Chủ đề 1: CHỨNG MINH TỨ GIÁC NỘI TIẾP

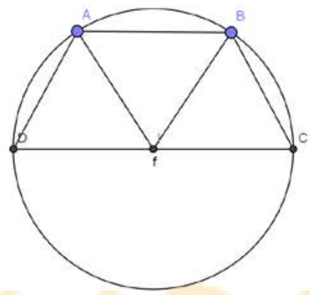
Tứ giác nội tiếp đường tròn là tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn. Đường tròn đó được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

I. Phương pháp 1 chứng minh: Chứng minh bốn đỉnh của tứ giác cùng cách đều một điểm.

CÁC VÍ DỤ.

Mức độ 1:

Bài 1: Cho hình thang $ABCD$ $(AB//CD,\ AB<CD)$ có $\widehat{C}=\widehat{D}=60^0$, $CD=2AD$. Chứng minh bốn điểm A,B,C,D cùng thuộc một đường tròn.



Hướng dẫn giải

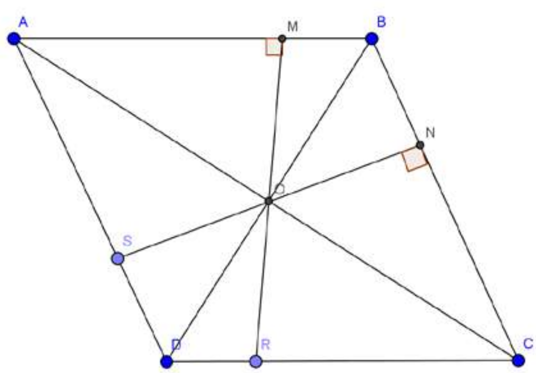
Gọi I là trung điểm CD, ta có $\begin{cases} IC=AB \\ IC//AB \end{cases} \Rightarrow ICBA$ là hình hành $\Rightarrow BC=AI$ (1)

Tương tự $AD=BI$ (2)

$ABCD$ là hình thang có $\widehat{C}=\widehat{D}=60^0$ nên $ABCD$ là hình thang cân(3); mà

Từ (1), (2), (3) ta có hai tam giác $ICB; IAD$ đều hay $IA=IB=IC=ID$ hay bốn điểm A,B,C,D cùng thuộc một đường tròn.

Bài 2: Cho hình thoi $ABCD$. Gọi O là giao điểm hai đường chéo. $M,N,$ R và S lần lượt là hình chiếu của O trên $AB,$ $BC,$ CD và DA. Chứng minh bốn điểm M, N, R và S cùng thuộc một đường tròn.

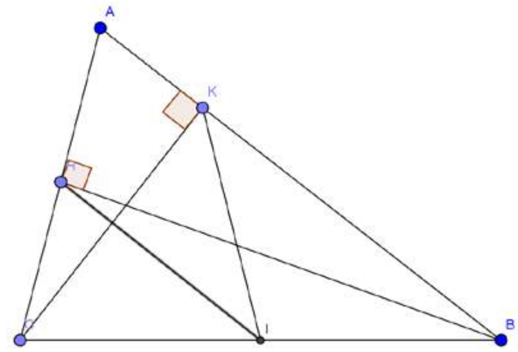


Hướng dẫn giải

Do $ABCD$ là hình thoi nên O là trung điểm của AC,BD; AC,BD là phân giác góc A,B,C,D nên $\Delta MAO=\Delta SAO=\Delta NCO=\Delta PDO\Rightarrow OM=ON=OP=OS$ hay bốn điểm M, N, R và S cùng thuộc một đường tròn.

Bài 3: Cho tam giác ABC có các đường cao BH và CK.

Chứng minh $B,\ K,\ H,\ C$ cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm đường tròn đó.



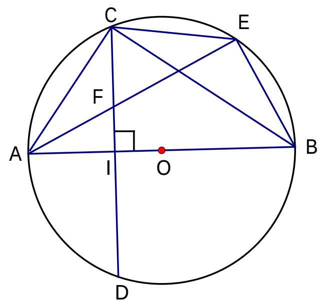
Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm CB, do $\Delta CHB;\Delta CKB$ vuông tại H,K nên $IC=IB=IK=IH$ hay $B,\ K,\ H,\ C$ cùng nằm trên một đường tròn tâm I.

Mức độ 2:

Bài 1:Cho đường tròn O đường kính AB. Vẽ dây cung CD vuông góc với AB tại I (I nằm giữa A và O). Lấy điểm E trên cung nhỏ BC (E khác B và C), AE cắt CD tại F. Chứng minh: $BEFI$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

Hướng dẫn giải



Tứ giác $BEFI$ có: $\widehat{\mathrm{BIF}}=90^0$ (gt)

$\widehat{\mathrm{BEF}}=\widehat{\mathrm{BEA}}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra tứ giác $BEFI$ nội tiếp đường tròn đường kính BF

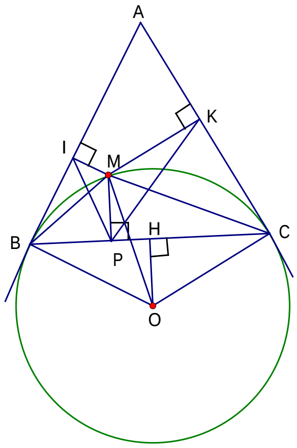
Bài 2:

Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O;R) ta vẽ hai tiếp tuyến $AB,\ AC$ với đường tròn (B, C là tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M, vẽ $MI\perp AB$, $MK\perp AC$, $\mathrm{MI}\perp\mathrm{AB}$, $\mathrm{MK}\perp\mathrm{AC}$ $\left(I\in AB,K\in AC\right)$

a) Chứng minh: $AIMK$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b)Vẽ $MP \perp BC$ $(P \in BC)$. Chứng minh: $CPMK$ là tứ giác nội tiếp.

Hướng dẫn giải



a) Ta có: $\widehat{AIM} = \widehat{AKM} = 90^0$ (gt), suy ra tứ giác AIMK nội tiếp đường tròn đường kính AM.

b) Tứ giác CPMK có $\widehat{MPC} = \widehat{MKC} = 90^0$ (gt). Do đó CPMK là tứ giác nội tiếp

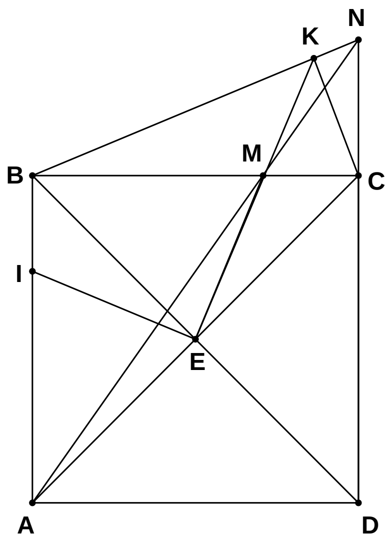
Bài 3: Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại E. Lấy I thuộc cạnh AB, M thuộc cạnh BC sao cho: $\widehat{IEM} = 90^0$ (I và M không trùng với các đỉnh của hình vuông).

a) Chứng minh rằng $BIEM$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Tính số đo của góc $\widehat{IME}$

c) Gọi N là giao điểm của tia AM và tia DC; K là giao điểm của BN và tia EM. Chứng min $BKCE$ là tứ giác nội tiếp.

Hướng dẫn giải



a)Tứ giác $BIEM$: $\widehat{IBM} = \widehat{IEM} = 90^0$ (gt);hay tứ giác $BIEM$ nội tiếp đường tròn đường kính IM.

b) Tứ giác $BIEM$ nội tiếp suy ra: $\widehat{IME} = \widehat{IBE} = 45^0$ (do $ABCD$ là hình vuông).

c) ΔEBI và ΔECM có $BE = CE$, $\widehat{BEI} = \widehat{CEM}$ (do $\widehat{IEM} = \widehat{BEC} = 90^0$)

$\Rightarrow$ $\Delta EBI = \Delta ECM$ (g-c-g) $\Rightarrow MC = IB \Rightarrow MB = IA$

Vì $CN // BA$ nên theo định lí Thalet, ta có: $\frac{MA}{MN}=\frac{MB}{MC}=\frac{IA}{IB}$. Suy ra IM song song với BN

(định lí Thalet đảo)

$\Rightarrow \widehat{BKE}=\widehat{IME}=45^0$ (2). Lại có $\widehat{BCE}=45^0$ (do $ABCD$ là hình vuông).

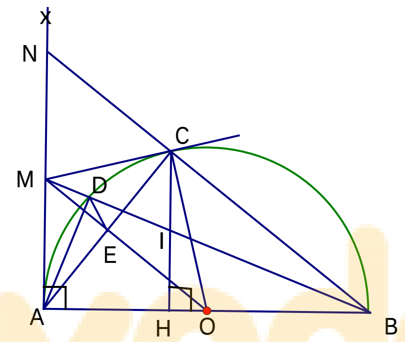
Suy ra $\widehat{BKE}=\widehat{BCE}\Rightarrow BKCE$ là tứ giác nội tiếp.

Mức độ 3:

Bài 1: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$ và tia tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đối với AB. Từ điểm M trên Ax kẻ tiếp tuyến thứ hai MC với nửa đường tròn (C là tiếp điểm). AC cắt OM tại E; MB cắt nửa đường tròn (O) tại D (D khác B).

Chứng minh: $AMCO$ và $AMDE$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

Hướng dẫn giải



Vì MA, MC là tiếp tuyến nên: $\widehat{MAO}=\widehat{MCO}=90^0 \Rightarrow AMCO$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MO.

$\widehat{ADB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{ADM}=90^0$ (1)

Lại có: $OA=OC=R$; $MA=MC$ (tính chất tiếp tuyến). Suy ra OM là đường trung trực của AC

$\Rightarrow \widehat{AEM}=90^0$ (2).

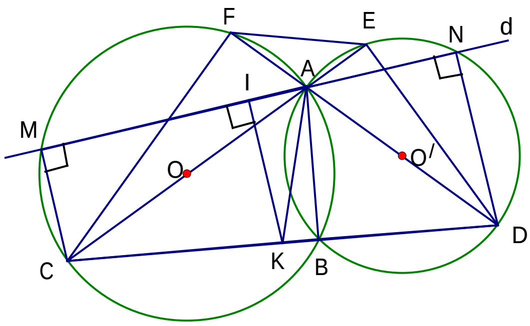
Từ (1) và (2) suy ra $AMDE$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MA.

Bài 2: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ AC, AD thứ tự là đường kính của hai đường tròn (O) và (O').

a) Chứng minh ba điểm C, B, D thẳng hàng.

b) Đường thẳng AC cắt đường tròn (O') tại E; đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại F (E, F khác A). Chứng minh bốn điểm C, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

Hướng dẫn giải



a) $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ABD}$ lần lượt là các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O) và (O') $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ABD} = 90^0$

Suy ra C, B, D thẳng hàng.

b) Xét tứ giác $CDEF$ có:

$\widehat{CFD} = \widehat{CFA} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\widehat{CED} = \widehat{AED} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $(O^/)$)

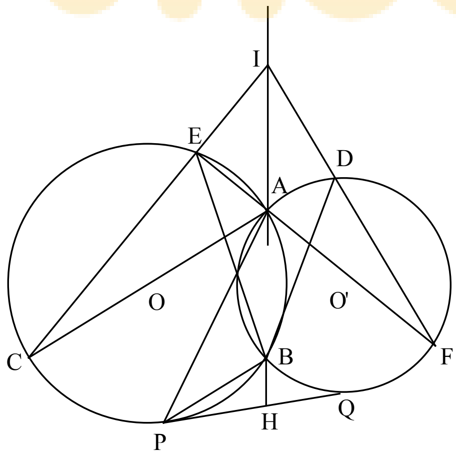
$\Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{CED} = 90^0$ suy ra $CDEF$ là tứ giác nội tiếp.

Bài 3: Cho 2 đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B phân biệt. Đường thẳng OA cắt (O), (O') lần lượt tại điểm thứ hai C và D. Đường thẳng $O'A$ cắt (O), (O') lần lượt tại điểm thứ hai E E, F.

1. Chứng minh 3 đường thẳng AB, CE và DF đồng quy tại một điểm I.

2. Chứng minh tứ giác $BEIF$ nội tiếp được trong một đường tròn.

Hướng dẫn giải:



Ta có: $\widehat{ABC} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{ABF} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên B, C, F thẳng hàng. AB, CE và DF là 3 đường cao của tam giác ACF nên chúng đồng quy.

2. Do $\widehat{IEF} = \widehat{IBF} = 90^0$ suy ra $BEIF$ nội tiếp đường tròn.

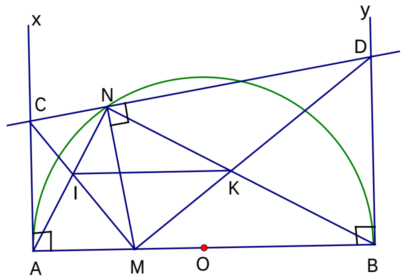
Mức độ 4:

Bài 1: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Lấy điểm M thuộc đoạn thẳng OA, điểm N thuộc nửa đường tròn (O). Từ A và B vẽ các tiếp tuyến Ax và By. Đường thẳng qua V và vuông góc với NM cắt Ax, By thứ tự tại C và D.

a) Chứng minh $ACNM$ và $BDNM$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh ΔANB đồng dạng với ΔCMD từ đó suy ra $IMKN$ là tứ giác nội tiếp.

Hướng dẫn giải



a)Ta có tứ giác $ACNM$ có: $\widehat{MNC}=90^0$ (gt) $\widehat{MAC}=90^0$ (tínhchất tiếp tuyến).

$\Rightarrow ACNM$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MC. Tương tự tứ giác $BDNM$ nội tiếp đường tròn đường kính. MD

b) ΔANB và ΔCMD có:

$\widehat{ABN}=\widehat{CDM}$ (do tứ giác $BDNM$ nội tiếp)

$\widehat{BAN}=\widehat{DCM}$ (do tứ giác $ACNM$ nội tiếp) nên $\Delta ANB\sim\Delta CMD$ (g.g)

c) $\Delta ANB\sim\Delta CMD\Rightarrow\widehat{CMD}=\widehat{ANB}=90^o$ (do $\widehat{ANB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Suy ra $\widehat{IMK}=\widehat{INK}=90^0\Rightarrow$ $IMKN$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính IK

BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Mức độ 1:

Bài 1. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của B trên các đường thẳng AC, AD. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, M, N cùng nằm trên đường tròn

HD: Chứng minh bốn điểm A, B, M, N cùng nằm trên đường tròn đường kính AB

Bài 2. Cho tam giác ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

Chứng minh rằng bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên một đường tròn (gọi tâm của nó là O).

HD Chứng minh bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên đường tròn đường kính AB

Bài 3. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn $(O;R)$. Các đường cao BE và CF cắt nhau tại H.

Chứng minh: $AEHF$ và $BCEF$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn

Hướng dẫn giải:

Tứ giác $AEHF$ có: $\widehat{AEH}=\widehat{AFH}=90^0$ (gt). Suy ra $AEHF$ là tứ giác nội tiếp.

- Tứ giác $BCEF$ có: $\widehat{BEC}=\widehat{BFC}=90^0$ (gt). Suy ra $BCEF$ là tứ giác nội tiếp.

II. ***Phương pháp 2 chứng minh*** **“**Chứng minh tứ giác có hai góc đối diện bù nhau (tổng hai góc đối diện bằng 180^0).

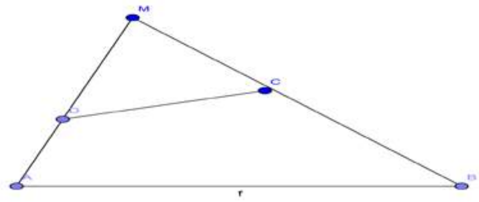
Mức độ 1:

Hình chữ nhật; Hình thang cân; Hình bình hành. Hình nào nội tiếp được trong đường tròn? Chứng minh.

Hướng dẫn giải

Ta có hình chữ nhật và hình thang cân đều có tổng hai góc đối diện bù nhau nên chúng nội tiếp trong một đường tròn.

Bài 1: Cho tứ giác $ABCD$ sao cho: AD cắt BC tại M và $MA.MD = MB.MC$. Chứng minh tứ giác $ABCD$ nội tiếp được.



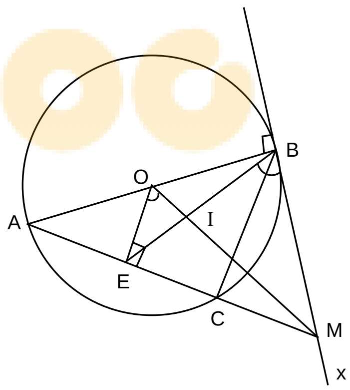
Hướng dẫn giải

Xét hai tam giác MAB, MCD

Có $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$ và $MA.MD = MB.MC \Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{MC}{MD}$ hay $\Delta MAB \sim \Delta MCD$ hay $\widehat{MCD} = \widehat{MAB} \Rightarrow \widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180^\circ$ hay tứ giác $ABCD$ nội tiếp được.

Cho đường tròn $(O;R)$,đường kính AB. Dây $BC = R$. Từ B kẻ tiếp tuyến Bx với đường tròn. Tia AC cắt Bx tại M. Gọi E là trung điểm của AC.

Chứng minh tứ giác $OBME$ nội tiếp đường tròn.



Hướng dẫn giải

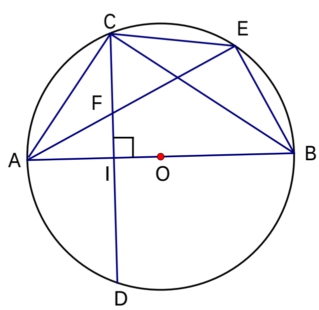
Ta có E là trung điểm của $AC \Rightarrow OE \perp AC$

Mà $Bx \perp AB$ $\widehat{ABx}$ 90° nên tứ giác $OBME$ nội tiếp.

Mức độ 2:

Bài 1: Cho đường tròn O đường kính AB. Vẽ dây cung CD vuông góc với AB tại I (I nằm giữa A và O). Lấy điểm E trên cung nhỏ BC (E khác B và C), AE cắt CD tại F. Chứng minh: $BEFI$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

Hướng dẫn giải

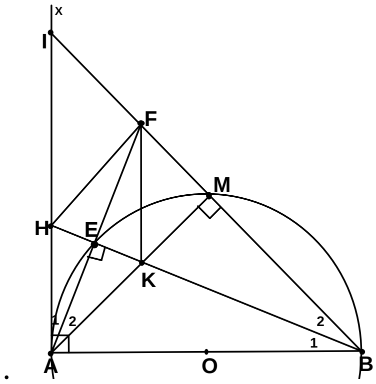


Tứ giác $BEFI$ có: $\widehat{BIF} = 90^0$ (gt) $\widehat{BEF} = \widehat{BEA} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra tứ giác $BEFI$ nội tiếp đường tròn đường kính BF.

Bài 2:
Cho nữa đường tròn tâm O đường kính AB, điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M khác A, B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I; tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E; cắt tia BM tại F tia BE cắt Ax tại H, cắt AM tại K. Chứng minh rằng: $EFMK$ là tứ giác nội tiếp.

Hướng dẫn giải



Ta có: $\widehat{AMB}=90^o$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{KMF}=90^o$ (vì là hai góc kề bù).

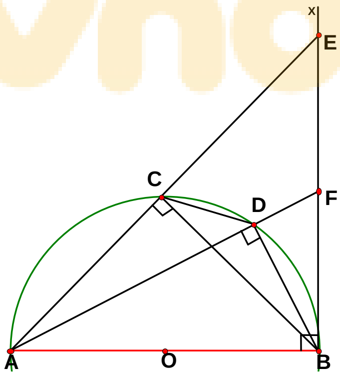
$\widehat{AEB}=90^o$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{KEF}=90^o$ (vì là hai góc kề bù).

$\Rightarrow \widehat{KEF}+\widehat{KMF}=180^o$ do đó $EFMK$ là tứ giác nội tiếp.

Bài 3:
Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB,. Kẻ tiếp tuyến Bx và lấy hai điểm C và D thuộc nửa đường tròn. Các tia AC và AD cắt Bx lần lượt ở E, F (F ở giữa B và E).

1. Chứng minh: $\widehat{ABD}=\widehat{DFB}$.

2. Chứng minh rằng $CEFD$ là tứ giác nội tiếp.



Hướng dẫn giải:

1) ΔADB có $\widehat{ADB}=90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{ABD}+\widehat{BAD}=90^\circ$ (vì tổng ba góc của một tam giác bằng 180°)(1)

ΔABF có $\widehat{ABF}=90^\circ$ (BF là tiếp tuyến).$\Rightarrow \widehat{AFB}+\widehat{BAF}=90^\circ$(vì tổng ba góc của một tam giác bằng 180°) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ABD}=\widehat{DFB}$

2) Tứ giác $ACDB$ nội tiếp $(O) \Rightarrow \widehat{ABD}+\widehat{ACD}=180^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{ECD}+\widehat{ACD}=180^\circ \angle$ (Vì là hai góc kề bù) $\Rightarrow \widehat{ECD}=\widehat{DBA}$

Theo trên $\widehat{ABD}=\widehat{DFB}$ $\widehat{ECD}=\widehat{DBA} \Rightarrow \widehat{ECD}=\widehat{DFB}$ $\widehat{EFD}+\widehat{DFB}=180^\circ$ (Vì là hai góc kề bù)

nên $\widehat{ECD}+\widehat{AEFD}=180^\circ$ do đó tứ giác $CEFD$ là tứ giác nội tiếp.

Mức độ 3:

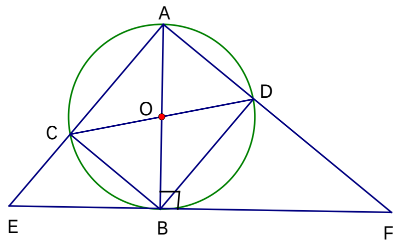
Bài 1:
Cho đường tròn $(O;R)$; AB và CD là hai đường kính khác nhau của đường tròn. Tiếp tuyến tại B của đường tròn $\left(O;R\right)$ cắt các đường thẳng AC, AD thứ tự tại E và F.

a) Chứng minh tứ giác $ACBD$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh $\Delta ACD \sim \Delta CBE$

c) Chứng minh tứ giác $CDFE$ nội tiếp được đường tròn.

Hướng dẫn giải



a) Tứ giác $ACBD$ có hai đường chéo AB và CD bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, suy ra $ACBD$ là hình chữ nhật.

b) Tứ giác $ACBD$ là hình chữ nhật suy ra $\widehat{CAD}=\widehat{BCE}=90^0$ (1).

Lại có $\widehat{CBE}=\frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{BC}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung); $\widehat{ACD}=\frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AD}$ (góc nội tiếp), mà $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AD}$ (do $BC=AD$) $\Rightarrow \widehat{CBE}=\widehat{ACD}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta ACD \sim \Delta CBE$.

c) Vì $ACBD$ là hình chữ nhật nên CB song song với AF, suy ra: $\widehat{CBE}=\widehat{DFE}$ (3).

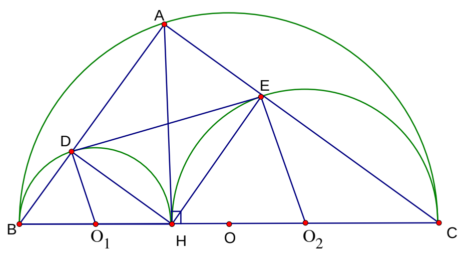
Từ (2) và (3) suy ra $\widehat{ACD}=\widehat{DFE}$ do đó tứ giác $CDFE$ nội tiếp được đường tròn.

Bài 2: Cho nửa đường tròn đường kính $BC=2R$. Từ điểm A trên nửa đường tròn vẽ $AH\perp BC$. Nửa đường tròn đường kính BH, CH lần lượt có tâm O_1; O_2 cắt AB và CA thứ tự tại D và E.

a) Chứng minh tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật, từ đó tính DE biết $R=25$ và $BH=10$.

b) Chứng minh tứ giác $BDEC$ nội tiếp đường tròn.

Hướng dẫn giải



a) Ta có $\widehat{BAC}=90^o$ (vì góc nội tiếpchắn nửa đường tròn)

Tương tự có $\widehat{BDH}=\widehat{CEH}=90^o$

Xét tứ giác $ADHE$ có $\hat{A}=\widehat{ADH}=\widehat{AEH}=90^o$ hay $ADHE$ là hình chữ nhật.

Từ đó $DE=AH$ mà $AH^2=BH.CH$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

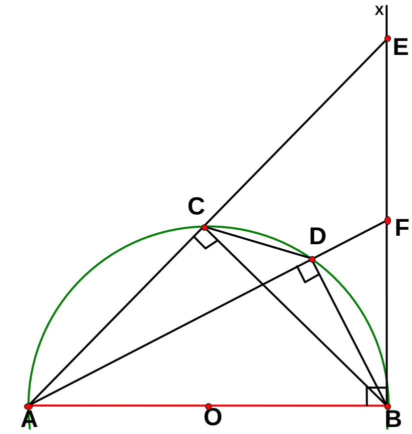
hay $AH^2=10.40=20^2\left(BH=10;CH=2.25-10=40\right)\Rightarrow DE=20$

$\widehat{BAH}$ $\hat{C}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) mà $\widehat{DAH}=\widehat{ADE}$

$ADHE$ à hình chữ nhật) => $\hat{C}=\widehat{ADE}$ do $\hat{C}+\widehat{BDE}=180^o$ nên tứ giác $BDEC$ nội tiếp đường tròn.

Bài 3:
Cho nửa đường tròn O R đường kính AB. Các tia AC AD cắt Bx lần lượt ở E và F F nằm giữa B và E). Chứng minh rằng CEFD là tứ giác nội tiếp

Hướng dẫn giải



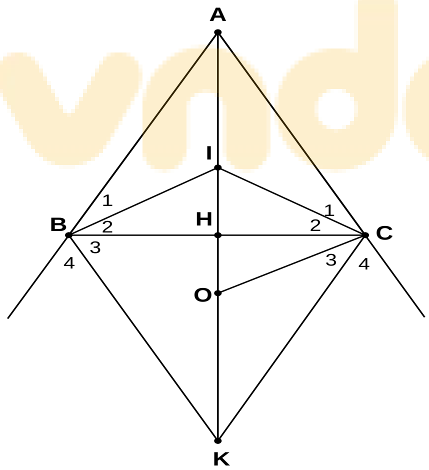
thật vậy. $\widehat{ABD} = \widehat{BFD}$ (1) (cùng phụ với $\widehat{DBF}$)

Mặt khác A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn nên $\widehat{ECD} = \widehat{ABD}$ (2)

Từ (1) và (2) $\widehat{ECD} = \widehat{BFD} \Rightarrow \widehat{ECD} + \widehat{EFD} = 180^o$ hay $CEFD$ là tứ giác nội tiếp

Mức độ 4:

Bài 1: Cho ΔABC cân tại A, I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A, O là trung điểm của IK. Chứng minh bốn điểm B, I, C, K cùng thuộc một đường tròn tâm O



Hướng dẫn giải:

Theo giả thiết ta có: $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$, $\widehat{B_3} = \widehat{B_4}$ Mà $\widehat{B_1} + \widehat{B_2} + \widehat{B_3} + \widehat{B_4} = 180^0$ $\widehat{B_2} + \widehat{B_3} = 90^0$

Tương tự $\widehat{C_2} + \widehat{C_3} = 90^0$

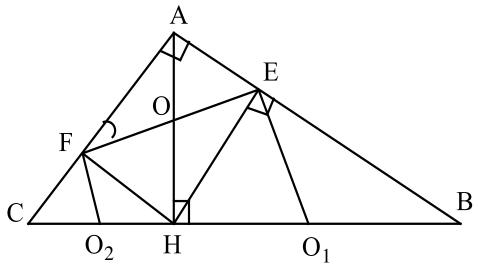
Xét tứ giác $BICK$ có $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^0 \Rightarrow$ bốn điểm B, I, C, K thuộc đường tròn tâm O đường kính IK.

Bài 2: Cho tam giác ΔABC vuông ở A $(AB > AC)$, đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A, vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E, nửa đường tròn đường kính HC cắt AC tại F. Chứng minh:

1) Tứ giác $AFHE$ là hình chữ nhật.

2) Tứ giác $BEFC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

Hướng dẫn giải



Từ giả thiết suy ra

$\widehat{CFH} = 90^0$, $\widehat{HEB} = 90^0$. (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Trong tứ giác $AFHE$ có: $\widehat{A}=\widehat{F}=\widehat{E}=90^o \Rightarrow$ AFHE là hình chữ nhật

2) Vì $AFHE$ là hình chữ nhật $\Rightarrow$ $AFHE$ nội tiếp $\Rightarrow$ $\widehat{AFE} = \widehat{AHE}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AE}$) (1)

Ta lại có $\widehat{AHE} = \widehat{ABH}$ (góc có cạnh tương ứng $\perp$) (2)

Từ (1) và (2)

$\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ABH}$ mà $\widehat{CFE} + \widehat{AFE} = 180^0 \Rightarrow \widehat{CFE} + \widehat{ABH} = 180^0$. Vậy tứ giác $BEFC$ nội tiếp.

Bài 3: Cho nửa đường tròn O đường kính AB. C là một điểm nằm giữa O và A. Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn trên tại I. K là một điểm bất kỳ nằm trên đoạn thẳng CI (K khác C và I), tia AK cắt nửa đường tròn (O) tại M, tia BM cắt tia CI tại D

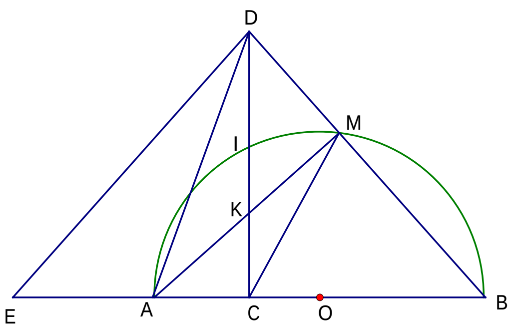
Chứng minh:

1) $ACMD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

2) $\Delta ABD \sim \Delta MBC$

3) $AKDE$ là tứ giác nội tiếp.

Hướng dẫn giải



1) Ta có: $\widehat{AMB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{AMD} = 90^0$. Tứ giác $ACMD$ có $\widehat{AMD} = \widehat{ACD} = 90^0$, suy ra $ACMD$ nội tiếp đường tròn đường kính AD.

2) ΔABD và ΔMBC có: $\widehat{B}$ chung và $\widehat{BAD} = \widehat{BMC}$ (do $ACMD$ là tứ giác nội tiếp).

Suy ra: $\Delta ABD \sim \Delta MBC$ (g – g)

3) Lấy E đối xứng với B qua C thì E cố định và $\widehat{EDC} = \widehat{BDC}$ $\widehat{BDC} = \widehat{CAK}$ (cùng phụ với $\widehat{B}$

$\widehat{EDC} = \widehat{CAK}$. Do đó $AKDE$ là tứ giác nội tiếp.

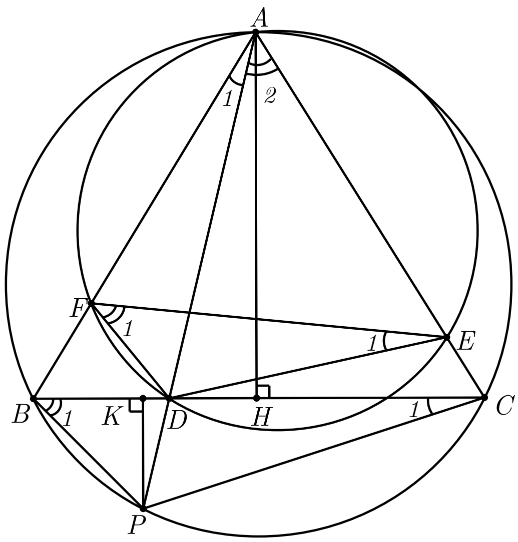
***III. Phương pháp 3 chứng minh:* "**Chứng minh hai đỉnh cùng nhìn đoạn thẳng tạo bởi hai điểm còn lại hai góc bằng nhau".

CÁC VÍ DỤ.

Mức độ 1:

Bài 1:

Cho tam giác ABC, lấy điểm D thay đổi nằm trên cạnh BC $(D$ không trùng với B và $C)$. Trên tia AD lấy điểm P sao cho D nằm giữa A và P đồng thời $DA.DP = DB.DC$. Đường tròn (T) đi qua hai điểm A, D lần lượt cắt cạnh AB, AC tại F và E. Chứng minh rằng: Tứ giác $ABPC$ nội tiếp

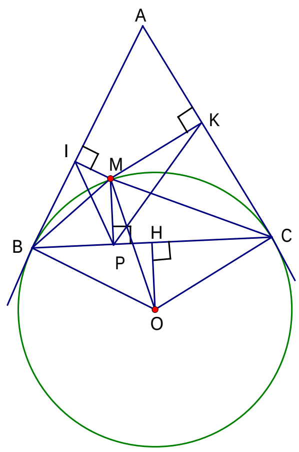


Hướng dẫn giải:

Ta có $DA.DP = DB.DC \Rightarrow \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{DC}{DP}$ mà $\widehat{ADB} = \widehat{CDP}$ nên hai tam giác ADB, CDP đồng dạng. Suy ra, $\widehat{DAB} = \widehat{DCP} \Rightarrow$ Tứ giác $ABPC$ nội tiếp.

Bài 2:

Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn $(O\ ;R\ )$ ta vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M, vẽ $MI \perp AB$, $MK \perp AC$ $(I \in AB, K \in AC)$. Chứng minh: $AIMK$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

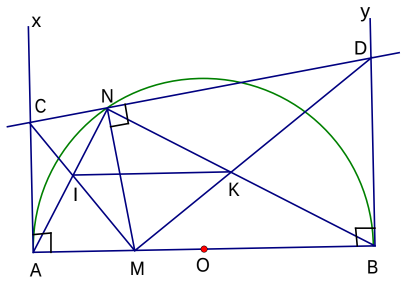


Hướng dẫn giải

Ta có: $\widehat{AIM} = \widehat{AKM} = 90^0$ (gt), suy ra tứ giác $AIMK$ nội tiếp đường tròn đường kính AM.

Bài 3: Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Lấy điểm M thuộc đoạn thẳng OA, điểm N thuộc nửa đường tròn (O). Từ A và B vẽ các tiếp tuyến Ax và By. Đường thẳng qua N và vuông góc với MN cắt Ax và By thứ tự tại C và D. Chứng minh $ACNM$ và $BDNM$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

Hướng dẫn giải:



Tứ giác $ACNM$ có: $\widehat{MNC}=90^o$ (gt) $\widehat{MAC}=90^o$ (tínhchất tiếp tuyến).

$\Rightarrow ACNM$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MC. Tương tự tứ giác $BDNM$ nội tiếp đường tròn đường kính MD.

Mức độ 2:

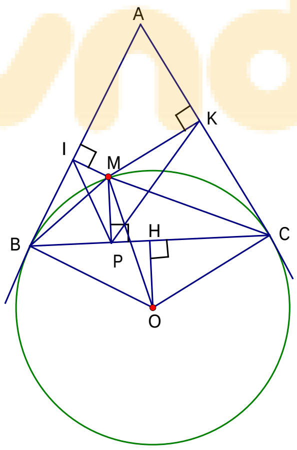
Bài 1:

Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ ta vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M, vẽ $MI \perp AB$, $MK \perp AC$ ($I \in AB, K \in AC$)

a) Chứng minh: $AIMK$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Vẽ $MP \perp BC$ $(P \in BC)$. Chứng minh: $\widehat{MPK}=\widehat{MBC}$.

Hướng dẫn giải



a) Ta có: $\widehat{AIM}=\widehat{AKM}=90^0$ (gt), suy ra tứ giác $AIMK$ nội tiếp đường tròn đường kính AM.

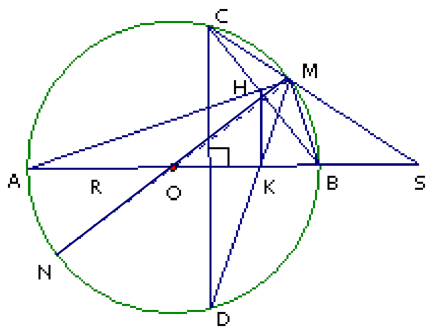
b) Tứ giác $CPMK$ có $\widehat{MPC}=\widehat{MKC}=90^0$ (gt). Do đó $CPMK$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MPK}=\widehat{MCK}$ (1).

Vì KC là tiếp tuyến của (O) nên ta có: $\widehat{MCK}=\widehat{MBC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{MC}$) (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MPK}=\widehat{MBC}$ (3) Chứng minh tương tự câu b ta có $BPMI$ là tứ giác nội tiếp.

Bài 2:

Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính AB. Vẽ dây cung CD vuông góc với AB (CD không đi qua tâm O). Trên tia đối của tia BA lấy điểm S; SC cắt $(O;R)$ tại điểm thứ hai là M. Gọi H là giao điểm của MA và BC K là giao điểm của MD và AB. Chứng minh $BMHK$ là tứ giác nội tiếp.



Hướng dẫn giải:

Vì $AB \perp CD$ nên $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$.

Suy ra $\widehat{MHB} = \widehat{MKB}$ (vì cùng bằng $\frac{1}{2}(sd\overset{\frown}{AD} + sd\overset{\frown}{MB}) \Rightarrow$ tứ giác $BMHK$ nội tiếp được đường tròn.

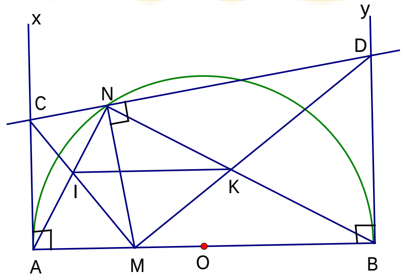
Bài 3: Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Lấy điểm M thuộc đoạn thẳng OA, điểm N thuộc nửa đường tròn (O). Từ A và B vẽ các tiếp tuyến Ax và By. Đường thẳng qua N và vuông góc với MN cắt Ax và By thứ tự tại C và D.

a) Chứng minh $ACNM$ và $BDNM$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $\Delta ANB \sim \Delta CMD$.

c) Gọi I là giao điểm của AN và CM, K là giao điểm của BN và DM. Chứng minh $IMKN$ là tứ giác nội tiếp.

Hướng dẫn giải:



Tứ giác $ACNM$ có: $\widehat{MNC} = 90^o$ (gt) $\widehat{MAC} = 90^o$ (tínhchất tiếp tuyến).

$\Rightarrow$ $ACNM$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MC. Tương tự tứ giác $BDNM$ nội tiếp đường tròn đường kính MD.

b) ΔANB và ΔCMD có:

$\widehat{ABN} = \widehat{CDM}$ (do tứ giác $BDNM$ nội tiếp)

$\widehat{BAN} = \widehat{DCM}$ (do tứ giác $ACNM$ nội tiếp) $\Rightarrow \Delta ANB \sim \Delta CMD$ (g.g)

c) $\Delta ANB \sim \Delta CMD \Rightarrow \widehat{CMD} = \widehat{ANB} = 90^o$ (do $\widehat{ANB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)).

Suy ra $\widehat{IMK} = \widehat{INK} = 90^o \Rightarrow$ $IMKN$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính IK

Mức độ 3:

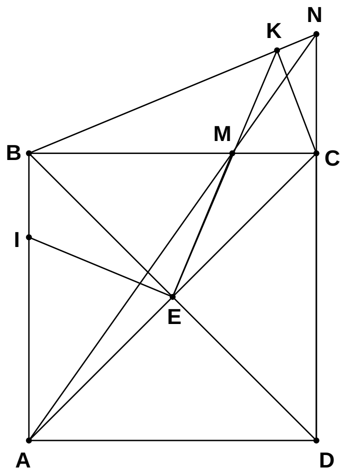
Bài 1: Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại E. Lấy I thuộc cạnh AB, M thuộc cạnh BC sao cho: $\widehat{IEM}=90^0$ (I và M không trùng với các đỉnh của hình vuông).

a) Chứng minh rằng $BIEM$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Tính số đo của góc $\widehat{IME}$

c) Gọi N là giao điểm của tia AM và tia DC; K là giao điểm của BN và tia EM. Chứng min $BKCE$ là tứ giác nội tiếp.

Hướng dẫn giải



a)Tứ giác $BIEM$: $\widehat{IBM}=\widehat{IEM}=90^0$ (gt);hay tứ giác $BIEM$ nội tiếp đường tròn đường kính IM.

b) Tứ giác $BIEM$ nội tiếp suy ra: $\widehat{IME}=\widehat{IBE}=45^0$ (do $ABCD$ là hình vuông).

c) ΔEBI và ΔECM có $BE=CE$, $\widehat{BEI}=\widehat{CEM}$ (do $\widehat{IEM}=\widehat{BEC}=90^0$)

$\Rightarrow$ ΔEBI =ΔECM (g-c-g) $\Rightarrow MC=IB \Rightarrow MB=IA$

Vì $CN//BA$ nên theo định lí Thalet, ta có: $\dfrac{MA}{MN}=\dfrac{MB}{MC}=\dfrac{IA}{IB}$. Suy ra $IM//BN$ (định lí Thalet đảo)

$\Rightarrow \widehat{BKE}=\widehat{IME}=45^0$ (2). Lại có $\widehat{BCE}=45^0$ (do $ABCD$ là hình vuông).

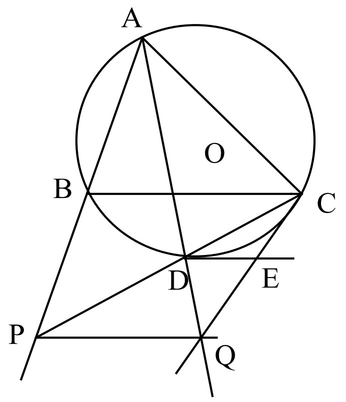
Suy ra $\widehat{BKE}=\widehat{BCE} \Rightarrow BKCE$ là tứ giác nội tiếp.

Bài 2: Cho đường tròn (O) với dây BC cố định và một điểm A thay đổi trên cung lớn BC sao cho $AC>AB$ và $AC>BC$. Gọi D là điểm chính giữa của cung nhỏ BC. Các tiếp tuyến của (O) tại D và C cắt nhau tại E. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AB với CD; AD với CE.

1) Chứng minh rằng: $DE//BC$

2) Chứng minh tứ giác $PACQ$ nội tiếp đường tròn.

Hướng dẫn giải



1) $\widehat{CDE}=\frac{1}{2}Sđ\overset{\frown}{DC}=\frac{1}{2}Sđ\overset{\frown}{BD}=\widehat{BCD}\Rightarrow DE//BC$

2) $\widehat{APC}=\frac{1}{2}sđ(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{DC})=\widehat{AQC}$

$\Rightarrow$ $PACQ$ nội tiếp đường tròn (vì $\widehat{APC}=\widehat{AQC}$)

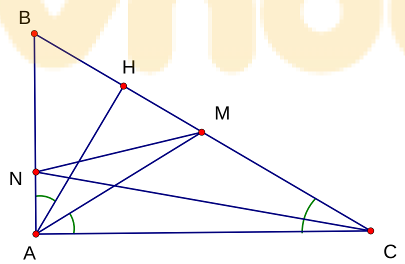
Bài 3:

Cho tam giác ABC có $\hat{C}<\hat{B}<90^0$, đường cao AH và trung tuyến AM.

a) Chứng minh rằng nếu $\widehat{BAC}=90^0$ thì $\widehat{BAH}=\widehat{MAC}$.

b) Nếu $\widehat{BAH}=\widehat{MAC}$ thì tam giác ABC có vuông không, tại sao?

Hướng dẫn giải



Ta có: $\widehat{BAH}=\widehat{BCA}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$)

$\widehat{MCA}=\widehat{MAC}$ (Tam giác MAC cân tại M theo tính chất trung tuyến trong tam giác vuông)

Suy ra $\widehat{BAH}=\widehat{MAC}$

b) Giả sử tam giác ABC không phải là tam giác vuông.

Kẻ đường cao CN của tam giác ABC

Ta có $\widehat{MAC}=\widehat{BAH}$ (giả thiết)

$\widehat{BAH}=\widehat{BCN}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$)

$\widehat{MCN}=\widehat{MNC}$ (Tam giác MNC cân tại N)

Suy ra $\widehat{MAC}=\widehat{MNC}$. Do đó $ACMN$ là tứ giác nội tiếp mà $\widehat{ANC}=90^0\Rightarrow\widehat{AMC}=90^0\Rightarrow H\equiv M$

Suy ra tam giác ABC cân (mâu thuẫn giả thiết)

Vậy khi $\widehat{BAH}=\widehat{MAC}$ thì tam giác ABC là tam giác vuông

Mức độ 4:

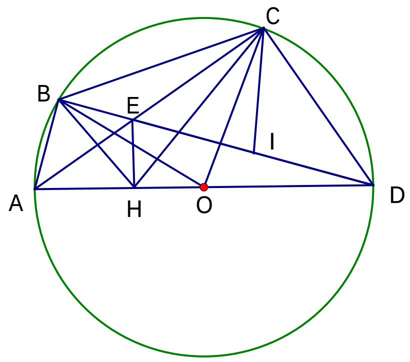
Bài 1: Cho tứ giác $ABCD$ có hai đỉnh B và C ở trên nửa đường tròn đường kính AD, tâm O. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Gọi H là hình chiếu vuông góc của E xuống AD và I là trung điểm của DE. Chứng minh rằng:

1) Các tứ giác $ABEH$, $DCEH$ nội tiếp được đường tròn.

2) E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCH.

3) Năm điểm B, C, I, O, H cùng thuộc một đường tròn.

Hướng dẫn giải



1) Tứ giác $ABEH$ có: $\widehat{B} = 90^o$ (góc nội tiếp trong nửa đường tròn); $\widehat{H} = 90^o$ (giả thiết) nên tứ giác $ABEH$ nội tiếp được.

Tương tự, tứ giác $DCEH$ có $\widehat{C} = \widehat{H} = 90^o$, nên nội tiếp được.

2) Trong tứ giác nội tiếp $ABEH$, ta có: $\widehat{EBH} = \widehat{EAH}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{EH}$)

Trong (O) ta có: $\widehat{EAH} = \widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{CD}$).

Suy ra: $\widehat{EBH} = \widehat{EBC}$, nên BE là tia phân giác của góc $\widehat{HBC}$.

Tương tự, ta có: $\widehat{ECH} = \widehat{BDA} = \widehat{BCE}$, nên CE là tia phân giác của góc $\widehat{BCH}$.
Vậy E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCH.

3) Ta có I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông ECD, nên $\widehat{BIC} = 2\widehat{EDC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung $\overset{\frown}{EC}$). Mà $\widehat{EDC} = \widehat{EHC}$, suy ra $\widehat{BIC} = \widehat{BHC}$.

+ Trong (O), $\widehat{BOC} = 2\widehat{BDC} = \widehat{BHC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung $\overset{\frown}{BC}$).
Hay năm điểm B, C, I, O, H cùng thuộc một đường tròn.

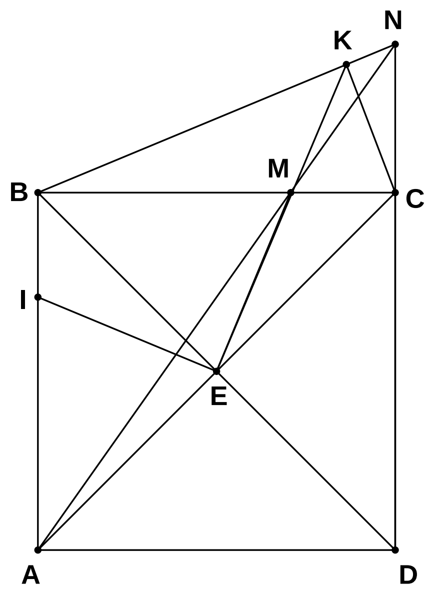
Bài 2: Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại E. Lấy I thuộc cạnh AB, M thuộc cạnh BC sao cho: $\widehat{IEM} = 90^0$ (I và M không trùng với các đỉnh của hình vuông).

a) Chứng minh rằng $BIEM$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Tính số đo của góc $\widehat{IME}$

c) Gọi N là giao điểm của tia AM và tia DC K là giao điểm của BN và tia EM. Chứng minh $BKCE$: $CK \perp BN$

Hướng dẫn giải



a) Tứ giác $BIEM$ có: $\widehat{IBM} = \widehat{IEM} = 90^0$ (gt); suy ra tứ giác $BIEM$ nội tiếp đường tròn đường kính IM.

b) Tứ giác $BIEM$ nội tiếp suy ra: $\widehat{IME} = \widehat{IBE} = 45^0$ (do $ABCD$ là hình vuông).

c) ΔEBI và ΔECM có: $\widehat{IBE} = \widehat{MCE} = 45^0$, $BE = CE$, $\widehat{BEI} = \widehat{CEM}$ (do $\widehat{IEM} = \widehat{BEC} = 90^0$)

$\Rightarrow \Delta EBI = \Delta ECM \left(g.c.g\right) \Rightarrow MC = IB \Rightarrow MB = IA$. Vì $CN // BA$ nên theo định lí Thalet, ta có:

$\dfrac{MA}{MN} = \dfrac{MB}{MC} = \dfrac{IA}{IB}$. Suy ra $MI // BN$ (định lí Thalet đảo)

$\Rightarrow \widehat{BKE} = \widehat{IME} = 45^0$ (2). Lại có $\widehat{BCE} = 45^0$ (do $ABCD$ là hình vuông).

Suy ra $\widehat{BKE} = \widehat{BCE} \Rightarrow BKCE$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra: $\widehat{BKC} + \widehat{BEC} = 180^0$ mà $\widehat{BEC} = 90^0$; suy ra $\widehat{BKC} = 90^0$; hay $CK \perp BN$.

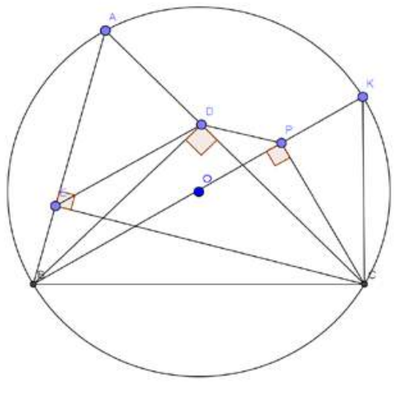
Bài 3:

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O), đường cao BD, CE cắt nhau tại H $\left(D \in AC; E \in AB\right)$. Kẽ đường kính BK, Kẽ $CP \perp BK$ $\left(P \in BK\right)$

a) Chứng minh rằng $BECD$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh rằng $EDPC$ là tứ giác nội tiếp, từ đó suy ra $ED = CP$

(trích HK2-Sở bắc ninh 2016-2017)



Hướng dẫn giải

Do E, D, P nhìn BC dưới một góc vuông nên B, E, D, P, C nằm trên một đường tròn đường kính BC.
Nên BECD , EDPC là tứ giác nội tiếp.

A.BÀI TẬP MINH HỌA

Câu 1. Cho tứ giác $ABCD$ có đường tròn đường kính AD tiếp xúc với BC và đường tròn đường kính BC tiếp xúc với AD. Chứng minh rằng $AB//CD$.

Câu 2. Cho tam giác đều ABC. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A vẽ nửa đường tròn đường kính BC, D là điểm trên nủa đường tròn sao cho sđ$\overset{\frown}{CD} = 60^0$. Gọi M là giao điểm của AD với BC. Chứng minh rằng $BM = 2MC$.

Câu 3. Cho đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc trong tại A $(R > R')$. Tiếp tuyến tại điểm M bất kỳ của $(O';R')$ cắt $(O;R)$ tại B và C. Chứng minh rằng $\widehat{BAM} = \widehat{MAC}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$, AH là đường cao $(H \in BC)$. Chứng minh rằng: $AB.AC = 2R.AH$.

Câu 5. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}$ nhọn nội tiếp trong đường tròn $(O;R)$. Chứng minh rằng: $BC = 2R\sin\widehat{BAC}$.

Câu 6. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Qua A vẽ hai cát tuyến CAD và EAF (C và E nằm trên đường tròn (O), D và F nằm trên đường tròn (O')) sao cho $\widehat{CAB} = \widehat{BAF}$. Chứng minh rằng $CD = EF$

Câu 7. Cho đường tròn (O) đường kính AB C là điểm trên cung AB C A B ẽ $CH \perp AB(H \in AB)$ ẽ đường tròn $(C;CH)$ ắt đường tròn (O) ại D E DE ắt CH ại M ứng minh rằng $MH = MC$

Câu 8. Cho tam giác ABC ội tiếp đường tròn $(O;R)$ ẽ AD là đường cao của tam giác ABC ứng minh rằng $\widehat{BAD} = \widehat{OAC}$

Câu 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD ắt đường thẳng AC ại E ứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE ếp xúc với BD

Câu 10. Cho đoạn thẳng AB M là điểm di động trên đoạn thẳng AB M A B ẽ đường thẳng xMy ới AB ại M Mx ần lượt lấy C D $MC = MA, MD = MB$. Đường tròn đường kính AC ắt đường tròn đường kính BD ại N N A ứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 11. Cho tam giác ABC ọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$ có đỉnh A ố định, đỉnh B,C động.Dựng hình bình hành $ABDC$ ứng minh rằng trực tâm H ủa tam giác BDC là điểm cố định.

Câu 12. Cho tam giác nhọn ABC. Vẽ đường tròn (O) đường kính BC. Vẽ AD là đường cao của tam giác ABC, các tiếp tuyến AM,AN với đường tròn (O) (M,N là các tiếp điểm). MN cắt AD tại E. Chứng minh rằng E là trực tâm của tam giác ABC.

Câu 13. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. Từ A vẽ các tiếp tuyến AM,AN với đường tròn (O) đường kính BC (M,N là các tiếp điểm). Chứng minh rằng M,H,N thẳng hàng.

Câu 14. Cho tam giác ABC cân đỉnh A, đường trung trực của AB cắt BC tại D. Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD.

Câu 15. Cho tam giác ABC $\left(\widehat{A}=90^0\right)$ và $AB<AC$. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AB cắt BC tại D, cắt AC tại E. Chứng minh rằng $DB.CB=EB^2$.

Câu 16. Cho tam giác vuông ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)\left(AB<AC,\widehat{A}=90^0\right)$. Đường tròn (I) qua B,C tiếp xúc với AB tại B, cắt đường thẳng AC tại D. Chứng minh rằng $OA\perp BD$.

Câu 17. Cho đoạn thẳng $AB=2a$ có trung điểm là O. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB ựng nửa đường tròn (O) đường kính AB ửa đường tròn (O') đường kính AO (O') ấy điểm M A O OM ắt (O) ại C ọi D là giao điểm thứ hai của CA ới (O')

ứng minh tam giác ADM

ếp tuyến tại C ủa (O) ắt tia OD ại E, xác định vị trí tương đối của đường thẳng EA đối với (O) (O')

Câu 18. Cho đường tròn tâm O có đường kính $AB=2R$ ọi M là điểm di động trên đường tròn (O). Điểm M A,B ựng đường tròn tâm M ếp xúc với AB ại H ừ A B ẻ hai tiếp tuyến AC BD ới đường tròn tâm M ừa dựng.

a) Chứng minh BM,AM ần lượt là các tia phân giác của các góc $\widehat{ABD}$ $\widehat{BAC}$

ứng minh ba điểm C,M,D ằm trên tiếp tuyến của đường tròn tâm O ại điểm M

ứng minh $AC+BD$ không đổi, từ đó tính tích $AC.BD$ theo CD

ả sử ngoài A,B ửa đường tròn đường kính AB ứa M ột điểm N ố định. gọi I là trung điểm của MN ẻ IP ới MB M ển động thì P ển động trên đường cố định nào.

Câu 19. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, điểm C ộc nửa đường tròn. Gọi I điểm chính giữa $\overset{\frown}{AC}$ E là giao điểm của AI BC ọi K là giao điểm của AC BI

ứng minh rằng $EK\perp AB$

ọi F là điểm đối xứng với K qua I. Chứng minh AF ếp tuyến của (O)

c) Chứng minh rằng $AK.AC + BK.BI = AB^2$.

d) Nếu $\sin\widehat{BAC} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Gọi H là giao điểm của EK và AB. Chứng minh $KH\left(KH + 2HE\right) = 2HE.KE$.

Câu 20. Cho đường tròn $\left(O\right)$ đường kính $AB = 2A$, điểm C thuộc đường tròn $\left(C \neq A, C \neq B\right)$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C, kẻ tia Ax tiếp xúc với đường tròn $\left(O\right)$. Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ AC. Tia BC cắt Ax tại Q, tia AM cắt BC tại N.

a) Chứng minh các tam giác BAN và MCN cân.

b) Khi $MB = MQ$, tính BC theo R.

Câu 21. Cho đường tròn $\left(O;R\right)$ đường kính AC. Trên đoạn thẳng OC lấy điểm B và vẽ đường tròn $\left(O'\right)$ có đường kính BC. Gọi M là trung điểm của AB, qua M kẻ dây cung vuông góc với AB cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại D và E. Nối CD cắt đường tròn $\left(O'\right)$ tại I.

a) Tứ giác $DAEB$ là hình có đặc tính gì? Vì sao?

b) Chứng minh $MD = MI$ và MI là tiếp tuyến của đường tròn $\left(O'\right)$.

c) Gọi H là hình chiếu vuông góc của I BC ứng minh $CH.MB = BH.MC$

Câu 22. Cho tam giác ABC đều, dựng nửa đường tròn tâm D đường kính BC ếp xúc với AB, AC ần lượt tại K, L ấy điểm P ộc cung nhỏ KL ựng tiếp tuyến với nửa đường tròn tại P ắt các cạnh AB, AC ần lượt tại M, N

ứng minh $\Delta BMD \sim \Delta CDN$ ồi suy ra $BM.CN = \frac{BC^2}{4}$.

ứng minh $\frac{S_{MDN}}{S_{ABC}} = \frac{MN}{2BC}$

ọi E, F ần lượt nằm trên các cạnh AB, AC ΔAEF ằng một nửa chu vi ΔABC ứng minh rằng $\widehat{EDF} = 60^0$

Câu 23. Cho tam giác ABC $AC = 2AB$ ội tiếp đường tròn $\left(O;R\right)$ ếp tuyến của đường tròn $\left(O\right)$ ại A, C ắt nhau tại M BM ắt đường tròn $\left(O\right)$ ại D ứng minh rằng:

a) $\frac{MA}{MB} = \frac{AD}{AB}$ $AD.BC = AB.CD$

$AB.CD + AD.BC = AC.BD$ ΔCBD

Câu 24. Trên nửa đường tròn tâm $\left(O;R\right)$, đường kính AB ấy hai điểm M, E ứ tự A, M, E, B. Hai đường thẳng AM BE ắt nhau tại C AE BM ắt nhau tại D

ứng minh rằng tứ giác $MCED$ ội tiếp và CD ới AB

b) Gọi H là giao điểm của CD AB ứng minh rằng $BE.BC = BH.BA$

c) Chứng minh rằng các tiếp tuyến tại M và E của đường tròn (O) cắt nhau tại một điểm I thuộc CD.

d) Cho $\widehat{BAM} = 45^0, \widehat{BAE} = 30^0$. Tính diện tích tam giác ABC theo R.

Câu 25. Cho tam giác ABC đều, gọi O là trung điểm của cạnh BC. Các điểm D, E lần lượt di động trên các cạnh AB, AC sao cho $\widehat{DOE}$ bằng 60^0.

a) Chứng minh $BD.CE$ không đổi,

b) Chứng minh rằng tia DO là tia phân giác của $\widehat{BDE}$.

c) Dựng đường tròn tâm O tiếp xúc với AB. Chứng minh rằng đường tròn này luôn tiếp xúc với DE và AC.

d) Gọi P, Q lần lượt là tiếp điểm của (O) với AB, AC. I và N lần lượt là giao điểm của PQ với OD và OE. Chứng minh rằng $DE = 2IN$.

Câu 26. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A ở bên ngoài đường tròn. Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi M là trung điểm AB.

a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp và xác định tâm I của đường tròn này.

b) Chứng minh rằng $AM.AO = AB.AI$.

c) Gọi G là trọng tâm tam giác ACM. Chứng minh $MG // BC$.

d) Chứng minh IG vuông góc với CM.

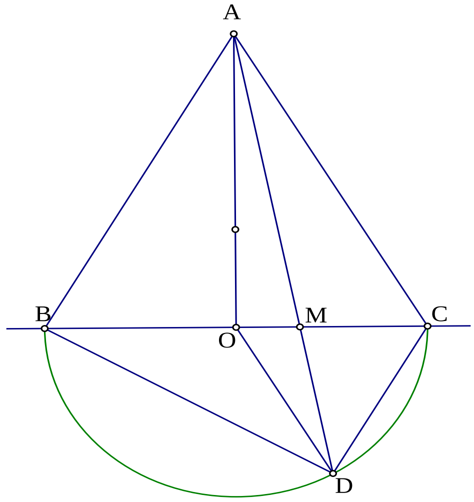
Câu 27. Cho đường tròn $(O;R)$ nội tiếp ΔABC, tiếp xúc với cạnh AB, AC lần lượt ở D E

ọi O' là tâm đường tròn nội tiếp ΔADE OO' R

b) Các đường phân giác trong của $\widehat{B}$ $\widehat{C}$ ắt đường thẳng DE ần lượt tại M N ứng minh tứ giác $BCMN$ ội tiếp được đường tròn.

c) Chứng minh $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{DM}{AC} = \dfrac{EN}{AB}$

B.HƯỚNG DẪN GIẢI



Câu 1. Giải:

Gọi O là trung điểm của BC

thì tam giác OCD đều nên $\widehat{OCD} = 60^0$

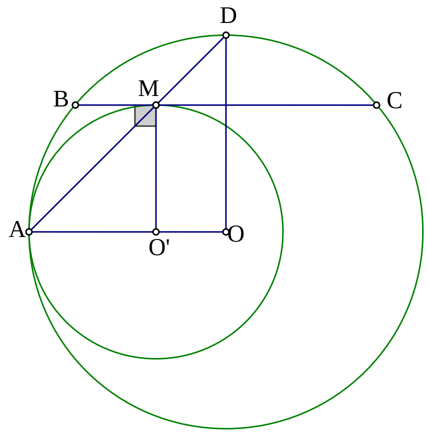
$\Rightarrow AB//CD$.Để chứng minh: $BM = 2MC$

Ta cần chứng minh $AB = 2CD$.

Xét tam giác vuông BDC ta có:

$CD = BC.\sin 30^0 = \frac{1}{2}BC$ suy ra $BC = AB = 2CD$

Câu 2. Giải:



Ta gọi giao điểm của AM và cung BC

là D.Ta có $\widehat{BAM} = \widehat{MAC} \Leftrightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DC}$.

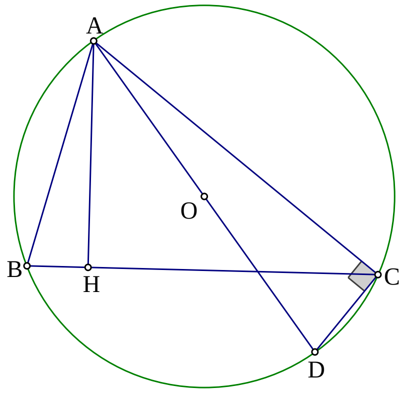
$\Leftrightarrow OD \perp BC \Leftrightarrow O'M//OD$

$\Leftrightarrow \widehat{AMO'} = \widehat{ADO}$

Để chứng minh: $\widehat{AMO'} = \widehat{ADO}$ ta

dựa vào các tam giác cân $O'AM$ và OAD.

Câu 3. Giải:



Vẽ đường kính AD của đường

tròn (O), suy ra $\widehat{ACD} = 90^0$

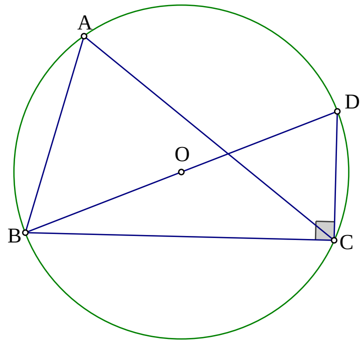
(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Xét ΔHBA và ΔCDA có:

$\widehat{AHB} = \widehat{ACD}\left(= 90^0\right); \widehat{HBA} = \widehat{CDA}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$), Do đó

$\Delta HBA \sim \Delta CDA \Rightarrow \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AB}{AD} \Rightarrow AB.AC = AD.AH$. Mà $AD = 2R$. Do đó $AB.AC = 2R.AH$.

Câu 4. Giải:



Vẽ đường kính BD của đường tròn

$\left(O;R\right) \Rightarrow \widehat{BCD} = 90^0$ (góc nội tiếp

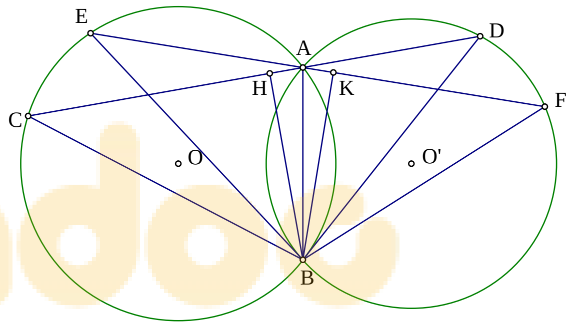
chắn nửa đường tròn).

ΔBCD có $\widehat{C} = 90^0$ nên $BC = BD\sin\widehat{BDC}$. Ta lại có $BD = 2R; \widehat{BDC} = \widehat{BAC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$) nên $BC = 2R\sin\widehat{BAC}$.

Từ bài toán này ta cần ghi nhớ kết quả quan trọng: Trong tam giác ABC ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Câu 5. Giải:



Ta có: AB là tia phân giác của $\widehat{CAF}$,

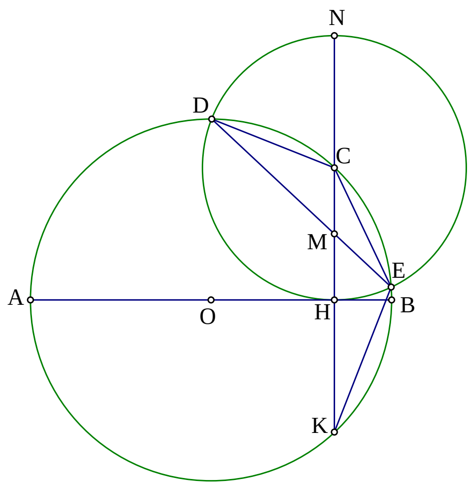
Vẽ $BH \perp CD, BK \perp EF$.

Thì suy ra $BH = BK$

Ta có: $\Delta CBD\$\,\Delta EBF$ suy ra

$\dfrac{CD}{EF} = \dfrac{BH}{BK} = 1 \Leftrightarrow CD = EF$. Đó là điều phải chứng minh.

Câu 6. Giải:



Dựng đường kính HN của đường tròn

$\left(C\right)$ cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại K khi đó ta có

$CN = CH = HK$ và

$MC.MK = MH.MN\left(= MD.ME\right)$.

$\Rightarrow MC.MK = \left(HC - MC\right).\left(HC + MC\right)$

$\Leftrightarrow MC.MK = HC^2 - MC^2 \Leftrightarrow MC(MC + MK) = HC^2$

Hay $\Leftrightarrow MC(MC + MK) = HC^2 \Leftrightarrow MC.2HC = HC^2 \Leftrightarrow HC = 2MC$ là điều phải chứng minh.

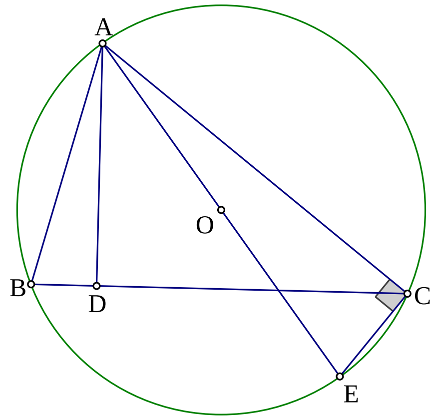
Câu 7. Giải:

Dựng đường kính AE của đường

tròn $(O;R)$.Ta có $\widehat{AEC}=\widehat{ABD}$ (cùng chắn cung AC)

suy ra $\Delta DBA\sim\Delta CEA$, từ đó suy ra

$\widehat{BAD}=\widehat{OAC}$.



Câu 8.

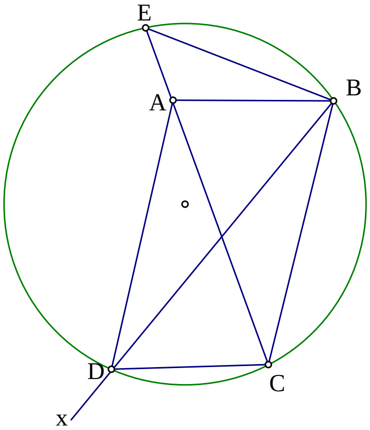
Ta có: $\widehat{BEC}=\widehat{BDC}$ (cùng chắn cung)

BC và $\widehat{ABD}=\widehat{BDC}$ (so le trong)

suy ra $\widehat{BEC}=\widehat{ABD}$.

Vì vậy tia BD là tia tiếp tuyến của

đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE



Câu 9. Giải:

+ Vẽ đường tròn đường kính AB.

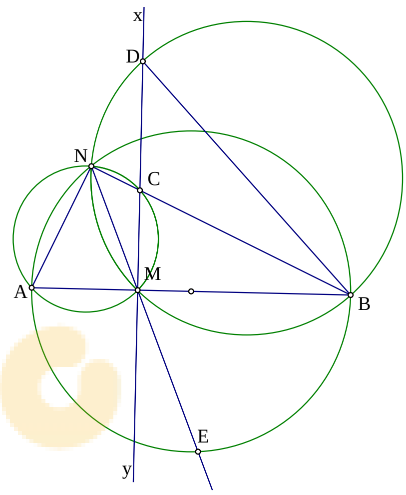
ΔMBD vuông tại M có $MB=MD$

(gt) nên là tam giác vuông cân

$\Rightarrow \widehat{ACM}=45^0$. Từ đó ta có

$\widehat{ANM}=\widehat{ACM}=45^0$ (hai góc nội

tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AM}$)



$\widehat{ANB}=\widehat{ANM}+\widehat{MNB}=90^0$; do đó N thuộc đường tròn đường kính AB.

+ Gọi E là giao điểm của MN và $\overset{\frown}{AB}$ (E khác N). Ta có

$\widehat{ANM}=\widehat{MNB}=45^0\Rightarrow \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EB}\Rightarrow E$ cố định. Vậy MN luôn đi qua một điểm cố định E.

Câu 10. Giải:

Dựng đường kính AH của (O).

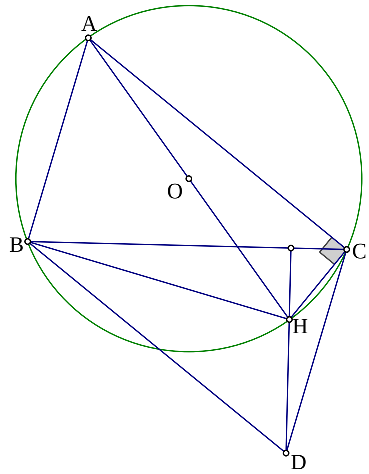
Ta chứng minh H là trực tâm của

ΔBDC. Thật vậy ta có: $\widehat{ACH}=90^0$

$\Rightarrow CH\perp AC \Leftrightarrow CH\perp BD$. Tương tự ta cũng có:

$BH\perp AB\Leftrightarrow BH\perp CD$. Như vậy H

là trực tâm của ΔBDC. Suy ra trực tâm H là điểm cố định.

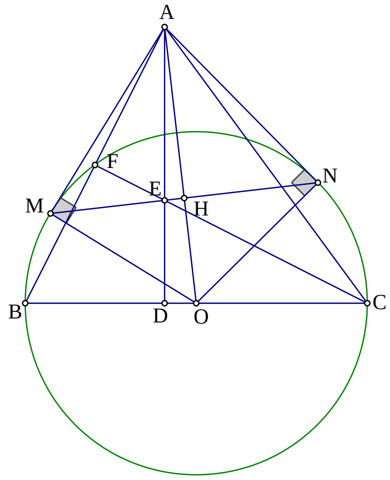


Câu 11. Giải:

AB cắt (O) tại B và F. Vì $\Delta AEH\$\Delta ADO$

suy ra $AE.AD = AH.AO = AM^2$.

Để chứng minh E là trực tâm của tam giác ABC, ta cần chứng minh $\widehat{AFE} = 90^0$, nghĩa là cần có $AF.AB = AE.AD$.

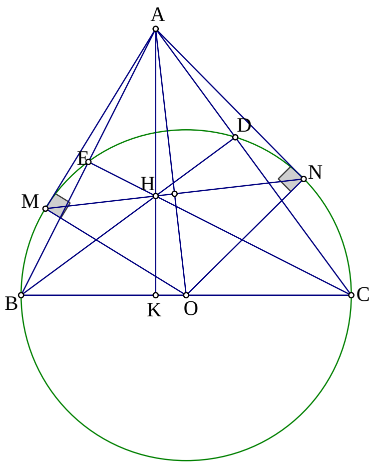


Nhưng ta có: $AF.AB = AM^2$ (Tính chất tiếp tuyến, cát tuyến) hoặc có thể dùng tam giác đồng dạng

Câu 12. Giải:

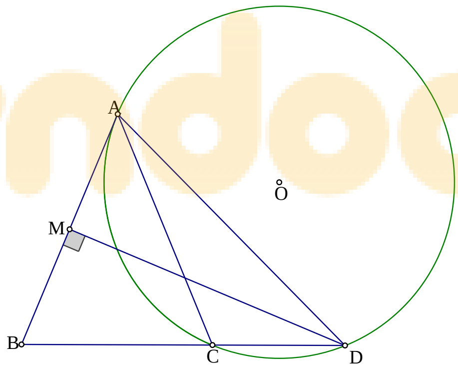
Gọi D, E là giao điểm của đường tròn (O) với các cạnh AC, AB thì H là giao điểm của BD, CE.

Chứng minh được $\widehat{AMH} = \widehat{AMN}$, từ đó có M, H, N thẳng hàng.



Câu 13. Giải:

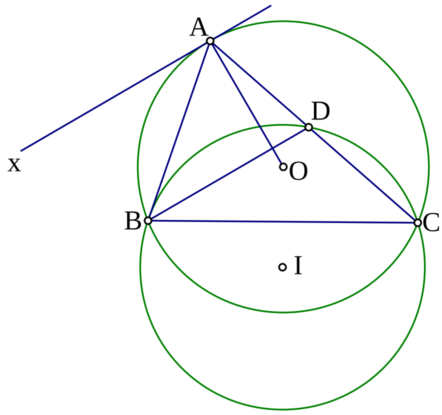
Hai tam giác cân ABC, DAB có chung góc ở đáy $\widehat{ABC}$, do đó $\widehat{BAC} = \widehat{ADC}$. Suy ra BA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD



Câu 14. Giải:

Vẽ tiếp tuyến Ax của đường tròn (O).

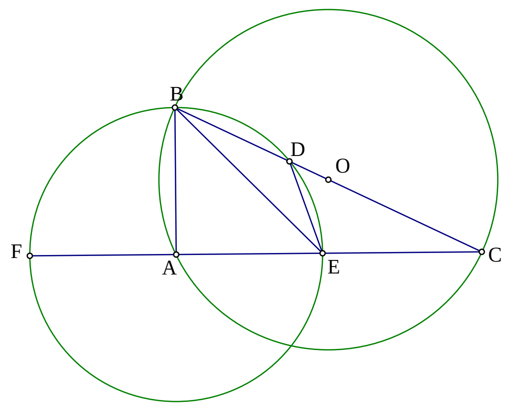
$\widehat{xAB}$ và $\widehat{ACB}$ lần lượt là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AB của (O) nên $\widehat{xAB} = \widehat{ACB}$.



$\widehat{ABD}$ và $\widehat{ACB}$ lần lượt là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung BD của (I) nên $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$.

Do đó $\widehat{xAB} = \widehat{ABD} \Rightarrow Ax // BD$. Mà $OA \perp Ax, OA \perp BD$ suy ra $OA \perp BD$.

Câu 15. Giải:



Giả sử CA cắt $\left(O\right)$ tại F thì EF là

đường kính của $\left(A;AB\right)$, ta có $\overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{BE}$

(vì $BA\perp EF$) . Ta có: $\widehat{BED}=\widehat{BFD}$,

$\widehat{BCF}\equiv\widehat{BCE}=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\left(\overset{\frown}{BF}-\overset{\frown}{DE}\right)=$

$\dfrac{1}{2}\text{sđ}\left(\overset{\frown}{BE}-\overset{\frown}{DE}\right)=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BD}=\widehat{BFD}$

Từ đó suy ra $\widehat{BED}=\widehat{ECB}$.

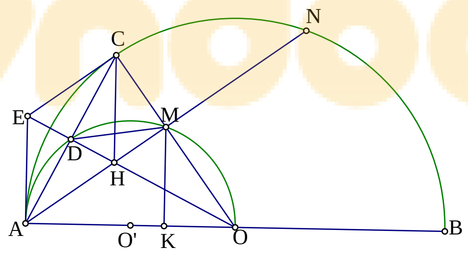
Xét tam giác $\Delta BCE,\Delta BED$ có $\widehat{B}$ chung, $\widehat{BED}=\widehat{ECB}$

$\Rightarrow \Delta BCE\$\ \Delta BED \Leftrightarrow \dfrac{BC}{BE}=\dfrac{BE}{BD}\Rightarrow DB.CB=EB^2$.

Câu 16 . Giải:

a) Ta có $OA=OC=a\Rightarrow \Delta OAC$ cân tại O. Mà $\widehat{ADO}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\left(O'\right)$) $\Rightarrow OD\perp AC\Rightarrow OD$ cũng là đường phân giác $\widehat{AOC}$, nghĩa là $\widehat{AOD}=\widehat{DOM}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DM}$ (hai góc ở tâm bằng nhau nên cung chắn bằng nhau)

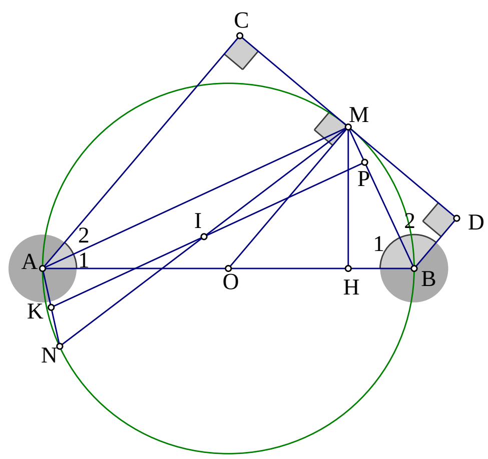


$\Rightarrow AD=DM\Rightarrow \Delta ADM$ cân tại D.

b) ΔAOE và ΔCOE có OE (chung);

$\widehat{AOE}=\widehat{COE}$ (cmt); $OA=OC=a$, $\Delta AOE=\Delta COE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{EAO}=\widehat{ECO}=90^0$ hay $EA\perp AB$ tại A, $OA=a$ là bán kính $\left(O\right)\Rightarrow EA$ là tiếp tuyến của $\left(O\right)$ và $\left(O'\right)$.

Câu 17. Giải:



a) Do BD, BH là hai tiếp tuyến cắt nhau đối với đường tròn (M)

$\Rightarrow BM$ là tia phân giác $\widehat{ABD}$ $\Rightarrow \widehat{B_1} + \widehat{B_2} = \dfrac{\widehat{HBD}}{2}$.Lý luận tương

tự AM là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$.

b) $\widehat{AMB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{B_1} = 90^0$

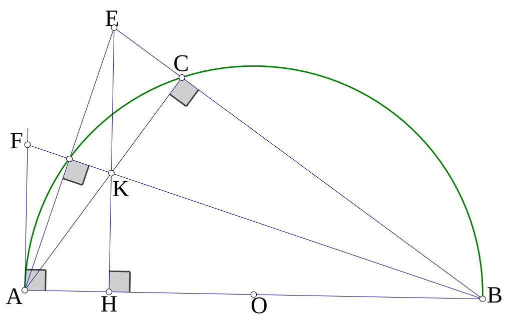
$\Rightarrow \dfrac{\widehat{HBD} + \widehat{BAC}}{2} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HBD} + \widehat{BAC} = 180^0$. Vậy $AC//BD$, mà $MD \perp BD, MC \perp AC$ (gt) nên M, C, D thẳng hàng. Ta có OM là đường trung bình của hình thang vuông $ABDC$ nên $OM//AC$ mà $CD \perp AC$ (gt) $\Rightarrow OM \perp CD$ tại M, CM là bán kính của (M) $\Rightarrow CD$ là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M.

c) Áp dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau của một đường tròn, có:

$\begin{cases} AC = AH \\ BD = BH \end{cases} \Rightarrow AC + BD = AH + BH = AB = 2R(const)$.Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông: $AC.BD = AH.BH = MH^2 = \dfrac{CD^2}{4}$(do ΔCHD vuông có HM là trung tuyến ứng với cạnh huyền).

d) Ta có $IP//AM$ (vì cùng vuông góc với MB).Kéo dài IP cắt AN tại K; ΔAMN có IK là đường trung bình $\Rightarrow K$ trung điểm của AN. Mà A, N cố định nên K cố định. Điểm P luôn nhìn hai điểm K, B cố định dưới một góc vuông nên P chuyển động trên đường tròn đường kính KB.

Câu 18. Giải:



a) Ta có $\widehat{AIB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nủa đường tròn) $\Rightarrow BI \perp AE$

Tương tự $AC \perp BE \Rightarrow \Delta AEB$ hai đường cao AC, BI ắt nhau tại

$K \Rightarrow K$ ực tâm ΔAEB $\Rightarrow EK \perp AB$ ất ba đường cao).

b) Do I là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AC} \Rightarrow \overset{\frown}{IA} = \overset{\frown}{IC} \Rightarrow \widehat{IBA} = \widehat{IBC}$ ội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau). Mà $\widehat{IAC} = \widehat{IBC}$ ội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{IC}$ $\Rightarrow \widehat{IAC} = \widehat{IBA}$
ΔFAK AI là đường cao $(AI \perp BI)$ đồng thời là đường trung tuyến (F K đối xứng qua I)

$\Rightarrow \Delta FAK$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{FAI} = \widehat{IAK}$ .Ta có

$\widehat{FAB} = \widehat{FAI} + \widehat{IAB} = \widehat{IAK} + \widehat{IAB} = \widehat{IBA} + \widehat{IAB} = 90^0 \Rightarrow AF \perp AB$ tại $A \Rightarrow AF$ là tiếp tuyến của (O).

c) $\sin \widehat{KAH} = \dfrac{KH}{AK}$ mà

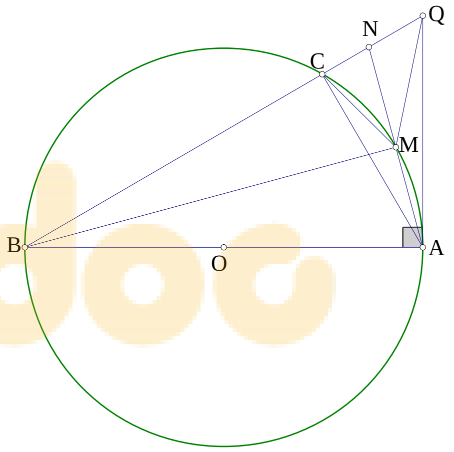
$\sin \widehat{BAC} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \Rightarrow \dfrac{KH}{AK} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \Rightarrow AK = \sqrt{\dfrac{3}{2}}HK$ ΔABE có BI vừa là đường cao vừa là đường phân giác $\Rightarrow \Delta ABE$ cân tại B nên BI cũng là đường trung trực $\Rightarrow KA = KE\left(K \in BI\right)$.

$EH = EK + KH = \left(\sqrt{\dfrac{3}{2}} + 1\right)KH$ .Ta có

$KH\left(KH + 2HE\right) = KH\left[KH + 2\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}} + 1\right)KH\right] = \left(3 + \sqrt{6}\right)KH^2$.

Và $2HE.KE = 2\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}} + 1\right)HK.\sqrt{\dfrac{3}{2}}HK = \left(\sqrt{3} + 6\right)HK^2$. Suy ra $KH\left(KH + 2HE\right) = 2HE.KE$.

Câu 19. Giải:



a) Do M là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AC}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MC}$ $\Rightarrow \widehat{NBM} = \widehat{ABM}$

(hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) $\Rightarrow BM$ là đường phân giác $\widehat{ABN}$ trong ΔABM.

[

Mặt khá $\widehat{BMA} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

ΔBAN có BM vừa là đường cao vừa là đường phân giác $\Rightarrow \Delta BAN$ cân tại B

$\Rightarrow \widehat{BAN} = \widehat{BNA}$.Ta lại có $\widehat{BAN} = \widehat{MCN}$ (vì cùng bù $\widehat{BCM}$). Do đó $\widehat{BNA} = \widehat{MCN} \Rightarrow \Delta CMN$ cân tại M .

b) Do $MB = MQ$ (gt) $\Rightarrow \Delta BMQ$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{MBQ} = \widehat{MQB}$ $\widehat{MCB} = \widehat{MNQ}$ (vì cùng bù với hai góc bằng nhau) $\Rightarrow \Delta BCM \sim \Delta QNM$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BC}{QN} = \dfrac{CM}{MN} = 1$ (do ΔCMN cân tại M nên $CM = MN$)$\Rightarrow QN = BC$. $\widehat{BCA} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Xét ΔBAQ vuông tại A $AC \perp BQ$

$AB^2 = BC.BQ = BC\left(BN + NQ\right) = BC\left(AB + BC\right)$ (1). Đặt $BC = x, x > 0$ ết $AB = 2R$ ừ (1) cho $4R^2 = x\left(2R + x\right) \Leftrightarrow x^2 + 2Rx - 4R^2 = 0$ $\Delta' = R^2 + 4R^2 = 5R^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = R\sqrt{5}$

$x_1 = -R + R\sqrt{5}$ $x_2 = -R - R\sqrt{5} < 0$ ại) . Vậy $BC = \left(\sqrt{5} - 1\right)R$

Câu 20. Giải:

a) Đường kính AC vuông góc

với dây DE tại M $\Rightarrow MD = ME$.

Tứ giác $ADBE$ có $MD = ME$,

$MA = MB$ (gt), $AB \perp DE$

$\Rightarrow ADBE$ là hình thoi (hình bình

hành có hai đường chéo vuông góc nhau).

b) Ta có $\widehat{BIC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nủa đường tròn (O'))

$\widehat{ADC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))$\Rightarrow BI \perp CD$ và $AD \perp DC$ nên $AD//BI$, mà $BE//AD \Rightarrow E, B, I$ thẳng hàng (tiên đề Ơclit). ΔDIE có IM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền $\Rightarrow MI = MD$. Do $MI = MD$ (cmt) $\Rightarrow \Delta MDI$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{MID} = \widehat{MDI}$

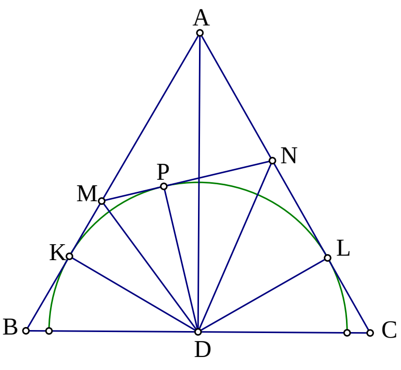
+ $O'I = O'C = R \Rightarrow \Delta O'IC$ cân tại O' $\Rightarrow \widehat{O'IC} = \widehat{O'CI}$.Suy ra

$\widehat{MID} + \widehat{O'IC} = \widehat{MDI} + \widehat{O'CI} = 90^0$ (ΔMCD vuông tại M). Vậy $MI \perp O'I$ tại I, $O'I = R'$ bán kính đường tròn (O') $\Rightarrow MI$ là tiếp tuyến của đường tròn (O').

c) $\widehat{BCI} = \widehat{BIM}$ (góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn $\overset{\frown}{BI}$) $\widehat{BCI} = \widehat{BIH}$ (cùng phụ $\widehat{HIC}$) $\Rightarrow \widehat{BIM} = \widehat{BIH} \Rightarrow IB$ là phân giác $\widehat{MIH}$ trong ΔMIH. Ta lại có $BI \perp CI \Rightarrow IC$ là phân giác ngoài tại đỉnh I của ΔMIH. Áp dụng tính chất phân giác đối với ΔMIH có:

$\dfrac{BH}{MB} = \dfrac{IH}{MI} = \dfrac{CH}{CM} \Rightarrow CH.MB = BH.MC$.

Câu 21. Giải:



Xét tứ giác $AKDL$ có $\widehat{KDL} + \widehat{KAL} = 180^0$

(vì $\widehat{K} = \widehat{L} = 90^0$ $\Rightarrow \widehat{KDL} = 180^0 - 60^0 = 120^0$

ất hai tiếp tuyến cắt nhau

ta có DM, DN ần lượt là tia phân giác $\widehat{KDP}$ $\widehat{PDL}$

$\Rightarrow \widehat{MDN} = \dfrac{\widehat{KDP} + \widehat{PDL}}{2} = \dfrac{\widehat{KDL}}{2} = \dfrac{120^0}{2} = 60^0$

$\widehat{MDC} = \widehat{MDN} + \widehat{NDC} = 60^0 + \widehat{NDC}$ $\widehat{MDC} = \widehat{B} + \widehat{BMD} = 60^0 + \widehat{NDC}$ ΔBMD

$\Rightarrow \widehat{NDC} = \widehat{BMD}$ $\widehat{MBD} = \widehat{DCN} = 60^0$ ΔABC đều)$\Rightarrow \Delta BMD \sim \Delta CDN$

$\Rightarrow \dfrac{BM}{CD} = \dfrac{BD}{CN} \Rightarrow BM.CN = BD.CD = \dfrac{BC^2}{4}$

b) Ta có $\dfrac{S_{MDN}}{S_{ABC}}=\dfrac{\frac{1}{2}MN.PD}{\frac{1}{2}AD.BC}=\dfrac{MN}{BC}.\dfrac{PD}{AD}=\dfrac{MN}{BC}.\dfrac{KD}{AD}=\dfrac{MN}{2BC}$.

Vì $D\in MD$ là tia phân giác $\widehat{BMN}\Rightarrow DK=DP$, ΔAKD có $\widehat{K}=90^0,\widehat{KAD}=30^0\Rightarrow KD=\dfrac{AD}{2}\Rightarrow\dfrac{KD}{AD}=\dfrac{1}{2}$.

c) Dựng đường tròn bàng tiếp trong góc A có tâm O của ΔAEF. Do AD là đường trung tuyến của ΔABC đều nên AD là tia phân giác $\widehat{BAC}$. Suy ra $O\in AC$. Gọi P',K',L' lần lượt là các tiếp điểm của (O) với EF,AB,AC. Ta có $AK'=AL';P'E=EK';P'F=FL'$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

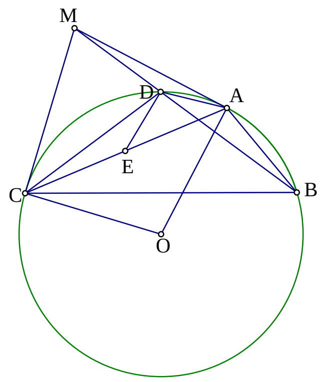
$\Rightarrow P_{AEF}=AE+EF+FA=AE+EP'+P'F+FA$

$=AE+EK'+FL'+FA=AK'+AL'=2AK'$. Mà $P_{AEF}=\dfrac{1}{2}P_{ABC}$ (gt)

$\Rightarrow 2AK'=\dfrac{1}{2}P_{ABC}=\dfrac{3}{2}AB$ (ΔABC đều) $\Rightarrow AK'=\dfrac{3}{4}AB\Rightarrow BK'=\dfrac{AB}{4}$ (vì $AK'+K'B=AB$)

$\Rightarrow BK'.AB=\dfrac{AB^2}{4}$. Mặt khác $BD^2=\left(\dfrac{BD}{2}\right)^2=\dfrac{BC^2}{4}$ (D là trung điểm BC); $AB=BC$ (ΔABC đều) $\Rightarrow BK'.AB=BD^2\Rightarrow\Delta BKD'\sim\Delta BDA$ (c.g.c) $\Rightarrow\widehat{BK'D}=\widehat{BDA}=90^0$. Ta lại có $\widehat{OK'B}=90^0\Rightarrow O\equiv D$ (vì $O,D\in AD$). Mà $\widehat{K'AL'}+\widehat{K'DL'}=180^0$ (vì $AK'DL'$ là tứ giác nội tiếp) mà $\widehat{K'AL'}=60^0\Rightarrow\widehat{K'DL'}=120^0\Rightarrow\widehat{EDF}=60^0$ (tia phân giác của hai góc kề).

Câu 22. Giải:



a) Xét ΔMAD và ΔMBA có $\widehat{AMB}$ chung;

$\widehat{MAD}=\widehat{MBA}$ (góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cùng chắn $\overset{\frown}{AD}$)

$\Rightarrow\Delta MAD\backsim\Delta MBA$ (g.g)

$\Rightarrow\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{MD}{MA}$.

b) Ta có $MA=MC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau của một đường tròn) $\Rightarrow\dfrac{MD}{MA}=\dfrac{MD}{MC}$. Lập luận tương tự, ta có $\dfrac{MD}{MC}=\dfrac{CD}{BC}$. Suy ra $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{CD}{BC}\Rightarrow AD.BC=AB.CD$.

c) Dựng điểm $E\in AC$ $\widehat{EDC}=\widehat{ADB}$

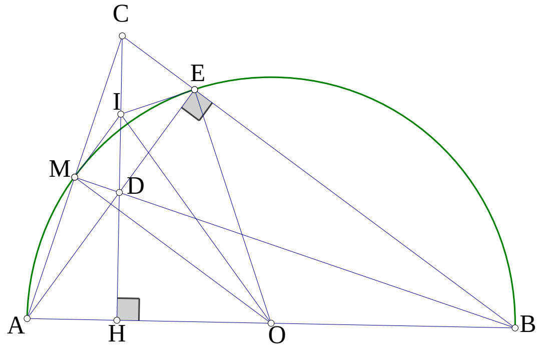
ΔDAB và ΔDEC có $\widehat{ADB} = \widehat{EDC}$ (cách dựng), $\widehat{ABD} = \widehat{ECD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AD}$) $\Rightarrow \Delta DAB\$ \Delta DEC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{EC} = \dfrac{BD}{DC} \Rightarrow AB.DC = EC.BD$ (1). Do $\widehat{EDC} = \widehat{ADB} \Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{ADE}$, nên $\Delta DAE\$ \Delta DBC$ (g.g)$\Rightarrow AD.BC = BD.AE$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $AB.CD + AD.BC = BD\left(AE + EC\right) = BD.AC$.

c) Ta có $\begin{cases} AD.BC = AB.CD \\ AD.BC + AB.CD = AC.BD \end{cases} \Rightarrow 2AB.CD = AC.BD$.

Mà $AC = 2AB$ (gt) $\Rightarrow 2AB.CD = 2AB.BD \Rightarrow CD = BD$. Suy ra tam giác BCD cân tại D.

Câu 23. Giải:



a) Áp dụng tính chất góc nội tiếp chắn nửa đường tròn ta có:

$\widehat{AEB} = \widehat{AMB} = 90^0$, vậy

$\widehat{BMC} = \widehat{AEC} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{AEC} + \widehat{BMC} = 180^0 \Rightarrow$ Tứ giác $MCED$ nội tiếp đường tròn. ΔABC có hai đường cao BM, AE cắt nhau tại $D \Rightarrow D$ là trực tâm $\Delta ABC \Rightarrow CD \perp AB$.

b) $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{BE}{AB} = \dfrac{BH}{BC} \Rightarrow BE.BC = BH.AB$.

c) + Gọi I là giao điểm của tiếp tuyến tại M của đường tròn $\left(O\right)$ với CD. Trong đường tròn $\left(O\right)$ có $\widehat{IMD} = \widehat{MAB}$ (góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cùng chắn $\overset{\frown}{MB}$), $\widehat{MAB} = \widehat{MDI}$ (cùng phụ với $\widehat{ACH}$)$\Rightarrow \widehat{IMD} = \widehat{MDI} \Rightarrow \Delta IMD$ cân tại $I \Rightarrow IM = ID$.

Ta lại có $\widehat{IMC} = \widehat{ICM}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau) $\Rightarrow \Delta MIC$ cân tại $I \Rightarrow IM = IC$.

Vậy $IM = ID = IC \Rightarrow I$ là trung điểm của CD.

+ ΔCED có EI là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $IE = IC = ID = IM$, ΔCED và ΔIED có $IM = IE$ (cmt), OI chung, $OM = OE = R \Rightarrow \Delta IMO = \Delta IEO$

$\Rightarrow \widehat{IEO} = \widehat{IMO} = 90^0 \Rightarrow IE \perp OE, OE = R$ IE ếp tuyến của đường tròn $\left(O\right)$ ại E. Nghĩa là các tiếp tuyến tại M, E ủa đường tròn $\left(O\right)$ ắt nhau tại một điểm I ộc CD

ΔAHC $\widehat{H} = 90^0$ $\widehat{CAH} = 45^0 \Rightarrow \Delta AHC$ ại $H \Rightarrow CH = AH = x$

$\widehat{EAB} = 30^0 \Rightarrow \widehat{EBA} = 60^0$ $\cot\widehat{EBA} = \dfrac{HB}{HC} = \cot 60^0 = \sqrt{3} \Rightarrow HB = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.HC = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.x$

$$AB = AH + HB \Rightarrow 2R = x + \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{6R}{\sqrt{3} + 3} = R\left(3 - \sqrt{3}\right)$$

Vậy $S_{ABC}=\dfrac{AB.CH}{2}=\dfrac{1}{2}.2R.R\left(3-\sqrt{3}\right)R^2$ (đvdt).

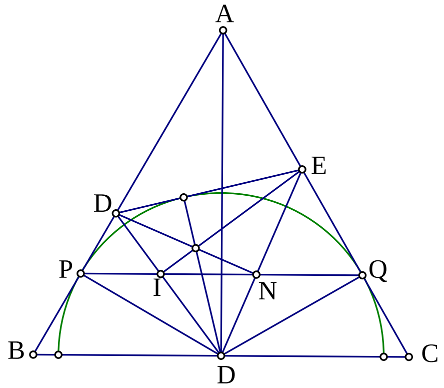
Câu 24. Giải:

a) Ta có $\begin{cases}\widehat{BDO}+\widehat{BOD}=180^0-\widehat{B}=120^0\\ \widehat{BOD}+\widehat{COE}=180^0-\widehat{DOE}=120^0\end{cases}\Rightarrow \widehat{BDO}=\widehat{COE}$,

mà $\widehat{DOE}=\widehat{B}=60^0$

$\Rightarrow \Delta BDO\sim\Delta COE$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BD}{OC}=\dfrac{OB}{CE}$

$\Rightarrow BD.CE=OB.OC=\dfrac{BC^2}{4}$ (không đổi).



b)

$\Delta BDO\sim\Delta COE\ \Rightarrow \dfrac{OD}{OE}=\dfrac{BD}{OC}=\dfrac{BD}{OB}$ mặt khác

$\widehat{DBO}=\widehat{DOE}=60^0\Rightarrow \Delta BDO\sim\Delta ODE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BDO}=\widehat{ODE}$, mà tia DO nằm giữa hai tia $DB,DE\Rightarrow DO$ là tia phân giác $\widehat{BDE}$.

c) ΔABC đều nên đường trung tuyến AO cũng là đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$, mà DO là phân giác ngoài tại đỉnh $D\Rightarrow O$ là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A của $\Delta ADE\Rightarrow$ĐƯờng tròn $\left(O\right)$ luôn tiếp xúc DE,AC.

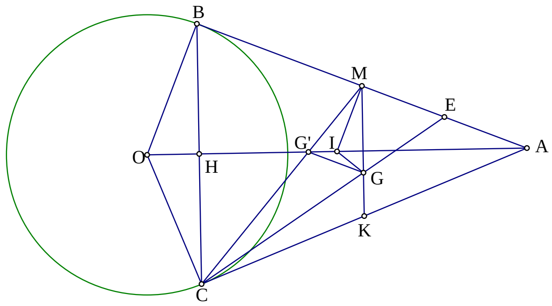
d) $AP=AQ$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau), $AB=AC$

$\Rightarrow\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{AQ}{AC}\Rightarrow PQ//BC\Rightarrow\widehat{IQA}=\widehat{ACB}=60^0$, mà $\widehat{DOE}=60^0\ \Rightarrow\widehat{IQE}=\widehat{IOE}=60^0;O,Q$ là hai đỉnh liên tiếp của tứ giác $IOQE\Rightarrow$Tứ giác $IOQE$ nội tiếp (cùng thuộc một cung chứa góc). Suy ra $\widehat{EIO}=\widehat{EQO}=90^0$. Lý luận tương tự $\widehat{DNE}=90^0$. Vậy tứ giác $DINE$ ($\widehat{DIE}$ và $\widehat{DNE}$ cùng nhìn DE dưới một góc vuông) $\Rightarrow\widehat{ONI}=\widehat{ODE}$. Vậy $\Delta ONI\sim\Delta ODE$ (g.g)

$\Rightarrow\dfrac{IN}{DE}=\dfrac{ON}{OD}=\cos 60^0=\dfrac{1}{2}\Rightarrow DE=2NI$.

Câu 25. Giải:

a) Do AB,AC là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn $\left(O\right)$ nên $\widehat{ABO}=\widehat{ACO}=90^0\Rightarrow B,C$



thuộc đường tròn đường kính OA có tâm I là trung điểm OA.

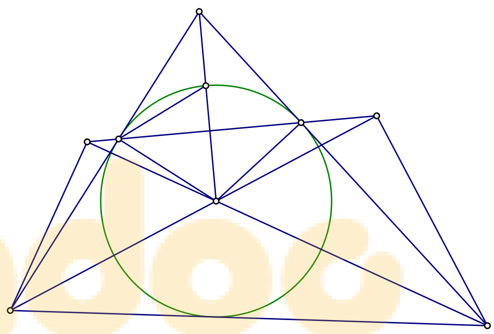
b) Ta có $AM.AO=\frac{AB}{2}.2AI=AB.AI$.

c) Gọi E là trung điểm MA, do G là trọng tâm ΔCMA nên $G\in CE$ và $\frac{GE}{CE}=\frac{1}{3}$. Mặt khác $\frac{ME}{BE}=\frac{1}{3}$ (vì $ME=\frac{MA}{2}=\frac{MB}{2}$ nên $ME=\frac{BE}{3}$) $\Rightarrow \frac{GE}{CE}=\frac{ME}{BE}$, theo định lý Ta-lét đảo $\Rightarrow MG//BC$.

d) Gọi G' là giao điểm của OA và $CM \Rightarrow G'$ là trọng tâm ΔABC. Nên $\frac{G'M}{CM}=\frac{1}{3}=\frac{GE}{CE'}$, theo định lý Ta-lét đảo $GG'//ME$ (1)

MI là đường trung bình trong $\Delta OAB \Rightarrow MI//OB$, mà $AB\perp OB$ (cmt) $\Rightarrow MI\perp AB$, nghĩa là $MI\perp ME$ (2). Từ (1) và (2) cho $MI\perp GG'$, ta lại có $GI'\perp MK$ (vì $OA\perp MK$) nên I là trực tâm $\Delta MGG' \Rightarrow GI\perp G'M$ tức $GI\perp CM$.

Câu 26. Giải:



a). Gọi O' là giao điểm của AO với cung nhỏ DE của đường tròn $(O)\Rightarrow O'$ thuộc đường phân giác của $\widehat{A}$ trong ΔADE. Ta có

$\widehat{DOA}=\widehat{EOA}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \widehat{DO'}=\widehat{O'E}$.

Mà $\widehat{ADO'}=\frac{1}{2}$sđ$\widehat{DO'}$; $\widehat{EDO'}=\frac{1}{2}$sđ$\widehat{O'E}$ $\Rightarrow \widehat{ADO'}=\widehat{EDO'}\Rightarrow DO'$ là phân giác $\widehat{D}\Rightarrow O'$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔADE. Do đó $OO'=R$.

b) Do $AB=AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \Delta ADE$ cân tại A nên

$\widehat{ADE}=\frac{180^0-\widehat{BAC}}{2}=90^0-\frac{\widehat{BAC}}{2}$. Mà $\widehat{ADE}=\widehat{ABM}+\widehat{NMB}=\frac{\widehat{ABC}}{2}+\widehat{NMB}$ BO

$\widehat{ABC}$ $\widehat{ABM}=\frac{\widehat{ABC}}{2}$ $\Rightarrow \widehat{NMB}=\widehat{ADE}-\frac{\widehat{B}}{2}=90^0-\frac{\widehat{BAC}+\widehat{ABC}}{2}=\frac{\widehat{ACB}}{2}$ ặt

khác $\widehat{NCB}=\frac{\widehat{ACB}}{2}$ CO $\widehat{ACB}$ $\widehat{NMB}=\widehat{NCB}$ M,C là hai đỉnh liên tiếp của tứ giác $BCMN\Rightarrow$ ứ giác $BCMN$ ội tiếp (vì cùng thuộc một cung chứa góc).

c) ΔNMO ΔBCO $\widehat{NOM}=\widehat{BOC}$ (đối đỉnh); $\widehat{NMO}=\widehat{BCO}$ $\Rightarrow \Delta NMO\$\Delta BCO$

$\Rightarrow \frac{OM}{OC}=\frac{ON}{OB}=\frac{MN}{BC}$ Tương tự $\Delta DMO\$\Delta ACO$ $\Rightarrow \frac{DM}{AC}=\frac{OM}{OC}$ $\Delta NEO\$\Delta BAO$

-----------////-------------