

TÀI LIỆU ÔN TẬP TOÁN 9

BIẾN ĐỔI, ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

Lý thuyết:

1. Điều kiện để căn thức có nghĩa: \sqrt{A} có nghĩa khi $A \geq 0$

2. Các công thức biến đổi căn thức.

$$\sqrt{A^2} = |A| \quad \sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \quad (A \geq 0; B \geq 0) \quad \text{c. } \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \quad (A \geq 0; B > 0)$$

$$\sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} \quad (B \geq 0) \quad A \sqrt{B} = \sqrt{A^2 B} \quad (A \geq 0; B \geq 0)$$

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{1}{|B|} \sqrt{AB} \quad (AB \geq 0; B \neq 0) \quad \frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} \quad (B > 0)$$

$$\frac{C}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2} \quad (A \geq 0; A \neq B^2) \quad \frac{C}{\sqrt{A \pm \sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B} \quad (A \geq 0; B \geq 0; A \neq B)$$

Để giải các bài toán dạng rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai, thông thường chúng ta sẽ ưu tiên thực hiện theo thứ tự sau:

1) Làm mất 1 lớp căn dạng $\boxed{\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}} = \sqrt{(\sqrt{m} \pm \sqrt{n})^2}}$ (nếu có)

2) Phân tích tử và mẫu các phân thức thành nhân tử \rightarrow Thu gọn phân thức (nếu được)

3) Thực hiện theo thứ tự phép toán (Ngoặc \rightarrow Nhân, chia \rightarrow Cộng, trừ)

4) Bình phương hai vế

5) Đặt ẩn phụ

Bài 1: Tính:

a) Làm mất 1 lớp căn: Dạng $\boxed{\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}} = \sqrt{(\sqrt{m} \pm \sqrt{n})^2}}$

Bản chất vấn đề: VD: $\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$

Ta nhận thấy: $15 = 3 \cdot 5 = 15 \cdot 1$. Lại có: $3 + 5 = 8$ (còn $15 + 1 = 16$)

Vậy ta chọn hai số: **3** và **5** để phân tích: $\boxed{8 = 3 + 5 = \sqrt{3}^2 + \sqrt{5}^2}$

Và: $\boxed{\sqrt{15} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}$. Như vậy ta có:

$$\sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = \sqrt{\sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5}^2} = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

Sử dụng máy tính Casio để tìm hai con số 3 và 5 này như sau:

***Với máy tính: Fx-570VN PLUS hoặc máy tính 570ES:**

-Bấm **Mode** chọn: **5** chọn: **3**

-Nhập: **1** **=** (bất kỳ bài nào, luôn nhập a = 1)

-8 **=** (là số đối của 8 - Tức nhập b = - 8)

15 **=** (Là số bên trong căn nhỏ, c = 15)

-Bấm tiếp: **=**

Ta được kết quả hiển thị trên màn hình là: **X₁ = 5**

-Bấm tiếp: **=**

Ta tiếp tục được kết quả thứ 2 là: **X₂ = 3**

***Với máy tính loại 500Ms hoặc 570MS :**

Bấm : **Mode Mode Mode 1** **▷** **2**

Sau đó cũng nhập : a, b, c theo cách làm trên

Bài tập áp dụng:

- | | | | |
|---------------------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1) $\sqrt{11-2\sqrt{10}}$ | 2) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$ | 3) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ | 4) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ |
| 5) $\sqrt{27-10\sqrt{2}}$ | 6) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$ | 7) $\sqrt{15-2\sqrt{14}}$ | 8) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ |
| 9) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ | 10) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ | 11) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$ | 12) $\sqrt{14-2\sqrt{13}}$ |
| 13) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ | 14) $\sqrt{12+6\sqrt{3}}$ | 15) $\sqrt{27-10\sqrt{2}}$ | 16) $\sqrt{18-6\sqrt{5}}$ |
| 17) $\sqrt{21+4\sqrt{5}}$ | 18) $\sqrt{28-6\sqrt{3}}$ | 19) $\sqrt{15-10\sqrt{2}}$ | 20) $\sqrt{46-6\sqrt{5}}$ |
| 17) $\sqrt{6-\sqrt{20}}$ | 18) $\sqrt{8+\sqrt{28}}$ | 19) $\sqrt{12-\sqrt{44}}$ | 20) $\sqrt{5-\sqrt{24}}$ |
| 21) $\sqrt{8-\sqrt{60}}$ | 22) $\sqrt{7+\sqrt{48}}$ | 23) $\sqrt{9+\sqrt{56}}$ | 24) $\sqrt{7+\sqrt{24}}$ |
| 25) $\sqrt{3-\sqrt{5}}$ | 26) $\sqrt{4+\sqrt{7}}$ | 27) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$ | 28) $\sqrt{6-\sqrt{35}}$ |
| 29) $\sqrt{7+\sqrt{40}}$ | 30) $\sqrt{8+\sqrt{15}}$ | 31) $\sqrt{9-\sqrt{77}}$ | 32) $\sqrt{10+\sqrt{99}}$ |

Dạng chứa chữ (với điều kiện tất cả các căn đều có nghĩa):

- | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------|
| 1) $\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}$ | 2) $\sqrt{x+1+2\sqrt{x}}$ | 3) $\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}}$ |
| 4) $\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}$ | 5) $\sqrt{2x-1-2\sqrt{2(x-1)}}$ | 6) $\sqrt{2x+1+2\sqrt{2x}}$ |
| 7) $\sqrt{2x-5-2\sqrt{(x-2)(x-3)}}$ | 8) $\sqrt{2x-1+2\sqrt{(x+2)(x-3)}}$ | |
| 9) $\sqrt{2x+1-2\sqrt{(x-1)(x+2)}}$ | 10) $\sqrt{2x-1-2\sqrt{x^2-x-2}}$ | |
| 11) $\sqrt{2x+3+2\sqrt{x^2+3x+2}}$ | 12) $\sqrt{2x+2-2\sqrt{x^2+2x-3}}$ | |

b) Tính toán, rút gọn linh hoạt:

Dạng đơn giản:

- | | | |
|---|---|--|
| 1) $\sqrt{14} \cdot \sqrt{56}$ | 2) $\sqrt{3\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{3\frac{3}{7}} \cdot \sqrt{12}$ | 3) $\sqrt{4-\sqrt{7}} \cdot \sqrt{4+\sqrt{7}}$ |
| 4) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{75}$ | 5) $\sqrt{2\frac{7}{9}} \cdot \sqrt{1\frac{24}{25}} \cdot \sqrt{\frac{36}{25}}$ | 6) $\sqrt{0,0425}$ |
| 7) $\sqrt{90.6,4}$ | 8) $\sqrt{9-\sqrt{17}} \cdot \sqrt{9+\sqrt{17}}$ | 9) $\sqrt{12}+5\sqrt{3}-\sqrt{48}$ |
| 10) $5\sqrt{5}+\sqrt{20}-3\sqrt{45}$ | 11) $2\sqrt{32}+4\sqrt{8}-5\sqrt{18}$ | |
| 12) $3\sqrt{12}-4\sqrt{27}+5\sqrt{48}$ | 13) $\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{27}$ | |
| 14) $2\sqrt{18}-7\sqrt{2}+\sqrt{162}$ | 15) $\sqrt{5}+\sqrt{20}-\sqrt{80}$ | |
| 16) $\sqrt{3}+\sqrt{12}+3\sqrt{2} \cdot \sqrt{24}$ | 17) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}-\sqrt{3}$ | |
| 18) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}-\frac{2}{\sqrt{3}+1}-\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ | | |

Các dạng khác:

- | | |
|---|--|
| 1) $2\sqrt{5}-\sqrt{125}-\sqrt{80}+\sqrt{605}$ | 2) $\frac{10+2\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\frac{8}{1-\sqrt{5}}$ |
| 3) $\sqrt{15-\sqrt{216}}+\sqrt{33-12\sqrt{6}}$ | 4) $\frac{2\sqrt{8}-\sqrt{12}}{\sqrt{18}-\sqrt{48}}-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{27}}{\sqrt{30}+\sqrt{162}}$ |
| 5) $2\sqrt{\frac{16}{3}}-3\sqrt{\frac{1}{27}}-6\sqrt{\frac{4}{75}}$ | 6) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}$ |

- 7) $\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}(3+\sqrt{5})}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$ 8) $2\sqrt{27}-6\sqrt{\frac{4}{3}}+\frac{3}{5}\sqrt{75}$
- 9) $\sqrt{8\sqrt{3}}-2\sqrt{25\sqrt{12}}+4\sqrt{\sqrt{192}}$ 10) $\sqrt{2-\sqrt{3}}(\sqrt{5}+\sqrt{2})$
- 11) $\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}$ 12) $\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$
- 13) $\frac{(\sqrt{5}+2)^2-8\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-4}$ 14) $\sqrt{21+6\sqrt{6}}+\sqrt{21-6\sqrt{6}}$
- 15) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ 16) $\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$
- 17) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}-\frac{2}{3+\sqrt{3}}$ 18) $2\sqrt{2}(\sqrt{3}-2)+(1+2\sqrt{2})^2-2\sqrt{6}=9$
- 19) $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{6}$ 20) $\sqrt{\frac{4}{(2-\sqrt{5})^2}}-\sqrt{\frac{4}{(2+\sqrt{5})^2}}=8$
- 21) $(\sqrt{12}+\sqrt{75}+\sqrt{27}):\sqrt{15}$ 22) $\sqrt{252}-\sqrt{700}+\sqrt{1008}-\sqrt{448};$
- 23) $(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})(\sqrt{72}-5\sqrt{20}-2\sqrt{2})$ 24) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}+\frac{1-\sqrt{3}}{2};$
- 25) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$ 26) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}:\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}-\frac{2}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}\right)$
- 27) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{7+2\sqrt{10}}}$ 28) $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$
- 29) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})$
- 30) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ 31) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}-\sqrt{23-4\sqrt{5}}$
- 32) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ 33) $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$
- 34) $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}$
- 35) $\sqrt{2+\sqrt{3}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$
- 36) $\sqrt{2+\sqrt{2}}.\sqrt{3+\sqrt{7+\sqrt{2}}}\sqrt{3+\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2}}}}.\sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2}}}}$
- 37) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ 38) $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$
- 39) $\sqrt{3-\sqrt{5}}(\sqrt{10}-\sqrt{2})(3+\sqrt{5})$ 40) $\sqrt{12-3\sqrt{7}}-\sqrt{12+3\sqrt{7}}$
- 41) $\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$
- 42) $\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$ 43) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}-\sqrt{7+2\sqrt{10}}$
- 44) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$ 45) $3\sqrt{3}+4\sqrt{12}-5\sqrt{27};$
- 46) $\sqrt{32}-\sqrt{50}+\sqrt{18}$ 47) $\sqrt{72}+\sqrt{4\frac{1}{2}}-\sqrt{32}-\sqrt{162}$
- 48) $\frac{1}{2}\sqrt{48}-2\sqrt{75}-\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}}+5\sqrt{1\frac{1}{3}}$ 49) $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)$

- 50) $(\sqrt{45} + \sqrt{63})(\sqrt{7} - \sqrt{5})$
52) $(\sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{27})(\sqrt{27} + \sqrt{50} - \sqrt{32})$
54) $(2\sqrt{112} - 5\sqrt{7} + 2\sqrt{63} - 2\sqrt{28})\sqrt{7}$
56) $7\sqrt{24} - \sqrt{150} - 5\sqrt{54}$
58) $\sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{98} - \sqrt{72}$
60) $\sqrt{48} + \sqrt{5\frac{1}{3}} + 2\sqrt{75} - 5\sqrt{1\frac{1}{3}}$
62) $(\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$
64) $\left(\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{(\sqrt{2} + 1)^2}$
66) $\left(\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{24} + 1} - \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{24} - 1} + 1\right) : (\sqrt{3} - \sqrt{2})$
68) $\sqrt{6 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}$
70) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{6}}{1 - \sqrt{2}} - \frac{2 + \sqrt{8}}{1 + \sqrt{2}}$
72) $\frac{5 + 7\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{11 + \sqrt{11}}{1 + \sqrt{11}}$
- 51) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(5 - \sqrt{15})$
53) $(\sqrt{12} - \sqrt{48} - \sqrt{108} - \sqrt{192}) : 2\sqrt{3}$
55) $(2\sqrt{27} - 3\sqrt{48} + 3\sqrt{75} - \sqrt{192})(1 - \sqrt{3})$
57) $2\sqrt{20} - \sqrt{50} + 3\sqrt{80} - \sqrt{320}$
59) $\sqrt{75} - \sqrt{5\frac{1}{3}} + \frac{9}{2}\sqrt{2\frac{2}{3}} + 2\sqrt{27}$
61) $(\sqrt{15} + 2\sqrt{3})^2 + 12\sqrt{5}$
63) $\left(\frac{2}{\sqrt{3} - 1} + \frac{3}{\sqrt{3} - 2} + \frac{15}{3 - \sqrt{3}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3} + 5}$
65) $\left(\frac{3 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}\right) \cdot \left(1 : \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}\right)$
67) $\sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{1 - \sqrt{21 - 12\sqrt{3}}}}$
69) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3} + 1} - 1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3} + 1} + 1}$
71) $\left(2 + \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}\right) \cdot \left(2 - \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}\right)$

Bài 2: Rút gọn các biểu thức:

Biểu thức số:

- 1) $\sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{2}$
2) $\sqrt{6 + 2\sqrt{2}\sqrt{3 - \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12} + \sqrt{18} - \sqrt{128}}}}$
3) $\frac{8\sqrt{41}}{\sqrt{45 + 4\sqrt{41}} + \sqrt{45 - 4\sqrt{41}}}$
4) $\sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$
5) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$
6) $\sqrt{227 - 30\sqrt{2}} + \sqrt{123 + 22\sqrt{2}}$
7) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}}{\sqrt{2} + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}}$
8) $\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$
9) $\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 6\sqrt{20}}}}$
10) $2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$
11) $\left(\sqrt{\sqrt{7 + \sqrt{48}} - \sqrt{\sqrt{28 - 16\sqrt{3}}}}\right) \cdot \sqrt{\sqrt{7 + \sqrt{48}}}$
12) $\sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}$
13) $\sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$
14) $\sqrt{94 - 42\sqrt{5}} - \sqrt{94 + 42\sqrt{5}}$

Biểu thức chứa chữ:

- 1) $\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) : \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2$ (Với $x > 0, x \neq 1$) 2) $\frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} + 1 - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ (với $x > 0$)
- 3) $\frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$ 4) $\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} + \frac{x+1}{\sqrt{x}}$
- 5) $\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ 6) $\left(\frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} - \frac{x+\sqrt{x}}{x-1}\right) : \frac{x-1}{2x+\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$
- 7) $\frac{1}{x^2-\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}$ 8) $\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} : \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$
- 9) $\frac{\sqrt{a}+3}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+2} + \frac{4\sqrt{a}-4}{4-a}$ 10) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} - 2\right)$
- 11) $\left(\frac{\sqrt{a}-1}{3\sqrt{a}+(\sqrt{a}-1)^2} - \frac{1-3\sqrt{a}+a}{a\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}-1}\right) : \frac{a+1}{1-\sqrt{a}}$
- 12) $\left(\frac{\sqrt{x}+2}{3\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - 3\right) : \frac{2-4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{3\sqrt{x}+1-x}{3\sqrt{x}}$ 13) $\left(\frac{2\sqrt{x}+x}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}\right)$
- 14) $\left(\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} - \frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} - \frac{4x}{x-4}\right) : \frac{x-6\sqrt{x}+9}{(2-\sqrt{x})(\sqrt{x}-3)}$ 15) $\left(\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + 1\right) \left(\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-1} + 1\right)$
- 16) $\sqrt{m+2\sqrt{m-1}} + \sqrt{m-2\sqrt{m-1}}$ 17) $\sqrt{m+2+2\sqrt{m+1}} + \sqrt{m+2-2\sqrt{m+1}}$

Bài 3: Tìm các giá trị của $x \in \mathbb{Z}$ để các biểu thức sau có giá trị nguyên

- 1) $A = \frac{6}{x-1}$ 2) $B = \frac{14}{2x+3}$ 3) $C = \frac{x+5}{x+2}$ 4) $D = \frac{4x+3}{2x-6}$
- 5) $\frac{x^3-x^2+2}{x-1}$ 6) $\frac{x^3-2x^2+4}{x-2}$ 7) $\frac{2x^3+x^2+2x+2}{2x+1}$
- 8) $\frac{3x^3-7x^2+11x-1}{3x-1}$ 9) $\frac{x^4-16}{x^4-4x^3+8x^2-16x+16}$
- 10) $\frac{x-3}{x+2}$ 11) $\frac{x+1}{x+2}$ 12) $\frac{2x+3}{x-2}$ 13) $\frac{2x+3}{3x+1}$
- 14) $\frac{x+3}{2x-1}$ 15) $\frac{2x^2+3x-1}{2x+1}$ 16) $\frac{2x^2+4x-1}{2x+1}$ 17) $\frac{2x^2+3}{x-2}$

Bài 4: Cho biểu thức $P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} + \frac{8x}{4-x}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)$

a) Rút gọn P

b) Tìm giá trị của x để $P = -1$

c) Tìm m để với mọi giá trị $x > 9$ ta có $m(\sqrt{x}-3)P > x+1$

$$\text{HD câu C: } \begin{cases} \frac{5}{18} > \frac{x+1}{4x} \\ m > \frac{x+1}{4x} \end{cases} \Rightarrow m \geq \frac{5}{18}$$

Bài 5: Cho biểu thức: $A = \frac{x+1}{x+3} - \frac{10}{x^2+x-6} + \frac{5}{x-2}$

a) Tìm điều kiện của x để A xác định

- b) Rút gọn biểu thức A
- c) Tìm giá trị của x để $A > 0$

Bài 6: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right) : \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right)$

- a) Rút gọn biểu thức A
- b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \sqrt{3} + \sqrt{8}$
- c) Tìm giá trị của x khi $A = \sqrt{5}$

Bài 7: Cho biểu thức $C = \left(x - 3 + \frac{1}{x-1} \right) : \left(x - 1 - \frac{1}{x-1} \right) : \frac{x+2}{x}$

- a) Tìm điều kiện đối với x để biểu thức C xác định
- b) Rút gọn biểu thức C
- c) Tính giá trị của biểu thức C khi $x = \sqrt{6} + \sqrt{20}$
- d) Tìm các giá trị nguyên của x để C có giá trị nguyên

Bài 8: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} \right) : \frac{a+2}{a-2}$

- a) Với giá trị nào của a thì biểu thức A không xác định
- b) Rút gọn biểu thức A
- c) Với giá trị nguyên nào của a thì A có giá trị nguyên?

Bài 9: Cho biểu thức: $B = \frac{x}{\sqrt{x}-1} - \frac{2x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$

- a) Rút gọn biểu thức B
- b) Tính giá trị của B khi $x = 3 + \sqrt{8}$
- c) Với giá trị nào của x thì $B > 0$? $B < 0$? $B = 0$?

Bài 10: Cho biểu thức $B = \frac{\sqrt{a}+3}{2\sqrt{a}-6} - \frac{3-\sqrt{a}}{2\sqrt{a}+6}$

- a) Tìm điều kiện của a để B xác định. Rút gọn B
- b) Với giá trị nào của a thì $B > 1$? $B < 1$?
- c) Tìm các giá trị của x để $B = 4$

Bài 11: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{1}{1+\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{1+\sqrt{x}} \right) + \frac{1}{1-\sqrt{x}}$

- a) Rút gọn biểu thức A
- b) Tính giá trị của A khi $x = 7 + 4\sqrt{3}$
- c) Với giá trị nào của x thì A đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 12: Cho biểu thức $C = \frac{2a-a^2}{a+3} \left(\frac{a-2}{a+2} - \frac{a+2}{a-2} + \frac{4a^2}{4-a^2} \right)$

- a) Tìm điều kiện đối với a để biểu thức C xác định. Rút gọn biểu thức C
- b) Tìm các giá trị của a để $C = 1$
- c) Khi nào thì C có giá trị dương? Có giá trị âm?

Bài 13: Cho $P = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left(\frac{1-x}{\sqrt{2}} \right)^2$

- a) Rút gọn P.
- b) Chứng minh : Nếu $0 < x < 1$ thì $P > 0$.
- c) Tìm giá trị lớn nhất của P.

Bài 14: Cho biểu thức $B = \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x^3-x}}{\sqrt{x-1}}$

- a) Tìm điều kiện để biểu thức B xác định
- b) Rút gọn biểu thức B
- c) Tìm giá trị của x khi B = 4
- d) Tìm các giá trị nguyên dương của x để B có giá trị nguyên

Bài 15: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x-2\sqrt{x}+1}$

- a) Tìm điều kiện của x để A có nghĩa, rút gọn A.
- b) So sánh A với 1

Bài 16: Tìm giá trị của x để

- a) $x^2 - 2x + 7$ có giá trị nhỏ nhất
- b) $\frac{1}{x^2 + 2x + 5}$ có giá trị lớn nhất
- c) $\frac{2x^2 + 5}{2x^2 + 1}$ có giá trị lớn nhất
- d) $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 4x + 5}$ có giá trị nhỏ nhất

Bài 17: Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{x-2-2\sqrt{x-3}} - \sqrt{x+1-4\sqrt{x-3}}$ với $3 \leq x \leq 4$

Bài 18: Cho biểu thức $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$

- a) Rút gọn P
- b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P
- c) Tìm x để biểu thức $Q = \frac{2\sqrt{x}}{P}$ nhận giá trị là số nguyên.

Bài 19: Chứng minh $(5 + 2\sqrt{6})(49 - 20\sqrt{6})\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = 9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}$

Bài 20: Cho $A = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + 4\sqrt{a} \right) \cdot \left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$ với $x > 0, x \neq 1$

- a) Rút gọn A HD: a) $A = 4a$
- b) Tính A với $a = (\sqrt{4+\sqrt{15}}) \cdot (\sqrt{10}-\sqrt{6}) \cdot (\sqrt{4-\sqrt{15}})$

Bài 21: Cho $A = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

- a) Rút gọn A
- b) Tìm GTLN của A HD: a) $A = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$

b) Nếu $x = 0$ thì $A = 0$

HD: - Nếu $x \neq 0$ thì $A = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{x}+1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$

Bài 22: Cho $A = \left(\frac{x-\sqrt{x}+7}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} - \frac{2\sqrt{x}}{x-4} \right)$ với $x > 0, x \neq 4$.

- a) Rút gọn A.
- b) So sánh A với $\frac{1}{A}$

HD: a) $A = \frac{x+9}{6\sqrt{x}}$ b) $A - \frac{1}{A} = \dots = \frac{(x-9)^2}{6\sqrt{x}(x+9)} \geq 0 \Rightarrow A \geq \frac{1}{A}$

Bài 23: Cho $A = \left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-9} - 1 \right) : \left(\frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} \right)$

- a) Tìm x để biểu thức A xác định.
- b) Rút gọn A.

c) với giá trị nào của x thì $A < 1$. d) Tìm $x \in Z$ để $A \in Z$

HD a) $x \geq 0, x \neq 9, x \neq 4$

b) $A = \frac{3}{\sqrt{x}-2}$

Bài 24: Cho $A = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn A. b) Tìm GTLN của A.

c) Tìm x để $A = \frac{1}{2}$ d) CMR : $A \leq \frac{2}{3}$.

HD: a) $A = \frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ b) $-5 + \frac{17}{\sqrt{x}+3}$

Bài 25: Cho $A = \left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{y-x} \right) : \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ với $x \geq 0, y \geq 0, x \neq y$

a) Rút gọn A. b) CMR : $A \geq 0$

HD: a) $A = \frac{\sqrt{xy}}{x-\sqrt{xy}+y}$

b) $A = \frac{\sqrt{xy}}{x-\sqrt{xy}+y} = \frac{\sqrt{xy}}{\left(\sqrt{x}-\frac{\sqrt{y}}{2}\right)^2 + \frac{3y}{4}} \geq 0$ Với $x, y \geq 0$

Bài 26: Cho $A = \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} + \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)$ Với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn A. b) Tìm x để $A = 6$ HD: a) $A = \frac{2(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}$

Bài 27: Cho $A = \left(\frac{\sqrt{x}-4}{x-2\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}-2} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \right)$ với $x > 0, x \neq 4$.

a) Rút gọn A b) Tính A với $x = 6-2\sqrt{5}$ HD: a) $A = 1-\sqrt{x}$ b)

Bài 28: Cho $A = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{1}{1+\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{1+\sqrt{x}} \right) + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn A b) Tính A với $x = 6-2\sqrt{5}$ HD: $A = \frac{3}{2\sqrt{x}}$

Bài 29: Cho $A = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(1 - \frac{x+4}{x+\sqrt{x}+1} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn A. b) Tìm $x \in Z$ để $A \in Z$ HD: a) $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$

Bài 29: Cho $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x-1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1$

a) Rút gọn A. b) Tìm $x \in Z$ để $A \in Z$ c) Tìm x để A đạt GTNN

d) Tìm x để $A \in Z$

HD: a) $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

b) $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}+1}$

$$A \text{ nguyễn}^n \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}+1} \text{ nguyễn}^n n^{\text{a}n} \text{ ®\&t: } \frac{2}{\sqrt{x}+1} = n \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2-n}{n} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < n \leq 2 \Rightarrow n \in \{1;2\} \Rightarrow \sqrt{x} \in \{1;0\} \Leftrightarrow x \in \{1;0\}$$

c) Có: $0 < \frac{2}{\sqrt{x}+1} \leq 2$. Mà $\frac{2}{\sqrt{x}+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}+1} \in \{1;2\}$

Bài 30: Cho $A = \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+3}{x-9} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - 1 \right)$ với $x \geq 0, x \neq 9$

a) Rút gọn A. b) Tìm x để $A < -\frac{1}{2}$ HD: a) $A = \frac{-3}{\sqrt{a}+3}$

Bài 31: Cho $A = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{8\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-x-3}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn A b) Tính A với $x = 6-2\sqrt{5}$ c) CMR : $A \leq 1$

HD: a) $A = \frac{4\sqrt{x}}{x+4}$ b) c) Xét hiệu $A - 1$.

Bài 32: Cho $A = \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x-2\sqrt{x}+1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn A b) So sánh A với 1 HD: a) $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

Bài 33: Cho $A = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}-1} - \frac{1}{3\sqrt{x}+1} + \frac{8\sqrt{x}}{9x-1} \right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}+1} \right)$ Với $x \geq 0, x \neq \frac{1}{9}$

a) Rút gọn A. b) Tìm x để $A = \frac{6}{5}$ c) Tìm x để $A < 1$.

HD: a) $A = \frac{x+\sqrt{x}}{3\sqrt{x}-1}$

Bài 34: Cho $A = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{x^2-2x+1}{2}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn A. b) CMR nếu $0 < x < 1$ thì $A > 0$

c) Tính A khi $x = 3+2\sqrt{2}$ d) Tìm GTLN của A

HD: a) $A = \sqrt{x}(1-\sqrt{x})$

Bài 35: Cho $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn A. b) CMR nếu $x \geq 0, x \neq 1$ thì $A > 0 \rightarrow$ HD: a) $A = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$

Bài 36: Cho $A = \left(1 - \frac{4}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{x-1} \right) : \frac{x-2\sqrt{x}}{x-1}$ với $x > 0, x \neq 1, x \neq 4$.

a) Rút gọn A. b) Tìm x để $A = \frac{1}{2}$

Bài 37: Cho $A = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x-2\sqrt{x}-3}{x-1} \right) : \left(\frac{x+3}{x-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn A. b) Tính A khi $x = 0,36$ c) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A \in \mathbb{Z}$

Bài 38: Cho $A = \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{3}{x\sqrt{x+1}} + \frac{2}{x-\sqrt{x+1}}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn A. b) CMR : $0 \leq A \leq 1$ HD: a) $A = \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x+1}}$

Bài 39: Cho $A = \left(\frac{x-5\sqrt{x}}{x-25} - 1 \right) : \left(\frac{25-x}{x+2\sqrt{x}-15} - \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+5}} + \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-3}} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 9; x \neq 2$

a. Rút gọn A. b) Tìm x nguyên sao cho A nguyên
HD: a) $A = \frac{5}{\sqrt{x+3}}$ b) Tương tự bài 29

Bài 40: Cho $A = \frac{2\sqrt{a}-9}{a-5\sqrt{a}+6} - \frac{\sqrt{a}+3}{\sqrt{a}-2} - \frac{2\sqrt{a}+1}{3-\sqrt{a}}$ với $a \geq 0, a \neq 9, a \neq 4$.

a) Rút gọn A. b) Tìm a để $A < 1$ c) Tìm $a \in \mathbb{Z}$ để $A \in \mathbb{Z}$
HD: a) $A = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-3}$

Bài 41: Cho $A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 9, x \neq 4$.

a) Rút gọn A. b) Tìm x để $A \in \mathbb{Z}$ c) Tìm x để $A < 0$
HD: a) $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$

Bài 42: Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}-1}$ ($x \geq 2; x \neq 3$)

a) Rút gọn A. b) Tính A khi $x=6$

Bài 43: Cho biểu thức: $B = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} \right)$

a) Rút gọn B b) CMR: $3B < 1$ với điều kiện thích hợp của x

Bài 44: Cho biểu thức: $C = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(1 - \frac{x+4}{x+\sqrt{x}+1} \right)$

a) Rút gọn C. b) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ sao cho $C \in \mathbb{Z}$.

Bài 45: Cho biểu thức: $D = \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+3}{x-9} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - 1 \right)$ ($x \geq 0; x \neq 9$)

a) Rút gọn D. b) Tìm x sao cho $D < \frac{1}{3}$. c) Tìm GTNN của D.

Bài 46: Cho biểu thức: $E = \left(\frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} \right)$ ($x \geq 0; x \neq 1$)

a) Rút gọn E b) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ sao cho $E \in \mathbb{Z}$.

Bài 47: Cho biểu thức: $F = \left(\frac{3}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{1-x} \right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + 1 \right)$ ($-1 < x < 1$)

a) Rút gọn F b) Tính giá trị của F khi $x = 4\sqrt{2}-5$

Bài 48: Cho biểu thức: $G = \left(\frac{x+5-5\sqrt{x-1}}{x-1-3\sqrt{x-1}} + \sqrt{1-x} \right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + 1 \right)$ ($x > 1; x \neq 10$)

a) Rút gọn F b) CMR: $F < 3$

Bài 49: Cho biểu thức: $H = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{2} \right)$ ($x \geq 0; x \neq 9$)

- a) Rút gọn H. b) CMR $H > 0$ với điều kiện xác định của H.

Bài 50: Cho biểu thức: $K = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$ ($x \geq 0; x \neq 9$)

- a) Rút gọn K. b) Tìm x để $K = 0,5$
c) Tìm x để K nhận giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Bài 51: Cho biểu thức: $L = \frac{12-x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}$ ($x \geq 2; x \neq 3$)

- a) Tìm x để L đạt GTLN. Tìm GTLN đó. b) Tìm x sao cho $L = 2x$

Bài 52: Cho biểu thức: $M = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right)$

- a) Rút gọn M. b) Tính giá trị của M khi $x = 28 - 6\sqrt{3}$ c) CMR : $M < \frac{1}{3}$

Bài 53: Cho biểu thức: $N = \left(\frac{x+1}{xy+1} + \frac{xy+x}{xy-1} - 1 \right) : \left(\frac{x+1}{xy+1} - \frac{xy+x}{xy-1} + 1 \right)$

- a) Rút gọn N. b) Tính giá trị của N khi $x = \sqrt{4+2\sqrt{3}}$; $y = \sqrt{4-2\sqrt{3}}$
c) Biết $x+y=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của N.

Bài 54: Cho biểu thức: $P = \frac{x}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 - \sqrt{y})} - \frac{y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)} - \frac{xy}{(\sqrt{x} + 1)(1 - \sqrt{y})}$

- a) Tìm điều kiện của x và y để P xác định. Rút gọn P.
b) Tìm x,y nguyên thỏa mãn phương trình $P = 2$.

HD:

- a) Điều kiện để P xác định là: $x \geq 0; y \geq 0; y \neq 1; x + y \neq 0$

$$P = \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y}.$$

b) $P = 2 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(1 + \sqrt{y}) = 1$

Ta có: $1 + \sqrt{y} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow x = 0; 1; 2; 3; 4$.

Bài 55: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$

- a) Tính $f(-1); f(5)$ b) Tìm x để $f(x)=10$ c) Rút gọn $A = \frac{f(x)}{x^2 - 4}$ khi $x \neq \pm 2$

HD: c) $A = \frac{f(x)}{x^2 - 4} = \frac{|x-2|}{(x-2)(x+2)}$

+ Với $x > 2$ suy ra $x - 2 > 0$ suy ra $A = \frac{1}{x+2}$;

+ Với $x < 2$ suy ra $x - 2 < 0$ suy ra $A = -\frac{1}{x+2}$

Bài 56: Cho $P = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$

- a) Rút gọn P b) Chứng minh: $P < \frac{1}{3}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

HD:a) Điều kiện: $x \geq 0$ và $x \neq 1$. $P = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$

Bài 57: Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{97} + \sqrt{99}}$$

HD: Trục căn thức ở mẫu $A = \frac{1}{2}(\sqrt{99} - \sqrt{3})$

Bài 58: Cho biểu thức $D = \left[\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{1 - \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{1 + \sqrt{ab}} \right] : \left[1 + \frac{a + b + 2ab}{1 - ab} \right]$

a) Tìm điều kiện xác định của D và rút gọn D

b) Tính giá trị của D với $a = \frac{2}{2 - \sqrt{3}}$

c) Tìm giá trị lớn nhất của D

HD: a) – Điều kiện xác định của D là $a \geq 0; b \geq 0; ab \neq 1 \rightarrow D = \frac{2\sqrt{a}}{a + 1}$

c) Áp dụng BĐT cauchy ta có : $2\sqrt{a} \leq a + 1 \Rightarrow D \leq 1$. Vậy $\text{Max}D = 1$

Bài 59: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}} \right) : \left(1 - \frac{3 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right) \rightarrow \text{kq: } \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$

1) Tìm ĐK XĐ của biểu thức A. 2) Rút gọn A.

3) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{1}{6 - 2\sqrt{5}}$

4) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

5) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức A bằng -3.

6) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức A nhỏ hơn -1.

7) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức A lớn hơn $\frac{-2}{\sqrt{x} + 1}$

8) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức A - 1 Max

9) So sánh A với $-\sqrt{x} + 1$

Bài 60: Cho biểu thức: $B = \left(1 - \frac{4\sqrt{x}}{x - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{x - 2\sqrt{x}}{x - 1} \rightarrow \text{kq: } \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$

1) Tìm x để biểu thức B xác định. 2) Rút gọn B.

3) Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 11 - 6\sqrt{2}$

4) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức B nhận giá trị nguyên.

5) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức B bằng -2.

6) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức B âm.

7) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức B nhỏ hơn -2.

8) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức B lớn hơn $\sqrt{x} - 1$

Bài 61: Cho biểu thức: $C = \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{x^3} - 1} - \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{x^3}}{1 + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) \rightarrow \text{kq: } \sqrt{x} - 1$

1) Biểu thức C xác định với những giá trị nào của x? 2) Rút gọn C.

3) Tính giá trị của biểu thức C khi $x = 8 - 2\sqrt{7}$

4) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức C bằng -3.

5) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức C lớn hơn $-\frac{1}{3}$.

- 6) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức C nhỏ hơn $2\sqrt{x}+3$.
- 7) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức C nhỏ nhất.
- 8) So sánh C với $-\frac{2}{\sqrt{x}}$.

Bài 62: Cho biểu thức: $D = \left(\frac{x-2\sqrt{x}}{x-4} - 1 \right) : \left(\frac{4-x}{x-\sqrt{x}-6} - \frac{\sqrt{x}-2}{3-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} \right)$ kq: $\frac{2}{\sqrt{x}-3}$

- 1) Tìm ĐK XĐ của biểu thức D.
- 2) Rút gọn D.
- 3) Tính giá trị của biểu thức D khi $x = 13 - \sqrt{48}$.
- 4) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức D bằng 1.
- 5) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức D âm.
- 6) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức D nhỏ hơn -2.
- 7) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức D nhận giá trị nguyên.
- 8) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức D lớn nhất.
- 9) Tìm x để D nhỏ hơn $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Bài 63: Cho biểu thức: $E = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{8\sqrt{a}}{a-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}-a-3}{a-1} - \frac{1}{\sqrt{a}-1} \right)$

- 1) Tìm a để biểu thức E có nghĩa.
- 2) Rút gọn E.
- 3) Tính giá trị của biểu thức E khi $a = 24 - 8\sqrt{5}$.
- 4) Tìm giá trị của a để giá trị biểu thức E bằng -1.
- 5) Tìm giá trị của a để giá trị biểu thức E dương.
- 6) Tìm giá trị của a để giá trị biểu thức E nhỏ hơn $\sqrt{a}+3$.
- 7) Tìm giá trị của a để giá trị biểu thức E nhỏ nhất.
- 8) So sánh E với 1.

Bài 64: Cho biểu thức: $F = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + 4\sqrt{a} \right) \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$ → kq: 4a

- 1) Tìm ĐK XĐ của biểu thức F.
- 2) Rút gọn F.
- 3) Tính giá trị của biểu thức F khi $a = \frac{\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}}$.
- 4) Tìm giá trị của a để giá trị biểu thức F bằng -1.
- 5) Tìm giá trị của a để giá trị biểu thức E nhỏ hơn $\sqrt{a}-1$.
- 6) Tìm giá trị của a để giá trị biểu thức E nhỏ nhất.
- 7) Tìm giá trị của a để $\sqrt{F} > F$. ($\sqrt{F} - \sqrt{F^2} > 0 \Leftrightarrow 0 < a < \frac{1}{4}$).
- 8) So sánh E với $\frac{1}{\sqrt{a}}$.

Bài 65: Cho biểu thức: $M = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \frac{x^2-2x+1}{2}$ → kq: $-x + \sqrt{x}$

- 1) Tìm x để M tồn tại và Rút gọn M.
- 2) CMR nếu $0 < x < 1$ thì $M > 0$. ($1 - \sqrt{x} > 0; \sqrt{x} > 0 \Rightarrow M > 0$)
- 3) Tính giá trị của biểu thức M khi $x = 4/25$.
- 4) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức M bằng -1.
- 5) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức M âm ; M dương.
- 6) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức M lớn hơn -2.

7) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức M nhận giá trị nguyên.

8) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức M lớn nhất.

9) Tìm x để M nhỏ hơn $-2x$; M lớn hơn $2\sqrt{x}$.

10) Tìm x để M lớn hơn $2\sqrt{x}$.

Bài 66: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x+1}}{x+\sqrt{x}} \right) : \left(1 - \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \right)$

a) Tìm ĐKXD của A.

b) Rút gọn A.

c) Tính A khi $x = \frac{1}{6-2\sqrt{5}}$.

d) Tìm x nguyên để A nguyên.

e) Tìm x để $A < 1$ (A dương, A âm).

f) Tìm x để $A = -3$.

g) Tìm x để $A > -\frac{2}{\sqrt{x}-1}$.

h) Tìm x để A - 1 max.

i) Tìm x để $\frac{1}{A}$ max.

Bài 67: Cho biểu thức $B = \left(1 - \frac{4\sqrt{x}}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) : \frac{x-2\sqrt{x}}{x-1}$

a) tìm ĐKXD của B.

b) Rút gọn B.

c) Tìm x để $B = \left| \frac{1}{2} \right|$.

D) Tìm B khi $x = 11 - 6\sqrt{2}$.

e) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $B \in \mathbb{Z}$.

F) Tìm x để B dương (âm).

g) Tìm x để $B = -2$.

H) Tìm x để $B > \sqrt{x}-1$, $B < 1-\sqrt{x}$.

Bài 68: Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1} \right)$.

Bài 69: Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = a - b \quad (a, b > 0; a \neq b)$

b) $\left(\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = -2$

c) $\left(1 + \frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} \right) \left(1 - \frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} \right) = 1 - a$

Bài 70: Cho hằng đẳng thức:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \quad (a, b > 0 \text{ và } a^2 - b > 0).$$

Áp dụng kết quả để rút gọn:

a) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

b) $\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$

c) $\sqrt{\frac{2\sqrt{10} + \sqrt{30} - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}} : \frac{2}{\sqrt{3}-1}$

d) $\frac{\sqrt{3+\sqrt{2}} + \sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{6+2\sqrt{7}}} - 1$

HD: Câu a, b quy đồng rồi áp dụng

Câu c: Đặt nhân tử chung, rút gọn trong căn lớn, AD đẳng thức trên từ trái sang phải

Câu d: áp dụng đẳng thức từ phải sang trái

Tuy nhiên, ta không cần áp dụng đẳng thức trên vẫn dễ dàng làm ra bằng cách:

$$\sqrt{3+\sqrt{2}}+\sqrt{3-\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{3+\sqrt{2}}+\sqrt{3-\sqrt{2}})^2}$$

Bài 71: Rút gọn : $\left(\sqrt{a}+\frac{b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right): \left(\frac{a}{\sqrt{ab}+b}+\frac{b}{\sqrt{ab}-a}-\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\right)$

Bài 72: Cho $A=(1-a^2): \left[\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)\left(\frac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)\right]+1$

- a) Rút gọn biểu thức A.
- b) Tính giá trị của A với $a=9$.
- c) Với giá trị nào của a thì $|A|=A$.

Bài 73: Cho biểu thức: $B=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-1}{a+\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\sqrt{ab}}\left(\frac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}}\right)$.

- a) Rút gọn biểu thức B.
- b) Tính giá trị của B nếu $a=6+2\sqrt{5}$.
- c) So sánh B với -1.

Bài 74: Cho biểu thức: $A=\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}\right): \left(1+\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}\right)$

- a) Rút gọn biểu thức A.
- b) Tìm b biết $|A|=-A$.
- c) Tính giá trị của A khi $a=5+4\sqrt{2}$; $b=2+6\sqrt{2}$.

Bài 75: Cho biểu thức: $A=\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$

- a) Rút gọn biểu thức A.
- b) Tìm giá trị của A nếu $a=\frac{\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}}$.
- c) Tìm giá trị của a để $\sqrt{A}>A$.

Bài 76: Cho biểu thức: $A=\left(\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)\left(\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}-\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)$.

- a) Rút gọn biểu thức A.
- b) Tìm giá trị của A để $A=-4$

Bài 77: Thực hiện phép tính: $A=\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right): \left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}-\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right)$

Bài 78: Rút gọn các biểu thức sau :

a) $A=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}}:\left[\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{x+y+2\sqrt{xy}}+\frac{2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\right]$

với $x=2-\sqrt{3}$; $y=2+\sqrt{3}$.

b) $B=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}}-\sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}}{\sqrt{2(x-y)}} \quad \text{với } x>y>0$

c) $C=\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x} \quad \text{với } x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}-\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right) \quad (0<a<1)$

d) $D=(a+b)-\sqrt{\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{c^2+1}} \quad (\text{với } a, b, c>0 \text{ và } ab+bc+ca=1)$

$$e) E = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}} \cdot \sqrt{2x-1}$$

Bài 79: Cho biểu thức: $A = \frac{x + \sqrt{x^2 - 2x}}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 2x}}{x + \sqrt{x^2 - 2x}}$.

a) Tìm giá trị của x để biểu thức A có nghĩa.

b) Rút gọn biểu thức A. c) Tìm giá trị của x để $A < 2$.

Bài 80: Cho biểu thức: $P = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \right)$

a) Rút gọn P

b) Tìm giá trị của P khi $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$

c) Tìm giá trị của x thỏa mãn: $P\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$

Bài 81: Chứng minh giá trị biểu thức D không phụ thuộc vào a:

$$D = \left(\frac{2 + \sqrt{a}}{a + 2\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} - 2}{a - 1} \right) \frac{a\sqrt{a} + a - \sqrt{a} - 1}{\sqrt{a}} \quad \text{với } a > 0 ; a \neq 1$$

Bài 82: Cho biểu thức: $B = \left(\sqrt{a} + \frac{c - \sqrt{ac}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} \right) - \frac{1}{\frac{a}{\sqrt{ac} + c} + \frac{c}{\sqrt{ac} - a} - \frac{a+c}{\sqrt{ac}}}$.

a) Rút gọn biểu thức B.

b) Tính giá trị của biểu thức B khi $c = 54 ; a = 24$

c) Với giá trị nào của a và c để $B > 0 ; B < 0$.

Bài 83: Cho biểu thức: $A = \left(\sqrt{m + \frac{2mn}{1+n^2}} + \sqrt{m - \frac{2mn}{1+n^2}} \right) \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$ với $m \geq 0 ; n \geq 1$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị của A với $m = \sqrt{56 + 24\sqrt{5}}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Bài 84: Rút gọn $D = \left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} - \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2} - 1+x} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} - \frac{1-x}{x} \right) \frac{x}{1-x + \sqrt{1-x^2}}$

Bài 85: Cho biểu thức: $y = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} + 1 - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

a) Rút gọn y. Tìm x để $y = 2$.

b) Giả sử $x > 1$. Chứng minh rằng: $y - |y| = 0$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của y?

Bài 86: Cho biểu thức $D = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x|x+2| - x^2 + 4}$

a) Rút gọn biểu thức D

b) Tìm x nguyên để D có giá trị nguyên

c) Tìm giá trị của D khi $x = 6$

Bài 87: Cho biểu thức: $A = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}}$

a) Rút gọn A;

b) Biết $xy = 16$. Tìm các giá trị của x, y để A có GTNN, tìm giá trị đó.

HD: $A = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$

b) $A = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}} \geq \frac{2\sqrt{\sqrt{xy}}}{\sqrt{xy}} = \frac{2\sqrt{\sqrt{16}}}{\sqrt{16}} = 1$ (vì $xy = 16$)

Bài 88: Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} - \frac{x-3}{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{2x-x}} \right)$

a) Tìm điều kiện để P có nghĩa. HD: $P = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

b) Rút gọn biểu thức P.

c) Tính giá trị của P với $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

Bài 89: Cho biểu thức: $P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} + \frac{8x}{4-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$

a) Rút gọn P DS: $\frac{4x}{\sqrt{x}-3}$

b) Tìm giá trị của x để $P = -1$

c) Tìm m để với mọi giá trị $x > 9$ ta có: $m(\sqrt{x}-3)P > x+1$

HD: c) $m(\sqrt{x}-3)P > x+1$ (đk: $x > 0; x \neq 4, x \neq 9$)

$\Leftrightarrow m > \frac{x+1}{4x}$ (do $4x > 0$)

Xét $\frac{x+1}{4x} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4x}$ Có $x > 9$ (thỏa mãn đkxd)

$\Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{4x} < \frac{1}{36} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4x} < \frac{5}{18}$

Theo kết quả phần trên ta có: $\begin{cases} \frac{5}{18} > \frac{x+1}{4x} \\ m > \frac{x+1}{4x} \end{cases} \Rightarrow m \geq \frac{5}{18}$

Kết luận: với $m \geq \frac{5}{18}, x > 9$ thì $m(\sqrt{x}-3)P > x+1$

MỘT SỐ DẠNG HAY VÀ KHÓ RÚT GỌN BIỂU THỨC

Dùng ôn thi chuyên hoặc chuyên toán

Bài 1: Cho biểu thức $A = \sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}$

a) Rút gọn A

b) Tìm MinA

HD: Lưu ý: $\sqrt{A^2} = |A|$ và Bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối

$|a| + |b| \geq |a + b|$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ab \geq 0$

$|a| - |b| \leq |a - b|$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b(a - b) \geq 0$

Bài 2: a) Chứng minh: $\sqrt{3-4x} + \sqrt{4x+1} \geq 2 \quad \forall x \in \left[\frac{-1}{4}; \frac{3}{4} \right]$

b) Giải phương trình: $\sqrt{3-4x} + \sqrt{4x+1} = -16x^2 - 8x + 1$

HD câu a: Bình phương vế trái (có thể đặt ẩn phụ cho vế trái)

HD câu b: $VP = -(4x+1)^2 + 2 \leq 2; VT \geq 2$ vậy Phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} \sqrt{3-4x} + \sqrt{4x+1} = 2 \\ -16x^2 - 8x + 1 = 2 \end{cases}$$

AD tính chất: $\begin{cases} A = B \\ A \geq m \Leftrightarrow \begin{cases} A = m \\ B = m \end{cases} \\ B \leq m \end{cases}$

Bài 3: Rút gọn biểu thức sau: $Q = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} - \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$ HD: Lưu ý: $\sqrt{A^2} = |A|$

Bài 4: Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} [\sqrt{(1+x)^3} + \sqrt{(1-x)^3}]}{2-\sqrt{1-x^2}}$

a) Rút gọn A b) Tìm x biết $A \geq \frac{1}{2}$ HD: Lưu ý: $\sqrt{A^2} = |A|$

Bài 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = \sqrt{1+4x+4x^2} + \sqrt{4x^2-12x+9}$

HD: AD Bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối

Bài 6: Cho biểu thức: $C = \left| \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \right| + \left| \frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} \right| - \left| \frac{x}{3} \right| - \left| \frac{y}{3} \right|$ ($xy \geq 0$)

a) Rút gọn C b) Tìm x; y biết: $C = \left| \frac{x}{2014} \right| + \left| \frac{y}{2014} \right|$

HD: Với $ab \geq 0$ thì $|a+b| = |a| + |b|$

Bài 7: $A = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}}$

a) Rút gọn A;
b) Biết $xy = 16$. Tìm các giá trị của x, y để A có giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị đó.

HD: a) $A = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$. b) AD: $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2\sqrt{\sqrt{xy}}$ và $xy=16$

Bài 8: Cho biểu thức: $A = \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{a^2}}{a}$

a) Tìm điều kiện đối với a, b để A có nghĩa b) Rút gọn A

HD: a) $\begin{cases} b \geq 0 \\ a > 0 \\ b \leq 0 \\ a < 0 \end{cases}$ b) Trong mỗi đk câu a) ĐS lần lượt là: 1 và $2\sqrt{\frac{b}{a}} - 1$

Bài 9: Cho $P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} + \frac{8x}{4-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$

- a) Rút gọn P b) Tìm x để P = -1
c) Tìm m để với mọi x > 9 ta có $m(\sqrt{x}-3)P > x+1$

HD: a) $P = \frac{4x}{\sqrt{x}-3}$ b) $x = \frac{9}{16}$

c) Ta suy ra: $x > \frac{1}{4m-1}$. Ta cần phải có: $x > 9 \geq \frac{1}{4m-1}$ nghĩa là ta phải có:

$$\frac{1}{4m-1} \leq 9 \Leftrightarrow m \geq \frac{5}{18}$$

Bài 10: Cho $A = \frac{\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}-1}$

- a) Tìm ĐK cho A b) Rút gọn A c) Tính A khi x = 6

Bài 11: Rút gọn biểu thức : $A = \frac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1} \right)$.

HD: Tìm ĐK. Xét hai khoảng $1 < x < 2$ và $x > 2$. Kết quả : $A = \frac{2}{1-x}$ và $A = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$

Bài 12: Cho biểu thức: $A = \left(1 + \frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} \right) \left(1 - \frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} \right)$

- a) Tìm các giá trị của a để A có nghĩa
b) Rút gọn A c) Tìm a để A = -5; A=0; A=6
d) Tìm a để $A^3 = A$ e) Với giá trị nào của a thì $|A| = A$

Bài 13: Cho biểu thức: $Q = \frac{1}{2\sqrt{x}-2} + \frac{1}{2\sqrt{x}+2} + \frac{x}{1-x}$

- a) Tìm điều kiện để Q có nghĩa b) Rút gọn Q
c) Tính giá trị của Q khi $x = \frac{4}{9}$ d) Tìm x để $Q = -\frac{1}{2}$
e) Tìm những giá trị nguyên của x để giá trị của Q nguyên.

Bài 14: Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}$

- a) Tìm điều kiện của x để P có nghĩa
b) Rút gọn P c) Tìm x để P > 0
d) Tìm x để $|P| = P$ e) Giải phương trình $P = -2\sqrt{x}$
f) Tìm giá trị x nguyên để giá trị của P nguyên

Bài 15: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} + 4\sqrt{a} \right) \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$

- a) Tìm điều kiện để A có nghĩa
b) Tính giá trị của A khi $a = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}}} + \sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}}$
c) Tìm các giá trị của a để $\sqrt{a} > A$
d) Tìm a để A=4; A=-16
e) Giải phương trình: $A = a^2 + 3$

Bài 16: Cho biểu thức: $M = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right) \left(\frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1} - \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} \right)$

- a) Với $a > 0; a \neq 1$
- b) Rút gọn M
- c) Tìm giá trị của a để $M = -4$
- d) Tính giá trị của M khi $a = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$
- e) Chứng minh rằng $M \leq 0$ với $a > 0; a \neq 1$

Bài 17: Cho biểu thức: $K = (1 - a^2) : \left[\left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left(\frac{1 + a\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} - \sqrt{a} \right) \right] + 1$ ($a > 0; a \neq 1$)

- a) Rút gọn K
- b) Tính giá trị của K khi $a = 9$
- c) Với giá trị nào của a thì $|K| = K$
- d) Tìm a để $K = 1$
- e) Tìm các giá trị tự nhiên của a để giá trị của K là số tự nhiên

Bài 18: Cho biểu thức: $Q = \frac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} + \frac{3 - \sqrt{x}}{x - 1}$ ($x \geq 0; x \neq 1$)

- a) Rút gọn Q
- b) Chứng minh rằng $Q < 0$ với $\forall x \geq 0; x \neq 1$
- c) Tính giá trị của Q khi $x = \frac{\sqrt{20001} - \sqrt{19999}}{\sqrt{20001} + \sqrt{19999}} + \frac{\sqrt{20001} + \sqrt{19999}}{\sqrt{20001} - \sqrt{19999}}$

Bài 19: Cho biểu thức: $T = \left(\frac{\sqrt{x}}{3 + \sqrt{x}} + \frac{x + 9}{9 - x} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x} + 1}{x - 3\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right)$ ($x > 0; x \neq 9$)

- a) Rút gọn T
- b) Tính giá trị của T khi $x = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$
- c) Tìm x để $T = 2$
- d) Với giá trị nào của x thì $T < 0$
- e) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $T \in \mathbb{Z}$

Bài 20: Cho biểu thức: $L = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$ ($x \geq 0; x \neq 1$)

- a) Rút gọn L
- b) Tính giá trị của L khi $x = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}$
- c) Tìm giá trị lớn nhất của L

Bài 21: Cho biểu thức: $A = \frac{1}{2 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 3} - \frac{6}{x - 5\sqrt{x} + 6}$

- a) Tìm điều kiện để A có nghĩa
- b) Rút gọn A
- c) Tìm x để $A = 1; A = -2$
- d) Tìm x để $|A| = A$
- e) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $T \in \mathbb{Z}$
- f) Tìm giá trị lớn nhất của A

Bài 22: Rút gọn:

- 1) $\sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$
- 2) $\sqrt{227 - 30\sqrt{2}} + \sqrt{123 + 22\sqrt{2}}$
- 3) $\frac{\sqrt{9 - 6\sqrt{2}} - \sqrt{6}}{\sqrt{3}}$
- 4) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}}{\sqrt{2} + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}}$

- 5) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$ 6) $\sqrt{4\sqrt{6} + 8\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 18}$.
- 7) $\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$ 8) $\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 6\sqrt{20}}}$
- 9) $2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$ 10) $\sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}$
- 11) $\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 6\sqrt{20}}}$ 12) $\sqrt{6 + 2\sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$
- 13) $\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$ 14) $\sqrt{94 - 42\sqrt{5}} - \sqrt{94 + 42\sqrt{5}}$
- 15) $\sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$
- 16) $\left(\sqrt{\sqrt{7 + \sqrt{48}}} - \sqrt{\sqrt{28 - 16\sqrt{3}}} \right) \cdot \sqrt{\sqrt{7 + \sqrt{48}}}$
- 17) $\frac{\sqrt{6 + 2(\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2})} - \sqrt{6 - 2(\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2})}}{\sqrt{2}}$
- 18) $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5})(-\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$
- 19) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$
- 20) $\sqrt{|12\sqrt{5} - 29|} + \sqrt{25 + 4\sqrt{21}} - \sqrt{12\sqrt{5} + 29} - \sqrt{25 - 4\sqrt{21}}$
- 21) $A = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{3 + \sqrt{4}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1 + \sqrt{n}}}$. ĐS: $A = \sqrt{n} - 1$
- 22) $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4} - \sqrt{5}} - \dots + \frac{1}{\sqrt{2n} - \sqrt{2n+1}}$
- 23) $\frac{1}{\sqrt{1} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{4}} - \dots - \frac{1}{\sqrt{24} - \sqrt{25}}$
- 24) $\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}}$
- HD: Hãy CM: $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Rightarrow A = \frac{9}{10}$

MỘT SỐ DẠNG TOÁN KHÁC LIÊN QUAN

Bài 1: So sánh các số thực sau (không dùng máy tính) :

- 1) $\sqrt{7} + \sqrt{15}$ và 7 2) $\sqrt{17} + \sqrt{5} + 1$ và $\sqrt{45}$ 3) $\frac{23 - 2\sqrt{19}}{3}$ và $\sqrt{27}$
- 4) $\sqrt{3\sqrt{2}}$ và $\sqrt{2\sqrt{3}}$ 5) $\sqrt{\sqrt{6 + \sqrt{20}}}$ và $\sqrt{1 + \sqrt{6}}$ 6) $\sqrt{\sqrt{17 + 12\sqrt{2}}}$ và $\sqrt{2} + 1$
- 7) $\sqrt{\sqrt{28 - 16\sqrt{3}}}$ và $\sqrt{3} - 2$ 8) $\frac{3\sqrt{7} + 5\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ và 6,9
- 9) $\sqrt{13} - \sqrt{12}$ và $\sqrt{7} - \sqrt{6}$ 10) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ và $\sqrt{15}$

11) $2 + \sqrt{15}$ và $\sqrt{12} + \sqrt{7}$

12) $\sqrt{18} + \sqrt{19}$ và 9

13) $\frac{16}{\sqrt{2}}$ và $\sqrt{5} \cdot \sqrt{25}$

Bài 2: So sánh:

a) $a = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ và $b = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}$ b) $\sqrt{5 - \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}}$ và $\sqrt{3} - 1$

c) $\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$ và $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (n là số nguyên dương)

HD: a) Xét a^2 và b^2 . Từ đó suy ra $a = b$.

b) Tính: $\sqrt{5 - \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}}$. Suy ra 2 số này bằng nhau.

c) $(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}) = 1$.

$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1$

Mà $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.

nên $\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Bài 3: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào biến:

a) $A = \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - (a\sqrt{a} - b\sqrt{b}) : \left(\frac{a + \sqrt{ab} + b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right)$ với $a > 0; b > 0; a \neq b$

b) $B = \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} - \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ với $x > 0; y > 0; x \neq y$

c) $C = \left(\frac{2 + \sqrt{a}}{a + 2\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} - 2}{a - 1} \right) \left(\frac{\sqrt{a^3} + a - \sqrt{a} - 1}{\sqrt{a}} \right)$ với $a > 0; a \neq 1$

d) $D = \frac{2x}{x + 3\sqrt{x} + 2} + \frac{5\sqrt{x} + 1}{x + 4\sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt{x} + 10}{x + 5\sqrt{x} + 6}$ với $x \geq 0$

e) $E = \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) : (a - b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ với $a > 0; b > 0; a \neq b$

f) $F = \frac{a\sqrt{a} - 1}{a - \sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a} + 1}{a + \sqrt{a}} - \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} + \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} \right)$ với $a > 0; a \neq 1$