{a^2+4}$$

$$= \frac{a^3 - 3a^2 + 3a - 1 - 1 + 2a^2 - 4a + a^2 + a + 1}{(a-1)(a^2+a+1)} . \frac{4a}{a^2+4}$$

$$= \frac{a^3-1}{a^3-1} . \frac{4a}{a^2+4} = \frac{4a}{a^2+4}$$

b) $M > 0 \Leftrightarrow 4a > 0 \Leftrightarrow a > 0$

Kết hợp với điều kiện suy ra $M > 0$ khi $a > 0$ và $a \neq 1$

c) Ta có: $M = \dfrac{4a}{a^2+4} = \dfrac{(a^2+4)-(a^2-4a+4)}{a^2+4} = 1 - \dfrac{(a-2)^2}{a^2+4}$

Vì $\dfrac{(a-2)^2}{a^2+4} \geq 0$ với mọi a nên $1 - \dfrac{(a-2)^2}{a^2+4} \leq 1$ với mọi a

vndoc

Dấu $"="$ xảy ra khi $\frac{(a-2)^2}{a^2+4}=0 \Leftrightarrow a=2$

Vậy $Max_M=1$ khi $a=2$.

Câu 2.

1)

a) Ta có:

$$\frac{x+2}{98}+\frac{x+4}{96}=\frac{x+6}{94}+\frac{x+8}{92}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x+2}{98}+1\right)+\left(\frac{x+4}{96}+1\right)=\left(\frac{x+6}{94}+1\right)+\left(\frac{x+8}{92}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow(x+100).\left(\frac{1}{98}+\frac{1}{96}-\frac{1}{94}-\frac{1}{92}\right)=0$$

Vì $\frac{1}{98}+\frac{1}{96}-\frac{1}{94}-\frac{1}{92}\neq 0$

Do đó: $x+100=0\Leftrightarrow x=-100$

Vậy phương trình có nghiệm : $x=-100$

b)

Ta có:

$$x^6-7x^3-8=0\Leftrightarrow(x^3+1)(x^3-8)=0$$

$$\Leftrightarrow(x+1)(x^2-x+1)(x-2)(x^2+2x+4)=0(*)$$

Do $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ và $x^2+2x+4=(x+1)^2+3>0$ với mọi x

Nên $(*)\Leftrightarrow(x+1)(x-2)=0\Leftrightarrow x\in\{-1;2\}$

2) $\frac{1-x}{x-m}+\frac{x-2}{x+m}=\frac{2(x-m)-2}{m^2-x^2}$ (1)

ĐKXĐ: $x+m\neq 0$ và $x-m\neq 0\Leftrightarrow x\neq\pm m$

$$\Rightarrow(1-x)(x+m)+(x-2)(x-m)=2-2(x-m)$$

$$\Leftrightarrow(2m-1)x=m-2(*)$$

+Nếu $2m-1=0\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$ ta có: $(*)\Leftrightarrow 0x=\frac{-3}{2}$ (vô nghiệm)

+Nếu $m\neq\frac{1}{2}$ ta có $(*)\Leftrightarrow x=\frac{m-2}{2m-1}$

- Xét $x = m$

$\Leftrightarrow \dfrac{m-2}{2m-1} = m \Leftrightarrow m - 2 = 2m^2 - m$

$\Leftrightarrow 2m^2 - 2m + 2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} = 0$

(Không xảy ra vì vế trái luôn dương)

Xét $x = -m$

$\Leftrightarrow \dfrac{m-2}{2m-1} = -m \Leftrightarrow m - 2 = -2m^2 + m$

$\Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Vậy phương trình vô nghiệm khi $m = \dfrac{1}{2}$ hoặc $m = \pm 1$

3)

Ta có: $g(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

Vì $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$

Nên tồn tại một đa thức $q(x)$ sao cho $f(x) = g(x).q(x)$

$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + 10x - 4 = (x+2).(x-1)q(x)$

Với $x = 1 \Rightarrow a + b + 6 = 0 \Rightarrow b = -a - 6\ (1)$

Với $x = -2 \Rightarrow 2a - b + 6 = 0(2)$

Thay (1) vào (2) ta có: $a = -4$ và $b = -2$

Câu 3.

1)

Từ $x + y + z = 1 \Leftrightarrow (x + y + z)^3 = 1$

Mà $x^3 + y^3 + z^3 = 1$

vndoc

$\Rightarrow (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 0$

$\Leftrightarrow (x+y+z)^3 - z^3 - (x^3 + y^3) = 0$

$\Leftrightarrow (x+y+z-z)\left[(x+y+z)^2 + (x+y+z)z + z^2\right] - (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0$

$\Leftrightarrow (x+y)(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz + xz + yz + z^2 + z^2 - x^2 + xy - y^2) = 0$

$\Leftrightarrow (x+y)(3z^2 + 3xy + 3yz + 3xz) = 0$

$\Leftrightarrow (x+y)3(y+z)(x+z) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ y+z=0 \\ x+z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ y=-z \\ x=-z \end{array}\right.$

*Nếu $x=-y \Rightarrow z=1 \Rightarrow A = x^{2015} + y^{2015} + z^{2015} = 1$

*Nếu $y=-z \Rightarrow x=1 \Rightarrow A = x^{2015} + y^{2015} + z^{2015} = 1$

*Nếu $x=-z \Rightarrow y=1 \Rightarrow A = x^{2015} + y^{2015} + z^{2015} = 1$

2)

Gọi $x(km)$ là độ dài quãng đường AB. ĐK: $x > 0$

Thời gian dự kiến đi hết quãng đường AB: $\frac{x}{30}$(giờ)

Quãng đường đi được sau 1 giờ: $30(km)$

Quãng đường còn lại : $x-30(km)$

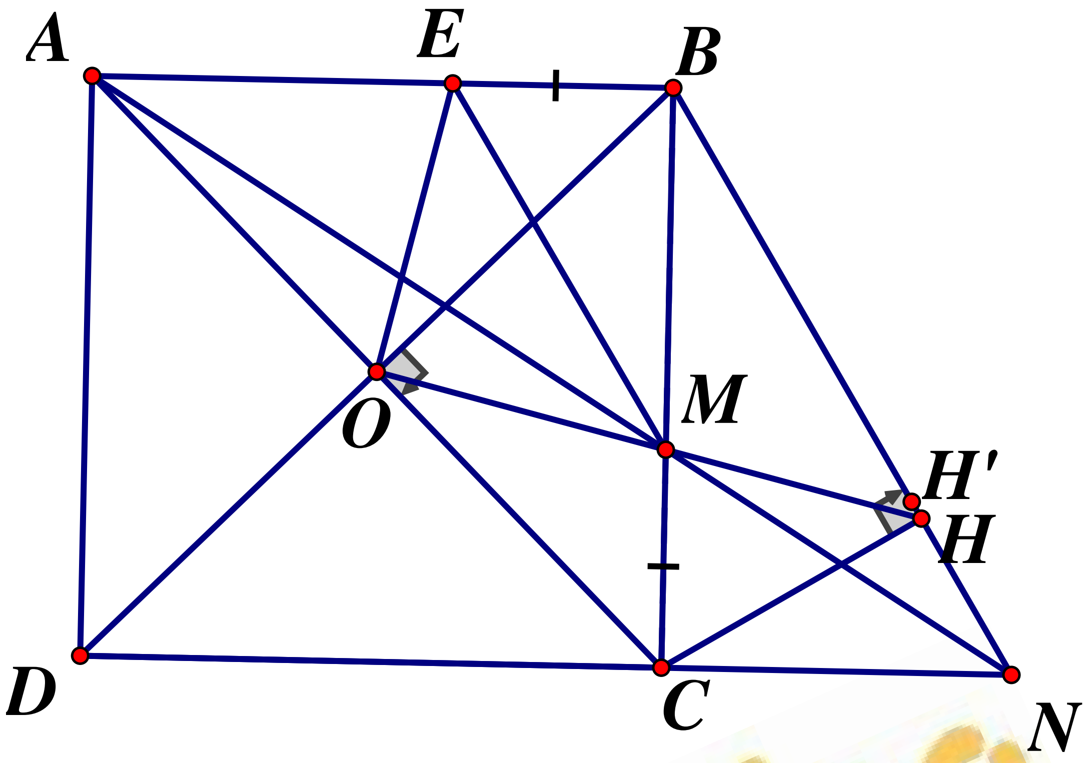
Thời gian đi quãng đường còn lại: $\frac{x-30}{40}$(giờ)

Theo bài ta có phương trình: $\frac{x}{30} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{x-30}{40}$

$\Leftrightarrow 4x = 30.5 + 3.(x-30) \Leftrightarrow x = 60$(thỏa mãn)

Vậy quãng đường AB là $60km$.

Câu 4.



a)

Xét ΔOEB và ΔOMC

Vì $ABCD$ là hình vuông nên ta có : $OB = OC$

Và $B_1 = C_1 = 45^0$

$BE = CM\left(gt\right)$

Suy ra $\Delta OEM = \Delta OMC(c.g.c)$

$\Rightarrow OE = OM$ và $O_1 = O_3$

Lại có: $O_2 + O_3 = BOC = 90^0$ vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông

$\Rightarrow O_2 + O_1 = EOM = 90^0$ kết hợp với $OE = OM \Rightarrow \Delta OEM$ vuông cân tại O

b) Từ giả thiết $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB = CD$ và $AB//CD$

$+AB//CD \Rightarrow AB//CN \Rightarrow \dfrac{AM}{MN} = \dfrac{BM}{MC}$ (định lý Ta-let) $\left(*\right)$

Mà $BE = CM\left(gt\right)$ và $AB = CD \Rightarrow AE = BM$ thay vào $\left(*\right)$

Ta có: $\dfrac{AM}{MN} = \dfrac{AE}{EB} \Rightarrow ME//BN$ (theo Định lý Talet đảo)

c) Gọi H' là giao điểm của OM và BN

Từ $ME//BN \Rightarrow OME = MH'B$

Mà $OME = 45^0$ vì ΔOEM vuông cân tại O $\Rightarrow MH'B = 45^0 = C_1$

$\Rightarrow \Delta OMC \sim \Delta BMH'\left(g.g\right)$

$\Rightarrow \dfrac{OM}{BM} = \dfrac{MC}{MH}$, kết hợp $OMB = CMH'$(hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta OMB \sim \Delta CMH'(c.g.c) \Rightarrow OBM = MH'C = 45^0$

Vậy $BH'C = BH'M + MH'C = 90^0 \Rightarrow CH' \perp BN$

Mà $CH \perp BN\left(H \in BN\right) \Rightarrow H \equiv H'$ hay 3 điểm O, M, H thẳng hàng (đpcm)

Câu 5.

Ta có:

$$P = \frac{2a+3b+3c+1}{2015+a} + \frac{3a+2b+3c}{2016+b} + \frac{3a+3b+2c-1}{2017+c}$$

$$= \frac{b+c+4033}{2015+a} + \frac{c+a+4032}{2016+b} + \frac{a+b+4031}{2017+c}$$

Đặt

$2015 + a = x$

$2016 + b = y$

$2017 + c = z$

$$P = \frac{b+c+4033}{2015+a} + \frac{c+a+4032}{2016+b} + \frac{a+b+4031}{2017+c}$$

$$= \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{y}{x}.\frac{x}{y}} + 2\sqrt{\frac{z}{x}.\frac{x}{z}} + 2\sqrt{\frac{y}{z}.\frac{z}{y}} = 6 \qquad (Co-si)$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z$ suy ra $a = 673, b = 672, c = 671$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 6 khi $a = 673, b = 672, c = 671$

PHÒNG GD & ĐT THANH CHƯƠNG **ĐỀ THI KĐCL MŨI NHỌN. NĂM HỌC 2012-2013**

Môn thi: TOÁN 8

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1.

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y - 5$

b) Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + n + 2$ là hợp số

c) Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ

Câu 2.

a) Giải phương trình : $\dfrac{x-1}{2012} + \dfrac{x-2}{2011} + \dfrac{x-3}{2010} + ... + \dfrac{x-2012}{1} = 2012$

b) Cho $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Tính $S = a^2 + b^{2012} + c^{2013}$

Câu 3.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = 2x^2 + 3y^2 + 4xy - 8x - 2y + 18$

b) Cho a, b, c là ba cạnh của tam giác.

Chứng minh: $\dfrac{ab}{a+b-c} + \dfrac{bc}{-a+b+c} + \dfrac{ac}{a-b+c} \geq a + b + c$

Câu 4. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. M là giao điểm của CE và DF

a) Chứng mnh tứ giác $EFGH$ là hình vuông

b) Chứng minh $DF \perp CE$ và ΔMAD cân

c) Tính diện tích ΔMDC theo a

vndoc

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a)

$$=(x-y)^2+4(x-y)-5=(x-y)^2+4(x-y)^2+4-9$$
$$=(x-y+2)^2-3^2=(x-y+5)(x-y-1)$$

b)

Ta có: $n^3+n+2=n^3+1+n+1=(n+1)(n^2-n+1)+(n+1)=(n+1)(n^2-n+2)$

Do $\forall n\in N^*$ nên $n+1>1$ và $n^2-n+2>1$. Vậy n^3+n+2 là hợp số

c)

Gọi hai số lần lượt là a^2 và $(a+1)^2$

Theo đề bài ra ta có:

$a^2+(a+1)^2+a^2(a+1)^2=a^4+2a^3+3a^2+2a+1$

$=(a^4+2a^3+a^2)+2(a^2+a)+1=(a^2+a)^2+2(a^2+a)+1$

$=(a^2+a+1)^2$ là một số chính phương lẻ vì $a^2+a=a(a+1)$ là số chẵn

$\Rightarrow a^2+a+1$ là số lẻ

Câu 2.

a) Phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{x-1}{2012}-1+\frac{x-2}{2011}-1+\frac{x-3}{2010}-1+...+\frac{x-2012}{1}-1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2013}{2012}+\frac{x-2013}{2011}+\frac{x-2013}{2010}+.....+\frac{x-2013}{1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2013)\left(\frac{1}{2012}+\frac{1}{2011}+\frac{1}{2010}+.....+\frac{1}{1}\right)\Leftrightarrow x=2013$$

vndoc

b)

$$a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3=1\Rightarrow a;b;c\in[-1;1]$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3-\left(a^2+b^2+c^2\right)=a^2(a-1)+b^2(b-1)+c^2(c-1)\le 0$$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3\le 1\Rightarrow a;b;c$ nhận hai giá trị là 0 hoặc 1

$$\Rightarrow b^{2012}=b^2;c^{2013}=c^2;\Rightarrow S=a^2+b^{2012}+c^{2013}=1$$

Câu 3.

a) Ta có: $A=2\left(x^2+2xy+y^2\right)+y^2-8x-2y+18$

$$A=2\left[(x+y)^2-4(x+y)+4\right]+\left(y^2+6y+9\right)+1$$

$$A=2(x+y-2)^2+(y+3)^2+1\ge 1$$

Vậy $\min A=1\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=-3\end{cases}$

b) Vì a,b,c là 3 cạnh của tam giác nên $a+b-c>0;-a+b+c>0;a-b+c>0$

Đặt $x=-a+b+c>0;y=a-b+c>0;z=a+b-c>0$

Ta có: $x+y+z=a+b+c;a=\dfrac{y+z}{2};b=\dfrac{x+z}{2};c=\dfrac{x+y}{2}$

$$\frac{ab}{a+b-c}+\frac{bc}{-a+b+c}+\frac{ac}{a-b+c}=\frac{(y+z)(x+z)}{4z}+\frac{(x+z)(x+y)}{4x}+\frac{(x+y)(y+z)}{4y}$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+3x+3y+3z\right)=\frac{1}{4}\left[3(x+y+z)+\frac{1}{2}.\left(2\frac{xy}{z}+2\frac{yz}{x}+2\frac{xz}{y}\right)\right]$$

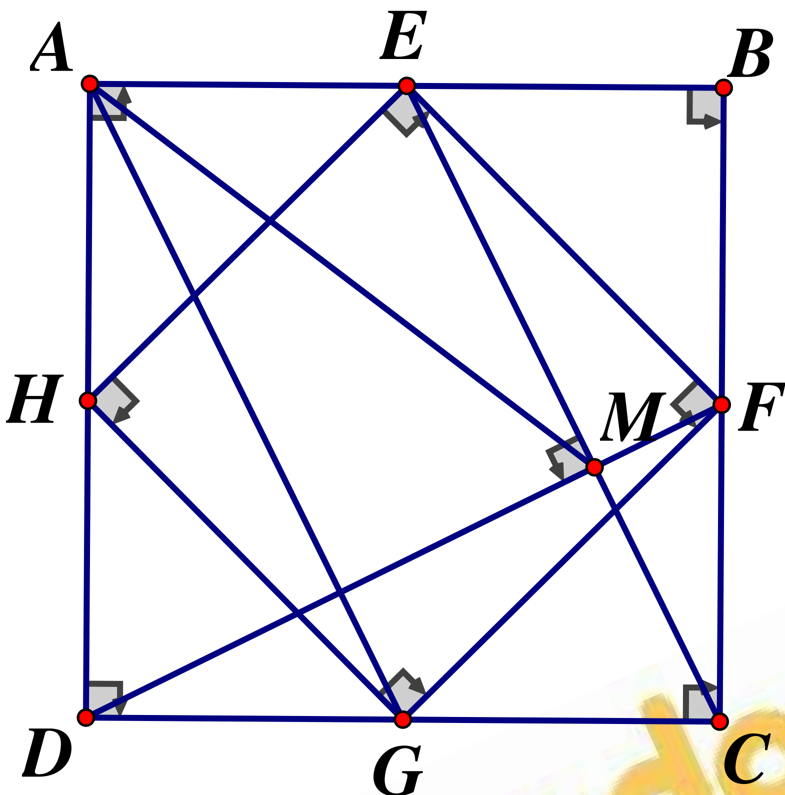
$$=\frac{1}{4}.\left[3(x+y+z)+\frac{y}{2}.\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\frac{x}{2}.\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\frac{z}{2}.\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\right]$$

$$\ge\frac{1}{4}.\left[3(x+y+z)+x+y+z\right]=x+y+z$$

Mà $x+y+z=a+b+c$ nên suy ra điều phải chứng minh.

vndoc

Câu 4.



a) Chứng minh $EFGH$ là hình thoi và có 1 góc vuông nên $EFGH$ là hình vuông

b) $\Delta BEC = \Delta CFD(c.g.c) \Rightarrow ECB = FDC$ mà ΔCDF vuông tại C nên

$\Rightarrow CDF + DFC = 90^0 \Rightarrow DFC + ECB = 90^0 \Rightarrow \Delta CMF$ vuông tại M

Hay $CE \perp DF$

Gọi N là giao điểm của AG và DF. Chứng minh tương tự : $AG \perp DF$

$\Rightarrow GN//CM$ mà G là trung điểm của DC nên N là trung điểm DM.

Trong ΔMAD có AN vừa là đường cao vừa là trung tuyến nên ΔMAD cân tại A

c) $\Delta CMD \sim \Delta FCD(g.g) \Rightarrow \dfrac{CD}{FD} = \dfrac{CM}{FC}$

Do đó: $\dfrac{S_{CMD}}{S_{FCD}} = \left(\dfrac{CD}{FD}\right)^2 \Rightarrow S_{CMD} = \left(\dfrac{CD}{FD}\right)^2 .S_{FCD}$

Mà $S_{FCD}=\frac{1}{2}.CF.CD=\frac{1}{4}CD^2$

Vậy $S_{CMD}=\frac{CD^2}{FD^2}.\frac{1}{4}CD^2$

Trong ΔDCF theo Pytago ta có:

$$DF^2=CD^2+CF^2=CD^2+\left(\frac{1}{2}BC\right)^2=CD^2+\frac{1}{4}CD^2=\frac{5}{4}CD^2$$

Do đó: $S_{MCD}=\frac{CD^2}{\frac{5}{4}CD^2}.\frac{1}{4}CD^2=\frac{1}{5}CD^2=\frac{1}{5}a^2$

ĐỀ BÀI

Câu 1. (5 điểm) Tìm số tự nhiên n để:

a) $A=n^3-n^2+n-1$ là số nguyên tố

b) $B=\frac{n^4+3n^3+2n^2+6n-2}{n^2+2}$ có giá trị là một số nguyên

c) $D=n^5-n+2$ là số chính phương.

Câu 2. (5 điểm) Chứng minh rằng:

a) $\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+c+1}=1$ biết $abc=1$

b) Với $a+b+c=0$ thì $a^4+b^4+c^4=2(ab+bc+ca)^2$

c) $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}$

Câu 3. (5 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x-214}{86}+\frac{x-132}{84}+\frac{x-54}{82}=6$

b) $2x(8x-1)^2.(4x-1)=9$

c) $x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0$ với x, y nguyên dương.

Câu 4. (5 điểm) Cho hình thang $ABCD\left(AB//CD\right)$, O là giao điểm hai đường chéo. Qua O kẻ đường thẳng song song với AB cắt DA tại E, cắt BC tại F

a) Chứng minh : Diện tích tam giác AOD bằng diện tích tam giác BOC

b) Chứng minh: $\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{CD} = \dfrac{2}{EF}$

c) Gọi K là điểm bất kỳ thuộc OE. Nêu cách dựng đường thẳng đi qua K và chia đôi diện tích tam giác DEF

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) $A = n^3 - n^2 + n - 1 = (n^2+1)(n-1)$

Để A là nguyên tố thì $n-1=1 \Leftrightarrow n=2$. Khi đó $A=5$

b) $B = n^2 + 3n - \dfrac{2}{n^2+2}$

B có giá trị nguyên $\Leftrightarrow 2 \vdots n^2+2$

n^2+2 là ước tự nhiên của 2 $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} n^2+2=1 \\ n^2+2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n^2=-1 (ktm) \\ n=0 \quad (tm) \end{array}\right.$

Vậy với $n=0$ thì B có giá trị nguyên.

c)

$D = n^5 - n + 2 = n(n^4-1) + 2 = n(n+1)(n-1)(n^2+1) + 2$

$= n(n-1)(n+1)\left[(n^2-4)+5\right] + 2 = n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) + 5n(n-1)(n+1) + 2$

Mà $n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) \vdots 5$ (tích 5 số tự nhiên liên tiếp)

Và $5n(n-1)(n+1) \vdots 5$. Vậy D chia 5 dư 2

Do đó D có tận cùng là 2 hoặc 7 nên D không phải là số chính phương.

Vậy không có giá trị nào của n để D là số chính phương.

Câu 2.

a)

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1} = \frac{ac}{abc+ac+c} + \frac{abc}{abc^2+abc+ac} + \frac{c}{ac+c+1}$$

$$= \frac{ac}{1+ac+c} + \frac{abc}{c+1+ac} + \frac{c}{ac+c+1} = \frac{abc+ac+1}{abc+ac+1} = 1$$

b)

$a+b+c=0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)=0$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 = -2(ab+ac+bc) \qquad (1)$

$\Rightarrow a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) = 4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) + 8abc(a+b+c)$

(Vì $a+b+c=0$)

$\Rightarrow 2(ab+ac+bc) = 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) \qquad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow a^4+b^4+c^4 = 2(ab+ac+bc)^2$

c) Áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y$

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}\geq 2.\frac{a}{b}.\frac{b}{c}=2.\frac{a}{c}$$

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq 2.\frac{a}{b}.\frac{c}{a}=2.\frac{c}{b}$$

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{b^2}{c^2}\geq 2.\frac{c}{a}.\frac{b}{c}=2.\frac{b}{a}$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta có:

$$2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)\geq 2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)\Rightarrow \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq \frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$

Câu 3.

a)

$$\frac{x-214}{86}+\frac{x-132}{84}+\frac{x-54}{82}=6$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x-214}{86}-1\right)+\left(\frac{x-132}{84}-2\right)+\left(\frac{x-54}{82}-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-300}{86}+\frac{x-300}{84}+\frac{x-300}{82}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-300)\left(\frac{1}{86}+\frac{1}{84}+\frac{1}{82}\right)=0\Leftrightarrow x-300=0\Leftrightarrow x=300$$

Vậy $S=\{300\}$

b)

$$2x(8x-1)^2.(4x-1)=9$$

$$\Leftrightarrow(64x^2-16x+1)(8x^2-2x)=9\Leftrightarrow(64x^2-16x+1)(64x^2-16x)=72$$

Đặt $64x^2-16x+\frac{1}{2}=k$

Ta có:

$$(k+0,5)(k-0,5)=72\Leftrightarrow k^2=72,25\Rightarrow k=\pm 8,5$$

vndoc

Với $k=8,5$ ta có phương trình :

$$64x^2-16x-8=0 \Leftrightarrow (2x-1)(4x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=\frac{-1}{4} \end{array}\right.$$

Với $k=-8,5$ ta có phương trình:

$64x^2-16x+9=0 \Leftrightarrow (8x-1)^2+8=0$ (vô nghiệm)

Vậy $S=\left\{\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right\}$

c) $x^2-y^2+2x-4y-10=0 \Leftrightarrow (x^2+2x+1)-(y^2+4y+4)-7=0$

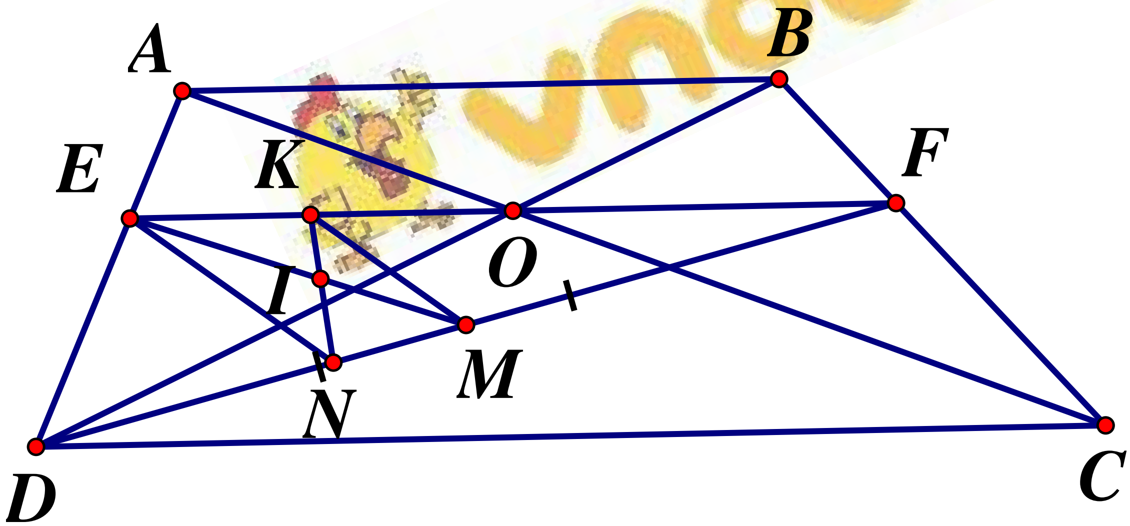
$\Leftrightarrow (x+1)^2-(y+2)^2=7 \Leftrightarrow (x-y-1)(x+y+3)=7$

Vì x, y nguyên dương nên $x+y+3>x-y-1$

$\Rightarrow x+y+3=7$ và $x-y-1=1 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

Phương trình có nghiệm dương duy nhất $(x;y)=(3;1)$

Câu 4.



a) Vì $AB//CD \Rightarrow S_{DAB}=S_{CBA}$ (cùng đáy và cùng đường cao)

$\Rightarrow S_{DAB}-S_{AOB}=S_{CBA}-S_{AOB}$ hay $S_{AOD}=S_{BOC}$

b) Vì $EO//DC \Rightarrow \frac{EO}{DC}=\frac{AO}{AC}$. Mặt khác $AB//DC$

$\Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{AO}{OC} \Rightarrow \frac{AB}{AB+BC} = \frac{AO}{AO+OC} \Rightarrow \frac{AB}{AB+BC} = \frac{AO}{AC} \Rightarrow \frac{EO}{DC} = \frac{AB}{AB+DC}$

$\Rightarrow \frac{EF}{2DC} = \frac{AB}{AB+DC} \Rightarrow \frac{AB+DC}{AB.DC} = \frac{2}{EF} \Rightarrow \frac{1}{DC} + \frac{1}{AB} = \frac{2}{EF}$

c) Dựng trung tuyến EM, dựng $EN // MK \left(N \in DF\right)$

Kẻ đường thẳng KN là đường phải dựng.

Chứng minh: $S_{EDM} = S_{EFM}$ (1)

Gọi giao điểm của EM và KN là I thì $S_{IKE} = S_{IMN} \left(2\right)$

Từ (1) và (2) suy ra $S_{DEKN} = S_{KFN}$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

MÔN TOÁN LỚP 8

Bài 1 (3đ)

a) Phân tích đa thức $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ thành nhân tử

b) Tìm giá trị nguyên của x để $A \vdots B$ biết

$A = 10x^2 - 7x - 5$ và $B = 2x - 3$

c) Cho $x + y = 1$ và $xy \neq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} + \frac{2\left(x - y\right)}{x^2y^2 + 3} = 0$$

Bài 2 (3đ) Giải các phương trình sau:

$a) \left(x^2 + x\right)^2 + 4\left(x^2 + x\right) = 12$

$b) \frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$

Bài 3. (2đ) Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia BA lấy E, trên tia đối của tia CB lấy F sao cho $AE = CF$

a) Chứng minh ΔEDF vuông cân

b) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh O, C, I thẳng hàng

Bài 4. (2 điểm) Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Các điểm D, E theo thứ tự di chuyển trên AB, AC sao cho $BD = AE.$ Xác định vị trí điểm D, E sao cho:

a) DE có độ dài nhỏ nhất

b) Tứ giác $BDEC$ có diện tích nhỏ nhất

ĐÁP ÁN

Bài 1.

$a)$

$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = x^3 - 4x^2 + 4x - x^2 + 4x - 4$

$= x\left(x^2 - 4x + 4\right) - \left(x^2 - 4x + 4\right) = (x-1)(x-2)^2$

b)

Xét $\dfrac{A}{B} = \dfrac{10x^2 - 7x - 5}{2x - 3} = 5x + 4 + \dfrac{7}{2x-3}$

Với $x \in \mathbb{Z}$ thì $A \vdots B$ khi $\dfrac{7}{2x-3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 7 \vdots (2x-3)$

Mà $Ư(7) = \{-1;1;-7;7\} \Rightarrow x = 5;-2;2;1$ thì $A \vdots B$

c) Biến đổi $\dfrac{x}{y^3-1} - \dfrac{y}{x^3-1} = \dfrac{x^4 - x - y^4 + y}{\left(y^3-1\right)\left(x^3-1\right)}$

$= \dfrac{\left(x^4 - y^4\right) - (x-y)}{xy\left(y^2+y+1\right)\left(x^2+x+1\right)} \left(do \quad x + y = 1 \Rightarrow y - 1 = -x \,\&\, x - 1 = -y\right)$

vndoc

$$= \frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)-(x-y)}{xy(x^2y^2+y^2x+y^2+yx^2+xy+y+x^2+x+1)}$$

$$= \frac{(x-y)(x^2+y^2-1)}{xy\left[x^2y^2+xy(x+y)+x^2+y^2+xy+2\right]}$$

$$= \frac{(x-y)(x^2-x+y^2-y)}{xy\left[x^2y^2+(x+y)^2+2\right]} = \frac{(x-y)\left[x(x-1)+y(y-1)\right]}{xy(x^2y^2+3)}$$

$$= \frac{(x-y)\left[x(-y)+y(-x)\right]}{xy\left(x^2y^2+3\right)} = \frac{(x-y)(-2xy)}{xy\left(x^2y^2+3\right)}$$

$= \dfrac{-2(x-y)}{x^2y^2+3}$ Suy ra điều phải chứng minh

Bài 2.

a) $\left(x^2+x\right)^2+4\left(x^2+x\right)=12$

Đặt $y=x^2+x$

$$y^2+4y-12=0 \Leftrightarrow y^2+6y-2y-12=0$$

$$\Leftrightarrow (y+6)(y-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-6 \\ y=2 \end{array}\right.$$

$*x^2+x=-6$ vô nghiệm vì $x^2+x+6>0$ với mọi x

$$*x^2+x=2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x^2+2x-x-2=0$$

$$\Leftrightarrow x(x+2)-(x+2)=0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=-2; x=1$$

b)

$$\frac{x+1}{2008}+\frac{x+2}{2007}+\frac{x+3}{2006}=\frac{x+4}{2005}+\frac{x+5}{2004}+\frac{x+6}{2003}$$

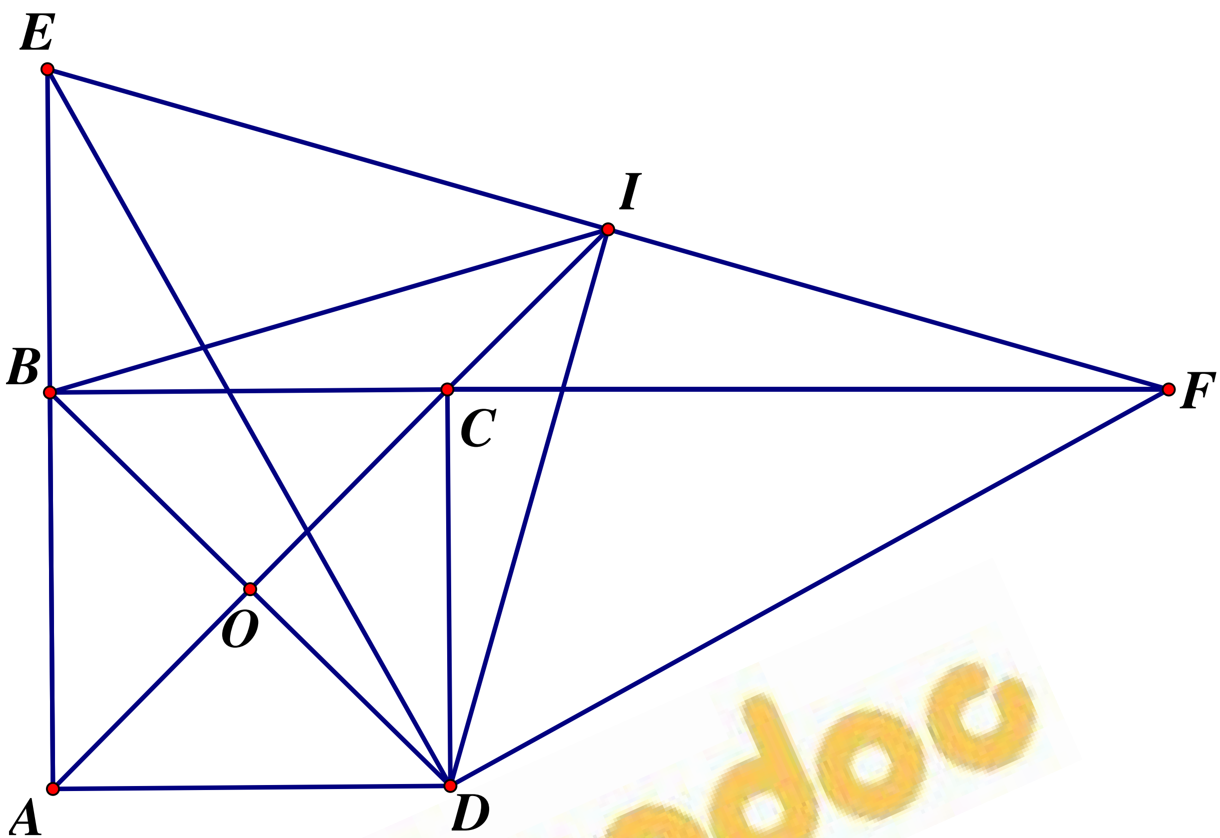
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2008}+1\right)+\left(\frac{x+2}{2007}+1\right)+\left(\frac{x+3}{2006}+1\right)=\left(\frac{x+4}{2005}+1\right)+\left(\frac{x+5}{2004}+1\right)+\left(\frac{x+6}{2003}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2009}{2008}+\frac{x+2009}{2007}+\frac{x+2009}{2006}=\frac{x+2009}{2005}+\frac{x+2009}{2004}+\frac{x+2009}{2003}$$

$$\Leftrightarrow (x+2009)\left(\frac{1}{2008}+\frac{1}{2007}+\frac{1}{2006}-\frac{1}{2005}-\frac{1}{2004}-\frac{1}{2003}\right)=0$$

Vì $\dfrac{1}{2008}+\dfrac{1}{2007}+\dfrac{1}{2006}-\dfrac{1}{2005}-\dfrac{1}{2004}-\dfrac{1}{2003}\neq 0 \Rightarrow x=-2009$

Bài 3



a)

Ta có : $\Delta ADE = \Delta CDF\left(c.g.c\right) \Rightarrow \Delta EDF$ cân tại D

Mặt khác $\Delta ADE = \Delta CDF(c.g.c) \Rightarrow BED = CFD$

Mà $BED + DEF + EFB = 90^0 \Rightarrow BFD + DEF + EFB = 90^0$

$\Rightarrow EDF = 90^0$. Vậy ΔEDF vuông cân.

b)

Theo tính chất đường chéo hình vuông$\Rightarrow CO$ là trung trực BD

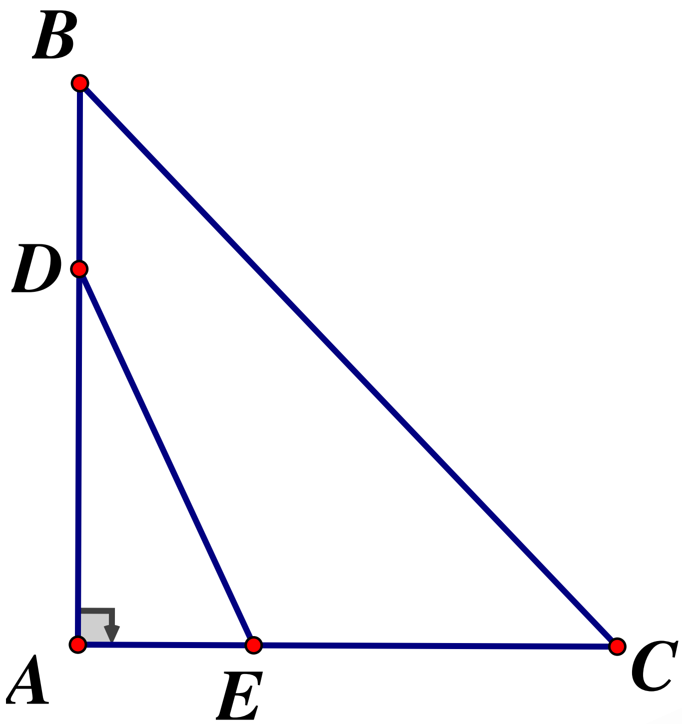
Mà ΔEDF vuông cân $\Rightarrow DI = \frac{1}{2}EF$

Tương tự $BI = \frac{1}{2}EF \Rightarrow DI = BI$

$\Rightarrow I$ thuộc đường trung trực của $DB \Rightarrow I$ thuộc đường thẳng CO

Nên O, C, I thẳng hàng

Bài 4



a)

Đặt $AB = AC = a$ không đổi; $AE = BD = x(0 < x < a)$

Áp dụng định lý Pytago với ΔADE vuông tại A có:

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 = (a-x)^2 + x^2 = 2x^2 - 2ax + a^2 = 2(x^2 - ax) - a^2$$

$$= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2} \geq \frac{a^2}{2}$$

Ta có DE nhỏ nhất $\Leftrightarrow DE^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$

$\Leftrightarrow BD = AE = \frac{a}{2} \Leftrightarrow$ D, E là trung điểm của AB, AC

b)

Tứ giác $BDEC$ có diện tích nhỏ nhất

Ta có: $S_{ADE} = \frac{1}{2}AD.AE = \frac{1}{2}AD.(AB - AD) = -\frac{1}{2}(AD^2 - AB.AD)$

$$= -\frac{1}{2}\left(AD^2 - 2.\frac{AB}{2}.AD + \frac{AB^2}{4}\right) + \frac{AB^2}{8} = -\frac{1}{2}\left(AD - \frac{AB}{2}\right)^2 + \frac{AB^2}{8} \leq \frac{AB^2}{8}$$

vndoc

Vậy $S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE} \geq \frac{AB^2}{2} - \frac{AB^2}{8} = \frac{3}{8}AB^2$ không đổi

Do đó $\min S_{BDEC} = \frac{3}{8}AB^2$ khi D, E lần lượt là trung điểm AB, AC

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

MÔN: TOÁN 8

NĂM HỌC 2014-2015

Bài 1. Phân tích đa thức thành nhân tử:

$a) x^2 - y^2 - 5x + 5y$

$b) 2x^2 - 5x - 7$

Bài 2. Tìm đa thức A, biết rằng $\frac{4x^2 - 16}{x^2 + 2x} = \frac{A}{x}$

Bài 3. Cho phân thức $\frac{5x+5}{2x^2+2x}$

a) Tìm điều kiện của x để giá trị của phân thức được xác định
b) Tìm giá trị của x để giá trị của phân thức bằng 1

Bài 4. a) Giải phương trình: $\frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-2)}$

b) Giải bất phương trình: $(x-3)(x+3) < (x+2)^2 + 3$

Bài 5. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình:

Một tổ sản xuất lập kế hoạch sản xuất, mỗi ngày sản xuất được 50 sản phẩm. Khi thực hiện, mỗi ngày tổ đó sản xuất được 57 sản phẩm. Do đó đã hoàn thành trước kế hoạch một ngày và còn vượt mức 13 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch tổ phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm và thực hiện trong bao nhiêu ngày.

Bài 6. Cho ΔABC vuông tại A, có $AB = 15cm, AC = 20cm.$ Kẻ đường cao AH và trung tuyến AM

a) Chứng minh $\Delta ABC \sim \Delta HBA$
b) Tính $BC; AH; BH; CH$

c) Tính diện tích ΔAHM

ĐÁP ÁN

Bài 1

$a) x^2 - y^2 - 5x + 5y = \left(x^2 - y^2\right) - \left(5x - 5y\right) = \left(x + y\right)\left(x - y\right) - 5(x - y) = \left(x - y\right)\left(x + y - 5\right)$

$b) 2x^2 - 5x - 7 = 2x^2 + 2x - 7x - 7$

$= 2x\left(x+1\right) - 7\left(x+1\right) = \left(x+1\right) = \left(2x-7\right)$

Bài 2.

$$A = \frac{x\left(4x^2 - 16\right)}{x^2 + 2x} = \frac{x\left(2x-4\right)\left(2x+4\right)}{x\left(x+2\right)} = \frac{4x(x-2)(x+2)}{x(x+2)} = 4(x-2) = 4x - 8$$

Bài 3.

$a) 2x^2 + 2x = 2x\left(x+1\right) \neq 0$

$\Leftrightarrow 2x \neq 0 \quad \& \quad x + 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \neq 0 \\ x \neq -1 \end{array}\right.$

b) Rút gọn :

$$\frac{5x+5}{2x^2+2x} = \frac{5\left(x+1\right)}{2x\left(x+1\right)} = \frac{5}{2x}$$

$\frac{5}{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} (tm)$

Bài 4.

a). ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq 2$

$\frac{x\left(x+2\right) - \left(x-2\right)}{x\left(x-2\right)} = \frac{2}{x\left(x-2\right)} \Rightarrow x^2 + 2x - x + 2 = 2$

$\Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \quad (ktm) \\ x = -1\,(tm) \end{array}\right.$

Vậy $S = \{-1\}$

vndoc

b) $\left(x-3\right)\left(x+3\right)<\left(x+2\right)^2+3$

$\Leftrightarrow x^2-9<x^2+4x+7$

$\Leftrightarrow x^2-x^2-4x<7+9 \Leftrightarrow x>-4$

Vậy nghiệm của phương trình là $x>-4$

Bài 5.

Gọi số ngày tổ dự định sản xuất là : x (ngày)

Điều kiện x nguyên dương và $x>1$

Vậy số ngày tổ đã thực hiện là : $x-1$ (ngày)

Số sản phẩm làm theo kế hoạch là : $50x$ (sản phẩm)

Số sản phẩm thực hiện là : $57(x-1)$ (sản phẩm)

Theo đề bài ta có phương trình:

$57(x-1)-50x=13$

$\Leftrightarrow 57x-57-50x=13$

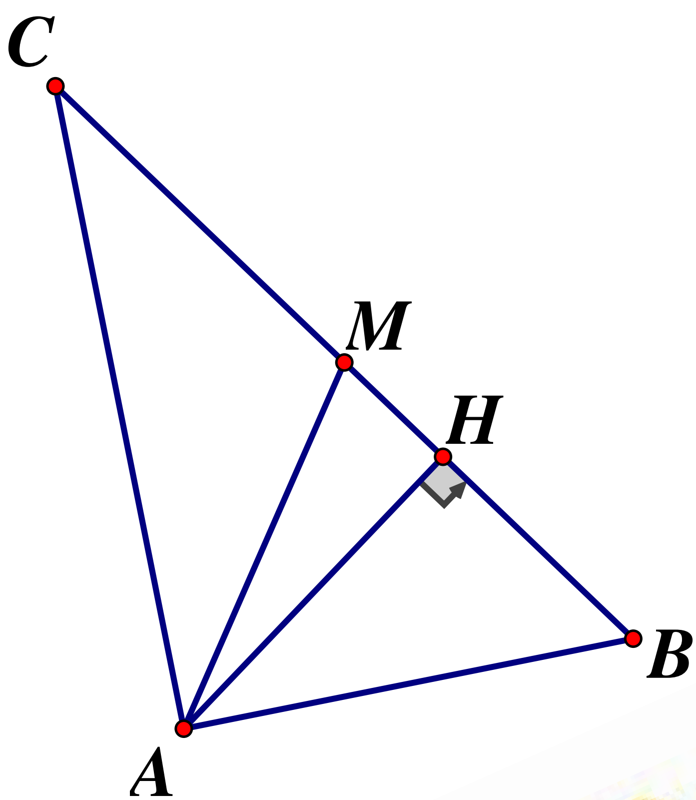
$\Leftrightarrow 7x=70$

$\Leftrightarrow x=10 \qquad (tm)$

Vậy số ngày dự định sản xuất là : 10 ngày

Số sản phẩm phải sản xuất theo kế hoạch: $50.10=500$ (sản phẩm)

Bài 6.



a) Xét ΔABC và ΔHBA có: $\hat{A} = \hat{H} = 90^0; \hat{B}$ chung

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta HBA (g.g)$

b) Áp dụng định lý Pytago vào ΔABC vuông

Ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25(cm)$

Vì $\Delta ABC \sim \Delta HBA$ nên $\dfrac{AB}{HB} = \dfrac{AC}{HC} = \dfrac{BC}{BA}$ hay

$\dfrac{15}{HB} = \dfrac{20}{HA} = \dfrac{25}{15} \Rightarrow AH = \dfrac{20.15}{25} = 12(cm); BH = \dfrac{15.15}{25} = 9\ (cm)$

$HC = BC - BH = 25 - 9 = 16(cm)$

c) $HM = BM - BH = \dfrac{BC}{2} - BH = \dfrac{25}{2} - 9 = 3,5(cm)$

$S_{AHM} = \dfrac{1}{2}.AH.HM = \dfrac{1}{2}.12.3,5 = 21(cm^2)$

vndoc

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NGHĨA BÌNH

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
Môn: TOÁN 8
Năm học : 2015-2016

Bài 1. (2 điểm)

Phân tích đa thức sau đây thành nhân tử:

$1. x^2 + 7x + 6$

$2. x^4 + 2008x^2 + 2007x + 2008$

Bài 2. (2 điểm) Giải phương trình:

$1) x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0$

$2) 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x + 4)^2$

Bài 3. (2 điểm)

1. CMR với a, b, c là các số dương, ta có: $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$
2. Tìm số dư trong phép chia của biểu thức $(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 2008$ cho đa thức $x^2 + 10x + 21$

Bài 4. (4 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại $A(AC > AB)$, đường cao $AH\,(H \in BC)$. Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

1) Chứng minh rằng hai tam giác BEC và ADC đồng dạng. Tính độ dài đoạn BE theo $m = AB$
2) Gọi M là trung điểm của đoạn BE. Chứng minh rằng hai tam giác BHM và BEC đồng dạng. Tính số đo của AHM
3) Tia AM cắt BC tại G. Chứng minh $\frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

1)

$$x^2+7x+6=x^2+x+6x+6$$
$$=x(x+1)+6(x+1)=(x+6)(x+1)$$

2)

$$x^4+2008x^2+2007x+2008=x^4+x^2+2007x^2+2007x+2007+1$$
$$=x^4+x^2+1+207\left(x^2+x+1\right)=\left(x^2+1\right)-x^2+2007\left(x^2+x+1\right)$$
$$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)+2007\left(x^2+x+1\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+2008\right)$$

Bài 2.

2.1 $x^2-3x+2+|x-1|=0(1)$

Nếu $x\ge 1:(1)\Leftrightarrow (x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn điều kiện $x\ge 1$)

$x<1:(1)\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow x^2-x-3(x-1)=0$

Nếu $\Leftrightarrow (x-1)(x-3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \quad (ktm) \\ x=3 \quad (ktm) \end{array}\right.$

Vậy phương trình (1) có một nghiệm duy nhất $x=1$

2.2

$$8\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=(x+4)^2 \quad (2)$$

Điều kiện để phương trình có nghiệm: $x\ne 0$

$$(2)\Leftrightarrow 8\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left[\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\right]=(x+4)^2$$

$$\Leftrightarrow 8\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-8\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=(x+4)^2\Leftrightarrow (x+4)^2=16$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 (ktm) \\ x=-8 (tm) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x=-8$

vndoc

Bài 3.

3.1 Ta có:

$$A=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1$$

$$=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)$$

Mà $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ (BĐT Cô si)

Do đó: $A\geq 3+2+2+2=9$. Vậy $A\geq 9$

3.2 Ta có:

$$P(x)=(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2008$$

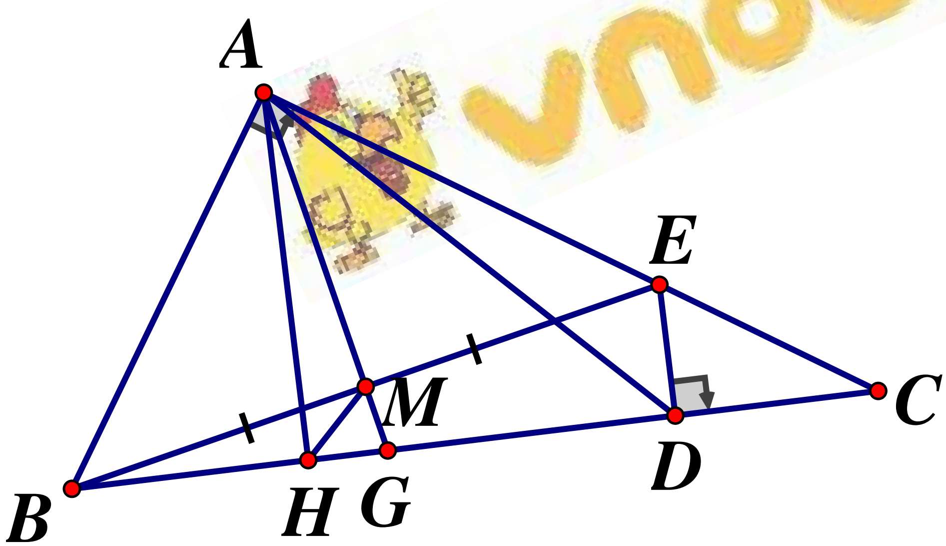
$$=\left(x^2+10x+16\right)\left(x^2+10x+24\right)+2008$$

Đặt $t=x^2+10x+21\left(t\neq -3;t\neq -7\right)$, Biểu thức $P(x)$ được viết lại

$$P(x)=(t-5)(t+3)+2008=t^2-2t+1993$$

Do đó khi chia $t^2-2t+1993$ cho t ta có số dư là 1993

Bài 4.



1) Hai tam giác ADC và BEC có: C chung;

   $\frac{CD}{CE}=\frac{CA}{CB}$ (hai tam giác vuông CDE và CAB đồng dạng)

   Do đó $\Delta ADC\sim\Delta BEC$

   Suy ra $BEC=ADC=135^0$ (vì tam giác AHD vuông cân tại H theo giả thiết)

Nên $AEB = 45^0$, do đó ΔABE vuông cân tại A

Suy ra : $BE = AB\sqrt{2} = m\sqrt{2}$

2) Ta có $\dfrac{BM}{BC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{BE}{BC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{AD}{AC}\left(do \quad \Delta BEC \sim \Delta ADC\right)$

Mà $AD = AH\sqrt{2}$ (tam giác AHD vuông cân tại H)

Nên $\dfrac{BM}{BC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{AH\sqrt{2}}{AC} = \dfrac{BH}{AB\sqrt{2}} = \dfrac{BH}{BE}$ (do $\Delta ABH \sim \Delta CBA$)

Do đó: $\Delta BHM \sim \Delta BEC(c.g.c) \Rightarrow BHM = BEC = 135^0 \Rightarrow AHM = 45^0$

3) Tam giác ABE vuông cân tại A, nên tia AM còn là tia phân giác BAC

Suy ra : $\dfrac{GB}{GC} = \dfrac{AB}{AC}$, mà $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{ED}{DC}\left(\Delta ABC \sim \Delta DEC\right) = \dfrac{AH}{HC}\left(ED // AH\right) = \dfrac{HD}{HC}$

Do đó: $\dfrac{GB}{GC} = \dfrac{HD}{HC} \Rightarrow \dfrac{GB}{GB + GC} = \dfrac{HD}{HD + HC} \Rightarrow \dfrac{GB}{BC} = \dfrac{HD}{AH + HC}$

PHÒNG GD & ĐT
HUYỆN THƯỜNG TÍN

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
Môn: TOÁN 8
Năm học: 2014-2015

Bài 1. (6 điểm) Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{2x-3}{4x^2-12x+5} + \frac{2x-8}{13x-2x^2-20} - \frac{3}{2x-1}\right) : \frac{21+2x-8x^2}{4x^2+4x-3} + 1$$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P khi $|x| = \dfrac{1}{2}$

c) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

d) Tìm x để $P > 0$

Bài 2. (3 điểm) Giải phương trình

$a)\dfrac{15x}{x^2+3x-4} - 1 = 12\left(\dfrac{1}{x+4} + \dfrac{1}{3x-3}\right)$

$b)\dfrac{148-x}{25} + \dfrac{169-x}{23} + \dfrac{186-x}{21} + \dfrac{199-x}{19} = 10$

$c)\left||x-2| + 3\right| = 5$

Bài 3. (2 điểm) Một người đi xe gắn máy từ A đến B dự định mất 3 giờ 20 phút. Nếu người ấy tăng vận tốc thêm $5km/h$ thì sẽ đến B sớm hơn 20 phút. Tính khoảng cách AB và vận tốc dự định đi của người đó

Bài 4. (7 điểm)

Cho hình chữ nhật $ABCD.$ Trên đường chéo BD lấy điểm P, gọi M là điểm đối xứng của C qua P.

a) Tứ giác $AMDB$ là hình gì ?

b) Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của điểm M lên $AB, AD.$ Chứng minh $EF//AC$ và ba điểm E, F, P thẳng hàng

c) Chứng minh rằng tỉ số các cạnh của hình chữ nhật $MEAF$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm P

d) Giả sử $CP \perp BD$ và $CP = 2,4cm, \frac{PD}{PB} = \frac{9}{16}.$ Tính các cạnh của hình chữ nhật $ABCD$

Bài 5. (2 điểm)

a) Chứng minh rằng : $2009^{2008} + 2011^{2010}$ chia hết cho 2010

b) Cho x, y, z là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

$4x^2 - 12x + 5 = (2x-1)(2x-5)$

$13x - 2x^2 - 20 = (x-4)(5-2x)$

$21 + 2x - 8x^2 = (3+2x)(7-4x)$

$4x^2 + 4x - 3 = (2x-1)(2x+3)$

Điều kiện $x \neq \left\{\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; \frac{-3}{2}; \frac{7}{4}; 4\right\}$

a) Rút gọn $P = \frac{2x-3}{2x-5}$

b) $|x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

$+) x = \frac{1}{2} \Rightarrow .....P = \frac{1}{2}$

$+) x = -\frac{1}{2} \Rightarrow ......P = \frac{2}{3}$

c) Ta có: $1 \in \mathbb{Z}$

Vậy $P\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\dfrac{2}{x-5}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x-5\in Ư\left(2\right)=\left\{-1;-2;1;2\right\}$

$x-5=-2\Rightarrow x=3\ \ (tm)$

$x-5=-1\Leftrightarrow x=4\ \ (ktm)$

$x-5=1\Rightarrow x=6\ \ \ \ (tm)$

$x-5=2\Rightarrow x=7\ \ \ \ (tm)$

d) $P=\dfrac{2x-3}{2x-5}=1+\dfrac{2}{x-5}$

Ta có: $1>0$

Để $P>0$ thì $\dfrac{2}{x-5}>0\Rightarrow x-5>0\Leftrightarrow x>5$

Với $x>5$ thì $P>0$

Bài 2.

a)

$$\frac{15x}{x^2+3x-4}-1=12\left(\frac{1}{x+4}+\frac{1}{3x-3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{15x}{(x+4)(x-1)}-1=12.\left(\frac{1}{x+4}+\frac{1}{3(x-1)}\right).\ DK: x\neq -4; x\neq 1$$

$$\Leftrightarrow 3.15x-3(x+4)(x-1)=3.12(x-1)+12(x+4)$$

....

$$\Leftrightarrow 3x(x+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x=0\\ x+4=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\ \ (tm)\\ x=-4\,(tm)\end{array}\right.$$

Vậy $S=\{0\}$

b)

$$\frac{148-x}{25}+\frac{169-x}{23}+\frac{186-x}{21}+\frac{199-x}{19}=10$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{148-x}{25}-1\right)+\left(\frac{169-x}{23}-2\right)+\left(\frac{186-x}{21}-3\right)+\left(\frac{199-x}{19}-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (123-x)\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{23}+\frac{1}{21}+\frac{1}{19}\right)=0$$

Do $\frac{1}{25}+\frac{1}{23}+\frac{1}{21}+\frac{1}{19}>0$ nên $123-x=0 \Leftrightarrow x=123$

Vậy $S=\{123\}$

c) $\left||x-2|+3\right|=5$

Ta có: $|x-2|\geq 0\forall x \Rightarrow |x-2|+3>0$ nên $\left||x-2|+3\right|=|x+2|-3$

Phương trình được viết dưới dạng:

$$|x-2|+3=5$$

$$\Leftrightarrow |x-2|=2$$

$$+)x-2=2 \Leftrightarrow x=4$$

$$+)x-2=-2 \Rightarrow x=0$$

$$S=\{0;4\}$$

vndoc

Bài 3.

Gọi khoảng cách giữa A và B là $x(km)$ $\quad (x > 0)$

Vận tốc dự định của người đi xe gắn máy là: $\dfrac{x}{3\frac{1}{3}} = \dfrac{3x}{10}(km/h)$ $\quad \left(3^h20' = 3\dfrac{1}{3}h\right)$

Vận tốc của người đi xe gắn máy khi tăng lên $5km/h$ là: $\dfrac{3x}{10} + 5(km/h)$

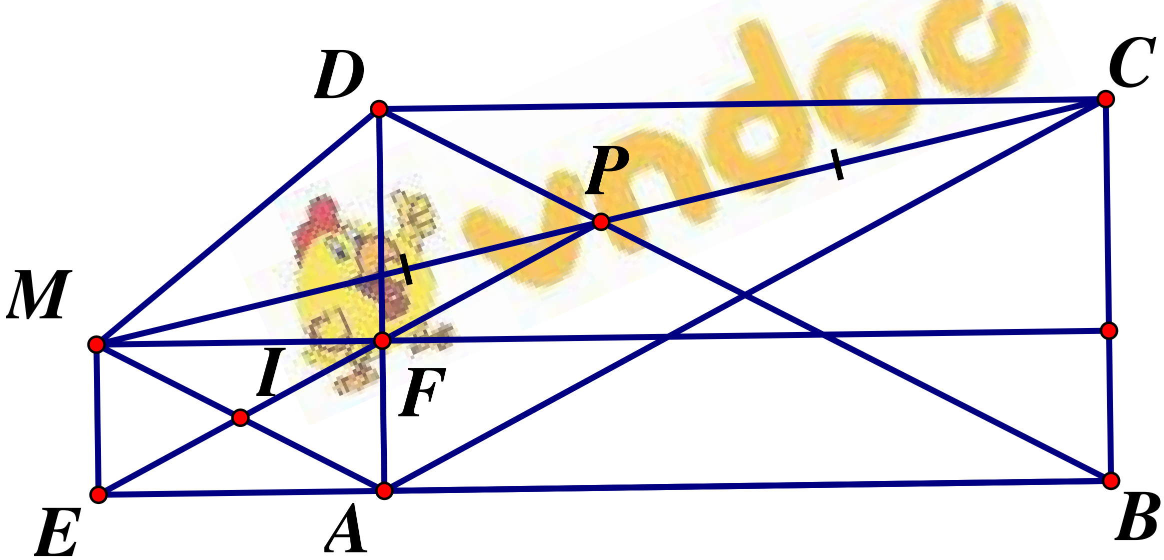
Theo đề bài ta có phương trình:

$\left(\dfrac{3x}{10} + 5\right).3 = x \Leftrightarrow x = 150 \ (tm)$

Vậy khoảng cách giữa A và B là $150(km)$

Vận tốc dự định là $\dfrac{3.150}{10} = 45(km/h)$

Bài 4.



a) Gọi O là giao điểm 2 đường chéo của hình chữ nhật $ABCD$
$\Rightarrow PO$ là đường trung bình của tam giác CAM
$\Rightarrow AM // PO \Rightarrow$ tứ giác $AMDB$ là hình thang

b) Do $AM // BD$ nên $OBA = MAE$ (đồng vị)
Tam giác AOB cân ở O nên $OBA = OAB$
Gọi I là giao điểm 2 đường chéo của hình chữ nhật $AEMF$ thì tam giác AIE cân ở I nên $IAE = IEA$

Từ chứng minh trên : $FEA = OAB$, do đó $EF // AC$ (1)

Mặt khác IP là đường trung bình của tam giác MAC nên $IP // AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm E,F,P thẳng hàng

c) $\Delta MAF \sim \Delta DBA(g-g)$ nên $\dfrac{MF}{FA} = \dfrac{AD}{AB}$ không đổi

d) Nếu $\dfrac{PD}{PB} = \dfrac{9}{16}$ thì $\dfrac{PD}{9} = \dfrac{PB}{16} = k \Rightarrow PD = 9k, PB = 16k$

Nếu $CP \perp BD$ thì $\Delta CBD \sim \Delta DCP(g.g) \Rightarrow \dfrac{CP}{PD} = \dfrac{PB}{CP}$

Do đó: $CP^2 = PB.PD$ hay $(2,4)^2 = 9.16k^2 \Rightarrow k = 0,2$

$PD = 9k = 1,8cm$

$PB = 16k = 3,2cm$

$BD = 5cm$

Chứng minh $BC^2 = BP.BD = 16$

Do đó $BC = 4cm; \quad CD = 3cm.$

Bài 5.

a) Ta có: $2009^{2008} + 2011^{2010} = \left(2009^{2008} + 1\right) + \left(2011^{2010} - 1\right)$

Vì $2009^{2008} + 1 = (2009+1)\left(2009^{2007} - ......\right)$

$= 2010.(..............)$ chia hết cho 2010 (1)

Vì $2011^{2010} - 1 = (2011-1)\left(2011^{2009} + ...\right)$

$= 2010.(...........)$ chia hết cho 2010 (2)

Từ (1) và (2) ta có đpcm.

b)

vndoc

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\ge\frac{2}{1+xy} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+xy}\right)+\left(\frac{1}{1+y^2}-\frac{1}{1+xy}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)}+\frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(y-x)^2(xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)}\ge 0(2)$$

Vì $x\ge 1; y\ge 1\Rightarrow xy\ge 1\Rightarrow xy-1\ge 0$ (2)

$\Rightarrow$BĐT (2) đúng nên BĐT (1) đúng . Dấu $"="$ xảy ra khi $x=y$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI HUYỆN

MÔN TOÁN 8

Bài 1 (3 điểm) Chứng minh rằng:

a) 8^5+2^{11}chia hết cho 17

b) $19^{19}+69^{19}$chia hết cho 44

Bài 2. (3 điểm)

a) Rút gọn biểu thức : $\dfrac{x^2+x-6}{x^3-4x^2-18x+9}$

b) Cho $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0(x,y,z\ne 0)$.Tính $\dfrac{yz}{x^2}+\dfrac{xz}{y^2}+\dfrac{xy}{z^2}$

Bài 3. (3 điểm)

Cho tam giác ABC.Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc tia đối của các tia BA, CA sao cho $BD = CE = BC$.Gọi O là giao điểm của BE và CD. Qua O vẽ đường thẳng song song với tia phân giác của góc A, đường thẳng này cắt AC ở K. Chứng minh rằng $AB = CK$

Bài 4. (1 điểm)

Tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của biểu thức sau (nếu có):

$M = 4x^2 + 4x + 5$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) Ta có: $8^5 + 2^{11} = (2^3)^5 + 2^{11} = 2^{15} + 2^{11} = 2^{11}.(2^4 + 1) = 2^{11}.17$

Rõ ràng kết quả trên chia hết cho 17

b) Áp dụng hằng đẳng thức

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ..... - ab^{n-2} + b^{n-1})$ với mọi n lẻ

Ta có: $19^{19} + 69^{19} = (19 + 69)(19^{18} - 19^{17}.69 + ... + 69^{18})$

$= 88.(19^{18} - 19^{17}.69 + ... + 69^{18})$ chia hết cho 44

Bài 2.

a) Ta có:

$*)x^2 + x - 6 = x^2 + 3x - 2x - 6 = x(x+3) - 2(x+3) = (x-2)(x+3)$

$*)x^3 - 4x^2 - 18x + 9 = x^3 + 3x^2 - 7x^2 - 21x + 3x + 9$

$= x^2(x+3) - 7x(x+3) + 3(x+3)$

$= (x+3)(x^2 - 7x + 3)$

$\Rightarrow \dfrac{x^2 + x - 6}{x^3 - 4x^2 - 18x + 9} = \dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x^2 - 7x + 3)} = \dfrac{x-2}{x^2 - 7x + 3} (x \neq -1; x^2 - 7x + 3 \neq 0)$

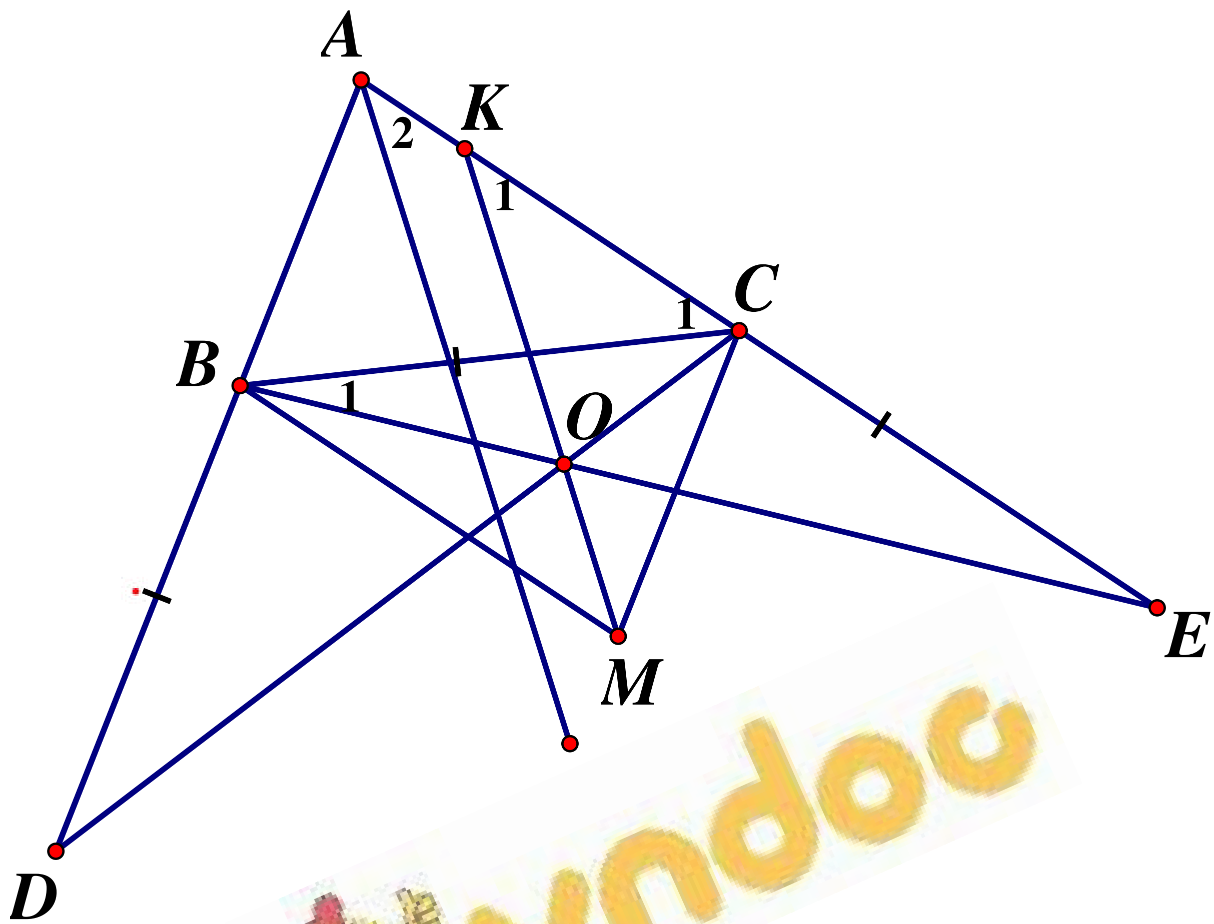
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0\Rightarrow\frac{1}{z}=-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

b) Vì $\Rightarrow\frac{1}{z^3}=-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^3\Rightarrow\frac{1}{z^3}=-\left(\frac{1}{x^3}+3.\frac{1}{x^2}.\frac{1}{y}+3.\frac{1}{x}.\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y^3}\right)$

$$\Rightarrow\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}=-3.\frac{1}{x}.\frac{1}{y}.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\Rightarrow\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}=3.\frac{1}{xyz}$$

Do đó: $xyz\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\right)=3\Leftrightarrow\frac{xyz}{x^3}+\frac{xyz}{y^3}+\frac{xyz}{z^3}=3\Leftrightarrow\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}+\frac{xy}{z^2}=3$

Bài 3.



Vẽ hình bình hành $ABMC$ ta có: $AB = CM$

Để chứng minh $AB = KC$ ta cần chứng minh $KC = CM$.

Thật vậy, xét tam giác BCE có $BC = CE\left(gt\right) \Rightarrow \Delta CBE$ cân tại C$\Rightarrow B_1 = E$

Vì góc C_1 là góc ngoài của tam giác BCE

$\Rightarrow C_1 = B_1 + E \Rightarrow B_1 = \dfrac{1}{2}C_1$ mà $AC//BM$ (ta vẽ)$\Rightarrow C_1 = CBM \Rightarrow B_1 = \dfrac{1}{2}CBM$ nên BO là tia phân giác của CBM.Hoàn toàn tương tự ta có CD là tia phân giác của BCM . Trong tam giác BCM, OB, CO, MO đồng quy tại O

$\Rightarrow MO$ là tia phân giác của CMB

Mà BAC, BMC là hai góc đối của hình bình hành BMCA $\Rightarrow MO//$ với tia phân giác của góc A theo giả thiết tia phân giác của góc A còn song song với OK

$\Rightarrow K, O, M$ thẳng hàng

Ta lại có: $M_1 = \dfrac{1}{2}BMC(cmt); A = M \Rightarrow M_1 = A_2$ mà $A_2 = K_1$ (2 góc đồng vị)

$\Rightarrow K_1 = M_1 \Rightarrow \Delta CKM$ cân tại C $\Rightarrow CK = CM$.

Kết hợp $AB = CM \Rightarrow AB = CK \quad (dfcm)$

Bài 4.

Ta có $M = 4x^2 + 4x + 5 = (4x^2 + 4x + 1) + 4 = (2x+1)^2 + 4$

Vì $(2x+1)^2 \ge 0 \Rightarrow (2x+1)^2 + 4 \ge 4 \Leftrightarrow M \ge 4$

Vậy $Min_M = 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

PHÒNG GD&ĐT TP PLEIKU	**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 8**
TRƯỜNG THCS BÙI THỊ XUÂN	**NĂM HỌC 2015-2016**
ĐỀ CHÍNH THỨC	Thời gian làm bài: 90 phút (không kể giao đề)

Bài 1. (2 điểm) Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$a) x^2 - 6xy + 9y^2 - 49$

$b) x^2 - 6x + 5$

Bài 2. (1,5 điểm) Thực hiện phép tính: $A = \frac{1}{x-2} + \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 7x + 10} - \frac{2x-4}{x-5}$

Bài 3. (1,5 điểm) Giải phương trình: $\frac{x+2005}{4} + \frac{x+2004}{5} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004}$

Bài 4. (2 điểm) Cho tam giác ABC. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của cạnh AB, AC. Vẽ $BE \perp MN, CF \perp MN$ (E, F thuộc đường thẳng MN)

a) Chứng minh rằng: Tứ giác $BEFC$ là hình chữ nhật

b) Chứng minh rằng : $S_{BEFC} = S_{ABC}$

Bài 5. (2 điểm)

Cho tam giác $ABC\left(AB < AC\right)$, đường phân giác $AD.$Qua trung điểm M của BC, kẻ đường thẳng song song với AD, cắt AC và AB theo thứ tự ở E và K.Chứng minh rằng:

a) $AE = AK$ b) $BK = CE$

Bài 6. (1 điểm) Chứng minh rằng: $n^3 + 3n^2 + 2n \vdots 6$ với mọi số nguyên n

ĐÁP ÁN

Bài 1a)

$$x^2 - 6xy + 9y^2 - 49 = \left(x^2 - 6xy + 9y^2\right) - 7^2$$
$$= \left(x - 3y\right)^2 - 7^2 = \left(x - 3y - 7\right)\left(x - 3y + 7\right)$$

Bài 1b)

$$x^2 - 6x + 5 = x^2 - x - 5x + 5$$
$$= x\left(x - 1\right) - 5\left(x - 1\right) = \left(x - 1\right)\left(x - 5\right)$$

Bài 2.

$$x^2 - 7x + 10 = \left(x - 5\right)\left(x - 2\right)$$
$$A = \frac{1}{x - 2} + \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 7x + 10} - \frac{2x - 4}{x - 5} = \frac{1}{x - 2} + \frac{x^2 - x - 2}{\left(x - 5\right)\left(x - 2\right)} - \frac{2x - 4}{x - 5}$$
$$= \frac{x - 5 + x^2 - x - 2 - \left(2x - 4\right)\left(x - 2\right)}{\left(x - 5\right)\left(x - 2\right)} = \frac{-x^2 + 8x - 15}{\left(x - 5\right)\left(x - 2\right)} = \frac{-\left(x - 5\right)\left(x - 3\right)}{\left(x - 5\right)\left(x - 2\right)} = \frac{-x + 3}{x - 2}$$

Bài 3.

$$a)\ \frac{x+2005}{4}+\frac{x+2004}{5}=\frac{x+4}{2005}+\frac{x+5}{2004}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+2005}{4}+1\right)+\left(\frac{x+2004}{5}+1\right)=\left(\frac{x+4}{2005}+1\right)+\left(\frac{x+5}{2004}+1\right)$$

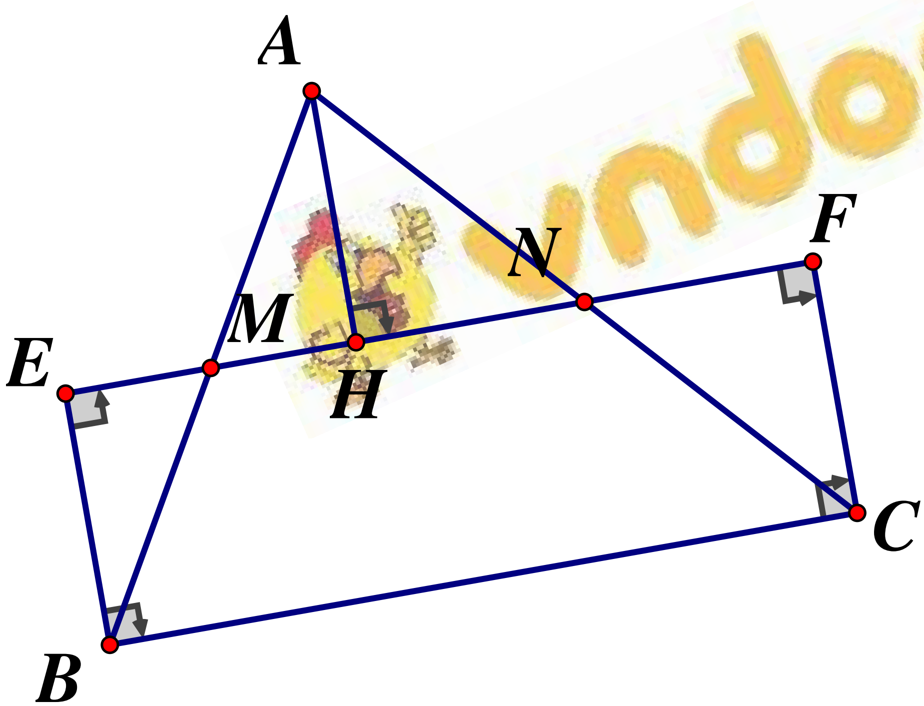
$$\Leftrightarrow \frac{x+2009}{4}+\frac{x+2009}{5}-\frac{x+2009}{2005}-\frac{x+2009}{2004}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2009)\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2005}-\frac{1}{2004}\right]=0$$

Vì $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2005}-\frac{1}{2004}\neq 0 \Rightarrow x+2009=0 \Leftrightarrow x=-2009$

Vậy phương trình có nghiệm $x=-2009$

Bài 4.



a) Ta có MN là đường trung bình của $\Delta ABC \Rightarrow MN//BC$

Mặt khác : $BE\perp EF; CF\perp EF \Rightarrow BE//CF$ & $BEF = 90^0$

Vậy $BEFC$ là hình chữ nhật

b) Kẻ $AH\perp MN$

Xét ΔAHM vuông tại H và ΔBEM vuông tại E có:

$AMH = BME; AM = BM$

$\Rightarrow \Delta AHM = \Delta BEM$ (Cạnh huyền – góc vuông)

$\Rightarrow S_{AHM} = S_{BEM}$ (1)

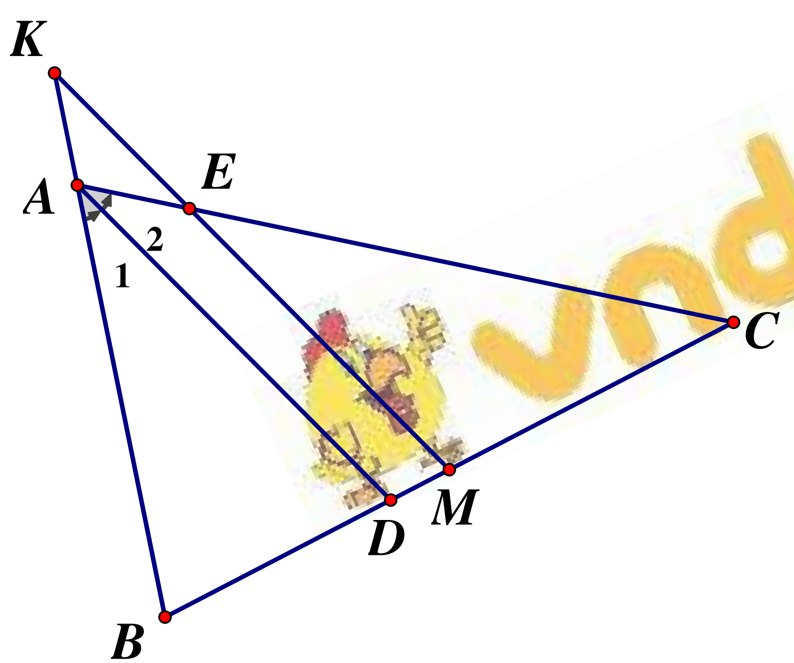
Chứng minh tương tự, ta có: $\Delta AHN = \Delta CFN \Rightarrow S_{AHN} = S_{CFN}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $S_{AHM} + S_{AHN} = S_{BEM} + S_{CFN}$

Mà $S_{BEFC} = S_{BEM} + S_{BMNC} + S_{CFN}; S_{ABC} = S_{BMNC} + S_{AHM} + S_{AHN}$

$\Rightarrow S_{BEFC} = S_{ABC}$

Bài 5.



a) $K = A_1$ (đồng vị); $AEK = A_2$ (so le trong)

Mà $A_1 = A_2$ (AD là tia phân giác) $\Rightarrow AEK = K \Rightarrow \Delta AEK$ cân tại A

$\Rightarrow AE = AK$

b)

Vì $MK // AD$ nên: $\dfrac{AK}{BK} = \dfrac{DM}{BM} \Rightarrow \dfrac{AK}{DM} = \dfrac{BK}{BM} (1)$

Vì $AD//EM$ nên: $\frac{CE}{AE}=\frac{CM}{DM}\Rightarrow\frac{CE}{CM}=\frac{AE}{DM}$ (2)

Vì $AK=AE\left(c/m\quad a\right)$nên $\frac{AK}{DM}=\frac{AE}{DM}$ (3)

Từ (1) (2) (3) $\Rightarrow\frac{BK}{BM}=\frac{CE}{CM}$

Mà $BM=CM$ (M là trung điểm của BC)

$\Rightarrow BK=CE$

Bài 6.

Ta có:

$$n^3+3n^2+2n=n\left(n^2+3n+2\right)=n\left(n^2+n+2n+2\right)$$

$$=n\left[\left(n^2+n\right)+\left(2n+2\right)\right]=n\left(n+1\right)\left(n+2\right)$$

Vì n là số nguyên nên: $n;n+1;n+2$ là ba số nguyên liên tiếp

Do đó có ít nhất một số chia hết cho 2, 1 số chia hết cho 3

$\Rightarrow n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\vdots 6$ hay $n^3+3n^2+2n\vdots 6$ với mọi số nguyên n

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI

MÔN: TOÁN LỚP 8

Năm học: 2010-2011

Bài 1. (3 điểm)

Tìm x biết:

$a)x^2-4x+4=25$

$b)\dfrac{x-17}{1990}+\dfrac{x-21}{1986}+\dfrac{x+1}{1004}=4$

$c)4^x-12.2^x+32=0$

Bài 2. (1,5 điểm)

Cho x,y,z đôi một khác nhau và $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$

Tính giá trị của biểu thức: $A=\dfrac{yz}{x^2+2yz}+\dfrac{xz}{y^2+2xz}+\dfrac{xy}{z^2+2xy}$

Bài 3. (1,5 điểm)

Tìm tất cả các số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng khi ta thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị, ta vẫn được một số chính phương.

Bài 4. (4 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA',BB',CC',H là trực tâm.

a) Tính tổng $\frac{HA'}{AA'}+\frac{HB'}{BB'}+\frac{HC'}{CC'}$

b) Gọi AI là phân giác của tam giác $ABC; IM, IN$ thứ tự là phân giác của góc AIC và góc AIB. Chứng minh rằng: $AN.BI.CM = BN.IC.AM$

c) Chứng minh rằng: $\frac{(AB+BC+CA)^2}{AA'^2+BB'^2+CC'^2} \geq 4$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) Tính đúng $x=7; x=-3$

b) Tính đúng $x=2007$

c)

$$4^x - 12.2^x + 32 = 0 \Leftrightarrow 2^x.2^x - 4.2^x - 8.2^x + 4.8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^x.(2^x-4) - 8.(2^x-4) = 0 \Leftrightarrow (2^x-8)(2^x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 8 \\ 2^x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Bài 2.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \Rightarrow \frac{xy+yz+xz}{xyz}=0 \Leftrightarrow xy+yz+xz=0 \Rightarrow yz=-xy-xz$$

$$x^2+2yz = x^2+yz-xy-xz = x(x-y)-z(x-y) = (x-y)(x-z)$$

Tương tự: $y^2+2xz=(y-x)(y-z); z^2+2xy=(z-x)(z-y)$

Do đó: $A=\frac{yz}{(x-y)(x-z)}+\frac{xz}{(y-x)(y-z)}+\frac{xy}{(z-x)(z-y)}$

Tính đúng $A=1$

Bài 3.

Gọi $\overline{abcd}$ là số phải tìm , $a,b,c,d \in \mathbb{N}, 0 \leq a,b,c,d \leq 9; a \neq 0$

Ta có: $\begin{cases}\overline{abcd}=k^2\\ \overline{(a+1)(b+3)(c+5)(d+3)}=m^2\end{cases}\left(k,m\in\mathbb{N};31<k<m<100\right)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\overline{abcd}=k^2\\ \overline{abcd}+1353=m^2\end{cases}$

Do đó: $m^2-k^2=1353$

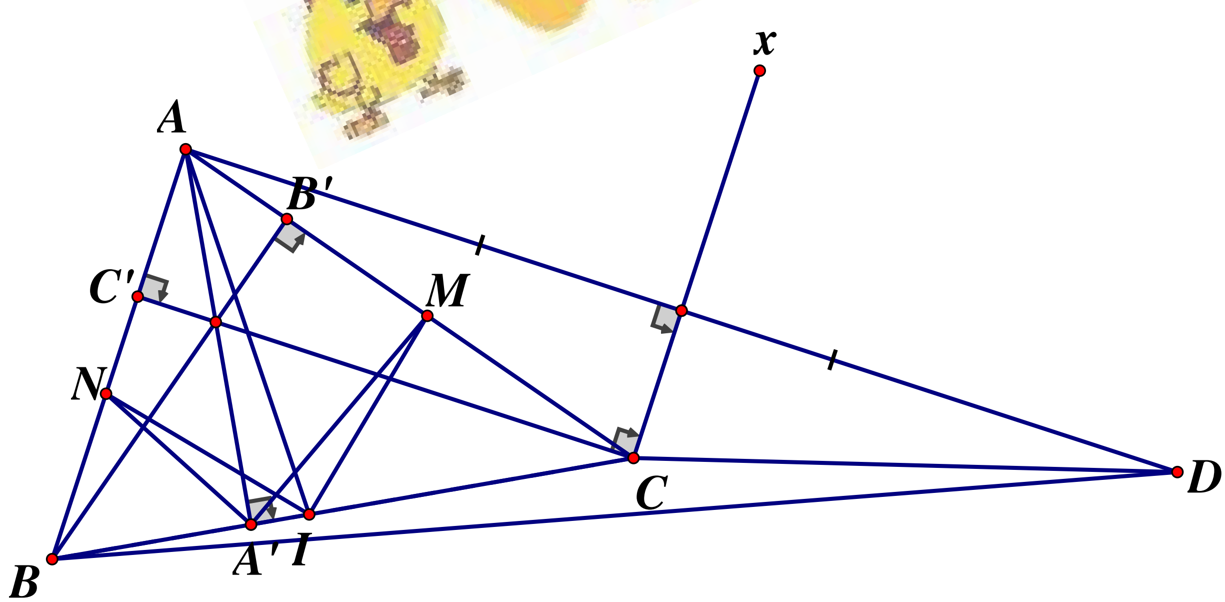
$\Rightarrow(m+k)(m-k)=123.11=41.33(k+m<200)$

$\Rightarrow\begin{cases}m+k=123\\ m-k=11\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}m+k=41\\ m-k=33\end{cases}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m=67\\ k=56\end{cases}\\ \begin{cases}m=37\\ k=4\end{cases}\end{array}\right.$

Kết luận đúng: $\overline{abcd}=3136$

Bài 4.



a) $\dfrac{S_{HAB}}{S_{ABC}}=\dfrac{\frac{1}{2}HA'.BC}{\frac{1}{2}.AA'.BC}=\dfrac{HA'}{AA'}$

Tương tự: $\dfrac{S_{HAB}}{S_{ABC}}=\dfrac{HC'}{CC'};\dfrac{S_{HAC}}{S_{ABC}}=\dfrac{HB'}{BB'}$

$\Rightarrow \dfrac{HA'}{AA'}+\dfrac{HB'}{BB'}+\dfrac{HC'}{CC'}=\dfrac{S_{HBC}}{S_{ABC}}+\dfrac{S_{HAB}}{S_{ABC}}+\dfrac{S_{HAC}}{S_{ABC}}=1$

b) Áp dụng tính chất phân giác vào các tam giác ABC, ABI, AIC:

$\dfrac{BI}{IC}=\dfrac{AB}{AC};\dfrac{AN}{NB}=\dfrac{AI}{BI};\dfrac{CM}{MA}=\dfrac{IC}{AI}$

$\Rightarrow \dfrac{BI}{IC}.\dfrac{AN}{NB}.\dfrac{CM}{MA}=\dfrac{AB}{AC}.\dfrac{AI}{BI}.\dfrac{IC}{AI}=\dfrac{AB}{AC}.\dfrac{IC}{BI}=1$

$\Rightarrow BI.AN.CM=BN.IC.AM$

c) Vẽ $Cx\perp CC'$. Gọi D là điểm đối xứng của A qua Cx

Chứng minh được góc BAD vuông, $CD=AC, AD=2.CC'$

Xét 3 điểm B,C,D ta có : $BD\le BC+CD$

ΔBAD vuông tại A nên : $AB^2+AD^2=BD^2$

$\Rightarrow AB^2+AD^2\le (BC+CD)^2$

$AB^2+4CC'^2\le (BC+AC)^2$

$4CC'^2\le (BC+AC)^2-AB^2$

Tương tự:

$4AA'^2\le (AB+AC)^2-BC^2$

$4BB'^2\le (AB+BC)^2-AC^2$

Chứng minh được: $4(AA'^2+BB'^2+CC'^2)\le (AB+BC+AC)^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{(AB+BC+AC)^2}{AA'^2+BB'^2+CC'^2}\ge 4$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow BC=AC, AC=AB, AB=BC \Leftrightarrow AB=AC=BC \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

UBND TỈNH BẮC NINH	**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH**
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**NĂM HỌC: 2018-2019**
	Môn thi: Toán – Lớp 8
ĐỀ CHÍNH THỨC	**Thời gian làm bài: 150 phút** (*Không kể giao đề*)

vndoc

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho ba số a,b,c khác nhau đôi một và khác 0, đồng thời thỏa mãn diều kiện $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}$. Tính giá trị của biểu thức: $A=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$

Câu 2. (4,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}=2$
2) Cho hai đa thức $P(x)=x^5-5x^3+4x+1, Q(x)=2x^2+x-1$. Gọi x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 là các nghiệm của $P(x)$. Tính giá trị của $Q(x_1).Q(x_2).Q(x_3).Q(x_4).Q(x_5)$

Câu 3. (4,0 điểm)

1) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho n^2+2 là ước số của n^6+206.
2) Cho a,b,c là các số nguyên khác 0, $a\neq c$ sao cho $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}$. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2$ không phải là số nguyên tố.

Câu 4. (7,0 điểm)

1) Cho hình vuông $ABCD$, gọi M là điểm bất kỳ trên cạnh BC. Trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa C, dựng hình vuông $AMHN$. Qua M dựng đường thẳng d song song với AB, d cắt AH tại E. Đường thẳng AH cắt DC tại F.
   a) Chứng minh rằng $BM=ND$.
   b) Tứ giác $EMFN$ là hình gì
   c) Chứng minh chu vi tam giác MFC không đổi khi M thay đổi trên BC
2) Cho tam giác ABC có $BAC=90^0, ABC=20^0$. Các điểm E và F lần lượt nằm trên các cạnh AC, AB sao cho $ABE=10^0$ và $ACF=30^0$. Tính CFE

Câu 5. (3,0 điểm)

1) Cho các số thực $a,b,c\geq 1$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{2a-1}+\frac{1}{2b-1}+\frac{1}{2c-1}+3\geq\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}$$
2) Cho hình vuông $ABCD$ và 9 đường thẳng cùng có tính chất là mỗi đường thẳng chia hình vuông $ABCD$ thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất 3 đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm.

ĐÁP ÁN

vndoc

Câu 1.

Nếu $a+b+c=0$ thì $a+b=-c, b+c=-a, c+a=-b$

Do đó, $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=-1 \Rightarrow A=\frac{a+b}{c}.\frac{b+c}{a}.\frac{c+a}{b}=-1$

Nếu $a+b+c\neq 0$ thì $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=\frac{a+b+b+c+c+a}{c+a+b}=2$

Do đó, $a+b=2c, b+c=2a, c+a=2b \Rightarrow a=b=c$, trái giả thiết

Vậy $A=-1$

Câu 2.

2.1 Điều kiện $x\neq 0; x\neq -1$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}=2 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x^2}+1-\frac{3}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2}+\frac{(x+1)^2-3(x+1)+2}{(x+1)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}+\frac{x(x-1)}{(x+1)^2}=0 \Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{x+1}{x^2}+\frac{x}{(x+1)^2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[(x+1)^3+x^3\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{-1}{2}(tm) \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{1;\frac{-1}{2}\right\}$

2.2

Ta có : $P(x)=x^5-5x^3+4x+1=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)$

$$Q(x)=2\left(\frac{1}{2}-x\right)(-1-x)$$

vndoc

Do đó

$Q(x_1).Q(x_2).Q(x_3).Q(x_4).Q(x_5)$

$=2^5.\left[\left(\frac{1}{2}-x_1\right)\left(\frac{1}{2}-x_2\right)\left(\frac{1}{2}-x_3\right)\left(\frac{1}{2}-x_4\right)\left(\frac{1}{2}-x^5\right)\right]$

$\times\left[(-1-x_1)(-1-x_2)(-1-x_3)(-1-x_4)(-1-x_5)\right]$

$=32.P\left(\frac{1}{2}\right).P(-1)=32.\left(\frac{1}{32}-\frac{5}{8}+2+1\right)(-1+5-4+1)=77$

Câu 3.

3.1

n^2+2 là ước số của $n^6+206 \Leftrightarrow \frac{n^6+206}{n^2+2}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{n^6+8+198}{n^2+2}\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow n^4+2n^2+4+\frac{198}{n^2+2}\in\mathbb{Z}$

Điều nảy xảy ra khi n^2+2 là ước nguyên dương của $198=2.3^2.11$ gồm:

$2;3;6;9;11;18;22;33;66;99;198$

Từ đó ta tìm được $n\in\{1;2;3;4;8;14\}$

3.2

Ta có: $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}\Leftrightarrow(a-c)(b^2-ac)=0\Rightarrow b^2=ac$

Mà $a^2+b^2+c^2=a^2+ac+c^2=a^2+2ac+c^2-b^2=(a+c)^2-b^2=(a+c+b)(a+c-b)$

Ta thấy $a^2+b^2+c^2>3$ do đó nếu $a^2+b^2+c^2$ là các số nguyên tố thì xảy ra các trường hợp sau:

$1)a+c-b=1;a+c+b=a^2+b^2+c^2\Rightarrow a^2+b^2+c^2=2a+2c-1$

$\Rightarrow(a-1)^2+(c-1)^2+b^2=1\Rightarrow a=c=1,b=\pm1\qquad(ktm)$

$2) a+c+b=1, a+c-b=a^2+b^2+c^2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2=2a+2c-1$

$\Rightarrow (a-1)^2+(c-1)^2+b^2=1 \Rightarrow a=c=1, b=\pm 1 \qquad (ktm)$

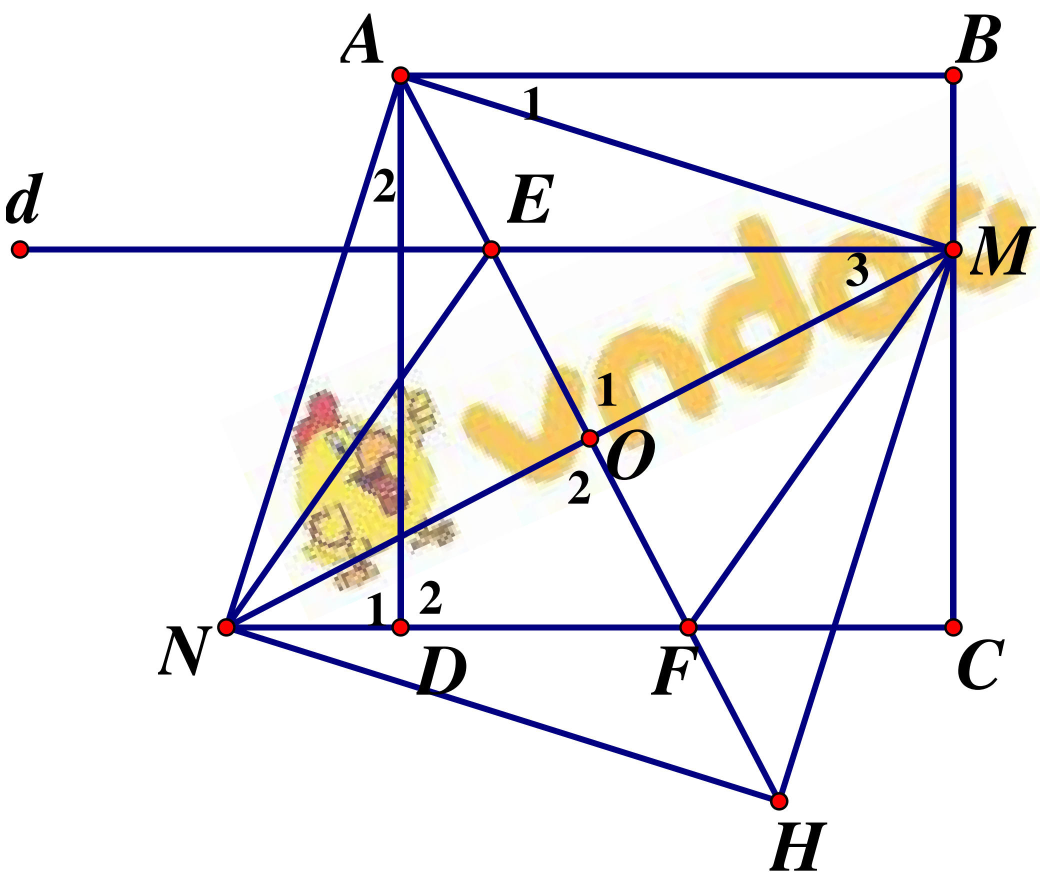
$3) a+c+b=-1, a+c-b=-\left(a^2+b^2+c^2\right) \Rightarrow a^2+b^2+c^2=-2a-2c-1$

$\Rightarrow (a+1)^2+(c+1)^2+b^2=1 \Rightarrow a=c=-1, b=\pm 1 \qquad (ktm)$

$4) a+c-b=-1, a+c+b=-\left(a^2+b^2+c^2\right) \Rightarrow a^2+b^2+c^2=-2a-2c-1$

$\Rightarrow (a+1)^2+(c+1)^2+b^2=1 \Rightarrow a=c=-1, b=\pm 1 \qquad (ktm)$

Câu 4.



4.1

a) Do ABCD là hình vuông nên $\Rightarrow A_1 + MAD = 90^0 (1)$

mà $AMHN$ là hình vuông $\Rightarrow A_2 + MAD = 90^0$ (2)

Từ $(1);(2)$ suy ra $A_1 = A_2$

Do đó, $\Delta AND = \Delta AMB(c.g.c) \Rightarrow B = D_1 = 90^0$ và $BM = ND$

b) Do $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow D_2 = 90^0$

$\Rightarrow NDC = D_1 + D_2 = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow N, D, C$ thẳng hàng

Gọi O là giao điểm hai đường chéo AH, MN của hình vuông $AMHN$.

$\Rightarrow O$ là tâm đối xứng của hình vuông $AMHN$

$\Rightarrow AH$ là đường trung trực đoạn MN, mà $E, F \in AH$

$\Rightarrow EN = EM$ và $FM = FN$ (3)

$\Delta EOM = \Delta FON\left(OM = ON; N_1 = M_3\right) \Rightarrow O_1 = O_2 \Rightarrow EM = FN$ (4)

Từ $(3);(4) \Rightarrow EM = NE = NF = FM \Rightarrow MEMF$ là hình thoi (5)

c) Từ (5) suy ra $FM = FN = FD + DN$

Mà $DN = MB \Rightarrow MF = DF + BM$

Gọi chu vi tam giác MCF là p và cạnh hình vuông là a

Ta có:

$P = MC + CF + MF = MC + CF + BM + DF$ (Vì $MF = DF + MB$)

$= (MC + MB) + (CF + FD) = BC + CD = a + a = 2a$

Do đó, chu vi tam giác MCF không đổi khi M thay đổi trên BC

4.2

Xét ΔABC có $BAC = 90^0, ABC = 20^0 \Rightarrow ACB = 70^0$

ΔACF có $CAF = 90^0, ACF = 30^0 \Rightarrow FC = 2.AF$

Gọi D là trung điểm của BC và G là điểm trên AB sao cho $GD \perp BC$.

Khi đó, $\Delta ABC \sim \Delta DBG \Rightarrow \dfrac{BD}{BG} = \dfrac{BA}{BC}$

$GCB = GBC = 20^0 \Rightarrow GCF = 20^0$

Do đó CG và BE lần lượt là tia phân giác của BCF và ABC nên:

$\dfrac{FC}{FG} = \dfrac{BC}{BG}; \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{AE}{EC}$

Do đó, $\dfrac{AF}{FG} = \dfrac{\frac{1}{2}FC}{FG} = \dfrac{\frac{1}{2}BC}{BG} = \dfrac{BD}{BG} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{AE}{EC} \Rightarrow \dfrac{AF}{FG} = \dfrac{AE}{EC}$

Từ đó suy ra $CG//EF$ (Định lý Talet đảo)$\Rightarrow CFE = GCF = 20^0$

Câu 5.

5.1

Ta có: $(a-1)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq 2a-1 \Rightarrow \dfrac{1}{2a-1} \geq \dfrac{1}{a^2}$

Nên $VT \geq \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} + 3$

Ta lại có: $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} \geq \dfrac{2}{ab} \geq \dfrac{8}{(a+b)^2}; \dfrac{8}{(a+b)^2} + 2 \geq \dfrac{8}{a+b} \Rightarrow \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + 2 \geq \dfrac{8}{a+b}$

Tương tự: $\dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} + 2 \geq \dfrac{8}{b+c}; \dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{a^2} + 2 \geq \dfrac{8}{c+a}$

Suy ra: $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} + 3 \geq \dfrac{4}{a+b} + \dfrac{4}{b+c} + \dfrac{4}{c+a}$

Do vậy, $\dfrac{1}{2a-1} + \dfrac{1}{2b-1} + \dfrac{1}{2c-1} + 3 \geq \dfrac{4}{a+b} + \dfrac{4}{b+c} + \dfrac{4}{c+a}$

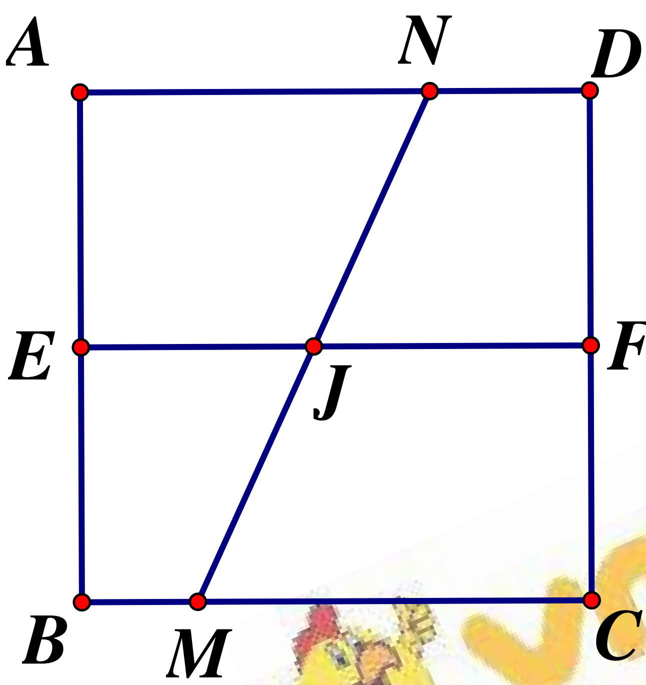
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

5.2

Các đường thẳng đã cho không thể cắt các cạnh kề nhau của hình vuông, bởi vì nếu thế chúng chia hình vuông thành một tam giác và ngũ giác (chứ không phải chia hình vuông thành hai tứ giác)

Do đó, mỗi đường thẳng (trong số chín đường thẳng) đều cắt hai cạnh đối của hình vuông và không đi qua một đỉnh nào của hình vuông cả.

Giả sử một đường thẳng cắt hai cạnh đối BC và AD tại các điểm M và N



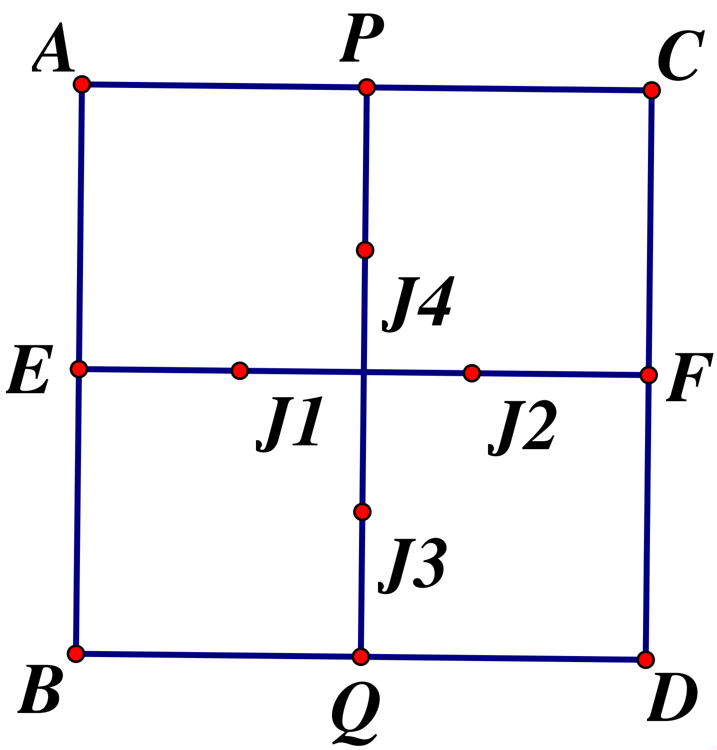
Ta có: $\frac{S_{ABMN}}{S_{MCND}}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{2}.AB.\left(BM+AN\right)}{\frac{1}{2}CD.(MC+ND)}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{EJ}{JF}=\frac{2}{3}$

(ở đây E và F là các trung điểm của AB và CD tương ứng)

Gọi E,F,P,Q tương ứng là các trung điểm của AB, CD, BC, AD. Gọi J_1,J_2,J_3,J_4 là các điểm sao cho J_1,J_2 nằm trên EF, J_3,J_4 nằm trên PQ và thỏa mãn:

$$\frac{EJ_1}{J_1F}=\frac{FJ_2}{J_2F}=\frac{PJ_3}{J_3Q}=\frac{QJ_4}{J_4P}=\frac{2}{3}$$

vndoc



Khi đó từ đó lập luận trên ta suy ra mỗi đường thẳng có tính chất thỏa mãn yêu cầu của đề bài phải đi qua một trong 4 điểm J_1, J_2, J_3, J_4 nói trên. Vì có 9 đường thẳng, nên theo nguyên lý Dirichle phải tồn tại ít nhất một trong 4 điểm J_1, J_2, J_3, J_4 sao cho nó có ít nhất ba trong 9 đường thẳng đã cho đi qua

Vậy có ít nhất 3 đường thẳng trong 9 đường thẳng đã cho đi qua một điểm.

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN TRỰC NINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC : 2017-2018
MÔN TOÁN LỚP 8
Thi ngày 04 tháng 4 năm 2018

Bài 1. (4,0 điểm)

1) Phân tích đa thức thành nhân tử:
   a) $x^3 - x^2 - 14x + 24$
   b) $x^4 + 2018x^2 + 2017x + 2018$
2) Cho $x + y = 1$ và $xy \neq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y^3-1} - \frac{y}{x^3-1} + \frac{2(x-y)}{x^2y^2+3} = 0$$

Bài 2. (3,0 điểm)

a) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$

vndoc

b) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $2x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{y^2}{4}=4$ sao cho tích $x.y$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 3. (3,0 điểm)

a) Tìm đa thức $f(x)$, biết $f(x)$ chia cho $x+2$ dư 10, chia cho $x-2$ dư 24, chia cho x^2-4 được thương là $-5x$ và còn dư

b) Cho p và $2p+1$ là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $4p+1$ là hợp số

Bài 4. (8,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB<AC)$ có AD là tia phân giác của BAC. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của D trên AB và AC, E là giao điểm của BN và DM, F là giao điểm của CM và DN.

1) Chứng minh tứ giác $AMDN$ là hình vuông và $EF\,//\,BC$.

2) Gọi H là giao điểm của BN và CM. Chứng minh ΔANB đồng dạng với ΔNFA và H là trực tâm ΔAEF

3) Gọi giao điểm của AH và DM là K, giao điểm của AH và BC là O, giao điểm của BK và AD là I. Chứng minh : $\frac{BI}{KI}+\frac{AO}{KO}+\frac{DM}{KM}>9$

Bài 5. (2,0 điểm)

a) Cho $x>0, y>0$ và m,n là hai số thực. Chứng minh rằng $\frac{m^2}{x}+\frac{n^2}{y}\ge\frac{(m+n)^2}{x+y}$

b) Cho a,b,c là ba số dương thỏa mãn $abc=1$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

1)

$a) x^3-x^2-14x+24$

$=x^3-2x^2+x^2-2x-12x+24$

$=x^2(x-2)+x(x-2)-12(x-2)$

$=(x^2+x-12)(x-2)$

$=(x-2)(x-3)(x+4)$

vndoc

$b) x^4 + 2018x^2 + 2017x + 2018$

$= x^4 + 2017x^2 + x^2 + 2017x + 2017 + 1$

$= (x^4 + x^2 + 1) + 2017(x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 2017(x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2018)$

2) Với $x + y = 1$ và $xy \neq 0$ ta có:

$$\frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} = \frac{x^4 - x - y^4 + y}{(y^3 - 1)(x^3 - 1)}$$

$$= \frac{(x^4 - y^4) - (x - y)}{xy(x^2 + x + 1)(y^2 + y + 1)}$$

$$= \frac{(x - y)[(x + y)(x^2 + y^2) - 1]}{xy(x^2y^2 + xy(x + y) + x^2 + y^2 + xy + 2)}$$

$$= \frac{(x - y)(x^2 - x + y^2 - y)}{xy(x^2y^2 + (x + y)^2 + 2)}$$

$$= \frac{(x - y)[x(x - 1) + y(y - 1)]}{xy(x^2 + y^2 + 3)} = \frac{-2(x - y)}{x^2y^2 + 3}$$

Vậy $\frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} + \frac{2(x - y)}{x^2y^2 + 3} = 0$

Bài 2.

a)

$y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 3x + 2$

$\Leftrightarrow (x + y) = (x + 1)(x + 2) (*)$

VT (*) là số chính phương, VP (*) là tích hai số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số bằng 0

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Với $x = -1 \Rightarrow y = 1$

Với $x = -2 \Rightarrow y = 2$

vndoc

b)

Điều kiện $x \neq 0$

$$2x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 4 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) + \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - xy\right) + xy = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + xy = 2$$

Vì $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \geq 0; \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 \geq 0$ với mọi $x \neq 0;$ mọi y

Do đó $xy \leq 2$ mà $x, y \in \mathbb{Z}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} x = 1; y = 2 \\ x = 2; y = 1 \\ x = -1; y = -2 \\ x = -2; y = -1 \end{array}\right.$

Bài 3.

a)

Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và dư $ax + b$

Khi đó $f(x) = (x^2 - 4)(-5x) + xa + b$

Theo đề ta có: $\begin{cases} f(2) = 24 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 24 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{7}{2} \\ b = 17 \end{cases}$

Do đó $f(x) = (x^2 - 4)(-5x) + \frac{7}{2}x + 17$

Vậy $f(x) = -5x^2 + \frac{47}{2}x + 17$

b) Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên có dạng $p = 3k + 1; p = 3k - 1$ với $k > 1$

+ Nếu $p = 3k + 1$ thì $2p + 1 = 6k + 3 = 3(2k + 1)$

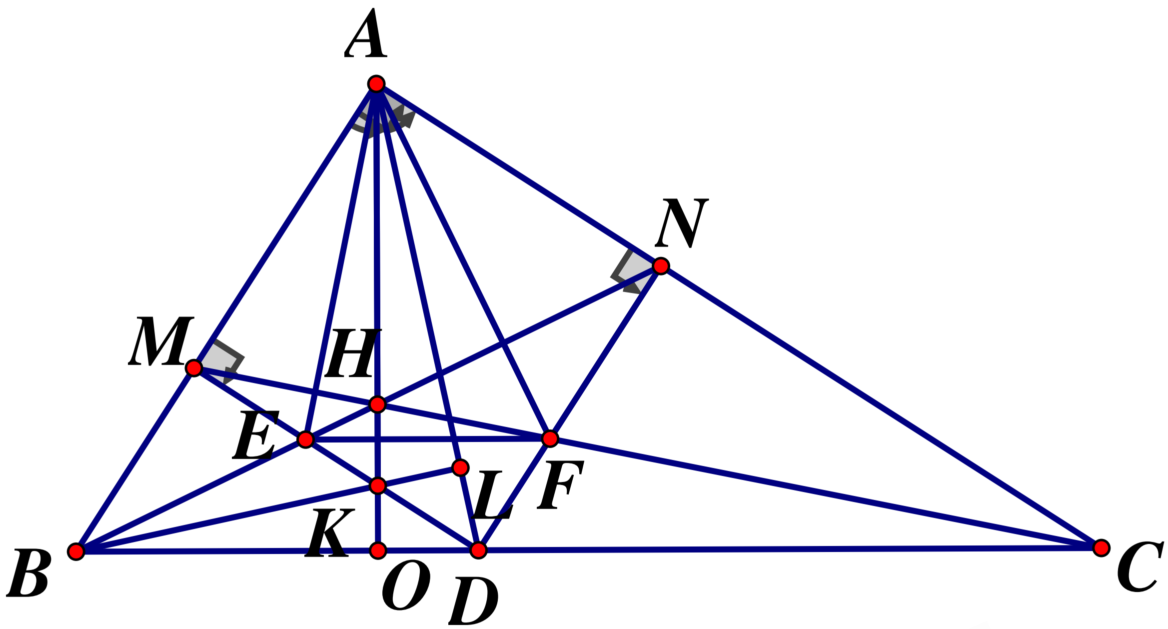
Suy ra $2p + 1$ là hợp số (vô lý)

+Nếu $p = 3k - 1, k > 1$ thì $4p + 1 = 12k - 3 = 3.(4k - 1)$

Do $k > 1$ nên $4k - 1 > 3.$ Do đó $4p + 1$ là hợp số.

Bài 4.

vndoc



1) *Chứng minh tứ giác AMDN là hình vuông

+) Chứng minh $AMD = 90^0; AND = 90^0; MAN = 90^0$

Suy ra tứ giác $AMDN$ là hình chữ nhật

+)Hình chữ nhật $AMDN$ có AD là phân giác của MAN nên tứ giác $AMDN$ là hình vuông.

***Chứng minh EF // BC**

+) Chứng minh : $\dfrac{FM}{FC} = \dfrac{DB}{DC}$ (1)

Chứng minh: $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{MB}{MA}$ (2)

Chứng minh $AM = DN \Rightarrow \dfrac{MB}{MA} = \dfrac{MB}{DN}$ (3)

Chứng minh $\dfrac{MB}{DN} = \dfrac{EM}{ED}$ (4)

Từ $(1),(2),(3),(4)$ suy ra $\dfrac{EM}{ED} = \dfrac{FM}{FC} \Rightarrow EF // BC$

2) Chứng minh $\Delta ANB \sim \Delta NFA$

Chứng minh $AN = DN$.suy ra $\dfrac{AN}{AB} = \dfrac{DN}{AB}$ (5)

Chứng minh $\dfrac{DN}{AB} = \dfrac{CN}{CA}$ (6)

Chứng minh $\dfrac{CN}{CA}=\dfrac{FN}{AM}$ (7)

Chứng minh $AM=AN$. Suy ra $\dfrac{FN}{AM}=\dfrac{FN}{AN}$ (8)

Từ (5) (6) (7) (8) suy ra $\dfrac{AN}{AB}=\dfrac{FN}{AN}\Rightarrow \Delta ANB\sim\Delta NFA\left(c.g.c\right)$

***chứng minh H là trực tâm tam giác AEF**

Vì $\Delta ANB\sim\Delta NFA$ nên $NBA=FAN$

Mà $BAF+FAN=90^0\Rightarrow NBA+BAF=90^0$

Suy ra $EH\perp AF$, Tương tự: $FH\perp AE$, suy ra H là trực tâm ΔAEF

3) Đặt $S_{AKD}=a,S_{BKD}=b,S_{AKB}=c$. Khi đó:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{AKD}}+\frac{S_{ABD}}{S_{BDK}}+\frac{S_{ABD}}{S_{AKB}}=\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$$

$$=3+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$$

Theo định lý AM-GM ta có: $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\ge 2$

Tương tự : $\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}\ge 2$; $\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\ge 2$

Suy ra $\dfrac{BI}{KI}+\dfrac{AO}{KO}+\dfrac{DM}{KM}\ge 9$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ΔABD là tam giác đều, suy ra trái với giả thiết.

Bài 5.

5a) Với $x>0,y>0$ và $m,n\in\mathbb{R}$ ta có:

$$\frac{m^2}{x}+\frac{n^2}{y}\ge\frac{\left(m+n\right)^2}{x+y} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow\left(m^2y+n^2x\right)\left(x+y\right)\ge xy\left(m+n\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left(nx-my\right)^2\ge 0 \text{ luôn đúng}$$

5b) Áp dụng bất đẳng thức $\left(1\right)$ ta có:

$$\frac{m^2}{x}+\frac{n^2}{y}+\frac{p^2}{z}\ge\frac{\left(m+n\right)^2}{x+y}+\frac{p^2}{z}\ge\frac{\left(m+n+p\right)^2}{x+y+z} \qquad (2)$$

Ta có: $\dfrac{1}{a^3(b+c)}+\dfrac{1}{b^3(c+a)}+\dfrac{1}{c^3(a+b)}=\dfrac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\dfrac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\dfrac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$

Áp dụng bất đẳng thức (2) ta có:

$$\dfrac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\dfrac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\dfrac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}\geq\dfrac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)}=\dfrac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}(do \quad abc=1)$$

Hay $\dfrac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\dfrac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\dfrac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}\geq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$

Mà $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geq 3$ nên $\dfrac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\dfrac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\dfrac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}\geq\dfrac{3}{2}$

Do đó: $\dfrac{1}{a^3(b+c)}+\dfrac{1}{b^3(c+a)}+\dfrac{1}{c^3(a+b)}\geq\dfrac{3}{2}$

PHÒNG GD&ĐT	**KỲ THI CHỌN HSG CẤP HUYỆN**
HUYỆN THỌ XUÂN	**NĂM HỌC : 2017 – 2018**
	Môn: Toán – Lớp 8
ĐỀ CHÍNH THỨC	**Ngày thi: 08 tháng 4 năm 2018**

Câu 1. (5,0 điểm)

Cho biểu thức : $P=\left(\dfrac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}+\dfrac{x^2-4y^2}{x+2y}\right):\left(\dfrac{2}{y^2x}-\dfrac{3}{x^2y}\right)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị biểu thức P khi x,y thỏa mãn ; $|x|+|y|=6; x^2+y^2=26\backslash$

c) Nếu $x;y$ là các số thực dương làm cho P xác định và thỏa mãn: $x+y=2$.Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Lúc 7 giờ sáng một xe buýt đi từ vị trí A đến vị trí B với độ dài là 60 km. Khi đi tới vị trí C cách vị trí A $39km$ thì xe bị hỏng. Xe phải dừng lại và sửa chữa mất 15 phút, sau đó xe tiếp tục đi từ C đến B với vận tốc giảm hơn so với vận tốc đi từ A tới C là $3km/h$.Tổng thời gian xe đi từ A đến B hết $\dfrac{11}{6}$ giờ (tính cả thời gian dừng lại sửa xe). Hỏi xe buýt bị hỏng lúc mấy giờ ?

b) Giải phương trình

vndoc

$$\frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+8x+20}{x+4}=\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+6x+12}{x+3}$$

Câu 3. (3,0 điểm)

a) Tìm tất cả các số nguyên n sao cho: $4n^3+n+3$ chia hết cho $2n^2+n+1$

b) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ sao cho: $3x^2-y^2-2xy-2x-2y+40=0$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên cạnh AC lấy điểm M bất kỳ, sao cho M khác A và C. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $AE=CM$

a) Gọi O là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh ΔOEM vuông cân

b) Đường thẳng qua A và song song với ME, cắt tia BM tại N. Chứng minh : $CN\perp AC$

c) Gọi H là giao điểm của OM và AN. Chứng minh rằng tích $AH.AN$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M trên cạnh AC.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho a,b,c là ba số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{3}{2}\le\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\le\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1a)

$$P=\left(\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{x^2-(2y)^2}{x+2y}\right):\left(\frac{2x-3y}{x^2y^2}\right)$$

$$=\left[\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x^2+xy+y^2}+\frac{(x-2y)(x+2y)}{x+2y}\right]:\frac{2x-3y}{x^2y^2}$$

$$=(x-y+x-2y).\frac{x^2y^2}{2x-3y}$$

$$=(2x-3y).\frac{x^2y^2}{2x-3y}=x^2y^2$$

1b)

Điều kiện : $x\ne 0; y\ne 0; x\ne\frac{3}{2}y; x\ne -2y$

Ta có:

$(|x|+|y|)^2=x^2+2|x||y|+y^2\Leftrightarrow 6^2=26+2|x||y|\Leftrightarrow |x||y|=5$

Vậy $P=5^2=25$

vndoc

1c)

Với x, y dương và thỏa mãn điều kiện $x \neq 0; y \neq 0; x \neq \frac{3}{2}; x \neq -2y$ ta có:

$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 1$ (vì $x + y = 2$). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 1$

Vậy GTLN của P bằng $1 \Leftrightarrow x = y = 1$

Câu 2.

a) Gọi vận tốc của xe buýt khi đi từ A đến C là $x\left(km/h; x > 3\right)$ thì vận tốc của xe buýt khi đi từ C đến B là $\left(x-3\right)\left(km/h\right)$

Thời gian để xe buýt đi hết quãng đường AC là $\frac{39}{x}(h)$, thời gian để xe buýt đi hết quãng đường CB là $\frac{21}{x-3}\left(h\right)$. Thời gian dừng lại sửa xe là 15 phút $= \frac{1}{4}(h)$

Theo bài ta có phương trình: $\frac{39}{x} + \frac{21}{x-3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{6}$

Giải ra được $\left[\begin{array}{l} x = 39 (tm) \\ x = \frac{36}{19} (ktm) \end{array}\right.$

Vậy khi đi từ A tới C xe buýt đi với vận tốc $39 km/h$, suy ra thời gian để xe buýt đo đi hết quãng đường AC là : $39 : 39 = 1$(giờ)

Do đó đúng 8 giờ sáng thì xe buýt bị hỏng.

b) Giải phương trình

vndoc

$$\frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+8x+20}{x+4}=\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+6x+12}{x+3} \qquad (x \neq -1;-2;-3;-4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2+1}{x+1}+\frac{(x+4)^2+4}{x+4}=\frac{(x+2)^2+2}{x+2}+\frac{(x+3)^2+3}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow x+1+\frac{1}{x+1}+x+4+\frac{4}{x+4}=x+2+\frac{2}{x+2}+x+3+\frac{3}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}+\frac{4}{x+4}=\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+4+4x+4}{x^2+5x+4}=\frac{2x+6+3x+6}{x^2+5x+6}$$

$$\Rightarrow (5x+8)(x^2+5x+6)=(5x+12)(x^2+5x+4)$$

$$\Leftrightarrow 5x^3+33x^2+70x+48=5x^3+37x^2+80x+48$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+10x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(tm) \\ x=\frac{-5}{2}(tm) \end{array}\right.$$

Câu 3.

3a)

Ta có: $\frac{4n^3+n+3}{2n^2+n+1}=2n-1+\frac{4}{2n^2+n+1}$

Vì n là số nguyên nên $2n-1$ là số nguyên. Do đó để $4n^3+n+3$ chia hết cho $2n^2+n+1$ thì $2n^2+n+1$ phải là ước số của 4

Mặt khác: $2n^2+n+1=2\left[n^2+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right]=2\left[\left(n+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}\right]>0$

Do đó: $2n^2+n+1=1$ hoặc $2n^2+n+1=2$ hoặc $2n^2+n+1=4$

Giải từng trường hợp suy ra: $\left[\begin{array}{l} n=0 \\ n=-1 \\ n=1 \end{array}\right.$

3b) Ta có:

vndoc

$3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 40 = 0$

$\Leftrightarrow 4x^2 - \left(x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1\right) = -41$

$\Leftrightarrow \left(x + y + 1\right)^2 - \left(2x\right)^2 = 41$

$\Leftrightarrow \left(3x + y + 1\right)\left(y - x + 1\right) = 41$

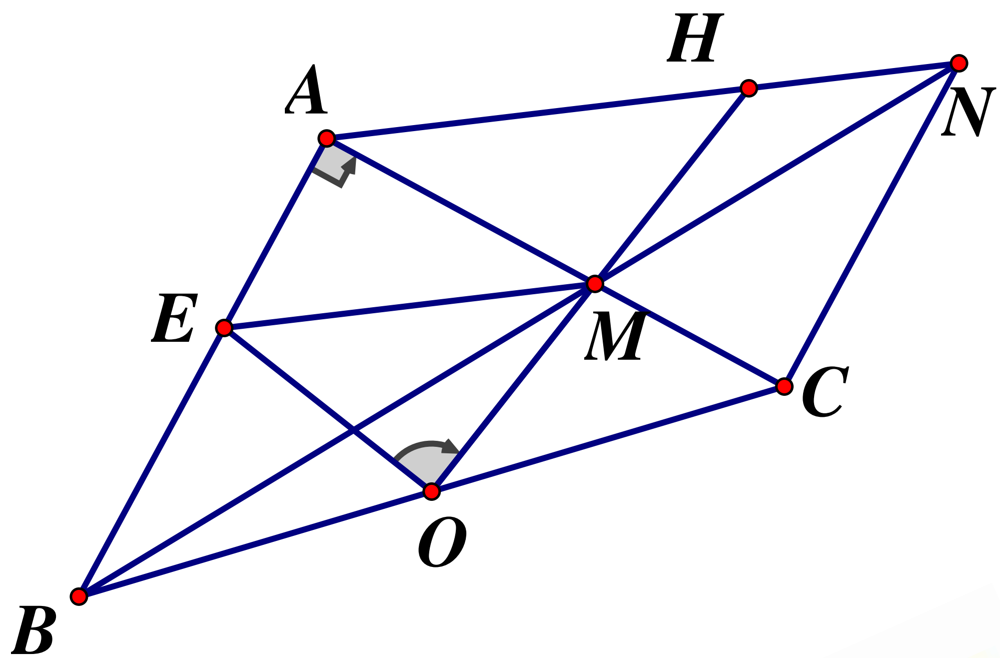
Đặt : $3x + y + 1 = a$ và $y - x + 1 = b$. Suy ra a và b là các ước của 41, có tích bằng 41. Nhận thấy 41 là số nguyên tố, từ đó ta có các trường hợp như bảng sau:

a	-41	-1	1	41
b	-1	-41	41	1
$x = \dfrac{a-b}{4}$	-10	10	-10	10
$y = \dfrac{a+3b-4}{4}$	-12	-32	30	10

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là $(-10;-12);(10;-32);(-10;30);(10;10)$

vndoc

Câu 4



4a. Vì tam giác ABC vuông cân tại A và O là trung điểm của cạnh BC nên AO là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC. Suy ra $OA = OC = OB$ và $OAB = ACO = 45^0$

Xét ΔOEA và ΔOMC có: $OA = OC; OAB = ACO = 45^0; AE = CM\ (gt)$

$\Rightarrow \Delta OEA = \Delta OMC(c.g.c) \Rightarrow OE = OM\ \&\ EOA = MOC$ (1)

Vì AO là đường trung tuyến của tam giác cân ABC nên AO cũng là đường cao

$\Rightarrow AO \perp BC \Rightarrow AOM + MOC = AOC = 90^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $AOM + AOE = EOM = 90^0$

Vì $OE = OM\ \&\ EOM = 90^0$ nên ΔOEM vuông cân tại O

4b.

Vì $ME // AN$ nên theo định lý Ta – let ta có: $\dfrac{BM}{MN} = \dfrac{BE}{EA}$ (3)

Vì tam giác ABC cân tại A nên $AB = AC$, mà $AE = CM$ nên $BE = AM$

Do đó, ở (3) ta thay BE bởi AM, thay EA bởi MC ta được:

$\dfrac{BM}{MN} = \dfrac{AM}{MC}$ (4) $\Rightarrow AB // CN$ (Theo định lý Ta let đảo)

Mà $AB \perp AC \Rightarrow CN \perp AC$

4c.

Từ $ME // AN \Rightarrow OME = OHA$ (cặp góc đồng vị)

Mà $OME = 45^0$ (vì ΔOEM vuông cân tại O) suy ra $OHA = 45^0 = ACB$

Hay $MHA = ACB$. Kết hợp với $OMC = AHM$ (đối đỉnh) (1)

$\Rightarrow \dfrac{OM}{AM} = \dfrac{MC}{MH}$, kết hợp $OMA = CMH$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta OMA \sim \Delta CMH (c.g.c) \Rightarrow OAM = MHC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AHC = MHA + MHC = 90^0$, suy ra $CH \perp AN$

Xét tam giác AHC và tam giác CAN sẽ đồng dạng theo trường hợp góc góc

$\Rightarrow \dfrac{AH}{HC} = \dfrac{AC}{AN} \Rightarrow AH.AN = AC.HC$ không đổi

Câu 5

Chứng minh $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$ (1)

Ta có:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) - 3$$

$$= \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{b+c+a}{c+a} + \frac{c+a+b}{a+b} - 3 = (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3$$

Đặt : $x = b+c; y = c+a; z = a+b$. Suy ra $x, y, z > 0$ và ta có:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{1}{2}(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 3$$

$$= \frac{1}{2}\left[9 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} - 2\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 2\right)\right] - 3$$

$$= \frac{1}{2}\left[9 + \frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{(x-z)^2}{xz} + \frac{(y-z)^2}{yz}\right] - 3 \geq \frac{1}{2}.9 - 3 = \frac{3}{2}$$

(Vì $\dfrac{(x-y)^2}{xy} + \dfrac{(x-z)^2}{xz} + \dfrac{(y-z)^2}{yz} \geq 0$)

Vậy $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Chứng minh : $\dfrac{a^2}{b^2+c^2} + \dfrac{b^2}{c^2+a^2} + \dfrac{c^2}{a^2+b^2} \geq \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b}$ (2)

Thật vậy, do vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát , ta có thể giả sử : $a \geq b \geq c$

vndoc

Xét hiệu :

$$\left(\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\right)-\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

$$=\left(\frac{a^2}{b^2+c^2}-\frac{a}{b+c}\right)+\left(\frac{b^2}{c^2+a^2}-\frac{b}{c+a}\right)+\left(\frac{c^2}{a^2+b^2}-\frac{c}{a+b}\right)$$

$$=\frac{\left(a^2b-ab^2\right)+\left(a^2c-ac^2\right)}{\left(b^2+c^2\right)\left(b+c\right)}+\frac{\left(b^2a-ba^2\right)+\left(b^2c-bc^2\right)}{\left(c^2+a^2\right)\left(c+a\right)}+\frac{\left(c^2a-ca^2\right)+\left(c^2b-cb^2\right)}{\left(a^2+b^2\right)\left(a+b\right)}$$

$$=\frac{ab(a-b)+ac(a-c)}{\left(b^2+c^2\right)(b+c)}+\frac{-ab(a-b)+bc(b-c)}{\left(c^2+a^2\right)(c+a)}+\frac{-ac(a-c)-bc(b-c)}{\left(a^2+b^2\right)(a+b)}$$

$$=ab(a-b)\left(\frac{1}{\left(b^2+c^2\right)(b+c)}-\frac{1}{\left(c^2+a^2\right)(c+a)}\right)$$

$$+bc(b-c)\left(\frac{1}{\left(c^2+a^2\right)(c+a)}-\frac{1}{\left(a^2+b^2\right)(a+b)}\right)$$

Vì giá trị của các biểu thức trong ngoặc đều không âm

Vậy $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\le\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm . Dấu $"="$ xảy ra khi $a=b=c$

PHÒNG GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
THANH OAI

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI OLYMPIC LỚP 8
Năm học : 2014-2015
Môn thi: TOÁN
Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1. (6,0 điểm)

1) Cho biểu thức $A=\left(\frac{1-x^3}{1-x}-x\right):\frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3}\ \left(x\neq\pm1\right)$

   a) Rút gọn biểu thức A

   b) Tìm giá trị của x để $A<0$

2) Giải phương trình: $x^4-30x^2+31x-30=0$

Câu 2. (4,0 điểm)

1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - xy = 6x - 5y - 8$

2) Chứng minh rằng nếu $m \neq 5$ thì $m = a^4 + 4$ không là số nguyên tố

Câu 3. (3,0 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A, biết:

$A = (x-1)^4 + (x-3)^4 + 6(x-1)^2.(x-3)^2$

Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H

a) Tính tổng $\dfrac{HD}{AD} + \dfrac{HE}{BE} + \dfrac{HF}{CF}$

b) Chứng minh : $BH.BE + CH.CF = BC^2$

c) Chứng minh: H cách đều ba cạnh tam giác DEF

d) Trên các đoạn HB, HC lấy các điểm M, N tùy ý sao cho $HM = CN$. Chứng minh đường trung trực của đoạn MN luôn đi qua một điểm cố định

Câu 5. (1,0 điểm)

Tìm số nguyên n sao cho: $2n^3 + n^2 + 7n + 1 \vdots (2n-1)$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1)

a) Với $x \neq -1; 1$ thì

$$A = \frac{1 - x^3 - x + x^2}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-x+x^2) - x(1+x)}$$

$$= \frac{(1-x)(1+x+x^2-x)}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-2x+x^2)}$$

$$= (1+x^2) : \frac{1}{1-x} = (1+x^2).(1-x)$$

vndoc

b) Với $x \neq \pm 1$ thì $A < 0 \Leftrightarrow (1+x^2)(1-x) < 0\,(1)$

Vì $1+x^2 > 0$ với mọi x nên (1) xảy ra khi và chỉ khi $1-x<0 \Leftrightarrow x>1$

2)

$$x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(x+5)(x+6) = 0\,(*)$$

Vì $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall x$

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow (x-5)(x+6) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-6 \end{array}\right.$$

Câu 2.

1. $x^2 - xy = 6x - 5y - 8 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = y(x-5)$ (2)

$\Leftrightarrow y = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x-5}$ (vì $x = 5$ không là nghiệm của (2))

$\Leftrightarrow y = (x+1) + \dfrac{3}{x+5}$

Vì x, y nguyên nên $x-5$ là ước của $3 \Leftrightarrow x - 5 \in \{-1;1;3;-3\}$ hay $x \in \{4;6;8;2\}$

x	2	6	4	8
y	0	8	0	8

Vậy nghiệm của phương trình $(x;y) = \{(2;0);(4;0);(6;8);(8;8)\}$

2)

$$m = a^4 + 4 = (a^4 + 4a^2 + 4) - (2a)^2 = (a^2 + 2 + 2a)(a^2 + 2 - 2a)$$
$$= [(a^2 + 2a + 1) + 1][(a^2 - 2a + 1) + 1] = [(a+1)^2 + 1][(a-1)^2 + 1]$$

Vì $(a+1)^2 \geq 1 \forall a, (a-1)^2 \geq 0 \forall a$ nên giá trị nhỏ nhất của thừa số thứ nhất là 1 khi $a = -1$

Giá trị nhỏ nhất của thừa số thứ hai là 1 nếu $a = 1$

vndoc

Còn các trường hợp khác là tích >1

Vậy ngoài $\left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-1 \end{array}\right.$ khi đó $m=5$ thì có thể phân tích thành tích của hai thừa số lớn hơn 1 nên m không thể là số nguyên tố.

Câu 3.

Đặt $a=x-1, b=3-x$ ta có: $a+b=2$

$$A=a^4+b^4+6(ab)^2=\left(a^2+b^2\right)^2+4a^2b^2$$

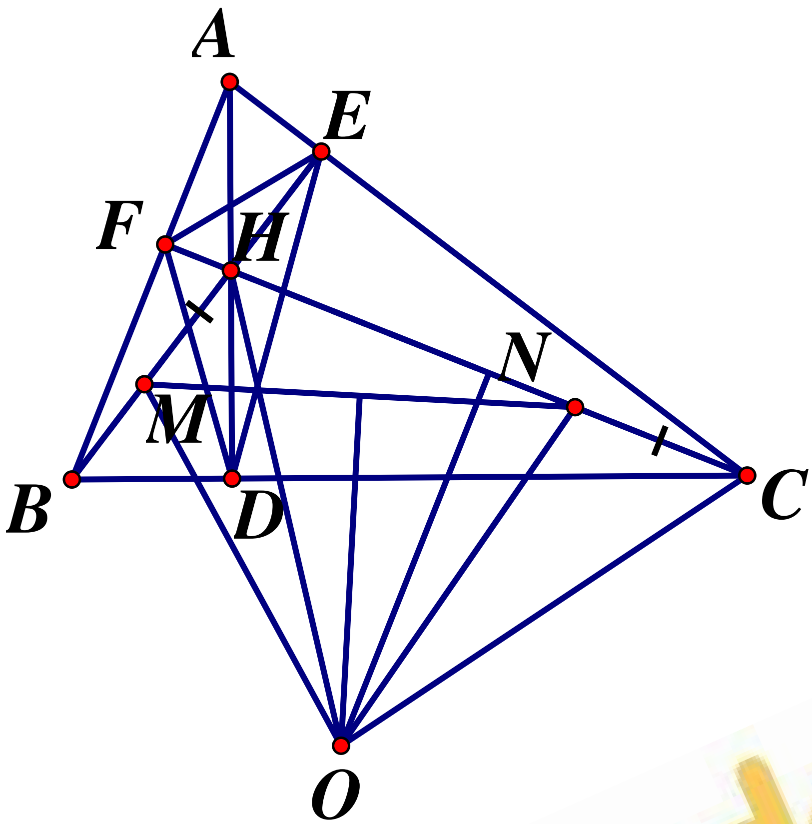
$$=\left[(a+b)^2-2ab\right]^2+4a^2b^2=(4-2ab)^2+4a^2b^2$$

$$=8a^2b^2-16ab+16=8(ab-1)^2+8\geq 8$$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow a+b=2$ và $ab=1 \Leftrightarrow a=b=1 \Rightarrow x=2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 8 tại $x=2$

Câu 4.



a) Trước hết chứng minh $\frac{HD}{AD} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$

Tương tự ta có: $\frac{HE}{BE} = \frac{S_{HCA}}{S_{ABC}}; \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$

Nên $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HBC} + S_{HCA} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = 1 \Rightarrow \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$

b) Trước hết chứng minh $\Delta BDH \sim \Delta BEC \Rightarrow BH.BE = BD.BC$

Và $\Delta CDH \sim \Delta CFB \Rightarrow CH.CF = CD.CB$

$\Rightarrow BH.BE + CH.CF = BC.(BD + CD) = BC^2 (dfcm)$

c) Chứng minh $\Delta AEF \sim \Delta ABC \Rightarrow AEF = ABC$

Và $\Delta CDE \sim \Delta CAB \Rightarrow CED = CBA \Rightarrow AEF = CED$

Mà $EB \perp AC$ nên EB là phân giác của góc DEF

Tương tự : DA, FC là phân giác của các góc EDF và DFE

Vậy H là giao điểm các đường phân giác của tam giác DEF

Nên H cách đều ba cạnh của tam giác DEF (đpcm)

d) Gọi O là giao điểm của các đường trung trực của hai đoạn MN và HC, ta có

$\Delta OMH = \Delta ONC\left(c.c.c\right) \Rightarrow OHM = OCN$ (1)

Mặt khác ta cũng có ΔOCH cân tại O nên $OHC = OCH$ (2)

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ ta có: $OHC = OCH \Rightarrow HO$ là phân giác của góc BHC

Vậy O là giao điểm của trung trực đoạn HC và phân giác của BHC nên O là điểm cố định

Hay trung trực của đoạn MN luôn đi qua một điểm cố định là O

Câu 5. $2n^3 + n^2 + 7n + 1 = \left(n^2 + n + 4\right)\left(2n - 1\right) + 5$

Để $2n^3 + n^2 + 7n + 1 \vdots 2n - 1$ thì $5 \vdots 2n - 1$ hay $2n - 1$ là Ư$\left(5\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2n - 1 = -5 \\ 2n - 1 = -1 \\ 2n - 1 = 1 \\ 2n - 1 = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -2 \\ n = 0 \\ n = 1 \\ n = 3 \end{array}\right.$$

Vậy $n \in \{-2; 0; 1; 3\}$ thì $2n^3 + n^2 + 7n + 1 \vdots 2n - 1$

PHÒNG GD & ĐT VIỆT YÊN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề thi có 01 trang

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2012-2013
MÔN THI: TOÁN LỚP 8
Ngày thi: 3/4/2013

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4+2013x^2+2012x+2013$
2. Rút gọn biểu thức sau: $A=\left(\dfrac{x^2-2x}{2x^2+8}-\dfrac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3}\right).\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right).$

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình sau:
$$\left(2x^2+x-2013\right)^2+4.\left(x^2-5x-2012\right)^2=4.\left(2x^2+x-2013\right)\left(x^2-5x-2012\right)$$
2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^3+2x^2+3x+2=y^3$

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng: $f(x)$ chia cho $x+2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x-2$ dư 24, $f(x)$ chia cho x^2-4 được thương là $-5x$ và còn dư
2. Chứng minh rằng:
$$a(b-c)(b+c-a)^2+c(a-b)(a+b-c)^2=b(a-c)(a+c-b)^2$$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho $AE=AF$. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), AH cắt DC và BC lần lượt tại hai điểm M, N

1) Chứng minh rằng tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật
2) Biết diện tích tam giác BCH gấp bốn lần diện tích tam giác AEH. Chứng minh rằng $AC=2EF$
3) Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{AD^2}=\dfrac{1}{AM^2}+\dfrac{1}{AN^2}$

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho a,b,c là ba số dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}.$$

vndoc

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1.1 Ta có:

$$x^4+2013x^2+2012x+2013$$
$$=\left(x^4-x\right)+2013x^2+2013x+2013$$
$$=x(x-1)\left(x^2+x+1\right)+2013.\left(x^2+x+1\right)$$
$$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+2013\right)$$

1.2

Điều kiện: $\begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 2 \end{cases}$

Ta có:

$$A=\left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8}-\frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3}\right)\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)$$
$$=\left(\frac{x^2-2x}{2\left(x^2+4\right)}-\frac{2x^2}{4(2-x)+x^2(2-x)}\right).\frac{x^2-x-2}{x^2}$$
$$=\left(\frac{x^2-2x}{2\left(x^2+4\right)}-\frac{2x^2}{\left(x^2+4\right)(2-x)}\right).\frac{(x+1)(x-2)}{x^2}$$
$$=\frac{x.(x-2)^2+4x^2}{2(x-2)\left(x^2+4\right)}.\frac{(x+1).(x+2)}{x^2}=\frac{x^3-4x^2+4x+4x^2}{2\left(x^2+4\right)}.\frac{x+1}{x^2}$$
$$=\frac{x\left(x^2+4\right)(x+1)}{2x^2\left(x^2+4\right)}=\frac{x+1}{2x}$$

Vậy $A=\dfrac{x+1}{2x}$ với $\begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 2 \end{cases}$

Câu 2.

2.1 Đặt $\begin{cases} a=2x^2+x-2013 \\ b=x^2-5x-2012 \end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành:

$$a^2+4b^2=4ab\Leftrightarrow (a-2b)^2=0\Leftrightarrow a-2b=0\Leftrightarrow a=2b$$

Khi đó ta có:

$$2x^2+x-2013=2.\left(x^2-5x-2012\right)\Leftrightarrow 2x^2+x-2013=2x^2-10x-4024$$

$$\Leftrightarrow 11x=-2011\Leftrightarrow x=\frac{-2011}{11}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{-2011}{11}$

2.2 Ta có: $y^3-x^3=2x^2+3x+2=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0\Rightarrow x<y$ (1)

$$\left(x+2\right)^3-y^3=4x^2+9x+6=\left(2x+\frac{9}{4}\right)^2+\frac{15}{16}>0\Rightarrow y<x+2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $x<y<x+2$ mà x,y nguyên suy ra $y=x+1$

Thay $y=x+1$ vào phương trình ban đầu và giải phương trình tìm được $x=-1\Rightarrow y=0$

Vậy $(x;y)=(-1;0)$

Câu 3.

3.1 Giả sử $f(x)$ chia cho x^2-4 được thương là $-5x$ và còn dư $ax+b$

Khi đó : $f(x)=\left(x^2-4\right).(-5x)+ax+b$

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{cases} f(2)=24 \\ f(-2)=10 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2a+b=24 \\ -2a+b=10 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=\frac{7}{2} \\ b=17 \end{cases}$$

Do đó : $f(x)=\left(x^2-4\right).(-5x)+\frac{7}{2}x+17$

Vậy đa thức $f(x)$ cần tìm có dạng: $f(x)=-5x^3+\frac{47}{2}x+17$

3.2

Ta có: $a\left(b-c\right)\left(b+c-a^2\right)+c\left(a-b\right)\left(a+b-c^2\right)-b\left(a-c\right)\left(a+c-b^2\right)=0$ (1)

vndoc

Đặt $\begin{cases} a+b-c=x \\ b+c-a=y \\ a+c-b=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{x+z}{2} \\ b=\dfrac{x+y}{2} \\ c=\dfrac{y+z}{2} \end{cases}$

Khi đó ta có:

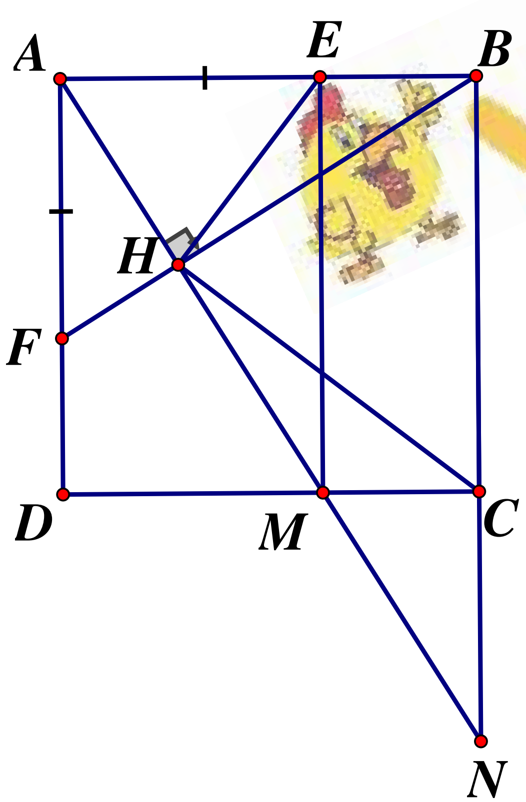
$$VT=\frac{x+z}{2}.\left(\frac{x+y}{2}-\frac{y+z}{2}\right).y^2+\frac{y+z}{2}.\left(\frac{x+z}{2}-\frac{x+y}{2}\right)x^2-\frac{1}{4}(x+y)(x-y)z^2$$

$$=\frac{x+z}{2}.\frac{x-z}{2}.y^2+\frac{y+z}{2}.\frac{z-y}{2}.x^2-\frac{1}{4}.\left(x^2-y^2\right)z^2$$

$$=\frac{1}{4}\left(x^2-z^2\right)y^2+\frac{1}{4}\left(z^2-y^2\right)x^2-\frac{1}{4}.\left(x^2-y^2\right).z^2$$

$$=\frac{1}{4}\left(x^2-y^2\right)z^2-\frac{1}{4}\left(x^2-y^2\right)z^2=0=VP \qquad (dfcm)$$

Câu 4.



vndoc

1) Ta có: $DAM = ABF$ (cùng phụ với BAH)

$AB = AD \quad (gt); BAF = ADM = 90^0$ (ABCD là hình vuông)

$\Rightarrow \Delta ADM = \Delta BAF\left(g.c.g\right)$

$\Rightarrow DM = AF$, mà $AF = AE(gt)$ nên $AE = DM$

Lại có: $AE//DM$ (vì $AB//DC$)

Suy ra tứ giác $AEMD$ là hình bình hành . Mặt khác $DAE = 90^0(gt)$

Vậy tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật

2) Ta có $\Delta ABH \sim \Delta FAH(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{BH}{AH} \text{ hay } \frac{BC}{AE} = \frac{BH}{AH}\left(AB = BC; AE = AF\right)$$

Lại có: $HAB = HBC$ (cùng phụ với ABH)

$\Rightarrow \Delta CBH \sim \Delta AEH(c.g.c)$

$$\Rightarrow \frac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = \left(\frac{BC}{AE}\right)^2, \text{mà } \frac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = 4(gt) \Rightarrow \left(\frac{BC}{AE}\right)^2 = 4 \Rightarrow BC^2 = \left(2AE\right)^2$$

$\Rightarrow BC = 2AE \Rightarrow E$ là trung điểm của AB, F là trung điểm của AD

Do đó: $BD = 2EF$ hay $AC = 2EF(dfcm)$

3) Do $AD//CN(gt)$.Áp dụng hệ quả định lý Ta let ta có:

$$\Rightarrow \frac{AD}{CN} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{AD}{AM} = \frac{CN}{MN}$$

Lại có: $MC//AB\left(gt\right)$.Áp dụng hệ quả định lý Ta let ta có:

$$\frac{MN}{AN} = \frac{MC}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{MC}{MN} \text{ hay } \frac{AD}{AN} = \frac{MC}{MN}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = \left(\frac{CN}{MN}\right)^2 + \left(\frac{CM}{MN}\right)^2 = \frac{CN^2 + CM^2}{MN^2} = \frac{MN^2}{MN^2} = 1$$

$(Pytago)$

$$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2} \qquad (dfcm)$$

Câu 5.

Trước tiên ta chứng minh BĐT: Vơi mọi $a,b,c \in \mathbb{R}$ và $x,y,z > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \qquad (*)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

Thật vậy, với $a,b\in\mathbb{R}$ và $x,y>0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y} \qquad (**)$$

$$\Leftrightarrow (a^2y+b^2x)(x+y)\ge xy(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow (bx-ay)^2\ge 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}$

Áp dụng bất đẳng thức $(**)$ ta có:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

Ta có: $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$

Áp dụng BĐT (*) ta có :

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}\ge\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)}=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)} \text{ (Vì } abc=1)$$

Hay

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Mà $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3$ nên $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}\ge\frac{3}{2}$

Vậy $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}$.(đpcm)

UBND HUYỆN KINH MÔN **PHÒNG GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO**	**ĐỀ THI OLYMPIC NĂM HỌC 2017-2018** **MÔN:TOÁN – LỚP 8** *Thời gian làm bài: 150 phút*

Câu 1. (2,0 điểm)

1) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2\left(x^4-1\right)\left(x^2+2\right)+1$
2) Biết $4a^2+b^2=5ab$ với $2a>b>0$. Tính giá trị biểu thức: $C=\frac{ab}{4a^2-b^2}$

Câu 2. (2,0 điểm)

Giải các phương trình sau:

1) $x^2-3x+2+|x-1|=0$

2) $\frac{9x}{2x^2+x+3}-\frac{x}{2x^2-x+3}=8$

Câu 3. (2,0 điểm)

1) Tìm các số nguyên x,y thỏa mãn: $x^2+2xy+7(x+y)+2y^2+10=0$
2) Cho đa thức $f(x)=x^3-3x^2+3x-4$. Với giá trị nguyên nào của x thì giá trị của đa thức $f(x)$ chia hết cho giá trị của đa thức x^2+2

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho O là trung điểm của đoạn AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB vẽ tia Ax, By cùng vuông góc với AB. Trên tia Ax lấy điểm C (khác A), qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt tia By tại D.

1) Chứng minh $AB^2=4.AC.BD$
2) Kẻ OM vuông góc CD tại M. Chứng minh $AC=CM$
3) Từ M kẻ MH vuông góc AB tại I. Chứng minh BC đi qua trung điểm MH.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho x,y,z là các số dương thỏa mãn $x+y+z=1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{16x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{z}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1.1

$x^2\left(x^4-1\right)\left(x^2+2\right)+1$

$=x^2\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)+1$

$=\left(x^4+x^2\right)\left(x^4+x^2-2\right)+1$

$=\left(x^4+x^2\right)^2-2\left(x^4+x^2\right)+1$

$=\left(x^4+x^2-1\right)^2$

1.2

$4a^2+b^2=5ab$

$\Leftrightarrow (a-b)(4a-b)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=0 \\ 4a-b=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ 4a=b \end{array}\right.$

Do $2a>b>0$ nên $4a=b$ loại

Với $a=b$ thì $C=\dfrac{ab}{4a^2-b^2}=\dfrac{a^2}{4a^2-a^2}=\dfrac{1}{3}$

Câu 2.

2.1

* Với $x\geq 1(*)$ ta có phương trình

$x^2-3x+2+x-1=0\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow (x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$ (Thỏa *)

*Với $x<1(**)$ ta có phương trình

$x^2-3x+2+1-x=0\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow (x-1)(x-3)=0$

+ $x-1=0\Leftrightarrow x=1$(không thỏa mãn điều kiện **)

$+x-3=0\Leftrightarrow x=3$ (không thỏa mãn điều kiện **)

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$

2.2

Xét $x=0$ không phải là nghiệm

Xét $x\neq 0$

$$\frac{9x}{2x^2+x+3}-\frac{x}{2x^2-x+3}=8$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2x+1+\frac{3}{x}}-\frac{1}{2x-1+\frac{3}{x}}=8$$

Đặt $2x+\frac{3}{x}=t,$ ta có phương trình:

$$\frac{9}{t+1}-\frac{1}{t-1}=8$$

$$PT \Leftrightarrow 8t^2-8t+2=0 \Leftrightarrow 2(2t-1)^2=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2x+\frac{3}{x}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-x+6=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{95}{16}=0$$

Suy ra phương trình vô nghiệm.

Câu 3.

3.1

Ta có:

$$x^2+2xy+7(x+y)+2y^2+10=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+8xy+28x+28y+8y^2+40=0$$

$$\Leftrightarrow (2x+2y+7)^2+4y^2=9(*)$$

Ta thấy $(2x+2y+7)^2 \geq 0$ nên $4y^2 \leq 9 \Leftrightarrow y^2 \leq \frac{9}{4}$ do y nguyên nên $y^2 \in \{0;1\}$

$$\Rightarrow y=\{01;-1\}$$

Với $y=0$ thay vào $(*)$ ta được: $(2x+7)^2=9$ tìm được $x \in \{-2;-5\}$

Với $y=1$ thay vào $(*)$ ta có: $(2x+9)^2=5$, không tìm được x nguyên

Với $y=-1$ thay vào $(*)$ ta có $(2x+5)^2=5$ không tìm được x nguyên

Vậy $(x;y)=\{(-2;0);(-5;0)\}$

3.2

Chia $f\left(x\right)$ cho x^2+2 được thương là $x-3$ dư $x+2$

Để $f(x)$ chia hết cho x^2+2 thì $x+2$ chia hết cho x^2+2

$\Rightarrow \left(x+2\right)\left(x-2\right)$ chia hết cho x^2+2

$\Rightarrow x^2-4$ chia hết cho x^2+2

$\Rightarrow x^2+2-6$ chia hết cho x^2+2

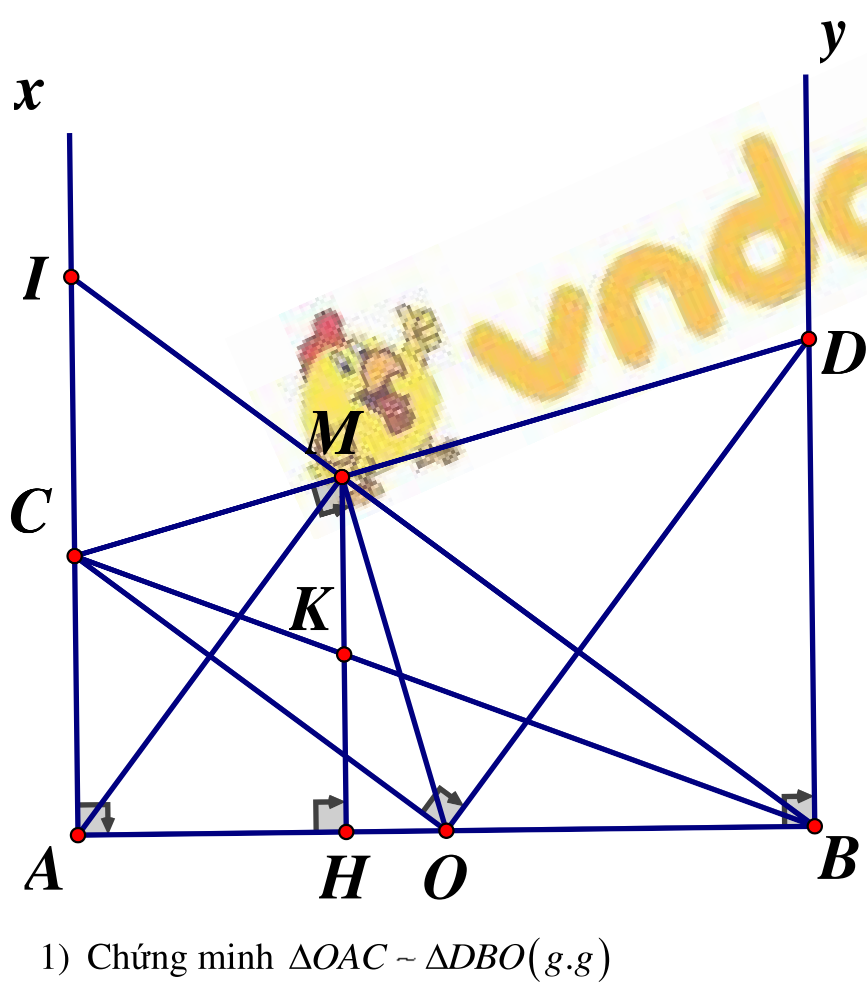
$\Rightarrow 6 \vdots \left(x^2+2\right) \Rightarrow x^2+2$ là ước của 6

Mà $x^2+2 \geq 2 \Rightarrow x^2+2 \in \left\{3;6\right\} \Rightarrow x \in \left\{\pm 1;\pm 2\right\}$

Thử lại ta thấy $x=1; x=-2$ thỏa mãn

Vậy với $x=1; x=-2$ thì $f(x)$ chia hết cho x^2+2

Câu 4.



1) Chứng minh $\Delta OAC \sim \Delta DBO\left(g.g\right)$

vndoc

$$\Rightarrow \frac{OA}{DB}=\frac{AC}{OB}\Rightarrow OA.OB=AC.BD$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{2}.\frac{AB}{2}=AC.BD\Rightarrow AB^2=4.AC.BD(dfcm)$$

2) Theo câu a ta có $\Delta OAC\sim\Delta DBO(g.g)\Rightarrow \frac{OC}{OD}=\frac{AC}{OB}$

Mà $OA=OB\Rightarrow \frac{OC}{OD}=\frac{AC}{OA}\Rightarrow \frac{OC}{AC}=\frac{OD}{OA}$

Chứng minh $\Delta OCD\sim\Delta ACO(c.g.c)\Rightarrow OCD=ACO$

Chứng minh $\Delta OAC=\Delta OMC(ch-gn)\Rightarrow AC=MC(dfcm)$

3) Ta có: $\Delta OAC=\Delta OMC\Rightarrow OA=OM;CA=CM\Rightarrow OC$ là trung trực của AM

$\Rightarrow OC\perp AM$

Mặt khác : $OA=OM=OB\Rightarrow \Delta AMB$ vuông tại M

$\Rightarrow OC//BM$ (Vì cùng vuông góc với AM) hay $OC//BI$

Chứng minh được C là trung điểm của AI

Do MH $//AI$ theo hệ quả Ta let ta có: $\frac{MK}{IC}=\frac{BK}{BC}=\frac{KH}{AC}$

Mà $IC=AC\Rightarrow MK=HK\Rightarrow BC$ đi qua trung điểm của MH (đpcm)

Câu 5.

$$P=\frac{1}{16x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{z}=(x+y+z)\left(\frac{1}{16x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{z}\right)=\left(\frac{y}{16x}+\frac{x}{4y}\right)+\left(\frac{z}{16x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{z}{4y}+\frac{y}{z}\right)+\frac{21}{16}$$

Theo BĐT Cô si ta có: $\frac{y}{16x}+\frac{x}{4y}\ge\frac{1}{4}$.Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y=2x$

Tương tự: $\frac{z}{16x}+\frac{x}{z}\ge\frac{1}{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow z=4x$

$\frac{z}{4y}+\frac{y}{z}\ge 1$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow z=2y$

$\Rightarrow P\ge\frac{49}{16}$.Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\frac{1}{7};y=\frac{2}{7};z=\frac{4}{7}$

Vậy $MinP=\frac{49}{16}$ khi với $x=\frac{1}{7};y=\frac{2}{7};z=\frac{4}{7}$

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN HOẰNG HÓA

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 8
Năm học: 2014-2015
Môn thi: TOÁN
Ngày thi: 16/03/2015

Bài 1. (4,5 điểm)

Cho biểu thức : $Q=\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{6x+3}{x^3+1}-\dfrac{2}{x^2-x+1}\right):(x+2)$

a) Tìm điều kiện xác định của Q, rút gọn Q

b) Tìm x khi $Q=\dfrac{1}{3}$

c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức Q.

Bài 2. (4,5 điểm)

a) Giải phương trình : $\dfrac{2x+3}{2x+1}-\dfrac{2x+5}{2x+7}=1-\dfrac{6x^2+9x-9}{(2x+1)(2x+7)}$

b) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: x^3-2x^2-x+2

c) Tìm các giá trị x, y nguyên dương sao cho : $x^2=y^2+2y+13$

Bài 3. (4,0 điểm)

a) Cho $abc\neq\pm1$ và $\dfrac{ab+1}{b}=\dfrac{bc+1}{c}=\dfrac{ca+1}{a}$. Chứng minh rằng $a=b=c$

b) Cho số tự nhiên $n>3$. Chứng minh rằng nếu $2^n=10a+b\,(a,b\in\mathbb{N},0<b<10)$ thì tích ab chia hết cho 6

Bài 4. (5,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng: $BD.DC=DH.DA$

b) Chứng minh rằng: $\dfrac{HD}{AD}+\dfrac{HE}{BE}+\dfrac{HF}{CF}=1.$

c) Chứng minh rằng: H là giao điểm các đường phân giác của tam giác DEF

d) Gọi M,N,P,Q,I,K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC,CA,AB, EF,FD,DE. Chứng minh rằng ba đường thẳng MQ,NI,PK đồng quy tại một điểm

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A có $AB=AC=b; BC=a$. Đường phân giác BD của tam giác ABC có độ dài bằng cạnh bên của tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{b}{(a+b)^2}$.

Bài 6. (1,0 điểm)

Cho $a,b,c>0; a+b+c=3$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{1+b^2}+\dfrac{b}{1+c^2}+\dfrac{c}{1+a^2}\geq\dfrac{3}{2}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) ĐK: $x \neq -1; x \neq -2$

$$Q = \frac{x^2 - x + 1 + 6x + 3 - 2x - 2}{x^3 + 1} \cdot \frac{1}{x+2} = \frac{(x+2)(x+1)}{(x+1)(x+2)(x^2 - x + 1)} = \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

b) $\frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 3 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

So sánh với điều kiện suy ra $x = 2$ thì $Q = \frac{1}{3}$

c) $Q = \frac{1}{x^2 - x + 1}$; Vì $1 > 0; x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$

Q đạt GTLN $\Leftrightarrow x^2 - x + 1$ đạt $GTLN \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(tm)$. Lúc đó $Q = \frac{4}{3}$

Vậy GTLN của Q là $Q = \frac{4}{3}$ khi $x = \frac{1}{2}$

Câu 2. a) ĐK: $x \neq \frac{-1}{2}; x \neq \frac{-7}{2}$

$$\frac{(2x+3)(2x+7)}{(2x+1)(2x+7)} - \frac{(2x+5)(2x+1)}{(2x+7)(2x+1)} = \frac{(2x+7)(2x+1)}{(2x+7)(2x+1)} - \frac{6x^2 + 9x - 9}{(2x+7)(2x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2 + 20x + 21 - 4x^2 - 12x - 5}{(2x+7)(2x+1)} = \frac{4x^2 + 16x + 7 - 6x^2 - 9x + 9}{(2x+7)(2x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x + 16}{(2x+7)(2x+1)} = \frac{-2x^2 + 7x + 16}{(2x+7)}$$

$$\Rightarrow 8x + 16 = -2x^2 + 7x + 16 \Leftrightarrow 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(2x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & (tm) \\ x = \frac{-1}{2} & (ktm) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 0$

b) Ta có

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x^3 - 2x^2) - (x-2) = x^2(x-2) - (x-2) = (x-2)(x-1)(x+1)$$

c) Ta có:

$$x^2 = y^2 + 2y + 13 \Leftrightarrow x^2 = (y+1)^2 + 12$$

$$\Leftrightarrow (x+y+1)(x-y-1) = 12$$

vndoc

Do $x+y+1-(x-y-1)=2y+2$ là số chẵn và $x,y\in\mathbb{N}^*$ nên $x+y+1>x-y-1$. Do đó $x+y+1$ và $x-y-1$ là hai số nguyên dương chẵn

Từ đó suy ra chỉ có một trường hợp : $x+y+1=6$ và $x-y-1=2$

$\Leftrightarrow x=4$ và $y=1$. Vậy $(x;y)=(4;1)$

Câu 3.

a) Từ $\dfrac{ab+1}{b}=\dfrac{bc+1}{c}=\dfrac{ca+1}{a}\Rightarrow a+\dfrac{1}{b}=b+\dfrac{1}{c}=c+\dfrac{1}{a}$

Do đó:

$a-b=\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b-c}{bc};b-c=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{c}=\dfrac{c-a}{ac};c-a=\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-b}{ab}$

Suy ra : $(a-b)(b-c)(c-a)=\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{a^2b^2c^2}$

$\Leftrightarrow (a-b)(b-c)(c-a)(a^2b^2c^2-1)=0$

$\Rightarrow (a-b)(b-c)(c-a)=0$ (do $abc\neq\pm1$)

Suy ra $a=b=c$

b) Ta có: $2^n=10a+b\Rightarrow b\,\vdots\,2\Rightarrow ab\,\vdots\,2$ (1)

Ta chứng minh $ab\,\vdots\,3$ (2)

Thật vậy , từ đẳng thức $2^n=10a+b\Rightarrow 2^n$ có chữ số tận cùng là b

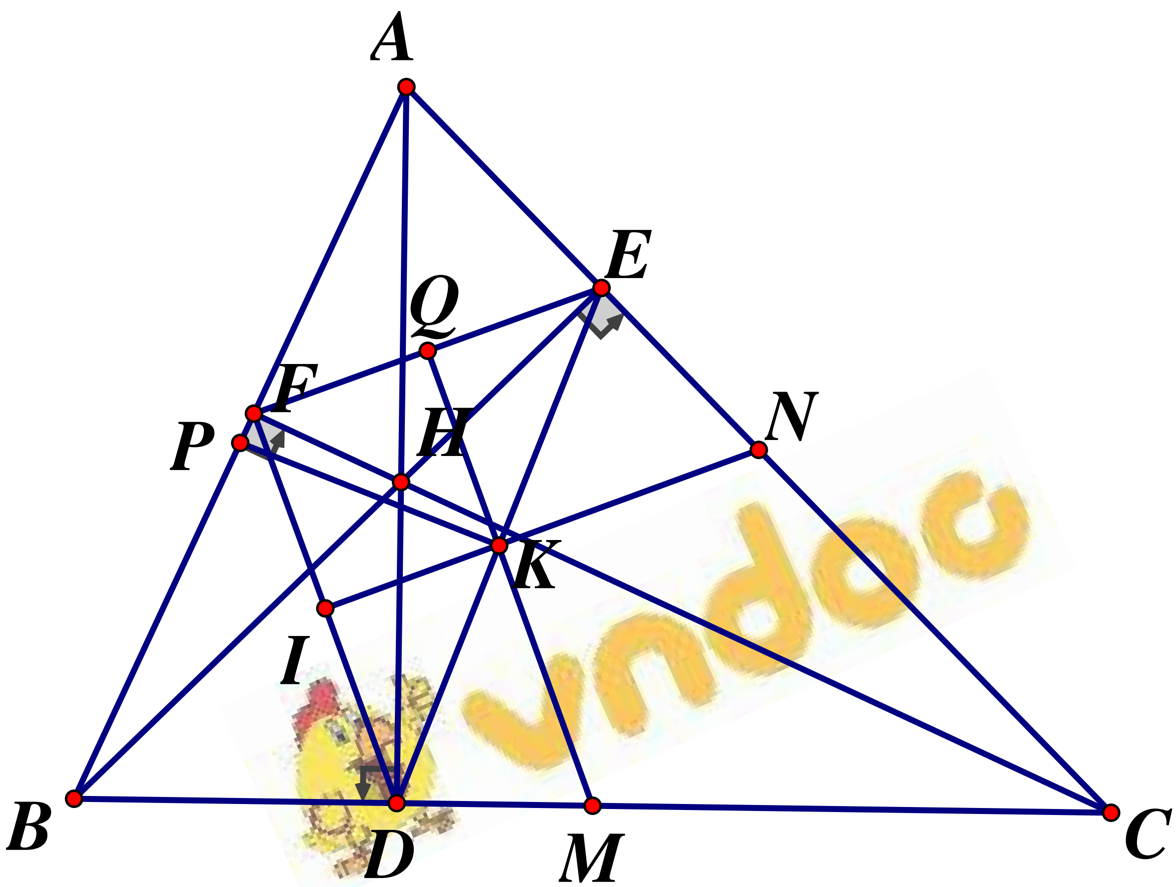
Đặt $n=4k+r\,(k,r\in\mathbb{N},0\le r\le 3)$ ta có: $2^n=16^k.2^r$

Nếu $r=0$ thì $2^n-2^r=2^r.(16^k-1)\,\vdots\,10\Rightarrow 2^n$ tận cùng là 2^r

Suy ra $b=2^r\Rightarrow 10a=2^n-2^r=2^r.(16^k-1)\,\vdots\,3\Rightarrow a\,\vdots\,3\Rightarrow ab\,\vdots\,3$

Từ (1) và (2) suy ra $ab\,\vdots\,6$

Câu 4.



a) Chỉ ra được $\Delta BDH \sim \Delta ADC(g.g) \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{DH}{DC} \Rightarrow BD.DC = DH.DA$

b) Ta có: $\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}HD.BC}{\frac{1}{2}AD.BC} = \frac{HD}{AD}$

Tương tự $\frac{HE}{BE} = \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}; \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$

Do đó: $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$

c) Chứng minh được $\Delta AEF \sim \Delta ABC(c.g.c) \Rightarrow AEF = ABC$

Tương tự: $DEC = ABC$.Do đó: $AEF = DEC$

Mà $AEF + HEF = DEC + HED = 90^0$ nên $HEF = HED$

$\Rightarrow EH$ là phân giác ngoài của góc EFD

Do đó H là giao các đường phân giác của tam giác DEF

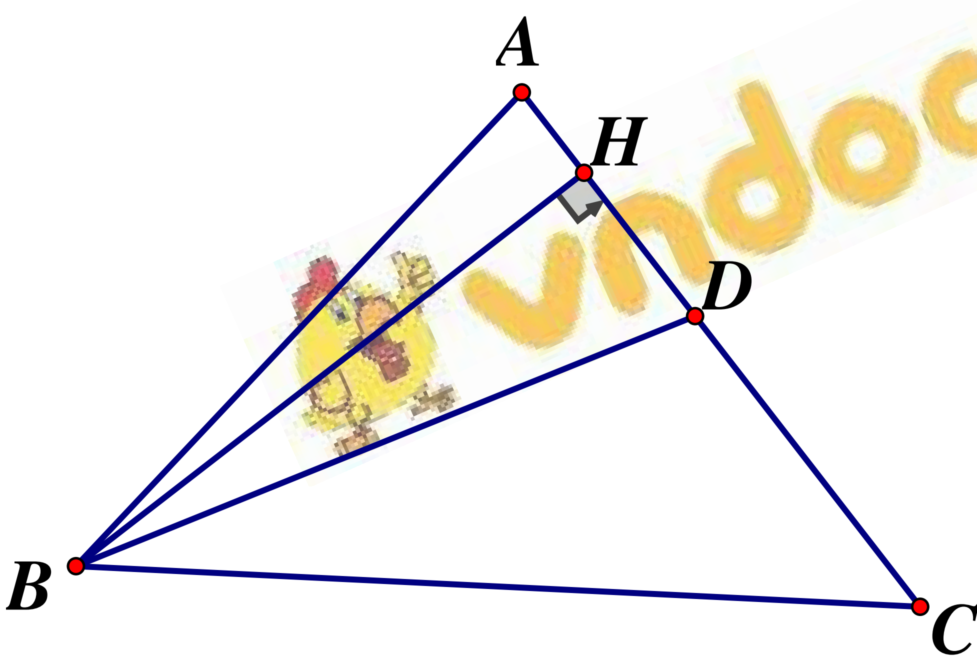
d) Do ΔBEC vuông tại E, M là trung điểm BC nên $EM = \frac{1}{2}BC$ (trung tuyến ứng với cạnh huyền), Tương tự: $FM = \frac{1}{2}BC$

Do đó: ΔEMF cân tại M, mà Q là trung điểm EF nên $MQ \perp EF$

$\Rightarrow MQ$ là đường trung trực của EF hay MQ là đường trung trực của tam giác DEF.

Hoàn toàn tương tự, chứng minh được NI và PK cũng là đường trung trực của tam giác DEF nên ba đường thẳng MQ, NI, PK đồng quy tại một điểm

Câu 5.



Vẽ BH là đường cao của tam giác ABC

Tam giác BAD cân tại B $(BA = BD)$ có BH là đường cao nên cũng là đường trung tuyến

$\Rightarrow AH = \frac{AD}{2}$

Tam giác ABC có BD là đường phân giác, ta có:

$$\frac{DA}{DC}=\frac{AB}{BC}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{DA}{b}=\frac{DC}{a}=\frac{DA+DC}{a+b}=\frac{AC}{a+b}=\frac{b}{a+b}\Rightarrow DA=\frac{b^2}{a+b}$$

Tam giác HAB vuông tại H, theo định lý Pytago ta có:

$$AB^2=BH^2+AH^2\Rightarrow BH^2=b^2-\frac{AD^2}{4}\qquad(1)$$

Tam giác HBC vuông tại H, theo định lý Pytago, ta có:

$$BC^2=BH^2+HC^2\Rightarrow BH^2=BC^2-(AC-AH)^2=a^2-\left(b-\frac{AD}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow BH^2=a^2-b^2+b.AD-\frac{AD^2}{4}\,(2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$b^2-\frac{AD^2}{4}=a^2-b^2+b.AD-\frac{AD^2}{4}\Rightarrow b^2-a^2=b.AD-b^2$$

$$\Rightarrow(b+a)(b-a)=\frac{-ab^2}{a+b}\Rightarrow\frac{a-b}{ab}=\frac{b}{(a+b)^2}\Rightarrow\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{b}{(a+b)^2}$$

Vậy bài toán dược chứng minh

Câu 6.

Do $a,b>0$ và $1+b^2\ge 2b$ với mọi b nên:

$$\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}.$$

Tương tự ta có: $\frac{b}{1+c^2}\ge b-\frac{bc}{2};\frac{c}{1+a^2}\ge c-\frac{ca}{2}$

Mà $a+b+c=3$ nên $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge 3-\frac{ab+bc+ca}{2}\qquad(1)$

Cũng từ $a+b+c=3\Rightarrow(a+b+c)^2=9$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=9$

Mà $a^2+b^2\ge 2ab;b^2+c^2\ge 2bc;c^2+a^2\ge 2ac$ nên $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

Suy ra $3(ab+bc+ca)\le 9\Leftrightarrow ab+bc+ca\le 3\ (2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\qquad dfcm$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 8

Câu 1. Tìm một số có 8 chữ số: $\overline{a_1a_2....a_8}$ thỏa mãn 2 điều kiện a và b sau:

vndoc

a) $\overline{a_1a_2a_3} = \left(\overline{a_7a_8}\right)^2$ b) $\overline{a_4a_5a_6a_7a_8} = \left(\overline{a_7a_8}\right)^3$

Câu 2. Chứng minh rằng: $\left(x^m + x^n + 1\right)$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ khi và chỉ khi $(mn - 2) \vdots 3$

Áp dụng phân tích đa thức thành nhân tử: $x^7 + x^2 + 1$

Câu 3. Giải phương trình:

$$\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + ... + \frac{1}{2005.2006.2007}\right)x = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 2006.2007$$

Câu 4. Cho hình thang $ABCD$ (đáy lớn CD). Gọi O là giao điểm của AC và BD; các đường kẻ từ A và B lần lượt song song với BC và AD cắt các đường chéo BD và AC tương ứng ở F và E. Chứng minh:

a) $EF // AB$

b) $AB^2 = EF.CD$

c) Gọi S_1, S_2, S_3 và S_4 theo thứ tự là diện tích của tam giác OAB, OCD, OAD và OBC.

Chứng minh $S_1.S_2 = S_3.S_4$

Câu 5. Tìm giá trị nhỏ nhất : $A = x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 45$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

Ta có: $\overline{a_1a_2a_3} = \left(\overline{a_7a_8}\right)^2$ (1) $\overline{a_4a_5a_6a_7a_8} = \left(\overline{a_7a_8}\right)^3$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 22 \le \overline{a_7a_8} \le 31$

vndoc

$\Rightarrow \left(\overline{a_7a_8}\right)^3 = \overline{a_4a_5a_600} + \overline{a_7a_8} \Leftrightarrow \left(\overline{a_7a_8}\right)^3 - \overline{a_7a_8} = \overline{a_4a_5a_600}$

$\Leftrightarrow \left(\overline{a_7a_8} - 1\right)\overline{a_7a_8}\left(\overline{a_7a_8} + 1\right) = 4.25.\overline{a_4a_5a_6}$

Do $\left(\overline{a_7a_8} - 1\right); \overline{a_7a_8}; \left(\overline{a_7a_8} + 1\right)$ là 3 số tự nhiên liên tiếp nên có 3 khả năng:

$a)\overline{a_7a_8} = 24 \Rightarrow \overline{a_1a_2a_3.......a_8}$ là số 57613824

b) $\overline{a_7a_8} - 1 = 24 \Rightarrow \overline{a_7a_8} = 25 \Rightarrow$ số đó là 62515625

c) $\overline{a_7a_8} = 26 \Rightarrow$ không thỏa mãn

Câu 2. Đặt $m = 3k + r$ với $0 \le r \le 2$ $\quad ; n = 3t + s$ với $0 \le s \le 2$

$\Rightarrow x^m + x^n + 1 = x^{3k+r} + x^{3t+s} + 1 = x^{3k}x^r - x^r + x^{3t}x^s - x^s + x^r + x^s + 1$

$= x^r\left(x^{3k} - 1\right) + x^s\left(x^{3t} - 1\right) + x^r + x^s + 1$

Ta thấy: $\left(x^{3k} - 1\right) \vdots \left(x^2 + x + 1\right)$ và $\left(x^{3t} - 1\right) \vdots \left(x^2 + x + 1\right)$

Vậy $\left(x^m + x^n + 1\right) \vdots \left(x^2 + x + 1\right)$

$\Leftrightarrow \left(x^r + x^s + 1\right) \vdots \left(x^2 + x + 1\right)$ với $0 \le r, s \le 2$

$\Leftrightarrow r = 2$ và $s = 1 \Rightarrow m = 3k + 2$ và $n = 3t + 1$

$r = 1$ và $s = 2 \Rightarrow m = 3k + 1$ và $n = 3t + 2$

$\Leftrightarrow mn - 2 = (3k + 2)(3t + 1) - 2 = 9kt + 3k + 6t = 3(3kt + k + 2t)$

$mn - 2 = (3k + 1)(3t + 2) - 2 = 9kt + 6k + 3t = 3(3kt + 2k + t)$

$\Rightarrow (mn - 2) \vdots 3,$ Điều phải chứng minh.

Áp dụng: $m = 7, n = 2 \Rightarrow mn - 2 = 12 \vdots 3$

$\Rightarrow \left(x^7 + x^2 + 1\right) \vdots \left(x^2 + x + 1\right)$

$\Rightarrow \left(x^7 + x^2 + 1\right) : \left(x^2 + x + 1\right) = x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$

Câu 3.

$$\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + ... + \frac{1}{2005.2006.2007}\right)x = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 2006.2007$$

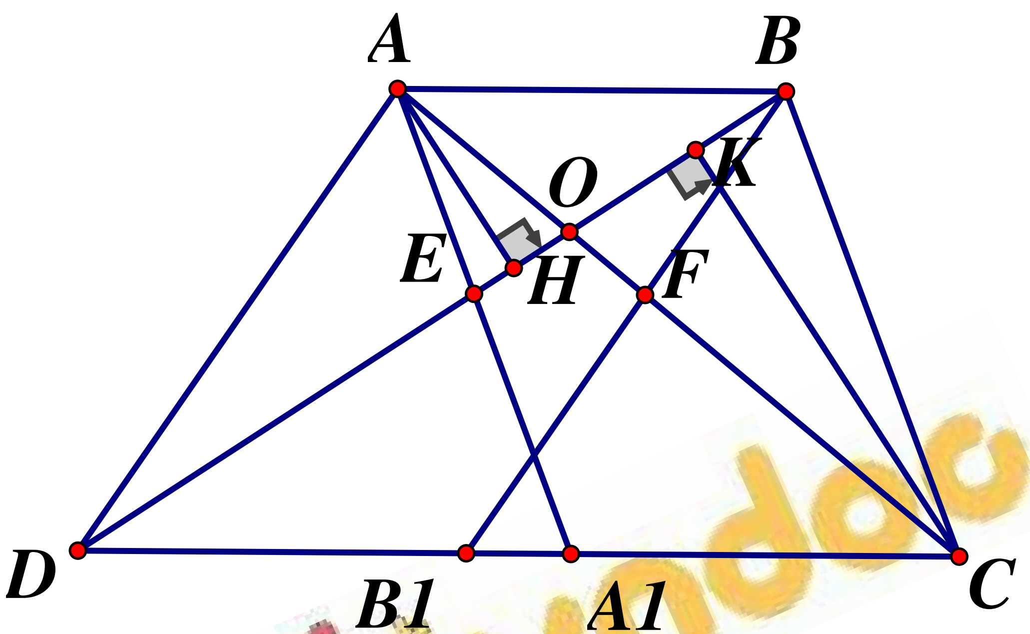
Nhân cả 2 vế với 6 ta được:

$$3.\left(\frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + ... + \frac{2}{2005.2006.2007}\right)x = 2\left[1.2.(3-0) + 2.3.(4-1) + ...2006.2007.(2008-2005)\right]$$

vndoc

$$3.\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}+......-\frac{1}{2006.2007}\right)x$$
$$=2.\left(1.2.3+2.3.4-1.2.3+.....+2006.2007.2008-2005.2006.2007\right)$$
$$\Leftrightarrow 3.\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2006.2007}\right)x=2.2006.2007.2008 \Leftrightarrow x=\frac{1003.1004.669}{5.100.651}$$

Câu 4.



a) Do $AE//BC$ và $BF//AD \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{OE}{OB}=\dfrac{OA}{OC} \\ \dfrac{OF}{OA}=\dfrac{OB}{OD} \end{cases}$

Mặt khác $AB//CD$ ta lại có: $\dfrac{OA}{OC}=\dfrac{OB}{OD}$ nên $\dfrac{OE}{OB}=\dfrac{OF}{OA} \Rightarrow EF//AB$

b) $ABCA_1$ và ABB_1D là hình bình hành $\Rightarrow A_1C=DB_1=AB$

Vì $EF//AB//CD$ nên $\dfrac{EF}{AB}=\dfrac{AB}{DC} \Rightarrow AB^2=EF.CD$

c) Ta có: $S_1=\dfrac{1}{2}AH.OB; S_2=\dfrac{1}{2}CK.OD; S_3=\dfrac{1}{2}AH.OD; S_4=\dfrac{1}{2}.OK.OD$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_4}=\frac{\frac{1}{2}.AH.OB}{\frac{1}{2}.CK.OB}=\frac{AH}{CK};\frac{S_3}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}.AH.OD}{\frac{1}{2}.CK.OD}=\frac{AH}{CK}$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_4} = \frac{S_3}{S_2} \Rightarrow S_1.S_2 = S_3.S_4$$

Câu 5.

$$A = x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 45$$
$$= x^2 + y^2 + 36 - 2xy - 12x + 12y + 5y^2 - 10y + 5 + 4$$
$$= (x - y - 6)^2 + 5(y - 1)^2 + 4 \ge 4$$

Giá trị nhỏ nhất $A = 4$ khi $\begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases}$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

MÔN TOÁN 8 NĂM HỌC 2013-2014

(Thời gian: 150 phút)

Bài 1. (3 điểm)

Rút gọn biểu thức :

$$A = \frac{1}{a^2 + a} + \frac{1}{a^2 + 3a + 2} + \frac{1}{a^2 + 5a + 6} + \frac{1}{a^2 + 7a + 12} + \frac{1}{a^2 + 9a + 20}$$

Bài 2. (4 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $(x - 2008)^4 + (x - 2010)^4 = 2$

b) $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$

Bài 3. (3 điểm) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$B = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 3}$$

Bài 4. (3 điểm) Giải bất phương trình:

$$(a + 1)x + \frac{ax - 1}{a} > \frac{1}{a} \qquad (a \ne 0)$$

Bài 5. (7 điểm)

Cho tam giác ABC (cân tại A) vẽ đường cao AH, đường cao BK

a) Tìm các cặp tam giác vuông đồng dạng ? Giải thích tại sao ?

b) Cho $AH = 10cm, BK = 12cm.$ Hãy tính độ dài các cạnh của tam giác ABC

c) Gọi I là giao điểm của AH và BK, hãy tìm điều kiện của tam giác ABC để tam giác BCI là tam giác đều ?

ĐÁP ÁN

Bài 1.

Điều kiện: $a \neq 0; a \neq -1; a \neq -2; a \neq -3; a \neq -4; a \neq -5$

$$A = \frac{1}{a^2+a} + \frac{1}{a^2+3a+2} + \frac{1}{a^2+5a+6} + \frac{1}{a^2+7a+12} + \frac{1}{a^2+9a+20}$$

$$= \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+2)(a+3)} + \frac{1}{(a+3)(a+4)} + \frac{1}{(a+4)(a+5)}$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2} + \frac{1}{a+2} - \frac{1}{a+3} + \frac{1}{a+3} - \frac{1}{a+4} + \frac{1}{a+4} - \frac{1}{a+5}$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+5} = \frac{a+4}{a(a+5)}$$

Bài 2.

a) $(x-2008)^4 + (x-2010)^4 = 2$ (I)

Đặt $y = x - 2009$ ta có:

$(I) \Leftrightarrow (y+1)^4 + (y-1)^4 = 2$

$\Leftrightarrow 2y^4 + 12y^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2y^2(y^2+6) = 0$

$\Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x - 2009 = 0 \Leftrightarrow x = 2009$

b) $|x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| = 4$ (II)

+Nếu $x < 1$ ta có $(II) \Leftrightarrow -2x + 6 = 4 \Leftrightarrow x = 1$ (ktm)

+Nếu $1 \leq x < 2$ ta có: $(II) \Leftrightarrow 0.x + 4 = 4$, Phương trình nghiệm đúng với $1 \leq x < 2$

+Nếu $2 \leq x < 3$ ta có: $(II) \Leftrightarrow -4x = -8 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn)

+Nếu $3 \leq x$ ta có: $(II) \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm của phương trình (II) là $x = 5$ hoặc $1 \leq x \leq 2$

Bài 3.

Ta có: $B = \dfrac{3x^2+6x+10}{x^2+2x+3} = 3 + \dfrac{1}{x^2+2x+3} = 3 + \dfrac{1}{(x+1)^2+2}$

Mà $3 + \dfrac{1}{(x+1)^2+2} \leq 3 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của B là $\dfrac{7}{2} \Leftrightarrow x = -1$

Bài 4. $(a+1)x+\frac{ax-1}{a}>\frac{1}{a} \qquad (a\neq 0)\ (III)$

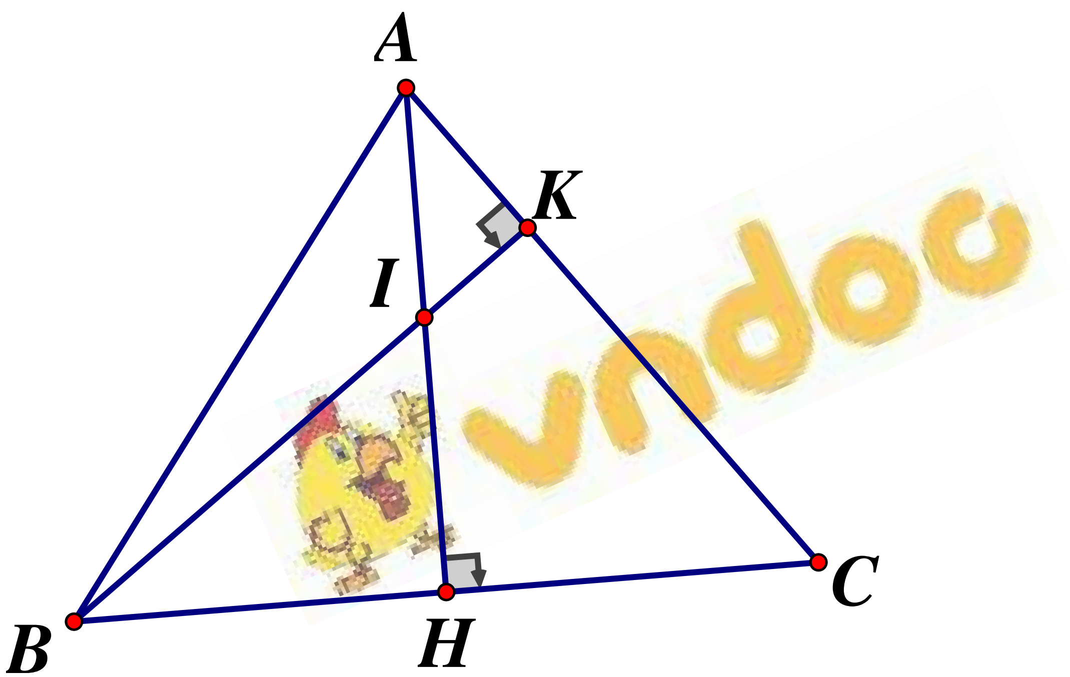
Với $a\neq 0$ ta có $(III)\Leftrightarrow (a+2)x>\frac{2}{a}(*)$

$(*)\Leftrightarrow x>\frac{2}{a(a+2)}$ nếu $a>-2$ và $a\neq 0$

$(*)\Leftrightarrow 0x>\frac{2}{-2}$ đúng với mọi x nếu $a=-2$

$(*)\Leftrightarrow x<\frac{2}{a(a+2)}$ nếu $a<-2$

Bài 5.



a) Các cặp tam giác vuông đồng dạng là :

$\Delta ABH \sim \Delta ACH$ (Vì có $BAH = CAH$)

$\Delta ABH \sim \Delta BCK$ (vì có $ABH = BCK$)

$\Delta ACH \sim \Delta BCK$ (vì cùng đồng dạng với ΔABH)

b) Từ $\Delta ABH \sim \Delta BCK \Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{AH}{BK}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$

$\Rightarrow \frac{AB}{2BH}=\frac{5}{6}\Rightarrow BH=\frac{3}{5}AB$ (H là chân đường cao, trung tuyến)

Ta lại có: $AB^2 - BH^2 = AH^2$(Định lý Pytago)

$\Rightarrow AB^2 - \left(\frac{3}{5}AB\right)^2 = 10^2 \Rightarrow AB = 12{,}5cm$

$\Rightarrow AC = AB = 12{,}5cm \quad ; BC = 15cm$

c) Chỉ ra được ΔBIC cân tại I

ΔBIC cân tại I trở thành tam giác đều khi $IBC = 60^0$

Mà $IBC = HAB \Rightarrow HAB = 60^0 \Rightarrow BAC = 120^0$.

Vậy để ΔBIC là tam giác đều thì ΔABC phải cân tại A và $A = 120^0$

PHÒNG GD&ĐT **KÌ THI KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN LỚP 8**

ĐỀ THI CHÍNH

Môn: Toán

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1.(5 điểm)

Cho x, y là hai số thay đổi thỏa mãn điều kiện x > 0, y < 0 và x + y = 1.

a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{y-x}{xy} : \left[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{2x^2y}{(x^2-y^2)^2} + \frac{x^2}{y^2-x^2}\right]$.

b) Chứng minh rằng: A < - 4.

Bài 2. (2 điểm)

Cho ba số x, y, z thỏa mãn điều kiện:

$$4x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4xy - 4xz + 2yz - 6y - 10z + 34 = 0,$$

Tính gia trị của biểu thức $T = (x-4)^{2014} + (y-4)^{2014} + (z-4)^{2014}$.

Bài 3.(2 điểm)

Cho số nguyên tố p > 3. Biết rằng có số tự nhiên n sao cho trong cách viết thập phân của số p^n có đúng 20 chữ số. Chứng minh rằng trong 20 chữ số này có ít nhất 3 chữ số giống nhau.

Bài 4.(8 điểm)

Cho hình vuông ABCD cạnh a và điểm N trên cạnh AB. Cho biết tia CN cắt tia DA tại E, tia Cx vuông góc với tia CE cắt tia AB tại F. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng EF.

a) Chứng minh CE = CF;
b) Chứng minh B, D, M thẳng hàng;
c) Chứng minh ΔEAC đồng dạng với ΔMBC;
d) Xác định vị trí điểm N trên cạnh AB sao cho tứ giác ACFE có diện tích gấp 3 lần diện tích hình vuông ABCD.

Bài 5. (3 điểm)

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $3^x - y^3 = 1$
b) Cho ba số a, b, c thỏa mãn điều kiện $0 \le a, b, c \le 2$ và $a + b + c = 3$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$.

-------------------- *Hết* --------------------

(Giám thị coi thi không giải thích gì thêm)

Họ và tên thí sinh: ....

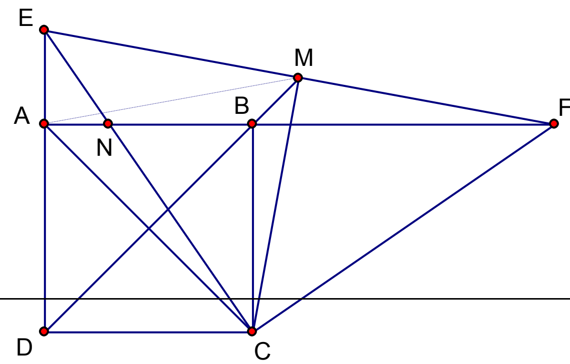
Số báo danh:.........................

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM

Bài	**Nội dung**	**Biểu điểm**

vndoc

Bài 1	a) Với $x + y = 1$, biến đổi và thu gọn A. $A=\frac{y-x}{xy}:\left[\frac{y^2}{(x-y)^2}-\frac{2x^2y}{(x^2-y^2)^2}+\frac{x^2}{y^2-x^2}\right]$ $=\frac{y-x}{xy}:\frac{y^2(x+y)^2-2x^2y-x^2(x^2-y^2)}{(x-y)^2(x+y)^2}$ $=\frac{y-x}{xy}:\frac{y^2.1-2x^2y-x^2(x-y)}{(x-y)^2.1}$ $=\frac{y-x}{xy}:\frac{y^2-x^2(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{y-x}{xy}:\frac{y^2-x^2}{(x-y)^2}=\frac{(y-x)(x-y)^2}{xy(y^2-x^2)}=\frac{(x-y)^2}{xy}$	3(điểm)
	b) $A+4=\frac{(x-y)^2}{xy}+4=\frac{(x+y)^2}{xy}=\frac{1}{xy}<0$ (vì $x > 0$; $y < 0$ và $x + y = 1$) Suy ra $A < -4$.	2(điểm)
Bài 2	$4x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4xy - 4xz + 2yz - 6y - 10z + 34 = 0$ $\Leftrightarrow [4x^2 - 4x(y + z) + (y + z)^2] + (y^2 + z^2 - 6y - 10z + 34) = 0$ $\Leftrightarrow (2x - y - z)^2 + (y - 3)^2 + (z - 5)^2 = 0$ … $\Leftrightarrow y = 3; z = 5; x = 4$ Khi đó $T = (4 - 4)^{2014} + (3 - 4)^{2014} + (5 - 4)^{2014} = 2$.	2(điểm)
Bài 3	Do p là số nguyên tố và $p > 3$ nên p không chia hết cho 3. (*) p^n có 20 chữ số. Các chữ số chỉ có thể là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 gồm 10 chữ số đôi một khác nhau. Nếu không có quá nhiều hơn 2 chữ số giống nhau thì mỗi chữ số phải có mặt đúng 2 lần trong cách viết số p^n. Như vậy tổng các chữ số của số p^n là: $2(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 90 \vdots 3$ nên $p^n \vdots 3$ Điều này mâu thuẫn (*).	2(điểm)

	Vậy trong số p^n phải có ít nhất 3 chữ số giống nhau.  	
Bài 4	a) Chứng minh được $\Delta CDE = \Delta CBF$ (g.c.g) $\Rightarrow CE = CF$.	2(điểm)
	b) Chỉ ra $AM = MC = \frac{1}{2}EF \Rightarrow$ M thuộc đường trung trực BD của đoạn AC. Vậy B, D, M thẳng hàng.	2(điểm)
	c) $\left.\begin{array}{l}\text{Chỉ ra } \angle ACE = \angle BCM \\ \text{Chỉ ra } \angle CAE = \angle CBM\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta EAC \sim \Delta MBC$ (g.g).	2(điểm)
	d) Đặt $BN = x \Rightarrow AN = a - x$. *)Tính $S_{AEFC} = S_{ACE} + S_{ECF} = \frac{1}{2}DC.AE + \frac{1}{2}CE^2$ - Tính AE: Lý luận để có $\frac{AE}{ED} = \frac{AN}{DC} \Leftrightarrow \frac{AE}{AE + AD} = \frac{AN}{DC} \Leftrightarrow \frac{AE}{AE + a} = \frac{a - x}{a} \Leftrightarrow AE.a = AE(a - x) + a(a - x)$	2(điểm)

	$\Leftrightarrow AE = \dfrac{a(a-x)}{x}$ - Tính CE^2: Lý luận để có $CE^2 = CD^2 + DE^2 = a^2 + (a + AE)^2$ $\Rightarrow CE^2 = a^2 + \left(a + \dfrac{a(a-x)}{x}\right)^2 = a^2 + \dfrac{a^4}{x^2}$ Do đó $S_{AEFC} = \dfrac{a^3(a+x)}{2x^2}$ *) Tính $S_{ABCD} = a^2$. Lý luận với $S_{AEFC} = 3S_{ABCD}$ để có $6x^2 - ax - a^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - a)(3x + a) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$ (vì a, x > 0). KL: N là trung điểm của AB thì $S_{AEFC} = 3S_{ABCD}$.	
Bài 5	a) $3^x - y^3 = 1 \Leftrightarrow 3^x = y^3 + 1$ (1) - Dễ thấy x = y = 0 là một nghiệm của (1). - Nếu x < 0 thì $3^x = \dfrac{1}{3^n}$ (n nguyên dương, n = - x) suy ra $0 < 3^x < 1$. Mà $y^3 + 1$ là số nguyên, suy ra (1) không có nghiệm nguyên. - Nếu x > 0 thì $3^x \vdots 3$ (1) $\Leftrightarrow 3^x = (y + 1)^3 - 3y(y + 1) \Rightarrow (y + 1)^3 \vdots 3$ nên $y + 1 \vdots 3$ Đặt y + 1 = 3k (k nguyên), suy ra y = 3k – 1. Thay vào (1) ta được: $3^x = (3k - 1)^3 + 1 = 9k(3k^2 - 3k + 1)$ nên $3k^2 - 3k + 1$ là ước của 3^x mà $3k^2 - 3k + 1 \not\vdots 3$ và $3k^2 - 3k + 1 = 3\left(k - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4} > 0$ nên $3k^2 - 3k + 1 = 1 \Leftrightarrow 3k(3k - 1) = 0 \Leftrightarrow k = 0$ hoặc k = 1. Với k = 0 thì y = - 1 suy ra $3^x = 0$ phương trình vô nghiệm.	1.5(điểm)

	Với $k = 1$ thì $y = 2$ suy ra $3^x = 9$ nên $x = 2$. Vậy các cặp số nguyên $(x, y) \in \{(0; 0), (2; 2)\}$.	
	b) Từ giả thiết $0 \le a, b, c \le 2$ suy ra $(2 – a)(2 – b)(2 – c) + abc \ge 0$ $\Leftrightarrow 8 – 4(a + b + c) + 2(ab + bc + ca) \ge 0$ $\Leftrightarrow 8 – 12 + 2ab + 2bc + 2ac \ge 0$ (vì $a + b + c = 3$) $\Leftrightarrow 2ab + 2bc + 2ac \ge 4$ $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \ge 4 + a^2 + b^2 + c^2$ $\Leftrightarrow (a + b + c)^2 \ge 4 + a^2 + b^2 + c^2$ $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \le 5$ (vì $a + b + c = 3$) Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (a; b; c) = (0; 1; 2)$ và các hoán vị của bộ số này. Vậy P có GTLN nhất là 5 $\Leftrightarrow (a; b; c) = (0; 1; 2)$ và các hoán vị của bộ số này.	1.5(điểm)

Chú ý: - Điểm được lấy đến 0.25.

- Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.

ĐỀ THI CHỌN HSG ĐỘI TUYỂN TOÁN 8

TRƯỜNG THCS NGUYỄN ĐĂNG ĐẠO

vndoc

Bài 1. Cho $Q=\dfrac{a^4+a^3-a^2-2a-2}{a^4+2a^3-a^2-4a-2}$

a) Rút gọn M

b) Xác định a để $Q_{\min}$

Bài 2.

a) Phân tích đa thức thành nhân tử

$A=x^4+2007x^2+2006x+2007$

b) Cho $x=\dfrac{a}{b+c},y=\dfrac{b}{a+c},z=\dfrac{c}{a+b}$. Tính $A=yz+zx+xy+2xyz$

Bài 3. Cho $x,y,z>0$. CMR: $\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{x+z}+\dfrac{z^2}{x+y}\ge\dfrac{x+y+z}{2}$

Bài 4. Tìm k để phương trình sau có nghiệm dương: $\dfrac{k(x+1)}{2x-1}=k+1$

Bài 5. Hình vuông $ABCD$ có E và F thuộc tia đối CB và DC sao cho $DF=BE$. Từ E kẻ đường song song với AF và từ F kẻ đường song song với AE. Hai đường này giao tại I. Tứ giác $AFIE$ là hình gì ?

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) $Q=\dfrac{a^4+a^3-a^2-2a-2}{a^4+2a^3-a^2-4a-2}=\dfrac{a^4+a^3+a^2-2a^2-2a-2}{a^4+2a^3+a^2-2a^2-4a-2}=\dfrac{\left(a^2-2\right)\left(a^2-a-1\right)}{\left(a^2-2\right)\left(a+1\right)^2}$ Khi

$DKXD: a\neq\pm\sqrt{2}, a\neq -1$

đó: $Q=\dfrac{a^2+a+1}{\left(a+1\right)^2}$

b) Ta có:

$$Q=\frac{a^2+a+1}{\left(a+1\right)^2}=\frac{a^2+2a+1-\left(a+1\right)+1}{a^2+2a+1}=1-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{\left(a+1\right)^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{\left(a+1\right)^2}+\frac{3}{4}$$

$$=\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{a+1}-\frac{1}{2}\right)^2\geq\frac{3}{4}$$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{1}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow a=1$

Vậy GTNN của $Q=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow a=1$

Bài 2.

a)

$A=x^4+2007x^2+2006x+2007=x^4-x+2007x^2+2007x+2007$

$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+2007\right)$

b) Ta có:

$$=\frac{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Nên $A=\dfrac{a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}=....=1$

vndoc

Bài 3. Ta có:

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y+z}{4}\ge x;\frac{x^2}{y+z}+\frac{y+z}{4}\ge x;\frac{z^2}{x+y}+\frac{x+y}{4}\ge z$$

Cộng lại ta có điều phải chứng minh

Bài 4.

Ta có phương trình tương đương:

$$k(x+1)=(k+1)(2x-1)\Leftrightarrow kx+k=2xk-k+2x-1\Leftrightarrow x=\frac{2k+1}{k+2}$$

Vậy $x>0$ thì k phải thỏa mãn 2 điều kiện sau:

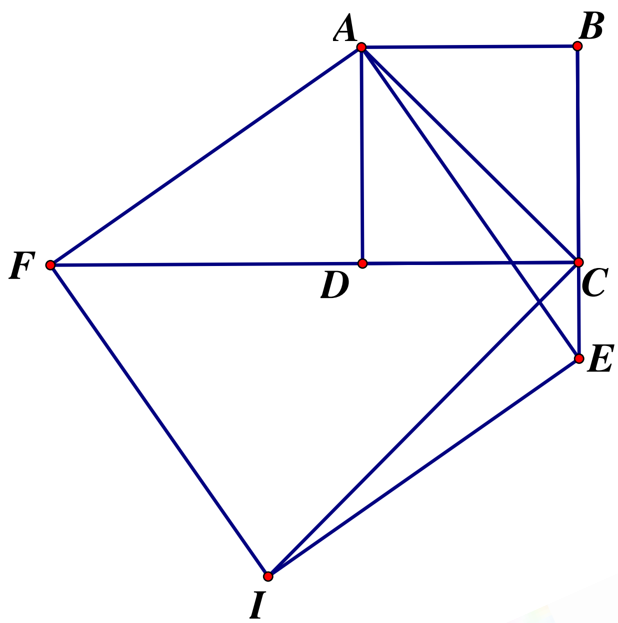
$*)\, k(x+1)=(k+1)(2x-1)\Leftrightarrow kx+k=2xk-k+2x-1$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{2k+1}{k+2}$ và $k+2>0$ hoặc $2k+1<0$ và $k+2<0$

$*)\, k\ne 0$ (vì $x\ne\dfrac{1}{2}$)

Vậy $x>0\Leftrightarrow k<-2$ hoặc $k>-\dfrac{1}{2}$ và $k\ne 0$

Bài 5.



Ta có AE song song với FI (gt); AF song song với EI (gt)

$\Rightarrow AFEI$ là hình bình hành (các cặp cạnh đối song song) (1)

Chứng minh $\Delta ADF = \Delta ABE(c.g.c) \Rightarrow FAD = BAE$

Mà $BAE + DAE = 90^0 (gt) \Rightarrow FAD + DAE = 90^0 (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AFIE$ là hình chữ nhật

Ta lại có : $AF = AE$ (vì hai tam giác bằng nhau theo cmt) nên AFIE là hình vuông.

UBND TỈNH

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 8 CẤP TỈNH

NĂM HỌC 2018 - 2019

Môn: Toán

Thời gian: 150 phút *(không kể thời gian giao đề)*

(*Đề thi gồm có 1 trang*)

Ngày thi: 12/05/2019

Câu 1 (2,0 điểm)

Cho biểu thức: $P=\left(\frac{x^4+x^2-4x+1}{x^2-1}-\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}\right).\frac{x(x+1)-(1+x)}{x^3-1}$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên ?

Câu 2 (6,0 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128.

b) Cho n là số nguyên dương, chứng minh rằng $16^n - 15n - 1$ chia hết cho 225.

c) Đa thức f(x) chia cho x + 1 dư 4, chia cho $x^2 + 1$ dư 2x + 3. Tìm phần dư khi chia f(x) cho $(x + 1)(x^2 + 1)$.

d) Chứng minh rằng tổng hai số chính phương liên tiếp cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

Câu 3 (5,0 điểm)

a) Tìm các số nguyên x; y thỏa mãn: $x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C=\frac{3x^2-2x+3}{x^2+1}$.

c) Cho ba số x, y, z đôi một khác nhau, thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ và $xyz \neq 0$.

Tính giá trị của biểu thức: $B=\frac{16(x+y)}{z}+\frac{3(y+z)}{x}-\frac{2038(z+x)}{y}$.

Câu 4 (7,0 điểm)

vndoc

4.1: Cho hình vuông ABCD. Gọi E là một điểm trên cạnh BC. Qua A kẻ tia Ax vuông góc với AE, Ax cắt CD tại F. Trung tuyến AI của tam giác AEF cắt CD ở K. Đường thẳng kẻ qua E, song song với AB cắt AI ở G. Chứng minh:

a) Tứ giác EGFK là hình thoi.

b) $AF^2 = FK.FC$

c) Chu vi tam giác EKC không đổi khi E thay đổi trên BC.

4.2: Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = c, AC = b và đường phân giác của góc A là AD = d. Chứng minh rằng: $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{\sqrt{2}}{d}$.

Câu 5 (1,0 điểm)

Cho các số dương a,b,c thỏa mãn a + b + c = 1. Chứng minh:

$$\frac{a}{1+b-a}+\frac{b}{1+c-b}+\frac{c}{1+a-c}\geq 1$$

--- Hết ---

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 1 (2,0 điểm)

Cho biểu thức: $P=\left(\frac{x^4+x^2-4x+1}{x^2-1}-\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}\right).\frac{x(x+1)-(1+x)}{x^3-1}$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên ?

Giải:

$$P=\left(\frac{x^4+x^2-4x+1}{x^2-1}-\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}\right).\frac{x(x+1)-(1+x)}{x^3-1}$$

vndoc

* ĐKXĐ: x $\neq \pm 1$

a) $P=\left(\frac{(x^4+x^2-4x+1)-(x^2-2x+1)+(x^2+2x+1)}{x^2-1}\right).\frac{x^2-1}{x^3-1}$

$=\frac{x^4+x^2+1}{x^2-1}.\frac{x^2-1}{x^3-1}$

$=\frac{(x^4-x)+(x^2+x+1)}{x^2-1}.\frac{x^2-1}{x^3-1}$

$=\frac{\mathrm{x}(\mathrm{x}-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)}{x^2-1}.\frac{x^2-1}{x^3-1}$

$=\frac{(\mathrm{x}^2-x+1)(x^2+x+1)}{x^2-1}.\frac{x^2-1}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\frac{\mathrm{x}^2-x+1}{x-1}$

b) $P=\frac{\mathrm{x}^2-x+1}{x-1}=\frac{\mathrm{x}(\mathrm{x}-1)+1}{x-1}=x+\frac{1}{x-1}$

Để P $\in$ Z thì $\frac{1}{x-1}$ $\in$ Z $\Rightarrow$ x – 1 $\in$ Ư(1) = {1; -1}

+) Với x-1 = 1 thì x = 2 (TMĐKXĐ)

+) Với x-1=-1 thì x = 0 (TMĐKXĐ)

Vậy P nguyên khi x $\in$ {2;0}.

Câu 2 (6,0 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128.

b) Cho n là số nguyên dương, chứng minh rằng 16^n – 15n – 1 chia hết cho 225.

c) Đa thức f(x) chia cho x + 1 dư 4, chia cho x^2 + 1 dư 2x + 3. Tìm phần dư khi chia f(x) cho (x + 1)(x^2 + 1).

d) Chứng minh rằng tổng hai số chính phương liên tiếp cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

Giải:

a) $x(x+4)(x+6)(x+10) + 128$

$= [x(x+10)].[(x+4)(x+6)] + 128$

$= (x^2 + 10x).(x^2 + 10x + 24) + 128$

Đặt $x^2 + 10x = a$, ta có:

$a(a + 24) + 128$

$= a^2 + 24a + 128$

$= (a+8)(a+16)$

$= (x^2 + 10x + 8)(x^2 + 10x + 16)$

$= (x + 2)(x + 8)(x + 5 + \sqrt{17})(x + 5 - \sqrt{17})$

b) Với n = 1 ta có: $16 - 15 - 1 = 0 \vdots 225$

Giả sử bài toán đúng với n = k tức là ta có:

$16^k - 15k - 1 \vdots 225$

Ta chứng minh bài toán đúng với n = k + 1

Thật vậy: $16^{k+1} - 15(k+1) - 1 = 16.16^k - 15k - 15 - 1$

$= 16^k(15 + 1) - 15k - 15 - 1$

$= (16^k - 15k - 1) + 15(15^k - 1)$

$= (16^k - 15k - 1) + 225.A(k) \vdots 225$

Vậy $16^n - 15n - 1$ chia hết cho 225 với mọi n là số nguyên dương.

c) Theo định lí Bê-du ta có: f(x) chia x+1 dư 4 $\Rightarrow f(-1)=4$

Do bậc đa thức chia (x+1)(x^2+1) là 3 nên đa thức dư có dạng $ax^2 + bx+c$

Gọi thương là Q, ta có:

$f(x) = (x+1)(x^2 +1)Q + ax^2 + bx+c$

$=(x+1) (x^2 +1)Q + ax^2 +a -a +bx+c$

$=(x+1) (x^2 +1)Q + a(x^2 +1) -a +bx+c$

$= [(x+1)Q + a](x^2 +1) + bx+c- a$

Vì f(x) chia x^2+1 dư 2x+3 $\Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ c-a=3 \end{cases}$ (1)

Mặt khác f(-1)=4 $\Rightarrow$ a -b+ c = 4 (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{2} \\ b=2 \\ c=\dfrac{9}{2} \end{cases}$

Vậy đa thức dư là: $\dfrac{3}{2}x^2+2x+\dfrac{9}{2}$.

d) Gọi hai số chính phương liên tiếp đó là k^2 và $(k+1)^2$.

Ta có: $k^2 + (k+1)^2 + k^2.(k+1)^2 = k^4 +2k^3+ 3k^2 + 2k +1 = (k^2 + k +1)^2 = [k(k + 1) +1]^2$ là số chính phương. (1)

Vì k(k + 1) là tích hai số tự nhiên liên tiếp nên k(k + 1) chẵn $\Rightarrow$ k(k + 1) +1 lẻ $\Rightarrow$ $[k(k + 1) +1]^2$ lẻ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Câu 3 (5,0 điểm)

a) Tìm các số nguyên x; y thỏa mãn: $x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = \dfrac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1}$.

c) Cho ba số x, y, z đôi một khác nhau, thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ và $xyz \neq 0$.

Tính giá trị của biểu thức: $B = \dfrac{16(x+y)}{z} + \dfrac{3(y+z)}{x} - \dfrac{2038(z+x)}{y}$.

Giải:

a) $x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy$.

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 35xy - 5x^2y^2 - 60$

$\Leftrightarrow (x - y)^2 = 5(3 - xy)(xy - 4)$ (1)

Vì $(x - y)^2 \geq 0$ nên $5(3 - xy)(xy - 4) \geq 0 \Leftrightarrow 3 \leq xy \leq 4 \Leftrightarrow xy \in \{3;4\}$

Đẳng thức (1) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 4 \\ x, y \in \mathbb{Z} \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases} \end{array}\right.$.

Vậy $(x,y) \in \{(2;2);(-2;-2)\}$

b) $C = \dfrac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1} = \dfrac{2(x^2 + 1) + (x^2 - 2x + 1)}{x^2 + 1} = 2 + \dfrac{(x-1)^2}{x^2 + 1} \geq 2$

Vậy min C = 2 $\Leftrightarrow$ x = 1

$$C = \dfrac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1} = \dfrac{4(x^2 + 1) - (x^2 + 2x + 1)}{x^2 + 1} = 4 - \dfrac{(x+1)^2}{x^2 + 1} \leq 4$$

Vậy max C = 4 $\Leftrightarrow$ x = -1

c) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ $(x \neq y \neq z; xyz \neq 0)$

$\Leftrightarrow (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3 - 3xyz = 0$

$\Leftrightarrow (x+y+z)^3 - 3z(x+y)(x+y+z) - 3xy(x+y+z) = 0$

$\Leftrightarrow (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}$ (x+y+z)[(x – y)^2 + (y – z)^2 + (z-x)^2] = 0

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ z-x=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=-z \\ y+z=-x \\ z+x=-y \end{cases} \\ x=y=z\ (loai, vi\ \ x\neq y\neq z) \end{array}\right.$$

Vậy $B=\frac{16(x+y)}{z}+\frac{3(y+z)}{x}-\frac{2038(z+x)}{y}=\frac{16(-z)}{z}+\frac{3(-x)}{x}-\frac{2038(-y)}{y}$ = (-16) + (-13) + 2038 = 2019.

Câu 4 (7,0 điểm)

4.1: Cho hình vuông ABCD. Gọi E là một điểm trên cạnh BC. Qua A kẻ tia Ax vuông góc với AE, Ax cắt CD tại F. Trung tuyến AI của tam giác AEF cắt CD ở K. Đường thẳng kẻ qua E, song song với AB cắt AI ở G. Chứng minh:

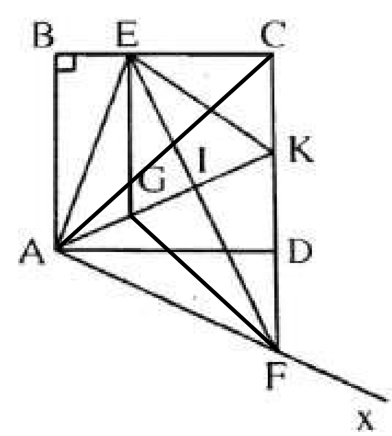
a) Tứ giác EGFK là hình thoi.

b) AF^2 = FK.FC

c) Chu vi tam giác EKC không đổi khi E thay đổi trên BC.

4.2: Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = c, AC = b và đường phân giác của góc A là AD = d. Chứng minh rằng: $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{\sqrt{2}}{d}$.

Giải:



4.1:

a) Xét ΔABE và ΔADF có:

$ABE = ADF$ (=90^0)

AB = AD (ABCD là hình vuông)

$BAE = DAF$ (cùng phụ DAE)

Do đó $\Delta ABE = \Delta ADF$ (g-c-g)

$\Rightarrow AE = AF$

$\Rightarrow \Delta AEF$ vuông cân tại A

Mà AI là trung tuyến của ΔAEF

$\Rightarrow$ AI cũng là đường cao của ΔAEF

$\Rightarrow AI \perp EF$ hay $GK \perp EF$

Xét ΔIEG và ΔIFK có:

$GIE = KIF$ (đối đỉnh)

$IE = IF$ (gt)

$IEG = IFK$ (so le trong)

Do đó $\Delta IEG = \Delta IFK$ (g-c-g)

$\Rightarrow IG = IK$

Tứ giác EGFK có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường (IE=IF(gt); IG=IK(cmt) đồng thời vuông góc với nhau ($GK \perp EF$) nên là hình thoi.

b) Xét ΔAFK và ΔCAF có:

$KAF = FCA$ $(=45^0)$

F: góc chung

Do đó $\Delta AFK \backsim \Delta CAF$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{AF}{CF} = \frac{KF}{AF} \Rightarrow AF^2 = KF.CF.$$

c) Đặt a là độ dài cạnh hình vuông ABCD $\Rightarrow$ a không đổi

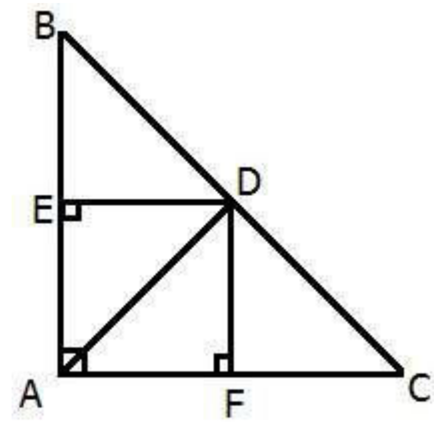
$\Delta ABE = \Delta ADF$ (theo a) $\Rightarrow BE = DF$

Ta có: EGFK là hình thoi (theo a) nên $KE = KF = KD + DF = KD + BE$

Chu vi ΔEKC là: C_{EKC} = KC + EK + EC = KC + KD + BE + CE = CD + BE = 2a không đổi.

4.2:

Kẻ DE $\perp$ AB (E $\in$ AB); DF $\perp$ AC (F $\in$ AC)



Dễ thấy AEDF là hình chữ nhật

Mà AD là tia phân giác $\widehat{EAF}$

Nên AEDF là hình vuông

Biến đổi qua Pi-ta-go ta được:

$$DE = DF = \frac{AD}{\sqrt{2}}$$

Vì AB // DF (cùng vuông góc với AC)

$\Rightarrow \Delta DFC \backsim \Delta BAC$ (tính chất đồng dạng)

$$\Rightarrow \frac{DF}{AB} = \frac{CD}{BC} (1)$$

Tương tự chứng minh $\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{CD} (2)$

Cộng hai vế tương ứng của (1) và (2) ta được: $\frac{DF}{AB} + \frac{DE}{AC} = \frac{CD+BD}{BC}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{AD}{\sqrt{2}}}{AB} + \frac{\frac{AD}{\sqrt{2}}}{AC} = \frac{BC}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{AD} \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\sqrt{2}}{d} \text{ (đpcm)}$$

Câu 5 (1,0 điểm)

Cho các số dương a,b,c thỏa mãn a + b + c = 1. Chứng minh: $\frac{a}{1+b-a} + \frac{b}{1+c-b} + \frac{c}{1+a-c} \geq 1$

Giải:

Áp dụng hệ quả bất đẳng thức Bu-nhi-a Cốp-xki, ta có:

$$\frac{a}{1+b-a}+\frac{b}{1+c-b}+\frac{c}{1+a-c}=\frac{a}{2b+c}+\frac{b}{2c+a}+\frac{c}{2a+b}=\frac{a^2}{2ab+ac}+\frac{b^2}{2bc+ab}+\frac{c^2}{2ac+bc}\geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ac)}$$

Ta chứng minh $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \geq 3ab+3bc+3ca$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \geq 0$ (luôn đúng)

Vậy $\frac{a}{1+b-a}+\frac{b}{1+c-b}+\frac{c}{1+a-c}\geq 1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ a+b+c=1 \\ a,b,c>0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẬN NGŨ HÀNH SƠN

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS
NĂM HỌC : 2013-2014

MÔN THI: TOÁN – LỚP 8

Thời gian: 150 phút (không tính giao đề)

Bài 1. (1,5 điểm)

a) Chứng minh rằng $2^{2008}+2^{2009}+2^{2010}$ chia hết cho 7
b) Chứng minh rằng không có giá trị tự nhiên n nào để giá trị của biểu thức $2n^3-3n^2+n+3$ chia hết cho giá trị của biểu thức n^2-n

Bài 2. (1,5 điểm)

Hưởng ứng ngày chủ nhật xanh – sạch – đẹp. Học sinh khối lớp 8 nhận làm vệ sinh một đoạn đường em chăm. Lớp 8/1 nhận 10 mét và 1/10 của phần còn lại, lớp 8/2 nhận 20 mét và 1/10 của phần còn lại, lớp 8/3 nhận 30 mét và 1/10 của phần còn lại … cứ chia như

vndoc

vậy cho đến lớp cuối cùng thì vừa đủ và phần đường của mỗi lớp dài bằng nhau. Hỏi khối 8 có bao nhiêu lớp và đoạn đường mỗi lớp nhận dài bao nhiêu mét ?

Bài 3. (2,0 điểm)

Cho biểu thức: $M=\left(\dfrac{2x^3+x^2-x}{x^3-1}-\dfrac{x^2+x}{x^2-1}\right).\dfrac{x^2-1}{2x^2+x-1}+\dfrac{x}{2x-1}$

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức M có nghĩa
b) Rút gọn biểu thức M
c) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức M có giá trị nguyên.

Bài 4. (2,0 điểm)

a) Cho $a+b=3$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức a^2+b^2
b) Cho $\dfrac{1}{x^2}+x^2=14\left(x\neq 0\right)$.Hãy tính giá trị của biểu thức $\dfrac{1}{x^3}+x^3$

Bài 5. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác AHB và AHC. MN cắt AB, AH, AC lần lượt tại I, E, K

a) Chứng minh : BM vuông góc với AN
b) Chứng minh : $ME.NK=MI.NE$
c) Biết diện tích của tam giác ABC là S. Tính diện tích lớn nhất của tam giác AIK theo S.

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a. $2^{2008}+2^{2009}+2^{2010}=2^{2008}.(1+2+4)=7.2^{2008}\vdots 7$

b. Chia $2n^3-3n^2+n+3$ cho n^2-n dư 3

Vì $n^2-n=n\left(n-1\right)$ là số chẵn nên $n\left(n-1\right)\notin$Ư(3).

Bài 2.

Gọi $x(m)$ là chiều dài đoạn đường cả khối 8 là vệ sinh ($x>0$)

Lớp 8/1 nhận đoạn đường dài : $10+0,1\left(x-10\right)=0,1x+9$

Sau khi lớp $8/1$nhận, đoạn đường còn lại: $x-\left(0,1x+9\right)=0,9x-9$

Lớp 8/2 nhận đoạn đường dài : $20+0,1.\left(0,9x-9-20\right)=0,09x+17,1$

Ta có phương trình : $0,1x+9=0,09x+17,1$

Giải ra : $x=810$(thích hợp)

vndoc

Khối 8 có 9 lớp

Mỗi lớp chăm đoạn đường dài 90m

Bài 3.

a.

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$

$x^2-1=(x+1)(x-1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$

$2x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \dfrac{1}{2}$

$2x^2+x-1=(x+1)(2x-1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1; x\neq \dfrac{1}{2}$

b.

$$\left(\frac{2x^3+x^2-x}{(x-1)(x^2+x+1)}-\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}\right).\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1).(2x-1)}+\frac{x}{2x-1}$$

$$=\left(\frac{2x^3+x^2-x}{(x-1)(x^2+x+1)}-\frac{x(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)\frac{x-1}{2x-1}+\frac{x}{2x-1}$$

$$=\left(\frac{2x^3+x^2-x-x^3-x^2-x}{(x-1)(x^2+x+1)}\right).\frac{x-1}{2x-1}+\frac{x}{2x-1}$$

$$=\left(\frac{x^3-2x}{x^2+x+1}\right).\frac{1}{2x-1}+\frac{x}{2x-1}=\frac{x^3-2x+x(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(2x-1)}$$

$$=\frac{2x^3+x^2-x}{(x^2+x+1).(2x-1)}=\frac{(2x-1)(x^2+x)}{(x^2+x+1).(2x-1)}=\frac{x^2+x}{x^2+x+1}$$

c)

$$M=\frac{x^2+x}{x^2+x+1}=\frac{x^2+x+1-1}{x^2+x+1}=1-\frac{1}{x^2+x+1}$$

M có giá trị nguyên $\Leftrightarrow x^2+x+1\in$ Ư(1)

$$x^2+x+1=1\Leftrightarrow x^2+x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(tm)\\ x=-1(ktm)\end{array}\right.$$

$x^2+x+1=-1\Leftrightarrow x^2+x+2=0(VN)$

Vậy $x=0$

Bài 4.

4a.

$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$ (với mọi a,b)

$a+b=3 \Leftrightarrow (a+b)^2 = 9 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 9$

$\Rightarrow 2(a^2+b^2) \geq 9 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 4,5$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $a^2 + b^2 = 4,5$

4b.

$\frac{1}{x^2} + x^2 = \left(\frac{1}{x} + x\right)^2 - 2$

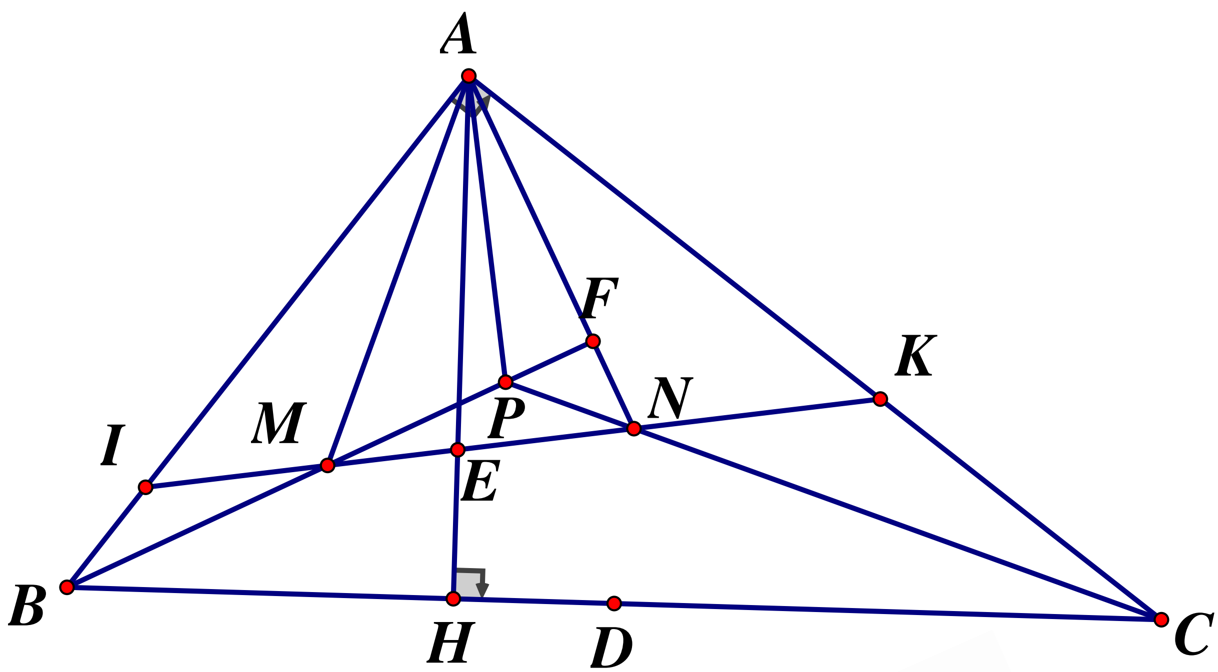
$\left(\frac{1}{x} + x\right)^2 = 16 \Rightarrow \frac{1}{x} + x = \pm 4$

$\frac{1}{x^3} + x^3 = \left(\frac{1}{x} + x\right)\left(\frac{1}{x^2} + x^2 - 1\right)$

Với $x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} + x = -4$; thì $\frac{1}{x^3} + x^3 = -4.(14-1) = -52$

Với $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} + x = 4$; thì $\frac{1}{x^3} + x^3 = 4.(14-1) = 52$

Bài 5.



a) Gọi F là giao điểm của BM và AN

$ABH = HAC$ (cùng phụ với BAH)

$ABF = CAN\left(ABF = \frac{1}{2}ABH; CAN = \frac{1}{2}BAH\right)$

$ABF + BAF = 90^0$ (vì $CAN + BAF = 90^0$)

ΔABF vuông tại F $\Rightarrow BM \perp AN$

b) Gọi P là giao điểm của BM và CN $\Rightarrow AP$ là phân giác BAC nên AP là phân giác ΔAIK

Chứng minh tương tự câu a ta có: $CN \perp AM$

P là trực tâm $\Delta AMN \Rightarrow AP \perp IK; AP$ là đường cao ΔAIK

ΔAIK vuông cân tại A $\Rightarrow AI = AK$.

Áp dụng tính chất đường phân giác vào ΔAIE và ΔAEK ta có:

$\frac{MI}{ME} = \frac{AI}{AE}; \frac{NK}{NE} = \frac{AK}{AE} \Rightarrow \frac{MI}{ME} = \frac{NK}{NE} (Do \quad AI = AK)$

$\Rightarrow ME.NK = MI.NE$

c) Gọi D là trung điểm BC; $AD = \frac{1}{2}BC$

$\Delta AMI = \Delta AMH (g.c.g) \Rightarrow AI = AH$

$$S_{AIK} = \frac{1}{2}AI.AK = \frac{1}{2}AH^2$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}AH.2AD = AH.AD$$

Vì $AH \le AD \Rightarrow S_{AIK} \le \frac{1}{2}S_{ABC} \Rightarrow S_{AIK} \le \frac{1}{2}S$

Vậy diện tích lớn nhất của ΔAIK là $\frac{1}{2}S$

PHÒNG GD & ĐT HẢI LĂNG	**ĐỀ THI KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI LỚP 8** **NĂM HỌC 2008-2009**
ĐỀ CHÍNH THỨC	Thời gian làm bài : 150 phút

Bài 1. (3 điểm)

Làm thế nào để đem được 6 lít nước từ sông về nếu trong tay chỉ có 2 cái can, một can có dung tích 4 lít, một can có dung tích 9 lít và không can nào có vạch chia dung tích ?

Bài 2. (3 điểm) Một số gồm 4 chữ số giống nhau chia cho một số gồm 3 chữ số giống nhau thì được thương là 16 và số dư là một số r nào đó

Nếu số bị chia và số chia đều bớt đi một chữ số thì thương không đổi và số dư giảm bớt 200. Tìm các số đó

Bài 3. (3 điểm)

Chứng minh rằng $n^3 - n$ chia hết cho 6 với mọi số tự nhiên n

Bài 4. (3 điểm) Tính tổng $S = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$

Bài 5. (4 điểm) Nhân ngày 1 – 6 một phân đội thiếu niên được tặng một số kẹo. Số kẹo này được chia hết và chia đều cho mọi người trong phân đội. Để đảm bảo nguyên tắc ấy phân đội trưởng đề xuất cách nhận phần kẹo của mỗi người như sau:

Bạn thứ nhất 1 cái kẹo và được lấy thêm $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại. Sau khi bạn thứ nhất đã lấy phần mình, bạn thứ hai nhận 2 cái kẹo và được lấy thêm $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại. Cứ tiếp tục như thế đến bạn cuối cùng thứ n nhận n cái kẹo và được lấy thêm $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại.

Hỏi phân đội thiếu niên nói trên có bao nhiêu đội viên và mỗi đội viên nhận bao nhiêu kẹo.

Bài 6. (4 điểm) Cho tam giác ABC cân tại A, có $A = 20^0$. Trên AB lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Tính số đo BDC?

ĐÁP ÁN

Bài 1.

Ký hiệu $(a;b)$ là trạng thái can 4 lít có a lít với $0 \le a \le 4$ và can 9 lít có b lít với $0 \le b \le 9$. Khi đó việc lấy được 6 lít nước từ sông được diễn tả qua các trạng thái sau:

$(0;0) \Rightarrow (0;9) \Rightarrow (4;5) \Rightarrow (0;5) \Rightarrow (4;1) \Rightarrow (0;1) \Rightarrow (1;9) \Rightarrow (4;6)$

Bài 2. Ta có: $\overline{aaaa} = 16\overline{bbb} + r$ $\qquad \overline{aaa} = 16\overline{bb} + (r - 200)$

Với $200 \le r < \overline{bbb}$

Trừ các đẳng thức ta có:

$$1000a = 1600b + 200 \Leftrightarrow 5a = 8b + 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}$$

Ta có các số 5555 và 333 thỏa mãn.

Bài 3.

Ta có: $n^3 - n = (n-1).n.(n+1)$ chia hết cho 3 vì tích của 3 số nguyên liên tiếp

Ta cũng có $(n-1)n(n+1)$ chia hết cho 2 vì trong 3 số liên tiếp có 1 số chẵn

Mà $\left(2,3\right)=1$. Vậy n^3-n chia hết cho 6

Bài 4.

$$S=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}$$
$$=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}=\frac{4}{1-x^4}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}=\frac{8}{1-x^8}+\frac{8}{1+x^8}=\frac{16}{1-x^{16}}$$

Bài 5.

Gọi số kẹo phân đội được tặng là x (cái) ; $x\in\mathbb{N}^*$

Số kẹo bạn thứ nhất nhận: $1+\frac{1}{11}(x-1)=\frac{x}{11}+\frac{10}{11}$ (cái)

Số kẹo còn lại sau khi bạn thứ nhất nhận $x-\left(\frac{x}{11}+\frac{10}{11}\right)=\frac{10x}{11}-\frac{10}{11}$ (cái)

Số kẹo bạn thứ hai nhận : $2+\frac{1}{11}.\left(\frac{10x}{11}-\frac{10}{11}-2\right)=\frac{10x}{121}+\frac{210}{121}$ (cái)

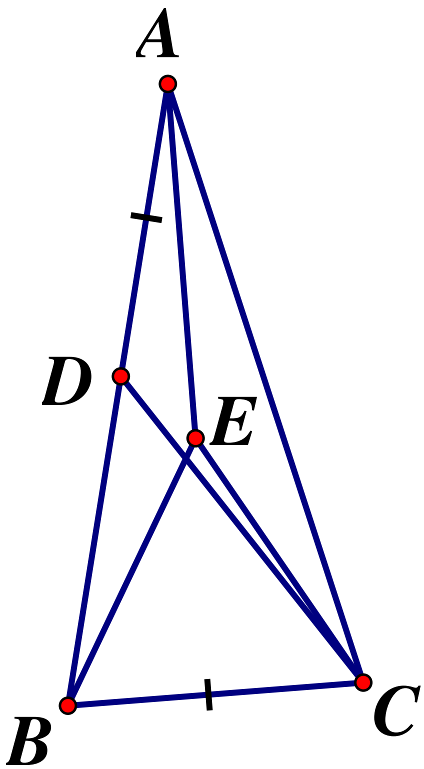
Vì số kẹo của mỗi bạn bằng nhau nên ta có phương trình:

$$\frac{x}{11}+\frac{10}{11}=\frac{10x}{121}+\frac{210}{121}\Leftrightarrow\frac{11x}{121}-\frac{10x}{121}=\frac{210}{121}-\frac{110}{121}\Leftrightarrow x=100$$

Số kẹo mỗi đội viên nhận là: $\frac{100}{11}+\frac{10}{11}=10$

Số đội viên là : $100:10=10$ (bạn)

Bài 6.



Ở miền trong tam giác ABC ta dựng tam giác đều BCE khi đó:

$\Delta ABE = \Delta ACE\left(c.c.c\right) \Rightarrow BAE = CAE = 10^0$

$ABE = 20^0$ và $AEB = 150^0$ suy ra

$\Delta ADC = \Delta BEA\left(c.g.c\right) \Rightarrow ADC = BEA = 150^0 \Rightarrow BDC = 30^0$

PHÒNG GD & ĐT BÌNH XUYÊN
TRƯỜNG THCS HƯƠNG CANH

ĐỀ THI GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI
MÔN: TOÁN 8
Năm học : 2017-2018

Câu 1.

Giải các phương trình sau:

$a) 2x^4 + x^3 - 22x^2 + 15x - 36 = 0$

$b) \dfrac{x-2}{2009} + \dfrac{x-42}{1969} + \dfrac{x-121}{1890} = 3$

Câu 2.

Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $x > y > 0$ và $x^3 + 7y = y^3 + 7x$

Câu 3.

a) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \dfrac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1}$

b) Cho $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3$

Câu 4.

Cho tam giác ABC cân tại A, có $BC = a$ không đổi. Gọi I là trung điểm của BC. Lấy $P \in AB$ và $Q \in AC$ sao cho $PIQ = ABC$. Vẽ $IK \perp AC \left(K \in AC\right)$

a) Chứng minh rằng tích $BP.CQ$ không đổi.

b) Chứng minh rằng PI là tia phân giác của góc BPQ, QI là tia phân giác của PQC

c) Gọi chu vi tam giác APQ là b, chứng minh rằng $b = 2.AK$. Tính b theo a khi $BAC = 60^0$

Câu 5.

a) Chứng minh rằng $3^{21} - 2^{24} - 6^8 - 1$ chia hết cho 1930

b) Cho a, b, c là 3 số thỏa mãn $\left(a + b + c\right)\left(ab + bc + ca\right) = abc$. Chứng minh rằng:

$a^{2009} + b^{2009} + c^{2009} = \left(a + b + c\right)^{2009}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) $PT \Leftrightarrow (x-3)\left(2x^3+7x^2-x+12\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x+4)\left(2x^2-x+3\right)=0$

Do $2x^2-x+3>0$ với mọi x nên phương trình có tập nghiệm $S=\{3;-4\}$

b) $PT \Leftrightarrow \frac{x-2}{2009}-1+\frac{x-42}{1969}-1+\frac{x-121}{1890}-1=0$

$\Leftrightarrow \frac{x-2011}{2009}+\frac{x-2011}{1969}+\frac{x-2011}{1890}=0$

$\Leftrightarrow x-2011=0 \Leftrightarrow x=2011$

Câu 2.

$PT \Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)=7(x-y) \Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2-7\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2+xy+y^2-7=0 (Vi\ x>y) \Leftrightarrow (x-y)^2=7-3xy\geq 0 \Rightarrow xy\leq 2$

Vì $x>y>0$ nên $xy=2$, do đó $x=2; y=1$

Câu 3.

a) $P=\frac{x^2-8x+7}{x^2+1}=\frac{2x^2-8x+8-x^2-1}{x^2+1}=\frac{2(x-2)^2}{x^2+1}-1\geq -1 \Rightarrow P_{\min}=-1 \Leftrightarrow x=2$

$P=\frac{x^2-8x+7}{x^2+1}=\frac{9x^2+9-8x^2-8x-2}{x^2+1}=9-\frac{2(2x+1)^2}{x^2+1}\leq 9 \Rightarrow P_{\max}=9 \Leftrightarrow x=\frac{-1}{2}$ b)

Ta có: $(a-1)^2\left(a^2+a+1\right)\geq 0 \Leftrightarrow a^4-a^3-a+1\geq 0 \quad (1)$

Tương tự cũng có:

$b^4-b^3-b+1\geq 0 \quad (2)$

$c^4-c^3-c+1\geq 0 \quad (3)$

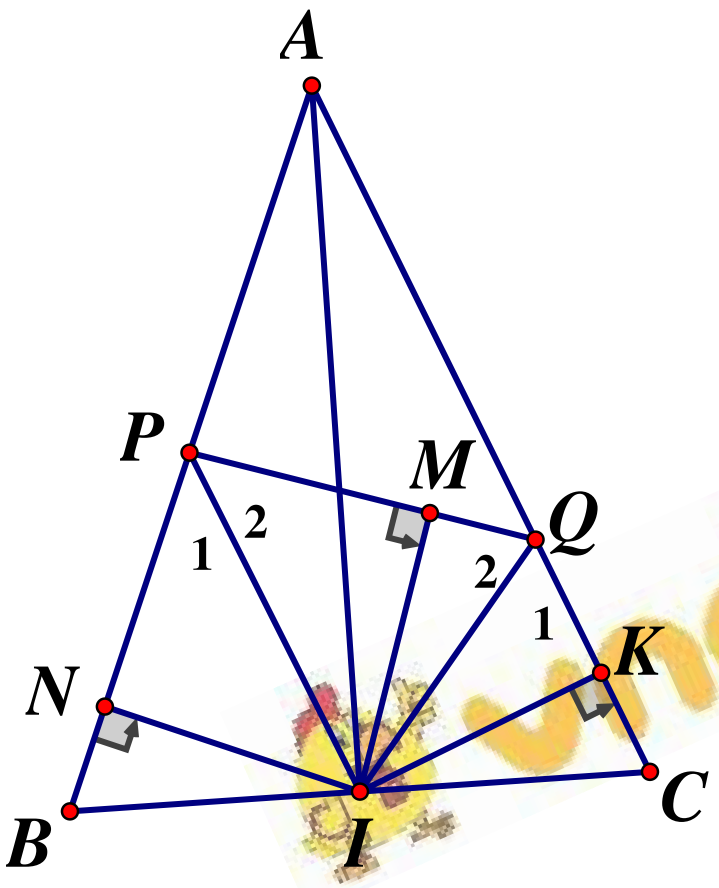
Cộng $(1);(2);(3)$ ta được:

$a^4-a^3-a+1+b^4-b^3-b+1+c^4-c^3-c+1\geq 0$

$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4-\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a+b+c\right)+3\geq 0$

$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4-\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq 0 \Leftrightarrow a^4+b^4+c^4\geq a^3+b^3+c^3 (Dfcm)$

Câu 4.



a) Theo tính chất góc ngoài tam giác thì $PIC = B + P_1$

Mặt khác , $PIC = PIQ + QIC = B + QIC.$

Suy ra $P_1 = QIC \Rightarrow \Delta BPI \sim \Delta CIQ$

$\Rightarrow \frac{BP}{BI}=\frac{CI}{CQ}\Rightarrow BP.CQ = BI.CI = \frac{a^2}{4}$ không đổi

b) Từ $\Delta BPI \sim \Delta CIQ \Rightarrow \frac{PI}{QI}=\frac{BP}{CI}\Rightarrow \frac{PI}{QI}=\frac{BP}{BI}\Rightarrow \Delta BPI \sim \Delta IPQ \Rightarrow P_1 = P_2$

Do đó PI là tia phân giác của BPQ

Chứng minh tương tự , cũng có QI là tia phân giác PQC

c) Kẻ $IM \perp PQ\left(M \in PQ\right), IN \perp AB\left(N \in AB\right)$. Vì PI, QI, AI là các tia phân giác và ΔABC cân tại A nên suy ra $IM = IN = IK, AN = AK, PM = PN, QK = QM$

Có

$b = AP + PQ + AQ = AP + \left(PM + QM\right) + AQ$

$= AP + PN + AQ + QK = AN + AK = 2.AK$

Nếu $BAC = 60^0$ thì $AB = BC = CA = a$ và $CK = \dfrac{CI}{2} = \dfrac{a}{4}$

Suy ra $b = 2.AK = 2.\left(AC - CK\right) = 2.\left(a - \dfrac{a}{4}\right) = \dfrac{3a}{2}$ (đơn vị dài)

Câu 5.

a) Đặt $a = 3^7, b = -2^8, c = \left(-1\right)^3$. Ta có:

$3^{21} - 2^{24} - 6^8 - 1 = \left(3^7\right)^3 + \left(-2^8\right)^3 + \left(-1\right)^3 - 3.3^7.\left(-2^8\right).\left(-1\right)$

$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \left(a + b + c\right)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\right)$

Mà $a + b + c = 3^7 + \left(-2^8\right) + \left(-1\right)^3 = 1930$ nên suy ra đpcm.

b) Ta có: $\left(a + b + c\right)\left(ab + bc + ca\right) - abc = \left(a + b\right)\left(b + c\right)\left(c + a\right)$ nên từ đề bài suy ra $\left(a + b\right)\left(b + c\right)\left(c + a\right) = 0$

Không mất tính tổng quát , giả sử $a + b = 0$ thì $a = -b$, suy ra $a^{2009} = -b^{2009}$, do đó: $a^{2009} + b^{2009} + c^{2009} = c^{2009} = \left(a + b + c\right)^{2009}$

PHÒNG GD & ĐT TAM DƯƠNG
ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 8
NĂM HỌC 2013-2014
Môn thi: Toán
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1.

Đa thức bậc 4 có hệ số cao nhất là 1 và thỏa mãn $f\left(1\right) = 5; f\left(2\right) = 11; f\left(3\right) = 21$

Tính $f\left(-1\right) + f\left(5\right)$

vndoc

Bài 2.

a) Tìm tất cả các số nguyên n sao cho: $n^4+2n^3+2n^2+n+7$ là số chính phương.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+xy+y^2=x^2y^2$

Bài 3. Chứng minh rằng : $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10>0$ với mọi x

Bài 4.

a) Cho tam giác ABC, gọi M, N lần lượt là trung diểm của BC, AC. Gọi O, G, H lần lượt là giao điểm ba đường trung trực, ba đường cao, ba đường trung tuyến của tam giác ABC. Tính tỉ số $GH:GO$

b) Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy $AB=2a, CD=a$. Hãy dựng điểm M trên đường thẳng CD sao cho đường thẳng AM cắt hình thang làm hai phần có diện tích bằng nhau.

Bài 5.

Cho $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$ và $x+y+z=1$. Chứng minh rằng $xy+yz+zx-2xyz\le \frac{7}{27}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

Nhận xét: $g(x)=2x^2+3$ thỏa mãn $g(1)=5; g(2)=11; g(3)=21$

$Q(x)=f(x)-g(x)$ là đa thức bậc 4 có 3 nghiệm $x=1; x=2; x=3$

Vậy $Q(x)=(x-1)(x-1)(x-3)(x-a)$ ta có:

$f(-1)=Q(-1)+2.(-1)^2+3=29+24a$

$f(5)=Q(5)+2.5^2+3=173-24a$

$\Rightarrow f(-1)+f(5)=202$

Câu 2.

a)

Giả sử $n^4+2n^3+2n^2+n+7=y^2 \qquad (y\in\mathbb{N})$

Ta có: $y^2=\left(n^2+n\right)^2+n^2+n+7$

$\Rightarrow y^2>\left(n^2+n\right)^2$

$\Rightarrow y>\left|n^2+n\right|$

$\Rightarrow y\ge\left|n^2+n\right|+1 \quad (Vi \quad y\in\mathbb{N})$

$\Rightarrow y^2\ge\left|n^2+n+1\right|$

$\Rightarrow y^2\ge\left(n^2+n+1\right)^2$

Thay $y^2=\left(n^2+n\right)^2+n^2+n+7$

$\Rightarrow n^2+n-6<0$

$\Leftrightarrow (n-2)(n+3)\le 0$

$\Leftrightarrow -3\le n\le 2$

Thử trực tiếp $n=2; n=-3$ thỏa mãn

Vậy số nguyên n cần tìm là $n\in\{2;-3\}$

b)

Thêm xy vào hai vế của phương trình ta có:

$x^2+2xy+y^2=x^2y^2+xy$

$\Leftrightarrow (x+y)^2=xy(xy+1)$

Ta thấy xy & $xy+1$ là hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương nên tồn tại một số bằng 0

TH1: $xy=0\Rightarrow x^2+y^2\Rightarrow x=y=0$

TH2: $xy+1=0$ ta có $xy=-1$ nên $(x;y)\in\{(1;-1);(-1;1)\}$

Thử lại ba cặp số $(0;0);(-1;1);(1;-1)$ đều là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 3.

Ta có: $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10=(x-1)(x-6)(x-3)(x-4)+10$

$= \left(x^2 - 7x + 6\right)\left(x^2 - 7x + 12\right) + 10$

$= \left(x^2 - 7x + 9 - 3\right)\left(x^2 - 7x + 9 + 3\right) + 10$

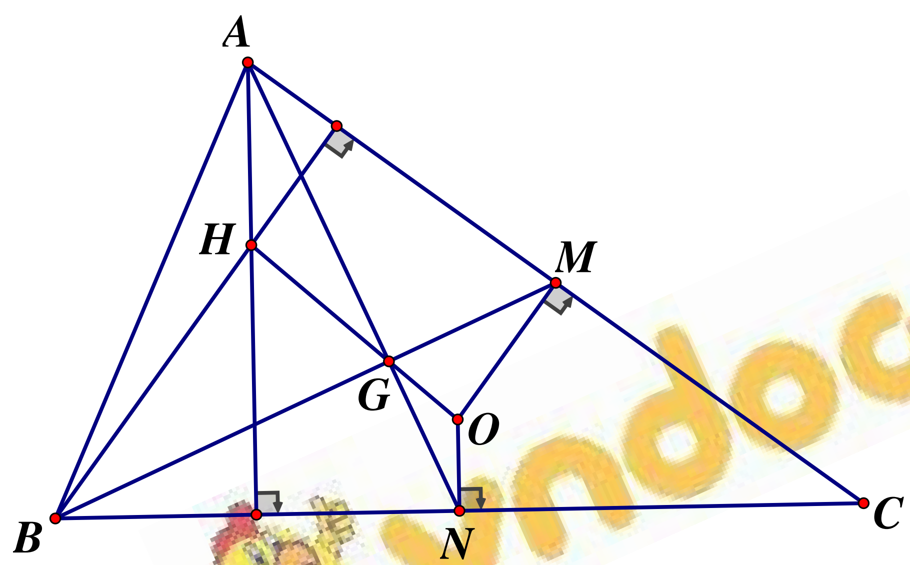
$= \left(x^2 - 7x + 9\right)^2 - 9 + 10 = \left(x^2 - 7x + 9\right)^2 + 1 > 0 \qquad (\forall x)$

Vì $\left(x^2 - 7x + 9\right)^2 \geq 0$ với mọi x

Do đó : $\left(x^2 - 7x + 9\right)^2 + 1 > 0$ với mọi x (bài toán được chứng minh).

Câu 4.

a)



Ta có: $OM // AH$ (vì cùng vuông góc với BC)

$ON // BH$ (vì cùng vuông góc với AC)

$NM // AB$ (đường trung bình của tam giác)

Xét ΔABH và ΔMNO

Có: $BAH = NMO$ (góc có cạnh tương ứng song song)

$ABH = MNO$ (góc có cạnh tương ứng song song)

$\Rightarrow \Delta ABH \sim \Delta MNO\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{NM}{BA} = \dfrac{OM}{AH} = \dfrac{1}{2}$

Xét ΔAGH và ΔMOG có:

$GAH = GMO$ (so le trong) (1)

$\dfrac{GM}{GA} = \dfrac{1}{2}$ (tính chất trọng tâm) (2)

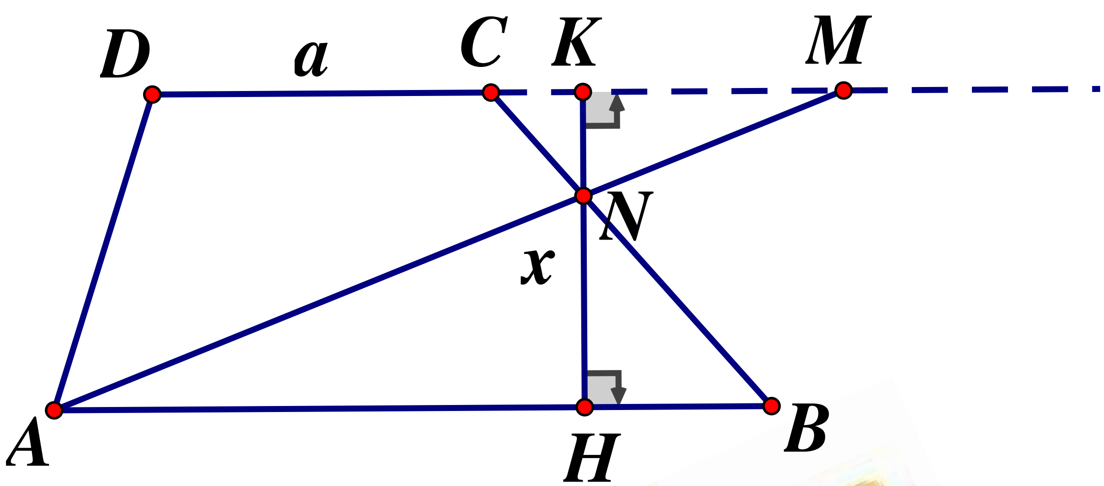
$\dfrac{OM}{AH} = \dfrac{1}{2} \qquad (cmt)$

Từ $(1);(2);(3) \Rightarrow \Delta AHG \sim \Delta MOG(c.g.c) \Rightarrow AGH = MGO(4)$

Mặt khác : A,G,M thẳng hàng (5)

Từ (4),(5) $\Rightarrow H,G,O$ thẳng hàng và $\dfrac{GH}{GO} = \dfrac{AH}{OM} = 2$

b)



Gọi h là đường cao của hình thang ABCD

Giả sử đã dựng được điểm M thuộc CD sao cho đường thẳng AM cắt hình thang thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Gọi N là giao điểm của AM và BC

Đặt $S_1 = S_{ADCN}; S_2 = S_{ANB}; S = S_{ABCD}$.

Ta có: $\begin{cases} s_1 + s_2 = s \\ s_1 = s_2 \end{cases} \Rightarrow S_2 = S:2 \quad (1)$

Kẻ đường cao NH của tam giác ANB và đặt $NH = x$ ta có:

$$s = \frac{1}{2}(2a + a)h = \frac{3ah}{2}$$

$$s_2 = \frac{1}{2}.2a.x = ax$$

Thay vào (1) : $ax = \dfrac{1}{2}.\dfrac{3ah}{2} \Rightarrow x = \dfrac{3h}{4}$

Áp dụng định lý Talet $\Rightarrow \dfrac{NB}{NC} = \dfrac{1}{3}$ suy ra cách dựng:

Chia đoạn BC làm 4 phần bằng nhau, lấy điểm N trên BC sao cho $NC = \dfrac{1}{4}BC$

Đường thẳng AN cắt đường thẳng CD tại điểm M cần dựng

vndoc

Câu 5. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $xyz \le \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

Mặt khác:

$\Leftrightarrow xyz \ge (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$

$\Leftrightarrow xyz \ge (1-2z)(1-2x)(1-2y)$

$\Leftrightarrow xyz \ge 1-2(x+y+z)+4(xy+yz+xz)-8xyz$

$\Leftrightarrow xyz \ge 1-2+4(xy+yz+zx)-8xyz$

$\Leftrightarrow 1+xyz \ge 4(xy+yz+zx)-8xyz$

$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{27} \ge 4(xy+yz+zx)-8xyz$

$\Leftrightarrow \frac{7}{27} \ge xy+yz+zx-2xyz(dfcm)$

PHÒNG GD – ĐT
HUYỆN LẬP THẠCH

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 8
Năm học: 2011-2012

Bài 1. (4 điểm)

1. Cho x, y thỏa mãn $y(x+y) \ne 0$ và $x^2 - xy = 2y^2$. Tính $A = \frac{3x-y}{x+y}$
2. Tính $B = \frac{2.1+1}{[1.(1+1)]^2} + \frac{2.2+1}{[2.(2+1)]^2} + \frac{2.3+1}{[3.(3+1)]^2} + ... + \frac{2.99+1}{[99.(99+1)]^2}$

Bài 2. (4 điểm)

1) Tìm a,b sao cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$
2) Tìm số nguyên a sao cho $a^4 + 4$ là số nguyên tố

Bài 3. (3 điểm)

Giải phương trình: $\frac{x}{x^2+4x+4} + \frac{5x}{x^2+4} = -2$

Bài 4. (4 điểm)

Cho hình thoi ABCD có góc $ABC = 60^0$. Hai đường chéo cắt nhau tại O, E thuộc tia BC sao cho BE bằng ba phần tư BC, AE cắt CD tại F. Trên đoạn thẳng AB và CD lần lượt lấy hai điểm G và H sao cho CG song song với FH

vndoc

1) Chứng minh rằng : $BG.DH=\frac{3}{4}BC^2$

2) Tính số đo góc GOH

Bài 5. (3 điểm)

Cho tam giác ABC, ba điểm M,N,P lần lượt thuộc các cạnh BC,CA,AB sao cho $\frac{BM}{BC}=\frac{CN}{CA}=\frac{AP}{AB}\ \&\ \frac{BM}{BC}<\frac{1}{2}$. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

Bài 6. (2 điểm)

Cho các số dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^3}{y+2z}+\frac{y^3}{z+2x}+\frac{z^3}{x+2y}\geq\frac{1}{3}$$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

1) Từ $y(x+y)\neq 0\Rightarrow\begin{cases}x+y\neq 0\\ y\neq 0\end{cases}$

$$x^2-xy=2y^2\Leftrightarrow.....\Leftrightarrow(x+y)(x-2y)=0$$

Vì $x+y\neq 0$ nên $x-2y=0\Leftrightarrow x=2y$

Ta có: $A=\frac{3.2y-y}{2y+y}=\frac{5y}{3y}=\frac{5}{3}$

2) Với $n\geq 1$, ta có: $\frac{2n+1}{\left[n(n+1)\right]^2}=\frac{(n+1)^2-n^2}{(n+1)^2.n^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$

Áp dụng vào bài toán ta có:

$$B=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+......+\frac{1}{99^2}-\frac{1}{100^2}=1-\frac{1}{100^2}=\frac{9999}{10000}$$

Bài 2.

1) Ta có: $g(x)=x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

Vì $f(x)=ax^3+bx^2+10x-4$ chia hết cho đa thức $g(x)=x^2+x-2$. Nên tồn tại một đa thức $q(x)$ sao cho $f(x)=g(x).q(x)$

$\Rightarrow ax^3+bx^2+10x-4=(x+2)(x-1)q(x)$

Với $x=1 \Rightarrow a+b+6=0 \Rightarrow b=-a-6$ (1)
Với $x=-2 \Rightarrow 2a-b+6=0$ (2)
Thay (1) vào (2) ta có: $a=2 \& b=4$

2) Ta có: $a^4+4=\left(a^2-2a+2\right)\left(a^2+2a+2\right)$

Vì $a \in c \Rightarrow a^2-2a+2 \in c; a^2+2a+2 \in c$

Có $a^2+2a+2=\left(a+1\right)^2+1 \geq 1 \quad \forall a$

Và $a^2-2a+2=\left(a-1\right)^2+1 \geq 1 \quad \forall a$

Vậy a^4+4 là số nguyên tố thì $a^2+2a+2=1$ hoặc $a^2-2a+2=1$
Nếu $a^2-2a+2=1 \Rightarrow a=1$ thử lại thấy thỏa mãn
Nếu $a^2+2a+2=1 \Rightarrow a=-1$ thử lại thấy thỏa mãn.

Bài 3.
Điều kiện $x \neq -2$

Với $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình : $\dfrac{x}{x^2+4x+4}+\dfrac{5x}{x^2+4}=-2$

Với $x \neq 0$ phương trình $\dfrac{x}{x^2+4x+4}+\dfrac{5x}{x^2+4}=-2$ trở thành:

$\dfrac{1}{x+\dfrac{4}{x}+4}+\dfrac{5}{x+\dfrac{4}{x}}=-2(*)$. Đặt $y=x+\dfrac{4}{x}+2$ phương trình $(*)$ trở thành:

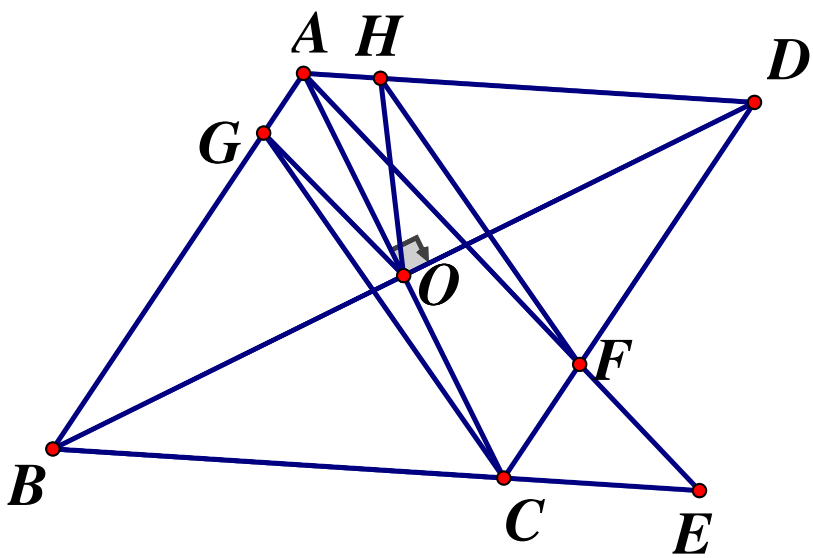
$\dfrac{1}{y+2}+\dfrac{5}{y-2}=-2$
Điều kiện : $y \neq \pm 2$

Phương trình trở thành: $y^2+3y=0 \Leftrightarrow y\left(y+3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=-3 \end{array}\right.$

Với $y=0$ thì $x+\dfrac{4}{x}+2=0 \Rightarrow x^2+2x+4=0 \Rightarrow \left(x+1\right)^2+3=0 \quad (VN)$

Với $y=-3$ thì $x+\dfrac{4}{x}+2=-3 \Rightarrow x^2+5x+4=0 \Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(x+4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-4 \end{array}\right. (TMDK)$

Vậy tập nghiệm phương trình là $S=\{-1;-4\}$
Bài 4.



1) Chứng minh $\Delta BCG \sim \Delta DHF \Rightarrow \dfrac{BC}{DH} = \dfrac{BG}{DF} \Rightarrow BC.DF = DH.BG$

Theo định lý Ta let tính được:

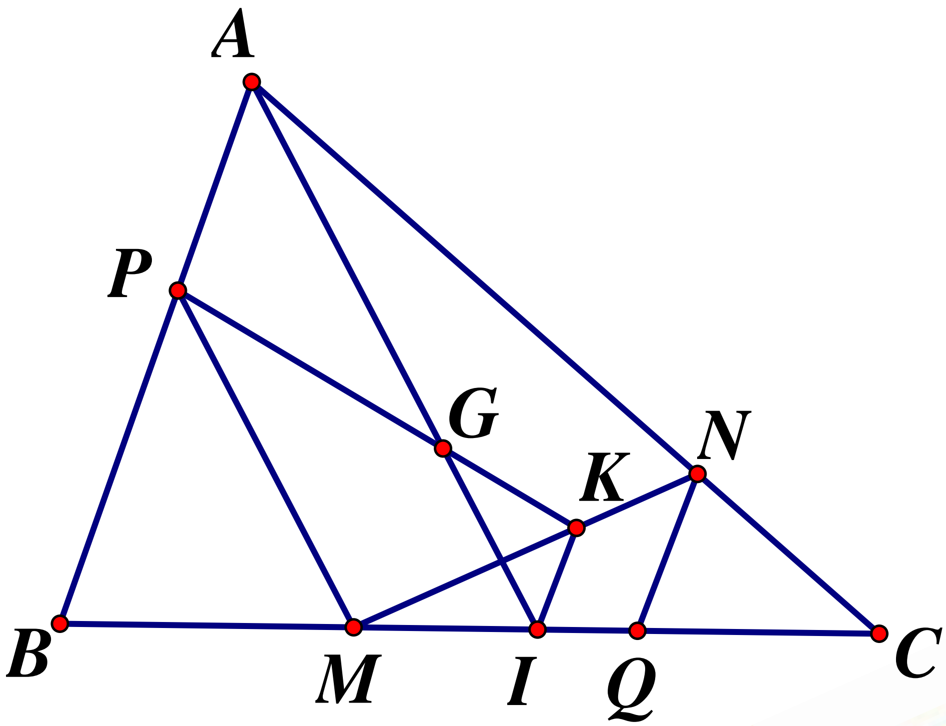
$$DF = \frac{3}{4}DC = \frac{3}{4}BC \Rightarrow BG.DH = \frac{3}{4}BC^2$$

2) Theo định lý Pytago tính được:

$$BO^2 = BC^2 - CO^2 = \frac{3}{4}BC^2 \Rightarrow BG.DH = BO^2 = BO^2 = BO.DO \Rightarrow \frac{BG}{DO} = \frac{BO}{DH}$$

Ta có $GBO = HDO = 30^0$. Nên $\Delta BGO \sim \Delta DOH \Rightarrow GHO = 30^0$

Bài 5.



Qua N kẻ $NQ//AB\left(Q\in AB\right)$, theo định lý Talet ta có:

$$\frac{QC}{BC}=\frac{CN}{CA}(gt)\Rightarrow\frac{QC}{BC}=\frac{BM}{BC}\Rightarrow QC=BM$$

$$\frac{QN}{AB}=\frac{CQ}{CB}(gt)\Rightarrow\frac{QN}{AB}=\frac{AP}{AB}\Rightarrow AB=QN$$

Gọi I,K là trung điểm của MQ và MN. Suy ra IK là đường trung bình của tam giác MNQ, vậy $IK//QN, IK=\frac{QN}{2}\Rightarrow IK//AP; IK=\frac{AP}{2}$

Gọi G là giao điểm của AI và PK, theo Ta let ta có: $\frac{GI}{GA}=\frac{GK}{GP}=\frac{KI}{PA}=\frac{1}{2}$

Suy ra G là trọng tâm của tam giác MNP và G là trọng tâm của tam giác ABC

Bài 6.

Ta có: $\frac{9x^3}{y+2z}+x\left(y+2z\right)\geq 6x^2;\frac{9y^3}{z+2x}+y\left(z+2x\right)\geq 6y^2;\frac{z^3}{x+2y}+z\left(x+2y\right)\geq 6z^2$

Lại có : $\left(x-y\right)^2+\left(y-z\right)^2+\left(z-x\right)^2\geq 0\Rightarrow x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$

Nên ta có:

$$\frac{9x^3}{y+2z}+\frac{9y^3}{z+2x}+\frac{9z^3}{x+2y}+3\left(xy+yz+xz\right)\geq 6\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{y+2z}+\frac{y^3}{z+2x}+\frac{z^3}{x+2y}\geq \frac{x^2+y^2+z^2}{3}=\frac{1}{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$

PHÒNG GD & ĐT TÂY HÒA
TRƯỜNG THCS TÂY SƠN

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI NĂM HỌC 2014-2015
MÔN: TOÁN – LỚP 8
Thời gian: 150 phút

Bài 1. (4 điểm)

a) Tính giá trị của biểu thức $A=x^4-17x^3+17x^2-17x+20$ tại $x=16$

b) Cho $x+y=a$ và $xy=b.$ Tính giá trị của biểu thức sau theo a và b: $B=x^2+y^2$

Bài 2. (4 điểm)

a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $C=4-x^2+2x$

b) Tìm ba số tự nhiên liên tiếp biết rằng tổng của ba tích của hai trong ba số ấy bằng 242

Bài 3. (4 điểm)

a) Tìm $x,$ biết: $4\left(x+1\right)^2+\left(2x-1\right)^2-8\left(x-1\right)\left(x+1\right)=11$

b) Tìm x,y,z biết: $\frac{x}{3}=\frac{y}{2};\frac{y}{5}=\frac{z}{7}$ và $x+y+z=195$

Bài 4. (4 điểm)

Tứ giác $ABCD$ có $B+D=180^0$ và $CB=CD.$ Chứng minh AC là tia phân giác của góc A.

Bài 5. (4 điểm)

Một tam giác có đường cao và đường trung tuyến chia góc ở đỉnh thành ba phần bằng nhau. Tính các góc của tam giác đó.

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) Thay $x=16$ vào biểu thức ta được:

$A=16^4-17.16^3+17.16^2-17.16+20$

$=16^4-(16+1).16^3+(16+1).16^2-(16+1).16+(16+4)$

$=16^4-16^4-16^3+16^3+16^2-16^2-16+16+4=4$

Vậy giá tri của biểu thức A tại $x=16$ là 4.

b)

$B=x^2+y^2=\left(x^2+2xy+y^2\right)-2xy=(x+y)^2-2xy$

Thay $x+y=a$ và $xy=b$ vào biểu thức ta được: $B=a^2-2b$

Vậy giá trị của biểu thức B tại $x+y=a$ và $xy=b$ là a^2-2b

Câu 2.

a) $C=4-x^2+2x=5-\left(x^2-2x+1\right)=5-(x-1)^2\le 5$

Vậy $C_{max}=5\Leftrightarrow x=1$

b) Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là $x,x+1,x+2$. Ta có:

$x(x+1)+x(x+2)+(x+1)(x+2)=242$

$\Leftrightarrow x^2+x+x^2+2x+x^2+3x+2=242$

$\Leftrightarrow 3x^2+6x+2=242\Leftrightarrow 3x^2+6x=240$

$\Leftrightarrow x^2+2x=80\Leftrightarrow x^2+2x+1=81$

$\Leftrightarrow (x+1)^2=9^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+1=9\\x+1=-9\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=8\quad (TM)\\x=-10(KTM)\end{array}\right.$

Vậy ba số tự nhiên liên tiếp cần tìm là $8;9;10$

Câu 3.

a)

$4(x+1)^2+(2x-1)^2-8(x-1)(x+1)=11$

$\Leftrightarrow 4\left(x^2+2x+1\right)+\left(4x^2-4x+1\right)-8\left(x^2-1\right)=11$

$\Leftrightarrow 4x^2+8x+4+4x^2-4x+1-8x^2+8=11$

$\Leftrightarrow 4x+13=11$

$\Leftrightarrow 4x=-2 \Leftrightarrow x=-0,5$

b)

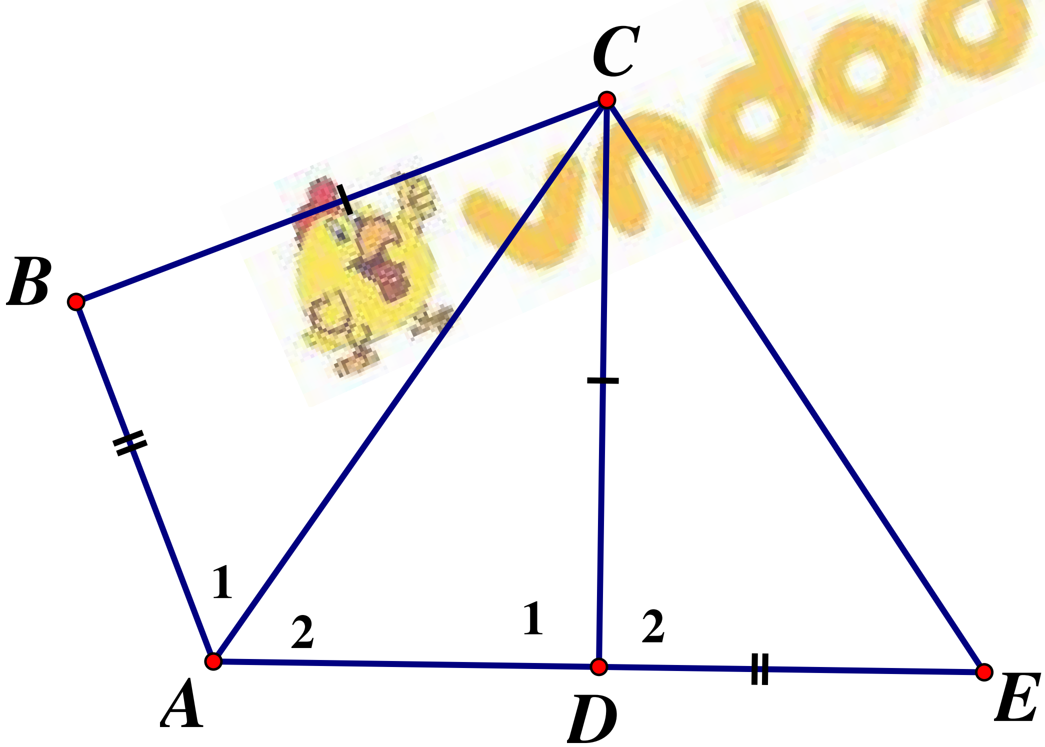
$\frac{x}{3}=\frac{y}{2} \Rightarrow \frac{x}{15}=\frac{y}{10}; \frac{y}{5}=\frac{z}{7} \Rightarrow \frac{y}{10}=\frac{z}{14}$

Do đó: $\frac{x}{15}=\frac{y}{10}=\frac{z}{14}$ và $x+y+z=195$

$\frac{x}{15}=\frac{y}{10}=\frac{z}{14}=\frac{x+y+z}{15+10+14}=\frac{195}{39}=5$

Vậy $x=5.15=75; y=5.10=50; z=5.14=70$

Câu 4.



Trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho $DE=BA$

Ta có: $B+D_1=180^0$ và $D_1+D_2=180^0 \Rightarrow B=D_2$

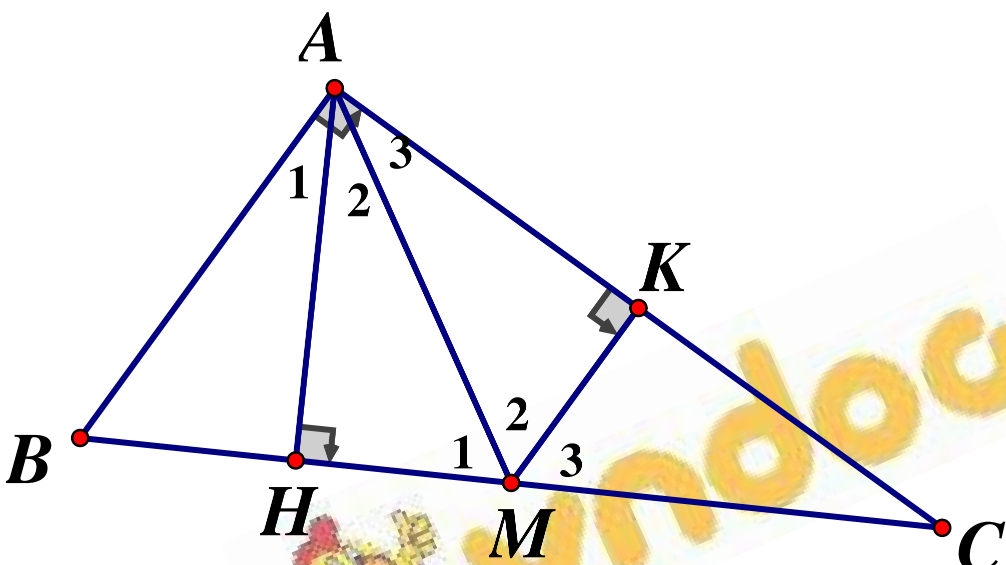
Xét ΔCBA và ΔCDE có: $CB = CD(gt); B = D_2; BA = DE$

$\Rightarrow \Delta CBA = \Delta CDE(c.g.c) \Rightarrow A_1 = E \quad (1); CA = CE$

Xét ΔCAE có $CA = CE$ nên là tam giác cân $\Rightarrow A_2 = E \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $A_1 = A_2 \Rightarrow AC$ là tia phân giác của góc A

Câu 5.



Kẻ $MH \perp BC$.Khi đó $\Delta AMH = \Delta AKM$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow MK = MH$ (1)

Xét ΔABM có AH vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên nó cân tại A

$\Rightarrow AH$ cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow MH = BH = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}MC \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MK = \frac{1}{2}MC \Rightarrow \Delta MKC$ là nửa tam giác đều

Do đó: $C = 30^0 \Rightarrow M_3 = 60^0 \Rightarrow HMK = 120^0$

Vì $\Delta AHM = \Delta AKM$ nên $M_1 = M_2 = \frac{1}{2}MHK = \frac{1}{2}.120^0 = 60^0$

Suy ra $A_3 = 30^0 \Rightarrow A = 3.A_3 = 3.30^0 = 90^0$

Vậy ΔABC vuông tại $A, B = 60^0; C = 30^0$

UBND HUYỆN THỦY NGUYÊN
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI 2016-2017
MÔN TOÁN 8

Thời gian: 120 phút (không kể giao đề)

Bài 1. (2 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^3.\left(x^2-7\right)^2-36x$

b) Dựa vào kết quả trên hãy chứng minh:

$A=n^3.\left(n^2-7\right)-36n$ chia hết cho 210 với mọi số tự nhiên n

Bài 2. (2 điểm)

Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{1-x^3}{1-x}-x\right):\dfrac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3}\left(x\neq -1;1\right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của biểu thức tại $x=-1\dfrac{2}{3}$

c) Tìm giá trị của x để $A<0$

Bài 3. (1,0 điểm) Cho ba số a,b,c thỏa mãn $abc=2004$

Tính: $M=\dfrac{2004a}{ab+2004a+2004}+\dfrac{b}{bc+b+2004}+\dfrac{c}{ac+c+1}$.

Bài 4. (4 điểm)

Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng $4cm$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,BC. Gọi P là giao điểm của AN với DM

a) Chứng minh : tam giác APM là tam giác vuông.

b) Tính diện tích của tam giác APM

c) Chứng minh tam giác CPD là tam giác cân.

Bài 5. (1 điểm) Tìm các giá trị x,y nguyên dương sao cho: $x^2=y^2+2y+13$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$a) x^3\left(x^2-7\right)^2-36x=x\left[\left(x^3-7x\right)^2-36\right]$

$=x\left(x^3-7x-6\right)\left(x^3-7x+6\right)=x\left(x^3-x-6x-6\right)\left(x^3-x-6x+6\right)$

$=x\left[x(x-1)(x+1)-6(x+1)\right]\left[x(x-1)(x+1)-6(x-1)\right]$

$=x(x+1)\left(x^2-x-6\right)(x-1)\left(x^2+x-6\right)$

$=x(x+1)\left(x^2-3x+2x-6\right)(x-1)\left(x^2+3x-2x-6\right)$

$=x(x+1)(x-1)[x(x-3)+2(x-3)]\left[x(x+3)-2(x+3)\right]$

$=x(x+1)(x-1)(x-3)(x+2)(x-2)(x+3)$

b) Theo phần a ta có:

$A=n^3\left(n^2-7\right)^2-36n=n(n+1)(n-1)(n-3)(n+2)(n-2)(n+3)$

Đây là tích của 7 số nguyên liên tiếp. Trong 7 số nguyên liên tiếp có:

- Một bội của 2 nên A chia hết cho 2
- Một bội của 3 nên A chia hết cho 3
- Một bôi của 5 nên A chia hết cho 5
- Một bội của 7 nên A chia hết cho 7.

Mà $2;3;5;7$ đôi một nguyên tố cùng nhau nên $A \vdots (2.3.5.7)$ hay $A \vdots 210$

Câu 2.

a) Với $x \neq 1;-1$ thì:

$$A=\frac{1-x^3-x+x^2}{1-x}:\frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)\left(1-x+x^2\right)-x(1+x)}$$

$$=\frac{(1-x)\left(1+x+x^2-x\right)}{1-x}:\frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)\left(1-2x+x^2\right)}$$

$$=\left(1+x^2\right):\frac{1}{1-x}=\left(1+x^2\right).(1-x)$$

b) Tại $x=-1\frac{2}{3}=\frac{-5}{3}$ thì A có giá trị là

$$\left[1+\left(-\frac{5}{3}\right)^2\right].\left(1-\left(\frac{5}{3}\right)\right)=\left(1+\frac{25}{9}\right).\left(1+\frac{5}{3}\right)=10\frac{2}{27}$$

c) Với $x \neq -1;1$ thì $A<0 \Leftrightarrow \left(1+x^2\right)(1-x)<0 \qquad (1)$

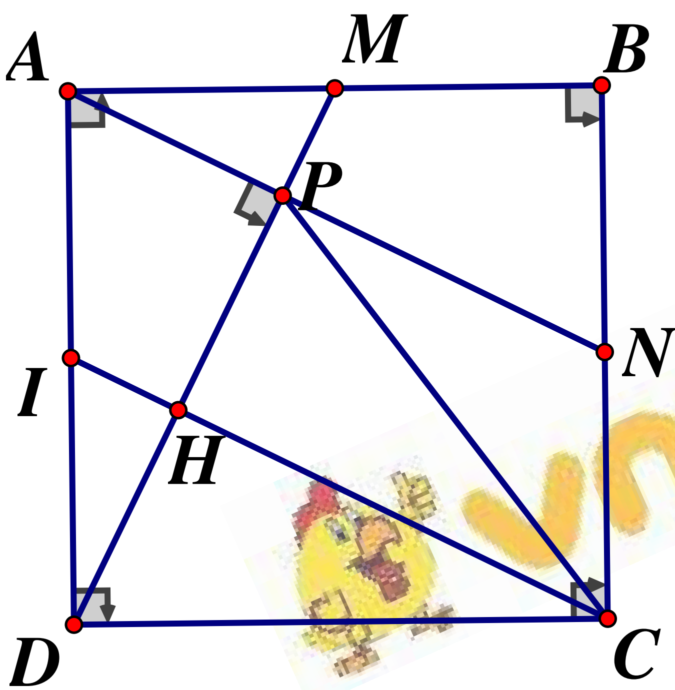
Vì $1+x^2>0$ nên $(1) \Leftrightarrow 1-x<0 \Leftrightarrow x>1$

Câu 3. Thay $2004=abc$ vào M ta có:

vndoc

$$M=\frac{a^2bc}{ab+a^2bc+abc}+\frac{b}{bc+b+abc}+\frac{c}{ac+c+1}$$
$$=\frac{a^2bc}{ab(1+ac+c)}+\frac{b}{b(c+1+ac)}+\frac{c}{ac+c+1}$$
$$=\frac{ac}{1+ac+c}+\frac{1}{c+1+ac}+\frac{c}{ac+c+1}$$
$$=\frac{ac+1+c}{1+ac+c}=1$$

Câu 4.



a) Chứng minh $\Delta ADM=\Delta BAN(c.g.c)\Rightarrow A_1=D_1$

Mà $D_1+M_1=90^0$(ΔADM vuông tại A)

Do đó: $A_1+M_1=90^0\Rightarrow APM=90^0$. Hay ΔAPM vuông tại A

b) Tính được: $AP=\frac{4\sqrt{5}}{5}cm, AM=\frac{2\sqrt{5}}{5}cm\Rightarrow S_{APM}=\frac{4}{5}(cm^2)$

c) Gọi I là trung điểm của AD. Nối C với I; CI cắt DM tại H

Chứng minh tứ giác $AICN$ là hình bình hành

$\Rightarrow AN//CI$ mà $AN\perp DM$ nên $CI\perp DM$

Hay CH là đường cao trong tam giác $CPD(1)$

Vận dụng định lý về đường trung bình trong ΔADP chứng minh được H là trung điểm của $DP \Rightarrow CH$ là trung tuyến trong ΔCPD (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔCPD cân tại C.

Câu 5.

Biến đổi đẳng thức đã cho về dạng $(x+y+1)(x-y-1)=12$

Lập luận để có $x+y+1>x-y-1$ và $x+y+1;x-y-1$ là các ước dương của 12. Từ đó ta có các trường hợp:

$x+y+1$	12	6	4
$x-y-1$	1	2	3
x	$\frac{13}{2}$	4	$\frac{7}{2}$
y	$\frac{9}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$

Mà $x;y$ nguyên dương nên $(x;y)=(4;1)$

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2013-2014
MÔN THI: TOÁN 8
Ngày thi: 12/04/2014
Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1. (4 điểm)

Cho biểu thức: $A=\left[\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+1}.\left(\frac{x+1}{3x}-x-1\right)\right]:\frac{x-1}{x}$

a) Rút gọn biểu thức A
b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên

Câu 2. (4 điểm)

a) Chứng minh rằng: $A=\left[n^3\left(n^2-7\right)^2-36n\right]\vdots 7$ với $\forall n\in\mathbb{Z}$.

b) Cho $P=n^4+4$. Tìm tất cả các số tự nhiên n để P là số nguyên tố.

Câu 3. (4 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2+9x+20}+\frac{1}{x^2+11x+30}+\frac{1}{x^2+13x+42}=\frac{1}{18}$

b) Cho a,b,c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A=\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3$$

Câu 4. (6 điểm)

Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB kẻ hai tia Ax, By cùng vuông góc với AB. Trên tia Ax lấy điểm C (C khác A). Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với OC, đường thẳng này cắt By tại D. Từ O hạ đường vuông góc OM xuống CD (M thuộc CD)

a) Chứng minh $OA^2=AC.BD$
b) Chứng minh tam giác AMB vuông
c) Gọi N là giao điểm của BC và AD. Chứng minh $MN//AC$

Câu 5. (2 điểm)

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+bc}{b+c}+\frac{b+ca}{c+a}+\frac{c+ab}{a+b}\geq 2$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) $A=\left[\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+1}.\left(\frac{x+1}{3x}-x-1\right)\right]:\frac{x-1}{x}$

$A=\left[\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+1}.\frac{(x+1)-3x(x+1)}{3x}\right]:\frac{x-1}{x}$

$A=\left[\frac{2}{3x}-\frac{2.(1-3x)}{3x}\right].\frac{x}{x-1}$

$A=2.\frac{x}{x-1}=\frac{2x}{x-1}$

b) Với $x\neq 0; x\neq \pm 1$, Ta có: $A=\frac{2x}{x-1}=2+$ $A=\frac{2x}{x-1}=2+\frac{2}{x-1}$

Để $A\in\mathbb{Z}$ thì $(x-1)$ phải là ước của $2\Rightarrow x-1\in\{\pm 1;\pm 2\}$

Đối chiếu điều kiện tìm được $x=2$ hoặc $x=3$ thỏa mãn

vndoc

Câu 2.

a) Ta có: $A=\left[n^3\left(n^2-7\right)^2-36n\right]$

$=n\left[n\left(n^2-7\right)-6\right]\left[n\left(n^2-7\right)+6\right]=n\left(n^3-7n-6\right)\left(n^3-7n+6\right)$

$=n\left(n^3-n-6n-6\right)\left(n^3-n-6n+6\right)=n\left[\left(n^2-1\right)-6\left(n+1\right)\right]\left[n\left(n^2-1\right)-6\left(n-1\right)\right]$ Do

$=n\left(n+1\right)\left(n^2-n-6\right)\left(n-1\right)\left(n^2+n-6\right)=n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n-3\right)\left(n-1\right)\left(n-2\right)\left(n+3\right)$

đó A là tích của 7 số nguyên liên tiếp $\Rightarrow A\,\vdots\,7 \quad \forall n\in\mathbb{Z}$

b) $P=n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=\left(n^2+2\right)^2-\left(2n\right)^2$

$=\left(n^2-2n+2\right)\left(n^2+2n+2\right)=\left[\left(n-1\right)^2+1\right]\left[\left(n-1\right)^2+1\right]$

Vì n là số tự nhiên nên $\left(n+1\right)^2+1\geq 2$.Như vậy muốn P là số nguyên tố thì ta phải có $\left(n-1\right)^2+1=0\Leftrightarrow\left(n-1\right)^2=0\Rightarrow n=1$

Khi đó $P=5$ là số nguyên tố

Câu 3.

a) Ta có:

$x^2+9x+20=\left(x+4\right)\left(x+5\right)$

$x^2+11x+30=\left(x+5\right)\left(x+6\right)$

$x^2+13x+42=\left(x+6\right)\left(x+7\right)$

TXĐ: $x\neq-4;x\neq-5;x\neq-6;x\neq-7$

Phương trình trở thành:

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)}+\frac{1}{(x+5)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+7)}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow 18(x+7)-18(x+4)=(x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-13 & (tm) \\ x=2 & (tm) \end{array}\right.$$

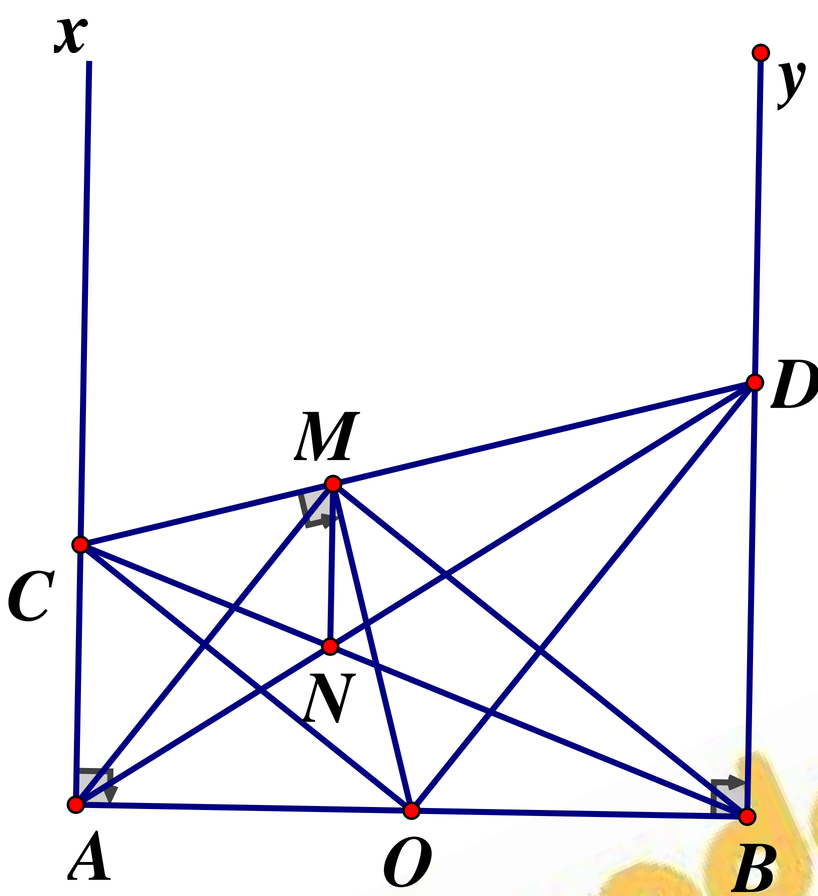
b) Đặt $b+c-a=x>0;c+a-b=y>0;a+b-c=z>0.$ Ta có: $x,y,z>0$

Từ đó suy ra : $a=\frac{y+z}{2};b=\frac{x+z}{2};c=\frac{x+y}{2}$

Thay vào ta được: $A=\frac{y+z}{2x}+\frac{x+z}{2y}+\frac{x+y}{2z}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\right]$

Từ đó suy ra $A\geq\frac{1}{2}(2+2+2)\Rightarrow A\geq 3$. Dấu "= " xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Câu 4.



a) Xét ΔACO và ΔBOD có:

$A = B = 90^0; COA = ODB$ (cùng phụ với DOB)

Nên $\Delta ACO \sim \Delta BOD\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{AO}{AC} = \dfrac{BD}{BO} \Rightarrow AO.BO = AC.BD$

Mà $AO = BO$ nên $AO^2 = AC.BD$

b) Xét ΔCMO và ΔOMD có:

$CMO = OMD = 90^0; OCM = DOM$ (cùng phụ với COM)

$\Rightarrow \Delta CMO \sim \Delta OMD \Rightarrow \dfrac{CO}{OD} = \dfrac{OM}{MD}$ (1)

Mà $\Delta ACO \sim \Delta BOD \Rightarrow \dfrac{CO}{OD} = \dfrac{AO}{OD} \Rightarrow \dfrac{CO}{OD} = \dfrac{OB}{BD} (Do \quad AO = OB)\left(2\right)$

Từ (1) và (2) ta có: $\dfrac{OM}{MD}=\dfrac{OB}{BD}\Rightarrow \Delta OMD \sim \Delta OBD$

$\Rightarrow MOD = BOD \Rightarrow \Delta OMD = \Delta OBD$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow OM = OB = OA \Rightarrow \Delta AMB$ vuông tại M

c) Ta có: $AC//BD$ (cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \dfrac{CN}{NB}=\dfrac{AC}{BD}$

Mà $BD = MD$ ($\Delta OMD = \Delta OBD$)

Tương tự ta chứng minh $AC = CM$

Nên $\dfrac{CN}{BN}=\dfrac{CM}{DM}\Rightarrow MN//BD//AC$

Câu 5.

- Nhận xét : có $a+bc = a(a+b+c)+bc = (a+b)(c+a)$

  Tương tự: $b+ca=(b+a)(b+c)$; $c+ab=(c+a)(c+b)$

  Do đó: $VT=\dfrac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\dfrac{(b+a)(b+c)}{c+a}+\dfrac{(c+a)(c+b)}{a+b}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\frac{(b+a)(b+c)}{c+a}\ge 2(a+b)$$

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}\ge 2(a+c)$$

$$\frac{(b+a)(b+c)}{a+c}+\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}\ge 2(b+c)$$

Vậy $2.VT \ge 4(a+b+c)=4 \Leftrightarrow VT\ge 2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$

ĐỀ KIỂM TRA HỌC SINH GIỎI

Năm học 2015-2016

Bài 1. (6 điểm) Cho biểu thức:

$$P=\left(\frac{2x-3}{4x^2-12x+5}+\frac{2x-8}{13x-2x^2-20}-\frac{3}{2x-1}\right):\frac{21+2x-8x^2}{4x^2+4x-3}+1$$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P khi $|x| = \frac{1}{2}$

c) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên

d) Tìm x để $P > 0$

Bài 2. (3 điểm) Giải phương trình:

$a) \frac{15x}{x^2 + 3x - 4} - 1 = 12\left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x-3}\right)$

b) $\frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$

c) $||x-2|+3| = 5$

Bài 3. (2 điểm) Giải bài toán bằng cách lập phương trình:

Một người đi xe gắn máy từ A đến B dự định mất 3 giờ 20 phút. Nếu người ấy tăng vận tốc thêm $5km/h$ thì sẽ đến B sớm hơn 20 phút. Tính khoảng cách AB và vận tốc dự định đi của người đó.

Bài 4. (7 điểm)

Cho hình chữ nhật $ABCD.$ Trên đường chéo BD lấy điểm P, gọi M là điểm đối xứng của C qua P.

a) Tứ giác $AMDB$ là hình gì ?

b) Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của điểm M lân AB, AD. Chứng minh $EF // AC$ và ba điểm E, F, P thẳng hàng

c) Chứng minh rằng tỉ số các cạnh của hình chữ nhật $MEAF$ không phụ thuộc vào vị trí điểm P

d) Giả sử $CP \perp BD$ và $CP = 2,4cm, \frac{PD}{PB} = \frac{9}{16}$. Tính các cạnh của hình chữ nhật ABCD.

Bài 5. (2 điểm) a) Chứng minh rằng: $2009^{2008} + 2011^{2010}$ chia hết cho 2010

b) Cho x, y, z là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

ĐKXĐ: $x \neq \frac{1}{2}; x \neq \frac{5}{2}; x \neq \frac{-3}{2}; x \neq \frac{7}{4}; x \neq 4$

a) Rút gọn $P = \frac{2x-3}{2x-5}$

vndoc

b) $|x|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

$+)x=\frac{1}{2}\Rightarrow .....P=\frac{1}{2}$ $\quad ;+)x=\frac{-1}{2}\Rightarrow .....P=\frac{2}{3}$

c) $P=\frac{2x-3}{2x-5}=1+\frac{2}{x-5}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x-5\in U(2)=\{-2;-1;1;2\}$

$x-5=-2\Rightarrow x=3(tm)$

$x-5=-1\Rightarrow x=4(ktm)$

$x-5=1\Rightarrow x=6(tm)$

$x-5=-2\Rightarrow x=7(tm)$

Kết luận: $x\in\{3;6;7\}$ thì P nhận giá trị nguyên

d) $P=\frac{2x-3}{2x-5}=1+\frac{2}{x-5}$

Ta có: $1>0$

Để $P>0$ thì $\frac{2}{x-5}>0\Rightarrow x-5>0\Leftrightarrow x>5$

Với $x>5$ thì $P>0$

Bài 2.

a)

$\frac{15x}{x^2+3x-4}-1=12\left(\frac{1}{x+4}+\frac{1}{3x-3}\right)$

$\Leftrightarrow\frac{15x}{(x+4)(x-1)}-1=12.\left[\frac{1}{x+4}+\frac{1}{3(x-1)}\right]$ $\quad DK: x\neq -4; x\neq 1$

$\Leftrightarrow 3.15x-3(x+4)(x-1)=3.12(x-1)+12(x+4)$

....

$\Leftrightarrow 3x(x+4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=0\\x+4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\quad (TM)\\x=-4\,(KTM)\end{array}\right.$

$S=\{0\}$

b)

vndoc

$$\frac{148-x}{25}+\frac{169-x}{23}+\frac{186-x}{21}+\frac{199-x}{19}=10$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{148-x}{25}-1\right)+\left(\frac{169-x}{23}-2\right)+\left(\frac{186-x}{21}-3\right)+\left(\frac{199-x}{19}-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(123-x)\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{23}+\frac{1}{21}+\frac{1}{19}\right)=0\Leftrightarrow 123-x=0\Leftrightarrow x=123$$

$S=\{123\}$

c) $\left||x-2|+3\right|=5$

Ta có: $|x-2|\geq 0\forall x\Rightarrow|x-2|+3>0$ nên $\left||x-2|+3\right|=|x-2|+3$

Phương trình được viết dưới dạng:

$|x-2|+3=5\Leftrightarrow|x-2|=5-3\Leftrightarrow|x-2|=2$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2=2\\x-2=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=0\end{array}\right.$$

Vậy $S=\{0;4\}$

Bài 3.

Gọi khoảng cách giữa A và B là $x(km)$ $(x>0)$

Vận tốc dự định của người đi xe gắn máy là: $\dfrac{x}{3\frac{1}{3}}=\dfrac{3x}{10}(km/h)$ $\quad 3h20'=3\dfrac{1}{3}(h)$

Vận tốc của người đi xe gắn máy khi tăng lên $5km/h$ là: $\dfrac{3x}{10}+5(km/h)$

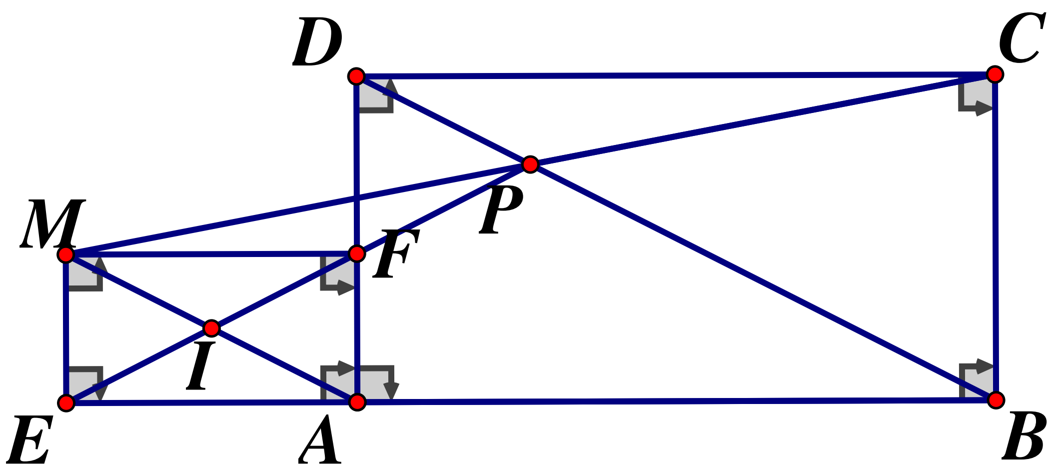
Theo đề bài ta có phương trình: $\left(\dfrac{3x}{10}+5\right).3=x\Leftrightarrow x=150(tm)$

Vậy khoảng cách giữa A và B là $150km$

Vận tốc dự định là: $\dfrac{3.150}{10}=45(km/h)$

Bài 4.

vndoc



a) Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật ABCD
$\Rightarrow PO$ là đường trung bình tam giác CAM
$\Rightarrow AM\,//\,PO \Rightarrow AMDB$ là hình thang

b) Do $AM\,//\,BD$ nên $OBA = MAE$ (đồng vị)

Tam giác AOB cân ở O nên $OBA = OAB$

Gọi I là giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật AEMF thì ΔAIE cân ở I nên $IAE = IEA$

Từ chứng minh trên : có $FEA = OAB$, do đó: $EF\,//\,AC$ (1)

Mặt khác IP là đường trung bình của ΔMAC nên $IP\,//\,AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm E, F, P thẳng hàng

c) $\Delta MAF \sim \Delta DBA(g.g) \Rightarrow \dfrac{MF}{FA} = \dfrac{AD}{AB}$ Không đổi

d) Nếu $\dfrac{PD}{PB} = \dfrac{9}{16} \Rightarrow \dfrac{PD}{9} = \dfrac{PB}{16} = k \Rightarrow PD = 9k, PB = 16k$

Nếu $CP \perp BD$ thì $\Delta CBD \sim \Delta DCP(g.g) \Rightarrow \dfrac{CP}{PD} = \dfrac{PB}{CP}$

Do đó: $CP^2 = PB.PD$ hay $(2,4)^2 = 9.16k^2 \Rightarrow k = 0,2$

$PD = 9k = 1,8(cm)$; $PB = 16k = 3,2(cm)$ $BD = 5(cm)$

Chứng minh $BC^2 = BP.BD = 16$, do đó: $BC = 4cm,\quad CD = 3cm.$

Bài 5.

a) Ta có: $2009^{2008} + 2011^{2010} = \left(2009^{2008} + 1\right) + \left(2011^{2010} - 1\right)$

Vì $2009^{2008} + 1 = (2009 + 1)\left(2009^{2007} - ......\right) = 2010.(........)$ chia hết cho 2010 (1)

Vì $2011^{2010} - 1 = (2011 - 1)\left(2011^{2009} + ...\right) = 2010.(.....)$ chia hết cho 2010 (2)

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

$$b)\ \frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\ge \frac{2}{1+xy}\quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+xy}\right)+\left(\frac{1}{1+y^2}-\frac{1}{1+xy}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{\left(1+x^2\right)\left(1+xy\right)}+\frac{y(x-y)}{\left(1+y^2\right)(1+xy)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(y-x\right)^2.\left(xy-1\right)}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)(1+xy)}\ge 0\quad (2)$$

Vì $x\ge 1; y\ge 1 \Rightarrow xy\ge 1 \Rightarrow xy-1\ge 0$

$\Rightarrow$ BĐT (2) đúng nên BĐT (1) đúng. Dấu "=" xảy ra khi $x=y$

Trường THCS Hồng Dương

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN 8
Năm học: 2013-2014
Thời gian : 120 phút

Bài 1. (6 điểm)

a) Giải phương trình: $y^2-2y+3=\dfrac{6}{x^2+2x+4}$

b) Giải bất phương trình: $\dfrac{1}{x^2-5x+6}+\dfrac{1}{x^2-7x+12}+\dfrac{1}{x^2-9x+20}+\dfrac{1}{x^2-11x+30}\ge 0$

Bài 2. (5 điểm)

2.1) Cho đa thức $P(x)=6x^3-7x^2-16x+m$

a) Tìm m để $P(x)$ chia hết cho $2x+3$

b) Với m vừa tìm được ở câu a, hãy tìm số dư khi chia $P(x)$ cho $3x-2$ và phân tích ra các thừa số bậc nhất

2.2) Cho đa thức $P(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

Biết $P(1)=1; P(2)=4; P(3)=16; P(5)=25.$ Tính $P(6); P(7)$?

Bài 3. (2 điểm)

Cho $a,b,c\in[0;1]$ và $a+b+c=2.$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2$

Bài 4. (7 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD\left(AC > BD\right)$.Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B, D lên AC; H, K lần lượt là hình chiếu của C trên AB và AC

a) Tứ giác $DFBE$ là hình gì ? Vì sao ?
b) Chứng minh: $\Delta CHK \sim \Delta BCA$
c) Chứng minh: $AC^2 = AB.AH + AD.AK$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a)

$$y^2-2y+3=\frac{6}{x^2+2x+4}\Leftrightarrow\left(y^2-2y+3\right)\left(x^2+2x+4\right)=6$$

$$\Leftrightarrow\left[(y-1)^2+2\right].\left[(x+1)^2+3\right]=6$$

$$\Leftrightarrow(x+1)^2.(y-1)^2+3(y-1)^2+2(x+1)^2+6=6$$

$$\Leftrightarrow(x+1)^2.(y-1)^2+3(y-1)^2+2(x+1)^2=0$$

Vì $(x+1)^2\ge0;(y-1)^2\ge0$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+1=0\\y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$$

$$b)\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2-7x+12}+\frac{1}{x^2-9x+20}+\frac{1}{x^2-11x+30}\ge0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{(x-3)(x-4)}+\frac{1}{(x-4)(x-5)}+\frac{1}{(x-5)(x-6)}\ge0\left(x\ne1;2;3;4;5;6\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-6}\ge0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-6}\ge0\Leftrightarrow\frac{-4}{(x-2)(x-6)}\ge0\Leftrightarrow(x-2)(x-6)<0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2>0\\x-6<0\end{cases}\\\begin{cases}x-2<0\\x-6>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2<x<6\\x\in\varnothing\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ta có $2<x<6$ và $x\ne3;4;5$

Bài 2.

2.1)

a) $P(x)=6x^3-7x^2-16x+m=6x^3+9x^2-16x^2-24x+8x+12+m-12$

vndoc

$= 3x^2(2x+3) - 8x(2x+3) + 4(2x+3) + m - 12$
$= (2x+3)(3x^2 - 8x + 4) + m - 12$

Để $P(x) \vdots (2x+3)$ thì $m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = 12$

b) Với $m = 12; P(x) = 6x^3 - 7x^2 - 16x + 12 = 6x^3 - 4x^2 - 3x^2 + 2x - 18x + 12$

$= 2x^2(3x-2) - x(3x-2) - 6(3x-2) = (3x-2)(2x^2 - x - 6)$

Phân tích $P(x)$ ra tích các thừa số bậc nhất:

$P(x) = 6x^3 - 7x^2 - 16x + 12 = (2x+3)(3x-2)(x-2)$

2.2) Vì $P(1) = 1; P(2) = 4; P(3) = 9; P(4) = 16; P(5) = 25$

Mà $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \Rightarrow P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) + x^2$

$\Rightarrow P(6) = 5.4.3.2.1 + 6^2 = 156$
$\Rightarrow P(7) = 6.5.4.3.2 + 7^2 = 769$

Bài 3.

Vì $a,b,c \in [0;1] \Rightarrow (1-a)(1-b)(1-c) \geq 0$

Ta có: $(1-a)(1-b)(1-c) = 1 - (a+b+c) + (ab+bc+ac) - abc(Vi \quad a+b+c=2)$

$= -1 + (ab+bc+ac) - abc \geq 0$

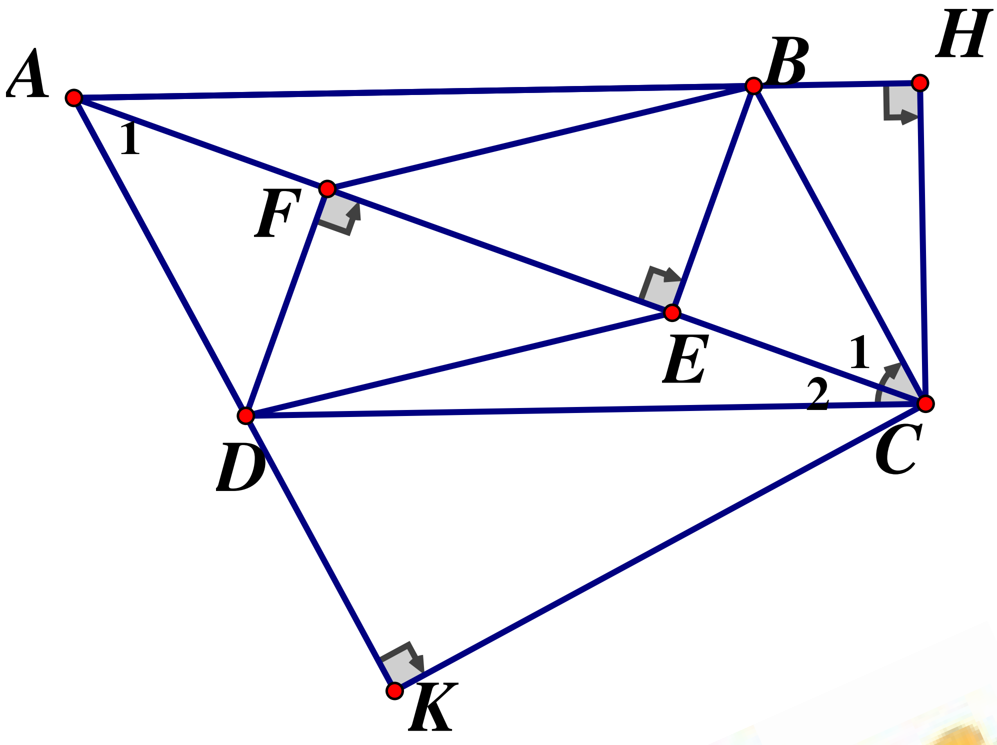
$\Leftrightarrow ab+bc+ac \geq abc + 1 \geq 1(Vi \quad abc \geq 0) \Rightarrow -2(ab+bc+ac) \leq -2$

Lại có: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac)$

$\Rightarrow P = a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac) = 4 - 2(ab+bc+ac) \leq 4 - 2 = 2$

Vậy $P_{max} = 2 \Leftrightarrow (a,b,c)$ là hoán vị của $(0;1;1)$

Bài 4.



a) $DF//BE$ (vì cùng vuông góc với AC)

$\Delta AFD = \Delta CEB$ (Cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow DF = BE$

$\Rightarrow DFBE$ là hình bình hành

b) $BC//AK \Rightarrow BCK = 90^0$

$ABC = 90^0 + BCH$ (góc ngoài của ΔCHB)

$HCK = 90^0 + BCH \Rightarrow ABC = HCK$

Có: $CKD = ACD + DAC$ (góc ngoài của ΔDKC)

$HBC = BAC + BCA$ mà $BCA = DAC; BAC = DCA$

$$\Rightarrow \Delta CKD \sim \Delta CBH \Rightarrow \frac{CD}{BC} = \frac{CK}{CH} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{CK}{CH} \Rightarrow \Delta CHK \sim \Delta BCA(c.g.c)$$

c) $\Delta AEB \sim \Delta AHC \Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AH} \Rightarrow AE.AC = AB.AH\,(1)$

$\Delta AFD \sim \Delta AKC \Rightarrow \dfrac{AF}{AK} = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow AF.AC = AD.AK\,(2)$

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta có: $AE.AC + AF.AC = AB.AH + AD.AK\,(3)$

Mà $\Delta AFD = \Delta CEB(cmt) \Rightarrow AF = CE$

$$(3) \Leftrightarrow AC.(AE+EC) = AB.AH + AD.AK \Leftrightarrow AC^2 = AB.AH + AD.AK$$

TRƯỜNG THCS
CỦ CHI

ĐỀ THI OYMPIC TOÁN LỚP 8
NĂM HỌC 2018-2019

Câu 1. (6 điểm)

a) Giải phương trình: $\dfrac{1}{x^2+9x+20}+\dfrac{1}{x^2+11x+30}+\dfrac{1}{x^2+13x+42}=\dfrac{1}{18}$

b) Cho a,b,c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A=\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3$$

Câu 2. (5 điểm)

a) Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9

b) Tìm các số nguyên n để n^5+1 chia hết cho n^3+1

Câu 3. (3 điểm)

a) Cho 3 số dương a,b,c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geq 9$

b) Cho a,b dương và $a^{2000}+b^{2000}=a^{2001}+b^{2001}=a^{2002}+b^{2002}$.

Tính $a^{2011}+b^{2011}$

Câu 4. (6 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là một điểm di động trên AC. Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với tia BM cắt tia BM tại H, cắt tia BA tại O. Chứng minh rằng:

$a) OA.OB = OC.OH$

b) OHA có số đo không đổi

c) Tổng $BM.BH + CM.CA$ không đổi

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) ĐKXĐ: $x \neq -4; x \neq -5; x \neq -6; x \neq -7$

Phương trình trở thành:

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)}+\frac{1}{(x+5)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+7)}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow 18(x+7)-18(x+4)=(x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-13 \\ x=2 \end{array}\right.$$

b) Đặt $b+c-a=x>0;\quad c+a-b=y>0;\quad a+b-c=z>0$

Từ đó suy ra $a=\frac{y+z}{2}; b=\frac{x+z}{2}; c=\frac{x+y}{2}$

Thay vào ta được:

$$A=\frac{y+z}{2x}+\frac{x+z}{2y}+\frac{x+y}{2z}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\right]$$

Từ đó suy ra $A \geq \frac{1}{2}(2+2+2)$ hay $A \geq 3 \Leftrightarrow a=b=c$

Câu 2.

a) Gọi 2 số phải tìm là a và b, ta có $a+b$ chia hết cho 3

Ta có: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right]$

Vì $a+b$ chia hết cho 3 nên $(a+b)^2-3ab$ chia hết cho 3.

Do vậy, $(a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right]$ chia hết cho 9

b)

$$n^5+1 \vdots \left(n^3+1\right) \Leftrightarrow \left(n^5+n^2-n^2+1\right) \vdots \left(n^3+1\right)$$

$$\Leftrightarrow n^2\left(n^3+1\right)-\left(n^2-1\right) \vdots \left(n^3+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(n-1\right)\left(n+1\right) \vdots \left(n+1\right)\left(n^2-n+1\right)$$

$$\Leftrightarrow n-1 \vdots n^2-n+1$$

$$\Rightarrow n\left(n-1\right) \vdots n^2-n+1$$

Hay $n^2-n \vdots n^2-n+1 \Rightarrow \left(n^2-n+1\right)-1 \vdots \left(n^2-n+1\right)$

$$\Rightarrow 1 \vdots n^2-n+1$$

Xét hai trường hợp:

$+) n^2-n+1=1 \Leftrightarrow n^2-n=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=0 \\ n=1 \end{array}\right.$

$+) n^2-n+1=-1 \Leftrightarrow n^2-n+2=0,$ không có giá trị của n thỏa mãn

Câu 3.

a.Từ $a+b+c=1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a}=1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a} \\ \dfrac{1}{b}=1+\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b} \\ \dfrac{1}{c}=1+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \geq 3+2+2+2=9$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$

b) $\left(a^{2001}+b^{2001}\right)\left(a+b\right)-\left(a^{2000}+b^{2000}\right)ab=a^{2002}+b^{2002}$

vndoc

$\Rightarrow (a+b) - ab = 1$

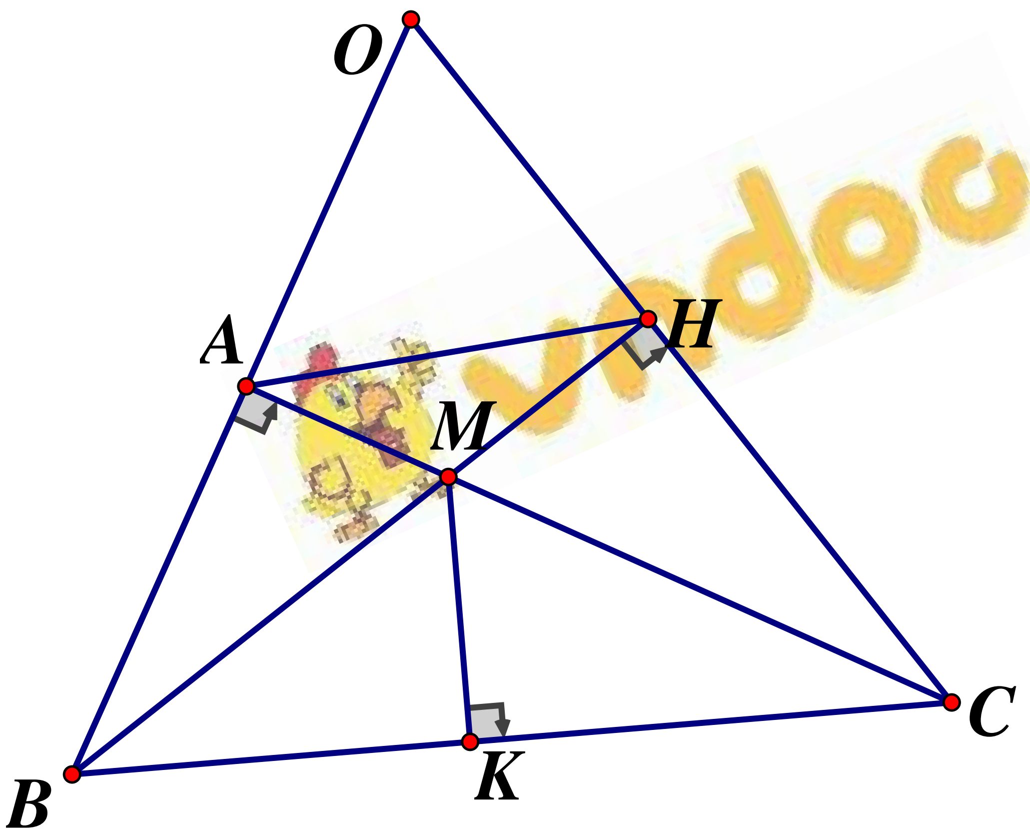
$\Leftrightarrow (a-1)(b-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ b=1 \end{array}\right.$

Với $a=1 \Rightarrow b^{2000} = b^{2001} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=1(tm) \\ b=0(ktm) \end{array}\right.$

Với $b=1 \Rightarrow a^{2000} = a^{2001} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=1(tm) \\ a=0(ktm) \end{array}\right.$

Vậy $a=1; b=1 \Rightarrow a^{2011} + b^{2011} = 2$

Câu 4.



a) $\Delta BOH \sim \Delta COA(g.g) \Rightarrow \dfrac{OB}{OC} = \dfrac{OH}{OA} \Rightarrow OA.OB = OH.OC$

b) $\dfrac{OB}{OC} = \dfrac{OH}{OA} \Rightarrow \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OH}{OB}$ và O chung $\Rightarrow \Delta OHA \sim \Delta OBC$

$\Rightarrow OHA = OBC$ (không đổi)

c) Vẽ $MK \perp BC; \Delta BKM \sim \Delta BHC(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BK}{BH} \Rightarrow BM.BH = BK.BC \quad (3)$$

$$\Delta CKM \sim \Delta CAB(g.g) \Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{CK}{CA} \Rightarrow CM.CA = BC.CK (4)$$

Cộng từng vế của (3) và (4) ta có:

$BM.BH + CM.CA = BK.BC + BC.CK = BC.(BK + KC) = BC^2$ (Không đổi)

PHÒNG GD & ĐT
Ninh Hòa

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
NĂM HỌC: 2014-2015
MÔN THI: TOÁN 8
Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

Bài 1. (5 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2}\right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

d) Rút gọn biểu thức A
e) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên
f) Tìm x để $|A| = A$

Bài 2. (4 điểm) Giải các phương trình sau:

$a) x^3 - x^2 - 12x = 0$

$b) \frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$

Bài 3 (5 điểm)

Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D. Biết $CD = 2AB = 2AD$ và $BC = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của CD.

d) Tứ giác $ABED$ là hình gì ? Tại sao ?
e) Tính diện tích hình thang $ABCD$ theo a
f) Gọi I là trung điểm của BC, H là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống AC. Tính góc HDI

Bài 4. (4 điểm)

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 5$

d) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: $B = \dfrac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1}$

Bài 5. (2 điểm)

c) Cho a,b,c là 3 cạnh của tam giác, p là nửa chu vi.

CMR: $\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c} \ge 2.\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$

d) Cho a,b,c,d là các số dương. Chứng minh rằng: $\dfrac{a-b}{b+c} + \dfrac{b-c}{c+d} + \dfrac{c-d}{d+a} \ge \dfrac{a-d}{a+b}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

d) ĐKXĐ: $x \ne \pm 1; x \ne \dfrac{1}{2}$

$$A = \left(\frac{1 + x + 2(1-x) - (5-x)}{1-x^2}\right).\frac{x^2-1}{1-2x}$$

$$= \frac{-2}{1-x^2}.\frac{x^2-1}{1-2x} = \frac{2}{1-2x}$$

e) A nguyên, mà x nguyên nên $2 \vdots (1-2x)$

Từ đó tìm được $x = 1$ và $x = 0$

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow x = 0$

$|A| = A \Leftrightarrow A > 0$

f) Ta có:

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1-2x} \ge 0 \Leftrightarrow 1 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

Kết hợp với điều kiện : $-1 \ne x < \dfrac{1}{2}$

Câu 2

c) $x^3 - x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x(x-4)(x+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \\ x = -3 \end{array}\right.$

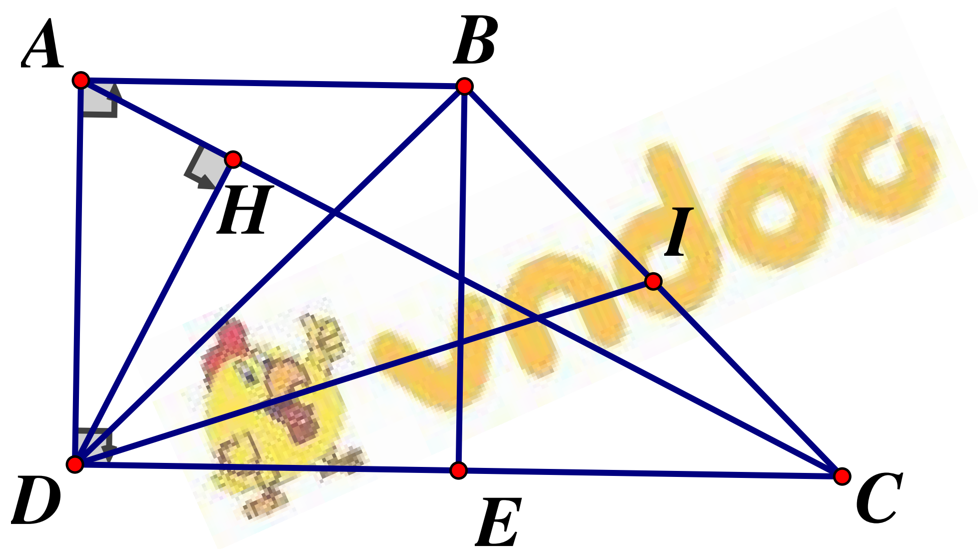
d) $\frac{x-214}{86}+\frac{x-132}{84}+\frac{x-54}{82}=6$

$\Leftrightarrow\left(\frac{x-214}{86}-1\right)+\left(\frac{x-132}{84}-2\right)+\left(\frac{x-54}{82}-3\right)=0$

$\Leftrightarrow\frac{x-300}{86}+\frac{x-300}{84}+\frac{x-300}{82}=0$

$\Leftrightarrow(x-300)\left(\frac{1}{86}+\frac{1}{84}+\frac{1}{82}\right)\Leftrightarrow x-300=0\Leftrightarrow x=300$

Câu 3.



d) Chỉ ra $ABED$ là hình bình hành $(AB//DE, AB=DE)$

Chỉ ra ABED là hình thoi (AB=AD)

Chỉ ra $ABED$ là hình vuông $\left(BAD=90^0\right)$

e) Chỉ ra ΔBEC vuông cân

Từ đó suy ra $AB=AD=a, DC=2a$

Diện tích của hình thang $ABCD$ là : $S=\frac{(AB+CD).AD}{2}=\frac{(a+2a).a}{2}=\frac{3a^2}{2}$

vndoc

f) $ACH = ACD$ (1) (cùng phụ với góc HDC)

Xét ΔADC và ΔIBD vuông tại D và B có:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{IB}{BD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta ADC \sim \Delta IBC$$

Suy ra $ACD = BDI$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $ADH = BDI$

Mà $ADH + BDI = 45^0 \Rightarrow BDI + BDH = 45^0$ hay $HDI = 45^0$

Câu 4.

c)

Ta có:

$A = x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 4y + 4 + 1$

$= (x-y)^2 + (y-2)^2 + 1$

Do $(x-y)^2 \geq 0; (y-2)^2 \geq 0$

Nên $A = (x-y)^2 + (y-2)^2 + 1 \geq 1$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 2$

Vậy GTNN của A là $1 \Leftrightarrow x = y = 2$

d) $B = \dfrac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1} = \dfrac{3(x+1)}{x^2(x+1) + x + 1} = \dfrac{3(x+1)}{(x^2+1)(x+1)} = \dfrac{3}{x^2+1}$

Do $x^2 + 1 \geq 1$ nên $B = \dfrac{3}{x^2+1} \leq 3$. Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$

Vậy $GTLN$ của B là $3 \Leftrightarrow x = 0$

Câu 5

c)

Ta có:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\ge\frac{4}{p-a+p-b}=\frac{2}{c}$$

$$\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge\frac{4}{p-a+p-c}=\frac{2}{a}$$

$$\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-a}\ge\frac{4}{p-c+p-a}=\frac{2}{b}$$

Cộng từng vế ta có điều phải chứng minh

d)

Ta có:

$$\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+a}\ge\frac{a-b}{a+b}\Leftrightarrow\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+a}+\frac{d-a}{a+b}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{c+a}{d+a}+\frac{d+b}{a+b}\ge 4$$

Xét

$$\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{c+a}{d+a}+\frac{d+b}{a+b}-4$$

$$=(a+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\right)+(b+d)\left(\frac{1}{c+d}+\frac{1}{a+b}\right)-4$$

$$\ge(a+c).\frac{4}{a+b+c+d}+(b+d).\frac{4}{a+b+c+d}-4=0$$

$\Rightarrow$ đpcm

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=d$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

MÔN TOÁN 8

Bài 1. (4 điểm)

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$a)\left(x+y+z\right)^3-x^3-y^3-z^3$

$b)x^4+2010x^2+2009x+2010$

Bài 2. (2 điểm) Giải phương trình:

$$\frac{x-241}{17}+\frac{x-220}{19}+\frac{x-195}{21}+\frac{x-166}{23}=10$$

Bài 3. (3 điểm)

Tìm x biết: $\dfrac{\left(2009-x^2\right)+\left(2009-x\right)\left(x-2010\right)+\left(x-2010\right)^2}{\left(2009-x\right)^2-\left(2009-x\right)\left(x-2010\right)+\left(x-2010\right)^2}=\dfrac{19}{49}$

Bài 4. (3 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\dfrac{2010x+2680}{x^2+1}$

Bài 5. (4 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A, D là điểm di động trên cạnh BC. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm D lên AB, AC

a) Xác định vị trí của điểm D để tứ giác $AEDF$ là hình vuông
b) Xác định vị trí của điểm D sao cho $3AD+4EF$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 6. (4 điểm)

Trong tam giác ABC, các điểm A, E, F tương ứng nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $AFE = BFD; BDF = CDE; CED = AEF$

a) Chứng minh rằng: $BDF = BAC$
b) Cho $AB=5, BC=8, CA=7.$ Tính độ dài đoạn $BD.$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a)

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=\left[(x+y+z)^3-x^3\right]-\left(y^3+z^3\right)$$
$$=(y+z)\left[(x+y+z)^2+(x+y+z)x+x^2\right]-(y+z)\left(y^2-yz+z^2\right)$$
$$=(y+z)\left(3x^2+3xy+3yz+3zx\right)=3(y+z)\left[x(x+y)+z(x+y)\right]$$
$$=3(x+y)(x+z)(y+z)$$

b)

$$x^4+2010x^2+2009x+2010=\left(x^4-x\right)+\left(2010x^2+2010x+2010\right)$$
$$=x(x-1)\left(x^2+x+1\right)+2010\left(x^2+x+1\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+2010\right)$$

Bài 2

$$\frac{x-241}{17}+\frac{x-220}{19}+\frac{x-195}{21}+\frac{x-166}{23}=10$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-241}{17}-1+\frac{x-220}{19}-2+\frac{x-195}{21}-3+\frac{x-166}{23}-4=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-258}{17}+\frac{x-258}{19}+\frac{x-258}{21}+\frac{x-258}{23}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-258)\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\frac{1}{23}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x=258$$

Bài 3

$$\frac{\left(2009-x^2\right)+(2009-x)(x-2010)+(x-2010)^2}{(2009-x)^2-(2009-x)(x-2010)+(x-2010)^2}=\frac{19}{49}$$

ĐKXĐ: $x\neq 2009; x\neq 2010.$

Đặt $a=x-2010(a\neq 0)$, ta có hệ thức:

$$\frac{(a+1)^2-(a+1)a+a^2}{(a+1)^2+(a+1)a+a^2}=\frac{19}{49}\Leftrightarrow\frac{a^2+a+1}{3a}=\frac{19}{49}$$

$$\Leftrightarrow 49a^2+49a+49=57a^2+57a+19$$

$$\Leftrightarrow 8a^2+8a-30=0$$

$$\Leftrightarrow (2a+1)^2-4^2=0\Leftrightarrow(2a-3)(2a+5)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\frac{3}{2}\ (tm)\\ a=-\frac{5}{2}(tm)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{4023}{2}\\ x=\frac{4015}{2}\end{array}\right.(TMDK)$$

Bài 4

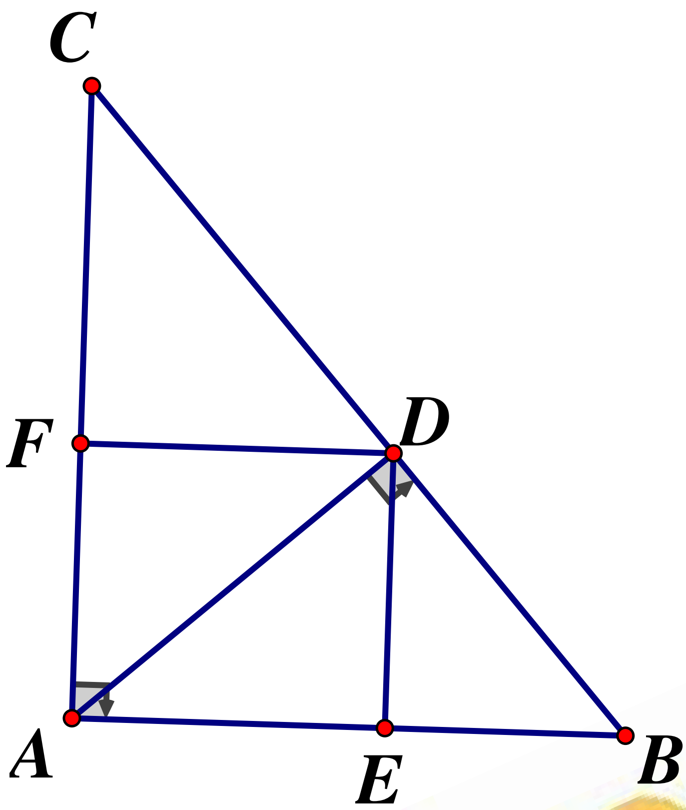
$$A=\frac{2010x+2680}{x^2+1}$$

$$=\frac{-335x^2-335+335x^2+2010x+3015}{x^2+1}=-335+\frac{335(x+3)^2}{x^2+1}\geq -335$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -335 khi $x=-3$

vndoc

Bài 5



a) Tứ giác $AEDF$ là hình chữ nhật (vì $E = A = F = 90^0$)

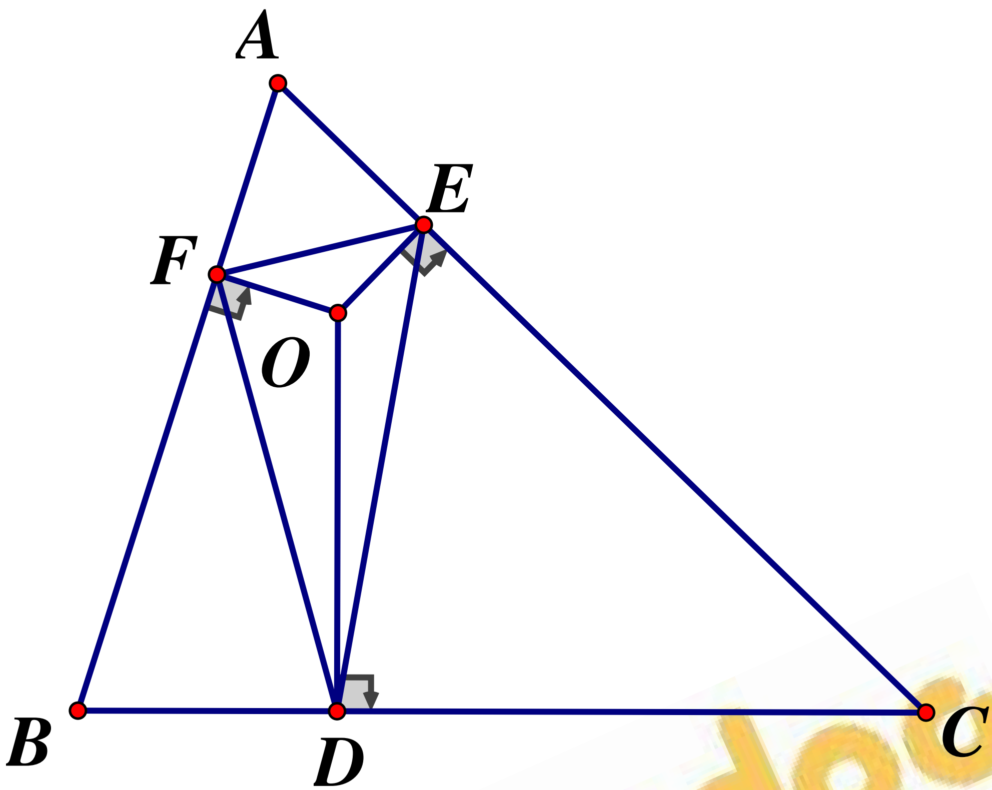
Để tứ giác $AEDF$ là hình vuông thì AD là tia phân giác của BAC

b) Do tứ giác $AEDF$ là hình chữ nhật nên $AD = EF$

$\Rightarrow 3AD + 4EF = 7AD$

$3AD + 4EF$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AD$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow D$ là hình chiếu vuông góc của A lên BC

Bài 6.



a) Đặt $AFE = BFD = \omega, BDF = CDE = \alpha; CED = AEF = \beta$

Ta có: $BAC + \beta + \omega = 180^0\,(*)$

Qua D, E, F lần lượt kẻ các đường thẳng vuông góc với BC, AC, AB cắt nhau tại O.

Suy ra O là giao điểm ba đường phân giác của tam giác DEF

$\Rightarrow OFD + OED + ODF = 90^0 (1)$

Ta có:

$OFD + \omega + OED + \beta + ODF + \alpha = 270^0 (2)$

$(1) \& (2) \Rightarrow \alpha + \beta + \omega = 180^0\,(**)$

Từ $(*) \& (**) \Rightarrow BAC = \alpha = BDF$

b) Chứng minh tương tự câu a) ta có:

$B=\beta, C=\omega \Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta DBF \sim \Delta DEC \sim \Delta ABC$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{BD}{BF}=\dfrac{BA}{BC}=\dfrac{5}{8} \\ \dfrac{CD}{CE}=\dfrac{CA}{CB}=\dfrac{7}{8} \\ \dfrac{AE}{AF}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{5}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD=\dfrac{5BF}{8} \\ CD=\dfrac{7CE}{8} \\ 7AE=5AF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD=\dfrac{5BF}{8} \\ CD=\dfrac{7CE}{8} \\ 7(7-CE)=5(5-BF) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD=\dfrac{5BF}{8} \\ CD=\dfrac{7CE}{8} \\ 7CE-5BF=24 \end{cases}$$

$\Rightarrow CD-BD=3 \quad (3)$

Ta lại có: $CD+BD=8 \quad (4)$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow BD=2,5$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 8 CẤP HUYỆN

NĂM HỌC 2015-2016

Câu 1. (2 điểm)

Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A=(a+1)(a+3)(a+5)(a+7)+15$

Câu 2. (2 điểm)

Với giá trị nào của a và b thì đa thức $(x-a)(x-10)+1$ phân tích thành tích của một đa thức bậc nhất có hệ số nguyên

Câu 3. (1 điểm)

Tìm các số nguyên a và b để đa thức $A(x)=x^4-3x^3+ax+b$ chia hết cho đa thức $B(x)=x^2-3x+4$

Câu 4. (3 điểm)

Cho tam giác ABC, đường cao AH, vẽ phân giác Hx của góc AHB và phân giác Hy của AHC. Kẻ AD vuông góc với Hx, AE vuông góc với Hy

Chứng minh rằng tứ giác $ADHE$ là hình vuông.

Câu 5. (2 điểm)

Chứng minh rằng: $P = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{100^2} < 1$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$A=(a+1)(a+3)(a+5)(a+7)+15$$
$$=(a+1)(a+7)(a+3)(a+5)+15$$
$$=\left(a^2+8a+7\right)\left(a^2+8a+15\right)+15$$
$$=\left(a^2+8a\right)^2+22\left(a^2+8a\right)+120$$
$$=\left(a^2+8a+11\right)^2-1^2$$
$$=\left(a^2+8a+12\right)\left(a^2+8a+10\right)$$
$$=(a+2)(a+6)\left(a^2+8a+10\right)$$

Câu 2.

Giả sử :

$$(x-a)(x-10)+1=(x-m)(x-n)(m,n\in\mathbb{Z})$$
$$\Leftrightarrow x^2-(a+10)x+10a+1=x^2-(m+n)x+mn$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}m+n=a+10\\mn=10a+1\end{cases}$$

Khử a ta có:

$$mn=10(m+n-10)+1$$
$$\Leftrightarrow mn-10m-10n+100=1$$
$$\Leftrightarrow m(n-10)-10(n-10)=1$$

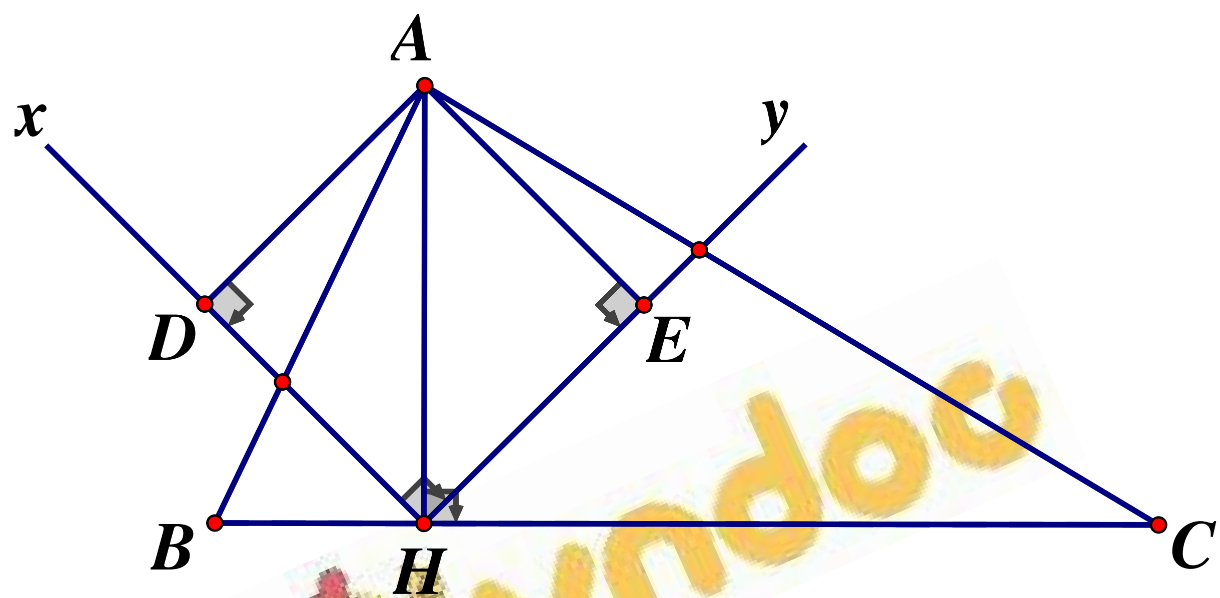
Vì m,n nguyên ta có: $\begin{cases}m-10=1\\n-10=1\end{cases}$ & $\begin{cases}m-10=-1\\n-10=-1\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=12\\a=8\end{array}\right.$

Câu 3. Ta có:

$$A(x) = B(x).\left(x^2 - 1\right) + \left(a - 3\right)x + b + 4$$

Để $A(x) \vdots B(x)$ thì $\begin{cases} a - 3 = 0 \\ b + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases}$

Câu 4.



Tứ giác $ADHE$ là hình vuông

Hx là phân giác của AHB; Hy là phân giác của AHC mà AHB và AHC là hai góc kề bù nên $Hx \perp Hy$

Hay $DHE = 90^0$, mặt khác: $AHD = AEH = 90^0$ nên tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật (1)

$AHD = \dfrac{AHB}{2} = \dfrac{90^0}{2} = 45^0$, Do $AHE = \dfrac{AHC}{2} = \dfrac{90^0}{2} = 45^0$

Hay HA là phân giác DHE (2)

Từ (1) và (2) ta có tứ giác $ADHE$ là hình vuông.

Câu 5.

$$P=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+....+\frac{1}{100^2}$$

$$=\frac{1}{2.2}+\frac{1}{3.3}+\frac{1}{4.4}+.....+\frac{1}{100.100}$$

$$<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+.....+\frac{1}{99.100}$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}<1$$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 8 CẤP HUYỆN

NĂM HỌC 2016-2017

Câu 1. (2 điểm)

Cho $P=\dfrac{a^3-4a^2-a+4}{a^3-7a^2+14a-8}$

a) Rút gọn P

b) Tìm giá trị nguyên của a để P nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (2 điểm)

a) Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9

b) Tìm các giá trị của x để biểu thức:

$P=(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$ có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Câu 3. (2 điểm)

a) Giải phương trình: $\dfrac{1}{x^2+9x+20}+\dfrac{1}{x^2+11x+30}+\dfrac{1}{x^2+13x+42}=\dfrac{1}{18}$

b) Cho a,b,c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A=\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3$$

Câu 4. (3 điểm)

Cho tam giác đều ABC, gọi M là trung điểm của BC. Một góc xMy bằng 60^0 quay quanh điểm M sao cho 2 cạnh Mx, My luôn cắt cạnh AB và AC lần lượt tại D và E. Chứng minh:

a) $BD.CE = \frac{BC^2}{4}$

b) DM, EM lần lượt là tia phân giác của các góc BDE và CED

c) Chu vi tam giác ADE không đổi

Câu 5. (1 điểm)

Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a)

$a^3 - 4a^2 - a + 4 = (a-1)(a+1)(a-4)$

$a^3 - 7a^2 + 14a - 8 = (a-2)(a-1)(a-4)$

Nêu ĐKXĐ: $a \neq 1; a \neq 2; a \neq 4$

Rút gọn $P = \frac{a+1}{a-2}$

b)

$P = \frac{a-2+3}{a-2} = 1 + \frac{3}{a-2}$; ta thấy P nguyên khi $a-2$ là ước của 3, mà $U(3) = \{-1;1;-3;3\}$, từ đó tìm được $a \in \{-1;3;5\}$

Câu 2.

a) Gọi 2 số phải tìm là a và b, ta có $a+b$ chia hết cho 3.

Ta có:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)\left[(a^2+2ab+b^2)-3ab\right]=(a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right]$$

Vì $a+b$ chia hết cho 3 nên $(a+b)^2-3ab$ chia hết cho 3

Do vậy $(a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right]$ chia hết cho 9

b) $P=(x-1)(x+6)(x+2)(x+3)=(x^2+5x-6)(x^2+5x+6)=(x^2+5x)^2-36$

Ta thấy $(x^2+5x)^2\geq 0$ nên $P=(x^2+5x)^2-36\geq -36$

Do dó $MinP=-36\Leftrightarrow x^2+5x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-5\end{array}\right.$

Câu 3. a)

$x^2+9x+20=(x+4)(x+5)$

$x^2+11x+30=(x+6)(x+5)$

$x^2+13x+42=(x+6)(x+7)$

ĐKXĐ: $x\neq -4; x\neq -5; x\neq -6; x\neq -7$

Phương trình trở thành:

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)}+\frac{1}{(x+5)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+7)}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow 18(x+7)-18(x+4)=(x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-13 \\ x=2 \end{array}\right.$$

b) Đặt $b+c-a=x>0; c+a-b=y>0; a+b-c=z>0$

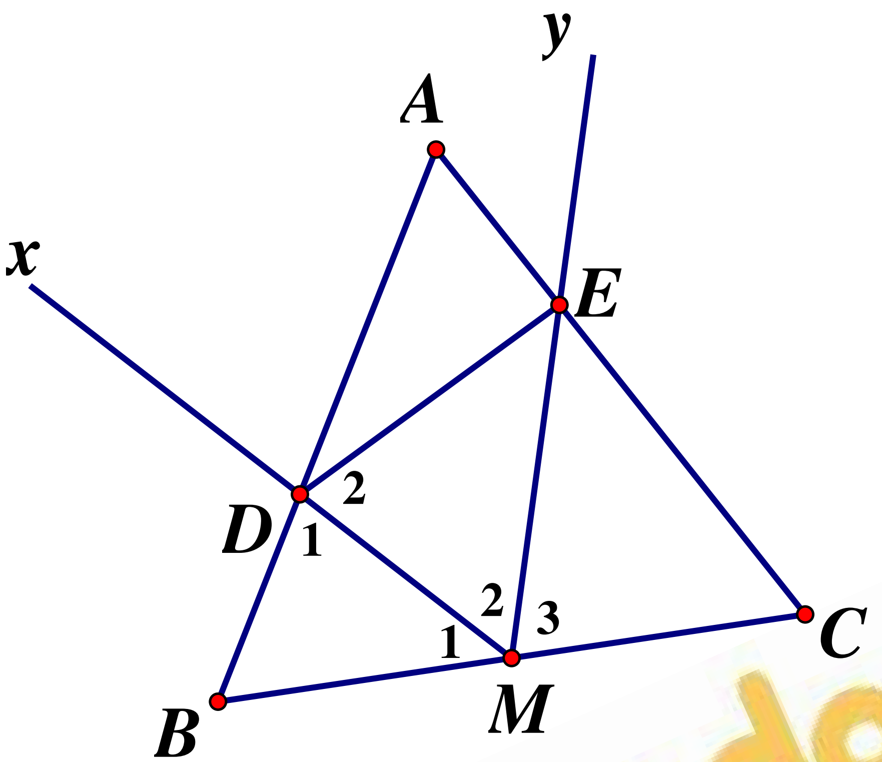
từ đó suy ra $a=\dfrac{y+z}{2}; b=\dfrac{x+z}{2}; c=\dfrac{x+y}{2};$

Thay vào ta được

$$A=\frac{y+z}{2x}+\frac{x+z}{2y}+\frac{x+y}{2z}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\right]$$

Từ đó suy ra $A\geq \dfrac{1}{2}(2+2+2)$ hay $A\geq 3$

Câu 4.



a) Trong tam giác BDM ta có: $D_1 = 120^0 - M_1$

Vì $M_2 = 60^0$ nên ta có: $M_3 = 120^0 - M_1$

Suy ra $D_1 = M_3$. Chứng minh $\Delta BMD \sim \Delta CEM$ (1)

Suy ra $\dfrac{BD}{BM} = \dfrac{CM}{CE}$, Từ đó $BD.CE = BM.CM$

Vì $BM = CM = \dfrac{BC}{2}$, nên ta có: $BD.CE = \dfrac{BC^2}{4}$

b) Từ (1) suy ra $\dfrac{BD}{CM} = \dfrac{MD}{EM}$

Chứng minh $\Delta BMD \sim \Delta MED \Rightarrow D_1 = D_2$, do đó DM là tia phân giác BDE

Chứng minh tương tự ta có : EM là tia phân giác CED

c) Gọi H, I, K là hình chiếu của M trên AB, DE, AC.

Chứng minh $DH = DI, EI = EK$

Tính chu vi tam giác bằng $2AH$ - không đổi

Câu 5.

Gọi các cạnh của tam giác vuông là x, y, z trong đó cạnh huyền là z

(x, y, z là các số nguyên dương)

Ta có: $xy = 2(x+y+z)(1)$ và $x^2 + y^2 = z^2 (2)$

Từ (2) suy ra $z^2 = (x+y)^2 - 2xy$, thay (1) vào ta có:

$$\begin{aligned}
&z^2 = (x+y)^2 - 4(x+y+z)\\
&z^2 + 4z = (x+y)^2 - 4(x+y)\\
&z^2 + 4z + 4 = (x+y)^2 - 4(x+y) + 4\\
&(z+2)^2 = (x+y-2)^2
\end{aligned}$$

Suy ra $z+2 = x+y-2 \Rightarrow z = x+y-4$; thay vào (1) ta được:

$$\begin{aligned}
&xy = 2(x+y+x+y-4)\\
&xy - 4x - 4y = -8\\
&(x-4)(y-4)8 = 1.8 = 2.4
\end{aligned}$$

Từ đó ta tìm được các giá trị của x, y, z là:

$(x; y; z) \in \{(5;12;13);(12;5;13);(6;8;10);(8;6;10)\}$

ĐỀ HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

MÔN : TOÁN 8

NĂM HỌC 2012-2013

Câu 1.

a) Phân tích các đa thức ra thừa số:

x^4+4

$(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24$

b) Giải phương trình: $x^4-30x^2+31x-30=0$

c) Cho $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=1$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}=0$

Câu 2. Cho biểu thức : $A=\left(\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{2}{2-x}+\dfrac{1}{x+2}\right):\left(x-2+\dfrac{10-x^2}{x+2}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A, biết $|x|=\dfrac{1}{2}$

c) Tìm giá trị của x để $A<0$

d) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$, M là một điểm tùy ý trên đường chéo BD. Kẻ $ME\perp AB$, $MF\perp AD$.

a) Chứng minh: $DE=CF$

b) Chứng minh ba đường thẳng : DE, BF, CM đồng quy

c) Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác $AEMF$ lớn nhất.

Câu 4.

a) Cho 3 số dương a,b,c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge 9$

b) Cho a,b dương và $a^{2000}+b^{2000}=a^{2001}+b^{2001}=a^{2002}+b^{2002}$

Tính $a^{2011}+b^{2011}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a)

$$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=\left(x^2+2\right)^2-(2x)^2=\left(x^2+2x+2\right)\left(x^2-2x+2\right)$$

$$(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24$$
$$=\left(x^2+7x+11-1\right)\left(x^2+7x+11+1\right)-24$$
$$=\left[\left(x^2+7x+11\right)^2-1\right]-24$$
$$=\left(x^2+7x+11\right)^2-5^2$$
$$=\left(x^2+7x+6\right)\left(x^2+7x+16\right)$$
$$=(x+1)(x+2)\left(x^2+7x+16\right)$$

b)

$$x^4-30x^2+31x-30=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x^2-x+1\right)(x-5)(x+6)=0(*)$$
$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0\qquad\forall x$$
Vì $\Rightarrow(*)\Leftrightarrow(x-5)(x+6)=0$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-5=0\\x+6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\x=-6\end{array}\right.$$

c) Nhân cả 2 vế của $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$ với $a+b+c$; rút gọn $\Rightarrow dpcm$

Câu 2.

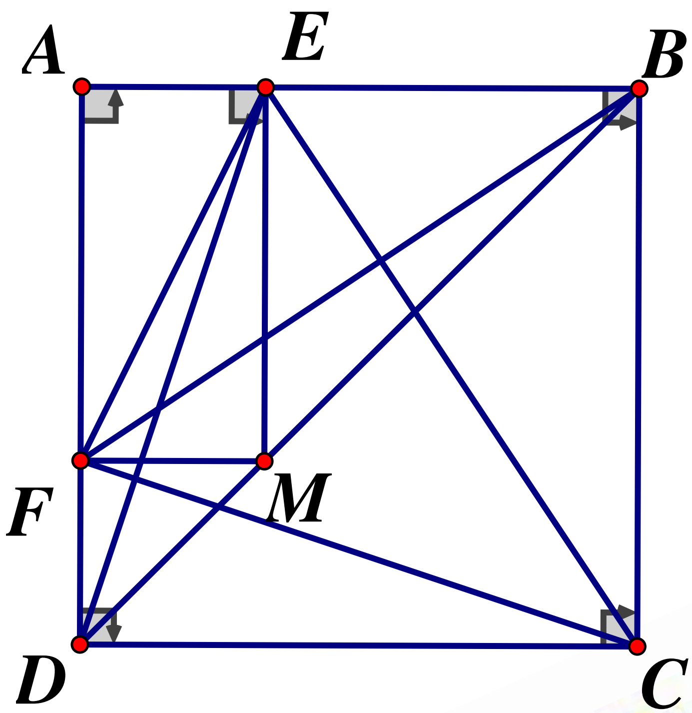
a) Rút gọn được kết quả $A=\frac{-1}{x-2}$

b) $|x|=\frac{1}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}A=\frac{4}{3}\\A=\frac{4}{5}\end{array}\right.$

c) $A<0\Leftrightarrow x>2$

d) $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{-1}{x-2} \in \mathbb{Z} .... \Rightarrow x \in \{1;3\}$

Câu 3.



a) Chứng minh: $AE = FM = DF \Rightarrow \Delta AED = \Delta DFC \Rightarrow dfcm$

b) DE, BF, CM là ba đường cao của $\Delta EFC \Rightarrow dfcm$

c) Có chu vi hình chữ nhật $AEMF = 2a$ không đổi

$\Rightarrow ME + MF = a$ không đổi

$\Rightarrow S_{AEMF} = ME.MF$ lớn nhất $\Leftrightarrow ME = MF$ ($AEMF$ là hình vuông)

$\Rightarrow M$ là trung điểm của BD.

Câu 4.

a) Từ $a+b+c=1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a} = 1 + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a} \\ \dfrac{1}{b} = 1 + \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} \\ \dfrac{1}{c} = 1 + \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

vndoc

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

b)

$$\left(a^{2001}+b^{2001}\right).(a+b)-\left(a^{2000}+b^{2000}\right).ab=a^{2002}+b^{2002}$$

$$\Rightarrow (a+b)-ab=1 \Leftrightarrow (a-1)(b-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ b=1 \end{array}\right.$$

Với $a=1 \Rightarrow b^{2000}=b^{2001} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=1(tm) \\ b=0(ktm) \end{array}\right.$

Với $b=1 \Rightarrow a^{2000}=a^{2001} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=1(tm) \\ a=0(ktm) \end{array}\right.$

Vậy $a=1; b=1 \Rightarrow a^{2011}+b^{2011}=2$

PHÒNG GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
HUYỆN HOẰNG HÓA

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 8
Năm học : 2010-2011
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi : 18/4/2011
Thời gian: 120 phút

Bài 1. (3 điểm)

Cho biểu thức: $A=\left[\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+1}.\left(\frac{x+1}{3x}-x-1\right)\right]:\frac{x-1}{x}$

a) Rút gọn A
b) Tìm giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Bài 2. (4 điểm)

a) Chứng minh rằng: $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$ với $a+b \geq 1$
b) Ký hiệu $[a]$ (phần nguyên của a) là số nguyên lớn nhất không vượt quá a. Tìm x biết rằng: $\left[\frac{34x+19}{11}\right]=2x+1$

Bài 3. (3 điểm)

Lúc 7 giờ, một ca nô xuôi dòng từ A đến B cách nhau $36km$, rồi ngay lập tức quay trở về A lúc 11 giờ 30 phút. Tính vận tốc ca nô khi xuôi dòng, biết vận tốc dòng nước chảy là $6km/h$

Bài 4. (5 điểm)

a) Hãy tính số bị chia, số chia và thương số trong phép chia sau đây:

$\overline{abcd} : \overline{dcba} = q$ biết rằng cả ba số đều là bình phương của những số nguyên (những chữ khác nhau là các chữ số khác nhau)

b) Cho a,b,c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{a+b-c}\ge 3$$

Bài 5. (5 điểm)

Cho đoạn thẳng $AB = a$. Gọi M là một điểm nằm giữa A và B. Vẽ về một phía của AB các hình vuông $AMNP, BMLK$ có tâm theo thứ tự là C, D. Gọi I là trung điểm của CD.

a) Tính khoảng cách từ I đến AB

b) Khi điểm M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì điểm I di chuyển trên đường nào ?

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) ĐKXĐ: $x \neq \pm 1; x \neq 0$

$$A=\left[\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+1}.\left(\frac{x+1}{3x}-x-1\right)\right]:\frac{x-1}{x}$$

$$=\left[\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+1}.\left(\frac{x+1-3x^2-3x}{3x}\right)\right].\frac{x}{x-1}=\left[\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+1}.\frac{1-2x-3x^2}{3x}\right].\frac{x}{x-1}$$

$$=\left[\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+1}.\frac{(x+1)(1-3x)}{3x}\right].\frac{x}{x-1}=\frac{2-2+6x}{3x}.\frac{x}{x-1}=\frac{2x}{x-1}$$

b) $$A=\frac{2x}{x-1}=\frac{2(x-1)+2}{x-1}=2+\frac{2}{x-1}$$

Để A có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \dfrac{2}{x-1}$ có giá trị nguyên $\Rightarrow x \in U(2)=\{\pm 1;\pm 2\}$

$\Rightarrow x \in \{-1;0;2;3\}$ vì $x \neq -1; x \neq 0 \Rightarrow \{x\}=\{2;3\}$

Bài 2.

a) Theo bài ra ta có: $a+b \geq 1 \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \geq 1$ (1)

Mặt khác : $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \geq 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $2\left(a^2+b^2\right) \geq 1 \Leftrightarrow a^2+b^2 \geq \dfrac{1}{2}$

b) $$\left[\frac{34x+19}{11}\right]=2x+1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{34x+19}{11}-(2x+1)<1 \text{ và } 2x+1 \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 12x+8<11 \Leftrightarrow -8 \leq 12x<3 \Leftrightarrow \frac{-4}{3} \leq 2x<\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-1}{3} \leq 2x+1<\frac{3}{2}$$

Do $2x+1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}2x+1=0\\2x+1=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\x=0\end{array}\right.$

Bài 3.

Gọi $x(km/h)$ là vận tốc ca nô xuôi dòng $(x>12)$

Vận tốc ca nô khi nước lặng: $x-6(km/h)$

vndoc

Vận tốc ca nô khi ngược dòng: $x-12(km/h)$

Thời gian cả đi và về của ca nô là $4,5$ giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{36}{x}+\frac{36}{x-12}=\frac{9}{2}\Leftrightarrow (x-4)(x-24)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4(ktm) \\ x=24(tm)\end{array}\right.$$

Vậy vận tốc của ca nô khi xuôi dòng là $24km/h$

Bài 4.

a) $\overline{abcd}:\overline{dcba}=q$

Vì $q\neq 1\Rightarrow \left[\begin{array}{l} q=4 \\ q=9\end{array}\right.\Rightarrow a,d$ phải là những số thuộc $\{1;4;5;6;9\}, a,d\neq 0$

Do $\overline{abcd}=\overline{dcba}\times q$ nên $d<3\Rightarrow d=1$

Giả sử $q=4$ khi đó $\overline{1cba}.4=\overline{abc1}$ (vô lý) vì $\overline{1cba}.4$ phải là một số chẵn nên $q=9$

Với q=9 ta có: $\overline{1cba}\times 9=\overline{abc1}$ suy ra $a=9, c<2$ vì tích $\overline{1cba}\times 9$ là số có 4 chữ số nên ta lại có $c\neq d$ tức là $c\neq 1\Rightarrow c=0$

Ta thấy $\overline{abcd}=\overline{9b01}=\overline{10b9}\times 9$ vậy $\overline{9b01}$ là số chia hết cho 9 nên $b=8$

Tóm lại ta có: $9801:1089=9$

b) Đặt $x=b+c-a; y=a+c-b; z=a+b-c\Rightarrow x,y,z>0$

$\Rightarrow x+y+z=a+b+c$

$$2a=a+b+c-(b+c-a)=x+y+z-x=y+z\Rightarrow a=\frac{y+z}{2}$$

Tương tự: $b=\dfrac{x+z}{2}; c=\dfrac{x+y}{2}$

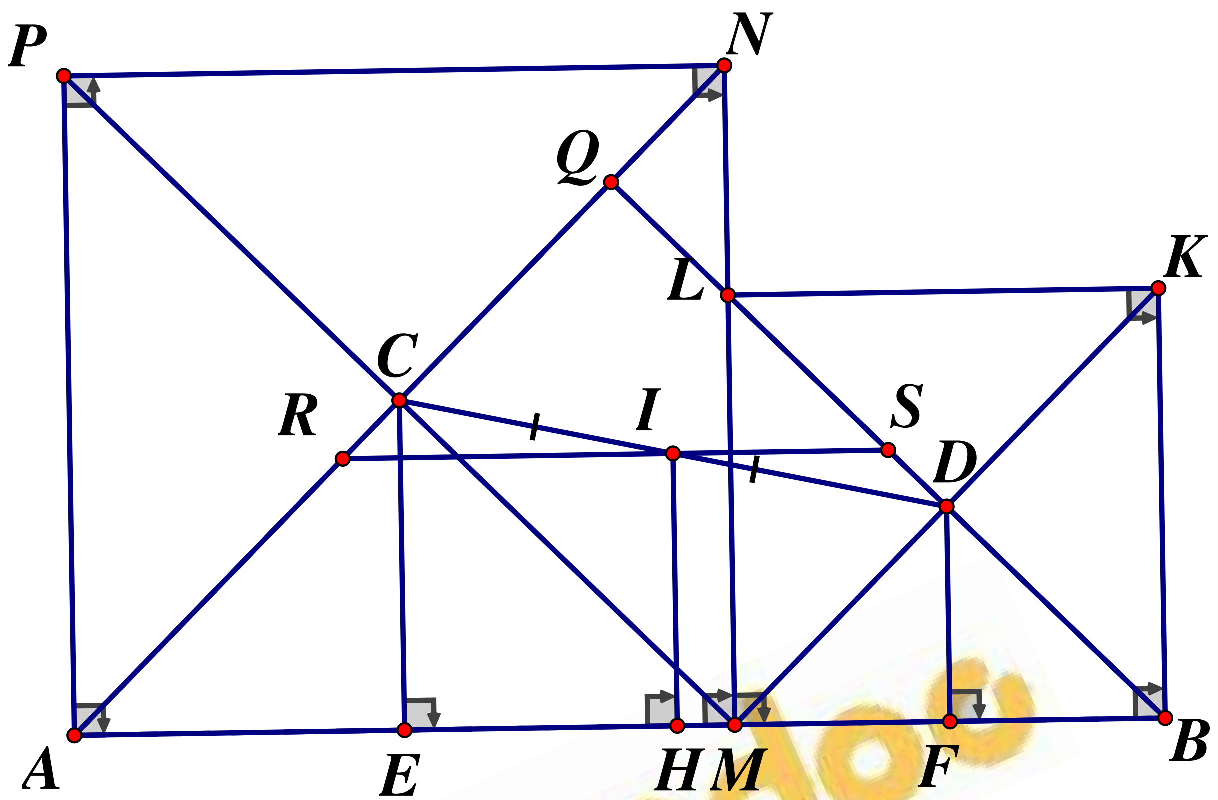
BĐT chứng minh tương đương với: $\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{x+z}{y}+\dfrac{x+y}{z}\geq 6$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\geq 6 \text{ do } \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh

vndoc

Bài 5.



a) Kẻ CE, IH, DF cùng vuông góc với AB suy ra tứ giác $CDFE$ là hình thang vuông.

Chứng minh được: $CE = \dfrac{AM}{2}, DF = \dfrac{BM}{2} \Rightarrow CE + DF = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2} \Rightarrow IH = \dfrac{a}{4}$

b) Khi M di chuyển trên AB thì I di chuyển trên đoạn RS song song với AB và cách AB một khoảng bằng $\dfrac{a}{4}$(R là trung điểm của AQ)

S là trung điểm của BQ, Q là giao điểm của BL và AN)

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHƯỚC HIỆP

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC : 2015-2016
Môn: TOÁN – LỚP 8
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1. (3,5 điểm)

a) Chứng minh $n^3 + 17n$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{Z}$

vndoc

b) Rút gọn biểu thức: $\dfrac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1}$

Bài 2. (4,5 điểm).

a) Một vật thể chuyển động từ A đến B theo cách sau: đi được $4m$ thì dừng lại 1 giây, rồi đi tiếp $8m$ dừng lai 2 giây, rồi đi tiếp $12m$ dừng lại 3 giây… Cứ như vậy đi từ A đến B kể cả dừng hết tất cả 155 giây. Biết rằng khi đi vật thể luôn có vận tốc $2m/$ giây. Tính khoảng cách từ A đến B.

b) Biết $a^3-3ab^2=5$ và $b^3-3a^2b=10$. Tính $M=\dfrac{a^2+b^2}{2018}$

Bài 3. (4 điểm)

a) Giải phương trình: $(x^2-x+1)(x^2-x+2)=12$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x^2+y^2-4(x+y)-2010$

Bài 4. (4,5 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A, phân giác BD. Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của BD, BC, DC

a) Chứng minh $APQR$ là hình thang cân

b) Biết $AB=6cm, AC=8cm.$ Tính độ dài của AR

Bài 5. (2,5 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD.$ Một đường thẳng qua B cắt cạnh CD tại M, cắt đường chéo AC tại N và cắt đường thẳng AD tại K. Chứng minh:

$$\frac{1}{BN}=\frac{1}{BM}+\frac{1}{BK}$$

Bài 6. (1,0 điểm)

Biết a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$(a^2+b^2-c^2)^2-4a^2b^2<0$$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) $n^3+17n=n^3-n+18n=n(n-1)(n+1)+18n$

Vì $n(n-1)(n+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3, $(2,3)=1$ nên chia hết cho 6

$18n \vdots 6$, suy ra điều phải chứng minh

vndoc

b)

$$\frac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1}=\frac{x^2+x^2a+a+a^2+a^2x^2+1}{x^2-x^2a-a+a^2+a^2x^2+1}$$

$$=\frac{x^2+x^2a+a^2x^2+1+a+a^2}{x^2-x^2a+a^2x^2+1-a+a^2}=\frac{x^2(1+a+a^2)+(1+a+a^2)}{x^2(1-a+a^2)+(1-a+a^2)}$$

$$=\frac{(x^2+1)(1+a+a^2)}{(x^2+1)(1-a+a^2)}=\frac{1+a+a^2}{1-a+a^2}$$

Bài 2.

a) Gọi x là số lần đi $(x\in\mathbb{N}, x>0)$, số lần dừng là $x-1$

Thời gian đi

$$\frac{4}{2}+\frac{8}{2}+\frac{12}{2}+.....+\frac{4x}{2}=2+4+6+.....+2x$$

$$=2(1+2+3+....+x)=x(x+1)$$

Thời gian dừng:

$$1+2+3+.....+(x-1)=\frac{(x-1+1)(x-1)}{2}=\frac{x(x-1)}{2}$$

Lập được phương trình

$$\frac{x(x-1)}{2}+x(x+1)=155\Leftrightarrow 3x^2+x-310\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=10\ (tm)\\ x=\dfrac{-31}{3}(ktm)\end{array}\right.$$

Khoảng cách AB là $10.(10+1).2=220(m)$

b)

$$a^3-3ab^2=5\Rightarrow a^6-6a^4b^2+9a^2b^4=25$$

$$b^3-3a^2b=10\Rightarrow b^6-6a^2b^4+9a^4b^2=100$$

$$\Rightarrow a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6=125$$

$$\Rightarrow (a^2+b^2)^3=5^3\Rightarrow\frac{a^2+b^2}{2018}=\frac{5}{2018}$$

Bài 3.

a) $\left(x^2-x+1\right)\left(x^2-x+2\right)=12$

Đặt $x^2-x+1=X$ có

$X^2+X-12=0$

$\Leftrightarrow X^2+4X-3X-12=0 \Leftrightarrow X\left(X+4\right)-3\left(X+4\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(X-3\right)\left(X+4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=3 \\ X=-4 \end{array}\right.$

$X=-4 \Rightarrow x^2-x+5=0 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}=0\ (VN)$

$X=3 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow \left(x^2-2x\right)+\left(x-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(x-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

b)

$P=x^2+y^2-4\left(x+y\right)-2010$

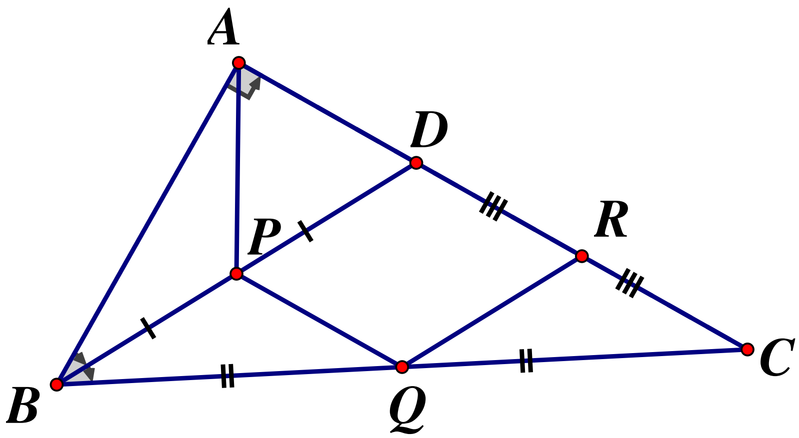
$=\left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2-4y+4\right)-2018$

$=\left(x-2\right)^2+\left(y-2\right)^2-2018 \geq -2018$

Vậy $P_{\min}=-2018 \Leftrightarrow x=y=2$

vndoc

Bài 4.



a) PQ là đường trung bình tam giác BDC, suy ra $PQ//AR$ nên $APQR$ là hình thang.

$AQ = \frac{1}{2}BC$ (trung tuyến tam giác vuông ABC)

$PR = \frac{1}{2}BC$ (đường trung bình tam giác DBC)

Suy ra $AQ = PR \Rightarrow APQR$ là hình thang cân

b) Tính được $BC = 10cm$

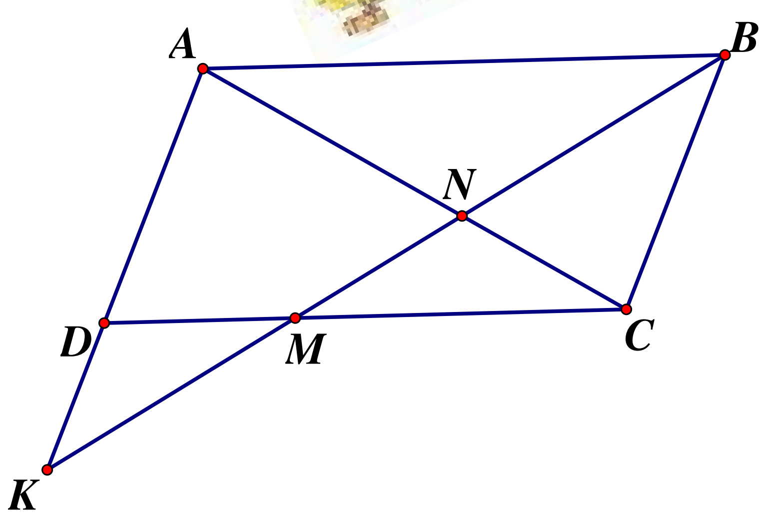
Tính chất đường phân giác trong của ΔABC

$\Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \frac{DA}{AC} = \frac{BA}{BC + BC}$

Thay số tính đúng $AD = 3cm, DC = 5cm, DR = 2,5cm$

Kết quả $AR = 5,5cm$

Bài 5.



AB//AC (hai cạnh đối diện hình bình hành). Theo định lý Talet có:

vndoc

$$\frac{MN}{AB}=\frac{NC}{AN}=\frac{MN}{NB}\Rightarrow\frac{MC+AB}{AB}=\frac{MN+NB}{BN}=\frac{BM}{BN}\ (1)$$

$$\frac{KM}{BK}=\frac{KD}{KA}=\frac{MD}{AB}\Rightarrow\frac{BK-KM}{BK}=\frac{AB-MD}{AB}\Rightarrow\frac{BM}{BK}=\frac{AB-MD}{AB}\qquad(2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\frac{BM}{BN}-\frac{BM}{BK}=\frac{AB+MC}{AB}-\frac{AB-MD}{AB}=\frac{MC+MD}{AB}$

Mà $MC+MD=CD=AB$ nên $\frac{BM}{BN}-\frac{BM}{BK}=1$(Điều phải chứng minh)

Bài 6.

$$\left(a^2+b^2-c^2\right)^2-4a^2b^2=\left(a^2+b^2-c^2+2ab\right)\left(a^2+b^2-c^2-2ab\right)$$

$$=\left[\left(a+b\right)^2-c^2\right]\left[\left(a-b\right)^2-c^2\right]$$

$$=-\left(a+b+c\right)\left(a+b-c\right)\left(a+c-b\right)\left(b+c-a\right)$$

Tổng hai cạnh tam giác lớn hơn cạnh thứ ba nên cả 4 thừa số đều dương, suy ra điều phải chứng minh.

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 8. Năm học: 2017-2018

Câu 1: ***(4,0 điểm)*** Chứng minh rằng:

a) $A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ...+ 3^{11}$ chia hết cho 40.

b) $B = \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{100^2}<1.$

Câu 2: ***(4,0 điểm)***

a) Cho a + b + c = 0, chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3=3abc$

b) So sánh hai số sau: $C = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ và $D = 2^{32}$.

Câu 3: ***(4,0 điểm)***

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $E = 2x^2 – 8x + 1$.

Câu 4: ***(3,0 điểm)*** Chứng minh rằng trong một tứ giác, tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi của tứ giác ấy.

Câu 5*: (4,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC). Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Qua I vẽ IM vuông góc với AB tại M và IN vuông góc với AC tại N.

a) Chứng minh tứ giác AMIN là hình chữ nhật.

b) Gọi D là điểm đối xứng của I qua N. Chứng minh tứ giác ADCI là hình thoi.

c) Đường thẳng BN cắt DC tại K. Chứng minh rằng $DK = \frac{1}{3}DC$

Câu 6: *(1,0 điểm)*

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

"HẾT"

vndoc

C. **ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM**

Câu 1: *(4,0 điểm)* Chứng minh rằng:

a) A = $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{11}$ chia hết cho 40.

b) B = $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{100^2} < 1.$

CÂU 1	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
a	$A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ...+ 3^{11}$ $= (1 + 3 + 3^2+ 3^3) + (3^4 + 3^5 +3^6 + 3^7)+ (3^8 + 3^9+ 3^{10} + 3^{11})$ $= (1 + 3 + 3^2+ 3^3) + 3^4. (1 + 3 + 3^2+ 3^3) + 3^8(1 + 3 + 3^2+ 3^3)$ $= 40 + 3^4. 40 + 3^8. 40$ $= 40. (1 + 3^4 + 3^8) \vdots 40$ Vậy $A \vdots 40$	 0,5 0,5 0,5 0,5
b	$B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{100^2}$ $= \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + ... + \frac{1}{100.100}$ $< \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{99.100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$ $= 1 - \frac{1}{100} < 1$ Vậy B < 1	 0,5 0,5 0,5 0,5

Câu 2: ***(4,0 điểm)***

a) Cho a + b + c = 0, Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3=3abc$

b) So sánh hai số sau: $C = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ và $D = 2^{32}$

CÂU 2	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
a	Ta có: a + b + c = 0 suy ra a + b = - c Mặt khác: $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ Suy ra $(- c)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(-c)$ $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$(đpcm)	 0,5 0,5 0,5 0,5
b	$C = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ $(2-1)C = (2-1) (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ $C = (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ $C = (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$	 0,25 0,25 0,25

	$C = (2^8-1)(2^8+1)(2^{16}+1)$	0,25
	$C = (2^{16}-1)(2^{16}+1)$	0,25
	$C = 2^{32}-1$	0,25
	Vì $2^{32} - 1 < 2^{32}$ nên C < D.	0,5

<u>Câu 3</u>*: (4,0 điểm)*

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $E = 2x^2 - 8x + 1$.

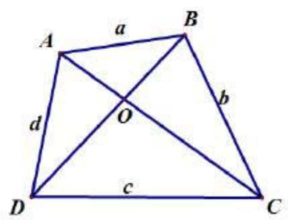
CÂU 3	**ĐÁP ÁN**	**ĐIỂM**
a	$x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$	
	$= x^4 + (x^2 + 2018x^2) + 2018x + (2018 + 1) + x^3 - x^3$	0,5
	$= (x^4 + x^3 + x^2) + (2018x^2 + 2018x + 2018) - (x^3 - 1)$	0,5
	$= x^2(x^2 + x + 1) + 2018(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$	0,5
	$= (x^2 + x + 1)(x^2 + 2018 - x + 1)$	0,25
	$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2019)$	0,25
b	$E = 2x^2 - 8x + 1$	
	$= 2x^2 - 8x + 8 - 7$	0,5
	$= 2(x^2 - 4x + 4) - 7$	0,5
	$= 2(x - 2)^2 - 7 \geq -7$	0,5
	Vậy giá trị nhỏ nhất của E = - 7 khi x = 2	0,5

<u>Câu 4</u>*: (3,0 điểm)*

Chứng minh rằng trong một tứ giác, tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi của tứ giác ấy.

ĐÁP ÁN	**ĐIỂM**

vndoc

	
Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD của tứ giác ABCD.	
Đặt AB = a, BC = b, CD = c, DA = d.	
Xét ΔAOB, ta có: OA + OB > AB (Quan hệ giữa ba cạnh của tam giác).	
Xét ΔCOD, ta có: OC + OD > CD (Quan hệ giữa ba cạnh của tam giác).	0,25
Suy ra: OA + OB + OC + OD > AB + CD	0,25
$\Rightarrow AC + BD > AB + CD$	
$\Rightarrow AC + BD > a + c$ (1)	0,25
Chứng minh tương tự:	
$AC + BD > AD + BC$	0,25
$\Rightarrow AC + BD > d + b$ (2)	
Từ (1) và (2) suy ra 2(AC + BD) > a + c + d + b	0,25
$\Rightarrow \quad AC + BD > \dfrac{a + c + d + b}{2}$ (*)	0,25
	0,25
Xét ΔABC, ta có: AC < a + b	
Xét ΔADC, ta có: AC < d + c	
Suy ra: 2AC < a +b + c + d	

$\Rightarrow AC < \dfrac{a+c+d+b}{2}$ (3) Chứng minh tương tự: $BD < \dfrac{a+c+d+b}{2}$ (**) (4) Từ (3) và (4) suy ra: AC + BD < a +b + c +d. Từ (*) và (**) suy ra $\dfrac{a+c+d+b}{2} < AC + BD < a+b+c+d$ (đpcm)	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25

Câu 5: ***(4,0 điểm)***

Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC). Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Qua I vẽ IM vuông góc với AB tại M và IN vuông góc với AC tại N.

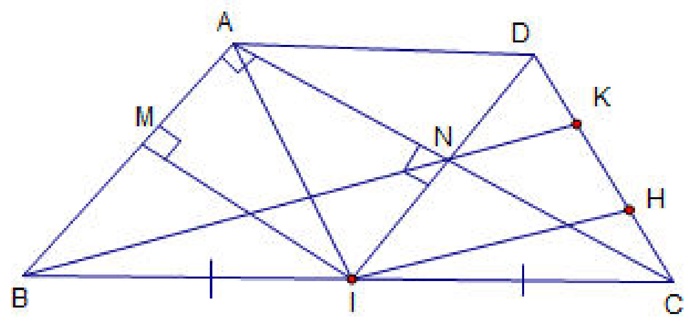
a) Chứng minh tứ giác AMIN là hình chữ nhật.

b) Gọi D là điểm đối xứng của I qua N. Chứng minh tứ giác ADCI là hình thoi.

c) Đường thẳng BN cắt DC tại K. Chứng minh rằng $DK = \frac{1}{3}DC$.

CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM

vndoc

		
a	Xét tứ giác AMIN có: $\widehat{MAN} = 90^0$ (vì tam giác ABC vuông ở A) $\widehat{AMI} = 90^0$ (vì IM vuông góc với AB) $\widehat{ANI} = 90^0$ (vì IN vuông góc với AC) Vậy tứ giác AMIN là hình chữ nhật (Vì có 3 góc vuông)	 0,25 0,25 0,25 0,25
b	ΔABC vuông tại A, có AI là trung tuyến nên $AI = IC = \frac{1}{2}BC$ Do đó ΔAIC cân tại I, có đường cao IN đồng thời là trung tuyến $\Rightarrow NA = NC$ Mặt khác: NI = ND (tính chất đối xứng) nên ADCI là hình bình hành (1) Mà $AC \perp ID$ (2) Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ADCI là hình thoi.	0,5 0.5 0,5 0,5
c	Kẻ qua I đường thẳng IH song song với BK cắt CD tại H $\Rightarrow$IH là đường trung bình ΔBKC $\Rightarrow$H là trung điểm của CK hay KH = HC (3) Xét ΔDIH có N là trung điểm của DI, NK // IH (IH // BK) Do đó K là trung điểm của DH hay DK = KH (4) Từ (3) và (4) suy ra DK = KH = HC $\Rightarrow DK = \frac{1}{3}DC$	0,25 0,25 0,25 0,25

<u>Câu 6</u>*:(1,0 điểm)*

Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \ge a(b+c+d+e)$

ĐÁP ÁN	ĐIỂM
Ta có : $\left(\frac{1}{2}a-b\right)^2 \ge 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2+b^2 \ge ab$ (1) $\left(\frac{1}{2}a-c\right)^2 \ge 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2+c^2 \ge ac$ (2) $\left(\frac{1}{2}a-d\right)^2 \ge 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2+d^2 \ge ad$ (3) $\left(\frac{1}{2}a-e\right)^2 \ge 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2+e^2 \ge ae$ (4)	0,25 0,25
Ta cộng (1), (2), (3), (4) vế theo vế ta được : $4.\frac{1}{4}a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \ge ab+ac+ad+ae$ $\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \ge a(b+c+d+e)$	0,25 0,25

- ***Lưu ý :***
  - *Mọi cách giải khác của học sinh có kết quả đúng đều ghi điểm tối đa.*
  - *Riêng câu 4 và câu 5 nếu học sinh không vẽ hình mà làm đúng thì cho ½ tổng số điểm của câu đó.*

(Đề thi gồm có 08 trang)

UBND HUYỆN GIỒNG RIỀNG
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÒNG HUYỆN
NĂM HỌC 2011-2012

ĐỀ THI MÔN TOÁN LỚP 8

Bài 1. (4 điểm)

a) Chứng minh rằng tổng lập phương của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 9

b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì : $A = 5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} \vdots 59$

Bài 2. (4 điểm)

Phân tích các đa thức thành nhân tử:

vndoc

a) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

b) $x^4 + 2011x^2 + 2010x + 2011$

Bài 3. (4 điểm)

a) Cho $a+b=2$ và $a^2+b^2=20$. Tính giá trị của biểu thức $M = a^3 + b^3$

b) Cho $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=14$. Tính giá trị của biểu thức $N = a^4 + b^4 + c^4$

Bài 4. (4 điểm)

Cho hình thang cân $ABCD$ có $ACD = 60^0$, O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi E, F, G theo thứ tự là trung điểm của OA, OD, BC. Tam giác EFG là tam giác gì ? Vì sao?

Bài 5. (4 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD$ có E, F thứ tự là trung điểm của AB, CD.

a) Chứng minh rằng các đường thẳng AC, BD, EF đồng quy

b) Gọi giao điểm của AC với DE và BF theo thứ tự là M và N. Chứng minh rằng $EMFN$ là hình bình hành

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) Ta phải chứng minh : $A = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \vdots 9$ với $n \in \mathbb{Z}$

$A = n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8$

$= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9$

$= 3n^3 - 3n + 9n^2 + 18n + 9$

$= 3n(n-1)(n+1) + 9(n^2 + 2n + 1)$

Nhận thấy $n(n-1)(n+1) \vdots 3 \Rightarrow 3n(n-1)(n+1) \vdots 9$ và $9(n^2 + 2n + 1) \vdots 9$

Vậy $A \vdots 9$

$b) 5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} = 25.5^n + 26.5^n + 8.8^{2n}$

$= 5^n(59 - 8) + 8.64^n = 59.5^n + 8(64^n - 5^n)$

$59.5^n \vdots 59$ và $8.(64^n - 5^n) \vdots (64 - 5) = 59$

Vậy $5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} \vdots 59$

Bài 2.

$a/ x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3 - 3xyz$

$= (x+y+z)^3 - 3z(x+y)(x+y+z) - 3xy(x+y+z)$

$= (x+y+z)\left[(x+y+z)^2 - 3z(x+y) - 3xy\right]$

$= (x+y+z)\left[x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yzz + 2xz - 3zx - 3zy - 3xy\right]$

$= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$b/ x^4 + 2011x^2 + 2010x + 2011$

$= x^4 + x^3 + x^2 + 2010x^2 + 2010x + 2010 - x^3 + 1$

$= x^2(x^2 + x + 1) + 2010(x^2 + x + 1) - (x-1)(x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x^2 + 2010 - x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2011)$

vndoc

Bài 3.

a) Từ $a^2+b^2=20 \Rightarrow (a+b)^2-2ab=20 \Rightarrow ab=-8$

$M=a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=2^3-3.(-8).2=56$

b) Từ $a^2+b^2+c^2=14 \Rightarrow (a^2+b^2+c^2)^2=196$

$\Rightarrow a^4+b^4+c^4=196-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

Ta lại có: $a+b+c=0 \Rightarrow (a+b+c)^2=0$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0$

$\Rightarrow ab+bc+ca=-7$

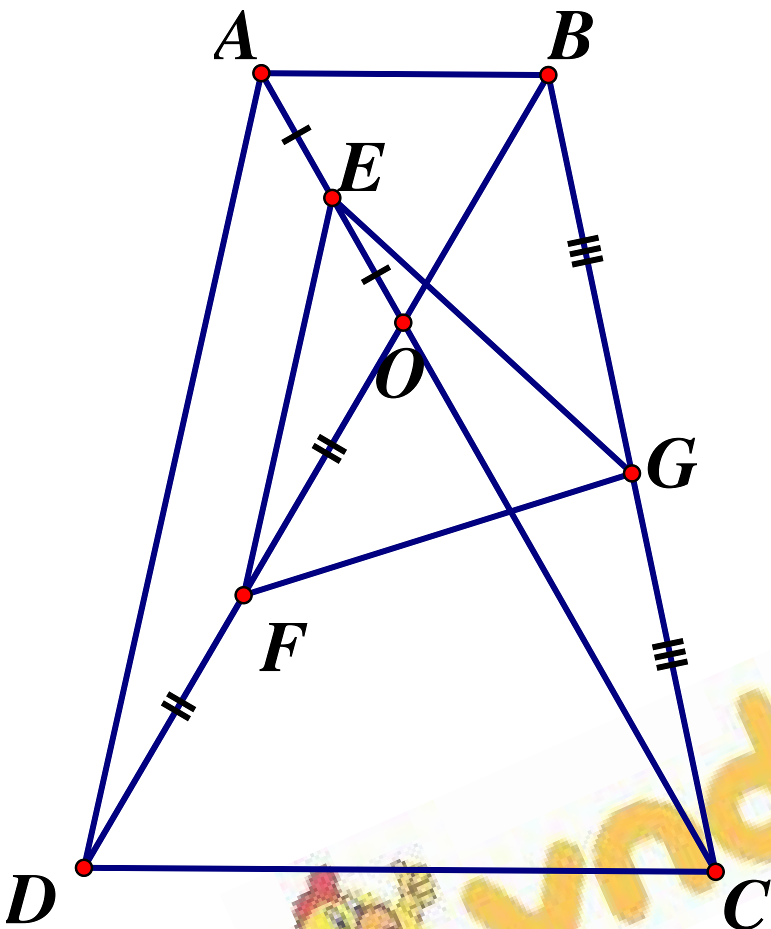
$\Rightarrow (ab+bc+ca)^2=49$

$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=49$

$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=49$

Do đó: $N=a^4+b^4+c^4=196-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=196-2.49=98$

Bài 4.



Do $ABCD$ là hình thang cân và $ACD = 60^0$ suy ra ΔOAB và ΔOCD là các tam giác đều

Chứng minh ΔBFC vuông tại F

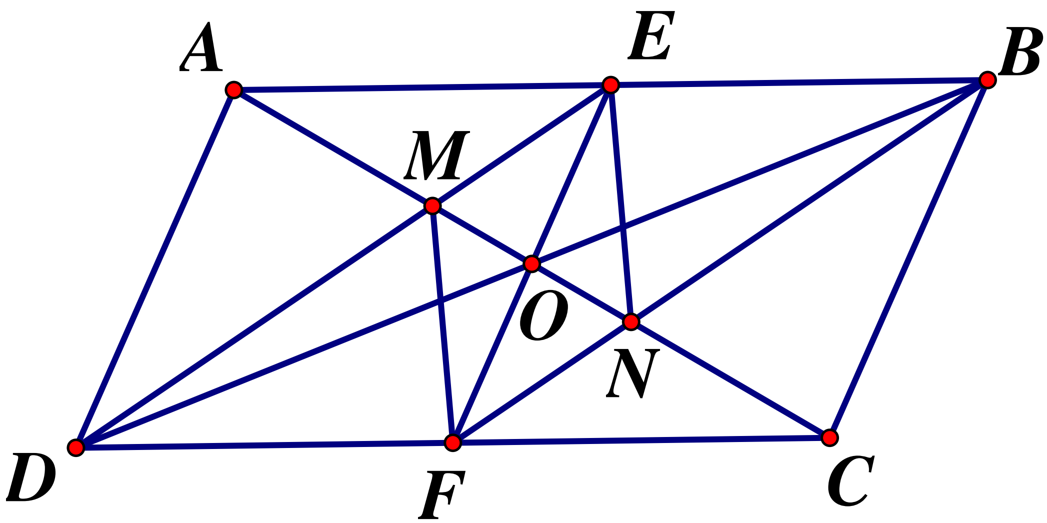
Xét ΔBFC vuông tại F có: $FG = \frac{1}{2}BC$

Chứng minh ΔBEC vuông tại E có $EG = \frac{1}{2}BC$

Xét EF là đường trung bình $\Delta AOD \Rightarrow EF = \frac{1}{2}AD \Rightarrow EF = \frac{1}{2}BC$ (ABCD hthang cân)

Suy ra $EF = EG = FG \Rightarrow \Delta EFG$ đều

Bài 5.



a)

Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$, ta có O là trung điểm của BD.

Chứng minh $BEDF$ là hình bình hành

Có O là trung điểm của BD nên O cũng là trung điểm của EF

Vậy EF, BD, AC đồng quy tại O

b) Xét ΔABD có M là trọng tâm, nên $OM = \frac{1}{3}OA$

Xét ΔBCD có N là trọng tâm, nên $ON = \frac{1}{3}OC$

Mà $OA = OC$ nên $OM = ON$

Tứ giác $EMFN$ có $OM = ON, OE = OF$ nên là hình bình hành

ĐỀ CHÍNH THỨC
VĨNH BÌNH BẮC

Môn TOÁN 8
Năm học 2018-2019

Bài 1. (2,0 điểm). Chứng minh rằng

a) $8^5 + 2^{11}$ chia hết cho 17

vndoc

b) $19^{19} + 69^{19}$ chia hết cho 44

Bài 2. (6,0 điểm). Tìm x, biết:

a) $x^2 - 2005x - 2006 = 0$

b) $\dfrac{x+1}{2008} + \dfrac{x+2}{2007} + \dfrac{x+3}{2006} = \dfrac{x+4}{2005} + \dfrac{x+5}{2004} + \dfrac{x+6}{2003}$

c) $\dfrac{1}{x^2+9x+20} + \dfrac{1}{x^2+11x+30} + \dfrac{1}{x^2+13x+42} = \dfrac{1}{18}$

Bài 3. (4,0 điểm) Cho biểu thức : $A = \dfrac{3x^3 - 14x^2 + 3x + 36}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9}$

a) Tìm giá trị của biểu thức A xác định

b) Tìm giá trị của biểu thức A có giá tri bằng 0

c) Tìm giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên

Bài 4. (4,0 điểm) Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CA. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AD, AF, EF, ED

a) Tứ giác $MNPQ$ là hình gì ? Tại sao ?

b) Tam giác ABC có điều kiện gì thì $MNPQ$ là hình chữ nhật ?

c) Tam giác ABC có điều kiện gì thì $MNPQ$ là hình thoi ?

Bài 5. (3 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A có $ABC = 60^0$, phân giác BD. Gọi M,N,I theo thứ tự là trung điểm của BD, BC, CD

a) Tứ giác $AMNI$ là hình gì ? Chứng minh

b) Cho $AB = 4cm$, Tính các cạnh của tứ giác $AMNI$

Bài 6. (1 điểm) Tìm giá trị lớn nhất của $M = 4x^2 + 4x + 5$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) Ta có: $8^5 + 2^{11} = \left(2^3\right)^5 + 2^{11} = 2^{15} + 2^{11} = 2^{11}.\left(2^4+1\right) = 2^{11}.17$ chia hết cho 17

b) Ta có:

vndoc

$19^{19}+69^{19}=(19+69)\left(19^{18}-19^{17},69+....+69^{18}\right)=88.\left(19^{18}-19^{17},69+....+69^{18}\right)$ chia hết cho 44

Bài 2.

a) Ta có:

$$x^2-2005x-2006=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-1-2005x-2005=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)-2005(x+1)=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1-2005)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2006 \end{array}\right.$$

b)

$$\frac{x+1}{2008}+\frac{x+2}{2007}+\frac{x+3}{2006}=\frac{x+4}{2005}+\frac{x+5}{2004}+\frac{x+6}{2003}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2008}+1\right)+\left(\frac{x+2}{2007}+1\right)+\left(\frac{x+3}{2006}+1\right)=\left(\frac{x+4}{2005}+1\right)+\left(\frac{x+5}{2004}+1\right)+\left(\frac{x+6}{2003}+1\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+2009}{2008}+\frac{x+2009}{2007}+\frac{x+2009}{2006}-\frac{x+2009}{2005}-\frac{x+2009}{2004}-\frac{x+2009}{2003}=0$$
$$\Leftrightarrow (x+2009)\left(\frac{1}{2008}+\frac{1}{2007}+\frac{1}{2006}-\frac{1}{2005}-\frac{1}{2004}-\frac{1}{2003}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x=-2009$$

c) $\dfrac{1}{x^2+9x+20}+\dfrac{1}{x^2+11x+30}+\dfrac{1}{x^2+13x+42}=\dfrac{1}{18}$

$x^2+9x+20=(x+4)(x+5)$

$x^2+11x+30=(x+5)(x+6)$

$x^2+13x+42=(x+6)(x+7)$

ĐKXĐ: $x\neq -4; x\neq -5; x\neq -6; x\neq -7$. Phương trình tương đương với:

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{(x+4)(x+5)}+\dfrac{1}{(x+5)(x+6)}+\dfrac{1}{(x+6)(x+7)}=\dfrac{1}{18}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{x+6}+\dfrac{1}{x+6}-\dfrac{1}{x+7}=\dfrac{1}{18}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x+7}=\dfrac{1}{18}$

$\Leftrightarrow 18(x+7)-18(x+4)=(x+7)(x+4)$

$\Leftrightarrow (x+13)(x-2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-13 \\ x=2 \end{array}\right.$

Bài 3.

a) Ta có $A=\dfrac{(x-3)^2.(3x+4)}{(x-3)^2.(3x-1)}$. Vậy biểu thức A xác định khi $x\neq 3; x\neq \dfrac{1}{3}$

b) Ta có: $A=\dfrac{3x+4}{3x-1}$, do đó $A=0\Leftrightarrow 3x+4=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-4}{3}$

Vậy với $x=-\dfrac{4}{3}$ thì biểu thức A có giá trị bằng 0

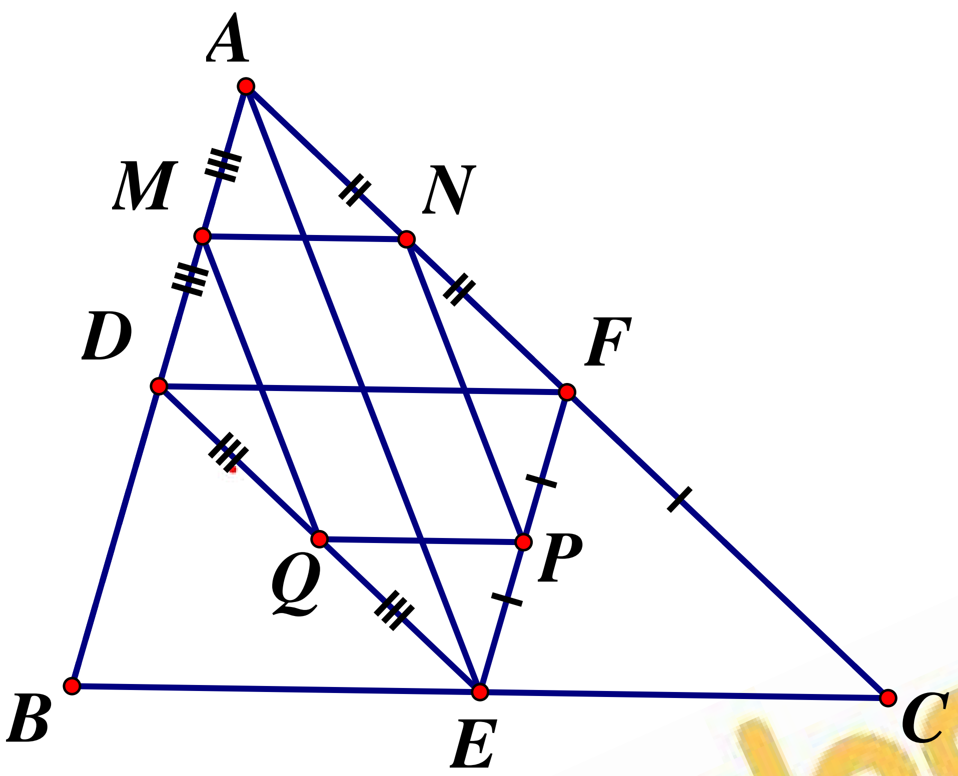
c) Ta có: $A=\dfrac{3x+4}{3x-1}=1+\dfrac{5}{3x-1}$

Để A có giá trị nguyên thì $\dfrac{5}{3x-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow (3x-1)\in U(5)=\{\pm1;\pm5\}$

$\Rightarrow x\in\left\{-\dfrac{4}{3};0;\dfrac{2}{3};2\right\}$

Vậy với giá trị nguyên của x là 0 và 2 thì A có giá trị nguyên

Bài 4.



a) $\left.\begin{array}{l} MN//DF; MN=\dfrac{1}{2}DF \\ PQ//DF; PQ=\dfrac{1}{2}DF \end{array}\right\} \Rightarrow MN//PQ; MN=PQ$. Vậy MNPQ là hình bình hành

b) Giả sử $MNPQ$ là hình chữ nhật thì $MP=NQ$

Mà $\left.\begin{array}{l} MP=AF=\dfrac{AC}{2} \\ NQ=AD=\dfrac{AB}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow AC=AB$

Vậy ΔABC cân tại A thì $MNPQ$ là hình chữ nhật

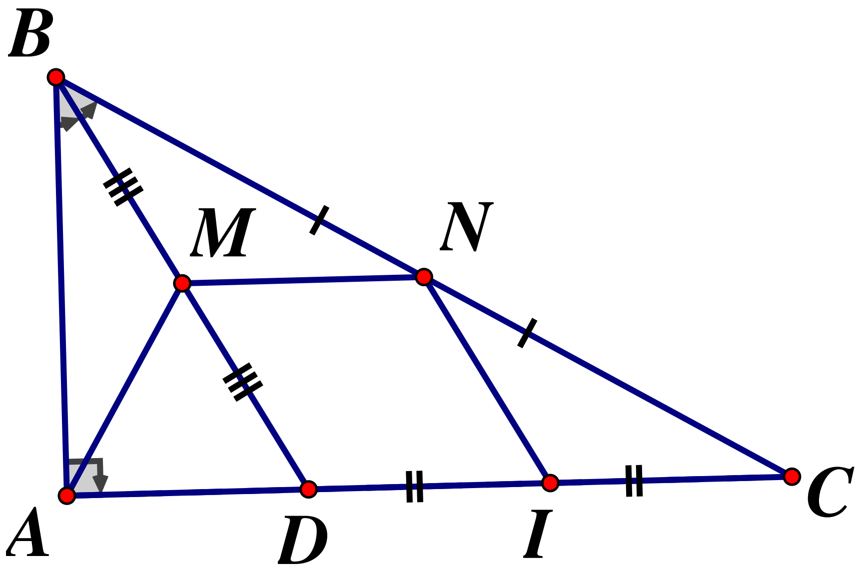
c) Giả sử MNPQ là hình thoi thì $MN=MQ$

$MN=MQ \Leftrightarrow \dfrac{BC}{4}=\dfrac{AE}{2} \Leftrightarrow AE=\dfrac{1}{2}BC$

Vậy tam giác ABC vuông tại A thì $MNPQ$ là hình thoi

vndoc

Bài 5.



a) Chứng minh được tứ giác $AMNI$ là hình thang

Chứng minh được $AN = MI$, từ đó suy ra tứ giác $AMNI$ là hình thang cân

b) Tính được: $AD = \frac{4\sqrt{3}}{3}cm; BD = 2AD = \frac{8\sqrt{3}}{3}cm; AM = \frac{1}{2}BD = \frac{4\sqrt{3}}{3}cm$

$NI = AM = \frac{4\sqrt{3}}{3}cm, DC = BC = \frac{8\sqrt{3}}{3}cm, MN = \frac{1}{2}DC = \frac{4\sqrt{3}}{3}cm$

$AI = \frac{8\sqrt{3}}{3}cm$

Bài 6.

Ta có : $M = 4x^2 + 4x + 5 = \left[(2x)^2 + 2.2x.1 + 1\right] + 4 = (2x+1)^2 + 4$

Vì $(2x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow (2x+1)^2 + 4 \geq 4 \Leftrightarrow M \geq 4$

Vậy GTNN của $M = 4 \Leftrightarrow x = -0,5$

UBND HUYỆN THỦY NGUYÊN
PHÒNG GD & ĐT

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
NĂM HỌC: 2017-2018
MÔN: TOÁN 8

Câu 1. (3 điểm)

1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

   a) $x^4 + 4$

b) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24$

2. Cho $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0$

Câu 2. (2 điểm)

1. Tìm a,b sao cho $f(x)=ax^3+bx^2+10x-4$ chia hết cho đa thức $g(x)=x^2+x-2$
2. Tìm số nguyên a sao cho a^4+4 là số nguyên tố

Câu 3. (3,5 điểm)

Cho hình vuông $ABCD, M$ là một điểm tùy ý trên đường chéo BD. Kẻ $ME\perp AB$, $MF\perp AD$

a) Chứng minh $DE=CF$

b) Chứng minh ba đường thẳng DE, BF, CM đồng quy

c) Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác $AEMF$ lớn nhất.

Câu 4. (1,5 điểm)

Cho a,b dương và $a^{2000}+b^{2000}=a^{2001}+b^{2001}=a^{2002}+b^{2002}$.

Tính : $a^{2011}+b^{2011}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1a. $x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2$

$=\left(x^4+4x^2+4\right)-(2x)^2=\left(x^2+2\right)^2-(2x)^2$

$=\left(x^2+2x+2\right)\left(x^2-2x+2\right)$

1b. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24$

$=\left(x^2+7x+11-1\right)\left(x^2+7x+11+1\right)-24$

$=\left[\left(x^2+7x+11\right)^2-1\right]-24$

$=\left(x^2+7x+11\right)^2-5^2$

$=\left(x^2+7x+6\right)\left(x^2+7x+16\right)$

$=(x+1)(x+6)\left(x^2+7x+16\right)$

2. Nhân cả 2 vế của $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$ với $a+b+c$, rút gọn suy ra đpcm

Câu 2.

1. Ta có: $g(x)=x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

Vì $f(x)=ax^3+bx^2+10x-4$ chia hết cho đa thức $g(x)=x^2+x-2$

Nên tồn tại một đa thức $q(x)$ sao cho $f(x)=g(x).q(x)$

$\Rightarrow ax^3+bx^2+10x-4=(x+2).(x-1).q(x)$

Với $x=1\Rightarrow a+b+6=0\Rightarrow b=-a-6$ (1)

Với $x=-2\Rightarrow 2a-b+6=0$ (2)

Thay (1) vào (2), ta có: $a=2;b=4$

2. Ta có: $a^4+4=\left(a^2-2a+2\right).\left(a^2+2a+2\right)$

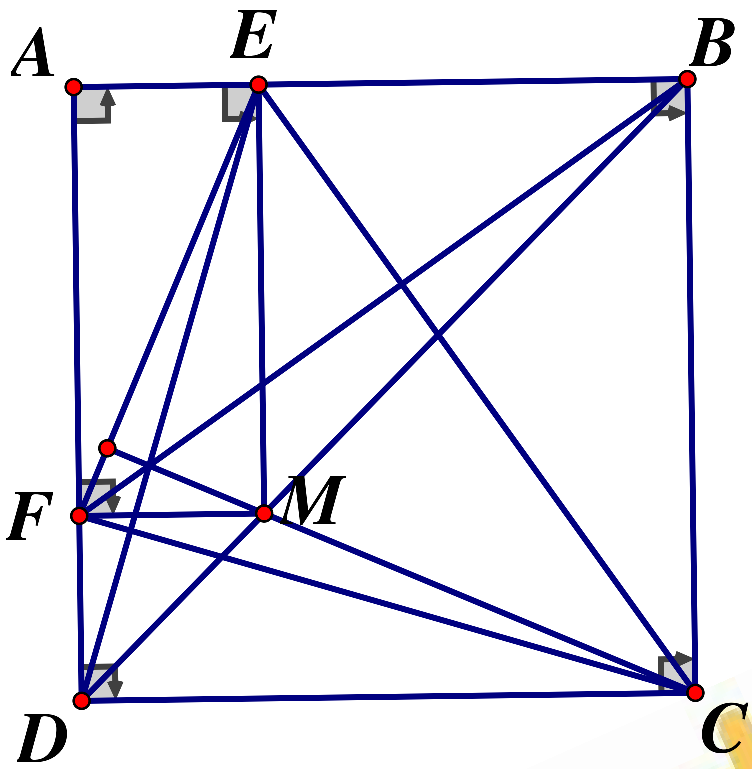
Vì $a\in\mathbb{Z}\Rightarrow a^2-2a+2\in\mathbb{Z};a^2+2a+2\in\mathbb{Z}$

Có: $a^2+2a+2=(a+1)^2+1\geq 1\forall a$ và $a^2-2a+2=(a-1)^2+1\geq 1(\forall a)$

Vậy a^4+4 là số nguyên tố thì $\left[\begin{array}{l}a^2+2a+2=1\\a^2-2a+2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1(tm)\\a=-1(tm)\end{array}\right.$

vndoc

Câu 3.



a) Chứng minh $AE = FM = DF \Rightarrow \Delta AED = \Delta DFC \Rightarrow dfcm$

b) DE, BF, CM là ba đường cao của $\Delta EFC \Rightarrow dfcm$

c) Có chu vi hình chữ nhật $AEMF = 2a$ không đổi

$\Rightarrow ME + MF = a$ không đổi

$\Rightarrow S_{AEMF} = ME.MF$ lớn nhất $\Leftrightarrow ME = MF$ (AEMF là hình vuông)

$\Rightarrow M$ là trung điểm của BD.

Câu 4.

$$\left(a^{2001} + b^{2001}\right)(a+b) - \left(a^{2000} + b^{2000}\right)ab = a^{2002} + b^{2002}$$

$$\Rightarrow (a+1) - ab = 1$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(b-1) = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \end{array}\right.$$

Vì $a = 1 \Rightarrow b^{2000} = b^{2001} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1(tm) \\ b = 0(ktm) \end{array}\right.$

vndoc

Vì $b=1 \Rightarrow a^{2000}=a^{2001} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=1(tm) \\ a=0(ktm) \end{array}\right.$

Vậy $a=1; b=1 \Rightarrow a^{2011}+b^{2011}=2$

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN PHÚ CHỮ

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC : 2018-2019
MÔN TOÁN LỚP 8
Thi ngày 04 tháng 4 năm 2018

Bài 1. (4,0 điểm)

3) Phân tích đa thức thành nhân tử:
   c) $x^3-x^2-14x+24$
   d) $x^4+2018x^2+2017x+2018$
4) Cho $x+y=1$ và $xy \neq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y^3-1}-\frac{y}{x^3-1}+\frac{2(x-y)}{x^2y^2+3}=0$$

Bài 2. (3,0 điểm)

c) Tìm các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $y^2+2xy-3x-2=0$
d) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $2x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{y^2}{4}=4$ sao cho tích $x.y$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 3. (3,0 điểm)

c) Tìm đa thức $f(x)$, biết $f(x)$ chia cho $x+2$ dư 10, chia cho $x-2$ dư 24, chia cho x^2-4 được thương là $-5x$ và còn dư
d) Cho p và $2p+1$ là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $4p+1$ là hợp số

Bài 4. (8,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB<AC)$ có AD là tia phân giác của BAC. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của D trên AB và AC, E là giao điểm của BN và DM, F là giao điểm của CM và DN.

4) Chứng minh tứ giác $AMDN$ là hình vuông và $EF // BC$.
5) Gọi H là giao điểm của BN và CM. Chứng minh ΔANB đồng dạng với ΔNFA và H là trực tâm ΔAEF
6) Gọi giao điểm của AH và DM là K, giao điểm của AH và BC là O, giao điểm của BK và AD là I. Chứng minh : $\frac{BI}{KI}+\frac{AO}{KO}+\frac{DM}{KM}>9$

Bài 5. (2,0 điểm)

c) Cho $x>0, y>0$ và m,n là hai số thực. Chứng minh rằng $\frac{m^2}{x}+\frac{n^2}{y}\ge\frac{(m+n)^2}{x+y}$

d) Cho a,b,c là ba số dương thỏa mãn $abc=1$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

3)

$$a)x^3-x^2-14x+24$$
$$=x^3-2x^2+x^2-2x-12x+24$$
$$=x^2(x-2)+x(x-2)-12(x-2)$$
$$=(x^2+x-12)(x-2)$$
$$=(x-2)(x-3)(x+4)$$
$$b)x^4+2018x^2+2017x+2018$$
$$=x^4+2017x^2+x^2+2017x+2017+1$$
$$=(x^4+x^2+1)+2017(x^2+x+1)$$
$$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)+2017(x^2+x+1)$$
$$=(x^2+x+1)(x^2-x+2018)$$

4) Với $x+y=1$ và $xy\ne 0$ ta có:

$$\frac{x}{y^3-1}-\frac{y}{x^3-1}=\frac{x^4-x-y^4+y}{\left(y^3-1\right)\left(x^3-1\right)}$$

$$=\frac{\left(x^4-y^4\right)-\left(x-y\right)}{xy\left(x^2+x+1\right)\left(y^2+y+1\right)}$$

$$=\frac{\left(x-y\right)\left[\left(x+y\right)\left(x^2+y^2\right)-1\right]}{xy\left(x^2y^2+xy\left(x+y\right)+x^2+y^2+xy+2\right)}$$

$$=\frac{\left(x-y\right)\left(x^2-x+y^2-y\right)}{xy\left(x^2y^2+\left(x+y\right)^2+2\right)}$$

$$=\frac{\left(x-y\right)\left[x\left(x-1\right)+y\left(y-1\right)\right]}{xy\left(x^2+y^2+3\right)}=\frac{-2\left(x-y\right)}{x^2y^2+3}$$

Vậy $\frac{x}{y^3-1}-\frac{y}{x^3-1}+\frac{2\left(x-y\right)}{x^2y^2+3}=0$

Bài 2.

c)

$y^2+2xy-3x-2=0\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2=x^2+3x+2$

$\Leftrightarrow\left(x+y\right)=\left(x+1\right)\left(x+2\right)(*)$

VT (*) là số chính phương, VP (*) là tích hai số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số bằng 0

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0\\x+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-2\end{array}\right.$$

Với $x=-1\Rightarrow y=1$

Với $x=-2\Rightarrow y=2$

d)

Điều kiện $x\neq 0$

$$2x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{y^2}{4}=4\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{1}{x^2}-2\right)+\left(x^2+\frac{y^2}{4}-xy\right)+xy=2$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+xy=2$$

Vì $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 \geq 0; \left(x-\frac{y}{2}\right)^2 \geq 0$ với mọi $x \neq 0$; mọi y

Do đó $xy \leq 2$ mà $x, y \in \mathbb{Z}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} x=1; y=2 \\ x=2; y=1 \\ x=-1; y=-2 \\ x=-2; y=-1 \end{array}\right.$

Bài 3.

c)

Giả sử $f(x)$ chia cho x^2-4 được thương là $-5x$ và dư $ax+b$

Khi đó $f(x)=\left(x^2-4\right)(-5x)+xa+b$

Theo đề ta có: $\begin{cases} f(2)=24 \\ f(-2)=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=24 \\ -2a+b=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{7}{2} \\ b=17 \end{cases}$

Do đó $f(x)=\left(x^2-4\right)(-5x)+\frac{7}{2}x+17$

Vậy $f(x)=-5x^2+\frac{47}{2}x+17$

d) Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên có dạng $p=3k+1; p=3k-1$ với $k>1$

+ Nếu $p=3k+1$ thì $2p+1=6k+3=3(2k+1)$

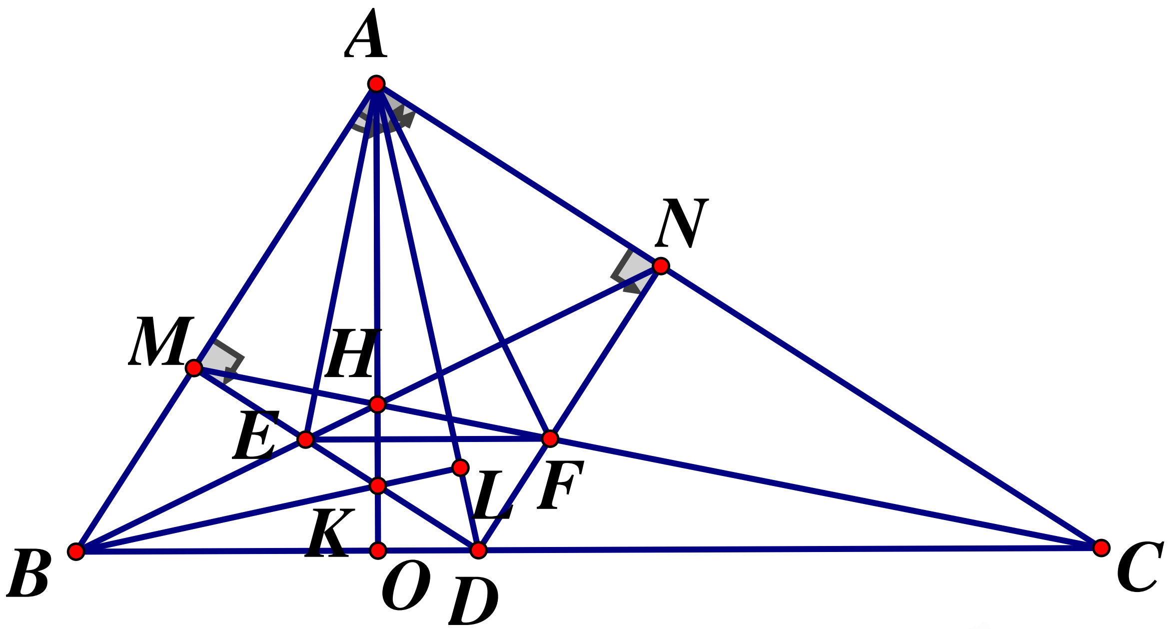
Suy ra $2p+1$ là hợp số (vô lý)

+Nếu $p=3k-1, k>1$ thì $4p+1=12k-3=3.(4k-1)$

Do $k>1$ nên $4k-1>3$. Do đó $4p+1$ là hợp số.

Bài 4.

vndoc



4) *Chứng minh tứ giác AMDN là hình vuông

+) Chứng minh $\widehat{AMD}=90^0;\widehat{AND}=90^0;\widehat{MAN}=90^0$

Suy ra tứ giác $AMDN$ là hình chữ nhật

+)Hình chữ nhật $AMDN$ có AD là phân giác của $\widehat{MAN}$ nên tứ giác $AMDN$ là hình vuông.

***Chứng minh EF // BC**

+) Chứng minh : $\frac{FM}{FC}=\frac{DB}{DC}$ (1)

Chứng minh: $\frac{DB}{DC}=\frac{MB}{MA}$ (2)

Chứng minh $AM=DN \Rightarrow \frac{MB}{MA}=\frac{MB}{DN}$ (3)

Chứng minh $\frac{MB}{DN}=\frac{EM}{ED}$ (4)

Từ $(1),(2),(3),(4)$ suy ra $\frac{EM}{ED}=\frac{FM}{FC} \Rightarrow EF//BC$

5) Chứng minh $\Delta ANB \sim \Delta NFA$

Chứng minh $AN=DN$.suy ra $\frac{AN}{AB}=\frac{DN}{AB}$ (5)

Chứng minh $\frac{DN}{AB}=\frac{CN}{CA}$ (6)

Chứng minh $\dfrac{CN}{CA}=\dfrac{FN}{AM}$ (7)

Chứng minh $AM = AN$. Suy ra $\dfrac{FN}{AM}=\dfrac{FN}{AN}$ (8)

Từ (5) (6) (7) (8) suy ra $\dfrac{AN}{AB}=\dfrac{FN}{AN} \Rightarrow \Delta ANB \sim \Delta NFA\left(c.g.c\right)$

***chứng minh H là trực tâm tam giác AEF**

Vì $\Delta ANB \sim \Delta NFA$ nên $NBA = FAN$

Mà $BAF + FAN = 90^0 \Rightarrow NBA + BAF = 90^0$

Suy ra $EH \perp AF$, Tương tự: $FH \perp AE$, suy ra H là trực tâm ΔAEF

6) Đặt $S_{AKD}=a, S_{BKD}=b, S_{AKB}=c$. Khi đó:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{AKD}}+\frac{S_{ABD}}{S_{BDK}}+\frac{S_{ABD}}{S_{AKB}}=\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$$

$$=3+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$$

Theo định lý AM-GM ta có: $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geq 2$

Tương tự : $\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}\geq 2$; $\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\geq 2$

Suy ra $\dfrac{BI}{KI}+\dfrac{AO}{KO}+\dfrac{DM}{KM}\geq 9$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ΔABD là tam giác đều, suy ra trái với giả thiết.

Bài 5.

5a) Với $x>0, y>0$ và $m,n\in\mathbb{R}$ ta có:

$$\frac{m^2}{x}+\frac{n^2}{y}\geq\frac{(m+n)^2}{x+y} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow\left(m^2y+n^2x\right)\left(x+y\right)\geq xy\left(m+n\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left(nx-my\right)^2\geq 0 \text{ luôn đúng}$$

5b) Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có:

$$\frac{m^2}{x}+\frac{n^2}{y}+\frac{p^2}{z}\geq\frac{(m+n)^2}{x+y}+\frac{p^2}{z}\geq\frac{(m+n+p)^2}{x+y+z} \qquad (2)$$

Ta có: $\dfrac{1}{a^3(b+c)}+\dfrac{1}{b^3(c+a)}+\dfrac{1}{c^3(a+b)}=\dfrac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\dfrac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\dfrac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$

Áp dụng bất đẳng thức (2) ta có:

$$\dfrac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\dfrac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\dfrac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}\ge\dfrac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)}=\dfrac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}(do \quad abc=1)$$

Hay $\dfrac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\dfrac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\dfrac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}\ge\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$

Mà $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge 3$ nên $\dfrac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\dfrac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\dfrac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}\ge\dfrac{3}{2}$

Do đó: $\dfrac{1}{a^3(b+c)}+\dfrac{1}{b^3(c+a)}+\dfrac{1}{c^3(a+b)}\ge\dfrac{3}{2}$

UBND HUYỆN VĨNH BẢO
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ GIAO LƯU HSG HUYỆN CẤP THCS
MÔN: TOÁN 8

Bài 1. (3 điểm)

a) Phân tích đa thức $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ thành nhân tử

b) Cho a,b,c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$

Tính giá trị của biểu thức: $P=\dfrac{a^2}{a^2+2bc}+\dfrac{b^2}{b^2+2ac}+\dfrac{c^2}{c^2+2ab}$

c) Cho $x+y+z=0$. Chứng minh rằng: $2(x^5+y^5+z^5)=5xyz(x^2+y^2+z^2)$

Bài 2. (2 điểm)

a) Tìm số tự nhiên n để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

b) Cho $a,b>0$ thỏa mãn $a+b=1$. Chứng minh $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{a}\right)^2\ge\dfrac{25}{2}$

Bài 3. (1 điểm)

vndoc

Cho hình bình hành $ABCD$ có góc ABC nhọn. Vẽ ra phía ngoiaf hình bình hành các tam giác đều BCE và DCF. Tính số đo EAF

Bài 4. (3 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AA', BB', CC' và H là trực tâm

a) Chứng minh $BC'.BA + CB'.CA = BC^2$

b) Chứng minh rằng: $\frac{HB.HC}{AB.AC} + \frac{HA.HB}{BC.AC} + \frac{HC.HA}{BC.AB} = 1$

c) Gọi D là trung điểm của BC. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với DH cắt AB, AC lần lượt tại M và N. Chứng minh H là trung điểm của MN.

Bài 5. (1 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ và 2018 đường thẳng cùng có tính chất chia hình vuông này thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất 505 đường thẳng trong 2018 đường thẳng trên đồng quy.

vndoc

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)$

$=a^2(b-c)-b^2\left[(a-b)+(b-c)\right]+c^2(a-b)$

$=\left(a^2-b^2\right)(b-c)+\left(c^2-b^2\right)(a-b)$

$=(a-b)(a+b)(b-c)-(b-c)(b+c)(a-b)$

$=(a-b)(b-c)[a+b-b-c]=(a-b)(b-c)(a-c)$

b) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow ab+ac+bc=0$

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}=\frac{a^2}{a^2-ab-ac+bc}=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}$$

Tương tự: $\dfrac{b^2}{b^2+2ac}=\dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)}$; $\dfrac{c^2}{c^2+2ac}=\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

$$P=\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}$$

$$=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}-\frac{b^2}{(a-b)(b-c)}+\frac{c^2}{(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=1$$

c) Vì $x+y+z=0 \Rightarrow x+y=-z \Rightarrow (x+y)^3=-z^3$

Hay $x^3+y^3+3xy(x+y)=-z^3 \Rightarrow 3xyz=x^3+y^3+z^3$

Do đó: $3xyz\left(x^2+y^2+z^2\right)=\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)$
$=x^5+y^5+z^5+x^3\left(y^2+z^2\right)+y^3\left(z^2+x^2\right)+z^3\left(x^2+y^2\right)$

Mà $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=z^2-2xy(Vi \quad x+y=-z)$

Tương tự: $y^2+z^2=x^2-2yz; z^2+x^2=y^2-2zx$

Vì vậy: $3xyz\left(x^2+y^2+z^2\right)=x^5+y^5+z^5+x^3\left(x^2-2yz\right)+y^3\left(y^2-2zx\right)+z^3\left(z^2-2xy\right)$

$=2\left(x^5+y^5+z^5\right)-2xyz\left(x^2+y^2+z^2\right)$

Suy ra : $2\left(x^5+y^5+z^5\right)=5xyz\left(x^2+y^2+z^2\right)$

Bài 2.

a) Để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

$\Leftrightarrow n+18=p^2$ và $n-41=q^2\left(p,q\in\mathbb{N}\right)$

$\Rightarrow p^2-q^2=(n+18)-(n-41)=59\Leftrightarrow(p-q)(p+q)=59$

Nhưng 59 là số nguyên tố, nên: $\begin{cases}p-q=1\\p+q=59\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p=30\\q=29\end{cases}$

Từ $n+18=p^2=30^2=900\Rightarrow n=882$

Thay vào $n-41$, ta được $882-41=841=29^2=q^2$

Vậy với $n=882$ thì $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

b) Có: $(a-b)^2\geq 0\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab\geq 0\Leftrightarrow a^2+b^2\geq 2ab$ (*)

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b$

Áp dụng $(*)$ có: $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\frac{25}{4}\geq 5\left(a+\frac{1}{b}\right)$; $\left(b+\frac{1}{a}\right)^2+\frac{25}{4}\geq 5\left(b+\frac{1}{a}\right)$

Suy ra: $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{a}\right)^2+\frac{25}{2}\geq 5\left[\left(a+\frac{1}{b}\right)+\left(b+\frac{1}{a}\right)\right]$

$\Leftrightarrow\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{a}\right)^2+\frac{25}{2}\geq 5\left[(a+b)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]$

$\Leftrightarrow\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{a}\right)^2+\frac{25}{2}\geq 5+5\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ (*Vi* $a+b=1$)

Với a,b dương , chứng minh $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}=4$ (*Vi* $a+b=1$)

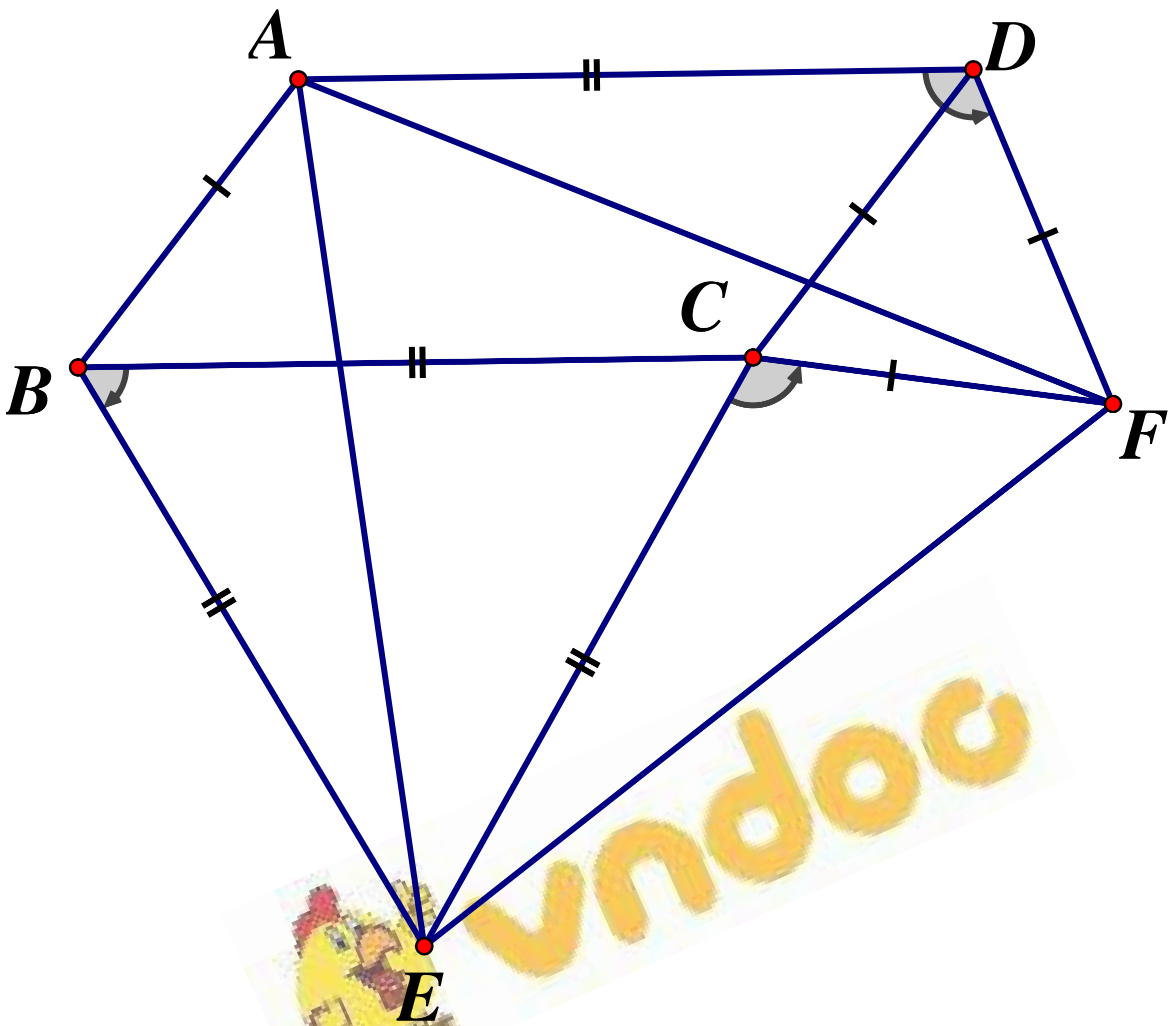
Dấu bằng xảy ra khi $a=b$

Ta được: $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{a}\right)^2+\frac{25}{2}\geq 5+5.4$

$\Leftrightarrow\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{a}\right)^2\geq\frac{25}{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$

vndoc

Bài 3.



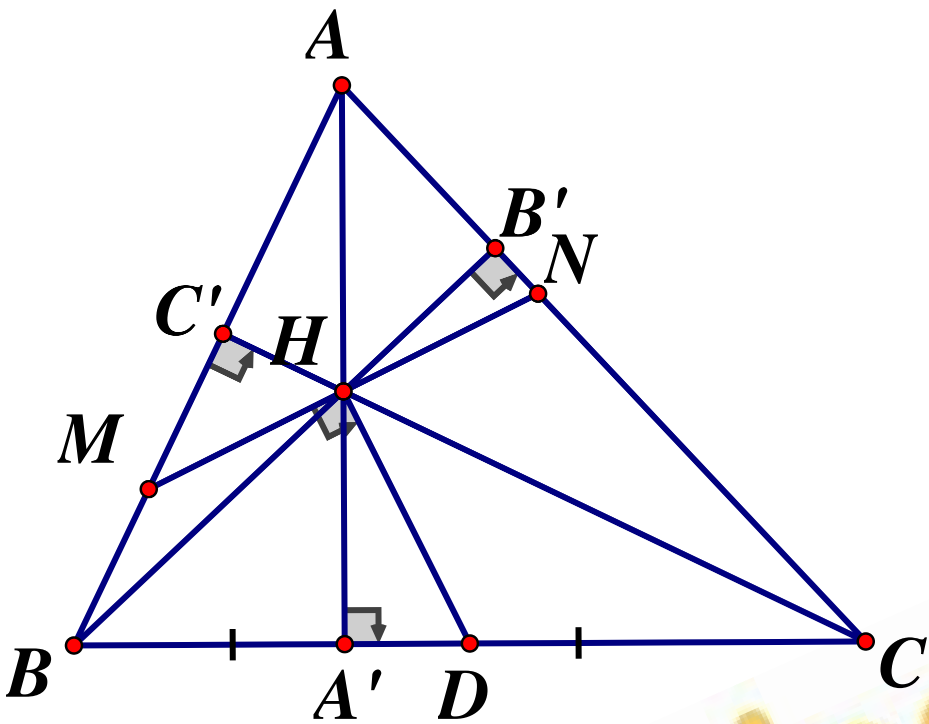
Chứng minh được $ABE = ECF$

Chứng minh được $\Delta ABE = \Delta FCE(c.g.c) \Rightarrow AE = EF$

Tương tự: $AF = EF$

$\Rightarrow AE = EF = AF \Rightarrow \Delta AEF$ đều $\Rightarrow EAF = 60^0$

Bài 4.



a) Chứng minh $\Delta BHC' \sim \Delta BAB' \Rightarrow \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{BC'}{BB'} \Rightarrow BH.BB' = BC'.BA$ (1)

Chứng minh $\Delta BHA' \sim \Delta BCB' \Rightarrow \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BA'}{BB'} \Rightarrow BH.BB' = BC.BA'$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BC'.BA = BA'.BC$

Tương tự : $CB'.CA = CA'.BC$

$\Rightarrow BC'.BA + CB'.CA = BA'.BC + CA'.BC = \left(BA' + A'C\right).BC = BC^2$

b) Có $\dfrac{BH}{AB} = \dfrac{BC'}{BB'} \Rightarrow \dfrac{BH.CH}{AB.AC} = \dfrac{BC'.CH}{BB'.AC} = \dfrac{S_{BHC}}{S_{ABC}}$

Tương tự: $\dfrac{AH.BH}{CB.CA} = \dfrac{S_{AHB}}{S_{ABC}}; \dfrac{AH.CH}{CB.AB} = \dfrac{S_{AHC}}{S_{ABC}}$

$\Rightarrow \dfrac{HB.HC}{AB.AC} + \dfrac{HA.HB}{AC.BC} + \dfrac{HC.HA}{BC.AB} = \dfrac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$

c) Chứng minh $\Delta AHM \sim \Delta CDH\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{HM}{HD} = \dfrac{AH}{CD}$ (3)

vndoc

Chứng minh $\Delta AHN \sim \Delta BDH\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{AH}{BD}=\dfrac{HN}{HD}$ (4)

Mà $CD = BD$ (gt) (5)

Từ $(3),(4),(5) \Rightarrow \dfrac{HM}{HD}=\dfrac{HN}{HD} \Rightarrow HM = HN \Rightarrow H$ là trung điểm của MN

Bài 5.

Gọi E,F,P,Q lần lượt là trung điểm của AB,CD,BC,AD. Lấy các điểm I,G trên EF và K,H trên PQ thỏa mãn:

$$\frac{IE}{IF}=\frac{HP}{HQ}=\frac{GF}{GE}=\frac{KQ}{KP}=\frac{2}{3}$$

Xét d là một trong các đường thẳng bất kỳ đã cho cắt hai đoạn thẳng AD,BC,EF lần lượt tại M,N,G'. Ta có:

$$\frac{S_{ABMN}}{S_{CDNM}}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\dfrac{AB.(BM+AN)}{2}}{\dfrac{CD.(CM+DN)}{2}}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{EG'}{G'F}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow G \equiv G' \text{ hay } d \text{ qua G.}$$

Từ lập luận trên suy ra mỗi đường thẳng thỏa mãn yêu cầu của đề bài đều đi qua một trong 4 điểm G,H,I,K

Do có 2018 đường thẳng đi qua 1 trong 4 điểm G,H,I,K theo nguyên lý Dirichle phải tồn tại ít nhất $\left[\dfrac{2018}{4}\right]+1=505$ đường thẳng cùng đi qua một điểm trong 4 điểm trên.

Vậy có ít nhất 505 đường thẳng trong số 2018 đường thẳng đã cho đồng quy.

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
DUY XUYÊN

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC : 2017-2018
Môn: TOÁN – LỚP 8
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1. (3,5 điểm)

c) Chứng minh n^3+17n chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{Z}$

d) Rút gọn biểu thức: $\dfrac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1}$

Bài 2. (4,5 điểm).

vndoc

c) Một vật thể chuyển động từ A đến B theo cách sau: đi được $4m$ thì dừng lại 1 giây, rồi đi tiếp $8m$ dừng lai 2 giây, rồi đi tiếp $12m$ dừng lại 3 giây… Cứ như vậy đi từ A đến B kể cả dừng hết tất cả 155 giây. Biết rằng khi đi vật thể luôn có vận tốc $2m/$ giây. Tính khoảng cách từ A đến B.

d) Biết $a^3 - 3ab^2 = 5$ và $b^3 - 3a^2b = 10$. Tính $M = \frac{a^2 + b^2}{2018}$

Bài 3. (4 điểm)

c) Giải phương trình: $\left(x^2 - x + 1\right)\left(x^2 - x + 2\right) = 12$

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 - 4(x + y) - 2010$

Bài 4. (4,5 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A, phân giác BD. Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của BD, BC, DC

c) Chứng minh $APQR$ là hình thang cân

d) Biết $AB = 6cm, AC = 8cm.$ Tính độ dài của AR

Bài 5. (2,5 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD.$ Một đường thẳng qua B cắt cạnh CD tại M, cắt đường chéo AC tại N và cắt đường thẳng AD tại K. Chứng minh:

$$\frac{1}{BN} = \frac{1}{BM} + \frac{1}{BK}$$

Bài 6. (1,0 điểm)

Biết a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2 + b^2 - c^2\right)^2 - 4a^2b^2 < 0$$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

c) $n^3 + 17n = n^3 - n + 18n = n(n-1)(n+1) + 18n$

Vì $n(n-1)(n+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3, $(2,3) = 1$ nên chia hết cho 6

$18n \vdots 6$, suy ra điều phải chứng minh

d)

$$\frac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1}=\frac{x^2+x^2a+a+a^2+a^2x^2+1}{x^2-x^2a-a+a^2+a^2x^2+1}$$

$$=\frac{x^2+x^2a+a^2x^2+1+a+a^2}{x^2-x^2a+a^2x^2+1-a+a^2}=\frac{x^2(1+a+a^2)+(1+a+a^2)}{x^2(1-a+a^2)+(1-a+a^2)}$$

$$=\frac{(x^2+1)(1+a+a^2)}{(x^2+1)(1-a+a^2)}=\frac{1+a+a^2}{1-a+a^2}$$

Bài 2.

c) Gọi x là số lần đi $(x\in\mathbb{N}, x>0)$, số lần dừng là $x-1$

Thời gian đi

$$\frac{4}{2}+\frac{8}{2}+\frac{12}{2}+.....+\frac{4x}{2}=2+4+6+.....+2x$$

$$=2(1+2+3+....+x)=x(x+1)$$

Thời gian dừng:

$$1+2+3+.....+(x-1)=\frac{(x-1+1)(x-1)}{2}=\frac{x(x-1)}{2}$$

Lập được phương trình

$$\frac{x(x-1)}{2}+x(x+1)=155\Leftrightarrow 3x^2+x-310\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=10\ (tm)\\ x=\dfrac{-31}{3}(ktm)\end{array}\right.$$

Khoảng cách AB là $10.(10+1).2=220(m)$

d)

$$a^3-3ab^2=5\Rightarrow a^6-6a^4b^2+9a^2b^4=25$$

$$b^3-3a^2b=10\Rightarrow b^6-6a^2b^4+9a^4b^2=100$$

$$\Rightarrow a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6=125$$

$$\Rightarrow(a^2+b^2)^3=5^3\Rightarrow\frac{a^2+b^2}{2018}=\frac{5}{2018}$$

Bài 3.

c) $\left(x^2-x+1\right)\left(x^2-x+2\right)=12$

Đặt $x^2-x+1=X$ có

$X^2+X-12=0$

$\Leftrightarrow X^2+4X-3X-12=0 \Leftrightarrow X(X+4)-3(X+4)=0$

$\Leftrightarrow (X-3)(X+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=3 \\ X=-4 \end{array}\right.$

$X=-4 \Rightarrow x^2-x+5=0 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}=0\ (VN)$

$X=3 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow \left(x^2-2x\right)+(x-2)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

d)

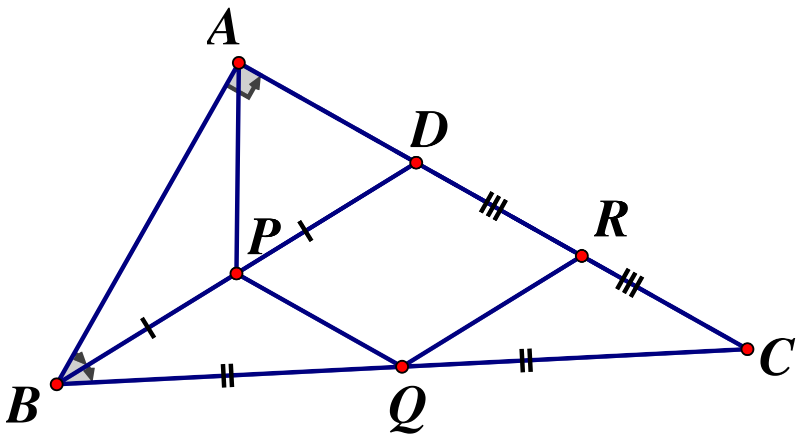
$P=x^2+y^2-4(x+y)-2010$

$=\left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2-4y+4\right)-2018$

$=(x-2)^2+(y-2)^2-2018 \geq -2018$

Vậy $P_{\min}=-2018 \Leftrightarrow x=y=2$

Bài 4.



c) PQ là đường trung bình tam giác BDC, suy ra $PQ//AR$ nên $APQR$ là hình thang.

$AQ = \frac{1}{2}BC$ (trung tuyến tam giác vuông ABC)

$PR = \frac{1}{2}BC$ (đường trung bình tam giác DBC)

Suy ra $AQ = PR \Rightarrow APQR$ là hình thang cân

d) Tính được $BC = 10cm$

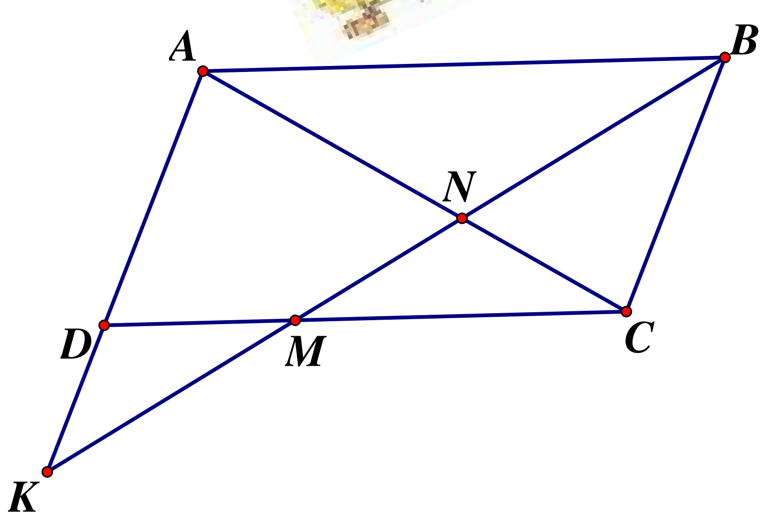
Tính chất đường phân giác trong của ΔABC

$\Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \frac{DA}{AC} = \frac{BA}{BC + BC}$

Thay số tính đúng $AD = 3cm, DC = 5cm, DR = 2,5cm$

Kết quả $AR = 5,5cm$

Bài 5.



AB//AC (hai cạnh đối diện hình bình hành). Theo định lý Talet có:

vndoc

$$\frac{MN}{AB}=\frac{NC}{AN}=\frac{MN}{NB}\Rightarrow\frac{MC+AB}{AB}=\frac{MN+NB}{BN}=\frac{BM}{BN}\ (1)$$

$$\frac{KM}{BK}=\frac{KD}{KA}=\frac{MD}{AB}\Rightarrow\frac{BK-KM}{BK}=\frac{AB-MD}{AB}\Rightarrow\frac{BM}{BK}=\frac{AB-MD}{AB}\qquad(2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\frac{BM}{BN}-\frac{BM}{BK}=\frac{AB+MC}{AB}-\frac{AB-MD}{AB}=\frac{MC+MD}{AB}$

Mà $MC+MD=CD=AB$ nên $\frac{BM}{BN}-\frac{BM}{BK}=1$(Điều phải chứng minh)

Bài 6.

$$\left(a^2+b^2-c^2\right)^2-4a^2b^2=\left(a^2+b^2-c^2+2ab\right)\left(a^2+b^2-c^2-2ab\right)$$

$$=\left[\left(a+b\right)^2-c^2\right]\left[\left(a-b\right)^2-c^2\right]$$

$$=-\left(a+b+c\right)\left(a+b-c\right)\left(a+c-b\right)\left(b+c-a\right)$$

Tổng hai cạnh tam giác lớn hơn cạnh thứ ba nên cả 4 thừa số đều dương, suy ra điều phải chứng minh.

UBND HUYỆN BÌNH XUYÊN	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 8**
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**NĂM HỌC: 2017-2018**
	ĐỀ THI MÔN: TOÁN
ĐỀ CHÍNH THỨC	*Thời gian làm bài: 150 phút, không kể gio đề*

Bài 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $A=\left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8}-\frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3}\right).\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)$

a) Tìm ĐKXĐ và rút gọn A
b) Tìm các số nguyên x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Bài 2. (2,0 điểm)

Giải các phương trình và bất phương trình sau:

a) $x+\frac{x-1}{m}<\frac{x+1}{m}-\left(m-2\right)x$ (với m là tham số , $m\neq 0$)

b) $8.\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4.\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right).\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+4\right)^2-4.\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2$

c) $\left(2x+3\right)^3+\left(3x-5\right)^3=\left(5x-2\right)^3-\left(5x-2\right)\left(17x^2+2016x-2063\right)$

Bài 3. (2,0 điểm)

a) Tìm các số tự nhiên n để $B=\left(n^2-8\right)^2+36$ là số nguyên tố

b) Trong lớp học bạn An khi đã hoàn thành bài tập mà giáo viên giao cho thì đã giết thời gian bằng cách liệt kê ra một bảng các số nguyên. Bạn ấy bắt đầu ghi ra một số

vndoc

nguyên nào đó; để có số tiếp theo, An đã cộng hoặc nhân các chữ số của số đứng liền trước. Cứ tiếp tục như thế, và rồi nhận ra rằng các số mình ghi đều là số lẻ. Hỏi có bao nhiêu số đầu tiên An có thể chọn, biết rằng nó không quá 6 chữ số.

Bài 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Tính tổng $\dfrac{HD}{AD}+\dfrac{HE}{BE}+\dfrac{HF}{CF}$

b) Chứng minh: $BH.BE+CH.CF=BC^2$

c) Chứng minh: Điểm H cách đều ba cạnh của tam giác DEF

d) Trên các đoạn HB, HC lấy tương ứng các điểm M, N tùy ý sao cho $HM=CN$. Chứng minh : Đường trung trực của đoạn MN luôn đi qua một điểm cố định .

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho a,b,c là các số dương.

Chứng minh: $\dfrac{1}{a(a+b)}+\dfrac{1}{b(b+c)}+\dfrac{1}{c(c+a)}\geq\dfrac{27}{2(a+b+c)^2}$

vndoc

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) ĐKXĐ: $\begin{cases} 2x^2+8\neq 0 \\ 8-4x+2x^2-x^3\neq 0 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 2 \end{cases}$

Với $\begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 2 \end{cases}$ thì:

$$A=\left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8}-\frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3}\right).\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)$$

$$=\left[\frac{x(x-2)}{2(x^2+4)}+\frac{2x^2}{\left(x^2+4\right)\left(x-2\right)}\right].\frac{x^2-x-2}{x^2}$$

$$=\frac{x\left(x-2\right)^2+2x^2.2}{2\left(x^2+4\right)\left(x-2\right)}.\frac{\left(x+1\right)\left(x-2\right)}{x^2}$$

$$=\frac{\left(x^2-4x+4\right)+4x^2}{2\left(x^2+4\right)}.\frac{x+1}{x}$$

$$=\frac{x^2+4}{2\left(x^2+4\right)}.\frac{x+1}{x}=\frac{x+1}{2x}$$

Vậy , với $\begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 2 \end{cases}$ thì $A=\frac{x+1}{2x}$

b) Xét với $\begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 2 \end{cases}(*)$

Giả sử biểu thức A nhận giá trị nguyên thì biểu thức 2A cũng nhận giá trị nguyên

$2A\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{2x+2}{2x}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{1}{x}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x\in\{-1;1\}$

$x=-1;x=1$ đều thỏa mãn $(*)$

Với $x=-1$ thì $A=\frac{-1+1}{2(-1)}=0$ (thỏa mãn $A\in\mathbb{Z}$)

vndoc

Với $x=1$ thì $A=\dfrac{1+1}{2.1}=2$ (thỏa mãn $A\in\mathbb{Z}$)

Vậy để biểu thức A nhận giá trị nguyên thì $x\in\{-1;1\}$

Câu 2.

a) $x+\dfrac{x-1}{m}<\dfrac{x+1}{m}-(m-2)x \Leftrightarrow (m-1)x<\dfrac{2}{m}\quad (2a)$

+) Nếu $m<1$ và $m\neq 0$ thì $m-1<0. \Rightarrow (2a)\Leftrightarrow x>\dfrac{2}{m(m-1)}$

+)Nếu $m>1$ thì $m-1>0.(2a)\Leftrightarrow x<\dfrac{2}{m(m-1)}$

+)Nếu $m=1$ thì $m-1=0. \Rightarrow (2a)\Leftrightarrow 0x<2(luon\quad dung)$

Kết luận:

+Với $m<1$ và $m\neq 0$ thì tập nghiệm BPT là $S=\left\{x\in\mathbb{R}/x>\dfrac{2}{m(m-1)}\right\}$

+Với $m=1$ thì tập nghiệm của BPT là $S=\mathbb{R}$

+Với $m>1$ thì tập nghiệm của BPT là: $S=\left\{x\in\mathbb{R}/x<\dfrac{2}{m(m-1)}\right\}$

b) $8\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=(x+4)^2-4\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2\ (2b)$

Điều kiện $x\neq 0$, Khi đó:

$$(2b)\Leftrightarrow 8\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=(x+4)^2$$

$$\Leftrightarrow 8\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left[\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\right]=(x+4)^2$$

$$\Leftrightarrow 8\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-8\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=(x+4)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2=16\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-8\end{array}\right.$$

Vì $x\neq 0$ nên $S=\{-8\}$

c) Trước hết chứng minh được rằng:

Nếu có 3 số a,b,c thỏa mãn $a+b+c=0$ thì $a^3+b^3+c^3=3abc\ (2c)$

Ta có:

$$(2x+3)^3+(3x-5)^3=(5x-2)^3-(5x-2)(17x^2+2016x-2063)$$
$$\Leftrightarrow (2x+3)^3+(3x-5)^3+(2-5x)^3=(2-5x)(17x^2+2016x-2063)$$
Áp dụng đẳng thức (2c) và vì $(2x+3)+(3x-5)+(2-5x)=0$ nên phương trình đã cho tương đương với :
$$3(2x+3)(3x-5)(2-5x)=(2-5x)(17x^2+2016x-2063)$$
$$\Leftrightarrow (2-5x)\left[3(6x^2-x-15)-(17x^2+2016x-2063)\right]=0$$
$$\Leftrightarrow (2-5x)(x^2-2019x+2018)=0$$
$$\Leftrightarrow (2-5x)(x-1)(x-2018)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{5} \\ x=1 \\ x=2018 \end{array}\right.$$
Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{2}{5};1;2018\right\}$

Câu 3.

a) Ta có:

$$B=(n^2-8)^2+36=n^4-16n^2+64+36$$
$$=n^4+20n^2+100-36n^2$$
$$=(n^2+10)^2-(6n)^2$$
$$=(n^2-6n+10)(n^2+6n+10)$$

Với $n\in\mathbb{N}$ thì $0<n^2-6n+10\le n^2+6n+10$

Nên để B là số nguyên tố thì trước hết $n^2-6n+10=1$

Hay $(n-3)^2=0\Leftrightarrow n=3$

Thử lại , với $n=3$ thì $B=(3^2-8)^2+36=37$

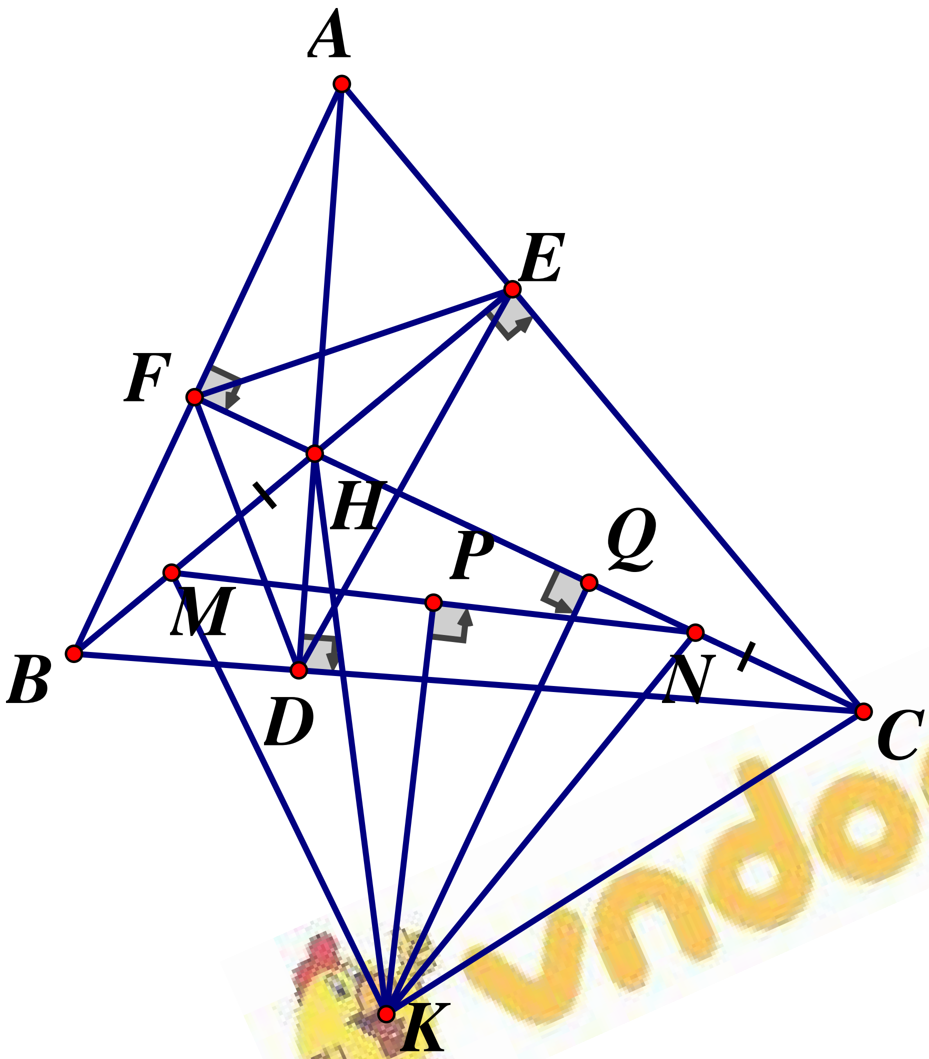
37 là số nguyên tố nên $n=3$ là giá tị cần tìm

b) Ta gọi số đầu tiên thỏa mãn đề bài là số chấp nhận được. Các chữ số của số chấp nhận đều phải là số lẻ, vì nếu không tích của chúng sẽ chẵn

Như vậy có 5 số chấp nhận được có 1 chữ số

Không thể có số chấp nhận được gồm 2 chữ số vì thế thì tổng hoặc tích các chữ số của chúng sẽ là số chẵn. Tương tự như vậy số chấp nhận được cũng không thể có 4 hoặc 6 chữ số.
Ta xét các số chấp nhận được gồm ba chữ số (tổng và tích các chữ số của các số chấp nhận được gồm ba chữ số này phải là số lẻ, và chúng không thể có hai chữ số, nên và tổng và tích các chữ số không thể vượt quá 9. Như vậy số chấp nhận được gồm 3 chữ số có thể:
Hoặc là gồm 3 chữ số 1,
Hoặc là gồm hai chữ số 1, số còn lại là 1 trong 3 chữ số 3,5,7
Hoặc gồm 1 chữ số 1 và 2 chữ số 3
Do đó có $1+9+3=13$ số chấp nhận được có 3 chữ số.
Tương tự như thế , ta tính được số chấp nhận được gồm 5 chữ số. Tổng các chữ số không vượt quá 45 và là số chấp nhận được nên tích không vượt quá 9, khả năng xảy ra là :
Hoặc gồm 5 chữ số 1
Hoặc gồm 4 chữ số 1 và một chữ số 3
Hoặc gồm 4 chữ số 1 và một chữ số 5
Hoặc gồm ba chữ số 1 và hai chữ số 3
Do đó số các số chấp nhận được gồm 5 chữ số:
$1+5+5+10=21$ số
Vậy số các số thỏa mãn đề bài là: $5+13+21=39$ số

Câu 4.



a) Trước hết chứng minh : $\dfrac{HD}{AD} = \dfrac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$

Tương tự có: $\dfrac{HE}{BE} = \dfrac{S_{HCA}}{S_{ABC}}; \dfrac{HF}{CF} = \dfrac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$

Nên $\dfrac{HD}{AD} + \dfrac{HE}{BE} + \dfrac{HF}{CF} = \dfrac{S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$

Vậy $\dfrac{HD}{AD} + \dfrac{HE}{BE} + \dfrac{HF}{CF} = 1$

b) Trước hết chứng minh: $\Delta BDH \sim \Delta BEC \Rightarrow BH.BE = BD.BC$

Và $\Delta CDH \sim \Delta CFB \Rightarrow CH.CF = CD.BC$

$\Rightarrow BH.BE + CH.CF = BC.(BD + CD) = BC^2$

vndoc

c) Trước hết chứng minh $\Delta AEB \sim \Delta AFC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$. Mặt khác $EAF = BAC$

Nên $\Delta AEF \sim \Delta ABC(c.g.c) \Rightarrow AEF = ABC$

Chứng minh tương tự, ta có: $\Delta CDE \sim \Delta CAB \Rightarrow CED = CBA$

$\Rightarrow AEF = CED$ mà $EB \perp AC$ nên EB là phân giác của góc DEF

Tương tự: DA, FC là phân giác của các góc EDF, DFE

Vậy H là giao điểm các đường phân giác của tam giác DEF

Nên H cách đều ba cạnh của tam giác DEF

d) Gọi K là giao điểm của các đường trung trực của hai đoạn MN và HC, ta có

$\Delta KMH = \Delta KNC\left(c.c.c\right) \Rightarrow KHM = KCN$ (1)

Mặt khác ta cũng có: ΔKCH cân tại K nên : $KHC = KCH$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $KHC = KHB \Rightarrow HK$ là phân giác của góc BHC

Vậy K là giao điểm của trung trực đoạn HC và phân giác của góc BHC nên K là điểm cố định

Hay trung trực của đoạn MN luôn đi qua một điểm cố định là K

Câu 5.

Áp dụng BĐT Cô si cho ba số dương ta được:

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}} \quad (*)$$

Cũng theo BĐT Cô si :

$0 < 3^3abc \leq \left(a+b+c\right)^3 (1)$ và $0 < 3^3.\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right) \leq 8\left(a+b+c\right)^3$ (2)

Nhân tương ứng hai vế các BĐT (1) và (2) được:

$$3^6abc\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right) \leq 8\left(a+b+c\right)^6$$

Hay $\frac{3}{\sqrt[3]{abc(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq \frac{27}{2\left(a+b+c\right)^2} (**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra $\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{27}{2\left(a+b+c\right)^2}$

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$