CHỦ ĐỀ 13: BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH KHÔNG GIAN

I. CÁC DẠNG TOÁN TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

• Áp dụng các phương pháp tính thể tích thông qua tam giác vuông; các loại góc và khoảng cách trong không gian cũng như các công thức tính thể tích khối chóp, khối lăng trụ.

• Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức chứa biến.

Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho các số thực dương

- Dạng 2 số: $a+b\ge 2\sqrt{ab}\to ab\le \dfrac{a^2+b^2}{2}$ hoặc $ab\le \dfrac{\left(a+b\right)^2}{4}$

- Dạng 3 số: $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\to abc\le \dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}$ hoặc $abc\le \dfrac{(a+b+c)^3}{27}$

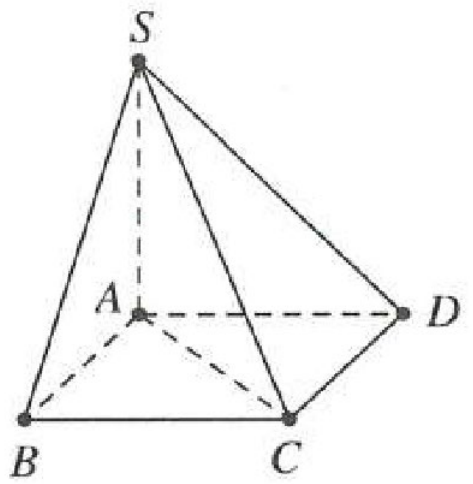
Cách 2. Khảo sát hàm số *f(x)* trên khoảng xác định (đạo hàm – lập bảng biến thiên)

2. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = 4, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD) và SC = 6. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho

A. $V_{\max}=\dfrac{40}{3}$ **B.** $V_{\max}=\dfrac{80}{3}$ **C.** $V_{\max}=\dfrac{20}{3}$ **D.** $V_{\max}=24$

Lời giải



Đặt $AD=x\Rightarrow$ Diện tích hình chữ nhật ABCD là $S_{ABCD}=4x$

Tam giác ABC vuông tại B, có $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{x^2+16}$

Tam giác SAC vuông tại A, có $SA=\sqrt{SC^2-AC^2}=\sqrt{20-x^2}$

Do đó, thể tích khối chóp S.ABCD là

$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\sqrt{20-x^2}.4x=\frac{4}{3}x.\sqrt{20-x^2}$$

Ta có $x.\sqrt{20-x^2}\le \dfrac{x^2+\left(\sqrt{20-x^2}\right)^2}{2}=\dfrac{20}{2}=10\Rightarrow V\le \dfrac{40}{3}$

Dấu bằng xảy ra khi $x=\sqrt{20-x^2}\Leftrightarrow x=\sqrt{10}$. Vậy $V_{\max}=\dfrac{40}{3}$.

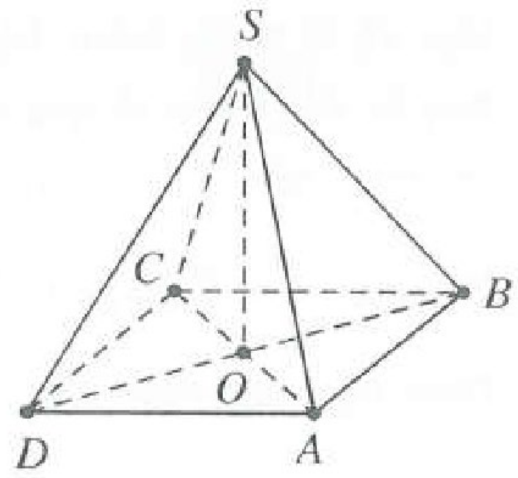
Chọn A

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AD = 4, các cạnh bên bằng nhau và bằng 6. Thể tích lớn nhất của khối chóp S.ABCD là

A. $V_{\max}=\dfrac{40}{3}$ **B.** $V_{\max}=\dfrac{64}{3}$ **C.** $V_{\max}=\dfrac{128}{3}$ **D.** $V_{\max}=\dfrac{32}{3}$

Lời giải

Vì $SA = SB = SC = SD \Rightarrow$ Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABCD) là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$



Đặt $AB = x$. Ta có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{x^2 + 16}$

Tam giác SBO vuông tại O, có

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{36 - \frac{x^2 + 16}{4}} = \frac{\sqrt{128 - x^2}}{2}$$

Do đó, thể tích khối chóp S.ABCD là

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{128 - x^2}}{2}.4x = \frac{2}{3}.x\sqrt{128 - x^2}$$

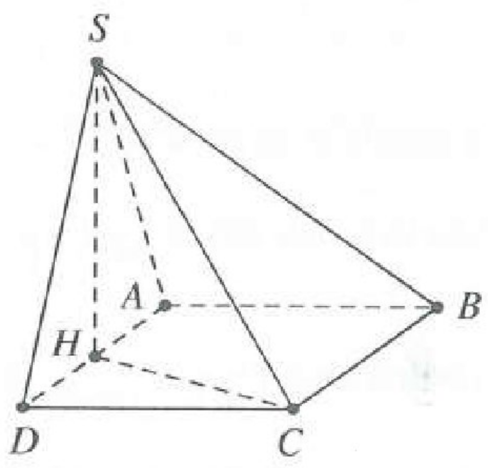
Mà $x\sqrt{128 - x^2} \le \frac{x^2 + 128 - x^2}{2} = 64 \to V \le \frac{2}{3}.64 = \frac{128}{3}$. Vậy $V_{\max} = \frac{128}{3}$. **Chọn C**

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật có AB = 4, SC = 6. Tam giác SAD cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích lớn nhất của khối chóp S.ABCD là

A. $V_{\max} = \frac{40}{3}$ **B.** $V_{\max} = \frac{20}{3}$ **C.** $V_{\max} = 20$ **D.** $V_{\max} = \frac{80}{3}$

Lời giải

Gọi H là trung điểm AD. Tam giác SAD cân tại S $\Rightarrow SH \perp AD$



Ta có $(SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow V = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD}$

Đặt $AD = 2x \to S_{ABCD} = AB.AD = 8x$

Tam giác HCD vuông tại D, có $HC = \sqrt{HD^2 + CD^2} = \sqrt{x^2 + 16}$

Tam giác SHC vuông tại H, có $SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{20 - x^2}$

Do đó $V = \frac{1}{3}.\sqrt{20 - x^2}.8x = \frac{8}{3}x.\sqrt{20 - x^2} \le \frac{8}{3}.\frac{x^2 + 20 - x^2}{2} = \frac{80}{3}$

Dấu bằng xảy ra khi $x = \sqrt{20 - x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{10}$. Vậy $V_{\max} = \frac{80}{3}$. **Chọn D**

Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A và AB = 1. Các cạnh bên SA = SB = SC = 2. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho

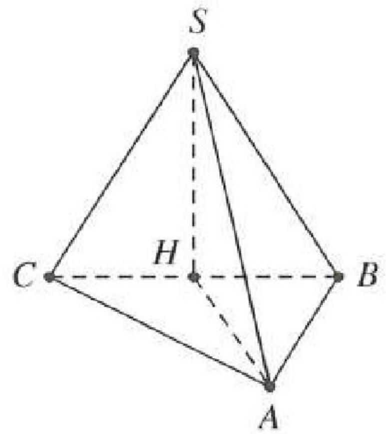
A. $V_{\max} = \frac{2}{3}$ **B.** $V_{\max} = \frac{5}{8}$ **C.** $V_{\max} = \frac{5}{4}$ **D.** $V_{\max} = \frac{4}{3}$

Lời giải

Gọi H là trung điểm BC, ΔABC vuông tại A

Suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

Vì $SA = SB = SC \Rightarrow H$ là hình chiếu của S trên (ABC)



Đặt $AC = x$. Tam giác ABC vuông $\Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{x^2+1}$

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC = \frac{x}{2}$

Tam giác SBH vuông tại H, có $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \frac{\sqrt{15-x^2}}{2}$

Do đó, thể tích cần tính là $V = \frac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{12}x.\sqrt{15-x^2}$

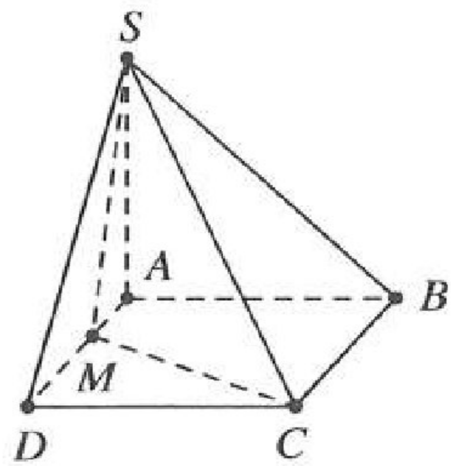
Mà $x\sqrt{15-x^2} \le \frac{x^2+15-x^2}{2} = \frac{15}{2} \to V \le \frac{1}{12}.\frac{15}{2} = \frac{5}{8}$. Vậy $V_{\max} = \frac{5}{8}$.

Chọn B

Ví dụ 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 1, cạnh bên SA = x và vuông góc với mặt đáy (ABCD). Trên cạnh AD lấy điểm M và đặt AM = y $(0 < y < 1)$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp S.ABCM, biết $x^2 + y^2 = 1$.

A. $V_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $V_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{8}$ **C.** $V_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{24}$ **D.** $V_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

Lời giải



Từ giả thiết, ta có $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2}$

Diện tích mặt đáy $S_{ABCM} = \left(\frac{AM+BC}{2}\right).AB = \frac{x+1}{2}$

Thể tích khối chóp $V_{S.ABCM}$ là $V_{S.ABCM} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCM} = \frac{(x+1)\sqrt{1-x^2}}{6}$

Xét hàm số $f(x) = (x+1)\sqrt{1-x^2}$ trên (0;1), có

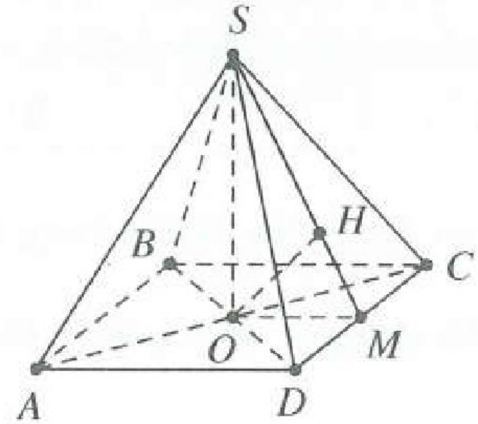
$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2+x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Dựa vào bảng biến thiên, ta được $\max\limits_{(0;1)} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Vậy $V_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{8}$. **Chọn B**

Ví dụ 6: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng 4. Thể tích lớn nhất của khối chóp S.ABCD là

A. $V_{\max} = 8\sqrt{3}$ **B.** $V_{\max} = 24\sqrt{3}$ **C.** $V_{\max} = 6\sqrt{3}$ **D.** $V_{\max} = 16\sqrt{3}$

Lời giải



Gọi O là tâm hình vuông ABCD $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Gọi M là trung điểm CD, H là hình chiếu của O trên SM

Ta có $\begin{cases} SO \perp CD \\ OM \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SMO) \Rightarrow CD \perp OH \Rightarrow OH \perp (SCD)$

Lại có $AB // CD \Rightarrow AB // (SCD)$

$$\Rightarrow d(AB;SC) = d(A;(SCD)) = 2d(O;(SCD))$$

Theo bài ra, ta có $d(AB;SC) = 2OH = 4 \rightarrow OH = 2$

Đặt $AB = 2x \rightarrow OM = x$. Tam giác SMO vuông tại O, có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} \Rightarrow SO = \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$

Do đó, thể tích khối chóp S.ABCD là $V = \frac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}.4x^2 = \frac{8}{3}.\frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}$

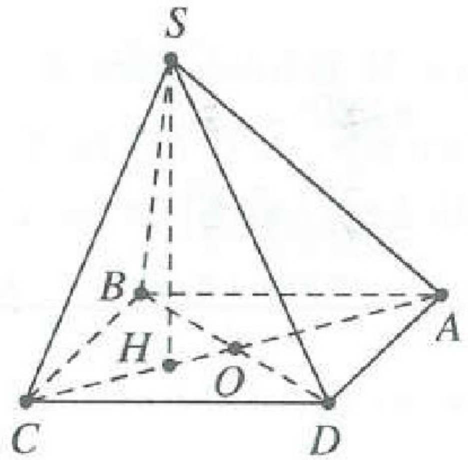
Xét hàm số $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}$ trên $(2;+\infty) \rightarrow \max f(x) = 6\sqrt{3}$

Vậy thể tích lớn nhất cần tính là $V_{max} = \frac{8}{3}.6\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$. **Chọn D**

Ví dụ 7: Cho hình chóp S.ABCD có $SA = x \ \left(0 < x < \sqrt{3}\right)$, tất cả các cạnh còn lại bằng nhau và bằng 1. Với giá trị nào của x thì thể tích khối chóp S.ABCD lớn nhất?

A. $V_{\max} = \frac{3}{4}$ **B.** $V_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ **C.** $V_{\max} = \frac{1}{4}$ **D.** $V_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Lời giải



Gọi O là tâm hình thoi ABCD $\Rightarrow OA = OC$ (1)

Theo bài ra, ta có $\Delta SBD = \Delta CBD \Rightarrow SO = OC$ (2)

Từ (1) và (2), ta có $SO = OA = OC = \frac{1}{2}AC$

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S $\Rightarrow AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = \sqrt{x^2+1}$

Suy ra $OA = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2}$ và $OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \frac{\sqrt{3-x^2}}{2}$

Diện tích hình thoi $S_{ABCD} = 2.OA.OB = \frac{\sqrt{(x^2+1)(3-x^2)}}{2}$

Lại có $SB = SC = SD = 1 \Rightarrow$ Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt đáy là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD $\rightarrow H \in AC$

Tam giác SAC vuông tại S, có $SH=\dfrac{SA.SC}{\sqrt{SA^2+SC^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Do đó, thể tích cần tính là $V=\dfrac{1}{3}.SH.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(3-x^2\right)}}{2}.\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{6}x.\sqrt{3-x^2}$

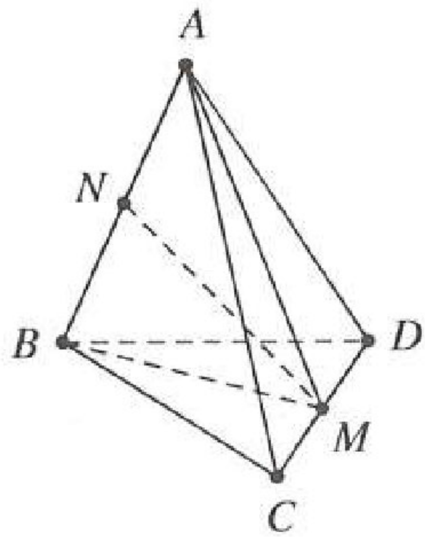
Mà $x.\sqrt{3-x^2}\le\dfrac{x^2+3-x^2}{2}=\dfrac{3}{2}\to V\le\dfrac{1}{6}.\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{4}$. Vậy $V_{\max}=\dfrac{1}{4}$. **Chọn C**

Ví dụ 8: Cho tứ diện ABCD có AB = x và các cạnh còn lại bằng $2\sqrt{3}$. Thể tích tứ diện ABCD lớn nhất khi giá trị của x bằng

A. $x=2$ **B.** $x=3\sqrt{2}$ **C.** $x=4$ **D.** $x=2\sqrt{2}$

Lời giải

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD, AB



Hai tam giác ACD, BCD đều $\Rightarrow AM=BM=2\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3$

$\Rightarrow \Delta ABM$ cân tại M $\Rightarrow MN\perp AB\Rightarrow MN=\sqrt{BM^2-BN^2}=\dfrac{\sqrt{36-x^2}}{2}$

Ta có $\begin{cases}BM\perp CD\\AM\perp CD\end{cases}\Rightarrow CD\perp\left(ABM\right)\Rightarrow V_{ABCD}=2V_{C.ABM}=\dfrac{2}{3}.CM.S_{\Delta ABM}$

Do đó, thể tích cần tính là $V_{ABCD}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}x.\dfrac{\sqrt{36-x^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}x.\sqrt{36-x^2}$

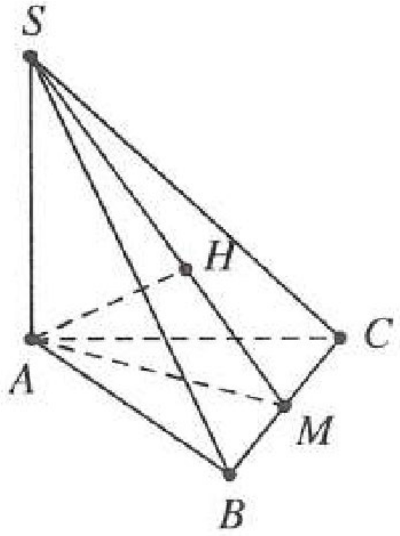
Mà $x.\sqrt{36-x^2}\le\dfrac{x^2+36-x^2}{2}=18\to V\le\dfrac{\sqrt{3}}{6}.18=3\sqrt{3}$

Dấu bằng xảy ra khi $x=\sqrt{36-x^2}\Leftrightarrow 2x^2=36\Leftrightarrow x=3\sqrt{2}$. **Chọn B**

Ví dụ 9: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC vuông cân tại A, SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC). Tính $cos\alpha$ khi thể tích khối chóp S.ABC nhỏ nhất?

A. $cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ **B.** $cos\alpha=\dfrac{1}{2}$ **C.** $cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC, kẻ $AH \perp SM \quad (H \in SM)$

Tam giác ABC cân tại A suy ra $BC \perp AM$

Mà $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

Suy ra $BC \perp (SAM) \Rightarrow AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (SBC)$

Do đó $d\left(A;(SBC)\right) = AH = 3$. Tam giác AMH vuông $\Rightarrow AM = \dfrac{3}{\sin\alpha}$

Tam giác vuông cân ABC $\Rightarrow BC = 2AM \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{9}{\sin^2\alpha} = \dfrac{9}{1-\cos^2\alpha}$

Khi đó, thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}.SA.S_{\Delta ABC} = \dfrac{9}{\left(1-\cos^2\alpha\right)\cos\alpha}$

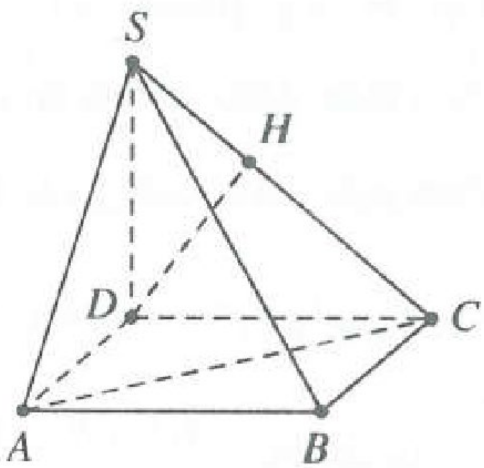
Xét hàm số $f(x) = \left(1-\cos^2 x\right)\cos x$, ta được $f(x) \le \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. Suy ra $V \ge \dfrac{27\sqrt{3}}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **Chọn D**

Ví dụ 10: Cho khối chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân tại B. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\sqrt{2}, \widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90°$. Xác định độ dài cạnh AB để khối chóp S.ABC có thể tích nhỏ nhất.

A. $AB = \sqrt{3}$ **B.** $AB = 2$ **C.** $AB = 3\sqrt{5}$ **D.** $AB = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

Lời giải



Gọi D là điểm sao cho ABCD là hình vuông

Ta có $\begin{cases} AB \perp AD \\ \widehat{SAB} = 90° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp SD$

Tương tự, ta cũng có $BC \perp SD$ suy ra $SD \perp (ABCD)$

Kẻ $DH \perp SC \quad (H \in SC) \to DH \perp (SBC)$

Khi đó $d\left(A;(SBC)\right) = d\left(D;(SBC)\right) = DH$. Đặt $AB = x > 0$

Tam giác SCD vuông tại D, có

$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{DC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow SD = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-2}}$$

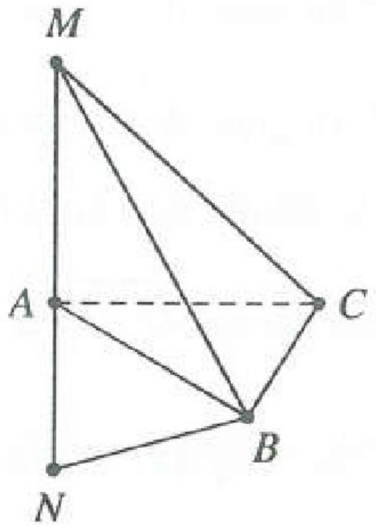
Do đó, thể tích khối chóp S.ABC là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{2}.V_{S.ABCD} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}.\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-2}}$

Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-2}}$ trên $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$, ta được $\min\limits_{\left(\sqrt{2};+\infty\right)} f\left(x\right)=f\left(\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}$. **Chọn A**

Ví dụ 11: Cho tam giác ABC vuông cân tại B, AC = 2. Trên đường thẳng qua A vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy các điểm M, N khác phía so với mặt phẳng (ABC) sao cho AM.AN = 1. Thể tích của khối tứ diện MNBC nhỏ nhất bằng

A. $V_{\min}=\dfrac{1}{3}$ **B.** $V_{\min}=\dfrac{1}{6}$ **C.** $V_{\min}=\dfrac{2}{3}$ **D.** $V_{\min}=\dfrac{1}{2}$

Lời giải



Đặt $AM=x, AN=y$ suy ra $AM.AN=x.y=1$

Tam giác ABC vuông cân tại B, có $AB=BC=\dfrac{AC}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

Diện tích tam giác vuông ABC là $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.\text{BC}=1$

Ta có $\text{V}_{MNBC}=V_{M.ABC}+V_{N.ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.\left(AM+AN\right)=\dfrac{x+y}{3}$

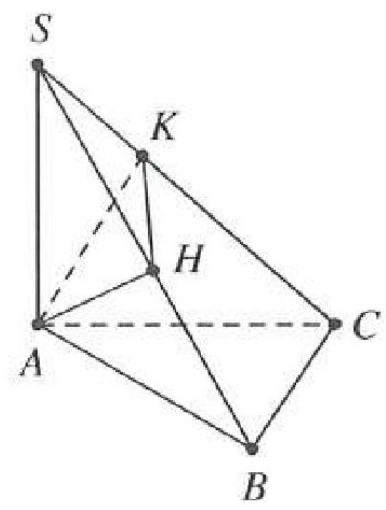
Lại có $x+y\ge 2\sqrt{xy}$ (bất đẳng thức AM – GM) $\Rightarrow \dfrac{x+y}{3}\ge\dfrac{2}{3}$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=1$. Vậy $V_{\min}=\dfrac{2}{3}$. **Chọn C**

Ví dụ 12: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại C, SA = AB = 2. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC. Thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp S.AHK bằng

A. $V_{\max}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ **B.** $V_{\max}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $V_{\max}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ **D.** $V_{\max}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

Lời giải



Đặt $AC=x$ $(0<x<2)$

Tam giác ABC vuông tại C $\Rightarrow BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{4-x^2}$

Tam giác SAB vuông cân tại A, có đường cao AH $\Rightarrow SH=\dfrac{1}{2}SB$

Tam giác SAC vuông tại A, có $SA^2=SK.SC\Rightarrow\dfrac{SK}{SC}=\dfrac{SA^2}{SC^2}=\dfrac{4}{4+x^2}$

Ta có $\dfrac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SH}{SB}.\dfrac{SK}{SC}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{x^2+4}=\dfrac{2}{x^2+4}\Rightarrow V_{S.AHK}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{x^2+4}$

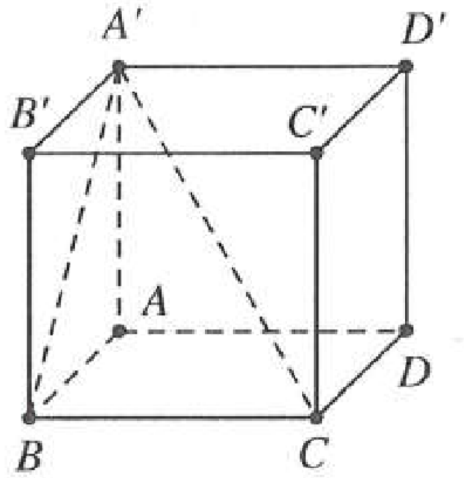
Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2}{3}.\dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{x^2+4}$ trên $\left(0;2\right)$, ta được $\max\limits_{(0;2)} f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Chọn A

Ví dụ 13: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có AB = x, AD = 3, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng $30°$. Tìm x để thể tích khối hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất.

A. $x=\dfrac{3\sqrt{15}}{5}$ **B.** $x=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$ **C.** $x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ **D.** $x=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

Lời giải



Ta có $BB'\perp BC$ và $AB\perp BC \Rightarrow BC\perp(ABB'A')$

$\Rightarrow$ B là hình chiếu vuông góc của C trên $(ABB'A')$

Suy ra $\widehat{A'C;(ABB'A')}=\widehat{(A'C;A'B)}=\widehat{CA'B}=30°$

Tam giác $A'BC$ vuông tại B, có $\tan\widehat{CA'B}=\dfrac{BC}{A'B}\Rightarrow A'B=3\sqrt{3}$

Tam giác $A'AB$ vuông tại A, có $AA'=\sqrt{A'B^2-AB^2}=\sqrt{27-x^2}$

Do đó thể tích khối hộp là $V_{ABCD.A'B'C'D'}=AA'.AB.AD=3x.\sqrt{27-x^2}$

Lại có $x.\sqrt{27-x^2}\le\dfrac{x^2+27-x^2}{2}=\dfrac{27}{2}\to V_{ABCD.A'B'C'D'}\le 3.\dfrac{27}{2}=\dfrac{81}{2}$

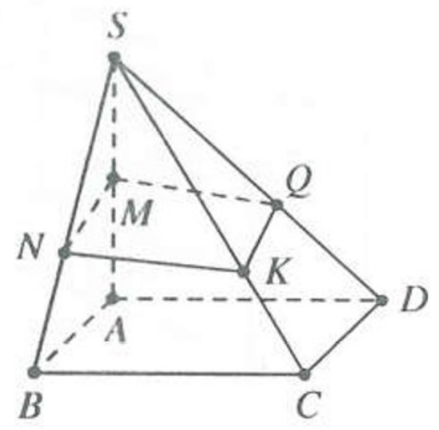
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=\sqrt{27-x^2}\Rightarrow x=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$. **Chọn B**

Ví dụ 14: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành, thể tích là V. Gọi M là trung điểm của SA, N là điểm nằm trên cạnh SB sao cho SN = 2NB, mặt phẳng (α) di động qua các điểm M,N và cắt các cạnh SC, SD lần lượt tại hai điểm phân biệt K, Q. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp S.MNKQ.

A. $\dfrac{V}{2}$ **B.** $\dfrac{2V}{3}$ **C.** $\dfrac{V}{3}$ **D.** $\dfrac{V}{6}$

Lời giải

Đặt $x=\dfrac{SK}{SC}$ $(0\le x\le 1)$. Hình vẽ tham khảo



Vì mặt phẳng (α) di động qua các điểm M, N và cắt các cạnh SC, SD lần lượt tại hai điểm phân biệt K, Q nên ta có $\frac{SA}{SM}+\frac{SC}{SK}=\frac{SB}{SN}+\frac{SD}{SQ} \Rightarrow 2+\frac{1}{x}=\frac{3}{2}+\frac{SD}{SQ}=\frac{2x}{2+x}$

Ta có $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{2}\left(\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SK}{SC}+\frac{SM}{SA}.\frac{SK}{SC}.\frac{SQ}{SD}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{4x}{3}-\frac{2}{x+2}\right)=\frac{2x}{3}-\frac{1}{x+2}$

Xét hàm số $f(x)=\frac{2x}{3}-\frac{1}{x+2}$ trên $[0;1]$ ta được $\underset{[0;1]}{max} f(x)=f(1)=\frac{1}{3}$

Vậy thể tích lớn nhất cần tính là $V_{S.MNPQ}=\frac{V}{3}$. **Chọn C**

Ví dụ 15: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 18 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x cm, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để có được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

A. x = 6 **B.** x = 4 **C.** x = 2 **D.** x = 3

Lời giải

Sau khi cắt ở bốn góc hình vuông cạnh x, ta được khối hộp có

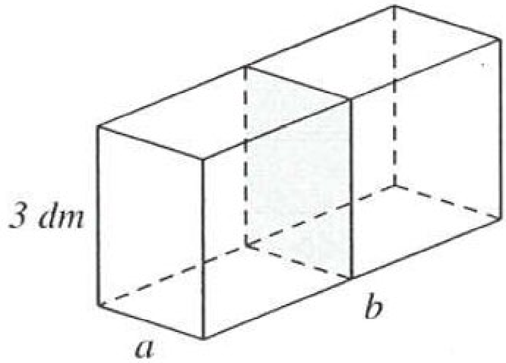
- Chiều cao bằng $\boxed{x}$ cm
- Đáy là hình vuông cạnh $\boxed{18-2x}$ cm

Do đó, thể tích khối hộp chữ nhật là $V=x.(18-2x)^2=\frac{1}{4}.4x.(18-2x).(18-2x)$

Ta có $4x.(18-2x).(18-2x)\le\frac{(4x+18-2x+18-2x)^3}{27}=\frac{36^3}{27}=1728$

Suy ra $V\le\frac{1}{4}.1728=432$. Dấu bằng xảy ra khi $4x=18-2x \Rightarrow x=3$. **Chọn D**

Ví dụ 16: Người ta muốn thiết kế một bể cá bằng kính không có nắp với thể tích $72\,dm^3$ và chiều cao 3 dm. Một vách ngăn (cùng bằng kính) ở giữa, chia bể cá thành hai ngăn, với các kích thước a,b (đơn vị dm) như hình vẽ



Tính a,b để bể cá tốn ít nguyên liệu nhất (tính cả tấm kính ở giữa), coi bề dày các tấm kính như nhau và không ảnh hưởng đến thể tích của bể.

A. $a = b = 2\sqrt{6}$ **B.** $a = 3, b = 8$ **C.** $a = 3\sqrt{2}, b = 4\sqrt{2}$ **D.** $a = 4, b = 6$

Lời giải

Thể tích của bể cá là $V = 3ab = 72 \Rightarrow ab = 24 \Rightarrow b = \dfrac{24}{a}$

Diện tích bể cá gồm: 3 mặt có diện tích 3a (hai mặt bên và vách ngăn); 2 mặt có diện tích 3b (hai mặt bên) và một mặt đáy có diện tích ab (đơn vị dm^2)

Do đó, tổng diện tích làm bể là $S = 3.(3a) + 2.(3b) + ab = 9a + 6b + ab = 9a + \dfrac{144}{a} + 24$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có $9a + \dfrac{144}{a} \ge 2\sqrt{9a.\dfrac{144}{a}} = 72$

Suy ra $S \ge 72 + 24 = 96$. Dấu bằng xảy ra khi $9a = \dfrac{144}{a} \Rightarrow a = 4; b = 6$. **Chọn C**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = 1. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp S.ABC.

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{12}$

Câu 2: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = 2, đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = 1. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp S.ABC

A. $\frac{5}{8}$ **B.** $\frac{5}{4}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{4}{3}$

Câu 3: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = BA = BC = 1. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp S.ABC.

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{12}$ **C.** $\frac{1}{8}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$

Câu 4: Cho hình hộp chữ nhật có tổng diện tích các mặt bằng 36 và độ dài đường chéo bằng 6. Tìm thể tích lớn nhất V_{max} của hình hộp chữ nhật đã cho.

A. $V_{max} = 8$ **B.** $V_{max} = 12$ **C.** $V_{max} = 8\sqrt{2}$ **D.** $V_{max} = 6\sqrt{6}$

Câu 5: Cho hình hộp chữ nhật có tổng độ dài tất cả các cạnh bằng 32, độ dài đường chéo bằng $2\sqrt{6}$. Tìm thể tích lớn nhất V_{max} của hình hộp đã cho

A. $V_{max} = 16\sqrt{2}$ **B.** $V_{max} = 16$ **C.** $V_{max} = 6\sqrt{6}$ **D.** $V_{max} = 12\sqrt{3}$

Câu 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AD = 4, các cạnh bên bằng nhau và bằng 6. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp S.ABCD

A. $\frac{130}{3}$ **B.** $\frac{128}{3}$ **C.** $\frac{125}{3}$ **D.** $\frac{250}{3}$

Câu 7: Cho hình chóp S.ABCD có $SB = x \quad (0 < x < \sqrt{3})$. Tất cả các cạnh còn lại bằng nhau và bằng 1. Với giá trị nào của x thì thể tích khối chóp S.ABCD là lớn nhất?

A. $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ **D.** $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 8: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Biết SC = 1, tìm thể tích lớn nhất của khối chóp S.ABC.

A. $\frac{\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{12}$ **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{27}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{27}$

Câu 9: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại C, AB = 2. Cạnh bên SA = 1 và vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích lớn nhất của khối chóp S.ABC là

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{12}$ **D.** $\frac{1}{6}$

Câu 10: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = 4, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD) và SC = 6. Thể tích lớn nhất của khối chóp S.ABCD là

A. $\frac{40}{3}$ **B.** $\frac{80}{3}$ **C.** $\frac{20}{3}$ **D.** 24

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

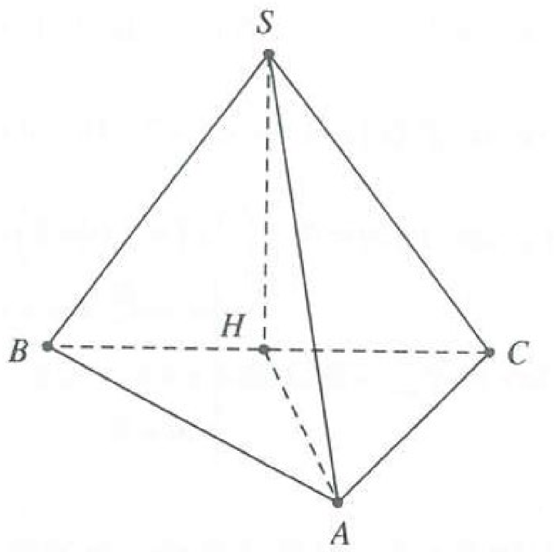
Câu 1:

$S_{SAB}=\frac{1}{2}SA.SB\sin\widehat{BSA}\le\frac{1}{2}SA.SB=\frac{1}{2}$

Mặt khác $d\left(C;\left(SAB\right)\right)\le SC$ nên $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{SAB}.d\left(C;\left(SAB\right)\right)\le\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.SC=\frac{1}{6}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow SA\perp SB\perp SC$. **Chọn B**

Câu 2:



Do SA = SB = SC = 2 $\Rightarrow$ hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng đáy trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và là trung điểm của BC.

Đặt $BC=2x\Rightarrow HA=HB=HC=x$ (với H là trung điểm của BC).

Ta có: $AC=\sqrt{4x^2-1};SH=\sqrt{SA^2-HA^2}=\sqrt{4-x^2}$

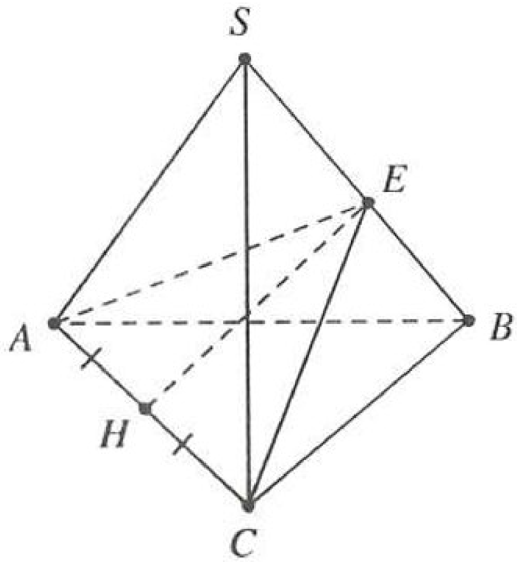
Thể tích khối chóp S.ABC là:

$V=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}=\frac{1}{3}\sqrt{4-x^2}.\frac{\sqrt{4x^2-1}}{2}=\frac{1}{6}\sqrt{\left(4-x^2\right)\left(4x^2-1\right)}$

$=\frac{1}{12}\sqrt{\left(16-4x^2\right)\left(4x^2-1\right)}\le\frac{1}{12}.\frac{16-4x^2+4x^2-1}{2}=\frac{5}{8}$

Vậy $V_{max}=\frac{5}{8}$. **Chọn A**

Câu 3:



Đặt $AC=x$, gọi E là trung điểm của SB khi đó:

$\begin{cases}CE\perp SB\\AE\perp SB\end{cases}$ suy ra $SB\perp\left(ACE\right)$ và ta có : $AE=CE=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Gọi H là trung điểm của AC do tam giác AEC cân nên

$EH\perp AC\Rightarrow HE=\sqrt{AE^2-AH^2}=\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{x^2}{4}}$

$V_{S.ABC}=V_{S.EAC}+V_{B.ACE}=\frac{1}{3}SB.S_{ACE}=\frac{1}{3}HE.AH=\frac{1}{6}x\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{x^2}{4}}$

Lại có $\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{x^2}{4}}.x=2.\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{x^2}{4}}.\frac{x}{2}\le\left(\frac{3}{4}-\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{4}\right)=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow V_{ABCD}\le\frac{1}{8}\Rightarrow V_{\max}=\frac{1}{8}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow 3=2x^2\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{6}}{2}$

Cách 2: Nhận xét $V_{\max}\Leftrightarrow S_{ACE}$ lớn nhất $\Leftrightarrow\frac{1}{2}AE.CE\sin\widehat{AEC}=\frac{3}{8}.\sin\widehat{AEC}\le\frac{3}{8}$

Vậy $V_{\max} = \frac{1}{8}$. **Chọn C**

Câu 4:

Giả sử 3 kích thước của hình hộp chữ nhật là a,b,c ta có $2(ab+bc+ca)=36$

$\Leftrightarrow ab+bc+ca=18 \Leftrightarrow (a+b)c+ab=18(*)$

Lại có: $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=6 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=36 \Leftrightarrow (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=36$

$\Leftrightarrow a+b+c=6\sqrt{2}$

$(*) \Rightarrow (6\sqrt{2}-c)c+ab=18 \Rightarrow \begin{cases} a+b=6\sqrt{2}-c \\ ab=18+c^2-6c\sqrt{2} \end{cases}$

Do $(a+b)^2 \ge 4ab \Rightarrow (6\sqrt{2}-c)^2 \ge 4(18+c^2-6c\sqrt{2}) \Leftrightarrow 0 \le c \le 4\sqrt{2}$

Lại có: $V=abc=(18+c^2-6c\sqrt{2})c=c^3-6c^2\sqrt{2}+18c=f(c)$ (với $c\in\left[0;4\sqrt{2}\right]$)

Ta có: $f'(c)=3c^2-12c\sqrt{2}+18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=3\sqrt{2} \\ c=\sqrt{2} \end{array}\right.$

Lại có: $f(0)=0; f(\sqrt{2})=f(4\sqrt{2})=8\sqrt{2}; f(3\sqrt{2})=0$

Suy ra $V_{\max}=8\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\sqrt{2} \vee c=4\sqrt{2} \\ a+b=5\sqrt{2} \\ ab=8 \end{cases} \Leftrightarrow (a;b;c)=(4\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2})$ hoặc các hoán vị. **Chọn C**

Câu 5:

Giả sử 3 kích thước của hình hộp chữ nhật là a,b,c ta có: $4(a+b+c)=32 \Leftrightarrow a+b+c=8$

Lại có: $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=2\sqrt{6} \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=24 \Leftrightarrow (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=24$

$\Rightarrow ab+bc+ca=20 \Leftrightarrow (a+b)c+ab=20 \Leftrightarrow (8-c)c+ab=20$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=8-c \\ ab=20+c^2-8c \end{cases}$

Do $(a+b)^2 \ge 4ab \Leftrightarrow (8-c)^2 \ge 4(20+c^2-8c) \Leftrightarrow \frac{4}{3} \le c \le 4$

Lại có $V=abc=(20+c^2-8c)c=c^3-8c^2+20c=f(c)$ (với $c\in\left[\frac{4}{3};4\right]$)

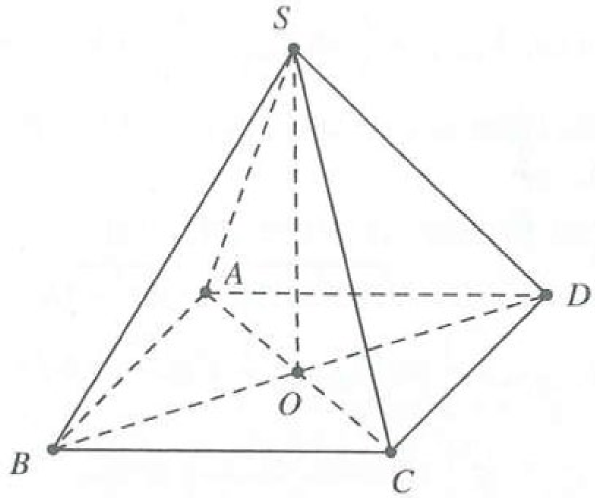
Khi đó $f'(c)=3c^2-16c+20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=\frac{10}{3} \\ c=2 \end{array}\right.$

Mặt khác $f\left(0\right)=0; f\left(2\right)=16; f\left(\frac{10}{3}\right)=\frac{400}{27}; f\left(4\right)=16$

Do đó $V_{\max}=16$. **Chọn B**

Câu 6:

Do SA = SB = SC = SD nên hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống đáy là tâm O của hình chữ nhật ABCD



Đặt $AB=x \Rightarrow BD=\sqrt{x^2+16} \Rightarrow OB=\frac{\sqrt{x^2+16}}{2}$

Khi đó $SO=\sqrt{SB^2-OB^2}=\sqrt{36-\frac{x^2+16}{4}}=\frac{\sqrt{128-x^2}}{2}$

Ta có $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SO.S_{ABCD}=\frac{1}{6}\sqrt{128-x^2}.4x$

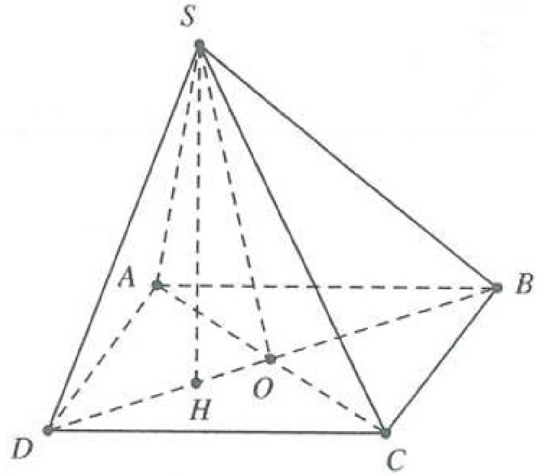
$=\frac{2}{3}x.\sqrt{128-x^2} \le \frac{1}{3}\left(x^2+128-x^2\right)=\frac{128}{3}$

Do đó $V_{max}=\frac{128}{3} \Leftrightarrow x=8$. **Chọn B**

Câu 7:

Ta có: $\Delta SAC=\Delta ADC$ (c – c – c)

Do đó $SO=DO$ (2 đường trung tuyến tương ứng)



Suy ra $SO=\frac{BD}{2} \Rightarrow \Delta SBD$ vuông tại S (tam giác có đường trung tuyến ứng với cạnh đối diện bằng nửa cạnh ấy). Khi ấy

$BD=\sqrt{SB^2+SD^2}=\sqrt{1+x^2}$

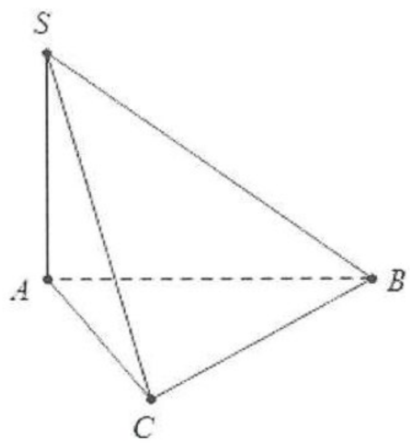
$\Rightarrow AC=2OA=2\sqrt{AB^2-\frac{BD^2}{4}}=2\sqrt{1-\frac{1+x^2}{4}}=\sqrt{3-x^2}$

Lại có $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.AC.S_{SBD}=\frac{\sqrt{3-x^2}}{3}.\frac{SB.SD}{2}=\frac{x\sqrt{3-x^2}}{6}$

Áp dụng BĐT AM – GM ta có: $x\sqrt{3-x^2} \le \frac{x^2+3-x^2}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow V \le \frac{1}{4}$

Dấu bằng xảy ra $\Rightarrow x^2=3-x^2 \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{6}}{2}$. **Chọn C**

Câu 8:



Đặt $CA=CB=x \Rightarrow SA=\sqrt{1-x^2}$

Ta có: $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{ABC}=\frac{1}{3}.\sqrt{1-x^2}.\frac{x^2}{2}=\frac{1}{6}\sqrt{1-x^2}.x^2$

Xét hàm số $f\left(x\right)=\left(1-x^2\right)x^4=x^4-x^6\quad \left(x\in\left(0;1\right)\right)$

Ta có: $f'\left(x\right)=4x^3-6x^5=0\Leftrightarrow x^2=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Khi đó $\underset{(0;1)}{\text{Max}}\, f\left(x\right)=f\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)=\dfrac{4}{27}\Rightarrow V_{\max}=\dfrac{1}{6}\sqrt{\dfrac{4}{27}}=\dfrac{\sqrt{3}}{27}$. **Chọn D**

Câu 9:

Đặt $AC=x\Rightarrow BC=\sqrt{4-x^2}$

Ta có: $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABC}=\dfrac{1}{6}.x\sqrt{4-x^2}\le\dfrac{1}{6}.\dfrac{x^2+4-x^2}{2}=\dfrac{1}{3}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=\sqrt{2}\Rightarrow AC=BC=\sqrt{2}$. **Chọn A**

Câu 10:

Đặt $AC=x\Rightarrow SA=\sqrt{SC^2-x^2}=\sqrt{36-x^2}$

Lại có $AD=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{x^2-16}$

$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\sqrt{36-x^2}.4\sqrt{x^2-16}$$

$$\le\frac{4}{3}.\frac{36-x^2+x^2-16}{2}=\frac{40}{3}$$

Vậy $V_{max}=\dfrac{40}{3}\Leftrightarrow x=\sqrt{26}$. **Chọn A**