**CHỦ ĐỀ 3: DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG - CẤP SỐ NHÂN**

**Phương pháp quy nạp toán học**

**A. LÝ THUYẾT**

Để chứng minh những mệnh đề liên quan đến số nguyên dương  là đúng với mọi  mà không thể thử trực tiếp được thì có thể làm như sau:

***- Bước 1:*** Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với .

***- Bước 2:*** Giả thiết rằng mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kỳ  (gọi là giả thiết quy nạp). Bằng kiến thức đã biết và giả thiết quy nạp, chứng minh rằng mệnh đề đó cũng đúng với .

**B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH**

1. Với mối số nguyên dương , đặt . Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**Đáp án C.**

***Lời giải***

***Cách 1:*** Chúng ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học rằng mọi , ta có đẳng thức 

***- Bước 1:*** Với  thì vế trái bằng , vế phải bằng .

Vậy đẳng thức đúng với .

***-Bước 2:*** Giả sử đẳng thức đúng với , tức là chứng minh

Ta phải chứng minh đẳng thức cũng đúng với , tức là chứng minh

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có



Mà 

Suy ra 

Do đó đẳng thức đúng với . Suy ra có điều phải chứng minh.

Vậy phương án đúng là C.

***Cách 2:*** Kiểm tra tính đúng-sai của từng phương án đến khi tìm được phương án đúng thông qua một số giá trị cụ thể của n.

+ Với  thì  (loại được các phương án B và D);

+ Với thì  (loại được phương án A).

Vậy phương án đúng là **C**.

**STUDY TIP**

Ngoài kết quả nêu trong ví dụ 1, chúng ta có thể đề cập đến các kết quả tương tự như sau:

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

***Nhận xét:*** *Từ ví dụ 1 và các bài tập ở phần nhận xét, ta thấy bậc ở vế trái nhỏ hơn bậc ở vế phải là 1 đơn vị. Lưu ý điều này có thể tính được tổng dạng luỹ thừa dựa vào phương pháp hệ số bất định. Từ kết quả của ví dụ này, chúng ta hoàn toàn có thể đề xuất các câu hỏi trắc nghiệm sau đây:*

1. Với mỗi số nguyên đặt  Mệnh đề nào dưới đây là **sai?**

**A.** ****. **B.** ****.

**C.** ****. **D.** ****.

1. Với mỗi số nguyên dương ta có  trong đó  là các hằng số. Tính giá trị của biểu thức 

**A.** ****. **B.** ****. **C.** ****. **D.** ****.

1. Tìm tất cả các số nguyên dương để .

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

1. Tính tổng  của tất cả các số nguyên dương thoả mãn .

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

1. Đặt  (có  dấu căn). Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Đáp án B.**

***Lời giải***

Ta chứng minh  bằng phương pháp quy nạp toán học. Thật vậy:

*Bước 1:* Với  thì vế trái bằng , còn vế phải bằng .

Vậy đẳng thức đúng với .

*Bước 2:* Giả sử đẳng thức đúng với , nghĩa là .

Ta phải chứng minh đẳng thức cũng đúng với , tức là chứng minh .

Thật vậy, vì  nên theo giả thiết quy nạp ta có .

Mặt khác,  nên .

Vậy phương án đúng là **B**.

**STUDY TIP**

Ngoài cách làm như trên, ta có thể làm theo cách sau: kiểm tra tính đúng – sai của từng phương án đến khi tìm được phương án đúng thông qua một số giá trị cụ thể của .

+ Với  thì  (loại ngay được phương án **A**, **C** và **D**).

**Nhận xét:** *Từ kết quả của ví dụ 2, chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi dưới đây:*

1. Đặt  (có  dấu căn). Tìm  để .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho dãy số  xác định bởi  và . Số hạng tổng quát của dãy số  là:

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Đặt ,với .Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.**. **B.** . **C.** . **D.** .

**Đáp án C.**

***Lời giải***

**C*ách 1:*** Rút gọn biểu thức  dựa vào việc phân tích phần tử đại diện.

Với mọi số nguyên dương, ta có .

Do đó:.

Vậy phương án đúng là phương án **C.**

***Cách 2:*** Kiểm tra tính đúng – sai của phương án dựa vào một số giá trị cụ thể của n.

Với thì (chưa loại được phương án nào);

Với  thì (loại ngay được các phương án A,B vàD.

Vậy phương án đúng là phương ánC.

**Nhận xét:** *Từ kết quả của ví dụ này,chúng ta hoàn toàn trả lời được các câu hỏi trắc nghiệm sau đây:*

1. Với ,biết rằng . Trong đó  là các số nguyên. Tính giá trị biểu thức .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Với ,biết rằng . Trong đó  là các số nguyên.Tính giá trị biểu thức .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. **B**iết rằng ,trong đó  và  là các số nguyên. Tính giá trị biểu thức .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Tính tổng S của tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn bất phương trình



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Tìm tất cả các số nguyên dương  sao cho 

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Đáp án D.**

***Lời giải***

Kiểm tra tính đúng – sai của bất đẳng thức với các trường hợp  ta dự đoán được  với  Ta chứng minh bất đẳng thức này bằng phương pháp quy nạp toán học. Thật vây:

-Bước 1: Với  thì vế trái bằng  còn vế phải bằng 

Do  nên bất đẳng thức đúng với 

-Bước 2: Giả sử đẳng thức đúng với  nghĩa là 

Ta phải chứng minh bất đẳng thức cũng đúng với  tức là phải chứng minh  hay 

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có 

Suy ra  hay 

Mặt khác  với mọi 

Do đó  hay bất đẳng thức đúng với 

Suy ra bất đẳng thức được chứng minh.

Vậy phương án đúng là **D.**

**STUDY TIP**

Dựa vào kết quả ví dụ 4, ta có thể đề xuất bài toán sau:

Tìm số nguyên tố  nhỏ nhất sao cho: 

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG**

1. Tổng  các góc trong của một đa giác lồi  cạnh, , là:

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Với , hãy rút gọn biểu thức .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Kí hiệu . Với , đặt . Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

**A.** . **B.** **.** **C.** . **D.** .

1. Với , đặt và . Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

**A.** . **B.** **.** **C.** . **D.** .

1. Tìm số nguyên dương  nhỏ nhất để  với mọi số nguyên .

**A.**. **B.** **.** **C.** . **D.** .

1. Tìm tất cả các giá trị của sao cho .

**A.**. **B.**  **hoặc** . **C**. **D.**  **hoặc** **.**

1. Với mọi số nguyên dương , ta có: , trong đó  là các số nguyên. Tính các giá trị của biểu thức .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** **.**

1. Với mọi số nguyên dương , ta có: , trong đó  là các số nguyên. Tính các giá trị của biểu thức .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** **.**

1. Biết rằng . Tính giá trị biểu thức .

**A.** . **B.** **.** **C.** . **D.** **.**

1. Biết rằng mọi số nguyên dương , ta có  và . Tính giá trị biểu thức .

**A.** . **B.** **.** **C.** . **D.** **.**

1. Biết rằng , trong đó  là số nguyên dương. Xét các mệnh đề sau:

, ,  và .

Số các mệnh đề đúng trong các mệnh đề nói trên là:

**A..** **B. .** **C. **. **D. .**

1. Với , ta xét các mệnh đề chia hết cho ; chia hết cho  và

chia hết cho . Số mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên là :

**A..** **B. .** **C. **. **D. .**

1. Xét bài toán: “Kiểm nghiệm với số nguyên dương  bất đẳng thức ”. Một học sinh đã trình bày lời giải bài toán này bằng các bước như sau:

Bước 1: Với , ta có:  và . Vậy  đúng.

Bước 2 : Giả sử bất đẳng thức đúng với , tức là ta có .

Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với , nghĩa là phải chứng minh .

Bước 3 : Ta có . Vậy  với mọi số nguyên dương .

Chứng minh trên đúng hay sai, nếu sai thì sai từ bước nào ?

**A.** Đúng. **B.** Sai từ bước 2. **C.** Sai từ bước 1. **D.** Sai từ bước 3**.**

1. Biết rằng , trong đó  và  là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức .

là :

**A.**. **B. **. **C. **. **D. .**

**D. HƯỚNG DẪN GIẢI**

1. **Đáp án B.**

**Cách 1:** Từ tổng các góc trong tam giác bằng  và tổng các góc trong từ giác bằng , chúng ta dự đoán được .

**Cách 2:** Thử với những trường hợp đã biết để kiểm nghiệm tính đúng –sai từ các công thức. Cụ thể là với  thì  (loại luôn được các phương án A, C và D); với  thì  (kiểm nghiệm phương án B lần nữa).

1. **Đáp án A.**

Để chọn được  đúng, chúng ta có thể dựa vào một trong ba cách sau đây:

**Cách 1:** Kiểm tra tính đúng –sai của từng phương án với những giá trị của .

Với  thì  (loại ngay được phương án B và C); với  thì  (loại được phương án D).

**Cách 2:** Bằng cách tính  trong các trường hợp  ta dự đoán được công thức .

**Cách 3:** Ta tính  dựa vào các tổng đã biết kết quả như  và . Ta có: .

1. **Đáp án B.**

Chúng ta có thể chọn phương án đúng dựa vào một trong hai cách sau đây:

**Cách 1:** Kiểm nghiệm từng phương án đúng đối với những giá trị cụ thể của .

Với  thì  (Loại ngay được các phương án A, C, D).

**Cách 2:** Rút gọn  dựa vào việc phân tích phần tử đại diện . Suy ra: .

1. **Đáp án A.**

Chúng ta có thể chọn phương án đúng dựa vào một trong hai cách sau đây:

**Cách 1:** Kiểm nghiệm từng phương án đúng đối với những giá trị cụ thể của .

Với  thì nên  (loại ngay được các phương án B, C, D).

**Cách 2:** Chúng ta tính  dựa vào những tổng đã biết kết quả. Cụ thể dựa vào ví dụ 1: . Suy ra .

1. **Đáp án B.**

Dễ thấy thì bất đẳng thức  là sai nên loại ngay phương án D.

Xét với  ta thấy  là bất đửng thức đúng. Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ta chứng minh được rằng  với mọi . Vậy  là số nguyên dương nhỏ nhất cần tìm.

1. **Đáp án D.**

Kiểm tra với  ta thấy bất đẳng thức đúng nên loại ngay phương án A và C.

Kiểm tra với  ta thấy bất đẳng thức đúng. Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ta chứng minh được rằng .

1. **Đáp án B**.

**Cách 1:** Với chú ý , chúng ta có: 

=.

Đối chiếu với đẳng thức đã cho, ta có: .

Suy ra .

**Cách 2:** Cho  ta được: .

Giải hệ phương trình trên ta được . Suy ra 

1. **Đáp án C**.

**Cách 1:** Bằng cách phân tích số hạng đại diện, ta có: . Suy ra  .

Đối chiếu với đẳng thức đã cho ta có: . Suy ra .

**Cách 2:** Cho  ta được . Giải hệ phương trình trren ta được . Suy ra .

1. **Đáp án B**.

**Cách 1:** Sử dụng kết quả đã biết: . So sánh cách hệ số, ta được .

**Cách 2:** Cho , ta được hệ 5 phương trình 5 ẩn . Giải hệ phương trình đó, ta tìm được . Suy ra .

1. **Đáp án C**.

**Cách 1:** Sử dụng các tổng lũy thừa bậc 1 và bậc 2 ta có:

**+) .**

Suy ra .

**+) **

Suy ra .

Do đó .

**Cách 2:** Cho  và sử dụng phương pháp hệ số bất đinh ta cũng tìm được ; .

Do đó .

1. **Đáp án D.**

Bằng các kết quả đã biết ở ví dụ 1, chúng ta thấy ngay được chỉ có  là sai.

1. **Đáp án A.**

Bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta chứng minh được rằng  chia hết cho 6.

Thật vậy: Với  thì .

Giả sử mệnh đề đúng với , nghĩa là  chia hết ccho 6.

Ta chứng minh mệnh đề đúng với , nghĩa là phỉa chứng minh  chia hết cho 6.

Ta có: .

Theo giả thiết quy nạp thì  chia hết cho 6 nên  cũng chia hết cho 6.

Vậy  chia hết cho 6 với mọi . Do đó các mệnh đề  và  cũng đúng.

1. **Đáp án A.**
2. **Đáp án C.**

Phân tích phần tử đại diện, ta có: .

Suy ra: 



=.

Đối chiếu với hệ số, ta được: .

Suy ra: .

**DÃY SỐ**

**A. LÝ THUYẾT**

**1. Định nghĩa:**

Một hàm số  xác định trên tập hợp các số nguyên dương  được gọi là một dãy số vô hạn (hay còn gọi tắt là dãy số)

Người ta thường viết dãy số dưới dạng khai triển  trong đó  hoặc viết tắt là .

Số hạng  được gọi là số hạng đầu,  là số hạng tổng quát (số hạng thứ ) của dãy số.

**2. Các cách cho một dãy số:**

*Người ta thường cho một dãy số bằng một trong các cách dưới đây:*

- **Cách 1:** Cho dãy số bằng công thức của số hạng tổng quát.

1. Cho dãy số  với .

*Dãy số cho bằng cách này có ưu điểm là chúng ta có thể xác định được ngay số hạng bất kỳ của dãy số. Chẳng hạn,* ***.***

- **Cách 2:** Cho dãy số bằng phương pháp truy hồi.

1. Cho dãy số  xác định bởi  và .
2. Cho dãy số  xác định bởi .

Với cách này, ta có thể xác định được ngay mối liên hệ giữa các số hạng hoặc nhóm các số hạng của dãy số thông qua hệ thức truy hồi. Tuy nhiên, để tính được các số hạng bất kỳ của dãy số thì chúng ta cần phải tích được các số hạng trước đó hoặc phải tìm được công thức tính số hạng tổng quát của dãy số.

- **Cách 3:** Cho dãy số bằng phương pháp mô tả hoặc diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hẩng dãy số.

1. Cho dãy số  gồm các số nguyên tố.
2. Cho tam giác đều  có cạnh bằng 4. Trên cạnh , ta lấy điểm  sao cho . Gọi  là hình chiếu của  trên ,  là hình chiếu của  trên ,  là hình chiếu của  trên ,  là hình chiếu của  trên ,… và cứ tiếp tục như thế, Xét dãy số  với .

**3. Dãy số tăng, dãy số giảm, dãy số hằng:**

Dãy số  được gọi là dãy số tăng nếu ta có  với mọi .

Dãy số  được gọi là dãy số giảm nếu ta có  với mọi .

Dãy số  được gọi là dãy số hằng (hoặc dãy số không đổi) nếu ta có  với mọi

.

1. a) Cho dãy số  với  là một dãy số tăng.

Chứng minh: Ta có .

Suy ra   hay .

Vậy  là một dãy số tăng.

b) Dãy số  với  là một dãy số giảm.

*Chứng minh:*

***Cách 1:*** Ta có . Suy ra  hay

.Vậy  là một dãy số giảm.

***Cách 2:*** Với , ta có nên ta xét tỉ số .

Ta có  nên . Vậy  là một dãy số giảm.

c) Dãy sốvới  không phải là một dãy số tăng cũng không phải là một dãy số giảm vì  không xác định được dương hay âm. Đây là dãy số đan dấu.

**STUDY TIP**

Để chứng minh dãy số  là dãy số giảm hoặc dãy số tăng, chúng ta thường sử dụng một trong 2 hướng sau đây:

(1): Lập hiệu . Sử dụng các biến đổi đại sốvà các kết quả đã biết để chỉ ra (dãy số tăng) hoặc (dãy số giảm)

(2): Nếu thì ta có thể lập tỉ số . Sử dụng các biến đổi đại số và các kết quả đã biết để chỉ ra  (dãy số tăng),(dãy số giảm).

**4. Dãy số bị chặn**

Dãy số được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số  sao cho .

Dãy số được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số  sao cho .

Dãysố được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số , sao cho .

***Ví dụ 7*:**

a) Dãy số với là một dãy số bị chặn vì .

b) Dãy số với  là một dãy số bị chặn vì .

c) Dãy số với bị chặn dưới vì .

d) Dãy số với  ( dấu căn), bị chặn trên vì .

**STUDY TIP**

1) Nếu là dãy số giảm thì bị chặn trên bởi .

2) Nếu là dãy số tăng thì bị chặn dưới bởi .

**B. Các bài toán điển hình**

1. Cho dãy số xác định bởi . Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**Đáp án C**

***Lời giải***

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được đáp án đúng.

+ Ta có 

+ Ta có .

+ Ta có .

+ Ta có .

Vậy phương án đúng là C.

**Nhận xét:** *Từ kết quả trong ví dụ này, chúng ta có thể trả lời được các câu hỏi trắc nghiệm sau đây*

Cho dãy số xác định bởi . Hãy chọn phương án trả lời đúng trong mỗi câu hỏi sau đây:

**Câu 1:** Tìm số nguyên dương  nhỏ nhất để 

**Câu 2:** Số hạng thứ 2017 của dãy số là số hạng nào dưới đây?

**A.** . **B.**. **C.** . **D.**.

1. Cho dãy số xác định bởi . Số hạng thứ 201 của dãy số có giá trị bằng bao nhiêu?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Đáp án A**

***Lời giải***

Nhận thấy dãy số trên là dãy số cho bởi công thức truy hồi.

Ta có .

Từ đây chúng ta có thể dự đoán . Chúng ta khẳng định dự đoán đó bằng phương pháp quy nạp toán học. Thật vậy:

Với  thì  và . Vậy đẳng thức đúng với .

Giả sử đẳng thức đúng với , nghĩa là .

Ta phải chứng minh đẳng thức đúng với , nghĩa là chứng minh .

Thật vậy, ta có  (theo hệ thức truy hồi).

Theo giả thiết quy nạp thì  nên .

Vậy đẳng thức đúng với . Suy ra .

Từ kết quả phần trên, ta có : nếu  thì .

Ta có  nên .

Vậy phương án đúng là A.

**Nhận xét:** *Việc chứng minh được hệ thức giúp ta giải quyết được bài toán tính tổng hoặc xác định được số hạng tùy ý của dãy số. Vì vậy, việc phát hiện ra tính chất đặc biệt của một dãy số sẽ giúp chúng ta giải quyết các yêu cầu liên quan đến dãy số một cách thuận lợi và dễ dàng hơn. Chúngta cùng kiểm nghiệm qua các câu hỏi trắc nghiệm khách quan dưới đây nhé:*

Cho dãy sốxác định bởi . Hãy chọn phương án trả lời đúng trong mỗi câu hỏi sau đây:

1. Tính tổng S của sáu số hạng đầu tiên của dãy 

**A. .** **B. .** **C. .** **D. .**

1. Tìm số nguyên dương  nhỏ nhất để 

**A. .** **B. .** **C. .** **D. .**

1. Tính tổng S của 2018 số hạng đầu tiên của dãy 

**A. .** **B. .** **C. .** **D. .**

1. Tính tổng bình thường của 2018 số hạng đầu tiên của dãy 

**A. .** **B. .** **C. .** **D. .**

1. Cho dãy số xác định bởi . Tìm số hạng tổng quát của dãy số .

**A. .** **B. .** **C. .** **D. **.

**Đáp án D**

***Lời giải***

Ta có .

Từ 5 số hạng đầu của dãy ta dự đoán được . Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ta chứng minh được . Vậy phương án đúng là D.

**Nhận xét:** *Với kết quả của ví dụ này, chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi trắc nghiệm dưới đây:*

*Cho dãy số xác định bởi . Hãy chọn phương án trả lời đúng trong mỗi câu hỏi sau đây:*

1. Rút gọn biểu thức  ta được

**A. .** **B. .** **C. .** **D. .**

1. Mệnh đề nào dưới đây là đúng

**A.** Dãy sốlà dãy số giảm. **B.** Dãy sốkhông là dãy số giảm.

**C.** Dãy sốlà dãy số tăng. **D.** Dãy sốkhông là dãy số tăng.

1. Rút gọn biểu thức 

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**STUDY TIP**

Ngoài cách làm bên, ta có thể kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng thông qua việc xác định một vài số hạng đầu của dãy

+ Với  thì loại ngay được phương án A.

+Ta có  thì loại ngay được các phương án B và C.

1. Cho dãy số có tổng của  số hạng đầu tiên bằng . Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

**A.** là dãy số tăng và .

**B.** là dãy số giảm và .

**C.** là dãy số tăng và .

**D.** là dãy số tăng và .

**Đáp án A.**

***Lời giải***

Ta có và .

Suy ra .

Ta có  và .

Do đó .

Dấu bằng chỉ xảy ra khi  hay . suy ra dãy số là dãy số tăng.

Vậy phương án đúng là A.

1. Cho dãy số xác định bởi . Tìm số hạng thứ 15 của dãy số .

**A. .** **B. .**

**C. .** **D. .**

**Đáp án A**

***Lời giải***

Chúng ta đi tìm công thức xác định số hạng tổng quát của dãy số .

Đặt  khi đó .

Từ hệ thức truy hồi  suy ra .

Như vậy ta có .

Ta có  ; . Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được rằng , suy ra . Do đó . Vậy suy ra phương án đúng là A.

**STUDY TIP**

Dãy số  xác định bởi 

-Nếu  thì số hạng tổng quát của dãy số  là .

-Nếu  thì số hạng tổng quát của dãy số  là .

Cho dãy số  xác định bởi và . Hãy chọn phương án trả lời đúng trong mỗi câu hỏi sau đây.

1. Số hạng thứ ba, thứ năm và thứ bảy của dãy số  lần lượt là:

**A.** **.** **B.** **.** **C.** **.** **D.** **.**

1. Tìm số hạng tổng quát của dãy số .

**A.** **.** **B.** **.** **C.** **.** **D.** **.**

1. Số  có là số hạng của dãy số  không, nếu có thì nó là số hạng thứ bao nhiêu?

**A.** Không. **B.** Có, . **C.** Có, . **D.** Có, .

1.  là một dãy số:

**A.** Giảm và bị chặn trên. **B.** Tăng và bị chặn trên.

**C.** Tăng và bị chặn dưới. **D.** Giảm và bị chặn dưới.

1. Cho dãy số  xác định bởi  và . Số hạng thứ  của dãy là số hạng nào?

**A.** **. B.** **. C.** **. D.** **.**

**Đáp án A**

**Lời giải**

+ Ta có .

Do đó ta có  và .

Từ hệ thức truy hồi của dãy số , ta có .

Bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta chứng minh được rằng:

.

+ Ta có .

Do đó ta có:  và .

Từ hệ thức truy hồi của dãy số , ta có .

Bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta chứng minh được rằng:

.

+ Từ các kết quả trên, ta có hệ phương trình:

.

Do đó số hạng tổng quát của dãy số  là .

Vậy suy ra . Vậy phương án đúng là **A**.

**Nhận xét:** *Với kết quả trong ví dụ này, chúng ta có thể trả lời các câu hỏi trắc nghiệm khách quan dưới đây:*

Cho dãy số  xác định bởi  và . Hãy chọn phương án trả lời đúng trong mỗi câu hỏi sau đây.

1. Tính số hạng thứ năm của dãy số .

**A.** **.** **B.** **.** **C.** **.** **D.** **.**

1. Số hạng tổng quát của dãy số  là:;

**A.** **.** **B.** **.**

**C.** **.** **D.** **.**

**STUDY TIP**

Dãy số  xác định bởi  và , với mọi , trong đó phương trình  có hai nghiệm phân biệt là  và . Khi đó số hạng tổng quát của dãy số  là , trong đó  thỏa mãn hệ phương trình .

1. Cho dãy số  xác định bởi  và . Số  là số hạng thứ mấy của dãy số đã cho?

**A.** **.** **B.** **.** **C.** **.** **D.** 

**Đáp án A.**

**Lời giải**

Từ hệ thức truy hồi của dãy số  ta có:

.

Suy ra số hạng tổng quát của dãy số  là .

Giải phương trình  ta được 

Vậy phương án đúng là **A**.

**STUDY TIP**

Dãy số  xác định bởi  và .

Số hạng tổng quát của dãy số  được tính theo công thức: .

1. Cho dãy số  xác định bởi  và . Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

**A.**  là một dãy số giảm và bị chặn.

**B.**  là một dãy số tăng và bị chặn.

**C.**  là một dãy số giảm và không bị chặn dưới.

**D.**  là một dãy số tăng và không bị chặn trên.

**Đáp án A**

**Lời giải**

Ta có . Do đó ta loại được các phương án **B** và **D**.

+ Ta có nên .

Suy ra  nên  là dãy số giảm.

+ Vì  là một dãy số giảm nên dãy số này bị chặn trên bởi .

Ta có .

Vậy phương án đúng là **A**.

**C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG**

**Dạng 1: Bài tập về xác định số hạng của dãy số**

1. Cho dãy số  có . Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

**A.** . **B.** **.** **C.** **.** **D.** **.**

1. Cho dãy số  xác định bởi . Bốn số hạng đầu của dãy số đó là:

**A.** **.** **B.** **.** **C.** **.** **D.** **.**

1. Cho dãy số  xác định bởi  và . Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là:

**A.** **.** **B.** **.** **C.** **.** **D.** **.**

1. Cho dãy số  xác định bởi  và  với mọi . Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

**A.** **.** **B.** **.** **C.** **.** **D.** **.**

1. Cho dãy số  xác định bởi  và  với mọi . Khi đó  bằng:

**A.** **.** **B.** **.** **C.** **.** **D.** **.**

1. Cho dãy số  có . Số  là số hạng thứ bao nhiêu của dãy số  ?

**A.** **.** **B.** **.** **C.** **.** **D.** **.**

1. Cho dãy số  có . Tìm số hạng lớn nhất của dãy số .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho dãy số  có . Tìm số hạng lớn nhất của dãy số .

**A.** **.** **B.** **.** **C.** **.** **D.** **.**

1. Cho dãy số  xác định bởi  và . Tổng  của  số hạng đầu tiên của dãy số là:

**A.** **.** **B.** **.** **C.** **.** **D.** **.**

1. Cho dãy số  xác định bởi  và . Số hạng tổng quát của dãy số  là:

**A.** **.** **B.** **.** **C.** **.** **D.** **.**

1. Cho dãy số  xác định bởi  và . Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

**A.** **.** **B.** **.** **C.** **.** **D.** .

**Dạng 2: Bài tập về xét tính tăng, giảm của dãy số.**

1. Trong các dãy số dưới đây dãy số nào là dãy số tăng ?

**A.** Dãy , với .

**B.** Dãy , với .

**C.** Dãy , với .

**D.** Dãy , với .

1. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là dãy số giảm ?

**A.** Dãy , với . **B.** Dãy  với .

**C.** Dãy , với . **D.** Dãy , với .

1. Cho dãy số  với . Dãy số  là dãy số tăng khi:

**A.** **.** **B.** **.** **C.** **.** **D.** **.**

1. Cho hai dãy số  với  và  với . Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

**A.**  là dãy số giảm,  là dãy số giảm.

**B.**  là dãy số giảm,  là dãy số tăng.

**C.**  là dãy số tăng,  là dãy số giảm.

**D.**  là dãy số tăng, là dãy số tăng.

**Dạng 3: Bài tập về xét tính bị chặn của dãy số**.

1. Cho dãy số , với . Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

**A.** Dãy  bị chặn trên và không bị chặn dưới.

**B.** Dãy  bị chặn dưới và không bị chặn trên.

**C.** Dãy  bị chặn trên và bị chặn dưới.

**D.** Dãy  không bị chặn.

1. Trong các dãy số sau dãy số nào là dãy bị chặn ?

**A.** Dãy , với .

**B.** Dãy , với .

**C.** Dãy , với .

**D.** Dãy , với .

1. Trong các dãy số dưới đây dãy số nào bị chặn trên ?

**A.** Dãy , với .

**B.** Dãy , với .

**C.** Dãy , với .

**D.** Dãy , với .

1. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào bị chặn dưới ?

**A.** Dãy , với .

**B.** Dãy , với .

**C.** Dãy , với .

**D.** Dãy , với .

**Dạng 4: Bài tập về tính chất của dãy số**.

1. Cho dãy số , xác định bởi: . Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

**A.** . **B.** .

**C.** **.** **D.** **.**

1. Cho dãy số , với . Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

**A.** **.** **B.** **.**

**C.** **.** **D.** **.**

1. Cho dãy số  xác định bởi . Mệnh đề nào dưới đây là sai ?

**A.** **.** **B.** **.** **C.** **.** **D.** **.**

1. Cho dãy số  xác định bởi  và . Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

**A.** **.** **B.** **.** **C.** **.** **D.** **.**

1. Cho dãy số  xác định bởi  và . Tìm số nguyên dương  nhỏ nhất sao cho .

**A.** **.** **B.** **.** **C.** **.** **D.** **.**

1. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **SAI** ?

**A.** Dãy số  xác định bởi  và  là một dãy số không đổi.

**B.** Dãy số , với , có tính chất .

**C.** Dãy số , với , là một dãy số bị chặn.

**D.** Dãy số , với , là một dãy số giảm.

1. Cho dãy số xác định bởi  và có tính chất

**A.** Là dãy số tăng và bị chặn dưới. **B.** Là dãy số giảm và bị chặn trên.

**C.** Là dãy số giảm và bị chặn dưới. **D.** Là dãy số tăng và bị chặn trên.

1. Cho dãy số xác định bởi  và Tổng  là

**A.** . **B.**  **C.**  **D.** 

1. Cho dãy số xác định bởi Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong các số hạng của dãy số . Tính giá trị biểu thức 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Cho dãy số thỏa mãn khi  có giá trị nguyên dương lớn nhất.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**

**Dạng 1: Bài tập về xác định số hạng của dãy số**

1. **Đáp án C.**

Ta có nên 

1. **Đáp án A.**

Ta có  (loại phương án B và D) và  (loại phương án C).

1. **Đáp án D.**

Ta có nên loại các phương án còn lại.

1. **Đáp án B.**

Ta có Bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta chứng minh được rằng . Do đó .

1. **Đáp án D.**

Ta có . Suy ra 

1. **Đáp án D.**

Giải phương trình ta được 

1. **Đáp án B.**

Ta có  Dấu bằng xảy ra khi 

Vậy số hạng lớn nhất của dãy số là số hạng bằng 15.

1. **Đáp án A.**

Ta có  Dấu bằng xảy ra khi 

Vậy số hạng lớn nhất của dãy là số hạng bằng .

1. **Đáp án A.**

Ta tính được 

1. **Đáp án A.**

**Cách 1:** Tìm số hạng tổng quát của dãy số.

Ta có 

**Cách 2:** Kiểm tra từng phương án cho đến khi tìm được phương án đúng.

Phương án A: 

**Cách 3:** Với  loại các phương án còn lại B, C, D.

1. **Đáp án A.**

Ta có  và 

Suy ra 

Suy ra  Do đó 

**Dạng 2: Bài tập về xét tính tăng giảm của dãy số**

1. **Đáp án B.**

* Dãy số là dãy đan dấu nên không phải là dãy số tăng cũng không phải là dãy số giảm.
* Với dãy , ta có (do  Vì nên là một dãy số tăng.
* Dãy số là một dãy số giảm vì 
* Dãy số là một dãy số giảm vì 

1. **Đáp án C.**

* Dãy số là dãy đan dấu nên không phải là dãy số tăng cũng không phải là dãy số giảm.
* Dãy số là một dãy số tăng vì 
* Dãy số là một dãy số giảm vì 
* Dãy số là một dãy số tăng vì 

1. **Đáp án B.**

Ta có  Xét hiệu 

là dãy tăng khi và chỉ khi 

1. **Đáp án D.**

Ta có  và nên là dãy số tăng.

Ta có  nên cũng là dãy số tăng.

**Dạng 3: Bài tập về xét tính bị chặn của dãy số**

1. **Đáp án C.**

Ta có  nên là một dãy số tăng. Suy ra nó bị chặn dưới bởi . Lại do nên dãy số  bị chặn trên bởi 1.

1. **Đáp án D.**

* Dãy số là dãy số tăng và chỉ bị chặn dưới vì 
* Dãy số là dãy số tăng và chỉ bị chặn dưới vì 
* Dãy số là dãy số tăng và chỉ bị chặn dưới vì 
* Dãy số là dãy số bị chặn vì  

1. **Đáp án B.**

* Dãy số là dãy số tăng và chỉ bị chặn dưới vì 
* Dãy số có  nên dãy số là dãy số bị chặn.
* Dãy số là dãy số tăng và chỉ bị chặn dưới bởi 
* Dãy số là dãy đan dấu và  lớn tùy ý khi  đủ lớn, còn  nhỏ tùy ý khi  đủ lớn.

1. **Đáp án C.**

* Dãy số là dãy đan dấu và  lớn tùy ý khi  đủ lớn,  nhỏ tùy ý khi  đủ lớn.
* Dãy số là dãy số giảm và nhỏ tùy ý khi  đủ lớn.
* Dãy số là dãy số tăng nên nó bị chặn dưới bởi
* Dãy số là dãy đan dấu và  lớn tùy ý khi  đủ lớn,  nhỏ tùy ý khi  đủ lớn.

**Dạng 4: Bài tập về tính chất của dãy số.**

1. **Đáp án A.**

Ta có .

* Phương án A: 
* Phương án B: 
* Phương án C: 
* Phương án D: 

1. **Đáp án D.**

* Phương án A: 
* Phương án B: 
* Phương án C: 
* Phương án D: 

1. **Đáp án C.**

* Phương án A:



* Phương án B: 
* Phương án C: 
* Phương án D:



Lưu ý: Quan sát vào các chỉ số dưới của số hạng tổng quát, ta thấy ở C có sự khác biệt so với ba phương án trên nên ta có thể kiểm tra ngay phương án C trước.

1. **Đáp án A.**

Sáu số hạng đầu tiên của dãy là 1;2;0;1;2;0.

Từ đây ta dự đoán Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được rằng 

Mặt khác  nên 

1. **Đáp án B.**

Trước hết ta kiểm tra phương án với nhỏ nhất. Viết 10 số hạng đầu tiên của 

Dễ dàng thấy  nên phương án A là sai.

**Cách 1:** Ta viết thêm 4 số hạng nữa của dãy  ta được



Từ đây ta dự đoán được 

Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ta chứng minh được  Vậy số nguyên dương cần tìm là 

**Cách 2:** Sau khi viết 10 số hạng của dãy ta có thể đoán được 

Bằng phương pháp quy nạp toán học, ta chứng minh được rằng Như vậy 6 là số nguyên dương nhỏ nhất để  Do đó 

Suy ra số cần tìm là 

1. **Đáp án D.**

* Phương án A: Ta có . Từ đây ta dự đoán 

Bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta chứng minh được rằng Suy ra  là dãy số không đổi. Do đó phương án A đúng.

* Phương án B: Ta có 

Vậy  Do đóphương án B là đúng.

* Phương án C: Ta có nên dãy số là dãy số không đổi. Suy ra là dãy số bị chặn. Do đó phương án C là đúng.
* Phương án D: Ta có  Suy ra khẳng định là một dãy số giảm là khẳng định sai.

1. **Đáp án C.**

Ta có  Từ đó ta tính được 

Do  nên là dãy số giảm

Ta có  nên  là dãy số bị chặn. Suy ra phương án đúng là C.

1. **Đáp án B.**

Từ hệ thức truy hồi của dãy số, ta có  Suy ra 

Do đó 

Vậy 

1. **Đáp án A.**

Dựa vào chu kì của hàm số  ta có 

Do đó tập hợp các phần tử của dãy số là 

Suy ra Do đó 

1. **Đáp án C.**

Dễ chỉ ra được Từ hệ thức truy hồi của dãy số, ta có 

Suy ra 

Do đó 

Vậy  Vì nên 

Suy ra số nguyên dương lớn nhất để là . Vì vậy phương án đúng là C.

**CẤP SỐ CỘNG**

**A. LÝ THUYẾT**

**I. ĐỊNH NGHĨA.**

***Cấp số cộng*** là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi .

Số không đổi  được gọi là *công sai* của cấp số cộng.

*Đặc biệt, khi*  *thì cấp số cộng là một* ***dãy số không đổi*** *(tất cả các số hạng đều bằng nhau).*

**Nhận xét:** *Từ định nghĩa, ta có:*

1. *Nếu*  *là một cấp số cộng với công sai* *, ta có công thức truy hồi*



*2) Cấp số cộng  là một dãy số tăng khi và chỉ khi công sai .*

*3) Cấp số cộng  là một dãy số giảm khi và chỉ khi công sai .*

**STUDY TIP**

*Để chứng minh dãy số*  *là một cấp số cộng, chúng ta cần chứng minh*  *là một hằng số với mọi số nguyên dương* *.*

**Ví dụ 1.** Chứng minh rằng dãy số hữu hạn sau là một cấp số cộng:

.

***Lời giải***

Vì 



Nên theo định nghĩa cấp số cộng, dãy số là một cấp số cộng với công sai 

**Ví dụ 2.** Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng? Tìm số hạng đầu và công sai của nó.

a) Dãy số , với ; b) Dãy số , với ;

c) Dãy số , với ; d) Dãy số , với .

***Lời giải***

a) Ta có  nên 

Do đó  là cấp số cộng với số hạng đầu  và công sai .

b) Ta có  nên 

Suy ra  là cấp số cộng với số hạng đầu  và công sai .

c) Ta có  nên  (phụ thuộc vào giá trị của ). Suy ra  không phải là một cấp số cộng.

d) Ta có  nên  (phụ thuộc vào giá trị của ).

Suy ra  không phải là một cấp số cộng.

**Ví dụ 3.** Cho cấp số cộng  có 7 số hạng với số hạng đầu  và công sai . Viết dạng khai triển của cấp số cộng đó.

***Lời giải***

Ta có 



Vậy dạng khai triển của cấp số cộng  là 

**II. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA CẤP SỐ CỘNG.**

**Định lý 1.**

Nếu cấp số cộng có số hạng đầu  và công sai  thì số hạng tổng quát  được xác định bởi công thức:

 (2)

**STUDY TIP**

*Từ kết quả của định lý 1, ta rút ra nhận xét sau:*

*Cho cấp số cộng*  *biết hai số hạng*  *và*  *thì số hạng đầu và công sai được tính theo công thức:*

*(1) :* 

*(2) :* 

**Ví dụ 4.** Cho cấp số cộng có  và .

a) Tìm .

b) Số  là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng?

***Lời giải***

a) Ta có 

b) Số hạng tổng quát của cấp số cộng là 

Vì  nên 

Do  là số nguyên dương nên số là số hạng thứ 405 của cấp số cộng đã cho.

**III. TÍNH CHẤT CÁC SỐ HẠNG CỦA CẤP SỐ CỘNG.**

**Định lý 2.**

Trong một cấp số cộng , mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

 với . (3)

**STUDY TIP**

*Một cách tổng quát, ta có:*

*Nếu*  *là cấp số cộng thì* *.*

**Ví dụ 5.**

a) Cho cấp số cộng  có  và . Tìm .

b) Cho cấp số cộng . Tính giá trị của biểu thức .

***Lời giải***

a) Theo tính chất của cấp số cộng, ta có  nên .

b) Theo tính chất của cấp số cộng, ta có  và .

Vì  nên 

Vậy .

**IV. TỔNG**  **SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA CẤP SỐ CỘNG.**

**Định lý 3.**

Cho một cấp số cộng . Đặt . Khi đó:

 (4) hoặc  (5)

**STUDY TIP**

*1) Chúng ta thường sử dụng công thức (4) để tính*  *khi biết số hạng đầu và số hạng thứ*  *của cấp số cộng.*

*2) Để tính được* *, thì công thức (5) được sử dụng mọi trường hợp. Cụ thể là, chúng ta cần tìm được số hạng đầu*  *và công sai*  *của cấp số cộng.*

*3) Các bài toán về cấp số cộng thường đề cập đến 5 đại lượng* *. Chúng ta cần biết ba đại lượng trong năm đại lượng là có thể tìm được hai đại lượng còn lại. Tuy nhiên, theo các công thức tính* *thì các bài toán về cấp số cộng sẽ quy về việc tính ba đại lượng* .

**Ví dụ 6.** Cho cấp số cộng có  và .

a) Tính tổng của 25 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

b) Biết , tìm *.*

***Lời giải***

Ta có 

a) Ta có .

b) Vì  nên 

Giải phương trình bậc hai trên với nguyên dương, ta tìm được 

**B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ CẤP SỐ CỘNG**

1. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

**A.** Dãy **số** , với .

**B.** Dãy số , với .

**C.** Dãy số , với .

**D.** Dãy số , với .

***Lời giải***

**Đáp án C.**

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng.

- *Phương án A*: Ba số hạng đầu tiên của dãy số 

Ba số này không lập thành cấp số cộng vì 

- *Phương án B*: Ba số hạng đầu tiên của dãy số 

Ba số này không lập thành cấp số cộng vì 

- *Phương án C*: Ta có 

Do đó,  nên  là cấp số cộng.

- *Phương án D*: Ba số hạng đầu tiên của dãy số 

Ba số này không lập thành cấp số cộng.

**STUDY TIP**

1) Để chứng minh dãy số là một cấp số cộng, chúng ta cần chứng minh  là một hằng số với mọi số nguyên dương .

2) Để chỉ ra dãy số không phải là một cấp số cộng, chúng ta cần phải chỉ ra ba số hạng liên tiếp  của dãy số không lập thành một cấp số cộng.

1. Cho cấp số cộng  có  và . Tìm số hạng .

**A.**. **B.**. **C.**. **D.** .

***Lời giải***

**Đáp án C.**

Ta có công sai của cấp số cộng là .

Suy ra .

Vậy phương án đúng là C.

**STUDY TIP**

Với việc biết được số hạng đầu và công sai của một cấp số cộng, chúng ta hoàn toàn xác định được các yếu tố còn lại của một cấp số cộng như số hạng tổng quát, thứ tự của số hạng và tổng của  số hạng đầu tiên. Tham khảo các bài tập sau.

**Nhận xét:** Cụ thể chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi sau đây:

**Câu 1:** Cho cấp số cộng có  và . Số  là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng đã cho?

**A.** 17. B. 16. C. 18. D. 19.

**Câu 2:** Cho cấp số cộng có  và . Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng 

**A.** . B. . C. . D. .

**Câu 3:** Cho cấp số cộng có  và . Tính tổng  của  số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho.

**A.** . B. .

**C.** . D. .

**Câu 4:** Cho cấp số cộng có  và . Biết rằng tổng  số hạng đầu tiên của cấp số cộng bằng 18, tìm .

**A.** . B. . C. . D..

1. Cho cấp số cộng có  và . Tính số hạng đầu  và công sai  của cấp số cộng.

**A.**. **B.** . **C.**. **D.** .

***Lời giải***

**Đáp án D.**

Ta có .



Ta có hệ phương trình .

Vậy phương án đúng là D.

1. Cho cấp số cộng . Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **sai**?

**A.** với .

**B.**  với .

**C.** với .

**D.** .

***Lời giải***

**Đáp án D.**

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án sai.

+ *Phương án A*: Ta có 

.

Do đó A là phương án đúng.

+ *Phương án B*: Ta có 

.

Do đó B là phương án đúng.

+ *Phương án C*: Ta có 

Do đó C là phương án đúng.

+ *Phương án D*: Ta có 

Vậy phương án D sai.

**STUDY TIP**

Qua ví dụ này, chúng ta lưu ý một số tính chất của cấp số cộng như:

1)  với .

2)  với .

3)  với .

Do đó C là phương án đúng.

*+ Phương án D:* Ta có . Vậy D là phương án sai.

1. Cho dãy số  xác định bởi  và  với mọi . Tính tổng  của  số hạng đầu tiên của dãy số đó.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Lời giải***

Từ công thức truy hồi của dãy số , ta có  là một cấp số cộng với công sai . Do đó tổng của  số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó là



Vậy chọn phương án A.

1. Cho cấp số cộng  có công sai  và  đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng  của  số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Lời giải***

Đặt  thì  với mọi .

Dấu bằng xảy ra khi .Suy ra .

Ta có . Vậy phương án đúng là C.

**Nhận xét:** *Từ kết quả bài tập này, chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi sau đây:*

1. Cho cấp số cộng  có công sai  và  đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng thứ  của cấp số cộng đó.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho cấp số cộng  có công sai  và  đạt giá trị nhỏ nhất. Số  là số hạng thứ mấy của cấp số cộng đã cho?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho cấp số cộng  có công sai  và  đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho cấp số cộng  có công sai , trong đó  là tham số. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho cấp số cộng  Tính tổng .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Lời giải***

Cấp số cộng  có số hạng đầu  và công sai .

Suy ra  là số hạng thứ  của cấp số cộng.

Do đó . Vậy B là phương án đúng.

Nhận xét: Từ kết quả của bài tập này, chúng ta có thể giải quyết các câu hỏi sau đây:

**Câu 1.** Cho cấp số cộng  Số  là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng đó?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 2.** Cho cấp số cộng  Tìm  biết .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 3.** Cần viết thêm vào giữa hai số  và  bao nhiêu số hạng để thu được một cấp số cộng hữu hạn có tổng các số hạng bằng ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 4.** Cho cấp số cộng  có  và . Số hạng thứ  của cấp số cộng đó là số nào dưới đây?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Tìm tất cả các giá trị của tham số  để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng: .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Lời giải***

**Cách 1:** *Giải bài toán như cách giải tự luận.*

- *Điều kiện cần:* Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt  lập thành một cấp số cộng. Theo định lý Vi-ét đối với phương trình bậc ba, ta có . Vì  lập thành cấp số cộng nên . Suy ra . Thay  vào phương trình đã cho, ta được



- *Điều kiện đủ:*

+ Với  thì ta có phương trình  (phương trình có nghiệm duy nhất). Do đó  không phải giá trị cần tìm.

+ Với , ta có phương trình 

Ba nghiệm  lập thành một cấp số cộng nên  là giá trị cần tìm.

**Cách 2:** *Kiểm tra từng phương án cho đến khi chọn được phương án đúng.*

Trước hết, ta kiểm tra phương án A và D (vì  nguyên).

+ Với  thì ta có phương trình  (phương trình có nghiệm duy nhất). Do đó  không phải giá trị cần tìm.

+ Với , ta có phương trình 

Ba nghiệm  lập thành một cấp số cộng nên  là giá trị cần tìm.

**STUDY TIP**

*Phương trình bậc ba  có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng thì điều kiện cần là  là nghiệm của phương trình. Giải điều kiện này ta có hệ thức liên hệ giữa các hệ số của phương trình là . Trong thực hành giải toán, chúng ta cũng chỉ cần ghi nhớ điều kiện cần là  là nghiệm của phương trình.*

1. Biết rằng tồn tại hai giá trị của tham số  để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng: , tính tổng lập phương của hai giá trị đó.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Lời giải***

Đặt ******. Khi đó ta có phương trình: .

Phương trình đã cho có nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình  có  nghiệm dương phân biệt 

(do tổng hai nghiệm bằng  nên không cần điều kiện này).

+ Với điều kiện trên thì có hai nghiệm dương phân biệt là .

Khi đó phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt là .

Bốn nghiệm này lập thành một cấp số cộng khi 

Theo định lý Vi-ét ta có: .

Suy ra ta có hệ phương trình .

Cả hai giá trị này đều thỏa mãn điều kiện nên đều có thể nhận được.

Do đó .

Suy ra phương án đúng là C.

1. Một cơ sở khoan giếng đưa ra định mức giá như sau: Giá từ mét khoan đầu tiên là  đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm  đồng so với giá của mét khoan ngay trước đó. Một người muốn kí hợp đồng với cơ sở khoan giếng này để khoan một giếng sâu  mét lấy nước dùng cho sinh hoạt của gia đình. Hỏi sau khi hoàn thành việc khoan giếng, gia đình đó phải thanh toán cho cơ sở khoan giếng số tiền bằng bao nhiêu?

**A.** đồng. **B.** đồng. **C.** đồng. **D.** đồng.

***Lời giải***

Gọi  là giá của mét khoan thứ , trong đó 

Theo giả thiết, ta có  và  với .

Ta có  là cấp số cộng có số hạng đầu  và công sai .

Tổng số tiền gia đình thanh toán cho cơ sở khoan giếng chính là tổng các số hạng của cấp số cộng . Suy ra số tiền mà gia đình phải thanh toán cho cơ sở khoan giếng là

 (đồng).

Vậy phương án đúng là **A**.

**C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG**

**Dạng 1: Bài tập nhận dạng cấp số cộng**

1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Trong các dãy số sau, dãy số nào **không** là cấp số cộng?

**A.** Dãy số  với .

**B.** Dãy số với .

**C.** Dãy số  với .

**D.** Dãy số  với .

1. Cho các số thực  thỏa mãn điều kiện: Ba số  theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

**A.** Ba số  theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

**B.** Ba số  theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

**C.** Ba số  theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

**D.** Ba số  theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

**Dạng 2: Bài tập về xác định số hạng và công sai của cấp số cộng.**

1. Cho cấp số cộng  xác định bởi . Xác định số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho cấp số cộng  có . Tính .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho cấp số cộng  có . Tìm số hạng đầu  và công sai  của cấp số cộng đó.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho cấp số cộng  có . Tính giá trị của biểu thức .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho cấp số cộng  với . Tìm số hạng đầu của cấp số cộng.

**A.**  hoặc . **B.**  hoặc . **C.**  hoặc . **D.**  hoặc .

1. Cho cấp số cộng  có công sai  và  đạt giá trị nhỏ nhất. Số  là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho cấp số cộng . Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Viết sáu số xen giữa  và  để được một cấp số cộng có tám số hạng. Sáu số hạng cần viết thêm là

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Cho hai cấp số cộng  và  Hỏi trong  số hạng đầu tiên của mỗi cấp số cộng có bao nhiêu số hạng chung?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho cấp số cộng  thỏa mãn điều kiện . Tính giá trị của .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Biết rằng tồn tại các giá trị của  để ba số  lập thành một cấp số cộng, tính tổng  các giá trị đó của .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Dạng 3: Bài tập về tổng của  số hạng đầu tiên của cấp số cộng.**

1. Cho cấp số cộng  có  và tổng của  số hạng đầu tiên là . Cấp số cộng trên có

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho cấp số cộng  có . Tính tổng  của  số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Dạng 4: Bài tập liên quan đến tính chất của cấp số cộng.**

1. Cho cấp số cộng . Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Cho ba số dương  thỏa mãn điều kiện  lập thành một cấp số cộng. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

**A.** Ba số  lập thành một cấp số cộng.

**B.** Ba số  lập thành một cấp số cộng.

**C.** Ba số  lập thành một cấp số cộng.

**D.** Ba số  lập thành một cấp số cộng

**Dạng 5: Bài tập liên quan đến cấp số cộng.**

1. Tìm tất cả các giá trị của tham số  để phương trình  có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Biết rằng tồn tại đúng hai giá trị của tham số  để phương trình  có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng, tính tổng bình phương của hai giá trị đó.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Tìm tất cả các giá trị của tham số  để phương trình  có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Biết rằng tồn tại đúng ba giá trị  của tham số  để phương trình  có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng, tính giá trị của biểu thức .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Mặt sàn tầng của một ngôi nhà cao hơn mặt sân . Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai gồm  bậc, một bậc cao . Kí hiệu  là độ cao của bậc thứ  so với mặt sân. Viết công thức để tìm độ cao .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Người ta trồng  cây theo hình một tam giác như sau: hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây,… Hỏi trồng được bao nhiêu hàng cây theo cách này?

**A.**  hàng. **B.**  hàng. **C.**  hàng. **D.**  hàng.

1. Trên một bàn cờ có nhiều ô vuông. Người ta đặt 7 hạt dẻ vào ô vuông đầu tiên, sau đó đặt tiếp vào ô thứ hai số hạt dẻ nhiều hơn ô đầu tiên là 5, tiếp tục đặt vào ô thứ ba số hạt dẻ nhiều hơn ô thứ hai là 5, … và cứ thế tiếp tục đến ô cuối cùng. Biết rằng đặt hết số ô trên bàn cờ người ta đã phải sử dụng hết  hạt dẻ. Hỏi bàn cờ đó có bao nhiêu ô?

**A.** ô. **B.** ô. **C.**  ô. **D.**  ô.

1. Một công ty trách nhiệm hữu hạn thực hiện việc trả lương cho các kỹ sư theo phương thức sau: Mức lương của quý làm việc đầu tiên cho công ty là  triệu đồng/quý, và kể từ quý làm việc thứ hai, múc lương sẽ được tăng thêm  đồng mỗi quý. Tính tổng số tiền lương một kỹ sư nhận được sau ba năm làm việc cho công ty.

**A.** triệu đồng. **B.**  triệu đồng. **C.** triệu đồng. **D.**  triệu đồng.

1. Trên tia  lấy các điểm  sao cho với mỗi số nguyên dương , . Trong cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa tia , vẽ các nửa đường tròn đường kính ,  Kí hiệu  là diện tích nửa đường tròn đường kính  và với mỗi , kí hiệu  là diện tích của hình giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính , nửa đường tròn đường kính  và tia . Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

**A.** Dãy số  không phải là một cấp số cộng.

**B.** Dãy số  là một cấp số cộng có công sai .

**C.** Dãy số  là một cấp số cộng có công sai .

**D.** Dãy số  không phải là một cấp số cộng có công sai .

1. Trong mặt phẳng tọa độ , cho đồ thị  của hàm số . Với mỗi số nguyên dương , gọi  là giao điểm của đồ thị  với đường thẳng . Xét dãy số  với  là tung độ của điểm . Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

**A.** Dãy số  là một cấp số cộng có công sai .

**B.** Dãy số  là một cấp số cộng có công sai .

**C.** Dãy số  là một cấp số cộng có công sai .

**D.** Dãy số  không phải là một cấp số cộng.

1. Cho cấp số cộng  có số hạng đầu  và công sai . Trên mặt phẳng tọa độ , lấy các điểm  sao cho với mỗi số nguyên dương , điểm  có tọa độ . Biết rằng khi đó tất cả các điểm  cùng nằm trên một đường thẳng. Hãy viết phương trình của đường thẳng đó.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** 

**D. HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Dạng 1: Bài tập về nhận dạng cấp số cộng**

1. **Đáp án B.**

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được đáp án đúng.

*- Phương án A*: .

*- Phương án B*: .

Vậy dãy số ở phương án B là cấp số cộng.

1. **Đáp án C.**

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được đáp án đúng.

*- Phương án A*: Ta có  nên  là cấp số cộng.

*- Phương án B*: Ta có  nên  là cấp số cộng.

*- Phương án C*: Ta có  nên  không là cấp số cộng.

*- Phương án D*: Ta có (do ) nên  là cấp số cộng.

1. **Đáp án C.**

Theo giả thiết, ta có: .

Suy ra  hoặc  lập thành một cấp số cộng. Do đó phương án đúng là C.

**Dạng 2: Bài tập về nhận dạng cấp số cộng**

1. **Đáp án A.**

Ta có  là cấp số cộng có công sai  nên số hạng đầu là 

Suy ra số hạng tổng quát là .

1. **Đáp án A.**

Gọi  là công sai của cấp số cộng. Theo giả thiết, ta có: 

Suy ra .

1. **Đáp án B.**

Ta có  và . Suy ra 

Vậy .

1. **Đáp án A.**

Ta có .

Suy ra . Do đó .

1. **Đáp án A.**

Ta có  hoặc .

+ Giải , ta được .

+ Giải , ta được .

1. **Đáp án A.**

Ta có 

Dấu bằng xảy ra khi 

Số hạng tổng quát của cấp số cộng là .

Nếu  thì .

Vậy  là số hạng thứ  của cấp số cộng.

1. **Đáp án C.**

Theo tính chất của cấp số cộng, ta có .

1. **Đáp án A.**

Theo giả thiết, ta có 

Suy ra .

Vậy  số cần viết thêm là .

1. **Đáp án B.**

Ta có 



Để một số là số hạng chung của cả hai cấp số cộng thì ta phải có .

Suy ra , tức là  và .

Lại do  nên .

ứng với  giá trị của , ta tìm được  số hạng chung.

1. **Đáp án B.**

Cấp số cộng  có số hạng đầu  và công sai  nên số hạng tổng quát là 

Giả sử . Khi đó 

Theo giả thiết, ta có .

1. **Đáp án** **A.**

Theo tính chất của cấp số cộng ta có:



+) .

+) 

Với nghiệm  và , ta tìm được . Với nghiệm và , ta tìm được . Với nghiệm  và  ta tìm được nghiệm 

Do đó .

**Dạng 3: Bài tập về tổng của**  **số hạng đầu tiên của cấp số cộng**.

1. **Đáp án B.**

Ta có .

.

Do đó ta có hệ phương trình .

Ta có 

Vậy đáp án đúng là **B.**

1. **Đáp án A.**

Ta có 

.

**Dạng 4: Bài tập liên quan đến tính chất của cấp số cộng**.

1. **Đáp án** **A.**

Kiểm tra từng phương án cho đến khi tìm được phương án đúng.

Ta có: .

- Phương án A: Ta có: 

- .

- Vậy đáp án **A.**

1. **Đáp án** **A.**

Theo giả thiết ta có:



Suy ra ba số  hoặc  lập thành một cấp số cộng. Do đó đáp án là. **A.**

**Dạng 5: Bài tập liên quan đến cấp số cộng**.

1. **Đáp án B.**

Áp dụng kết quả ở phần lí thuyế, ta có phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng thì điều kiện cần là hay .

Với  thì phương trình đã cho trở thành .

Bốn số  lập thành một cấp số cộng nên  là giá trị cần tìm.

1. **Đáp án** **A.**

ÁP dụng kết quả phần lý thuyết, ta có phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng thì điều kiện cần là  hay 

Với , ta có phương trình . Phương trình nàu có 4 nghiệm là  lập thành cấp số cộng.

Với , ta có phương trình . Phương trình này có 4 nghiệm  lập thành cấp số cộng.

Vậy  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do đó .

1. **Đáp án** **D.**

Áp dụng kết quả phần lý thuyết, ta có phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thì điều kiện cần là  là nghiệm của phương trình.

Suy ra .

Với , ta có phương trình .



Ba số  lập thành cấp số cộng.

Vậy các giá trị cần tìm là . Do đó D là phương án đúng.

1. **Đáp án A.**

Áp dụng kết quả ở phần lý thuyết, ta có phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thì điều kiện cần là:  là nghiệm của phương trình.

Suy ra 

 

Với  thì  nên .

Do vậy, với  ta có phương trình  .

Ba số 1,3,5 lập thành cấp số cộng.

Vậy  là các giá trị cần tìm.

Do đó 

1. **Đáp án A.**

Ký hiệu  là độ cao của bậc thứ  so với mặt sân.

Khi đó, ta có  (mét), trong đó  (mét). Dãy số  lập thành một cấp số cộng có  và công sai . Suy ra số hạng tổng quát của cấp số cộng này là  (mét).

1. **Đáp án A.**

Giả sử trồng được  hàng. Khi đó tổng số cây được trồng là .

Theo giả thiết ta có .

1. **Đáp án B.**

Kí hiệu  là số hạt dẻ ở ô thứ .

Khi đó, ta có  và .

Dãy số  là cấp số cộng với  và công sai  nên có .

Theo giả thiết, ta có  .

Suy ra bàn cờ có 100 ô. Do đó B là đáp án đúng.

1. **Đáp án B.**

Kí hiệu  là mức lương của quý thứ  làm việc cho công ty. Khi đó  và .

Dãy số  lập thành cấp số cộng có số hạng đầu  và công sai .

Một năm có 4 quý nbên 3 năm có tổng 12 quý.

Số tiền lương sau 3 năm bằng tổng số tiền lương của 12 quý và bằng tổng 12 số hạng đầu tiên của cấp số cộng . Vậy, tổng số tiền lương nhận được sau 3 năm làm việc cho công ty của kỹ sư là  (triệu đồng).

1. **Đáp án B.**

Bán kính đường tròn có đường kính  là .

Diên tích nửa đường tròn đường kính  là .

Suy ra .

Ta có .

Do  nên  là cấp số cộng với công sai .

Suy ra B là phương án đúng.

1. **Đáp án B.**

Ta có  trong đó .

Do  nên  là một cấp số cộng với công sai .

Suy ra B là phương án đúng.

1. **Đáp án A.**

Số hạng tổng quát của cấp số cộng  là .

Nhận thấy toạ độ của các điểm  đều thoả mãn phương trình  nên phương trình đường thẳng đi qua các điểm là  .

Suy ra A là phương án đúng.

**CẤP SỐ NHÂN**

**A. LÝ THUYẾT**

**1. ĐỊNH NGHĨA.**

***Cấp số nhân*** là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nhân với một số không đổi *q*.

Số không đổi *q* được gọi là ***công bội***của cấp số nhân.

**Đặc biệt:**

1. *Khi  thì cấp số nhân là một* ***dãy số không đổi*** *(tất cả các số hạng đều bằng nhau).*
2. *Khi  thì cấp số nhân có dạng *
3. *Khi  thì với mọi  cấp số nhân có dạng *

**Nhận xét:** Từ định nghĩa, ta có:

Nếu là một cấp số nhân với công bội , ta có công thức truy hồi  (1)

**STUDY TIP**

*1) Để chứng minh dãy số là một cấp số nhân, chúng ta cần phải chỉ tồn tại một số không đổi  sao cho .*

*2) Trong trường hợp  để chứng minh  là một cấp số nhân, chúng ta cần phải chỉ ra tỷ số  là một số không đổi với mọi số nguyên dương n.*

*3) Để chỉ ra một dãy số không phải là cấp số nhân, chúng ta cần chỉ một dãy số gồm 3 số hạng liên tiếp của dãy số đã cho mà không lập thành cấp số nhân.*

**Ví dụ 1.** Chứng minh rằng dãy số hữu hạn sau là một cấp số nhân.

****

**Lời giải**

Ta có 



Theo định nghĩa cấp số nhân, dãy số là một cấp số nhân với công bội .

**Ví dụ 2.** Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

a) Dãy số , với  b) Dãy số , với 

c) Dãy số , với  d) Dãy số , với 

**Lời giải**

a) **Cách 1:** Ba số hạng đầu của dãy số  là 1, 4, 9. Vì  nên dãy số không phải là cấp số nhân.

**Cách 2:** Tacó  nên  (phụ thuộc vào *n* không phải là số không đổi). Do đó,  không phải là cấp số nhân.

b) Ta có  nên (là số không đổi). Do đó, phải là cấp số nhân với công bội .

c) Ta có  nên  (phụ thuộc vào n, không phải là số không đổi).

Do đó  không phải là một cấp số nhân.

d) Ba số hạng đầu của dãy số  là  Vì  nên dãy số không phải là cấp số nhân.

**Ví dụ 3.** Cho cấp số nhân  có số hạng đầu  và công bội . Viết 6 số hạnh đầu của cấp số nhân và tính tổng của 6 số hạng đó.

**Lời giải**

Ta có 





Tổng của 6 số hạng đầu tiên của cấp số nhân là



**2. Số hạng tổng quát của cấp số nhân.**

**Định lý 1.**

Nếu cấp số nhân có số hạng đầu  và công bội *q*  thì số hạng tổng quát  được xác định bởi công thức:  (2)

**STUDY TIP**

*Từ kết quả của định lý 1, ta rút ra kết quả sau:*

*Cho cấp số nhân với các số hạng khác 0. Khi đó ta có:*

*1) *

*2) *

**Ví dụ 4.** Cho cấp số nhân có  và 

a) Tìm .

b) Số  là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số nhân đã cho?

**Lời giải**

a) Ta có 

b) Số hạng tổng quát của cấp số nhân là 

Vì  nên 

Do  là số nguyên dương nên số là số hạng thứ 13 của cấp số nhân đã cho.

**Ví dụ 5.** Cho cấp số nhân có  và  Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân đó

**Lời giải**

Gọi q là công bội của cấp số nhân .

Ta có 

+ Với  và , ta có số hạng tổng quát là 

+ Với  và , ta có số hạng tổng quát là 

**3. Tính chất các số hạng của cấp số nhân**

**Định lý 2.**

Trong một cấp số nhân , bình phương mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

 (3)

**STUDY TIP**

*Một cách tổng quát, ta có:*

*Nếu  là cấp số nhân thì *

**Ví dụ 6.**

a) Cho cấp số nhân có  và . Tìm .

b) Cho cấp số nhân . Tính giá trị của biểu thức .

**Lời giải**

a) Theo tính chất của cấp số nhân, ta có  Suy ra  hoặc .

b) Theo tính chất của cấp số nhân, ta có  và .

Giải ra ta được  hoặc .

+ Với  thì 

+ Với  thì 

Vậy hoặc 

**4. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân.**

**Định lý 3.**

Cho một cấp số nhân với công bội  Đặt . Khi đó:

 hoặc 

**STUDY TIP**

*1) Chúng ta thường sử dụng công thức (4) để tính khi biết số hạng đầu  và công bội q của cấp số nhân.*

*2) Công thức (5) được sử dụng để tính  trong trường hợp biết các số hạng  và công bội q của cấp số nhân.*

**Ví dụ 7.**

a) Tính tổng 

b) Cho cấp số nhân  có  và công bội . Tìm *k*, biết .

***Lời giải***

a) Ta có dãy số lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu  và công bội  . Cấp số nhân này có 13 số hạng. Do đó



b) Ta có

Theo giả thiết, ta có 

**B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ CẤP SỐ NHÂN**

1. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

**A.** Dãy **số** , với  .

**B.** Dãy số , với .

**C.** Dãy số , với .

**D.** Dãy số , với .

**Lời giải**

**Đáp án B**

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng.

- *Phương án A*: Ba số hạng đầu tiên của dãy số là 

Ba số này không lập thành cấp số nhân vì 

- *Phương án B*: Ta có  nên  là cấp số nhân

- *Phương án C*: Ta có  (phụ thuộc vào *n*, không phải là không đổi)

Do đó  không phải là cấp số nhân.

- *Phương án D*: Ba số hạng đầu tiên của dãy số  là . Nhận thấy ba số này không lập thành cấp số nhân nên dãy số  không là cấp số nhân.

1. Cho cấp số nhân có  và . Tìm số hạng thứ năm của cấp số nhân đã cho.

**A.** . **B. ** . **C. ** . **D.** ****.

**Lời giải**

**Đáp án B**

Ta có công bội của cấp số nhân là 

Suy ra .

Vậy phương án đúng là **B**.

**Nhận xét:** *Với dữ kiện của ví dụ này, chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi sau đây:*

1. Cho cấp số nhân có  và . Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân đã cho.

**A. .** **B. .** **C. .** **D. .**

1. Cho cấp số nhân có  và . Tìm tổng *S* của 50 số hạng đầu tiên cấp số nhân đã cho.

**A. .** **B. .** **C. .** **D. .**

1. Cho cấp số nhân có  và . Biết rằng , tính .

**A. .** **B. .** **C. .** **D. .**

1. Cho cấp số nhân  có  Tìm  và công bội 

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Lời giải***

Ta có 

Suy ra  Vậy phương án đúng là A.

1. Cho cấp số nhân  có tổng  số hạng đầu tiên là  Tìm số hạng đầu  và công bội  của cấp số nhân đó.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Lời giải***

Ta có  và 

**STUDY TIP**

1) Định lý Vi-ét đối với phương trình bậc ba:

Nếu phương trình bậc ba  có ba nghiệm  thì:



2) Trong thực hành giải toán, chúng ta sử dụng kết quả này kết hợp với giả thiết của bài toán để tìm ra nghiệm của phương trình hoặc xác định được mối liên hệ giữa các hệ số của phương trình.

Trường hợp nếu  là hằng số thì điều kiện cần để phương trình bậc ba nói trên có ba nghiệm lập thành một cấp số nhân là  là nghiệm của phương trình bậc ba đó.

1. Cho cấp số nhân  có  và  đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng thứ  của cấp số nhân đã cho.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Lời giải***

Gọi  là công bội của cấp số nhân 

Ta có 

Suy ra  Phương án đúng là B.

**Nhận xét:** *Từ kết quả của ví dụ này, chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi sau:*

1. Cho cấp số nhân  có  và  đạt giá trị nhỏ nhất. Số hạng tổng quát của cấp số nhân đó là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

1. Cho cấp số nhân  có  và  đạt giá trị nhỏ nhất. Số  là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số nhân đó?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho cấp số nhân  có  và  đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng  của 15 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Cho cấp số nhân  có  và  đạt giá trị nhỏ nhất. Biết  tìm .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân. Biết thể tích của khối hộp là  và diện tích toàn phần là  Tính tổng số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật đó.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Lời giải***

Vì ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân nên ta có thể gọi ba kích thước đó là 

Thể tích của khối hình hộp chữ nhật là 

Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật là



Theo giả thiết, ta có 

Với  hoặc  thì kích thước của hình hộp chữ nhật là 

Suy ra tổng của ba kích thước này là  cm.

Vậy phương án đúng là D.

1. Tìm tất cả các giá trị của tham số  để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: 

**A.**  **B.** 

**C.**  hoặc  **D.**  hoặc 

***Lời giải***

+ *Điều kiện cần:* Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt  lập thành một cấp số nhân.

Theo định lý Vi-ét, ta có 

Theo tính chất của cấp số nhân, ta có . Suy ra ta có 

+ *Điều kiện đủ:* Với  và  thì  nên ta có phương trình



Giải phương trình này, ta được các nghiệm là  Hiển nhiên ba nghiệm này lập thành một cấp số nhân với công bôị 

Vậy,  và  là các giá trị cần tìm. Do đó phương án 

**STUDY TIP**

Ta có thể chỉ ra nghiệm  bằng cách khác:

Theo định lý Vi-ét thì 

Theo tính chất của cấp số nhân thì  Suy ra 

Thay  được  Thay vào  ta được 



Nhận xét: Từ kêt quả của ví dụ này, ta có thể đề xuất các câu hỏi sau đây:

1. Biết rằng tồn tại đúng hai giá trị của tham số  để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân:  Tính tổng bình phương của hai giá trị đó.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Biết rằng tồn tại đúng hai giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: . Tính tổng bình phương của ba số hạng của cấp số nhân đó.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Một khu rừng có trữ lượng gỗ là  mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là  mỗi năm. Hỏi sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có bao nhiêu mét khối gỗ

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Lời giải***

Đặt  và 

Gọi  là trữ lượng gỗ của khu rừng sau năm thứ 

Khi đó ta có 

Suy ra  là cấp số nhân với số hạng đầu  và công bội 

Do đó số hạng tổng quát của cấp số nhân  là 

Sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có:

 mét khối gỗ.

Vậy phương án đúng là D.

1. Bài toán ***“Lãi kép”***Một người gửi số tiền  triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất /năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Giả sử trong khoảng thời gian gửi người gửi không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi, hỏi sau  năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được gần với số tiền nào trong các số tiền dưới đây?

**A.**  đồng. **B.**  đồng. **C.**  đồng. **D.**  đồng.

***Lời giải***

Đặt  (đồng) và 

Gọi  là số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được sau  năm.

Theo giả thiết, ta có 

Do đó dãy số  là cấp số nhân với số hạng đầu  và công bội  Suy ra 

Vì vậy, sau  năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được là



Vậy phương án đúng là A.

1. Một người gửi ngân hàng  triệu đồng theo thể thức lãi kép, lãi suất  một tháng (kể từ tháng thứ , tiền lãi được tính theo phần trăm của tổng tiền lãi tháng trước đó và tiền gốc của tháng trước đó). Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có  triệu đồng?

**A.**  tháng. **B.**  tháng. **C.**  tháng. **D.**  tháng.

***Lời giải***

Theo ví dụ , thì sau  tháng gửi tiết kiệm, ta có

 trong đó 

Do đó 

***Cách 1:*** Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng.

+ *Phương án A:* (đồng).

+ *Phương án B:*  (đồng).

+ *Phương án C:* (đồng).

Vậy, phương án đúng là B. (Không cần kiểm tra phương án D vì ở phương án D, số tháng ít hơn ở phương án C nên số tiền sẽ ít hơn nữa).

***Cách 2:*** Theo giả thiết, ta có  (đồng).

Do đó, ta có 

Sử dụng máy tính cầm tay, ta tính được  hay 

Do đó  Vậy phương án đúng là B.

**C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG**

**Dạng 1: Bài tập về nhận dạng cấp số nhân.**

1. Dãy số nào dưới đây không là cấp số nhân?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

1. Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

**A.** Dãy số  với  **B.** Dãy số  với 

**C.** Dãy số  với  **D.** Dãy số  với 

1. Trong các dãy số cho bởi công thức truy hồi sau, hãy chọn dãy số là cấp số nhân.

**A. **  **B. **  **C. **  **D. **

**Dạng 2: Bài tập về xác định số hạng và công bội của cấp số nhân.**

1. Cho dãy số  xác định bởi  và  Tìm số hạng tổng quát của dãy số.

**A. **  **B. **  **C. **  **D. **

1. Cho cấp số nhân  có  và  Tính số hạng đầu  và công bội  của cấp số nhân.

**A. **hoặc  **B. ** hoặc 

**C. ** hoặc  **D. ** hoặc 

1. Cho cấp số nhân  có  và  Tìm số hạng thứ mười của cấp số nhân đó.

**A. **  **B. **  **C. **  **D. **

1. Cho cấp số nhân  Tìm  và 

**A.**  hoặc  **B.** hoặc 

**C.**  hoặc  **D.**  hoặc 

1. Cho cấp số nhân  có  và  tìm  và 

**A.** và  **B.**  và 

**C.**  và  **D.**  và 

1. Cho cấp số nhân  có  và biểu thức  đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng thứ bảy của cấp số nhân đó.

**A.**  **B.**  **C.** **D.** 

1. Một tứ giác lồi có số đo các góc lập thành một cấp số nhân. Biết rằng số đo của góc nhỏ nhất bằng  số đo của góc nhỏ thứ ba. Hãy tính số đo của các góc trong tứ giác đó.

**A.**   **B.**  **C.**  **D.** 

1. Cho cấp số nhân  có  Tìm số hạng đầu  và công bội  của cấp số nhân.

**A. **  **B. **  **C.**   **D. **

1. Cho cấp số nhân  có   và  Tính giá trị của biểu thức 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Dạng 3: Bài tập về tổng  số hạng đầu tiên của cấp số nhân.**

1. Cho cấp số nhân  có  và  Tìm 

**A.**  hoặc  **B.**  hoặc 

**C.**  hoặc  **D.**  hoặc 

1. Cho cấp số nhân  có  và biểu thức  đạt giá trị nhỏ nhất. Tính 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Cho cấp số nhân  có  công bội dương và biểu thức  đạt giá trị nhỏ nhất. Tính 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Cho cấp số nhân  có . Tính 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Dạng 4: Bài tập liên quan đến cấp số nhân.**

1. Tìm tất cả các giá trị của tham số  để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Biết rằng tồn tại hai giá trị  và  để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân:  Tính giá trị của biểu thức 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Một của hàng kinh doanh, ban đầu bán mặt hàng A với giá 100 (đơn vị nghìn đồng). Sau đó, cửa hàng tăng giá mặt hàng A lên  Nhưng sau một thời gian, cửa hàng lại tiếp tục tăng giá mặt hàng đó lên  Hỏi giá của mặt hàng A của cửa hàng sau hai làn tăng giá là bao nhiêu?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Một người đem 100 triệu đồng đi gửi tiết kiệm với kỳ han 6 tháng, mỗi tháng lãi suất là  số tiền mà người đó có. Hỏi sau khi hết kỳ hạn, người đó được lĩnh về bao nhiêu tiền?

**A.**  (đồng) **B.**  (đồng)

**C.**  (đồng) **D.**  (đồng)

1. Tỷ lệ tăng dân số của tỉnh M là  Biết rằng số dân của tỉnh M hiện nay là 2 triệu người. Nếu lấy kết quả chính xác đến hàng nghìn thì sau 9 năm nữa số dân của tỉnh M sẽ là bao nhiêu?

**A.**  nghìn người. **B.**  nghìn người.

**C.**  nghìn người. **D.**  nghìn người.

1. Tế bào E. Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại nhân đôi một lần. Nếu lúc đầu có  tế bào thì sau 3 giờ sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

**A.**  tế bào. **B.**  tế bào. **C.**  tế bào. **D.**  tế bào.

1. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng theo cách: Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích bề mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích đế tháp. Biết diện tích đế tháp là  tính diện tích mặt trên cùng.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Dạng 5: Bài tập liên quan đến cả cấp số nhân và cấp số cộng.**

1. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào là sai?

**A.** Dãy số , với  và   vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.

**B.** Dãy số , với  và   vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.

**C.** Dãy số , với  và   vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.

**D.** Dãy số , với  và   vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.

1. Các số    theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng, đồng thời, các số    theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm  và 

**A.**  hoặc  **B.**  hoặc 

**C.**  hoặc  **D.**  hoặc 

1. Ba số  lập thành một cấp số cộng và có tổng bằng 21. Nếu lần lượt thêm các số  vào ba số đó (theo thứ tự của cấp số cộng) thì được ba số lập thành một cấp số nhân. Tính 

**A.** hoặc  **B.**  hoặc 

**C.**  hoặc  **D. ** hoặc 

**D. HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Dạng 1: Bài tập về nhận dạng cấp số nhân.**

1. **Đáp án **

Các dãy số trong các phương án  và  đảm bảo về dấu còn dãy số trong phương án  thì 3 số hạng đầu âm còn số hạng thứ tư là dương nên dãy số trong phương án  không phải là cấp số nhân.

1. **Đáp án **

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng.

+ Phương án  Ba số hạng đầu của dãy số là  không lập thành cấp số nhân nên dãy số  không phải là cấp số nhân.

+ Phương án  Ba số hạng đầu của dãy số là  không lập thành cấp số nhân nên dãy số  không phải là cấp số nhân.

+ Phương án  Ta có  nên dãy số  là một cấp số nhân.

+ Phương án  Ba số hạng đầu của dãy số là  không lập thành cấp số nhân nên dãy số  không phải là cấp số nhân.

1. **Đáp án **

Các kiểm tra như câu 2.

**Dạng 2: Bài tập về xác định số hạng và công bội của cấp số nhân.**

1. **Đáp án **

Ta có:  nên  là cấp số nhân có công bội  Suy ra số hạng tổng quát là 

Vậy phương án đúng là 

1. **Đáp án **

Ta có    hoặc 

Do đó  là phương án đúng.

1. **Đáp án **

Ta có:    hoặc 

Với  thì 

Với  thì 

Vậy  Suy ra  là phương án đúng.

1. **Đáp án **

Theo tính chất của cấp số nhân, ta có:

 

Cũng theo tính chất của cấp số nhân, ta có:



Với  thì  với  thì 

Vậy phương án đúng là 

1. **Đáp án **

Ta có:  nên theo giả thiế, ta có:

 

Suy ra  Vậy đáp án là 

1. **Đáp án **

Gọi  là công bội của cấp số nhân .

Ta có  

Dấu bằng xảy ra khi 

Suy ra 

Vậy phương án đúng là 

1. **Đáp án **

**Cách 1:** Kiểm tra các dãy số trong mỗi phương án có thỏa mãn yêu cầu của bài toán không.

+ Phương án  Các góc  không lập thành cấp số nhân vì

  

+ Phương án  Các góc  lập thành cấp số nhân và  Hơn nữa,  nên  là phương án đúng.

+ Phương án  và  Kiểm tra như phương án 

**Cách 2:** Gọi các góc của tứ giác là  trong đó 

Theo giả thiết, ta có  nên 

Suy ra các góc của tứ giác là 

Vì tổng các góc trong tứ giác bằng  nên ta có:

 

Do đó, phương án đúng là  (vì trong ba phương án còn lại không có phương án nào có góc ).

1. **Đáp án **

Ta có  

Kết hợp với phương trình thứ hai trong hệ, ta tìm được 

Lại có  

Vì  nên 

Vậy phương án đúng là 

1. **Đáp án **

Ta có    (do ).

Do  nên    

Suy ra 

Vậy phương án đúng là 

**Dạng 3: Bài tập về tổng  số hạng đầu tiên của cấp số nhân.**

1. **Đáp án **

Ta có  

Vì  nên  Do đó 

  hoặc 

+ Với  thì  

Suy ra 

+ Với  thì  

Suy ra 

Vậy phương án đúng là 

1. **Đáp án **

Gọi  là công bội của cấp số nhân. Khi đó



Dấu bằng xảy ra khi  

Suy ra: 

Vậy phương án đúng là 

1. **Đáp án **

Gọi  là công bội của cấp số nhân, 

Ta có 

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:



Suy ra  đạt giá trị nhỏ nhất bằng  khi  

Ta có  

Do đó  Vậy phương án đúng là 

1. **Đáp án **

Ta có  

Kết hợp với phương trình thứ hai trong hệ, ta tìm được  Lại có  

Vì  nên  Suy ra 

Vậy phương án đúng là 

**Dạng 4: Bài tập liên quan đến cấp số nhân**

1. **Đáp án **

**Cách 1:** Ta có 

Điều kiện cần để phương trình đã choc ó ba nghiệm lập thành một cấp số nhân là  là nghiệm của phương trình.

Thay  vào phương trình đã cho, ta được

 

Với  ta có phương trình  

Ba nghiệm này lập thành một cấp số nhân nên  là giá trị cần tìm. Vậy,  là phương án đúng.

**Cách 2:** Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng.

1. **Đáp án **

Ta có 

Điều kiện cần để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân là  phải là nghiệm của phương trình đã cho.

 

Vì giả thiết cho biết tồn tại đúng hai giá trị của tham số  nên  và  là các giá trị thỏa mãn

Suy ra 

Vậy phương án đúng là 

1. **Đáp án **

Sau lần tăng giá thứ nhất thì giá của mặt hàng  là:



Sau lần tăng giá thứ hai thì giá của mặt hàng  là:



Suy ra phương án đúng là 

**Suy ra phương án đúng là B.**

1. **Đáp án D.**

Số tiền ban đầu là  (đồng).

Đặt .

Số tiền sau tháng thứ nhất là .

Số tiền sau tháng thứ hai là .

Lập luận tương tự, ta có số tiền sau tháng thứ sáu là .

Do đó .

1. **Đáp án C.**

Đặt  và .

Gọi  là số dân của tỉnh  sau  năm nữa.

Ta có: .

Suy ra  là một cấp số nhân với số hạng đầu  và công bội .

Do đó số dân của tỉnh  sau  năm nữa là: .

1. **Đáp án C.**

Lúc đầu có  tế bào và mỗi lần phân chia thì một tế bào tách thành hai tế bào nên ta có cấp số nhân với  và công bội .

Do cứ  phút phân đôi một lần nên sau  giờ sẽ có lần phân chia tế bào. Ta có  là số tế bào nhận được sau  giờ. Vậy, số tế bào nhận được sau  giờ là .

1. **Đáp án A.**

Gọi  là diện tích đế tháp và  là diện tích bề mặt trên của tầng thứ , với . Theo giả thiết, ta có .

Dãy số  lập thành cấp số nhân với số hạng đầu  và công bội .

Diện tích mặt trên cùng của tháp là .

***Dạng 5: Bài tập liên quan đến cả cấp số nhân và cấp số cộng.***

1. **Đáp án D.**

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án sai.

+ *Phương án A*:Ta có  Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ra chứng minh được rằng . Do đó  là dãy số không đổi. Suy ra nó vừa là cấp số cộng (công sai bằng ) vừa là cấp số nhân (công bội bằng ).

+ Phương án B: Tương tự như phương án A, chúng ta chỉ ra được . Do đó  là dãy số không đổi. Suy ra nó vừa là cấp số cộng (công sai bằng ) vừa là cấp số nhân (công bội bằng ).

+ Phương án C: Tương tự như phương án A, chúng ta chỉ ra được . Do đó  là dãy số không đổi. Suy ra nó vừa là cấp số cộng (công sai bằng ) vừa là cấp số nhân (công bội bằng ).

+ Phương án D: Ta có: . Ba số hạng này không lập thành cấp số cộng cũng không lập thành cấp số nhân nên dãy số  không phải là cấp số cộng và cũng không là cấp số nhân .

1. **Đáp án A.**

+ Ba số  lập thành cấp số cộng nên .

+ Ba số  lập thành cấp số nhân nên .

Thay  vào ta được  hoặc .

Với  thì ; với  thì .

1. **Đáp án C.**

Theo tính chất của cấp số cộng , ta có .

Kết hợp với giả thiết , ta suy ra .

Gọi  là công sai của cấp số cộng thì  và .

Sau khi thêm các số  vào ba số  ta được ba số là  hay .

Theo tính chất của cấp số nhân, ta có .

Giải phương trình ta được  hoặc .

Với , cấp số cộng . Lúc này .

Với , cấp số cộng . Lúc này .