

PHƯƠNG PHÁP GIẢI NHANH BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÀM TRỪNG PHƯƠNG

$$y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$$

A) Kiến thức cơ sở

Bài Toán : cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, có đồ thị là (C) tìm điều kiện của a,b,c sao cho (C) có 3 điểm cực trị là A,B,C trong đó điểm A thuộc trục tung

Lời giải : Đạo hàm : $y' = 4ax^3 + 2bx$

$$\text{Ta có : } y' = 0 \Leftrightarrow 4ax^3 + 2bx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{-b}{2a} \end{cases}$$

Để (C) có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow \frac{-b}{2a} > 0$, đặt : $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\text{Lúc này : } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ x_{B,C} = \pm \sqrt{\frac{-b}{2a}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_A = 0 \\ y_B = y_C = \frac{-\Delta}{4a} \end{cases}$$

Biểu thức tọa độ các điểm cực trị : $A(0, c)$, $B\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$, $B\left(-\sqrt{\frac{-b}{2a}}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$

Độ dài các đoạn AB, BC, CA : $AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}$ và $BC = 2\sqrt{\frac{-b}{2a}}$

B) Các kết quả đáng nhớ

Gọi φ là góc tại đỉnh của tam giác cân ABC ta có : $\cos \varphi = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$ (1)

Gọi S là diện tích tam giác cân ABC ta có : $S = \frac{1}{4} \cdot \frac{b^2}{|a|} \cdot \sqrt{\frac{-b}{2a}}$ (2)

Gọi (Cr) là đường tròn tâm I, bán kính R ngoại tiếp tam giác cân ABC thì phương trình (Cr) :

$$x^2 + y^2 - \left(c + \frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}\right)y + c\left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}\right) = 0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow I\left(0; \frac{c}{2} + \frac{1}{b} - \frac{\Delta}{8a}\right) \text{ và } R = \sqrt{\left(\frac{c}{2} + \frac{1}{b} - \frac{\Delta}{8a}\right)^2 - c\left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}\right)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{(b^3 - 8a)}{|a|b}$$

C) Áp dụng :

Bài 1 : cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 3$ có đồ thị là (C), tìm m để (C) có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác đều .

Giải : Ta có $a = 1, b = -2m, c = 3$

Điều kiện có 3 cực trị $\frac{-b}{2a} > 0 \Leftrightarrow \frac{2m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0$

Để tam giác này đều thì góc ở đỉnh cân là 60 độ , áp dụng kết quả (1) ta có :

$$\cos \varphi = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} \Leftrightarrow \cos 60 = \frac{(-2m)^3 + 8.1}{(-2m)^3 - 8.1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{8 - 8m}{-8 - 8m} \Leftrightarrow m = 3 \text{ (nhận)}$$

Bài 2 : cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 3$ có đồ thị là (C), tìm m để (C) có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông

Giải : Ta có $a = 1, b = -2m, c = 3$

Điều kiện có 3 cực trị $\frac{-b}{2a} > 0 \Leftrightarrow \frac{2m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0$

Để tam giác này vuông thì góc ở đỉnh cân là 90 độ , áp dụng kết quả (1) ta có :

$$\cos \varphi = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} \Leftrightarrow \cos 90 = \frac{(-2m)^3 + 8.1}{(-2m)^3 - 8.1} \Leftrightarrow 0 = \frac{8 - 8m}{-8 - 8m} \Leftrightarrow m = 1 \text{ (nhận)}$$

Bài 3 : cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 3$ có đồ thị là (C), tìm m để (C) có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có góc 120 độ

Giải : Ta có $a = 1, b = -2m, c = 3$

Điều kiện có 3 cực trị $\frac{-b}{2a} > 0 \Leftrightarrow \frac{2m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0$

Để tam giác này có góc 120 độ thì góc ở đỉnh cân là 120 độ , áp dụng kết quả (1) ta có :

$$\cos \varphi = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} \Leftrightarrow \cos 120 = \frac{(-2m)^3 + 8.1}{(-2m)^3 - 8.1} \Leftrightarrow \frac{-1}{2} = \frac{8 - 8m}{-8 - 8m} \Leftrightarrow m = \frac{1}{3} \text{ (nhận)}$$

Bài 4 : cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 3$ có đồ thị là (C), tìm m để (C) có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có góc 135 độ

Giải : Ta có $a = 1, b = -2m, c = 3$

Điều kiện có 3 cực trị $\frac{-b}{2a} > 0 \Leftrightarrow \frac{2m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0$

Để tam giác này có góc 135 độ thì góc ở đỉnh cân là 120 độ, áp dụng kết quả (1) ta có :

$$\cos \varphi = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} \Leftrightarrow \cos 135 = \frac{(-2m)^3 + 8.1}{(-2m)^3 - 8.1} \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{8-8m}{-8-8m} \Leftrightarrow m = 3 - 2\sqrt{2} \text{ (nhận)}$$

Bài 5: cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 3$ có đồ thị là (C), tìm m để (C) có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có góc 30 độ

Giải : Ta có $a = 1, b = -2m, c = 3$

Điều kiện có 3 cực trị $\frac{-b}{2a} > 0 \Leftrightarrow \frac{2m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0$

Để tam giác này có góc 30 độ thì ta có 2 trường hợp :

TH1 : Góc ở đỉnh cân là 30 độ, áp dụng kết quả (1) ta có :

$$\cos \varphi = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} \Leftrightarrow \cos 30 = \frac{(-2m)^3 + 8.1}{(-2m)^3 - 8.1} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8-8m}{-8-8m} \Leftrightarrow m = 7 + 4\sqrt{3} \text{ (nhận)}$$

TH2 : Góc ở đáy là 30 độ thì góc ở đỉnh cân là 120 độ, áp dụng kết quả (1) ta có :

$$\cos \varphi = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} \Leftrightarrow \cos 120 = \frac{(-2m)^3 + 8.1}{(-2m)^3 - 8.1} \Leftrightarrow \frac{-1}{2} = \frac{8-8m}{-8-8m} \Leftrightarrow m = \frac{1}{3} \text{ (nhận)}$$

Bài 6 : cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 3$ có đồ thị là (C), tìm m để (C) có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác cân có cạnh bên gấp 2 lần cạnh đáy

Giải : Ta có $a = 1, b = -2m, c = 3$

Điều kiện có 3 cực trị $\frac{-b}{2a} > 0 \Leftrightarrow \frac{2m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0$

Theo giả thuyết thì $AB = 2BC$, áp dụng định lý hàm cos cho góc đỉnh cân ta có :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2ABAC \cdot \cos \varphi \Leftrightarrow \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 2AB^2 - 2AB^2 \cos \varphi \Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{7}{8}$$

áp dụng kết quả (1) ta có :

$$\cos \varphi = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} \Leftrightarrow \frac{7}{8} = \frac{(-2m)^3 + 8.1}{(-2m)^3 - 8.1} \Leftrightarrow \frac{7}{8} = \frac{8-8m}{-8-8m} \Leftrightarrow m = 15 \text{ (nhận)}$$

Bài 7 : cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 3$ có đồ thị là (C), tìm m để (C) có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác cân có độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh bằng với cạnh đáy

Giải : Ta có $a = 1, b = -2m, c = 3$

Điều kiện có 3 cực trị $\frac{-b}{2a} > 0 \Leftrightarrow \frac{2m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0$, Gọi M là trung điểm BC

Theo giả thuyết thì $AM = BC$ hay $\sqrt{AB^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = BC \Leftrightarrow AB^2 = \frac{5}{4}BC^2$

áp dụng định lý hàm cos cho góc đỉnh cân ta có :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2ABAC \cdot \cos\varphi \Leftrightarrow \frac{4}{5}AB^2 = 2AB^2 - 2AB^2 \cos\varphi \Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{3}{5}$$

Áp dụng kết quả (1) ta có :

$$\cos\varphi = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} \Leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{(-2m)^3 + 8.1}{(-2m)^3 - 8.1} \Leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{8 - 8m}{-8 - 8m} \Leftrightarrow m = 4 \text{ (nhận)}$$

Bài 8 : cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 3$ có đồ thị là (C), tìm m để (C) có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp là 1.

Giải : Ta có $a = 1, b = -2m, c = 3$

Điều kiện có 3 cực trị $\frac{-b}{2a} > 0 \Leftrightarrow \frac{2m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Gọi M là trung điểm BC, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp . Theo giả thuyết $R=1$

Ta có : diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot BC \Leftrightarrow S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 - \frac{BC^2}{4}} \cdot BC$

Lại có:

áp dụng định lý hàm cos cho góc đỉnh cân ta có :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2ABAC \cdot \cos\varphi \Leftrightarrow \frac{4}{5}AB^2 = 2AB^2 - 2AB^2 \cos\varphi \Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{3}{5}$$

Áp dụng kết quả (1) ta có :

$$\cos\varphi = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} \Leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{(-2m)^3 + 8.1}{(-2m)^3 - 8.1} \Leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{8 - 8m}{-8 - 8m} \Leftrightarrow m = 4 \text{ (nhận)}$$

Bài 9 : cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 3$ có đồ thị là (C), tìm m để (C) có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích là 1.

Giải : Ta có $a = 1, b = -2m, c = 3$

Điều kiện có 3 cực trị $\frac{-b}{2a} > 0 \Leftrightarrow \frac{2m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0$

Áp dụng kết quả thứ 2 ta có :

$$S = \frac{1}{4} \cdot \frac{b^2}{|a|} \cdot \sqrt{\frac{-b}{2a}} \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{(-2m)^2}{|1|} \cdot \sqrt{\frac{2m}{2 \cdot 1}} \Leftrightarrow m = 1 \text{ (nhận)}$$

Bài 10: cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 3$ có đồ thị là (C), tìm m để (C) có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp là 1.

Giải : Ta có $a=1, b=-2m, c=3$

Điều kiện có 3 cực trị $\frac{-b}{2a} > 0 \Leftrightarrow \frac{2m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0$

Gọi M là trung điểm BC, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp, theo giả thuyết $R=1$

Áp dụng kết quả thứ 3 ta có :

$$R = \frac{1}{8} \cdot \frac{(b^3 - 8a)}{|a|b} \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{8} \cdot \frac{((-2m)^3 - 8 \cdot 1)}{|1|(-2m)} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Bài 11: Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(1 - m^2)x^2 + m + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích lớn nhất

Giải : Ta có $a=1, b=-2(1 - m^2), c=m + 1$

Điều kiện có 3 cực trị : $\frac{-(-2(1 - m^2))}{2 \cdot 1} > 0 \Leftrightarrow 1 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$

Áp dụng kết quả thứ 2 ta có :

$$S = \frac{1}{4} \cdot \frac{b^2}{|a|} \cdot \sqrt{\frac{-b}{2a}} \Leftrightarrow S = \frac{1}{4} \cdot \frac{(-2(1 - m^2))^2}{|1|} \cdot \sqrt{\frac{2(1 - m^2)}{2 \cdot 1}} \Leftrightarrow S = (\sqrt{1 - m^2})^5 \leq 1 \Rightarrow m = 0 \text{ (nhận)}$$

Bài 12: Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có ba điểm cực trị tạo thành 1 tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính nhỏ nhất

Giải : Ta có $a=1, b=-2m, c=2m + m^4$

Điều kiện có 3 cực trị : $\frac{-(-2m)}{2 \cdot 1} > 0 \Leftrightarrow m > 0$

Áp dụng kết quả thứ 3 ta có :

$$R = \frac{1}{8} \cdot \frac{(b^3 - 8a)}{|a|b} \Leftrightarrow R = \frac{1}{8} \cdot \frac{((-2m)^3 - 8.1)}{|1|(-2m)}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{m^3 + 1}{2m} = \frac{m^2}{2} + \frac{1}{2m} = \frac{m^2}{2} + \frac{1}{4m} + \frac{1}{4m} \geq \sqrt[3]{\frac{m^2}{2} \cdot \frac{1}{4m} \cdot \frac{1}{4m}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{4}}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{m^2}{2} = \frac{1}{4m} \Leftrightarrow m^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (nhận)

Bài 13: Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 1$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho bốn điểm A, B, C, O cùng nằm trên một đường tròn?

Giải: Ta có $a=1, b=-2m^2, c=m^4+1$

Điều kiện có 3 cực trị: $\frac{-(-2m^2)}{2.1} > 0 \Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$

Đặt: $\Delta = b^2 - 4ac = (-2m^2)^2 - 4(m^4 + 1) = -4$

Áp dụng kết quả thứ 3, ta có phương trình đường tròn đi qua A, B, C là:

$$(Cr): x^2 + y^2 - \left(c + \frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}\right)y + c\left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}\right) = 0$$

O(0;0) thuộc (Cr): $\Leftrightarrow c\left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}\right) = 0 \Leftrightarrow (m^4 + 1)\left(\frac{2}{-2m^2} - \frac{-4}{4.1}\right) = 0 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Bài 14: Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ có ba điểm cực trị A, B, C tạo thành một tam giác có đường tròn ngoại tiếp đi qua điểm $A\left(\frac{3}{5}; \frac{9}{5}\right)$

Giải: Ta có $a=1, b=-2m, c=2$

Điều kiện có 3 cực trị: $\frac{-(-2m)}{2.1} > 0 \Leftrightarrow m > 0$

Đặt: $\Delta = b^2 - 4ac = (-2m)^2 - 4.1.2 = 4m^2 - 8$

Áp dụng kết quả thứ 3, ta có phương trình đường tròn đi qua A, B, C là:

$$(Cr): x^2 + y^2 - \left(c + \frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}\right)y + c\left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}\right) = 0$$

$$A\left(\frac{3}{5}; \frac{9}{5}\right) \text{ thuộc } (Cr) : \Leftrightarrow \frac{18}{5} - \left(2 + \frac{2}{-2m} - \frac{4m^2 - 8}{4.1}\right) \cdot \frac{9}{5} + 2\left(\frac{2}{-2m} - \frac{4m^2 - 8}{4.1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{-m} - (m^2 - 2)\right) + 2\left(\frac{1}{-m} - (m^2 - 2)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{-m} - (m^2 - 2)\right) = 0 \Leftrightarrow m^3 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Nhắc nhở : các em không nên quá lạm dụng nghề vẫn phải học và trình bày tự luận cho đàng hoàng chỉ khi nào đùng bài mà mình có thể áp dụng được thì hẵng áp dụng, bản thân mình cũng ko tán thành việc giải toán như thế này. Mớ thủ thuật này chỉ mang tính hỗ trợ các em trong quá trình học tập các em phải luôn nghĩ như vậy nhé. Hãy nhớ rằng việc học vẫn phải là ghi chép vẫn phải là quan sát vẫn phải là nhìn ngắm chứ ko phải cứ đề công thức ra mà làm

Ví dụ : Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho độ dài $OA = BC$ với A là cực trị thuộc trục tung ? (**ĐH B - 2011**)

Quá rõ ràng các em sẽ bẽ tắc ngay đúng không vì 3 công thức trên không thể áp dụng cho bài này, **buột lòng** các em chỉ có cách biến đổi và tính toán cho bài này :

Giải : điều kiện có 3 cực trị : $\frac{-b}{2a} > 0 \Leftrightarrow m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$,

Đặt : $\Delta = b^2 - 4ac = 4(m+1)^2 - 4m = 4m^2 + 4m + 4$

Tọa độ của 3 điểm cực trị : $A(0, c)$, $B\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$, $C\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$

$\Rightarrow A(0, m)$, $B(\sqrt{m+1}; m^2 + m + 1)$, $C(-\sqrt{m+1}; m^2 + m + 1)$

Vậy $OA = BC \Leftrightarrow \sqrt{m^2} = \sqrt{4(m+1)} \Leftrightarrow m = 2 \pm 2\sqrt{2}$

Cuối cùng , ta có thể bỏ qua bước tìm điều kiện có 3 cực trị bằng cách giải ra m rồi thế lại cũng được

D) Bài Tập Áp Dụng

BT 1. Tìm tham số m để các đồ thị của các hàm số sau có ba điểm cực trị ?

- a) $y = 2x^4 + 8mx^3 + (8m+1)x^2 + 2015$. b) $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$.
c) $y = (m-2)x^4 + 2mx^2 + m - 1$. d) $y = x^4 + 2(m+1)x^2 + 1$.
e) $y = x^4 + (m^2 - 4)x^2 + 3$. f) $y = x^4 + (m-1)x^2 + 2$.

BT 2. Tìm tham số m để hàm số thỏa yêu cầu theo sau của bài toán:

- a) Cho hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$. Tìm m để đồ thị hàm số có đúng 1 cực trị ?
b) Cho hàm số $y = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2$. Tìm m để hàm số có cực tiểu mà không có cực đại ?
c) Cho hàm số $y = (m-1)x^4 - 3mx^2 + 5$. Tìm m để hàm số có cực đại mà không có cực tiểu ?
d) Cho hàm số $y = (m-1)x^4 - 2mx^2 + 1$. Tìm m để hàm số có cực tiểu mà không có cực đại ?

BT 3. Cho hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$.

- 1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với $m = 4$.
2) Tìm tham số m để hàm số có 3 điểm cực trị, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị tạo thành một tam giác có trực tâm là gốc tọa độ O .

Đáp số: $m = 1$.

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2015 – THPT Cao Bá Quát – Quảng Nam

BT 4. Cho hàm số: $y = x^4 - 2(m^2 + 1)x^2 + 1$.

- 1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với $m = 0$.
2) Tìm tham số m để hàm số có 3 điểm cực trị thỏa mãn giá trị cực tiểu đạt giá trị lớn nhất.

Đáp số: $m = 0$.

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2015 – THPT Mạc Đĩnh Chi – Tp. Hồ Chí Minh

BT 5. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông ? (*Đại học khối A – 2012*) ĐS: $m = 0$.

BT 6. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị này tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông cân ? ĐS: $m = \pm 1$.

BT 7. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + (3m+1)x^2 - 3$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác cân sao cho độ dài cạnh đáy bằng $\frac{2}{3}$ lần độ dài cạnh bên ? ĐS: $m = -\frac{5}{3}$.

BT 8. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$ có cực đại, cực tiểu tạo thành một tam giác đều ? ĐS: $m = 2 - \sqrt[3]{3}$.

BT 9. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị này tạo thành một tam giác đều ? ĐS: $m = \sqrt[3]{3}$.

- BT 10.** Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 4(m-1)x^2 + 2m - 1$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị này tạo thành tam giác đều ? ĐS: $m = 1 + \sqrt[3]{3}/2$.
- BT 11.** Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$ có ba điểm cực trị và ba điểm cực trị đó tạo thành tam giác có 1 góc bằng 120° ? ĐS: $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.
- BT 12.** Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 - m$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có góc bằng 30° ? ĐS:
 $m = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, m = \sqrt[3]{7 + 4\sqrt{3}}$.
- BT 13.** Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có cực đại, cực tiểu mà các cực đại, cực tiểu tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1 ? ĐS: $m = 1$.
- BT 14.** Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 8m^2x^2 + 1$ có ba cực trị A, B, C , đồng thời ba điểm này tạo thành một tam giác có diện tích bằng 64 ? ĐS: $m = \pm\sqrt[5]{2}$.
- BT 15.** Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^4 - m^2x^2 + m^2 - 1$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho bốn điểm O, A, B, C là bốn đỉnh của một hình thoi ? ĐS: $m = \pm\sqrt{2}$.
- BT 16.** Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - (m+1)x^2 + 2m + 1$ có điểm cực đại là A , hai điểm cực tiểu là B và C sao cho tứ giác $ABIC$ là hình thoi với $I\left(0; -\frac{5}{2}\right)$? ĐS: $m = \frac{1}{2}$.
- BT 17.** Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 1$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho bốn điểm A, B, C, O cùng nằm trên một đường tròn ? ĐS: $m = \pm 1$.
- BT 18.** Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ có ba điểm cực trị A, B, C , sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính bằng 1 ? ĐS:
 $m = 1 \vee m = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.
- BT 19.** Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ có ba điểm cực trị A, B, C tạo thành một tam giác có đường tròn ngoại tiếp đi qua điểm $A\left(\frac{3}{5}; \frac{9}{5}\right)$? ĐS: $m = 1, m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.
- BT 20.** Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn hơn 1 ? ĐS: $m \in (2; +\infty)$.
- BT 21.** Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - 4$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho ba điểm này nằm trên các trục tọa độ ? ĐS: $m \in (-\infty; 0] \cup \{2\}$.
- BT 22.** Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho độ dài $OA = BC$ với A là cực trị thuộc trục tung ? (ĐH B - 2011) ĐS: $m = 2 \pm 2\sqrt{2}$.
- BT 23.** Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m + 2$ có ba điểm cực trị A, B, C , đồng thời O là trọng tâm của tam giác ABC ? ĐS: $m = -\frac{4}{3}$.

- BT 24.** Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m^2 - m + 1)x^2 + m - 1$ có khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu của đồ thị là nhỏ nhất?
ĐS: $m = \frac{1}{2}$.
- BT 25.** Chứng minh rằng với mọi m thì đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m^2 + 1)x^2 + 1$ luôn có ba điểm cực trị. Tìm m để khoảng cách từ điểm cực đại đến đường thẳng đi qua hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là nhỏ nhất?
ĐS: $m = 0$.
- BT 26.** Cho đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$, (C) và đường thẳng d đi qua điểm cực đại của (C) có hệ số góc m . Tìm m để tổng các khoảng cách từ hai điểm cực tiểu của đồ thị (C) đến đường thẳng d đạt giá trị nhỏ nhất?
ĐS: $m = \pm \frac{1}{4}$.
- BT 27.** Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(1 - m^2)x^2 + m + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích lớn nhất?
ĐS: $m = 0$.
- BT 28.** Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có ba điểm cực trị tạo thành 1 tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính nhỏ nhất?
ĐS: $m = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.
- BT 29.** Tìm tham số m để đồ thị hàm số $(C_m): y = x^4 - 2(m^2 - m + 1)x^2 + m - 1$ có khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu gần nhất?
ĐS: $m = 0$.
- BT 30.** Xác định tham số m để đồ thị hàm số $(C_m): y = x^4 - 4(m - 1)x^2 + 2m - 1$ có ba cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều.
ĐS: $m = 1$.
- BT 31.** Tìm tham số m để đồ thị hàm số $(C_m): y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có một góc bằng 120°
ĐS: $m = 0$.