PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

1. Phương trình đường tròn

Phương trình đường tròn có tâm *I(a; b)* và bán kính *R*: $\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$.

Nhận xét: Phương trình $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$, với $a^2+b^2-c>0$, là phương trình đường tròn tâm *I(–a; –b)*, bán kính *R* = $\sqrt{a^2+b^2-c}$.

2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Cho đường tròn (C) có tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ.

$\boxed{\Delta \text{ tiếp xúc với (C)} \Leftrightarrow d(I,\Delta)=R}$

VẤN ĐỀ 1: Xác định tâm và bán kính của đường tròn

• *Nếu phương trình đường tròn (C) có dạng:* $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$
thì (C) có tâm I(a; b) và bán kính R.

• *Nếu phương trình đường tròn (C) có dạng:* $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$

thì – *Biến đổi đưa về dạng* $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

hoặc – *Tâm I(–a; –b), bán kính R =* $\sqrt{a^2+b^2-c}$.

Chú ý: *Phương trình* $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ *là phương trình đường tròn nếu thoả mãn điều kiện:* $a^2+b^2-c>0$.

Bài 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình đường tròn. Tìm tâm và bán kính của đường tròn đó:

a) $x^2+y^2-2x-2y-2=0$
b) $x^2+y^2-6x+4y-12=0$
c) $x^2+y^2+2x-8y+1=0$
d) $x^2+y^2-6x+5=0$
e) $16x^2+16y^2+16x-8y=11$
f) $7x^2+7y^2-4x+6y-1=0$
g) $2x^2+2y^2-4x+12y+11=0$
h) $4x^2+4y^2+4x-5y+10=0$

Bài 2. Tìm *m* để các phương trình sau là phương trình đường tròn:

a) $x^2+y^2+4mx-2my+2m+3=0$

b) $x^2+y^2-2(m+1)x+2my+3m^2-2=0$

c) $x^2+y^2-2(m-3)x+4my-m^2+5m+4=0$

d) $x^2+y^2-2mx-2(m^2-1)y+m^4-2m^4-2m^2-4m+1=0$

Bài 3. * Tìm *m* để các phương trình sau là phương trình đường tròn:

a) $x^2+y^2-6x+2y\ln m+3\ln m+7=0$

b) $x^2+y^2-2x+4y+\ln(m-2)+4=0$

c) $x^2+y^2-2e^{2m}x+2e^m y+6e^{2m}-4=0$

d) $x^2+y^2-2x\cos m+4y+\cos^2 m-2\sin m+5=0$

e) $x^2+y^2-4x\cos m+2y\sin m-4=0$

VẤN ĐỀ 2: Lập phương trình đường tròn

Để lập phương trình đường tròn (C) ta thường cần phải xác định **tâm I (a; b)** *và* ***bán kính R*** *của (C). Khi đó phương trình đường tròn (C) là:*

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

Dạng 1: *(C) có tâm I và đi qua điểm A.*

– *Bán kính R = IA.*

Dạng 2: *(C) có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng Δ.*

– *Bán kính R =* $d(I,\Delta)$.

Dạng 3: *(C) có đường kính AB.*

– *Tâm I là trung điểm của AB.*

– *Bán kính R =* $\frac{AB}{2}$.

Dạng 4: *(C) đi qua hai điểm A, B và có tâm I nằm trên đường thẳng Δ.*

– *Viết phương trình đường trung trực d của đoạn AB.*

– *Xác định tâm I là giao điểm của d và Δ.*

– *Bán kính R = IA.*

Dạng 5: *(C) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng Δ.*

– *Viết phương trình đường trung trực d của đoạn AB.*

– *Tâm I của (C) thoả mãn:* $\begin{cases} I\in d \\ d(I,\Delta)=IA \end{cases}$.

– *Bán kính R = IA.*

Dạng 6: *(C) đi qua điểm A và tiếp xúc với đường thẳng Δ tại điểm B.*

– *Viết phương trình đường trung trực d của đoạn AB.*

– *Viết phương trình đường thẳng Δ′ đi qua B và vuông góc với Δ.*

– *Xác định tâm I là giao điểm của d và Δ′.*

– *Bán kính R = IA.*

Dạng 7: *(C) đi qua điểm A và tiếp xúc với hai đường thẳng* Δ_1 *và* Δ_2.

– *Tâm I của (C) thoả mãn:* $\begin{cases} d(I,\Delta_1)=d(I,\Delta_2) & (1) \\ d(I,\Delta_1)=IA & (2) \end{cases}$

– *Bán kính R = IA.*

Chú ý: – *Muốn bỏ dấu GTTĐ trong (1), ta xét dấu miền mặt phẳng định bởi* Δ_1 *và* Δ_2 *hay xét dấu khoảng cách đại số từ A đến* Δ_1 *và* Δ_2.

– *Nếu* $\Delta_1 // \Delta_2$*, ta tính R =* $\frac{1}{2}d(\Delta_1,\Delta_2)$*, và (2) được thay thế bởi IA = R.*

Dạng 8: *(C) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và có tâm nằm trên đường thẳng d.*

– Tâm I của (C) thoả mãn: $\begin{cases} d(I,\Delta_1) = d(I,\Delta_2) \\ I \in d \end{cases}$.

– Bán kính R = $d(I,\Delta_1)$.

Dạng 9: *(C) đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C (đường tròn ngoại tiếp tam giác).*

Cách 1: *– Phương trình của (C) có dạng:* $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ *(*).*

– Lần lượt thay toạ độ của A, B, C vào (*) ta được hệ phương trình.

– Giải hệ phương trình này ta tìm được a, b, c ⇒ phương trình của (C).

Cách 2: *– Tâm I của (C) thoả mãn:* $\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases}$.

– Bán kính R = IA = IB = IC.

Dạng 10: *(C) nội tiếp tam giác ABC.*

– Viết phương trình của hai đường phân giác trong của hai góc trong tam giác

– Xác định tâm I là giao điểm của hai đường phân giác trên.

– Bán kính R = $d(I, AB)$.

Bài 1. Viết phương trình đường tròn có tâm I và đi qua điểm A, với: *(dạng 1)*

a) I(2; 4), A(–1; 3) b) I(–3; 2), A(1; –1) c) I(–1; 0), A(3; –11) d) I(1; 2), A(5; 2)

Bài 2. Viết phương trình đường tròn có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng Δ, với: *(dạng 2)*

a) $I(3;4),\ \Delta: 4x - 3y + 15 = 0$ b) $I(2;3),\ \Delta: 5x - 12y - 7 = 0$

c) $I(-3;2),\ \Delta \equiv Ox$ d) $I(-3;-5),\ \Delta \equiv Oy$

Bài 3. Viết phương trình đường tròn có đường kính AB, với: *(dạng 3)*

a) A(–2; 3), B(6; 5) b) A(0; 1), C(5; 1) c) A(–3; 4), B(7; 2) d) A(5; 2), B(3; 6)

Bài 4. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có tâm I nằm trên đường thẳng Δ, với: *(dạng 4)*

a) $A(2;3),\ B(-1;1),\ \Delta: x - 3y - 11 = 0$ b) $A(0;4),\ B(2;6),\ \Delta: x - 2y + 5 = 0$

c) $A(2;2),\ B(8;6),\ \Delta: 5x - 3y + 6 = 0$

Bài 5. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng Δ, với: *(dạng 5)*

a) $A(1;2),\ B(3;4),\ \Delta: 3x + y - 3 = 0$ b) $A(6;3),\ B(3;2),\ \Delta: x + 2y - 2 = 0$

c) $A(-1;-2),\ B(2;1),\ \Delta: 2x - y + 2 = 0$ d) $A(2;0),\ B(4;2),\ \Delta \equiv Oy$

Bài 6. Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A và tiếp xúc với đường thẳng Δ tại điểm B, với: *(dạng 6)*

a) $A(-2;6),\ \Delta: 3x - 4y - 15 = 0,\ B(1;-3)$ b) $A(-2;1),\ \Delta: 3x - 2y - 6 = 0,\ B(4;3)$

c) $A(6;-2),\ \Delta \equiv Ox,\ B(6;0)$ d) $A(4;-3),\ \Delta: x + 2y - 3 = 0,\ B(3;0)$

Bài 7. Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2, với: *(dạng 7)*

a) $A(2;3),\ \Delta_1: 3x - 4y + 1 = 0,\ \Delta_2: 4x + 3y - 7 = 0$

b) $A(1;3),\ \Delta_1: x + 2y + 2 = 0,\ \Delta_2: 2x - y + 9 = 0$

c) $A \equiv O(0;0),\ \Delta_1: x + y - 4 = 0,\ \Delta_2: x + y + 4 = 0$

d) $A(3;-6)$, $\Delta_1 \equiv Ox$, $\Delta_2 \equiv Oy$

Bài 8. Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và có tâm nằm trên đường thẳng d, với: *(dạng 8)*

a) $\Delta_1: 3x+2y+3=0,\ \Delta_2: 2x-3y+15=0,\ d: x-y=0$

b) $\Delta_1: x+y+4=0,\ \Delta_2: 7x-y+4=0,\ d: 4x+3y-2=0$

c) $\Delta_1: 4x-3y-16=0,\ \Delta_2: 3x+4y+3=0,\ d: 2x-y+3=0$

d) $\Delta_1: 4x+y-2=0,\ \Delta_2: x+4y+17=0,\ d: x-y+5=0$

Bài 9. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, với: *(dạng 9)*

a) A(2; 0), B(0; –3), C(5; –3)   b) A(5; 3), B(6; 2), C(3; –1)

c) A(1; 2), B(3; 1), C(–3; –1)   d) A(–1; –7), B(–4; –3), C ≡ O(0; 0)

e) $AB: x-y+2=0,\ BC: 2x+3y-1=0,\ CA: 4x+y-17=0$

f) $AB: x+2y-5=0,\ BC: 2x+y-7=0,\ CA: x-y+1=0$

Bài 10. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC, với: *(dạng 10)*

a) A(2; 6), B(–3; –4), C(5; 0)   b) A(2; 0), B(0; –3), C(5; –3)

c) $AB: 2x-3y+21=0,\ BC: 3x-2y-6=0,\ CA: 2x+3y+9=0$

d) $AB: 7x-y+11=0,\ BC: x+y-15,\ CA: 7x+17y+65=0$

VẤN ĐỀ 3: Tập hợp điểm

1. Tập hợp các tâm đường tròn

Để tìm tập hợp các tâm I của đường tròn (C), ta có thể thực hiện như sau:

a) Tìm giá trị của m để tồn tại tâm I.

b) Tìm toạ độ tâm I. Giả sử: $I\begin{cases} x = f(m) \\ y = g(m) \end{cases}$.

c) Khử m giữa x và y ta được phương trình F(x; y) = 0.

d) Giới hạn: Dựa vào điều kiện của m ở a) để giới hạn miền của x hoặc y.

e) Kết luận: Phương trình tập hợp điểm là F(x; y) = 0 cùng với phần giới hạn ở d).

2. Tập hợp điểm là đường tròn

Thực hiện tương tự như trên.

Bài 1. Tìm tập hợp các tâm I của đường tròn (C) có phương trình (*m* là tham số):

a) $x^2+y^2-2(m-1)x-4my+3m+11=0$

b) $x^2+y^2-2mx-4(m+1)y+3m+14=0$

c) $x^2+y^2-2mx-2m^2y+2=0$

d) $x^2+y^2+mx-m(m+2)y-2m^2-4=0$

Bài 2. * Tìm tập hợp các tâm I của đường tròn (C) có phương trình (*t* là tham số):

a) $x^2+y^2-2(\cos 2t+4)x-2y\sin 2t+6\cos 2t-3=0$

b) $x^2+y^2-4x\sin t+4(\cos 2t-\sin t)y-2\cos^2 t=0$

c) $x^2+y^2-2(2-e^t)x+4(e^{2t}-1)y-e^t-3=0$

d) $(t^2+1)(x^2+y^2)+8(t^2-1)x-4(t^2+4t+1)y-3t^2-3=0$

Bài 3. Tìm tập hợp các tâm I của đường tròn (C), biết:

a) (C) tiếp xúc với đường thẳng $d: 6x-8y+15=0$ và có bán kính R = 3

b) (C) tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1: x+2y-3=0,\ d_2: x+2y+6=0$

c) (C) tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1: 2x+3y-6=0,\ d_2: 3x-2y+9=0$

d) (C) tiếp xúc với đường tròn $(C'): x^2+y^2-4x+6y-3=0$ và có bán kính R = 2.

e) (C) đi qua điểm A(2; 3) và tiếp xúc với đường thẳng $d: y-5=0$

Bài 4. Cho hai điểm A(2; –4), B(–6; 2). Tìm tập hợp các điểm M(*x; y*) sao cho:

a) $AM^2+BM^2=100$ b) $\dfrac{MA}{MB}=3$ c) $AM^2+BM^2=k^2$ (*k* > *0*)

Bài 5. Cho hai điểm A(2; 3), B(–2; 1). Tìm tập hợp các điểm M(*x; y*) sao cho:

a) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ b) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=4$

Bài 6. Tìm tập hợp các điểm M sao cho tổng bình phương các khoảng cách từ đó đến hai đường thẳng *d* và *d′* bằng *k*, với:

a) $d: x-y+3=0,\ d': x+y=1=0,\ k=9$ b)

Bài 7. Cho bốn điểm A(4; 4), B(–6; 4), C(–6; –2), D(4; –2).

a) Chứng tỏ rằng ABCD là hình chữ nhật.

b) Tìm tập hợp các điểm M sao cho tổng bình phương các khoảng cách từ M đến các cạnh của hình chữ nhật bằng 100.

VẤN ĐỀ 4: Vị trí tương đối của đường thẳng *d* và đường tròn (C)

Để biện luận số giao điểm của đường thẳng d: $Ax+By+C=0$ *và đường tròn (C):* $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$*, ta có thể thực hiện như sau:.*

• ***Cách 1:*** *So sánh khoảng cách từ tâm I đến d với bán kính R.*

– Xác định tâm I và bán kính R của (C).

– Tính khoảng cách từ I đến d.

+ $d(I,d)<R$ $\Leftrightarrow$ *d cắt (C) tại hai điểm phân biệt.*

+ $d(I,d)=R$ $\Leftrightarrow$ *d tiếp xúc với (C).*

+ $d(I,d)>R$ $\Leftrightarrow$ *d và (C) không có điểm chung.*

• ***Cách 2:*** *Toạ độ giao điểm (nếu có) của d và (C) là nghiệm của hệ phương trình:*

$$\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ x^2+y^2+2ax+2by+c=0 \end{cases} \quad (*)$$

+ Hệ (*) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow$ *d cắt (C) tại hai điểm phân biệt.*

+ Hệ (*) có 1 nghiệm $\Leftrightarrow$ *d tiếp xúc với (C).*

+ Hệ (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ *d và (C) không có điểm chung.*

Bài 1. Biện luận theo *m* số giao điểm của đường thẳng *d* và đường tròn (C), với:

a) $d: mx - y - 3m - 2 = 0,\ (C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$

b) $d: 2x - y + m = 0,\ (C): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$

c) $d: x + y - 1 = 0,\ (C): x^2 + y^2 - 2(2m+1)x - 4y + 4 - m = 0$

d) $d: mx + y - 4m = 0,\ (C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

Bài 2. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ và đường thẳng *d* đi qua điểm A(–1; 0) và có hệ số góc *k* .

a) Viết phương trình đường thẳng *d*.

b) Biện luận theo *k* vị trí tương đối của *d* và (C).

c) Suy ra phương trình các tiếp tuyến của (C) xuất phát từ A.

Bài 3. Cho đường thẳng *d* và đường tròn (C):

i) Chứng tỏ *d* cắt (C). ii) Tìm toạ độ các giao điểm của *d* và (C).

a) *d* đi qua M(–1; 5) và có hệ số góc $k = -\dfrac{1}{3}$, $(C): x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$

b) $d: 3x - y - 10 = 0,\ (C): x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

VẤN ĐỀ 5: Vị trí tương đối của hai đường tròn (C_1) và (C_2)

Để biện luận số giao điểm của hai đường tròn

(C_1): $x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0$, *($C_2$):* $x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0$.

ta có thể thực hiện như sau:

• ***Cách 1:*** *So sánh độ dài đoạn nối tâm I_1I_2 với các bán kính R_1, R_2.*

+ $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2$ $\Leftrightarrow$ *(C_1) cắt (C_2) tại 2 điểm.*

+ $I_1I_2 = R_1 + R_2$ $\Leftrightarrow$ *(C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2).*

+ $I_1I_2 = |R_1 - R_2|$ $\Leftrightarrow$ *(C_1) tiếp xúc trong với (C_2).*

+ $I_1I_2 > R_1 + R_2$ $\Leftrightarrow$ *(C_1) và (C_2) ở ngoài nhau.*

+ $I_1I_2 < |R_1 - R_2|$ $\Leftrightarrow$ *(C_1) và (C_2) ở trong nhau.*

• ***Cách 2:*** *Toạ độ các giao điểm (nếu có) của (C_1) và (C_2) là nghiệm của hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

+ Hệ (*) có hai nghiệm $\Leftrightarrow$ *(C_1) cắt (C_2) tại 2 điểm.*

+ Hệ (*) có một nghiệm $\Leftrightarrow$ *(C_1) tiếp xúc với (C_2).*

+ Hệ (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ *(C_1) và (C_2) không có điểm chung.*

Bài 1. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn (C_1) và (C_2), tìm toạ độ giao điểm, nếu có, với:

a) $(C_1): x^2 + y^2 + 6x - 10y + 24 = 0,\ (C_2): x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$

b) $(C_1): x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0,\ (C_2): x^2 + y^2 - 10x - 14y + 70 = 0$

c) $(C_1): x^2 + y^2 - 6x - 3y = 0$, (C_2) *có tâm* $I_2\left(5; \dfrac{5}{2}\right)$ *và bán kính* $R_2 = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Bài 2. Biện luận số giao điểm của hai đường tròn (C_1) và (C_2), với:

a) $(C_1): x^2 + y^2 - 6x - 2my + m^2 + 4 = 0$, $(C_2): x^2 + y^2 - 2mx - 2(m+1)y + m^2 + 4 = 0$

b) $(C_1): x^2 + y^2 + 4mx - 2my + 2m + 3 = 0$, $(C_2): x^2 + y^2 + 4(m+1)x - 2my + 6m - 1 = 0$

Bài 3. Cho hai điểm A(8; 0), B(0; 6).

a) Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB.

b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của OA, AB, OB. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.

c) Chứng minh rằng hai đường tròn trên tiếp xúc nhau. Tìm toạ độ tiếp điểm.

VẤN ĐỀ 6: Tiếp tuyến của đường tròn (C)

Cho đường tròn (C) có tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ.

Δ tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow d(I, \Delta) = R$

• ***Dạng 1:*** *Tiếp tuyến tại một điểm* $M_0(x_0; y_0) \in (C)$.

– *Δ đi qua* $M_0(x_0; y_0)$ *và có VTPT* $\overrightarrow{IM_0}$.

• ***Dạng 2:*** *Tiếp tuyến có phương cho trước.*

– *Viết phương trình của Δ có phương cho trước (phương trình chứa tham số t).*

– *Dựa vào điều kiện:* $d(I, \Delta) = R$, *ta tìm được t. Từ đó suy ra phương trình của Δ.*

• ***Dạng 3:*** *Tiếp tuyến vẽ từ một điểm* $A(x_A; y_A)$ *ở ngoài đường tròn (C).*

– *Viết phương trình của Δ đi qua A (chứa 2 tham số).*

– *Dựa vào điều kiện:* $d(I, \Delta) = R$, *ta tìm được các tham số. Từ đó suy ra phương trình của Δ.*

Bài 1. Cho đường tròn (C) và đường thẳng *d*.

i) Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của (C) với các trục toạ độ.

ii) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với *d*.

iii) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với *d*.

a) $(C): x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$, $d: 2x - y + 3 = 0$

b) $(C): x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$, $d: 2x - 3y + 1 = 0$

Bài 2. Cho đường tròn (C), điểm A và đường thẳng *d*.

i) Chứng tỏ điểm A ở ngoài (C).

ii) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ A.

iii) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với *d*.

iv) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với *d*.

a) $(C): x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$, $A(-7; 7)$, $d: 3x + 4y - 6 = 0$

b) $(C): x^2+y^2+4x-8y+10=0,\ A(2;2),\ d: x+2y-6=0$

Bài 3. Cho hai điểm A(1; 2), B(3; 4) và đường thẳng $d: y=-3-3x$.

a) Viết phương trình các đường tròn (C_1) và (C_2) qua A, B và tiếp xúc với *d*.

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung (khác *d*) của hai đường tròn đó.

Bài 4. Cho đường tròn (C): $x^2+y^2-6x-2my+m^2+4=0$.

a) Tìm *m* để từ A(2; 3) có thể kẻ được hai tiếp tuyến với (C).

b) Viết phương trình các tiếp tuyến đó khi *m* = 6.