SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC

TRƯỜNG THPT YÊN LẠC 2

KỲ THI KSCL ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI KHỐI 12

ĐỀ THI MÔN: TOÁN

NĂM HỌC 2018-2019

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 (2.5 điểm).

a) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để đồ thị hàm số (C_m) có hai điểm cực trị A, B sao cho diện tích tam giác ABC bằng 4 với điểm $C(1;4)$.

b) Cho hàm số $y = \dfrac{2x-4}{x+1}$ có đồ thị là (C) và hai điểm $M(-3;0), N(-1;-1)$. Tìm trên đồ thị hàm số (C) hai điểm A, B sao cho chúng đối xứng nhau qua đường thẳng MN.

Câu 2 (2.0 điểm).

a) Giải phương trình: $4\cos^2 x(1+\sin x) + 2\sqrt{3}\cos x\cos 2x = 1 + 2\sin x$.

b) Một hộp đựng 9 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Hỏi phải rút ít nhất bao nhiêu thẻ để xác suất có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4 phải lớn hơn $\dfrac{5}{6}$.

Câu 3 (1.0 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2 - 2x - 5 + 2x\sqrt{x^2+1} = 2(y+1)\sqrt{y^2+2y+2} \\ x^2 + 2y^2 = 2x - 4y + 3 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Câu 4 (1.5 điểm). Cho hình hộp đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có các cạnh $AB = AD = 2, AA_1 = \sqrt{3}$ và góc $\widehat{BAD} = 60^0$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh A_1D_1 và A_1B_1.

a) Chứng minh rằng AC_1 vuông góc với mặt phẳng $(BDMN)$.

b) Tính thể tích khối chóp $A.BDMN$.

Câu 5 (1.0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 3, BC = 6$, mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy, các mặt phẳng (SBC) và (SCD) cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ các góc bằng nhau. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD bằng $\sqrt{6}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và cosin góc giữa hai đường thẳng SA và BD.

Câu 6 (1.0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ (Oxy), cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm $J(2;1)$. Biết đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC có phương trình: $2x + y - 10 = 0$ và $D(2;-4)$ là giao điểm thứ hai của AJ với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết B có hoành độ âm và B thuộc đường thẳng có phương trình $x + y + 7 = 0$.

Câu 7 (1.0 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{7}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{121}{14(ab+bc+ca)}$.

------------------ Hết ------------------

- Thí sinh không sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:……………………………………………….; Số báo danh:………………

SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC **KỲ THI CHỌN HSG LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2018-2019**

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: TOÁN

(*Hướng dẫn chấm gồm 06 trang*)

I. LƯU Ý CHUNG:

- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm bài thí sinh làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.
- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.
- Với bài hình học nếu thí sinh không vẽ hình phần nào thì không cho điểm tương ứng với phần đó.

II. ĐÁP ÁN:

Câu 1.a (1.25 điểm) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để đồ thị hàm số (C_m) có hai điểm cực trị A, B sao cho diện tích tam giác ABC bằng 4 với điểm $C(1;4)$.

Nội dung	Điểm
TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6mx$ $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$. Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì $m \neq 0$.	0.25
Tọa độ hai điểm cực trị là $A(0;4m^2-2), B(2m;-4m^3+4m^2-2)$. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2m;-4m^3) \Rightarrow AB = \sqrt{4m^2+16m^6} = 2\|m\|\sqrt{1+4m^4}$. Phương trình đường $AB: 2m^2x + y - 4m^2 + 2 = 0$.	0.5
$d(C;AB) = \dfrac{\|6-2m^2\|}{\sqrt{1+4m^4}}$, suy ra $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}d(C;AB).AB = \|6m - 2m^3\|$.	0.25
Do đó $\|6m-2m^3\| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \pm 1 \\ m = \pm 2 \end{array}\right.$.	0.25

Câu 1.b (1.25 điểm) Cho hàm số $y = \dfrac{2x-4}{x+1}$ có đồ thị là (C) và hai điểm $M(-3;0), N(-1;-1)$. Tìm trên đồ thị hàm số (C) hai điểm A, B sao cho chúng đối xứng nhau qua đường thẳng MN.

Nội dung	Điểm
Phương trình đường $MN: x + 2y + 3 = 0$. Phương trình đường $AB: y = 2x + m$.	0.25
Khi đó hai điểm A, B có hoành độ thỏa mãn: $\dfrac{2x-4}{x+1} = 2x + m$. ĐK: $x \neq -1$. Pt $\Leftrightarrow 2x^2 + mx + m + 4 = 0\ (1)$	0.25

Để đường AB cắt (C) tại hai điểm phân biệt thì pt (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1 $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta > 0\\ 2-m+m+4\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow m^2-8m-32>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>4+4\sqrt{3}\\ m<4-4\sqrt{3}\end{array}\right.$.	
Trung điểm I của đoạn AB có tọa độ $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};x_1+x_2+m\right)$ với x_1, x_2 là nghiệm của pt (1). Mà $x_1+x_2=-\dfrac{m}{2}$ nên $I\left(-\dfrac{m}{4};\dfrac{m}{2}\right)$.	0.5
Ta có: $I\in MN$ nên $-\dfrac{m}{4}+2.\dfrac{m}{2}+3=0 \Leftrightarrow m=-4$ (thỏa mãn). Suy ra $A(0;-4), B(2;0)$ hoặc $A(2;0), B(0;-4)$.	0.25

Câu 2.a (1.0 điểm) $4\cos^2 x(1+\sin x)+2\sqrt{3}\cos x\cos 2x=1+2\sin x$.

Nội dung	Điểm
Phương trình tương đương với: $$2\sin x(2\cos^2 x-1)+2\sqrt{3}\cos x\cos 2x+4\cos^2 x-1=0.$$	0.25
$\Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x+2\sqrt{3}\cos x\cos 2x+3\cos^2 x-\sin^2 x=0$ $\Leftrightarrow 2\cos 2x\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)+\left(\sqrt{3}\cos x+\sin x\right)\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x\right)=0$ $\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\cos x+\sin x\right)\left(2\cos 2x+\sqrt{3}\cos x-\sin x\right)=0$	0.25
+) $\sqrt{3}\cos x+\sin x=0 \Leftrightarrow \tan x=-\sqrt{3} \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi$.	0.25
+) $2\cos 2x+\sqrt{3}\cos x-\sin x=0 \Leftrightarrow \cos 2x=\cos\left(x-\dfrac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3}\end{array}\right.$. Vậy phương trình có nghiệm: $x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi$, $x=-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi, x=\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3}$.	0.25

Câu 2.b (1.0 điểm) Một hộp đựng 9 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Hỏi phải rút ít nhất bao nhiêu thẻ để xác suất có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4 phải lớn hơn $\dfrac{5}{6}$.

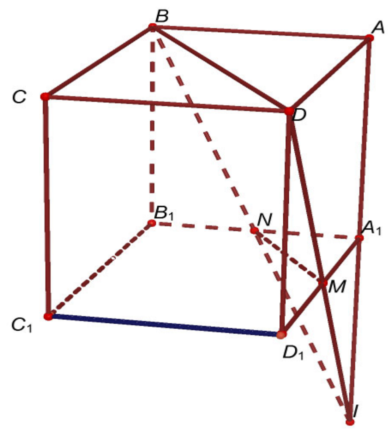
Nội dung	Điểm
Trong 9 thẻ đã cho có hai thẻ ghi số chia hết cho 4 (các thẻ ghi số 4 và 8), 7 thẻ còn lại ghi số không chia hết cho 4. Giả sử rút $x(1\le x\le 9; x\in\mathbb{N})$, số cách chọn x từ 9 thẻ trong hộp là C_9^x, số phần tử của không gian mẫu là: $\lvert\Omega\rvert=C_9^x$.	0.25
Gọi A là biến cố:" Trong số x thẻ rút ra, có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4" Suy ra $\overline{A}$ là biến cố:" Lấy x tấm thẻ không có tấm thẻ nào chia hết cho 4" Số cách chọn tương ứng với biến cố $\overline{A}$ là $\lvert\overline{A}\rvert=C_7^x$	

Ta có $P\left(\overline{A}\right)=\frac{C_7^x}{C_9^x}\Rightarrow P\left(A\right)=1-\frac{C_7^x}{C_9^x}$	0.25
Do đó $P\left(A\right)>\frac{5}{6}\Leftrightarrow 1-\frac{C_7^x}{C_9^x}>\frac{5}{6}\Leftrightarrow x^2-17x+60<0\Leftrightarrow 5<x<12\Rightarrow 6\le x\le 9$	0.25
Vậy giá trị nhỏ nhất của x là 6. Vậy số thẻ ít nhất phải rút là 6.	0.25

Câu 3. (1.0 điểm) $\begin{cases}3x^2-2x-5+2x\sqrt{x^2+1}=2\left(y+1\right)\sqrt{y^2+2y+2}\\ x^2+2y^2=2x-4y+3\end{cases}\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

Nội dung	Điểm
Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases}3x^2-2x-5+2x\sqrt{x^2+1}-2\left(y+1\right)\sqrt{y^2+2y+2}=0 \ (1)\\ x^2+2y^2-2x+4y-3=0 \ (2)\end{cases}$ $\Leftrightarrow 3x^2-2x-5+2x\sqrt{x^2+1}-2\left(y+1\right)\sqrt{y^2+2y+2}=x^2+2y^2-2x+4y-3$ $\Leftrightarrow x^2+x\sqrt{x^2+1}=\left(y+1\right)^2+\left(y+1\right)\sqrt{\left(y+1\right)^2+1} \quad (*)$	0.25
Xét hàm số: $f(t)=t^2+t\sqrt{t^2+1}$ $(t\in\mathbb{R})$ có $f'(t)=2t+\sqrt{t^2+1}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}>\left\|2t\right\|+2t>0$ Suy ra $f\left(t\right)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$	0.25
Do đó từ phương trình (*) ta có: $x=y+1$ thế vào phương trình (2) ta được: $\left(y+1\right)^2+2y^2-2\left(y+1\right)+4y-3=0\Leftrightarrow 3y^2+4y-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\frac{2}{3}\\ y=-2\end{array}\right.$ +) Với $y=-2\Rightarrow x=-1$ +) Với $y=\frac{2}{3}\Rightarrow x=\frac{5}{3}$	0.25
Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(x;y\right)$ là: $\left(-1;-2\right);\left(\frac{5}{3};\frac{3}{2}\right)$.	0.25

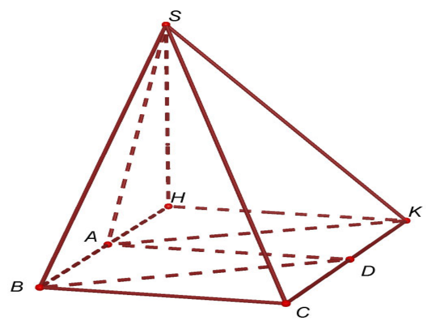
Câu 4.a (0.75 điểm) Cho hình hộp đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có các cạnh $AB=AD=2,\ AA_1=\sqrt{3}$ và góc $\widehat{BAD}=60^0$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh A_1D_1 và A_1B_1. Chứng minh rằng AC_1 vuông góc với mặt phẳng $\left(BDMN\right)$.

Nội dung	Điểm
	
Ta có: $BD \perp AC, BD \perp AA_1 \Rightarrow BD \perp mp(ACC_1A_1) \Leftrightarrow AC_1 \perp BD.$	0.25
Mặtkhác: $\overrightarrow{AC_1}.\overrightarrow{BN} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}\right)\left(\overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}^2 =$ $-2-1+3=0.$ Suy ra $\overrightarrow{AC_1} \perp \overrightarrow{BN}\ (2).$ Từ (1) và $(2) \Rightarrow AC_1 \perp (BCMN).$	0.5

Câu 4.b (0.75 điểm) Tính thể tích khối chóp $A.BDMN$.

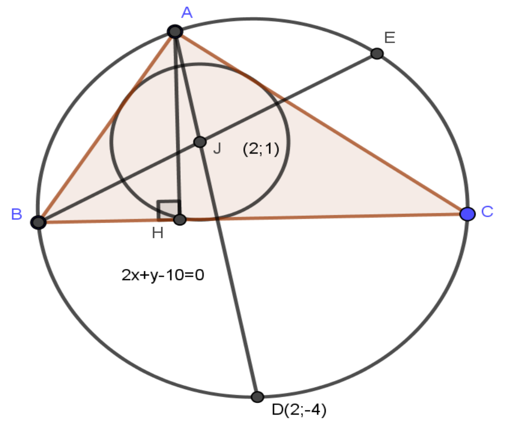
Nội dung	Điểm
Gọi $AA_1 \cap DM \cap BN = \{I\} \Rightarrow A_1, M, N$ lần lượt là trung điểm của $AI, DI, BI.$	0.25
$\frac{V_{I.AMN}}{V_{I.ABD}} = \frac{IA.IM.IN}{IA.IB.ID} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{A.BDMN} = \frac{3}{4}V_{I.ABD}$ Suy ra $V_{A.BCMN} = \frac{3}{4}.\frac{1}{3}.IA.S_{\Delta ABD} = \frac{1}{4}.2\sqrt{3}.2^2.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}\,(dvtt)$ Vậy thể tích khối chóp $A.BDMN$ bằng $\frac{3}{2}.$	0.5

Câu 5 (1.0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=3, BC=6,$ mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy, các mặt phẳng (SBC) và (SCD) cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ các góc bằng nhau. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD bằng $\sqrt{6}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và cosin góc giữa hai đường thẳng SA và $BD.$

Nội dung	Điểm
	
Hạ $SH \perp AB\left(H \in AB\right) \Rightarrow SH \perp \left(ABCD\right)$ Kẻ $HK \perp CD\left(K \in CD\right) \Rightarrow$ tứ giác $HBCK$ là hình chữ nhật. Ta có: $BC \perp \left(SAB\right) \Rightarrow$ Góc giữa mặt phẳng $\left(SBC\right)$ và $\left(ABCD\right)$ là: $\widehat{SBH}$ $CD \perp \left(SHK\right) \Rightarrow$ Góc giữa mặt phẳng $\left(SCD\right)$ và $\left(ABCD\right)$ là: $\widehat{SKH}$	0.25
Theo giả thiết: $\widehat{SBH} = \widehat{SKH} \Rightarrow \Delta SHB = \Delta SHK\left(g-c-g\right) \Rightarrow HK = HB = BC = 6$. Do đó A là trung điểm của HB. Ta thấy $\square ABDK$ là hình bình hành $\Rightarrow BD // AK \Rightarrow BD // \left(SAK\right)$ mà $SA \in \left(SAK\right)$ Suy ra $d\left(BD,SA\right) = d\left(BD,\left(SAK\right)\right) = d\left(D,\left(SAK\right)\right) = d\left(H,\left(SAK\right)\right) = h = \sqrt{6}$.	0.25
Do tam diện $H.SAK$ vuông tại H nên: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HK^2} \Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36}$ $\Rightarrow SH = 6$ Suy ra $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.6.3.6 = 36$ (dvtt).	0.25
Gọi α là góc giữa hai đường thẳng SA và $BD \Rightarrow \alpha = \left(BD,SA\right) = \left(AK,SA\right)$ Ta có: $SA = 6\sqrt{2}, SA = AK = 3\sqrt{5}$. Trong tam giác SAK có: $\cos\widehat{SAK} = \frac{AS^2 + AK^2 - SK^2}{2.AS.AK} = \frac{45+45-72}{2.3\sqrt{5}.3\sqrt{5}} = \frac{1}{5}$. Vậy $\alpha = \widehat{SAK} = \arccos\frac{1}{5}$.	0.25

Câu 6. (1.0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $\left(Oxy\right)$, cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm $J\left(2;1\right)$. Biết đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC có phương trình: $2x + y - 10 = 0$ và $D\left(2;-4\right)$ là giao điểm thứ hai của AJ với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết B có hoành độ âm và B thuộc đường thẳng có phương trình $x + y + 7 = 0$.

Nội dung	Điểm

	
AJ đi qua $J(2;1)$ và $D(2;-4)$ nên AJ có phương trình : $x-2=0$ Gọi H là chân đường cao xuất phát từ đỉnh A. Tọa độ điểm A thỏa mãn hệ : $\begin{cases} x-2=0 \\ 2x+y-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases} \Rightarrow A(2;6).$	0.25
Gọi E là giao điểm thứ hai của BJ với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có $\overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{DC} \Rightarrow DB=DC$ và $\overset{\frown}{EA}=\overset{\frown}{EC}$ $\widehat{DBJ}=\frac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{EC}+sd\,\overset{\frown}{DC}\right)=\frac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{EA}+sd\,\overset{\frown}{DB}\right)=\widehat{DJB} \Rightarrow \Delta DBJ$ cân tại D. $DB=DC=DJ$ hay D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác JBC.	0.25
Suy ra B,C nằm trên đường tròn tâm $D(2;-4)$ bán kính $JD=\sqrt{0+5^2}=5$ có phương trình $(x-2)^2+(y+4)^2=25$. Khi đó tọa độ B là hệ của nghiệm: $\begin{cases} (x-2)^2+(y+4)^2=25 \\ x+y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=-9 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(-3;-4) \\ B(2;-9) \end{array}\right.$ Do B có hoành độ âm nên $B(-3;-4)$.	0.25
BC đi qua $B(-3;-4)$ và vuông góc AH nên có phương trình: $x-2y-5=0$. Khi đó C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} (x-2)^2+(y+4)^2=25 \\ x-2y-5=0 \end{cases} \Rightarrow C(5;0)$ Vậy $A(2;6), B(-3;-4), C(5;0)$.	0.25

Câu 7. (1.0 điểm) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{7}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{121}{14(ab+bc+ca)}$.

Nội dung	Điểm
Ta có $1=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \Rightarrow ab+bc+ca=\dfrac{1-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2}$ Do đó $A=\dfrac{7}{a^2+b^2+c^2}-\dfrac{121}{7\left(1-\left(a^2+b^2+c^2\right)\right)}$	0.25

Đặt $t=a^2+b^2+c^2$. Vì $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$ nên $0<a<1, 0<b<1, 0<c<1$ Suy ra $t=a^2+b^2+c^2<a+b+c=1$ Mặt khác $1=\left(a+b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)\le 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$ Suy ra $t=a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}$. Vậy $t\in\left[\frac{1}{3};1\right)$.	0.25
Xét hàm số $f\left(t\right)=\frac{7}{t}+\frac{121}{7(1-t)}; t\in\left[\frac{1}{3};1\right)$ $f'\left(t\right)=-\frac{7}{t^2}-\frac{121}{7\left(1-t\right)^2}$ $f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=\frac{7}{18}$ Lập BBT của hàm số $f\left(t\right)$	0.25
Dựa vào BBT suy ra $f\left(t\right)\ge\frac{324}{7};\forall t\in\left[\frac{1}{3};1\right)$. Vậy $\min A=\frac{324}{7}$ đạt được khi $a=\frac{1}{2}; b=\frac{1}{3}; c=\frac{1}{6}$.	0.25

------------------- Hết -------------------