SỰ ĐỒNG BIẾN - NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

Kiến Thức Cần Nhớ

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là D khi đó:

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in D$ thì $f(x)$ đồng biến trên D
- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in D$ thì $f(x)$ nghịch biến trên D
- Nếu $f(x)$ đồng biến trên D thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in D$
- Nếu $f(x)$ nghịch biến trên D thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in D$

Ta nói chung D là khoảng đơn điệu của hàm số

1 Tìm khoảng đơn điệu của hàm số

Phương Pháp Giải

Bài toán: Cho hàm số $y = f(x)$ tìm các khoảng đơn điệu của hàm số.

Quy trình bấm máy như sau:

Bước 1. Nhấn tổ hợp phím SHIFT $\left(\frac{d}{dx}\blacksquare\right)$

Bước 2. Nhập hàm số $y = f(x)$ vào máy tính và ta cho $x = X$.

Bước 3. Nhấn phím CALC

Bước 4. Thử các đáp án và nếu kết quả ra số dương thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng đó, ngược lại nếu kết quả ra âm thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng đó.

Phương pháp làm tự luận:

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số

Bước 2. Tính y', giải phương trình $y' = 0$ và tìm những điểm mà tại đó y' không xác định giả sử được các phần tử là x_i

Bước 3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

Bước 4. Nêu kết luận về các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số.

Ví dụ 1 (THPT Chu Văn An, Đắk Nông). Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số $y = 2x^2 - x^4$.

A. $(-1;0)$. **B.** $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Lời giải. Chọn đáp án B

Quy trình bấm máy	Màn hình hiển thị

Bước 1. Nhấn tổ hợp phím $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\left(\frac{d}{dx}\blacksquare\right)$.	$\frac{d}{dx}(\square)\Big\vert_{x=\square}$
Bước 2. Nhập hàm $y = 2x^2 - x^4$ vào bằng phím chức năng $\boxed{\text{ALPHA}}$ và cho $x = X$.	$\frac{d}{dx}(2X^2-X^4)\Big\vert_{x=X}$
Bước 3. Nhấn phím $\boxed{\text{CALC}}$ ở đây máy tính sẽ hỏi X bằng bao nhiêu ta thử X thuộc các đáp án.	X? 2
Bước 4. Thử đáp án: Đáp án **A** khoảng $(-1;0)$ ta chọn $X = -0,5$ nhập vào máy tính bằng cách nhấn $\boxed{-}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{5}$ sau đó nhấn $\boxed{=}$ được kết quả là $-\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên khoảng này, như vậy đáp án này có thể đúng nhưng ta cần kiểm tra tất cả các đáp án để thu được đáp án chính xác và đầy đủ nhất. Đáp án **B** khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$ ở đây khoảng $(-1;0)$ đã thử ở đáp án **A** nên ta chỉ cần thử khoảng $(1;+\infty)$, khoảng này ta chọn $X = 10$ bằng cách tiếp tục nhấn $\boxed{\text{CALC}}$ và nhập $X = 10$ vào $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ rồi nhấn $\boxed{=}$ được kết quả là $-3960 < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên khoảng này, như vậy đáp án đầy đủ và chính xác là đáp án **B**. Để cho chắc chắn ta thử hai đáp án còn lại ta để ý đáp án **C, D** đều có khoảng $(0;1)$ vậy ta thử với $X = 0,5$ bằng cách tiếp tục nhấn $\boxed{\text{CALC}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ được kết quả là $\frac{3}{2} > 0 \Rightarrow$ Hàm số không nghịch biến vậy đáp án cuối cùng là đáp án **B.**	$\frac{d}{dx}(2X^2-X^4)\Big\vert_{x=X}$ $-\frac{3}{2}$ $\frac{d}{dx}(2X^2-X^4)\Big\vert_{x=X}$ -3960 $\frac{d}{dx}(2X^2-X^4)\Big\vert_{x=X}$ $\frac{3}{2}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1 (THPT Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang -Học kì II). Hàm số $y = x^3 - x^2 - x + 3$ nghịch biến trên khoảng

A. $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$. **B.** $(1;+\infty)$.

C. $\left(-\frac{1}{3};1\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 2 (THPT Quốc Oai, Hà Nội). Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 5$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 3 (THPT Chuyên Hùng Vương, Gia Lai, lần 3). Hàm số $y=2x^3-6x$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Câu 4 (chuyên Hoàng Văn Thụ, Hoà Bình). Hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+x$ đồng biến trên

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Câu 5 (THPT Kim Liên, Hà Nội, lần 3). Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-6x+\dfrac{3}{4}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;3)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;3)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

Đáp án

1 - C	**2 - A**	**3 - C**	**4 - A**	**5 - B**

2 Tìm m để hàm số đơn điệu

2.1 Hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TAY

Phương Pháp Giải

Bài toán: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(x,m)=ax^3+bx^2+cx+d$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên tập D.

TH1. Nếu $D=\mathbb{R}$ thì:

- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2-3ac\le 0\\ a>0\end{cases}$
- Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2-3ac\le 0\\ a<0\end{cases}$

TH2. Nếu tập D là một khoảng hay một đoạn ta nên sử dụng máy tính hoặc phương pháp cô lập m tức làm như sau:

Bước 1. Tính đạo hàm $f'(x,m)$ (hay tính y'). Ở đây ta xét trường hợp hàm số đồng biến trên D (trường hợp nghịch biến làm tương tự $f'(x,m)\le 0$) tức $f'(x,m)\ge 0$, $\forall x\in D$ và dấu = chỉ xảy ra tại hữu hạn các điểm.

Bước 2. Biến đổi $f'(x,m)\ge 0$ trên về dạng $h(m)\le g(x)$ (hoặc $h(m)\ge g(x)$) ở đó $g(x)$, $h(m)$ là các hàm số (Tức là chuyển các phần tử có tham số m sang một vế và các phần tử không chứa tham số m ở một vế).

Bước 3. Sử dụng nhận xét: $\begin{cases} h(m) \le g(x) \forall x \in D \Leftrightarrow h(m) \le \min\limits_{D} g(x) \\ h(m) \ge g(x) \forall x \in D \Leftrightarrow h(m) \ge \max\limits_{D} g(x) \end{cases}$. Từ đây ta thu được giá trị của tham số m cần tìm

Ví dụ 1 (TRƯỜNG THPT ĐÔNG ANH). Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 9x - 2m + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ là

A. $(-3;3)$. **B.** $[-3;3]$. **C.** $[3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;3)$.

Lời giải. Chọn đáp án B

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ chính là $\mathbb{R}$. Như vậy bài toán rơi vào trường hợp thứ nhất ở trên áp dụng vào ở đây $\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = m \\ c = 9 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2 - 3ac \le 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3.\frac{1}{3}.9 \le 0 \\ a = \frac{1}{3} > 0 \end{cases} \Rightarrow m^2 - 9 \le 0 \Leftrightarrow -3 \le m \le 3$$

Ví dụ 2 (THPT CHUYÊN THÁI BÌNH 2016-2017-LẦN 5). Tìm giá trị của m để hàm số $y = -\frac{x^3}{3} - mx^2 - mx + 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $\left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 1 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 1 \end{array}\right.$. **C.** $0 \le m \le 1$. **D.** $0 < m < 1$.

Lời giải. Chọn đáp án C

Bài toán rơi vào trường hợp thứ hai nên $\begin{cases} b^2 - 3ac \le 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-m)^2 - 3.\left(-\frac{1}{3}\right).(-m) \le 0 \\ a = -\frac{1}{3} < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow m^2 - m \le 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le 1$

Ví dụ 3 (Sở GD và ĐT Gia Lai). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $m \le \frac{5}{4}$. **B.** $-1 \le m \le 5$. **C.** $m > \frac{5}{4}$. **D.** $-1 < m < 5$.

Lời giải. Chọn đáp án A

Bài toán rơi vào trường hợp thứ hai.

Bước 1. Ta có $y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m$. Đề bài yêu cầu tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nên điều kiện là $y' \ge 0$ hay $3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m \ge 0\ \forall x \in (0;+\infty)$.

Bước 2. Biến đổi bất phương trình trên để cô lập m ta được $3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m \ge 0 \Leftrightarrow$ $3x^2 + 2x - 4mx + 2 - m \ge 0 \Leftrightarrow 4mx + m \le 3x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow m(4x+1) \le 3x^2 + 2x + 2 \Rightarrow m \le \frac{3x^2+2x+2}{4x+1}$ với $x \in (0;+\infty) \Rightarrow m \le \min\limits_{(0;+\infty)} \frac{3x^2+2x+2}{4x+1}$

Bước 3. Xét hàm $g(x) = \frac{3x^2+2x+2}{4x+1}$ trên $(0;+\infty)$. Có $g'(x) = \frac{12x^2+6x-6}{(4x+1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \min_{(0;+\infty)} \frac{3x^2+2x+2}{4x+1} = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} \Rightarrow m \leq \frac{5}{4}$$

Notes

Ta có thể sử dụng phương pháp hàm số tức tìm m sao cho hàm $f'(x,m)$ là hàm bậc hai nằm phía trên hay phía dưới trục hoành.

PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO

Phương Pháp Giải

Bài toán: (Ta vẫn sử dụng chức năng tính đạo hàm của hàm số) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = f(x,m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên tập D. Sử dụng phương pháp loại đáp án:

Bước 1. Nhấn tổ hợp phím SHIFT $\left(\frac{d}{dx}\blacksquare\right)$

Bước 2. Nhập hàm $f(x,m)$ vào máy ta vẫn cho $x = X$.

Bước 3. Nhấn phím CALC

Bước 4. Thử các đáp án vì xét hàm số trên tập D nên sau khi nhấn CALC ta gán cho X bằng các giá trị thuộc tập D và nhớ quy tắc chọn là chọn X không quá lớn và chọn $M \approx X^2$ (tức nếu ta chọn $X = 10$ thì chọn $M = 10^2 = 100$ hoặc $M = -10^2 = -100$). Nếu kết quả ra dương là hàm số đồng biến, kết quả ra âm là hàm số nghịch biến.

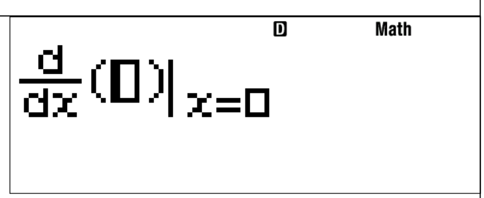
Notes

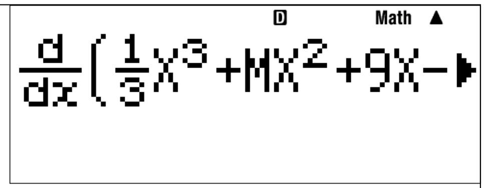
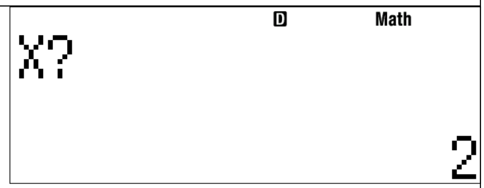
Ta nên quan sát đáp án trước để gán các giá trị cụ thể nào đó vào biến M, sao cho có thể loại được đáp án nhanh nhất. Thử với nhiều giá trị của X và M để cho đáp án chính xác nhất.

Ví dụ 4 (TRƯỜNG THPT ĐÔNG ANH). Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 9x - 2m + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ là

A. $(-3;3)$. **B.** $[-3;3]$. **C.** $[3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;3)$.

Lời giải. Chọn đáp án B

Quy trình bấm máy	Màn hình hiển thị
Bước 1. Nhấn tổ hợp phím SHIFT $\left(\frac{d}{dx}\blacksquare\right)$	

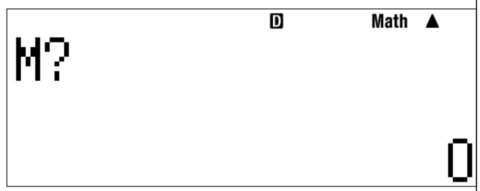
<table>
<tr><td>Bước 2. Nhập hàm $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+9x-2m+1$ vào bằng phím chức năng ALPHA cho $x=X$ tức nhập $\frac{1}{3}X^3+MX^2+9X-2M+1$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Bước 3. Nhấn phím CALC</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Bước 4. Khi nhấn nút CALC máy sẽ hỏi ta gán giá trị X là bao nhiêu. Ta quan sát đáp án thấy đáp án A, B khác hoàn toàn so với đáp án C, D như vậy ta gán các giá trị như sau: Vì hàm số đồng biến trên khoảng $D=(-\infty;+\infty)$ nên ta chọn gán cho $X=1$ tức nhập 1 = màn hình sẽ hiển thị gán M bằng bao nhiêu

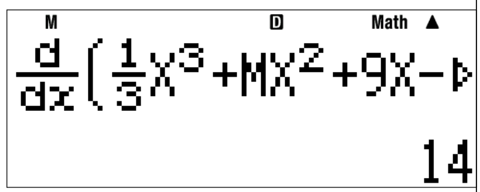
Đáp án A gán $M=2$ bằng cách tiếp tục nhấn 2 = khi đó được kết quả là $14>0$ do đó thỏa mãn đáp án này có thể chọn.

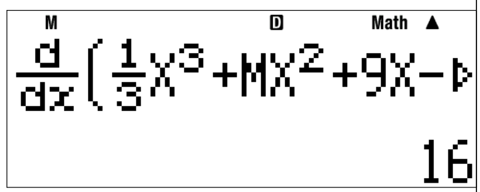
Đáp án B chỉ khác đáp án A tại hai điểm 3, -3 nên ta gán $M=3$ hoặc $M=-3$ xem có thỏa mãn không bằng cách tiếp tục nhấn = = 3 = được kết quả là $16>0$ như vậy có thể chọn đáp án này và loại đáp án A.

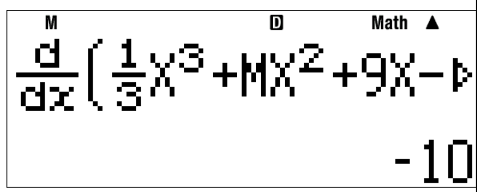
Đáp án C khác đáp án A, B nên ta gán giá trị $M=10$ và thay đổi giá trị của X lúc này ta cho $X=-1$ bằng cách tiếp tục nhấn = − 1 = 1 0 = được kết quả là $-10<0\Rightarrow$ loại đáp án C.

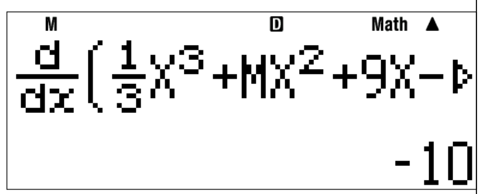
Đáp án D ta lại gán giá trị $X=1$ và $M=-10$ được kết quả là $-10<0\Rightarrow$ loại đáp án D.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án đúng là B.</td><td>







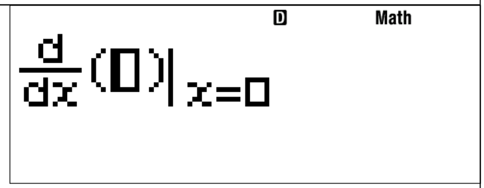
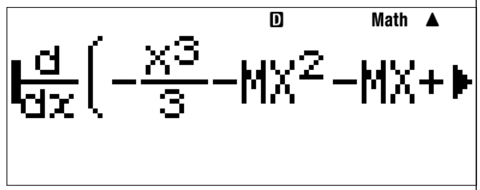
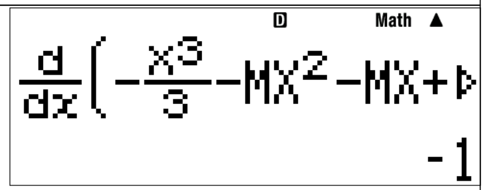
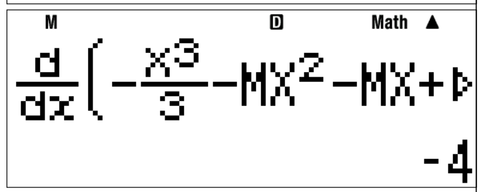
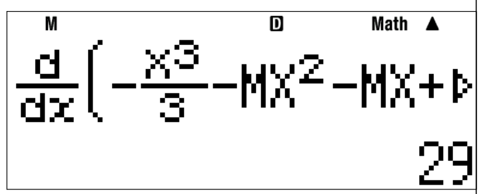

</td></tr>
</table>

Ví dụ 5 (THPT CHUYÊN THÁI BÌNH 2016-2017-LẦN 5). Tìm giá trị của m để hàm số $y=-\frac{x^3}{3}-mx^2-mx+1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge 1 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m< 0 \\ m> 1 \end{array}\right.$. **C.** $0\le m\le 1$. **D.** $0<m<1$.

Lời giải. Chọn đáp án C

Tương tự như trên ở đây Thầy sẽ nói các bước cơ bản:

Quy trình bấm máy	Màn hình hiển thị
Bước 1. Nhấn tổ hợp phím [SHIFT] $(\frac{d}{dx}\blacksquare)$	
Bước 2+3. Nhập hàm $y=-\frac{x^3}{3}-mx^2-mx+1$ bằng cách tiếp tục nhấn lần lượt [−] [ALPHA] [X] [SHIFT] [x^2] [▭] [3] [▶] [−] [ALPHA] [M+] [ALPHA] [X] [x^2] [−] [ALPHA] [M+] [ALPHA] [X] [+] [1] [▶] [ALPHA] [X] [CALC]	
Bước 4. Thử các đáp án, ở đây yêu cầu hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên trước tiên ta gán $X=1$ ta để ý ở các đáp án **A, C** đều có $m=0$ và $m=1$ vậy ta sẽ thử với hai giá trị này quy trình bấm máy tiếp tục như sau [1] [=] [0] [=] được kết quả là $-1<0\Rightarrow m=0$ thỏa mãn hàm số nghịch biến tiếp tục nhấn [=] [=] [1] [=] kết quả là -4 vậy hai giá trị $m=0$ và $m=1$ đều thỏa mãn hàm số nghịch biến ta thử đáp án: Đáp án **A, B** với $m\le 0$ ta chọn $m=-10$ bằng cách nhấn tiếp tục [=] [=] [−] [1] [0] [=] kết quả là $29>0\Rightarrow$ hàm số đồng biến, loại đáp án **A, B** Đáp án **C, D** vì ở trên ta thử với $m=0$ và $m=1$ đều thỏa mãn nên ta chọn đáp án **C**.	

Ví dụ 6 (Sở GD và ĐT Gia Lai). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m+2$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $m\le\frac{5}{4}$. **B.** $-1\le m\le 5$. **C.** $m>\frac{5}{4}$. **D.** $-1<m<5$.

Lời giải. Chọn đáp án A

Tương tự như trên các em tự giải và chú ý rằng ta đang xét đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nên chỉ gán những giá trị X thuộc khoảng này.

Notes

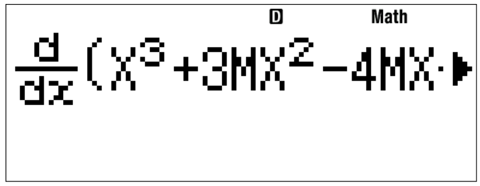
Ví dụ sau sẽ cho ta thấy việc chọn M ở các đáp án rất quan trọng! nếu chọn không chính xác ta khó có thể có kết luận đúng.

Ví dụ 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3+3mx^2-4mx+4$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

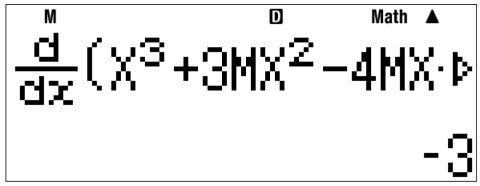
A. $0\le m\le\frac{4}{3}$. **B.** $-\frac{4}{3}\le m\le 0$. **C.** $0\le m\le\frac{3}{4}$. **D.** $-\frac{3}{4}\le m\le 0$.

Lời giải. Chọn đáp án (B)

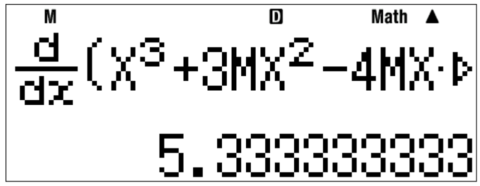
Bước 1+2+3. Bạn đọc tự nhập!



Bước 4. Vì hàm số yêu cầu đồng biến trên tập số thực nên ta gán giá trị X tùy ý nhưng không quá lớn! ở đây ta gán $X = 0$. Tiếp theo ta gán giá trị của M quan sát đáp án ta thấy đáp án nào cũng có $M = 0$ vậy không xét $M = 0$.



$*$) Hai đáp án **A, C** đều có phần chung vậy ta chọn một số M đều thuộc cả hai đáp án này chọn $M = \frac{3}{4}$ ta được kết quả là $-3 \Rightarrow$ loại **A, C.**



$*$) Còn lại đáp án **B, D** ta thấy hai đáp án này đều có phần chung cụ thể là đáp án **B** sẽ bao gồm cả đáp án **D** như vậy ta sẽ thử với đáp án **B** trước ta chọn $M = -\frac{4}{3}$

$\Rightarrow$ kết quả là $5.333 > 0 \Rightarrow$ thỏa mãn hàm số đồng biến $\Rightarrow$ loại đáp án **D** và chọn đáp án **B**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1 (THPT Quốc Oai, Hà Nội (HK2)). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 - 4x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-1 \le m \le 3$. **B.** $m \in \mathbb{R}$. **C.** $m \ge 3$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m \ge 3 \end{array}\right.$.

Câu 2 (Sở GD và ĐT Gia Lai). Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \frac{(m+1)x - 2}{x - m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 3 (THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Lai Châu, lần 3). Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2+m)x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $(1;2)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-\infty;-1] \cup [2;+\infty)$. **D.** $[-1;2]$.

Câu 4 (THPT Chuyên Biên Hòa, Hà Nam, lần 3). Tìm tất cả các tham số thực m để hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

A. $m < 1$. **B.** $m \le 1$. **C.** $m < 2$. **D.** $m > 1$.

Đáp án

1 - A	**2 - C**	**3 - D**	**4 - B**

2.2 Hàm bậc nhất trên bậc nhất $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TAY

Phương Pháp Giải

Bài toán: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = f(x,m) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ thỏa mãn đồng biến hoặc nghịch biến như sau:

TH1. Hàm số đồng biến trên tập xác định thì điều kiện là $ad - bc > 0$.

TH2. Hàm số nghịch biến trên tập xác định thì điều kiện là $ad - bc < 0$.

TH3. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; x_1)$ thì điều kiện là $\begin{cases} ad - bc > 0 \\ -\dfrac{d}{c} \geq x_1 \end{cases}$

TH4. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; x_1)$ thì điều kiện là $\begin{cases} ad - bc < 0 \\ -\dfrac{d}{c} \geq x_1 \end{cases}$

TH5. Hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; +\infty)$ thì điều kiện là $\begin{cases} ad - bc > 0 \\ -\dfrac{d}{c} \leq x_1 \end{cases}$

TH6. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(x_1; +\infty)$ thì điều kiện là $\begin{cases} ad - bc < 0 \\ -\dfrac{d}{c} leq x_1 \end{cases}$

TH7. Hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$ thì điều kiện là $\begin{cases} ad - bc > 0 \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{d}{c} \leq x_1 \\ -\dfrac{d}{c} \geq x_2 \end{array} \right. \end{cases}$

TH8. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(x_1; x_2)$ thì điều kiện là $\begin{cases} ad - bc < 0 \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{d}{c} \leq x_1 \\ -\dfrac{d}{c} \geq x_2 \end{array} \right. \end{cases}$

Notes

$*$) Để nhớ được các trường hợp trên ta nên hiểu tại sao có được như vậy: Hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ vì mẫu của y' là $(cx+d)^2$ luôn dương vậy dấu của y' chỉ phụ thuộc vào $ad - bc$ do đó ta có các trường hợp:

TH1. Hàm số đồng biến nếu $ad - bc > 0$

TH2. Hàm số đồng biến nếu $ad - bc < 0$

$*$) Phương pháp bấm máy cũng gần tương tự đối với hàm bậc ba đã xét ở trên (ở dạng này nên làm tay!)

Ví dụ 1 (THPT Chuyên Lào Cai, lần 2). Tìm giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

A. $-2 \leq m \leq 2$. **B.** $-2 < m \leq -1$. **C.** $-2 < m < 2$. **D.** $-2 \leq m \leq 1$.

Lời giải. Chọn đáp án C

Bài toán rơi vào trường hợp thứ 2 với $\begin{cases} a = m \\ b = 4 \\ c = 1 \\ d = m \end{cases}$

$\Rightarrow ad - bc < 0 \Leftrightarrow m.m - 4.1 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2.$

Ví dụ 2 (Sở GD và ĐT Lâm Đồng (HKII)). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến $(-\infty;1)$ là

A. $(-2;1]$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $[-2;2]$.

Lời giải. Chọn đáp án A

Bài toán rơi vào trường hợp thứ 4 với $\begin{cases} a = m \\ b = 4 \\ c = 1 \\ d = m \\ x_1 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ điều kiện là $\begin{cases} ad - bc < 0 \\ -\dfrac{d}{c} > x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ -\dfrac{m}{1} > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \le 1 \end{cases} \Rightarrow -2 < m \le 1 \Rightarrow m \in (-2;1]$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1 (THPT Thị xã Quảng Trị, lần 2). Cho hàm số $y = \dfrac{mx-9}{4x-m}$, với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{4};+\infty\right)$.

A. $m \in [-6;6]$. **B.** $m \in (-6;6)$. **C.** $m \in (-6;1]$. **D.** $m \in (-6;1)$.

Câu 2 (SỞ GD-ĐT LONG AN). Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x-m}$, với m là tham số thực. Tìm tập hợp T gồm tất cả các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $(3;+\infty)$.

A. $T = (1;+\infty)$. **B.** $T = (1;3]$. **C.** $T = (-\infty;3)$. **D.** $T = (1;3)$.

Câu 3 (Chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương, lần 4). Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

A. $-2 < m < -1$. **B.** $-2 \le m < 1$. **C.** $-2 \le m \le -1$. **D.** $-2 < m \le -1$.

Câu 4 (THPT Chuyên Hùng Vương, Gia Lai, lần 3). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx-4}{m-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$.

A. $m \in (1;2)$. **B.** $m \in [1;2]$. **C.** $m \in [1;2)$. **D.** $m \in (1;2]$.

Câu 5 (THPT Thạch Thành 1, Thanh Hóa, lần 2). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \dfrac{mx+3}{x+m+2}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Đáp án

1 - C	**2 - B**	**3 - D**	**4 - C**	**5 - B**

CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Kiến Thức Cần Nhớ

Định lý 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$ với $h > 0$. Điều kiện cần và đủ để hàm số đạt cực trị tại x_0 là

$*$) Nếu $\begin{cases} f'(x) > 0, \forall x \in (x_0 - h; x_0) \\ f'(x) < 0, \forall x \in (x_0; x_0 + h) \end{cases} \Rightarrow x_0$ là điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$.

$*$) Nếu $\begin{cases} f'(x) < 0, \forall x \in (x_0 - h; x_0) \\ f'(x) > 0, \forall x \in (x_0; x_0 + h) \end{cases} \Rightarrow x_0$ là điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$.

Định lý 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị tại x_0 là

$*$) Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow x_0$ là điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$.

$*$) Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases} \Rightarrow x_0$ là điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$.

Notes

$*$) Đối với định lí một ở trên ta có thể hiểu đơn giản là nếu $f'(x_0^-)$ và $f'(x_0^+)$ trái dấu thì hàm đạt cực trị tại x_0. Ở đây Thầy lạm dụng kí hiệu $f'(x_0^-)$ ta sẽ hiểu là gán $x = x_0 - 10^{-8}$ và $f'(x_0^+)$ sẽ hiểu là gán $x_0 = 1 + 10^{-8}$ bằng máy tính.

Cho hàm số $y = f(x)$. Khi đó:

$*$) Điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm số kí hiệu lần lượt là $x_{\text{CĐ}}$ và x_{CT} các điểm này gọi chung là điểm cực trị của **hàm số**.

$*$) Các giá trị $f(x_{\text{CĐ}})$ và $f(x_{\text{CT}})$ được gọi lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của **hàm số**. Kí hiệu là $f_{\text{CĐ}}$, f_{CT} và được gọi chung là cực đại, cực tiểu của hàm số.

$*$) Điểm $M(x_{\text{CĐ}}; f(x_{\text{CĐ}}))$, $M(x_{\text{CT}}; f(x_{\text{CT}}))$ được gọi lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của **đồ thị hàm số**.

$*$) Hàm số có thể đạt cực trị tại những điểm mà nó không có đạo hàm.

Minh họa bằng bảng biến thiên

Cực Đại	**Cực Tiểu**
(bảng 1)	(bảng 2)

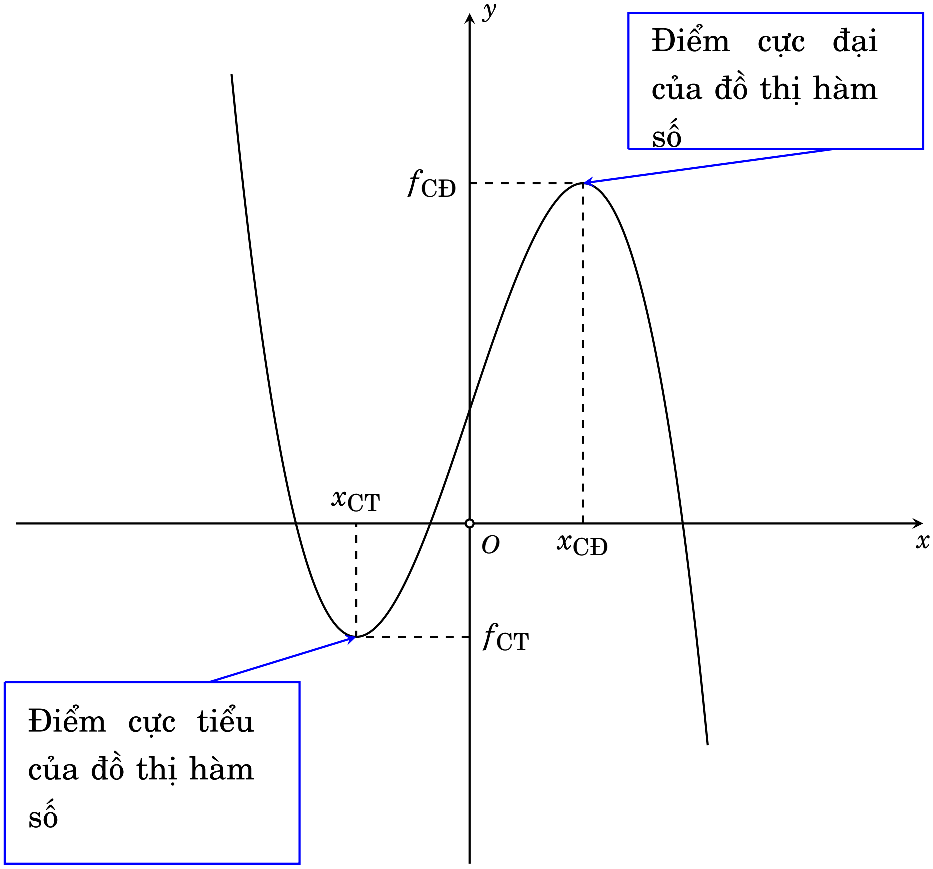
Cực Đại

x	a		x_{CT}		b
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$f(a)$	$\searrow$	f_{CT}	$\nearrow$	$f(b)$

Cực Tiểu

x	a		$x_{\text{CĐ}}$		b
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	$f(a)$	$\nearrow$	$f_{\text{CĐ}}$	$\searrow$	$f(b)$

Minh họa bằng đồ thị



I. Tìm cực trị của hàm số

1. Phương pháp - ví dụ

Phương Pháp Giải

Bài toán. Cho hàm số $y = f(x)$, tìm các điểm cực trị của hàm số.

Cách 1. Sử dụng bảng biến thiên

Bước 1. Tìm tập xác định.

Bước 2. Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x) = 0$ bằng cách giải phương trình $f'(x) = 0$ và các điểm mà $f'(x)$ không xác định hoặc không có đạo hàm.

Bước 3. Xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x đi qua x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i cụ thể là nếu $f'(x_i)$ đổi dấu từ dương sang âm thì đó là cực đại và $f'(x_i)$ đổi dấu từ âm sang dương thì đó là cực tiểu. Ở bước này ta có thể sử dụng máy tính CASIO để kiểm tra bằng cách tính $f'(x_i^-)$ và $f'(x_i^+)$ rồi so sánh dấu của chúng.

Cách 2. Sử dụng định lí 2

Bước 1. Tìm tập xác định.

Bước 2. Tính $f'(x)$ và giải phương trình $f'(x) = 0$ kí hiệu x_i $(i = 1,2,...)$ là các nghiệm của nó.

Bước 3. Tính $f''(x)$ từ đó tính $f''(x_i)$. Từ đó dựa vào dấu của $f''(x_i)$ kết luận cực trị cụ thể nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_i, nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_i.

Notes

$*$) Ta chỉ nên áp dụng cách số 1 cho trường hợp hàm số $y = f(x)$ đã cho là hàm chứa dấu giá trị tuyệt đối, hàm chứa căn thức.

$*$) Cho hàm số $y = f(x)$ và điểm x_0 thuộc tập xác định. Nếu y' đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm x_0 thì điểm đó là điểm cực đại, nếu y' đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm x_0 thì điểm đó là điểm cực tiểu.

Ví dụ 1 (Sở GD-ĐT HCM - Cụm II). Tìm giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = x^3 - 3x$.

A. $y_{CT} = -4$. **B.** $y_{CT} = 2$. **C.** $y_{CT} = -2$. **D.** $y_{CT} = -1$.

Lời giải. Chọn đáp án C

Vì hàm $y = x^3 - 3x$ không chứa căn hay giá trị tuyệt đối nên ta áp dụng cách hai ta làm như sau:

Bước 1. Tập xác định: $\text{D} = \mathbb{R}$.

Bước 2. Tính đạo hàm $y' = 3x^2 - 3$. Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Bước 3. Tính đạo hàm cấp hai $y'' = 6x \Rightarrow \begin{cases} y''(1) = 6 > 0 \\ y''(-1) = -6 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{\text{CT}} = 1 \\ x_{\text{CĐ}} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{\text{CT}} = 1^3 - 3.1 = -2 \\ y_{\text{CĐ}} = (-1)^3 - 3.(-1) = 2 \end{cases}$

Ví dụ 2 (TT Lê Hồng Phong - NĐ lần 1). Tìm tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$.

A. $(0;2)$. **B.** $(0;-4)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(4;0)$.

Lời giải. Chọn đáp án C

Vì đề bài yêu cầu tìm tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số nên ta cần tìm đủ $x_{CĐ}$ và $y_{CĐ}$ mà hàm số $y=x^4-2x^2+4$ không chứa dấu giá trị tuyệt đối hay căn thức, nên áp dụng cách số hai ta làm như sau:

$*$) Tính đạo hàm cấp một $y'=4x^3-4x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow 4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

$*$) Tính đạo hàm cấp hai $y''=12x^2-4 \Rightarrow \begin{cases} y''(0)=12.0^2-4=-4<0 \\ y''(\pm1)=12.(-1)^2-4=8>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{CĐ}=0 \\ x_{CT}=\pm1 \end{cases}$

$\Rightarrow y_{CĐ}=0^4-2.0^2+4=4$.

Vậy tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(0;4)$.

Nhận xét: Để làm nhanh ví dụ trên ta nhớ rằng hàm số trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ với $a\neq 0$ luôn có cực trị cụ thể:

$*$) Nếu $a>0$ thì đồ thị hàm số có điểm cực đại là $M(0,c)$.

$*$) Nếu $a<0$ thì đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $M(0,c)$.

Ví dụ 3 (Sở GD và ĐT Hà Tĩnh). Tìm giá trị cực tiểu của hàm số $y=-x^3+3x+2$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** -1.

Lời giải. Chọn đáp án A

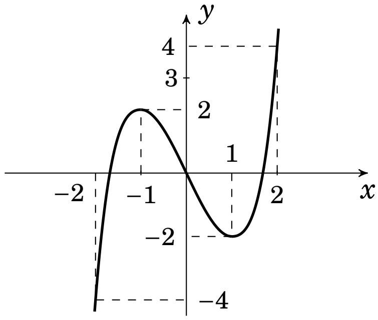
Vì đề bài yêu cầu tìm giá trị cực tiểu nên ta cần tìm y_{CT}.

$*$) Tính đạo hàm $y'=-3x^2+3 \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow -3x^2+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

$*$) Tính đạo hàm cấp hai $y''=-6x \Rightarrow \begin{cases} y''(1)=-6<0 \\ y''(-1)=6>0 \end{cases} \Rightarrow y_{CT}=-(-1)^3+3.(-1)+2=0$

Ví dụ 4 (THPT Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang -Học kì II).

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là



A. $x=1$.

B. $M(1;-2)$.

C. $M(-2;-4)$.

D. $x=-2$.

Lời giải. Chọn đáp án B

Vì đề bài yêu cầu tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số nên ta phải tìm cả x_{CT} và y_{CT}. Nhìn đồ thị ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x_{CT}=1$ và $y_{CT}=-2 \Rightarrow M(1;-2)$.

2. Bài tập tự luyện

Câu 1 (THPT Phù Cừ, Hưng Yên). Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x-\dfrac{1}{3}$. Tìm tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số.

A. $(-1;1)$. **B.** $\left(3;-\dfrac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(0;-\dfrac{1}{3}\right)$. **D.** $(1;1)$.

Câu 2 (THPT Quốc Oai, Hà Nội (HK2)). Hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-3x+2$ đạt cực tiểu tại

A. $x=1$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=\dfrac{1}{3}$. **D.** $x=0$.

Câu 3 (Chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương, lần 4). Hàm số $y=x^3-5x^2+3x+1$ đạt cực trị tại 2 điểm nào sau đây?

A. $x=1, x=3$. **B.** $x=-3, x=-1$. **C.** $x=-1, x=3$. **D.** $x=\dfrac{1}{3}, x=3$.

Câu 4 (Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi). Hàm số $y=3x^4-4x^3-6x^2+12x+1$ có bao nhiêu cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 5 (Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi). Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ và cực tiểu tại $x=2$.

B. Hài số đạt cực đại tại $x=3$.

C. Hàm số có đúng 1 cực trị.

D. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2.

ĐÁP ÁN

1 - D	**2 - A**	**3 - D**	**4 - A**	**5 - A**

II. Tìm điều kiện để hàm số có cực trị thỏa mãn tính chất

1. Phương pháp - ví dụ

Phương Pháp Giải

Bài toán 1: Cho hàm số $y = f(x,m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a \neq 0)$. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số thỏa mãn:

TH1: Hàm số không có cực trị thì điều kiện là $b^2 - 3ac \leq 0$.

TH2: Hàm số có hai điểm cực trị (hoặc hàm số có cực trị) thì điều kiện là $b^2 - 3ac > 0$.

Bài toán 2: Cho hàm số $y = f(x,m)$ có đạo hàm tại điểm x_0. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số thỏa mãn:

TH1: Hàm số có cực trị tại x_0 thì trước tiên ta tìm m bằng cách giải $f'(x_0) = 0$ sau đó thay m tìm được vào phương trình $f'(x,m)$ để tính $f'(x_0^+)$ và $f'(x_0^-)$ bằng cách sử dụng máy tính nếu hai giá trị này trái dấu thì ta kết luận được m là giá trị cần tìm. Có thể sử dụng điều kiện sau chỉ đúng với hàm bậc ba là $\begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases}$

TH2: Hàm số đạt cực tiểu tại x_0 thì điều kiện là $\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) > 0 \end{cases}$

TH3: Hàm số đạt cực đại tại x_0 thì điều kiện là $\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) < 0 \end{cases}$

Notes

$*$) Nếu ở bài toán số hai ở trên mà $y'(x_0) = 0$ với mọi m thì đối với cả hai trường hợp (trường hợp hai và trường hợp ba) ta cần xét thêm trường hợp $y''(x_0) = 0$. Đối với trường hợp này ta cần lập bảng biến thiên hoặc sử dụng máy tính để tính đạo hàm trái và đạo hàm phải tức tính $f'(x_0^-)$ và $f'(x_0^+)$ nếu hai giá trị này trái dấu thì ta kết luận thêm được m là giá trị cần tìm. Cụ thể nếu kết quả của phép tính $f'(x_0^-)$ và $f'(x_0^+)$ lần lượt ra dương và âm thì x_0 là cực đại, kết quả lần lượt ra âm và dương thì x_0 là cực tiểu.

Ví dụ 1 (TT Lê Hồng Phong-NĐ lần 1). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - mx + 1$ đạt cực đại tại $x = 1$.

A. $m = -7$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = 7$.

Lời giải. Chọn đáp án B

Phân tích: Yêu cầu đề bài giống với bài toán số hai thuộc trường hợp ba như vậy ta làm như sau:

$*$) Đạo hàm cấp một $y' = -3x^2 + 4x - m \Rightarrow y'(1) = -3.1^2 + 4.1 - m = 1 - m \Rightarrow y'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

$*$) Đạo hàm cấp hai $y'' = -6x + 4 \Rightarrow y''(1) = -6.1 + 4 = -2 < 0$ (thỏa mãn).

Vậy với $m = 1$ thì hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Ví dụ 2 (THPT ĐỐNG ĐA, Hà Nội). Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 1$ có cực trị.

A. $m<1$. **B.** $m\ge 1$. **C.** $m>1$. **D.** $m\le 1$.

Lời giải. Chọn đáp án A

Phân tích: Yêu cầu của đề bài rơi vào bài toán một thuộc trường hợp thứ hai ta làm như sau: Điều kiện để hàm số có cực trị là $b^2-3ac>0 \Leftrightarrow (-3)^2-3.1.3m>0 \Leftrightarrow 9-9m>0 \Leftrightarrow m<1$

Nhận xét: Một vài nhận xét cho việc giải nhanh các câu hỏi:

1. Đối với hàm bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a\ne 0$ thì điều kiện để hàm số đạt cực trị tại x_0 là $\begin{cases} y'(x_0)=0 \\ b^2-3ac>0 \end{cases}$

2. Bài toán số hai ở trên đối với **TH2** và **TH3** ta có thể sử dụng máy tính để kiểm tra điều kiện $y''(x_0)$ xem kết quả âm hay dương, hoặc để cho có kết quả nhanh trước tiên ta tính đạo hàm cấp một y' sau đó sử dụng máy tính để chọn đáp án đúng nhất bằng chức năng CALC của CASIO.

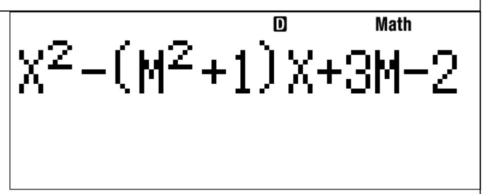
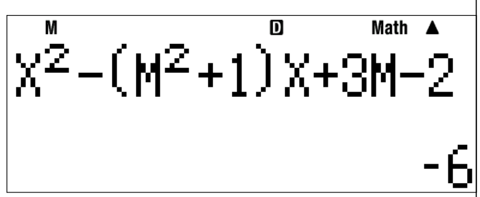
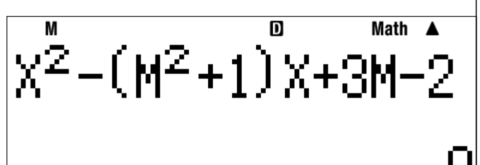
3. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a\ne 0$ là $y=\left(\dfrac{2c}{3}-\dfrac{2b^2}{9a}\right).x+d-\dfrac{bc}{9a}$.

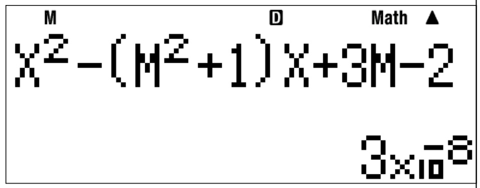
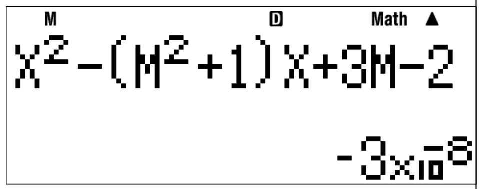
Ví dụ 3 (Sở GD-ĐT Yên Bái). Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}\left(m^2+1\right)x^2+(3m-2)x+m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

A. $m=-1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$.

Lời giải. Chọn đáp án B

Phân tích: Sử dụng nhận xét hai trước tiên ta tính đạo hàm cấp một $y'=x^2-(m^2+1)x+3m-2$ sau đó dùng CASIO ta tìm đáp án đúng như sau:

Quy trình bấm máy	**Màn hình hiển thị**
Bước 1. Nhập hàm $y'=x^2-(m^2+1)x+3m-2$ vào máy tính CASIO.	
Bước 2. Thử đáp án nếu đáp án bằng cách nhấn CALC ở đây đề bài yêu cầu hàm số đạt cực đại tại $x=1$ nên ta gán $x=1$ vào bằng cách tiếp tục nhấn 1 = tiếp tục gán giá trị m nào cho kết quả là 0 thì tạm chấp nhận Đáp án **A** gán $m=-1$ được kết quả $-6\ne 0 \Rightarrow$ loại Đáp án **B** gán $m=2$ được kết quả $0 \Rightarrow$ như vậy tạm chấp nhận đáp án này.	 

Để khẳng định xem đáp án **B** có chính xác hay không ta tiếp tục tính $f'(x_0^-)$ và $f'(x_0^+)$ ở đây đề bài yêu cầu cực đại tại $x=1$ nên ta chú ý là kết quả của $f'(x_0^-)$ phải ra dương và kết quả của $f'(x_0^+)$ phải ra âm tính bằng cách:	
Tính $f'(x_0^-)$ ta gán $x=1-10^{-8}$ và gán $m=2$ bằng cách nhấn $\boxed{=}$ $\boxed{1}$ $\boxed{-}$ $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{x^{\blacksquare}}$ $\boxed{-}$ $\boxed{8}$ $\boxed{=}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ được kết quả $3.10^{-8}>0$	
Tính $f'(x_0^+)$ ta gán $x=1+10^{-8}$ và vẫn gán $m=2$ bằng cách tiếp tục nhấn $\boxed{=}$ $\boxed{1}$ $\boxed{+}$ $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{x^{\blacksquare}}$ $\boxed{-}$ $\boxed{8}$ $\boxed{=}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ được kết quả $-3.10^{-8}<0$.	
Vậy $m=2$ thỏa mãn mà $f'(x_0^-)$ dương và $f'(x_0^+)$ âm ta chọn đáp án này.	

Nhận xét: Cách làm bằng máy tính CASIO tương tự như ví dụ trên cũng được áp dụng trong các hàm $y=f(x,m)$ khác chỉ cần chú ý rằng nếu $f'(x_0^-)$ và $f'(x_0^+)$ trái dấu thì hàm sẽ đạt cực trị tại x_0. Cụ thể ta gán như sau $\begin{cases} x_0^- = x_0 - 10^{-8} \\ x_0^+ = x_0 + 10^{-8} \end{cases}$

Ví dụ 4 (THPT Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang -Học kì II). Hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=3$. Giá trị của tham số m là

A. -3. **B.** $-\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 3.

Lời giải. Chọn đáp án C

Phân tích: Đối với dạng này ta cần sử dụng định lí vi-ét và nhớ rằng x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $y'=0$.

Cách 1: Ta có thể sử dụng CASIO để thử đáp án.

Cách 2: Để hàm số có hai điểm cực trị thì $b^2-3ac>0 \Leftrightarrow (-3)^2-3.1.m>0 \Leftrightarrow m<3$.

Có $y'=3x^2-6x+m \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x+m=0$ theo vi-ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-6}{3}=2 \\ x_1.x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{m}{3} \end{cases}$ Điều kiện đề bài $x_1^2+x_2^2=3 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2.x_1.x_2=3 \Rightarrow 2^2-2.\dfrac{m}{3}=3 \Rightarrow m=\dfrac{3}{2}$.

2. Bài tập tự luyện

Câu 1 (Sở GD và ĐT TP HCM, Cụm VII). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-2mx^2+m^2x+2$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

A. $m=1$. **B.** $m=3$. **C.** $m=1 \vee m=3$. **D.** $m=-1$.

Câu 2 (THPT Thực hành Cao Nguyên, Đắk Lắk, lần 2). Hàm số $y=x^3+mx+2$ có cực đại và cực tiểu khi

A. $m<0$. **B.** $m>0$. **C.** $m\le 0$. **D.** $m\ge 0$.

Câu 3 (HK2 THPT YÊN VIÊN). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (2m+1)x - 2$ đạt cực trị tại $x = 1$.

A. $m = 1$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 2$. **D.** Không tồn tại m.

Câu 4 (Chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương, lần 4). Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6mx + m$ có 2 điểm cực trị.

A. $0 < m < 2$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 2 \end{array}\right.$. **C.** $-2 < m < 0$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 0 \end{array}\right.$.

Câu 5 (THPT CHUYÊN SƠN LA, LẦN 4). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx + 3$ không có cực trị.

A. $m < 0$. **B.** $m > 0$. **C.** $m = 0$. **D.** $m \le 0$.

Câu 6 (THPT Chuyên Thái Nguyên, lần 3). Nếu $x = -1$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $f(x) = -x^3 + 2(2m-1)x^2 - (m^2+8)x + 2$ thì giá trị của m là

A. $m = -7$. **B.** $m = -1$. **C.** Không có m. **D.** $m = -1$, $m = -7$.

Câu 7 (THPT Chu Văn An, Đắk Nông). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 = 2$.

A. $m = 0$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 3, m = -3$. **D.** $m = 1, m = -1$.

ĐÁP ÁN

1 - A	2 - A	3 - D	4 - B	5 - D	6 - C	7 - D

3. Hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$

Đối với hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow y' = 4ax^3 + 2bx$ với $a \ne 0$ ta có một số kết quả sau:

Hàm số có một cực trị là $A(0;c)$ nếu $ab \ge 0$		Hàm số có ba cực trị nếu $ab < 0$	
$a > 0$ có một cực tiểu là $A(0;c)$	$a < 0$ có một cực đại là $A(0;c)$	$a > 0$ có một cực đại là $A(0;c)$ và hai cực tiểu	$a < 0$ có hai cực đại và một cực tiểu là $A(0;c)$

Nếu hàm số có ba cực trị thì ba cực trị là $A(0;c)$, $B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)$, $C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)$

$\Rightarrow AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}, BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ với $\Delta = b^2 - 4ac$

Phương tình qua điểm cực trị $BC: y = -\frac{\Delta}{4a}$ và $AB, AC: y = \pm\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^3 x + c$

Gọi $\widehat{BAC} = \alpha$, luôn có $8a(1+\cos\alpha) + b^3(1-\cos\alpha) = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^3+8a}{b^3-8a}$ và $S^2_{\Delta ABC} = -\frac{b^5}{32a^3}$.

Một số công thức giải nhanh: Nếu hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba cực trị $A(0;c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)$, $C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)$ tạo thành một tam giác thỏa mãn dữ kiện:

STT	Dữ Kiện	Công Thức
Vì hàm số có ba cực trị nên trong trường hợp này ta luôn chú ý $ab<0$		
1	Tam giác ABC vuông tại A hoặc tam giác ABC cân tại A	$8a+b^3=0$
2	Tam giác ABC đều	$24a+b^3=0$
3	Tam giác ABC có góc $\widehat{BAC}=\alpha$	$8a+b^3.\tan^2\frac{\alpha}{2}=0$
4	Tam giác ABC có diện tích $S_{\Delta ABC}=S_0$	$32a^3(S_0)^2+b^5=0$
5	Tam giác ABC có diện tích $\max(S_0)$	$S_0=\sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$
6	Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp $r_{\Delta ABC}=r_0$	$r_0=\frac{b^2}{4\lvert a\rvert\left(1+\sqrt{1-\frac{b^3}{8a}}\right)}$
7	Tam giác ABC có độ dài cạnh $BC=m_0$	$am_0^2+2b=0$
8	Tam giác ABC có độ dài $AB=AC=n_0$	$16a^2n_0^2-b^4+8ab=0$
9	Tam giác ABC có cực trị $B,C\in Ox$	$b^2-4ac=0$
10	Tam giác ABC có ba góc nhọn	$b(8a+b^3)>0$
11	Tam giác ABC có trọng tâm O	$b^2-6ac=0$
12	Tam giác ABC có trực tâm O	$b^3+8a-4ac=0$
13	Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R_{\Delta ABC}=R_0$	$R=\frac{b^3-8a}{8\lvert a\rvert b}$
14	Tam giác ABC cùng điểm O tạo thành hình thoi	$b^2-2ac=0$
15	Tam giác ABC có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3-8a-4abc=0$
16	Tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3-8a-8abc=0$
17	Tam giác ABC có cạnh $BC=kAB=kAC$	$b^3.k^2-8a(k^2-4)=0$
18	Trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau	$b^2=4\sqrt{2}\lvert ac\rvert$
19	Tam giác ABC có điểm cực trị cách đều trục hoành	$b^2-8ac=0$

Ví dụ 1 (THPT Lương Thế Vinh-Hà Nội-Lần 3). Cho hàm số $f(x)=x^4-2x^2+3$. Tính diện tích S của tam giác có ba đỉnh là 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số.

A. $S=2$. **B.** $S=1$. **C.** $S=4$. **D.** $S=\frac{1}{2}$.

Lời giải. Chọn đáp án B

Phân tích: Ở đây đề yêu cầu là tính diện tích S của tam giác có ba đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số trùng phương nên ta áp dụng công thức tính nhanh ở trên là $S^2=-\frac{b^5}{32a^3}$ áp dụng vào bài ta được:

$$\text{Hàm số } f(x)=x^4-2x^2+3\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\end{cases}\Rightarrow S^2=-\frac{b^5}{32a^3}=-\frac{(-2)^5}{32.1^3}=1.$$

Ví dụ 2 (Sở GD và ĐT Đà Nẵng, mã đề 224). Cho hàm số $y=x^4-mx^2+m^4$, với m là tham số. Tìm m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông.

A. $m=-2$. **B.** $m=2$. **C.** $m=2\sqrt[3]{3}$. **D.** $m=-2\sqrt[3]{3}$.

Lời giải. Chọn đáp án B

Phân tích: Để ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông thì rơi vào trường hợp số 1 trong bảng trên tức điều kiện là $\begin{cases} ab < 0 \\ 8a + b^3 = 0 \end{cases}$ áp dụng vào bài ta có:

Hàm số $y = x^4 - mx^2 + m^4$ có $\begin{cases} a = 1 \\ b = -m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ 8a + b^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 8.1 - m^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 2$

4. Bài tập tự luyện

Câu 1 (Sở GD và ĐT Đồng Tháp). Đồ thị hàm số nào sau đây có 3 điểm cực trị?

A. $y = \left(x^2 + 1\right)^2$. **B.** $y = -x^4 - 3x^2 + 4$. **C.** $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$. **D.** $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$.

Câu 2 (Sở GD và ĐT Bình Dương). Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^4 - 6x^2 + 5$.

A. $\left(\sqrt{3}, 0\right)$ và $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$. **B.** $\left(\sqrt{3}, 4\right)$ và $\left(-\sqrt{3}, 4\right)$.

C. $(0, 5)$. **D.** $\left(\sqrt{3}, -4\right)$ và $\left(-\sqrt{3}, -4\right)$.

Câu 3 (Sở GDDT Phú Thọ, Lần 1). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

A. $m = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. **B.** $m = 1; m = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 1; m = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Câu 4 (Sở GD-ĐT HCM-Cụm 6). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 4$ có ba điểm cực trị nằm trên các trục tọa độ.

A. $m = 2$. **B.** $m = -2$ hoặc $m = 2$.

C. Không có giá trị m nào. **D.** $m = -2$.

Câu 5 (Sở GD và ĐT Hà Tĩnh). Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$. Tìm giá trị m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác có diện tích bằng 4.

A. $m = 16$. **B.** $m = \sqrt[5]{16}$. **C.** $\sqrt[3]{16}$. **D.** $-\sqrt[3]{16}$.

ĐÁP ÁN

1 - D **2 - D** **3 - C** **4 - D** **5 - B**

§3 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Kiến Thức Cần Nhớ

Định nghĩa 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D.

➢ Số M được gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \leq M$ với mọi x thuộc D và tồn tại x_0 thuộc D sao cho $f(x_0) = M$. Kí hiệu là $M = \max\limits_{D} f(x)$.

➢ Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \geq m$ với mọi x thuộc D và tồn tại x_0 thuộc D sao cho $f(x_0) = m$. Kí hiệu $m = \min\limits_{D} f(x)$.

Định lý 1. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

I. Quy tắc tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất

Phương Pháp Giải

Bài toán: Cho hàm số $y = f(x)$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[a;b]$.

Bước 1. Tìm các điểm x_1, x_2, x_3,..., x_n trên khoảng $(a;b)$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 2. Tính $f(a)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$,..., $f(x_n)$, $f(b)$.

Bước 3. Tìm số lớn nhất và nhỏ nhất trong các số trên thì đó lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

Ví dụ 1 (THPT Chu Văn An, Đắk Nông). Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - x^2 - 8x$ trên đoạn $[1;3]$.

A. $\max\limits_{[1;3]} y = \dfrac{176}{27}$. **B.** $\max\limits_{[1;3]} y = -4$. **C.** $\max\limits_{[1;3]} y = -6$. **D.** $\max\limits_{[1;3]} y = -8$.

Lời giải. Chọn đáp án C

Phương pháp tự luận:

Bước 1. Có $y' = 3x^2 - 2x - 8 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\dfrac{4}{3} \notin [1;3] \end{array}\right.$

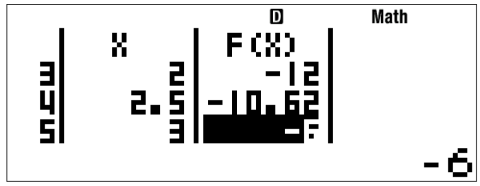
Bước 2. Tính $f(1) = 1^3 - 1^2 - 8.1 = -8$, tương tự ta có $f(2) = -12$, $f(3) = -6$.

Bước 3. So sánh các số ở bước hai ta thấy $\min\limits_{[1;3]} y = -12$ và $\max\limits_{[1;3]} y = -6$

Phương pháp sử dụng CASIO:

Ta sử dụng chức năng table của máy tính CASIO như sau: Để vào được chức năng này nhấn MODE 7 sau đó nhập hàm $y = x^3 - x^2 - 8x$ vào máy tính rồi cho Start? bằng 1 rồi

nhấn [=] cho End? bằng 3 rồi nhấn [=] cho Step? bằng 0,5 (thường cho giá trị này bằng 0,5 trong một số trường hợp ta cho bằng 0,2, 0,3...) rồi nhấn [=] máy sẽ cho một bảng ta so sánh xem giá trị nào lớn nhất trong bảng thì đó là giá trị lớn nhất của hàm số và giá trị nào nhỏ nhất trong
bảng thì đó là giá trị nhỏ nhất của hàm số.
Nhìn bảng ta thấy giá trị lớn nhất là -6 vậy $\max\limits_{[1;3]} y = -6$



Ví dụ 2 (THPT Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang -Học kì II). Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 1$ trên đoạn $[-1;2]$ là

A. -1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -2.

Lời giải. Chọn đáp án (A)

Phương pháp tự luận:

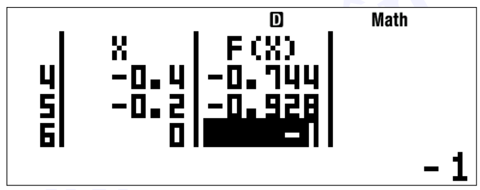
Bước 1. Có $y' = 4x^3 + 4x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bước 2. Tính $y(-1) = (-1)^4 + 2(-1)^2 - 1 = 2,\ y(0) = -1,\ y(2) = 23$.

Bước 3. So sánh các số vừa tính được ở trên ta thấy $\min\limits_{[-1;2]} y = -1$.

Phương pháp sử dụng CASIO:

Nhấn liên tiếp các bước như sau: [MODE] [7] [ALPHA] [X] [$x^\blacksquare$] [4] [▶] [+] [2] [ALPHA] [X] [x^2] [−] [1] [=] [−] [1] [=] [2] [=] [0] [•] [2] [=] [▶] sau đó tra bảng ta thấy giá trị nhỏ nhất là -1 vậy $\min\limits_{[-1;2]} y = -1$



Nhận xét:

∗) Ở đây Thầy cho Step? (bước nhảy) bằng 0,2 như vậy tùy bài em sẽ cho Step? với giá trị là bao nhiêu (thường là 0,2, 0,3, 0,5) lưu ý rằng bảng này chỉ tính được 20 giá trị.

∗) Nếu đề bài không cho tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất trên đoạn $[a;b]$ thì ta cần tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của nó trên tập xác định.

Ví dụ 3 (Sở GD và ĐT Phú Thọ, lần 2). Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$. Tính $M - m$.

A. $M - m = 2\sqrt{2}$. **B.** $M - m = 2\sqrt{2} - 2$. **C.** $M - m = 4$. **D.** $M - m = 2\sqrt{2} + 2$.

Lời giải. Chọn đáp án (D)

Phương pháp tự luận: Vì yêu cầu đề bài không có đoạn $[a;b]$ nên ta sẽ tìm tập xác định của hàm số trước rồi tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm số trên tập xác định:

Bước 1. Tìm tập xác định: $4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$. Vậy ta sẽ tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-2;2]$. Có $y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{4-x^2} - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x$$

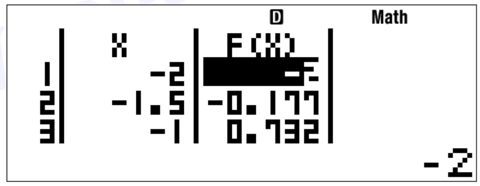
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 2x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

Bước 2. Tính $y(-2) = -2 + \sqrt{4-(-2)^2} = -2$ tương tự ta có $y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, $y(2) = 2$.

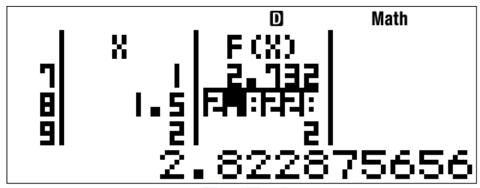
Bước 3. So sánh các số vừa tính được ta thấy $\begin{cases} M = \max y = 2\sqrt{2} \\ m = \min y = -2 \end{cases} \Rightarrow M - m = 2\sqrt{2} + 2.$

Phương pháp sử dụng CASIO: Với phương pháp này ta vẫn cần phải tìm điều kiện xác định của hàm số làm tương tự như trên ta có điều kiện xác định là $[-2;2]$ ta sẽ tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đoạn này ta vẫn sử dụng chức năng MODE 7 như trên và cho Step? bằng 0.5 được kết quả như sau:

Giá trị nhỏ nhất là $m = \min y = -2$



Giá trị lớn nhất là $M = \max y = 2,8228 \approx 2\sqrt{2}$

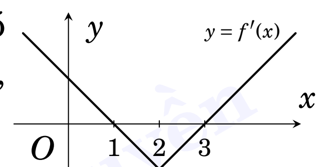


Vậy $M - m = 2\sqrt{2} + 2$

II. Mối liên hệ giữa f’(x) và f(x)

Ví dụ 1 (THPT ĐỒNG ĐA, Hà Nội).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ có dạng như hình vẽ bên. Số nào lớn nhất trong các số sau $f(0), f(1)$, $f(2), f(3)$?



A. $f(1)$. **B.** $f(2)$. **C.** $f(3)$. **D.** $f(0)$.

Lời giải. Chọn đáp án A

Để so sánh các số $f(0), f(1)$, $f(2), f(3)$ ta cần lập bảng biến thiên của hàm số ban đầu $y = f(x)$ mà để lập được bảng biến thiên ta cần biết dấu của hàm số $f'(x)$ và những điểm mà $f'(x) = 0$ nhìn vào đồ thị ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↗	$f(0)$ ↗	$f(1)$	↘ $f(2)$ ↘	$f(3)$	↗	

Để lập được bảng biến thiên như trên ta quan sát đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ thấy rằng:

*) Từ $(-\infty;1)$ hàm số $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành do đó mang dấu dương.

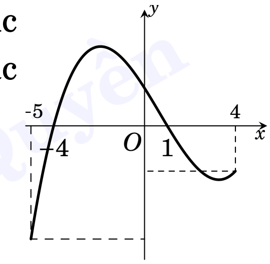
*) Từ $(1;3)$ hàm số $f'(x)$ nằm phía dưới trục hoành do đó mang dấu âm.

*) Từ $(3;+\infty)$ hàm số $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành do đó mang dấu dương.

Như vậy nhìn vào bảng biến thiên ta thấy số lớn nhất trong các số $f(0), f(1), f(2), f(3)$ là số ở vị trí cao nhất $f(1)$.

Ví dụ 2 (THPT Quốc Học, Quy Nhơn).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Hình bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-5;4]$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?



A. $\min\limits_{x\in[-5;4]} f(x) = f(-5)$.　　**B.** $\min\limits_{x\in[-5;4]} f(x) = f(-4)$.

C. $\min\limits_{x\in[-5;4]} f(x) = f(1)$.　　**D.** $\min\limits_{x\in[-5;4]} f(x) = f(4)$.

Lời giải. Chọn đáp án (B)

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-5		-4		1		4	$+\infty$
$f'(x)$		$-$		0	$+$	0		$-$	
$f(x)$		$f(-5)$		$f(-4)$		$f(1)$		$f(4)$	

Nhìn bảng biến thiên ta thấy $\begin{cases} f(-5) > f(-4) \\ f(1) > f(4) \end{cases}$ vậy để tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-5;4]$ ta chỉ cần so sánh $f(-4)$ và $f(4)$.

Gọi S_1, S_2 lần lượt là diên tích tạo bởi đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ và trục Ox trên các đoạn $[-4;1]$, $[1;4]$. Từ đồ thị, ta thấy $S_1 > S_2$.

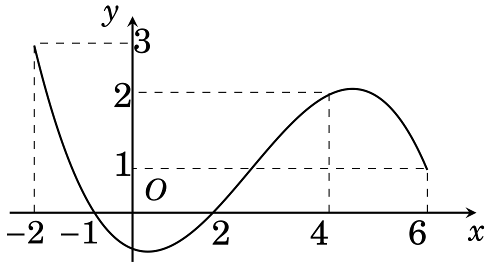
Suy ra $\int\limits_{-4}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x > -\int\limits_{1}^{4} f'(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_{-4}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{4} f'(x)\,\mathrm{d}x > 0 \Leftrightarrow \int\limits_{-4}^{4} f'(x)\,\mathrm{d}x > 0$.

Vậy $f(4) > f(-4)$. Do đó $\min\limits_{x\in[-5;4]} f(x) = f(-4)$.

Nhận xét: Như vậy đối với dạng toán cho đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ rồi yêu cầu tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất thì trước tiên từ đồ thị ta lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ sau đó nếu chưa so sánh được ta cần dựa vào ứng dụng của tích phân so sánh diện tích hai hình trên đồ thị.

Ví du 3 (THPT Hải An-Hải Phòng).

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình vẽ bên. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau



A. $\max\limits_{[-2;6]} f(x)=f(2)$. **B.** $\max\limits_{[-2;6]} f(x)=f(-1)$.

C. $\max\limits_{[-2;6]} f(x)=f(6)$. **D.** $\max\limits_{[-2;6]} f(x)=f(-2)$.

Lời giải. Chọn đáp án C

Từ đồ thị của $f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	-2		-1		2		6
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(6)$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $\begin{cases} f(-1)>f(-2) \\ f(-1)>f(2) \\ f(6)>f(2) \end{cases}$ Do vậy hàm số chỉ có thể đạt giá trị lớn nhất tại $x=-1$ hoặc $x=6$.

Gọi S_1 là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục Ox với $-1\le x\le 2$ và S_2 là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục Ox với $2\le x\le 6$.

Nhìn vào đồ thị ta thấy $S_1<S_2 \Longleftrightarrow -\int\limits_{-1}^{2} f'(x)\mathrm{d}x<\int\limits_{2}^{6} f'(x)\mathrm{d}x \Longrightarrow f(-1)<f(6)$. Vậy $\max\limits_{[-2;6]} f(x)=f(6)$.

III. Bài tập tự luyện

Câu 1 (THPT Thạch Thành 1, Thanh Hóa, lần 2). Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3+3x^2-9x+7$ trên đoạn $[-2;2]$.

A. $\max\limits_{[-2;2]} y=29$. **B.** $\max\limits_{[-2;2]} y=9$. **C.** $\max\limits_{[-2;2]} y=5$. **D.** $\max\limits_{[-2;2]} y=34$.

Câu 2 (Sở GD và ĐT Cần Thơ, mã đề 317). Gọi m,M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$ trên đoạn $[1;3]$. Tính $S=m+M$.

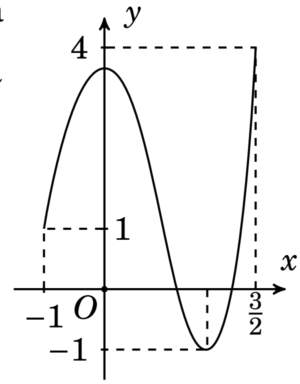
A. $S=\dfrac{2}{7}$. **B.** $S=-\dfrac{2}{7}$. **C.** $S=3$. **D.** $S=4$.

Câu 3 (THPT Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang - HK2). Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^4+2x^2-1$ trên đoạn $[-1;2]$.

A. -1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -2.

Câu 4 (Sở GD và ĐT Đồng Tháp).

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1;\dfrac{3}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1;\dfrac{3}{2}\right]$ là



A. $M = 4, m = 1$. **B.** $M = \dfrac{7}{2}, m = -1$.

C. $M = 4,\ m = -1$. **D.** $M = \dfrac{7}{2}, m = -1$.

Câu 5 (Sở GD & ĐT Phú Yên). Biết hàm số $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;3]$ tại điểm x_0. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0 = 0$. **B.** $x_0 = \pm 2$. **C.** $x_0 = -3$. **D.** $x = 2$.

Câu 6 (Sở GD và ĐT TP.HCM,CỤM I). Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x + 2017$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;2017]$. Khi đó, phương trình $f(x) = M$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 7 (Sở GD và ĐT TP HCM, Cụm V). Tìm giá trị điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^3 + 6x^2 + 15x + 10$.

A. 5. **B.** 110. **C.** 2. **D.** −1.

Câu 8 (SGD BẮC GIANG). Cho hàm số $y = x + \sqrt{1 - x^2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số. Giá trị của biểu thức $49M^2 - m^2$ bằng

A. 96. **B.** 97. **C.** 95. **D.** 94.

Câu 9 (Sở GD và ĐT Hà Tĩnh). Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ trên đoạn $[-1;3]$.

A. 2. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 10 (Tạp chí THTT, lần 9). Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 11 (Tạp chí THTT, lần 9). Đặt M là giá trị lớn nhất, m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |x^3 + 3x^2 - 72x + 90|$ trên đoạn $[-5;5]$. Khi đó tổng $M + m$ có giá trị là một số thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(369;471)$. **B.** $(313;315)$. **C.** $(149;151)$. **D.** $(-6;10)$.

Câu 12 (THPT Đông Hà-Quảng Trị-lần 2). Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x - m^2}{x + 1}$ trên $[0;1]$.

A. $\max\limits_{[0;1]} y = \dfrac{1 + m^2}{2}$. **B.** $\max\limits_{[0;1]} y = \dfrac{1 - m^2}{2}$. **C.** $\max\limits_{[0;1]} y = m^2$. **D.** $\max\limits_{[0;1]} y = -m^2$.

Câu 13 (Sở GD-ĐT Yên Bái). Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-1;2]$.

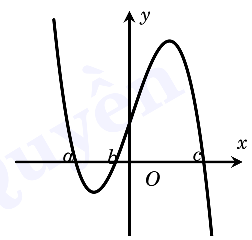
A. $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = -2$. **B.** $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = 0$. **C.** $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = 4$. **D.** $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = 2$.

Câu 14 (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH, LẦN 4). Tập hợp nào dưới đây chứa tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m|$ trên $[-1;2]$ bằng 5.

A. $(-5;-2) \cup (0;3)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-6;-3) \cup (0;2)$. **D.** $(-4;3)$.

Câu 15 (Sở GD và ĐT Gia Lai).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ là a, b, c như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?



A. $f(c) > f(a) > f(b)$. **B.** $f(a) > f(c) > f(b)$.

C. $f(b) > f(a) > f(c)$. **D.** $f(c) > f(b) > f(a)$.

Câu 16 (Sở GD và ĐT Bình Dương). Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^2 + 4x - m$ trên đoạn $[-1;3]$ là 10. Khi đó, giá trị m là bao nhiêu?

A. 3. **B.** -15. **C.** -6. **D.** -7.

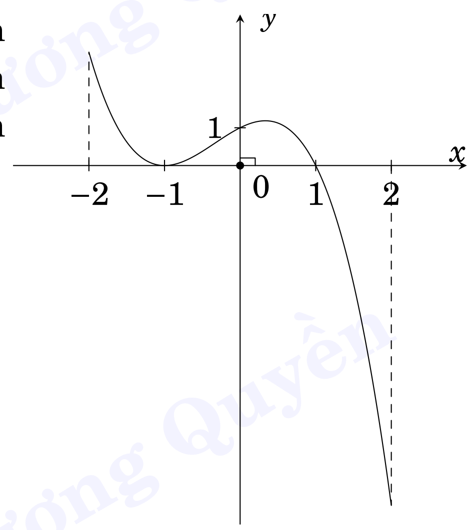
Câu 17 (Sở GD và ĐT Bình Dương). Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

A. $\min\limits_{[2;4]} y = -2$. **B.** $\min\limits_{[2;4]} y = 6$. **C.** $\min\limits_{[2;4]} y = -3$. **D.** $\min\limits_{[2;4]} y = \dfrac{19}{3}$.

Câu 18 (Sở GDDT Phú Thọ, Lần 1).

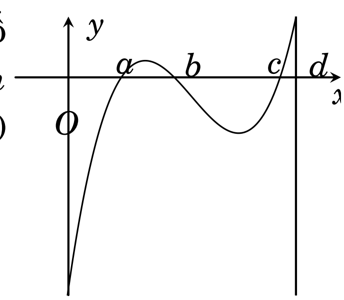
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2;2]$, có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Tìm giá trị x_0 để hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-2;2]$.

A. $x_0 = 1$. **B.** $x_0 = -1$. **C.** $x_0 = -2$. **D.** $x_0 = 2$.



Câu 19 (THPT Chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa, lần 3).

Cho các số thực a, b, c, d thoả mãn $0 < a < b < c < d$ và hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[0;d]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?



A. $M + m = f(0) + f(c)$. **B.** $M + m = f(d) + f(c)$.

C. $M + m = f(b) + f(a)$. **D.** $M + m = f(0) + f(a)$.

ĐÁP ÁN

1 A	**3** A	**6** C	**8** B	**10** B	**12** B	**14** A	**16** C	**18** A
2 A	**4** C	**7** C	**9** A	**11** A	**13** C	**15** A	**17** B	**19** A

§4 ĐƯỜNG TIỆM CẬN

Kiến Thức Cần Nhớ

Định nghĩa: Kí hiệu (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$, khi đó:

➢ **Tiệm cận đứng:** Nếu có một trong các điều kiện $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$, hoặc $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$, hoặc $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$, hoặc $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ thỏa mãn thì đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (C).

➢ **Tiệm cận ngang:** Nếu có một trong các điều kiện $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y_0$ thì đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (C).

I. Tìm tiệm cận ngang - tiệm cận đứng

Phương Pháp Giải

Bài toán: Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$*$) **Tiệm cận đứng:** Ta sử dụng định nghĩa của tiệm cận đứng như sau:

Bước 1. Giải phương trình mẫu tức giải phương trình $Q(x) = 0$ giả sử được các nghiệm là x_1, x_2,...

Bước 2. Thay các nghiệm x_1, x_2,... ở trên vào tử tức thay x_i vào $P(x)$ được $P(x_i)$ nếu kết quả ra một số khác 0 thì $x = x_i$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số, nếu kết quả ra 0 hoặc không xác định thì $x = x_i$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$*$) **Tiệm cận ngang:** Ta vẫn sử dụng định nghĩa của tiệm cận ngang như sau:

Bước 1. Tính $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Bước 2. So sánh kết quả nếu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ra kết quả là một số hữu hạn tức y_0 thì hàm số có tiệm cận ngang là $y = y_0$ tương tự đối với trường hợp $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, ngược lại nếu ra kết quả là $\pm\infty$ thì hàm số không có tiệm cận ngang.

Notes

Nếu ở cách tìm tiệm cận đứng trên bước 1 ta giải ra nghiệm $x = x_0$ bội n với $n \geq 2$ thì ta cần sử dụng máy tính CASIO để tính giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0^\pm} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ nếu kết quả ra vô cùng thì $x = x_0$ là tiệm cận đứng và kết quả ra một số hữu hạn thì $x = x_0$ không là tiệm cận đứng. Hoặc ta có thể tìm tiệm cận đứng bằng cách như sau:

Giải phương trình mẫu $Q(x) = 0$ được các nghiệm là x_i sau đó ta tính giới hạn

$\lim\limits_{x\to x_i^{\pm}} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ nếu kết quả ra vô cùng thì $x = x_i$ là tiệm cận đứng nếu kết quả ra một số hữu hạn thì $x = x_i$ không là tiệm cận đứng.

Ví dụ 1 (Sở GD-ĐT Yên Bái). Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2-x}{x+2}$ có phương trình là

A. $x = -2.$ **B.** $y = 2.$ **C.** $y = -1.$ **D.** $x = -1.$

Lời giải. Chọn đáp án A

Bước 1. Giải phương trình mẫu tức giải phương trình $x+2=0 \Rightarrow x=-2$.

Bước 2. Thay $x=-2$ vào tử số tức thay vào $2-x$ ta được kết quả là $4 \neq 0$.

Vậy $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ví dụ 2 (Sở GD và ĐT Lâm Đồng - Học kì 2). Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x-1}$?

A. $x = -1.$ **B.** $y = 1.$ **C.** $x = 1.$ **D.** $y = 0.$

Lời giải. Chọn đáp án D

Bước 1. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$.

Bước 2. So sánh kết quả vì hai giá trị $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ đều ra một số hữu hạn nên ta có $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ví dụ 3 (THPT Chu Văn An, Đắk Nông). Tìm tất cả các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{7-x^2}{(x-2)(x-3)}$.

A. $x=-2, x=-3.$ **B.** $y=2, y=3.$ **C.** $x=2, x=3.$ **D.** $y=-2, y=-3.$

Lời giải. Chọn đáp án C

Bước 1. Giải phương trình mẫu tức giải phương trình $(x-2)(x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$

Bước 2. Thay $\begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$ vào tử số tức thay vào $7-x^2$ ta được:

- Với $x=2 \Rightarrow 7-x^2 = 3 \neq 0 \Rightarrow x=2$ là tiệm cận đứng.
- Với $x=3 \Rightarrow 7-x^2 = -2 \neq 0 \Rightarrow x=3$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x=2$ và $x=3$.

Ví dụ 4 (THPT Chuyên Biên Hòa, Hà Nam, lần 3). Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2-x}{9-x^2}$.

A. $x = 0.$ **B.** $y = 1.$ **C.** $y = 0.$ **D.** Không có.

Lời giải. Chọn đáp án C

Bước 1. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-x}{9-x^2} = 0$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2-x}{9-x^2} = 0$.

Bước 2. So sánh kết quả vì hai giá trị $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ đều ra một số hữu hạn là 0 nên ta có $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-\dfrac{d}{c}$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $x=\dfrac{a}{c}$.

Ví dụ 5 (THPT Quốc Oai, Hà Nội (HK2)). Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-x}{2x+1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải. Chọn đáp án (A)

Sử dụng nhận xét trên ta có đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-x}{2x+1}=\dfrac{-x+1}{2x+1}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\\c=2\\d=1\end{cases}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-\dfrac{d}{c}=-\dfrac{1}{2}$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{a}{c}=\dfrac{-1}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

Ví dụ 6 (THPT Bắc Duyên Hà, Thái Bình, lần 2). Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-3|x|-4}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải. Chọn đáp án (D)

Bước 1. Giải phương trình mẫu tức giải phương trình $x^2-3|x|-4=0$ ta xét hai trường hợp như sau:

TH1: $x\ge 0\Rightarrow |x|=x\Rightarrow x^2-3|x|-4=0\Leftrightarrow x^2-3x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=-1<0\end{array}\right.\Rightarrow x=4.$

TH2: $x<0\Rightarrow |x|=-x\Rightarrow x^2-3|x|-4=0\Rightarrow x^2+3x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-4<0\end{array}\right.\Rightarrow x=1.$

Vậy phương trình $x^2-3|x|-4=0$ có hai nghiệm là $\begin{cases}x=4\\x=1\end{cases}$.

Bước 2. Thay $\begin{cases}x=4\\x=1\end{cases}$ vào tử tức thay vào x^2+1 ta được:

- Với $x=4\Rightarrow x^2+1=17\ne 0\Rightarrow x=4$ là tiệm cận đứng.
- Với $x=1\Rightarrow x^2+1=2\ne 0\Rightarrow x=1$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng là $x=4$ và $x=1$.

Ví dụ 7 (Sở GD và ĐT Lâm Đồng (HKII)). Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải. Chọn đáp án (B)

Tiệm cận đứng:

Bước 1. Giải phương trình mẫu tức giải phương trình $x^2-3x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=4\end{array}\right.$

Bước 2. Thay $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=4 \end{array}\right.$ vào tử tức thay vào $\sqrt{4-x^2}$ ta được:

- Với $x=-1 \Rightarrow \sqrt{4-x^2}=\sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng.
- Với $x=4 \Rightarrow \sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4^2}=\sqrt{-12}$ không xác định do đó đường thẳng $x=4$ không là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x=-1$.

Tiệm cận ngang: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4}$ ta thấy hai giới hạn này đều không xác định tức không tồn tại hai giới hạn này nên đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số có duy nhất một đường tiệm cận là $x=-1$.

Nhận xét: Trong một số trường hợp để làm nhanh cách tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số chứa căn thức ta trước tiên có thể tìm tập xác định của hàm số rồi áp dụng phương pháp trên thì sẽ loại được những giá trị không cần thiết.

Áp dụng vào bài này ta có điều kiện xác định của hàm số là $4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$ nên ta loại luôn trường hợp $x=4$ và không cần tính hai giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4}$ vì ở đây $x \to \pm\infty$ không thỏa mãn $-2 \leq x \leq 2$.

II. Tìm tiệm cận dựa vào bảng biến thiên

Ví dụ 1 (THPT Quốc Thái, An Giang). Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên tập $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	3

Tìm tất cả các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

A. $y=-1, y=3$. **B.** $y=-1, y=1$. **C.** $y=0, y=1$. **D.** $y=1, y=3$.

Lời giải. Chọn đáp án A

Tiệm cận đứng: Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy khi x tiến tới 1 từ vế trái tức khi $x \to 1^-$ thì hàm số y nhận giá trị $-\infty$ điều này có nghĩa là $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty \Rightarrow x=1$ là tiệm cận đứng.

Tiệm cận ngang: Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy:

- Khi $x \to -\infty$ thì giá trị của y tiến đến -1 điều này có nghĩa là $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1 \Rightarrow$

$y=-1$ là tiệm cận ngang.

- Khi $x \to +\infty$ thì giá trị của y tiến đến 3 điều này có nghĩa là $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3 \Rightarrow y=3$ là tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai tiệm cận ngang là $y=-1$ và $y=3$.

Nhận xét: Như vậy để làm được dạng toán này ta cần nhớ lại định nghĩa của tiệm cận ở phần kiến thức cần nhớ trên ngoài ra ta có thể hiểu một cách đơn giản như sau:

➢ **Tiệm cận đứng:** Khi x tiến đến x_0 từ bên trái hoặc từ bên phải thì y tiến đến vô cùng thì $x=x_0$ là tiệm cận đứng.

➢ **Tiệm cận ngang:** Khi x tiến đến $-\infty$ hoặc x tiến đến $+\infty$ thì y tiến đến một số y_0 thì $y=y_0$ là tiệm cận ngang.

$*$) Tóm lại **tiệm cận đứng** có thể hiểu là x tiến đến một số, y tiến đến vô cùng. **tiệm cận ngang** có thể hiểu là x tiến đến vô cùng, y tiến đến một số.

Ví dụ 2 (Chuyên Lê Quý Đôn - Vũng Tàu). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như bảng dưới đây.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	
$f(x)$	-1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	1

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Đồ thị của hàm số $f(x)$ có đúng 1 tiệm cận ngang và 1 tiệm cận đứng.

B. Đồ thị của hàm số $f(x)$ không có tiệm cận ngang và 1 tiệm cận đứng.

C. Đồ thị của hàm số $f(x)$ có đúng 2 tiệm cận ngang và không có tiệm cận đứng.

D. Đồ thị của hàm số $f(x)$ có đúng 2 tiệm cận ngang và 1 tiệm cận đứng.

Lời giải. Chọn đáp án D

Tiệm cận đứng: Quan sát bảng biến thiên ta thấy x tiến đến -1 thì y tiến đến vô cùng nên $x=-1$ là tiệm cận đứng.

Tiệm cận ngang: Quan sát bảng biến thiên ta thấy:

- Khi x tiến đến $-\infty$ thì y tiến đến -1 nên $y=-1$ là tiệm cận ngang.
- Khi x tiến đến $+\infty$ thì y tiến đến 1 nên $y=1$ là tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x=-1$ và hai tiệm cận ngang là $\begin{cases} y=-1 \\ y=1 \end{cases}$

III. Tìm m để hàm số có tiệm cận thỏa mãn điều kiện

Phương Pháp Giải

Bài toán: Cho hàm số $y = f(x,m) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có a tiệm cận đứng (hoặc a tiệm cận ngang, hoặc a tiệm cận nói chung).

Bước 1. Tìm điều kiện xác định của tử $P(x)$ và mẫu $Q(x)$.

Bước 2. Ta nhớ lại cách tìm tiệm cận để giải quyết bài toán này:

TH1. Có a tiệm cận đứng thì phương trình ở mẫu $Q(x) = 0$ phải có a nghiệm trong đó a nghiệm này phải thuộc điều kiện xác định ở bước một và không là nghiệm của tử.

TH2. Có a tiệm cận ngang thì các giới hạn $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \end{cases}$ phải ra a số hữu hạn.

TH3. Có a tiệm cận thì ta cần tính cả tiệm cận đứng và tiệm cận ngang đã xét ở trên.

Ví dụ 1 (THPT Nguyễn Huệ, Huế, lần 2). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}$ có hai đường tiệm cận đứng.

A. $m \in (-8;1)$.
B. $m \in (-\infty;-8) \cup (-8;1)$.
C. $m \in (-\infty;-1)$.
D. $m \in (-\infty;1)$.

Lời giải. Chọn đáp án B

Phân tích: Bài toán rơi vào trường hợp số 1. Vì yêu cầu đề bài cần có hai tiệm cận đứng nên phương trình ở mẫu cần có hai nghiệm thuộc tập xác định của cả tử và mẫu mà hai nghiệm này phải khác nghiệm của tử nên ta làm như sau:

Bước 1. Điều kiện xác định của tử x^2+x-2 và mẫu x^2-2x+m là $x \in \mathbb{R}$.

Bước 2. Yêu cầu đề bài có hai tiệm cận đứng nên phương trình ở mẫu $x^2-2x+m=0$ phải có hai nghiệm phân biệt khi đó $\Delta' = 1-m > 0 \Rightarrow m < 1$.

Hai nghiệm này phải khác nghiệm của phương trình tử mà phương trình tử là $x^2+x-2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ phương trình mẫu $x^2-2x+m=0$ phải có hai nghiệm $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 1^2 - 2.1 + m \neq 0 \\ (-2)^2 - 2.(-2) + m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -8 \end{cases}$

Vậy với $\begin{cases} m < 1 \\ m \neq -8 \end{cases}$ hay $m \in (-\infty;-8) \cup (-8;1)$ thì đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng.

Ví dụ 2 (THPT ĐỒNG ĐA, Hà Nội). Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x(x+m)}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. $\{-1;0\}$.
B. $\{1\}$.
C. $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
D. $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Lời giải. Chọn đáp án A

Phân tích: Đề bài yêu cầu đồ thị hàm số chỉ có đúng hai tiệm cận như vậy tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số chỉ là hai.

Điều kiện xác định: $x \in \mathbb{R}$.

Tiệm cận ngang: Ta tính hai giới hạn $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \end{cases}$ tức tính $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x(x+m)} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{x(x+m)} \end{cases}$. Như vậy cả hai giới hạn này chỉ cho một kết quả hữu hạn là $y=0$ nên đồ thị hàm số luôn có một tiệm cận ngang. Do đó để đồ thị hàm số có hai tiệm cận thì ta chỉ tìm điều kiện để đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng.

Tiệm cận đứng: Ta xét phương trình ở mẫu $x(x-m)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-m \end{array}\right.$. Nghiệm của tử là $x-1=0 \Rightarrow x=1$. Để đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng thì hoặc phương trình ở mẫu chỉ có một nghiệm khác nghiệm của tử hoặc phương trình ở mẫu có hai nghiệm mà một nghiệm trùng với nghiệm của tử. Rõ ràng $x=0$ là nghiệm của mẫu khác nghiệm của tử nên ta xét nghiệm còn lại $x=-m$ ở đây nghiệm này trùng với nghiệm tử khi $-m=1 \Rightarrow m=-1$, mặt khác để phương trình ở mẫu có duy nhất một nghiệm thì hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-m \end{array}\right.$ phải trùng nhau khi đó $m=0$.

Vậy với $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=0 \end{array}\right.$ thì đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận.

> **Nhận xét:** Từ ví dụ trên ta có nhận xét số tiệm cận đứng là số nghiệm của mẫu (nghiệm này thuộc tập xác định của tử) mà không phải là nghiệm của tử, số tiệm cận ngang là số kết quả hữu hạn khác nhau của hai giới hạn $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \end{cases}$

Ví dụ 3 (THPT Hưng Nhân, Thái Bình, Lần 3). Cho hàm số $y=\dfrac{x}{x-m}$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có tiệm cận ngang?

A. $m=0$. **B.** $m\neq 1$. **C.** $m\neq 0$. **D.** $\forall m\in\mathbb{R}$.

Lời giải. Chọn đáp án D

Để hàm số có tiệm cận ngang thì phải tồn tại một trong hai giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ta thấy với mọi $m\in\mathbb{R}$ thì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x-m} = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x-m} = 1 \end{cases}$ Do đó với mọi $m\in\mathbb{R}$ thì đồ thị hàm số luôn có tiệm cận ngang là $y=1$.

IV. Bài tập vận dụng

Câu 1 (THPT Thạch Thành 1, Thanh Hóa, lần 2). Đường thẳng $y=-1$ là đường tiệm cận của đồ thị hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

A. $y=\dfrac{-x^2+1}{x+2}$. **B.** $y=\dfrac{-3x+4}{3+x}$. **C.** $y=\dfrac{x+5}{6-x}$. **D.** $y=\dfrac{-1}{x+2}$.

Câu 2 (THPT Sông Ray, Đồng Nai). Xác định tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

A. $x=1,\ y=-1$. **B.** $x=1,\ y=2$. **C.** $x=2,\ y=1$. **D.** $x=-1,\ y=2$.

Câu 3 (Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi). Số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x-3}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 4 (THPT Quốc Thái, An Giang). Tìm tất cả các tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{x}$.

A. $y=0$ và $y=-\dfrac{3}{2}$. **B.** $y=0$ và $y=2$.

C. $y=-2$ và $y=2$. **D.** $y=-\sqrt{2}$ và $y=\sqrt{2}$.

Câu 5 (Để TTTHPT QG- Sở Cần Thơ). Tìm đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-4}{x+2}$.

A. $y=2$. **B.** $y=-2$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=2$.

Câu 6 (THPT Thị xã Quảng Trị, lần 2). Tính tổng số các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{2x^2-5x+3}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 7 (Sở GD và ĐT Phú Thọ, lần 2). Tìm tất cả các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-1-\sqrt{x+3}}{x^2+2x-3}$.

A. $x=-3$. **B.** $x=-1$ và $x=3$. **C.** $x=1$ và $x=-3$. **D.** $x=3$.

Câu 8 (THPT Hậu Lộc, Thanh Hoá, lần 3). Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 9 (THPT Quỳnh Lưu - Nghệ An, lần 4). Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x^2-4}$?

A. $y=-2$. **B.** $y=0$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-2$.

Câu 10 (THPT Chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa, lần 3). Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{10-x^2}-2x-1}{x^2+3x-4}$. Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 11 (THPT Phù Cừ - Hưng Yên, lần 1). Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2-\sqrt{x^2+x+2}}{x^3+8}$.

A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

B. $x=-2$.

C. $x=2$.

D. $y=0$.

Câu 12 (THPT Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang - HK2). Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x+m}$ có đúng 2 đường tiệm cận.

A. $\left(-\infty;\dfrac{9}{4}\right)$. **B.** $\left\{2;\dfrac{9}{4}\right\}$. **C.** $\left(-\infty;\dfrac{9}{4}\right]$. **D.** $\{2\}$.

Câu 13 (Sở GD và ĐT Bình Phước). Biết đồ hị của hàm số $y=\dfrac{(a-2b)x^2+bx+1}{x^2+x-b}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$ và tiệm cân ngang là đường thẳng $y=0$. Tính $a+2b$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 14 (Sở GD và ĐT Hưng Yên). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{(m+1)x^4+1}{x^2-2x+m^2}$ có đúng 2 đường tiệm cận.

A. $m\in[-1;1)$. **B.** $m\in(-1;1)$.

C. $m\in[-1;1]$. **D.** $m\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Câu 15 (Sở GD và ĐT Bình Dương). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{m\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ có đường thẳng $y=-2$ là một tiệm cận ngang.

A. $m\in\{-2;2\}$. **B.** $m\in\{-1;1\}$. **C.** $m\in\{2\}$. **D.** $m\in\{1;-2\}$.

Câu 16 (TT Lê Hồng Phong-NĐ lần 1). Gọi a,b tương ứng là số đường tiệm cận đứng và số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-4x+3}$. Tính $a+b$.

A. $a+b=3$. **B.** $a+b=2$. **C.** $a+b=0$. **D.** $a+b=1$.

Câu 17 (TRƯỜNG THPT ĐÔNG ANH). Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-6x+m}{x-m}$ không có đường tiệm cận đứng.

A. $m=6$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=3\\m=5\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=5\end{array}\right.$. **D.** $m=7$.

Câu 18 (THPT Phù Cừ - Hưng Yên, lần 1). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Hàm số $y=f(x)$ có một giá trị cực tiểu là -1.

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$.

C. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

D. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=0$.

Câu 19 (TT Lê Hồng Phong-NĐ lần 1). Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$+$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3		$\nearrow$		2	$\searrow$	-4

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Hàm số có hai điểm cực trị.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

C. Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.

D. Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.

Câu 20 (Trường THPT Tân Yên - Bắc Giang). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới đây. Hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$1 \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty \;\|\|\; -\infty$	$\nearrow$	3

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 21 (Sở GD và ĐT Bình Thuận). Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-1-\sqrt{x^2+x+2}}{x^2+2x-3}$.

A. $x = -3$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = -3$ và $x = 1$. **D.** $x = 1$.

Câu 22 (Sở GD và ĐT Đà Nẵng, mã đề 224). Cho hàm số $y = \dfrac{5x+3}{\sqrt{4x^2-1}}$. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 23 (Vương Quyền). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$		-1		0		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1 \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; -3$	$\nearrow$	7	$\searrow$	-4

Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

A. 3 tiệm cận đứng và 2 tiệm cận ngang. **B.** 3 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang.

C. 2 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang. **D.** 1 tiệm cận đứng và 2 tiệm cận ngang.

Câu 24 (THPT CHUYÊN THÁI BÌNH LẦN 5). Hàm số $y=\dfrac{2}{x^2-2mx+m^2-m+2}$. Tìm m để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

A. $m>0$. **B.** $m>3$. **C.** $m<1$. **D.** $m<2$.

Câu 25 (SỞ GD-ĐT LONG AN). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx+2}{x-1}$ có tiệm cận đứng.

A. $m\neq 2$. **B.** $m<2$. **C.** $m\leq -2$. **D.** $m\neq -2$.

Câu 26 (Chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương, lần 4). Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+1}}{x+2}$ có 3 tiệm cận.

A. $m>0$. **B.** $-2<m<-1$. **C.** $m\leq 0$. **D.** $m\geq\dfrac{1}{2}$.

Câu 27 (THPT CHUYÊN SƠN LA, LẦN 4). Tìm tập hợp các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{(mx^2-2x+1)(4x^2+4mx+1)}$ có đúng một đường tiệm cận.

A. $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **B.** $\{0\}$.

C. $\varnothing$. **D.** $(-\infty;-1)\cup\{0\}\cup(1;+\infty)$.

Câu 28 (THPT Chuyên ĐHSP Hà Nội - Lần 5). Tập hợp các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2+6x-2}{x+2}$ có tiệm cận đứng là

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{7}{2}\right\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **D.** $\left\{\dfrac{7}{2}\right\}$.

Câu 29 (THPT Cổ Loa, Hà Nội, lần 3). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{(x^2+3x+2)(x+m)}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. $m\leq 1$. **B.** $m>1$. **C.** $m\geq 1$. **D.** $m<1$.

Câu 30 (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp, Quảng Ngãi). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x^2-4x+m}$ có đúng ba đường tiệm cận.

A. $m<4$ và $m\neq -12$. **B.** $m>4$.

C. $m<4$. **D.** $m=-12$ hoặc $m=4$.

Câu 31 (THPT Thạch Thành 1-Thanh Hóa). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x}{3x-\sqrt{mx^2+1}}$ có ba đường tiệm cận.

A. $m>0$. **B.** $0<m<9$. **C.** $m>0$ và $m\neq 9$. **D.** $m>9$.

ĐÁP ÁN

1 C	**5** C	**9** D	**13** C	**17** C	**21** A	**25** D	**29** C
2 B	**6** B	**10** D	**14** A	**18** D	**22** D	**26** A	**30** A
3 A	**7** A	**11** A	**15** A	**19** C	**23** C	**27** C	
4 D	**8** A	**12** B	**16** D	**20** A	**24** D	**28** A	**31** B

§5 NHẬN DẠNG ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Kiến Thức Cần Nhớ

Khi nhìn một đồ thị hàm số, để kết luận được đó là đồ thị nào hay để chọn được phương án trả lời đúng nhất các em cần nắm-vận được các kỹ năng sau:

➢ Kỹ năng dựa vào dạng chuẩn của đồ thị hàm số bậc ba, trùng phương, hàm bậc nhất trên bậc nhất.

➢ Kỹ năng dựa vào các giao điểm của đồ thị với các trục tung (Oy) và trục hoành (Ox).

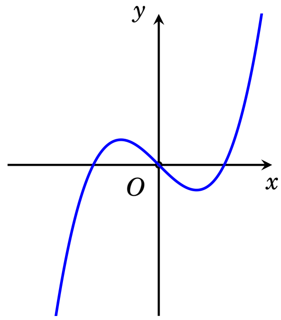
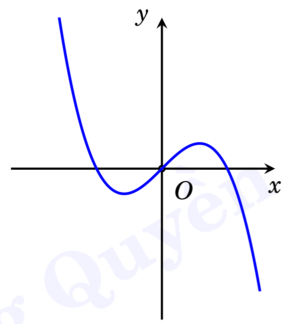
➢ Kỹ năng dựa vào điểm cực trị của đồ thị hàm số.

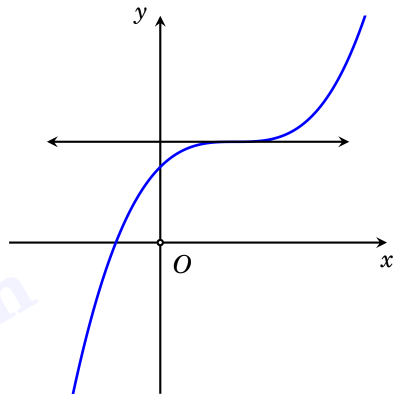
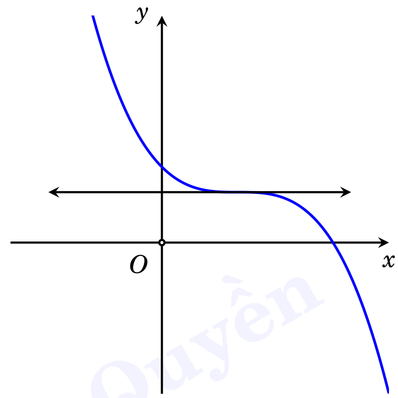
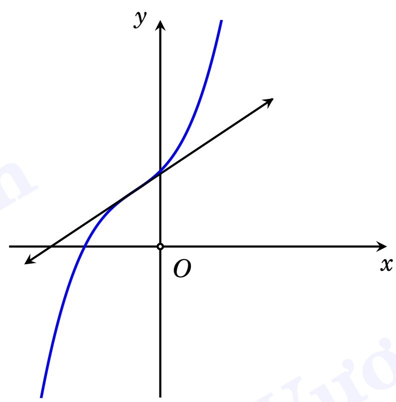
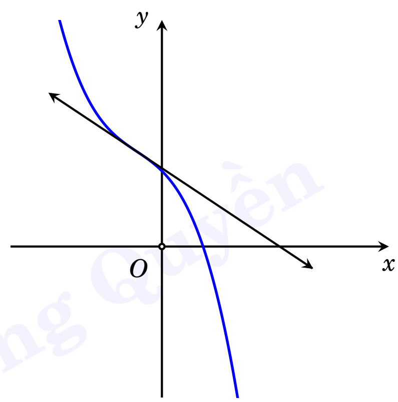
➢ Kỹ năng dựa vào các đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

Tùy vào đồ thị hàm số đề bài cho là gì ta sẽ ứng dụng linh hoạt các kỹ năng trên một cách linh hoạt để nhanh chóng đưa ra phương án trả lời chính xác nhất.

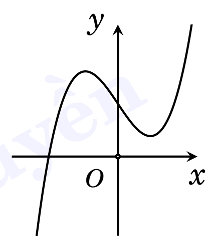
I. Kỹ năng nhìn dạng chuẩn của đồ thị hàm số

1. Nhìn dạng chuẩn hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Các dạng đồ thị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$		
Dữ kiện	$a > 0$	$a < 0$
Hàm số có hai cực trị - phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt hay $b^2 - 3ac > 0$		

Hàm số không có cực trị	Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép hay $b^2 - 3ac = 0$		
	Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hay $b^2 - 3ac < 0$		

Ví dụ 1 (Vương Quyền). Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau đây?



A. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 2.$ **B.** $y = -x^3 + 3x^2 + 5x + 1.$

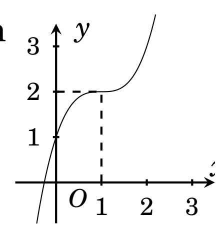
C. $y = \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x + 1.$ **D.** $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x + 1.$

Lời giải. Chọn đáp án C

✎ Quan sát đồ thị và dựa vào bảng trên ta thấy hàm số có dạng là hàm bậc ba và hệ số $a > 0 \Rightarrow$ loại phương án **B, D**.

✎ Nhìn vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có hai cực trị nên $b^2 - 3ac > 0$ ta thấy đáp án **A** cho kết quả $b^2 - 3ac = -2 < 0 \Rightarrow$ loại phương án **A**, đáp án **C** cho kết quả là $b^2 - 3ac = 6 > 0 \Rightarrow$ Chọn **C**.

Ví dụ 2 (THPT Lý Thánh Tông, Hà Nội, lần 4). Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



A. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1.$ **B.** $y = -x^3 + 3x^2 + 1.$

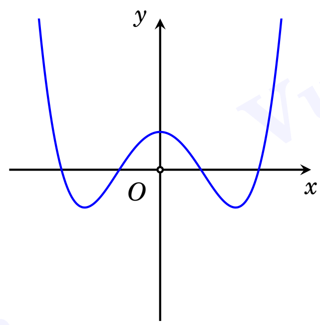
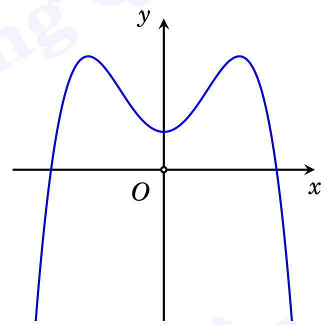
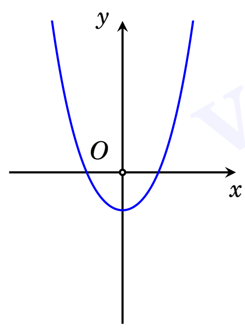
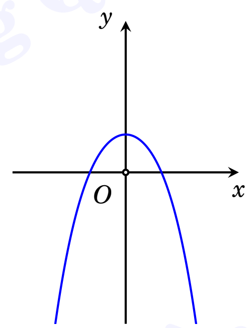
C. $y = -x^3 - 3x^2 + 1.$ **D.** $y = 2x^3 - x + 1.$

Lời giải. Chọn đáp án (A)

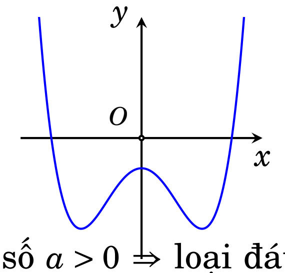
✎ Quan sát đồ thị ta thấy đồ thị của hàm bậc ba và hệ số $a>0$ nên loại luôn hai đáp án **B, C**.

✎ Tiếp tục ta để ý đồ thị rơi vào trường hợp phương trình $y'=0$ có nghiệm kép tức $b^2-3ac=0 \Rightarrow$ Chọn đáp án **A**.

2. Nhìn dạng chuẩn hàm số trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$

Các dạng đồ thị của hàm số trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ với $a\neq 0$		
Dữ kiện	$a>0$	$a<0$
Hàm số có ba cực trị - phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt hay $ab<0$		
Hàm số có một cực trị - phương trình $y'=0$ có nghiệm duy nhất là $x=0$ hay $ab\leq 0$.		

Ví dụ 1 (Vương Quyền). Đường cong hình bên là của hàm số nào trong các hàm số sau đây?



A. $y=-\dfrac{x^4}{2}+2x^2-1$. **B.** $y=x^4-2x^2-\dfrac{1}{2}$.

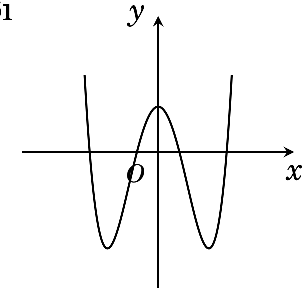
C. $y=x^4+3x^2-1$. **D.** $y=-x^4-x^2-1$.

Lời giải. Chọn đáp án (B)

✎ Nhìn đồ thị ta thấy đồ thị là của hàm trùng phương có hệ số $a>0 \Rightarrow$ loại đáp án **A, D** và hàm số có ba cực trị nên $ab<0 \Rightarrow$ Chọn đáp án **B**.

Ví dụ 2 (THPT Hải An-Hải Phòng).

Hình vẽ ở bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



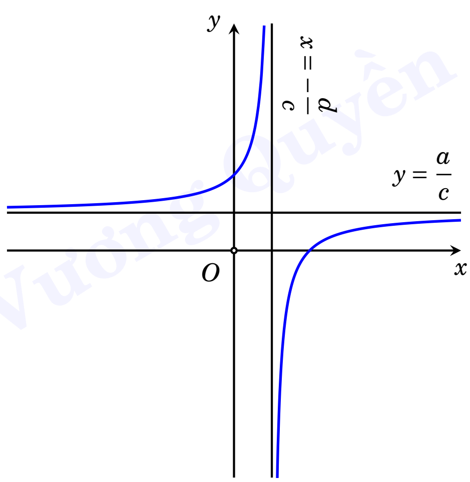
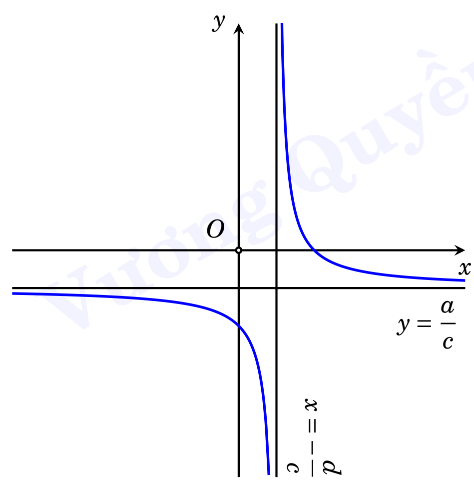
A. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.　　**B.** $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.　　**D.** $y = 2x^4 - 5x^2 + 1$.

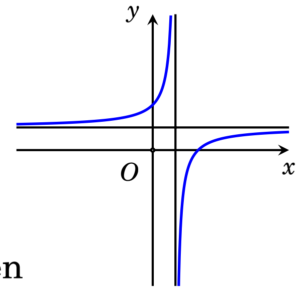
Lời giải. Chọn đáp án D

✎ Nhìn vào đồ thị ta thấy đồ thị là của hàm trùng phương nên loại đáp án **A, C**, mặt khác hệ số hàm trùng phương này có hệ số $a > 0 \Rightarrow$ Chọn đáp án **D**.

3. Nhìn dạng chuẩn hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$

Các dạng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ **với** $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$	
Hàm số đồng biến $ad - bc > 0$	Hàm số nghịch biến $ad - bc < 0$
	

Ví dụ 1 (Vương Quyền). Đường cong hình bên là của hàm số nào trong các hàm số sau?



A. $y = \dfrac{x+3}{x+1}$.　　**B.** $y = \dfrac{x-1}{2x-1}$.

C. $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$.　　**D.** $y = \dfrac{-x+2}{3x+1}$.

Lời giải. Chọn đáp án B

✎ Quan sát đồ thị ta thấy đồ thị hàm số là hàm bậc nhất trên bậc nhất $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow$ loại **C** mà hàm số đồng biến nên có $ad - bc > 0 \Rightarrow$ Chọn đáp án **B**.

II. Kỹ năng dựa vào giao điểm - cực trị - tiệm cận của đồ thị hàm số

Phương Pháp Giải

➢ **Kỹ năng nhìn vào giao điểm:** Đối với các đồ thị hàm số cho các điểm mà nó đi qua ta chỉ cần thay tọa độ điểm đi qua đó vào các đáp án nào thỏa mãn thì chọn đáp án đó cụ thể:

☑ Nếu đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ giao điểm với trục tung tại điểm y_0 thì $x_0 = 0$ nên $d = y_0$.

☑ Đồ thị hàm số bậc ba có điểm uốn là $U\left(-\frac{b}{3a}; y\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$. Hoành độ điểm uốn là nghiệm của phương trình $y'' = 0$.

☑ Nếu đồ thị hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ giao điểm với trục tung tại điểm y_0 thì $x_0 = 0$ nên $c = y_0$.

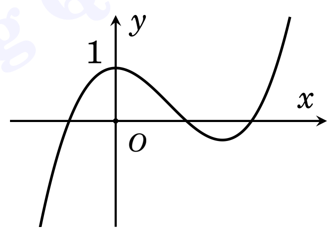
☑ Nếu đồ thị hàm số bậc nhất trên bậc nhất $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ giao với trục tung tại điểm y_0 thì $x_0 = 0$ nên $\frac{b}{d} = y_0$ và nếu đồ thị giao với trục hoành tại điểm x_0 thì $y_0 = 0$ nên $-\frac{b}{a} = x_0$.

➢ **Kỹ năng nhìn vào cực trị:** Cũng gần tương tự như trên đối với các hình vẽ đồ thị hàm số cho ta tọa độ các điểm cực trị thì có thể thay tọa độ điểm đó vào các đáp án hoặc thay vào phương trình $y' = 0$ và để ý rằng điểm cực trị của hàm bậc ba và hàm trùng phương là nghiệm của phương trình $y' = 0$.

➢ **Kỹ năng nhìn vào tiệm cận:** Đối với kỹ năng này thường chỉ áp dụng cho hàm phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{d}{c}$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{a}{c}$

Ví dụ 1 (THPT Tiên Hưng, Thái Bình).

Đồ thị bên là của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



A. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$. **B.** $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. **D.** $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$.

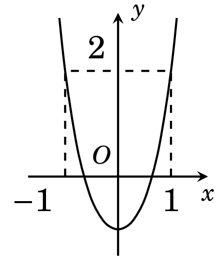
Lời giải. Chọn đáp án A

✎ Đồ thị hàm số là hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục Oy tại điểm $y_0 = 1 \Rightarrow d = y_0 = 1 \Rightarrow$ loại **C**, kết hợp với dạng chuẩn ở trên (kỹ năng nhìn dạng chuẩn) thì $a > 0 \Rightarrow$ loại **D**.

✎ Hàm số có hai cực trị nên $b^2 - 3ac > 0 \Rightarrow$ Chọn **A** vì có $b^2 - 3ac = 0^2 - 3.\frac{1}{3}.(-1) = 1 > 0$.

Ví dụ 2 (Sở GD và ĐT Đồng Tháp).

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới dây?



A. $y=-x^4-2x^2-1$. **B.** $y=x^4-2x^2-1$.

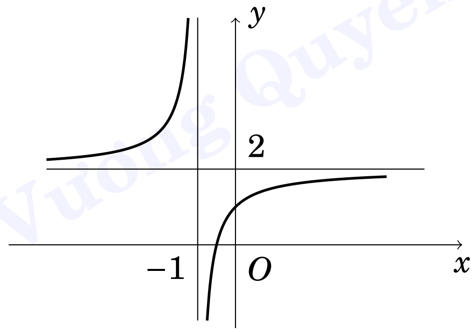
C. $y=x^4+2x^2-1$. **D.** $y=-x^4+2x^2-1$.

Lời giải. Chọn đáp án C

✎ Đồ thị hàm số đi qua điểm $\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=2 \end{cases} \Rightarrow$ Thay vào từng đáp án ta thấy chỉ đáp án **C** thỏa mãn $\Rightarrow$ Chọn **C**.

Ví dụ 3 (Sở GD và ĐT Hưng Yên).

Đồ thị trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



A. $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

C. $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{-x+1}{x-2}$.

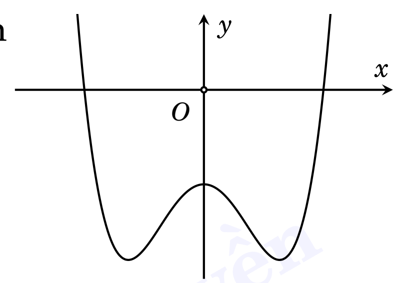
Lời giải. Chọn đáp án A

✎ Nhìn đồ thị ta thấy hàm số là hàm bậc nhất trên bậc nhất $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, đồ thị có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1=-\dfrac{d}{c}\Rightarrow$ loại đáp án **C, D**.

✎ Tương tự đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2=\dfrac{a}{c}\Rightarrow$ Chọn đáp án **A** vì đáp án **B** có tiệm cận ngang là $y=1$.

Ví dụ 4 (THPT Chuyên Biên Hòa, Hà Nam, lần 3).

Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình dưới đây. Chọn đáp án đúng.



A. $a>0,b>0,c<0$.

B. $a>0,b<0,c<0$.

C. $a<0,b>0,c<0$.

D. $a<0,b>0,c>0$.

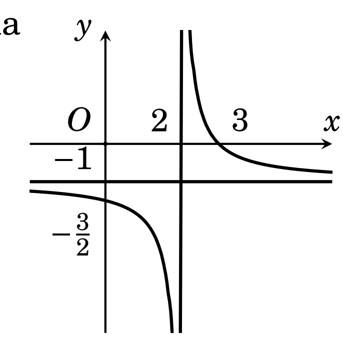
Lời giải. Chọn đáp án B

✎ Quan sát đồ thị đối chiếu với dạng chuẩn ta có đồ thị hàm số đã cho là hàm trùng phương và hệ số $a>0\Rightarrow$ loại **C, D**.

✎ Hàm số có ba cực trị nên $a.b<0$ mà $a>0\Rightarrow b<0\Rightarrow$ Chọn **B**.

Ví dụ 5 (THPT Nguyễn Huệ, Huế, lần 2).

Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính giá trị của $S=a+2b+c$.



A. $S=0$.

B. $S=-1$.

C. $S=3$.

D. $S=-2$.

Lời giải. Chọn đáp án C

✎ Vấn đề ta cần tìm a, b, c. Quan sát đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2 = -\dfrac{c}{1} \Rightarrow -c = 2 \Rightarrow c = -2$.

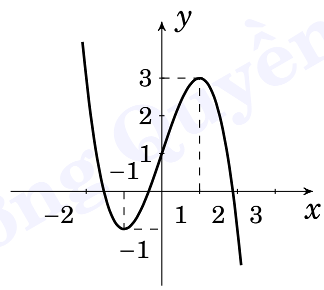
✎ Tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -1 = \dfrac{a}{1} \Rightarrow a = -1$.

✎ Đồ thị hàm số giao với trục hoành tại $x_0 = 3 \Rightarrow -\dfrac{b}{a} = 3 \Rightarrow -\dfrac{b}{-1} = 3 \Rightarrow b = 3$.

Vậy $S = a + 2b + c = -1 + 2.3 - 2 = 3$.

Ví dụ 6 (THPT Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang -Học kì II).

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

B. $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

C. $a < 0, b = 0, c > 0, d > 0$.

D. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

Lời giải. Chọn đáp án C

✎ Hàm số bậc ba có hệ số $a < 0 \Rightarrow$ loại **A, D**.

✎ Quan sát đồ thị ta thấy hàm số có điểm uốn tại $y = 1 \Rightarrow x = 0 = -\dfrac{b}{3a} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow$ Chọn **C**.

Nhận xét:

➢ Đôi khi ta cần chú ý đến dấu của hai điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sau đó sử dụng định lí vi-ét như sau Vì điểm cực đại và cực tiểu là nghiệm của phương trình $y' = 0$ hay $3ax^2 + 2bx + c = 0$ (1) nên:

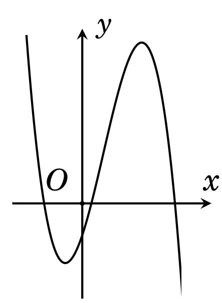
$*$) Nếu hàm số có hai điểm cực trị nằm khác phía so với trục tung Oy thì phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu $x_1.x_2 = \dfrac{c}{3a} < 0$ hay ta có điều kiện $\dfrac{c}{a} < 0$.

$*$) Nếu hàm số có hai cực trị nằm cùng phía so với trục tung Oy thì phương trình (1) có hai nghiệm cùng dấu: Nếu cùng nằm bên phải so với Oy thì phương trình (1) có hai nghiệm dương, cùng nằm bên trái so với Oy thì phương trình (1) có hai nghiệm âm.

➢ Ta cần nhớ rằng nếu điểm $M(x_0; f(x_0))$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số thì hình chiếu của M lên trục hoành sẽ là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ hay nói các khác điểm $M(x_0; f(x_0))$ là giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ với trục hoành.

Ví dụ 7 (Vương Quyền).

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?



A. $a < 0,\ b > 0,\ c < 0,\ d > 0$. **B.** $a < 0,\ b > 0,\ c < 0,\ d < 0$.

C. $a < 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d < 0$. **D.** $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d < 0$.

Lời giải. Chọn đáp án C

✎ Quan sát đồ thị đối chiếu với dạng chuẩn ta có $a < 0 \Rightarrow$ loại **D**.

✎ Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tung độ $y_0 < 0 \Rightarrow d < 0 \Rightarrow$ loại **A**.

✎ Đồ thị hàm số có hai cực trị trái dấu nhau nên theo nhận xét trên thì $\frac{c}{a} < 0$ mà hệ số $a < 0 \Rightarrow c > 0$.

✎ Đồ thị hàm số có điểm uốn tại $x_0 > 0 \Rightarrow -\frac{b}{3a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{3a} < 0$ mà $a < 0 \Rightarrow b > 0 \Rightarrow$ chọn **C**.

III. Một số đồ thị có được từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$

1. Đồ thị hàm $y = f(|x|)$

Phương Pháp Giải

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x|)$.

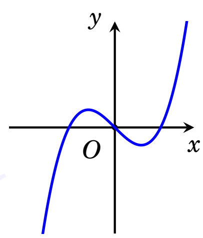
Bước 1: Xác định phần bên phải trục tung rồi giữ nguyên phần đó và bỏ phần bên trái trục tung.

Bước 2: Lấy đối xứng phần bên phải ở trên qua trục tung khi đó phần bên phải đã xác định và phần bên trái vừa lấy đối xứng là của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$.

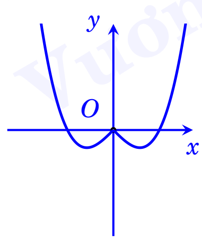
Notes

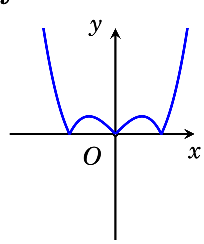
Cơ sở của các phương pháp là dựa vào tính chất $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $|x| = \begin{cases} x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$

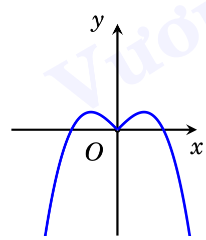
Ví dụ 1 (Vương Quyền). Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ

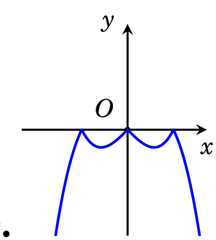


Trong các hình vẽ dưới đây hình nào là của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$?

A. 

. **B.** 

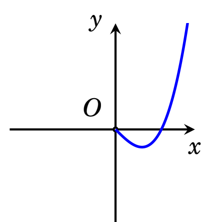
. **C.** 

. **D.** 

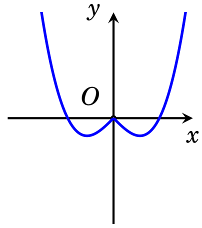
.

Lời giải. Chọn đáp án A

✎ Ta giữ nguyên phần bên phải trục tung Oy như sau:



✎ Lấy đối xứng phần này qua trục tung ta được đồ thị của hàm số $y = f(|x|)$ là:



2. Đồ thị hàm $y = |f(x)|$

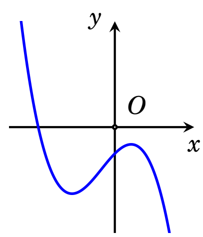
Phương Pháp Giải

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$

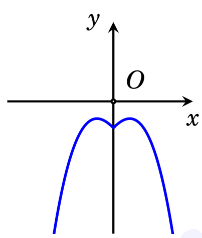
Bước 1: Xác định phần phía trên trục hoành của đồ thị hàm $y = f(x)$.

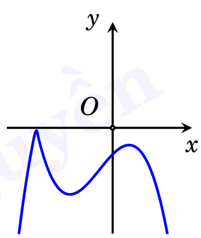
Bước 2: Lấy đối xứng hết phần dưới trục hoành của đồ thị hàm $y = f(x)$ qua trục hoành khi đó đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ là tất cả phần phía trên đã xác định ở bước một và phần vừa đối xứng lên trục hoành.

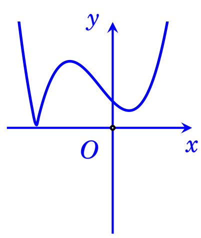
Ví dụ 1 (Vương Quyền). Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ

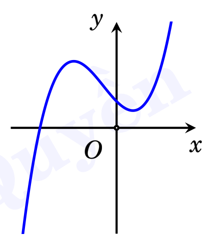


Trong các hình vẽ dưới đây hình nào là của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$?

A. 

. **B.** 

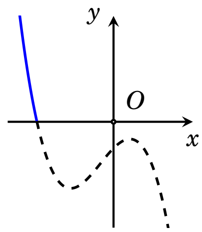
. **C.** 

. **D.** 

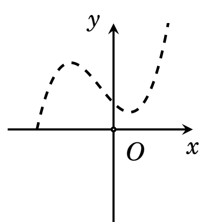
.

Lời giải. Chọn đáp án C

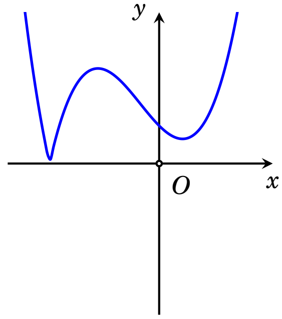
✎ Ta xác định phần trên trục hoành (phần màu xanh) như hình bên:



✎ Lấy đối xứng phần biên dưới (phần màu đen) trục Ox lên phía trên trục Ox ta được



✎ Kết hợp hai phần trên ta được đồ thị của hàm số $y=|f(x)|$ là



3. Đồ thị hàm số $y=|f(|x|)|$

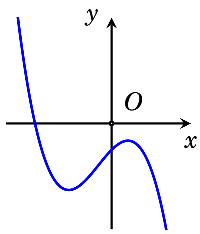
Phương Pháp Giải

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ suy ra đồ thị của hàm số $y=|f(|x|)|$

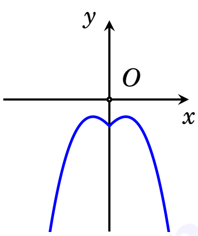
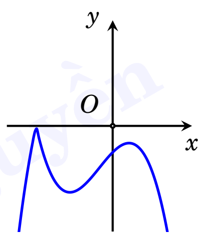
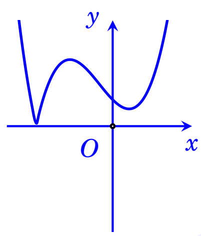
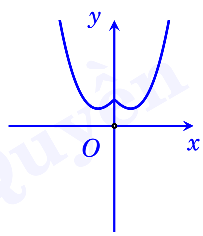
Bước 1: Ta xác định đồ thị của hàm số $y=f(|x|)$ theo các bước đã được nhắc đến ở trên.

Bước 2: Từ đồ thị hàm $y=f(|x|)$ vừa xác định ta tiếp tục lấy đối xứng phần bên dưới qua trục Ox để được đồ thị hàm $y=|f(|x|)|$.

Ví dụ 1 (Vương Quyền). Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ

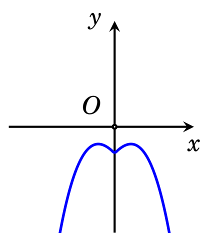


Trong các hình vẽ dưới đây, hình nào là của đồ thị hàm số $y=|f(|x|)|$?

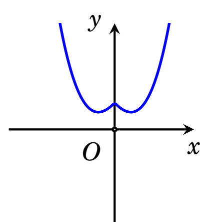
A.  . **B.**  . **C.**  . **D.**  .

Lời giải. Chọn đáp án D

Bước 1: Xác định hàm $y=f(|x|)$ bằng cách bỏ phần bên trái trục Oy rồi lấy đối xứng phần bên phải sang ta được:



Bước 2: Từ đồ thị trên xác định đồ thị hàm số $y=|f(|x|)|$ bằng cách giữ nguyên phần trên trục Ox và lấy đối xứng phần dưới lên ta được:



4. Đồ thị hàm $|y| = f(x)$

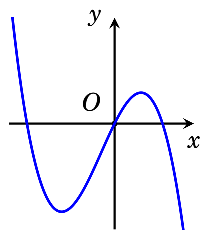
Phương Pháp Giải

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị của hàm số $|y| = f(x)$

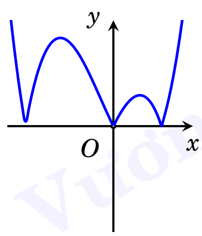
Bước 1: Xác định phần phía trên trục hoành của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và bỏ phần phía dưới trục hoành của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

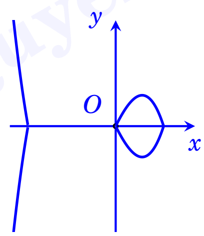
Bước 2: Lấy đối xứng phần vừa xác định (phía trên trục hoành) qua trục hoành khi đó cả hai phần phía trên và phía dưới trục hoành là của đồ thị hàm số $|y| = f(x)$.

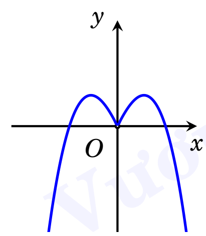
Ví dụ 1 (Vương Quyền). Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ

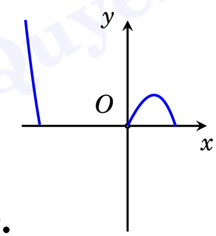


Trong các hình vẽ dưới đây, hình nào là của đồ thị hàm số $|y| = f(x)$?

A.  .

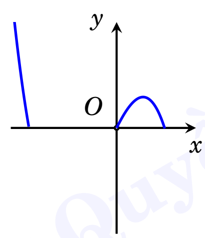
B.  .

C.  .

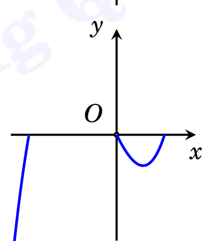
D.  .

Lời giải. Chọn đáp án B

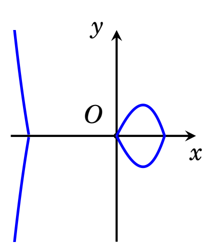
Bước 1: Ta xác định phần phía trên trục hoành của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được:



Bước 2: Lấy đối xứng phần đã xác định ở trên qua trục Ox ta được:



$\Rightarrow$ Đồ thị của hàm số $|y| = f(x)$ chính là hai phần trên



5. Một số dạng đồ thị khác

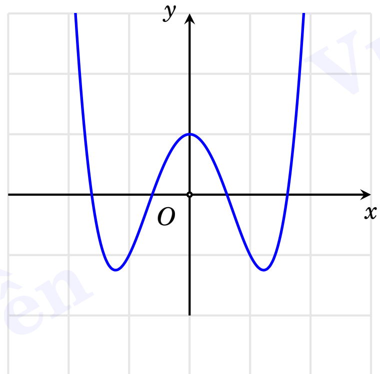
Phương Pháp Giải

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = f(x) + a$ ta thực hiện phép tịnh tiến:

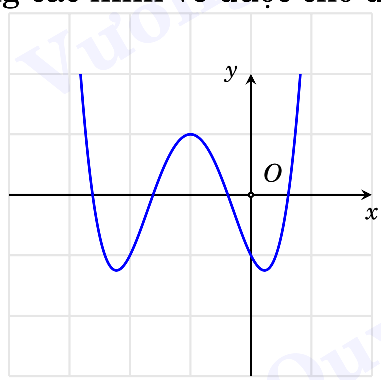
☑ Nếu $a \geq 0$ thì ta tịnh tiến đồ thị $y = f(x)$ về phía bên trên trục hoành a đơn vị.

☑ Nếu $a < 0$ thì ta tịnh tiến đồ thị $y = f(x)$ về phía bên dưới trục hoành a đơn vị.

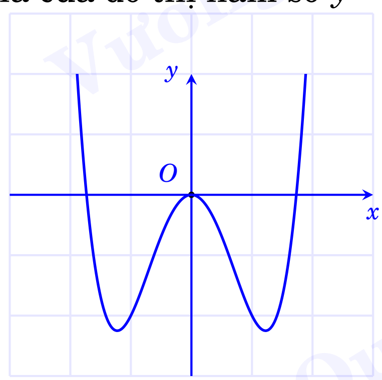
Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



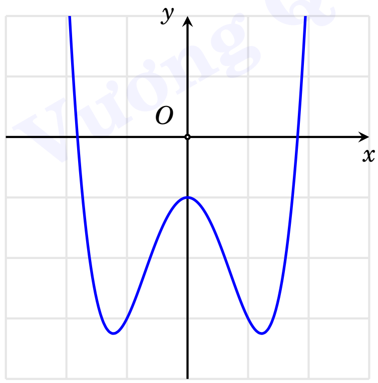
Trong các hình vẽ được cho dưới đây, hình nào là của đồ thị hàm số $y = f(x) - 1$

A. 

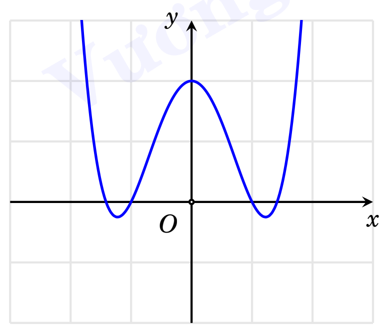
.

B. 

.

C. 

.

D. 

.

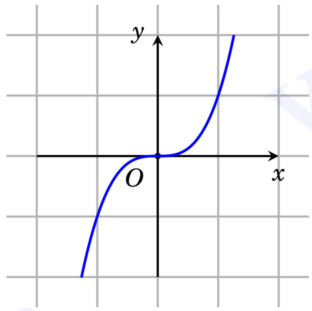
Lời giải. Chọn đáp án B

✎ Vì số $a = -1 < 0 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = f(x) - 1$ thu được từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng cách tịnh tiến xuống dưới trục hoành 1 đơn vị ta được đồ thị là đáp án **B**.

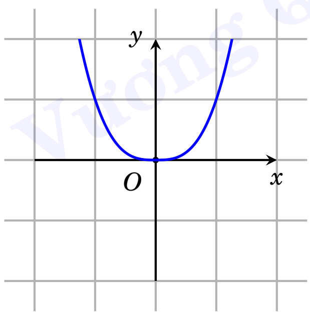
✎ Ta có thể lập luận đơn giản như sau ta thấy rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $(0,1) \Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow f(0) - 1 = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm $y = f(x) - 1$ có điểm $(0,1)$ sẽ bị tịnh tiến xuống thành điểm $(0,0) \Rightarrow$ đồ thị đáp án **B**.

> **Nhận xét:** Như vậy ở dạng này từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có thể tự suy ra được các đồ thị tương ứng bằng cách lấy một điểm thuộc đồ thị rồi thực hiện phép toán như cách số hai ở ví dụ trên theo đề bài cho, biến đổi theo tính chất giá trị tuyệt đối rồi thực hiện phép toán theo đề bài ra. Ta xét như ví dụ sau

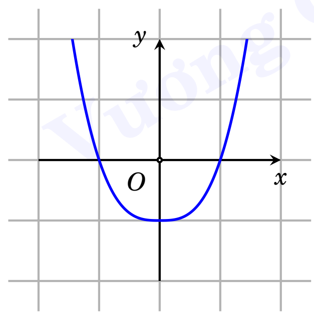
Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



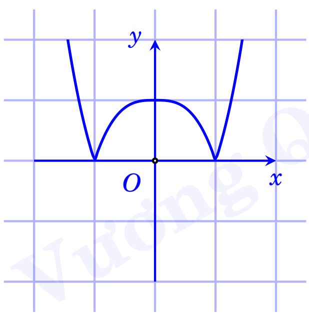
Trong các hình dưới đây, hình nào là của đồ thị hàm số $y = ||f(x)| - 1|$?

A. 

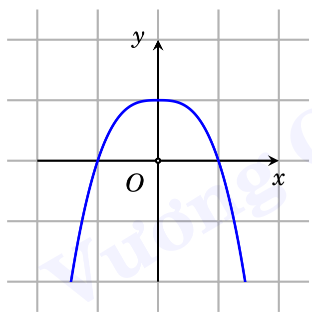
.

B. 

.

C. 

.

D. 

.

Lời giải. Chọn đáp án C

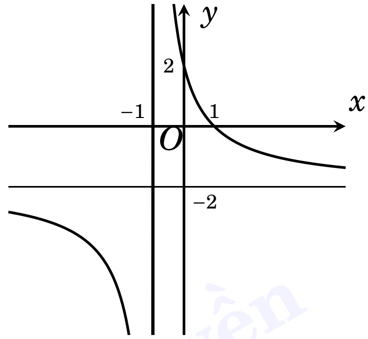
✎ Cơ sở của cách tìm hàm $y = ||f(x)| - 1|$ là tính chất của hàm trị tuyệt đối như sau:

$$y = ||f(x)| - 1| = \begin{cases} |f(x)| - 1 \text{ nếu } |f(x)| \geq 1 \\ -(|f(x)| - 1) \text{ nếu } |f(x)| < 1 \end{cases} = \begin{cases} |f(x)| - 1 \text{ nếu } f(x) \geq 1 \text{ hoặc } f(x) \leq -1 \\ -(|f(x)| - 1) \text{ nếu } -1 < f(x) < 1 \end{cases}$$

Do đó ta lần lượt xác định hai hàm số $y = |f(x)| - 1$ với $f(x) \geq 1$ hoặc $f(x) \leq -1$ và hàm số $y = -(|f(x)| - 1) = -|f(x)| + 1$ với $-1 < f(x) < 1$.

IV. Bài tập tự luyện

Câu 1 (Chuyên Lê Quý Đôn - Vũng Tàu). Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị như hình vẽ dưới đây?



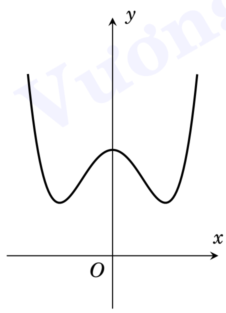
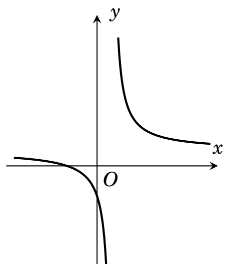
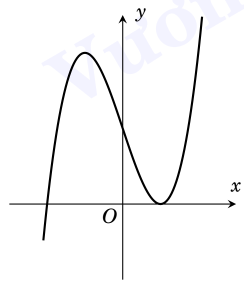
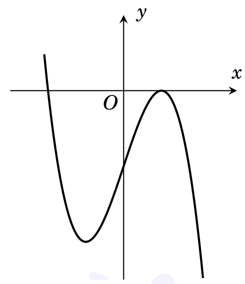
A. $y = \dfrac{-x+2}{x+2}$.

B. $y = \dfrac{2x-2}{x+1}$.

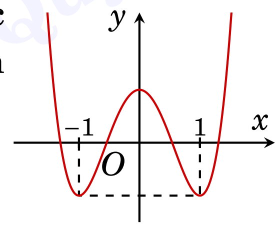
C. $y = \dfrac{-2x+2}{x+1}$.

D. $y = \dfrac{x-2}{x+1}$.

Câu 2 (THPT Sông Ray, Đồng Nai). Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có dạng nào sau đây?

A.  . **B.**  . **C.**  . **D.**  .

Câu 3 (Để TTTHPT QG- Sở Cần Thơ- Mã 329).
Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



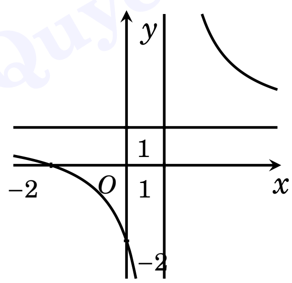
A. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

B. $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$.

C. $y = x^4 - 4x^2 + 1$.

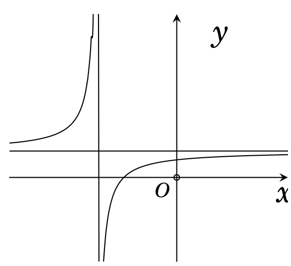
D. $y = 2x^4 - 2x^2 + 1$.

Câu 4 (THPT Chu Văn An, Đắk Nông).
Đồ thị trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án **A, B, C, D** dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. **B.** $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. **C.** $y = \dfrac{x+2}{x-1}$. **D.** $y = \dfrac{x+2}{1-x}$.

Câu 5 (THPT Kim Liên, Hà Nội, lần 3).
Cho hàm số $y = \dfrac{ax+1}{x-b}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

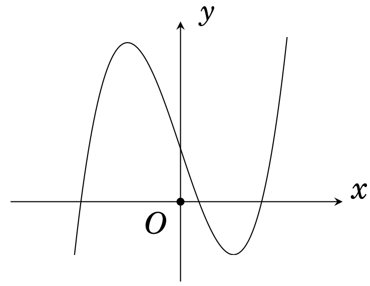


A. $a > 0 > b$. **B.** $a > b > 0$.

C. $a < b < 0$. **D.** $a < 0 < b$.

Câu 6 (THPT Phù Cừ - Hưng Yên, lần 1).

Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. $a>0, c<0, d>0$.

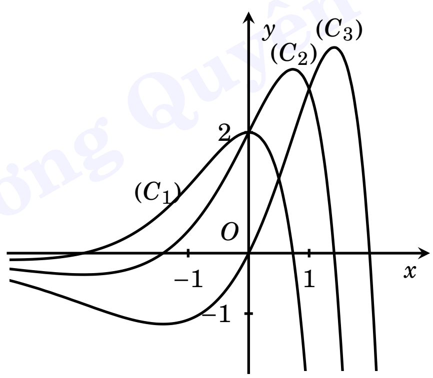
B. $a>0, c>0, d>0$.

C. $a<0, c<0, d>0$.

D. $a>0, c<0, d<0$.

Câu 7 (Sở GDDT Phú Thọ, Lần 1).

Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được mô tả bằng hình vẽ bên. Hỏi đồ thị của các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

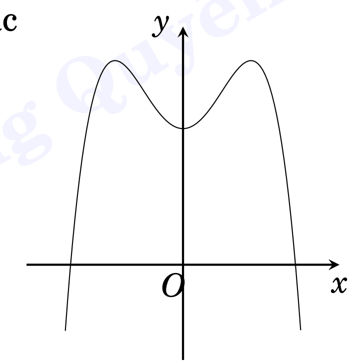


A. (C_3); (C_2); (C_1). **B.** (C_2); (C_1); (C_3).

C. (C_2); (C_3); (C_1). **D.** (C_1); (C_3); (C_2).

Câu 8 (Sở GD và ĐT TP HCM, Cụm V).

Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình bên. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?



A. $a<0, b<0, c>0$.

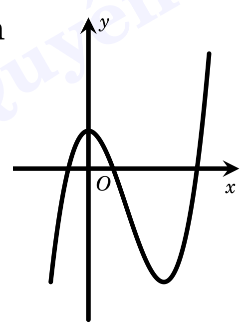
B. $a>0, b>0, c>0$.

C. $a>0, b<0, c>0$.

D. $a<0, b>0, c>0$.

Câu 9 (Sở GD và ĐT TP HCM, Cụm VIII).

Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$ có đồ thị sau. Khi đó, khẳng định nào sau đây là đúng?



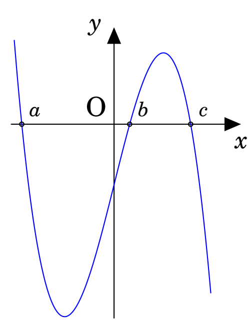
A. $a>0, b>0, c=0, d>0$.

B. $a>0, b<0, c>0, d>0$.

C. $a>0, b>0, c>0, d>0$.

D. $a>0, b<0, c=0, d>0$.

Câu 10 (THPT Chuyên Lào Cai, lần 2). Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y'=f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

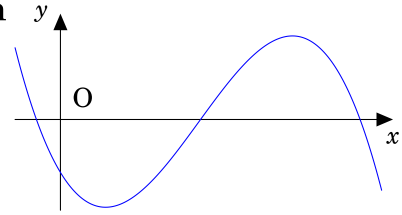


A. $(f(b)-f(a))(f(b)-f(c))<0$. **B.** $f(c)>f(b)>f(a)$.

C. $f(c)+f(a)-2f(b)>0$. **D.** $f(a)>f(b)>f(c)$.

Câu 11 (THPT Chuyên Lào Cai, lần 2).

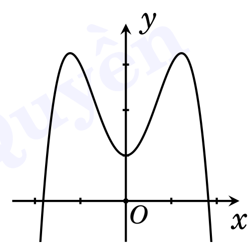
Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Dấu của $a;b;c;d$ là



A. $a < 0; b < 0; c > 0; d < 0$. **B.** $a < 0; b < 0; c < 0; d < 0$.

C. $a < 0; b > 0; c < 0; d < 0$. **D.** $a > 0; b > 0; c > 0; d < 0$.

Câu 12 (THPT Lê Viết Thuật, Nghệ An, lần 2). Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



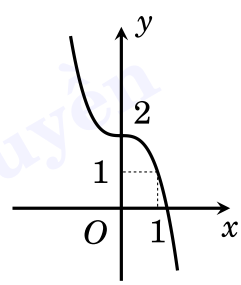
A. $a < 0, b > 0, c > 0$.

B. $a > 0, b < 0, c > 0$.

C. $a < 0, b < 0, c > 0$.

D. $a > 0, b < 0, c > 0$.

Câu 13 (THPT Đông Hà-Quảng Trị-lần 2). Đồ thị ở hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số được liệt kê ở các đáp án **A, B, C, D**?



A. $y = -x^3 - x + 2$.

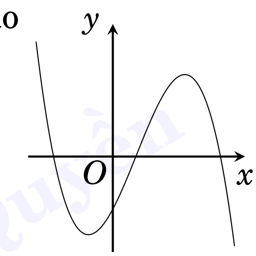
B. $y = -x^3 + 1$.

C. $y = -x^3 + 3x + 2$.

D. $y = -x^3 + 2$.

Câu 14 (THPT Trần Hưng Đạo, Nam Định).

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?



A. $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

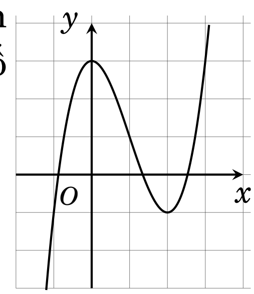
B. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

C. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

D. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

Câu 15 (Sở GD và ĐT Cần Thơ, mã đề 324).

Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở các phương án **A, B, C, D**. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

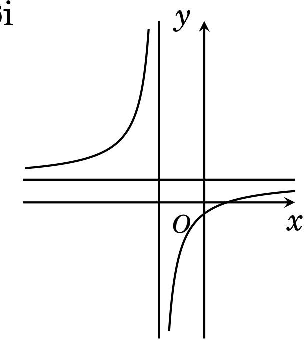


A. $y = x^3 - 3x^2 - 3$. **B.** $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$.

C. $y = -x^2 + 3x + 3$. **D.** $y = x^3 - 3x^2 + 3$.

Câu 16 (Sở GD và ĐT Cần Thơ, mã đề 324).

Cho hàm số $y=\dfrac{x+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây đúng?



A. $b<0, c>0, d<0$.

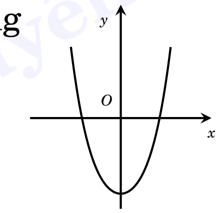
B. $b>0, c>0, d>0$.

C. $b<0, c<0, d>0$.

D. $b<0, c>0, d>0$.

Câu 17 (THPT Chuyên Hà Tĩnh, lần 2).

Đường cong như trong hình vẽ bên có thể là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số cho dưới đây?



A. $y=-x^2-1$.

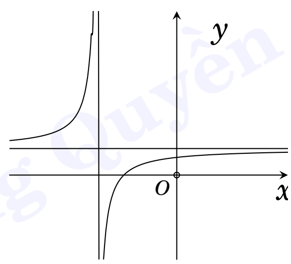
B. $y=\dfrac{1}{2}x^4+x^2-1$.

C. $y=x^4-x^2-1$.

D. $y=x^3+x^2-1$.

Câu 18 (THPT Kim Liên, Hà Nội, lần 3).

Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{x-b}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

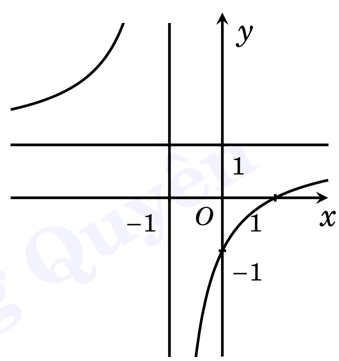


A. $a>0>b$. **B.** $a>b>0$.

C. $a<b<0$. **D.** $a<0<b$.

Câu 19 (THPT Minh Khai, Hà Nội).

Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị như hình bên?



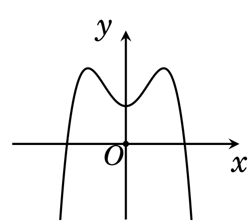
A. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

B. $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

C. $y=\dfrac{2x+1}{2x-1}$.

D. $y=\dfrac{2x-1}{2x+1}$.

Câu 20 (THPT Bắc Duyên Hà, Thái Bình, lần 2). Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



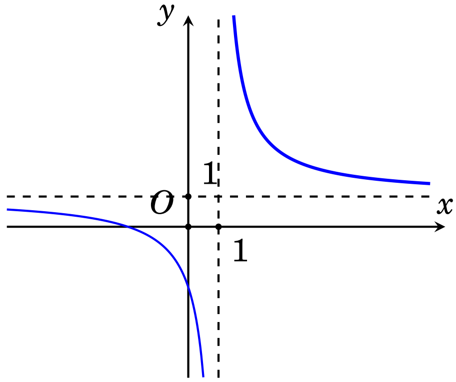
A. $y=x^4+2x^2+1$.

B. $y=x^4-2x^2+1$.

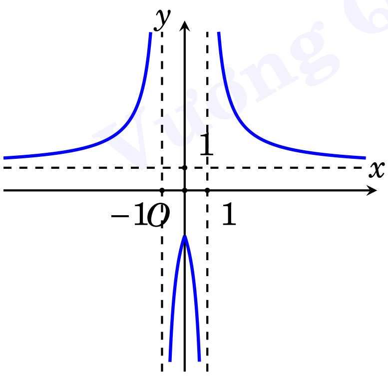
C. $y=-x^4+2x^2+1$.

D. $y=-x^4-2x^2+1$.

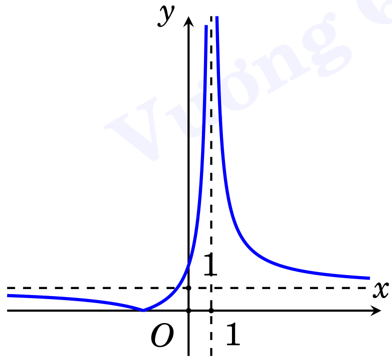
Câu 21 (Trường THPT Tân Yên - Bắc Giang). Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ.



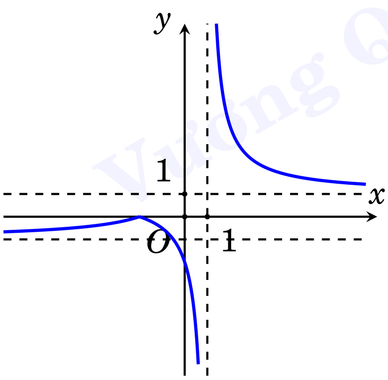
Hình vẽ nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{|x|+2}{|x|-1}$?



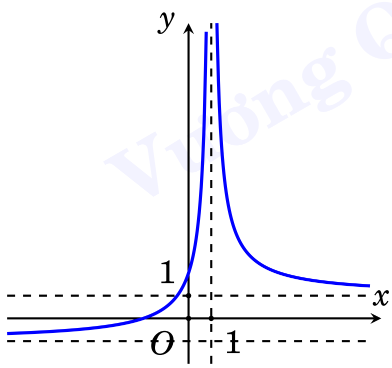
Hình 1



Hình 2



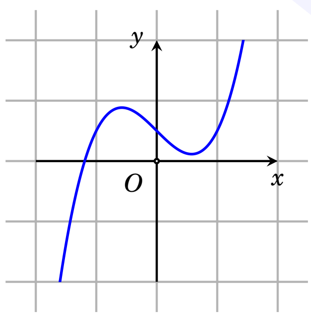
Hình 3



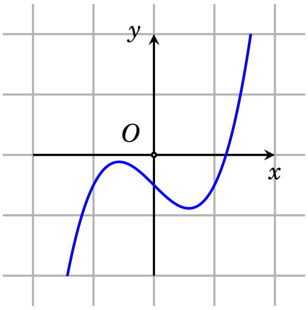
Hình 4

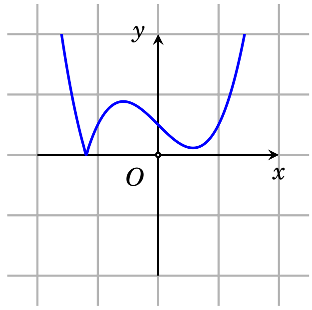
A. Hình 4. **B.** Hình 3. **C.** Hình 2. **D.** Hình 1.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây

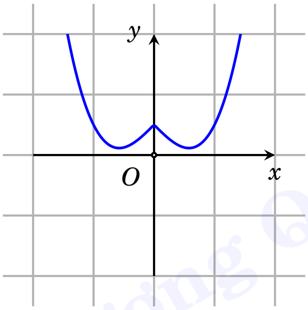


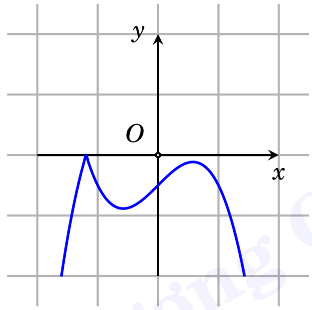
Trong các hình vẽ dưới đây, hình nào là của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$?

A. 

. **B.** 

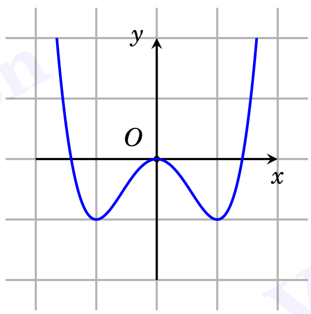
.

C. 

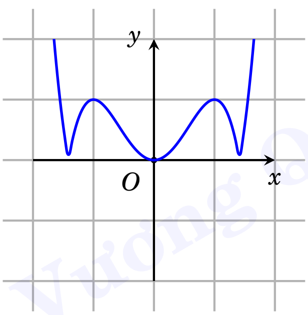
. **D.** 

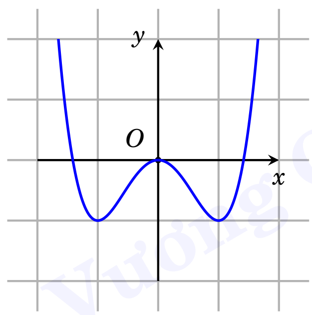
.

Câu 23. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị như hình vẽ

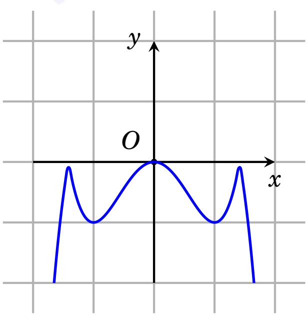


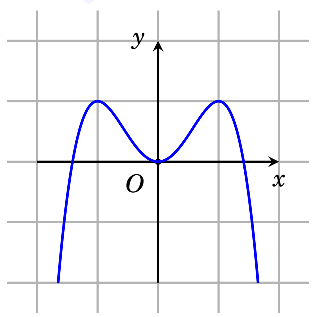
Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = |x^4 - 2x^2|$?

A. 

. **B.** 

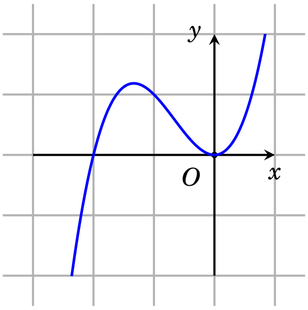
.

C. 

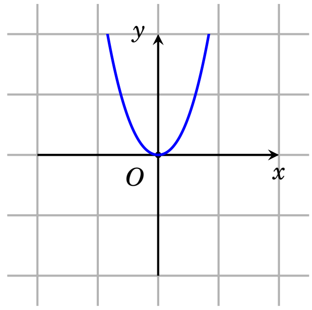
. **D.** 

.

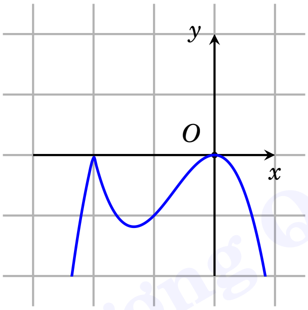
Câu 24. Đồ thị nào dưới đây là của hàm số $y = |x|^3 + 2x^2$?

A. 

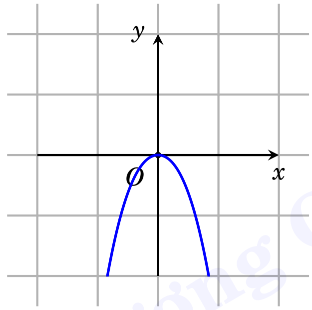
.

B. 

.

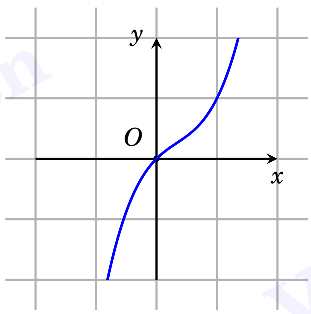
C. 

.

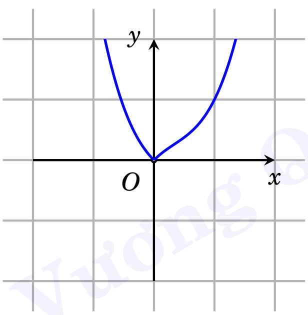
D. 

.

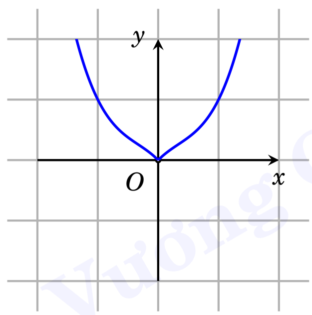
Câu 25. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



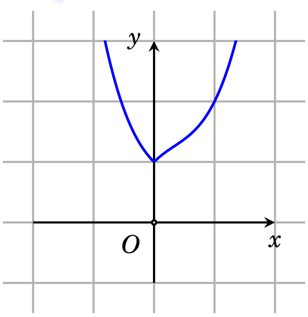
Trong các hình vẽ dưới đây, hình nào biểu diễn đồ thị hàm số $y = |f(x)| + 1$?

A. 

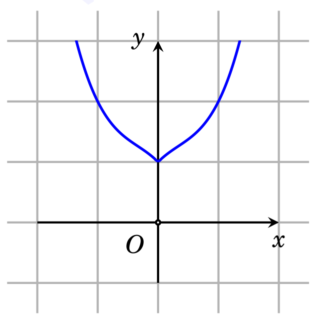
.

B. 

.

C. 

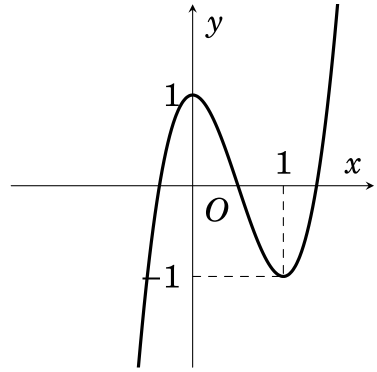
.

D. 

.

Câu 26 (Sở GD và ĐT TP.HCM,CUM I).

Biết rằng hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phát biểu nào sau đây là phát biểu đúng?



A. Đồ thị hàm số $y = \left|4x^3 - 6x^2 + 1\right|$ có 3 cực trị.

B. Đồ thị hàm số $y = \left|4x^3 - 6x^2 + 1\right|$ có 2 cực trị.

C. Đồ thị hàm số $y = \left|4x^3 - 6x^2 + 1\right|$ có 5 cực trị.

D. Đồ thị hàm số $y = \left|4x^3 - 6x^2 + 1\right|$ có 1 cực trị.

ĐÁP ÁN

1 C	**4** C	**7** A	**10** C	**13** D	**16** D	**19** A	**22** C	**25** C
2 C	**5** A	**8** D	**11** C	**14** C	**17** B	**20** C	**23** A	
3 B	**6** A	**9** D	**12** A	**15** D	**18** A	**21** D	**24** B	**26** C