SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẠC LIÊU

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020
Môn thi chuyên: **TOÁN**

Câu 1.

a) Chứng minh rằng số có dạng $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ không phải là số chính phương, trong đó $n \in \mathbb{N}, n > 1$

b) Rút gọn biểu thức: $B = \left(13 - 4\sqrt{3}\right)\left(7 + 4\sqrt{3}\right) - 8\sqrt{20 + 2\sqrt{43 + 24\sqrt{3}}}$

Câu 2.

a) Một người mang trứng ra chợ bán. Tổng số trứng bán ra được tính như sau: Ngày thứ nhất bán được 8 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại. Ngày thứ hai bán được 16 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại. Ngày thứ ba bán được 24 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại. Cứ như vậy cho đến ngày cuối cùng thì bán hết trứng. Biết số trứng bán được mỗi ngày đều bằng nhau. Hỏi tổng số trứng người đó bán được là bao nhiêu và bán hết trong mấy giờ

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{7x + y} + \sqrt{2x + y} = 5 \\ \sqrt{2x + y} + x - y = 2 \end{cases}$

Câu 3.

a) Cho phương trình $2018x^2 - (m - 2019)x - 2020 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\sqrt{x_1^2 + 2019} - x_1 = \sqrt{x_1^2 + 2019} + x_2$$

b) Giải phương trình: $2\left(x^2 + 2\right) = 5\sqrt{x^3 + 1}$

Câu 4. Cho ΔABC không cân, biết ΔABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của BC, CA, AB với đường tròn (I). Gọi M là giao điểm của đường thẳng EF và đường thẳng BC, biết AD cắt đường tròn (I) tại điểm N $(N \neq D)$. Gọi K là giao điểm của AI, EF

a) Chứng minh rằng $AK.AI = AN.AD$ và các điểm I, D, N, K cùng thuộc đường một đường tròn

b) Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn (I).

Câu 5. Cho đường tròn $(O; R)$ và hai điểm B, C cố định sao cho $BOC = 120^0$. Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho ΔABC nhọn. Gọi E là điểm đối xứng với B qua AC và F là điểm đối xứng với C qua AB. Các đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABE, \Delta ACF$ cắt nhau tại K $(K \neq A)$. Gọi H là giao điểm của BE, CF

a) Chứng minh KA là phân giác trong góc BKC và tứ giác $BHCK$ nội tiếp

b) Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác $BHCK$ lớn nhất, tính diện tích lớn nhất của tứ giác $BHCK$ theo R.

ĐÁP ÁN

Câu 1. a) Ta có:

$$A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$$
$$= n^2\left[n^2(n-1)(n+1) + 2(n+1)\right]$$
$$= n^2(n+1)\left[(n^3+1) - (n^2-1)\right]$$
$$= n^2(n+1)^2(n^2 - 2n + 2)$$

Với $n \in \mathbb{N}, n > 1 \Rightarrow n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 > (n-1)^2$

Và $n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2(n-1) < n^2$

Vậy $(n-1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2$ nên $n^2 - 2n + 2$ không là số chính phương.

Do đó A không là số chính phương với $n \in \mathbb{N}, n > 1$

$$b) B = (13 - 4\sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3}) - 8\sqrt{20 + 2\sqrt{43 + 24\sqrt{3}}}$$
$$= 91 + 52\sqrt{3} - 28\sqrt{3} - 48 - 8\sqrt{\left(\sqrt{13 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right)^2}$$
$$= 43 + 24\sqrt{3} - 8\left(\sqrt{13 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right)$$
$$= 43 + 24\sqrt{3} - 8\left(\sqrt{(2\sqrt{3} - 1)^2} + \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2}\right)$$
$$= 43 + 24\sqrt{3} - 8\left(2\sqrt{3} - 1 + 2 + \sqrt{3}\right) = 35$$

Câu 2.

a) Gọi x là số trứng bán được $(x \in \mathbb{N}, x > 8)$, thì:

Số trứng bán được trong ngày thứ nhất là: $8 + \dfrac{x-8}{8}$

Số trứng bán được trong ngày thứ hai là: $16 + \dfrac{x - \left(16 + 8 + \dfrac{x-8}{8}\right)}{8}$

Theo bài ta có phương trình:

$$8 + \frac{x-8}{8} = 16 + \frac{x - \left(16 + 8 + \dfrac{x-8}{8}\right)}{8} \Rightarrow x = 392$$

Vậy tổng số trứng bán được là 392 trứng

Số trứng bán được mỗi ngày là : $8 + \dfrac{392 - 8}{8} = 56$

Số ngày là: $392 : 56 = 7$ (ngày)

b) Điều kiện: $\begin{cases} 7x+y\ge 0 \\ 2x+y\ge 0 \end{cases} (*)$

Đặt $u=\sqrt{7x+y}, v=\sqrt{2x+y}\,(u,v>0)$

Hệ phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases} u+v=5 & (1) \\ v+x-y=2 & (2) \end{cases}$

Ta thấy $u^2-v^2=5x$, kết hợp với (1) suy ra: $v=\dfrac{5-x}{2}$, thay vào (2) ta được:

$x=2y-1$ (3). Thay (3) vào (2) ta có: $\sqrt{5y-2}=3-y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\le 3 \\ 5y-2=(3-y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\le 3 \\ y^2-11y+11=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\le 3 \\ \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{11-\sqrt{77}}{2} \\ y=\dfrac{11+\sqrt{77}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow y=\frac{11-\sqrt{77}}{2} \Rightarrow x=10-\sqrt{77}\,(tm)$$

Vậy $(x,y)=\left(10-\sqrt{77};\dfrac{11-\sqrt{77}}{2}\right)$

Câu 3.

a) Do $ac<0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m

Ta có:

$$\sqrt{x_1^2+2019}-x_1=\sqrt{x_2^2+2019}+x_2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2+2019}-\sqrt{x_2^2+2019}=x_2+x_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+2019}-\sqrt{x_2^2+2019}}=x_2+x_1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1+x_2=0 \\ \sqrt{x_1^2+2019}-\sqrt{x_2^2+2019}=x_1-x_2 \end{array}\right.$$

*Trường hợp 1: $x_1+x_2=0 \Leftrightarrow m-2019=0 \Leftrightarrow m=2019$

*Trường hợp 2: Không xảy ra do: $\sqrt{x_1^2+2019}>|x_1|;\sqrt{x_2^2+2019}>|x_2|$

Vậy $m=2019$

b)ĐK: $x^3+1\ge 0$

$$2\left(x^2+2\right)=5\sqrt{x^3+1}$$

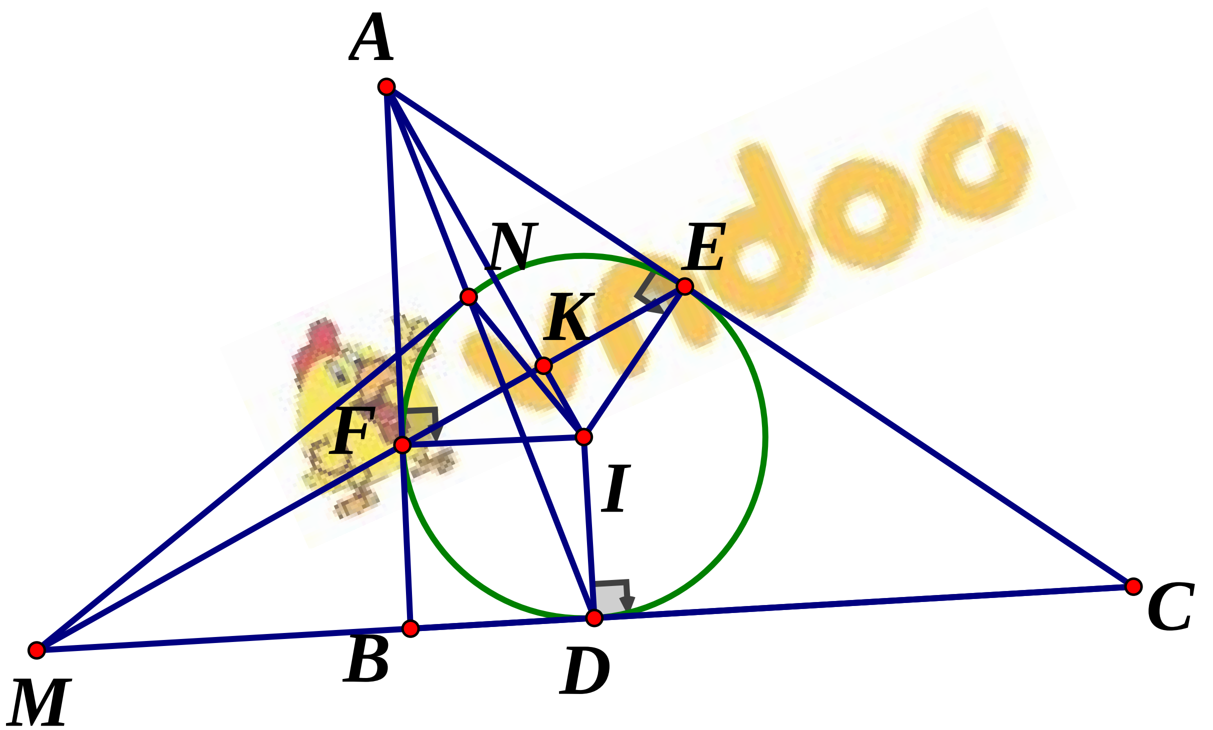
$$\Leftrightarrow 2\left(x^2-x+1+x+1\right)=5\sqrt{\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow 2.\frac{x+1}{x^2-x+1}-5.\sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}}+2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}}=2\\ \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x^2-5x+3=0(VN)\\ x^2-5x-3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5-\sqrt{37}}{2}\\ x=\dfrac{5+\sqrt{37}}{2}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm : $x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$

Câu 4.



a) Ta có: AE, AF là hai tiếp tuyến của đường tròn (I) nên $AE=AF$, AI là phân giác của EAF

ΔAEF cân tại A, AI là đường phân giác do đó AI là đường cao của ΔAEF

ΔEAI vuông tại E, EK là đường cao nên $AE^2=AK.AI$

Xét ΔAEN và ΔADE có EAN chung; $AEN=ADE$ (góc tạo bởi tiếp tuyến dây cung) Do đó $\Delta AEN\sim\Delta ADE(g.g)\Rightarrow \dfrac{AE}{AD}=\dfrac{AN}{AE}\Rightarrow AE^2=AN.AD$

Ta có: $AK.AI=AN.AD$ (cùng bằng AE^2)

Xét ΔANK và ΔAID có: KAN chung; $\dfrac{AN}{AI}=\dfrac{AK}{AD}\left(Do\,AK.AI=AN.AD\right)$

Do đó : $\Delta ANK \sim \Delta AID(c.g.c) \Rightarrow AKN = ADI \Rightarrow DNKI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Do MD là tiếp tuyến của (I) nên $MD \perp ID$

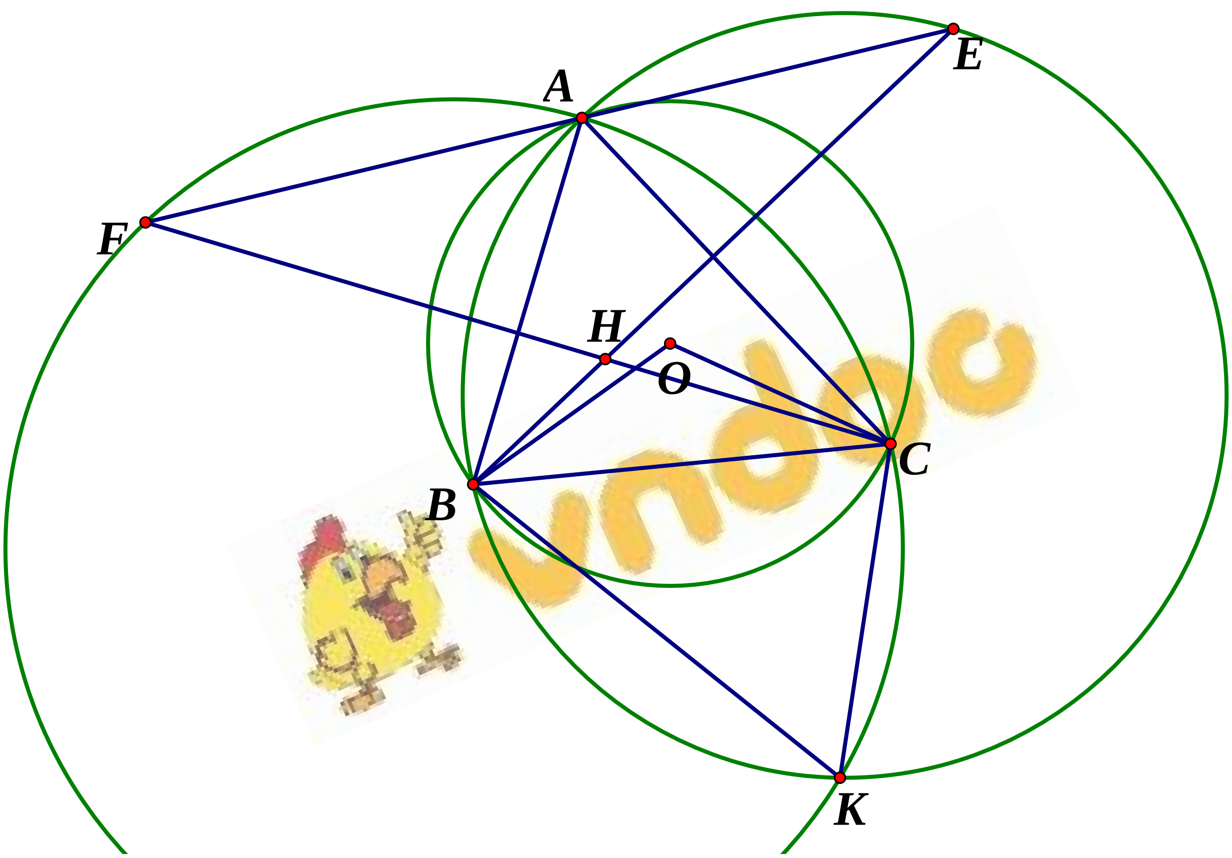
Tứ giác $MKID$ có $MKI + MDI = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Do đó, $MKID$ là tứ giác nội tiếp nên M, N, K, I, D cùng thuộc một đường tròn

Suy ra $MNI = MKI = 90^0 \Rightarrow MN \perp IN\left(N \in \left(I\right)\right)$

Vậy MN là tiếp tuyến của đường tròn $\left(I\right)$

Câu 5.



a) Ta có: $AKB = AEB$ (cùng chắn AB của đường tròn ngoại tiếp ΔAEB)

Mà $ABE = AEB$ (tính chất đối xứng) suy ra : $AKB = ABE$ (1)

Ta có: $AKC = AFC$ (cùng chắn cung AC của đường tròn ngoại tiếp ΔAFC)

Mà $ACF = AFC$ (tính chất đối xứng) suy ra : $AKC = ACF$ (2)

Mặt khác $ABE = ACF$ (cùng phụ BAC) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $AKB = AKC$ hay KA là phân giác trong của ΔBKC.

Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của $BE\ voi'\ AC$ và CF với AB

Ta có: $BOC = 120^0$ nên $BC = R\sqrt{3}, BAC = \dfrac{1}{2}BOC = 60^0$

Trong tam giác vuông ABP có: $APB = 90^0, BAC = 60^0 \Rightarrow ABP = 30^0$.

Hay $ABE = ACF = 30^0$

Tứ giác $APHQ$ có: $AQH + APH = 180^0$

$\Rightarrow PAQ + PHQ = 180^0 \Rightarrow PHQ = 120^0 \Rightarrow BHC = 120^0$ (đối đỉnh)

Ta có: $AKC = ABE = 30^0, AKB = ACF = ABE = 30^0$

Mà $BKC = AKC + AKB = AFC + AEB = ACF + ABE = 60^0$

$\Rightarrow BHC + BKC = 180^0$, Do đó tứ giác $BHKC$ nội tiếp.

b) Gọi (O') là đường tròn đi qua bốn điểm B, H, C, K. Ta có dây $BC = R\sqrt{3}$

$BKC = 60^0 = BAC$ nên bán kính đường tròn (O') bằng bán kính R của đường tròn (O)

Gọi M là giao điểm AH và BC suy ra $MH \perp BC$, kẻ $KN \perp BC (N \in BC)$, gọi I là giao điểm của HK và BC.

Ta có: $S_{BHCK} = S_{BHC} + S_{BCK} = \frac{1}{2}BC.HM + \frac{1}{2}BC.KN = \frac{1}{2}BC.(HM + KN)$

$S_{BHCK} \leq \frac{1}{2}BC(HI + KI) = \frac{1}{2}BC.KH$ (do $HM \leq HI, KN \leq KI$)

Ta có: KH là dây cung của đường tròn $(O'; R)$

Suy ra $KH \leq 2R$ (không đổi) nên S_{BHCK} lớn nhất $= KH = 2R$ và $HM + KN = HK = 2R$

Giá trị lớn nhất $S_{BHCK} = \frac{1}{2}R\sqrt{3}.2R = \sqrt{3}R^2$

Khi HK là đường kính của đường tròn (O') thì M, N, I trùng nhau, suy ra I là trung điểm của BC nên ΔABC cân tại A. Khi đó A là điểm chính giữa của cung lớn BC.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THỪA THIÊN HUẾ	ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2019-2020
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	Môn thi chuyên: **TOÁN (chuyên)**

Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức $P = \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1}$. Tìm x để $P = 3$

b) Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) = 2$

.Tính giá trị của biểu thức $Q = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}$

Câu 2.

a) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $parabol(P): y=\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y=\frac{1}{2}x+3$. Gọi $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B)$ (với $x_A<x_B$) là các giao điểm của (P) và (d), $C(x_C;y_C)$ là điểm thuộc (P) sao cho $x_A<x_C<x_B$. Tìm giá tri lớn nhất của diện tích tam giác ABC

b) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3(x-y)+x^2y^2=1 \\ x^2(xy+3)-3xy=3 \end{cases}$

Câu 3. a) Giải phương trình: $\sqrt{x+3+3\sqrt{2x-3}}+\sqrt{x-1+\sqrt{2x-3}}=2\sqrt{2}$

b) Cho phương trình (ẩn x) : $x^2+(m-1)x+m-6=0$. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 sao cho biểu thức $A=(x_1^2-4)(x_2^2-4)$ có giá trị lớn nhất.

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC có $AB<AC$ và trực tâm là T. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC và D là điểm đối xứng với T qua đường thẳng BC, I và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên AB, AC, E và F lần lượt là trung điểm của AC và IH.

a) Chứng minh $ABDC$ là tứ giác nội tiếp và hai tam giác ACD và IHD đồng dạng.

b) Chứng minh ba điểm I,H,K thẳng hàng và DEF là tam giác vuông

c) Chứng minh $\frac{BC}{DH}=\frac{AB}{DI}+\frac{AC}{DK}$

Câu 5. a) Cho ba số dương x,y,z thỏa mãn $xyz=2$. Chứng minh:

$$\frac{x}{2x^2+y^2+5}+\frac{2y}{6y^2+z^2+6}+\frac{4z}{3z^2+4x^2+16}\le\frac{1}{2}$$

b) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho $\frac{2^{2020}}{3x+1}$ là số nguyên.

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) Điều kiện $x\ge 0, x\ne 1$. Ta có:

$$P=\frac{3x+3\sqrt{x}-3-(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)-(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

$$P=3\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=3\Leftrightarrow\sqrt{x}=2\Leftrightarrow x=4(tmdk)$$

b) Ta có:

$$2 = xy + \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} + x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1} = xy + \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} + Q$$

$$\Rightarrow (2-Q)^2 = \left[xy + \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}\right]^2$$

$$\Rightarrow 4 - 4Q + Q^2 = 2x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 + 2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}$$

Ta lại có $Q^2 = x^2(y^2+1) + y^2(x^2+1) + 2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}$

$$\Rightarrow Q^2 = 2x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}$$

$$\Rightarrow 4 - 4Q = 1 \Leftrightarrow Q = \frac{3}{4}$$

Câu 2.

a) Phương trình hoành độ giao điểm (P) và (d) là: $\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=3 \end{array}\right.$

Các giao điểm $A(-2;2)$ và $B\left(3;\frac{9}{2}\right)$

Gọi $C\left(x_C;\frac{x_C^2}{2}\right)$ với $-2 < x_C < 3$. Gọi A',B',C' theo thứ tự là hình chiếu của A,B,C trên trục hoành. Ta có:

$$S_{ABC} = S_{ABB'A'} - S_{ACC'A'} - S_{BCC'B'}$$

$$= \frac{1}{2}\left(2+\frac{9}{2}\right).5 - \frac{1}{2}\left(2+\frac{x_C^2}{2}\right)(x_C+2) - \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}+\frac{x_C^2}{2}\right)(3-x_C)$$

$$= -\frac{5}{4}x_C^2 + \frac{5}{4}x_C + \frac{15}{2}$$

Ta có: $S_{ABC} = \frac{125}{16} - \frac{5}{4}\left(x_C - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{125}{16}$

Vậy $Max\, S_{ABC} = \frac{125}{16} \Leftrightarrow x_C = \frac{1}{2}$

b) Viết lại hệ $\begin{cases} x^4 - 2x^3y + x^2y^2 + x^3y = 1 \\ x^3y + 3(x^2 - xy) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - xy)^2 + x^3y = 1 \\ x^3y + 3(x^2 - xy) = 3 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = x^2 - xy \\ v = x^3y \end{cases}$, ta có hệ $\begin{cases} u^2 + v = 1 & (1) \\ v + 3u = 3 & (2) \end{cases}$

(2) ta có: $v = 3 - 3u$. Thay vào (1) ta được $u^2 - 3u + 2 = 0 \Leftrightarrow u = 1, u = 2$

$$Th1: u=1 \Rightarrow v=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - xy = 1 \\ x^3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x;y) \in \{(1;0);(-1;0)\}$$

$$Th2: u=2 \Rightarrow v=-3 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - xy = 2 \\ x^3y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \dfrac{3}{x^2} = 2 \\ x^2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 2x^2 + 3 = 0 \\ x^2y = -3 \end{cases} (VN)$$

Câu 3.

a) Điều kiện : $x \geq \dfrac{3}{2}$

Phương trình (1) viết lại $\sqrt{2x+6+6\sqrt{2x-3}} + \sqrt{2x-2+2\sqrt{2x-3}} = 4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-3+6\sqrt{2x-3}+9} + \sqrt{2x-3+2\sqrt{2x-3}+1} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{2x-3}+3\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{2x-3}+1\right)^2} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-3}+3+\sqrt{2x-3}+1 = 4$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} (tmdk)$$

$b)\Delta = (m-1)^2 - 4(m-6) = m^2 - 6m + 25 = (m-3)^2 + 16 > 0$ với mọi m

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

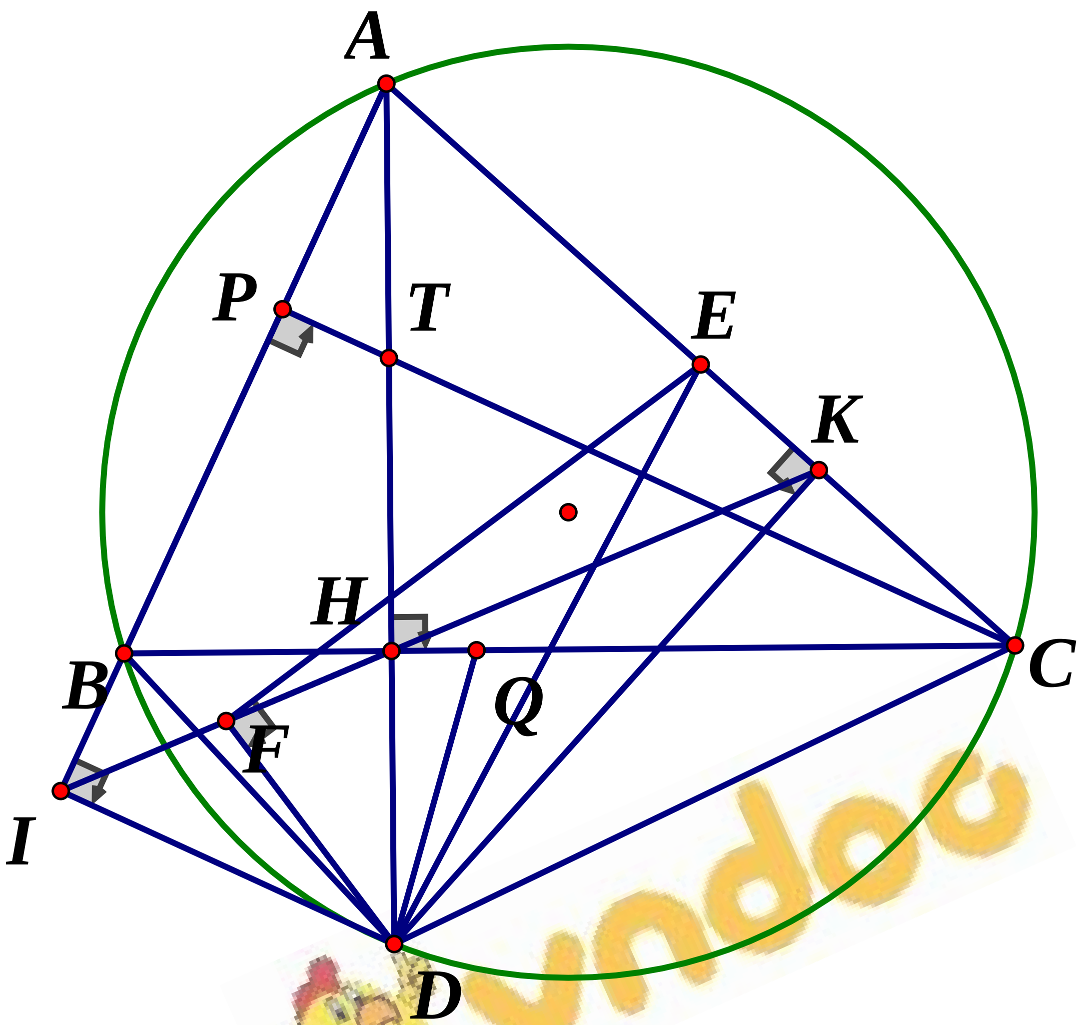
Theo định lý Viet ta có: $x_1 + x_2 = -(m-1), x_1x_2 = m-6$

Ta có: $A = x_1^2x_2^2 - 4\left(x_1^2 + x_2^2\right) + 16 = x_1^2x_2^2 - 4\left(x_1 + x_2\right)^2 + 8x_1x_2 + 16$

$$A = (m-6)^2 - 4(m-1)^2 + 8(m-6) + 16 = -3m^2 + 4m = -3\left(m - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} \leq \frac{4}{3}$$

Vậy khi $m = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow MaxA = \dfrac{4}{3}$

Câu 4.



a) Ta có $DAB = TCB$ (cùng phụ với ABC), $TCB = DCB$ (D và T đối xứng qua BC)

Do đó $DAB = DCB \Rightarrow ABDC$ là tứ giác nội tiếp

Nên $DIH = DBH = DAC$ và $IHD = IBD = ACD$

Do đó $\Delta ACD \sim \Delta IHD$

b) Tứ giác $IBHD$ nội tiếp nên $BHI = BDI$

Tứ giác $DHKC$ có hai đỉnh H và K cùng nhìn đoạn DC dưới một góc vuông nên $DHKC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow KHC = KDC$

Các tứ giác $ABDC$ và $KDIA$ nội tiếp nên $KDI = BDC$ (cùng bù với BAC)

Nên $BDI = KDC$, do đó $BHI = KHC$. Vì I, K nằm khác phía đối với đường thẳng BC nên ba điểm K, H, I thẳng hàng.

Hai tam giác ACD và IHD đồng dạng với nhau có DE, DF lần lượt là các đường trung tuyến nên $\dfrac{DC}{DH} = \dfrac{DE}{DF}$

$\Rightarrow HDF = EDC \Rightarrow HDC = FDE$

Do đó hai tam giác HDC và FDE đồng dạng suy ra $DFE = DHC = 90^0$

Vậy ΔDEF vuông tại F

c) Trên cạnh CB lấy điểm Q sao cho $CDQ = ADB$, lại có $BAD = BCD$ nên

$$\Delta DBA \sim \Delta DQC(g.g) \Rightarrow \frac{AB}{CQ} = \frac{AD}{CD}$$

$$\Delta DIA \sim \Delta DHC \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{DI}{DH} \Rightarrow \frac{AB}{CQ} = \frac{DI}{DH} \text{ hay } \frac{AB}{DI} = \frac{CQ}{DH} (1)$$

Vì $QDC = BDA \Rightarrow CDH = BDQ$

Nên $\Delta BDQ \sim \Delta ADC \Rightarrow \dfrac{BQ}{AC} = \dfrac{DB}{DA} (2)$

Ta có: $BAD = BCD = HKD$. Lại có $DBA = 180^0 - IBD, KHD = 180^0 - IHD$

Vì $DBI = IHD$ nên $ABD = DHK$

Nên $\Delta ABD \sim \Delta KHD \Rightarrow \dfrac{DB}{DA} = \dfrac{DH}{DK} (3)$

Từ (2) và (3) suy ra $\dfrac{BQ}{AC} = \dfrac{DH}{DK}$ hay $\dfrac{AC}{DK} = \dfrac{BQ}{DH} (4)$

Từ (1) và (4) suy ra $\dfrac{AB}{DI} + \dfrac{AC}{DK} = \dfrac{CQ}{DH} + \dfrac{BQ}{DH} = \dfrac{BC}{DH}$

Câu 5.

a) Áp dụng bất đẳng thức Co-si cho hai số không âm, ta có:

$$2x^2 + y^2 + 5 = \left(x^2 + y^2\right) + \left(x^2 + 1\right) + 4 \geq 2xy + 2x + 4 = 2\left(xy + x + 2\right)$$

$$6y^2 + z^2 + 6 = \left(4y^2 + z^2\right) + 2\left(y^2 + 1\right) + 4 \geq 4yz + 4y + 4 = 4\left(yz + y + 1\right)$$

$$3z^2 + 4x^2 + 16 = \left(z^2 + 4x^2\right) + 2\left(z^2 + 4\right) + 8 \geq 4zx + 8z + 8 = 4\left(zx + 2z + 2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2x^2 + y^2 + 5} \leq \frac{x}{2\left(xy + x + 2\right)}, \frac{2y}{6x^2 + z^2 + 6} \leq \frac{y}{2\left(yz + y + 1\right)},$$

$\dfrac{4z}{3z^2 + 4x^2 + 16} \leq \dfrac{z}{zx + 2z + 2}$. Cộng vế theo vế, ta có:

$$P \le \frac{x}{2(xy+x+2)} + \frac{y}{2(yz+y+1)} + \frac{z}{zx+2z+2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{xy+x+2} + \frac{y}{yz+y+1} + \frac{2z}{zx+2z+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{xy+x+2} + \frac{xy}{xyz+xy+x} + \frac{2z}{zx+2z+xyz}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{xy+x+2} + \frac{xy}{xy+x+2} + \frac{2}{x+xy+2}\right) = \frac{1}{2}$$

b) TH1: Xét b là số chẵn, tức là $b = 2k\left(k \in \mathbb{N}\right)$

Xét phương trình:

$3x+1 = 2^{2k} \Leftrightarrow 3x = 4^k - 1 \Leftrightarrow 3x - 3\left(4^{k-1} + ... + 1\right) \Leftrightarrow x = 4^{k-1} + ... + 1$

Vì $0 \le 2k \le 2020 \Leftrightarrow 0 \le k \le 1010$ nên TH1 có 1011 nghiệm

+Xét phương trình $3x+1 = -2^{2k} \Leftrightarrow 3(x+1) = 2 - 4^k$

Vì $\left(2-4^k\right) \not\vdots\, 3$ nên trường hợp này không có nghiệm nguyên nào

Th2: Xét b là số lẻ, tức là $b = 2k+1\left(k \in \mathbb{N}\right)$

Xét phương trình $3x+1 = 2.4^k \Leftrightarrow 3x = -1 - 2.4^k$

Vì $\left(-1-2.4^k\right) \vdots\, 3$ nên phương trình có nghiệm $x = \dfrac{-1-2.4^k}{3}$

Ta có: $0 \le 2k+1 \le 2020 \Rightarrow 0 \le k \le 1009$ nên trường hợp này có 1010 nghiệm

Vậy có tất cả $1011 + 1010 = 2021$ số nguyên x để $\dfrac{2^{2020}}{3x+1}$ là số nguyên.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HƯNG YÊN

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2019-2020

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi chuyên: **TOÁN**

Câu 1.

a) Cho a là số thực khác 1 và -1. Rút gọn biểu thức

$$P = \frac{\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 + 3}{\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 + 3} : \frac{a^3+1}{a^3-1} - \frac{2a}{a-1}$$

b) Cho các số thực x, y, a thỏa mãn $\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{y^4x^2}} = a$

Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$

Câu 2. Trên quãng đường dài 20km, tại cùng một thời điểm, bạn An đi bộ từ A đến B và bạn Bình đi bộ từ B về A. Sau 2 giờ kể từ lúc xuất phát, An và Bình gặp nhau tại C và cùng nghỉ lại 15 phút (vận tốc của An trên quãng đường AC không thay đổi, vận tốc của Bình trên quãng đường BC không thay đổi). Sau khi nghỉ, An đi tiếp đến B với vận tốc nhỏ hơn của An trên quãng đường AC là $1km/h,$ Bình đi tiếp đến A với vận tốc lớn hơn vận tốc của Bình trên quãng đường BC là $1km/h.$ Biết rằng An đến B sớm hơn so với Bình đến A là 48 phút. Hỏi vận tốc của An trên quãng đường AC là bao nhiêu ?

Câu 3. Cho các đa thức $P\left(x\right)=x^2+ax+b, Q(x)=x^2+cx+d$ với a,b,c,d là các số thực

a) Tìm tất cả các giá trị của a,b để 1 và a là nghiệm của phương trình $P(x)=0$

b) Giả sử phương trình $P(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 và phương trình $Q(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_3,x_4 sao cho $P\left(x_3\right)+P\left(x_4\right)=Q\left(x_1\right)+Q\left(x_2\right)$. Chứng minh rằng : $\left|x_1-x_2\right|=\left|x_3-x_4\right|$

Câu 4. Cho đường tròn $\left(O\right)$, bán kính $R,$ ngoại tiếp ΔABC có ba góc nhọn. Gọi AA_1,BB_1,CC_1 là các đường cao của tam giác $ABC\left(A_1\in BC, B_1\in CA, C_1\in AB\right)$.Đường thẳng A_1C_1 cắt đường tròn (O) tại A',C'(A_1 nằm giữa A' và C_1).Các tiếp tuyến của đường tròn $\left(O\right)$ tại A' và C' cắt nhau tại B'.

a) Gọi H là trực tâm $\Delta ABC.$ Chứng minh rằng $HC_1.A_1C=A_1C_1.HB_1$

b) Chứng minh rằng ba điểm B,B',O thẳng hàng

c) Khi tam giác ABC là tam giác đều, hãy tính $A'C'$ theo R

Câu 5. Với a,b là hai số thực thỏa mãn $ab=\frac{9}{4}.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\left(a-1\right)^4+1}+\sqrt{\left(b-1\right)^4+1}$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$a)P=\frac{\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2+3}{\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2+3}:\frac{a^3+1}{a^3-1}-\frac{2a}{a-1}=\frac{\frac{(a+1)^2+3(a-1)^2}{(a-1)^2}}{\frac{(a-1)^2+3(a+1)^2}{(a+1)^2}}:\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{(a-1)(a^2+a+1)}-\frac{2a}{a-1}$$

$$=\frac{4(a^2-a+1)}{4(a^2+a+1)}.\frac{(a+1)^2}{(a-1)^2}.\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a+1)(a^2-a+1)}-\frac{2a}{a-1}=\frac{a+1}{a-1}-\frac{2a}{a-1}=\frac{1-a}{a-1}=-1$$

b) Đặt $s=\sqrt[3]{x^2}$ và $t=\sqrt[3]{y^2}$ thì đẳng thức đề bài có thể viết lại thành

$\sqrt{s^3+s^2t}+\sqrt{t^3+t^2s}=a$

Do $s,t\ge 0$ nên $\sqrt{s^3+s^2t}=s\sqrt{s+t},\sqrt{t^3+t^2s}=t\sqrt{s+t}$

Từ đó ta có: $(s+t)\sqrt{s+t}=a$ hay $(s+t)^3=a^2$

Vậy $s+t=\sqrt[3]{a^2}\,(dfcm)$

Câu 2.

Gọi a (km/h) là vận tốc của An khi đi trên quãng đường AC, $b(km/h)$ là vận tốc của Bình khi đi trên quãng đường BC. Ta có $a>1, b>0$

Ta thấy, độ dài quãng đường AC là $2a(km)$ và độ dài quãng đường BC là $2b(km)$

Do $AC+BC=AB$ nên ta có : $2a+2a=20\Rightarrow a+b=10(1)$

Thời gian An đi trên quãng đường BC là $\frac{2b}{a-1}$(giờ)

Thời gian Bình đi trên quãng đường AC là $\frac{2a}{b-1}$(giờ)

Do An đến B sớm hơn so với Bình đến A là $\frac{4}{5}$(giờ) $\left(48'=\frac{4}{5}h\right)$

Nên $\frac{2a}{b+1}-\frac{2b}{a-1}=\frac{4}{5}$ hay $\frac{a}{b+1}+1-1-\frac{b}{a-1}=\frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{a+b+1}{b+1}-\frac{a+b-1}{a-1}=\frac{2}{5}(2)$

Từ (1) ta có: $b=10-a$

Thay vào (2) ta được:

$\frac{11}{11-a}-\frac{9}{a-1}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow (a+44)(a-6)=0\Rightarrow a=6\Rightarrow b=4(do\, a,b>0)$

Vậy vận tốc của An trên quãng đường AC là $6(km/h)$

Câu 3.

a) Để 1 và a là nghiệm ta có $\begin{cases} P(1)=1+a+b=0 \\ P(a)=a^2+a^2+b=0 \end{cases}$

Rút $b=-1-a$ từ phương trình trên và thay vào phương trình dưới, ta được

$2a^2-a-1=0$

Từ đó $\left[\begin{array}{l} a=1\Rightarrow b=-2 \\ a=-\frac{1}{2}\Rightarrow b=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy có hai cặp (a,b) thỏa mãn điều kiện đề bài là $(1;-2)$ và $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

b) Do x_1,x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $P(x)=0$ nên

$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)$, tương tự: $Q(x)=(x-x_3)(x-x_4)$

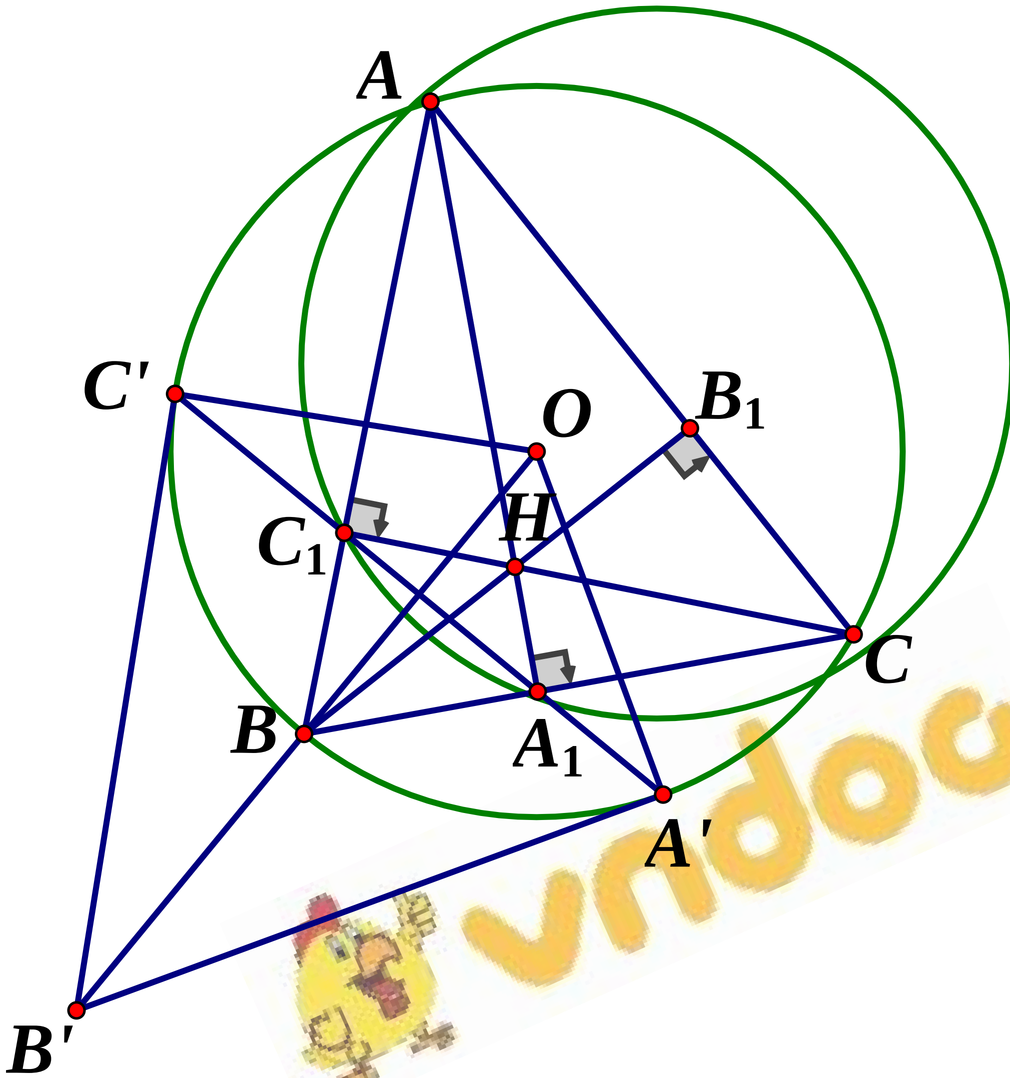
Điều kiện đề bài ta có thể viết lại thành

$(x_3-x_1)(x_3-x_2+x_1-x_4)+(x_4-x_1+x_2-x_3)(x_4-x_2)=0$

Hay $(x_3-x_2+x_1-x_4)(x_3-x_1+x_2-x_4)=0$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2=(x_3-x_4)^2$ hay $|x_1-x_2|=|x_3-x_4|$

Câu 4.



a) Hai tam giác AB_1H và AA_1C có $AB_1H = AA_1C = 90^0$ và chung góc HAB_1 nên đồng dạng với nhau theo trường hợp g-g. Từ đó $\Rightarrow \dfrac{HB_1}{A_1C} = \dfrac{AH}{AC}(1)$

Tứ giác AC_1A_1C có $AC_1C = AA_1C = 90^0$ nên nội tiếp

Suy ra $HC_1A_1 = CAH$ (cùng chắn cung A_1C của đường tròn (AC_1A_1C)) và

$HA_1C_1 = HCA$ (cùng chắn cung AC_1 của đường tròn (AC_1A_1C))

Từ đó ta có, $\Delta C_1A_1H \sim \Delta ACH(g.g) \Rightarrow \dfrac{HC_1}{A_1C_1} = \dfrac{HA}{AC}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được : $\dfrac{HB_1}{A_1C} = \dfrac{HC_1}{A_1C_1} \Rightarrow HB_1.A_1C_1 = HC_1.A_1C$

b) Theo tính chất của tiếp tuyến, ta có: $OB' \perp A'C'$ (3)

Ta sẽ chứng minh $OB \perp A'C'$ hay $OB \perp A_1C_1$

Do tam giác OBC cân tại O nên $OBA_1 = \dfrac{180^0 - BOC}{2} = \dfrac{180^0 - 2BAC}{2} = 90^0 - BAC$

Mặt khác, do tứ giác AC_1AC nội tiếp nên $C_1A_1B = BAC$ (cùng bù với C_1A_1C).

Kết hợp với kết quả ở trên, ta được: $OBA_1 = C_1A_1B = 180^0 - BAC = 90^0$

Do đó $OB \perp A_1C_1$ hay $OB \perp A'C'$. Kết hợp với (3) ta suy ra : B, B', O thẳng hàng.

c) Khi tam giác ABC đều thì BO đi qua B_1, B_1 là trung điểm của AC và $A'C' \perp BO$

Gọi K là giao điểm của BO và $A'C_1$ nên K là trung điểm của $A'C'$

Do tam giác AB_1C_1 đều và $OB \perp A_1C_1$ nên K cũng là trung điểm của A_1C_1

Do tam giác ABC đều nên O cũng là trọng tâm của tam giác. Suy ra

$$OC_1 = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}R$$

Mặt khác, sử dụng hệ thức lượng trong tam giác OC_1B vuông tại C_1 có C_1K là đường cao, ta có: $OC_1^2 = OK.OB \Rightarrow OK = \dfrac{OC_1^2}{OB} = \dfrac{1}{4}R$

Áp dụng định lý Pytago trong $\Delta A'KO$ vuông tại K, ta được:

$$A'K = \sqrt{OA'^2 - OK^2} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{16}R^2} = \frac{R\sqrt{15}}{4}$$

Vậy $A'C' = 2A'K = \dfrac{R\sqrt{15}}{4}$

Câu 5.

Biểu thức P có thể được viết lại dưới dạng

$$P = x(x-2)y(y+6) + 13x(x-2) + 4y(y+6) + 46$$

Đặt $a = x(x-2) = (x-1)^2 - 1$ và $b = y(y-6) = (y+3)^2 - 9$ thì ta có:

$$P = ab + 13a + 4b + 46 = (a+4)(b+13) - 6$$

$$= \left[(x-1)^2 + 3\right]\left[(y+3)^2 + 4\right] - 6 \geq 3.4 - 6 = 6$$

Vậy $P_{\min} = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TUYÊN QUANG	ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
ĐỀ CHÍNH THỨC	**NĂM HỌC 2019-2020**
	Môn thi chuyên: **TOÁN (chuyên)**

Câu 1. Tính tổng $S=\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+.....+\frac{1}{\sqrt{2019^2-2}+\sqrt{2019^2}}$

Câu 2. Cho phương trình $x^2-2mx+m-4(1)$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m
b) Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn: $x_1+x_2=\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}$

Câu 3. Giải phương trình và hệ phương trình sau:

$a)\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-x}=x-2+2\sqrt{-2x^2+11x-5}$

$b)\begin{cases}2\sqrt{x+y}+2\sqrt{x-y}=4+\sqrt{x^2-y^2}\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2\end{cases}$

Câu 4. Cho đường tròn (O) cố định và điểm A cố định ở ngoài đường tròn (O). Từ A kẻ đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) tại B. Một tia Ax thay đổi, nằm trong miền ΔOAB, cắt đường tròn (O) tại hai điểm C,D (C ở giữa A và D). Từ B kẻ $BH\perp AO$ tại H. Chứng minh rằng:

a) Tích $AC.AD$ không đổi
b) $CHOD$ là tứ giác nội tiếp
c) Phân giác của CHD cố định

Câu 5.

a) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $A=\frac{x^4+x^2+x+2}{x^4+3x^3+7x^2+3x+6}$ nhận giá trị là một số nguyên
b) Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=4$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}+\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{b}+3\sqrt{c}}+\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{c}+3\sqrt{a}}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$S=\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+.....+\frac{1}{\sqrt{2019^2-2}+\sqrt{2019^2}}$$

$$\Rightarrow S=\frac{1-\sqrt{3}}{1-3}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3-5}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{5-7}+.....+\frac{\sqrt{2019^2-2}-\sqrt{2019^2}}{2019^2-2-2019^2}$$

$$\Rightarrow S=\frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{7}+.....+\sqrt{2019^2-2}-\sqrt{2019^2}}{-2}$$

$$S=\frac{1-\sqrt{2019^2}}{-2}=\frac{1-2019}{-2}=1009$$

Vậy $S=1009$

Câu 2.

a) Phương trình: $x^2-2mx+m-4=0(1)$

Phương trình (1) là phương trình bậc hai của x có:

$$\Delta'=(-m)^2-1.(m-4)=m^2-m+4$$

$$\Rightarrow \Delta'=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0(\forall m)$$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

b) Với mọi m phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2

Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=m-4 \end{cases}$. Ta lại có:

$$x_1+x_2=\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}\Leftrightarrow x_1+x_2=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1x_2}\Leftrightarrow x_1+x_2=\frac{(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)}{x_1x_2}$$

$$\Leftrightarrow (x_1+x_2)\left(\frac{x_1^2-x_1x_2+x_2^2}{x_1x_2}-1\right)=0\Leftrightarrow (x_1+x_2)\frac{(x_1-x_2)^2}{x_1x_2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1+x_2=0\Rightarrow 2m=0\Leftrightarrow m=0 \\ \dfrac{(x_1-x_2)^2}{x_1x_2}=0\Rightarrow PTVN \end{array}\right.$$

Vậy $m=0$ thỏa mãn đề bài.

a) Phương trình xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1\ge 0 \\ 5-x\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\le x\le 5$

Khi đó phương trình (đề) $\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}+\sqrt{5-x}=x-2+2\sqrt{(2x-1)(5-x)}$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{2x-1}=a \\ \sqrt{5-x}=b \end{cases}(a,b\ge 0)\Rightarrow x+4=a^2+b^2\Rightarrow x-2=a^2+b^2-6$

Ta có phương trình: $a+b=a^2+b^2-6+2ab\Leftrightarrow (a+b)^2-(a+b)-6=0$

$\Leftrightarrow (a+b-3)(a+b+2)=0\Leftrightarrow a+b-3=0(do\, a+b+2>0,\forall a,b\ge 0)$

$\Leftrightarrow a+b=3\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab=9\Leftrightarrow x+4+2\sqrt{(2x-1)(5-x)}=9$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(2x-1)(5-x)}-(5-x)=0\Leftrightarrow \sqrt{5-x}\left(2\sqrt{2x-1}-\sqrt{5-x}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{5-x}=0\Leftrightarrow x=5(tm) \\ 4(2x-1)=5-x\Leftrightarrow 9x=9\Leftrightarrow x=1(tm) \end{array}\right.$

$Vay\, S=\{1;5\}$

b) ĐKXĐ: $x\ge y\ge 0$.Đặt

$\begin{cases} a=\sqrt{x+y} \\ b=\sqrt{x-y} \end{cases}(a\ge b\ge 0)\Rightarrow 2a+2b=4+ab$

$\Leftrightarrow (ab-2a)-(2b-4)=0\Leftrightarrow a(b-2)-2(b-2)=0\Leftrightarrow (a-2)(b-2)=0$

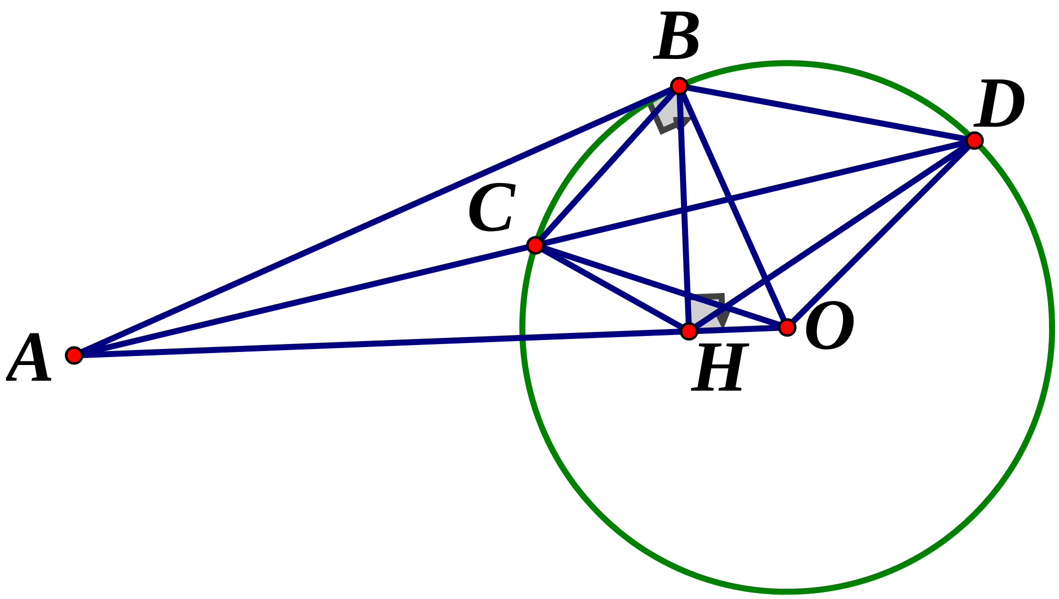
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-2=0\Leftrightarrow \sqrt{x+y}=2\Leftrightarrow x+y=4 \\ b-2=0\Leftrightarrow \sqrt{x-y}=2\Leftrightarrow x-y=4 \end{array}\right.$

$*)Th1:\begin{cases} x+y=4 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ x+y+2\sqrt{xy}=4 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ \sqrt{xy}=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}(do\ x\ge y\ge 0)$

$*)th2:\begin{cases} x-y=4 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=y+4 \\ x+y+2\sqrt{xy}=4 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=y+4 \\ y+\sqrt{xy}=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}(do\, x\ge y\ge 0)$

Vậy $x=4,y=0$

Câu 4.



a) Xét ΔABC và ΔADB có: BAD chung; $ABC = ADB = \frac{1}{2} sd\, BC$

$$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta ADB (g-g) \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AC.AD = AB^2 \, (3)$$

Do đường tròn (O), A cố định nên AB không đổi do đó $AC.AD$ không đổi

b) ΔABO vuông tại B, đường cao BH $\Rightarrow AB^2 = AH.AO (4)$

Từ (3), (4) $\Rightarrow AC.AD = AH.AO \Rightarrow \frac{AC}{AH} = \frac{AO}{AD}, \& OAD$ chung

$\Rightarrow \Delta AHC \sim \Delta ADO (c.g.c) \Rightarrow AHC = ADO \,(5) \Rightarrow$ Tứ giác $CHOD$ nội tiếp

c) Tứ giác CHOD nội tiếp $\Rightarrow OHD = OCD (6)$

ΔCOD cân tại O $\Rightarrow OCD = ODC \Rightarrow OCD = ADO$ (7)

Từ (5), (6), (7) $\Rightarrow AHC = OHD$

Mà $AHC + BHC = OHD + BHD = 90^0 \Rightarrow BHC = BHD$

$\Rightarrow BH$ là phân giác của CHD, BH cố định $\Rightarrow dfcm$

Câu 5.

a) Ta có: $A = \dfrac{x^4 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 3x + 6} = \dfrac{x^2(x^2+1) + (x+2)}{(x^4 + x^2) + (3x^3 + 3x) + (6x^2 + 6)}$

$$\Rightarrow A=\frac{x^2\left(x^2+1\right)+\left(x+2\right)}{x^2\left(x^2+1\right)+3x\left(x^2+1\right)+6\left(x^2+1\right)}=\frac{x^2\left(x^2+1\right)+\left(x+2\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+3x+6\right)}$$

Do A, x nguyên nên $x^2\left(x^2+1\right)+\left(x+2\right)$ chia hết cho $\left(x^2+1\right)\left(x^2+3x+6\right)$

$\Rightarrow x^2\left(x^2+1\right)+\left(x+2\right)$ chia hết cho $x^2+1\Rightarrow x+2\vdots x^2+1$

$\Rightarrow \left(x+2\right)\left(x-2\right)\vdots\left(x^2+1\right)\Rightarrow x^2-4\vdots x^2+1$

$\Rightarrow \left(x^2+1\right)-5\vdots x^2+1\Rightarrow 5\vdots x^2+1\Rightarrow \left(x^2+1\right)\in U\left(5\right)=\{1;5\}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=4 \\ x^2=0 \end{array}\right.\Rightarrow x=0;\pm 2$$

Thử lại với $x=-2$ thì A nguyên.

b) Ta có: $P=\dfrac{a^2}{a+3\sqrt{ab}}+\dfrac{b^2}{b+3\sqrt{bc}}+\dfrac{c^2}{c+3\sqrt{ca}}$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki (dạng phân thức), ta có:

$$P=\frac{a^2}{a+3\sqrt{ab}}+\frac{b^2}{b+3\sqrt{bc}}+\frac{c^2}{c+3\sqrt{ca}}\geq\frac{\left(a+b+c\right)^2}{a+b+c+3\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)}$$

$$P=\frac{a^2}{a+3\sqrt{ab}}+\frac{b^2}{b+3\sqrt{bc}}+\frac{c^2}{c+3\sqrt{ca}}\geq\frac{16}{4+3\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)}\left(do\, a+b+c=4\right)$$

Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$a+b\geq 2\sqrt{ab};b+c\geq 2\sqrt{bc};c+a\geq 2\sqrt{ca}$

$\Rightarrow 2a+2b+2c\geq 2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}$

$\Rightarrow \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\leq a+b+c=4\Rightarrow P\geq\dfrac{16}{4+3.4}=1$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=4 \\ a=b=c \end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{4}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1 khi $a=b=c=\dfrac{4}{3}$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA	**ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2019-2020**
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	**Môn thi chuyên: TOÁN (chuyên Tin)**

Câu 1.

1) Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+......+\frac{1}{2025\sqrt{2024}+2024\sqrt{2025}}=\frac{44}{45}$$

2) Cho x là số thực âm thỏa mãn $x^2+\frac{1}{x^2}=23$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A=x^3+\frac{1}{x^3}$$

Câu 2.

1) Giải phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}=2$

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y-2xy+x=0 \\ \left(x^2+y\right)^2-6x^2y+3x^2=0 \end{cases}$

Câu 3.

1) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $x^2-xy-5x+5y+2=0$

2) Cho biểu thức $A=\left(a^{2020}+b^{2020}+c^{2020}\right)-\left(a^{2016}+b^{2016}+c^{2016}\right)$ với a,b,c là các số nguyên dương. Chứng minh rằng A chia hết cho 30

Câu 4. Cho tam giác nhọn $ABC\left(AB<AC\right)$ nội tiếp đường tròn (O) có tâm O. Các đường cao BE,CF của tam giác ABC cắt nhau tại H. Đường phân giác ngoài của BHC cắt các cạnh AB,AC lần lượt tại M,N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác của BAC tại điểm I khác A, IM cắt BE tại điểm P và IN cắt CF tại điểm Q.

1) Chứng minh tam giác AMN cân tại A
2) Chứng minh $HPIQ$ là hình bình hành
3) Chứng mnh giao điểm của hai đường thẳng HI và AO thuộc đường tròn (O)

Câu 5. Với các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $S=\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1) Xét

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}.\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}.\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Áp dụng đẳng thức trên ta có:

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+......+\frac{1}{2025\sqrt{2024}+2024\sqrt{2025}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+.......+\frac{1}{\sqrt{2024}}-\frac{1}{\sqrt{2025}}$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{2025}}=1-\frac{1}{45}=\frac{44}{45}(dfcm)$$

2) Từ giả thiết : $x^2+\frac{1}{x^2}=23$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=23\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=25\Rightarrow x+\frac{1}{x}=-5(do\,x<0)$$

Ta có:

$$A=x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3.x.\left(x+\frac{1}{x}\right)=(-5)^3-3.(-5)=-110$$

Câu 2.

1) ĐKXĐ: $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}, x\neq 0$

Đặt $\sqrt{2-x^2}=a$ ta được:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=2\\ x^2+a^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+x=2ax\\ (a+x)^2-2ax=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+x=2ax\\ (a+x)^2-(a+x)-2=0\quad(1)\end{cases}$$

Giải (1) :

$$(a+x)^2-(a+x)-2=0\Leftrightarrow(a+x+1)(a+x-2)=0$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a+x=-1\Rightarrow ax=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}(tm)\\ a+x=2\Rightarrow ax=1\Rightarrow x=1(tm)\end{array}\right.$$

Vậy $S=\left\{1;\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right\}$

2) Nhận thấy $x=0, y=0$ là một nghiệm của hệ phương trình

Với $x\neq 0,$ từ hệ phương trình , ta có:

$$\begin{cases}3x\left(x^2+y\right)-6x^2y+3x^2=0\\ \left(x^2+y\right)^2-6x^2y+3x^2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(x^2+y\right)^2-3x\left(x^2+y\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+y\right)\left(x^2+y-3x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-x^2\\ y=-x^2+3x\end{array}\right.$$

*) $y=-x^2\Rightarrow(1)\Leftrightarrow 2x^3+x=0\Leftrightarrow x=y=0$

*) $y=-x^2+3x\Rightarrow(1)\Leftrightarrow x^3-3x^2+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=2\\ x=2\Rightarrow y=2\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình $(x,y)=\{(0,0);(1,2);(2,2)\}$

Câu 3.

1) $x^2-xy-5x+5y=2\Leftrightarrow x(x-y)-5(x-y)=2\Leftrightarrow(x-y)(x-5)=2$

Vì $2=1.2=2.1=(-1).(-2)=(-2).(-1)$ nên ta có 4 trường hợp :

*) $\begin{cases}x-y=1\\ x-5=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=6\\ x=7\end{cases}(TM)$ *) $\begin{cases}x-y=2\\ x-5=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=4\\ x=6\end{cases}(TM)$

*) $\begin{cases}x-y=-1\\ x-5=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=4\\ x=3\end{cases}(TM)$ *) $\begin{cases}x-y=-2\\ x-5=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=6\\ x=4\end{cases}(TM)$

Vậy có 4 cặp (x,y) thỏa mãn $(7;6),(6;4),(3;4),(4;6)$

2) Ta có: $x^5-x=x\left(x^4-1\right)=x\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)=x\left(x^2-1\right)\left[\left(x^2-4\right)+5\right]$

$=(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)+5(x-1)(x+1)x$

Ta có: $(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)$ chia hết cho 5 và 6

Mà $(5,6)=1$nên $(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)\vdots 30$

Lại có $(x-1)x(x+1)$chia hết cho 2 và 3 mà $(2,3)=1$nên $5(x-1)x(x+1)\vdots 30$

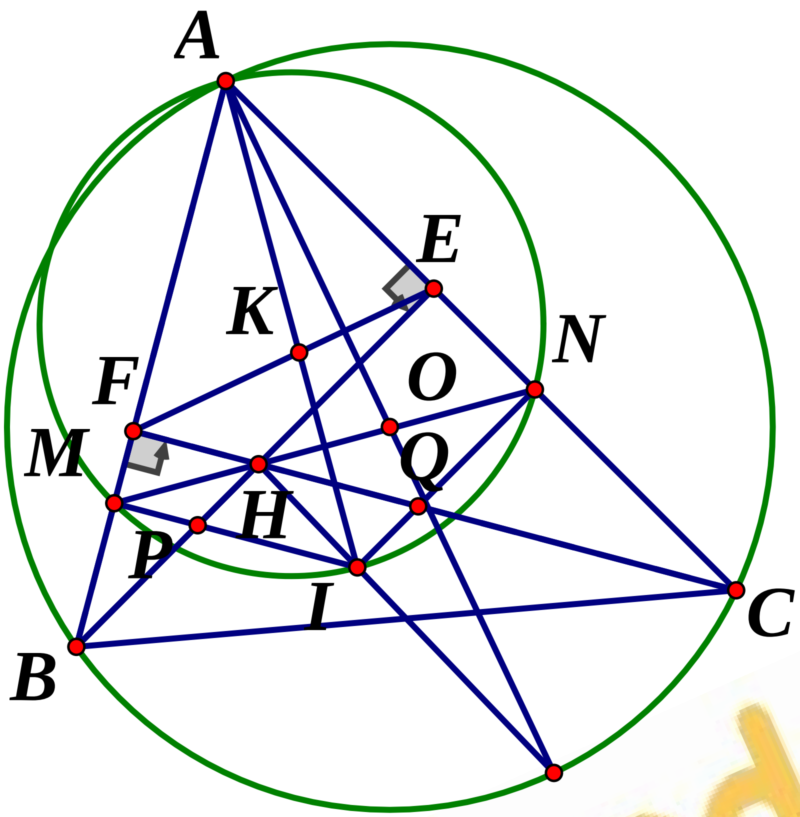
Do đó $x^5-x\vdots 30$

$Suy\ ra\ A=\left(a^{2020}+b^{2020}+c^{2020}\right)-\left(a^{2016}+b^{2016}+c^{2016}\right)$

$A=a^{2015}\left(a^5-a\right)+b^{2015}\left(b^5-b\right)+c^{2015}\left(c^5-c\right)\vdots 30$

Vậy $A\vdots 30$

Câu 4.



1) Có $\widehat{BFD}=\widehat{DMC}=\widehat{DEC};\widehat{FBD}=\widehat{ACD}=\widehat{DCE}\Rightarrow \Delta BDF\sim\Delta CDE$

2) Tứ giác $BMDF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BDF}=\widehat{BMF}$ (cùng chắn cung FB)

Tứ giác $CEMD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CDE}=\widehat{CME}$ (cùng chắn cung EC)

Do $\Delta BDF\sim\Delta CDE(cmt)\Rightarrow \widehat{BDF}=\widehat{CDE}$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow \widehat{BMF}=\widehat{CME}$

Mà các điểm B,M,C thẳng hàng $\Rightarrow E,M,F$ thẳng hàng (dpcm)

*) Kẻ AO cắt EF tại K,

$$\widehat{OAC}=\widehat{KAE}=\widehat{OCA}=\frac{180^0-\widehat{AOC}}{2}=\frac{180^0-2\widehat{ABC}}{2}=90^0-\widehat{ABC}$$

$$\Rightarrow \widehat{KAE}=90^0-\widehat{ADC}=90^0-\widehat{AEK}\Rightarrow \widehat{AEK}+\widehat{KAE}=90^0\Rightarrow AO\perp EF$$

3) $\Delta ABM\sim\Delta ADF\Rightarrow \frac{AF}{DF}=\frac{AM}{BM}$ và $\Delta ACM\sim\Delta ADE\Rightarrow \frac{AE}{ED}=\frac{AM}{CM}$,

Mà $BM=CM\,(gt)\Rightarrow \frac{AF}{DF}=\frac{AE}{ED}\Rightarrow \frac{FN}{NE}=\frac{DF}{DE}\left(do\,\frac{FN}{NE}=\frac{AF}{AE}\right)$

$$\Rightarrow \frac{FN}{NE}=\frac{BF}{CE}\left(do\;\Delta BDF\sim\Delta CDE\right)\Rightarrow \frac{FN}{FB}=\frac{NE}{CE}\Rightarrow \frac{QN}{QB}=\frac{NP}{PC}\Rightarrow PQ//BC$$

… tia phân giác kết hợp Talet đảo)

Câu 5.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$\left(a.1+b.1+c.1\right)^2 \le \left(a^2+1^2+1^2\right)\left(b^2+c^2+1\right)=\left(a^2+2\right)\left(1+b^2+c^2\right) \qquad (1)$$

Do vai trò của a,b,c là như nhau nên theo nguyên lý Dirichlet trong trong 3 số a^2-1, b^2-1, c^2-1 luôn tồn tại 2 số cùng dấu, giả sử b^2-1, c^2-1.

$$\Rightarrow \left(b^2-1\right)\left(c^2-1\right)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow b^2c^2-b^2-c^2+1\ge 0$$
$$\Leftrightarrow b^2c^2+2b^2+2c^2+4\ge 3+3b^2+3c^2$$
$$\Leftrightarrow \left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\ge 3\left(1+b^2+c^2\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\ge 3\left(a^2+2\right)\left(1+b^2+c^2\right) \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$A=\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\ge 3\left(a+b+c\right)^2=3.9=27$$

Vậy $GTNN$ của $S=27 \Leftrightarrow a=b=c=1$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH HÓA

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020
Môn thi chuyên: **TOÁN**

Câu 1.

1) Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$

   Chứng minh rằng $\dfrac{a}{ab+a+1}+\dfrac{b}{bc+b+1}+\dfrac{c}{ca+c+1}=1$

2) Cho các số a,b,c khác 0 thỏa mãn $2ab+bc+2ca=0$

   Hãy tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{bc}{8a^2}+\dfrac{ca}{b^2}+\dfrac{ab}{c^2}$

Câu 2.

1) Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=3x(1)$

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{2} \\ xy+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=5 \end{cases}$

Câu 3.

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $y^2 + y = x^4 + x^3 + x^2 + x$

2) Cho hai số nguyên dương x, y với $x > 1$ và thỏa mãn điều kiện $2x^2 - 1 = y^{15}$. Chứng minh rằng $x \vdots 15$

Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC, AM cắt (O) tại D khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDC cắt đường thẳng AC tại E khác C. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDB cắt đường thẳng AB tại F khác B

1) Chứng minh hai tam giác BDF, CDE đồng dạng

2) Chứng minh rằng ba điểm E, M, F thẳng hàng và $OA \perp EF$

3) Đường phân giác của BAC cắt EF tại điểm N. Đường phân giác của CEN cắt CN tại P, đường phân giác của BFN cắt BN tại Q. Chứng minh rằng $PQ // BC$

Câu 5. Trong mặt phẳng, kẻ 2022 đường thẳng sao cho không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường thẳng nào đồng quy. Tam giác tạo bởi đường thẳng trong số các đường thẳng đã cho gọi là tam giác đẹp nếu nó không bị đường thẳng nào trong số các đường thẳng còn lại đã cắt. Chứng minh rằng số tam giác đẹp không ít hơn 674.

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1) Ta có:

$$VT=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{abc+ab+a}+\frac{abc}{ab.ac+abc+ab}=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{1+ab+a}+\frac{1}{a+1+ab}$$

$$=\frac{ab+a+1}{ab+a+1}=1=VP(dfcm)$$

2) Đặt $x=2a,y=b,z=c\Rightarrow xy+yz+zx=0\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$

Khi đó $2A=\frac{bc}{4a^2}+\frac{2ac}{b^2}+\frac{2ab}{c^2}=\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}+\frac{xy}{z^2}=xyz\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\right)$

Mặt khác từ hằng đẳng thức

$$\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}-\frac{3}{xyz}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{xy}-\frac{1}{yz}-\frac{1}{2x}\right)=0$$

Ta được: $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}=\frac{3}{xyz}\Rightarrow 2A=xyz.\frac{3}{xyz}=3\Rightarrow A=\frac{3}{2}$

Câu 2.

1) ĐKXĐ: $x\in\mathbb{R}$

Từ giả thiết ta nhận thấy $x>0$ (do vế trái dương)

Chia cả 2 vế cho x, ta có: $\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=3$

Đặt $t=\frac{1}{x}(t>0)$ ta được phương trình $\sqrt{t^2+t+2}+\sqrt{t^2-t+1}=3$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{t^2+t+2}-2\right)+\left(\sqrt{t^2-t+1}-1\right)=0\Leftrightarrow\frac{t^2+t-2-4}{\sqrt{t^2+t+2}+2}+\frac{t^2-t+1-1}{\sqrt{t^2-t+1}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow(t-1)\left(\frac{t+2}{\sqrt{t^2+t+2}+2}+\frac{t}{\sqrt{t^2-t+1}+1}\right)=0\Leftrightarrow t-1=0$$

$\Leftrightarrow t=1\Rightarrow x=1$

2) ĐKXĐ: $x\neq 0,y\neq 0$

Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{2} \\ x\left(y+\dfrac{1}{y}\right)+\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{y}+y\right)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{2} \\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=5 \end{cases}$

Đặt $u=x+\dfrac{1}{x}, v=y+\dfrac{1}{y} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=\dfrac{9}{2} \\ uv=5 \end{cases}$

Vậy u,v là hai nghiệm của phương trình $x^2-\dfrac{9}{2}x+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X_1=2 \\ X_2=5 \end{array}\right.$

$Th1: u=2, v=\dfrac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=2 \\ y+\dfrac{1}{y}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+1=0 \\ 2y^2-5y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases}$

$Th2: u=\dfrac{5}{2}, v=2 \Rightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2} \\ y+\dfrac{1}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+2=0 \\ y^2-2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ y=1 \end{cases}$

Vậy $(x;y)=(1;2);\left(1;\dfrac{1}{2}\right);(2;1);\left(\dfrac{1}{2};1\right)$

Câu 3.

1) Ta có: $y^2+y=x^4+x^3+x^2+x \Leftrightarrow 4y^2+4y+1=4x^4+4x^3+4x^2+4x+1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (2y+1)^2=(2x^2+x)^2+(3x+1)(x+1) \\ (2y+1)^2=(2x^2+x+1)^2-x(x+1) \end{cases}$

Ta thấy , nếu

$\left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>2 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} (3x+1)(x+1)>0 \\ x(x-2)>0 \end{cases} \Rightarrow (2x^2+x+1)^2>(2y+1)^2>(2x^2+x)^2$ (*)

Loại vì không có số nguyên y thỏa mãn $\Rightarrow -1 \le x \le 2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow y^2+y=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=-1 \end{array}\right. \\ x=2 \Rightarrow y^2+y=30 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=5 \\ y=-6 \end{array}\right. \\ x=0 \Rightarrow y^2+y=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=-1 \end{array}\right. \\ x=1 \Rightarrow y^2+y=4(ktm) \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(0;5);(2;-6);(0,0);(0;-1);(-1;0);(-1;-1)$

2) Ta chứng minh $x \vdots 3$

Đặt $y^5=a, a\in\mathbb{N}^* \Rightarrow 2x^2-1=y^{15} \Leftrightarrow 2x^2=a^3+1 \Leftrightarrow 2x^2=(a+1)(a^2-a+1)(1)$

Gọi $UCLN(a+1;a^2-a+1)=d\,(d\in\mathbb{N}^*) \Rightarrow \begin{cases} a+1 \vdots d \\ a^2-a+1 \vdots d \end{cases}$

$$\Rightarrow (a^2-a+1)-(a+1)(a-2)=3 \vdots d \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d=1 \\ d=3 \end{array}\right.$$

d=1 thì từ (1) ta có:

$$\begin{cases} a+1=2 \\ a^2-a+1=x^2 \end{cases} hoac \begin{cases} a+1=x^2 \\ a^2-a+1=2 \end{cases} (ktm)$$

$$\begin{cases} a+1=2 \\ a^2-a+1=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ x^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ x=1 \end{cases} (ktm)$$

Nếu $d=3 \Rightarrow 2x^2 \vdots 9 \Rightarrow x^2 \vdots 9 \Rightarrow x \vdots 3(*)$

Chứng minh: $x \vdots 5$

Đặt $y^3=b, b\in\mathbb{N}^* \Rightarrow 2x^2-1=b^5 \Leftrightarrow 2x^2=b^5+1$

$$\Leftrightarrow 2x^5=(b+1)(b^4-b^3+b^2-b+1)=k\in\mathbb{N}^*$$

Ta có: $b+1 \vdots k, b^4-b^3+b^2-b+1 \vdots k$

$$\Rightarrow (b^4-b^3+b^2-b+1)-(b+1)(b^3-2b^2+3b-4)=5 \vdots k \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=5 \end{array}\right.$$

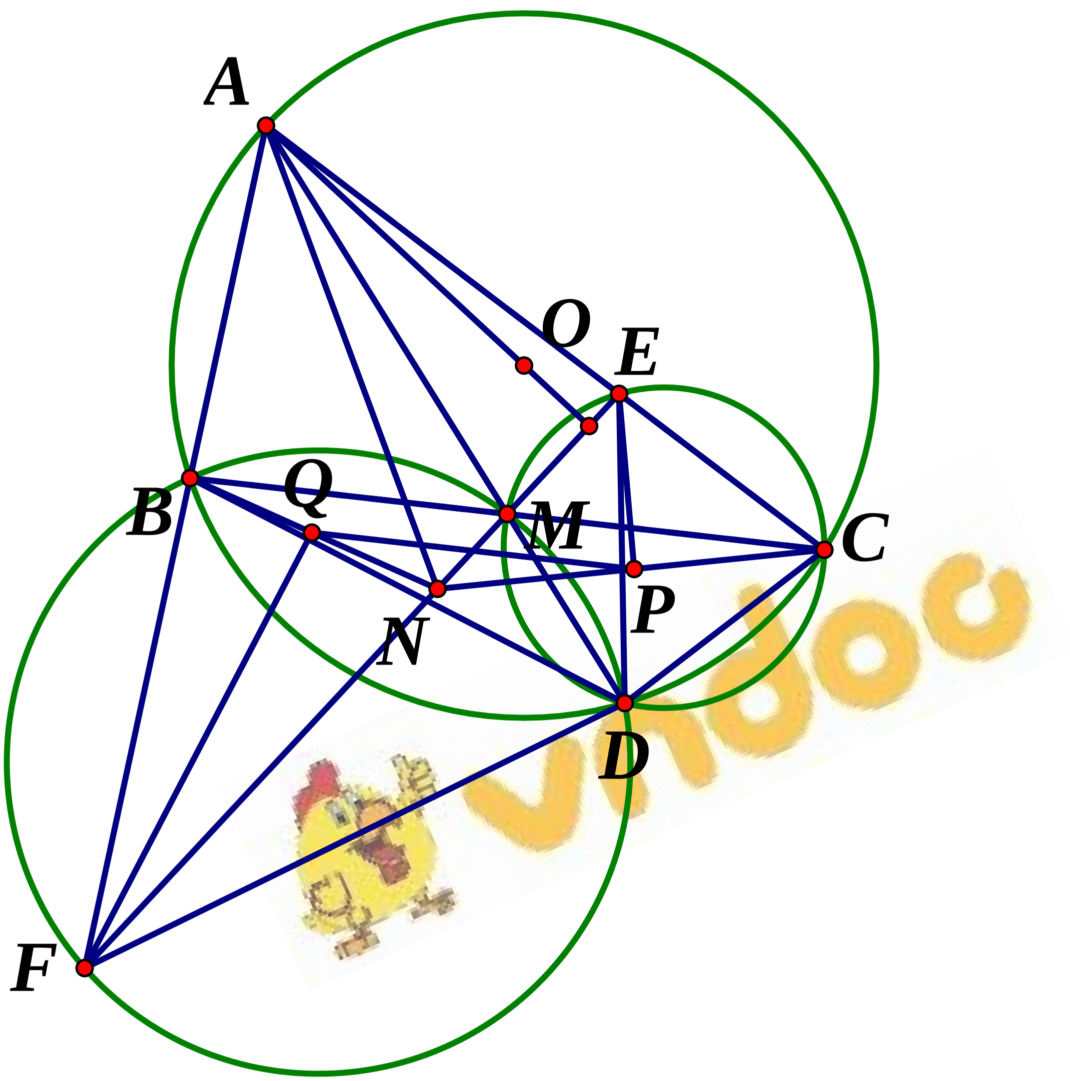
*Nếu $k=1 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow \begin{cases} b+1=x^2 \\ b^4-b^3+b^2-b+1=2 \end{cases} (ktm)$ hoặc:

$$\begin{cases} b+1=2 \\ b^4-b^3+b^2-b+1=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ x=1 \end{cases} (ktm\,vi\,x>1)$$

Nếu $k=5 \Rightarrow (2) \Rightarrow 2x^2 \vdots 25 \Rightarrow x^2 \vdots 25 \Rightarrow x \vdots 5 (**)$

Từ (*) và (**) $\rightarrow x \vdots 15$

Câu 4.



1) Do các tứ giác $MECD, MBFD$ nội tiếp nên $DEC = DMC = DFB (1)$

Tứ giác $ABDC$ nội tiếp nên $DCE = DCA = DBF (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta BDF \sim \Delta CDE (g.g) (dfcm)$

2) Ta có: $BMF = BDF, EMC = EDC$ và $BDF = CDE$ (do $\Delta BDF \sim \Delta CDE$) nên

$BMF = EMC \Rightarrow E, M, F$ thẳng hàng

Từ hai tứ giác $MECD, MBFD$ nội tiếp suy ra $AB.AF = AM.AD = AE.AC$,

suy ra tứ giác $BECF$ nội tiếp. Do đó, $AFE = ACB$. Vẽ tiếp tuyến Ax của

(O) thì $ACB = BAx \Rightarrow Ax // EF \Rightarrow OA \perp EF$

3) Theo tính chất phân giác ta có: $\frac{PN}{PC}=\frac{EN}{EC},\frac{QN}{QB}=\frac{FN}{FB},\frac{NE}{NF}=\frac{AE}{AF}$ nên:

$$\frac{PN}{PC}:\frac{QN}{QB}=\frac{EN}{EC}:\frac{FN}{FB}=\frac{EN}{FN}.\frac{FB}{EC}=\frac{AE}{AF}.\frac{FB}{EC}=\frac{AB}{AC}.\frac{FB}{EC} \quad (3)$$

Mà $1=\frac{MB}{MC}=\frac{S_{DAB}}{S_{DAC}}=\frac{S_{DAB}}{S_{BDF}}.\frac{S_{BDF}}{S_{CDE}}.\frac{S_{CDE}}{S_{DAC}}=\frac{AB}{BF}.\frac{BF^2}{CE^2}.\frac{CE}{AC}=\frac{AB.BF}{CE.AC}(4)$

Từ (3) và (4) suy ra: $\frac{PN}{PC}=\frac{QN}{QB}\Rightarrow PQ//BC$

Câu 5.

Gọi các đường thẳng đã cho là $d_1,d_2,.....,d_{2022}$. A_{ij} là giao điểm của đường thẳng d_i và $d_j\left(i,j=\overline{1;2022},i\neq j,A_j=A_n\right)$

Xét đường thẳng d_n bất kỳ trong số 2022 đường thẳng đã cho. Do không có 3 đường thẳng nào đồng quy nên các giao điểm A_{ij} (n khác i,j) của các đường thẳng d_i và d_j không nằm trên d_n. Do số giao điểm là hữu hạn nên tồn tại một giao điểm gần d_n nhất, giả sử là A_{ij} (nếu có nhiều giao điểm như vậy thì ta chọn 1 giao điểm nào đó).

Ta sẽ chứng minh $\Delta A_{ij}A_{ni}A_{nj}$ là tam giác đẹp

Nếu tam giác này bị đường thẳng d_m nào đó trong số 2019 đường thẳng còn lại cắt thì d_m phải cắt ít nhất một trong hai đoạn $A_{ij}A_{ni},A_{ij}A_{nj}$. Giả sử d_m cắt đoạn $A_{ij}A_{ni}$ tại điểm A_{mi} thì A_{mi} gần d_n trái giả thiết A_{ij} gần d_n nhất

Suy ra, với mỗi đường thẳng d_n luôn tồn tại một tam giác đẹp có cạnh nằm trên d_n. Trên mỗi đường thẳng d_n, ta chọn một cạnh của tam giác đẹp thì ta thu được 2022 cạnh của tam giác đẹp

Vậy số tam giác đẹp không ít hơn: $2022:3=674$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NAM ĐỊNH	**ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN**
ĐỀ CHÍNH THỨC	**NĂM HỌC 2019-2020**
	Môn thi chuyên: **TOÁN**

Câu 1.

a) Cho $x=\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}+\sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$. Tính giá trị của biểu thức $P=x(2-x)$

b) Cho ba số a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=2019$. Chứng minh:

$$\frac{a^2-bc}{a^2+2019}+\frac{b^2-ca}{b^2+2019}+\frac{c^2-ab}{c^2+2019}=0$$

Câu 2. Giải phương trình, hệ phương trình sau:

$a)x^3+\sqrt{(x+1)^3}=9x+8$

$$b)\begin{cases}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=3+x^2y^2\\ \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+3=x^3y^3\end{cases}$$

Câu 3. Cho tam giác nhọn $ABC(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn O. Đường phân giác trong và đường phân giác ngoài của BAC cắt đường tròn (O) lần lượt tại D và E (cùng khác A). Gọi G là hình chiếu vuông góc của E lên cạnh AC, Gọi M và N tương ứng là trung điểm của các đoạn thẳng BC và BA. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng GM,H là giao điểm của đường thẳng AB và đường thẳng MG, F là giao điểm của đường thẳng MN và đường thẳng AE

a) Chứng minh rằng hai đường thẳng AD và GM song song

b) Chứng minh $FH=MC$

c) Chứng minh : $KE+KN\le\sqrt{2}.EN$

Câu 4.

a) Chứng minh rằng nếu n là số nguyên thì $\frac{n^5+29n}{30}$ cũng là số nguyên

b) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x;y)$ sao cho $2(x^2+y^2-3x+2y)-1$ và $5(x^2+y^2+4x+2y+3)$ đều là số chính phương.

Câu 5.

a) Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $(a^4+b^4)(b^4+c^4)(c^4+a^4)=8$. Chứng minh rằng: $(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)\ge1$

b) Trước ngày thi vào lớp 10 chuyên, thầy giáo dùng không quá 49 cây bút đem tặng cho tất cả 32 bạn học sinh lớp 9A sao cho ai cũng nhận được bút của thầy. Chứng minh rằng có một số bạn lớp 9A nhận được bút tổng cộng là 25.

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$a)x^2=\left(\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}+\sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}\right)^2=6+2\sqrt{3^2-\left(5+2\sqrt{3}\right)}=6+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}$$

$$=6+2\left(\sqrt{3}-1\right)=4+2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$$

$$x>0\Rightarrow x=\sqrt{3}+1\Rightarrow (x-1)^2=3 hay\, x^2-2x=2\Rightarrow P=-2$$

b) Từ $ab+bc+ca=2019\Rightarrow a^2+2019=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$

Tương tự: $b^2+2019=(b+c)(b+a),c^2+2019=(c+a)(c+b)$

Vế trái đẳng thức trở thành

$$\frac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2-ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}$$
$$=\frac{\left(a^2-bc\right)(b+c)+\left(b^2-ca\right)(c+a)+\left(c^2-ab\right)(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Khai triển và thu gọn ta được kết quả bằng 0

Câu 2.

a) ĐKXĐ: $x\ge -1$

Phương trình cho tương đương với

$$(x+1)\left[x^2-x-8+\sqrt{x+1}\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x^2-x-8+\sqrt{x+1}=0\end{array}\right.$$

$$x^2-x-8+\sqrt{x+1}=0\Leftrightarrow (x-3)\left[x+2+\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}\right]=0$$

$$Do\, x+2+\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}>0\Rightarrow x=3$$

Vậy $S=\{-1;3\}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=3+x^2y^2\,(1) \\ \dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}+3=x^3y^3\,(2) \end{cases}$

Điều kiện xác định: $x \neq 0, y \neq 0$. Ta có:

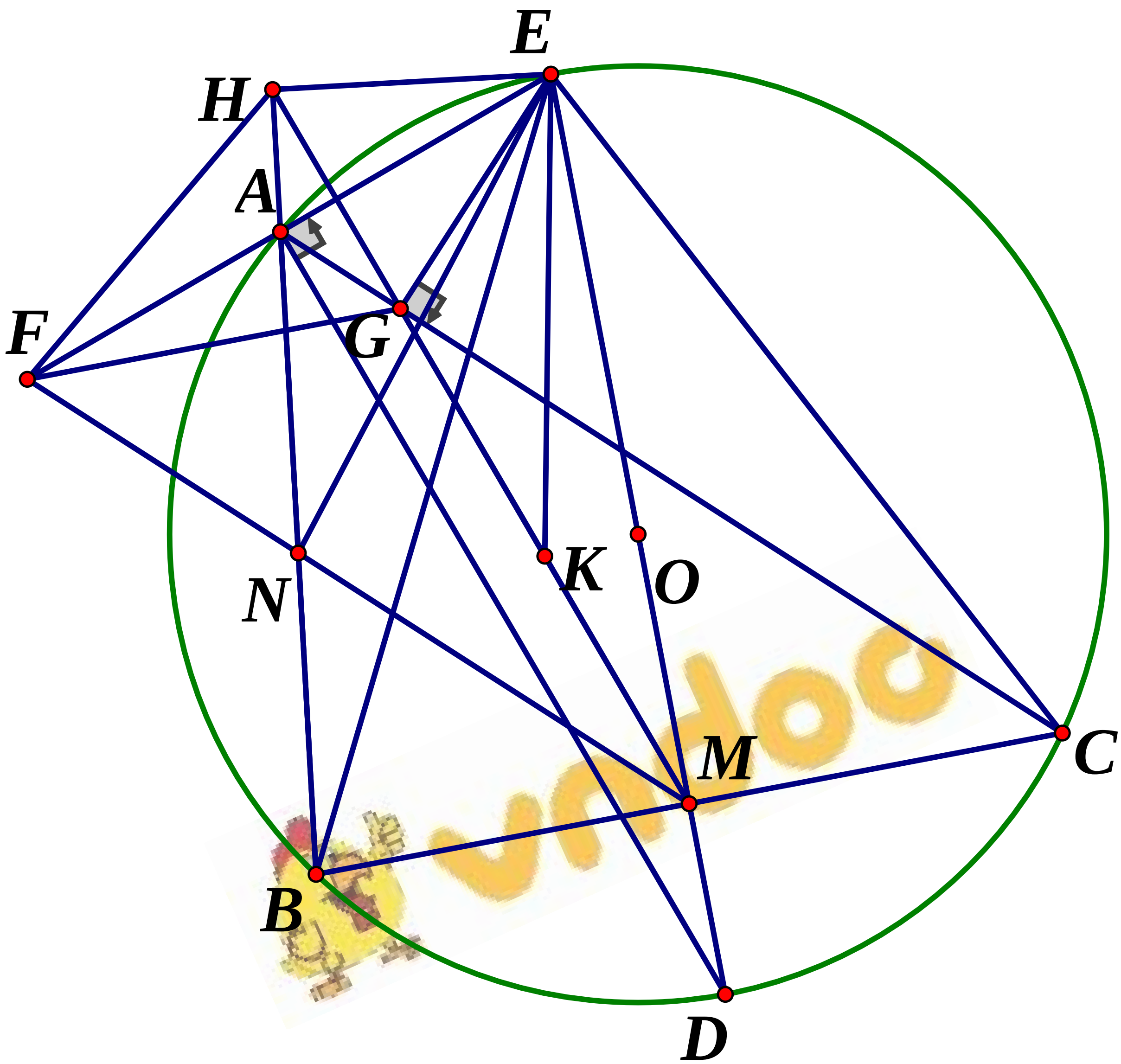
$$\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+3=x^3y^3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^3+\left(\frac{1}{y}\right)^3+(-xy)^3=3.\frac{1}{x}.\frac{1}{y}.(-xy)$$

Sử dụng hằng đẳng thức :

$a^3+b^3+c^3-3abc=\dfrac{a+b+c}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$ ta thu được

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y}=-xy \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-xy=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y \\ 1=-x^2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=xy \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{4}{9} \\ xy=-\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{2+\sqrt{58}}{9} \\ y=\dfrac{2-\sqrt{58}}{9} \end{cases} \\ \begin{cases} y=\dfrac{2+\sqrt{58}}{9} \\ x=\dfrac{2-\sqrt{58}}{9} \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Câu 3.



a) Có AD, AE là các phân giác trong và ngoài của BAC nên chúng vuông góc, suy ra ED là đường kính của (O)

Lại có D là điểm chính giữa của cung nhỏ BC của (O) nên có OD vuông góc với BC tại trung điểm M. Vậy D, M, O, E thẳng hàng và $DE \perp BC$

Xét tứ giác $EGMC$ có $EGC = EMC = 90^0$ nên $EGMC$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra $EMG = ECG$, lại có : $ECG = EDA$ nên $EMG = EDA \Rightarrow GM // AD$

b) $AE \perp AD$ và $MG // AD$ nên $MG \perp FE$, lại có $EG \perp AC$ và $MF // AC$ nên $EG \perp MF$

Từ đó suy ra G là trực tâm tam giác MFE, do đó $FG \perp ME$ hay $FG \perp DE$

Có $FG//MC$ (cùng vuông góc với DE), $FM//GC$ nên $FMCG$ là hình bình hành nên $FG = MC.$

Từ AE là phân giác của HAG và $HG \perp AE$ suy ra AE là đường trung trực của đoạn HG.

c) Từ $EAB = EGM$ (vì cùng cộng với ECB $ra\ 180^0$), $ABE = GME$ (vì cùng bằng ECA) nên $\Delta EAB \sim \Delta EGM (g.g)$

Có N, K là các trung điểm của hai cạnh tương ứng là AB và GM nên

$EKG = ENA, \Rightarrow EKNH$ là tứ giác nội tiếp

Lại có: $AHE = AGE = 90^0$ ($Do\ H, G$ đối xứng nhau qua AE) nên $NKE = 90^0$

Có $NE^2 = EK^2 + KN^2$.

Từ $2\left(KE^2 + KN^2\right) \geq \left(KE + KN\right)^2$ có $2NE^2 \geq \left(KE + KN\right)^2$ hay $KE + KN \leq NE\sqrt{2}$

Vậy *dfcm*

Câu 4.

a) Ta có: $\dfrac{n^5 + 29n}{30} = \dfrac{n^5 - n}{30} + n = \dfrac{(n-1)n(n+1)\left(n^2+1\right)}{30} + n$

Với n nguyên thì $n-1, n, n+1$ là ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6 nên $n^5 - n \vdots 6$

Và nếu $n \vdots 5 \Rightarrow n^5 - n \vdots 5$, nếu n chia 5 dư 1,2,3,4 thì n^4 chia cho 5 dư 1 do đó $n^5 - n \vdots 5$. Từ đó suy ra $\left(n^5 - n\right) \vdots 30$.

Vậy $\dfrac{n^5 + 29n}{30}$ là số nguyên

b)Giả sử tồn tại cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn yêu cầu. Khi đó, $a, b \in \mathbb{N}^*$ mà

$$\begin{cases} 2\left(x^2 + y^2 - 3x + 2y\right) - 1 = a^2 \\ 5\left(x^2 + y^2 + 4x + 2y + 3\right) = b^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 7\left[(x+1)^2 + (y+1)^2\right]$$

Nói cách khác phương trình (1): $A^2 + B^2 = 7\left(X^2 + Y^2\right)$ có nghiệm (X, Y, A, B) với $X, Y \in \mathbb{N}^*$ và $A, B \in \mathbb{N}$. Ta xem (X, Y, A, B) là bộ nghiệm của (1) thỏa mãn điều kiện $X + Y$ nhỏ nhất

Từ (1) có $\left(A^2+B^2\right)\vdots 7$. Nhận thấy một số chính phương chia cho 7 thì chỉ có thể cho số dư là 0,1,2,4 nên $\left(A^2+B^2\right)\vdots 7$ khi và chỉ khi $\begin{cases} A\vdots 7 \\ B\vdots 7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=7A_1 \\ B=7B_1\end{cases}, A_1, B_1 \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó (1) trở thành: $X^2+Y^2=7\left(A_1^2+B_1^2\right)$

Lập luận tương tự dẫn đến $\begin{cases} X=7X_1 \\ Y=7Y_1\end{cases}, X_1, Y_1 \in \mathbb{N}^*$

Câu 5.

a) Ta chứng minh kết quả $2\left(a^2-ab+b^2\right)^2 \geq a^4+b^4 (1)$

Thật vậy, $(1) \Leftrightarrow 2\left(a^4+b^4+a^2b^2+2a^2b^2-2ab\left(a^2+b^2\right)\right) \geq a^4+b^4$

$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2-2ab\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^4 \geq 0$, bất đẳng thức đúng, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b$

Tương tự có $(2): 2\left(b^2-bc+c^2\right)^2 \geq a^4+b^4, (3): 2\left(c^2-ca+a^2\right)^2 \geq c^4+a^4$

Thấy các vế của $(1),(2),(3)$ đều không âm, nhân theo vế các bất đẳng thức ta được:

$8\left(a^2-ab+b^2\right)^2\left(b^2-bc+c^2\right)^2\left(c^2-ca+a^2\right)^2 \geq \left(a^4+b^4\right)\left(b^2+c^4\right)\left(c^4+a^4\right)=8$

$\Rightarrow \left(a^2-ab+b^2\right)^2\left(b^2-bc+c^2\right)^2\left(c^2-ca+a^2\right)^2 \geq 1 (*)$

$Do\, a^2-ab+b^2, b^2-bc+c^2, c^2-ca+a^2 \geq 0 \Rightarrow$

$(*) \Leftrightarrow \left(a^2-ab+b^2\right)^2\left(b^2-bc+c^2\right)^2\left(c^2-ca+a^2\right)^2 \geq 1 (dfcm)$

b) Gọi a_i là số bút mà học sinh thứ I (trong 32 học sinh) nhận được $(i=1,2,3,.....,32)$. Như vậy $a_i \in \mathbb{N}^*$ và $a_1+a_2+.....+a_{32} \leq 49$. Ta ký hiệu

$S_1=a_1$

$S_2=a_1+a_2$

....

$S_{32}=a_1+a_2+.....+a_{32}$

Với mỗi $i \in \{1;2;......;32\}$ ta có: $1 \leq S_i \leq 49, S_i+25 \leq 74, S_i+50 \leq 99, S_i+75 \leq 124$

Xét 128 số gồm:

32 số nhóm $(1): S_1, S_2, ..., S_{32}$

32 số nhóm (2): $S_1+25, S_2+25, ..., S_{32}+25$

32 số nhóm $(3): S_1+50; S_2+50; ....; S_{32}+50$

32 số nhóm $(4): S_1+75, S_2+75, ..., S_{32}+75$

Thấy 128 số này lấy giá trị nguyên dương trong phạm vi từ 1 đến 124 theo nguyên lý Dirichle tồn tại hai số nào đó trong chúng bằng nhau. Vì $S_1 < S_2 < ..... < S_{32}$ nên dãy 32 giá trị trong mỗi nhóm ở trên tăng dần kể từ trái qua phải. Suy ra tồn tại $j > i > 1$ mà $S_J + k_1.25 = S_J + k_2.25$ với $k_1, k_2 \in \{0,1,2,3\}$ và $k_1 \neq k_2$ (do hai số bằng nhau thì không cùng nhóm)

Vì $S_j > S_i$ nên $0 < S_j - S_i = 25(k_1 - k_2) \Rightarrow k_1 - k_2 \in \{1;2;3\}$. Lại có $S_j - S_i < S_j \leq 49$

Nên $25(k_1 - k_2) < 49 \Rightarrow k_1 - k_2 = 1 \Rightarrow S_j - S_i = 25$ hay $a_{i+1} + a_{i+2} + ... + a_j = 25$, nghĩa là nhóm gồm các học sinh từ học sinh thứ $i+1$ đến học sinh thứ j nhận được tổng cộng 25 cây bút.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NGHỆ AN	**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU**
	Năm học 2019-2020
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	**Môn thi:TOÁN CHUYÊN**

Câu 1.

a) Giải phương trình: $x^3 - x^2 + 12x\sqrt{x-1} + 20 = 0$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+1)(xy+1) = 6 \\ x^2.(y^2+y+1) = 7 \end{cases}$

Câu 2.

a) Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c\,(a \in \mathbb{N}^*)$ thỏa mãn $P(9) - P(6) = 2019$. Chứng minh $P(10) - P(7)$ là một số lẻ

b) Tìm các cặp số nguyên dương $(x;y)$ sao cho $x^2y + x + y$ chia hết cho $xy^2 + y + 1$.

Câu 3. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc = a+b+c+2$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}$

Câu 4. Cho tam giác nhọn $ABC(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi E là điểm nằm chính giữa của cung nhỏ BC. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $EM = EC$, đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại N (N khác B). Các đường thẳng EA, EN cắt cạnh BC lần lượt tại D và F

a) Chứng minh $\Delta AEN \sim \Delta FED$

b) Chứng minh M là trực tâm ΔAEN

c) Gọi I là trung điểm của AN, tia IM cắt đường tròn (O) tại K. Chứng minh đường thẳng CM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMK.

Câu 5. Cho 12 điểm trên mặt phẳng sao cho 3 điểm nào cũng là đỉnh của một tam giác mà mỗi tam giác đó luôn tồn tại ít nhất một cạnh có độ dài nhỏ hơn 673. Chứng minh rằng có ít nhất hai tam giác mà chu vi mỗi tam giác nhỏ hơn 2019.

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) Điều kiện : $x \ge 1$

$(1) \Leftrightarrow x^2(x-1) - 12x\sqrt{x-1} + 20 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x\sqrt{x-1} - 2\right)\left(x\sqrt{x-1} - 10\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\sqrt{x-1} = 2 \\ x\sqrt{x-1} = 10 \end{array}\right.$

TH1: $x\sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2(tmdk)$

Th2: $x\sqrt{x-1} = 10 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = 100 \Leftrightarrow x = 5(tmdk)$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 2, x = 5$

b) Hệ phương trình $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y + xy + x = 5 \\ x^2y + x^2y^2 + x^2 = 7 \end{cases}$

Đặt $xy = a, x = b.$ Ta có:

Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} ab + a + b = 5 \\ ab + a^2 + b^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab + a + b = 5 \\ (a+b)^2 - ab = 7 \end{cases}$

$\Rightarrow (a+b)^2 + a + b - 5 = 7 \Leftrightarrow (a+b)^2 + (a+b) - 12 = 0$

$\Leftrightarrow (a+b-3)(a+b+4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b = 3 \\ a+b = -4 \end{array}\right.$

Th1: $a + b = 3 \Rightarrow ab = 2$

$\Rightarrow a, b$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow (a,b) = (1;2),(2;1) \Rightarrow (x;y) = \left(2;\dfrac{1}{2}\right);(1;2)$

Th2: $a + b = -4 \Rightarrow ab = 9$

$\Rightarrow a, b$ là nghiệm của phương trình $X^2 + 4X + 9$(phương trình vô nghiệm)

Câu 2.

a) Ta có:

$P(9) - P(6) = 2019$

$\Leftrightarrow (8ab + 9b + c) - (36a + 6b + c) = 2019$

$\Leftrightarrow 45a + 3b = 2019(1)$

Lại có : $P(10) - P(7) = (100a + 10b + c) - (29a + 7b + c) = 51a + 3b$

Đặt $P(10)-P(7)=t\Rightarrow 51a+3b=t\,(2)$

Trừ vế theo vế (2) cho (1) ta có: $6a=t-2019,$ mà $6a$ chẵn, 2019 lẻ nên t lẻ, ta có điều phải chứng minh.

b) Ta có:

$x^2y+x+y\,\vdots\, xy^2+y+1$

$\Leftrightarrow y\left(x^2y+x+y\right)-x\left(xy^2-y+1\right)\vdots\, xy^2+y+1$

$\Leftrightarrow y^2-x\,\vdots\, xy^2+y+1$

Th1: $y^2=x\Rightarrow\begin{cases}y=m\\x=m^2\end{cases}$: Với mọi m là số tự nhiên khác 0. Thử lại thấy thỏa mãn

Th2: $y^2>x,$ ta có: $xy^2+y+1\le y^2-x\Leftrightarrow(x-1)y^2+y+x+1\le 0$ (vô lý do $x,y\ge 1$)

Th3: $y^2<x$. Ta có:

$xy^2+y+1<x-y^2\Leftrightarrow x\left(y^2-1\right)+y^2+y+1<0$ (vô lý do $x,y\ge 1$)

Vậy $(x;y)=\left(m^2,m\right)$ với m thuộc tập hợp số tự nhiên khác 0

Câu 3.

Từ đẳng thức $abc=a+b+c+2\Leftrightarrow\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{2}{abc}=1$

Đặt $\frac{1}{a}=\frac{x}{y+z};\frac{1}{b}=\frac{y}{z+x};\frac{1}{c}=\frac{z}{x+y}\,(x,y,z>0)$

Ta có: $P=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}\le\frac{1}{\sqrt{2ab}}+\frac{1}{\sqrt{2bc}}+\frac{1}{\sqrt{2ca}}$

Mặt khác: $\frac{1}{\sqrt{2ab}}=\sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}}.\frac{1}{\sqrt{2}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+z}+\frac{y}{y+z}\right).\frac{1}{\sqrt{2}}$

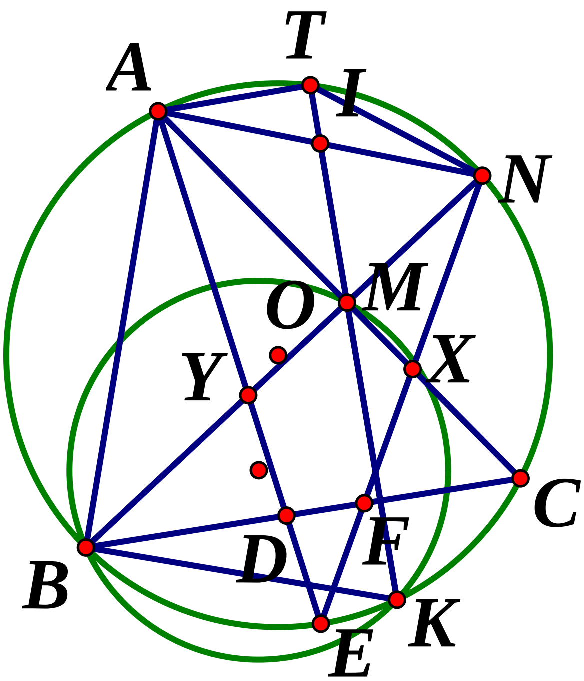
Tương tự thì ta cũng có:

$\frac{1}{\sqrt{2bc}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{y}{y+x}+\frac{z}{z+x}\right).\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{\sqrt{2ca}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{z}{y+z}+\frac{x}{y+x}\right).\frac{1}{\sqrt{2}}$

Cộng vế theo vế ta có: $P\le\frac{3}{2\sqrt{2}}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$ hay là $a=b=c=2.$

Câu 4.



a) Có $EDF = 180^0 - BDE$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow EDF = 180^0 - DEC - DCE = ANC - DCE = ANC - ENC = ANE(do\ \ DE = EC)$

Suy ra $\Delta DEF \sim \Delta NEA$

b) Ta có: $EB = EC = EM$ do E là điểm chính giữa cung BC và theo giả thiết $EM = EC.$ Mặt khác AE là tia phân giác BAM suy ra AE là trung trực đoạn thẳng BM hay vuông góc với tia NM.

Chứng mnh tương tự thì NE là tia phân giác của $BNC,$ suy ra NE là đường trung trực của đoạn thẳng MC hay $NE \perp AM$.

Từ hai điều trên ta có M là trực tâm ΔAEN.

c) Gọi giao điểm của AM với EN là X, của BN với AE là Y

Gọi giao điểm của IM với đường tròn (O) là T. Dễ thấy rằng $ATNM$ là hình bình hành nên $TN \perp EN \Rightarrow ET$ là đường kính đường tròn (O)

$\Rightarrow EKT = 90^0\ hay\ MKE = 90^0$ hay K thuộc đường tròn đường kính EM, suy ra năm điểm X, Y, M, K, E cùng thuộc một đường tròn.

Ta có: $KMC = KMX = XEK = NEK = NBK$ (do tứ giác $MEKX$ nội tiếp)

Suy ra CM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔBMK.

Câu 5.

Ta tô màu các đoạn thẳng có đầu mút là 2 trong 12 điểm đã cho:

- Tô đỏ các đoạn thẳng có độ dài nhỏ hơn 673
- Tô xanh các đoạn thẳng còn lại

Thì mỗi tam giác có ít nhất một cạnh màu đỏ. Ta sẽ chứng mnh có ít nhất 2 tam giác có 3 cạnh đều là màu đỏ.

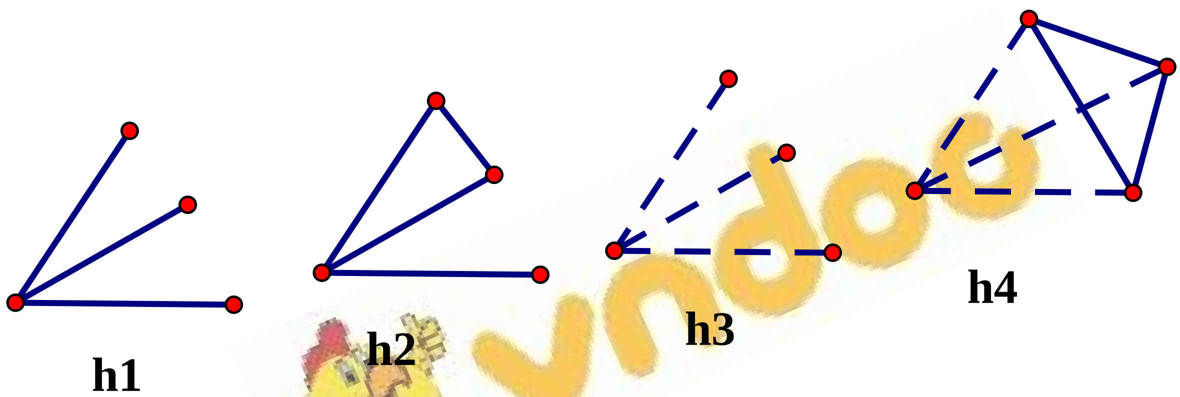
+Xét 6 điểm trong 12 điểm đã cho. Từ một điểm A nối đến các đoạn thẳng còn lại tạo thành 5 đoạn thẳng, được tô tới hai màu xanh, nên tồn tại 3 cạnh cùng màu. Giả sử đó là AB, AC, AD

Nếu AB, AC, AD tô đỏ (nét liền) thì tam giác BCD phải có 1 cạnh tô đỏ (h1) Chẳng hạn Bc thì tam giác ABC có ba cạnh tô đỏ (h2). Nếu AB, AC, AD tô xanh (nét đứt, h3). Do mỗi tam giác phải có ít nhất một cạnh đỏ nên BC, CD, BD và tam giác BCD có ba cạnh đỏ.

Suy ra trong 6 điểm này luôn tồn tại ít nhất một tam giác có 3 cạnh màu đỏ

+Xét 6 điểm còn lại, chứng minh tương tự

Vậy trong 12 điểm luôn tồn tại ít nhất 2 tam giác có hai cạnh đều màu đỏ. Suy ra tồn tại ít nhất hai tam giác có chu vi mỗi tam giác bé hơn 2019



SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PTNK HỒ CHÍ MINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020
MÔN THI CHUYÊN: TOÁN (vòng 2)
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (1)$ thỏa mãn các điều kiện: $a > 0$ và $2\sqrt{|ac|} < \sqrt{|b|} < a + c$

a) Chứng minh rằng phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 và
$(1 - x_1)(1 - x_2) > 0$
Và $(1 + x_1)(1 + x_2) > 0$

b) Biết rằng $a > c$. Chứng minh rằng $-1 < x_1, x_2 < 1$

Câu 2.

a) Tìm tất cả những số tự nhiên n sao cho $2^n + 1$ chia hết cho 9

b) Cho n là số tự nhiên $n > 3$. Chứng minh rằng: $2^n + 1$ không chia hết cho mọi số tự nhiên m sao cho $2 < m \le n$.

Câu 3. Cho a,b là hai số thực phân biệt thỏa mãn điều kiện : $a^4-4a=b^4-4b$

a) Chứng minh rằng: $0<a+b<2$

b) Biết rằng: $a^4-4a=b^4-4b=k>0.$ Chứng minh rằng: $-\sqrt{k}<ab<0$

Câu 4. Cho tam giác ABC có $AB<AC.$ Gọi d_1,d_2 lần lượt là các đường phân giác trong và ngoài góc $BAC.$ Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của B lên $d_1,d_2.$ Gọi P,Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của C lên d_1,d_2

a) Chứng minh rằng MN,PQ lần lượt đi qua trung điểm của AB,AC

b) Chứng minh rằng MN,PQ cắt nhau trên BC

c) Trên d_1 lấy các điểm E,F sao cho $ABE=BCA$ và $ACF=CBA.$ (E thuộc nửa mặt phẳng bờ AB chứa $C;F$ thuộc nửa mặt phẳng bờ AC chứa B). Chứng mỉnh rằng: $\frac{BE}{CF}=\frac{AB}{AC}$

d) Các đường thẳng BN,CQ lần lượt cắt AC,AB tại hai điểm K, L. Chứng minh rằng các đường thẳng KE,LF cắt nhau trên đường thẳng $BC.$

Câu 5. Tron một buổi gặp gỡ giao lưu giữa các học sinh đến từ n quốc gia, người ta nhận thấy rằng cứ 10 học sinh bất kỳ thì có ít nhất 3 học sinh đến từ cùng 1 quốc gia.

a) Gọi k là số quốc gia có đúng 1 học sinh tham dự buổi gặp gỡ. Chứng minh rằng $n<\frac{k+10}{2}$

b) Biết rằng số các học sinh tham dự buổi gặp gỡ là 60. Chứng mnh rằng có thể tìm được ít nhất là 15 học sinh đến từ cùng một quốc gia.

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) Có: $|b|>2\sqrt{|ac|}$ nên $b^2>4ac$

Suy ra: $\Delta=b^2-4ac>0.$ Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt

Có $|b|<a+c\Leftrightarrow -a-c<b<a+c\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c>0\\a-b+c>0\end{cases}$

Suy ra $(1-x_1)(1-x_2)=1-(x_1+x_2)+x_1x_2=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{a+b+c}{a}>0$

Và $(1+x_1)(1+x_2)=1+(x_1+x_2)+x_1x_2=1-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{a-b+c}{a}>0$

b) Có $(1-x_1)(1-x_2)>0$

Xét trường hợp $\begin{cases}x_1>1\\x_2>1\end{cases}\Rightarrow x_1x_2>1\Rightarrow\frac{c}{a}>1\Rightarrow c>a$

Mâu thuẫn với giả thiết $a>c$. Vậy $x_1,x_2<1$

Có $(1+x_1)(1+x_2)>0$

Xét trường hợp : $\begin{cases} x_1<-1 \\ x_2<-1 \end{cases} \Rightarrow x_1x_2>1 \Rightarrow \dfrac{c}{a}>1 \Rightarrow c>a$,

mâu thuẫn với giả thiết $a>c$.Vậy $x_1, x_2>-1$

Câu 2.

$a)\, n=3k \Rightarrow 2^n+1=8^k+1\equiv(-1)^k+1(\text{mod}\,9)\Rightarrow k$ lẻ, $k=2t+1$

Suy ra $n=3(2t+1)=6t+3$

Nếu $n=3k+1$ ta có: $2^n+1=3.8^k+1\equiv(-1)^k.3+1(\text{mod}\,9)\Rightarrow 2^n+1$ không chia hết cho 9.

Vậy với $n=6t+2$, với t là số tự nhiên là các số cần tìm.

b) Ta có: $2^{n-m}(2^m-1)\vdots 2^m-1 \Rightarrow 2^n-2^{n-m}\vdots 2^m-1$, mà $2^n+1\vdots 2^m-1 \Rightarrow 2^{n-m}+1\vdots 2^m-1$

Lý luận tương tự ta có $2^{n-km}+1$ chia hết cho 2^m-1

Giả sử $n=km+q, 0\le q\le m$

Chọn k như trên, ta có: 2^q+1 chia hết cho 2^m-1. Mà $q<m$ nên $2^q+1=2^m-1$, giải ra $q=1, m=2$ (vô lý).

Câu 3.

a) Ta có: $a^4-b^4=4(a-b)$, mà $a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$ nên đẳng thức được viết lại thành $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)=4(a-b)$

Mà $a\ne b$ nên $(a+b)(a^2+b^2)=4$. Vì $a^2+b^2>0$ (do a,b không thể đồng thờ bằng 0) nên ta có $a+b>0$

Ngoài ra, ta cũng có đánh giá $a^2+b^2>\dfrac{(a+b)^2}{2}$ (đẳng thức không xảy ra vì $a\ne b$)

Nên $4>\dfrac{(a+b)^3}{2}\Leftrightarrow(a+b)^3<8\Leftrightarrow a+b<2$

Vậy ta được $0<a+b<2$.

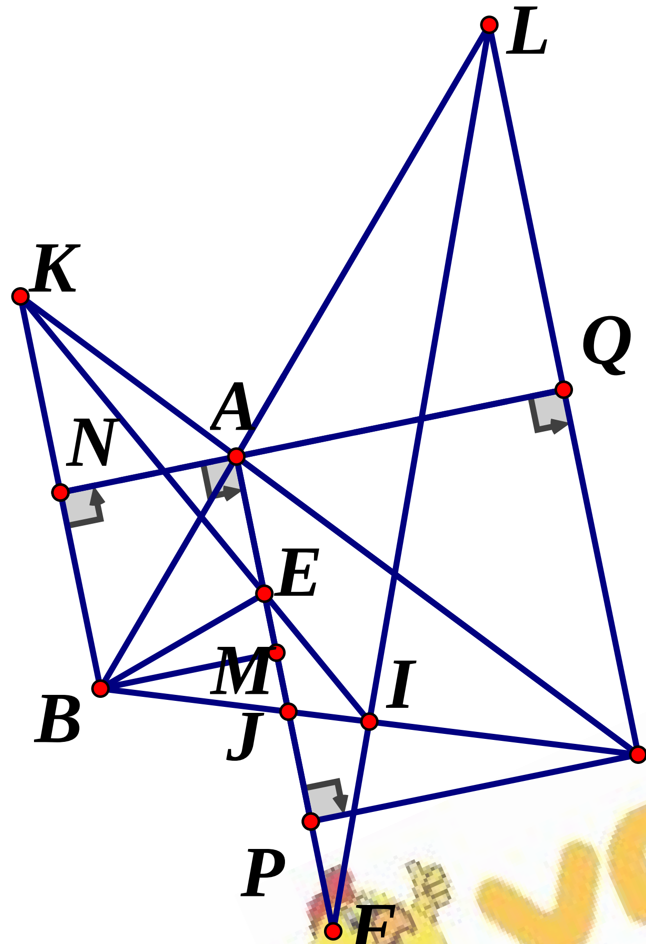
b) Ta có: $ab\ne 0$, ta sẽ chứng minh a,b trái dấu. ta xét hai trường hợp:

- Nếu $a>0, b>0$ thì $a^4-4a=a(a^3-4)>0\Rightarrow a>\sqrt[3]{4}>1$. Tương tự thì $b>1$. Khi đó $a+b>2$, mâu thuẫn với câu a
- Nếu $a<0, b<0\Rightarrow a+b<0$, mâu thuẫn với câu a

  Do đó a,b trái dấu và $ab<0$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a<0<b$ thì đặt $c=-a>0$, ta viết lại $c^4+4c=b^4-4b=k>0$. Từ đây dễ thấy $(b-c)(b^2+c^2)=4$ và $b\ne c$. Ta cần chứng minh $-\sqrt{k}<ab\Leftrightarrow-\sqrt{k}<-bc\Leftrightarrow bc>\sqrt{k}$

Câu 4.



a) Tứ giác $ANBM$ là hình chữ nhật nên hai đường chéo MN, AB bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi dường. Suy ra MN là trung điểm của AB. Chứng minh tương tự ta cũng có PQ đi qua trung điểm của AC

b) Do $ANBM$ là hình chữ nhật và NQ là phân giác ngoài của BAC nên

$MNA = BAN = CAQ$, mà MNA và CAQ ở vị trí đồng vị nên $MN // AC$.
Ta có $MN // AC$ và MN đi qua trung điểm của AB nên MN là đường trung bình ứng với cạnh AC của tam giác ABC. Suy ra MN đi qua trung điểm I của BC.
Chứng minh tương tự ta cũng có PQ đi qua trung điểm I của BC. Vậy NM và PQ cắt nhau tại trung điểm I của BC.

c) Ta có: $IBC = ABC - ABE = ABC - ACB$

Tương tự ta cũng có: $ICB = ABC - ACB$. Do đó $IBC = ICB$ mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $BE // FC$, ta dùng định lý Ta – let trong tam giác JFC và $BE // FC$(J là giao điểm của d_1 và BC), ta có: $\dfrac{BE}{CF} = \dfrac{JB}{JC}$

Mặt khác theo tính chất tia phân giác ta có: $\frac{JB}{JC} = \frac{AB}{AC}$

Kết hợp hai kết quả lại ta được: $\frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC}$

d) Ta có: $BEC = ABE + BAE = BAC + \frac{1}{2}BAC = EJB$

Do đó tam giác BEJ cân tại B. Mà BM vuông góc với EJ nên ta có M là trung điểm của EJ. Lại có ΔKAB cân tại A (có AN vừa là phân giác vừa là đường cao). Suy ra N là trung điểm của KB. Sử dụng định lý Ta-let trong tam giác IBN với

$MJ // BN$, ta có: $\frac{IJ}{IB} = \frac{MJ}{BN} = \frac{\frac{1}{2}EJ}{\frac{1}{2}KB} = \frac{EJ}{KB}$

$\Rightarrow \Delta IJE, \Delta IBK$ có $IJE = IBK$ (đồng vị),

$\frac{IJ}{IB} = \frac{EJ}{KB} \Rightarrow \Delta IJE \sim \Delta IBK (c.g.c) \Rightarrow EIJ = KIB$, từ đó ta có K, E, I thẳng hàng. Vậy đường thẳng KE đi qua trung điểm I của BC

Chứng minh tương tự, ta có LF đi qua trung điểm I của BC. Do đó, KE, LF cắt nhau tại trung điểm I của BC.

Câu 5.

a) Giả sử ngược lại rằng $n \geq \frac{k+10}{2}$ thì $2n - k \geq 10$. Gọi A là tập hợp các quốc gia có đúng 1 học sinh tham dự buổi gặp gỡ và B là tập hợp các quốc gia còn lại. Khi đó, mỗi quốc gia trong B sẽ có ít nhất 2 học sinh.

Ta chọn tất cả học sinh trong A và mỗi quốc gia trong B, chọn 2 học sinh thì có $k + 2(n-k) = 2n - k$ học sinh

Các học sinh này có đặc điểm là: không có ba học sinh nào đến từ cùng quốc gia. Do $2n - k \geq 10$ nên có thể chọn ra trong đó 10 học sinh nào đó không thỏa mãn đề bài.

b) Theo câu a, ta có: $2n - k < 10$ nên $2n - k \leq 9 \Leftrightarrow n \leq \frac{k+9}{2}$.

Do số học sinh tổng cộng là 60, để chỉ ra có 15 học sinh đến từ cùng quốc gia thì theo nguyên lý Dirichle, ta cần chỉ ra rằng

$\frac{60-k}{n-k} \geq 15 \Leftrightarrow 15n - 14k \leq 60$.

Ta sẽ chứng minh đánh giá trên đúng với mọi $(n;k)$. Vì ta đã có $n \leq \frac{k+9}{2}$

nên ta sẽ đưa về chứng minh $15\left(\frac{k+9}{2}\right) - 14k \leq 60 \Leftrightarrow k \geq \frac{15}{13}$. Do đó, với

ẳng định đúng. Tiếp theo, ta xét hai trường hợp:

- Nếu $k=0$ thì theo (*), ta phải có $n\le 4$ nên $15n-14k=15n\le 60,$ đúng
- Nếu $k=1$ thì theo $(*)$, khi đó loại trừ học sinh ở nước đó ra thì còn lại 59 học sinh, đến từ 4 quốc gia. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại 15 học sinh đến từ cùng quốc gia.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
AN GIANG

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020
Môn thi chuyên: **TOÁN**

Bài 1. Rút gọn: $A=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}-\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^2-\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}-\dfrac{2}{1-\sqrt{3}}\right)^2$

Bài 2. Phương trình $x^2-\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{6}=0$ có các nghiệm đều là nghiệm của phương trình $x^4+bx^2+c=0(*)$. Tìm b,c và giải phương trình $(*)$ ứng với b,c vừa tìm được.

Bài 3.

Cho hàm số $y=ax^2\,(a\ne 0)$ có đồ thị (P)

a) Xác định hệ số a biết đồ thị (P) đi qua điểm $A\left(\sqrt{5};\sqrt{50}\right)$. Vẽ đồ thị hàm số ứng với a vừa tìm được
b) Với giá trị a vừa tìm được ở trên, cho biết điểm $M(m,n)$ thuộc đồ thị (P). Hỏi điểm $N(n,m)$ có thuộc đồ thị (P) được hay không ? Tìm điểm đó nếu có (m,n là hai số khác 0)

Bài 4. Cho x,y là hai số thỏa mãn $x+y=1.$ Hãy tính:

$$A=x^4+y^4-2x^3-2x^2y^2+x^2-2y^3+y^2$$

Bài 5. Cho hình chữ nhật $ABCD,$ hai điểm K,P thuộc hai cạnh AD,BC sao cho ΔDKP đều và có cạnh $18cm.$ Biết đường chéo BD đi qua trung điểm N của đoạn $KP.$ Đường thẳng qua A song song với KP cắt BC tại M

a) Tính diện tích hình chữ nhật $ABCD$
b) Chứng minh rằng tứ giác $AKNM$ nội tiếp.

Bài 6. Một chiếc bút chì có dạng hình trụ có đường kính đáy $8mm$ và chiều cao bằng $200mm.$ Thân bút chì được làm bằng gỗ, phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng hình trụ có chiều cao bằng chiều dài bút và đáy là hình tròn có ...h thể tích phần lõi và phần gỗ của bút chì ?

ĐÁP ÁN

Bài 1.

$$A=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{1-\sqrt{3}}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2+4}{2\left(1+\sqrt{3}\right)}\right)^2-\left(\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2-4}{2\left(1-\sqrt{3}\right)}\right)^2$$

$$=\left(\frac{2\sqrt{3}}{2\left(1+\sqrt{3}\right)}\right)^2-\left(\frac{-2\sqrt{3}}{2\left(1-\sqrt{3}\right)}\right)^2=\frac{3}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}-\frac{3}{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\frac{3}{4+2\sqrt{3}}-\frac{3}{4-2\sqrt{3}}=\frac{12-6\sqrt{3}-12-6\sqrt{3}}{16-12}=-3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow A=-3\sqrt{3}$$

Bài 2.

Xét phương trình $x^2-\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{6}=0$

Dễ thấy phương trình có hai nghiệm $x=\sqrt{3}, x=\sqrt{2}$

Do tổng $S=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ và tích $P=\sqrt{3}.\sqrt{2}=\sqrt{6}$

Thay hai nghiệm vào phương trình $x^4+bx^2+c=0$ ta được hệ:

$$\begin{cases}9+3b+c=0\\4+2b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-5\\c=6\end{cases}$$

Vậy $b=-5, c=6$ thì nghiệm của pt bậc 2 là nghiemeh phương trình (*)

Với $b=-5, c=6$ ta có phương trình $x^4-5x^2+6=0(*)$

Đặt $t=x^2\left(t\geq 0\right)$ ta được $\left(*\right)\Leftrightarrow t^2-5t+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}\\t=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$

Bài 3.

a) Đồ thị hàm số $y = ax^2$ đi qua điểm

$A\left(\sqrt{5};\sqrt{50}\right) \Rightarrow A = \sqrt{50} = a.\sqrt{5}^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$

Vậy $a = \sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{2}x^2$

Học sinh tự vẽ đồ thị

b) Điểm $M\left(m,n\right)$ thuộc đồ thị $\Rightarrow n = \sqrt{2}m^2$ (1)

Giả sử điểm $N\left(n,m\right)$ thuộc đồ thị $\Rightarrow m = \sqrt{2}n^2$ (2)

Lấy (1) trừ (2) ta được $n - m = \sqrt{2}\left(m^2 - n^2\right) \Leftrightarrow \left(n-m\right)\left(1+\sqrt{2}\left(n+m\right)\right) = 0$

+Th1:Nếu $n - m = 0 \Leftrightarrow n = m$ thay vào (1) ta được: $n = \sqrt{2}n^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = 0 \\ n = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

+Th2: Nếu $1+\sqrt{2}\left(n+m\right) = 0 \Rightarrow 1+\sqrt{2}n+\sqrt{2}m = 0 \Rightarrow n = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - m$

Thay vào (1) ta được

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - m = \sqrt{2}m^2 \Leftrightarrow \sqrt{2}m^2 + m + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$ (phương trình vô nghiệm)

Vậy $m = n = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ thì điểm $M\left(m,n\right)$ thuộc đồ thị (P) khi đó điểm $N\left(n,m\right)$ thuộc (P)

Bài 4.

$A = x^4 + y^4 - 2x^3 - 2x^2y^2 + x^2 - 2y^3 + y^2$

$= \left(x^4 + y^4 - 2x^2y^2\right) - 2\left(x^3 + y^3\right) + x^2 + y^2$

$= \left(x^2 - y^2\right)^2 - 2\left(x+y\right)\left(x^2 - xy + y^2\right) + \left(x^2 + y^2\right)$

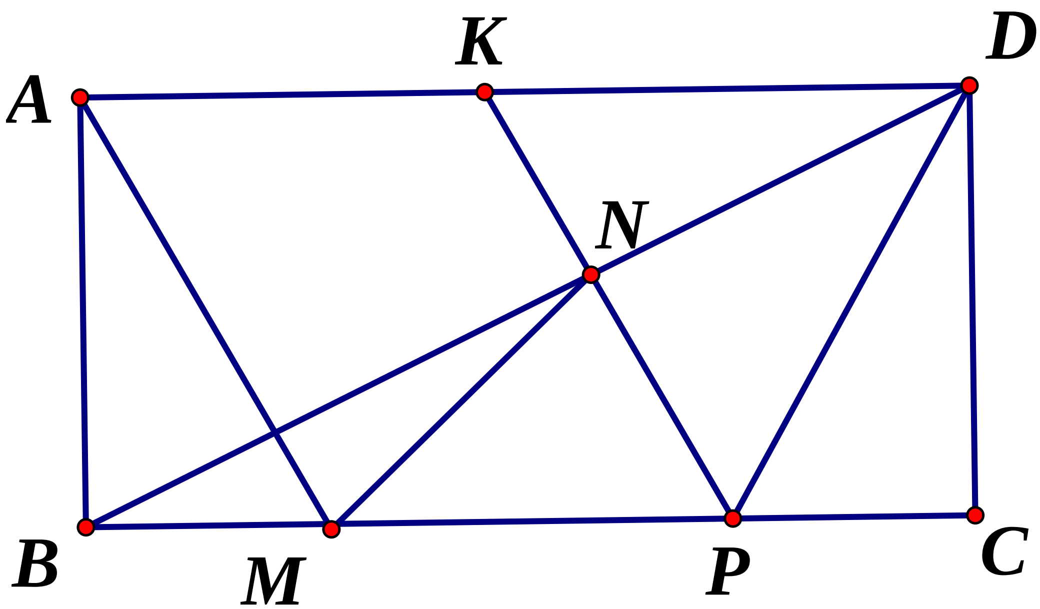
$= \left(x+y\right)^2\left(x-y\right)^2 - 2\left[\left(x+y\right)^2 - 3xy\right] + \left(x+y\right)^2 - 2xy$

$= \left(x-y\right)^2 - 2\left(1-3xy\right) + 1 - 2xy$

$= \left(x+y\right)^2 - 4xy - 2 + 6xy + 1 - 2xy = 0$

$\Rightarrow A = 0$

Bài 5.



a) Tam giác CDP vuông tại C có $CDP = 30^0$

$\cos CDP = \dfrac{CD}{DP} \Rightarrow CD = DP.\cos 30^0 = 18.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$

Tam giác DKP đều có N là trung điểm KP nên $DB \perp KP$ và là đường phân giác của $ADP \Rightarrow CDB = 60^0$

$\Rightarrow \tan CDB = \tan 60^0 = \dfrac{BC}{CD} \Rightarrow BC = CD.\tan 60^0 = 9\sqrt{3}.\sqrt{3} = 27$

Diện tích hình chữ nhật ABCD là: $S_{ABCD} = BC.CD = 27.9\sqrt{3} = 243\sqrt{3}\left(cm^2\right)$

b) Do $AM // KP \Rightarrow KAM = DKP = 60^0$ (đồng vị)

Ta có: $AK = 27 - 18 = 9cm \Rightarrow MP = 9cm = NP$

Mà $MPN = NKD = 60^0$ (so le trong) $\Rightarrow \Delta MNP$ đều

$\Rightarrow MNP = 60^0 \Rightarrow MNK = 120^0$ (kề bù)

Vậy $KAM + MNK = 60^0 + 120^0 = 180^0$

Vậy tứ giác $AKNM$ nội tiếp.

Bài 6.

Ta có công thức tính thể tích hình trụ $V = \pi R^2 h$

Thể tích phần than chì có dạng hình trụ chiều cao $200mm$ bán kính đáy $r = 1mm$

$V_{than\,chi} = \pi.1^2.200 = 200\pi\left(mm^3\right)$

Thể tích bút chì có chiều cao $200mm$ bán kính đáy $R=4mm$

$$V_{but}=\pi.4^2.200=3200\pi\left(mm^3\right)$$

Thể tích phần gỗ bút chì:

$$V_{go}=V_{but}-V_{than\,chi}=3200\pi-200\pi=3000\pi\left(mm^3\right)$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PTNK HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020
Môn thi chuyên:**TOÁN (vòng 1)**
Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1. Tìm a, biết: $\dfrac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2-\left(\sqrt{a}-1\right)^2}{4\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}-\dfrac{\left(\sqrt{2a+1}+\sqrt{a+1}\right)\left(\sqrt{2a+1}-\sqrt{a+1}\right)}{a\left(\sqrt{a}+1\right)}=1$

Bài 2.

a) Giải phương trình: $\left(\sqrt{x+2}-x\right)\left(\sqrt{2x-5}-1\right)=0$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+y+3}=\sqrt{2x+3y+1}\\ x\left(y+1\right)-4\left(x+y\right)+54=0\end{cases}$

Bài 3. Cho phương trình (ẩn x, tham số m): $x^2-\left(2m+1\right)x-12=0\ \left(1\right)$

a) Với các giá trị nào của số thực m thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 sao cho $x_1+x_2-2x_1x_2=25$

b) Tìm tất cả các giá trị của số thực m để phương trình $\left(1\right)$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^2-x_2^2-7\left(2m+1\right)=0$

Bài 4.

a) Từ ngày $1/1/2019$ đến ngày $20/5/2019$, giá bán lẻ xăng RON 95 có đúng bốn lần tăng và một lần giảm. Các thời điểm thay đổi xăng $RON\,95$ trong năm 2019 (tính đến ngày 20/5/2019) được cho bởi bảng sau (giá xăng được tính theo đơn vị đồng, giá được niêm yết cho 1 lít xăng):

Ngày	$1/1$	$2/3$	$2/4$	$17/4$	$2/5$	$17/5$
Giá	17600	18540	20030	21230	….	21590

Từ 16 giờ chiều $2/5/2019$, giá bán lẻ 1 lít xăng RON 95 tăng thêm khoảng 25% so với giá 1 lít xăng RON 95 ngày 1/1/2019. Nếu ông A mua 100 lít xăng RON 95 ngày $2/1/2019$ thì cũng với số tiền đó , ông A sẽ mua được bao nhiêu lít xăng RON 95 vào ngày 3/5/2019 ? Cũng tron hai ngày đó (2/1 và 3/5) ông B đã mua tổng cộng 200 lít xăng RON 95 với tổng số tiền là 3850000 đồng, hỏi ông B đã

xăng $RON\,95$ vào ngày 3/5/2019

b) Tứ giác $ABCD$ có chu vi $18cm$, $AB=\frac{3}{4}BC, CD=\frac{5}{4}BC$ và $AD=2AB$. Tính độ dài các cạnh của tứ giác $ABCD$. Biết $AC=CD$, tính diện tích tứ giác $ABCD$.

Bài 5. Hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp đường tròn (T) có tâm O, bán kính $R=2a$. Tiếp tuyến của (T) tại C cắt các tia AB, AD lần lượt tại E, F

a) Chứng minh rằng $AB.AE=AD.AF$ và $BEFD$ là tứ giác nội tiếp

b) Đường thẳng d qua A, d vuông góc với BD và d cắt (T), EF theo thứ tự tại $M, N\,(M\neq A)$. Chứng minh rằng $BMNE$ là tứ giác nội tiếp và N là trung điểm của EF.

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBEF. Tính IN theo a

ĐÁP ÁN

Bài 1. Điều kiện $a>0, a\neq 1$. Ta có:

$$\left(\sqrt{a}+1\right)^2-\left(\sqrt{a}-1\right)^2=\left(a+1+2\sqrt{a}\right)-\left(a+1-2\sqrt{a}\right)=4\sqrt{a} \text{ và}$$

$$\left(\sqrt{2a+1}+\sqrt{a+1}\right)\left(\sqrt{2a+1}-\sqrt{a+1}\right)=(2a+1)-(a+1)=a$$

Do đó, phương trình đã cho có thể viết lại thành $\dfrac{1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}=1$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{a}+1\right)-\left(\sqrt{a}-1\right)}{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}=1 \Leftrightarrow \frac{2}{a-1}=1 \Leftrightarrow a=3(tm)$$

Vậy $a=3$

Bài 2.

a) Điều kiện : $x\geq \dfrac{5}{2}$. Từ phương trình đã cho, ta thấy có hai trường hợp xảy ra :

- Trường hợp 1: $\sqrt{x+2}-x=0 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1(ktm) \\ x=2(ktm) \end{array}\right.$
- Trường hợp 2: $\sqrt{2x-5}-1=0 \Leftrightarrow 2x-5=1 \Leftrightarrow x=3(tm)$

  Vậy $x=3$

b) Điều kiện $x+y+3\geq 0$ và $2x+3y+1\geq 0$

Từ phương trình thứ nhất của hệ, ta có $x+y+3=2x+3y+1 \Rightarrow x=2-2y$

Từ đây và các điều kiện $x+y+3\geq 0, 2x+3y+1\geq 0$, ta phải có

$$\begin{cases} 5-2y\geq 0 \\ 5-y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y\leq \frac{5}{2}$$

Bây giờ, thay $x=2-2y$ vào phương trình thứ hai của hệ, ta được:

$$(2-2y)(y+1)-4(2-y)+54=0 \Rightarrow -2(y+4)(y-6)=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=10(ktm) \\ y=-4(tm) \Rightarrow x=10 \end{array}\right.$$

Vậy $(x;y)=(10;-4)$

Bài 3.

Phương trình (1) là phương trình bậc hai ẩn x có các hệ số tương ứng $a=1, b=-(2m+1), c=-12$. Do a và c trái dấu nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 trái dấu nhau. Theo Viet, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m+1 \\ x_1x_2=-12 \end{cases}$

a) Do $x_1+x_2-2x_1x_2=25 \Rightarrow 2x+1+24=25 \Leftrightarrow m=0$

Vậy có duy nhất một giá trị m thỏa mãn bài toán là $m=0$

b) Ta có $x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)=(2m+1)(x_1-x_2)$. Do đó, để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì ta phải có $(2m+1)(x_1-x_2-7)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=-\dfrac{1}{2} \\ x_1-x_2=7 \end{array}\right.$

Ở trường hợp 2, do $x_1+x_2=2m+1$ nên ta có: $\begin{cases} x_1=m+4 \\ x_2=m-3 \end{cases}$

Từ đây, do $x_1x_2=-12 \Rightarrow (m+4)(m-3)=-12 \Leftrightarrow m(m+1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-1 \end{array}\right.$

Vậy $m \in \left\{0;-1;-\dfrac{1}{2}\right\}$ thì thỏa mãn bài toán

Bài 4.

a) Ở trường hợp của ông A:Theo giả thiết, ta thấy giá bán lẻ một lít xăng RON 95 từ 16 giờ chiều ngày 2/5/2019 là $17600.(1+0,25)=22000$ (đồng).

Khi ông A mua 100 lít xăng Ron 95 vào ngày 2/1/2019 thì do trong khoảng thời gian chưa có điều chỉnh giá nên giá 1 lít xăng RON 95 chính là giá niêm yết ngày 1/1/2019, suy ra số tiền ông A đã bỏ ra là :
$17600.100=1760000$ (đồng)

Tương tự như trên, giá xăng RON 95 vào ngày 3/5/2019 chính là giá niêm yết lúc 16 giờ chiều 2/5/2019. Do đó, với cùng số tiền đã bỏ ra để mua 100 lít xăng RON 95 vào ngày 2/1/2019 thì ngày 3/5/2019, ông A chỉ có thể mua được $1760000:22000=80$ lít xăng RON 95

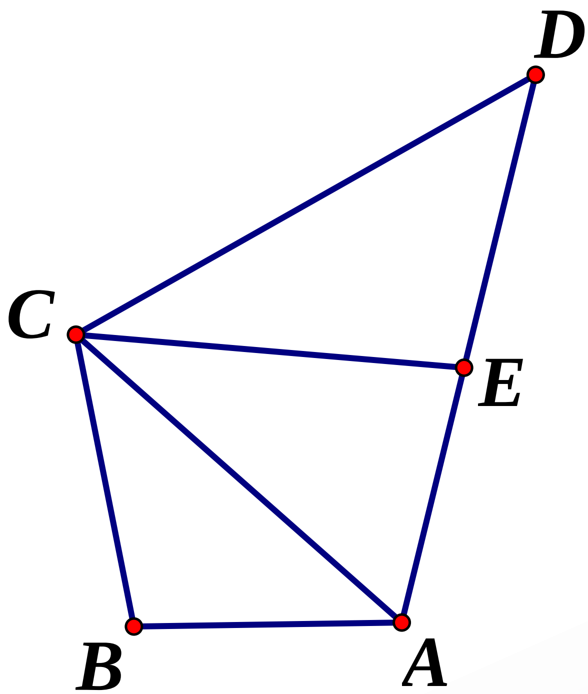
Ở trường hợp ông B: Gọi x là số lít xăng RON 95 mà ông B đã mua trong ngày 2/1/2019, y là số lít xăng RON 95 mà ông B đã mua trong ngày $3/5/2019$. Rõ ràng $x, y \geq 0$. Theo đề bài, ta có:

$\begin{cases} x+y=200 \\ 17600x+22000y=3850000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=200 \\ 4x+5y=875 \end{cases}$

Do $4x+5y=4(x+y)+y=800+y$ nên ta có $y=75 \Rightarrow x=125$ (thỏa mãn)

Vậy số lít xăng $RON95$ mà ông B đã mua vào ngày $3/5/2019$ là 75 lít.

b)



Theo đề bài, ta có $AD=2AB=\frac{3}{2}BC$

Do $AB+BC+CD+DA=18$ nên $\frac{3}{4}BC+BC+\frac{5}{4}BC+\frac{3}{2}BC=18 \Leftrightarrow BC=4(cm)$

$\Rightarrow AB=3(cm), CD=5(cm), DA=6(cm)$

Do $AC=CD$ nên ta có: $AC=5cm$

Suy ra $AB^2+BC^2=3^2+4^2=5^2=AC$. Từ đó, theo định lý Pytago đảo, tam giác ABC vuông tại B

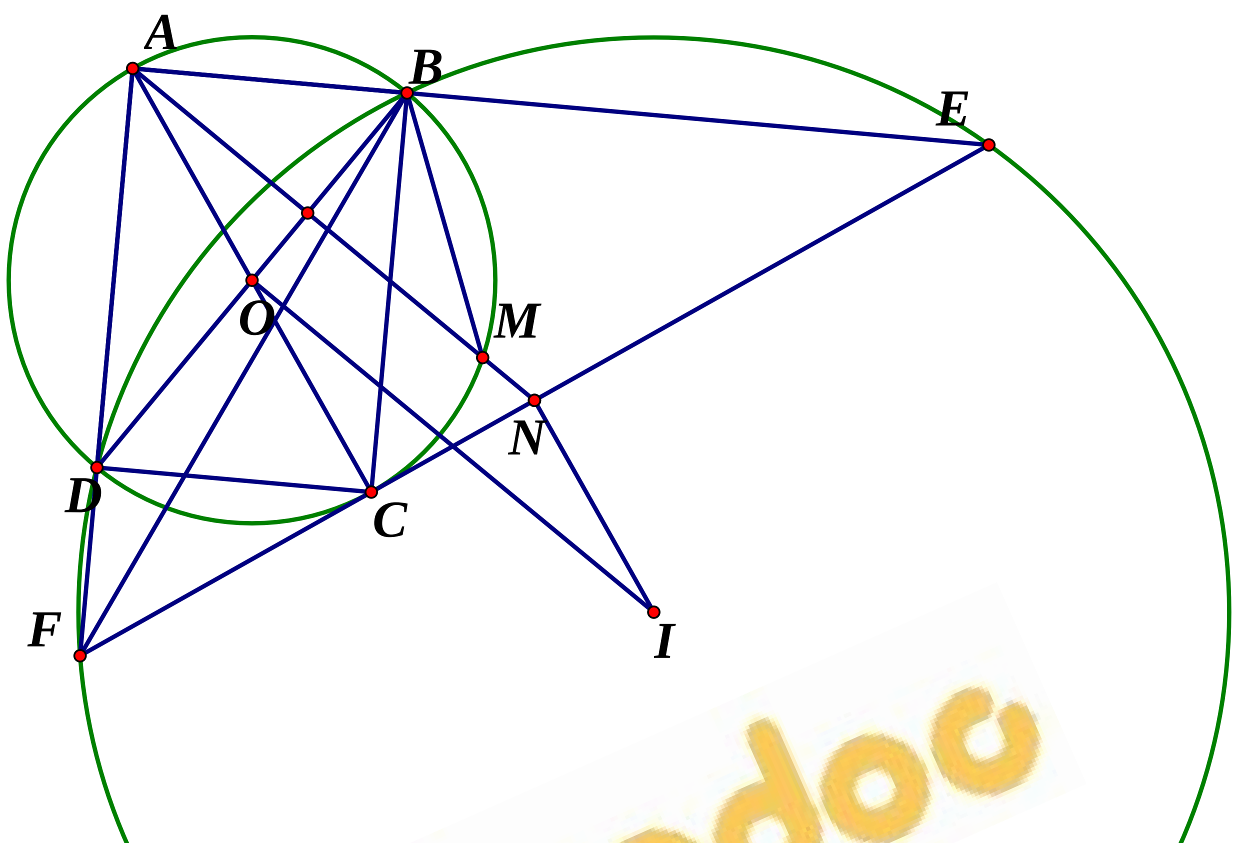
Do $AC=CD$ nên tam giác ACD cân tại C. Gọi E là trung điểm của AD thì ta có $CE\perp AD$. Áp dụng định lý Pytago trong tam giác AEC vuông tại E, ta có:

$CE=\sqrt{AC^2-AE^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

Từ đây, ta tính được :

$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}=\frac{1}{2}AB.BC+\frac{1}{2}AD.CE=\frac{1}{2}.3.4+\frac{1}{2}.6.4=18(cm^2)$

Bài 5.



a) Theo tính chất của góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp, ta có $DCF = DAC$ (cùng chắn cung DC của đường tròn (T))

Lại có $DAC = ADB$ (tính chất hình chữ nhật) và $DCF = AEF$ (đồng vị) nên $AEF = DCF = DAC = ADB$

Xét tam giác ADB và tam giác AEF , ta có DAB chung, $AEF = ADB(cmt)$

Nên $\Delta ADB \sim \Delta AEF(g-g) \Rightarrow \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AB}{AF}$ hay $AB.AE = AD.AF$

Bây giờ, do $BEF = AEF = ADB$ nên ta có: $BEF + BDF = ADB + BDF = 180^0$
Từ đó suy ra tứ giác $BEFD$ nội tiếp

b) Theo tính chất của góc nội tiếp, ta có: $AMB = ADB$ (cùng chắn cung AB của đường tròn (T). Lại có $ADB = AEF$ nên $AMB = AEF$

Từ đây, ta có : $BEN + BMN = AEF + BMN = AMB + BMN = 180^0$. Suy ra tứ giác $BMNE$ nội tiếp

Bây giờ, do $AN \perp BD$ nên ta có $NAE = 90^0 - ABD = DBC = ADB = AEF = AEN$.
Do đó tam giác NAE cân tại N, suy ra $NA = NE(1)$.

Mặt khác, do $NAE = AEN, NAE = 90^0 - NAF$ và $AEN = 90^0 - AFN$ nên ta cũng có $NAF = AFN,$ suy ra ΔNAF cân tại N do đó $NF = NA(2)$

Từ (1) và (2) ta suy ra $NE = NF,$ tức N là trung điểm của đoạn EF.

c) Do N là trung điểm của EF và I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBEF nên $NI \perp EF.$ Lại có EF là tiếp tuyến tại C của đường tròn (T) và AC là đường kính của đường tròn (T) nên $AC \perp EF.$ Từ đó suy ra $AC//NI$, tức $AO//NI(3)$

Do tứ giác $BEFD$ nội tiếp nên D thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF. Ta lại có O là trung điểm của BD và I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF nên $IO \perp BD.$ Mà $NA \perp BD(gt) \Rightarrow IO//NA(4)$

Từ (3) và (4) ta suy ra $ANIO$ là hình bình hành $\Rightarrow IN = OA = 2a$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH BÌNH PHƯỚC

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
Môn: TOÁN CHUYÊN
Năm học 2019-2020

Câu 1.(2,0 điểm) Cho biểu thức $A = \dfrac{x\sqrt{x} - 3}{x - 2\sqrt{x} - 3} - \dfrac{2\left(\sqrt{x} - 3\right)}{\sqrt{x} + 1} + \dfrac{\sqrt{x} + 3}{3 - \sqrt{x}}$

a) Rút gọn A

b) Tính giá trị của A khi $x = 4 - 2\sqrt{3}$

Câu 2. (1,0 điểm) Cho phương trình : $x^2 - (m+2)x + 3m - 3 = 0(1)$ với m là tham số

Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông với cạnh huyền có độ dài bằng 5

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $x + \sqrt{4 - x^2} = 2 + 3x\sqrt{4 - x^2}$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^3 + 2x^2y - xy = y^2 - x - y \\ 2x^3 - xy + x^2 = 4 \end{cases}$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho đường tròn $(O;R)$ và đường tròn $(O';R')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và $B.$ Trên tia đối của tia AB lấy điểm C. kẻ tiếp tuyến CD, CE với đường tròn $(O;R)$, trong đó D, E là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn

$(O';R')$. Đường thẳng AD, AE cắt đường tròn $(O';R')$ lần lượt tại M và N (M, N khác A).Tia DE cắt MN tại I. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $BEIN$ nội tiếp

b) $\Delta MIB \sim \Delta AEB$

c) $O'I \perp MN$

Câu 5. (1,0 điểm)

a) Giải phương trình nghiệm nguyên $4y^2 = 2 + \sqrt{199 - x^2 - 2x}$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p;q)$ sao cho $p^2 - 2q^2 = 41$

Câu 6.

a) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $xy \le 1$, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \le \frac{2}{1+\sqrt{xy}}$$

b) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $(x+y)^3 + 4xy \le 12$

Tìm $GTLN$ của $P = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + 2018xy$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) Điều kiện : $x \ge 0; x \ne 9 (*)$

$$A = \frac{x\sqrt{x} - 3 - 2\left(\sqrt{x}-3\right)^2 - \left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$= \frac{x\sqrt{x} - 3 - 2x + 12\sqrt{x} - 18 - x - 4\sqrt{x} - 3}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{x\sqrt{x} - 3x + 8\sqrt{x} - 24}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}-3\right)(x+8)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{x+8}{\sqrt{x}+1}$$

b) $x = 4 - 2\sqrt{3}$ thỏa mãn $(*)$. Với $x = 4 - 2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}-1\right)^2$ ta có :

$$A = \frac{x+8}{\sqrt{x}+1} = \frac{4 - 2\sqrt{3} + 8}{\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} + 1} = \frac{12 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} - 2$$

Câu 2.

Điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện bài toán là:

$$\begin{cases}\Delta > 0\\ S > 0\\ P > 0\\ x_1^2 + x_2^2 = 25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m+2)^2 - 4(3m-3) > 0\\ m+2 > 0\\ 3m-3 > 0\\ (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2 - 8m + 16 > 0\\ m > -2\\ m > 1\\ (m+2)^2 - 2(3m-3) = 25\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}m \neq 4\\ m > -2\\ m > 1\\ m = 5 \vee m = -3\end{cases} \Rightarrow m = 3$$

Vậy $m = 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 3.

a) $x + \sqrt{4 - x^2} = 2 + 3x\sqrt{4 - x^2}$. Điều kiện $-2 \le x \le 2$

Đặt $t = x + \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow x\sqrt{4 - x^2} = \dfrac{t^2 - 4}{2}$, khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$3t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}t = 2\\ t = \dfrac{-4}{3}\end{cases}$$

$$*)t = 2 \Rightarrow x + \sqrt{4 - x^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = 2 - x \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}x = 0(tm)\\ x = 2(tm)\end{cases}$$

$$*)t = -\frac{4}{3} \Rightarrow x + \sqrt{4 - x^2} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = \frac{-4}{3} - x \Leftrightarrow 2x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{20}{9} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{14}}{3}(tm)$$

Vậy $S = \left\{0; 2; \dfrac{-2 \pm \sqrt{14}}{3}\right\}$

$$b.\begin{cases}2x^3 + 2x^2y - xy = y^2 - x - y(1)\\ 2x^3 - xy + x^2 = 4 \quad (2)\end{cases}$$

Ta có

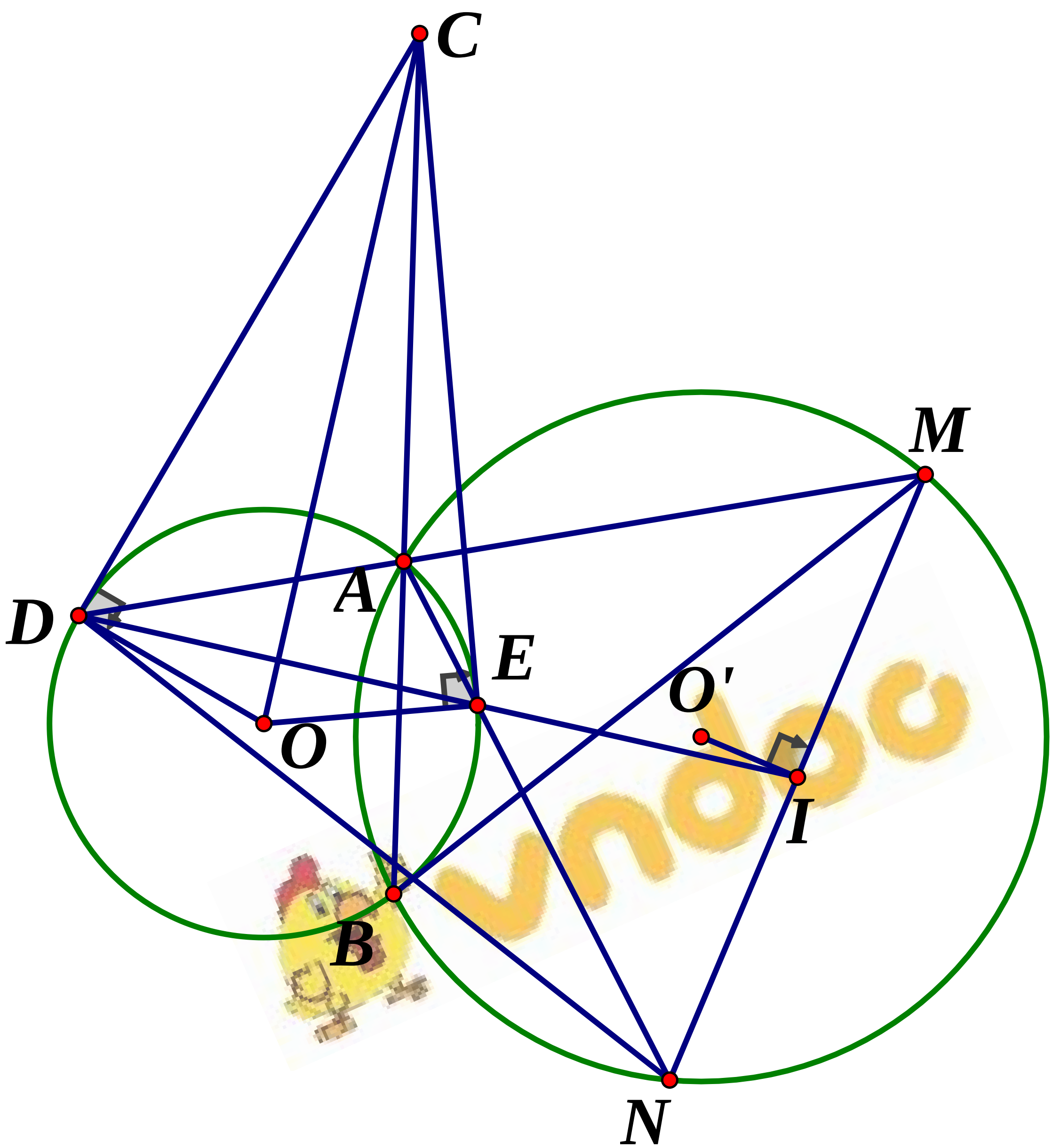
$$(1) \Leftrightarrow 2x^2(x+y) - y(x+y) + (x+y) = 0 \Leftrightarrow (x+y)(2x^2 - y + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y = -x\\ y = 2x^2 + 1\end{array}\right.$$

$*) y=-x \Rightarrow (2) \Leftrightarrow 2x^3+2x^2-4=0 \Leftrightarrow 2(x-1)\left(x^2+2x+2\right)=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=-1$

$*) y=2x^2+1 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow x^2-x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow y=10+\sqrt{17} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2} \Rightarrow y=10-\sqrt{17} \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm là $(x;y) \in \left\{(1;-1);\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{2};10+\sqrt{17}\right);\left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{2};10-\sqrt{17}\right)\right\}$

Câu 4.



a) Tứ giác $BAMN$ nội tiếp nên ta có: $BAD = BNM$ hay $BAD = BNI$ (1)

Tứ giác $BEAD$ nội tiếp nên ta có: $BAD = BED$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BED = BNI$, vậy tứ giác $BENI$ nội tiếp

b) Tứ giác $BAMN$ nội tiếp $\Rightarrow \begin{cases} BMI = BAE & (1) \\ MNA = MBA & (2) \end{cases}$

Tứ giác $BEIN$ nội tiếp $\Rightarrow MNA = INE = IBE$ (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow MBA = IBE \Rightarrow IBM + MBE = EBA + MBE \Rightarrow IBM = EBA$ (4)

Từ (1) và (4) $\Rightarrow \Delta MIB \sim \Delta AEB (g.g)$

c) CD là tiếp tuyến của (O) nên

$$CDA = CBD \Rightarrow \Delta CDA \sim \Delta CBD(g.g) \Rightarrow \frac{BD}{DA} = \frac{CD}{CA}$$

Tương tự, ta có: $\frac{CE}{CA} = \frac{EB}{EA}$ mặt khác $CD = CE$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow \frac{BD}{DA} = \frac{EB}{EA}$ (5)

$\Delta MIB \sim \Delta AEB$($cm$ câu b) $\Rightarrow \frac{EB}{EA} = \frac{IB}{IM}$ (6)

*) $ABD = AED = IEN$ mà $IEN = IBN$ (tứ giác $BEIN$ nội tiếp) $\Rightarrow ABD = IBN$

Mặt khác $INB = DAB$ (chứng minh câu a), từ đó ta có

$\Delta INB \sim \Delta DAB(g.g) \Rightarrow \frac{DB}{DA} = \frac{IB}{IN}$ (7)

Từ (5), (6), (7) $\Rightarrow \frac{IB}{IN} = \frac{IB}{IM} \Rightarrow IM = IN \Rightarrow I$ là trung điểm của $MN \Rightarrow O'I \perp MN$

Câu 5.

a) ĐK:

$$199 - x^2 - 2x \ge 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \le 200 \Rightarrow x \in \{-15;-14;-13;....;12;13\} \left(do...x \in \mathbb{Z}\right)$$

Ta có: $4y^2 = 2 + \sqrt{199 - x^2 - 2x} = 2 + \sqrt{200 - (x+1)^2} \le 2 + 10\sqrt{2} \Rightarrow 0 < y^2 \le 4$, mà $y \in \mathbb{Z}$

Suy ra $y = \{-2;-1;1;2\}$

$y = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -15 \\ x = 13 \end{cases}$ $\qquad$ $y = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = -15 \\ x = 13 \end{cases}$

$y = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$ $\qquad$ $y = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$

Vậy tập hợp các cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn đề bài là:

$$S = \{(13;-1);(-15;-1);(-15;1);(-3;2);(-3;-2);(1;2);(1;-2)\}$$

$b)$ $p^2 - 2q^2 = 41 \Rightarrow p^2 = 41 + 2q^2 \Rightarrow p^2$ là số lẻ $\Rightarrow p$ lẻ $\Rightarrow p = 2k + 1(k \in \mathbb{N}*)$, thay vào (*) suy ra :

$q^2 = 2k(k+1) - 20 \Rightarrow q$ chẵn, mà q là số nguyên tố nên $q = 2 \Rightarrow p^2 = 49 \Rightarrow p = 7$

Câu 6.

$$a)\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\le \frac{2}{1+\sqrt{xy}}\Leftrightarrow \frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+\sqrt{xy}}+\frac{1}{1+y}-\frac{1}{1+\sqrt{xy}}\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{xy}-x}{(1+x)\left(1+\sqrt{xy}\right)}+\frac{\sqrt{xy}-y}{(1+y)\left(1+\sqrt{xy}\right)}\le 0\Leftrightarrow \frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{1+\sqrt{xy}}.\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}-\frac{\sqrt{y}}{1+y}\right)\le 0$$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)^2\left(\sqrt{xy}-1\right)}{(1+x)(1+y)\left(1+\sqrt{xy}\right)}\le 0,$ bất đẳng thức này luôn đúng với các số thực

$x,y>0;xy\le 1$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng

b) Ta có

$12\ge (x+y)^3+4xy\ge \left(2\sqrt{xxy}\right)^3+4xy$ (áp dụng BĐT AM-GM cho hai số thực không âm x,y). Đặt $t=\sqrt{xy}\,(t>0)$, khi đó:

$12\ge 8t^3+4t^2\Leftrightarrow 2t^3+t^2-3\le 0\Leftrightarrow (t-1)\left(2t^2+3t+3\right)\le 0$

$\Leftrightarrow t\le 1$ (Vì $t>0\Rightarrow 2t^2+3t+3>0$)

$t\le 1\Rightarrow 0<xy\le 1.$ Theo câu a ta có:

$$P=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+2018xy\le \frac{2}{1+\sqrt{xy}}+2018xy$$

Đặt $t=\sqrt{xy}\left(0<t\le 1\right)$, ta được: $P\le \dfrac{2}{1+t}+2018t^2$

Ta sẽ cần chứng minh $GTLN$ của P là $2019,$ thật vậy ta chứng minh bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$\frac{2}{1+t}+2018t^2\le 2019\Leftrightarrow 2018t^3+2018t^2-2019t-2017\le 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)\left(2018t^2+4036t+2017\right)\le 0$$

Bát đẳng thức sau luôn đúng với $0<t\le 1.$ Dấu $"="$ xảy ra khi $\begin{cases}t=1\\x=y\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$

Vậy $GTLN$ của P là 2019 đạt được khi $x=y=1$

UBND TỈNH SƠN LA **CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM**
SỞ GIÁO DỤC – ĐÀO TẠO **Độc lập – Tự do – Hạnh phúc**
ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN

NĂM HỌC 2019-2020

Môn : **Toán (Lớp chuyên)**

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức: $A=\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$

b) Tính giá trị biểu thức $B=\left(x^2+4x-2\right)^{2019}$ tại $x=\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{21+4\sqrt{5}}+3}$

Câu 2. (2,0 điểm) Cho phương trình : $x^2-mx+m-1=0$

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn biểu thức

$A=\dfrac{4x_1x_2+6}{x_1^2+x_2^2+2\left(1+x_1x_2\right)}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 3. (1,0 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{x^2-3x+5}=3x+7$

Câu 4. (3,0 điểm) Từ một điểm I nằm ngoài đường tròn tâm O kẻ hai tiếp tuyến IA và IB đến đường tròn (A,B là các tiếp điểm). Tia Ix nằm giữa hai tia IA và $IB,$ Ix không đi qua O và cắt đường tròn (O) tại C và E (E nằm giữa C và I), đoạn IO cắt AB tại M. Chứng minh

a) Tứ giác $OMEC$ nội tiếp

b) $AMC=AME$

c) $\left(\dfrac{MB}{MC}\right)^2=\dfrac{IE}{IC}$

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $\leq 3.$ Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{362}{ab+bc+ca}\geq 121$$

Câu 6. (1,0 điểm)

Trong các tam giác có cạnh đáy bằng $a,$ chiều cao tương ứng là h (a,h cho trước, không đổi). Hãy tìm tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 4, x \neq 9$

$$A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{x-9-x+4+\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{x}+1} . \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$$

b) Ta có:

$$x = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{21+4\sqrt{5}}+3} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+1\right)^3}}{\sqrt{\left(1+2\sqrt{5}\right)^2}+3}$$

$$= \frac{2}{2\left(2+\sqrt{5}\right)} = \frac{1}{\sqrt{5}+2} = -2+\sqrt{5}$$

Vậy

$$B = \left(x^2+4x-2\right)^{2019} = \left[\left(-2+\sqrt{5}\right)^2 + 4.\left(-2+\sqrt{5}\right) - 2\right]^{2019}$$

$$= \left(4-4\sqrt{5}+5-8+4\sqrt{5}-2\right)^{2019} = \left(-1\right)^{2019} = -1$$

Câu 2.

a) Phương trình $x^2 - mx + m - 1 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 4 > 0 \\ m > 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(m-2\right)^2 > 0 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m > 1 \end{cases}$$

Vậy với $\begin{cases} m \neq 2 \\ m > 1 \end{cases}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt

b) Vì $\Delta = \left(m-2\right)^2 \geq 0$ với mọi m nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Theo hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$

Khi đó:

$$A=\frac{4x_1x_2+6}{x_1^2+x_2^2+2\left(1+x_1x_2\right)}=\frac{4x_1x_2+6}{\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2+2+2x_1x_2}=\frac{4x_1x_2+6}{\left(x_1+x_2\right)^2+2}$$

$$A=\frac{4\left(m-1\right)+6}{m^2+2}=\frac{4m+2}{m^2+2}\Leftrightarrow A\left(m^2+2\right)=4m+2$$

$\Leftrightarrow Am^2-4m+2A-2=0(1)$

(1) có nghiệm khi

$\Delta'\geq 0\Leftrightarrow 4-A\left(2A-2\right)\geq 0\Leftrightarrow 2A^2-2A-4\leq 0$

$\Leftrightarrow\left(A+1\right)\left(A-2\right)\leq 0\Leftrightarrow -1\leq A\leq 2$

Vậy $MinA=-1\Leftrightarrow -m^2-4m-4=0\Leftrightarrow m=-2$

Vậy với $m=-2$ thì phương trình có hai nghiệm thỏa mãn đề bài.

Câu 3.

Có $x^2-3x+5=x^2-2.\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}+\frac{11}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}>0\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow VT>0$

ĐKXĐ: $x>\frac{-7}{3}$

$\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-3x+5}+x^2-3x+5-12=0$

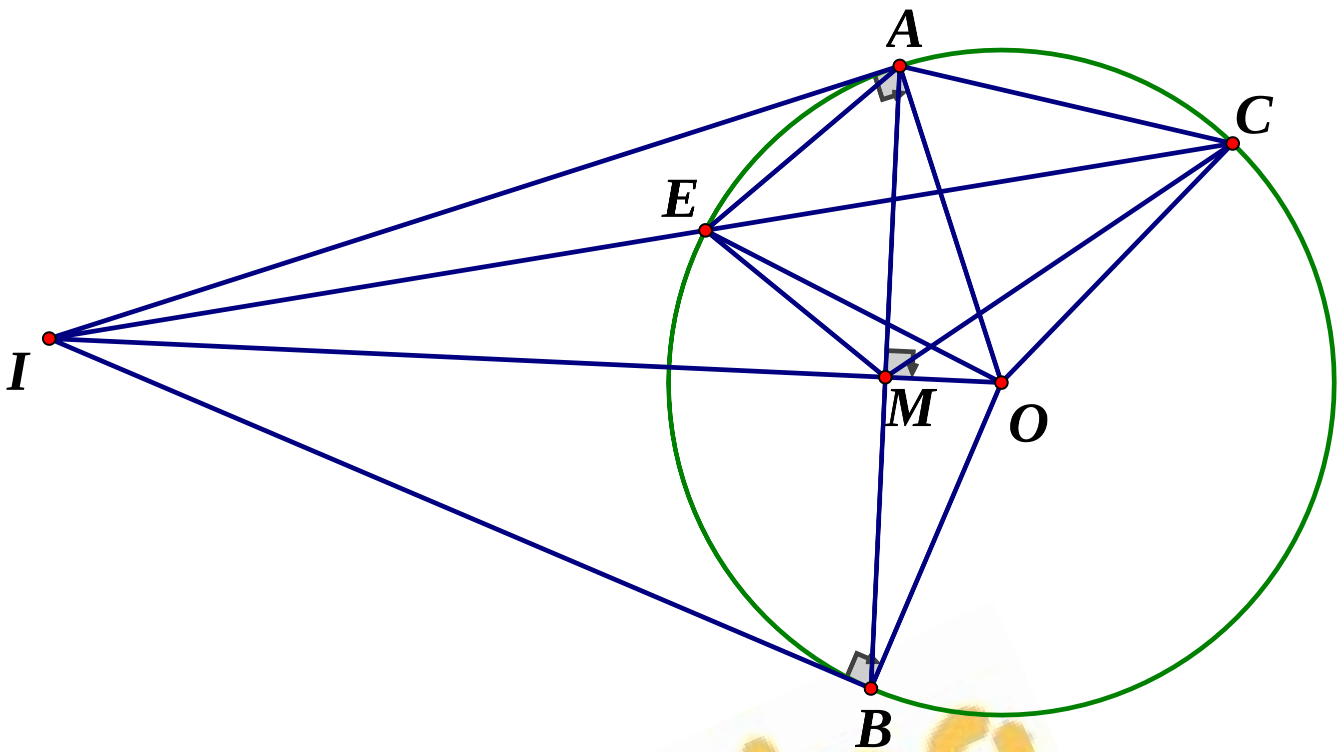
Đặt $\sqrt{x^2-3x+5}=t\left(t>0\right)$, ta có phương trình:

$t^2+t-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3(tm)\\t=-4(ktm)\end{array}\right.$

Với $t=3\Rightarrow\sqrt{x^2-3x+5}=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1(tm)\\x=4(tm)\end{array}\right.$

Vậy $S=\{-1;4\}$

Câu 4.



a) ΔIAE và ΔICA có $IAE = ICA$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AE) và góc I chung

$$\Rightarrow \Delta IAE \sim \Delta ICA (g.g) \Rightarrow \frac{IA}{IC} = \frac{IE}{IA} \Rightarrow IA^2 = IE.IC (1)$$

Lại có ΔIAO vuông tại A có $AM \perp IO$ (do IO là trung trực của đoạn AB)

$\Rightarrow IA^2 = IM.MO \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có: $IE.IC = IM.IO \Leftrightarrow \dfrac{IE}{IM} = \dfrac{IO}{IC}$

ΔIEM và ΔIMC có góc I chung và $\dfrac{IE}{IM} = \dfrac{IO}{IC}$

$\Rightarrow \Delta IEM \sim \Delta IOC (c.g.c) \Rightarrow IME = OCE$

$\Rightarrow$ Tứ giác $OMEC$ nội tiếp (góc trong tại một đỉnh bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện)

b) Do tứ giác $OMEC$ nội tiếp (câu a)

$\Rightarrow OEC = OMC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OC)

Mà $OEC = OCE$ (do tam giác OCE cân tại O)

Và $OCE = IME$ (chứng minh trên) $\Rightarrow IME = OMC$

Mà $IME + EMA = 90^0$ và $OMC + CMA = 90^0$ (do $AB \perp IO$) $\Rightarrow AMC = AME$

c) ΔCMO và ΔICO có: $CMO = ICO\left(= OEC\right); IOC$ chung

$$\Rightarrow \Delta CMO \sim \Delta ICO(g.g) \Rightarrow \frac{CM}{MO} = \frac{IC}{CO} \Rightarrow CM.CO = MO.IC$$

$$\Rightarrow CM^2.CO = CM.MO.IC \Rightarrow \frac{CM^2}{MO.IC} = \frac{CM}{CO} (1)$$

Lại có $\Delta IEM \sim \Delta COM(g.g)$ (do $IEM = MOC\left(= IOC\right)$ theo câu a và $EMI = OMC$ (câu b)

$$\Rightarrow \frac{IM}{IE} = \frac{CM}{CO} (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{IM}{IE} = \frac{CM^2}{MO.IC} \Rightarrow \frac{IM.IO}{MC^2} = \frac{IE}{IC}$

Mà $MA^2 = MI.MO$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông IAO)

$\Rightarrow \frac{MA^2}{MC^2} = \frac{IE}{IC}$ mà $MA = MB \Rightarrow \frac{MB^2}{MC^2} = \frac{IE}{IC}$ hay $\left(\frac{MB}{MC}\right)^2 = \frac{IE}{IC}$

Câu 5.

Với 3 số thực dương a,b,c ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$

Thật vậy ta có:

$$\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + 3$$

$$\overset{CoSi}{\geq} 2+2+2+3 = 9$$

Vậy $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} (*)$, Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$

Với ba số thực a,b,c ta có: $3\left(ab+bc+ca\right) \leq \left(a+b+c\right)^2$

Thật vậy:

$$3\left(ab+bc+ca\right) \leq \left(a+b+c\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 3ab + 3bc + 3ca \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\left(a-b\right)^2 + \left(b-c\right)^2 + \left(c-a\right)^2\right] \geq 0$$

Luôn đúng với mọi a,b,c. Vậy $ab+bc+ca \le \frac{(a+b+c)^2}{3}$ (**)

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$

Áp dụng $(*),(**)$ và giả thiết $a+b+c \le 3$, ta có:

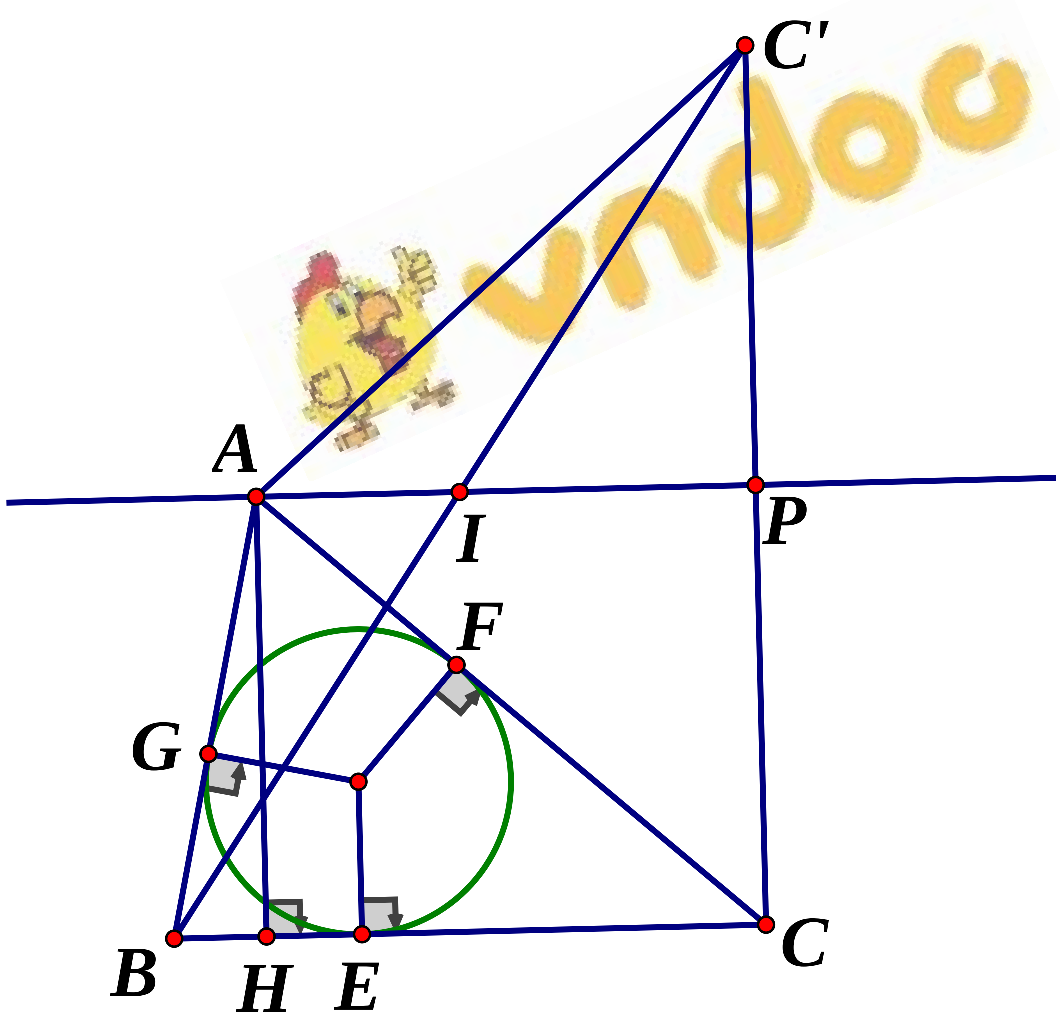
$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{362}{ab+bc+ca}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{360}{ab+bc+ca}$$

$$\ge \frac{9}{(a+b+c)^2}+\frac{360}{\frac{(a+b+c)^2}{3}} \ge \frac{9}{9}+\frac{360.3}{9}=121$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$

Câu 6.



Tam giác ABC có B, C cố định, $AH=h$

Vậy A thuộc đường thẳng d cố định song song với BC và cách BC một đoạn h

Gọi $(O;r)$ là đường tròn nội tiếp tam giác $ABC,$ tiếp xúc với BC, AC, AB lần lượt tại $E, F, G.$ Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC$ (không đổi) (1)

Mặt khác $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA} = \frac{1}{2}r(AB + BC + CA)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có r lớn nhất khi $AB + AC$ nhỏ nhất

Lấy C' đối xứng với C qua d $\Rightarrow C'$ cố định và $AC = AC'$

$\Rightarrow AB + AC = AB + AC' \geq BC'$

$\Rightarrow AB + AC$ nhỏ nhất khi $A \equiv I$ (I là giao của BC' và d)

Gọi P là trung điểm CC' vì $d // BC$ nên I là trung điểm BC'

$\Rightarrow IB = IC' = IC \Rightarrow AB = AC$

Vậy r lớn nhất khi tam giác ABC cân tại $A.$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN**
TÂY NINH	**NĂM HỌC 2019-2020**
ĐỀ CHÍNH THỨC	Môn thi chuyên:**TOÁN**

Câu 1. Giải phương trình : $x^4 + x^2 - 20 = 0$

Câu 2. Rút gọn biểu thức : $T = \frac{\left(\sqrt{2a} - 2\sqrt{2}\right)(a-1)}{a - \sqrt{a} - 2}$ với $a > 0, a \neq 4$

Câu 3. Cho hình thang cân $ABCD(AB // CD)$ có $CD = 2AD = 2AB = 8.$ Tính diện tích của hình thang cân đó.

Câu 4. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 5xy + x - 5y^2 = 42 & (1) \\ 7xy + 6y^2 + 42 = x & (2) \end{cases}$

Câu 5. Cho hai phương trình $x^2 + 6ax + 2b = 0$ và $x^2 + 4bx + 3a = 0$ với a, b là các số thực. Chứng minh nếu $3a + 2b \geq 2$ thì ít nhất một trong hai phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 6. Tìm số tự nhiên có 4 chữ số có dạng $\overline{abcd}$ sao cho $\overline{abcd} = k^2 \left(k \in \mathbb{N}^*\right)$ và $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$ (các số tự nhiên a, b, c, d có thể giống nhau)

Câu 7. Cho tam giác ABC có $BAC = 60^0$ và $AB < AC.$ Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại D và E. Kéo dài BI, CI lần lượt cắt DE tại F và G, gọi M là trung điểm $BC.$ Chứng minh ΔMFG đều.

Câu 8.

Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O) có tâm O

a) Trên cung nhỏ AB của đường tròn (O) lấy điểm D (khác A, B). Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn tâm A bán kính AC với đường thẳng BD. Chứng minh AD là đường trung trực của CK

b) Lấy P là điểm bất kỳ trên đoạn OC (khác O, C). Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên AB, AC. Gọi Q là điểm đối xứng của P qua đường thẳng EF. Chứng minh Q thuộc đường tròn (O)

Câu 9. Chứng minh $(x+y+z)^3 + 9xyz \geq 4(x+y+z)(xy+yz+zx)$ với x, y, z là các số thực không âm. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

ĐÁP ÁN

Câu 1.

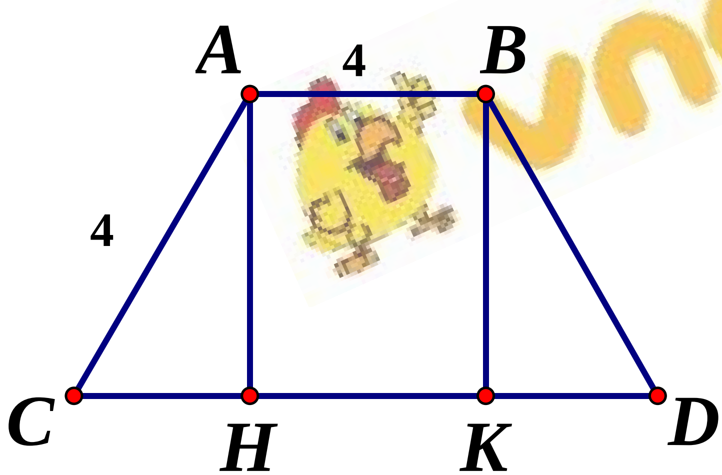
Đặt $t = x^2, t \geq 0$, phương trình thành $t^2 + t - 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right. \\ t = -5 (ktm) \end{array}\right.$

Câu 2. Ta có:

$$\left(\sqrt{2a} - 2\sqrt{2}\right)(a-1) = \sqrt{2}\left(\sqrt{a} - 2\right)(a-1)$$
$$= \sqrt{2}\left(\sqrt{a} - 2\right)\left(\sqrt{a} - 1\right)\left(\sqrt{a} + 1\right)$$
$$a - \sqrt{a} - 2 = \left(\sqrt{a} + 1\right)\left(\sqrt{a} - 2\right)$$

Vậy $T = \sqrt{2}\left(\sqrt{a} - 1\right)$

Câu 3.



Gọi H, K lần lượt là chân đường cao kẻ từ A và B xuống CD

S_{ABCD} là diện tích hình thang ABCD.

Ta có : $\Delta ADH = \Delta BCK$ do $AHD = BKC = 90^0; ADH = BCK, AD = BC$

Nên $DH = CK$

Mặt khác $ABKH$ là hình chữ nhật nên $AB = KH \Rightarrow DH = \dfrac{CD - HK}{2} = 2$

Do đó : $AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = 2\sqrt{3}$

Vậy $S_{ABCD} = \dfrac{AH.(AB + CD)}{2} = 12\sqrt{3}$

Câu 4. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 5xy + x - 5y^2 = 42 & (1) \\ 7xy + 6y^2 + 42 = x & (2) \end{cases}$

Lấy (1)+(2) ta được $(x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -y$, thay $x = -y$ vào (1) ta được:

$$x^2 + x - 42 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -7 \Rightarrow y = 7 \\ x = 6 \Rightarrow y = -6 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(-7;7);(6;-6)$

Câu 5.

$\Delta_1' = 9a^2 - 2b, \Delta_2' = 4b^2 - 3a$

$\Delta_1' + \Delta_2' = (3a-1)^2 + (2b-1)^2 + 3a + 2b - 2$

Do $3a + 2b \ge 2 \Rightarrow \Delta_1' + \Delta_2' \ge 0$

Suy ra có ít nhất một trong hai giá trị Δ_1', Δ_2' không âm hay ít nhất một trong hai phương trình đã cho có nghiệm .

Câu 6.

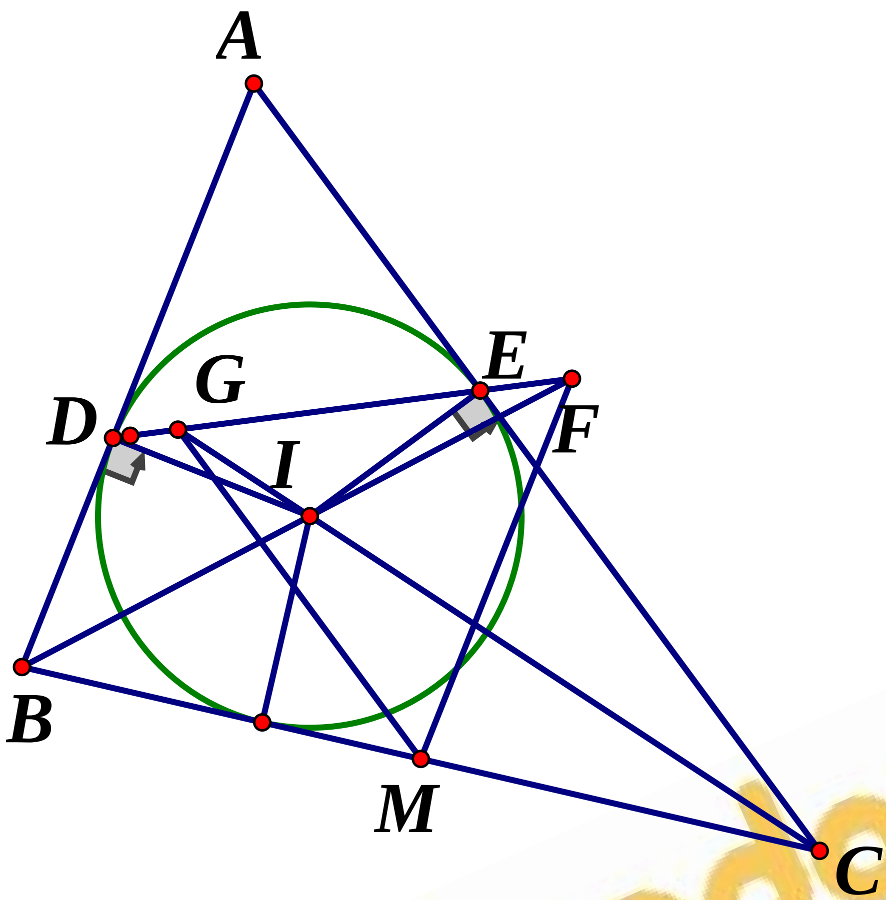
$\overline{abcd} = k^2 \left(k \in \mathbb{N}^*\right) \Rightarrow k^2 = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 100\left(1 + \overline{cd}\right) + \overline{cd}$

$\Rightarrow k^2 = 100 + 101\overline{cd} \Leftrightarrow 101\overline{cd} = k^2 - 100 \Leftrightarrow 101\overline{cd} = (k-10)(k+10)$

Do $k < 100$ (vì k^2 chỉ có 4 chữ số) $\Rightarrow k - 10 < 101$ và do 101 là số nguyên tố nên $(k+10) \vdots 101 \Rightarrow k + 10 = 101 \Rightarrow k = 91$

Suy ra $\overline{abcd} = 91^2 = 8281$

Câu 7.



Ta có tứ giác $CIEF$ nội tiếp vì $CEF = AED = 60^0$ (ΔADE đều) và

$CIF = \frac{1}{2}\left(ABC + ACB\right) = 60^0$

Suy ra $IFC = IEC = 90^0 \Rightarrow FM = MB = MC(1)$

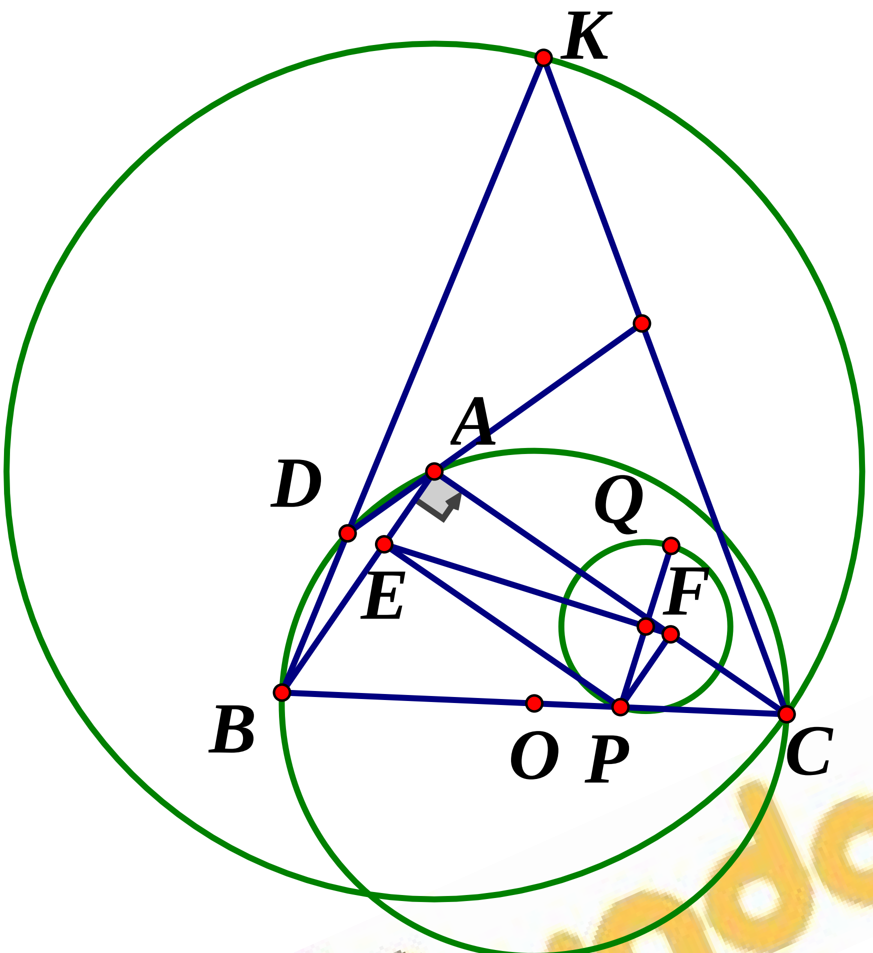
Mặt khác tứ giác $BDGI$ nội tiếp vì $ADE = 60^0$ (ΔADE đều) và $BIG = CIF = 60^0$

Suy ra $IGB = IDB = 90^0$ nên $GM = MB = MC(2)$

Lại có: $GMF = 180^0 - CMF - BMG = 180^0 - ABC - ACB = 60^0$ (3)

Từ (1) (2) (3) suy ra : $MF = MG$ và $GMF = 60^0$ nên ΔMFG đều.

Câu 8.



a) Ta có: $BKC = \frac{1}{2}BAC = 45^0$ (1); $BDC = 90^0 \Rightarrow KDC = 90^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔKDC vuông cân tại D nên $DC = DK$

Ta lại có $AC = AK$ do đó AD là trung trực của CK

b) Gọi I là giao điểm của AP, EF. Ta có: $IP = IQ = IA$ nên ΔAQP vuông tại Q (1)

Ta có: $FP = FQ$ và ΔPFC vuông cân tại F nên F là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔPCQ

Do đó $PQC = \frac{1}{2}PFC = \frac{1}{2}.90^0 = 45^0$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $AQC = AQP + PQC = 135^0$

Suy ra $AQC + ABC = 135^0 + 45^0 = 180^0$

Vậy tứ giác $ABCQ$ nội tiếp, nên Q thuộc đường tròn (O)

Câu 9.

$(*) \Leftrightarrow x^3+y^3+z^3+3xyz-x^2y-x^2z-y^2z-y^2x-z^2x-z^2y \geq 0$

$\Leftrightarrow x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y) \geq 0 (**)$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z \geq 0$

Khi đó $(**) \Leftrightarrow z(z-x)(z-y)+(x-y)\left[x(x-z)-y(y-z)\right] \geq 0$ (hiển nhiên đúng)

Dấu $"="$ xảy ra khi $x=y=z$ hoặc 2 trong 3 số bằng nhau, số còn lại bằng 0.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG TRỊ
ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020
Môn thi chuyên: **TOÁN (vòng 2)**
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1.

a) Cho biểu thức : $A=\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}-\dfrac{2x-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \left(x \geq 0, x \neq 1\right)$

Tìm tất cả các giá trị của x để $A \leq 0$

b) Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $x^2-2(m+1)x-2=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1<x_2$ và $|x_1|-|x_2|=-4$

Câu 2.

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+6y=13 \\ 2x^2=(x+2y-3)(2-x) \end{cases}$

2) Giải phương trình: $x^6+\left(x^3-3\right)^3=3x^5-9x^2-1$

Câu 3.

1) Cho số tự nhiên có 3 chữ số $\overline{abc}$ chứng minh rằng $\overline{abc}$ chia hết cho 21 khi và chỉ khi $a-2b+4c$ chia hết cho 21

2) Tìm các số nguyên tố x, y, z thỏa mãn $x^y=z-1$

Câu 4. Trên đường tròn (O) đường kính AB lấy điểm C (C khác A và B), điểm D nằm trên đường thẳng AB sao cho $BD=AC$. Kẻ DE vuông góc với AC tại E, đường phân giác BAC cắt DE và (O) tại G và F (F khác A). Đường thẳng CG cắt AB và (O) tại I và H (H khác C). Chứng minh:

a) Tứ giác $AGDH$ nội tiếp đường tròn

b) Ba điểm H, D và F thẳng hàng

iểm của AD.

Câu 5.

Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $a+b+c+2=abc$

Chứng minh: $\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\le \frac{3}{2}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1) $A = 2\left(\sqrt{x}-1\right)+x+\sqrt{x}-2\sqrt{x}$

$= x+\sqrt{x}-2 = \left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)$

$\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le 1$

Đối chiếu điều kiện giá trị cần tìm $0 \le x < 1$

2)Vì $ac = -2 < 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt và vì $x_1 < x_2$ nên $x_1 < 0 < x_2$

Do đó $-x_1 - x_2 = -4 \Rightarrow x_1 + x_2 = 4$.Theo định lý Viet $x_1 + x_2 = 2(m+1)$

Nên $2(m+1) = 4 \Leftrightarrow m = 1$

Câu 2.

1) $\begin{cases} x+6y=13 \\ 2x^2 = (x+2y-3)(2-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{13-x}{6} \\ 2x^2 = \left(x+2.\dfrac{13-x}{6}-3\right)(2-x) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{13-x}{6} \\ 2x^2 = \dfrac{2\left(4-x^2\right)}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{13-x}{6} \\ x = \pm 1 \end{cases}$

Vậy nghiệm (x,y)của hệ phương trình là $(1;2);\left(-1;\dfrac{7}{3}\right)$

2) $x^6 + \left(x^3-3\right)^3 = 3x^5 - 9x^2 - 1 \Leftrightarrow \left(x^2\right)^3 + \left(x^3-3\right)^3 + 1 = 3x^2\left(x^3-3\right)$

Đặt $x^2 = a, x^3 - 3 = b$

Ta có phương trình: $a^3 + b^3 + 1 = 3ab \Leftrightarrow (a+b)^3 + 1 - 3ab(a+b) - 3ab = 0$

$\Leftrightarrow (a+b+1)\left[(a+b)^2 - (a+b) + 1\right] - 3ab\left[(a+b)+1\right] = 0$

$\Leftrightarrow (a+b+1)\left(a^2+b^2-ab-a-b+1\right) = 0$

$+) a^2+b^2-ab-a-b+1 = 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 1$

$\Rightarrow x^2 = x^2 - 1 = 1 (VN)$

$+) a+b+1 = 0 \Rightarrow x^2 + x^3 - 3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+2x+2\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$

Câu 3.

1) Ta có: $4\overline{abc} = 21(19a+2b) + (a-2b+4c)$

Vì $21(19a+2b)\equiv 0(\bmod 21)$, nên $4\overline{abc}\vdots 21$khi và chỉ khi $(a-2b+4c)\vdots 21$

Mà $(4,21)=1$nên $\overline{abc}\vdots 21 \Leftrightarrow 4\overline{abc}\vdots 21 \Leftrightarrow (a-2b+4c)\vdots 21$

2) Ta có: $z=x^y+1$ mà x,y là các số nguyên tố nên $x\geq 2, y\geq 2 \Rightarrow z\geq 5$. Do đó z là số nguyên tố lẻ

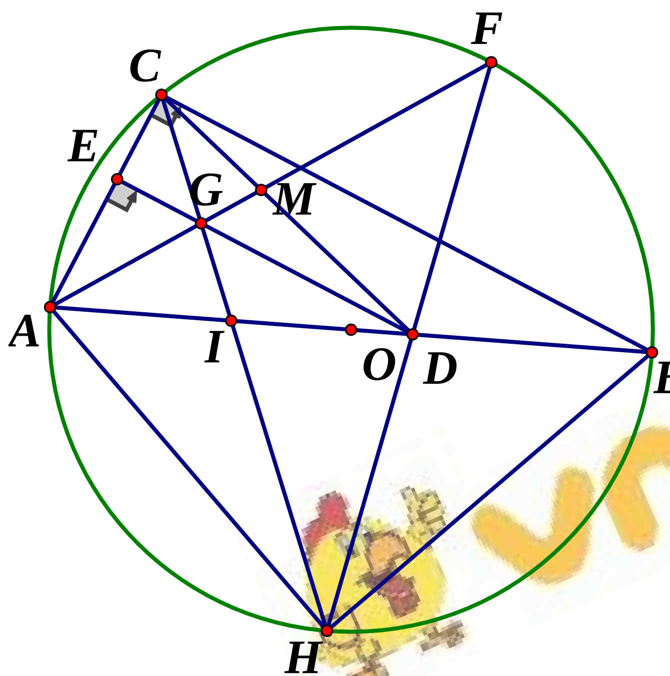
Vì $x^y=z-1$nên x^ylà số chẵn, vậy $x=2$.Khi đó $z=2^y+1$

Nếu y lẻ thì $2^y\equiv 2(\bmod 3)\Rightarrow 2^y+1\vdots 3\Rightarrow z\vdots 3$vô lý vì z là số nguyên tố

Nếu y chẵn, y nguyên tố nen $y=2\Rightarrow z=2^2+1=5$

Vậy các số cần tìm $x=y=2, z=5$

Câu 4.



a) Vì $DE//BC$ nên $ADE=ABC=AHC=AHG$do đó tứ giác $AGDH$nội tiếp

b) Từ tứ giác $AGDH$nội tiếp, ta có:

$DHG=DAG=BAF=FAC=CHF=FHG$

Suy ra hai tia HD,HF trùng nhau, Vậy H,D,F thẳng hàng

c) Gọi M là giao điểm của CD và AF

Ta có: $\frac{IA}{ID}.\frac{MD}{MC}.\frac{EC}{EA}=1$(Định lý Ceva)

$\frac{MD}{MC}=\frac{AD}{AC}$(phân giác); $\frac{EC}{EA}=\frac{DB}{DA}=\frac{AC}{DA}$(Ta let)

Suy ra $\frac{IA}{ID}.\frac{AD}{AC}.\frac{AC}{DA}=1\Leftrightarrow \frac{IA}{ID}=1$

Vậy I là tung điểm AD

Câu 5.

Ta có: $a+b+c+2=abc \Leftrightarrow \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1$

Đặt $x=\frac{1}{a+1}, y=\frac{1}{b+1}, z=\frac{1}{c+1}$

Ta có: $x+y+z=1$ và $a=\frac{1}{x}-1=\frac{y+z}{x}, b=\frac{z+x}{y}, c=\frac{x+y}{z}$

$$\frac{2}{\sqrt{ab}}+\frac{2}{\sqrt{bc}}+\frac{2}{\sqrt{ca}}=2\sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}}+2\sqrt{\frac{yz}{(y+x)(z+x)}}+2\sqrt{\frac{xz}{(x+y)(z+y)}}$$

$$\le \frac{x}{x+z}+\frac{y}{y+z}+\frac{y}{y+x}+\frac{z}{z+x}+\frac{x}{x+y}+\frac{z}{z+y}=3$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG BÌNH	ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2019-2020
ĐỀ CHÍNH THỨC	Môn thi chuyên: **TOÁN (chuyên)**

Câu 1.

Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng d đi qua điểm $M(0;1)$ có hệ số góc k

a) Chứng minh rằng đường thẳng d luôn cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt với mọi giá trị k

b) Chứng minh ΔOAB là tam giác vuông với mọi giá trị k (O là gốc tọa độ)

Câu 2.

a) Giải phương trình $x^2-x-4=2\sqrt{x-1}.(1-x)$

b) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2-5y+3+6\sqrt{y^2-7x+4}=0 \\ y(y-x+2)=3x+3 \end{cases}$

Câu 3. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x+y+z=\sqrt{2}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{2019x^2+2xy+2019y^2}+\sqrt{2019y^2+2yz+2019z^2}+\sqrt{2019z^2+2zx+2019x^2}\ge 2\sqrt{2020}$$

Câu 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2AD=4a\,(a>0)$. Đường thẳng vuông góc với AC tại C cắt các đường thẳng AB, AD lần lượt tại E và F

a) Chứng minh tứ giác $EBDF$ nội tiếp

b) Gọi I là giao điểm của các đường thẳng BD, EF. Tính độ dài đoạn thẳng ID theo a

c) M là điểm thay đổi trên cạnh $AB(M \neq A, M \neq B)$, đường thẳng CM cắt đường thẳng AD tại N. Gọi S_1 là diện tích của tam giác CME và S_2 là diện tích của tam giác AMN. Xác định vị trí của M sao cho $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{2}$

Câu 5. Cho $\overline{abc}$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ không có nghiệm hữu tỉ

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(0;1)$ có hệ số góc $k: y = kx+1$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và $(P): x^2 - kx - 1 = 0(1)$

Phương trình (1) có $\Delta = k^2 + 4 > 0, \forall k$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt hay đường thẳng d luôn cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt với mọi giá trị k

b) Gọi $A(x_1; x_1^2)$ và $B(x_2; x_2^2)$. Khi đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1), suy ra $x_1x_2 = -1$

Phương trình đường thẳng $OA: y = x_1x$

Phương trình đường thẳng $OB: y = x_2x$

Do $x_1.x_2 = -1$ nên $OA \perp OB$. Vậy ΔOAB là tam giác vuông

Câu 2.

a) Điều kiện: $x \ge 1$

$x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}.(1-x) \Leftrightarrow x(x-1) + 2\sqrt{x-1}.(x-1) - 4 = 0(1)$

Đặt $y = \sqrt{x-1}, y \ge 0$

Phương trình (1) trở thành:

$(y^2+1)y^2 + 2y.y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow y^4 + 2y^3 + y^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (y-1)(y^3 + 3y^2 + 4y + 4) = 0 \Leftrightarrow y = 1 (do\, y \ge 0)$

$\Rightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy $x = 2$

b) $\begin{cases} x^2 - 5y + 3 + 6\sqrt{y^2 - 7x + 4} = 0(1) \\ y(y - x + 2) = 3x + 3(2) \end{cases}$

Điều kiện : $y^2 - 7x + 4 \ge 0$

$(2) \Leftrightarrow (y+3)(y-x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -3 \\ y = x+1 \end{array}\right.$

Với $y = -3, (1) \Leftrightarrow x^2 + 18 + 6\sqrt{13 - 7x} = 0$ (vô nghiệm)

Với $y = x+1, (1) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 5 + 6\sqrt{x^2 - 5x + 5} - 7 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+5=-7 \\ x^2-5x+5=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+12=0 (VN) \\ x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=2 (tmdk) \\ x=4 \Rightarrow y=5 (tmdk) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $(1;2)$ và $(4;5)$

Câu 3.

Đặt

$$S=\sqrt{2019x^2+2xy+2019y^2}+\sqrt{2019y^2+2yz+2019z^2}+\sqrt{2019z^2+2zx+2019x^2}$$

Ta có:

$$2019x^2+2xy+2019y^2=1009(x-y)^2+1010(x+y)^2 \geq 1010(x+y)^2$$

Suy ra $\sqrt{2019x^2+2xy+2019y^2} \geq \sqrt{1010}(x+y)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y$

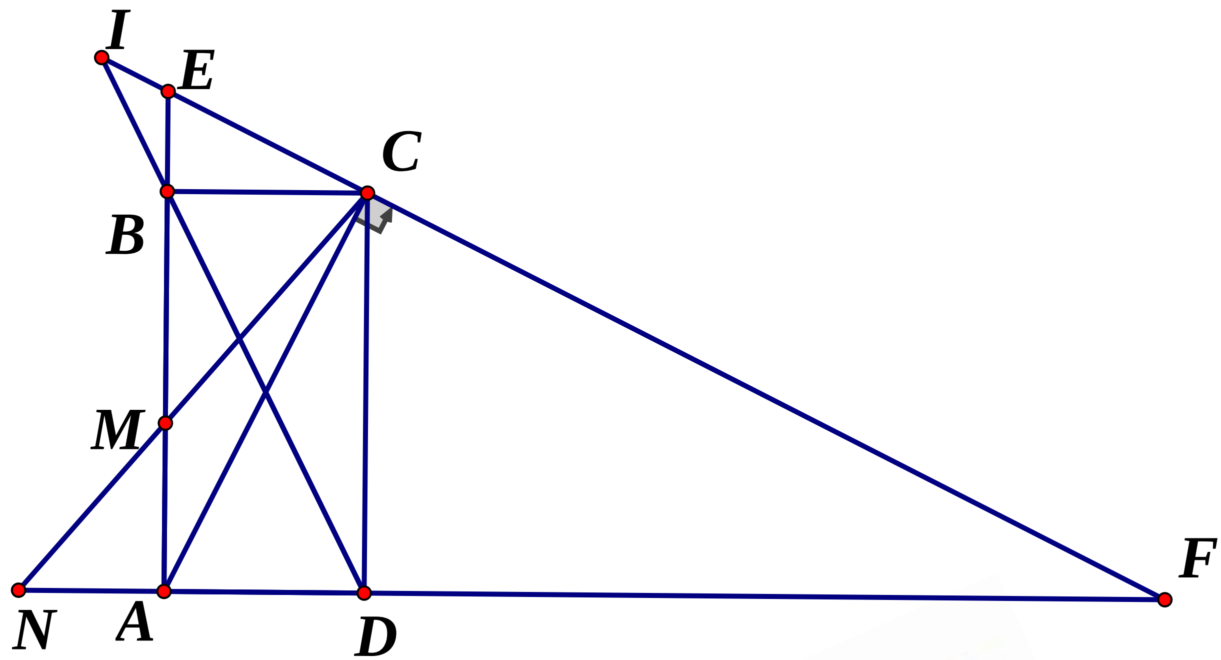
Tương tự

$$\sqrt{2019y^2+2yz+2019z^2} \geq \sqrt{1010}(y+z)$$
$$\sqrt{2019z^2+2zx+2019x^2} \geq \sqrt{1010}(z+x)$$

Do đó $S \geq 2\sqrt{1010}(x+y+z)=2\sqrt{2020}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{\sqrt{2}}{3}$

Câu 4.



a) Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên $BDA = CAD$

Mặt khác $CAD = AEF$ (cùng phụ với AFE) suy ra $BDA = AEF$

Tứ giác $EBDF$ có $BEF + BDF = BDA + BDF = 180^0$. Vậy tứ giác $EBDF$ nội tiếp

b) Tam giác ACE vuông tại C và $CB \perp EA$ nên ta có: $CB^2 = BE.BA$

Suy ra $BE = \dfrac{CB^2}{BA} = \dfrac{(2a)^2}{4a} = a$

Ta có: $BD^2 = AB^2 + AD^2 = (4a)^2 + 2a^2 = 20a^2 \Rightarrow BD = 2a\sqrt{5}$

Do BE song song với CD nên $\dfrac{IB}{ID} = \dfrac{BE}{DC} = \dfrac{a}{4a} = \dfrac{1}{4}$

Suy ra $ID = \dfrac{4}{3}BD \Rightarrow ID = \dfrac{8\sqrt{5}a}{3}$

c) Đặt $AM = x, 0 < x < 4a$. Suy ra : $MB = 4a - x, ME = 5a - x$

Do $BC // AN \Leftrightarrow \dfrac{AN}{BC} = \dfrac{MA}{MB} \Rightarrow AN = \dfrac{MA.BC}{MB} = \dfrac{2ax}{4a - x}$. Suy ra:

$$S_1 = \frac{1}{2}CB.ME = \frac{1}{2}.2a.(5a - x) = a(5a - x)$$

$$S_2 = \frac{1}{2}AM.AN = \frac{1}{2}x.\frac{2ax}{4a - x} = \frac{ax^2}{4a - x}$$

Do đó $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{(5a-x)(4a-x)}{x^2}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x^2+18ax-40a^2=0$

$\Leftrightarrow(x-2a)(x+20a)=0\Leftrightarrow x=2a$

Vậy khi M là trung điểm của AB thì $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{2}$

Câu 5.

Giả sử phương trình $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm hữu tỉ, khi đó:
$\Delta=b^2-4ac=m^2\,(m\in\mathbb{N})$

Suy ra $b^2>m^2$ hay $b>m(1)$

Ta có: $4a.\overline{abc}=4a.(100a+10b+c)=400a^2+40a+4ac$

$=(400a^2+40ab+b^2)-(b^2-4ac)=(20a+b)^2-m^2$
$=(20a+b+m)(20a+b-m)$

Do $\overline{abc}$ là số nguyên tố nên $(20a+b+m)\vdots\overline{abc}$ hoặc $(20a+b-m)\vdots\overline{abc}$, suy ra
$20a+b+m\geq\overline{abc}$ (2)

Từ (1) ta có: $20a+2b=20a+b+b>20a+b+m$

Từ (2) ta có: $20a+b+m\geq 100a+10b+c>100a+10b$

Do đó

$20a+2b>100a+10b\Leftrightarrow 2(10a+b)>10(10a+b)\Leftrightarrow 2>10$ (vô lý)

Vậy Δ không thể là số chính phương nên phương trình $ax^2+bx+c=0$ không có nghiệm hữu tỉ.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KON TUM	ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
	NĂM HỌC 2019-2020
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	
	Môn thi chuyên: **TOÁN**

Câu 1.

1) Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính giá trị biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}.\left(3+\sqrt{5}\right)}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$$

2) Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức : $Q=\dfrac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$ tại

$x=2020-2\sqrt{2019}$

Câu 2.

1) Cho parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2x+m^2+1, m$ là tham số. Tìm m để đường thẳng d cắt $parabol(P)$ tại hai điểm $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B)$ sao cho $\dfrac{y_A}{x_B}+\dfrac{y_B}{x_A}=\dfrac{-38}{5}$

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-y^2-6=0 \\ x+(y-1)^2-\left(\dfrac{2}{x-y}\right)^2-3=0 \end{cases}$

Câu 3. Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính AB cố định và đường kính CD thay đổi sao cho CD không vuông góc cũng không trùng với AB. Gọi d là tiếp tuyến tại A của $(O;R)$. Các đường thẳng BC, BD cắt d tương ứng tại E, F

1) Chứng minh rằng $CDFE$ là tứ giác nội tiếp
2) Gọi M là trung điểm của EF và K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDEF$. Chứng minh rằng tứ giác $KMBO$ là hình bình hành
3) Gọi H là trực tâm tam giác DEF, chứng minh H luôn chạy trên một đường tròn cố định.

Câu 4.

1. Cho số thực x thỏa mãn $-1\le x\le 1$. Chứng minh rằng: $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\ge 2-x^2$
2. Cho tập hợp A gồm 41 phần tử là các số nguyên khác nhau thỏa mãn tổng của 21 phần tử bất kỳ lớn hơn tổng của 20 phần tử còn lại. Biết các số 401 và 402 thuộc tập A. Tìm tất cả các phần tử của tập hợp A.

Câu 5. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2a, BC=a\sqrt{2}$. Lấy đoạn AB làm đườn kính, dựng về phía ngoài hình chữ nhật nửa đường tròn. Điểm M thuộc nửa đường tròn đó. Các đường thẳng MD, MC cắt AB lần lượt tại N, L. Chứng minh:

$$\frac{AL^2+BN^2}{AB^2}=1.$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$1)P=\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}.\left(3+\sqrt{5}\right)\sqrt{2}.\left(\sqrt{5}-1\right)}{8}$$

$$=\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}.\left(3\sqrt{5}-\left(5-3-\sqrt{5}\right)\right)}{8}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}.\left(2\sqrt{5}+2\right)}{8}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{5}-1\right).2.\left(\sqrt{5}-1\right)}{8}=1$$

2) Ta có: $x=2020-2\sqrt{2019}=2019-2.\sqrt{2019}.1+1^2=\left(\sqrt{2019}-1\right)^2$

$\Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{2019}-1$

$$Q=\frac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}=\frac{\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x}-2}=2\sqrt{x}+1$$

$$Q=2\left(\sqrt{2019}-1\right)+1=2\sqrt{2019}-1$$

Câu 2.

1) Phương trình hoành độ giao điểm của d và P là:

$$x^2=2x+m^2+1\Leftrightarrow x^2-2x-m^2-1=0$$

Phương trình bậc hai có $ac=-m^2-1<0$ với mọi m nên luôn có hai nghiệm phân biệt khác 0 với mọi m. Do đó (d) luôn cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_A,y_A),B(x_B,y_B)$ với mọi m

x_A,x_B là các nghiệm khác 0 của phương trình $x^2-2x-m^2-1=0$

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases}x_A+x_B=2\\ x_B.x_B=-m^2-1\end{cases}$

Do $\frac{y_A}{x_B}+\frac{y_B}{x_A}=\frac{-38}{5}\Leftrightarrow 5y_Ax_A+y_Bx_B=-38x_Ax_B$

$\Leftrightarrow 5x_A^3+x_B^3=-38x_Ax_B\Leftrightarrow 5\left[x_A+x_B^3-3x_Ax_Bx_A+x_B\right]=-38x_Ax_B$

$\Leftrightarrow 5\left[8-6-m^2-1\right]=-38.\left(-m^2-1\right)$

$=\pm 2$

Vậy $m=-2, m=2$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-y^2-6=0 \\ x+y-1^2-\left(\dfrac{2}{x-y}\right)^2-3=0 \end{cases}(I)$

Ta có: $(1)\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x+y)=6 \\ x+y-1^2-\dfrac{4}{x-y^2}-3=0 \end{cases}$

Đặt $\Leftrightarrow \begin{cases} a=x+y \\ b=x-y \end{cases}, b\neq 0$

Khi đó $(I)\Leftrightarrow \begin{cases} ab=6 \\ (a-1)^2-\dfrac{4}{b^2}-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{b}=\dfrac{a}{6} & (1) \\ (a-1)^2-\dfrac{4a^2}{36}=3 & (2) \end{cases}$

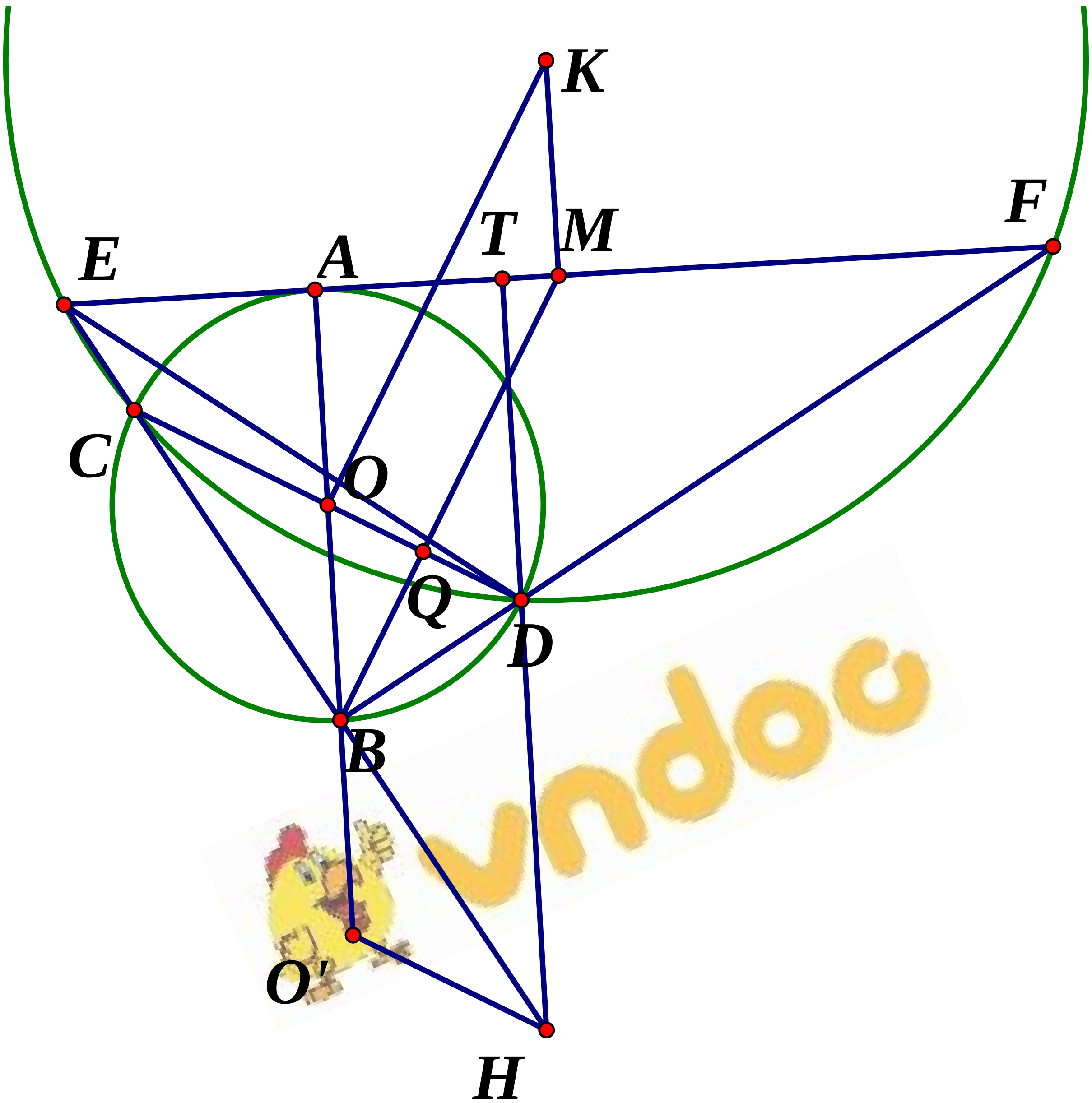
Từ (2) ta có phương trình: $9(a-1)^2-a^2=27 \Leftrightarrow 8a^2-18a-18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=-\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$

Với $a=3, b=2 \Rightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Với $a=-\dfrac{3}{4}, b=-8 \Rightarrow \begin{cases} x+y=-\dfrac{3}{4} \\ x-y=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{35}{8} \\ y=\dfrac{29}{8} \end{cases}$

Vậy $(x;y)\in\left\{\left(\dfrac{-35}{8};\dfrac{29}{8}\right);\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2}\right)\right\}$

Câu 3.



1) Vì CD là đường kính nên $CBD = 90^0$

Do đó $BEF = ABF$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc cùng nhọn)

Mà $ABF = ODB\left(OB = OD = R\right)$

Nên $BEF = ODB.$ Do đó tứ giác $CDFE$ nội tiếp đường tròn

2) Gọi Q là giao điểm của BM, CD

Tam giác BEF vuông tại B nên $BM = ME \Rightarrow MBE = MEB$ (1)

ΔBCD vuông tại B có $BCD + BDC = 90^0$ mà $BDC = BEF$ (cmt)

$\Rightarrow BCD + BEF = 90^0 \left(2\right)$

Từ (1) và (2): $BCD + MBE = 90^0 \Rightarrow BQC = 90^0 \Rightarrow BM \perp CD$

K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDFE$, O là trung điểm CD nên

$KO \perp CD \Rightarrow KO // MB$ (cùng vuông góc với CD) (3)

Ta có M là trung điểm EF, nên $KM \perp EF, BA \perp EF$

$\Rightarrow KM // AB$ hay $KM // BO$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $KMBO$ là hình bình hành

3) H là trực tâm ΔDEF, do đó $HD \perp EF \Rightarrow HD // AB$

Tương tự $BH // AD$ (cùng vuông góc với BF)

Do đó $BHDA$ là hình bình hành nên $BH = AD$

Mặt khác $BDAC$ là hình chữ nhật nên $AD = BC \Rightarrow BH = BC(5)$

Lấy O' đối xứng với O qua B ta có : $BO' = BO(6)$ với O' cố định vì O, B cố định.

Từ (5) và (6) suy ra $HO'CO$ là hình bình hành nên $O'H = OC = R$

Vậy H chạy trên đường tròn cố định $(O'; R)$

Câu 4.

1) Với $-1 \le x \le 1$ ta có: $-x^2 \le 0 \Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{1-x^2} \ge 2 - x^2 + 2\sqrt{1-x^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2} \ge 1 + \sqrt{1-x^2}^2 \Leftrightarrow \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \ge 1 + \sqrt{1-x^2}$

Lại có: $0 \le 1 - x^2 \le 1, \forall x \in [-1;1] \Rightarrow \sqrt{1-x^2} \ge 1 - x^2 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{1-x^2} \ge 2 - x^2$

Vậy $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \ge \sqrt{1-x^2} \ge 2 - x^2, \forall x \in [-1;1]$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} -x^2 = 0 \\ \sqrt{1-x^2} = 1 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

2) Giả sử $A = a_1, a_2, a_3, ..., a_{41}$ với $a_1, a_2, a_3, ..., a_{41} \in \mathbb{Z}$, và $a_1 < a_2 < a_3 < ..... < a_{41}$

Theo giả thiết ta có $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{21} > a_{22} + a_{23} + ... + a_{41}$

$\Leftrightarrow a_1 > a_{22} - a_2 + a_{23} - a_3 + ... + a_{41} - a_{21}$ (1)

Mặt khác với $x, y \in \mathbb{Z}$ và nếu $y > x$ thì $y \ge x + 1$

$\Rightarrow a_{22} - a_2 \ge 20, a_{23} - a_3 \ge 20, ..., a_{41} - a_{21} \ge 20$ (2)

Nên từ (1) suy ra $a_1 > 20 + 20 + 20 + ... + 20 = 400$

Mà a_1 nhỏ nhất và $401 \in A \Rightarrow a_1 = 401$

Ta có: $401 > a_{22} - a_2 + a_{23} - a_3 + ... + a_{41} - a_{21} \ge 400$

$\Rightarrow a_{22} - a_2 + a_{23} - a_3 + ... + a_{41} - a_{21} = 400$

Kết hợp với (2)

$\Rightarrow a_{22} - a_2 = a_{23} - a_3 = ... = a_{41} - a_{21} (3)$

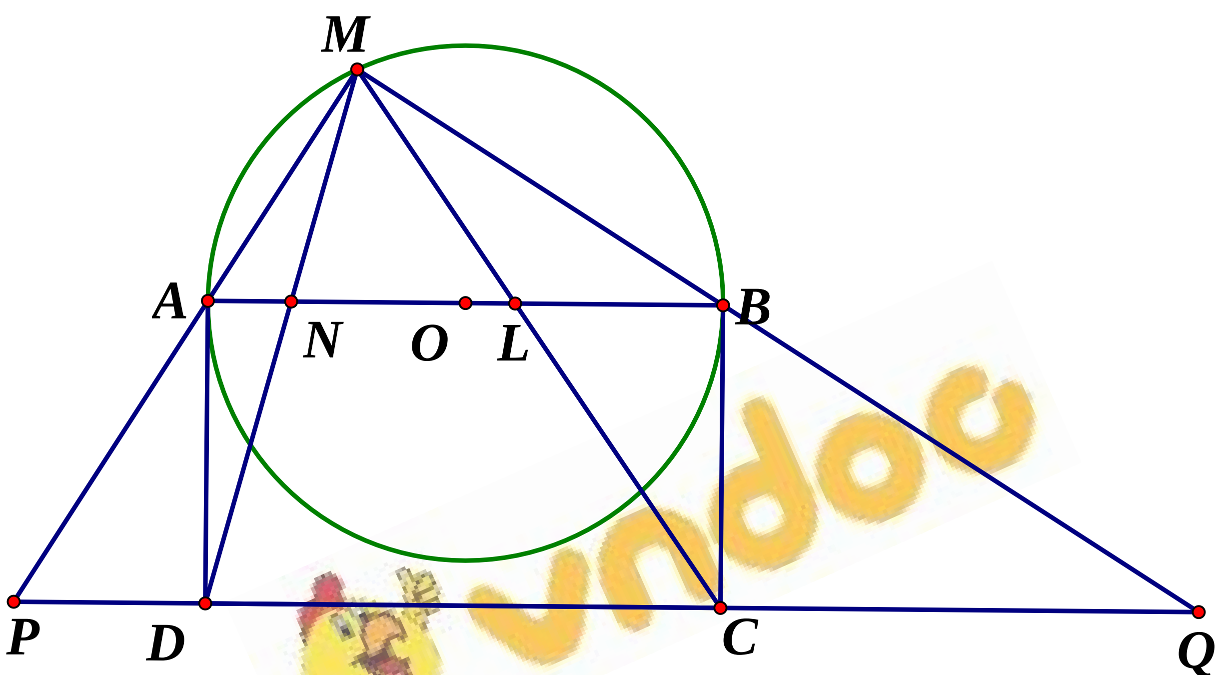
$\Rightarrow 20 = a_{22} - a_2 = a_{22} - a_{21} + a_{21} - a_{20} + ... + a_3 - a_2 \geq 20$

$\Rightarrow a_{22} - a_{21} = a_{21} - a_{20} = ... = a_3 - a_2 = 1 (4)$

Ta có : $a_1 = 401$ mà $402 \in A \Rightarrow a_2 = 402$

Kết hợp (3) và (4) suy ra $A = 401; 402; 403; .....; 441$

Câu 5.



Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của CD với MA, MB

Đặt $PD = x, CQ = y$

Ta có: $APD = QBC$ (góc có cặp cạnh tương ứng vuông góc)

$$\Rightarrow \Delta APD \sim \Delta QBC \Rightarrow \frac{PD}{DA} = \frac{CB}{CQ} \Leftrightarrow \frac{x}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{y} \Leftrightarrow xy = 2a^2$$

$$PC^2 + QD^2 = (x + 2a)^2 + (y + 2a)^2 = x^2 + y^2 + 4a(x + y) + 8a^2$$

$$= (x + y)^2 + 4a(x + y) + 8a^2 - 2xy$$

$$(x + y)^2 + 4a(x + y) + 4a^2 = (x + y + 2a)^2 = PQ^2 (1)$$

Áp dụng định lý Talet, ta có: $\frac{MN}{MD}=\frac{ML}{MC}=\frac{MA}{MP}=\frac{MB}{MQ}=\frac{AL}{PC}=\frac{BN}{QD}=\frac{AB}{PQ}$

$$\Rightarrow \frac{AL^2}{PC^2}=\frac{BN^2}{QD^2}=\frac{AB^2}{PQ^2}=\frac{AL^2+BN^2}{PQ^2+QD^2}=\frac{AL^2+BN^2}{PQ^2}\left(do(1)\right)$$

$$\Rightarrow AB^2=AL^2+BN^2 \Rightarrow \frac{AL^2+BN^2}{AB^2}=1$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BÌNH THUẬN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020
Môn thi chuyên: **TOÁN (chuyên)**

Bài 1.

Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\left(x^2+xy+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}=185 & (1)\\ \left(x^2-xy+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}=65 & (2)\end{cases}$

Bài 2.

a) Chứng minh rằng số $M=\left(n+1\right)^4+n^4+1$ chia hết cho một số chính phương khác 1 với mọi số n nguyên dương
b) Tìm tất cả các số tự nhiên n để phương trình $x^2-n^2x+n+1=0$ (ẩn số x) có các nghiệm là số nguyên.

Bài 3. Cho các số dương $x;y;z$ thỏa $xyz=\frac{1}{2}$

Chứng minh : $\frac{yz}{x^2\left(y+z\right)}+\frac{xz}{y^2\left(x+z\right)}+\frac{xy}{z^2\left(x+y\right)}\ge xy+yz+xz$

Bài 4. Cho tam giác ABC cân tại A $\left(A<90^0\right)$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là một điểm trên cung AB không chứa C (D khác A, B). Hai dây cung AD, BC kéo dài cắt nhau tại E. Đường thẳng qua E song song với CD cắt AB tại F. Vẽ tiếp tuyến FG với đường tròn (O) (G là tiếp điểm)

a) Chứng minh: $FG=FE$
b) Từ trung điểm I của BC vẽ $IJ\perp AC\left(J\in AC\right)$. Gọi H là trung điểm của IJ. Chứng minh $AH\perp BJ$

Bài 5. Trong một buổi tổ chức lễ tuyên dương các học sinh có thành tích học tập xuất sắc của một huyện, ngoại trừ bạn An, hai người bất kỳ đều bắt tay nhau; An chỉ bắt tay với những người mình quen. Biết rằng một cặp (hai người) chỉ bắt tay không quá 1 lần và có tổng cộng 420 bắt tay. Hỏi bạn An có bao nhiêu người quen trong buổi lễ tuyên dương đó.

ĐÁP ÁN

Bài 1. Cộng các phương trình vế theo vế ta có:

$$2\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}=250$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3=125\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=5$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=25$$

Thay vào (1) ta có:

$$\left(25+xy\right)\sqrt{x^2+y^2}=185$$

$$\Leftrightarrow\left(25+xy\right).5=185\Leftrightarrow xy=12$$

Như vậy hệ đã cho

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=25\\xy=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{12}{x}\\x^2+\dfrac{144}{x^2}=25\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{12}{x}\\x^4-25x^2+144=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{12}{x}\\\left(x^2-16\right)\left(x^2-9\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3,y=4\\x=-3,y=-4\\x=4,y=3\\x=-4,y=-3\end{array}\right.$$

Kết luận

Bài 2. a) ta có:

$$\begin{aligned}M &= (n+1)^4 + n^4 + 1\\ &= \left[(n^2+2n+1)^2 - n^2\right] + \left[(n^4+2n^2+1) - n^2\right]\\ &= (n^2+n+1)(n^2+3n+1) + (n^2+n+1)(n^2-n+1)\\ &= (n^2+n+1)(2n^2+2n+2)\\ &= 2(n^2+n+1)^2 \qquad (*)\end{aligned}$$

Vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên $(n^2+n+1)^2$ là số chính phương khác 1.

Do đó, từ (*) suy ra $M = (n+1)^4 + n^4 + 1$ chia hết cho một số chính phương khác 1 với mọi số tự nhiên n khác 0 (đpcm)

b) Xét phương trình: $x^2 - n^2x + n + 1 = 0$ (ẩn số x) (1)

Để phương trình (1) có nghiệm thì $\Delta \ge 0 \Rightarrow n^4 - 4n - 4 \ge 0 \Rightarrow n \notin \{0;1\} (n \in \mathbb{N})$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1)

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = n^2 \\ x_1x_2 = n+1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow x_1 + x_2 - x_1x_2 = n^2 - n - 1\\ &\Leftrightarrow x_1(1-x_2) - (1-x_2) = n^2 - n - 2\\ &\Leftrightarrow (x_1-1)(1-x_2) = (n-2)(n+1)\\ &\Leftrightarrow (x_1-1)(x_2-1) = (2-n)(n+1)\end{aligned}$$

Với $n \in \mathbb{N}, n \notin \{0;1\}$ thì $\begin{cases} x_1 + x_2 = n^2 \ge 4 \\ x_1x_2 = n+1 \ge 3 \end{cases}$

Do đó ,

$\Rightarrow 2 - n \ge 0 (n+1 > 0, \forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow n \le 2$

Mà $n \in \mathbb{N}, n \notin \{0;1\} \Rightarrow n = 2$. Khi đó phương trình (1) trở thành:

$$x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1(tm) \\ x=3(tm) \end{array}\right.$$

Vậy để phương trình có nghiệm nguyên thì $n=2$

Bài 3.

Ta có $VT=\dfrac{yz}{x^2\left(y+z\right)}=\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{y+z}{yz}}=\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}};\dfrac{xz}{y^2\left(x+z\right)}=\dfrac{\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}};\dfrac{xy}{z^2\left(x+y\right)}=\dfrac{\frac{1}{z^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

Đặt $\dfrac{1}{x}=a;\dfrac{1}{y}=b;\dfrac{1}{z}=c\left(a,b,c>0\right)\Rightarrow abc=2$

Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\ge 2\sqrt{\frac{a^2}{4}}=a;\frac{b^2}{a+c}+\frac{a+c}{4}\ge b;\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\ge c$$

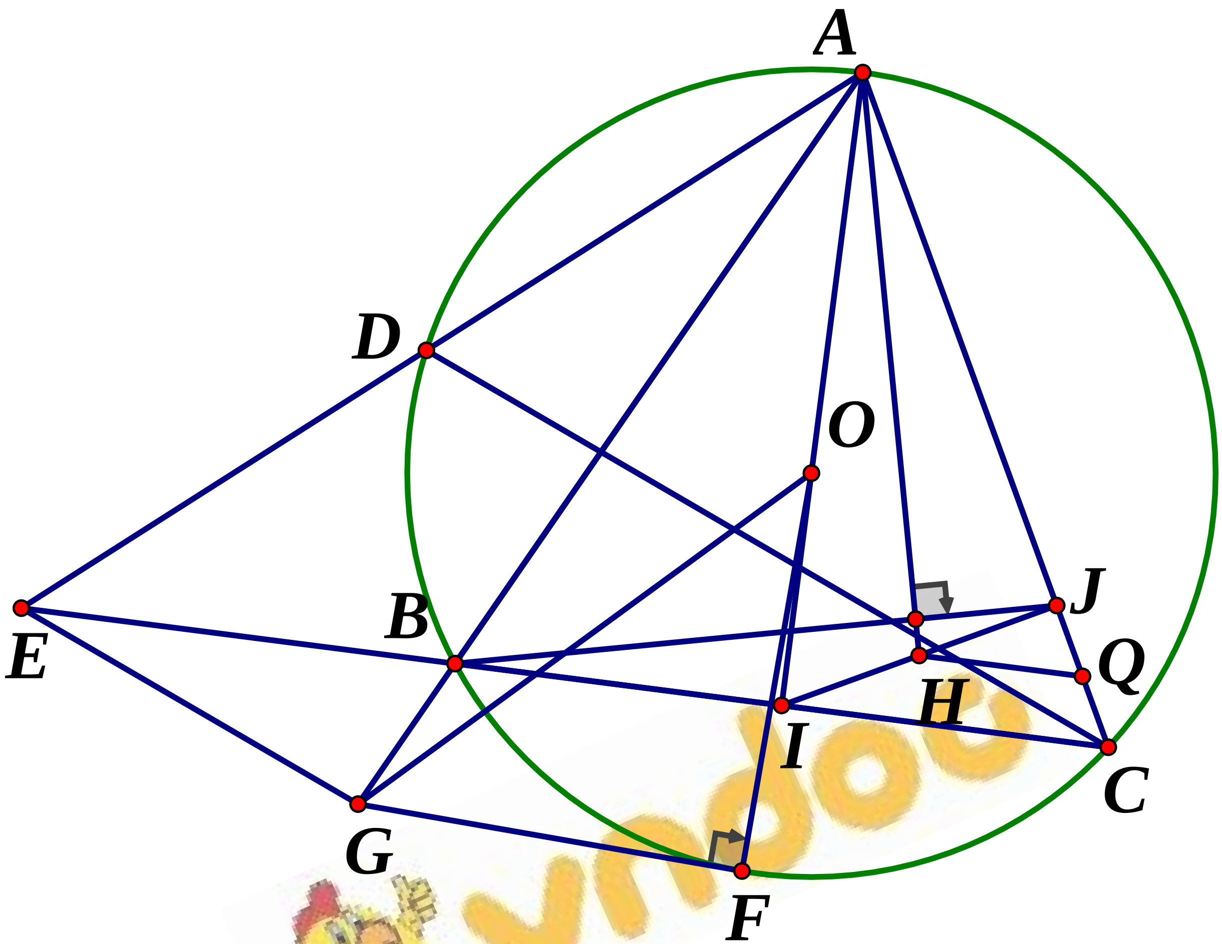
Cộng các vế lại với nhau ta có:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b+c}{2}\ge a+b+c$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\ge \frac{a+b+c}{2}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=xy+yz+xz$$

$$\Rightarrow \frac{yz}{x^2\left(y+z\right)}+\frac{xz}{y^2\left(x+z\right)}+\frac{xy}{z^2\left(x+y\right)}\ge xy+yz+zx(dfcm)$$

Bài 4.



a) Chứng minh : $FG = FE$

Ta có: $FG // CD \Rightarrow FEB = DCB$ (so le trong) và $DCB = DAB$ (chắn cung AD)

Nên $FEB = FAE \Rightarrow \Delta FBE \sim \Delta FEA(g.g) \Rightarrow \dfrac{FE}{FA} = \dfrac{FB}{FE} \Rightarrow FE^2 = FA.FB$

Do FG là tiếp tuyến tại G của đường tròn (O) $\Rightarrow FGB = FAG$ (cùng chắn cung GB)

Thế nên dễ dàng có: $\Delta FGB \sim \Delta FAG(g.g) \Rightarrow \dfrac{FG}{FB} = \dfrac{FA}{FG} \Rightarrow FG^2 = FA.FB$

Do đó $FG^2 = FE^2 \Rightarrow FG = FE$

b) Chứng minh $AH \perp BJ$

Ta gọi Q là trung điểm của CJ thì IQ là đường trung bình tam giác BJC

$\Rightarrow IQ//BJ$, ta sẽ chứng minh : $AH \perp IQ$

Do $HQ//IC$ (HQ là đường trung bình tam giác JIC) và $AI \perp BC \Rightarrow AI \perp IC$ (do tam giác ABC cân tại A có AI là đường trung tuyến) $\Rightarrow HQ//IA$

Kết hợp với $IH \perp AQ$ khi đó H là trực tâm tam giác $AIQ \Rightarrow AH \perp IQ \Rightarrow AH \perp BJ$

Bài 5.

Giả sử ngoài bạn An còn có n bạn và An quen m bạn, điều kiện $m \le n; m,n \in \mathbb{N}^*$

Số cái bắt tay là : $\frac{n(n-1)}{2}+m$

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{n(n-1)}{2}+m=420 \Leftrightarrow n(n-1)+2m=840 \qquad (1)$$

Mặt khác $2m \le 2n,$ kết hợp với (1) ta suy ra

$n(n-1)+2n \ge 840 \Leftrightarrow n^2+n \ge 840 \Rightarrow n \ge 29$

Và $2m > 2,$ kết hợp với (1) ta suy ra $n^2-n-838 \le 0 \Rightarrow n \le 29 \Rightarrow n=29$

Thay $n=29$ vào (1) ta có: $2m+29.28=840 \Leftrightarrow m=14$

Vậy An quen 14 người

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BÌNH DƯƠNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN**

Câu 1.

a) Giải phương trình: $\left(x^2+x+1\right)\left(\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{3x-2}+1\right)=9$

b) Cho parabol $(P): y=2ax^2\ (a>0)$ và đường thẳng $d: y=4x-2a^2$. Tìm a để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt N, M có hoành độ x_N, x_M sao cho $K=\frac{8}{x_M+x_N}+\frac{1}{2x_Mx_N}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 2.

Giả sử ba số thực a,b,c thỏa mãn điều kiện $a>0,b=3a^2,a+b+c=abc.$

Chứng minh rằng : $a\ge \sqrt{\frac{1+2\sqrt{3}}{3}}$

Câu 3. a) Tính giá trị của biểu thức $P=\left(4x^5+4x^4-5x^3+5x-2\right)^{2018}+2019$ tại $x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}.$

b)Tìm tất cả các số nguyên x sao cho $\frac{x-3}{x^2+1}$ là một số nguyên.

Câu 4. Cho điểm M thuộc nửa đường tròn (O) đường kính $AB\left(M\ne A,M\ne B,MA<MB\right)$. Tia phân giác của AMB cắt AB tại C. Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt các đường thẳng AM,BM theo thứ tự tại D,H.

a) Chứng minh rằng: $CA=CH$
b) Gọi E là hình chiếu vuông góc của H tên tiếp tuyến tại A của $\left(O\right),F$ là hình chiếu vuông góc của D trên tiếp tuyến tại B. Chứng minh rằng E,M,F thẳng hàng.
c) Gọi S_1,S_2 theo thứ tự là diện tích của các tứ giác $ACHE$ và $BCDF$. Chứng minh rằng: $CM^2<\sqrt{S_1.S_2}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) Ta có:

$$\left(x^2+x+1\right)\left(\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{3x-2}+1\right)=9$$

$$\Rightarrow\left(x^2+x+2\right)\left[\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^2+\sqrt[3]{3x-2}+1\right]=9$$

$$\Rightarrow\left(x^2+x+2\right)\left(\sqrt[3]{3x-2}-1\right)\left[\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^2+\sqrt[3]{3x-2}+1\right]=9\left(\sqrt[3]{3x-2}-1\right)$$

$$\Rightarrow\left(x^2+x+2\right)\left[\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^3-1\right]=9\left(\sqrt[3]{3x-2}-1\right)$$

$$\Rightarrow\left(x^2+x+2\right)(3x-3)=9\left(\sqrt[3]{3x-2}-1\right)$$

$$\Rightarrow\left(x^2+x+2\right)(x-1)-3\left(\sqrt[3]{3x-2}-1\right)=0$$

$$\Rightarrow x^3-1-3\sqrt[3]{3x-2}+3=0$$

$$\Rightarrow x^3-3\sqrt[3]{3x-2}+2=0 \qquad (*)$$

Đặt $\sqrt[3]{3x-2}=t\Rightarrow t^3=3x-2$

$$(*)\Rightarrow\begin{cases}x^3-3t+2=0\\t^3=3x-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^3-3t+2=0 & (1)\\t^3-3x+2=0 & (2)\end{cases}$$

Lấy $(1)-(2)$ ta được:

$$x^3-t^3-3t+3x=0$$

$$\Rightarrow(x-t)\left(x^2+xt+t^2\right)+3(x-t)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-t)\left(x^2+xt+t^2+3\right)=0$$

$$\Rightarrow(x-t)\left[x^2+tx+\left(t^2+3\right)\right]=0$$

$$x=t\Rightarrow x=\sqrt[3]{3x-2}$$

$$\Rightarrow x^3=3x-2$$

$$\Rightarrow x^3-3x+2=0$$

$$\Rightarrow x^3-x-2x+2=0$$

$$\Rightarrow x\left(x^2-1\right)-2(x-1)=0$$

$$\Rightarrow x(x-1)(x+1)-2(x-1)=0$$

$$\Rightarrow(x-1)\left(x^2+x-2\right)=0$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1(kep')\\x=-2\end{array}\right.$$

$x^2+tx+\left(t^2+3\right)=0$ có $\Delta=t^2-4.1.\left(t^2+3\right)=-3t^2-12<0$

Vậy $x^2+tx+\left(t^2+3\right)=0$ vô nghiệm

Vậy $S=\{-2;1\}$

b) Phương tình hoành độ của (P) và (d) là:

$$2ax^2=4x-2a^2 \Leftrightarrow 2ax^2-4x+2a^2=0 \qquad (*)$$

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt M,N thì (*) phải có hai nghiệm phân biệt, nghĩa là $\Delta>0$

$$\Rightarrow (-4)^2-4.2a.2a^2>0 \Rightarrow 16-16a^3>0 \Rightarrow 1-a^3>0 \Rightarrow (1-a)\left(1+a+a^2\right)>0$$

$$\Rightarrow (1-a)\left[\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}\right]>0 \Rightarrow 0<a<1$$

Ngoài ra, ta có:

$$x_M=\frac{4+\sqrt{16-16a^3}}{2.2a}=\frac{1+\sqrt{1-a^3}}{a},\ x_N=\frac{4-\sqrt{16-16a^3}}{2.2a}=\frac{1-\sqrt{1-a^3}}{a}$$

$$x_M+x_N=\frac{1+\sqrt{1-a^3}}{a}+\frac{1-\sqrt{1-a^3}}{a}=\frac{2}{a}$$

$$2x_M.x_N=2.\frac{1+\sqrt{1-a^3}}{a}.\frac{1-\sqrt{1-a^3}}{a}=2a$$

Mà $K=\dfrac{8}{x_M+x_N}+\dfrac{1}{2x_Mx_N}=\dfrac{8}{\frac{2}{a}}+\dfrac{1}{2a}=4a+\dfrac{1}{2a}\overset{BDT\,Co\,si}{\geq}2\sqrt{4a.\dfrac{1}{2a}}=2\sqrt{2}$

Do đó K đạt giá trị nhỏ nhất, nghĩa là

$$4a+\frac{1}{2a}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow 8a^2-4\sqrt{2}a+1=0 \Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Vậy $a=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ thì thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 2. Ta thấy $3a^2 = bc \Rightarrow 3a^3 = abc \Rightarrow a^3 = \dfrac{abc}{3}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si :

$$3a^2 = bc \le \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \left(\frac{3a^3 - a}{2}\right)^2 \Rightarrow 3a^2 \le \frac{\left(3a^3 - a\right)^2}{4} \Rightarrow 12a^2 \le \left(3a^3 - a\right)^2$$

$$\Rightarrow a^2\left(3a^2 - 1\right)^2 \ge 12a^2 \Rightarrow \left(3a^2 - 1\right)^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow \left(3a^2 - 1 + 2\sqrt{3}\right)\left(3a^2 - 1 - 2\sqrt{3}\right) \ge 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3a^2 - 1 - 2\sqrt{3} \ge 0 \\ 3a^2 - 1 + 2\sqrt{3} \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3a^2 - 1 - 2\sqrt{3} \le 0 \\ 3a^2 - 1 + 2\sqrt{3} \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2 \ge \dfrac{1 - 2\sqrt{3}}{3} \\ a^2 \ge \dfrac{1 + 2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} a^2 \le \dfrac{1 - 2\sqrt{3}}{3} \\ a^2 \le \dfrac{1 + 2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow a^2 \ge \frac{1 + 2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a \ge \sqrt{\frac{1 + 2\sqrt{3}}{3}} \quad (Do\, a > 0)$$

Câu 3.

a) Ta có: $x = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{2} - 1\right)^2}{1}} = \dfrac{1}{2}\left|\sqrt{2} - 1\right| = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)$

Đặt $A = 4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 5x - 2$. Ta thấy:

$A = 4x^3\left(x^2 + x + 1\right) - x^3 + 5x - 2$

$= x^3\left(4x^2 + 4x - 1\right) - x\left(4x^2 + 4x - 1\right) + \left(4x^2 + 4x - 1\right) - 1$

$= \left(4x^2 + 4x - 1\right)\left(x^3 - x + 1\right) - 1$

Mà $4x^2 + 4x - 1 = 4.\left[\dfrac{1}{2}.\left(\sqrt{2} - 1\right)\right]^2 + 4.\dfrac{1}{2}.\left(\sqrt{2} - 1\right) - 1 = 0$

Thay $4x^2 + 4x - 1 = 0$ vào A, ta được $A = -1$

Vậy $P = (-1)^{2018} + 2019 = 2020$

b) Vì $\frac{x-3}{x^2+1}$ là số nguyên nên $\frac{(x-3)(x+3)}{x^2+1}$ cũng là số nguyên

Ta thấy $\frac{(x-3)(x+3)}{x^2+1}=\frac{x^2-9}{x^2+1}=1-\frac{10}{x^2+1}$

Do đó : $10 \vdots x^2+1 \Rightarrow x^2+1 \in U(10)=\{\pm1;\pm2;\pm5;\pm10\}$

$x^2+1=-1 \Rightarrow x^2=-2(ktm)$ $\quad$ $x^2+1=1 \Rightarrow x=0$

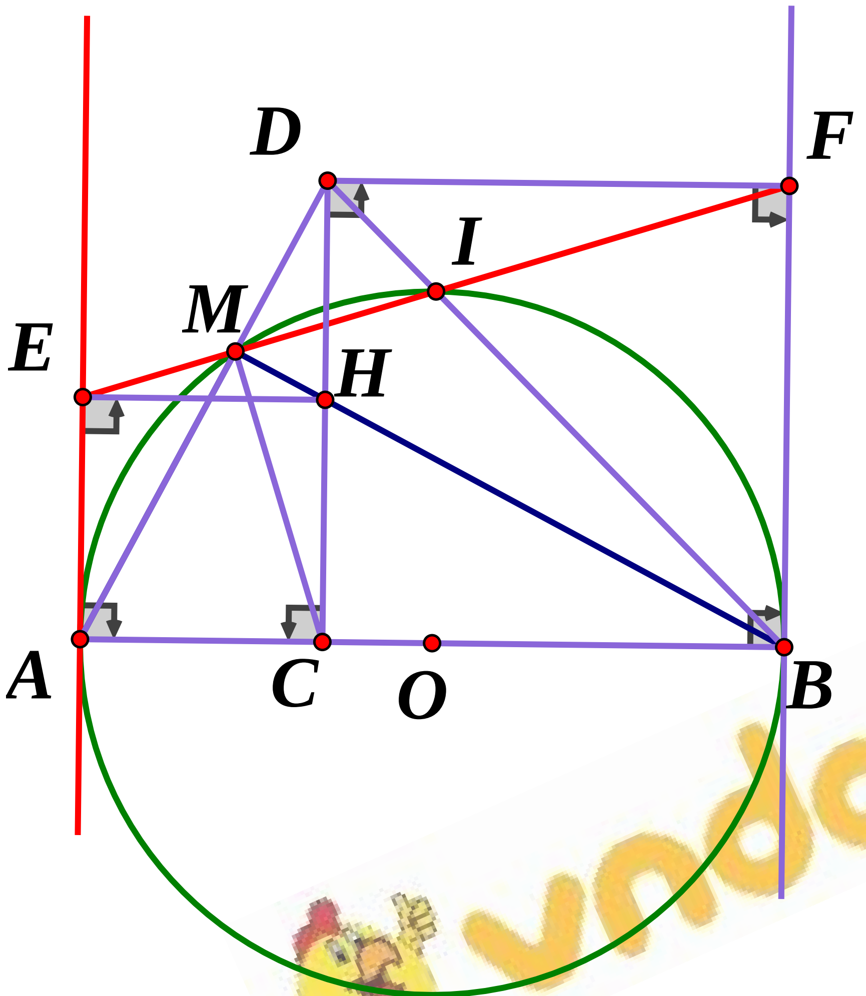
$x^2+1=-2 \Rightarrow x^2=-3(ktm)$ $\quad$ $x^2+1=2 \Rightarrow x=\pm1$

$x^2+1=-5 \Rightarrow x^2=-6(ktm)$ $\quad$ $x^2+1=5 \Rightarrow x=\pm2$

$x^2+1=-10 \Rightarrow x^2=-11(ktm)$ $\quad$ $x^2+1=10 \Rightarrow x=\pm3$

Vậy $x \in \{-2;-1;0;1;3\}$ thì $\frac{x-3}{x^2+1}$ là một số nguyên

Câu 4.



a) Tứ giác $AMHC$ nội tiếp đường tròn (Vì $AMH = ACH = 90^0$)

$\Rightarrow HAC = CMH = 45^0$ (hai góc cùng chắn cung HC) $\Rightarrow \Delta ACH$ vuông cân

$\Rightarrow AC = CH$

b) Tứ giác $MHCA$ thuộc đường tròn đường kính AH, mà EACH là hình vuông

$\Rightarrow EACH$ nội tiếp đường tròn đường kính AH

$\Rightarrow EACHM$ nội tiếp đường tròn

Vì $EACH$ là hình vuông nên $CE = AH \Rightarrow EC$ cũng là đường kính $\Rightarrow EM \perp MC$(1)

Ta lại có: $HMI = HDI = HAC = CMH$ (do các tứ giác $MHID, MACH$ nội tiếp)

$\Rightarrow CMH = HMI = 45^0 \Rightarrow MC \perp MI$(2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow M, I, E$ thẳng hàng

Chứng minh tương tự ta được M, I, F thẳng hàng

Vậy M, I, E, F thẳng hàng

$EACH, FDCB$ là hình vuông

$\Rightarrow S_1.S_2 = AC^2.CB^2 \Rightarrow \sqrt{S_1.S_2} = AC.CB$

$\Rightarrow AC.CB = (AO - OC)(OB + OC) = (R - OC)(R + OC) = R^2 - OC^2 = OM^2 - OC^2$

$\Rightarrow CM^2 < OM^2 - OC^2$ (đúng vì ΔMCO tù tại C)

Vậy $CM^2 < \sqrt{S_1 S_2}$