

HD GIẢI 30 BÀI TOÁN VỀ DÃY CÁC SỐ VIẾT THEO QUY LUẬT (Bồi dưỡng học sinh giỏi Toán)

Tài liệu này hệ thống 9 loại dãy số viết có quy luật, từ đó ra thành 30 bài toán để HSG có thể rèn luyện, với mỗi dạng có công thức tổng quát để áp dụng.

► **Bài 1:** Tìm số hạng thứ n của các dãy số sau:

- a) 3, 8, 15, 24, 35, ...
- b) 3, 24, 63, 120, 195, ...
- c) 1, 3, 6, 10, 15, ...
- d) 2, 5, 10, 17, 26, ...
- e) 6, 14, 24, 36, 50, ...
- f) 4, 28, 70, 130, 208, ...
- g) 2, 5, 9, 14, 20, ...
- h) 3, 6, 10, 15, 21, ...
- i) 2, 8, 20, 40, 70, ...

• **Hướng dẫn:**

- a) $n(n+2)$
- b) $(3n-2)3n$
- c) $n(n+1):2$
- d) $1+n^2$
- e) $n(n+5)$
- f) $(3n-2)(3n+1)$
- g) $n.(n+3):2$
- h) $n.[(n+1)(n+2)]:2$
- i) $n.[(n+1)(n+2)]:3$

► **Bài 2:** Tính giá trị của A, biết:

- a) $A = 1+2+3+\dots+(n-1)+n$
- b) $A = 1.2+2.3+3.4+\dots+99.100$

• **Hướng dẫn:**

a) Tổng các giá trị của dãy số tự nhiên từ 1 đến n

$$\boxed{A = 1+2+3+\dots+(n-1)+n = n(n+1):2 \quad [*1]}$$

thay giá trị n vào => tính được A

b) Nhân 2 về với 3, trong đó từ số hạng thứ 2 thay vì nhân 3 ta nhân $(4-1)=3$

$$3A = 1.2.3 + 2.3(4-1) + 3.4.(5-2) + \dots + 99.100.(101-98)$$

$$3A = 1.2.3 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + \dots + 99.100.101 - 98.99.100$$

$$3A = 99.100.101$$

$$A = 333300$$

Tổng quát: Dãy số b) với số cuối cùng là n thì:

$$A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + (n-1)n = \frac{1}{3}n.(n-1).(n+1) \quad [*2]$$

► **Bài 3:** Tính giá trị của A, biết:

$$A = 1.3 + 2.4 + 3.5 + \dots + 99.101$$

► **Hướng dẫn:** thay thừa số 3, 4, 5, 6.....101 bằng $(2+1), (3+1), (4+1), \dots, (100+1)$

Ta có

$$A = 1(2+1) + 2(3+1) + 3(4+1) + \dots + 99(100+1)$$

$$A = 1.2 + 1 + 2.3 + 2 + 3.4 + 3 + \dots + 99.100 + 99$$

$$A = \underbrace{(1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100)}_{333300} + \underbrace{(1 + 2 + 3 + \dots + 99)}_{4950}$$

$$A = 333300 + 4950 = 338250$$

Dãy đầu áp dụng công thức [*2], dãy sau công thức [*1]

Tổng quát:

$$A = 0.1 + 1.3 + 2.4 + 3.5 + \dots + (n-1)(n+1) \quad \text{Lưu ý số hạng đầu } = 0 \text{ với } n=1$$

$$A = (n-1)n(n+1):3 + n(n-1):2$$

$$A = 1.3 + 2.4 + 3.5 + \dots + (n-1)(n+1) = \frac{n}{6} [(n-1).(2n+1)] \quad [*3]$$

► **Bài 4:** Tính:

$$A = 1.4 + 2.5 + 3.6 + \dots + 99.102 = ?$$

► **Hướng dẫn:** thay thừa số 4, 5, 6.....102 bằng $(2+2), (3+2), (4+2), \dots, (100+2)$

ta có :

$$A = 1(2+2) + 2(3+2) + 3(4+2) + \dots + 99(100+2)$$

$$A = 1.2 + 1.2 + 2.3 + 2.2 + 3.4 + 3.2 + \dots + 99.100 + 99.2$$

$$A = \underbrace{(1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100)}_{333300} + \underbrace{2(1 + 2 + 3 + \dots + 99)}_{9900}$$

$$A = 333300 + 9900 = 343200$$

Dãy đầu áp dụng công thức [*2], dãy sau công thức [*1]

► **Bài 5:** Tính:

$$A = 4 + 12 + 24 + 40 + \dots + 19404 + 19800$$

☛ Hướng dẫn: Chia 2 vế cho 2 ta có

$$\frac{1}{2}.A = 1.2+2.3+3.4+4.5+\dots+98.99+99.100$$

Áp dụng công thức [*2] tính ra $A = 666600$

➤ Bài 6: Tính:

$$A = 1 + 3 + 6 + 10 + \dots + 4851 + 4950 = ?$$

☛ Hướng dẫn: Nhân 2 vế với 2 và biến đổi để vế phải là dạng [*2]; ta có

$$2A = 1.2+2.3+3.4+\dots+99.100 = 333300$$

$$\Rightarrow A = 333300:2 = 166650$$

➤ Bài 7: Tính:

$$A = 6+16+30+48+\dots+19600+19998 = ?$$

☛ Hướng dẫn: Chia 2 vế cho 2 và biến đổi để vế phải là dạng [*3]; ta có

$$\frac{1}{2} A = 1.3+2.4+3.5+\dots+99.101$$

$$\Rightarrow A = 338250 \times 2 = 676500$$

➤ Bài 8: Tính:

$$A = 2+5+9+14+\dots+4949+5049 = ?$$

☛ Hướng dẫn: Nhân 2 vế với 2 ta đưa về dạng Bài 4 (ở trên)

$$2A = 1.4+2.5+3.6+\dots+99.102$$

$$A = 343200:2 = 171600$$

➤ Bài 9: Tính:

$$A = 1.2.3+2.3.4+3.4.5+\dots+98.99.100 = ?$$

☛ ➤ Hướng dẫn: Nhân 2 vế với 4 và biến đổi ta có

$$4A = 1.2.3.4+2.3.4(5-1)+3.4.5.(6-2)+\dots+98.99.100.(101-97)$$

$$4A = 1.2.3.4+2.3.4.5-1.2.3.4+3.4.5.6-2.3.4.5+\dots+98.99.100.101-97.98.99.100$$

$$4A = 98.99.100.101$$

$$\Rightarrow A = 2449755$$

Tổng quát:

$$A = 1.2.3+2.3.4+3.4.5+\dots+(n-2)(n-1)n = \frac{1}{4} .(n-2)(n-1)n(n+1) \quad [*4]$$

➤ Bài 10: Tính tổng các bình phương của 100 số tự nhiên đầu tiên

$$A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 99^2 + 100^2$$

☛ Hướng dẫn:

$$A = 1+2(1+1)+3(2+1)+\dots+99(98+1)+100(99+1)$$

$$A = 1+1.2+2+2.3+3+\dots+98.99+99+99.100+100$$

$$A = \underbrace{(1.2+2.3+3.4+\dots+99.100)}_{333300} + \underbrace{(1+2+3+\dots+99+100)}_{5050}$$

$$A = 333300 + 5050 = 338050$$

Tổng quát:

$$A = (n-1)n(n+1):3 + n(n+1):2$$

$$A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 99^2 + 100^2 = n(n+1)(2n+1):6 \quad [*5]$$

► **Bài 11:** Tính tổng các bình phương của 50 số chẵn đầu tiên (2,4,6,8,...98,100):

$$A = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 98^2 + 100^2 = ?$$

• **Hướng dẫn:** Tách 2^2 làm thừa số chung rồi áp dụng công thức [*5]

$$A = 2^2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 49^2 + 50^2)$$

► **Bài 12:** Tính tổng các bình phương của 50 số lẻ đầu tiên

$$A = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 97^2 + 99^2 = ?$$

• **Hướng dẫn:** Lấy tổng các bình phương của 100 số tự nhiên đầu tiên trừ tổng các bình phương của 50 số chẵn đầu tiên

$$A = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 99^2 + 100^2) - 2^2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 49^2 + 50^2)$$

► **Bài 13:** Tính:

$$A = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2$$

• **Hướng dẫn:** Lấy tổng các bình phương của 100 số tự nhiên đầu tiên trừ 2 lần tổng các bình phương của 100 số chẵn đầu tiên

$$A = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 99^2 + 100^2) - 2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 99^2 + 100^2)$$

► **Bài 14:** Tính:

$$A = 1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \dots + 98.99^2 = ?$$

• **Hướng dẫn:**

$$A = 1.2(3-1) + 2.3(4-1) + 3.4(5-1) + \dots + 98.99(100-1)$$

$$A = 1.2.3 - 1.2 + 2.3.4 - 2.3 + 3.4.5 - 3.4 + \dots + 98.99.100 - 98.99$$

$$A = (1.2.3+2.3.4+3.4.5+\dots+98.99.100)-(1.2+2.3+3.4+\dots+98.99)$$

► **Bài 15:** Tính:

$$A = 1.3+3.5+5.7+\dots+97.99+99.101 = ?$$

☛ **Hướng dẫn:** Đổi thừa thừa số thứ 2 của các số hạng thành tổng $(1+2), (3+2); (5+2), \dots, (99+2)$

$$A = 1(1+2)+3(3+2)+5(5+2)+\dots+97(97+2)+99(99+2)$$

$$A = (1^2+3^2+5^2+\dots+97^2+99^2)+2(1+3+5+\dots+97+99)$$

► **Bài 16:** Tính:

$$A = 2.4+4.6+6.8+\dots+98.100+100.102$$

☛ **Hướng dẫn:**

$$A = 2(2+2)+4(4+2)+6(6+2)+\dots+98(98+2)+100(100+2)$$

$$A = (2^2+4^2+6^2+\dots+98^2+100^2)+4(1+2+3+\dots+49+50)$$

► **Bài 17:** Tính:

$$A = 1^3+2^3+3^3+\dots+99^3+100^3$$

☛ **Hướng dẫn:**

$$A = 1^2(1+0)+2^2(1+1)+3^2(2+1)+\dots+99^2(98+1)+100^2(99+1)$$

$$A = (1.2^2+2.3^2+3.4^2+\dots+98.99^2+99.100^2)+(1^2+2^2+3^2+\dots+99^2+100^2)$$

$$A = [1.2(3-1)+2.3(4-1)+3.4(5-1)+\dots+98.99(100-1)]+(1^2+2^2+3^2+\dots+99^2+100^2)$$

$$A = (1.2.3 - 1.2+2.3.4 - 2.3+3.4.5 - 3.4+\dots+98.99.100 - 98.99) + (1^2+2^2+3^2+\dots+99^2+100^2)$$

$$A = (1.2.3+2.3.4+3.4.5+\dots+98.99.100) - (1.2+2.3+3.4+\dots+98.99) + (1^2+2^2+3^2+\dots+99^2+100^2)$$

► **Bài 18:** Tính:

$$A = 2^3+4^3+6^3+\dots+98^3+100^3$$

☛ **Hướng dẫn:**

► **Bài 19:** Tính:

$$A = 1^3+3^3+5^3+\dots+97^3+99^3$$

☛ **Hướng dẫn:** Lấy dãy số của bài 17 trừ dãy của bài 18

► **Bài 20:** Tính:

$$A = 1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + 99^3 - 100^3$$

Hướng dẫn:

► **Bài 21 :** Tính tổng:

$$2 + 4 - 6 - 8 + 10 + 12 - 14 - 16 + 18 + 20 - 22 - 24 \dots - 2008$$

► **Bài 22:** Cho $A = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 99 - 100$

a) Tính A.

b) A có chia hết cho 2, cho 3, cho 5 không ?

c) A có bao nhiêu ước tự nhiên. Bao nhiêu ước nguyên ?

► **Bài 23:** Cho $A = 1 - 7 + 13 - 19 + 25 - 31 + \dots$

a) Biết $A = 181$. Hỏi A có bao nhiêu số hạng ?

b) Biết A có n số hạng. Tính giá trị của A theo n ?

► **Bài 24:** Cho $A = 1 - 7 + 13 - 19 + 25 - 31 + \dots$

a) Biết A có 40 số hạng. Tính giá trị của A.

b) Tìm số hạng thứ 2004 của A.

► **Bài 25:** Tìm giá trị của x trong dãy tính sau:

$$(x+2)+(x+12)+(x+42)+(x+47) = 655$$

► **Bài 26:**

a) Tìm x biết : $x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + \dots + (x+2009) = 2009.2010$

b) Tính $M = 1.2+2.3+3.4+ \dots + 2009.2010$

► **Bài 27:** Tính tổng:

$$S = 9.1 + 99.101 + 999.1001 + \dots + 99999.100001 = ?$$

► **Bài 28:** Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}$

Tìm số tự nhiên n biết rằng $2A + 3 = 3^n$

► **Bài 29:** Cho $M = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}$

Hỏi :

a. M có chia hết cho 4, cho 12 không ? vì sao?

b. Tìm số tự nhiên n biết rằng $2M+3 = 3^n$

► **Bài 30:** Cho biểu thức: $M = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{118} + 3^{119}$

a) Thu gọn biểu thức M.

b) Biểu thức M có chia hết cho 5, cho 13 không? Vì sao?

$$2 + 4 - 6 - 8 + 10 + 12 - 14 - 16 + 18 + 20 - 22 - 24 \dots - 2008$$

► **Bài 22:** Cho $A = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 99 - 100$

- Tính A.
- A có chia hết cho 2, cho 3, cho 5 không ?
- A có bao nhiêu ước tự nhiên. Bao nhiêu ước nguyên ?

► **Bài 23:** Cho $A = 1 - 7 + 13 - 19 + 25 - 31 + \dots$

- Biết $A = 181$. Hỏi A có bao nhiêu số hạng ?
- Biết A có n số hạng. Tính giá trị của A theo n ?

► **Bài 24:** Cho $A = 1 - 7 + 13 - 19 + 25 - 31 + \dots$

- Biết A có 40 số hạng. Tính giá trị của A.
- Tìm số hạng thứ 2004 của A.

► **Bài 25:** Tìm giá trị của x trong dãy tính sau:

$$(x+2)+(x+12)+(x+42)+(x+47) = 655$$

► **Bài 26:**

- Tìm x biết : $x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + \dots + (x+2009) = 2009.2010$
- Tính $M = 1.2+2.3+3.4+ \dots + 2009.2010$

► **Bài 27:** Tính tổng:

$$S = 9.1 + 99.101 + 999.1001 + \dots + 99999.100001 = ?$$

► **Bài 28:** Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}$

Tìm số tự nhiên n biết rằng $2A + 3 = 3^n$

► **Bài 29:** Cho $M = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}$

Hỏi :

- M có chia hết cho 4, cho 12 không ? vì sao?
- Tìm số tự nhiên n biết rằng $2M+3 = 3^n$

► **Bài 30:** Cho biểu thức: $M = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{118} + 3^{119}$

- Thu gọn biểu thức M.
- Biểu thức M có chia hết cho 5, cho 13 không? Vì sao?