

BÀI TẬP VÀ ĐÁP ÁN
Bài tập 1: Giải các phương trình bậc hai sau:

TT	PTBH	TT	PTBH
1	$x^2 - 11x + 30 = 0$	41	$x^2 - 16x + 84 = 0$
2	$x^2 - 10x + 21 = 0$	42	$x^2 + 2x - 8 = 0$
3	$x^2 - 12x + 27 = 0$	43	$5x^2 + 8x + 4 = 0$
4	$5x^2 - 17x + 12 = 0$	44	$x^2 - 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})x + 4\sqrt{6} = 0$
5	$3x^2 - 19x - 22 = 0$	45	$11x^2 + 13x - 24 = 0$
6	$x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$	46	$x^2 - 11x + 30 = 0$
7	$x^2 - 14x + 33 = 0$	47	$x^2 - 13x + 42 = 0$
8	$6x^2 - 13x - 48 = 0$	48	$11x^2 - 13x - 24 = 0$
9	$3x^2 + 5x + 61 = 0$	49	$x^2 - 13x + 40 = 0$
10	$x^2 - \sqrt{3}x - 2 - \sqrt{6} = 0$	50	$3x^2 + 5x - 1 = 0$
11	$x^2 - 24x + 70 = 0$	51	$5x^2 + 7x - 1 = 0$
12	$x^2 - 6x - 16 = 0$	52	$3x^2 - 2\sqrt{3}x - 3 = 0$
13	$2x^2 + 3x + 1 = 0$	53	$x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$
14	$x^2 - 5x + 6 = 0$	54	$x^2 - 2(\sqrt{3} - 1)x - 2\sqrt{3} = 0$
15	$3x^2 + 2x + 5 = 0$	55	$11x^2 + 13x + 24 = 0$
16	$2x^2 + 5x - 3 = 0$	56	$x^2 + 13x + 42 = 0$
17	$x^2 - 7x - 2 = 0$	57	$11x^2 - 13x - 24 = 0$
18	$3x^2 - 2\sqrt{3}x - 2 = 0$	58	$2x^2 - 3x - 5 = 0$
19	$-x^2 - 7x - 13 = 0$	59	$x^2 - 4x + 4 = 0$
20	$\sqrt{2}x^2 - 2(\sqrt{3} - 1)x - 3\sqrt{2} = 0$	60	$x^2 - 7x + 10 = 0$
21	$3x^2 - 2x - 1 = 0$	61	$4x^2 + 11x - 3 = 0$
22	$x^2 - 8x + 15 = 0$	62	$3x^2 + 8x - 3 = 0$
23	$2x^2 + 6x + 5 = 0$	63	$x^2 + x + 1 = 0$
24	$5x^2 + 2x - 3 = 0$	64	$x^2 + 16x + 39 = 0$
25	$x^2 + 13x + 42 = 0$	65	$3x^2 - 8x + 4 = 0$
26	$x^2 - 10x + 2 = 0$	66	$4x^2 + 21x - 18 = 0$
27	$x^2 - 7x + 10 = 0$	67	$4x^2 + 20x + 25 = 0$
28	$5x^2 + 2x - 7 = 0$	68	$2x^2 - 7x + 7 = 0$
29	$4x^2 - 5x + 7 = 0$	69	$-5x^2 + 3x - 1 = 0$
30	$x^2 - 4x + 21 = 0$	70	$x^2 - 2\sqrt{3}x - 6 = 0$
31	$5x^2 + 2x - 3 = 0$	71	$x^2 - 9x + 18 = 0$
32	$4x^2 + 28x + 49 = 0$	72	$3x^2 + 5x + 4 = 0$
33	$x^2 - 6x + 48 = 0$	73	$x^2 + 5 = 0$
34	$3x^2 - 4x + 2 = 0$	74	$x^2 - 4 = 0$
35	$x^2 - 16x + 84 = 0$	75	$x^2 - 2x = 0$
36	$x^2 + 2x - 8 = 0$	76	$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
37	$5x^2 + 8x + 4 = 0$	77	$9x^4 + 6x^2 + 1 = 0$
38	$x^2 - 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})x + 4\sqrt{6} = 0$	78	$2x^4 + 5x^2 + 2 = 0$
39	$x^2 - 6x + 8 = 0$	79	$2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$
40	$3x^2 - 4x + 2 = 0$	80	$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Bài tập 2. Tìm x, y trong các trường hợp sau:

a) $x + y = 17, x.y = 180$

e) $x^2 + y^2 = 61, x.y = 30$

b) $x + y = 25, x.y = 160$

f) $x - y = 6, x.y = 40$

c) $x + y = 30, x^2 + y^2 = 650$

g) $x - y = 5, x.y = 66$

d) $x + y = 11, x.y = 28$

h) $x^2 + y^2 = 25, x.y = 12$

Bài tập 3 a) Phương trình $x^2 - 2px + 5 = 0$. Có một nghiệm bằng 2, tìm p và nghiệm thứ hai.

b) Phương trình $x^2 + 5x + q = 0$ có một nghiệm bằng 5, tìm q và nghiệm thứ hai.

c) Cho phương trình: $x^2 - 7x + q = 0$, biết hiệu 2 nghiệm bằng 11. Tìm q và hai nghiệm của phương trình.

d) Tìm q và hai nghiệm của phương trình: $x^2 - qx + 50 = 0$, biết phương trình có 2 nghiệm và có một nghiệm bằng 2 lần nghiệm kia.

Bài giải:

a) Thay $x_1 = 2$ vào phương trình ban đầu ta được:

$$4 - 4p + 5 = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{4}$$

$$\text{Từ } x_1 x_2 = 5 \text{ suy ra } x_2 = \frac{5}{x_1} = \frac{5}{2}$$

b) Thay $x_1 = 5$ vào phương trình ban đầu ta được:

$$25 + 25 + q = 0 \Rightarrow q = -50$$

$$\text{Từ } x_1 x_2 = -50 \text{ suy ra } x_2 = \frac{-50}{x_1} = \frac{-50}{5} = -10$$

c) Vì vai trò của x_1 và x_2 bình đẳng nên theo đề bài giả sử $x_1 - x_2 = 11$ và theo VI-ÉT ta có $x_1 + x_2 = 7$, ta

$$\text{giải hệ sau: } \begin{cases} x_1 - x_2 = 11 \\ x_1 + x_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } q = x_1 x_2 = -18$$

d) Vì vai trò của x_1 và x_2 bình đẳng nên theo đề bài giả sử $x_1 = 2x_2$ và theo VI-ÉT ta có $x_1 x_2 = 50$. Suy ra

$$2x_2^2 = 50 \Leftrightarrow x_2^2 = 5^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -5 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

$$\text{Với } x_2 = -5 \text{ thì } x_1 = -10$$

$$\text{Với } x_2 = 5 \text{ thì } x_1 = 10$$

Bài tập 4 Cho $x_1 = 3$; $x_2 = 2$ lập một phương trình bậc hai chứa hai nghiệm trên

Bài giải: Theo hệ thức VI-ÉT ta có $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 5 \\ P = x_1 x_2 = 6 \end{cases}$ vậy x_1, x_2 là nghiệm của phương trình có dạng:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

Bài tập 5 Cho phương trình: $x^2 - 3x + 2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Không giải phương trình trên,

hãy lập phương trình bậc 2 có ẩn là y thỏa mãn: $y_1 = x_2 + \frac{1}{x_1}$ và $y_2 = x_1 + \frac{1}{x_2}$

Bài giải: Theo hệ thức VI-ÉT ta có:

$$S = y_1 + y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1} + x_1 + \frac{1}{x_2} = (x_1 + x_2) + \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) = (x_1 + x_2) + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$P = y_1 y_2 = \left(x_2 + \frac{1}{x_1}\right)\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) = x_1 x_2 + 1 + 1 + \frac{1}{x_1 x_2} = 2 + 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

Vậy phương trình cần lập có dạng: $y^2 - 9y + P = 0$

$$\text{hay } y^2 - \frac{9}{2}y + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 9y + 9 = 0$$

Bài tập 6 Tìm hai số a, b biết tổng $S = a + b = -3$ và tích $P = ab = -4$

Bài giải:

Vì $a + b = -3$ và $ab = -4$ nên a, b là nghiệm của phương trình: $x^2 + 3x - 4 = 0$
giải phương trình trên ta được $x_1 = 1$ và $x_2 = -4$

Vậy nếu a = 1 thì b = -4

nếu a = -4 thì b = 1

Bài tập 7 Tìm 2 số a và b biết

1. $a + b = 9$ và $a^2 + b^2 = 41$

2. $a - b = 5$ và $ab = 36$

3. $a^2 + b^2 = 61$ và $ab = 30$

Hướng dẫn: 1) Theo đề bài đã biết tổng của hai số a và b, vậy để áp dụng hệ thức VI-ÉT thì cần tìm tích của a và b.

$$\text{Từ } a + b = 9 \Rightarrow (a + b)^2 = 81 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 81 \Leftrightarrow ab = \frac{81 - (a^2 + b^2)}{2} = 20$$

Suy ra: a, b là nghiệm của phương trình có dạng: $x^2 - 9x + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 5 \end{cases}$

Vậy: Nếu a = 4 thì b = 5

nếu a = 5 thì b = 4

2) Đã biết tích: $ab = 36$ do đó cần tìm tổng: $a + b$

Cách 1: Đặt $c = -b$ ta có: $a + c = 5$ và $a.c = -36$

$$\text{Suy ra a, c là nghiệm của phương trình: } x^2 - 5x - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 9 \end{cases}$$

Do đó nếu a = -4 thì c = 9 nên b = -9

nếu a = 9 thì c = -4 nên b = 4

Cách 2: Từ $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab \Rightarrow (a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab = 169$

$$\Rightarrow (a + b)^2 = 13^2 \Rightarrow \begin{cases} a + b = -13 \\ a + b = 13 \end{cases}$$

*) Với $a + b = -13$ và $ab = 36$, nên a, b là nghiệm của phương trình: $x^2 + 13x + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = -9 \end{cases}$

Vậy a = -4 thì b = -9

*) Với $a + b = 13$ và $ab = 36$, nên a, b là nghiệm của phương trình: $x^2 - 13x + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 9 \end{cases}$

Vậy a = 9 thì b = 4

3) Đã biết $ab = 30$, do đó cần tìm a + b:

$$\text{Từ: } a^2 + b^2 = 61 \Rightarrow (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 61 + 2.30 = 121 = 11^2 \Rightarrow \begin{cases} a + b = -11 \\ a + b = 11 \end{cases}$$

*) Nếu $a + b = -11$ và $ab = 30$ thì a, b là hai nghiệm của phương trình: $x^2 + 11x + 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = -6 \end{cases}$

Vậy nếu a = -5 thì b = -6; nếu a = -6 thì b = -5

*) Nếu $a + b = 11$ và $ab = 30$ thì a, b là hai nghiệm của phương trình : $x^2 - 11x + 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 6 \end{cases}$

Vậy nếu $a = 5$ thì $b = 6$; nếu $a = 6$ thì $b = 5$.

Bài tập 8 Cho phương trình $x^2 - 4\sqrt{3}x + 8 = 0$ có 2 nghiệm $x_1 ; x_2$, không giải phương trình, tính

$$Q = \frac{6x_1^2 + 10x_1x_2 + 6x_2^2}{5x_1x_2^3 + 5x_1^3x_2}$$

$$\text{HD: } Q = \frac{6x_1^2 + 10x_1x_2 + 6x_2^2}{5x_1x_2^3 + 5x_1^3x_2} = \frac{6(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{5x_1x_2[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]} = \frac{6.(4\sqrt{3})^2 - 2.8}{5.8[(4\sqrt{3})^2 - 2.8]} = \frac{17}{80}$$

Bài tập 9 Cho phương trình : $(m-1)x^2 - 2mx + m - 4 = 0$ có 2 nghiệm $x_1 ; x_2$. Lập hệ thức liên hệ

giữa $x_1 ; x_2$ sao cho chúng không phụ thuộc vào m .

HD : Để phương trình trên có 2 nghiệm x_1 và x_2 thì :

$$\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m^2 - (m-1)(m-4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 5m-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \geq \frac{4}{5} \end{cases}$$

Theo hệ thức VI- ÉT ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m-1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m-4}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 + \frac{2}{m-1} \quad (1) \\ x_1 \cdot x_2 = 1 - \frac{3}{m-1} \quad (2) \end{cases}$$

Rút m từ (1) ta có :

$$\frac{2}{m-1} = x_1 + x_2 - 2 \Leftrightarrow m-1 = \frac{2}{x_1 + x_2 - 2} \quad (3)$$

Rút m từ (2) ta có :

$$\frac{3}{m-1} = 1 - x_1x_2 \Leftrightarrow m-1 = \frac{3}{1 - x_1x_2} \quad (4)$$

Đồng nhất các vế của (3) và (4) ta có:

$$\frac{2}{x_1 + x_2 - 2} = \frac{3}{1 - x_1x_2} \Leftrightarrow 2(1 - x_1x_2) = 3(x_1 + x_2 - 2) \Leftrightarrow 3(x_1 + x_2) + 2x_1x_2 - 8 = 0$$

Bài tập 10 Gọi $x_1 ; x_2$ là nghiệm của phương trình : $(m-1)x^2 - 2mx + m - 4 = 0$. Chứng minh rằng biểu

thức $A = 3(x_1 + x_2) + 2x_1x_2 - 8$ không phụ thuộc giá trị của m .

HD: Để phương trình trên có 2 nghiệm x_1 và x_2 thì :

$$\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m^2 - (m-1)(m-4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 5m-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \geq \frac{4}{5} \end{cases}$$

Theo hệ thức VI- ÉT ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m-1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m-4}{m-1} \end{cases} \quad \text{thay vào A ta có:}$$

$$A = 3(x_1 + x_2) + 2x_1x_2 - 8 = 3 \cdot \frac{2m}{m-1} + 2 \cdot \frac{m-4}{m-1} - 8 = \frac{6m + 2m - 8 - 8(m-1)}{m-1} = \frac{0}{m-1} = 0$$

Vậy $A = 0$ với mọi $m \neq 1$ và $m \geq \frac{4}{5}$. Do đó biểu thức A không phụ thuộc vào m

Bài tập 11 Cho phương trình : $x^2 - (m+2)x + (2m-1) = 0$ có 2 nghiệm $x_1; x_2$. Hãy lập hệ thức liên hệ giữa $x_1; x_2$ sao cho $x_1; x_2$ độc lập đối với m .

Hướng dẫn: Dễ thấy $\Delta = (m+2)^2 - 4(2m-1) = m^2 - 4m + 8 = (m-2)^2 + 4 > 0$

do đó phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1 và x_2

Theo hệ thức VI- ÉT ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 2 \\ x_1 \cdot x_2 = 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x_1 + x_2 - 2(1) \\ m = \frac{x_1 x_2 + 1}{2}(2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$x_1 + x_2 - 2 = \frac{x_1 x_2 + 1}{2} \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) - x_1 x_2 - 5 = 0$$

Bài tập 12 Cho phương trình : $x^2 + (4m+1)x + 2(m-4) = 0$.

Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 sao cho chúng không phụ thuộc vào m .

Hướng dẫn: Dễ thấy $\Delta = (4m+1)^2 - 4 \cdot 2(m-4) = 16m^2 + 33 > 0$ do đó phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1 và x_2

Theo hệ thức VI- ÉT ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -(4m+1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2(m-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m = -(x_1 + x_2) - 1(1) \\ 4m = 2x_1 x_2 + 16(2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$-(x_1 + x_2) - 1 = 2x_1 x_2 + 16 \Leftrightarrow 2x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 17 = 0$$

Bài tập 13: Cho phương trình : $mx^2 - 6(m-1)x + 9(m-3) = 0$

Tìm giá trị của tham số m để 2 nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn hệ thức : $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$

Bài giải: Điều kiện để phương trình có 2 nghiệm x_1 và x_2 là :

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = [3(m-21)]^2 - 9(m-3)m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 9(m^2 - 2m + 1) - 9m^2 + 27 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 9(m-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \geq -1 \end{cases}$$

Theo hệ thức VI-ÉT ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{6(m-1)}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{9(m-3)}{m} \end{cases}$ và từ giả thiết: $x_1 + x_2 = x_1 x_2$. Suy ra:

$$\frac{6(m-1)}{m} = \frac{9(m-3)}{m} \Leftrightarrow 6(m-1) = 9(m-3) \Leftrightarrow 6m - 6 = 9m - 27 \Leftrightarrow 3m = 21 \Leftrightarrow m = 7$$

(thỏa mãn điều kiện xác định)

Vậy với $m = 7$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức: $x_1 + x_2 = x_1 x_2$

Bài tập 14 Cho phương trình: $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 2 = 0$.

Tìm m để 2 nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức: $3x_1 x_2 - 5(x_1 + x_2) + 7 = 0$

Bài giải: Điều kiện để phương trình có 2 nghiệm x_1 & x_2 là:

$$\begin{aligned} \Delta' &= (2m+1)^2 - 4(m^2 + 2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 8 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 4m - 7 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Theo hệ thức VI-ÉT ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+1 \\ x_1 x_2 = m^2 + 2 \end{cases}$ và từ giả thiết $3x_1 x_2 - 5(x_1 + x_2) + 7 = 0$. Suy ra

$$\begin{aligned} 3(m^2 + 2) - 5(2m+1) + 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3m^2 + 6 - 10m - 5 + 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3m^2 - 10m + 8 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2(TM) \\ m = \frac{4}{3}(KTM) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy với $m = 2$ thì phương trình có 2 nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức: $3x_1 x_2 - 5(x_1 + x_2) + 7 = 0$

Bài tập 15

1. Cho phương trình: $mx^2 + 2(m-4)x + m + 7 = 0$

Tìm m để 2 nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức: $x_1 - 2x_2 = 0$

2. Cho phương trình: $x^2 + (m-1)x + 5m - 6 = 0$

Tìm m để 2 nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức: $4x_1 + 3x_2 = 1$

3. Cho phương trình: $3x^2 - (3m-2)x - (3m+1) = 0$.

Tìm m để 2 nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức: $3x_1 - 5x_2 = 6$

HD:

BT1: - ĐKXĐ: $m \neq 0$ & $m \leq \frac{16}{15}$

- Theo VI-ÉT:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-(m-4)}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{m+7}{m} \end{cases} \quad (1)$$

- Từ $x_1 - 2x_2 = 0$ Suy ra:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3x_2 \\ 2(x_1 + x_2) = 3x_1 \end{cases} \Rightarrow 2(x_1 + x_2)^2 = 9x_1 x_2 \quad (2)$$

- Thế (1) vào (2) ta đưa được về phương trình sau: $m^2 + 127m - 128 = 0 \Rightarrow m_1 = 1; m_2 = -128$

BT2: - ĐKXĐ: $\Delta = m^2 - 22m + 25 \geq 0 \Leftrightarrow 11 - \sqrt{96} \leq m \leq 11 + \sqrt{96}$

- Theo VI-ÉT:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m \\ x_1 x_2 = 5m - 6 \end{cases} \quad (1)$$

- Từ : $4x_1 + 3x_2 = 1$. Suy ra:
$$\begin{cases} x_1 = 1 - 3(x_1 + x_2) \\ x_2 = 4(x_1 + x_2) - 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 x_2 = [1 - 3(x_1 + x_2)] \cdot [4(x_1 + x_2) - 1] \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 = 7(x_1 + x_2) - 12(x_1 + x_2)^2 - 1$$

- Thế (1) vào (2) ta có phương trình : $12m(m-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

BT3: - Vì $\Delta = (3m-2)^2 + 4 \cdot 3(3m+1) = 9m^2 + 24m + 16 = (3m+4)^2 \geq 0$ với mọi số thực m nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.

- Theo VI-ÉT:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3m-2}{3} \\ x_1 x_2 = \frac{-(3m+1)}{3} \end{cases} \quad (1)$$

- Từ giả thiết: $3x_1 - 5x_2 = 6$. Suy ra:
$$\begin{cases} 8x_1 = 5(x_1 + x_2) + 6 \\ 8x_2 = 3(x_1 + x_2) - 6 \end{cases} \Rightarrow 64x_1 x_2 = [5(x_1 + x_2) + 6] \cdot [3(x_1 + x_2) - 6] \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow 64x_1 x_2 = 15(x_1 + x_2)^2 - 12(x_1 + x_2) - 36$$

- Thế (1) vào (2) ta được phương trình: $m(45m + 96) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -\frac{32}{15} \end{cases}$ (thỏa mãn)

Bài tập 16 Cho phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Hãy tìm điều kiện để phương trình có 2 nghiệm: **trái dấu, cùng dấu, cùng dương, cùng âm**

Ta lập bảng xét dấu sau:

Dấu nghiệm	x_1	x_2	$S = x_1 + x_2$	$P = x_1 x_2$	Δ	Điều kiện chung
trái dấu	\pm	\mp		$P < 0$	$\Delta \geq 0$	$\Delta \geq 0 ; P < 0.$
cùng dấu,	\pm	\pm		$P > 0$	$\Delta \geq 0$	$\Delta \geq 0 ; P > 0$
cùng dương,	$+$	$+$	$S > 0$	$P > 0$	$\Delta \geq 0$	$\Delta \geq 0 ; P > 0 ; S > 0$
cùng âm	$-$	$-$	$S < 0$	$P > 0$	$\Delta \geq 0$	$\Delta \geq 0 ; P > 0 ; S < 0.$

Ví dụ: Xác định tham số m sao cho phương trình:

$$2x^2 - (3m+1)x + m^2 - m - 6 = 0 \text{ có 2 nghiệm trái dấu.}$$

Để phương trình có 2 nghiệm trái dấu thì

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (3m+1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m^2 - m - 6) \geq 0 \\ P = \frac{m^2 - m - 6}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-7)^2 \geq 0 \forall m \\ P = (m-3)(m+2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 3$$

Vậy với $-2 < m < 3$ thì phương trình có 2 nghiệm trái dấu.

Bài tập 17 Cho phương trình : $x^2 + (2m-1)x - m = 0$

Gọi x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm m để :

$$A = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2 \text{ có giá trị nhỏ nhất.}$$

Bài giải: Theo VI-ÉT:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -(2m-1) \\ x_1x_2 = -m \end{cases}$$

Theo đề bài : $A = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2$

$$\begin{aligned} &= (2m-1)^2 + 8m \\ &= 4m^2 - 12m + 1 \\ &= (2m-3)^2 - 8 \geq -8 \end{aligned}$$

Suy ra: $\min A = -8 \Leftrightarrow 2m-3 = 0 \text{ hay } m = \frac{3}{2}$

Bài tập 18 Cho phương trình : $x^2 - mx + m - 1 = 0$

Gọi x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$B = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}$$

Ta có: Theo hệ thức VI-ÉT thì :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = m-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)} = \frac{2x_1x_2 + 3}{(x_1 + x_2)^2 + 2} = \frac{2(m-1) + 3}{m^2 + 2} = \frac{2m+1}{m^2 + 2}$$

Cách 1: Thêm bớt để đưa về dạng như phần (*) đã hướng dẫn

Ta biến đổi B như sau:

$$B = \frac{m^2 + 2 - (m^2 - 2m + 1)}{m^2 + 2} = 1 - \frac{(m-1)^2}{m^2 + 2}$$

$$\text{Vì } (m-1)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{(m-1)^2}{m^2 + 2} \geq 0 \Rightarrow B \leq 1$$

Vậy $\max B = 1 \Leftrightarrow m = 1$

Với cách thêm bớt khác ta lại có:

$$B = \frac{\frac{1}{2}m^2 + 2m + 1 - \frac{1}{2}m^2}{m^2 + 2} = \frac{\frac{1}{2}(m^2 + 4m + 4) - \frac{1}{2}(m^2 + 2)}{m^2 + 2} = \frac{(m+2)^2}{2(m^2 + 2)} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\text{Vì } (m+2)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{(m+2)^2}{2(m^2+2)} \geq 0 \Rightarrow B \geq -\frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \min B = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -2$$

Cách 2: Đưa về giải phương trình bậc 2 với ẩn là m và B là tham số, ta sẽ tìm điều kiện cho tham số B để phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m .

$$B = \frac{2m+1}{m^2+2} \Leftrightarrow Bm^2 - 2m + 2B - 1 = 0 \quad (\text{Với } m \text{ là ẩn, } B \text{ là tham số}) \quad (**)$$

$$\text{Ta có: } \Delta = 1 - B(2B - 1) = 1 - 2B^2 + B$$

Để phương trình (**) luôn có nghiệm với mọi m thì $\Delta \geq 0$

$$\text{hay } -2B^2 + B + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2B^2 - B - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (2B+1)(B-1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2B+1 \leq 0 \\ B-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \leq -\frac{1}{2} \\ B \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq B \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2B+1 \geq 0 \\ B-1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq -\frac{1}{2} \\ B \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy: } \max B = 1 \Leftrightarrow m = 1$$

$$\min B = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -2$$

Bài 19: (Bài toán tổng quát)

Tìm điều kiện tổng quát để phương trình $ax^2+bx+c = 0$ ($a \neq 0$) có:

1. Có nghiệm (có hai nghiệm) $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$
2. Vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0$
3. Nghiệm duy nhất (nghiệm kép, hai nghiệm bằng nhau) $\Leftrightarrow \Delta = 0$
4. Có hai nghiệm phân biệt (khác nhau) $\Leftrightarrow \Delta > 0$
5. Hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ và $P > 0$
6. Hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow \Delta > 0$ và $P < 0 \Leftrightarrow a.c < 0$
7. Hai nghiệm dương (lớn hơn 0) $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$; $S > 0$ và $P > 0$
8. Hai nghiệm âm (nhỏ hơn 0) $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$; $S < 0$ và $P > 0$
9. Hai nghiệm đối nhau $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ và $S = 0$
10. Hai nghiệm nghịch đảo nhau $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ và $P = 1$
11. Hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn $\Leftrightarrow a.c < 0$ và $S < 0$
12. Hai nghiệm trái dấu và nghiệm dương có giá trị tuyệt đối lớn hơn $\Leftrightarrow a.c < 0$ và $S > 0$

$$(\text{ở đó: } S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}; \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a})$$

Bài 20: Giải phương trình (giải và biện luận): $x^2 - 2x + k = 0$ (tham số k)

Giải

$$\Delta' = (-1)^2 - 1 \cdot k = 1 - k$$

Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 1 - k < 0 \Leftrightarrow k > 1 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 1 - k = 0 \Leftrightarrow k = 1 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 1$

Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 - k > 0 \Leftrightarrow k < 1 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = 1 - \sqrt{1 - k}; \quad x_2 = 1 + \sqrt{1 - k}$$

Kết luận:

Nếu $k > 1$ thì phương trình vô nghiệm

Nếu $k = 1$ thì phương trình có nghiệm $x=1$

Nếu $k < 1$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = 1 - \sqrt{1-k}$; $x_2 = 1 + \sqrt{1-k}$

Bài 21: Cho phương trình $(m-1)x^2 + 2x - 3 = 0$ (1) (tham số m)

- Tìm m để (1) có nghiệm
- Tìm m để (1) có nghiệm duy nhất? tìm nghiệm duy nhất đó?
- Tìm m để (1) có 1 nghiệm bằng 2? khi đó hãy tìm nghiệm còn lại (nếu có)?

Giải

a) + Nếu $m-1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ thì (1) có dạng $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ (là nghiệm)

+ Nếu $m \neq 1$. Khi đó (1) là phương trình bậc hai có: $\Delta' = 1^2 - (-3)(m-1) = 3m-2$

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 3m-2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}$

+ Kết hợp hai trường hợp trên ta có: Với $m \geq \frac{2}{3}$ thì phương trình có nghiệm

b) + Nếu $m-1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ thì (1) có dạng $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ (là nghiệm)

+ Nếu $m \neq 1$. Khi đó (1) là phương trình bậc hai có: $\Delta' = 1 - (-3)(m-1) = 3m-2$

(1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta' = 3m-2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$ (thỏa mãn $m \neq 1$)

Khi đó $x = -\frac{1}{m-1} = -\frac{1}{\frac{2}{3}-1} = 3$

+ Vậy với $m = 1$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{2}$

với $m = \frac{2}{3}$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$

c) Do phương trình có nghiệm $x_1 = 2$ nên ta có:

$$(m-1)2^2 + 2 \cdot 2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 4m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$$

Khi đó (1) là phương trình bậc hai (do $m-1 = \frac{3}{4}-1 = -\frac{1}{4} \neq 0$)

Theo định lý Viet ta có: $x_1 \cdot x_2 = \frac{-3}{m-1} = \frac{-3}{-\frac{1}{4}} = 12 \Rightarrow x_2 = 6$

Vậy $m = \frac{3}{4}$ và nghiệm còn lại là $x_2 = 6$

Bài 22: Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x - 3 - m = 0$ (ẩn số x)

- Chứng tỏ rằng phương trình có nghiệm x_1, x_2 với mọi m
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng âm
- Tìm m sao cho nghiệm số x_1, x_2 của phương trình thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 \geq 10$.
- Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc vào m
- Hãy biểu thị x_1 qua x_2

Giải

a) Ta có: $\Delta' = (m-1)^2 - (-3-m) = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}$

Do $\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ với mọi m ; $\frac{15}{4} > 0 \Rightarrow \Delta > 0$ với mọi m

\Rightarrow Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt

Hay phương trình luôn có hai nghiệm (đpcm)

b) Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c < 0 \Leftrightarrow -3 - m < 0 \Leftrightarrow m > -3$

Vậy $m > -3$

c) Theo ý a) ta có phương trình luôn có hai nghiệm

Khi đó theo định lí Viet ta có: $S = x_1 + x_2 = 2(m-1)$ và $P = x_1.x_2 = -(m+3)$

Khi đó phương trình có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow S < 0$ và $P > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(m-1) < 0 \\ -(m+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m < -3 \end{cases} \Leftrightarrow m < -3$$

Vậy $m < -3$

d) Theo ý a) ta có phương trình luôn có hai nghiệm

Theo định lí Viet ta có: $S = x_1 + x_2 = 2(m-1)$ và $P = x_1.x_2 = -(m+3)$

Khi đó $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(m-1)^2 + 2(m+3) = 4m^2 - 6m + 10$

Theo bài $A \geq 10 \Leftrightarrow 4m^2 - 6m \geq 0 \Leftrightarrow 2m(2m-3) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ 2m-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{3}{2} \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{3}{2} \\ m \leq 0 \end{cases}$$

Vậy $m \geq \frac{3}{2}$ hoặc $m \leq 0$

e) Theo ý a) ta có phương trình luôn có hai nghiệm

$$\text{Theo định lí Viet ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1.x_2 = -(m+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-2 \\ 2x_1.x_2 = -2m-6 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = -8$

Vậy $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 + 8 = 0$ là hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc m

f) Từ ý e) ta có: $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = -8 \Leftrightarrow x_1(1+2x_2) = -(8+x_2) \Leftrightarrow x_1 = -\frac{8+x_2}{1+2x_2}$

$$\text{Vậy } x_1 = -\frac{8+x_2}{1+2x_2} \quad \left(x_2 \neq -\frac{1}{2}\right)$$

Bài 23: Cho phương trình: $x^2 + 2x + m-1 = 0$ (m là tham số)

a) Phương trình có hai nghiệm là nghịch đảo của nhau

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $3x_1 + 2x_2 = 1$

c) Lập phương trình ẩn y thỏa mãn $y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2}; y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}$ với $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình ở

trên

Giải

a) Ta có $\Delta' = 1^2 - (m-1) = 2 - m$

Phương trình có hai nghiệm là nghịch đảo của nhau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m \geq 0 \\ m - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy $m = 2$

b) Ta có $\Delta' = 1^2 - (m-1) = 2 - m$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 2 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$ (*)

Khi đó theo định lí Viet ta có: $x_1 + x_2 = -2$ (1); $x_1 x_2 = m - 1$ (2)

Theo bài: $3x_1 + 2x_2 = 1$ (3)

$$\text{Từ (1) và (3) ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_1 + x_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -7 \end{cases}$$

Thế vào (2) ta có: $5(-7) = m - 1 \Leftrightarrow m = -34$ (thỏa mãn (**))

Vậy $m = -34$ là giá trị cần tìm

d) Với $m \leq 2$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm

Theo định lí Viet ta có: $x_1 + x_2 = -2$ (1); $x_1 x_2 = m - 1$ (2)

$$\text{Khi đó: } y_1 + y_2 = x_1 + x_2 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = x_1 + x_2 + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -2 + \frac{-2}{m-1} = \frac{2m}{1-m} \quad (m \neq 1)$$

$$y_1 y_2 = \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_1}\right) = x_1 x_2 + \frac{1}{x_1 x_2} + 2 = m - 1 + \frac{1}{m-1} + 2 = \frac{m^2}{m-1} \quad (m \neq 1)$$

$$\Rightarrow y_1; y_2 \text{ là nghiệm của phương trình: } y^2 - \frac{2m}{1-m} \cdot y + \frac{m^2}{m-1} = 0 \quad (m \neq 1)$$

Phương trình ẩn y cần lập là: $(m-1)y^2 + 2my + m^2 = 0$

Bài 24: Giải và biện luận phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + 2m+10 = 0$

Giải.

Ta có $\Delta' = (m+1)^2 - 2m + 10 = m^2 - 9$

+ Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow m < -3$ hoặc $m > 3$. Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = m + 1 - \sqrt{m^2 - 9} \quad x_2 = m + 1 + \sqrt{m^2 - 9}$$

+ Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3$

- Với $m = 3$ thì phương trình có nghiệm là $x_{1,2} = 4$

- Với $m = -3$ thì phương trình có nghiệm là $x_{1,2} = -2$

+ Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 3$ thì phương trình vô nghiệm

Kết luận:

- Với $m = 3$ thì phương trình có nghiệm $x = 4$
- Với $m = -3$ thì phương trình có nghiệm $x = -2$
- Với $m < -3$ hoặc $m > 3$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1 = m + 1 - \sqrt{m^2 - 9} \quad x_2 = m + 1 + \sqrt{m^2 - 9}$$

- Với $-3 < m < 3$ thì phương trình vô nghiệm

Bài 25: Giải và biện luận phương trình: $(m-3)x^2 - 2mx + m - 6 = 0$

Hướng dẫn

- Nếu $m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$ thì phương trình đã cho có dạng

$$-6x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

* Nếu $m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$. Phương trình đã cho là phương trình bậc hai có biệt số $\Delta' = m^2 - (m - 3)(m - 6) = 9m - 18$

- Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 9m - 18 = 0 \Leftrightarrow m = 2$. phương trình có nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a} = \frac{2}{2-3} = -2$$

- Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 2$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_{1,2} = \frac{m \pm 3\sqrt{m-2}}{m-3}$$

- Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < 2$. Phương trình vô nghiệm

Kết luận:

Với $m = 3$ phương trình có nghiệm $x = -\frac{1}{2}$

Với $m = 2$ phương trình có nghiệm $x_1 = x_2 = -2$

Với $m > 2$ và $m \neq 3$ phương trình có nghiệm $x_{1,2} = \frac{m \pm 3\sqrt{m-2}}{m-3}$

Với $m < 2$ phương trình vô nghiệm

Bài 26: Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình: $x^2 - 3x - 7 = 0$

a) Tính:

$$A = x_1^2 + x_2^2$$

$$B = |x_1 - x_2|$$

$$C = \frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1}$$

$$D = (3x_1 + x_2)(3x_2 + x_1)$$

a) lập phương trình bậc 2 có các nghiệm là $\frac{1}{x_1 - 1}$ và $\frac{1}{x_2 - 1}$

Giải:

Phương trình bậc hai $x^2 - 3x - 7 = 0$ có tích $ac = -7 < 0$, suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Theo hệ thức Viét, ta có: $S = x_1 + x_2 = 3$ và $p = x_1x_2 = -7$

a) Ta có

$$+ A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2p = 9 - 2(-7) = 23$$

$$+ (x_1 - x_2)^2 = S^2 - 4p \Rightarrow B = |x_1 - x_2| = \sqrt{S^2 - 4p} = \sqrt{37}$$

$$+ C = \frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} = \frac{(x_1 + x_2) - 2}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} = \frac{S - 2}{p - S + 1} = -\frac{1}{9}$$

$$+ D = (3x_1 + x_2)(3x_2 + x_1) = 9x_1x_2 + 3(x_1^2 + x_2^2) + x_1x_2 \\ = 10x_1x_2 + 3(x_1^2 + x_2^2) \\ = 10p + 3(S^2 - 2p) = 3S^2 + 4p = -1$$

b) Ta có:

$$S = \frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} = -\frac{1}{9} \text{ (theo câu a)}$$

$$p = \frac{1}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} = \frac{1}{p - S + 1} = -\frac{1}{9}$$

Vậy $\frac{1}{x_1 - 1}$ và $\frac{1}{x_2 - 1}$ là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - SX + p = 0 \Leftrightarrow X^2 + \frac{1}{9}X - \frac{1}{9} = 0 \Leftrightarrow 9X^2 + X - 1 = 0$$

Bài 27: Cho phương trình:

$$x^2 - (k - 1)x - k^2 + k - 2 = 0 \quad (1) \text{ (k là tham số)}$$

1. Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của k
2. Tìm những giá trị của k để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt trái dấu

3. Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1). Tìm k để: $x_1^3 + x_2^3 > 0$

Giải.

1. Phương trình (1) là phương trình bậc hai có:

$$\begin{aligned} \Delta &= (k-1)^2 - 4(-k^2 + k - 2) = 5k^2 - 6k + 9 = 5\left(k^2 - \frac{6}{5}k + \frac{9}{5}\right) \\ &= 5\left(k^2 - 2 \cdot \frac{3}{5}k + \frac{9}{25} + \frac{36}{25}\right) = 5\left(k - \frac{3}{5}\right) + \frac{36}{5} > 0 \text{ với mọi giá trị của } k. \end{aligned}$$

luôn có hai nghiệm phân biệt

2. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt trái dấu $\Leftrightarrow p < 0$

$$\Leftrightarrow -k^2 + k - 2 < 0 \Leftrightarrow -\left(k^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}k + \frac{1}{4} + \frac{7}{4}\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow -\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{4} < 0 \text{ luôn đúng với mọi } k. \text{ Vậy phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt trái dấu với}$$

mọi k

3. Ta có $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$

Vì phương trình có nghiệm với mọi k . Theo hệ thức Viét ta có

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= k - 1 \text{ và } x_1x_2 = -k^2 + k - 2 \\ \Leftrightarrow x_1^3 + x_2^3 &= (k-1)^3 - 3(-k^2 + k - 2)(k-1) \\ &= (k-1)[(k-1)^2 - 3(-k^2 + k - 2)] \\ &= (k-1)(4k^2 - 5k + 7) \\ &= (k-1)\left[\left(2k - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{87}{16}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } x_1^3 + x_2^3 > 0 &\Leftrightarrow (k-1)\left[\left(2k - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{87}{16}\right] > 0 \\ &\Leftrightarrow k - 1 > 0 \text{ (vì } \left(2k - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{87}{16} > 0 \text{ với mọi } k) \\ &\Leftrightarrow k > 1 \end{aligned}$$

Vậy $k > 1$ là giá trị cần tìm

Bài 28:

Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0$ (1) (m là tham số)

- Giải phương trình (1) với $m = -5$
- Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt với mọi m
- Tìm m để $|x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất (x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1) nói trong phần 2.)

Giải

1. Với $m = -5$ phương trình (1) trở thành $x^2 + 8x - 9 = 0$ và có 2 nghiệm là $x_1 = 1, x_2 = -9$

2. Có $\Delta' = (m+1)^2 - (m-4) = m^2 + 2m + 1 - m + 4 = m^2 + m + 5$

$$= m^2 + 2 \cdot m \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{19}{4} = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} > 0 \text{ với mọi } m$$

Vậy phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

3. Vì phương trình có nghiệm với mọi m , theo hệ thức Viét ta có:

$$x_1 + x_2 = 2(m+1) \text{ và } x_1x_2 = m - 4$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (x_1 - x_2)^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4(m+1)^2 - 4(m-4) \\ &= 4m^2 + 4m + 20 = 4(m^2 + m + 5) = 4\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4}\right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |x_1 - x_2| = 2\sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4}} \geq 2\sqrt{\frac{19}{4}} = \sqrt{19} \text{ khi } m + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Vậy $|x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{19}$ khi $m = -\frac{1}{2}$

Bài 29 : Cho phương trình $(m + 2)x^2 + (1 - 2m)x + m - 3 = 0$ (m là tham số)

- 1) Giải phương trình khi $m = -\frac{9}{2}$
- 2) Chứng minh rằng phương trình đã cho có nghiệm với mọi m
- 3) Tìm tất cả các giá trị của m sao cho phương trình có hai nghiệm phân biệt và nghiệm này gấp ba lần nghiệm kia.

Giải:

1) Thay $m = -\frac{9}{2}$ vào phương trình đã cho và thu gọn ta được

$$5x^2 - 20x + 15 = 0$$

phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1, x_2 = 3$

2) + Nếu: $m + 2 = 0 \Rightarrow m = -2$ khi đó phương trình đã cho trở thành;

$$5x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

+ Nếu: $m + 2 \neq 0 \Rightarrow m \neq -2$. Khi đó phương trình đã cho là phương trình bậc hai có biệt số:

$$\Delta = (1 - 2m)^2 - 4(m + 2)(m - 3) = 1 - 4m + 4m^2 - 4(m^2 - m - 6) = 25 > 0$$

Do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{2m - 1 + 5}{2(m + 2)} = \frac{2m + 4}{2m + 4} = 1 \quad x_2 = \frac{2m - 1 - 5}{2(m + 2)} = \frac{2(m - 3)}{2(m + 2)} = \frac{m - 3}{m + 2}$$

Tóm lại phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m

3) Theo câu 2 ta có $m \neq -2$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt. Để nghiệm này gấp 3 lần nghiệm kia ta xét 2 trường hợp

Trường hợp 1 : $3x_1 = x_2 \Leftrightarrow 3 = \frac{m - 3}{m + 2}$ giải ra ta được $m = -\frac{9}{2}$ (đã giải ở câu 1)

Trường hợp 2: $x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow 1 = 3 \cdot \frac{m - 3}{m + 2} \Leftrightarrow m + 2 = 3m - 9 \Leftrightarrow m = \frac{11}{2}$ (thỏa mãn điều kiện $m \neq -2$)

Kiểm tra lại: Thay $m = \frac{11}{2}$ vào phương trình đã cho ta được phương trình:

$15x^2 - 20x + 5 = 0$ phương trình này có hai nghiệm

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \text{ (thỏa mãn đầu bài)}$$

Bài 30: Cho phương trình: $mx^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0$ (1) với m là tham số.

1. Biện luận theo m sự có nghiệm của phương trình (1)
2. Tìm m để (1) có 2 nghiệm trái dấu.
3. Tìm m để (1) có một nghiệm bằng 3. Tìm nghiệm thứ hai.

Giải

1. + Nếu $m = 0$ thay vào (1) ta có: $4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} + \text{ Nếu } m \neq 0. \text{ Lập biệt số } \Delta' &= (m - 2)^2 - m(m - 3) \\ &= m^2 - 4m + 4 - m^2 + 3m \\ &= -m + 4 \end{aligned}$$

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow -m + 4 < 0 \Leftrightarrow m > 4 : (1) \text{ vô nghiệm}$$

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow -m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = 4 : (1) \text{ có nghiệm kép}$$

$$x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a} = \frac{m-2}{m} = \frac{4-2}{2} = \frac{1}{2}$$

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow -m + 4 > 0 \Leftrightarrow m < 4$: (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{m-2-\sqrt{-m+4}}{m} \quad ; \quad x_2 = \frac{m-2+\sqrt{-m+4}}{m}$$

Vậy : $m > 4$: phương trình (1) vô nghiệm

$m = 4$: phương trình (1) Có nghiệm kép $x = \frac{1}{2}$

$0 \neq m < 4$: phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{m-2-\sqrt{-m+4}}{m} \quad ; \quad x_2 = \frac{m-2+\sqrt{-m+4}}{m}$$

$m = 0$: Phương trình (1) có nghiệm đơn $x = \frac{3}{4}$

2. (1) có nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow \frac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow \frac{m-3}{m} < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-3 > 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-3 < 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m > 0 \end{cases}$$

Trường hợp $\begin{cases} m > 3 \\ m < 0 \end{cases}$ không thỏa mãn

Trường hợp $\begin{cases} m < 3 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 3$

3. *)Cách 1: Lập điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm

$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 0 \neq m \leq 4$ (*) (ở câu a đã có)

- Thay $x = 3$ vào phương trình (1) ta có :

$$9m - 6(m-2) + m-3 = 0 \Leftrightarrow 4m = -9 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{4}$$

- Đối chiếu với điều kiện (*), giá trị $m = -\frac{9}{4}$ thỏa mãn

*) Cách 2: Không cần lập điều kiện $\Delta' \geq 0$ mà thay $x = 3$ vào (1) để tìm được $m = -\frac{9}{4}$. Sau đó thay m

$$= -\frac{9}{4} \text{ vào phương trình (1): } -\frac{9}{4}x^2 - 2(-\frac{9}{4} - 2)x - \frac{9}{4} - 3 = 0 \Leftrightarrow -9x^2 + 34x - 21 = 0$$

$$\text{có } \Delta' = 289 - 189 = 100 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{7}{9} \end{cases}$$

Vậy với $m = -\frac{9}{4}$ thì phương trình (1) có một nghiệm $x = 3$

*) Để tìm nghiệm thứ 2, ta có 3 cách làm

Cách 1: Thay $m = -\frac{9}{4}$ vào phương trình đã cho rồi giải phương trình để tìm được $x_2 = \frac{7}{9}$ (Như phần trên đã làm)

Cách 2: Thay $m = -\frac{9}{4}$ vào công thức tính tổng 2 nghiệm:

$$x_1 + x_2 = \frac{2(m-2)}{m} = \frac{2(-\frac{9}{4}-2)}{-\frac{9}{4}} = \frac{34}{9}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{34}{9} - x_1 = \frac{34}{9} - 3 = \frac{7}{9}$$

Cách 3: Thay $m = -\frac{9}{4}$ vào công thức tính tích hai nghiệm

$$x_1 x_2 = \frac{m-3}{m} = \frac{-\frac{9}{4}-3}{-\frac{9}{4}} = \frac{21}{9} \Rightarrow x_2 = \frac{21}{9} : x_1 = \frac{21}{9} : 3 = \frac{7}{9}$$

Bài 31: Cho phương trình : $x^2 + 2kx + 2 - 5k = 0$ (1) với k là tham số

1. Tìm k để phương trình (1) có nghiệm kép
2. Tìm k để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện :
 $x_1^2 + x_2^2 = 10$

Giải.

1. Phương trình (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow k^2 - (2 - 5k) = 0$

$$\Leftrightarrow k^2 + 5k - 2 = 0 \quad (\text{có } \Delta = 25 + 8 = 33 > 0)$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{-5 - \sqrt{33}}{2}; k_2 = \frac{-5 + \sqrt{33}}{2}$$

Vậy có 2 giá trị $k_1 = \frac{-5 - \sqrt{33}}{2}$ hoặc $k_2 = \frac{-5 + \sqrt{33}}{2}$ thì phương trình (1) Có nghiệm kép.

2. Có 2 cách giải.

Cách 1: Lập điều kiện để phương trình (1) có nghiệm:

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow k^2 + 5k - 2 \geq 0 (*)$$

$$\text{Ta có } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$\text{Theo bài ra ta có } (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10$$

Với điều kiện (*), áp dụng hệ thức vi ét: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -2k$ và $x_1x_2 = 2 - 5k$

$$\text{Vậy } (-2k)^2 - 2(2 - 5k) = 10 \Leftrightarrow 2k^2 + 5k - 7 = 0$$

$$(\text{Có } a + b + c = 2 + 5 - 7 = 0) \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = -\frac{7}{2}$$

Để đối chiếu với điều kiện (*) ta thay lần lượt k_1, k_2 vào $\Delta' = k^2 + 5k - 2$

$$+ k_1 = 1 \Rightarrow \Delta' = 1 + 5 - 2 = 4 > 0; \text{ thỏa mãn}$$

$$+ k_2 = -\frac{7}{2} \Rightarrow \Delta' = \frac{49}{4} - \frac{35}{2} - 2 = \frac{49 - 70 - 8}{4} = -\frac{29}{8} \text{ không thỏa mãn}$$

Vậy $k = 1$ là giá trị cần tìm

Cách 2 : Không cần lập điều kiện $\Delta' \geq 0$. Cách giải là:

Từ điều kiện $x_1^2 + x_2^2 = 10$ ta tìm được $k_1 = 1$; $k_2 = -\frac{7}{2}$ (cách tìm như trên)

Thay lần lượt k_1, k_2 vào phương trình (1)

+ Với $k_1 = 1$: (1) $\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$ có $x_1 = 1, x_2 = 3$

+ Với $k_2 = -\frac{7}{2}$ (1) $\Rightarrow x^2 - 7x + \frac{39}{2} = 0$ (có $\Delta = 49 - 78 = -29 < 0$) .Phương trình vô nghiệm

Vậy $k = 1$ là giá trị cần tìm

Bài 32

Cho phương trình: $x^2 - 4x + m + 1 = 0$.

a/ Giải phương trình khi $m = 2$

b/ Tìm m để phương trình có nghiệm

c/ Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 = 10$

d/ Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^3 + x_2^3 = 34$

Giải

a/ Khi $m = 2$ PT $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$ do $a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$.

b/ $\Delta' = 4 - m - 1 = 3 - m$, phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 3 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 3$.

c/ Để phương trình có 2 nghiệm thì phải có $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 3$.

Khi đó: $x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10 \Leftrightarrow 16 - 2(m + 1) = 10 \Leftrightarrow m = 2$

d/ Để phương trình có 2 nghiệm thì phải có $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 3$.

$x_1^3 + x_2^3 = 34 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] = 34 \Leftrightarrow 4[16 - 3(m + 1)] = 34 \Leftrightarrow m + 1 = 10 \Leftrightarrow m = 9$

Bài 33

Cho phương trình: $x^2 - 2(m - 1)x - 3 - m = 0$.

a/ Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m .

b/ Tìm để phương trình có một nghiệm $x = 2$, tìm nghiệm kia

c/ Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 \geq 10$

d/ Tìm m để phương trình có nghiệm x_1, x_2 sao cho $P = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

Giải

a/ $\Delta' = m^2 - 2m + 1 + m + 3 = m^2 - m + 4 = (m - 1/2)^2 + 15/4 > 0 \Rightarrow$ với mọi m thì phương trình luôn có nghiệm.

b/ $x = 2$ thay vào phương trình ta có: $5m = 5 \Leftrightarrow m = 1$. Khi đó phương trình có dạng: $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \cup x = -2$.

c/ $x_1^2 + x_2^2 \geq 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \geq 10 \Leftrightarrow [2(m - 1)]^2 + 2(m + 3) \geq 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 4 + 2m + 6 \geq 10 \Leftrightarrow 4m^2 - 6m \geq 0 \Leftrightarrow m(2m - 3) \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 3/2 \cup m \leq 0$.

d/ $P = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = [2(m - 1)]^2 + 2(m + 3) = 4m^2 - 6m + 10 =$

$(2m - 3/2)^2 + 31/4 \Rightarrow P_{\min} = 31/4 \Leftrightarrow m = 3/4$.

Bài 34

Cho phương trình: $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$.

- a/ Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m.
- b/ Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_1x_2 = 27$.
- c/ Tìm m sao cho phương trình có nghiệm này bằng hai nghiệm kia.
- d/ Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1 = x_2^2$

Giải

a/ $\Delta' = m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow$ với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

b/ $2x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_1x_2 = 27 \Leftrightarrow 2[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] - 5x_1x_2 = 27 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2)^2 - 9x_1x_2 = 27 \Leftrightarrow 8m^2 - 9(2m + 1) = 27 \Leftrightarrow 8m^2 - 18m - 18 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 9m - 9 = 0$
 $\Leftrightarrow m = 3 \cup m = -3/4$.

c/ Giả sử phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = 2x_2 \Rightarrow$ ta có:

$x_1 + x_2 = 3x_2 = 2m \Leftrightarrow x_2 = 2m/3$ (1) và $x_1x_2 = 2x_2^2 = 2m - 1 \Leftrightarrow x_2^2 = (2m - 1)/2$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 4m^2/9 = (2m - 1)/2 \Leftrightarrow 8m^2 - 18m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = 3/4 \cup m = 3/2$

d/ Ta có: $x = m + m + 1 = 2m + 1 \cup x = m - m - 1 = -1$

Nếu $x_1 = 2m + 1, x_2 = -1$ thì ta có: $2m + 1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$

Nếu $x_1 = -1, x_2 = 2m + 1$ thì ta có: $-1 = (2m + 1)^2$ vô lý. Vậy $m = 0$.

Bài 35

Cho phương trình: $(m - 1)x^2 + 2(m - 1)x - m = 0$.

- a/ Tìm m để phương trình có nghiệm kép, tìm nghiệm kép này
- b/ Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt trái dấu
- c/ Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt đều âm
- d/ Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt đều dương

Giải

a/ Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow m \neq 1$ và $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + m^2 - m = 0$

$\Leftrightarrow 2m^2 - 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m - 1)(2m - 1) = 0 \Leftrightarrow m = 1 \cup m = 1/2$

Vậy $m = 1/2$ thì phương trình có nghiệm kép: $x = 1$.

b/ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt trái dấu \Leftrightarrow

$$\begin{cases} m \neq 1 \\ \Delta' > 0 \\ x_1x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ (m-1)(2m-1) > 0 \\ -\frac{m}{m-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 1/2 \\ m < 0 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \end{cases}$$

c/ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt đều âm \Leftrightarrow

$$\begin{cases} m \neq 1 \\ \Delta' > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ (m-1)(2m-1) > 0 \\ -\frac{m}{m-1} > 0 \\ -\frac{2(m-1)}{m-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 1/2 \Leftrightarrow 0 < m < 1/2 \\ 0 < m < 1 \end{cases}$$

d/ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt đều dương \Leftrightarrow

$$\begin{cases} m \neq 1 \\ \Delta' > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ (m-1)(2m-1) > 0 \\ -\frac{m}{m-1} > 0 \\ -\frac{2(m-1)}{m-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 1/2 \\ 0 < m < 1 \\ -2 > 0 \end{cases}$$

Loại

Vậy không tồn tại m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt đều dương.

Bài 36

Cho phương trình: $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 3m = 0$.

a/ Chứng minh rằng phương trình luôn có 2 nghiệm khi m thay đổi.

b/ Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $1 < x_1 < x_2 < 6$.

Giải

a/ $\Delta = 4m^2 - 12m + 9 - 4m^2 + 12m = 9 > 0 \Rightarrow$ phương trình luôn có 2 nghiệm.

$$b/ x_1 = \frac{2m-3-3}{2} = m-3; \quad x_2 = \frac{2m-3+3}{2} = m$$

Với mọi m ta luôn có: $m - 3 < m \Rightarrow 1 < m - 3 < m < 6 \Leftrightarrow 4 < m < 6$.

Bài 37

Cho phương trình: $3x^2 - mx + 2 = 0$. Tìm m để pt có 2 nghiệm thỏa mãn: $3x_1 x_2 = 2x_2 - 2$.

Giải

$$\text{ĐK: } \begin{cases} \Delta = m^2 - 24 \geq 0 \\ 3x_1 x_2 = 2x_2 - 2 \\ x_1 x_2 = 2/3 \\ x_1 + x_2 = m/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2\sqrt{6} \cup m \leq -2\sqrt{6} \\ 2 = 2x_2 - 2 \\ x_1 x_2 = 2/3 \\ x_1 + x_2 = m/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2\sqrt{6} \cup m \leq -2\sqrt{6} \\ x_2 = 2 \\ x_1 = 1/3 \\ m = 7 \end{cases}$$

Bài 38

Gọi a, b là nghiệm của phương trình: $x^2 + px + 1 = 0$

c, d là nghiệm của phương trình: $x^2 + qx + 1 = 0$

a/ Chứng minh rằng: $(a - c)(a - d)(b - c)(b - d) = (p - q)^2$

b/ Chứng minh rằng: $(a - c)(b - c)(a + d)(b + d) = q^2 - p^2$
Giải

 Theo định lý Viét ta có:
$$\begin{cases} a + b = -p \\ ab = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c + d = -q \\ cd = 1 \end{cases}$$

$$a/ VT = (a - c)(a - d)(b - c)(b - d) = (a^2 - ad - ac + cd)(b^2 - bc - bd + cd) =$$

$$[a^2 - a(c + d) + cd][b^2 - b(c + d) + cd] = (a^2 + aq + 1)(b^2 + bq + 1) =$$

$$a^2b^2 + a^2bq + a^2 + ab^2q + abq^2 + aq + b^2 + bq + 1 =$$

$$1 + aq + bq + q(a + b) + [(a + b)^2 - 2ab] + q^2 + 1 =$$

$$2 + q(a + b) - pq + p^2 - 2 + q^2 + 1 = p^2 - 2pq + q^2 = (p - q)^2 = VP.$$

$$b/ VT = (a - c)(b - c)(a + d)(b + d) = [ab - c(a + b) + c^2][ab + d(a + b) + d^2] = (1 + cp + c^2)(1 - dp + d^2) = 1 -$$

$$dp + d^2 + cp - cdp^2 + cd^2p + c^2 - c^2dp + c^2d^2 =$$

$$= 1 - dp + d^2 + cp - p^2 + dp + c^2 - cp + 1 = (c + d)^2 - 2cd - p^2 + 2 = q^2 - p^2 = VP.$$

Bài 39 Cho phương trình: $x^2 + (m + 1)x + 5 - m = 0$. (1)

- Tìm m để phương trình có nghiệm bằng -1. Tìm nghiệm còn lại.
- Giải phương trình khi m = -6.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.
- Với m tìm được ở câu c, hãy viết một hệ thức giữa x_1 và x_2 độc lập đối với m.

Lời giải

a) Phương trình (1) có một nghiệm bằng -1 nên:

$$(-1)^2 + (m + 1)(-1) + 5 - m = 0 \Rightarrow m = \frac{5}{2}$$

 Khi đó ta có phương trình: $x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow$ nghiệm còn lại của PT là: $\frac{5}{2}$

 b) Với m = -6 ta có PT: $x^2 - 5x + 11 = 0$ có $\Delta = -19 < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

 c) Ta có: $\Delta = m^2 + 6m - 19$.

 Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta = m^2 + 6m - 19 > 0$.

 Ta xét dấu Δ

m	$-3 - 2\sqrt{7}$	$-3 + 2\sqrt{7}$	
Δ	+	0	+

 Vậy khi $m < -3 - 2\sqrt{7}$ hoặc $m > -3 + 2\sqrt{7}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

 d) Ta có: $x_1 + x_2 = -m - 1$ (1); $x_1x_2 = -m$ (2).

 Từ (2) suy ra: $m = -x_1x_2 + 5$, thay vào (1): $x_1 + x_2 = x_1x_2 - 6$

 Vậy hệ thức cần tìm là: $x_1 + x_2 - x_1x_2 + 6 = 0$.

Bài 40 Giải các phương trình sau:

$$a) x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \quad b) \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0$$

Lời giải

 a) Đặt $x^2 = t$ (ĐK: $t \geq 0$). Khi đó phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 4t + 3 = 0$

Vì $a + b + c = 0$, nên phương trình có hai nghiệm: $t_1 = 1, t_2 = \frac{c}{a} = 3$ (TMĐK)

* Với $t_1 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

* Với $t_2 = 3 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Vậy phương trình có 4 nghiệm : $x = -1; 1; \sqrt{3}; -\sqrt{3}$.

b) ĐK: $x \neq 0$. Đặt $x + \frac{1}{x} = t$

Ta được: $t^2 - 4t + 3 = 0$. Theo câu a/ $t_1 = 1, t_2 = \frac{c}{a} = 3$

* $t_1 = 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 1$ (PT vô nghiệm)

* $t_2 = 3 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

Bài 41: Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2 = 0$ (I)

- Giải phương trình (I) khi $m = -2$
- Tìm m để phương trình (I) có nghiệm?. Có hai nghiệm phân biệt?.
- Tìm m để phương trình (I) có hai nghiệm trái dấu ?.
- Tìm m để phương trình có nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 = 4$
- Tìm m để phương trình có nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1 = 2x_2$
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dấu .
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng âm.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dương.
- Tìm m để phương trình có một nghiệm bằng 1. Tìm nghiệm còn lại.
- Tìm m để phương trình có nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $2x_1 - 4x_2 = -3$

Lời giải

a) Khi $m = -2$, phương trình (I) trở thành: $x^2 + 6x + 2 = 0$

Ta có $\Delta' = b'^2 - ac = 3^2 - 1.2 = 7 > 0 \rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{7}}{1} = -3 + \sqrt{7}; x_2 = \frac{-3 - \sqrt{7}}{1} = -3 - \sqrt{7}$$

b) Phương trình (I) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 - 1.(m^2 - 2) \geq 0 \Leftrightarrow -2m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{3}{2}$

Phương trình (I) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 - 1.(m^2 - 2) > 0 \Leftrightarrow -2m + 3 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$$

c) Phương trình (I) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow \frac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow m^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$

d) Điều kiện để phương trình có nghiệm $x_1; x_2$ là: $m \leq \frac{3}{2}$

Khi đó theo hệ thức Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 2(m-1); x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m^2 - 2$

Do đó $x_1^2 + x_2^2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4 \Leftrightarrow [2(m-1)]^2 - 2.(m^2 - 2) = 4 \Leftrightarrow 2m^2 - 4m + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (TMĐK)

e) Điều kiện để phương trình có nghiệm $x_1; x_2$ là: $m \leq \frac{3}{2}$

Khi đó theo Vi-et và đề bài ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) & (1) \\ x_1 x_2 = m^2 - 2 & (2) \\ x_1 = 2x_2 & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (3) ta có $x_2 = \frac{2(m-1)}{3}; x_1 = \frac{4(m-1)}{3}$ thay vào (2) ta được

$$\frac{2(m-1)}{3} \cdot \frac{4(m-1)}{3} = m^2 - 2 \Leftrightarrow 8(m-1)^2 = 9(m^2 - 2) \Leftrightarrow m^2 + 16m - 26 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -8 + 3\sqrt{10} \\ m = -8 - 3\sqrt{10} \end{cases}$$

f) Phương trình (I) có 2 nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3}{2} \\ m > \sqrt{2} \\ m < -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} < m \leq \frac{3}{2} \\ m < -\sqrt{2} \end{cases}$

g) Phương trình (I) có 2 nghiệm cùng âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ \frac{-b}{a} < 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3}{2} \\ m-1 < 0 \\ m^2 - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3}{2} \\ m < 1 \\ m > \sqrt{2} \\ m < -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < -\sqrt{2}$

h) Phương trình (I) có hai nghiệm cùng dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ \frac{-b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3}{2} \\ m > 1 \\ m > \sqrt{2} \\ m < -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2} < m \leq \frac{3}{2}$

i) Phương trình (I) có một nghiệm bằng 1

$$\Leftrightarrow a + b + c = 0 \Leftrightarrow 1 - 2(m-1) + m^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

Khi đó nghiệm còn lại là $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m^2 - 2}{1} = \frac{1^2 - 2}{1} = -1$

j) Phương trình (I) có nghiệm thỏa ĐK: $2x_1 - 4x_2 = -3$

ĐK: $m \leq \frac{3}{2}$ (để phương trình có nghiệm)

Theo hệ thức Vi-et và yêu cầu bài toán, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) & (1) \\ x_1 x_2 = m^2 - 2 & (2) \\ 2x_1 - 4x_2 = -4 & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (3) ta có $x_1 = \frac{4m-6}{3}; x_2 = \frac{2m}{3}$ thay vào (2), ta được

$$\frac{4m-6}{3} \cdot \frac{2m}{3} = m^2 - 2 \Leftrightarrow 2m(4m-6) = 9(m^2 - 2) \Leftrightarrow m^2 + 12m - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -6 + 3\sqrt{6} \\ m = -6 - 3\sqrt{6} \end{cases} \text{ (TM)}$$

Bài 42 : Xác định m để phương trình $x^2 + 5x + 3m - 1 = 0$

- a) Có hai nghiệm trái dấu
b) Có hai nghiệm âm phân biệt

Hớng dẫn :

$$a) \text{ Phương trình có hai nghiệm trái dấu } \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ ac < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0, \forall m \\ 3m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{1}{3}$$

$\frac{1}{3}$

Vậy $m < \frac{1}{3}$ thì phương trình có hai nghiệm trái dấu

b) Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0, \forall m \\ -12m + 29 > 0 \\ 3m - 1 > 0 \\ -5 < 0, \forall m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{29}{12} \\ m > \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < m < \frac{29}{12}$$

Vậy $\frac{1}{3} < m < \frac{29}{12}$ thì phương trình có hai nghiệm âm phân biệt

Bài 43: Cho phương trình $mx^2 - (m-1)x + 2 = 0, \quad m \neq 0$ (1)

Tìm m để (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 = 2$

Giải: Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 10m + 1 > 0 \Leftrightarrow (m-5)^2 - 24 > 0$$

$$\Leftrightarrow m > 5 + 2\sqrt{6} \text{ hoặc } m < 5 - 2\sqrt{6}$$

$$\text{- Theo hệ thức Vi-ét, ta có: } x_1 + x_2 = \frac{m-1}{m}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{m}$$

$$\text{- Theo đề bài } x_1^2 + x_2^2 = 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{m-1}{m}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{m} = 2 \Leftrightarrow m^2 + 6m - 1 = 0 (*)$$

$$\text{Giải phương trình (*) ta được } m_1 = \sqrt{10} - 3, m_2 = -\sqrt{10} - 3$$

Đối chiếu với điều kiện của tham số m $\Rightarrow m_1$ (loại) và m_2 (nhận)

$$\text{Vậy } m = -\sqrt{10} - 3$$

Bài 44: Cho phương trình $x^2 + 3x + m = 0$

x_1 và x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình. Không giải phương trình, tìm giá trị của m để :

a) $x_1 - x_2 = 6$

b) $x_1^2 + x_2^2 = 34$

c) $x_1^2 - x_2^2 = 30$

d) $x_1 = 2x_2$

e) $3x_1 + 2x_2 = 20$

Hướng dẫn:

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và $x_2 \Leftrightarrow \Delta = 9 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{4}$

Khi đó, theo định lí Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -3 \\ P = x_1 x_2 = m \end{cases}$$

a) $x_1 - x_2 = 6 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 36 \Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = 36$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 36 \Leftrightarrow 9 - 4m = 36 \Leftrightarrow m = \frac{-27}{4} < \frac{9}{4}$

Vậy: $m = \frac{-27}{4}$

b) $x_1^2 + x_2^2 = 34 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 34$. Từ đó tìm được $m = \frac{-25}{2} < \frac{9}{4}$

Vậy: $m = \frac{-25}{2}$

c) $x_1^2 - x_2^2 = 30 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 30 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = -10$

$\Leftrightarrow x_2 - x_1 = 10 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = 100$ (giả sử $x_2 > x_1$)

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 100 \Leftrightarrow 9 - 4m = 100 \Leftrightarrow m = \frac{-91}{4} < \frac{9}{4}$

Vậy: $m = \frac{-91}{4}$

d) Giải hệ
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 = 2x_2 \end{cases}$$
 Ta được
$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Theo định lí Vi-ét: $m = x_1 x_2 = 2 < \frac{9}{4}$

Vậy $m = 2$

e) Giải hệ
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 20 \\ x_1 + x_2 = -3 \end{cases}$$
 Ta được
$$\begin{cases} x_1 = 26 \\ x_2 = -29 \end{cases}$$

Theo định lí Vi-ét: $m = x_1 x_2 = -754 < \frac{9}{4}$

Vậy $m = -754$

Bài 45: Xác định các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - (m + 5)x - m + 6 = 0$

có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn :

a) Nghiệm này lớn hơn nghiệm kia 1 đơn vị

b) $2x_1 + 3x_2 = 13$

Hớng dẫn:

Phương trình có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta = m^2 + 14m + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow (m + 7 + 4\sqrt{3})(m + 7 - 4\sqrt{3}) \geq 0$. Sau khi giải bất phương trình này được kết quả:

$m \leq -7 - 4\sqrt{3}$ hoặc $m \geq -7 + 4\sqrt{3}$ (*)

$$x_2 > x_1 \text{ ta có hệ } \begin{cases} x_2 - x_1 = 1 & (1) \\ x_1 + x_2 = m + 5 & (2) \\ x_1 x_2 = -m + 6 & (3) \end{cases}$$

a) Giả sử

(1) + (2) $\Rightarrow x_2 = \frac{m + 6}{2}$. Thay vào (1) $\Rightarrow x_1 = \frac{m + 4}{2}$

Thay x_1, x_2 vào (3) $\Rightarrow m = 0$ hoặc $m = -14$ thỏa mãn điều kiện (*)

Vậy $m = 0$ hoặc $m = -14$

b) Ta có hệ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 13 \\ x_1 + x_2 = m + 5 \\ x_1 x_2 = -m + 6 \end{cases}$ Từ hệ này tìm được $m = 0$ hoặc $m = 1$

Bài 46: Cho phương trình bậc hai $3x^2 - mx + 2 = 0$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $3x_1 x_2 = 2x_1 - 2$

Tính x_1, x_2 ?

Hớng dẫn: Phương trình có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta = m^2 - 24m \geq 0$

$\Leftrightarrow m \geq 2\sqrt{6}$ hoặc $m \leq -2\sqrt{6}$

Ta có: $\begin{cases} 3x_1 x_2 = 2x_1 - 2 \\ x_1 + x_2 = \frac{m}{3} \\ x_1 x_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$. Tìm được $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{3}, m = 7$

Bài 47: Cho phương trình bậc hai $x^2 + ax + a + 7 = 0$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1^2 + x_2^2 = 10$

Hớng dẫn: Ta cần có điều kiện $\Delta = a^2 - 4a - 28 \geq 0$ (*)

Theo định lí Vi - ét $x_1 + x_2 = -a, x_1 x_2 = a + 7$

Từ $x_1^2 + x_2^2 = 10$ tìm được $a_1 = 6, a_2 = -4$

$a_1 = 6$ không thỏa mãn điều kiện (*) và $a_2 = -4$ thỏa mãn điều kiện (*)

Vậy $a = -4$

Bài 48: Cho phương trình bậc hai $x^2 + mx + m + 7 = 0$

a) Tính $x_1^2 + x_2^2$ và $x_1^3 + x_2^3$ theo m

b) Tìm giá trị của m để $x_1^2 + x_2^2 = 10$

c) Tìm giá trị của m để phương trình có một nghiệm bằng -2 rồi tính nốt nghiệm thứ hai.

Hướng dẫn:

a) $x_1^2 + x_2^2 = m^2 - 2m - 14$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2) \left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 \right]$$

Theo Vi - ét ta tính được $x_1^3 + x_2^3 = m(-m^2 + 3m + 21)$

b) $m_1 = 6$ (loại) và $m_2 = -4$ (nhận) $\Rightarrow m = -4$

c) $m = 11$ và $x_1 = -2, x_2 = -9$

Bài 49: Cho phương trình $x^2 + 3x - m = 0$

a) Tìm những giá trị của m để phương trình có nghiệm

b) Tìm giá trị của m để phương trình có một nghiệm bằng -2 . Tìm nốt nghiệm kia

Hướng dẫn:

a) Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{-9}{4}$

b) Thay $x_1 = -2$ vào phương trình ta có: $4 - 6 - m = 0 \Leftrightarrow m = -2$ thỏa mãn $m \geq \frac{-9}{4}$

Theo định lí Vi — ét. Ta có: $x_2 = S - x_1 = -3 - (-2) = -1$

Bài 50: Với giá trị nào của b thì phương trình

a) $2x^2 + bx - 10 = 0$ có một nghiệm bằng 5

b) $b^2x^2 - 15x - 7 = 0$ có một nghiệm bằng 7

c) $(b-1)x^2 - (b+1)x - 72 = 0$ có một nghiệm bằng 3 . Tính nghiệm còn lại

Kết quả:

a) $b = -8$ b) $b = \pm \frac{4\sqrt{7}}{7}$ c) $b = 14$ và $x_2 = \frac{-24}{13}$

Bài 51: Cho phương trình: $x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 4m + 6 = 0$

Tìm m để phương trình có nghiệm là 2 .

Tổng quát:

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có một nghiệm $x = x_1$.

Cách giải:

Thay $x = x_1$ vào phương trình $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$. Giải phương trình có ẩn là tham số.

Bài 52:

Cho phương trình: $x^2 - (3m+2n+4)x + 4m + 10n + 38 = 0$

Tìm m để phương trình có nghiệm là 1 và 2

Tổng quát:

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm $x = x_1; x = x_2$.

Cách 1:

Thay $x = x_1; x = x_2$ vào phương trình (1) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình có ẩn là tham số.

Cách 2:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Theo hệ thức Vi-ét

Thay $x = x_1; x = x_2$ vào hệ và giải ta được giá trị của tham số.

Bài 53: Lập phương trình bậc hai nhận hai số 2 và 3 làm nghiệm

Hướng dẫn: Phương trình có dạng $(x - 2)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

Bài 54:

Lập phương trình khi biết phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 3 - 2\sqrt{2}; x_2 = 3 + 2\sqrt{2}$

Bài 55: Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm x_1, x_2 liên lạc với nhau bởi hệ thức

$$\begin{cases} x_1 x_2 + (x_1 + x_2) = m & (1) \\ x_1 x_2 + 1 = m(x_1 + x_2) & (2) \end{cases}$$

Với $m \neq -1$

Đặt $S = x_1 + x_2, P = x_1 x_2$. Từ hệ trên ta tìm được $S = 1$ và $P = m - 1$

$$S^2 \geq 4P \Leftrightarrow 1^2 \geq 4(m - 1) \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{4}$$

ĐK:

$$-1 \neq m < \frac{5}{4}$$

Phương trình cần tìm là: $x^2 - x + m - 1 = 0$ với

Bài 56: Tìm hệ thức độc lập với m giữa những nghiệm số của phương trình

$$x^2 - 2(m + 1)x + 2m + 3 = 0$$

Hướng dẫn:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0, \forall m \\ m^2 - 2 \geq 0 \end{cases}$$

- Điều kiện để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 là

$$\Leftrightarrow m \leq -\sqrt{2} \text{ hoặc } m \geq \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} S = 2(m + 1) \\ P = 2m + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2m + 2 \\ P = 2m + 3 \end{cases} \Rightarrow S - P = -1$$

Hay $x_1 + x_2 - x_1 x_2 + 1 = 0$, đó là hệ thức độc lập với m giữa những nghiệm số của phương trình

Bài 57: Cho phương trình $(k - 1)x^2 - 2kx + k - 4 = 0$. Tìm hệ thức độc lập với k giữa những nghiệm số của phương trình

$$\begin{cases} k - 1 \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{5} \leq k \neq 1$$

Hướng dẫn: Để phương trình có nghiệm, ta phải có:

$$\begin{cases} S = \frac{2k}{k-1} \\ P = \frac{k-4}{k-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{S}{S-2} (S \neq 2) \\ k = \frac{P-4}{P-1} (P \neq 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{S}{S-2} = \frac{P-4}{P-1} \Leftrightarrow 3S + 2P - 8 = 0$$

Theo Vi - ét:

Hay $3(x_1 + x_2) + 2x_1x_2 - 8 = 0$, đó là hệ thức độc lập với k giữa những nghiệm số của phương trình

Bài 58:

Cho phương trình $x^2 - 2(m+5)x + 4m - 3 = 0$

- a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.
b) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m.

Kết quả: b) $2(x_1 + x_2) - x_1x_2 = 23$

Bài 59:

Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m = 0$

Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m.

Kết quả: $4x_1x_2 - (x_1 + x_2 - 2)^2 - 4(x_1 + x_2) + 8 = 0$

Bài 60: Cho phương trình $x^2 + 4x + 1 = 0$ (1)

a) Giải phương trình (1)

b) Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1). Hãy tính giá trị của biểu thức $B = x_1^3 + x_2^3$

Giải:

a) Xét phương trình $x^2 + 4x + 1 = 0$ (1). Ta có: $\Delta' = 4^2 - 4.1.1 = 16 - 4 = 12 > 0$

\Rightarrow Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{3}}{2.1} = -2 + \sqrt{3}; x_2 = \frac{-4 - 2\sqrt{3}}{2.1} = -2 - \sqrt{3}$

b) Áp dụng định lí Vi - ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$

Mà: $x_1^3 + x_2^3 = (x_1^3 + 3x_1^2 \cdot x_2 + 3x_1 \cdot x_2^2 + x_2^3) - (3x_1^2 \cdot x_2 + 3x_1 \cdot x_2^2) = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2)$
 $= (-4)^3 - 3.1.(-4) = -64 + 12 = -52$. Vậy $x_1^3 + x_2^3 = -52$

Bài 61 Cho phương trình $2x^2 - 7x + 4 = 0$ gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình

1) Không giải phương trình hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $x_1 + x_2; x_1 \cdot x_2$ b) $x_1^3 + x_2^3$ c) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$

2) Xác định phương trình bậc hai nhận $x_1^2 - x_2$ và $x_2^2 - x_1$ là nghiệm.

Giải:

1) Xét phương trình $2x^2 - 7x + 4 = 0$. Ta có: $\Delta = (-7)^2 - 4.2.4 = 49 - 32 = 17 > 0$

\Rightarrow Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

Áp dụng định lí Vi - ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{7}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = 2 \end{cases}$

b) Ta có: $x_1^3 + x_2^3 = (x_1^3 + 3x_1^2 \cdot x_2 + 3x_1 \cdot x_2^2 + x_2^3) - (3x_1^2 \cdot x_2 + 3x_1 \cdot x_2^2) = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2)$

$$= \left(\frac{7}{2}\right)^3 - 3 \cdot 2 \cdot \left(\frac{7}{2}\right) = \frac{343}{8} - \frac{42}{2} = \frac{343 - 168}{8} = \frac{175}{8} \text{ . Vậy } x_1^3 + x_2^3 = \frac{175}{8}$$

c) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \frac{1}{2} \sqrt{14 + 8\sqrt{2}}$

2) Đặt $u = x_1^2 - x_2$ và $v = x_2^2 - x_1$

Ta có: $u + v = (x_1^2 - x_2) + (x_2^2 - x_1) = x_1^2 + x_2^2 - (x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - (x_1 + x_2)$

$$= \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2 \cdot 2 - \frac{7}{2} = \frac{49}{4} - 4 - \frac{7}{2} = \frac{49 - 16 - 14}{4} = \frac{19}{4}$$

$$\Rightarrow u + v = \frac{19}{4}$$

Mà: $u \cdot v = (x_1^2 - x_2)(x_2^2 - x_1) = x_1^2 \cdot x_2^2 - (x_1^3 + x_2^3) + x_1 \cdot x_2 = (x_1 x_2)^2 - (x_1^3 + x_2^3) + x_1 x_2$

$$= 2^2 - \frac{175}{8} + 2 = 6 - \frac{175}{8} = \frac{48 - 175}{8} = \frac{-127}{8}$$

$$\Rightarrow u \cdot v = \frac{-127}{8}$$

Vì 2 số u và v có tổng $u + v = \frac{19}{4}$ và tích $u \cdot v = \frac{-127}{8}$. Nên $u ; v$ là 2 nghiệm của phương trình bậc hai:

$$X^2 - \frac{19}{4}X - \frac{127}{8} = 0$$

Vậy phương trình cần tìm là: $X^2 - \frac{19}{4}X - \frac{127}{8} = 0 \Leftrightarrow 8X^2 - 38X - 127 = 0$

Bài 62: Cho phương trình $2x^2 - 9x + 6 = 0$ gọi $x_1 ; x_2$ là hai nghiệm của phương trình

1) Không giải phương trình hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $x_1 + x_2 ; x_1 \cdot x_2$ b) $x_1^3 + x_2^3$

2) Xác định phương trình bậc hai nhận $2x_1 - 3x_2$ và $2x_2 - 3x_1$ là nghiệm.

Giải:

1) Xét phương trình $2x^2 - 9x + 6 = 0$. Ta có: $\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 81 - 48 = 33 > 0$

\Rightarrow Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1 ; x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{9}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = 3 \end{cases}$$

Áp dụng định lí Vi — ét, ta có:

b) Ta có: $x_1^3 + x_2^3 = (x_1^3 + 3x_1^2 \cdot x_2 + 3x_1 \cdot x_2^2 + x_2^3) - (3x_1^2 \cdot x_2 + 3x_1 \cdot x_2^2) = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2)$

$$= \left(\frac{9}{2}\right)^3 - 3 \cdot 3 \cdot \left(\frac{9}{2}\right) = \frac{729}{8} - \frac{81}{2} = \frac{729 - 324}{8} = \frac{405}{8}$$

Vậy $x_1^3 + x_2^3 = \frac{405}{8}$

2) Đặt $u = 2x_1 - 3x_2$ và $v = 2x_2 - 3x_1$

Ta có: $u + v = (2x_1 - 3x_2) + (2x_2 - 3x_1) = 2x_1 - 3x_2 + 2x_2 - 3x_1 = -(x_1 + x_2) = -\frac{9}{2}$
 $\Rightarrow u + v = -\frac{9}{2}$

Mà: $u \cdot v = (2x_1 - 3x_2) \cdot (2x_2 - 3x_1) = 4x_1 \cdot x_2 - 6(x_1^2 + x_2^2) + 9x_1 \cdot x_2 = 25x_1 \cdot x_2 - 6(x_1 + x_2)^2$
 $= 25 \cdot 3 - 6\left(\frac{9}{2}\right)^2 = 75 - \frac{243}{2} = \frac{150 - 243}{2} = \frac{-93}{2}$
 $\Rightarrow u \cdot v = \frac{-93}{2}$

Vì 2 số u và v có tổng $u + v = \frac{-9}{2}$ và tích $u \cdot v = \frac{-93}{2}$.
 $X^2 + \frac{9}{2}X - \frac{93}{2} = 0$

Nên $u; v$ là 2 nghiệm của phương trình bậc hai:

Vậy phương trình cần tìm là: $X^2 + \frac{9}{2}X - \frac{93}{2} = 0$

Bài 63: Cho phương trình $2x^2 + 5x - 6 = 0$ (1)

a) Giải phương trình (1)

b) Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1). Hãy tính giá trị của biểu thức: $B = x_1^3 + x_2^3$

Giải:

a) Xét phương trình $2x^2 + 5x - 6 = 0$ (1)

Ta có: $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 25 + 48 = 73 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{73}$

\Rightarrow Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-5 + \sqrt{73}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 + \sqrt{73}}{4}$ và $x_2 = \frac{-5 - \sqrt{73}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 - \sqrt{73}}{4}$

b) Áp dụng định lý Vi — ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{5}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = -3 \end{cases}$

Mà: $x_1^3 + x_2^3 = (x_1^3 + 3x_1^2 \cdot x_2 + 3x_1 \cdot x_2^2 + x_2^3) - (3x_1^2 \cdot x_2 + 3x_1 \cdot x_2^2)$
 $= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2)$
 $= \left(-\frac{5}{2}\right)^3 - 3 \cdot (-3) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{125}{8} - \frac{45}{2} = \frac{-125 - 180}{8} = \frac{-305}{8}$

Vậy $x_1^3 + x_2^3 = \frac{-305}{8}$

Bài 64: Cho phương trình $2x^2 - 7x + 1 = 0$ gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình
 Không giải phương trình, hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $x_1 + x_2; x_1 \cdot x_2$ b) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$

Giải:

a) Xét phương trình $2x^2 - 7x + 1 = 0$

- Ta có: $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 49 - 8 = 41 > 0 \Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{7}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x_1 > 0; x_2 > 0; x_1 \cdot x_2 > 0$$

- Áp dụng định lí Vi — ét ta có:

$$\Rightarrow \sqrt{x_1} > 0; \sqrt{x_2} > 0; \sqrt{x_1 \cdot x_2} > 0; \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 0$$

b) Đặt $A = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ ($A > 0$)

$$\Rightarrow A^2 = (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2 = x_1 + 2\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} + x_2 = (x_1 + x_2) + 2\sqrt{x_1 x_2}$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{7}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{7}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7 + 2\sqrt{2}}{2} \quad (\forall A > 0)$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{7 + 2\sqrt{2}}{2}} \quad \text{Vậy} \quad \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{\frac{7 + 2\sqrt{2}}{2}}$$

Bài 65: Chứng minh với bất kì giá trị nào của k, phương trình:

a) $7x^2 + kx - 23 = 0$ có hai nghiệm trái dấu

b) $12x^2 + 70x + k^2 + 1 = 0$ không thể có hai nghiệm dương

c) $x^2 - (k + 1)x + k = 0$ có một nghiệm bằng 1

Kết quả:

a) $ac < 0, \forall k \in \mathbb{R} \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm trái dấu $\forall k \in \mathbb{R}$

b) Ta có $S = \frac{-70}{12} < 0, \forall k \in \mathbb{R}$ nên phương trình không thể có hai nghiệm dương

c) Thay $x = 1$ vào phương trình thấy thỏa mãn $\forall k \in \mathbb{R} \Rightarrow$ phương trình có một nghiệm bằng 1

Bài 66: Cho phương trình $x^2 - (m - 1)x - m^2 + m - 2 = 0$

a) Chứng minh rằng phương trình có hai nghiệm trái dấu với mọi m

b) Gọi hai nghiệm của phương trình là x_1, x_2 . Tìm giá trị của m để $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất
Hớng dẫn:

a) Tính $ac = -\left[\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right] < 0, \forall m$ nên phương trình có hai nghiệm trái dấu với mọi m

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(\sqrt{3}m - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{11}{3} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \geq \frac{11}{3}$$

b) Tính

$$\text{Vậy } x_1^2 + x_2^2 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } \frac{11}{3} \text{ khi } \sqrt{3}m - \frac{2}{\sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$$

Bài 67 Cho phương trình $x^2 - 2(m - 4)x - 2m - 8 = 0$

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Cho $A = x_2(x_2 - 2) + x_1(x_1 - 2)$. Tìm m để A đạt giá trị nhỏ nhất.

Hớng dẫn:

a) Tính $\Delta = (m - 3)^2 + 15 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$

b) $\text{Min}A = 32 \Leftrightarrow m = 4$

Bài 68 Cho phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + 2m - 4 = 0$

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Cho $B = x_1^2 + x_2^2$. Tìm m để B đạt giá trị nhỏ nhất.

Hớng dẫn:

a) $\Delta' = (m - 2)^2 + 1 > 0 \Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt

b) $B = x_1^2 + x_2^2 = (2m - 3)^2 + 3 \geq 3 \Rightarrow \text{Min}B = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$

Bài 69 Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2(m + 1)x + 2m + 10 = 0$

a) Tìm m để phương trình có nghiệm

b) Cho biểu thức $P = 6x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2$. Tìm m sao cho P đạt giá trị nhỏ nhất, hãy tính giá trị ấy.

Hớng dẫn:

a) $m \leq -3$ hoặc $m \geq 3$

b) Tính được $P = 4(m + 2)^2 + 28$

Khi $m \leq -3 \Rightarrow m + 2 \leq -1 \Rightarrow (m + 2)^2 \geq 1 \Rightarrow P \geq 32$

Khi $m \geq 3 \Rightarrow m + 2 \geq 5 \Rightarrow (m + 2)^2 \geq 25 \Rightarrow P \geq 128$

Vậy $\text{Min}P = 32 \Leftrightarrow m = -3$

Bài 70 Cho phương trình $x^2 - 2(m - 6)x - 2m - 2 = 0$

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Cho $P = x_1^2 + x_2^2 - 26x_1x_2 - x_1^2 \cdot x_2^2$. Chứng minh giá trị của biểu thức P không phụ thuộc vào tham số m .

Kết quả: b) $P = 196 \Rightarrow$ giá trị của biểu thức P không phụ thuộc vào tham số m .

Bài 71 Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + m - 4 = 0$

a) Giải phương trình khi $m = 1$

b) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

c) Chứng minh biểu thức $A = x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1)$ không phụ thuộc vào giá trị của tham số m

Kết quả:

a) $x_1 = 2 + \sqrt{7}, x_2 = 2 - \sqrt{7}$

b) $\Delta' = (m + \frac{1}{2})^2 + \frac{19}{4} > 0$, với mọi m

c) $A = 10 \Rightarrow$ Giá trị biểu thức A không phụ thuộc vào giá trị của tham số m

Bài 72 Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + 2m + 10 = 0$. Tìm m sao cho hai nghiệm của phương trình

thỏa mãn $A = 10x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hớng dẫn: Để phương trình có hai nghiệm thì $m \leq -3$ hoặc $m \geq 3$

$10x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2 = 4(m + 3)^2 + 48 \geq 48$

Khi $m \leq -3 \Rightarrow m + 3 \leq 0 \Rightarrow (m + 3)^2 \geq 0 \Rightarrow A \geq 48$

Khi $m \geq 3 \Rightarrow m + 3 \geq 6 \Rightarrow (m + 3)^2 \geq 36 \Rightarrow A \geq 4 \cdot 36 + 48 = 192$
 $\Rightarrow \text{Min}A = 48 \Leftrightarrow m = -3$

Bài 73 Tìm hai số x, y trong các trường hợp sau:

a) $x + y = 11$ và $xy = 28$ b) $x - y = 5$ và $xy = 66$ c) $x^2 + y^2 = 25$ và $xy = 12$
 Hớng dẫn:

a) Hai số x, y là hai nghiệm của phương trình bậc hai $X^2 - 11X + 28 = 0$
 giải phương trình ta đợc $X_1 = 4, X_2 = 7$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$$

Do x, y có vai trò nh nhau nên có hai cặp số (x, y) thỏa mãn là

b) Đặt $Y = -y$, ta có $x + Y = 5, xY = -66$. Giải nh câu a tìm đợc
 $\begin{cases} x = 11 \\ Y = -6 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -6 \\ Y = 11 \end{cases}$ Hay $\begin{cases} x = 11 \\ y = 6 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -6 \\ y = -11 \end{cases}$

c) Tìm $x + y = \pm 7$

$$\text{Kết quả: } \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}$$

Bài 74: Tìm giá trị của tham số m để hai phương trình bậc hai sau có ít nhất một nghiệm chung, tìm nghiệm chung đó: $x^2 + mx + 1 = 0$ và $x^2 + x + m = 0$

Giải:

Cách 1:

- Hai phương trình có nghiệm chung khi và chỉ khi hệ $\begin{cases} x^2 + mx + 1 = 0 \\ x^2 + x + m = 0 \end{cases}$ có nghiệm (*)
 - Trừ vế với vế của hai phương trình trong hệ ta có phương trình: $(m - 1)x = m - 1$ (*)

+) Nếu $m = 1$. Thay trực tiếp vào hai phương trình ta có:

$x^2 + x + 1 = 0$ và $x^2 + x + 1 = 0$. Hai phương trình này đều vô nghiệm nên không có nghiệm chung

+) Nếu $m \neq 1$. Từ phương trình (*) $\Rightarrow x = 1$, đây là nghiệm chung của hai phương trình. Thay $x = 1$ vào một trong hai phương trình ta đợc $m = -2 \neq 1$

- Vậy $m = -2$ thì hai phương trình có nghiệm chung $x = 1$

Cách 2: Xét hai trường hợp

✓ Nếu $x = 0$, ta thấy phương trình thứ nhất $\Leftrightarrow 1 = 0$ (vô lí). Vậy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình thứ nhất \Rightarrow không là nghiệm chung của hai phương trình.

✓ Nếu $x \neq 0$. Từ hai phương trình rút ra $m = \frac{-x^2 - 1}{x}, m = -x^2 - x$

Ta có: $\frac{-x^2 - 1}{x} = -x^2 - x \Leftrightarrow x^2 + 1 = x^3 + x^2 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$, đây là nghiệm chung của hai phương trình $\Rightarrow m = -2$

Vậy $m = -2$ thì hai phương trình có nghiệm chung $x = 1$

Bài 75: Tìm giá trị của tham số k để hai phương trình bậc hai sau có ít nhất một nghiệm chung, tìm nghiệm chung đó: $2x^2 + (3k + 1)x - 9 = 0$ và $6x^2 + (7k - 1)x - 19 = 0$

Giải:

- Hai phương trình có nghiệm chung khi và chỉ khi hệ

$$\begin{cases} 2x^2 + (3k + 1)x - 9 = 0 & (1) \\ 6x^2 + (7k - 1)x - 19 = 0 & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

- Trừ vế với vế của hai phương trình trong hệ ta có phương trình: $(k + 2)x = 4$

+) Nếu $k = -2$. Thay vào phương trình (1), ta có: $2x^2 - 5x - 9 = 0$

Giải phương trình này ta được hai nghiệm là $x_1 = \frac{5 + \sqrt{97}}{4}, x_2 = \frac{5 - \sqrt{97}}{4}$

Thay $k = -2$ vào phương trình (2), ta có: $6x^2 - 15x - 19 = 0$

Giải phương trình này ta được hai nghiệm là $x_3 = \frac{15 + \sqrt{681}}{12}, x_4 = \frac{15 - \sqrt{681}}{12}$

$\Rightarrow k = -2$ thì hai phương trình không có nghiệm chung

+) Nếu $k \neq -2$. Từ phương trình (*) $\Rightarrow x = \frac{4}{k + 2}$. Thay vào phương trình (1), ta có:

$$3k^2 - 8k + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = 2, k_2 = \frac{2}{3} \text{ (thỏa mãn } k \neq -2)$$

Với $k_1 = 2$, phương trình (1) $\Leftrightarrow 2x^2 + 7x - 9 = 0$ có hai nghiệm

$$x_5 = 1, x_6 = \frac{-9}{2}$$

và phương trình (2) $\Leftrightarrow 6x^2 + 13x - 19 = 0$ có hai nghiệm

$$x_7 = 1, x_8 = \frac{-19}{2}$$

$\Rightarrow k_1 = 2$ thì hai phương trình có nghiệm chung $x = 1$

Tương tự với $k_2 = \frac{2}{3}$, hai phương trình có nghiệm chung $x = \frac{2}{3}$

- Kết luận:

$k = 2$ thì hai phương trình có nghiệm chung $x = 1$

$k = \frac{2}{3}$ thì hai phương trình có nghiệm chung $x = \frac{2}{3}$

Bài 76: Cho hai phương trình sau: $x^2 - (2m - 3)x + 6 = 0$ (1) và $2x^2 + x + m - 5 = 0$ (2)

Tìm m để hai phương trình đã cho có đúng một nghiệm chung

Hướng dẫn:

- Hai phương trình có nghiệm chung khi và chỉ khi hệ

$$\begin{cases} x^2 - (2m - 3)x + 6 = 0 & (1) \\ 2x^2 + x + m - 5 = 0 & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

- Rút m từ phương trình (2) thay vào phương trình (1), ta có

$$4x^3 + 3x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(4x^2 - 5x + 3) = 0$$

Phương trình $4x^2 - 5x + 3 = 0$ vô nghiệm \Rightarrow Nghiệm chung là $x = -2$, khi đó $m = -1$

Bài 77 Tìm a để hai phương trình sau có nghiệm chung

$$2x^2 + (2 - 3a)x + 4 - a = 0 \text{ và } 2x^2 + 3(1 - a)x + 5 - 2a = 0$$

Hướng dẫn:

- Hai phương trình có nghiệm chung khi và chỉ khi hệ

$$\begin{cases} 2x^2 + (2 - 3a)x + 4 - a = 0 \\ 2x^2 + 3(1 - a)x + 5 - 2a = 0 \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

- Trừ vế với vế của hai phương trình, ta có: $x = a - 1$. Thay vào phương trình thứ nhất, ta nhận được $a = \pm 2$
- Thay $a = 2$ vào cả hai phương trình, tìm nghiệm và kết luận về nghiệm chung là gì ?
- Thay $a = -2$ vào cả hai phương trình, tìm nghiệm và kết luận về nghiệm chung là gì ?
- Tóm lại: $a = \pm 2$ thì hai phương trình có nghiệm chung.

Bài 78 Tìm k để hai phương trình sau có nghiệm chung. Tìm nghiệm chung đó

$$x^2 - 3x - k = 0 \text{ và } x^2 + kx + 3 = 0$$

Hớng dẫn:

$$\begin{cases} x^2 - 3x - k = 0 \\ x^2 + kx + 3 = 0 \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

- Hai phương trình có nghiệm chung khi và chỉ khi hệ $(*)$
- Trừ vế với vế của hai phương trình, ta có: $(k + 3)x = -(k + 3)$
 - + Nếu $k = -3$, thay vào hai phương trình và nhận thấy hai phương trình đều vô nghiệm nên không có nghiệm chung
 - + Nếu $k \neq -3 \Rightarrow x = -1$, đây là nghiệm chung của hai phương trình

Thay vào một trong hai phương trình thu được $k = 4$

Bài 79: Chứng minh rằng hệ số của hai phương trình bậc hai:

$$x^2 + a_1x + b_1 = 0, \quad x^2 + a_2x + b_2 = 0 \text{ liên lạc với nhau bởi hệ thức}$$

$$a_1a_2 = 2(b_1 + b_2) \text{ thì có ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm}$$

Giải:

Cách 1: Gọi Δ_1, Δ_2 lần lượt là biệt thức của hai phương trình

$$\text{Ta có: } \Delta_1 + \Delta_2 = a_1^2 - 4b_1 + a_2^2 - 4b_2 = a_1^2 + a_2^2 - 4(b_1 + b_2) = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 = (a_1 - a_2)^2 \geq 0 \Rightarrow \Delta_1 \geq 0 \text{ hoặc } \Delta_2 \geq 0 \text{ hoặc } \Delta_1, \Delta_2 \geq 0$$

Vậy ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm

Cách 2: Giả sử cả hai phương trình đều vô nghiệm. Khi đó $\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0$ hay:

$$a_1^2 < 4b_1 \text{ và } a_2^2 < 4b_2 \Rightarrow a_1^2 + a_2^2 < 4(b_1 + b_2) = 2a_1a_2 \Leftrightarrow a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 < 0 \text{ (vô lí), vì } (a_1 - a_2)^2 \geq 0$$

\Rightarrow Phải có ít nhất một trong hai biệt thức không âm. Vậy có ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm

Bài 80: Cho phương trình $x^2 - ax + a + 1 = 0$

a) Giải phương trình khi $a = -1$

b) Xác định a biết phương trình có một nghiệm là $-\frac{3}{2}$. Tìm nốt nghiệm kia

c) Chứng minh rằng với $a + b \geq 2$ thì có ít nhất một trong hai phương trình sau đây có nghiệm

$$x^2 + 2ax + b = 0, \quad x^2 + 2bx + a = 0$$

Hớng dẫn:

a) $x = 0$ hoặc $x = -1$

$$b) a = \frac{-13}{10}; x_2 = \frac{1}{5}$$

c) Tính tổng:

$$\Delta_1' + \Delta_2' = (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + (a + b - 2)$$

$$\Delta_1' + \Delta_2' = (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (a + b - 2) \geq 0$$

$$\Rightarrow \Delta_1' \geq 0 \text{ hoặc } \Delta_2' \geq 0 \text{ hoặc } \Delta_1', \Delta_2' \geq 0$$

Vậy ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm

Bài 81: Tìm m để hai phương trình tổng đồng

a) $(m + 1)x - 8 = 4x + m$ và $mx - 3x = 2$ với $m \neq 3$

b) $x^2 + x + m = 0$ và $x^2 + mx + 1 = 0$

Hướng dẫn:

a) $(m + 1)x - 8 = 4x + m$ và $mx - 3x = 2$ với $m \neq 3$

$$(m + 1)x - 8 = 4x + m \Rightarrow x = \frac{m + 8}{m - 3} \quad (m \neq 3)$$

$$mx - 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{m - 3} \quad (m \neq 3)$$

$$\text{Hai phương trình tổng đồng} \Leftrightarrow \frac{m + 8}{m - 3} = \frac{2}{m - 3} \Rightarrow m = -6$$

Vậy $m = -6$ thì hai phương trình tổng đồng

b) $x^2 + x + m = 0$ và $x^2 + mx + 1 = 0$

✓ Trường hợp 1: Hai phương trình có nghiệm chung

$$\begin{cases} x^2 + mx + 1 = 0 \\ x^2 + x + m = 0 \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

- Hai phương trình có nghiệm chung khi và chỉ khi hệ

- Trừ vế với vế của hai phương trình trong hệ ta có phương trình: $(m - 1)x = m - 1$ (*)

+) Nếu $m = 1$. Thay trực tiếp vào hai phương trình ta có:

$x^2 + x + 1 = 0$ và $x^2 + x + 1 = 0$. Hai phương trình này đều vô nghiệm nên không có nghiệm chung

+) Nếu $m \neq 1$. Từ phương trình (*) $\Rightarrow x = 1$, đây là nghiệm chung của hai phương trình. Thay $x = 1$ vào một trong hai phương trình ta được $m = -2 \neq 1$

- Vậy $m = -2$ thì hai phương trình có nghiệm chung $x = 1$

- Với $m = -2$, phương trình thứ nhất là: $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Tập nghiệm $S = \{1\}$

- Với $m = -2$, phương trình thứ hai là: $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = -2$

Tập nghiệm $S' = \{1; -2\}$

$\Rightarrow S \neq S'$. Vậy $m = -2$ thì hai phương trình không tổng đồng

✓ Trường hợp 2: Hai phương trình cùng vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4m < 0 \\ m^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{4} \\ -2 < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < m < 2$$

$$\frac{1}{4} < m < 2$$

Kết luận: $\frac{1}{4} < m < 2$ thì hai phương trình tổng đồng

Bài 82: Tìm m và n để hai phương trình sau tổng đồng

$$x^2 - (2m + n)x - 3m = 0 \text{ và } x^2 - (m + 3n)x - 6 = 0$$

Hớng dẫn:

- Nhận thấy phương trình thứ hai có $ac < 0$ nên luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2
- Vậy để hai phương trình tương đương thì nghiệm x_1 và x_2 của phương trình thứ hai cũng là nghiệm của phương trình thứ nhất

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + n = m + 3n \\ x_1 x_2 = -3m = -6 \end{cases}$$

- Áp dụng vi - ét cho cả hai phương trình, ta có:
- Kết quả: $m = 2$ và $n = 1$

Bài 83: Cho hai phương trình $x^2 + bx + c = 0$ và $x^2 + cx + b = 0$. Biết rằng $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai phương trình có nghiệm

Hớng dẫn: Tính $\Delta_1 + \Delta_2 = b^2 + c^2 - 4(b + c)$

Theo đề bài $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \Rightarrow b + c = \frac{bc}{2}$. Từ đó $\Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 = (b - c)^2 \geq 0$ (đpcm)

Bài 84: Cho ba phương trình sau:

$$x^2 + ax + b - 1 = 0 \quad (1); \quad x^2 + bx + c - 1 = 0 \quad (2); \quad x^2 + cx + a - 1 = 0 \quad (3)$$

Chứng minh rằng trong ba phương trình có ít nhất một phương trình có nghiệm

Hớng dẫn: Chứng minh $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = (a - 2)^2 + (b - 2)^2 + (c - 2)^2 \geq 0$

Bài 85 Cho phương trình: $x^2 - 2(m + 1)x + n + 2 = 0$

Tìm m và n để phương trình có hai nghiệm là $x_1 = 1$ và $x_2 = 2$

Kết quả: $m = \frac{1}{2}$, $n = 0$

Bài 86: Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là :

a) 1 và $\frac{1}{2}$ b) $1 - \sqrt{5}$ và $1 + \sqrt{5}$

Hớng dẫn:

a) Ta có: $S = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ và $P = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Hai số 1 và $\frac{1}{2}$ là hai nghiệm của phương trình:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

b) Tương tự: $x^2 - 2x - 4 = 0$

Bài 87 Cho phương trình $x^2 + 5x + 2 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức

a) $x_1^2 + x_2^2$ b) $x_1^3 + x_2^3$ c) $x_1^4 + x_2^4$

d) $x_1^2 \cdot x_2^3 + x_1^3 \cdot x_2^2$ e) $|x_1 - x_2|$

Hớng dẫn:

a) 21 b) -95 c) 433 d) -20 e) $\sqrt{17}$

Bài 88: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $2x^2 + 2(m + 1)x + m^2 + 4m + 3 = 0$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = |x_1 x_2 - 2x_1 - 2x_2|$

Hớng dẫn:

ĐK: $-5 \leq m \leq -1$

$$\text{Tính đợc } A = \left| \frac{m^2 + 8m + 7}{2} \right| = \left| \frac{(m+1)(m+7)}{2} \right|$$

Với điều kiện trên thì $(m+1)(m+7) \leq 0 \Rightarrow A = \frac{-m^2 - 8m - 7}{2} = \frac{9 - (m+4)^2}{2} \leq \frac{9}{2}$

$$\text{Vậy Max } A = \frac{9}{2} \Leftrightarrow m = -4$$

Bài 89 Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$

1. Chứng tỏ phương trình luôn có hai nghiệm với mọi m

2. Đặt $A = 2(x_1^2 + x_2^2) - 5x_1 x_2$

a) Chứng minh $A = 8m^2 - 18m + 9$

b) Tìm m sao cho $A = 27$

3. Tìm m sao cho phương trình có nghiệm này bằng hai nghiệm kia

Hớng dẫn:

1. $\Delta = (m-1)^2 \geq 0, \forall m$

2. a) Theo vi — ét tính đợc $A = 8m^2 - 18m + 9$

b) $m_1 = 3, m_2 = \frac{-3}{4}$

3. Phương trình có nghiệm này bằng hai nghiệm kia, giả sử $x_2 = 2x_1$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{3}{2}, m_2 = \frac{3}{4}$$

Bài 90 Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 6 = 0$

a) Xác định m để phương trình có hai nghiệm đều âm

b) Xác định m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn $|x_1^3 - x_2^3| = 50$

Hớng dẫn:

$$\text{a) ĐK: } \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Rightarrow m < -3$$

b) $\Delta = 25 > 0$. Tính đợc $x_1 = m+3, x_2 = m-2$

$$|x_1^3 - x_2^3| = 50 \Leftrightarrow |(m+3)^3 - (m-2)^3| = 50$$

$$\Leftrightarrow |3m^2 + 3m + 7| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 + 3m + 7 = 10 \\ 3m^2 + 3m + 7 = -10 \end{cases}$$

Giải hai phương trình trên ta được $m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ hoặc $m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

Bài 91 Cho phương trình $x^2 - 2(m + 2)x + m + 1 = 0$

a) Giải phương trình khi $m = -\frac{3}{2}$

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu

c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức

$$x_1(1 - 2x_2) + x_2(1 - 2x_1) = m^2$$

Hớng dẫn:

a) $x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$

b) $m < -1$

c) $m = 0$ hoặc $m = -2$

Bài 92 Cho phương trình $mx^2 + 2mx + m^2 + 3m - 3 = 0$ (1)

a) Xác định m để phương trình vô nghiệm

b) Xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn hệ thức $|x_1 - x_2| = 1$

Hớng dẫn:

a) Xét hai trường hợp $m = 0$ và $m \neq 0$.

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow m > 1$ hoặc $-3 < m \leq 0$

b) Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Rightarrow m < -3$ hoặc $0 < m < 1$.

$$|x_1 - x_2| = 1 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 1 \Rightarrow m_1 = \frac{-9 + \sqrt{273}}{8}, m_2 = \frac{-9 - \sqrt{273}}{8} \text{ (thỏa mãn)}$$

Bài 8: Cho phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính:

a) $x_1 + x_2$ b) $x_1 \cdot x_2; \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ c) $x_1^2 + x_2^2$ d) $x_1 - x_2$ ($x_1 > x_2$)

e) $x_1^2 - x_2^2$ f) $x_1 \sqrt{x_1} + x_2 \sqrt{x_2}$ g) $x_1 \sqrt{x_2} + x_2 \sqrt{x_1}$ h) $x_1^3 - x_2^3$

i) $x_1^3 + x_2^3$ k) $x_1^4 + x_2^4$ m) $\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2}$ n) $x_1^2 x_2^3 + x_1^3 x_2^2$

o) $\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 (x_1 + x_2)}{x_1^2 (x_1^2 - 1) + x_2^2 (x_2^2 - 1)}$ p) $x_1^4 - x_2^4$ q) $\frac{6x_1^2 + 5x_1 x_2 + 6x_2^2}{8x_1^3 x_2 + 8x_1 x_2^3}$

Kết quả:

a) 3 b) 1 và $\sqrt{5}$ c) 7 d) $\sqrt{5}$ e) $3\sqrt{5}$ f) $2\sqrt{5}$

g) $\sqrt{5}$ h) $8\sqrt{5}$ i) 18 k) 47 m) 47 n) 3

o) $\frac{1}{4}$ p) $21\sqrt{5}$ q)

Bài 93 a) Cho phương trình $x^2 - (m + 3)x + 2(m + 2) = 0$ (1). Tìm giá trị của m để (1) có nghiệm thỏa mãn $x_1 = 2x_2$

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} \text{ và } \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

b) Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là:
Kết quả:

a) ĐK để phương trình có hai nghiệm là : $m \leq -2\sqrt{2} + 1$ hoặc $m \geq 2\sqrt{2} + 1$

Tìm được $m_1 = \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2}, m_2 = \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}$

b) Phương trình : $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$

Bài 94 Cho phương trình $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0$

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi $m \neq 1$

b) Tìm m để phương trình có tích hai nghiệm bằng 5, từ đó tính tổng hai nghiệm của phương trình

c) Tìm một hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{5}{2} = 0$$

d) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức

Kết quả:

a) $\Delta' = 1 > 0 \Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi $m \neq 1$

b) $m = \frac{3}{2}, x_1 + x_2 = 6$

c) $x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = 0$

d) $m = \pm \frac{1}{3}$

Bài 95 Tìm giá trị của m để phương trình $x^2 - mx + m + 1 = 0$ có hai nghiệm thỏa mãn

$$x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) - 19 = 0$$

Kết quả: $m = 6$

Bài 4: Xác định k để phương trình $(k + 1)x^2 - 2(k + 2)x + k - 3 = 0$ có hai nghiệm thỏa mãn

$$(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18$$

Kết quả: $k = 7$

Bài 96 Cho phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

b) Tìm một hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m

c) Xác định m sao cho phương trình có hai nghiệm bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu nhau.

Kết quả:

b) $x_1 + x_2 - 2x_1 x_2 = 4$

c) Phương trình có hai nghiệm bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu nhau

$$\text{ĐK: } \begin{cases} \Delta' > 0, \forall m \\ x_1 x_2 < 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

(Lu ý HS: Phương trình có hai nghiệm bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu nhau không phải hai nghiệm là hai số đối nhau)

Bài 97 Cho phương trình bậc hai $mx^2 - 2(m+2)x + m = 0$

- a) Xác định m để phương trình có nghiệm
 b) Xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt đều âm
 Kết quả:

- a) Xét hai trường hợp $m = 0$ và $m \neq 0 \Rightarrow$ kết quả là: $m \geq -1$
 b) $-1 < m < 0$

Bài 98 Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 4m + 5 = 0$

- a) Xác định m để phương trình có nghiệm
 b) Xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt đều dương
 Kết quả:

- a) $m \geq \frac{2}{3}$ b) $m > \frac{2}{3}$

Bài 99 Cho phương trình $x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{5} = 0$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của các biểu

- thức sau: a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ b) $x_1^2 + x_2^2$ c) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ d) $x_1^3 + x_2^3$

- Kết quả: a) $\frac{\sqrt{15}}{5}$ b) $3 + 2\sqrt{5}$ c) $\frac{3 + 2\sqrt{5}}{5}$ d) $-3\sqrt{3}(1 + \sqrt{5})$

Bài 100 Cho phương trình $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$

- a) Xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt
 b) Xác định m để phương trình có một nghiệm bằng 2 và tính nghiệm kia

- c) Xác định m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{7}{4}$

- Kết quả: a) $-1 \neq m < 3$ b) $m = -6$ và $x_2 = \frac{4}{5}$ c) $m = -6$

Bài 10: Cho phương trình $2x^2 - 6x + m = 0$

- a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương

- b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 3$

- Kết quả: a) $0 < m \leq \frac{9}{2}$ b) $m = \frac{18}{5}$

Bài 101: Cho phương trình $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ (1) ($m \neq -1$)

- a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi $m \neq -1$

- b) Tìm m để $x_1 x_2 > 0$ và $x_1 = 2x_2$

Hướng dẫn: b) Kết hợp vì —ét $x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m+1}$ với $x_1 = 2x_2$, tìm được x_1 và $x_2 \Rightarrow m = ?$

$x_1 x_2 > 0 \Rightarrow m < -1$ hoặc $m > 3$

Kết quả bài toán: $m = 7$ hoặc $m = -5$

Bài 102 Cho phương trình $x^2 + mx + n - 3 = 0$

1) Cho $n = 0$

- Chứng tỏ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m
- Tìm m để phương trình có một nghiệm là 1

2) Tìm m và n để hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình (1) thỏa mãn:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1^2 - x_2^2 = 7 \end{cases}$$

Kết quả: 1) a. Thay $n = 0$ vào phương trình, ta có $x^2 + mx - 3 = 0 \Rightarrow \Delta > 0, \forall m$
b. $m = 2$

2) Từ điều kiện đề bài
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1^2 - x_2^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 4 \text{ và } x_2 = 3$$

Viết hệ thức vi — ét và suy ra $m = -7 ; n = 15$

Bài 103 Cho phương trình $x^2 - (2m + 3)x + m - 3 = 0$

a) Chứng tỏ phương trình luôn có nghiệm

b) Tìm m để $A = |x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó

Kết quả:

a) Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

b) $A = (x_1 - x_2)^2 = (2m + 2)^2 + 17 \geq 17 \Rightarrow |x_1 - x_2| \geq \sqrt{17}$

Vậy $\text{Min}A = 17 \Leftrightarrow m = -1$

Mời các bạn xem tiếp tài liệu tại: <https://vndoc.com/tai-lieu-hoc-tap-lop-9>