SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÁI BÌNH

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2017 - 2018

Môn: **TOÁN**

Thời gian làm bài: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)*

Câu 1. *(4,0 điểm)*

1) Cho hàm số: $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị là (C). Tìm tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho tổng khoảng cách từ điểm M đến hai đường tiệm cận đạt giá trị nhỏ nhất.

2) Cho hàm số: $y=2x^3-(m+6)x^2-(m^2-3m)x+3m^2$ có đồ thị là (C_m) (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x_1;x_2;x_3$ thỏa mãn: $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+(x_3-1)^2=6$.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

1) Cho (H) là đa giác đều $2n$ đỉnh nội tiếp đường tròn tâm O ($n\in N^*, n\geq 2$). Gọi S là tập hợp các tam giác có ba đỉnh là các đỉnh của đa giác (H). Chọn ngẫu nhiên một tam giác thuộc tập S, biết rằng xác suất chọn được một tam giác vuông trong tập S là $\dfrac{1}{13}$. Tìm n.

2) Tính tổng tất cả các nghiệm thuộc $[0;100\pi]$ của phương trình:

$$\frac{3-\cos 2x+\sin 2x-5\sin x-\cos x}{2\cos x+\sqrt{3}}=0$$

Câu 3. *(2,0 điểm)* Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\log_{2018}\left(2017^x-x-\dfrac{x^2}{2}-m\right)$ xác định với mọi x thuộc $[0;+\infty)$.

Câu 4. *(6,0 điểm)*

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh bằng a, $\widehat{ABC}=60^0$, $SA=SB=SC$, $SD=2a$. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SB tại K.

1) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

2) Mặt phẳng (P) chia khối chóp S.ABCD thành hai phần có thể tích $V_1;V_2$ trong đó V_1 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh S. Tính $\dfrac{V_1}{V_2}$.

3) Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của K trên SC và SA. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp K.ACMN.

Câu 5. *(2,0 điểm)* Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3-y^3-3(2x^2-y^2+2y)+15x-10=0 \\ \sqrt{x^2+y-5}+3\sqrt{y}-\sqrt{3x^2-6y+13}=0 \end{cases}$$

Câu 6. *(2,0 điểm)*

Cho a,b,c,d là các số thực không âm và có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\text{P}=(1+a^2+b^2+a^2b^2)(1+c^2+d^2+c^2d^2)$$

— HẾT —

Họ và tên thí sinh:... SBD:..................

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÁI BÌNH

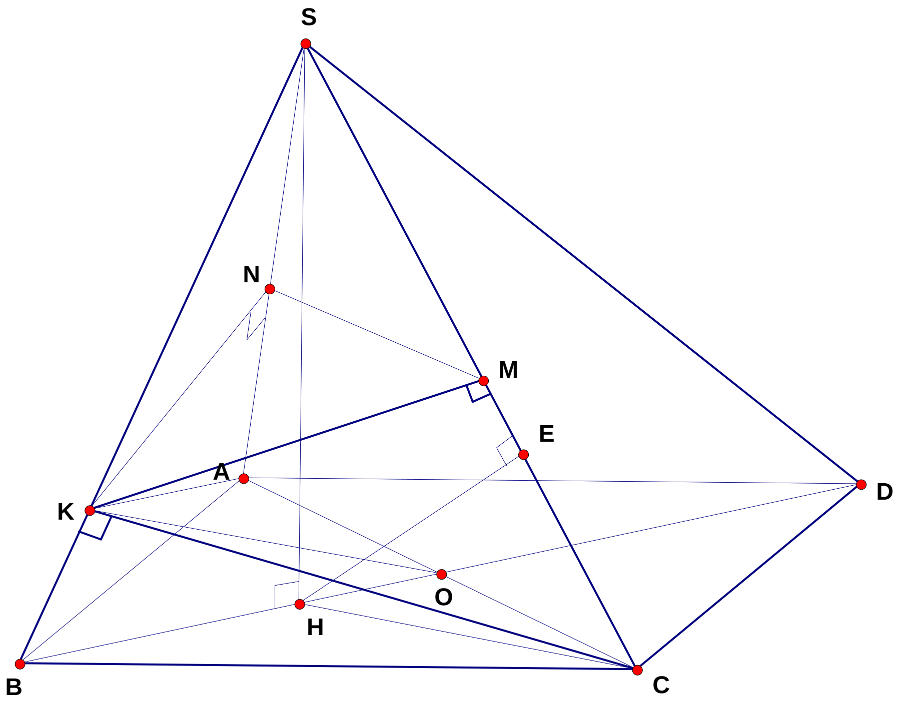
KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2017 - 2018

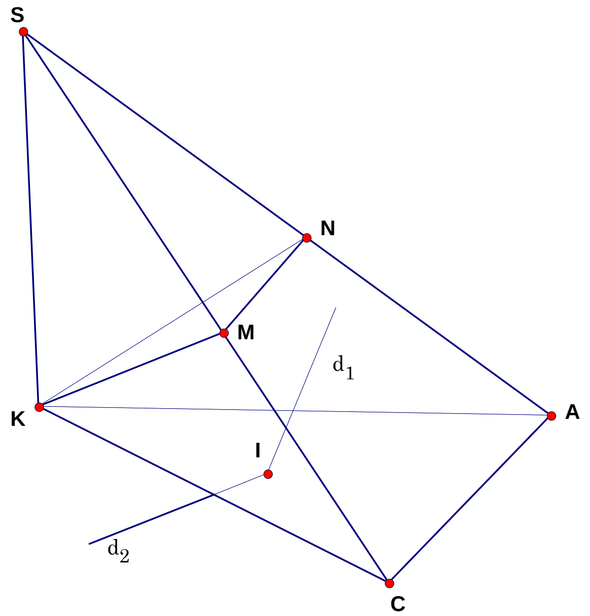
HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM
MÔN TOÁN

(Gồm 05 trang)

CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
Câu 1. *(4 điểm)* **1.** *(2 điểm)*	Cho hàm số: $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị là (C). Tìm tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho tổng khoảng cách từ điểm M đến hai đường tiệm cận đạt giá trị nhỏ nhất.	
	Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=2; \lim\limits_{x\to-\infty} y=2$ nên y=2 là đường tiệm cận ngang $\lim\limits_{x\to-1^+} y=-\infty; \lim\limits_{x\to-1^-} y=+\infty$ nên x=-1 là đường tiệm cận đứng	**0,5**
	Giả sử điểm $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-1}{x_0+1}\right)\in(C); x_0\neq -1$ $d_{(M,TCD)}=\left\|x_0+1\right\|; d_{(M,TCN)}=\dfrac{3}{\left\|x_0+1\right\|}$	**0,5**
	Suy ra: $d_{(M,TCD)}+d_{(M,TCN)}=\left\|x_0+1\right\|+\dfrac{3}{\left\|x_0+1\right\|}\geq 2\sqrt{3}$	**0,5**
	Dấu bằng xảy ra khi $\left[\begin{array}{l} x_0=\sqrt{3}-1(tm) \\ x_0=-\sqrt{3}-1(tm)\end{array}\right.$.Các điểm M cần tìm: $\left[\begin{array}{l} M=\left(\sqrt{3}-1;2-\sqrt{3}\right) \\ M=\left(-\sqrt{3}-1;2+\sqrt{3}\right)\end{array}\right.$	**0,5**
2. *(2 điểm)*	Cho hàm số: $y=2x^3-(m+6)x^2-(m^2-3m)x+3m^2$ có đồ thị là (C_m) (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x_1;x_2;x_3$ thỏa mãn: $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+(x_3-1)^2=6$.	
	Xét phương trình hoành độ giao điểm: $2x^3-(m+6)x^2-(m^2-3m)x+3m^2=0(1)$ $\Leftrightarrow (x-3)\left(2x^2-mx-m^2\right)=0$	**0,5**
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=m \\ x=\dfrac{-m}{2}\end{array}\right.$ Để đồ thị hàm số cắt Ox tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 3 \\ m\neq 0 \\ m\neq -6\end{cases}$	**0,5**
	Khi đó: $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+(x_3-1)^2=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0(loai) \\ m=\dfrac{4}{5}(tm)\end{array}\right.$ Vậy $m=\dfrac{4}{5}$	**1,0**

CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
Câu 2. *(4 điểm)* **1.** *(2 điểm)*	Cho (H) là đa giác đều 2n đỉnh nội tiếp đường tròn tâm O ($n \in N^*, n \geq 2$). Gọi S là tập hợp các tam giác có ba đỉnh là các đỉnh của đa giác (H). Chọn ngẫu nhiên một tam giác thuộc tập S, biết rằng xác suất chọn được một tam giác vuông trong tập S là $\frac{1}{13}$. Tìm n.	
	Số phần tử của tập hợp S là: C_{2n}^3 Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{2n}^3$	**0,5**
	Gọi A là biến cố: " Chọn được tam giác vuông" Đa giác đều 2n đỉnh có n đường chéo qua tâm O. Mỗi tam giác vuông được tạo bởi hai đỉnh nằm trên cùng một đường chéo qua tâm O và một đỉnh trong 2n-2 đỉnh còn lại . $\Rightarrow$ Số tam giác vuông được tạo thành: $C_n^1.C_{2n-2}^1$	**1,0**
	Theo bài ra ta có: $P(A) = \frac{C_n^1.C_{2n-2}^1}{C_{2n}^3} = \frac{1}{13} \Leftrightarrow n = 20$	**0,5**
2. *(2 điểm)*	Tính tổng tất cả các nghiệm thuộc $[0;100\pi]$ của phương trình: $$\frac{3-\cos 2x+\sin 2x-5\sin x-\cos x}{2\cos x+\sqrt{3}} = 0$$	
	Điều kiện: $\cos x \neq \frac{-\sqrt{3}}{2}$	**0,25**
	3-cos2x+sin2x-5sinx-cosx=0 $\Leftrightarrow 2\sin^2 x-5\sin x+2+2\sin x.\cos x-\cos x = 0$ $\Leftrightarrow (2\sin x-1)(\sin x+\cos x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x-1=0 \\ \sin x+\cos x-2=0 \end{array}\right.$	**0,5**
	$\sin x + \cos x - 2 = 0$ (phương trình vô nghiệm)	**0,25**
	$2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in Z)$ Đối chiếu điều kiện nghiệm phương trình là: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in Z$	**0,5**
	$x \in [0;100\pi] \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{6} + k2\pi \leq 100\pi \Rightarrow 0 \leq k \leq 49, k \in Z$ Tổng tất cả các nghiệm của phương trình là: $\frac{\pi}{6} + \left(\frac{\pi}{6}+2\pi\right) + \left(\frac{\pi}{6}+4\pi\right) + ... + \left(\frac{\pi}{6}+98\pi\right) = \left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+98\pi\right).\frac{50}{2} = \frac{7375}{3}\pi$	**0,5**
Câu 3. *(2 điểm)*	Hàm số xác định với mọi x thuộc $[0;+\infty)$ khi và chỉ khi $2017^x - x - \frac{x^2}{2} - m > 0, \forall x \in [0;+\infty) \Leftrightarrow 2017^x - x - \frac{x^2}{2} > m, \forall x \in [0;+\infty) (*)$	**0,5**
	Xét hàm số: $f(x) = 2017^x - x - \frac{x^2}{2}$ trên $[0;+\infty)$. Hàm số liên tục trên $[0;+\infty)$ $f'(x) = 2017^x.\ln 2017 - 1 - x$ và liên tục trên $[0;+\infty)$ $f''(x) = 2017^x.(\ln 2017)^2 - 1 > 0, \forall x \in [0;+\infty)$ $\Rightarrow f'(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty) \Rightarrow f'(x) \geq f'(0) = \ln 2017 - 1 > 0, \forall x \in [0;+\infty)$ $\Rightarrow f(x)$ là hàm số đồng biến trên $[0;+\infty) \Rightarrow \min\limits_{[0;+\infty)} f(x) = 1$	**1,0**
	Bất phương trình (*) $\Leftrightarrow f(x) > m, \forall x \in [0;+\infty) \Leftrightarrow \min\limits_{[0;+\infty)} f(x) > m \Leftrightarrow m < 1$	**0.5**

CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
Câu 4. *(6,0 điểm)*	Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh bằng a, $\widehat{ABC}=60^0$, $SA=SB=SC;SD=2a$. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SB tại K. 1) Tính khoảng cách từ A đến (SCD) 2) Mặt phẳng (P) chia khối chóp S.ABCD thành 2 phần có thể tích $V_1;V_2$ trong đó V_1 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh S. Tính $\frac{V_1}{V_2}$ 3) Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của K trên SC và SA. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp K.ACMN.  	
1. *(2 điểm)*	Tính khoảng cách từ A đến (SCD) Gọi H là trọng tâm ΔABC. Chứng minh $SH\perp(ABCD)$ và tính được $SH=\frac{2\sqrt{6}a}{3}$	**1,0**
	Lập luận được $d_{(A,(SCD))}=\frac{3}{2}d_{(H,(SCD))}$	**0,25**
	Tính được $d_{(H,(SCD))}=\frac{2\sqrt{6}a}{9}$	**0,5**
	Suy ra $d_{(A,(SCD))}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$	**0,25**
2. *(2 điểm)*	Mặt phẳng (P) chia khối chóp S.ABCD thành 2 phần có thể tích $V_1;V_2$ trong đó V_1 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh S. Tính $\frac{V_1}{V_2}$	
	Trong mặt phẳng (SAB), dựng đường thẳng đi qua A và vuông góc với SB tại K. Chứng minh $(AKC)\perp SB$. Suy ra (P) là mặt phẳng (AKC) Tính được $SB=\sqrt{3}a;BK=\frac{a\sqrt{3}}{6}\Rightarrow\frac{SK}{SB}=\frac{5}{6}$	**1,0**
	$\Rightarrow\frac{V_{SAKC}}{V_{SABC}}=\frac{SK}{SB}=\frac{5}{6}\Rightarrow V_{SAKC}=\frac{5}{6}V_{SABC}=\frac{5}{12}V_{SABCD}\Rightarrow V_2=\frac{1}{12}V_{SABCD}$ $\Rightarrow V_1=\frac{11}{12}V_{SABCD}\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=11$	**1,0**

CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
3. *(2 điểm)*	Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của K trên SC và SA. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp K.ACMN. Trong mặt phẳng (AKC) dựng d_1 là đường trung trực của đoạn AK; d_2 là đường trung trực của đoạn KC, d_1 cắt d_2 tại điểm I. Chứng minh được I cách đều 5 đỉnh của hình chóp K.ACMN Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp K.ACMN. Do đó bán kính mặt cầu bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AKC  	**1,0**
	Tính được $KA = KC = \dfrac{a\sqrt{33}}{6}$ Diện tích tam giác KAC: $S_{\Delta KAC} = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{6}$ Bán kính mặt cầu là : $R = \dfrac{KA.KC.AC}{4S_{\Delta KAC}} = \dfrac{11\sqrt{6}a}{48}$ Diện tích mặt cầu: $S_{mc} = 4\pi R^2 = \dfrac{121\pi a^2}{96}$	**1,0**
Câu 5. *(2,0 điểm)*	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - y^3 - 3\left(2x^2 - y^2 + 2y\right) + 15x - 10 = 0 (1) \\ \sqrt{x^2 + y - 5} + 3\sqrt{y} - \sqrt{3x^2 - 6y + 13} = 0 (2) \end{cases}$ Điều kiện: $\begin{cases} x^2 + y - 5 \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x^2 - 6y + 13 \geq 0 \end{cases}$ Biến đổi phương trình (1) $\Leftrightarrow (x-2)^3 + 3(x-2) = (y-1)^3 + 3(y-1)$ Phương trình có dạng: $f(x-2) = f(y-1)$ với $f(t) = t^3 + 3t, t \in R$ $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, t \in R$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên R Do đó: $f(x-2) = f(y-1) \Leftrightarrow x - 2 = y - 1 \Leftrightarrow y = x - 1$	**0,5**
	Thay vào phương trình (2) ta được: $\sqrt{x^2 + x - 6} + 3\sqrt{x-1} - \sqrt{3x^2 - 6x + 19} = 0 (3)$ Điều kiện: $x \geq 2$	**0,25**

<table>
<tr><th>CÂU</th><th>ĐÁP ÁN</th><th>ĐIỂM</th></tr>
<tr><td></td><td>Khi đó phương trình $(3) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1}=\sqrt{3x^2-6x+19}$
$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1}\sqrt{x^2+x-6}=x^2-8x+17$$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-2}\sqrt{x^2+2x-3}=\left(x^2+2x-3\right)-10\left(x-2\right)$$
$$\Leftrightarrow 10\left(\frac{x-2}{x^2+2x-3}\right)+3\sqrt{\frac{x-2}{x^2+2x-3}}-1=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{\frac{x-2}{x^2+2x-3}}=\frac{1}{5}\\ \sqrt{\frac{x-2}{x^2+2x-3}}=\frac{-1}{2}(vn)\end{array}\right.$$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>$$\sqrt{\frac{x-2}{x^2+2x-3}}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow x^2-23x+47=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{23+\sqrt{341}}{2}(tm)\\ x=\frac{23-\sqrt{341}}{2}(tm)\end{array}\right.$$
Suy ra nghiệm của hệ phương trình là: $\begin{cases}x=\frac{23+\sqrt{341}}{2}\\ y=\frac{21+\sqrt{341}}{2}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=\frac{23-\sqrt{341}}{2}\\ y=\frac{21-\sqrt{341}}{2}\end{cases}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Câu 6.
(2,0 điểm)</td><td>Cho a,b,c,d là các số thực không âm và có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P=$\left(1+a^2+b^2+a^2b^2\right)\left(1+c^2+d^2+c^2d^2\right)$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$P=\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)\left(1+d^2\right)$
$\Rightarrow \ln P=\ln\left(1+a^2\right)+\ln\left(1+b^2\right)+\ln\left(1+c^2\right)+\ln\left(1+d^2\right)$
Chứng minh được bất đẳng thức: $\ln\left(1+t^2\right)\geq \frac{8}{17}t-\frac{2}{17}+\ln\frac{17}{16},\forall t\in[0;1](*)$</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td></td><td>Áp dụng (*) ta có:
$\ln\left(1+a^2\right)+\ln\left(1+b^2\right)+\ln\left(1+c^2\right)+\ln\left(1+d^2\right)\geq \frac{8}{17}\left(a+b+c+d\right)-\frac{8}{17}+4\ln\frac{17}{16}$
$\Leftrightarrow \ln P\geq 4\ln\frac{17}{16}\Leftrightarrow P\geq\left(\frac{17}{16}\right)^4$
Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=d=\frac{1}{4}$
Vậy $\min P=\left(\frac{17}{16}\right)^4$</td><td>1,0</td></tr>
</table>

Lưu ý:

- Trên đây là hướng dẫn chấm bao gồm các bước giải cơ bản, học sinh phải trình bày đầy đủ, hợp logic mới cho điểm.
- Mọi cách giải khác đúng đều được điểm tối đa.
- Điểm toàn bài không làm tròn.
- Câu 4 nếu không có hình vẽ không chấm điểm.