GTLN - GTNN CỦA MÔĐUN SỐ PHỨC

A. BÀI TOÁN CỰC TRỊ CỦA SỐ PHỨC

I. CÁC BÀI TOÁN QUI VỀ BÀI TOÁN TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM MỘT BIẾN

1. PHƯƠNG PHÁP

Bài toán: Trong các số phức z thoả mãn điều kiện T. Tìm số phức z để biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất, lớn nhất

Từ điều kiện T, biến đổi để tìm cách rút ẩn rồi thế vào biểu thức P để được hàm một biến.

Tìm giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) tuỳ theo yêu cầu bài toán của hàm số một biến vừa tìm được.

II. CÁC BÀI TOÁN QUI VỀ BÀI TOÁN TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC HAI BIẾN MÀ CÁC BIẾN THOẢ MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC.

1. PHƯƠNG PHÁP:

Để giải được lớp bài toán này, chúng tôi cung cấp cho học sinh các bất đẳng thức cơ bản như: Bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình nhân, bất đẳng thức Bunhia- Cốpxki, bất đẳng thức hình học và một số bài toán công cụ sau:

BÀI TOÁN CÔNG CỤ 1:

Cho đường tròn (T) cố định có tâm I bán kính R và điểm A cố định. Điểm M di động trên đường tròn (T). Hãy xác định vị trí điểm M sao cho AM lớn nhất, nhỏ nhất.

Giải:

TH1: A thuộc đường tròn (T)

Ta có: AM đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi M trùng với A

AM đạt giá trị lớn nhất bằng 2R khi M là điểm đối xứng với A qua I

TH2: A không thuộc đường tròn (T)

Gọi B, C là giao điểm của đường thẳng qua A,I và đường tròn (T);

Giả sử $AB < AC$.

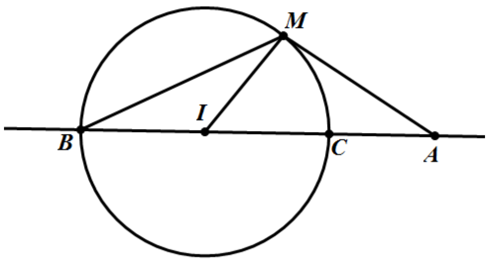
+) Nếu A nằm ngoài đường tròn (T) thì với điểm M bất kì trên (T), ta có:

$AM \geq AI - IM = AI - IB = AB$.

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv B$

$AM \leq AI + IM = AI + IC = AC$.

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv C$



+) Nếu A nằm trong đường tròn (T) thì với điểm M bất kì trên (T), ta có:

$AM \geq IM - IA = IB - IA = AB$.

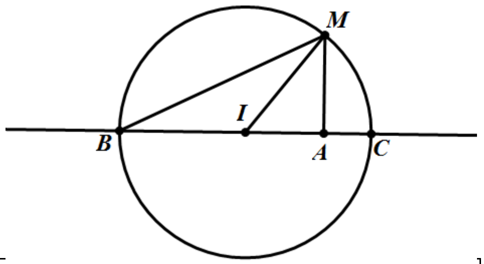
Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv B$

$AM \leq AI + IM = AI + IC = AC$.

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv C$

Vậy khi M trùng với B thì AM đạt gía trị nhỏ nhất.

Vậy khi M trùng với C thì AM đạt gía trị lớn nhất.



BÀI TOÁN CÔNG CỤ 2:

Cho hai đường tròn (T_1) có tâm I, bán kính R_1; đường tròn (T_2) có tâm J, bán kính R_2. Tìm vị trí của điểm M trên (T_1), điểm N trên (T_2) sao cho MN đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Giải:

Gọi d là đường thẳng đi qua I, J;

d cắt đường tròn (T_1) tại hai điểm phân biệt A, B (giả sử JA > JB) ; d cắt (T_2) tại hai điểm phân biệt C, D (giả sử ID > IC).

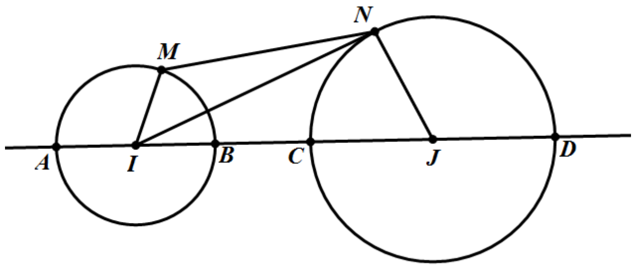
Với điểm M bất khì trên (T_1) và điểm N bất kì trên (T_2).

Ta có: $MN \le IM + IN \le IM + IJ + JN = R_1 + R_2 + IJ = AD$.

Đẳng thức xảy ra khi M trùng với A và N trùng với D

$MN \ge |IM - IN| \ge |IJ - IM - JN| = |IJ - R_1 + R_2| = BC$.

Đẳng thức xảy ra khi M trùng với B và N trùng với C.



Vậy khi M trùng với A và N trùng với D thì MN đạt giá trị lớn nhất.

khi M trùng với B và N trùng với C thì MN đạt giá trị nhỏ nhất.

BÀI TOÁN CÔNG CỤ 3:

Cho hai đường tròn (T) có tâm I, bán kính R; đường thẳng Δ không có điểm chung với (T). Tìm vị trí của điểm M trên (T), điểm N trên Δ sao cho MN đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên d

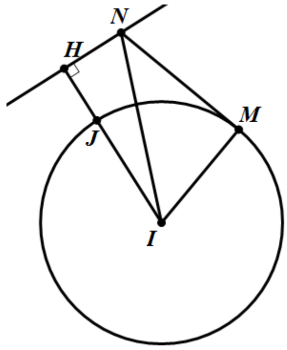
Đoạn IH cắt đường tròn (T) tại J

Với M thuộc đường thẳng Δ, N thuộc đường tròn (T), ta có:

$MN \ge IN - IM \ge IH - IJ = JH = const$.

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv H; N \equiv I$

Vậy khi M trùng với H; N trùng với J thì MN đạt giá trị nhỏ nhất.



B – BÀI TẬP

Câu 1. Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z+3i| = |z+2-i|$. Tìm số phức có môđun nhỏ nhất?

A. $z = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$. **B.** $z = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$. **C.** $z = -1+2i$. **D.** $z = 1-2i$.

Câu 2. Trong các số phức z thỏa mãn $|z-2-4i| = |z-2i|$. Số phức z có môđun nhỏ nhất là

A. $z = 3+2i$ **B.** $z = -1+i$ **C.** $z = -2+2i$ **D.** $z = 2+2i$

Câu 3. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1| = |z-i|$. Tìm mô đun nhỏ nhất của số phức $w = 2z+2-i$.

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

Câu 4. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. 6. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 5. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-3i+5|=2$ và $|iz_2-1+2i|=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|2iz_1+3z_2|$.

A. $\sqrt{313}+16$. **B.** $\sqrt{313}$. **C.** $\sqrt{313}+8$. **D.** $\sqrt{313}+2\sqrt{5}$.

Câu 6. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+2-3i|=|\overline{z}+1-2i|$, hãy tìm phần ảo của số phức có môđun nhỏ nhất?

A. $\frac{10}{13}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** -2. **D.** $-\frac{2}{13}$.

Câu 7. Xét các số phức $z_1=3-4i$ và $z_2=2+mi$, $(m\in\mathbb{R})$. Giá trị nhỏ nhất của môđun số phức $\frac{z_2}{z_1}$ bằng?

A. $\frac{2}{5}$. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $\frac{1}{5}$.

Câu 8. Số phức z nào sau đây có môđun nhỏ nhất thỏa $|z|=|\overline{z}-3+4i|$:

A. $z=-\frac{3}{2}-2i$. **B.** $z=3-\frac{7}{8}i$. **C.** $z=\frac{3}{2}+2i$. **D.** $z=-3-4i$.

Câu 9. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để có đúng hai số phức z thỏa mãn $|z-(m-1)+i|=8$ và $|z-1+i|=|\overline{z}-2+3i|$.

A. 66. **B.** 130. **C.** 131. **D.** 63.

Câu 10. Cho các số phức z thoả mãn $|z|=2$. Đặt $w=(1+2i)z-1+2i$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|w|$.

A. 2. **B.** $3\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 11. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-i|=1$, số phức w thỏa mãn $|\overline{w}-2-3i|=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z-w|$.

A. $\sqrt{17}+3$ **B.** $\sqrt{13}+3$ **C.** $\sqrt{13}-3$ **D.** $\sqrt{17}-3$

Câu 12. Cho số phức $z=\frac{-m+i}{1-m(m-2i)}$, $m\in\mathbb{R}$. Tìm môđun lớn nhất của z.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 13. Cho số phức z thỏa mãn $|z+1-i|=|z-3i|$. Tính môđun nhỏ nhất của $z-i$.

A. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$. **B.** $\frac{4\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{7\sqrt{5}}{10}$.

Câu 14. Cho số phức z thoả mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Tính môđun của số phức $w=M+mi$.

A. $|w|=2\sqrt{309}$. **B.** $|w|=\sqrt{2315}$. **C.** $|w|=\sqrt{1258}$. **D.** $|w|=3\sqrt{137}$.

Câu 15. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=3$. Tìm môđun lớn nhất của số phức $z-2i$.

A. $\sqrt{26+8\sqrt{17}}$. **B.** $\sqrt{26-4\sqrt{17}}$. **C.** $\sqrt{26+6\sqrt{17}}$. **D.** $\sqrt{26-6\sqrt{17}}$.

Câu 16. Giả sử z_1, z_2 là hai trong số các số phức z thỏa mãn $|iz+\sqrt{2}-i|=1$ và $|z_1-z_2|=2$. Giá trị lớn nhất của $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 3. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** 4.

Câu 17. Gọi T là tập hợp tất cả các số phức z thõa mãn $|z-i|\geq 2$ và $|z+1|\leq 4$. Gọi $z_1,\, z_2 \in T$ lần lượt là các số phức có mô đun nhỏ nhất và lớn nhất trong T. Khi đó $z_1 - z_2$ bằng:

A. $4-i$. **B.** $5-i$. **C.** $-5+i$. **D.** -5.

Câu 18. Trong tập hợp các số phức, gọi z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2 - z + \frac{2017}{4} = 0$, với z_2 có thành phần ảo dương. Cho số phức z thoả mãn $|z-z_1|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z-z_2|$ là

A. $\frac{\sqrt{2016}-1}{2}$. **B.** $\sqrt{2017}-1$. **C.** $\sqrt{2016}-1$. **D.** $\frac{\sqrt{2017}-1}{2}$.

Câu 19. Cho số phức z thỏa mãn $z.\overline{z}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\left|z^3+3z+\overline{z}\right|-\left|z+\overline{z}\right|$.

A. $\frac{15}{4}$. **B.** 3. **C.** $\frac{13}{4}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 20. Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z|=\sqrt{5}$, $w=(4-3i)z+1-2i$. Giá trị nhỏ nhất của $|w|$ là :

A. $6\sqrt{5}$ **B.** $3\sqrt{5}$ **C.** $4\sqrt{5}$ **D.** $5\sqrt{5}$

Câu 21. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+\frac{1}{z}\right|=4$. Tính giá trị lớn nhất của $|z|$.

A. $4+\sqrt{3}$. **B.** $2+\sqrt{5}$. **C.** $2+\sqrt{3}$. **D.** $4+\sqrt{5}$.

Câu 22. Biết số phức $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$ có mô đun nhỏ nhất. Tính $M=a^2+b^2$.

A. $M=26$. **B.** $M=10$. **C.** $M=8$. **D.** $M=16$.

Câu 23. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+|z^2-z+1|$. Tính giá trị của $M.m$.

A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{39}{4}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

Câu 24. Cho số phức $z\neq 0$ thỏa mãn $|z|\geq 2$. Tìm tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|\frac{z+i}{z}\right|$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 25. Nếu z là số phức thỏa $|\overline{z}|=|z+2i|$ thì giá trị nhỏ nhất của $|z-i|+|z-4|$ là

A. $\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 26. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i|=1$. Giá trị lớn nhất của $|\overline{z}+1+i|$ là

A. $\sqrt{13}+2$. **B.** 4. **C.** 6. **D.** $\sqrt{13}+1$.

Câu 27. Cho hai số phức u, v thỏa mãn $3|u-6i|+3|u-1-3i|=5\sqrt{10}$, $|v-1+2i|=|\overline{v}+i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|u-v|$ là:

A. $\frac{5\sqrt{10}}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{10}}{3}$ **C.** $\frac{2\sqrt{10}}{3}$ **D.** $\sqrt{10}$

Câu 28. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+13=0$, với z_1 có phần ảo dương. Biết số phức z thỏa mãn $2|z-z_1|\le|z-z_2|$, phần thực nhỏ nhất của z là

A. -2 **B.** 1 **C.** 9 **D.** 6

Câu 29. Cho số phức z thỏa mãn $|(z+2)i+1|+|(\overline{z}-2)i-1|=10$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính tổng $S=M+m$.

A. $S=8$. **B.** $S=2\sqrt{21}$. **C.** $S=2\sqrt{21}-1$. **D.** $S=9$.

Câu 30. Cho 2018 phức z thoả mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Tính môđun của 2018 phức $w=M+mi$.

A. $|w|=2\sqrt{314}$. **B.** $|w|=2\sqrt{309}$. **C.** $|w|=\sqrt{1258}$. **D.** $|w|=\sqrt{1258}$.

Câu 31. Cho hai số phức z,z' thỏa mãn $|z+5|=5$ và $|z'+1-3i|=|z'-3-6i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z-z'|$.

A. $\sqrt{10}$. **B.** $3\sqrt{10}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{5}{4}$.

Câu 32. Cho số phức z thỏa mãn $|z|\le 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2|z+1|+2|z-1|+|z-\overline{z}-4i|$ bằng:

A. $2+\frac{7}{\sqrt{15}}$. **B.** $2+\sqrt{3}$. **C.** $4+\frac{14}{\sqrt{15}}$. **D.** $4+2\sqrt{3}$.

Câu 33. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+2|1-z|$ bằng

A. $6\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 34. Cho các số phức $z_1=3i$, $z_2=-1-3i$, $z_3=m-2i$. Tập giá trị tham số m để số phức z_3 có môđun nhỏ nhất trong 3 số phức đã cho là.

A. $\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\}$. **B.** $(-\sqrt{5};\sqrt{5})$.

C. $(-\infty;-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5};+\infty)$. **D.** $[-\sqrt{5};\sqrt{5}]$.

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3|=2|z|$ và $\max|z-1+2i|=a+b\sqrt{2}$. Tính $a+b$.

A. 3. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 4. **D.** $4\sqrt{2}$.

Câu 36. Cho số phức z thỏa mãn: $|z-2-2i|=1$. Số phức $z-i$ có môđun nhỏ nhất là:

A. $\sqrt{5}+2$. **B.** $\sqrt{5}+1$. **C.** $\sqrt{5}-2$. **D.** $\sqrt{5}-1$.

Câu 37. Cho số phức z thỏa $|z|\ge 2$. Tìm tích của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|\frac{z+i}{z}\right|$.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 38. Tìm số phức z sao cho $|z-(3+4i)|=\sqrt{5}$ và biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $z=5+5i$. **B.** $z=2+i$. **C.** $z=2+2i$. **D.** $z=4+3i$.

Câu 39. Cho số phức z thỏa điều kiện $\left|z^2+4\right|=\left|z\left(z+2i\right)\right|$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|z+i\right|$ bằng ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 40. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-1+2i\right|=3$. Tìm môđun nhỏ nhất của số phức $z-1+i$.

A. $\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 2.

Câu 41. Cho số phức $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $\left|z-1-i\right|\ge 1$ và $\left|z-3-3i\right|\le\sqrt{5}$. Gọi m,M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+2y$. Tính tỉ số $\frac{M}{m}$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{14}{5}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Câu 42. Cho số phức z thỏa mãn $5\left|z-i\right|=\left|z+1-3i\right|+3\left|z-1+i\right|$. Tìm giá trị lớn nhất M của $\left|z-2+3i\right|$?

A. $M=4\sqrt{5}$ **B.** $M=9$ **C.** $M=\frac{10}{3}$ **D.** $M=1+\sqrt{13}$

Câu 43. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $\left|z-1+2i\right|=\sqrt{5}$ và $w=z+1+i$ có môđun lớn nhất. Số phức z có môđun bằng:

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 44. Cho $z_1,\ z_2,\ z_3$ là các số phức thỏa mãn $z_1+z_2+z_3=0$ và $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=\left|z_3\right|=1$. Khẳng định nào dưới đây là **sai** ?

A. $\left|z_1^3+z_2^3+z_3^3\right|=\left|z_1^3\right|+\left|z_2^3\right|+\left|z_3^3\right|$. **B.** $\left|z_1^3+z_2^3+z_3^3\right|\le\left|z_1^3\right|+\left|z_2^3\right|+\left|z_3^3\right|$.

C. $\left|z_1^3+z_2^3+z_3^3\right|\ge\left|z_1^3\right|+\left|z_2^3\right|+\left|z_3^3\right|$. **D.** $\left|z_1^3+z_2^3+z_3^3\right|\ne\left|z_1^3\right|+\left|z_2^3\right|+\left|z_3^3\right|$.

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn $\left|\frac{-2-3i}{3-2i}z+1\right|=2$. Giá trị lớn nhất của môđun số phức z là

A. $\sqrt{3}$. **B.** 3. **C.** 2. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 46. Cho số phức z thỏa mãn z không phải số thực và $w=\frac{z}{2+z^2}$ là số thực. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z+1-i\right|$ là?

A. $\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 8.

Câu 47. Biết số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $\left|z-3-4i\right|=\sqrt{5}$ và biểu thức $M=\left|z+2\right|^2-\left|z-i\right|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính môđun của số phức $z+i$.

A. $\left|z+i\right|=5\sqrt{2}$ **B.** $\left|z+i\right|=\sqrt{41}$. **C.** $\left|z+i\right|=2\sqrt{41}$ **D.** $\left|z+i\right|=3\sqrt{5}$.

Câu 48. Cho số phức z và w thỏa mãn $z+w=3+4i$ và $\left|z-w\right|=9$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\left|z\right|+\left|w\right|$.

A. $\max T=14$. **B.** $\max T=4$. **C.** $\max T=\sqrt{106}$. **D.** $\max T=\sqrt{176}$.

Câu 49. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-4\right|+\left|z+4\right|=10$. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $\left|z\right|$ lần lượt là.

A. 5 và 4. **B.** 4 và 3. **C.** 5 và 3. **D.** 10 và 4.

Câu 50. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+5|=5, |z_2+1-3i|=|z_2-3-6i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$ là:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{7}{2}$

Câu 51. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1|=|(1+i)z|$. Đặt $m=|z|$, tìm giá trị lớn nhất của m.

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}-1$. **C.** $\sqrt{2}+1$. **D.** 1.

Câu 52. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+3|1-z|$.

A. $6\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{20}$. **C.** $2\sqrt{20}$. **D.** $3\sqrt{15}$.

Câu 53. Trong các số phức z thỏa mãn $|z|=|\overline{z}-1+2i|$, số phức có mô đun nhỏ nhất là

A. $z=5$. **B.** $z=1+\frac{3}{4}i$. **C.** $z=\frac{1}{2}+i$. **D.** $z=3+i$.

Câu 54. Cho số phức thỏa mãn $|z-2+2i|=1$. Giá trị lớn nhất của $|z|$ là.

A. $4\sqrt{2}-2$. **B.** $2+\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}+1$. **D.** $3\sqrt{2}+1$.

Câu 55. Cho số phức z thỏa điều kiện $|z^2+4|=|z(z+2i)|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z+i|$ bằng ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 56. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để có đúng 2 số phức z thỏa $|z-(m-1)+i|=8$ và $|z-1+i|=|\overline{z}-2+3i|$.

A. 66. **B.** 65. **C.** 131. **D.** 130.

Câu 57. Cho số phức z thỏa mãn $|z|\le 1$. Đặt $A=\frac{2z-i}{2+iz}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $|A|<1$. **B.** $|A|>1$. **C.** $|A|\le 1$. **D.** $|A|\ge 1$.

Câu 58. Trong tập hợp các số phức z thỏa mãn: $\left|\frac{z+2-i}{z+1-i}\right|=\sqrt{2}$. Tìm môđun lớn nhất của số phức $z+i$.

A. $2+\sqrt{2}$. **B.** $3+\sqrt{2}$. **C.** $3-\sqrt{2}$. **D.** $2-\sqrt{2}$.

Câu 59. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2-2z+5|=|(z-1+2i)(z+3i-1)|$.

Tính $\min|w|$, với $w=z-2+2i$.

A. $\min|w|=\frac{1}{2}$. **B.** $\min|w|=1$. **C.** $\min|w|=2$. **D.** $\min|w|=\frac{3}{2}$.

Câu 60. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$.

A. $\sqrt{13}$. **B.** $1+\sqrt{13}$. **C.** $2+\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{13}-1$.

Câu 61. Gọi điểm A, B lần lượt biểu diễn các số phức z và $z'=\frac{1+i}{2}z;\ (z\ne 0)$ trên mặt phẳng tọa độ (A, B, C và A', B', C' đều không thẳng hàng). Với O là gốc tọa độ, khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tam giác OAB vuông cân tại A. **B.** Tam giác OAB đều.

C. Tam giác OAB vuông cân tại O. **D.** Tam giác OAB vuông cân tại B.

Câu 62. Xét số phức $z=a+bi\left(a,b\in R,b>0\right)$ thỏa mãn $|z|=1$. Tính $P=2a+4b^2$ khi $\left|z^3-z+2\right|$ đạt giá trị lớn nhất .

A. $P=4$. **B.** $P=2-\sqrt{2}$. **C.** $P=2$. **D.** $P=2+\sqrt{2}$.

Câu 63. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. 1. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 0. **D.** $\sqrt{2}-1$.

Câu 64. Cho các số phức z thỏa mãn $|z-4+3i|=2$. Giả sử biểu thức $P=|z|$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất khi z lần lượt bằng $z_1=a_1+b_1i\ \left(a_1,b_1\in\mathbb{R}\right)$ và $z_2=a_2+b_2i\ \left(a_2,b_2\in\mathbb{R}\right)$. Tính $S=a_1+a_2$

A. $S=8$. **B.** $S=10$. **C.** $S=4$. **D.** $S=6$.

Câu 65. Cho số phức z thỏa mãn $\left|(1+i)z+2\right|+\left|(1+i)z-2\right|=4\sqrt{2}$. Gọi $m=\max|z|$, $n=\min|z|$ và số phức $w=m+ni$. Tính $|w|^{2018}$

A. 5^{1009}. **B.** 6^{1009}. **C.** 2^{1009}. **D.** 4^{1009}.

Câu 66. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+\left|z^2-z+1\right|$. Giá trị của $M.m$ bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\dfrac{13\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$.

Câu 67. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2i|\le|z-4i|$ và $|z-3-3i|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-2|$ là:

A. $\sqrt{10}+1$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $\sqrt{13}+1$.

Câu 68. Trong mặt phẳng tọa độ, hãy tìm số phức z có môđun nhỏ nhất, biết rằng số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=\sqrt{5}$.

A. $z=-1-2i$. **B.** $z=1-2i$. **C.** $z=-1+2i$. **D.** $z=1+2i$.

Câu 69. Cho z là số phức thay đổi thỏa mãn $\left|(1+i)z+2-i\right|=4$ và $M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn cho z trong mặt phẳng phức. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|x+y+3|$.

A. $4+2\sqrt{2}$. **B.** 8. **C.** 4. **D.** $4\sqrt{2}$.

Câu 70. Trong các số phức z thỏa mãn $|z-i|=|\overline{z}-2-3i|$. Hãy tìm z có môđun nhỏ nhất.

A. $z=\dfrac{27}{5}+\dfrac{6}{5}i$. **B.** $z=-\dfrac{6}{5}-\dfrac{27}{5}i$. **C.** $z=-\dfrac{6}{5}+\dfrac{27}{5}i$. **D.** $z=\dfrac{3}{5}-\dfrac{6}{5}i$.

Câu 71. Cho số phức z, tìm giá trị lớn nhất của $|z|$ biết rằng z thỏa mãn điều kiện $\left|\dfrac{-2-3i}{3-2i}z+1\right|=1$.

A. $\sqrt{2}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 72. Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$. Tìm môđun nhỏ nhất của số phức $z+2i$.

A. $3\sqrt{5}$. **B.** $3\sqrt{2}$ **C.** $3+\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{5}$

Câu 73. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2|+|z+2|=5$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính $M+m$?

A. $M+m=1$ **B.** $M+m=4$ **C.** $M+m=\frac{17}{2}$ **D.** $M+m=8$

Câu 74. Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z-5+3i|=3$, $|iw+4+2i|=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|3iz+2w|$.

A. $\sqrt{578}+13$ **B.** $\sqrt{578}+5$ **C.** $\sqrt{554}+13$ **D.** $\sqrt{554}+5$

Câu 75. Trong các số phức z thỏa $|z+3+4i|=2$, gọi z_0 là số phức có mô đun nhỏ nhất. Khi đó.

A. Không tồn tại số phức z_0. **B.** $|z_0|=7$.

C. $|z_0|=2$. **D.** $|z_0|=3$.

Câu 76. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2+4|=2|z|$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\frac{\sqrt{2}-1}{3}\le|z|\le\frac{\sqrt{2}+1}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}-1}{6}\le|z|\le\frac{\sqrt{3}+1}{6}$.

C. $\sqrt{5}-1\le|z|\le\sqrt{5}+1$. **D.** $\sqrt{6}-1\le|z|\le\sqrt{6}+1$.

Câu 77. Cho số phức z thỏa mãn $|(1-i)z-6-2i|=\sqrt{10}$. Tìm môđun lớn nhất của số phức z.

A. $3+\sqrt{5}$ **B.** $4\sqrt{5}$ **C.** $3\sqrt{5}$. **D.** 3.

Câu 78. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$ .Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

A. $z=-1+i$. **B.** $z=3+2i$. **C.** $z=2+2i$. **D.** $z=-2+2i$.

Câu 79. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=2$. Tìm môđun lớn nhất của số phức z.

A. $\sqrt{5+6\sqrt{5}}$. **B.** $\sqrt{11+4\sqrt{5}}$. **C.** $\sqrt{6+4\sqrt{5}}$. **D.** $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$.

Câu 80. Cho số phức z thỏa mãn z không phải số thực và $w=\frac{z}{2+z^2}$ là số thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z+1-i|$ là.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 8. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 81. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\left|\frac{z+i}{z}\right|$, với z là số phức khác 0 thỏa mãn $|z|\ge 2$. Tính $2M-m$.

A. $2M-m=\frac{5}{2}$. **B.** $2M-m=10$. **C.** $2M-m=6$. **D.** $2M-m=\frac{3}{2}$.

Câu 82. Cho số phức z thỏa mãn $|z+1-i|=|z-3i|$ và số phức $w=\frac{1}{z}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|w|$.

A. $|w|_{\max}=\frac{9\sqrt{5}}{10}$. **B.** $|w|_{\max}=\frac{7\sqrt{5}}{10}$. **C.** $|w|_{\max}=\frac{4\sqrt{5}}{7}$. **D.** $|w|_{\max}=\frac{2\sqrt{5}}{7}$.

Câu 83. Xét các số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $4(z-\bar{z})-15i=i(z+\bar{z}-1)^2$. Tính $F=-a+4b$ khi $\left|z-\frac{1}{2}+3i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. $F=4$. **B.** $F=6$. **C.** $F=5$. **D.** $F=7$.

Câu 84. Gọi M và m là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của môđun số phức z thỏa mãn $|z-1|=2$. Tính $M+m$.

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 85. - 2017] Cho z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $|6-3i+iz|=|2z-6-9i|$, thỏa mãn $|z_1-z_2|=\frac{8}{5}$. Giá trị lớn nhất của $|z_1+z_2|$ bằng.

A. $4\sqrt{2}$. **B.** 5. **C.** $\frac{56}{5}$. **D.** $\frac{31}{5}$.

Câu 86. Trong các số phức z thỏa mãn $|z^2+1|=2|z|$ gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Khi đó môđun của số phức $w=z_1+z_2$ là

A. $|w|=1+\sqrt{2}$. **B.** $|w|=2\sqrt{2}$. **C.** $|w|=2$. **D.** $|w|=\sqrt{2}$.

Câu 87. Cho số phức z thỏa mãn: $|z-2-2i|=1$. Số phức $z-i$ có môđun nhỏ nhất là:

A. $\sqrt{5}-1$. **B.** $\sqrt{5}+1$. **C.** $\sqrt{5}+2$. **D.** $\sqrt{5}-2$.

Câu 88. Cho số phức z thỏa mãn $|2z-3-4i|=10$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Khi đó $M-m$ bằng.

A. 15. **B.** 10. **C.** 20. **D.** 5.

Câu 89. Cho các số phức z, z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-4-5i|=|z_2-1|$ và $|\overline{z}+4i|=|z-8+4i|$. Tính $M=|z_1-z_2|$ khi $P=|z-z_1|+|z-z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 6. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** 8. **D.** $\sqrt{41}$.

Câu 90. Số phức z nào sau đây có môđun nhỏ nhất thỏa $|z|=|\overline{z}-3+4i|$:

A. $z=-3-4i$. **B.** $z=3-\frac{7}{8}i$. **C.** $z=\frac{3}{2}+2i$. **D.** $z=-\frac{3}{2}-2i$.

Câu 91. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho điểm $A(4;\,4)$ và M là điểm biễn diễn số phức z thoả mãn điều kiện $|z-1|=|z+2-i|$. Tìm toạ độ điểm M để đoạn thẳng AM nhỏ nhất.

A. $M(1;\,5)$. **B.** $M(2;\,8)$. **C.** $M(-1;\,-1)$. **D.** $M(-2;\,-4)$.

Câu 92. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|\overline{z}+1+i|$.

A. $\sqrt{13}+1$. **B.** $\sqrt{13}+2$. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 93. Tìm giá trị lớn nhất của $P=|z^2-z|+|z^2+z+1|$ với z là số phức thỏa mãn $|z|=1$.

A. 3. **B.** $\frac{13}{4}$. **C.** 5. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 94. Cho số phức z thỏa mãn $|z+3i|+|z-3i|=10$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là điểm biểu diễn số phức z có môđun lớn nhất và nhỏ nhất. Gọi M là trung điểm của M_1M_2, $M(a;b)$ biểu diễn số phức w, tổng $|a|+|b|$ nhận giá trị nào sau đây?

A. $\frac{7}{2}$. **B.** 5. **C.** 4. **D.** $\frac{9}{2}$.

Câu 95. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3|+|z+3|=8$. Gọi M, m lần lượt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất $|z|$. Khi đó $M+m$ bằng

A. $4-\sqrt{7}$. **B.** $4+\sqrt{7}$. **C.** 7. **D.** $4+\sqrt{5}$.

Câu 96. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất $M_{\max}$ và giá trị nhỏ nhất $M_{\min}$ của biểu thức

$M=|z^2+z+1|+|z^3+1|$.

A. $M_{\max}=5;\ M_{\min}=1$. **B.** $M_{\max}=5;\ M_{\min}=2$.

C. $M_{\max}=4;\ M_{\min}=1$. **D.** $M_{\max}=4;\ M_{\min}=2$.

Câu 97. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1|=\sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $T=|z+i|+|z-2-i|$.

A. $\max T=4\sqrt{2}$. **B.** $\max T=8$. **C.** $\max T=8\sqrt{2}$. **D.** $\max T=4$.

Câu 98. Cho các số phức z thỏa mãn $|z-1-i|+|z-8-3i|=\sqrt{53}$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=|z+1+2i|$.

A. $P_{\max}=53$. **B.** $P_{\max}=\dfrac{\sqrt{185}}{2}$. **C.** $P_{\max}=\sqrt{106}$. **D.** $P_{\max}=\sqrt{53}$.

Câu 99. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z-1+2i|=\sqrt{5}$ và $w=z+1+i$ có môđun lớn nhất. Số phức z có môđun bằng:

A. $\sqrt{6}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 100. Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z-4i-2|=|2i-z|$, môđun nhỏ nhất của số phức z bằng:

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 101. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+1-i|=2$ và $z_2=iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z_1-z_2|$?

A. $m=2\sqrt{2}-2$. **B.** $m=2\sqrt{2}$. **C.** $m=2$. **D.** $m=\sqrt{2}-1$.

Câu 102. Cho các số phức $z_1=-2+i$, $z_2=2+i$ và số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=16$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị biểu thức M^2-m^2 bằng

A. 15 **B.** 7 **C.** 11 **D.** 8

Câu 103. Cho số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{z-1}{z+3i}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z+i|+2|\overline{z}-4+7i|$.

A. 8. **B.** 10. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $4\sqrt{5}$.

Câu 104. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+2-3i|=2$ và $|\overline{z_2}-1-2i|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=|z_1-z_2|$.

A. $P=6$. **B.** $P=3$. **C.** $P=3+\sqrt{34}$. **D.** $P=3+\sqrt{10}$.

Câu 105. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-4i|=\sqrt{5}$ và $|z|_{\min}$. Khi đó số phức z là.

A. $z=4+5i$. **B.** $z=3+2i$. **C.** $z=2-i$. **D.** $z=1+2i$.

Câu 106. Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M, M'. Số phức $z(4+3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là N, N'. Biết rằng M, M', N, N' là bốn đỉnh của hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z+4i-5|$.

A. $\frac{5}{\sqrt{34}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{4}{\sqrt{13}}$.

Câu 107. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+2|1-z|$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $6\sqrt{5}$.

Câu 108. Trong các số phức z thỏa $|z+3+4i|=2$, gọi z_0 là số phức có mô đun nhỏ nhất. Khi đó

A. Không tồn tại số phức z_0. **B.** $|z_0|=2$.

C. $|z_0|=7$. **D.** $|z_0|=3$.

Câu 109. Gọi n là số các số phức z đồng thời thỏa mãn $|iz+1+2i|=3$ và biểu thức $T=2|z+5+2i|+3|z-3i|$ đạt giá trị lớn nhất. Gọi M là giá trị lớn nhất của T. Giá trị tích của $M.n$ là

A. $2\sqrt{13}$ **B.** $10\sqrt{21}$ **C.** $6\sqrt{13}$ **D.** $5\sqrt{21}$

Câu 110. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i|=1$. Giá trị lớn nhất của $|\overline{z}+1+i|$ là.

A. $\sqrt{13}+2$. **B.** 6. **C.** 4. **D.** $\sqrt{13}+1$.

Câu 111. Cho z_1, z_2, z_3 là các số phức thỏa $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1.$ Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $|z_1+z_2+z_3|<|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$. **B.** $|z_1+z_2+z_3|\neq|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$.

C. $|z_1+z_2+z_3|=|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$. **D.** $|z_1+z_2+z_3|>|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$.

Câu 112. Cho $z=x+yi$ với x, $y\in\mathbb{R}$ là số phức thỏa mãn điều kiện $|\overline{z}+2-3i|\le|z+i-2|\le 5$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+8x+6y$. Tính $M+m$.

A. $\frac{156}{5}-20\sqrt{10}$. **B.** $60-20\sqrt{10}$. **C.** $\frac{156}{5}+20\sqrt{10}$. **D.** $60+2\sqrt{10}$.

Câu 113. Tìm số phức z thỏa mãn $|z-1-i|=5$ và biểu thức $T=|z-7-9i|+2|z-8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $z=1+6i$ và $z=5-2i$. **B.** $z=4+5i$.

C. $z=5-2i$. **D.** $z=1+6i$.

Câu 114. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2-2z+5|=|(z-1+2i)(z+3i-1)|$.

Tính $\min|w|$, với $w=z-2+2i$.

A. $\min|w|=\frac{3}{2}$. **B.** $\min|w|=2$. **C.** $\min|w|=1$. **D.** $\min|w|=\frac{1}{2}$.

Câu 115. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Môđun của số phức $w=M+mi$ là

A. $|w|=\sqrt{1258}$ **B.** $|w|=2\sqrt{309}$ **C.** $|w|=2\sqrt{314}$ **D.** $|w|=3\sqrt{137}$

Câu 116. Cho số phức z thoả mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$ và biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Môđun của số phức z bằng

A. $5\sqrt{2}$. **B.** 13. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** 10.

Câu 117. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P=\left|\frac{z+i}{z}\right|$, với z là số phức khác 0 và thỏa mãn $|z|\geq 2$. Tính tỷ số $\frac{M}{m}$.

A. $\frac{M}{m}=5$ **B.** $\frac{M}{m}=3$ **C.** $\frac{M}{m}=\frac{3}{4}$ **D.** $\frac{M}{m}=\frac{1}{3}$

Câu 118. Cho các số phức z thỏa mãn $|z^2+4|=|(z-2i)(z-1+2i)|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=|z+3-2i|$.

A. $P_{\min}=\frac{7}{2}$. **B.** $P_{\min}=3$. **C.** $P_{\min}=4$. **D.** $P_{\min}=2$.

Câu 119. Gọi $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn hai điều kiện $|z-2|^2+|z+2|^2=26$ và $\left|z-\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}i\right|$ đạt giá trị lớn nhất. Tính tích xy.

A. $xy=\frac{9}{2}$. **B.** $xy=\frac{13}{2}$. **C.** $xy=\frac{16}{9}$. **D.** $xy=\frac{9}{4}$.

Câu 120. Xét các số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-3-2i|=2$. Tính $a+b$ khi $|z+1-2i|+2|z-2-5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 3. **B.** $4+\sqrt{3}$. **C.** $4-\sqrt{3}$. **D.** $2+\sqrt{3}$.

Câu 121. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+3|1-z|$.

A. $P=3\sqrt{15}$. **B.** $P=2\sqrt{5}$. **C.** $P=2\sqrt{10}$. **D.** $P=6\sqrt{5}$.

Câu 122. Cho các số phức w, z thỏa mãn $|\mathrm{w}+\mathrm{i}|=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5\mathrm{w}=(2+\mathrm{i})(z-4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-1-2\mathrm{i}|+|z-5-2\mathrm{i}|$ bằng

A. $6\sqrt{7}$. **B.** $4+2\sqrt{13}$. **C.** $2\sqrt{53}$. **D.** $4\sqrt{13}$.

Câu 123. Biết rằng $|z-1|=2$. Tìm giá trị lớn nhất của module số phức $w=\bar{z}+2i$?

A. $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ **B.** $2+\sqrt{5}$ **C.** $\sqrt{5}-2$ **D.** $\sqrt{5}-\sqrt{2}$

Câu 124. Trong các số phức z thỏa mãn $|z|=|\bar{z}-2+4i|$, số phức có môđun nhỏ nhất là.

A. $z=3+i$. **B.** $z=5$. **C.** $z=\frac{5}{2}i$. **D.** $z=1+2i$.

Câu 125. Cho các số phức z thỏa mãn $|z-3|=|z+i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=|z|$.

A. $P_{\min}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$. **B.** $P_{\min}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$. **C.** $P_{\min}=\frac{\sqrt{10}}{5}$. **D.** $P_{\min}=3$.

Câu 126. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\left|1+\frac{5i}{z}\right|$.

A. 6. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 127. Xét số phức z thỏa mãn $2|z-1|+3|z-i|\leq 2\sqrt{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}<|z|<2$. **C.** $|z|>2$. **D.** $|z|<\frac{1}{2}$.

Câu 128. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3+3i|=2$. Giá trị lớn nhất của $|z-i|$ là

A. 8. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 7.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z+3i|=|z+2-i|$. Tìm số phức có môđun nhỏ nhất?

A. $z=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$. **B.** $z=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$. **C.** $z=-1+2i$. **D.** $z=1-2i$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Phương pháp tự luận

Giả sử $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

$|z+3i|=|z+2-i|\Leftrightarrow|x+(y+3)i|=|(x+2)+(y-1)i|\Leftrightarrow x^2+(y+3)^2=(x+2)^2+(y-1)^2$

$\Leftrightarrow 6y+9=4x+4-2y+1\Leftrightarrow 4x-8y-4=0\Leftrightarrow x-2y-1=0\Leftrightarrow x=2y+1$

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(2y+1)^2+y^2}=\sqrt{5y^2+4y+1}=\sqrt{5\left(y+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}}\geq\frac{\sqrt{5}}{5}$

Suy ra $|z|_{\min}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ khi $y=-\frac{2}{5}\Rightarrow x=\frac{1}{5}$

Vậy $z=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i.$

Phương pháp trắc nghiệm

Giả sử $z=x+yi\ \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

$|z+3i|=|z+2-i|\Leftrightarrow|x+(y+3)i|=|(x+2)+(y-1)i|\Leftrightarrow x^2+(y+3)^2=(x+2)^2+(y-1)^2$

$\Leftrightarrow 6y+9=4x+4-2y+1\Leftrightarrow 4x-8y-4=0\Leftrightarrow x-2y-1=0$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa điều kiện $|z+3i|=|z+2-i|$ là đường thẳng $d: x-2y-1=0$.

Phương án A: $z=1-2i$ có điểm biểu diễn $(1;-2)\notin d$ nên loại A.

Phương án B: $z=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ có điểm biểu diễn $\left(-\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)\notin d$ nên loại

B.

Phương án D: $z=-1+2i$ có điểm biểu diễn $(-1;2)\notin d$ nên loại

B.

Phương án C: $z=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$ có điểm biểu diễn $\left(\frac{1}{5};-\frac{2}{5}\right)\in d$

Câu 2. Trong các số phức z thỏa mãn $|z-2-4i|=|z-2i|$. Số phức z có môđun nhỏ nhất là

A. $z=3+2i$ **B.** $z=-1+i$ **C.** $z=-2+2i$ **D.** $z=2+2i$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $z=a+bi$. Khi đó $|z-2-4i|=|z-2i|$

$\Leftrightarrow\ |(a-2)+(b-4)i|=|a+(b-2)i|$

$\Leftrightarrow\ (a-2)^2+(b-4)^2=a^2+(b-2)^2$

$\Leftrightarrow\ a+b=4\ (1)$

Mà $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. Mà $\left(a^2+b^2\right)\left(1^2+1^2\right)\overset{BCS}{\geq}(a+b)^2$

$\Leftrightarrow\ a^2+b^2\ge\frac{(a+b)^2}{2}=8$ (Theo (1))

$\Leftrightarrow\ \sqrt{a^2+b^2}\ge 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow\ |z|\ge 2\sqrt{2}\ \Rightarrow\ \min|z|=2\sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\ \frac{a}{1}=\frac{b}{1}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\ \begin{cases}a=2\\ b=2\end{cases}\ \Rightarrow\ z=2+2i$.

Câu 3. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1|=|z-i|$. Tìm mô đun nhỏ nhất của số phức $\mathrm{w}=2z+2-i$.

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Giả sử $z=a+bi\Rightarrow\overline{z}=a-bi$. Khi đó $|z-1|=|z-i|\Leftrightarrow|a-1+bi|=|a+(b-1)i|$.

$\Leftrightarrow(a-1)^2+b^2=a^2+(b-1)^2\Leftrightarrow a-b=0$.

Khi đó $\mathrm{w}=2z+2-i=2(a+ai)+2-i=(2a+2)+i(a-1)$.

$\Rightarrow|\mathrm{w}|=\sqrt{(2a+2)^2+(2a-1)^2}=\sqrt{8a^2+4a+5}\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Vậy mô đun nhỏ nhất của số phức w là $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 4. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. 6. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $1=|z-(3+4i)|\ge|3+4i|-|z|=5-|z|\Leftrightarrow|z|\ge 5-1=4$.

Câu 5. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-3i+5|=2$ và $|iz_2-1+2i|=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|2iz_1+3z_2|$.

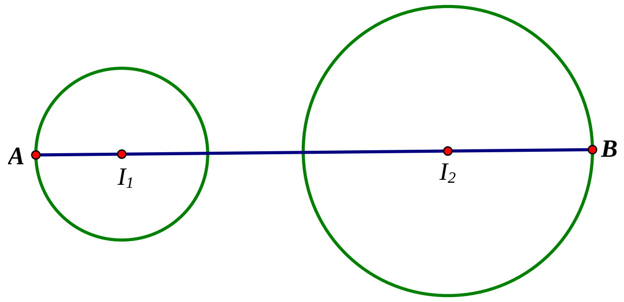
A. $\sqrt{313}+16$. **B.** $\sqrt{313}$. **C.** $\sqrt{313}+8$. **D.** $\sqrt{313}+2\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $|z_1-3i+5|=2\Leftrightarrow|2iz_1+6+10i|=4$ (1); $|iz_2-1+2i|=4\Leftrightarrow|(-3z_2)-6-3i|=12$ (2).

Gọi A là điểm biểu diễn số phức $2iz_1$, B là điểm biểu diễn số phức $-3z_2$. Từ (1) và (2) suy ra điểm A nằm trên đường tròn tâm $I_1(-6;-10)$ và bán kính $R_1=4$; điểm B nằm trên đường tròn tâm $I_2(6;3)$ và bán kính $R_2=12$.



Ta có $T=\left|2iz_1+3z_2\right|=AB\le I_1I_2+R_1+R_2=\sqrt{12^2+13^2}+4+12=\sqrt{313}+16$.

Vậy $\max T=\sqrt{313}+16$.

Câu 6. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z+2-3i\right|=\left|\overline{z}+1-2i\right|$, hãy tìm phần ảo của số phức có môđun nhỏ nhất?

A. $\dfrac{10}{13}$. **B.** $\dfrac{2}{5}$. **C.** -2. **D.** $-\dfrac{2}{13}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi $z=a+bi,\left(a,b\in R\right)$.

$\left|z+2-3i\right|=\left|\overline{z}+1-2i\right|\Leftrightarrow\left|a+bi+2-3i\right|=\left|a-bi+1-2i\right|$

$\Leftrightarrow\left(a+2\right)^2+\left(b-3\right)^2=\left(a+1\right)^2+\left(b+2\right)^2\Leftrightarrow 2a-10b+8=0$

$\left|z\right|^2=a^2+b^2=\left(5b-4\right)^2+b^2=26b^2-40b+16\ge\dfrac{8}{13}$.

Suy ra: z có môđun nhỏ nhất khi $b=\dfrac{10}{13}$.

Câu 7. Xét các số phức $z_1=3-4i$ và $z_2=2+mi$, $\left(m\in\mathbb{R}\right)$. Giá trị nhỏ nhất của môđun số phức $\dfrac{z_2}{z_1}$ bằng?

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{2+mi}{3-4i}=\dfrac{\left(2+mi\right)\left(3+4i\right)}{\left(3-4i\right)\left(3+4i\right)}=\dfrac{6-4m+\left(3m+8\right)i}{25}=\dfrac{6-4m}{25}+\dfrac{3m+8}{25}i$

$\Rightarrow\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{6-4m}{25}\right)^2+\left(\dfrac{3m+8}{25}\right)^2}\Rightarrow\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|=\sqrt{\dfrac{36-48m+16m^2+9m^2+48m+64}{25^2}}$

$\Rightarrow\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|=\sqrt{\dfrac{25m^2+100}{25^2}}\Rightarrow\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|=\sqrt{\dfrac{m^2+4}{25}}\ge\sqrt{\dfrac{4}{25}}=\dfrac{2}{5}$.

Hoặc dùng công thức: $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|=\dfrac{\left|z_2\right|}{\left|z_1\right|}$.

Câu 8. Số phức z nào sau đây có môđun nhỏ nhất thỏa $|z|=|\overline{z}-3+4i|$:

A. $z=-\frac{3}{2}-2i$. **B.** $z=3-\frac{7}{8}i$. **C.** $z=\frac{3}{2}+2i$. **D.** $z=-3-4i$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi $z=a+bi \Rightarrow \bar{z}=a-bi$;

$|z|=|\bar{z}-3+4i| \Leftrightarrow -6a+8b+25=0\,(*)$. Trong các đáp án, có đáp án $z=3-\frac{7}{8}i$ và $z=-\frac{3}{2}-2i$ thỏa (*).

Ở đáp án $z=3-\frac{7}{8}i:|z|=\frac{25}{8}$; Ở đáp án $z=-\frac{3}{2}-2i$ thì $|z|=\frac{5}{2}$.

Chọn đáp án: $z=-\frac{3}{2}-2i$.

Câu 9. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để có đúng hai số phức z thỏa mãn $|z-(m-1)+i|=8$ và $|z-1+i|=|\bar{z}-2+3i|$.

A. 66. **B.** 130. **C.** 131. **D.** 63.

Hướng dẫn giải

Chọn A

- Đặt $z=x+yi$, với x, $y\in\mathbb{R}$.

- Từ giả thiết $|z-(m-1)+i|=8 \Rightarrow (x-(m-1))^2+(y+1)^2=64$, do đó tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn (T) có tâm $I(m-1;-1)$, bán kính $R=8$.

- Từ giả thiết $|z-1+i|=|\bar{z}-2+3i| \Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=(x-2)^2+(-y+3)^2$

$\Leftrightarrow 2x+8y-11=0$ hay M nằm trên đường thẳng $\Delta: 2x+8y-11=0$.

- Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \Delta$ cắt (T) tại 2 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow d(I;\Delta)<R \Leftrightarrow \frac{|2(m-1)-8-11|}{2\sqrt{17}}<8 \Leftrightarrow |2m-21|<16\sqrt{17}$

$\Leftrightarrow \frac{21-16\sqrt{17}}{2}<m<\frac{21+16\sqrt{17}}{2}$, do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-22;-21;...;42;43\}$.

Vậy có tất cả 66 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10. Cho các số phức z thoả mãn $|z|=2$. Đặt $w=(1+2i)z-1+2i$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|w|$.

A. 2. **B.** $3\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi số phức $z=a+bi$ với a, $b\in\mathbb{R}$. Ta có $|z|=2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}=2 \Leftrightarrow a^2+b^2=4\ (*)$.

Mà số phức $w=(1+2i)z-1+2i$

$\Leftrightarrow w=(1+2i)(a+bi)-1+2i \Leftrightarrow w=(a-2b-1)+(2a+b+2)i$.

Giả sử số phức $w=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó $\begin{cases}x=a-2b-1\\ y=2a+b+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+1=a-2b\\ y-2=2a+b\end{cases}$.

Ta có : $(x+1)^2+(y-2)^2=(a-2b)^2+(2a+b)^2$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=a^2+4b^2-4ab+4a^2+b^2+4ab$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=5(a^2+b^2) \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=20$ (theo $(*)$).

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

Điểm M là điểm biểu diễn của số phức w thì $|w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi OM nhỏ nhất.

Ta có $OI=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$, $IM=R=2\sqrt{5}$.

Mặt khác $OM \ge |OI-IM| \Leftrightarrow OM \ge \left|\sqrt{5}-2\sqrt{5}\right| \Leftrightarrow OM \ge \sqrt{5}$.

Do vậy $|w|$ nhỏ nhất bằng $\sqrt{5}$.

Câu 11. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-i|=1$, số phức w thỏa mãn $|\overline{w}-2-3i|=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z-w|$.

A. $\sqrt{17}+3$ **B.** $\sqrt{13}+3$ **C.** $\sqrt{13}-3$ **D.** $\sqrt{17}-3$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z=x+iy$ thì M thuộc đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1;1)$, bán kính $R_1=1$.

$N(x';y')$ biểu diễn số phức $w=x'+iy'$ thì N thuộc đường tròn (C_2) có tâm $I_2(2;-3)$, bán kính $R_2=2$. Giá trị nhỏ nhất của $|z-w|$ chính là giá trị nhỏ nhất của đoạn MN.

Ta có $\overrightarrow{I_1I_2}=(1;-4) \Rightarrow I_1I_2=\sqrt{17}>R_1+R_2 \Rightarrow (C_1)$ và (C_2) ở ngoài nhau.

$\Rightarrow MN_{\min}=I_1I_2-R_1-R_2=\sqrt{17}-3$

Câu 12. Cho số phức $z=\dfrac{-m+i}{1-m(m-2i)}$, $m\in\mathbb{R}$. Tìm môđun lớn nhất của z.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $z=\dfrac{-m+i}{1-m(m-2i)}=\dfrac{m}{m^2+1}+\dfrac{i}{m^2+1} \Rightarrow |z|=\sqrt{\dfrac{1}{m^2+1}}\le 1 \Rightarrow |z|_{\max}=1 \Leftrightarrow z=i;\ m=0$.

Câu 13. Cho số phức z thỏa mãn $|z+1-i|=|z-3i|$. Tính môđun nhỏ nhất của $z-i$.

A. $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{7\sqrt{5}}{10}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi $z=x+yi;\ (x;\ y\in\mathbb{R})$ có điểm $M(x;y)$ biểu diễn z trên mặt phẳng tọa độ.

Từ giả thiết $|z+1-i|=|z-3i|$ suy ra $M\in\Delta: 2x+4y-7=0$.

Ta có: $z-i=x+(y-1)i$ có điểm $M'(x;y-1)$ biểu diễn z trên mặt phẳng tọa độ.

Ta có: $2x+4y-7=0 \Leftrightarrow 2x+4(y-1)-3=0 \Rightarrow M'\in\Delta': 2x+4y-3=0$.

Vậy $\left|z-i\right|_{\min} = d\left(O;\Delta'\right) = \dfrac{\left|-3\right|}{\sqrt{2^2+4^2}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$, khi $z = \dfrac{3}{10} + \dfrac{8}{5}i$.

Câu 14. Cho số phức z thoả mãn $\left|z-3-4i\right| = \sqrt{5}$. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left|z+2\right|^2 - \left|z-i\right|^2$. Tính môđun của số phức $w = M + mi$.

A. $\left|w\right| = 2\sqrt{309}$. **B.** $\left|w\right| = \sqrt{2315}$. **C.** $\left|w\right| = \sqrt{1258}$. **D.** $\left|w\right| = 3\sqrt{137}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $z = x + yi$. Ta có $P = \left(x+2\right)^2 + y^2 - \left[x^2 + \left(y-1\right)^2\right] = 4x + 2y + 3$.

Mặt khác $\left|z-3-4i\right| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left(x-3\right)^2 + \left(y-4\right)^2 = 5$.

Đặt $x = 3 + \sqrt{5}\sin t$, $y = 4 + \sqrt{5}\cos t$

Suy ra $P = 4\sqrt{5}\sin t + 2\sqrt{5}\cos t + 23$.

Ta có $-10 \le 4\sqrt{5}\sin t + 2\sqrt{5}\cos t \le 10$.

Do đó $13 \le P \le 33 \Rightarrow M = 33,\ m = 13 \Rightarrow \left|w\right| = \sqrt{33^2 + 13^2} = \sqrt{1258}$.

Câu 15. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-1+2i\right| = 3$. Tìm môđun lớn nhất của số phức $z - 2i$.

A. $\sqrt{26+8\sqrt{17}}$. **B.** $\sqrt{26-4\sqrt{17}}$. **C.** $\sqrt{26+6\sqrt{17}}$. **D.** $\sqrt{26-6\sqrt{17}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $z = x + yi$; $\left(x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}\right) \Rightarrow z - 2i = x + \left(y-2\right)i$. Ta có:

$\left|z-1+2i\right| = 9 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2 + \left(y+2\right)^2 = 9$.

Đặt $x = 1 + 3\sin t$; $y = -2 + 3\cos t$; $t \in \left[0; 2\pi\right]$.

$\Rightarrow \left|z-2i\right|^2 = \left(1+3\sin t\right)^2 + \left(-4+3\cos t\right)^2 = 26 + 6\left(\sin t - 4\cos t\right) = 26 + 6\sqrt{17}\sin\left(t+\alpha\right)$; $\left(\alpha \in \mathbb{R}\right)$

$\Rightarrow \sqrt{26-6\sqrt{17}} \le \left|z-2i\right| \le \sqrt{26+6\sqrt{17}} \Rightarrow \left|z-2i\right|_{\max} = \sqrt{26+6\sqrt{17}}$.

Câu 16. Giả sử z_1, z_2 là hai trong số các số phức z thỏa mãn $\left|iz + \sqrt{2} - i\right| = 1$ và $\left|z_1 - z_2\right| = 2$. Giá trị lớn nhất của $\left|z_1\right| + \left|z_2\right|$ bằng

A. 3. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\left|iz + \sqrt{2} - i\right| = 1 \Leftrightarrow \left|z - \left(1 + i\sqrt{2}\right)\right| = 1$. Gọi $z_0 = 1 + i\sqrt{2}$ có điểm biểu diễn là $I\left(1; \sqrt{2}\right)$.

Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2. Vì $\left|z_1 - z_2\right| = 2$ nên I là trung điểm của AB.

Ta có $\left|z_1\right| + \left|z_2\right| = OA + OB \le \sqrt{2\left(OA^2 + OB^2\right)} = \sqrt{4OI^2 + AB^2} = \sqrt{16} = 4$.

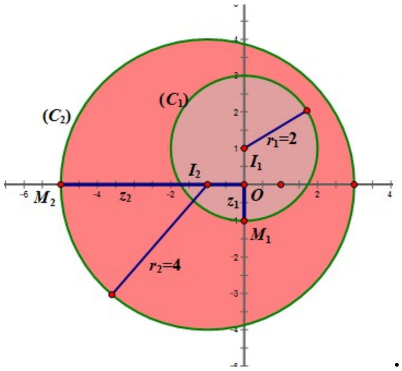
Dấu bằng khi $OA = OB$.

Câu 17. Gọi T là tập hợp tất cả các số phức z thõa mãn $|z-i|\ge 2$ và $|z+1|\le 4$. Gọi $z_1, z_2 \in T$ lần lượt là các số phức có mô đun nhỏ nhất và lớn nhất trong T. Khi đó $z_1 - z_2$ bằng:

A. $4-i$. **B.** $5-i$. **C.** $-5+i$. **D.** -5.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Đặt $z = x + yi$ khi đó ta có:

$$\begin{cases}|z-i|\ge 2\\ |z+1|\le 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x+(y-1)i|\ge 2\\ |(x+1)+yi|\le 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+(y-1)^2\ge 4\\ (x+1)^2+y^2\le 16\end{cases}.$$

Vậy T là phần mặt phẳng giữa hai đường tròn (C_1) tâm $I_1(0;1)$ bán kính $r_1 = 2$ và đường tròn (C_2) tâm $I_2(-1;0)$ bán kính $r_2 = 4$.

Dựa vào hình vẽ ta thấy $z_1 = 0 - i,\ z_2 = -5$ là hai số phức có điểm biểu diễn lần lượt là $M_1(0;-1),\ M(-5;0)$ có mô-đun nhỏ nhất và lớn nhất. Do đó $z_1 - z_2 = -i - (-5) = 5 - i$.

Câu 18. Trong tập hợp các số phức, gọi z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2 - z + \dfrac{2017}{4} = 0$, với z_2 có thành phần ảo dương. Cho số phức z thoả mãn $|z - z_1| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z - z_2|$ là

A. $\dfrac{\sqrt{2016}-1}{2}$. **B.** $\sqrt{2017}-1$. **C.** $\sqrt{2016}-1$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2017}-1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Xét phương trình $z^2 - z + \dfrac{2017}{4} = 0$

Ta có: $\Delta = -2016 < 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phức $\left[\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2016}}{2}i \\ z_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2016}}{2}i \end{array}\right.$.

Khi đó: $z_1 - z_2 = i\sqrt{2016}$

$|z - z_2| = |(z - z_1) + (z_1 - z_2)| \ge |z_1 - z_2| - |z - z_1| \Leftrightarrow P \ge \sqrt{2016} - 1$.

Vậy $P_{\min} = \sqrt{2016} - 1$.

Câu 19. Cho số phức z thỏa mãn $z.\overline{z} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |z^3 + 3z + \overline{z}| - |z + \overline{z}|$.

A. $\frac{15}{4}$. **B.** 3. **C.** $\frac{13}{4}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi $z=a+bi$, với $a,b\in\mathbb{R}$.

Ta có: $z+\overline{z}=2a$; $z.\overline{z}=1\Leftrightarrow |z|^2=1\Leftrightarrow |z|=1$.

Khi đó $P=\left|z^3+3z+\overline{z}\right|-\left|z+\overline{z}\right|=\left|z\left(z^2+3+\frac{\overline{z}}{z}\right)\right|-\left|z+\overline{z}\right|$.

$$P=|z|.\left|z^2+3+\frac{\overline{z}^2}{|z|^2}\right|-\left|z+\overline{z}\right|=\left|z^2+2z\overline{z}+\overline{z}^2+1\right|-\left|z+\overline{z}\right|.$$

$$P=\left|\left(z+\overline{z}\right)^2+1\right|-\left|z+\overline{z}\right|=\left|4a^2+1\right|-2|a|=4a^2+1-2|a|=\left(2|a|-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}.$$

Vậy $P_{\min}=\frac{3}{4}$.

Câu 20. Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z|=\sqrt{5}$, $w=(4-3i)z+1-2i$. Giá trị nhỏ nhất của $|w|$ là :

A. $6\sqrt{5}$ **B.** $3\sqrt{5}$ **C.** $4\sqrt{5}$ **D.** $5\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Theo giả thiết ta có $w=(4-3i)z+1-2i\Rightarrow z=\frac{w-1+2i}{4-3i}$.

Mặt khác $|z|=\sqrt{5}\Leftrightarrow\left|\frac{w-1+2i}{4-3i}\right|=\sqrt{5}\Leftrightarrow|w-1+2i|=5\sqrt{5}$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(1;-2)$ và bán kính $5\sqrt{5}$.

Do đó $\min|w|=R-OI=4\sqrt{5}$.

Câu 21. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+\frac{1}{z}\right|=4$. Tính giá trị lớn nhất của $|z|$.

A. $4+\sqrt{3}$. **B.** $2+\sqrt{5}$. **C.** $2+\sqrt{3}$. **D.** $4+\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\left|z+\frac{1}{z}\right|\ge|z|-\frac{1}{|z|}\Leftrightarrow 4\ge|z|-\frac{1}{|z|}\Rightarrow|z|\le 2+\sqrt{5}$.

Câu 22. Biết số phức $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$ có mô đun nhỏ nhất. Tính $M=a^2+b^2$.

A. $M=26$. **B.** $M=10$. **C.** $M=8$. **D.** $M=16$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$. Ta có $|z-2-4i|=|z-2i|\Leftrightarrow|a+bi-2-4i|=|a+bi-2i|$.

$$\Leftrightarrow\sqrt{(a-2)^2+(b-4)^2}=\sqrt{a^2+(b-2)^2}\Leftrightarrow a+b-4=0.$$

$\left|z\right|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+\left(4-a\right)^2}=\sqrt{2\left(a-2\right)^2+8}\ge 2\sqrt{2}$.

Vậy $\left|z\right|$ nhỏ nhất khi $a=2,\ b=2$. Khi đó $M=a^2+b^2=8$.

Câu 23. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z\right|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z+1\right|+\left|z^2-z+1\right|$. Tính giá trị của $M.m$.

A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{39}{4}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi $z=x+yi;\ \left(x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R}\right)$. Ta có: $\left|z\right|=1\Leftrightarrow z.\overline{z}=1$

Đặt $t=\left|z+1\right|$, ta có $0=\left|z\right|-1\le\left|z+1\right|\le\left|z\right|+1=2\Rightarrow t\in\left[0;2\right]$.

Ta có $t^2=\left(1+z\right)\left(1+\overline{z}\right)=1+z.\overline{z}+z+\overline{z}=2+2x\Rightarrow x=\frac{t^2-2}{2}$.

Suy ra $\left|z^2-z+1\right|=\left|z^2-z+z.\overline{z}\right|=\left|z\right|\left|z-1+\overline{z}\right|=\sqrt{\left(2x-1\right)^2}=\left|2x-1\right|=\left|t^2-3\right|$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=t+\left|t^2-3\right|,t\in\left[0;2\right]$. Bằng cách dùng đạo hàm, suy ra

$\max f\left(t\right)=\frac{13}{4};\ \min f\left(t\right)=\sqrt{3}\Rightarrow M.n=\frac{13\sqrt{3}}{4}$.

Câu 24. Cho số phức $z\ne 0$ thỏa mãn $\left|z\right|\ge 2$. Tìm tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|\frac{z+i}{z}\right|$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $1-\left|\frac{i}{z}\right|\le\left|1+\frac{i}{z}\right|\le 1+\left|\frac{i}{z}\right|\Leftrightarrow 1-\frac{1}{\left|z\right|}\le\left|1+\frac{i}{z}\right|\le 1+\frac{1}{\left|z\right|}$. Mặt khác $\left|z\right|\ge 2\Leftrightarrow\frac{1}{\left|z\right|}\le\frac{1}{2}$ suy ra $\frac{1}{2}\le P\le\frac{3}{2}$. Suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất là $\frac{3}{2},\frac{1}{2}$. Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 2.

Câu 25. Nếu z là số phức thỏa $\left|\overline{z}\right|=\left|z+2i\right|$ thì giá trị nhỏ nhất của $\left|z-i\right|+\left|z-4\right|$ là

A. $\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $z=x+yi$ với x, $y\in\mathbb{R}$ theo giả thiết $\left|\overline{z}\right|=\left|z+2i\right|\Leftrightarrow y=-1$. $\left(d\right)$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $\left(d\right)$.

Gọi $A\left(0;1\right)$, $B\left(4;0\right)$ suy ra $\left|z-i\right|+\left|z-4\right|=P$ là tổng khoảng cách từ điểm $M\left(x;-1\right)$ đến hai điểm A, B.

Thấy ngay $A(0;1)$ và $B(4;0)$ nằm cùng phía với (d). Lấy điểm đối xứng với $A(0;1)$ qua đường thẳng (d) ta được điểm $A'(0;-3)$.

Do đó khoảng cách ngắn nhất là $A'B=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Câu 26. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i|=1$. Giá trị lớn nhất của $|\overline{z}+1+i|$ là

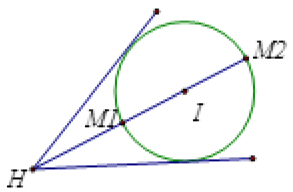
A. $\sqrt{13}+2$. **B.** 4. **C.** 6. **D.** $\sqrt{13}+1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi $z=x+yi$ ta có $z-2-3i=x+yi-2-3i=x-2+(y-3)i$.

Theo giả thiết $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ nên điểm M biểu diễn cho số phức z nằm trên đường tròn tâm $I(2;3)$ bán kính $R=1$.



Ta có $|\overline{z}+1+i|=|x-yi+1+i|=|x+1+(1-y)i|=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$.

Gọi $M(x;y)$ và $H(-1;1)$ thì $HM=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$.

Do M chạy trên đường tròn, H cố định nên MH lớn nhất khi M là giao của HI với đường tròn.

Phương trình $HI:\begin{cases}x=2+3t\\y=3+2t\end{cases}$, giao của HI và đường tròn ứng với t thỏa mãn:

$9t^2+4t^2=1\Leftrightarrow t=\pm\frac{1}{\sqrt{13}}$ nên $M\left(2+\frac{3}{\sqrt{13}};3+\frac{2}{\sqrt{13}}\right),M\left(2-\frac{3}{\sqrt{13}};3-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

Tính độ dài MH ta lấy kết quả $HM=\sqrt{13}+1$.

Câu 27. Cho hai số phức u, v thỏa mãn $3|u-6i|+3|u-1-3i|=5\sqrt{10}$, $|v-1+2i|=|\overline{v}+i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|u-v|$ là:

A. $\frac{5\sqrt{10}}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{10}}{3}$ **C.** $\frac{2\sqrt{10}}{3}$ **D.** $\sqrt{10}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

▪ Ta có: $3|u-6i|+3|u-1-3i|=5\sqrt{10}\Leftrightarrow|u-6i|+|u-1-3i|=\frac{5\sqrt{10}}{3}\Rightarrow MF_1+MF_2=\frac{5\sqrt{10}}{3}$.

$\Rightarrow u$ có điểm biểu diễn M thuộc elip với hai tiêu điểm $F_1(0;6)$, $F_2(1;3)$, tâm $I\left(\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$ và độ dài trục lớn là $2a=\frac{5\sqrt{10}}{3}\Rightarrow a=\frac{5\sqrt{10}}{6}$.

$\overrightarrow{F_1F_2}=(1;-3)\Rightarrow F_1F_2:3x+y-6=0$.

▪ Ta có: $|v-1+2i|=|\overline{v}+i|=|v-i|\Rightarrow NA=NB$

$\Rightarrow v$ có điểm biểu diễn N thuộc đường thẳng d là trung trực của đoạn AB với $A(1;-2)$, $B(0;1)$.

$\overrightarrow{AB}=(-1;3)$, $K\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ là trung điểm của $AB \Rightarrow d: x-3y-2=0$.

$$d(I,d)=\frac{\left|\frac{1}{2}-\frac{27}{2}-2\right|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$$

Dễ thấy $F_1F_2 \perp d \Rightarrow \min|u-v|=\min MN=|d(I,d)-a|=\frac{2\sqrt{10}}{3}$.

Câu 28. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+13=0$, với z_1 có phần ảo dương. Biết số phức z thỏa mãn $2|z-z_1|\le|z-z_2|$, phần thực nhỏ nhất của z là

A. -2 **B.** 1 **C.** 9 **D.** 6

Hướng dẫn giải

Chọn A

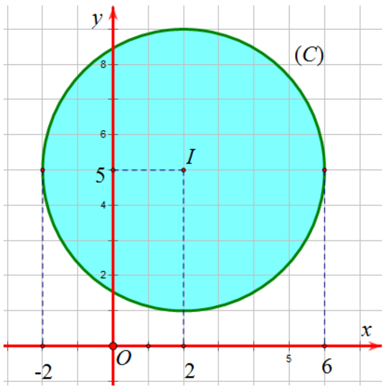
Ta có $z^2-4z+13=0 \Leftrightarrow z_1=2+3i$ hoặc $z_2=2-3i$.

Gọi $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$.

Theo giả thiết, $2|z-z_1|\le|z-z_2| \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}\le\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}$

$\Leftrightarrow 4\left[(x-2)^2+(y-3)^2\right]\le(x-2)^2+(y+3)^2 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-5)^2\le 16$.

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là miền trong của hình tròn (C) có tâm $I(2;5)$, bán kính $R=4$, kể cả hình tròn đó.



Do đó, phần thực nhỏ nhất của z là $x_{\min}=-2$.

Câu 29. Cho số phức z thỏa mãn $|(z+2)i+1|+|(\overline{z}-2)i-1|=10$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính tổng $S=M+m$.

A. $S=8$. **B.** $S=2\sqrt{21}$. **C.** $S=2\sqrt{21}-1$. **D.** $S=9$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Giả sử $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=a-bi$.

Chia hai vế cho $|i|$ ta được: $|z+2-i|+|\overline{z}-2+i|=10$.

Đặt $M(a;b)$, $N(a;-b)$, $A(-2;1)$, $B(2;-1)$, $C(2;1)\Rightarrow NB=MC$.

Ta có: $MA+MC=10\Rightarrow M\in(E):\frac{X^2}{25}+\frac{Y^2}{21}=1$.

Elip này có phương trình chính tắc với hệ trục tọa độ IXY , $I(0;1)$ là trung điểm AC .

Áp dụng công thức đổi trục $\begin{cases} X = x \\ Y = y-1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{(y-1)^2}{21} = 1$.

Đặt $\begin{cases} a = 5\sin t \\ b-1 = \sqrt{21}\cos t \end{cases}$, $t \in [0;2\pi) \Rightarrow |z|^2 = OM^2 = a^2 + b^2 = 25\sin^2 t + \left(1+\sqrt{21}\cos t\right)^2$

$= 26 + \left(-4\cos^2 t + 2\sqrt{21}\cos t\right)$.

$|z|_{\max} = 1+\sqrt{21} \Leftrightarrow \cos t = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1+\sqrt{21} \end{cases}$.

$|z|_{\min} = -1+\sqrt{21} \Leftrightarrow \cos t = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1-\sqrt{21} \end{cases}$.

$\Rightarrow M + m = 2\sqrt{21}$.

Câu 30. Cho 2018 phức z thoả mãn $|z-3-4i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+2|^2 - |z-i|^2$. Tính môđun của 2018 phức $w = M + mi$.

A. $|w| = 2\sqrt{314}$. **B.** $|w| = 2\sqrt{309}$. **C.** $|w| = \sqrt{1258}$. **D.** $|w| = \sqrt{1258}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Giả sử $z = a+bi$ $(a,b \in \mathbb{R})$.

$|z-3-4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a-3)^2 + (b-4)^2 = 5\,(1)$.

$P = |z+2|^2 - |z-i|^2 = (a+2)^2 + b^2 - \left[a^2 + (b-1)^2\right] = 4a + 2b + 3\,(2)$.

Từ (1) và (2) ta có $20a^2 + (64-8P)a + P^2 - 22P + 137 = 0$ (*).

Phương trình (*) có nghiệm khi $\Delta' = -4P^2 + 184P - 1716 \ge 0$

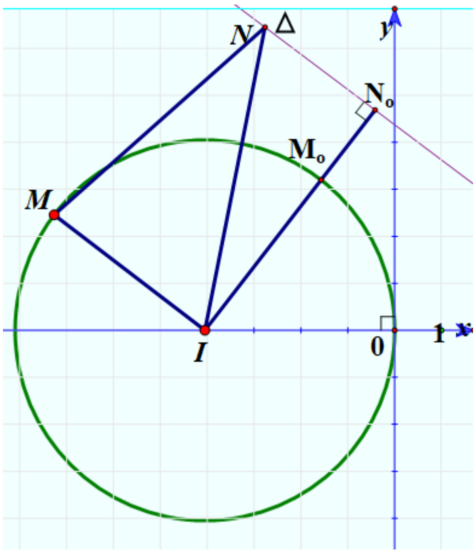
$\Leftrightarrow 13 \le P \le 33 \Rightarrow |w| = \sqrt{1258}$.

Câu 31. Cho hai số phức z, z' thỏa mãn $|z+5| = 5$ và $|z'+1-3i| = |z'-3-6i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z-z'|$.

A. $\sqrt{10}$. **B.** $3\sqrt{10}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=x+yi$, $N(x';y')$ là điểm biểu diễn của số phức $z=x'+y'i$.

Ta có $|z+5|=5 \Leftrightarrow |x+5+yi|=5 \Leftrightarrow (x+5)^2+y^2=5^2$.

Vậy M thuộc đường tròn $(C):(x+5)^2+y^2=5^2$

$|z'+1-3i|=|z'-3-6i| \Leftrightarrow |(x'+1)+(y'-3)i|=|(x'-3)+(y'-6)i|$

$\Leftrightarrow (x'+1)^2+(y'-3)^2=(x'-3)^2+(y'-6)^2 \Leftrightarrow 8x'+6y'=35$

Vậy N thuộc đường thẳng $\Delta: 8x+6y=35$

Dễ thấy đường thẳng Δ không cắt (C) và $|z-z'|=MN$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác, cho bộ ba điểm (I,M,N) ta có.

$$MN \geq |IN-IM|=|IN-R| \geq |IN_0-R|=|d(I,\Delta)-R|=\left|\frac{|8.(-5)+6.0-5|}{\sqrt{8^2+6^2}}-5\right|=\frac{5}{2}$$

Dấu bằng đạt tại $M \equiv M_0; N=N_0$.

Câu 32. Cho số phức z thỏa mãn $|z| \leq 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2|z+1|+2|z-1|+|z-\bar{z}-4i|$ bằng:

A. $2+\frac{7}{\sqrt{15}}$. **B.** $2+\sqrt{3}$. **C.** $4+\frac{14}{\sqrt{15}}$. **D.** $4+2\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi $z=x+yi$, $(x,\ y\in\mathbb{R})$. Theo giả thiết, ta có $|z| \leq 2 \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 4$.

Suy ra $-2 \leq x,\ y \leq 2$.

Khi đó, $P=2|z+1|+2|z-1|+|z-\bar{z}-4i| = 2\left(\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}+|y-2|\right)$

$\Leftrightarrow P=2\left(\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}+|y-2|\right) \geq 2\left(2\sqrt{1+y^2}+2-y\right)$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=0$.

Xét hàm số $f(y)=2\sqrt{1+y^2}+2-y$ trên đoạn $[-2;\,2]$, ta có:

$$f'(y)=\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}-1=\frac{2y-\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+y^2}};\ f'(y)=0\Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ta có $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2+\sqrt{3}$; $f(-2)=4+2\sqrt{5}$; $f(2)=2\sqrt{5}$.

Suy ra $\min\limits_{[-2;\,2]} f(y)=2+\sqrt{3}$ khi $y=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Do đó $P\ge 2\left(2+\sqrt{3}\right)=4+2\sqrt{3}$. Vậy $P_{\min}=4+2\sqrt{3}$ khi $z=\frac{1}{\sqrt{3}}i$.

Câu 33. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+2|1-z|$ bằng

A. $6\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi số phức $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$.

Theo giả thiết, ta có $|z|=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1$. Suy ra $-1\le x\le 1$.

Khi đó, $P=|1+z|+2|1-z|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}+2\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{2x+2}+2\sqrt{2-2x}$.

Suy ra $P\le\sqrt{\left(1^2+2^2\right)\left[(2x+2)+(2-2x)\right]}$ hay $P\le 2\sqrt{5}$, với mọi $-1\le x\le 1$.

Vậy $P_{\max}=2\sqrt{5}$ khi $2\sqrt{2x+2}=\sqrt{2-2x}\Leftrightarrow x=-\frac{3}{5},\ y=\pm\frac{4}{5}$.

Câu 34. Cho các số phức $z_1=3i$, $z_2=-1-3i$, $z_3=m-2i$. Tập giá trị tham số m để số phức z_3 có môđun nhỏ nhất trong 3 số phức đã cho là.

A. $\left\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\right\}$. **B.** $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$.

C. $\left(-\infty;-\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5};+\infty\right)$. **D.** $\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

☑ Ta có: $|z_1|=3$, $|z_2|=\sqrt{10}$, $|z_3|=\sqrt{m^2+4}$.

☑ Để số phức z_3 có môđun nhỏ nhất trong 3 số phức đã cho thì

$\sqrt{m^2+4}<3\Leftrightarrow -\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$.

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3|=2|z|$ và $\max|z-1+2i|=a+b\sqrt{2}$. Tính $a+b$.

A. 3. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 4. **D.** $4\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Khi đó $|z-3|=2|z|\Leftrightarrow|(x-3)+yi|=2|x+yi|\Leftrightarrow\sqrt{(x-3)^2+y^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$.

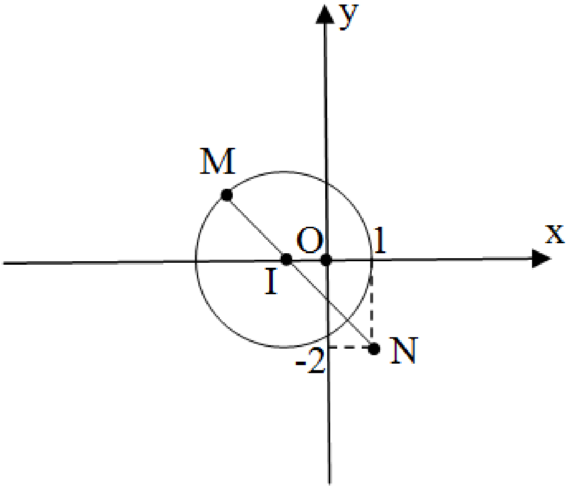
$\Leftrightarrow(x-3)^2+y^2=4\left(x^2+y^2\right)\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+6x-9=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-3=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+y^2=2^2$.

Suy ra tập hợp các điểm M biểu diễn z chính là đường tròn tâm $I(-1;0), R=2$.

Ta có $|z-1+2i|=|z-(1-2i)|=MN,\ N(1;-2)$. Dựa vào hình vẽ nhận thấy MN lớn nhất khi đi qua tâm. Khi đó $MN = NI + IM = 2\sqrt{2}+R=2\sqrt{2}+2$. Suy ra $a=2,\ b=2$.

Do đó $a+b=2+2=4$.

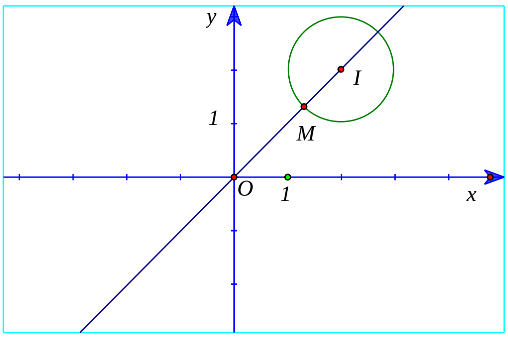


Câu 36. Cho số phức z thỏa mãn: $|z-2-2i|=1$. Số phức $z-i$ có môđun nhỏ nhất là:

A. $\sqrt{5}+2$. **B.** $\sqrt{5}+1$. **C.** $\sqrt{5}-2$. **D.** $\sqrt{5}-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Gọi $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có: $|z-2-2i|=1 \Leftrightarrow |(x-2)+(y-2)i|=1 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=1$.

Tập hợp các điểm trong mặt phẳng Oxy biểu diễn của số phức z là đường tròn (C) tâm $I(2;2)$ và bán kính $R=1$.

$|z-i|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}=IM$, với $I(2;2)$ là tâm đường tròn, M là điểm chạy trên đường tròn.

Khoảng cách này ngắn nhất khi M là giao điểm của đường thẳng nối hai điểm $N(0;1)\in Oy, I(2;2)$ với đường tròn (C).

$IM_{\min}=IN-R=\sqrt{5}-1$

Câu 37. Cho số phức z thỏa $|z|\ge 2$. Tìm tích của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|\dfrac{z+i}{z}\right|$.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $P=\left|1+\frac{i}{z}\right|\le 1+\frac{1}{|z|}\le\frac{3}{2}$. Mặt khác: $\left|1+\frac{i}{z}\right|\ge 1-\frac{1}{|z|}\ge\frac{1}{2}$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{2}$, xảy ra khi $z=-2i$; giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{3}{2}$ xảy ra khi $z=2i$.

Câu 38. Tìm số phức z sao cho $\left|z-(3+4i)\right|=\sqrt{5}$ và biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $z=5+5i$. **B.** $z=2+i$. **C.** $z=2+2i$. **D.** $z=4+3i$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

$\left|z-(3+4i)\right|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=5$.

Đặt $\begin{cases}x-3=\sqrt{5}\sin t\Leftrightarrow x=3+\sqrt{5}\sin t\\ y-4=\sqrt{5}\cos t\Leftrightarrow y=4+\sqrt{5}\cos t\end{cases}$.

$P=|z+2|^2-|z-i|^2=4x+2y+3=4\left(3+\sqrt{5}\sin t\right)+2\left(4+\sqrt{5}\cos t\right)+3$.

$\Leftrightarrow 4\sqrt{5}\sin t+2\sqrt{5}\cos t=P-23$.

Theo điều kiện có nghiệm phương trình lượng giác.

$\Rightarrow\left(4\sqrt{5}\right)^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2\ge(P-23)^2\Leftrightarrow P^2-46P+429\le 0\Leftrightarrow 13\le P\le 33$.

Vậy GTLN của P là 33 $\Rightarrow z=5+5i$.

Câu 39. Cho số phức z thỏa điều kiện $\left|z^2+4\right|=\left|z(z+2i)\right|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z+i|$ bằng ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Giả sử $z=x+yi\ (x,\ y\in\mathbb{R})$.

$\left|z^2+4\right|=\left|z(z+2i)\right|\Leftrightarrow\left|z^2-(2i)^2\right|=\left|z(z+2i)\right|\Leftrightarrow\left|(z-2i)(z+2i)\right|=\left|z(z+2i)\right|$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z+2i=0\quad(1)\\ |z-2i|=|z|\quad(2)\end{array}\right.$.

$(1)\Leftrightarrow z=-2i$. Suy ra $|z+i|=|-2i+i|=|-i|=1$.

$(2)\Leftrightarrow|x+yi-2i|=|x+yi|\Leftrightarrow\sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{x^2+y^2}\Leftrightarrow x^2+y^2-4y+4=x^2+y^2$

$\Leftrightarrow y=1$.

Suy ra $|z+i|=|x+yi+i|=\sqrt{x^2+(y+1)^2}=\sqrt{x^2+4}\ge 2,\forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z+i|$ bằng 1.

Câu 40. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=3$. Tìm môđun nhỏ nhất của số phức $z-1+i$.

A. $\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi $z=x+yi;\ (x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R})\Rightarrow z-1+i=(x-1)+(y+1)i$. Ta có:

$|z-1+2i|=9\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=9$.

Đặt $x=1+3\sin t;\ y=-2+3\cos t;\ t\in[0;2\pi]$.

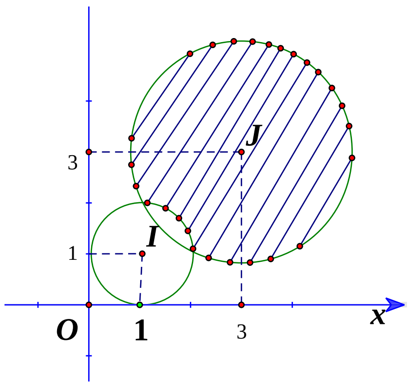
$\Rightarrow|z-1+i|^2=(3\sin t)^2+(-1+3\cos t)^2=10-6\cos t\Rightarrow 2\le|z-2i|\le 4\Rightarrow|z-1+i|_{\min}=2$, khi $z=1+i$.

Câu 41. Cho số phức $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $|z-1-i|\ge 1$ và $|z-3-3i|\le\sqrt{5}$. Gọi m,M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+2y$. Tính tỉ số $\frac{M}{m}$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{14}{5}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Gọi A là điểm biểu diễn của số phức z.

Từ giả thiết $|z-1-i|\ge 1$ ta có A là các điểm nằm bên ngoài hình tròn (C_1) có tâm $I(1;1)$ bán kính $R_1=1$.

Mặt khác $|z-3-3i|\le\sqrt{5}$ ta có A là các điểm nằm bên trong hình tròn (C_2) có tâm $J(3;3)$ bán kính $R_2=\sqrt{5}$.

Ta lại có: $P=x+2y\Leftrightarrow x+2y-P=0\,(\Delta)$. Do đó để tồn tại x,y thì (Δ) và phần gạch chéo phải có điểm chung tức là $d(J;\Delta)\le\sqrt{5}\Leftrightarrow\frac{|9-P|}{\sqrt{5}}\le\sqrt{5}\Leftrightarrow|9-P|\le 5\Leftrightarrow 4\le P\le 14$. Suy ra $m=4;M=14\Rightarrow\frac{M}{m}=\frac{7}{2}$.

Câu 42. Cho số phức z thỏa mãn $5|z-i|=|z+1-3i|+3|z-1+i|$. Tìm giá trị lớn nhất M của $|z-2+3i|$?

A. $M=4\sqrt{5}$ **B.** $M=9$ **C.** $M=\frac{10}{3}$ **D.** $M=1+\sqrt{13}$

Chọn A

Hướng dẫn giải

Gọi $A(0;1)$, $B(-1;3), C(1;-1)$. Ta thấy A là trung điểm của BC

$\Rightarrow MA^2 = \dfrac{MB^2 + MC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} \Leftrightarrow MB^2 + MC^2 = 2MA^2 + \dfrac{BC^2}{2} = 2MA^2 + 10$.

Ta lại có : $5|z-i| = |z+1-3i| + 3|z-1+i|$

$\Leftrightarrow 5MA = MB + 3MC \le \sqrt{10}.\sqrt{MB^2 + MC^2}$

$\Rightarrow 25MA^2 \le 10\left(2MA^2 + 10\right) \Rightarrow MC \le 2\sqrt{5}$

Mà $|z-2+3i| = |(z-i)+(-2+4i)| \le |z-i| + |2-4i| \le |z-i| + 2\sqrt{5} \le 4\sqrt{5}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} |z-i| = 2\sqrt{5} \\ \dfrac{a}{-2} = \dfrac{b-1}{4} \end{cases}$, với $z = a + bi$; $a,\ b \in \mathbb{R}$.

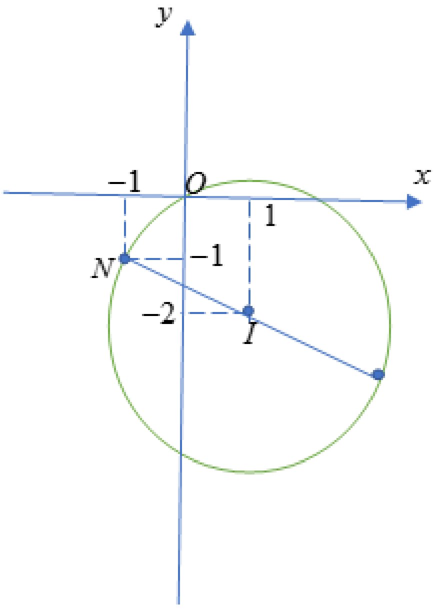
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2-3i\ (loai) \\ z = -2+5i \end{array}\right.$.

Câu 43. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z-1+2i| = \sqrt{5}$ và $w = z+1+i$ có môđun lớn nhất. Số phức z có môđun bằng:

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Gọi $z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow z - 1 + 2i = (x-1) + (y+2)i$.

Ta có: $|z-1+2i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$.

Suy ra tập hợp điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z thuộc đường tròn (C) tâm $I(1;-2)$ bán kính $R = \sqrt{5}$ như hình vẽ.

Dễ thấy $O \in (C)$, $N(-1;-1) \in (C)$.

Theo đề ta có: $M(x;y) \in (C)$ là điểm biểu diễn cho số phức z thỏa mãn:

$w = z + 1 + i = x + yi + 1 + i = (x+1) + (y+1)i \Rightarrow |z+1+i| = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = |\overrightarrow{MN}|$.

Suy ra $|z+1+i|$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow MN$ lớn nhất.

Mà $M, N \in (C)$ nên MN lớn nhất khi MN là đường kính đường tròn $(C) \Leftrightarrow I$ là trung điểm $MN \Rightarrow M(3;-3) \Rightarrow z = 3 - 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$.

Câu 44. Cho z_1, z_2, z_3 là các số phức thỏa mãn $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Khẳng định nào dưới đây là **sai** ?

A. $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| = |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$.
B. $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| \le |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$.
C. $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| \ge |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$.
D. $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| \ne |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1: Ta có: $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_2 + z_3 = -z_1$

$(z_1 + z_2 + z_3)^3 = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + 3(z_1z_2 + z_1z_3)(z_1 + z_2 + z_3) + 3z_2z_3(z_2 + z_3)$

$= z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3 \Rightarrow z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 3z_1z_2z_3$.

$\Rightarrow |z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| = |3z_1z_2z_3| = 3|z_1||z_2||z_3| = 3$

Mặt khác $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ nên $|z_1|^3 + |z_2|^3 + |z_3|^3 = 3$. Vậy phương án D sai.

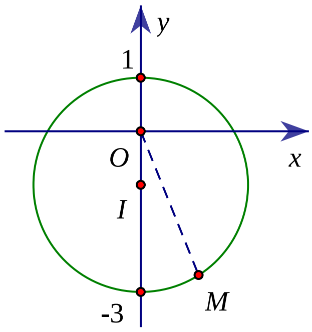
Cách 2: thay thử $z_1 = z_2 = z_3 = 1$ vào các đáp án, thấy đáp án D bị sai

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn $\left|\frac{-2-3i}{3-2i}z + 1\right| = 2$. Giá trị lớn nhất của môđun số phức z là

A. $\sqrt{3}$. **B.** 3. **C.** 2. **D.** $\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Đặt: $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có: $\left|\frac{-2-3i}{3-2i}z + 1\right| = 2 \Leftrightarrow |-iz + 1| = 2 \Leftrightarrow |z + i| = 2 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = 4$.

Vậy tập hợp điểm M biểu diễn số phức z nằm trên đường tròn tâm $I(0;-1)$ và bán kính $R = 2$.

Ta có: $|z| = OM$.

Do đó giá trị lớn nhất của $|z|$ khi OM lớn nhất nghĩa là O, M, I thẳng hàng $\Rightarrow \max|z| = 3$.

Câu 46. Cho số phức z thỏa mãn z không phải số thực và $w=\frac{z}{2+z^2}$ là số thực. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1-i|$ là?

A. $\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Cách 1.

Xét $z=0$ suy ra $w=0$ suy ra $P=|z+1-i|=\sqrt{2}$.

Xét $z\neq 0$ suy ra $\frac{1}{w}=z+\frac{2}{z}$.

Gọi $z=a+bi, b\neq 0$ suy ra $\frac{1}{w}=z+\frac{2}{z}=\left(\frac{2a}{a^2+b^2}+a\right)-b\left(\frac{2}{a^2+b^2}-1\right)i$.

Vì $\frac{1}{w}\in\mathbb{R}$ nên $b\left(\frac{2}{a^2+b^2}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ a^2+b^2=2 \end{array}\right.$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn $(C): x^2+y^2=2$.

Xét điểm $A(-1;1)$ là điểm biểu diễn số phức $z_0=-1+i$, suy ra $P=MA$.

$\Rightarrow Max\ P=OA+r=2\sqrt{2}$. (Với r là bán kính đường tròn $(C): x^2+y^2=2$).

Cách 2.

$w=\frac{z}{2+z^2}\Leftrightarrow w\left(2+z^2\right)=z\Leftrightarrow z^2-\frac{1}{w}z+2=0\ (*)$, $(*)$ là phương trình bậc hai với hệ số thực $\left(\frac{1}{w}\in\mathbb{R}\right)$. Vì z thỏa $(*)$ nên z là nghiệm phương trình $(*)$.

Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của $(*)$ suy ra $z_1.z_2=2\Rightarrow |z_1.z_2|=2\Leftrightarrow |z_1||z_2|=2\Rightarrow |z|=\sqrt{2}$.

Suy ra $P=|z+1-i|\leq |z|+|1-i|=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

Câu 47. Biết số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z-3-4i|=\sqrt{5}$ và biểu thức $M=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính môđun của số phức $z+i$.

A. $|z+i|=5\sqrt{2}$ **B.** $|z+i|=\sqrt{41}$. **C.** $|z+i|=2\sqrt{41}$ **D.** $|z+i|=3\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi $z=x+yi;\ (x\in\mathbb{R}; y\in\mathbb{R})$. Ta có: $|z-3-4i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow (C): (x-3)^2+(y-4)^2=5$: tâm $I(3;4)$ và $R=\sqrt{5}$.

Mặt khác:

$M=|z+2|^2-|z-i|^2=(x+2)^2+y^2-\left[\left(x^2\right)+(y-1)^2\right]=4x+2y+3\Leftrightarrow d: 4x+2y+3-M=0.$

Do số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện nên d và (C) có điểm chung

$\Leftrightarrow d(I;d)\leq R\Leftrightarrow \frac{|23-M|}{2\sqrt{5}}\leq\sqrt{5}\Leftrightarrow |23-M|\leq 10\Leftrightarrow 13\leq M\leq 33$

$$\Rightarrow M_{\max}=33\Leftrightarrow\begin{cases}4x+2y-30=0\\(x-3)^2+(y-4)^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=-5\end{cases}\Rightarrow z+i=5-4i\Rightarrow|z+i|=\sqrt{41}.$$

Câu 48. Cho số phức z và w thỏa mãn $z+w=3+4i$ và $|z-w|=9$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|z|+|w|$.

A. $\max T=14$. **B.** $\max T=4$. **C.** $\max T=\sqrt{106}$. **D.** $\max T=\sqrt{176}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$. Do $z+w=3+4i$ nên $w=(3-x)+(4-y)i$.

Mặt khác $|z-w|=9$ nên $|z-w|=\sqrt{(2x-3)^2+(2y-4)^2}=\sqrt{4x^2+4y^2-12x-16y+25}=9$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2-6x-8y=28$ (1). Suy ra $T=|z|+|w|=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(3-x)^2+(4-y)^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có $T^2\le 2\left(2x^2+2y^2-6x-8y+25\right)$ (2).

Dấu $"="$ xảy ra khi $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(3-x)^2+(4-y)^2}$.

Từ (1) và (2) ta có $T^2\le 2.(28+25)\Leftrightarrow -\sqrt{106}\le T\le\sqrt{106}$. Vậy $MaxT=\sqrt{106}$.

Câu 49. Cho số phức z thỏa mãn $|z-4|+|z+4|=10$. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là.

A. 5 và 4. **B.** 4 và 3. **C.** 5 và 3. **D.** 10 và 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức z.

Theo đề: $|z-4|+|z+4|=10\Leftrightarrow\sqrt{(a-4)^2+b^2}+\sqrt{(a+4)^2+b^2}=10$

$\Leftrightarrow (a+4)^2+b^2=100+(a-4)^2+b^2-20\sqrt{(a-4)^2+b^2}\Leftrightarrow 20\sqrt{(a-4)^2+b^2}=100-16a$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{(a-4)^2+b^2}=25-4a\Leftrightarrow 25\left(a^2-8a+16+b^2\right)=625+16a^2-200a$

$\Leftrightarrow 9a^2+25b^2=225\Leftrightarrow\dfrac{a^2}{5^2}+\dfrac{b^2}{3^2}=1.$

Dựa vào hình elip.

$\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}max\Leftrightarrow a=5\Rightarrow b=0$ và $\sqrt{a^2+b^2}\min\Leftrightarrow b=3\Rightarrow a=0$.

Câu 50. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+5|=5$, $|z_2+1-3i|=|z_2-3-6i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$ là:

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{3}{2}$ **C.** $\dfrac{5}{2}$ **D.** $\dfrac{7}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Giả sử $z_1=a_1+b_1i\,(a_1,b_1\in\mathbb{R})$, $z_2=a_2+b_2i\,(a_2,b_2\in\mathbb{R})$.

Ta có

□ $|z_1+5|=5 \Leftrightarrow (a_1+5)^2+b_1^2=25$. Do đó, tập hợp các điểm A biểu diễn cho số phức z_1 là đường tròn $(C):(x+5)^2+y^2=25$ có tâm là điểm $I(-5;0)$ và bán kính $R=5$.

□ $|z_2+1-3i|=|z_2-3-6i| \Leftrightarrow (a_2+1)^2+(b_2-3)^2=(a_2-3)^2+(b_2-6)^2$

$\Leftrightarrow 8a_2+6b_2-35=0$. Do đó tập hợp các điểm B biểu diễn cho số phức z_2 là đường thẳng $\Delta: 8x+6y-35=0$.

Khi đó, ta có $|z_1-z_2|=AB$.

Suy ra $|z_1-z_2|_{\min}=AB_{\min}=d(I;\Delta)-R=\dfrac{|8.(-5)+6.0-35|}{\sqrt{8^2+6^2}}-5=\dfrac{5}{2}$.

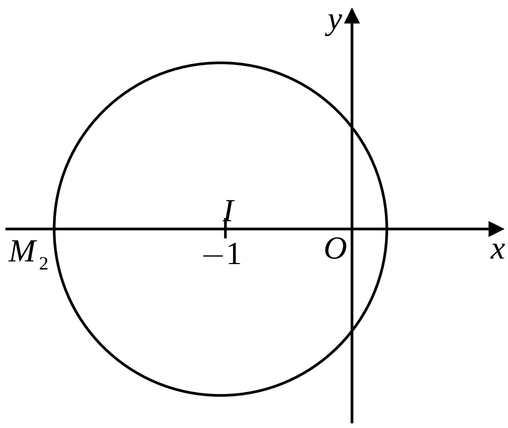
Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$ là $\dfrac{5}{2}$.

Câu 51. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1|=|(1+i)z|$. Đặt $m=|z|$, tìm giá trị lớn nhất của m.

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}-1$. **C.** $\sqrt{2}+1$. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Đặt $z=x+iy$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có $|z-1|=|(1+i)z| \Leftrightarrow |z-1|=|1+i|.|z|$.

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=2(x^2+y^2) \Leftrightarrow x^2+y^2+2x-1=0$.

$\Rightarrow$ tập các điểm biểu diễn z là đường tròn tâm $I(-1;0)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$.

$\Rightarrow Max|z|=OM_2=OI+R=1+\sqrt{2}$.

Câu 52. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+3|1-z|$.

A. $6\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{20}$. **C.** $2\sqrt{20}$. **D.** $3\sqrt{15}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi;\ (x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R})$. Ta có: $|z|=1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=1 \Rightarrow y^2=1-x^2 \Rightarrow x\in[-1;1]$

Ta có: $P=|1+z|+3|1-z|=\sqrt{(1+x)^2+y^2}+3\sqrt{(1-x)^2+y^2}=\sqrt{2(1+x)}+3\sqrt{2(1-x)}$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{2(1+x)}+3\sqrt{2(1-x)};\ x\in[-1;1]$. Hàm số liên tục trên $[-1;1]$ và với $x\in(-1;1)$ ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2(1+x)}}-\dfrac{3}{\sqrt{2(1-x)}}=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{4}{5}\in(-1;1)$

Ta có: $f(1)=2;\ f(-1)=6;\ f\left(-\dfrac{4}{5}\right)=2\sqrt{20}\Rightarrow P_{\max}=2\sqrt{20}$.

Câu 53. Trong các số phức z thỏa mãn $|z|=|\overline{z}-1+2i|$, số phức có mô đun nhỏ nhất là

A. $z=5$. **B.** $z=1+\dfrac{3}{4}i$. **C.** $z=\dfrac{1}{2}+i$. **D.** $z=3+i$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$ suy ra $\overline{z}=x-yi$.

Theo giả thiết ta có $x^2+y^2=(x-1)^2+(2-y)^2\Leftrightarrow -2x-4y+5=0\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}-2y$.

Khi đó $|z|^2=x^2+y^2=\left(\dfrac{5}{2}-2y\right)^2+y^2=5(y-1)^2+\dfrac{5}{4}\geq\dfrac{5}{4}$.

Vậy $|z|$ nhỏ nhất bằng $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ khi $\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}-2y\\ y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=1\end{cases}$.

Vậy số phức có mô đun nhỏ nhất là $z=\dfrac{1}{2}+i$.

Câu 54. Cho số phức thỏa mãn $|z-2+2i|=1$. Giá trị lớn nhất của $|z|$ là.

A. $4\sqrt{2}-2$. **B.** $2+\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}+1$. **D.** $3\sqrt{2}+1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Cách 1:

Đặt $z=x+yi$ khi đó ta có $|z-2+2i|=1\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}=1\Leftrightarrow(x-2)^2+(y+2)^2=1$.

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(2;-2)$ bán kính $r=1$.

Phương trình đường thẳng $OI: y=-x$.

Hoành độ giao điểm của OI và đường tròn tâm $I(2;-2)$ là nghiệm phương trình tương giao:

$(x-2)^2+(-x+2)^2=1\Leftrightarrow x=2\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ta có hai tọa độ giao điểm là $M\left(2+\dfrac{1}{\sqrt{2}};-2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ và $M'\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{2}};-2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ta thấy $OM=2\sqrt{2}+1; OM'=2\sqrt{2}-1$.

Vậy tại giá trị lớn nhất của $|z|=2\sqrt{2}+1$.

Cách 2: Casio.

Quy tắc tính đối với bài toán tổng quát như sau.

Cho số phức z thỏa mãn $|z-z_1|=r$. Tìm GTLN, GTNN của $P=|z-z_2|$.

Bước 1: Tính $a=|z_1-z_2|$.

Bước 2: GTLN của $P=a+r$, GTNN của $P=a-r$.

Áp dụng đối với bài này ta có $r=1; z_1=2-2i, z_2=0 \Rightarrow a=|z_1-z_2|=2\sqrt{2}$.

Vậy GTLN của $|z|=2\sqrt{2}+1$.

Cách 3:

Xét $|z-2+2i|=1 \Leftrightarrow 1=|z-(2-2i)| \geq |z|-|2-2i|=|z|-2\sqrt{2}$.

Vậy $|z| \leq 1+2\sqrt{2}$, GTLN của $|z|=1+2\sqrt{2}$.

Câu 55. Cho số phức z thỏa điều kiện $|z^2+4|=|z(z+2i)|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z+i|$ bằng ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Giả sử $z=x+yi\ (x,\ y\in\mathbb{R})$.

$$|z^2+4|=|z(z+2i)| \Leftrightarrow |z^2-(2i)^2|=|z(z+2i)| \Leftrightarrow |(z-2i)(z+2i)|=|z(z+2i)|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z+2i=0 & (1) \\ |z-2i|=|z| & (2) \end{array}\right.$$

$(1) \Leftrightarrow z=-2i$. Suy ra $|z+i|=|-2i+i|=|-i|=1$.

$(2) \Leftrightarrow |x+yi-2i|=|x+yi| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow x^2+y^2-4y+4=x^2+y^2$

$\Leftrightarrow y=1$.

Suy ra $|z+i|=|x+yi+i|=\sqrt{x^2+(y+1)^2}=\sqrt{x^2+4}\geq 2, \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z+i|$ bằng 1.

Câu 56. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để có đúng 2 số phức z thỏa $|z-(m-1)+i|=8$ và $|z-1+i|=|\overline{z}-2+3i|$.

A. 66. **B.** 65. **C.** 131. **D.** 130.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $z=x+iy\ (x,y\in\mathbb{R})$

Ta có: $|z-(m-1)+i|=2 \Leftrightarrow$ tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(m-1;-1)$, bán kính $R=8$.

Ta có: $|z-1+i|=|\overline{z}-2+3i| \Leftrightarrow$ tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường thẳng $d: 2x+8y-11=0$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ khoảng cách từ I đến d nhỏ hơn R $\Leftrightarrow |2m-21|<8\sqrt{68}$

$\Leftrightarrow \frac{21}{2}-4\sqrt{68}<m<\frac{21}{2}+4\sqrt{68}$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $-22\leq m\leq 43 \Rightarrow$ có 66 giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 57. Cho số phức z thỏa mãn $|z|\leq 1$. Đặt $A=\frac{2z-i}{2+iz}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $|A|<1$. **B.** $|A|>1$. **C.** $|A|\le 1$. **D.** $|A|\ge 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt Có $a=a+bi,\ (a,\ b\in\mathbb{R})\Rightarrow a^2+b^2\le 1$ (do $|z|\le 1$)

$$|A|=\left|\frac{2z-i}{2+iz}\right|=\left|\frac{2a+(2b-1)i}{2-b+ai}\right|=\sqrt{\frac{4a^2+(2b+1)^2}{(2-b)^2+a^2}}$$

Ta chứng minh $\dfrac{4a^2+(2b+1)^2}{(2-b)^2+a^2}\le 1$.

Thật vậy ta có $\dfrac{4a^2+(2b+1)^2}{(2-b)^2+a^2}\le 1\Leftrightarrow 4a^2+(2b+1)^2\le(2-b)^2+a^2\Leftrightarrow a^2+b^2\le 1$

Dấu "=" xảy ra khi $a^2+b^2=1$.

Vậy $|A|\le 1$.

Câu 58. Trong tập hợp các số phức z thỏa mãn: $\left|\dfrac{z+2-i}{z+1-i}\right|=\sqrt{2}$. Tìm môđun lớn nhất của số phức $z+i$.

A. $2+\sqrt{2}$. **B.** $3+\sqrt{2}$. **C.** $3-\sqrt{2}$. **D.** $2-\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$.

$$\left|\frac{z+2-i}{z+1-i}\right|=\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{|z+2-i|}{|z+1-i|}=\sqrt{2}\Leftrightarrow|(x+2)+(y-1)i|=\sqrt{2}|(x+1)+(y-1)i|.$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{2}\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}.$$

$$\Leftrightarrow(x+2)^2+(y-1)^2=2\left[(x+1)^2+(y-1)^2\right].\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=2.$$

Suy ra $(y-1)^2\le 2\Rightarrow y\le 1+\sqrt{2}$.

Ta có: $x^2+(y-1)^2=2\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=2+4y\Rightarrow|z+i|^2=2+4y\le 2+4\left(1+\sqrt{2}\right)=6+4\sqrt{2}$.

$$\Rightarrow|z+1|\le\sqrt{6+4\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}.$$

Vậy $|z+1|=2+\sqrt{2}$ là môđun lớn nhất của số phức $z+i$.

Câu 59. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2-2z+5|=|(z-1+2i)(z+3i-1)|$.

Tính $\min|w|$, với $w=z-2+2i$.

A. $\min|w|=\dfrac{1}{2}$. **B.** $\min|w|=1$. **C.** $\min|w|=2$. **D.** $\min|w|=\dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có

$$|z^2-2z+5|=|(z-1+2i)(z+3i-1)|\Leftrightarrow|(z-1+2i)(z-1-2i)|=|(z-1+2i)(z+3i-1)|$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z-1+2i=0\\|(z-1-2i)|=|(z+3i-1)|\end{array}\right..$$

Trường hợp 1: $z-1+2i=0\Rightarrow w=-1\Rightarrow |w|=1\ (1)$.

Trường hợp 2: $|z-1-2i|=|z+3i-1|$.

Gọi $z=a+bi$ (với $a,b\in\mathbb{R}$) khi đó ta được

$|a-1+(b-2)i|=|(a-1)+(b+3)i|\Leftrightarrow (b-2)^2=(b+3)^2\Leftrightarrow b=-\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $w=z-2+2i=a-2+\dfrac{3}{2}i\Rightarrow |w|=\sqrt{(a-2)^2+\dfrac{9}{4}}\ge\dfrac{3}{2}\ (2)$.

Từ (1), (2) suy ra $\min|w|=1$.

Câu 60. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$.

A. $\sqrt{13}$. **B.** $1+\sqrt{13}$. **C.** $2+\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{13}-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $z=x+yi,\ (x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|z-2-3i|=1\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=1\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-3)^2=1$.

Đặt: $\begin{cases}x-2=\sin t\\ y-3=\cos t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2+\sin t\\ y=3+\cos t\end{cases}$.

Ta được: $z^2=x^2+y^2=(2+\sin t)^2+(3+\cos t)^2=4\sin t+6\cos t+14$.

$=\sqrt{4^2+6^2}\sin(t+\alpha)+14=2\sqrt{13}\sin(t+\alpha)+14$.

Suy ra: $|z|\le\sqrt{2\sqrt{13}+14}=\sqrt{13}+1$.

Câu 61. Gọi điểm A, B lần lượt biểu diễn các số phức z và $z'=\dfrac{1+i}{2}z;\ (z\ne 0)$ trên mặt phẳng tọa độ (A, B, C và A', B', C' đều không thẳng hàng). Với O là gốc tọa độ, khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tam giác OAB vuông cân tại A. **B.** Tam giác OAB đều.

C. Tam giác OAB vuông cân tại O. **D.** Tam giác OAB vuông cân tại B.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $OA=|z|;|OB|=|z'|=\left|\dfrac{1+i}{2}.z\right|=\left|\dfrac{1+i}{2}\right|.|z|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|z|$

Ta có: $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\Rightarrow BA=|z-z'|=\left|z-\dfrac{1+i}{2}z\right|=\left|\dfrac{1-i}{2}\right|.|z|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|z|$

Suy ra: $OA^2=OB^2+AB^2$ và $AB=OB\Rightarrow OAB$ là tam giác vuông cân tại B.

Câu 62. Xét số phức $z=a+bi\,(a,b\in R,b>0)$ thỏa mãn $|z|=1$. Tính $P=2a+4b^2$ khi $|z^3-z+2|$ đạt giá trị lớn nhất .

A. $P=4$. **B.** $P=2-\sqrt{2}$. **C.** $P=2$. **D.** $P=2+\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$|z|=1 \Rightarrow \bar{z}=\dfrac{1}{z}$

Do $b>0 \Rightarrow -1<a<1$

Ta có : $\left|z^3-z+2\right|=\left|z-\dfrac{1}{z}+\dfrac{2}{z^2}\right| =\left|z-\bar{z}+2\bar{z}^2\right|=2\left|bi+(a-bi)^2\right|$

$=2\left|bi+a^2-b^2-2abi\right| =2\sqrt{\left(a^2-b^2\right)^2+(b-2ab)^2}$

$=2\sqrt{b^2-4ab^2+1} =2\sqrt{1-a^2-4a\left(1-a^2\right)+1}$

$=2\sqrt{4a^3-a^2-4a+2}$

Biểu thức trên đạt GTLN trên miền $-1<a<1$ khi $a=\dfrac{-1}{2} \Rightarrow b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (do $b>0$)

Vậy $P=2a+4b^2=2$

Câu 63. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. 1. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 0. **D.** $\sqrt{2}-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $|z-1|=1 \Rightarrow$ Quỹ tích điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn (C) tâm $I(1;0)$, bán kính $R=1$.

Mặt khác $\begin{cases}|z|=OM \\ O\in(C)\end{cases} \Rightarrow |z|_{\min}=0$.

Câu 64. Cho các số phức z thỏa mãn $|z-4+3i|=2$. Giả sử biểu thức $P=|z|$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất khi z lần lượt bằng $z_1=a_1+b_1i \quad (a_1,b_1\in\mathbb{R})$ và $z_2=a_2+b_2i \quad (a_2,b_2\in\mathbb{R})$. Tính $S=a_1+a_2$

A. $S=8$. **B.** $S=10$. **C.** $S=4$. **D.** $S=6$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$

$|z-4+3i|=2 \Leftrightarrow |a+ib-4+3i|=2 \Leftrightarrow |a-4+(b+3)i|=2$

$\Leftrightarrow (a-4)^2+(b+3)^2=4$

Khi đó tập hợp các điểm $M(a;b)$ biểu diễn số phức $z=a+bi$ thuộc vào đường tròn (C) có tâm $I(4;-3)$, $R=2$. Ta có $OI=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Suy ra $|z|_{\max}=OI+R=5+2=7$, $|z|_{\min}=|OI-R|=5-2=3$.

Gọi Δ là đường thẳng qua hai điểm OI ta có

phương trình của $(\Delta):3x+4y=0$. Gọi M và N lần lượt là hai giao điểm của (Δ) và (C) sao cho $OM=3$ và $ON=7$ khi đó

$$\begin{cases}\overrightarrow{OM}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OI}\Rightarrow M\left(\dfrac{12}{5};-\dfrac{9}{5}\right)\\ \overrightarrow{ON}=\dfrac{7}{5}\overrightarrow{OI}\Rightarrow N\left(\dfrac{28}{5};-\dfrac{21}{5}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z_1=\dfrac{28}{5}-\dfrac{21}{5}i\\ z_2=\dfrac{12}{5}-\dfrac{9}{5}i\end{cases}\Rightarrow S=\dfrac{28}{5}+\dfrac{12}{5}=8.$$

Câu 65. Cho số phức z thỏa mãn $\left|(1+i)z+2\right|+\left|(1+i)z-2\right|=4\sqrt{2}$. Gọi $m=\max|z|$, $n=\min|z|$ và số phức $w=m+ni$. Tính $|w|^{2018}$

A. 5^{1009}. **B.** 6^{1009}. **C.** 2^{1009}. **D.** 4^{1009}.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\left|(1+i)z+2\right|+\left|(1+i)z-2\right|=4\sqrt{2}\Leftrightarrow|z+1-i|+|z-1+i|=4$.

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z, $F_1(-1;1)$ là điểm biểu diễn của số phức $z_1=-1+i$ và $F_2(1;-1)$ là điểm biểu diễn của số phức $z_2=1-i$. Khi đó ta có $MF_1+MF_2=4$. Vậy tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là Elip nhận F_1 và F_2 làm hai tiêu điểm.

Ta có $F_1F_2=2c\Leftrightarrow 2c=2\sqrt{2}\Leftrightarrow c=\sqrt{2}$.

Mặt khác $2a=4\Leftrightarrow a=2$ suy ra $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$.

Do đó Elip có độ dài trục lớn là $A_1A_2=2a=4$, độ dài trục bé là $B_1B_2=2b=2\sqrt{2}$.

Mặt khác O là trung điểm của AB nên $\mathrm{m}=\max|z|=\max OM=OA_1=a=2$ và $\mathrm{n}=\min|z|=\min OM=OB_1=b=\sqrt{2}$.

Do đó $w=2+\sqrt{2}i$ suy ra $|w|=\sqrt{6}\Rightarrow|w|^{2018}=6^{1009}$.

Câu 66. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+\left|z^2-z+1\right|$. Giá trị của $M.m$ bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\dfrac{13\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t=|z+1|\le|z|+1=2$ nên $t\in[0;2]$.

Do $|z|=1$ nên $z.\overline{z}=1\Rightarrow P=|z+1|+\left|z^2-z+z.\overline{z}\right|=|z+1|+|z+\overline{z}-1|$.

Ta có $t^2=|z+1|^2=(z+1)(\overline{z}+1)=z.\overline{z}+(z+\overline{z})+1=2+(z+\overline{z})$ nên $z+\overline{z}=t^2-2$.

Vậy $P=f(t)=t+\left|t^2-3\right|$, với $t\in[0;2]$.

Khi đó, $f(t)=\begin{cases}t^2+t-3 & \text{khi}\sqrt{3}\le t\le 2\\ -t^2+t+3 & \text{khi}\,0\le t<\sqrt{3}\end{cases}$ nên $f'(t)=\begin{cases}2t+1 & \text{khi}\sqrt{3}<t\le 2\\ -2t+1 & \text{khi}\,0\le t<\sqrt{3}\end{cases}$.

$f'(t)=0\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

$f(0)=3$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{13}{4}$; $f\left(\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}$; $f(2)=3$.

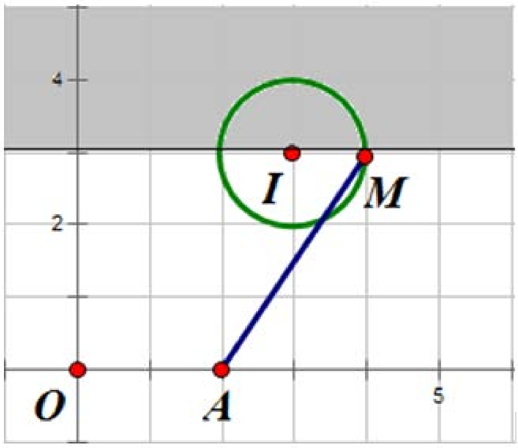
Vậy $M=\dfrac{13}{4}$; $m=\sqrt{3}$ nên $M.m=\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$.

Câu 67. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2i| \le |z-4i|$ và $|z-3-3i| = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z-2|$ là:

A. $\sqrt{10}+1$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $\sqrt{13}+1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z ta có:

$|z-2i| \le |z-4i| \Leftrightarrow x^2+(y-2)^2 \le x^2+(y-4)^2$

$\Leftrightarrow y \le 3$; $|z-3-3i| = 1 \Leftrightarrow$ điểm M nằm trên đường tròn tâm $I(3;3)$ và bán kính bằng 1. Biểu thức $P = |z-2| = AM$ trong đó $A(2;0)$, theo hình vẽ thì giá trị lớn nhất của $P = |z-2|$ đạt được khi $M(4;3)$ nên $\max P = \sqrt{(4-2)^2+(3-0)^2} = \sqrt{13}$.

Câu 68. Trong mặt phẳng tọa độ, hãy tìm số phức z có môđun nhỏ nhất, biết rằng số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i| = \sqrt{5}$.

A. $z=-1-2i$. **B.** $z=1-2i$. **C.** $z=-1+2i$. **D.** $z=1+2i$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi $z = a+bi\,(a,b \in \mathbb{R})$.

Ta có: $|z-2-4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |a+bi-2-4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |(a-2)+(b-4)i| = \sqrt{5}$.

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2+(b-4)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a-2)^2+(b-4)^2 = 5$.

Ta có: $|z-(2+4i)| = \sqrt{5} \Rightarrow$ Tập hợp các số phức là đường tròn (C) tâm $I(2;4)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z. Ta có: $|z| = |z-0| = OM$.

OM nhỏ nhất $\Rightarrow I, O, M$ thẳng hàng.

Ta có: $(IM): y = 2x$.

M là giao điểm của IM và $(C) \Rightarrow M(1;2) \vee M(3;6) \Rightarrow z = 1+2i \vee z = 3+6i$.

Ta có: $|1+2i| = \sqrt{5}$, $|3+6i| = 3\sqrt{5}$. Chọn $z = 1+2i$.

Câu 69. Cho z là số phức thay đổi thỏa mãn $\left|(1+i)z+2-i\right|=4$ và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho z trong mặt phẳng phức. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\left|x+y+3\right|$.

A. $4+2\sqrt{2}$. **B.** 8. **C.** 4. **D.** $4\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\left|(1+i)z+2-i\right|=4 \Leftrightarrow \left|z+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right|=2\sqrt{2}$. Vậy quỹ tích điểm biểu diễn cho số phức z là đường tròn (C) tâm $I\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ bán kính $R=2\sqrt{2}$ (1).

Biểu thức $T=\left|x+y+3\right|$, với $T\geq 0$ thì ta có $\left[\begin{array}{l} x+y+3-T=0 \\ x+y+3+T=0 \end{array}\right.$ (2).

Khi đó điểm M là điểm thuộc đường tròn (C) và một trong hai đường thẳng trong (2).

Điều kiện để một trong hai đường thẳng trên cắt đường tròn (C) là

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\left|4-T\right|}{\sqrt{2}}\leq 2\sqrt{2} \\ \dfrac{\left|T+4\right|}{\sqrt{2}}\leq 2\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\leq T\leq 8 \\ -8\leq T\leq 0 \end{array}\right. \Rightarrow 0\leq T\leq 8.$$ Vậy $\max T=8$.

Câu 70. Trong các số phức z thỏa mãn $\left|z-i\right|=\left|\overline{z}-2-3i\right|$. Hãy tìm z có môđun nhỏ nhất.

A. $z=\frac{27}{5}+\frac{6}{5}i$. **B.** $z=-\frac{6}{5}-\frac{27}{5}i$. **C.** $z=-\frac{6}{5}+\frac{27}{5}i$. **D.** $z=\frac{3}{5}-\frac{6}{5}i$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Giả sử $z=x+yi \ (x,y\in\mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z}=x-yi$.

Ta có $\left|x+yi-i\right|=\left|x-yi-2-3i\right| \Leftrightarrow \left|x+(y-1)i\right|=\left|(x-2)-(y+3)i\right|$

$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=(x-2)^2+(y+3)^2 \Leftrightarrow 1-2y=13-4x+6y \Leftrightarrow 4x=12+8y \Leftrightarrow x=2y+3$.

Do đó $|z|^2=x^2+y^2=(2y+3)^2+y^2=5y^2+12y+9=\left(y\sqrt{5}+\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2+\frac{9}{5}\geq\frac{9}{5}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y=-\frac{6}{5}$, khi đó $x=\frac{3}{5}\Rightarrow z=\frac{3}{5}-\frac{6}{5}i$.

Câu 71. Cho số phức z, tìm giá trị lớn nhất của $|z|$ biết rằng z thỏa mãn điều kiện $\left|\frac{-2-3i}{3-2i}z+1\right|=1$.

A. $\sqrt{2}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có: $\left|\frac{-2-3i}{3-2i}z+1\right|=1 \Leftrightarrow \left|-iz+1\right|=1 \Leftrightarrow \left|z+i\right|=1 \Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=1$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(0;-1)$, bán kính $R=1$.

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z, ta có $IM = 1$.

Ta có: $|z| = OM \le OI + IM \le 2$.

Câu 72. Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i| = |z-2i|$. Tìm môđun nhỏ nhất của số phức $z+2i$.

A. $3\sqrt{5}$. **B.** $3\sqrt{2}$ **C.** $3+\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi $z = x + yi;\ (x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R})$.

Ta có: $|z-2-4i| = |z-2i| \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} \Leftrightarrow x + y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 4 - x$.

Ta có: $|z+2i|^2 = x^2 + (y+2)^2 = x^2 + (6-x)^2 = 2x^2 - 12x + 36 = 2(x-3)^2 + 18 \ge 18$

$\Rightarrow |z+2i|_{\min} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ khi $z = 3 + i$.

Câu 73. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2| + |z+2| = 5$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính $M + m$?

A. $M + m = 1$ **B.** $M + m = 4$ **C.** $M + m = \frac{17}{2}$ **D.** $M + m = 8$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi $M(x;y)$, $F_1(-2;0)$, $F_1(2;0)$ biểu diễn cho số phức $z, -2, 2$.

Ta có $MF_1 + MF_2 = 5 \Rightarrow M$ chạy trên Elip có trục lớn $2a = 5$, trục nhỏ $2b = 2\sqrt{\frac{25}{4} - 4} = 3$.

Mà $|z| = OM$. Do đó giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là $M = \frac{5}{2}$; $m = \frac{3}{2}$.

Suy ra $M + m = 4$.

Câu 74. Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z-5+3i| = 3$, $|iw+4+2i| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |3iz + 2w|$.

A. $\sqrt{578} + 13$ **B.** $\sqrt{578} + 5$ **C.** $\sqrt{554} + 13$ **D.** $\sqrt{554} + 5$

Hướng dẫn giải

Chọn C

$|z-5+3i| = 3 \Rightarrow |3iz - 15i - 9| = 9$ là đường tròn có tâm $I(9;15)$ và $R = 9$.

$|iw+4+2i| = 2 \Rightarrow |2w - 8i + 4| = 4$ là đường tròn có tâm $J(4;-8)$ và $R' = 4$.

$T = |3iz + 2w|$ đạt giá trị lớn nhất khi $T = IJ + R + R' = \sqrt{554} + 13$.

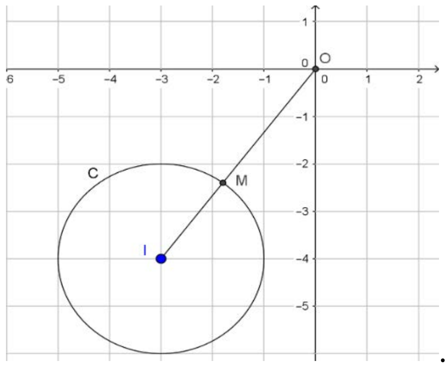
Câu 75. Trong các số phức z thỏa $|z+3+4i| = 2$, gọi z_0 là số phức có mô đun nhỏ nhất. Khi đó.

A. Không tồn tại số phức z_0. **B.** $|z_0| = 7$.

C. $|z_0| = 2$. **D.** $|z_0| = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Cách 1:

Đặt $z=a+bi\ \ (a,b\in\mathbb{R})$.

Khi đó $|z+3+4i|=2\Leftrightarrow(a+3)^2+(b+4)^2=4$.

Suy ra biểu diễn hình học của số phức z là đường tròn (C) tâm $I(-3;-4)$ và bán kính $R=5$.

Gọi $M(z)$ là điểm biểu diễn số phức z. Ta có: $M(z)\in(C)$.

$|z|=OM\geq OI-R=3$.

Vậy $|z|$ bé nhất bằng 3 khi $M(z)=(C)\cap IM$.

Cách 2:

Đặt $\begin{cases}a+3=2\cos\varphi\\b+4=2\sin\varphi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3+2\cos\varphi\\b=-4+2\sin\varphi\end{cases}$.

$\Rightarrow|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(2\cos\varphi-3)^2+(2\sin\varphi-4)^2}=\sqrt{29-12\cos\varphi-16\sin\varphi}$.

$=\sqrt{29-20\left(\dfrac{3}{5}\cos\varphi+\dfrac{4}{5}\sin\varphi\right)}=\sqrt{29-20\cos(\alpha-\varphi)}\geq\sqrt{9}$.

$\Rightarrow|z_0|=3$.

Câu 76. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2+4|=2|z|$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}\leq|z|\leq\dfrac{\sqrt{2}+1}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}-1}{6}\leq|z|\leq\dfrac{\sqrt{3}+1}{6}$.

C. $\sqrt{5}-1\leq|z|\leq\sqrt{5}+1$. **D.** $\sqrt{6}-1\leq|z|\leq\sqrt{6}+1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Áp dụng bất đẳng thức $|u|+|v|\geq|u+v|$, ta được

$$2|z|+|-4|=|z^2+4|+|-4|\geq|z|^2\Rightarrow|z|^2-2|z|-4\leq0\Rightarrow|z|\leq\sqrt{5}+1$$

$$2|z|+|z|^2=|z^2+4|+|-z^2|\geq4\Rightarrow|z|^2+2|z|-4\geq0\Rightarrow|z|\geq\sqrt{5}-1$$

Vậy, $|z|$ nhỏ nhất là $\sqrt{5}-1$, khi $z=-i+i\sqrt{5}$ và $|z|$ lớn nhất là $\sqrt{5}+1$, khi $z=i+i\sqrt{5}$.

Câu 77. Cho số phức z thỏa mãn $|(1-i)z-6-2i|=\sqrt{10}$. Tìm môđun lớn nhất của số phức z.

A. $3+\sqrt{5}$ **B.** $4\sqrt{5}$ **C.** $3\sqrt{5}$. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $z = x + yi;\ \left(x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}\right)$.

Ta có:

$$\left|\left(1-i\right)z - 6 - 2i\right| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left|\left(1-i\right)\right|.\left|z + \frac{-6-2i}{1-i}\right| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left|z - 2 - 4i\right| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left(x-2\right)^2 + \left(y-4\right)^2 = 5.$$

Đặt $x = 2 + \sqrt{5}\sin t; y = 4 + \sqrt{5}\cos t;\ t \in \left[0; 2\pi\right]$.

Lúc đó:

$$\left|z\right|^2 = \left(2 + \sqrt{5}\sin t\right)^2 + \left(4 + \sqrt{5}\cos t\right)^2 = 25 + \left(4\sqrt{5}\sin t + 8\sqrt{5}\cos t\right)$$

$$= 25 + \sqrt{\left(4\sqrt{5}\right)^2 + \left(8\sqrt{5}\right)^2}\sin\left(t + \alpha\right);\ \left(\alpha \in \mathbb{R}\right)$$

$$\Rightarrow \left|z\right|^2 = 25 + 20\sin\left(t + \alpha\right) \Rightarrow z \in \left[\sqrt{5}; 3\sqrt{5}\right]$$

$\Rightarrow z_{\max} = 3\sqrt{5}$ đạt được khi $z = 3 + 6i$.

Câu 78. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z - 2 - 4i\right| = \left|z - 2i\right|$.Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

A. $z = -1 + i$. **B.** $z = 3 + 2i$. **C.** $z = 2 + 2i$. **D.** $z = -2 + 2i$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $z = x + yi,\ \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$, ta có:

$\left|z - 2 - 4i\right| = \left|z - 2i\right| \Rightarrow x + y = 4$.

$\Rightarrow \left|z\right| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2(x-2)^2 + 8} \geq 2\sqrt{2} \Rightarrow z = 2 + 2i$.

Câu 79. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z - 1 + 2i\right| = 2$. Tìm môđun lớn nhất của số phức z.

A. $\sqrt{5 + 6\sqrt{5}}$. **B.** $\sqrt{11 + 4\sqrt{5}}$. **C.** $\sqrt{6 + 4\sqrt{5}}$. **D.** $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi $z = x + yi;\ \left(x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}\right)$. Ta có: $\left|z - 1 + 2i\right| = 2 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2 + \left(y+2\right)^2 = 4$.

Đặt $x = 1 + 2\sin t; y = -2 + 2\cos t;\ t \in \left[0; 2\pi\right]$.

Lúc đó:

$$\left|z\right|^2 = \left(1 + 2\sin t\right)^2 + \left(-2 + 2\cos t\right)^2 = 9 + \left(4\sin t - 8\cos t\right) = 9 + \sqrt{4^2 + 8^2}\sin\left(t + \alpha\right);\ \left(\alpha \in \mathbb{R}\right)$$

$$\Rightarrow \left|z\right|^2 = 9 + 4\sqrt{5}\sin\left(t + \alpha\right) \Rightarrow z \in \left[-\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}; \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}\right]$$

$\Rightarrow z_{\max} = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$ đạt được khi $z = \dfrac{5 + 2\sqrt{5}}{5} + \dfrac{-10 + 4\sqrt{5}}{5}i$.

Câu 80. Cho số phức z thỏa mãn z không phải số thực và $w = \dfrac{z}{2 + z^2}$ là số thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left|z + 1 - i\right|$ là.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 8. **D.** $\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1. Xét $z \neq 0$ suy ra $\frac{1}{w} = z + \frac{2}{z}$. Gọi $z = a + bi, b \neq 0$.

Suy ra $\frac{1}{w} = z + \frac{2}{z} = \left(\frac{2a}{a^2+b^2} + a\right) - b\left(\frac{2}{a^2+b^2} - 1\right)i$.

Vì $\frac{1}{w} \in \mathbb{R}$ nên $b\left(\frac{2}{a^2+b^2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{array}\right.$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng Oxy là đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 2$.

Xét điểm $A(-1;1)$ là điểm biểu diễn số phức $z_0 = -1 + i$ suy ra

$P = MA \Rightarrow \max P = OA + r = 2\sqrt{2}$.

Với r là bán kính đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 2$.

Cách 2. $w = \frac{z}{2+z^2} \Leftrightarrow w(2+z^2) = z \Leftrightarrow z^2 - \frac{1}{w}z + 2 = 0$ $(*)$. $(*)$ là phương trình bậc hai với hệ số thực $\left(\frac{1}{w} \in \mathbb{R}\right)$. Vì z thỏa $(*)$ nên z là nghiệm phương trình $(*)$. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của $(*)$ suy ra $z_1.z_2 = 2 \Rightarrow |z_1.z_2| = 2 \Leftrightarrow |z_1||z_2| = 2 \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$. Suy ra

$P = |z + 1 - i| \leq |z| + |1 - i| = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $z = 1 - i$.

Câu 81. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = \left|\frac{z+i}{z}\right|$, với z là số phức khác 0 thỏa mãn $|z| \geq 2$. Tính $2M - m$.

A. $2M - m = \frac{5}{2}$. **B.** $2M - m = 10$. **C.** $2M - m = 6$. **D.** $2M - m = \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$P = \left|\frac{z+i}{z}\right| = \frac{|z+i|}{|z|} \leq \frac{|z| + |i|}{|z|} = 1 + \frac{1}{|z|} \leq \frac{3}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $z = 2i$. Vậy $M = \frac{3}{2}$.

$P = \left|\frac{z+i}{z}\right| = \frac{|z+i|}{|z|} \geq \frac{\left||z| - |i|\right|}{|z|} = \frac{|z| - |i|}{|z|} = 1 - \frac{1}{|z|} \geq \frac{1}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $z = -2i$.

Vậy $m = \frac{1}{2}$.

Vậy $2M - m = \frac{5}{2}$.

Câu 82. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 1 - i| = |z - 3i|$ và số phức $w = \frac{1}{z}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|w|$.

A. $|w|_{\max} = \frac{9\sqrt{5}}{10}$. **B.** $|w|_{\max} = \frac{7\sqrt{5}}{10}$. **C.** $|w|_{\max} = \frac{4\sqrt{5}}{7}$. **D.** $|w|_{\max} = \frac{2\sqrt{5}}{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

$|z + 1 - i| = |z - 3i| \Leftrightarrow (a+1)^2 + (b-1)^2 = a^2 + (b-3)^2 \Leftrightarrow a = -2b + \frac{7}{2}$.

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(-2b+\frac{7}{2}\right)^2+b^2}=\sqrt{5b^2-14b+\frac{49}{4}}=\sqrt{5\left(b-\frac{7}{5}\right)^2+\frac{49}{20}}\geq\frac{7}{2\sqrt{5}}$

$\Rightarrow |w|=\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}\leq\frac{2\sqrt{5}}{7}$. Đẳng thức xảy ra khi $b=\frac{7}{5}$ và $a=\frac{63}{10}$.

Vậy $|w|_{\max}=\frac{2\sqrt{5}}{7}$.

Câu 83. Xét các số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $4(z-\bar{z})-15i=i(z+\bar{z}-1)^2$. Tính $F=-a+4b$ khi $\left|z-\frac{1}{2}+3i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. $F=4$. **B.** $F=6$. **C.** $F=5$. **D.** $F=7$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có

$4(z-\bar{z})-15i=i(z+\bar{z}-1)^2 \Leftrightarrow 4(a+bi-a+bi)-15i=i(a+bi+a-bi-1)^2$

$\Leftrightarrow 8b-15=(2a-1)^2$ suy ra $b\geq\frac{15}{8}$.

$\left|z-\frac{1}{2}+3i\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(2a-1)^2+(2b+6)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{8b-15+4b^2+24b+36}=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2+32b+21}$

Xét hàm số $f(x)=4x^2+32x+21$ với $x\geq\frac{15}{8}$

$f'(x)=8x+32>0, \forall x\geq\frac{15}{8}$ suy ra $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $\left[\frac{15}{8};+\infty\right)$ nên $f(x)\geq f\left(\frac{15}{8}\right)=\frac{4353}{16}$.

Do đó $\left|z-\frac{1}{2}+3i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4353}{16}}$ khi $b=\frac{15}{8};a=\frac{1}{2}$.

Khi đó $F=-a+4b=7$.

Câu 84. Gọi M và m là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của môđun số phức z thỏa mãn $|z-1|=2$. Tính $M+m$.

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi $z=x+yi$ được biểu diễn bởi điểm $M(x;y)$. Khi đó $OM=|z|$.

$|z-1|=2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2}=2 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=4\ (1)$. Chứng tỏ M thuộc đường tròn (C) có phương trình (1), tâm $I(1;0)$, bán kính $R=2$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow M\in(C)$ sao cho OM lớn nhất, nhỏ nhất.

Ta có $OI=1$ nên điểm O nằm trong đường tròn $\Rightarrow R-OI\leq OM\leq OI+R \Leftrightarrow 1\leq OM\leq 3$.

Do đó $M=3$ và $m=1$.

Vậy $M+m=4$.

Câu 85. - 2017] Cho z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $|6-3i+iz|=|2z-6-9i|$, thỏa mãn $|z_1-z_2|=\frac{8}{5}$. Giá trị lớn nhất của $|z_1+z_2|$ bằng.

A. $4\sqrt{2}$. **B.** 5. **C.** $\frac{56}{5}$. **D.** $\frac{31}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Ta có $|6-3i+iz|=|2z-6-9i| \Leftrightarrow a^2+b^2-6a-8b+24=0$.

$\Leftrightarrow (a-3)^2+(b-4)^2=1 \Leftrightarrow |z-(3+4i)|=1 \Rightarrow \begin{cases} |z_1-(3+4i)|=1 \\ |z_2-(3+4i)|=1 \end{cases}$.

Ta lại có: $2\left[|z_1-(3+4i)|^2+\left(z_2-(3+4i)\right)^2\right] \overset{hbh}{=} |z_1-z_2|^2+|z_1+z_2-(6+8i)|^2$.

$\Leftrightarrow 2(1+1)=\frac{64}{25}+\left|z_1+z_2-(6+8i)^2\right| \Leftrightarrow |z_1+z_2-(6+8i)|^2=\frac{6}{5}$.

Ta có: $|z_1+z_2|=|z_1+z_2-(6+8i)+(6+8i)|\le|z_1+z_2-(6+8i)|+|6+8i|\le\frac{6}{5}+10=\frac{56}{5}$.

Câu 86. Trong các số phức z thỏa mãn $|z^2+1|=2|z|$ gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Khi đó môđun của số phức $w=z_1+z_2$ là

A. $|w|=1+\sqrt{2}$. **B.** $|w|=2\sqrt{2}$. **C.** $|w|=2$. **D.** $|w|=\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thì $|z^2+1|=2|z| \Leftrightarrow |(a+bi)^2+1|=2|a+bi|$

$\Leftrightarrow |a^2-b^2+1+2abi|=2|a+bi| \Leftrightarrow (a^2-b^2+1)^2+4a^2b^2=4(a^2+b^2)$

$\Leftrightarrow a^4+b^4+1-2a^2-6b^2+2a^2b^2=0 \Leftrightarrow (a^2+b^2-1)^2-4b^2=0$

$\Leftrightarrow (a^2+b^2-1-2b)(a^2+b^2-1+2b)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2+b^2-1-2b=0 \\ a^2+b^2-1+2b=0 \end{array}\right.$

TH1: $a^2+b^2-1-2b=0 \Leftrightarrow a^2+(b-1)^2=2$.

Khi đó tập hợp điểm $M(a;b)$ biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I_1(0;1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$, giao điểm của OI (trục tung) với đường tròn là $M_1(0;\sqrt{2}+1)$ và $M_2(0;1-\sqrt{2})$

$\Rightarrow w=(\sqrt{2}+1)i+(1-\sqrt{2})i \Rightarrow w=2i \Rightarrow |w|=2$

TH2: $a^2+b^2-1+2b=0 \Leftrightarrow a^2+(b+1)^2=2$.

Khi đó tập hợp điểm $M(a;b)$ biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I_2(0;-1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$, giao điểm của OI (trục tung) với đường tròn là $M_3(0;\sqrt{2}-1)$ và $M_4(0;-\sqrt{2}-1)$

$\Rightarrow w=(\sqrt{2}-1)i+(-1-\sqrt{2})i \Rightarrow w=-2i \Rightarrow |w|=2$.

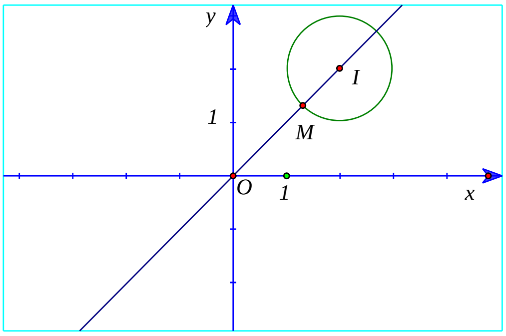
Với đáp án của trường ĐH Vinh đưa ra là A thì ta chọn số phức M_1 và M_3 có $w = 2\sqrt{2}i \Rightarrow |w| = 2\sqrt{2}$ nên đề bài chưa chuẩn, có thể chọn phương án **B**.

Câu 87. Cho số phức z thỏa mãn: $|z-2-2i|=1$. Số phức $z-i$ có môđun nhỏ nhất là:

A. $\sqrt{5}-1$. **B.** $\sqrt{5}+1$. **C.** $\sqrt{5}+2$. **D.** $\sqrt{5}-2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Gọi $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $|z-2-2i| = 1 \Leftrightarrow |(x-2)+(y-2)i| = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$.

Tập hợp các điểm trong mặt phẳng Oxy biểu diễn của số phức z là đường tròn (C) tâm $I(2;2)$ và bán kính $R=1$.

$|z-i| = \sqrt{x^2+(y-1)^2} = IM$, với $I(2;2)$ là tâm đường tròn, M là điểm chạy trên đường tròn.

Khoảng cách này ngắn nhất khi M là giao điểm của đường thẳng nối hai điểm $N(0;1) \in Oy, I(2;2)$ với đường tròn (C).

$IM_{\min} = IN - R = \sqrt{5}-1$.

Câu 88. Cho số phức z thỏa mãn $|2z-3-4i| = 10$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Khi đó $M-m$ bằng.

A. 15. **B.** 10. **C.** 20. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $z = x + yi$.

Ta có: $|2z-3-4i| = 10 \Leftrightarrow \left|z - \frac{3}{2} - 2i\right| = 5 \Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = 25$.

Tập hợp điểm biểu diễn số phức thỏa đề là đường tròn tâm $I\left(\frac{3}{2};2\right)$, bán kính $R=5$.

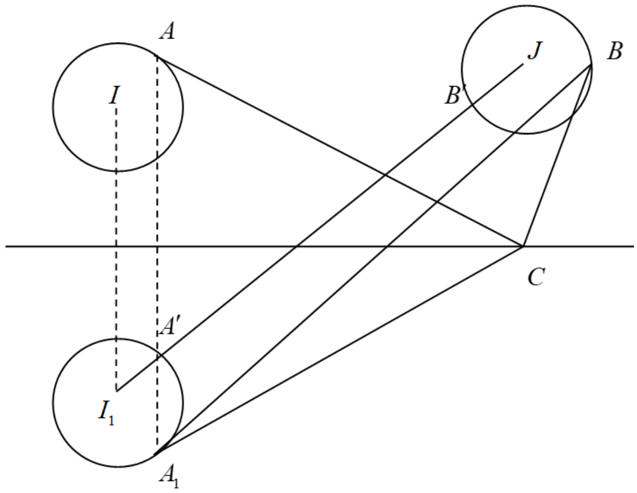
Khi đó: $\begin{cases} m = IO - R \\ M = IO + R \end{cases} \Rightarrow M - m = 2R = 10$.

Câu 89. Cho các số phức z, z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-4-5i| = |z_2-1|$ và $|\overline{z}+4i| = |z-8+4i|$. Tính $M = |z_1-z_2|$ khi $P = |z-z_1| + |z-z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 6. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** 8. **D.** $\sqrt{41}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Gọi $I(4;5)$, $J(1;0)$.

Gọi A,B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1,z_2.

Khi đó A nằm trên đường tròn tâm I bán kính $R=1$, B nằm trên đường tròn tâm J bán kính $R=1$.

Đặt $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Ta có:

$\left|\overline{z}+4i\right|=\left|z-8+4i\right|$

$\Leftrightarrow\ \left|x-yi+4i\right|=\left|x+yi-8+4i\right|$

$\Leftrightarrow\ x^2+(4-y)^2=(x-8)^2+(y+4)^2$

$\Leftrightarrow\ 16x-16y-64=0$

$\Leftrightarrow\ \Delta: x-y-4=0$

Gọi C là điểm biểu diễn số phức z thì $C\in(\Delta)$.

Ta có: $P=\left|z-z_1\right|+\left|z-z_2\right|=CA+CB$.

$d(I,\Delta)=\dfrac{\left|4-5-4\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}>1=R$, $d(\mathrm{J},\Delta)=\dfrac{\left|1-0-4\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}>1=R$.

$(x_I-y_I-4)(x_J-y_J-4)=(4-5-4)(1-0-4)>0\ \Rightarrow$ hai đường tròn không cắt Δ và nằm cùng phía với Δ.

Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua Δ, suy ra A_1 nằm trên đường tròn tâm I_1 bán kính $R=1$ (với I_1 là điểm đối xứng với I qua Δ). Ta có $I_1(9;0)$.

Khi đó: $P=CA+CB=CA_1+CB\geq A_1B$ nên $P_{\min}\ \Leftrightarrow\ A_1B_{\min}\ \Leftrightarrow\begin{cases}A_1\equiv A'\\ B\equiv B'\end{cases}$.

Khi đó: $\overrightarrow{I_1A}=\dfrac{1}{8}\overrightarrow{I_1J}\ \Rightarrow A'(8;0)$; $\overrightarrow{I_1B}=\dfrac{7}{8}\overrightarrow{I_1J}\ \Rightarrow B'(2;0)$.

Như vậy: $P_{\min}$ khi A đối xứng A' qua Δ và $B\equiv B'\Leftrightarrow\begin{cases}A(4;4)\\ B(2;0)\end{cases}$. Vậy

$M=\left|z_1-z_2\right|=AB=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

Câu 90. Số phức z nào sau đây có môđun nhỏ nhất thỏa $|z|=|\overline{z}-3+4i|$:

A. $z=-3-4i$. **B.** $z=3-\frac{7}{8}i$. **C.** $z=\frac{3}{2}+2i$. **D.** $z=-\frac{3}{2}-2i$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi $z=a+bi,(a,b\in R)$.

Ta có: $|z|=|\overline{z}-3+4i|\Leftrightarrow -6a+8b+25=0\,(*)$.

Trong các đáp án, có đáp án $z=3-\frac{7}{8}i$ và $z=-\frac{3}{2}-2i$ thỏa $(*)$.

Ở đáp án $z=3-\frac{7}{8}i$ thì $|z|=\frac{25}{8}$; Ở đáp án $z=-\frac{3}{2}-2i$ thì $|z|=\frac{5}{2}$.

Chọn đáp án: $z=-\frac{3}{2}-2i$.

Câu 91. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho điểm $A(4;4)$ và M là điểm biến diễn số phức z thoả mãn điều kiện $|z-1|=|z+2-i|$. Tìm toạ độ điểm M để đoạn thẳng AM nhỏ nhất.

A. $M(1;5)$. **B.** $M(2;8)$. **C.** $M(-1;-1)$. **D.** $M(-2;-4)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi $z=x+yi,(x,y\in R)$.

Ta có $|z-1|=|z+2-i|\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=(x+2)^2+(y-1)^2\Leftrightarrow 3x-y+2=0$.

Tập hợp điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là đường thẳng $(d):3x-y+2=0$.

Để đoạn AM nhỏ nhất thì M là hình chiếu của A trên d.

d' qua A và vuông góc với d có phương trình $x+3y-16=0$. Tọa độ M là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x+3y-16=0\\3x-y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=5\end{cases}$.

Vậy $M(1;5)$.

Câu 92. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|\overline{z}+1+i|$.

A. $\sqrt{13}+1$. **B.** $\sqrt{13}+2$. **C.** 4. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $w=\overline{z}+1+i$.

Ta có $|z-2-3i|=1\Leftrightarrow|\overline{z-2-3i}|=1\Leftrightarrow|\overline{z}-2+3i|=1\Leftrightarrow|\overline{z}+1+i-3+2i|=1$.

$\Leftrightarrow|w-3+2i|=1$.

Ta có: $1=|w-(3-2i)|\ge|w|-|3-2i|\Leftrightarrow|w|\le 1+\sqrt{13}$.

$\Rightarrow Max|\overline{z}+1+i|=1+\sqrt{13}$.

Câu 93. Tìm giá trị lớn nhất của $P=|z^2-z|+|z^2+z+1|$ với z là số phức thỏa mãn $|z|=1$.

A. 3. **B.** $\dfrac{13}{4}$. **C.** 5. **D.** $\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$. Do $|z|=1$ nên $a^2+b^2=1$.

Sử dụng công thức: $|u.v|=|u||v|$ ta có: $\left|z^2-z\right|=|z||z-1|=|z-1|=\sqrt{(a-1)^2+b^2}=\sqrt{2-2a}$.

$\left|z^2+z+1\right|=\left|(a+bi)^2+a+bi+1\right|=\left|a^2-b^2+a+1+(2ab+b)i\right|=\sqrt{\left(a^2-b^2+a+1\right)^2+(2ab+b)^2}$

$=\sqrt{a^2(2a+1)^2+b^2(2a+1)^2}=|2a+1|$ (vì $a^2+b^2=1$).

Vậy $P=|2a+1|+\sqrt{2-2a}$.

TH1: $a<-\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $P=-2a-1+\sqrt{2-2a}=(2-2a)+\sqrt{2-2a}-3\le 4+2-3=3$ (vì $0\le\sqrt{2-2a}\le 2$).

TH2: $a\ge-\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $P=2a+1+\sqrt{2-2a}=-(2-2a)+\sqrt{2-2a}+3=-\left(\sqrt{2-2a}-\dfrac{1}{2}\right)^2+3+\dfrac{1}{4}\le\dfrac{13}{4}$.

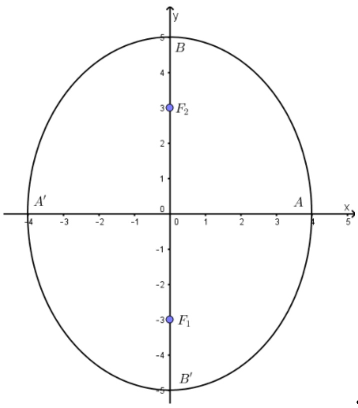
Xảy ra khi $a=\dfrac{7}{16}$.

Câu 94. Cho số phức z thỏa mãn $|z+3i|+|z-3i|=10$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là điểm biểu diễn số phức z có môđun lớn nhất và nhỏ nhất. Gọi M là trung điểm của M_1M_2, $M(a;b)$ biểu diễn số phức w, tổng $|a|+|b|$ nhận giá trị nào sau đây?

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** 5. **C.** 4. **D.** $\dfrac{9}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Gọi $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$. Theo giả thiết, ta có $|z+3i|+|z-3i|=10$.

$\Leftrightarrow |x+(y+3)i|+|x+(y+3)i|=10$.

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+3)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}=10 \quad (*)$.

Gọi $E(x;y)$, $F_1(0;-3)$ và $F_2(0;3)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 10 > F_1F_2 = 6$ nên tập hợp các điểm E là đường elip (E) có hai tiêu điểm F_1 và F_2. Và độ dài trục lớn bằng 10.

Ta có $c = 3$; $2b = 10 \Leftrightarrow b = 5$ và $a^2 = b^2 - c^2 = 16$.

Do đó, phương trình chính tắc của (E) là $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$.

Vậy $\max|z| = OB = OB' = 5$ khi $z = \pm 5i$ có điểm biểu diễn là $M_1(0;\pm 5)$.

và $\min|z| = OA = OA' = 4$ khi $z = \pm 4$ có điểm biểu diễn là $M_2(\pm 4;0)$.

Tọa độ trung điểm của M_1M_2 là $M\left(\pm 2;\pm\dfrac{5}{2}\right)$.

Vậy $|a| + |b| = 2 + \dfrac{5}{2} = \dfrac{9}{2}$.

Câu 95. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3| + |z+3| = 8$. Gọi M, m lần lượt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất $|z|$. Khi đó $M + m$ bằng

A. $4 - \sqrt{7}$. **B.** $4 + \sqrt{7}$. **C.** 7. **D.** $4 + \sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi $z = x + yi$ với $x; y \in \mathbb{R}$.

Ta có $8 = |z-3| + |z+3| \ge |z - 3 + z + 3| = |2z| \Leftrightarrow |z| \le 4$.

Do đó $M = max|z| = 4$.

Mà $|z-3| + |z+3| = 8 \Leftrightarrow |x - 3 + yi| + |x + 3 + yi| = 8 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 8$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$8 = 1.\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + 1.\sqrt{(x+3)^2 + y^2} \le \sqrt{(1^2 + 1^2)\left[(x-3)^2 + y^2 + (x+3)^2 + y^2\right]}$

$\Leftrightarrow 8 \le \sqrt{2(2x^2 + 2y^2 + 18)} \Leftrightarrow 2(2x^2 + 2y^2 + 18) \ge 64$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \ge 7 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \ge \sqrt{7} \Leftrightarrow |z| \ge \sqrt{7}$.

Do đó $M = min|z| = \sqrt{7}$.

Vậy $M + m = 4 + \sqrt{7}$.

Câu 96. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất $M_{\max}$ và giá trị nhỏ nhất $M_{\min}$ của biểu thức $M = |z^2 + z + 1| + |z^3 + 1|$.

A. $M_{\max} = 5;\ M_{\min} = 1$. **B.** $M_{\max} = 5;\ M_{\min} = 2$.

C. $M_{\max} = 4;\ M_{\min} = 1$. **D.** $M_{\max} = 4;\ M_{\min} = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $M \le |z|^2 + |z| + 1 + |z|^3 + 1 = 5$, khi $z = 1 \Rightarrow M = 5 \Rightarrow M_{\max} = 5$.

Mặt khác: $M=\frac{|1-z^3|}{|1-z|}+|1+z^3|\ge\frac{|1-z^3|}{2}+\frac{|1+z^3|}{2}\ge\frac{|1-z^3+1+z^3|}{2}=1$, khi

$z=-1\Rightarrow M=1\Rightarrow M_{\min}=1$.

Câu 97. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1|=\sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $T=|z+i|+|z-2-i|$.

A. $\max T=4\sqrt{2}$. **B.** $\max T=8$. **C.** $\max T=8\sqrt{2}$. **D.** $\max T=4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$T=|z+i|+|z-2-i|=|(z-1)+(1+i)|+|(z-1)-(1+i)|$.

Đặt $w=z-1$. Ta có $|w|=1$ và $T=|w+(1+i)|+|w-(1+i)|$.

Đặt $w=x+y.i$. Khi đó $|w|^2=2=x^2+y^2$.

$T=|(x+1)+(y+1)i|+|(x-1)+(y-1)i|=1.\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}+1.\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$

$\le\sqrt{(1^2+1^2)\left((x+1)^2+(y+1)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\right)}=\sqrt{2\left(2x^2+2y^2+4\right)}=4$

Vậy $\max T=4$.

Câu 98. Cho các số phức z thỏa mãn $|z-1-i|+|z-8-3i|=\sqrt{53}$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=|z+1+2i|$.

A. $P_{\max}=53$. **B.** $P_{\max}=\frac{\sqrt{185}}{2}$. **C.** $P_{\max}=\sqrt{106}$. **D.** $P_{\max}=\sqrt{53}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Xét $A(1;1),B(8;3)$ ta có $AB=\sqrt{53}$

$\Rightarrow$ các điểm biểu diễn z là đoạn thẳng AB

$P=|z+1+2i|=MM'$ với M là điểm biểu diễn số phức z, M' là điểm biểu diễn số phức $z'=-1-2i$

Phương trình đường thẳng $AB:-2x+7y-5=0$

Hình chiếu vuông góc của M' lên AB là $M_1=\left(-\frac{87}{53};\frac{13}{53}\right)$

Ta có A nằm giữa M_1 và B nên $P=MM'$ lớn nhất $\Leftrightarrow MM_1$ lớn nhất

$\Leftrightarrow M\equiv B\Rightarrow z=8+3i$

$\Rightarrow P_{\max}=\sqrt{106}$.

Câu 99. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z-1+2i|=\sqrt{5}$ và $w=z+1+i$ có môđun lớn nhất. Số phức z có môđun bằng:

A. $\sqrt{6}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

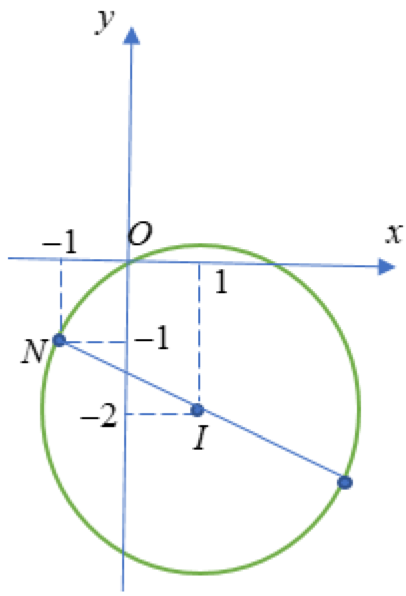
Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi $z=x+yi\quad(x,y\in\mathbb{R})\quad\Rightarrow z-1+2i=(x-1)+(y+2)i$

Ta có: $|z-1+2i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{5}\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=5$

Suy ra tập hợp điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z thuộc đường tròn (C) tâm $I(1;-2)$ bán kính $R=\sqrt{5}$ như hình vẽ:



Dễ thấy $O \in (C)$, $N(-1;-1) \in (C)$.

Theo đề ta có: $M(x;y) \in (C)$ là điểm biểu diễn cho sốphức z thỏa

mãn: $w = z + 1 + i = x + yi + 1 + i = (x+1) + (y+1)i \Rightarrow |z+1+i| = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = |\overrightarrow{MN}|$

Suy ra $|z+1+i|$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow MN$ lớn nhất.

Mà $M, N \in (C)$ nên MN lớn nhất khi MN là đường kính đường tròn (C).

$\Leftrightarrow I$ là trung điểm $MN \Rightarrow M(3;-3) \Rightarrow z = 3 - 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$.

Câu 100. Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z - 4i - 2| = |2i - z|$, môđun nhỏ nhất của số phức z bằng:

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(x;y)$ trên mặt phẳng tọa độ. Ta có:

$|z - 4i - 2| = |2i - z| \Leftrightarrow |x - 2 + (y-4)i| = |-x + (2-y)i| \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = x^2 + (2-y)^2$

$\Leftrightarrow x + y - 4 = 0$.

Vậy tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường thẳng $d: x + y - 4 = 0$.

$|z|_{\min} = OM_{\min} = d(O;d) = \dfrac{|-4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Câu 101. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 1 - i| = 2$ và $z_2 = iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z_1 - z_2|$?

A. $m = 2\sqrt{2} - 2$. **B.** $m = 2\sqrt{2}$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = \sqrt{2} - 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $z_1 = a + bi;\ a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow z_2 = -b + ai$

$\Rightarrow z_1 - z_2 = (a+b) + (b-a)i$.

Nên $\left|z_1 - z_2\right| = \sqrt{(a+b)^2 + (b-a)^2} = \sqrt{2}.\left|z_1\right|$

Ta lại có $2 = \left|z_1 + 1 - i\right| \le \left|z_1\right| + \left|1 - i\right| = \left|z_1\right| + \sqrt{2}$

$\Rightarrow \left|z_1\right| \ge 2 - \sqrt{2}$. Suy ra $\left|z_1 - z_2\right| = \sqrt{2}.\left|z_1\right| \ge 2\sqrt{2} - 2$.

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{1} = \frac{b}{-1} < 0$.

Vậy $m = \min\left|z_1 - z_2\right| = 2\sqrt{2} - 2$.

Câu 102. Cho các số phức $z_1 = -2 + i$, $z_2 = 2 + i$ và số phức z thay đổi thỏa mãn $\left|z - z_1\right|^2 + \left|z - z_2\right|^2 = 16$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị biểu thức $M^2 - m^2$ bằng

A. 15. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 8

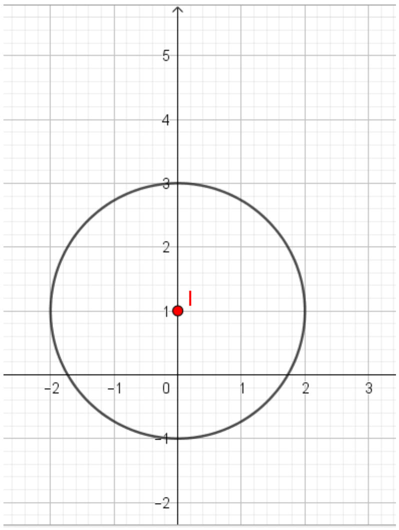
Hướng dẫn giải

Chọn D

Giả sử $z = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có: $\left|z - z_1\right|^2 + \left|z - z_2\right|^2 = 16 \Leftrightarrow \left|x + yi + 2 - i\right|^2 + \left|x + yi - 2 - i\right|^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 4$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm số phức $I(0;1)$ bán kính $R = 2$.



Do đó $m = 1$, $M = 3$.

Vậy $M^2 - m^2 = 8$.

Câu 103. Cho số phức z thỏa mãn $\left|\frac{z-1}{z+3i}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z + i| + 2\left|\bar{z} - 4 + 7i\right|$.

A. 8. **B.** 10. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $4\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$, gọi M là điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z. Ta có: $\left|\dfrac{z-1}{z+3i}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\sqrt{2}|z-1|=|z+3i|\Leftrightarrow\sqrt{2}|(x-1)+yi|=|x+(y+3)i|$

$\Leftrightarrow\sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y+3)^2}\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-3)^2=20$.

Như vậy, tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn (C) tâm $I(2;3)$ và bán kính $R=2\sqrt{5}$.

Gọi $A(0;-1)$, $B(4;7)$ lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z_1=-i$, $z_2=4+7i$. Dễ thấy A,B thuộc đường tròn (C). Vì $AB=4\sqrt{5}=2R$ nên AB là đường kính của đường tròn $(C)\Rightarrow MA^2+MB^2=AB^2=20$.

Từ đó:

$P=|z+i|+2|\overline{z}-4+7i|=|z+i|+2|z-4-7i|=MA+2MB\le\sqrt{(1^2+2^2)(MA^2+MB^2)}=10$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}MB=2MA\\MA^2+MB^2=20\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}MA=2\\MB=4\end{cases}$.

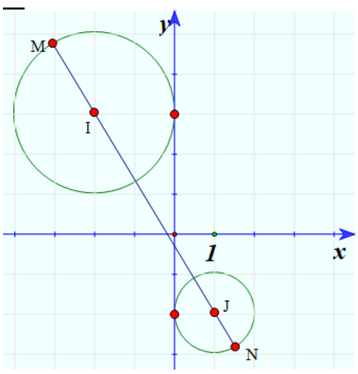
Vậy $\max P=10$.

Câu 104. Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+2-3i|=2$ và $|\overline{z_2}-1-2i|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=|z_1-z_2|$.

A. $P=6$. **B.** $P=3$. **C.** $P=3+\sqrt{34}$. **D.** $P=3+\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Gọi $M(x_1;y_1)$ là điểm biểu diễn số phức z_1, $N(x_2;y_2)$ là điểm biểu diễn số phức z_2

Số phức z_1 thỏa mãn $|z_1+2-3i|=2\Leftrightarrow(x_1+2)^2+(y_1-3)^2=4$ suy ra $M(x_1;y_1)$ nằm trên đường tròn tâm $I(-2;3)$ và bán kính $R_1=2$.

Số phức z_2 thỏa mãn $|\overline{z_2}-1-2i|=1\Leftrightarrow(x_2-1)^2+(y_1+2)^2=1$ suy ra $N(x_2;y_2)$ nằm trên đường tròn tâm $J(1;-2)$ và bán kính $R_2=1$.

Ta có $|z_1-z_2|=MN$ đạt giá trị lớn nhất bằng $R_1+IJ+R_2=2+\sqrt{34}+1=3+\sqrt{34}$.

Câu 105. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-4i|=\sqrt{5}$ và $|z|_{\min}$. Khi đó số phức z là.

A. $z=4+5i$. **B.** $z=3+2i$. **C.** $z=2-i$. **D.** $z=1+2i$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Do $\left|z-2-4i\right|=\sqrt{5}$ nên tập điểm M biểu diễn số phức là đường tròn $\left(x-2\right)^2+\left(y-4\right)^2=5$ có tâm và $I\left(2;4\right)$ bán kính $R=\sqrt{5}$.

Mà $OM=\left|z\right|$.

Gọi A,B là giao của OI và đường tròn $\left(x-2\right)^2+\left(y-4\right)^2=5$.

Tọa độ là nghiệm của hệ phương trình.

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-4)^2=5\\ y=2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=1\end{array}\right.\\ y=2x\end{cases}\Rightarrow A(1;2),B(2;4).$$

Khi đó $OA\le OM\le OB\Rightarrow \min\left|z\right|=OA\Leftrightarrow z=1+2i$.

Câu 106. Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M, M'. Số phức $z\left(4+3i\right)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là N, N'. Biết rằng M, M', N, N' là bốn đỉnh của hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\left|z+4i-5\right|$.

A. $\frac{5}{\sqrt{34}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{4}{\sqrt{13}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $z=a+bi\Rightarrow M\left(a;b\right),M'\left(a;-b\right)$.

Ta có:

$z\left(4+3i\right)=\left(a+bi\right)\left(4+3i\right)=4a-3b+\left(3a+4b\right)i\Rightarrow N\left(4a-3b;3a+4b\right),N'\left(4a-3b;-3a-4b\right)$.

Vì MM' và NN' cùng vuông góc với trục Ox nên M, M', N, N' là bốn đỉnh của hình chữ nhật khi $\begin{cases}MM'=NN'\\ MN\perp MM'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2b)^2=(6a+8b)^2\\ (3a-3b).0+(3a+3b).(-2b)=0\\ b\ne0,3a+4b\ne0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=0\\ b\ne0,3a+4b\ne0\end{cases}$.

Khi đó: $\left|z+4i-5\right|=\left|(a-5)+(b+4)i\right|=\sqrt{(a-5)^2+(b+4)^2}=\sqrt{(a-5)^2+(4-a)^2}$

$=\sqrt{2a^2-18a+41}=\sqrt{2\left(a-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\left|z+4i-5\right|$ là $\frac{1}{\sqrt{2}}$ khi $a=\frac{9}{2}\Rightarrow b=-\frac{9}{2}$.

Câu 107. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z\right|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|1+z\right|+2\left|1-z\right|$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $6\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi số phức $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$.

Theo giả thiết, ta có $\left|z\right|=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1$. Suy ra $-1\le x\le1$.

Khi đó, $P=|1+z|+2|1-z|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}+2\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{2x+2}+2\sqrt{2-2x}$.

Suy ra $P\le\sqrt{(1^2+2^2)\left[(2x+2)+(2-2x)\right]}$ hay $P\le 2\sqrt{5}$, với mọi $-1\le x\le 1$.

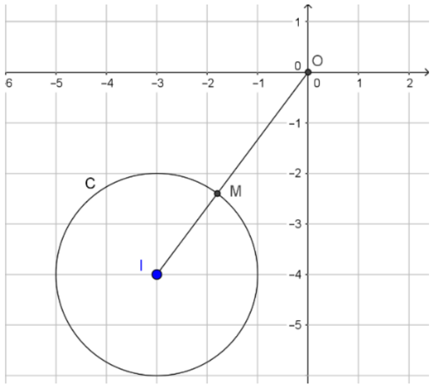
Vậy $P_{\max}=2\sqrt{5}$ khi $2\sqrt{2x+2}=\sqrt{2-2x}\Leftrightarrow x=-\frac{3}{5},\ y=\pm\frac{4}{5}$.

Câu 108. Trong các số phức z thỏa $|z+3+4i|=2$, gọi z_0 là số phức có mô đun nhỏ nhất. Khi đó

A. Không tồn tại số phức z_0.
B. $|z_0|=2$.
C. $|z_0|=7$.
D. $|z_0|=3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Cách 1:

Đặt $z=a+bi\ \ (a,b\in\mathbb{R})$. Khi đó $|z+3+4i|=2\Leftrightarrow(a+3)^2+(b+4)^2=4$.

Suy ra biểu diễn hình học của số phức z là đường tròn (C) tâm $I(-3;-4)$ và bán kính $R=5$

Gọi $M(z)$ là điểm biểu diễn số phức z. Ta có: $M(z)\in(C)$.

$|z|=OM\ge OI-R=3$.

Vậy $|z|$ bé nhất bằng 3 khi $M(z)=(C)\cap IM$.

Cách 2:

Đặt $\begin{cases}a+3=2\cos\varphi\\ b+4=2\sin\varphi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3+2\cos\varphi\\ b=-4+2\sin\varphi\end{cases}$.

$\Rightarrow|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(2\cos\varphi-3)^2+(2\sin\varphi-4)^2}=\sqrt{29-12\cos\varphi-16\sin\varphi}$.

$=\sqrt{29-20\left(\frac{3}{5}\cos\varphi+\frac{4}{5}\sin\varphi\right)}=\sqrt{29-20\cos(\alpha-\varphi)}\ge\sqrt{9}$.

$\Rightarrow|z_0|=3$.

Câu 109. Gọi n là số các số phức z đồng thời thỏa mãn $|iz+1+2i|=3$ và biểu thức $T=2|z+5+2i|+3|z-3i|$ đạt giá trị lớn nhất. Gọi M là giá trị lớn nhất của T. Giá trị tích của $M.n$ là

A. $2\sqrt{13}$
B. $10\sqrt{21}$
C. $6\sqrt{13}$
D. $5\sqrt{21}$

Hướng dẫn giải

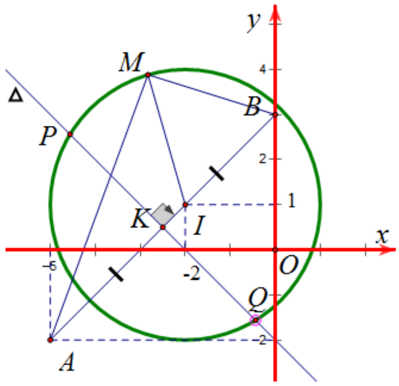
Chọn B

Gọi $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z.

Theo giả thiết, $|iz+1+2i|=3\Leftrightarrow|z+2-i|=3\Leftrightarrow(x+2)^2+(y-1)^2=9$.

Ta có $T=2|z+5+2i|+3|z-3i|=2MA+3MB$, với $A(-5;-2)$ và $B(0;3)$.

Nhận xét rằng A, B, I thẳng hàng và $2IA=3IB$.



Cách 1:

Gọi Δ là đường trung trực của AB, ta có $\Delta: x+y+5=0$.

$T=2MA+3MB\le PA+PB$. Dấu "=" xảy ra khi $M\equiv P$ hoặc $M\equiv Q$.

Giải hệ $\begin{cases} x+y+5=0 \\ (x+2)^2+(y-1)^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow P\left(\dfrac{-8-\sqrt{2}}{2};\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}\right)$ và $Q\left(\dfrac{-8+\sqrt{2}}{2};-\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$.

Khi đó $M=\max T=5\sqrt{21}$.

Vậy $M.n=10\sqrt{21}$.

Cách 2:

Ta có A, B, I thẳng hàng và $2IA=3IB$ nên $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

$\Rightarrow\ 2MA^2+3MB^2=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=5MI^2+2IA^2+3IB^2=105$.

Do đó $T^2=\left(\sqrt{2}.\sqrt{2}MA+\sqrt{3}.\sqrt{3}MB\right)^2\le 5\left(2MA^2+3MB^2\right)=525$ hay $T\le 5\sqrt{21}$.

Khi đó $M=\max T=5\sqrt{21}$. Dấu "=" xảy ra khi $M\equiv P$ hoặc $M\equiv Q$.

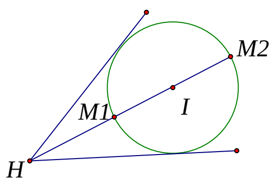
Vậy $M.n=10\sqrt{21}$.

Câu 110. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i|=1$. Giá trị lớn nhất của $|\bar{z}+1+i|$ là.

A. $\sqrt{13}+2$. **B.** 6. **C.** 4. **D.** $\sqrt{13}+1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Gọi $z=x+yi$ ta có $z-2-3i=x+yi-2-3i=x-2+(y-3)i$.

Theo giả thiết $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ nên điểm M biểu diễn cho số phức z nằm trên đường tròn tâm $I(2;3)$ bán kính $R=1$.

Ta có $|\bar{z}+1+i|=|x-yi+1+i|=|x+1+(1-y)i|=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$.

Gọi $M(x;y)$ và $H(-1;1)$ thì $HM=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$.

Do M chạy trên đường tròn, H cố định nên MH lớn nhất khi M là giao của HI với đường tròn.

Phương trình $HI:\begin{cases}x=2+3t\\y=3+2t\end{cases}$, giao của HI và đường tròn ứng với t thỏa mãn:

$9t^2+4t^2=1\Leftrightarrow t=\pm\frac{1}{\sqrt{13}}$ nên $M\left(2+\frac{3}{\sqrt{13}};3+\frac{2}{\sqrt{13}}\right),M\left(2-\frac{3}{\sqrt{13}};3-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

Tính độ dài MH ta lấy kết quả $HM=\sqrt{13}+1$.

Câu 111. Cho z_1,z_2,z_3 là các số phức thỏa $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $|z_1+z_2+z_3|<|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$.
B. $|z_1+z_2+z_3|\neq|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$.
C. $|z_1+z_2+z_3|=|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$.
D. $|z_1+z_2+z_3|>|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Cách 1: Kí hiệu Re: là phần thực của số phức.

Ta có $|z_1+z_2+z_3|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+2\,\mathrm{Re}\left(\overline{z}_1z_2+\overline{z}_2z_3+\overline{z}_3z_1\right)=3+2\,\mathrm{Re}\left(\overline{z}_1z_2+\overline{z}_2z_3+\overline{z}_3z_1\right)$(1).

$|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|^2=|z_1z_2|^2+|z_2z_3|^2+|z_3z_1|^2+2\,\mathrm{Re}\left(\overline{z}_1\overline{z}_2z_2z_3+\overline{z}_2\overline{z}_3z_3z_1+\overline{z}_3\overline{z}_1z_1z_2\right)$

$=|z_1|^2.|z_2|^2+|z_2|^2.|z_3|^2+|z_3|^2.|z_1|^2+2\,\mathrm{Re}\left(\overline{z}_1|z_2|^2z_3+\overline{z}_2|z_3|^2z_1+\overline{z}_3|z_1|^2z_2\right)$

$=3+2\,\mathrm{Re}\left(\overline{z}_1z_3+\overline{z}_2z_1+\overline{z}_3z_2\right)==3+2\,\mathrm{Re}\left(\overline{z}_1z_2+\overline{z}_3z_3+\overline{z}_3z_1\right)$(2).

Từ (1) và (2) suy ra $|z_1+z_2+z_3|=|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$.

Các h khác: B hoặc C đúng suy ra D đúngLoại B,
C.

Chọn $z_1=z_2=z_3\Rightarrow$ A đúng và D sai

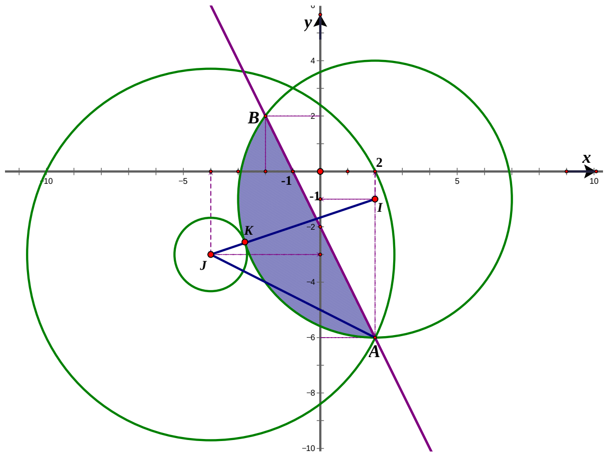
Cách 2: thay thử $z_1=z_2=z_3=1$ vào các đáp án, thấy đáp án D bị sai

Câu 112. Cho $z=x+yi$ với x, $y\in\mathbb{R}$ là số phức thỏa mãn điều kiện $|\overline{z}+2-3i|\le|z+i-2|\le5$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+8x+6y$. Tính $M+m$.

A. $\frac{156}{5}-20\sqrt{10}$.
B. $60-20\sqrt{10}$.
C. $\frac{156}{5}+20\sqrt{10}$.
D. $60+2\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



- Theo bài ra: $\left|\overline{z}+2-3i\right| \le \left|z+i-2\right| \le 5 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(-y-3)^2} \le \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} \le 5$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+2 \le 0 \\ (x-2)^2+(y+1)^2 \le 25 \end{cases}$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm biểu diễn số phức z là miền mặt phẳng (T) thỏa mãn

$\begin{cases} 2x+y+2 \le 0 \\ (x-2)^2+(y+1)^2 \le 25 \end{cases}$

- Gọi $A(2;-6)$, $B(-2;2)$ là các giao điểm của đường thẳng $2x+y+2=0$ và đường tròn $(C'):(x-2)^2+(y+1)^2=25$.

- Ta có: $P=x^2+y^2+8x+6y \Leftrightarrow (x+4)^2+(y+3)^2=P+25$.

Gọi (C) là đường tròn tâm $J(-4;-3)$, bán kính $R=\sqrt{P+25}$.

- Đường tròn (C) cắt miền (T) khi và chỉ khi

$JK \le R \le JA \Leftrightarrow IJ-IK \le R \le IA \Leftrightarrow 2\sqrt{10}-5 \le \sqrt{25+P} \le 3\sqrt{5} \Leftrightarrow 40-20\sqrt{10} \le P \le 20$

$\Rightarrow M=20$ và $m=40-20\sqrt{10}$.

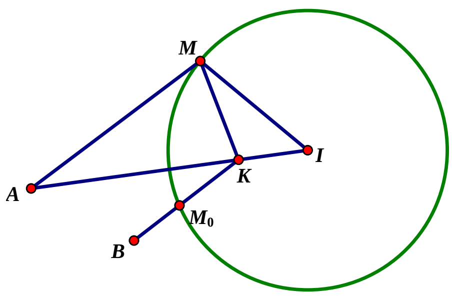
Vậy $M+m=60-20\sqrt{10}$.

Câu 113. Tìm số phức z thỏa mãn $|z-1-i|=5$ và biểu thức $T=|z-7-9i|+2|z-8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $z=1+6i$ và $z=5-2i$.
B. $z=4+5i$.
C. $z=5-2i$.
D. $z=1+6i$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Từ giả thiết $|z-1-i|=5$ suy ra tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn (C) tâm $I(1;1)$, bán kính $R=5$.

Xét các điểm $A(7;9)$ và $B(0;8)$. Ta thấy $IA=10=2.IM$.

Gọi K là điểm trên tia IA sao cho $IK = \frac{1}{4}IA \Rightarrow K = \left(\frac{5}{2};3\right)$

Do $\frac{IM}{IA} = \frac{IK}{IM} = \frac{1}{2}$, góc $\widehat{MIK}$ chung $\Rightarrow \Delta IKM \sim \Delta IMA$ $(c.g.c)$

$\Rightarrow \frac{MK}{MA} = \frac{IK}{IM} = \frac{1}{2} \Rightarrow MA = 2.MK$.

Lại có: $T = |z-7-9i| + 2|z-8i| = MA + 2.MB = 2(MK+MB) \geq 2.BK = 5\sqrt{5}$

$\Rightarrow T_{\min} = 5\sqrt{5} \Leftrightarrow M = BK \cap (C)$, M nằm giữa B và $K \Rightarrow 0 < x_M < \frac{5}{2}$.

Ta có: phương trình đường thẳng BK là: 2x+y-8=0

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x+y-8=0 \\ (x-1)^2+(y-1)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases} \\ \begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow M = (1;6)$.

Vậy $z = 1+6i$ là số phức cần tìm.

Câu 114. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2-2z+5| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$.

Tính $\min|w|$, với $w = z-2+2i$.

A. $\min|w| = \frac{3}{2}$. **B.** $\min|w| = 2$. **C.** $\min|w| = 1$. **D.** $\min|w| = \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có

$|z^2-2z+5| = |(z-1+2i)(z+3i-1)| \Leftrightarrow |(z-1+2i)(z-1-2i)| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z-1+2i=0 \\ |(z-1-2i)| = |(z+3i-1)| \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $z-1+2i=0 \Rightarrow w=-1 \Rightarrow |w|=1$ (1).

Trường hợp 2: $|z-1-2i| = |z+3i-1|$

Gọi $z = a+bi$ (với $a,b \in \mathbb{R}$) khi đó ta được

$|a-1+(b-2)i| = |(a-1)+(b+3)i| \Leftrightarrow (b-2)^2 = (b+3)^2 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}$.

Suy ra $w = z-2+2i = a-2+\frac{3}{2}i \Rightarrow |w| = \sqrt{(a-2)^2+\frac{9}{4}} \geq \frac{3}{2}$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $\min|w| = 1$.

Câu 115. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+2|^2 - |z-i|^2$. Môđun của số phức $w = M+mi$ là

A. $|w| = \sqrt{1258}$ **B.** $|w| = 2\sqrt{309}$ **C.** $|w| = 2\sqrt{314}$ **D.** $|w| = 3\sqrt{137}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

- Đặt $z = x+yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $|z-3-4i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow |(x-3)+(y-4)i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=5$, hay tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(3;4)$, bán kính $r=\sqrt{5}$.

- Khi đó : $P=|z+2|^2-|z-i|^2=(x+2)^2+y^2-x^2-(y-1)^2=4x+2y+3$

$\Rightarrow 4x+2y+3-P=0$, kí hiệu là đường thẳng Δ.

- Số phức z tồn tại khi và chỉ khi đường thẳng Δ cắt đường tròn (C)

$\Leftrightarrow d(I;\Delta)\le r \Leftrightarrow \dfrac{|23-P|}{2\sqrt{5}}\le\sqrt{5} \Leftrightarrow |P-23|\le 10 \Leftrightarrow 13\le P\le 33$

Suy ra $M=33$ và $m=13$ $\Rightarrow w=33+13i$.

Vậy $|w|=\sqrt{1258}$.

Câu 116. Cho số phức z thoả mãn $|z-3-4\mathrm{i}|=\sqrt{5}$ và biểu thức $P=|z+2|^2-|z-\mathrm{i}|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Môđun của số phức z bằng

A. $5\sqrt{2}$. **B.** 13. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$ và gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z trên Oxy, ta có

$|z-3-4i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=5$

Và $P=|z+2|^2-|z-i|^2=(x+2)^2+y^2-x^2-(y-1)^2=4x+2y+3$.

Như vậy $P=4x+2y+3=\left[4(x-3)+2(y-4)\right]+23\le\sqrt{4^2+2^2}.\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}+23=33$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-4}{2}=t\\ 4(x-3)+2(y-4)=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\ y=5\\ t=0,5\end{cases}$.

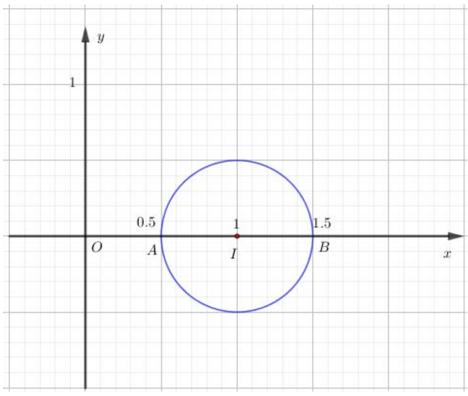
Vậy P đạt giá trị lớn nhất khi $z=5+5i \Rightarrow |z|=5\sqrt{2}$.

Câu 117. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P=\left|\dfrac{z+i}{z}\right|$, với z là số phức khác 0 và thỏa mãn $|z|\ge 2$. Tính tỷ số $\dfrac{M}{m}$.

A. $\dfrac{M}{m}=5$ **B.** $\dfrac{M}{m}=3$ **C.** $\dfrac{M}{m}=\dfrac{3}{4}$ **D.** $\dfrac{M}{m}=\dfrac{1}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn B



Gọi $T=\dfrac{z+i}{z}\Rightarrow (T-1)z=i$.

Nếu $T=1\Rightarrow$ Không có số phức nào thoả mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $T\neq 1\Rightarrow z=\dfrac{i}{T-1}\Leftrightarrow |z|=\left|\dfrac{i}{T-1}\right|\geq 2\Rightarrow |T-1|\leq \dfrac{1}{2}$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức T là hình tròn tâm $I(1;0)$ có bán kính $R=\dfrac{1}{2}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} M=OB=OI+R=\dfrac{3}{2} \\ m=OA=|OI-R|=\dfrac{1}{2} \end{cases}\Rightarrow \dfrac{M}{m}=3.$$

Câu 118. Cho các số phức z thỏa mãn $|z^2+4|=|(z-2i)(z-1+2i)|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=|z+3-2i|$.

A. $P_{\min}=\dfrac{7}{2}$. **B.** $P_{\min}=3$. **C.** $P_{\min}=4$. **D.** $P_{\min}=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $|z^2+4|=|(z-2i)(z-1+2i)|\Leftrightarrow |z-2i|\left(|z+2i|-|z-1+2i|\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|z-2i|=0\\ |z+2i|=|z-1+2i|\end{array}\right.$.

Do đó tập hợp các điểm N biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ Oxy là điểm $A(0;2)$ và đường trung trực của đoạn thẳng BC với $B(0;-2)$, $C(1;-2)$.

Ta có $\overrightarrow{BC}=(1;0)$, $M\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ là trung điểm BC nên phương trình đường trung trực của BC là $\Delta: 2x-1=0$.

Đặt $D(-3;2)$, $DA=3$, $d(D,\Delta)=\dfrac{7}{2}$.

Khi đó $P=|z+3-2i|=DN$, với N là điểm biểu diễn cho z.

Suy ra $\min P=\min\{DA, d(D,\Delta)\}=3$.

Câu 119. Gọi $z = x + yi\left(x, y \in \mathbb{R}\right)$ là số phức thỏa mãn hai điều kiện $\left|z-2\right|^2 + \left|z+2\right|^2 = 26$ và $\left|z - \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i\right|$ đạt giá trị lớn nhất. Tính tích xy.

A. $xy = \frac{9}{2}$. **B.** $xy = \frac{13}{2}$. **C.** $xy = \frac{16}{9}$. **D.** $xy = \frac{9}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $z = x + iy\left(x, y \in \mathbb{R}\right)$. Thay vào điều kiện thứ nhất, ta được $x^2 + y^2 = 36$.

Đặt $x = 3\cos t, y = 3\sin t$. Thay vào điều kiện thứ hai, ta có

$$P = \left|z - \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i\right| = \sqrt{18 - 18\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)} \le 6.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Rightarrow t = -\frac{3\pi}{4} \Rightarrow z = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i.$

Câu 120. Xét các số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $\left|z - 3 - 2i\right| = 2$. Tính $a + b$ khi $\left|z + 1 - 2i\right| + 2\left|z - 2 - 5i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 3. **B.** $4 + \sqrt{3}$. **C.** $4 - \sqrt{3}$. **D.** $2 + \sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1:

Đặt $z - 3 - 2i = w$ với $w = x + yi$ $\left(x, y \in \mathbb{R}\right)$. Theo bài ra ta có $|w| = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$.

Ta có $P = \left|z + 1 - 2i\right| + 2\left|z - 2 - 5i\right| = \left|w + 4\right| + 2\left|w + 1 - 3i\right| = \sqrt{(x+4)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}$

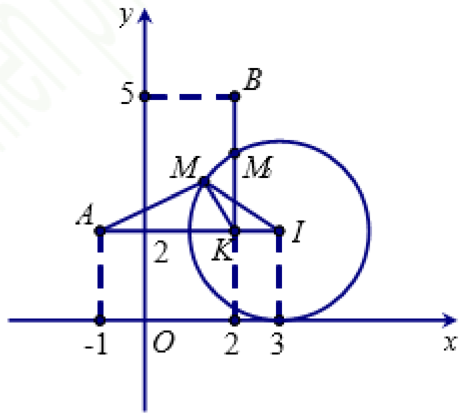
$= \sqrt{20 + 8x} + 2\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} = 2\sqrt{5 + 2x} + 2\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}$

$= 2\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}\right) = 2\left(\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}\right)$

$\ge 2\left(|y| + |y-3|\right) \ge 2\left|y + 3 - y\right| = 6$.

$$P = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y(3-y) \ge 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \sqrt{3} \end{cases}.$$

Vậy GTNN của P là bằng 6 đạt được khi $z = 2 + \left(2 + \sqrt{3}\right)i$.



Cách 2:

$\left|z-3-2i\right|=2 \Rightarrow MI=2 \Rightarrow M \in (I;2)$ với $I=(3;2)$.

$P=\left|z+1-2i\right|+2\left|z-2-5i\right|=MA+2MB$ với $A=(1;2)$, $B=(2;5)$.

Ta có $IM=2$; $IA=4$. Chọn $K(2;2)$ thì $IK=1$. Do đó ta có $IA.IK=IM^2 \Rightarrow \dfrac{IA}{IM}=\dfrac{IM}{IK}$

$\Rightarrow \Delta IAM$ và ΔIMK đồng dạng với nhau $\Rightarrow \dfrac{AM}{MK}=\dfrac{IM}{IK}=2 \Rightarrow AM=2MK$.

Từ đó $P=MA+2MB=2(MK+MB)\geq 2BK$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M, K, B thẳng hàng và M thuộc đoạn thẳng BK.

Từ đó tìm được $M=\left(2;2+\sqrt{3}\right)$.

Cách 3:

Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức $z=a+bi$. Đặt $I=(3;2)$, $A(-1;2)$ và $B(2;5)$.

Ta xét bài toán: Tìm điểm M thuộc đường tròn (C) có tâm I, bán kính $R=2$ sao cho biểu thức $P=MA+2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Trước tiên, ta tìm điểm $K(x;y)$ sao cho $MA=2MK\ \forall M\in(C)$.

Ta có $MA=2MK \Leftrightarrow MA^2=4MK^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2=4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IK}\right)^2$

$\Leftrightarrow MI^2+IA^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}=4\left(MI^2+IK^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IK}\right) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}-4\overrightarrow{IK}\right)=3R^2+4IK^2-IA^2\ (*)$.

$(*)$ luôn đúng $\forall M\in(C) \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{IA}-4\overrightarrow{IK}=\vec{0}\\ 3R^2+4IK^2-IA^2=0\end{cases}$.

$\overrightarrow{IA}-4\overrightarrow{IK}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases}4(x-3)=-4\\ 4(y-2)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$.

Thử trực tiếp ta thấy $K(2;2)$ thỏa mãn $3R^2+4IK^2-IA^2=0$.

Vì $BI^2=1^2+3^2=10>R^2=4$ nên B nằm ngoài (C).

Vì $KI^2=1<R^2=4$ nên K nằm trong (C).

Ta có $MA+2MB=2MK+2MB=2(MK+MB)\geq 2KB$.

Dấu bằng trong bất đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn thẳng BK.

Do đó $MA+2MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của (C) và đoạn thẳng BK.

Phương trình đường thẳng $BK: x=2$.

Phương trình đường tròn $(C):(x-3)^2+(y-2)^2=4$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x=2 \\ (x-3)^2+(y-2)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2+\sqrt{3} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=2 \\ y=2-\sqrt{3} \end{cases}$.

Thử lại thấy $M\left(2;2+\sqrt{3}\right)$ thuộc đoạn BK.

Vậy $a=2$, $b=2+\sqrt{3} \Rightarrow a+b=4+\sqrt{3}$.

Câu 121. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+3|1-z|$.

A. $P=3\sqrt{15}$. **B.** $P=2\sqrt{5}$. **C.** $P=2\sqrt{10}$. **D.** $P=6\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

□Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$P=|1+z|+3|1-z|\le\sqrt{\left(1^2+3^2\right)\left(|1+z|^2+|1-z|^2\right)}=\sqrt{10\left(1+|z|^2\right)}=\sqrt{10(1+1)}=2\sqrt{5}.$$

Vậy $P_{\max}=2\sqrt{5}$.

Câu 122. Cho các số phức w, z thỏa mãn $|w+i|=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w=(2+i)(z-4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-1-2i|+|z-5-2i|$ bằng

A. $6\sqrt{7}$. **B.** $4+2\sqrt{13}$. **C.** $2\sqrt{53}$. **D.** $4\sqrt{13}$.

Hướng dẫn giải

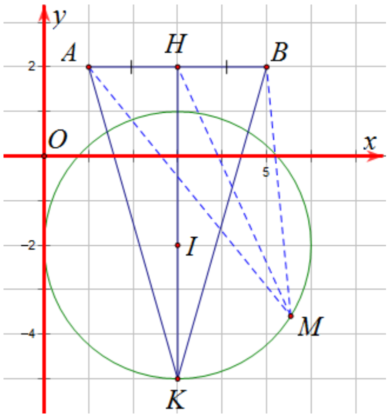
Chọn C

Gọi $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z.

Theo giả thiết, $5w=(2+i)(z-4)\Leftrightarrow 5(w+i)=(2+i)(z-4)+5i\Leftrightarrow(2-i)(w+i)=z-3+2i$

$\Leftrightarrow|z-3+2i|=3$. Suy ra $M(x;y)$ thuộc đường tròn $(C):(x-3)^2+(y+2)^2=9$.

Ta có $P=|z-1-2i|+|z-5-2i|=MA+MB$, với $A(1;2)$ và $B(5;2)$.



Gọi H là trung điểm của AB, ta có $H(3;2)$ và khi đó:

$$P=MA+MB\le\sqrt{2\left(MA^2+MB^2\right)} \text{ hay } P\le\sqrt{4MH^2+AB^2}.$$

Mặt khác, $MH\le KH$ với mọi $M\in(C)$ nên

$$P\le\sqrt{4KH^2+AB^2}=\sqrt{4(IH+R)^2+AB^2}=2\sqrt{53}.$$

Vậy $P_{\max} = 2\sqrt{53}$ khi $\begin{cases} M \equiv K \\ MA = MB \end{cases}$ hay $z = 3 - 5i$ và $w = \dfrac{3}{5} - \dfrac{11}{5}i$.

Câu 123. Biết rằng $|z-1| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của module số phức $w = \overline{z} + 2i$?

A. $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ **B.** $2 + \sqrt{5}$ **C.** $\sqrt{5} - 2$ **D.** $\sqrt{5} - \sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Quỹ tích $M(z)$ là đường tròn tâm $I(1,0)$ bán kính $R = 2$. Còn $|w| = |\overline{z} + 2i| = MA$ với $A(0,2)$.

Khi đó $\boxed{|w|_{\max} = IA + R = 2 + \sqrt{5}}$.

Câu 124. Trong các số phức z thỏa mãn $|z| = |\overline{z} - 2 + 4i|$, số phức có môđun nhỏ nhất là.

A. $z = 3 + i$. **B.** $z = 5$. **C.** $z = \dfrac{5}{2}i$. **D.** $z = 1 + 2i$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $z = x + yi, (x, y \in R) \Rightarrow \overline{z} = x - yi$.

Khi đó: $|z| = |\overline{z} - 2 + 4i| \Leftrightarrow |x + yi| = |x - yi - 2 + 4i|$.

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2 \Leftrightarrow x + 2y - 5 = 0$.

Tập hợp điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là đường thẳng $x + 2y - 5 = 0$.

$|x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(5-2y)^2 + y^2} = \sqrt{5(y^2 - 4y + 4) + 5} = \sqrt{5(y-2)^2 + 5} \geq \sqrt{5}$.

Suy ra: $|x + yi|$ bé nhất bằng $\sqrt{5}$ khi $y = 2 \Rightarrow x = 1$.

Câu 125. Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 3| = |z + i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = |z|$.

A. $P_{\min} = \dfrac{2\sqrt{10}}{5}$. **B.** $P_{\min} = \dfrac{3\sqrt{10}}{5}$. **C.** $P_{\min} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$. **D.** $P_{\min} = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$

Ta có: $P = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Mà $|z - 3| = |z + i|$

Hay $|a + ib - 3| = |a + ib + i|$

$\Leftrightarrow |(a-3) + ib| = |a + (b+1)i|$

$\Leftrightarrow (a-3)^2 + b^2 = a^2 + (b+1)^2$

$\Leftrightarrow b = 4 - 3a$

Lúc đó $P = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (4-3a)^2} = \sqrt{10a^2 - 24a + 16}$

$= \sqrt{10\left(x^2 - \dfrac{24}{10}x + \dfrac{144}{100}\right) + \dfrac{8}{5}} \geq \dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

Câu 126. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\left|1+\dfrac{5i}{z}\right|$.

A. 6. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $A=\left|1+\dfrac{5i}{z}\right|\le|1|+\left|\dfrac{5i}{z}\right|=1+\dfrac{5}{|z|}=6.$ Khi $z=i\Rightarrow A=6.$

Câu 127. Xét số phức z thỏa mãn $2|z-1|+3|z-i|\le 2\sqrt{2}.$ Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{2}<|z|<2$. **C.** $|z|>2$. **D.** $|z|<\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1. Chọn $z=i$.

Cách 2.

$2\sqrt{2}\ge 2|z-1|+3|z-i|=2\left(|z-1|+|z-i|\right)+|z-i|$

$\ge 2|z-1-(z-i)|+|z-i|=2|i-1|+|z-i|=2\sqrt{2}+|z-i|\ge 2\sqrt{2}$.

Dấu $"="$ xảy ra khi $|z-i|=0$ hay $z=i\Rightarrow|z|=|i|=1.$.

Câu 128. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3+3i|=2$. Giá trị lớn nhất của $|z-i|$ là

A. 8. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 7.

Hướng dẫn giải

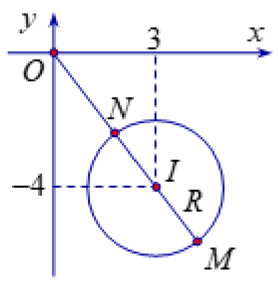
Chọn D

Cách 1. $2=|z-3+3i|=|(z-i)-(3-4i)|\ge|z-i|-|3-4i|\Rightarrow|z-i|\le 2+|3-4i|\Rightarrow|z-i|\le 7$.

Cách 2. Đặt $w=z-i$.

Gọi M là điểm biểu diễn của w trong hệ trục tọa độ Oxy.

$|z-3+3i|=2\Rightarrow|w-3+4i|=2\Rightarrow MI=2$ với $I(3;-4)\Rightarrow M$ nằm trên đường tròn (C) tâm $I(3;-4)$, bán kính $R=2$.



Ta có $|z-i|=|w|=OM$. Vậy $\max OM=OI+R=5+2=7$.

□ Lưu ý: Nếu đề bài hỏi "Giá trị nhỏ nhất của $|z-i|$" thì $\min OM=ON=OI-R$.