# BẢNG TÓM TẮT CÔNG THỨC TOÁN 12

## CÔNG THỨC LŨY THỪA

Cho các số dương $a, b$ và $m, n \in \mathbb{R}$. Ta có:

| | | |
|---|---|---|
| ▪ $a^0 = 1$ | ▪ $\underbrace{a^n = a.a\ldots\ldots\ldots a}_{n \text{ thừa số}}$ với $n \in \mathbb{N}^*$ | ▪ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ |
| ▪ $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$ | ▪ $a^m.a^n = a^{m+n}$ | ▪ $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ |
| ▪ $a^n b^n = (ab)^n$ | ▪ $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ | ▪ $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ $\left\langle \begin{array}{l} * \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \\ * \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \end{array}\right.$ |

## CÔNG THỨC LOGARIT

Cho các số $a, b > 0,\ a \neq 1$. Ta có:

| | | |
|---|---|---|
| ▪ $\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b$ | ▪ $\lg b = \log b = \log_{10} b$ | ▪ $\ln b = \log_e b$ |
| ▪ $\log_a 1 = 0$ | ▪ $\log_a a = 1$ | ▪ $\log_a a^b = b$ |
| ▪ $\log_{a^m} b = \dfrac{1}{m}\log_a b$ | ▪ $\log_a b^n = n\log_a b$ | ▪ $\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m}\log_a b$ |
| ▪ $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ | ▪ $\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$ | ▪ $\begin{cases} a^{\log_a b} = b \\ a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \end{cases}$ |
| ▪ $\log_a b.\log_b c = \log_a c$ | ▪ $\dfrac{\log_a c}{\log_a b} = \log_b c$ | ▪ $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ |

## HÀM SỐ LŨY THỪA – MŨ – LOGARIT

### HÀM LŨY THỪA

- **Dạng:** $\left\langle \begin{array}{l} y = x^\alpha \\ y = u^\alpha \end{array}\right.$ với $u$ là đa thức đại số.
- **Tập xác định:**

  Nếu $\alpha \in \mathbb{Z}^+ \xrightarrow{\text{ĐK}} u \in \mathbb{R}$.

  Nếu $\alpha \in \mathbb{Z}^- \xrightarrow{\text{ĐK}} u \neq 0$.

  Nếu $\alpha \notin \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{ĐK}} u > 0$.
- **Đạo hàm:**

$$\left\langle \begin{array}{l} y = x^\alpha \longrightarrow y' = \alpha x^{\alpha-1} \\ y = u^\alpha \longrightarrow y' = \alpha u^{\alpha-1}.\boxed{u'} \end{array}\right.$$

### HÀM SỐ MŨ

- **Dạng:** $\left\langle \begin{array}{l} y = a^x \\ y = a^u \end{array}\right.$ với $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$.
- **Tập xác định:** $D = \mathbb{R}$.
- **Đạo hàm:**

$$\left\langle \begin{array}{l} y = a^x \longrightarrow y' = a^x \ln a \\ y = a^u \longrightarrow y' = a^x \ln a.\boxed{u'} \end{array}\right..$$

  **Đặc biệt:** $\left\langle \begin{array}{l} (e^x)' = e^x \\ (e^u)' = e^u.\boxed{u'} \end{array}\right..$
- **Sự biến thiên:** $y = a^x$

  Nếu $\boxed{a > 1}$ thì hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nếu $\boxed{0 < a < 1}$ thì hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

### HÀM SỐ LOGARIT

- **Dạng:** $\left\langle \begin{array}{l} y = \log_a x \\ y = \log_a u \end{array}\right.$ với $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$.
- **Đặc biệt:** $a = e \longrightarrow y = \ln x$; $a = 10 \longrightarrow y = \log x = \lg x$.
- **Điều kiện xác định:** $u > 0$.
- **Đạo hàm:**

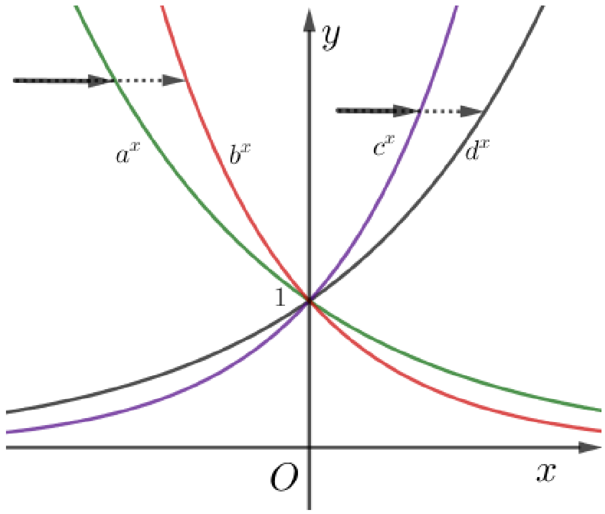
$$\left\langle \begin{array}{l} y = \log_a x \longrightarrow y' = \dfrac{1}{x\ln a} \\ y = \log_a u \longrightarrow y' = \dfrac{\boxed{u'}}{u\ln a} \end{array}\right..$$

  **Đặc biệt:** $\left\langle \begin{array}{l} (\ln x)' = \dfrac{1}{x} \\ (\ln u)' = \dfrac{\boxed{u'}}{u} \end{array}\right..$
- **Sự biến thiên:** $y = \log_a x$

  Nếu $\boxed{a > 1}$: hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$. Nếu $\boxed{0 < a < 1}$: hàm nghịch biến trên $(0;+\infty)$

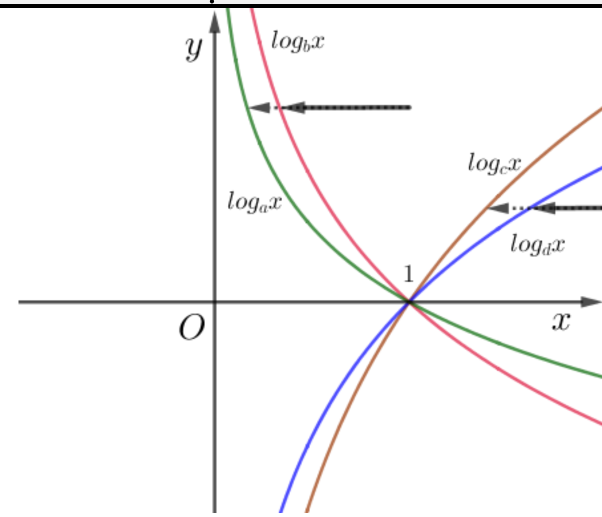
## ĐỒ THỊ HÀM MŨ VÀ HÀM LOGARIT

### ĐỒ THỊ HÀM SỐ MŨ




- Ta thấy: $a^x \downarrow \Rightarrow 0 < a < 1$; $b^x \downarrow \Rightarrow 0 < b < 1$.
- Ta thấy: $c^x \uparrow \Rightarrow c > 1$; $d^x \uparrow \Rightarrow d > 1$.
- **So sánh $a$ với $b$:** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **trái sang phải**, trúng $a^x$ trước nên $a > b$.
- **So sánh $c$ với $d$:** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **trái sang phải**, trúng $c^x$ trước nên $c > d$.
- Vậy $0 < b < a < 1 < d < c$.

### ĐỒ THỊ HÀM SỐ LOGARIT




- Ta thấy: $\log_a x \downarrow \Rightarrow 0 < a < 1$; $\log_b x \downarrow \Rightarrow 0 < b < 1$.
- Ta thấy: $\log_c x \uparrow \Rightarrow c > 1$; $\log_d x \uparrow \Rightarrow d > 1$.
- **So sánh $a$ với $b$:** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **phải sang trái**, trúng $\log_b x$ trước: $b > a$.
- **So sánh $c$ với $d$:** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **phải sang trái**, trúng $\log_d x$ trước: $d > c$.
- Vậy $0 < a < b < 1 < c < d$.

## PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

| Phương trình mũ | Phương trình Logarit |
|---|---|
| Dạng cơ bản: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ | Dạng cơ bản: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) > 0$ |
| Dạng logarit hóa: $\left[\begin{array}{l} a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b \\ a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).\log_a b \end{array}\right.$ | Dạng mũ hóa: $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$ (không cần điều kiện) |

## BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

| Bất Phương trình mũ | Bất Phương trình Logarit |
|---|---|
| Dạng cơ bản: $\left[\begin{array}{l} * \ a^{f(x)} \ge a^{g(x)} \overset{a>1}{\Leftrightarrow} f(x) \ge g(x) \\ * \ a^{f(x)} \ge a^{g(x)} \overset{0<a<1}{\Leftrightarrow} f(x) \le g(x) \end{array}\right.$ | Dạng cơ bản: $\left[\begin{array}{l} * \ \log_a f(x) \ge \log_a g(x) \overset{a>1}{\Leftrightarrow} f(x) \ge g(x) > 0 \\ * \ \log_a f(x) \ge \log_a g(x) \overset{0<a<1}{\Leftrightarrow} 0 < f(x) \le g(x) \end{array}\right.$ |

## CÔNG THỨC ĐẠO HÀM

| | | | |
|---|---|---|---|
| $k' = 0$<br>Với $k$ là hằng số | $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$<br>$\longrightarrow (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}.\boxed{u'}$ | $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$<br>$\longrightarrow \left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{\boxed{u'}}{2\sqrt{u}}$ | $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$<br>$\longrightarrow \left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{\boxed{u'}}{u^2}$ |
| $\left(e^x\right)' = e^x$<br>$\longrightarrow \left(e^u\right)' = e^u.\boxed{u'}$ | $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$<br>$\longrightarrow \left(a^u\right)' = a^u.\ln a.\boxed{u'}$ | $(\sin x)' = \cos x$<br>$\longrightarrow (\sin u)' = \boxed{u'}\cos u$ | $(\cos x)' = -\sin x$<br>$\longrightarrow (\cos u)' = -\boxed{u'}\sin u$ |

- $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$

  $\longrightarrow (\tan u)' = \dfrac{\boxed{u'}}{\cos^2 u} = \boxed{u'}\left(1+\tan^2 u\right)$

- $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\left(1+\cot^2 x\right)$

  $\longrightarrow (\cot u)' = -\dfrac{\boxed{u'}}{\sin^2 u} = -\boxed{u'}\left(1+\cot^2 u\right)$

## CÔNG THỨC NGUYÊN HÀM

$$\int f(x)dx = F(x)+C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

- $\int k.f(x)dx = k\int f(x)dx$
- $\int \left[f(x)\pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
- $\int kdx = kx+C$

1) $\int kdx = kx+C$

- $\int 2dx = 2x+C$
- $\int (-3)dx = -3x+C$

2) $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$

$\xrightarrow{MR} \int (ax+b)^{\alpha}dx = \dfrac{1}{a}.\dfrac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$

- $\int x^3dx = \dfrac{x^4}{4}+C$
- $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2}+C = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$
- $\int (1-2x)^{10}dx = \dfrac{1}{-2}.\dfrac{(1-x)^{11}}{11}+C = \dfrac{(1-x)^{11}}{-22}+C$

3) $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x|+C \xrightarrow{MR} \int \dfrac{1}{ax+b}dx = \dfrac{1}{a}\ln|ax+b|+C$

- $\int \dfrac{1}{1-3x}dx = \dfrac{1}{-3}\ln|1-3x|+C$

4) $\int \dfrac{1}{x^2}dx = -\dfrac{1}{x}+C \xrightarrow{MR} \int \dfrac{1}{(ax+b)^2}dx = \dfrac{1}{a}.\dfrac{-1}{ax+b}+C$

- $\int \dfrac{1}{(2x-3)^2}dx = \dfrac{1}{2}.\dfrac{-1}{2x-3}+C = -\dfrac{1}{4x-6}+C$
- $\int \left(x^2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-10\right)dx = \dfrac{x^3}{3}+\ln|x|-\dfrac{1}{x}-10x+C$
- $\int \dfrac{x^5+1}{x}dx = \int \left(x^4+\dfrac{1}{x}\right)dx = \dfrac{x^5}{5}+\ln|x|+C$

5) $\int e^xdx = e^x+C \xrightarrow{MR} \int e^{ax+b}dx = \dfrac{1}{a}e^{ax+b}+C$

- $\int e^{-x}dx = \dfrac{1}{-1}e^{-x}+C = -e^x+C$

6) $\int a^xdx = \dfrac{a^x}{\ln a}+C$

$\xrightarrow{MR} \int a^{bx+c}dx = \dfrac{1}{b}.\dfrac{a^{bx+c}}{\ln a}+C$

- $\int 5^xdx = \dfrac{5^x}{\ln 5}+C$
- $\int 3^{2x}dx = \int 9^xdx = \dfrac{9^x}{\ln 9}+C$
- $\int 3^{2x+5}dx = \dfrac{1}{2}.\dfrac{3^{2x+5}}{\ln 3}+C = \dfrac{3^{2x+5}}{2\ln 3}+C$
- $\int \left(e^{x-1}-2\right)e^xdx = \int \left(e^{2x-1}-2e^x\right)dx = \dfrac{1}{2}e^{2x-1}-2e^x+C$
- $\int 2^x.3^{x-1}dx = \int 2^x.3^x.\dfrac{1}{3}dx = \dfrac{1}{3}\int 6^xdx = \dfrac{6^x}{3\ln 6}+C$

7) $\int \sin xdx = -\cos x+C$

$\xrightarrow{MR} \int \sin(ax+b)dx = -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)+C$

- $\int \sin\underbrace{\left(4x-\dfrac{\pi}{2}\right)}_{a=4;\, b=-\frac{\pi}{2}}dx = -\dfrac{1}{4}\cos\left(4x-\dfrac{\pi}{2}\right)+C$

8) $\int \cos xdx = \sin x+C$

$\xrightarrow{MR} \int \cos(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}\sin(ax+b)+C$

- $\int \cos\underbrace{\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)}_{a=-1;\, b=\frac{\pi}{3}}dx = \dfrac{1}{-1}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)+C = -\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)+C$
- $\int \left(3\sin x-2\cos x\right)dx = -3\cos x-2\sin x+C$
- $\int \sin^2 xdx = \int \dfrac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)dx = \dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)+C$

  (hạ bậc)

9) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = \int \left(1+\tan^2 x\right)dx = \tan x+C$

$\xrightarrow{MR} \int \dfrac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \dfrac{1}{a}\tan(ax+b)+C$

- $\int \dfrac{1-2\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-2\right)dx = \tan x-2x+C$
- $\int \dfrac{1}{\cos^2 3x}dx = \dfrac{1}{3}\tan 3x+C$

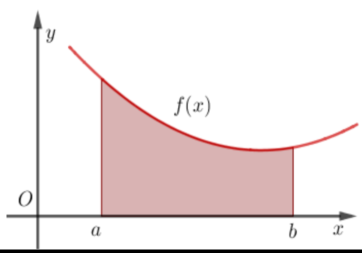
| | |
|---|---|
| $\xrightarrow{MR} \int \left[1+\tan^2(ax+b)\right]dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$ | ▪ $\int \left[1+\tan^2\underbrace{(\pi-2x)}_{a=-2;\,b=\pi}\right]dx = \frac{1}{-2}\tan(\pi-2x)+C$ |
| 10) $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int (1+\cot^2 x)dx = -\cot x + C$<br>$\xrightarrow{MR} \int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+C$<br>$\xrightarrow{MR} \int \left[1+\cot^2(ax+b)\right]dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+C$ | ▪ $\int \frac{x\sin^2 x+1}{\sin^2 x}dx = \int \left(x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \frac{x^2}{2}-\cot x + C$<br>▪ $\int \frac{1}{\sin^2 8x}dx = -\frac{1}{8}\cot 8x + C$<br>▪ $\int \left[1+\cot^2 3x\right]dx = -\frac{1}{3}\cot 3x + C$ |

▪ $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \tan x - \cot x + C$

## DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH

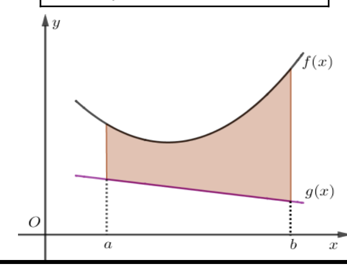
▪ Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục $Ox$, $x=a$, $x=b$ thì có diện tích:

$$\boxed{S=\int_a^b |f(x)|dx}$$




▪ Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$ thì có diện tích:

$$\boxed{S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx}$$




▪ Khi xoay hình phẳng $\begin{cases} y=f(x) \\ x=a,\ x=b \end{cases}$ quanh $Ox$, ta được khối trụ tròn có thể tích

$$\boxed{V=\pi\int_a^b f^2(x)dx}$$

▪ Khi xoay hình phẳng $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \\ x=a,\ x=b \end{cases}$ quanh $Ox$, ta được khối trụ tròn có thể tích

$$\boxed{V=\pi\int_a^b \left|f^2(x)-g^2(x)\right|dx}$$

▪ Xét hình khối được giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=a$, $x=b$. Khi cắt khối này ta được thiết diện có diện tích $S(x)$ (là hàm liên tục trên $[a;b]$). Thể tích khối này trên $[a;b]$ là: $\boxed{V=\int_a^b S(x)dx}$.

## CÔNG THỨC CHUYỂN ĐỘNG

Xét hàm quảng đường $S(t)$, hàm vận tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$. Ba hàm này sẽ biến thiên theo $t$.

| | |
|---|---|
| ▪ $S(t)=\int v(t)dt \Leftrightarrow v(t)=S'(t)$ | ▪ $v(t)=\int a(t)dt \Leftrightarrow a(t)=v'(t)$ |

## CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

### 1. Hệ thức cơ bản:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ▪ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ | ▪ $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ | ▪ $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ | ▪ $\tan\alpha.\cot\alpha=1$ |
| ▪ $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ | ▪ $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ | ▪ $\begin{cases}\sin(\alpha+k2\pi)=\sin\alpha \\ \cos(\alpha+k2\pi)=\cos\alpha\end{cases}$ | ▪ $\begin{cases}\tan(\alpha+k\pi)=\tan\alpha \\ \cot(\alpha+k\pi)=\cot\alpha\end{cases}$ |

### 2. Cung liên kết:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Đối:** $\alpha$ **và** $-\alpha$ | **Bù:** $\alpha$ **và** $\pi-\alpha$ | **Phụ:** $\alpha$ **và** $\frac{\pi}{2}-\alpha$ | **Khác pi:** $\pi$; $\pi+\alpha$ | **Khác** $\frac{Pi}{2}$: $\alpha$; $\frac{\pi}{2}-\alpha$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ | $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$ | $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$ | $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$ | $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$ |
| $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ | $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$ | $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$ |
| $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ | $\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$ | $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$ | $\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$ | $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$ |
| $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$ | $\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$ | $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha$ | $\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$ | $\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha$ |
| Cos Đối | Sin Bù | Phụ Chéo | Khác pi<br>Tang, Cotang | Khác pi chia 2<br>Sin bạn cos |

### 3. Công thức cộng:

$$\begin{Vmatrix} * \sin(a+b) = \sin a.\cos b + \sin b.\cos a \\ * \sin(a-b) = \sin a.\cos b - \sin b.\cos a \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} * \cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b \\ * \cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b \end{Vmatrix}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$$

### 4. Công thức nhân đôi, nhân ba:

| | | |
|---|---|---|
| $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$ | $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$ | $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ |
| $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ | $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ | $\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$ |

### 5. Công thức hạ bậc

| | | |
|---|---|---|
| $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ | $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ | $\tan^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ |

### 6. Công thức biến đổi tổng thành tích:

| | |
|---|---|
| $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$ | $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$ |
| $\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$ | $\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$ |
| $\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a.\cos b}$ | $\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a.\cos b}$ |
| $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}.\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ | $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ |

### 7. Công thức biến đổi tích thành tổng:

| | | |
|---|---|---|
| $\cos a.\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$ | $\sin a.\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$ | $\sin a.\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$ |
| Cos.Cos thì Cos cộng cộng Cos trừ | Sin.Sin thì Cos trừ trừ Cos cộng | Sin.Cos thì Sin cộng cộng Sin trừ |

## PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

- $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

| | |
|---|---|
| Đặc biệt: $\begin{cases} \sin u = 1 \Leftrightarrow u = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ \sin u = -1 \Leftrightarrow u = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi \end{cases}$ | Đặc biệt: $\begin{cases} \cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi \\ \cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \cos u = 0 \Leftrightarrow u = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$ |
| ▪ $\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ | ▪ $\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ |

## TỔ HỢP – XÁC SUẤT

| QUY TẮC CỘNG | QUY TẮC NHÂN |
|---|---|
| Nếu phép đếm được chia ra **nhiều trường hợp**, ta sẽ **cộng các kết quả** lại. | Nếu phép đếm được chia ra làm **nhiều giai đoạn bắt buộc**, ta sẽ **nhân các kết quả** của mỗi giai đoạn ấy. |

| HOÁN VỊ | CHỈNH HỢP | TỔ HỢP |
|---|---|---|
| ▪ Sắp xếp (đổi chỗ) của $n$ phần tử khác nhau, ta có số cách xếp là $\boxed{P_n = n!}$ với $n \in \mathbb{N}$.<br>▪ Cách tính: $n! = 1.2.....(n-1)n$.<br>▪ Quy ước sốc: $0! = 1$. | ▪ Chọn $k$ phần tử từ $n$ phần tử (không sắp xếp thứ tự), ta có số cách chọn là $\boxed{C_n^k}$.<br>▪ Cách tính: $\boxed{C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}}$<br>với $\begin{cases} n,\ k \in \mathbb{N} \\ 0 \le k \le n \end{cases}$. | ▪ Chọn $k$ phần tử từ $n$ phần tử (có sắp xếp thứ tự), ta được số cách chọn là $\boxed{A_n^k}$.<br>▪ Cách tính: $\boxed{A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}}$<br>với $\begin{cases} n,\ k \in \mathbb{N} \\ 0 \le k \le n \end{cases}$. |

| | | |
|---|---|---|
| **XÁC SUẤT** | ▪ **Công thức:** $\boxed{P(X) = \dfrac{n(X)}{n(\Omega)}}$<br>Trong đó: $n(X)$: số phần tử của tập biến cố $X$; $n(\Omega)$: số phần tử không gian mẫu . $P(X)$ là xác suất để biến cố $X$ xảy ra với $X \subset \Omega$. | ▪ **Tính chất:**<br>$\boxed{0 \le P(X) \le 1}$.<br>$\boxed{P(\varnothing) = 0;\ P(\Omega) = 1}$.<br>$\boxed{P(X) = 1 - P(\overline{X})}$ với $\overline{X}$ là biến cố đối của $X$. |

## KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NEWTƠN

| | |
|---|---|
| **Khai triển dạng liệt kê:**<br>*Trong các công thức bên, ta luôn có $n \in \mathbb{N},\ n \ge 2$.* | ▪ $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ......... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$.<br>▪ **Đặc biệt:** $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + .........C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$ (*).<br>▪ **Hệ quả 1:** $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + .........C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$ (tức là thay $x = 1$ vào (*)).<br>▪ **Hệ quả 2:** Với $n$ chẵn, chỉ cần thay $x = -1$ vào (*), ta có:<br>$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ......... - C_n^{n-1} + C_n^n = 0 \Leftrightarrow C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 ...... + C_n^n = C_n^1 + C_n^3 + ......C_n^{n-1}$ |
| **Khai triển tổng quát:**<br>*Trong các công thức bên, ta luôn có $n \in \mathbb{N},\ n \ge 2$.* | ▪ Khai triển: $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k}$. Số hạng tổng quát: $\boxed{T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k}$<br>▪ Phân biệt hệ số và số hạng: $\underbrace{\underbrace{C_n^k (-1)^k a^{n-k} b^k}_{\text{HỆ SỐ}} .x^{\alpha}}_{\text{SỐ HẠNG}}$.<br>Nhớ rằng **số hạng không chứa** $x$ ứng với $\alpha = 0$. |

## CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

| CẤP SỐ CỘNG | CẤP SỐ NHÂN |
|---|---|

**1. Định nghĩa:**

- Dãy số $(u_n)$ được gọi là **cấp số cộng** khi và chỉ khi $\boxed{u_{n+1}=u_n+d}$ với $n\in\mathbb{N}^*$.
- **Cấp số cộng** như trên có **số hạng đầu** $u_1$, **công sai** $d$.

**2. Số hạng tổng quát:**

- $\boxed{u_n=u_1+(n-1)d}$ *với* $n\in\mathbb{N}^*$.

**3. Tính chất các số hạng:**

- $\boxed{u_{k-1}+u_{k+1}=2u_k}$ *với* $k\in\mathbb{N}$ *và* $k\geq 2$.

**4. Tổng *n* số hạng đầu tiên:**

- $\boxed{S_n=u_1+u_2+...+u_n=\dfrac{(u_1+u_n)n}{2}}$.

**1. Định nghĩa:**

- Dãy số $(u_n)$ được gọi là **cấp số nhân** khi và chỉ khi $\boxed{u_{n+1}=u_n.q}$ với $n\in\mathbb{N}^*$.
- **Cấp số nhân** như trên có **số hạng đầu** $u_1$, **công bội** $q$.

**2. Số hạng tổng quát:**

- $\boxed{u_n=u_1.q^{n-1}}$ với $n\in\mathbb{N}^*$.

**3. Tính chất các số hạng:**

- $\boxed{u_{k-1}.u_{k+1}=u_k^2}$ với $k\in\mathbb{N}$ *và* $k\geq 2$.

**4. Tổng *n* số hạng đầu tiên:**

- $\boxed{S_n=u_1+u_2+...+u_n=\dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}}$ với $q\neq 1$.

## KHẢO SÁT HÀM SỐ & BÀI TOÁN LIÊN QUAN

### XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU

- **Bước 1:** Tìm tập xác định $D$.
- **Bước 2:** Tính $y'=f'(x)$ ; cho $y'=0 \xrightarrow{\text{Tìm nghiệm}} x_1,\, x_2...$
- **Bước 3:** Lập bảng biến thiên. *(Nên chọn giá trị x đại diện cho từng khoảng thay vào $y'$ để tìm dấu của $y'$ trên khoảng đó).*
- **Bước 4:** Dựa vào bảng biến thiên để kết luận về sự đồng biến, nghịch biến của hàm số.

### HÀM BẬC BA

$y=ax^3+bx^2+cx+d \quad (a\neq 0)$

- Đạo hàm $y'=3ax^2+2bx+c$.
- Hàm số **đồng biến trên tập xác định** $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta\leq 0\end{cases}$.
- Hàm số **nghịch biến trên tập xác định** $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta\leq 0\end{cases}$.

### HÀM NHẤT BIẾN

$y=\dfrac{ax+b}{cx+d} \quad (ad-bc\neq 0)$

- Đạo hàm $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.
- Hàm số **đồng biến trên từng khoảng xác định** $\Leftrightarrow ad-bc>0$.
- Hàm số **nghịch biến trên từng khoảng xác định** $\Leftrightarrow ad-bc<0$.

### ĐIỀU KIỆN CỰC TRỊ

- Hàm số có điểm cực trị là $(x_0;y_0) \Leftrightarrow\begin{cases}y'(x_0)=0\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$.

  (giả thiết là hàm số liên tục tại $x_0$).

- Nếu $\boxed{\begin{cases}f'(x_0)=0\\ f''(x_0)<0\end{cases}}$ thì hàm số $f(x)$ **đạt cực đại** tại $x=x_0$.
- Nếu $\boxed{\begin{cases}f'(x_0)=0\\ f''(x_0)>0\end{cases}}$ thì hàm số $f(x)$ **đạt cực tiểu** tại $x=x_0$.

### CỰC TRỊ HÀM BẬC BA

$y=ax^3+bx^2+cx+d \quad (a\neq 0)$

- Đạo hàm $y'=3ax^2+2bx+c$.
- Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta_{y'}>0\end{cases}$ (*).
- Để tìm điều kiện cho hàm số không có cực trị: **Bước 1:** làm theo công thức (*). **Bước 2**: phủ định kết quả.
- Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị:

$$\boxed{y=f(x)-\frac{f'(x).f''(x)}{18a}}$$

### CỰC TRỊ HÀM BẬC BỐN

$y=ax^4+bx^2+c \quad (a\neq 0)$

- Đạo hàm $y'=4ax^3+2bx$.
- Điều kiện cực trị

| | |
|---|---|
| **Ba cực trị** | $ab<0$ |
| **Một cực trị** | $\begin{cases}ab\geq 0\\ a^2+b^2>0\end{cases}$ |
| **Có cực trị** | $a^2+b^2>0$ |

- Cho $A,\,B,\,C$ là ba điểm cực trị, ta có: $\boxed{\cos BAC=\dfrac{b^3+8a}{b^3-8a}}$

$$\boxed{S_{\Delta ABC}=\sqrt{\frac{b^5}{-32a^3}}}.$$

### TÌM MAX-MIN TRÊN ĐOẠN

Tìm Max-Min của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$

### TÌM MAX-MIN TREN KHOẢNG

Tìm Max-Min của $f(x)$ trên khoảng $(a;b)$

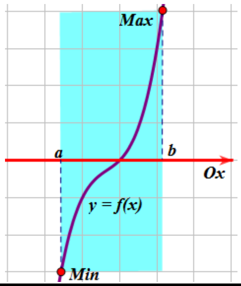
- **Bước 1:** Tính $y' = f'(x)$.
  Tìm các nghiệm $x_i \in (a;b)$ khi cho $f'(x) = 0$.
- **Bước 2:** Tính các giá trị $f(a)$, $f(b)$ và $f(x_i)$,... (nếu có).
- **Bước 3:** So sanh tất cả giá trị trong **bước 2** để **kết luận về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất**.

- **Bước 1:** Tính $y' = f'(x)$.
  Tìm các nghiệm $x_i \in (a;b)$ khi cho $f'(x) = 0$.
- **Bước 2:** Cần tính $\lim\limits_{x \to a^+} y$, $\lim\limits_{x \to b^-} y$. (Nếu thay $(a;b)$ bằng $(-\infty;+\infty)$ thì ta tính thêm $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y$).
- **Bước 3:** Lập bảng biến thiên và suy ra **giá trị lớn nhất, nhỏ nhất** trên khoảng.

**ĐẶC BIỆT**

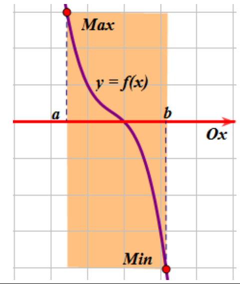
- Nếu hàm $f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$ thì

$$\begin{cases} \max\limits_{x \in [a;b]} f(x) = f(b) \\ \min\limits_{x \in [a;b]} f(x) = f(a) \end{cases}$$




- Nếu hàm $f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$ thì

$$\begin{cases} \max\limits_{x \in [a;b]} f(x) = f(a) \\ \min\limits_{x \in [a;b]} f(x) = f(b) \end{cases}$$




## TIỆM CẬN ĐỨNG

- **Định nghĩa:** $\begin{cases} x \longrightarrow x_0 \\ y \longrightarrow \pm\infty \end{cases}$ ($x$ hữu hạn, $y$ vô hạn), ta có **tiệm cận đứng** $x = x_0$. **Lưu ý:** điều kiện $x \longrightarrow x_0$ có thể được thay bằng $x \longrightarrow x_0^-$ (giới hạn bên trái) hoặc $x \longrightarrow x_0^+$ (giới hạn bên phải).
- **Cách tìm TCĐ:** Nếu $x = x_0$ là một **nghiệm của mẫu số** mà **không phải là nghiệm của tử số** thì $x = x_0$ chính là một **TCĐ** của đồ thị.

## TIỆM CẬN NGANG

- **Định nghĩa:** $\begin{cases} x \longrightarrow \pm\infty \\ y \longrightarrow y_0 \end{cases}$ ($x$ vô hạn, $y$ hữu hạn), ta có **tiệm cận ngang** $y = y_0$.
- **Cách tìm TCN:** Đơn giản nhất là dùng CASIO
  **Bước 1:** Nhập hàm số vào máy.
  **Bước 2:** $\boxed{CALC} \xrightarrow{NEXT} \boxed{X = 10\,^\wedge 10} \xrightarrow{NEXT} \boxed{=}$
  $\boxed{CALC} \xrightarrow{NEXT} \boxed{X = -10\,^\wedge 10} \xrightarrow{NEXT} \boxed{=}$
  **Bước 3:** Nếu kết quả thu được là **hữu hạn** (tức là $y_0$) thì ta kết luận **TCN**: $y = y_0$.

- Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$ có một TCĐ: $\boxed{x = -\dfrac{d}{c}}$, một TCN: $\boxed{y = \dfrac{a}{c}}$.
- **Nên nhớ, đồ thị có thể có nhiều tiệm cận đứng, nhưng chỉ có tối đa là 2 tiệm cận ngang.**

## TÌM TỌA ĐỘ GIAO ĐIỂM HOẶC SỐ GIAO ĐIỂM HAI ĐỒ THỊ

**Xét hai đồ thị $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$.**

- **Bước 1 :** Lập phương trình hoành độ giao điểm của $(C_1) \& (C_2)$: $\boxed{f(x) = g(x)}$. $(*)$
- **Bước 2 :** Giải phương trình $(*)$ để tìm các nghiệm $x_1, x_2, ...$ (nếu có), suy ra $y_1, y_2 ...$

## PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

### DẠNG 1

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ tại điểm $M(x_0;y_0) \in (C)$

- **Bước 1:** Tính đạo hàm $y'$, từ đó có hệ số góc $k = y'(x_0)$.
- **Bước 2 :** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị dạng $\boxed{y = k(x - x_0) + y_0}$.

### DẠNG 2

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ biết tiếp tuyến có hệ số góc $k$.

- **Bước 1:** Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm và tính đạo hàm $y'$.
- **Bước 2:** Cho $y'(x_0) = k$, từ đó tìm được tiếp điểm $(x_0;y_0)$.
- **Bước 3:** Viết phương trình tiếp tuyến :

### DẠNG 3

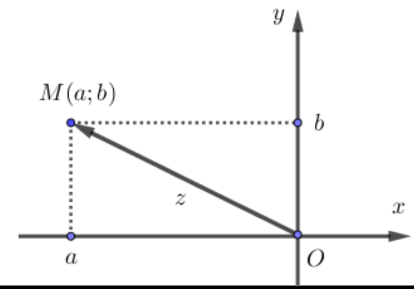
Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ biết tiếp tuyến đi qua $A(x_A;y_A)$.

- **Bước 1:** Tiếp tuyến có dạng : $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$ $(*)$ với $y_0 = f(x_0)$.
- **Bước 2:** Thay tọa độ điểm $A$ vào $(*)$ để tìm được $x_0$.
- **Bước 3:** Thay $x_0$ tìm được vào

| | | |
|---|---|---|
| | $\boxed{y=k(x-x_0)+y_0}$. | (*) để viết phương trình tiếp tuyến. |

## SỐ PHỨC VÀ CÁC YẾU TỐ LIÊN QUAN

Số phức có dạng: $z=a+bi$ với $\begin{cases} a,b\in\mathbb{R} \\ i^2=-1 \end{cases}$ ($i$: là đơn vị ảo). Ký hiệu tập số phức: $\mathbb{C}$.

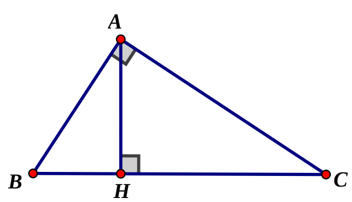
| Thành phần | Hình học | Minh họa |
|---|---|---|
| ▪ **Phần thực:** $a$.<br>Nếu $a=0$ thì $z=bi$ được gọi là **số thuần ảo**.<br>▪ **Phần ảo**: $b$.<br>Nếu $b=0$ thì $z=a$ là **số thực**.<br>▪ Khi $a=b=0$ thì $z=0$ vừa là số thuần ảo vừa là số thực. | ▪ Điểm $M(a;b)$ biểu diễn cho $z$ trên hệ trục $Oxy$.<br>▪ **Mô-đun:**<br>$\lvert z\rvert=OM=\sqrt{a^2+b^2}$. |  |

| Số phức liên hợp – Số phức nghịch đảo | Căn bậc hai | Phương trình bậc hai |
|---|---|---|
| Cho $z=a+bi$. Khi đó:<br>▪ **Số phức liên hợp** của nó là $\bar{z}=a-bi$.<br>▪ **Số phức nghịch đảo** là<br>$z^{-1}=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a+bi}$<br>$=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}i$. | ▪ Căn bậc hai của $a>0$ là $\pm\sqrt{a}$.<br>▪ Căn bậc hai của $a<0$ là $\pm i\sqrt{-a}$.<br>▪ Căn bậc hai của số phức $z=a+bi$ là hai số phức dạng $w=x+yi$ với $\begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \end{cases}$. | ▪ Phương trình $z^2=a>0$ có hai nghiệm phức $z=\pm\sqrt{a}$.<br>▪ Phương trình $z^2=a<0$ có hai nghiệm phức $z=\pm i\sqrt{-a}$.<br>▪ Phương trình $az^2+bz+c=0$ với $\Delta<0$ sẽ có hai nghiệm phức là: $z_{1,2}=\dfrac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$. |

## KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA CHÚNG

### I. MỘT SỐ HÌNH PHẲNG CƠ BẢN:

**1. Tam giác vuông:**



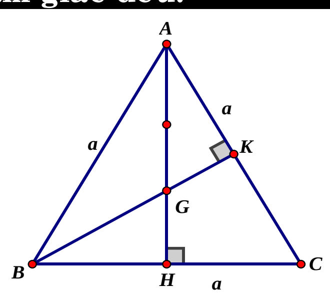

▪ $AB^2+AC^2\overset{Pitago}{=}BC^2$ ▪ $AB^2=BH.BC$

▪ $AC^2=CH.BC$ ▪ $AH^2=BH.CH$

▪ $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}\Rightarrow \boxed{AH=\dfrac{AB.AC}{\sqrt{AB^2+AC^2}}}$

▪ $\sin B=\dfrac{AC}{BC}$ (đối/huyền) ▪ $\cos B=\dfrac{AB}{BC}$ (kề/huyền) ▪ $\tan B=\dfrac{AC}{AB}$ (đối/kề) ▪ $\cot B=\dfrac{AB}{AC}$ (kề/đối)

**2. Tam giác đều:**




Giả sử tam giác $ABC$ đều có cạnh $a$; trọng tâm $G$; các đường cao (trùng với trung tuyến) gồm $AH$, $BK$.

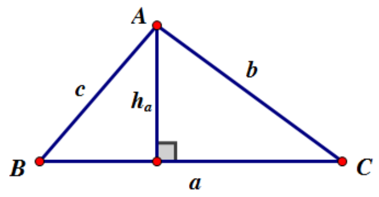
▪ Đường cao: $AH=BK=\dfrac{(cạnh)\times\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

▪ $AG=\dfrac{2}{3}AH=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $GH=\dfrac{1}{3}AH=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

▪ Diện tích: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{(cạnh)^2\times\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

**3. Tam giác thường:**

Giả sử tam giác $ABC$ có $a=BC,b=AC,c=AB$; các đường cao $h_a,h_b,h_c$ lần lượt ứng với cạnh $a,b,c$. Ký hiệu $R,r$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp $\Delta$.




▪ Định lí Sin: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

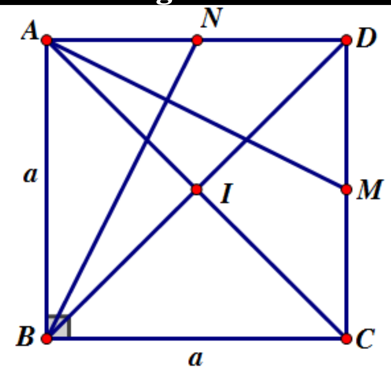
▪ Định lí Cô-sin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$;

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B; c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$.

▪ Diện tích: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}h_a.a = \dfrac{1}{2}h_b.b = \dfrac{1}{2}h_c.c$; $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}ab.\sin C = \dfrac{1}{2}ac.\sin B = \dfrac{1}{2}bc.\sin A$;

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{abc}{4R} = pr$ ; $\underbrace{S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-b)}}_{\text{Công thức Hê-Rông}}$ với $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ (nửa chu vi).

## 4. Hình vuông:




Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh $a$; hai điểm $M, N$ lần lượt là trung điểm của $CD, AD$; $I$ là tâm hình vuông.

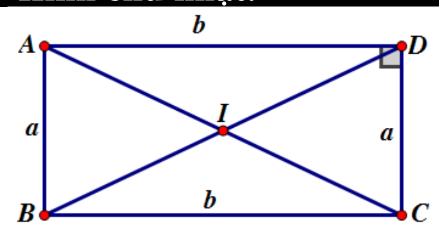
▪ Đường chéo: $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC = BD = (\text{cạnh}) \times \sqrt{2} = a\sqrt{2} \end{cases}$.

$IA = IB = IC = ID = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên $I$ là tâm đường tròn đi qua bốn đỉnh hình vuông.

▪ Diện tích: $S_{ABCD} = (\text{cạnh})^2 = a^2$; chu vi: $p = 4a$.

▪ Vì $\Delta ABN = \Delta ADM$, ta chứng minh được: $AM \perp BN$.

## 5. Hình chữ nhật:



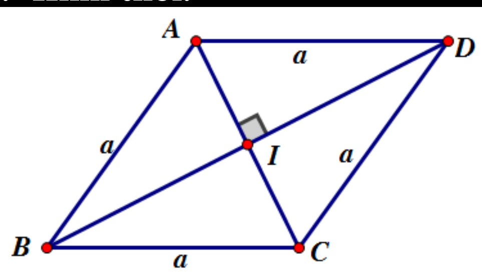

Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm $I$ có $AB = a, AD = b$.

▪ Đường chéo: $AC = BD = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$IA = IB = IC = ID = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$ nên $I$ là tâm đường tròn đi qua bốn điểm $A, B, C, D$.

▪ Diện tích: $S_{ABCD} = a.b$; chu vi: $p = 2(a+b)$.

## 6. Hình thoi:




Cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I$, cạnh bằng $a$.

▪ Đường chéo: $AC \perp BD$; $AC = 2AI = 2AB.\sin ABI = 2a.\sin ABI$.

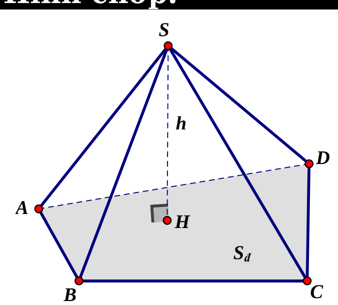
▪ Diện tích: $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD$; $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta ACD} = 2S_{\Delta ABD}$.

**Đặc biệt:** Nếu hình thoi có góc $B = D = 60^0$ ($A = C = 120^0$) thì ta chia hình thoi ra làm hai tam giác đều: $\Delta ABC = \Delta ACD$.

$AC = a$ và $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

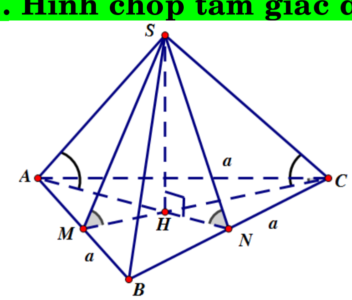
# II. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP:

## 7. Hình chóp:




$\boxed{V = \dfrac{1}{3}h.S_đ}$

### 7.1. Hình chóp tam giác đều




▪ Tất cả cạnh bên bằng nhau.

▪ Đáy là tam giác đều cạnh $a$.

▪ $SH \perp (ABC)$ với $H$ là trọng tâm $\Delta ABC$.

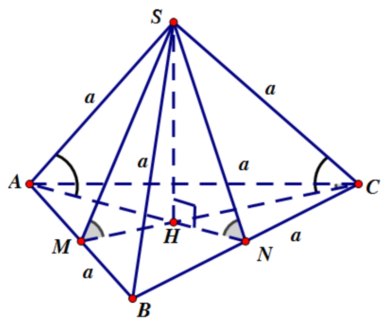
▪ $\begin{cases} S_đ = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ SH = h \end{cases} \xrightarrow{\text{Thể tích}} \boxed{V = \dfrac{1}{3}h.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}$

☆**Góc giữa cạnh bên và mặt**

☆**Góc giữa mặt bên và mặt đáy:**

**7.2. Tứ diện đều:**

- Đây cũng là hình chóp tam giác đều, đặc biệt là cạnh bên bằng cạnh đáy. Thể tích: $\boxed{V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}}$.



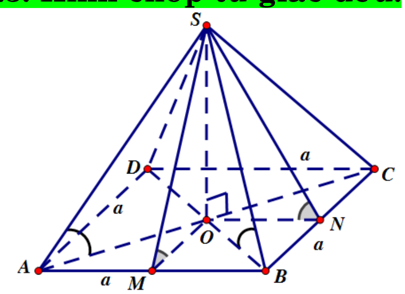

**đáy:** $SA,(ABC) = SAH$

$= SC,(ABC) = SCH$.

$(SAB),(ABC) = SMH$

$= (SBC),(ABC) = SNH$.

**7.3. Hình chóp tứ giác đều:**




- Tất cả cạnh bên bằng nhau.
- Đáy là hình vuông cạnh $a$.
- $SO\perp(ABCD)$ với $O$ là tâm hình vuông $ABCD$.
- $\begin{cases}S_đ=a^2\\SO=h\end{cases}\xrightarrow{\text{Thể tích}}\boxed{V=\dfrac{1}{3}h.a^2}$.

☆**Góc giữa cạnh bên và mặt đáy:** $SA,(ABCD) = SAO$

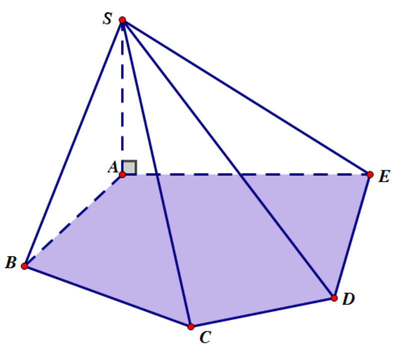
$= SB,(ABCD) = SBO$.

☆**Góc giữa mặt bên và mặt đáy:**

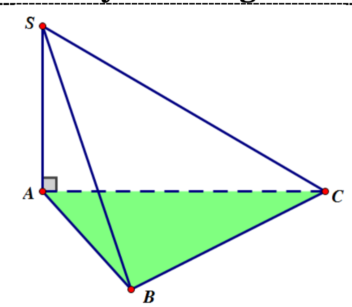
$(SAB),(ABCD) = SMO$

$= (SBC),(ABCD) = SNO$.

**7.4. Hình chóp có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy.**



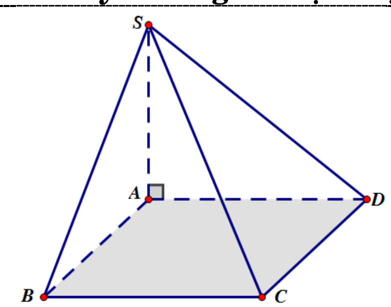

**Đáy là tam giác**




- $\begin{cases}h=SA\\S_đ=S_{\Delta ABC}\end{cases}\xrightarrow{\text{Thể tích}}V=\dfrac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}$.
- Góc giữa cạnh bên và mặt đáy:

$\begin{cases}SB,(ABC) = SBA\\SC,(ABC) = SCA\end{cases}$.

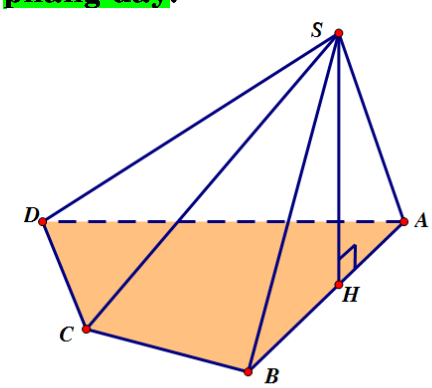
**Đáy là tứ giác đặc biệt**



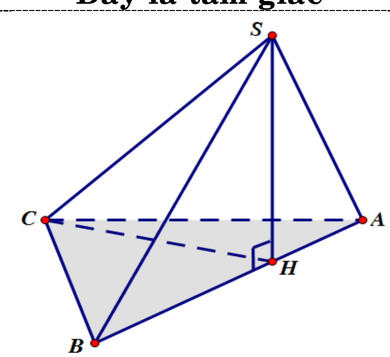

- $\begin{cases}h=SA\\S_đ=S_{ABCD}\end{cases}\xrightarrow{\text{Thể tích}}V=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}$.
- Góc giữa cạnh bên và mặt đáy:

$\begin{cases}SB,(ABCD) = SBA\\SC,(ABCD) = SCA\end{cases}$.

**7.5. Hình chóp có mặt bên *(SAB)* vuông góc với mặt phẳng đáy.**



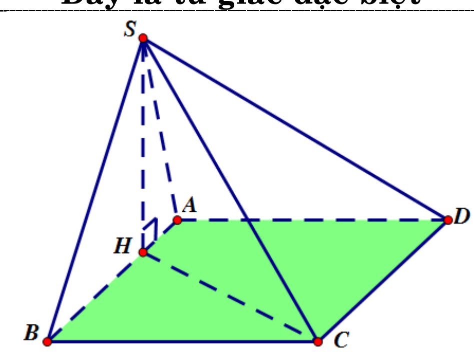

**Đáy là tam giác**




- Đường cao $h=SH$ cũng là đường cao của $\Delta SAB$.
- Góc giữa cạnh bên và mặt đáy:

$\begin{cases}SA,(ABC) = SAH\\SC,(ABC) = SCH\end{cases}$.

**Đáy là tứ giác đặc biệt**




- Đường cao $h=SH$ cũng là đường cao của $\Delta SAB$.
- Góc giữa cạnh bên và mặt đáy:

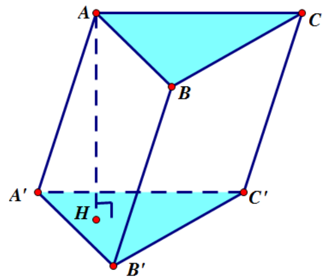
$\begin{cases}SA,(ABCD) = SAH\\SC,(ABCD) = SCH\end{cases}$.

## III. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ:

### 1. Hình lăng trụ thường:

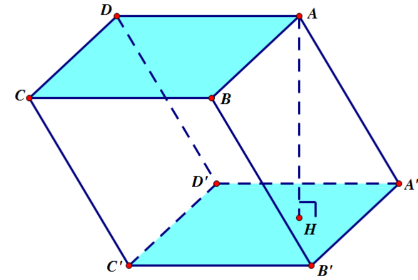
- Hai đáy là hai hình giống nhau và nằm trong hai mặt phẳng song song.
- Các cạnh bên song song và bằng nhau. Các mặt bên là các hình bình hành.
- Thể tích: $\boxed{V = h.S_đ}$.

**Đáy là tam giác**




$\boxed{V = AH.S_{\Delta ABC} = AH.S_{\Delta A'B'C'}}$

**Đáy là tứ giác**



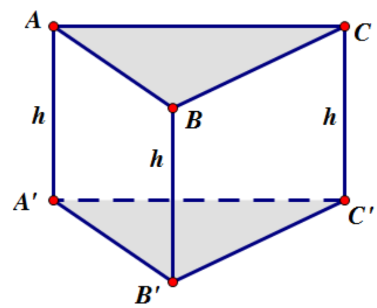

$\boxed{V = AH.S_{ABCD} = AH.S_{A'B'C'D'}}$

### 2. Hình lăng trụ đứng:

- Các cạnh bên cùng vuông góc với hai mặt đáy nên mỗi cạnh bên cũng là đường cao của lăng trụ.

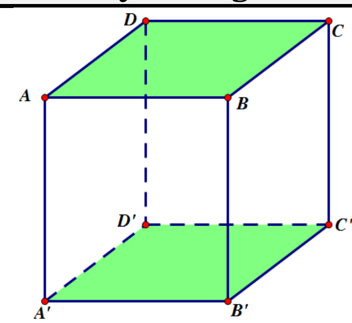
  ☞ **Lăng trụ tam giác đều:** Là **lăng trụ đứng** và có hai đáy là hai **tam giác đều** bằng nhau.

**Đáy là tam giác**




- Thể tích: $\boxed{V = h.S_đ}$ với $h = AA' = BB' = CC'$ .

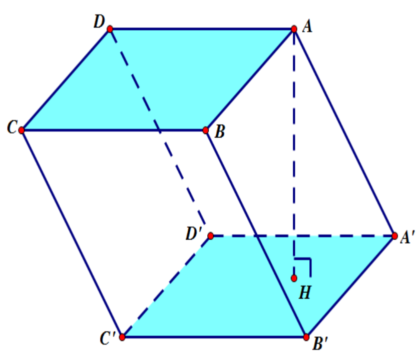
**Đáy là tứ giác**




Thể tích: $\boxed{V = h.S_đ}$ với $h = AA' = BB' = CC' = DD'$ .

### 3. Hình hộp:

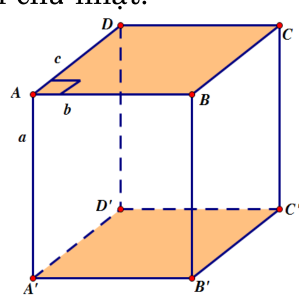
- Là lăng trụ có tất cả các mặt là hình bình hành.




- Thể tích: $\boxed{V = h.S_đ}$.

**3.1 Hình hộp chữ nhật:**

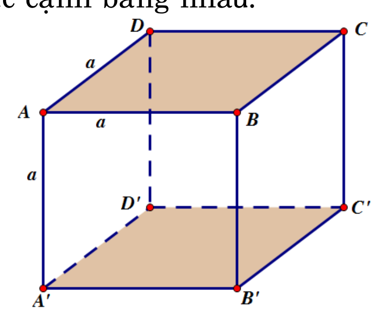
- Là lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật.




- $\boxed{V = abc}$ với $a,b,c$ là ba kích thước khác nhau của hình hộp chữ nhật.

**3.2. Hình lập phương:**

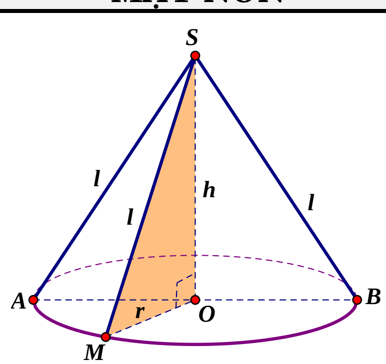
- Là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.




- $\boxed{V = a^3}$ với $a$ là cạnh của hình lập phương.

## MẶT TRỤ – MẶT NÓN – MẶT CẦU

### MẶT NÓN




☞**Hình thành:** Quay $\Delta$ vuông

### Các yếu tố mặt nón:

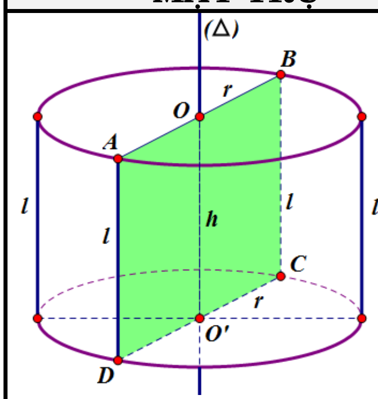
- **Đường cao**: $\boxed{h = SO}$. ($SO$ cũng được gọi là **trục** của hình nón).
- **Bán kính đáy**: $\boxed{r = OA = OB = OM}$.
- **Đường sinh**: $\boxed{l = SA = SB = SM}$.
- **Góc ở đỉnh**: $\boxed{\widehat{ASB}}$.

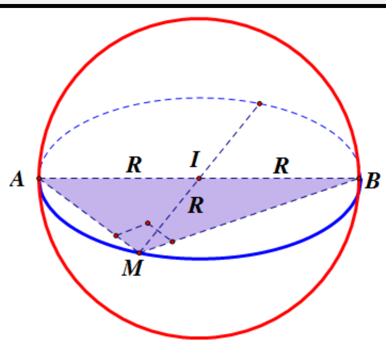
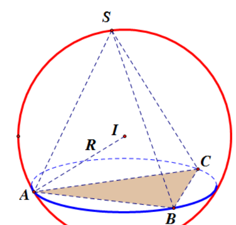
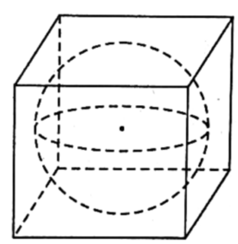
### Một số công thức:

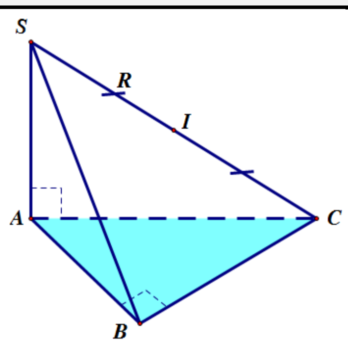
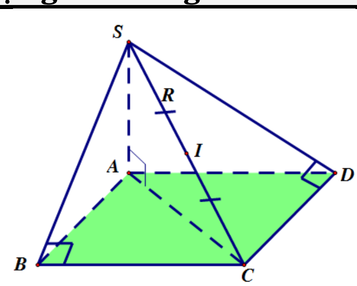
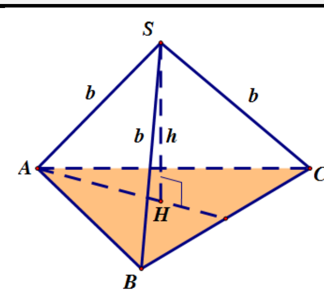
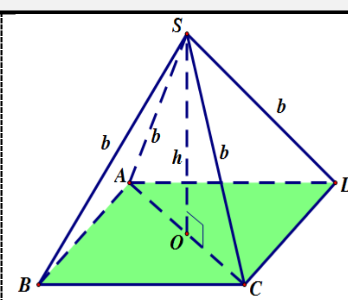
- **Chu vi đáy**: $\boxed{p = 2\pi r}$.
- **Diện tích đáy**: $\boxed{S_đ = \pi r^2}$.
- **Thể tích**: $\boxed{V = \frac{1}{3}h.S_đ = \frac{1}{3}h.\pi r^2}$.

  *(liên tưởng khối chóp).*
- **Diện tích xung quanh**: $\boxed{S_{xq} = \pi rl}$.

| | | |
|---|---|---|
| $SOM$ quanh trục $SO$, ta được mặt nón như hình bên với: $\begin{cases} h = SO \\ r = OM \end{cases}$. | ▪ **Thiết diện qua trục**: $\Delta SAB$ cân tại $S$.<br>▪ **Góc giữa đường sinh và mặt đáy**: $\boxed{SAO = SBO = SMO}$. | ▪ **Diện tích toàn phần**:<br>$\boxed{S_{tp} = S_{xq} + S_{đ} = \pi rl + \pi r^2}$. |

| MẶT TRỤ | Các yếu tố mặt trụ: | Một số công thức: |
|---|---|---|
| <br><br>☞**Hình thành:** Quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh đường trung bình $OO'$, ta có mặt trụ như hình bên. | ▪ **Đường cao**: $\boxed{h = OO'}$.<br>▪ **Đường sinh**: $\boxed{l = AD = BC}$.<br>Ta có: $\boxed{l = h}$.<br>▪ **Bán kính đáy**:<br>$\boxed{r = OA = OB = O'C = O'D}$.<br>▪ **Trục** $(\Delta)$ là đường thẳng đi qua hai điểm $O$, $O'$.<br>▪ **Thiết diện qua trục**: Là hình chữ nhật $ABCD$. | ▪ **Chu vi đáy**: $\boxed{p = 2\pi r}$.<br>▪ **Diện tích đáy**: $\boxed{S_{đ} = \pi r^2}$.<br>▪ **Thể tích khối trụ**:<br>$\boxed{V = h.S_{đ} = h.\pi r^2}$.<br>▪ **Diện tích xung quanh**:<br>$\boxed{S_{xq} = 2\pi r.h}$.<br>▪ **Diện tích toàn phần**:<br>$\boxed{S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đ} = 2\pi r.h + 2\pi r^2}$. |

| MẶT CẦU | Một số công thức: | Mặt cầu ngoại tiếp đa diện<br>Mặt cầu nội tiếp đa diện |
|---|---|---|
| <br><br>☞**Hình thành:** Quay đường tròn tâm $I$, bán kính $R = \frac{AB}{2}$ quanh trục $AB$, ta có mặt cầu như hình vẽ. | ▪ **Tâm** $I$, **bán kính** $R = IA = IB = IM$.<br>▪ **Đường kính** $AB = 2R$.<br>▪ **Thiết diện qua tâm** mặt cầu: Là đường tròn tâm $I$, bán kính $R$.<br>▪ **Diện tích** mặt cầu: $\boxed{S = 4\pi R^2}$<br>▪ **Thể tích** khối cầu: $\boxed{V = \frac{4\pi R^3}{3}}$ | <br><br>▪ **Mặt cầu ngoại tiếp đa diện** là mặt cầu đi qua tất cả đỉnh của đa diện đó.<br><br>▪ **Mặt cầu nội tiếp** đa diện là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của đa diện đó. |

| CÁCH TÌM BÁN KÍNH MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP THƯỜNG GẶP | | | |
|---|---|---|---|
| **1. Hình chóp có các đỉnh nhìn một cạnh dưới một góc vuông.** | | **2. Hình chóp đều.** | |
| <br><br>▪ Xét hình chóp có $SA \perp (ABC)$ và | <br><br>▪ Xét hình chóp có $SA \perp (ABCD)$ và $ABCD$ là hình chữ | <br><br>▪ Xét hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng $b$ và đường cao | <br><br>▪ Xét hình chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng $b$ và chiều cao $SO = h$ |

$\widehat{ABC} = 90^0$.

- Ta có $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = 90^0$ nên mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có tâm $I$ là trung điểm $SC$, bán kính $\boxed{R = \dfrac{SC}{2}}$.

nhật hoặc hình vuông.

- Ta có: $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = \widehat{SDC} = 90^0$

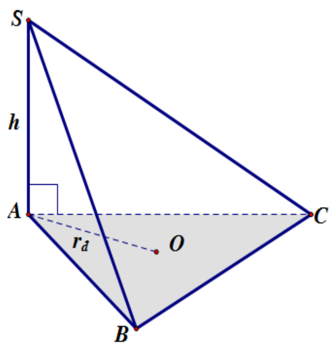
Suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có tâm $I$ là trung điểm $SC$, bán kính $\boxed{R = \dfrac{SC}{2}}$.

$SH = h$.

- Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trên là $\boxed{R = \dfrac{b^2}{2h}}$.

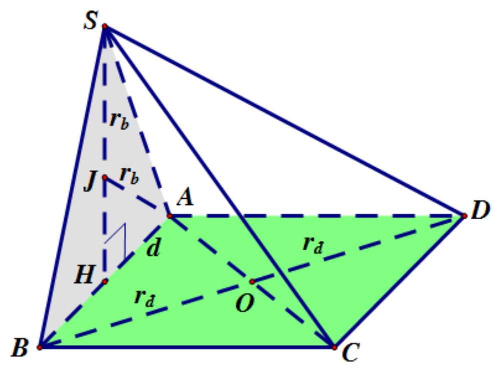
- Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trên là $\boxed{R = \dfrac{b^2}{2h}}$.

### 3. Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy.



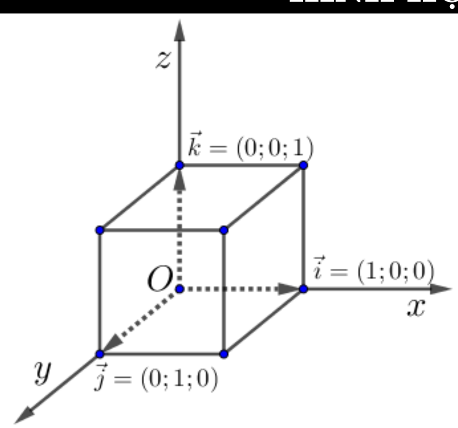

- Xét hình chóp có $SA \perp$ (đáy) và $SA = h$; bán kính đường tròn ngoại tiếp của đáy là $r_d$.
- Khi đó mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có bán kính $\boxed{R = \sqrt{\left(\dfrac{h}{2}\right)^2 + r_d^{\,2}}}$.
- Nếu đáy là tam giác đều cạnh $a$ thì $r_d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
- Nếu đáy là hình vuông cạnh $a$ thì $r_d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Nếu đáy là hình chữ nhật cạnh $a, b$ thì $r_d = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.

### 4. Hình chóp có mặt bên vuông góc với mặt đáy.




- Xét hình chóp có mặt bên $(SAB) \perp$ (đáy), bán kính ngoại tiếp đáy là $r_d$, bán kính ngoại tiếp $\Delta SAB$ là $r_b$, $d = AB = (SAB) \cap$ (đáy).
- Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $\boxed{R = \sqrt{r_d^{\,2} + r_b^{\,2} - \dfrac{d^2}{4}}}$.

## HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN




### 1. Hệ trục tọa độ *Oxyz*:

- Hệ trục gồm ba trục $Ox$, $Oy$, $Oz$ đôi một vuông góc nhau.
- Trục $Ox$ : **trục hoành**, có vectơ đơn vị $\vec{i} = (1;0;0)$.
- Trục $Oy$ : **trục tung**, có vectơ đơn vị $\vec{j} = (0;1;0)$.
- Trục $Oz$ : **trục cao**, có vectơ đơn vị $\vec{k} = (0;0;1)$.
- Điểm $O(0;0;0)$ là **gốc tọa độ**.

### 2. Tọa độ vectơ: Vectơ $\boxed{\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (x;y;z)}$.

Cho $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$. Ta có:

- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$
- $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$
- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$
- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}$ $(k \in R)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$, $(b_1, b_2, b_3 \neq 0)$.

- $\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_2^2}$
- $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$
- $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

**3. Tọa độ điểm:** $\boxed{M(x;y;z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x;y;z)}$. Cho $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$, $C(x_C;y_C;z_C)$, ta có:

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- Toạ độ trung điểm $M$ của đoạn thẳng $AB$: $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.
- Toạ độ trọng tâm $G$ của tam giác $ABC$: $G\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}; \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}; \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$.

**4. Tích có hướng của hai vectơ:**

☞ **Định nghĩa:** Cho $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là:

$$[\vec{a},\vec{b}] = \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1).$$

| ☞ **Tính chất:** | $[\vec{a},\vec{b}] \perp \vec{a}$ | $[\vec{a},\vec{b}] \perp \vec{b}$ | $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right| = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin(\vec{a},\vec{b})$ |
|---|---|---|---|

- Điều kiện **cùng phương** của hai vectơ $\vec{a}$ & $\vec{b}$ là $[\vec{a},\vec{b}] = \vec{0}$ với $\vec{0} = (0;0;0)$.
- Điều kiện **đồng phẳng** của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ là $[\vec{a},\vec{b}].\vec{c} = 0$.
- **Diện tích hình bình hành** ABCD: $S_{\square ABCD} = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]\right|$.
- **Diện tích tam giác** ABC: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right|$.
- **Thể tích khối hộp**: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$.
- **Thể tích tứ diện:** $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$.

**5. Phương trình mặt cầu:**

**Dạng 1:** $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ $\xrightarrow{\text{Mặt cầu (S) có}} \begin{cases} I(a;b;c) \\ R = \sqrt{R^2} \end{cases}$

**Dạng 2:** $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ $\xrightarrow{\text{Mặt cầu (S) có}} \begin{cases} I(a;b;c) \\ R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} \end{cases}$

☞ Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow \boxed{a^2 + b^2 + c^2 - d > 0}$.

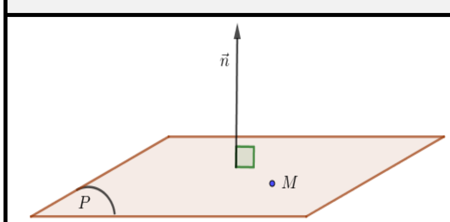
__Bài toán 5.1.__ **Viết phương trình mặt cầu tâm *I* và đi qua điểm *M*.**

- **Bước 1:** Tính bán kính $R = IM$.
- **Bước 2:** Viết phương trình mặt cầu **dạng 1**.

__Bài toán 5.2.__ **Viết phương trình mặt cầu có đường kính *AB*.**

- **Bước 1:** Tìm tâm $I$ là trung điểm $AB$. Bán kính $R = \dfrac{AB}{2} = IA = IB$.
- **Bước 2:** Viết phương trình mặt cầu **dạng 1**.

**6. Phương trình mặt phẳng:**

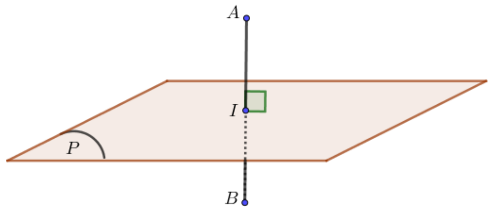



✍ **Lưu ý:** Vectơ pháp tuyến (VTPT) của mặt phẳng là vectơ khác $\vec{0}$ nằm trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đó.

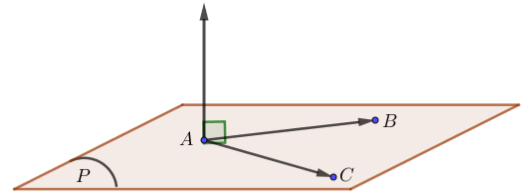
- Mặt phẳng $(P)\begin{cases} qua\ M(x_0;y_0;z_0) \\ VTPT\ \vec{n} = (a;b;c) \end{cases}$ thì phương trình $(P): \boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$.
- Ngược lại, một mặt phẳng bất kỳ đều có phương trình dạng $ax + by + cz + d = 0$, mặt phẳng này có $VTPT\ \vec{n} = (a;b;c)$.

__Bài toán 6.1.__ **Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng *AB*.**

__Bài toán 6.2.__ **Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm *A, B, C*.**

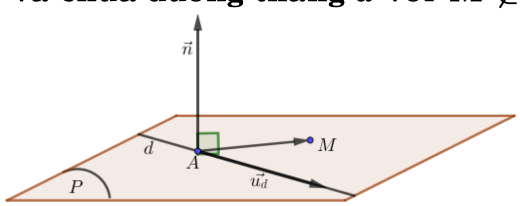



- **Bước 1:** Tìm trung điểm $I$ của đoạn $AB$ và tính tọa độ $\overrightarrow{AB}$.
- **Bước 2:** Phương trình mp$(P)\begin{cases}\text{qua } I\\ \text{VTPT } \vec{n}=\overrightarrow{AB}\end{cases}$.




- **Bước 1:** Tính tọa độ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ và suy ra $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.
- **Bước 2:** Phương trình mp$(P)\begin{cases}\text{qua } A\\ \text{VTPT } \vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\end{cases}$

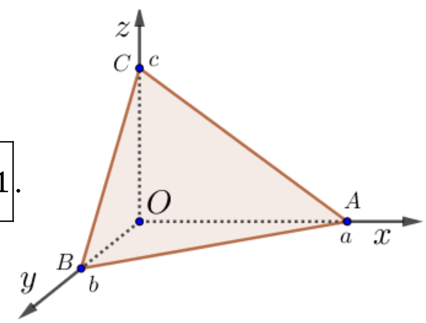
**<u>Bài toán 6.3.</u> Viết phương trình mặt phẳng qua $M$ và chứa đường thẳng $d$ với $M\notin d$.**




- **Bước 1:** Chọn điểm $A\in d$ và một VTCP $\overrightarrow{u_d}$. Tính $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u_d}\right]$.
- **Bước 2:** Phương trình mp$(P)\begin{cases}\text{qua } M\\ \text{VTPT } \vec{n}=\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u_d}\right]\end{cases}$

**<u>Bài toán 6.4.</u> Viết phương trình mặt phẳng cắt $Ox$, $Oy$, $Oz$ lần lượt tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a,\ b,\ c\neq 0$.**

- Phương trình mặt phẳng được viết theo đoạn chắn $(P):\boxed{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1}$.




### Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng

- Cho $\begin{cases}M(x_0;y_0;z_0)\\ mp(P):ax+by+cz+d=0\end{cases}$.
- Khi đó: $\boxed{d\left(M,(P)\right)=\dfrac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$.

### Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

- Cho hai mặt phẳng $\begin{cases}(P):ax+by+cz+d_1=0\\ (Q):ax+by+cz+d_2=0\end{cases}$.
- Khi đó: $\boxed{d\left((P),(Q)\right)=\dfrac{\left|d_1-d_2\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$ với $d_1\neq d_2$.

### Góc giữa hai mặt phẳng

- Cho hai mặt phẳng $(\alpha)$, $(\beta)$ có phương trình: $\begin{cases}(P):a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\ (Q):a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}$
- Góc giữa $(P)\&(Q)$ được tính:

$$\boxed{\cos\left((P),(Q)\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{n_Q}\right|}=\dfrac{\left|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}}$$

☞ **<u>Chú ý:</u>** $0^0\leq\left((P),(Q)\right)\leq 90^0$.

### Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(\alpha)$, $(\beta)$ có phương trình: $\begin{cases}(P):a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\ (Q):a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}$. Ta có:

- $(P)\parallel(Q)\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}\neq\dfrac{d_1}{d_2}$.
- $(P)\equiv(Q)\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}=\dfrac{d_1}{d_2}$.
- $(P)\&(Q)$ cắt nhau $\Leftrightarrow a_1:b_1:c_1\neq a_2:b_2:c_2$.
- $(P)\perp(Q)\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.

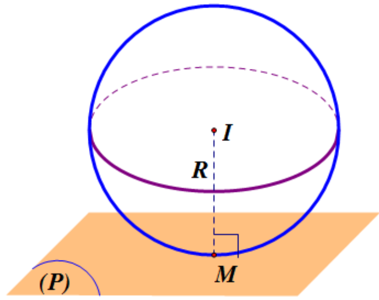
☞ **Lưu ý**: Các tỉ số trên có nghĩa khi mẫu khác 0.

### Ví trị tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu

Cho mặt phẳng $(P):ax+by+cz+d=0$ và mặt cầu $(S)$ có tâm $I$ và bán kính $R$.

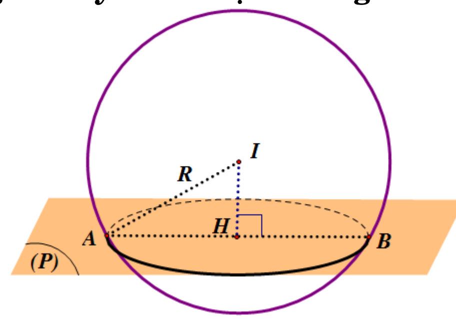
- **Trường hợp 1:** $\boxed{d\left(I,(P)\right)>R}\Leftrightarrow(P)$ và $(S)$ **không có điểm chung.**
- **Trường hợp 2:** $\boxed{d\left(I,(P)\right)=R}\Leftrightarrow(P)$ và $(S)$ có
- **Trường hợp 3:** $\boxed{d\left(I,(P)\right)<R}\Leftrightarrow(P)$ cắt $(S)$

**một điểm chung**. Khi đó ta nói $(P)$ **tiếp xúc** $(S)$ hoặc $(P)$ là **tiếp diện** của $(S)$.




Ta có: $IM \perp (P)$ với $M$ là tiếp điểm.

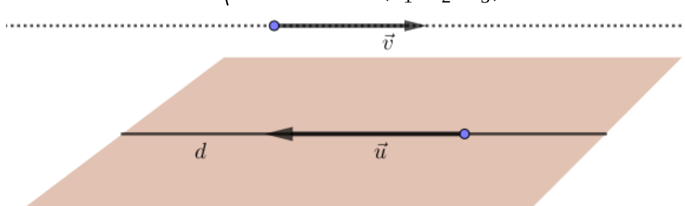
theo **giao tuyến là một đường tròn**.




Đường tròn giao tuyến có tâm $H$ (là trung điểm $AB$), bán kính $r=\sqrt{R^2-IH^2}$ với $IH=d\left(I,(P)\right)$.

## 7. Phương trình đường thẳng:

☞ Đường thẳng $d\left\langle\begin{array}{l}\text{qua } A(x_A;y_A;z_A)\\ \text{VTCP } \vec{u}=(u_1;u_2;u_3)\end{array}\right.$ có:




☞ Vectơ chỉ phương (VTCP) của đường thẳng $d$ là vectơ khác $\vec{0}$, có giá nằm trên $d$ hoặc song song với $d$.

- Phương trình tham số $d:\boxed{\begin{cases}x=x_A+u_1t\\ y=y_A+u_2t\\ z=z_A+u_3t\end{cases}}$ với $t$ là tham số.
- Phương trình chính tắc $d:\boxed{\dfrac{x-x_A}{u_1}=\dfrac{y-y_A}{u_2}=\dfrac{z-z_A}{u_3}}$ với $u_1.u_2.u_3\neq 0$.

✍ **Lưu ý:** Nếu có cặp vectơ khác $\vec{0}$ không cùng phương sao cho $\begin{cases}\vec{a}\perp d\\ \vec{b}\perp d\end{cases}$ thì $d$ có VTCP là: $\boxed{\overrightarrow{u_d}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]}$.

### 7.1. Ví trị tương đối giữa hai đường thẳng:

Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $d_1,d_2$ với $d_1\left\langle\begin{array}{l}\text{qua } M\\ \text{VTCP } \overrightarrow{u_1}\end{array}\right.$, $d_1\left\langle\begin{array}{l}\text{qua } N\\ \text{VTCP } \overrightarrow{u_2}\end{array}\right.$.

| Bước I | Bước II | Kết luận |
|---|---|---|
| ❖ $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=\vec{0}\longrightarrow$ Hai đường thẳng $d_1,d_2$ **song song** hoặc **trùng nhau**. | ❖ $\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{MN}\right]=\vec{0}$ | $\longrightarrow d_1\equiv d_2$ (Hai đường thẳng trùng nhau) |
| | ❖ $\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{MN}\right]\neq\vec{0}$ | $\longrightarrow d_1 \parallel d_2$ |
| ❖ $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\neq\vec{0}\longrightarrow$ Hai đường thẳng $d_1,d_2$ **cắt nhau** hoặc **chéo nhau**. | ❖ $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{MN}=0$ | $\longrightarrow d_1$ cắt $d_2$ |
| | ❖ $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{MN}\neq 0$ | $\longrightarrow d_1\,\&\,d_2$ chéo nhau |

### 7.2. Ví trị tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng:

Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_0+u_1t\\ y=y_0+u_2t\\ z=z_0+u_3t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):ax+by+cz+d=0$ .

| Bước I: | Bước II:Giải PT (*), ta gặp 1 trong 3 trường hợp sau | Kết luận |
|---|---|---|
| ❖ Thay phương trình tham số $d$ vào | ❖ PT (*) vô nghiệm | $\longrightarrow d \parallel (P)$ |

| | | |
|---|---|---|
| phương trình $(P)$, ta được PT (*): $a(x_0+u_1t)+b(y_0+u_2t)+c(z_0+u_3t)+d=0$ | ❖ PT (*) có 1 nghiệm $\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0 \end{cases}$ | $\longrightarrow d$ cắt $(P)$ tại điểm có tọa độ $(x_0;y_0;z_0)$. |
| | ❖ PT (*) có vô số nghiệm | $\longrightarrow d\subset(P)$ |

**7.3. Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng:**

| | |
|---|---|
| ☞ Cho điểm $M$ và đường thẳng $d$ (có phương trình tham số hoặc chính tắc). | ▪ **Bước 1:** Chọn điểm $A\in d$ và một VTCP $\overrightarrow{u_d}$.<br>▪ **Bước 2:** $\boxed{d(M,d)=\dfrac{\left\|\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{AM}\right]\right\|}{\left\|\overrightarrow{u_d}\right\|}}$. |

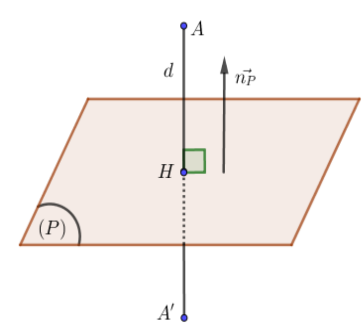
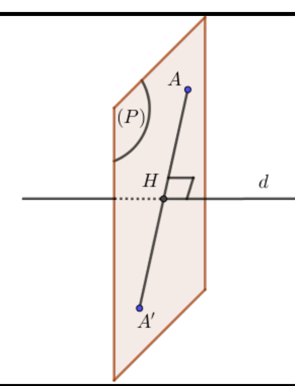
**7.4. Góc giữa hai đường thẳng:**

| | |
|---|---|
| ☞ Cho hai đường thẳng $d_1$, $d_2$ lần lượt có VTCP là $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$. | $\longrightarrow$ Ta có: $\boxed{\cos(d_1,d_2)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right\|}{\left\|\overrightarrow{u_1}\right\|.\left\|\overrightarrow{u_2}\right\|}}$. |

**7.5. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:**

| | |
|---|---|
| ☞ Cho đường thẳng $d$ có VTCP $\vec{u}$ và mặt phẳng $(P)$ có VTPT $\vec{n}$. | $\longrightarrow$ Ta có: $\boxed{\sin(d,(P))=\dfrac{\left\|\vec{u}.\vec{n}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{n}\right\|}}$. |

**8. Hình chiếu và điểm đối xứng:**

| Bài toán | Phương pháp | | |
|---|---|---|---|
| ◈ Tìm hình chiếu của điểm $A$ trên mặt phẳng $(P)$. | ❖ Gọi $d$ là đường thẳng $\begin{cases} \text{qua } A \\ \perp (P) \end{cases}$ $\longrightarrow$ Viết pt tham số của $d$ với VTCP của $d$ cũng là VTPT của *(P)*.<br>❖ Gọi $H=d\cap(P)$. Thay pt tham số của $d$ vào pt mp *(P)* ta tìm được tọa độ *H*. | | <br> |
| ◈ Tìm điểm $A'$ đối xứng với $A$ qua $(P)$. | ❖ Ta có $H$ là trung điểm $AA'\Rightarrow\begin{cases} x_{A'}=2x_H-x_A \\ y_{A'}=2y_H-y_A \\ z_{A'}=2z_H-z_A \end{cases}$. | | |
| ◈ Tìm hình chiếu của điểm $A$ trên đường thẳng $d$. | Cách I | ❖ Gọi $H(theo\ \ t)$ (dựa vào pt tham số của $d$).<br>❖ $AH\perp d\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_d}=0\longrightarrow$ Tìm được $t=.......\longrightarrow$ Tọa độ $H$. | |
| | Cách II | ❖ Gọi $(P)\begin{cases} \text{qua } A \\ (P)\perp d \end{cases}\longrightarrow$ Viết pt mp$(P)$.<br>❖ Gọi $H=d\cap(P)$. Thay pt tham số của $d$ vào pt mp *(P)* ta tìm được tọa độ *H*. | <br> |
| ◈ Tìm điểm $A'$ đối xứng với $A$ qua đường thẳng $d$. | ❖ Ta có $H$ là trung điểm $AA'\Rightarrow\begin{cases} x_{A'}=2x_H-x_A \\ y_{A'}=2y_H-y_A \\ z_{A'}=2z_H-z_A \end{cases}$. | | |

**Biên soạn:** Hoàng Xuân Nhàn
**Email góp ý:** thayxuannhan@gmail.com