**DẠNG 6: BẤT ĐẲNG THỨC**

**A.Bài toán**

**Bài 1**. Cho dương và Chứng minh rằng :



**Bài 2**: Chứng minh rằng: với 

**Bài 3 :** Cho là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



**Bài 4 :** Cho là ba số dương thỏa mãn Chứng minh rằng:



**Bài 5 :**

1. Chứng minh (với mọi 
2. Chứng minh: 
3. Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức : 

**Bài 6 :**

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:



1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:



**Bài 7:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : 

**Bài 8:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**Bài 9 :** Cho 3 số dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: 

**Bài 10:** Tìm các giá trị của để biểu thức:

có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

**Bài 11 :** Cho là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



**Bài 12 :** Chứng minh rằng: 

**Bài 13**Cho  thỏa mãn Chứng minh 

**Bài 14:** Cho hai số thỏa mãn điều kiện Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Bài 15 :** Cho các số thỏa mãn 

Chứng minh rằng: 

**Bài 16 :** Cho ba số dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: 

**Bài 17 :** Cho tam giác có nửa chu vi với là độ dài ba cạnh

Chứng minh 

**Bài 18 :** Cho các số thực dương thỏa mãn 

Chứng minh rằng: 

**Bài 19 :** Cho là ba số dương thỏa mãn 

Chứng minh rằng: 

**Bài 20 :** Cho thỏa mãn Chứng minh rằng : 

**Bài 21 :** Cho hai số thỏa mãn điều kiện Chứng minh : 

**Bài 22 :** Chứng minh rằng với mọi 

**Bài 23 :** Chứng minh rằng: 

**Bài 24 :** Cho là 3 cạnh của tam giác, là nửa chu vi. CMR:



**Bài 25 :** Cho là các số dương. Chứng minh rằng:



**Bài 26 :** Chứng minh rằng: 

**Bài 27 :** So sánh hai số sau: và 

**Bài 28 :** Cho số thực dương thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:



**Bài 29 :** Cho là ba cạnh của tam giác.



Chứng minh: 

**Bài 30 :** Chứng minh rằng: 

**Bài 31 :** CMR với là các số dương, ta có: 



**Bài 32:** Cho là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng: 

**Bài 33 :** Cho các số thực Chứng minh rằng





**Bài 34 :** a) Cho  và là hai số thực. Chứng minh rằng 



b) Cho là ba số dương thỏa mãn



Chứng minh rằng: 

**Bài 35 :** Cho là ba số thực dương. Chứng minh rằng:



Chứng minh 

**Bài 36 :** Cho là ba số dương thỏa mãn Chứng minh rằng:



**Bài 37:** Cho Chứng minh rằng: 

**Bài 38 :** Cho CMR: 

**Bài 39 :** Cho các số dương a,b,c thỏa mãn a + b + c = 1. Chứng minh:



**Bài 40 :** Cho Chứng minh rằng: 

**Bài 41 :** Chứng minh rằng : với mọi 

**Bài 42 :** Cho và 

Chứng minh rằng 

**Bài 43 :** Cho các số dương thỏa mãn điều kiện 

Chứng minh rằng: 

**Bài 44 : a.** Chứng minh (với mọi 

b. Chứng minh: 

**Bài 45:** Cho là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng:



**Bài 46:** CMR với là các số dương, ta có: 

**Bài 47:** Cho dương và Chứng minh rằng :



**Bài 48:** Chứng minh rằng: với 

**Bài 49:** Cho là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



**Bài 50:** Cho là ba số dương thỏa mãn Chứng minh rằng:



**Bài 51:** Cho biểu thức 

1. Phân tích biểu thức thành nhân tử
2. Chứng minh rằng: Nếu là độ dài các cạnh của một tam giác thì 

**Bài 52:** Cho 3 số dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: 

**Bài 53:** Cho Chứng minh rằng : 

**Bài 54:** Biết là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



**Bài 55:** Cho là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



**Bài 56:** Cho là ba số dương thỏa mãn Chứng minh rằng:



**Bài 57:** Cho 2 số và b thỏa mãn Chứng minh: ****

**Bài 58:** Chứng minh rằng: 

**Bài 59:** Cho là ba số dương thỏa mãn Chứng minh rằng:



**Bài 60:** Cho các số thực dương thỏa mãn Chứng minh rằng:



**Bài 61:** Cho Chứng minh rằng : 

**Bài 62:** Biết là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



**Bài 63:** Cho 2 số và b thỏa mãn Chứng minh:

**Bài 64:** Cho là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



**Bài 65:** Cho là ba số dương thỏa mãn Chứng minh rằng:



**Bài 66:** Cho là các số thực dương thỏa mãn Chứng minh rằng:

 

**Bài 67:** Cho là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng:



**Bài 68:** Cho 3 số dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: 

**Bài 69:** Cho  là các số dương. Chứng minh rằng: 

**Bài 70:** Chứng minh rằng: 

**Bài 71:** Chứng minh rằng: với 

**Bài 72:** Chứng minh rằng: 

**Bài 73:** a)Cho  và  là hai số thực. Chứng minh rằng 

b) Cho là ba số dương thỏa mãn 

Chứng minh rằng: 

**Bài 74:** Cho thỏa mãn Chứng minh 

**Bài 75:** Cho Chứng minh rằng 

**Bài 76:** Cho  là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



**Bài 77:** Cho  là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



**Bài 78:** Cho  là 3 cạnh của tam giác, là nửa chu vi.

CMR: 

**Bài 79:** Biết  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



**Bài 80:** Cho biểu thức Chứng minh rằng nếu là 3 cạnh của một tam giác thì 

**Bài 81:** Cho bốn số dương . Chứng minh rằng: 

**Bài 82:** a) Chứng minh với mọi số thực x, y, z, t ta luôn có bất đẳng thức sau:

. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

b) Chứng minh rằng với x, y bất kỳ, ta có: 

**Bài 83:** a) Cmr : 

b) Cho các số dương  và  thỏa mãn điều kiện . Cmr : 

**Bài 84:** Chứng minh rằng:

a) 

b) 

**Bài 85:**  Cmr: a) 

b) 

**Bài 86:** Chứng minh rằng:

a)  với ;

b) ;

c) 

**Bài 87:** Chứng minh với mọi số thực a, b khác 0 ta luôn có bất đẳng thức sau: 

**Bài 88:** Chứng minh BĐT: 

**Bài 89:** a) Chứng minh: 

b) Chứng minh: 

c) Chứng minh:  với .

d) Chứng minh:  với 

e) Cho  và  cùng dấu. Chứng minh: 

**Bài 90:** Cho ba số dương 

1. Chứng minh rằng:;
2. Chứng minh rằng: 

**Bài 91:** Cho , chứng minh: .

**Bài 92:** Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) ; b)  khi .

**Bài 93:** Cho là ba cạnh của một tam giác

a) Chứng minh rằng: 

b) Chứng minh rằng: thì tam giác đó là tam giác đều.

**Bài 94:** Cho . Chứng minh rằng: .

**Bài 95:** a) Chứng minh: với 

b) Chứng minh:  với 

**Bài 96:** Cho ba số *x, y, z*.

a) Chứng minh ;

b) Khi . Chứng minh .

**Bài 97:** Cho thỏa mãn Chứng minh 

**Bài 98:** Với . Hãy chứng minh các BĐT:

a)  ; b) ;

c) .

**Bài 99:**

a) Cho . Chứng minh rằng: .



b) Cho a, b là các số tùy ý. Chứng minh:



c) Cho a, b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh:



**Bài 100:** Cho thỏa mãn Chứng minh



**Bài 101:** Cho các số thỏa mãn Chứng minh rằng:



**Bài 102:** Cho Chứng minh rằng 

**Bài 103:** Cho là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



**Bài 104:** Cho là các số thực dương thỏa mãn Chứng minh rằng:



**Bài 105:** Cho thỏa mãn Chứng minh



**Bài 106:** CMR với là các số dương, ta có:



**Bài 107:** Cho biểu thức Chứng minh rằng nếu là 3 cạnh của một tam giác thì



**Bài 108:** CMR với là các số dương, ta có: 

**Bài 109:** Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác

Chứng minh rằng 

**Bài 110:** Chứng minh rằng , trong đó a, b, c là các số thực không nhỏ hơn 1.

**Bài 111:** Chứng minh  với mọi số thực a, b, c.

**Bài 112:** Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:  Đẳng thức xảy ra khi nào?

**Bài 113:** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn . Chứng minh rằng



**Bài 114:** Cho a và b là hai số dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng . Đẳng thức xảy ra khi nào?

**Bài 115:** Cho a, b, c là độ dài các cạnh và p là nửa chu vi của một tam giác. Chứng minh:  

**Bài 116:** Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh bất đẳng thức:

 + +   

**Bài 117:** Cho x > y > 0. Chứng minh: 

**Bài 118:** Chứng minh biểu thức: A = 4a(a + b)(a + b + c)(a + c) + b2c2  0 với mọi a, b, c.

**Bài 119:** Cho 3 số dương có tổng bằng Chứng minh rằng 

**Bài 120:** Cho a, b, c > 0; a + b + c = 3.

Chứng minh rằng: .

**Bài 121:** Cho là ba số dương thỏa mãn Chứng minh rằng:

**Bài 122:** Cho các số thực dương thỏa mãn x + y + z =3. Chứng minh rằng:

**Bài 123:** Cho ba số dương  thỏa mãn . Chứng minh rằng 

**Bài 124:** Cho  Chứng minh rằng 

**Bài 125:** Cho là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức:



**Bài 126:** Cho là các số không âm và không lớn hơn 2 thỏa mãn 

Chứng minh rằng 

**Bài 127:** Chứng minh rằng: , trong đó là các số thực không nhỏ hơn 1

**Bài 128:** Cho là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng: 

**Bài 129:** Chứng minh rằng: 

**Bài 130:** Chứng minh với mọi số dương 

**Bài 131:** Cho là 3 cạnh của một tam giác . Chứng minh rằng : 

**Bài 132:** Cho là các số thực dương thỏa mãn Chứng minh rằng:



**Bài 133:** Cho Chứng minh rằng : 

**Bài 134:** Biết là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



**Bài 135:** Cho là các số dương.

Chứng minh: 

**Bài 136:** Chứng minh bất đẳng thức:

 với 

**Bài 137:** Cho . Chứng minh 

**Bài 138**: Cho là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



**Bài 139:** Cho 3 số dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: 

**Bài 140:** Cho thỏa mãn Chứng minh rằng: 

**Bài 141:** Chứng minh bất đẳng thức sau:

với mọi 

**Bài 142:** Cho là ba số dương thỏa mãn Chứng minh rằng:



**Bài 143:** Cho là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng:



**Bài 144: a)** Cho là 3 cạnh của tam giác, là nửa chu vi.

CMR: 

b)Cho  là các số dương. Chứng minh rằng: 

**B. HƯỚNG DẪN**

**Bài 1 :** Cho dương và Chứng minh rằng :



**Lời giải**

Đặt 

và 

Chứng minh: 

hay 

**Bài 2 :** Chứng minh rằng: với 

**Lời giải**

Theo bài ra ta có: 

Mặt khác : 

Từ (1) và (2) suy ra: 

**Bài 3 :** Cho là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



**Lời giải**

Đặt 





Tương tự: 

BĐT chứng minh tương đương với: 

 do 

Vậy bất đẳng thức được chứng minh

**Bài 4 :** Cho là ba số dương thỏa mãn Chứng minh rằng:



**Lời giải**

Trước tiên ta chứng minh BĐT: Vơi mọi và  ta có:



Dấu xảy ra 

Thật vậy, với và ta có:



(luôn đúng)

Dấu xảy ra 

Áp dụng bất đẳng thức ta có:



Dấu xảy ra 

Ta có: 

Áp dụng BĐT (\*) ta có :

 (Vì 

Hay 

Mà nên 

Vậy (đpcm)

**Bài 5**

1. Chứng minh (với mọi 
2. Chứng minh: 
3. Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức : 

**Lời giải**

1. (với mọi x)
2. Từ kết quả câu a, nhân 2 vế của BĐT với số dương được:



(luôn đúng)

Suy ra: 

****

Vậy 

**Bài 6 : a)** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:



1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:



**Lời giải**

1. Ta có: 

Do 

Nên 

Dấu “=” xảy ra 

Vậy 

b) 

Do . Đẳng thức xảy ra 

Vậy 

**Bài 7:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : 

**Lời giải**

Ta có :



Vậy 

**Bài 8:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**Lời giải**



Vậy giá trị nhỏ nhất của là khi 

**Bài 9 :** Cho 3 số dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Từ



Dấu “=” xảy ra 

**Bài 10 :** Tìm các giá trị của để biểu thức:

có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

**Lời giải**



Ta thấy nên 

Do dó 

**Bài 11 :** Cho là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



**Lời giải**

Đặt 

từ đó suy ra 

Thay vào ta được 

Từ đó suy ra hay 

**Bài 12 :** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

****

**Bài 13 :** Cho  thỏa mãn Chứng minh 

**Lời giải**

Ta có:

mà nên 





**Bài 14 :**Cho hai số thỏa mãn điều kiện Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Lời giải**

****

Ta có: 

Vậy 

. Vậy 

**Bài 15 :** Cho các số thỏa mãn 

Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Vì  nên suy ra 

Do đó : 

Lại có: 

Vì  nên 

Do đó từ 

Từ (1) và (3) suy ra 

**Bài 16 :** Cho ba số dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Từ





Dấu bằng xảy ra 

**Bài 17 :** Cho tam giác có nửa chu vi với là độ dài ba cạnh

Chứng minh 

**Lời giải**

Ta có : 

Tương tự: 

Cộng vế với vế các BĐT cùng chiều:



**Bài 18 :** Cho các số thực dương thỏa mãn 

Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Đặt 



Áp dụng BĐT và với dương, dấu bằng xảy ra 

Ta có: 

Bởi vậy





**Bài 19 :** Cho là ba số dương thỏa mãn 

Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Trước tiên ta chứng minh BĐT: Với mọi và  ta có:



Dấu xảy ra 

Thật vậy, với và ta có:



(luôn đúng)

Dấu xảy ra 

Áp dụng bất đẳng thức ta có:



Dấu xảy ra 

Ta có: 

Áp dụng BĐT (\*) ta có :

 (Vì 

Hay 

Mà nên 

Vậy (đpcm)

**Bài 20 :** Cho thỏa mãn Chứng minh rằng : 

**Lời giải**

Bài toán phụ : Chứng minh rằng 

Chứng minh 



Áp dụng bài toán phụ (1) ta có:

(2)

Mà (vì 

Với ta có: (vì 





Từ (2) và (3) suy ra : 

**Bài 21 :** Cho hai số thỏa mãn điều kiện Chứng minh : 

**Lời giải**

Ta có: 



(vì 

(Vì 



(2) đúng nên (1) đúng ta có đpcm.

**Bài 22 :** Chứng minh rằng với mọi 

**Lời giải**



Đặt Khi đó ta có:

**Bài 23 :** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có:



Ta cộng vế theo vế ta được:





**Bài 24 :** Cho là 3 cạnh của tam giác, là nửa chu vi.



CMR:



**Lời giải**

Ta có:



Cộng từng vế ta có điều phải chứng minh

**Bài 25 :** Cho là các số dương. Chứng minh rằng:



**Lời giải**

Ta có:



Xét



đpcm



Dấu xảy ra khi



**Bài 26 :** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**



Vậy



**Bài 27 :** So sánh hai số sau: và 

**Lời giải**





Vì nên



**Bài 28 :** Cho số thực dương thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:



**Lời giải**

Ta có:



Đặt





Dấu xảy ra khi suy ra 



Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức là 6 khi 



**Bài 29 :** Cho là ba cạnh của tam giác.



Chứng minh: 

**Lời giải**

Vì là 3 cạnh của tam giác nên 



Đặt 

Ta có: 





Mà  nên suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 30 :** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Áp dụng bất đẳng thức . Dấu bằng xảy ra khi





Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta có:



Dấu xảy ra khi



**Bài 31 :** CMR với là các số dương, ta có: 



**Lời giải**



Mà (BĐT Cô si)

Do đó: . Vậy 

**Bài 32 :** Cho là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng:



**Lời giải**



Vì 

BĐT (2) đúng nên BĐT (1) đúng. Dấu xảy ra khi



**Bài 33 :** Cho các số thực Chứng minh rằng





**Lời giải**

Ta có: 

Nên 

Ta lại có: 

Tương tự: 

Suy ra:



Do vậy, 

Dấu xảy ra khi và chỉ khi 



**Bài 34 :**

1. Cho  và là hai số thực. Chứng minh rằng 



1. Cho là ba số dương thỏa mãn



Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

**a)** Với và ta có:





 luôn đúng

**b)** Áp dụng bất đẳng thức ta có:





Ta có: 

Áp dụng bất đẳng thức (2) ta có:



Hay 

Mà  nên 

Do đó: 

**Bài 35.** Cho là ba số thực dương. Chứng minh rằng:



Chứng minh 

**Lời giải**

Ta có:



Đặt :  Suy ra và ta có:



(Vì )

Vậy . Dấu xảy ra 

Chứng minh : 

Thật vậy, do vai trò của như nhau nên không mất tính tổng quát , ta có thể giả sử : 

Xét hiệu :



Vì giá trị của các biểu thức trong ngoặc đều không âm

Vậy 

Từ (1) và (2) suy ra đpcm . Dấu xảy ra khi 

**Bài 36.** Cho là ba số dương thỏa mãn Chứng minh rằng:



**Lời giải**

Trước tiên ta chứng minh BĐT: Vơi mọi và  ta có:



Dấu xảy ra 

Thật vậy, với và ta có:



(luôn đúng)

Dấu xảy ra 

Áp dụng bất đẳng thức ta có:



Dấu xảy ra 

Ta có: 

Áp dụng BĐT (\*) ta có :

 (Vì 

Hay



Mà nên 

Vậy (đpcm)

**Bài 37**. Cho Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Do và với mọi b nên:



Tương tự ta có: 

Mà  nên 

Cũng từ 



Mà nên 

Suy ra 

Từ suy ra 

Đẳng thức xảy ra 

**Bài 38.** Cho CMR: 

**Lời giải**

Ta có:



Cộng lại ta có điều phải chứng minh

**Bài 39.** Cho các số dương a,b,c thỏa mãn a + b + c = 1. Chứng minh:



**Lời giải**

Áp dụng hệ quả bất đẳng thức Bu-nhi-a Cốp-xki, ta có:

==≥

Ta chứng minh  ≥ 3(ab + bc + ca)

a2 + b2 + c2 + 2ab + 2bc + 2ca ≥ 3ab + 3bc + 3ca

a2 + b2 + c2 - ab - bc – ca ≥ 0

[(a– b)2 + (b – c)2 + (c – a)2] ≥ 0 (luôn đúng)

Vậy 

Dấu “=” xảy ra   .

**Bài 40**. Cho Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có: 

Tương tự cũng có:



Cộng ta được:





**Bài 41.** Chứng minh rằng : với mọi 

**Lời giải**

Ta có: 



Vì với mọi 

Do đó :  với mọi (bài toán được chứng minh).

**Bài 42.** Cho và 

Chứng minh rằng 

**Lời giải**

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: 

Mặt khác:



**Bài 43.** Cho các số dương thỏa mãn điều kiện 

Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có: 

Lại có : 

Nên ta có:





Dấu bằng xảy ra khi 

**Bài 44: a.** Chứng minh (với mọi 

b. Chứng minh: 

**Lời giải**

1. (với mọi x)
2. Từ kết quả câu a, nhân 2 vế của BĐT với số dương được:



(luôn đúng)

Suy ra: 

**Bài 45:** Cho là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng:



**Lời giải**

1. Ta có:



Vì 

Suy ra BĐT (2) đúng nên BĐT (1) đúng, dấu xảy ra 

**Bài 46:** CMR với là các số dương, ta có: 

**Lời giải**

Ta có: 



Mà (BĐT Cô si). Do đó: . Vậy 

**Bài 47:** Cho dương và Chứng minh rằng :



**Lời giải**

1. C/m:

+)Từ giả thiết suy ra : 



Biến đổi được kết quả: 

Tam giác đó là đều (đpcm)

1. Đặt 

và 

Chứng minh: 

hay 

**Bài 48:** Chứng minh rằng: với 

**Lời giải**

Ta có: 

Mặt khác : 

Từ (1) và (2) suy ra: 

**Bài 49:** Cho là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



**Lời giải**

1. Đặt 





Tương tự: 

BĐT chứng minh tương đương với: 

 do 

Vậy bất đẳng thức được chứng minh

**Bài 50:** Cho là ba số dương thỏa mãn Chứng minh rằng:



**Lời giải**

Trước tiên ta chứng minh BĐT: Vơi mọi và  ta có:



Dấu xảy ra 

Thật vậy, với và ta có:



(luôn đúng)

Dấu xảy ra 

Áp dụng bất đẳng thức ta có: 

Dấu xảy ra 

Ta có: 

Áp dụng BĐT (\*) ta có : 

(Vì 

Hay 

Mà nên 

Vậy (đpcm)

**Bài 51:** Cho biểu thức 

1. Phân tích biểu thức thành nhân tử
2. Chứng minh rằng: Nếu là độ dài các cạnh của một tam giác thì 
3. **Lời giải**
4. Ta có:



1. Ta có: (BĐT tam giác)

(BĐT tam giác)

(BĐT tam giác)

(BĐT tam giác)

Vậy 

**Bài 52:** Cho 3 số dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có:



Dấu “=” xảy ra 

**Bài 53:** Cho Chứng minh rằng : 

**Lời giải**

Học sinh chứng minh với mọi 



Dấu xảy ra 

**Bài 54:** Biết là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



**Lời giải**



Tổng hai cạnh tam giác lớn hơn cạnh thứ ba nên cả 4 thừa số đều dương, suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 55:** Cho là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



**Lời giải**

Đặt 

Từ đó suy ra 

Thay vào biểu thức A ta được:



**Bài 56:** Cho là ba số dương thỏa mãn Chứng minh rằng:



**Lời giải**

Trước tiên ta chứng minh BĐT: ta có:

. Dấu xảy ra 

Thật vậy, với và ta có: (\*\*)



Dấu xảy ra 

Áp dụng BĐT (\*\*) ta có:



Dấu xảy ra 

Ta có:



Áp dụng bất đẳng thức (\*) ta có:



Hay 

Mà nên 

Vậy 

**Bài 57:** Cho 2 số và b thỏa mãn Chứng minh:



**Lời giải**



 Do nên 



**Bài 58:** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Xét hiệu:



(Dấu xảy ra 

Vậy (dấu xảy ra 

**Bài 59:** Cho là ba số dương thỏa mãn Chứng minh rằng:



**Lời giải**

Trước tiên ta chứng minh BĐT: Vơi mọi và  ta có:



Dấu xảy ra 

Thật vậy, với và ta có:



(luôn đúng)

Dấu xảy ra 

Áp dụng bất đẳng thức ta có:



Dấu xảy ra 

Ta có: 

Áp dụng BĐT (\*) ta có :

 (Vì 

Hay



Mà nên 

Vậy (đpcm)

**Bài 60:** Cho các số thực dương thỏa mãn Chứng minh rằng:



**Lời giải**

Đặt 



Áp dụng BĐT và với dương , dấu bằng xảy ra 

Ta có: 

Bởi vậy 



**Bài 61:** Cho Chứng minh rằng : 

**Lời giải**

Học sinh chứng minh với mọi 



Dấu xảy ra 

**Bài 62:** Biết là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



**Lời giải**



Tổng hai cạnh tam giác lớn hơn cạnh thứ ba nên cả 4 thừa số đều dương, suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 63:** Cho 2 số và b thỏa mãn Chứng minh:

**Lời giải**



Do nên 



**Bài 64:** Cho là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



**Lời giải**

Đặt 

Từ đó suy ra 

Thay vào biểu thức A ta được:



**Bài 65:** Cho là ba số dương thỏa mãn Chứng minh rằng:



**Lời giải**

Trước tiên ta chứng minh BĐT: ta có:

. Dấu xảy ra 

Thật vậy, với và ta có: (\*\*)



Dấu xảy ra 

Áp dụng BĐT (\*\*) ta có: 

Dấu xảy ra 

Ta có: 

Áp dụng bất đẳng thức (\*) ta có:

Hay 

Mà nên 

Vậy 

**Bài 66:** Cho là các số thực dương thỏa mãn Chứng minh rằng:

 

**Lời giải**

* Nhận xét : có 

Tương tự: 

Do đó: 

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:



Vậy . Dấu “=” xảy ra 

**Bài 67:** Cho là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng:



**Lời giải**



Vì 

BĐT (2) đúng nên BĐT (1) đúng. Dấu “=” xảy ra khi 

**Bài 68:** Cho 3 số dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Từ 



Dấu “=” xảy ra 

**Bài 69:** Cho  là các số dương. Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có:



Xét



đpcm

Dấu xảy ra khi 

**Bài 70:** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

****

**Bài 71:** Chứng minh rằng: với 

**Lời giải**

Theo bài ra ta có: 

Mặt khác : 

Từ (1) và (2) suy ra: 

**Bài 72:** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có :



Ta cộng (1), (2), (3), (4) vế theo vế ta được :



**Bài 73:** a)Cho  và  là hai số thực. Chứng minh rằng 

b) Cho là ba số dương thỏa mãn 

Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

a) Với và ta có:



 luôn đúng

b)Áp dụng bất đẳng thức ta có:



Ta có: 

Áp dụng bất đẳng thức (2) ta có:



Hay 

Mà  nên 

Do đó: 

**Bài 74:** Cho thỏa mãn Chứng minh 

**Lời giải**

1. Có: 

Dấu đẳng thức xảy ra khi 

Áp dụng có: 

Suy ra: 





Với dương , chứng minh 

Dấu bằng xảy ra khi 

Ta được: 

. Dấu đẳng thức xảy ra 

**Bài 75:** Cho Chứng minh rằng 

**Lời giải**

Giả sử 



Vậy 

**Bài 76:** Cho  là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



**Lời giải**

Đặt Ta có: 

Từ đó suy ra : 

Thay vào ta được: 

Từ đó suy ra . Dấu “= “ xảy ra 

**Bài 77:** Cho  là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



**Lời giải**

Đặt 

Từ đó suy ra 

Thay vào ta được:



Từ đó suy ra hay 

**Bài 78:** Cho  là 3 cạnh của tam giác, là nửa chu vi.

CMR: 

**Lời giải**

Ta có:



Cộng từng vế ta có điều phải chứng minh

**Bài 79:** Biết  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



**Lời giải**



Tổng hai cạnh tam giác lớn hơn cạnh thứ ba nên cả 4 thừa số đều dương, suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 80 :** Cho biểu thức Chứng minh rằng nếu là 3 cạnh của một tam giác thì 

**Lời giải**





Do là 3 cạnh của một tam giác nên

**Bài 81:** Cho bốn số dương . Chứng minh rằng: 

**Lời giải:**

Cho bốn số dương . Chứng minh rằng:

Vì  ta có: ; 

; 

Lấy (1), (2), (3) và (4) cộng vế theo vế, thu gọn ta được điều phải chứng minh.

**( Chú ý : Dạng tương tự :** Cho bốn số dương .

Chứng minh rằng: có giá trị không nguyên )

**Bài 82:** a) Chứng minh với mọi số thực x, y, z, t ta luôn có bất đẳng thức sau:

. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

b) Chứng minh rằng với x, y bất kỳ, ta có: 

**Lời giải:**

a) Ta có: 





 ( đúng )

Dấu “=” .

b) Ta có: 

******

******

***(đúng)***

Dấu “=” .

**Bài 83:** a) Cmr : 

b) Cho các số dương  và  thỏa mãn điều kiện . Cmr : 

**Lời giải:**

a) Xét hiệu : =... 

Đặt . Khi đó, .

Vậy, .

Dấu « = »  ( giải tiếp tìm  )

b) Ta có: 

( Vì các số dương  và  thỏa mãn điều kiện )

Vây, . Dấu « = » 

**Bài 84:** Chứng minh rằng:

a) 

b) 

**Lời giải:**

a) 

Áp dụng BĐT . Dấu “=” .

Ta có: 

Tương tự,  và 

Lấy (1), (2) và (3) cộng vế theo vế ta được đpcm.

Dấu “=” .

b) Đặt 

+ Nếu  thì , do đó , còn  nên 

+ Nếu  thì , do đó , còn  nên 

Vậy,  với mọi .

**Bài 85:**  Cmr: a) 

b) 

**Lời giải:**

a) 

 ( Đúng )

Dấu “=” 

b) 



Dấu “=”  hoặc 

**Bài 86:** Chứng minh rằng:

a)  với ;

b) ;

c) 

**Lời giải:**

Chứng minh rằng:

a)  với 

 với  ( Đúng )

b) Xét 

Đặt . Khi đó, ta có: 

Vậy,  (đpcm)

c) 



 ( Đúng )

**Bài 87:** Chứng minh với mọi số thực a, b khác 0 ta luôn có bất đẳng thức sau: 

**Lời giải:**

Ta có: 





 ( Đúng )

Dấu “ =” .

Vậy,  với . Dấu “ =” .

**Bài 88:** Chứng minh BĐT: 

**Lời giải:**

Chứng minh BĐT: 

Ta có: 

 ( đúng )

Vậy, . Dấu “=” .

**Bài 89:** a) Chứng minh: 

b) Chứng minh: 

c) Chứng minh:  với .

d) Chứng minh:  với 

e) Cho  và  cùng dấu. Chứng minh: 

**Lời giải:**

a) Chứng minh: 

Ta có: 



 ( Đúng )

Vậy, . Dấu “=”.

b) Chứng minh: 

***\* Cách 1: Dùng biến đổi tương đương.***

Ta có: 





( Đúng )

Vậy, . Dấu “=”.

***\* Cách 2: Dùng BĐT phụ:*** ***.*** Dấu “=”.

Ta có: 





Vậy, . Dấu “=”.

c) Chứng minh:  với .

Với  ta có: 

Do đó, 





Vậy,  với 

d) Chứng minh:  với 

Với  ta có: 

Ta có: 





Vậy,  với .

e) Cho  và  cùng dấu. Chứng minh: 

Ta có: 



 ( Vì c/m được  với a, b cùng dấu)

Dấu “=” 

Vậy,  với  và  cùng dấu. Dấu “=” 

**Bài 90:** Cho ba số dương 

a) Chứng minh rằng:;

b) Chứng minh rằng: 

**Lời giải:**

Cho ba số dương 

a) Chứng minh rằng: ***( HS tự giải )***

b) Chứng minh rằng: 

**\* Cách 1:** Ta có: 

****

****



 ( Đúng) ( theo câu a)

Dấu “ =” .

KL: . Dấu “ =” .

**\* Cách 2:** Đặt  với .

Suy ra 

Do đó, 





Dấu “=” .

**Bài 91:** Cho , chứng minh: .

**Lời giải:**

Cho , chứng minh: .

Ta có: 

Vì  và  nên .

Dấu “=” 

Vậy,  với . Dấu “=” .

**Bài 92:** Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) ; b)  khi .

**Lời giải:**

a) 

Áp dụng BĐT . Dấu “=”

Ta có: 

Dấu “=”

b)  khi .

Ta có : 



Dấu “=”

**Bài 93:** Cho là ba cạnh của một tam giác

a) Chứng minh rằng: 

b) Chứng minh rằng: thì tam giác đó là tam giác đều.

**Lời giải:**

Cho là ba cạnh của một tam giác

a) Chứng minh rằng: 

+Ta có: 





 ( Đúng )

Dấu “=”  tam giác đó là tam giác đều.

+ Theo BĐT tam giác ta có: 

Vậy, với là ba cạnh của một tam giác.

b) Chứng minh rằng: thì tam giác đó là tam giác đều.

Xét hiệu 

Suy ra 

Vậy, thì tam giác đó là tam giác đều.

**Bài 94:** Cho . Chứng minh rằng: .

**Lời giải:**

Cho . Chứng minh rằng: .

Xét hiệu: 

( vì  nên)

Do đó 

Giả sử  và , do đó  (đpcm)

Tương tự,  và , do đó  (đpcm)

Dấu 

**Bài 95:** a) Chứng minh: với 

b) Chứng minh:  với 

**Lời giải:**

a) Chứng minh: với 

Ta có:  với .

Do đó, .

Vậy, với 

b) Chứng minh:  với 

Ta có: 

Do đó, 



Vậy,  với .

**Bài 96:** Cho ba số *x, y, z*.

a) Chứng minh ;

b) Khi . Chứng minh .

**Lời giải:**

Hay . Cho ba số *x, y, z*.

a) Chứng minh 

Ta có 





.

Các bước biến đổi tương đương mà bất dẳng thức cuối đúng nên bất đẳng thức đầu đúng.

b) Khi . Chứng minh .

Ta có 



Kết hợp **** và **** ta có : 

**Bài 97:** Cho thỏa mãn Chứng minh 

**Lời giải:**

Có: 

Dấu đẳng thức xảy ra khi 

Áp dụng có: 

Suy ra: 





Với dương , chứng minh 

Dấu bằng xảy ra khi 

Ta được: 

. Dấu đẳng thức xảy ra 

**Bài 98:** Với . Hãy chứng minh các BĐT:

a)  ; b) ;

c) .

**Lời giải**

Với . Hãy chứng minh các BĐT:



a)



Với nên



Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương và ta được



Dấu “=”



Vậy, với . Dấu “=” .



b)



Áp dụng kết quả câu a, ta có:



Dấu “=” .



Vậy, . Dấu “=” .



c) .



Ta có



Áp dụng kết quả câu a, ta có:



Dấu “=” .



Vậy, . Dấu “=” .



**Bài 99:**

a) Cho . Chứng minh rằng: .



b) Cho a, b là các số tùy ý. Chứng minh:



c)Cho a, b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh:



**Lời giải**

a) Cho . Chứng minh rằng: .



Ta có mà



Do đó .



Vậy, nếu thì .



b) Cho a, b là các số tùy ý. Chứng minh:



Đặt



Đặt , ta có:



Vậy, . Dấu “=” .



c)Cho a, b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh: .



Đặt thì và



C/m BĐT phụ: với .



Thật vậy, ta có



Suy ra



( cả hai vế đều không âm)



Do đó, với . Dấu “=”



Áp dụng BĐT trên, ta có



Vậy, . Dấu “=” tam giác đã cho đều.



**Bài 100:**

Cho thỏa mãn Chứng minh



**Lời giải**

Có:



Dấu đẳng thức xảy ra khi



Áp dụng có:



Suy ra:



Với dương , chứng minh



Dấu bằng xảy ra khi



Ta được:



. Dấu đẳng thức xảy ra



**Bài 101:**

Cho các số thỏa mãn Chứng minh rằng:



**Lời giải**

Vì nên suy ra



Do đó :



Lại có:



Vì nên



Do đó từ



Từ (1) và (3) suy ra



**Bài 102:**

Cho Chứng minh rằng 

**Lời giải**

Giả sử



Vậy



**Bài 103:**

Cho là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



**Lời giải**

Đặt Ta có:



Từ đó suy ra :



Thay vào ta được:



Từ đó suy ra . Dấu “= “ xảy ra



**Bài 104:**

Cho là các số thực dương thỏa mãn Chứng minh rằng:



**Lời giải**

* Nhận xét : có



Tương tự:



Do đó:



Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:



Vậy . Dấu “=” xảy ra



**Bài 105:** Cho thỏa mãn Chứng minh



**Lời giải**

Ta có:

mà nên



**Bài 106:** CMR với là các số dương, ta có:



**Lời giải**



Mà (BĐT Cô si)



Do đó: . Vậy



**Bài 107:** Cho biểu thức Chứng minh rằng nếu là 3 cạnh của một tam giác thì



**Lời giải**



Do là 3 cạnh của một tam giác nên



**Bài 108:** CMR với là các số dương, ta có: 

**Lời giải**

Ta có:



Mà (BĐT Cô si)

Do đó: . Vậy 

**Bài 109:** Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác

Chứng minh rằng 

**Lời giải**

Đặt 

Từ đó suy ra 

Thay vào ta được 

Từ đó suy ra hay 

**Bài 110:** Chứng minh rằng , trong đó a, b, c là các số thực không nhỏ hơn 1.

**Lời giải**



(đúng với mọi )

**Bài 111:** Chứng minh  với mọi số thực a, b, c.

**Lời giải**

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên ta có:

 ; 



Do đó, suy ra: 

**Bài 112:** Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng: .

Đẳng thức xảy ra khi nào?

**Lời giải**



Áp dụng bđt côsi ta có: 



. Đẳng thức xảy ra khi a = b = c

**Bài 113:** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn . Chứng minh rằng



**Lời giải**



**Bài 114:** Cho a và b là hai số dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng .

Đẳng thức xảy ra khi nào?

**Lời giải**

 (\*)

Vì 

Mà = (Theo BĐT Cauchy) nên BĐT (\*) đúng do đó bđt được CM.

Đẳng thức xảy ra khi .

**Bài 115:** Cho a, b, c là độ dài các cạnh và p là nửa chu vi của một tam giác. Chứng minh:  

**Lời giải**

Ta có: ( x, y >0)

Áp dụng kết quả này ta được:



Tương tự ta có: 

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên, thu gọn ta được:



Dấu đẳng thức xảy ra khi a = b = c hay tam giác đã cho là đều.

**Bài 116:** Cho a, b, c là các số dương . Chứng minh bất đẳng thức:

 + +   

**Lời giải**

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho cặp số  ,  không âm ta có :

 +   2 = 2 .  = a

Suy ra   a - 

Tương tự   b - 

 c - 

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta được:

 + +   ( a + b + c ) - = 

Vậy  + +    (đpcm)

**Bài 117:** Cho x > y > 0. Chứng minh: 

**Lời giải**

Với x > 0; y > 0. Ta có x + y  0

Áp dụng tính chất cơ bản của phân thức ta có:



*(1)*

Mặt khác : x > 0 ; y > 0 nên x2 + 2xy + y2 > x2 + y2

*(2)*

Từ (1) và (2) ta có: (đpcm).

**Bài 118:** Chứng minh biểu thức: A = 4a(a + b)(a + b + c)(a + c) + b2c2  0 với mọi a, b, c.

**Lời giải**

A = 4a(a + b)(a + b + c)(a + c) + b2c2

= 4 (a + b) (a + c) a (a + b + c) + b2c2

= 4(a2 + ab + ac + bc)(a2 + ab + ac) + b2c2

Đặt a2 + ab + ac = m, ta có:

A = 4(m + bc)m + b2c2 = 4m2  + 4mbc + b2c2 =( 2m + bc)2

= (2 a2 + 2 ab + 2ac + bc)2 0 với mọi a,b,c (đpcm)

**Bài 119:** Cho 3 số dương có tổng bằng Chứng minh rằng 

**Lời giải**

Từ 



Dấu xảy ra 

**Bài 120:** Cho a, b, c > 0; a + b + c = 3.

Chứng minh rằng: .

**Lời giải**

Do a, b > 0 và 1 + b2 ≥ 2b với mọi b nên .

Tương tự ta có : ; 

mà a + b + c = 3 nên  (1)

Cũng từ a + b + c = 3 ⇒ (a + b + c)2 = 9

⇔ a2 + b2 + c2 + 2(ab + bc + ca) = 9

mà a2 + b2 ≥ 2ab; b2 + c2 ≥ 2bc; c2 + a2 ≥ 2ac nên a2 + b2 + c2 ≥ ab + bc + ca suy ra 3(ab + bc + ca) ≤ 9 ⇔ ab + bc + ca ≤ 3 (2).

Từ (1) và (2) suy ra  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 

**Bài 121:** Cho là ba số dương thỏa mãn Chứng minh rằng:

**Lời giải**

Trước tiên ta chứng minh BĐT: Với mọi ta có:

Dấu “=”xảy ra

Thật vậy, với và ta có:

( luôn đúng)

Dấu “=” xảy ra

Áp dụng bất đẳng thức (\*\*) ta có:

Dấu “=” xảy ra

Ta có:

Áp dụng BĐT (\*) ta có :

(Vì abc = 1)

Hay

Mà nên :

Vậy

**Bài 122:** Cho các số thực dương thỏa mãn x + y + z =3. Chứng minh rằng:

**Lời giải**

Đặt

Áp dụng BĐT :

và với a,b,c dương; dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b = c

Ta có:

Bởi vậy

(đpcm)

**Bài 123:** Cho ba số dương  thỏa mãn . Chứng minh rằng

**Lời giải**

Ta có:  (1)



 (vì )

 (vì x, y dương nên x + y dương) (2)

Từ (1) và (2), ta có: 

  (đpcm)

**Bài 124:** Cho . Chứng minh rằng 

**Lời giải**

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM với ta có



Áp dụng BĐT Cauchy Schwarz 

Ta có: 

Suy ra : 

Tương tự:





Cộng vế với vế các BĐT trên ta có:



**Bài 125:** Cho là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức:



**Lời giải**

Ký hiệu vế trái là vế phải là xét hiệu 



Do bình đẳng nên giả sử khi đó , 





Mà  nên  đpcm

**Bài 126:** Cho là các số không âm và không lớn hơn 2 thỏa mãn 

Chứng minh rằng 

**Lời giải**

Từ giả thiết ta có:



Cộng hai vế với sau đó thu gọn ta được:



Mà nên 

Dấu bằng xảy ra khi trong ba số có một số bằng một số bằng một số bằng 1.

**Bài 127:** Chứng minh rằng: , trong đó là các số thực không nhỏ hơn 1

**Lời giải**





(đúng với mọi 

**Bài 128:** Cho là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



**Lời giải**

Đặt 

từ đó suy ra 

Thay vào ta được: 

Từ đó suy ra hay 

**Bài 129:** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có:



**Bài 130:** Chứng minh với mọi số dương 

**Lời giải**

Với mọi số dương ta có:





BĐT cuối đúng nên ta có điều phải chứng minh.

**Bài 131:** Cho là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng : 

**Lời giải**

Đặt 

Từ đó suy ra 

Thay vào ta được: 

Từ đó suy ra  hay 

**Bài 132:** Cho là các số thực dương thỏa mãn Chứng minh rằng:



**Lời giải**

Nhận xét có: 

Tương tự có: 

Do đó 

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có:



Vậy 

Đẳng thức xảy ra khi 

**Bài 133:** Cho Chứng minh rằng : 

**Lời giải**

Học sinh chứng minh với mọi 



Dấu xảy ra 

**Bài 134:** Biết là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



**Lời giải**



Tổng hai cạnh tam giác lớn hơn cạnh thứ ba nên cả 4 thừa số đều dương, suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 135:** Cho là các số dương.

Chứng minh: 

**Lời giải**

Áp dụng BĐT Cô si cho ba số dương ta được:



Cũng theo BĐT Cô si :

 và 

Nhân tương ứng hai vế các BĐT (1) và (2) được:



Hay 

Từ và suy ra 

Dấu xảy ra khi và chỉ khi 

**Bài 136:** Chứng minh bất đẳng thức:

 với 

**Lời giải**

Gọi vế trái là ta có:



Vậy 

**Bài 137:** Cho . Chứng minh 

**Lời giải**

Từ thay vào đẳng thức cần chứng minh ta có: 

BĐT này luôn đúng . Vậy 

Dấu xảy ra 

**Bài 138**: Cho là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

**Lời giải**

Đặt 

Từ đó suy ra 

Thay vào ta được:



Từ đó suy ra hay 

**Bài 139:** Cho 3 số dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Từ 



Dấu “=” xảy ra 

**Bài 140:** Cho thỏa mãn Chứng minh rằng: 

**Lời giải**



Vì ĐT (2) luôn đúng nên BĐT (1) đúng.

Dấu xảy ra 

**Bài 141:** Chứng minh bất đẳng thức sau:

với mọi 

**Lời giải**

Có với mọi 





**Bài 142:** Cho là ba số dương thỏa mãn Chứng minh rằng:



**Lời giải**

Trước tiên ta chứng minh BĐT: Vơi mọi và  ta có:



Dấu xảy ra 

Thật vậy, với và ta có:



(luôn đúng)

Dấu xảy ra 

Áp dụng bất đẳng thức ta có:



Dấu xảy ra 

Ta có: 

Áp dụng BĐT (\*) ta có :

 (Vì 

Hay



Mà nên 

Vậy (đpcm)

**Bài 143:** Cho là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng:



**Lời giải**



Vì 

BĐT (2) đúng nên BĐT (1) đúng. Dấu “=” xảy ra khi 

**Bài 144: a)**  Cho là 3 cạnh của tam giác, là nửa chu vi.

CMR: 

1. Cho  là các số dương. Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có:



Cộng từng vế ta có điều phải chứng minh

b)Ta có:



Xét



đpcm

Dấu xảy ra khi 