

CHƯƠNG I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Hàm số $y = \sin x$

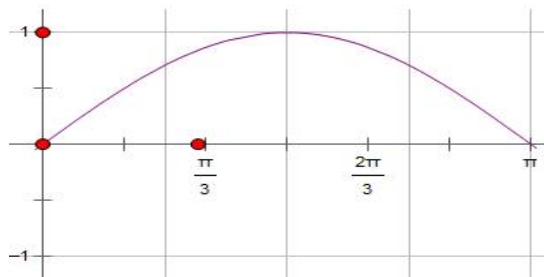
- Có tập xác định $D = \mathbb{R}$;
- Là hàm số lẻ;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $2f$, $\sin(x + k2f) = \sin x$;
- Do hàm số $y = \sin x$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $2f$ nên ta chỉ cần khảo sát hàm số đó trên đoạn có độ dài $2f$, chẳng hạn trên đoạn $[-f; f]$.

Khi vẽ đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-f; f]$ ta nên để ý rằng : Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ, do đó đồ thị của nó nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng. Vì vậy, đầu tiên ta vẽ đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; f]$

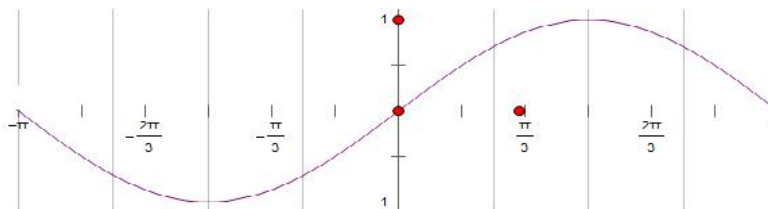
Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
y = sin x	0	1	0

Đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; f]$



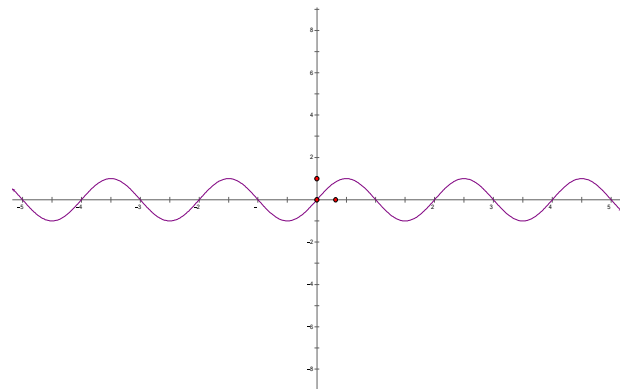
Lấy đối xứng phần đồ thị này qua gốc tọa độ lập thành đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-f; f]$



Tịnh tiến phần đồ thị sang trái, sang phải những đoạn có độ dài $2f, 4f, 6f, \dots$ thì ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y = \sin x$. Đồ thị đó được gọi là một đường hình sin.

Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng

$\left(-\frac{f}{2}; \frac{f}{2}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{f}{2}; \frac{3f}{2}\right)$.



Từ đó do tính tuần hoàn với chu kì $2f$, hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{f}{2} + k2f; \frac{3f}{2} + k2f\right)$

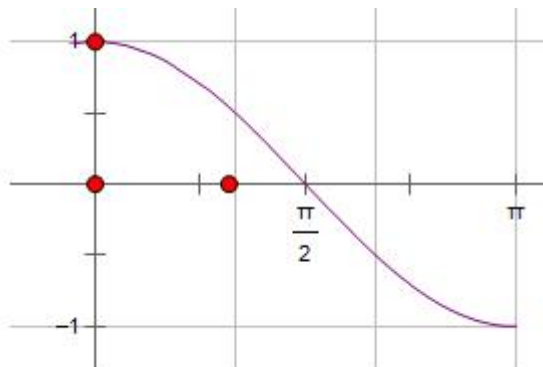
2. Hàm số $y = \cos x$

- Có tập xác định $D = \mathbb{R}$;
- Là hàm số chẵn;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì $2f$;
- Do hàm số $y = \cos x$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $2f$ nên ta chỉ cần khảo sát hàm số đó trên đoạn có độ dài 2π , chẳng hạn trên đoạn $[-f; f]$.

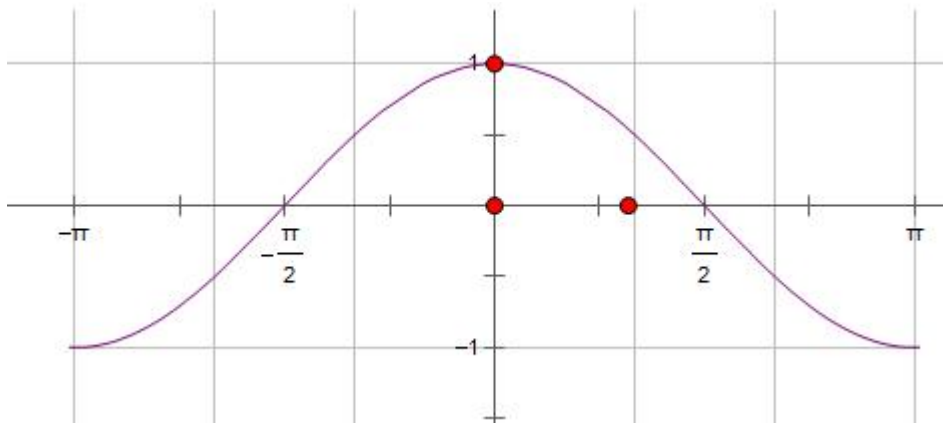
Khi vẽ đồ thị của hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-f; f]$ ta nên để ý rằng: Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn, do đó đồ thị của nó nhận trục Oy làm trục đối xứng. Vì vậy, đầu tiên ta vẽ đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[0; f]$

Bảng biến thiên:

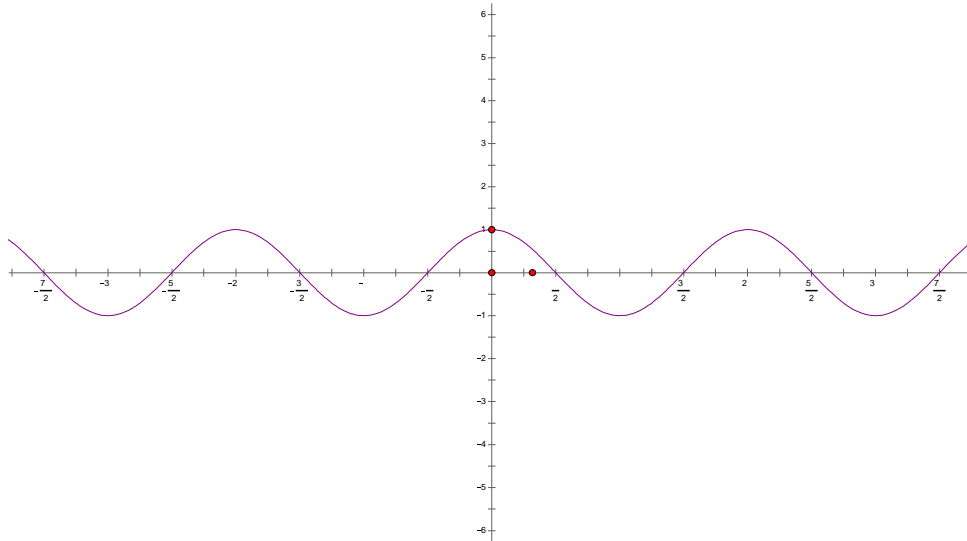
Đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[0; \pi]$



Lấy đối xứng phần đồ thị này qua trục Oy lập thành đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-f; f]$



Tịnh tiến phần đồ thị sang trái, sang phải những đoạn có độ dài $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ thì ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y = \cos x$. Đồ thị đó được gọi là một *đường hình sin*



Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(-f; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; f)$. Từ đó do tính tuần hoàn với chu kỳ $2f$, hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên khoảng $(k2\pi; f + k2\pi)$.

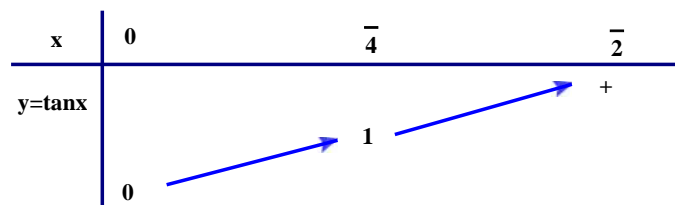
3. Hàm số $y = \tan x$

- Có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{f}{2} + kf \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$;
- Có tập giá trị là \mathbb{R} ;
- Là hàm số lẻ;
- Hàm số tuần hoàn với chu kỳ f , $\tan(x + kf) = \tan x$;

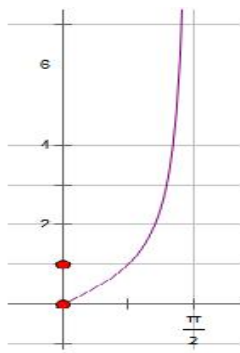
Do hàm số $y = \tan x$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ f nên ta chỉ cần khảo sát hàm số đó trên đoạn có độ dài π , chẳng hạn trên đoạn $\left[-\frac{f}{2}; \frac{f}{2} \right]$.

Khi vẽ đồ thị của hàm số $y = \tan x$ trên đoạn $\left[-\frac{f}{2}; \frac{f}{2} \right]$ ta nên để ý rằng: Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ, do đó đồ thị của nó nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng. Vì vậy, đầu tiên ta vẽ đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$

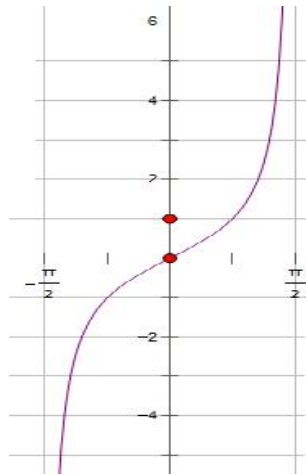
Bảng biến thiên:



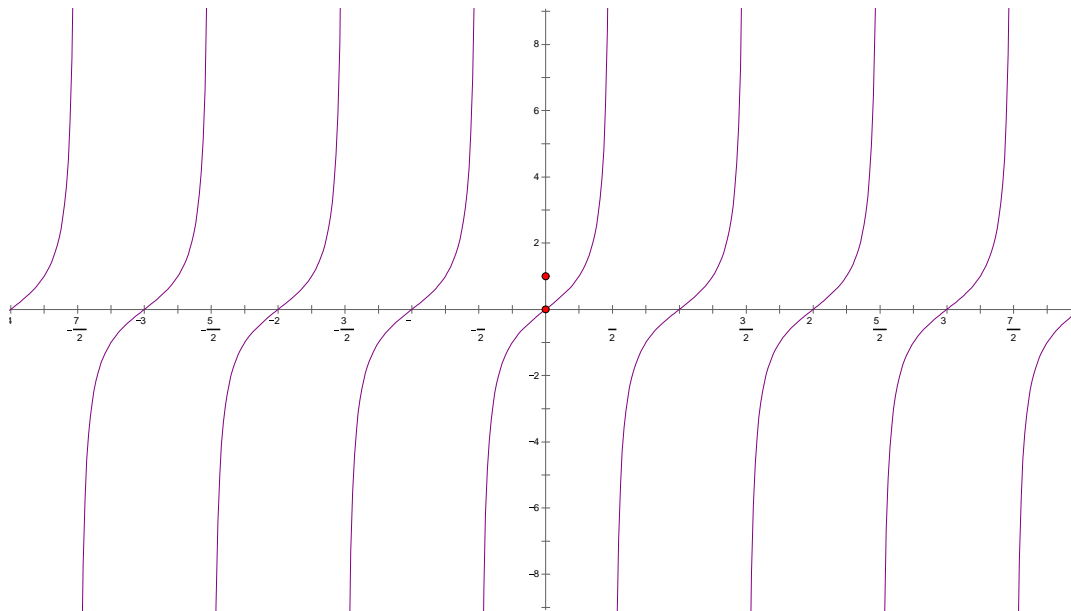
Đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên $\left[0; \frac{f}{2} \right]$



Lấy đối xứng phần đồ thị này qua gốc tọa độ lập thành đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$



Tịnh tiến phần đồ thị sang trái, sang phải những đoạn có độ dài $f, 2f, 3f, \dots$ thì ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y = \tan x$.



Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Từ đó do tính tuần hoàn với chu kỳ π nên

hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

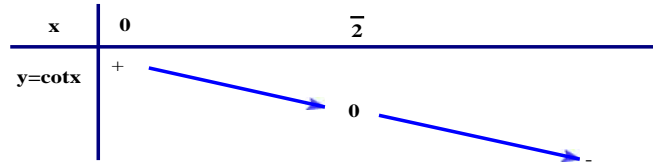
Đồ thị hàm số $y = \tan x$ nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm một đường tiệm cận (đứng).

4. Hàm số $y = \cot x$

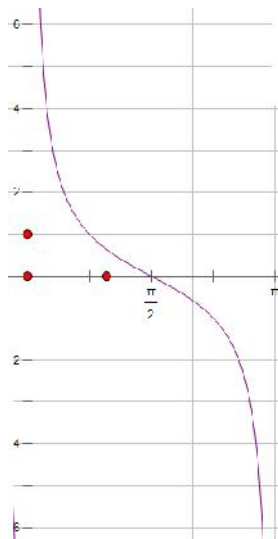
- Có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;
- Có tập giá trị là \mathbb{R} ;
- Là hàm số lẻ;
- Hàm số tuần hoàn với chu kỳ f , $\cot(x + kf) = \cot x$;

Do hàm số $y = \cot x$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ f nên ta chỉ cần khảo sát hàm số đó trên đoạn có độ dài f , chẳng hạn trên đoạn $[0; f]$.

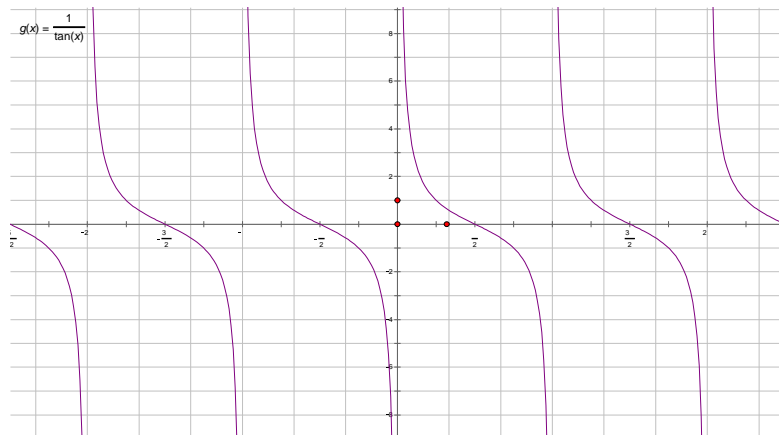
Bảng biến thiên:



Đồ thị hàm số $y = \cot x$ trên $[0; f]$



Tịnh tiến phần đồ thị sang trái, sang phải những đoạn có độ dài $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ thì ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y = \cot x$.



Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên khoảng $(0; f)$. Từ đó do tính tuần hoàn với chu kỳ f nên hàm số $y = \cot x$ đồng biến trên khoảng $(kf; f + kf)$.

Đồ thị hàm số $y = \cot x$ nhận mỗi đường thẳng $x = kf$ làm một đường tiệm cận (đứng).

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số

Phương pháp: Để tìm tập xác định của hàm số ta cần lưu ý các điểm sau

- $y = \sqrt{u(x)}$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) \geq 0$.
- $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ có nghĩa khi và chỉ $u(x), v(x)$ xác định và $v(x) \neq 0$.
- $y = \frac{u(x)}{\sqrt{v(x)}}$ có nghĩa khi và chỉ $u(x), v(x)$ xác định và $v(x) > 0$.
- Hàm số $y = \sin x, y = \cos x$ xác định trên \mathbb{R} và tập giá trị của nó là:
 $-1 \leq \sin x \leq 1; \quad -1 \leq \cos x \leq 1$.

Như vậy, $y = \sin[u(x)], y = \cos[u(x)]$ xác định khi và chỉ khi $u(x)$ xác định.

- $y = \tan u(x)$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $y = \cot u(x)$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

I. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \sin\left(\frac{5x}{x^2 - 1}\right);$ b) $y = \cos\sqrt{4 - x^2};$ c) $y = \sqrt{\sin x};$ d) $y = \sqrt{2 - \sin x}.$

Giải

a) Hàm số $y = \sin\left(\frac{5x}{x^2 - 1}\right)$ xác định $\Leftrightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

b) Hàm số $y = \cos\sqrt{x^2 - 4}$ xác định $\Leftrightarrow 4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

Vậy $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$.

c) Hàm số $y = \sqrt{\sin x}$ xác định $\Leftrightarrow \sin x \geq 0 \Leftrightarrow k2\pi \leq x \leq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $D = \{x \in \mathbb{R} \mid k2\pi \leq x \leq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

d) Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 2 - \sin x > 0$.

Do đó, hàm số luôn luôn xác định hay $D = \mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right);$ b) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right);$ c) $y = \frac{\sin x}{\cos(x - \pi)};$ d) $y = \frac{1}{\tan x - 1}.$

Giải

a) Hàm số $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ xác định $\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) Hàm số $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ xác định $\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

c) Hàm số $y = \frac{\sin x}{\cos(x - \pi)}$ xác định $\Leftrightarrow \cos(x - \pi) \neq 0 \Leftrightarrow x - \pi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

d) Hàm số $y = \frac{1}{\tan x - 1}$ xác định $\begin{cases} \tan x \neq 1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

Ví dụ 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \cos 2x + \frac{1}{\cos x}$;

b) $y = \frac{3\cos 2x}{\sin 3x \cos 3x}$.

Giải

a) Hàm số $y = \cos 2x + \frac{1}{\cos x}$ xác định $\Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) Hàm số $y = \frac{3\cos 2x}{\sin 3x \cos 3x}$ xác định \Leftrightarrow

$$\sin 3x \cos 3x \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 6x \neq 0 \Leftrightarrow 6x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Ví dụ 4. Tìm m để hàm số sau đây xác định trên \mathbb{R} : $y = \sqrt{2m - 3\cos x}$.

Giải

Hàm số đã cho xác định trên \mathbb{R} khi và chỉ khi $2m - 3\cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{2m}{3}$

Bất đẳng thức trên đúng với mọi x khi $1 \leq \frac{2m}{3} \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$.

II. Bài tập rèn luyện

BT 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

$$a) y = \sqrt{1 - \cos^2 x};$$

$$b) y = \sqrt{\frac{2 + \sin x}{1 + \cos x}}.$$

Giải

a) Nhận thấy $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ nên $1 - \cos^2 x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy $D = \mathbb{R}$.

b) Hàm số $y = \sqrt{\frac{2 + \sin x}{1 + \cos x}}$ xác định $\Leftrightarrow 1 + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

BT 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau

$$a) y = \tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right);$$

$$b) y = \tan 6x + \frac{1}{\cot 3x};$$

$$c) y = \frac{\tan 2x}{\sin x + 1} + \cot\left(3x + \frac{\pi}{6}\right);$$

$$d) y = \frac{\tan 5x}{\sin 4x - \cos 3x}.$$

Giải

a) Hàm số $y = \tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$ xác định $\Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{5\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) Hàm số $y = \tan 6x + \frac{1}{\cot 3x}$ xác định

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 6x \neq 0 \\ \sin 3x \neq 0 \\ \cot 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 6x \neq 0 \\ \sin 6x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 12x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) Hàm số $y = \frac{\tan 2x}{\sin x + 1} + \cot\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$ xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sin x \neq -1 \\ \cos 2x \neq 0 \\ \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x \neq -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) Hàm số $y = \frac{\tan 5x}{\sin 4x - \cos 3x}$ xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \cos 5x \neq 0 \\ \sin 4x \neq \cos 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) \neq \cos 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} \\ \frac{\pi}{2} - 4x \neq 3x + k2\pi \\ \frac{\pi}{2} - 4x \neq -3x + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} \\ 7x \neq \frac{\pi}{2} - k2\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} - k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} \\ x \neq \frac{\pi}{14} - \frac{k2\pi}{7}, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{2} - k2\pi \end{cases}$$

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}, \frac{\pi}{14} - \frac{k2\pi}{7}, \frac{\pi}{2} - k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

BT 3. Tìm m để hàm số sau xác định trên \mathbb{R} : $y = \frac{3x}{\sqrt{2\sin^2 x - m\sin x + 1}}$.

Giải

Hàm số xác định trên \mathbb{R} khi và chỉ khi: $2\sin^2 x - m\sin x + 1 > 0$ với mọi $t \in [-1; 1]$

Ta có: $U = m^2 - 8$

- TH 1: $\Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 - 8 < 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$. Khi đó $f(t) > 0, \forall t$ (thỏa mãn)
- TH 2: $\Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2\sqrt{2} \\ m = 2\sqrt{2} \end{cases}$
 - Với $m = -2\sqrt{2}$ thì $f(t) = 2t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 = (\sqrt{2}t - 1)^2$
Ta thấy $f(t) = 0$ tại $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \in [-1; 1]$ (không thỏa mãn)
 - Với $m = 2\sqrt{2}$ thì $f(t) = 2t^2 + 2\sqrt{2}t + 1 = (\sqrt{2}t + 1)^2$
Ta thấy $f(t) = 0$ tại $t = -\frac{1}{\sqrt{2}} \in [-1; 1]$ (không thỏa mãn)
- TH 3: $\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2\sqrt{2} \\ m > 2\sqrt{2} \end{cases}$ khi đó tam thức $f(t)$ có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 (giả sử $t_1 < t_2$)

Ta có bảng xét dấu:

t	-	t₁	-	t₂	+
f(t)	+	0	-	0	+

Từ bảng xét dấu ta thấy:

$$f(t) = 2t^2 - mt + 1 > 0, \forall t \in [-1, 1] \Leftrightarrow t_1 > 1 \text{ hoặc } t_2 < -1$$

a) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có: $f(-x) = \tan(-x) + \cot(-x) = -\tan x - \cot x = -(\tan x + \cot x) = -f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có: $f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-x) = -\sin x \cos x = -f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Ví dụ 3. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = 2\sin x + 3$; b) $y = \sin x + \cos x$.

Giải

a) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 3 = 1; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3 = 5$$

Nhận thấy $\begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

Do đó hàm số không chẵn không lẻ.

b) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có: $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 0; \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

Nhận thấy $\begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$

Do đó hàm số không chẵn không lẻ.

Ví dụ 4. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \sin 2x + \cos \frac{x}{2}$; b) $y = \frac{\cos^3 x + 1}{\sin^3 x}$.

Giải

a) TXĐ: $D = \mathbb{R}$ Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Chọn $x = \frac{\pi}{4} \in D \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \in D$

Ta có: $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{x}{2}$

b) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$\text{Ta có: } f(-x) = \frac{\cos^3(-x)+1}{\sin^3(-x)} = \frac{\cos^3 x + 1}{-\sin^3 x} = -\frac{\cos^3 x + 1}{\sin^3 x} = -f(x)$$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Ví dụ 5. Xác định tham số m để hàm số sau: $y = f(x) = 3m \sin 4x + \cos 2x$ là hàm số chẵn.

Giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có:

$$f(-x) = 3m \sin(-4x) + \cos(-2x) = -3m \sin 4x + \cos 2x$$

Để hàm số đã cho là hàm số chẵn thì:

$$f(-x) = f(x), \forall x \in D \Leftrightarrow 3m \sin 4x + \cos 2x = -3m \sin 4x + \cos 2x, \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow 6m \sin 4x = 0 \Leftrightarrow m = 0$$

II. Bài tập rèn luyện

BT 1. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = 4x^2 + \cos 5x$; b) $y = x^2 \sin x + \cot x$.

Giải

a) TXĐ: $D = \mathbb{R}$ Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$\text{Ta có: } f(-x) = 4(-x)^2 + \cos(-5x) = 4x^2 + \cos 5x = f(x)$$

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

b) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có:

$$f(-x) = (-x)^2 \sin(-x) + \cot(-x) = -x^2 \sin x - \cot x = -(x^2 \sin x + \cot x) = -f(x)$$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

BT 2. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{x-3} + 3 \sin^2 x$; b) $y = \sin \sqrt{1-x}$.

Giải

a) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Ta có: $x = -3 \in D$ nhưng $-x = 3 \notin D$ nên D không có tính đối xứng.

Do đó, hàm số đã cho không chẵn không lẻ.

b) TXĐ: $D = [1; +\infty)$

Ta có: $x = 3 \in D$ nhưng $-x = -3 \notin D$ nên D không có tính đối xứng.

Do đó, hàm số đã cho không chẵn không lẻ.

BT 3. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \sin x + \cos x$; b) $y = \frac{\tan 3x + \cot 5x}{\sin 3x}$.

Giải

a) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Ta có:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + 5 = 2;$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 5 = 8$$

Nhận thấy: $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$

Do đó, hàm số đã cho không chẵn không lẻ.

b) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có:

$$f(-x) = \frac{\tan(-3x) + \cot(-5x)}{\sin(-3x)} = \frac{\tan(3x) + \cot(5x)}{\sin(3x)} = f(x)$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

BT 4. Tìm tham số a, b để hàm số:

$$y = f(x) = \begin{cases} (3a-1)\sin x + b\cos x, & \text{khi } x < 0 \\ a\sin x + (3-2b)\cos x, & \text{khi } x \geq 0 \end{cases} \text{ là hàm số lẻ.}$$

Giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

▪ TH 1: Với $x < 0$ thì $f(x) = (3a-1)\sin x + b\cos x$

$$\text{Và } f(-x) = a\sin(-x) + (3-2b)\cos(-x) = -a\sin x + (3-2b)\cos x$$

Vì hàm số lẻ nên $f(-x) = -f(x)$ hay

$$-a\sin x + (3-2b)\cos x = -(3a-1)\sin x - b\cos x, \forall x < 0$$

$$\Leftrightarrow (2a-1)\sin x + (3-b)\cos x = 0, \forall x < 0$$

$$\text{Đẳng thức trên đúng với mọi } x < 0 \text{ khi } \begin{cases} 2a-1=0 \\ 3-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=3 \end{cases}$$

▪ TH 2: Với $x > 0$ thì $f(x) = a\sin x + (3-2b)\cos x$

$$\text{Và } f(-x) = (3a-1)\sin(-x) + b\cos(-x) = -(3a-1)\sin x + b\cos x$$

Vì hàm số lẻ nên $f(-x) = -f(x)$ hay

$$-(3a-1)\sin x + b\cos x = -a\sin x - (3-2b)\cos x$$

$$\text{Đẳng thức trên đúng với mọi } x > 0 \text{ khi } \begin{cases} 2a-1=0 \\ 3-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=3 \end{cases}$$

Vậy hàm số đã cho lẻ khi $a = \frac{1}{2}, b = 3$.

Dạng 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác

Phương pháp: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D

- $M = \max_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}$
- $m = \min_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases}$

Lưu ý:

- $-1 \leq \sin x \leq 1; -1 \leq \cos x \leq 1.$
- $0 \leq \sin^2 x \leq 1; 0 \leq \cos^2 x \leq 1.$
- $0 \leq \sqrt{\sin x} \leq 1; 0 \leq \sqrt{\cos x} \leq 1.$

I. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$; b) $y = 2\sqrt{\cos x + 1} - 3.$

Giải

a) Ta có:

$$-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 2 \Rightarrow -1 \leq 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \leq 3$$

Hay $-1 \leq y \leq 3$. Suy ra:

$$\text{Max}y = 3 \text{ khi } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Min}y = -1 \text{ khi } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos x \leq 1 &\Rightarrow 0 \leq \cos x + 1 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{\cos x + 1} \leq \sqrt{2} \\ \Rightarrow 0 \leq 2\sqrt{\cos x + 1} \leq 2\sqrt{2} &\Rightarrow -3 \leq 2\sqrt{\cos x + 1} - 3 \leq 2\sqrt{2} - 3 \end{aligned}$$

Hay $-3 \leq y \leq 2\sqrt{2} - 3$ Suy ra

$$\text{Max}y = 2\sqrt{2} - 3 \text{ khi } \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Min}y = -3 \text{ khi } \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = \sin x + \cos x$; b) $y = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x.$

Giải

a) Ta có: $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2} .$

Suy ra:

$$\text{Max}y = \sqrt{2} \text{ khi } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Min}y = -\sqrt{2} \text{ khi } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$b) \text{ Ta có: } y = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) = 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right)$$

Suy ra: $-2 \leq y \leq 2$. Do đó:

$$\text{Maxy} = 2 \text{ khi } \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = 1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Miny} = -2 \text{ khi } \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = -1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$a) y = \cos^2 x + 2\sin x + 2; \quad b) y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1.$$

Giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} y &= \cos^2 x + 2\sin x + 2 = (1 - \sin^2 x)^2 + 2\sin x + 2 \\ &= -\sin^2 x + 2\sin x + 3 = -(\sin x - 1)^2 + 4 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \sin x - 1 \leq 0 \Rightarrow 4 \geq (\sin x - 1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq -(\sin x - 1)^2 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -(\sin x - 1)^2 + 4 \leq 4$$

Hay $0 \leq y \leq 4$

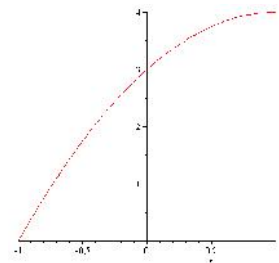
Do đó:

$$\text{Maxy} = 4 \text{ khi } \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Miny} = 0 \text{ khi } \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Lưu ý:

Nếu đặt $t = \sin x, t \in [-1; 1]$. Ta có (P): $y = f(t) = -t^2 + 2t + 3$ xác định với mọi $t \in [-1; 1]$, (P) có hoành độ đỉnh $t = 1$ và trên đoạn $[-1; 1]$ hàm số đồng biến nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = -1$ hay $\sin x = -1$ và đạt giá trị lớn nhất khi $t = 1$ hay $\sin x = 1$.



b) Ta có

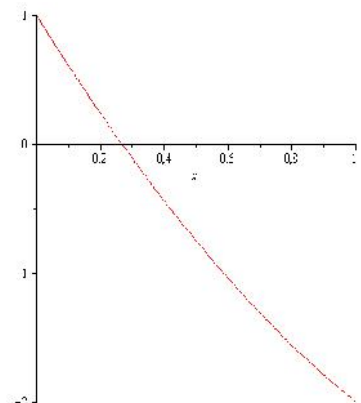
$$\begin{aligned} y &= \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1 = (1 - \cos^2 x)^2 - 2\cos^2 x + 1 \\ &= \cos^4 x - 4\cos^2 x + 2 = (\cos^2 x - 2)^2 - 2 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \cos^2 x - 2 \leq -1 \Leftrightarrow 4 \geq (\cos^2 x - 2)^2 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq (\cos^2 x - 2)^2 - 2 \geq -1 \Leftrightarrow 2 \geq y \geq -1$$

Do đó:

Maxy = 2 khi



$$\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Min $y = -1$ khi

$$\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Lưu ý:

Nếu đặt $t = \cos^2 x, t \in [0; 1]$. Ta có (P): $y = f(t) = t^2 - 4t + 2$ xác định với mọi $t \in [0; 1]$, (P) có hoành độ đỉnh $t = 2 \notin [0; 1]$ và trên đoạn $[0; 1]$ hàm số nghịch biến nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = 1$ và đạt giá trị lớn nhất khi $t = 0$.

II. Bài tập rèn luyện

BT 1. Tìm GTLN và GTNN của hàm số

a) $y = 3\sqrt{\sin x} + 2$; b) $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x + 3$.

Bài 2. Tìm GTLN và GTNN của hàm số

a) $y = 1 + 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; b) $y = 3 - 2\cos^2 3x$; c) $y = 1 + \sqrt{2 + \sin 2x}$; d) $y = \frac{4}{1 + 2\sin^2 x}$.

Bài 3. Tìm GTLN và GTNN của hàm số

a) $y = 6\cos^2 x + \cos^2 2x$; b) $y = 3\sin x + 4\cos x - 1$
 c) $y = 2\sin^2 x + 3\sin 2x - 4\cos^2 x$; c) $y = (4\sin x - 3\cos x)^2 - 4(4\sin x - 3\cos x) + 1$

Bài 4. Cho hai số x, y thỏa mãn $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Tìm GTLN và GTNN (nếu có) của biểu thức

$$P = x + 2y + 1$$

Dạng 4. Chứng minh hàm số tuần hoàn và xác định chu kỳ của nó {Tham khảo}

Phương pháp

Muốn chứng minh hàm số tuần hoàn $f(x)$ tuần hoàn ta thực hiện theo các bước sau:

- Xét hàm số $y = f(x)$, tập xác định là D
- Với mọi $x \in D$, ta có $x - T_0 \in D$ và $x + T_0 \in D$ (1). Chỉ ra $f(x + T_0) = f(x)$ (2)

Vậy hàm số $y = f(x)$ tuần hoàn

Chứng minh hàm tuần hoàn với chu kỳ T_0

Tiếp tục, ta đi chứng minh T_0 là chu kỳ của hàm số tức chứng minh T_0 là số dương nhỏ nhất thỏa (1) và (2). Giả sử có T sao cho $0 < T < T_0$ thỏa mãn tính chất (2) $\Leftrightarrow \dots \Rightarrow$ mâu thuẫn với giả thiết $0 < T < T_0$. Mâu thuẫn này chứng tỏ T_0 là số dương nhỏ nhất thỏa (2). Vậy hàm số tuần hoàn với chu kỳ cơ sở T_0

Một số nhận xét:

- Hàm số $y = \sin x, y = \cos x$ tuần hoàn chu kỳ 2π . Từ đó $y = \sin(ax + b), y = \cos(ax + b)$ có chu

$$\text{kỳ } T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$$

- Hàm số $y = \tan x, y = \cot x$ tuần hoàn chu kỳ π . Từ đó $y = \tan(ax + b), y = \cot(ax + b)$ có chu kỳ

$$T_0 = \frac{\pi}{|a|}$$

Chú ý:

$y = f_1(x)$ có chu kỳ T_1 ; $y = f_2(x)$ có chu kỳ T_2

Thì hàm số $y = f_1(x) \pm f_2(x)$ có chu kỳ T_0 là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2 .

Các dấu hiệu nhận biết hàm số không tuần hoàn

Hàm số $y = f(x)$ không tuần hoàn khi một trong các điều kiện sau vi phạm

- Tập xác định của hàm số là tập hữu hạn
- Tôn tại số a sao cho hàm số không xác định với $x > a$ hoặc $x < a$
- Phương trình $f(x) = k$ có vô số nghiệm hữu hạn
- Phương trình $f(x) = k$ có vô số nghiệm sắp thứ tự $\dots < x_m < x_{m+1} < \dots$ mà $|x_m - x_{m+1}| \rightarrow 0$ hay ∞

I. Các ví dụ mẫu

Bài 1. Chứng minh rằng các hàm số sau là những hàm số tuần hoàn với chu kỳ cơ sở T_0

a) $f(x) = \sin x, T_0 = 2\pi$; b) $f(x) = \tan 2x, T_0 = \frac{\pi}{2}$

Hướng dẫn:

a) Ta có: $f(x + 2\pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Giả sử có số thực dương $T < 2\pi$ thỏa $f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow \sin(x + T) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$ (*)

Cho $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow VT(*) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = \cos T < 1$; $VP(*) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

$\Rightarrow (*)$ không xảy ra với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = 2\pi$

b) Ta có: $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x), \forall x \in D$.

Giả sử có số thực dương $T < \frac{\pi}{2}$ thỏa $f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow \tan(2x + 2T) = \tan 2x, \forall x \in D$ (**)

Cho $x = 0 \Rightarrow VT(**) = \tan 2T \neq 0$; $VP(**) = 0$

$B \Rightarrow (**)$ không xảy ra với mọi $x \in D$. Vậy hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \frac{\pi}{2}$

II. Bài tập rèn luyện

BT 1. Tìm chu kỳ của hàm số:

- | | | |
|-------------------------------------|---------------------------|--|
| a/ $y = \sin 2x$ | b/ $y = \cos \frac{x}{3}$ | c/ $y = \sin^2 x$ |
| d/ $y = \sin 2x + \cos \frac{x}{2}$ | e/ $y = \tan x + \cot 3x$ | f/ $y = \cos \frac{3x}{5} - \sin \frac{2x}{7}$ |
| g/ $y = 2 \sin x \cdot \cos 3x$ | h/ $y = \cos^2 4x$ | i/ $y = \tan(-3x + 1)$ |

BT 2. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ cơ sở (nếu có) của các hàm số sau

- a) $f(x) = \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}$; b) $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$; c) $f(x) = \sin(x^2)$; d) $y = \tan \sqrt{x}$.

Hướng dẫn

c) Hàm số $f(x) = \sin(x^2)$ không tuần hoàn vì khoảng cách giữa các nghiệm (không điểm) liên tiếp của nó dần tới 0

$$\sqrt{(k+1)\pi} - \sqrt{k\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi} + \sqrt{k\pi}} \rightarrow 0 \text{ khi } k \rightarrow \infty$$

d) Hàm số $f(x) = \tan\sqrt{x}$ không tuần hoàn vì khoảng cách giữa các nghiệm (không điểm) liên tiếp của nó dần tới $+\infty$

$$(k+1)^2 \pi^2 - k^2 \pi \rightarrow \infty \text{ khi } k \rightarrow \infty$$

BT 3. Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số tuần hoàn với chu kỳ lần lượt là T_1, T_2 . Chứng minh rằng nếu $\frac{T_1}{T_2}$ là số hữu tỉ thì các hàm số $f(x) \pm g(x)$; $f(x).g(x)$; $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) là những hàm số tuần hoàn.

Dạng 5. Vẽ đồ thị hàm số lượng giác

Phương pháp

1/ Vẽ đồ thị hàm số lượng giác:

- Tìm tập xác định D.
- Tìm chu kỳ T_0 của hàm số.
- Xác định tính chẵn - lẻ (nếu cần).
- Lập bảng biến thiên trên một đoạn có độ dài bằng chu kỳ T_0 có thể chọn:

$$x \in [0, T_0] \text{ hoặc } x \in \left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right].$$

- Vẽ đồ thị trên đoạn có độ dài bằng chu kỳ.
- Rồi suy ra phần đồ thị còn lại bằng phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v} = k.T_0.\vec{i}$ về bên trái và phải song song với trục hoành Ox (với \vec{i} là véc tơ đơn vị trên trục Ox).

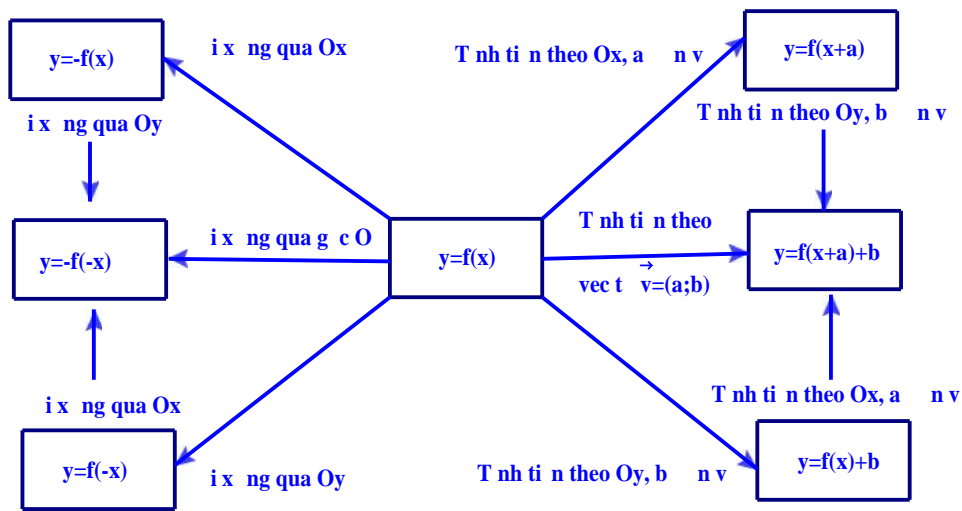
2/ Một số phép biến đổi đồ thị:

- Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $y = f(x) + a$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $y = f(x)$ lên trên trục hoành a đơn vị nếu $a > 0$ và tịnh tiến xuống phía dưới trục hoành a đơn vị nếu $a < 0$.
- Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $y = f(x + a)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $y = f(x)$ sang phải trục hoành a đơn vị nếu $a > 0$ và tịnh tiến sang trái trục hoành a đơn vị nếu $a < 0$.
- Từ đồ thị $y = f(x)$, suy ra đồ thị $y = -f(x)$ bằng cách lấy đối xứng đồ thị $y = f(x)$ qua trục hoành.

- Đồ thị $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$ hoặc suy ngược lại thì $y = f(x)$ bằng cách giở

nguyên phần nào thì $y = f(x)$ ở phía trên trục hoành và lấy ngược lại vùng phần nào thì $y = f(x)$ nằm ở phía dưới trục hoành qua trục hoành.

Mối liên hệ đồ thị giữa các hàm số



Ví dụ 1. Hãy xác định các giá trị của x trên đoạn $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ để hàm số $y = \tan x$

- a) Nhận giá trị bằng 0;
- b) Nhận giá trị bằng 1;
- c) Nhận giá trị dương;
- d) Nhận giá trị âm.

Ví dụ 2. Dựa vào đồ thị $y = \sin x$, hãy vẽ đồ thị hàm số $y = |\sin x|$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng $\sin 2(x + k\pi) = \sin 2x$ với mọi số nguyên k . Từ đó vẽ đồ thị hàm số $y = \sin 2x$.

Ví dụ 4. Vẽ đồ thị hàm số $y = \cos x$, tìm các giá trị của x để $\cos x = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 5. Dựa vào đồ thị hàm số $y = \sin x$, tìm các khoảng giá trị của x để hàm số nhận giá trị âm

Ví dụ 6. Dựa vào đồ thị hàm số $y = \cos x$, tìm các khoảng giá trị của x để hàm số nhận giá trị dương.