HÀM SỐ LIÊN TỤC

A.ÔN TẬP LÝ THUYẾT:

1.Hàm số liên tục tại một điểm: y = f(x) liên tục tại x_0 ⇔ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

- Để xét tính liên tục của hàm số y = f(x) tại điểm x_0 ta thực hiện các bước:

Bước 1: Tính $f(x_0)$.

Bước 2: Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (trong nhiều trường hợp ta cần tính $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$)

Bước 3: So sánh $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ với $f(x_0)$ và rút ra kết luận.

Bước 4: Kết luận.

2.Hàm số liên tục trên một khoảng: y = f(x) liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

3.Hàm số liên tục trên một đoạn [a; b]: y = f(x) liên tục trên (a; b) và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

4.Hàm số đa thức liên tục trên R.

Hàm số phân thức, các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

5.Giả sử y = f(x), y = g(x) liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

- Các hàm số y = f(x) + g(x), y = f(x) – g(x), y = f(x).g(x) liên tục tại x_0.

- Hàm số y = $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

6.Nếu y = f(x) liên tục trên [a; b] và f(a). f(b)< 0 thì tồn tại ít nhất một số c ∈ (a; b): f(c) = 0.

Nói cách khác: Nếu y = f(x) liên tục trên [a; b] và f(a). f(b)< 0 thì phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm c∈ (a; b).

Mở rộng: Nếu y = f(x) liên tục trên [a; b]. Đặt m = $\min\limits_{[a;b]} f(x)$, M = $\max\limits_{[a;b]} f(x)$. Khi đó với mọi T ∈ (m; M) luôn tồn tại ít nhất một số c ∈ (a; b): f(c) = T.

B.CÁC DẠNG TOÁN:

Vấn đề 1: Hàm số liên tục tại một điểm:

Dạng 1: $f(x) = \begin{cases} h(x,m) \; khi \; x \neq x_0 \\ g(x,m) \; khi \; x = x_0 \end{cases}$ $tại \; x = x_0$

<u>Phương pháp:</u>

Bước 1: Tính $f(x_0)$.

Bước 2: Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Bước 3: So sánh $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ với $f(x_0)$ và rút ra kết luận.

Bước 4: Kết luận.

Ví dụ 1: Xét tính liên tục của hàm số tại điểm được chỉ ra: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-7x+5x^2}{x^2-3x+2} & khi \; x \neq 1 \\ -3 & khi \; x = 1 \end{cases}$ $tại \; x = 1$

<u>Giải:</u>

$f(1) = -3$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{2-7x+5x^2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(5x-2)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{5x-2}{x-2}=-3$$

Do: $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)=-3$ nên hàm số f(x) liên tục tại $x_0=1$

Vậy: Hàm số f(x) liên tục tại $x_0=1$

Ví dụ 2: Xét tính liên tục của hàm số tại điểm được chỉ ra: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-7x+5x^2}{x^2-3x+2} & khi\ x\neq1\\ -1 & khi\ x=1\end{cases}$ tại $x=1$

Giải:

$f(1)=-1$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{2-7x+5x^2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(5x-2)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{5x-2}{x-2}=-3$$

Do: $\lim_{x\to1} f(x)\neq f(1)$ nên hàm số f(x) gián đoạn tại $x_0=1$

Vậy: Hàm số f(x) gián đoạn tại $x_0=1$

Ví dụ 3: Tìm **m** để hàm số liên tục tại điểm được chỉ ra: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-7x+5x^2}{x^2-3x+2} & khi\ x\neq1\\ -3mx-1 & khi\ x=1\end{cases}$ tại $x=1$

Giải:

$f(1)=-3m.1-1$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{2-7x+5x^2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(5x-2)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{5x-2}{x-2}=-3$$

Để hàm số f(x) liên tục tại $x_0=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow -3m-1=-3\Leftrightarrow m=-\dfrac{2}{3}$

Vậy: Giá trị m cần tìm là m = -3

Bài tập vận dụng:

Bài tập 1: Xét tính liên tục của hàm số tại điểm được chỉ ra:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+3}{x-1} & khi\ x\neq1\\ -1 & khi\ x=1\end{cases}$ tại $x=-1$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & khi\ x\neq1\\ \dfrac{1}{4} & khi\ x=1\end{cases}$ tại $x=1$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2} & khi\ x\neq2\\ 1 & khi\ x=2\end{cases}$ tại $x=2$

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} & khi\ x\neq0\\ \dfrac{1}{3} & khi\ x=0\end{cases}$ tại $x=0$

Bài tập 2: Tìm **m, n** để hàm số liên tục tại điểm được chỉ ra:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & khi\ x\neq1\\ 3x+m & khi\ x=1\end{cases}$ tại $x=1$

b) $f(x)=\begin{cases}m & khi\ x=0\\ \dfrac{x^2-x-6}{x(x-3)} & khi\ x\neq0, x\neq3\\ n & khi\ x=3\end{cases}$ tại $x=0$ và $x=3$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & khi\ x\neq 2\\ m & khi\ x=2\end{cases}$ $tại\ x=2$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{\sqrt{6-x}-\sqrt[3]{6+x}} & khi\ x\neq 2\\ m & khi\ x=2\end{cases}$ $tại\ x=2$

Dạng 2: $f(x)=\begin{cases}h(x,m)\ khi\ x\geq x_0\\ g(x,m)\ khi\ x<x_0\end{cases}$ $tại\ x=x_0$ hoặc $f(x)=\begin{cases}h(x,m)\ khi\ x>x_0\\ g(x,m)\ khi\ x\leq x_0\end{cases}$ $tại\ x=x_0$

Phương pháp:

Bước 1: Tính $f(x_0)$.

Bước 2: Tính $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

Bước 3: So sánh $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ với $f(x_0)$ và rút ra kết luận.

Bước 4: Kết luận.

Ví dụ 1: Xét tính liên tục của hàm số tại điểm được chỉ ra: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-7x+5x^2}{x^2-3x+2} & khi\, x>1\\ 1 & khi\ x\leq 1\end{cases}$ $tại\ x=1$

Giải:

$f(1)=1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2-7x+5x^2}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(5x-2)}{(x-1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x-2}{x+2}=1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 1=1$

Do: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)=-3$ nên hàm số f(x) liên tục tại $x_0=1$

Vậy: Hàm số f(x) liên tục tại $x_0=1$

Ví dụ 2: Xét tính liên tục của hàm số tại điểm được chỉ ra: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-7x+5x^2}{x^2+x-2} & khi\, x>1\\ -1 & khi\ x\leq 1\end{cases}$ $tại\ x=1$

Giải:

$f(1)=-1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2-7x+5x^2}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(5x-2)}{(x-1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x-2}{x+2}=1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(-1)=-1$

Do: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)=-3$ nên hàm số f(x) gián đoạn tại $x_0=1$

Vậy: Hàm số f(x) gián đoạn tại $x_0=1$

Ví dụ 3: Tìm **m** để hàm số liên tục tại điểm được chỉ ra: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-7x+5x^2}{x^2+x-2} & khi\, x>1\\ -3mx-1 & khi\ x\leq 1\end{cases}$ $tại\ x=1$

Giải:

$f(1)=-3m.1-1$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{2-7x+5x^2}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(5x-2)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to1}\frac{5x-2}{x+2}=1$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}(-3mx-1)=-3m-1$$

Do hàm số f(x) không liên tục tại $x_0=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=f(1)\Leftrightarrow -3m-1=1\Leftrightarrow m=-\frac{2}{3}$

Vậy: Giá trị m cần tìm là: $m=-\frac{2}{3}$

Bài tập vận dụng:

Bài tập 1: Xét tính liên tục của hàm số tại điểm được chỉ ra:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & khi\ x>5\\ (x-5)^2+3 & khi\ x\le 5\end{cases}$ $tại\ x=5$

b) $f(x)=\begin{cases}1-\cos x & khi\ x\le 0\\ \sqrt{x+1} & khi\ x>0\end{cases}$ $tại\ x=0$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & khi\ x<1\\ -2x & khi\ x\ge 1\end{cases}$ $tại\ x=1$

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{2-x}}{x-1} & khi\ x<1\\ -\dfrac{x}{2} & khi\ x\ge 1\end{cases}$ $tại\ x=1$

e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-1}{x^3-1} & khi\ x<1\\ -2x & khi\ x\ge 1\end{cases}$ $tại\ x=1$

f) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-1} & khi\ x<1\\ -2x & khi\ x\ge 1\end{cases}$ $tại\ x=1$

g) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{4-\sqrt{x^2+16}} & khi\ x<0\\ 1-2x^2 & khi\ x\ge 0\end{cases}$ $tai\ x=0$

h) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{3-2x}-\sqrt{2-x}}{x-1} & khi\ x<1\\ -\dfrac{x}{2} & khi\ x\ge 1\end{cases}$ $tại\ x=1$

Bài tập 2: Tìm **m** để hàm số liên tục tại điểm được chỉ ra:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2 & khi\ x<1\\ 2mx-3 & khi\ x\ge 1\end{cases}$ $tại\ x=1$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & khi\ x>5\\ (x-5)^2+3m & khi\ x\le 5\end{cases}$ $tại\ x=5$

c) $f(x)=\begin{cases}1-m\cos x & khi\ x\le 0\\ \sqrt{x+1} & khi\ x>0\end{cases}$ $tại\ x=0$

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & khi\ x<1\\ -2mx+1 & khi\ x\ge 1\end{cases}$ $tại\ x=1$

e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-1}{x^3-1} & khi\ x<1\\ -2(m-1)x+3 & khi\ x\ge 1\end{cases}$ $tại\ x=1$

f) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-1} & khi\ x<1\\ m-2x & khi\ x\ge 1\end{cases}$ $tại\ x=1$

Vấn đề 2: Hàm số liên tục trên tập xác định của nó:

Dạng 1: $f(x)=\begin{cases}h(x,m)\ khi\ x\ne x_0\\ g(x,m)\ khi\ x=x_0\end{cases}$ $tại\ x=x_0$

Phương pháp:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2: Khi $x \neq x_0$. Kiểm tra tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x \neq x_0$.

Bước 3: Khi $x = x_0$.

- Tính f(x_0).
- Tính $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
- So sánh $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ với f(x_0) và rút ra kết luận tại điểm x_0.

Bước 4: Kết luận tính liên tục trên tập xác định của chúng.

Ví dụ 1: Xét tính liên tục của hàm số trên tập xác định của chúng: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-7x+5x^2}{x-1} & khi\, x \neq 1 \\ 3 & khi\ x = 1 \end{cases}$

Giải:

- Tập xác định: $D = R$
- Nếu $x \neq 1$, thì hàm số $f(x) = \dfrac{2-7x+5x^2}{x-1}$.

Đây là hàm phân thức hữu tỉ có tập xác định là $(-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

Vậy nó liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

- Nếu $x = 1$

$f(1) = -3$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{2-7x+5x^2}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(5x-2)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(5x-2) = 3$$

Do: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 3$ nên hàm số f(x) liên tục tại $x_0 = 1$

Suy ra hàm số f(x) liên tục tại $x_0 = 1$

- Vậy: Hàm số f(x) liên tục trên R.

Ví dụ 2: Xét tính liên tục của hàm số trên tập xác định của chúng: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-7x+5x^2}{x-1} & khi\, x \neq 1 \\ -1 & khi\ x = 1 \end{cases}$

Giải:

- Tập xác định: $D = R$
- Nếu $x \neq 1$, thì hàm số $f(x) = \dfrac{2-7x+5x^2}{x-1}$.

Đây là hàm phân thức hữu tỉ có tập xác định là $(-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

Vậy nó liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

- Nếu $x = 1$

$f(1) = -1$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-7x+5x^2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(5x-2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(5x-2) = 3$

Do: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$ nên hàm số f(x) không liên tục tại $x_0 = 1$

Suy ra hàm số f(x) không liên tục tại $x_0 = 1$

- Vậy: Hàm số f(x) liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ nhưng gián đoạn tại $x_0 = 1$

Ví dụ 3: Tìm **m** để hàm số liên tục trên tập xác định của chúng: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-7x+5x^2}{x-1} & khi\, x \neq 1 \\ -3mx-1 & khi\ x = 1 \end{cases}$ $\quad tại\ x = 1$

<u>Giải:</u>

- Tập xác định: $D = R$

- Nếu $x \neq 1$, thì hàm số $f(x) = \dfrac{2-7x+5x^2}{x-1}$.

Đây là hàm phân thức hữu tỉ có tập xác định là $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Vậy nó liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

- Nếu $x = 1$

$f(1) = -3m-1$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-7x+5x^2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(5x-2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(5x-2) = 3$

Do hàm số f(x) không liên tục tại $x_0 = 1$ nên $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow -3m-1 = 3 \Leftrightarrow m = -\dfrac{4}{3}$.

- Vậy: Giá trị m cần tìm là $m = -\dfrac{4}{3}$

Bài tập vận dụng:

Bài tập 1: Xét tính liên tục của hàm số trên tập xác định của chúng:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{x-1} & khi\ x \neq 1 \\ -1 & khi\ x = 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & khi\, x \neq 1 \\ \dfrac{1}{4} & khi\ x = 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-7x+5x^2-x^3}{x-2} & khi\, x \neq 2 \\ 1 & khi\ x = 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+x+2}{x^3+1} & khi\ x \neq -1 \\ \dfrac{4}{3} & khi\ x = -1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & khi\ x \neq -2 \\ -4 & khi\ x = -2 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} & khi\ x \neq \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & khi\ x = \sqrt{2} \end{cases}$

Bài tập 2: Tìm **m** để hàm số liên tục tại trên tập xác định của chúng:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & khi\ x\neq 1\\ 3x+m & khi\ x=1\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} m & khi\ x=0\\ \dfrac{x^2-x-6}{x(x-3)} & khi\ x\neq 0, x\neq 3\\ n & khi\ x=3\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & khi\ x\neq 2\\ m & khi\ x=2\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & khi\ x\neq 2\\ m & khi\ x=2\end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & khi\ x\neq 1\\ 3x+m & khi\ x=1\end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+x-2}{x-2} & khi\ x\neq 2\\ m & khi\ x=2\end{cases}$

Dạng 2: $f(x)=\begin{cases} h(x,m)\ khi\ x\geq x_0\\ g(x,m)\ khi\ x<x_0\end{cases}$ $tại\ x=x_0$ hoặc $f(x)=\begin{cases} h(x,m)\ khi\ x>x_0\\ g(x,m)\ khi\ x\leq x_0\end{cases}$ $tại\ x=x_0$

Phương pháp:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2: Khi $x\neq x_0$. Kiểm tra tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x\neq x_0$.

Bước 3: Khi $x=x_0$.

- Tính f(x_0).
- Tính $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$..
- So sánh $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ với f(x_0) và rút ra kết luận tại điểm x_0.

Bước 4: Kết luận tính liên tục trên tập xác định của chúng.

Ví dụ 1: Xét tính liên tục của hàm số trên tập xác định của chúng: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-7x+5x^2}{x-1} & khi\ x>1\\ 3 & khi\ x\leq 1\end{cases}$

Giải:

- Tập xác định: $D=R$.

- Nếu $x>1$, thì hàm số $f(x)=\dfrac{2-7x+5x^2}{x-1}$.

Đây là hàm phân thức hữu tỉ có tập xác định là $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Vậy nó liên tục trên mỗi khoảng $(1;+\infty)$.

- Nếu $x<1$, thì hàm số $f(x)=1$.

Đây là hàm đa thức có tập xác định là R.

Vậy nó liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$.

- Nếu $x=1$

$f(1)=3$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2-7x+5x^2}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)(5x-2)}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}(5x-2)=3$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} 3=3$

Do: $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=f(1)=3$ nên hàm số f(x) liên tục tại $x_0=1$

Vậy: Hàm số f(x) liên tục tại $x_0=1$

- Vậy: Hàm số f(x) liên tục trên R.

Ví dụ 2: Xét tính liên tục của hàm số trên tập xác định của chúng: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-7x+5x^2}{x-1} & khi\, x>1\\ -1 & khi\ x\le 1\end{cases}$

<u>Giải:</u>

- Tập xác định: $D=R$

- Nếu $x>1$, thì hàm số $f(x)=\dfrac{2-7x+5x^2}{x-1}$.

Đây là hàm phân thức hữu tỉ có tập xác định là $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Vậy nó liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$.

- Nếu $x<1$, thì hàm số $f(x)=1$.

Đây là hàm đa thứccó tập xác định là R.

Vậy nó liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$.

- Nếu $x=1$

$f(1)=-1$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2-7x+5x^2}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)(5x-2)}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}(5x-2)=3$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} -1=-1$

Do: $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)\ne\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=f(1)$ nên hàm số f(x) gián đoạn tại $x_0=1$

- Vậy: Hàm số f(x) liên tục trên $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$ và gián đoạn tại $x_0=1$.

Ví dụ 3: Tìm **m** để hàm số liên tục trên tập xác định của chúng: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-7x+5x^2}{x^2+x-2} & khi\, x>1\\ -3mx-1 & khi\ x\le 1\end{cases}$

<u>Giải:</u>

- Tập xác định: $D=R$

- Nếu $x>1$, thì hàm số $f(x)=\dfrac{2-7x+5x^2}{x-1}$.

Đây là hàm phân thức hữu tỉ có tập xác định là $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Vậy nó liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$.

- Nếu $x<1$, thì hàm số $f(x)=-3mx-1$.

Đây là hàm đa thứccó tập xác định là R.

Vậy nó liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$.

- Nếu $x=1$

$f(1)=-3m-1$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{2-7x+5x^2}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(5x-2)}{(x-1)}=\lim_{x\to1}(5x-2)=3$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}(-3mx-1)=-3m-1$$

Để hàm số f(x) gián đoạn tại $x_0=1$ khi $\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^-} f(x)=f(1)\Leftrightarrow m=-\frac{4}{3}$

- Vậy: Giá trị m cần tìm là $m=-\frac{4}{3}$.

Chú ý:

Bài tập vận dụng:

Bài tập 1: Xét tính liên tục của hàm số trên tập xác định của chúng:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-5}{x^2-25} & khi\ x>5\\ (x-5)^2+\dfrac{1}{10} & khi\ x\le 5\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}1-\cos x & khi\ x\le 0\\ \sqrt{x+1} & khi\ x>0\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}1-x & khi\ x\le 3\\ \dfrac{x^2-2x-3}{2x-6} & khi\ x>3\end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-1}{x^3-1} & khi\ x<1\\ -2x & khi\ x\ge 1\end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1} & khi\ x<1\\ -2x & khi\ x\ge 1\end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+4 & khi\ x<2\\ 5 & khi\ x=2\\ 2x+1 & khi\ x>2\end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{12-6x}{x^2-7x+10} & khi\ x\ne 2\\ 2 & khi\ x=2\end{cases}$

Bài tập 2: Tìm **m** để hàm số liên tục trên tập xác định của chúng:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2 & khi\ x<1\\ 2mx-3 & khi\ x\ge 1\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-5}{x^2-25} & khi\ x>5\\ (x-5)^2+3m & khi\ x\le 5\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}1-m\cos x & khi\ x\le 0\\ \dfrac{x^3+x}{x} & khi\ x>0\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x^3-1} & khi\ x<1\\ -2mx+1 & khi\ x\ge 1\end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-1}{x^3-1} & khi\ x<1\\ -2(m-1)x+3 & khi\ x\ge 1\end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1} & khi\ x<1\\ m-2x & khi\ x\ge 1\end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases}2m^2+1 & khi\ x\le 1\\ \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & khi\ x>1\end{cases}$ h) $f(x)=\begin{cases}x^2+x & khi\ x<1\\ 2 & khi\ x=1\\ mx+1 & khi\ x>1\end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases}x^2 & khi\ x<1\\ 2mx-3 & khi\ x\ge 1\end{cases}$ j) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & khi\ x<1\\ mx+2 & khi\ x\ge 1\end{cases}$

Vấn đề 3: Chứng minh phương trình có nghiệm:

Ví dụ 1: Chứng minh phương trình $3x^3+2x-2=0$ có nghiệm trong khoảng $(0;1)$

<u>Giải:</u>

- Xét hàm số $f(x)=3x^3+2x-2$ là hàm đa thức, liên tục trên R tức liên tục trên khoảng $(0;1)$.
- Ta có: $f(0).f(1)=(-2).(3)=-6<0$.
- Do đó: $\exists c\in(0;1): f(c)=0$, tức phương trình có nghiệm $c\in(0;1)$.

Ví dụ 2: Chứng minh phương trình $2x^3-6x^2+5=0$ có ba nghiệm trong khoảng $(-1;3)$

<u>Giải:</u>

- Xét hàm số $f(x)=2x^3-6x^2+5$ liên tục trên R nên $f(x)=2x^3-6x^2+5$ liên tục trên mọi đoạn.
- Ta có: $f(-1)=-3<0$, $f(0)=5>0$, $f(2)=-3<0$, $f(3)=5>0$. Suy ra phương trình có nghiệm trong mỗi khoảng $(-1;0)$, $(0;2)$, $(2;3)$.
- Vậy: Phương trìn có ba nghiệm trên khoảng $(-1;3)$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng phương trình: $ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm x $\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$ với a ≠ 0 và 2a + 6b + 19c = 0.

<u>Giải:</u>

- Xét hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ liên tục trên R.

Ta có: $f(0)=c$, $f(\frac{1}{3})=\frac{1}{9}(a+3b+9c)$

Do đó: $f(0)+18f(\frac{1}{3})=2a+6b+19c=0$

Như thế:

- Nếu $f(0)=0$ hay $f(\frac{1}{3})=0$ phương trình $f(x)=0$ hiển nhiên có nghiệm thuộc $\left[0;\frac{1}{3}\right]$.
- Nếu $f(0)\ne 0$ và $f(\frac{1}{3})\ne 0$ ta thấy $f(0)f(\frac{1}{3})<0$.

Vậy: Phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trên $\left[0;\frac{1}{3}\right]$.

Ví dụ 4: Với mọi $a,b,c\in R$, chứng minh phương trình: $a(x-b)(x-c)+b(x-c)(x-a)+c(x-a)(x-b)=0$ luôn luôn có nghiệm.

<u>Giải:</u>

- Xét hàm số $f(x)=a(x-b)(x-c)+b(x-c)(x-a)+c(x-a)(x-b)$ liên tục trên R.

$f(a)=a(a-b)(a-c)$, $f(b)=b(b-c)(b-a)$, $f(c)=c(c-a)(c-b)$

Giả sử $a\le b\le c$ (tương tự các trường hợp sau)

- Nếu $a=0$ hoặc $b=0$ hoặc $c=0$ ta có $f(0)=0$ do đó $x=0$ là một nghiệm của phương trình.
- Nếu $b\ne 0$. Ít nhất có một trong hai trường hợp xảy ra:

+Với $a\le b<0 \Rightarrow f(a)f(b)=-ab(a-b)^2(a-c)(b-c)\le 0$

Suy ra phương trình có nghiệm trên đoạn $[a;b]$

+Với $0<b\le c \Rightarrow f(b)f(c)=-bc(a-b)^2(b-a)(b-c)\le 0$

Suy ra phương trình có nghiệm trên đoạn $[b;c]$.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng nếu $2a+3b+6b=0$ thì phương trình $a\tan^2 x+b\tan x+c=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $\left(k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$ với $k\in Z$

<u>***Giải:***</u>

- Xét hàm số $f(x)=a\tan^2 x+b\tan x+c$

Đặt $t=\tan x$, $x_0\in\left(k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right)\Rightarrow t\in(0;1)$. Khi đó ta có: $f(t)=at^2+bt+c$ có ít nhất một nghiệm $t_0\in(0;1)$

- Nếu $a\ne 0, c\ne 0$. Ta có: $f(0)f\left(\frac{2}{3}\right)=c\left(\frac{4}{9}a+\frac{2}{3}b+c\right)=-\frac{c^2}{3}<0$. Vậy phương trình $f(t)=0$ có nghiệm $t_0\in\left(0;\frac{2}{3}\right)$.
- Nếu $c=0$, lúc đó phương trình $f(t)=0$ có nghiệm $t_1=0$, $t_2=\frac{2}{3}$ có nghĩa $t_2=\frac{2}{3}\in(0;1)$.
- Nếu $a=0$. Ta có: $\begin{cases} bt+c=0 \\ 3(b+2c)=0 \end{cases}$

+Với $b=c=0$ phương trình $f(t)=0$ có vô số nghiệm nên tất nhiên sẽ có một nghiệm thuộc $t_0\in(0;1)$.

+Với $b\ne 0$, $t=-\frac{c}{b}=\frac{1}{2}\in(0;1)$.

- Tóm lại: $\forall a,b,c$ thỏa mãn $2a+3b+6b=0$ thì phương trình $f(t)=0$ có ít nhất một nghiệm $t_0\in(0;1)$, tức là $2a+3b+6b=0$ thì phương trình $a\tan^2 x+b\tan x+c=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $\left(k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$ với $k\in Z$

Bài tập vận dụng:

Bài tập 1: Chứng minh rằng các phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

a) $x^3-3x+1=0$ b) $x^3+6x^2+9x+1=0$ c) $2x+6\sqrt[3]{1-x}=3$

Bài tập 2: Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm:

a) $x^5-3x+3=0$ b) $x^5+x-1=0$ c) $x^4+x^3-3x^2+x+1=0$

Bài tập 3: Chứng minh rằng phương trình: $x^5-5x^3+4x-1=0$ có 5 nghiệm trên (–2; 2).

Bài tập 4: Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số:

a) $m(x-1)^3(x-2)+2x-3=0$

b) $x^4+mx^2-2mx-2=0$

c) $a(x-b)(x-c)+b(x-c)(x-a)+c(x-a)(x-b)=0$

d) $(1-m^2)(x+1)^3+x^2-x-3=0$

e) $\cos x+m\cos 2x=0$

f) $m(2\cos x-\sqrt{2})=2\sin 5x+1$

Bài tập 5: Chứng minh rằng phương trình:

a) $x^3+6x^2+9x+1=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

b) $m(x-1)^3(x^2-4)+x^4-3=0$ luôn có ít nhất 2 nghiệm với mọi giá trị của m.

c) $(m^2+1)x^4-x^3-1=0$ luôn có ít nhất 2 nghiệm nằm trong khoảng $\left(-1;\sqrt{2}\right)$ với mọi m.

d) $x^3+mx^2-1=0$ luôn có 1 nghiệm dương.

e) $x^4-3x^2+5x-6=0$ có nghiệm trong khoảng (1; 2).

Bài tập 6: Chứng minh các phương trình sau luôn có nghiệm:

a) $ax^2+bx+c=0$ với 2a + 3b + 6c = 0

b) $ax^2+bx+c=0$ với a + 2b + 5c = 0

c) $x^3+ax^2+bx+c=0$

Bài tập 7: Cho m > 0 và a, b, c là 3 số thực thoả mãn: $\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0$. Chứng minh rằng phương trình: $f(x)=ax^2+bx+c=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng (0; 1).

HD: Xét 2 trường hợp c = 0; c ≠ 0. Với c ≠ 0 thì $f(0).f\left(\frac{m+1}{m+2}\right)=-\frac{c^2}{m(m+2)}<0$