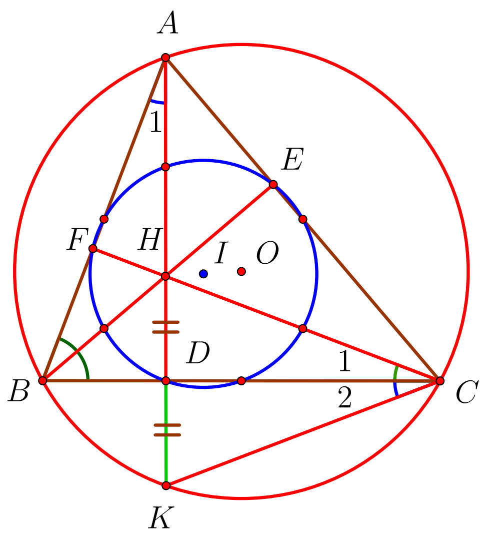
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG THCS ....

Ths: LÊ VĂN HƯNG

LUYỆN TẬP SÂU VÀ CÓ CHỦ ĐÍCH

5 CHỦ ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀ 50 ĐỀ THI THỬ

VÀO LỚP 10 MÔN TOÁN



CẬP NHẬT - CHỌN LỌC - BÁM SÁT

NỘI DUNG ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT THÀNH PHỐ HÀ NỘI

√ **Bám sát đề thi nhất**

√ **Phương pháp tư duy hay nhất**

√ **Đầy đủ lý thuyết và các dạng bài tập nhất**

HÀ NỘI, 20 - 7 - 2018

MỤC LỤC

Tài liệu này sẽ liên tục được chỉnh sửa và cập nhật

.

LỜI NÓI ĐẦU

Với mong muốn tổng hợp những nội dung hay và bám sát theo đề thi tuyển sinh vào 10 môn toán THPT, giải quyết được tất cả các bài toán trên lớp cho các em học sinh, tôi đã sưu tầm và biên soạn tài liệu này để giúp các em học sinh khối 9 có cái nhìn tổng quan về nội dung cần học.

Tài liệu này được siêu tầm trên nhiều nguồn, nhiều cuốn sách với sự trân trọng như của thầy "LÊ ĐỨC THUẬN", ..., các đề thi của các trường trong cả nước và được viết lại với ý tưởng của tôi. Tài liệu tổng hợp này có phân ra các chủ đề trọng tâm có cơ sở lý thuyết, phân dạng bài tập rõ ràng và cụ thể, có các ví dụ mẫu minh họa với các cách giải theo mô hình tư duy. Đặc biệt là 50 đề luyện tập sẽ giúp các em nâng cao kĩ năng và tốc độ làm bài.

Dù đã rất cố gắng kiểm soát nội dung bài viết của tài liệu nhưng cũng không thể tránh được những sai sót vì thế rất mong nhận được sự góp ý chân thành của bạn đọc.

Tài liệu sẽ luôn được cập nhật và chỉnh sửa để trở nên hay hơn nữa.

Xin chân thành cảm ơn!!!

Ý tưởng & biên soạn

LÊ VĂN HƯNG

MINH HỌA CẤU TRÚC ĐỀ THI VÀO 10 HÀ NỘI DỰA TRÊN ĐỀ TUYỂN SINH

Bài I. (2,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức (1,0 điểm).

b) Tìm giá trị của biểu thức thỏa mãn điều kiện (0,5 điểm).

c) Bài toán phụ (0,5 điểm).

Bài II. (2,0 điểm) Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình hoặc phương trình.

Bài III. (2,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn (1,0 điểm).

2) (1,0 điểm)

a) Bài toán đường thẳng, parabol, phương trình bậc hai ... (0,5 điểm).

b) Bài toán đường thẳng, parabol, phương trình bậc hai ... (0,5 điểm).

Bài IV. (3,5 điểm) Hình học tổng hợp.

1) Chứng minh tứ giác nội tiếp (hoặc chứng minh nhiều điểm cùng thuộc một đường tròn) (1,0 điểm).

2) Tam giác đồng dạng, ..., hệ thức lượng trong tam giác (1,0 điểm).

3) Câu hỏi vận dụng (1,0 điểm).

4) Câu hỏi vận dụng cao (0,5 điểm).

Chú ý: Chứng minh phần nào thì có hình vẽ đúng phần đó mới có điểm.

Bài V. (0,5 điểm) Vận dụng cao.

1) Bài toán Min - Max (bất đẳng thức).

2) Giải phương trình chứa căn thức.

3) Giải hệ phương trình nâng cao.

CHUYÊN ĐỀ TOÁN THI VÀO 10

CHỦ ĐỀ I: RÚT GỌN BIỂU THỨC
BÀI TOÁN PHỤ

A. LÝ THUYẾT

1. CÁC CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI CĂN THỨC

1. $\sqrt{A^2} = \mid A \mid = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}.$

2. $\sqrt{AB} = \sqrt{A}.\sqrt{B}$ (với $A \geq 0; B \geq 0$).

3. $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ (với $A \geq 0; B > 0$).

4. $\sqrt{A^2B} = \mid A \mid \sqrt{B}$ (với $B \geq 0$).

5. $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$ (với $A \geq 0; B \geq 0$).

6. $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$ (với $A < 0; B \geq 0$).

7. $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{1}{\mid B \mid}\sqrt{AB}$ (với $A.B \geq 0; B \neq 0$).

8. $\dfrac{A}{\sqrt{B}} = \dfrac{A\sqrt{B}}{B}$ (với $B > 0$).

9. $\dfrac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \dfrac{C\left(\sqrt{A} \mp B\right)}{A - B^2}$ (với $A \geq 0$ và $A \neq B^2$).

10. $\dfrac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \dfrac{C\left(\sqrt{A} \mp \sqrt{B}\right)}{A - B}$ (với $A \geq 0; B \geq 0; A \neq B$).

11. $\left(\sqrt[3]{A}\right)^3 = \sqrt[3]{A^3} = A.$

2. XÁC ĐỊNH NHANH ĐIỀU KIỆN CỦA BIỂU THỨC

- $\sqrt{A} \Rightarrow$ ĐKXĐ: $A \geq 0$. **Ví dụ:** $\sqrt{x - 2018} \Rightarrow$ **ĐKXĐ:** $x \geq 2018$.
- $\dfrac{A}{B} \Rightarrow$ ĐKXĐ: $B \neq 0$. **Ví dụ:** $\dfrac{x+2}{x-3} \Rightarrow$ **ĐKXĐ:** $x \neq 3$.
- $\dfrac{A}{\sqrt{B}} \Rightarrow$ ĐKXĐ: $B > 0$. **Ví dụ:** $\dfrac{x+2}{\sqrt{x-3}} \Rightarrow$ **ĐKXĐ:** $x > 3$.
- $\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \Rightarrow$ ĐKXĐ: $A \geq 0; B > 0$. **Ví dụ:** $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} \Rightarrow$ **ĐKXĐ:** $\begin{cases} x \geq 0 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$
- $\sqrt{\dfrac{A}{B}} \Rightarrow$ ĐKXĐ: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} A \leq 0 \\ B < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \end{cases} \end{array}\right.$. **Ví dụ:** $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}} \Rightarrow$ **ĐKXĐ:** $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 1 \leq 0 \\ x + 2 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x \geq 1 \end{array}\right..$
- Cho $a > 0$ ta có $x^2 > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \sqrt{a} \\ x < -\sqrt{a} \end{array}\right.$. **Ví dụ:** $x^2 > 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -2 \end{array}\right..$

- Cho $a > 0$ ta có $x^2 < a \Leftrightarrow -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$. **Ví dụ:** $x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

Chú ý 1: Giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

- Dạng tổng quát 1: $|A(x)| = k \Leftrightarrow A(x) = \pm k$ với k là hằng số.
- Dạng tổng quát 2: $|A(x)| = |B(x)| \Leftrightarrow A(x) = \pm B(x)$.
- Dạng tổng quát 3: $|A(x)| = B(x)$

Trường hợp 1: Nếu $A(x) \geq 0$ thì phương trình trở thành $A(x) = B(x)$.

Trường hợp 2: Nếu $A(x) < 0$ thì phương trình trở thành $A(x) = -B(x)$.

Chú ý 2: Giải bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

- Dạng tổng quát 1: $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x)$.

Đặc biệt với hằng số $k > 0$ thì $|f(x)| < k \Leftrightarrow -k < f(x) < k$.

- Dạng tổng quát 2: $|A(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.$.

Đặc biệt với hằng số $k > 0$ thì $|f(x)| > k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > k \\ f(x) < -k \end{array}\right.$.

- Dạng tổng quát 3:

+) $|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 < [g(x)]^2$.

+) $|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 > [g(x)]^2$.

Chú ý 3: Bất đẳng thức Cô - si cho hai số a, b không âm ta có:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Chú ý: Với hai số a, b bất kỳ ta luôn có:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Ví dụ: Cho $x \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x + \dfrac{1}{x}$.

Hướng dẫn

Vì $x \geq 1 > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô - si ta có $A = x + \dfrac{1}{x} \geq 2\sqrt{x.\dfrac{1}{x}} = 2$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy $A_{\min} = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Ví dụ: Cho $x \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = x + \dfrac{1}{x}$.

Hướng dẫn

Cách giải sai: Vì $x \geq 2 > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô - si ta có $B = x + \dfrac{1}{x} \geq 2\sqrt{x.\dfrac{1}{x}} = 2$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$ (không thỏa mãn vì $x \geq 2$).

Vậy $B_{\min} = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Gợi ý cách giải đúng:

Dự đoán $B_{\min}$ đạt được tại $x = 2$. Ta có $B = nx + \dfrac{1}{x} + x - nx$. Dấu " = " xảy ra khi $\begin{cases} nx = \dfrac{1}{x} \\ x = 2 \end{cases}$.

Do đó ta có $A = \dfrac{3x}{4} + \left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{x}\right)$. Áp dụng bất đẳng thức Cô - si $\dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x} \geq 2\sqrt{\dfrac{x}{4}.\dfrac{1}{x}} = 1$.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x}{4} = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = 2$ (vì $x \geq 2$).

Vậy $B_{\min} = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow x = 2$.

Ví dụ: Cho $x \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = x + \dfrac{1}{x}$.

Hướng dẫn

Tương tự ta có $C = x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{8x}{9} + \left(\dfrac{x}{9} + \dfrac{1}{x}\right) \geq \dfrac{10}{3}$. Dấu " = " xảy ra khi $x = 3$.

Ví dụ: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $D = \dfrac{x + 12}{\sqrt{x} + 2}$. Với $x \geq 0$.

Hướng dẫn

Gợi ý: $D = (\sqrt{x} + 2) + \dfrac{16}{\sqrt{x} + 2} - 4 \geq 4$. Dấu " = " xảy ra khi $x = 4$.

.

3. Các bước rút gọn một biểu thức

Bước 1: Tìm điều kiện xác định.

Bước 2: Tìm mẫu thức chung, quy đồng mẫu thức, rút gọn tử, phân tích tử thành nhân tử.

Bước 3: Chia cả tử và mẫu cho cho nhân tử chung của tử và mẫu.

Bước 4: Khi nào phân số tối giản thì ta đã hoàn thành việc rút gọn.

Ví dụ: Rút gọn biểu thức $A = \left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-1}\right) \cdot \left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} + 1\right)$.

Hướng dẫn

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

$$A = \left[\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} - \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\right] \cdot \left[\frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right]$$

$$A = \left[\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2}\right] \cdot \left(\frac{x+1+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}}\right)$$

$$A = \left[\frac{x+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} - \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2}\right] \cdot \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$A=\left[\frac{x+\sqrt{x}-2-x+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)}\right]\cdot\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right)$$
$$A=\left[\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)}\right]\cdot\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right)$$
$$A=\frac{2}{x-1}.$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Các bài toán rút gọn, tính giá trị của biểu thức chứa số

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức.

a) $A=\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

b) $B=\sqrt{4-\sqrt{12}}$.

c) $C=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$

d) $D=\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\sqrt{4+\sqrt{12}}$.

Hướng dẫn

a) $A=\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=|\sqrt{5}-1|=\sqrt{5}-1$.

b) $B=\sqrt{4-\sqrt{12}}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=|\sqrt{3}-1|=\sqrt{3}-1$.

c) $C=\sqrt{19-8\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3}-4)^2}=|\sqrt{3}-4|=4-\sqrt{3}$.

d) $D=\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\sqrt{4+\sqrt{12}}=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}-\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}=|\sqrt{3}-\sqrt{2}|-|\sqrt{3}+1|$
$=\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{3}-1=-1-\sqrt{2}$.

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức.

a) $A=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

b) $B=\sqrt{8-2\sqrt{15}}$.

c) $C=\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

d) $D=\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}$.

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức.

a) $A=\dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}+\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

b) $B=\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$.

c) $C=\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

d) $D=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức.

a) $A=\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}$

b) $B=\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$.

c) $C=\left(\sqrt{14}+\sqrt{6}\right)\sqrt{5-\sqrt{21}}$

d) $D=\dfrac{3+3\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{10}}{6+2\sqrt{5}}$.

Ví dụ 5: Rút gọn biểu thức.

a) $A=\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

b) $B=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$.

c) $C=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$

d) $D=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

Ví dụ 6: Rút gọn biểu thức.

a) $A=\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

b) $B=\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}+\sqrt{3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}}$.

c) $C=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

d) $D=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$.

Ví dụ 7: Rút gọn biểu thức.

a) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$ b) $\sqrt{41-12\sqrt{5}}-\sqrt{41+12\sqrt{5}}$.

c) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$.

Các bài toán rút gọn chứa ẩn và bài toán phụ

Dạng 1: TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC A KHI $x=x_0$

Phương pháp: Rút gọn giá trị của biến (nếu cần) sau đó thay vào biểu thức đã cho rồi thay vào biểu thức đã cho rồi tính kết quả.

Ví dụ: Cho biểu thức $A=2x+\mid x-4\mid$.

a) Rút gọn A.

b) Tính giá của A khi $x=3$.

Hướng dẫn

Ta có $A=2x+\mid x-4\mid=\begin{cases}2x+x-4 & \text{nếu } x\geq 4\\ 2x-(x-4) & \text{nếu } x<4\end{cases}$

$=\begin{cases}3x-4 & \text{nếu } x\geq 4\\ x+4 & \text{nếu } x<4\end{cases}$

Khi $x=3<4$ thì giá trị của A là: $A=3+4=7$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{2-5\sqrt{x}}{4-x}$.

a) Rút gọn A.

b) Tính giá trị của A biết $x=\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-1}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-2\sqrt{x}+1}\right):\dfrac{4x}{(x-1)^2}$.

a) Rút gọn A.

b) Tính giá trị của A biết $|x-5|=4$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{2\sqrt{xy}}{x-y}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}\right).\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

a) Rút gọn A.

b) Tính giá trị của A biết $\dfrac{x}{y}=\dfrac{4}{9}$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x^2-2x}{2x^2+8}+\dfrac{2x^2}{x^3-2x^2+4x-8}\right).\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)$.

a) Rút gọn A.

b) Tính giá trị của A biết $x=\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A=\dfrac{x-\sqrt{x}}{x-9}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-3}$.

a) Rút gọn A.

b) Tính giá trị của A biết $x=\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

c) Tính giá trị của A biết $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$.

d) Tính giá trị của A biết $x=2\left(\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}}-\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}}\right)$.

Dạng 2: TÌM GIÁ TRỊ CỦA BIẾN KHI BIẾT GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

Phương pháp:

• Nếu bài toán yêu cầu tìm x để $A=k$ thì ta biến đổi $A-k=0$ tính kết quả, kết hợp với điều kiện để kết luận.

• Nếu bài toán yêu cầu tìm x để $A>k$ $(\geq,\leq,<k)$. Ta đi đánh giá dựa vào điều kiện hoặc đi xét hiệu $A-k>0$ với điều kiện của đề bài để tìm x.

Ví dụ: Cho biểu thức $A=\dfrac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$ với $x\geq 0$, $x\neq 4$. Tìm x để $A=-\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn

Ta có $A=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \dfrac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{x}-4=\sqrt{x}+2\Leftrightarrow \sqrt{x}=6\Leftrightarrow x=36$ (thỏa mãn điều kiện).

Ví dụ: Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{2}{x+4\sqrt{x}+4}\right):\left(\dfrac{2}{x-4}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}\right)$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm x để $A=0$.

Ví dụ: Cho biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{x-2\sqrt{x}}{x-4}$ và $Q=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ với $x\geq 0; x\neq 4$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm x sao cho $P=2$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A=\dfrac{1}{\sqrt{x}-3}$ với $x\geq 0$, $x\neq 9$. Tìm x để $A>1$.

Hướng dẫn

Ta có $A>1\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}-3}>1\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}-3}-1>0\Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}>0\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-3}<0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x}-4>0\\ \sqrt{x}-3<0\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x}-4<0\\ \sqrt{x}-3>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>16\\ x<9\end{cases}\\ \begin{cases}x<16\\ x>9\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow 9<x<16 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Ví dụ: Cho biểu thức $A=\dfrac{3\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}+1}$ với $x\geq 0$. Tìm x để $A<\dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn

Cách 1: Ta có $A<\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow \dfrac{3\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}+1}<\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow \dfrac{3\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}+1}-\dfrac{3}{2}<0\Leftrightarrow \dfrac{-13}{2\left(2\sqrt{x}+1\right)}<0$ luôn đúng với $x\geq 0$.

Vậy $A<\dfrac{3}{2}$ với $x\geq 0$.

Cách 2: Xét hiệu $A-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}+1}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{-13}{2\left(2\sqrt{x}+1\right)}<0$

Vậy $A<\dfrac{3}{2}$ với $x\geq 0$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{3}{x\sqrt{x}-9\sqrt{x}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{3\sqrt{x}-3}{x+3\sqrt{x}}\right)$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm x để $A>1$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x^2-2x}{2x^2+8}+\dfrac{2x^2}{x^3-2x^2+4x-8}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)$.

a) Rút gọn A.

b) Giải bất phương trình $A>\dfrac{1}{3}$.

Ví dụ: Cho biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{x-2\sqrt{x}}{x-4}$ và $Q=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ với $x\geq 0; x\neq 4$.

a) Rút gọn P.

b) Biết $M=P:Q$. Tìm giá trị của x để $M^2<\dfrac{1}{4}$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$ và $B=\dfrac{x-\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}-2}$ với $x>0$, $x\neq 1$, $x\neq 4$.

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x=\sqrt{27+10\sqrt{2}}-\sqrt{18+8\sqrt{2}}+8$.

b) Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{B}{A}$.

c) Tìm giá trị nguyên của x để $P\sqrt{x}\geq-\dfrac{3}{2}$.

Dạng 3: SO SÁNH BIỂU THỨC A VỚI k HOẶC BIỂU THỨC B (k LÀ HẰNG SỐ)

Phương pháp: Nếu đề bài yêu cầu so sánh biểu thức A với hằng số k hay biểu thức khác là B thì ta đi xét hiệu $A-k$, $A-B$ và xét dấu biểu thức này rồi kết luận.

Ví dụ: Cho biểu thức $A=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{x+9\sqrt{x}}{x-9}$ và $B=\dfrac{x+5\sqrt{x}}{x-25}$ với $x\geq 0$, $x\neq 9$ và $x\neq 25$.

a) Rút gọn A.

b) Hãy so sánh $P=\dfrac{A}{B}$ với 1.

Hướng dẫn

a) $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$.

b) Ta có: $P=\dfrac{A}{B}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}:\dfrac{x+5\sqrt{x}}{x-25}=\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}$.

Xét hiệu: $P-1=\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}-1=\dfrac{-8}{\sqrt{x}+3}<0$ với $x\geq 0$, $x\neq 9$ và $x\neq 25$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A=\dfrac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6}-\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$ với $x\geq 0$, $x\neq 4$ và $x\neq 9$.

a) Rút gọn A.

b) Hãy so sánh A với 1.

Ví dụ: Cho biểu thức $A=\dfrac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$ với $x\geq 0$, $x\neq 1$.

a) Rút gọn A.

b) Hãy so sánh A với $\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}\right):\left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{x+1}\right)$

với $x \geq 0$, $x \neq 1$.

a) Rút gọn A.

b) Hãy so sánh A với $\frac{1}{3}$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \left(2 - \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-3}\right) : \left[\frac{6\sqrt{x}+1}{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right]$.

a) Rút gọn A.

b) Hãy so sánh A với $\frac{3}{2}$.

Dạng 4: TÌM GIÁ TRỊ NGUYÊN CỦA x ĐỂ BIỂU THỨC CÓ GIÁ TRỊ NGUYÊN

Phương pháp: Biến đổi biểu thức về dạng phân thức có tử là số nguyên, lí luận chặt chẽ để rồi chỉ ra mẫu phải thuộc ước tự nhiên của tử và kết luận.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3} + \frac{5}{\sqrt{x}-3} - \frac{6}{9-x}\right) : \frac{6}{\sqrt{x}+2}$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Hướng dẫn

a) Điều kiện: $x \geq 0$; $x \neq 9$. Khi đó ta có

$$A = \frac{(\sqrt{x}-3) + 5(\sqrt{x}+3) + 6}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} . \frac{\sqrt{x}+2}{6}$$

$$A = \frac{6\sqrt{x}+18}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} . \frac{\sqrt{x}+2}{6}$$

$$A = \frac{6(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} . \frac{\sqrt{x}+2}{6}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}.$$

b) Ta có $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3+5}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x}-3}$.

A có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x}-3}$ có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{x}-3 \in$Ư$(5) \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 \in \{\pm 1; \pm 5\}$.

Ta biết rằng khi x là số nguyên thì $\sqrt{x}$ hoặc là số nguyên (nếu x là số chính phương) hoặc là số vô tỉ (nếu x không là số chính phương). Để $\frac{5}{\sqrt{x}-3}$ là số nguyên thì $\sqrt{x}$ không thể là số vô tỉ, do đó $\sqrt{x}$ là số nguyên, suy ra $\sqrt{x}-3$ là ước tự nhiên của 5.

Ta có bảng sau.

$\sqrt{x}-3$	1	-1	5	-5
$\sqrt{x}$	4	2	8	-2
x	16	4	64	||

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) . \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{3}{\sqrt{x}} + \left(\frac{x}{x-\sqrt{x}} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) . \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm các giá trị của x để $A \geq 10$.

c) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{x-4} + \dfrac{1}{\sqrt{x}-2}\right) : \dfrac{\sqrt{x}+2}{x-4}$ với $x \geq 0$, $x \neq 4$.

a) Rút gọn B.

b) Tìm các giá trị nguyên của x để $P = A(B-2)$ có giá trị nguyên.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{x-4} + \dfrac{1}{\sqrt{x}-2}\right) : \dfrac{\sqrt{x}+2}{x-4}$ với $x \geq 0$, $x \neq 4$.

a) Rút gọn B.

b) Tìm các giá trị nguyên của x để $P = A(B-2)$ có giá trị nguyên.

Dạng 5: TÌM GIÁ TRỊ CỦA x ĐỂ BIỂU THỨC CÓ GIÁ TRỊ NGUYÊN

Phương pháp:

Cách 1: Dựa vào điều đánh giá biểu thức để tìm ra khoảng biểu thức nằm trong, biện luận biểu thức nguyên nên ta chỉ ra được các giá trị nguyên thuộc khoảng đó, với mỗi giá trị của biểu thức ta sẽ tìm ra được các nghiệm của biến tương ứng.

Cách 2: Đặt biểu thức bằng một tham số nguyên, biến đổi suy ra một vế chỉ còn chứa căn thức bậc hai, dựa vào căn thức để giải bất phương trình để tương ứng, tìm khoảng tham số nằm trong rồi giải với các tham số tương ứng để tìm ra các nghiệm của biến tương ứng.

Ví dụ: $A = \dfrac{7}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0$. Tìm các giá trị của x để A có giá trị nguyên.

Cách 1: Với $x \geq 0$ ta có $A > 0$.

- $A = \dfrac{7}{\sqrt{x}+3} \leq \dfrac{7}{3}$.

Mà $A \in \mathbb{Z} \Rightarrow A \in \{1; 2\}$.

Với $A = 1 \Leftrightarrow x = 16$ (thỏa mãn).

Với $A = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$ (thỏa mãn).

Cách 2: Đặt $A = \dfrac{7}{\sqrt{x}+3} = n$ với $n \in \mathbb{Z}$.

$A = \dfrac{7}{\sqrt{x}+3} = n \Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{7-3n}{n}$. Vì $\sqrt{x} \geq 0$ nên $\dfrac{7-3n}{n} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < n \leq \dfrac{7}{3}$.

Mà $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \in \{1; 2\}$.

Với $n = 1 \Leftrightarrow x = 16$ (thỏa mãn).

Với $n = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$ (thỏa mãn).

Vậy với $x = 16$, $x = \dfrac{1}{4}$ thì biểu thức A có giá trị nguyên.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \dfrac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} - \dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} - \dfrac{36}{x-9}$ với $x \geq 0$, $x \neq 9$.

a) Rút gọn B và tìm tất cả các giá trị của x để $A = B$.

b) Tìm các giá trị của x để A có giá trị nguyên.

Hướng dẫn

a) $B=\dfrac{(\sqrt{x}-3)^2-(\sqrt{x}+3)^2-36}{x-9}=\dfrac{12\sqrt{x}-36}{x-9}=\dfrac{12}{\sqrt{x}+3}$.

Để $A=B\Leftrightarrow \dfrac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1}=\dfrac{12}{\sqrt{x}+3}\Leftrightarrow (7\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)=12(2\sqrt{x}+1)\Leftrightarrow 7x-5\sqrt{x}-18=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=2\\ \sqrt{x}=-\dfrac{9}{7}\ \text{(loại)}\end{array}\right.\Rightarrow x=4.$

Vậy để $A=B$ thì $x=4$.

b) $A=\dfrac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1}=\dfrac{\frac{7}{2}(2\sqrt{x}+1)-\frac{11}{2}}{2\sqrt{x}+1}<\dfrac{\frac{7}{2}(2\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}+1}=\dfrac{7}{2}$

$A<\dfrac{7}{2}$ mà A nhận giá trị nguyên dương $\Rightarrow 0<A<\dfrac{7}{2}$. A nguyên $\Rightarrow A=1;2;3$

Với $A=1\Rightarrow \sqrt{x}=\frac{3}{5}\Rightarrow x=\frac{9}{25}$

Với $A=2\Rightarrow \sqrt{x}=\frac{4}{3}\Rightarrow x=\frac{16}{9}$

Với $A=3\Rightarrow \sqrt{x}=5\Rightarrow x=25$.

Vậy để A nhận giá trị nguyên dương thì $x=\dfrac{9}{25};\dfrac{16}{9};x=25$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{2\sqrt{x}-24}{x-9}$ và $B=\dfrac{7}{\sqrt{x}+8}$ với $x\geq 0$, $x\neq 9$.

a) Tính giá trị của biểu thức B khi $x=36$.

b) Rút gọn A.

c) Tìm x để biểu thức $P=A.B$ có giá trị nguyên.

Hướng dẫn

b) $A=\dfrac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$.

c) Ta có đánh giá $0\leq P\leq \dfrac{7}{3}$.

Với $P=1\Rightarrow x=16$ (TM).

Với $P=2\Rightarrow x=\dfrac{1}{4}$ (TM).

Ví dụ: Cho biểu thức $A=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ và $B=\left(\dfrac{15-\sqrt{x}}{x-25}+\dfrac{2}{\sqrt{x}+5}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$ với $x\geq 0$, $x\neq 25$.

a) Rút gọn B.

b) Tìm các giá trị của x để $P=B-A$ có giá trị nguyên.

Ví dụ: Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}\right).\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ với $x\geq 0$, $x\neq 4$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm x thực để $\dfrac{7A}{3}$ có giá trị nguyên.

Dạng 6: TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT HOẶC GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA BIỂU THỨC

Phương pháp:

Cách 1: Thêm bớt rồi dùng định lí cô si hoặc đánh giá dựa vào điều kiện.

Cách 2: Dùng phương pháp miền giá trị.

Chú ý:

• Biểu thức A có giá trị lớn nhất là a, kí hiệu là $A_{\max} = a$ nếu $A \leq a$ với mọi giá trị của biến và tồn tại sao cho ít nhất một giá trị của biến dấu " = " xảy ra.

• Biểu thức A có giá trị nhỏ nhất là b, kí hiệu là $A_{\min} = b$ nếu $A \geq b$ với mọi giá trị của biến và tồn tại sao cho ít nhất một giá trị của biến dấu " = " xảy ra.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \dfrac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19}{x+2\sqrt{x}-3} - \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0$, $x \neq 1$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Hướng dẫn

a) $A = \dfrac{x+16}{\sqrt{x}+3}$

b) **Cách 1: Thêm bớt rồi dùng Cô - si hoặc đánh giá dựa vào điều kiện xác định.**

$A = \dfrac{x+16}{\sqrt{x}+3} = \dfrac{x-9+25}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x}-3+\dfrac{25}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x}+3+\dfrac{25}{\sqrt{x}+3}-6 \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+3).\dfrac{25}{\sqrt{x}+3}}-6$ $= 2.5-6 = 4$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x+3} = \dfrac{25}{\sqrt{x}+3} \Leftrightarrow x = 4$.

$\Rightarrow A \geq 4$.

Suy ra $\min A = 4$ khi $x = 4$.

Cách 2: Dùng phương pháp miền giá trị.

$A = \dfrac{x+16}{\sqrt{x}+3} \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 - A\sqrt{x} + 16 - 3A = 0.$

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A \geq 4 \\ A \leq -16 \end{array}\right.$. Suy ra $\min A = 4$ dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x} = \dfrac{A}{2} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn).

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} : \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm giá trị lớn nhất của A.

Hướng dẫn

a) Điều kiện $x > 0$. Khi đó ta có

$A = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} : \dfrac{\sqrt{x}+1+x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$.

$A = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} . \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1+x}$.

$A = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1+x}$.

b) Ta có: $A = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1+x} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$.

Xét biểu thức ở mẫu: $1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \geq 2\sqrt{\sqrt{x}.\dfrac{1}{\sqrt{x}}} + 1 = 3$ (áp dụng cô si).

Ta có $A \leq \frac{1}{3}$. Do đó max$A = \frac{1}{3}$ khi $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-36} - \frac{\sqrt{x}-6}{x+6\sqrt{x}}\right) \cdot \frac{x\sqrt{x}-36\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}-3)(x-2\sqrt{x}+3)}$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm giá trị lớn nhất của A.

Hướng dẫn

a) $A = \frac{6}{x-2\sqrt{x}+3}$ với điều kiện $x > 0; x \neq 9; x \neq 36$.

b) $A = \frac{6}{(\sqrt{x}+1)^2+2} \leq \frac{6}{2} = 3$ vì $(\sqrt{x}+1)^2 \geq 0$.

Suy ra max$A = 3$ khi $x = 1$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} - \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3}$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Hướng dẫn

a) $A = \frac{5\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$ với điều kiện $x \geq 0; x \neq 1$.

b) $A = \frac{5\sqrt{x}+15-17}{\sqrt{x}+3} = 5 - \frac{17}{\sqrt{x}+3} \geq 5 - \frac{17}{3} \Rightarrow A \geq -\frac{2}{3}$ vì $\sqrt{x} \geq 0$.

Suy ra min$A = -\frac{2}{3}$ khi $x = 0$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{x+\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{3x-4}{x-2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x}}$ với $x > 0$, $x \neq 4$.

a) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$.

b) Tính giá trị của A khi $x + \sqrt{x} + 1 + (2\sqrt{5}-1)\sqrt{x} = 3x - 2\sqrt{x-4} + 3$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{A}{B}$.

Dạng 7: CHỨNG MINH BIỂU THỨC LUÔN LUÔN ÂM HOẶC LUÔN LUÔN DƯƠNG VỚI MỌI GIÁ TRỊ CỦA ẨN

Phương pháp:

- Để chứng minh biểu thức $A > 0$ ta chỉ ra $A = A_1^2 + k$ với (k là hằng số dương).
- Để chứng minh biểu thức $A < 0$ ta chỉ ra $A = A_1^2 - k$ với (k là hằng số dương).

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{x+2}{x\sqrt{x}+1}\right) : \frac{2}{\sqrt{x}}$.

a) Rút gọn A.

b) Chứng minh rằng biểu thức A luôn luôn âm với mọi giá trị của x làm A xác định.

Hướng dẫn

a) Điều kiện $x > 0$. Khi đó ta có

$A = \frac{(x-\sqrt{x}+1)-(x+2)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} : \frac{2}{\sqrt{x}}$.

$A = \dfrac{-(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}.\dfrac{\sqrt{x}}{2}.$
$A = \dfrac{-\sqrt{x}}{2(x-\sqrt{x}+1)}.$
b) Ta có: $x > 0$ nên $-\sqrt{x} < 0$.
$x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0.$
Do đó $A < 0$ với mọi $x > 0$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} + \dfrac{x\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}+1}.$

a) Rút gọn A.

b) Chứng minh rằng biểu thức A luôn luôn không âm với mọi giá trị của x làm A xác định.

Hướng dẫn

a) Điều kiện $x \geq 1$. Khi đó ta có

$A = x - 2\sqrt{x-1}$.

b) Ta có: $A = x - 2\sqrt{x-1} = (x-1) - 2\sqrt{x-1} + 1 = (\sqrt{x-1}-1)^2 \geq 0$.

Vậy A luôn luôn không âm với mọi $x \geq 1$.

Dạng 8: CHỨNG MINH BIỂU THỨC THỎA MÃN VỚI ĐIỀU KIỆN NÀO ĐÓ

Phương pháp: Vận dụng linh hoạt các kiến thức đã học.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} - \dfrac{7\sqrt{x}-9}{x-9}$ (với $x > 0$, $x \neq 9$).

a) Rút gọn biểu thức B.

b) Tính giá trị của A khi $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$.

c) Cho biểu thức $P = \dfrac{A}{B}$. Hãy tìm các giá trị của m để có x thỏa mãn $P = m$.

Hướng dẫn

a) $B = \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$.

b) $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2-1} - \dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1} = 2$ thay vào $A = \dfrac{\sqrt{2}-2}{2}$.

c) $P = \dfrac{A}{B} = \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$ với điều kiện $x > 0$, $x \neq 4$, $x \neq 9$.

$P = m \Leftrightarrow (m-1)\sqrt{x} = 3$ (1)

Nếu $m = 1$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

Nếu $m \neq 1$ thì từ (1) $\Rightarrow \sqrt{x} = \dfrac{3}{m-1}$.

Do $x > 0$, $x \neq 4$, $x \neq 9 \Rightarrow \sqrt{x} > 0$, $\sqrt{x} \neq 2$, $\sqrt{x} \neq 3$.

Để có x thỏa mãn $P = m \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{m-1} > 0 \\ \dfrac{3}{m-1} \neq 2 \\ \dfrac{3}{m-1} \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq \dfrac{5}{2} \\ m \neq 2 \end{cases}$

Vậy $m > 1$, $m \neq 2$, $m \neq \dfrac{5}{2}$ (Thỏa mãn yêu cầu bài toán).

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} - \dfrac{7\sqrt{x}-9}{x-9}$ với $x > 0$, $x \neq 9$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm giá trị của A khi $x = \sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

c) Tìm x để biểu thức $\dfrac{A}{B} = 1$.

d) Tìm các giá trị m để có x thỏa mãn $\dfrac{A}{B} = m$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \dfrac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \dfrac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

c) Tìm x để biểu thức $Q = \dfrac{2\sqrt{x}}{A}$ nhận giá trị là số nguyên.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \dfrac{3}{2-\sqrt{x}} + \dfrac{3\sqrt{x}+2}{x-4}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \dfrac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-x}\right)$.

a) Rút gọn A.

b) Tính giá trị của A khi $x = 9-4\sqrt{5}$.

c) Tìm x sao cho $A.(x-1) = 3\sqrt{x}$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \dfrac{7\sqrt{x}+3}{9-x} + \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \dfrac{x+7}{3\sqrt{x}}$ (ĐKXĐ: $x > 0$, $x \neq 9$).

a) Chứng minh rằng $A = \dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$.

b) So sánh A với 3.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = A.B$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \dfrac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} + \dfrac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$ (với $x > 0$, $x \neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm x để biểu thức A nhận giá trị là số nguyên.

Hướng dẫn

a) $A = \dfrac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}$.

b) **Cách 1:** Với $x > 0$, $x \neq 1 \Rightarrow x+\sqrt{x}+1 > \sqrt{x}+1 > 1$.

Vậy $0 < A = \dfrac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} < \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} < 2$.

Vì A nguyên nên $A = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn).

Vậy không có giá trị nguyên nào của x để giá trị của A là một số nguyên.

Cách 2: Dùng miền giá trị

$A = \dfrac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow Ax + (A-1)\sqrt{x} + A - 2 = 0$

Trường hợp 1: $A = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = -2 \Rightarrow x \in \varnothing$

Trường hợp 2: $A \neq 0 \Rightarrow \Delta = (A-1)^2 - 4A(A-2) = -3A^2 + 6A + 1 \geq 0 \Leftrightarrow A^2 - 2A - \dfrac{1}{3} \leq 0 \Leftrightarrow$

$A^2 - 2A + 1 \le \frac{4}{3} \Leftrightarrow (A-1)^2 \le \frac{4}{3} \Rightarrow A \in \{1; 2\}$ do $A \in \mathbb{Z}$ và $A > 0$.
Với $A = 1 \Rightarrow x = 1$ (loại).
Với $A = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} = 2 \Leftrightarrow 2x + \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(2\sqrt{x}+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (loại).

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1}\right).\frac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$ (với $x \ge 0$, $x \ne 1$).

a) Rút gọn biểu thức B.

b) Tính giá trị của A khi $x = 5 + 2\sqrt{6}$.

c) Với $x \in \mathbb{N}$ và $x \ne 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = A.B$.

C. LUYỆN TẬP BÀI TẬP GỒM NHIỀU Ý HỎI

Bài I. Cho biểu thức:

$$A=\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}+\frac{2-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-1}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2}-\frac{2}{x-1}\right) \text{ với } x\geq 0, x\neq 1$$

.

1. Chứng minh $A=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

2. Tính giá trị của A khi:

a) $x=6-4\sqrt{2}$.

b) $x=\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{9+\sqrt{80}}-\sqrt{9-\sqrt{80}}\right)$.

c) $x=\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$.

d) $x=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{81}}$.

e) x là nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2-3x-5}=x-1$.

f) x là nghiệm của phương trình $|2x-6|=3x+1$.

g) x là giá trị của biểu thức $M=\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})$ đạt giá trị lớn nhất.

3. Tìm x để:

a) $A=\dfrac{1}{6}$; b) $|A|=A$; c) $A^2+A\leq 0$.

4. So sánh :

a) A với 1. b) A với biểu thức $N=\dfrac{\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}}$.

5. Tìm x nguyên dương để biểu thức $\dfrac{2}{A}$ nhận giá trị nguyên.

6. Tìm x thực để A nhận giá trị nguyên.

7. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) $P=A\,(x-\sqrt{x}-2)$.

b) $Q=\dfrac{A}{-x+3\sqrt{x}-2}$ với $0\leq x<4$.

c) $R=\dfrac{\sqrt{x}}{A}$ với $x>1$.

8. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

a) $B=2-A$; b) $C=\dfrac{A}{\sqrt{x}+7}$. với $x>1$.

9. Tìm x thỏa mãn $A\,(\sqrt{x}+1)-\left(2\sqrt{6}-1\right)\sqrt{x}=2x-2\sqrt{x-5}+1$.

Bài II. Cho biểu thức:

$$B=\left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}\right).\left(\frac{1+x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)+\frac{2-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \text{ với } x>0, x\neq 1$$

.

1. Chứng minh $B=\dfrac{x-3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$.

2. Tính giá trị của B khi:

a) $x = 7 - \sqrt{48}$.

b) $x = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$.

c) $x = \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$.

d) $x = \dfrac{1}{1 + \sqrt{4}} + \dfrac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{7}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{97} + \sqrt{100}}$.

e) x là nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - x + 2} = x$.

f) x là nghiệm của phương trình $|x - 1| = |2x - 5|$.

g) x là giá trị của biểu thức $P = x - 4\sqrt{x} + 6$ đạt giá trị nhỏ nhất.

3. Tìm x để:

a) $B = 0$; b) $B + \dfrac{3\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x}} \leq 0$.

4. So sánh :

a) B với -2. b) B với biểu thức $C = \dfrac{\sqrt{x} - 3x}{x}$.

5. Tìm x để B nhận giá trị nguyên.

6. Xét dấu biểu thức $T = B\left(\sqrt{x} - 1\right)$.

7. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) B. b) $D = B\sqrt{x}$. c) $E = \dfrac{B}{\sqrt{x}}$.

8. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

a) $G = -3 - B$; b) $Q = 1 - B\sqrt{x}$.

9. Tìm x thỏa mãn $B\sqrt{x} + \left(2\sqrt{3} + 3\right)\sqrt{x} = 3x - 4\sqrt{x + 1} + 10$.

Bài III. Cho biểu thức:

$$B = \left(\frac{x + 2\sqrt{x}}{x + 4\sqrt{x} + 4} + \frac{2x}{4 - x}\right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 2\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x}}\right) \text{ với } x > 0, x \neq 4, x \neq 9$$

.

1. Chứng minh $C = \dfrac{x}{\sqrt{x} - 3}$.

2. Tính giá trị của C khi:

a) $x = 6 - 2\sqrt{8}$.

b) $x = \sqrt{11 + 3\sqrt{8}} + \sqrt{11 - 3\sqrt{8}}$.

c) $x = \sqrt[3]{14\sqrt{2} + 20} - \sqrt[3]{14\sqrt{2} - 20} - 1$.

d) $x = \dfrac{1}{1 + \sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{9}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{77} + \sqrt{81}}$.

e) x là nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - x} = x - 1$.

f) x là nghiệm của phương trình $|x - 3| = 3$.

g) x là giá trị của biểu thức $M = -x + 3\sqrt{x} + 5$ đạt giá trị lớn nhất.

3. Tìm x để:

a) $C^2 \leq 0$; b) $|C| = -C$.

4. So sánh C với biểu thức $D = \sqrt{x}$ khi $x > 9$.

5. Tìm x để $E = \dfrac{2C}{\sqrt{x}}$ nhận giá trị nguyên.

6. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) Biểu thức C với $x > 9$.

b) $I = -\dfrac{C}{x\sqrt{x}}$ với $0 < x < 9$, $x \neq 4$.

7. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $N = \dfrac{C}{\sqrt{x} - 1 + C}$.

8. Tìm x thỏa mãn $\left(2\sqrt{2} + C\right)\sqrt{x} - 3C = 3x - 2\sqrt{x-1} + 2$.

D. MỘT SỐ CÂU VỀ RÚT GỌN VÀ CÂU HỎI PHỤ TRONG ĐỀ TUYỂN SINH HÀ NỘI

Ví dụ : (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2012 - 2013)

1) Cho biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 36$.

2) Rút gọn biểu thức $B = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \dfrac{4}{\sqrt{x}-4}\right) : \dfrac{x+16}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0$, $x \neq 16$.

3) Với các biểu thức A và B nói trên, hãy tìm các giá trị nguyên x để giá trị của biểu thức $B(A-1)$ là số nguyên.

Ví dụ : (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2013 - 2014)

Với $x > 0$, cho hai biểu thức $A = \dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \dfrac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 64$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm x để $\dfrac{A}{B} > \dfrac{3}{2}$.

Ví dụ : (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2014 - 2015)

1) Tính giá trị của biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ khi $x = 9$.

2) Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right) . \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

a) Chứng minh $P = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

b) Tìm các giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x}+5$.

Ví dụ : (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2015 - 2016)

Cho hai biểu thức $A = \dfrac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \dfrac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$ với $x > 0$, $x \neq 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm giá trị của x để biểu thức $P = \dfrac{A}{B}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ : (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2016 - 2017)

Cho hai biểu thức $A = \dfrac{7}{\sqrt{x}+8}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \dfrac{2\sqrt{x}-24}{x-9}$ với $x \geq 0$, $x \neq 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.

2) Chứng minh $B = \dfrac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$.

3) Tìm x để biểu thức $P = A.B$ có giá trị là số nguyên.

Ví dụ : (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2017 - 2018)

Cho hai biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \dfrac{3}{\sqrt{x}+5} + \dfrac{20-2\sqrt{x}}{x-25}$ với $x \geq 0$, $x \neq 25$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

2) Chứng minh $B = \dfrac{1}{\sqrt{x}-5}$.

3) Tìm tất cả các giá trị của x để $A = B|x-4|$.

Ví dụ : (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2018 - 2019)

Cho hai biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \dfrac{3\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-3} - \dfrac{2}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$, $x \neq 1$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

2) Chứng minh $B = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$.

3) Tìm tất cả các giá trị của x để $\dfrac{A}{B} \geq \dfrac{x}{4} + 5$.

CHỦ ĐỀ II: HỆ PHƯƠNG TRÌNH

PHẦN I: GIẢI VÀ BIỆN LUẬN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. LÝ THUYẾT

1. Hệ phương trình cơ bản

Cho hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ $\qquad (I)$

• Cặp số $(x_0;y_0)$ là một nghiệm của hệ (I) nếu hai phương trình của hệ có chung một nghiệm $(x_0;y_0)$.

• Nếu hệ (I) không có nghiệm thì ta kết luận hệ (I) vô nghiệm.

• Giải hệ phương trình là tìm tập nghiệm của nó.

• Tập nghiệm của hệ phương trình (I) được biểu diễn bởi tập hợp các điểm chung của hai đường thẳng (d_1): $ax+by=c$ và (d_2): $a'x+b'y=c'$. Khi đó:

+) Nếu (d_1) cắt (d_2) thì hệ (I) có một nghiệm duy nhất.

+) Nếu (d_1) // (d_2) thì hệ (I) vô nghiệm.

+) Nếu (d_1) trùng (d_2) thì hệ (I) có vô số nghiệm.

• Hai hệ phương trình được gọi là tương đương với nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.

2. Giải hệ phương trình không cơ bản

Phương pháp đặt ẩn phụ:

Bước 1: Đặt điều kiện để hệ có nghĩa.

Bước 2: Đặt ẩn phụ và điều kiện của ẩn nếu có.

Bước 3: Giải hệ theo các ẩn đã đặt.

Bước 4: Trở lại ẩn đã cho để tìm nghiệm.

3. Giải và biện luận hệ phương trình cơ bản

Phương pháp:

• Từ một phương trình rút y theo x rồi thay vào phương trình còn lại để được phương trình $ax=b$.

• Biện luận:

+) Nếu $a\neq 0$ thì $x=\dfrac{b}{a}$ thay vào biểu thức để tìm y, khi đó hệ có duy nhất nghiệm.

+) Nếu $a=0$ thì ta có $0.x=b$

Nếu $b=0$ thì hệ có vô số nghiệm.

Nếu $b\neq 0$ thì hệ vô nghiệm.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

Phương pháp: Sử dụng phương pháp thế, phương pháp cộng đại số.

- **Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế**

Phương pháp:

Bước 1: Từ một phương trình của hệ đã cho, ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình còn lại, ta được phương trình mới chỉ còn một ẩn.

Bước 2: Giải phương trình một ẩn vừa có, rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

Chú ý: Ở bước 1 ta thường chọn phương trình có các hệ số có giá trị tuyệt đối không quá lớn.

Ví dụ: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp thế

$$\begin{cases} x-2y=-1 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$$

Hướng dẫn

$\begin{cases} x-2y=-1 & (1) \\ 2x+3y=5 & (2) \end{cases}$. Từ phương trình (1) $\Rightarrow x=y-1$ thế vào phương trình (2) ta được $2(y-1)+3y=5 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

Ví dụ: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp thế

1) $\begin{cases} x-y=3 \\ 3x-4y=4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x\sqrt{3}+y=2\sqrt{2} \\ -x+4y=10 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x\sqrt{6}-y\sqrt{2}=2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x\sqrt{2}-\sqrt{3}y=1 \\ x+\sqrt{3}y=\sqrt{2} \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 6x+9y=1 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x-2y=3 \\ -2x+4y=-6 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 5x-4y=3 \\ 7x-9y=8 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \sqrt{3}x-\sqrt{2}y=-1 \\ 2\sqrt{2}+\sqrt{3}y=0 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x+\sqrt{2}y=1 \\ \sqrt{2}x-3y=4 \end{cases}$.

- **Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số**

Phương pháp:

Bước 1: Nhân hai vế của mỗi phương trình với số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau.

Bước 2: Cộng hay trừ vế với vế hai phương trình của hệ phương trình đã cho để được một phương trình mới một ẩn.

Bước 3: Dùng phương trình mới ấy thay thế cho một trong hai phương trình của hệ và giữ nguyên phương trình kia.

Ví dụ: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số

a) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y=6 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$.

Hướng dẫn

a) Cộng từng vế của hai phương trình của hệ ta có: $\begin{cases} 3x = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 12 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7y = 7 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 4 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$.

Ví dụ: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số

1) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -4x + y = -12 \\ x - y = 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x\sqrt{2} - \sqrt{3}y = 1 \\ x + \sqrt{3}y = \sqrt{2} \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 6x + 9y = 1 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ -2x + 4y = -6 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 7x - 9y = 8 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = -1 \\ 2\sqrt{2} + \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x + \sqrt{2}y = 1 \\ \sqrt{2}x - 3y = 4 \end{cases}$

Ví dụ: Giải các hệ phương trình sau

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} \\ \dfrac{x+8}{y+4} = \dfrac{9}{4} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{y}{2} + \dfrac{x+y}{5} = 0,1 \\ \dfrac{y}{5} - \dfrac{x-y}{2} = 0,1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$.

Dạng 2. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG CƠ BẢN

Phương pháp: Đặt ẩn phụ:

Bước 1: Đặt điều kiện để hệ có nghĩa.

Bước 2: Đặt ẩn phụ và điều kiện của ẩn nếu có.

Bước 3: Giải hệ theo các ẩn đã đặt.

Bước 4: Trở lại ẩn đã cho để tìm nghiệm.

Ví dụ: Giải hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y-2} = -1 \\ \dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2}{y-2} = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3\sqrt{x+2018} + 2(y+2020) = 13 \\ 5\sqrt{x+2018} - 3(y+2020) = 9 \end{cases}$

Hướng dẫn

a) Điều kiện: $x \neq -1$; $y \neq 2$.

Đặt $\dfrac{1}{x+1} = a$; $\dfrac{1}{y-2} = b$. Khi đó hệ trên trở thành $\begin{cases} a + b = -1 \\ 3a - 2b = 7 \end{cases}$. Giải phương trình cơ bản này ta được $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$.

Trở lại ẩn x; y ta có $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}=1 \\ \dfrac{2}{y-2}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

b) Điều kiện: $x \geq -2018$.

Đặt $\sqrt{x+2018}=a$; $(y+2020)=b$. Khi đó hệ trên trở thành $\begin{cases} 3a+2b=13 \\ 5a-3b=9 \end{cases}$. Giải phương trình cơ bản này ta được $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$.

Trở lại ẩn x; y ta có $\begin{cases} \sqrt{x+2018}=3 \\ (y+2020)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2009 \\ y=-2018 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x=-2009 \\ y=-2018 \end{cases}$.

Ví dụ: Giải hệ phương trình sau

1) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{2}{y-2}=6 \\ \dfrac{5}{x+1}-\dfrac{1}{y-2}=3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x^2-2x)^2+4(x^2-2x)=0 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y-1}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{2} \\ 2x-\dfrac{3}{y}=-\dfrac{7}{2} \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3\sqrt{2x-1}-\dfrac{y}{y+1}=1 \\ \sqrt{2x-1}+\dfrac{2y}{y+1}=5 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \dfrac{8}{\sqrt{x-3}}+\dfrac{1}{|2y-1|}=5 \\ \dfrac{4}{\sqrt{x-3}}+\dfrac{1}{|2y-1|}=3 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dfrac{4}{x-1}+\dfrac{y-15}{y+2}=\dfrac{2}{5} \\ \dfrac{x-9}{x-1}+\dfrac{30}{y+2}=2 \end{cases}$

Ví dụ: Giải hệ phương trình sau

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}=-1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{3}{2x-y}-\dfrac{6}{x+y}=-1 \\ \dfrac{1}{2x-y}-\dfrac{1}{x+y}=0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{5x}{x+1}+\dfrac{y}{y-3}=27 \\ \dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{3y}{y-3}=4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{7}{x+2}+\dfrac{3}{y}=2 \\ \dfrac{4}{x+2}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{2} \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \dfrac{2x}{x+4}+\dfrac{2y}{2y-3}=27 \\ \dfrac{2x}{x+4}-\dfrac{6y}{2y-3}=4 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dfrac{3}{x+2}-\dfrac{y}{y+1}=-1 \\ \dfrac{x}{x+2}-\dfrac{2}{y+1}=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$

7) $\begin{cases} \sqrt{3x-1}-\sqrt{2y+1}=1 \\ 2\sqrt{3x-1}+3\sqrt{2y+1}=12 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \sqrt{x-2}+\sqrt{y-3}=3 \\ 2\sqrt{x-2}-3\sqrt{y-3}=-4 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} \dfrac{3x}{x+1}+\dfrac{2}{y+4}=4 \\ \dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{5}{y+4}=9 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{2x+3y-1}{x-y+2}=\dfrac{12}{13} \\ 2x+3y+2=0 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 2(x^2-2x)+\sqrt{y+1}=0 \\ 3(x^2-2x)-3\sqrt{y+1}=-7 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} \dfrac{81}{x+y}+\dfrac{105}{x-y}=8 \\ \dfrac{54}{x+y}+\dfrac{42}{x-y}=4 \end{cases}$

13) $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y-1} + \dfrac{5}{xy-2x-3} = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{3}{x+y-1} - \dfrac{1}{xy-2x-3} = \dfrac{7}{5} \end{cases}$ 14) $\begin{cases} 5|x-1| - 3|y+2| = 7 \\ 2\sqrt{4x^2-8x+4} + 5\sqrt{y^2+4y+4} = 13 \end{cases}$

15) $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{y} = \dfrac{9}{x} \\ x+y-\dfrac{4}{x} = \dfrac{4y}{x^2} \end{cases}$ 16) $\begin{cases} \dfrac{4}{x+2y} - \dfrac{1}{x-2y} = 1 \\ \dfrac{20}{x+2y} + \dfrac{3}{x-2y} = 1 \end{cases}$ 17) $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} = 4 \\ x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2} = 4 \end{cases}$

18) $\begin{cases} x+y+x^2+y^2+xy = 4 \\ x++y+xy = 2 \end{cases}$ 19) $\begin{cases} x+y+xy = \dfrac{7}{2} \\ xy(x+y) = \dfrac{5}{2} \end{cases}$ 20) $\begin{cases} x^3+y^3 = 8 \\ x+y+2xy = 2 \end{cases}$.

Dạng 3. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN HỆ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

Phương pháp:

• Từ một phương trình rút y theo x rồi thay vào phương trình còn lại để được phương trình $ax = b$.

• Biện luận:

+) Nếu $a \neq 0$ thì $x = \dfrac{b}{a}$ thay vào biểu thức để tìm y, khi đó hệ có duy nhất nghiệm.

+) Nếu $a = 0$ thì ta có $0.x = b$

Nếu $b = 0$ thì hệ có vô số nghiệm.

Nếu $b \neq 0$ thì hệ vô nghiệm.

Ví dụ: Giải và biện luận hệ phương trình sau

1) $\begin{cases} mx - y = 2m \\ x - my = m+1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + my = 5\sqrt{2} \\ mx + 2y = 2m+1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} mx - y = 2m \\ 4x - my = m+6 \end{cases}$

4) $\begin{cases} mx + y = 3m-1 \\ x + my = m+1 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} mx + 4y = 10 - m \\ x + my = 4 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} (m-1)x - my = 3m-1 \\ 2x - y = m+5 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x + my = 3m \\ mx - y = m^2 - 2 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x - my = 1 + m^2 \\ mx + y = 1 + m^2 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 2x - y = 3 + 2m \\ mx + y = (m+1)^2 \end{cases}$

10) $\begin{cases} (m+1)x - y = m+1 \\ x + (m-1)y = 2 \end{cases}$

Ví dụ: Tìm giá trị của $m \in \mathbb{Z}$ để hệ phương trình sau có nghiệm $(x;y)$ với x, $y \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} (m+1)x - my = 5 \\ x + my = m^2 + 4m \end{cases}.$$

Hướng dẫn

$$\begin{cases} (m+1)x - my = 5 & (1) \\ x + my = m^2 + 4m & (2) \end{cases}.$$

Từ (2) suy ra $x = m^2 + 4m - my$

Thay vào (1) ta được $m(m+2)y = m^3 + 5m^2 + 4m - 5 \qquad (3)$

- Nếu $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -2 \end{array}\right.$ thì phương trình (3) vô nghiệm.
- Nếu $\left[\begin{array}{l} m \neq 0 \\ m \neq -2 \end{array}\right.$. Khi đó $y = \dfrac{m^3 + 5m^2 + 4m - 5}{m(m+2)}$. Từ đó ta được $x = \dfrac{m^2 + 4m + 5}{m+2}$.

Trước hết ta tìm $m \in \mathbb{Z}$ để $x \in \mathbb{Z}$.

$x = \dfrac{m^2 + 4m + 5}{m+2} = m + 2 + \dfrac{1}{m+2}$. Để $x \in \mathbb{Z}$ thì $m + 2 \in Ư(1)$.

Suy ra $m + 2 = \pm 1 \Rightarrow m = -3; m = -1$.

Với $m = -3 \Rightarrow y = \dfrac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Với $m = -1 \Rightarrow y = 5 \in \mathbb{Z}$.

Vậy với $m = -1$ thì hệ có nghiệm nguyên $(2; 5)$.

Ví dụ: Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + 4y = 10 - m \\ x + my = 2m + 1 \end{cases}$

a) Xác định các giá trị nguyên m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho $x > 0$, $y > 0$.

b) Tìm giá trị nguyên m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ với x, y là các số nguyên dương.

Hướng dẫn

a) Điều kiện hệ có nghiệm duy nhất là $m \neq \pm 2$.

Khi đó hệ có nghiệm $\begin{cases} x = \dfrac{8 - m}{2 + m} \\ y = \dfrac{5}{2 + m} \end{cases}$.

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{8 - m}{2 + m} > 0 \\ \dfrac{5}{2 + m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 8$.

Với $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2; 3; ...; 7\}$.

b) $m = \{-1; 3\}$.

Ví dụ: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 2 \\ mx - 2y = 1 \end{cases}$

a) Tìm số nguyên m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho $x > 0$, $y < 0$.

b) Tìm số nguyên m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ mà x, y là các số nguyên.

Hướng dẫn

a) Với $m = 0$ thì hệ có nghiệm $\left(2; \dfrac{1}{2}\right)$ thỏa mãn đề bài.

Với $m \neq 0$ khi đó hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{m + 4}{m^2 + 2} \\ y = \dfrac{2m - 1}{m^2 + 2} \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m+4}{m^2+2} > 0 \\ \dfrac{2m-1}{m^2+2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < \dfrac{1}{2}$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3; -2; -1; 0\}$.

Vậy với $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3; -2; -1; 0\}$ thì hệ có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x > 0$; $y < 0$.

b) Theo ý a) $m = 0$ không thỏa mãn.

Với $m \neq 0$ khi đó hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{m+4}{m^2+2} \\ y = \dfrac{2m-1}{m^2+2} \end{cases}$

Trước hết tìm $m \in \mathbb{Z}$ để $x \in \mathbb{Z}$ thì $m + 4 \vdots m^2 + 2$

$\Rightarrow m^2 + 4m \vdots m^2 + 2 \Rightarrow 4m - 2 \vdots m^2 + 2$

$\Rightarrow 4(m + 4) - (4m - 2) \vdots m^2 + 2 \Rightarrow 18 \vdots m^2 + 2$

mà $m^2 + 2 > 2$ nên $m^2 + 2 \in \{3; 6; 9; 18\} \Rightarrow m^2 \in \{1; 4; 7; 16\}$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{\pm1; \pm2; \pm4\}$.

Thử trực tiếp để $x \in \mathbb{Z}$ và $y \in \mathbb{Z}$ thì chỉ có $m = -1$ thỏa mãn.

Ví dụ: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = 3 - m \\ 2x + y = 3(m + 2) \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $m = -1$.

b) Tìm m **để hệ có nghiệm duy nhất** $(x; y)$ **sao cho** $S = x^2 + y^2$ **đạt giá trị nhỏ nhất.**

Hướng dẫn

a) Khi $m = -1$ thì hệ phương trình có dạng $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

b) Hệ phương trình luôn có nghiệm $\begin{cases} x = m + 3 \\ y = m \end{cases}$ với mọi giá trị của m.

- Ta có $S = x^2 + y^2 = (m + 3)^2 + m^2 = 2m^2 + 6m + 9 = 2.\left(m + \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{2} \geq \dfrac{9}{2}$.

  Vậy S nhỏ nhất bằng $\dfrac{9}{2}$ khi $m = -\dfrac{3}{2}$.

Ví dụ: Cho hệ phương trình sau $\begin{cases} mx - y = 3 \\ 2x + my = 9 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $m = 1$.

b) Tìm giá trị nguyên của m **để hệ có nghiệm duy nhất** $(x; y)$ **sao cho biểu thức** $P = 3x - y$ **nhận giá trị nguyên.**

Hướng dẫn

a) Khi $m = 1$ thì hệ phương trình có dạng $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$

b) Hệ phương trình luôn có nghiệm $\begin{cases} x = \dfrac{3m+9}{m^2+2} \\ y = \dfrac{9m-6}{m^2+2} \end{cases}$ với mọi giá trị của m.

• Xét $A = 3x - y = \dfrac{33}{m^2+2}$.
Để $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m^2+2 \in Ư(33)$ mà $m^2+2 \geq 2; m \in \mathbb{Z}$.

Suy ra: $m \in \{-3; -1; 1; 3\}$.

Ví dụ: Cho hệ phương trình sau $\begin{cases} (m+1)x - y = m+1 \\ x + (m-1)y = 2 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $m = 2$.

b) Giải và biện luận hệ phương trình.

c) Tìm giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ với x, y có giá trị nguyên.

d) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất sao cho $x + y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn

a) Khi $m = 2$ thì hệ phương trình có dạng $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{4} \\ y = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

b) • Với $m = 0 \Rightarrow$ hệ phương trình vô nghiệm.

• Với $m \neq 0 \Rightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{m^2+1}{m^2} \\ y = \dfrac{m+1}{m^2} \end{cases}$.

c) • Với $m \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{m^2+1}{m^2} \\ y = \dfrac{m+1}{m^2} \end{cases}$.

• Để $\dfrac{m^2+1}{m^2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \pm 1$.
Thử lại với $m = \pm 1$ thì $\dfrac{m^2+1}{m^2}, \dfrac{m+1}{m^2} \in \mathbb{Z}$.

Vậy với $m = \pm 1$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ với $x, y \in \mathbb{Z}$.

d) • Với $m \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{m^2+1}{m^2} \\ y = \dfrac{m+1}{m^2} \end{cases}$.

• Xét $x + y = \dfrac{m^2+1}{m^2} + \dfrac{m+1}{m^2} = \dfrac{7}{8} + \dfrac{(m+4)^2}{8m^2} \geq \dfrac{7}{8}$.
Vậy với $m = -4$ thì $x + y$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{7}{8}$.

Ví dụ: Cho hệ phương trình sau $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + my = 1 \end{cases}$ **(m là tham số). Tìm giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho x, y là các số nguyên.**

C. MỘT SỐ CÂU GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH CỦA ĐỀ THI TUYỂN SINH HÀ NỘI.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2012 - 2013) $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=2 \\ \dfrac{6}{x}-\dfrac{2}{y}=1 \end{cases}.$

Ví dụ: (Biên soạn) $\begin{cases} \dfrac{2}{|x|}+\dfrac{1}{|y|}=2 \\ \dfrac{6}{|x|}-\dfrac{2}{|y|}=1 \end{cases}.$

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2013 - 2014) $\begin{cases} 3(x+1)+2(x+2y)=4 \\ 4(x+y)-(x+2y)=9 \end{cases}.$

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2014 - 2015) $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y}+\dfrac{1}{y-1}=5 \\ \dfrac{1}{x+y}-\dfrac{2}{y-1}=-1 \end{cases}.$

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2015 - 2016) $\begin{cases} 2(x+y)+\sqrt{x+1}=4 \\ (x+y)-3\sqrt{x+1}=-5 \end{cases}.$

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2016 - 2017) $\begin{cases} \dfrac{3x}{x-1}-\dfrac{2}{y+2}=4 \\ \dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{1}{y+2}=5 \end{cases}$

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2017 - 2018) $\begin{cases} \sqrt{x}+2\sqrt{y-1}=5 \\ 4\sqrt{x}-\sqrt{y-1}=2 \end{cases}.$

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2018 - 2019) $\begin{cases} 4x-|y+2|=3 \\ x+2|y+2|=3 \end{cases}.$

PHẦN II: GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. LÝ THUYẾT

1. Phương pháp

Các bước thực hiện

Bước 1: Lập hệ phương trình.

- Chọn ẩn và đặt điều kiện, chọn đơn vị cho ẩn. (chọn ẩn là các đại lượng cần tìm).
- Biểu thị các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập hệ phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2: Giải hệ phương trình vừa lập.

Bước 3: Kểm tra xem các nghiệm của phương trình có thỏa mãn điều kiện đặt ra và trả lời.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÌM CÁC CHỮ SỐ TỰ NHIÊN

Phương pháp:

- $\overline{ab} = 10.a + b$ $(a,\ b \in \mathbb{N},\ 0 < a \leq 9,\ 0 \leq b \leq 9)$
- $\overline{abc} = 100.a + 10.b + c$ $(a,\ b,\ c \in \mathbb{N},\ 0 < a \leq 9,\ 0 \leq b, c \leq 9)$
- Tỉ số của hai số a và b $(b \neq 0)$ là $\dfrac{a}{b}$
- Tổng hai số x và y là $x + y$
- Tổng bình phương hai số x và y là $x^2 + y^2$
- Tổng nghịc đảo của hai số x và y là $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

Ví dụ 1: Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết hiệu giữa chữ số hàng chục và hàng đơn vị là 7, nếu lấy số đã cho chia cho số viết theo th tự ngược lại ta được thương là 3 và số dư là 5.

Hướng dẫn

Gọi chữ số cần tìm có dạng: $\overline{ab}$ điều kiện: $\begin{cases} a, b \in \mathbb{Z}^* \\ a = 1, ..., 9 \\ b = 1, ..., 9 \end{cases}$

Vì hiệu giữa chữ số hàng chục và hàng đơn vị là 7 nên: $a - b = 7$ (1)

Vì lấy số đã cho chia cho số viết theo th tự ngược lại ta được thương là 3 và số dư là 5 nên: $\overline{ab} = 3\overline{ba} + 5 \Leftrightarrow 7a - 29b = 5$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} a - b = 7 \\ 7a - 29b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 2 \end{cases}$

Ví dụ 2: Tìm một có hai chữ số, biết rằng tổng của các chữ số của số đó đều bằng 9 và viết các chữ số đó theo thứu tự ngược lại thì được một số bằng $\frac{2}{9}$ số ban đầu.

Hướng dẫn

Gọi chữ số cần tìm có dạng: $\overline{ab}$ điều kiện: $\begin{cases} a, b \in \mathbb{Z}^* \\ a = 1, ..., 9 \\ b = 1, ..., 9 \end{cases}$

Vì tổng của các chữ số của số đó đều bằng 9 nên: $a + b = 9$ (1)

Vì viết các chữ số đó theo thứu tự ngược lại thì được một số bằng $\frac{2}{9}$ số ban đầu nên:

$\overline{ba} = \frac{2}{9}\overline{ab} \Leftrightarrow \frac{11}{9}a - \frac{88}{9}b = 0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} a + b = 9 \\ \frac{11}{9}a - \frac{88}{9}b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 1 \end{cases}$

Dạng 2. TÍNH TUỔI

Ví dụ 1: Hai năm trước đây tuổi của anh gấp đôi tuổi của em, còn tám năm trước đây, tuổi của anh gấp 5 lần tuổi của em. Hỏi hiện nay anh và em là bao nhiêu tuổi.

Hướng dẫn

Gọi tuổi của anh hiện nay là x và tuổi của em hiện nay là y điều kiện: $x, y \in \mathbb{N}, x, y > 8$

Vì Hai năm trước đây tuổi của anh gấp đôi tuổi của em nên: $x - 2 = 2.(y - 1) \Leftrightarrow x - 2y = -2$ (1)

Vì còn tám năm trước đây, tuổi của anh gấp 5 lần tuổi của em nên: $x - 8 = 5.(y - 8) \Leftrightarrow x - 5y = -32$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ x - 5y = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = 10 \end{cases}$

Vậy tuổi anh là 18 và tuổi em là 10.

Ví dụ 2: Bảy năm trước, tuổi của mẹ bằng 5 lần tuổi của con cộng thêm 4, năm nay tuổi mẹ vừa bằng đúng 3 lần tuổi con. Hỏi năm nay mỗi người bao nhiêu tuổi.

Hướng dẫn

Gọi tuổi của mẹ hiện nay là x và tuổi của con hiện nay là y điều kiện: $x, y \in \mathbb{N}, x > y > 7$

Vì Bảy năm trước, tuổi của mẹ bằng 5 lần tuổi của con cộng thêm 4 nên: $x - 7 = 5.(y - 7) + 4 \Leftrightarrow x - 5y = -38$ (1)

Vì năm nay tuổi mẹ vừa bằng đúng 3 lần tuổi con nên: $x - 8 = 5.(y - 8) \Leftrightarrow x = 3y$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} x - 5y = -38 \\ x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 8 \end{cases}$

Vậy tuổi mẹ là 24 và tuổi con là 8.

Dạng 3. HÌNH HỌC

Phương pháp:

• Định lí Py-ta-go: ΔABC vuông tại $A \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$

• Chu vi và diện tích của hình chữ nhật lần lượt là $C_{\text{chu vi}} = 2(a+b)$, $S = a.b$ với a, b lần lượt là chiều dai và chiều rộng.

• Diện tích hình thang $S = \dfrac{(a+b).h}{2}$ hoặc $S = m.h$ với a, b là độ dài hai đáy, h là đường cao, m là độ dài đường trung bình.

Ví dụ 1: Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng $5m$. Nếu giảm chiều rộng đi $4m$ và giảm chiều dài đi $5m$ thì diện tích mảnh đất giảm đi $180m^2$. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.

Hướng dẫn

Gọi chiều dài mảnh đất là x (mét) $x > 4$

Gọi chiều rộng mảnh đất là y (mét) $y > 5$

Vì chiều dài lớn hơn chiều rộng $5m$ nên: $x - y = 5$ (1)

Nếu giảm chiều rộng đi $4m$ và giảm chiều dài đi $5m$ thì: $x.y - (x-5)(y-4)180 \Leftrightarrow x + 5y = 200$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} x - y = 5 \\ x + 5y = 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 20 \end{cases}$

Vậy chiều dài mảnh đất là $25m$ và chiều rộng mảnh đất là $20m$.

Ví dụ 2: Một hình thang có diện tích $140cm^2$, chiều cao là $8cm$. Tính độ dài các đáy của hình thang, biết rằng chúng hơn kém nhau $15cm$

Hướng dẫn

Gọi đáy lớn của hình thang là x và đáy nhỏ của hình thang là y điều kiện: $x, y \in \mathbb{N}, x > y > 7$

Vì hình thang có diện tích $140cm^2$, chiều cao là $8cm$ nên: $\dfrac{(x+y).8}{2} = 140 \Leftrightarrow 8x + 8y = 280$ (1)

Vì độ dài các đáy của hình than hơn kém nhau $15cm$ nên: $x - y = 15$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 8x + 8y = 280 \\ x - y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 5 \end{cases}$

Vậy độ dài đáy lớn là $30cm$ và độ dài đáy nhỏ là $5cm$.

Dạng 4. TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TỈ SỐ PHẦN TRĂM.

Phương pháp:

• Khối lượng công việc = Năng suất . Thời gian.

• Năng suất = Khối lượng công việc : Thời gian.

• Thời gian = Khối lượng công việc : Năng suất.

Ví dụ 1: Hai tổ sản xuất được giao làm 800 sản phẩm trong một thời gian quy định. Nhờ tăng năng suất lao động, tổ I vượt mức 10 phần trăm, tổ II vượt mức 20 phần trăm nên cả hai tổ đã làm được 910 sản phẩm. Tính số phản phẩm phải làm theo kế hoạch.

Hướng dẫn

Gọi số sản phẩm tổ I và tổ II làm theo kế hoạch lần lượt là x, y (x, $y \in \mathbb{N}^*$, x, $y < 800$)

Cả hai tổ theo kế hoạch là 800 sản phẩm ta có: $x + y = 800$ (1)

Nhờ tăng năng suất, tổ I làm vượt mức 10 phần trăm là $\dfrac{10}{100}x$, tổ II vượt mức 20 phần trăm là $\dfrac{20}{100}y$. Cả hai tổ làm được 910 sản phẩm ta có:

$\left(x + \dfrac{10}{100}x\right) + \left(y + \dfrac{20}{100}y\right) = 910 \Leftrightarrow \dfrac{10}{100}x + \dfrac{20}{100}y = 910 - 800 \Leftrightarrow \dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{5} = 110 \Leftrightarrow x + 2y = 1100$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} x + y = 800 \\ x + 2y = 1100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 500 \text{ (thỏa mãn)} \\ y = 300 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$

Vậy số sản phẩm tổ I là 500 và tổ II là 300.

Ví dụ 2: Hai trường A và B có 420 em học sinh đỗ vào lớp 10 đạt tỷ lệ 84 phần trăm, Riêng trường A tỷ lệ 80 phần trăm, riêng trường B tỷ lệ đỗ 90 phần trăm. Tính số học sinh dự thi của mỗi trường.

Hướng dẫn

Gọi số học sinh dự thi của trường A và B lần lượt là x, y (x, $y \in \mathbb{N}^*$, x, $y < 800$)

ta có: $x + y = 420.\dfrac{100}{84}$ (1)

Nhờ tăng năng suất, tổ I làm vượt mức 10 phần trăm là $\dfrac{10}{100}x$, tổ II vượt mức 20 phần trăm là $\dfrac{20}{100}y$. Cả hai tổ làm được 910 sản phẩm ta có:

$\dfrac{80}{100}x + \dfrac{90}{100}y = 420$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} x + y = 420.\dfrac{100}{84} \\ \dfrac{80}{100}x + \dfrac{90}{100}y = 420 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 500 \text{ (thỏa mãn)} \\ y = 300 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$

Vậy số sản phẩm tổ I là 500 và tổ II là 300.

Ví dụ 3: Tháng thứ nhất hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy. Tháng thứ hai tổ I vượt mức 15 phần trăm và tổ II vượt mức 10 phần trăm so với tháng thứ nhất. Vì vậy hai tổ đã sản xuất được 1010 chi tiết máy. Hỏi tháng thứ nhất mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy.

Hướng dẫn

Gợi ý hệ phương trình biểu diễn các đại lượng là. $\begin{cases} x + y = 900. \\ \dfrac{115}{100}x + \dfrac{110}{100}y = 1010 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 400 \text{ (thỏa mãn)} \\ y = 500 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$

Ví dụ 4: Theo kế hoạch hai tổ sản xuất được 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kĩ thuật mới nên tổ I đã vượt mức 18 phần trăm và tổ II đã vượt

mức 21 phần trăm. Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ theo kế hoạch.

Hướng dẫn

Gợi ý hệ phương trình biểu diễn các đại lượng là. $\begin{cases} x+y=600. \\ \dfrac{18}{100}x+\dfrac{21}{100}y=120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=200 \text{ (thỏa mãn)} \\ y=400 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$.

Dạng 5. TOÁN LÀM CHUNG CÔNG VIỆC

Phương pháp:

- Coi toàn bộ công việc là 1.
- Năng suất = 1 : Thời gian.
- Tổng các năng suất riêng = Năng suất chung.

Ví dụ 1: Hai người cùng làm chung một công việc thì sau 6 giờ xong. Nếu một mình người thứ nhất làm trong 2 giờ, sau đó người thứ hai làm một mình trong 3 giờ thì cả hai người làm được $\frac{2}{5}$ công việc. Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì sau bao nhiêu giờ xong công việc?

Hướng dẫn

Gọi thời gian người thứ nhất và người thứ hai làm một mình xong công việc lần lượt là x, y (giờ, x, $y > 6$)

+) Trong 1 giờ

Người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

Người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc)

Cả hai người làm được $\frac{1}{6}$ (công việc)

$\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}$ (1)

Trong 2 giờ người thứ nhất làm được $\frac{2}{x}$ (công việc)

Trong 3 giờ người thứ hai làm được $\frac{3}{y}$ (công việc)

Cả hai người làm được $\frac{2}{5}$ (công việc)

$\Rightarrow \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{2}{5}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \text{ (thỏa mãn)} \\ y=15 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$

Vậy người thứ nhất làm một mình xong công việc là 10 giờ

người thứ hai làm một mình xong công việc là 15 giờ.

Ví dụ 2: Hai người cùng làm chung một công việc thì hoàn thành sau 7 giờ 12 phút. Nếu một mình người thứ nhất làm trong 5 giờ, người thứ hai làm một mình trong 6 giờ thì cả hai người hoàn thành được $\frac{3}{4}$ công việc. Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì hoàn thành công việc sau bao lâu?

Hướng dẫn

Gọi thời gian người thứ nhất và người thứ hai làm một mình xong công việc lần lượt là x, y (giờ, x, $y > \frac{36}{5}$)

+) Trong 1 giờ

Người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

Người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc)

Cả hai người làm được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ (công việc)

Đổi $7\text{h}12' = \frac{36}{5}\text{h} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{36}{5}} = \frac{5}{36}$ (1)

Trong 5 giờ người thứ nhất làm được $\frac{5}{x}$ (công việc)

Trong 6 giờ người thứ hai làm được $\frac{6}{y}$ (công việc)

Cả hai người làm được $\frac{3}{4}$ (công việc)

$\Rightarrow \frac{5}{x}+\frac{6}{y} = \frac{3}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{5}{36} \\ \frac{5}{x}+\frac{6}{y} = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \text{ (thỏa mãn)} \\ y = \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$

Vậy người thứ nhất làm một mình xong công việc là . giờ

người thứ hai làm một mình xong công việc là / giờ.

Ví dụ 3: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn thì sau 1 giờ 20 phút bể sẽ đầy. Nếu mở vòi I trong 10 phút và vòi II trong 12 phút thì được $\frac{2}{15}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu đầy bể?

Hướng dẫn

Đổi $1\text{h}20' = \frac{4}{3}\text{h}$ và $10' = \frac{1}{6}\text{h}$, $12' = \frac{1}{5}\text{h}$

Gọi thời gian vòi I và vòi II chảy một mình đầy bể lần lượt là x, y (giờ, x, $y > 0$)

+) Trong 1 giờ: Vòi I chảy được $\frac{1}{x}$ (bể), vòi II chảy được $\frac{1}{y}$ (bể)

Cả hai vòi chảy được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{3}{4}$ (bể) (1)

+) Trong $10' = \frac{1}{6}\text{h}$ vòi I chảy được $\frac{1}{6x}$ (bể), trong $12' = \frac{1}{5}\text{h}$ vòi II chảy được $\frac{1}{5y}$ (bể)

Cả hai vòi chảy được $\dfrac{1}{6x}+\dfrac{1}{5y}=\dfrac{2}{15}$ (bể) (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4}\\ \dfrac{1}{6x}+\dfrac{1}{5y}=\dfrac{2}{15}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\text{ (thỏa mãn)}\\ y=4\text{ (thỏa mãn)}\end{cases}$

Vậy vòi thứ I chảy một mình đầy bể là 2 giờ, vòi thứ II chảy một mình đầy bể là 4 giờ.

Ví dụ 4: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 2 giờ 55 phút bể sẽ đầy. Nếu chảy một mình thì vòi I chảy nhanh hơn vòi II là 2 giờ. Hỏi thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể?

Hướng dẫn

Đổi 1h20′ $=\dfrac{4}{3}$h và 10′ $=\dfrac{1}{6}$h, 12′ $=\dfrac{1}{5}$h

Gọi thời gian vòi I và vòi II chảy một mình đầy bể lần lượt là x, y (giờ, x, $y>0$)

+) Trong 1 giờ: Vòi I chảy được $\dfrac{1}{x}$ (bể), vòi II chảy được $\dfrac{1}{y}$ (bể)

Cả hai vòi chảy được $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4}$ (bể) (1)

+) Trong 10′ $=\dfrac{1}{6}$h vòi I chảy được $\dfrac{1}{6x}$ (bể), trong 12′ $=\dfrac{1}{5}$h vòi II chảy được $\dfrac{1}{5y}$ (bể)

Cả hai vòi chảy được $\dfrac{1}{6x}+\dfrac{1}{5y}=\dfrac{2}{15}$ (bể) (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4}\\ \dfrac{1}{6x}+\dfrac{1}{5y}=\dfrac{2}{15}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\text{ (thỏa mãn)}\\ y=4\text{ (thỏa mãn)}\end{cases}$

Vậy vòi thứ I chảy một mình đầy bể là 2 giờ, vòi thứ II chảy một mình đầy bể là 4 giờ.

Ví dụ 5: Cho ba vòi A, B, C cùng chảy vào một bể. Vòi A và vòi B chảy đầy bể trong 71 phút. Vòi A và vòi C chảy đầy bể trong 63 phút. Vòi C và vòi B chảy đầy bể trong 56 phút.

a) Hỏi mỗi vòi chảy sau bao lâu thì đầy bể? Cả ba vòi cùng mở một lúc thì sau bao lâu đầy bể.

b) Biết vòi C chảy 10 lít ít hơn mỗi phút so với vời A và vời C. Tính sức chứa của bể và sức chảy của mỗi vòi.

Hướng dẫn

Gọi thời gian vòi A chảy một mình đầy bể là x (mỗi phút chảy đầy bể là $\dfrac{1}{x}$).

Thời gian vòi B chảy một mình đầy bể là y (mỗi phút chảy đầy bể là $\dfrac{1}{y}$).

Thời gian vòi C chảy một mình đầy bể z (mỗi phút chảy đầy bể là $\dfrac{1}{z}$).

+) Trong 1 phút: Vòi A chảy được $\dfrac{1}{x}$ (bể), vòi B chảy được $\dfrac{1}{y}$ (bể)

Cả hai vòi chảy được $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{72}$ (bể) (1)

+) Trong 1 phút vòi A chảy được $\frac{1}{x}$ (bể), vòi C chảy được $\frac{1}{z}$ (bể)

Cả hai vòi chảy được $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{63}$ (bể) (2)

+) Trong 1 phút vòi C chảy được $\frac{1}{z}$ (bể), vòi B chảy được $\frac{1}{y}$ (bể)

Cả hai vòi chảy được $\frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{1}{56}$ (bể) (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{72}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{63}\\ \frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{1}{56}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=168\text{ (thỏa mãn)}\\ y=126\text{ (thỏa mãn)}\\ z=\frac{504}{5}\text{ (thỏa mãn)}\end{cases}$

Vậy thời gian vòi A chảy một mình đầy bể là 168.

Thời gian vòi B chảy một mình đầy bể là 126 phút.

Thời gian vòi C chảy một mình đầy bể $\frac{504}{5}$ phút.

Nếu ba vòi cùng mở một lúc thì mỗi phút đầy bể là $\frac{5+4+3}{504}=\frac{12}{504}$.

Vậy ba vòi cùng chảy đầy bể sau $\frac{504}{12}$ phút.

b)Gọi dung tích của bể là t phút thì mỗi phút vòi C chảy được $\frac{5}{504}.t$ lít, vòi A và B chảy được $\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{504}\right).t$ lít. Theo đề bài ta có phương trình: $\frac{5}{504}.t+10=\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{504}\right).t \Rightarrow t=2520$ (lít).

Sức chảy vòi A là: $\frac{3.2520}{504}=15$ (lít/p).

Sức chảy vòi B là: $\frac{4.2520}{504}=20$ (lít/p).

Sức chảy vòi C là: $\frac{5.2520}{504}=25$ (lít/p).

Ví dụ 6: Hai công nhân cùng làm một công việc trong $18h$ thì xong. Nếu người thứ nhất là $6h$ và người thứ hai làm $12h$ thì chỉ hoàn thành 50 phần trăm công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người hoàn thành công việc đó trong bao lâu.

Hướng dẫn

Gợi ý hệ phương trình biểu diễn các đại lượng là. $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{18}.\\ \frac{6}{x}+\frac{12}{y}=\frac{50}{100}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=36\text{ (thỏa mãn)}\\ y=36\text{ (thỏa mãn)}\end{cases}$

Ví dụ 7: Hai vòi nước chảy cùng vào một bể không có nước thì sau $1h$ 30 phút sẽ đầy bể. Nếu mở vòi I chảy trong 15 phút rồi khóa lại và mở vòi thứ II chảy trong 20 phút thì được $\frac{1}{5}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy riêng thì bao lâu đầy bể.

Hướng dẫn

Gợi ý hệ phương trình biểu diễn các đại lượng là. $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3}.\\ \frac{1}{4x}+\frac{1}{3y}=\frac{1}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{15}{4}\text{ (thỏa mãn)}\\ y=\frac{5}{2}\text{ (thỏa mãn)}\end{cases}$

Ví dụ 8: Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất là một mình trong 15 giờ rồi người thứ hai làm tiếp 6 giờ thì hoàn thành được 75 phần trăm công việc. Hỏi mỗi người làm công việc đó một mình hoàn thành trong bao lâu.

Hướng dẫn

Gợi ý hệ phương trình biểu diễn các đại lượng là. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{16}. \\ \dfrac{15}{x} + \dfrac{6}{y} = \dfrac{75}{100} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \text{ (thỏa mãn)} \\ y = 48 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$

Ví dụ 9: Để hoàn thành một công việc, hai tổ phải làm chung trong 6 giờ. Sau 2 giờ làm chung thì tổ hai được điều đi làm việc khác, tổ một đã hoàn thành công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì sau bao lâu sẽ làm xong công việc đó.

Hướng dẫn

Gợi ý hệ phương trình biểu diễn các đại lượng là. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6}. \\ 2.\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) + \dfrac{10}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \text{ (thỏa mãn)} \\ y = 10 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$

Ví dụ 10: Hai người thợ cùng làm chung một công việc trong 7 giờ 12 phút thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 5 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì cả hai chỉ làm được $\frac{3}{4}$ công việc. Hỏi mỗi người làm một mình trong thời gian bao lâu hoàn thành công việc đó.

Hướng dẫn

Gợi ý hệ phương trình biểu diễn các đại lượng là. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{36}. \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{y} = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \text{ (thỏa mãn)} \\ y = 18 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$

Ví dụ 11: Hai vòi nước cùng chảy thì sao $5h50$ phút sẽ đầy bể. Nếu để hai vòi cùng chảy trong 5 giờ rồi khóa vòi thứ nhất lại thì vòi thứ hai phải chảy trong 2 giờ nữa mới đầy bể. Tính xem nếu để mỗi vòi chảy một mình thì trong bao lâu sẽ đầy bể.

Hướng dẫn

Gợi ý hệ phương trình biểu diễn các đại lượng là. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{6}{35}. \\ 5.\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) + \dfrac{2}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ (thỏa mãn)} \\ y = 14 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}.$

Dạng 6. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN SỰ THAY ĐỔI CỦA TÍCH

Ví dụ 1: Trong một ngôi trường có một số ghế băng, mỗi ghế băng quy định một số người như nhau. Nếu bớt hai ghế băng và mỗi ghế băng thêm một người thì thêm được 8 chỗ. Nếu thêm 3 ghế băng và mỗi ghế băng ngồi rút 1 người thì giảm 8 chỗ. Tính số ghế băng trong hội trường và số người theo quy định ngồi trong mỗi ghế.

Hướng dẫn

Gọi số ghế băng trong hội trường là x (cái, $x > 0$)

Số người quy định ngồi trên mỗi ghế băng là y (người $y > 0$)

Số chỗ ngồi quy định trong hội trường là $x.y$ (chỗ)

+) Nếu bớt hai ghế băng và mỗi ghế băng thêm một người thì thêm được 8 chỗ thì

$(x-2)(y+1) = xy + 8 \Leftrightarrow x - 2y = 10$ (1)

+) Nếu thêm 3 ghế băng và mỗi ghế băng ngồi rút 1 người thì giảm 8 chỗ thì

$(x+3)(y-1) = xy + 8 \Leftrightarrow x - 3y = 5$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} x - 2y = 10 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \text{ (thỏa mãn)} \\ y = 20 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$

Vậy số ghế băng là 20 cái, mỗi ghế quy định ngồi 5 người.

Ví dụ 2: Một ô tô đi quãng đường AB với vận tốc $50\ km/h$, rồi đi tiếp quãng đường BC với vận tốc $45\ km/h$. Biết quãng đường tổng cộng dài $165\ km$ và thời gian ô tô đi hết quãng đường AB ít hơn thời gian đi trên quãng đường BC là 30 phút.

Hướng dẫn

Gọi số ghế băng trong hội trường là x (cái, $x > 0$)

Số người quy định ngồi trên mỗi ghế băng là y (người $y > 0$)

Số chỗ ngồi quy định trong hội trường là $x.y$ (chỗ)

+) Nếu bớt hai ghế băng và mỗi ghế băng thêm một người thì thêm được 8 chỗ thì

$(x-2)(y+1) = xy + 8 \Leftrightarrow x - 2y = 10$ (1)

+) Nếu thêm 3 ghế băng và mỗi ghế băng ngồi rút 1 người thì giảm 8 chỗ thì

$(x+3)(y-1) = xy + 8 \Leftrightarrow x - 3y = 5$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} x - 2y = 10 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \text{ (thỏa mãn)} \\ y = 5 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$

Vậy số ghế băng là 20 cái, mỗi ghế quy định ngồi 5 người.

Dạng 7. TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Phương pháp: $S = v.t$. Trong đó:

+) S là quãng đường (m, km).

+) v là vận tốc (m/s, km/h).

+) t là thời gian (s, phút, h).

- Nếu chuyển động trong dòng chảy thì:

+) $V_{\text{xuôi}} = V_{\text{riêng}} + V_{\text{dòng nước}}$.

+) $V_{\text{xuôi}} = V_{\text{riêng}} - V_{\text{dòng nước}}$.

Ví dụ 1: Một ô tô đi quãng đường AB với vận tốc $50km/$giờ, rồi đi tiếp quãng đường BC với vận tốc $45km/$giờ. Biết quãng đường tổng cộng dài $165km$ và thời gian ô tô đi

trên quãng đường AB ít hơn thời gian đi trên quãng đường BC là 30 phút. Tính thời gian ô tô đi trên mỗi quãng đường.

Hướng dẫn

Gọi thời gian ô tô đi trên quãng đường AB là x (giờ, $x > 0$).

Gọi thời gian ô tô đi trên quãng đường BC là y (giờ, $y > 0$).

Độ dài quãng đường AB là $50x$ (km).

Độ dài quãng đường BC là $45y$ (km).

Vì quãng đường tổng cộng dài $165km$ nên ta có phương trình: $50x + 45y = 165 \Leftrightarrow 10x + 9y = 33$ (1)

Thời gian ô tô đi trên quãng đường AB ít hơn thời gian đi trên quãng đường BC là 30 phút nên ta có phương trình: $x + \frac{1}{2} = y$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 10x + 9y = 33 \\ y = x + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ y = 2 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$

Vậy thời gian ô tô đi trên quãng đường AB là $\frac{3}{2}$ (giờ), thời gian ô tô đi trên quãng đường BC là 2 (giờ).

Ví dụ 2: Quãng đường AB dài $650km$. Hai ô tô khởi hành từ A đến B đi ngược chiều nhau. Nếu cùng khởi hành thì sau 10 giờ chúng gặp nhau và nếu xe đi từ B khởi hành trước xe kia 4 giờ 20 phút thì hai xe gặp nhau sau khi xe đi từ A khởi hành được 8 giờ. Tính vận tốc mỗi xe.

Hướng dẫn

Gọi vận tốc ô tô đi trên quãng đường từ A đến B là x (km, $x > 0$).

Gọi vận tốc ô tô đi trên quãng đường từ B đến A là y (km, $y > 0$).

Độ dài quãng đường AB là $50x$ (km).

Độ dài quãng đường BC là $45y$ (km).

Vì quãng đường tổng cộng dài $165km$ nên ta có phương trình: $50x + 45y = 165 \Leftrightarrow 10x + 9y = 33$ (1)

Thời gian ô tô đi trên quãng đường AB ít hơn thời gian đi trên quãng đường BC là 30 phút nên ta có phương trình: $x + \frac{1}{2} = y$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 10x + 9y = 33 \\ y = x + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ y = 2 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$

Vậy thời gian ô tô đi trên quãng đường AB là $\frac{3}{2}$ (giờ), thời gian ô tô đi trên quãng đường BC là 2 (giờ).

Ví dụ 3: Một ca nô chạy xuôi dòng một khúc sông dài $60km$, sau đó chạy ngược dòng $48km$ trên khúc sông đó thì hết $6h$ giờ. Nếu ca nô ấy chạy xuôi dòng $40km$ và ngược dòng $80km$ trên khúc sông đó thì hết 7 giờ. Tính vận tốc riêng của ca nô và dòng nước.

Hướng dẫn

Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/giờ, $x > 0$).

Gọi vận tốc riêng của dòng nước là y (km/giờ, $y > 0$).

Vận tốc ca nô chạy xuôi dòng là $x + y$ (km/giờ).

Vận tốc ca nô chạy ngược dòng là $x - y$ (km/giờ).

Thời gian ca nô chạy xuôi dòng $60km$ là $\dfrac{60}{x+y}$ h

Thời gian ca nô chạy ngược dòng $48km$ là $\dfrac{48}{x-y}$ h

Ta có phương trình: $\dfrac{60}{x+y} + \dfrac{48}{x-y} = 6 \Leftrightarrow \dfrac{10}{x+y} + \dfrac{8}{x-y} = 1$ (1)

Tương tự ta có phương trình: $\dfrac{40}{x+y} + \dfrac{80}{x-y} = 7$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{10}{x+y} + \dfrac{8}{x-y} = 1 \\ \dfrac{40}{x+y} + \dfrac{80}{x-y} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \text{ (thỏa mãn)} \\ y = 2 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 18 (km/h), vận tốc riêng của dòng nước là 2 (km/h).

Ví dụ 4: Một chiếc thuyền xuôi, ngược trên một khúc sông dài $40km$ hết 4 giờ 30 phút. Cho thời gian thuyền xuôi dòng $5km$ bằng thời gian thuyền ngược dòng $4km$. Tính vận tốc của dòng nước.

Ví dụ 5: Tìm vận tốc và chiều dài của một 1 đoàn tàu hỏa biết đoàn tàu ấy chạy ngang qua văn phòng ga từ đầu máy đến hết toa cuối cùng mất 7 giây. Cho biết sân ga dài $378m$ và thời gian kể từ khi đầu máy bắt đầu vào sân ga cho tới khi toa cuối cùng rời khỏi sân ga là 25 giây.

Hướng dẫn

Gọi vận tốc của tàu khi vào sân ga là x (m/s, $x > 0$).

Gọi chiều dài của đoàn tàu là y (m, $y > 0$).

Tàu chạy ngang văn phòng ga mất 7 giây nên $y = 7x$ (1)

Khi đầu máy bắt đầu và sân ga dài $378m$, cho tới khi toa cuối cùng rời khỏi sân ga là 25 giây ta có phương trình: $y + 378 = 25x$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} y = 7x \\ y + 378 = 25x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 21 \text{ (thỏa mãn)} \\ y = 147 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$

Vậy vận tốc của đoàn tàu là 21 (m/s), chiều dài của đoàn tàu là 147 (m).

Ví dụ 6: Một chiếc thuyền xuôi, ngược dòng trên một khúc sông dài $40km$ hết 4 giờ 30 phút. Biết thời gian thuyền xuôi dòng $5km$ bằng thời gian thuyền ngược dòng $4km$. Tính vận tốc dòng nước.

Hướng dẫn

Gọi vận tốc riêng của thuyền lúc nước yên lặng là x (km/giờ, $x > 0$).

Gọi vận tốc riêng của dòng nước là y (km/giờ, $y > 0$).

Vận tốc thuyền chạy xuôi dòng là $x + y$ (km/giờ).

Vận tốc thuyền chạy ngược dòng là $x - y$ (km/giờ).

Thời gian thuyền chạy xuôi dòng $40km$ là $\dfrac{40}{x+y}$ h

Thời gian thuyền chạy ngược dòng $40km$ là $\dfrac{40}{x-y}$ h

Ta có phương trình: $\dfrac{40}{x+y} + \dfrac{40}{x-y} = \dfrac{9}{2}$ (1)

Tương tự ta có phương trình: $\dfrac{5}{x+y} = \dfrac{4}{x-y}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{40}{x+y} + \dfrac{40}{x-y} = \dfrac{9}{2} \\ \dfrac{5}{x+y} = \dfrac{4}{x-y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \text{ (thỏa mãn)} \\ y = 2 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$

Vậy vận tốc riêng của thuyền là 18 (km/h), vận tốc riêng của dòng nước là 2 (km/h).

Ví dụ 7: Trên một đường tròn chu vi $1,2m$, ta lấy một điểm A cố định. Hai điểm M, N chạy trên đường tròn, cùng khởi hành từ A với vận tốc không đổi. Nếu chúng di chuyển trái chiều nhau thì chúng gặp nhau sau mỗi 15 giây. Nếu di chuyển cùng chiều thì điểm M sẽ vượt điểm N đúng một vòng sau 60 giây. Tìm vận tốc mỗi điểm M, N?

Hướng dẫn

Gọi vận tốc của điểm M là x (m/s, $x > 0$).

Gọi vận tốc của điểm N là y (m/s, $y > 0$).

Khi chúng di chuyển trái chiều nhau thì chúng gặp nhau sau mỗi 15 giây

Ta có phương trình: $15x + 15y = 1,2$ (1)

Khi chúng di chuyển cùng chiều thì điểm M sẽ vượt điểm N đúng một vòng sau 60 giây ta có phương trình: $60x - 60y = 1,2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 15x + 15y = 1,2 \\ 60x - 60y = 1,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,05 \text{ (thỏa mãn)} \\ y = 0,03 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$

Vậy vận tốc của điểm M là $0,05$ (m/s), vận tốc của điểm N là $0,03$ (m/s).

Ví dụ 8: Một chiếc xe máy và ô tô đi từ A đến B với vận tốc khác nhau. Vận tốc xe máy là $62km$/giờ, còn vận tộc ô tô là $55km$/giờ. Để hai xe đến đích cùng một lúc người ta đã cho ô tô chạy trước một thời gian. Nhưng vì một lí do đặc biệt nên khi chạy được $\dfrac{2}{3}$ quãng đường ô tô buộc phải chạy với vận tốc $27,5km$/giờ. Vì vậy khi còn cách B $124km$ thì xe máy đuổi kịp ô tô. Tính quãng đường từ A đến B.

Hướng dẫn

Gọi khoảng cách AB là x (km, $x > 0$).

Gọi thời gian dự định ô tô đi trước xe máy là y (h, $y > 0$).

Ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{x}{62}+y=\dfrac{x}{55} \\ \dfrac{\frac{2}{3}x}{65}+\dfrac{\frac{x}{3}-124}{27,5}=y+\dfrac{x-124}{62} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=514 \,(\text{thỏa mãn}) \\ y=1\dfrac{94}{1705}\,(\text{thỏa mãn}) \end{cases}$

Vậy khoảng cách AB là 514 (km), thời gian dự định ô tô đi trước xe máy là $1\dfrac{94}{1705}$ (h).

Ví dụ 9: Hai ô tô khởi hành cùng một lúc trên quãng đường từ A đến B dài $120km$. Mỗi giờ ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai là $10km$ nên đến B trước ô tô thứ hai là $0,4$ giờ. Tính vận tốc của mỗi ô tô.

Hướng dẫn

Gọi khoảng cách AB là x $(km,\, x>0)$.

Gọi thời gian dự định ô tô đi trước xe máy là y $(h,\, y>0)$.

Ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{x}{62}+y=\dfrac{x}{55} \\ \dfrac{\frac{2}{3}x}{65}+\dfrac{\frac{x}{3}-124}{27,5}=y+\dfrac{x-124}{62} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=514 \,(\text{thỏa mãn}) \\ y=1\dfrac{94}{1705}\,(\text{thỏa mãn}) \end{cases}$

Vậy khoảng cách AB là 514 (km), thời gian dự định ô tô đi trước xe máy là $1\dfrac{94}{1705}$ (h).

Ví dụ 10: Một ca nô đi từ A đến B với vận tốc và thời gian dự định. Nếu ca nô tăng vận tốc thêm $3km/h$ thì thời gian rút ngắn được 2 giờ. Nếu ca nô giảm vận tốc đi $3km/h$ thì thời gian tăng 3 gờ. Tính vận tốc và thời gian dự định của ca nô.

Hướng dẫn

Gọi vận tốc dự định của ca nô là x $(km/h; x>3)$.

Gọi thời gian dự định của ca nô là y (giờ; $y>0$).

Ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} (x+3)(y-2)=xy. \\ (x-3)(y+3)=xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=15\,(\text{thỏa mãn}) \\ y=12\,(\text{thỏa mãn}) \end{cases}$

Vậy vận tốc dự định của ca nô là $15km/h$.

Thời gian dự định của ca nô là 12 giờ.

Ví dụ 11: Một ca nô chạy trên sông trong 8 giờ xuôi dòng được $81km$ và ngược dòng $105km$. Một lần khác, ca nô chạy trên sông trong 4 giờ xuôi dòng $54km$ và ngược dòng $42km$. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước.
(Biết vận tốc riêng của ca nô, vận tốc dòng nước không đổi).

Hướng dẫn

Gọi vận tốc riêng của ca nô là x $(km/h; x>0)$.

Vận tốc dòng nước là y $(km/h; x>y>0)$.

Ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{81}{x+y}+\dfrac{105}{x-y}=8. \\ \dfrac{54}{x+y}+\dfrac{42}{x-y}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=24\,(\text{thỏa mãn}) \\ y=3\,(\text{thỏa mãn}) \end{cases}$

Vậy vận tốc dự định của ca nô là $24km/h$.

vận tốc dòng nước là $3km/h$.

Ví dụ 12: Một xe máy đi từ A đến B trong thời gian đã định. Nếu đi với vận tốc $45km/h$ sẽ tới B chậm mất nửa giờ. Nếu đi với vận tốc $60km/h$ sẽ tới B sớm 45 phút. Tính quãng đường AB và thời gian dự định.

Hướng dẫn

Gọi quãng đường AB là x $(km; x > 0)$.

Thời gian dự định đi từ Aến B là y $(h; y > 0)$.

Ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} x = 45.\left(y + \dfrac{1}{2}\right). \\ x = 60.\left(y - \dfrac{3}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 225 \text{ (thỏa mãn)} \\ y = 4,5 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$

Vậy quãng đường AB là 225 (km).

Thời gian dự định đi từ A đến B hết $4,5$ giờ.

Ví dụ 13: Một ca nô xuôi dòng $81km$ và ngược dòng $42km$ mất 5 giờ. Một lần khác, ca nô xuôi dòng $9km$ và ngược dòng $7km$ thì mất 40 phút. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước. (Biết vận tốc riêng của ca nô, vận tốc của dòng nước không đổi).

Hướng dẫn

Gọi vận tốc riêng của ca nô là x $(km/h; x > 0)$.

Vận tốc dòng nước là y $(km/h; x > y > 0)$.

Ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{81}{x+y} + \dfrac{42}{x-y} = 5. \\ \dfrac{9}{x+y} + \dfrac{7}{x-y} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \text{ (thỏa mãn)} \\ y = 3 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$

Vậy vận tốc dự định của ca nô là $24km/h$.

vận tốc dòng nước là $3km/h$.

Ví dụ 14: Một ô tô đi từ Hà Nội và dự định đến Huế lúc $20h$ 30 phút. Nếu xe đi với vận tốc $45km/h$ thì sẽ đến Huế chậm hơn so với dự định là 2 giờ. Nếu xe chạy với vận tốc $60km/h$ thì sẽ đến Huế sớm hơn 2 giờ so với dự định. Tính độ dài quãng đường Hà Nội - Huế và thời gian xe xuất phát từ Hà Nội.

Hướng dẫn

Gọi quãng đường Hà Nội - Huế là x $(km; x > 0)$.

Thời gian ô tô dự định đi là y (giờ; $y > 0$).

Ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} x = 60.(y-2). \\ x = 45.(y+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 720 \text{ (thỏa mãn)} \\ y = 14 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$

Vậy quãng đường Hà Nội - Huế là $720km$.

Thời gian xe xuất phát từ Hà Nội là $20h30$ phút $- 14h = 6h30$ phút.

Ví dụ 15: Hai địa điểm A và B cách nhau $36km$. Cùng lúc đó một xe tải khởi hành từ A chạy về B và một xe con chạy từ B về A. Sau khi gặp nhau xe tải chạy tiếp 5 giờ nữa thì đến B và xe con chạy tiếp 3 giờ 12 phút thì tới A. Tính vận tốc mỗi xe.

Hướng dẫn

Gọi vận tốc xe tải là x $(km/h; x > 0)$.

vận tốc xe con là x $(km/h; y > 0)$.

Ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 5x + \dfrac{16}{5y} = 360. \\ \dfrac{\frac{16}{5}y}{x} = \dfrac{5x}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \text{ (thỏa mãn)} \\ y = 50 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$

Vậy vận tốc xe tải là 40 (km/h).

vận tốc xe con là 50 (km/h).

Ví dụ 16: Một bè nứa trôi tự do (với vận tốc bằng vận tốc của dòng nước) và một ca nô cùng dời bến A để xuôi dòng. Ca nô xuôi dòng được $144km$ thì quay trở về bến A ngay, cả đi lẫn về hết 21 giờ. Trên đường ca nô trở về bến A khi còn cách bến A là $36km$ thì gặp bè nứa nói trên. Tìm vận tốc riêng của ca nô và vận tốc của dòng nước.

Hướng dẫn

Gọi vận tốc riêng của ca nô là x $(km/h; x > 3)$.

Vận tốc dòng nước là y $(km/h; x > y > 0)$.

Ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{144}{x+y} + \dfrac{144}{x-y} = 21 \\ \dfrac{144}{x+y} + \dfrac{144-36}{x-y} = \dfrac{36}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 \text{ (thỏa mãn)} \\ y = 3 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$

Vậy vận tốc dự định của ca nô là $14km/h$.

vận tốc dòng nước là $2km/h$.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 1. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 2 và nếu viết thêm chữ số bằng chữ hàng chục vào bên phải thì được một số lớn hơn số ban đầu là 682.

A. 75. **B.** 85. **C.** 95. **D.** 65.

Bài 2. Có hai số tự nhiên, biết rằng tổng của hai chữ số bằng 59; hai lần số này bé hơn ba lần số kia là 7. Tìm hai số đó.

A. $30, 35$. **B.** $25, 34$. **C.** $30, 34$. **D.** $25, 35$.

Bài 3. Cho môt số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng tổng của hai chữ số bằng 10, tích của hai số đó bằng 12. Tìm số đã cho.

A. 26. **B.** 27. **C.** 28. **D.** 29.

Bài 4. Một hình chữ nhật có chu vi là $280m$. Nếu giảm chiều dài của hình chữ nật đi $2m$ và tăng chiều rộng thêm $3m$ thì diện tích nó tăng thêm $144m^2$. Chiều rộng và chiều dài của hình chữ nhật lần lượt là.

A. 45, 86. **B.** 45, 68. **C.** 54, 68. **D.** 54, 86.

Bài 5. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi là $320m$. Nếu chiều dài của hình chữ nật tăng đi $10m$ và giảm chiều rộng thêm $5m$ thì diện tích nó tăng thêm $50m^2$. Tính diện tích của khu vườn ban đầu.

A. $3000m^2$. **B.** $6000m^2$. **C.** $9000m^2$. **D.** $10000m^2$.

Bài 6. Một hình chữ nhật có chu vi là $160m$ và có diện tích $1500m^2$. Chiều rộng và chiều dài của hình chữ nhật lần lượt là.

A. 20, 75. **B.** 25, 60. **C.** 10, 150. **D.** 30, 50.

Bài 7. Một sân trường hình chữ nhật có chu vi là $340m$. ba lần chiều dài hơn bốn lần chiều rộng là $20m$. Tính diện tích sân trường.

A. $3000m^2$. **B.** $4000m^2$. **C.** $6000m^2$. **D.** $7000m^2$.

Bài 8. Cho một tam giác vuông. Nếu tăng các cạnh góc vuông lên $4cm$ và $5cm$ thì diện tích tam giác sẽ tăng thêm $110cm^2$. Nếu giảm cả hai cạnh này đi $5cm$ thì diện tích sẽ giảm đi $100cm^2$. Tình hai cạnh góc vuông của tam giác.

A. $20cm$, $25cm$. **B.** $25cm$, $25cm$. **C.** $20cm$, $20cm$. **D.** $30cm$, $35cm$.

Bài 9. Cho tam giác vuông có cạnh huyền bằng $5cm$, diện tích bằng $6cm^2$. Tìm độ dài các cạnh góc vuông.

A. $3cm$, $4cm$. **B.** $3cm$, $4cm$ hoặc $4cm$, $3cm$.

C. $4cm$, $5cm$ hoặc $5cm$, $4cm$. **D.** $5cm$, $4cm$.

Bài 10. Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước trong 4 giờ 48 phút sẽ đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất trong 3 giờ và vòi thứ hai trong 4 giờ thì được $\dfrac{3}{4}$ bể nước. Hỏi vòi một và vòi hai theo thứ tứ chảy một mình trong bao lâu thì mới đầy bể?

A. $12h$, $8h$. **B.** $8h$, $12h$. **C.** $9h$, $15h$. **D.** 15, $9h$.

Bài 11. Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước trong 1 giờ 20 phút thì đầy bể. Nếu để vòi thứ nhất chảy một mình trong 10 phút và vòi thứ hai chảy một mình trong 12 phút thì chỉ được $\dfrac{2}{15}$ thể tích của bể nước. Hỏi mỗi vòi chảy một mình trong bao lâu sẽ đầy bể?

A. Vòi một chảy đầy bể sau $2h$, vòi hai chảy đầy bể sau $8h$.

B. Vòi một chảy đầy bể sau $8h$, vòi hai chảy đầy bể sau $2h$.

C. Vòi một chảy đầy bể sau $4h$, vòi hai chảy đầy bể sau $2h$.

D. Vòi một chảy đầy bể sau $2h$, vòi hai chảy đầy bể sau $4h$.

Bài 12. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn chưa có nước thì sau 18 giờ đầy bể. Nếu chảy riêng thì vòi thứ nhất sẽ chảy đầy bể chậm hơn vòi thứ hai 27 giờ. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi mất bao lâu mới chảy đầy bể?

A. Vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể trong $425h$, vòi thứ hai chảy riêng đầy bể trong $27h$..

B. Vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể trong 542h, vòi thứ hai chảy riêng đầy bể trong $72h$..

C. Vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể trong $524h$, vòi thứ hai chảy riêng đầy bể trong $27h$..

D. Vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể trong $542h$, vòi thứ hai chảy riêng đầy bể trong $27h$..

- - - - - - - - - - HẾT- - - - - - - - - -

ĐÁP ÁN

1 A	**3** C	**5** B	**7** D	**9** B	**11** D
2 B	**4** D	**6** D	**8** A	**10** A	**12** D

MỘT SỐ ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Ví dụ : (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2011 - 2012)

Một đội xe theo kế hoạch chở hết 140 tấn hàng trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày đội đó chở vượt mức 5 tấn nên đội đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 1 ngày và chở thêm được 10 tấn. Hỏi theo kế hoạch đội xe chở hàng hết bao nhiêu ngày?

Ví dụ : (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2012 - 2013)

Hai người cùng làm chung một công việc trong $\dfrac{12}{15}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì thời gian để người thứ nhất hoàn thành công việc ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu giờ để xong công việc?

Ví dụ : (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2013 - 2014)

Quãng đường từ A đến B dài 90 km. Một người đi xe máy từ A đến B. Khi đến B, người đó nghỉ 30 phút rồi quay trở về A với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 9 km/h. Thời gian kể từ lúc bắt đầu đi từ A đến lúc trở về đến A là 5 giờ. Tính vận tốc xe máy lúc đi từ A đến B.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2014 - 2015)

Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2015 - 2016)

Một tàu tuần tra chạy ngược dòng $60km$, sau đó chạy xuôi dòng $48km$ trên cùng một dòng sông có vận tốc của dòng nước là $2km/$giờ. Tính vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng 1 giờ.

Ví dụ : (THI THỬ 10 - THPT Hà Nội, năm học 2015 - 2016)

Hai khối 8 và 9 của một trường THCS có 420 học sinh có học lực trên trung bình đạt tỉ lệ 84%. Khối 8 đạt tỉ lệ 80% là học sinh trên trung bình, khối 9 đạt 90%. Tính số học sinh của mỗi khối.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2016 - 2017)

Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích $720m^2$. Nếu tăng chiều dài thêm $10m$ và giảm chiều rộng $6m$ thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2017 - 2018)

Một xe ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ A để đi đến B với vận tốc của mỗi xe không đổi trên toàn bộ quãng đường AB dài $120km$. Do vận tốc xe ô tô lớn hơn vận tốc xe máy là $10km/h$ nên xe ô tô đến B sớm hơn xe máy 36 phút. Tính vận tốc của mỗi xe.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2018 - 2019)

Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi bằng 28 mét và độ dài đường chéo bằng 10 mét. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó theo đơn vị mét.

CHỦ ĐỀ III: PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI - ĐƯỜNG THẲNG - PARABOL

A. LÝ THUYẾT

1. Hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

• Hàm số bậc nhất $y = ax + b$, $a \neq 0$

+) Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 0$.

+) nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $a < 0$.

• Đồ thị hàm số bậc nhất là một đường thẳng. +) Với $b = 0$ khi đó đường thẳng đi qua các điểm $(0; 0)$ và $(1; a)$.

+) Với $b \neq 0$ khi đó đường thẳng cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại các điểm $\left(-\dfrac{b}{a}; 0\right)$ và $(0; b)$.

• Hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$

+) Nếu $a > 0$ góc tạo bởi trục Ox và d là góc nhọn α và $a = tan\alpha$.

+) Nếu $a < 0$ góc tạo bởi trục Ox và d là góc tù α và $a = -tan(180^0 - \alpha)$.

• Vị trí tương đối của hai đường thẳng d:$y = ax + b$ và d':$y = a'x + b'$

+) $d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$.

+) $d // d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$.

+) d cắt $d' \Leftrightarrow a \neq a'$.

+) $d \perp d' \Leftrightarrow a.a' = -1$.

Chú ý: Độ dài đoạn thẳng AB với $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ là $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

2. Hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

• Hàm số này có tập xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

• Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$.

• Nếu $a < 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x > 0$ và đồng biến khi $x < 0$.

• Nếu $a > 0$ thì $y > 0$ $\forall x \neq 0$.

+) $y = 0$ khi $x = 0$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y = 0$.

• Nếu $a < 0$ thì $y < 0$ $\forall x \neq 0$.

+) $y = 0$ khi $x = 0$. Giá trị lớn nhất của hàm số là $y = 0$.

∗ Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

• Đồ thị hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ là một đường cong đi qua gốc tọa độ và nhận trục Oy làm trục đối xứng. Đường cong đó được gọi là một Parabol với đỉnh O.

• Nếu $a > 0$ thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị.

• Nếu $a < 0$ thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị.

3. Phương trình bậc hai một ẩn

Phương trình bậc hai một ẩn là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ trong đó: x là ẩn số; a, b, c $(a \neq 0)$ là các hệ số.

• Công thức nghiệm của phương trình bậc hai.

Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ và biết thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

• Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

• Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$.

• Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm kép.

Chú ý: Nếu $a.c < 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Đối với phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có $b = 2b'$ và biết thức $\Delta' = b'^2 - ac$.

• Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$; $x_2 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$.

• Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \dfrac{-b'}{a}$.

• Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm kép.

4. Hệ thức VI - ÉT và ứng dụng

• Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ thì: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

• Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, còn nghiệm kia là $x_2 = \dfrac{c}{a}$.

• Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\dfrac{c}{a}$.

• Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$. Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$ hay $(\Delta \geq 0)$.

Chú ý: Cách xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai

• Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c < 0$.

• Phương trình có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P = \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases}$.

• Phương trình có hai nghiệm cùng dấu dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P = \dfrac{c}{a} > 0 \\ S = -\dfrac{b}{a} > 0 \end{cases}$.

• Phương trình có hai nghiệm cùng dấu âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P = \dfrac{c}{a} > 0 \\ S = -\dfrac{b}{a} < 0 \end{cases}$.

• Phương trình có hai nghiệm trái dấu, mà nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương

$\Leftrightarrow \begin{cases} a.c < 0 \\ S = -\dfrac{b}{a} < 0 \end{cases}$.

5. Phương trình quy về phương trình bậc hai

a) Phương trình trùng phương

Phương trình trùng phương là phương trình có dạng

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \ (a \neq 0) \ (1)$$

Phương pháp giải: Đặt $t = x^2 = t \geq 0$ đưa về phương trình $at^2 + bt + c = 0$ (2) .

b) Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2: Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu.

Bước 3: Giải phương trình vừa nhận được.

Bước 4: Kiểm tra nghiệm với điều kiện rồi kết luận.

b) Phương trình tích

Bước 1: Phân tích vế trái thành nhân tử, vế phải bằng 0.

Bước 2: Giải phương trình tích.

6. Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Bước 1: Lập hệ phương trình.

- Chọn ẩn và đặt điều kiện, chọn đơn vị cho ẩn. (chọn ẩn là các đại lượng cần tìm).
- Biểu thị các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập hệ phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2: Giải hệ phương trình vừa lập.

Bước 3: Kểm tra xem các nghiệm của phương trình có thỏa mãn điều kiện đặt ra và trả lời.

Kiến thức cần nhớ 1: $S = v.t$. Trong đó:

+) S là quãng đường (m, km).

+) v là vận tốc (m/s, km/h).

+) t là thời gian (s, phút, h).

- Nếu chuyển động trong dòng chảy thì:

+) $V_{\text{xuôi}} = V_{\text{riêng}} + V_{\text{dòng nước}}$.

+) $V_{\text{ngược}} = V_{\text{riêng}} - V_{\text{dòng nước}}$.

Kiến thức cần nhớ 2

- Khối lượng công việc = Năng suất $\times$ Thời gian.
- Năng suất = Khối lượng công việc $\div$ Thời gian.
- Thời gian = Khối lượng công việc $\div$ Năng suất.

Kiến thức cần nhớ 3

Coi toàn bộ công việc là 1.

- Năng suất = 1 ÷ Thời gian.
- Tổng các năng suất riêng = Năng suất chung.

Kiến thức cần nhớ 4

- Biểu diễn: $\overline{ab} = 10.a + b\ a, b \in \mathbb{N}, (0 < a \leq 9, 0 < b \leq 9)$.

$\overline{abc} = 100.a + 10.b + c\ a, b \in \mathbb{N}, (0 < a \leq 9, 0 < b, c \leq 9)$.

- Tỉ số của hai số a và b $b \neq 0$ là $\dfrac{a}{b}$.
- Tổng của hai số a, b là: $a + b$.
- Tổng bình phương hai số a, b là: $a^2 + b^2$.
- Tổng nghịch đảo hai số a, b là: $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

Kiến thức cần nhớ 5

- Định lí Py-ta-go.
- Diện tích hình chữ nhật.
- Diện tích hình thang.
- Tinh chu vi của các hình.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ $y = f(x) = ax^2$ $(a \neq 0)$ TẠI $x = x_0$

Ví dụ 1: Cho Parabol $y = \dfrac{1}{3}x^2$. Xác định giá trị m để các điểm sau đây thuộc Parabol.

a) $A(3; m)$ b) $B(-3; m)$ c) $C(m; \dfrac{1}{3})$ d) $C(m; \dfrac{m}{3})$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị là Parabol (P). Biết điểm A nằm trên (P) có hoành độ bằng $-\dfrac{1}{2}$. Hãy tính tung độ của điểm A.

Dạng 2. XÁC ĐỊNH TÍNH ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = (3m - 2)x^2$. Với $m \neq \dfrac{2}{3}$.

a) Tìm điều kiện m để hàm số đồng biến khi $x > 0$.

b) Tìm điều kiện m để hàm số nghịch biến khi $x > 0$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = (\sqrt{m + 2} - 3)x^2$.

a) Tìm điều kiện m để hàm số đồng biến khi $x > 0$.

b) Tìm điều kiện m để hàm số nghịch biến khi $x > 0$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = (m^2 - 2m + 3)x^2$. Chứng minh rằng khi $x > 0$ thì hàm số đồng biến.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = f(x) = 2x^2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số khi:

a) $0 \leq x \leq 3$ b) $-3 \leq -1$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = f(x) = (m^2 + m + 1)x^2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số khi:

a) Chứng minh rằng khi $x < 0$ thì hàm số nghịch biến.

b) Với $m = -2$, tìm các giá trị nguyên của x để $f(x) < 100$.

Dạng 3. VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

Ví dụ 1: Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{2}x^2$ b) $y = \dfrac{1}{2}x.|x|$ c) $y = -\dfrac{1}{3}x^2$ d) $y = \dfrac{1}{3}x.|x|$.

Dạng 4. XÁC ĐỊNH THAM SỐ

Ví dụ 1: Xác định hệ số a của hàm số $y = ax^2$. Biết rằng đồ thị hàm số đi qua điểm $A(10; 30)$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = (k+2)x^2$ có đồ thị cắt đường thẳng $y - 2x + 3 = 0$. Tại điểm $M(1; m)$. Hãy xác định k và m.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = ax^2 + b$. Tìm a, b biết rằng đồ thị hàm số đã cho song song với đường thẳng $y = -3x + 5$ và đi qua điểm A thuộc Parabol (P): $y = \dfrac{1}{2}x^2$ có hoành độ bằng -2.

Dạng 5. TỌA ĐỘ GIAO ĐIỂM CỦA PARABOL VÀ ĐƯỜNG THẲNG

Ví dụ 1: Biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình: $2x^2 - 1 = m$.

Ví dụ 2: Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = -x + 2$.

a) Vẽ (P) và (d) trên cùng mặt phẳng tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm A; B của (P) và (d) bằng phép tính.

c) Tính diện tích ΔAOB (đơn vị trên hai trục là cm).

Dạng 6. XÁC ĐỊNH HỆ SỐ a, b, c CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

Ví dụ 1: Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2 + bx + c = 0$ và chỉ rõ các hệ số a, b, c.

a) $2x^2 - 3x = 4 + 3x$ b) $x^2 + 3x = mx + m$ m là hằng số.

c) $2x^2 + \sqrt{2}(3x - 1) = 1 + \sqrt{2}$.

Ví dụ 2: Lập phương trình bậc hai có các hệ số hữu tỉ có một nghiệm là $\sqrt{2} + 1$. Xác định các hệ số của phương trình.

Dạng 7. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 2 = 0$ b) $x^2 - 2x = 0$ c) $2x^2 + 4 = 0$ d) $x^2 - 2x + 1 = 0$.

e) $2x^2 + 5x + 3 = 0$ f) $x^2 - x - 12 = 0$ g) $x^2 - 3(x-1)^2 = 0$ h) $x^2 + 6x - 16 = 0$.

i) $2x^2 - 6x + 1 = 0$.

Dạng 8. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 5x - 12 = 0$ b) $x^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$ c) $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2x}{3} = \dfrac{2x+7}{6}$.

Ví dụ 2: Giải và biện luận các phương trình sau:

a) $x^2 - 4x + m + 1 = 0$ b) $(m+1)x^2 - 2(m+1)x + m - 3 = 0$.

Dạng 9. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH HAI ẨN GỒM MỘT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ MỘT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x^2 - 3xy + y^2 + 2x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$

Ví dụ 2: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} 2x + y = m \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$.

Dạng 10. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ HAI ẨN SỐ

Ví dụ 1: Giải phương trình sau: $x^2y^4 - 16xy^3 + 68y^2 - 4xy + x^2 = 0$.

Ví dụ 2: Với mỗi cặp $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - x^2y - y + 8x + 7 = 0$. Hãy tìm cặp nghiệm mà y lớn nhất.

Dạng 11. HỆ THỨC VI - ÉT VÀ ỨNG DỤNG

Ví dụ 1: Cho phương trình $2x^2 + 2x + m = 0$. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 3$.

Ví dụ 2: Cho phương trình $(m + 2)x^2 - (2m - 1)x - 3 + m = 0$.

a) Chứng tỏ phương trình có nghiệm với mọi m.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Khi đó hãy tìm m để nghiệm này gấp đôi nghiệm kia.

Ví dụ 3: Cho phương trình $2x^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$. Xác định m để phương trình có hai nghiệm cùng dương.

Ví dụ 4: Cho phương trình $2x^2 - 2mx + m + 6 = 0$. Biện luận dấu các nghiệm của phương trình này.

Ví dụ 5: Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 2 = 0$.

a) Giải phương trình khi $m = 1$.

b) Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

Ví dụ 6: Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + 2m = 0$.

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình chứng tỏ $x_1 + x_2 - x_1x_2$ không phụ thuộc vào giá trị của m.

Ví dụ 7: Tìm tọa độ điểm A và B của đồ thị hàm số $y = 2x + 3$ và $y = x^2$. Gọi D và C lần lợt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục hoành. Tính diện tích tứ giác $ABCD$.

Ví dụ 8: Cho phương trình $x^2 - 2(m + 2)x + m + 1 = 0$.

a) Tìm các giá trị m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm m để $x_1(1 - 2x_2) + x_2(1 - 2x_1) = m^2$.

Ví dụ 9: Cho phương trình $x^2 - (2m + 2)x + 2m - 4 = 0$ với x là ẩn và m là tham số.

a) Giải phương trình khi $m = 1$.

b) Tìm giá trị của tham số m để phương trình đã cho có một nghiệm $x = 2$. Tìm nghiệm còn lại.

c) Chứng minh phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

d) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho. Hãy Tìm m để:

i) $x_1^2 + x_2^2 = 13$ ii) $2x_1 + 3x_2 = 3$

iii) $|x_1 + x_2| = 4$ iv) $|x_1| + |x_2| = 5$

v) Nghiệm này gấp ba lần nghiệm kia.

e) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc vào m.

f) Tìm các giá trị của m để phương trình:

i) Có hai nghiệm trái dấu;

ii) Có hai nghiệm cùng âm;

iii) Có hai nghiệm cùng dương;

iv) Có hai nghiệm trái dấu, nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương;

v) Có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2$.

g) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho. Xét biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 4$:

i) Tính giá trị của biểu thức A theo m;

ii) Tìm các giá trị của m để $A = 41$;

iii) Tìm các giá trị của m để A đạt giá trị nhỏ nhất.

h) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho. Tìm các giá trị của m để x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\dfrac{\sqrt{205}}{2}$.

k) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho. Với $m \neq 2$ lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\dfrac{1}{x_1}$ và $\dfrac{1}{x_2}$ có tham số m.

Ví dụ 10: Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0$ với x là ẩn và m là tham số.

a) Giải phương trình khi $m = 2$.

b) Tìm giá trị của tham số m để phương trình đã cho có một nghiệm $x = -2$. Tìm nghiệm còn lại.

c) Tìm các giá trị của m để phương trình:

i) Có hai nghiệm phân biệt. Tìm các nghiệm đó;

ii) Có nghiệm kép. Tìm nghiệm với m vừa tìm được;

iii) Vô nghiệm.

d) Trong trường hợp phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Tìm các giá trị của m để:

i) $x_1^2 + x_2^2 = 8$ ii) $2x_1 - 3x_2 = 8$

iii) $|x_1 - x_2| = 4$ iv) $|x_1| + |x_2| = 3$.

e) Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

i) x_1, x_2 trái dấu ii) x_1, x_2 cùng dương

iii) x_1, x_2 cùng âm iv) $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

g) Trong trường hợp phương trình đã cho có các nghiệm phân biệt x_1, x_2. Hãy:

i) Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 độc lập với m.

ii) Tìm các giá trị của m để $(2x_1 - 3)(2x_2 - 3) > 1$.

iii) Với $m \neq 0$ và $m \neq 3$. Lập phương trình bậc hai có các nghiệm là $y_1 = x_1 + \dfrac{1}{x_2}$ và $y_2 = x_2 + \dfrac{1}{x_1}$.

Dạng 12. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH TRÙNG PHƯƠNG

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau.

a) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$.

b) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$.

b) $\dfrac{4}{x^2+4} + \dfrac{5}{x^2+5} = 2$.

Ví dụ 2: Tìm các giá trị của m để phương trình $x^4 - 6x^2 + m - 1 = 0$ có 4 nghiệm.

Dạng 13. GIẢI MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ.

a) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) = 24$.

b) $(x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2 = 81$.

c) $\dfrac{x^2 + x - 5}{x} + \dfrac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0$.

d) $(x + 5)(x + 6)(x + 8)(x + 9) = 40$.

e) $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24$.

f) $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$.

g) $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0$.

h) $(x + 4)^2 + (x + 2)^2 = 82$.

i) $(x - 2)^6 + (x - 4)^6 = 64$.

k) $\dfrac{4x}{x^2 + x + 3} + \dfrac{5x}{x^2 - 5x + 3} = -\dfrac{3}{2}$.

n) $\dfrac{x^2 - 13x + 15}{x^2 - 14x + 15} + \dfrac{x^2 - 15x + 15}{x^2 - 16x + 15} = -\dfrac{1}{12}$.

m) $\dfrac{x^2 - 10x + 15}{x^2 - 6x + 15} = \dfrac{4x}{x^2 - 12x + 15}$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau.

a) $\sqrt{2x - 1} = 8 - x$.

b) $\sqrt{15 - x} + \sqrt{3 - x} = 6$.

c) $x^2 - x + \sqrt{x^2 - x + 24} = 18$.

d) $\sqrt{2 - x} + \sqrt{2 + x} + \sqrt{4 - x^2} = 2$.

Dạng 14. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

• TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Ví dụ 1: Hai ô tô cùng khởi hành từ A đến B cách nhau 560 km. Vận tốc ô tô (II) hơn vận tốc ô tô (I) là 10 km/h nên đã đến sớm hơn ô tô (I) là 1 giờ. Tính vận tốc mỗi xe.

Ví dụ 2: Một người đi xe đạp từ A đến B dài 30 km. Khi đi từ B về A người đó chọn đi con đường khác dài hơn 6 km và đi với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 3 km\giờ, nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút. Tính vận tốc lúc đi.

Ví dụ 3: Một tàu thủy chạy trên một khúc sông dài 120 km. Cả đi lẫn về mất 6 giờ 45 phút. Tính vận tốc tàu thủy khi nước yên lặng biết vận tốc của dòng nước là 4 km\giờ.

Ví dụ 4: Một ca nô xuôi dòng từ bến A đến bến sông B cách nhau 24 km, cũng từ A về B một chiếc bè trôi với vận tốc dòng nước là 4 km\giờ. Khi đến B ca nô quay lại ngay và gặp bè tại địa điểm C cách A là 8 km. Tính vận tốc thực của ca nô.

Ví dụ 5: Một ô tô dự định đi từ A đến B cách nhau 120 km trong một thời gian đã định. Khi đi được nửa quãng đường xe bị chắn bởi xe hỏa mất 3 phút. Vì vậy để đến B đúng hạn xe phải tăng tốc thêm 2 km\giờ trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc dự định.

Ví dụ 6: Một bè nứa trôi tự do (với vận tốc bằng vận tốc của dòng nước) và một ca nô cùng dời bến A để xuôi dòng sông. Ca nô xuôi dòng được 144 km thì quay trở về bến A ngay, cả đi lẫn về hết 21 giờ. Trên đường ca nô trở về bến A, khi còn cách bến A là 36 km thì gặp bè nứa nói trên. Tìm vận tốc riêng của ca nô và vận tốc của dòng nước.

• TOÁN CÔNG VIỆC LIÊN QUAN ĐẾN NĂNG SUẤT VÀ THỜI GIAN

Ví dụ 1: Một công nhân dự định làm 70 sản phẩm trong thời gian quy định. Nhưng do áp dụng kĩ thuật nên đã tăng năng suất thêm 5 sản phẩm mỗi giờ. Do đó không những hoàn thành kế hoạch trước thời hạn 40 phút mà còn vượt mức 10 sản phẩm. Tính năng suất dự định.

Ví dụ 2: Một công nhân dự định làm 72 sản phẩm trong thời gian quy định. Nhưng thực tế xí nghiệp lại giao 80 sản phẩm. Vì vậy mặc dù người đó đã làm mỗi giờ thêm 1 sản phẩm, song thời gian hoàn thành công việc vẫn chậm hơn so với dự định 12 phút. Tính năng suất dự kiến, biết rằng mỗi giờ người đó làm không quá 20 sản phẩm.

Ví dụ 3: Một tổ có kế hoạch sản xuất 350 sản phẩm theo năng suất dự định. Nếu tăng năng suất lên 10 sản phẩm thì tổ đó hoàn thành sớm 2 ngày so với giảm năng suất 10 sản phẩm mỗi ngày. Tính năng suất dự kiến.

Ví dụ 4: Một nhóm thợ phải thực hiện kế hoạch sản xuất 3000 sản phẩm. Trong 8 ngày đầu họ thực hiện đúng mức đề ra, những ngày còn lại họ đã vượt mức mỗi ngày 10 sản phẩm, nên đã hoàn thành sớm hơn dự định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm.

• TOÁN CÔNG VIỆC LIÊN QUAN ĐẾN LÀM CHUNG, LÀM RIÊNG

Ví dụ 1: Hai công nhân cùng làm một công việc thì hoàn thành công việc đó trong 6 giờ 40 phút. Nếu họ làm riêng thì công nhân (I) hoàn thành công việc đó ít hơn công nhân (II) 3 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi công nhân phải làm trong bao lâu xong công việc.

Ví dụ 2: Hai vòi cùng chảy vào mōt bể thì đầy sau 7 giờ 12 phút. Nếu mỗi vòi chảy riêng mà đầy bể thì tổng thời gian là 30 giờ. Mỗi vòi chảy riêng thì đầy bể trong thời gian là bao lâu?

• TOÁN VỀ QUAN HỆ GIỮA CÁC SỐ

Ví dụ 1: Tìm hai số biết rằng tổng của hai chữ số đó bằng 17 đơn vị. Nếu số thứu nhất tăng thêm 3 đơn vị, số thứ hai tăng thêm 2 đơn vị thì tích của chúng bằng 105 đơn vị.

Ví dụ 2: Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu đem số đó chia cho tổng các chữ số của nó thì được thương là 4 và dư là 3. Còn nếu đem số đó chia cho tích các chữ số của nó thì được thương là 3 và dư là 5.

Ví dụ 3: Lấy một số tự nhiên có hai chữ số chia chữ số đó viết bởi hai chữ số có thứ tự ngược lại thì được thương là 4 và dư là 5. Nếu lấy số đó trừ đi 9 thì được một số bằng tổng bình phương các chữ số đó. Tìm số tự nhiên đó.

Ví dụ 4: Cho một số có hai chữ số. Tìm số đó, biết rằng tổng hai chữ số đó nó nhỏ hơn số đó 6 lần. Nếu thêm 25 vào tích của 2 chữ số dó sẽ được số viết theo thứ tự ngược lại với số đã cho.

• TOÁN CÓ NỘI DUNG HÌNH HỌC

Ví dụ 1: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2010 - 2011)
Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13 m và chiều dài hơn chiều rộng 7 cm. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.

Ví dụ 2: Một hình chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{2}{3}$ chiều dài, diện tích hình chữ nhật là 5400 cm^2. Tính chu vi hình chữ nhật.

LUYỆN TẬP TỔNG HỢP PHẦN GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH HOẶC PHƯƠNG TRÌNH CỦA CÁC TRƯỜNG THCS HÀ NỘI 2018

Ví dụ 1: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 4 giờ sẽ đầy bể. Nếu để vòi 1 chảy riêng trong 1 giờ rồi khóa lại và mở tiếp vòi hai trong 40 phút thì cả hai vòi chảy được $\frac{2}{9}$ bể. Tính thời gian để mỗi vòi chảy riêng đầy bể.

Ví dụ 2: Một xe lửa đi từ Huế ra Hà Nội. Sau đó 1 giờ 40 phút, một xe lửa khác đi từ Hà Nội vào Huế với vận tốc lớn hơn vận tốc xe lửa thứ nhất là 5 km/h. Hai xe lửa gặp nhau tại ga cách Hà Nội 300km. Tìm vận tốc của mỗi xe, biết rằng quãng đường sắt Hà Nội – Huế là 645km.

Ví dụ 3: Quãng đường AB dài 120km. Hai xe máy khởi hành cùng một lúc từ A đến B. Vận tốc của xe thứ nhất lớn hơn vận tốc của xe thứ hai là 10km/h nên xe máy thứ nhất đến B sớm hơn xe máy thứ hai 1 giờ. Tính vận tốc của mỗi xe.

Ví dụ 4: Hai vòi nước cùng chảy vào bể không có nước sau 2 giờ 24 phút thì đầy bể. Nếu chỉ mở vòi một trong 2 giờ sau đo khóa vòi một và chỉ mở vòi hai trong 1 giờ 30 phút thì được $\frac{3}{4}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì trong bao lâu sẽ đầy bể?

Ví dụ 5: Trong đợt thi đua cuối năm, hai đội công nhân làm được 1020 sản phẩm chất lượng loại A đạt tỉ lệ 85%. Riêng đội 1 tỉ lệ sản phẩm loại A là 90%, riêng đội 2 tỉ lệ sản phẩm loại A là 78%. Tính số sản phẩm mỗi đội đã làm được.

Ví dụ 6: Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi là 280m. Người ta làm một lối đi quanh vườn (thuộc đất của mảnh vườn) rộng 2m, diện tích còn lại để trồng trọt là $4256m^2$. Tính kích thước của mảnh vườn lúc đầu.

Ví dụ 7: Một ô tô dự định đi từ A đến B dài 80km với vận tốc dự định. Thực tế trên nửa quãng đường đầu ô tô đi với vận tốc nhỏ hơn vận tốc dự định 6km/h. Trong nửa quãng đường sau ô tô đi với vận tốc lớn hơn vận tốc dự định 12km/h. Biết rằng ô tô đến B đúng thời gian dự định. Tính vận tốc dự định của ô tô.

Ví dụ 8: Quãng đường từ Hà Nội đi Ninh Bình dài 100km. Cùng một lúc, một xe máy khởi hành từ Hà Nội đi Ninh Bình và một xe ô tô khởi hành từ Ninh Bình đi Hà Nội. Sau khi hai xe gặp nhau, xe máy đi 1 giờ 30 phút nữa mới đến Ninh Bình. Biết vận tốc hai xe không đổi trên suốt quãng đường đi và vận tốc xe máy kém vận tốc xe ô tô là 20km/h. Tính vận tốc mỗi xe.

Ví dụ 9: Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích 320m2. Nếu tăng chiều rộng thêm 10m và giảm chiều dài đi 16m thì diện tích mảnh vườn không thay đổi. Tính kích thước của mảnh đất ban đầu.

Ví dụ 10: Một ca nô xuôi dòng từ bến sông A đến bến sông B cách nhau 24km. Cùng lúc đó, cũng từ A về B một bè nứa trôi với vận tốc dòng nước là 4km/h. Khi đến B ca nô quay lại ngay và gặp bè nứa tại điểm C cách A là 8km. Tính vận tốc thực của ca nô.

Ví dụ 11: Quãng đường từ A đến B dài 90km. Một người đi xe đạp từ A đến B. Khi đến B người đó nghỉ 30 phút rồi quay trở về A với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 9km/h. Thời gian kể từ lúc bắt đầu đi từ A đến khi trở về A là 5 giờ. Tính vận tốc xe máy lúc đi từ A đến B.

Ví dụ 12: Quãng đường AB dài 50km. Một người dự định đi xa đạp từ A đến B với vận tốc không đổi. Khi đi được 2 giờ, người ấy dừng lại 30 phút để nghỉ. Muốn đến B đúng thời gian dự định người đó phải tăng vận tốc thêm 2km/h trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc ban đầu của người đó.

Ví dụ 13: Một xe máy khởi hành từ A đến B dài 60km, 30 phút sau một ô tô cũng khởi hành từ A đến B với vận tốc lớn hơn vận tốc xe máy 10km/h nên cả hai xe đến B cùng một lúc. Tính vận tốc của mỗi xe?

Ví dụ 14: Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Ví dụ 15: Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm riêng trong 3 giờ rồi người thứ hai làm tiếp trong 6 giờ thì họ làm được 25% khối lượng công việc. Hỏi nếu mỗi người thợ làm một mình thì hoàn thành công việc đó trong bao lâu?

Ví dụ 16: Đội tình nguyện trường ARCHIMEDES ACADEMY tham gia quét dọn đường phố. Theo kế hoạch, đội phải quét 75km đường trong một số tuần lễ. Vì các em học sinh tham giá nhiệt tình và năng nổ nên mỗi tuần quét đều dọn vượt mức 5km so với kế hoạch, kết quả là đã quét dọn được 80km đường và hoàn thành sớm hơn 1 tuần. Hỏi theo kế hoạch, đội tình nguyện của trường ARCHIMEDES ACADEMY phải quét dọn bao nhiêu km đường mỗi tuần?

Ví dụ 17: Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích Nếu tăng chiều dài thêm 10m và giảm chiều rộng 6m thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

Ví dụ 18: Một ô tô đi từ A đến B trong một thời gian dự định. Nếu vận tốc tăng thêm 14km/h thì đến B sớm hơn dự định là 2 giờ. Nếu vận tốc giảm đi 4km/h thì sẽ đến B chậm hơn dự định 1 giờ. Tính khoảng cách AB , vận tốc và thời gian dự định của ô tô.

Ví dụ 19: Để hoàn thành một công việc theo dự định, cần một số công nhân làm trong một số ngày nhất định . Nếu bớt đi 2 công nhân thì phải mất thêm 3 ngày mới có thể hoàn thành công việc . Nếu tăng thêm 5 công nhân thì công việc hoàn thành sớm được 4 ngày . Hỏi theo dự định, cần bao nhiêu công nhân và làm bao nhiêu ngày .

Ví dụ 20: Một ca nô xuôi dòng một quãng đường dài 12km rồi ngược quãng sông đó mất 2 giờ 30 phút. Nếu cũng quãng sông ấy, ca nô xuôi dòng 4km rồi ngược dòng 8km thì hết 1 giờ 20 phút. Biết rằng vận tốc riêng của ca nô và vận tốc riêng của dòng nước là không đổi, tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc riêng của dòng nước.

Ví dụ 21: Tính độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông biết cạnh góc vuông lớn dài hơn cạnh góc vuông bé là 7cm. Độ dài cạnh huyền là 13cm.

Ví dụ 22: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn trong 1 giờ 12 phút thì đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 30 phút và vòi thứ hai chảy trong 1 giờ thì được $\frac{7}{12}$ bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu sẽ đầy bể?

Ví dụ 23: Theo kế hoạch hai tổ sản xuất được giao làm 600 sản phẩm. Nhờ tăng năng suất lao động tổ 1 làm vượt mức 10% và tổ 2 làm vượt mức 20% so với kế hoạch của mỗi tổ nên cả hai tổ làm được 685 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi tổ làm theo kế hoạch.

Ví dụ 24: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 12 giờ thì đầy bể. Nếu để vòi I chảy riêng trong 4 giờ rồi khóa lại và mở tiếp vòi II trong 3 giờ thì cả hai vòi chảy được $\frac{3}{10}$ bể. Tính thời gian để mỗi vòi chảy riêng đầy bể.

Ví dụ 25: Cho số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng tổng hai chữ số của nó bằng 5; bình phương chữ số hàng chục hơn chữ số hàng đơn vị là 1 đơn vị. Tìm số đó.

Ví dụ 26: Hai xe máy khởi hành cùng một lúc trên quãng đường từ A đến B dài 120km. Mỗi giờ xe máy thứ nhất chạy nhanh hơn xe máy thứ hai là 10km nên xe máy thứ nhất đến B trước xe máy thứ hai là 1 giờ. Tính vận tốc của mỗi xe máy.

Ví dụ 27: Cho tam giác có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ cạnh đáy. Nếu chiều cao tăng thêm 3m và cạnh đáy giảm đi 2m thì diện tích của tam giác đó tăng thêm Tính cạnh đáy và chiều cao của tam giác đã cho.

Ví dụ 28: Theo kế hoạch, một xưởng máy phải sản xuất 400 sản phẩm trong một thời gian đã định. Do cải tiến kĩ thuật nên trong thực tế mỗi ngày xưởng máy làm thêm được 10 sản phẩm. Vì thế đã hoàn thành kế hoạch trước 1 ngày mà còn làm thêm được 20 sản phẩm nữa. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm.

Ví dụ 29: Một xe khách và một xe du lịch khởi hành đồng thời từ A đi đến B. Biết vận tốc của xe du lịch lớn hơn vận tốc của xe khách là 20km/h. Do đó nó đến B trước xe khách 50 phút. Tính vận tốc của mỗi xe, biết quãng đường AB dài 100km.

Ví dụ 30: Một công nhân dự định làm 33 sản phẩm trong thời gian đã định. Nhưng thực tế xí nghiệp lại giao 62 sản phẩm. Do vậy mặc dù người đó đã làm tăng mỗi giờ 3 sản phẩm song vẫn hoàn thành chậm hơn dự định 1 giờ 30 phút. Tính năng suất dự định.

Ví dụ 31: Một người đi xe máy từ thành phố A đến thành phố B với một vận tốc định trước. Hai thành phố cách nhau 150km. Sau khi đi được $\frac{1}{5}$ quãng đường thì người đó tăng vận tốc thêm 10km/h trên toàn bộ quãng đường còn lại. Tính vận tốc định trước ban đầu và thời gian di chuyển của người đó biết rằng người đó đến B sớm hơn dự định 36 phút.

Ví dụ 32: Một xe ô tô cần chạy quãng đường 80km trong thời gian đã dự định. Vì trời mưa nên một phần tư quãng đường đầu xe phải chạy chậm hơn vận tốc dự định là 15km/h nên quãng đường còn lại xe phải chạy nhanh hơn vân tốc dự định là 10km/h. Tính thời gian dự định của xe ô tô đó?

Ví dụ 33: (Trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội năm 2013). Trên quãng đường AB dài 210 m, tại cùng một thời điểm một xe máy khởi hành từ A đến B và một ôt ô khởi hành từ B đi về A. Sau khi gặp nhau xe máy đi tiếp 4 giờ nữa thì đến B và ô tô đi tiếp 2 giờ 15 phút nữa thì đến A. Biết rằng vận tốc ô tô và xe máy không thay đổi trong suốt chặng đường. Tính vận tốc của xe máy và ô tô.

Ví dụ 34: (Trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội năm 2015). Quãng đường AB dài 120 km. lúc 7h sang một xe máy đi từ A đến B. Đi được $\frac{3}{4}$ xe bị hỏng phải dừng lại 10 phút để sửa rồi đi tiếp với vận tốc kém vận tốc lúc đầu 10km/h. Biết xe máy đến B lúc 11h40 phút trưa cùng ngày. Giả sử vận tốc xe máy trên $\frac{3}{4}$ quãng đường đầu không đổi và vận tốc xe máy trên $\frac{1}{4}$ quãng đường sau cũng không đổi. Hỏi xe máy bị hỏng lúc mấy giờ?

Dạng 15. TÌM HỆ THỨC LIÊN HỆ GIỮA CÁC NGHIỆM KHÔNG PHỤ THUỘC VÀO THAM SỐ

PHƯƠNG PHÁP: Để tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào tham số (giả sử tham số là m), ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm $x_1,\, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$.

Bước 2: Áp dụng định lí Vi - ét, ta được: $\begin{cases} x_1 + x_2 = f(m) \\ x_1.x_2 = g(m) \end{cases}$. $\qquad (I)$

Bước 3: Khử m từ hệ (I) ta được hệ thức cần tìm.

Ví dụ: Cho phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-4)x + m - 5 = 0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc m.

Dạng 16. TÌM ĐIỂM CỐ ĐỊNH CỦA ĐƯỜNG THẲNG PHỤ THUỘC THAM SỐ

PHƯƠNG PHÁP: Cho đường thẳng d: $y = ax + b$ phụ thuộc vào tham số m.

Bước 1: Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định của $d \Rightarrow y_0 = ax_0 + b\ \forall m$.

Bước 2: Biến đổi $y_0 = ax_0 + b$ về dạng $A(x_0; y_0)m + B(x_0; y_0) = 0$ hoặc $A(x_0; y_0)m^2 + B(x_0; y_0)m + C(x_0; y_0) = 0$.

Bước 3: Điều kiện để

- $A(x_0; y_0)m + B(x_0; y_0) = 0\ \forall m$.
$\Leftrightarrow \begin{cases} A(x_0; y_0) = 0 \\ B(x_0; y_0) = 0 \end{cases}$
- $A(x_0; y_0)m^2 + B(x_0; y_0)m + C(x_0; y_0) = 0\ \forall m$.
$\Leftrightarrow \begin{cases} A(x_0; y_0) = 0 \\ B(x_0; y_0) = 0 \\ C(x_0; y_0) = 0 \end{cases}$

Bước 4: Tìm $(x_0; y_0)$ và kết luận.

Ví dụ: Cho đường thẳng d: $y = (m+1)x - 2m$ với m là tham số. Tìm điểm cố định mà d luôn đi qua với mọi m.

Hướng dẫn

Gọi $M(x_0; y_0) \in d \Rightarrow y_0 = (m+1)x_0 - 2m \Leftrightarrow m(x_0 - 2) + (x_0 - y_0) = 0\ (*)$.

Để d đi qua M với mọi m khi $(*)$ đúng với mọi m tức là:

$\begin{cases} x_0 - 2 = 0 \\ x_0 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 2 \end{cases}$.

Vậy d luôn đi qua điểm $M(2; 2)$ cố định với mọi m.

Ví dụ: Cho đường thẳng d: $y = (2m+1)x + m - 2$ với m là tham số. Tìm điểm cố định mà d luôn đi qua với mọi m.

Dạng 17. TÌM THAM SỐ m SAO CHO KHOẢNG CÁCH TỪ GỐC TỌA ĐỘ ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC LÀ LỚN NHẤT HOẶC NHỎ NHẤT

PHƯƠNG PHÁP: Cho đường thẳng d: $y = ax + b$ phụ thuộc vào tham số m. Tìm m để khoảng cách từ O đến d là lớn nhất.

Cách 1: Phương pháp hình học.

Bước 1: Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d với Ox và Oy, H là hình chiếu vuông góc của O trên d.

Bước 2: Khoảng cách từ O đến d tính bởi công thức $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2}$.

Bước 3: Tìm điều kiện của m để OH đạt giá trị lớn nhất.

Cách 2: Phương pháp điểm cố định.

Bước 1: Tìm điểm cố định I mà d luôn đi qua.

Bước 2: Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên $d \Rightarrow OH \leq OI =$cost.

Bước 3: Ta có $OH_{\max} = OI \Leftrightarrow d$ là đường thẳng qua I và vuông góc với OI. Từ đó ta tìm được tham số m.

Ví dụ: Cho đường thẳng d: $y = mx - 2m - 1$ với m là tham số. Tìm m sao khoảng cách từ O đến d đạt giá trị:

a) Lớn nhất. b) Nhỏ nhất.

Hướng dẫn

a) **Cách 1:**

Trường hợp 1: Nếu $m = 0 \Rightarrow d$: $y = -1 \Rightarrow$ khoảng cách từ O đến d bằng 1.

Trường hợp 2: Nếu $m \neq 0 \Rightarrow d$ cắt hai trục Ox và Oy lần lượt tại $A\left(\dfrac{2m+1}{m}; 0\right)$ và $B\,(0; -2m-1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên d.

Từ $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2}$ ta được $OH^2 = \dfrac{(2m+1)^2}{m^2+1}$.

Mà: $OH^2 - 5 = -\dfrac{(m-2)^2}{m^2+1} \leq 0 \Rightarrow OH \leq \sqrt{5}\ \forall m \neq 0$.

Kết hợp với trường hợp 1 và 2 ta được $OH_{\max} = \sqrt{5} \Leftrightarrow m = 2$.

Cách 2:

Gọi I là điểm cố định của $d \Rightarrow I(2; -1)$.

Với mỗi m. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên d.

$\Rightarrow OH \leq OI = \sqrt{5}, \forall m$.

Từ đó $OH_{\max} = \sqrt{5} \Leftrightarrow d \perp OI$. Tìm được $m = 2$.

b) Khoảng cách từ O đến d nhỏ nhất bằng $O \Leftrightarrow O \in d$. Ta tìm được $m = 3$.

Ví dụ: Cho đường thẳng d: $y = (m+1)x + m + 2$ với m là tham số. Tìm m sao khoảng cách từ O đến d đạt giá trị:

a) Lớn nhất. b) Nhỏ nhất.

C. LUYỆN TẬP TỔNG HỢP

Ví dụ 1: Cho đường thẳng d: $y = (m-2)x + m + 3$ và parabol (P): $y = mx^2$ với x là ẩn, m là tham số.

1) Với $m = 1$ hãy:

a) Vẽ (P) và d trên cùng trục tọa độ Oxy.

b) Tính diện tích ΔABC với A, B là các giao điểm của d và (P).

2) Tìm giá trị của m để:

a) d đi qua $C(1;1)$;

b) Ba đường thẳng d_1: $y = 2x + 3$, d_2: $y = -x + 1$ và d đồng quy;

c) d tạo với đường thẳng $y = 2$ một góc 120^0

d) d song song với đường thẳng Δ, biết Δ đi qua $D(1;2)$ và vuông góc với đường thẳng Δ': $2x - y + 3 = 0$;

e) (P) đi qua điểm cố định của d;

f) d cắt trục tọa độ Ox, Oy tạo thành tam giác có diện tích bằng $2|m-2|$;

g) Khoảng cách từ $O(0;0)$ đến d lớn nhất.

3) Viết phương trình đường thẳng d_3 song song với d_1: $y = 2x + 3$.

4) Chứng minh với $m \neq 0$, d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

5) Gọi $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ các giao điểm của d và (P). Hãy tìm:

a) Hệ thức độc lập giữa x_A và x_B;

b) Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x_A^2 + x_B^2 + 2018$.

6) Gọi $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ các giao điểm của d và (P). Hãy tìm m để:

a) A và B nằm về hai phía của trục tung;

b) A và B nằm về cùng của đường thẳng $x = 1$;

c) x_A và x_B thỏa mãn hệ thức $x_A = 2x_B$;

d) AB song song với đường thẳng d_4: $y = x + 2018$. Tính diện tích tam giác OAB với m vừa tìm được.

Ví dụ 2: Cho đường thẳng d: $y = (3-m)x - m$ và parabol (P): $y = -2x^2$ với x là ẩn, m là tham số.

1) Với $m = -2$ hãy:

a) Vẽ (P) và d trên cùng trục tọa độ Oxy.

b) Tính diện tích ΔABC với A, B là các giao điểm của d và (P).

2) Tìm giá trị của m để:

a) d đi qua $C(1;1)$ và d song song với d_1: $y = 2x + 3$;

b) d tạo với đường thẳng Ox một góc 45^0;

c) d cắt trục tọa độ Ox, Oy tạo thành tam giác có diện tích bằng 2;

d) Khoảng cách từ $O(0;0)$ đến d lớn nhất.

3) Viết phương trình đường thẳng d_3 vuông góc với d_1: $y = 2x + 3$ và đi qua điểm cố định của d.

4) Chứng minh với $m \neq 0$, d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

5) Gọi $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ các giao điểm của d và (P).

a) Hãy tìm hệ thức độc lập giữa x_A và x_B;

b) Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{x_A^2} + \dfrac{1}{x_B^2}$;

c) Hãy tìm m để A và B có hoành độ âm;

d) Hãy tìm m để $(2x_A^2 + mx_A)(2x_B^2 + mx_B) = \dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 3: Cho đường thẳng d: $y = 3x + 2m - 5$ và parabol (P): $y = \dfrac{1}{2}x^2$ với x là ẩn, m là tham số.

1) Với $m = \dfrac{1}{2}$ hãy:

a) Vẽ (P) và d trên cùng trục tọa độ Oxy.

b) Tính diện tích ΔABC với A, B là các giao điểm của d và (P).

2) Tìm giá trị của m để:

a) (P) và d tiếp xúc nhau;

b) Tìm m để d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt;

c) Giao điểm của d_1: $y = \dfrac{2}{3}x - 1$, d_2: $y = x + 2$ thuộc d;

d) Khoảng cách từ $O(0;0)$ đến d nhỏ nhất.

3) Tím giá trị tan của góc tạo bởi d với tia Ox.

4) Viết phương trình đường thẳng d_3 vuông góc với mọi đường thẳng d và đi qua điểm cố định của đường thẳng d_4: $y = (m-2)x + m$.

5) Trong trường hợp d cắt (P) tại hai điểm phân biệt. Gọi $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ là tọa độ giao điểm.

a) Tìm m để $y_A + y_B = 0$;

b) Tìm m để biểu thức $P = x_A^2 + x_B^2 + (x_A.x_B)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất;

c) Hãy tìm m để $Q = \dfrac{m^2}{x_A^2 + 6_B - 4m} + \dfrac{x_B^2 + 6x_A - 4m}{m^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất (với $m \neq 0$).

D. MỘT SỐ CÂU VỀ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRONG ĐỀ TUYỂN SINH HÀ NỘI

Ví dụ : (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2011 - 2012)

Một đội xe theo kế hoạch chở hết 140 tấn hàng trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày đội đó chở vượt mức 5 tấn nên đội đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 1 ngày và chở thêm được 10 tấn. Hỏi theo kế hoạch đội xe chở hàng hết bao nhiêu ngày?

Ví dụ : (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2012 - 2013)

Hai người cùng làm chung một công việc trong $\dfrac{12}{15}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì thời gian để người thứ nhất hoàn thành công việc ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu giờ để xong công việc?

Ví dụ : (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2013 - 2014)

Quãng đường từ A đến B dài 90 km. Một người đi xe máy từ A đến B. Khi đến B, người đó nghỉ 30 phút rồi quay trở về A với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 9 km/h. Thời gian kể từ lúc bắt đầu đi từ A đến lúc trở về đến A là 5 giờ. Tính vận tốc xe máy lúc đi từ A đến B.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2014 - 2015)

Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2015 - 2016)

Một tàu tuần tra chạy ngược dòng $60km$, sau đó chạy xuôi dòng $48km$ trên cùng một dòng sông có vận tốc của dòng nước là $2km/$giờ. Tính vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng 1 giờ.

Ví dụ : (THI THỬ 10 - THPT Hà Nội, năm học 2015 - 2016)

Hai khối 8 và 9 của một trường THCS có 420 học sinh có học lực trên trung bình đạt tỉ lệ 84%. Khối 8 đạt tỉ lệ 80% là học sinh trên trung bình, khối 9 đạt 90%. Tính số học sinh của mỗi khối.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2016 - 2017)

Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích $720m^2$. Nếu tăng chiều dài thêm $10m$ và giảm chiều rộng $6m$ thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2017 - 2018)

Một xe ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ A để đi đến B với vận tốc của mỗi xe không đổi trên toàn bộ quãng đường AB dài $120km$. Do vận tốc xe ô tô lớn hơn vận tốc xe máy là $10km/h$ nên xe ô tô đến B sớm hơn xe máy 36 phút. Tính vận tốc của mỗi xe.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2018 - 2019)

Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi bằng 28 mét và độ dài đường chéo bằng 10 mét. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó theo đơn vị mét.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2010 - 2011)

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d): $y = -x + 6$ và parabol (P): $y = x^2$.

a) Tìm tọa độ các giao điểm của (d) và (P).

b) Gọi A, B là hai giao điểm của (d) và (P). Tính diện tích tam giác OAB.

Ví dụ : (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2012 - 2013)

Cho phương trình $x^2 - (4m-1)x + 3m^2 - 2m = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 7$.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2013 - 2014)

Cho parabol (P): $y = \dfrac{1}{2}x^2$ và đường thẳng d: $y = mx - \dfrac{1}{2}m^2 + m + 1$.

a) Với $m = 1$, xác định tọa độ các giao điểm A, B của (d) và (P).

b) Tìm các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 2$.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2015 - 2016)

Cho (P): $y = x^2$ và (d): $y = mx + 1$.

a. Tìm điểm cố định của (d).

b. Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B nằm khác phía trục tung.

c. Tìm m để diện tích tam giác $OAB = 2$.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2016 - 2017)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d): $y = 3x + m^{2\smile}1$ và parabol (P): $y = x^2$.

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt với mọi m.

b) Gọi x_1 và x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và (P). Tìm m để $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 1$.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2017 - 2018)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $y = mx + 5$.

a) Chứng minh đường thẳng (d) luôn đi qua điểm $A(0; 5)$ với mọi giá trị của m.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P): $y = x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 (với $x_1 < x_2$) sao cho $|x_1| > |x_2|$.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2018 - 2019)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $y = (m+2)x + 3$ và parabol (P): $y = x^2$.

a) Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có các hoành độ là các số nguyên.

CHỦ ĐỀ IV: CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG TRÒN

TỔNG QUAN KIẾN THỨC HÌNH

I. Kiến thức lớp 7 cần nhớ

1. Để chứng minh $a//b$ ta có:

Cách 1: $\begin{cases} a\perp c \\ b\perp c \end{cases} \Rightarrow a//b.$

Cách 2: $\begin{cases} a//c \\ b//c \end{cases} \Rightarrow a//b.$

Cách 3: Chứng minh hai góc ở hai vị trí so le trong hoặc đồng vị hoặc trong cùng phía bù nhau.

2. Để chứng minh $a\perp b$ ta có:

Cách 1: $\begin{cases} a//c \\ b\perp c \end{cases} \Rightarrow a\perp b.$

Cách 2: Chứng minh góc giữa chúng bằng 90^0 tức là $(\widehat{a;b}) = 90^0$.

3. Để chứng minh hai tam giác thường bằng nhau ta có:

Cách 1: c - c - c.

Cách 2: c - g - c.

Cách 3: g - c - g.

4. Để chứng minh hai tam giác vuông bằng nhau ta có:

Cách 1: c - c - c.

Cách 2: c - g - c.

Cách 3: g - c - g.

Cách 4: Cạnh huyền - góc nhọn.

Cách 5: Cạnh huyền - góc vuông.

5. Định lý Py-ta-go

- Nếu $AB^2 + AC^2 = BC^2$ thì ΔABC là vuông tại A.
- Nếu ΔABC là vuông tại A thì $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

6. Chứng minh ΔABC cân tại A

Cách 1: Chứng minh $AB = AC$ thì ΔABC là cân tại A.

Cách 2: Chứng minh $\widehat{B} = \widehat{C}$ thì ΔABC là cân tại A.

7. Chứng minh ΔABC đều

Cách 1: Chứng minh $AB = BC = AC$ thì ΔABC là đều.

Cách 2: Chứng minh $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$ thì ΔABC là đều.

Cách 3: Chứng minh ΔABC cân và có một góc bằng 60^0 thì ΔABC là đều.

8. Trong một tam giác cân đường đương giác cũng là đường cao, cũng là đường trung tuyến, cũng là đường trung trực

9. Giao điểm của ba đường trung tuyến là trọng tâm của tam giác

10. Giao điểm của ba đường cao là trực tâm của tam giác

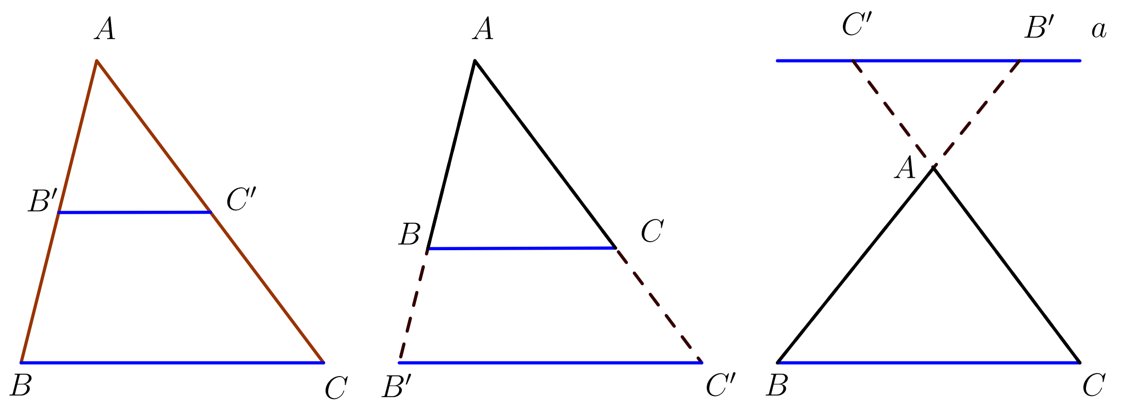
11. Giao điểm của ba đường phân giác cách đều ba cạnh của tam giác

12. Đường thẳng trung trực là đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó

II. Kiến thức lớp 8 cần nhớ

1. Tính chất, dấu hiệu nhận biết hình thang, hình thang, hình thang cân, hình bình hành, hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông

2. Định lí ta - lét thuận và đảo, hệ quả



Định lí ta - lét: $\begin{cases} \Delta ABC \\ B'C'//BC \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC}; \dfrac{AB'}{BB'} = \dfrac{AC'}{CC'}; \Rightarrow \dfrac{BB'}{AB} = \dfrac{C'C}{AC}.$

Định lí ta - lét đảo: $\begin{cases} \Delta ABC \\ \dfrac{AB'}{B'B} = \dfrac{AC'}{C'C} \end{cases} \Rightarrow B'C'//BC.$

Hệ quả của định lí ta - lét: $\begin{cases} \Delta ABC \\ B'C'//BC \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}.$

Chú ý: Hệ quả vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng a song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại.

3. Cách chứng minh hai tam giác đồng dạng

Cách 1: c - c - c.

Cách 2: c - g - c.

Cách 3: g - g.

4. Hai tam giác đồng dạng thì tỉ số diện tích bằng bình phương tỉ số đồng dạng

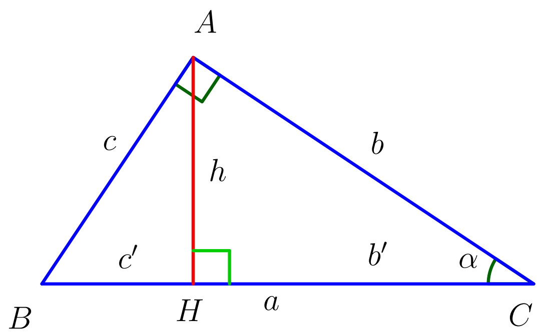
5. Trong một tam giác vuông đường trung tuyến thuộc cạnh huyền thì bằng một nửa cạnh huyền và ngược lại

III. Kiến thức lớp 9 cần nhớ. "GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN"

Nội dụng kiến thức cần biết của học kì I.

1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Cho ΔABC vuông tại A có các giả thiết như hình vẽ như hình vẽ.



(1) $b^2 = a.b'$; $c^2 = a.c'$.

(2) $h^2 = b'.c'$.

(3) $ah = bc$.

(4) $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

(5) Từ hệ thứ (1) suy ra định lí Py-ta-go $a^2 = b^2 + c^2$

2. Tỉ số lượng giác của góc nhọn.

(1) $sin\alpha = \dfrac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}$ (2) $cos\alpha = \dfrac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}$.

(3) $tan\alpha = \dfrac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}$ (4) $cot\alpha = \dfrac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}$.

3. Một số tính chất của các tỉ số lượng giác.

- Nếu $\alpha + \beta = 90^0$ thì:
- $sin\alpha = cos\beta$; $cos\alpha = sin\beta$; $tan\alpha = cot\beta$; $cot\alpha = tan\beta$.
- Nếu $0^0 < \alpha < 90^0$ thì:
- $0 < sin\alpha < 1$; $0 < cos\alpha < 1$; $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$.

$tan\alpha = \dfrac{sin\alpha}{cos\alpha}$; $cot\alpha = \dfrac{cos\alpha}{sin\alpha}$; $tan\alpha.cot\alpha = 1$.

- Nếu α tăng thì $sin\alpha$ tăng, $tan\alpha$ tăng còn $cos\alpha$ giảm, $cot\alpha$ giảm.

4. Các hệ thức về cạnh trong tam giác vuông.

- $b = a.sinB$; $b = a.cosC$; $b = a.tanB$; $b = a.cotC$.
- $c = a.sinC$; $c = a.cosB$; $c = a.tanC$; $c = a.cotB$.

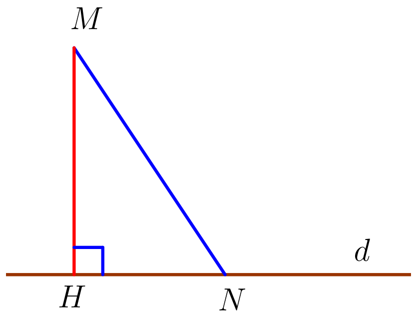
Chú ý: Với các góc nhọn α, β thì ta có:

- $sin\alpha < sin\beta$; $tan\alpha < tan\beta$.
- $cos\alpha > cos\beta$; $cot\alpha > cot\beta$.

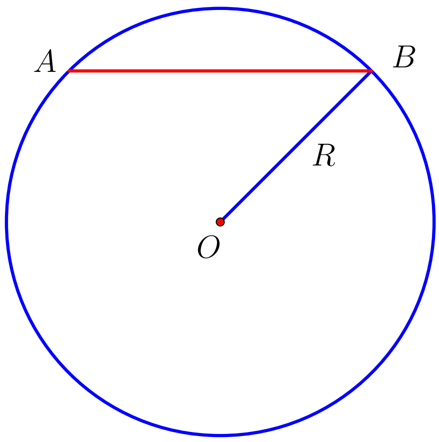
• $sin\alpha < tan\alpha$; $cos\alpha < cot\alpha$.

5. Cực trị hình học.

• Vận dụng tính chất đường xiên và đường vuông góc $MH \leq MN$. Dấu " = " xảy ra khi $N \equiv H$.



• Vận dụng định lí đường kính và dây $AB \leq 2R$. Dấu " = " xảy ra khi A, O, B thẳng hàng.



• Vận dụng các bất đẳng thức đại số:

+) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ dấu " = " xảy ra khi $a = b$.

+) $a.b \leq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ dấu " = " xảy ra khi $a = b$.

+) Bất đẳng thức tam giác (quy tắc ba điểm).

+) Quan hệ đường kính và dây cung.

+) Quan hệ đường vuông góc và đường xiên.

Ví dụ: Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB = 10cm$. Một dây $CD = 8cm$, có hai đầu mút di chuyển trên nửa đường tròn. Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A và B trên đường thẳng CD. Xác định vị trí của CD để diện tích tứ giác $ABFE$ lớn nhất.

Ví dụ: Cho nửa đường tròn tâm (O), đường kính $AB = 2R$. Lấy điểm I trong đoạn OA sao cho $OI = x$ $(0 < x < R)$. Qua I vẽ đường thẳng d vuông góc với AB và cắt nửa đường tròn tâm O tại M. Xác định x để chu vi tam giác IMO lớn nhất.

Ví dụ: Cho điểm A và đường tròn $(O; R)$ cố định $(OA > R)$. Tìm điểm M thuộc (O) sao cho AM lớn nhất, AM nhỏ nhất.

Ví dụ: Cho nửa đường tròn tâm $(O;R)$, đường kính AB. Từ điểm M bất kỳ thuộc đường tròn, kẻ MN vuông góc với AB ($N \in AB$; M khác A; khác B). Từ N kẻ ND và NE lần lượt vuông góc với AM và BM ($D \in AM$, $E \in BM$).

a) Tứ giác $DMEN$ là hình gì? Chứng minh.

b) Chứng minh $DM.AM = EM.BM$.

c) Gọi O' là tâm đường tròn đường kính NB. Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O').

d) Gọi I là điểm đối xứng với N qua D. Gọi K là điểm đối xứng với N qua E. Xác định vị trí điểm M trên nửa đường tròn (O) để tứ giác $AIKB$ có chu vi lớn nhất.

6. Tiếp tuyến của đường tròn.

a) Định nghĩa Tiếp tuyến của đường tròn là đường thẳng chỉ có một điểm chung với đường tròn đó.

b) Định lí 1 Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

c) Định lí 2 Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

d) Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau:

Định lí: Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tia tiếp tuyến.
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

7. Các bước của phương pháp chứng minh đi qua một điểm cố định.

Bước 1: Xác định rõ các yếu tố cố định đã biết.

Bước 2: Xác định tứ giác nội tiếp liên quan đến điểm cố định.

Bước 3: Chứng minh đường thẳng hoặc đường tròn đi qua điểm cố định.

Các ví dụ điểm đi qua đường tròn cố định:

Ví dụ: Cho đường tròn (O) và dây BC cố định (BC không đi qua (O)). Lấy điểm A thuộc (O) sao cho A và (O) thuộc cùng một phía so với BC. Lấy điểm M là trung điểm của AB, vẽ MH vuông góc với AC tại H. Chứng minh H luôn nằm trên một đường tròn cố định.

Ví dụ: Cho A, B nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ cố định (đường thẳng AB không có điểm chung với (O)). Lấy điểm M bất kì trên (O), gọi G là trọng tâm ΔMAB. Chứng minh G chạy trên một đường tròn cố định khi M di động trên (O).

Các ví dụ điểm đi qua đường thẳng cố định:

Ví dụ: Cho đường tròn (O) và điểm A cố định thuộc (O). Vẽ tiếp tuyến d tại A của (O). Lấy M bất kỳ thuộc d, gọi N là trung điểm của đoạn OM. Chứng minh rằng khi M di động trên d thì

N chạy trên một đường cố định.

Ví dụ: Họ đường tròn (O) bán kính R và một đường thẳng d cắt (O) tại C, D. Một điểm M di động trên d sao cho $MC > MD$ và ở ngoài đường tròn (O). Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là tiếp điểm). Chứng minh đường thẳng AB đi qua điểm cố định.

Ví dụ: Cho đoạn thẳng AC cố định, điểm B cố định nằm giữa A và C. Đường tròn (O) thay đổi luôn đi qua A và B. Gọi PQ là đường kính của đường tròn (O), PQ vuông góc AB, (P thuộc cung lớn AB). Gọi CP cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai I. Chứng minh QI luôn đi qua một điểm cố định khi đường tròn (O) thay đổi.

Ví dụ: Cho đường tròn tâm (O) và hai điểm A, B cố định thuộc đường tròn đó (AB không phải là đường kính). Gọi M là trung điểm của cung nhỏ kAB. Trên đoạn AB lấy hai điểm C, D phân biệt và không nằm trên đường tròn. Các đường thẳng MC, MD cắt đường tròn đã cho tương ứng tại E, F khác M.

1) Chứng minh rằng bốn điểm C, D, E, F nằm trên một đường tròn.

2) Gọi O_2, O_2 tương ứng là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác ACE và BDF. Chứng minh rằng khi C, D thay đổi trên đoạn AB các đường thẳng AO_1 và BO_2 luôn cắt nhau tại một điểm cố định.

Ví dụ: Cho tam giác ABC và điểm D di chuyển trên cạnh BC (D khác B và C)Đường tròn (O_1) đi qua D và tiếp xúc AB tại B. Đường tròn (O_2) đi qua D và tiếp xúc AC tại C. Gọi E là giao điểm thứ hai của (O_1) và (O_2).

a) Chứng minh rằng khi D di động trên đoạn BC thì đường thẳng ED luôn đi qua một điểm cố định

b) Kết quả trên còn đúng không trong trường hợp D di động ở ngoài đoạn BC.

Ví dụ: Cho góc vuông xAy, điểm B cố định trên Ay, điểm C di chuyển trên Ax. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AC, BC theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Ví dụ: Cho đường tròn tâm O, dây AB. Điểm M di chuyển trên cung lớn AB. Các đường cao AE, BF của tam giác ABM cắt nhau ở H. Đường tròn tâm H bán kính HM cắt MA, MB theo thứ tự ở C, D.

a) Chứng minh rằng đường thẳng kẻ từ M vuông góc với CD luôn đi qua một điểm cố định.

b) Chứng minh rằng đường thẳng kẻ từ H và vuông góc với CD cũng đi qua một điểm cố định.

Ví dụ: Cho tam giác ABC, M là điểm bất kì thuộc đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ấy. Gọi D là điểm đối xứng với M qua AB, E là điểm đối xứng với M qua BC. Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên đường tròn (O) thì DE luôn đi qua một điểm cố định.

Ví dụ: Cho đường tròn tâm (O). Từ điểm A cố định ở ngoài (O) kẻ tiếp tuyến AB, AC tới (O) (B, C tiếp điểm). Lấy điểm M trên cung nhỏ BC. Gọi D, E, F thứ tự là hình chiếu từ M đến BC,

AC, AB. Gọi MB cắt DF tại P, MC cắt DE tại Q. Chứng minh đường thẳng nối giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác MPF và MQE luôn đi qua một điểm cố định.

Ví dụ: Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M, N thứ tự là các điểm di động trên các đường thẳng AB, AC sao cho trung điểm I của MN nằm trên cạnh BC. Chứng minh rằng đường tròn qua 3 điểm A, M, N luôn đi qua một điểm cố định khác A.

Ví dụ: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), I là điểm chính giữa của BC không chứa A. Vẽ đường tròn (O_1) đi qua I và tiếp xúc với AB tại B, vẽ đường tròn (O_2) đi qua I và tiếp xúc với AC tại C. Gọi K là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (O_1), (O_2).

a) Chứng minh rằng ba điểm B, K, C thẳng hàng.

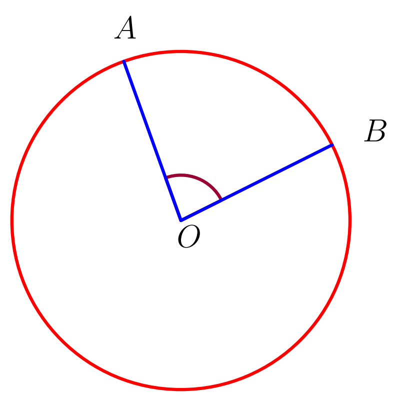
b) Lấy điểm D bất kì thuộc cạnh AB, điểm E thuộc tia đối của tia CA sao cho $BD = CE$. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn đi qua một điểm cố định khác A.

Ví dụ: Cho đường tròn tâm (O) đường kính AB, điểm C cố định trên đường kính ấy (C khác (O)). Điểm M chuyển động trên đường tròn. Đường vuông góc với AB tại C cắt MA, MB theo thứ tự ở E, F. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF luôn đi qua qua một điểm cố định khác A.

Ví dụ: Cho đường tròn (O) và dây cung AB. Lấy điểm E trên dây cung AB (E khác A và B). Qua E vẽ dây cung CD của đường tròn (O). Trên hai tia DA, DB lấy hai điểm P, Q đối xứng qua E. Chứng minh rằng đường tròn (I) tiếp xúc với PQ tại E và đi qua C luôn đi qua một điểm cố định khi E di động trên dây cung AB.

Nội dung kiến thức cần biết của học kì II.

1. Góc ở tâm



a) Định nghĩa

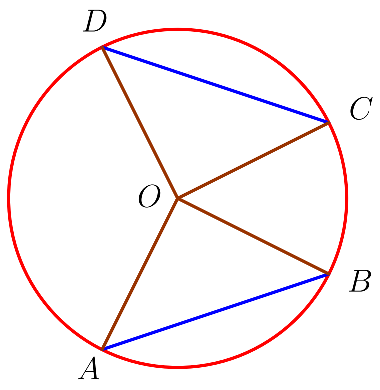
Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm của đường tròn.

b) Tính chất

- $\widehat{AOB} =$sđ$\overset{\frown}{AB}$.

d) Bài tập áp dụng

2. Liên hệ giữa cung và dây



a) Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.

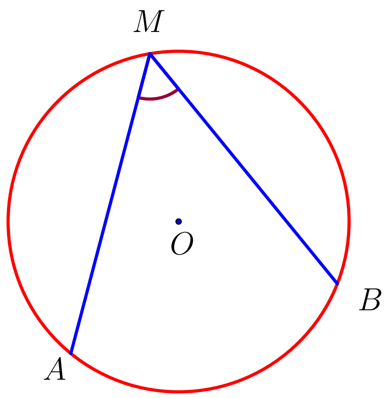
b) Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.

Định lí:

• Đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì chia đôi dây căng cung. Đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâ thì đi qua điểm chính giữa cung căng dây đó.

• Đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.

3. Góc nội tiếp



a) Định nghĩa

Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.

b) Tính chất

• $\widehat{AMB} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB}$.

Ví dụ 1: Trong đường tròn (O) có dây AC và BD vuông góc với nhau tại I. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh $IM \perp AD$.

Ví dụ 2: Cho ΔABC đều nội tiếp đường tròn (O). Lấy điểm M nằm trên cung BC. Chứng minh rằng $AM = BM + CM$.

Ví dụ 3: Trong đường tròn (O); (O') cắt nhau tại A, B. Trên AB lấy điểm I. Qua I kẻ dây MN của đường tròn (O), kẻ dây CD của đường tròn (O'). Chứng minh $IM.IN = IC.ID$.

Ví dụ 4: Cho ΔABC đều nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác góc A cắt BC tại F, cắt đường tòn tại E. Chứng minh :

a) ΔBEC cân.

b) $\widehat{BEC} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB}$.

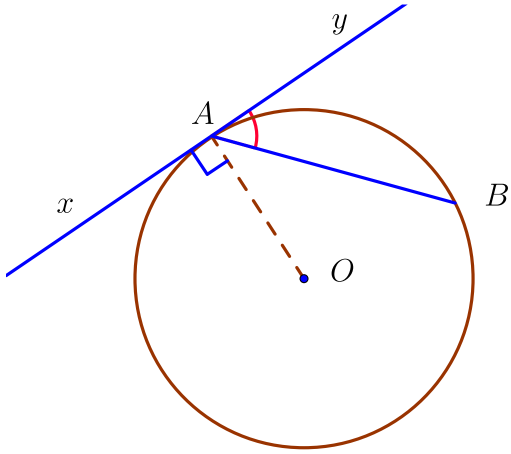
c) $AB.AC = AE.AF$.

d) $AF^2 = AB.AC - BF.CF$.

Ví dụ 5: Cho tứ giác $ABCD$ có bốn đỉnh thuộc đường tròn (O). Chứng minh $AB.CD + AD.BC = AC.BD$.

4. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung

a) Định nghĩa



Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và một cạnh là tia tiếp tuyến còn cạnh kia chứa dây cung của đường tròn đó.

Trong hình trên $\widehat{BAx}$ và $\widehat{BAy}$ là hai góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung ($\widehat{BAx} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AB}$ cung lớn và $\widehat{BAy} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AB}$ cung nhỏ).

b) Định lí

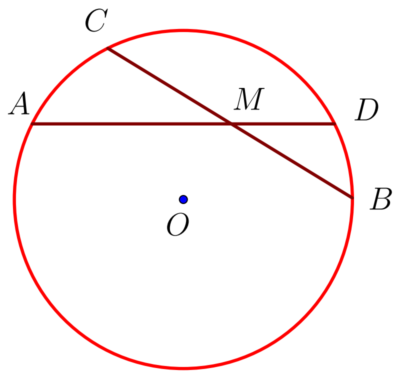
Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo góc của cung bị chắn.

c) Hệ quả

Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

5. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn, góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn

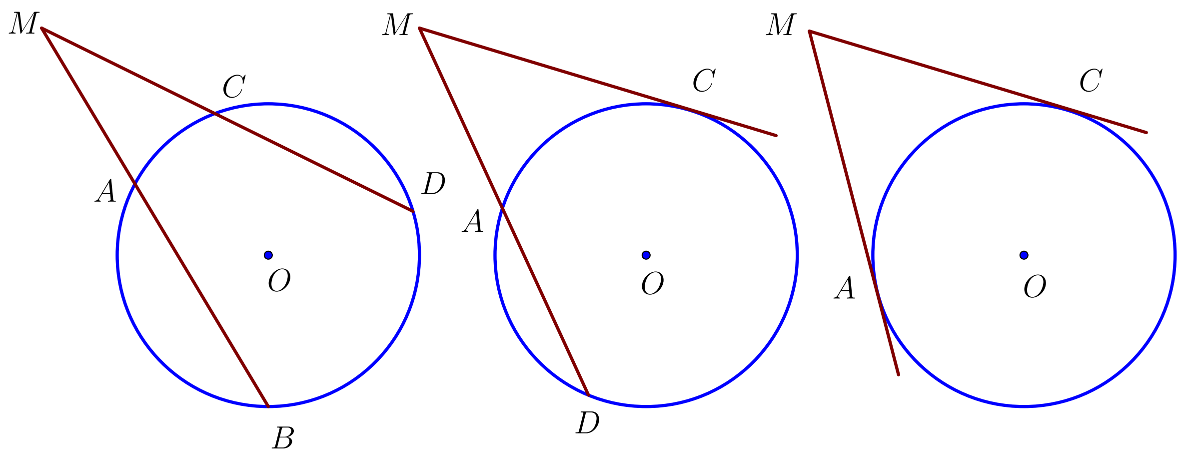
a) Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn



$\widehat{AMC}$ Có đỉnh M nằm bên trong đường tròn (O).

Định lí: Số đo góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

b) Góc có đỉnh nằm bên ngoài đường tròn



$\widehat{AMC}$ Có đỉnh M nằm bên ngoài đường tròn (O).

Định lí: Số đo góc có đỉnh nằm bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

6. Cung chứa góc

a. Bài toán quỹ tích cung chứa góc

Với đoạn thẳng AB và góc α $(0^0 < \alpha < 180^0)$ cho trước thì quỹ tích các điểm M thỏa mãn $\widehat{AMB} = \alpha$ là hai cung chứa góc α dựng trên đoạn AB.

Chú ý:

- Hai cung chứa góc α dựng trên đoạn AB là hai cùng tròn đối xứng nhau qua AB.
- Hai điểm A, B được coi là thuộc quỹ tích.
- Khi $\alpha = 90^0$ thì quỹ tích các điểm nhìn đoạn AB cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB.

b) Cách giải bài toán quỹ tích

Muốn chứng minh quỹ tích (tập hợp) các điểm M thỏa mãn tính chất (τ) là một hình H nào đó ta phải chứng minh hai phần:

Phần thuận: Mọi điểm có tính chất (τ) đều thuộc hình H.

Phần đảo: Mọi điểm thuộc hình H đều có tính chất (τ).

Kết luận: Quỹ tích (tập hợp) các điểm M có tính chất (τ) là hình H.

c) Dạng bài quỹ tích

Dạng 1. Quỹ tích là cung chứa góc α

Phương pháp:

+) Tìm đoạn thẳng cố định trong hình vẽ.

+) Nối điểm phải tìm quỹ tích với hai đầu của đoạn thẳng cố định đó, xác định góc α tạo thành.

+) Khẳng định điểm phải tìm quỹ tích thuộc cung chứa góc α vẽ trên đoạn thẳng cố định.

Ví dụ 1: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB cố định. Điểm C chuyển động trên nửa đường tròn. Ở phía ngoài ΔABC vẽ ΔBCD vuông cân tại C. Tìm quỹ tích điểm D.

Ví dụ 2: trên đường tròn $(O;R)$ lấy hai điểm B, C cố định sao cho số đo cung sđ$\overparen{BC} = 128^0$. Lấy điểm A di động trên cung lớn BC. Gọi M là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của ΔABC. Chứng minh rằng M nằm trên một cung tròn cố định.

7. Tứ giác nội tiếp

a) Định nghĩa

Tứ giác có 4 đỉnh nằm trên một đường tròn gọi là tứ giác nội tiếp.

b) Tính chất

- Trong một tứ giác nội tiếp thì hai góc đối có tổng bằng 180^0.
- Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180^0 thì tứ giác đó nội tiếp đường tròn.

c) Dấu hiệu

- Tổng hai góc đối của một tứ giác bằng 180^0 thì tứ giác nội tiếp đường tròn.
- Nếu tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn một cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc bằng nhau thì bốn đỉnh của tứ giác ấy cùng thuộc một đường tròn.

d. Vận dụng

Phương pháp: Để chứng minh một tứ giác nội tiếp (hay 4 điểm cùng thuộc một đường tròn) ta cần:

(1) Chứng minh cho bốn đỉnh của tứ giác cách đều một điểm nào đó.

(2) Chứng minh tứ giác có tổng 2 góc đối bằng 180^0

(3) Chứng minh từ hai đỉnh cùng kề một cạnh cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau.

(4) Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối bằng thì tứ giác đó nội tiếp được trong một đường tròn.

Cụ thể: Cho tam giác $ABCD$. Nếu các bạn chứng minh được $\widehat{A}+\widehat{C} = \widehat{B}+\widehat{D}$ thì tứ giác $ABCD$ cũng nội tiếp trong một đường tròn. Đây có thể nói là một trường hợp đặc biệt của trường hợp thứ 2.

(5) Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối của đỉnh đó thì nội tiếp được trong một đường tròn.

(6) Chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

Chú ý: Các bạn có thể chứng minh tứ giác $ABCD$ là một trong những hình đặc biệt sau: Tứ giác $ABCD$ là hình thang cân, hình chữ nhật, hình vuông.

Ví dụ: Cho tam giác nhọn ABC có $\widehat{A} = 60^0$. Các đường phân giác trong BB_1, CC_1 của tam giác ABC cắt nhau tại I.

1. Chứng minh tứ giác AB_1IC_1 nội tiếp.

2. Gọi K là giao điểm thứ hai khác B của đường thẳng BC với đường tròn ngoại tiếp tam giác BC_1I. Chứng minh tứ giác $CKIB_1$ nội tiếp.

Ví dụ: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp $(O; R)$. Hạ đường cao AD, BE của tam giác. Các tia AD, BE lần lượt cắt (O) tại các điểm thứ hai M, N. Chứng minh rằng:

1. Bốn điểm A,E, D, B nằm trên một đường tròn.

2. $MN//DE$.

3. $ED \perp OC$.

4. Cho (O) và dây AB cố định, điểm C di chuyển trên cung lớn AB. Chứng minh rằng độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác CED không đổi.

C. CÁC DẠNG CƠ BẢN.

- **Bài toán liên quan đến chứng minh.**
- **Bài toán liên quan đến tính toán.**
- **Bài toán liên quan đến quỹ tích.**
- **Bài toán liên quan đến dựng hình.**
- **Bài toán liên quan đến cực trị hình học.**

Ví dụ 1: Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài (O). Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến (O) (A, B là tiếp điểm). Qua M kẻ cát tuyến MNP ($MN < MP$) đến (O). Gọi K là trung điểm của NP.

1. Chứng minh rằng M, A, K, O, B cùng thuộc một đường tròn.

2. Chứng minh rằng tia KM là tia phân giác của góc $\widehat{AKB}$.

3. Gọi Q là giao điểm thứ hai của đường thẳng BK với đường tròn (O). Chứng minh $AQ//NP$.

4. Chứng minh rằng $MA^2 = MH.MO = MN.MP$.

5. Chứng minh rằng tứ giác $NHOP$ là tứ giác nội tiếp.

6. Gọi E là giao điểm của AB và KO. Chứng minh rằng: $AB^2 = 4.HE.HF$ (H là giao điểm của AB và NP).

7. Chứng minh rằng tứ giác $KEMH$ là tứ giác nội tiếp. Từ đó chứng tỏ rằng $OK.OE$ không đổi.

8. Gọi I là giao điểm của đoạn thẳng MO với đường tròn (O). Chứng minh rằng: I là tâm đường tròn nội tiếp ΔMAB.

9. Chứng minh rằng: KE và KF là phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\widehat{AKB}$. Từ đó suy ra: $AE.BF = AF.BE$.

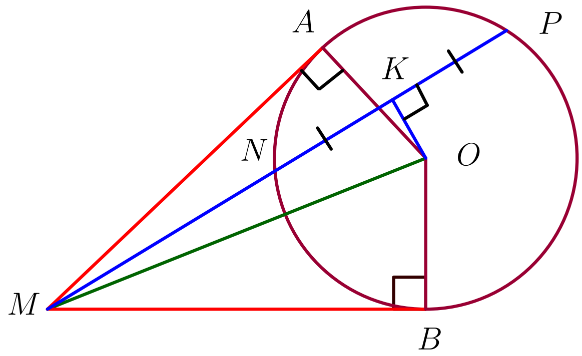
10. Tìm vị trí của cát tuyến MNP để diện tích tam giác MQP đạt giá trị lớn nhất.

11. Chứng minh khi cát tuyến MNP quay quanh M thì trọng tâm G của ΔNAP luôn chạy trên một đường tròn cố định và khi cát tuyến MNP cố định, điểm M di chuyển trên tia đối của NP, chứng minh đường AB đi qua một điểm cố định.

12. Giả sử $MO = 2R$. Tính diện tích hình quạt giới hạn bởi hai bán kính OA, OB và cung nhỏ AB.

Hướng dẫn

1. Chứng minh rằng M, A, K, O, B cùng thuộc một đường tròn.



Vì MA là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow MA \perp OA$ tại A

$\Rightarrow \Delta MOA$ vuông tại $A \Rightarrow A \in (MO)$ (1)

Vì MB là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow MB \perp OB$ tại B

$\Rightarrow \Delta MOB$ vuông tại $B \Rightarrow B \in (MO)$ (2)

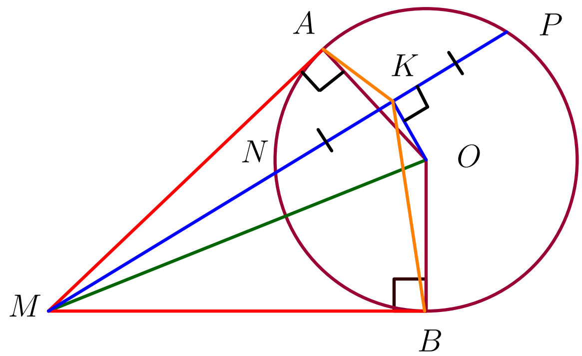
+) Ta có K là trung điểm của $NP \Rightarrow$ đường thẳng $OK \perp NP$

Vì M, N, K thẳng hàng $\Rightarrow OK \perp MK \Rightarrow \widehat{MOK} = 90^0 \Rightarrow K \in (MO)$ (3)

Từ (1) (2) và (3) $\Rightarrow A$, B, C cùng $\in (MO)$

$\Rightarrow$ 5 điểm M, A, K, O, B cùng thuộc một đường tròn.

2. Chứng minh rằng tia KM là tia phân giác của góc $\widehat{AKB}$.



Xét đường tròn đường kính (MO) ở câu 1

+) Ta có: $\widehat{AKM} = \dfrac{1}{2}$sđ$\widehat{AM}$ và $\widehat{AOM} = \dfrac{1}{2}$sđ$\widehat{AM}$

$\Rightarrow \widehat{AKM} = \widehat{AOM}$ (4)

+) Ta có: $\widehat{BKM} = \dfrac{1}{2}$sđ$\widehat{BM}$ và $\widehat{BOM} = \dfrac{1}{2}$sđ$\widehat{BM}$

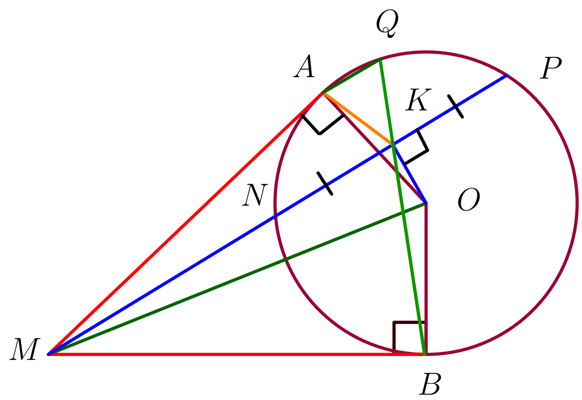
$\Rightarrow \widehat{BKM} = \widehat{BOM}$ (5)

Mà NA, MB là tiếp tuyến của (O):

OM là phân giác của góc $\widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ (6)

+) Từ (4), (5) và (6) $\Rightarrow \widehat{AKM} = \widehat{BKM} \Rightarrow MK$ là phân giác của góc $\widehat{AKB}$ (đpcm).

3. Gọi Q là giao điểm thứ hai của đường thẳng BK với đường tròn (O). Chứng minh $AQ//NP$.



Ta sẽ chứng minh: $\widehat{AQB} = \widehat{NKB}$

+) Trong đường tròn (O): $\widehat{AQB} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overparen{AB}$ (7)

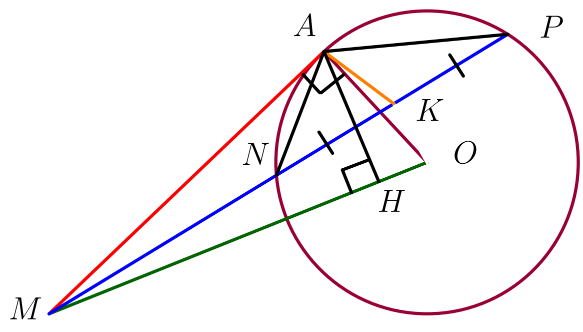
+) Trong đường tròn (MO): $\widehat{NKB} = \widehat{MKB} = \widehat{MOB}$ (vì cùng $= \dfrac{1}{2}$sđ$\overparen{MB}$)

$= \dfrac{1}{2}\widehat{AOB}$ (vì MO là phân giác của góc $\widehat{AOB}$)

$= \dfrac{1}{2}$sđ$\overparen{AB}$ (vì $\widehat{AOB}$ =sđ$\overparen{AB}$) (8)

Từ (7) và (8): $\Rightarrow \widehat{AQB} = \widehat{NKB}$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow AQ//NP$ (đpcm).

4. Chứng minh rằng $MA^2 = MH.MO = MN.MP$.



Ta chứng minh $MA^2 = MH.MO$

Xét ΔMAO vuông tại A và có chiều cao $AH \perp MO$

$\Rightarrow$ Theo hệ thức lượng ta có $MA^2 = MH.MO$ (đpcm) (9)

Ta chứng minh $MA^2 = MN.MP$

Xét ΔMAN và ΔMPA

+) $\widehat{M}$ chung (I)

+) $\widehat{MAN} = \frac{1}{2}$sđ$AN$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

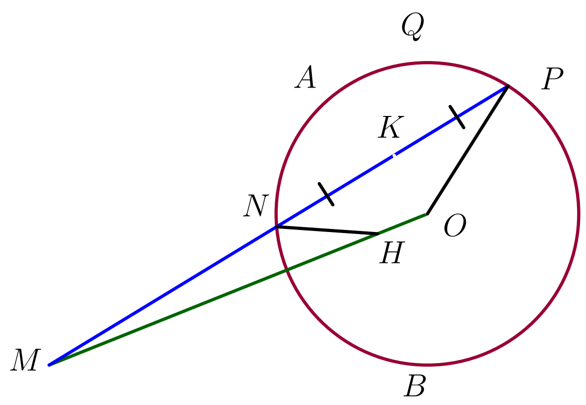
+) $\widehat{MPA} = \widehat{NPA} = \frac{1}{2}$sđ$AN$

$\Rightarrow \widehat{MAN} = \widehat{MPA}$ (II)

Từ (I) và $(II) \Rightarrow \Delta MAN \sim \Delta MPA \Rightarrow \frac{MA}{MN} = \frac{MP}{MA} \Rightarrow MA^2 = MN.MP$ (đpcm) (10)

Từ (9) và (10) $\Rightarrow MA^2 = MH.MO = MN.MP$ (đpcm).

5. Chứng minh rằng tứ giác $MNOP$ là tứ giác nội tiếp.



Theo câu 4 ta có $MH.MO = MN.MP \Rightarrow \frac{MH}{MP} = \frac{MN}{MO}$

Xét ΔMHN và ΔMPO có:

+) $\widehat{M}$ chung (1 cặp góc đồng vị)

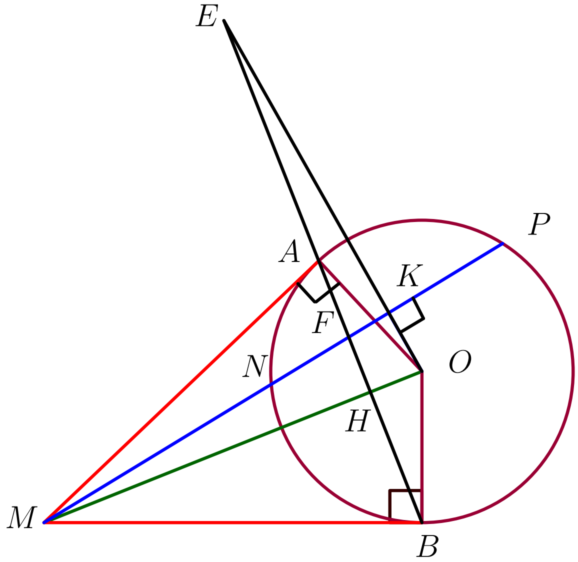
+) $\frac{MH}{MP} = \frac{MN}{MO}$ (hai cặp cạnh kề nhau tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow \Delta MHN \sim \Delta MPO \Rightarrow \widehat{MHN} = \widehat{MPO}$ (11)

Mặt khác $\widehat{MHN} + \widehat{NHO} = 180^0$ (12)

Từ (11) và (12) $\Rightarrow \widehat{MPO} + \widehat{NHO} = 180^0$, Vậy tứ giác $NHOP$ là tứ giác nội tiếp.

6. Gọi E là giao điểm của AB và KO. Chứng minh rằng: $AB^2 = 4.HE.HF$ (H là giao điểm của AB và NP).



Gợi ý: $\dfrac{AB^2}{4} = HE.HF \Leftrightarrow \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = AH^2 = HE.HF$

Trong đó ΔMAO: $AH^2 = HM.MO$

$HM.MO = HE.HF \Rightarrow \dfrac{HM}{HF} = \dfrac{HE}{HO} \Rightarrow \Delta HMF \sim \Delta HEO$

+) Chứng minh $AH^2 = HM.HO$

Xét ΔMAO vuông tại A, có chiều cao AH.

Theo hệ thức cơ bản trong tam giác vuông ta có: $AH^2 = HM.HO$

Mặt khác: $AH = \dfrac{AB}{2} \Rightarrow AH^2 = \dfrac{AB^2}{4} \Rightarrow AB^2 = 4.AH^2 = 4.HM.HO$ (12)

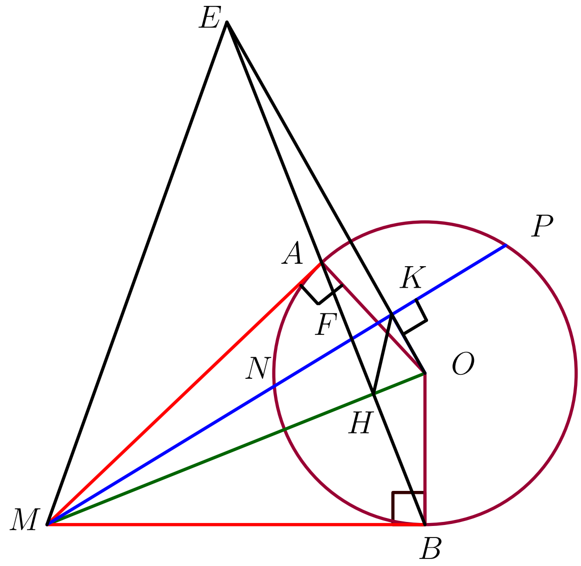
Từ (11) và (12): để chứng minh (11) ta phải chứng minh:

$HM.HO = HE.HF \Leftrightarrow \dfrac{HM}{HF} = \dfrac{HE}{HO}$

Xét hai tam giác vuông ΔHMF và ΔHEO: có $\widehat{HMF} = \widehat{HEO}$ (vì cùng phụ góc $\widehat{MOE}$)

$\Rightarrow \Delta HMF \sim \Delta HEO \Rightarrow \dfrac{HM}{HF} = \dfrac{HE}{HO}$ (đpcm)

7. Chứng minh rằng tứ giác $KEMH$ là tứ giác nội tiếp. Từ đó chứng tỏ rằng $OK.OE$ không đổi.

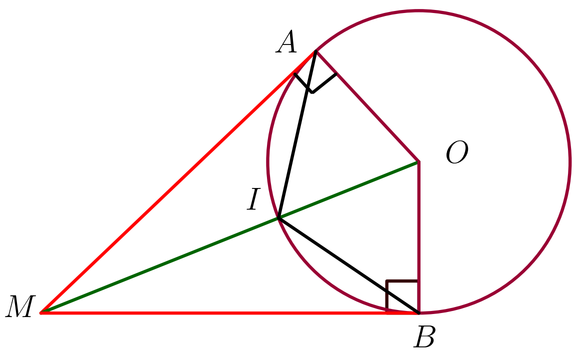


Ta có $MK \perp EK$, $EH \perp MH$ và $\widehat{EKM} = \widehat{EHM} = 90^0$ cùng nhìn đoạn $EM \Rightarrow KEMH$ là tứ giác nội tiếp.

Dùng kết quả ở câu 5 ta có $OK.OE = OH.OM = OA^2 = R^2$ không đổi.

Từ $OK.OE = R^2 = ON^2 = OP^2 \Rightarrow \widehat{ENO} = 90^0$. (đpcm).

8. Gọi I là giao điểm của đoạn thẳng MO với đường tròn (O). Chứng minh rằng: I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB.



Vì MO là trung trực của AB nên $IA = IB$. $\Rightarrow \widehat{IAM} = \widehat{IAB} \Rightarrow AI$ là phân giác $\widehat{AMB}$.

9. Chứng minh rằng: KE và KF là phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\widehat{AKB}$. Từ đó suy ra: $AE.BF = AF.BE$.

Từ câu 2 ta có KF là phân giác góc $\widehat{AKB}$, với $KE \perp KF$ nên KE là phân giác góc ngoài tại đỉnh K. Dùng tính chất đường phân giác với $AKB \Rightarrow AE.BF = AF.BE$.

10. Tìm vị trí của cát tuyến MNP để diện tích tam giác MQP đạt giá trị lớn nhất.

Chú ý: Do P, Q thay đổi nên ΔMQP có độ dài cả ba cạnh đều thay đổi gây khó khăn do đó cần đưa về tam giác chứa nhiều yếu tố cố định hơn.

Từ câu 3 $\Rightarrow AQ//MP \Rightarrow S_{QMP} = S_{AMP}$.

Kẻ $PJ \perp MA$ ta có $S_{QMP} = \dfrac{1}{2}AM.PJ$. Do AM không đổi $\Rightarrow S_{QMPmax} \Leftrightarrow PJ_{max}$.

Vì $PJ \leq PA \leq P'A \Leftrightarrow P \equiv P'$ (P' đối xứng với A qua O).

Vậy $S_{MQPmax} \Leftrightarrow P = P'$.

11. Chứng minh khi cát tuyến MNP quay quanh M thì trọng tâm G của ΔNAP luôn chạy trên một đường tròn cố định và khi cát tuyến MNP cố định, điểm M di chuyển trên tia đối của NP, chứng minh đường AB đi qua một điểm cố định.

Gọi S là trung điểm OM, từ G kẻ $GL//KS$. Vì AS cố định và $\dfrac{AL}{AS} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow L$ cố định.

Lại có $LG = \dfrac{2}{3}SK = \dfrac{1}{3}OM$ không đổi. Bởi vậy G luôn chạy trên đường tròn $\left(L; \dfrac{1}{3}OM\right)$.

Do $OK.OE$ không đổi $\Rightarrow E$ thuộc đường OK cố định trên đó E cách O cố định một đoạn $OE = \dfrac{R^2}{OK}$ không đổi. Vậy E là điểm cố định mà AB luôn đi qua.

12. Giả sử $MO = 2R$. Tính diện tích hình quạt giới hạn bởi hai bán kính OA, OB và cung nhỏ AB.

Từ $MO = 2R$ ta tính được $\widehat{MOA} = 60^0 \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^0$.

Diện tích hình quạt cần tính là $S = \dfrac{\pi R^2}{3}$.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H và lần lượt cắt đường tròn tại các điểm tại M, N, P. Chứng minh rằng:

1. Tứ giác $BFEC$ và $AEDB$ nội tiếp.

2. $AE.AC = AF.AB$.

3. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác EFD.

4. Khi $\widehat{BAC} = 30^0$. Tính diện tích hình quạt giới hạn bởi hai bán kính OB, OC và cung nhỏ BC.

5. BC là phân giác của góc $\widehat{HNM}$, từ đó suy ra H, M đối xứng nhau qua BC.

6. $PN//EF$, $AO \perp EF$.

7. Gọi I là trung điểm BC, K đối xứng H qua I. Chứng minh K thuộc (O).

8. $BMKC$ là hình thang cân.

9. $PN < 2AH$.

10. AI cắt OH tại G. Chứng minh G là trọng tâm ΔABC.

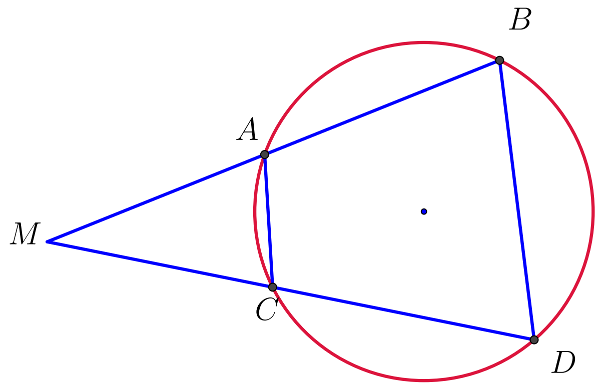
11. Tìm điều kiện của góc B và C để $OH//BC$.

12. Khi A di chuyển trên cung lớn BC. Chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp AFE không đổi. Chứng minh H luôn thuộc một đường cố định,

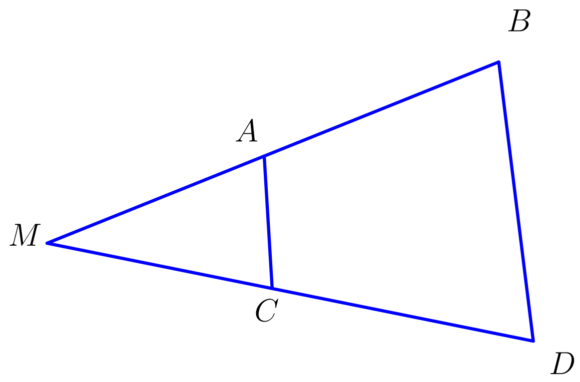
13. Khi A di chuyển trên $\widehat{BC}$. Chứng minh EF có độ dài không đổi, suy ra vị trí điểm A để diện tích ΔAEF lớn nhất.

E. PHƯƠNG TÍCH GIẢI CÁC BÀI TOÁN KHÓ

1. Bổ đề số 1



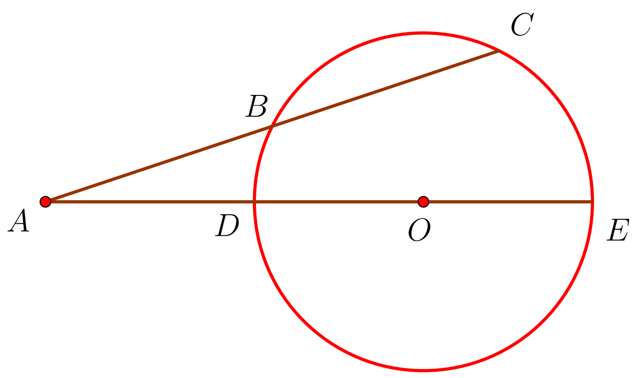
Nếu $ABCD \Rightarrow MA.MB = MC.MD$ hay $\Delta MAC \sim \Delta MDB$ (g-g) hay $\Delta MAD \sim \Delta MCB$ (g-g).



• Nếu $MA.MB = MC.MD \Leftrightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MB} \Leftrightarrow \Delta MAC \sim \Delta MDB$ (c-g-c) thì tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

Kết luận: $ABCD$ nội tiếp $\Leftrightarrow MA.MB = MC.MD$.

Mở rộng bổ đề 1.



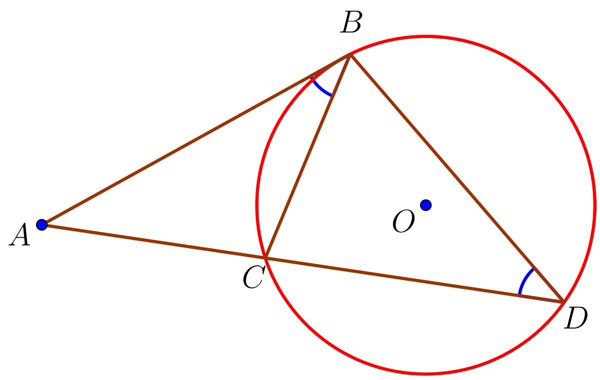
Chứng minh: $AB.AC = d^2 - R^2$

Theo bổ đề 1: $AB.AC = AD.AE = (d-R)(d+R) = d^2 - R^2$ (d là khoảng cách từ A cho tới O).

Bài toán ứng dụng: Chứng minh $AB.AC$ không đổi.

2. Bổ đề 2.

Cho đường tròn (O), tiếp tuyến AB và cát tuyến ACD. Chứng minh $AB^2 = AC.AD$.

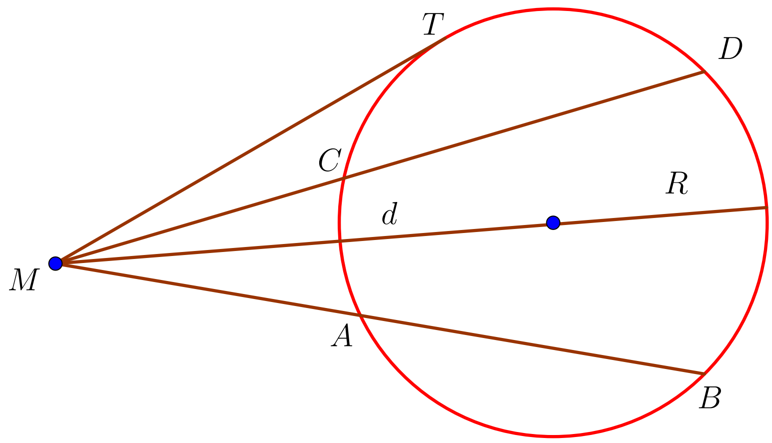


$\Delta ACB \sim \Delta ABD$ (g - g).

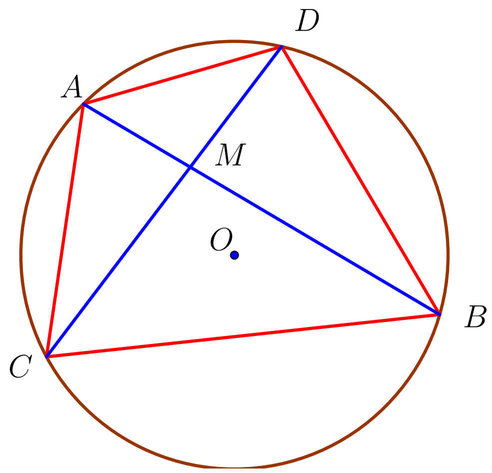
Ứng dụng: AB là tiếp tuyến của $\Delta BCD \Leftrightarrow AB^2 = AC.AD \Leftrightarrow \Delta ACB \sim \Delta ABD$ (c - g - c).

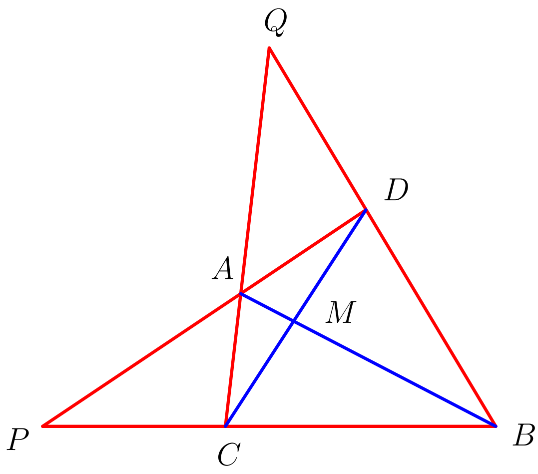
$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{D}$. $\Rightarrow AB$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

Từ bổ đề 1 và bổ đề 2 ta có $MA.MB = MC.MD = MT^2 = d^2 - R^2$.



Tương tự trường hợp hai dây cung cắt nhau cùng nằm trong một đường tròn cũng xảy ra hai chiều cách chứng minh tương tự các phần trên.



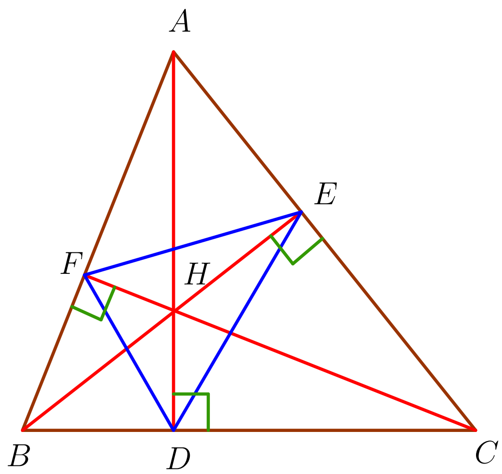


- $ACBD$ nội tiếp $\Leftrightarrow MA.MB = MC.MD$.

Chứng minh: $\Delta MCA \sim \Delta MBD \Leftrightarrow \dfrac{MC}{MB} = \dfrac{MA}{MD} = MA.MB = MC.MD$.

- Vậy $ACBD$ nội tiếp $\Leftrightarrow PA.PD = PC.PB$, $QA.QC = QD.QB$, $MA.MB = MC.MD$.

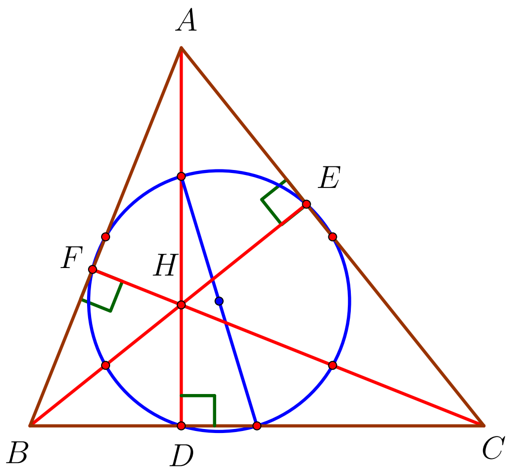
3. Bổ đề 3.



Trong ΔABC có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

- Chứng minh được các tứ giác loại 1 $AFHE$, ... và tứ giác loại 2 $ABDE$, ... nội tiếp.
- Chứng minh được H là tâm nội tiếp ΔDEF.
- Chứng minh được $AF.AB = AH.AD = AE.AC$ và $HA.HD = HE.HB = HC.HF$.
- Chứng minh được $DB.DC = DH.DA \Leftrightarrow \Delta BDH \sim \Delta ADC$ quan trọng nhất.

4. Đường tròn Euler



• Đường tròn đi qua 9 điểm như hình vẽ trên được gọi là đường tròn Euler.

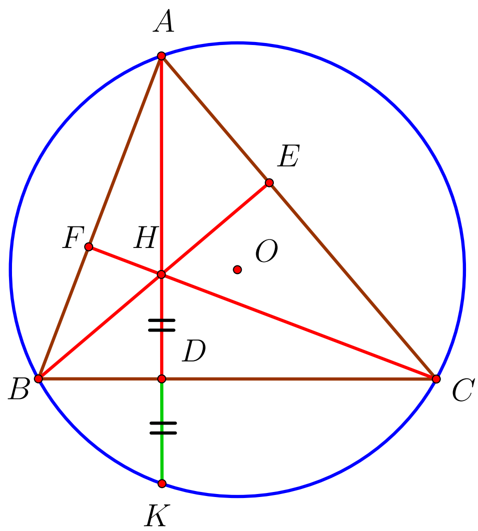
Chú ý: Khi đi thi đề chỉ hỏi chứng minh 4 điểm trong 9 điểm cùng thuộc một đường tròn.

5. Điểm đối xứng với trực tâm qua cạnh của tam giác

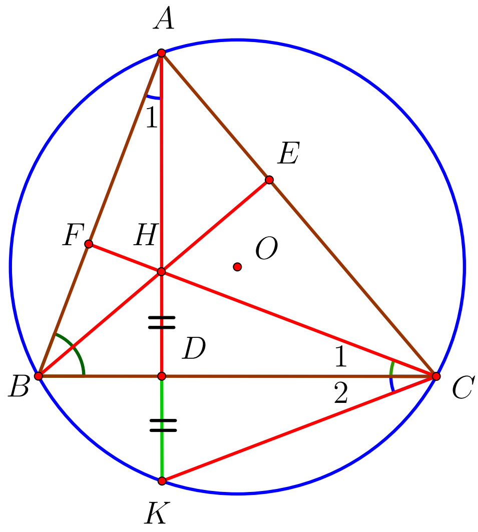
Cho ΔABC, ba đường cao AD, BE, CF đồng qui tại H.

Cách hỏi 1: Kẻ AD cắt (ABC) tại K thì H và K đối xứng nhau qua BC.

Cách hỏi 2: Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC thì $K \in (ABC)$.



Chứng minh:



Cách hỏi 1: H và K đối xứng nhau qua BC.

- ΔHCK là Δ cân. Vì $\widehat{C_1} = \widehat{C_2} \Rightarrow BC$ là phân giác của $\widehat{HCK}$ mà $BC \perp HK$.
- $\Delta BHC = \Delta BKC \Rightarrow (BHC)$ và (BKC) có bán kính bằng nhau hơn nữa (BHC), (CHA), (AHB), (BKC), (ABC) cũng có bán kính bằng nhau.

Cách hỏi 2: Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC thì $K \in (ABC)$.

Ta có $K \in (ABC) \Leftrightarrow ABKC$ nội tiếp $\Leftrightarrow \widehat{BKC} + \widehat{BAC} = 180^0 \Leftrightarrow \widehat{BHC} + \widehat{BAC} = 180^0 \Leftrightarrow \widehat{EHF} + \widehat{BAC} = 180^0$.

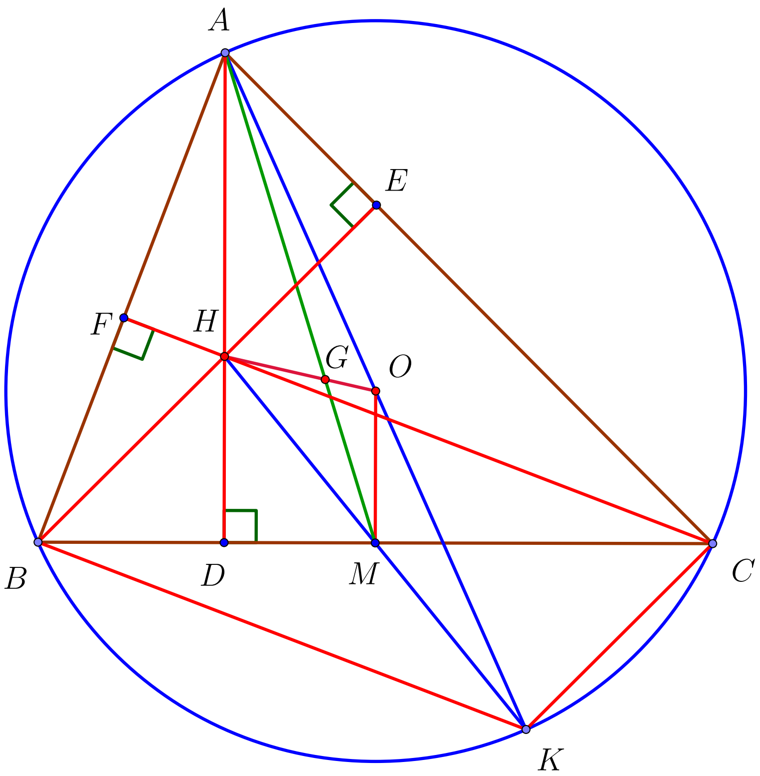
6. Đường thẳng Euler H, G, O

Cho ΔABC, ba đường cao AD, BE, CF đồng qui tại H. Kẻ đường kính AK.

Ta chứng minh được $BHCK$ là hình bình hành vì $CK//BE$, $BK//CF$.

Nối HK cắt BC tại M thì $AH = 2OM$.

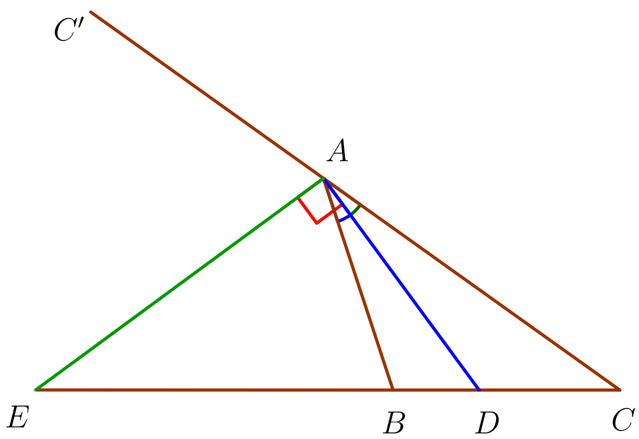
Chứng minh được G là trọng tâm ΔABC vì $OM = \dfrac{1}{2}AH$ theo định lí ta-lét $\dfrac{AG}{GM} = 2 \Rightarrow \dfrac{AG}{AM} = \dfrac{2}{3}$.



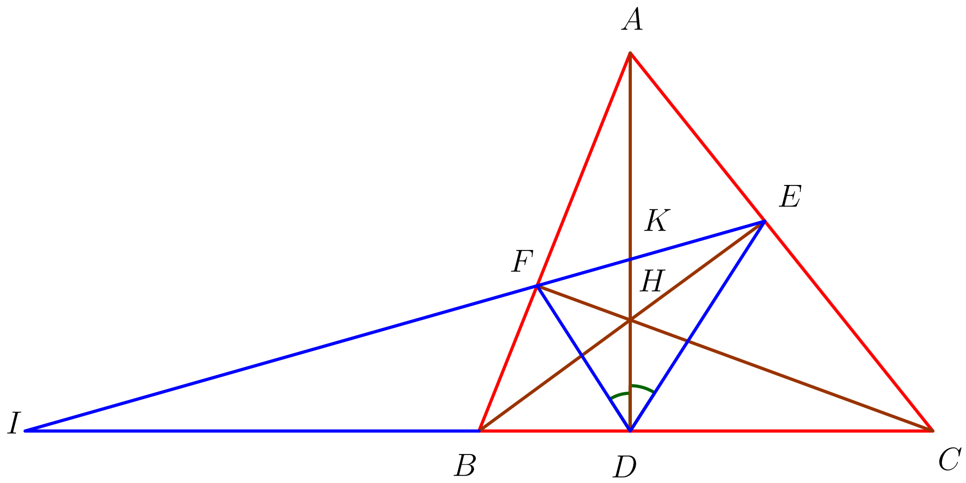
7. Tính chất phân giác

Cho ΔABC có đường phân giác trong AD và phân giác ngoài AE.

Ta có $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{EB}{EC} \Leftrightarrow DB.EC = DC.EB.$

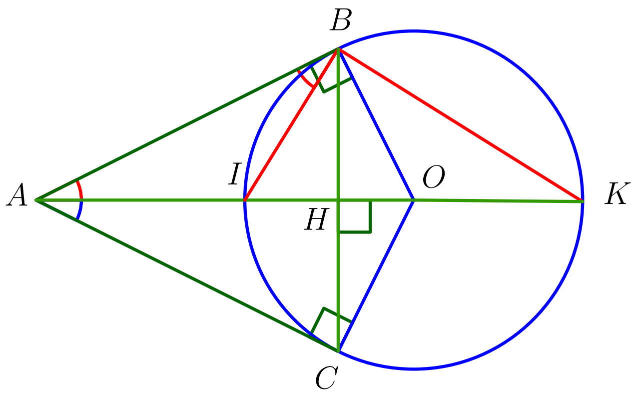


Chú ý: Trong ΔABC có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Kẻ EF cắt BC tại I, cắt AD tại K. Thì DK, ID là đường phân giác trong và phân giác ngoài. Khi đó ta có: $FK.IE = IF.KE$.



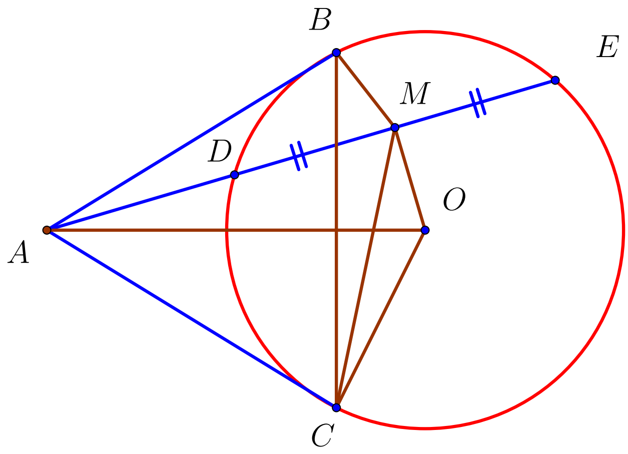
Ba điều cần chú ý:

- Ta có I là tâm nội tiếp ΔABC.
- BI, BK là đường phân giác trong và phân giác ngoài.
- $IH.AK = AI.HK$.



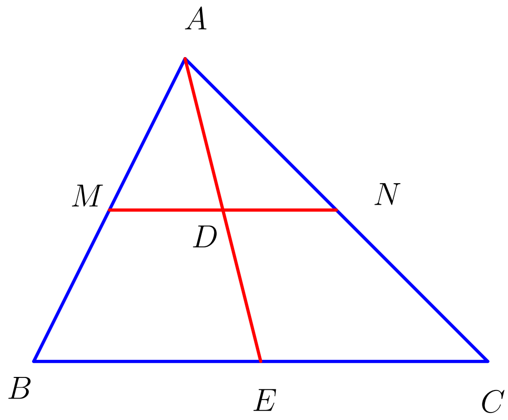
8. 5 điểm cùng thuộc một đường tròn

- A, B, M, O, C cùng thuộc một đường tròn.
- $\widehat{BMA} = \widehat{AMC}$.



9. Định lí ta - lét

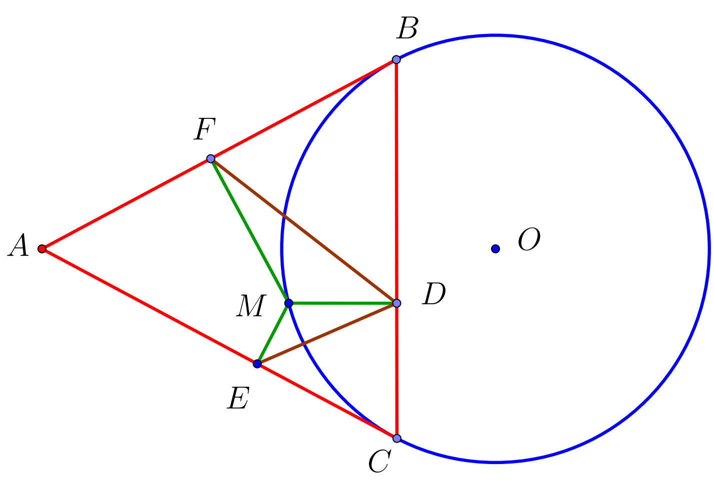
Cho ΔABC, $M \in AB$, $N \in AC$ và $MN//BC$. Lấy E thuộc cạnh BC, AE cắt MN tại D. Ta có E là trung điểm $BC \Leftrightarrow D$ là trung điểm MN.



- $\dfrac{MD}{BE} = \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{ND}{EC}$.

10. Khoảng cách đến ba cạnh của tam giác

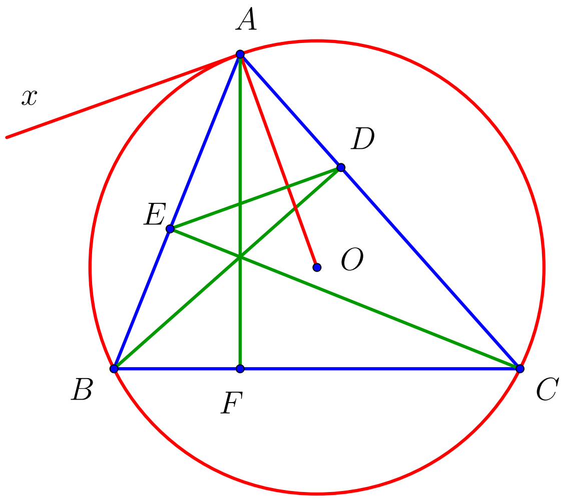
Vẽ $MD \perp BC$, $ME \perp AC$, $MF \perp AB$.



• $MD^2 = ME.MF \Leftrightarrow \dfrac{MD}{ME} = \dfrac{MF}{MD} \Leftrightarrow \Delta MDE \sim \Delta MFD$ (g - g) (Dựa vào tứ giác nội tiếp $MDCE$ và $MDBF$).

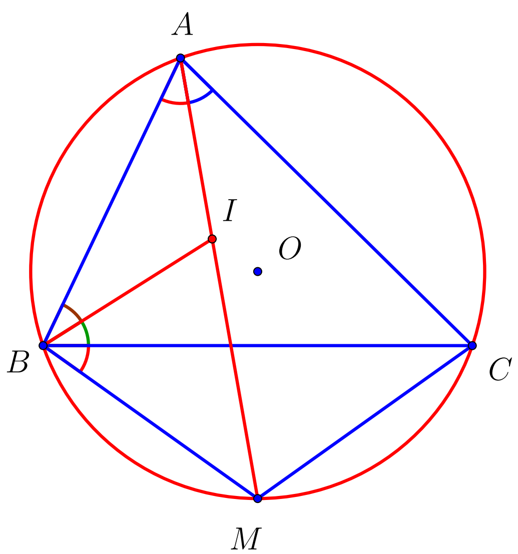
• $ME.MF_{\max} \Leftrightarrow MD^2_{\max} \Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung BC.

11. Chứng minh vuông góc



• $AO \perp ED$.

Kẻ Ax là tiếp tuyến của đường tròn. Khi đó $\widehat{xAB} = \widehat{ACB} = \widehat{AED} \Rightarrow ED//Ax \Rightarrow Ax \perp AO \Rightarrow AO \perp ED$.

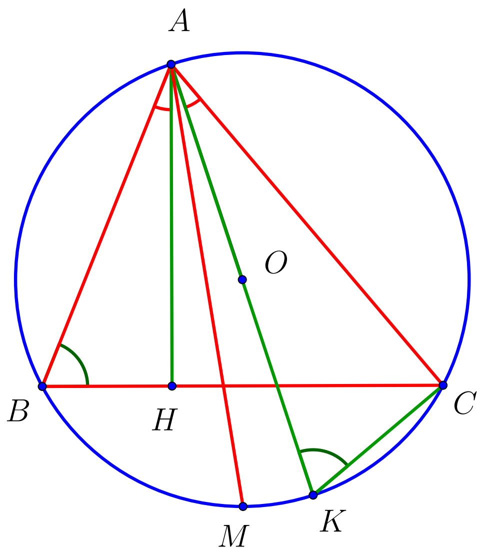


• $MB = MC = MI$.

• $\widehat{BIM} = \widehat{BAM} + \widehat{ABI}$.

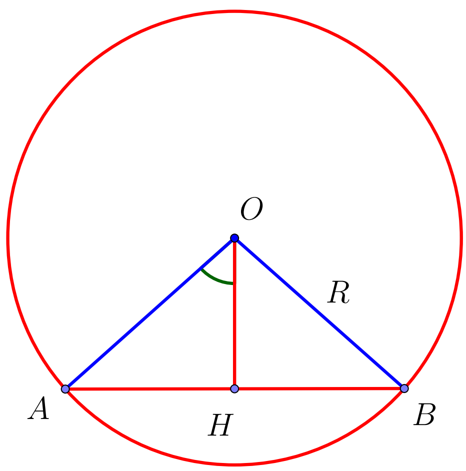
• Chứng minh (BIC) có tâm thuộc (ABC) chính điểm là M vì $MB = MC = MI$.

• Đường phân giác $\widehat{BAC}$ cắt (O) tại M, trên AM lấy điểm I sao cho $MB = MI$ thì ta chứng minh được I là tâm nội tiếp ΔABC.



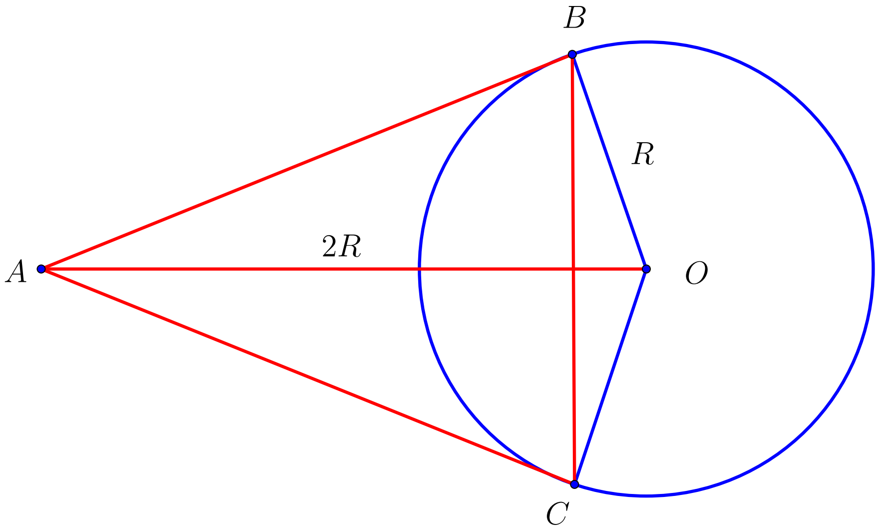
- $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.
- $\widehat{BAC}$ và $\widehat{HAO}$ có chung đường phân giác AM.

12. Độ dài dây và số đo cung



- $AB = R\sqrt{1} \Leftrightarrow$ sđ$\overset{\frown}{AB} = 60^0$.
- $AB = R\sqrt{2} \Leftrightarrow$ sđ$\overset{\frown}{AB} = 90^0$.
- $AB = R\sqrt{3} \Leftrightarrow$ sđ$\overset{\frown}{AB} = 120^0$.
- $AB = R\sqrt{4} \Leftrightarrow$ sđ$\overset{\frown}{AB} = 180^0$.

Chú ý: $OA = 2R$



Cho $OA = 2R$ thì ta được.

• ΔABC là tam giác đều (vì $sin\widehat{BAO} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAO} = 30^0$).

F. KĨ THUẬT PHƯƠNG PHÁP TƯ DUY HÌNH HỌC CỰC HAY!!!

Dạng 1. Chứng minh tích, tỉ số, tam giác đồng dạng.

Tư duy 1: $AE.AF = AC^2 \Leftrightarrow \dfrac{AC}{AF} = \dfrac{AE}{AC} \Leftrightarrow \Delta ACF \sim \Delta AEC$.

Tư duy 2: $AE.AF = AC^2 \Leftrightarrow \dfrac{AC}{AF} = \dfrac{AE}{AC} \Leftrightarrow AE.AF = AC^2 = CM.CN \Leftrightarrow \Delta ACM \sim \Delta ANC$.
Khi đó sẽ xuất hiện dạng $\Delta_1 \sim \Delta_3$ và $\Delta_2 \sim \Delta_3 \Rightarrow \Delta_1 \sim \Delta_3$.

Dạng 2. $BM.BI + CM.CA = AB^2 + AC^2$ $(*)$

Tư duy 1: $BM.BI = AB^2$ (1) và $CM.CA = AC^2$ (2)

Cộng vế với vế của (1) với (2) $\Rightarrow (*)$ (Nếu thế thì AB, AC phải là cạnh chung của 1 cặp tam giác đồng dạng).

Tư duy 2: $AB^2 + AC^2 = BC^2$ nên $(*) \Leftrightarrow BM.BI + CM.CA = BC^2$. Khi đó khả năng
$\begin{cases} BM.BI = k.BC^2 \\ CM.CA = (1-k)BC^2 \end{cases}$ (với $0 < k < 1$)
Khi đó cộng vế với vế $\Rightarrow (*)$. Thì BC phải là cạnh chung của một cặp tam giác đồng dạng.

Tư duy 3: $BN + NC = BC$ nên $(*) \Leftrightarrow BM.BI + CM.CA = BC.(BN + NC) = BC.BN + BC.NC$. Khi xuất hiện hai cặp tam giác đồng dạng.

Dạng 3. Để chứng minh 3 đường thẳng đồng quy ta thường chứng minh 3 đường thẳng ấy hoặc là 3 đường cao hoặc là 3 đường trung tuyến hoặc là 3 đường phân giác của một tam giác.

Dạng 4. Để chứng minh 3 điểm A, B, C thẳng hàng được chứng minh một trong ba điều tương đương sau:

- $AB + BC = AC$ (khi đó BC thuộc đoạn thẳng AC).
- Một trong ba điểm ấy là đỉnh một góc bằng 180^0 chẳng hạn như $\widehat{ABC} = 180^0$.
- Một trong ba điểm ấy là điểm chung của hai đoạn thẳng song song chẳng hạn $AB//BC$.
- Một trong ba điểm ấy là điểm chung của hai đoạn thẳng cùng tạo với đường thẳng Δ có sẵn một góc bằng nhau chẳng hạn $(\widehat{AB;\Delta}) = (\widehat{AC;\Delta})$.

Dạng 5. Xác định vị trí điểm M trên cung nhỏ BC để tích $MI.MK.MP$ đạt giá trị lớn nhất.

Tư duy: $MI.MK.MP = MP^3 \Leftrightarrow MI.MK = MP^2$ thì thường MP là cạnh chung của hai tam giác ΔMPI và ΔMPK.

Dạng 6. Khi E chạy trên cung nhỏ BC thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔAEF luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Nếu (Δ) là đường thẳng cố định chứa tâm của đường tròn biến thiên có các đặc điểm sau:

Tư duy 1: Nếu đường tròn có hai điểm cố định thì (Δ) là trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm cố định ấy.

Tư duy 2: Nếu đường tròn có một điểm cố định thì (Δ) là đường thẳng đi qua điểm đó và

- hoặc là $(\Delta)\perp(\Delta')$.
- hoặc là $(\Delta)//(\Delta')$.

• hoặc là (Δ) tạo với (Δ') một góc không đổi (trong đó (Δ) là một đường thẳng cố định có sẵn).

Dạng 7. Chứng minh $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}$ ta có các cách sau:

Tư duy 1: $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S} \Leftrightarrow h_1 + h_2 = h$ với h_1, h_2, h_3 là các đường cao tương ứng.

Tư duy 2: $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S} \Leftrightarrow a_1 + a_2 = a$ với a_1, a_2, a là các cạnh ứng với đường cao tương ứng.

Tư duy 3: $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{S_1}{S}} + \sqrt{\dfrac{S_2}{S}} = 1$. Thường đẳng thức về tỷ số diện tích tam giác là đẳng thức về tỉ số các cạnh tương ứng trong các cặp tam giác đồng dạng.

G. MỘT SỐ CÂU HÌNH TRONG ĐỀ TUYỂN SINH HÀ NỘI

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2011 - 2012)

Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Gọi d_1 và d_2 lần lượt là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại hai điểm A và B. Gọi I là trung điểm của OA và E là điểm thuộc đường tròn (O) (E không trùng với A và B). Đường thẳng d đi qua điểm E và vuông góc với EI cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại M, N.

1) Chứng minh $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh góc $\widehat{ENI} = \widehat{EBI}$ và góc $\widehat{MIN} = 90^0$.

3) Chứng minh $AM.BN = AI.BI$.

4) Gọi F là điểm chính giữa của cung AB không chứa E của đường tròn (O). Hãy tính diện tích của tam giác MIN theo R khi ba điểm E, I, F thẳng hàng.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2012 - 2013)

Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB. Bán kính CO vuông góc với AB, M là điểm bất kỳ trên cung nhỏ AC (M khác A và C), BM cắt AC tại H. Gọi K là hình chiếu của H trên AB.

1)Chứng minh tứ giác $CBKH$ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $\widehat{ACM} = \widehat{ACK}$.

3) Trên đoạn thẳng BM lấy điểm E sao cho $BE = AM$. Chứng minh tam giác ECM là tam giác vuông cân tại C.

4) Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn tại (O) tại điểm A. Cho P là một điểm nằm trên d sao cho hai điểm P, C nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ AB và $\dfrac{AP.MB}{MA} = R$. Chứng minh đường thẳng PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2013 - 2014)

Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm). Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C ($AB < AC$, d không đi qua tâm O).

1) Chứng minh tứ giác $AMON$ nội tiếp.

2) Chứng minh $AN^2 = AB.AC$. Tính độ dài đoạn thẳng BC khi $AB = 4$ cm, $AN = 6$ cm.

3) Gọi I là trung điểm của BC. Đường thẳng NI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T. Chứng minh $MT//AC$.

4) Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau ở K. Chứng minh K thuộc một đường thẳng cố định khi d thay đổi và thỏa mãn điều kiện đề bài.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2014 - 2015)

Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB cố định. Vẽ đường kính MN của đường tròn $(O; R)$

(M khác A, M khác B). Tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ tại B cắt các đường thẳng AM, AN lần lượt tại các điểm Q, P.

1) Chứng minh tứ giác $AMBN$ là hình chữ nhật.

2) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

3) Gọi E là trung điểm của BQ. Đường thẳng vuông góc với OE tại O cắt PQ tại điểm F. Chứng minh F là trung điểm của BP và $ME//NF$.

4) Khi đường kính MN quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính MN để tứ giác $MNPQ$ có diện tích nhỏ nhất.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2015 - 2016)

Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính AB cố định. Vẽ đường kính MN của đường tròn $(O;R)$ (M khác A, M khác B). Tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ tại B cắt các đường thẳng AM, AN lần lượt tại các điểm Q, P.

1) Chứng minh tứ giác $AMBN$ là hình chữ nhật.

2) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

3) Gọi E là trung điểm của BQ. Đường thẳng vuông góc với OE tại O cắt PQ tại điểm F. Chứng minh F là trung điểm của BP và $ME//NF$.

4) Khi đường kính MN quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính MN để tứ giác $MNPQ$ có diện tích nhỏ nhất.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2016 - 2017)

Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (O) (với B là tiếp điểm) và đường kính BC. Trên đoạn thẳng CO lấy điểm I ($I \neq C$, $I \neq O$). Đường thẳng AI cắt (O) tại hai điểm D và E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của DE.

1) Chứng minh bốn điểm A, B, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BD}{BE}$.

3) Đường thẳng d đi qua E song song với AO, d cắt BC tại điểm K. Chứng minh $HK//DC$.

4) Tia CD cắt AO tại điểm P, tia EO cắt BP tại F. Chứng minh tứ giác $BECF$ là hình chữ nhật.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2017 - 2018)

Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ AB và cung nhỏ BC. Hai dây AN và CM cắt nhau tại điểm I. Dây MN cắt cạnh AB và BC lần lượt tại các điểm H và K.

1. Chứng minh bốn điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn.

2. Chứng minh $NB^2 = NK.NM$.

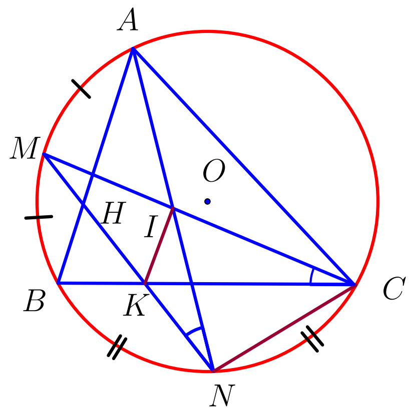
3. Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.

4. Gọi P, Q lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK, tam giác MCK và E là trung điểm của đoạn PQ. Vẽ đường kính ND của đường tròn (O). Chứng minh ba điểm D, E, K

thẳng hàng.

Hướng dẫn

1. Chứng minh bốn điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn.



Xét (O) có $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM}$ (M là điểm nằm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$)

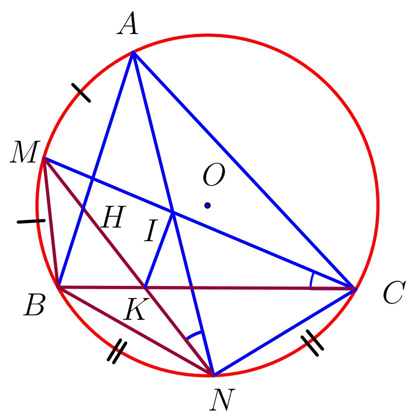
$\Rightarrow \widehat{ANB} = \widehat{BCM}$ (2 góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Xét tứ giác $CNKI$ có $\widehat{INK} = \widehat{ICK}$ (chứng minh trên)

Mà C và N là hai đỉnh kề nhau $\Rightarrow$ tứ giác $CNKI$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp)

Suy ra 4 điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn (đpcm).

2. Chứng minh $NB^2 = NK.NM$.



Xét (O) có $\overset{\frown}{BN} = \overset{\frown}{NC}$ (do N là điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$)

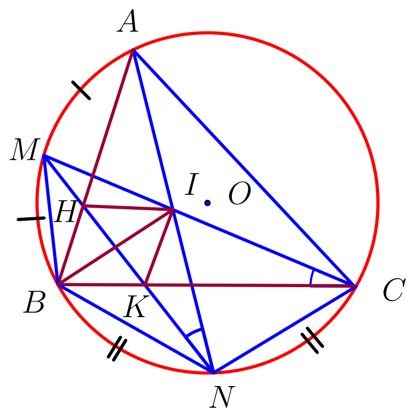
$\Rightarrow \widehat{BMN} = \widehat{NBC}$ (2 góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Xét ΔNBK và ΔNMB có:

$\widehat{BNM}$ chung, $\widehat{NBK} = \widehat{NMB}$ (chứng minh trên). Suy ra $\Delta NBK \sim \Delta NMB$ (g - g)

$\Rightarrow \dfrac{NB}{NM} = \dfrac{NK}{NB} \Leftrightarrow NB^2 = NB.NK$ (đpcm).

3. Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.



Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CNKI$ có $\widehat{IKC} = \widehat{INC}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{IC}$)

Xét đường tròn (O) có $\widehat{ABC} = \widehat{ANC}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AC}$)

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{IKC}\ (= \widehat{ANC})$

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow IK//HB$ (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song)

Chứng minh tương tự ta được $BK//HI$

Xét (O) có $\widehat{BN} = \widehat{NC}$ (N là điểm chính giữa cung BC)

$\Rightarrow \widehat{BAN} = CAN$ (2 góc nội tiếp chắn hai cùng bằng nhau)

$\Rightarrow AN$ là phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

Chứng minh tương tự ta được CM là phân giác của góc $\widehat{ACB}$.

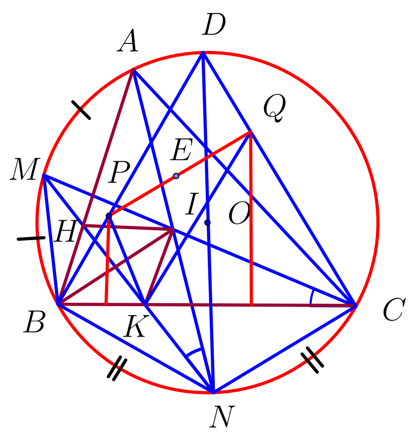
Mà $AN \cap CM = \{I\}\}$ là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác ABC

$\Rightarrow BI$ là phân giác của góc $\widehat{ABC}$

Xét tứ giác $BHIK$ có $HI//BK$, $BH//KI$ nên tứ giác $BHIK$ là hình bình hành

Mà BI là phân giác $\widehat{HBK}$ Suy ra tứ giác $BHIK$ là hình thoi (dấu hiệu nhận biết hình thoi).

4. Gọi P, Q lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK, tam giác MCK và E là trung điểm của đoạn PQ. Vẽ đường kính ND của đường tròn (O). Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.



Do $\widehat{NBK} = \widehat{BMK} \Rightarrow BN$ là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp ΔBMK

Ta có $BD \perp BN$ ($\widehat{NBD}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\Rightarrow B \in BD$ và trung trực BK

Chứng minh tương tự ta được $Q \in CD$ và trung trực KC

Ta chứng minh được ΔBPK, ΔQKC, ΔBDC cân

$\Rightarrow \widehat{PBK} = \widehat{PKB} = \widehat{QCK}$

$\widehat{PBK} = \widehat{QKC}$ (hai góc đồng vị)

$\Rightarrow QK//DP$

$\widehat{PKB} = \widehat{DCK}$ (hai góc đồng vị)

$\Rightarrow QK//DP$

Suy ra tứ giác $DQKH$ là hình bình bành

$\Rightarrow PQ$ cắt DK tại trung điểm của mỗi đường

Mà E là trung điểm PQ

$\Rightarrow E$ là trung điểm của DK

Vậy D, E, K thẳng hàng.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2018 - 2019)

Cho đường tròn $(O;R)$ với dây cung AB không đi qua tâm. Lấy S là điểm bất kì trên tia đối của tia AB (S khác A). Từ điểm S vẽ hai tiếp tuyến SC và SD với đường tròn $(O;R)$ sao cho điểm C nằm trên cung nhỏ AB (C, D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB.

1. Chứng minh năm điểm điểm C, D, H, O, S cùng thuộc một đường tròn đường kính SO.
2. Khi $SO = 2R$, hãy tính độ dài đoạn thẳng SD theo R và tính số đo $\widehat{CSD}$.
3. Đường thẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng SC, cắt đoạn thẳng CD tại điểm K. Chứng minh tứ giác $ADHK$ là tứ giác nội tiếp và đường thẳng BK đi qua trung điểm của đoạn thẳng SC.
4. Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng BD và F là hình chiếu vuông góc của điểm E trên đường thẳng AD. Chứng minh rằng, khi điểm S thay đổi trên tia AB thì điểm F luôn thuộc một đường tròn cố định.

Ví dụ: Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB cố định, dây CD di động vuông góc với AB tại H nằm giữa A và O, lấy điểm F thuộc cung AC nhỏ, DF cắt dây CD tại E, AF cắt tia DC tại I,

1. Chứng minh rằng các điểm A, H, E, F cùng thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh rằng: $HA.HB = HE.HI$.
3. Đường tròn ngoại tiếp tam giác IFE cắt AE tại M. Chứng minh M thuộc đường tròn $(O;R)$.
4. Tìm vị trí điểm H trên OA để chu vi tam giác OHD lớn nhất.

Ví dụ: Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ Vẽ tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy điểm M bất kỳ, vẽ MI vuông góc với AB, MK vuông góc với AC ($\in AB$, $K \in AC$).

1. Chứng minh rằng các điểm A, I, M, K cùng thuộc một đường tròn.

2. Vẽ MP vuông góc với BC ($P \in BC$). Chứng minh rằng: $\widehat{MPK} = \widehat{MBC}$.

3. Chứng minh $MI.MK = MP^2$.

4. Xác định vị trí điểm M trên cung nhỏ BC để tích $MI.MK.MP$ đạt giá trị lớn nhất.

Ví dụ: Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ kẻ hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Lấy điểm I thuộc dây BC sao cho $IB < IC$. Kẻ đường thẳng d vuông góc với OI tại I, đường thẳng d cắt các tia AB, AC lần lượt tại E và F.

1) Chứng minh các tứ giác $OIBE$, $OIFC$ là các tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh: ΔOEF là tam giác cân.

3) Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OA, nó cắt tia AB, AC lần lượt tại P và Q. Tìm vị trí của A để diện tích ΔAPQ nhỏ nhất.

H. CÁC BÀI HÌNH HỌC ĐỂ LUYỆN TẬP PHẢN XẠ THEO MÔ HÌNH

Ví dụ: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính BC, A là điểm nằm trên tia đối của tia BC. Vẽ tiếp tuyến AD (D là tiếp điểm) và dây DE song song với BC, M là giao điểm của AE với đường tròn $(O; R)$, N là điểm chính giữa của AB và DM. Chứng minh: $\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC} = \dfrac{1}{AN}$. (Gợi ý Chứng minh $AN^2 = NM.ND = NB.NC$.)

Ví dụ: Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) dựng các tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MCD với đường tròn (A, B là các tiếp điểm, $MC < MD$). Gọi E là trung điểm của CD.

1) Chứng minh 5 điểm M, A, E, O, B cùng thuộc đường tròn.

2) Chứng minh: $MC.MD = MB^2$.

3) Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với OA, nó cắt AB tại F. Chứng minh tứ giác $BCFE$ là tứ giác nội tiếp.

4) Gọi H là giao điểm của AB và CD. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{MC} + \dfrac{1}{MD} = \dfrac{2}{MH}$. (Gợi ý: Chứng minh $MA^2 = MH.ME$ và $MA^2 = MD.MC \Rightarrow MH.ME = MC.MD \Leftrightarrow 2MH.ME = 2MC.MD \Leftrightarrow MH.(ME + ED + ME - EC) = 2MC.MD \Leftrightarrow MH.(MD + MC) = MC.MD$).

Ví dụ: Cho đường tròn $(O; R)$ với dây $AB < 2R$ cố định. Gọi C là điểm thuộc cung lớn AB sao cho tam giác ABC nhọn, M và N lần lượt là điểm chính giữa cung nhỏ AB và cung nhỏ AC. Gọi I là giao của BN và CM. Dây MN cắt AB và AC lần lượt tại H và K. Chứng minh rằng:

1) Tứ giác $BMHI$ nội tiếp.

2) $NI.NB = NH.NM$.

3) KH là phân giác của góc AKI, IA là phân giác cuả KIH.

4) Khi điểm C di động trên cung lớn AB và thỏa mãn điều kiện đề bài thì tổng 2 bán kính của 2 đường tròn ngoại tiếp tam giác NAH và NBH có giá trị không đổi.

Ví dụ: Cho đường tròn (O) có BC là dây cung cố định nhỏ hơn đường kính, A là điểm di động trên cung lớn BC (A không trùng B và C). Gọi AD, BE, CF là các đường cao của ΔABC, EF cắt

BC tại M. Qua D kẻ đường thẳng song song với EF cắt AB tại P và cắt AC tại Q.

1) Chứng minh tứ giác $BPCQ$ nội tiếp.

2) Chứng minh tam giác DFP cân tại D.

3) Gọi N là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $MF.ME = MD.MN$.

4) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ luôn đi qua một điểm cố định khi A di động trên cung lớn BC.

Ví dụ: Cho điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ các tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là các tiếp điểm). Vẽ cát tuyến MCD không đi qua tâm O (C nằm giữa M và D), OM cắt AB và (O) lần lượt tại H và I. Chứng minh:

1) Chứng minh tứ giác $MAOB$ nội tiếp và đường tròn này đi qua trung điểm E của CD.

2) Chứng minh: $OH.OM + MC.MD = MO^2$.

3) Chứng minh CI là phân giác góc $\widehat{MCH}$.

4) Cho các điểm M, C, D cố định, đường tròn (O) thay đổi nhưng luôn qua C, D. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác OHE luôn đi qua một điểm cố định.

Ví dụ: Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính BC. Lấy điểm A trên tia đối của tia CB. Kẻ tiếp tuyến AF của nửa đường tròn (O) (với F là tiếp điểm), tia AF cắt tiếp tuyến Bx của nửa đường tròn tại D. Cho biết $AF = \dfrac{4R}{3}$.

1) Chứng minh tứ giác $OBDF$ nội tiếp. Xác định tâm I đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OBDF$.

2) Tính côsin góc $\widehat{DAB}$.

3) Kẻ $OM \perp BC$ ($M \in AD$). Chứng minh $\dfrac{BD}{DM} - \dfrac{DM}{AM} = 1$

4) Tính diện tích phần hình tứ giác $OBDM$ ở bên ngoài nửa đường tròn (O) theo R.

Ví dụ: Cho tam giác ABC có hai đường cao BE, CF, cắt nhau tại H. Gọi E' là điểm đối xứng H qua AC, F' là điểm đối xứng H qua AB. Chứng minh:

1) Tứ giác $BCE'F'$ nội tiếp đường tròn (O)

2) Tứ giác $AE'CF'$ nội tiếp. Từ đó suy ra A nằm trên (O).

3) $AO \perp EF$.

4) Khi A chạy trên (O) thì bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF không đổi.

Ví dụ: Cho tam giác ABC nhọn, có H là trực tâm, nội tiếp đường tròn tâm O đường kính $AM = 2R$.

1) Chứng minh tứ giác $BHCM$ là hình bình hành.

2) Gọi N là điểm đối xứng của M qua AB. Chứng minh tứ giác $AHBN$ nội tiếp được trong một đường tròn.

3) Gọi E là điểm đối xứng của M qua AC. Chứng minh ba điểm N, H, E thẳng hàng.

4) Giả sử $AB = R\sqrt{3}$. Tính diện tích phần chung của đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AHBN$.

CHỦ ĐỀ V: BÀI TOÁN MIN - MAX, GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

A. LÝ THUYẾT

1. Bất đẳng thức Cô - si

- Bất đẳng thức Cô - si cho hai số a, b không âm ta có:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Chú ý: Với hai số a, b bất kỳ ta luôn có:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

- Bất đẳng thức Cô - si cho ba số a, b và c không âm ta có:

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Chú ý: Đây là bất đẳng thức nằm ngoài chương trình, SGK hiện hành nếu muốn áp dụng học sinh cần chứng minh trước khi hoặc sau khi sử dụng như một bổ đề.

2. Một số bổ đề thường dùng khác

Bổ đề 1. Với mọi số thực a, b ta luôn có.

$$+)\ (a+b)^2 \geq 4ab \qquad\qquad +)\ a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$$

Dấu " = " xảy ra $a = b$.

Bổ đề 2. Với mọi số thực a, b, c ta luôn có.

$$+)\ a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab + bc + ca$$

Dấu " = " xảy ra $a = b = c$.

Bổ đề 3. Với mọi số thực dương a, b ta luôn có.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

Dấu " = " xảy ra $a = b$.

Bổ đề 4. Với mọi số thực không âm a, b ta luôn có.

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$$

Dấu " = " xảy ra $a = b$.

Bổ đề 5. Với ba số thực không âm a, b và c ta luôn có.

$$\sqrt{a+b+c} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{3(a+b+c)}$$

Dấu " = " xảy ra $a = b = c$.

Chú ý: Với mỗi bất đẳng thức trên, ta cần nhớ và vận dụng linh hoạt cả hai chiều xuôi và chiều ngược của nó.

3. Giải phương trình chứa căn thức

PHƯƠNG PHÁP CHUNG:

Cách 1: Sử dụng biến đổi đại số.

Cách 2: Đặt ẩn phụ.

Cách 3: Đánh giá.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

BÀI TOÁN MIN -MAX

Dạng 1: Kĩ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức Cô - si.

Phương pháp: Dự đoán trước dấu bằng (tức điểm rơi) của bài toán, từ đó điều chỉnh hệ số để đảm bảo việc dấu bằng luôn xảy ra.

Ví dụ: Cho các số $x \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức

$$A = x + \frac{2}{x}.$$

Ví dụ: Cho các số x, $y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức

a) $A = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

b) $B = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2}$.

c) $C = \dfrac{(x-y)^2}{xy} + \dfrac{6xy}{(x+y)^2}$.

d) $D = \dfrac{(x+y+1)^2}{xy+x+y} + \dfrac{xy+x+y}{(x+y+1)^2}$.

Hướng dẫn

a) Ta có $A = \dfrac{x^2+y^2}{xy} + \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Đặt $t = \dfrac{x^2+y^2}{xy} \geq 2$ (cô si).

$A = t + \dfrac{1}{t}$ với $t \geq 2$.

Dự đoán $A_{\min}$ đạt được tại $t = 2$. Ta có $B = nt + \dfrac{1}{t} + x - nt$. Dấu " = " xảy ra khi $\begin{cases} nt = \dfrac{1}{t} \\ t = 2 \end{cases}$.

Do đó ta có $A = \dfrac{3t}{4} + \left(\dfrac{t}{4} + \dfrac{1}{t}\right)$. Áp dụng bất đẳng thức Cô - si $\dfrac{4}{t} + \dfrac{1}{t} \geq 2\sqrt{\dfrac{t}{4}.\dfrac{1}{t}} = 1$.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{t}{4} = \dfrac{1}{t} \Leftrightarrow t = 2$ (vì $t \geq 2$).

Vậy $A_{\min} = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x = y$.

Ví dụ: Cho các số x, $y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức

a) $A=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{2xy}{x^2+y^2}$.

b) $B=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{xy}{x^2-xy+y^2}$.

c) $C=\frac{(x-y)^2}{xy}+\frac{4xy}{(x+y)^2}$.

d) $D=\frac{(x+y+2)^2}{xy+2(x+y)}+\frac{xy+2(x+y)}{(x+y+2)^2}$.

Hướng dẫn

a) Ta có $A=\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{2xy}{x^2+y^2}$. Đặt $t=\frac{x^2+y^2}{xy}\geq 2$ (cô si).

$A=t+\frac{2}{t}$ với $t\geq 2$.

Từ $A=t+\frac{2}{t}=\frac{t}{2}+\left(\frac{t}{2}+\frac{2}{t}\right)\geq 3$.

Vậy $A_{\min}=3\Leftrightarrow t=2\Leftrightarrow x=y$.

Ví dụ: Cho các số x, $y>0$ thỏa mãn $x+y\leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức

a) $A=x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

b) $B=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)$.

c) $C=x^2+y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}$.

d) $D=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2$.

Hướng dẫn

a) Ta có $A=\left(4x+\frac{1}{x}\right)+\left(4y+\frac{1}{y}\right)-3(x+y)\geq 5$.

Vậy $A_{\min}=5\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$.

Ví dụ: Cho các số x, $y>0$ thỏa mãn $x+y\leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức

a) $A=x+y+\frac{2}{x}+\frac{2}{y}$.

b) $B=\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(y+\frac{2}{y}\right)$.

c) $C=x^2+y^2+\frac{4}{x^2}+\frac{4}{y^2}$.

d) $D=\left(x+\frac{2}{x}\right)^2+\left(y+\frac{2}{y}\right)^2$.

Hướng dẫn

a) Ta có $A=\left(2x+\frac{2}{x}\right)+\left(2y+\frac{2}{y}\right)-(x+y)\geq 6$.

Vậy $A_{\min}=6\Leftrightarrow x=y=1$.

Ví dụ: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh:

a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leq\sqrt{3}$;

b) $\sqrt{x+2y}+\sqrt{y+2z}+\sqrt{z+2x}\leq 3$;

c) $\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{yz}+\sqrt[3]{zx}\leq\sqrt[3]{3}$;

d) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}\leq\sqrt[3]{9}$;

e) $\sqrt[3]{x+y}+\sqrt[3]{y+z}+\sqrt[3]{z+x}\leq\sqrt[3]{18}$.

Hướng dẫn

a) Ta có $\sqrt{x}=\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{3}}\geq\frac{1}{2\sqrt{3}}(3x+1)$.

Tương tự $\sqrt{y}=\geq\frac{1}{2\sqrt{3}}(3y+1)$; $\sqrt{z}=\geq\frac{1}{2\sqrt{3}}(3z+1)$.

Do đó $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \le \sqrt{3}$. Dấu " = " xả ra $\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

Vậy $A_{\min}=5 \Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow x=y=\dfrac{1}{2}$.

b) Áp dụng cô si ta có: $\sqrt{(x+2y).1} \le \dfrac{x+2y+1}{2}$.

Tương tự $\sqrt{(y+2z).1} \le \dfrac{y+2z+1}{2}$; $\sqrt{(z+2x).1} \le \dfrac{z+2x+1}{2}$

Vậy $\sqrt{x+2y}+\sqrt{y+2z}+\sqrt{z+2x} \le \dfrac{3(x+y+z)+3}{2}=3$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

c) Ta có $\sqrt[3]{xy}=\dfrac{\sqrt[3]{3x.3y.1}}{\sqrt[3]{9}}\dfrac{3x+3y+1}{3\sqrt[3]{9}}$.

Tương tự $\sqrt[3]{yz}$; $\sqrt[3]{zx}$.

Vậy $\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{yz}+\sqrt[3]{zx} \le \sqrt[3]{3}$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

Ví dụ: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh:

a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \le \sqrt{3}$;

b) $\sqrt{x+2y}+\sqrt{y+2z}+\sqrt{z+2x} \le 3\sqrt{3}$;

c) $\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{yz}+\sqrt[3]{zx} \le 3$;

d) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z} \le 3$;

e) $\sqrt[3]{x+y}+\sqrt[3]{y+z}+\sqrt[3]{z+x} \le 3\sqrt[3]{2}$.

Dạng 2: Kĩ thuật khai thác giả thiết.

Phương pháp: Sử dụng những phép biến đổi tương đương (ẩn phụ, tách phép chia, chia...), hoặc sử dụng tính chất bắc cầu của bất đẳng thức.

Ví dụ: Cho các số x, y và thỏa mãn $\sqrt{x+2}-y^3=\sqrt{y+2}-x^3$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

i) $A=x^2+2xy-2y^2+2y+10$ ii) $B=\dfrac{x^2+7}{y+3}+\dfrac{y^2+7}{x+3}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $C=\dfrac{x}{x^2+4}+\dfrac{y}{y^2+4}$.

Hướng dẫn

Điều kiện: $x \ge -2$, $y \ge -2$. Trục căn thức ở mẫu ta có

$\dfrac{x-y}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}}+(x-y)(x^2+xy+y^2) \Leftrightarrow (x-y)\left[\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}}+(x^2+xy+y^2)\right]=0$

$\Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$.

Vì $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}}+(x^2+xy+y^2)>0$, $\forall x,y \ge -2$.

a) i) Ta có $A=x^2+2x+10=(x+1)^2+9 \ge 9$, $\forall x \ge -2$.

Vậy $A_{\min}=9 \Leftrightarrow x=y=-1$.

ii) $B=\dfrac{2(x^2+7}{x+3}=2\left[x+3+\dfrac{16}{x+3}-6\right] \ge 4$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow (x+3)^2=16 \Leftrightarrow x=1$

$\Rightarrow y=1$.

Vậy $B_{\min}=4 \Leftrightarrow x=y=1$.

b) $C=\dfrac{2x}{x^2+4}$.

Xét $\dfrac{1}{C}=\dfrac{x^2+4}{2x}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$.

Nếu $x>0\Rightarrow \dfrac{1}{C}\geq 2\Leftrightarrow 0<C\leq \dfrac{1}{2}$.

Nếu $-2<x<0\Rightarrow \dfrac{1}{C}\leq 2\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\leq x<0$.

Vậy $C_{\max}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=y=2$, $C_{\min}=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=y=-2$.

Ví dụ: Cho các số x, y thỏa mãn $\sqrt{x+2}-y^3=\sqrt{y+2}-x^3$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

i) $A=x^2-xy+y^2+2x+2018$ ii) $B=\dfrac{x^2+5}{y+2}+\dfrac{y^2+5}{x+2}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $C=\dfrac{x}{x^2+9}+\dfrac{y}{y^2+9}$.

Ví dụ: Cho các số x, y, $z>0$ thỏa mãn $2(x+y+z)+xy+yz+zx=9xyz$. Chứng minh: $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}\geq 3$.

Ví dụ: Cho các số $x\geq 1$, $y\geq 1$, $z\geq 1$ thỏa mãn $x+y+z=4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x^2+y^2+z^2$.

Ví dụ: Cho số thực x, y thỏa mãn $x-\sqrt{x+1}=\sqrt{y+1}-y$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x+y+2017$.

Ví dụ: Cho các số thực $x>0$, $y>0$ thỏa mãn $xy+4\leq 2y$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất $A=\dfrac{x^2+2y^2}{xy}$.

b) Tìm trị lớn nhất của biểu thức:

i) $B=\dfrac{xy}{x^2+2y^2}$ $C=\dfrac{xy}{(x+y)^2}$.

Ví dụ: Cho các số thực $x>0$, $y>0$ thỏa mãn $xy+9\leq 3x$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất $A=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

b) Tìm trị lớn nhất của biểu thức:

i) $B=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ $C=\dfrac{xy}{(x+4y)^2}$.

Dạng 3: Kĩ thuật "Cô - si ngược dấu".

Phương pháp: Sử dụng những phép biến đổi tương đương (như thêm bớt hoặc tách ghép...) để đưa bài toán từ "trạng thái ngược dấu" về "trạng thái xuôi dấu".

Ví dụ: Cho các số a, b, $c>0$ và thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh:

a) $\dfrac{a^3}{a^2+b^2}+\dfrac{b^3}{b^2+c^2}+\dfrac{c^3}{c^2+a^2}\geq\dfrac{3}{2}$. b) $\dfrac{a}{1+b^2}+\dfrac{b}{1+c^2}+\dfrac{c}{1+a^2}\geq\dfrac{3}{2}$.

c) $\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}+\dfrac{1}{c^2+1}\geq\dfrac{3}{2}$. d) $\dfrac{a+1}{1+b^2}+\dfrac{b+1}{1+c^2}+\dfrac{c+1}{1+a^2}\geq 3$.

e) $\dfrac{a}{b^3+ab}+\dfrac{b}{c^3+bc}+\dfrac{c}{a^3+ca}\geq\dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn

a) Ta có $\dfrac{a^3}{a^2+b^2}=a-\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}\geq a-\dfrac{b}{2}$. Tương tự $\dfrac{b^3}{b^2+c^2}\geq b-\dfrac{c}{2}$, $\dfrac{c^3}{c^2+a^2}\geq c-\dfrac{a}{2}$.

Do đó $\dfrac{a^3}{a^2+b^2}+\dfrac{b^3}{b^2+c^2}+\dfrac{c^3}{c^2+a^2}\geq\dfrac{3}{2}\geq\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{3}{2}$. Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

b) Ta có $\dfrac{a}{1+b^2}=a-\dfrac{ab^2}{1+b^2}\geq a-\dfrac{ab}{2}$. Tương tự $\dfrac{b}{1+c^2}\geq b-\dfrac{bc}{2}$, $\dfrac{c}{1+a^2}\geq c-\dfrac{ca}{2}$.
$VT=a+b+c-\dfrac{ab+bc+ca}{2}\geq\dfrac{3}{2}$. Do $ab+bc+ca\leq\dfrac{(a+b+c)^2}{2}=3$.
Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.
c) Ta có $\dfrac{1}{a^2+1}=1-\dfrac{a^2}{a^2+1}\geq 1-\dfrac{a}{2}$. Tương tự $\dfrac{1}{b^2+1}\geq 1-\dfrac{b}{2}$, $\dfrac{1}{c^2+1}\geq 1-\dfrac{c}{2}$.
$VT\geq 3-\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{3}{2}$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.
d) Ta có $\dfrac{a+1}{b^2+1}=a+1-\dfrac{(a+1)b^2}{b^2+1}\geq a+1-\dfrac{(a+1)b}{2}$.
Tương tự $\dfrac{b+1}{c^2+1}\geq b+1-\dfrac{(b+1)c}{2}$, $\dfrac{c+1}{a^2+1}\geq c+1-\dfrac{(c+1)a}{2}$.
$VT\geq 3+\dfrac{a+b+c}{2}-\dfrac{ab+bc+ca}{2}=3$.
Vì $ab+bc+ca\leq\dfrac{(a+b+c)^2}{3}=a+b+c=3$.
Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.
e) Ta có $\dfrac{a}{b^3+ab}=\dfrac{1}{b}-\dfrac{b}{a+b^2}\geq\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{2\sqrt{\sqrt{a}}}$.
Tương tự $\dfrac{b}{c^3+bc}\geq\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{2\sqrt{b}}$, $\dfrac{c}{a^3+ca}\geq\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2\sqrt{c}}$.
$VT\geq\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{2a}-\dfrac{1}{2\sqrt{\sqrt{b}}}-\dfrac{1}{2\sqrt{\sqrt{c}}}$.
Áp dụng bất đẳng thức cô si $\dfrac{1}{2\sqrt{\sqrt{a}}}\leq\dfrac{1}{4a}+\dfrac{1}{4}$ và $\dfrac{1}{a}\geq 2-a$.
Do đó $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2a}\geq\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{4a}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3a}{4}-\dfrac{1}{4}\geq\dfrac{3}{4}(2-a)-\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}-\dfrac{3a}{4}$.
Suy ra $VT\geq\dfrac{15}{4}-\dfrac{3}{4}(a+b+c)=\dfrac{3}{2}$.
Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Ví dụ: Cho các số a, b, $c>0$ và thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh:

a) $\dfrac{a^3}{a^2+b^2}+\dfrac{b^3}{b^2+c^2}+\dfrac{c^3}{c^2+a^2}\geq\dfrac{1}{2}$. b) $\dfrac{a}{1+9b^2}+\dfrac{b}{1+9c^2}+\dfrac{c}{1+9a^2}\geq\dfrac{1}{2}$.
c) $\dfrac{1}{9a^2+1}+\dfrac{1}{9b^2+1}+\dfrac{1}{9c^2+1}\geq\dfrac{3}{2}$. d) $\dfrac{a+1}{1+9b^2}+\dfrac{b+1}{1+9c^2}+\dfrac{c+1}{1+9a^2}\geq 2$.

Ví dụ: Cho các số dương a, b, c có thỏa mãn $a.b.c=1$. Chứng minh:

$$a+b+c\geq\frac{a+1}{b+1}+\frac{b+1}{c+1}+\frac{c+1}{a+1}$$

.

Hướng dẫn

Ta có $a+1-\dfrac{a+1}{b+1}=\dfrac{(a+1)b}{b+1}$.

Ta đưa bài toán về chứng minh $\dfrac{(a+1)b}{b+1}+\dfrac{(b+1)c}{c+1}+\dfrac{(b+1)a}{a+1}\geq 3$.

Áp dụng bất đẳng thức cô si cho ba số hạng ở VT với $abc=1$. Ta được điều cần chứng minh.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Ví dụ: Cho các số dương a, b, c có thỏa mãn $a.b.c=1$. Chứng minh:

$$a+b+c \geq \frac{a+2}{b+2}+\frac{b+2}{c+2}+\frac{c+2}{a+2}$$

.

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

Dạng 1: Sử dụng biến đổi đại số.

Phương pháp:

- Thêm bớt hạng tử.
- Nâng lên lũy thừa cả hai vế.
- Phép nhân liên hợp.

...

Từ đó các phép biến đổi đại số đó ta đi giải phương trình đơn giản hơn mà ta đã biết cách giải.

Ví dụ: Giải phương trình

a) $\sqrt{x^2+\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}-\sqrt{x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}}}=\frac{1}{3}(3x^3-x^2+6x-2)$ (1).

b) $\sqrt{x^2-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}}}=\frac{1}{2}(2x^3+x^2+2x+1)$.

Hướng dẫn

a) Điều kiện: $VP\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{1}{3}$.

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{x^2+\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}-\sqrt{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}}=\frac{1}{3}(3x-1)(x^2+2)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}(3x-1)(x^2+2)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}(3x-1)(x^2+2)$$
$$\Leftrightarrow x-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(3x-1)(x^2+2)$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}.$$

Vậy $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Ví dụ: Giải phương trình

a) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$ (*).

b) $3\sqrt{5x+2}=x^2+2$.

c) $\sqrt{x+\sqrt{2x-5}-2}+\sqrt{x-3\sqrt{2x-5}+2}=2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn

a) Điều kiện: $-\frac{1}{3}\leq x\leq 6$.

$$(*)\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x+1}-4\right)+\left(1-\sqrt{6-x}\right)3x^2-14x-5=0$$
$$\Leftrightarrow (x-5)\left[\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+(3x+1)\right]=0$$

Với $-\dfrac{1}{3} \le x \le 6$ thì $\left[\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \dfrac{1}{\sqrt{6-x}+1} + (3x+1)\right] > 0$

Vậy $S = \{5\}$.

Ví dụ: Giải phương trình

a) $\sqrt[3]{x^2-1} + x = \sqrt{x^3-2}$.

b) $\sqrt{x^2-2x+17} - 5|x-1| = 4$ (**).

Hướng dẫn

b) $(**) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+16} - 5|x-1| = 4$

Sử dụng bất đẳng thức $\sqrt{a^2+b^2} \le |a| + |b|$ nên

$\sqrt{(x-1)^2+16} - 5|x-1| \le |x-1| + 4 = 4 - |x-1|$

Do đó $4 \le 4 - 4|x-1| \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy $S = \{1\}$.

Dạng 2: Đặt ẩn phụ.

Phương pháp: Đặt một ẩn, hai hoặc ba biểu thức phục tạp bằng ẩn mới (gọi là ẩn phụ) và giải phương trình thu được sau đó tìm nghiệm.

Loại 1: Sử dụng một ẩn phụ

Ví dụ: Giải phương trình

a) $\sqrt{x^4+x^2+1} + \sqrt{3}(x^2+1) = 3\sqrt{3}x$.

b) $2x^2 + \sqrt{1-x} + 2x\sqrt{1-x^2} = 1$.

Hướng dẫn

a) Với $x = 0$ không là nghiệm của phương trình trên.

Với $x \neq 0$ ta chia hai vế của phương trình cho x ta được

$\sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 1} + \sqrt{3}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 3\sqrt{3}$. Đặt $t = x + \dfrac{1}{x} \ge 2$ (cô si).

Phương trình trở thành: $\sqrt{t^2-1} = \sqrt{3}(3-t) \Leftrightarrow \begin{cases} t \le 3 \\ t^2 - 9t + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$ (thỏa mãn).

Với $t = 2 \Leftrightarrow x + \dfrac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy $S = \{1\}$.

Loại 2: Sử dụng hai ẩn phụ

Ví dụ: Giải phương trình

a) $\sqrt{4x^2+5x+1} - 2\sqrt{x^2-x+1} = 9x - 3$.

b) $\sqrt{x^2+3} + \sqrt{10-x^2} = 5$.

Hướng dẫn

a) Đặt $\begin{cases} \sqrt{4x^2+5x+1} = a \\ 2\sqrt{x^2-x+1} = b \end{cases}$. Điều kiện: $a > 0$, $b > 0$.

Phương trình trên trở thành: $a - b = a^2 - b^2 \Leftrightarrow (a-b)(a+b-1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a + b = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2+5x+1 = 4x^2-4x+1 \\ \sqrt{4x^2+5x+1} + 2\sqrt{x^2-x+1} = 1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3} \\ \sqrt{4x^2+5x+1} = 1 - 2\sqrt{x^2-x+1} \text{ vô nghiệm} \end{array}\right.$

Vậy $S = \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

Loại 3: Sử dụng cả ẩn phụ và ẩn chính để đưa về hệ phương trình đối xứng

Ví dụ: Giải phương trình

a) $x^3 + 1 = 2\sqrt{2x+1}$.

b) $x^3 - 3\sqrt[3]{3x+2} = 2$.

Hướng dẫn

a) Phương trình $\Leftrightarrow x^3 + 2x = 2x - 1 + 2\sqrt[3]{2x-1}$. Đặt $t = \sqrt[3]{2x-1}$.

Ta được $x^3 + 2x = t^3 + 2t \Leftrightarrow (x-t)(x^2+xt+t^2) + 2(x-t) = 0$

$\Leftrightarrow (x-t)(x^2+xt+t^2+2) = 0$

Vì $x^2 + xt + t^2 + 2 = \left(x + \dfrac{t}{2}\right)^2 + \dfrac{3t^2}{4} + 2 > 0$.

Nên $x = t \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Vậy $S = \left\{1; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Loại 4: Sử dụng cả ẩn phụ và ẩn chính để đưa về phương trình bậc hai một ẩn

Ví dụ: Giải phương trình

a) $2x^2 + 3x + 7 = (x+5)\sqrt{2x^2+1}$

b) $x^2 + 3x + 5 = (x+3)\sqrt{x^2+5}$

c) $\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}+2x-5\right) = x$.

Hướng dẫn

a) Phương trình $2x^2 + 1 - (x+5)\sqrt{2x^2+1} + 3x + 6 = 0$. Đặt $t = 2\sqrt{x^2+1}$ $(t > 1)$.

Phương trình trở thành: $t^2 - (x+5)t + 3x + 6 = 0$.

$\Delta = [-(x+5)]^2 - 4(3x+6) = (x-1)^2 \geq 0\ \forall x$.

Do đó $\left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=x+2 \end{array}\right.$.

Với $t=3 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Với $t=x+2 \Leftrightarrow x=2 \pm \sqrt{\sqrt{7}}$.

Vậy $S=\left\{\pm 2; 2 \pm \sqrt{7}\right\}$.

Dạng 3: Đánh giá.

Phương pháp: Phương trình $f(x)=g(x)$ nếu luôn có $\begin{cases} f(x) \geq m \\ g(x) \leq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=m \\ g(x)=m \end{cases}$.

Ví dụ: Giải phương trình.

a) $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$.

b) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}=\sqrt{x+9}$.

c) $13\sqrt{x^2-x^4}+9\sqrt{x^2+x^4}=16$.

Hướng dẫn

a) Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{3(x+1)^2+4}+\sqrt{5(x+1)^2+9}=5-(x+1)^2$

Ta có: $\begin{cases} VT \geq 5 \\ VP \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow VT=VP=5$.

Dấu " $=$ " xả ra $\Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Vậy $S=\left\{\dfrac{21+\sqrt{41}}{2}\right\}$.

b) Điều kiện: $x \geq 0$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki: $(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$.

Dấu " $=$ " xảy ra khi $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}$.

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}\right)^2 \leq \left[(2\sqrt{2})^2+x+1\right]\left[\frac{1}{x+1}+\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)^2\right]=x+9.$$

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{7}$.

Vậy $S=\left\{\dfrac{1}{7}\right\}$.

C. LUYỆN TẬP SÂU VÀ CÓ CHỦ ĐÍCH

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + 2\sqrt{x}$

Hướng dẫn

Điều kiện: $0 \le x \le 1$.

Với $a,\ b \ge 0$ ta có: $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b \ge a + b$

$\Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} \ge \sqrt{a+b}$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a = 0$ hoặc $b = 0$.

Áp dụng vào bài toán ta có: $\sqrt{1-x} + \sqrt{x} \ge \sqrt{1-x+x} = 1$, $\sqrt{1+x} + \sqrt{x} \ge \sqrt{1} + 0 = 1$

$\Rightarrow P \ge 1 + 1 = 2$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 2$ khi $x = 0$.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2017 - 2018)

Cho các số $a,\ b,\ c$ thỏa mãn $a \ge 1,\ b \ge 1,\ c \ge 1$ và $ab + bc + ca = 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$

Hướng dẫn

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có

$a^2 + b^2 \ge 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab$

$b^2 + c^2 \ge 2\sqrt{b^2c^2} = 2bc$

$c^2 + a^2 \ge 2\sqrt{c^2a^2} = 2ca$

$\Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \ge 2(ab + bc + ca)$

$\Rightarrow P \ge 9$

$$\text{Vậy } MinP = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 \\ b^2 = c^2 \\ c^2 = a^2 \\ ab + bc + ca = 9 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \sqrt{3}.$$

Ta có $a \ge 1,\ b \ge 1,\ c \ge 1$ nên

$$\begin{cases} (a-1)(b-1) \ge 0 \\ (b-1)(c-1) \ge 0 \\ (c-1)(a-1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab - a - b + 1 \ge 0 \\ bc - b - c + 1 \ge 0 \\ ca - c - a + 1 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow ab + bc + ca - 2(a + b + c) + 3 \ge 0$$

$\Leftrightarrow a + b + c \le \dfrac{ab + bc + ca + 3}{2} \Leftrightarrow (a + b + c)^2 \le 36$ vì $a + b + c \ge 3$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \le 36$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \le 36 - 2(ab + bc + ca) \Leftrightarrow P \le 18$

Vậy $MaxP = 18 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(b-1) \geq 0 \\ (b-1)(c-1) \geq 0 \\ (c-1)(a-1) \geq 0 \\ a^2+b^2+c^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=1, c=4 \\ a=4, b=c=1 \\ a=c=1, b=4 \end{cases}$

Vậy $MinP = 9 \Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$.

$MaxP = 18 \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=1, c=4 \\ a=4, b=c=1 \\ a=c=1, b=4 \end{cases}$

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2016 - 2017)

Với các số thực x, y thỏa mãn $x - \sqrt{x+6} = \sqrt{y+6} - y$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x+y$.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2015 - 2016)

Với các số thực a, b thỏa mãn $a^2+b^2 = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \dfrac{ab}{a+b+2}$.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2014 - 2015)

Với a, b, c là các số dương thỏa mãn $a+b+c=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
$Q = \sqrt{2a+bc} + \sqrt{2b+ac} + \sqrt{2c+ab}$.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2013 - 2014)

Với a, b, c là các số dương thỏa mãn $a+b+c+ab+bc+ca = 6abc$. Chứng minh $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \geq 3$.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2012 - 2013)

Với x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x \geq 2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

Ví dụ: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x+y \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\sqrt{1+x^2y^2}.$$

Hướng dẫn

Ta có $P = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)\sqrt{1+x^2y^2} \geq \dfrac{2}{\sqrt{xy}}\sqrt{1+x^2y^2} = 2\sqrt{\dfrac{1}{xy} + xy} = 2\sqrt{\left(xy + \dfrac{1}{16xy}\right) + \dfrac{15}{16xy}}$

$\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{15}{4.(4xy)}}$ (áp dụng Cô si)

$\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{15}{4(x+y)^2}}$ vì $(4xy \leq (x+y)^2)$

$\geq \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{15}{4}}$ vì $(x+y \leq 1)$

$= \sqrt{17}$

Vậy $MinP = \sqrt{17} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x+2y+3z\geq 20$
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x+y+z+\dfrac{3}{x}+\dfrac{9}{2y}+\dfrac{4}{z}$.

Hướng dẫn

Ta có $A=x+y+z+\dfrac{3}{x}+\dfrac{9}{2y}+\dfrac{4}{z}=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{9}{2y}+\dfrac{1}{4}z+\dfrac{4}{z}+\left(\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{3}{4}z\right)$

Áp dụng Cô si ta có:

+) $\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{x}\geq 3$

+) $\dfrac{1}{2}y+\dfrac{9}{2y}\geq 3$

+) $\dfrac{1}{4}z+\dfrac{4}{z}\geq 2$

Và $\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{3}{4}z=(x+2y+3z)\geq 5$

Suy ra $A\geq 13$

Vậy $MinP=13\Leftrightarrow x=2,y=3,z=4.$

Ví dụ: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=abc$
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\dfrac{a}{a^2+ab}+\dfrac{b}{b^2+ac}+\dfrac{c}{c^2+ab}$.

Hướng dẫn

Ta có $A=\dfrac{a}{a^2+ab}+\dfrac{b}{b^2+ac}+\dfrac{c}{c^2+ab}$

$=\dfrac{1}{a+\dfrac{bc}{a}}+\dfrac{1}{b+\dfrac{ac}{b}}+\dfrac{1}{c+\dfrac{ab}{c}}$

$\leq\dfrac{1}{2\sqrt{bc}}+\dfrac{1}{2\sqrt{ac}}+\dfrac{1}{2\sqrt{ba}}$

$\leq\dfrac{1}{4\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a}\right)}$

$=\dfrac{1}{2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)}$

Mà $\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ac}+\dfrac{c}{ab}=1$ nên $2\geq\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{2}{c}$

$P\leq\dfrac{1}{2}$ dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=3$.

Vậy $MinP=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow a=b=c=3$.

Ví dụ: Cho các số dương a, b thỏa mãn $a+b\leq 2\sqrt{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

Hướng dẫn

Ta có: $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2\geq 0\Rightarrow(a+b)^2\geq 4ab\Leftrightarrow\dfrac{(a+b)}{ab}\geq\dfrac{4}{(a+b)}\Leftrightarrow A\geq\dfrac{4}{(a+b)}$

Mà $a+b \le 2\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{4}{(a+b)} \ge \dfrac{4}{2\sqrt{2}}$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}(a-b)^2=0\\ a+b=2\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow a=b=\sqrt{2}$.

Vậy $\mathrm{Min}P=\sqrt{2}$.

Ví dụ: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=x^2-x\sqrt{x}+x+y-\sqrt{y}+1$.

Hướng dẫn

Điều kiện: $y \ge 0$.

Ta có: $A=x^2-x(\sqrt{y}-1)+\dfrac{(\sqrt{y}-1)^2}{4}+\dfrac{3y}{4}-\dfrac{\sqrt{y}}{2}+\dfrac{3}{4}=\left(x-\dfrac{\sqrt{y}-1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\left(\sqrt{y}-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}\ge\dfrac{2}{3}$.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{1}{3}\\ y=\dfrac{1}{9}\end{cases}$.

Vậy $\mathrm{Min}P=\dfrac{2}{3}$.

Ví dụ: Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh: $ab+bc+ca \le a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ca)$.

Hướng dẫn

Ta có $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0 \Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge 2\left(ab+bc+ca\right)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$ (1)

Vì a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên ta có: $a^2 < a.(b+c) \Rightarrow a^2 < ab+ac$.

Tương tự: $b^2 < ab+bc$; $c^2 < ac+bc$.

Suy ra: $a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ca)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ: Giải phương trình: $10\sqrt{x^3+1}=3(x^2+2)$.

Hướng dẫn

Điều kiện: $x \ge -1$ (1). Đặt $a=\sqrt{x+1}$ và $b=\sqrt{x^2-x+1}$, $(a \ge 0; b \ge 0)$ (2)

$\Rightarrow a^2+b^2=x^2+2$. Khi đó phương trình đã cho trở thành: $10.ab=3.(a^2+b^2) \Leftrightarrow (a-3b)(3a-b)=0$

- Nếu $a=3b$ thì từ (2) $\Rightarrow \sqrt{x+1}=3\sqrt{x^2-x+1}$ phương trình này vô nghiệm.
- Nếu $b=3a$ thì từ (2) $\Rightarrow 3\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow x^2-10x-8=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=5+\sqrt{33}\\ x_2=5-\sqrt{33}\end{cases}$ thỏa mãn (1).

Vậy phương trình có hai nghiệm là: $\begin{cases}x_1=5+\sqrt{33}\\ x_2=5-\sqrt{33}\end{cases}$.

Ví dụ: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3+1=2y\\ y^3+1=2x\end{cases}$.

Hướng dẫn

Lấy phương trình trên trừ dưới.

Ví dụ: Cho các số a, b, $c \in [0;1]$. Chứng minh rằng: $a+b^2+c^3-ab-bc-ca \leq 1$.

Hướng dẫn

Vì b, $c \in [0;1] \Rightarrow a^2 \leq b\ c^3 \leq c$. Do đó $a+b^2+c^3-ab-bc-ca \leq a+b+c-ab-bc-ca$ (1)

Mặt khác $a+b^2+c^3-ab-bc-ca = (a-1)(b-1)(c-1)-abc+1$ (2)

Vì a, b, $c \in [0;1]$ nên $a+b^2+c^3-ab-bc-ca = (a-1)(b-1)(c-1)-abc+1 \leq 0$; $-abc \leq 0$

Do đó từ (2) $\Rightarrow a+b^2+c^3-ab-bc-ca \leq 1$ (3)

Từ (1) và (3) $\Rightarrow a+b^2+c^3-ab-bc-ca \leq 1$

Ví dụ: Chứng minh rằng: $\dfrac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)}+\sqrt{b(3b+a)}} \geq \dfrac{1}{2}$ với a, b là các số dương.

Ví dụ: Cho hai số x, y thỏa mãn đẳng thức: $\left(x+\sqrt{x^2+2011}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2011}\right)=2011$. Tính: $x+y$.

Ví dụ: Cho $x>0$, $y>0$ và $x+y \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 3x+2y+\dfrac{6}{x}+\dfrac{8}{y}$.

Ví dụ: Các số thực x, a, b, c thay đổi thỏa mãn hệ $\begin{cases} x+a+b+c=7 \\ x^2+a^2+b^2+c^2=13 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của x.

Ví dụ: Tìm x, y thoả mãn $5x-2\sqrt{x}(2+y)+y^2+1=0$.

Ví dụ: Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng: $1<\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}<2$.

Ví dụ: Cho x, y là hai số thực thoả mãn: $(x+y)^2+7(x+y)+y^2+10=0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x+y+1$.

Ví dụ: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\dfrac{x^4+2x^2+2}{x^2+1}$.

Ví dụ: Tìm m để phương trình ẩn x sau đây có ba nghiệm phân biệt: $x^3-2mx^2+(m^2+1)x-m=0$.

Ví dụ: Với a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{a}{a^2+bc}+\dfrac{b}{b^2+ca}+\dfrac{c}{c^2+ab}$.

Ví dụ: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\dfrac{a^3+b^3}{a^2+b^2}+\dfrac{b^3+c^3}{b^2+c^2}+\dfrac{c^3+a^3}{c^2+a^2}$.

Hướng dẫn

Ta có $\dfrac{a^3+b^3}{a^2+b^2}=\dfrac{a^3}{a^2+b^2}+\dfrac{b^3}{a^2+b^2}=\dfrac{a(a^2+b^2)-ab^2}{a^2+b^2}+\dfrac{b(a^2+b^2)-ba^2}{a^2+b^2}=a+b-\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}-\dfrac{ba^2}{a^2+b^2}$.

Áp dụng cô si.

$\geq a+b-\dfrac{b}{2}-\dfrac{a}{2}=\dfrac{a+b}{2}$. Tương tự $\dfrac{b^3+c^3}{b^2+c^2} \geq \dfrac{b+c}{2}$; $\dfrac{c^3+a^3}{c^2+a^2} \geq \dfrac{c+a}{2} \Rightarrow M \geq \dfrac{2(a+b+c)}{2}=6$.

Dấu " = " xảy ra khi $a = b = c = 2$.

Ví dụ: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = a + b + c + ab + bc + ca$.

Hướng dẫn

Cách 1: Ta có $\begin{cases} a^2 + b^2 \geq 2ab \\ b^2 + c^2 \geq 2bc \\ c^2 + a^2 \geq 2ca \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca = 3.$

Mặt khác $a + b + c \leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{3}\sqrt{3} = 3$.

Vậy $A \leq 3 + 3 = 6$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3 \\ \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của $A = 6 \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Cách 2: $a^2 + b^2 + c^2 = 3 \Leftrightarrow (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 3$.

Đặt $t = a + b + c$, $|t| \leq 3 \Rightarrow ab + bc + ca = \dfrac{t^2 - 3}{2}$.

$\Rightarrow A = t + \dfrac{t^2 - 3}{2} = \dfrac{1}{2}(t + 1)^2 - 2$, $|t| \leq 3 \Leftrightarrow |t| + 1 \leq 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(t + 1)^2 \leq 8 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(t + 1)^2 - 2 \leq 6$.

Vậy giá trị lớn nhất của $A = 6 \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Ví dụ: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \sqrt{3a + 1} + \sqrt{3b + 1} + \sqrt{3c + 1}$.

Hướng dẫn

• Áp dụng bất đẳng thức cô - si $\sqrt{3a + 1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4(3a + 1)} \leq \dfrac{1}{2}.\dfrac{4 + 3a + 1}{2} = \dfrac{3a + 5}{4}$.

Tương tự: $\sqrt{3b + 1} \geq \dfrac{3b + 5}{4}$, $\sqrt{3c + 1} \geq \dfrac{3c + 5}{4}$.

Do đó $A = \dfrac{3(a + b + c) + 15}{4} = 6$.

Vậy $A_{\min} = 6 \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

• Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$.

Do $a + b + c = 3$ nên $a \geq 1$.

Ta có $\left(\sqrt{3b + 1} + \sqrt{3c + 1}\right) = 3a + 3b + 2 + 2\sqrt{(3b + 1)(3c + 1)} \geq 3(3 - a) + 4 = 13 - 3a$ do đó b, $c \geq 0$.

Khi đó $A \geq \sqrt{3a + 1} + \sqrt{13 - 3a} \Rightarrow A^2 \geq 14 + 2\sqrt{(3a + 1)(13 - 3a)}$.

Ta chứng minh được $(3a + 1)(13 - 3a) \geq 40$ với $1 \leq a \leq 3$.

$\Rightarrow A^2 \geq 14 + 4\sqrt{10} \Rightarrow A \geq 2 + \sqrt{10}$.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a = 3, b = c = 0$.

Vậy $A_{\max} = 2 + \sqrt{10} \Leftrightarrow a = 3, b = c = 0$.

BỘ 10 ĐỀ DO Ths: LÊ VĂN HƯNG BIÊN SOẠN - 2018

ĐỀ 1: Ths: LÊ VĂN HƯNG - 2018

Bài I $(2,0$ điểm$)$.

Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{2x+4\sqrt{x}-5}{x-1}\right) : \left(1 - \dfrac{2}{\sqrt{x}-1}\right)$

1) Tìm điều kiện xác định của A và rút gọn A.

2) Tìm giá trị của x biết $A = 1 - \sqrt{x}$.

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Trong một phòng họp có một số ghế dài. Nếu xếp mỗi ghế 5 người thì 9 người không có chỗ. Nếu xếp ghế 6 người thì thừa 1 ghế. Hỏi trong phòng học có bao nhiêu ghế và có bao nhiêu người dự họp.

Bài III $(2,0$ điểm$)$.

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} |x+2020| + 2\sqrt{x+y+2019} = 3 \\ 5|x+2020| - \sqrt{x+y+2019} = 4 \end{cases}$.

2) Cho parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx + 2$.

a) Chứng minh (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của tham số m.

b) Giả sử (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$. Tìm m thỏa mãn biểu thức

$$x_1^2 + x_2^2 + y_1 + y_2 = 4.$$

Bài IV $(3,5$ điểm$)$. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB vuông góc với dây cung CD tại H $(HB < R)$. Gọi M là điểm bất kì nằm trên cung nhỏ AC, tia AM cắt đường thẳng CD tại N, MB cắt CD tại E.

1) Chứng minh rằng các tứ giác $AMEH$ và $MNBH$ là các tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh: $MN.NA = NC.ND = NE.NH$.

3) Nối BN cắt (O) tại K $(K \neq B)$. Đường thẳng KH cắt (O) tại điểm thứ hai là F. Chứng minh ba điểm A, E, K thẳng hàng và ΔAMF cân.

4) Gọi Q là trung điểm của MA, I là hình chiếu của Q trên MC. Chứng minh rằng khi M di động trên cung nhỏ AC thì I luôn thuộc một đường tròn cố định.

Bài VI $(0,5$ điểm$)$. Cho a, b là các số thực và $a + b + ab = \dfrac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^2 + b^2.$$

ĐỀ 2: Ths: LÊ VĂN HƯNG - 2018

Bài I $(2,0$ điểm).

Cho biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \dfrac{x+4}{x-4}$ và $B = \dfrac{-x-2\sqrt{x}-7}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0$, $x \neq 4$.

1) Tính giá trị của B tại $|x-10| = |2x-14|$.

2) Rút gọn biểu thức A.

3) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{A}{B}$.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Hai học sinh lớp $9A$ và $9B$ có tổng cộng 94 học sinh, biết rằng 25% số học sinh $9A$ và 20% số học sinh lớp $9B$ đạt loại giỏi. Tổng số học sinh giỏi của hai lớp là 21. Tính số học sinh của mỗi lớp.

Bài III $(2,0$ điểm).

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} + \dfrac{2}{x+y} = 3 \\ \dfrac{1}{x-y} - \dfrac{2}{x+y} = 4 \end{cases}$.

2) Cho parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng (d): $y = (m-1)x - 2$.

a) Tìm giá trị của tham số m để d và (P) tiếp xúc nhau.

b) Tìm các giá trị của m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía của trục tung.

Bài IV $(3,5$ điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp (O) đường kính AB $(AC < BC)$. Trên dây BC lấy điêm H (H khác C và B). AH cắt đường tròn tại điểm thứ hai là D. Kẻ HQ vuông góc với AB (với Q thuộc AB).

1) Chứng minh rằng tứ giác $BDHQ$ nội tiếp.

2) Biết CQ cắt (O) tại điểm thứ hai là F. Chứng minh $DF//HQ$.

3) Chứng minh H cách đều các đường thẳng CD, CQ và DQ.

4) Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của F trên AC và CB. Chứng minh MN, AB, DF đồng quy.

Bài VI $(0,5$ điểm). Cho các số thực $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ và $ab + bc + ca = 3$. Tìm giá trị giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{1+2b^3} + \frac{b}{1+2c^3} + \frac{c}{1+2a^3}.$$

ĐỀ 3: Ths: LÊ VĂN HƯNG - 2018

Bài I $(2,0$ điểm).

Cho biểu thức $A = \dfrac{x - 5\sqrt{x}}{x - 25} - 1$ và $B = \dfrac{25 - x}{x + 2\sqrt{x} - 15} - \dfrac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 5} + \dfrac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} - 3}$ với $x \geq 0$, $x \neq 9$, $x \neq 25$.

1) Tính giá trị của A tại $x = \sqrt{6 + 4\sqrt{2}}$.

2) Rút gọn biểu thức $P = A : B$.

3) Tìm giá trị của x để biểu thức P có giá trị là một số nguyên.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Hai học sinh lớp $9A$ và $9B$ có tổng cộng 94 học sinh, biết rằng 25% số học sinh $9A$ và 20% số học sinh lớp $9B$ đạt loại giỏi. Tổng số học sinh giỏi của hai lớp là 21. Tính số học sinh của mỗi lớp.

Bài III $(2,0$ điểm).

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} -x - \sqrt{2}y = \sqrt{3} \\ \sqrt{2}x + 2y = -\sqrt{6} \end{cases}$.

2) Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = (2m - 6)x - m + 13$.

a) Tìm giá trị của tham số m để d và (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm của d và (P). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2 + 2$.

Bài IV $(3,5$ điểm). Cho đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng d không có điểm chung sao cho khoảng cách từ O đến d không quá $2R$. Qua điểm M trên d, vẽ các tiếp tuyến MA, MB tới (O) với A, B là các tiếp điểm. Gọi H là hình chiếu vuông góc của (O) trên d. Vẽ dây AB cắt OH ở K và cắt OM tại I. Tia OM cắt (O) tại E.

1) Chứng minh rằng 4 điểm M, A, O, B thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh: $OK.OH = OI.OM$.

3) Tìm vị trí điểm M trên d để $OAEB$ là hình thoi.

4) Khi M di chuyển trên d, chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Bài VI $(0,5$ điểm). Cho các số thực a, b, $c > 0$. Chứng minh rằng:

$$P = \frac{a}{2a + b + c} + \frac{b}{a + 2b + c} + \frac{c}{a + b + 2c} \leq \frac{3}{4}.$$

ĐỀ SỐ 4: Ths: Lê Văn Hưng - 2018

Bài I $(2,0$ điểm).

1) Cho biểu thức $A = \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$, $x \neq 1$. Tìm các giá trị của x để $A = \dfrac{1}{2}$.

2) Đặt $B = A : \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$. Tìm x để $B < 0$.

3) Cho biết $C = \dfrac{x+12}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của C.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Một đội xe vận tải phải vận chuyển 28 tấn hàng đến một địa điểm quy định. Vì trong đội có 2 xe phải điều đi làm việc khác nên mỗi xe phải chở thêm $0,7$ tấn hàng nữa. Tính số xe của đội lúc đầu.

Bài III $(2,0$ điểm).

1) Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+2y=5 \\ mx+y=4 \end{cases}$. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn $x = |y|$.

2) Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$.

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 đối nhau.

b) Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình. Tìm các giá trị của m để $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = 2$.

Bài IV $(3,5$ điểm).

Cho đường tròn (O) và một dây BC cố định. Lấy điểm A ở chính giữa cung BC nhỏ và điểm M trên cung BC lớn sao cho $MC \geq MB$. Đường MA cắt tiếp tuyến qua C của (O) và BC lần lượt tại Q, I. Đường MB cắt CA tại P.

1) Chứng minh tứ giác $PQCM$ nội tiếp và PQ song song với BC.

2) Tiếp tuyến tại A cắt tiếp tuyến tại C ở N. Chứng minh: $\dfrac{1}{CI} + \dfrac{1}{CQ} = \dfrac{1}{CN}$.

3) Chứng minh: $MB.MC = IB.IC + IM^2$.

4) Khi điểm M di động và thỏa mãn giả thiết đề bài, hãy tìm vị trí của M để bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MBI có độ dài lớn nhất.

Bài V $(0,5$ điểm). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c = 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}.$$

ĐỀ SỐ 5: Ths: Lê Văn Hưng - 2018

Bài I (2.0 điểm).

Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{3x+2}{x-4} - \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \dfrac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}\right) : \left(\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - 1\right)$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Tính giá trị của biểu thức khi $|x-18| = x$.

3) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức A đạt giá trị nguyên.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Hai bến sông A và B cách nhau 40 km. Cùng một lúc chiếc ca nô xuôi dòng từ A đến B và một chiếc bè cũng trôi từ A đến B với vận tốc 3 km/h. Sau khi đến B, ca nô qua ngay về A ngay và gặp chiếc bè ở một địa điểm cách B là 32 km. Tính vận tốc của ca nô.

Bài III (2,0 điểm).

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-3)(2y+5) = (2x+7)(y-1) \\ (4x+1)(3y-6) = (6x-1)(2y+3) \end{cases}$.

2) Cho phương trình parabol (P) $y = x^2$ và đường thẳng d: $y = mx - m + 1$.

a) Chứng minh phương trình có 2 nghiệm với mọi giá trị của m.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất biểu thức $T = \dfrac{2x_1x_2+3}{x_1^2+x_2^2+2(x_1x_2+1)}$.

Bài IV (3.5 điểm). Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Điểm C di động trên nửa đường tròn (C khác A và B). Qua C vẽ tiếp tuyến d với nửa đường tròn. Gọi E, F là hình chiếu của A, B xuống d và H là chân vuông góc hạ từ C xuống AB.

a) Chứng minh tứ giác $ABCO$ nội tiếp và AC là phân giác của góc $\widehat{EAH}$.

b) Chứng minh $AC//HF$.

c) Chứng minh $(AE+BF)$ không đổi khi C di động trên nửa đường tròn tâm O.

d) Tìm vị trí của C trên nửa đường tròn tâm O để tích $AE.BF$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài V (0.5 điểm).

Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^3+b^3+6ab \leq 8$. Chứng minh rằng:

$$P = a = 2b + \frac{2}{a} + \frac{3}{b} \geq 8.$$

ĐỀ SỐ 6: Ths: Lê Văn Hưng - 2018

Bài I (2.0 điểm).

Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \dfrac{8x}{4-x}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)$ với $x > 0$, $x \neq 4$, $x \neq 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = 5 - 2\sqrt{6}$.

2) Hãy so sánh A với 1.

3) Tìm giá trị của x để biểu thức A đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Người ta cần chở một số lượng hàng. Nếu xếp vào mỗi xe 15 tấn thì còn thừa lại 5 tấn, nếu xếp vào mỗi xe 17 tấn thì còn có thể chở thêm 9 tấn nữa. Hỏi có bao nhiêu xe tham gia chở hàng.

Bài III (2.0 điểm).

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{y}} = 1 \\ 2\sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt{y}} = 5 \end{cases}$.

2) Cho phương trình parabol (P) $y = x^2$ và đường thẳng d đi qua điểm $M(0; -1)$ có hệ số góc là k.

a) Viết phương trình đường thẳng d và chứng minh với mọi giá trị của k thì d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B.

b) Gọi hoành độ A, B lần lượt là x_1, x_2. Chứng minh rằng $|x_1 - x_2| \geq 2$.

Bài IV (3.5 điểm). Cho ΔABC có ba góc không tù nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Kẻ đường cao AK cắt đường tròn tại F, đường cao BI cắt đường tròn tại E.

a) Chứng minh các điểm A, I, K, B cùng thuộc một đường tròn và $CE = CF$.

b) Chứng minh BC là trung trực của HF.

c) Gọi J là trung điểm của BC. Chứng minh $OJ = \dfrac{1}{2}AH$.

d) Kẻ đường cao CD. Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp ΔAEF.

Bài V (0.5 điểm).

Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $ab = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{6}{2a+3b}.$$

ĐỀ SỐ 7: Ths: Lê Văn Hưng - 2018

Bài I (2.0 điểm).

Cho biểu thức $A = \dfrac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \dfrac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \dfrac{2\sqrt{x}+3}{3+\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

1) Rút gọn A.

2) Tìm x để $A = \dfrac{1}{2}$.

3) Tìm x để A nhận giá trị nguyên.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Trong một buổi liên hoan văn nghệ, một lớp có 26 khách mời đến giao lưu. Vì lớp đã có 40 học sinh nên phải kê thêm một dãy ghế nữa và mỗi dãy xếp thêm hai chỗ ngồi. Biết mỗi dãy đều có số người ngồi như nhau và ngồi không quá năm người. Hỏi lớp học lúc đầu có bao nhiêu dãy ghế?

Bài III (2,0 điểm).

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2-2y=4 \end{cases}$.

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $M(1;2)$ và đường thẳng d: $y=-3x+1$.

a) Viết phương trình đường thẳng d' đi qua M và song song với d.

b) Cho parabol (P): $y=mx^2$ $(m \neq 0)$. Tìm các giá trị của tham số m để d và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B cùng nằm phía đối với trục tung.

Bài IV (3.5 điểm). Cho đường tròn tâm (O) đường kính AB lấy điểm C nằm giữa O và B. Lấy điểm D trên đường tròn tâm O sao cho $AD = BC$. kẻ CH vuông góc với AD (H thuộc AD) tia phân giác của DAB cắt đường tròn tâm O tại E (E khác A) và cắt CH tại F. DF cắt (O) tại điểm N khác D.

1) CH song song với BD.

2) Tứ giác $AFCN$ nội tiếp.

3) Ba điểm N, C, E thẳng hàng.

4) Kẻ CK song song với AD (K thuộc DN). Chứng minh tứ giác $ADCK$ là hình bình hành kẻ CK song song với AD (K thuộc DN). Chứng minh tứ giác $ADCK$ là hình bình hành.

Bài V (0.5 điểm).

Cho a và b là hai số thực thỏa mãn $\sqrt{a+1}-b^3=\sqrt{b+1}-a^3$. Chứng minh rằng:

$$P = a^2 - ab + b^2 + 2a + 2018.$$

ĐỀ SỐ 8: Ths: Lê Văn Hưng - 2018

Bài I (2.0 điểm).

Cho hai biểu thức $A = x + 2018$ và $B = \left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-1}\right).\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$, $x \neq 1$.

1) Rút gọn B.

2) Tìm x để $B > 0$.

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = A + B$.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Hai trường A và trường B có 420 học sinh thi đỗ vào lớp 10, đạt tỉ lệ 84%. Riêng trường A có tỉ lệ đỗ là 80%, riêng trường B có tỉ lệ đỗ là 90%. Tính số học sinh dự thi của mỗi trường.

Bài III (2.0 điểm).

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y} - \dfrac{1}{x-y} = 1 \\ \dfrac{6}{x+y} + \dfrac{3}{x-y} = 6 \end{cases}$.

2) Cho phương trình parabol (P) $y = -\dfrac{1}{4}x^2$ và đường thẳng d: $y = mx - 2m - 1$.

a) Tìm giá trị của tham số m sao cho d tiếp xúc với (P).

b) Chứng tỏ d luôn luôn đi qua một điểm cố định A thuộc (P).

Bài IV (3.5 điểm). Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Đường cao BE kéo dài cắt đường tròn (O) tại điểm K Kẻ KD vuông góc với BC tại D.

1) Chứng minh 4 điểm K, E, D, C cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh KB là phân giác của góc AKD.

3) DE kéo dài cắt AB tại I. Chứng minh $KI \perp AB$.

4) Đường thẳng qua E vuông góc với OA cắt AB tại H. Chứng minh $CH//KI$.

Bài V(0.5 điểm).

Cho $a \geq 2017$ và $b \geq 2018$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{\sqrt{a-2017}}{a+1} + \frac{\sqrt{b-2018}}{b+2}.$$

ĐỀ SỐ 9: Ths: Lê Văn Hưng - 2018

Bài I (2.0 điểm).

Cho hai biểu thức A $= \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \dfrac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$ với $x \geq 0, x \neq 4$..

1) Tính giá trị của A tại $x = 4 - 2\sqrt{3}$.

2) Rút gon B.

3) Tìm giá trị của x để biểu thức $P = A : B$ có giá trị nguyên.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Trong tháng đầu, hai tổ sản xuất được 400 sản phẩm. Tháng sau do cải tiến kỹ thuật nên tổ I sản xuất vượt mức 10%, tổ II sản xuất vượt mức $\dfrac{20}{3}$%, do đó tổng sản phẩm tháng sau của hai tổ tăng thêm 35 sản phẩm so với tháng trước. Hỏi trong tháng đầu mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu sản phẩm.

Bài III (2.0 điểm).

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3\sqrt{x-2} + 2\sqrt{y+1} = 13 \\ 2\sqrt{x-2} - \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$.

2) Cho phương trình parabol (P) $y = \dfrac{1}{2}x^2$ và đường thẳng d: $y = -mx + 2$.

a) Chứng minh d và (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B.

b) Tìm m để AB nhỏ nhất. Tính diện tích ΔAOB với mọi m vừa tìm được.

Bài IV (3.5 điểm). Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$. Vẽ đường thẳng d là tiếp tuyến của (O) tại B. Trên cung AB lấy điểm M tùy ý (M khac A và B), tia AM cắt d tại N. Gọi C là trung điểm của AM, tia CO cắt d tại D.

1) Chứng minh rằng tứ giác $OBNC$ nội tiếp.

2) Chứng minh rằng $NO \perp AD$.

3) Chứng minh rằng $CA.CN = CO.CD$.

4) Xác định vị trí điểm M để $(2AM + AN)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài V (0.5 điểm).

Cho $x > 0$, $y > 0$, $c > 0$ và $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{x^2+2y^2+3} + \frac{1}{y^2+2z^2+3} + \frac{1}{z^2+2x^2+3}.$$

ĐỀ SỐ 10: Ths: Lê Văn Hưng - 2018

Bài I (2.0 điểm).

Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \dfrac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}\right).\dfrac{(1-x)^2}{2}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

1) Chứng minh rằng $A = -x + \sqrt{x}$.

2) Tìm giá trị của x để $A > 0$.

3) Tìm giá trị lớn nhất của A.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 1 giờ 20 phút đầy bể. Nếu để vòi I chảy một mình trong 10 phút rồi khóa lại, tiếp tục mở vòi II chảy trong 12 phút thì cả hai vòi chảy được $\dfrac{2}{15}$ bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Bài III (2.0 điểm).

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{3}{x-1} - \dfrac{1}{y+2} = 4 \\ \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{y+2} = 1 \end{cases}$.

2) Cho phương trình parabol (P) $y = x^2$ và đường thẳng d: $y = 2mx - 2m + 3$.

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m, thì đường thẳng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi y_1, y_2 là tung độ các giao điểm của d và (P). Tìm các giá trị của tham số m để $y_1 + y_2 < 9$.

Bài IV (3.5 điểm). Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn $(O; R)$ $(AB < CD)$. Gọi P là điểm chính giữa của cung nhỏ AB; DP cắt AB tại E và cắt CB tại K; CP cắt AB tại F và cắt DA tại I.

1) Chứng minh: Tứ giác $CKID$ nội tiếp được và $IK//AB$.

2) Chứng minh: $AP^2 = PE.PD = PF.PC$

3) Chứng minh: AP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AED.

4) Gọi R_1, R_2 là các bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác AED và BED. Chứng minh: $R_1 + R_2 = \sqrt{4R^2 - PA^2}$.

Bài V (0.5 điểm).

Cho $x > 0$, $b > 0$ và $x + y \geq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{3x^2+4}{4x} + \frac{2+y^2}{y^2}.$$

LUYỆN BỘ ĐỀ GỒM 30 ĐỀ
CỦA THẦY "LÊ ĐỨC THUẬN" CHỦ BIÊN

ĐỀ SỐ 1

Bài I (2, 0 điểm).

Cho biểu thức $A = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \dfrac{3-11\sqrt{x}}{9-x}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$; $x \neq 9$.

1) Tính giá trị của B khi $x = \dfrac{2}{\sqrt{2}-1} - \dfrac{2}{\sqrt{2}+1}$.

2) Rút gọn biểu thức A.

3) Tìm số nguyên x để $P = A.B$ là số nguyên.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Một đội công nhân theo kế hoạch phải trồng 75 héc ta rừng trong một số tuần lễ. Do mỗi tuần trồng vượt mức 5 héc ta so với kế hoạch nên đã trồng được 80 héc ta và hoàn thành sớm hơn 1 tuần. Hỏi theo kế hoạch mỗi tuần đội công nhân đó trồng bao nhiêu héc ta rừng?

Bài III (2, 0 điểm).

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{8}{x-3} + \dfrac{1}{2|y|-3} = 5 \\ \dfrac{4}{x-3} + \dfrac{1}{2|y|-3} = 3 \end{cases}$

2). Cho parapol $x^2 - 2(m+1)x + 2m + 1 = 0$.

a) Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi m. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc m.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{5}$.

Bài IV (3, 5 điểm).

Cho điểm C nằm trên nửa đường tròn $(O; R)$, đường kính AB sao cho cung AC lớn hơn cung BC $(C \neq B)$. Đường thẳng vuông góc với đường kính AB tại O cắt dây AC tại D.

1) Chứng minh tứ giác $BCDO$ nội tiếp một đường tròn.

2) Chứng minh $AD.AC = AO.AB$.

3) Tiếp tuyến tại C của đường tròn cắt đường thẳng đi qua D và song song với AB tại điểm E. Tứ giác $OEDA$ là hình gì?.

4) Gọi H là hình chiếu của C trên AB. Hãy tìm vị trí điểm C để $HD \perp AC$.

Bài V (0, 5 điểm). Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + \dfrac{1}{x} + y + \dfrac{1}{y}$.

ĐỀ SỐ 2

Bài I $(2,0$ điểm).

Cho biểu thức $A = \dfrac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \dfrac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0$; $x \neq 4$; $x \neq 9$.

1) Rút gọn A.

2) Tìm x để $A < 1$.

3) Tìm x nguyên để A nhận giá trị nguyên.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Một ca nô đi xuôi dòng từ A đến B cách nhau 40 km sau đó đi ngược dòng từ B về A. Cho biết thời gian đi xuôi dòng ít hơn thời gian đi ngược dòng là 20 phút, vận tốc dòng nước là 3 km/giờ và vận tốc riêng của ca nô không đổi. Tính vận tốc riêng của ca nô.

Bài III $(2,0$ điểm).

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{0,3}{2x-1} - \dfrac{0,5}{y-3} = 3 \\ \dfrac{1,5}{2x-1} - \dfrac{2}{y-3} = 1,5 \end{cases}$.

2). Cho parapol $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$. Tìm các giá trị của m để phương trình.

a) Có đúng một nghiệm.

b) Có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1.x_2 > 0$ và $x_1 = 2x_2$.

Bài IV $(3,5$ điểm).

Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 60^0$, M là điểm tùy ý trên cạnh AC. Vẽ đường tròn tâm O đường kính MC cắt BC tại E. Đường thẳng BM cắt (O) tại N, AN cắt (O) tại D. Lấy I đối xứng với M qua A. Lấy K đối xứng với M qua E.

1) Chứng minh tứ giác $BANC$ nội tiếp.

2) Chứng minh CA là tia phân giác của góc BCD.

3) Tìm vị trí của M trên AC để $MBKC$ là hình thoi.

4) Tìm vị trí điểm M để đường tròn ngoại tiếp tam giác BIK có bán kính nhỏ nhất.

Bài V $(0,5$ điểm). Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b \leq c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a^2+b^2+c^2)\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right)$.

ĐỀ SỐ 3

Bài I $(2,0$ điểm$)$.

Cho biểu thức $A = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{x-\sqrt{x}+3}{x\sqrt{x}-1}$ và $B = \dfrac{x+2}{x+\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$; $x \neq 1$.

1) Tính giá trị của B khi $x = \left(1 - \dfrac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)\left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} - 1\right)$.

2) Rút gọn A.

3) Cho biết $P = \dfrac{A}{1-B}$. Tìm x để $P \leq 1$.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Cho một số có hai chữ số. Biết rằng tổng của chữ số hàng chục và hai lần chữ số hàng đơn vị là 12. Nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau thì sẽ được một số mới lớn hơn số ban đầu 27 đơn vị. Tìm số ban đầu.

Bài III $(2,0$ điểm$)$.

1) Giải phương trình $2x - 5 + 3\sqrt{2x-1} = 0$

2). Cho đường thẳng d: $y = mx + m + 1$ và parabol (P): $y = x^2$. Tìm các giá trị của m để d cắt (P) tại hai điểm có hoành độ là x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện.

a) $|x_1 - x_2| = 4$; b) $|x_1| + |x_2| = 4$.

Bài IV $(3,5$ điểm$)$.

Cho đường tròn $(O;R)$ và một đường thẳng d không đi qua O, cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Từ một điểm C ở ngoài đường tròn ($C \in d$ và $CB < CA$), kẻ hai tiếp tuyến CM và CN với đường tròn (M thuộc cung nhỏ AB). Gọi H là trung điểm của AB, OH cắt CN tại K.

1) Chứng minh $KN.KC = KH.KO$.

2) Chứng minh năm điểm M, H, O, N, C cùng thuộc một đường tròn.

3) Đoạn thẳng CO cắt (O) tại I. Chứng minh điểm I cách đều các đường thẳng CM, CN, MN.

4) Một đường thẳng đi qua O và song song với MN cắt CM và CN lần lượt tại E và F. Xác định vị trí điểm C trên d sao cho diện tích tam giác CEF nhỏ nhất.

Bài V $(0,5$ điểm$)$. Cho ba số thực dương a, b thỏa mãn điều kiện $a + 2b \leq 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2a + 3b + \dfrac{4}{a} + \dfrac{9}{b}$.

ĐỀ SỐ 4

Bài I $(2,0$ điểm).

Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-4} - \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+4}\right) : \dfrac{x\sqrt{x}}{(4-x)^2}$ với $x > 0$; $x \neq 4$.

1) Rút gọn A.

2) Tính giá trị của A tại $x = 4 + 2\sqrt{3}$.

3) Tìm x để $A \geq \dfrac{1}{4}$.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi là 90 m. Nếu giảm chiều rộng đi 4 m và giảm chiều dài đi 20% thì chu vi mảnh đất giảm đi 18 m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật ban đầu.

Bài III $(2,0$ điểm).

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3\sqrt{3x-2} - 2\sqrt{1-y} = 4 \\ 2\sqrt{3x-2} + \sqrt{1-y} = 5 \end{cases}$.

2). Cho phương trình $x^2 - 2x - 2m = 0$.

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(1+x_1^2)(1+x_2^2) = 5$.

b) Khi phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 viết phương trình bậc hai nhận $\dfrac{1}{x_1+1}$ và $\dfrac{1}{x_2+1}$ làm nghiệm.

Bài IV $(3,5$ điểm).

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn O, đường cao AI và BN cắt nhau tại H, CH cắt AB tại M.

1) Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp.

2) Chứng minh điểm H cách đều các đường thẳng NM, NI.

3) Chứng minh $MN = BC.cos\widehat{BAC}$. Cho biết $\widehat{BAC} = 45^0$, $S_{\Delta ABC} = 100\ cm^2$. tính diện tích tam giác ANM.

4) Gọi E là trung điểm BC, AE cắt OH tại G. Cho B, C cố định và A di chuyển trên cung lớn BC, hỏi G di chuyển trên đường nào?

Bài V $(0,5$ điểm). Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn điều kiện $2a + b \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 16a^2 + 2b^2 + \dfrac{3}{a} + \dfrac{2}{b}$.

ĐỀ SỐ 5

Bài I $(2,0$ điểm$)$.

Cho biểu thức $A = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \dfrac{x+9\sqrt{x}}{x-9}$ và $B = \dfrac{x+5\sqrt{x}}{x-25}$ với $x \geq 0$; $x \neq 9$; $x \neq 25$.

1) Rút gọn các biểu thức A và B.

2) Với $x \neq 0$, đặt $P = \dfrac{A}{B}$. Hãy so sánh P với 1.

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Theo kế hoạch hai tổ sản xuất phải làm được 900 chi tiết máy trong một thời gian quy định. Do cải tiến kĩ thuật nên tổ một vượt mức 15%, tổ hai vượt mức 10% so với kế hoạch. Vì vậy hai tổ sản xuất được 1010 chi tiết máy. Hỏi theo kế hoạch mỗi tổ sản xuất phải làm bao nhiêu chi tiết máy?

Bài III $(2,0$ điểm$)$.

1) Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 2 \\ mx + 2y = 1 \end{cases}$. Chứng minh hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x; y)$ với mọi tham số m. Tìm m để nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $3x + 2y \geq 0$.

2) Cho đường thẳng d: $y = mx - m + 1$ và parabol (P): $y = x^2$.

a) Chứng minh d và (P) luôn có điểm chung với mọi m. Với giá trị nào của m thì d và (P) tiếp xúc nhau? Khi đó tìm tọa độ tiếp điểm.

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm của d và (P). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2}$.

Bài IV $(3,5$ điểm$)$.

Cho đường tròn $(O; R)$ đường kình AB cố định. Điểm I nằm giữa A và O. Dây CD vuông góc với AB tại I. Gọi M là điểm tùy ý thuộc cung lớn CD (M không trùng với C, D và B). Dây AM cắt CD tại K.

1) Chứng minh tứ giác $IKMB$ nội tiếp.

2) Chứng minh $AD^2 = AK.AM$.

3) Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn tâm E ngoại tiếp tam giác CKM.

4) Xác định vị trí của điểm M sao cho độ dài DE là nhỏ nhất.

Bài V $(0,5$ điểm$)$. Cho hai số dương x, y thỏa mãn điều kiện $2xy - 4 = x + y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xy + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}$.

ĐỀ SỐ 6

Bài I $(2,0$ điểm).

Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{a}-2}\right).\dfrac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}}$ với $a>0$; $a\neq 4$.

1) Rút gọn các biểu thức A.

2) Tìm a để $A>\dfrac{1}{3}$.

3) Tìm tất cả các giá trị thực của a để $B=\dfrac{9}{2}A$.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Tính chu vi của một hình chữ nhật, biết rằng nếu tăng mỗi chiều của hình chữ nhật thêm 4 m thì diện tích hình chữ nhật tăng thêm 80 m^2. Nếu giảm chiều rộng 2 m và tăng chiều dài 5 m thì diện tích hình chữ nhật bằng diện tích ban đầu.

Bài III $(2,0$ điểm).

1) Giải phương trình $4x-3\sqrt{5x-1}+1=0$.

2) Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng (d): $y=2x-m+1$ và parabol (P): $y=\dfrac{1}{2}x^2$.

a) (d) đi qua điểm $A(-1;3)$. Vẽ (d) và (P) ứng với giá trị vừa tìm được của m.

b) (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có tọa độ $(x_1;y_1)$ và $(x_2;y_2)$ sao cho $x_1x_2\left(y_1+y_2\right)+48=0$.

Bài IV $(3,5$ điểm).

Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm A sao cho $OA=R$. Qua A kẻ hai tiếp tuyến AP và AQ của (O) (P, Q là các tiếp điểm). Lấy M thuộc (O) sao cho PQ song song với AQ. Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng AM và (O). Tia PN cắt đường thẳng AQ tại K.

1) Chứng minh tứ giác $APOQ$ nội tiếp.

2) Chứng minh $KA^2=KN.KP$.

3) Kẻ đường kính QS của (O). Chứng minh tia NS là tia phân giác của góc PNM.

4) Gọi G là giao điểm của hai đường thẳng AO và PK. Tính độ dài đoạn thẳng AG theo R.

Bài V $(0,5$ điểm). Cho hai số dương a, b thỏa mãn điều kiện $ab+4\leq 2b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{ab}{a^2+2b^2}$.

ĐỀ SỐ 7

Bài I $(2,0$ điểm).

Cho biểu thức $A=\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}}{x-4}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$ với $x\geq 0$; $x\neq 4$.

1) Tìm x biết rằng $A=\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}$.

2) Rút gọn các biểu thức B. Tính $P=\dfrac{A}{B}$.

3)Tìm x thỏa mãn $P\left(\sqrt{x}+1\right)-\sqrt{x}+2\sqrt{x-1}=2x-2\sqrt{2x}+4$.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết chữ số hạng chục lớn hơn hàng đơn vị là 2, nếu viết xen chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị thì số đó tăng thêm 630 đơn vị.

Bài III $(2,0$ điểm).

1) Cho phương trình $x^4-2mx^2+(m^2-1)=0$.

a) Giải phương trình khi $m=3$.

b) Tìm m để phương trình có ba nghiệm phân biệt.

2) Cho đường thẳng (d): $y=x-m+1$ và parabol (P): $y=\dfrac{1}{2}x^2$. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ sao cho $y_1+y_2=4\left(x_1+x_2\right)$ và một trong hai giao điểm có hoành độ lớn hơn 1.

Bài IV $(3,5$ điểm).

Cho đường tròn tâm O, điểm M cố định ngoài (O), kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là tiếp điểm). Trên cung nhỏ AB lấy điểm N và từ N kẻ tiếp tuyến với (O) cắt MA, MB lần lượt tại E và F.

1) Chứng minh tứ giác $AONE$ nội tiếp.

2) Chứng minh chu vi tam giác MEF và độ lớn góc EOF không phụ thuộc vị trí điểm N.

3) Gọi I, K lần lượt là giao điểm của OE và OF với AB. Cho $\widehat{AOB}=120^0$, tính tỉ số $\dfrac{EF}{IK}$.

4) Đường thẳng qua O vuông góc với OM cắt MA, MB lần lượt tại C và D. Tìm vị trí điểm N để $(EC+FD)$ có độ dài nhỏ nhất.

Bài V $(0,5$ điểm). Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a}{1+9b^2}+\dfrac{b}{1+9c^2}+\dfrac{c}{1+9a^2}$.

ĐỀ SỐ 8

Bài I $(2,0$ điểm).

Cho biểu thức $A = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ và $B = \left(\dfrac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \dfrac{2}{\sqrt{x}+5}\right) : \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$ với $x \geq 0$; $x \neq 25$.

1) Tính giá trị của A khi $x = 6 - 2\sqrt{5}$.

2) Rút gọn các biểu thức B.

3) Tìm x để phương trình $A - B = x$ có nghiệm.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Trên quãng đường AB, hai ô tô khởi hành cùng một thời điểm từ hai bến A và B đi ngược chiều nhau. Hai xe gặp nhau sau 3 giờ. Biết rằng sau khi gặp nhau, mỗi xe tiếp tục đi hết quãng đường còn lại. Xe khởi hành từ A đến B muộn hơn xe khởi hành từ B đến A là 2 giờ 30 phút. Hỏi mỗi xe đi quãng đường AB hết mấy giờ?

Bài III $(2,0$ điểm).

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(y+3)+2y = xy+33 \\ (x+1)(y-2) = xy-10 \end{cases}$.

2) Cho phương trình $x^2 - mx - 4 = 0$.

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{2\left(x_1+x_2\right)+7}{x_1^2+x_2^2}$.

Bài IV $(3,5$ điểm).

Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm A cố định thỏa mãn $OA = 2R$. Một đường kính BC quay quanh O sao cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng OA ở P (khác A). Đường thẳng AB, AC cắt (O) ở điểm thứ hai là D và E. Nối DE cắt OA ở K. Chứng minh.

1) Các tam giác OPB, AOC đồng dạng và bốn điểm P, E, C, K cùng nằm trên một đường tròn.

2) $AK.AP = AE.AC$.

3) Đường thẳng DE đi qua một điểm cố định.

4) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE đi qua điểm cố định F từ đó suy ra vị trí của CB để diện tích tứ giác $ABPC$ lớn nhất.

Bài V $(0,5$ điểm). Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2 \leq 16$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a\sqrt{b\left(a+8b\right)} + b\sqrt{(b+8a)}$.

ĐỀ SỐ 9

Bài I $(2,0$ điểm$)$.

Cho biểu thức $A=\left(1-\dfrac{2\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{9x-1}\right):\left(\dfrac{9\sqrt{x}+6}{3\sqrt{x}+1}-3\right)$ với $x\geq 0$; $x\neq\dfrac{1}{9}$.

1) Rút gọn các biểu thức A.

2) Tìm x để $A=\dfrac{6}{5}$.

3) Với $m>1$, chứng tỏ có hai giá trị của x sao cho $A=m$.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì sau 6 giờ đầy bể. Nếu chảy một mình để đầy bể thì vòi I cần nhiều thời gian hơn vòi II là 5 giờ. Hỏi mỗi vòi chảy bao lâu thì đầy bể.

Bài III $(2,0$ điểm$)$.

1) Cho phương trình $x^2-2mx+(m^2-m)=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $3x_1+2x_2=6$.

2) Cho hệ phương trình $\begin{cases}2x+my=1\\ mx+2y=1\end{cases}$.

a) Tìm số nguyên m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ với x, y là các số nguyên.

b) Chứng minh rằng khi hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$, điểm $M(x;y)$ luôn luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Bài IV $(3,5$ điểm$)$.

Cho điểm M nằm ngoài đường tròn $(O;R)$. Vẽ tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là các tiếp điểm). Vẽ cát tuyến MCD không đi qua tâm O (C nằm giữa M và D), OM cắt AB và O lần lượt tại H và I.

1) Chứng minh tứ giác $MAOB$ nội tiếp và đường tròn này đi qua trung điểm E của CD.

2) Chứng minh $OH.OM+MC.MD=R^2$.

3) Chứng minh CI là phân giác góc MCH.

4) Cho các điểm M, C, D cố định, (O) thay đổi nhưng luôn qua C, D. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác OHE luôn qua một điểm cố định.

Bài V $(0,5$ điểm$)$. Cho a, b, $c>0$ và $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh $\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}\leq 2\,(a+b+c)$.

ĐỀ SỐ 10

Bài I $(2,0$ điểm).

1) Cho biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$. Tính giá trị của A khi $x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{6+4\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}\right)$.

2) Cho biểu thức $B = \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{5}{1-\sqrt{x}} + \dfrac{4}{x-1}$ với $x \geq 0$, $x \neq 1$. Rút gọn B.

3) Tìm các số hữu tỉ x để $P = A.B$ có giá trị nguyên.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Trong hội trường có một số ghế băng, mỗi ghế băng quy định số người ngồi như nhau. Nếu bớt 2 ghế băng và mỗi ghế băng ngồi thêm 1 người thì thêm được 8 chỗ. Nếu thêm 3 ghế băng và mỗi ghế ngồi rút đi 1 người thì giảm 8 chỗ. Tính số ghế băng trong hội trường.

Bài III $(2,0$ điểm).

1) Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2(m-2) = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương.

2) Cho hệ phương trình $\begin{cases}(m-1)x + y = 2\\ mx + y = m+1\end{cases}$.

a) Chứng minh với mọi giá trị của m thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $2x + y \leq 3$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x + y = -4$.

Bài IV $(3,5$ điểm).

Cho đường tròn (O) đường kính AB, Ax, By là hai tiếp tuyến của (O) tại các tiếp điểm A, B. Lấy điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M thuộc cùng nửa mặt phẳng bờ AB chứa các tia Ax, By), tiếp tuyến M của (O) cắt Ax, By lần lượt tại C và D.

1) Chứng minh tứ giác $AOMC$ nội tiếp.

2) Với $BD = R\sqrt{3}$ hãy tính AM.

3) Nối OC cắt AM tại E, OD cắt BM tại F, kẻ $MN \perp AB$ ($N \in AB$). Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác NEF luôn đi qua một điểm cố định.

4) Tìm vị trí điểm M trên nửa đường tròn để bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CEFD$ có độ dài nhỏ nhất.

Bài V $(0,5$ điểm). Cho a, b là các số dương. Chứng minh $\dfrac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)} + \sqrt{b(3b+a)}} \geq \dfrac{1}{2}$.

ĐỀ SỐ 11

Bài I (2,0 điểm).

1) Cho biểu thức $A = \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$, $x \neq 1$. Tìm các giá trị của x để $A = \dfrac{1}{2}$.

2) Đặt $B = A : \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$. Tìm x để $B < 0$.

3) Cho biết $C = \dfrac{x+12}{(\sqrt{x}-1).B}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của C.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Hai anh Hưng và Hiếu góp vốn cùng kinh doanh. Anh Hưng góp 13 triệu đồng, anh Hiếu góp 15 triệu đồng. Sau một thời gian kinh doanh lãi được 7 triệu đồng (lãi chia theo tỷ lệ góp vốn). Tính số tiền lãi mà mỗi anh được hưởng.

Bài III (2,0 điểm).

1) Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ mx + y = 4 \end{cases}$. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $x = |y|$.

2) Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$.

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 = 3x_2$.

b) Lập phương trình bậc hai có các nghiệm là $\dfrac{1}{x_1}$ và $\dfrac{1}{x_2}$.

Bài IV (3,5 điểm).

Cho đường tròn (O) và một dây BC cố định. Lấy điểm A ở chính giữa cung BC nhỏ và điểm M trên cung BC lớn sao cho $MC \geq MB$. Đường MA cắt tiếp tuyến qua C của (O) và BC lần lượt tại Q, I. Đường MB cắt CA tại P.

1) Chứng minh tứ giác $PQCM$ nội tiếp và PQ song song với BC.

2) Tiếp tuyến tại A cắt tiếp tuyến tại C ở N. Chứng minh: $\dfrac{1}{CI} + \dfrac{1}{CQ} = \dfrac{1}{CN}$.

3) Chứng minh: $MB.MC = IB.IC + IM^2$.

4) Khi điểm M di động và thỏa mãn giả thiết đề bài, hãy tìm vị trí của M để bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MBI có độ dài lớn nhất.

Bài V (0,5 điểm). Cho các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{a}{\sqrt{a+bc}} + \dfrac{b}{\sqrt{b+ca}} + \dfrac{c}{\sqrt{c+ab}}$.

ĐỀ SỐ 12

Bài I $(2,0$ điểm$)$.

1) Cho biểu thức $A = \dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0$, $x \neq 1$. Rút gọn A.

2) Cho biểu thức $B = \dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$. Hãy tìm $P = \dfrac{A}{B}$.

3) Tìm giá trị của m để $\dfrac{1}{P} > m + \sqrt{x}$ nghiệm đúng $\forall x > 1$.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 12 giờ đầy bể. Người ta mở cả hai vòi trong 4 giờ rồi khóa vòi II lại và để vòi I chảy tiếp 14 giờ nữa thì mới đầy bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì bao lâu mới đầy bể.

Bài III $(2,0$ điểm$)$.

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{8}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{4}{\sqrt{y^2+7}} = 9 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{y^2+7}} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$.

2) Cho đường thẳng (d): $y = (m-3)x + m - 2$.

a) Tìm m để khoảng cách từ điểm $I(-1;0)$ đến (d) là lớn nhất.

b) Tìm m để d cắt (P): $y = x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 = 4x_2$.

Bài IV $(3,5$ điểm$)$.

Cho đường tròn (O) có dây AB cố định và , C là điểm di động trên cung lớn AB. Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ AC và AB. Gọi I là giao điểm của BM và CN. Dây MN cắt AC và AB lần lượt tại H và K.

1) Chứng minh tứ giác $BNKI$ nội tiếp.

2) Chứng minh $NM.NH = NC.NI$.

3) Giả sử AI cắt (O) tại E, NE cắt CB tại F. Chứng minh ba điểm H, I, F thẳng hàng.

4) Xác định vị trí điểm C để chu vi tứ giác $AIBN$ lớn nhất.

Bài V $(0,5$ điểm$)$. Cho các số thực x, y không âm và thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 \leq 2$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{x(29x+3y)} + \sqrt{y(29y+3x)}$.

ĐỀ SỐ 13

Bài I $(2,0$ điểm).

Cho biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$ và $B = \dfrac{x}{x-4} + \dfrac{1}{\sqrt{x}-2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$ với $x > 0$; $x \neq 4$.

1) Rút gọn B và tính $P = \dfrac{A}{B}$.

2) Tìm x để $B = |B|$.

3) Tìm x thỏa mãn: $xP \leq 10\sqrt{x} - 29 - \sqrt{x-25}$.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Một ca nô xuôi dòng 45 km rồi ngược dòng 18 km. Biết vận tốc xuôi dòng lớn hơn vạn tốc ngược dòng là 6 km/giờ. Thời gian đi xuôi nhiều hơn thời gian đi ngược là 1 giờ. Tính vận tốc xuôi dòng và ngược dòng của ca nô biết rằng vận tốc ca nô đi ngược dòng lớn hơn 10 km/giờ.

Bài III $(2,0$ điểm).

1) Cho phương trình $x^2 - 2(m^2 - m + 2)x + m^2 = 0$.

2) Cho đường thẳng d: $y = -mx + \dfrac{1}{2m^2}$ với $m \neq 0$ và parabol (P): $y = x^2$.

a) Chứng minh d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi $m \neq 0$.

b) Gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ là các giao điểm của d và (P). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = y_1^2 + y_2^2$.

Bài IV $(3,5$ điểm).

Trên đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB, lấy hai điểm M, E theo thứ tự A, M, E, B (hai điểm M, E khác hai điểm A, B), AM cắt BE tại C, AE cắt MB tại D.

1) Chứng minh tứ giác $MCED$ nội tiếp.

2) Chứng minh rằng khi M và E di động thì $BE.BC + AM.AC$ không đổi.

3) Chứng minh các tiếp tuyến tại M và E của (O) cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng CD.

4) Cho biết $\widehat{BAM} = 45^0$ và $\widehat{BAE} = 30^0$. Tính diện tích tam giác ABC.

Bài V $(0,5$ điểm). Cho các số dương a, b thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{a} + \sqrt{b} - \dfrac{1}{a+b}$.

ĐỀ SỐ 14

Bài I $(2,0$ điểm).

Cho biểu thức $A=\dfrac{x}{x-\sqrt{x}+1}$ và $B=\dfrac{x+2\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+1}$ với $x\geq 0$.

1) Tính giá trị của A tại $x=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.

2) Cho biết $P=\dfrac{1-A}{B}$. Tìm x để $(x-1)P=-9$.

3) Tìm x để $P>\dfrac{1}{2}$.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Một ô tô và một xe máy đi từ A đến B cách nhau 120 km. Ô tô khởi hành sau xe máy 30 phút và đi với vận tốc lớn hơn vận tốc xe máy là 24 km/giờ. Tính vận tốc của mỗi xe, biết xe ô tô đến sớm hơn xe máy là 20 phút.

Bài III $(2,0$ điểm).

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2|x+1|-5y=3 \\ |x+1|+2y=-\dfrac{3}{5} \end{cases}$.

2) Cho đường thẳng d: $y=(m-1)x-m+2$ và parabol (P): $y=\dfrac{x^2}{2}$.

a) Tìm điểm cố định mà d luôn đi qua với mọi m.

b) Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 sao cho $A=x_1^2+x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài IV $(3,5$ điểm).

Cho đường tròn (O) và dây AB. Vẽ đường kính CD vuông góc với AB tại K (D thuộc cung nhỏ AB). Lấy điểm M thuộc cung nhỏ BC sao cho cung nhỏ MC nhỏ hơn cung MB. Dây DM cắt AB tại F. Tia CM cắt đường thẳng AB tại E.

1) Chứng minh tứ giác $CKFM$ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $KE.KF=KC.KD$.

3) Tiếp tuyến tại M của (O) cắt AE tại I. Chứng minh $IE=IF$.

4) Chứng minh $\dfrac{FB}{EB}=\dfrac{KF}{KA}$.

Bài V $(0,5$ điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c\leq\dfrac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.

ĐỀ SỐ 15

Bài I $(2,0$ điểm).

Với $x>0$, cho biểu thức $A=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$.

1) Tính giá trị của A tại $x=\dfrac{4-\sqrt{7}}{2}$.

2) Tìm x để $B=\dfrac{1}{3}$.

3) Tính giá trị biểu thức $P=A:B$. Tìm x thỏa mãn:

$$P\sqrt{x}+\left(2\sqrt{5}-1\right)\sqrt{x}=3x-2\sqrt{x-4}+3$$

. **Bài II** (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Trong đợt tổng kết quý I hai tổ sản xuất đã làm được 630 sản phẩm đạt 63% theo kế hoạch. Riêng tổ I sản xuất đạt tỉ lệ 57% theo kế hoạch, tổ II sản xuất đạt tỉ lệ 67% theo kế hoạch. Hỏi theo kế hoạch quý I mỗi tổ phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm.

Bài III $(2,0$ điểm).

1) Cho phương trình $x^4-2mx^2+(m^2-1)=0$. Tìm m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

2) Cho đường thẳng d: $y=4x-2$ và parabol (P): $y=2x^2$.

a) Chứng minh d tiếp xúc với (P) tại $A(1;2)$.

b) Viết phương trình đường thẳng d' có hệ số góc m đi qua $A(1;2)$. Chứng minh d' luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi $m\neq 4$ và tìm m để một trong hai giao điểm đó có hoành độ lớn hơn 3.

Bài IV $(3,5$ điểm).

Cho đường tròn $(O;R)$ và đường kính AB. Dây MN vuông góc với AB tại H (H nằm giữa O và B). Trên tia đối NM lấy điểm C sao cho đoạn thẳng AC cắt (O) tại điểm K ($K\neq A$), hai dây MN và BK cắt nhau tại E.

1) Chứng minh tứ giác $AHEK$ là tứ giác nội tiếp.

2) Kéo dài AE cắt (O) tại I. Chứng minh $\widehat{KAE}=\widehat{KBC}$.

3) Chứng minh $AE.AI+BE.BK=4R^2$.

4) Giả sử $KE=KC$, Chứng minh $OK//MN$ và $KM^2+KN^2=4R^2$.

Bài V $(0,5$ điểm). Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $x+y\leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4xy+\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{2}{xy}$.

ĐỀ SỐ 16

Bài I $(2,0$ điểm).

Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}\right) : \left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1} + \dfrac{1}{x+1}\right)$ với $x \geq 0$, $x \neq 1$.

1) Rút gọn A.

2) Tìm x để $A < \dfrac{1}{2}$.

3) Tìm m để phương trình $(\sqrt{x}+1)\, A = m - x$.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Hai xe chở cát để san lấp một khu đất. Nếu hai đội cùng làm thì trong 18 ngày xong cong việc. Nếu đội I làm 6 ngày, sau đó đội II làm tiếp 8 ngày nữa thì được 40% công việc. Hỏi mỗi đội làm một mình thì bao lâu xong công việc.

Bài III $(2,0$ điểm).

1) Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 2 \\ 4x + my = 4 \end{cases}$.

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho $x > 0$, $y > 0$.

2) Cho hai đường thẳng d_1: $y = \dfrac{1}{3}x + m + \dfrac{1}{3}$ và d_2: $y = -2x - 6m + 5$.

a) Chứng minh d_1 và d_2 luôn cắt nhau tại một điểm và điểm đó luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

b) Tìm m để giao điểm M của d_1 và d_2 nằm trên parabol (P): $y = 9x^2$.

Bài IV $(3,5$ điểm).

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và I là điểm đối xứng với A qua O. Trên cạnh AB lấy điểm M và trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $BM = CN$.

1) Chứng minh $IM = IN$ và $BI = CI$.

2) Gọi E là giao điểm của MN và AI. Chứng minh $EA.EI = EM.EN$.

3) Gọi K là giao điểm của MN với BC. Chứng minh $MK = NK$.

4) Chứng tỏ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ANM nằm trên một đoạn thẳng cố định khi M chạy trên cạnh AB.

Bài V $(0,5$ điểm). Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn điều kiện $a + b \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$.

ĐỀ SỐ 17

Bài I $(2,0$ điểm).

Cho hai biểu thức $A=\dfrac{x+3\sqrt{x}}{x-25}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+5}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ với $x\geq 0$, $x\neq 25$.

1) Tính giá trị của B tại $x=\dfrac{23(5-\sqrt{2})}{5+\sqrt{2}}$.

2) Rút gọn A và tìm x để $\dfrac{A}{B}=\dfrac{4}{7}$.

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{A}{B}$.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Lớp 9A được phân công trồng 480 cây xanh. Lớp dự định chia đều cho số học sinh, nhưng khi lao động có 8 bạn vắng nên mỗi bạn có mặt phải trồng thêm 3 cây mới xong. Hỏi lớp 9A có bao nhiêu bạn học sinh.

Bài III $(2,0$ điểm).

1) Cho phương trình $x^3+mx-(m+1)=0$. Chứng minh phương trình luôn có nghiệm không phụ thuộc vào m. Tìm m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt, trong đó có đúng một nghiệm âm.

2) Cho đường thẳng d_1: $y=x+m$ và parabol (P): $y=x^2$.

a) Tìm các giá trị của m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Khi d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B, tìm m để $AB=3\sqrt{2}$.

Bài IV $(3,5$ điểm).

Cho đường tròn (O) có dây AB cố định và M là điểm di động trên cung lớn AB. Từ M vẽ MH vuông góc với AB. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H trên MA, MB. Qua M vẽ đường thẳng vuông góc với EF, đường này cắt AB tại D.

1) Chứng minh đường thẳng MD đi qua một điểm cố định.

2) Chứng minh $\dfrac{MA^2}{MB^2}=\dfrac{AH}{BD}.\dfrac{AD}{BH}$.

3) Gọi I là điểm đối xứng của H qua AM và K là điểm đối xứng của H qua BM. Đường thẳng IK cắt HM, BM lần lượt tại B', A'. Chứng minh 5 điểm M, B', H, B, K cùng thuộc một đường tròn.

4) Chứng minh BB', AA' và MH đồng quy tại một điểm.

Bài V $(0,5$ điểm). Cho $x>0$, $y>0$ và thỏa mãn điều kiện $x+y\leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2$.

ĐỀ SỐ 18

Bài I (2, 0 điểm).

Cho hai biểu thức $A = \dfrac{2\sqrt{x}}{x-9} - \dfrac{2}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \dfrac{6}{x-3\sqrt{x}}$ với $x \geq 0$, $x \neq 9$.

1) Rút gọn A.

2) Tìm x để $A = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{2}$ với $P = \dfrac{B}{A}$.

3) So sánh A và A^2.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc và thời gian quy định. Nếu tăng vận tốc thêm 10 km/giờ thì đến B sớm hơn quy định 2 giờ. Nếu giảm vận tốc 10 km/giờ thì đến B chậm hơn quy định 3 giờ. Tính quãng đường AB.

Bài III (2, 0 điểm).

1) Cho phương trình $2x - 4\sqrt{x} + m = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

2) Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - 2y = 2m \\ -2x + y = m + 1 \end{cases}$.

a) Giải và biện luận hệ phương trình đã cho.

b) Khi hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$, tìm các giá trị nguyên của m để biểu thức $\dfrac{x-y}{m+2}$ có giá trị là số nguyên.

Bài IV (3, 5 điểm).

Cho góc $\widehat{xAy} = \alpha$ $(0^0 < x < 90^0)$ cố định. Đường tròn (O) tiếp xúc với Ax, Ay lần lượt tại K, L. Tiếp tuyến của (O) tại E thuộc cung nhỏ KL cắt Ax, Ay theo thứ tự tại N, M. Đường KL cắt OM tại P, cắt ON tại Q.

1) Khi E di động, chứng minh $\widehat{MON}$ có độ lớn không đổi.

2) Chứng minh các đường thẳng MQ, NP, OE cùng đi qua một điểm.

3) Chứng minh $KQ.PL = EM.EN$.

4) Chứng minh khi E di động thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MON thuộc một đường cố định.

Bài V (0, 5 điểm). Cho $x > 0$, $y > 0$, z và thỏa mãn điều kiện $x + y + x = \dfrac{9}{4} - (xy + yz + zx)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2$.

ĐỀ SỐ 19

Bài I $(2,0$ điểm).

Cho biểu thức $A = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \dfrac{3x+3}{x-9}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0$, $x \neq 9$.

1) Tính giá trị của Q tại $x = 4 - 2\sqrt{3}$.

2) Rút gọn A và tính $P = \dfrac{A}{B}$.

3) Cho biểu thức $Q = xP + \dfrac{4x+7}{\sqrt{x}+3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của Q

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Cho một hình chữ nhật. Nếu tăng độ dài mỗi cạnh của nó lên 1 cm thì diện tích của hình chữ nhật sẽ tăng thêm 13 cm^2. Nếu giảm chiều dài đi 2 cm, chiều rộng đi 1 cm thì diện tích của hình chữ nhật sẽ giảm 15 cm^2. Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật đã cho.

Bài III $(2,0$ điểm).

1) Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = m + 1 \\ mx + y = 3m - 1 \end{cases}$. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho tích của x và y có giá trị nhỏ nhất.

2) Cho đường thẳng d: $y = (m-1)x + m^1 + 1$ và parabol (P): $y = x^2$.

a) Chứng minh d luôn cắt (P) tại ha điểm phân biệt nằm về hai phía của trục tung.

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm của d và (P). Tìm các giá trị của tham số m biết rằng $|x_1| + |x_2| = 2\sqrt{2}$.

Bài IV $(3,5$ điểm).

Cho đường tròn $(O; R)$ và hai đường kính AB, CD vuông góc nhau. Trên đoạn OB lấy điểm M (khác điểm O). Tiam CM cắt (O) tại điểm thứ hai N. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến qua N của (O) tại điểm P.

1) Chứng minh tứ giác $OMNP$ nội tiếp.

2) Chứng minh tứ giác $CMPO$ là hình bình hành.

3) Chứng minh tích $CM.CN$ không phụ thuộc vào trí điểm M.

4) Chứng minh tâm đường tròn nội tiếp tam giác CND đi chuyển trên cung tròn cố định khi M di chuyển trên đoạn OB.

Bài V $(0,5$ điểm). Giải phương trình $x(3 - \sqrt{3x-1}) = \sqrt{3x^2 + 2x - 1} - x\sqrt{x+1} + 1$.

ĐỀ SỐ 20

Bài I $(2,0$ điểm).

Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{1}{x-\sqrt{x}}\right) : \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{2}{x-1}\right)$ với $x > 0$, $x \neq 1$.

1) Rút gọn A.

2) Tìm x để $a < 2$.

3) Chứng minh với mọi giá $m \neq 0$, luôn có một giá trị của x thỏa mãn $A = m$.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Cho một tam giác có chiều cao bằng $\dfrac{4}{3}$ cạnh đáy. Nếu chiều cao tăng thêm 3 m và cạnh đáy giảm đi 2 m thì diện tích tam giác đó tăng thêm 9 m^2. Tính độ dài cạnh đáy và chiều cao của tam giác đã cho.

Bài III $(2,0$ điểm).

1) Trong hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng d: $y = (x^2+1)x + 2$. Gọi A, B lần lượt là gaio điểm của d với Ox và Oy.

a) Tìm m để diện tích tam giác OAB bằng $\dfrac{1}{2}$.

b) Tìm m để khoảng cách từ O đến d là lớn nhất.

2) Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $M = x_1^2 + x_2^2$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài IV $(3,5$ điểm).

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) đường kính AB $(AB < AC)$. Trên dây CB lấy điểm H (khác C và B). AH cắt đường tròn tại điểm thứ hai là D. Kẻ HQ vuông góc với AB (Q thuộc AB). Đường thẳng CQ cắt (O) tại F.

1) Chứng minh tứ giác $ACHQ$ nội tiếp.

2) Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của F trên AC, CB. Chứng minh MN, AB, DF đồng quy.

3) Giả sử (O) và AB cố định, C di động trên (O), điểm Q cố định và H luôn là giao điểm của đường vuông góc với AB tại Q với CB. Gọi E là giao điểm của đường AC và QH. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE thuộc một đường cố định.

4) Tiếp tuyến tại C cắt đường thẳng HQ ở I, đường OI cắt CD ở K. Chứng minh $OK.OI = R^2$ và CD luôn đi qua một điểm cố định.

Bài V $(0,5$ điểm). Giải phương trình $\sqrt{4x^2 - 2x + \dfrac{1}{4}} = 4x^3 - x^2 + 8x - 2$.

ĐỀ SỐ 21

Bài I $(2,0$ điểm$)$.

Cho biểu thức $A = \dfrac{1}{\sqrt{x}-2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}+2} - \dfrac{x}{4-x}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0$, $x \neq 4$.

1) Rút gọn A.

2) Cho biết $A = 3$. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{B}{2A}$.

3) Tìm x để $A\left(\sqrt{x}-2\right) + 5\sqrt{x} = x + 4 + \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x}$.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Có một khu vườn hình chữ nhật, biết rằng nếu tăng mỗi cạnh thêm 4 m thì diện tích khu vườn tăng 216 m^2, còn nếu chiều rộng tăng thêm 2 m, chiều dài giảm đi 5 m thì diện tích sẽ giảm đi 50 m^2. Tính độ dài các cạnh của khu vườn đó.

Bài III $(2,0$ điểm$)$.

1) Cho đường thẳng d: $y = -mx - \dfrac{1}{2}m^2 + m + 1$ và parabol (P): $y = \dfrac{1}{2}x^2$.

a) Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 5$.

b) Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm ở bên trái trục tung.

2) Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + (m+1) = 0$. Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi m. Tìm m để phương trình có một nghiệm không nhỏ hơn 2.

Bài IV $(3,5$ điểm$)$.

Cho đường tròn $(O;R)$ có dây BC cố định, điểm A di chuyển trên cung lớn BC. Gọi AD, BE, CF là các đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC, I là trung điểm của BC.

1) Chứng minh bốn điểm A, F, H, E cùng nằm trên một đường tròn và 4 điểm B, C, E, F cũng nằm trên một đường tròn.

2) Khi cung nhỏ BC có số đo bằng 90^0, tính độ dài dây cung BC và diện tích tam giác OBC.

3) Đường thẳng qua E và vuông góc với EI cắt BC tại P. Chứng minh $PE^2 = PB.PC$.

4) Tìm vị trí của điểm A để tam giác AEH có diện tích nhỏ nhất.

Bài V $(0,5$ điểm$)$. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2+x+\dfrac{1}{4}} - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}\left(2x^3 + x^2 + 2x + 1\right)$.

ĐỀ SỐ 22

Bài I (2, 0 điểm).

Cho hai biểu thức $A = \dfrac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ và $B = \left(\dfrac{x+3}{x-9} + \dfrac{1}{\sqrt{x}+3}\right) : \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$ với $x > 0$, $x \neq 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \dfrac{36}{\sqrt{3}-1} - \dfrac{36}{\sqrt{3}+1}$.

2) Rút gọn B.

3) Tìm x để $A.B > \dfrac{3}{2}$.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Hai người thợ cung làm một công việc trong 15 giờ thì xong việc. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 3 giờ rồi người thứ hai làm một mình trong 5 giờ thì được 25% công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu giờ để xong công việc?

Bài III (2, 0 điểm).

1) Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - y = -m \end{cases}$.

a) Chứng minh hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất với mọi m.

b) Tìm m để hệ có nghiệm $(x; y)$ sao cho $x < 1$ và $y < 1$.

2) Cho đường thẳng d: $y = -mx + m + 1$ và parabol (P): $y = x^2$. Tìm các giá tị của m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành đọ x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_x^2 < 2$.

Bài IV (3, 5 điểm).

Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB. Gọi C là điểm chỉnh giữa cung AB. Điểm M thuộc cung AC. Hạ $MH \perp AB$ tại H, AC cắt MH tại K, MB cắt AC tại E. Hạ $EI \perp AB$ tại I.

1) Chứng minh $BHKC$ và $AMEI$ là các tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $AK.AC = AM^2$ và AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tếp ΔMKC.

3) Cho $R = 3cm$. Tính giá trị của tổng $AE.AC + BE.BM$.

4) Chứng minh khi M chuyển động trên cung AC thì tâm đường tròn ngoại tiếp ΔIMC luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Bài V (0, 5 điểm). Giải phương trình $x^2 + \sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 5x$.

ĐỀ SỐ 23

Bài I $(2,0$ điểm$)$.

Cho hai biểu thức $A=\dfrac{2\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}$ và $B=\left(\dfrac{15-\sqrt{x}}{x-25}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}\right):\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$ với $x\geq 0$, $x\neq 25$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}.\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$.

2) Rút gọn B.

3) Đặt $P=A+B$. Tìm x để P đạt giá trị nguyên.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Một đội xe theo kế hoạch phải chuyển xong 200 tấn than trong một thời gian quy định, mỗi ngày chuyển được một khối lượng than như nhau. Nhờ được bổ sung thêm xe, thực tế mỗi ngày đội chuyển thêm được 5 tấn so với quy định mà còn chuyển vượt mức 25 tấn. Tính khối lượng than mà đội xe phải chuyển trong một ngày theo kế hoạch.

Bài III $(2,0$ điểm$)$.

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt{x+1}-3\sqrt{y-2}=5\\4\sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}=17\end{cases}$.

2) Cho phương trình $x^2+(m+2)x-m-4=0$ (với m là tham số).

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của m.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để $x_1<0\leq x_2$.

Bài IV $(3,5$ điểm$)$.

Cho đường tròn (O) với dây AB cố định khác đường kính, C là điểm thuộc cung lớn AB sao cho tam giác ABC nhọn. M và N lần lượt là điểm chính giữa cung nhỏ AB và cung nhỏ AC. Gọi I là giao điểm của BN và CM. Dây MN cắt AB và AC lần lượt tại H và K.

1) Chứng minh $BMHI$ là các tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $MK.MN=MI.MC$.

3) Chứng minh tam giác AKI cân tại K và tứ giác $AHIK$ là hình thoi.

4) Chứng minh khi điểm C di động trên cung lớn AB và thỏa mãn điều kiện của đề bài, tổng hai bán kính của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác NAH và tam giác NBH có giá trị không đổi.

Bài V $(0,5$ điểm$)$. Giải phương trình $\left(\sqrt{x+2}-1\right)^2=3x-8\sqrt{x+2}+11$.

ĐỀ SỐ 24

Bài I $(2,0$ điểm).

Cho hai biểu thức $A = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ và $B = \left(\dfrac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \dfrac{2}{\sqrt{x}+5}\right) : \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$ với $x \geq 0$, $x \neq 25$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4 - \sqrt{12}$.

2) Rút gọn B.

3) Đặt $P = B - A$. Tìm x để P nhận giá trị nguyên.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Một công nhân phải làm xong 120 sản phẩm trong thời gian quy định. Sau khi làm được hai giờ với năng suất dự kiến, người đó đã cải tiến các thao tác kĩ thuật nên mỗi giờ làm thêm được 3 sản phẩm. Vì vậy, người đó đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn quy định 1 giờ 36 phút. Tính số sản phẩm người đó dự kiến làm trong mỗi giờ.

Bài III $(2,0$ điểm).

1) Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ với m là tham số.

a) Giải phương trình khi $m = 3$.

b) Tìm giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 - 2x_2 + x_1x_2 = -12$.

2) Cho parabol (P): $y = \dfrac{x^2}{2}$ và đường thẳng d đi qua điểm I $(0;2)$ có hệ số góc m.

a) Chứng minh d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B.

b) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên Ox. Chứng minh tam giác IHK vuông tại I.

Bài IV $(3,5$ điểm).

Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Gọi M là trung điểm của OA và lấy điểm N bất kì thuộc (O) (N không trùng với A và B). Đường thẳng đi qua N và vuông góc với MN cắt tiếp tuyến tại A và B của (O) lần lượt tại C và D.

1) Chứng minh $CAMN$ là các tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $AC.BD$ có giá trị không phụ thuộc vào trí của điểm N.

3) Gọi giao điểm của AD và BC là K. Qua K kẻ đường thẳng song song với AC, đường thẳng này cắt AB và CD lần lượt tại E, F. Chứng minh $KE = KF$.

4) Xác định vị trí điểm N trên (O) sao cho diện tích tam giác CMD đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài V $(0,5$ điểm). Giải phương trình $\sqrt{x^3+1} = \dfrac{2x^2+4}{5}$.

ĐỀ SỐ 25

Bài I (2, 0 điểm).

Cho hai biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{5}{1-\sqrt{x}} + \dfrac{4}{x-1}$ với $x \geq 0$, $x \neq 1$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \sqrt{6-4\sqrt{2}} + \sqrt{6+4\sqrt{2}}$.

2) Rút gọn B.

3) Đặt $P = A.B$. Tìm x hữu tỉ để P có giá trị nguyên.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Nhà máy luyện thép hiện đã có sẵn hai loại thép chứa 10% cacbon và loại thép chứa 20% cacbon. Giả sử quá trình luyện thép các nguyên liệu được dùng không bị hao hụt, hãy tính khối lượng thép mỗi loại cần dùng để tạo ra 1.000 tấn thép chứa 16% cacbon từ hai loại thép trên.

Bài III (2, 0 điểm).

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2m \end{cases}$. Tìm m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$. Tìm hệ thức liên hệ giữa x, y không phụ thuộc tham số m.

2) Cho phương trình $x^2 - mx - 4 = 0$ (với m là tham số).

a) Chứng minh với mọi giá trị của m, phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2.

b) Chứng minh $(x_1^2 + x_2^2) + 16(x_1 + x_2) + 56 \geq 0$ với mọi m.

Bài IV (3, 5 điểm).

Cho đường tròn $(O; R)$ với dây $BC < 2R$ cố định. Kẻ đường kính BM, điểm A bất kỳ trên tia CB $(CA > CB)$. Gọi E là giao điểm AM với (O), gọi K là giao điểm của OA với (O') ngoại tiếp tam giác ABM. Gọi K là giao điểm của OA với CE.

1) Chứng minh $BKHC$ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh các tam giác AEK và AHM đồng dạng.

3) Chứng minh $\widehat{AO'M}$ có độ lớn không phụ thuộc vào vị trí điểm A.

4) Xác định vị trí A để $AO + 4HO$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài V (0, 5 điểm). Giải phương trình $\sqrt{x^2 - x - 2} + \sqrt{x^2 - 7x + 14} = 2$.

ĐỀ SỐ 26

Bài I $(2,0$ điểm).

Cho hai biểu thức $A=\dfrac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{36}{x-9}$ với $x\geq 0$, $x\neq 9$.

1) Rút gọn B.

2) Tìm x để $A=B$.

3) Tìm x để A nhận giá trị là số nguyên dương.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Một mảnh vườn hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13 m và chiều dài lớn hơn chiều rộng 7 m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn đó.

Bài III $(2,0$ điểm).

1) Lập phương trình bậc hai có các nghiệm là $\dfrac{2}{\sqrt{3}+2}$ và $\dfrac{2}{\sqrt{3}-2}$.

2) Trên ệ trục tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng d: $y=2x+(m^2+1)$ với m là tham số.

a) Khi $m=\sqrt{3}$, chứng tỏ d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Từ đó tính diện tích tam giác OAB (với O là gốc tọa độ).

b) Với giá trị nào của m thì d cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho khoảng cách từ M đến trục Oy gấp 2 lần khoảng cách từ N đến trục Oy.

Bài IV $(3,5$ điểm).

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Đường cao AD, BE cắt nhau tại H, kéo dài BE cắt đường tròn $(O;R)$ tại F.

1) Chứng minh $CDHE$ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh tam giác AHF cân.

3) Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Chứng minh ME là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE.

4) Cho BC cố định và $BC=R\sqrt{3}$. Xác định vị trí của A trên (O) để $DH.DA$ lớn nhất.

Bài V $(0,5$ điểm). Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{x+2}-y^3=\sqrt{y+2}-x^3.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A=x^2+2xy-2y^2+2y+10.$$

ĐỀ SỐ 27

Bài I $(2,0$ điểm).

Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}-\dfrac{10-5\sqrt{x}}{x-5\sqrt{x}+6}$ với $x\geq 0$, $x\neq 4$, $x\neq 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=3-2\sqrt{2}$.

2) Rút gọn B.

3) Tìm giá trị nhỏ của biểu thức $P=A:B$.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Hai địa điểm A và B cách nhau 84 km. Một ô tô khi khởi hành từ A và đi thẳng đến B với vận tốc không đổi. Trên quãng đường từ B về A, vận tốc của ô tô tăng thêm 20 km/giờ. Tính vận tốc lúc đi của ô tô, biết tổng thời gian cả đi và về của ô tô đó là 3 giờ 30 phút.

Bài III $(2,0$ điểm).

1) Cho phương trình $x^3-mx-2(m-4)=0$. Tìm m để phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2x_3=25$$

. 2) Cho parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng d: $y=mx+2$.

a) Với $m=-1$ vẽ d và (P) trên cùng một hệ trục tọa độ. Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và d.

b) Tìm các giá trị của m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1-2x_2=5$.

Bài IV $(3,5$ điểm).

Cho đường tròn $(O;R)$ và đường thẳng d không có điểm chung với đường tròn. Gọi M là một điểm thuộc đường thẳng d. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn. Gọi H là hình chiếu của O lên đường thẳng d.

1) Chứng minh năm điểm M, A, O, B, H cùng thuộc một đường tròn.

2) Gọi K và I lần lượt là giao điểm của OH và OM với AB. Chứng minh $OK.OH=OI.OM$

3) Gọi E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB. Giả sử $R=64cm$ và $\widehat{AMB}=60^0$, tính bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác MBA và diện tích viên giới hạn bởi dây AB và cung nhỏ AB.

4) Tìm vị trí điểm M trên đường thẳng d để diện tích tam giác OIK đạt giá trị lớn nhất.

Bài V $(0,5$ điểm). Cho biết a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá lớn nhất của biểu thức $A=a^2+b^2+c^2$.

ĐỀ SỐ 28

Bài I $(2,0$ điểm$)$.

Cho hai biểu thức $A = \dfrac{x\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}$ và $B = \dfrac{2x+6\sqrt{x}+7}{x\sqrt{x}+1} - \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$.

1) Rút gọn A và tìm A khi $x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{19+8\sqrt{8}} + \sqrt{19-8\sqrt{3}}\right)$.

2) Rút gọn $M = A.B$. Tìm x để $M > 2$.

3) Tìm các số hữu tỉ x để M là số nguyên.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Theo kế hoạch, một tổ công nhân phải làm một số sản phẩm trong một thời gian nhất định. Nếu mỗi ngày họ làm được 5 sản phẩm so với dự định thì sẽ hoàn thành kế hoạch trước thời hạn 4 ngày. Nếu mỗi ngày họ làm ít đi 5 sản phẩm so với dự định thì sẽ hoàn thành kế hoạch chậm hơn thời hạn 5 ngày. Tính thời gian và số sản phẩm phải làm theo kế hoạch.

Bài III $(2,0$ điểm$)$.

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + my = 1 \\ mx + 2y = 1 \end{cases}$.

a) Chứng minh khi hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thì điểm $M(x;y)$ luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

b) Tìm m để điểm M thuộc đường tròn tâm O là gốc tọa độ và bán kính bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt cung dương.

Bài IV $(3,5$ điểm$)$.

Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi D là trung điểm của BC. Lấy điểm M bất kỳ trên đoạn thẳng AD. KẺ MN vuông góc với AB tại N, MP vuông góc với AC tại P. Kẻ NH vuông góc với DP tại H.

1) Chứng minh các điểm A, N, M, H, P cùng nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh $DM.DA = DH.DP$.

3) Chứng minh ba điểm B, M, H thẳng hàng.

4) Tìm vị trí của điểm M để độ dài đoạn thẳng HN đạt giá trị lớn nhất.

Bài V $(0,5$ điểm$)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{2x+3\sqrt{2x-1}+1}{x+2\sqrt{2x-1}+1}$.

ĐỀ SỐ 29

Bài I $(2,0$ điểm).

Cho hai biểu thức $A=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{x}-2}{x+3\sqrt{x}}$ với $x>0$, $x\neq 4$.

1) Rút gọn A.

2) Tìm x để $A=3$.

3) Đặt $B=A.\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}$. Tìm x nguyên để B nhận giá trị nguyên.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Một người đi xe đạp từ điểm A đến địa điểm B cách nhau 30 km. Khi đi từ B về A, người đó chọn con đường khác dễ đi hơn nhưng dài hơn con đường cũ 6 km. Vì vận tốc lúc về lớn hơn vận tốc lúc đi là 3 km/giờ nên thời gian về vẫn ít hơn thời gian đi 20 phút. Tính vận tốc lúc đi.

Bài III $(2,0$ điểm).

1) Cho ba đường thẳng:

$$d_1\colon y=x+1,\quad d_2\colon y=2x-1,\quad d_3\colon y=(m^2+1)x-m^2+m-1.$$

Tìm m để ba đường thẳng đồng quy.

2) Cho phương trình $x^2-2(m+3)x+m^2+3=0$ (với m là tham số).

a) Giải phương trình khi $m=3$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt. Khi đó, xét dấu của hai nghiệm.

Bài IV $(3,5$ điểm).

Cho đường tròn (O) có dây cung AB cố định. Gọi K là điểm chính giữa cung nhỏ AB kẻ đường kính IK cắt AB tại N. Lấy điểm M bất kì trên cung lớn AB, MK cắt AB tịa D. Hai đường thẳng IM và AB cắt nhau tại C.

1) Chứng minh $MNKC$ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $IM.IC=IN.KI$.

3) Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng ID và CK, chứng minh E thuộc (O) và NC là phân giác của góc MNE.

4) Xác định vị trí của điểm M trên cung lớn AB để tích $DM.DK$ đạt giá trị lớn.

Bài V $(0,5$ điểm). Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=abc$ và $a^2=bc$. Chứng minh $a=0$ hoặc $|a|\geq\sqrt{3}$.

ĐỀ SỐ 30

Bài I $(2,0$ điểm$)$.

Cho các biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \left(\dfrac{2}{\sqrt{x}-5} + \dfrac{\sqrt{x}-15}{25-x}\right) : \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$ với $x \geq 0$, $x \neq 25$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

2) Rút gọn B.

3) Đặt $P = A + B$. Tìm x để P đạt giá trị nguyên.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Hai địa điểm A và B cách nhau 120 km. Một ô tô khởi hành từ A và đi đến B với vận tốc không đổi. Trên quãng đường từ B về A, vận tốc của ô tô tăng thêm 20 km/giờ nên thời gian về rút ngắn hơn so với thời gian đi 18 phút. Hỏi vận tốc của ô tô lúc đi từ A đến B là bao nhiêu.

Bài III $(2,0$ điểm$)$.

1) Giải phương trình $3x - 4 - \sqrt{3x-2} = 0$.

2) Cho parabpl (P): $y = \dfrac{1}{2}x^2$ và đường thẳng d: $y = mx + 2$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của d và (P) khi $m = \dfrac{1}{2}$.

b) Chứng minh d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m và $|x_1 - x_2| \geq 4\sqrt{2}$ với x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm.

Bài IV $(3,5$ điểm$)$.

Cho đường tròn (O) và điểm M ở ngoài (O). Vẽ tiếp tuyến MA tới (O) (A là tiếp điểm). Gọi E là trung điểm đoạn AM và các điểm I, H theo thứ tự là hình chiếu của E và A xuống OM. Qua M vẽ cát tuyến MBC tới (O) ($MA < MC$ và tia MC ở giữa hai tia MO, MA).

1) Chứng minh các tam giác MBH và MOC đồng giác. Từ đó suy ra tứ giác $BCOH$ nội tiếp được.

2) Chứng minh $\widehat{AHB} = \widehat{AHC}$.

3) Vẽ tiếp tuyến IK tới (O). Chứng minh tam giác MKH vuông.

4) Cho biết $BC = BM$ và D trung điểm đoạn MC. Chứng minh MC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ODH.

Bài V $(0,5$ điểm$)$. Cho các số x, y, z không âm và $x + y + z \leq \dfrac{3}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức.

$$M = \sqrt{x^2 + 4xy + y^2} + \sqrt{y^2 + 4yz + z^2} + \sqrt{z^2 + 4zx + x^2}.$$

MỘT SỐ ĐỀ ĐỀ THI THỬ NĂM 2018

ĐỀ 1: (TRƯỜNG THCS THỰC NGHIỆM - HÀ NỘI NĂM 2018)

Bài I $(2,0$ điểm).

Cho biểu thức $P = \dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} + \dfrac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} - \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ và $Q = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ với $x > 0$; $x \neq 1$.

a) Tính giá trị của Q khi $x = 25$.

b) Rút gọn biểu thức $A = P.Q$.

c) Tìm các giá trị của x để $A\sqrt{x} < 8$.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Một ô tô di chuyển từ A đến B trong một thời gian dự định. Nếu vận tốc tăng thêm $14km/h$ thì đến B sớm hơn dự định là 2 giờ. Nếu vận tốc giảm đi $4km/h$ thì đến B chậm hơn dự định là 1. Tính khảng cách AB, vận tốc và thời gian dự định của ô tố.

Bài III $(2,0$ điểm).

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{x+2} + 2\sqrt{y-3} = 7 \\ \dfrac{2}{x+2} - 3\sqrt{y-3} = -7 \end{cases}$

b). Cho hệ phương trình $\begin{cases} (m+1)x - y = 3 \\ mx + y = m \end{cases}$

Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện $2x + y > 0$.

Bài IV $(3,5$ điểm).

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tòn tâm O bán kính R. Đường cao AD, BE cắt nhau tại H. Kéo dài BE cắt đường tròn (O) tại F.

a) Chứng minh tứ giác $CHDE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Kéo dài AD cắt (O) tại N. Chứng minh ΔAHF cân và C là điểm chính giữa cung NF.

c) Gọi M là trung điểm AB. Chứng minh ME là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔCDE.

d) Cho điểm B, C cố định và $BC = R\sqrt{3}$. Hãy xác định vị trí điểm A trên $(O; R)$ để $DH.DA$ lớn nhất.

Bài V $(0,5$ điểm). Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} + \dfrac{y}{\sqrt{y^2+3}} + \dfrac{z}{\sqrt{z^2+3}}$.

Hướng dẫn

Bài V $(2,0$ điểm). Ta có

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = \sqrt{\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}} = \sqrt{\frac{x}{(x+y)}\frac{x}{(x+z)}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y} + \frac{x}{x+z}\right)$$ (áp dụng cô si ở mẫu).

Tương tự: $\dfrac{y}{\sqrt{y^2+3}} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{y+z} + \dfrac{y}{z+y}\right)$.

$\dfrac{z}{\sqrt{z^2+3}} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{y+z}+\dfrac{z}{z+x}\right)$.

$\Rightarrow P \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{x}{x+z}+\dfrac{y}{y+z}+\dfrac{y}{z+y}+\dfrac{z}{y+z}+\dfrac{z}{z+x}\right) = \dfrac{1}{2}.3 = \dfrac{3}{2}$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

ĐỀ 2: SƯU TẦM VÀ BIÊN SOẠN 2018

Bài I $(2,0$ điểm).

Cho biểu thức $P = \dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \dfrac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} + \dfrac{8}{x-4}$ và $Q = 2 - \dfrac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0$; $x \neq 4$.

1) Tính giá trị của Q khi $x = 100$.

2) Rút gọn biểu thức $A = P.Q$.

3) Tìm các giá trị nhỏ nhất của $\sqrt{A}$.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Một nhóm gồm 15 học sinh (cả nam và nữ) tham gia buổi lao động trồng cây. Các bạn nam trồng được 30 cây, các bạn nữ trồng được 36 cây. Mỗi bạn nam trồng được số cây như nhau và mỗi bạn nữ trồng được số cây như nhau. Tính số học sinh nam và số học sinh nữ của nhóm, biết rằng mỗi bạn nam trồng được nhiều hơn mỗi bạn nữ 1 cây.

Bài III $(2,0$ điểm).

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y^2} = 3 \\ x + \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y} = 3 \end{cases}$

2). Cho parapol (P): $y = mx - \dfrac{1}{2}m^2 + m + 1$ và đường thẳng (d): $y = \dfrac{1}{2}x^2$.

a) Với $m = 1$, xác định tọa độ các giao điểm A, B của (d) và (P).

b) Tìm các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 2$.

Bài IV $(3,5$ điểm).

Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Lấy điểm C trên cung nhỏ AC (C không trùng với A và B). Từ điểm C kẻ CD vuông góc với AB, CE vuông góc với MA, CF vuông góc với MB $(D \in AB, E \in MA, F \in MB)$. Gọi I là giao điểm của AC và DE, K là giao điểm của BC và DF. Chứng minh rằng:

1) Tứ giác $ADCE$ nội tiếp một đường tròn.

2) Hai tam giác CDE và CFD đồng dạng.

3) Tia đối của CD là tia phân giác của góc $\widehat{ECF}$.

4) Đường thẳng IK song song với đường thẳng AB.

Bài V $(0,5$ điểm). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca}$.

Hướng dẫn

Bài II $(2,0$ điểm).

Gọi số học sinh nam là x $(x \in N^*; x < 15) \Rightarrow$ Số học sinh nữ là $15 - x$.

Mỗi bạn nam trồng được $\dfrac{30}{x}$ (cây), mỗi bạn nữ trồng được $\dfrac{36}{15-x}$ (cây).

Vì mỗi bạn nam trồng được nhiều hơn mỗi bạn nữ 1 cây nên ta có phương trình: $\dfrac{30}{x} - \dfrac{36}{15 - x} = 1$.

Giải phương trình được: $x_1 = 75$ (loại); $x_2 = 6$ (nhận).

Vậy nhóm có 6 học sinh nam và 9 học sinh nữ.

ĐỀ 3: TRƯỜNG THPT THĂNG LONG 2018

Bài I $(2,0$ điểm$)$.

Cho biểu thức $A = \dfrac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x^3} - \sqrt{x} + 2x - 2}{\sqrt{x} + 2}$ với $x \geq 0$; $x \neq 4$.

1) Tính giá trị của A khi $x = 4 - 2\sqrt{3}$.

2) Tính giá trị của x để $B = A + 1$.

3) Tìm các giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = B - A$.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Một ô tô dự định đi từ A đến B trong một khoảng thời gian xác định. Nếu chạy với vận tốc 35 km/giờ thì đến B chậm mất 2 giờ. Nếu xe chạy với vận tốc 50 km/giờ thì đến B sớm hơn 1 giờ. Tính quãng đường AB và thời gian dự định lúc đi ban đầu.

Bài III $(2,0$ điểm$)$.

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x+3}{3} + \dfrac{2y}{y-2} = 8 \\ 2\dfrac{x+3}{3} + \dfrac{3y}{y-2} = 13 \end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d_1): $y = -mx + m + 1$ và (d_2): $y = \dfrac{1}{m}x - 1 - \dfrac{5}{m}$ với m là tham số khác 0.

a) Chứng minh rằng (d_1) và (d_2) luôn vuông góc với nhau với mọi giá trị của tham số $m \neq 0$.

b) Tìm điểm cố định mà đường thẳng (d_1) luôn đi qua. Chứng minh rằng giao điểm của hai đường thẳng luôn thuộc một đường cố định.

Bài IV $(3,5$ điểm$)$.

Cho đường tròn (O) bán kính R. Điểm A thuộc đường tròn, BC là một đường kính $(A \neq B, A \neq C)$. Vẽ AH vuông góc với BC tại H. Gọi E, M lần lượt là trung điểm của AB, AH và P là giao điểm của OE với tiếp tuyến tại A của đường tròn $(O; R)$.

1) Chứng minh rằng: $AB^2 = BH.BC$.

2) Chứng minh: PB là tiếp tuyến của đường tròn (O).

3) Chứng minh ba điểm P, M, Q thẳng hàng.

4) Gọi Q là giao điểm của đường thẳng PA với tiếp tuyến tại C của đường tròn (O). Khi A thay đổi trên đường tròn (O). Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $OP + OQ$.

Bài V $(0,5$ điểm$)$. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x \leq 1$, $y \leq 1$, $z \leq 1$ và $x + y + z = \dfrac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2$.

ĐỀ 4: TRUNG TÂM BỒI DƯỠNG VĂN HÓA HÀ NỘI - Amsterdam 25/03/2018

Bài I $(2,0$ điểm$)$.

Cho biểu thức $A = \dfrac{x-2}{2+\sqrt{x}}$ và $B = \left(\dfrac{8x\sqrt{x}-1}{2x-\sqrt{x}} - \dfrac{8x\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}+x}\right) : \dfrac{2x+1}{2x-1}$ với $x > 0$; $x \neq \dfrac{1}{2}$; $x \neq \dfrac{1}{4}$.

1) Chứng minh khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$ thì $A = \dfrac{5\sqrt{2}-1}{7}$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm các giá trị của x để biểu thức $\dfrac{A}{B} = \dfrac{x-2}{4\sqrt{x}}$.

Bài II (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Một phòng họp có 180 ghế và được chia thành các dãy có số ghế ở mỗi dãy đều bằng nhau. Nếu kê thêm cho mỗi dãy 5 ghế và bớt đi 3 dãy thì số ghế trong phòng không thay đổi. Hỏi ban đầu số ghế trong phòng họp được chia thành bao nhiêu dãy.

Bài III $(2,0$ điểm$)$.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = (m-2)x + 3$ với m là tham số.

1) Chứng minh rằng khi m thay đổi thì (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía của trục tung.

2) Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm A, B của (d) và (P) với $x_1 < 0 < x_2$.

Xét các điểm $A(x_1); x_1^2)$, $B(x_2; x_2^2)$, $C(x_1; 0)$, $D(x_2; 0)$. Tìm tất cả các giá trị của m để hai tam giác AOC và BOD có diện tích bằng nhau.

Bài IV $(3,5$ điểm$)$.

Cho đường tròn (O) đường kính $AB = R$. Trên đoạn OA lấy điểm I ($I \neq A$ và O). Từ I Vẽ tia Ix vuông góc với AB cắt $(O;R)$ tại C. Lấy điểm E tùy ý trên cung nhỏ BC ($E \neq B$ và C). Nối AE cắt CI tại F. Gọi D là giao điểm của tia BC với tiếp tuyến tại A của $(O;R)$.

1) Chứng minh rằng: $BEFI$ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh: $AE.AF = CB.CD$.

3) Tia BE cắt tia CI tại K. Giả sử I và F lần lượt là trung điểm của AO và BC. Chứng minh $\Delta AIF \sim \Delta KIB$ từ đó tính độ dài đoạn IK theo R.

4) Khi I là trung điểm của OA và E chạy trên cung nhỏ BC. Tìm vị trí điểm E để biểu thức $EB + EC$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài V $(0,5$ điểm$)$. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a \geq 1$, $b \geq 1$, $c \geq 1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{2a-1} + \frac{1}{2b-1} + \frac{1}{2c-1} + \frac{4ab}{1+ab} + \frac{4bc}{1+bc} + \frac{4ca}{1+ca} \geq 9.$$

ĐỀ 5: THPT Nguyễn Tất Thành - 2018

Bài I (2,0 điểm).

Cho biểu thức $A = \left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \dfrac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$

1) Tìm điều kiện xác định của A và rút gọn A.

2) Tìm giá trị của x biết $A = \sqrt{x} - \dfrac{18}{5}$.

Bài II (1,0 điểm). Cho phương trình $(m-1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ ẩn x. Tìm m để phương trình có một nghiệm $x = -\sqrt{2}$. Tìm nghiệm còn lại.

Bài III (1,0 điểm). Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng d có phương trình $y = mx - 1$. Tìm m để (d) và (P):

1) Cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

2) Tiếp xúc nhau.

3) Không có điểm chung nào.

Bài IV (1,5 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Trong một phòng họp ghế được xếp theo hàng và số ghế mỗi hàng là bằng nhau. Nếu kê bớt đi hai hàng và mỗi hàng bớt đi hai ghế thì tổng số ghế trong phòng họp đó giảm đi 80 ghế so với ban đầu. Nếu xếp thêm một hàng và mỗi hàng xếp thêm hai ghế thì tổng số ghế trong phòng họp đó tăng thêm 68 ghế so với ban đầu. Tính số hàng ghế và số ghế trong phòng họp đó lúc ban đầu.

Bài V (3,5 điểm). CHo đường tròn $(O; R)$. Qua điểm A cố định nằm ngoài đường tròn kẻ đường thẳng d vuông góc với OA. Từ điểm B bất kì trên đường thẳng d (B không trùng với A), kẻ các tiếp tuyến BA và BC với $(O; R)$ (D, C là các tiếp điểm). Dây CD cắt OB tại N, cắt OA tại P.

1) Chứng minh rằng các tứ giác $OCBD$ và $BNPA$ là các tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh: $OA.OP = OB.ON = R^2$.

3) Cho $\widehat{CBO} = 30^0$ và $R = 6cm$. Tính diện tích tứ giác $BCOD$ và diện tích hình được giới hạn bởi cung nhỏ DC và dây DC.

4) Gọi E là giao điểm của đường thẳng AO với đường tròn (O) ((O) nằm giữa A và E). Khi B di chuyển trên đường thẳng d chứng minh trọng taam G của tam giác ACE thuộc một đường tròn cố định.

Bài VI (1,0 điểm).

1) Cho a, b, c là các số thực dương và $a + b + c = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = \sqrt{a^2 + 4ab + b^2} + \sqrt{b^2 + 4bc + c^2} + \sqrt{c^2 + 4ca + a^2}.$$

2) Giải phương trình: $5\sqrt{x^3 + 8} = 2(x^2 - x + 6)$.

ĐỀ 6: THPT Chuyên Khoa Học Tự Nhiên Hà Nội - 2018 (Vòng 1 đợt 1)

Bài I $(3,0$ điểm).

1) Giải phương trình.

$$x^2+1+\sqrt{x^2+x+2}=2x+\sqrt{3x+1}.$$

2) Giải hệ phương trình.

$$\begin{cases} x^2+4y^2=5 \\ 5x+10y+4x^2y+8y^2x=27 \end{cases}.$$

Bài II $(3,0$ điểm).

1) Tìm tất cả các ước số nguyên dương phân biệt của số $n=(420)^4$.

2) Với a, b, $c>0$ và $\min(ab,\, bc,\, ca\geq 1)$. Chứng minh rằng:

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)\leq\left(1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{c+a}{2}\right)^2\right).$$

Bài III $(3,0$ điểm).

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O với $BA>BC$. Phân giác ngoài góc ABC cắt đường thẳng qua A song song với BC tại P.

1) Chứng minh $AP=AB$.

2) Tiếp tuyến qua A của (O) cắt PB tại Q. BP cắt (O) tại M khác B. Chứng minh rằng:

$$MA^2=MQ.MP.$$

3) Gọi R đối xứng với Q qua AC. Chứng minh góc $\widehat{APR}=\widehat{CPB}$.

Bài IV $(1,0$ điểm). Giả sử số nguyên dương n có tính chất: có tồn tại một cách sắp xếp a_1, a_2, $\ldots$, a_2n của $2n$ số 1, 1, 2, 2, $\ldots$, n, n sao cho với mỗi $k=1$, 2, $\ldots$, n luôn tồn tại đúng k số xếp giữa hai số k. Chứng minh rằng n^2+n chia hết cho 4.

ĐỀ 7: THPT Chuyên Khoa Học Tự Nhiên Hà Nội - 2018 (Vòng 2 đợt 1)

Bài I $(3,0$ điểm).

1) Giải hệ phương trình.

$$\begin{cases} xy(x+y)=2 \\ y^3+y+6=7x^3+x \end{cases}.$$

2) Với a, b, c là các số thực bất kỳ, chứng minh bất biểu thức.

$$Q=\frac{a}{a-b}.\frac{c}{c-b}+\frac{b}{b-c}.\frac{a}{a-c}+\frac{c}{c-a}.\frac{b}{b-a}\ .$$

nhận giá trị nguyên.

Bài II $(3,0$ điểm).

1) Xét các số nguyên tố $n_1<n_2<n_3<...<n_{31}$. Giả sử $n_1^4+n_2^4+...+n_{31}^4$ chia hết cho 30. Chứng minh trong dãy số tồn tại 3 số nguyên tố liên tiếp.

2) Với x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^3+y^3+z^3-3xyz=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=x^2+y^2+z^2.$$

Bài III $(3,0$ điểm).

Cho tam giác nhọn ABC và P là một điểm bất kỳ nằm trong tam giác. D, E, F lần lượt là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. (I) là đường tròn ngoại tiếp ΔDEF.

1) Giả sử (I) cắt AB tại K khác F. Trung trực của DE cắt DK tại G. Chứng minh rằng G luôn nằm trên một đường thẳng d cố định khi P thay đổi.

2) Lấy J thuộc d sao cho $IJ//BP$. Chứng minh rằng IJ và BC cắt nhau trên đường tròn (I).

Bài IV $(1,0$ điểm). Chứng minh rằng với hợp số $n>4$ không tồn tại một cách sắp xếp a_1, a_2, ... a_n của các số 1, 2, ... n sao cho các số a_1, a_1a_2, $a_1a_2a_3$, ... $a_1a_2...a_n$ có số dư đôi một phân biệt khi chia cho n.

ĐỀ 8: THPT Chuyên Khoa Học Tự Nhiên Hà Nội - 03 - 03 - 2018

Bài I $(3,0$ điểm).

1) Giải phương trình.

$$\sqrt{x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2.$$

2) Giải hệ phương trình.

$$\begin{cases} x^2-y^2+3=4x+2y \\ x^2+xy+y^2=3 \end{cases}.$$

Bài II $(3,0$ điểm).

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$x^2-2xy-x+y+3=0$$

2) Với các só thực dương a, thỏa mãn $a+b=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{a}{\sqrt{4-a^2}}+\frac{b}{\sqrt{4-b^2}}.$$

Bài III $(3,0$ điểm).

Cho tam giác nhọn ABC với E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của B C lên cạnh CA, AB. Gọi M, N và Q lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BE, CF, CA và AB. Đường thẳng MN cắ CA, AB lần lượt tại K, L.

1) Chứng minh rằng $\dfrac{KC}{KE}=\dfrac{LF}{LB}$.

2) Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác AKL nằm trên đường thẳng PQ.

Bài IV $(1,0$ điểm). Cho 9 nguyên dương, mỗi số chỉ có các ước nguyên tố 2, 3, 5. Chứng minh rằng trong 9 số này luôn tồn tại hai số mà tích của chúng bằng bình phương của một số nguyên.

ĐỀ 9: THPT Chuyên Khoa Học Tự Nhiên Hà Nội - 07 - 04 - 2018 (Toán chung đợt 3)

Bài I $(3,0$ điểm).

1) Giải phương trình.

$$\sqrt{x+2}(x+\sqrt{2x+1}) = x+2+x\sqrt{2x+1}.$$

2) Giải hệ phương trình.

$$\begin{cases} x^3+2xy=3 \\ x^3+3x=4y^3 \end{cases}.$$

Bài II $(3,0$ điểm).

1) Tìm tất cả các số nguyên tố sao cho $2p^2+1$ là số nguyên tố.

2) Cho các số a, b thỏa mãn $a^2-b^2=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=2a-b$.

Bài III $(3,0$ điểm).

Cho tam giác nhọn ABC có $\widehat{BAC}$. Gọi O và H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

1) Chứng minh $BCHO$ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $BH-HC=\sqrt{3}HO$.

Bài IV $(1,0$ điểm). Xếp 2018 quả bóng được đánh số từ 1 đến 2018 lên một đường tròn. Với hai quả bóng bất kì được xếp kề nhau, ta tính hiệu của hai số ghi trên hai quả bóng (lấy số lớn trừ số bé). Gọi S là tổng tất các hiệu đó. Tìm giá trị nhỏ nhất của S.

ĐỀ 10: THPT Chuyên Khoa Học Tự Nhiên Hà Nội - 08 - 04 - 2018 (Toán chuyên đợt 3)

Bài I $(3,0$ điểm).

1) Giải phương trình.

$$\sqrt{x+1}+2\sqrt{4-x}-\sqrt{4+3x-x^2}=3x-7.$$

2) Giải hệ phương trình.

$$\begin{cases} x^3-9y^3=18 \\ xy(x-y)=6 \end{cases}.$$

Bài II $(3,0$ điểm).

1) Tìm tất cả các số nguyên dương m $(m>1)$ sao cho tồn tại số nguyên n để n^2+2 và $(n+1)^2+2$ đều chia hết cho m.

2) Cho các số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a,b,c \leq 1$. Chứng minh rằng

$$a+b+c > \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

Bài III $(3,0$ điểm).

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AB với $AD > BC$. Gọi (ω) là đường tròn đi qua C và tiếp xúc với AB tại O. Gọi E là giao điểm của đường thẳng OD và (ω) (E khác O) và I là giao điểm của đường phân giác $\widehat{COD}$ và đường thẳng BD.

1) Chứng minh $BCIF$ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp ΔOCE.

Bài IV $(1,0$ điểm). Xét tập $S=\{1,2,3,...,9,10,11\}$. Chứng minh rằng với mọi cách chia tập S thành hai tập con thì luôn tồn tại ba phần tử a, b, c thuộc cùng một tập con sao cho $a+b=c$.

"KIẾN THỨC CỦA CHÚNG TA CHÍNH LÀ CÁI MIỆNG GIẾNG MIỆNG GIẾNG CÀNG TO THÌ ĐÀO GIẾNG ĐƯỢC CÀNG SÂU".

—— CHÚC CÁC EM ÔN THI TỐT ——

TÀI LIỆU SẼ LUÔN ĐƯỢC CẬP NHẬT VÀ CHỈNH SỬA ĐỂ PHÙ HỢP VỚI CÁC NĂM

—— TO BE CONTINUED ——