SỐ CHÍNH PHƯƠNG LỚP 6

I. ĐỊNH NGHĨA: Số chính phương là số bằng bình phương đúng của một số nguyên.

II. TÍNH CHẤT:

1. Số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng bằng 0, 1, 4, 5, 6, 9; không thể có chữ số tận cùng bằng 2, 3, 7, 8.

2. Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn.

3. Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng 4n hoặc 4n + 1. Không có số chính phương nào có dạng 4n + 2 hoặc 4n + 3 ($n \in N$).

4. Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng 3n hoặc 3n + 1. Không có số chính phương nào có dạng 3n + 2 ($n \in N$).

5. Số chính phương tận cùng bằng 1 hoặc 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn.

Số chính phương tận cùng bằng 5 thì chữ số hàng chục là 2

Số chính phương tận cùng bằng 4 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn.

Số chính phương tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục là chữ số lẻ.

6. Số chính phương chia hết cho 2 thì chia hết cho 4.

Số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9.

Số chính phương chia hết cho 5 thì chia hết cho 25.

Số chính phương chia hết cho 8 thì chia hết cho 16.

III. MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP VỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

A. ***DẠNG 1***: **CHỨNG MINH MỘT SỐ LÀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG**

Bài 1: *Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì*

$A = (x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4$ là số chính phương.

Ta có $A = (x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4$

$= (x^2 + 5xy + 4y^2)(x^2 + 5xy + 6y^2) + y^4$

Đặt $x^2 + 5xy + 5y^2 = t$ $(t \in Z)$ thì

$A = (t - y^2)(t + y^2) + y^4 = t^2 - y^4 + y^4 = t^2 = (x^2 + 5xy + 5y^{2)2}$

V ì x, y, z $\in Z$ nên $x^2 \in Z$, $5xy \in Z$, $5y^2 \in Z \Rightarrow x^2 + 5xy + 5y^2 \in Z$

Vậy A là số chính phương.

Bài 2: *Chứng minh tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng 1 luôn là số chính phương.*

Gọi 4 số tự nhiên, liên tiếp đó là n, n + 1, n+ 2, n + 3 ($n \in N$). Ta có

$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = n.(n + 3(n + 1)(n + 2) + 1$

$= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1$ (*)

Đặt $n^2 + 3n = t$ ($t \in N$) thì (*) $= t(t + 2) + 1 = t^2 + 2t + 1 = (t + 1)^2$

$= (n^2 + 3n + 1)^2$

Vì $n \in N$ nên $n^2 + 3n + 1 \in N$ Vậy $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ là số chính phương.

<u>Bài 3</u>: *Cho S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + . . . + k(k+1)(k+2)*

Chứng minh rằng 4S + 1 là số chính phương .

Ta có $k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4} k(k+1)(k+2).4 = \frac{1}{4} k(k+1)(k+2).[(k+3) - (k-1)]$

$= \frac{1}{4} k(k+1)(k+2)(k+3) - \frac{1}{4} k(k+1)(k+2)(k-1)$

$\Rightarrow S = \frac{1}{4}.1.2.3.4 - \frac{1}{4}.0.1.2.3 + \frac{1}{4}.2.3.4.5 - \frac{1}{4}.1.2.3.4 + \ldots + \frac{1}{4} k(k+1)(k+2)(k+3) - \frac{1}{4}$

$k(k+1)(k+2)(k-1) = \frac{1}{4} k(k+1)(k+2)(k+3)$

$4S + 1 = k(k+1)(k+2)(k+3) + 1$

Theo kết quả bài 2 $\Rightarrow$ $k(k+1)(k+2)(k+3) + 1$ là số chính phương.

<u>Bài 4</u>: *Cho dãy số 49; 4489; 444889; 44448889; ...*

Dãy số trên được xây dựng bằng cách thêm số 48 vào giữa số đứng trước nó. Chứng minh rằng tất cả các số của dãy trên đều là số chính phương.

Ta có $\underbrace{44\ldots4}_{\text{n chữ số 4}}\underbrace{88\ldots8}_{\text{n-1 chữ số 8}}9 = \underbrace{44\ldots4}_{\text{n chữ số 4}}\underbrace{88..8}_{\text{n chữ số 8}} + 1 = \underbrace{44\ldots4}_{\text{n chữ số 4}} . 10^n + 8 . \underbrace{11\ldots1}_{\text{n chữ số 1}} + 1$

$$= 4. \frac{10^n - 1}{9} . 10^n + 8. \frac{10^n - 1}{9} + 1$$

$$= \frac{4.10^{2n} - 4.10^n + 8.10^n - 8 + 9}{9} = \frac{4.10^{2n} + 4.10^n + 1}{9}$$

$$= \left(\frac{2.10^n + 1}{3}\right)^2$$

Ta thấy $2.10^n + 1 = 2\underbrace{00\ldots0}_{\text{n-1 chữ số 0}}1$ có tổng các chữ số chia hết cho 3 nên nó chia hết cho 3

$\Rightarrow \left(\dfrac{2.10^n+1}{3}\right) \in Z$ hay các số có dạng 44…488…89 là số chính phương.

Bài 5: *Chứng minh rằng các số sau đây là số chính phương:*

$$A = \underbrace{11\ldots1}_{2n \text{ chữ số } 1} + \underbrace{44\ldots4}_{n \text{ chữ số } 4} + 1$$

$$B = \underbrace{11\ldots1}_{2n \text{ chữ số } 1} + \underbrace{11\ldots1}_{n+1 \text{ chữ số } 1} + \underbrace{66\ldots6}_{n \text{ chữ số } 6} + 8$$

$$C = \underbrace{44\ldots4}_{2n \text{ chữ số } 4} + \underbrace{22\ldots2}_{n+1 \text{ chữ số } 2} + \underbrace{88\ldots8}_{n \text{ chữ số } 8} + 7$$

Kết quả: $A = \left(\dfrac{10^n+2}{3}\right)^2$; $B = \left(\dfrac{10^n+8}{3}\right)^2$; $C = \left(\dfrac{2.10^n+7}{3}\right)^2$

Bài 6: *Chứng minh rằng các số sau là số chính phương:*

a. $A = 224\underbrace{99\ldots9}_{n-2 \text{ chữ số } 9}1\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ chữ số } 0}9$

b. $B = \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ chữ số } 1}\underbrace{55\ldots5}_{n-1 \text{ chữ số } 5}6$

a. $A = 224.10^{2n} + 99\ldots9.10^{n+2} + 10^{n+1} + 9$

$= 224.10^{2n} + (10^{n-2} - 1).10^{n+2} + 10^{n+1} + 9$

$= 224.10^{2n} + 10^{2n} - 10^{n+2} + 10^{n+1} + 9$

$= 225.10^{2n} - 90.10^n + 9$

$= (15.10^n - 3)^2$

$\Rightarrow$ A là số chính phương

b. $B = \underbrace{111\ldots1}_{\text{n chữ số 1}}\underbrace{555\ldots5}_{\text{n chữ số 5}} + 1 = \underbrace{11\ldots1}_{\text{n chữ số 1}}.10^n + 5.\underbrace{11\ldots1}_{\text{n chữ số 1}} + 1$

$$= \frac{10^n - 1}{9}.10^n + 5.\frac{10^n - 1}{9} + 1 = \frac{10^{2n} - 10^n + 5.10^n - 5 + 9}{9}$$

$$= \frac{10^{2n} + 4.10^n + 4}{9} = \left(\frac{10^n + 2}{3}\right)^2$$ là số chính phương (điều phải chứng minh)

Bài 7: *Chứng minh rằng tổng các bình phương của 5 số tự nhiên liên tiếp không thể là một số chính phương*

Gọi 5 số tự nhiên liên tiếp đó là n-2, n-1, n , n+1 , n+2 ($n \in N$, $n \geq 2$).

Ta có $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5.(n^2+2)$

Vì n^2 không thể tận cùng bởi 3 hoặc 8 do đó n^2+2 không thẻ chia hết cho 5

$\Rightarrow$ $5.(n^2+2)$ không là số chính phương hay A không là số chính phương

Bài 8: *Chứng minh rằng số có dạng $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ trong đó $n \in N$ và $n>1$ không phải là số chính phương*

$n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 = n^2.(n^4 - n^2 + 2n +2) = n^2.[n^2(n-1)(n+1) + 2(n+1)]$

$= n^2[(n+1)(n^3 - n^2 + 2)] = n^2(n+1).[(n^3+1) - (n^2-1)]$

$= n^2(n+1)^2.(n^2-2n+2)$

Với $n \in N$, $n >1$ thì $n^2-2n+2 = (n - 1)^2 + 1 > (n - 1)^2$

và $n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2(n - 1) < n^2$

Vậy $(n - 1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2 \Rightarrow n^2 - 2n + 2$ không phải là một số chính phương.

Bài 9: *Cho 5 số chính phương bất kì có chữ số hàng chục khác nhau còn chữ số hàng đơn vị đều là 6. Chứng minh rằng tổng các chữ số hàng chục của 5 số chính phương đó là một số chính phương*

Cách 1: Ta biết một số chính phương có chữ số hàng đơn vị là 6 thì chữ số hàng chục của nó là số lẻ. Vì vậy chữ số hàng chục của 5 số chính phương đã cho là 1,3,5,7,9 khi đó tổng của chúng bằng $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$ là số chính phương

Cách 2: Nếu một số chính phương $M = a^2$ có chữ số hàng đơn vị là 6 thì chữ số tận cùng của a là 4 hoặc 6 $\Rightarrow a \vdots 2 \Rightarrow a^2 \vdots 4$

Theo dấu hiệu chia hết cho 4 thì hai chữ số tận cùng của M chỉ có thể là 16, 36, 56, 76, 96 $\Rightarrow$ Ta có: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$ là số chính phương.

<u>Bài 10</u>: *Chứng minh rằng tổng bình phương của hai số lẻ bất kỳ không phải là một số chính phương.*

a và b lẻ nên $a = 2k+1$, $b = 2m+1$ (Với $k, m \in N$)

$\Rightarrow a^2 + b^2 = (2k+1)^2 + (2m+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4m^2 + 4m + 1$

$= 4(k^2 + k + m^2 + m) + 2 = 4t + 2$ (Với $t \in N$)

Không có số chính phương nào có dạng $4t + 2$ ($t \in N$) do đó $a^2 + b^2$ không thể là số chính phương.

<u>Bài 11</u>: *Chứng minh rằng nếu p là tích của n số nguyên tố đầu tiên thì p-1 và p+1 không thể là các số chính phương.*

Vì p là tích của n số nguyên tố đầu tiên nên $p \vdots 2$ và p không chia hết cho 4 (1)

a. Giả sử p+1 là số chính phương . Đặt $p+1 = m^2$ ($m \in N$)

Vì p chẵn nên p+1 lẻ $\Rightarrow m^2$ lẻ $\Rightarrow$ m lẻ.

Đặt $m = 2k+1$ ($k \in N$). Ta có $m^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow p+1 = 4k^2 + 4k + 1$

$\Rightarrow p = 4k^2 + 4k = 4k(k+1) \vdots 4$ mâu thuẫn với (1)

$\Rightarrow$ p+1 là số chính phương

b. p = 2.3.5… là số chia hết cho 3 $\Rightarrow$ p-1 có dạng 3k+2.

Không có số chính phương nào có dạng 3k+2 $\Rightarrow$ p-1 không là số chính phương .

Vậy nếu p là tích n số nguyên tố đầu tiên thì p-1 và p+1 không là số chính phương

<u>Bài 12</u>: *Giả sử N = 1.3.5.7...2007.*

Chứng minh rằng trong 3 số nguyên liên tiếp 2N-1, 2N và 2N+1 không có số nào là số chính phương.

a. 2N-1 = 2.1.3.5.7…2007 – 1

Có $2N \vdots 3 \Rightarrow$ 2N-1 không chia hết cho 3 và 2N-1 = 3k+2 ($k \in N$)

$\Rightarrow$ 2N-1 không là số chính phương.

b. 2N = 2.1.3.5.7…2007

Vì N lẻ $\Rightarrow$ N không chia hết cho 2 và $2N \vdots 2$ nhưng 2N không chia hết cho 4.

2N chẵn nên 2N không chia cho 4 dư 1 $\Rightarrow$ 2N không là số chính phương.

c. 2N+1 = 2.1.3.5.7…2007 + 1

2N+1 lẻ nên 2N+1 không chia hết cho 4

2N không chia hết cho 4 nên 2N+1 không chia cho 4 dư 1

$\Rightarrow$ 2N+1 không là số chính phương.

Bài 13: *Cho* $a = \underbrace{11\ldots1}_{2008\text{ chữ số }1}$; $b = 1\underbrace{00\ldots0}_{2007\text{ chữ số }0}5$

Chứng minh $\sqrt{ab+1}$ *là số tự nhiên.*

Cách 1: Ta có $a = \underbrace{11\ldots1}_{2008\text{ chữ số }1} = \dfrac{10^{2008}-1}{9}$; $b = 1\underbrace{00\ldots0}_{2007\text{ chữ số }0}5 = 1\underbrace{00\ldots0}_{2008\text{ chữ số }0} + 5 = 10^{2008} + 5$

$$\Rightarrow ab+1 = \frac{(10^{2008}-1)(10^{2008}+5)}{9} + 1 = \frac{(10^{2008})^2 + 4.10^{2008} - 5 + 9}{9} = \left(\frac{10^{2008}+2}{3}\right)^2$$

$$\sqrt{ab+1} = \sqrt{\left(\frac{10^{2008}+2}{3}\right)^2} = \frac{10^{2008}+2}{3}$$

Ta thấy $10^{2008} + 2 = 1\underbrace{00\ldots0}_{2007\text{ chữ số }0}2 \;\vdots\; 3$ nên $\dfrac{10^{2008}+2}{3} \in N$ hay $\sqrt{ab+1}$ *là số tự nhiên.*

Cách 2: $b = 1\underbrace{00\ldots0}_{2007\text{ chữ số }0}5 = 1\underbrace{00\ldots0}_{2008\text{ chữ số }0} - 1 + 6 = \underbrace{99\ldots9}_{2008\text{ chữ số }9} + 6 = 9a + 6$

$\Rightarrow ab+1 = a(9a+6) + 1 = 9a^2 + 6a + 1 = (3a+1)^2$

$\Rightarrow \sqrt{ab+1} = \sqrt{(3a+1)^2} = 3a + 1 \in N$

B. *DẠNG 2*: TÌM GIÁ TRỊ CỦA BIẾN ĐỂ BIỂU THỨC LÀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Bài 1: *Tìm số tự nhiên n sao cho các số sau là số chính phương:*

a. $n^2 + 2n + 12$ *b.* $n(n+3)$

c. $13n + 3$ *d.* $n^2 + n + 1589$

Giải

a. Vì $n^2 + 2n + 12$ là số chính phương nên đặt $n^2 + 2n + 12 = k^2$ $(k \in N)$

$\Rightarrow (n^2 + 2n + 1) + 11 = k^2 \Leftrightarrow k^2 - (n+1)^2 = 11 \Leftrightarrow (k+n+1)(k-n-1) = 11$

Nhận xét thấy k+n+1 > k-n-1 và chúng là những số nguyên dương, nên ta có thể viết $(k+n+1)(k-n-1) = 11.1 \Leftrightarrow \begin{cases} k+n+1 = 11 \\ k - n - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 6 \\ n = 4 \end{cases}$

b. Đặt $n(n+3) = a^2$ $(n \in N) \Rightarrow n^2 + 3n = a^2 \Leftrightarrow 4n^2 + 12n = 4a^2$

$\Leftrightarrow (4n^2 + 12n + 9) - 9 = 4a^2$

$\Leftrightarrow (2n + 3)^2 - 4a^2 = 9$

$\Leftrightarrow (2n + 3 + 2a)(2n + 3 – 2a) = 9$

Nhận xét thấy $2n + 3 + 2a > 2n + 3 – 2a$ và chúng là những số nguyên dương, nên ta có thể viết $(2n + 3 + 2a)(2n + 3 – 2a) = 9.1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2n + 3 + 2a = 9 \\ 2n + 3 – 2a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ a = 2 \end{cases}$

c. Đặt $13n + 3 = y^2$ ($y \in N$) $\Rightarrow 13(n – 1) = y^2 – 16$

$\Leftrightarrow 13(n – 1) = (y + 4)(y – 4)$

$\Rightarrow (y + 4)(y – 4) \vdots 13$ mà 13 là số nguyên tố nên $y + 4 \vdots 13$ hoặc $y – 4 \vdots 13$

$\Rightarrow y = 13k \pm 4$ (Với $k \in N$)

$\Rightarrow 13(n – 1) = (13k \pm 4)^2 – 16 = 13k.(13k \pm 8)$

$\Rightarrow n = 13k^2 \pm 8k + 1$

Vậy $n = 13k^2 \pm 8k + 1$ (Với $k \in N$) thì $13n + 3$ là số chính phương.

d. Đặt $n^2 + n + 1589 = m^2$ ($m \in N$) $\Rightarrow (4n^2 + 1)^2 + 6355 = 4m^2$

$\Leftrightarrow (2m + 2n +1)(2m – 2n -1) = 6355$

Nhận xét thấy $2m + 2n +1> 2m – 2n -1 > 0$ và chúng là những số lẻ, nên ta có thể viết $(2m + 2n +1)(2m – 2n -1) = 6355.1 = 1271.5 = 205.31 = 155.41$

Suy ra n có thể có các giá trị sau: 1588; 316; 43; 28.

<u>Bài 2</u>: *Tìm a để các số sau là những số chính phương:*

a. $a^2 + a + 43$

b. $a^2 + 81$

c. $a^2 + 31a + 1984$

Kết quả: a. 2; 42; 13

b. 0; 12; 40

c. 12; 33; 48; 97; 176; 332; 565; 1728

<u>Bài 3</u>: *Tìm số tự nhiên $n \geq 1$ sao cho tổng $1! + 2! + 3! + \ldots + n!$ là một số chính phương .*

Với n = 1 thì $1! = 1 = 1^2$ là số chính phương .

Với n = 2 thì $1! + 2! = 3$ không là số chính phương

Với n = 3 thì $1! + 2! + 3! = 1+1.2+1.2.3 = 9 = 3^2$ là số chính phương

Với $n \geq 4$ ta có $1! + 2! + 3! + 4! = 1+1.2+1.2.3+1.2.3.4 = 33$ còn $5!$; $6!$; …; $n!$ đều tận cùng bởi 0 do đó $1! + 2! + 3! + \ldots + n!$ có tận cùng bởi chữ số 3 nên nó không phải là số chính phương .

Vậy có 2 số tự nhiên n thỏa mãn đề bài là $n = 1$; $n = 3$.

Bài 4: *Tìm $n \in N$ để các số sau là số chính phương:*

a. $n^2 + 2004$ (Kết quả: 500; 164)

b. $(23 - n)(n - 3)$ (Kết quả: 3; 5; 7; 13; 19; 21; 23)

c. $n^2 + 4n + 97$

d. $2^n + 15$

Bài 5: *Có hay không số tự nhiên n để $2006 + n^2$ là số chính phương.*

Giả sử $2006 + n^2$ là số chính phương thì $2006 + n^2 = m^2$ $(m \in N)$

Từ đó suy ra $m^2 - n^2 = 2006 \Leftrightarrow (m + n)(m - n) = 2006$

Như vậy trong 2 số m và n phải có ít nhất 1 số chẵn (1)

Mặt khác $m + n + m - n = 2m \Rightarrow$ 2 số $m + n$ và $m - n$ cùng tính chẵn lẻ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $m + n$ và $m - n$ là 2 số chẵn

$\Rightarrow (m + n)(m - n) \vdots 4$ Nhưng 2006 không chia hết cho 4

$\Rightarrow$ Điều giả sử sai.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để $2006 + n^2$ là số chính phương.

Bài 6: *Biết $x \in N$ và $x>2$. Tìm x sao cho $\overline{x(x-1)}.\overline{x(x-1)} = \overline{(x-2)xx(x-1)}$*

Đẳng thức đã cho được viết lại như sau: $\overline{x(x-1)}^2 = \overline{(x-2)xx(x-1)}$

Do vế trái là một số chính phương nên vế phải cũng là một số chính phương .

Một số chính phương chỉ có thể tận cùng bởi 1 trong các chữ số 0; 1; 4; 5; 6; 9 nên x chỉ có thể tận cùng bởi 1 trong các chữ số 1; 2; 5; 6; 7; 0 (1)

Do x là chữ số nên $x \leq 9$, kết hợp với điều kiện đề bài ta có $x \in N$ và $2 < x \leq 9$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ x chỉ có thể nhận 1 trong các giá trị 5; 6; 7.

Bằng phép thử ta thấy chỉ có $x = 7$ thỏa mãn đề bài, khi đó $76^2 = 5776$

Bài 7: *Tìm số tự nhiên n có 2 chữ số biết rằng $2n+1$ và $3n+1$ đều là các số chính phương.*

Ta có $10 \leq n \leq 99$ nên $21 \leq 2n+1 \leq 199$. Tìm số chính phương lẻ trong khoảng trên ta được 25; 49; 81; 121; 169 tương ứng với số n bằng 12; 24; 40; 60; 84.

Số $3n+1$ bằng 37; 73; 121; 181; 253. Chỉ có 121 là số chính phương.

Vậy n = 40

<u>Bài 8</u>: *Chứng minh rằng nếu n là số tự nhiên sao cho n+1 và 2n+1 đều là các số chính phương thì n là bội số của 24.*

Vì n+1 và 2n+1 là các số chính phương nên đặt $n+1 = k^2$, $2n+1 = m^2$ ($k, m \in N$)

Ta có m là số lẻ $\Rightarrow m = 2a+1 \Rightarrow m^2 = 4a(a+1) + 1$

$$\Rightarrow n = \frac{m^2-1}{2} = \frac{4a(a+1)}{2} = 2a(a+1)$$

$\Rightarrow$ n chẵn $\Rightarrow$ n+1 lẻ $\Rightarrow$ k lẻ $\Rightarrow$ Đặt k = 2b+1 (Với $b \in N$) $\Rightarrow k^2 = 4b(b+1) + 1$

$$\Rightarrow n = 4b(b+1) \Rightarrow n \vdots 8 \quad (1)$$

Ta có $k^2 + m^2 = 3n + 2 \equiv 2 \pmod 3$

Mặt khác k^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1, m^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1.

Nên để $k^2 + m^2 \equiv 2 \pmod 3$ thì $k^2 \equiv 1 \pmod 3$

$$m^2 \equiv 1 \pmod 3$$

$\Rightarrow m^2 - k^2 \vdots 3$ hay $(2n+1) - (n+1) \vdots 3 \Rightarrow n \vdots 3$ (2)

Mà (8; 3) = 1 (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow n \vdots 24$.

<u>Bài 9</u>: *Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho số $2^8 + 2^{11} + 2^n$ là số chính phương .*

Giả sử $2^8 + 2^{11} + 2^n = a^2$ ($a \in N$) thì

$$2^n = a^2 - 48^2 = (a+48)(a-48)$$

$2^p.2^q = (a+48)(a-48)$ Với $p, q \in N$; $p+q = n$ và $p > q$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+48 = 2^p \\ a-48 = 2^q \end{cases} \Rightarrow 2^p - 2^q = 96 \Leftrightarrow 2^q(2^{p-q} - 1) = 2^5.3$$

$\Rightarrow$ q = 5 và p-q = 2 $\Rightarrow$ p = 7

$\Rightarrow$ n = 5+7 = 12

Thử lại ta có: $2^8 + 2^{11} + 2^n = 80^2$

***<u>C. DẠNG 3</u>*: TÌM SỐ CHÍNH PHƯƠNG**

<u>Bài 1</u>: *Cho A là số chính phương gồm 4 chữ số. Nếu ta thêm vào mỗi chữ số của A một đơn vị thì ta được số chính phương B. Hãy tìm các số A và B.*

Gọi A = $\overline{abcd} = k^2$. Nếu thêm vào *mỗi* chữ số của A một đơn vị thì ta có số

$B = \overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)} = m^2$ với $k, m \in N$ và $32 < k < m < 100$

$a, b, c, d \in N$; $1 \le a \le 9$; $0 \le b, c, d \le 9$

$\Rightarrow$ Ta có $\begin{cases} A = \overline{abcd} = k^2 \\ B = \overline{abcd} + 1111 = m^2 \end{cases}$

$\Rightarrow m^2 - k^2 = 1111 \Leftrightarrow (m-k)(m+k) = 1111$ (*)

Nhận xét thấy tích (m-k)(m+k) > 0 nên m-k và m+k là 2 số nguyên dương.

Và m-k < m+k < 200 nên (*) có thể viết (m-k)(m+k) = 11.101

Do đó $\begin{cases} m - k == 11 \\ m + k = 101 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 56 \\ n = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2025 \\ B = 3136 \end{cases}$

<u>Bài 2</u>: *Tìm 1 số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng số gồm 2 chữ số đầu lớn hơn số gồm 2 chữ số sau 1 đơn vị.*

Đặt $\overline{abcd} = k^2$ ta có $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$ và $k \in N$, $32 \le k < 100$

Suy ra $101\overline{cd} = k^2 - 100 = (k-10)(k+10) \Rightarrow k+10 \vdots 101$ hoặc $k-10 \vdots 101$

Mà $(k-10; 101) = 1 \Rightarrow k+10 \vdots 101$

Vì $32 \le k < 100$ nên $42 \le k+10 < 110 \Rightarrow k+10 = 101 \Rightarrow k = 91$

$\Rightarrow \overline{abcd} = 91^2 = 8281$

<u>Bài 3</u>: *Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.*

Gọi số chính phương phải tìm là $\overline{aabb} = n^2$ với a, b $\in$ N, $1 \le a \le 9$; $0 \le b \le 9$

Ta có $n^2 = \overline{aabb} = 11.\overline{a0b} = 11.(100a+b) = 11.(99a+a+b)$ (1)

Nhận xét thấy $\overline{aabb} \vdots 11 \Rightarrow a + b \vdots 11$

Mà $1 \le a \le 9$; $0 \le b \le 9$ nên $1 \le a+b \le 18 \Rightarrow a+b = 11$

Thay a+b = 11 vào (1) được $n^2 = 11^2(9a+1)$ do đó 9a+1 là số chính phương .

Bằng phép thử với a = 1; 2; …; 9 ta thấy chỉ có a = 7 thỏa mãn $\Rightarrow$ b = 4

Số cần tìm là 7744

<u>Bài 4</u>: *Tìm một số có 4 chữ số vừa là số chính phương vừa là một lập phương.*

Gọi số chính phương đó là $\overline{abcd}$. Vì abcd vừa là số chính phương vừa là một lập phương nên đặt $\overline{abcd} = x^2 = y^3$ Với x, y $\in$ N

Vì $y^3 = x^2$ nên y cũng là một số chính phương .

Ta có $1000 \le \overline{abcd} \le 9999 \Rightarrow 10 \le y \le 21$ và y chính phương $\Rightarrow$ y = 16

$\Rightarrow \overline{abcd} = 4096$

Bài 5: *Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số sao cho chữ số cuối là số nguyên tố, căn bậc hai của số đó có tổng các chữ số là một số chính phương.*

Gọi số phải tìm là $\overline{abcd}$ với a, b, c, d nguyên và $1 \le a \le 9$; $0 \le b,c,d \le 9$

$\overline{abcd}$ chính phương $\Rightarrow d \in \{0,1,4,5,6,9\}$

d nguyên tố $\Rightarrow$ d = 5

Đặt $\overline{abcd} = k^2 < 10000 \Rightarrow 32 \le k < 100$

k là một số có hai chữ số mà k^2 có tận cùng bằng 5 $\Rightarrow$ k tận cùng bằng 5

Tổng các chữ số của k là một số chính phương $\Rightarrow$ k = 45

$\Rightarrow \overline{abcd} = 2025$

Vậy số phải tìm là 2025

Bài 6: *Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết rằng hiệu các bình phương của số đó và viết số bởi hai chữ số của số đó nhưng theo thứ tự ngược lại là một số chính phương*

Gọi số tự nhiên có hai chữ số phải tìm là $\overline{ab}$ ($a,b \in N, 1 \le a,b \le 9$)

Số viết theo thứ tự ngược lại $\overline{ba}$

Ta có $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 = (10a + b)^2 - (10b + a)^2 = 99(a^2 - b^2) \vdots 11 \Rightarrow a^2 - b^2 \vdots 11$

Hay $(a-b)(a+b) \vdots 11$

Vì $0 < a - b \le 8$, $2 \le a+b \le 18$ nên $a+b \vdots 11 \Rightarrow a + b = 11$

Khi đó $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 = 3^2 . 11^2 . (a - b)$

Để $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2$ là số chính phương thì a - b phải là số chính phương do đó a-b = 1 hoặc a - b = 4

- Nếu a-b = 1 kết hợp với a+b = 11 $\Rightarrow$ a = 6, b = 5, $\overline{ab} = 65$

Khi đó $65^2 - 56^2 = 1089 = 33^2$

- Nếu a - b = 4 kết hợp với a+b = 11 $\Rightarrow$ a = 7,5 (loại)

Vậy số phải tìm là 65

Bài 7: *Cho một số chính phương có 4 chữ số. Nếu thêm 3 vào mỗi chữ số đó ta cũng được một số chính phương. Tìm số chính phương ban đầu*

(Kết quả: 1156)

Bài 8: *Tìm số có 2 chữ số mà bình phương của số ấy bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.*

Gọi số phải tìm là $\overline{ab}$ với $a,b \in N$ và $1 \le a \le 9$, $0 \le b \le 9$

Theo giả thiết ta có : $\overline{ab}^2 = (a + b)^3$

$\Leftrightarrow (10a+b)^2 = (a + b)^3$

$\Rightarrow \overline{ab}$ là một lập phương và a+b là một số chính phương

Đặt $\overline{ab} = t^3$ ($t \in N$) , $a + b = l^2$ ($l \in N$)

Vì $10 \le ab \le 99 \Rightarrow \overline{ab} = 27$ hoặc $\overline{ab} = 64$

- Nếu $\overline{ab} = 27 \Rightarrow a + b = 9$ là số chính phương
- Nếu $\overline{ab} = 64 \Rightarrow a + b = 10$ không là số chính phương $\Rightarrow$ loại

Vậy số cần tìm là ab = 27

Bài 9: *Tìm 3 số lẻ liên tiếp mà tổng bình phương là một số có 4 chữ số giống nhau.*

Gọi 3 số lẻ liên tiếp đó là 2n-1, 2n+1, 2n+3 ($n \in N$)

Ta có $A= (2n-1)^2 + (2n+1)^2 + (2n+3)^2 = 12n^2 + 12n + 11$

Theo đề bài ta đặt $12n^2 + 12n + 11 = \overline{aaaa} = 1111.a$ với a lẻ và $1 \le a \le 9$

$\Rightarrow 12n(n + 1) = 11(101a – 1)$

$\Rightarrow 101a – 1 \vdots 3 \Rightarrow 2a – 1 \vdots 3$

Vì $1 \le a \le 9$ nên $1 \le 2a-1 \le 17$ và 2a-1 lẻ nên $2a – 1 \in \{ 3; 9; 15 \}$

$\Rightarrow a \in \{ 2; 5; 8 \}$

Vì a lẻ $\Rightarrow a = 5 \Rightarrow n = 21$

3 số càn tìm là 41; 43; 45

Bài 10: *Tìm số có 2 chữ số sao cho tích của số đó với tổng các chữ số của nó bằng tổng lập phương các chữ số của số đó.*

$\overline{ab}(a + b) = a^3 + b^3$

$\Leftrightarrow 10a + b = a^2 – ab + b^2 = (a + b)^2 – 3ab$

$\Leftrightarrow 3a(3 + b) = (a + b) (a + b – 1)$

a + b và a + b – 1 nguyên tố cùng nhau do đó

$\begin{cases} a + b = 3a \\ a + b – 1 = 3 + b \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a + b – 1 = 3a \\ a + b = 3 + b \end{cases}$

$\Rightarrow a = 4 , b = 8$ hoặc $a = 3 , b = 7$

Vậy $\overline{ab} = 48$ hoặc $\overline{ab} = 37$.

…..………………….. Hết …………………………