

## Chuyên đề 2

# BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

### A.KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1.Bất phương trình một ẩn

- bất phương trình một ẩn là bất phương trình có dạng  $f(x) > g(x)$  ( hoặc  $f(x) < g(x); f(x) \geq g(x); f(x) \leq g(x)$ ), trong đó  $f(x)$  và  $g(x)$  là hai biểu thức của biến  $x$ .
- Số  $x_0$  gọi là nghiệm của phương trình  $f(x) > g(x)$  nếu thay  $x_0$  vào ta được  $f(x_0) > g(x_0)$  là một khẳng định đúng. Giải bất phương trình ta tìm được tất cả các nghiệm hay tập nghiệm của bất phương trình đó.
- Hai bất phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.
- Phép biến đổi một bất phương trình thành một bất phương trình tương đương gọi là phép biến đổi tương đương.

Một số quy tắc biến đổi tương đương thường dùng là :

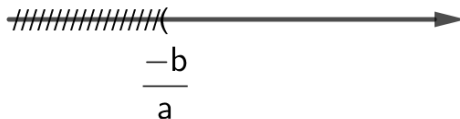
- Chuyển vế :  $f(x) + h(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) - h(x)$
- Nhân (chia) :  $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x).h(x) > g(x).h(x)$  nếu  $h(x) > 0$  với mọi  $x$   
 $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x).h(x) < g(x).h(x)$  nếu  $h(x) < 0$  với mọi  $x$ .

#### 2.Bất phương trình bậc nhất một ẩn :

- Bất phương trình một ẩn là bất phương trình có dạng  $ax + b > 0$  ( hoặc  $ax + b < 0; ax + b \geq 0; ax + b \leq 0$  ) trong đó  $a, b$  là các số cho trước và  $a \neq 0$ .
- Giải bất phương trình  $ax + b > 0$  (1)

Ta có (1)  $\Leftrightarrow ax > -b$

+ Nếu  $a > 0$  thì (1)  $\Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$



+ Nếu  $a < 0$  thì (1)  $\Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$

$$\begin{array}{c} \text{-----} \rangle \text{////////////////////} \text{-----} \rightarrow \\ \frac{-b}{a} \end{array}$$

+ Nếu  $a = 0$  thì (1) trở thành  $0x > -b$

- Nếu  $b \leq 0$  thì (1) vô nghiệm
- Nếu  $b > 0$  thì (1) nghiệm đúng với mọi  $x \in R$

## B. MỘT SỐ VÍ DỤ

**Dạng 1. Xét xem một số có là nghiệm của bất phương trình hay không.**

**Ví dụ 9.** Xét xem  $x = -3$  có là nghiệm của bất phương trình sau hay không ?

$$a) \frac{2x-5}{3} + 3 > \frac{1}{x+1} \quad (1)$$

$$b) -4x^2 + \frac{x+6}{3} \leq \frac{2}{3}x - 10 \quad (2)$$

**Giải**

a) Thay  $x = -3$  vào bất phương trình (1) ta được :

$$\frac{2(-3)-5}{3} + 3 > \frac{1}{-3+1} \Leftrightarrow \frac{-11}{3} + 3 > \frac{1}{-2} \Leftrightarrow \frac{-2}{3} > \frac{-1}{2} \text{ là một khẳng định sai.}$$

Vậy  $x = -3$  không phải là nghiệm của bất phương trình (1).

b) Thay  $x = -3$  vào bất phương trình (2) ta được :

$$-4(-3)^2 + \frac{-3+6}{3} \leq \frac{2}{3}(-3) - 10$$

$$\Leftrightarrow -36 + 1 \leq -2 - 10$$

$$\Leftrightarrow -35 \leq -12 \text{ là một khẳng định đúng.}$$

Vậy  $x = -3$  là nghiệm của bất phương trình (2).

**Ví dụ 10.** Tìm  $m$  để  $x = 7$  là nghiệm của bất phương trình :  $\frac{(m-1)x}{x-2} - 3 > 2x - 24$

**Giải**

Vì  $x = 7$  là nghiệm của bất phương trình nên ta có:

$$\frac{(m-1)7}{7-2} - 3 > 2 \cdot 7 - 24 \Leftrightarrow \frac{(m-1) \cdot 7}{5} > -7$$

$$\Leftrightarrow m-1 > -5 \Leftrightarrow m > -4$$

Vậy điều kiện cần tìm của m là  $m > -4$

### Dạng 2 Giải bất phương trình.

**Ví dụ 11.** Giải các bất phương trình sau:

a)  $2x - 7 > 8 - x$

b)  $\frac{1-3x}{2} - 3 \leq x - \frac{x+1}{4}$

Giải

a)  $2x - 7 > 8 - x \Leftrightarrow 2x + x > 8 + 7$

$$\Leftrightarrow 3x > 15$$

$$\Leftrightarrow x > 5$$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$



b)  $\frac{1-3x}{2} - 3 \leq x - \frac{x+1}{4} \Leftrightarrow 2(1-3x) - 12 \leq 4x - (x+1)$

$$\Leftrightarrow 2 - 6x - 12 \leq 4x - x - 1$$

$$\Leftrightarrow -6x - 4x + x \leq -1 - 2 + 12$$

$$\Leftrightarrow -9x \leq 9$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1$$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$



**Ví dụ 12.** Giải các bất phương trình sau:

a)  $3x^2 - 6x + 7 < 0$

b)  $\frac{4x-3}{x+2} > 5$

Giải

a) Ta có  $3x^2 - 6x + 7 < 0 \Leftrightarrow (3x^2 - 6x + 3) + 4 < 0 \Leftrightarrow 3(x-1)^2 + 4 < 0$

Mặt khác :  $3(x-1)^2 + 4 > 0, \forall x \in R$ , nên không có giá trị nào của x thỏa mãn bất phương trình.

Vậy bất phương trình vô nghiệm.

b) Ta có  $\frac{4x-3}{x+2} > 5 \Leftrightarrow \frac{4x-3}{x+2} - 5 > 0 \Leftrightarrow \frac{4x-3-5(x+2)}{x+2} > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-x-13}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+13}{x+2} < 0$$

Suy ra  $x+13$  và  $x+2$  trái dấu mà  $x+13 > x+2$  nên :  $x+13 > 0 > x+2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+13 > 0 \\ x+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -13 \\ x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow -13 < x < -2$$

Vậy bất phương trình có nghiệm là  $-13 < x < -2$



### Dạng 3. Giải và biện luận bất phương trình.

**Ví dụ 13.** Giải và biện luận bất phương trình :  $(m-1)x - 3 > x + m$  (1)

Giải

Ta có (1)  $\Leftrightarrow (m-2)x > m+3$

- Nếu  $m-2=0 \Leftrightarrow m=2$ , thì (1) trở thành  $0x > 5 \Rightarrow$  vô nghiệm.

- Nếu  $m-2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$ , thì (1)  $\Leftrightarrow x > \frac{m+3}{m-2}$

- Nếu  $m-2 < 0 \Leftrightarrow m < 2$ , thì (1)  $\Leftrightarrow x < \frac{m+3}{m-2}$

Kết luận :

- Nếu  $m = 2$  thì bất phương trình vô nghiệm

- Nếu  $m > 2$ , thì bất phương trình (1) có nghiệm là  $x > \frac{m+3}{m-2}$

- Nếu  $m < 2$ , thì bất phương trình (1) có nghiệm là  $x < \frac{m+3}{m-2}$

**Ví dụ 14.** Giải và biện luận bất phương trình :

$$x - m \geq \frac{3(x+2)}{m} - 5 \quad (2)$$

**Giải**

Ta có (2)  $\Leftrightarrow x - m + 5 - \frac{3x+6}{m} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{mx - m^2 + 5m - 3x - 6}{m} \geq 0$   
 $\Leftrightarrow \frac{(m-3)x - (m^2 - 5m + 6)}{m} \geq 0 \quad (3)$

- Nếu  $m > 0$  thì ta có  
 $(m-3)x - (m^2 - 5m + 6) \geq 0 \Leftrightarrow (m-3)x \geq (m-2)(m-3) \quad (4)$ 
  - + Nếu  $m = 3$  thì (4) trở thành  $0x \geq 0$  nghiệm đúng với mọi  $x$
  - + Nếu  $m > 3$  thì (4)  $\Leftrightarrow x \geq \frac{(m-2)(m-3)}{m-3} \Leftrightarrow x \geq m-2$
  - + Nếu  $0 < m < 3$ , thì (4)  $\Leftrightarrow x \leq \frac{(m-2)(m-3)}{m-2} \Leftrightarrow x \leq m-2$
- Nếu  $m < 0$  thì ta có :  $(m-3)x - (m^2 - 5m + 6) \leq 0 \Leftrightarrow (m-3)x \leq (m-2)(m-3)$   
 $x \geq \frac{(m-2)(m-3)}{m-3} \Leftrightarrow x \geq m-2$  (vì  $m-3 < 0$ )

**Kết luận :**

- Nếu  $m > 3$  hoặc  $m < 0$  thì (2) có nghiệm là  $x \geq m-2$
- Nếu  $m = 3$  thì (2) nghiệm đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$
- Nếu  $0 < m < 3$  thì (2) có nghiệm là  $x \leq m-2$   
(  $m = 0$  thì bất phương trình không có nghĩa )

### C.BÀI TẬP

**4.17** Xét xem  $x = -6$  có là nghiệm của bất phương trình sau không ?

a)  $1 - 5x \leq x^2 - 4$

b)  $\frac{2}{7x-4} > \frac{1}{14-x^2}$

**4.18.** Tìm  $m$  để  $x = -2$  là nghiệm của bất phương trình :

a)  $\frac{x-13}{5} - m < 2x - \frac{m-x}{10}$

b)  $4x^2 - (m-1)x + 2 - m \geq 0$

**4.19** Giải các bất phương trình sau :

a)  $1 - \frac{2x-5}{6} > \frac{3-x}{4}$

b)  $\frac{(2x-1)^2}{2} - \frac{(1-3x)^2}{3} \leq x(2-x)$

**4.20.** Chứng minh rằng bất phương trình  $(x+6)(8-x) < 0$  không có nghiệm x mà  $-6 \leq x \leq 8$

**4.21** Giải các bất phương trình sau :

a)  $\frac{2x+3}{x+2} \geq 1$

b)  $\frac{4-x}{x-9} - \frac{1}{x-1} > 0$

**4.22.** Tìm nghiệm chung của hai bất phương trình sau :  $2x+1 > 3x-4$  và  $(x-1)^2 \leq (2x-3)^2$

**4.23.** Giải bất phương trình :  $\frac{x+12}{2000} + \frac{x+15}{1997} > \frac{x+34}{1978} + \frac{x+26}{1986}$

**4.24.** Giải và biện luận bất phương trình.

a)  $mx + 4 \geq 2x + m^2$

b)  $(m+4)x < m^2 + 2m - 8$

**4.25.** Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi  $x \in R$

a)  $m^2x \geq 9x + m^2 + 3m$

b)  $m^3(x+2) \leq m^2(x-1)$

**4.26.** Tìm m để bất phương trình sau vô nghiệm :

$$(m^2 + m + 1)x + 3m \geq (m^2 + 2)x + 5m - 1$$

**4.27.** Giải và biện luận bất phương trình:  $\frac{x+3}{m} + m > x + 4$

**4.28.** Tìm m để hai bất phương trình  $x - 7 \leq 0$  và  $mx \geq m + 1$  có một nghiệm chung duy nhất.

**4.29.** Tìm m để hai bất phương trình sau không có nghiệm chung :

$$\frac{8}{3-x} > 1 \text{ và } x \geq 3 - mx$$

**4.30.** Tìm m để hai bất phương trình sau tương đương:

$$(m-1)x - m + 3 > 0 \text{ và } (m+1)x - m + 2 > 0$$