Chương 2

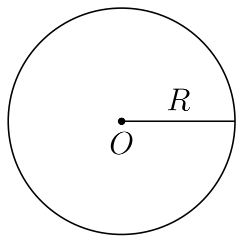
Đường tròn

§1 Sự xác định đường tròn. Tính chất đối xứng của đường tròn

1 Tóm tắt lí thuyết

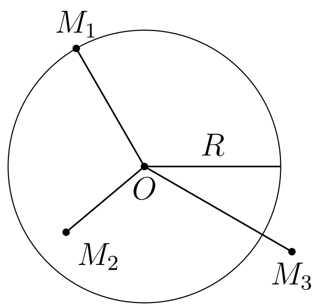
1.1 Định nghĩa đường tròn

Định nghĩa 3.
Đường tròn tâm O bán kính R (với $R > 0$) là hình gồm các điểm cách đều điểm O một khoảng không đổi bằng R.
Đường tròn tâm O bán kính R được kí hiệu là $(O; R)$, ta cũng có thể kí hiệu là (O) khi không cần chú ý đến bán kính.



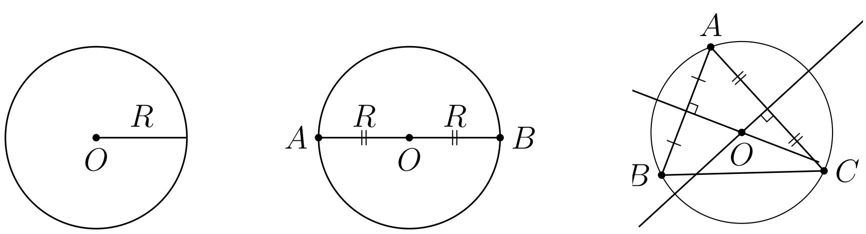
Nhận xét. Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm M. Khi đó

- M nằm trên $(O; R)$ khi và chỉ khi $OM = R$.
- M nằm bên trong $(O; R)$ khi và chỉ khi $OM < R$.
- M nằm bên ngoài $(O; R)$ khi và chỉ khi $OM > R$.



1.2 Cách xác định đường tròn

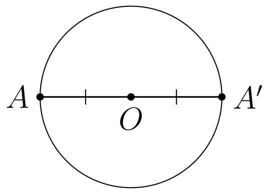
1. Một đường tròn được xác định khi biết tâm và bán kính của nó.
2. Một đường tròn được xác định khi biết một đoạn thẳng là đường kính của đường tròn đó.
3. Qua ba điểm không thẳng hàng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.

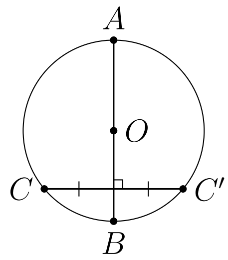


1.3 Tính chất đối xứng của đường tròn

Tính chất 2. Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.

Tính chất 3. Đường tròn là hình có trục đối xứng. Bất kỳ đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.





⚠ **23.** Đường tròn có một tâm đối xứng và có vô số trục đối xứng.

2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Xác định tâm và bán kính đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC.

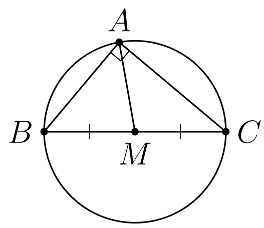
Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC.

Ta có AM là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $AM = \dfrac{BC}{2}$.

Suy ra $MA = MB = MC = \dfrac{BC}{2}$.

Vậy đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC có tâm là điểm M và bán kính $R = \dfrac{BC}{2}$.



□

Ví dụ 2. Chứng minh rằng, nếu một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác đó thì tam giác đó là tam giác vuông.

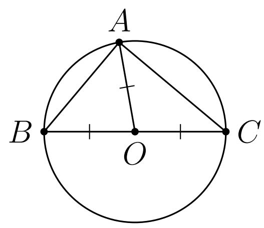
Lời giải.

Xét tam giác ABC có ba đỉnh nằm trên đường tròn (O) đường kính BC.

Ta có $OA = OB = OC$ (vì là bán kính của (O)).

Lúc đó AO là trung tuyến ứng với cạnh BC và $AO = \dfrac{BC}{2}$.

Vậy ABC là tam giác vuông tại A.

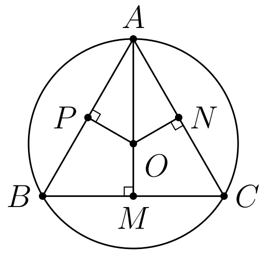


⚠ **24.** Đường tròn qua ba đỉnh của một tam giác vuông thì nó có tâm là trung điểm của cạnh huyền và bán kính bằng phân nửa độ dài cạnh huyền. Ngược lại, một đường tròn đi qua ba đỉnh của một tam giác nhận một cạnh của tam giác đó là đường kính thì tam giác đó là tam giác vuông.

□

Ví dụ 3. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính bán kính đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC.

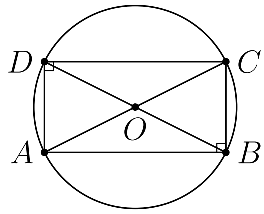
Lời giải.



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.
Dựng các đường trung trực của các cạnh AB, BC, CA, các đường trung trực này đồng quy tại O, suy ra O là tâm của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC. Bán kính của đường tròn (O) là $R = OA = OB = OC$.
Vì ABC là tam giác đều nên các đường trung trực này cũng là các đường trung tuyến của tam giác ABC. Suy ra O cũng là trọng tâm của tam giác ABC.
Trong tam giác ABM vuông tại M ta có $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
Lại có $OA = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
Vậy bán kính đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC là $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. □

Ví dụ 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 12$ cm, $BC = 5$ cm. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó.

Lời giải.



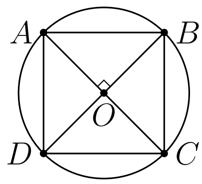
Gọi O là giao điểm AC và BD. Khi đó O là trung điểm của AC, BD.
Mà $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AC = BD$.
Do đó $OA = OB = OC = OD$ hay bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn (O), bán kính $R = OA = \frac{AC}{2}$.
Tam giác ABC vuông tại B nên $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.
Suy ra $R = \frac{AC}{2} = 6,5$ cm.
Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn (O) bán kính $R = 6,5$ cm.

⚠ **25.** Đường tròn qua bốn đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$ có tâm là giao điểm của hai đường chéo và bán kính của nó bằng một nửa độ dài đường chéo của hình chữ nhật đó.

□

Ví dụ 5. Cho đường tròn (O) với hai đường kính AC và BD vuông góc với nhau. Chứng minh $ABCD$ là hình vuông.

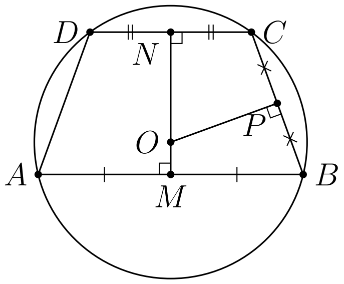
Lời giải.



Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC, BD là đường kính của đường tròn (O) nên $ABCD$ là hình chữ nhật.
Lại có $AC \perp BD$.
Vậy $ABCD$ là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau nên $ABCD$ là hình vuông. □

Ví dụ 6. Cho hình thang cân $ABCD$ với $AB \parallel CD$ và $AB > CD$. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

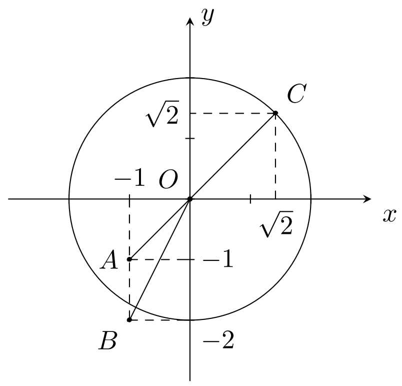
Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.
Do $ABCD$ là hình thang cân với hai đáy AB, CD nên MN đường trung trực của AB, CD.
Gọi P là trung điểm của BC. Qua P dựng đường trung trực của BC cắt MN tại O. Ta cần chứng minh $OA = OB = OC = OD$.
Thật vậy, vì O nằm trên đường trung trực của AB nên $OA = OB$.
Mà MN cũng là trung trực của CD nên $OC = OD$.
Hơn nữa, O nằm trên đường trung trực của BC nên $OB = OC$.
Từ đó suy ra $OA = OB = OC = OD$.
Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn (O) bán kính $R = OA$. □

Ví dụ 7. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy xác định vị trí của mỗi điểm $A(-1; -1)$, $B(-1; -2)$, $C\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ đối với đường tròn tâm O bán kính 2.

Lời giải.

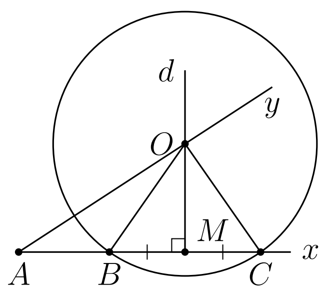


- OA là cạnh huyền trong tam giác vuông cân cạnh bằng 1 nên $OA = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} < 2$, suy ra A nằm bên trong đường tròn $(O; 2)$.
- OB là cạnh huyền trong tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là 1; 2 nên $OB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} > 2$, suy ra B nằm bên ngoài đường tròn $(O; 2)$.
- OC là cạnh huyền trong tam giác vuông cân cạnh bằng $\sqrt{2}$ nên $OC = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = 2$, suy ra C nằm trên đường tròn $(O; 2)$.

□

Ví dụ 8. Cho góc nhọn xAy và hai điểm B, C thuộc tia Ax. Dựng đường tròn (O) đi qua điểm B và C sao cho tâm O nằm trên tia Ay.

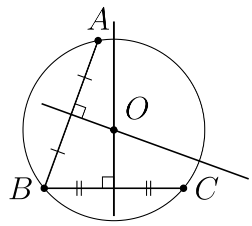
Lời giải.



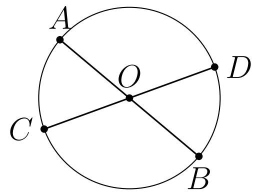
Giả sử đã dựng được (O) thỏa mãn đề bài. Khi đó $OB = OC$ bằng bán kính, nên O nằm trên đường trung trực d của BC.
Lại có O thuộc Ay nên O là giao điểm của d và Ay.
Cách dựng. Dựng đường trung trực d của BC cắt Ay tại O. Dựng đường tròn tâm O bán kính OB thì đó là đường tròn phải dựng (như hình vẽ). □

Ví dụ 9. Một tấm bìa hình tròn không còn dấu vết của tâm. Hãy tìm lại tâm của hình tròn đó.

Lời giải.



Cách 1. Trên đường tròn của tấm bìa lấy ba điểm A, B, C không trùng nhau.
Nối A với B và B với C.
Dựng các đường trung trực của AB, BC chúng cắt nhau tại O, khi đó O là tâm của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC hay O là tâm của tấm bìa hình tròn.

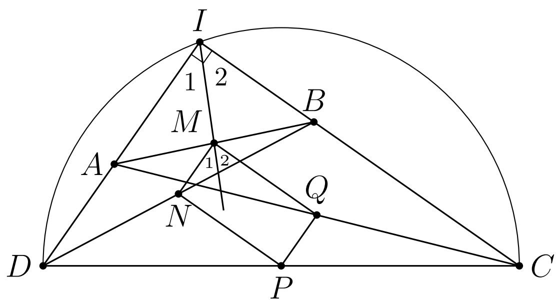


Cách 2. Gấp tấm bìa sao cho hai phần của hình tròn trùng nhau, nếp gấp là một đường kính.
Lại gấp như trên theo nếp gấp khác, ta được một đường kính thứ hai.
Giao điểm của hai đường kính này là tâm của tấm bìa hình tròn.

□

Ví dụ 10. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC và CA. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.



Gọi I là giao điểm của AD và BC.
Vì $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$ nên $\widehat{DIC} = 90^\circ$.
Do M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC và CA nên MN, NP, PQ, QM lần lượt là đường trung bình của tam giác ABD, BCD, ACD, ABC.
Suy ra $MN \parallel AD$, $PQ \parallel AD$, $MQ \parallel BC$, $NP \parallel BC$ do đó $MN \parallel PQ$, $NP \parallel MQ$.
Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Lại có $\begin{cases} \widehat{M_1} = \widehat{I_1} \\ \widehat{M_2} = \widehat{I_2} \end{cases}$ (góc đồng vị).

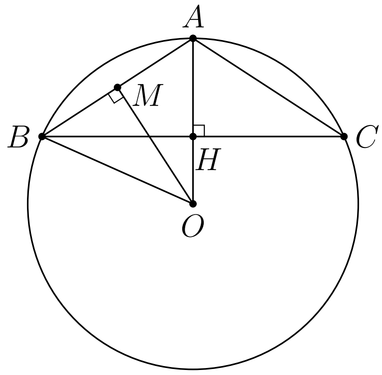
Khi đó $\widehat{NMQ} = \widehat{M_1} + \widehat{M_2} = \widehat{I_1} + \widehat{I_2} = 90^\circ$.
Do đó $MNPQ$ là hình chữ nhật.
Theo ví dụ 4 thì bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn. □

3 Luyện tập

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A, $BC = 12$ cm, chiều cao $AH = 4$ cm. Tính bán kính của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải.

Vì tam giác ABC cân tại A nên đường cao AH cũng là đường trung trực của đoạn BC.
Qua trung điểm M của AB kẻ đường trung trực của AB cắt đường thẳng AH tại O. Khi đó O là tâm của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC.
Bán kính của đường tròn (O) là $R = OA = OB$.
Tam giác BOH vuông tại H nên



$$\begin{aligned} BO^2 = BH^2 + OH^2 &\Leftrightarrow BO^2 = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + (OA - AH)^2 \\ &\Leftrightarrow R^2 = 36 + (R-4)^2 \\ &\Leftrightarrow 8R = 52 \\ &\Leftrightarrow R = 6,5. \end{aligned}$$

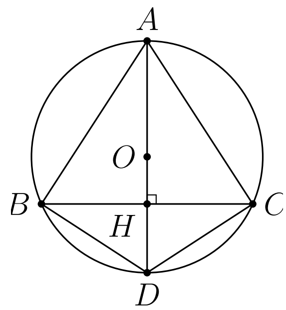
Vậy bán kính của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC bằng $6,5$ cm. □

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A có ba đỉnh nằm trên đường tròn (O). Đường cao AH cắt (O) ở D. Biết $BC = 24$ cm, $AC = 20$ cm. Tính chiều cao AH và bán kính đường tròn (O).

Lời giải.

Vì tam giác ABC cân tại A nên đường cao AH cũng là đường trung trực của đoạn BC, suy ra H là trung điểm của đoạn BC.
Tam giác ACH vuông tại H nên

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16 \text{ cm}.$$



Tam giác ACD có AD là đường kính nên tam giác ACD vuông tại C.
Áp dụng hệ thức về cạnh trong tam giác vuông ACD ta có

$$AC^2 = AD \cdot AH \Leftrightarrow AD = \frac{AC^2}{AH} \Leftrightarrow AD = 25 \text{ cm}.$$

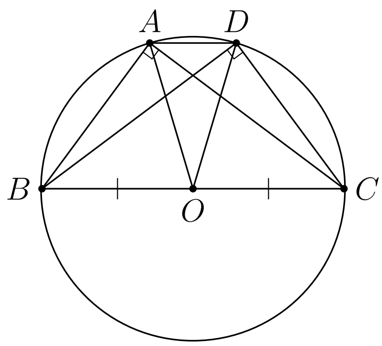
Vậy bán kính của đường tròn (O) là $R = \dfrac{AD}{2} = 12,5$ cm. □

Bài 3. Cho hình thang cân $ABCD$ (với $AD \parallel BC$) có $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm, $BC = 20$ cm. Chứng minh rằng A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình thang cân với hai đáy AD, BC nên $AB = CD = 12$ cm và $BD = AC = 16$ cm.
Gọi O là trung điểm của BC.
Xét tam giác ABC có

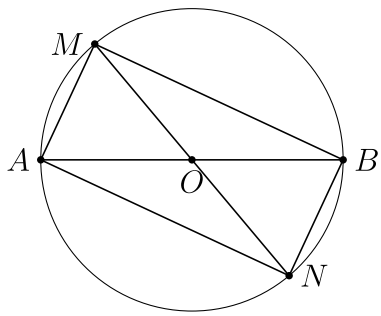
$$AB^2 + AC^2 = 12^2 + 16^2 = 20^2 = BC^2.$$



Vậy tam giác ABC vuông tại A. Do đó ba đỉnh của tam giác ABC cùng thuộc đường tròn (O).
Tương tự ta cũng có tam giác BCD vuông tại D. Do đó ba đỉnh của tam giác BCD cùng thuộc đường tròn (O).
Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc đường tròn (O) bán kính $R = \dfrac{BC}{2} = 10$ cm. □

Bài 4. Cho đường tròn (O) đường kính AB, M, N thuộc (O) sao cho $AM = BN$ và M, N nằm trên hai nửa đường tròn khác nhau. Chứng minh MN là đường kính của (O).

Lời giải.



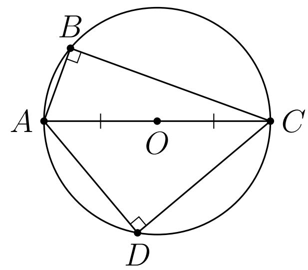
Vì M, N thuộc đường tròn (O) nên tam giác ABM, ABN là tam giác vuông lần lượt tại M, N.
Hai tam giác vuông ABM và ABN có $AM = BN$, AB là cạnh chung nên hai tam giác này bằng nhau, suy ra $BM = AN$.
Vậy tứ giác $AMBN$ có $AM = BN$ và $BM = AN$ nên $AMBN$ là hình bình hành. Hơn nữa $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Do đó $AMBN$ là hình chữ nhật.
Vậy MN là đường kính của (O). □

Bài 5. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$.

1. Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.
2. Nếu $AC = BD$ thì tứ giác $ABCD$ là hình gì?

Lời giải.

1.



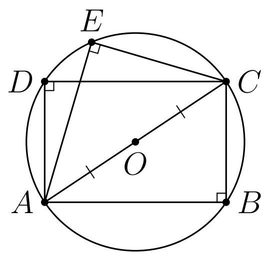
Gọi O là trung điểm của AC.
Vì tam giác ABC vuông tại B nên ba đỉnh A, B, C cùng thuộc đường tròn (O).
Vì tam giác ACD vuông tại D nên ba đỉnh A, C, D cùng thuộc đường tròn (O).
Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn (O) đường kính AC.

2. Nếu $BD = AC$ thì BD là đường kính của (O), suy ra $\widehat{BAD} = 90^\circ$.
Vậy tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$ nên $ABCD$ là hình chữ nhật.

□

Bài 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$, vẽ tam giác AEC vuông tại E. Chứng minh năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

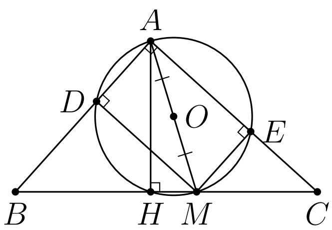
Lời giải.



Gọi O là trung điểm của AC.
Vì tam giác ABC vuông tại B nên ba điểm A, B, C thuộc đường tròn (O) đường kính AC.
Vì tam giác ACD vuông tại D nên ba điểm A, C, D thuộc đường tròn (O) đường kính AC.
Vì tam giác ACE vuông tại E nên ba điểm A, C, E thuộc đường tròn (O) đường kính AC.
Vậy năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc đường tròn (O) đường kính AC. □

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Từ M là điểm bất kỳ trên cạnh BC kẻ $MD \perp AB$, $ME \perp AC$. Chứng minh năm điểm A, D, M, H, E cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải.



Vì $MD \perp AB$ và $AC \perp AB$ nên $MD \parallel AE$.
Vì $ME \perp AC$ và $AB \perp AC$ nên $ME \parallel AD$.
Từ hai điều trên suy ra $ADME$ là hình bình hành.
Mà $\widehat{DAE} = 90^\circ$ nên $ADME$ là hình chữ nhật, suy ra bốn điểm A, D, M, E thuộc đường tròn (O) đường kính AM (với O là trung điểm của đoạn AM).
Lại có tam giác AHM vuông tại H nên ba điểm A, H, M thuộc đường tròn (O) đường kính AM.
Vậy năm điểm A, D, M, H, E cùng nằm trên đường tròn (O) đường kính AM. □

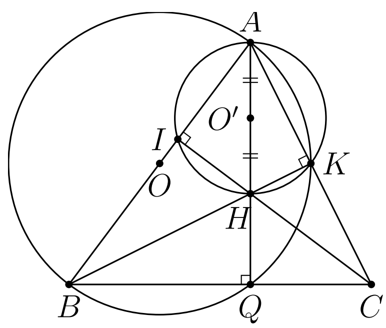
Bài 8. Cho tam giác ABC có AQ, KB, CI là ba đường cao và H là trực tâm.

1. Chứng minh A, B, Q, K cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.
2. Chứng minh A, I, H, K cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.

Lời giải.

1.

Gọi O là trung điểm của AB.
Vì tam giác ABQ vuông tại Q nên ba điểm A, B, Q thuộc đường tròn (O) đường kính AB.
Vì tam giác ABK vuông tại K nên ba điểm A, B, K thuộc đường tròn (O) đường kính AB.
Từ đó suy ra bốn điểm A, B, Q, K cùng thuộc đường tròn (O) đường kính AB.



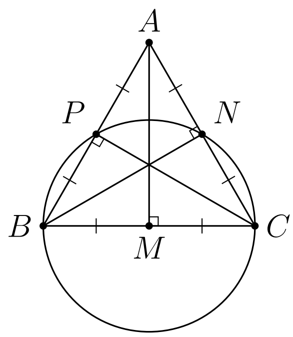
2. Gọi O' là trung điểm của AH.
Vì $\triangle AHI$ vuông tại I nên ba điểm A, H, I thuộc đường tròn (O') đường kính AH.
Vì $\triangle AHK$ vuông tại K nên ba điểm A, H, K thuộc đường tròn (O') đường kính AH.
Từ đó suy ra bốn điểm A, I, H, K cùng thuộc đường tròn (O') đường kính AH.

□

Bài 9. Cho tam giác đều ABC có AM, BN, CP là ba đường trung tuyến. Chứng minh B, P, N, C cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

Tam giác ABC là tam giác đều nên AM, BN, CP cũng là các đường cao của tam giác ABC, suy ra các tam giác BPC, BNC là các tam giác vuông.
Vì tam giác BPC vuông tại P nên ba điểm B, P, C thuộc đường tròn (M) đường kính BC.
Vì tam giác BNC vuông tại N nên ba điểm B, N, C thuộc đường tròn (M) đường kính BC.
Vậy bốn điểm B, P, N, C cùng thuộc đường tròn (M) đường kính BC.

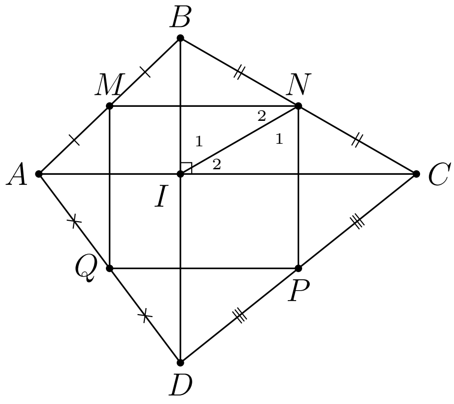


□

Bài 10. Cho tứ giác $ABCD$ có $AC \perp BD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của AC và BD.
Do $AC \perp BD$ nên $\widehat{BIC} = \widehat{I}_1 + \widehat{I}_2 = 90^\circ$.
Vì M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA nên MN, NP, PQ, QM lần lượt là đường trung bình của tam giác ABC, BCD, CDA, DAB.
Suy ra $MN \parallel AC \parallel PQ$, $MQ \parallel BD \parallel NP$.
Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.



Lại có $\begin{cases} \widehat{I}_1 = \widehat{N}_1 \\ \widehat{I}_2 = \widehat{N}_2 \end{cases}$ (góc so le trong của cặp đường thẳng song song).
Khi đó $\widehat{MNP} = \widehat{N}_1 + \widehat{N}_2 = \widehat{I}_1 + \widehat{I}_2 = \widehat{BIC} = 90^\circ$.
Do đó $MNPQ$ là hình chữ nhật.
Vậy bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn. □

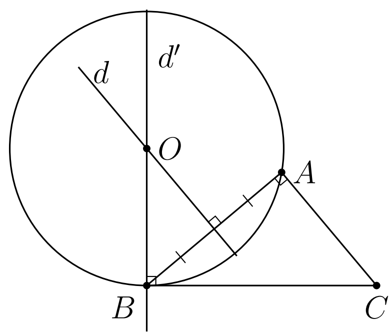
Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A.

1. Nêu cách dựng đường tròn (O) đi qua A và tiếp xúc với BC tại B.
2. Nêu cách dựng đường tròn (O') đi qua A và tiếp xúc với BC tại C.

Lời giải.

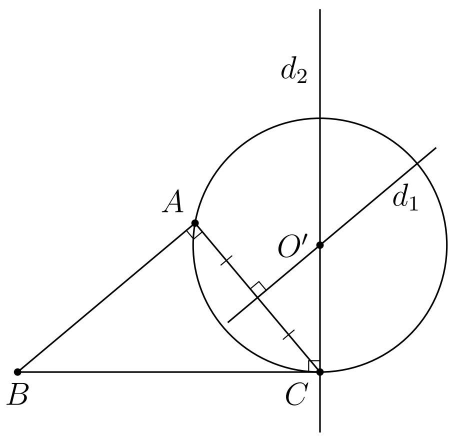
1.

Giả sử đã dựng được (O) thỏa mãn đề bài. Khi đó $OA = OB$ bằng bán kính, nên O nằm trên đường trung trực d của AB. Lại có (O) tiếp xúc với BC tại B nên $OB \perp BC$, suy ra O nằm trên đường thẳng d' đi qua B và vuông góc với BC.
Do đó O là giao điểm của d và d'.
Cách dựng. Dựng đường trung trực d của AB. Dựng đường thẳng d' vuông góc với BC tại B. Gọi O là giao điểm của d và d'. Dựng đường tròn tâm O bán kính OA thì đó là đường tròn phải dựng (như hình vẽ).



2.

Giả sử đã dựng được (O') thỏa mãn đề bài. Khi đó $O'A = O'C$ bằng bán kính, nên O' nằm trên đường trung trực d_1 của AC.
Lại có (O') tiếp xúc với BC tại C nên $O'C \perp BC$, suy ra O' nằm trên đường thẳng d_2 đi qua C và vuông góc với BC.
Do đó O' là giao điểm của d_1 và d_2.
Cách dựng. Dựng đường trung trực d_1 của AC. Dựng đường thẳng d_2 vuông góc với BC tại C. Gọi O' là giao điểm của d_1 và d_2. Dựng đường tròn tâm O' bán kính $O'A$ thì đó là đường tròn phải dựng (như hình vẽ).



□

Bài 12. Cho năm điểm A, B, C, D, E. Biết rằng qua bốn điểm A, B, C, D có thể vẽ được một đường tròn, qua bốn điểm B, C, D, E cũng vẽ được một đường tròn. Hỏi qua cả năm điểm A, B, C, D, E có thể vẽ được một đường tròn không?

Lời giải.

Gọi (O) là đường tròn đi qua qua đỉnh của tam giác ABC.
Với giả thiết:

- Bốn điểm A, B, C, D thuộc đường tròn (O_1), suy ra $(O_1) \equiv (O)$.
- Bốn điểm B, C, D, E thuộc đường tròn (O_2), suy ra $(O_2) \equiv (O)$.

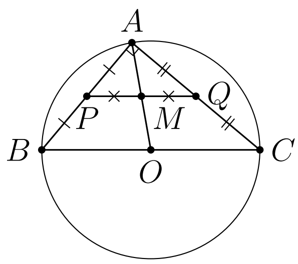
Vậy cả năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc đường tròn (O). □

Bài 13. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính BC. Điểm A di động trên (O) , gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB và AC.

1. Chứng minh PQ có độ dài không đổi khi A di động trên (O).
2. Tìm quỹ tích trung điểm M của PQ.

Lời giải.

1.



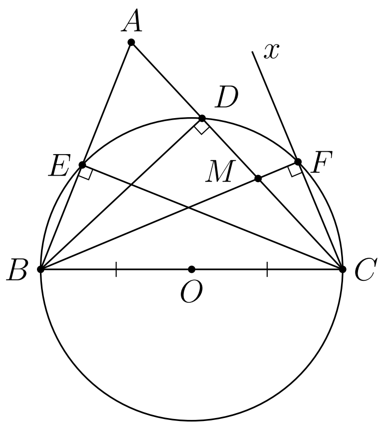
Khi A không trùng với các điểm B, C thì PQ là đường trung bình của tam giác ABC. Do đó $PQ = \dfrac{BC}{2} = R$ (không đổi).
Khi $A \equiv B$ thì $P \equiv B$ và $Q \equiv O$ nên $PQ = OB = R$ (không đổi).
Khi $A \equiv C$ thì $Q \equiv C$ và $P \equiv O$ nên $PQ = OC = R$ (không đổi).
Vậy PQ có độ dài không đổi (luôn bằng R) khi A di động trên (O).

2. Vì O, P, Q lần lượt là trung điểm của BC, AB, AC nên OP, OQ là các đường trung bình của tam giác ABC, suy ra $OP \parallel AQ$, $OQ \parallel AP$.
Do đó tứ giác $APOQ$ là hình bình hành, nên AO, PQ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, suy ra M là trung điểm của AO.
Khi đó $OM = \dfrac{AO}{2} = \dfrac{R}{2}$ (không đổi).
Vậy quỹ tích điểm M là đường tròn $\left(O; \dfrac{R}{2}\right)$.

□

Bài 14. Cho tam giác ABC, các đường cao BD và CE. Trên cạnh AC lấy điểm M. Kẻ tia Cx vuông góc với tia BM tại F. Chứng minh rằng năm điểm B, C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

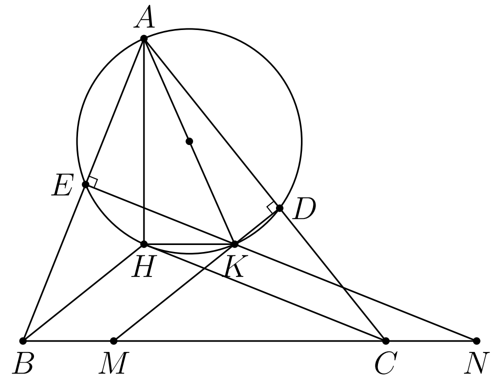


Gọi O là trung điểm của BC.
Vì tam giác BCD vuông tại D nên ba điểm B, C, D cùng thuộc đường tròn (O) đường kính BC.
Vì tam giác BCE vuông tại E nên ba điểm B, C, E cùng thuộc đường tròn (O) đường kính BC.
Vì tam giác BCF vuông tại F nên ba điểm B, C, F cùng thuộc đường tròn (O) đường kính BC.
Vậy năm điểm B, C, D, E, F cùng thuộc đường tròn (O) đường kính BC.

□

Bài 15. Cho tam giác ABC có H là trực tâm. Lấy M, N thuộc tia BC sao cho $MN = BC$ và M nằm giữa B, C. Gọi D là hình chiếu của M lên AC và E là hình chiếu của N lên AB. Chứng minh rằng các điểm A, D, E, H cùng thuộc một đường tròn.

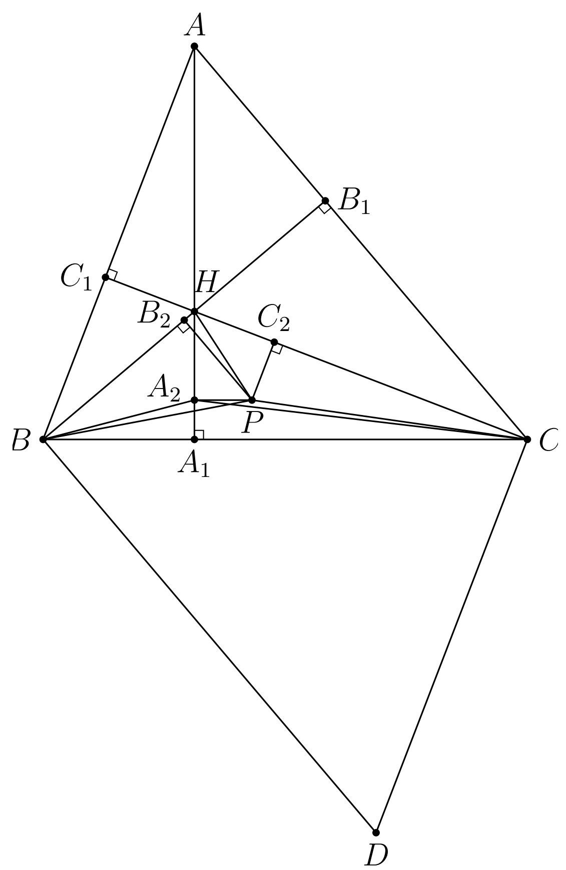
Lời giải.



Gọi K là giao điểm của MD, NE.
Ta thấy $HB \parallel MK$ do cùng vuông góc AC suy ra cặp góc đồng vị $\widehat{HBC} = \widehat{KMN}$.
Tương tự $\widehat{HCB} = \widehat{KNM}$.
Kết hợp giả thiết $BC = MN$ suy ra $\triangle BHC = \triangle MKN$.
Do đó $S_{BHC} = S_{MKN}$, suy ra $HK \parallel BC$.
Mà $AH \perp BC$ nên $AH \perp HK$, suy ra H thuộc đường tròn đường kính AK.
Vì tam giác ADK vuông tại D nên ba điểm A, D, K thuộc đường tròn đường kính AK.
Vì tam giác AEK vuông tại E nên ba điểm A, E, K thuộc đường tròn đường kính AK.
Vậy các điểm A, D, E, H cùng thuộc đường tròn đường kính AK. □

Bài 16. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại H. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt thuộc đoạn thẳng AA_1, BB_1, CC_1 sao cho $S_{A_2BC} + S_{B_2CA} + S_{C_2AB} = S_{ABC}$. Chứng minh rằng A_2, B_2, C_2, H cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.



Qua B_2, C_2 lần lượt dựng các đường thẳng vuông góc với BB_1, CC_1 chúng cắt nhau tại P. Dựng hình bình hành $ABDC$. Vì B_2, C_2 lần lượt thuộc đoạn BB_1, CC_1 nên P nằm ở miền trong hình

bình hành $ABDC$.
Ta dễ thấy $PB_2 \parallel CA$, $PC_2 \parallel AB$ nên

$$S_{PCA} = S_{B_2CA} \text{ và } S_{PAB} = S_{C_2AB}. \tag{2.1}$$

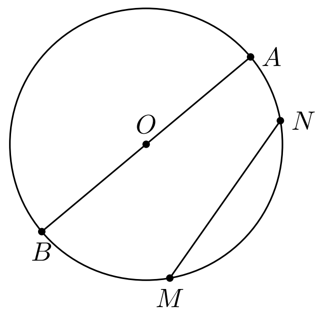
Nếu P nằm ở miền trong tam giác BCD thì $S_{B_2CA} + S_{C_2AB} = S_{PCA} + S_{PAB} > S_{ABC}$ vô lý vì trái với giả thiết, vậy P nằm ở miền trong tam giác ABC.
Khi đó kết hợp giả thiết $S_{PCA} + S_{PBA} + S_{PBC} = S_{ABC} = S_{A_2BC} + S_{B_2CA} + S_{C_2AB}$. Theo (2.1) suy ra $S_{PBC} = S_{A_2BC}$, suy ra $PA_2 \parallel BC$ hay $PA_2 \perp AA_1$.
Từ đây dễ thấy A_2, B_2, C_2 thuộc đường tròn đường kính PH hay A_2, B_2, C_2, H cùng thuộc một đường tròn. $\square$

§2 Đường kính và dây của đường tròn

1 Tóm tắt lí thuyết

Định nghĩa 4.

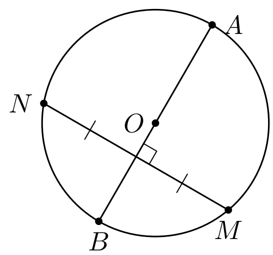
- Dây cung là đoạn thẳng nối hai điểm phân biệt cùng nằm trên một đường tròn.
- Dây cung đi qua tâm của đường tròn gọi là đường kính của đường tròn.
- Một dây cung sẽ chia đường tròn thành hai phần, tương ứng với hai cung của đường tròn (cung lớn và cung nhỏ).



Định lí 6. Trong các dây cung của một đường tròn, đường kính là dây cung lớn nhất.

Định lí 7. Trong một đường tròn

1) Đường kính vuông góc với một dây cung thì đi qua trung điểm của dây đó.
2) Đường kính đi qua trung điểm của một dây cung không đi qua tâm của đường tròn thì vuông góc với dây đó.



2 Các ví dụ

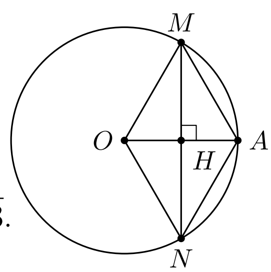
Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O;10)$. Lấy một điểm A tùy ý thuộc (O). Vẽ dây MN vuông góc với OA tại trung điểm của OA.

a) Chứng minh $OMAN$ là hình thoi. b) Tính độ dài dây MN.

Lời giải.

1. Gọi H là trung điểm của OA. Vì $MN \perp OA$ tại H nên H cũng là trung điểm của MN, do đó $OMAN$ là hình thoi.
2. Xét $\triangle OHM$ vuông tại H có $OH = 5$ và $OM = 10$, do đó

$$HM = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{100 - 25} = 5\sqrt{3} \Rightarrow MN = 2MH = 10\sqrt{3}.$$



□

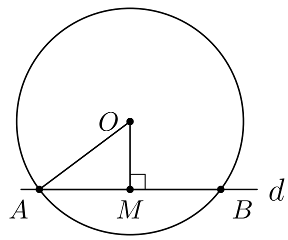
Ví dụ 2. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm M nằm trong đường tròn (O).

1. Hãy nêu cách dựng dây AB của đường tròn (O) nhận M làm trung điểm.
2. Tính độ dài dây AB ở câu a) biết $R=5$ cm và $OM=1,4$ cm.

Lời giải.

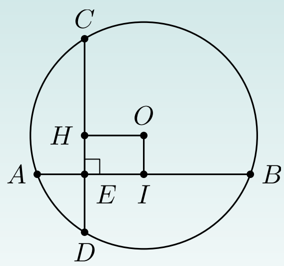
1. Dựng đường thẳng d đi qua M và vuông góc với OM. Giả sử d cắt đường tròn (O) tại $A,\ B$. Khi đó ta có M là trung điểm AB.
2. Xét tam giác AOM vuông tại M có

$$AM=\sqrt{AO^2-OM^2}=\sqrt{5^2-1,4^2}=4,8\Rightarrow AB=9,6\text{ cm}.$$



□

Ví dụ 3.
Trong hình vẽ bên có $AB\perp CD$, $AE=2$, $EB=6$, $EC=4$ và $ED=3$. Tính độ dài đường kính của đường tròn (O).



Lời giải.

Ta có $AB=AE+EB=2+6=8$ cm, $CD=CE+ED=4+3=7$ cm.
Kẻ $OI\perp AB$ tại I và $OH\perp CD$ tại H. Khi đó $I,\ H$ lần lượt là trung điểm của $AB,\ CD$. Do vậy $IA=IB=\dfrac{AB}{2}=4$ và $HC=HD=\dfrac{CD}{2}=\dfrac{7}{2}$.
Ta có

$$OI=HE=CE-CH=4-\frac{7}{2}=\frac{1}{2}.$$

Do đó $OB=\sqrt{OI^2+IB^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}+4^2}=\dfrac{\sqrt{65}}{2}\Rightarrow 2R=\sqrt{65}$. □

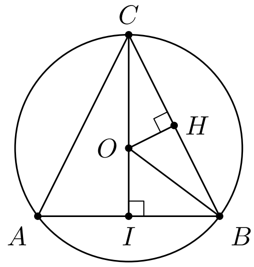
Ví dụ 4. Cho đường tròn (O) và dây $AB=2a$ sao cho khoảng cách từ tâm O đến AB bằng h. Gọi I là trung điểm của AB. Tia IO cắt đường tròn (O) tại C.

1. Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại C.
2. Tính khoảng cách từ O đến BC.

Lời giải.

1. Vì $OA = OB$ và I là trung điểm AB nên $OI \perp AB$. Lại có $CI \perp AB$ nên CI vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến trong tam giác $CAB \Rightarrow$ tam giác ABC cân tại C.

2. Hạ $OH \perp BC$ tại $H \Rightarrow H$ là trung điểm của BC, do đó $HB = HC = \dfrac{BC}{2}$.



Xét tam giác OIB vuông tại I có $IB = a$, $OI = h$ nên $OB = \sqrt{OI^2 + IB^2} = \sqrt{a^2 + h^2}$.
Mà $CI = CO + OI = h + \sqrt{a^2 + h^2}$.
Xét tam giác IBC vuông tại I có

$$BC = \sqrt{CI^2 + IB^2} = \sqrt{(h + \sqrt{a^2 + h^2})^2 + a^2} = \sqrt{2(a^2 + h^2 + h\sqrt{a^2 + h^2})}.$$

Do đó $HB = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + h^2 + h\sqrt{a^2 + h^2})}$.
Xét tam giác HOB vuông tại H có

$$\begin{aligned} OH &= \sqrt{OB^2 - HB^2} = \sqrt{\left(\sqrt{a^2 + h^2}\right)^2 - \left[\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + h^2 + h\sqrt{a^2 + h^2})}\right]^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 - h\sqrt{a^2 + h^2} + h^2}{2}}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 5. Cho đường tròn $(O; R)$ và hai bán kính OA, OB. Trên các bán kính OA, OB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $OM = ON$. Vẽ dây CD đi qua M và N (M nằm giữa C và N).

1. Chứng minh rằng $CM = DN$.

2. Giả sử $\widehat{AOB} = 90^\circ$ và $CM = MN = ND$, hãy tính độ dài OM theo R.

Lời giải.

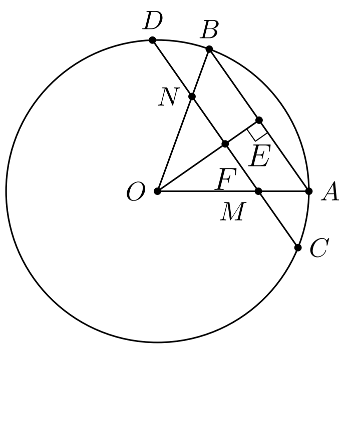
1.

Hạ $OE \perp AB$ tại E và OE cắt CD tại F.
Trong tam giác OAB cân tại O, ta có

$$\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB} \Rightarrow MN \parallel AB \Rightarrow OF \perp MN \text{ và } MF = NF.$$

Vì $OF \perp MN$ nên $OF \perp CD \Rightarrow F$ là trung điểm CD, do vậy $FC = FD$. Ta có

$$CM = CF - MF = DF - NF = DN \text{ (đpcm).}$$

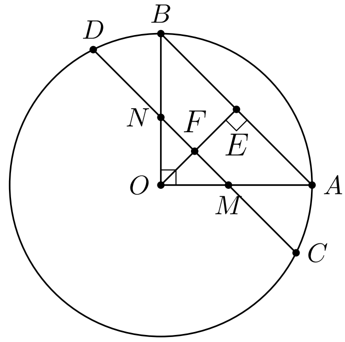


2.

Đặt $MF = x \Rightarrow CF = CM + MF = 3MF = 3x$. Vì tam giác OAB vuông cân tại O và $MN \parallel AB$ nên tam giác OMN vuông cân tại $O \Rightarrow OF = MF = x$.
Xét tam giác OCF vuông tại F, ta có

$$OF^2 = OC^2 - CF^2 \Leftrightarrow x^2 = R^2 - 9x^2 \Leftrightarrow x = \frac{R}{\sqrt{10}}.$$

Khi đó $OM = ON = OF\sqrt{2} = \dfrac{R}{\sqrt{5}}$.
Vậy với $OM = ON = \dfrac{R}{\sqrt{5}}$ sẽ thỏa mãn đề bài.

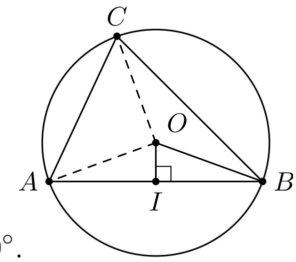


□

Ví dụ 6. Cho đường tròn $(O; R)$ và hai dây $AB = R\sqrt{3}$, $AC = R\sqrt{2}$ (B, C nằm về hai phía đối với đường thẳng AO). Hãy tính các góc của tam giác ABC.

Lời giải.

Xét tam giác OAC có $OA = OC = R$, $AC = R\sqrt{2}$ nên $\triangle OAC$ vuông cân tại $O \Rightarrow \widehat{OCA} = \widehat{OAC} = 45^\circ$.
Kẻ $OI \perp AB$ tại $I \Rightarrow IA = IB = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.
Xét tam giác OIB vuông tại I có



$$\cos\widehat{OBI} = \frac{IB}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{OAI} = \widehat{OBI} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 180^\circ - 2\cdot 30^\circ = 120^\circ.$$

Do vậy $\widehat{CAB} = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$.
Lại có

$$360^\circ = \widehat{COA} + \widehat{AOB} + \widehat{COB} \Rightarrow \widehat{COB} = 360^\circ - 90^\circ - 120^\circ = 150^\circ.$$

Xét tam giác OBC cân tại O, ta có

$$\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

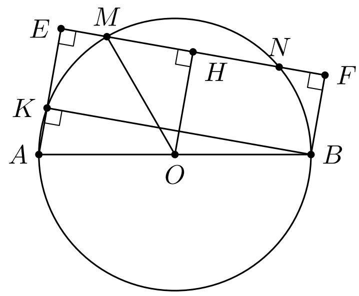
Do đó $\widehat{ACB} = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$ và $\widehat{ABC} = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ$.

□

Ví dụ 7. Cho nửa đường tròn (O), đường kính $AB = 10$ cm. Một dây $MN = 8$ cm có hai đầu mút di chuyển trên nửa đường tròn (O) (điểm M nằm trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AN}$). Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, B trên đường thẳng MN.

1. Chứng minh EF và MN có trung điểm trùng nhau.
2. Chứng minh $ME = NF$.
3. Xác định vị trí của MN để diện tích tứ giác $ABFE$ lớn nhất.

Lời giải.



1. Kẻ $OH \perp MN$
   $\Rightarrow H$ là trung điểm của NM và $AE \parallel OH \parallel BF$. (1)
   Do O là trung điểm AB nên $AE \parallel OH \parallel BF$ và cách đều nhau, do đó $EH = HF$. (2)
   Từ (1) và (2) ta có EF và MN có trung điểm trùng nhau.
2. Ta có $ME = EH - HM = FH - HN = NF$.
   Vậy $ME = NF$.

c) Vì H là trung điểm của MN nên $HM = HN = 4$ cm. Xét tam giác OMH vuông tại H có

$$OH = \sqrt{MO^2 - HM^2} = \sqrt{25 - 16} = 3 \text{ cm}.$$

Vì $ABFE$ là hình thang có OH là đường trung bình nên $AE + BF = 2OH = 6$ cm.
Kẻ $BK \perp AE$ tại $K \Rightarrow BK \parallel MN$ và $BK \leq AB$. Do vậy

$$S_{ABFE} = \frac{(AE + BF)BK}{2} = \frac{6BK}{2} = 3BK \leq 3AB = 30 \text{ cm}^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi $BK = AB$, hay $MN \parallel AB$.
Vậy khi $MN \parallel AB$ thì diện tích tứ giác $ABFE$ lớn nhất.

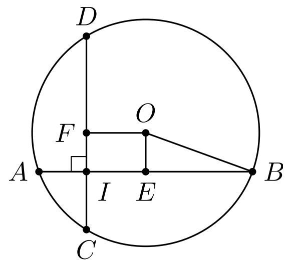
□

3 Luyện tập

Bài 1. Cho đường tròn $(O; 5 \text{ cm})$ và dây $AB = 8$ cm.

1. Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB.
2. Lấy điểm I trên dây AB sao cho $AI = 1$ cm. Qua I kẻ dây CD vuông góc với AB. Chứng minh rằng $AB = CD$.

Lời giải.

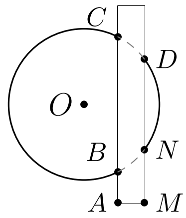


1. Kẻ $OE \perp AB$ tại E. Khi đó E là trung điểm của AB, do vậy $EA = EB = \dfrac{AB}{2} = 4$.
   Ta có $OE = \sqrt{OB^2 - EB^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$ cm.
2. Kẻ $OF \perp CD$ tại $F \Rightarrow F$ là trung điểm của CD.
   Do vậy $FC = FD = \dfrac{CD}{2}$.

   Ta có $IE = AE - AI = 4 - 1 = 3$ cm, suy ra $OEIF$ là hình vuông. Do đó $OF = 3$ cm.
   Xét tam giác OFD vuông tại F, ta có $FD = \sqrt{OD^2 - OF^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$ cm.
   Do vậy $CD = 2FD = 8$ cm, suy ra $AB = CD$.

□

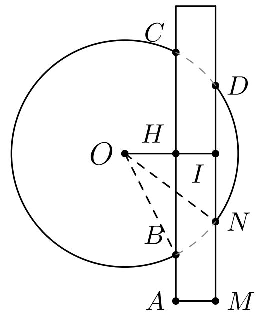
Bài 2.
Trong hình vẽ bên có một mảnh giấy hình chữ nhật che khuất một phần của đường tròn (O). Cho biết $AB = 1$ cm, $BC = 4$ cm và $MN = 2$ cm.



1. Tính độ dài đoạn DN.
2. Cho $AM = 1$ cm. Tính bán kính của đường tròn (O).

Lời giải.

1. Kẻ $OH \perp BC$ tại H, OH cắt DN tại I. Khi đó $H,\ I$ lần lượt là trung điểm của $BC,\ DN$.
   Ta có $HB = HC = \dfrac{BC}{2} = 2$ cm. Vì $AMIH$ là hình chữ nhật nên $IM = AH = AB + BH = 1 + 2 = 3$ cm.
   Do đó $IN = IM - MN = 3 - 2 = 1$ cm.
   Vậy $DN = 2IN = 2$ cm.



b) Xét tam giác OHB vuông tại H có $OB = \sqrt{OH^2 + 4}$.
Xét tam giác OIN vuông tại I có $OI = OH + HI = OH + 1$, do đó

$$ON = \sqrt{OI^2 + IN^2} = \sqrt{(OH+1)^2 + 1}.$$

Mà $ON = OB \Leftrightarrow \sqrt{OH^2 + 4} = \sqrt{(OH+1)^2 + 1} \Leftrightarrow OH^2 + 4 = OH^2 + 2OH + 2 \Leftrightarrow OH = 1$.
Khi đó $OB = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ cm.

□

Bài 3. Cho đường tròn $(O; OA)$ và đường kính $AD = 12,5$ cm. Lấy điểm B thuộc đường tròn $(O; OA)$ sao cho $AB = 10$ cm. Kẻ dây BC vuông góc với đường kính AD. Tính các khoảng cách từ tâm O đến các dây AB và BC.

Lời giải.

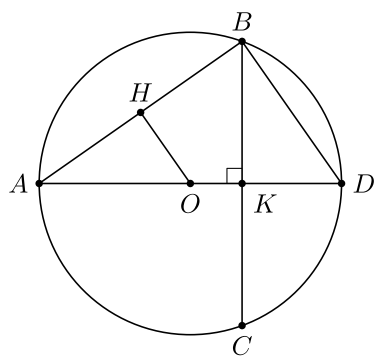
Vì $OA = OD = OB$ nên tam giác ABD vuông tại B, do đó

$$BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = \sqrt{12,5^2 - 10^2} = 7,5 \text{ cm}.$$

Kẻ $OH \perp AB$ tại $H \Rightarrow OH = \dfrac{BD}{2} = 3,75$ cm.
Gọi K là giao điểm của AD và BC, khi đó $OK \perp BC$.
Xét tam giác ABD vuông tại B ta có

$$AB^2 = AK \cdot AD \Rightarrow AK = \frac{10^2}{12,5} = 8 \text{ cm}.$$

Do đó $OK = AK - AO = 8 - \dfrac{12,5}{2} = 1,75$ cm.



□

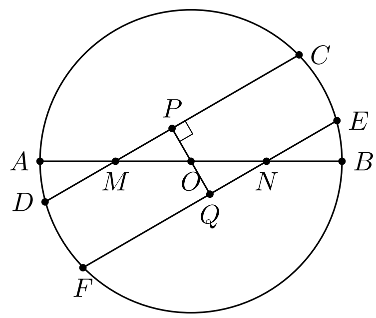
Bài 4. Cho đường tròn (O) và đường kính AB. Gọi $M,\ N$ theo thứ tự là trung điểm của $OA,\ OB$. Qua $M,\ N$ lần lượt vẽ các dây $CD,\ EF$ song song với nhau ($C,\ E$ cùng nằm trên một nửa đường tròn đường kính AB).

1. Chứng minh tứ giác $CDFE$ là hình chữ nhật.

2. Giả sử CD và EF cùng tạo với AB một góc $30°$. Tính diện tích hình chữ nhật $CDFE$.

Lời giải.

1. Kẻ $OP \perp CD$ tại P
   $\Rightarrow P$ là trung điểm CD và $OP \perp EF$ (do $CD \parallel EF$).
   Giả sử OP cắt EF tại $Q \Rightarrow Q$ là trung điểm của EF.
   Xét hai tam giác vuông OPM và OQN có
   $OM = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{OB}{2} = ON$ và $\widehat{MOP} = \widehat{NOQ}$ nên
   $\triangle OPM = \triangle OQN$, do đó $OP = OQ \Rightarrow CD = EF$.
   Xét tứ giác $CDFE$ có $CD = EF$ và $CD \parallel EF$ nên
   $CDFE$ là hình bình hành.
   Lại có PQ là đường trung bình của hình bình hành
   $CDFE$ và $PQ \perp CE \Rightarrow CD \perp CE$.
   Do đó $CDFE$ là hình chữ nhật.



b) Xét tam giác OPM vuông tại P có $\widehat{OMP} = 30°$, suy ra

$$OP = \frac{OM}{2} = \frac{OA}{4} = \frac{R}{4} \Rightarrow CE = PQ = 2OP = \frac{R}{2}. \quad (1)$$

Xét tam giác OPC vuông tại P, ta có

$$CP = \sqrt{OC^2 - OP^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{16}} = \frac{R\sqrt{15}}{4} \Rightarrow CD = 2CP = \frac{R\sqrt{15}}{2}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $S_{CDFE} = CD \cdot CE = \dfrac{R}{2} \cdot \dfrac{R\sqrt{15}}{2} = \dfrac{R^2\sqrt{15}}{4}$.

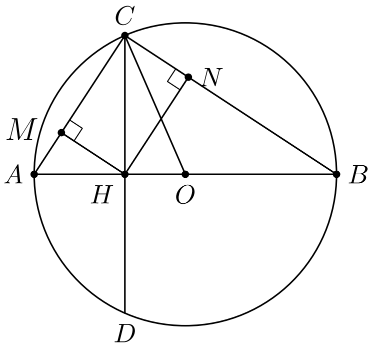
□

Bài 5. Cho đường tròn (O) và đường kính $AB = 13$ cm. Dây $CD = 12$ cm vuông góc với AB tại H.

1. Tính độ dài các đoạn $HA,\ HB$.

2. Gọi $M,\ N$ theo thứ tự là hình chiếu của H lên $AC,\ BC$. Tính diện tích tứ giác $CMHN$.

Lời giải.



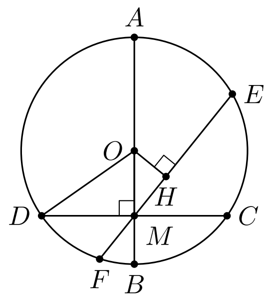
1. Vì $CD \perp AB$ tại H nên $CH = \dfrac{CD}{2} = 6$ cm.
   Giả sử $HA < HB$. Xét tam giác OCH vuông tại H có
   $$OH = \sqrt{OC^2 - HC^2} = \sqrt{6,5^2 - 6^2} = 2,5 \text{ cm}.$$
   Do đó
   $HA = 6,5 - 2,5 = 4$ cm và $HB = 13 - 4 = 9$ cm.
2. Vì $\triangle CHN \backsim \triangle ABC$ nên
   $$\frac{S_{CHN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{CH}{AB}\right)^2 = \frac{6^2}{13^2} = \frac{36}{169}.$$
   Mà $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 13 \cdot 6 = 39 \text{ cm}^2$ nên
   $$S_{CHN} = 39 \cdot \frac{36}{169} = \frac{108}{13} \text{ cm}^2 \Rightarrow S_{CMHN} = \frac{216}{13} \text{ cm}^2.$$

□

Bài 6. Cho đường tròn $(O; 5 \text{ cm})$ và điểm M cách O một đoạn là 3 cm.

1. Tính độ dài dây cung ngắn nhất của (O) đi qua M.
2. Tính độ dài dây cung dài nhất của (O) đi qua M.

Lời giải.



Giả sử EF là một dây cung tùy ý qua M, CD là dây cung đi qua M và vuông góc với OM, AB là đường kính chứa M của đường tròn (O). Kẻ $OH \perp EF$ tại $H \Rightarrow H$ là trung điểm EF.

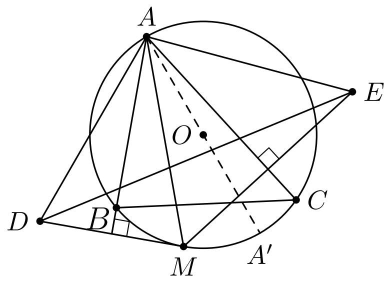
1. Ta có $HE = \sqrt{OE^2 - OH^2}$. Vì $EF = 2HE$, $OE = 5$ cm nên EF nhỏ nhất khi HE lớn nhất.
   Lại có tam giác OHM vuông tại H nên $OH \le OM$.
   Dấu bằng chỉ xảy ra khi $H \equiv M \Leftrightarrow EF \equiv CD$.
   Ta có $MC = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{25 - 9} = 4 \Rightarrow CD = 8$ cm.
   Vậy EF nhỏ nhất bằng 8 cm khi $EF \perp OM$.
2. Vì AB là đường kính đi qua $M \Rightarrow EF \le AB$. Do vậy EF lớn nhất bằng 10 cm khi EF là đường kính đi qua M.

□

Bài 7. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) và M là điểm bất kỳ trên cung tròn $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. Gọi D, E lần lượt là điểm đối xứng của M qua AB, AC. Tìm vị trí của M để độ dài DE nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi AA' là đường kính của đường tròn (O).
Vì $D,\ E$ lần lượt là điểm đối xứng của M qua $AB,\ AC$ nên $AD = AM = AE$, do đó tam giác AED cân tại A.
Lại có $\widehat{DAE} = \widehat{DAM} + \widehat{MAE} = 2(\widehat{BAM} + \widehat{MAC}) = 2\widehat{BAC}$ (không đổi).
Vì vậy DE lớn nhất khi AD lớn nhất, tức là AM lớn nhất $\Leftrightarrow M \equiv A'$.



□

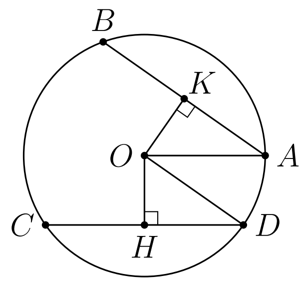
§3 Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

1 Tóm tắt lí thuyết

Định lí 8. Trong một đường tròn:

1) Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

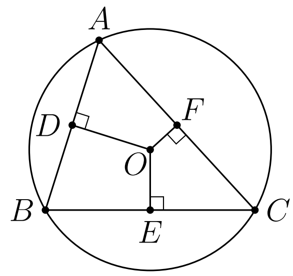
2) Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.



Định lí 9. Trong hai dây của một đường tròn:

1) Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

2) Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.



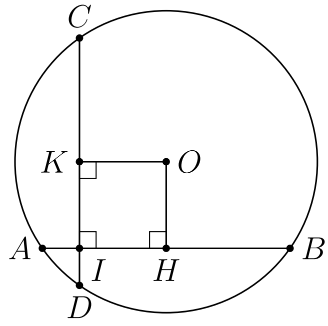
⚠ **26.** Cả hai định lý trên vẫn đúng với trường hợp hai đường tròn có bán kính bằng nhau (gọi là hai đường tròn bằng nhau).

2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho đường tròn tâm (O) bán kính $5\,\text{cm}$, dây AB bằng $8\,\text{cm}$.

1. Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB.
2. Gọi I là điểm thuộc dây AB sao cho $AI = 1\,\text{cm}$. Kẻ dây CD qua I và vuông góc với AB. Chứng minh rằng $CD = AB$.

Lời giải.



1. Gọi H là trung điểm của AB, suy ra $OH \perp AB$.
   Khoảng cách từ O đến dây AB là

$$OH = \sqrt{OA^2 - HA^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\,\text{cm}.$$

2. Kẻ $OK \perp CD$ tại K. Suy ra $OKIH$ là hình chữ nhật.
   mà $IH = AH - AI = 3\,\text{cm} \Rightarrow IH = OH$.
   suy ra $OKIH$ là hình vuông $\Rightarrow OK = OH$.
   Do đó khoảng cách từ tâm O đến hai dây AB và CD bằng nhau, suy ra $AB = CD$.

□

Ví dụ 2. Cho đường tròn tâm (O) các dây MN và PQ bằng nhau, các tia MN và PQ cắt nhau tại điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của MN và PQ. Chứng minh rằng:

a) $AE = AF$.

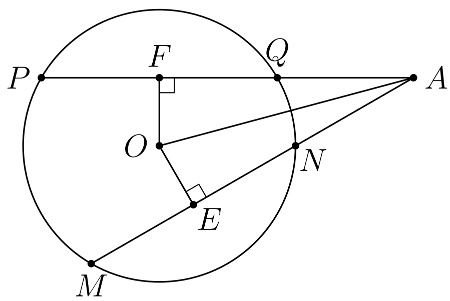
b) $AN = AQ$.

Lời giải.

1. Chứng minh $AE = AF$.

   Vì E, F lần lượt là trung điểm của MN, PQ nên

$$OE \perp MN \text{ và } OF \perp PQ.$$



   Mặt khác, $MN = PQ \Rightarrow OE = OF$.
   Suy ra

$$AE = \sqrt{OA^2 - OE^2} = \sqrt{OA^2 - OF^2} = AF.$$

2. Chứng minh $AN = AQ$.
   Ta có

$$AN = AE - NE \text{ và } AQ = AF - FQ$$

   mà

$$NE = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}PQ = QF \text{ và } AE = AF$$

   Suy ra $AN = AQ$.

□

Ví dụ 3. Cho đường tròn tâm (O), dây AB và dây CD, $AB < CD$. Giao điểm K của các đường thẳng AB, CD nằm ngoài đường tròn. Đường tròn $(O; OK)$ cắt KA và KC tại M và N. Chứng minh rằng $KM < KN$.

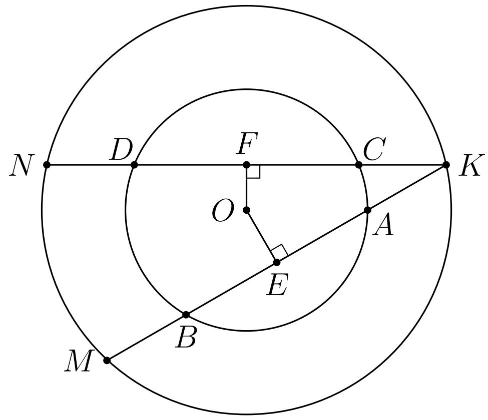
Lời giải.

Kẻ $OE \perp AB$ tại E, kẻ $OF \perp CD$ tại F.
Trong đường tròn nhỏ, ta có

$$AB < CD \Rightarrow OE > OF.$$

Trong đường tròn lớn, ta có

$$OE > OF \Rightarrow KM < KN.$$



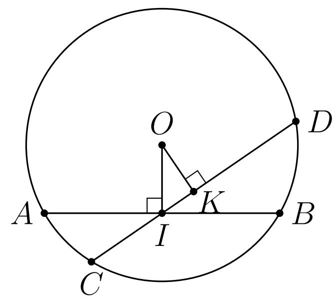
□

Ví dụ 4. Cho đường tròn tâm (O) và điểm I nằm bên trong đường tròn. Chứng minh rằng dây AB vuông góc với OI tại I ngắn hơn mọi dây khác đi qua I.

Lời giải.

Gọi CD là dây bất kỳ (khác AB) đi qua I. Ta cần chứng minh $AB < CD$.
Kẻ $OI \perp CD$ tại K.
Tam giác OKI vuông tại K nên $OI > OK$.
Trong đường tròn (O), ta có

$$OI > OK \Rightarrow AB < CD.$$



□

Ví dụ 5. Cho đường tròn tâm (O) và hai dây AB, AC sao cho $AB < AC$ và tâm O nằm trong góc $\widehat{ABC}$. Chứng minh rằng $\widehat{OAB} > \widehat{OAC}$.

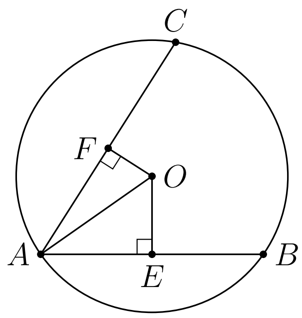
Lời giải.

Kẻ $OE \perp AB$ tại E, kẻ $OF \perp AC$ tại F.
Trong đường tròn (O), ta có

$$AB < AC \Rightarrow OE > OF.$$

$$\Rightarrow \sin \widehat{OAE} = \frac{OE}{OA} > \frac{OF}{OA} = \sin \widehat{OAF}.$$

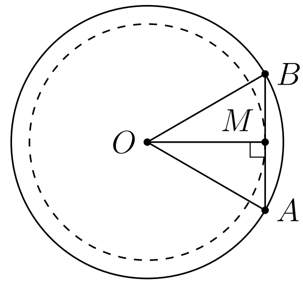
Suy ra $\widehat{OAE} > \widehat{OAF}$ hay $\widehat{OAB} > \widehat{OAC}$.



□

Ví dụ 6. Cho đường tròn tâm (O, R), dây AB di động sao cho $\widehat{AOB} = 60°$. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng điểm M luôn di động trên một đường tròn cố định.

Lời giải.

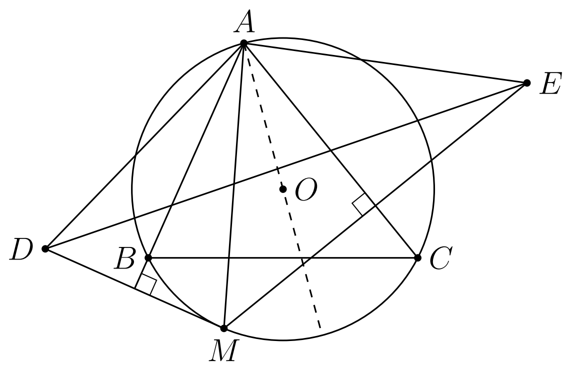


Vì M là trung điểm của dây AB nên $OM \perp AB$.
Lại có $OA = OB$ và $\widehat{AOB} = 60^\circ$ (O), suy ra tam giác OAB đều.
Do đó,
$$OM = \frac{OA\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$
Suy ra M di động trên đường tròn tâm O, bán kính bằng $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

□

Ví dụ 7. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là điểm bất kỳ thuộc cung BC không chứa A. Gọi D, E theo thứ tự là điểm đối xứng với M qua AB, AC. Tìm vị trí của M để DE có độ dài lớn nhất.

Lời giải.



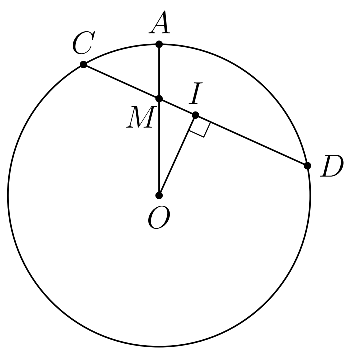
Ta có AB, AC lần lượt là đường trung trực của MD và ME nên
$$AD = AM = AE.$$
Mặt khác,
$$\widehat{MAD} + \widehat{MAE} = 2\widehat{BAM} + 2\widehat{MAC} = 2\widehat{BAC}.$$
Do đó, tam giác ADE cân tại A có $\widehat{DAE}$ không đổi nên DE lớn nhất khi AD lớn nhất tương đương AM lớn nhất hay AM là đường kính của (O).

□

3 Luyện tập

Bài 1. Cho đường tròn tâm O bán kính $OA = 11\,\text{cm}$. Điểm M thuộc bán kính OA và cách O là $7\,\text{cm}$. Qua M kẻ dây CD có độ dài $18\,\text{cm}$, $MC < MD$. Tính các độ dài MC, MD.

Lời giải.



Kẻ $OI \perp CD$ tại I, suy ra I là trung điểm CD. Ta có
$$OI = \sqrt{OC^2 - CI^2} = \sqrt{11^2 - 9^2} = 2\sqrt{10}.$$
và
$$IM = \sqrt{OM^2 - OI^2} = \sqrt{7^2 - \left(2\sqrt{10}\right)^2} = \sqrt{9} = 3.$$
Suy ra
$$CM = CI - IM = 9 - 3 = 6\,(\text{cm})$$
và
$$DM = CD - CM = 18 - 6 = 12\,(\text{cm}).$$

□

Bài 2. Cho đường tròn tâm O bán kính $25\,\text{cm}$. Hai dây AB, CD song song với nhau và có độ dài lần lượt là $40\,\text{cm}$, $48\,\text{cm}$. Tính khoảng cách giữa hai dây AB, CD.

Lời giải.

Kẻ $OM \perp AB$ tại M; $ON \perp CD$ tại N.
Vì $AB \parallel CD$ nên M, O, N thẳng hàng. Ta có

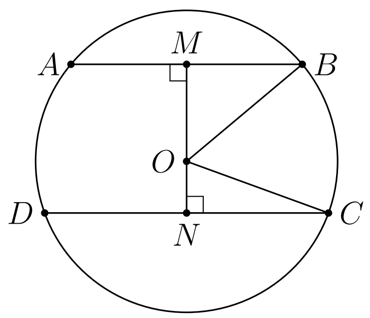
$$OM = \sqrt{OB2 - MB^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15.$$

và

$$ON = \sqrt{OC^2 - NC^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7.$$

Khoảng cách d giữa AB và CD là

$$d = OM + ON = 15 + 7 = 22\,(\text{cm}).$$



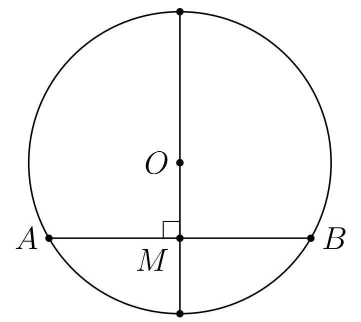
□

Bài 3. Cho đường tròn tâm O, đường kính $10\,\text{dm}$, điểm M cách O là $3\,\text{dm}$.

1. Tính độ dài dây ngắn nhất đi qua M.
2. Tính độ dài dây dài nhất đi qua M.

Lời giải.

1. Tính độ dài dây ngắn nhất đi qua M.
   Theo ví dụ 1.4, gọi AB là dây cung đi qua M và vuông góc với OM, khi đó dây AB ngắn hơn mọi dây cung khác đi qua M. Ta có
   $$AB = 2AM = 2\sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4\,\text{dm}.$$
2. Tính độ dài dây dài nhất đi qua M.
   Đường kính là dây cung lớn nhất. Do đó, dây cung đi qua O và M là dài nhất và bằng $10\,\text{dm}$.



□

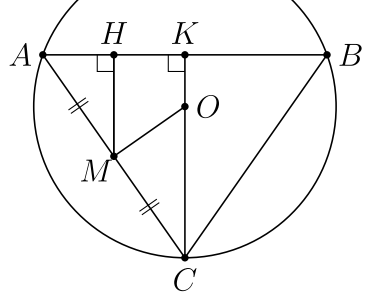
Bài 4. Cho đường tròn tâm O, dây $AB = 24\,\text{cm}$, dây $AC = 20\,\text{cm}$. Biết $\widehat{BAC} < 90^\circ$ và điểm O nằm trong góc $\widehat{BAC}$. Gọi M là trung điểm của AC, khoảng cách từ M đến AB bằng $8\,\text{cm}$.

1. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.
2. Tính bán kính của đường tròn đã cho.

Lời giải.

1. Chứng minh tam giác ABC cân.

   Kẻ $MH \perp AB$ tại H. Tam giác AHM vuông tại H, có $AM = 10\,\text{cm}$, $MH = 8\,\text{cm}$, suy ra
   $$AH = \sqrt{MA^2 - MH^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6\,\text{cm}.$$
   Kẻ $CK \perp AB$ tại K, suy ra $MH \parallel CK$.
   Tam giác ACK có MH là đường trung bình nên
   $$CK = 2MH = 16\,\text{cm}, \text{ và } AK = 2AH = 12\,\text{cm}.$$



   Vì $AK = \dfrac{1}{2}AB$ nên K là trung điểm AB. Vậy tam giác ABC cân tại C.

2. Tính bán kính của đường tròn (O).
   Ta có $CK \perp AB$ và $OK \perp AB$ nên $O \in CK$.
   Hai tam giác OMC và AKC có $\widehat{C}$ chung và $\widehat{OMC} = \widehat{AKC} = 90^\circ$.
   Do đó, hai tam giác OMC và AKC đồng dạng. Suy ra
$$\frac{MC}{KC} = \frac{OC}{AC} \Rightarrow OC = \frac{10 \cdot 20}{16} = 12{,}5\,(\text{cm}).$$
   Vậy đường tròn (O) có bán kính bằng $12{,}5\,\text{cm}$.

□

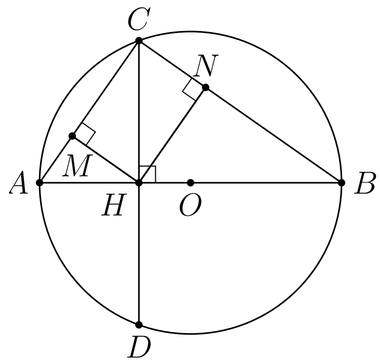
Bài 5. Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 13\,\text{cm}$. Dây CD có độ dài $12\,\text{cm}$ và vuông góc với AB tại H.

1. Tính độ dài đoạn AH và BH.
2. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H trên AC, BC. Tính diện tích tứ giác $CMHN$.

Lời giải.

1. Tính độ dài đoạn AH và BH.

   Ta có $AB \perp CD$, suy ra $CH = \frac{1}{2}CD = 6\,\text{cm}$.
   Tam giác CHO vuông tại H, ta có
$$OH = \sqrt{OC^2 - OH^2} = \sqrt{(6{,}5)^2 - 6^2} = 2{,}5\,\text{cm}.$$
   Giả sử $AH < BH$, khi đó
$$AH = AO - HO = 4\,\text{cm}, \text{ và } BH = HO + OB = 9\,\text{cm}.$$



2. Tính diện tích tứ giác $CMHN$.
   Vì AB là đường kính nên tam giác ABC vuông tại C. Do đó $CMHN$ là hình chữ nhật.
   Tam giác CHA vuông tại H, HM là đường cao nên
$$\frac{1}{HM^2} = \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{HA^2} = \frac{13}{144} \Rightarrow HM = \frac{12\sqrt{13}}{13}\,(\text{cm}).$$
   Tam giác CHB vuông tại H, HN là đường cao nên
$$\frac{1}{HN^2} = \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{HB^2} = \frac{13}{324} \Rightarrow HN = \frac{18\sqrt{13}}{13}\,(\text{cm}).$$
   Diện tích $CMHN$ là
$$S_{CMHN} = HM \cdot HN = \frac{216}{13}\,(\text{cm}^2).$$

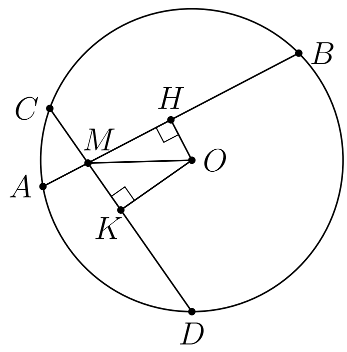
□

Bài 6. Cho đường tròn (O) và hai dây cung AB và CD cắt nhau tại điểm M nằm bên trong đường tròn. Gọi H và K theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Cho biết $AB > CD$, chứng minh rằng $MH > MK$.

Lời giải.

Tam giác OHM và OKM vuông tại H và K. Ta có

$$\begin{aligned} MH^2 - MK^2 &= \left(OM^2 - OH^2\right) - \left(OM^2 - OK^2\right) \\ &= OK^2 - OH^2. \end{aligned}$$



Mặt khác, trong đường tròn (O), ta có

$$AB > CD \Rightarrow OH < OK \Rightarrow OK^2 - OH^2 > 0.$$

Suy ra

$$MH^2 > MK^2 \text{ hay } MH > MK.$$

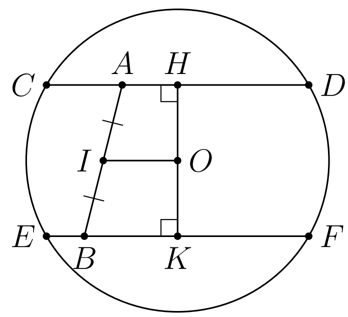
□

Bài 7. Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B nằm bên trong đường tròn và không cùng thuộc một đường kính. Dựng hai dây song song và bằng nhau sao cho điểm A nằm trên một dây, điểm B nằm trên một dây còn lại.

Lời giải.

Cách dựng.

1. Dựng trung điểm I của đoạn AB.
2. Qua A, dựng dây CD song song với OI.
3. Qua B, dựng dây EF song song với OI.



Chứng minh.
Theo cách dựng trên ta đã có hai dây CD và EF song song với nhau.
Kẻ $OH \perp CD$ và $OK \perp EF$.
Ta có IO là đường trung bình của hình thang $AHKB$ nên suy ra $OH = OK$.
Trong đường tròn (O), ta có

$$OH = OK \Rightarrow CD = EF.$$

Biện luận.
Bài toán có một nghiệm hình. □

Bài 8. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB, dây CD. Gọi H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A, B đến CD.

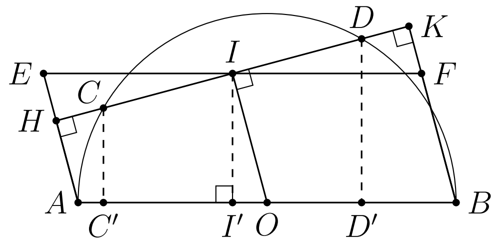
1. Chứng minh rằng $CH = DK$.
2. Chứng minh rằng $S_{AHKB} = S_{ACB} + S_{ADB}$.
3. Tính diện tích lớn nhất của tứ giác $AHBK$, biết $AB = 30\,\text{cm}$, $CD = 18\,\text{cm}$.

Lời giải.

1. Chứng minh rằng $CH = DK$.

   Kẻ $OI \perp CD$ tại I, suy ra I là trung điểm CD.
   Ta có AH, BK, OI song song với nhau (do cùng vuông góc với CD), đồng thời O là trung điểm của AB nên OI là đường trung bình của hình thang $AHKB$, suy ra $IH = IK$. Do đó

   $$CH = IH - IC = IK - ID = DK.$$



2. Qua I, kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AH, BK lần lượt tại E, F.
Gọi I', C', D' lần lượt là hình chiếu của I, C, D lên cạnh AB. Khi đó, II' là đường trung bình của hình thang $CC'D'D$, suy ra $CC' + DD' = 2II'$.
Hai tam giác vuông IHE và IKF có $IH = IK$ và $\widehat{HIE} = \widehat{KIF}$ nên bằng nhau. Suy ra,
$$S_{AHKB} = S_{AEFB} = AB \cdot II'. \tag{1}$$
Mặt khác,
$$S_{ABC} + S_{ADB} = \frac{1}{2}CC' \cdot AB + \frac{1}{2}DD' \cdot AB = AB \cdot II'. \tag{2}$$
Từ (1) và (2), suy ra
$$S_{AHKB} = S_{ACB} + S_{ADB}.$$

3. Độ dài $OI = \sqrt{OC^2 - IC^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12\,\text{cm}$. Ta có
$$S_{AHKB} = AB \cdot II' \leqslant AB \cdot IO = 30 \cdot 12 = 360.$$
Dấu "=" xảy ra khi $I' \equiv O$ hay $CD \parallel AB$.
Vậy hình thang $AHKB$ có diện tích lớn nhất bằng $360\,\text{cm}^2$.

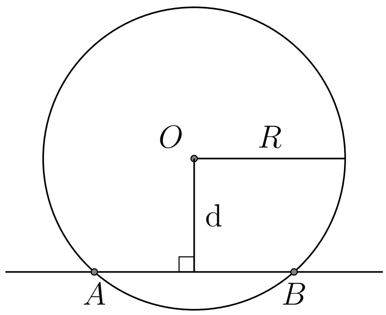
□

§4 Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

1 Tóm tắt lí thuyết

1.1 Đường thẳng và đường tròn cắt nhau

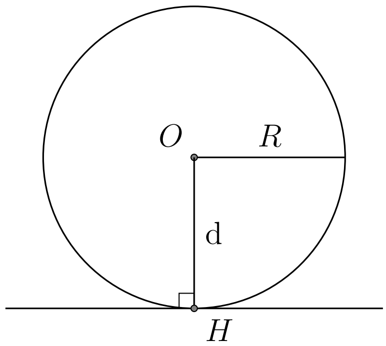
- Đường tròn và đường thẳng cắt nhau khi bán kính của đường tròn lớn hơn khoảng cách từ tâm đường tròn đó đến đường thẳng đã cho. $R > d$.
- Đường thẳng cắt đường tròn tại 2 điểm phân biệt. Số giao điểm bằng 2.



27. Số giao điểm lớn nhất của đường thẳng và đường tròn là 2 giao điểm.

1.2 Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau

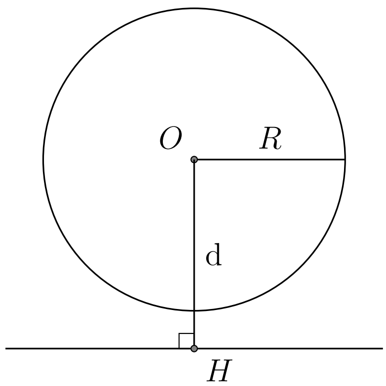
- Đường tròn và đường thẳng tiếp xúc nhau khi bán kính của đường tròn bằng khoảng cách từ tâm đường tròn đó đến đường thẳng đã cho. $R = d$.
- Đường thẳng tiếp xúc đường tròn tại 1 điểm duy nhất. Số giao điểm bằng 1.



28. Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn được gọi là tiếp tuyến. Điểm tiếp xúc gọi là tiếp điểm. Một đường thẳng gọi là tiếp tuyến nếu đường thẳng đó vuông góc với bán kính tại tiếp điểm.

1.3 Đường thẳng và đường tròn không cắt nhau

- Đường tròn và đường thẳng không cắt nhau khi bán kính của đường tròn nhỏ hơn khoảng cách từ tâm đường tròn đó đến đường thẳng đã cho. $R < d$.
- Đường thẳng không cắt đường tròn nên số giao điểm bằng 0.



2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho điểm A nằm trong đường tròn (O). Chứng minh rằng mọi đường thẳng d đi qua A đều cắt (O) tại hai điểm phân biệt.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng đi qua A. Dựng OH vuông góc d. Suy ra

$$\mathrm{d}_{(O,d)} = OH.$$

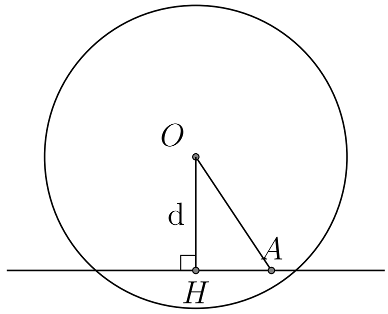
Xét tam giác vuông OAH vuông tại H, ta có OA là cạnh huyền nên

$$OA \geq OH.$$

Mà A nawmg bên trong đường tròn nên $OA < R$. Do đó suy ra

$$R > OH \Leftrightarrow R > \mathrm{d}_{(O,d)}.$$

Do đó, đường thẳng d luôn cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt.



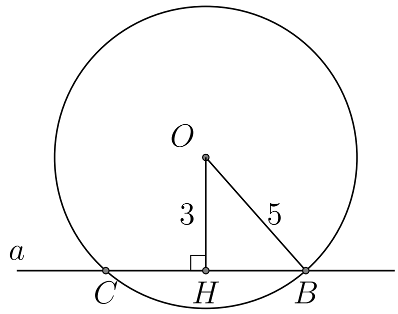
□

Ví dụ 2. Cho đường thẳng a và một điểm O cách a là 3 cm. Dựng $(O; 5\text{ cm})$.

1. Xét vị trí tương đối của a và đường tròn (O).
2. Gọi B và C là các giao điểm của đường thẳng a và (O). Tính độ dài BC.

Lời giải.

1. Vì $\begin{cases} R = 5 \\ \mathrm{d} = 3 \end{cases}$, nên $R > \mathrm{d}$, do đó a cắt (O) tại hai điểm phân biệt B và C.
2. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O xuống a. Suy ra $OH = 3$ cm và H là trung điểm BC. Do đó
$$BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 = 8.$$
Vậy $BC = 8$ cm.



□

Ví dụ 3. Cho hình thang vuông $ABCD(A = D = 90^\circ)$, $AB = 4$ cm, $BC = 13$ cm và $CD = 9$ cm. Tính AD và chứng minh rằng đường thẳng AD tiếp xúc với đường tròn có đường kính là BC.

Lời giải.

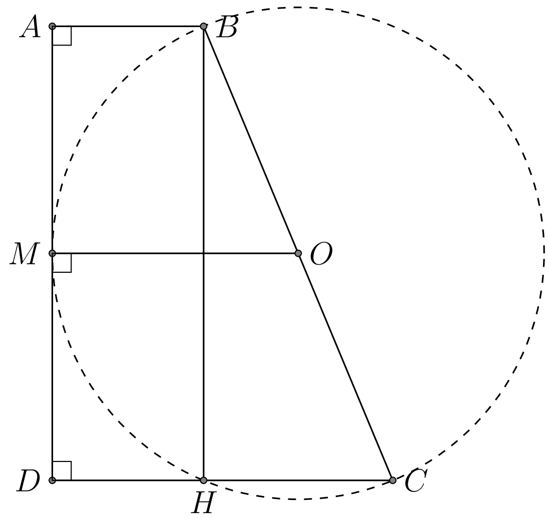
Dựng $BH \perp CD \Rightarrow ABHD$ là hình chữ nhật. Suy ra

$$AD^2 = BH^2 = BC^2 - CH^2 = 13^2 - 5^2 = 144$$
$$\Rightarrow AD = 12.$$

Gọi O và M lần lượt là trung điểm BC và AD. Ta được $MO \perp AD$ và

$$MO = \frac{AB + CD}{2} = \frac{13}{2} = \frac{BC}{2}.$$

Do đó, AD là đường thẳng vuông góc với bán kính của đường tròn (O) tại tiếp điểm M. nên AD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính BC.

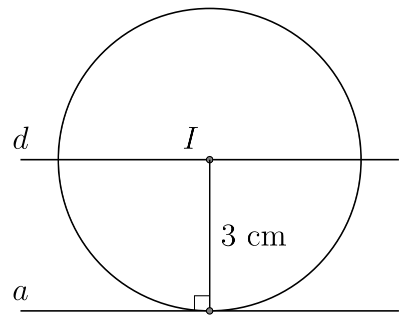


□

Ví dụ 4. Cho đường thẳng a. Tâm I của tất cả các đường tròn bán kính 3 cm, tiếp xúc với đường thẳng a nằm trên đường nào?

Lời giải.

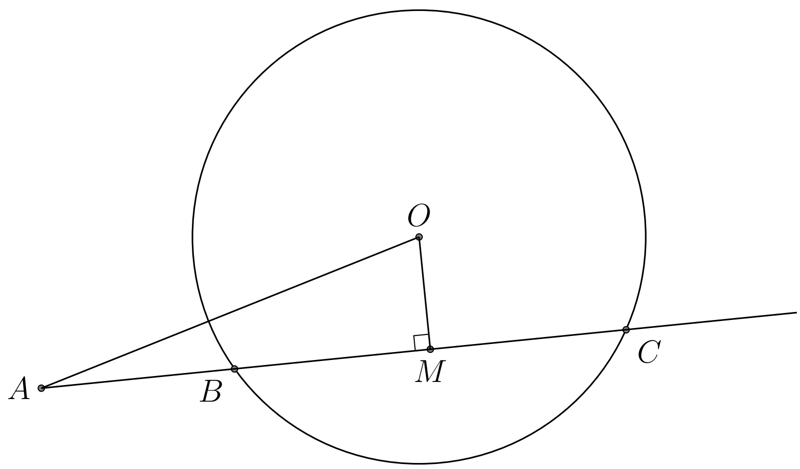
Ta có đường tròn tâm I bán kính bằng 3 cm tiếp xúc với đường thẳng a. Suy ra $\mathrm{d}_{(I,a)} = 3$ cm.
Do mọi điểm I đều cách a một khoảng 3 cm nên mọi điểm I đều nằm trên đường thẳng d song song với a và cách a là 3 cm.



□

Ví dụ 5. Cho đường tròn (O), điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Dựng đường thẳng đi qua A, cắt đường tròn ở B và C sao cho tổng $AB + AC$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm BC, ta có $OM \perp BC$ và $MB = MC$. Suy ra

$$AB + AC = AM - MB + AM + MC = 2AM.$$

Nên $AB + AC$ lớn nhất khi AM lớn nhất. Mà

$$AM^2 = OA^2 - OM^2.$$

Nên, AM lớn nhất khi OM nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv O$. Vậy $AB + AC$ lớn nhất khi đường thẳng đi qua A đi qua tâm O. □

3 Luyện tập

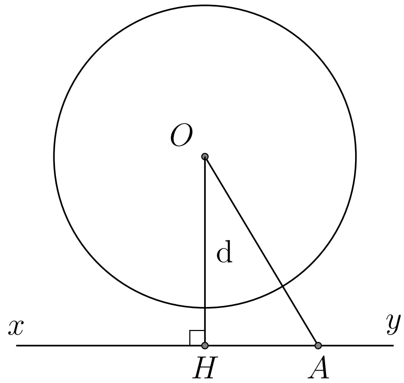
Bài 1. Cho đường thẳng xy không cắt đường tròn $(O; R)$. Chứng minh rằng mọi điểm thuộc xy đều ở bên ngoài đường tròn (O).

Lời giải.

Gọi A là điểm thuộc đường thẳng xy, H là chân đường vuông góc hạ từ O xuống xy. Ta luôn có

$$OA \geq OH.$$

Mà xy không cắt $(O; R)$ nên $OH > R \Rightarrow OA > R$. Do đó, A nằm ngoài $(O; R)$.
Vậy mọi điểm thuộc xy đều nằm ngoài $(O; R)$.

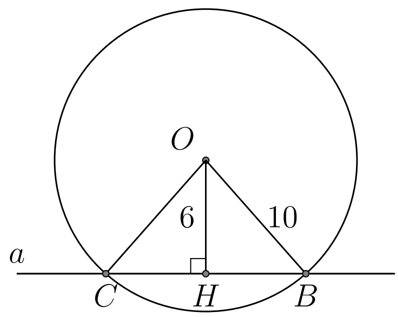


□

Bài 2. Cho điểm O cách đường thẳng a là 6 cm. Vẽ đường tròn $(O, 10\text{ cm})$.

1. Chứng minh rằng (O) có hai giao điểm với đường thẳng a.
2. Gọi hai giao điểm nói trên là B và C. Tính diện tích tam giác OBC.

Lời giải.



1. Vì $\begin{cases} R = 10 \\ \mathrm{d} = 6 \end{cases}$, nên $R > \mathrm{d}$, do đó a cắt (O) tại hai điểm phân biệt B và C.
2. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O xuống a. Suy ra $OH = 6$ cm và H là trung điểm BC. Do đó

$$BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \Rightarrow BC = 16.$$

Suy ra diện tích tam giác OBC

$$S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} \cdot OH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 16 = 48\text{ cm}^2.$$

□

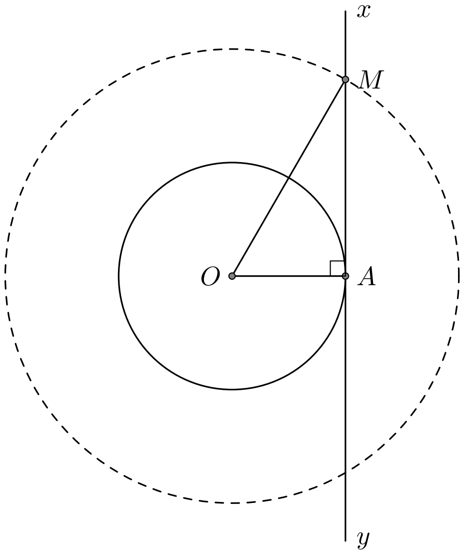
Bài 3. Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A chạy trên đường tròn đó. Từ A vẽ tiếp tuyến xy, trên xy lấy một điểm M sao cho $AM = R\sqrt{3}$. Điểm M di động trên đường nào?

Lời giải.

Ta có xy là tiếp tuyến của $(O;R)$ tại A nên $OA \perp xy$. Xét tam giác vuông OAM vuông tại A, ta có

$$OM^2 = OA^2 + AM^2 = R^2 + 3R^2 = 4R^2$$
$$\Rightarrow OM = 2R.$$

Suy ra khi A chạy trên $(O;R)$ thì điểm M thuộc đường tròn tâm O bán kính $2R$.



□

Bài 4. Cho đường tròn $(O;R)$ có dây $AB = R$. Trên tia AB lấy điểm M sao cho $AM = a$. Qua M vẽ đường thẳng xy vuông góc với AB. Chứng minh rằng đường thẳng xy và đường tròn $(O;R)$ chỉ có điểm chung khi $a \leq \dfrac{3R}{2}$.

Lời giải.

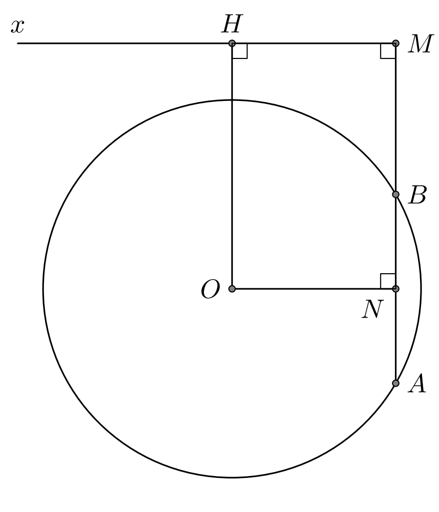
Gọi N là trung điểm AB. Ta có $ON \perp AM$ và $NM = a - \dfrac{R}{2}$. Gọi H là chân đường vuông góc dựng từ O xuống xy, ta có $OH \perp xy \Rightarrow ONMH$ là hình chữ nhật, do đó

$$\mathrm{d}_{(O,xy)} = OH = MN = a - \frac{R}{2}.$$

Đường thẳng xy và đường tròn $(O;R)$ có điểm chung khi và chỉ khi

$$\mathrm{d}_{(O,xy)} \leq R \Leftrightarrow a - \frac{R}{2} \leq R \Leftrightarrow a \leq \frac{3R}{2}.$$

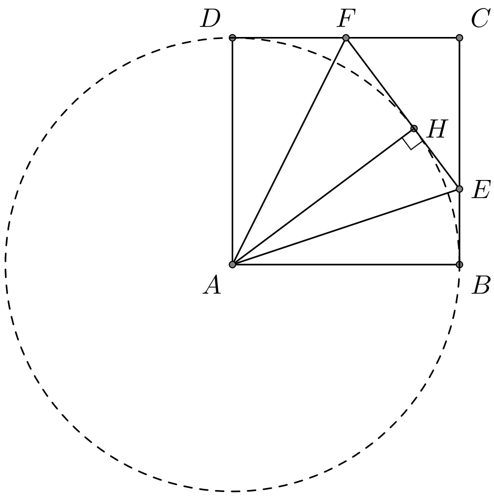
Vậy đường thẳng xy và đường tròn $(O;R)$ chỉ có điểm chung khi $a \leq \dfrac{3R}{2}$.



□

Bài 5. Cho hình vuông $ABCD$, lấy điểm E trên cạnh BC và điểm F trên cạnh CD sao cho $AB = 3BE = 2DF$. Chứng minh EF tiếp xúc với cung tròn tâm A, bán kính AB.

Lời giải.



Dựng $AH \perp EF$ tại H.
Gọi độ dài cạnh hình vuông bằng a. Ta có

$$EF^2 = FC^2 + CE^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{9} = \frac{25a^2}{36}$$
$$\Rightarrow EF = \frac{5a}{6}.$$

Mặt khác

$$S_{\triangle AEF} = S_{ABCD} - S_{\triangle ADF} - S_{\triangle CEF} - S_{\triangle AEB}$$
$$= a^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{6} = \frac{5a^2}{12}.$$

Từ đó suy ra

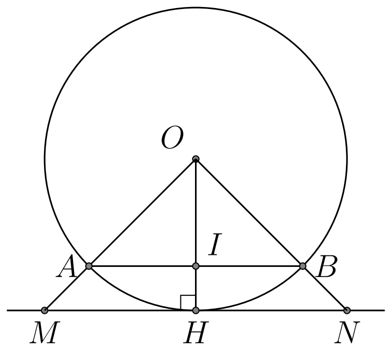
$$AH = \frac{2S_{\triangle AEF}}{EF} = \frac{2 \cdot \frac{5a^2}{12}}{\frac{5a}{6}} = a.$$

Suy ra EF vuông góc bán kính đường tròn (A, AB) tại tiếp điểm H hay EF tiếp xúc (A, AB) tại H.

□

Bài 6. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây $AB = \frac{8R}{5}$. Vẽ một tiếp tuyến song song với AB, cắt các tia OA, OB theo thứ tự tại M và N. Tính diện tích tam giác OMN.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm AB, ta có $AI = \frac{4R}{5}$. Suy ra

$$OM^2 = OA^2 - AI^2 = R^2 - \frac{16R^2}{25} = \frac{9R^2}{25}$$
$$\Rightarrow ON = \frac{3R}{5}.$$
$$\Rightarrow S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \cdot OI \cdot AB = \frac{12R^2}{25}.$$

Gọi H là tiếp điểm của tiếp tuyến MN. Do $MN \parallel AB$ nên ta có

$$\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OMN}} = \frac{OI^2}{OH^2} = \frac{9}{25}.$$
$$\Rightarrow S_{\triangle OMN} = \frac{25}{9} S_{\triangle OAB} = \frac{4R^2}{3}.$$

Vậy diện tích tam giác OMN bằng $\frac{4R^2}{3}$.

□

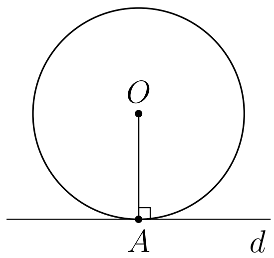
§5 Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

1 Tóm tắt lí thuyết

Định nghĩa 5. Tiếp tuyến của đường tròn là đường thẳng chỉ có một điểm chung với đường tròn đó.

Định lí 10. Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

Định lí 11.
Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.



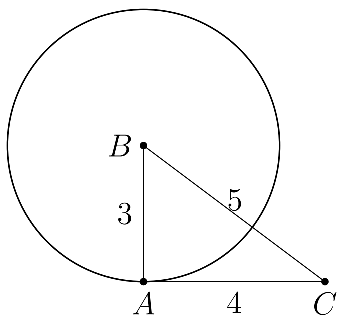
2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$. Vẽ đường tròn (B, BA). Chứng minh rằng AC là tiếp tuyến của đường tròn.

Lời giải.

Xét tam giác ABC có

$$\begin{cases} BC^2 = 5^2 = 25 \\ AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2.$$



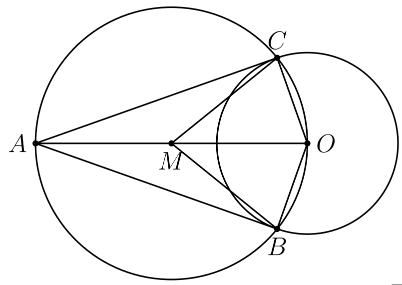
Suy ra tam giác ABC vuông tại B. Hay $CA \perp BA$.
Vậy CA là tiếp tuyến của đường tròn (B, BA).

□

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O), điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Gọi M là trung điểm của AO. Vẽ đường tròn (M, MO), nó cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C. Chứng minh rằng AB và AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải.

Xét tam giác ABO có $MA = MB = MO = \dfrac{AO}{2}$.
Suy ra tam giác ABO vuông tại B. Hay $AB \perp OB$.
Vậy AB là tiếp tuyến của đường tròn (O).
Chứng minh tương tự, ta có AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

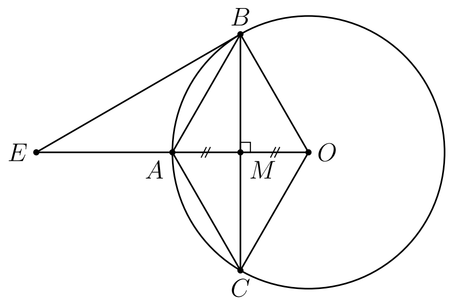


□

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O) có bán kính OA, dây BC vuông góc với OA tại trung điểm M của OA.

1. Tứ giác $OCAB$ là hình gì? Vì sao?
2. Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại B, nó cắt đường thẳng OA tại E. Tính độ dài BE, biết $OB = R$.

Lời giải.



1. Ta có $BC \perp OA \Rightarrow MB = MC$ (đường kính vuông góc với một dây); $MA = MO$ (gt). Suy ra tứ giác $OCAB$ là hình bình hành.
   Mặt khác, $OA \perp BC$ nên hình bình hành $OCAB$ là hình thoi.

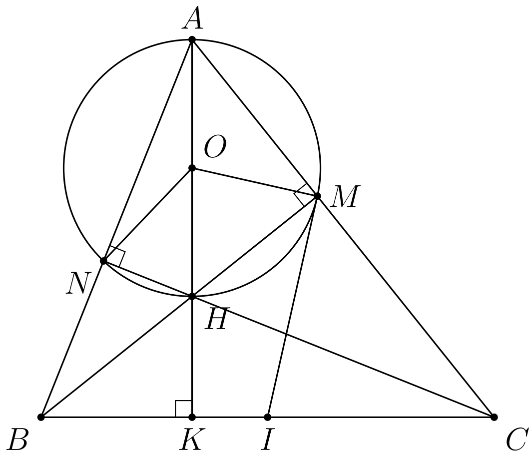
2. Xét tam giác OBA có $OB = OA = R$; $OB = AB$ (vì tứ giác $OCAB$ là hình thoi), suy ra $OA = OB = AB$. Do đó tam giác OAB là tam giác đều. Suy ra $\widehat{BOA} = 60^\circ$.
   Do BE là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $BE \perp OB$, suy ra $\triangle OBE$ vuông tại B.
   Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, ta có
   $$BE = OB \cdot \tan \widehat{BOA} = R \cdot \tan 60^\circ = R\sqrt{3}.$$

□

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC, vẽ các đường cao BM, CN cắt nhau tại H.

1. Chứng minh rằng A, M, H, N cùng nằm trên một đường tròn tâm O.
2. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh IM là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải.



1. Lấy O là trung điểm của AH.
   Áp dụng định lý đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong giác AMH vuông tại M và tam giác ANH vuông tại N, ta có

$$OM = OA = OH \text{ và } ON = OA = OH.$$

   Do đó, $OM = ON = OA = OH$. Vậy bốn điểm A, M, H, N cùng nằm trên một đường tròn tâm O.

2. Gọi K là giao điểm của AH và BC, ta có H là trực tâm của tam giác ABC nên $AK \perp BC$.
   Tam giác HBK vuông tại K nên $\widehat{KBH} + \widehat{KHB} = 90^\circ$.
   Mà $\widehat{KHB} = \widehat{MHO}$ (hai góc đối đỉnh) nên $\widehat{KBH} + \widehat{MHO} = 90^\circ$. (1)
   Tam giác MBC vuông tại M nên $MI = IB = IC$. Suy ra $\triangle IMB$ cân tại I.
   Do đó $\widehat{IMB} = \widehat{IBM}$. (2)
   Theo chứng minh trên ta có $OM = OH$ nên $\triangle OHM$ cân tại O.
   Do đó $\widehat{OMH} = \widehat{OHM}$. (3)
   Từ (1), (2) và (3), ta có $\widehat{IMB} + \widehat{OMH} = 90^\circ$. Suy ra $OM \perp MI$.
   Vậy IM là tiếp tuyến của đường tròn (O).

□

Ví dụ 5. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Từ một điểm M trên nửa đường tròn ta vẽ tiếp tuyến xy. Kẻ $AD \perp xy$ và $BC \perp xy$.

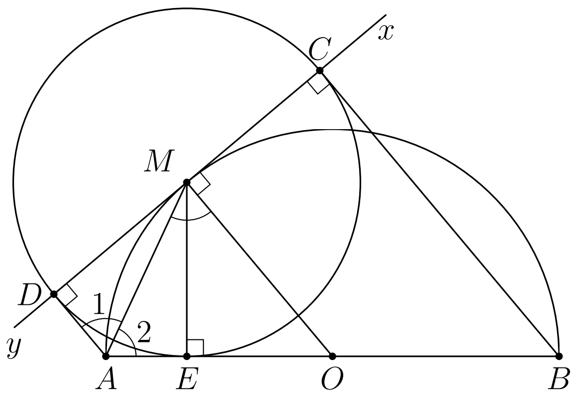
a) Chứng minh $MC = MD$.

b) Chứng minh tổng $AD + BC$ có giá trị không phụ thuộc vị trí điểm M trên nửa đường tròn.

c) Chứng minh đường tròn đường kính CD tiếp xúc với AB.

d) Xác định vị trí điểm M để tứ giác $ABCD$ có diện tích lớn nhất.

Lời giải.



1. Ta có $AD \parallel BC \parallel OM$ (cùng vuông góc với xy).
   Suy ra tứ giác $ABCD$ là hình thang.
   Lại có O là trung điểm của AB nên M là trung điểm của CD. Vậy $MC = MD$.

2. Hình thang $ABCD$ có M, O lần lượt là trung điểm của CD, AB nên MO là đường trung bình của hình thang $ABCD$. Do đó

$$AD + BC = 2MO = AB \text{ (không đổi).}$$

3. Ta có $\triangle AMO$ cân tại O nên $\widehat{A}_2 = \widehat{OMA}$.
   Lại có $AD \parallel OM$ nên $\widehat{A}_1 = \widehat{OMA}$.
   Suy ra $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$.
   Kẻ $ME \perp AB$.
   Ta có $\triangle AMD = \triangle AME$ (ch-gn).
   Suy ra $MD = ME$. Do đó E thuộc đường tròn đường kính CD.
   Vậy đường tròn đường kính CD tiếp xúc với AB.

4. Diện tích hình thang $ABCD$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}CD \cdot (AD + BC) = \frac{1}{2}CD \cdot AB.$$

   Vì AB không đổi nên diện tích hình thang $ABCD$ lớn nhất khi CD lớn nhất.
   Mà $CD \leq AB$ nên CD lớn nhất khi $CD = AB$, lúc đó M là điểm chính giữa cung AB. Vậy S_{ABCD} lớn nhất bằng $\dfrac{AB^2}{2}$ khi M là điểm chính giữa cung AB.

□

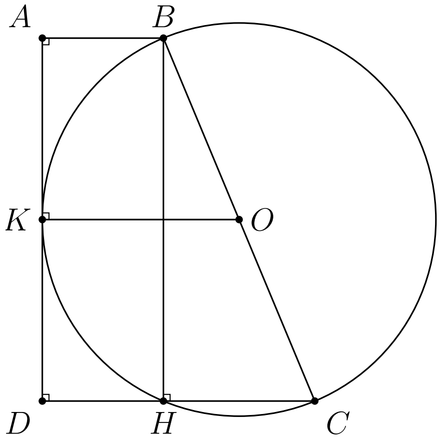
3 Luyện tập

Bài 1. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$), $AB = 4$ cm, $BC = 13$ cm, $CD = 9$ cm.

1. Tính độ dài AD.

2. Chứng minh rằng đường thẳng AD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính BC.

Lời giải.



1. Kẻ $BH \perp CD$ thì tứ giác $ABHD$ có ba góc vuông nên $ABHD$ là hình chữ nhật. Do đó $DH = AB = 4$ cm, $HC = 9 - 4 = 5$ cm.
   Xét tam giác BHC vuông tại H có
   $$BH = \sqrt{BC^2 - HC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (cm)}.$$
   Vậy $AD = BH = 12$ cm.
2. Gọi O là trung điểm của BC, đường tròn đường kính BC có tâm O, bánh kính bằng $\dfrac{BC}{2} = 6{,}5$ cm.
   Kẻ $OK \perp AD$, ta có $OK \parallel AB \parallel CD$ (vì cùng vuông góc với AD). Vì O là trung điểm của BC nên K là trung điểm của AD hay OK là đường trung bình của hình thang $ABCD$. Do đó $OK = \dfrac{AB + CD}{2} = \dfrac{4 + 9}{2} = 6{,}5$ (cm).
   Suy ra K thuộc đường tròn đường kính BC.
   Vậy (O) tiếp xúc với AD tại K.

□

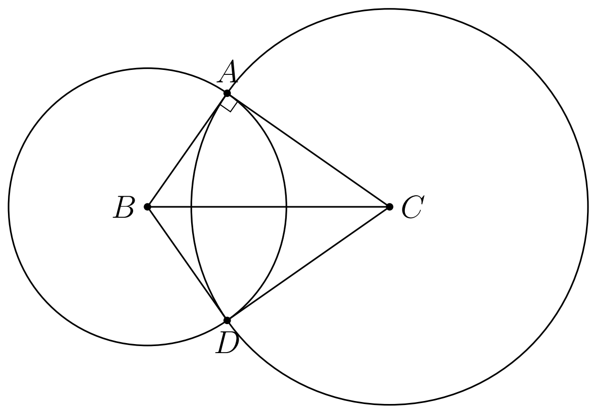
Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ hai đường tròn (B, BA) và (C, CA) cắt nhau tại D (khác A). Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của (B).

Lời giải.

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle DBC$ có

$$\begin{aligned} &CA = CD \\ &BA = BD \\ &BC \text{ chung} \end{aligned}$$

Suy ra $\triangle ABC = \triangle DBC$
Suy ra $\widehat{BDC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$. hay $CD \perp BD$.
Vậy CD là tiếp tuyến của đường tròn (B).

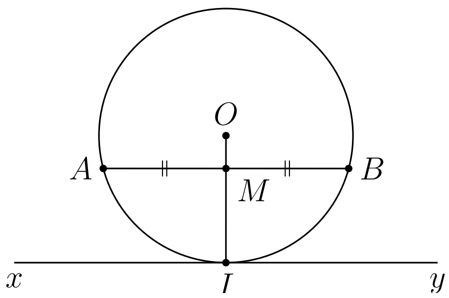


□

Bài 3. Cho đường tròn (O) và một dây AB. Gọi M là trung điểm của AB. Vẽ bán kính OI đi qua M. Từ I vẽ đường thẳng $xy \parallel AB$. Chứng minh rằng xy là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải.

Xét đường tròn (O), có M là trung điểm của AB và OI đi qua M nên $OI \perp AB$.
Mà $xy \parallel AB$ nên $xy \perp OI$.
Vậy xy là tiếp tuyến của đường tròn (O).

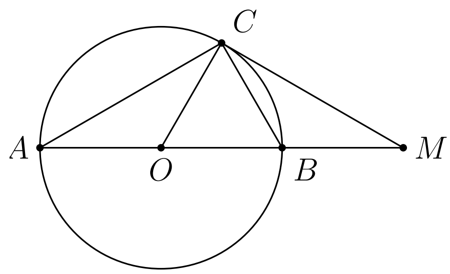


□

Bài 4. Cho đường tròn (O, R) đường kính AB. Vẽ dây AC sao cho $\widehat{CAB} = 30°$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm M sao cho $BM = R$. Chứng minh rằng

1. MC là tiếp tuyến của đường tròn (O).
2. $MC^2 = 3R^2$.

Lời giải.



1. Xét tam giác ABC có $OC = OA = OB = R$ nên tam giác ABC vuông tại C.
   $\Rightarrow \widehat{CBA} = 90° - \widehat{CAB} = 90° - 30° = 60°$.
   Tam giác OCB có $OB = OC = R$ và $\widehat{CBO} = 60°$ nên tam giác OCB đều. Suy ra $CB = OB = R$.
   Xét tam giác OCM có $CB = OB = BM = R$ nên tam giác OCM vuông tại C.
   Suy ra $MC \perp OC$, do đó MC là tiếp tuyến của đường tròn O.

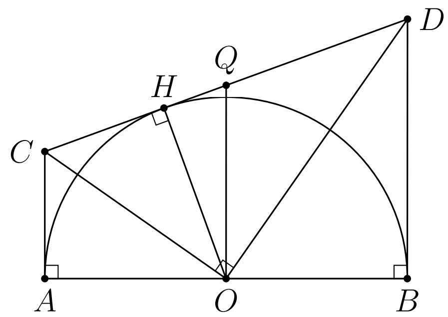
2. Ta có $\widehat{BCM} = 90° - \widehat{BCO} = 90° - 60° = 30°$.
   Ta có $\triangle BCM \backsim \triangle CAM$ (g-g).
   Suy ra $\dfrac{MC}{MA} = \dfrac{MB}{MC} \Rightarrow MC^2 = MA \cdot MB = 3R^2$ (đpcm)

□

Bài 5. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn, vẽ hai tiếp tuyến Ax và By. Trên Ax lấy điểm C. Nối C với O, từ O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt tia By ở D.

1. Tứ giác $ABDC$ là hình gì?
2. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác COD tiếp xúc với đường thẳng AB tại O.
3. Chứng minh $CA \cdot DB = R^2$. Tính CA, DB và CD khi $\widehat{ACD} = 60°$.

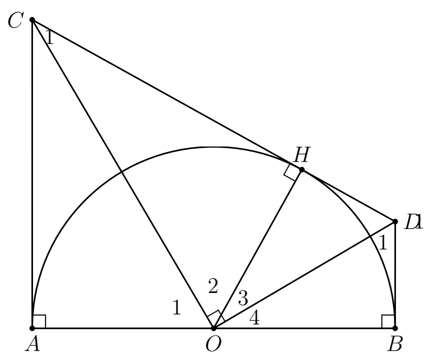
Lời giải.



1. Tứ giác $ABDC$ có $AC \parallel BD$ (cùng vuông góc với AB) nên $ABDC$ là hình thang.
   Hình thang $ABDC$ có $\widehat{CAB} = 90^\circ$ nên $ABDC$ là hình thang vuông.

2. Gọi Q là trung điểm của CD thì $QC = QO = QD$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác COD có tâm Q, bán kính QO.
   Hình thang $ABDC$ có O, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD nên OQ là đường trung bình của hình thang vuông $ABDC$. Suy ra $OQ \parallel AC$ mà $AC \perp AB$ nên $OQ \perp AB$.
   Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác COD tiếp xúc với đường thẳng AB tại O.

3.



Kẻ $OH \perp CD$.
Ta có $\widehat{O}_1 = \widehat{D}_1$ (cùng phụ với $\widehat{O}_4$); $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$.
Suy ra $\triangle OAC \backsim \triangle DBO$ (g-g).
Suy ra $\dfrac{OC}{OD} = \dfrac{AC}{BO} = \dfrac{AC}{AO} \Rightarrow \dfrac{OC}{AC} = \dfrac{OD}{AO}$.
Suy ra $\triangle OCD \backsim \triangle ACO$ (c-g-c).
Suy ra $\widehat{O}_1 = \widehat{D}_2$.
Mặt khác $\widehat{O}_2 = \widehat{D}_2$ (cùng phụ với $\widehat{C}_1$).
Do đó $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$.
Suy ra $\triangle ACO \backsim \triangle HCO$ (ch-gn).
Suy ra $CA = CH$ và $OH = OA = R$.
Tương tự, ta có $BD = DH$.
Do đó $CA \cdot DB = CH \cdot DH = OH^2 = R^2$.
Khi $\widehat{ACD} = 60^\circ$, ta có

$$CA = R\sqrt{3}, DB = \frac{R\sqrt{3}}{3}, CD = \frac{4R\sqrt{3}}{3}.$$

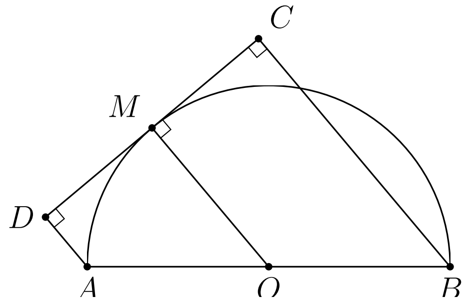
□

Bài 6. Cho nửa đường tròn có đường kính $AB = 2R$, một điểm M di chuyển trên nửa đường tròn. Gọi D, C theo thứ tự là các hình chiếu của A, B trên tiếp tuyến tại M của nửa đường tròn. Xác định vị trí của điểm M để tứ giác $ABCD$ có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất ấy.

Lời giải.

Diện tích hình thang $ABCD$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}CD \cdot (AD + BC) = CD \cdot OM.$$



Vì OM không đổi nên diện tích hình thang $ABCD$ lớn nhất khi CD lớn nhất.
Mà $CD \le AB$ nên CD lớn nhất khi $CD = AB$, lúc đó M là điểm chính giữa cung AB. Vậy S_{ABCD} lớn nhất bằng $2OM^2 = 2R^2$ khi M là điểm chính giữa cung AB.

□

§6 Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

1 Tóm tắt lí thuyết

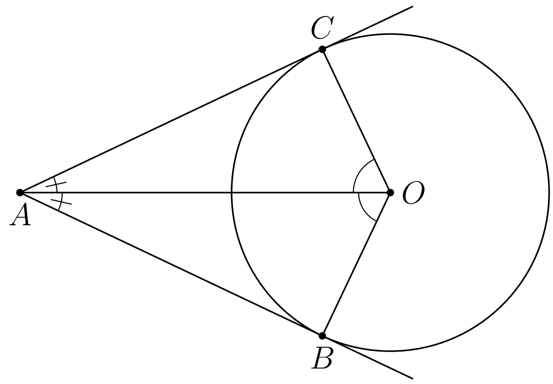
1) Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau

Định lí 12. Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

a) Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.

b) Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.

c) Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.



2) Đường tròn nội tiếp tam giác

(a) Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác được gọi là đường tròn nội tiếp tam giác, còn tam giác được gọi là ngoại tiếp đường tròn.

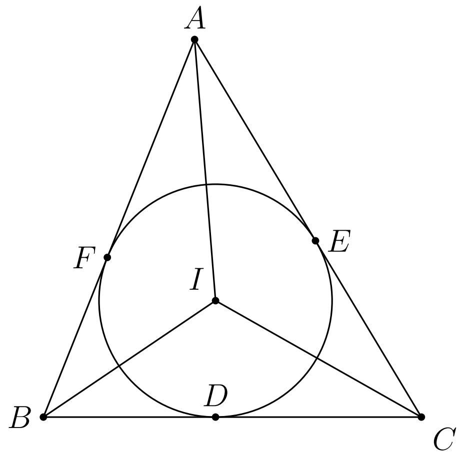
(b) Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác của góc trong tam giác.

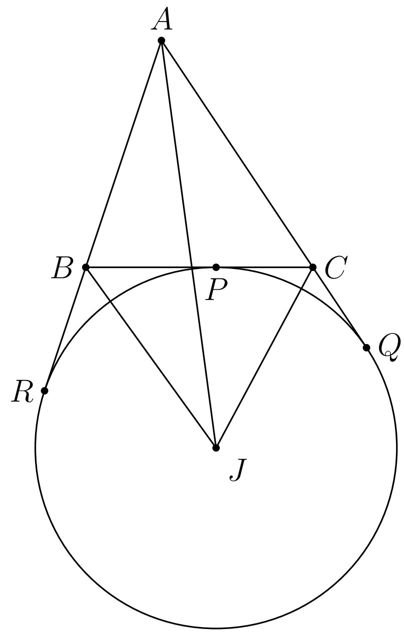
3) Đường tròn bàng tiếp tam giác

(a) Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh kia gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác.

(b) Một tam giác có ba đường tròn bàng tiếp.

(c) Tâm của đường tròn bàng tiếp trong góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B và C (hoặc là giao điểm của đường phân giác góc A và phân giác ngoài tại B, hoặc C). Kí hiệu (J, r_A).



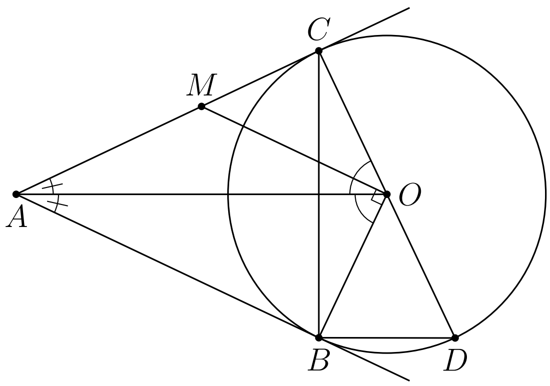


2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho đường tròn tâm O, bán kính R. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn tâm O với B, C là tiếp điểm.

1. Chứng minh AO là đường trung trực của BC.
2. Kẻ đường kính CD của (O). Chứng minh BD song song với AO.
3. Kẻ OM vuông góc với OB (M thuộc AC). Chứng minh $MO = MA$.

Lời giải.



1. Vì AB, AC là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow AC = AB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).
   $\Rightarrow A$ thuộc đường trung trực của BC.
   Mặt khác $OA = OB$ (cùng bằng bán kính) $\Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của BC.
   $\Rightarrow AO$ là đường trung trực của BC.
2. Vì BO là trung tuyến của tam giác DBC, $BO = \dfrac{1}{2}CD$.

$\Rightarrow \triangle DBC$ vuông tại B hay $BD \perp BC$.
Mặt khác $AO \perp BC$ (do AO là trung trực của BC) $\Rightarrow AO \parallel BD$.

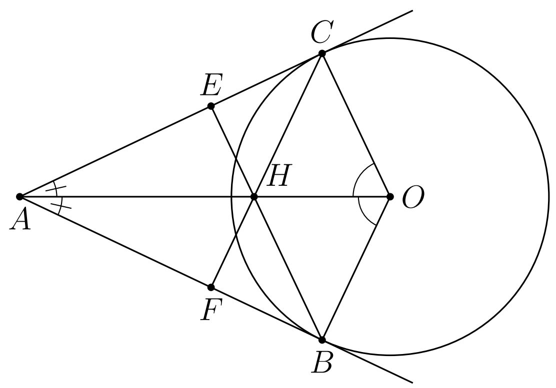
3. Vì $OM \perp OB$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{MOA} + \widehat{AOB} = 90^\circ$. (1)
   Ta có $\widehat{MAO} = \widehat{BAO}$ (vì A là giao điểm của hai tiếp tuyến chung của (O))
   Vì $\widehat{OAB} + \widehat{AOB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MAO} + \widehat{AOB} = 90^\circ$. (2)
   Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MAO} = \widehat{MOA}$ suy ra $\triangle AMO$ cân tại M hay $MA = MO$.

□

Ví dụ 2. Từ điểm A nằm ngoài $(O; R)$ kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B, C là các tiếp điểm). Kẻ BE vuông góc với AC, CF vuông góc AB ($E \in AC; F \in AB$), BE và CF cắt nhau tại H.

1. Chứng minh tứ giác $BOCH$ là hình thoi.
2. Chứng minh ba điểm A, H, O thẳng hàng.
3. Tìm vị trí của điểm A để H thuộc (O).

Lời giải.



1. Vì $AC \perp OC$ (tính chất tiếp tuyến) mà $BE \perp AC$ (giả thiết)
   $\Rightarrow BE \parallel OC$ hay BH song song với OC.
   Chứng minh tương tự CH song song $OB \Rightarrow OCHB$ là hình bình hành.
   Mà $OB = OC$ (cùng bằng bán kính) $\Rightarrow BOCH$ là hình thoi.
2. Vì $OBHC$ là hình thoi $\Rightarrow OH$ là tia phân giác góc BOC.
   Mặt khác OA là tia phân giác $\widehat{BOC} \Rightarrow O,\ H,\ A$ thẳng hàng.
3. Để H thuộc (O) suy ra $OH = R$.
   Vì $OH = OC = CH = R \Rightarrow \widehat{OCH} = 60^\circ \Rightarrow \cos \widehat{COH} = \dfrac{CO}{OA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow AO = 2R$.
   Vậy A cách O một khoảng bằng $2R$ thì H nằm trên đường tròn tâm (O).

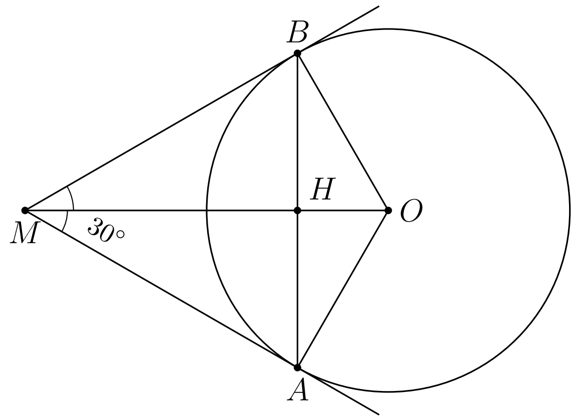
□

Ví dụ 3. Cho đường tròn $(O; R)$. Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là tiếp điểm) sao cho $\widehat{AMO} = 30^\circ$.

1. Chứng minh $MO = 2R$.
2. Tính AB theo R.

3. Tính S_{MAB} theo R.

Lời giải.



1. Xét $\triangle OAM$ có $\widehat{OAM} = 90^\circ$.
   Ta có $\sin\widehat{AMO} = \dfrac{OA}{OM} = \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2} \Rightarrow OM = 2R$.

2. Vì MA; MB là tiếp tuyến của (O) suy ra $MA = MB; MO$ là tia phân giác AMB (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).
   $\Rightarrow \triangle MAB$ cân tại M, $\widehat{AMB} = 2 \cdot \widehat{AMO} = 60^\circ$
   $\Rightarrow AMB$ là tam giác đều $\Rightarrow AB = AM$.
   Xét $\triangle OAM$ có $\widehat{OAM} = 90^\circ \Rightarrow AM^2 = OM^2 - OA^2 \Rightarrow AM = \sqrt{3}R \Rightarrow AB = \sqrt{3}R$.

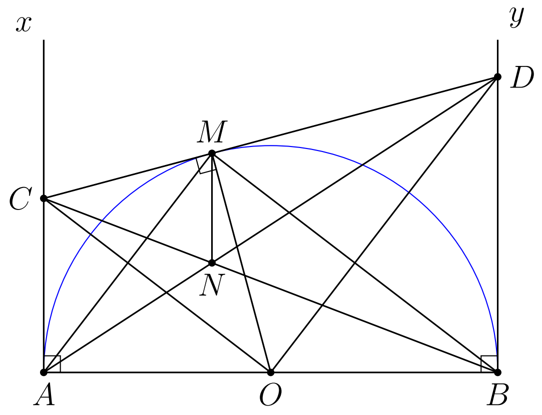
3. Xét tam giác vuông MHA có $\cos\widehat{AMH} = \cos 30^\circ = \dfrac{MH}{AM} \Rightarrow MH = \dfrac{3R}{2}$.
   $\Rightarrow S_{AMB} = \dfrac{1}{2}MH \cdot AB = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}R$.

□

Ví dụ 4. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB vẽ hai tiếp tuyến Ax, By. Điểm M nằm trên (O) sao cho tiếp tuyến tại M cắt Ax, By lần lượt tại C, D. Đường thẳng AD cắt BC tại N.

1. Chứng minh A, C, M, O cùng thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh OC song song BM.
3. Tìm vị trí của M để S_{ABCD} nhỏ nhất.
4. Chứng minh MN và AB vuông góc với nhau.

Lời giải.



1. Vì Ax là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow Ax \perp OA$.
   Xét $\triangle OAC$ có $\widehat{OAC} = 90^\circ \Rightarrow A$ thuộc đường tròn đường kính CO. (1)
   Vì MC là tiếp tuyến của (O)
   $\Rightarrow \widehat{CMO} = 90^\circ \Rightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính CO. (2)
   Từ (1) và (2) suy ra A, C, O, M cùng thuộc đường tròn đường kính CO.

2. Vì CM; CA là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow OC$ là phân giác $\widehat{AOM}$.
   Mà $\triangle AOM$ cân tại O suy ra $OC \perp AM$ (tính chất tam giác cân) (3)
   Vì $M \in (O) \Rightarrow MO = OA = OB$, hay $\triangle AMO$ có đường trung tuyến MO bằng $\dfrac{1}{2}$ cạnh huyền.
   $\Rightarrow \triangle AMO$ vuông tại $M \Rightarrow BM \perp AM$. (4)
   Từ (3) và (4) suy ra $OC \parallel BM$.

3. Tìm vị trí của M để S_{ABCD} nhỏ nhất.
   $$\left.\begin{array}{l}\text{Vì } OC \text{ là phân giác } \widehat{AOM}\\ OD \text{ là phân giác } \widehat{BOM}\\ \widehat{AOM} \text{ và } \widehat{BOM} \text{ là hai góc kề bù}\end{array}\right\} \Rightarrow CO \perp OD \text{ (Tính chất phân giác hai góc kề bù).}$$
   Xét $\triangle COD$ có $\widehat{COD} = 90^\circ$; $OM \perp CD$
   $\Rightarrow CM \cdot MD = OM^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)
   Mà $CM = CA$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)
   $DM = DA$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)
   $OM^2 = CA \cdot DB = R^2$.
   Ta có $AC + BD \geq 2\sqrt{AC \cdot BD} = 2R$.
   $\Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{(AC + BD) \cdot AB}{2} \geq \dfrac{2R \cdot 2R}{2} = 2R^2$.
   Vậy S_{ABCD} nhỏ nhất bằng $2R^2 \Leftrightarrow AC = BD$ hay M là điểm chính giữa cung AB.

4. Vì $AC \parallel BD$ (cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \dfrac{CN}{BN} = \dfrac{AC}{BD} = \dfrac{CM}{MD}$ (vì $CM = CA; DM = DB$)
   $\Rightarrow MN \parallel BD$, mà $BD \perp AB$ (do BD là tiếp tuyến) $\Rightarrow MN \perp AB$.

□

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC cân tại A, điểm I là tâm đường tròn nội tiếp, điểm K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác.

1. Chứng minh bốn điểm B, I, C, K cùng thuộc một đường tròn.

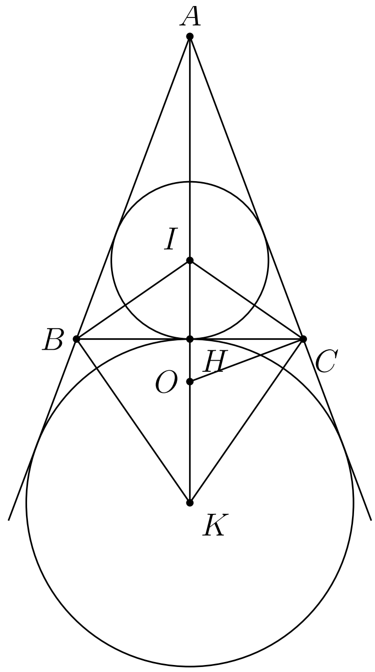
2. Gọi (O) là đường tròn đi qua bốn điểm B, I, C, K. Chứng minh AC là tiếp tuyến của

đường tròn $(O; OK)$.

3. Tính bán kính của (O), biết $AB = AC = 20$ cm, $BC = 24$ cm.

Lời giải.

1.



Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC
$\Rightarrow BI; CI$ lần lượt là phân giác $\widehat{ABC}; \widehat{ACB}$.
Vì K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A
$\Rightarrow BK;\ CK$ lần lượt là phân giác ngoài $\widehat{ABC}; \widehat{ACB}$.
$\Rightarrow BI \perp BK; CI \perp CK$ (tính chất phân giác hai góc kề bù).
Gọi O là trung điểm của IK, ta có $OI = OB = OK = OC$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông)
$\Rightarrow B, I, C, K$ cùng thuộc đường tròn tâm (O).

2. Ta có $\widehat{OCK} = \widehat{OKC}$ (tam giác OCK cân tại O).
Mặt khác $\widehat{OKC} + \widehat{CIK} = 90^\circ$
$\Rightarrow \widehat{OCK} + \widehat{KIC} = 90^\circ$, mà $\widehat{KIC} + \widehat{ICH} = 90^\circ$
$\Rightarrow \widehat{OCK} = \widehat{BCI}$, ta lại có $\widehat{BCI} = \widehat{ACI}$.
$\Rightarrow \widehat{OCK} = \widehat{ACI}$.
Vì $\widehat{ICK} = 90^\circ = \widehat{ICO} + \widehat{OCK} = \widehat{ICO} + \widehat{ACI} = 90^\circ$
$\Rightarrow OC \perp AC \Rightarrow AC$ là tiếp tuyến của (O).

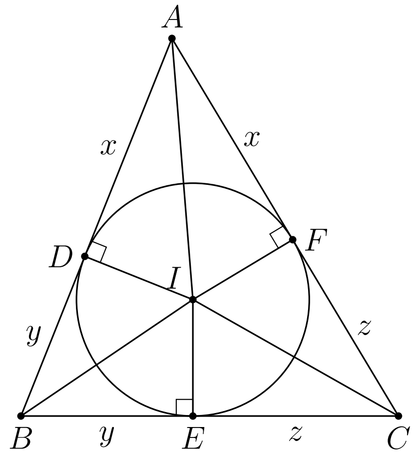
3. Gọi H là giao điểm của AK và BC suy ra H là trung điểm của $BC \Rightarrow HC = 12$ cm.
Xét tam giác vuông AHC có $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = 16$, $\tan\widehat{HAC} = \dfrac{HC}{AH}$.
Xét tam giác vuông ACO có $\tan\widehat{CAO} = \dfrac{OC}{AC}$.
$\Rightarrow \dfrac{HC}{AH} = \dfrac{OC}{AC} \Rightarrow OC = \dfrac{HC \cdot AC}{AH} = 15$ cm.

□

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC, đường tròn tâm I, bán kính r nội tiếp tam giác ABC. Gọi D, E, F là các tiếp điểm $(D \in AB, E \in BC, F \in CA)$. Đặt $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $AD = x$, $BE = y$, $CF = z$.

1. Tính x, y, z theo a, b, c.
2. Chứng minh $S_{\triangle ABC} = p \cdot r$ (p là nửa chu vi tam giác ABC).
3. Chứng minh $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$ trong đó h_a; h_b; h_c lần lượt là các độ dài đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC.

Lời giải.



1. Từ giả thiết ta có $AF = AD = x; BD = B = y, CE = CF = z$.

   Từ đó suy ra $\begin{cases} x + y = c & (1) \\ y + z = a & (2) \\ z + x = b & (3) \\ x + y + z = \dfrac{a+b+c}{2} & (4) \end{cases}$

   lần lượt trừ từng vế của phương trình (4) cho phương trình (1), (2) và (3) ta được

   $\begin{cases} z = \dfrac{a+b-c}{2} = p - c \\ y = \dfrac{a+c-b}{2} = p - b \\ x = \dfrac{b+c-a}{2} = p - a \end{cases}$ (với p là nửa chu vi của tam giác ABC).

2. Ta có $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle IAB} + S_{\triangle IBC} + S_{\triangle ICA} = \dfrac{1}{2}(r \cdot AB + r \cdot AC + r \cdot BC) = \dfrac{1}{2} r \cdot 2p = p \cdot r$.

3. Ta có $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} a \cdot h_a \Rightarrow \dfrac{1}{h_a} = \dfrac{a}{2S}, \dfrac{1}{h_b} = \dfrac{b}{2S}, \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{c}{2S}$.

   $\Rightarrow \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{2S}(a+b+c) = \dfrac{p}{S} = \dfrac{1}{r}$.

□

3 Luyện tập

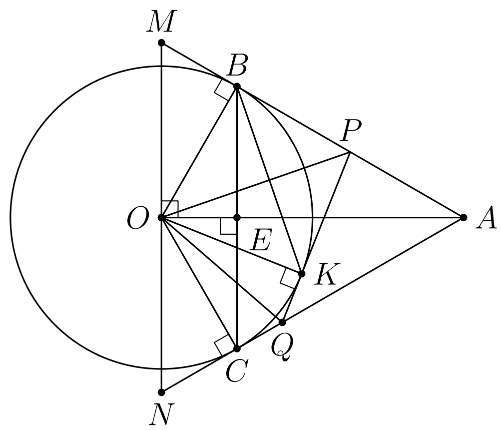
Bài 1. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm).

1. Gọi E là giao điểm của BC và OA. Chứng minh BE vuông góc với OA và $OE \cdot OA = R^2$.

2. Trên cung nhỏ BC lấy điểm K bất kỳ (K khác B và C). Tiếp tuyến tại K của đường tròn $(O; R)$ cắt AB, AC theo thứ tự tại P và Q. Chứng minh tam giác APQ có chu vi không đổi khi K chuyển động trên cung nhỏ BC.

Lời giải.

1. Vì $AB = AC$ (tính chất tiếp tuyến) và $OB = OC$
   $\Rightarrow OA$ là đường trung trực của BC
   $\Rightarrow BC \perp OA$ tại E.
   Xét tam giác OBA có $\widehat{OBA} = 90^\circ$ và đường cao $BE \Rightarrow OE \cdot OA = OB^2 = R^2$.



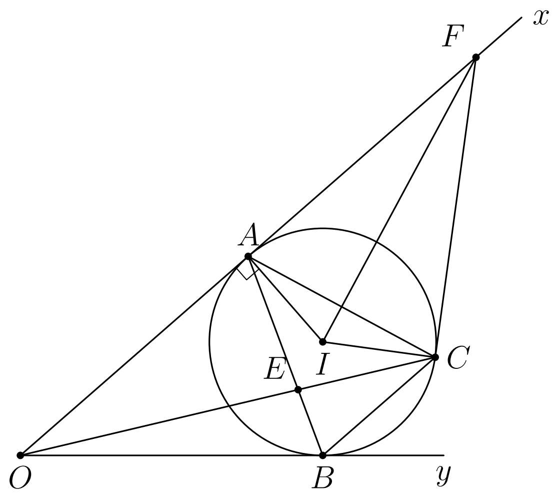
2. Vì PK, PB là các tiếp tuyến của (O) cắt nhau tại P nên $PK = PB$. Tương tự, $QK = QC$.
   Ta có
   $$\begin{aligned} AP + PQ + QA &= AP + PB + AQ + QC \\ &= AB + AC \qquad \text{(không đổi)}. \end{aligned}$$

□

Bài 2. Cho góc xOy và đường tròn tâm I tiếp xúc các tia Ox, Oy tương ứng tại các điểm A, B. Một đường thẳng qua B và song song với Ox cắt đường tròn (I) lần thứ hai tại C.

1. Chứng minh rằng $AB = AC$.
2. Đường thẳng OC cắt dây cung AB tại E. Chứng minh rằng $OE > AE$.
3. Gọi F là điểm đối xứng với O qua A. Chứng minh rằng CF tiếp xúc với đường tròn (I).

Lời giải.



1. Vì OA là tiếp tuyến của đường tròn (I) nên $IA \perp OA$. Mà $BC \parallel OA$ nên $IA \perp BC$.
   Lại có $IB = IC$ nên IA là đường trung trực đoạn BC, suy ra $AB = AC$.
2. Ta có $\widehat{AOE} = \widehat{ECB} < \widehat{ACB} = \widehat{ABC} = \widehat{OAE}$, suy ra $AE < OE$.
3. Vì O, F đối xứng nhau qua IA, B, C đối xứng nhau qua IA nên $OB = FC$.
   Lại có $FA = OA = OB$ nên $FA = FC$. Dẫn tới $\triangle CIF = \triangle AIF$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{ICF} = \widehat{IAF} = 90^\circ$ nên FC là tiếp tuyến của đường tròn (I).

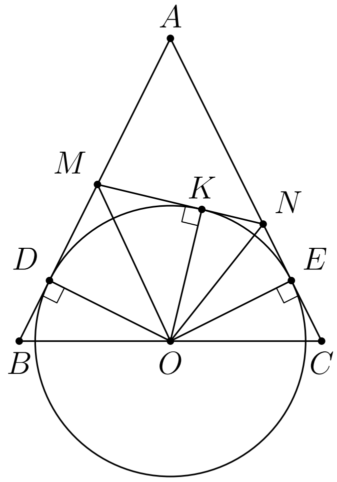
□

Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi O là trung điểm của cạnh BC. Dựng đường tròn tâm O tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E. Lấy các điểm M, N tương ứng trên các đoạn thẳng AD, AE sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với đường tròn tâm O.

1. Chứng minh rằng góc MON có số đo không đổi khi M, N thay đổi.

2. Chứng minh rằng $BM \cdot CN$ không đổi.

Lời giải.



1. Giả sử MN tiếp xúc với đường tròn (O) tại K.
   Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $\widehat{DOM} = \widehat{MOK}$ và $\widehat{NOK} = \widehat{NOE}$ nên $\widehat{MON} = \widehat{MOK} + \widehat{KON} = \frac{1}{2}\widehat{DOE}$.
   Ta có $\widehat{ADO} = \widehat{AEO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DAE} + \widehat{DOE} = 360^\circ$, suy ra $\widehat{MON} = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \widehat{DAE}\right) = 90^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2}$ (không đổi).

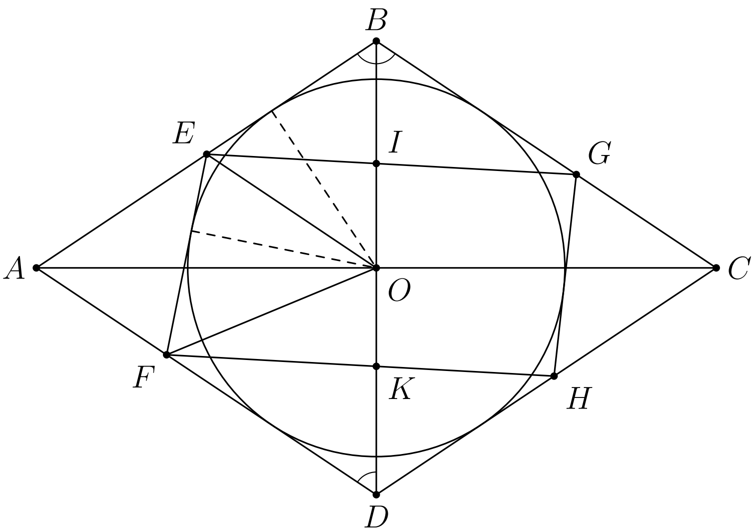
2. Tứ giác $BMNC$ có $\widehat{MBC} + \widehat{BCN} + \widehat{CNM} + \widehat{NMB} = 180^\circ$ hay $2\widehat{BCN} + 2\widehat{CNO} + 2\widehat{OMB} = 360^\circ$ suy ra $\widehat{BCN} + \widehat{CNO} + \widehat{OMB} = 180^\circ$. Lại có $\widehat{BCN} + \widehat{CNO} + \widehat{NOC} = 180^\circ$ suy ra $\widehat{OMB} = \widehat{NOC}$. Dẫn tới $\triangle BOM \backsim \triangle CNO$ (g.g) suy ra $\frac{BO}{CN} = \frac{BM}{CO} \Rightarrow BM \cdot CN = BO \cdot CO = \frac{BC^2}{4}$ (không đổi).

□

Bài 4. Cho đường tròn (O) nội tiếp hình thoi $ABCD$. Kẻ một tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt các cạnh AB, AD theo thứ tự ở E, F. Kẻ một tiếp tuyến khác với đường tròn (O) cắt cạnh CB, CD theo thứ tự ở G và H. Chứng minh rằng:

1. $BE \cdot DF = OB \cdot OD$.
2. EG song song với HF.

Lời giải.



1. Tứ giác $BEFD$ có $\widehat{OBA} + \widehat{ODB} + \widehat{BEF} + \widehat{EFD} = 360^\circ \Rightarrow 2\widehat{OBE} + 2\widehat{BEO} + 2\widehat{OFD} = 360^\circ$ $\Rightarrow \widehat{OBE} + \widehat{BEO} + \widehat{OFD} = 180^\circ$ mà $\widehat{OBE} + \widehat{BEO} + \widehat{EOB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{EOB} = \widehat{OFD}$.
   Dẫn tới $\triangle BOE \backsim \triangle DFO$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BE}{OD} = \frac{OB}{DF} \Rightarrow BE \cdot DF = OB \cdot OD$. (1)

2. Tương tự $BG \cdot DH = OB \cdot OD$. (2)
   Từ (1) và (2) suy ra $BE \cdot DF = BG \cdot DH \Rightarrow \frac{BE}{DH} = \frac{BG}{DF} \Rightarrow \triangle BEG \backsim \triangle DHF$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BGE} = \widehat{DFH} \Rightarrow \widehat{BGE} + \widehat{GBI} = \widehat{BGE} + \widehat{EBI} = \widehat{DFK} + \widehat{FDK} \Rightarrow \widehat{OIG} = \widehat{OKF}$
(với I, K lần lượt là giao điểm của BD với EG, FH) $\Rightarrow EG \parallel FH$.

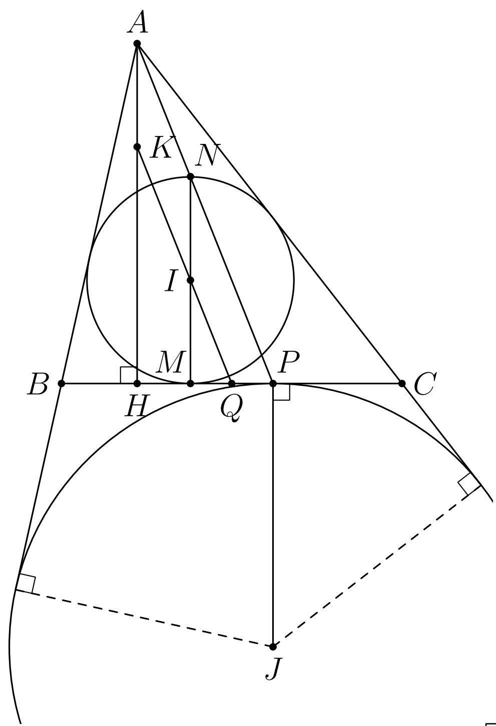
□

Bài 5. Đường tròn (I, r) nội tiếp và đường tròn (J, r_a) bàng tiếp góc A của tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC tương ứng tại các điểm M và P. Đoạn thẳng AP cắt đường tròn (I, r) tại điểm N.

1. Chứng minh rằng đoạn thẳng MN là đường kính của đường tròn (I, r).
2. Gọi Q là trung điểm của cạnh BC, đường thẳng IQ cắt đường cao AH tại K. Chứng minh rằng $AK = r$.

Lời giải.

1. Gọi N' là giao điểm của AP và IM. Vì I nằm trên AJ nên $\dfrac{IN'}{JP} = \dfrac{AI}{AJ} = \dfrac{r}{r_a}$ suy ra $IN' = r$, hay N' thuộc đường tròn (I, r), dẫn tới $N \equiv N'$ hay MN là đường kính của đường tròn (I, r).
2. Ta có Q cũng là trung điểm MP, suy ra QI là đường trung bình $\triangle MNP \Rightarrow QI \parallel NP$ hay $KI \parallel AN$. Mà $AK \parallel IN$ (vì cùng vuông góc với BC) nên $AKIN$ là hình bình hành, suy ra $AK = IN = r$.



□

Bài 6. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh AB tại D.

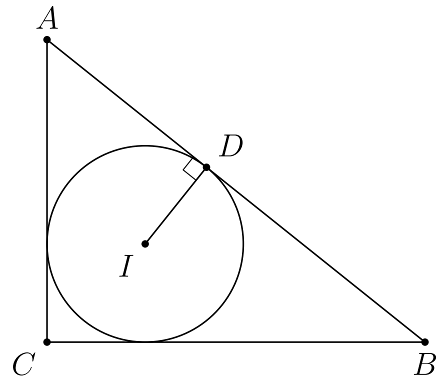
1. Chứng minh rằng nếu $\triangle ABC$ vuông tại C thì $CA \cdot CB = 2 \cdot DA \cdot DB$.
2. Chứng minh rằng nếu $CA \cdot CB = 2 \cdot DA \cdot DB$ thì $\triangle ABC$ vuông tại C.

Lời giải.

Đặt $BC = a, AC = b, AB = c$.
Khi đó $AD = \dfrac{b + c - a}{2}, BD = \dfrac{a + c - b}{2}$, suy ra

$$AD \cdot BD = \frac{c^2 - (a-b)^2}{4} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{4} + \frac{ab}{2}. \qquad (1)$$

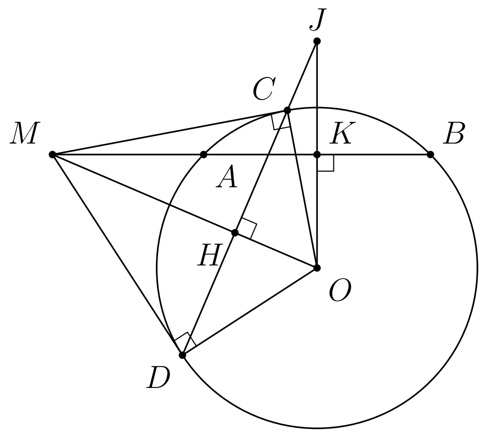
1. Nếu $\triangle ABC$ vuông tại C thì $a^2 + b^2 = c^2$, khi đó theo (1) ta có $AD \cdot BD = \dfrac{ab}{2} = \dfrac{CA \cdot CB}{2}$.
2. Nếu $CA \cdot CB = 2 \cdot DA \cdot DB$ thì từ (1) suy ra $c^2 = a^2 + b^2$ hay $\triangle ABC$ vuông tại C.



□

Bài 7. Cho đường tròn (O, R) và đường thẳng d cắt đường tròn tại A, B. Từ điểm M là điểm nằm trên tia đối tia AB kẻ các tiếp tuyến MC, MD. Chứng minh rằng khi M di chuyển trên tia đối tia AB, đường thẳng CD luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



Vì MC, MD là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên MO là trung trực của CD suy ra $MO \perp CD$ tại H.
Trong tam giác OCM vuông tại C có đường cao CH nên $OH \cdot OM = CO^2 = R^2$. (1)
Kẻ $OK \perp AB$ cắt đường thẳng CD tại J.
Ta có $\triangle OKM \backsim \triangle OHJ$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{OK}{OM} = \dfrac{OH}{OJ}$
$\Rightarrow OJ = \dfrac{OH \cdot OM}{OK} = \dfrac{R^2}{OK}$ không đổi (do OK không đổi), nên J là điểm cố định.
Vậy CD luôn đi qua điểm J cố định.

□

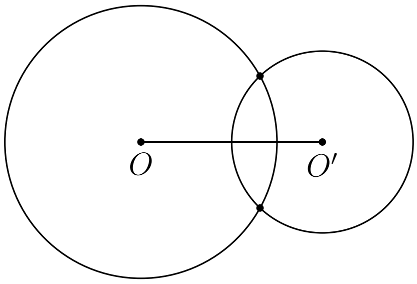
§7 Vị trí tương đối của hai đường tròn

1 Tóm tắt lí thuyết

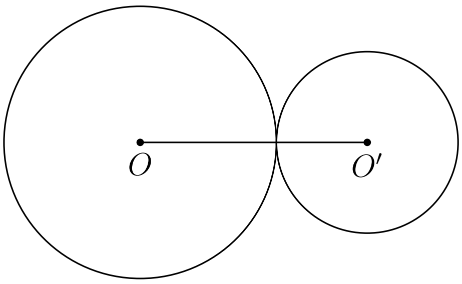
1.1 Vị trí tương đối của hai đường tròn

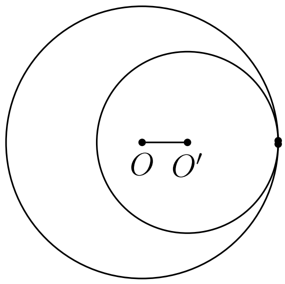
Xét vị trí tương đối của hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ với $R>r$.

1. Nếu $R-r<OO'<R+r$ thì (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

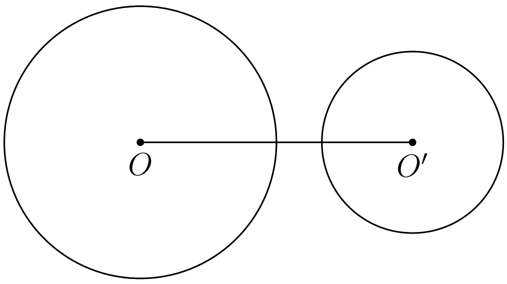


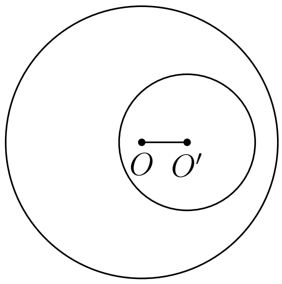
2. Nếu $OO'=R+r$ thì (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau.
   Nếu $OO'=R-r$ thì (O) và (O') tiếp xúc trong với nhau.





3. Nếu $OO'>R+r$ thì (O) và (O') ở ngoài nhau.
   Nếu $OO'<R-r$ thì (O) chứa (O').





Chú ý.

- Nếu hai đường tròn cắt nhau thì hai giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối hai tâm.
- Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối hai tâm.

1.2 Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

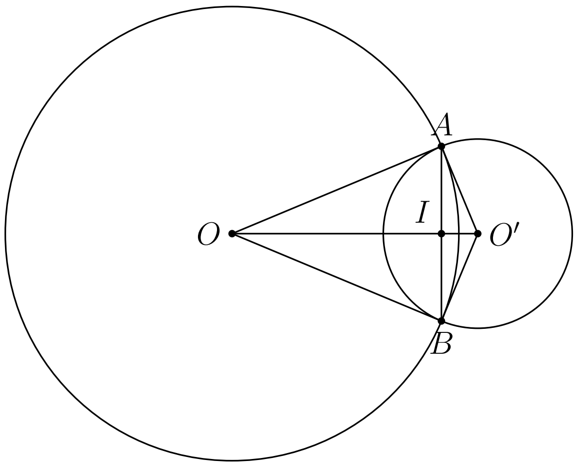
1. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó.
2. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn không cắt đoạn nối hai tâm là tiếp tuyến chung ngoài, cắt đoạn nối tâm là tiếp tuyến chung trong.

2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ với $R = 12\text{cm}$, $r = 5\text{cm}$, $OO' = 13\text{cm}$.

1. Chứng minh hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B và OO' là đường trung trực của AB.
2. Chứng minh AO là tiếp tuyến của đường tròn $(O'; r)$.
3. Tính độ dài AB.

Lời giải.



1. Vì $12 - 5 < 13 < 12 + 5$ nên $R - r < d < R + r$. Vậy hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B.
Mặt khác ta có $OA = OB = R$ và $OA' = OB' = r$ nên OO' là đường trung trực của đoạn thẳng AB.
2. Ta có $OO'^2 = OA^2 + O'A^2$ nên tam giác AOO' vuông tại A. Từ đó suy ra AO là tiếp tuyến của đường tròn $(O'; r)$.
3. Gọi I là giao điểm của OO' và AB. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác AOO' vuông tại A, AI là đường cao ta có
$$OO' \cdot AI = OA \cdot OA' \Rightarrow AI = \frac{OA \cdot OA'}{OO'} = \frac{60}{13} \text{ (cm)}.$$
Do đó $AB = 2AI = \dfrac{120}{3}$ (cm).

□

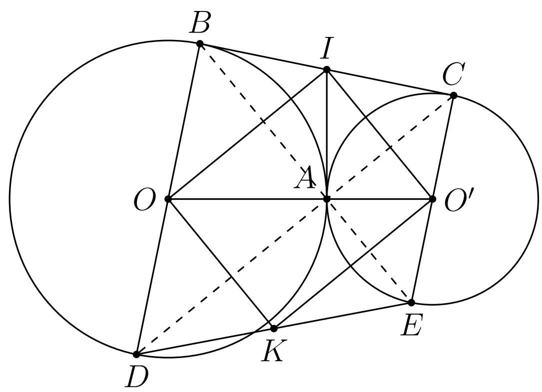
Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC với $B \in (O)$, $C \in (O')$. Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC ở I.

1. Vẽ đường kính BOD và $CO'E$. Chứng minh các bộ ba điểm B, A, E và C, A, D thẳng hàng.

2. Chứng minh $\triangle BAC$ và $\triangle DAE$ có diện tích bằng nhau.

3. Gọi K là trung điểm của DE. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp $\triangle OKO'$ tiếp xúc với BC.

Lời giải.



1. Do IA và IB là tiếp tuyến của (O) nên $IA = IB$; IA và IC là tiếp tuyến của (O') nên $IA = IC$. Do đó $IA = IB = IC$, suy ra $\triangle BAC$ vuông tại A hay $\widehat{BAC} = 90^\circ$.
   Mặt khác, $O'A = O'C = O'E$ nên $\triangle CAE$ vuông tại A hay $\widehat{CAE} = 90^\circ$. Từ đó suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{CAE} = 90^\circ$, do đó các bộ ba điểm B, A, E và C, A, D thẳng hàng.

2. Vì $\triangle BAD \backsim \triangle EAC$ (g.g) nên

$$\frac{BA}{EA} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AD \cdot AE \Rightarrow S_{BAC} = S_{DAE}.$$

3. Vì IO' và OK lần lượt là đường trung bình của tam giác CBE và tam giác DEB nên $IO' \parallel BE$, $IO' = \frac{1}{2}BE$ và $OK \parallel BE$, $OK = \frac{1}{2}BE$. Do đó $IO' = OK$ và $IO' \parallel OK$, suy ra tứ giác $OIO'K$ là hình bình hành.
   Mặt khác, do OI là đường trung bình của $\triangle BDC$ nên $OI \parallel DC$, mà $OI' \parallel BE$, $DC \perp BE$ nên $OI \perp IO'$. Từ đó suy ra tứ giác $OIO'K$ là hình chữ nhật.
   Đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle OKO'$ là đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $OIO'K$ có đường kính là IK. Mà $IK \perp BC$ tại I (do IK là đường trung bình của hình thang vuông $ECBD$, $\widehat{ECB} = \widehat{DBC} = 90^\circ$) nên đường tròn ngoại tiếp $\triangle OKO'$ tiếp xúc với BC.

□

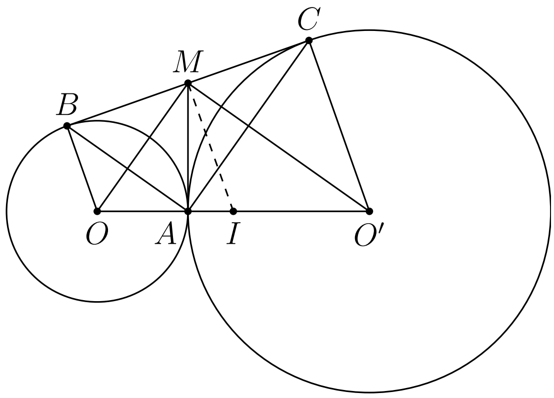
Ví dụ 3. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài tiếp xúc với (O) và (O') lần lượt ở B và C. Đường vuông góc với OO' kẻ từ A cắt BC ở M.

1. Tính MA theo R và r.

2. Tính diện tích tứ giác $BCO'O$ theo R và r.
3. Tính diện tích tam giác BAC theo R và r.
4. Gọi I là trung điểm của OO'. Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường tròn $(I; IM)$.

Lời giải.

1. Vì MA và MB là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên MO là tia phân giác của $\widehat{BMA}$, hay
$$\widehat{OMA} = \frac{1}{2}\widehat{BMA}. \tag{1}$$
Do MA và MC là tiếp tuyến của đường tròn (O') nên MO' là tia phân giác của $\widehat{CMA}$, hay
$$\widehat{O'MA} = \frac{1}{2}\widehat{CMA}. \tag{2}$$
Từ (1) và (2) ta có
$$\widehat{OMO'} = \widehat{OMA} + \widehat{O'MA} = \frac{1}{2}\widehat{BMA} + \frac{1}{2}\widehat{CMA} = \frac{1}{2}\widehat{BMC} = 90^\circ.$$
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OMO' vuông tại M, $MA \perp OO'$ ta có
$$MA^2 = AO \cdot AO' \Rightarrow MA^2 = Rr \Rightarrow MA = \sqrt{Rr}.$$



2. Do MA và MB là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\triangle OMB = \triangle OMA$. (3)
Do MA và MC là tiếp tuyến của đường tròn (O') nên $\triangle O'MC = \triangle O'MA$. (4)
Từ (3) và (4) ta có
$$S_{BCOO'} = S_{OBMA} + S_{O'CMA} = 2S_{OMO'} = 2 \cdot \frac{1}{2} OO' \cdot MA = (R+r)\sqrt{Rr}.$$

3. Vì $\triangle BAC \backsim \triangle OMO'$ (g.g) nên
$$\frac{S_{BAC}}{S_{OMO'}} = \left(\frac{BC}{OO'}\right)^2 \Rightarrow S_{BAC} = \frac{S_{OMO'} \cdot BC^2}{OO'^2} = \frac{4Rr\sqrt{Rr}}{R+r}.$$

4. Tứ giác $OBCO'$ là hình thang vuông tại B và C có IM là đường trung bình. Do đó $IM \perp BC$ tại M. Vậy BC là tiếp tuyến của đường tròn $(I; IM)$.

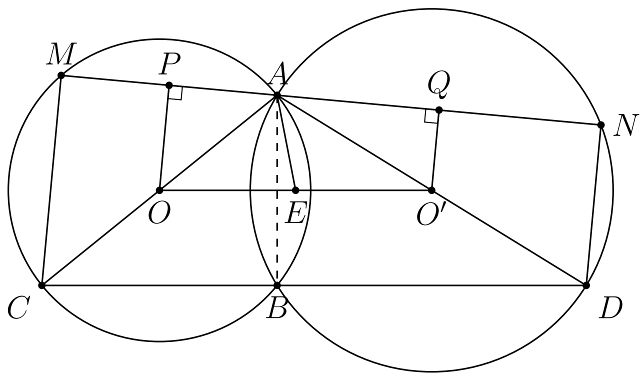
□

Ví dụ 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một cát tuyến qua A cắt (O) ở M, cắt (O') ở N sao cho A nằm giữa M và N. Từ A vẽ các đường kính AOC và $AO'D$.

1. Tứ giác $CMND$ là hình gì?
2. Gọi E là trung điểm của OO'. Với $MA = NA$, chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn $(E; EA)$.

Lời giải.

1. Vì $\widehat{CMA} = \widehat{DNA} = 90^\circ$ nên tứ giác $CMND$ là hình thang vuông.



2. Vẽ $OP \perp MA$ và $O'Q \perp NA$. Khi $MA = NA$ thì AE là đường trung bình của hình thang vuông $OPQO'$ ($\widehat{P} = \widehat{Q} = 90^\circ$), do đó $EA \perp MN$. Vậy khi $MA = NA$ thì MN là tiếp tuyến của đường tròn $(E; EA)$.

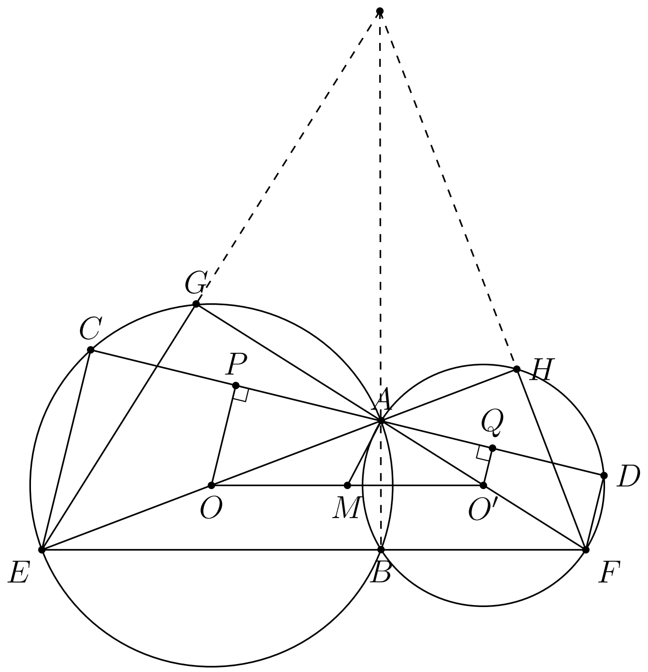
□

Ví dụ 5. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Gọi M là trung điểm của OO'. Đường thẳng qua A cắt các đường tròn (O) và (O') lần lượt ở C và D.

1. Khi $CD \perp MA$, chứng minh $AC = AD$.
2. Khi CD qua A và không vuông góc với MA.
   i) Vẽ đường kính AE của (O), AE cắt (O') ở H. Vẽ đường kính AF của (O'), AF cắt (O) ở G. Chứng minh AB, EG, FH đồng quy.
   ii) Tìm vị trí của CD để đoạn thẳng CD có độ dài lớn nhất?

Lời giải.

Vẽ $OP \perp CA$ và $O'Q \perp AD$. Khi đó tứ giác $OPQO'$ là hình thang vuông tại P và Q.



1. Vì $CD \perp MA$ và M là trung điểm của OO' nên MA là đường trung bình của hình thang $OPQO'$. Do đó $AP = AQ$ hay $AC = AD$.

2. Khi CD qua A và không vuông góc với MA.

   i) Vì tam giác AEF có ba đường cao là AB, EG, FH nên AB, EG, FH đồng quy.

   ii) Ta có $CD = 2PQ$. Mặt khác tứ giác $OPQO'$ là hình thang vuông tại P và Q nên $PQ \leq OO'$. Do đó CD lớn nhất khi $CD \parallel OO'$.

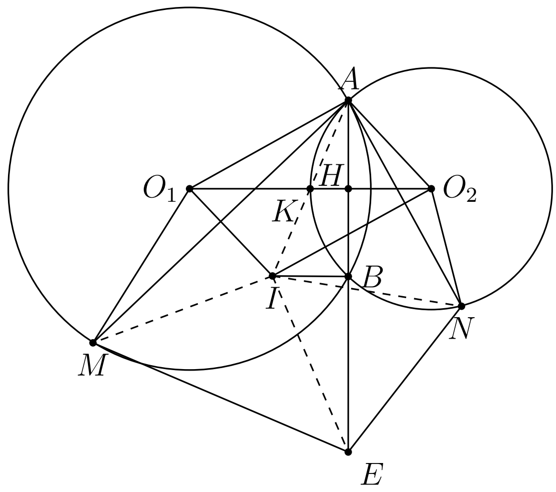
□

Ví dụ 6. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B. Gọi AM là dây cung của đường tròn (O_1) tiếp xúc với đường tròn (O_2) ở A và AN là dây cung của đường tròn (O_2) tiếp xúc với đường tròn (O_1) ở A. Gọi E là điểm đối xứng với A qua B.

1. Chứng minh rằng bốn điểm A, M, E, N cùng thuộc một đường tròn.
2. Khi hai đường tròn (O_1) và (O_2) thay đổi nhưng luôn cắt nhau tại hai điểm cố định A và B, tìm tập hợp tâm I của đường tròn qua bốn điểm A, M, E, N.

Lời giải.

1. Từ O_1 và O_2 kẻ các đường vuông góc với AM và AN, chúng cắt nhau tại I. Ta có $O_1I \parallel AO_2$ (vì cùng vuông góc với MA); $O_2I \parallel AO_1$ (vì cùng vuông góc với NA) nên tứ giác AO_1IO_2 là hình bình hành.



O_1O_2 cắt AI ở K và cắt AB ở H thì KH là đường trung bình của tam giác AIB, do đó $KH \parallel IB$. Mà $O_1O_2 \perp AB$ nên $IB \perp AB$.
Vì B là trung điểm của AE nên $IA = IE$. Ta lại có $IA = IM = IN$ (vì O_1I, O_2I lần lượt là đường trung trực của AM, AN). Vậy điểm I các đều bốn điểm A, M, E, N nên bốn điểm này cùng thuộc đường tròn tâm I.

2. Theo câu a) thì I nằm trên đường thẳng d vuông góc với AB tại B. Trên d lấy một điểm I tùy ý (I khác B), AI cắt đường trung trực xy của AB tại K. Trên xy lấy hai điểm O_1, O_2 sao cho K là trung điểm của O_1O_2.
Dựng hai đường tròn tâm O_1 và O_2 có bán kính O_1A và O_2A, chúng cắt nhau tại A và B. Dựng các dậy AM và AN của hai đường tròn tâm O_1 và O_2 lần lượt tiếp xúc với hai đường tròn (O_2) và (O_1) tại A. Khi đó tứ giác AO_1IO_2 là hình bình hành và điểm I cách đều bốn điểm A, M, E, N.

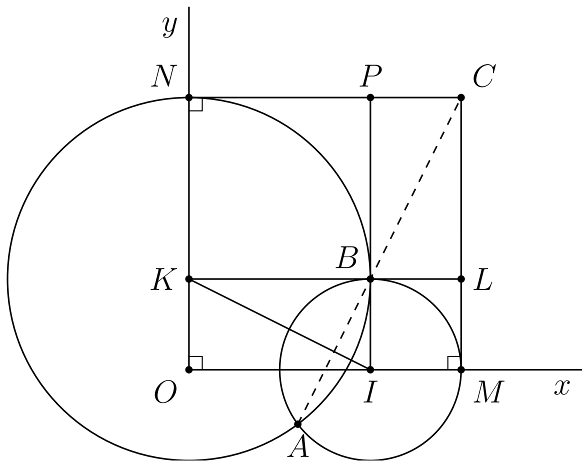
□

3 Luyện tập

Bài 1. Cho $\widehat{xOy} = 90^\circ$. Lấy các điểm I, K theo thứ tự trên các tia Ox, Oy. Vẽ đường tròn $(I; OK)$ cắt tia Ox tại M (I nằm giữa O và M). Vẽ đường tròn $(K; OI)$ cắt Oy tại N (K nằm giữa O và N).

1. Chứng minh hai đường tròn (I) và (K) luôn cắt nhau.
2. Tiếp tuyến tại M của đường tròn (I) và tiếp tuyến tại N của đường tròn (K) cắt nhau tại C. Chứng minh tứ giác $OMCN$ là hình vuông.
3. Gọi giao điểm của hai đường tròn (I) và (K) là A, B. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.
4. Giả sử I và K theo thứ tự di động trên Ox và Oy sao cho $OI + OK = a$ không đổi. Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



1. Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác ta có $|OK - OI| < IK < OK + OI$. Do đó hai đường tròn (I) và (K) luôn cắt nhau.

2. Ta có $\widehat{CMO} = \widehat{MON} = \widehat{NOC} = 90^\circ$ nên tứ giác $OMCN$ là hình chữ nhật.
Mặt khác, $OI = OK$, $OK = IM$, suy ra $OM = ON$, do đó tứ giác $OMCN$ là hình vuông.

3. Gọi L là giao điểm của KB và MC, K là giao điểm của IB và NC. Khi đó tứ giác $OKBI$ là hình chữ nhật và tứ giác $BLMI$ là hình vuông. Suy ra
$$\triangle BLC = \triangle KOI \Rightarrow \widehat{LBC} = \widehat{OKI} = \widehat{BIK}.$$
Mà $\widehat{BIK} + \widehat{IBA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{LBC} + \widehat{IBA} = 90^\circ$. Do đó $\widehat{LBC} + \widehat{LBI} + \widehat{IBA} = 180^\circ$. Vậy ba điểm A, B, C thẳng hàng.

4. Vì $OI + OK = a$ không đổi nên $OM = OI + IM = OI + OK = a$ không đổi.
Mặt khác do tứ giác $OMCN$ là hình vuông nên $OC = \sqrt{2}OM = a\sqrt{2}$ không đổi. Vậy C là điểm cố định và AB luôn đi qua C.

□

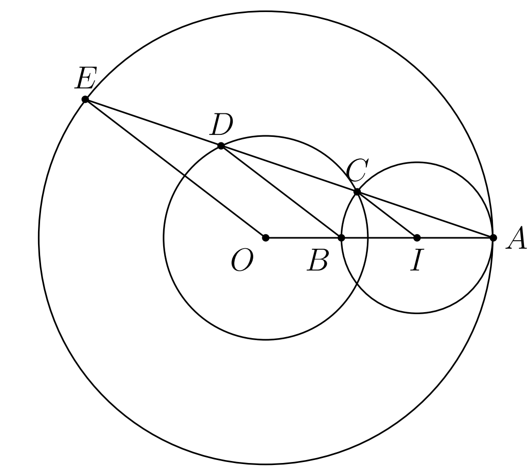
Bài 2. Cho đường tròn (O) và một điểm A trên đường tròn đó. Trên đoạn OA lấy điểm B sao cho $OB = \dfrac{1}{3}OA$. Vẽ đường tròn đường kính AB.

1. Chứng minh đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường tròn (O).

2. Vẽ đường tròn đồng tâm O với đường tròn (O) cho trước, cắt đường tròn đường kính AB tại C. Tia AC cắt hai đường tròn đồng tâm tại D, E (D nằm giữa C và E). Chứng minh $AC = CD = DE$.

Lời giải.

1. Gọi I là trung điểm của AB. Ta có $OI = OA - IA$ nên đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường tròn (O).



2. Ta có $IC = IA$ nên tam giác CIA cân tại A. Do đó

$$\widehat{CIA} = 180^\circ - \left(\widehat{ICA} + \widehat{IAC}\right) = 180^\circ - 2\widehat{IAC}.$$

Tương tự $\widehat{DBA} = 180^\circ - 2\widehat{BAD}$ và $\widehat{EOA} = 180^\circ - 2\widehat{OAE}$. Từ đó suy ra $IC \parallel BD \parallel OE$. Mặt khác, $IA = IO = \dfrac{1}{3}AB$ (do $OB = \dfrac{1}{3}OA$). Do đó $OB = BI = IA$. Suy ra

$$AC = CD = DE.$$

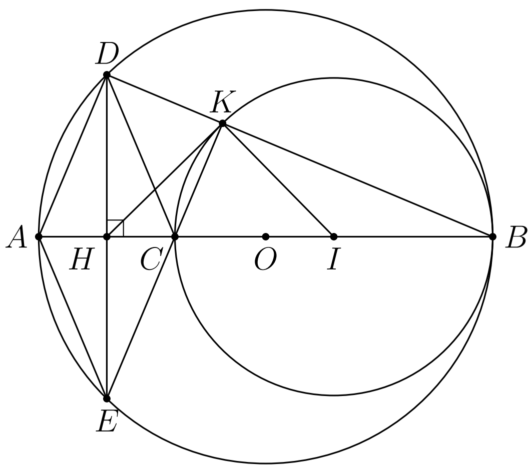
□

Bài 3. Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm C nằm giữa A và O. Vẽ đường tròn (I) có đường kính CB.

1. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn (O) và (I).
2. Kẻ dây DE của đường tròn (O) vuông góc với AC tại trung điểm H của AC. Tứ giác $ADCE$ là hình gì? Vì sao?
3. Gọi K là giao điểm của DB và đường tròn (I). Chứng minh ba điểm E, C, K thẳng hàng.
4. Chứng minh HK là tiếp tuyến của đường tròn (I).

Lời giải.

1. Vì điểm C nằm giữa hai điểm A và O, I là trung điểm của BC nên I nằm giữa hai điểm B và O, dó đó $OI = OB - IB$. Vậy hai đường tròn (O) và (I) tiếp xúc trong với nhau tại I.



2. Vì H là trung điểm của AC và DE, $DE \perp AC$ tại H nên tứ giác $ADCE$ là hình thoi.

3. Ta có $CK \perp AB$, $AD \perp DB$ nên $CK \parallel AD$, mà $CE \parallel AD$ do đó ba điểm B, K, D thẳng hàng.

4. Ta có $\widehat{HKD} = \widehat{HDK}$, $\widehat{IKB} = \widehat{IBK}$ nên

$$\widehat{HKD} + \widehat{IKB} = \widehat{HKD} + \widehat{IBK} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IKH} = 90^\circ.$$

Vậy HK là tiếp tuyến của đường tròn (I).

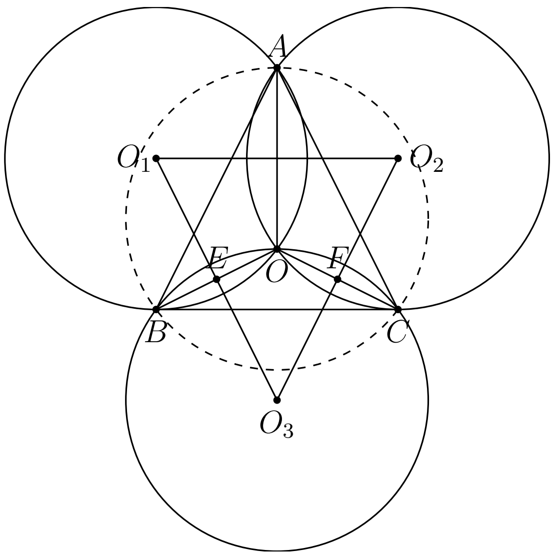
□

Bài 4. Cho ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có cùng bán kính R và cùng đi qua điểm O. Gọi giao điểm thứ hai của từng cặp hai trong ba đường tròn là A, B, C. Chứng minh

1. Đường tròn đi qua ba điểm A, B, C có bán kính bằng R.

2. Ba đường thẳng xác định bởi tâm của một đường tròn và giao điểm của hai đường tròn còn lại cắt nhau tại một điểm.

Lời giải.



1. Gọi E là giao điểm của O_1O_3 và OB, F là giao điểm của O_2O_3 và OC. Vì EF là đường trung bình của hai tam giác $O_1O_2O_3$ và OBC nên $BC \parallel O_1O_2$ và $BC = O_1O_2$. Tương tự $AB = O_2O_3$, $AC = O_1O_3$. Do đó $\triangle ABC = \triangle O_1O_2O_3$ (c.c.c).
Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính bằng R (vì bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $O_1O_2O_3$ bằng R).

2. Ba đường thẳng AO_3, BO_2, CO_1 cắt nhau tại một điểm vì đó là các đường thẳng chứa các đường chéo của hai hình bình hành có chung một đường chéo.

□

Bài 5. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài tiếp xúc với (O) và (O') lần lượt ở B và C. Tiếp tuyến chung trong cắt BC ở I. Gọi E, F thứ tự là giao điểm của IO với AB và của IO' với AC.

1. Chứng minh A, E, I, F cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm K của đường tròn đó.

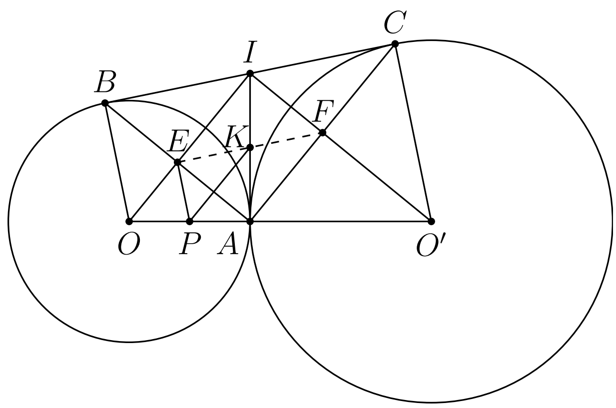
2. Chứng minh $IE \cdot IO + IF \cdot IO' = \dfrac{1}{2}(AB^2 + AC^2)$.

3. Gọi P là trung điểm của OA. Chứng minh PE tiếp xúc với (K).

4. Cho OO' cố định và có độ dài là $2a$. Tìm điều kiện của R và R' để diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Lời giải.

1. Vì IB và IA là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $IO \perp AB$ tại E. (1)
Vì IC và IA là tiếp tuyến của đường tròn (O') nên $IO' \perp AC$ tại F. (2)
Mặt khác
$$\widehat{EIF} = \widehat{EIA} + \widehat{FIA} = \frac{1}{2}\widehat{BIA} + \frac{1}{2}\widehat{CIA} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BIA} + \widehat{CIA}\right) = \frac{1}{2}\widehat{BIC} = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ. \quad (3)$$
Từ (1), (2), (3) ta có $\widehat{AEI} = \widehat{AFI} = \widehat{EIF} = 90^\circ$, do đó tứ giác $AEIF$ là hình chữ nhật. Vì vậy, A, E, I, F cùng thuộc một đường tròn có tâm K là trung điểm của AI và EF.



2. Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông OAI ($\widehat{IAO} = 90^\circ$), $AE \perp OI$ ta có
$$IE \cdot IO == IA^2 = IB^2 = \frac{BC^2}{4}. \quad (4)$$
Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông $O'AI$ ($\widehat{IAO'} = 90^\circ$), $AE \perp O'I$ ta có
$$IF \cdot IO' = IA^2 = IC^2 = \frac{BC^2}{4}. \quad (5)$$
Từ (4) và (5) ta có
$$IE \cdot IO + IF \cdot IO' = \frac{BC^2}{4} + \frac{BC^2}{4} = \frac{BC^2}{2} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2\right).$$

3. Vì P là trung điểm của OA nên PK là đường trung bình của tam giác OAI và PK là đường trung trực của EA. Do đó $\widehat{PEK} = \widehat{PAK} = 90^\circ$. Vậy PE tiếp xúc với (K).

4. Ta có $\triangle ABC \backsim \triangle IOO'$ (g.g) nên

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle IOO'}} = \left(\frac{BC}{OO'}\right)^2 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{S_{\triangle IOO'} \cdot BC^2}{OO'^2}. \quad (6)$$

Mà $BC = 2IA$; $OO' = 2a$; $S_{\triangle IOO'} = \dfrac{1}{2} \cdot OO' \cdot IA = \dfrac{1}{2} \cdot 2a \cdot IA$ nên thay vào (6) ta được

$$S_{\triangle ABC} = \frac{S_{\triangle IOO'} \cdot BC^2}{OO'^2} = \frac{a \cdot IA \cdot (2IA)^2}{(2a)^2} = \frac{IA^3}{a}.$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OIO' ($\widehat{OIO'} = 90^\circ$, $IA \perp OO'$) ta có

$$IA^2 = AO \cdot AO' = R \cdot R' \leq \left(\frac{R+R'}{2}\right)^2 = a^2.$$

Suy ra IA lớn nhất bằng a khi $R = R'$. Vậy $S_{\triangle ABC}$ lớn nhất bằng a^2 khi $R = R'$.

□

Bài 6. Cho đường tròn tâm O đường kính AB và một điểm C di động trên đoạn AB. Vẽ các đường tròn tâm I đường kính AC và đường tròn tâm K đường kính BC. Tia Cx vuông góc với AB tại C, cắt (O) tại M. Đoạn thẳng MA cắt đường tròn (I) tại E và đoạn thẳng MB cắt đường tròn (K) tại F.

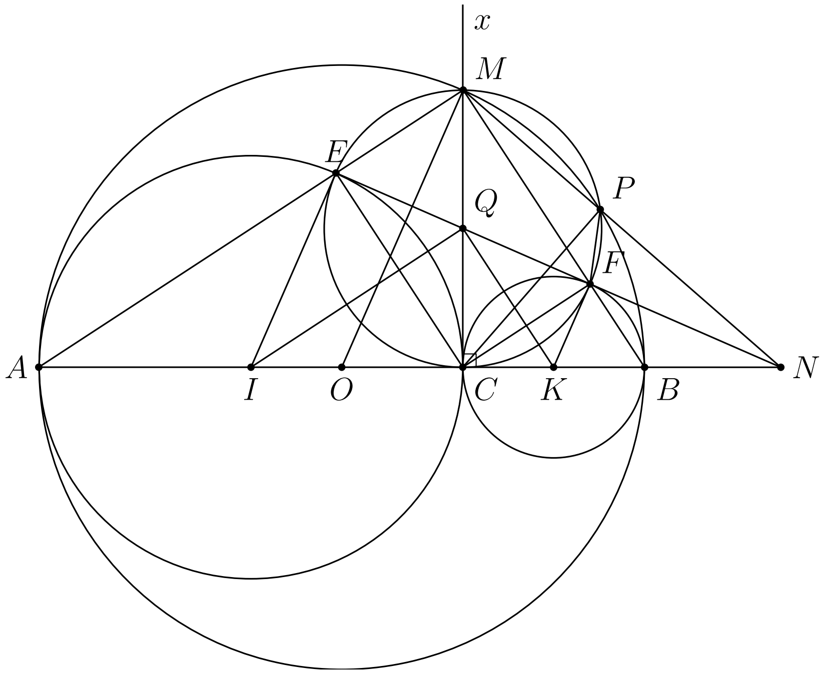
1. Chứng minh tứ giác $MECF$ là hình chữ nhật và EF là tiếp tuyến chung của (I) và (K).
2. Cho $AB = 4$cm, xác định vị trí điểm C trên AB để diện tích tứ giác $IEFK$ lớn nhất.
3. Khi C khác O, đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $MECF$ cắt đường tròn (O) tại P (khác M), đường thẳng PM cắt đường thẳng AB tại N. Chứng minh tam giác MPF đồng dạng với tam giác MBN.
4. Chứng minh ba điểm N, E, F thẳng hàng.

Lời giải.

1. Xét $\triangle AMB$ có $MO = OA = OB$ nên $\triangle AMB$ vuông tại M. Từ đó suy ra

$$\widehat{EMF} = \widehat{AMB} = 90^\circ. \quad (1)$$

Tương tự ta có $\widehat{AEC} = 90^\circ$ và $\widehat{CFB} = 90^\circ$. (2)
Từ (1) và (2) ta có $\widehat{CEM} = \widehat{EMF} = \widehat{MFC} = 90^\circ$. Do đó tứ giác $EMFC$ là hình chữ nhật.
Gọi Q là giao điểm của MC và EF. Do tứ giác $EMFC$ là hình chữ nhật nên $QE = QC$.
Mặt khác $IE = IC$ nên IQ là đường trung trực của CE. Suy ra $\widehat{IEQ} = \widehat{ICQ} = 90^\circ$. Do đó EF là tiếp tuyến của đường tròn (I). (3)
Tương tự $\widehat{KFQ} = \widehat{KCQ} = 90^\circ$, suy ra EF là tiếp tuyến của đường tròn (K). (4)
Từ (3) và (4) suy ra EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).



2. Do $\widehat{IEF} = \widehat{KFE} = 90^\circ$ nên tứ giác $IEFK$ là hình thang vuông tại E và F. Do đó
$$S_{IEFK} = \frac{1}{2}(IE + FK)\cdot EF = \frac{1}{2}\left(\frac{AC}{2} + \frac{BC}{2}\right)\cdot EF = \frac{1}{4}AB \cdot EF.$$
Mà tứ giác $EMFC$ là hình chữ nhật nên $EF = CM$. Khi C di động trên đoạn AB và $Cx \perp AB$ thì $CM \leq \dfrac{AB}{2}$. Do đó
$$S_{IEFK} = \frac{1}{4}AB\cdot EF = \frac{1}{4}AB \cdot CM \leq \frac{1}{4}AB\cdot\frac{AB}{2} = \frac{1}{8}AB^2 = \frac{1}{8}\cdot 4^2 = 2\ (\text{cm}^2).$$
Do đó giá trị lớn nhất của S_{IEFK} bằng $2\ (\text{cm}^2)$, đạt được khi và chỉ khi C trùng với O.

3. Vì P thuộc đường tròn đường kính CM nên tam giác MCP vuông tại P. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông NCM, $CP \perp MN$, ta có
$$MC^2 = MP \cdot MN. \tag{5}$$
Tương tự, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông MCB, đường cao CF, ta có
$$MC^2 = MF\cdot MB. \tag{6}$$
Từ (5) và (6) suy ra
$$MP\cdot MN = MF \cdot MB \Rightarrow \frac{MP}{MB} = \frac{MF}{MN}.$$
Xét hai tam giác MPF và MBN có $\widehat{PMF}$ chung, $\dfrac{MP}{MB} = \dfrac{MF}{MN}$ (chứng minh trên), do đó $\triangle MPF \backsim \triangle MBN$ (c.g.c).

4. Ta có $\widehat{OMA} = \widehat{OAM} = \widehat{CMB} = \widehat{CEF}$, do đó $OM \perp EF$. (7)
Vì $QP = QM$, $OP = OM$ nên QO là đường trung trực của đoạn thẳng MP, suy ra $OQ \perp MN$. Mặt khác $MQ \perp ON$ nên Q là trực tâm của $\triangle OMN$, do đó $NQ \perp OM$. (8)
Từ (7) và (8) ta có bốn điểm N, E, F, Q thẳng hàng. Vậy ba điểm N, E, F thẳng hàng.

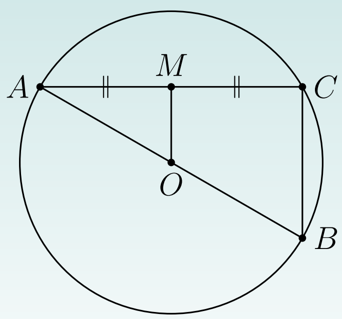
□

§8 Ôn tập chương 2

1 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình vẽ bên, biết đường kính $AB = 10$ cm; $OM = 3$ cm.

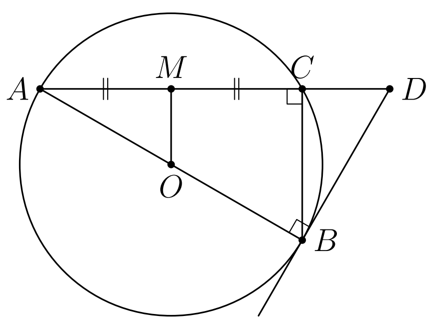
1. Tính số đo góc $\widehat{ACB}$;
2. Tính độ dài dây AC;
3. Tiếp tuyến tại B của đường tròn cắt tia AC ở D. Tính độ dài CD.



Lời giải.

1. Theo bài ra ta thấy $OC = OA = \dfrac{AB}{2}$.
   Tam giác ABC có trung tuyến CO bằng nửa cạnh đối AB nên $\triangle ABC$ vuông tại C.
   Vậy $\widehat{ACB} = 90^\circ$.
2. Vì M là trung điểm của AC nên $OM \perp AC$ (bán kính đi qua trung điểm của dây cung).
   Suy ra tam giác AOM vuông tại M nên
   $$AM^2 = OA^2 - OM^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow AM = 4 \text{ (cm)}.$$
   Vậy $AC = 2 \cdot AM = 8$ (cm).
3.

   Vì BD là tiếp tuyến của đường tròn O nên $BD \perp AB$.
   Suy ra tam giác ABD vuông tại B.
   Lại có $\widehat{ACB} = 90^\circ \Rightarrow BC \perp AD$ nên BC là đường cao ứng với cạnh huyền AD của tam giác vuông ABD, ta có
   $AB^2 = AC \cdot AD \Rightarrow AD = \dfrac{AB^2}{AC} = \dfrac{10^2}{8} = 12{,}5$ (cm).
   Từ đó suy ra $CD = AD - AC = 12{,}5 - 8 = 4{,}5$ (cm).



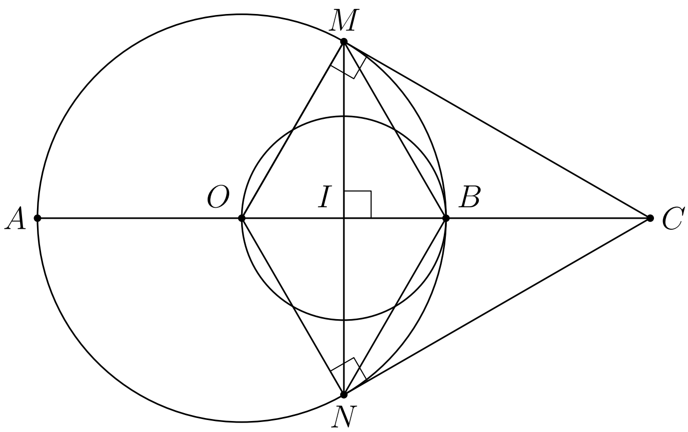
□

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 12$ cm, dây MN vuông góc với AB tại trung điểm I của OB. Các tiếp tuyến của (O) tại M và N cắt nhau tại C. Vẽ đường tròn tâm I đường kính OB.

1. Xác định vị trí tương đối của (O) và (I);

2. Tính độ dài dây MN;
3. Tứ giác $BMON$ là hình gì? Vì sao?
4. Chứng minh: $CO \perp MN$;
5. Tính diện tích tứ giác $MONC$;
6. Chứng minh $\dfrac{4}{MN^2} = \dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{NC^2}$.

Lời giải.



1. (O) và (I) có bán kính lần lượt là OA và IB.
   Ta có $OI = OB - IB$.
   Vậy (O) tiếp xúc trong với (I) tại B.

2. Theo bài ra $MN \perp AB \Rightarrow MI \perp OI$ nên tam giác MIO là tam giác vuông tại I. Mặt khác $AB = 12$ cm $\Rightarrow OM = OB = 6$ cm, $IO = IB = 3$ cm. Ta có
   $MI^2 = OM^2 - OI^2 = 6^2 - 3^2 = 27 \Rightarrow MI = 3\sqrt{3}$ (cm).
   Vì $OB \perp MN$ tại I nên I cũng là trung điểm của MN.
   Vậy $MN = 2MI = 6\sqrt{3}$ (cm).

3. Từ giả thiết và kết quả của câu b) ta có I là trung điểm của OB và MN nên tứ giác $OMBN$ là hình bình hành.
   Mặt khác ta có $OM = ON$ (đều là bán kính) suy ra $OMBN$ là hình thoi.

4. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại C, ta có $CM = CN$.
   Mặt khác $OM = ON = R$, do đó CO là đường trung trực của MN.
   Vậy $CO \perp MN$.

5. Tam giác MOC vuông tại M vì $OM \perp CM$ (bán kính vuông góc với tiếp tuyến tại tiếp điểm). Mặt khác từ câu c) ta có $CO \perp MN$ nên OI là hình chiếu của cạnh góc vuông OM lên cạnh huyền OC của tam giác vuông OCM.
   Vậy ta có $OM^2 = OI \cdot CO \Rightarrow OC = \dfrac{OM^2}{OI} = \dfrac{36}{3} = 12$ (cm).
   Tứ giác $OMCN$ có hai đường chéo vuông góc nên có diện tích là
   $S_{CMON} = \dfrac{1}{2}CO \cdot MN = \dfrac{1}{2}9 \cdot 6\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$ (cm^2).

6. Ta có $MI = \dfrac{MN}{2} \Rightarrow \dfrac{4}{MN^2} = \dfrac{1}{MI^2}$. (1)
$OM = ON$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại C). (2)
Tam giác OMC vuông tại M có đường cao MI nên ta có

$$\frac{1}{MI^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{MC^2}. \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

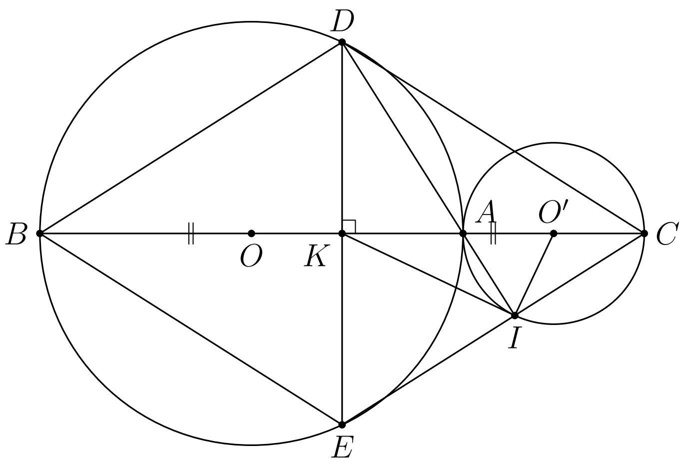
$$\frac{4}{MN^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{NC^2}.$$

□

Ví dụ 3. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A $(R > R')$. Vẽ các đường kính AOB, $AO'C$. Dây DE của đường tròn (O) vuông góc với BC tại trung điểm K của BC.

1. Tứ giác $BDCE$ là hình gì? Vì sao?
2. Gọi I là giao điểm của DA và đường tròn (O'). Chứng minh rằng ba điểm E, I, C thẳng hàng;
3. Chứng minh rằng KI là tiếp tuyến của (O').

Lời giải.



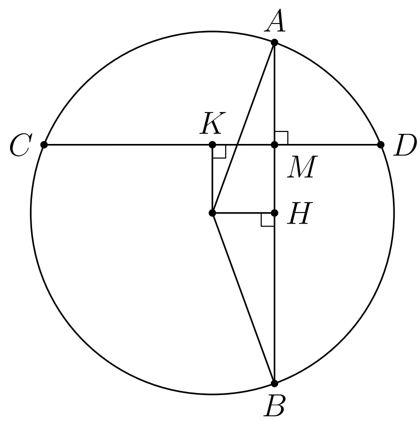
1. Tứ giác $BDCE$ có $BK = KC$, $DK = KE$ nên là hình bình hành.
Lại có $BC \perp DE$ nên $BDCE$ là hình thoi.
2. Ta có $\triangle AIC$ có $O'I = \dfrac{1}{2}AC$ nên $\widehat{AIC} = 90^\circ$ hay $AI \perp IC$.
Tương tự $AD \perp BD$. Suy ra $BD \parallel IC$.
Lại có $BD \parallel EC$ (tính chất hình thoi). Suy ra E, I, C thẳng hàng(Ơ-clit).
3. Nối KI và IO' ta có $KI = KD = KE$ (KI là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền). Do đó $\widehat{KIA} = \widehat{KDA}$. (1)
Tam giác $O'IA$ cân tại O' nên $\widehat{O'IA} = \widehat{O'AI} = \widehat{DAK}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{KIA} + \widehat{O'IA} = \widehat{KDA} + \widehat{DAK} = 90^\circ$.
Vậy KI là tiếp tuyến của đường tròn (O').

□

Ví dụ 4. Cho đường tròn $(O; 13\text{ cm})$, dây $AB = 24$ cm.

1. Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB;
2. Gọi M là điểm thuộc dây AB. Qua M, vẽ dây CD vuông góc với dây AB tại điểm M. Xác định vị trí điểm M trên dây AB để $AB = CD$.

Lời giải.



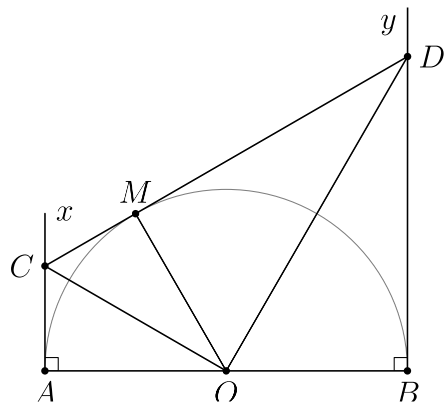
1. Hạ $OH \perp AB$. Xét $\triangle OHA$ có $\widehat{H} = 90^\circ$. Ta có
   - $AH = HB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{24}{2} = 12$ (cm).
   - $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (cm).
2. Hạ $OK \perp CD$. Áp dụng định lí về quan hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây ta có
   $AB = CD \Leftrightarrow OH = OK$.
   Mặt khác tứ giác $OHMK$ có $\widehat{H} = \widehat{K} = \widehat{M} = 90^\circ$ và $OH = OK$ nên $OHMK$ là hình vuông.
   Vậy để $AB = CD$ thì điểm $M \in AB$ và $HM = 5$ (cm).

□

Ví dụ 5. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Kẻ các tiếp tuyến Ax, By cùng phía với nửa đường tròn đối với AB. Từ điểm M trên nửa đường tròn kẽ tiếp tuyến thứ ba với đường tròn, nó cắt Ax và By lần lượt tại C và D.

1. Chứng minh tam giác COD là tam giác vuông;
2. Chứng minh $AC \cdot BD = OM^2$;
3. Cho biết $OC = BA = 12$ cm. Tính độ dài AC và BD.

Lời giải.



1. Ta có CA và CM là hai tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{AOC} = \widehat{MOC}$.
   Tương tự $\widehat{BOD} = \widehat{MOD}$, mà $\widehat{AOM} + \widehat{MOB} = 180^\circ$ (hai góc kề bù).
   Suy ra $\widehat{COD} = 90^\circ$ hay $\triangle COD$ vuông.
2. Áp dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $AC = MC$; $BD = MD$.
   Mặt khác, xét $\triangle COD$, $\widehat{COD} = 90^\circ$ ta có

$OM^2 = MC \cdot MD$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông).
Suy ra $AC \cdot BD = OM^2$ (điều phải chứng minh).

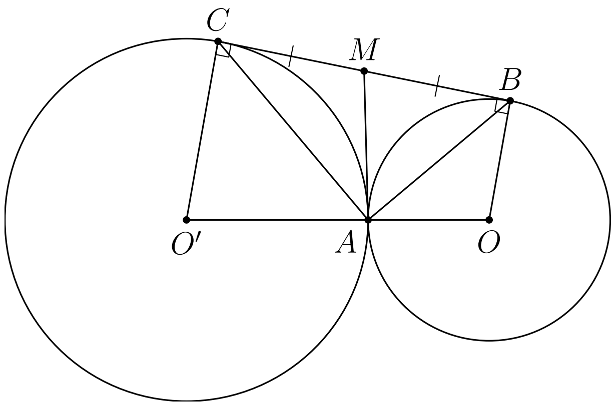
3. Từ $AB = 12$ cm $\Rightarrow OA = 6$ cm nên $AC = \sqrt{OC^2 - AO^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$ (cm).
$BD = MD = \dfrac{OM^2}{MC} = \dfrac{OA^2}{AC} = \dfrac{6^2}{6\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ (cm).

□

Ví dụ 6. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc ngoài tại A. Một đường thẳng (d) tiếp xúc với cả hai đường tròn trên tại B và C với $B \in (O)$, $C \in (O')$.

1. Chứng minh tam giác ABC vuông;
2. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O').

Lời giải.



1. Ta có $OB \parallel O'C$ (cùng vuông góc với BC).
$\Rightarrow$ Tứ giác $OBCO'$ là hình thang vuông.
$\Rightarrow \widehat{BOO'} + \widehat{CO'O} = 180^\circ$.
$\triangle CO'A$ cân tại O' có $\widehat{CAO'} = \dfrac{180^\circ - \widehat{CO'O}}{2} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{CO'O}}{2}$. (1)
$\triangle BOA$ cân tại O có $\widehat{BAO} = \dfrac{180^\circ - \widehat{BOO'}}{2} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{BOO'}}{2}$. (2)
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{CAO'} + \widehat{BAO} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{CO'O}}{2} + 90^\circ - \dfrac{\widehat{BOO'}}{2}$.
$$= 180^\circ - \dfrac{\widehat{BOO'} + \widehat{CO'O}}{2}$$
$$= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$
Lại có $\widehat{CAO'} + \widehat{BAO} + \widehat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.
$\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A.

2. Ta có M là trung điểm của cạnh huyền $BC \Rightarrow MA = MB = MC \Rightarrow \triangle MAB$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{MBA}$.
Lại có $\triangle OAB$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA}$
$$\Rightarrow \widehat{MAB} + \widehat{OAB} = \widehat{MBA} + \widehat{OBA}$$
$$\Leftrightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^\circ.$$

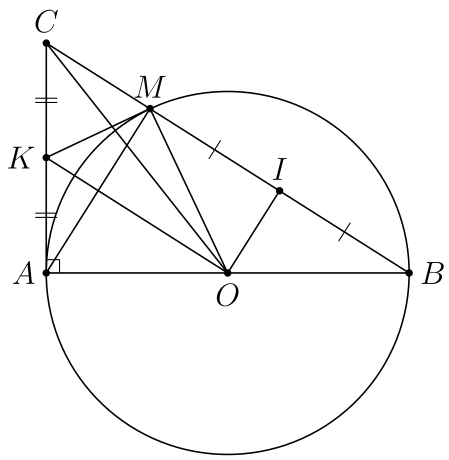
$\Rightarrow MA$ là tiếp tuyến của (O).
Chứng minh tương tự MA là tiếp tuyến của (O').
Vậy MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O').

□

Ví dụ 7. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tiếp tuyến Ax lấy điểm $C \neq A$. Đoạn thẳng BC cắt (O) tại M. Gọi I là trung điểm của MB, K là trung điểm của AC.

1. Chứng minh AM là đường cao của tam giác ABC và $AC^2 = CM \cdot CB$;
2. Chứng minh A, I, C, M cùng nằm trên một đường tròn;
3. Chứng minh KM là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải.



1. Tam giác AMB nội tiếp đường tròn (O) có AB là đường kính $\Rightarrow \triangle AMB$ vuông tại M hay $\widehat{AMB} = 90^\circ \Rightarrow AM$ là đường cao của tam giác ABC.
   Xét tam giác ABC vuông tại A có AM là đường cao $\Rightarrow AC^2 = CM \cdot CB$ (hệ thức liên hệ giữa cạnh và đường cao).

2. Tam giác ACO vuông tại $A \Rightarrow$ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACO là trung điểm của CO. (1)
   Xét tam giác AMB có I là trung điểm của AM, O là trung điểm của $AB \Rightarrow IO$ là đường trung bình của tam giác $AMB \Rightarrow IO \parallel AM$.
   Mà $AM \perp MB \Rightarrow IO \perp MB$.
   Tam giác CIO vuông tại $I \Rightarrow$ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CIO là trung điểm của CO. (2)
   Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ bốn điểm A, I, C, O cùng thuộc một đường tròn.

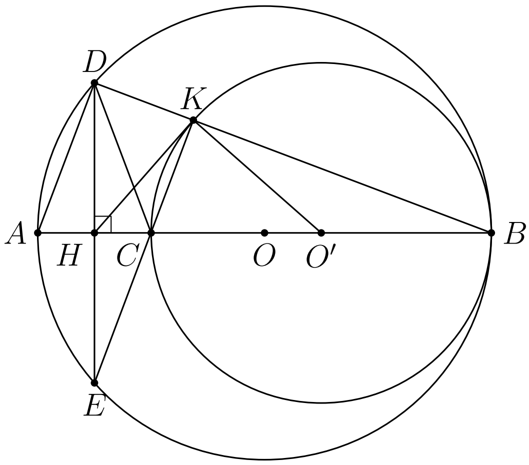
3. Tam giác CMA vuông tại M có MK là trung tuyến $\Rightarrow MK = KA = KC$.
   Xét $\triangle KAO$ và $\triangle KMO$ có
   $$\begin{cases} KA = KM \\ KO \text{ là cạnh chung} \\ AO = MO \text{ (bằng bán kính } (O)) \end{cases} \Rightarrow \triangle KAO = \triangle KMO \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{KAO} = \widehat{KMO}.$$
   Mà $\widehat{KAO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{KMO} = 90^\circ \Rightarrow KM$ là tiếp tuyến của (O).

□

Ví dụ 8. Cho đường tròn (O), đường kính AB, điểm C nằm giữa A và O. Vẽ đường tròn (O') có đường kính CB.

1. Hai đường tròn (O) và (O') có vị trí tương đối như thế nào?
2. Kẻ dây DE của đường tròn (O) vuông góc với AC tại trung điểm H của AC. Tứ giác $ADCE$ là hình gì? Vì sao?
3. Gọi K là giao điểm của DB và đường tròn (O'). Chứng minh rằng 3 điểm E, C, K thẳng hàng;
4. Chứng minh HK là tiếp tuyến của đường tròn (O').

Lời giải.



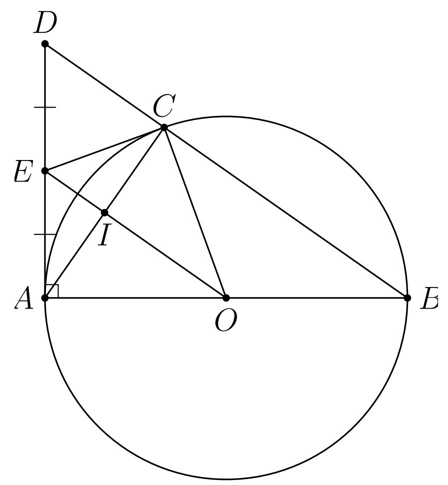
1. Ta có $OO' = OB - O'B \Rightarrow$ hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc trong tại B.
2. Dây DE của (O) vuông góc với đường kính $AB \Rightarrow AB$ đi qua trung điểm của DE hay H là trung điểm của AB.
Xét tứ giác $ADCE$ có H là trung điểm của AB, H cũng là trung điểm của $AC \Rightarrow$ tứ giác $ADCE$ là hình bình hành.
Lại có $AC \perp DE \Rightarrow$ tứ giác $ADCE$ là hình thoi.
3. $\triangle KCB$ có trung tuyến $KO' = \dfrac{BC}{2}$ nên vuông tại $K \Rightarrow \widehat{CKB} = 90^\circ$ hay $CK \perp BD$. (1)
Chứng minh tương tự ta có $\widehat{ADB} = 90^\circ$ hay $AD \perp BD$. (2)
Từ (1)và (2) $\Rightarrow CK \parallel AD$.
Lại có $CE \parallel AD$ (vì tứ giác $ADCE$ là hình thoi) $\Rightarrow C$, E, K thẳng hàng.
4. Xét tam giác DEK vuông tại K có KH là trung tuyến nên $KH = HE$.
Tam giác KHE có $KH = HE \Rightarrow \triangle KHE$ cân tại $H \Rightarrow \widehat{HKE} = \widehat{KEH}$.
Lại có $\triangle O'CK$ cân tại O'
$$\begin{aligned} &\Rightarrow \widehat{O'CK} = \widehat{O'KC} \\ &\Rightarrow \widehat{HKE} + \widehat{O'KC} = \widehat{KEH} + \widehat{O'CK} \\ &\Leftrightarrow \widehat{O'KH} = \widehat{KEH} + \widehat{O'CK}. \end{aligned}$$
Mặt khác $\widehat{O'CK} = \widehat{HCE}$(đối đỉnh)
Tam giác HEC vuông tại H nên $\widehat{KEH} + \widehat{HCE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{KEH} + \widehat{O'CK} = 90^\circ$ hay $\widehat{O'KH} = 90^\circ \Rightarrow KH$ là tiếp tuyến của (O').

□

Ví dụ 9. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Lấy điểm C thuộc (O). Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại D. Gọi E là trung điểm của AD.

1. Chứng minh EC là tiếp tuyến của (O);
2. Chứng minh EO vuông góc với AC tại trung điểm I của AC.

Lời giải.



1. Ta có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AC \perp BD$.
   Tam giác ACD vuông tại C có CE là trung tuyến nên $CE = EA = \dfrac{1}{2}AD$.
   Xét tam giác AEO và tam giác CEO có
   $\begin{cases} AE = CE \\ EO \text{ là cạnh chung} \\ AO = CO \end{cases} \Rightarrow \triangle AEO = \triangle CEO$ (c.c.c)
   $\Rightarrow \widehat{EAO} = \widehat{ECO} = 90^\circ \Rightarrow CE$ là tiếp tuyến của (O).

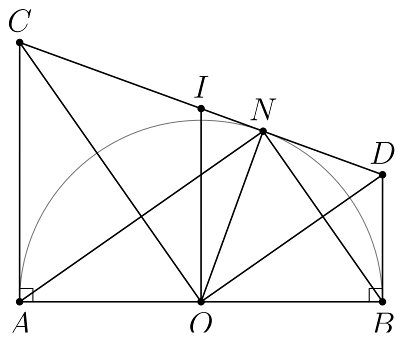
2. EA và EC là 2 tiếp tuyến của (O) cắt nhau tại $E \Rightarrow EA = EC$.
   Lại có $OA = OC \Rightarrow OE$ là đường trung trực của đoạn AC hay OE vuông góc với AC tại trung điểm I của AC

□

Ví dụ 10. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$, N là điểm trên nửa đường tròn. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ hai tiếp tuyến Ax và By và một tiếp tuyến tại N cắt hai tiếp tuyến Ax và By lần lượt tại C và D.

1. Chứng minh $AC + BD = CD$ và $AC \cdot BD$ không đổi;
2. Chứng minh AB tiếp xúc với đường tròn đường kính CD;
3. Biết $AC = \dfrac{R}{2}$. Tính NA và NB.

Lời giải.



1. Ta có DN và DB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại $D \Rightarrow DN = DB$.
   Lại có CA và CN là hai tiếp tuyến cắt nhau tại $C \Rightarrow CA = CN$ nên $DB + CA = DN + CN = DC$.
   Mặt khác OC và OD lần lượt là hai phân giác của hai góc $\widehat{AON}$ và $\widehat{BON}$ kề bù nên $\widehat{COD} = 90^\circ$.
   Trong tam giác vuông COD có ON là đường cao nên $DN \cdot CN = ON^2 = R^2$.
   Hay $AC \cdot BD = R^2$ (không đổi).

2. Gọi I là tâm của đường tròn đường kính CD.
   Tứ giác $CABD$ là hình thang vuông ($AC \perp AB; BD \perp AB$) có OI là đường trung bình $\Rightarrow OI \parallel AC$ mà $AC \perp AB \Rightarrow OI \perp AB$ tại O và $OI = \dfrac{AC + BD}{2} = \dfrac{CD}{2} = IC$.
   Vậy AB tiếp xúc với đường tròn đường kính CD.

3. Ta có $OA = ON = R$, $CA = CN$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).
   Do đó OC là đường trung trực của AN.
   Gọi H là giao điểm của OC và AN.
   Xét tam giác vuông CAO có AH là đường cao nên
   $$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AO^2} + \frac{1}{CA^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{\left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{4}{R^2} = \frac{5}{R^2} \Rightarrow AH = \frac{R\sqrt{5}}{5} \Rightarrow AN = \frac{2R\sqrt{5}}{5}.$$
   $AN^2 + NB^2 = AB^2$ (theo Py-ta-go).
   $NB^2 = AB^2 - NA^2 = (2R)^2 - \dfrac{4R^2}{5} = \dfrac{16R^2}{5} \Rightarrow NB = \dfrac{4R}{\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{5}R}{5}$.
   Vậy $AN = \dfrac{2\sqrt{5}R}{5}$ và $BN = \dfrac{4\sqrt{5}R}{5}$.

□

2 Luyện tập

Bài 1. Cho đường tròn tâm O, bán kính R, kẻ đường kính AB và dây cung AM có độ dài bằng R. Tia OM cắt tiếp tuyến Ax (A là tiếp điểm) của đường tròn (O) tại P. Tiếp tuyến PN của (O) (N là tiếp điểm, N khác A) cắt đường thẳng AB ở Q.

1. Chứng minh OP là đường trung trực của AN.

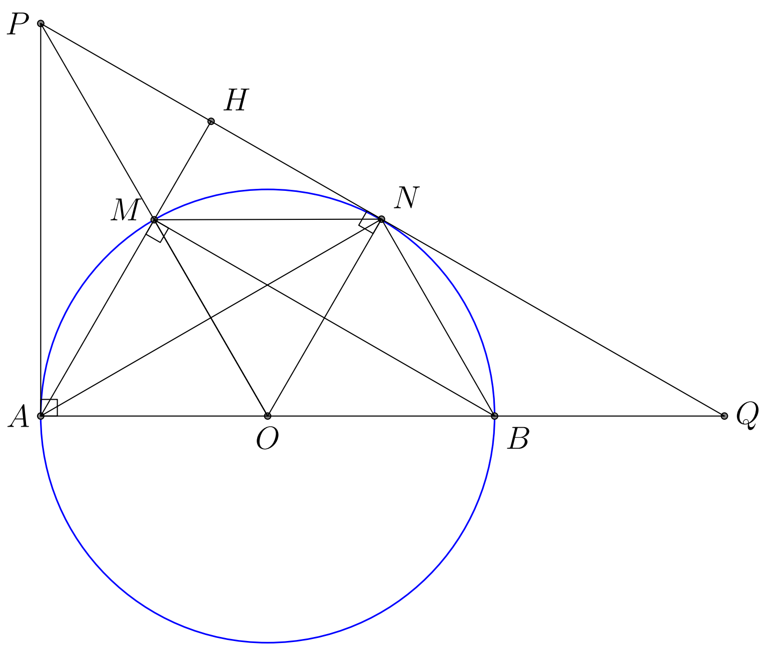
2. Chứng minh AM song song với ON và tính AP theo R.

3. Chứng minh tam giác APN đều và tính diện tích tam giác APQ theo R.

4. Gọi H là giao điểm của AM và PQ. Chứng minh rằng AP và AN là hai tiếp tuyến của đường tròn $(M; MH)$.

(Kiểm tra Học kì 1 Toán 9, Thừa Thiên Huế, năm học 2015 - 2016)

Lời giải.



1. Ta có $\begin{cases} PA = PB & \text{(tính chất tiếp tuyến)} \\ OA = ON = R \end{cases}$ suy ra OP là đường trung trực của AN.

2. Tam giác OAM đều $(AM = OA = OM = R) \Rightarrow \widehat{AMO} = \widehat{AOM} = 60^\circ$.
Mà $\widehat{MON} = \widehat{AOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)
Suy ra $\widehat{AMO} = \widehat{MON} = 60^\circ$.
Vậy $AM \parallel ON$.
Ta có $AP \perp OA$ (vì AP là tiếp tuyến) $\Rightarrow \widehat{OAP} = 90^\circ$.
Tam giác PAO vuông tại A nên $AP = OA \cdot \tan \widehat{AOP} = R \cdot \tan 60^\circ = R\sqrt{3}$.

3. Ta có $\widehat{PAN} = \widehat{AOM}$ (cùng phụ với $\widehat{OAN}$) do đó $\widehat{PAN} = 60^\circ$.
Mà $PA = PN$ suy ra tam giác PAN đều suy ra $\widehat{APQ} = 60^\circ$.
Tam giác APQ vuông tại A, nên $AQ = AP \cdot \tan \widehat{APQ} = R\sqrt{3} \cdot \tan 60^\circ = 3R$.
Vậy $S_{APQ} = \dfrac{1}{2} \cdot PA \cdot AQ = \dfrac{1}{2} \cdot R\sqrt{3} \cdot 3R = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$(đvdt).

4. Ta có $ON \perp PN$ (vì PN là tiếp tuyến), $AM \parallel ON$ suy ra $MH \perp PN$. Do đó, MH là khoảng cách từ M đến PN.
Tam giác APN đều có AH là đường cao nên AH cũng là đường phân giác của tam giác APN.
Mặt khác PO là phân giác của $\widehat{APN}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).
Suy ra đường tròn $(M; MH)$ là đường tròn nội tiếp tam giác APN.
Vậy AP và AN là hai tiếp tuyến của đường tròn $(M; MH)$.

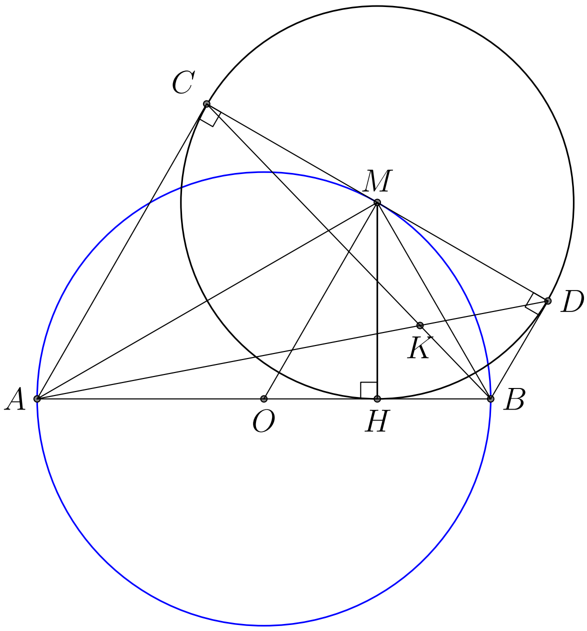
□

Bài 2. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Gọi M là một điểm trên đường tròn (O) (M không trùng với A và B). Vẽ đường tròn tâm M tiếp xúc với AB tại H. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến AC và BD với đường tròn tâm M (C, D là hai tiếp điểm).

1. Chứng minh $AC + BD = AB$.
2. Chứng minh CD là tiếp tuyến của đường tròn (O).
3. Gọi K là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng $KH \parallel AC$.

(Kiểm tra Học kì 1 Toán 9, Thừa Thiên Huế, năm học 2014 - 2015)

Lời giải.



1. Chứng minh $AC + BD = AB$.
   Ta có AC và AH là 2 tiếp tuyến cắt nhau tại A của (M) $\Rightarrow AH = AC$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau).
   Tương tự ta có $BH = BD$.
   $\Rightarrow AH + BH = AC + BD \Leftrightarrow AC + BD = AB$ (điều phải chứng minh).
2. Chứng minh CD là tiếp tuyến của đường tròn (O).
   Ta có AC và AH là 2 tiếp tuyến cắt nhau tại A của (M)
   $\Rightarrow MA$ là tia phân giác của $\widehat{CMH}$ (tính chất của 2 tiếp tuyến cắt nhau).
   $\Leftrightarrow \widehat{HMA} = \dfrac{1}{2}\widehat{CMH}$.
   Tương tự ta có $\widehat{HMB} = \dfrac{1}{2}\widehat{DMH}$.
   Suy ra
$$\begin{aligned} & \widehat{HMA} + \widehat{HMB} = \frac{1}{2}\widehat{CMH} + \frac{1}{2}\widehat{DMH} \\ \Leftrightarrow\ & \widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{DMC} \\ \Leftrightarrow\ & \widehat{CMD} = 180^\circ \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad C, D, M \quad \text{thẳng hàng.}$$

Suy ra M là trung điểm của CD hay tứ giác $ACDB$ là hình thang vuông, đáy AC, BD.
Mặt khác AC và BD là tiếp tuyến của (M) (giả thiết)
$\Leftrightarrow AC \perp CD; BD \perp CD \Leftrightarrow AC \parallel BD$.
Lại có O là trung điểm của AB nên OM là đường trung bình của hình thang $ACDB$ suy ra $OM \parallel BD$.
$OM \perp CD \Leftrightarrow CD$ là tiếp tuyến của (O) (điều phải chứng minh).

3. Gọi K là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng $KH \parallel AC$.
   Ta có $AC \parallel BD \Rightarrow \dfrac{CK}{KB} = \dfrac{AC}{BD}$ (định lý Talet).
   Mà $AC = AH$, $BD = BH$ (chứng minh trên)
   $\Rightarrow \dfrac{CK}{KB} = \dfrac{AH}{HB} \Rightarrow HK \parallel AC$ (định lí Talet đảo).
   Xét $\triangle ACM$ và $\triangle AHM$ có: $\begin{cases} AC = AH & \text{(tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)} \\ OE = OD & \text{(bán kính).} \end{cases}$

□

Bài 3. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn (O) (C khác A và B), kẻ CH vuông góc với AB tại H.

1. Chứng minh tam giác ABC vuông tại C và $CH^2 = AC \cdot BC \cdot \sin A \cdot \cos A$.

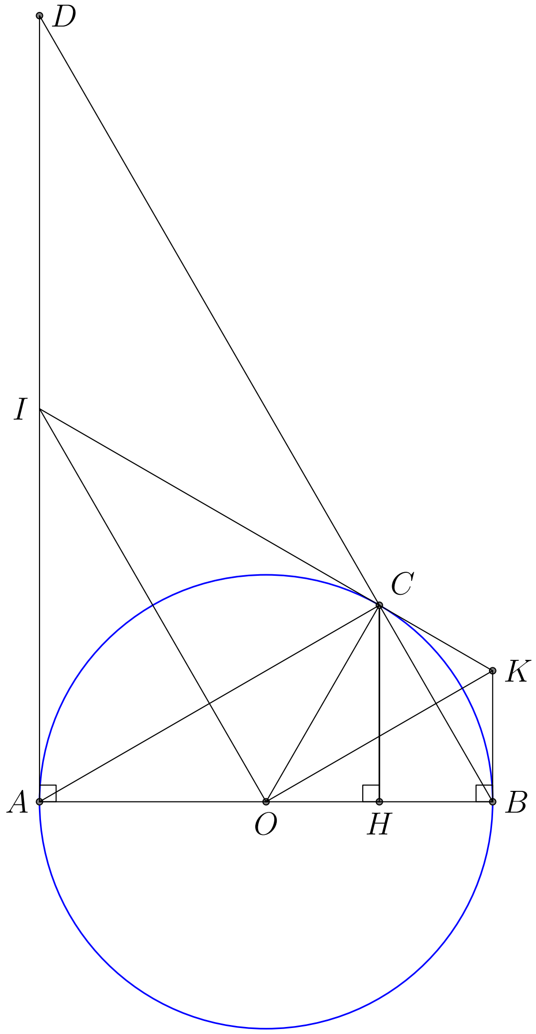
2. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt tia BC ở D. Gọi I là trung điểm của AD. Chứng minh đường thẳng IC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

3. Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt tia IC ở K. Chứng minh $IA \cdot BK = R^2$.

4. Xác định vị trí điểm C trên đường tròn (O) để diện tích tứ giác $ABKI$ nhỏ nhất.

(Kiểm tra Học kì 1 Toán 9, Thừa Thiên Huế, năm học 2013-2014)

Lời giải.



1. Chứng minh tam giác ABC vuông tại C và $CH^2 = AC \cdot BC \cdot \sin A \cdot \cos A$.

   Điểm C thuộc đường tròn (O) (C khác A và B) nên $OC = OA = OB = R = \dfrac{AB}{2}$.

   Tam giác ABC có trung tuyến $CO = \dfrac{AB}{2}$ suy ra $\triangle ABC$ vuông tại C (dấu hiệu nhận biết).

   Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ACB vuông tại C, đường cao CH ta có:

$$\begin{aligned} & CH^2 = AH \cdot BH \\ \Leftrightarrow\ & CH^2 = AC \cdot \cos A \cdot BC \cdot \sin A \\ \Leftrightarrow\ & CH^2 = AC \cdot BC \cdot \sin A \cdot \cos A \\ \Rightarrow\ & \text{Điều phải chứng minh.} \end{aligned}$$

2. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt tia BC ở D. Gọi I là trung điểm của AD. Chứng minh đường thẳng IC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

   Xét $\triangle ACD$ vuông tại C có I là trung điểm của cạnh huyền AD (giả thiết)

   $\Rightarrow IA = IC = \dfrac{AD}{2}$.

   Xét $\triangle AIO$ và $\triangle CIO$ có:

   $\begin{cases} IA = IC & \text{(Chứng minh trên)} \\ OA = OC & \text{(bán kính của đường tròn)} \\ OI \quad \text{chung.} \end{cases}$

   $\Rightarrow \triangle AIO = \triangle CIO$ (cạnh - cạnh - cạnh).

$\Rightarrow \widehat{IAO} = \widehat{ICO}$ (2 góc tương ứng của 2 tam giác bằng nhau).
$\Rightarrow \widehat{ICO} = 90^\circ \Rightarrow OC \perp IC$ hay IC là tiếp tuyến của (O).
Suy ra điều phải chứng minh.

3. Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt tia IC ở K. Chứng minh $IA \cdot BK = R^2$. Ta có IA, IC là tiếp tuyến của (O) cắt nhau tại I
$\Rightarrow IA = IC$ và OI là tia phân giác của $\widehat{ACO}$ (tính chất của 2 tiếp tuyến cắt nhau).
$\Rightarrow IA = IC$ và $\widehat{IOC} = \dfrac{\widehat{AOC}}{2}$.
Tương tự ta có $KC = KB$ và $\widehat{KOC} = \dfrac{\widehat{BOC}}{2}$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow && \widehat{IOC} + \widehat{KOC} = \frac{\widehat{AOC}}{2} + \frac{\widehat{BOC}}{2} \\
&\Leftrightarrow && \widehat{IOK} = \frac{\widehat{AOB}}{2} \\
&\Leftrightarrow && \widehat{IOK} = \frac{180^\circ}{2} \\
&\Leftrightarrow && \widehat{IOK} = 90^\circ \\
&\Leftrightarrow && \triangle IOK \text{ vuông tại } O.
\end{aligned}$$

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông $\triangle IOK$ vuông tại O, đường cao OC ta có:

$$\begin{aligned}
& && OC^2 = IC \cdot KC \\
&\Leftrightarrow && OC^2 = IA \cdot BK \\
&\Leftrightarrow && R^2 = IA \cdot BK \\
&\Rightarrow && \text{điều phải chứng minh.}
\end{aligned}$$

4. Xác định vị trí điểm C trên đường tròn (O) để diện tích tứ giác $ABKI$ nhỏ nhất. Ta có $\triangle AIO = \triangle CIO$ (chứng minh trên).
Tương tự ta có: $\Rightarrow \triangle KBO = \triangle KCO$.
Suy ra $S_{AIKB} = 2 \cdot (S_{CIO} + S_{KOC}) = 2 \cdot S_{IOK} = OC \cdot KI = R \cdot KI$.
Mà $KI \geq AB \Rightarrow S_{AIKB} \geq R \cdot AB = 2 \cdot R^2$.
Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow KI = AN \Leftrightarrow C$ là điểm chính giữa cung AB.
Vậy S_{AIKB} đạt GTLN là $2R^2$ khi C là điểm chính giữa cung AB.

□

Bài 4. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Lấy C thuộc (O), gọi E là trung điểm BC. Tiếp tuyến tại C của O cắt OE ở D.

1. Chứng minh $\triangle ACB$ vuông và OE vuông góc với BC.

2. Chứng minh DB là tiếp tuyến của (O).

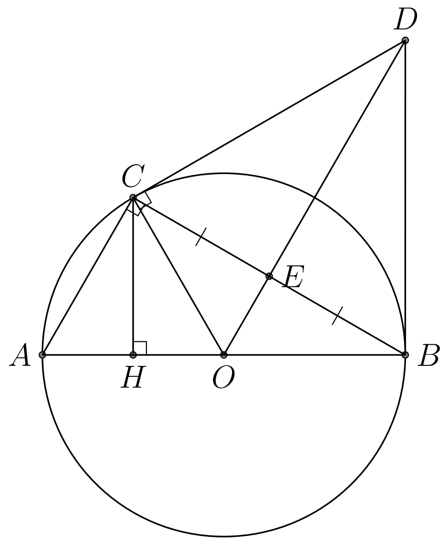
3. Kẻ CH vuông góc với AB. Chứng minh $CB \cdot OC = OD \cdot HC$.

(Đề thi Toán 9 Học kỳ 1 năm học 2017-2018, Quận 12, HCM)

Lời giải.

1. Vì C thuộc đường tròn đường kính AB nên $\widehat{ACB}=90^\circ$ hay $\triangle ABC$ vuông tại C.
Vì E là trung điểm BC nên $OE\perp BC$ (liên hệ đường kính và dây cung).

2. Tam giác OCB cân tại O có $OE\perp BC$ nên OE cũng là tia phân giác của góc BOC suy ra $\widehat{COE}=\widehat{BOE}$.
Xét $\triangle ODC$ và $\triangle ODB$ có
OD là cạnh chung
$OC=OD=R$
$\widehat{COE}=\widehat{BOE}$ (cmt)
$\Rightarrow \triangle ODC=\triangle ODB$ (c.g.c)
$\Rightarrow \widehat{DBO}=\widehat{DCO}$ (hai góc tương ứng).
Mặt khác $\widehat{DCO}=90^\circ$ (tính chất tiếp tuyến) nên $\widehat{DBO}=90^\circ$ hay $DB\perp OB$, mặt khác OB là bán kính của (O).
Vậy DB là tiếp tuyến của đường tròn (O).



c) Ta có $\widehat{CBH}=\widehat{ODB}$ (cùng phụ góc $\widehat{DBE}$), mà $\widehat{ODC}=\widehat{ODB}$ suy ra $\widehat{ODC}=\widehat{CBH}$.
Xét hai tam giác vuông CHB và OCD có $\widehat{OHC}=\widehat{OCD}=90^\circ$ và $\widehat{ODC}=\widehat{CBH}$ nên $\triangle CHB\backsim\triangle OCD$ (g.g)
suy ra $\dfrac{CH}{OC}=\dfrac{BC}{OD}\Rightarrow CH\cdot OD=OC\cdot BC$ (đpcm).

□

Bài 5. Cho nửa đường tròn $(O;R)$, đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax và By của đường tròn (O).

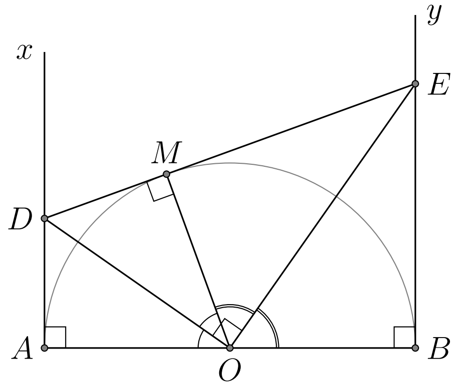
1. Chứng minh $Ax \mathbin{/\mkern-5mu/} By$.
2. Trên (O) lấy điểm M. Tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) lần lượt cắt Ax và By tại D,E. Chứng minh $DE=DA+BE$.
3. Chứng minh $\widehat{DOE}=90^\circ$ và $DA\cdot BE=R^2$.

(Đề thi Toán 9 Học kỳ 1 năm học 2017-2018, Thủ Đức, Hồ Chí Minh)

Lời giải.

a) Ax,By là 2 tiếp tuyến của nửa đường tròn $\Rightarrow Ax\perp AB$ và $By\perp AB\Rightarrow Ax \mathbin{/\mkern-5mu/} By$.

b) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có $DA=DM$ và $BE=EM$. Suy ra $DE=DM+EM=DA+BE$.



c) Cũng theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có $\widehat{AOD} = \widehat{DOM}$ và $\widehat{MOE} = \widehat{EOB}$.
Mà $\widehat{AOD} + \widehat{DOM} + \widehat{MOE} + \widehat{EOB} = \widehat{AOB} = 180^\circ$.
Suy ra $\widehat{DOE} = \widehat{DOM} + \widehat{MOE} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB} = \dfrac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$.
Hơn nữa, $DA \cdot BE = DM \cdot EM = OM^2 = R^2$.

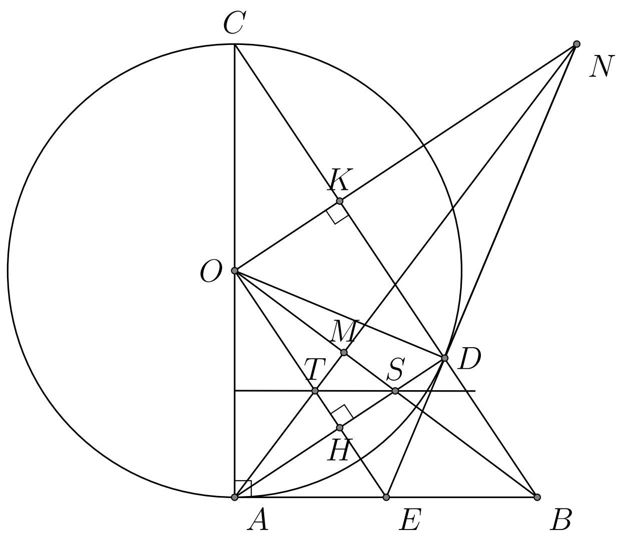
□

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB < AC)$. Vẽ đường tròn tâm O đường kính AC cắt cạnh BC tại D. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AD và DC.

1. Chứng minh tứ giác $OHKD$ là hình chữ nhật.
2. Tia OH cắt cạnh AB tại E. Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).
3. Tia OK cắt đường thẳng DE tại N và cắt đường tròn tâm O tại I. Gọi S là giao điểm của OB với AD. Đường thẳng đi qua S và vuông góc với AO cắt tia OH tại T. Chứng minh AT vuông góc với BO và 3 điểm A, T, N thẳng hàng.

(Đề thi Toán 9 Học kỳ 1 năm học 2017-2018, Trần Đại Nghĩa, HCM)

Lời giải.



1. Ta có $OH \perp AD \Rightarrow \widehat{OHD} = 90^\circ$; $OK \perp CD \Rightarrow \widehat{KDA} = 90^\circ$.
Mặt khác, tam giác ADC vuông tại D nên $\widehat{CDA} = 90^\circ$. Do đó tứ giác $OHKD$ là hình chữ nhật.

2. Ta có $\widehat{EDA} = \widehat{EAD}$ (OE là trung trực của AD).
$\widehat{EAD} = \widehat{ACD}$ (cùng phụ với góc $\widehat{ABC}$).
$\widehat{ACD} = \widehat{CDO}$ (tam giác OAD cân).
Suy ra $\widehat{EDA} = \widehat{CDO}$.
Mặt khác $\widehat{CDO} + \widehat{DAO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EDO} = \widehat{ADO} + \widehat{ADO} = \widehat{ADO} + \widehat{EDA} = 90^\circ$.
Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

3. Tam giác AOS có OH và ST là hai đường cao cắt nhau tại T nên T là trực tâm
$\Rightarrow AT$ là đường cao tam giác AOS hay $AT \perp OB$.
Gọi M là giao điểm của AT với OB. Để chứng minh A, T, N thẳng hàng ta cần chứng minh

$MN \perp OB$ tại M.
Tam giác OAB vuông tại A có AM là đường cao $\Rightarrow OM \cdot OB = OA^2$.
Tam giác OND vuông tại D có DK là đường cao $\Rightarrow OK \cdot ON = OD^2$.
Vì $OA = OD$ (bán kính đường tròn (O)) nên $OM \cdot OB = OK \cdot ON \Rightarrow \dfrac{OM}{ON} = \dfrac{OK}{OB}$.
Xét tam giác OMN và tam giác OKB có $\widehat{BON}$ chung và $\dfrac{OM}{ON} = \dfrac{OK}{OB}$
$\Rightarrow \triangle OMN \backsim \triangle OKB \Rightarrow \widehat{NMO} = \widehat{OKB} = 90° \Rightarrow NM \perp OB$.
Vậy A, T, N thẳng hàng.

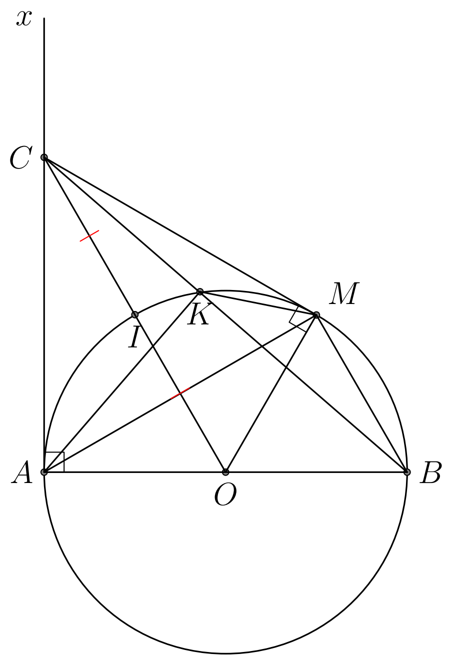
□

Bài 7. Cho đường tròn $(O; R)$ đường tính AB. Qua điểm A kẻ tia tiếp tuyến Ax đến đường tròn (O). Trên tai Ax lấy điểm C sao cho $AC > R$. Từ điểm C kẻ tiếp tuyến CM với đường tròn (O) (M là tiếp điểm).

1. Chứng minh rằng bốn điểm A, C, O, M cùng thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh rằng $MB \parallel OC$.
3. Gọi K là giao điểm thứ hai của BC với đường tròn (O). Chứng minh rằng $BC \cdot BK = 4R^2$.
4. Chứng minh rằng $\widehat{CMK} = \widehat{MBC}$.

(Đề thi Toán 9 Học kỳ 1 năm học 2017-2018,Bắc Từ Liêm, Hà Nội)

Lời giải.



1. Gọi I là trung điểm của OC.
Tam giác vuông CAO có AI là đường trung tuyến nên $AI = IO = IC$. (1)
Tương tự $MI = IO = IC$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $IC = IO = IA = IM$.
Vậy bốn điểm A, C, O, M cùng thuộc một đường tròn đường kính OC.

2. Ta có $\begin{cases} CA = CM \\ OA = OM = R \end{cases} \Rightarrow OC$ là đường trung trực của $AM \Rightarrow OC \perp AM$. (1)

Mặt khác, tam giác AMB có OM là đường trung tuyến và $OM = \dfrac{1}{2}AB$ nên $\triangle AMB$ vuông tại $M \Rightarrow BM \perp AM$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MB \parallel OC$.

3. Vì CA là tiếp tuyến của $(O;R)$ đường kính AB (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{CAB} = 90^\circ$ hay tam giác ABC vuông tại A.

K thuộc $(O;R)$ đường kính $AB \Rightarrow \widehat{AKB} = 90^\circ$ hay $AK \perp BC \Rightarrow AK$ là đường cao của $\triangle ABC$.

Xét tam giác ABC vuông tại A, đường cao AK, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$\begin{aligned} & AB^2 = BK \cdot BC \\ \Leftrightarrow\ & BC \cdot BK = 4R^2. \end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

4. Xét tam giác ABC vuông tại A, đường cao AK, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$AC^2 = CK \cdot CB.$$

Mà $AC = CM$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ & CM^2 = CK \cdot CB \\ \Rightarrow\ & \frac{CK}{CM} = \frac{CM}{CB} \\ \Rightarrow\ & \triangle CKM \backsim \triangle CMB \quad \text{(cạnh - góc - cạnh)} \\ \Rightarrow\ & \widehat{CMK} = \widehat{MBC}. \end{aligned}$$

□

Bài 8. Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm M nằm ngoài đường tròn. Qua M kẻ tiếp tuyến MA với đường tròn (A là tiếp điểm). Tia Mx nằm giữa MA và MO cắt đường tròn $(O;R)$ tại hai điểm C và D (C nằm giữa M và D). Gọi I là trung điểm của dây CD, kẻ AH vuông góc với MO tại H.

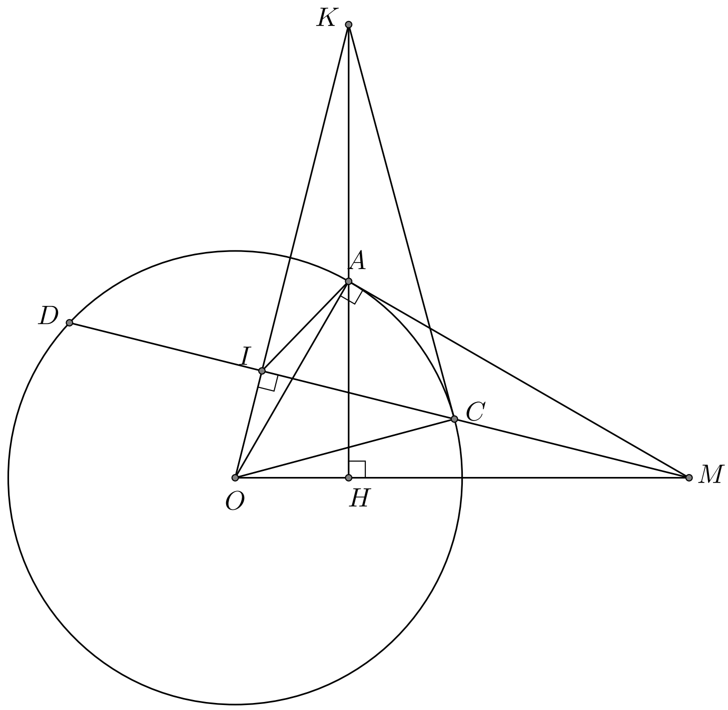
1. Tính $OH \cdot OM$ theo R.

2. Chứng minh: Bốn điểm M, A, I, O cùng thuộc một đường tròn.

3. Gọi K là giao điểm của OI với HA. Chứng minh KC là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$.

(Kiểm tra Học kì 1 Toán 9, Đề A, Sở GDĐT Tỉnh Thanh Hóa, năm 2016)

Lời giải.



1. Xét tam giác AMO vuông tại A có $AH \perp MO \Rightarrow OH \cdot OM = OA^2 = R^2$.

2. Xét đường tròn (O) có I là trung điểm dây $CD \Rightarrow OI \perp CD$.
   Do đó I thuộc đường tròn đường kính OM. (1)
   Mặt khác ta lại có MA là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $OA \perp AM$.
   Do đó A thuộc đường tròn đường kính OM. (2)
   Từ (1) và (2) ta có bốn điểm A, I, O, M thuộc đường tròn đường kính OM.

3. Xét $\triangle OHK$ và $\triangle OIM$ có:
   $\widehat{OHK} = \widehat{OIM} = 90°$; $\widehat{O}$ chung.
   $\Rightarrow \triangle OHK \backsim \triangle OIM$ (g.g).
   Suy ra $\dfrac{OH}{OI} = \dfrac{OK}{OM} \Rightarrow OI.OK = OH.OM = AO^2 = OC^2$
   $\Rightarrow \dfrac{OI}{OC} = \dfrac{OC}{OK} \Rightarrow \triangle OCK \backsim \triangle OIC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OCK} = \widehat{OIC} = 90°$.
   $\Rightarrow OC \perp KC$, mà C thuộc đường tròn (O).
   Do đó KC là tiếp tuyến của đường tròn (O) (đpcm).

□

Bài 9. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB và tia tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đối với AB. Từ điểm M trên Ax kẻ tiếp tuyến thứ hai MC với nửa đường tròn (C là tiếp điểm). Kẻ CH vuông góc với AB ($H \in AB$). Chứng minh rằng

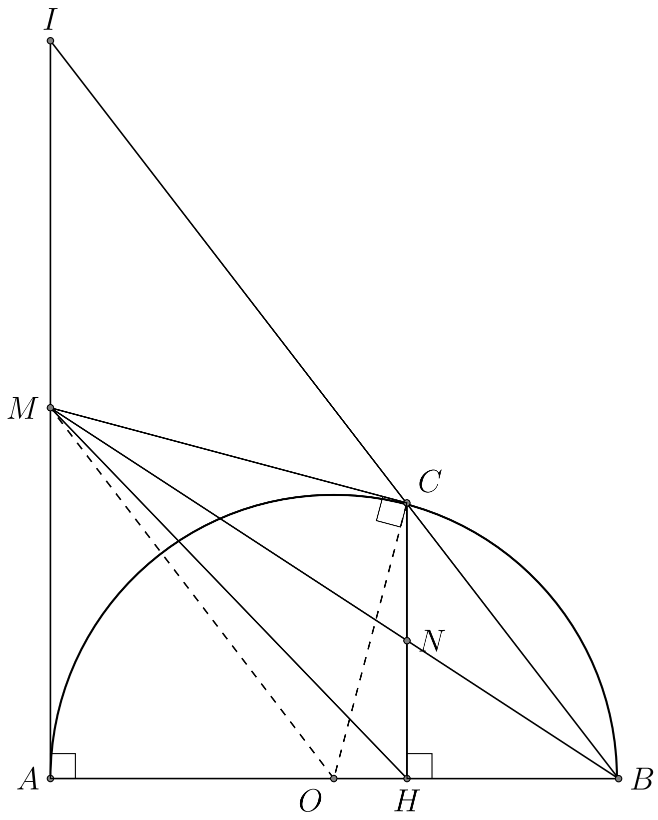
1. $\widehat{ACB} = 90°$.

2. $BC \parallel OM$.

3. MB đi qua trung điểm của đoạn thẳng CH.

(Kiểm tra Học kì 1 Toán 9, Vĩnh Long, năm 2017)

Lời giải.



1. Tam giác ABC có CO là đường trung tuyến và $CO = \frac{1}{2}AB$ nên tam giác ABC vuông tại C, do đó $\widehat{ACB} = 90^\circ$.

2. Có $MA = MC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) suy ra $\triangle MAC$ cân tại M , mà MO là phân giác của $\widehat{AMC}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau), nên MO cũng là đường cao của tam giác MAC. Do đó $MO \perp AC$. Lại có $BC \perp AC$ (ABC vuông tại C) $\Rightarrow BC \parallel OM$.

3. MB đi qua trung điểm của đoạn thẳng CH.
Gọi I là giao điểm của đường thẳng BC với Ax và N là giao điểm của MB với CH.
Trong tam giác ABI có $OA = OB$ (bán kính) và $OM \parallel BI$ (vì $OM \parallel BC$, $I \in BC$) $\Rightarrow MA = MI$. (1)
Mà $CH \parallel AI$ (cùng vuông góc với AB), do đó
$\frac{NH}{MA} = \frac{BN}{BM}$ và $\frac{NC}{MI} = \frac{BN}{BM}$ (hệ quả định lý Ta-let) $\Rightarrow \frac{NH}{MA} = \frac{NC}{MI}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $NH = NC$ hay BM đi qua trung điểm của đoạn thẳng CH.

□

Bài 10. Hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ tiếp xúc ngoài tại A $(R > r)$. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC, $B \in (O), C \in (O')$. Gọi M là trung điểm của OO'. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ M đến BC.

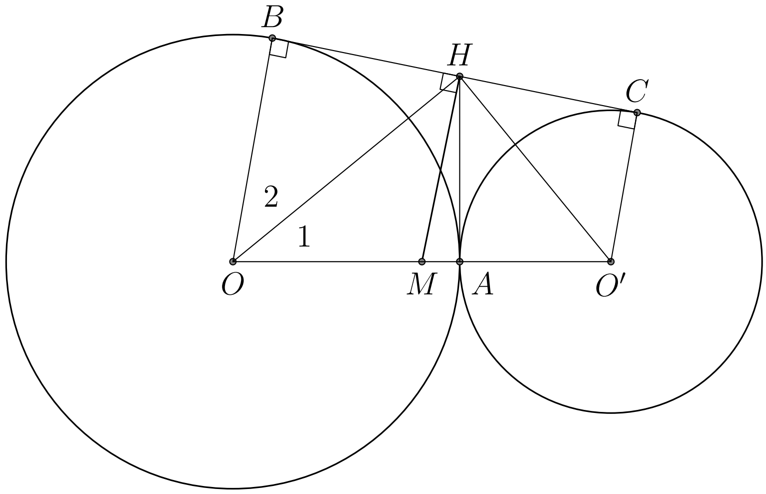
1. Tính số đo góc OHO'.

2. Chứng minh rằng OH là tia phân giác của góc AOB.

3. Chứng minh rằng AH là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O').

4. Cho $R = 5$ cm, $r = 2$ cm. Tính độ dài BC.

Lời giải.



1. Vì $\begin{cases} OB \perp BC \\ O'C \perp BC \\ MH \perp BC \end{cases} \Rightarrow OB \parallel O'C \parallel MH.$
   Hình thang $OBCO'$ có $MO = MO'$, $MH \parallel OB \parallel O'C$ nên $HB = HC$ và MH là đường trung bình.
   Suy ra $MH = \dfrac{OB + O'C}{2} = \dfrac{OA + O'A}{2} = \dfrac{OO'}{2}$.
   Tam giác OHO' có $MH = MO = MO'$ nên $\widehat{OHO'} = 90^\circ$.
2. $OB \parallel MH$ nên $\widehat{O_1} = \widehat{OHM}$ (so le trong).
   Tam giác MOH cân tại M nên $\widehat{O_2} = \widehat{OHM}$. Suy ra $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$.
   Vậy OH là tia phân giác của góc AOB.
3. $\triangle AOH = \triangle BOH$ (c.g.c) nên $\widehat{OAH} = \widehat{OBH} = 90^\circ$. AH vuông góc vơi OA tại A nên là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O').
4. Tam giác OHO' vuông tại A, đường cao HA nên $HA^2 = OA \cdot O'A = 5 \cdot 2 = 10$. Suy ra $HA = \sqrt{10}$. Do đó $BC = 2HA = 2\sqrt{10}$ cm.

□