KỲ THI THQG 2019-2020

MÔN TOÁN

TUYỂN TẬP ĐỀ THI THỬ
ĐỀ THI THQG QUA CÁC NĂM

Th.s NGUYỄN CHÍN EM

TUYỂN TẬP ĐỀ THI THỬ
ĐỀ THI THQG QUA CÁC NĂM

MỤC LỤC

C ĐỀ THI THQG QUA CÁC NĂM 3805

PHẦN

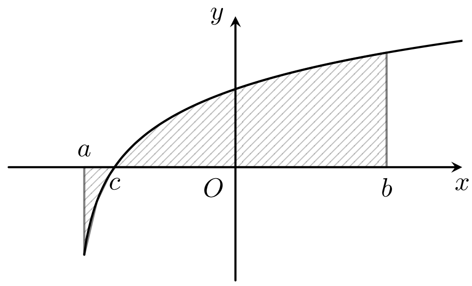
A

ĐỀ THI THỬ CÁC TRƯỜNG THPT

1 ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH, YÊN BÁI, LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.
Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ (phần tô đậm trong hình vẽ). Tính theo công thức nào dưới đây?



A $S = -\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

B $S = \left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

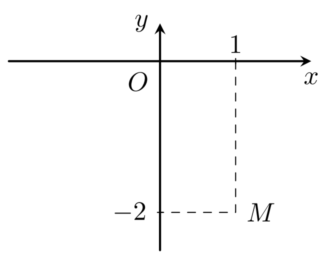
C $S = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

D $S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.
Ta có: $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = -\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 2.
Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.



A Phần thực là -2 và phần ảo là i.

B Phần thực là 1 và phần ảo là -2.

C Phần thực là 1 và phần ảo là $-2i$.

D Phần thực là -2 và phần ảo là 1.

Lời giải.
Điểm M có tọa độ $M(1;-2)$ nên $z = 1 - 2i$.
Vậy phần thực là 1 và phần ảo là -2.
Chọn đáp án B □

Câu 3. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-3;4)$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-5}{-5} = \dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x + z - 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M vuông góc với d và song song với (P).

A $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-4}{-2}$.

B $\Delta\colon \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-4}{-2}$.

C $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$. **D** $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z+4}{2}$.

Lời giải.

Đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-5}{-5}=\dfrac{z-2}{-1}$ có vec tơ chỉ phương $\vec{u}_d=(3;-5;-1)$.

Mặt phẳng $(P)\colon 2x+z-2=0$ có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(2;0;1)$.

Đường thẳng Δ vuông góc với d nên vec tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta\perp\vec{u_d}$.

Đường thẳng Δ song song với (P) nên $\vec{u}_\Delta\perp\vec{n}_{(P)}$.

Ta có $\left[\vec{u}_d,\vec{n}_{(P)}\right]=(-5;-5;10)$.

Suy ra vec tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}_\Delta - -\dfrac{1}{5}\cdot\left[\vec{u}_d,\vec{n}_{(P)}\right]=(1;1;-2)$.

Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho một cấp số cộng (u_n), biết $u_1=\dfrac{1}{3}; u_8=26$. Tìm công sai d ?

A $d=\dfrac{3}{10}$. **B** $d=\dfrac{11}{3}$. **C** $d=\dfrac{3}{11}$. **D** $d=\dfrac{10}{3}$.

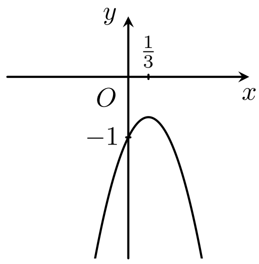
Lời giải.

Ta có $u_8=26\Leftrightarrow u_1+7d=26\Leftrightarrow \dfrac{1}{3}+7d=26\Leftrightarrow d=\dfrac{11}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 5.

Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,\,b,\,c,\,d\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho có thể là hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



A $y=x^3-2x-1$. **B** $y=-x^3+2x^2-x-2$.

C $y=-x^3+x^2-x+2$. **D** $y=-x^3+2x^2+x+2$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ căn cứ vào đồ thị hàm $y=f'(x)$ ta có:

- Đồ thị là một parabol quay bề lõm xuống nên $a<0$ suy ra loại $y=x^3-2x-1$.
- Đồ thị giao với trục Oy tại điểm có tung độ âm nên $c<0$ suy ra loại $y=-x^3+2x^2+x+2$.
- $f'(x)<0$ với mọi x nên hàm luôn nghịch biến suy ra loại $y=-x^3+2x^2-x-2$.

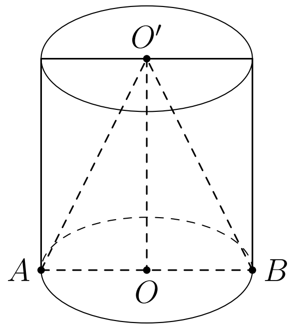
Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$, chiều cao $R\sqrt{3}$. Một hình nón có đỉnh là O' và đáy là hình tròn $(O;R)$. Tỷ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón bằng

A 2. **B** $\sqrt{3}$. **C** 3. **D** $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_1 = 2\pi R^2\sqrt{3}$.
Độ dài đường sinh của hình nón là $l = \sqrt{R^2 + 3R^2} = 2R$ do đó diện tích xung quanh của hình nón là $S_2 = 2\pi R^2$.
Vậy tỷ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón là $\dfrac{S_1}{S_2} = \sqrt{3}$.



Chọn đáp án B □

Câu 7. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh Ox.

A $V = \dfrac{16}{15}\pi$. **B** $V = \dfrac{16}{15}$. **C** $V = \dfrac{4}{3}$. **D** $V = \dfrac{4}{3}\pi$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm là $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Thể tích $V = \pi \displaystyle\int_0^2 (2x - 2^2)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) \,\mathrm{d}x = \pi \left(4\frac{x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2 = \frac{16}{15}\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2 || $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

A Hàm số không có đạo hàm tại $x = -1$.
B Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 1$.
C Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.
D Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Lời giải.

Hàm số không có đạo hàm tại $x = -1$ nên phương án "Hàm số không có đạo hàm tại $x = -1$" đúng.
Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 1$ nên phương án "Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 1$" đúng.
Vì $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = +\infty$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$ nên phương án "Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng" sai.
Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$ suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang nên phương án "Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang" đúng.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int_0^2 \left(f(x) + 3x^2\right) \mathrm{d}x = 10$. Tính $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A -18. **B** -2. **C** 18. **D** 2.

Lời giải.

Ta có: $\int\limits_0^2 \left(f(x)+3x^2\right)\,\mathrm{d}x = 10 \Leftrightarrow \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 10 - \int\limits_0^2 3x^2\,\mathrm{d}x = 10 - x^2\Big|_0^2 = 2.$

Chọn đáp án D □

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{-4}$. Điểm nào sau đây không thuộc đường thẳng d?

A. $Q(-2;-4;7)$. B. $N(4;0;-1)$. C. $M(1;-2;3)$. **D.** $P(7;2;1)$.

Lời giải.

Ta thay lần lượt tọa độ các điểm vào phương trình đường thẳng d, điểm nào có tọa độ không thỏa mãn phương trình đường thẳng d là điểm cần tìm.

a) Điểm $Q(-2;-4;7)$: $\dfrac{-2-1}{3} = \dfrac{-4+2}{2} = \dfrac{7-3}{-4} = -1 \Rightarrow Q \in d$.

b) Điểm $N(4;0;-1)$: $\dfrac{4-1}{3} = \dfrac{0+2}{2} = \dfrac{-1-3}{-4} = 1 \Rightarrow N \in d$.

c) Điểm $M(1;-2;3)$: $\dfrac{1-1}{3} = \dfrac{-2+2}{2} = \dfrac{3-3}{-4} = 0 \Rightarrow M \in d$.

d) Điểm $P(7;2;1)$: $\dfrac{7-1}{3} = \dfrac{2+2}{2} = \dfrac{1-3}{-4} \Rightarrow$ Vô lí$\Rightarrow P \notin d$.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Khi tăng độ dài cạnh đáy của một khối chóp tam giác đều lên 2 lần và giảm chiều cao của hình chóp đó đi 4 lần thì thể tích khối chóp thay đổi như thế nào?

A. Không thay đổi. B. Tăng lên 8 lần. C. Giảm đi 2 lần. D. Tăng lên 2 lần.

Lời giải.

Gọi độ dài cạnh đáy của hình chóp tam giác đều là a và chiều cao là h thì diện tích chóp là $B = a^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ và thể tích ban đầu của hình là: $V_1 = \dfrac{1}{3}B.h = \dfrac{1}{3}.h.a^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

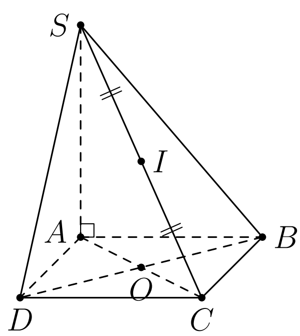
Nếu tăng độ dài cạnh đáy của một khối chóp tam giác đều lên 2 lần và giảm chiều cao của hình chóp đó đi 4 lần thì thể tích khối chóp mới sẽ là: $V_2 = \dfrac{1}{3}.\dfrac{h}{4}.(2a)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1}{3}.h.a^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4} = V_1$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy $ABCD$. Tính theo a diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

A. $2a^2$. **B.** $8\pi a^2$. C. $a^2\sqrt{2}$. D. $2\pi a^2$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của cạnh SC. Do $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$.

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$. Vậy A nhìn đoạn SC dưới một góc vuông.

Ta lại có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA, \text{ (Do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow CD \perp SD$. Vậy D nhìn đoạn SC dưới một góc vuông.

Tương tự B cũng nhìn đoạn SC dưới một góc vuông.

Vậy mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ có tâm là I và bán kính $R = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6a^2 + 2a^2}}{2} = \dfrac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$.

Diện tích mặt cầu cần tìm là $S = 4\pi R^2 = 4\pi \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 8\pi a^2$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của AB. Mặt phẳng $(MA'C')$ cắt cạnh BC của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tại N. Tính $k = \dfrac{MN}{A'C'}$.

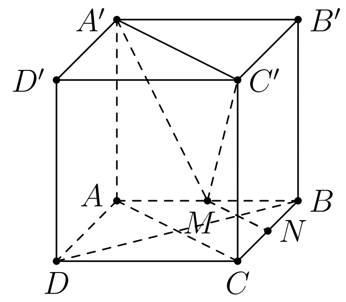
A $k = \dfrac{1}{2}$. **B** $k = \dfrac{1}{3}$. **C** $k = \dfrac{2}{3}$. **D** $k = 1$.

Lời giải.

Ta có $AC \subset (ABC)$, $A'C' \subset (MA'C')$ và AC song song $A'C'$ suy ra MN song song với $A'C'$.

Do M là trung điểm của AB nên N là trung điểm của BC.

Suy ra $k = \dfrac{MN}{A'C'} = \dfrac{MN}{AC} = \dfrac{1}{2}$.



Chọn đáp án A □

Câu 14. Một lớp có 20 học sinh nam và 18 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên một học sinh. Tính xác suất chọn được một học sinh nữ.

A $\dfrac{1}{38}$. **B** $\dfrac{10}{19}$. **C** $\dfrac{9}{19}$. **D** $\dfrac{19}{9}$.

Lời giải.

Chọn một học sinh trong 38 có C_{38}^1 cách.

Chọn một học sinh trong 18 có C_{18}^1 cách.

Xác suất chọn được một học sinh nữ là $\dfrac{\mathrm{C}_{18}^1}{\mathrm{C}_{38}^1} = \dfrac{9}{19}$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (4x^2 - 1)^{-3}$.

A $\mathscr{D} = \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right)$. **B** $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

C $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right\}$. **D** $\mathscr{D} = \left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định là $4x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm\dfrac{1}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|\overline{z} + 2 - i| = 4$ là đường tròn có tâm I và bán kính R lần lượt là

A $I(2; -1)$; $R = 2$. **B** $I(-2; -1)$; $R = 4$.

C $I(-2; -1)$; $R = 2$. **D** $I(2; -1)$; $R = 4$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ nên điểm biểu diễn của số phức z là $M(x; y)$.

Theo giả thiết $|\overline{z} + 2 - i| = 4$ nên ta có

$$\begin{aligned} & |x - yi + 2 - i| = 4 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} = 4 \\ \Leftrightarrow\ & (x+2)^2 + (y+1)^2 = 16. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-2; -1)$ và bán kính $R = 4$.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Cho hình lăng trụ đứng có diện tích đáy là $3a^2$, độ dài cạnh bên bằng $2a$. Thể tích khối lăng trụ bằng

A $6a^3$. **B** a^3. **C** $3a^3$. **D** $2a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ là $V = B.h$ với B là diện tích đáy, h là chiều cao của lăng trụ.

Lăng trụ đã cho là lăng trụ đứng suy ra đường cao là một cạnh bên nên $h = 2a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là: $V = 3a^2 \cdot 2a = 6a^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

A $F(x) = x^3 + \sin x + C$. **B** $F(x) = x^3 - \cos x + C$.

C $F(x) = 3x^3 - \sin x + C$. **D** $F(x) = x^3 + \cos x + C$.

Lời giải.

Ta có: $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(3x^2 + \sin x\right)\,\mathrm{d}x = x^3 - \cos x + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. **B** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

C Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. **D** Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 4x$.

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = -1 \Rightarrow y = 1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

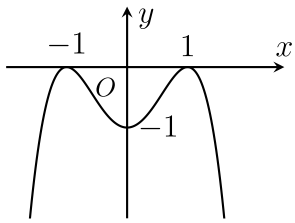
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 20.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A $y = -x^4 + 3x^2 - 2$.

B $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.

C $y = -x^4 + x^2 - 1$.

D $y = -x^4 + 3x^2 - 3$.

Lời giải.

Dựa vào dạng đồ thị ta thấy:

- Hàm số đã cho có dạng $y = ax^4 + bx^2 + c$ với $a < 0$.
- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1 nên hàm số có hệ số tự do $c = -1$. Do vậy ta loại đáp án A và D.
- Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm 1$, giá trị cực đại bằng 0.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, gía trị cực tiểu bằng -1 . Do vậy ta chọn đáp án B.

Chọn đáp án B □

Câu 21. Tích tất cả các nghiệm của phương trình $3^{x^2+x} = 9$ bằng

A -2.

B -1.

C 2.

D 3.

Lời giải.

$$\begin{aligned} 3^{x^2+x} = 9 &\Leftrightarrow 3^{x^2+x} = 3^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + x = 2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy tích tất cả các nghiệm của phương trình đã cho bằng -2.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Cho $\log_{12} 3 = a$. Tính $\log_{24} 18$ theo a.

A $\dfrac{3a+1}{3+a}$.

B $\dfrac{3a-1}{3+a}$.

C $\dfrac{3a-1}{3-a}$.

D $\dfrac{3a+1}{3-a}$.

Lời giải.

Có $a = \log_{12} 3 = \dfrac{1}{\log_3 12} = \dfrac{1}{\log_3 3 + \log_3 4} = \dfrac{1}{1 + 2\log_3 2} \Rightarrow \log_3 2 = \dfrac{1-a}{2a}$.

Lại có $\log_{24} 18 = \dfrac{\log_3 18}{\log_3 24} = \dfrac{\log_3 9 + \log_3 2}{\log_3 3 + \log_3 8} = \dfrac{2 + \log_3 2}{1 + 3\log_3 2} = \dfrac{2 + \dfrac{1-a}{2a}}{1 + 3 \cdot \dfrac{1-a}{2a}} = \dfrac{3a+1}{3-a}$.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Phát biểu nào sau đây đúng?

A Nếu $f''(x_0) = 0$ và $f'(x_0) = 0$ thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số.

B Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm $x_0$và $f(x)$ liên tục tại x_0 thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0.

(C) Nếu $f''(x_0) > 0$ và $f'(x_0) = 0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0.
(D) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 khi và chỉ khi $f'(x_0) = 0$.

Lời giải.

- Nếu $f''(x_0) = 0$ và $f'(x_0) = 0$ thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số là phát biểu **sai**. Chẳng hạn, hàm số $y = x^4$ có $f'(0) = f''(0) = 0$ và $x = 0$ là điểm cực trị của hàm số.
- Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 và $f(x)$ liên tục tại x_0 thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 là phát biểu đúng.
- Nếu $f''(x_0) > 0$ và $f'(x_0) = 0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0 là phát biểu **sai** do không thỏa mãn dấu hiệu nhận biết điểm cực đại.
- Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 khi và chỉ khi $f'(x_0) = 0$ là phát biểu **sai** vì khi $f'(x) = 0$ thì $x = x_0$ chưa chắc là điểm cực trị vì $f'(x)$ có thể không đổi dấu khi x qua điểm x_0.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Tính thể tích của khối nón có chiều cao bằng 4 và độ dài đường sinh bằng 5.

A 12π. (B) 36π. (C) 16π. (D) 48π.

Lời giải.

Bán kính đường tròn đáy của khối nón là $r = \sqrt{l^2 - h^2} = 3$.
Vậy thể tích của khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = 12\pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - z + 2 = 0$. Tính $T = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

(A) $T = \dfrac{2}{3}$. (B) $T = \dfrac{8}{3}$. **C** $T = \dfrac{4}{3}$. (D) $T = -\dfrac{11}{9}$.

Lời giải.

Ta có $3z^2 - z + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{1 + \sqrt{23}i}{6} \Rightarrow |z_1|^2 = \dfrac{2}{3} \\ z_2 = \dfrac{1 - \sqrt{23}i}{6} \Rightarrow |z_2|^2 = \dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$

Vậy $T = |z_1|^2 + |z_2|^2 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Số phức liên hợp của $z = 4 + 3i$ là

(A) $\overline{z} = -3 + 4i$. **B** $\overline{z} = 4 - 3i$. (C) $\overline{z} = 3 + 4i$. (D) $\overline{z} = 3 - 4i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của $z = 4 + 3i$ là $\overline{z} = 4 - 3i$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1;3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

x	-1		0		2		3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			5				4
	0	$\nearrow$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

A. $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$.

B. $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(3)$.

C. $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(2)$.

D. $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(0)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên trên đoạn $[-1;3]$, ta thấy $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Ta có $f(-1) = 0,\ f(0) = 5,\ f(2) = 1,\ f(3) = 4$.

Mặt khác hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ nên $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vec-tơ $\vec{u} = (3;0;1)$ và $\vec{v} = (2;1;0)$. Tính tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$. B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$. C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$.

Lời giải.

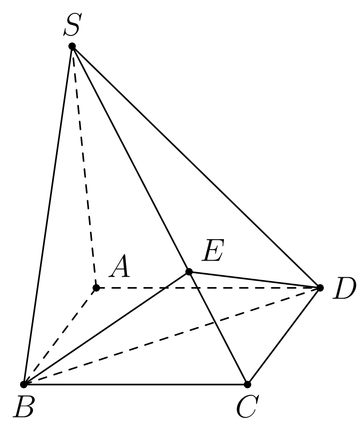
Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 6$.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 1 và đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên cạnh SC lấy điểm E sao cho $SE = 2EC$. Tính thể tích V của khối tứ diện $SEBD$.

A. $V = \dfrac{2}{3}$. B. $V = \dfrac{1}{6}$. C. $V = \dfrac{1}{12}$. D. $V = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.



- Vì $SE = 2EC$ nên $\dfrac{SE}{SC} = \dfrac{2}{3}$.
  Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên ta có
  $$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = 2S_{\triangle BDC}.$$
  Suy ra $V_{S.ABCD} = 2V_{S.BCD} = 1 \Leftrightarrow V_{S.BCD} = \dfrac{1}{2}$.
- Ta có $\dfrac{V_{S.BED}}{V_{S.BCD}} = \dfrac{SB}{SB} \cdot \dfrac{SE}{SC} \cdot \dfrac{SD}{SD} = \dfrac{SE}{SC} = \dfrac{2}{3}$.
  Suy ra$V_{S.BED} = \dfrac{2}{3} \cdot V_{S.BCD} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. B. $y = \log_{\frac{\pi}{3}} (x^2+1)$. C. $y = \left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^x$. D. $y = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$.

Lời giải.

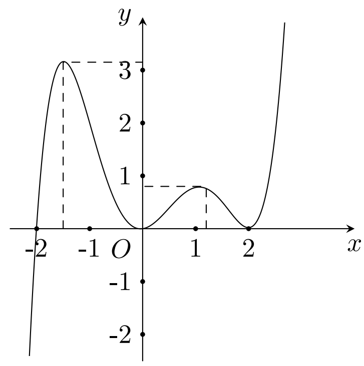
- Hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ có tập xác định là $(0; +\infty)$ và có cơ số $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ nên nghịch biến trên $(0; +\infty)$.
- Hàm số $y = \log_{\frac{\pi}{3}}(x^2+1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
  Ta có $y' = \dfrac{2x}{(x^2+1)\ln\dfrac{\pi}{3}}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$, nên y' đổi dấu khi qua $x = 0$, suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên $(0; +\infty)$.
- Hàm số $y = \left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và có cơ số $0 < \dfrac{2}{\mathrm{e}} < 1$, suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- Hàm số $y = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và có cơ số $\dfrac{\pi}{3} > 1$, suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 31.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trơn (không bị gãy khúc), hình vẽ bên. Gọi hàm $g(x) = f[f(x)]$. Hỏi phương trình $g'(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A 14. **B** 10. **C** 12. **D** 8.



Lời giải.

Ta có: $g'(x) = f'[f(x)] \cdot f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

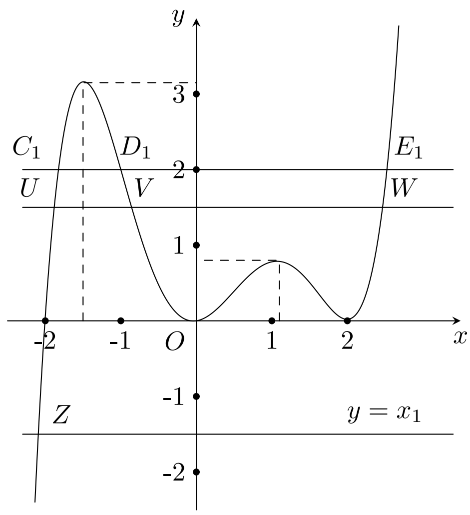
Ta có: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'[f(x)].f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \ (1) \\ f'[f(x)] = 0 \ (2). \end{array}\right.$

Từ đồ thị có thể thấy:

(1) có các nghiệm nghiệm:

$x = x_1 \in (-2; -1), x = 0, x = x_2 \in (1; 2), x = 2$.

Xét phương trình (2) ta có: (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = x_1 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = x_2 \\ f(x) = 2. \end{array}\right.$



Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $x = -2, x = 0, x = 2$ (trùng mất hai nghiệm với (1)).

Dựng các đường thẳng $y = 2, y = x_1 \in (-2; -1), y = x_2 \in (1; 2)$ ta thấy:

- $f(x) = 2$ có 3 nghiệm x_3, x_4, x_5 tương ứng là hoành độ các điểm C_1, D_1, E_1 (xem hình)
- $f(x) = x_1$ có nghiệm duy nhất x_6 ứng với hoành độ điểm Z (Xem hình).
- $f(x) = x_2$ có 3 nghiệm x_7, x_8, x_9 tương ứng là hoành độ các điểm U, V, W (Xem hình).

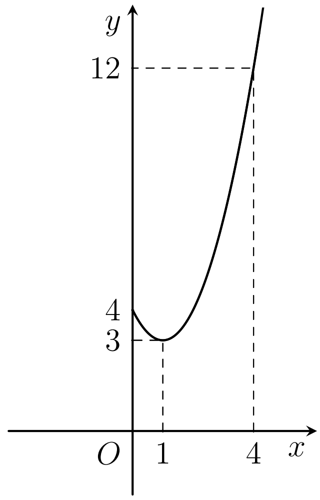
Từ đồ thị có thể thấy các nghiệm $-2, 0, 2, x_1, x_2, \cdots, x_9$ hoàn toàn phân biệt nên phương trình

$g'(x) = 0$ có tổng cộng 12 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án C □

Câu 32.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc $v\,(km/h)$ phụ thuộc thời gian $t\,(h)$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;3)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



A $s = \dfrac{50}{3}\,(km)$.

B $s = 10\,(km)$.

C $s = 20\,(km)$.

D $s = \dfrac{64}{3}\,(km)$.

Lời giải.

Ta có $v(t) = at^2 + bt + c$ có dạng parabol đỉnh $I(1;3)$, đi qua điểm $A(0;4)$ và $B(4;12)$.

$$\begin{cases} \dfrac{-b}{2a} = 1 \\ a+b+c = 3 \\ v(0) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-b}{2a} = 1 \\ a+b+c = 3 \\ 0+0+c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a+b = -1 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a+(-2a) = -1 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a = 1 \\ c = 4. \end{cases}$$

Do đó $v(t) = t^2 - 2t + 4$.

Quãng đường vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát được tính như sau

$$s = \int_0^4 v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^4 \left(t^2 - 2t + 4\right)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{t^3}{3} - t^2 + 4t\right)\Bigg|_0^4 = \left(\frac{4^3}{3} - 4^2 + 4.4\right) - 0 = \frac{64}{3}\,(\mathrm{km}).$$

Chọn đáp án D □

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P) : x + y - 2z + 5 = 0$ và $A\,(1;-1;2)$. Đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN. Một vectơ chỉ phương của Δ là

A $\vec{u} = (2;3;2)$. **B** $\vec{u} = (1;-1;2)$. **C** $\vec{u} = (-3;5;1)$. **D** $\vec{u} = (4;5;-13)$.

Lời giải.

Gọi $M(-1+2t;t;2+t)$.

Vì $A(1;-1;2)$ là trung điểm của đoạn MN nên ta có $N(3-2t;-2-t;2-t)$.

Lại có $N \in (P)$ nên $3 - 2t - 2 - t - 2(2-t) + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow M(3;2;4)$.

Một vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{AM} = (2;3;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - 2y + 2z - 2 = 0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

A $(S)\colon (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34$. **B** $(S)\colon (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$.

C $(S)\colon (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 34$. **D** $(S)\colon (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25$.

Lời giải.

Ta có $d(I,(P)) = 3$; bán kính đường tròn giao tuyến $r = 5$ suy ra bán kính mặt cầu là $R = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$. Do đó phương trình mặt cầu là $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Gọi x,y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(x+y)$ và $\dfrac{x}{y} = \dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a, b là hai số nguyên dương. Tính $T = a^2 + b^2$.

A $T = 26$. **B** $T = 29$. **C** $T = 20$. **D** $T = 25$.

Lời giải.

Đặt $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(x+y) = t$.

Suy ra $\begin{cases} x = 9^t \\ y = 6^t \\ x + y = 4^t. \end{cases}$

Khi đó ta có: $9^t + 6^t = 4^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2t} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^t - 1 = 0$

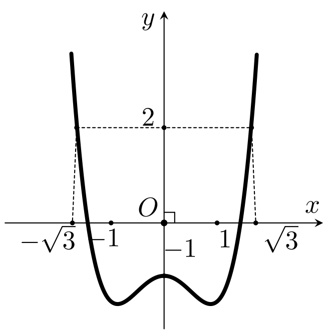
$\Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^t = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \left(\text{Vì } \left(\dfrac{3}{2}\right)^t > 0 \right)$.

Lại có $\dfrac{x}{y} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^t \Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a = 1,\ b = 5$ hay $T = 26$.

Chọn đáp án A □

Câu 36.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $h(x) = 3f(x) - x^3 + 3x$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau



A $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f(1)$.

B $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f\left(-\sqrt{3}\right)$.

C $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f\left(\sqrt{3}\right)$.

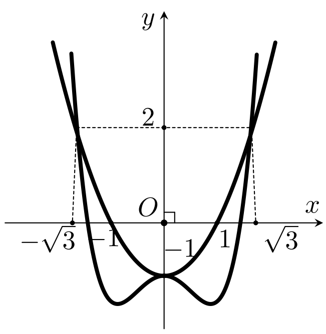
D $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f(0)$.

Lời giải.

Ta có: $h'(x) = 3f'(x) - 3x^2 + 3 \Leftrightarrow h'(x) = 3\left[f'(x) - (x^2-1)\right]$.

Đồ thị hàm số $y = x^2 - 1$ là một parabol có toạ độ đỉnh $C(0;-1)$, đi qua $A\left(-\sqrt{3};2\right)$, $B\left(\sqrt{3};2\right)$.

Từ đồ thị hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = x^2 - 1$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$.



x	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$
$h'(x)$		$-$	0	$-$	
$h(x)$	$h(-\sqrt{3})$	↘	$h(0)$	↘	$h(\sqrt{3})$

Với $h\left(-\sqrt{3}\right) = 3f\left(-\sqrt{3}\right)$, $h\left(\sqrt{3}\right) = 3f\left(\sqrt{3}\right)$.

Vậy $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f\left(-\sqrt{3}\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho z là số phức thỏa $|\overline{z}| = |z+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z-1+2i|+|z+1+3i|$ là

A $\sqrt{5}$. B $5\sqrt{2}$. C $\sqrt{13}$. D $\sqrt{29}$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $T = |z-1+2i| + |z+1+3i| = \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2} + \sqrt{(x+1)^2+(y+3)^2} = MA + MB$, với $A(1;-2), B(-1;-3), M(x;y)$.

Từ giả thiết $|\overline{z}| = |z+2i| \Leftrightarrow y = -1$.

Suy ra tập hợp điểm M biểu diễn số phức z nằm trên đường thẳng $y = -1$, do đó $M(x;-1)$.

Ta thấy$A(1;-2), B(-1;-3)$ nằm cùng phía với đường thẳng $y = -1$.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua đường thẳng $y = -1$ thì $A'(1;0)$.

Do đó $T = MA + MB = MA' + MB$ nhỏ nhất khi A', B, M thẳng hàng $\Rightarrow M\left(\dfrac{1}{3};0\right)$.

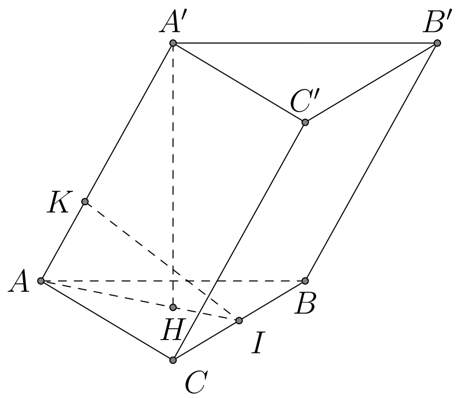
Khi đó $T = MA + MB = MA' + MB = \sqrt{13}$.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. D $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' lên mp(ABC) và I là trung điểm BC.

Ta có $\begin{cases} A'H \perp BC \\ AI \perp BC \end{cases}$ suy ra $BC \perp (A'AI)$ nên $BC \perp AA'$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên AA'.

Khi đó IK là đoạn vuông góc chung của AA' và BC.

Mặt khác $\mathrm{d}(AA', BC) = IK = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác ABC đều cạnh a suy ra

$$AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AH = \frac{2}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}; S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Tam giác AIK vuông tại K có $\sin\widehat{KAI} = \dfrac{IK}{AI} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{KAI} = 30^\circ$.

Xét tam giác vuông $AA'H$ vuông tại H có $A'H = AH.\tan 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a}{3}$.

$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Ba anh em An, Bình, Cường cùng vay tiền ở một ngân hàng với lãi suất $0,7\%$/ tháng với tổng số tiền vay là 1 tỉ đồng. Giả sử mỗi tháng ba người đều trả cho ngân hàng một số tiền như nhau để trừ vào tiền gốc và lãi. Để trả hết gốc và lãi cho ngân hàng thì An cần 10 tháng, Bình cần 15 tháng và Cường cần 25 tháng. Hỏi tổng số tiền mà ba anh em trả ở tháng thứ nhất cho ngân hàng là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?

A 6426800. **B** 45672000. **C** 46712000. **D** 63271000.

Lời giải.

Gọi A, B, C lần lượt là số tiền mà An, Bình, Cường vay ngân hàng. Ta có

$$A + B + C = 10^9 \ (1).$$

Gọi X là số tiền mà mỗi người trả cho ngân hàng vào mỗi tháng với $r = \frac{0,7}{100}$.

Để trả hết gốc và lãi cho ngân hàng thì An cần 10 tháng, áp dụng công thức vay vốn trả góp ta có

$$A(1+r)^{10} - X\frac{(1+r)^{10}-1}{r} = 0 \Rightarrow A = X\frac{(1+r)^{10}-1}{r(1+r)^{10}} \ (2).$$

Bình cần 15 tháng nên

$$B(1+r)^{15} - X\frac{(1+r)^{15}-1}{r} = 0 \Rightarrow B = X\frac{(1+r)^{15}-1}{r(1+r)^{15}} \ (3).$$

Cường cần 25 tháng nên

$$C(1+r)^{25} - X\frac{(1+r)^{25}-1}{r} = 0 \Rightarrow C = X\frac{(1+r)^{25}-1}{r(1+r)^{25}} \ (4).$$

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra tổng số tiền mà ba anh em trả ở tháng thứ nhất cho ngân hàng là $3X = 64268000$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|\, i = 0$. Tính $S = 2a + 3b$.

A $S = -5$. **B** $S = 5$. **C** $S = -6$. **D** $S = 6$.

Lời giải.

Ta có $z + 1 + 3i - |z|\, i = 0 \Leftrightarrow (a+1) + \left(b + 3 - \sqrt{a^2+b^2}\right) i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 = 0 \\ b + 3 - \sqrt{a^2+b^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b + 3 - \sqrt{1+b^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \dfrac{-4}{3} \end{cases}$$

Suy ra $S = 2a + 3b = -6$.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-3; 3; -3)$ thuộc mặt phẳng $(P)\colon 2x - 2y + z + 15 = 0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 100$. Đường thẳng Δ qua M nằm trên mặt phẳng (P) cắt (S) tại A, B, sao cho độ dài AB lớn nhất. Viết phương trình đường thẳng Δ .

A $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+3}{3}$. **B** $\dfrac{x+3}{16} = \dfrac{y-3}{11} = \dfrac{z+3}{-10}$.

Ⓒ $\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+3}{8}$.

D $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$, bán kính $R=10$. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(2;-2;1)$.

Ta có $\mathrm{d}(I,(P))=6<R \Leftrightarrow (P)$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) tâm H, bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}$, với H là hình chiếu của I trên (P).

Đường thẳng Δ qua M nằm trên mặt phẳng (P) cắt (S) tại A và B sao cho độ dài AB lớn nhất. Khi đó AB là đường kính của đường tròn (C). Do đó Δ đi qua M và H.

Đường thẳng IH nhận $\vec{n}_P$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình là $\begin{cases} x=2+2t \\ y=3-2t \\ z=5+t \end{cases}$.

Do đó ta có $H(2+2t;3-2t;5+t)$. Vì $H\in(P)$ nên $t=-2\Rightarrow H(-2;7;3)$. Đường thẳng Δ nhận $\overrightarrow{MH}=(1;4;6)$ làm véc-tơ chỉ phương, đi qua M nên có phương trình là $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 42. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d\colon y=-2x+m-1$ (m là tham số thực). Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C). Tính tích $k_1\cdot k_2$.

Ⓐ $k_1\cdot k_2=3$.

B $k_1\cdot k_2=4$.

Ⓒ $k_1\cdot k_2=\dfrac{1}{4}$.

Ⓓ $k_1\cdot k_2=2$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{1}{(x+2)^2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là $\dfrac{x+1}{x+2}=-2x+m-1$ với $x\neq 2$. Phương trình này tương đương $2x^2-(m-6)x-2m+3=0$.

Ta có $\Delta=m^2+4m+12>0\,\forall m$. Suy ra d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2.

Hệ số góc của các tiếp tuyến tại các giao điểm lần lượt là $k_1=\dfrac{1}{(x_1+2)^2}$ và $k_2=\dfrac{1}{(x_2+2)^2}$.

Theo Vi-et ta có $x_1+x_2=\dfrac{m-6}{2}$ và $x_1\cdot x_2=\dfrac{-2m+3}{2}$.

Do đó $k_1\cdot k_2=\dfrac{1}{[(x_1+2)(x_2+2)]^2}=\dfrac{1}{\left[\dfrac{-2m+3}{2}+2\dfrac{m-6}{2}+4\right]^2}=4$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 43. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và $f(3)=21$, $\displaystyle\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=9$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^1 x\cdot f'(3x)\mathrm{d}x$.

A $I=6$.

Ⓑ $I=12$.

Ⓒ $I=9$.

Ⓓ $I=15$.

Lời giải.

Đặt $3x=t\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{3}$. Đổi cận $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=0 \\ x=1\Rightarrow t=3. \end{cases}$

$I=\int\limits_0^3 \frac{t}{3}f'(t)\frac{\mathrm{d}t}{3}=\frac{1}{9}\int\limits_0^3 xf'(x)\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=f(x) \end{cases}$

Suy ra $I=\frac{1}{9}\left(xf(x)\Big|_0^3-\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x\right)=6.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$, biết $f'(x)+(2x+1)f(x)=0$, $f(x)=0$, $f'(x)>0$, $f(2)=\frac{1}{6}$. Tính giá trị của $P=f(1)+f(2)+\ldots+f(2019)$.

A $P=\frac{2020}{2019}$. **B** $P=\frac{2019}{2020}$. **C** $P=\frac{2018}{2019}$. **D** $P=\frac{2021}{2020}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)+(2x+1)f(x)=0\Rightarrow\frac{-f'(x)}{f(x)}=2x+1\Rightarrow\int\frac{-f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int(2x+1)\mathrm{d}x$.

Suy ra $\frac{1}{f(x)}=x^2+x+c\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^2+x+c}$. Mà $f(2)=\frac{1}{6}\Rightarrow c=0\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$.

$P=f(1)+f(2)+\ldots+f(2019)=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}=\frac{2019}{2020}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4\cos^3x-\cos 2x+(m-3)\cos x-1=0$ có đúng bốn nghiệm khác nhau thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$?

A 2. **B** 3. **C** 0. **D** 1.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & 4\cos^3x-\cos 2x+(m-3)\cos x-1=0\\ \Leftrightarrow\ & 4\cos^3x-(2\cos^2x-1)+(m-3)\cos x-1=0\\ \Leftrightarrow\ & \cos x(4\cos^2x-2\cos x+m-3)=0\\ \Leftrightarrow\ & \cos x=0 \text{ hoặc } 4\cos^2x-2\cos x+m-3=0\end{aligned}$$

Phương trình $\cos x=0$ không có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Xét phương trình $4\cos^2x-2\cos x+m-3=0$ (1)

Đặt $t=\cos x$, với $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$.

Khi đó (1) trở thành $4t^2-2t+m-3=0\Leftrightarrow 4t^2-2t-3=-m$.

Xét hàm số $f(t)=4t^2-2t-3$ với $t\in(0;1)$.

t	0		$\frac{1}{4}$		1
$f(t)$	-3	$\searrow$	$-\frac{13}{4}$	$\nearrow$	-1

Từ bảng biến thiên ta thấy yêu cầu bài toán tương đương $-\dfrac{13}{4} < -m < -3 \Leftrightarrow 3 < m < \dfrac{13}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa AC và DC'.

A $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B** $\dfrac{a}{3}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D** a.

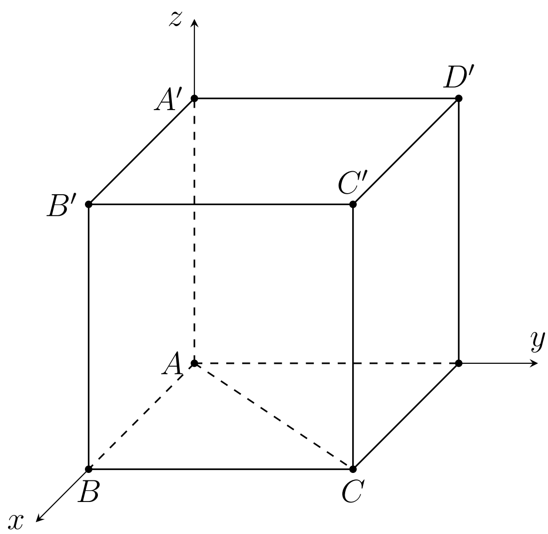
Lời giải.

Chọn hệ trục $Axyz$ như hình vẽ.

Ta có $A(0;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;a;0)$, $C'(a;a;a)$. Khi đó $\overrightarrow{AC} = (a;a;0)$, $\overrightarrow{DC'} = (a;0;a)$, $\overrightarrow{DC} = (a;0;0)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC'}\right] = (a^2; -a^2; -a^2)$. Khi đó

$$\mathrm{d}(AC, DC') = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC'}\right] \cdot \overrightarrow{AD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC'}\right]\right|} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

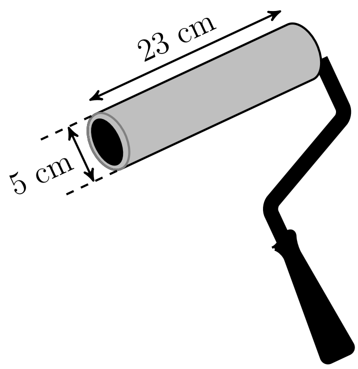


Chọn đáp án C □

Câu 47.

Một cái trục lăn sơn nước có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là 5 cm, chiều dài lăn là 23 cm. Sau khi lăn trọn 10 vòng thì trục lăn tạo nên tương phẳng lớp sơn có diện tích là

A $862{,}5\pi$ cm^2. **B** 5230π cm^2.
C 2300π cm^2. **D** 1150π cm^2.



Lời giải.

Gọi r, l lần lượt là bán kính và độ dài đường sinh của hình trụ. Theo giả thiết $2r = 5$ cm, $l = 23$ cm.

Ta có diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi rl = 5 \cdot 23\pi = 115\pi$ cm^2.

Sau khi lăn tròn 1 vòng thì trục lăn tạo nên tường phẳng lớp sơn có diện tích bằng diện tích xung quanh của hình trụ.

Vậy sau khi lăn trọn 10 vòng thì trục lăn tạo nên tường phẳng lớp sơn có diện tích là $10 \cdot S_{xq} = 1150\pi$ cm^2.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $4^{x-1} - m\left(2^x + 1\right) > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A $m \in (-\infty; 0]$. **B** $m \in (0; +\infty)$.

C $m \in (0; 1)$. **D** $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải.

Đặt $t = 2^x$, $t > 0 \Rightarrow t + 1 > 0$.

Bài toán đã cho trở thành

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\dfrac{t^2}{4(t+1)} > m$, $\forall t > 0$. (1)

Đặt $f(t) = \dfrac{t^2}{4(t+1)}$, $(t > 0) \Rightarrow f'(t) = \dfrac{t^2 + 2t}{4(t+1)^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \text{ (loại)} \\ t = -2 \text{ (loại)} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

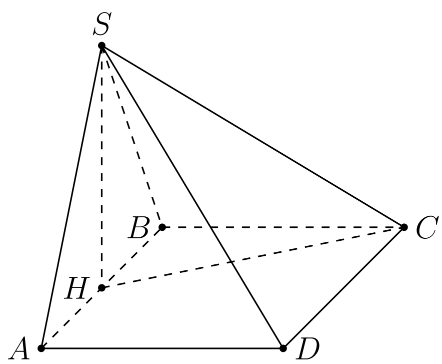
Nhìn vào bảng biến thiên ta có $m \in (-\infty; 0]$ thảo mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{4a^3}{3}$. Tính độ dài SC.

A $SC = 6a$. **B** $SC = 3a$. **C** $SC = 2a$. **D** $SC = a\sqrt{6}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AB.

$\Rightarrow SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD) (do\ (SAB) \perp (ABCD))$.

Ta có $S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$.

Trong tam giác vuông HBC, ta có

$$HC = \sqrt{HB^2 + BC^2} = a\sqrt{5}.$$

Ta có $SH = \dfrac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}} = \dfrac{3 \cdot \dfrac{4a^3}{3}}{4a^2} = a$.

Trong tam giác vuông SHC, ta có $SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = a\sqrt{6}$.

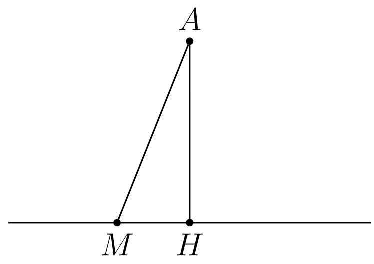
Chọn đáp án D □

Câu 50. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $M(4;-2;1)$, song song với mặt phẳng $(\alpha)\colon 3x-4y+z-12=0$ và cách $A(-2;5;0)$ một khoảng lớn nhất.

A $\begin{cases} x=4-t \\ y=-2+t \\ z=1+t \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x=4+t \\ y=-2-t \\ z=-1+t \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x=1+4t \\ y=1-2t \\ z=-1+t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x=4+t \\ y=-2+t \\ z=1+t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của điểm A xuống đường thẳng Δ. Khi đó $AH \le AM$.



Vậy $\mathrm{d}\left(A,\Delta\right)$ lớn nhất khi $H \equiv M$, hay $AM \perp \Delta$.

Ta có $\overleftrightarrow{AM}=(6;-7;1)$.

Gọi $\vec{n}_{(\alpha)}=(3;-4;1)$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

Ta có $\left[\overrightarrow{AM},\overleftrightarrow{n}_{(\alpha)}\right]=(-3;-3;-3)$.

Do $\begin{cases} AM \perp \Delta \\ \Delta \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \Delta$ nhận $\left[\overrightarrow{AM},\vec{n}_{(\alpha)}\right]$ làm một véc-tơ chỉ phương. Hay $\vec{u}_\Delta=(1;1;1)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

Do $M \in \Delta$ nên phương trình Δ là $\begin{cases} x=4+t \\ y=-2+t \\ z=1+t. \end{cases}$

Chọn đáp án D $\square$

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. B	3. C	4. B	5. C	6. B	7. A	8. C	9. D	10. D
11. A	12. B	13. A	14. C	15. C	16. B	17. A	18. B	19. D	20. B
21. A	22. D	23. B	24. A	25. C	26. B	27. D	28. B	29. D	30. C
31. C	32. D	33. A	34. A	35. A	36. B	37. C	38. D	39. A	40. C
41. D	42. B	43. A	44. B	45. C	46. C	47. D	48. A	49. D	50. D

2 ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC, VĨNH PHÚC, LẦN 3 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1;0;0)$, $B(0;0;2)$, $C(0;-3;0)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là

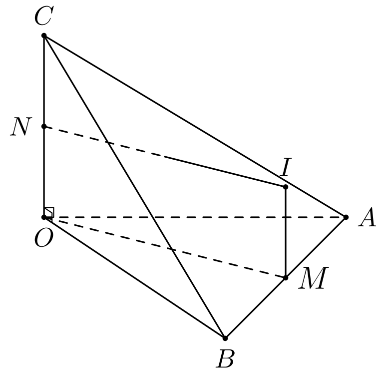
(A) $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$. (B) $\sqrt{14}$. (C) $\dfrac{\sqrt{14}}{3}$. (D) $\dfrac{\sqrt{4}}{2}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Dựng tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp.

Cách giải:



Tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và OC.

Ta có $\begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{cases} \Rightarrow OC \perp (OAB)$.

Qua M dựng đường thẳng song song với OC, qua N dựng đường thẳng song song với OM. Hai đường thẳng này cắt nhau tại I. ΔOAB vuông tại $O \Rightarrow M$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta OAB \Rightarrow IO = IA = IB$. và $I \in IN \Rightarrow IO = IC \Rightarrow IO = IA = IB = IC \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp $O.ABC$.

Ta có: $OA = 1, OB = 2, OC = 3$

$\Rightarrow OM = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}\sqrt{1^2 + 2^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

$R = OI = \sqrt{IM^2 + OM^2} = \sqrt{\dfrac{9}{4} + \dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 11$ và công sai $d = 4$. Hãy tính u_{99}.

(A) 401. (B) 404. (C) 403. (D) 402.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng công thức SHTQ của cấp số cộng: $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Cách giải:

Ta có:

$u_1 = 11; d = 4$

$\Rightarrow u_{99} = u_1 + (99-1).d = 11 + 98.4 = 403$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

(A) $a = 0$. (B) $a = -1$. (C) $a = 2$. (D) $a = 1$.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng định nghĩa hàm số liên tục.

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Cách giải:

Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} (x+1) = a \Leftrightarrow 2 = a$.

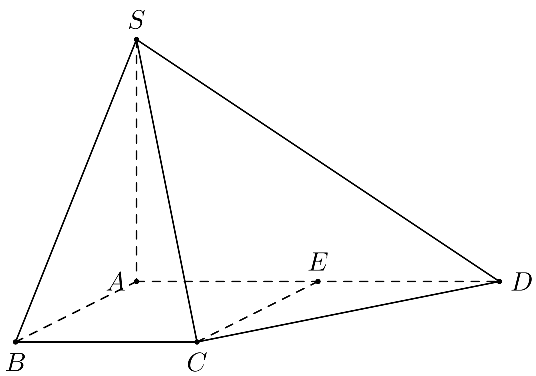
Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B. Biết $SA \perp (ABCD)$, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AD. Tính bán kính mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, D, E.

A $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. B a. C $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. D $\dfrac{a\sqrt{30}}{6}$.

Lời giải.

Phương pháp:



Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy, sử dụng công thức tính nhanh bán kính mặt cầu ngoại tiếp $R = \sqrt{\dfrac{h^2}{4} + R_d^2}$ trong đó h là chiều cao khối chóp, R_d là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy.

Cách giải:

Xét tứ giác $ABCE$ có $AE \parallel BC$, $AE = BC = a$ $\Rightarrow ABCE$ là hình bình hành. Lại có $\widehat{BAE} = 90^\circ$ (gt), $AC = BC \Rightarrow ABCE$ là hình vuông cạnh a.

$\Rightarrow$ Bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCE là $R_d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Sử dụng công thức tính nhanh bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCE$ là:

$R = \sqrt{\dfrac{SA^2}{4} + R_d^2} = \sqrt{\dfrac{2a^2}{4} + \dfrac{2a^2}{4}} = a$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Gọi x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $3\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$. Chọn khẳng định đúng?

A $x_0 \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$. B $x_0 \in \left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$. C $x_0 \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. D $x_0 \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng phương pháp giải phương trình đẳng cấp bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$. Chia cả 2 vế của phương trình cho $\cos^2 x \neq 0$.

Cách giải:

Phương trình: $3\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0 \ (*)$

+) $\cos x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1$ không phải là nghiệm của phương trình $(*)$

+) $\cos x \neq 0$. Ta có:

$$3\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 3\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 2\cdot\frac{\sin x}{\cos x} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^2 x + 2\tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \arctan\dfrac{1}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình là $x = \arctan\dfrac{1}{3} \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Hàm số $y = x^4 - x^3 - x + 2019$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 2. (B) 3. (C) 0. **D** 1.

Lời giải.

Ta có: $y' = 4x^3 - 3x^2 - 1 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$y'' = 12x^2 - 6x \Rightarrow y''(1) = 12 - 6 = 6 > 0$.

$\Rightarrow x = 1$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 1 điểm cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

(A) -2. **B** $\dfrac{1}{2}$. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$ xác định trên đoạn $[-2; 3]$.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{3}{(x+3)^2} > 0, \forall x \in [-2; 3] \Rightarrow$ Hàm số luôn đồng biến trên đoạn $[-2; 3]$.

$\Rightarrow$ GTLN của hàm số $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$ trên đoạn $[-2; 3]$ là $f(3) = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên R, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

B Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

(D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

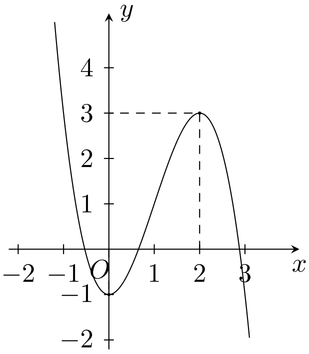
Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta thấy. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$.

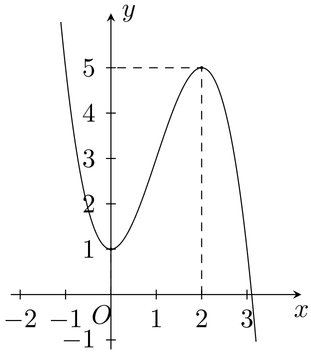
Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; -2)$.

Chọn đáp án B □

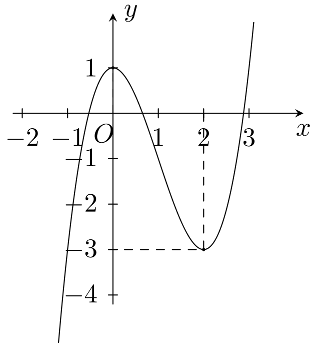
Câu 9. Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ có đồ thị nào trong các đồ thị dưới đây?



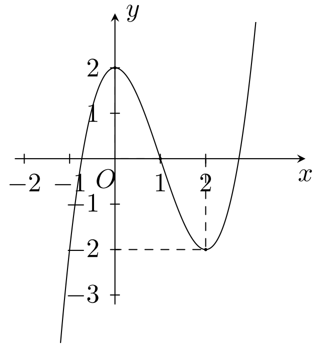
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

Ⓐ Hình 3. **B** Hình 1. Ⓒ Hình 2. Ⓓ Hình 4.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty \Rightarrow$ loại đáp án A và D.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; -1) \Rightarrow$ loại đáp án C.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Gọi n là số nguyên dương sao cho $\dfrac{1}{\log_3 x} + \dfrac{1}{\log_{3^2} x} + \dfrac{1}{\log_{3^3} x} + \cdots + \dfrac{1}{\log_{3^n} x} = \dfrac{190}{\log_3 x}$ đúng với mọi x dương, $x \neq 1$. Tìm giá trị của biểu thức $P = 2n + 3$.

Ⓐ $P = 23$. **B** $P = 41$. Ⓒ $P = 43$. Ⓓ $P = 32$.

Lời giải.

Với mọi $x > 0, x \neq 1$ ta có:

$\dfrac{1}{\log_3 x} + \dfrac{1}{\log_{3^2} x} + \dfrac{1}{\log_{3^3} x} + \cdots + \dfrac{1}{\log_{3^n} x} = \dfrac{190}{\log_3 x}$

$\Leftrightarrow \log_x 3 + \log_x 3^2 + \cdots + \log_x 3^n = 190 \log_x 3$

$\Leftrightarrow \log_x \left(3.3^2.3^3 \ldots 3^n\right) = 190 \log_x 3$

$\Leftrightarrow \log_x 3^{1+2+3+\cdots+n} = 190 \log_x 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{n(n+1)}{3} = 190 \Leftrightarrow n(n+1) = 380 \Leftrightarrow n = 19.$

$\Rightarrow P = 2n + 3 = 41.$

Chọn đáp án B □

Câu 11. Có bao nhiêu số hạng trong khai triển nhị thức $(2x-3)^{2018}$ thành đa thức

A 2019. Ⓑ 2020. Ⓒ 2018. Ⓓ 2017.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng khai triển nhị thức Newton: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k}$.

Cách giải:

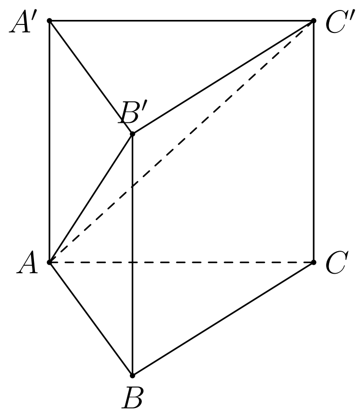
Ta có: $(2x-3)^{2018} = \sum\limits_{k=0}^{2018} C_{2018}^k (2x)^k.(-3)^{2018-k}$, do đó khai triển trên có 2019 số hạng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Tính thể tích khối đa diện $ABCB'C'$.

(A) $\frac{V}{2}$. (B) 45π. (C) 180π. (D) 15π.

Lời giải.



Ta có:

$$V_{ABCA'B'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'}$$
$$= V_{ABC.A'B'C'} - \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$$
$$= \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3}V$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Một người gửi tiết kiệm số tiền 80000000 đồng với lãi suất là $6,9\%$/năm. Biết rằng tiền lãi hàng năm được nhập vào tiền gốc, hỏi sau đúng 5 năm người đó có rút được cả gốc và lãi số tiền gần với con số nào dưới đây?

(A) 107667000 đồng. (B) 105370000 đồng. (C) 111680000 đồng. (D) 116570000 đồng.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng công thức lãi kép $A_n = \text{A}\left(1+r\right)^n$ trong đó: A: tiền gốc.

r: lãi suất.

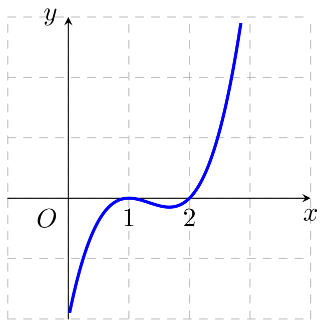
n: thời gian gửi tiết kiệm.

Cách giải:

Ta có $A_5 = 80.(1+6,9\%)^5 = 111,68$ (triệu đồng).

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đồ thị của hàm số $y = f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



(A) $(0;1)$. (B) $(2;+\infty)$.
(C) $(1;2)$. (D) $(0;1)$ và $(2;+\infty)$.

Lời giải.

- **Phương pháp:** Lập BXD của $f'\left(x\right)$ và kết luận các khoảng đơn điệu của hàm số.
- **Cách giải:** Ta có BXD của $f'\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào BXD ta có: Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1),(1;2)$ và đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

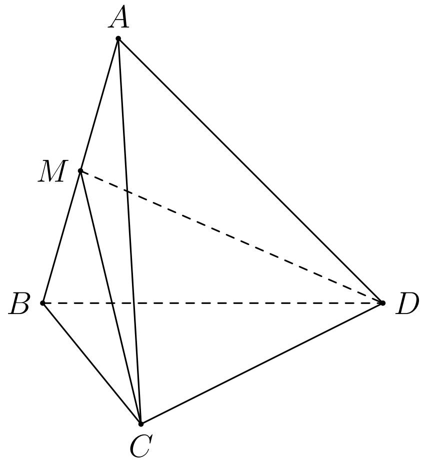
$\Rightarrow y=f(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$

Chọn đáp án B □

Câu 15. Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

A 30^0. B 60^0. C 90^0. D 120^0.

Lời giải.



- **Phương pháp:**
  Gọi M là trung điểm của AB, chứng minh $AB\perp(CDM)$.
- **Cách giải:**
  Gọi M là trung điểm của AB ta có:
  ΔABC đều $\Rightarrow CM\perp AB$.
  ΔABD đều $\Rightarrow DM\perp AB$
  $\Rightarrow AB\perp(MCD)\Rightarrow AB\perp CD\Rightarrow\left(\widehat{AB,CD}\right)=90^0$

Chọn đáp án C □

Câu 16. Cho $\int 2x(3x-2)^6\mathrm{d}x=A(3x-2)^8+B(3x-2)^7+C$ với $A,B,C\in\mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $12A+7B$.

A $\frac{23}{252}$. B $\frac{241}{252}$. C $\frac{52}{9}$. D $\frac{7}{9}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&\int 2x(3x-2)^6\mathrm{d}x\\=&\ \frac{2}{3}\int 3x(3x-2)^6\mathrm{d}x\\=&\ \frac{2}{3}\int\left[(3x-2)^7+2(3x-2)^6\right]\mathrm{d}x\\=&\ \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3\cdot 8}\cdot(3x-2)^8+\frac{2}{3\cdot 7}\cdot(3x-2)^7\right]+C\\=&\ \frac{1}{36}\cdot(3x-2)^8+\frac{4}{63}\cdot(3x-2)^7+C.\end{aligned}$$

Suy ra $A=\frac{1}{36},B=\frac{4}{63}$ nên $12A+7B=\frac{7}{9}$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{1+a^2}\right)^{2x+1}>1$ (với a là tham số, $a\neq0$) là

A $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$. B $(-\infty;0)$. C $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. D $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Vì $0 < \dfrac{1}{1+a^2} < 1$ nên $\left(\dfrac{1}{1+a^2}\right)^{2x+1} > 1 \Leftrightarrow 2x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm nào trong các điểm sau đây?

A $x = -2$. **B** $x = 3$. **C** $x = 2$. **D** $x = 4$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Tìm tập nghiệm của phương trình $3^{x^2+2x} = 1$.

A $S = \{-1; 3\}$. **B** $S = \{-2; 0\}$. **C** $S = \{-3; 1\}$. **D** $S = \{0; 2\}$.

Lời giải.

Ta có $3^{x^2+2x} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Do đó tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; 2\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tìm tọa độ của vec-tơ $\vec{a}$.

A $(2; -3; -1)$. **B** $(-3; 2; -1)$. **C** $(-1; 2; -3)$. **D** $(2; -1; -3)$.

Lời giải.

Vì $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$ nên $\vec{a} = (-1; 2; -3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

A $y = \log_{\sqrt{3}} x$. **B** $y = \log_{\frac{\pi}{4}} x$. **C** $y = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$. **D** $y = \log_2(\sqrt{x} + 1)$.

Lời giải.

Phương pháp:

Hàm số $y = \log_a x\,(0 < a \neq 1)$ đồng biến trên TXĐ khi $a > 1$ và nghịch biến trên TXĐ khi $0 < a < 1$.

Hàm số $y = a^x\,(0 < a \neq 1)$ đồng biến trên TXĐ khi $a > 1$ và nghịch biến trên TXĐ khi $0 < a < 1$.

Cách giải:

Đáp án A: $\sqrt{3} > 1$, nên hàm số đồng biến trên TXĐ.

Đáp án B: $\dfrac{\pi}{4} < 1$, nên hàm số nghịch biến trên TXĐ.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120°$. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

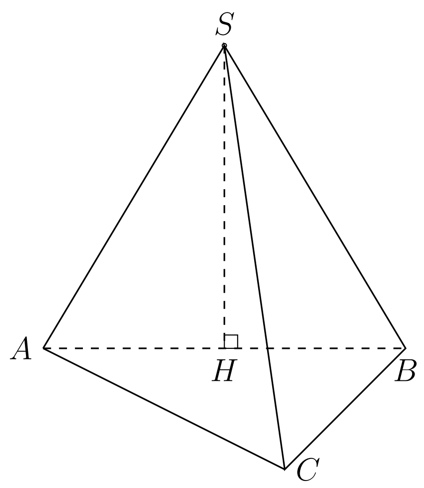
A $V = a^3$. **B** $V = \dfrac{a^3}{2}$. **C** $V = 2a^3$. **D** $V = \dfrac{a^3}{8}$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng công thức tính thể tích khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là:

$$V = \frac{1}{3}Sh.$$

Cách giải:



Gọi H là trung điểm của AB. Ta có $SH \perp AB$ (Tính chất tam giác đều).

Mà có $(SAB) \perp (ABC)$ và $(SAB) \cap (ABC) = AB \Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow V = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{\triangle ABC}$.

Ta có $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (Do tam giác SAB đều cạnh a).

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC\sin\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{8}$.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-2018; 2018]$ để hàm số $y = \ln(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

A 2018. **B** 1009. **C** 2019. **D** 2017.

Lời giải.

Phương pháp: Hàm số $y = \log_a f(x)$ xác định khi và chỉ khi $f(x) > 0$.

Cách giải:

Hàm số $y = \ln(x^2 - 2x - m + 1)$ xác định trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2x - m + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

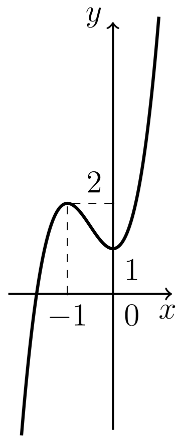
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ 1 + m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-2018; 2018] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-2018; 0) \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2018; -2017; \cdots; -1\}$.

Vậy có 2018 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực tiểu và không có cực đại.
(B) Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại và không có cực tiểu.
(C) Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.
(D) Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

Lời giải.

Phương pháp: Dựa vào đồ thị hàm số để xét dấu của hàm số $y = f'(x)$ và số nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ để kết luận tính đơn điệu và số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

Cách giải: Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại 1 điểm qua điểm đó hàm số $y = f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên điểm đó là điểm cực tiểu của hàm số.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Cho hình trụ có thiết diện đi qua trục là một hình vuông có cạnh bằng $4a$. Diện tích xung quanh S của hình trụ là

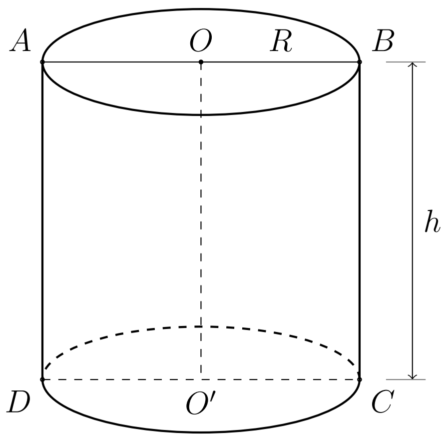
(A) $S = 4\pi a^2$. (B) $S = 8\pi a^2$. (C) $S = 24\pi a^2$. **D** $S = 16\pi a^2$.

Lời giải.

Phương pháp: Công thức tính diện tích xung quanh hình trụ có bán kính đáy R, chiều cao h là

$$S_{xq} = 2\pi Rh.$$

Cách giải:

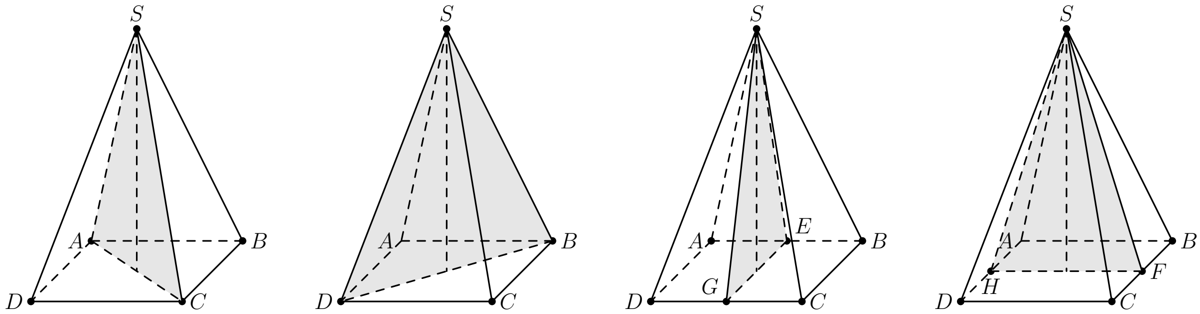


Hình trụ có thiết diện đi qua trục là hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $4a$.
Do đó $h = 2R = 4a \Rightarrow R = 2a$ với R, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ.
Vậy $S = 2\pi Rh = 16\pi a^2$
Chọn đáp án D □

Câu 26. Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A 4. **B** 8. **C** 6. **D** 2.

Lời giải.
Hình chóp tứ giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng (SAC), (SBD), (SEG), (SFH) như hình vẽ với E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.



Chọn đáp án A □

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A Hàm số có đúng một cực trị.
B Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 3.
C Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$.
D Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, giá trị cực đại $y_{CĐ} = 2$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$, giá trị cực tiểu $y_{CT} = -1$.

Chú ý khi giải: Hàm số $y = f'(x)$ không xác định tại $x = 3$, nhưng $x = 3$ vẫn là điểm cực tiểu của hàm số vì qua điểm $x = 3$ thì y' đổi dấu từ âm sang dương.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Tìm nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \dfrac{1}{x}$

A. $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} - \ln|x| + C$.

B. $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{1}{x^2} + C$.

C. $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} - \ln x + C$.

D. $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$.

Lời giải.

$$I = \int \left(x^2 - 3x + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$$

Chú ý khi giải: Dùng dấu giá trị tuyệt đối khi có $\ln|x|$, học sinh có thể chọn nhầm đáp án C.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 10]$ và $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 7$ và $\displaystyle\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $P = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $P = -4$.
B. $P = 10$.
C. $P = 7$.
D. $P = 4$.

Lời giải.

Ta có: $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow P = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 7 - 3 = 4.$$

Chọn đáp án D □

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 0.

A. $m = 6$.
B. $m = 4$.
C. $m = 0$.
D. $m = 2$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

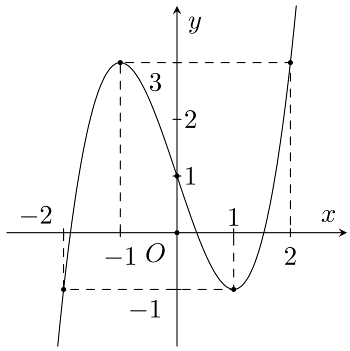
Ta có: $y' = -3x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1; 1] \\ x = -2 \notin [-1; 1] \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(0) = m \\ y(-1) = m - 2 \\ y(1) = m - 4 \end{cases} \Rightarrow \min_{[-1;1]} y = m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 4.$$

Chọn đáp án B □

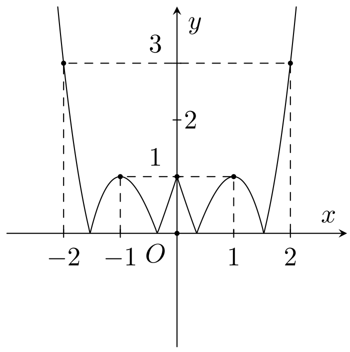
Câu 31.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



Ⓐ 9. **B** 7. Ⓒ 6. Ⓓ 8.

Lời giải.



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-2; -1)$, $(-1; 3)$, $(1; -1)$, $(2; 3)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 = -8a + 4b - 2c + d \\ 3 = -a + b - c + d \\ -1 = a + b + c + d \\ 3 = 8a + 4b + 2c + d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow y = x^3 - 3x + 1.$$

Khi đó ta có đồ thị hàm số $y = \left||x|^3 - 3|x| + 1\right|$ như hình vẽ bên.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x - \cos x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y = F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 1. Ⓑ Vô số điểm. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow F'(x) = f(x)$.

$\Rightarrow F'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x - \cos x}{x^2} = 0\ (x \neq 0) \Leftrightarrow g(x) = x - \cos x = 0$.

Xét hàm số $g(x) = x - \cos x$ ta có $g'(x) = 1 + \sin x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số được viết từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sao cho số đó chia hết cho 15?

Ⓐ 432. Ⓑ 234. Ⓒ 132. **D** 243.

Lời giải.

Gọi số tự nhiên cần lập có dạng $\overline{abcd}$ $(a, b, c, d \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\})$.

Số cần lập chia hết cho 15 nên nó chia hết cho 3 và 5.

Số cần lập chia hết cho 5 nên ta có $d = 5 \Rightarrow d$ có 1 cách chọn.

$\Rightarrow$ Số cần tìm có dạng $\overline{abc5}$.

Số cần lập chia hết cho 3 nên $(a + b + c + 5) \vdots 3$.

Chọn a có 9 cách chọn, chọn b có 9 cách chọn.

- Nếu $(a + b + 5) \vdots 3 \Rightarrow c \in \{3; 6; 9\} \Rightarrow c$ có 3 cách chọn.
- Nếu $(a + b + 5)$ chia cho 3 dư 1 $\Rightarrow c \in \{2; 5; 8\} \Rightarrow c$ có 3 cách chọn.

- Nếu $(a+b+5)$ chia cho 3 dư 2 $\Rightarrow c \in \{1;4;7\} \Rightarrow c$ có 3 cách chọn.

$\Rightarrow$ Có 3 cách chọn c.

Như vậy có $9 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 = 243$ cách chọn.

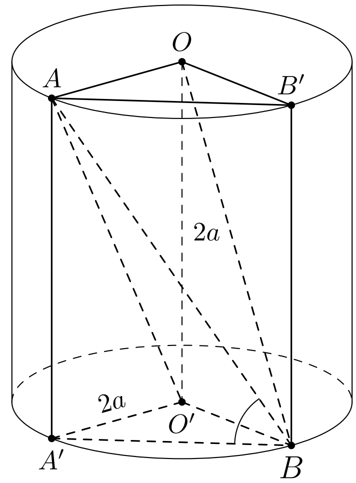
Vậy có 243 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B. Đặt α là góc giữa AB và đáy. Tính $\tan\alpha$ khi thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất.

A $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B** $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$. **C** $\tan\alpha = 1$. **D** $\tan\alpha = \sqrt{2}$.

Lời giải.



Lấy điểm $A' \in (O')$, $B' \in (O)$ sao cho AA', BB' song song với trục OO'.

Khi đó ta có lăng trụ đứng $OAB'.O'A'B$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } V_{OO'AB} &= V_{OAB'.O'A'B} - V_{A.O'A'B} - V_{B.OAB'} \\ &= V_{OAB'.O'A'B} - \frac{1}{3}V_{OAB'.O'A'B} - \frac{1}{3}V_{OAB'.O'A'B} \\ &= \frac{1}{3}V_{OAB'.O'A'B}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow V_{OO'AB} = \dfrac{1}{3}AA' \cdot S_{\triangle OAB'} = \dfrac{1}{6}AA' \cdot OA \cdot OB \cdot \sin\widehat{AOB'}$.

Do đó $V_{OO'AB}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin\widehat{AOB'} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AOB'} = 90^\circ \Leftrightarrow OA \perp OB'$.

$\Rightarrow O'A' \perp O'B \Rightarrow \triangle O'A'B$ vuông tại $O' \Rightarrow A'B = O'A'\sqrt{2} = 2a\sqrt{2}$.

Ta có $AA' \perp (O'A'B) \Rightarrow (AB,(O'A'B)) = \widehat{ABA'} = \alpha$.

$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{AA'}{A'B} = \dfrac{2a}{2a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}$.

A 1. **B** 0. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 4\sqrt{3x+1}-3x-5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{3} \\ 3x+1-4\sqrt{3x+1}+4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{3} \\ \left(\sqrt{3x+1}-2\right)^2 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{3} \\ \sqrt{3x+1}-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{3} \\ 3x+1 \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{3} \\ x \neq 1. \end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D} = \left[-\dfrac{1}{3};1\right) \cup (1;+\infty)$.

Ta có

- $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1-x}{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)^2} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{\sqrt{3x+1}+2}{3\left(\sqrt{3x+1}-2\right)} = +\infty$.

  $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5} = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1-x}{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)^2} = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{\sqrt{3x+1}+2}{3\left(\sqrt{3x+1}-2\right)} = -\infty$.

$\Rightarrow x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{4\sqrt{\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-3-\dfrac{5}{x}} = -\dfrac{1}{3}$.

  $\Rightarrow y = -\dfrac{1}{3}$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ΔABC vuông cân ở B, $AC = a\sqrt{2}$, $SA\perp(ABC)$, $SA = a$. Gọi G là trọng tâm của ΔSBC, mặt phẳng (α) đi qua AG và song song với BC chia khối chóp thành hai phần. Gọi V là thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S. Tính V.

A $\dfrac{5a^3}{54}$. B $\dfrac{4a^3}{9}$. C $\dfrac{2a^3}{9}$. D $\dfrac{4a^3}{27}$.

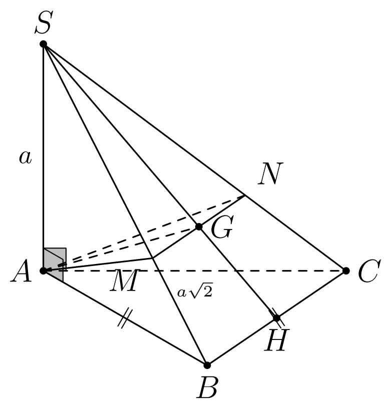
Lời giải.

Phương pháp

- Xác định mặt phẳng đi qua AG và song song với BC.
- Sử dụng công thức tỉ lệ thể tích Simpson.

  Cho chóp $S.ABC, A' \in SA, B' \in SB, C' \in SC$. Khi đó
  $$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}\cdot\frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SC'}{SC}.$$

Cách giải



Trong (SBC) qua G kẻ $MN \parallel BC$ $(M \in SB, N \in SC)$. Khi đó mặt phẳng đi qua AG và song song với BC chính là mặt phẳng (AMN). Mặt phẳng này chia khối chóp thành 2 khối $S.AMN$ và $AMNBC$.

Gọi H là trung điểm của BC.

Vì $MN \parallel BC$ nên theo định lí Ta-lét ta có:

$$\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} = \frac{2}{3}\left(=\frac{SG}{SH}\right)$$
$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$
$$\Rightarrow\quad V_{S.AMN} = \frac{4}{9}V_{S.ABC}.$$

Mà $V_{S.AMN} + V_{AMNBC} = V_{S.ABC} \Rightarrow V_{AMNBC} = \dfrac{5}{9}V_{S.ABC} = V$.

Ta có ΔABC vuông cân tại B

$$\Rightarrow\quad AB = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a^2$$
$$\Rightarrow\quad V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}a.\frac{1}{2}a^2 = \frac{a^3}{6}.$$

Vậy $V = \dfrac{5}{9}.\dfrac{a^3}{6} = \dfrac{5a^3}{54}$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh $SA = BC = 3$; $SB = AC = 4$; $SC = AB = 2\sqrt{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

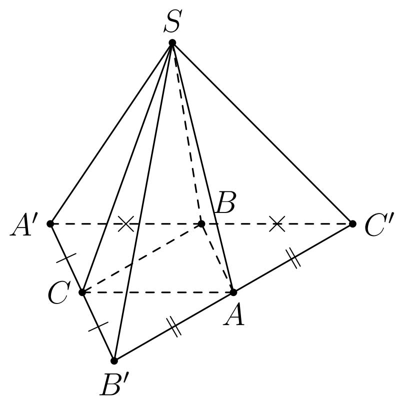
Ⓐ $\dfrac{\sqrt{390}}{12}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{390}}{6}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{390}}{8}$. **D** $\dfrac{\sqrt{390}}{4}$.

Lời giải.

Phương pháp

- Dựng hình chóp $S.A'B'C'$ sao cho A, B, C lần lượt là trung điểm của $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$. Chứng minh chóp $S.A'B'C'$ có SA', SB', SC' đôi một vuông góc.
- Tính thể tích $S.A'B'C'$, từ đó suy ra thể tích $V_{S.ABC}$.

Cách giải



Đặt $SA = SB = a$, $SB = AC = b$, $SC = AB = c$.

Dựng hình chóp $S.A'B'C'$ sao cho A, B, C lần lượt là trung điểm của $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$.

Dễ thấy ΔABC đồng dạng với $\Delta A'B'C'$ theo tỉ số $\dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{4} V_{S.A'B'C'}.$$

Ta có AB, BC, CA là các đường trung bình của tam giác $A'B'C'$

$$\Rightarrow A'B' = 2AB = 2c;\ B'C' = 2BC = 2a;\ A'C' = 2AC = 2b.$$

$\Rightarrow \Delta SA'B', \Delta SB'C', \Delta SC'A'$ là các tam giác vuông tại S (tam giác có trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy) $\Rightarrow SA', SB', SC'$ đôi một vuông góc

$$V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{6} SA' \cdot SB' \cdot SC' \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{24} SA' \cdot SB' \cdot SC'.$$

Áp dụng định lí Py-ta-go ta có:

$$\begin{cases} SA'^2 + SB'^2 = 4c^2 \\ SB'^2 + SC'^2 = 4a^2 \\ SA'^2 + SC'^2 = 4b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SA'^2 = 2\left(b^2 + c^2 - a^2\right) \\ SB'^2 = 2\left(a^2 + c^2 - b^2\right) \\ SC'^2 = 2\left(a^2 + b^2 - c^2\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_{S.ABC} &= \frac{1}{24} \cdot \sqrt{8\left(b^2 + c^2 - a^2\right)\left(a^2 + c^2 - b^2\right)\left(a^2 + b^2 - c^2\right)} \\ &= \frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{\left(b^2 + c^2 - a^2\right)\left(a^2 + c^2 - b^2\right)\left(a^2 + b^2 - c^2\right)}. \end{aligned}$$

Thay $a = 3, b = 4, c = 2\sqrt{5} \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{\sqrt{390}}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, lấy điểm C trên tia Oz sao cho $OC = 1$. Trên hai tia Ox, Oy lần lượt lấy hai điểm A, B thay đổi sao cho $OA + OB = OC$. Tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$?

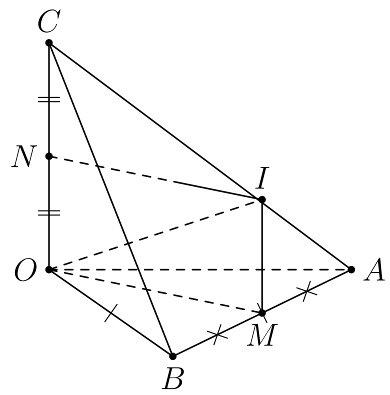
A $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **B** $\sqrt{6}$. **C** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **D** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

Phương pháp

- Dựng tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.
- Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp.

Cách giải



Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0) \Rightarrow OA = |a|, OB = |b|$. Tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và OC. Ta có

$$\begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{cases} \Rightarrow OC \perp (OAB).$$

Qua M dựng đường thẳng song song với OC, qua N dựng đường thẳng song song với OM. Hai đường thẳng này cắt nhau tại I.

ΔOAB vuông tại $O \Rightarrow M$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta OAB \Rightarrow IO = IA = IB$.

$I \in IN \Rightarrow IO = IC \Rightarrow IO = IA = IB = IC$;

$\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp $O.ABC$. Ta có $OM = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$.

$$\begin{aligned} R &= OI = \sqrt{IM^2+OM^2} = \sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{a^2+b^2}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2} \frac{\sqrt{a^2+(1-a^2)+1}}{2} = \frac{\sqrt{2a^2-2a+2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2(a^2-a+1)}}{2} = \frac{\sqrt{2\left(a^2-2.a.\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}}{2} \geq \frac{\sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

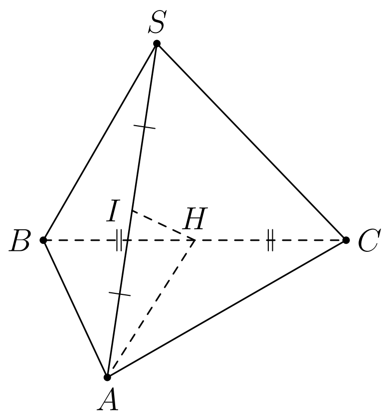
Vậy $R_{\min} = \dfrac{\sqrt{6}}{4} \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow b = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $A, AB = 1$ cm, $AC = \sqrt{3}$ cm. Tam giác SAB, SAC lần lượt vuông tại B và C. Khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $\dfrac{5\sqrt{5}}{6}$ cm^3. Tính khoảng cách từ C tới (SAB).

A $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm. **B** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ cm. **C** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ cm. **D** $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ cm.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của SA.
Tam giác SAB, SAC vuông tại $B, C \Rightarrow IS = IA = IB = IC \Rightarrow$ I là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$.
Gọi H là trung điểm của BC. Vì ΔABC vuông tại A;
$\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
$\Rightarrow IH \perp (ABC)$.
Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$. Theo bài ra ta có:

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}\pi R^3 &= \frac{5\sqrt{5}\pi}{6} \Leftrightarrow R^3 = \frac{5\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{125}}{8} \Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{5}}{2};\\ \Rightarrow IS &= IA = IB = IC = \frac{\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

Xét tam giác vuông ABC có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2 \Rightarrow AH = 1$.
Xét tam giác vuông IAH có: $IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{5}{4} - 1} = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}S_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \Rightarrow V_{I.ABC} &= \frac{1}{3}IH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}SI \cap (ABC) = A &\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\left(S,(ABC)\right)}{\mathrm{d}\left(I,(ABC)\right)} = \frac{SA}{IA} = 2\\ &\Rightarrow \frac{V_{S.ABC}}{V_{S.IBC}} = 2\\ &\Rightarrow V_{S.ABC} = 2V_{I.ABC} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6}.\end{aligned}$$

Xét tam giác vuông SAB có $IB = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$$\Rightarrow SA = 2IB = \sqrt{5} \Rightarrow SB = \sqrt{SA^2 - AB^2} = 2 \Rightarrow S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 1.$$

Ta có

$$\begin{aligned}V_{S.ABC} &= \frac{1}{3}\mathrm{d}\left(C,(SAB)\right).S_{\Delta SAB}\\ \Rightarrow \mathrm{d}\left(C,(SAB)\right) &= \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SAB}} = \frac{3\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0) = 0$. Biết $\int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}$ và $\int\limits_0^1 f'(x)\cos\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng.

$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $\dfrac{6}{\pi}$. **B** $\dfrac{2}{\pi}$. **C** $\dfrac{4}{\pi}$. **D** $\dfrac{1}{\pi}$.

Lời giải.

Phương pháp

- Sử dụng phương pháp từng phần đối với tích phân $\int\limits_0^1 f'(x)\cos\dfrac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{3\pi}{4}$.
- Xét $\int\limits_0^1 \left[f(x) + k\sin\dfrac{\pi x}{2}\right]^2 \mathrm{d}x = 0$, tìm k, từ đó suy ra $f(x) = -k\sin\dfrac{\pi x}{2}$.
- $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 -k\sin\dfrac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$.

Cách giải

Đặt $\begin{cases} u = \cos\dfrac{\pi x}{2} \\ dv = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int\limits_0^1 f'(x)\cos\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x &= \cos\frac{\pi x}{2} f(x)\Big|_0^1 + \frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 f(x)\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= f(1)\cdot\cos\frac{\pi}{2} - f(0)\cdot\cos 0 + \frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 f(x)\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 f(x)\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Xét tích phân

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1 \left[f(x) + k\sin\frac{\pi x}{2}\right]^2 \mathrm{d}x = 0 &\Leftrightarrow \int\limits_0^1 \left[f^2(x) + 2kf(x)\sin\frac{\pi x}{2} + k^2\sin^2\frac{\pi x}{2}\right]\mathrm{d}x = 0 \\
&\Leftrightarrow \int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x + 2k\int\limits_0^1 f(x)\sin\frac{\pi x}{2} + k^2\int\limits_0^1 \sin^2\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{9}{2} + 2k\frac{3}{2} + \frac{1}{2}k^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow k = -3.
\end{aligned}$$

Khi đó ta có

$$\int\limits_0^1 \left[f(x) - 3\sin\frac{\pi x}{2}\right]^2 \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow f(x) - 3\sin\frac{\pi x}{2} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 3\sin\frac{\pi x}{2}.$$

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 3\int\limits_0^1 \sin\dfrac{\pi x}{2}dx = -3\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{2}}{\dfrac{\pi}{2}}\Bigg|_0^1 = \dfrac{-6}{\pi}\cos\dfrac{\pi x}{2}\Bigg|_0^1 = -\dfrac{6}{\pi}\left(\cos\dfrac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \dfrac{6}{\pi}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình
$e^{3m} + e^m = 2\left(x + \sqrt{1-x^2}\right)\left(1 + x\sqrt{1-x^2}\right)$ có nghiệm ?

(A) $\left[\dfrac{1}{2}\ln 2; +\infty\right)$. **B** $\left(0; \dfrac{1}{2}\ln 2\right)$. (C) $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\ln 2\right]$. (D) $\left(0; \dfrac{1}{e}\right)$.

Lời giải.

Phương pháp:

- Đặt $x + \sqrt{1-x^2} = t$, tìm khoảng giá trị của t.
- Đưa bài toán về dạng $m = f(t)$. Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm.

Cách giải:

ĐKXĐ: $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Đặt $x + \sqrt{1-x^2} = t$ ta có $t^2 = x^2 + 1 - x^2 + 2x\sqrt{1-x^2} = 1 + 2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x\sqrt{1-x^2} = \dfrac{t^2-1}{2}$.

Ta có: $t(x) = x + \sqrt{1-x^2}, x \in [-1;1] \Rightarrow t'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

BBT:

x	-1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$t'(x)$		$+$	0	$-$	
$t(x)$	-1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1

Từ BBT ta có: $t \in \left[-1; \sqrt{2}\right]$.

Khi đó phương trình trở thành: $e^{3m} + e^m = 2t\left(1 + \dfrac{t^2-1}{2}\right) = t(t^2+1) = t^3 + t\ (*)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0\ \forall t \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\left(-1; \sqrt{2}\right)$.

Từ $(*) \Rightarrow f(e^m) = f(t) \Leftrightarrow e^m = t \Leftrightarrow m = \ln t \Rightarrow m \in \left(0; \ln\sqrt{2}\right) = \left(0; \dfrac{1}{2}\ln 2\right)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3, f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f"(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f"(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(x + 2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây ?

(A) $(0;2)$. **(B)** $(-\infty;-2017)$. (C) $(-2017;0)$. (D) $(2017;+\infty)$.

Lời giải.

Phương pháp:

- Từ BXD của $f''(x)$ ta suy ra BBT của $f'(x)$ và suy ra BBT của hàm số $f'(x+2017)+2018$.
- Giải phương trình $f'(x+2017)+2018=0$, lập BBT của hàm số $y=f(x+2017)+2018x$ và xác định GTNN.

Cách giải:

Ta có: $y'=f'(x+2017)+2018=0$

Từ BXD của $f''(x)$ ta suy ra BBT của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-2018	↗	$+\infty$

Từ BBT ta có: $f'(x+2017)=-2018 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2017=2 \\ x+2017=a<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-2015 \\ x_2<-2017 \end{array}\right.$.

Từ đó ta suy ra BBT của hàm số $f'(x+2017)+2018$ như sau:

Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f'(x)$ lên trên 2018 đơn vị.

Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f'(x)$ sang trái 2017 đơn vị.

x	$-\infty$	x_2		-2017		-2015		$+\infty$
$f''(x)$			$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x+2017)+2018$	$-\infty$	↗		2021	↘	0	↗	$+\infty$

Suy ra BBT của hàm số $y=f(x+2017)+2018x$

x	$-\infty$		$x_2<-2017$		-2015		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↗		↗	$+\infty$

Vậy hàm số đạt GTNN tại $x_2<-2017$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số $y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$?

(A) 2020. **B** 2019. (C) 2028. (D) 2018.

Lời giải.

Phương pháp:

- Sử dụng công thức $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, đặt ẩn phụ $t = \sin x$.
- Để hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b) \Rightarrow f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a; b)$.

Cách giải:

$y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1 = \sin^3 x - 3\left(1 - \sin^2 x\right) - m\sin x - 1$.

$y = \sin^3 x + 3\sin^2 x - m\sin x - 4$.

Đặt $t = \sin x$, với $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0; 1]$.

Bài toán trở thành tìm m để hàm số $y = t^3 + 3t^2 - mt - 4$ đồng biến trên $[0; 1]$.

TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3t^2 + 6t - m$.

Để hàm số đồng biến trên $[0; 1]$

$\Rightarrow y' \geq 0\ \forall t \in [0; 1] \Rightarrow 3t^2 + 6t - m \geq 0\ \forall t \in [0; 1] \Leftrightarrow m \leq 3t^2 + 6t\ \forall t \in [0; 1]$.

$\Rightarrow m \leq f(t) = 3t^2 + 6t\ \forall t \in [0; 1] \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{[0;1]} f(t)$.

Xét hàm số $f(t) = 3t^2 + 6t$, ta có $f(0) = 0, f(1) = 9 \Rightarrow \min\limits_{[0;1]} f(t) = 0 \Leftrightarrow m \leq 0$.

Kết hợp điều kiện đề bài $\Rightarrow \begin{cases} m \in (-2019; 0] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$ Có 2019 giá trị của m thoả mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có 4 chữ số. Tính xác suất để số được chọn có dạng $\overline{abcd}$, trong đó $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 9$

(A) 0.079. **B** 0.055. (C) 0.014. (D) 0.0495.

Lời giải.

Phương pháp:

Xét các trường hợp sau:

- TH1:$1 \leq a < b < c < d \leq 9$. Số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$.
- TH2:$1 \leq a = b < c < d \leq 9$. Số cần tìm có dạng $\overline{aacd}$.
- TH3:$1 \leq a = b = c < d \leq 9$. Số cần tìm có dạng $\overline{aaad}$.
- TH4:$1 \leq a = b = c = d \leq 9$ Số cần tìm có dạng $\overline{aaaa}$.

Cách giải:

Không gian mẫu $n(\Omega) = 9 \cdot 10^3 = 9000$.

Gọi A là biến cố: "số được chọn có dạng $\overline{abcd}$, trong đó $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 9$ ".

TH1:$1 \leq a < b < c < d \leq 9$. Số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$.

Chọn ngẫu nhiên 4 số trong các số từ 1 đến 9 có $\mathrm{C}_9^4 = 126$ cách.

Có duy nhất một cách xếp các chữ số a, b, c, d theo thứ tự tăng dần, do đó trường hợp này có 126 số thoả mãn.

TH2:$1 \leq a = b < c < d \leq 9$. Số cần tìm có dạng $\overline{aacd}$.

Chọn ngẫu nhiên 3 số trong các số từ 1 đến 9 có $\mathrm{C}_9^3 = 84$ cách.

Có duy nhất một cách xếp các chữ số a, c, d theo thứ tự tăng dần, do đó trường hợp này có 84 số thoả mãn.
Tương tự như vậy, các trường hợp $1 \leq a < b = c < d \leq 9$,$1 \leq a < b < c = d \leq 9$, mỗi trường hợp cũng có 84 số thoả mãn.
TH3:$1 \leq a = b = c < d \leq 9$. Số cần tìm có dạng $\overline{aaad}$.
Chọn ngẫu nhiên 2 số trong các số từ 1 đến 9 có $\mathrm{C}_9^2 = 36$ cách.
Có duy nhất một cách xếp các chữ số a, d theo thứ tự tăng dần, do đó trường hợp này có 36 số thoả mãn.
Tương tự như vậy, các trường hợp $1 \leq a < b = c = d \leq 9$,$1 \leq a < b = c = d \leq 9$, mỗi trường hợp cũng có 36 số thoả mãn.
TH4:$1 \leq a = b = c = d \leq 9$ Số cần tìm có dạng $\overline{aaaa}$. Có 9 số thoả mãn.
$\Rightarrow n\left(A\right) = 126 + 3 \cdot 84 + 3 \cdot 36 + 9 = 495$.
Vậy $\mathrm{P}\left(A\right) = \dfrac{495}{9000} = 0{,}055$.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Xét các số thực dương x, y thoả mãn $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \leq \log_{\frac{1}{2}}\left(x + y^2\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất P_{min} của biểu thức $P = x + 3y$

A $P_{min} = \dfrac{17}{2}$. **B** $P_{min} = 8$. **C** $P_{min} = 9$. **D** $P_{min} = \dfrac{25\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.
Phương pháp:
- Sử dụng công thức $\log_a x + \log_a y = \log_a (xy)\ \ (0 < a \neq 1, x, y > 0)$, giải bất phương trình lôgarit cơ bản $\log_a f\left(x\right) \leq \log_a g\left(x\right)\ \ (0 < a < 1) \Leftrightarrow f\left(x\right) \geq g\left(x\right)$.
- Rút x theo y thế vào P.
- Đưa P về dạng $\mathrm{P} = f\left(y\right)$. Lập BBT và tìm GTNN của $\mathrm{P} = f\left(y\right)$.

Cách giải:
Theo bài ra ta có:
$\log_{\frac{1}{2}x} + \log_{\frac{1}{2}y} \leq \log_{\frac{1}{2}}\left(x + y^2\right) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(xy) \leq \left(x + y^2\right) \Leftrightarrow xy \geq x + y^2$
$x\left(y - 1\right) \geq y^2 > 0$. Mà $x > 0 \Rightarrow y - 1 > 0 \Leftrightarrow y > 1$.
$x \geq \dfrac{y^2}{y-1}$. Khi đó ta có $\mathrm{P} = x + 3y \geq \dfrac{y^2}{y-1} + 3y$ với $y > 1$.
Xét hàm số $f\left(y\right) = \dfrac{y^2}{y-1} + 3y$ với $y > 1$ ta có:

$$f'\left(y\right) = \frac{2y\left(y-1\right) - y^2}{\left(y-1\right)^2} + 3 = \frac{y^2 - 2y + 3y^2 - 6y + 3}{\left(y-1\right)^2} = \frac{4y^2 - 8y + 3}{\left(y-1\right)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

BBT:

y	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(y)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(y)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	9	↗	$+\infty$

Từ BBT ta thấy $\min\limits_{y>1} f(y) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 9$.

Vậy $\mathrm{P} \geq 9$ hay $\mathrm{P}_{min} = 9$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x) = 3f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $\int\limits_0^1 f(x)dx = 1$. Tính tích phân $I = \int\limits_1^2 f(x)dx$.

A $I = 3$. **B** $I = 5$. **C** $I = 2$. **D** $I = 6$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_1^2 f(x)dx = \int\limits_0^2 f(x)dx - \int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^2 f(x)dx - 1 = J - 1$, $\left(\text{với } J = \int\limits_0^2 f(x)dx\right)$.

Mặt khác ta có $1 = \int\limits_0^1 f(x)dx = \dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 3f(x)dx = \dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 f(2x)dx = 1 \Rightarrow \int\limits_0^1 f(2x)dx = 3$

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = 2. \end{cases}$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 f(2x)dx = \int\limits_0^2 f(t)dt = \int\limits_0^2 f(x)dx = 3 \Rightarrow J = 3$.

Vậy $I = \int\limits_1^2 f(x)dx = 3 - 1 = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Tìm tập S tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x + 4y - 6 + m^2) \geq 1$ và $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

A $S = \{-5; 5\}$. **B** $S = \{-7; -5; -1; 1; 5; 7\}$.

C $S = \{-5; -1; 1; 5\}$. **D** $S = \{-1; 1\}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\log_{x^2+y^2+2}(4x + 4y - 6 + m^2) \geq 1 = \log_{x^2+y^2+2}(x^2 + y^2 + 2) \\
\Leftrightarrow &4x + 4y - 6 + m^2 \geq x^2 + y^2 + 2 \text{ (do } x^2 + y^2 + 2 > 1) \\
\Leftrightarrow &x^2 + y^2 - 4x - 4y - m^2 + 8 \leq 0 \\
\Leftrightarrow &(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq m^2 \quad (1)
\end{aligned}$$

(1) là hình tròn (C_1) có tâm $I(2;2)$, bán kính $(R_1 = |m|$ với $m \neq 0$ hoặc là điểm $I(2;2)$ với $m = 0$.
Ta có $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ (2) là đường tròn (C_2) có tâm $J(-1;2)$ bán kính $R_2 = 2$.
Khi $m = 0$ ta có $I(2;2) \notin (C_2)$ nên yêu cầu bài toán không thỏa mãn.
Khi $m \neq 0$ ta nhận thấy để tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn 2 điều kiện (1) và (2) thì chỉ xảy ra 2 trường hợp sau:
Trường hợp 1: (C_1);(C_2) tiếp xúc ngoài với nhau

$$\Leftrightarrow I_1I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow \sqrt{(-1-2)^2 + (2-2)^2} = m + 2 \Leftrightarrow 3 = m + 2 \Leftrightarrow m = 1(tm).$$

Trường hợp 2: (C_1); (C_2) tiếp xúc trong và $R_1 < R_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I_1I_2 = |R_1 - R_2| \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = |m-2| \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 5 \\ m = -1 \end{array}\right. \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1\ (tm).$$

Vậy $S = \{-1;1\}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(0;2019)$ để $\lim \sqrt{\dfrac{9^n + 3^{n+1}}{5^n + 9^{n+a}}} \leq \dfrac{1}{2187}$?

(A) 2018. (B) 2011. (C) 2012. (D) 2019.

Lời giải.

$$\lim \sqrt{\frac{9^n + 3^{n+1}}{5^n + 9^{n+a}}} = \lim \sqrt{\frac{9^n + 3 \cdot 3^n}{5^n + 9^n \cdot 9^a}} = \lim \sqrt{\frac{1 + 3 \cdot \left(\frac{3}{9}\right)^n}{\left(\frac{5}{9}\right)^n + 9^a}} = \frac{1}{3^a}$$

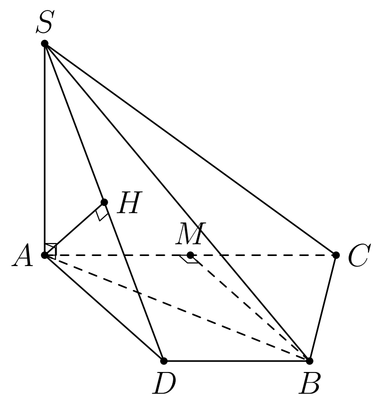
$$\Rightarrow \frac{1}{3^a} \leq \frac{1}{2187} = \frac{1}{3^7} \Leftrightarrow 3^a \geq 3^7 \Leftrightarrow a \geq 7.$$

Kết hợp điều kiện đề bài $\Rightarrow \begin{cases} a \in [7;2019) \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a \in \{7;8;9;\ldots;2018\}$.
Vậy có $2018 - 7 + 1 = 2012$ giá trị của a thỏa mãn.
Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB.

(A) $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$. (D) $2a$.

Lời giải.



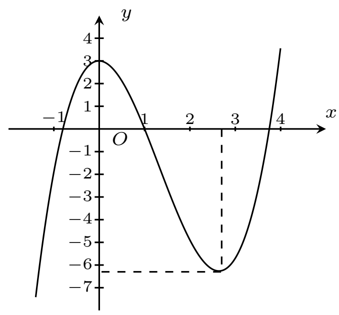
Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB lên (ABC).
$(SB;(ABC)) = (SB;AB) = \widehat{SBA} = 60^\circ$.
Gọi M là trung điểm AC, do tam giác ABC đều nên $BM \perp AC, BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Gọi D là điểm sao cho $AMBD$ là hình bình hành, khi đó dễ thấy $BD \perp (SAD)$ và $\mathrm{d}(AC, BD) = \mathrm{d}(A,(SBD))$.
Kẻ $AH \perp SD$, khi đó ta có $AH \perp (SBD) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SBD)) = AH$.
Xét tam giác vuông SAB ta có $SA = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAD ta có:

$$AH = \frac{SA \cdot AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3a^2 + \dfrac{3a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Vậy $d(AC;SB) = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

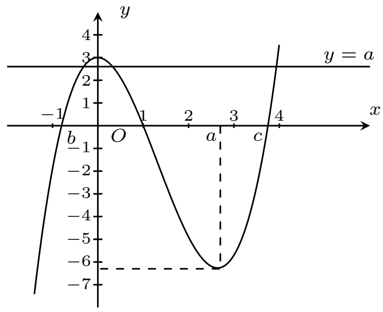
Chọn đáp án (A) □

Câu 50.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới. Đặt $g(x) = f\left[f(x)\right]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.



A 8. **B** 4. **C** 6. **D** 2.

Lời giải.



Ký hiệu a, b, c như hình vẽ.

Ta có $g'(x) = f'[f(x)] \cdot f'(x)$, từ đó suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'[f(x)] = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right.$.

Từ đồ thị của hàm $y = f(x)$ ta suy ra phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 0$ và $x_2 = a \in (2; 3)$, (a là hoành độ của điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$).

$f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = a \end{array}\right.$.

Phương trình $f(x) = 0$ có tập nghiệm $\{x_3; x_4; x_5\} = \{b, 1; c\}$, ($b < 1 < c$ là hoành độ giao điểm của hàm số $y = f(x)$ và trục hoành).

Phương trình $f(x) = 0$ có tập nghiệm $\{x_6; x_7; x_8\}$, ở đó $x_6; x_7; x_8$ là hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = a$ với đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Dễ thấy các nghiệm $x_i,\ i = \overline{1; 8}$ đôi một phân biệt. Từ đó suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có đúng 8 nghiệm.

Chọn đáp án A □

——— HẾT ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. C	3. C	4. B	5. C	6. D	7. B	8. B	9. B	10. B
11. A	12. D	13. C	14. B	15. C	16. D	17. A	18. C	19. D	20. C
21. B	22. D	23. A	24. A	25. D	26. A	27. C	28. D	29. D	30. B
31. B	32. A	33. D	34. A	35. C	36. A	37. D	38. A	39. A	40. A
41. B	42. B	43. B	44. B	45. C	46. C	47. D	48. C	49. A	50. A

3 ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN THÁI NGUYÊN - THÁI NGUYÊN - LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;3)$, $B(-1;2;3)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là

(A) $(0;3;6)$. (B) $(-2;1;0)$. (C) $(0;\frac{3}{2};3)$. (D) $(2;-1;0)$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của đoạn AB. Khi đó

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = 0 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{3}{2} \\ z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = 3. \end{cases}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[0;3]$ bằng

(A) 57. (B) 55. (C) 56. (D) 54.

Lời giải.

Hàm số y liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có đạo hàm $y' = 4x^3 - 6x$.

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}. \end{array}\right.$

Ta có $y(0) = 2$, $y(3) = 56$, $y\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) = -\dfrac{1}{4}$.

Do đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 56.

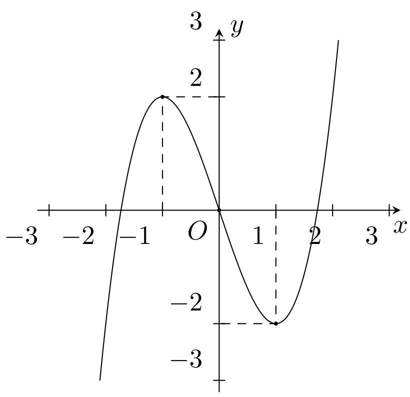
Chọn đáp án (C) □

Câu 3.

Đồ thị hình bên là của hàm số nào?

(A) $y = x^3 - 3x$. (B) $y = -x^3 + 2x$.

(C) $y = x^3 + 3x$. (D) $y = -x^3 - 2x$.



Lời giải.

Do $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ nên hai đáp án B và D bị loại.

Ta có $(x^3 + 3x)' = 3x^2 + 3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = x^3 + 3x$ không có điểm cực trị.

Ta có $(x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$. Hàm số này có hai điểm cực trị.

Lại có hàm số có đồ thị như đầu bài có hai điểm cực trị nên suy ra đáp án đúng là A.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)$. Tìm khoảng nghịch biến của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

(A) $(-\infty; 0)$ và $(1; 2)$. **(B)** $(0; 1)$. **(C)** $(0; 2)$. **(D)** $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	1	$-$	2	$+$	

Vậy hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Hàm số $y = -x^4 - x^2 + 1$ có mấy điểm cực trị?

(A) 3. **(B)** 0. **(C)** 1. **(D)** 2.

Lời giải.

Ta có $y' = -4x^3 - 2x$.

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow -2x(2x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	

Vậy hàm số có 1 cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = 3^x \cdot 2^x$. Khi đó đạo hàm $f'(x)$ của hàm số là

(A) $f'(x) = 3^x \cdot 2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln 3$. **(B)** $f'(x) = 6^x \ln 6$.

(C) $f'(x) = 2^x \ln 2 - 3^x \ln x$. **(D)** $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln x$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = 3^x \cdot 2^x = (3 \cdot 2)^x = 6^x$. Cho nên $f'(x) = 6^x \ln 6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

B Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

C Hàm số có đúng một cực trị.

D Hàm số có giá trị cực đại bằng 2.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có, dấu của y' đổi từ dương sang âm nên hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ và dấu của y' đổi từ dương sang âm nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1, giá trị cực đại của hàm số bằng 0.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Với a, b, c là các số thực dương tùy ý khác 1 và $\log_a c = x$, $\log_b c = y$. Khi đó giá trị của $\log_c(ab)$ bằng

A $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. **B** $\frac{xy}{x+y}$. **C** $\frac{1}{xy}$. **D** $x + y$.

Lời giải.

Với a, b, c là các số thực dương tùy ý khác 1, ta có $\log_c a = \frac{1}{x}$ và $\log_c b = \frac{1}{y}$.

Khi đó $\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Chọn đáp án A □

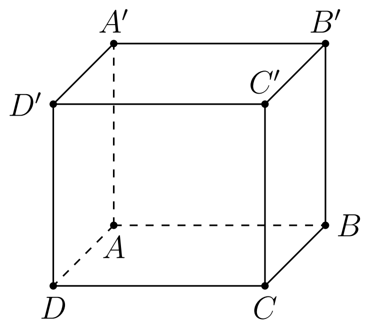
Câu 9. Trong không gian, cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 1$ m, $AA' = 3$ m và $BC = 2$ m. Tính thể tích V của khối hộp chữ nhật đó.

A $V = \sqrt{5}$ m^3. **B** $V = 6$ m^3. **C** $V = 3$ m^3. **D** $V = 3\sqrt{5}$ m^3.

Lời giải.

Thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là

$$V = AB \cdot AD \cdot AA' = AB \cdot BC \cdot AA' = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \text{ m}^3.$$



Chọn đáp án B □

Câu 10. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 1$ là

A $F(x) = 2x^2 + x$. **B** $F(x) = 2$.

C $F(x) = C$. **D** $F(x) = x^2 + x + C$.

Lời giải.

Ta có

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (2x+1)\,\mathrm{d}x = x^2 + x + C.$$

Chọn đáp án D □

Câu 11. Các khoảng nghịch biến của hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ là

(A) $(-\infty; +\infty) \setminus \{1\}$.
(B) $(-\infty; 1)$.
(C) $(-\infty; 1$ và $(1; +\infty)$.
(D) $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Phương pháp

Hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}(ad \neq bc)$ luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên từng khoảng xác định của hàm số. Công thức tính nhanh đạo hàm của hàm số là $y' = \dfrac{ad - bc}{(cx+d)^2}$.

Cách giải

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \dfrac{2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1}{(x-1)^2} = -\dfrac{3}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in \mathscr{D}$.

Vậy hàm số luôn nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Tính diện tích của mặt cầu có bán kính $r = 2$.

(A) $\dfrac{32}{3}\pi$.
(B) 8π.
(C) 32π.
(D) 16π.

Lời giải.

Phương pháp

Công thức tính diện tích mặt cầu bán kính R là $S = 4\pi R^2$.

Cách giải

Công thức tính diện tích mặt cầu bán kính $r = 2$ là $S = 4\pi r^2 = 16\pi$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Xác định số thực x để dãy số $\log 2; \log 7; \log x$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

(A) $x = \dfrac{7}{2}$.
(B) $x = \dfrac{49}{2}$.
(C) $x = \dfrac{2}{49}$.
(D) $x = \dfrac{2}{7}$.

Lời giải.

Phương pháp

Cho ba số a, b, c lập thành cấp số cộng thì ta có $2b = a + c$.

Cách giải

Điều kiện $x > 0$.

Ta có 3 số $\log 2; \log 7; \log x$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng
nên $2\log 7 = \log 2 + \log x$

$\Leftrightarrow \log 7^2 = \log 2x$

$\Leftrightarrow 2x = 49 \Leftrightarrow x = \dfrac{49}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Hàm số $f(x) = \mathrm{C}_{2019}^0 + \mathrm{C}_{2019}^1 x + \mathrm{C}_{2019}^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2019}^{2019} x^{2019}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 0.
(B) 2018.
(C) 1.
(D) 2019.

Lời giải.

Phương pháp

- Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là số nghiệm bội lẻ của phương trình $f'(x) = 0$.

- Sử dụng công thức $\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n = (x+1)^n$.

Cách giải

Ta có $f(x) = \mathrm{C}_{2019}^0 + \mathrm{C}_{2019}^1 x + \cdots + \mathrm{C}_{2019}^{2019} x^{2019} = (x+1)^{2019}$

$\Rightarrow f'(x) = [(x+1)^{2019}] = 2019(x+1)^{2018}$.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2019(x+1)^{2018} = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Vì $x = 1$ là nghiệm bội 2018 nên $x = -1$ không phải là điểm cực trị của hàm số đã cho.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Công thức tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón có đường sinh l, bán kính đáy r là

A $S_{\text{xq}} = 4\pi r l$. B $S_{\text{xq}} = \pi r l$. C $S_{\text{xq}} = \pi r l$. D $S_{\text{xq}} = 3\pi r l$.

Lời giải.

Công thức tính diện tích xung quanh hình nón có bán kính đáy r, chiều cao h và đường sinh l là $S_{\text{xq}} = \pi r l$.

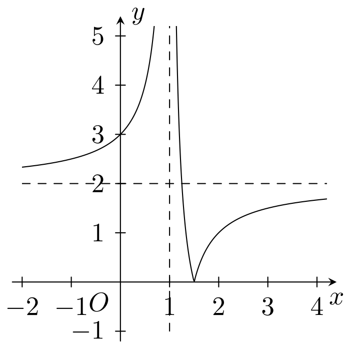
Chọn đáp án C □

Câu 16.

Đồ thị hình bên là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số cho dưới đây?

A $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$. B $y = \dfrac{2x-3}{|x-1|}$.

C $y = \dfrac{|2x-3|}{x-1}$. D $y = \left|\dfrac{2x-3}{x-1}\right|$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0, 3)$ nên các đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{|x-1|}$ và $y = \dfrac{|2x-3|}{x-1}$ không thỏa mãn.

Với $1 < x < \dfrac{3}{2}$ đồ thị hàm số có giá trị dương mà $y = \dfrac{2x-3}{x-1} < 0$ với $\forall x \in \left(1; \dfrac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Cho hàm số $y = \dfrac{mx-4}{x+1}$ (với m là tham số) có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	-2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-2

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A Với $m = 3$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

B Với $m = 9$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

(C) Với $m = 6$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

D Với $m = -2$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{m+4}{(x+1)^2}$. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi $m + 4 > 0 \Leftrightarrow m > -4$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -2 \Leftrightarrow m = -2$ (thỏa mãn $m > -4$).

Vậy $m = -2$ thì hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 + 1$.

A $y = x + 1$. (B) $y = -x + 1$. (C) $y = x - 1$. (D) $y = -x - 1$.

Lời giải.

- TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- $y' = -6x^2 + 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

  Ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	-	

  Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$. Giá trị cực tiểu $y_{\text{CT}} = 1$.

  Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$. Giá trị cực đại $y_{\text{CĐ}} = 2$.

  Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có phương trình

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-1}{2-1} \Leftrightarrow x = y - 1 \Leftrightarrow y = x + 1.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x - 4\sqrt{6-x}$ trên $[-3; 6]$. Tổng $M + m$ có giá trị là

(A) -12. **B** -6. (C) 18. (D) -4.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 2 + \dfrac{2}{\sqrt{6-x}} > 0,\ \forall x \in [-3; 6]$, suy ra hàm số đồng biến trên $[-3; 6]$.

Do đó $M = f(6) = 12$, $m = f(-3) = -18$. Vậy $M + m = -6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Số nghiệm thực của phương trình $\log_3 x + \log_3(x-6) = \log_3 7$.

(A) 0. (B) 2. **C** 1. (D) 3.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình $x > 6$. Phương trình đã cho tương đương

$$\log_3\left(x^2 - 6x\right) = \log_3 7 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 7. \end{array}\right.$$

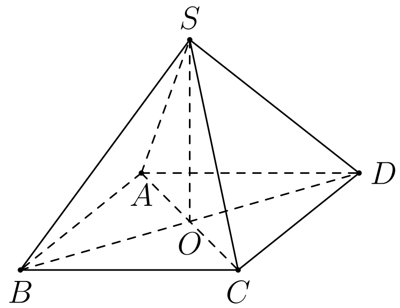
So với điều kiện, phương trình có một nghiệm $x = 7$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, $\widehat{BSA} = 60^\circ$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. (B) $V = a^3\sqrt{2}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **(D)** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải.



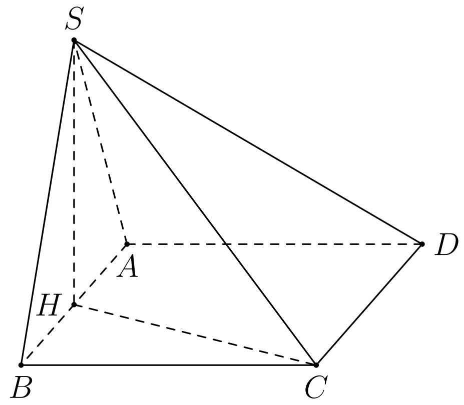
- Công thức tính thể tích khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là $V = \dfrac{1}{3}Sh$.
- Gọi $AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.
- Ta có là hình chóp $S.ABCD$ tứ giác đều $\Rightarrow SA = SB \Rightarrow \Delta SAB$ cân tại S.
- Ta có $\widehat{ASB} = 60^\circ$ nên $\triangle SAB$ đều $\Rightarrow SA = SB = AB = a$.
- Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Vậy $V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB cân tại S có $SA = SB = 2a$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $ABCD$. Gọi α là góc giữa SD và mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\tan\alpha = \sqrt{3}$. (B) $\cot\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. (C) $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (D) $\cot\alpha = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.



- Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB$. Ta có $(SAB) \perp (ABCD)$, $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ $\Rightarrow (SD; (ABCD)) = (SD; HD) = \widehat{SDH} = \alpha$.
- Áp dụng định lý Py-ta-go với các tam giác vuông SAH, ADH ta có

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

$$DH = \sqrt{AH^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

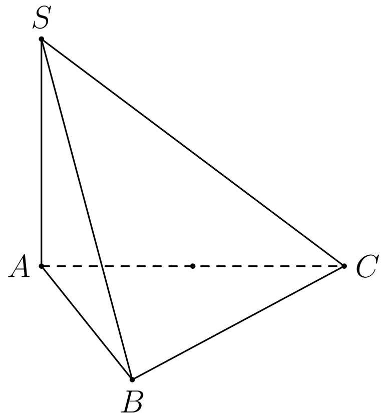
- Vậy $\tan\alpha = \dfrac{SH}{DH} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2} : \dfrac{a\sqrt{5}}{2} = \sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Trong không gian, cho hình chóp $S.ABC$ có SA, AB, BC đôi một vuông góc với nhau và $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$. Mặt cầu đi qua S, A, B, C có bán kính bằng

(A) $\dfrac{2(a+b+c)}{3}$. (B) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. (C) $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **(D)** $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Lời giải.



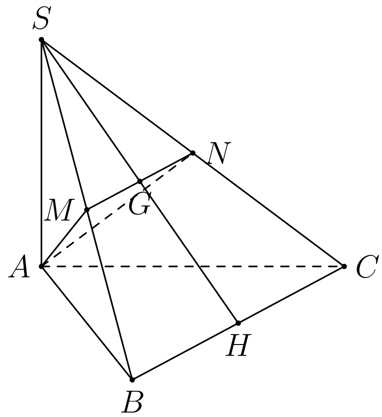
- Ta có SA, AB, BC đôi một vuông góc $\Rightarrow SA \perp (ABC)$ và $\triangle ABC$ vuông tại B.
- Gọi I là trung điểm của là tâm AC thì I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
- Khi đó bán kính đường tròn tâm I ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $r = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{b^2 + a^2}$.
- Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SABC$ là $R = \sqrt{\left(\dfrac{SA}{2}\right)^2 + r^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{b^2 + c^2}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân ở B, $AC = a\sqrt{2}$, $SA \perp mp(ABC)$, $SA = a$. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC, mặt phẳng (α) đi qua AG và song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Tính thể tích V của khối chóp $S.AMN$?

A $V = \dfrac{a^3}{9}$. **B** $V = \dfrac{2a^3}{27}$. **C** $V = \dfrac{2a^2}{9}$. **D** $V = \dfrac{a^3}{6}$.

Lời giải.



- Qua G, kẻ đường thẳng song song với BC, cắt SB tại M và cắt SC tại N. Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow \dfrac{SG}{SH} = \dfrac{2}{3}$.
- Ta có $MN // BC \Rightarrow \dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{SG}{SH} = \dfrac{2}{3}$ và $AB = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = a$.
- Ta có : $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}SA \cdot \dfrac{1}{2}AB^2 = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot \dfrac{1}{2}a^2 = \dfrac{1}{6}a^3$.
- Theo công thức tỉ lệ thể tích ta có
  $\dfrac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$
  $\Rightarrow V_{SAMN} = \dfrac{4}{9}V_{SABC} = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{1}{6}a^3 = \dfrac{2}{27}a^3$.

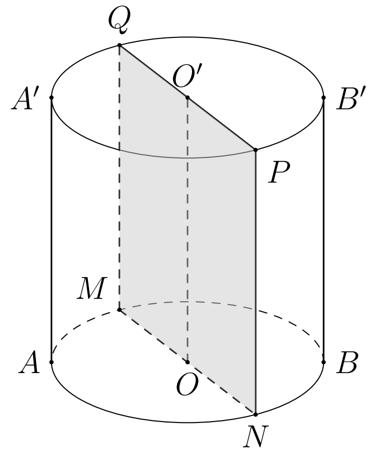
Chọn đáp án B □

Câu 25. Một hình trụ có bán kính đáy bằng 2cm và có thiết diện qua trục là một hình vuông. Diện tích xung quanh của hình trụ là

A $8\pi\text{cm}^2$. **B** $4\pi\text{cm}^2$. **C** $32\pi\text{cm}^2$. **D** $16\pi\text{cm}^2$.

Lời giải.

Vì thiết diện qua trục là hình vuông nên ta có $h = 2r = 4\text{cm}$
$\Rightarrow S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2.4 = 16\pi\text{cm}^2$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ và có bảng biến thiên trên $[-5; 7)$ như sau

x	-5		1		7
y'		$-$	0	$+$	‖
y	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	9 ‖

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $[-5; 7)$.

B $\max\limits_{[-5;7)} f(x) = 6$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 2$.

C $\max\limits_{[-5;7)} f(x) = 9$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 2$.

D $\max\limits_{[-5;7)} f(x) = 9$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 6$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 2$ và hàm số không có giá trị lớn nhất trên $[-5; 7)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Số nghiệm thực của phương trình $4^{x-1} + 2^{x+3} - 4 = 0$ là

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 0.

Lời giải.

$$4^{x-1} + 2^{x+3} - 4 = 0 \Leftrightarrow 2^{2(x-1)} + 16 \cdot 2^{x-1} - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x-1} = -8 + 2\sqrt{17} \\ 2^{x-1} = -8 - 2\sqrt{17} \quad (\text{VN}) \end{array}\right.$$
$$\Rightarrow x - 1 = \log_2\left(-8 + 2\sqrt{17}\right) \Leftrightarrow x = 1 + \log_2\left(-8 + 2\sqrt{17}\right).$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	-2		0		$+\infty$
y'	‖	$+$	‖	$-$	
y	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ 1	↘	0

Đồ thị hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

(A) 0. (B) 1. **(C) 3.** (D) 2.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

- $\lim\limits_{x\to -2^+} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 0$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2\log_{\frac{1}{2}}|x-1| < \log_{\frac{1}{2}} x - 1$ là

(A) 3. **(B) Vô số.** (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Điều kiện $0 < x \neq 1$.

$$\begin{aligned} 2\log_{\frac{1}{2}}|x-1| < \log_{\frac{1}{2}} x - 1 &\Leftrightarrow -2\log_2|x-1| < -\log_2 x - 1 \\ &\Leftrightarrow \log_2(x-1)^2 > \log_2 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 > 2x \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2+\sqrt{3} \\ x < 2-\sqrt{3} \end{array}\right. . \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $\left[\begin{array}{l} 0 < x < 2-\sqrt{3} \\ x > 2+\sqrt{3} \end{array}\right.$. Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{4; 5; \cdots\}$.

Vậy bất phương trình có vô số nghiệm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biên thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 3. (B) 5. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên đã cho, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ như sau

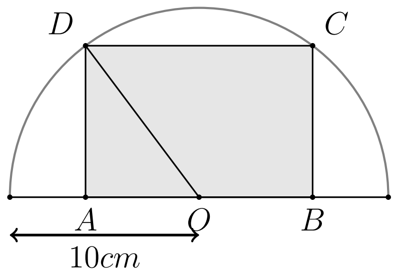
x	$-\infty$	x_0	-1	3	$+\infty$
$\lvert f(x)\rvert$	$+\infty$ ↘		5 ↘		$+\infty$
		↗ 0		↗ 1	

Khi đó từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có 3 cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Tính diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong nửa đường tròn có bán kính $10\,\text{cm}$ (hình vẽ)

(A) $160\,\text{cm}^2$. **B** $100\,\text{cm}^2$. (C) $80\,\text{cm}^2$. (D) $200\,\text{cm}^2$.



Lời giải.

Đặt $OA = x\ (0 < x < 10) \Rightarrow AB = 2x\ (x > 0)$.

Áp dụng định lí Pytago trong tam giác vuông OAD ta có: $AD = \sqrt{OD^2 - OA^2} = \sqrt{100 - x^2}$

$\Rightarrow S_{ABCD} = AB \cdot AD = 2x \cdot \sqrt{100 - x^2} \le x^2 + 100 - x^2 = 100$.

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ là $100\,\text{cm}^2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}\,(\text{cm})$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{x^2}\left(x^3 - 4x\right)$. Hàm số $F\left(x^2 + x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 6. **B** 5. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int e^{x^2}\left(x^3 - 4x\right)\,\mathrm{d}x &&= \int e^{x^2}\left(x^2 - 4\right)x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int (x^2 - 4)\,\mathrm{d}(e^{x^2}) &&= \frac{1}{2}\left[(x^2 - 4) \cdot e^{x^2} - 2 \cdot \int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 5)e^{x^2} + C. \end{aligned}$$

Đặt $g(x) = F(x^2 + x)$.

Suy ra $g(x) = F(x^2 + x) = \dfrac{1}{2} \cdot \left[(x^2 + x)^2 - 5\right] \cdot e^{(x^2+x)^2} + C$.

$$\Rightarrow g'(x) = \left(x^2 + x\right)(2x + 1)e^{\left(x^2+x\right)^2}\left[\left(x^2 + x\right)^2 - 4\right].$$

$g'(x) = x(x + 1)(2x + 1)\left(x^2 + x - 2\right)\left(x^2 + x + 2\right)e^{\left(x^2+x\right)^2}$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\dfrac{-1}{2}\\x=-2\end{array}\right..$$

Vậy hàm số $F\left(x^2+x\right)$ có 5 điểm cực trị.

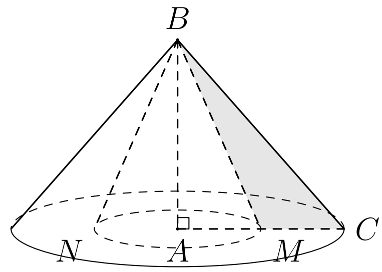
Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh $AB=6, AC=8$ và M là trung điểm của cạnh AC. Khi đó thể tích của khối tròn xoay do tam giác BMC quanh cạnh AB là

A 86π. **B** 106π. **C** 96π. **D** 98π.

Lời giải.

Khi quay tam giác BMC quanh cạnh AB tạo ra 2 khối tròn xoay có thể tích là: $V=\dfrac{1}{3}\pi\cdot AC^2\cdot AB-\dfrac{1}{3}\pi\cdot AM^2\cdot AB=\dfrac{1}{3}\pi\cdot 8^2\cdot 6-\dfrac{1}{3}\pi\cdot 4^2\cdot 6=96\pi$.



Chọn đáp án C □

Câu 34. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x-m\cdot 2^x+2m+1=0$ có nghiệm. Tập $\mathbb{R}\backslash S$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

A 1. **B** 4. **C** 9. **D** 7.

Lời giải.

Đặt $t=2^x>0$. Khi đó phương trình trở thành $t^2-mt+2m+1=0\Leftrightarrow t^2+1=m(t-2)$.

Nhận thấy $t=2$ không là nghiệm của phương trình nên chia cả 2 vế của phương trình cho $t-2$ ta được $m=\dfrac{t^2+1}{t-2}=f(t)\ (t>0)(*)$.

Số nghiệm của phương trình (*) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(t)$ và đường thẳng $y=m$ song song với trục hoành.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{2t(t-2)-t^2-1}{(t-2)^2}=\dfrac{t^2-4t-1}{(t-2)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2+\sqrt{5}\in(0;+\infty)\\t=2-\sqrt{5}\notin(0;+\infty)\end{array}\right..$

Bảng biến thiên:

t	0		2		$2+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$-\dfrac{1}{2}$ ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$4+2\sqrt{5}$	↗	$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-\dfrac{1}{2}\\m\geq 4+2\sqrt{5}\end{array}\right.$

$\Rightarrow S=\left(-\infty;\dfrac{-1}{2}\right)\cup[4+2\sqrt{5};+\infty)\Rightarrow\mathbb{R}\backslash S=\left[-\dfrac{1}{2};4+2\sqrt{5}\right)$ có 9 giá trị nguyên là $\{0;1;2;\ldots;8\}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Cho hàm số $y = \dfrac{1-x}{x^2-2mx+4}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận?

A $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{5}{2} \end{cases}$. (B) $\begin{cases} m>2 \\ m \neq \dfrac{5}{2} \end{cases}$. (C) $-2<m<2$. (D) $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x}{x^2-2mx+4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{2m}{x}+\dfrac{4}{x^2}} = 0 \Rightarrow y=0$ là TCN của đồ thị hàm số.

Do đó để đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận thì đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x) = x^2-2mx+4=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2-4>0 \\ f(1) = 1-2m+4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{5}{2} \end{cases}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số (không nhất thiết khác nhau) được lập từ các chữ số $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$. Chọn ngẫu nhiên một số $\overline{abc}$ từ S. Tính xác suất để số được chọn thỏa mãn $a \leq b \leq c$.

(A) $\dfrac{1}{6}$. **B** $\dfrac{11}{60}$. (C) $\dfrac{13}{60}$. (D) $\dfrac{9}{11}$.

Lời giải.

Gọi A là biến cố chọn được số $\overline{abc}$ thỏa mãn bài toán.

Số các số có ba chữ số là $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ (số).

Ta đi tìm số các số thỏa mãn bài toán.

- Trường hợp 1: $a<b<c$.
  Chọn 3 trong 9 số từ 1 đến 9, có duy nhất một cách sắp xếp ba số thỏa mãn bài toán. Do đó số các số là C_9^3.
- Trường hợp 2: $a=b<c$.
  Lập luận tương tự suy ra số các số là C_9^2.
- Trường hợp 3: $a<b=c$.
  Tương tự suy ra số các số là C_9^2.
- Trường hợp 4: $a=b=c$.
  Suy ra số các số là 9.

Vậy số các số thỏa mãn bài toán là $C_9^3 + 2 \cdot C_9^2 + 9 = 165$ (số).

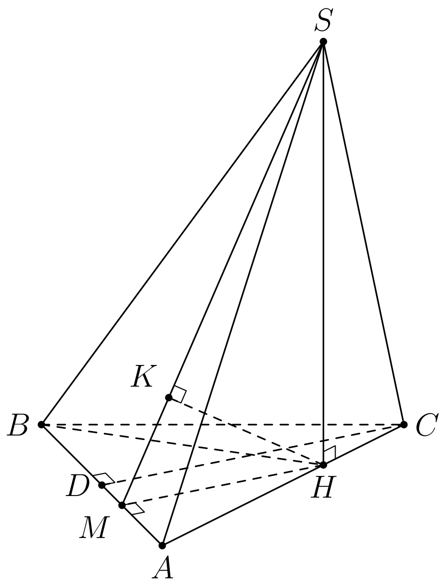
Vậy $P(A) = \dfrac{165}{900} = \dfrac{11}{60}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $3a$. Điểm H thuộc cạnh AC với $HC = a$. Dựng đoạn SH vuông góc với mặt phẳng (ABC) với $SH = 2a$. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) bằng

A $\dfrac{3a}{7}$. **B** $\dfrac{3\sqrt{21}a}{7}$. **C** $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. **D** $3a$.

Lời giải.



Gọi D là trung điểm của AB, do giả thiết suy ra $CD \perp AB$.
Trong (ABC) kẻ $HM \parallel CD$ suy ra $HM \perp AB \quad (1)$. Do giả thiết $SH \perp (ABC)$ suy ra $SH \perp AB \quad (2)$.
Từ (1), (2) suy ra $AB \perp (SHM)$.
Trong mặt phẳng (SHM) kẻ $HK \perp SM \quad (3)$, theo chứng minh trên suy ra $HK \perp AB \quad (4)$.
Do đó từ (3), (4) suy ra $HK \perp (SAB)$ nên $\mathrm{d}\,(H;(SAB)) = HK$.
Dễ thấy $CH \cap (SAB) = \{A\}$ nên

$$\frac{\mathrm{d}\,(C;(SAB))}{\mathrm{d}\,(H;(SAB))} = \frac{CA}{HA} = \frac{3}{2}.$$

Do đó $\mathrm{d}\,(C;(SAB)) = \dfrac{3}{2}\cdot\mathrm{d}\,(H;(SAB)) = \dfrac{3}{2}\cdot HK$. Theo giả thiết $\triangle ABC$ đều suy ra $CD = \dfrac{3\sqrt{3}a}{2}$.
Xét $\triangle ABC$ do $HM \parallel CD$ theo định lý Ta-lét ta có $\dfrac{HM}{CD} = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{2}{3}$ suy ra

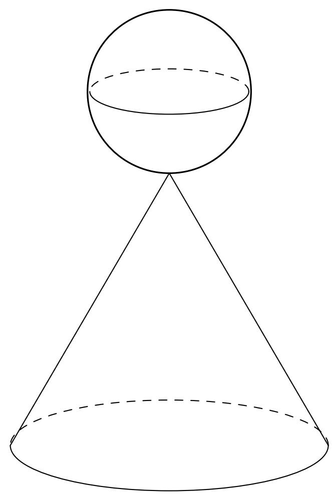
$$HM = \frac{2}{3}\cdot CD \Leftrightarrow HM = \frac{2}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}a}{2} = \sqrt{3}a.$$

Áp dụng hệ thức lượng trong $\triangle SHM$ vuông tại H, ta có

$$HK = \frac{SH\cdot HM}{\sqrt{SH^2+HM^2}} = \frac{2a\cdot\sqrt{3}a}{\sqrt{4a^2+3a^2}} = \frac{2\sqrt{21}a}{7}.$$

Do đó $\mathrm{d}\,(C;(SAB)) = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{21}a}{7} = \dfrac{3\sqrt{21}a}{7}$.
Chọn đáp án B □

Câu 38.



Một khối pha lê gồm một hình cầu (H_1) bán kính R và một hình nón (H_2) có bán kính đáy và đường sinh lần lượt là r, l thỏa mãn $r = \dfrac{1}{2}l$ và $l = \dfrac{3}{2}R$ xếp chồng lên nhau như hình vẽ bên. Biết tổng diện tích mặt cầu (H_1) và diện tích toàn phần của hình nón (H_2) là $91\,\text{cm}^2$. Tính diện tích của khối cầu (H_1).

A $\dfrac{104}{5}\,\text{cm}^2$. **B** $16\,\text{cm}^2$. **C** $64\,\text{cm}^2$. **D** $\dfrac{26}{5}\,\text{cm}^2$.

Lời giải.

Do giả thiết $r = \dfrac{1}{2}l$ và $l = \dfrac{3}{2}R$ suy ra $r = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{2}R = \dfrac{3}{4}R$.

Gọi S_1 là diện tích toàn phần của hình nón, ta có

$$S_1 = \pi \cdot r \cdot l + \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{3}{4}R\right) \cdot \frac{3}{2}R + \pi \cdot \left(\frac{3}{4}R\right)^2 = \frac{27\pi R^2}{16}.$$

Mặt khác gọi S_2 là diện tích mặt cầu, ta có $S_2 = 4\pi R^2$.

Để thỏa mãn bài toán cho

$$S_1 + S_2 = 91 \Leftrightarrow \frac{27\pi R^2}{16} + 4\pi R^2 = 91 \Leftrightarrow \frac{91\pi R^2}{16} = 91 \Leftrightarrow \pi R^2 = 16.$$

Do đó $S_2 = 4\pi R^2 = 4 \cdot 16 = 64\ (\text{cm}^2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Cho hàm số $f(x) > 0$ với $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ và $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot f'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $f(3) < 2$. B $2 < f(3) < 4$. C $4 < f(3) < 6$. D $f(3) < f(6)$.

Lời giải.

Do giả thiết $f(x) > 0$ với $x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot f'(x)$ suy ra $\sqrt{x+1} > 0$.

Khi đó $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot f'(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Suy ra $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x \quad (*)$.

Mà $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C_1$. Vì $f(x) > 0$ nên $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln f(x) + C_1$.

Mặt khác $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1} + C_2$.

Từ $(*)$ suy ra $\ln f(x) = 2\sqrt{x+1} + C \Rightarrow f(x) = \mathrm{e}^{2\sqrt{x+1}+C}$.

Do $f(0) = 1$ nên $\mathrm{e}^{2+C} = 1 \Leftrightarrow 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -2$ suy ra $f(x) = \mathrm{e}^{2\sqrt{x+1}-2}$.

Khi đó $f(3) = \mathrm{e}^{2\sqrt{3+1}-2} = \mathrm{e}^2$ và $f(6) = \mathrm{e}^{2\sqrt{7}-2}$ suy ra $f(3) < f(6)$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Tìm các giá trị thực của tham số m hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - (m^2 - 3m + 2)x + 5$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

A $1 < m < 2$. B $m < 1$, $m > 2$. C $1 \leq m \leq 2$. D $m \leq 1$, $m \geq 2$.

Lời giải.

Tập xác định của $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 6x - (m^2 - 3m + 2)$.

Để hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - (m^2 - 3m + 2)x + 5$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ khi $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (0;2)$ và dấu đẳng thức xảy ra tại hữu hạn điểm.

Suy ra $3x^2 + 6x - (m^2 - 3m + 2) \geq 0,\ \forall x \in (0;2) \Leftrightarrow 3x^2 + 6x \geq (m^2 - 3m + 2),\ \forall x \in (0;2)$.

Xét hàm số $g(x) = 3x^2 + 6x$ trên $(0;2)$.

Ta có bảng biến thiên

x	0	2
$g(x)$	0	24

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m^2 - 3m + 2 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le m \le 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Số giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để bất phương trình

$$\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2} \le m^2 - m + 1$$

nghiệm đúng với $\forall x \in [-3; 6]$ là

A 19. **B** 20. **C** 4. **D** 28.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2}$.

Để bất phương trình $f(x) \le m^2 - m + 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-3; 6]$

thì $m^2 - m + 1 \ge \max\limits_{x\in[-3;6]} f(x)$.

Đặt $t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} \Rightarrow t^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)} = 9 + 2\sqrt{18+3x-x^2} \ge 9$.

Mặt khác $t^2 = \left[\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x}\right]^2 \le (1^2+1^2)(3+x+6-x) = 18$.

Vậy $3 \le t \le 3\sqrt{2}$.

Khi đó $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2} = t - \dfrac{t^2-9}{2} = g(t)$.

Ta có $g'(t) = 1 - t < 0$ với $t \in \left[3; 3\sqrt{2}\right]$, nên $g(t)$ là hàm số nghịch biến trong khoảng $[-3; 6]$.

Suy ra $\max\limits_{t\in\left[3;3\sqrt{2}\right]} g(t) = g(3) = 3 = \max\limits_{x\in[-3;6]} f(x)$.

Để bất phương trình đã cho thỏa mãn với mọi $x \in [-3; 6]$ thì

$$m^2 - m + 1 \ge 3 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 2 \\ m \le -1. \end{array}\right.$$

Vì $m \in [-10; 10]$ nên $m \in [-10; -1] \cup [2; 10]$ nên $m \in \{-10; \ldots; -1; 2; \ldots; 10\}$.

Vậy số các giá trị nguyên của m là 19.

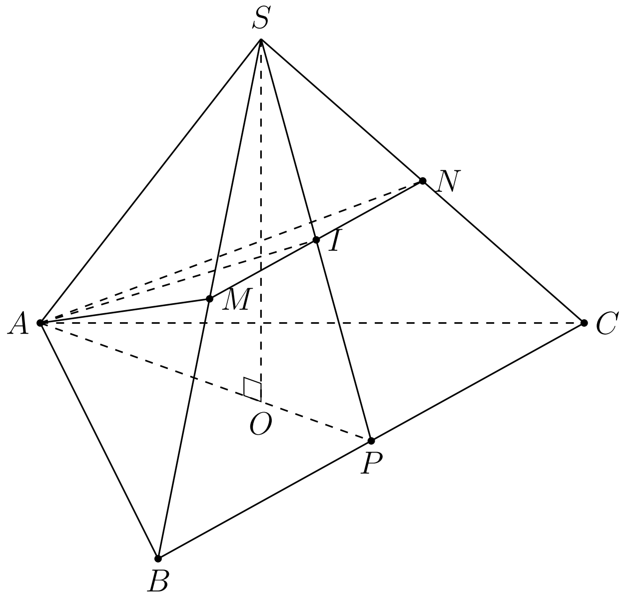
Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Biết $(AMN) \perp (SBC)$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A $\dfrac{a^3\sqrt{26}}{24}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{24}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{8}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{13}}{18}$.

Lời giải.

Gọi P là trung điểm của BC, $SP \cap MN = I \Rightarrow$ I là trung điểm của SP. Gọi O là tâm của đáy. Tam giác SBC là tam giác cân nên $SP \perp BC$ mà $MN \parallel BC$ nên $SP \perp MN$. Từ
$\begin{cases}(AMN) \perp (SBC)\\(AMN) \cap (SBC) = MN\\SP \perp MN\end{cases}$
$\Rightarrow SP \perp (AMN) \Rightarrow SP \perp AI$.
Tam giác APS có AI là đường cao đồng thời là trung tuyến nên $\triangle ASP$ cân tại A
$\Rightarrow AS = AP = AB \sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Ta có $AO = \dfrac{2}{3}AP = \dfrac{2}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Tam giác SOA là tam giác vuông tại O nên

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{15}}{6}.$$

Thể tích của hình chóp: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SO \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{15}}{6} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{24}$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Cho hàm số $f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 cực trị.

A $\dfrac{5}{4} < m < 2$. **B** $-\dfrac{5}{4} < m < 2$. **C** $-2 < m < \dfrac{5}{4}$. **D** $\dfrac{5}{4} \le m \le 2$.

Lời giải.

Để hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị thì $f(x)$ phải đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $0 < x_1 < x_2$ hay $f'(x)$ có hai nghiệm dương phân biệt.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 2(2m-1)x + 2 - m$. Để hàm số $f'(x)$ có hai nghiệm dương phân biệt thì

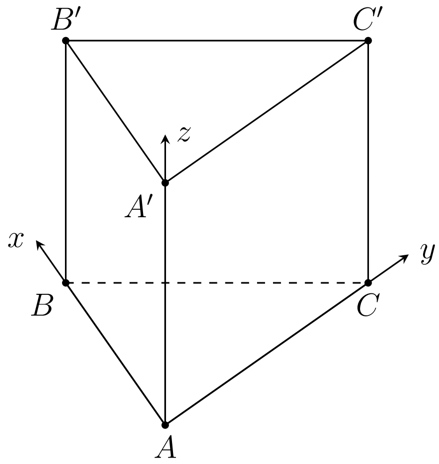
$$\begin{cases}\Delta' > 0\\S > 0\\P > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2m-1)^2 - 3(2-m) > 0\\\dfrac{2(2m-1)}{3} > 0\\\dfrac{2-m}{3} > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m > \dfrac{5}{4}\\m < -1\end{array}\right.\\m > \dfrac{1}{2}\\m < 2\end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 2.$$

Chọn đáp án A □

Câu 44. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB = AC = a$. Biết góc giữa hai đường thẳng AC' và BA' bằng $60°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A $2a^3$. **B** $\dfrac{a^3}{3}$. **C** $\dfrac{a^3}{2}$. **D** a^3.

Lời giải.



Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. Đặt $AA' = x$.
Ta có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $A'(0;0;x)$, $C'(0;a;x)$.
Ta có $\overrightarrow{A'B} = (a;0;-x)$, $\overrightarrow{AC'} = (0;a;x)$.
Góc giữa $A'B$ và AC' là 60° nên

$$\cos 60^\circ = \frac{|\overrightarrow{A'B}\cdot\overrightarrow{AC'}|}{\left|\overrightarrow{A'B}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A'C}\right|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x^2}{a^2+x^2} \Leftrightarrow x = a.$$

Thể tích của hình lăng trụ:

$$V_{ABC.A'B'C'} = AA'\cdot S_{ABC} = \frac{1}{2}AA'\cdot AB\cdot AC = \frac{a^3}{2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 45. Tập hợp tất cả các số thực x không thỏa mãn bất phương trình $9^{x^2-4}+(x^2-4)\cdot 2019^{x-2} \geq 1$ là khoảng $(a;b)$. Tính $b-a$.

A 5. B 4. C -5. D -1.

Lời giải.

- Trường hợp 1. $x^2-4<0$ ta có $9^{x^2-4}+(x^2-4)\cdot 2019^{x-2} < 9^0+0\cdot 2019^{x-2} = 1$.
- Trường hợp 2. $x^2-4\geq 0$ ta có $9^{x^2-4}+(x^2-4)\cdot 2019^{x-2} \geq 9^0+0\cdot 2019^{x-2} = 1$.

Vậy tập hợp các giá trị của x không thỏa mãn bất phương trình là $x\in(-2;2) \Rightarrow a=-2$, $b=2 \Rightarrow b-a=4$.
Chọn đáp án B □

Câu 46. Một người vay ngân hàng số tiền 50 triệu đồng, mỗi tháng trả ngân hàng số tiền 4 triệu đồng và phải trả lãi suất cho số tiền còn nợ là 1,1% một tháng theo hình thức lãi kép. Giả sử sau n tháng người đó trả hết nợ. Khi đó n gần với số nào dưới đây?

A 13. B 15. C 16. D 14.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
& P(1+r)^n = \frac{M}{r}\left[(1+r)^n-1\right]\\
\Leftrightarrow\ & 50(1+1{,}1\%)^n = \frac{4}{1{,}1\%}\left[(1+1{,}1\%)^n-1\right]\\
\Leftrightarrow\ & 50(1+1{,}1\%)^n = \frac{4}{1{,}1\%}(1+1{,}1\%)^n - \frac{4}{1{,}1\%}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{4}{1{,}1\%} = \frac{3450}{11}(1+1{,}1\%)^n\\
\Leftrightarrow\ & (1+1{,}1\%)^n = \frac{80}{69} \Rightarrow n = \log_{1+1{,}106}\frac{80}{69} \approx 13{,}52.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

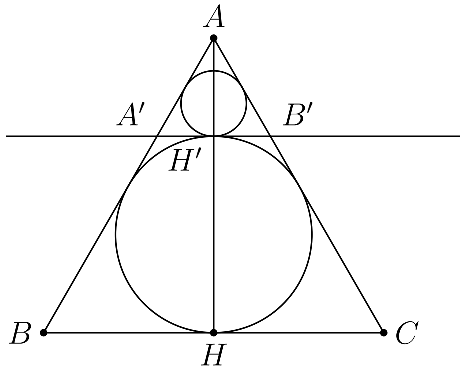
Câu 47. Cho khối nón có độ lớn góc ở đỉnh là $\frac{\pi}{3}$. Một khối cầu (S_1) nội tiếp trong khối nón. Gọi S_2 là khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón và với S_1; S_3 là khối tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón với S_2; …; S_n là khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón và với S_{n-1}. Gọi V_1, V_2, V_3, ..., V_{n-1}, V_n lần lượt là thể tích của khối cầu S_1, S_2, S_3, ..., S_{n-1}, S_n và V là thể tích của khối nón. Tính giá trị của biểu thức

$$T = \lim_{n\to+\infty} \frac{V_1 + V_2 + \ldots + V_n}{V}$$

.

A $\frac{3}{5}$. **B** $\frac{6}{13}$. **C** $\frac{7}{9}$. **D** $\frac{1}{2}$.

Lời giải.



Thiết diện qua trục của hình nón là một tam giác đều cạnh l. Do đó bán kính đường tròn nội tiếp tam giác cũng chính là bán kính mặt cầu nội tiếp chóp là $r_1 = \frac{1}{3}\frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{6}$.

Áp dụng định lí Ta-lét ta có

$$\frac{AA'}{AB} = \frac{AH'}{AH} = \frac{AH - HH'}{AH} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2} - \frac{l\sqrt{3}}{3}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow AA' = \frac{l}{3}.$$

Tương tự ta tìm được $r_2 = \frac{l}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{l\sqrt{3}}{18} = \frac{r_1}{3}$.

Tiếp tục như vậy ta có $r_3 = \frac{r_1}{3^2}$, $r_4 = \frac{r_1}{3^3}$, ... $r_n = \frac{r_1}{3^{n-1}}$.

Ta có $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$, $V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{r_1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3^3}V_1$, $V_3 = \frac{1}{(3^3)^2}V_1$, ... ; $V_n = \frac{1}{(3^3)^{n-1}}V_1$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{V_1+V_2+\ldots+V_n}{V}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{V_1\left(1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{(3^3)^2}+\ldots+\frac{1}{(3^3)^{n-1}}\right)}{V}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{V_1\cdot S}{V}.
\end{aligned}$$

Đặt $S = 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{(3^3)^2} + \ldots + \frac{1}{(3^3)^{n-1}}$. Đây là tổng của CSN lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{3^3} < 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S = \frac{1}{1-\frac{1}{3^3}} = \frac{27}{26}$$

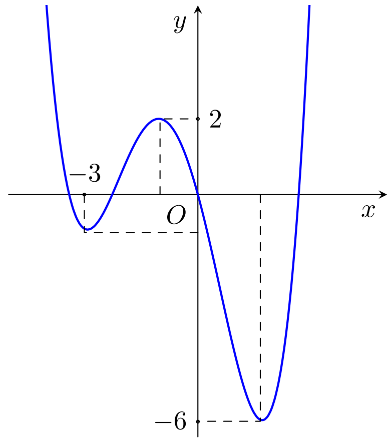
$\Rightarrow V_1 + V_2 + \ldots + V_n = \frac{27}{26}V_1 = \frac{27}{26}\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\frac{l\sqrt{3}}{6}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{52}\pi l^3$ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2\cdot\frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi l^3}{24}$

$\Rightarrow T = \frac{\frac{\sqrt{3}}{52}\pi l^3}{\frac{\sqrt{3}\pi l^3}{24}} = \frac{6}{13}$.

Chọn đáp án B □

Câu 48.

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên không âm của tham số m để hàm số $y = |f(x-2019)+m-2|$ có 5 điểm cực trị. Số các phần tử của S bằng



A 3. **B** 4. **C** 2. **D** 5.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = f(x-2019)$ được tạo thành bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ theo chiều song song với trục Ox sang bên phải 2019 đơn vị.

Đồ thị hàm số $y = f(x-2019) + m - 2$ được tạo thành bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x-2019)$ theo chiều song song với trục Oy lên trên $m-2$ đơn vị.

Đồ thị hàm số $y = |f(x-2019) + m - 2|$ được tạo thành bằng cách giữ nguyên phần đồ thị $y = f(x-2019) + m - 2$ phía trên trục Ox, lấy đối xứng toàn bộ phần đồ thị phía dưới trục Ox qua trục Ox và xóa đi phần đồ thị phía dưới trục Ox.

Do đó để đồ thị hàm số $y = |f(x-2019) + m - 2|$ có 5 điểm cực tị thì đồ thị hàm số $y = f(x-2019) + m - 2$ có

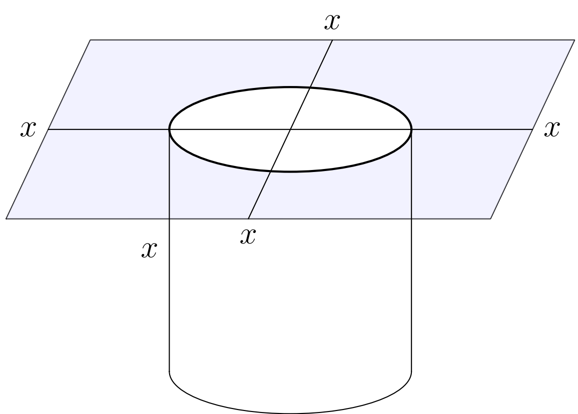
$$\begin{aligned}
& y_{\text{CD}} \cdot y_{\text{CT}} \leq 0 \\
\Leftrightarrow\ & -3 + m - 2 \geq 0 > -6 + m - 2 \\
\Leftrightarrow\ & m - 5 \geq 0 > m - 8 \\
\Leftrightarrow\ & 5 \leq m < 8.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ có 3 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 49.

Trên một mảnh đất hình vuông có diện tích $81m^2$ người ta đào một cái ao nuôi cá hình trụ (như hình vẽ) sao cho tâm của hình tròn đáy trùng với tâm của mảnh đất. Ở giữa mép ao và mép mảnh đất người ta để lại một khoảng đất trống để đi lại, biết khoảng cách nhỏ nhất giữa mép mảnh đất là $x(m)$. Giả sử chiều sâu của ao cũng là $x(m)$. Tính thể tích lớn nhất V của ao.



A $V = 13{,}5\pi\ \text{m}^3$. **B** $V = 27\pi\ \text{m}^3$. **C** $V = 36\pi\ \text{m}^3$. **D** $V = 72\pi\ \text{m}^3$.

Lời giải.

Đường kính đáy của hình trụ là $9 - 2x \Rightarrow$ Bán kính đáy hình trụ là $\dfrac{9-2x}{2}$.

Khi đó ta có thể tích ao là $V = \pi\left(\dfrac{9-2x}{2}\right)^2 x = \dfrac{\pi}{4}(9-2x)^2x = \dfrac{\pi}{4}f(x)$.

Xét hàm số $f(x) = (9-2x)^2x = 4x^3 - 36x^2 + 81x$ với $0 < x < \dfrac{9}{2}$ ta có

$$f'(x) = 12x^2 - 72x + 81 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{9}{2} \\ x = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

BBT

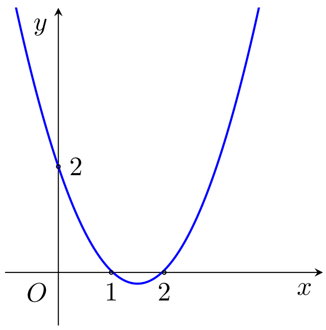
x	0		$\frac{3}{2}$		$\frac{9}{2}$
y'		$+$	0	$-$	0
y	0	$\nearrow$	54	$\searrow$	0

Dựa vào BBT ta thấy $f(x)_{\max} = 54 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

Khi đó $V_{\max} = \dfrac{\pi}{4}.54 = \dfrac{27\pi}{2} = 13,5\pi$ m^3.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$. Hàm số $g(x) = f\left(x - x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?



A $\left(-\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$. **B** $\left(-\infty; \dfrac{3}{2}\right)$. **C** $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$. **D** $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = (1-2x)f'\left(x - x^2\right)$. Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(a;b) \Leftrightarrow g'(x) \le 0, \forall x \in (a;b)$ và bằng 0 tại hữu hạn điểm. Ta có $g'(-1) = 3f'(-2) > 0 \Rightarrow$ Loại đáp án A, B và D.

Chọn đáp án C □

——— HẾT ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

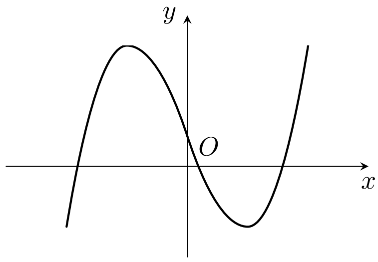
1. C	2. C	3. A	4. C	5. C	6. B	7. A	8. A	9. B	10. D
11. C	12. D	13. B	14. A	15. C	16. D	17. D	18. A	19. B	20. C
21. D	22. A	23. D	24. B	25. D	26. A	27. A	28. C	29. B	30. A
31. B	32. B	33. C	34. C	35. A	36. B	37. B	38. C	39. D	40. C
41. A	42. B	43. A	44. C	45. B	46. D	47. B	48. A	49. A	50. C

4 ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN KHTN, TP HCM – LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.

Hàm số nào dưới đây có đồ thị như hình vẽ?



(A) $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. (B) $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
(C) $y = x^3 - 3x^2 + 1$. (D) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên loại đáp án A và B.

Đồ thị hàm số có nét cuối cùng đi lên nên $a > 0 \Rightarrow$ loại đáp án D.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Nghiệm các phương trình $\log_3(2x-1) = 2$ là

(A) $x = 4$. (B) $x = \dfrac{7}{2}$. (C) $x = \dfrac{9}{2}$. (D) $x = 5$.

Lời giải.

Điều kiện: $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{2}$.

$\log_3(2x-1) = 2 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3^2 = 9 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$ (thỏa mãn).

Vậy $x = 5$ là nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Cho khối nón có chiều cao bằng $2a$ và bán kính đáy bằng a. Thể tích của khối nón đã cho bằng

(A) $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. (B) $2\pi a^3$. (C) $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. (D) $4\pi a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi a^2.2a = \dfrac{2\pi a^3}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;3;-1)$và $B(0;-1;1)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

(A) $(1;1;0)$. (B) $(2;2;0)$. (C) $(-2;-4;2)$. (D) $(-1;-2;1)$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow M = \left(\dfrac{2+0}{2}; \dfrac{3-1}{2}; \dfrac{-1+1}{2}\right) = (1;1;0)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $AC = 2a$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **C** $\dfrac{a^3}{3}$. **D** $\dfrac{2a^3}{3}$.

Lời giải.

Tam giác ABC vuông tại $B \Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác ABC : $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} a^2 \cdot a = \dfrac{\sqrt{3}}{6} a^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

A $(-\infty; 1)$. **B** $(-1; 2)$. **C** $(3; +\infty)$. **D** $(1; 3)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Với các số thực $a, b > 0, a \neq 1$ tùy ý, biểu thức $\log_{a^2}(ab^2)$ bằng

A $\dfrac{1}{2} + 4\log_a b$. **B** $2 + 4\log_a b$. **C** $\dfrac{1}{2} + \log_a b$. **D** $2 + \log_a b$.

Lời giải.

$\log_{a^2}(ab^2) = \log_{a^2} a + \log_{a^2} b^2 = \dfrac{1}{2}\log_a a + \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \log_a b = \dfrac{1}{2} + \log_a b$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P): $2y - 3z + 1 = 0$?

A $\vec{u_1} = (2; 0; -3)$. **B** $\vec{u_2} = (0; 2; -3)$. **C** $\vec{u_3} = (2; -3; 1)$. **D** $\vec{u_4} = (2; -3; 0)$.

Lời giải.

(P): $2y - 3z + 1 = 0 \Rightarrow$véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (0; 2; -3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

A $x^3 + \cos x + C$. **B** $6x + \cos x + C$. **C** $x^3 - \cos x + C$. **D** $6x - \cos x + C$.

Lời giải.

$$\int \left(3x^2 + \sin x\right) \mathrm{d}x = 3 \cdot \dfrac{x^3}{3} - \cos x + C = x^3 - \cos x + C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 10. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a + 6i = 2 - 2bi$, với i là đơn vị ảo. Giá trị của $a + b$ bằng

A -1. **B** 1. **C** -4. **D** 5.

Lời giải.

Ta có $a + 6i = 2 - 2bi \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 6 = -2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow a + b = -1.$

Chọn đáp án A □

Câu 11. Một lớp học có 15 bạn nam và 10 bạn nữ. Số cách chọn hai bạn trực nhật sao cho có cả nam và nữ là

A 300. **B** 25. **C** 150. **D** 50.

Lời giải.

Ta có 15 bạn nam và 10 bạn nữ.
Có $\mathrm{C}_{15}^1 = 15$ cách chọn 1 bạn nam.
Có $\mathrm{C}_{10}^1 = 15$ cách chọn 1 bạn nữ.
Khi đó, số cách chọn hai bạn sao cho có một bạn nam và một bạn nữ là: $\mathrm{C}_{15}^1 \cdot \mathrm{C}_{10}^1 = 15 \cdot 10 = 150$.
Chọn đáp án C □

Câu 12. Với hàm số $f(x)$ tùy ý liên tục trên $\mathbb{R}, a < b$, diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = a, x = b$ được xác định theo công thức

A $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B** $S = \pi\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

C $S = \left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$. **D** $S = \left|\pi\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Công thức tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường thẳng $y = 0, x = a, x = b(a < b)$và đồ thị hàm số $y = f(x)$là $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$?

A $Q(-2; 1; -3)$. **B** $P(2; -1; 3)$. **C** $M(-1; 1; 2)$. **D** $N(1; -1; 2)$.

Lời giải.

Dựa vào phương trình đường thẳng ta thấy đường thẳng đã cho đi qua điểm $N(1; -1; 2)$.
Chọn đáp án D □

Câu 14. Cho (u_n) là một cấp số cộng thỏa mãn $u_1 + u_3 = 8$ và $u_4 = 10$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

A 3. **B** 6. **C** 2. **D** 4.

Lời giải.

Gọi công sai của cấp số cộng là d.

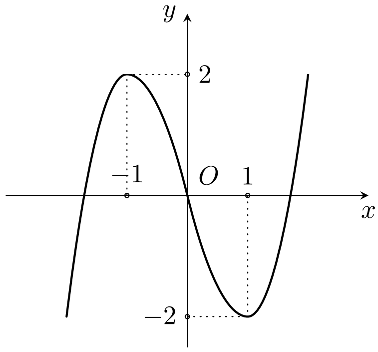
Ta có: $\begin{cases} u_1 + u_3 = 8 \\ u_4 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + 2d = 8 \\ u_1 + 3d = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 2d = 8 \\ u_1 + 3d = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}$.

Chọn đáp án A □

Câu 15.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A $x = -1$. **B** $x = 2$. **C** $x = 1$. **D** $x = -2$.



Lời giải.

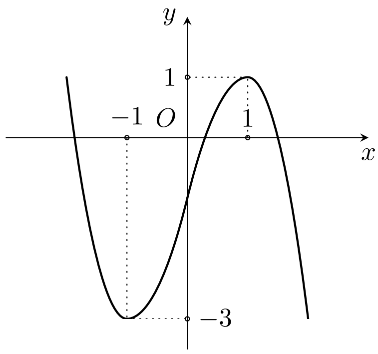
Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta thấy hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = -1$.

Chọn đáp án A □

Câu 16.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $2|f(x)| - 5 = 0$ là

A 3. **B** 5 . **C** 4. **D** 6.



Lời giải.

$$2\,|f(x)| - 5 = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x) = \dfrac{5}{2} & (1) \\ f(x) = -\dfrac{5}{2} & (2) \end{array}\right..$$

Số nghiệm của phương trình đã cho là tổng số nghiệm của phương trình (1) và phương trình (2).

Số nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của đường thẳng $y = \dfrac{5}{2}$ và đường thẳng $y = -\dfrac{5}{2}$ với đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Như vậy, dựa vào đồ thị hàm số ta thấy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
y'	$-$	$\|$ $+$	0	$-$
y	$2 \searrow 1$	$\|$ $-\infty \nearrow$	5	$\searrow -\infty$

Số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A 4. **B** 2 . **C** 3. **D** 1.

Lời giải.

Dựa vào BBT ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -2$ và tiệm cận ngang $y = 2$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$và $B(3; 3; 0)$. Mặt phẳng trung trực của đường thẳng AB có phương trình là

A $x + y - z - 2 = 0$. **B** $x + y - z + 2 = 0$.

C $x + 2y - z - 3 = 0$. **D** $x + 2y - z + 3 = 0$.

Lời giải.

Ta có: $A(1; -1; 2); B(3; 3; 0) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2; 4; -2)$.

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Khi đó $M(2; 1; 1)$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là mặt phẳng đi qua điểm M và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là:

$$\begin{aligned} & 2(x-2) + 4(y-1) - 2(z-1) = 0 \\ \Leftrightarrow \ & 2x - 4 + 4y - 4 - 2z + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \ & x + 2y - z - 3 = 0 \end{aligned}$$

.

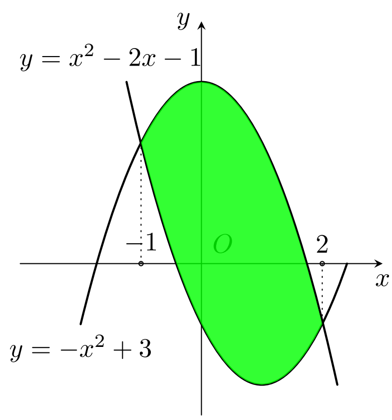
Chọn đáp án **C** □

Câu 19.

Diện tích hình phẳng bôi đậm trong hình vẽ dưới đây được xác định theo công thức

A $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left(2x^2 - 2x - 4\right) \mathrm{d}x$. **B** $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left(2x^2 + 2x - 4\right) \mathrm{d}x$.

C $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left(-2x^2 + 2x + 4\right) \mathrm{d}x$. **D** $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left(-2x^2 - 2x + 4\right) \mathrm{d}x$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy công thức tính diện tích hình phẳng cần tính là
$$\int_{-1}^{2}\left(-x^2+3-x^2+2x+1\right)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\,\mathrm{d}x.$$
Chọn đáp án C □

Câu 20. Cho số phức z thỏa mãn $(2+3i)z+4-3i=13+4i$. Mô-đun của z bằng

A. 20. B. 4. C. $2\sqrt{2}$. D. $\sqrt{10}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&(2+3i)z+4-3i=13+4i\\
\Leftrightarrow\ &(2+3i)z=13+4i-4+3i\\
\Leftrightarrow\ &(2+3i)z=9+7i\\
\Leftrightarrow\ &z=\frac{9+7i}{2+3i}\\
\Leftrightarrow\ &z=\frac{(9+7i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}\\
\Leftrightarrow\ &z=\frac{18-21.i^2+14i-27i}{2^2+3^2}\\
\Leftrightarrow\ &z=\frac{39-13i}{13}\\
\Leftrightarrow\ &z=3-i\\
\Rightarrow\ &|z|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}
\end{aligned}$$

.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{2}}$ là

A. $(0;+\infty)$. B. $[1;+\infty)$. C. $(1;+\infty)$. D. $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải.

Do $\dfrac{1}{2}\notin\mathbb{Z}\Rightarrow$ Hàm số xác định $\Leftrightarrow x-1>0\Leftrightarrow x>1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(1;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|(1+i)z-5+i|=2$ là một đường tròn tâm I và bán kính R lần lượt là

A. $I(2;-3), R=\sqrt{2}$. B. $I(2;-3), R=2$. C. $I(-2;3), R=\sqrt{2}$. D. $I(-2;3), R=2$.

Lời giải.

Gọi số phức $z = x + yi$.

$$\begin{aligned}
& |(1+i)z - 5 + i| = 2 \\
\Leftrightarrow\ & |(1+i)(x+yi) - 5 + i| = 2 \\
\Leftrightarrow\ & |(x-y-5) + (x+y+1)i| = 2 \\
\Leftrightarrow\ & (x-y-5)^2 + (x+y+1)^2 = 4 \\
\Leftrightarrow\ & (x-y)^2 - 10(x-y) + 25 + (x+y)^2 + 2(x+y) + 1 = 4 \\
\Leftrightarrow\ & 2x^2 + 2y^2 - 8x + 12y + 22 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + y^2 - 4x + 6y + 11 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-2)^2 + (y+3)^2 = 2
\end{aligned}$$

. Vậy đường tròn biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện bài toán có tâm $I(2;-3), R = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3^{2x} - 2.3^{x+2} + 27 = 0$ bằng

A 9. B 18. C 3. D 27.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
& 3^{2x} - 2.3^{x+2} + 27 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 3^{2x} - 2.9.3^x + 27 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 3^{2x} - 18.3^x + 27 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 3^{x_1} = 9 + 3\sqrt{6} \\ 3^{x_2} = 9 - 3\sqrt{6} \end{array}\right. \\
\Rightarrow\ & 3^{x_1} \cdot 3^{x_2} = \left(9 + 3\sqrt{6}\right)\left(9 - 3\sqrt{6}\right) \\
\Leftrightarrow\ & 3^{x_1 + x_2} = 9^2 - \left(3\sqrt{6}\right)^2 = 27 \\
\Leftrightarrow\ & x_1 + x_2 = 3.
\end{aligned}$$

.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Với các số $a, b > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 6ab$, biểu thức $\log_2(a+b)$ bằng

A $\frac{1}{2}(3 + \log_2 a + \log_2 b)$. B $\frac{1}{2}(1 + \log_2 a + \log_2 b)$.

C $1 + \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$. D $2 + \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$.

Lời giải.

Ta có: $a^2 + b^2 = 6ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 8ab$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ & \log_2(a+b)^2 = \log_2 8ab \\
\Leftrightarrow\ & 2\log_2(a+b) = \log_2 8 + \log_2 a + \log_2 b \\
\Leftrightarrow\ & \log_2(a+b) = \frac{1}{2}(3 + \log_2 a + \log_2 b).
\end{aligned}$$

.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Cho khối trụ (T). Biết rằng một mặt phẳng chứa trục của (T) cắt (T) theo thiết diện là một hình vuông cạnh $4a$. Thể tích khối trụ đã cho bằng

(A) $8\pi a^3$. (B) $64\pi a^3$. (C) $32\pi a^3$. **(D)** $16\pi a^3$.

Lời giải.

Thiết diện của hình trụ (T) qua trục là hình vuông cạnh $4a \Rightarrow$ hình trụ có chiều cao là $h = 4a$ và bán kính đáy $R = \frac{1}{2} \cdot 4a = 2a \Rightarrow V = \pi R^2 h = \pi \cdot 4a^2 \cdot 4a = 16\pi a^2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x}{x+1}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng

(A) $-\dfrac{15}{4}$. **(B)** $-\dfrac{7}{2}$. (C) -3. (D) -4.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$.

Ta có: $x = -1 \notin [1; 3]$.

$f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \in [1; 3] \\ x = -4 \notin [1; 3]. \end{array}\right.$

Mà $f(1) = -\dfrac{7}{2}; f(3) = -\dfrac{15}{4}; f(2) = -4$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên $[1; 3]$ là $-\dfrac{7}{2}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$ và chiều cao bằng $\sqrt{3}a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. (B) a. **(C)** $\sqrt{3}a$. (D) $2a$.

Lời giải.

Ta có:

$V_{SABCD} = \dfrac{1}{3} h S_d = \dfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot 4a^2 = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$

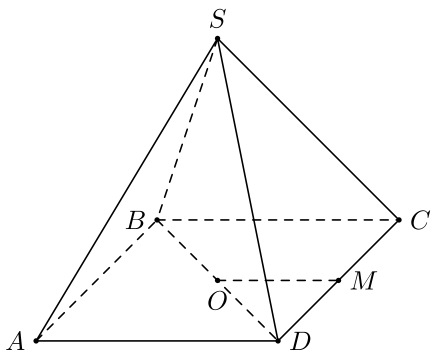
$\Rightarrow V_{SACD} = \dfrac{1}{2} V_{SABCD} = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Gọi M là trung điểm của CD.

$\Rightarrow SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$.

$\Rightarrow S_{SCD} = \dfrac{1}{2} SM.CD = \dfrac{1}{2}.2a.2a = 2a^2$.

$\Rightarrow d\left(A; (SCD)\right) = \dfrac{3V_{SACD}}{S_{SCD}} = \dfrac{3 \cdot 2a^3\sqrt{3}}{3 \cdot 2a^2} = a\sqrt{3}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết $MN = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$, góc giữa đường thẳng AD và BC bằng

(A) $45°$. (B) $90°$. **(C)** $60°$. (D) $30°$.

Lời giải.

Gọi P là trung điểm của AC ta có: $PM//CD$ và $PN//AB \Rightarrow \widehat{(AB;CD)} = \widehat{(PM;PN)}$

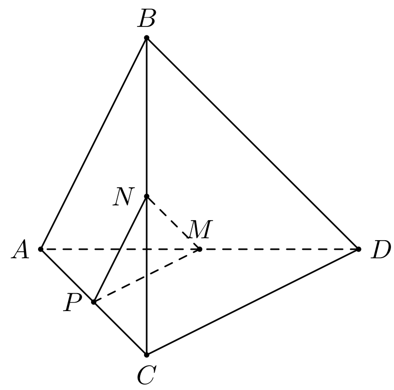
Do PM, PN lần lượt là đường trung bình của tam giác ACD và tam giác ABC $\Rightarrow PM = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a}{2}; PN = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Xét tam giác PMN có:

$$\cos\widehat{MPN} = \frac{PM^2 + PN^2 - MN^2}{2 \cdot PM \cdot PN} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \widehat{MPN} = 120^\circ$.

Vậy $\widehat{(PM;PN)} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 2x$. Giá trị của $x_1^2 + x_2^2$ bằng

(A) 13. (B) 32. (C) 40. (D) 36.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = x^2 - 6x - 2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 2 = 0 \quad (*)$

Có $x_1; x_2$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$

$\Rightarrow x_1, x_2$ là hai nghiệm của phương trình $(*)$.

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1x_2 = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 6^2 - 2\cdot(-2) = 40$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, gọi d là đường thẳng qua $A(1;0;2)$ cắt và vuông góc với đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-5}{-2}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

(A) $A(2;-1;1)$. (B) $Q(0;-1;1)$. (C) $N(0;-1;2)$. (D) $M(-1;-1;1)$.

Lời giải.

Ta có: d_1 đi qua $M(1;0;5)$ và có vec-tơ pháp tuyến là $\vec{u_1} = (1;1;-2)$ nên $d_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$

$\Rightarrow M_0(1+t;t;5-2t) \in (d_1)$.

Đường thẳng $d \perp d_1 \Rightarrow \vec{u_2} \perp \vec{u_1}$.

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với d_1 là: $x - 1 + y - 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + y - 2z + 3 = 0$.

Gọi $M_0(1+t;t;5-2t)$ là giao điểm của đường thẳng d_1 và mặt phẳng (α).

$\Rightarrow 1 + t + t - 2(5-2t) + 3 = 0 \Leftrightarrow 6t = 6 \Leftrightarrow t = 1$.

$\Rightarrow M_0(2;1;3)$.

$\Rightarrow d$ là đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;0;2)$ và $M_0(2;1;3)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{AM} = (1;1;1) \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 2+t \end{cases}$.

Thử các đáp án, chỉ có điểm $Q(0;-1;1)$ thuộc đường thẳng d khi $t=-1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Tìm m để đường thẳng $y = 2x+m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm M, N sao cho độ dài MN nhỏ nhất

A 3. (B) -1. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số là

$2x+m = \dfrac{x+3}{x+1}\,(x \neq 1) \Leftrightarrow 2x^2+(m+1)x+m-3=0 \quad (*)$

Ta có: $\Delta = (m+1)^2 - 8(m-3) = m^2-6m+25 = (m-3)^2+16 > 0, \forall m$.

$\Rightarrow$ (*) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m.

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2 = -\dfrac{m+1}{2} \\ x_1x_2 = \dfrac{m-3}{2} \end{cases}$.

Gọi $M(x_1; 2x_1+m), N(x_2; 2x_2+m)$ là hai giao điểm của 2 đồ thị hàm số.

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} MN^2 &= (x_2-x_1)^2 + (2x_2-2x_1)^2 = 5(x_2-x_1)^2 \\ &= 5\left[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2\right] = 5\left[\dfrac{(m+1)^2}{4} - 4\cdot\dfrac{m-3}{2}\right] \\ &= \dfrac{5}{4}\left(m^2+2m+1-8m+24\right) = \dfrac{5}{4}\left(m^2-6m+25\right) \\ &= \dfrac{5}{4}(m-3)^2+20 \geq 20, \forall m. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m-3=0 \Leftrightarrow m=3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = |x^3-3x+m|$ có 5 điểm cực trị?

(A) 5. **B** 3. (C) 1. (D) vô số.

Lời giải.

Hàm số $y = |x^3-3x+m|$có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y = x^3-3x+m$ có 2 cực trị nằm về hai phía của trục Ox.

Ta có:

$y' = x^3-3x+m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=-2+m \\ x=-1 \Rightarrow y = 2+m \end{array}\right.$.

Hai điểm cực trị nằm về 2 phía trục Ox $\Leftrightarrow (-2+m)(2+m) < 0 \Leftrightarrow m^2-4<0 \Leftrightarrow -2<m<2$.

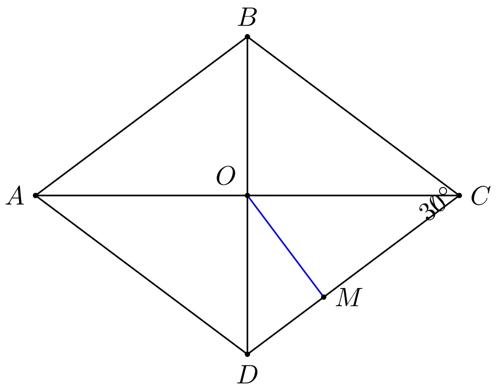
Kết hợp điều kiện $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1;0;1\}$. Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Cho khối chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $AB = a$, $\widehat{BAD} = 60°, SO \perp (ABCD)$ và mặt phẳng (SCD) tạo với mặt đáy một góc bằng $60°$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{24}$. **C** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{48}$. **D** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Lời giải.



Ta có: $\widehat{DAB} = 60° \Rightarrow \Delta ABD$ là tam giác đều cạnh a $\Rightarrow BD = a$.

$\Rightarrow S_{ABD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{ABD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Kẻ $SM \perp CD \Rightarrow CD \perp (SOM) \Rightarrow CD \perp OM$

$\Rightarrow \widehat{((SCD),(ABCD))} = \widehat{(OM, SM)} = \widehat{SMO} = 60°$.

Xét ΔOMD vuông tại D ta có:

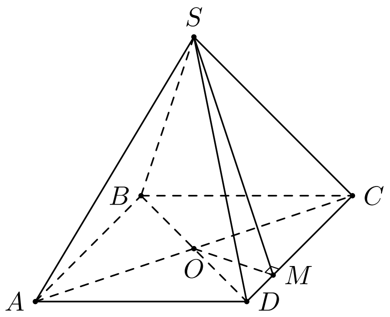
$\sin\widehat{ODM} = \dfrac{OM}{OD}$

$\Rightarrow OM = OD \cdot sin60° = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Xét ΔSOM vuông tại M ta có:

$SO = OM \cdot \tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{3a}{4}$

$\Rightarrow V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}SO \cdot S_{ABD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3a}{4} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.



Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho các số thực dương $x, y \neq 1$ và thỏa mãn $\log_x y = \log_y x, \log_x(x-y) = \log_y(x+y)$. Giá trị của $x^2 + xy - y^2$ bằng

A 0. **B** 3. **C** 1. **D** 2.

Lời giải.

Điều kiện: $x > y > 0, x, y \neq 1$

Ta có:

$$\begin{cases}\log_x y = \log_y x\\ \log_x(x-y) = \log_y(x+y)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_x y = \dfrac{1}{\log_x y}\\ \log_x(x-y) = \log_y(x+y)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\log_x y = \pm 1\\ \log_x(x-y) = \log_y(x+y)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} y = x(\text{không thỏa mãn})\\ y = \dfrac{1}{x}\end{array}\right.\\ \log_x(x-y) = \log_y(x+y)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}y = \dfrac{1}{x}\\ \log_x(x-y) = \log_{x^{-1}}(x+y)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = \dfrac{1}{x}\\ \log_x(x-y) + \log_x(x+y) = 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}y = \dfrac{1}{x}\\ \log_x\left(x^2 - y^2\right) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy = 1\\ x^2 - y^2 = 1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + xy - y^2 = 1 + 1 = 2.$$

Chọn đáp án D □

Câu 35. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+3x+2}$ là

A $\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C$. B $2\ln|x+1| + \ln|x+2| + C$.

C $2\ln|x+1| - \ln|x+2| + C$. D $-\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C$.

Lời giải.

Ta có:

$I = \displaystyle\int f(x)dx = \int \frac{x+3}{x^2+3x+2}dx = \int \frac{x+3}{(x+1)(x+2)}dx$

$= \displaystyle\int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)dx = 2\ln|x+1| - \ln|x+2| + C.$

Chọn đáp án C □

Câu 36. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + 3x - 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A $(-3;3)$. B $[-3;3]$. C $\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. D $\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3x^2 - 2mx + 3$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \quad y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \quad \Delta' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \quad m^2 - 9 \leq 0\\ &\Leftrightarrow \quad -3 \leq m \leq 3.\end{aligned}$$

Chú ý: Chỉ kết luận $\Delta' > 0$ là chưa đủ, học sinh có thể thử lại khi $m = \pm 3$ để chắc chắn.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Xét số phức z thỏa mãn $\dfrac{z+2}{z-2i}$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

(A) 1. (B) $\sqrt{2}$. (C) $2\sqrt{2}$. (D) 2.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ ta có:

$\dfrac{z+2}{z-2i} = \dfrac{(a+2)+bi}{a+(b-2i)i} = \dfrac{[(a+2)+bi]\,[a-(b-2)i]}{[a+(b-2)i]\,[a-(b-2)i]}$

$= \dfrac{(a+2)a-(a+2)(b-2)i+abi+b(b-2)}{a^2+(b-2)^2}$.

$= \dfrac{a^2+2a+b^2-2b}{a^2+(b-2)^2} - \dfrac{(a+2)(b-2)-ab}{a^2+(b-2)^2}i.$

Để số trên là số thuần ảo $\Rightarrow$ có phần thực bằng 0 $\Rightarrow a^2+2a+b^2-2b=0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-1;1)$, bán kính $R=\sqrt{(-1)^2+1^2-0}=\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Gieo con xúc xắc được chế tạo cân đối và đồng chất 2 lần. Gọi a là số chấm xuất hiện trong lần gieo thứ nhất, b là số chấm xuất hiện trong lần gieo thứ hai. Xác suất để phương trình $x^2+ax+b=0$ có nghiệm bằng

(A) $\dfrac{17}{36}$. (B) $\dfrac{19}{36}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{4}{9}$.

Lời giải.

Gieo một con xúc xắc 2 lần $\Rightarrow n(\Omega)=6^2=36$.

Để phương trình $x^2+ax+b=0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta=a^2-4b\geq 0 \Leftrightarrow b\leq \dfrac{a^2}{4}$ với $a,b\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

TH1: $a=1\Rightarrow b\leq\dfrac{1}{4}\Rightarrow$ Không có b thỏa mãn.

TH2: $a=2\Rightarrow b\leq\dfrac{2^2}{4}=1\Rightarrow b=1\Rightarrow$ có 1 cặp $(a;b)$ thỏa mãn.

TH3: $a=3\Rightarrow b\leq\dfrac{3^2}{4}=2,25\Rightarrow b\in\{1;2\}\Rightarrow$ có 2 cặp $(a;b)$ thỏa mãn.

TH4: $a=4\Rightarrow b\leq\dfrac{4^2}{4}=4\Rightarrow b\in\{1;2;3;4\}\Rightarrow$ có 4 cặp $(a;b)$ thỏa mãn.

TH5: $a=5\Rightarrow b\leq\dfrac{5^2}{4}=6,25\Rightarrow b\in\{1;2;3;4;5;6\}\Rightarrow$ có 6 cặp $(a;b)$ thỏa mãn.

TH6: $a=6\Rightarrow b\leq\dfrac{6^2}{4}=9\Rightarrow b\in\{1;2;3;4;5;6\}\Rightarrow$ có 6 cặp $(a;b)$ thỏa mãn.

Gọi A là biến cố: "Phương trình $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm" $\Rightarrow n(A)=1+2+4+6+6=19$.

Vậy $P(A)=\dfrac{19}{36}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Biết rằng tồn tại duy nhất bộ các số nguyên a,b,c sao cho $\displaystyle\int_2^3 (4x+2)\ln x\,\mathrm{d}x = a+b\ln 2+c\ln 3$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

(A) 19. (B) -19. (C) 5. (D) -5.

Lời giải.

Đặt $I = \int\limits_2^3 (4x+2)\ln x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = (4x+2)\mathrm{d}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \\ v = 2x^2 + 2x = 2x(x+1) \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} I =& \; [2x(x+1)\ln x]\big|_2^3 - \int\limits_2^3 \frac{2x(x+1)}{x}\,\mathrm{d}x \\ I =& \; 24\ln 3 - 12\ln 2 - 2\int\limits_2^3 (x+1)dx \\ I =& \; 24\ln 3 - 12\ln 2 - 2\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_2^3 \\ I =& \; 24\ln 3 - 12\ln 2 - 2\left(\frac{15}{2} - 4\right) \\ I =& \; 24\ln 3 - 12\ln 2 - 7 = a + b\ln 2 + c\ln 3. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = -12 \Rightarrow a+b+c = -7-12+24 = 5. \\ c = 24 \end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 40. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2-2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về hai phía khác nhau đối với trục hoành?

A 2. **B** 1. **C** 3. **D** 4.

Lời giải.

$y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2-2)\,x - m^2 + 3$ TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2$.

Để hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 - 3(m^2-2) > 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 2m + 7 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{15}}{2} < m < \dfrac{1+\sqrt{15}}{2}$.

Mà $m \in Z \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

Thử lại:

+) Với $m = -1$ ta có $y = x^3 - x^2 - x + 2$.

Khi đó $y' = 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = \dfrac{-1}{3} \Rightarrow y = \dfrac{59}{27} \end{array}\right.$ (ktm).

+) Với $m = 0$ ta có $y = x^3 - x^2 - 2x + 3$.

Khi đó $y' = 3x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1+\sqrt{7}}{3} \Rightarrow y = \dfrac{61-14\sqrt{7}}{27} > 0 \\ x = \dfrac{1-\sqrt{7}}{3} \Rightarrow y = \dfrac{61+14\sqrt{7}}{27} > 0 \end{array}\right.$ (ktm).

+) Với $m = 1$ ta có $y = x^3 - x^2 - x + 2$.

Khi đó $y' = 3x^3 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2+\sqrt{7}}{3} \Rightarrow y = \dfrac{20-14\sqrt{7}}{27} < 0 \\ x = \dfrac{2-\sqrt{7}}{3} \Rightarrow y = \dfrac{20+14\sqrt{7}}{27} < 0 \end{array}\right. (tm).$

+) Với $m = 2$ ta có $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.

Khi đó $y' = 3x^3 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = -\dfrac{9+2\sqrt{3}}{27} < 0 \\ x = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \dfrac{-9+2\sqrt{3}}{9} < 0 \end{array}\right. (ktm).$

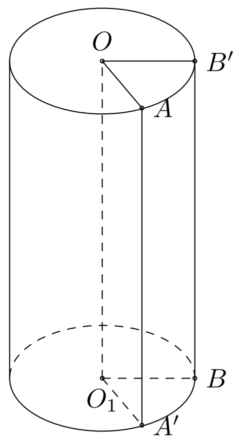
Vậy có 1 giá trị của m thỏa mãn là $m = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Cho hình trụ (T) có chiều cao bằng $2a$. Hai đường tròn đáy của (T) có tâm lần lượt là O và O_1 và bán kính bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy O_1 lấy điểm B sao cho $AB = \sqrt{5}a$. Thể tích khối tứ diện OO_1AB bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. B. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. C. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. D. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải.



Trên (O) lấy điểm B', trên (O_1) lấy điểm A' sao cho $AA' \parallel BB' \parallel OO_1$. Khi đó ta được hình lăng trụ $OAB'.O_1A'B$.

Ta có $AA' = h = 2a$, $AB = a\sqrt{5}$.

Xét tam giác vuông $AA'B$ có $A'B = \sqrt{AB^2 - AA'^2} = \sqrt{5a^2 - 4a^2} = a$.

Do đó tam giác $O_1A'B$ có $O_1A' = O_1B = A'B = a \Rightarrow \Delta O_1A'B$ đều cạnh a

$\Rightarrow S_{\Delta O_1A'B} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow V_{OAB'.O_1A'B} = AA'.S_{O_1A'B} = 2a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $V_{OAB'.O_1A'B} = V_{A.O_1A'B} = V_{OAB'.O_1A'B} + V_{B.OAB'} + V_{OO_1AB}$.

Mà $V_{A.O_1A'B} = \dfrac{1}{3}V_{OAB'.O_1A'B}; V_{B.OAB'} = \dfrac{1}{3}V_{OAB'.O_1AB}$

$\Rightarrow V_{OO_1AB} = \dfrac{1}{3}V_{OAB'.O_1A'B} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;2;1), B(2;-1;4), C(1;1;4)$. Đường thẳng nào dưới đây vuông góc với mặt phẳng (ABC)?

A. $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$. B. $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$. C. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$. D. $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-1}$.

Lời giải.

Phương pháp:

$(d)\perp(P) \Leftrightarrow \overrightarrow{u_d}$ cùng phương với $\overrightarrow{n_P}$.

Cách giải:

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3;-3;3) // \vec{a} = (1;-1;1) \\ \overrightarrow{AC} = (2;-1;3) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{(ABC)} = \left[\vec{a};\overrightarrow{AC}\right] = (-2;-1;1)$ là 1 VTPT của mặt phẳng (ABC).

Do đó đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) có VTPT cùng phương với vectơ $(-2;-1;1)$.

Dựa vào các đáp án ta thấy ở đáp án D đường thẳng $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-1}$ có 1 VTPT là $(-2;1;1)$ cùng phương với $(-2;-1;1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 43. Cho hàm số $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=1$ và $f(x)=\sqrt{x+1}\cdot f'(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $4<f(3)<6$. (B) $f(3)<2$. (C) $2<f(3)<4$. **D** $f(3)>6$.

Lời giải.

Phương pháp:

+) Từ giả thiết suy ra $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

+) Sử dụng phương pháp nguyên hàm 2 vế.

Cách giải:

Theo bài ra ta có: $f(x)=\sqrt{x+1}f'(x)$ (*)

Do $f(x)>0\forall x\in R$ nên từ (*) ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được:

$\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$

$\Leftrightarrow \ln|f(x)|\,dx=2\sqrt{x+1}+C\Leftrightarrow \ln f(x)=2\sqrt{x+1}+C\Leftrightarrow f(x)=e^{2\sqrt{x+1}+C}$.

Ta có $f(0)=1\Rightarrow 1=e^{2+C}\Leftrightarrow 2+C=0\Leftrightarrow C=-2$.

Do đó $f(x)=e^{2\sqrt{x+1}-2}\Rightarrow f(3)=e^2\approx 7,4>6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(0;1)$. **B** $(-2;-1)$. (C) $(-2;1)$. (D) $(-4;-3)$.

Lời giải.

Đặt $g(x)=f(x^2+2x)$ ta có:

$g'(x)=(2x+2)f'(x^2+2x)=2(x+1)f'(x^2+2x)$.

Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên $(a;b)\Leftrightarrow g'(x)\le 0,\forall x\in(a;b)$ và bằng 0 tại hữu hạn điểm.

Xét đáp án A ta có: $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=3f'\left(\dfrac{5}{4}\right)>0\Rightarrow$ Loại đáp án A.

Xét đáp án C ta có: $g'\left(\dfrac{-3}{2}\right)=2f'(0)>0\Rightarrow$ Loại đáp án C.

Xét đáp án D ta có: $g'\left(-\dfrac{7}{2}\right)=-5f'\left(\dfrac{21}{4}\right)>0\Rightarrow$ Loại đáp án D.

Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + z_1z_2z_3 = 0$. Đặt $z = z_1 + z_2 + z_3$, giá trị của $|z|^3 - 3|z|^2$ bằng

A -2. **B** -4. **C** 4. **D** 2.

Lời giải.

Do các giả thiết đã cho đúng với mọi cặp số phức z_1, z_2, z_3 nên ta chọn $z_1 = z_2 = 1$, kết hợp giả thiết ta có:

$z_1^3 + z_2^3 + z_2^3 + z_1z_2z_3 = 0 \Leftrightarrow 1 + 1 + z_3^3 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_3^3 + z_3 + 2 = 0 \Leftrightarrow z_3 = -1$, thỏa mãn $|z_3| = 1$.

Khi đó ta có 1 cặp $(z_1, z_2, z_2) = (1; 1; -1)$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

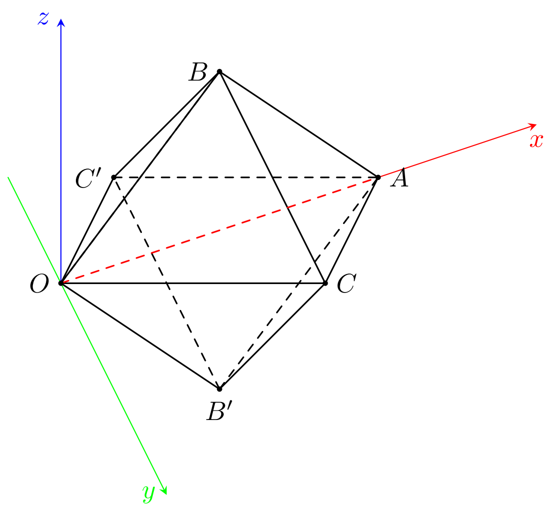
Khi đó $z = z_1 + z_2 + z_3 = 1 + 1 - 1 = 1$. $\Rightarrow |z|^3 - 3|x|^2 = 1 - 3.1 = -2$.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, tập hợp các điểm thỏa mãn $|z| + |y| + |z| \leq 2$ và $|x - 2| + |y| + |z| \leq 2$ là một khối đa diện có thể tích bằng

A 3. **B** 2. **C** $\frac{8}{3}$. **D** $\frac{4}{3}$.

Lời giải.



Có $0 \leq |x| + |y| + |z| \leq 2$ và $0 \leq |x - 2| + |y| + |z| \leq 2$ nên tìm các điểm đầu mút.

$|x| + |y| + |z| = 0 \Rightarrow x = y = z = 0 \Rightarrow O(0; 0; 0)$.

$|x - 2| + |y| + |z| = 0 \Rightarrow x = 2; y = z = 0 \Rightarrow A(2; 0; 0)$.

Xét hệ phương trình

$$\begin{aligned} &\begin{cases} |x| + |y| + |z| = 2 \\ |x - 2| + |y| + |z| = 2 \end{cases} \\ \Rightarrow\ & |x| = |x - 2| \\ \Leftrightarrow\ & x = 2 - x \\ \Leftrightarrow\ & x = 1 \\ \Rightarrow\ & |y| + |z| = 1 \\ \Rightarrow\ & \left[\begin{aligned} & y = 0; z = \pm 1 \\ & y = \pm 1; z = 0 \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

$\Rightarrow B(1; 0; 1), B'(1; 0; -1), C(1; 1; 0), C'(1; -1; 0)$.

Dựng hình suy ra tập hợp các điểm thỏa mãn là bát diện $B.OCAC'.B'$.

Ta có $OB = \sqrt{1^1 + 1^1} = \sqrt{2}$, do đó hình bát diện đều $B.OCAC'.B'$ có cạnh bằng $\sqrt{2}$.

Vậy thể tích của bát diện đều là $V = \dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^3 \cdot \sqrt{2}}{3} = \dfrac{4}{3}$.

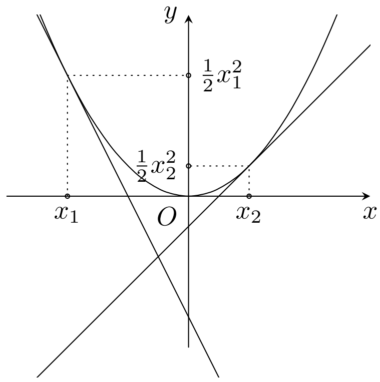
Chọn đáp án D □

Câu 47. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P). Xét các điểm A, B thuộc (P) sao cho tiếp tuyến tại A và B của (P) vuông góc với nhau, diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB

bằng $\frac{9}{4}$. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của A và B. Giá trị của $(x_1+x_2)^2$ bằng

(A) 7. (B) 5. (C) 13. (D) 11.

Lời giải.



$(P): y = \frac{1}{2}x^2$

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = x$

Giả sử $A\left(x_1; \frac{1}{2}x_1^2\right); B\left(x_2; \frac{1}{2}x_2^2\right) \in (P)(x_1 \neq x_2)$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm A của (P) là $y = x_1(x-x_1) + \frac{1}{2}x_1^2 \Leftrightarrow y = x_1 x - \frac{1}{2}x_1^2 (d_1)$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm B của (P) là $y = x_2(x-x_2) + \frac{1}{2}x_2^2 \Leftrightarrow y = x_2 x - \frac{1}{2}x_2^2 (d_2)$.

Do $(d_1) \perp (d_2)$ nên ta có $x_1 x_2 = -1 \Leftrightarrow x_2 = \frac{-1}{x_1}$.

Phương trình đường thẳng AB:

$$\begin{aligned}
& \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-\frac{1}{2}x_1^2}{\frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}(x-x_1)\left(x_2^2-x_1^2\right) = \left(y - \frac{1}{2}x_1^2\right)(x_2-x_1) \\
\Leftrightarrow\ & (x-x_1)(x_2+x_1) = 2y - x_1^2 \\
\Leftrightarrow\ & (x_1+x_2)x - 2y - x_1x_2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & y = \frac{1}{2}\left[(x_1+x_2)x - x_1x_2\right] = \frac{1}{2}\left[(x_1+x_2)x + 1\right]
\end{aligned}$$

Do đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi AB, (P) là:

$$\begin{aligned}
& S=\frac{1}{2}\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\left(x_1+x_2\right)x+1-x^2\right)dx\\
\Leftrightarrow\ & \frac{9}{4}=\frac{1}{2}\left(\left(x_1+x_2\right)\frac{x^2}{2}+x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x_1}^{x_2}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{9}{4}=\frac{1}{2}\left[\left(x_1+x_2\right)\left(\frac{x_2^2}{2}-\frac{x_1^2}{2}\right)+\left(x_2-x_1\right)-\frac{x_2^3-x_1^3}{3}\right]\\
\Leftrightarrow\ & \frac{9}{4}=\frac{1}{2}\left(x_1+x_2\right)\left(x_2^2-x_1^2\right)+\left(x_2-x_1\right)-\frac{x_2^3-x_1^3}{3}\\
\Leftrightarrow\ & 27=3\left(x_1x_2^2-x_1^3+x_2^3-x_1^2x_2\right)+6\left(x_2-x_1\right)-2x_2^3+2x_1^3\\
\Leftrightarrow\ & 27=3x_1x_2^2-3x_1x_2^2+x_2^3-x_1^3+6(x_2-x_1)\\
\Leftrightarrow\ & 27=-3(x_2-x_1)+\left(x_2-x_1\right)\left(x_1^2+x_2^2-1\right)+6(x_2-x_1)\\
\Leftrightarrow\ & 27=3(x_2-x_1)+\left(x_2-x_1\right)\left(x_1^2+x_2^2-1\right)\\
\Leftrightarrow\ & 27=\left(x_2-x_1\right)\left(x_1^2+x_2^2+2\right)\\
\Leftrightarrow\ & 27=\left(x_2-x_1\right)\left(x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\right)\\
\Leftrightarrow\ & 27=(x_2-x_1)(x_2-x_1)^2=(x_2-x_1)^3\\
\Leftrightarrow\ & x_2-x_1=3
\end{aligned}$$

Thay $x_2=\dfrac{-1}{x_1}$ ta có:

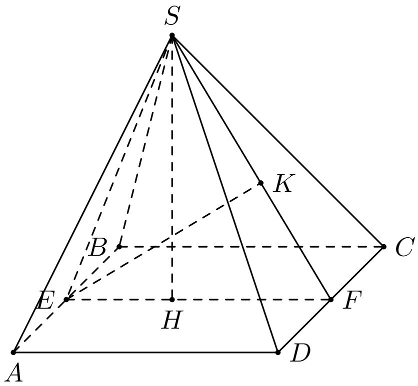
$$\begin{aligned}
& \frac{-1}{x_1}-x_1=3\\
\Leftrightarrow\ & -1-x_1^2-3x_1=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x_2=\dfrac{2}{3+\sqrt{5}}\\ x_1=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x_2=\dfrac{-2}{-3+\sqrt{5}}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & (x_1+x_2)^2=5.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 48. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA=SB=\sqrt{2}a$, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng a. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$. B. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. C. $\dfrac{2\sqrt{6}a^3}{3}$. D. $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải.



Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD.
ΔSAB có $SA = SB \Rightarrow SE \perp AB \Rightarrow SE \perp CD$.
Ta có $\begin{cases} CD \perp SE \\ CD \perp EF \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SEF)$.
Trong (SEF) kẻ $EK \perp SF$ ta có:
$\begin{cases} EK \perp SF \\ EK \perp CD \end{cases} \Rightarrow EK \perp (SCD) \Rightarrow d\left(E;(SCD)\right) = EK$
Vì
$AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}\left(E;(SCD)\right) = \mathrm{d}\left(A;(SCD)\right) = a$.

Kẻ $SH \perp EF$ ta có $\begin{cases} SH \perp EF \\ CD \perp (SEF) \end{cases} \Rightarrow SD \perp CD \Leftrightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ta có $S_{\Delta SEF} = \dfrac{1}{2} SH \cdot \mathrm{EF} = \dfrac{1}{2} EK \cdot SF \Leftrightarrow SH \cdot 2a = a \cdot SF \Rightarrow 2SH = SF$.
Đặt $SH = x \Rightarrow SF = 2a$.
Ta có $AE = \dfrac{1}{2} AB = a \Rightarrow SE = \sqrt{SA^2 - AE^2} = \sqrt{2a^2 - a^2} = a$.
Áp dụng định lí Cosin trong tam giác SEF ta có:
$cos\widehat{SEF} = \dfrac{SE^2 + EF^2 - SF^2}{2SE.EF} = \dfrac{a^2 + 4a^2 - 4x^2}{2 \cdot a \cdot 2a} = \dfrac{5a^2 - 4x^2}{4a^2}$.
Xét tam giác vuông SHE có $EH = SE \cdot \cos\widehat{SEF} = a \cdot \dfrac{5a^2 - 4x^2}{4a^2} = \dfrac{5a^2 - 4x^2}{4a}$.
Áp dụng định lí Pytago trong tam giác vuông SHE có:

$$\begin{aligned} & SH^2 + EH^2 = SE^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + \left(\frac{5a^2 - 4x^2}{4a}\right)^2 = a^2 \\ \Leftrightarrow\ & 16a^2x^2 + 25a^4 - 40a^2x^2 + 16x^4 = 16a^4 \\ \Leftrightarrow\ & 9a^4 - 24a^2x^2 + 16x^4 = 0 \Leftrightarrow \left(3a^2 - 4a^2\right)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 4x^2 = 3a^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{2} = SH. \end{aligned}$$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 4a^2 = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.
Chọn đáp án D □

Câu 49. Cho số thực α sao cho phương trình $2^x - 2^{-x} = 2\cos(\alpha x)$ có đúng 2019 nghiệm thực. Số nghiệm của phương trình $2^x + 2^{-x} = 4 + 2\cos(\alpha x)$ là

(A) 2019. (B) 2018. (C) 4037. (D) 4038.

Lời giải.

Ta có: $2^x + 2^{-x} = 4 + 2cos(\alpha x) \Leftrightarrow \left(2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}}\right)^2 = 4\cos^2\dfrac{\alpha x}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = 2\cos\dfrac{\alpha x}{2} & (1) \\ 2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = -2\cos\dfrac{\alpha x}{2} & (2) \end{array}\right.$

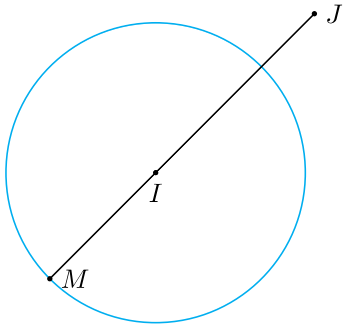
Thay $x = 0$ vào phương trình (1) ta có $2^0 - 2^0 = 2\cos 0 \Leftrightarrow 0 = 1$ (Vô lí), kết hợp với giả thiết ta có phương trình (1) có 2019 nghiệm thực khác 0.

Với x_0 là nghiệm của phương trình (1)
$\Leftrightarrow 2^{\frac{x_0}{2}} - 2^{-\frac{x_0}{2}} = 2\cos\dfrac{\alpha x_0}{2} \Leftrightarrow 2^{\frac{(-x_0)}{2}} - 2^{\frac{-(-x_0)}{2}} = -2\cos\dfrac{\alpha(-x_0)}{2} \Rightarrow -x_0$ là nghiệm của phương trình (2).
Thay $x = -x_0$ vào phương trình (1) ta có:
$\Leftrightarrow 2^{-\frac{x_0}{2}} - 2^{\frac{x_0}{2}} = 2\cos\frac{\alpha(-x_0)}{2} = 2\cos\frac{\alpha x_0}{2} = 2^{\frac{x_0}{2}} - 2^{\frac{-x_0}{2}}$
$\Leftrightarrow 2\cdot 2^{\frac{x_0}{2}} = 2\cdot 2^{\frac{-x_0}{2}} \Leftrightarrow 2^{\frac{x_0}{2}+1} = 2^{\frac{-x_0}{2}+1} \Leftrightarrow \dfrac{x_0}{1} + 1 = -\dfrac{x_0}{1} + 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$ (vô lí do $x_0 \neq 0$) $\Rightarrow -x_0$ không là nghiệm của phương trình (1), điều đó đảm bảo mọi nghiệm của phương trình (2) không trùng với nghiệm của phương trình (1).
Do đó phương trình (2) cũng có 2019 nghiệm.
Vậy phương trình ban đầu có $2019 \cdot 2 = 4038$ nghiệm.
Chọn đáp án D □

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-3), B(0;-2;3)$ và mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 1$. Xét điểm M thay đổi luôn thuộc mặt cầu (S), giá trị lớn nhất của $MA^2 + 2MB^2$ bằng

A 80. **B** 50. **C** 82. **D** 52.

Lời giải.



Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;0;3)$, bán kính $R = 1$.
Gọi $J(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn
$\overrightarrow{JA} + 2\cdot\overrightarrow{JB} = \vec{0}$ Ta có: $\overrightarrow{JA} = (3-a, 1-b, -3-c); \overrightarrow{JB} = (-a; 2-b; 3-c)$.
$\Rightarrow \overrightarrow{JA} + 2.\overrightarrow{JB} = (3-3a; -3-3b; 3-3c) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \Rightarrow J(1;-1;1). \\ c = 1 \end{cases}$

Khi đó ta có:
$T = MA^2 + 2MB^2 = \left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}\right)^2$
$T = MJ^2 + 2\cdot\overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{JA} + JA^2 + 2MJ^2 + 4\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{JB} + 2JB^2$
$T = 3MJ^2 + 2\overrightarrow{MJ}\underbrace{\left(\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB}\right)}_{\vec{0}} + \underbrace{JA^2 + 2JB^2}_{\text{const}}$
Do đó $T_{max} \Leftrightarrow MJ_{max}$
Ta có: $\overrightarrow{IJ} = (2;-1;-2) \Rightarrow IJ = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3 > R = 1 \Rightarrow J$ nằm ở phía ngoài mặt cầu (S).
Khi đó
$MJ_{max} = IJ + R = 3 + 1 = 4$.
Vậy $T_{max} = 3.4^2 + (2^2 + 2^2 + 4^2) + 2.(1^2 + 1^2 + 2^2) = 3.16 + 24 + 2.6 = 84$.
Chọn đáp án C □

—— **HẾT** ——

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. D	3. C	4. A	5. A	6. D	7. C	8. B	9. C	10. A
11. C	12. A	13. D	14. A	15. A	16. C	17. B	18. C	19. C	20. D
21. C	22. A	23. C	24. A	25. D	26. B	27. C	28. C	29. C	30. B
31. A	32. B	33. A	34. D	35. C	36. B	37. B	38. B	39. C	40. B
41. C	42. D	43. D	44. B	45. A	46. D	47. B	48. D	49. D	50. C

5 ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, QUẢNG TRỊ, LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho biểu thức $P=\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}}$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là đúng?

(A) $P=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}}$. (B) $P=\left(\frac{2}{3}\right)^{18}$. (C) $P=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{18}}$. (D) $P=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Lời giải.

$$P=\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Tính số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$.

(A) 3. (B) 0. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{1;2\}$.

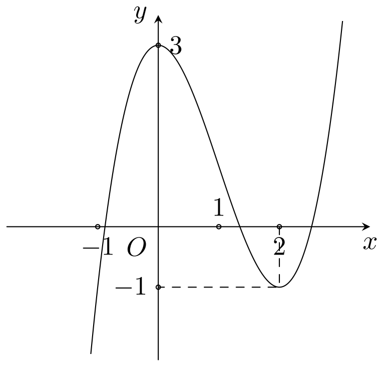
Ta có: $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{x+2}{x-2}$.

$\lim\limits_{x\to2^+}y=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x+2}{x-2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to2^-}y=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x+2}{x-2}=-\infty$

$\Rightarrow x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+2}{x-2}=1\Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. □

Câu 3. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1. (B) Điểm cực tiểu của hàm số là -1.
(C) Điểm cực đại của hàm số là 3. (D) Giá trị cực đại của hàm số là 0.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy:

- Đồ thị hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$, giá trị cực đại bằng -1.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Hàm số $y=-x^3+3x^2-4$ đồng biến trên tập hợp nào trong các tập hợp được cho dưới đây?

A $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

B $(-\infty; 0)$.

C $(0; 2)$.

D $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = -3x^2 + 6x$.

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 5. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh là $3cm$. Tính thể tích của khối tứ diện $ACB'D'$.

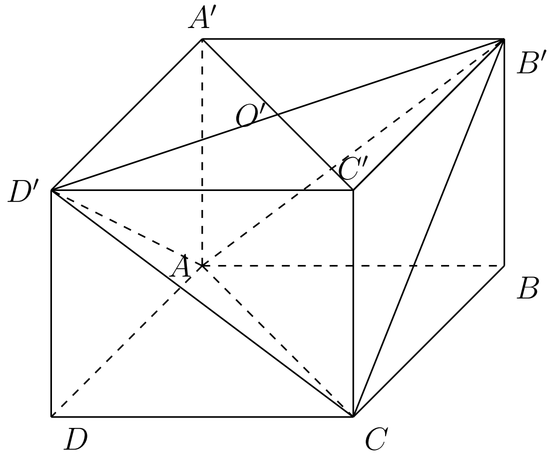
A $3cm^3$.

B $18\sqrt{2}cm^3$.

C $18cm^3$.

D $9cm^3$.

Lời giải.



Ta có $V_{B'D'AC} = 2V_{D'OAC} = 2 \cdot \dfrac{1}{2} V_{D'AA'C'C} = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} V_{DD'AA'C'C} = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} V_{ABCD.A'B'C'D'} = 9cm^3$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 6. Khối nón (N) có bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh bằng 15π. Tính thể tích của khối nón (N).

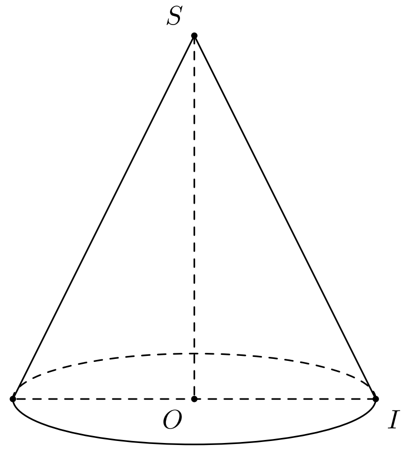
A 36π.

B 12π.

C 16π.

D 45π.

Lời giải.



Gọi SO, SI lần lượt là đường cao và đường sinh của khối nón (N).
Ta có $S_{xq} = \pi \cdot OI \cdot SI$.
$\Rightarrow SI = \dfrac{S_{xq}}{\pi \cdot OI} = 5$.
Suy ra $SO = \sqrt{SI^2 - OI^2} = 4$.
Thể tích của khối nón (N) bằng

$$V = \frac{1}{3} SO \cdot \pi \cdot OI^2 = \frac{1}{3} \cdot 4\pi 9 = 12\pi$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 2x - 2y + z + 2017 = 0$, véc tơ nào trong các véc tơ được cho dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A $\vec{n} = (4;\ -4;\ 2)$. (B) $\vec{n} = (1;\ -1;\ 4)$. (C) $\vec{n} = (1;\ -2;\ 2)$. (D) $\vec{n} = (-2;\ 2;\ 1)$.

Lời giải.
Ta có phương trình mặt phẳng $(P) : 2x - 2y + z + 2017 = 0$ nên một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{n_{(P)}} = (2; -2; 1)$.
Mặt khác $\vec{n} = (4; -4; 2)$ cùng phương với $\overrightarrow{n_{(P)}}$.
Do đó véc tơ $\vec{n} = (4; -4; 2)$ là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).
Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho số phức $z = \dfrac{(2-3i)(4-i)}{3+2i}$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng Oxy.

(A) $(1; 4)$. (B) $(-1; 4)$. C $(-1; -4)$. (D) $(1; -4)$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned} z = \frac{(2-3i)(4-i)}{3+2i} &= \frac{(8-3)-(2+12)i}{3+2i} \\ &= \frac{5-14i}{3+2i} \\ &= \frac{(5-14i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} \\ &= \frac{(15-28)-(10+42)i}{9+4} \\ &= \frac{-13-52i}{13} = -1-4i. \end{aligned}$$

Vậy điểm biểu diễn số phức $z$trên mặt phẳng Oxy là $M(-1; -4)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Tính tích phân $I = \displaystyle\int\limits_1^2 \frac{x-1}{x}\,\mathrm{d}x$

A $I = 1 - \ln 2$. (B) $I = \dfrac{7}{4}$. (C) $I = 1 + \ln 2$. (D) $I = 2\ln 2$.

Lời giải.

Ta có

$$I=\int\limits_1^2 \frac{x-1}{x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(1-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \left.(x-\ln|x|)\right|_1^2 = (2-\ln 2)-(1-\ln 1) = 1-\ln 2$$

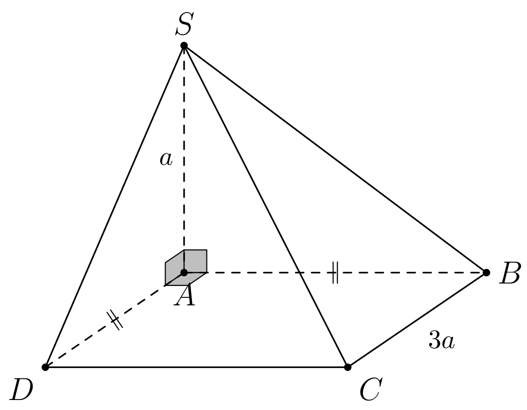
Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$, $SA=a$, $SA\perp(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A $3a^3$. **B** $\dfrac{a^3}{3}$. **C** $9a^3$. **D** $6a^3$.

Lời giải.

Ta có $V=\dfrac{1}{3}SA\cdot S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}a\cdot(3a)^2=\dfrac{1}{3}a\cdot 9a^2=3a^3$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, tập hợp các điểm biểu biễn các số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=|\overline{z}+1+2i|$ là đường thẳng có phương trình.

A $x-2y+1=0$. **B** $x+2y=0$. **C** $x-2y=0$. **D** $x+2y+1=0$.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow \overline{z}=x-yi$ và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Ta có:

$$\begin{aligned}
&|z-1+2i|=|\overline{z}+1+2i|\\
\Leftrightarrow\ &|x+yi-1+2i|=|x-yi+1+2i|\\
\Leftrightarrow\ &|(x-1)+(y+2)i|=|(x+1)+(2-y)i|\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(2-y)^2}\\
\Leftrightarrow\ &x^2-2x+1+y^2+4y+4=x^2+2x+1+y^2-4y+4\\
\Leftrightarrow\ &x-2y=0.
\end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu biễn các số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường thẳng có phương trình là $x-2y=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y+z+4=0$. Tính khoảng cách d từ điểm $M(1;2;1)$ đến (P).

(A) $d=3$. (B) $d=4$. **C** $d=1$. (D) $d=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Khoảng cách d từ điểm $M(1;2;1)$ đến (P) là $\mathrm{d}(M,(P))=\dfrac{|2\cdot 1-2\cdot 2+1+4|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho số phức $z=(1-2i)^2$. Tính mô đun của số phức $\dfrac{1}{z}$.

A $\dfrac{1}{5}$. (B) $\sqrt{5}$. (C) $\dfrac{1}{5}$. (D) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Ta có $z=(1-2i)^2=1-4i+4i^2=-3-4i$.

$\Rightarrow \dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{-3-4i}=-\dfrac{3}{25}+\dfrac{4}{25}i$.

Do đó $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\sqrt{\left(-\dfrac{3}{25}\right)^2+\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{1}{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Tính diện tích của mặt cầu có bán kính bằng 3.

(A) 18π. **B** 36π. (C) 12π. (D) 9π.

Lời giải.

Gọi r là bán kính của mặt cầu.

Ta có diện tích của mặt cầu là $S=4\pi r^2=4\cdot\pi\cdot 3^2=36\pi$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{1-2x}$ trên $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

(A) $\dfrac{1}{2}\ln|2x-1|+C$. (B) $\dfrac{1}{2}\ln|1-2x|+C$.

C $-\dfrac{1}{2}\ln|2x-1|+C$. (D) $\ln|2x-1|+C$.

Lời giải.

Trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$, ta có $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{1}{1-2x}\mathrm{d}(1-2x)=-\dfrac{1}{2}\ln|2x-1|+C$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Thể tích của khối trụ có bán kính $R=3$, chiều cao $h=5$ là

(A) $V=90\pi$. (B) $V=45$. **C** $V=45\pi$. (D) $V=15\pi$.

Lời giải.

Thể tích của khối trụ: $V=\pi\cdot R^2\cdot h=45\pi$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Tìm nghiệm của phương trình $\log_3(x-2)=2$.

(A) $x=9$. (B) $x=8$. **C** $x=11$. (D) $x=10$.

Lời giải.

Ta có:

$$\log_3(x-2)=2$$

$$\Leftrightarrow \quad x-2=3^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x-2=9$$
$$\Leftrightarrow \quad x=11.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=11$

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Gọi (D) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{x}{4}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình (D) quanh trục Ox.

(A) $\dfrac{15}{16}$. (B) $\dfrac{15\pi}{8}$. (C) $\dfrac{21\pi}{16}$. (D) $\dfrac{21}{16}$.

Lời giải.

Thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình (D) quanh trục Ox là

$$V=\pi\cdot\int\limits_1^4\left(\frac{x}{4}\right)^2dx=\left.\frac{\pi x^3}{48}\right|_1^4=\frac{21\pi}{16}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+2-m}{x+1}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

(A) $m<-3$. (B) $m\leq-3$. (C) $m\leq 1$. (D) $m<1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có $y'=\dfrac{-1+m}{(x+1)^2}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng xác định khi và chỉ khi:

$$y'=\frac{-1+m}{(x+1)^2}<0;\forall x\in\mathscr{D}$$
$$\Leftrightarrow \quad -1+m<0$$
$$\Leftrightarrow \quad m<1.$$

Chọn đáp án (D) □

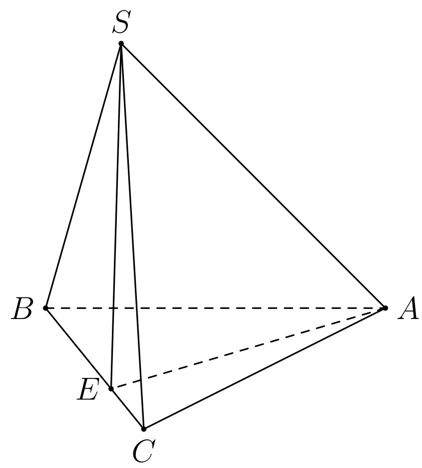
Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng 1. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE=2EC$. Tính thể tích V của khối tứ diện $S.AEB$?

(A) $V=\dfrac{1}{6}$. (B) $V=\dfrac{1}{3}$. (C) $V=\dfrac{2}{3}$. (D) $V=\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} S_{\triangle AEB} &= \frac{1}{2}\cdot BE\cdot \mathrm{d}(A,BC)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}BC\cdot \mathrm{d}(A,BC)\\ &= \frac{2}{3}\cdot S_{\triangle ABC}.\end{aligned}$$



Suy ra

$$\begin{aligned} V_{S.ABE} &= \frac{1}{3}\cdot \mathrm{d}(S,(ABC))\cdot S_{\triangle ABE}\\ &= \frac{1}{3}\cdot \mathrm{d}(S,(ABC))\cdot \frac{2}{3}S_{\triangle ABC}\\ &= \frac{2}{3}\cdot V_{S.ABC}\\ &= \frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 21. Biết rằng hàm số $F(x)=mx^3+(3m+n)x^2-4x+3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+10x-4$. Tính mn.

(A) $mn=1$. **(B) $mn=2$.** (C) $mn=0$. (D) $mn=3$.

Lời giải.

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

Khi đó, $3mx^2+2(3m+n)x-4=3x^2+10x-4,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}3m=3\\2(3m+n)=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\n=2.\end{cases}$

Vậy $m.n=2$

Chọn đáp án B □

Câu 22. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+5=0$. Tính $w=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+i\left(z_1^2z_2+z_2^2z_1\right)$.

(A) $w=-\frac{4}{5}+20i$. **(B) $w=\frac{4}{5}+20i$.** (C) $w=4+20i$. (D) $w=20+\frac{4}{5}i$.

Lời giải.

Theo hệ thức Vi-et, ta có $\begin{cases}z_1+z_2=4\\z_1z_2=5.\end{cases}$

Suy ra $w=\frac{z_2+z_1}{z_1z_2}+i\left(z_1+z_2\right)z_1z_2=\frac{4}{5}+20i$.

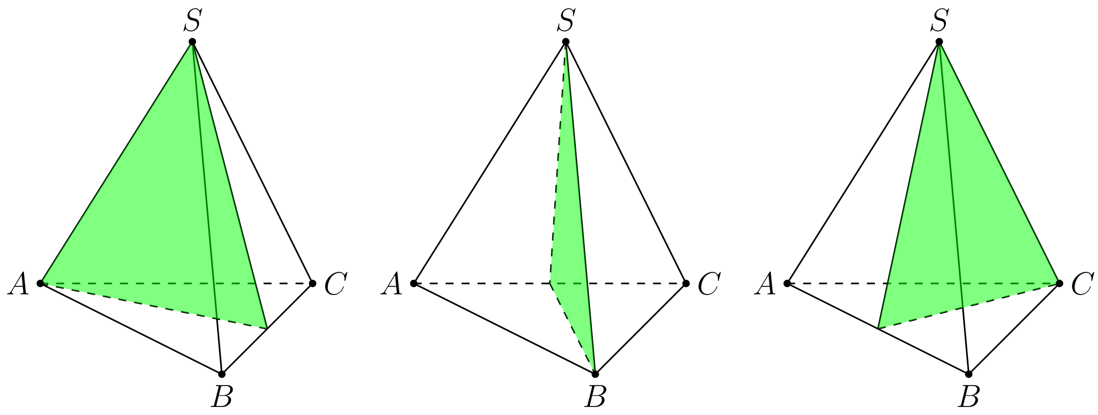
Chọn đáp án B □

Câu 23. Khối chóp tam giác đều có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

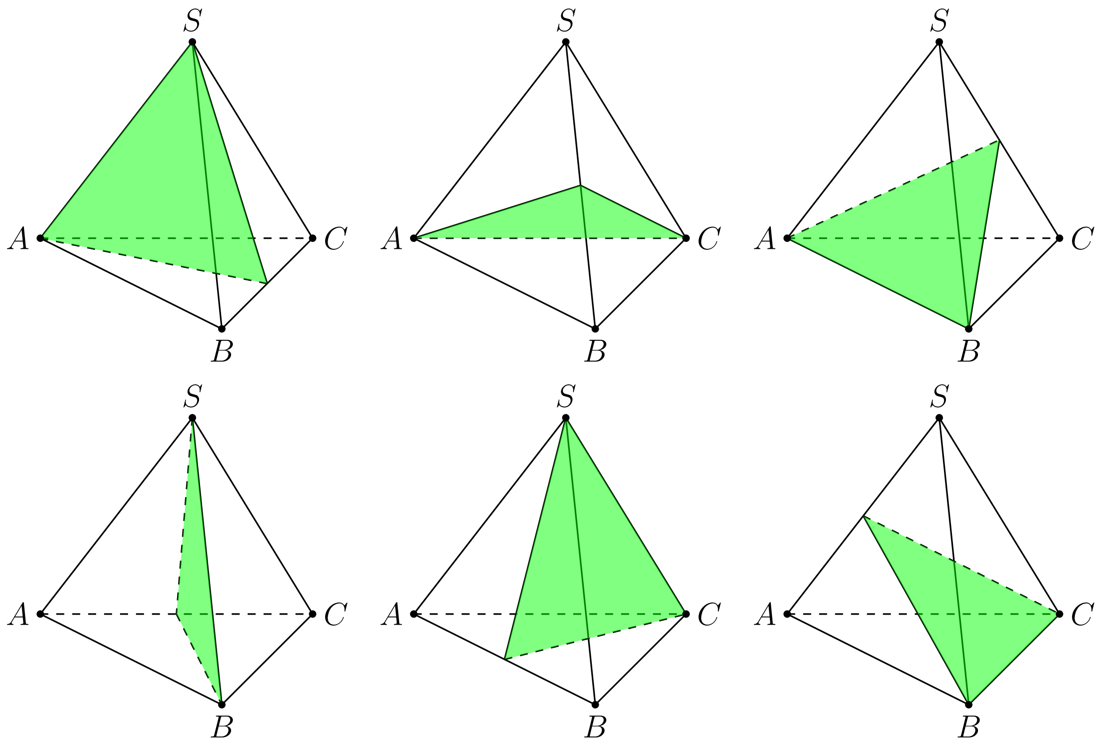
(A) 3. (B) 9. (C) 6. (D) 4.

Lời giải.

Trường hợp 1: Khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy không bằng cạnh bên. Khi đó khối chóp tam giác đều có tất cả 3 mặt phẳng đối xứng.



Trường hợp 2: Khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng cạnh bên. Khi đó khối chóp tam giác đều trở thành khối tứ diện đều $SABC$. Khi đó khối chóp tam giác đều có tất cả 6 mặt phẳng đối xứng.



Vậy khối chóp tam giác đều có nhiều nhất 6 mặt phẳng đối xứng. □

Câu 24. Cho số thực $a > 0, a \neq 1$. Giá trị $\log_{\sqrt{a^3}} \sqrt[3]{a^2}$ bằng

A $\dfrac{4}{9}$. **B** $\dfrac{2}{3}$. **C** 1. **D** $\dfrac{9}{4}$.

Lời giải.

Ta có: $\log_{\sqrt{a^3}} \sqrt[3]{a^2} = \log_{a^{\frac{3}{2}}} a^{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \log_a a = \dfrac{4}{9}$. □

Câu 25. Cho số phức z thỏa $|z - 1 + 2i| = 3$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w = 2z + i$ trên mặt phẳng (Oxy) là một đường tròn. Tìm tâm của đường tròn đó.

A $I(2; -3)$. **B** $I(1; 1)$. **C** $I(0; 1)$. **D** $I(1; 0)$.

Lời giải.

Gọi M là điểm biểu diễn số phức w.
Ta có $w = 2z + i \Leftrightarrow z = \dfrac{w-i}{2}$.
Do đó $|z - 1 + 2i| = 3 \Leftrightarrow \left|\dfrac{w-i}{2} - 1 + 2i\right| = 3 \Leftrightarrow |w - 2 + 3i| = 6 \Leftrightarrow MI = 6$, với $I\,(2;-3)$.
Do đó tập hợp điểm M là đường tròn tâm $I\,(2;-3)$ và bán kính $R = 6$.
Chọn đáp án A □

Câu 26. Tìm tổng tất cả các nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{2}\cdot\log_2(x+3) = \log_2(x+1) + x^2 - x - 4 + 2\sqrt{x+3}.$$

A $S = -1$. **B** $S = 1 - \sqrt{2}$. **C** $S = 1$. **D** $S = 2$.

Lời giải.
Điều kiện $\begin{cases} x+3 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1$.
Phương trình đã cho tương đương với:

$$\log_2\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x+3} + x + 3 = \log_2(x+1) - 2(x+1) + (x+1)^2. \qquad (1)$$

Xét $f(t) = \log_2 t - 2t + t^2$ với $t > 0$.

$$f'(t) = \frac{1}{t\ln 2} - 2 + 2t = \frac{(2\ln 2)\,t^2 - (2\ln 2)\,t + 1}{t\ln 2} = \frac{2\ln 2\cdot\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{1}{2}\ln 2}{t\cdot\ln 2} > 0,\ \forall t > 0.$$

Ta có $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ và $\begin{cases} \left(\sqrt{x+3}\right) \in (0;+\infty) \\ (x+1) \in (0;+\infty). \end{cases}$
Do đó $(1) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+3}\right) = f(x+1) \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = x+1$

$$\Leftrightarrow x + 3 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x &= 1 \\ x &= -2. \end{aligned}\right.$$

So với điều kiện ta nhận $x = 1$.
Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là $S = 1$.
Chọn đáp án C □

Câu 27. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_9(x^2+1)$.

A $y' = \dfrac{1}{(x^2+1)\ln 9}$. **B** $y' = \dfrac{x}{(x^2+1)\ln 3}$. **C** $y' = \dfrac{2x\ln 9}{x^2+1}$. **D** $y' = \dfrac{2\ln 3}{x^2+1}$.

Lời giải.
Ta có $y' = \dfrac{(x^2+1)'}{(x^2+1)\ln 9} = \dfrac{2x}{(x^2+1)\ln 3^2} = \dfrac{2x}{(x^2+1)\,2\ln 3} = \dfrac{x}{(x^2+1)\ln 3}$.
Chọn đáp án B □

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 10y - 6z + 49 = 0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S).

A $R = 1$. **B** $R = 7$. **C** $R = \sqrt{151}$. **D** $R = \sqrt{99}$.

Lời giải.

Ta có $a=4$, $b=-5$, $c=3$, $d=49$. Do đó $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=1$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Tích phân $I=\int\limits_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=a-\ln b$ trong đó a, b là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a+b$.

(A) 1. (B) 0. (C) -1. (D) 3.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1}\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^1 \left(1-\frac{2x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= x\Big|_0^1 - \ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1 \\ &= 1-\ln 2 \\ &\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow a+b=3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 30. Cho x, $y>0$ thỏa mãn $x+y=\frac{3}{2}$ và biểu thức $P=\frac{4}{x}+\frac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính x^2+y^2.

(A) $\frac{25}{16}$. (B) $\frac{5}{4}$. (C) $\frac{2313}{1156}$. (D) $\frac{153}{100}$.

Lời giải.

- **Cách 1.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$P=\frac{4}{x}+\frac{1}{4y}=\frac{4^2}{4x}+\frac{1^2}{4y}\geq\frac{(4+1)^2}{4x+4y}=\frac{25}{4\cdot\frac{3}{2}}=\frac{25}{6}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{4}{4x}=\frac{1}{4y}\Leftrightarrow x=4y$ mà $x+y=\frac{3}{2}$ nên $\begin{cases} x=\frac{6}{5} \\ y=\frac{3}{10}. \end{cases}$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{25}{6}$ khi $\begin{cases} x=\frac{6}{5} \\ y=\frac{3}{10} \end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=\frac{153}{100}$.

- **Cách 2.** Ta có $P=\frac{4}{x}+\frac{1}{4y}=\left(\frac{4}{x}+\frac{25}{9}x\right)+\left(\frac{1}{4y}+\frac{25}{9}y\right)-\frac{25}{9}(x+y)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$\frac{4}{x}+\frac{25}{9}x\geq 2\sqrt{\frac{4}{x}\cdot\frac{25x}{9}}=\frac{20}{3}$; $\frac{1}{4y}+\frac{25}{9}y\geq 2\sqrt{\frac{1}{4y}\cdot\frac{25y}{9}}=\frac{5}{3}\Rightarrow P\geq\frac{20}{3}+\frac{5}{3}-\frac{25}{9}\cdot\frac{3}{2}=\frac{25}{6}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{4}{x} = \dfrac{25}{9}x \\ \dfrac{1}{4y} = \dfrac{25}{9}y \end{cases}$ mà $\begin{cases} x > 0; y > 0 \\ x + y = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6}{5} \\ y = \dfrac{3}{10} \end{cases}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{25}{6}$ khi $\begin{cases} x = \dfrac{6}{5} \\ y = \dfrac{3}{10} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \dfrac{153}{100}$.

- **Cách 3.** Do $x > 0$ và $x + y = \dfrac{3}{2}$ nên $x \in \left(0; \dfrac{3}{2}\right)$.

  Xét hàm số $f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{6 - 4x}$ trên $\left(0; \dfrac{3}{2}\right)$.

  Ta có $f'(x) = -\dfrac{4}{x^2} + \dfrac{4}{(6 - 4x)^2}$;

  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (6 - 4x)^2 = x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6 - 4x = x \\ 6 - 4x = -x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{6}{5} \in \left(0; \dfrac{3}{2}\right) \\ x = 2 \notin \left(0; \dfrac{3}{2}\right) \end{array}\right.$.

  Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0		$\frac{6}{5}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$		
$f(x)$		$+\infty$	$\searrow$	$\frac{25}{6}$	$\nearrow$	$+\infty$	

  Ta có $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to \left(\frac{3}{2}\right)^-} f(x) = +\infty$; $f\left(\dfrac{6}{5}\right) = \dfrac{25}{6}$.

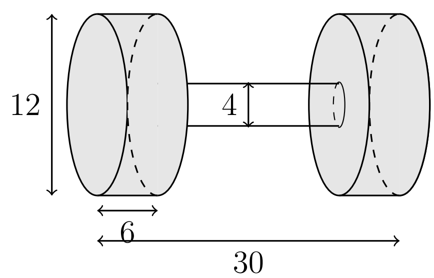
  Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có $\min\limits_{x \in \left(0; \frac{3}{2}\right)} f(x) = f\left(\dfrac{6}{5}\right) = \dfrac{25}{6}$.

  Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{25}{6}$ khi $\begin{cases} x = \dfrac{6}{5} \\ y = \dfrac{3}{10} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \dfrac{153}{100}$.

Chọn đáp án D □

Câu 31.

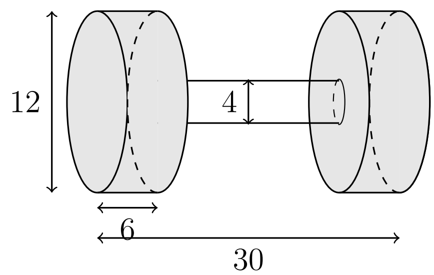
Người ta làm tạ tập cơ tay như hình vẽ với hai đầu là hai khối trụ bằng nhau và tay cầm cũng là khối trụ. Biết hai đầu là hai khối trụ đường kính đáy bằng 12, chiều cao bằng 6, chiều dài tạ bằng 30 và bán kính tay cầm là 2. Hãy tính thể tích vật liệu làm nên tạ tay đó.



A 108π. **B** 6480π. **C** 502π. **D** 504π.

Lời giải.

Gọi h_1, R_1, V_1 lần lượt là chiều cao, bán kính đáy, thể tích khối trụ nhỏ mỗi đầu.
$V_1 = h_1 \cdot \pi \cdot R_1^2 = 6 \cdot \pi \cdot 6^2 = 216\pi$.
Gọi h_2, R_2, V_2 lần lượt là chiều cao, bán kính đáy, thể tích của tay cầm.
$V_2 = h_2 \cdot \pi \cdot R_2^2 = (30 - 2 \cdot 6) \cdot \pi \cdot 2^2 = 72\pi$.
Thể tích vật liệu làm nên tạ tay bằng $V = 2V_1 + V_2 = 504\pi$.



Chọn đáp án D □

Câu 32. Tính số giá trị nguyên của tham số m trên khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 3m + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

A 2020. B 2. C 2019. D 1.

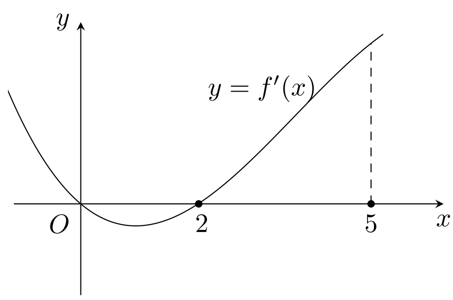
Lời giải.
Xét hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 3m + 1$.
Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$.
Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad y' \geq 0, \forall x \in (1; 2) \\ &\Leftrightarrow \quad 4x^3 - 4mx \geq 0, \forall x \in (1; 2). \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - m \geq 0, \forall x \in (1; 2) \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 \geq m, \forall x \in (1; 2). \end{aligned}$$

Mà $x^2 > 1, \forall x \in (1; 2)$.
Do đó $m \leq 1$.
Lại có $m \in (-2019; 2019)$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2018; -2017; \ldots; -1; 0; 1\}$.
Vậy có 2020 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án A □

Câu 33.
Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Tính số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2)$ trên khoảng $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$.

A 2. B 4. C 3. D 5.



Lời giải.
Xét hàm số $g(x) = f\left(x^2\right) \Rightarrow g'(x) = 2xf'\left(x^2\right)$.

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\sqrt{5}$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{5}$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

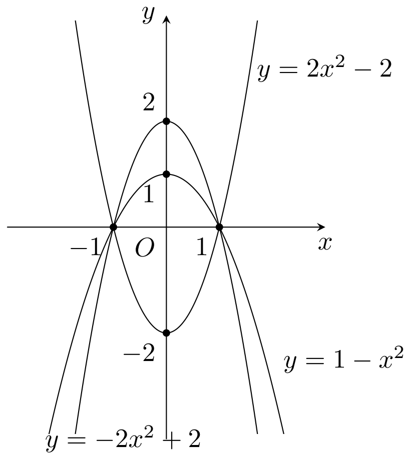
Từ đó suy ra hàm số $y = f(x^2)$ có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Cho hình phẳng D được giới hạn bởi hai đường $y = 2(x^2 - 1); y = 1 - x^2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành do D quay quanh trục Ox.

A $\dfrac{64\pi}{15}$. (B) $\dfrac{32}{15}$. (C) $\dfrac{32\pi}{15}$. (D) $\dfrac{64}{15}$.

Lời giải.



Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = 2(x^2 - 1)$ và $y = 1 - x^2$ là

$$2(x^2 - 1) = 1 - x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y = 2(x^2 - 1)$ qua trục Ox ta được đồ thị hàm số $y = 2(1 - x^2)$.

Ta có $2(1 - x^2) \geq 1 - x^2, \forall x \in [-1; 1]$.

Khi đó trên đoạn $[-1; 2]$ phần thể tích của hàm số $y = 2(x^2 - 1)$ chứa cả phần thể tích của hàm số $y = 1 - x^2$.

Suy ra thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V = \pi \int\limits_{-1}^{1} \left[2(x^2 - 1)\right]^2 \, \mathrm{d}x = \frac{64\pi}{15}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P)\colon x + y + z - 3 = 0$ và ba điểm $A(3; 1; 1)$, $B(7; 3; 9)$ và $C(2; 2; 2)$. Điểm $M(a; b; c)$ trên (P) sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $2a - 10b + c$.

A $\dfrac{62}{9}$. (B) $\dfrac{27}{9}$. (C) $\dfrac{46}{9}$. (D) $\dfrac{43}{9}$.

Lời giải.

- Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

  Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{IA} = (3 - x; 1 - y; 1 - z) \\ \overrightarrow{IB} = (7 - x; 3 - y; 9 - z) \\ \overrightarrow{IC} = (2 - x; 2 - y; 2 - z). \end{cases}$

- $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}23-6x=0\\13-6y=0\\25-6z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{23}{6}\\y=\dfrac{13}{6}\\z=\dfrac{25}{6}\end{cases}\Rightarrow I\left(\dfrac{23}{6};\dfrac{13}{6};\dfrac{25}{6}\right)$.
  Ta có $|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}|=|6\overrightarrow{MI}+(\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC})|=|6\overrightarrow{MI}|=6MI$.
  Khi đó $|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên mặt phẳng P.
- Đường thẳng MI đi qua I và vuông góc (P).
  Ta có MI đi qua $I\left(\dfrac{23}{6};\dfrac{13}{6};\dfrac{25}{6}\right)$ và nhận $\overrightarrow{n_p}=(1;1;1)$ làm véc-tơ chỉ phương.
  Suy ra phương trình (MI): $\begin{cases}x=\dfrac{23}{6}+t\\y=\dfrac{13}{6}+t\\z=\dfrac{25}{6}+t.\end{cases}$
  Ta có $M\in(MI)\Leftrightarrow M\left(\dfrac{23}{6}+t;\dfrac{13}{6}+t;\dfrac{25}{6}+t\right)$.
  Mặt khác
  $$\begin{aligned}M\in(P)&\Leftrightarrow\dfrac{23}{6}+t+\dfrac{13}{6}+t+\dfrac{25}{6}+t-3=0\\&\Leftrightarrow t=\dfrac{-43}{18}\\&\Leftrightarrow M\left(\dfrac{13}{9};\dfrac{-2}{9};\dfrac{16}{9}\right).\end{aligned}$$
  Do đó $\begin{cases}a=\dfrac{13}{9}\\b=\dfrac{-2}{9}\\c=\dfrac{16}{9}\end{cases}\Rightarrow 2a-10b+c=\dfrac{62}{9}$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^3(x-2)^5(x+3)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là

A 3. B 5. C 1. D 2.

Lời giải.

- Hàm số $y=f(|x|)$ là hàm chẵn nên đồ thị của hàm số nhận trục tung làm trục đối xứng.
- Gọi n là số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ trên miền $x>0$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là $2n+1$.
- Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow(x+1)^3(x-2)^5(x+3)^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\\x=-3\end{array}\right.$ (nghiệm bội lẻ)
  $\Rightarrow$ Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ trên miền $x>0$ là 1.

$\Rightarrow$ Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ là $2 \cdot 1 + 1 = 3$.

Chọn đáp án (A) □

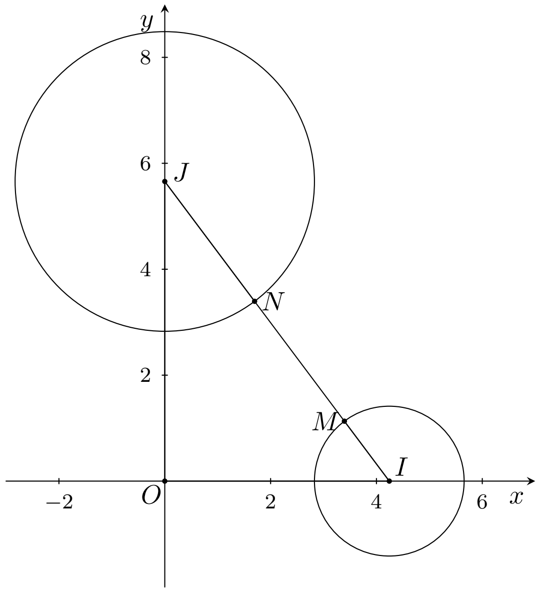
Câu 37. Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z - 3\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|w - 4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$. Biết rằng $|z - w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z = z_0$, $w = w_0$. Tính $|3z_0 - w_0|$.

(A) $2\sqrt{2}$. (B) $4\sqrt{2}$. (C) 1. (D) $6\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có:

- $|z - 3\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn M biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I(3\sqrt{2}; 0)$, bán kính $r = \sqrt{2}$.
- $|w - 4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn N biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $J(0; 4\sqrt{2})$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$.



Suy ra $|z - w| = MN$.

Mặt khác $IM + MN + NJ \geq IJ$

$\Rightarrow MN \geq IJ - IM - NJ$.

Hay $MN \geq 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Suy ra $\min MN = 2\sqrt{2}$ khi I, M, N, J thẳng hàng và M, N nằm giữa I, J (Hình vẽ).

Khi đó ta có:

$|3z_0 - w_0| = |3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}|$, $\overrightarrow{IM} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{IJ}$; $\overrightarrow{IN} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Mặt khác $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{OI} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$; $3\overrightarrow{OM} = 3(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}) = 3(\overrightarrow{OI} + \dfrac{1}{5}\overrightarrow{IJ}) = 3\overrightarrow{OI} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Suy ra $|3z_0 - w_0| = |3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}| = |3\overrightarrow{OI} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{IJ} - (\overrightarrow{OI} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{IJ})| = |2\overrightarrow{OI}| = 6\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Một chiếc vòng đeo tay gồm 20 hạt giống nhau. Hỏi có bao nhiêu cách cắt chiếc vòng đó thành 2 phần mà số hạt ở mỗi phần đều là số lẻ?

(A) 90. (B) 5. (C) 180. (D) 10.

Lời giải.

Ta có $20 = 1 + 19 = 3 + 17 = 5 + 15 = 7 + 13 = 9 + 11$ mà vòng đeo tay gồm 20 hạt giống nhau nên có 5 cách cắt chiếc vòng đó thành 2 phần mà số hạt ở mỗi phần đều là số lẻ.

Chọn đáp án (B) □

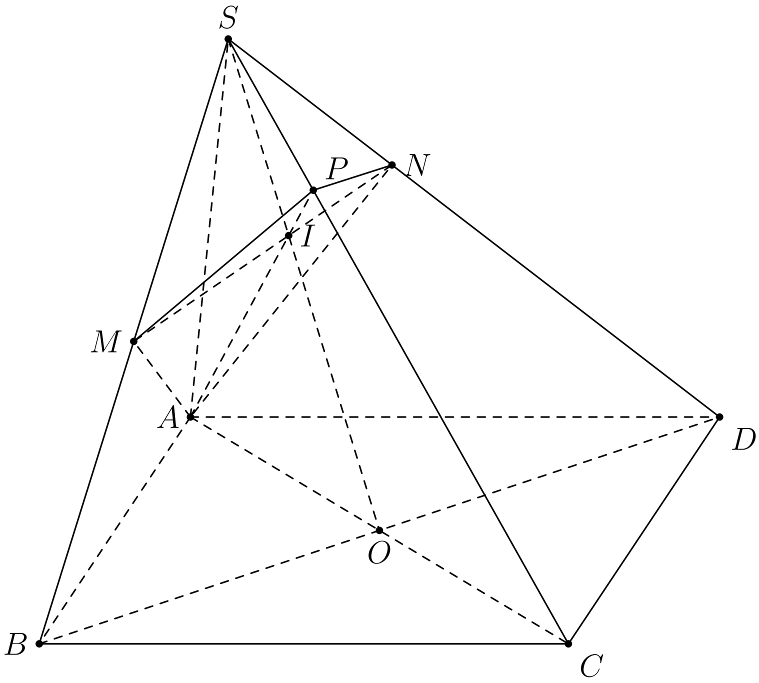
Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích bằng 48. Trên cạnh SB, SD lấy điểm M, N sao cho $SM = MB$, $SD = 3SN$. Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại P. Tính thể tích V của khối tứ diện $SMNP$.

(A) $V = \dfrac{1}{2}$. (B) $V = \dfrac{1}{3}$. (C) $V = 2$. (D) $V = 1$.

Lời giải.

Gọi O là tâm $ABCD$, I là giao điểm của MN và SO.
Khi đó P là giao điểm của AI và SC.
Do mặt phẳng (AMN) cắt hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành theo thiết diện là tứ giác $AMPN$ nên ta có

$$\frac{SA}{SA} + \frac{SC}{SP} = \frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN}$$
$$\Leftrightarrow \frac{SC}{SP} = 4$$
$$\Leftrightarrow \frac{SP}{SC} = \frac{1}{4}$$

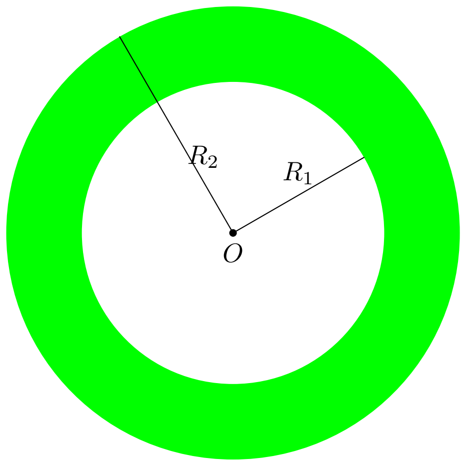


Xét hình chóp $S.ABCD$ có $V_{S.BCD} = \frac{1}{2} \cdot V_{S.ABCD} = 24$.
Ta có $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.BDC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SP}{SC} = \frac{1}{24}$.
$\Rightarrow V_{S.MNP} = 1$.

Chọn đáp án D □

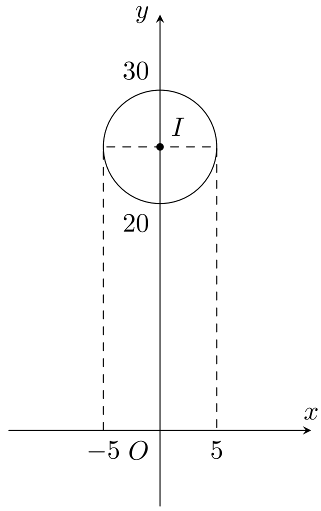
Câu 40.

Săm lốp xe tô khi bơm căng đặt nằm trên mặt phẳng nằm ngang có hình chiếu bằng như hình vẽ với bán kính đường tròn nhỏ $R_1 = 20$ cm, bán kính đường tròn lớn $R_2 = 30$ cm và mặt cắt khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trục, vuông góc mặt phẳng nằm ngang là hai đường tròn. Bỏ qua độ dày vỏ săm. Tính thể tích không khí được chứa bên trong săm.



A $1250\pi^2$ cm^3. **B** $1400\pi^2$ cm^3.
C $2500\pi^2$ cm^3. **D** $600\pi^2$ cm^3.

Lời giải.



Thể tích săm xe bằng thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình tròn tâm $I(0;25)$ bán kính bằng 5 quay quanh trục Ox.

Ta có phương trình đường tròn tâm I bán kính bằng 5 là

$x^2+(y-25)^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=25+\sqrt{25-x^2} \\ y=25-\sqrt{25-x^2} \end{array}\right., x\in[-5;5]$.

Khi đó thể tích săm xe là

$$V=\pi\left[\int\limits_{-5}^{5}(25+\sqrt{25-x^2})^2\,\mathrm{d}x-\int\limits_{-5}^{5}(25-\sqrt{25-x^2})^2\,\mathrm{d}x\right]$$

$$=100\pi\int\limits_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ta có $\int\limits_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,\mathrm{d}x$ là diện tích nửa hình tròn tâm $O(0;0)$, bán kính bằng 5 nên $\int\limits_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\cdot\pi\cdot5^2=\dfrac{25\pi}{2}$.

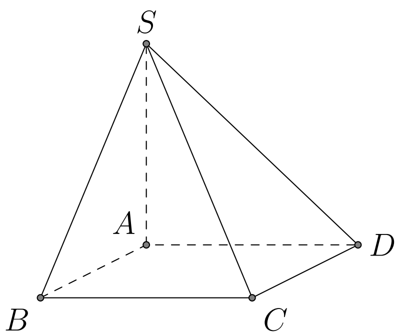
Suy ra $V=100\pi\cdot\int\limits_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,\mathrm{d}x=100\pi\cdot\dfrac{25\pi}{2}=1250\pi^2\text{ cm}^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC=a\sqrt{5}$ và $BC=a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa SD và BC.

(A) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.   **(B) $a\sqrt{3}$.**   (C) $\dfrac{2a}{3}$.   (D) $\dfrac{3a}{4}$.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases} BC \parallel AD \\ BC \not\subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow BC \parallel (SAD)$.

$\Rightarrow \mathrm{d}(BC,SD)=\mathrm{d}(BC,(SAD))=\mathrm{d}(B,(SAD))$.

Mà $\begin{cases} BA\perp AD \\ BA\perp SA \\ SA\cap AD=A \end{cases} \Rightarrow BA\perp(SAD)$.

Do đó, $\mathrm{d}(B,(SAD))=BA=\sqrt{5a^2-2a^2}=a\sqrt{3}$.

Vậy $\mathrm{d}(BC,SD)=a\sqrt{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x^2-3)(x^4-1)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. So sánh $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$ ta được

(A) $f(2)<f(0)<f(-2)$.   (B) $f(0)<f(-2)<f(2)$.

(C) $f(-2)<f(2)<f(0)$.   (D) $f(-2)<f(0)<f(2)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=(x-1)(x^2-3)(x^4-1)=x^7-x^6-3x^5+3x^4-x^3+x^2+3x-3$.

- $I_1 = \int_{-2}^{0} f'(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} (x^7 - x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 3)\mathrm{d}x = -\dfrac{464}{105} < 0.$
  $\Rightarrow f(0) - f(-2) < 0 \Rightarrow f(0) < f(-2).$
- $I_2 = \int_{0}^{2} f'(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{2} (x^7 - x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 3)\mathrm{d}x = -\dfrac{44}{105} < 0.$
  $\Rightarrow f(2) - f(0) < 0 \Rightarrow f(2) < f(0).$

Vậy $f(2) < f(0) < f(-2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Tính tổng của tất cả các giá trị của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn đồng thời $|z| = m$ và $|z - 4m + 3mi| = m^2$.

A 4. B 6. C 9. D 10.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó, điểm biểu diễn của z là $M(x; y)$.

Với $m = 0$, ta có $z = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m > 0$, ta có

- $|z| = m \Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn (C_1) tâm $I(0; 0)$, bán kính $R = m$.
- $|z - 4m + 3mi| = m^2 \Leftrightarrow (x - 4m)^2 + (y + 3m)^2 = m^4 \Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn (C_2) tâm $I'(4m; -3m)$, bán kính $R' = m^2$.
- Có duy nhất một số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} II' = R + R' \\ II' = |R - R'| \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 5m = m^2 + m \\ 5m = |m^2 - m| \end{array}\right. \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = 6 \end{array}\right.$.

Suy ra, tập giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $\{0; 4; 6\}$. Do đó, tổng tất cả các giá trị của m là 10.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Biết $F\left(\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right) = k$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Tính $F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \cdots + F(10\pi)$.

A 55. B 44. C 45. D 0.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C$.

Suy ra $F(x) = \begin{cases} \tan x + C_0, & x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_1, & x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_2, & x \in \left(\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right) \\ \ldots \\ \tan x + C_9, & x \in \left(\dfrac{17\pi}{2}; \dfrac{19\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_{10}, & x \in \left(\dfrac{19\pi}{2}; \dfrac{21\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F\left(\dfrac{\pi}{4} + 0\pi\right) = 1 + C_0 = 0 \Rightarrow C_0 = -1 \\ F\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi\right) = 1 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 0 \\ F\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi\right) = 1 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1 \\ \ldots \\ F\left(\dfrac{\pi}{4} + 9\pi\right) = 1 + C_9 = 9 \Rightarrow C_9 = 8 \\ F\left(\dfrac{\pi}{4} + 10\pi\right) = 1 + C_{10} = 10 \Rightarrow C_{10} = 9. \end{cases}$

Vậy $F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \cdots + F(10\pi) = \tan 0 - 1 + \tan \pi + \tan 2\pi + 1 + \cdots + \tan 10\pi + 9 = 44$.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$, $f(1) = \cot 1$. Tính tích phân $I = \int_0^1 \left[f(x)\tan^2 x + f'(x)\tan x\right]\mathrm{d}x$

(A) -1. (B) $1 - \ln(\cos 1)$. **C** 0. (D) $1 - \cot 1$.

Lời giải.

Ta có $I = \int_0^1 \left[f(x)\tan^2 x + f'(x)\tan x\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\tan^2 x\mathrm{d}x + \int_0^1 f'(x)\tan x\mathrm{d}x$.

Mà

- $\int_0^1 f(x)\tan^2 x\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f(x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f(x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x - 1$.
- $\int_0^1 f'(x)\tan x\mathrm{d}x = \int_0^1 \tan x\mathrm{d}(f(x)) = f(x)\cdot\tan x\big|_0^1 - \int_0^1 \frac{f(x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = 1 - \int_0^1 \frac{f(x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Vậy $I = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,5% tháng và ông ta rút đều đặn mỗi tháng một triệu đồng kể từ sau ngày gửi một tháng cho đến khi hết tiền (tháng cuối cùng có thể không còn đủ một triệu đồng). Hỏi ông ta rút hết tiền sau bao nhiêu tháng?

A 139. (B) 140. (C) 100. (D) 138.

Lời giải.

Gọi số tiền lúc đầu người đó gửi là A triệu đồng, lãi suất gửi ngân hàng một tháng là r, S_n là số tiền còn lại sau n tháng.

Sau 1 tháng kể từ ngày gửi tiền, số tiền còn lại của người đó là: $S_1 = A(1+r) - 1$.

Sau 2 tháng kể từ ngày gửi tiền, số tiền còn lại của người đó là:

$$S_2 = \left[A(1+r) - 1\right](1+r) - 1 = A(1+r)^2 - (1+r) - 1$$

Sau n tháng kể từ ngày gửi tiền, số tiền còn lại của người đó là:

$$S_n = A(1+r)^n - (1+r)^{n-1} - (1+r)^{n-2} - \cdots - (1+r) - 1 = A(1+r)^n - \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Giả sử sau n tháng người đó rút hết tiền. Khi đó ta có

$$S_n = 0 \Leftrightarrow A(1+r)^n - \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0 \Leftrightarrow (1+r)^n(Ar - 1) + 1 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow n = \log_{1+r}\frac{1}{1 - Ar} \Leftrightarrow n = -\log_{1+r}(1 - Ar). \quad (2)$$

Với $A = 100$ triệu đồng, $r = 0{,}005$ ta có $n \approx 138{,}9757216$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Gọi $M(a;b)$ là điểm trên đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x}$ sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $d\colon y = 2x + 6$ nhỏ nhất. Tính $(4a+5)^2 + (2b-7)^2$.

(A) 162. (B) 2. **C** 18. (D) 0.

Lời giải.

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x}$.
Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d là:

$$\frac{x-2}{x} = 2x+6 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+5x+2=0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Suy ra đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $M_1(-2;2)$, $M_2\left(-\dfrac{1}{2};5\right)$.
Ta có $d(M;d) \geq 0$, $\forall M \Rightarrow d(M;d) = 0$ khi $M \in d$.
Mà $M \in (C) \Rightarrow M = d \cap (C) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(-2;2) \\ M\left(-\dfrac{1}{2};5\right). \end{array}\right.$

- Với $M(-2;2) \Rightarrow a=-2$, $b=2 \Rightarrow (4a+5)^2+(2b-7)^2 = 18$.
- Với $M\left(-\dfrac{1}{2};5\right) \Rightarrow a = -\dfrac{1}{2}$, $b=5 \Rightarrow (4a+5)^2+(2b-7)^2=18$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Tính số nghiệm của phương trình $\cot x = 2^x$ trong khoảng $\left(\dfrac{11\pi}{12};2019\pi\right)$.

A. 2020. B. 2019. C. 2018. D. 1.

Lời giải.
Điều kiện: $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ta có $\cot x = 2^x \Leftrightarrow \cot x - 2^x = 0$. (1)
Xét hàm số $f(x) = \cot x - 2^x$ trên $\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$, $(\pi;2\pi)$,..., $(2018\pi;2019\pi)$.
Ta có $f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} - 2^x \ln 2 < 0$ với $\forall x \in \left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$, $(\pi;2\pi)$,..., $(2018\pi;2019\pi)$.
Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.
Trên $\left(\dfrac{11\pi}{12};\pi\right)$ ta có $f(x) < f\left(\dfrac{11\pi}{12}\right) \Rightarrow f(x) < \cot\left(\dfrac{11\pi}{12}\right) - 2^{\frac{11\pi}{12}} < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ vô nghiệm.
Ta có hàm số $f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng $(\pi;2\pi)$,...,$(2018\pi;2019\pi)$ và trên mỗi khoảng đó hàm số có tập giá trị là $\mathbb{R}$.
Suy ra trên mỗi khoảng $(\pi;2\pi)$,...,$(2018\pi;2019\pi)$, phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất.
Vậy phương trình (1) có 2018 nghiệm.
Chọn đáp án C □

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-y+2=0$ và hai điểm $A(1;2;3)$, $B(1;0;1)$. Điểm $C(a;b;-2) \in (P)$ sao cho tam giác ABC có diện tích nhỏ nhất. Tính $a+b$.

A. 0. B. -3. C. 1. D. 2.

Lời giải.
$C(a;b;-2) \in (P) \Rightarrow a-b+2=0 \Rightarrow b=a+2 \Rightarrow C(a;a+2;-2)$.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (0;-2;-2)$, $\overrightarrow{AC} = (a-1;a;-5) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right] = (10+2a;-2a+2;2a-2)$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right] = \frac{\sqrt{(2a+10)^2+2(2a-2)^2}}{2} = \sqrt{3(a+1)^2+24} \geq 2\sqrt{6},\ \forall a.$$

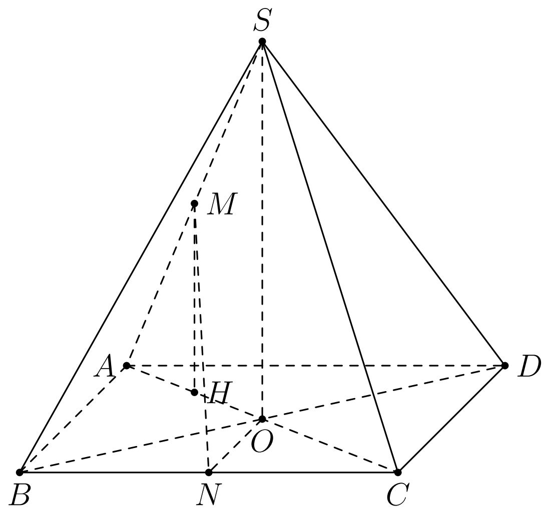
Do đó $\min S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{6}$ khi $a = -1$. Khi đó ta có $C(-1; 1; -2) \Rightarrow a + b = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a và $SO \perp (ABCD)$, $SA = 2a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC. Tính góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$.

(A) $\frac{\pi}{6}$. **B** $\frac{\pi}{3}$. (C) $\arctan 2$. (D) $\frac{\pi}{6}$.

Lời giải.



Cách 1: Gọi H là trung điểm của AO. Ta có $HM \parallel SO$.

Mà $SO \perp (ABCD) \Rightarrow MH \perp (ABCD) \Rightarrow H$ là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng $(ABCD)$. Suy ra HN là hình chiếu vuông góc của MN trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Do đó $(\widehat{MN, (ABCD)}) = (\widehat{MN; MH}) = \widehat{MNH}$.

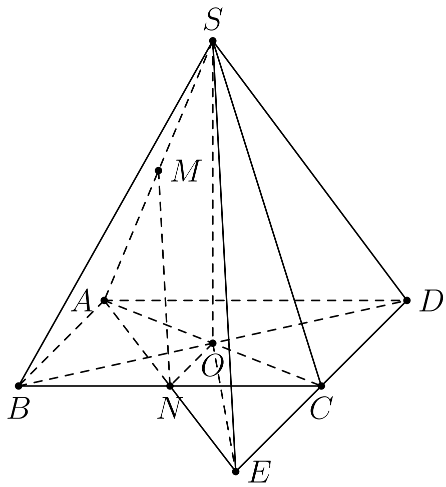
Ta có $OA = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$HM = \frac{1}{2}SO = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{1}{2}\sqrt{8a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{30}}{4}$, $HC = \frac{3}{4}AC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Ta có

$$HN^2 = HC^2 + NC^2 - 2 \cdot HC \cdot NC \cdot \cos 45^\circ = \frac{9a^2}{8} + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5a^2}{8} \Rightarrow HN = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

Xét tam giác vuông HMN, ta có $\widehat{MNH} = \frac{HM}{HN} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{MNH} = \frac{\pi}{3}$.



Cách 2:

Gọi $E = AN \cap CD$, suy ra E đối xứng với D qua C.

Ta có $MN \parallel SE$ nên

$$(\widehat{MN, (ABCD)}) = (\widehat{SE, (ABCD)}) = (\widehat{SE, OE}) = \widehat{SEO}.$$

$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a\sqrt{30}}{2}$.

Gọi K là trung điểm của CD.

Ta có $OE = \sqrt{OK^2 + KE^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Ta có

$$\tan \widehat{SEO} = \frac{SO}{OE} = \frac{a\sqrt{30}}{2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{10}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SEO} = \frac{\pi}{3}$$

Chọn đáp án (B) □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	3. A	4. C	5. D	6. B	7. A	8. C	9. A	10. A	11. C
12. C	13. A	14. B	15. C	16. C	17. C	18. C	19. D	20. C	21. B
22. B	25. A	26. C	27. B	28. A	29. D	30. D	31. D	32. A	33. C
34. A	35. A	36. A	37. D	38. B	39. D	40. A	41. B	42. A	43. D
44. B	45. C	46. A	47. C	48. C	49. A	50. B			

6 ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ - LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho $\triangle ABC$ với các cạnh $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Gọi R , r , S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác ABC . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sai?

(A) $S = \dfrac{abc}{4R}$.
(B) $R = \dfrac{a}{\sin A}$.
(C) $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$.
(D) $a^2 + b^2 - c^2 = 2ac\cos C$.

Lời giải.

Theo định lý sin trong tam giác, ta có $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Cho hàm số $y = 2x - 3$ có đồ thị là đường thẳng (d). Xét các phát biểu sau

(I): Hàm số $y = 2x - 3$ đồng biến trên R.

(II): Đường thẳng (d) song song với đồ thị hàm số $2x + y - 3 = 0$

(III): đường thẳng (d) cắt trục Ox tại $A\,(0; -3)$

Số các phát biểu đúng là

(A) 2. (B) 0. (C) 3. **(D) 1.**

Lời giải.

- Hàm số $y = 2x - 3$ có hệ số $a = 2 > 0$ nên hàm số đồng biến trên $R \Rightarrow (I)$ đúng

- Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow (d)$ cắt đồ thị hàm số $2x + y - 3 = 0$ tại điểm $\left(\dfrac{3}{2}; 0\right) \Rightarrow (II)$ sai.

- Giao Ox: cho $y = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow$ giao Ox tại điểm $\left(\dfrac{3}{2}; 0\right) \Rightarrow (III)$ sai

Vậy sô các phát biểu đúng là 1.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Số nghiệm của phương trình $x^4 + 2x^3 - 2 = 0$ là:

(A) 0. (B) 4. **(C) 2.** (D) 3.

Lời giải.

Xem số nghiệm của phương trình là số giao điểm của $y = f(x) = x^4 + 2x^3 - 2$ với đường thẳng $y = 0$ Đặt $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2$;

$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 = 2x(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		-2		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên thì số nghiệm là 2.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Cho hai mặt phẳng (P), (Q) cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng d . Đường thẳng a song song với cả hai mặt phẳng(P), (Q). Khẳng định nào sau đây đúng?

A a, d trùng nhau. **B** a, d chéo nhau. **C** a song song d. **D** a, d cắt nhau.

Lời giải.

Sử dụng hệ quả: Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Khẳng định nào sau đây sai?

A $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.. **B** $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$..

C $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.. **D** $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$..

Lời giải.

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

Giới hạn hữu hạn (nếu có) của tỉ số $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ khi x dần đến x_0

gọi là đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm x_0, kí hiệu là $f'(x_0)$, ta có $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Từ định nghĩa rút ra kết luận B sai.

A đúng do định nghĩa.

C đúng vì đặt $x = x_0 + h \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = h \\ x \to x_0 \Rightarrow h \to 0 \end{cases}$.

D đúng vì đặt $x = x_0 + \Delta x \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = \Delta x \\ x \to x_0 \Rightarrow \Delta x \to 0 \end{cases}$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Trong các phép biến đổi sau, phép biến đổi nào sai?

A $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **B** $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C $\cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$. **D** $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, nên đáp án D sai.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Cho hai tập hợp $A =[- 1; 5)$ và $B = [2; 10]$. Khi đó tập hợp $A \cap B$ bằng

A $[2; 5)$. **B** $[-1; 10]$. **C** $(2; 5)$. **D** $[-1; 10)$.

Lời giải.

Biểu diễn hai tập A và B trên cùng trục số ta được $A \cap B = [2; 5)$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 + x^2 + 2)$ bằng

A 0. **B** $-\infty$. **C** $+\infty$. **D** 2.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3+x^2+2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(-x^3)\left(-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3).\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)$

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)=-1$.

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3+x^2+2)=-\infty.(-1)=+\infty$

Chọn đáp án C □

Câu 9. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Số hạng thứ 9 của dãy số là $\dfrac{1}{10}$.

B. Dãy số (u_n) bị chặn.

C. Dãy số (u_n) là một dãy số giảm.

D. Số hạng thứ 10 của dãy số là $\dfrac{-1}{11}$.

Lời giải.

Dễ thấy $|u_n|=\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1}\right|=\dfrac{1}{n+1}<1,\forall n\in\mathbb{N}^*$ nên (u_n) là dãy số bị chặn

Lại có $u_9=\dfrac{1}{10};u_{10}=\dfrac{-1}{11};u_{11}=\dfrac{1}{12};u_{12}=\dfrac{-1}{13};\cdots$.

Suy ra dãy (u_n) không phải là dãy số tăng cũng không phải là dãy số giảm. Do đó đáp án C sai.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Trong mặt phẳng Oxy , đường thẳng$(d):ax+by+c=0,(a^2+b^2\neq 0)$. Vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng (d) ?

A. $\vec{n}=(a;-b)$. B. $\vec{n}=(b;a)$. C. $\vec{n}=(b;-a)$. D. $\vec{n}=(a;b)$.

Lời giải.

Ta có một vecto pháp tuyến của đường thẳng (d) là $\vec{n}=(a;b)$

Chọn đáp án D □

Câu 11. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.

B. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ đều.

C. Hình lăng trụ có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.

D. Hình lăng trụ tứ giác đều là hình lập phương.

Lời giải.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Từ các chữ số $1;2;3;4;5;6;7;8;9$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số khác nhau?

A. A_9^2 . B. C_9^2 . C. 2^9 . D. 9^2 .

Lời giải.

Mỗi cách lập một số tự nhiên có hai chữ số khác nhau từ các chữ số$1;2;3;4;5;6;7;8;9$ là một chỉnh hợp chập 2 của 9. Vậy có A_9^2 số tự nhiên có hai chứ số khác nhau.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases}a<b\\c>d\end{cases}\Rightarrow a+c<b+d$.

B. $\begin{cases}a<b\\c>d\end{cases}\Rightarrow a+c>b+d$.

(C) $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow ac > bd$.

(D) $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$.

Lời giải.

Khi cộng hai bất đẳng thức cùng chiều ta được một bất đẳng thức cùng chiều nên ta có

$$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 14. $\lim \dfrac{1+3+5+...+2n+1}{3n^2+4}$ bằng

(A) $\dfrac{2}{3}$. (B) 0. (C) $\dfrac{1}{3}$. (D) $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $1+3+5+...+(2n+1) = \dfrac{(1+2n+1)(n+1)}{2} = (n+1)^2$

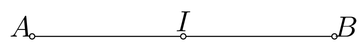
$$\lim \frac{1+3+5+...+(2n+1)}{3n^2+4} = \lim \frac{(n+1)^2}{3n^2+4} = \lim \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{4}{n^2}} = \frac{1}{3}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Hỏi đẳng thức nào đúng?

(A) $2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. (B) $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. (C) $\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IB}$. (D) $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Lời giải.



Ta có: + $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$ nên D đúng

+ $2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ nên A sai

+ $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BA} \neq \vec{0}$ nên B sai

+ $\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{IB} \neq \overrightarrow{IB}$ nên C sai

Chọn đáp án (D) □

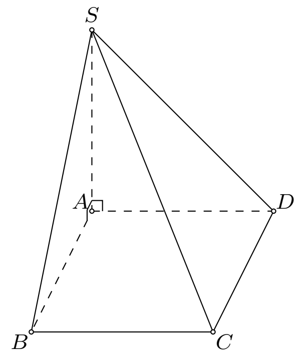
Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{3}, BC = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa SB và DC bằng:

(A) $a\sqrt{2}$. (B) $\dfrac{2a}{3}$. (C) $a\sqrt{3}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Vì DC // AB nên khoảng cách giữa SB và DC bằng khoảng cách giữa mặt phẳng (SAB) và DC.

Do đó: $d(DC, SB) = d(DC, (SAB)) = d(D, (SAB)) = AD = a\sqrt{2}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$. có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng BD vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

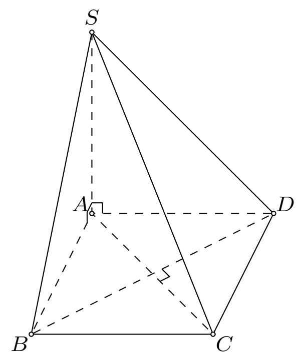
A SB. **B** SD. **C** SC. **D** CD.

Lời giải.

+ $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$ (1)

+ $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BD$ (2)

+ Từ (1) và (2) suy ra $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$



Chọn đáp án C □

Câu 18. Xác định a để 3 số $1+2a$; $2a^2-1$; $-2a$ theo thứ tự thành lập một cấp số cộng?

A không có giá trị nào của a . **B** $a = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

C $a = \pm 3$. **D** $a = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Theo công thức cấp số cộng ta có: $2\left(2a^2-1\right) = (1+2a) + (-2a) \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow a = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Chọn đáp án D □

Câu 19. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3\sin 2x - m^2 + 5 = 0$ có nghiệm?

A 6. **B** 2. **C** 1. **D** 7.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với phương trình $\sin 2x = \dfrac{m^2-5}{3}$

Vì $\sin 2x \in [-1;1]$ nên $\dfrac{m^2-5}{3} \in [-1;1] \Leftrightarrow m^2 \in [2;8] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\sqrt{2} \le m \le -\sqrt{2} \Rightarrow m = -2 (m \in \mathbb{Z}) \\ \sqrt{2} \le m \le 2\sqrt{2} \Rightarrow m = 2 (m \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Khi đó đường thẳng MG song song với mặt phẳng nào dưới đây?

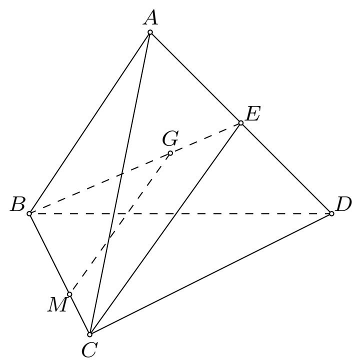
A (ACD) . **B** (BCD) . **C** (ABD) . **D** (ABC) .

Lời giải.

Gọi E là trung điểm AD.

Xét tam giác BCE có $\dfrac{BG}{BE} = \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{2}{3}$

nên suy ra $MG \parallel (ACD)$



Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Đạo hàm của hàm số $y = (2x-1)\sqrt{x^2+x}$ là:

A $y' = \dfrac{8x^2+4x-1}{2\sqrt{x^2+x}}$.
(B) $y' = \dfrac{8x^2+4x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$.
(C) $y' = \dfrac{4x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$.
(D) $y' = \dfrac{6x^2+2x-1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 2\sqrt{x^2+x} + \dfrac{(2x-1)(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x}} = \dfrac{4x^2+4x+4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}} = \dfrac{8x^2+4x-1}{2\sqrt{x^2+x}}$

Vậy $y' = \dfrac{8x^2+4x-1}{2\sqrt{x^2+x}}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Số trung bình của dãy số liệu 1; 1; 2 ; 3 ; 3; 4 ; 5 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 9 ; 9 gần đúng với giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

A 5,14. (B) 5,15. (C) 5. (D) 6.

Lời giải.

Số trung bình của dãy số liệu 1; 1; 2 ; 3 ; 3; 4 ; 5 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 9 ; 9 là

$x_{tb} = \dfrac{1+1+2+3+3+4+5+5+6+7+8+9+9+9}{14} = \dfrac{36}{7} \approx 5,142857$

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Hệ số x^5 trong khai triển biểu thức $x(3x-1)^8$ bằng:

(A) -5.670. (B) 13.608. (C) 13.608. D 5.670.

Lời giải.

Ta có: $x(3x-1)^8 = x\sum\limits_{k=0}^{8} C_8^k (3x)^k (-1)^{8-k} = \sum\limits_{k=0}^{9} C_8^k 3^k x^{k+1} (-1)^{8-k}$

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(3x-1)^8$ là: $\sum\limits_{k=0}^{8} C_8^4 3^4 (-1)^{8-4} = 5.670$

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Hệ số góc k của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -2$ bằng

(A) 6. (B) 0. (C) 8. D 9.

Lời giải.

Hệ số góc k của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -2$ là:

$k = y'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 9$

Chọn đáp án (D) □

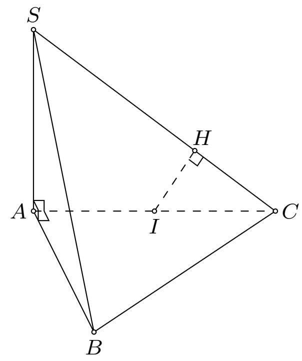
Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$. có đáy ABC là tam giác vuông tại A , cạnh bên SA vuông góc với (ABC). Gọi I là trung điểm cạnh AC , H là hình chiếu của I trên SC . Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $(SBC) \perp (IHB)$. B $(SAC) \perp (SAB)$. (C) $(SAC) \perp (SBC)$. (D) $(SBC) \perp (SAB)$.

Lời giải.

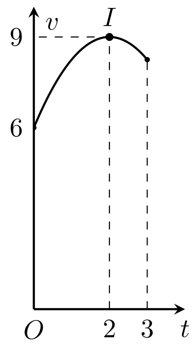
Ta có: $\begin{cases} AB\perp SA\left(SA\perp\left(ABC\right),\left(AB\subset\left(ABC\right)\right)\right) \\ AB\perp AC \end{cases} \Rightarrow AB\perp\left(SAC\right)$

Vì $AB\perp\left(SAC\right)$ nên $\left(SAC\right)\perp\left(SAB\right)$



Chọn đáp án B □

Câu 26. Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h)phụ thuộc thời gian $t\left(h\right)$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I\left(2;9\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình vẽ. Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm 2 giờ 30 phút sau khi vật bắt đầu chuyển động gần bằng giá trị nào nhất trong các giá trị sau?.



(A) 8,7 (km/h). **B** 8,8 (km/h).
(C) 8,6 (km/h). (D) 8,5 (km/h).

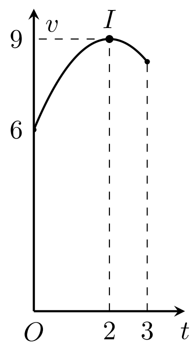
Lời giải.

Giả sử vận tốc của vật chuyển động có phương trình là: $v\left(t\right)=at^2+bt+c$

Ta có: $v\left(2\right)=9\Leftrightarrow 4a+2b+c=9; v\left(0\right)=6\Leftrightarrow c=6$

Lại có $\begin{cases} \dfrac{-b}{2a}=2 \\ 4a+2b+6=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+b=0 \\ 4a+2b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{3}{4} \\ b=3 \end{cases}$

Do đó $v\left(t\right)=-\dfrac{3}{4}t^2+3t+6$ Vậy $v\left(2,5\right)=8{,}8125$.



Chọn đáp án B □

Câu 27. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\left(m+1\right)x^2-2\left(m+1\right)x+4\geq 0$ (1) có tập nghiệm $S=R$?

(A) $m>-1$. **B** $-1\leq m\leq 3$. (C) $-1<m\leq 3$. (D) $-1<m<3$.

Lời giải.

TH1: $m+1=0\Leftrightarrow m=-1$ bất phương trình (1) trở thành $4\geq 0\forall x\in\mathbb{R}$ (luôn đúng) $(*)$

TH2: $m+1\neq 0\Leftrightarrow m\neq -1$ bất phương trình (1) có tập nghiệm $S=R$

$\Leftrightarrow\begin{cases} a>0 \\ \Delta'\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1>0 \\ \Delta'=m^2-2m-3\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1<m\leq 3\ (**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ ta suy ra: $-1\leq m\leq 3$

Chọn đáp án B □

Câu 28. Tính tổng các nghiệm trong đoạn $[0;30]$ của phương trình : $\tan x=\tan 3x$ (1)

(A) 55π. (B) $\dfrac{171\pi}{2}$. **C** 45π. (D) $\dfrac{190\pi}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình (1) có nghĩa $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \cos 3x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}\end{cases} (*)$

Khi đó, phương trình (1) $3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}$

so sánh với điều kiện $(*) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right., x \in [0; 30] \Rightarrow k = \{0; ...; 4\} \Rightarrow x \in \{0; \pi; 2\pi; ...; 9\pi\}$

Vậy, tổng các nghiệm trong đoạn $[0; 30]$ của phương trình (1) là: 45π

Chọn đáp án C □

Câu 29. Từ một hộp chứa 12 quả cầu, trong đó có 8 quả màu đỏ, 3 quả màu xanh và 1 quả màu vàng, lấy ngẫu nhiên 3 quả. Xác suất để lấy được 3 quả cầu có đúng hai màu bằng :

A $\dfrac{23}{44}$. B $\dfrac{21}{44}$. C $\dfrac{139}{220}$. D $\forall m \in \left[0; \dfrac{4}{3}\right]$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^3 = 220$

Gọi A là biến cố: "Lấy được 3 quả cầu có đúng hai màu".

- Trường hợp 1: Lấy 1 quả màu vàng và 2 quả màu đỏ có: $\mathrm{C}_8^2 = 28$ cách
- Trường hợp 2: Lấy 1 quả màu vàng và 2 quả màu xanh có: $\mathrm{C}_3^2 = 3$ cách
- Trường hợp 3: Lấy 1 quả màu đỏ và 2 quả màu xanh có: $\mathrm{C}_8^1.\mathrm{C}_3^2 = 24$ cách
- Trường hợp 4: Lấy 1 quả màu xanh và 2 quả màu đỏ có: $\mathrm{C}_3^1.\mathrm{C}_8^2 = 84$ cách

Số kết quả thuận lợi của biến cố A là: $n(A) = 28 + 3 + 24 + 84 = 139$ cách

Xác suất cần tìm là: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{139}{220}$

Cách 2: Lấy 3 quả bất kì trừ đi trường hợp 3 quả khác màu (1Đ, 1X, 1V), và 3 quả chung 1 màu (cùng đỏ hoặc cùng xanh). ĐS:$(220 - 81)/220$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Một người muốn có 1 tỉ tiền tiết kiệm sau 6 năm gửi ngân hàng bằng cách bắt đầu từ ngày 01/01/2019 đến 31/12/2024, vào ngày 01/01 hàng năm người đó gửi vào ngân hàng một số tiền bằng nhau với lãi suất ngân hàng là 7%/1 năm (tính từ ngày 01/01 đến ngày 31/12) và lãi suất hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi số tiền mà người đó phải gửi vào ngân hàng hàng năm là bao nhiêu (với giả thiết lãi suất không thay đổi và số tiền được làm tròn đến đơn vị đồng)?

A 130.650.280 (đồng). B 30.650.000 (đồng).

C 139.795.799 (đồng). D 139.795.800 (đồng).

Lời giải.

Gọi T_0 là số tiền người đó gửi vào ngân hàng vào ngày 01/01 hàng năm, T_n là tổng số tiền cả vốn lẫn lãi người đó có được ở cuối năm thứ n , với $n \in \mathbb{N}^*$, r là lãi suất ngân hàng mỗi năm.

Ta có: $T_1 = T_0 + rT_0 = T_0(1 + r)$ Đầu năm thứ 2 , người đó có tổng số tiền là:

$T_0(1 + r) + T_0 = T_0[(1 + r) + 1] = \dfrac{T_0}{[(1 + r) - 1]}\left[(1 + r)^2 - 1\right] = \dfrac{T_0}{r}\left[(1 + r)^2 - 1\right]$

Do đó: $T_2 = \dfrac{T_0}{r}\left[(1 + r)^2 - 1\right] + \dfrac{T_0}{r}\left[(1 + r)^2 - 1\right] r = \dfrac{T_0}{r}\left[(1 + r^2) - 1\right](1 + r)$

Tổng quát: Ta có: $T_n = \dfrac{T_0}{r}\left[(1 + r)^n - 1\right](1 + r)$

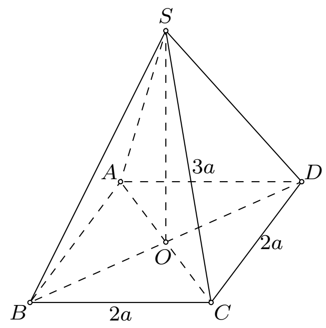
Áp dụng vào bài toán, ta có: $10^9 = \dfrac{T_0}{0,07}\left[(1+0,07)^6 - 1\right](1+0,07) \Rightarrow T_0 \approx 130.650.280$ đồng

Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho hình chóp đều $SABCD$. có cạnh đáy bằng $2a$ cạnh bên bằng $3a$. Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng

A $\dfrac{a\sqrt{14}}{3}$. B $\dfrac{a\sqrt{14}}{4}$. C $a\sqrt{14}$. D $\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

Lời giải.



Gọi $O = AC \cap BD$.

Do $S.ABCD$ chóp đều nên đáy $ABCD$ là hình vuông và $SO\perp(ABCD)$

Ta có: $\dfrac{d(A,(SCD))}{d(O,(SCD))} = \dfrac{AC}{OC} = 2 \Rightarrow d(A,(SCD)) = 2.d(O,(SCD)) = 2h$

Xét ΔACD vuông tại D ta có:

$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = CD\sqrt{2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow OC = OD = a\sqrt{2}$

Xét ΔSOC vuông tại O có: $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{(3a)^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2} = a\sqrt{7}$

Do tứ diện $S.OCD$ có 3 cạnh OS, OC, OD đôi một vuông góc

$\Rightarrow \dfrac{1}{h}^2 = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OC^2} + \dfrac{1}{OD^2} = \dfrac{1}{\left(a\sqrt{7}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{8}{7a^2} \Rightarrow h = \dfrac{a\sqrt{14}}{4}$.

Vậy khoảng cách từ A đến (SCD) bằng $\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$

Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}$. Tính giới hạn đó

A $+\infty$. B 1. C 0. D $-\infty$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}} = \lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{\dfrac{x.(x-2)^2}{x^2-4}} = \lim\limits_{x\to 2+}\sqrt{\dfrac{(x-2)\,x}{x+2}} = 0$

Chọn đáp án C □

Câu 33. Cho $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax}+3x\right) = -2$. Tính giá trị của a

A -6. B 12. C 6. D -12.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax}+3x\right) = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{ax}{\sqrt{9x^2+ax}-3x}\right) = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{a}{-\sqrt{9+\dfrac{a}{x}}-3} = -\dfrac{a}{6}$

$\Rightarrow -\dfrac{a}{6} = -2 \Leftrightarrow a = 12$

Cách khác : Có thể thay a thử máy tính.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$, công bội $q = 2$. Tính tổng $T = \dfrac{1}{u_1-u_5} + \dfrac{1}{u_2-u_6} + \dfrac{1}{u_3-u_7} + \cdots + \dfrac{1}{u_{20}-u_{24}}$

A $\dfrac{1-2^{19}}{15.2^{18}}$. B $\dfrac{1-2^{20}}{15.2^{19}}$. C $\dfrac{2^{19}-1}{15.2^{18}}$. D $\dfrac{2^{20}-1}{15.2^{19}}$.

Lời giải.

$T=\dfrac{1}{u_1-u_5}+\dfrac{1}{u_2-u_6}+\dfrac{1}{u_3-u_7}+\cdots+\dfrac{1}{u_{20}-u_{24}}$

$=\dfrac{1}{u_1\left(1-q^4\right)}+\dfrac{1}{u_2\left(1-q^4\right)}+\dfrac{1}{u_3\left(1-q^4\right)}+\cdots+\dfrac{1}{u_{20}\left(1-q^4\right)}=\dfrac{1}{1-q^4}\left(\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+\dfrac{1}{u_3}+\cdots+\dfrac{1}{u_{20}}\right)$

$=\dfrac{1}{1-q^4}\left(\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_1q}+\dfrac{1}{u_1q^2}+\cdots+\dfrac{1}{u_1q^{19}}\right)=\dfrac{1}{1-q^4}\cdot\dfrac{1}{u_1}\left(1+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q}^2+\cdots+\dfrac{1}{q^{19}}\right)$

$=\dfrac{1}{1-q^4}\cdot\dfrac{1}{u_1}.\dfrac{\left(\dfrac{1}{q}\right)^{20}-1}{\dfrac{1}{q}-1}=\dfrac{1}{1-q^4}\cdot\dfrac{1}{u_1}\cdot\dfrac{1-(q)^{20}}{(1-q)\,q^{19}}=\dfrac{1-2^{20}}{15.2^{19}}$

Chọn đáp án B □

Câu 35. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+x+2$ có đồ thị (C). Phương trình các tiếp tuyến với đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng d: $y=-2x+\dfrac{10}{3}$ là

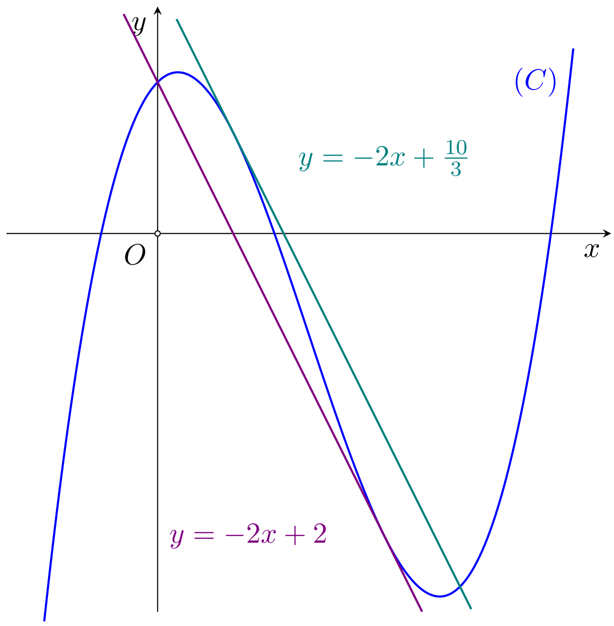
A $y=-2x+2$.

B $y=-2x-2$.

C $y=-2x+10$, $y=-2x-\dfrac{2}{3}$.

D $y=-2x-10$, $y=-2x+\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.



Giả sử $M_0\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm Hệ số góc của tiếp tuyến tại $M_0\left(x_0;y_0\right)$ là: $f'\left(x_0\right)=x_0^2-4x_0+1$

Hệ số góc của đường thẳng $d: y=-2x+\dfrac{10}{3}$ là -2

Tiếp tuyến song song với đường thẳng d thì:

${x_0}^2-4x_0+1=-2\Leftrightarrow x_0^2-4x_0+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\x_0=3\end{array}\right.$

*TH1: $x_0=1, y_0=\dfrac{4}{3}, f'\left(x_0\right)=-2$

Phương trình tiếp tuyến:

$y=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+y_0\Rightarrow y=-2x+\dfrac{1}{3}$ (loại)

*TH2: $x_0=3, y_0=-4, f'\left(x_0\right)=-2$

Phương trình tiếp tuyến:

$y=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+y_0\Rightarrow y=-2x+2$ (nhận)

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-2x+2$

Chọn đáp án A □

Câu 36. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB=4$, $BC=6$, M là trung điểm của BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $ND=3NC$. Khi đó bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN bằng

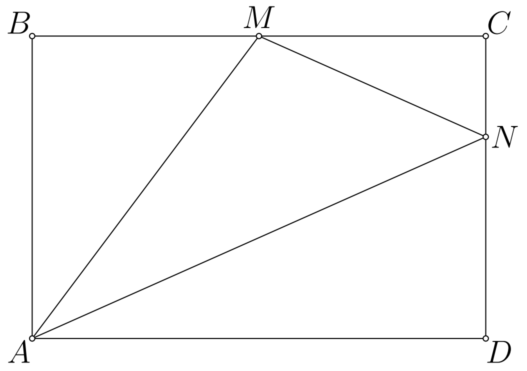
A $3\sqrt{5}$.

B $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.

C $5\sqrt{2}$.

D $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

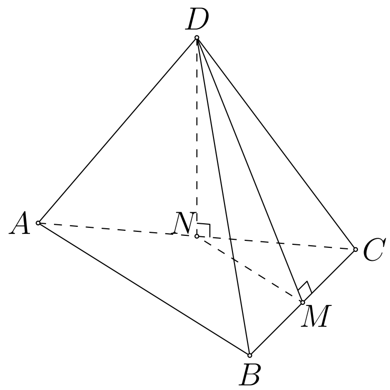


Ta có:
$MC = 3$, $NC = 1 \Rightarrow MN = \sqrt{10}$, $BM = 3$, $AB = 4 \Rightarrow AM = 5$,
$AD = 6$, $ND = 3 \Rightarrow AN = \sqrt{45}$,
$p = \dfrac{AM + AN + MN}{2} = \dfrac{\sqrt{10} + 5 + \sqrt{45}}{2}$,
$S_{AMN} = \sqrt{p\left(p - AM\right)\left(p - AN\right)\left(p - MN\right)} = \dfrac{15}{2}$
Bán kính của đường tròn ngoại tiếp của tam giác AMN là:
$R = \dfrac{AM.AN.MN}{4S_{AMN}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$
Chọn đáp án D □

Câu 37. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi M là trung điểm của BC. Tính côsin của góc giữa hai đường thẳng AB vàDM?

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **(B)** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm của AC.
Khi đó, $AB \| MN$ nên $\left(DM, AB\right) = \left(DM, MN\right)$
Dễ dàng tính được $DM = DN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $MN = \dfrac{a}{2}$
Trong tam giác DMN, ta có

$$\cos DMN = \frac{DM^2 + MN^2 - DN^2}{2DM.MN} = \frac{\frac{a^2}{4}}{2\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Vì $\cos DMN = \dfrac{\sqrt{3}}{6} > 0$ nên $\cos\left(DM, MN\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Vậy $\cos\left(DM, AB\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$
Chọn đáp án B □

Câu 38. Tìm a để hàm số $f\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2x + a & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$?

(A) $\dfrac{15}{4}$. **(B)** $-\dfrac{15}{4}$. (C) $\dfrac{1}{4}$. (D) 1.

Lời giải.

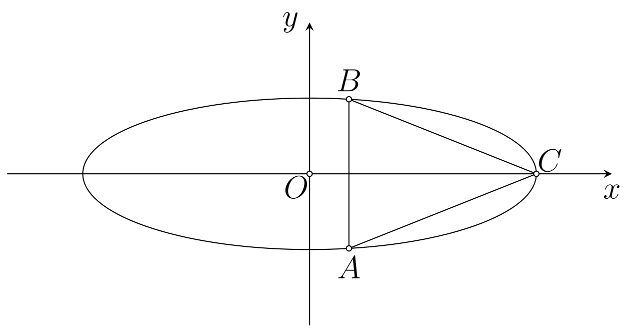
Ta có $f\left(2\right) = 4 + a$ Ta tính được $\lim\limits_{x \to 2} f\left(x\right) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x + 2 - 4}{\left(x - 2\right)\left(\sqrt{x+2} + 2\right)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{\sqrt{x+2} + 2} = \dfrac{1}{4}$
Hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi $f\left(2\right) = \lim\limits_{x \to 2} f\left(x\right) \Leftrightarrow 4 + a = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow a = -\dfrac{15}{4}$
Vậy hàm số liên tục tại $x = 2$ khi $a = -\dfrac{15}{4}$
Chọn đáp án B □

Câu 39. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $C\left(3; 0\right)$ và elip $\left(E\right) : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{1} = 1$. A, B là 2 điểm thuộc $\left(E\right)$ sao cho $\triangle\ ABC$ đều, biết tọa độ của $A\left(\dfrac{a}{2}; \dfrac{c\sqrt{3}}{2}\right)$ và A có tung độ âm. Khi đó $a + c$ bằng:

A 2. **B** 0. **C** -2. **D** -4.

Lời giải.

Nhận xét: Điểm $C(3;0)$ là đỉnh của elip $(E) \Rightarrow$ điều kiện cần để ΔABC đều đó là A,B đối xứng với nhau qua Ox. Suy ra A,B là giao điểm của đường thẳng $\Delta : x = x_0$ và elip (E)



+ Ta có elip (E): $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{3}\sqrt{9-x^2} \\ y = \dfrac{1}{3}\sqrt{9-x^2} \end{array}\right.$

+ Theo giả thiết A có tung độ âm nên tọa độ của $A\left(x_0; -\dfrac{1}{3}\sqrt{9-{x_0}^2}\right)$ (điều kiện $x_0 < 3$ do $A \neq C$)

+ *Ta* có: $AC = \sqrt{(3-x_0)^2 + \dfrac{1}{9}\left(9-{x_0}^2\right)}$

và $d_{(C;\Delta)} = |3-x_0|$

+ ΔABC đều $\Leftrightarrow d_{(C;\Delta)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AC \Leftrightarrow |3-x_0| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(3-x_0)^2 + \dfrac{1}{9}\left(9-{x_0}^2\right)}$

$\Leftrightarrow (3-x_0)^2 = \dfrac{3}{4}\left[(3-x_0)^2 + \dfrac{1}{9}\left(9-{x_0}^2\right)\right]$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{3}{x_0}^2 - \dfrac{3}{2}x_0 + \dfrac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = \dfrac{3}{2}\,(t/m) \\ x_0 = 3\,(R) \end{array}\right. \Rightarrow A\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow a + c = 2$

Chọn đáp án A □

Câu 40. Tổng các nghiệm (nếu có) của phương trình: $\sqrt{2x-1} = x - 2$ bằng:

A 6. **B** 1. **C** 5. **D** 2.

Lời giải.

Với điều kiện $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ ta có phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$2x - 1 = (x-2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1(L) \\ x = 5\,(t/m) \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$

Chọn đáp án C □

Câu 41. Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - (m+2)\,x + m^2 + 1 = 0$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 4\,(x_1 + x_2) - x_1x_2$ bằng

A $\dfrac{95}{9}$. **B** 11. **C** 7. **D** $\dfrac{-1}{9}$.

Lời giải.

Phương trình bậc hai $x^2 - (m+2)\,x + m^2 + 1 = 0$ có nghiệm x_1, x_2

$\Leftrightarrow \Delta = (m+2)^2 - 4\left(m^2+1\right) \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 4m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \dfrac{4}{3}$

Áp dụng hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 2 \\ x_1.x_2 = m^2 + 1 \end{cases}$

Khi đó $P = 4\,(x_1 + x_2) - x_1x_2 = 4\,(m+2) - \left(m^2+1\right) = -m^2 + 4m + 7$

Xét hàm số $P\,(m) = -m^2 + 4m + 7\ \forall m \in \left[0; \dfrac{4}{3}\right]$. Có $P' = -2m + 4 \geq 0 \forall m \in \left[0; \dfrac{4}{3}\right]$

Hàm số $P(m)$ luôn đồng biến trên $\left[0;\dfrac{4}{3}\right] \Rightarrow \max P(m) = f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{95}{9}$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\dfrac{95}{9}$

Chọn đáp án A □

Câu 42. *Ba* bạn A , B , C mỗi bạn viết ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc đoạn $[1;16]$ được kí hiệu theo thứ tự là a, b, c rồi lập phương trình bậc hai $ax^2+2bx+c=0$. Xác suất để phương trình lập được có nghiệm kép là

A $\dfrac{17}{2048}$. B $\dfrac{5}{512}$. C $\dfrac{3}{512}$. D $\dfrac{1}{128}$.

Lời giải.

$b^2 = ac$

Nếu $a=b=c$ sẽ có 16 cách chọn.

Nếu a, b, c khác nhau đôi một. Ta có thể liệt kê:

$(1;2;4),(1;3;9),(1;4;16),(2;4;8),(3;6;12),(4;6;9),(4;8;16),(9;12;16)$.

Suy ra có : 8.2! cách chọn $(a$, c hoán vị$)$.

Xác suất cần tìm là: $P=\dfrac{16+8.2!}{16^3}=\dfrac{1}{128}$

Chọn đáp án D □

Câu 43. Đề thi trắc nghiệm môn Toán gồm 50 câu hỏi , mỗi câu có 4 phương án trả lời trong đó chỉ có một phương án trả lời đúng. Mỗi câu trả lời đúng được 0,2 điểm. Một học sinh không học bài lên mỗi câu trả lời đều chọn ngẫu nhiên một phương án. Xác suất để học sinh đó được đúng 6 điểm là :

A $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{30}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{20}$.

B $\dfrac{C_{50}^{30}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{30}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{20}}{4^{50}}$.

C $\dfrac{30.\dfrac{1}{4}+20.\dfrac{3}{4}}{4^{50}}$.

D $C_{50}^{30}\left(\dfrac{1}{40}\right)^{20}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{20}$.

Lời giải.

Cách 1: Tự luận từ đầu

Để học sinh được đúng 6 điểm tức là trả lời đúng được tất cả 30 câu và trả lời sai 20 câu. Không gian mẫu (số cách lựa chọn) là:

Gọi A là biến cố mà học sinh trả lời đúng được 30 câu. Trước hết ta phải chọn ra 30 câu từ 50 câu để trả lời đúng (mỗi câu đúng chỉ có 1 cách chọn) , còn lại 20 câu trả lời sai (mỗi câu sai có 3 cách chọn). Suy ra $n(A)=C_{50}^{30}.(1)^{30}.(3)^{20}$

Suy ra xác suất để học sinh trúng được 6 điểm là: $p(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{C_{50}^{30}.(1)^{30}.(3)^{20}}{4^{50}}=C_{50}^{30}.\left(\dfrac{1}{4}\right)^{30}.\left(\dfrac{3}{4}\right)^{20}$

Cách 2: Áp dụng công thức xác suất Béc nu li:

Áp dụng công thức $p(k)=C_n^k.(p)^k.(1-p)^{n-k}$ $\Rightarrow$6 điểm $=p(30)=C_{50}^{30}.\left(\dfrac{1}{4}\right)^{30}.\left(\dfrac{3}{4}\right)^{20}$

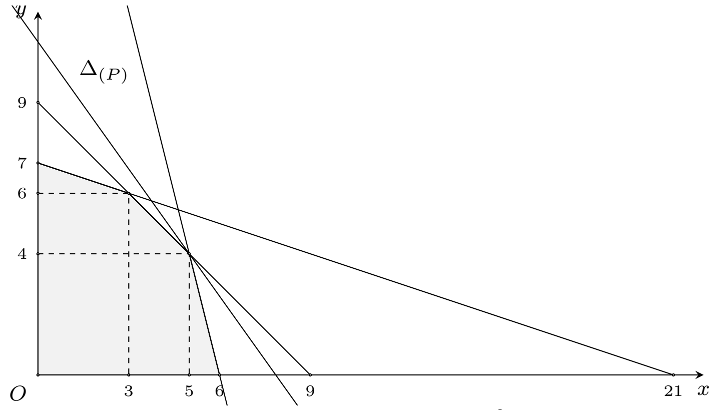
Chọn đáp án D □

Câu 44. Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24 gam hương liệu, 9 lít nước và 210 gam đường để pha chế nước ngọt loại I và nước ngọt loại II. Để pha chế 1 lít nước ngọt loại I cần 10 gam đường, 1 lít nước và 4 gam hương liệu. Để pha chế 1 lít nước ngọt loại II

cần 30 gam đường, 1 lít nước và 1 gam hương liệu. Mỗi lít nước ngọt loại I được 80 điểm thưởng, mỗi lít nước ngọt loại II được 60 điểm thưởng. Hỏi số điểm thưởng cao nhất có thể của mỗi đội trong cuộc thi là bao nhiêu ?

A 540. **B** 600. **C** 640. **D** 700.

Lời giải.



Gọi số lít nước ngọt loại I là x và số lít nước ngọt loại II là y.

Khi đó ta có hệ điều kiện về vật liệu ban đầu mà mỗi loại được cung cấp:

$$\begin{cases} 10x + 30y \le 210 \\ 4x + y \le 24 \\ x + y \le 9 \\ x, y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y \le 210 \\ 4x + y \le 24 \\ x + y \le 9 \\ x, y \ge 0 \end{cases} \quad (*)$$

Điểm thưởng đạt được $P = 80x + 60y$ Bài toán đưa về tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P trong miền D được cho bởi hệ điều kiện (*)

Biến đổi biểu thức $P = 80x + 60y \Leftrightarrow 80x + 60y - P = 0$ đây là họ đường thẳng $\Delta_{(P)}$ trong hệ tọa độ Oxy.

Miền D được xác định trong hình vẽ bên dưới:

Giá trị lớn nhất của P ứng với đường thẳng $\Delta_{(P)}$ đi qua điểm $A(5; 4)$,

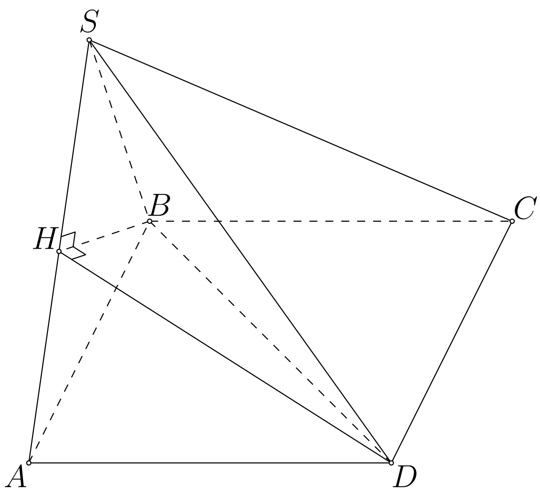
suy ra: $80.5 + 60.4 - P = 0 \Rightarrow P = 640 = P_{\max}$

Chọn đáp án C □

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng BD với (SAD). Tính $\sin\alpha$?

A $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. **B** $\dfrac{1}{2}$. **C** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **D** $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Lời giải.



Ta có $\sin(BD, (SAD)) = \sin\alpha = \dfrac{BH}{BD}$ (BH vuông góc với (SAD)) (1)

$ABCD$ là hình vuông cạnh a (gt), suy ra $BD = a\sqrt{2}$ (2)

Kẻ BH vuông góc SA (H thuộc SA), BH vuông góc AD

suy ra BH vuông góc (SAD).

Tam giác SAD đều cạnh a, đường cao $BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho $f(x) = \dfrac{x^2}{-x+1}$. Tính $f^{(2018)}(x)$

A $-\dfrac{2018!}{(-x+1)^{2018}}$. **B** $\dfrac{2018!}{(-x+1)^{2019}}$. **C** $-\dfrac{2018!}{(-x+1)^{2019}}$. **D** $\dfrac{2018!}{(-x+1)^{2018}}$.

Lời giải.

Ta có: $f(x) = \dfrac{x^2}{-x+1} = -x - 1 - \dfrac{1}{x-1}$ $f'(x) = -1 + \dfrac{1}{(x-1)^2}; f'(x) = -\dfrac{1.2}{(x-1)^3}; f'(x) = \dfrac{1.2.3}{(x-1)^4}$ Dự đoán: $f^{(2018)}(x) = \dfrac{-2018!}{(x-1)^{2019}}$

(Có thể chứng minh tổng quát bằng phương pháp quy nạp. Nhưng do đây là bài thi Trắc nghiệm nên bỏ qua!)

Chọn đáp án **B** □

Câu 47. Cho hàm số $y = x^3 - 5x^2$ có đồ thị (C). Hỏi có bao nhiêu điểm trên đường thẳng $d: y = 2x - 6$ sao cho từ đó kẻ được đúng hai tiếp tuyến đến (C)?

A 2 điểm. **B** 3 điểm. **C** 4 điểm. **D** vô số điểm.

Lời giải.

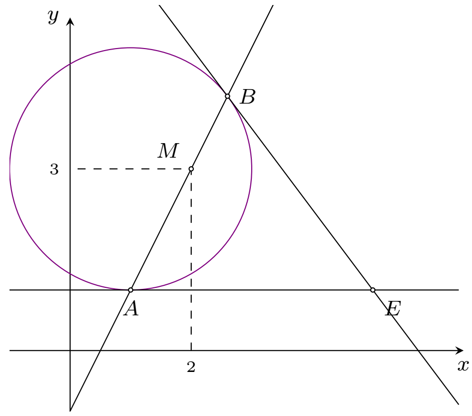
Cách 1: Gọi $M(a; 2a-6) \in d$. Phương trình đường thẳng d đi qua$M(a; 2a-6) \in d$ có hệ số góc k là: $y = k(x-a) + 2a - 6$ d tiếp xúc với (C) khi hệ $\begin{cases} x^3 - 5x^2 = k(x-a) + 2a - 6 \\ 3x^2 - 10x = k \end{cases}$ có nghiệm Theo yêu cầu bài toán thì $x^3 - 5x^2 = (3x^2 - 10x)(x-a) + 2a - 6$ có hai nghiệm phân biệt. Xét hàm số $f(x) = (3x^2 - 10x)(x-a) + 2a - 6 - x^3 + 5x^2 = 2x^3 - (3a+5)x^2 + 10ax + 2a - 6$ Có $f'(x) = 6x^2 - 2(3a+5)x + 10a = (6x-10)(x-a)$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \Rightarrow f(a) = -a^3 + 9a^2 + 2a - 6 \\ x = \dfrac{5}{3} \Rightarrow f\left(\dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{31}{3}a + \dfrac{71}{9} \end{array}\right.$ $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi: $\begin{cases} a \neq \dfrac{5}{3} \\ f(a).f\left(\dfrac{5}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq \dfrac{5}{3} \\ (-a^3 + 9a^2 - 2a - 6).\left(\dfrac{31}{3}a + \dfrac{71}{9}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{71}{31} \\ a = -1 \\ a = 4 \pm \sqrt{22} \end{cases}$ Đáp án có 4 điểm thỏa mãn bài toán. Cách 2: Gọi $M(a; 2a-6) \in d$. Phương trình đường thẳng d đi qua$M(a; 2a-6) \in d$ có hệ số góc k là: $y = k(x-a) + 2a - 6$ d tiếp xúc với (C) khi hệ $\begin{cases} x^3 - 5x^2 = k(x-a) + 2a - 6 \\ 3x^2 - 10x = k \end{cases}$ có nghiệm Theo yêu cầu bài toán thì $x^3 - 5x^2 = (3x^2 - 10x)(x-a) + 2a - 6$ có hai nghiệm phân biệt. Đến đây ta có thể cô lập a, xét hàm số. Chú ý tính cực trị bằng công thức: $y = u'/v'$

Chọn đáp án **C** □

Câu 48. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$. Đường thẳng (d) đi qua $M(2; 3)$ cắt (C) tại hai điểm A, B. Tiếp tuyến của đường tròn tại A và cắt nhau tại E. Biết $S_{AEB} = \dfrac{32}{5}$ và phương trình đường thẳng (d) có dạng $ax - y + c = 0$ với $a, c \in \mathbb{Z}$, $a > 0$. Khi đó $a + 2c$ bằng:

A 1 . **B** -1. **C** -4. **D** 0.

Lời giải.



Ta có $M(2;3) \in d : 2a - 3 + c = 0 \Leftrightarrow 3 - 2a$
$(C) : x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ có tâm $0(1;3)$, $r = 2$.
$OH = d\left(O, d\right) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}} \Rightarrow OE = \dfrac{OA^2}{OH} = \dfrac{4\sqrt{a^2+1}}{a}$,
$HE = \dfrac{3a^2+4}{a\sqrt{a^2+1}}$
$AH^2 = OA^2 - OH^2 = \dfrac{3a^2+4}{a^2+1} = \dfrac{\sqrt{3a^2+4}}{\sqrt{a^2+1}}$
Mà $S_{AEB} = \dfrac{32}{5} \Leftrightarrow AH.HE = \dfrac{32}{5} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3a^2+4}}{\sqrt{a^2+1}} . \dfrac{3a^2+4}{a\sqrt{a^2+1}} = \dfrac{32}{5}$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{\left(3a^2+4\right)^3} = 32a\sqrt{a^2+1} \Leftrightarrow 25\left(3a^2+4\right)^3 = 1024a^2\left(a^2+1\right)\ (1)$$

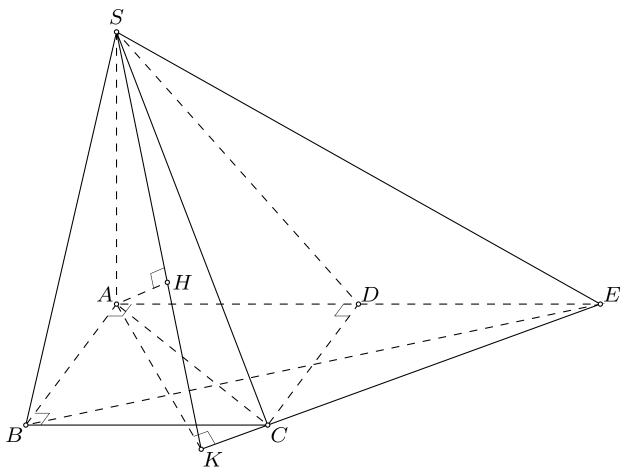
Đặt $t = a$ thì $(1) \Leftrightarrow -349t^3 + 652t^2 + 2576t + 1600 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \Leftrightarrow a = 2 \Leftrightarrow c = -1$. Vậy $a + 2c = 0$

Chọn đáp án D □

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa SC và BD bằng :

A $\dfrac{2a}{3}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{4a}{3}$. **D** $\dfrac{3a}{2}$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng $(ABCD)$,
qua C kẻ $CE \| BD \Rightarrow BD \| (SCE)$
$\Rightarrow d\left(SC, BD\right) = d\left(BD, \left(CSE\right)\right) = \dfrac{1}{2} d\left(A; \left(SCE\right)\right)$.
Từ A kẻ $AK \perp CE$.
Dễ dàng chứng minh được:
$AH \perp \left(ACE\right) \Rightarrow d\left(A; \left(ACE\right)\right) = AH$.
+ Tính AH:
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ΔSAK ta có:
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AK^2}$.
+ Tính AK: $S_{\Delta ACE} = \dfrac{1}{2} AK.CE = \dfrac{1}{2} CD.AE \Rightarrow AK = \dfrac{CD.AE}{CE} = \dfrac{4a}{\sqrt{5}}$.
Suy ra: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{(2a)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{4a}{\sqrt{5}}\right)^2} = \dfrac{9}{16a^2} \Rightarrow d\left(A; \left(SCE\right)\right) = \dfrac{4a}{3}$. Vậy $d\left(SC.BD\right) = \dfrac{2a}{3}$

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SCD). Tính $\cos\alpha$

A $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$. **B** $\dfrac{\sqrt{21}}{14}$. **C** $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. **D** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải.

Gọi $\{H\} = AC \cap BD$.

Vì hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SH\perp(ABCD)$.

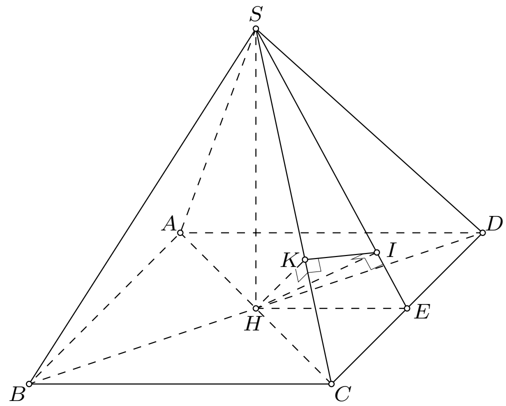
Ta có: $(SAC) \cap (SCD) = SC$.

Gọi I là hình chiếu của H trên mặt phẳng (SCD).

(Cách xác định điểm I: Gọi M là trung điểm của CD. Nối S với M. Gọi I là hình chiếu của H trên SM.

Dễ dàng chứng minh được: $SI\perp(SCD)$.

Tính được: $SM = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}, SH = a\sqrt{3}, HC = a, MC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.)



Gọi K là hình chiếu của I trên mặt phẳng SC. Có: $\begin{cases} HI\perp SC \\ KI\perp SC \end{cases} \Rightarrow SC\perp(HIK) \Rightarrow SC\perp HK$.

Lại có: $SC\perp HI$ (vì $HI\perp(SCD), SC\subset(SCD)$) suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SCD) là góc $HKI = \alpha$

Tính $\cos\alpha = \cos KHI = \dfrac{IK}{HK}$.

+ Tính $HK : HK.SC = SH.HC \Rightarrow HK = \dfrac{SH.HC}{SC} = \dfrac{a\sqrt{3}.a}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

+ Tính IK: dễ thấy $\Delta SIK - \Delta SCM \Rightarrow \dfrac{IK}{MC} = \dfrac{SK}{SM} \Rightarrow IK = \dfrac{SK.MC}{SM}$.

+ Tính SK: Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông cho tam giác SHC ta có:

$$SH^2 = SK.SC \Rightarrow SK = \frac{SH^2}{SC} = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3a}{2} \Rightarrow IK = \frac{\dfrac{3a}{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{14}}{2}} = \frac{3a\sqrt{7}}{14}.$$

Vậy $\cos\alpha = \cos KHI = \dfrac{IK}{HK} = \dfrac{\dfrac{3a\sqrt{7}}{14}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án D □

——— HẾT ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. D	3. C	4. C	5. B	6. D	7. A	8. C	9. C	10. D
11. A	12. A	13. D	14. C	15. D	16. A	17. C	18. D	19. B	20. A
21. A	22. A	23. D	24. D	25. B	26. B	27. B	28. C	29. C	30. A
31. D	32. C	33. B	34. B	35. A	36. D	37. B	38. B	39. A	40. C
41. A	42. D	43. D	44. C	45. C	46. B	47. C	48. D	49. A	50. D

7 ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH, NGHỆ AN – LẦN 1 (2019)

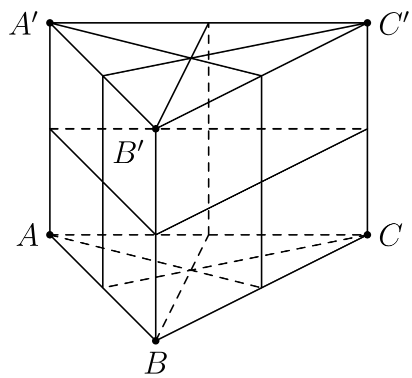
NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Hình lăng trụ tam giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A 3. B 1. C 2. D 4.

Lời giải.

Hình lăng trụ tam giác đều có 4 mặt đối xứng.



Chọn đáp án D □

Câu 2. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+x}{x-2}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến tại $A(1;-2)$ của (C) là

A $y = -3x + 5$. B $y = -5x + 7$. C $y = -5x + 3$. D $y = -4x + 6$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có $y' = \dfrac{(2x+1)(x-2) - (x^2+x)}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$.

Suy ra $y'(1) = -5$ nên phương trình tiếp tuyến tại A là

$$y = (-5)(x-1) - 2 \Leftrightarrow y = -5x + 3.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại A với đồ thị (C) là $y = -5x + 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Gọi (P) là đồ thị hàm số $y = 2x^3 - x + 3$. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào là tiếp tuyến của (P).

A $y = -x - 3$. B $y = 11x + 4$. C $y = -x + 3$. D $y = 4x - 1$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = 2x^3 - x + 3$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 6x^2 - 1$.

Ta xét đường thẳng $y = -x + 3$, khi đó

$$\begin{cases} 2x^3 - x + 3 = -x + 3 \\ 6x^2 - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 = 0 \\ 6x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $x = 0$. Nên đồ thị (P) tiếp xúc với đường thẳng $y = -x + 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Khối đa diện đều loại $\{4, 3\}$ có bao nhiêu mặt?

A 6. **B** 20. **C** 12. **D** 8.

Lời giải.

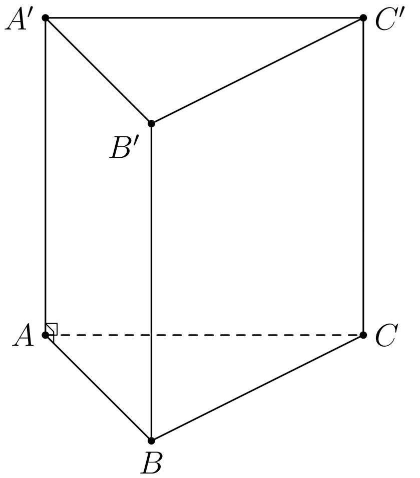
Khối đa diện đều loại $\{4, 3\}$ là hình lập phương. Do đó số mặt là 6.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên là hình vuông $\sqrt{2}a$. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{2}$. **B** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **C** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$. **D** $V = \dfrac{\sqrt{6}a^2}{6}$.

Lời giải.



Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên là hình vuông nên tam giác ABC là tam giác đều và

$$\begin{cases} AA' \perp AC \\ AA' \perp AB \end{cases} \Rightarrow AA' \perp (ABC).$$

Khi đó

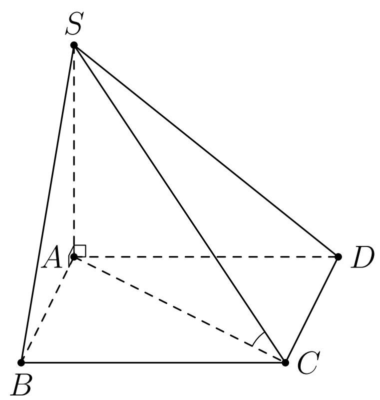
$$\begin{aligned} V = AA' \cdot S_{\triangle ABC} &= AA' \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot AB^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\sqrt{2}a\right)^3 = \frac{\sqrt{6}a^3}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với $(ABCD)$. Góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng

A $45°$. **B** $30°$. **C** $60°$. **D** $90°$.

Lời giải.



Do giả thiết ta có $SA \perp (ABCD)$ suy ra $SA \perp AC$ và AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Khi đó góc $(SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$.

Xét tam giác SAC ta có $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC}$.

Mà $AC = \sqrt{2}a$ nên $\tan \widehat{SCA} = 1 \Leftrightarrow \widehat{SCA} = 45°$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và CD'.

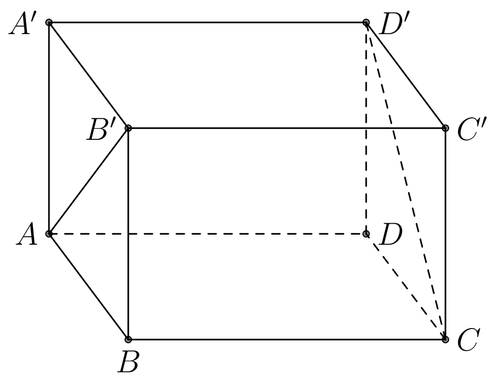
A $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **B** a. **C** $\sqrt{2}a$. **D** $2a$.

Lời giải.

Do giả thiết ta có $(AA'B'B) \parallel (CC'D'D)$.
Nên

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(AB', CD'\right) &= \mathrm{d}\left(AB', (CC'D'D)\right) \\ &= \mathrm{d}\left(A, (CC'D'D)\right) = AD \end{aligned}$$

Vậy khoảng cách giữa AB' và CD' bằng a.



Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Giá trị cực đại $y_{\text{CĐ}}$ của hàm số $y = x^3 - 12x + 20$ là

(A) $y_{\text{CĐ}} = 4$. **B** $y_{\text{CĐ}} = 36$. (C) $y_{\text{CĐ}} = -4$. (D) $y_{\text{CĐ}} = -2$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Ta có $y' = 3x^2 - 12$.
Xét $y' = 0$ suy ra $3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$.
Xét dấu y'

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ suy ra $y_{\text{CĐ}} = 36$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin x + 1}}$ là

(A) $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B** $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(C) $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. (D) $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Do $\sin x + 1 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số xác định khi và chỉ khi

$$\sin x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} = 3\cot x + \sqrt{3}$ là

(A) $-\dfrac{\pi}{6}$. (B) $-\dfrac{5\pi}{6}$. **C** $-\dfrac{\pi}{2}$. (D) $-\dfrac{2\pi}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện $\sin x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} = 3\cot x + \sqrt{3}\\
\Leftrightarrow\ &\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) - \sqrt{3}\cot x = 0\\
\Leftrightarrow\ &\cot x(\cot x - \sqrt{3}) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cot x = 0\\ \cot x = \sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi\end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Do đó nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $\max\left\{-\frac{\pi}{2}; -\frac{5\pi}{6}\right\} = -\frac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng lần lượt là $5; 9; 13; 17; \ldots$ Tìm công thức số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng đó?

A. $u_n = 5n - 1$. B. $u_n = 5n + 1$. C. $u_n = 4n - 1$. D. $u_n = 4n + 1$.

Lời giải.

Cấp số cộng (u_n) có công sai $d = 9 - 5 = 4$, $u_1 = 5$ nên có số hạng tổng quát là

$$u_n = u_1 + (n-1)d = 5 + 4(n-1) = 4n + 1.$$

Chọn đáp án D □

Câu 12. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 1$ trên đoạn $[-3; 2]$?

A. $\min\limits_{[-3;2]} y = 3$. B. $\min\limits_{[-3;2]} y = -3$. C. $\min\limits_{[-3;2]} y = -1$. D. $\min\limits_{[-3;2]} y = 8$.

Lời giải.

Hàm số có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$, $y' = 2x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in [-3; 2].$$

Có $y(-3) = 8$, $y(0) = -1$, $y(2) = 3$ nên $\min\limits_{[-3;2]} y = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

$y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} > 0$, $\forall x \in (1; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

$y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} < 0$, $\forall x \in (-\infty; -1)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Khai triển $(x-3)^{100}$ ta được đa thức $(x-3)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{100}x^{100}$, với $a_0, a_1, \ldots, a_{100}$ là hệ số thực. Tính $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{99} + a_{100}$.

(A) -2^{100}. (B) 4^{100}. (C) -4^{100}. (D) 2^{100}.

Lời giải.

Thay $x = -1$ vào khai triển $(x-3)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{100}x^{100}$, ta được

$$a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 + \cdots + a_{100}(-1)^{100} = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{99} + a_{100} = (-1-3)^{100} = 4^{100}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Nghiệm của phương trình lượng giác $\cos^2 x - \cos x = 0$ thỏa mãn điều kiện $0 < x < \pi$ là

(A) $x = 0$. (B) $x = \dfrac{3\pi}{4}$. (C) $x = \dfrac{\pi}{2}$. (D) $x = -\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

$$\cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = k2\pi\end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).$$

Do đó các nghiệm của phương trình trên khoảng $(0;\pi)$ là $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Tất cả các nghiệm của phương trình $\tan x = \cot x$ là

(A) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$. (B) $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(C) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (D) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

$$\tan x = \cot x \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Đối chiếu điều kiện được các nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (D) □

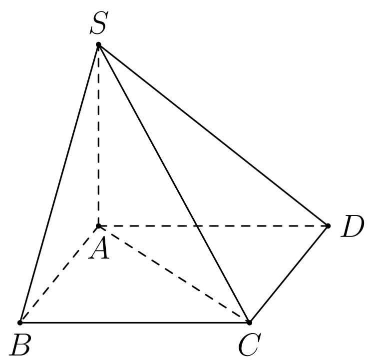
Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = \sqrt{2}a$ và vuông góc với $(ABCD)$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

(A) $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$. (B) $V = \dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. (C) $V = \sqrt{2}a^3$. (D) $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$V = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{2}a\cdot a^2 = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

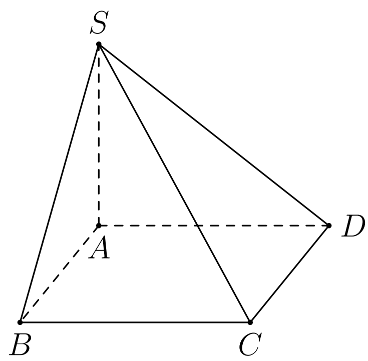


Chọn đáp án (A) ☐

Câu 18. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = a$, $SA = \sqrt{3}a$ và vuông góc với $(ABCD)$. Tính góc giữa hai đường thẳng SB và CD.

A 60°. **B** 30°. **C** 45°. **D** 90°.

Lời giải.



Ta có $AB \parallel CD$ suy ra $(SB, CD) = (SB, AB) = \widehat{SBA}$.

Trong tam giác SAB vuông tại A, ta có

$$\tan\widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ.$$

Vậy $(SB, CD) = 60^\circ$.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 19. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-3}$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

A Đồ thị (C) có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

B Đồ thị (C) không có tiệm cận đứng.

C Đồ thị (C) có tiệm cận ngang.

D Đồ thị (C) có tiệm cận.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{3x-1}{x-3} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{3x-1}{x-3} = -\infty$, suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 3$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x-1}{x-3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3-\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}} = 3$, suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 3$.

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 20. Trong năm học 2018 - 2019, Trường THPT chuyên Đại học Vinh có 13 lớp học sinh khối 10, 12 lớp học sinh khối 11 và 12 lớp học sinh khối 12. Nhân ngày nhà giáo Việt Nam 20 tháng 11, nhà trường chọn ngẫu nhiên 2 lớp trong trường để tham gia hội diễn văn nghệ của Trường Đại học Vinh. Xác suất để 2 lớp được chọn không cùng một khối là

A $\dfrac{76}{111}$. **B** $\dfrac{87}{111}$. **C** $\dfrac{78}{111}$. **D** $\dfrac{67}{111}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = \mathrm{C}_{37}^2$.

Gọi A là biến cố "2 lớp được chọn không cùng một khối".

Ta có $n(A) = \mathrm{C}_{13}^1 \cdot \mathrm{C}_{12}^1 + \mathrm{C}_{12}^1 \cdot \mathrm{C}_{12}^1 + \mathrm{C}_{12}^1 \cdot \mathrm{C}_{13}^1$.

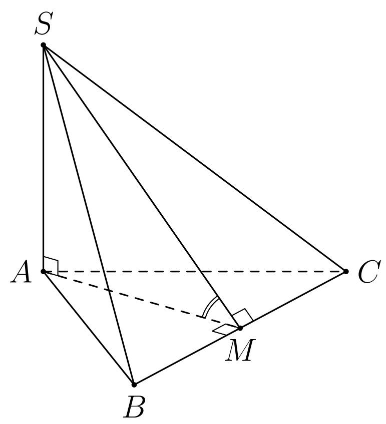
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{\mathrm{C}_{13}^1 \cdot \mathrm{C}_{12}^1 + \mathrm{C}_{12}^1 \cdot \mathrm{C}_{12}^1 + \mathrm{C}_{12}^1 \cdot \mathrm{C}_{13}^1}{\mathrm{C}_{37}^2} = \dfrac{76}{111}$.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = 2a$, $SA = a$ và SA vuông góc với (ABC). Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

A 45°. **B** 30°. **C** 60°. **D** 90°.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases}(SBC) \cap (ABC) = BC \\ AM \perp BC \\ SM \perp BC\end{cases}$

nên $((SBC), (ABCD)) = (SM, AM) = \widehat{SMA}$.

Trong tam giác SAM vuông tại A, ta có

$$\tan \widehat{SMA} = \frac{SA}{AM} = \frac{a}{a} = 1 \Rightarrow \widehat{SMA} = 45^\circ.$$

Vậy $((SBC), (ABCD)) = 45^\circ$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Gọi x_1, x_2, x_3 là các điểm cực trị của hàm số $y = -x^4 + 4x^2 + 2019$. Tổng $x_1 + x_2 + x_3$ bằng

A 0. **B** $2\sqrt{2}$. **C** -1. **D** 2.

Lời giải.

$y' = -4x^3 + 8x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ trên đoạn $[0; 4]$. Tính tổng $m + 2M$.

A $m + 2M = 17$. **B** $m + 2M = -37$. **C** $m + 2M = 51$. **D** $m + 2M = -24$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \notin [0; 4] \\ x = 3 \in [0; 4]. \end{array}\right.$

$y(0) = 1$, $y(3) = -26$, $y(4) = -19$.

Vậy $M = \max\limits_{[0;4]} y = 1$, $m = \min\limits_{[0;4]} y = -26$ nên $m + 2M = -24$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$. Tính u_3.

A $u_3 = 15$. **B** $u_3 = 25$. **C** $u_3 = 10$. **D** $u_3 = 20$.

Lời giải.

$\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1 - q^2 + q^4\right) = 65 \\ u_1\left(1 + q^6\right) = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1 - q^2 + q^4\right) = 65 \\ 1 + q^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^2 = 4 \\ u_1 = 5. \end{cases}$

Vậy $u_3 = u_1 q^2 = 5 \cdot 4 = 20$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Biết số tự nhiên n thỏa mãn $\mathrm{C}_n^1 + 2 \cdot \dfrac{\mathrm{C}_n^2}{\mathrm{C}_n^1} + \cdots + n \cdot \dfrac{\mathrm{C}_n^n}{\mathrm{C}_n^{n-1}} = 45$. Tính C_{n+4}^n.

A 715. **B** 1820. **C** 1365. **D** 1001.

Lời giải.

Xét số hạng tổng quát

$$k \cdot \frac{\mathrm{C}_n^k}{\mathrm{C}_n^{k-1}} = \frac{k \cdot n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(k-1)!(n+1-k)!}{n!} = n + 1 - k.$$

Do đó

$$\begin{aligned} & \mathrm{C}_n^1 + 2\frac{\mathrm{C}_n^2}{\mathrm{C}_n^1} + \cdots + n\frac{\mathrm{C}_n^n}{\mathrm{C}_n^{n-1}} = 45 \\ \Leftrightarrow\ & n + (n-1) + \cdots + 1 = 45 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{n(n+1)}{2} = 45 \\ \Leftrightarrow\ & n^2 + n - 90 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} n = 9 \\ n = -10 \text{ (loại)} \end{array}\right. \\ \Rightarrow\ & n = 9. \end{aligned}$$

Vậy $\mathrm{C}_{13}^9 = 715$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A $(-1; +\infty)$. **B** $[0; +\infty)$. **C** $(0; +\infty)$. **D** $[-1; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$, $y' = \dfrac{m+1}{(x+m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m \leq 0 \\ m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + mx - 1$ nằm bên phải trục tung.

A $m < 0$. **B** $0 < m < \dfrac{1}{3}$. **C** $m < \dfrac{1}{3}$. **D** Không tồn tại.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 + 2x + m$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 1 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{3} \qquad (1).$$

Khi đó phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1 và x_2.
Theo định lí Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = -\frac{2}{3}$, $x_1x_2 = \frac{m}{3}$.
Vì $x_1 + x_2 = -\frac{2}{3} < 0$ nên để điểm cực tiểu của đồ thị hàm số nằm bên phải trục tung thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

$$\Leftrightarrow x_1x_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{m}{3} < 0 \Leftrightarrow m < 0 \qquad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $m < 0$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Sinh nhật của An vào ngày 1 tháng 5. Bạn An muốn mua một chiếc máy ảnh giá khoảng 600.000 đồng để làm quà cho chính mình. Bạn ấy quyết định bỏ ống tiết kiệm 10.000 đồng vào ngày 1 tháng 1 của năm đó, sau đó cứ liên tục những ngày sau, mỗi ngày bạn bỏ ống tiết kiệm 5.000 đồng. Biết trong năm đó, tháng 1 có 31 ngày, tháng 2 có 28 ngày, tháng 3 có 31 ngày và tháng 4 có 30 ngày. Gọi a (đồng) là số tiền An có được đến sinh nhật của mình (ngày sinh nhật An không bỏ tiền vào ống). Khi đó ta có

(A) $a \in [610000; 615000)$.
(B) $a \in [605000; 610000)$.
(C) $a \in [600000; 605000)$.
(D) $a \in [595000; 600000)$.

Lời giải.
Theo giả thiết An quyết định bỏ ống tiết kiệm vào ngày 1 tháng 1 đến ngày 30 tháng 4 nên tổng số ngày bạn An bỏ tiết kiệm là 120 ngày.
Ngày thứ nhất An bỏ ống tiết kiệm là 10.000 đồng.
119 ngày sao đó An bỏ ống là $119 \cdot 5000 = (120 - 1) \cdot 5000 = 600.000 - 5000$ đồng.
Vậy tổng số tiền An bỏ ống tiết kiệm là $600.000 - 5000 + 10.000 = 605.000$ đồng.
Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Số nghiệm của phương trình $\sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x = 2\sin 7x$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là

(A) 4. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.
$\sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x = 2\sin 7x \Leftrightarrow \sin(5x + \frac{\pi}{3}) = \sin 7x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x + \frac{\pi}{3} = 7x + k2\pi \\ 5x + \frac{\pi}{3} = \pi - 7x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{6} - k2\pi & (1) \\ x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{6} & (2). \end{array}\right.$$

Vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ nên $\left[\begin{array}{l} (1) \Rightarrow k = 0 \\ (2) \Rightarrow k \in \{0; 1; 2\}. \end{array}\right.$
Vậy số nghiệm của phương trình đã cho là 4.
Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) > 0$, $\forall x > 0$. Biết $f(1) = 2$, hỏi khẳng định nào sau đây có thể xảy ra?

(A) $f(2) + f(3) = 4$.
(B) $f(-1) = 2$.

Ⓒ $f(2) = 1$. Ⓓ $f(2018) > f(2019)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) > 0,\ \forall x > 0 \Rightarrow y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Suy ra $2 = f(1) < f(2) < f(3)$ và $f(2018) < f(2019)$.

Do đó các khẳng định $f(2) + f(3) = 4$; $f(2) = 1$; $f(2018) > f(2019)$ là sai.

Vậy khẳng định $f(-1) = 2$ có thể xảy ra.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 31. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Từ A lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 4 chữ số khác nhau và nhỏ hơn 4012?

Ⓐ 180. Ⓑ 240. Ⓒ 200. **D** 220.

Lời giải.

Gọi số cần lập là $\overline{abcd}$. Theo giả thiết của đề bài ta suy ra $a \in \{1; 2; 3\}$, $d \in \{0; 2; 4; 6\}$.

- **TH1** Nếu $a = 1$ thì số các số chẵn lập được là $1 \cdot 4 \cdot \mathrm{A}_5^2 = 80$.
- **TH2** Nếu $a = 2$ thì số các số chẵn lập được là $1 \cdot 3 \cdot \mathrm{A}_5^2 = 60$.
- **TH3** Nếu $a = 3$ thì số các số chẵn lập được là $1 \cdot 4 \cdot \mathrm{A}_5^2 = 80$.

Vậy số các số thỏa đề bài là 220 số.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 32. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\dfrac{1}{2}t^3 + 9t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Ⓐ 216 (m/s). Ⓑ 400 (m/s). **C** 54 (m/s). Ⓓ 30 (m/s).

Lời giải.

Ta có $v(t) = s'(t) = -\dfrac{3}{2}t^2 + 18t$. Bằng cách lập bảng biến thiên hàm số $y = v(t)$ với $t \in [0; 10]$.

t	0		6		10
$v'(t)$		+	0	−	
$v(t)$			54		
	0	↗		↘	30

Ta suy ra $\max\limits_{t \in [0;10]} v(t) = v(6) = 54$.

Vậy vận tốc lớn nhất của vật đạt được trong khoảng từ 0 đến 10s là $v(6) = 54$ (m/s).

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 33. Trong tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m-1)x^4$ đạt cực đại tại $x = 0$ là

A $m < 1$. Ⓑ $m > 1$. Ⓒ Không tồn tại m. Ⓓ $m = 1$.

Lời giải.

- Với $m = 1$, hàm số trở thành $y = 0$ không có cực trị, do đó $m = 1$ không thỏa yêu cầu bài toán.

- Với $m \neq 1$, ta có $y' = 4(m-1)x^3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$, suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ khi chỉ khi $\begin{cases} y' > 0, \ \forall x \in (-\infty; 0) \\ y' < 0, \ \forall x \in (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Tung hai con súc sắc 3 lần độc lập với nhau. Tính xác suất để có đúng một lần tổng số chấm xuất hiện trên hai mặt của hai con súc sắc bằng 6. (Kết quả làm tròn đến 3 chữ số ở phần thập phân).

(A) 0,120. (B) 0,319. (C) 0,718. **(D) 0,309.**

Lời giải.

Mỗi lần gieo đồng thời hai con súc sắc, có 36 kết quả có thể xảy ra.

Gọi A: "tổng số chấm xuất hiện trên hai mặt của con súc sắc bằng 6 ".

Khi đó, $A = \{(1;5),(2;4),(3;3),(4;2),(5;1)\} \Rightarrow n(A) = 5$, $n\left(\overline{A}\right) = 31$

và $P(A) = \dfrac{5}{36}$, $P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{31}{36}$.

Gọi B: "có đúng một lần tổng số chấm xuất hiện trên hai mặt của con súc sắc bằng 6 ", ta có $B = \overline{A}AA + A\overline{A}A + AA\overline{A}$.

Do đó,

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(\overline{A}\right)P(A)P(A) + P(A)P\left(\overline{A}\right)P(A) + P(A)P(A)P\left(\overline{A}\right) \\ &= \frac{5}{36}\cdot\frac{31}{36}\cdot\frac{31}{36} + \frac{31}{36}\cdot\frac{5}{36}\cdot\frac{31}{36} + \frac{31}{36}\cdot\frac{31}{36}\cdot\frac{5}{36} \\ &\approx 0{,}309. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Hệ số khai triển của x^5 trong khai triển $(1-2x-3x^2)^9$ là

(A) 792. (B) -684. **(C) 3528.** (D) 0.

Lời giải.

Ta có $(1-2x-3x^2)^9 = \sum\limits_{k=0}^{9} \mathrm{C}_9^k(-1)^k(2x+3x^2)^k = \sum\limits_{k=0}^{9} \mathrm{C}_9^k(-1)^k \sum\limits_{i=0}^{k} \mathrm{C}_k^i 2^{k-i}3^i x^{k+i}$ trong đó $0 \le i \le k \le 9$.

Số hạng trong khai triển chứa x^5 khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} k=3, i=2 \\ k=4, i=1 \\ k=5, i=0. \end{array}\right.$

Vậy hệ số cần tìm là $\mathrm{C}_9^3(-1)^3\mathrm{C}_3^2 2^1 3^2 + \mathrm{C}_9^4(-1)^4\mathrm{C}_4^1 2^3 3^1 + \mathrm{C}_9^5(-1)^5\mathrm{C}_5^0 2^5 3^0 = 3528$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Cho một khối đa diện lồi có 10 đỉnh, 7 mặt. Hỏi khối đa diện này có mấy cạnh?

(A) 20. (B) 18. **(C) 15.** (D) 12.

Lời giải.

Ta có $đ + m - c = 2 \Rightarrow c = 15$

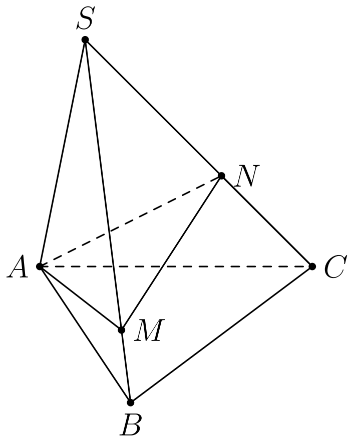
Vậy khối đa diện có 15 cạnh.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = \sqrt{2}a$, $SB = 2a$, $SC = 2\sqrt{2}a$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60^\circ$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

A $\dfrac{4a^3}{3}$. **B** $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **C** $\sqrt{2}a^3$. **D** $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.



Trên cạnh SB lấy điểm M sao cho $SM = \sqrt{2}a$; trên cạnh SC lấy N sao cho $SN = \sqrt{2}a$.

Khi đó ta có tam giác SAM, SAN, SMN đều cạnh bằng $\sqrt{2}a$.

Suy ra hình chóp $S.AMN$ là tứ diện đều cạnh $\sqrt{2}a$ nên thể tích là

$$V_{S.AMN} = \frac{\left(a\sqrt{2}\right)^3 \cdot \sqrt{2}}{12} = \frac{4a^3}{12} = \frac{1}{3}a^3.$$

Mặt khác ta có $\dfrac{V_{SABC}}{V_{SAMN}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SB}{SN} \cdot \dfrac{SC}{SN} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

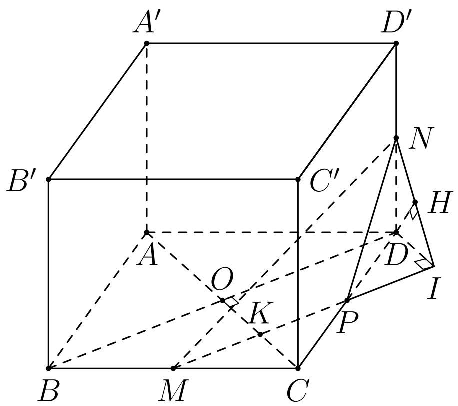
Vậy $V_{SABC} = 2\sqrt{2} \cdot V_{SAMN} = \dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và DD'. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và BD.

A $\sqrt{3}a$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **C** $\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$. **D** $\dfrac{\sqrt{3}a}{6}$.

Lời giải.



Gọi O, P, K lần lượt là trung điểm của AC, CD, OC. Kẻ $DI \perp MP$, $DH \perp NI$.

Ta có $ND = \dfrac{a}{2}$, $BD \parallel MP$, tứ giác $DIKO$ là hình chữ nhật $\Rightarrow DI = OK = \dfrac{OC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Khi đó:

$$\mathrm{d}(MN, BD) = \mathrm{d}(BD, (MNP)) = \mathrm{d}(D, (MNP)) = DH$$

Xét tam giác vuông NDI có $\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{DN^2} + \dfrac{1}{DI^2} \Rightarrow DH = \dfrac{\sqrt{3}a}{6}$.

Vậy $\mathrm{d}(MN, BD) = \dfrac{\sqrt{3}a}{6}$.

Cách khác.

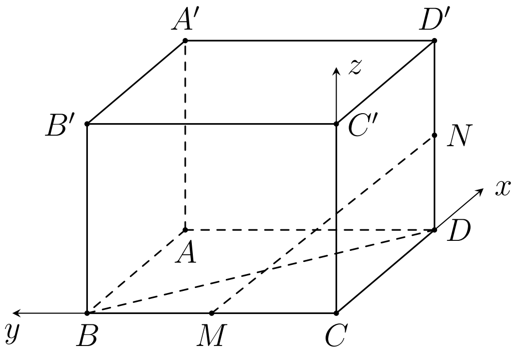
Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Khi đó $C(0;0;0)$, $D(a;0;0)$, $B(0;a;0)$, $D'(a;0;a)$, $M\left(0;\dfrac{a}{2};0\right)$, $N\left(a;0;\dfrac{a}{2}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{MN}=\left(a;-\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{BD}=(a;-a;0)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{BD}\right]=\left(\dfrac{a^2}{2};\dfrac{a^2}{2};-\dfrac{a^2}{2}\right)$, $\overrightarrow{BM}=\left(0;-\dfrac{a}{2};0\right)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{BD}\right]\cdot\overrightarrow{BM}=-\dfrac{a^3}{4}$ và $\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{BD}\right]\right|=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.



Ta có $\mathrm{d}(MN,BD)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{BD}\right]\cdot\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{BD}\right]\right|}=\dfrac{\dfrac{a^3}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SB, BC, CD. Tính thể tích khối tứ diện $CMNP$.

A $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{48}$. B $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{96}$. C $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{54}$. D $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{72}$.

Lời giải.

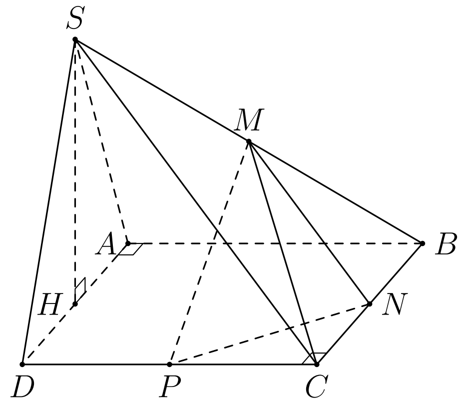
Gọi H là trung điểm của $AD\Rightarrow SH\perp(ABCD)$ và $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $V_{CMNP}=V_{M.CNP}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle CNP}\cdot\mathrm{d}(M,(CNP))$.

Vì N, P là trung điểm CD, CB nên

$S_{\triangle CNP}=\dfrac{1}{2}\cdot CN\cdot CP=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{a}{2}=\dfrac{a^2}{8}$.

Mặt khác M là trung điểm của SB nên



$$\mathrm{d}(M,(CNP))=\frac{1}{2}\mathrm{d}(S,(ABCD))=\frac{1}{2}\cdot SH=\frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Khi đó $V_{M.CNP}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a^2}{8}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{96}$.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{|x|-2018}{x+2019}$.

A 1. B 3. C 2. D 0.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2018}{x+2019}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{2018}{x}}{1+\dfrac{2019}{x}}=1\Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang.

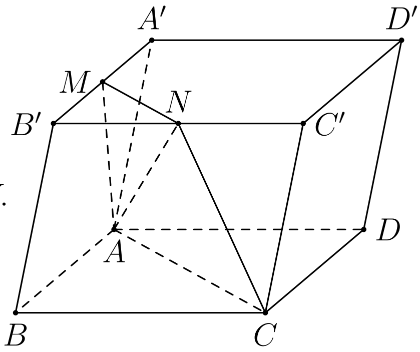
Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x-2018}{x+2019}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1-\dfrac{2018}{x}}{1+\dfrac{2019}{x}}=-1\Rightarrow y=-1$ là tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (C) □

Câu 41. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có M là trung điểm của $A'B'$. Mặt phẳng (ACM) chia khối hộp đã cho thành hai phần. Tỉ số thể tích của hai phần đó bằng

A $\frac{7}{17}$. (B) $\frac{5}{17}$. (C) $\frac{7}{24}$. (D) $\frac{7}{12}$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm của $B'C' \Rightarrow (ACM)$ chia khối hộp thành khối đa diện là $ABCB'MN$, $ACDMNC'D'A'$.

Gọi V, V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối đa diện

$$ABCD.A'B'C'D', ABCB'MN, ACDMNC'D'A' \Rightarrow V_1 + V_2 = V.$$

Vì M, N là trung điểm của $A'B'$, $B'C'$ nên

$S_{\triangle B'MN} = \frac{1}{4}S_{\triangle B'A'C'} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$. Đặt $S = \triangle ABC$.

Khi đó thể tích khối chóp cụt $ABCB'MN$ là

$V_1 = \frac{1}{3}\left(S + \frac{1}{4}S + \sqrt{S \cdot \frac{1}{4}S}\right) \cdot \mathrm{d}(B', (ABC))$

$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{7S}{4} \cdot \mathrm{d}(B', (ABC)) = \frac{7}{24} \cdot 2S \cdot \mathrm{d}(B', (ABC)) = \frac{7}{24}V$. Suy ra $V_2 = \frac{17}{24}V$ hay $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{17}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiếp xúc với trục hoành tại gốc tọa độ và cắt đường thẳng $x = 1$ tại điểm có tung độ bằng 3 khi

(A) $a = b = 0$, $c = 2$. (B) $a = c = 0$, $b = 2$.

C $a = 2$, $b = c = 0$. (D) $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

Gọi (C) là đồ thị hàm số $f(x)$. Vì $M(1;3) \in (C)$ nên $3 = 1 + a + b + c \Leftrightarrow a + b + c = 2$ (1).

Vì (C) tiếp xúc với Ox tại O nên hệ $\begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$ có nghiệm $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0. \end{cases}$

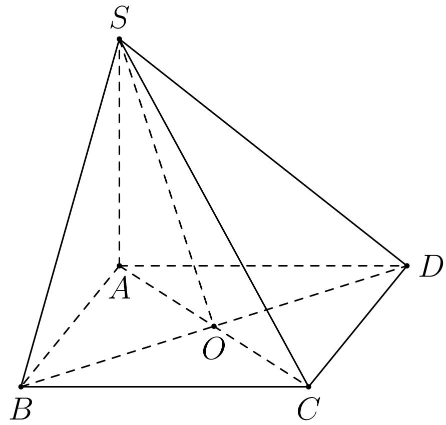
Từ (1) suy ra $a = 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, cạnh bên $SA = \sqrt{2}a$ và SA vuông góc với $(ABCD)$. Tính góc giữa SB và (SAC).

(A) 90°. **B** 30°. (C) 45°. (D) 60°.

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của AC và BD.
Do $ABCD$ là hình thoi nên $BO \perp AC$ (1).
Lại có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BO$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $BO \perp (SAC)$.
Vậy $(SB, (SAC)) = (SB, SO) = \widehat{BSO}$.
Trong tam giác vuông BOA, ta có $\widehat{ABO} = 30^\circ$ nên suy ra $AO = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$ và $BO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
Trong tam giác vuông SAO, ta có

$$SO = \sqrt{SA^2 + AO^2} = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{3a}{2}.$$

$BO \perp (SAC) \Rightarrow BO \perp SO \Rightarrow \Delta SOB$ vuông tại O.
Ta có $\tan \widehat{BSO} = \frac{BO}{SO} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
Vậy $(SB, (SAC)) = (SB, SO) = \widehat{BSO} = 30^\circ$.
Chọn đáp án B □

Câu 44. Gọi m là giá trị để đồ thị (C_m) của hàm số $y = \frac{x^2 + 2mx + 2m^2 - 1}{x - 1}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến với (C_m) tại hai điểm này vuông góc với nhau. Khi đó ta có

A $m \in (1; 2)$. **B** $m \in (-2; -1)$. **C** $m \in (0; 1)$. **D** $m \in (-1; 0)$.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x - 2m^2 - 2m + 1}{(x-1)^2} = 1 - \frac{2m^2 + 2m}{(x-1)^2}$.
Để (C_m) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt thì phương trình $x^2 + 2mx + 2m^2 - 1 = 0$ (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1 tức là

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1 + 2m + 2m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m^2 > 0 \\ m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-1;\, 1) \setminus \{0\} \qquad (*).$$

Gọi x_1 , x_2 là hai nghiệm của (1) . Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = -2m$ và $x_1 \cdot x_2 = 2m^2 - 1$.
Theo giả thiết, ta có

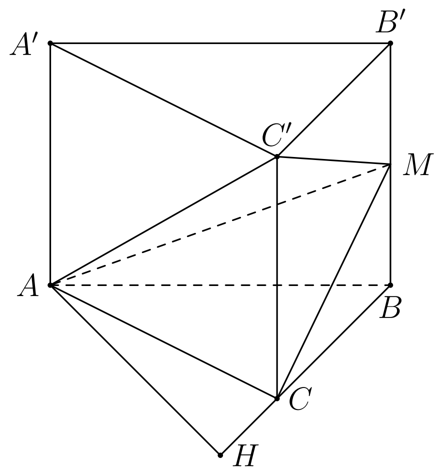
$$\begin{aligned} y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left[1 - \frac{2m^2 + 2m}{(x_1 - 1)^2}\right] \cdot \left[1 - \frac{2m^2 + 2m}{(x_2 - 1)^2}\right] = -1 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - \left(2m^2 + 2m\right) \left[\frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 2}{[x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1]^2}\right] \\ &\qquad + \left(2m^2 + 2m\right)^2 \cdot \frac{1}{[x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1]^2} = -1 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{4m + 4}{2m^2 + 2m} + 1 = -1 \Leftrightarrow 1 - \frac{2(m+1)}{m(m+1)} + 1 = -1 \\ &\Leftrightarrow \quad 3 - \frac{2}{m} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 45. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại C, $\widehat{BAC} = 30°$, $AB = \sqrt{3}a$, $AA' = a$. Gọi M là trung điểm của BB'. Tính theo a thể tích V của khối tứ diện $MACC'$.

A $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **B** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **D** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{18}$.

Lời giải.

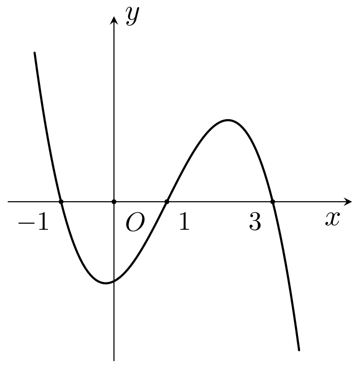


Tam giác ABC cân tại C, $\widehat{BAC} = 30°$, $AB = \sqrt{3}a$.
Đặt $AC = CB = x > 0$.
Áp dụng định lí Côsin trong $\triangle ABC$ ta có
$AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB \cdot \cos 120° = AB^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 3a^2 \Leftrightarrow x = a$.
Kẻ $AH \perp BC$, mà $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng. $\Rightarrow AH \perp (MCC')$.
Dễ thấy $S_{\triangle MCC'} = \dfrac{1}{2} S_{BCC'B'} = \dfrac{1}{2}a^2$.
$V_{MACC'} = \dfrac{1}{3} \cdot AH \cdot S_{\triangle MCC'} = \dfrac{1}{3} a\sqrt{3} \cdot \sin 30° = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(x-3)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A $(2; 4)$. **B** $(1; 3)$. **C** $(-1; 3)$. **D** $(5; 6)$.



Lời giải.
Đặt $g(x) = f(x-3)$.
Ta có $g'(x) = (x-3)' \cdot f'(x-3) = f'(x-3)$.
Hàm số $g(x)$ đồng biến khi $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x-3) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3 < -1 \\ 1 < x-3 < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 2 \\ 4 < x < 6. \end{array}\right.$

Chọn đáp án D □

Câu 47. Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Khi đó số nghiệm của phương trình $2|f(x-3)| - 5 = 0$ là

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

A 3. **B** 2. **C** 4. **D** 1.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = 2f(x-3)$ là

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = 2f(x-3)$ ta có đồ thị hàm số $y = 2f(x-3)$ cắt trục Ox tại điểm duy nhất có hoành độ là x_0 $(x_0 > 4)$.

Suy ra có bảng biến thiên của hàm số $y = 2|f(x-3)|$ là

x	$-\infty$		3		4		x_0		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = 2|f(x-3)|$ ta có

Phương trình $2|f(x-3)| - 5 = 0 \Leftrightarrow 2|f(x-3)| = 5$ có hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Tìm số tiệm cận (bao gồm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{4x^2+5}}{\sqrt{2x+1}-x-1}$.

A 3. B 1. C 2. D 4.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = \left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{0\}$.

Ta có

- $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+5}}{\sqrt{2x+1}-x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4+\dfrac{5}{x^2}}}{\sqrt{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-1-\dfrac{1}{x}} = -2.$

  Suy ra $y = -2$ là tiệm cận ngang của hàm số.
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}(\sqrt{4x^2+5}) = \sqrt{5} > 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(\sqrt{2x+1}-x-1) = 0 \\ \sqrt{2x+1}-x-1 < 0 \text{ khi } x \to 0^+ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} y = -\infty.$

  Suy ra $x = 0$ là tiệm cận đứng của hàm số.
- $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^+} y = -2\sqrt{6}.$

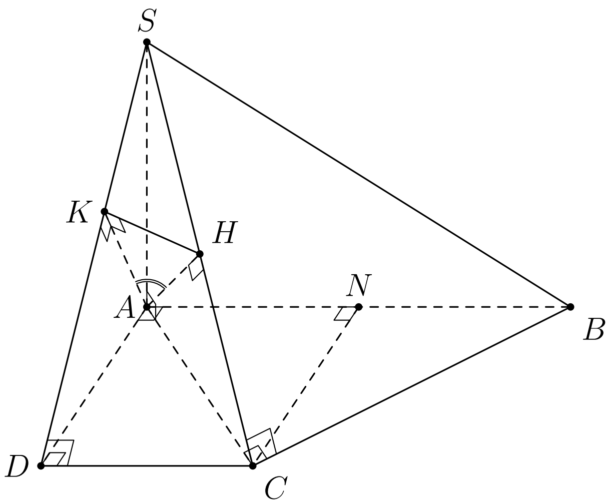
  Suy ra $x = -\dfrac{1}{2}$ không là tiệm cận đứng của hàm số.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2a$, $AD = CD = a$, $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với $(ABCD)$. Tính côsin của góc giữa (SBC) và (SCD).

A $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **B** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Gọi H, N lần lượt là trung điểm của SC, AB.

Ta có $CN = \dfrac{1}{2}AB$ suy ra tam giác ABC vuông cân tại C.

Suy ra $\begin{cases} SA \perp BC \\ AC \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC)$.

Do $\triangle SAC$ vuông cân tại A nên $AH = a$.

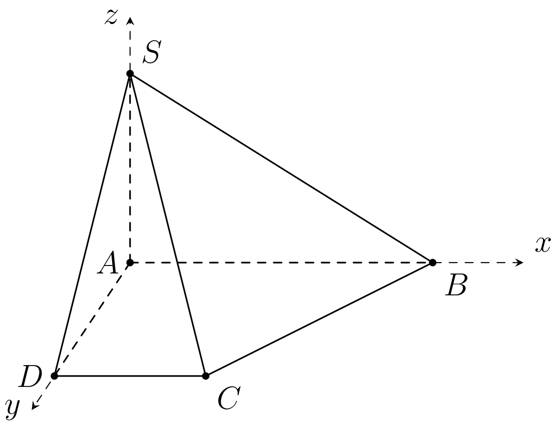
Kẻ $AK \perp SD$. Khi đó $\begin{cases} AH \perp (SBC) \\ AK \perp (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow ((SBC),(SCD)) = (AH, AK) = \widehat{KAH} = \varphi$.

Xét tam giác vuông SAD có $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}\cdot$

Xét tam giác vuông AKH có $\cos\varphi = \dfrac{AK}{AH} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}\cdot$

Cách khác. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ.



Ta có $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $S\left(0;0;\sqrt{2}\right)$.

Ta có véc-tơ pháp tuyến của (SCD) là $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}\right] = \left(0;\sqrt{2};1\right)$ và véc-tơ pháp tuyến của (SBC) là $\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}\right] = \left(\sqrt{2};\sqrt{2};2\right)$.

Vậy $\cos\left((SBC),(SCD)\right) = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{mx^3}{3} + 7mx^2 + 14x - m + 2$ nghịch biến trên $[1;+\infty)$?

A $\left(-\infty; -\dfrac{14}{15}\right)$. **B** $\left(-\infty; -\dfrac{14}{15}\right]$. **C** $\left[-2; -\dfrac{14}{15}\right]$. **D** $\left[-\dfrac{14}{15}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = mx^2 + 14mx + 14 = m(x^2 + 14x) + 14$.

Hàm số $y = \dfrac{mx^3}{3} + 7mx^2 + 14x - m + 2$ nghịch biến trên $[1;+\infty)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow\ y' \le 0, \forall x \in [1;+\infty) \\ &\Leftrightarrow\ m(x^2+14x) + 14 \le 0, \forall x \in [1;+\infty) \\ &\Leftrightarrow\ m \le -\frac{14}{x^2+14x}\ \left(\text{vì } x^2 + 14x > 0, \forall x \in [1;+\infty)\right) \qquad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $g(x) = -\dfrac{14}{x^2+14x}$ trên nửa khoảng $[1;+\infty)$. Ta có

$$g'(x) = \frac{14(2x+14)}{(x^2+14x)^2} > 0, \forall x \in [1; +\infty).$$

Bảng biến thiên

x	1	$+\infty$
y'	$+$	
y	$-\frac{14}{15}$ $\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có $(*) \Leftrightarrow m \le -\dfrac{14}{15}$.

Chọn đáp án B □

HẾT

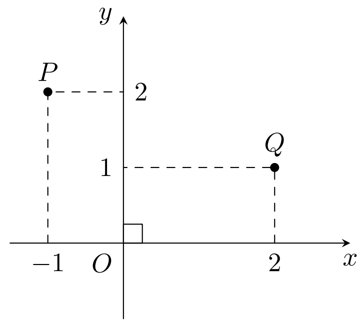
ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. C	3. C	4. A	5. A	6. A	7. B	8. B	9. B	10. C
11. D	12. C	13. C	14. B	15. C	16. D	17. A	18. A	19. B	20. A
21. A	22. A	23. D	24. D	25. A	26. B	27. A	28. B	29. A	30. B
31. D	32. C	33. A	34. D	35. C	36. C	37. D	38. D	39. B	40. C
41. A	42. C	43. B	44. C	45. A	46. D	47. B	48. C	49. B	50. B

8 ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH, NGHỆ AN, LẦN 2 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.
Trong hình vẽ bên, điểm P biểu diễn số phức z_1, điểm Q biểu diễn số phức z_2. Tìm số phức $z = z_1 + z_2$.



A $1 + 3i$. **B** $-3 + i$. **C** $-1 + 2i$. **D** $2 + i$.

Lời giải.
Theo hình vẽ ta có $z_1 = -1 + 2i, z_2 = 2 + i$ nên $z = z_1 + z_2 = 1 + 3i$.
Chọn đáp án A □

Câu 2. Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số bất kỳ liên tục trên $\mathbb{R}$ và a, b, c là các số thực. Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

B $\int\limits_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

D $\int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.
Theo tính chất tích phân ta có:

- $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
- $\int\limits_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, với $c \in \mathbb{R}$.
- $\int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $(-\infty; 2]$ và bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây **sai** về hàm số đã cho ?

x	$-\infty$	-1	0	1	2
$f(x)$	$-\infty$ ↗	2 ↘	-1 ↗	2 ↘	1

(A) Giá trị cực đại bằng 2. **B** Hàm số có 2 điểm cực tiểu.
(C) Giá trị cực tiểu bằng -1. (D) Hàm số có 2 điểm cực đại.

Lời giải.

Dựa vào tập xác định và bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta thấy hàm số có 1 điểm cực tiểu là $x = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Cho cấp số cộng (u_n), có $u_1 = -2, u_4 = 4$. Số hạng u_6 là

A 8. (B) 6. (C) 10. (D) 12.

Lời giải.

Áp dụng công thức của cấp số cộng $u_n = u_1 + (n-1)d$, ta có

$$u_4 = u_1 + 3d \Leftrightarrow 4 = -2 + 3d \Leftrightarrow d = 2.$$

Vậy $u_6 = u_1 + 5d = -2 + 5(2) = 8$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x+2z+3 = 0$. Một vec-tơ chỉ phương của Δ là

(A) $\vec{b} = (2;-1;0)$. (B) $\vec{v} = (1;2;3)$. **C** $\vec{a} = (1;0;2)$. (D) $\vec{u} = (2;0;-1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có một vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;0;2)$.

Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) nên có vec-tơ chỉ phương là $\vec{a} = \vec{n} = (1;0;2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 1. Thể tích khối tứ diện $AB'C'D'$ bằng

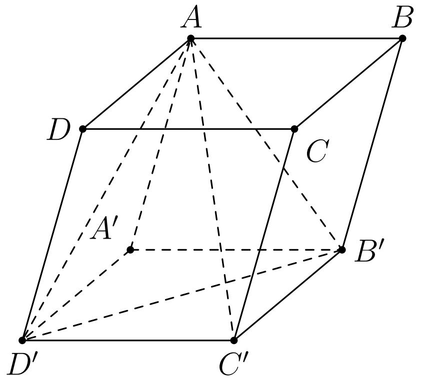
(A) $\frac{1}{3}$. **B** $\frac{1}{6}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{12}$.

Lời giải.

Gọi h là chiều cao của hình hộp, ta có

$$V_{A.B'C'D'} = \frac{1}{3}S_{\Delta B'C'D'} \cdot h = \frac{1}{6}S_{A'B'C'D'} \cdot h = \frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'}.$$

Từ đó suy ra $V_{A.B'C'D'} = \frac{1}{6}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 5x$.

Ⓐ $\dfrac{1}{5}\cos 5x + C$. Ⓑ $\cos 5x + C$. Ⓒ $-\cos 5x + C$. **D** $-\dfrac{1}{5}\cos 5x + C$.

Lời giải.

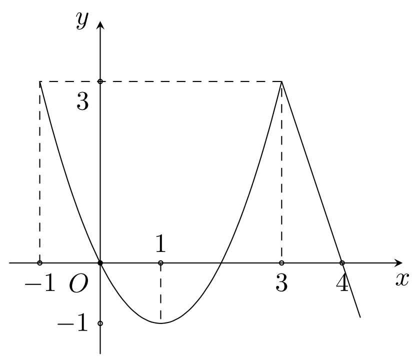
Ta có $\displaystyle\int \sin 5x\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \sin 5x\mathrm{d}(5x) = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 8.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đồng biến trong khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(2;4)$. Ⓑ $(0;3)$. **C** $(2;3)$. Ⓓ $(-1;4)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số đồng biến trong $(1;3)$.

Từ đó suy ra trong khoảng $(2;3)$ hàm số $y = f(x)$ đồng biến.

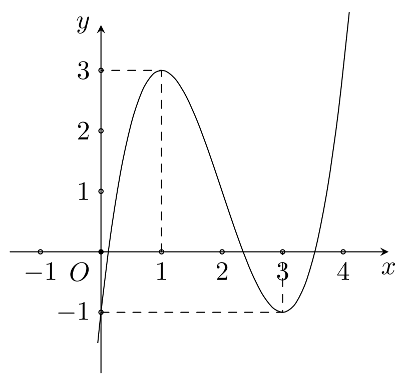
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 9.

Đường cong ở hình bên là đồ thị hàm số nào dưới đây?

Ⓐ $y = x^3 - 5x^2 + 8x - 1$. Ⓑ $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

Ⓒ $y = -x^3 + 6x^2 + 9x + 1$. **D** $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số cho trong hình vẽ đi qua điểm $(0;-1)$ nên không thể là đồ thị của các hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1, y = -x^3 + 6x^2 + 9x + 1$.

Đồ thị hàm số cho trong hình vẽ đạt cực trị tại $x = 1$ và $x = 3$, trong hai hàm số còn lại ta thấy chỉ có hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ thỏa mãn điều kiện đó.

Vậy đồ thị cho trong hình vẽ là của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 10. Giả sử a, b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $a^2b^3 = 4^4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $2\log_2 a - 3\log_2 b = 8$. **B** $2\log_2 a + 3\log_2 b = 8$.

Ⓒ $2\log_2 a + 3\log_2 b = 4$. Ⓓ $2\log_2 a - 3\log_2 b = 4$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\log_2(a^2b^3) = \log_2 4^4 \Leftrightarrow \log_2 a^2 + \log_2 b^3 = 4\log_2 4 \Leftrightarrow 2\log_2 a + 3\log_2 b = 8$.
Chọn đáp án B □

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau song song với trục Oz?

A. $\alpha\colon z = 0$.
B. $(P)\colon x + y = 0$.
C. $(Q)\colon x + 11y + 1 = 0$.
D. $(\beta)\colon z = 1$.

Lời giải.
Ta có: trục Oz có vectơ chỉ phương là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.
Gọi $\vec{n}_{(\alpha)} = (0; 0; 1)$, $\vec{n}_{(P)} = (1; 1; 0)$, $\vec{n}_{(Q)} = (1; 11; 1)$, $\vec{n}_{(\beta)} = (0; 0; 1)$ là các vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng $(\alpha), (P), (Q), (\beta)$.
Nhận thấy $\vec{n}_{(\alpha)} \cdot \vec{k} = 1 \neq 0$ và $\vec{n}_{(\beta)}.\vec{k} = 1 \neq 0$ nên loại A và D.
Nhận thấy $\vec{n}_{(P)}.\vec{k} = 0$ và $O \in Oz \cap (P) \Rightarrow Oz \subset (P)$ nên ta loại B.
Chọn đáp án C □

Câu 12. Nghiệm của phương trình $2^{x-3} = \dfrac{1}{2}$ là

A. 0.
B. 2.
C. -1.
D. 1.

Lời giải.
Ta có: $2^{x-3} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2^{x-3} = 2^{-1} \Leftrightarrow x - 3 = -1 \Leftrightarrow x = 2$.
Chọn đáp án B □

Câu 13. Mệnh đề nào sau đây là **sai** ?

A. Số tập con có 4 phần tử của tập hợp có 6 phần tử là C_6^4.
B. Số cách sắp xếp 4 quyển sách vào 4 trong 6 vị trí trên giá là A_6^4.
C. Số cách chọn và sắp xếp thứ tự 4 học sinh từ nhóm 6 học sinh là C_6^4.
D. Số cách xếp 4 quyển sách trong 6 quyển sách vào 4 vị trí trên giá là A_6^4.

Lời giải.
A đúng. Lấy ngẫu nhiên 4 phần tử từ tập 6 phần tử ta được một tập con của 6 phần tử. Vậy số tập con có 4 phần tử của tập 6 phần tử là C_6^4.
B đúng. Mỗi cách sắp xếp 4 quyển sách trong 6 quyển sách là một chỉnh hợp chập 4 của 6 quyển sách. Vậy số cách sắp xếp 4 quyển sách vào 4 vị trí trong 6 vị trí trên giá là A_6^4.
C sai. Mỗi cách lựa chọn và xếp thứ tự 4 học sinh từ nhóm 6 học sinh là một chỉnh chập 4 của 6 học sinh. Vậy số cách lựa chọn và xếp thứ tự 4 học sinh từ nhóm 6 học sinh là A_6^4.
D đúng. Mỗi cách sắp xếp 4 quyển sách trong 6 quyển sách vào 4 vị trí là một chỉnh hợp chập 4 của 6 quyển sách. Vậy số cách sắp xếp 4 quyển sách trong 6 vào 4 vị trí trên giá là A_6^4.
Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ thỏa mãn $F(2) = 4$. Giá trị $F(-1)$ bằng

A. $\sqrt{3}$.
B. 1.
C. $2\sqrt{3}$.
D. 2.

Lời giải.

$F(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x+2} + C.$

Theo đề bài $F(2) = 4$ nên $2\sqrt{2+2} + C = 4 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow F(-1) = 2\sqrt{-1+2} = 2$.

Vậy $F(-1) = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Biết tập hợp nghiệm của bất phương trình $2^x < 3 - \dfrac{2}{2^x}$ là khoảng $(a;b)$. Giá trị $a+b$ là

A 3. **B** 2. **C** 0. **D** 1.

Lời giải.

Ta có: $2^x < 3 - \dfrac{2}{2^x} \Leftrightarrow (2^x)^2 < 3\cdot 2^x - 2 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 3\cdot 2^x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < 2^x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

Vậy tập hợp nghiệm của bất phương trình là khoảng $(0;1)$. Suy ra $a+b=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2-2x}+x}{x-1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A 3. **B** 0. **C** 2. **D** 1.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$

Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Ta có: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}+x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}{1-\frac{1}{x}} = 2$ và

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}+x}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\frac{2}{x}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(-\sqrt{1-\frac{2}{x}}-1\right)} = 0.$$

Nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y=2$ và $y=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AC=1$, $BC=1$, $AA'=1$. Tính góc giữa AB' và $(BCC'B')$.

A 45°. **B** 90°. **C** 30°. **D** 60°.

Lời giải.

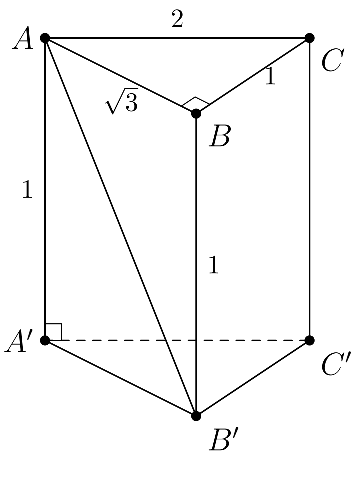
Ta có: $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCC'B')$.

$\Rightarrow BB'$ là hình chiếu của AB' lên mặt phẳng $(BCC'B')$.

Do đó: $(AB', (BCC'B')) = (AB', BB') = \widehat{AB'B}$.

Xét $\Delta ABB'$ vuông tại B ta có: $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{3}$, $BB' = 1$.

Suy ra $\tan \widehat{AB'B} = \dfrac{AB}{BB'} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{AB'B} = 60°$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)(x-2)^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

(A) $f(-1)$. **B** $f(0)$. (C) $f(3)$. (D) $f(2)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = x(x+1)(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$ với $x = 2$ là nghiệm kép.

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗		↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 2]$ tại $x = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x - y + 2z = 0$. Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) bằng

A 30°. (B) 60°. (C) 150°. (D) 120°.

Lời giải.

Δ có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u} = (1; 2; -1)$.

(α) có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n} = (1; -1; 2)$.

$\sin\widehat{(\Delta, (\alpha))} = \dfrac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{n}|} = \dfrac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $\widehat{(\Delta, (\alpha))} = 30^\circ$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Tính thể tích V của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 4$, biết rằng khi cắt bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 < x < 4)$ thì được thiết diện là nửa hình tròn có bán kính $R = x\sqrt{4 - x}$.

(A) $V = \dfrac{64}{3}$. (B) $V = \dfrac{32}{3}$. (C) $V = \dfrac{64\pi}{3}$. **D** $V = \dfrac{32\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có diện tích thiết diện là $S(x) = \dfrac{1}{2}\pi R^2 = \dfrac{1}{2}\pi x^2(4 - x) = \dfrac{1}{2}\pi\left(4x^2 - x^3\right)$.

Thể tích của vật thể cần tìm là: $V = \displaystyle\int\limits_0^4 S(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\pi \int\limits_0^4 \left(4x^2 - x^3\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{4}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^4 = \dfrac{32\pi}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho số thực $a > 2$ và gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + a = 0$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A $z_1 + z_2$ là số thực.

B $z_1 - z_2$ là số ảo.

C $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$ là số ảo.

D $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$ là số thực.

Lời giải.

Xét phương trình $z^2 - 2z + a = 0$. Ta có $\Delta' = 1 - a < 0$ $(\forall a > 2)$.

Nên phương trình có 2 nghiệm phức là: $z_1 = 1 + \sqrt{a-1}i$; $z_2 = 1 - \sqrt{a-1}i$ (không làm mất tính tổng quát).

Ta có

- $z_1 + z_2 = 1 + \sqrt{a} - 1i + 1 - \sqrt{a} - 1i = 2$ là một số thực nên A đúng.
- $z_1 - z_2 = (1 + \sqrt{a-1}i) - (1 - \sqrt{a-1}i) = 2\sqrt{a-1}$ là một số ảo (với $\forall a > 2$) nên B đúng.
- $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{1+\sqrt{a-1}i}{1-\sqrt{a-1}i} + \dfrac{1-\sqrt{a-1}}{1+\sqrt{a-1}i} = \dfrac{4-2a}{a}$ là một số ảo (với $\forall a > 2$) nên C sai.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho các số thực a, b thỏa mãn $1 < a < b$ và $\log_a b + \log_b a^2 = 3$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log_{ab} \dfrac{a^2+b}{2}$.

A $\dfrac{1}{6}$. **B** $\dfrac{3}{2}$. **C** 6. **D** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\log_a b + \log_b a^2 = 3 \Leftrightarrow \log_a b + 2\log_b a = 3$. (1)

Đặt $t = \log_a b$. Do $1 < a < b \Leftrightarrow t > \log_a b \Rightarrow t > 1$.

Khi đó (1) trở thành: $t + \dfrac{2}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \text{ (không thỏa)} \\ t = 2 \text{ (thỏa)} \end{array}\right.$.

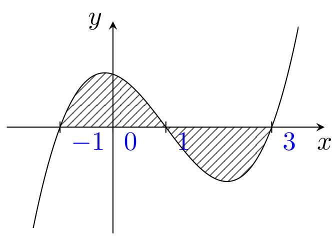
Với $t = 2$ ta có $\log_a b = 2 \Leftrightarrow b = a^2$.

Suy ra $T = \log_{ab} \dfrac{a^2+b}{2} = \log_{a^3} a^2 = \dfrac{2}{3}\log_a a = \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 23.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - \dfrac{1}{3}x + 1$ và trục hoành như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây **sai**?



A $S = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

B $S = 2\displaystyle\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C $S = 2\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

D $S = \displaystyle\int_{-1}^{3} |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành:

$$\frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{1}{3}x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Từ hình vẽ ta thấy $f(x) > 0, \forall x \in (-1;1)$ và $f(x) > 0, \forall x \in (1;3)$.

Do đó $S = \int\limits_{-1}^{3} |f(x)|\, \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\, \mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{3} f(x)\, \mathrm{d}x = 2\int\limits_{-1}^{1} f(x)\, \mathrm{d}x$.

Suy ra các phương án A, C, D đúng.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(1;2;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có bán kính bằng

A $\sqrt{10}$. **B** 2. **C** $\sqrt{5}$. **D** $\sqrt{13}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm $I(1;2;-3)$ trên trục $Oy \Rightarrow H(0;2;0) \Rightarrow IH = \sqrt{10}$.

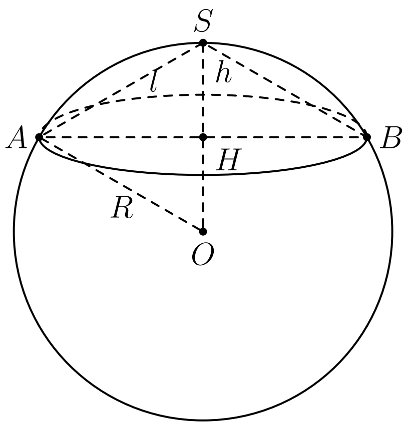
Gọi R là bán kính mặt cầu có tâm $I(1;2;-3)$ và tiếp xúc với trục $Oy \Rightarrow R = IH = \sqrt{10}$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Cho hình nón đỉnh S có đường sinh bằng 2, đường cao bằng 1. Tìm đường kính của mặt cầu chứa điểm S và chứa đường tròn đáy hình nón đã cho.

A 4. **B** 2. **C** 1. **D** $2\sqrt{3}$.

Lời giải.



Cách 1: Gọi O, R lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu.

Đường tròn đá của hình nón có tâm H bán kính r.

Do H là hình chiếu của S và O trên mặt đáy của hình nón nên S, H, O thẳng hàng.

Hình nón có độ dài đường sinh $l = 2$, đường cao $h = 1$. Suy ra $r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{3}$.

Góc ở đỉnh của hình nón là $\widehat{ASB} = 2\widehat{ASH} = 120^\circ$ nên suy ra $H \in SO$ (như hình vẽ).

Trong tam giác OAH vuông tại H ta có:

$OA^2 = OH^2 + HA^2 \Leftrightarrow R^2 = (R-h)^2 + r^2 \Leftrightarrow R = \dfrac{h^2 + r^2}{2h} = 2$.

Vậy đường kính mặt cầu chứa điểm S và đường tròn đáy hình nón bằng 4.

Cách 2:

Gọi lần O, R lượt là tâm và bán kính của mặt cầu.

Đường tròn đáy của hình nón có tâm H bán kính r.

Do H là hình chiếu của S và O trên mặt đáy của hình nón nên S, H, O thẳng hàng.

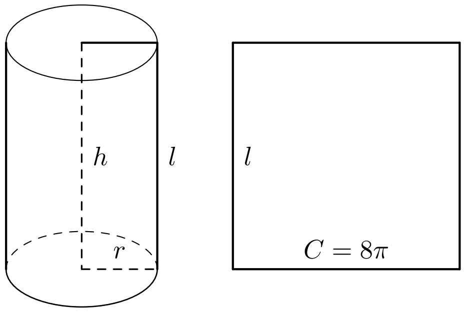
Hình nón có độ dài đường sinh $l = 2$, đường cao $h = 1$. Suy ra $r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{3}$.

Góc ở đỉnh của hình nón là $\widehat{ASB} = 2\widehat{ASH} = 120^\circ$ nên suy ra $H \in SO$ (như hình vẽ).
Trong tam giác SAH vuông tại H ta có $\cos\widehat{ASH} = \dfrac{SH}{SA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ASH} = 60^\circ$.
Xét tam giác SOA có $OS = OA = R$ và $\widehat{OSA} = 60^\circ$.
Suy ra tam giác SOA đều. Do đó $R = OA = SA = 2$.
Vậy đường kính mặt cầu chứa điểm S và đường tròn đáy hình nón bằng 4.
Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Cắt mặt xung quanh của một hình trụ dọc theo một đường sinh rồi trải ra trên mặt phẳng ta được hình vuông có chu vi bằng 8π. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. $2\pi^2$. B. $2\pi^3$. C. 4π. D. $4\pi^2$.

Lời giải.
Chu vi hình vuông bằng 8π nên cạnh hình vuông bằng 2π.
Do đó hình trụ có bán kính $R = 1$, đường sinh $l = 2R$.
Vậy thể tích hình trụ là $V = \pi R^2 h = 2\pi^2$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = \sqrt{3}$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Môđun $|z_1 + z_2|$ bằng

A. 2. B. 3. C. $\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

a) **Cách 1:** Gọi các số phức $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$, $(a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R})$.
Ta có $|z_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{3} \Rightarrow a_1^2 + b_1^2 = 3$, $|z_2| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{3} \Rightarrow a_2^2 + b_2^2 = 3$.
Do đó

$$\begin{aligned} & |z_1 - z_2| = 2 && \Leftrightarrow \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} = 2 \\ \Leftrightarrow\ & (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 4 && \Leftrightarrow a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 - 2a_1a_2 - 2b_1b_2 = 4 \\ \Leftrightarrow\ & 2a_1a_2 + 2b_1b_2 = 2. \end{aligned}$$

Do đó $|z_1 + z_2| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + 2a_1a_2 + 2b_1b_2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

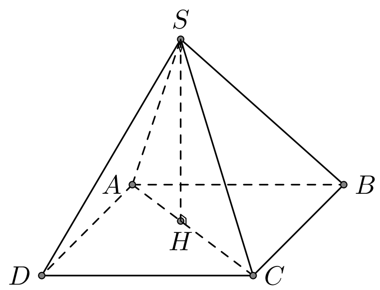
b) **Cách 2:** Ta có $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) = 4$
$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) = 8$
$\Rightarrow |z_1 + z_2| = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$, tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{12}$. B. $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$. C. $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{4}$. D. $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Lời giải.



Vẽ $SH \perp AC$ tại H.

Khi đó ta có $\begin{cases} (SAC) \perp (ABCD) \\ (SAC) \cap (ABCD) = AC \\ SH \subset (SAC) \\ SH \perp AC \end{cases}$

$\Rightarrow SH \perp (ABCD)$

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD}$.

Theo đề ΔSAC vuông tại S nên ta có $SC = \sqrt{AC^2 - SA^2} = \dfrac{\sqrt{6}a}{2}$ và $SH = \dfrac{SA \cdot SC}{AC} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}a}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{6}a}{2}}{\sqrt{2}a} = \dfrac{\sqrt{6}a}{4}$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{12}$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;2;3)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;4;6)$. Phương trình nào sau đây **không** phải là của đường thẳng Δ?

A $\begin{cases} x = -5 - 2t \\ y = -10 - 4t \\ z = -15 - 6t \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = 6 + 3t \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 6t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 6 + 4t \\ z = 12 + 6t \end{cases}$.

Lời giải.

Thay tọa độ điểm $M(1;2;3)$ vào các phương trình, dễ thấy M không thỏa mãn phương trình $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 6 + 4t \\ z = 12 + 6t \end{cases}$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{\log_2 x}{x}$ là

A $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$. **B** $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2 \ln 2}$.

C $f'(x) = \dfrac{1 - \log_2 x}{x^2 \ln 2}$. **D** $f'(x) = \dfrac{1 - \log_2 x}{x^2}$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{(\log_2 x)' \cdot x - (\log_2 x) \cdot (x)'}{x^2} = \dfrac{\dfrac{1}{x \ln 2} x - \log_2 x}{x^2} = \dfrac{\dfrac{1}{\ln 2} - \log_2 x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2 \ln 2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x) = f(x) - x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 3. **B** 2. **C** 0. **D** 1.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x) - 1$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = x_0 > 1 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		x_0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $g(x) = f(x) - x$ có một điểm cực trị .

Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như dưới đây

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = \log_2(f(2x))$ đồng biến trên khoảng

A $(1; 2)$. **B** $(-\infty; -1)$. **C** $(-1; 0)$. **D** $(-1; 1)$.

Lời giải.

Đặt $g(x) = \log_2(f(2x))$, ta có $g'(x) = \dfrac{2f'(x)}{f(2x)\ln 2}$.

Theo giả thiết ta có $f(2x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(2x) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leq 2x \leq 1 \\ 2x \geq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ x \geq 1 \end{array}\right.$$

và có dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm, suy ra hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ và $(1; +\infty)$. Vậy hàm số đồng biến trên $(1; 2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên m sao cho tồn tại hai số phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn đồng thời các phương trình $|z-1|=|z-i|$ và $|z+2m|=m+1$. Tổng tất cả các phần tử của S là

A 1. B 4. C 2. D 3.

Lời giải.

Giả sử $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$. Ta có $|z+2m|=m+1\geq 0$.

TH1: $m+1=0\Leftrightarrow m=-1\Rightarrow z=2$ (loại) vì không thỏa mãn phương trình $|z-1|=|z-i|$

TH2: $m+1>0\Leftrightarrow m>-1$ (1).

Theo bài ra ta có

$\begin{cases}|z-1|=|z-i|\\|z+2m|=m+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|(x-1)+yi|=|x+(y-1)i|\\|(x+2m)+yi|=m+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+y^2=x^2+(y-1)^2\\(x+2m)^2+y^2=(m+1)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=x\\(x+2m)^2=(m+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x\\2x^2+4mx+3m^2-2m-1=0(*)\end{cases}.$

Để tồn tại hai số phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn thỏa mãn yêu cầu đề bài thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow\Delta'=4m^2-2(3m^2-2m-1)=2(-m^2+2m+1)>0\Leftrightarrow 1-\sqrt{2}<m<1+\sqrt{2}$ (2)

Từ (1), (2) và $m\in\mathbb{Z}$ ta nhận được $S=\{0;1;2\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là $0+1+2=3$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB=BC=a$, $AD=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD.

A $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. B $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. C $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. D $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho

$A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;2a;0)$ và $S(0;0;a)$.

Khi đó ta có

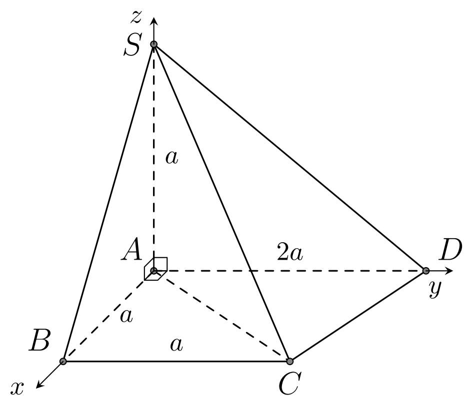
$\overrightarrow{AC}=(a;a;0)$, $\overrightarrow{SD}=(0;2a;-a)$, $\overrightarrow{SA}=(0;0;-a)$,

$[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{SD}]=(-a;a;2a)$ và

$[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{SD}]\cdot\overrightarrow{SA}=-a\cdot 0+a\cdot 0+2a\cdot(-a)=-2a^2$.

Vậy ta có

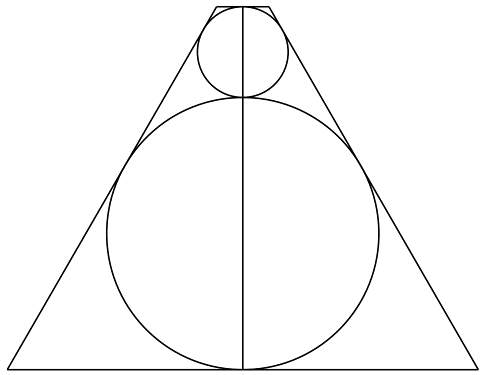
$$\mathrm{d}(AC,SD)=\frac{|[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{SD}]\cdot\overrightarrow{SA}|}{|[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{SD}]|}=\frac{2a^2}{\sqrt{a^2+a^2+4a^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}a.$$



Chọn đáp án C □

Câu 35.

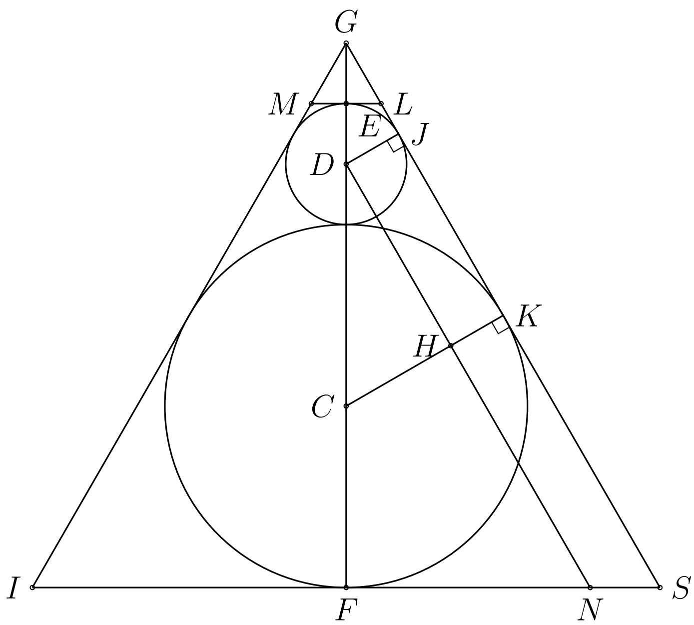
Người ta sản xuất một vật lưu niệm (N) bằng thủy tinh trong suốt có dạng khối tròn xoay mà thiết diện qua trục của nó là một hình thang cân (xem hình vẽ). Bên trong (N) có hai khối cầu ngũ sắc với bán kính lần lượt là $R = 3$ cm, $r = 1$ cm tiếp xúc với nhau và cùng tiếp xúc với mặt xung quanh của (N), đồng thời hai khối cầu lần lượt tiếp xúc với hai mặt đáy của (N). Tính thể V tích vật lưu niệm đó



A $V = \dfrac{485\pi}{6}$ (cm^3). **B** $V = 81\pi$ (cm^3).

C $V = 72\pi$ (cm^3). **D** $V = \dfrac{728\pi}{9}$ (cm^3).

Lời giải.



Gọi tâm của hai đường tròn trong (N) là C và D. Ta có GS là tiếp tuyến chung của hai đường tròn tại K và J. Khi đó $DJ \perp GS$, $CK \perp GS$.

Kẻ $DN \parallel GS$ $(N \in IS)$, khi đó $DHKJ$ là hình chữ nhật nên $HK = DJ = 1$ cm, do đó ta có $CH = 2$ cm.

Ta có tam giác DHC đồng dạng với tam giác GJD nên $\dfrac{DJ}{CH} = \dfrac{GD}{CD} \Rightarrow DG = \dfrac{DJ \cdot CD}{CH} = 2$ cm, từ đó suy ra $GF = 9$ cm.

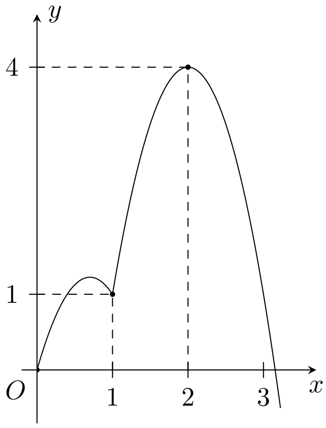
Ta lại có tam giác DHC đồng dạng với tam giác GFS nên $\dfrac{DS}{DC} = \dfrac{GF}{DH} \Rightarrow GS = \dfrac{DC \cdot GF}{DH} = \dfrac{DC \cdot GF}{\sqrt{DC^2 - CH^2}} = 6\sqrt{3}$ cm, từ đó suy ra $FS = \sqrt{GS^2 - GF^2} = 3\sqrt{3}$ cm.

Vì tam giác GEL đồng dạng với tam giác GFS nên $\dfrac{EL}{FS} = \dfrac{GE}{GF} \Rightarrow EL = \dfrac{GE \cdot FS}{GF} = \dfrac{3\sqrt{3}}{9} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ cm.

Vì (N) là khối nón cụt nên $V_{(N)} = \dfrac{1}{3}(EL^2 + FS^2 + EL \cdot FS) \cdot EF = \dfrac{728\pi}{9}$.

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



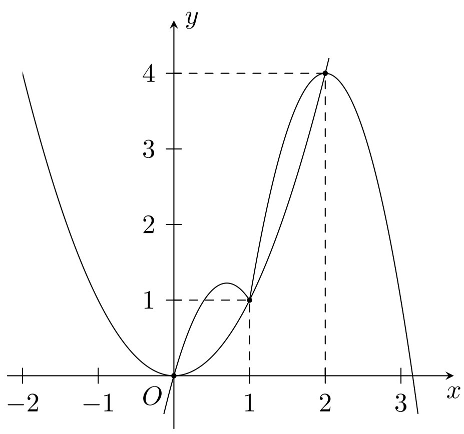
Hàm số $y = |3f(x) - x^3|$ đồng biến trên khoảng

(A) $(2; +\infty)$. (B) $(-\infty; 2)$. (C) $(0; 2)$. (D) $(0; 2)$.

Lời giải.

Đặt $g(x) = 3f(x) - x^3$. Hàm số ban đầu có dạng $y = |g(x)|$.

Ta có $g'(x) = 3f'(x) - 3x^2$. Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

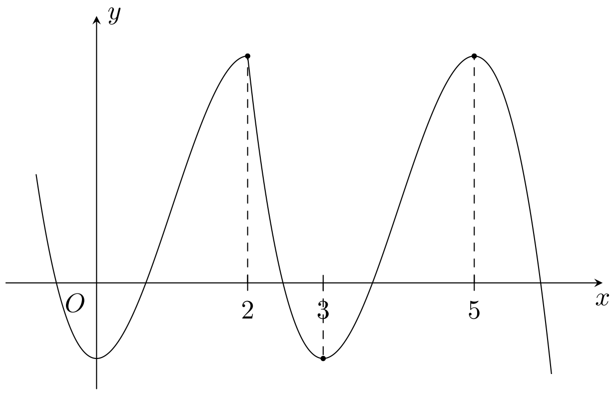


Dễ thấy $g(0) = 0$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		a		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$			
$y = \|g(x)\|$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$y = 0$	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$ / $\searrow$	$+\infty$ / $-\infty$

Dựa vào BBT suy ra hàm số $y = |g(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ và $(a; +\infty)$ với $g(a) = 0$.
Chọn đáp án C □

Câu 37. Cho số thực m và hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(2^x+2^{-x}) = m$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?



A 2. B 3. C 4. D 5.

Lời giải.

Đặt $t = t(x) = 2^x + 2^{-x}$ với $x \in [-1; 2]$.

Hàm $t = t(x)$ liên tục trên $[-1; 2]$ và $t'(x) = 2^x \ln 2 - 2^{-2} \ln 2$, $t'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	-1		0		2
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
$t(x)$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{17}{4}$

Do đó $x \in [-1; 2] \Rightarrow t \in \left[2; \frac{17}{4}\right]$.

Với mỗi $t \in \{2\} \cup \left(\frac{5}{2}; \frac{17}{4}\right]$ có duy nhất 1 giá trị x thỏa mãn.

Xét phương trình $f(t) = m$ với $t \in \left(\frac{5}{2}; \frac{17}{4}\right]$.

Từ đồ thị, phương trình $f(2^x + 2^{-x}) = m$ có số nghiệm nhiều nhất khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có 2 nghiệm t_1, t_2 trong đó có $t_1 \in \left(2; \frac{5}{2}\right]$, $t_2 \in \left(\frac{5}{2}; \frac{17}{4}\right]$.

Khi đó, phương trình có $f(2^x + 2^{-2}) = m$ có nhiều nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(0; 0; 1)$, $B(-3; 2; 0)$, $C(2; -2; 3)$. Đường cao kẻ từ B của tam giác ABC đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A $P(-1; 2; -2)$. B $M(-1; 3; 4)$. C $N(0; 3; -2)$. D $Q(-5; 3; 3)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; 2; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (2; -2; 2)$, $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (2; 4; 2)$.

Một vectơ chỉ phương của đường cao kẻ từ B của tam giác ABC là $\vec{u} = \frac{1}{12}\left[\vec{n}, \overrightarrow{AC}\right] = (1; 0; -1)$.

Phương trình đường cao kẻ từ B là: $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 \\ z = -t \end{cases}$.

Ta thấy điểm $P(-1; 2; -2)$ thuộc đường thẳng trên.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Trong Lễ tổng kết Tháng thanh niên, có 10 đoàn viên xuất sắc gồm 5 nam và 5 nữ được tuyên dương khen thưởng. Các đoàn viên này được sắp xếp ngẫu nhiên thành một hàng ngang trên sân khấu để nhận giấy khen. Tính xác suất để trong hàng ngang trên không có bất kì bạn nữ nào đứng cạnh nhau.

A $\frac{1}{7}$. **B** $\frac{1}{42}$. **C** $\frac{1}{252}$. **D** $\frac{25}{252}$.

Lời giải.

Cách 1

$n(\Omega) = 10!$.

Bước 1: Xếp 5 bạn nữ có $5!$ cách.

Bước 2: Xếp 5 bạn nam vào xen giữa 4 khoảng trống của 5 bạn nữ và 2 vị trí đầu hàng. Có hai trường hợp sau:

+TH1: Xếp 4 bạn nam vào 4 khoảng trống giữa 5 bạn nữ, bạn nam còn lại có hai lựa chọn: xếp vào 2 vị trí đầu hàng. Trường hợp này có $\mathrm{A}_5^4 \cdot 2$ cách.

+TH2:

-Chọn một khoảng trống trong 4 khoảng trống giữa hai bạn nữ để xếp hai bạn nam có C_4^1 cách.

-Chọn 2 bạn nam trong 5 bạn nam để xếp vào vị trí đó có A_5^2 cách.

-Ba khoảng trống còn lại xếp ba bạn nam còn lại có $3!$ cách.

Trường hợp này có $\mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{A}_5^2 \cdot 3!$ cách.

Vậy có tất cả $5!(\mathrm{A}_5^4 \cdot 2 + \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{A}_5^2 \cdot 3!)$ cách.

Vậy xác suất là: $P = \dfrac{\mathrm{A}_5^4 \cdot 2 + \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{A}_5^2 \cdot 3!}{10!} = \dfrac{1}{42}$.

Cách 2

$n(\Omega) = 10!$.

-Xếp 5 bạn nam có $5!$ cách.

-Xếp 5 bạn nữ xen vào giữa 4 khoảng trống và 2 vị trí đầu hàng có A_6^5 cách.

Vậy có $5! \cdot \mathrm{A}_5^2$ cách.

Vậy $P = \dfrac{5! \cdot \mathrm{A}_5^2}{10!} = \dfrac{1}{42}$.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Giả sử m là số thực thỏa mãn giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 31^x + 3^x + mx$ trên $\mathbb{R}$ là 2

A $m \in (-10; -5)$. **B** $m \in (-5; 0)$. **C** $m \in (0; 5)$. **D** $m \in (5; 10)$.

Lời giải.

Ta có: $f(x) = 31^x + 3^x + mx \Rightarrow f'(x) = 31^x \ln 31 + 3^x \ln 3 + m$. Xét hai trường hợp sau:

TH1: $m \geq 0$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến nên không tồn tại giá trị giá trị nhỏ nhất.

TH2: $m < 0 \Rightarrow f''(x) = 31^x \ln^2 3 > 0 \Rightarrow f'(x)$ có nhiều nhất một nghiệm x_0. Chọn trường hợp $f'(x) = 0$ có nghiệm, khi đó:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	

Khi đó $\begin{cases} f(x_0) = 2 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 31_0^x + 3_0^x + mx_0 = 2 \\ 31^{x_0} \ln 31 + 3^{x_0} \ln 3 + m = 0 \end{cases}$. $(*)$

Với $x_0 = 0 \Rightarrow m = -\ln 31 - \ln 3 \in (-5; 0)$

Với $x_0 \neq 0$, $(*) \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{-31^{x_0} - 3^{x_0}}{x_0} \\ m = -31^{x_0} \ln 31 - 3^{x_0} \ln 3 \end{cases}$. $(**)$

Từ $(**)$ bấm máy tính ta thấy $m \in (-5; 0)$ là thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 41.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - \sin^2 x$ trên đoạn $[-1; 1]$ là

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow\ \searrow$	0	$\searrow\ \nearrow$	0	$\nearrow$

(A) $f(-1)$. (B) $f(0)$.

(C) $f(2)$. (D) $f(1)$.

Lời giải.

Ta có $g(x) = f(2x) + \dfrac{1}{2}\cos 2x - \dfrac{1}{2}$.

Đặt $t = 2x$. Với $x \in [-1; 1]$ thì $t \in [-2; 2]$.

Khi đó ta có $h(t) = f(t) + \dfrac{1}{2}\cos t - \dfrac{1}{2} \Rightarrow h'(t) = f'(t) - \dfrac{1}{2}\sin t$.

Từ bảng biến thiên ta thấy

- Với $t \in (-2; 0)$ thì $f'(t) > 0$ và $\sin t < 0 \Rightarrow h'(t) > 0$.
- Với $t \in (0; 2)$ thì $f'(t) < 0$ và $\sin t > 0 \Rightarrow h'(t) < 0$.
- Với $t = 0$ thì $f'(t) = 0$.

Từ đó ta có bảng biến thiên sau

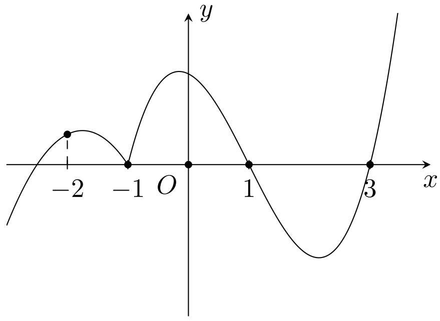
t	-2		0		2
h'		$+$	0	$-$	
h		$\nearrow$		$\searrow$	

Vậy $\max\limits_{[-1;1]} g(x) = \max\limits_{[-2;2]} h(t) = h(0) = f(0)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên m để bất phương trình $\left(mx + m^2\sqrt{5-x^2} + 2m + 1\right) f(x) \geqslant 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; 2]$?



A 1. **B** 3. **C** 0. **D** 2.

Lời giải.

Đặt $g(x) = mx + m^2\sqrt{5-x^2} + 2m + 1$.

Từ đồ thị của $y = f(x)$ ta thấy $f(x)$ đổi dấu khi qua $x = 1$ nên suy ra $g(x)$ cũng phải đổi dấu khi qua $x = 1$. Mặt khác $g(x)$ liên tục nên $g(x) = 0$ có nghiệm $x = 1$.

Kiểm tra: Với $m = -1$

Ta có $g(x) \cdot f(x) = \left(-x + \sqrt{5-x^2} - 1\right) f(x) = (1-x)\left(\dfrac{1+x}{2+\sqrt{5-x^2}} + 1\right) f(x)$.

Nhận xét: $\dfrac{1+x}{2+\sqrt{5-x^2}} + 1 = \dfrac{3 + x + \sqrt{5-x^2}}{2+\sqrt{5-x^2}} > 0,\ \forall x[-2; 2]$.

Khi đó quan sát đồ thị $f(x)$, ta thấy

- Với $x \in [1; 2]$ thì $f(x) \leqslant 0$ nên $(1-x)f(x) \geqslant 0$.
- Với $x \in [-2; 1]$ thì $f(x) \geqslant 0$ nên $(1-x)f(x) \geqslant 0$.

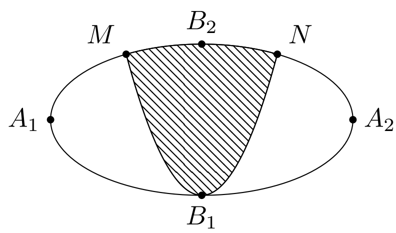
Do đó trong cả hai trường hợp ta luôn có $g(x) \cdot f(x) \geqslant 0,\ \forall x \in [-2; 2]$.

Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án A □

Câu 43.

Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Người ta chia elip bởi Parabol có đỉnh B_1, trục đối xứng B_1B_2 và đi qua các điểm M, N. Sau đó sơn phần tô đậm với giá 200.000 đồng/m^2 và trang trí đèn led phần còn lại với giá 500.000 đồng/m^2. Hỏi kinh phí sử dụng gần nhất với giá trị nào dưới đây? Biết rằng $A_1A_2 = 4$m, $B_1B_2 = 2$m, $MN = 2$m.



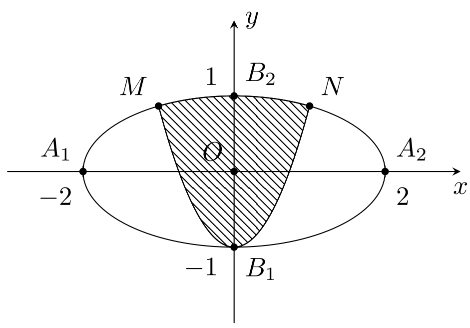
A 2.431.000 đồng. **B** 2.057.000 đồng. **C** 2.760.000 đồng. **D** 1.664.000 đồng.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là trung điểm của A_1A_2.

Tọa độ các đỉnh $A_1(-2; 0)$, $A_2(2; 0)$, $B_1(0; -1)$, $B_2(0; 1)$.

Phương trình đường Elip (E): $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4}}$.



Ta có $M\left(-1; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $N\left(1; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \in (E)$.

Parabol (P) có đỉnh $B_1(0; -1)$ và trục đối xứng là Ox nên (P) có phương trình $y = ax^2 - 1$, $(a > 0)$, đi qua M, N.

$\Rightarrow a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 \Rightarrow (P)$ có phương trình $y = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) x^2 - 1$.

Diện tích phần tô đậm

$$S_1 = 2\int\limits_0^1 \left[\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) x^2 + 1\right] \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) + 2.$$

Đặt $x = 2\sin t$, $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\cos t\,\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{6}$.

$\Rightarrow S_1 = \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4 - 4\sin^2 t} \cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t - \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) + 2 = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3}$

$= 2\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3} = (2t + \sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{4}{3}$.

Diện tích hình Elip là $S = \pi ab = 2\pi$.

$\Rightarrow$ Diện tích phần còn lại $S_2 = S - S_1 = \dfrac{5\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{6} - \dfrac{4}{3}$.

Kinh phí sử dụng là $200000 S_1 + 500000 S_2 \approx 2341000$ (đồng).

Chọn đáp án A □

Câu 44. Sau khi tốt nghiệp đại học, anh Nam thực hiện một dự án khởi nghiệp. Anh vay vốn từ ngân hàng 200 triệu đồng với lãi suất $0,6\%$ một tháng. Phương án trả nợ của anh Nam là: Sau đúng một tháng kể từ thời điểm vay anh bắt đầu trả nợ, hai lần trả nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền trả của mỗi lần là như nhau và hoàn thành sau đúng 5 năm kể từ khi vay. Tuy nhiên, sau khi dự án có hiệu quả và đã trả nợ được 12 tháng theo phương án cũ, anh Nam muốn rút ngắn thời gian trả nợ nên từ tháng tiếp theo, mỗi tháng anh trả nợ cho ngân hàng 9 triệu đồng. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng từ thời điểm vay anh Nam trả hết nợ?

A 32 tháng. **B** 31 tháng. **C** 29 tháng. **D** 30 tháng.

Lời giải.

Gọi n là số tháng anh Nam trả nợ, B là số tiền mượn, $B = 200$ triệu, $C = 9$ triệu.

- Dự kiến trả 60 tháng hết nợ.

  Gọi A_0 là số tiến trả mỗi tháng.

  Ta có $A_0 + A_0(1+r) + \cdots + A_0(1+r)^{59} + A_0(1+r)^{60} \Rightarrow A_0 \dfrac{(1+r)^{60} - 1}{1 + r - 1} = B_0(1+r)^{60}$.

  Suy ra $A_0 = 4.035.211$ đồng.

- Thực tế: trả n tháng trong đó có 12 tháng trả A_0 và $n - 12$ tháng trả 9 triệu.

  Suy ra:

  $A_0(1+r)^{n-1} + A_0(1+r)^{n-2} + \cdots + A_0(1+r)^{n-12} + C(1+r)^{n-13} + C(1+r)^{n-14} + \cdots C \geqslant B(1+r)^n$

  Suy ra $A_0(1+r)^{n-12}\left[\dfrac{(1+r)^{12} - 1}{1 + r - 1}\right] + C\left[\dfrac{(1+r)^{n-12} - 1}{r}\right] \geqslant B(1+r)^n$

  $\Rightarrow (1+r)^{n-12}\left[A_0(1+r)^{12} - A_0 + C\right] - B(1+r)^n \geqslant C$

  $\Rightarrow (1+r)^{n-12}\left[A_0(1+r)^{12} - A_0 + C - B(1+r)^{12}\right] \geqslant C$

  $\Rightarrow n \geqslant \log_{1+r}\left[A_0(1+r)^{12} - A_0 + C - B(1+r)^{12}\right] + 12$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Giả sử hàm f có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(1)=1$ và $f(1-x)+x^2f''(x)=2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Từ giả thiết $f(1-x)+x^2f''(x)=2x \Rightarrow f(1)=0$.

Suy ra $\int\limits_0^1 x^2f''(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 2x\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 f(1-x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x^2\\ \mathrm{d}v=f''(x)\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x\\ v=f'(x).\end{cases}$

Khi đó $\int\limits_0^1 x^2f''(x)\,\mathrm{d}x=x^2f'(x)\Big|_0^1-2\int\limits_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x=1-2I$.

Mà $\int\limits_0^1 2x\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 f(1-x)\,\mathrm{d}x=x^2\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1-\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1-xf(x)\Big|_0^1+\int\limits_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x=1+I$.

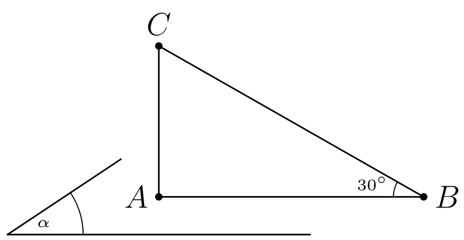
Suy ra $1-2I=1+I\Rightarrow I=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{ABC}=30^\circ$, $BC=3\sqrt{2}$, đường thẳng BC có phương trình $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z+7}{-4}$, đường thẳng AB nằm trong mặt phẳng $(\alpha): x+z-3=0$. Biết rằng đỉnh C có cao độ âm. Tìm hoành độ của đỉnh A.

(A) $\dfrac{3}{2}$. (B) 3. (C) $\dfrac{9}{2}$. (D) $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.



Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z+7}{-4}\\ x+z-3=0\end{cases}\Rightarrow B(2;3;1).$$

Do $C\in BC$ nên $C(4+c;5+c;-7-4c)$. Theo giả thiết $BC=3\sqrt{2}$ nên

$$18(2+c)^2=18\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=-1\Rightarrow C(3;4;-3)\\ c=-3\Rightarrow C(1;2;5)\end{array}\right..$$

Mặt khác đỉnh C có cao độ âm nên $C(3;4;-3)$.

Gọi $A(x;y;3-x)\in(\alpha)$. Do $\widehat{ABC}=30^\circ$ nên

$$\begin{cases} AB=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\\ AC=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2+(y-3)^2+(2-x)^2=\dfrac{27}{2}\\ (x-3)^2+(y-4)^2+(6-x)^2=\dfrac{9}{2}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-8x+y^2-6y+\dfrac{7}{2}=0\\ 2x^2-18x+y^2-8y+\dfrac{113}{2}=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}10x+2y-53=0\\ 2x^2-8x+y^2-6y+\dfrac{7}{2}=0.\end{cases}$$

Từ (1) suy ra $y=\dfrac{53-10x}{2}$. Thay vào (2) ta có

$$\begin{aligned} & 2x^2-8x+\left(\frac{53-10x}{2}\right)^2-6\cdot\frac{53-10x}{2}+\frac{7}{2}=0\\ \Leftrightarrow\ & 108x^2-972x+2187=0 \Leftrightarrow (2x-9)^2=0\\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{9}{2}.\end{aligned}$$

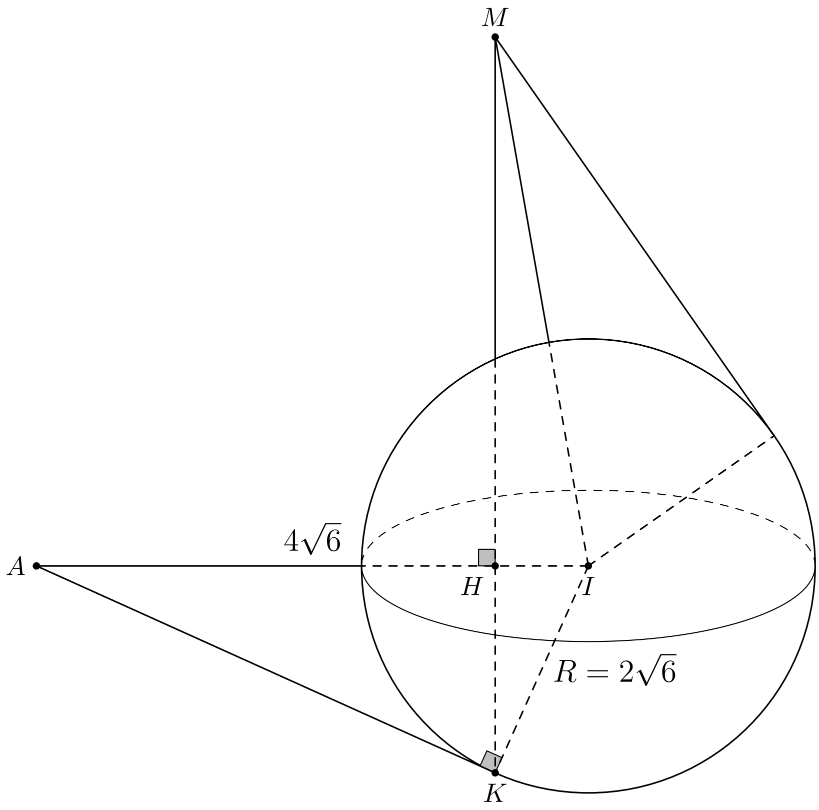
Vậy $A\left(\dfrac{9}{2};4;-\dfrac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=24$ và điểm $A(-2;0;-2)$. Từ A kẻ các tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (ω). từ điểm M di động nằm ngoài (S) và nằm trong mặt phẳng chứa (ω), kẻ các tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (ω'). Biết rằng khi (ω) và (ω') có cùng bán kính thì M luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A $r=6\sqrt{2}$. **B** $r=3\sqrt{10}$. **C** $r=3\sqrt{5}$. **D** $r=3\sqrt{2}$.

Lời giải.



Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn (ω).
Mặt cầu (S) có tâm $(2;4;6)$ và bán kính $R = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. Ta có

$$IA = \sqrt{4^2 + 4^2 + 8^2} = 4\sqrt{6}.$$

Do hai đường tròn (ω) và (ω') có cùng bán kính nên $IM = IA = 4\sqrt{6}$.
Tam giác IAK vuông tại K nên

$$IK^2 = IH \cdot IA \Rightarrow IH = \frac{IK^2}{IA} = \frac{24}{4\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

Do H là tâm đường tròn (ω) nên điểm H cố định.
Tam giác IHM vuông tại H nên

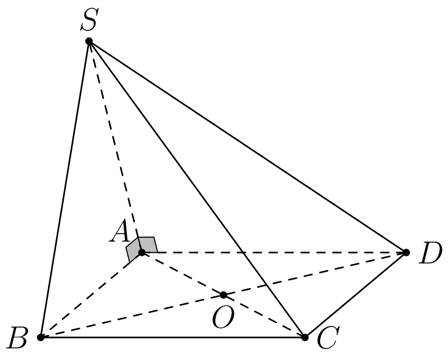
$$MH = \sqrt{IM^2 - IH^2} = \sqrt{(4\sqrt{6})^2 - (\sqrt{6})^2} = 3\sqrt{10}.$$

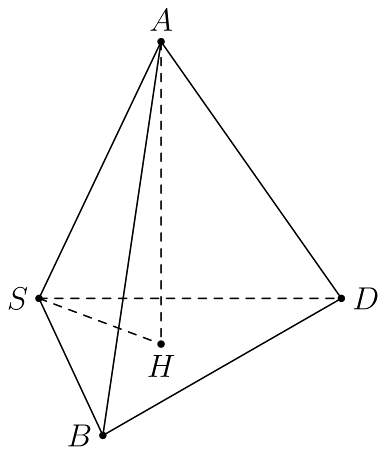
Do H cố định thuộc mặt phẳng (P), M di động trên mặt phẳng (P) và $MH = 3\sqrt{10}$ không đổi.
Suy ra điểm M thuộc đường tròn có tâm là H và có bán kính $r = HM = 3\sqrt{10}$.
Chọn đáp án B □

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $AC = \sqrt{3}a$, SAB là tam giác đều, $\widehat{SAD} = 120°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A $\sqrt{3}a^3$. **B** $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{2}$. **C** $\sqrt{6}a^3$. **D** $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải.





Tam giác SAB đều nên $SA = SB = AB = 2a$.
Xét tam giác SAD có

$$SD^2 = SA^2 + AD^2 - 2SAAD \cdot \cos SAD = 12a^2 \Rightarrow SD = 2\sqrt{3}a.$$

Gọi $AC \cap BD = O \Rightarrow AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{3}a}{2} \Rightarrow BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \dfrac{\sqrt{13}a}{2} \Rightarrow BD = \sqrt{13}a$.
Áp dụng công thức Hê-rông, ta tính được diện tích của tam giác SBD là $S_{\triangle SBD} = \dfrac{\sqrt{183}a^2}{4}$.
Gọi H là hình chiếu của A trên (SBD). Vì $AB = AD = AS = 2a \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBD

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad SH = \frac{SB \cdot SD \cdot BD}{4S_{\Delta SBD}} = \frac{4\sqrt{39}a}{\sqrt{183}}\\
&\Rightarrow \quad AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{624a^2}{183}} = \frac{6\sqrt{3}a}{\sqrt{183}}\\
&\Rightarrow \quad V_{S,ABD} = V_{ASBD} = \frac{1}{3} \cdot AH \cdot S_{\Delta SBD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}a}{\sqrt{183}} \cdot \frac{\sqrt{183}a^2}{4} = \frac{\sqrt{3}a^3}{2}\\
&\Rightarrow \quad V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABD} = \sqrt{3}a^3.
\end{aligned}$$

Cách 2
Ta có

$$\begin{aligned}
\cos BAC &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{4a^2 + 3a^2 - 4a^2}{2 \cdot 2a \cdot \sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{4}\\
\Rightarrow \cos BAD &= 2(\cos BAC)^2 - 1 = -\frac{5}{8}.
\end{aligned}$$

Áp dụng công thức tính nhanh cho khối chóp $A.SBD$ ta có

$$\begin{aligned}
V_{ASBD} &= \frac{AS \cdot AB \cdot AD}{6} \cdot \sqrt{1 + 2\cos SAB \cdot \cos BAD \cdot \cos DAS - \cos^2 SAB - \cos^2 BAD - \cos^2 DAS}\\
&= \frac{2a \cdot 2a.2a}{6} \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} - \frac{25}{64} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}a^3}{2};\\
\Rightarrow \ & V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABD} = 2V_{ASBD} = \sqrt{3}a^3.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A ☐

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị m để phương trình

$$9.3^{2x} - m\left(4\sqrt[4]{x^2+2x+1} + 3m + 3\right) \cdot 3^x + 1 = 0.$$

có đúng ba nghiệm phân biệt.

(A) Vô số. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 9 \cdot 3^{2x} - m\left(4\sqrt[4]{x^2+2x+1} + 3m + 3\right) \cdot 3^x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & 3^{x+1} + \frac{1}{3^{x+1}} - \frac{m}{3}(4\sqrt{|x+1|} + 3m + 3) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Đặt $t = x + 1$, phương trình (1) trở thành

$3^t + \frac{1}{3^t} - \frac{m}{3}(4\sqrt{|t|} + 3m + 3) = 0.$ (2)

Bái toán trở thành tìm số giá trị nguyên của m để phương trình (2) có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

Nhận xét: Nếu t_0 là một nghiệm của phương trình (2) thì $-t_0$ cũng là một nghiệm của phương trình (2). Do đó điều kiện cần để phương trình (2) có đúng ba nghiệm thực phân biệt là phương trình (2) có nghiệm $t = 0$.

Với $t = 0$, thay vào phương trình (2) ta có $-m^2 - m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2. \end{cases}$

Thử lại

- Với $m = -2$ phương trình (2) thành $3^t + \frac{1}{3^t} + \frac{2}{3}(4\sqrt{|t|} - 3) = 0.$

  Ta có $3^t + \frac{1}{3^t} \geq 2, \forall t \in \mathbb{R}$ và $\frac{2}{3}(4\sqrt{|t|} - 3) \geq -2, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra $3^t + \frac{1}{3^t} + \frac{2}{3}(4\sqrt{|t|} - 3) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

  Dấu "=" xảy ra khi $t = 0$, hay phương trình (2) có nghiệm duy nhất $t = 0$ nên loại nghiệm $m = -2$.

- Với $m = 1$ phương trình (2) thành $3^t + \frac{1}{3^t} - \frac{1}{3}(4\sqrt{t}| + 6) = 0$ (3)

  Dễ thấy phương trình (3) có ba nghiệm $t = -1$, $t = 0$, $t = 1$.

  Ta chứng minh phương trình (3) chỉ có ba nghiệm $t = -1$, $t = 0$, $t = 1$.

  Vì t là nghiệm thì $-t$ cũng là nghiệm nên ta chỉ xét phương trình (3) trên $[0; +\infty)$.

  Trên tập $[0; +\infty)$, (3) $\Leftrightarrow 3^t + \frac{1}{3^t} - \frac{1}{3}(4\sqrt{t} + 6) = 0.$

  Xét hàm $f(t) = 3^t + \frac{1}{3^t} - \frac{1}{3}(4\sqrt{t} + 6)$ trên $[0; +\infty)$.

  Ta có $f'(t) = 3^t \ln 3 - 3^{-t} \cdot \ln 3 - \frac{2}{3\sqrt{t}}$, $f''(t) = 3^t \ln^2 3 + 3^{-t} \cdot \ln^2 3 + \frac{1}{3 \cdot (\sqrt{t})^3} > 0, \forall t > 0.$

  Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty) \Rightarrow f'(t) = 0$ có tối đa một nghiệm $t > 0 \Rightarrow f(t) = 0$ có tối đa hai nghiệm $t \in [0; +\infty)$. Suy ra trên $[0; +\infty)$, phương trình (3) có hai nghiệm $t = 0$, $t = 1$.

  Do đó trên tập $\mathbb{R}$, phương trình (3) có đúng ba nghiệm $t = -1$, $t = 0$, $t = 1$. Vậy chọn $m = 1$.

Chú ý: Đối với bài toán trắc nghiệm này, sau khi loại được $m = -2$, ta có thể kết luận đáp án C do đề không có phương án nào là không tồn tại m.

Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Cho số phức z và w thỏa mãn $(2+i)|z| = \dfrac{z}{w} + 1 - i$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |w+1-i|$.

A $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. (D) $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Nhận xét $z = 0$ không thỏa mãn giả thiết của bài toán.

Đặt $|z| = R, R > 0$. Ta có

$$\begin{aligned}
& (2+i)|z| = \frac{z}{w} + 1 - i \Leftrightarrow (2R-1) + (R+1)i = \frac{z}{w} \\
\Rightarrow\ & \frac{R}{|w|} = \sqrt{5R^2 - 2R + 2} \\
\Rightarrow\ & \frac{1}{|w|} = \sqrt{\frac{5R^2 - 2R + 2}{R^2}} = \sqrt{5 - \frac{2}{R} + \frac{2}{R^2}} = \sqrt{2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}, \forall R > 0.
\end{aligned}$$

Suy ra $|w| \leq \dfrac{\sqrt{2}}{3}, \forall R > 0$. ta có

$$T = |w + 1 - i| \leq |w| + |1 - i| \leq \frac{\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} |z| = 2 \\ w = k(1-i), k > 0 \\ (2+i)|z| = \dfrac{z}{w} + 1 - i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ = \dfrac{1}{3}(1-i). \end{cases}$$

Vậy $\max T = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

HẾT

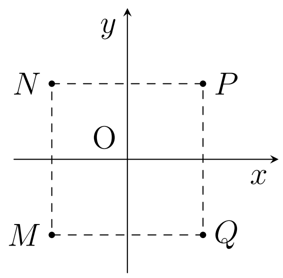
ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. C	3. B	4. A	5. C	6. B	7. D	8. C	9. D	10. B
11. C	12. B	13. C	14. D	15. D	16. C	17. D	18. B	19. A	20. D
21. C	22. D	23. B	24. A	25. A	26. A	27. D	28. A	29. D	30. B
31. D	32. A	33. D	34. C	35. D	36. C	37. B	38. A	39. B	40. B
41. B	42. A	43. A	44. A	45. C	46. C	47. B	48. A	49. C	50. A

9 ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH, NGHỆ AN, LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.
Cho các số phức $z = -1 + 2i$, $w = 2 - i$. Điểm nào trong hình vẽ bên biểu diễn số phức $z + w$?



A. P. B. N. C. Q. D. M.

Lời giải.
Ta có $z + w = 1 + i$, suy ra điểm biểu diễn số phức $z + w$ là điểm P.
Chọn đáp án A □

Câu 2. Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{-x}$.

A. $\dfrac{3^{-x}}{\ln 3} + C$. B. $-\dfrac{3^{-x}}{\ln 3} + C$. C. $-3^{-x} + C$. D. $-3^{-x}\ln 3 + C$.

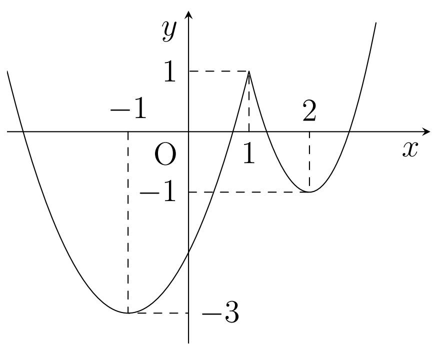
Lời giải.
Ta có $\displaystyle\int 3^{-x}\mathrm{d}x = -\dfrac{3^{-x}}{\ln 3} + C$.
Chọn đáp án B □

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 3a$, $BC = a$, cạnh bên $SD = 2a$ và SD vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. a^3. B. $2a^3$. C. $6a^3$. D. $3a^3$.

Lời giải.
Ta có thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3} \cdot SD \cdot AB \cdot BC = \dfrac{1}{3} \cdot 2a \cdot 3a \cdot a = 3a^3$.
Chọn đáp án D □

Câu 4.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng về hàm số $y = f(x)$?



A. Đồng biến trên khoảng $(-3; 1)$.
B. Nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
C. Nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.
D. Đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

Lời giải.
Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên miền $(-1; 1)$.
Chọn đáp án D □

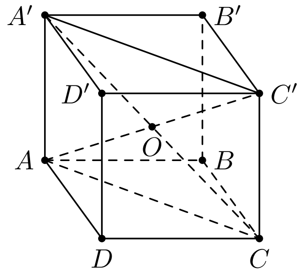
Câu 5. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = AA' = 2a$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $\dfrac{3\pi a^2}{4}$. B. $3\pi a^2$. C. $\dfrac{9\pi a^2}{4}$. D. $9\pi a^2$.

Lời giải.

Ta có $AC' = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2 + 4a^2} = 3a$.

Gọi O là giao điểm của AC' và $A'C$, khi đó O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Suy ra $R = OA = \dfrac{3a}{2}$, do đó diện tích mặt cầu ngoại tiếp $ABCD.A'B'C'D'$ là $S = 4piR^2 = 4\pi \cdot \dfrac{9a^2}{4} = 9\pi a^2$.



Chọn đáp án D □

Câu 6. Cho cấp số nhân (u_n), với $u_1 = -9$, $u_4 = \dfrac{1}{3}$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

A $\dfrac{1}{3}$. B -3. C 3. D $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $u_4 = u_1 \cdot q^3 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow q^3 = \dfrac{1}{3 \cdot u_1} = \dfrac{1}{-27} \Leftrightarrow q = -\dfrac{1}{3}$.

Vậy cấp số nhân (u_n) có công bội $q = -\dfrac{1}{3}$

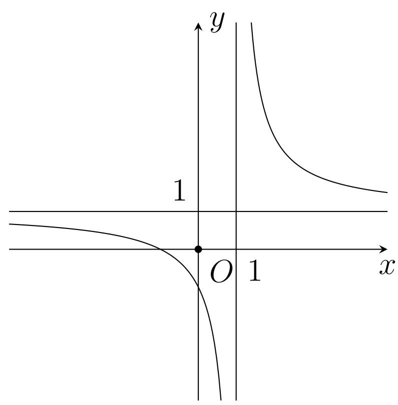
Chọn đáp án D □

Câu 7.

Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây

A $y = -x^3 + 3x + 1$. B $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

C $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. D $y = x^3 - 3x^2 - 1$.



Lời giải.

Căn cứ vào đồ thị ta có tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x = 1$ nên loại phương án $y = -x^3 + 3x + 1$, $y = \dfrac{x-1}{x+1}$, $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

Vậy hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(3; -1; 4)$, đồng thời vuông góc với giá của vectơ $\vec{a}(1; 1; 2)$ có phương trình là

A $3x - y + 4z - 12 = 0$. B $3x - y + 4z + 12 = 0$.

C $x - y + 2z - 12 = 0$. D $x - y + 2z + 12 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) nhận vectơ $\vec{a}(1; 1; 2)$ làm vectơ pháp tuyến và đi qua điểm $M(3; -1; 4)$ nên có phương trình là

$$1(x - 3) - 1(y + 1) + 2(z - 4) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z - 12 = 0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3; 3]$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên.

x	-3		-1		0		1		2		3
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây **sai** về hàm số đó?

(A) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.
(B) Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.
(C) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.
(D) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Lời giải.

Dựa vào bảng xét dấu của đạo hàm ta thấy $f'(0) = 0$ và đạo hàm không đổi dấu khi x qua $x_0 = 0$ nên hàm số đã cho không đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Giả sử $f(x)$ là một hàm số bất kì liên tục trên khoảng $(\alpha; \beta)$ và a, b, c, $b + c \in (\alpha; \beta)$. Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

(A) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
(B) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.
(C) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{b+c}^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
(D) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dựa vào tính chất của tích phân, với $f(x)$ là một hàm số bất kì liên tục trên khoảng $(\alpha; \beta)$ và a, b, c, $b + c \in (\alpha; \beta)$ ta luôn có

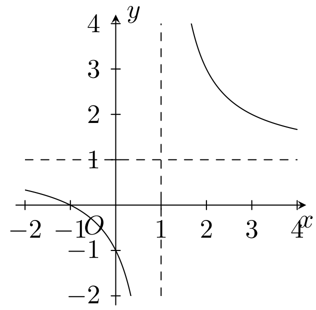
$$\begin{aligned}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{b+c}^b f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Vậy mệnh đề sai là $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11.

Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây



(A) $y = -x^3 + 3x + 1$. **B** $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. (C) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. (D) $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

Lời giải.

Căn cứ vào đồ thị ta có tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x = 1$ nên loại phương án A, C, D..

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3; 4; 0)$, $\vec{b} = (5; 0; 12)$. Côsin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

(A) $\dfrac{3}{13}$. **B** $-\dfrac{3}{13}$. (C) $-\dfrac{5}{6}$. (D) $\dfrac{5}{6}$.

Lời giải.

Ta có: $cos\left(\vec{a}; \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{-3.5 + 4.0 + 0.12}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2}.\sqrt{5^2 + 0^2 + 12^2}} = \dfrac{-3}{13}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Trong không gian$Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M\,(3; -1; 4)$, đồng thời vuông góc với giá của vectơ $\vec{a}\,(1; -1; 2)$ có phương trình là

(A) $x - y + 2z + 12 = 0$. **B** $x - y + 2z - 12 = 0$.

(C) $3x - y + 4z - 12 = 0$. (D) $3x - y + 4z + 12 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) nhận vectơ $\vec{a}\,(1; -1; 2)$làm vectơ pháp tuyến và đi qua điểm $M\,(3; -1; 4)$nên có phương trình là:

$1\,(x-3) - 1(y+1) + 2\,(z-4) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z - 12 = 0$

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Phương trình $\log(x+1) = 2$ có nghiệm là

(A) 11. (B) 9. (C) 101. **D** 99.

Lời giải.

Điều kiện: $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

Ta có $\log(x+1) = 2 \Leftrightarrow x + 1 = 10^2 \Leftrightarrow x = 99$ (thỏa mãn điều kiện).

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Giả sử $f(x)$ là một hàm số bất kì liên tục trên khoảng $(\alpha; \beta)$ và a, b, c, $b + c \in (\alpha; \beta)$. Mệnh đề nào sau đây sai?

(A) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. **B** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{b+c} f(x)\,dx - \int_c^a f(x)\,dx$.

(C) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{b+c} f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx$. (D) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$.

Lời giải.

Dựa vào tính chất của tích phân, với $f(x)$ là một hàm số bất kì liên tục trên khoảng $(\alpha;\beta)$ và a,b,c,$b+c \in (\alpha;\beta)$ ta có:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b+c}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vậy mệnh đề sai là $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x$

Chọn đáp án B □

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-3y+2z-1=0$, $(Q): x-z+2=0$. Mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q) đồng thời cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3. Phương trình của mp (α) là:

A $x+y+z-3=0$. **B** $x+y+z+3=0$. **C** $-2x+z+6=0$. **D** $-2x+z-6=0$.

Lời giải.

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_p}=(1;-3;2)$, (Q) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=(1;0;-1)$.

Vì mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q)

nên (α) có một vectơ pháp tuyến là $[\overrightarrow{n_p};\overrightarrow{n_Q}]=(3;3;3)=3(1;1;1)$.

Vì mặt phẳng (α) cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3 nên (α)đi qua điểm $M(3;0;0)$.

Vậy (α) đi qua điểm $M(3;0;0)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;1;1)$

nên (α) có phương trình $x+y+z-3=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Cho số phức z thỏa mãn $(1-\sqrt{3}i)^2z=4-3i$. Môđun của z bằng

A $\frac{5}{4}$. **B** $\frac{5}{2}$. **C** $\frac{2}{5}$. **D** $\frac{4}{5}$.

Lời giải.

Cách 1: Ta có $z=\dfrac{4-3i}{(1-\sqrt{3}i)^2}=\dfrac{-4+3\sqrt{3}}{8}+\dfrac{3+4\sqrt{3}}{8}i$

Suy ra $|z|=\left|\dfrac{-4+3\sqrt{3}}{8}+\dfrac{3+4\sqrt{3}}{8}i\right|=\sqrt{\left(\dfrac{-4+3\sqrt{3}}{8}\right)^2+\left(\dfrac{3+4\sqrt{3}}{8}\right)^2}=\dfrac{5}{4}$

Cách 2: Ta có $z=\dfrac{4-3i}{(1-\sqrt{3}i)^2}$ Suy ra $|z|=\dfrac{|4-3i|}{(1-\sqrt{3}i)^2|}=\dfrac{|4-3i|}{|-2-2\sqrt{3i}|}=\dfrac{5}{4}$

Chọn đáp án A □

Câu 18. Một hình trụ tròn xoay có độ dài đường sinh bằng đường kính đáy và thể tích của khối trụ bằng 16π . Diện tích toàn phần của khối trụ đã cho bằng

A 16π. **B** 12π. **C** 8π. **D** 24π.

Lời giải.

Gọi bán kính đáy của hình trụ là R suy ra $h=l=2R$.

Theo đề bài ta có thể tích khối trụ là: $V=\pi R^2.h=\pi R^2.2R=2\pi R^3=16\pi \Rightarrow R=2$

Do đó $h=l=4$. Diện tích toàn phần của khối trụ là: $S=2\pi Rl+2\pi R^2=2\pi.2.4+2\pi.2^2=24\pi$

Chọn đáp án D □

Câu 19. Biết rằng phương trình $\log_2^2 x-7\log_2 x+9=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2. Giá trị $x_1.x_2$ bằng

A 128. **B** 64. **C** 9. **D** 512.

Lời giải.

Cách 1: Điều kiện: $x > 0$. $\log_2^2 x - 7\log_2 x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = \dfrac{7-\sqrt{13}}{2} \\ \log_2 x = \dfrac{7+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2^{\frac{7-\sqrt{13}}{2}} \\ x = 2^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}} \end{array}\right.$ (nhận).

Vậy $x_1x_2 = 2^{\frac{7-\sqrt{13}}{2}} \cdot 2^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}} = 128$

Cách 2: Điều kiện: $x > 0$. $\log_2^2 x - 7\log_2 x + 9 = 0$là phương trình bậc 2 theo $\log_2 x$

có $\Delta = (-7)^2 - 4.1.9 = 13 > 0$. $\Delta = (-7)^2 - 4.1.9 = 13 > 0$

Theo định lý Vi-et ta có: $\log_2 x_1 + \log_2 x_2 = 7 \Leftrightarrow \log_2(x_1x_2) = 7 \Leftrightarrow x_1x_2 = 2^7 = 128$

Chọn đáp án A □

Câu 20. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{3^x - 1}{3^x + 1}$ là:

A $f'(x) = -\dfrac{2}{(3^x+1)^2} \cdot 3^x$.

B $f'(x) = \dfrac{2}{(3^x+1)^2} \cdot 3^x$.

C $f'(x) = \dfrac{2}{(3^x+1)^2} \cdot 3^x \ln 3$.

D $f'(x) = -\dfrac{2}{(3^x+1)^2} \cdot 3^x \ln 3$.

Lời giải.

$f'(x) = \dfrac{(3^x-1)'(3^x+1) - (3^x-1)(3^x+1)'}{(3^x+1)^2}$

$= \dfrac{3^x \ln 3 (3^x+1) - (3^x-1)3^x \ln 3}{(3^x+1)^2} = \dfrac{3^x \ln 3 (3^x + 1 - 3^x + 1)}{(3^x+1)^2} = \dfrac{2}{(3^x+1)^2} \cdot 3^x \ln 3$

Chọn đáp án C □

Câu 21. Cho $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A $S = \displaystyle\int_{-2}^{2} |f(x)|\mathrm{d}x$.

B $S = 2\left|\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| + 2\left|\displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\right|$.

C $S = 2\displaystyle\int_0^2 |f(x)|\mathrm{d}x$.

D $S = 2\left|\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ và trục hoành

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm 2. \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int\limits_{-2}^{2}|f(x)|\mathrm{d}x \quad (1)$$
$$=2\int_0^2|f(x)|\mathrm{d}x \quad (2) \text{ (do } f(x) \text{ là hàm số chẵn)}$$
$$=2\int\limits_0^1|f(x)|\mathrm{d}x+2\int\limits_1^2|f(x)|\mathrm{d}x$$
$$=2\left|\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|+2\left|\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x\right| \quad (3) \text{ (do trong các khoảng}(0;1),(1;2) \text{ phương trình } f(x)=0 \text{ vô nghiệ}$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra các đáp án A, B, C là đúng, đáp án D là sai.
Máy tính: Bấm máy kiểm tra, ba kết quả đầu bằng nhau nên đáp án là đáp án D.
Chọn đáp án D □

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2\left(x^2-1\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=2f(-x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(2;+\infty)$. B. $(-\infty;-1)$. **C. $(-1;1)$.** D. $(0;2)$.

Lời giải.
Ta có $y'=-2f'(-x)$.
Mà $f'(x)=x^2\left(x^2-1\right)\Rightarrow y'=-2(-x)^2\left[(-x)^2-1\right]=-2x^2\left(x^2-1\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\x^2-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1.\end{array}\right.$$

Kết luận hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.
Chọn đáp án C □

Câu 23. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3-4x}{x^3-3x-2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. B. 1. C. 3. **D. 2.**

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
- Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-4x}{x^3-3x-2}=1$

  $\Rightarrow$ Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.
- Ta có $\lim\limits_{x\to2^+}y=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^3-4x}{x^3-3x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x(x-2)(x+2)}{(x+1)^2(x-2)}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}=\dfrac{8}{9}$.

  $\lim\limits_{x\to2^-}y=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^3-4x}{x^3-3x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x(x-2)(x+2)}{(x+1)^2(x-2)}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}=\dfrac{8}{9}$.

  $\lim\limits_{x\to(-1)^+}y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^3-4x}{x^3-3x-2}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x(x-2)(x+2)}{(x+1)^2(x-2)}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}=-\infty$.

  $\Rightarrow$ Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$.

  Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Biết rằng α, β là các số thực thỏa mãn $2^{\beta}\left(2^{\alpha}+2^{\beta}\right)=8\left(2^{\alpha}+2^{-\beta}\right)$. Giá trị của $\alpha+2\beta$ bằng

(A) 1. (B) 2. (C) 4. **D** 3.

Lời giải.

Ta có $2^{\beta}\left(2^{\alpha}+2^{\beta}\right)=8\left(2^{\alpha}+2^{-\beta}\right) \Leftrightarrow 2^{\beta}\left(2^{\alpha}+2^{\beta}\right)=8\dfrac{2^{\alpha}+2^{\beta}}{2^{\alpha+\beta}}$

$$\Leftrightarrow \left(2^{\alpha}+2^{\beta}\right)\left(2^{\alpha}-\frac{8}{2^{\alpha+\beta}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2^{\beta}-\frac{8}{2^{\alpha+\beta}}=0$$

$$\Leftrightarrow 2^{\alpha+2\beta}=8$$

$$\Leftrightarrow \alpha+2\beta=3.$$

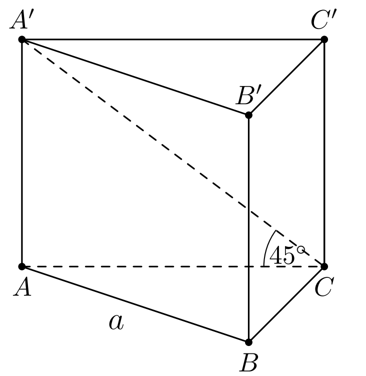
Vậy $\alpha+2\beta=3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$, góc giữa đường thẳng $A'C'$ và mặt đáy bằng 45°. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.



Theo tính chất lăng trụ tam giác đều thì lăng trụ đã cho là lăng trụ đứng, có đáy là tam giác ABC đều, cạnh $AB=a$. Do đó $S_{\triangle ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Góc giữa $A'C$ và mặt phẳng (ABC) là góc $A'CA=45^\circ$.

$AA'=AC\cdot\tan 45^\circ=AB\cdot\tan 45^\circ=a$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'}=AA'\cdot S_{\triangle ABC}=a\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

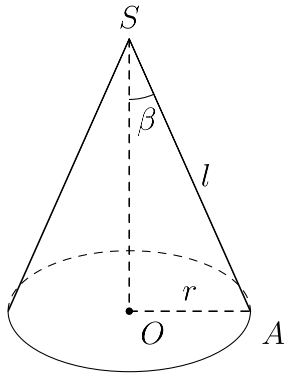
Câu 26. Cho hình nón tròn xoay có bán kính bằng 3 và diện tích xung quanh bằng $6\sqrt{3}\pi$. Góc ở đỉnh của hình nón đã cho bằng

(A) 60°. (B) 150°. (C) 90°. **D** 120°.

Lời giải.

Gọi S, O lần lượt là đỉnh và tâm mặt đáy của hình nón. Lấy A là một điểm nằm trên đường tròn đáy. Gọi góc ở đỉnh của hình nón là 2β suy ra $\beta = \widehat{OSA}$. Mặt khác $S_{xq} = \pi r l \Leftrightarrow l = \dfrac{S_{xq}}{\pi r} = \dfrac{6\sqrt{3}\pi}{3\pi} = 2\sqrt{3}$. Xét $\triangle SOA$ vuông tại O, ta có $\sin OSA = \dfrac{OA}{SA} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{OSA} = 60^\circ$.

Vậy $2\beta = 2\widehat{OSA} = 120^\circ$.



Chọn đáp án D □

Câu 27. Cho hình nón tròn xoay có bán kính bằng 3 và diện tích xung quanh bằng $6\sqrt{3}\pi$. Góc ở đỉnh của hình nón đã cho bằng

A. 60°. B. 150°. C. 90°. D. 120°.

Lời giải.

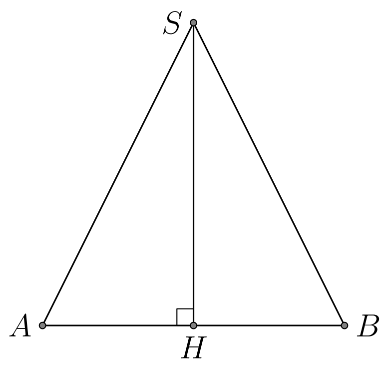
Giả sử thiết diện qua trục của hình nón đã cho là tam giác SAB, gọi H là tâm đường tròn đáy của hình nón.

Ta có $AH = 3$ và $S_{xq} = \pi \cdot AH \cdot SA$

Suy ra $SA = \dfrac{S_{xq}}{\pi AH} = \dfrac{6\sqrt{3}\pi}{3\pi} = 2\sqrt{3}$.

Ta có $\cos \widehat{ASH} = \dfrac{AH}{AS} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{ASH} = 30^\circ$.

Do đó, góc ở đỉnh của hình nón bằng 60°.



Chọn đáp án A □

Câu 28. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương pháp $z^2 + 4z + 7 = 0$. Số $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2$ bằng

A. 2. B. 10. C. $2i$. D. $10i$.

Lời giải.

Cách 1. Ta có $z^2 + 4z + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} z_1 &= -2 - \sqrt{5}i \\ z_2 &= -2 + \sqrt{5}i. \end{aligned}\right.$

Suy ra $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = (-2 - \sqrt{5}i)^2 + (-2 + \sqrt{5}i)^2 = 2$.

Cách 2. Áp dụng định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} z_1 + z_2 = -4 \\ z_1 z_2 = 7. \end{cases}$

Dễ thấy $z_1 = \overline{z_2}$ và $z_2 = \overline{z_1}$, nên

$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 = (-4)^2 - 14 = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \dfrac{9}{x}$ trên đoạn $[1; 4]$. Giá trị của $m + M$ bằng

A. $\dfrac{65}{4}$. B. 16. C. $\dfrac{49}{4}$. D. 10.

Lời giải.

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[1; 4]$.

Ta có $y' = 1 - \dfrac{9}{x^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{9}{x^2} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \in (1;4) \\ x = -3 \notin (1;4). \end{array}\right.$

Mặt khác $y(1) = 10, y(3) = 6, y(4) = \dfrac{25}{4}$, suy ra $m = 6$ và $M = 10$, nên $m + M = 16$.

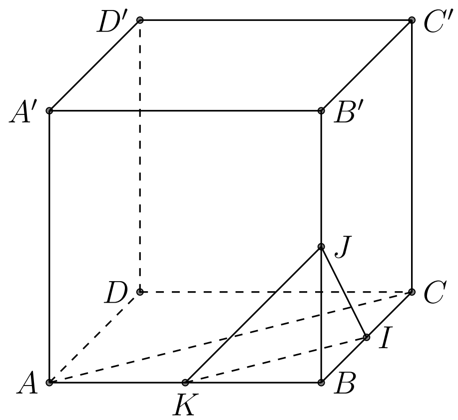
Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có I, J tương ứng là trung điểm của BC và BB'. Góc giữa hai đường thẳng AC và IJ là

(A) 45°. **B** 60°. (C) 30°. (D) 120°.

Lời giải.

Gọi K là trung điểm của AB. Vì $ABCD$ là hình vuông nên $KI \parallel AC$, suy ra góc giữa AC và IJ bằng góc giữa KI và IJ bằng $\widehat{KIJ}$. Ta có $IK = \dfrac{1}{2}AC$; $IJ = \dfrac{1}{2}B'C$; $JK = \dfrac{1}{2}AB'$. Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $AC = B'C = AB'$, từ đó suy ra $IK = IJ = JK$, hay tam giác IJK là tam giác đều. Vậy $\widehat{KIJ} = 60^\circ$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Giải bóng chuyền quốc tế VTV Cup có 8 đội tham gia, trong đó có hai đội Việt Nam. Ban tổ chức bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành hai bảng đấu, mỗi bảng 4 đội. Xác suất để hai đội của Việt Nam nằm ở hai bảng khác nhau bằng

(A) $\dfrac{2}{7}$. (B) $\dfrac{5}{7}$. (C) $\dfrac{3}{7}$. **D** $\dfrac{4}{7}$.

Lời giải.

Số cách chia ngẫu nhiên 8 đội bóng thành hai bảng đấu là: $n(\Omega) = C_8^4.C_4^4 = 70$.

Gọi A là biến cố: " hai đội của Việt Nam nằm ở hai bảng khác nhau".

Bảng 1: Từ 8 đội tham gia chọn ngẫu nhiên 1 đội Việt Nam và 3 đội nước ngoài vào bảng 1 có số cách chọn là $C_6^3.C_2^1$.

Bảng 2: Sau khi chọn các đội vào bảng 1 còn 1 đội Việt Nam và 3 đội nước ngoài xếp vào bảng 2 có 1 cách xếp.

Số cách chia 8 đội thành 2 bảng đấu sao cho hai đội của Việt Nam nằm ở hai bảng khác nhau là: $n(A) = C_6^3.C_2^1.1 = 40$.

Vậy Xác suất cần tìm: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{40}{70} = \dfrac{4}{7}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 32. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$ là

A $-x\cot x + \ln(\sin x) + C$. (B) $x\cot x - \ln|\sin x| + C$.

(C) $x\cot x + \ln|\sin x| + C$. (D) $-x\cot x - \ln(\sin x) + C$.

Lời giải.

$F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{x}{\sin^2 x}dx.$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cot x \end{cases}.$

Khi đó:

$$F(x) = \int \frac{x}{\sin^2 x}dx = -x.\cot x + \int \cot x dx = -x.\cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = -x.\cot x + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$$
$$= -x.\cot x + \ln|\sin x| + C.$$

Với $x \in (0;\pi) \Rightarrow \sin x > 0 \Rightarrow \ln|\sin x| = \ln(\sin x)$.

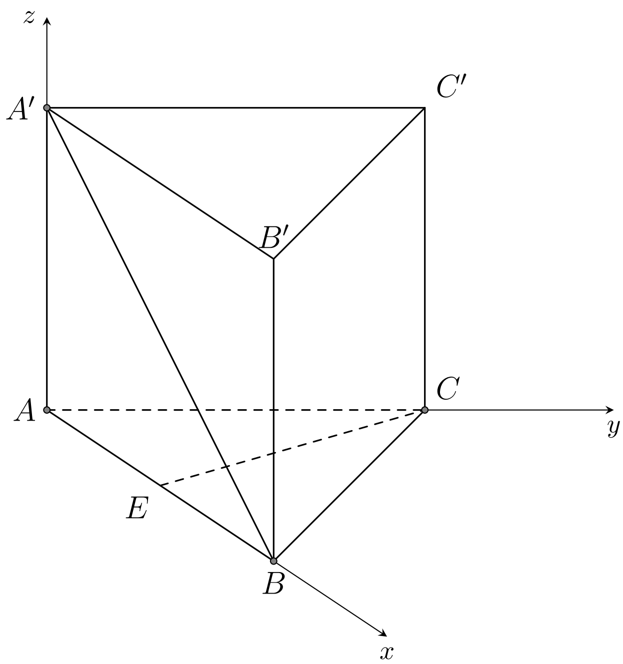
Vậy $F(x) = -x\cot x + \ln(\sin x) + C$

Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Gọi E là trung điểm của AB. Cho biết $AB = 2a$, $BC = \sqrt{13}a$, $CC' = 4a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và CE bằng

A $\frac{4a}{7}$. **B** $\frac{12a}{7}$. **C** $\frac{6a}{7}$. **D** $\frac{3a}{7}$.

Lời giải.



Cách 1. Xét ΔABC vuông tại A có: $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 3a$.

Gắn hệ trục tọa độ như hình và không mất tính tổng quát ta chọn $a = 1$, khi đó ta có:

$A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(0;3;0)$, $E(1;0;0)$, $A'(0;0;4)$.

$\overrightarrow{A'B} = (2;0;-4)$, $\overrightarrow{CE} = (1;-3;0)$

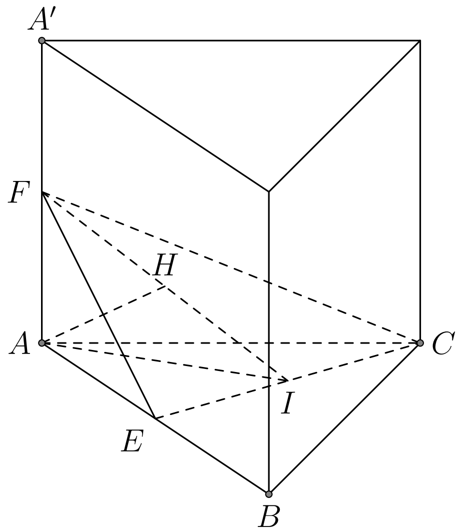
$\Rightarrow \left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{CE}\right] = (-12;-4;-6)$.

$\overrightarrow{CB} = (2;-3;0)$.

$d(A'B, CE) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{CE}\right].\overrightarrow{CB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{CE}\right]\right|} = \frac{|-12.2 + (-4).(-3) + (-6).0|}{\sqrt{(-12)^2 + (-4)^2 + (-6)^2}} = \frac{6}{7}.$

Vậy khoảng cách giữa $A'B$ và CE là $\frac{6a}{7}$.

Cách 2.



Gọi F là trung điểm AA'.

Ta có $(CEF)//A'B$ nên $d(CE, A'B) = d(A'B, (CEF)) = d(A', (CEF)) = d(A, (CEF))$.

Kẻ $AI \perp CE; AH \perp FI$ thì $AH \perp (CEF)$ hay $d(A, (CEF)) = AH$.

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AF^2} + \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{AF^2} + \dfrac{1}{AE^2} + \dfrac{1}{AF^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{9a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{49}{36a^2}$.

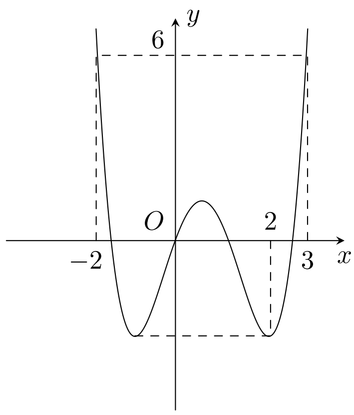
Suy ra $d(CE, A'B) = d(A, (CEF)) = AH = \dfrac{6a}{7}$.

Vậy khoảng cách giữa $A'B$ và CE là $\dfrac{6a}{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 34.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?



A 3. B 2. C 6. D 7.

Lời giải.

Đặt $t = g(x) = x^3 - 3x, x \in [-1; 2]$.

$g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $[-1; 2]$.

x	-1		1		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	2	↘	-2	↗	2

Suy ra với $t = -2$, có 1 giá trị của x thuộc đoạn $[-1; 2]$.

$t \in (-2; 2]$, có 2 giá trị của x thuộc đoạn $[-1; 2]$.

Phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(-2; 2]$. (1)

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ và m nguyên ta có hai giá trị của m thỏa mãn điều kiện (1) là: $m = 0, m = -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - 1|^2 + |z - \bar{z}|\, i + (z + \bar{z})\, i^{2019} = 1$?

(A) 4. (B) 2. (C) 1. $\boxed{\text{D}}$ 3.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$; $(a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z} = a - bi$.

Ta có: $|z-1|^2 = |a+bi-1|^2 = (a-1)^2 + b^2$,

$|z-\overline{z}|\, i = |a+bi-a+bi|\, i = \sqrt{(2b)^2} i = 2|b|\, i$,

$i^{2019} = i^{4.504+3} = (i^4)^{504}.i^3 = i.i^2 = -i$,

$(z+\overline{z})\, i^{2019} = -i\,(a+bi+a-bi) = -2ai$.

Suy ra phương trình đã cho tương đương với:

$(a-1)^2 + b^2 + 2|b|\, i - 2ai = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(a-1)^2+b^2=1\\ 2|b|-2a=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2-2a+b^2=0\\ a=|b|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2|b|^2-2|b|=0\\ a=|b|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}|b|=0\\ |b|=1\end{array}\right.\\ a=|b|\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\ b=0\end{cases}\\ \begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}\\ \begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy có 3 số phức z thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-1|^2 + |z-\overline{z}|\, i + (z+\overline{z})\, i^{2019} = 1$?

(A) 4. (B) 2. (C) 1. $\boxed{\text{D}}$ 3.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$; $(a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z} = a - bi$.

Ta có:

$$|z-1|^2 = |a+bi-1|^2 = (a-1)^2 + b^2.$$
$$|z-\overline{z}|\, i = |a+bi-a+bi|\, i = \sqrt{(2b)^2} i = 2|b|\, i.$$
$$(z+\overline{z})\, i^{2019} = -i\,(a+bi+a-bi) = -2ai.$$

Suy ra phương trình đã cho tương đương với:

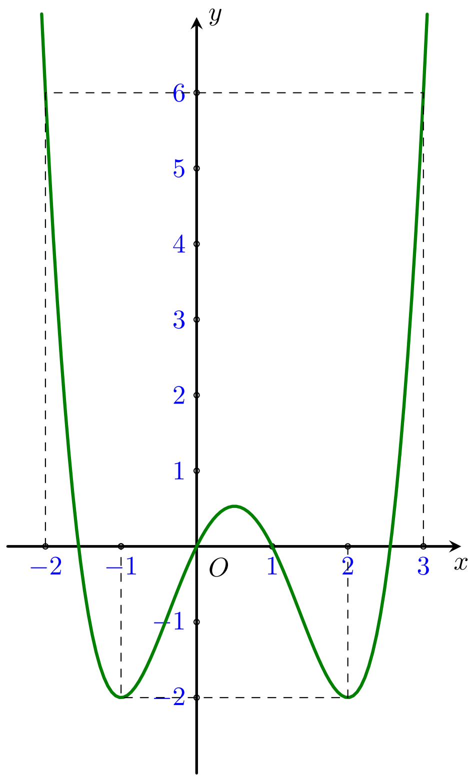
$$(a-1)^2 + b^2 + 2|b|\, i - 2ai = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(a-1)^2+b^2=1\\ 2|b|-2a=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2-2a+b^2=0\\ a=|b|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2|b|^2-2|b|=0\\ a=|b|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}|b|=0\\ |b|=1\end{array}\right.\\ a=|b|\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\ b=0\end{cases}\\ \begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}\\ \begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}\end{array}\right..$$

Vậy có 3 số phức z thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?



A 2. **B** 6. **C** 3. **D** 7.

Lời giải.

Đặt

$$t = g(x) = x^3 - 3x, \ x \in [-1; 2]$$

$$g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $[-1; 2]$

x	-1		1		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

Suy ra

Với $t = -2$, có 1 giá trị của x thuộc đoạn $[-1; 2]$.

$t \in (-2; 2]$, có 2 giá trị của x thuộc đoạn $[-1; 2]$.

Phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(-2; 2]$. (1)

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ và m nguyên ta có hai giá trị của m thỏa mãn điều kiện (1) là: $m = 0,\ m = -1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$ và hai điểm $A(-1;3;1)$ và $B(0;2;-1)$. Gọi $C(m;n;p)$ là điểm thuộc đường thẳng d sao cho diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{2}$. Giá trị của tổng $m+n+p$ bằng

(A) -1. (B) 2. (C) 3. (D) -5.

Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng $d : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$.

Vì C thuộc d nên tọa độ của C có dạng $C(-1+2t;t;2-t)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(1;-1;-2)$ và $\overrightarrow{AC}(2t;t-3;1-t)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (3t-7;-3t-1;3t-3)$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{(3t-7)^2 + (-3t-1)^2 + (3t-3)^2}$.

Theo bài ra ta có $S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{27t^2 - 54t + 59} = 2\sqrt{2}. \Leftrightarrow 27t^2 - 54t + 59 = 32 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Với $t = 1$ thì $C(1;1;1)$ nên $m = 1; n = 1; p = 1$. Vậy giá trị của tổng $m+n+p = 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$ là

(A) $x\cot x - \ln|\sin x| + C$.

(B) $.-x\cot x + \ln(\sin x) + C$.

(C) $-x\cot x - \ln(\sin x) + C$.

(D) $x\cot x + \ln|\sin x| + C$.

Lời giải.

$F(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = -\cot x \end{cases}$.

Khi đó: $F(x) = \displaystyle\int \dfrac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -x.\cot x + \int \cot x\mathrm{d}x = -x.\cot x + \int \dfrac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x = -x.\cot x + \int \dfrac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin x} = -x.\cot x + \ln|\sin x| + C$.

Với $x \in (0;\pi)$ suy ra $\sin x > 0$ suy ra $\ln|\sin x| = \ln(\sin x)$.

Vậy $F(x) = -x\cot x + \ln(\sin x) + C$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Bất phương trình $(x^3 - 9x)\ln(x+5) \leq 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên ?

(A) 4 . (B) 7. (C) 6. (D) Vô số.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x > -5$ (*).

Xét $(x^3 - 9x)\ln(x+5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 - 9x = 0 \\ \ln(x+5) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 3 \\ x = -4 \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện (*)).

Bảng xét dấu của biểu thức $f(x) = (x^3 - 9x)\ln(x+5)$ trên khoảng $(-5; +\infty)$.

x	-5		-4		-3		0		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Khi đó $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 \leq x \leq -3 \\ 0 \leq x \leq 3. \end{array}\right.$

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-4; -3; 0; 1; 2; 3\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Hàm số $y = \left|f(x) + \frac{1}{2}x^2 - f(0)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng $(-2; 3)$?

A 5. **B** 3. **C** 2. **D** 6.

Lời giải.

Đặt $g(x) = f(\cos x) + x^2 - x$. Ta thấy $g'(x) = -\sin x \cdot f'(\cos x) + 2x - 1$. Do $-1 \leq \cos x \leq 1$ nên $-1 \leq f'(\cos x) \leq 1$, suy ra $|-sinx \cdot f'(\cos x)| \leq 1$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Cách 1. Ta có $g'(x) = -\sin x \cdot f'(\cos x) + 2x - 1 \leq 1 + (2x - 1) = 2x \leq 0, \forall x \leq 0$. Loại đáp án B và D. Với $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ thì $0 \leq \sin x < 1, 0 < \cos x \leq 1$ nên $-\sin x \cdot f'(\cos x) \leq 0$. Do đó $g'(x) \leq 0, \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. Loại đáp án C. Chọn đáp án A.

Cách 2. Vì $g'(x) - \sin x \cdot f'(\cos x) + 2x - 1 \neq 1 + (2x - 1) = 2x - 2$ nên $g'(x) > 0, \forall x > 1$. Suy ra $g(x) = f(\cos x) + x^2 - x$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$. Chọn đáp án A.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2} + 1\right) + x = m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$?

A 8. **B** 11. **C** 9. **D** 10.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $-x \in \mathbb{R}$, ta có $f(-x) = 2^{-x} - 2^x = -(2^x - 2^{-x}) = -f(x)$. Suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ. Mặt khác $f'(x) = (2^x + 2^{-x})ln2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta có $f(m) + f(2m - 2^{12}) < 0 \Leftrightarrow f(2m - 2^12) < -f(m)$. Theo (1) suy ra $f(2m - 2^{12}) < f(-m)$. Theo (2) ta được $2m - 2^{12} < -m \Leftrightarrow 3m < 2^{12} \Leftrightarrow m < \frac{2^{12}}{3}$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \leq 1365 \Rightarrow m_0 = 1365$. Vậy $m_0 \in [1009; 1513)$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Cho hàm số $f(x) = 2^x - 2^{-x}$. Gọi m_0 là số lớn nhất trong các số nguyên m thỏa mãn $f(m) + f(2m - 2^12) < 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A $m_0 \in [1; 505]$. **B** $m_0 \in [505; 1009)$. **C** $m_0 \in [1009; 1513)$. **D** $m_0 \in [1513; 2009)$.

Lời giải.

Ta có $f(x) + f'(x) = e^{-x} \Leftrightarrow f(x)e^x + f'(x)e^x = 1 \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = 1 \Leftrightarrow f(x)e^x = x + C_1$. Vì $f(0) = 2 \Rightarrow C_1 = 2 \Rightarrow f(x)e^{2x} = (x+2)e^x$ nên $\int f(x)e^{2x}dx = \int (x+2)e^x dx = \int (x+2)d(e^x) = (x+2)e^x - \int e^x d(x+2) = (x+2)e^x - \int e^x dx = (x+2)e^x - e^x + C = (x+1)e^x + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(\cos x) + x^2 - x$ đồng biến trên khoảng

A $(1; 2)$. **B** $(-1; 0)$. **C** $(0; 1)$. **D** $(-2; -1)$.

Lời giải.

Xét hàm số $h(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2 - f(0)$. Ta có $h'(x) = f'(x) + x; h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x$ Số nghiệm phương trình trên là số giao điểm của hai đồ thị $y = -x$ và $y = f'(x)$. Dựa vào đồ thị suy ra phương trình $f'(x) = -x$ có ba nghiệm $x = -2; x = 0; x = 2$. Tại $x = 2$ là cực tiểu, tại $x = -2$ là cực đại, tại $x = 0$ không là cực trị vì đạo hàm không đổi dấu. Hay $h(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2 - f(0)$ có một cực trị dương trong khoảng $(-2; 3)$. Hàm số $y = \left|f(x) + \frac{1}{2}x^2 - f(0)\right|$ có số cực trị trong khoảng $(-2; 3)$ là: $2.1 + 1 = 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$ là

A $(x-1)e^x + C$. **B** $(x-2)e^x + e^x + C$.

C $(x+1)e^x + C$. **D** $(x+2)e^{2x} + e^x + C$.

Lời giải.

Sử dụng phương pháp tọa độ hóa. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ. Chuẩn hóa $a = 1$ (đơn vị dài). Khi đó $SA = \sqrt{11}$ Đặt $OC = OD = b > 0; OS = c > 0$ ta có:

$SA^2 = SC^2 = SO^2 + OC^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = 11(1)$. Tọa độ các điểm $B(0; -b; 0), C(b; 0; 0), D(0; b; 0), S(0$

Mặt phẳng (SBC) có phương trình $\frac{x}{b} + \frac{y}{-b} + \frac{z}{c} = 1 \Rightarrow$ vtpt của (SBC) là: $\left(\frac{1}{b}; -\frac{1}{b}; \frac{1}{c}\right)$. Theo giả thiết ta có: $|cos(n_1; n_2)| = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{|1|}{\sqrt{1}.\sqrt{2}} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{c^2}}{\frac{2}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{9}{c^2} = \frac{2}{b^2} \Leftrightarrow 9b^2 - 2c^2 = 0$.

Kết hợp (1) và (2) ta được: $b^2 = 2$ và $c^2 = 9 \Rightarrow b = \sqrt{2}$ và $c = 3$ (do $b, c > 0$). Vậy $CD = OC\sqrt{2} = 2; SO = 3 \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.2^2.3 = 4$ (đơn vị thể tích). Vậy $V_{S.ABCD} = 4a^3$.

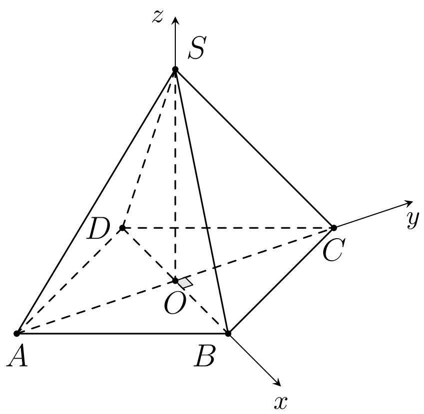
Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{11}$, cosin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng $\frac{1}{10}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A $3a^3$. **B** $9a^3$. **C** $4a^3$. **D** $12a^3$.

Lời giải.

(Sử dụng phương pháp tọa độ hóa)
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.
Chuẩn hóa $a = 1$ (đơn vị dài), khi đó $SA = \sqrt{11}$.
Đặt $OC = OD = b > 0$; $OS = c > 0$.
Ta có $SA^2 = SC^2 = SO^2 + OC^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = 11$ (1)
Tọa độ các điểm
$B\,(0\,;\,-b\,;\,0)$, $C\,(b\,;\,0\,;\,0)$, $D\,(0\,;\,b\,;\,0)$, $S\,(0\,;\,0\,;\,c)$.



Mặt phẳng (SBC) có phương trình $\dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{-b} + \dfrac{z}{c} = 1 \Rightarrow \vec{n}_{SBC} = \left(\dfrac{1}{b}; -\dfrac{1}{b}; \dfrac{1}{c}\right)$ là vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBC).
Mặt phẳng (SCD) có phương trình: $\dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1 \Rightarrow \vec{n}_{SCD} = \left(\dfrac{1}{b}\,;\,\dfrac{1}{b}\,;\,\dfrac{1}{c}\right)$ là vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SCD).

Theo giả thiết ta có $\left|\cos\left(\vec{n}_{SBC}\,,\,\vec{n}_{SCD}\right)\right| = \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow \dfrac{\left|\dfrac{1}{b}.\dfrac{1}{b} + \left(-\dfrac{1}{b}\right).\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}.\dfrac{1}{c}\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}.\sqrt{\dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}} = \dfrac{1}{10}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\dfrac{1}{c^2}}{\dfrac{2}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}} = \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow \dfrac{9}{c^2} = \dfrac{2}{b^2} \Leftrightarrow 9b^2 - 2c^2 = 0$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta được $\begin{cases} b^2 = 2 \\ c^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \sqrt{2} \\ c = 3 \end{cases}$ (do b, $c > 0$).
Vậy $CD = OC\sqrt{2} = 2$; $SO = 3 \Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \dfrac{1}{3}.2^2.3 = 4$ (đơn vị thể tích).
Vậy $V_{S.ABCD} = 4a^3$.
Chọn đáp án C □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$ cho ba đường thẳng $d : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$, $\Delta_1 : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}$, $\Delta_2 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{1}$. Đường thẳng Δ vuông góc với d đồng thời cắt Δ_1, Δ_2 tương ứng tại H, K sao cho độ dài HK nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u}(h; k; 1)$. Giá trị $h - k$ bằng

A 0. **B** 4. **C** 6. **D** -2.

Lời giải.
Ta có $H \in \Delta_1 \Leftrightarrow H(3 + 2t; t; 1 + t)$; $K \in \Delta_2 \Leftrightarrow K(1 + m; 2 + 2m; m)$.
Suy ra $\overrightarrow{HK} = (m - 2t - 2; 2m - t + 2; m - t - 1)$.
Đường thẳng d có một VTCP là $\vec{u_d} = (1; 1; -2)$.
$\Delta \perp d \Leftrightarrow \vec{u_d}.\overrightarrow{HK} = 0 \Leftrightarrow m - t + 2 = 0 \Leftrightarrow m = t - 2 \Rightarrow \overrightarrow{HK} = (-t - 4; t - 2; -3)$.
Ta có $HK^2 = (-t - 4)^2 + (t - 2)^2 + (-3)^2 = 2(t + 1)^2 + 27 \geqslant 27, \forall t \in \mathbb{R}$.
$\Rightarrow \min HK = \sqrt{27}$, đạt được khi $t = -1$.
Khi đó ta có $\overrightarrow{HK} = (-3; -3; -3)$, suy ra $\vec{u}(1; 1; 1) \Rightarrow h = k = 1 \Rightarrow h - k = 0$.
Chọn đáp án A □

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}\,(1;\,-1;\,0)$ và hai điểm $A\,(-4;\,7;\,3)$, $B\,(4;\,4;\,5)$. Giả sử M, N là hai điểm thay đổi trong mặt phẳng (Oxy) sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}$ và $MN = 5\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng

A $\sqrt{17}$. **B** $\sqrt{77}$. **C** $7\sqrt{2} - 3$. **D** $\sqrt{82} - 5$.

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nên $\exists t > 0 : \overrightarrow{MN} = t\vec{a}$.

Hơn nữa, $MN = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow t \cdot |\vec{a}| = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow t = 5$. Suy ra $\overrightarrow{MN} = (5;\,-5;\,0)$.

Gọi $A'\,(x';\,y';\,z')$ là điểm sao cho $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \begin{cases} x' + 4 = 4 \\ y' - 7 = -5 \\ z' - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2 \\ z' = 3 \end{cases} \Rightarrow A'\,(1;\,2;\,3)$.

Dễ thấy các điểm A', B đều nằm cùng phía so với mặt phẳng (Oxy) vì chúng đều có cao độ dương. Hơn nữa vì cao độ của chúng khác nhau nên đường thẳng $A'B$ luôn cắt mặt phẳng (Oxy) tại một điểm cố định.

Từ $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$ suy ra $AM = A'N$ nên $|AM - BN| = |A'N - BN| \leqslant A'B$. Dấu bằng xảy ra khi N

là giao điểm của đường thẳng $A'B$ với mặt phẳng (Oxy).

Do đó $\max|AM - BN| = A'B = \sqrt{(4-1)^2 + (4-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{17}$, đạt được khi $N = A'B \cap (Oxy)$.

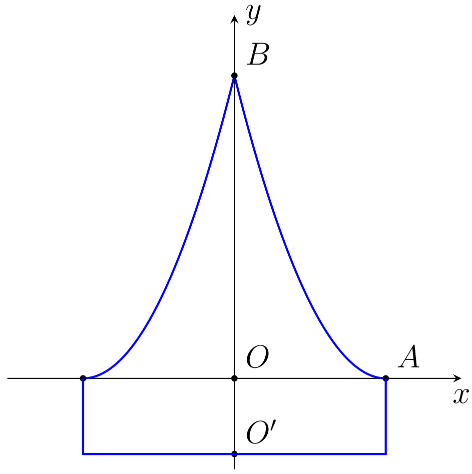
Chọn đáp án A □

Câu 49.

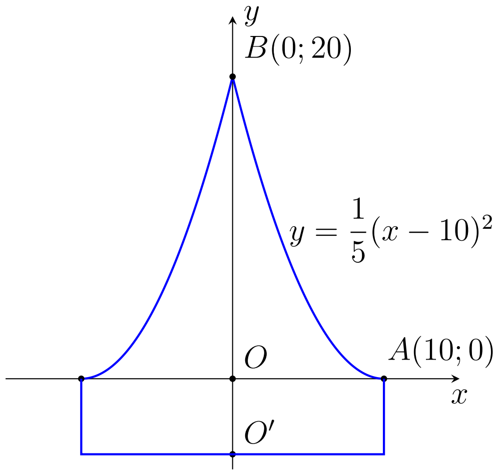
Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO' = 5\ cm$, $OA = 10\ cm$, $OB = 20\ cm$, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A. Thể tích của chiếc mũ bằng

A $\dfrac{2750\pi}{3}\ (cm^3)$. **B** $\dfrac{2500\pi}{3}\ (cm^3)$.

C $\dfrac{2050\pi}{3}\ (cm^3)$. **D** $\dfrac{2250\pi}{3}\ (cm^3)$.



Lời giải.

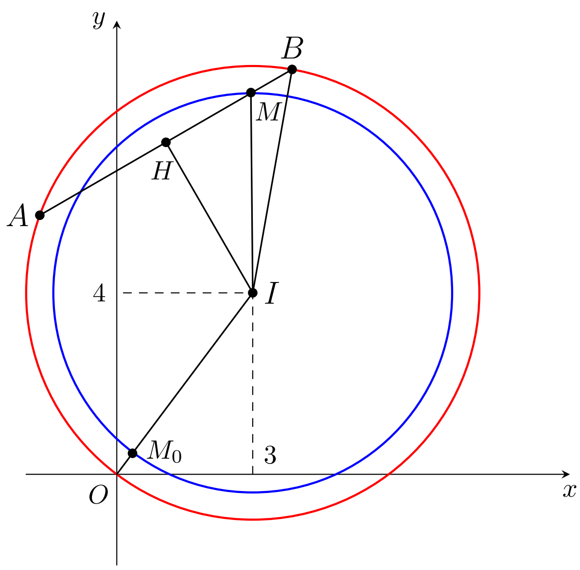


Ta gọi thể tích của chiếc mũ là V.
Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA = 10$ cm và đường cao $OO' = 5$ cm là V_1.
Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong AB và hai trục tọa độ quanh trục Oy là V_2.
Ta có $V = V_1 + V_2$.
$V_1 = 5.10^2\pi = 500\pi\ (cm^3)$.
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.
Do parabol có đỉnh A nên nó có phương trình dạng (P) : $y = a(x-10)^2$.
Vì (P) qua điểm $B(0; 20)$ nên $a = \dfrac{1}{5}$.
Do đó, $(P): y = \dfrac{1}{5}(x-10)^2$. Từ đó suy ra $x = 10 - \sqrt{5y}$ (do $x < 10$).
Suy ra $V_2 = \pi \displaystyle\int_0^{20} \left(10 - \sqrt{5y}\right)^2 dy = \pi\left(3000 - \dfrac{8000}{3}\right) = \dfrac{1000}{3}\pi\ (cm^3)$.
Do đó $V = V_1 + V_2 = \dfrac{1000}{3}\pi + 500\pi = \dfrac{2500}{3}\pi\ (cm^3)$.
Chọn đáp án B ☐

Câu 50. Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z-6)\left(8+\overline{zi}\right)$ là số thực. Biết rằng $|z_1 - z_2| = 4$, giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + 3z_2|$ bằng

A. $5 - \sqrt{21}$. B. $20 - 4\sqrt{21}$. C. $20 - 4\sqrt{22}$. D. $5 - \sqrt{22}$.

Lời giải.



Giả sử $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức z_1, z_2.
Suy ra $AB = |z_1 - z_2| = 4$.
* Ta có $(z-6)\left(8+\overline{zi}\right) = [(x-6)+yi]\cdot[(8-y)-xi] = (8x+6y-48) - (x^2+y^2-6x-8y)i$.
Theo giả thiết $(z-6)\left(8+\overline{zi}\right)$ là số thực nên ta suy ra $x^2+y^2-6x-8y = 0$. Tức là các điểm A, B thuộc đường tròn (C) tâm $I(3; 4)$, bán kính $R = 5$.

* Xét điểm M thuộc đoạn AB thỏa $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OM}$. Gọi H là trung điểm AB. Ta tính được $HI^2=R^2-HB^2=21; IM=\sqrt{HI^2+HM^2}=\sqrt{22}$, suy ra điểm M thuộc đường tròn (C') tâm $I(3;4)$, bán kính $r=\sqrt{22}$.
* Ta có $|z_1+3z_2|=\left|\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}\right|=\left|4\overrightarrow{OM}\right|=4OM$, do đó $|z_1+3z_2|$ nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất.
Ta có $(OM)_{\min}=OM_0=|OI-r|=5-\sqrt{22}$.
Vậy $|z_1+3z_2|_{\min}=4OM_0=20-4\sqrt{22}$.
Chọn đáp án C □

——— HẾT ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. B	3. D	4. D	5. D	6. D	7. B	8. C	9. D	10. B
11. B	12. B	13. B	14. D	15. B	16. A	17. A	18. D	19. A	20. C
21. D	22. C	23. D	24. D	25. A	26. D	27. A	28. A	29. B	30. B
31. D	32. A	33. C	34. B	35. D	36. D	37. A	38. C	39. B	40. C
41. A	42. B	43. D	44. D	45. C	46. C	47. A	48. A	49. B	50. C

10 ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN HƯNG YÊN, HƯNG YÊN – LẦN 2 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Nếu $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{e}^x + C$ thì $f(x)$ bằng

(A) $f(x) = 3x^2 + \mathrm{e}^x$. (B) $f(x) = \dfrac{x^4}{3} + \mathrm{e}^x$. (C) $f(x) = x^2 + \mathrm{e}^x$. (D) $f(x) = \dfrac{x^4}{12} + \mathrm{e}^x$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{e}^x + C \Rightarrow f(x) = x^2 + \mathrm{e}^x$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị x thoả mãn $5^{x^2} = 5^x$?

(A) 0. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $5^{x^2} = 5^x \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

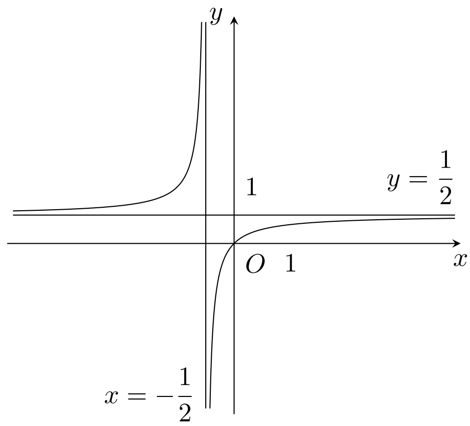
Chọn đáp án (D) □

Câu 3.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây?

(A) $y = \dfrac{x+1}{2x+1}$. (B) $y = \dfrac{x}{2x+1}$.

(C) $y = \dfrac{x-1}{2x+1}$. (D) $y = \dfrac{x+3}{2x+1}$.



Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta thấy đường cong đi qua điểm $O(0;0)$ nên đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x}{2x+1}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Với giá trị nào của x thì biểu thức $(4 - x^2)^{\frac{1}{3}}$ sau có nghĩa?

(A) $x \geq 2$. (B) Không có giá trị x.

(C) $-2 < x < 2$. (D) $x \leq -2$.

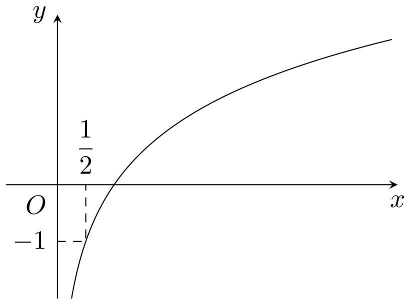
Lời giải.

Vì $\dfrac{1}{3}$ là số hữu tỉ nên điều kiện xác định của biểu thức là $4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây?



(A) $y = \log_2(2x)$. **B** $y = \log_2 x$.
(C) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. (D) $y = \log_{\sqrt{2}} x$.

Lời giải.

Từ hình vẽ suy ra hàm số đồng biến nên loại hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Lại từ hình vẽ suy đồ thị hàm số đi qua điểm $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$.

Kiểm tra ta thấy $-1 \neq \log_2\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right); -1 = \log_2 \frac{1}{2}$ và $-1 \neq \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2}$ nên loại các hàm số $y = \log_2(2x)$ và $y = \log_{\sqrt{2}} x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{2}{x^2 + 2x + 2}$ có hoành độ và tung độ đều là số nguyên?

(A) 8. (B) 1. (C) 4. **D** 3.

Lời giải.

Ta có: $y = \dfrac{2}{x^2 + 2x + 2} = \dfrac{2}{(x+1)^2 + 1}$.

Mà $0 < \dfrac{2}{(x+1)^2 + 1} \leq 2$, do $(x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow y \in \{1; 2\}$.

Với $y = 1 \Rightarrow \dfrac{2}{(x+1)^2 + 1} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Suy ra các điểm $(-2; 1), (0; 1)$ thoả mãn.

Với $y = 2 \Rightarrow \dfrac{2}{(x+1)^2 + 1} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Suy ra điểm $(-1; 2)$ thoả mãn.

Vậy, đồ thị (C) có 3 điểm có hoành độ và tung độ đều là số nguyên.

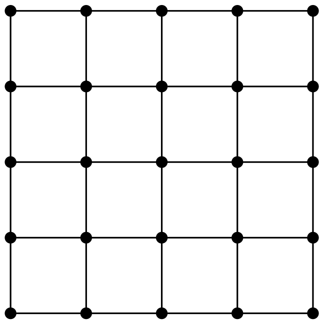
Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Xét một hàng ô vuông gồm 4×4 ô vuông. Người ta điền vào mỗi ô vuông một trong hai số 1 hoặc -1 sao cho tổng các số trong mỗi hàng và tổng các số trong mỗi cột đều bằng 0. Hỏi có bao nhiêu cách điền số?

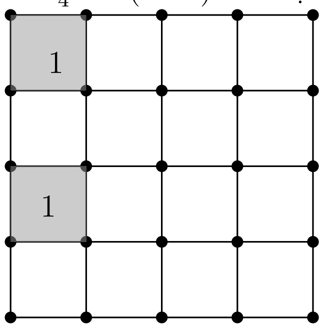
(A) 144. **B** 90. (C) 80. (D) 72.

Lời giải.

Nhận xét rằng để tổng các số trong mỗi hàng và tổng các số trong mỗi cột đều bằng 0 thì số lượng số 1 và số lượng số -1 trong mỗi hàng và mỗi cột đều là 2. Từ đó suy ra mỗi hàng và mỗi cột đều có đúng 2 số 1.

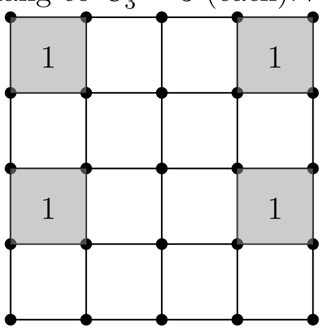


- Chọn 2 ô ở cột 1 để đặt số 1, ta có: $\mathrm{C}_4^2 = 6$(cách). Ví dụ:

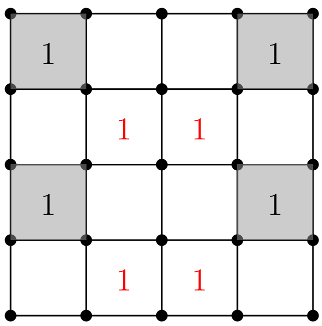


- Ở mỗi hàng mà chứa 2 ô vừa được chọn, ta chọn đúng 1 ô để đặt số 1, khi đó có 2 trường hợp:

  <u>TH1</u>: 2 ô được chọn ở cùng một hàng có $\mathrm{C}_3^1 = 3$ (cách).Ví dụ:



  Khi đó, ở 2 hàng còn lại có duy nhất cách đặt số 1 vào 4 ô không cùng hàng và cột với các ô đã điền. Như hình vẽ sau:



  <u>TH2</u>: 2 ô được chọn khác hàng: có $3 \cdot 2 = 6$ (cách). Ví dụ:

1			1
1		1	

Khi đó, số cách đặt 4 số 1 còn lại là: $1 \cdot 1 \cdot 2! = 2$ (cách), trong đó, 2 số 1 để vào đúng 2 ô còn lại của cột chưa điền, 2 số 1 còn lại hoán vị vào 2 ô ở 2 cột vừa điền ở bước trước. Ví dụ:

1			1
	1	1	
1		1	
	1		1

Vậy, số cách xếp là: $6(3 \cdot 1 + 6 \cdot 2) = 6 \cdot 15 = 90$ (cách).

Chọn đáp án B □

Câu 8. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong $[-2017; 2017]$ để phương trình $\log(mx) = 2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất?

A 4015. B 4014. C 2017. D 2018.

Lời giải.

Ta có $\log(mx) = 2\log(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ mx = (x+1)^2 \end{cases}$. (1)

Dễ thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của (1), do đó (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ m = \dfrac{(x+1)^2}{x} = x + \dfrac{1}{x} + 2 \end{cases}$. (2)

Xét hàm số $f(x) = x + \dfrac{1}{x} + 2$ trên $\in (-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

Ta có $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$. Bảng biến thiên

x	-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0 ↘		$-\infty$ || $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m = 4 \end{array}\right.$.

Mà $m \in \mathbb{Z}, m \in [-2017; 2017] \Rightarrow m \in \{-2017; -2016; \ldots; -1\} \cup \{4\}$. Vậy, có 2018 giá trị của m

thoả mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Đạo hàm của hàm số $y = \sin x + \log_3 x^3 \ (x > 0)$ là

A $y' = \cos x + \dfrac{3}{x \ln 3}$.
(B) $y' = -\cos x + \dfrac{1}{x^3 \ln 3}$.
(C) $y' = \cos x + \dfrac{1}{x^3 \ln 3}$.
(D) $y' = -\cos x + \dfrac{1}{x \ln 3}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $(\sin x)' = \cos x$, $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $(0 < a \neq 1)$, ta có $y' = \cos x + \dfrac{3}{x \ln 3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^{2019}$, $(x \in \mathbb{R})$ là hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

(A) $F(x) = 2019x^{2018} + C$, $(C \in \mathbb{R})$.
(B) $F(x) = x^{2020} + C$, $(C \in \mathbb{R})$.
C $F(x) = \dfrac{x^{2020}}{2020} + C$, $(C \in \mathbb{R})$.
(D) $F(x) = 2018x^{2019} + C$, $(C \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\displaystyle\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$, ta có $\displaystyle\int f(x) \, dx = \int x^{2019} \, dx = \frac{x^{2020}}{2020} + C$.

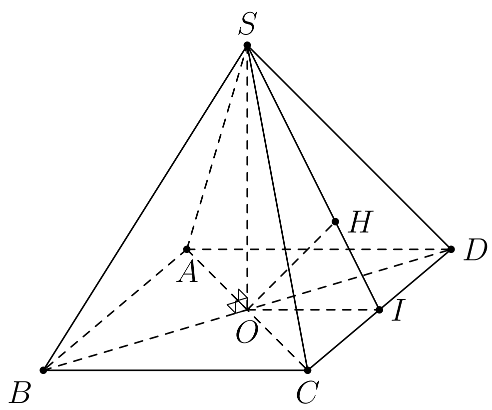
Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

(A) $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.
(B) $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$.
C $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.
(D) $\dfrac{2a\sqrt{3}}{15}$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} AB \parallel CD \\ CD \subset (SCD) \Rightarrow AB \parallel (SCD) \\ AB \parallel (SCD) \end{cases}$



Mà $CD \subset (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(AB; CD) = \mathrm{d}(AB; (SCD)) = \mathrm{d}(A; (SCD))$.

Do O là trung điểm của $AC \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}(A; (SCD))}{\mathrm{d}(O; (SCD)\}} = \dfrac{AC}{OC} = 2 \Rightarrow \mathrm{d}(A; (SCD)) = 2\mathrm{d}(O; (SCD))$.

Gọi I là trung điểm của CD. Dựng $OH \perp SI, H \in SI \quad (1)$

Ta có: $\begin{cases} CD \perp OI \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOI) \Rightarrow CD \perp OH \quad (2)$

Từ (1), (2) suy ra $OH \perp (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(O; (SCD)) = OH$.

$\triangle SOI$ vuông tại O, $OH \perp SI \Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OI^2} + \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow d(AB; CD) = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $A(-3;0;0), B(0;0;3), C(0;-3;0)$. Điểm $M(a;b;c)$ nằm trên mặt phẳng Oxy sao cho $MA^2 + MB^2 - MC^2$ nhỏ nhất. Tính $a^2 + b^2 - c^2$.

A 18. **B** 0. **C** 9. **D** -9.

Lời giải.

Trước hết ta xác định điểm I thoả mãn đẳng thức $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x_I = 0 - 0 \\ 0 - y_I = -3 - 0 \\ 0 - z_I = 0 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = -3 \\ y_I = 3 \\ z_I = 3 \end{cases} \Rightarrow I(-3;3;3)$.

Khi đó

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 - MC^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2 \\ &= MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}\right) + IA^2 + IB^2 - IC^2 \\ &= MI^2 + IA^2 + IB^2 - IC^2. \end{aligned}$$

Vì $IA^2 + IB^2 - IC^2$ không đổi nên $MA^2 + MB^2 - MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất.
Từ đó suy ra M là hình chiếu của I lên $(Oxy) \Rightarrow M(-3;3;0)$.
Vậy $a^2 + b^2 - c^2 = (-3)^2 + 3^2 - 0 = 18$.
Chọn đáp án A □

Câu 13. Hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A $(5;+\infty)$. **B** $(-\infty;1)$. **C** $(2;3)$. **D** $(1;5)$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 6x + 5$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5 \end{array}\right.$. Dấu của y':

Từ dấu của y' suy ra hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 2019$ nghịch biến trên $(1;5)$.
Chọn đáp án D □

Câu 14. Hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ và $f(1) = -3$. Tính $b + 2a$.

A 3. **B** 15. **C** -15. **D** -3.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.
Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ và $f(1) = -3$ nên suy ra

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = -3 \\ a + b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -9. \end{cases}$$

Thử lại ta thấy với $a = 3, b = -9$ thì hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 1$.
Vậy $b + 2a = -9 + 2 \cdot 3 = -3$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương đó là

(A) $S = \pi a^2$. (B) $S = \dfrac{3\pi a^2}{4}$. **(C)** $S = 3\pi a^2$. (D) $S = 12\pi a^2$.

Lời giải.

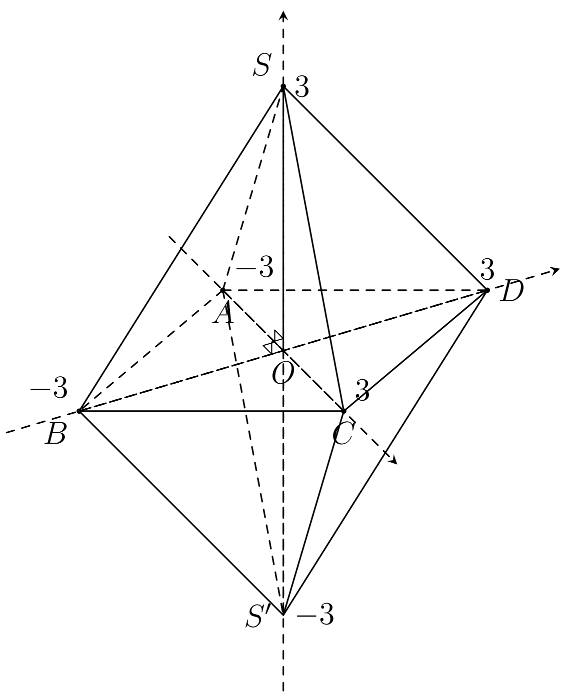
Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, cạnh bằng a có bán kính mặt cầu ngoại tiếp $R = \dfrac{AC'}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương đó là: $S = 4\pi \cdot \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi a^2$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, biết rằng tập hợp tất cả các điểm $M(x; y; z)$ sao cho $|x| + |y| + |z| = 3$ là một hình đa diện. Tính thể tích V của khối đa diện đó.

(A) 72. **(B)** 36. (C) 27. (D) 54.

Lời giải.

Tập hợp tất cả các điểm $M(x, y, z)$ sao cho $|x| + |y| + |z| = 3$ là hình bát diện đều $SABCDS'$ (như hình vẽ).
Thể tích V của khối đa diện đó: $V = 2V_{S.ABCD} = 2 \cdot \dfrac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD}$.
$ABCD$ là hình vuông cạnh $BC = OB\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.
$\Rightarrow S_{ABCD} = \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18 \Rightarrow V = 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 3 \cdot 18 = 36$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $f'(x) = 27 + \cos x$ và $f(0) = 2019$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

(A) $f(x) = 27x + \sin x + 1991$. (B) $f(x) = 27x - \sin x + 2019$.
(C) $f(x) = 27x + \sin x + 2019$. (D) $f(x) = 27x - \sin x - 2019$.

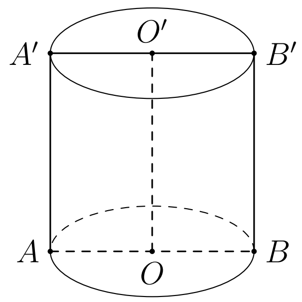
Lời giải.

Ta có $f'(x) = 27 + \cos x \Rightarrow \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int (27 + \cos x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow f(x) = 27x + \sin x + C$.
Lại có $f(0) = 2019 \Rightarrow 27 \cdot 0 + \sin 0 + C = 2019 \Leftrightarrow C = 2019 \Rightarrow f(x) = 27x + \sin x + 2019$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng 4π. Thể tích khối trụ là

(A) $\frac{2}{3}\pi$. (B) 2π. (C) 4π. (D) $\frac{4}{3}\pi$.

Lời giải.



Ta có $ABB'A'$ là hình vuông $\Rightarrow h = 2r$.

Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2 = 4\pi \Rightarrow r = 1 \Rightarrow h = 2$.

Thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = 2\pi$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$ song song với đường thẳng $y = x$?

(A) 2. (B) 4. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Gọi d là tiếp tuyến cần tìm, $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y = -x^3 + 2x^2 \Rightarrow y' = -3x^2 + 4x$.

Do d song song với đường thẳng $y = x \Rightarrow y'(x_0) = 1 \Leftrightarrow -3x_0^2 + 4x_0 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = \frac{1}{3} \end{array}\right.$.

- $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $d : y = 1(x-1) + 1 \Leftrightarrow y = x$ (loại).
- $x_0 = \frac{1}{3} \Rightarrow y_0 = \frac{5}{27} \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $d : y = 1\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{5}{27} \Leftrightarrow y = x - \frac{4}{27}$ (thoả mãn).

Vậy, có 1 tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$ song song với đường thẳng $y = x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Hàm số $F(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

(A) $f(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$. (B) $f(x) = x^2\mathrm{e}^{x^2}$. (C) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$. (D) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}$.

Lời giải.

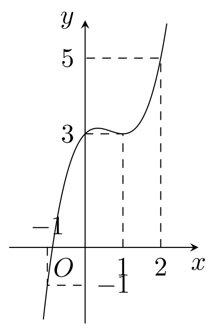
Ta có $f(x) = (F(x))' = \left(e^{x^2}\right)' = 2xe^{x^2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(2 - \sqrt{2x - x^2}\right) = m$ có nghiệm?

(A) 6. (B) 7. (C) 3. (D) 2.



Lời giải.

Xét hàm số $t(x) = 2 - \sqrt{2x - x^2}, x \in [0;2]$, có $t'(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}, t'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Hàm số $t(x)$ liên tục trên $[0;2]$ có $t(0) = t(2) = 2, t(1) = 1 \Rightarrow \min\limits_{[0;2]} t(x) = 1, \max\limits_{[0;2]} t(x) = 2$.
Do đó $x \in [0;2] \Rightarrow t \in [1;2]$. Khi đó bài toán trở thành có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(t) = m$ có nghiệm $t \in [1;2]$.
Quan sát đồ thị hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[1;2]$ ta thấy phương trình $f(t) = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow 3 \leq m \leq 5$.
Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in 3;4;5$: có 3 giá trị của m thoả mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ điểm M trên trục Ox cách đều hai điểm $A(1;2;-1)$ và điểm $B(2;1;2)$

A $M\left(\frac{1}{2};0;0\right)$. B $M\left(\frac{3}{2};0;0\right)$. C $M\left(\frac{2}{3};0;0\right)$. D $M\left(\frac{1}{3};0;0\right)$.

Lời giải.
Ta có $M \in Ox \Rightarrow M(m;0;0)$.
Theo bài ta có:

$$\begin{aligned} MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2 & \\ &\Leftrightarrow (m-1)^2 + 2^2 + 1^2 = (m-2)^2 + 1^2 + 2^2 \\ &\Leftrightarrow (m-1)^2 = (m-2)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1 = m-2 \\ m-1 = 2-m \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow m = \frac{3}{2} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2};0;0\right). \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 23. Tích $\dfrac{1}{2019!}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(1-\dfrac{1}{4}\right)^3 \cdots \left(1-\dfrac{1}{2019}\right)^{2018}$ được viết dưới dạng a^b, khi đó $(a;b)$ là cặp nào trong các cặp sau?

A $(2020;-2019)$. B $(2019;-2019)$. C $(2019;-2020)$. D $(2018;-2019)$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2019!}\left(1-\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(1-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(1-\frac{1}{4}\right)^3 \cdots \left(1-\frac{1}{2019}\right)^{2018} &= \frac{1}{2019!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdots \left(\frac{2018}{2019}\right)^{2018} \\ &= \frac{1}{2019!} \cdot \frac{1.2.3...2018}{2019^{2018}} \\ &= \frac{1}{2019^{2019}} \\ &= 2019^{-2019}. \end{aligned}$$

Khi đó (a,b) là $(2019;-2019)$.
Chọn đáp án C □

Câu 24. Gọi $S = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n$. Giá trị của S là bao nhiêu?

(A) $S = n^n$. (B) $S = 0$. (C) $S = n^2$. **D** $S = 2^n$.

Lời giải.

Sử dụng khai triển: $\mathrm{C}_n^0 x^n + \mathrm{C}_n^1 x^{n-1} + \mathrm{C}_n^2 x^{n-2} + \cdots + \mathrm{C}_n^n = (x+1)^n$.

Ta có: $S = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n = (1+1)^n = 2^n$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Khối đa diện đều nào sau đây có mặt **không** phải tam giác đều?

(A) Bát diện đều. (B) Khối hai mươi mặt đều.

C Khối mười hai mặt đều. (D) Tứ diện đều.

Lời giải.

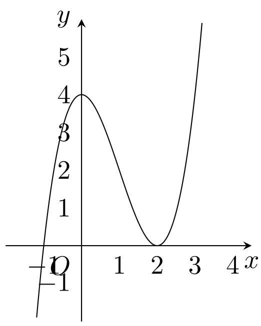
Khối mười hai mặt đều có các mặt là ngũ giác đều, không phải tam giác đều.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?

(A) 0. **B** 2. (C) 1. (D) 3.



Lời giải.

Từ hình vẽ ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

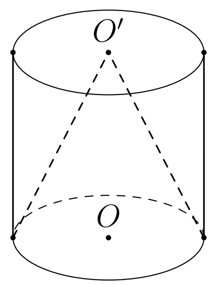
Câu 27. Một hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy R. Hình nón có đỉnh là tâm đáy trên của hình trụ và đáy là hình tròn đáy dưới của hình trụ. Gọi V_1 là thể tích của hình trụ, V_2 là thể tích của hình nón. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

(A) 2. (B) $2\sqrt{2}$. **C** 3. (D) $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Hai khối nón và khối trụ có cùng chiều cao h và cùng bán kính đáy bằng r.

Do đó ta có $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = 3$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Cho cấp số nhân $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ với công bội $q\,(q \neq 0, q \neq 1)$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$. Khi đó ta có:

A $S_n = \dfrac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}$. (B) $S_n = \dfrac{u_1(q^{n-1} - 1)}{q - 1}$.

(C) $S_n = \dfrac{u_1(q^n+1)}{q+1}$. (D) $S_n = \dfrac{u_1(q^{n-1}-1)}{q+1}$.

Lời giải.

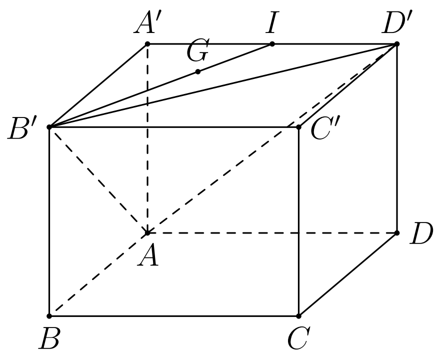
Công thức tính tổng n số hạng đầu của cấp số nhân là $S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{u_1(q^n-1)}{q-1}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Khối hộp có 6 mặt đều là các hình thoi cạnh a, các góc nhọn của các mặt đều bằng $60°$ có thể tích là

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Giả sử các góc ở đỉnh A' đều bằng $60°$, khi đó tứ diện $AA'B'D'$ là tứ diện đều, có cạnh bằng a.

Gọi I là trung điểm của $A'D'$, G là trọng tâm tam giác đều $A'B'D'$

$\Rightarrow B'I = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, B'G = \dfrac{2}{3}B'I = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}, S_{A'B'D'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$AG = \sqrt{AB'^2 - B'G^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

$V_{A.A'B'D'} = \dfrac{1}{3}AG \cdot S_{A'B'D'} = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}} \cdot a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{12}$.

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2V_{ABD.A'B'D'} = 6V_{A.A'B'D'} = 6 \cdot \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q). Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q) ?

(A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) Vô số .

Lời giải.

Qua M có vô số mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q). Đó là các mặt phẳng chứa d, với d là đường thẳng qua M và vuông góc với (P) và (Q).

Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Tính thể tích V của khối nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và chiều cao $h = 4$.

(A) $V = 4\pi$. (B) $V = 12\pi$. (C) $V = 16\pi\sqrt{3}$. (D) $V = 4$.

Lời giải.

Thể tích V của khối nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và chiều cao $h = 4$ là $V = \dfrac{1}{3}\pi\left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot 4 = 4\pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ với $A(-2;3;1)$, $B(3;0;-1)$, $C(6;5;0)$. Toạ độ đỉnh D là

(A) $D(1;8;-2)$. (B) $D(11;2;2)$. (C) $D(1;8;2)$. (D) $D(11;2;-2)$.

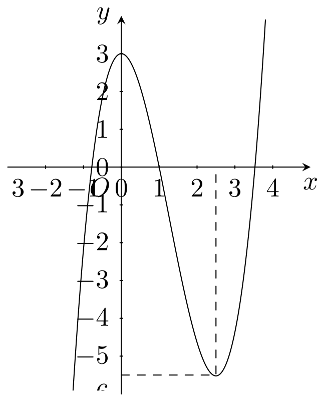
Lời giải.

Ta có $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - x_D = 3 + 2 \\ 5 - y_D = 0 - 3 \\ -z_D = -1 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 8 \\ z_D = 2 \end{cases} \Rightarrow D\,(1; 8; 2).$

Chọn đáp án C □

Câu 33.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Đặt $g(x) = f(x^2)$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.

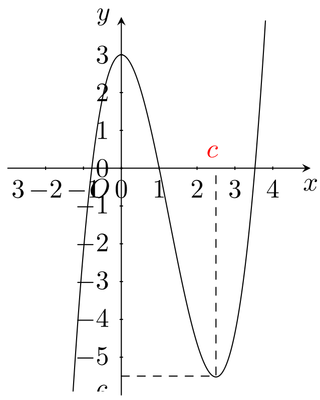


A. 5. B. 4. C. 3. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2x \cdot f'(x)$;

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = c \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = c \end{array}\right.$.



(với $2 < c < 3$ được biểu diễn bởi hình vẽ trên)

Vậy, phương trình $g'(x) = 0$ có 2 nghiệm.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **đúng**?

A. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) .

B. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì a song song với b.

C. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho (với điều kiện đường thẳng không vuông góc với mặt phẳng).

D. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng $[P]$ bằng góc giữa đường thẳng a và đường thẳng b với b vuông góc với (P).

Lời giải.

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho (với điều kiện đường thẳng không vuông góc với mặt phẳng).

Chọn đáp án C □

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f'(x) - 2018f(x) = 2018x^{2017}\mathrm{e}^{2018x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 2018$. Tính $f(1)$.

A. $f(1) = 2019\mathrm{e}^{2018}$. B. $f(1) = 2019\mathrm{e}^{-2018}$.

(C) $f(1)=2017\mathrm{e}^{2018}$.
(D) $f(1)=2018\mathrm{e}^{2018}$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x)-2018f(x)=2018x^{2017}\mathrm{e}^{2018x}\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2018x}f'(x)-2018\mathrm{e}^{-2018x}f(x)=2018x^{2017}$.

$\Rightarrow \left(\mathrm{e}^{-2018x}f(x)\right)'=2018x^{2017}\Rightarrow \mathrm{e}^{-2018x}f(x)$ là 1 nguyên hàm của$2018x^{2017}$.

Ta có: $\displaystyle\int 2018x^{2017}\,\mathrm{d}x=x^{2018}+C\Rightarrow \mathrm{e}^{-2018x}f(x)=x^{2018}+C_0$.

Mà $f(0)=2018\Rightarrow 2018=C_0\Rightarrow \mathrm{e}^{-2018x}f(x)=x^{2018}+2018\Rightarrow f(x)=x^{2018}\mathrm{e}^{2018x}+2018\mathrm{e}^{2018x}$

$\Rightarrow f(1)=\mathrm{e}^{2018}+2018\mathrm{e}^{2018}=2019\mathrm{e}^{2018}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Tính thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.

(A) $\dfrac{a^3}{3}$.
(B) $\dfrac{a^3}{2}$.
(C) a^3.
(D) $\dfrac{a^3}{6}$.

Lời giải.

Thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a là: a^3.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Toạ độ của vec-tơ $\vec{a}$ là

(A) $(2;-1;-3)$.
(B) $(-3;2;-1)$.
(C) $(-1;2;-3)$.
(D) $2;-3;-1$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a}=-1\cdot\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}\Rightarrow$ Toạ độ của vec-tơ $\vec{a}=(-1;2;-3)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Cho $\log_3 x=3\log_3 2$. Khi đó giá trị của x là

(A) 8.
(B) 6.
(C) $\dfrac{2}{3}$.
(D) 9.

Lời giải.

Sử dụng công thức $\log_a b^c=c\log_a b\,(0<a\neq 1,b>0)$, ta có $\log_3 x=3\log_3 2\Leftrightarrow \log_3 x=\log_3 2^3\Leftrightarrow x=8$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2+2x+5$ trên nửa khoảng $[-4;\infty)$ là

(A) $\min\limits_{[-4;\infty)} y=5$.
(B) $\min\limits_{[-4;\infty)} y=-17$.
(C) $\min\limits_{[-4;\infty)} y=4$.
(D) $\min\limits_{[-4;\infty)} y=-9$.

Lời giải.

Ta có: $y=x^2+2x+5\Rightarrow y'=2x+2=0\Leftrightarrow x=-1$.

Hàm số $y=x^2+2x+5$ liên tục trên $[-4;+\infty)$ có $y(-4)=13, y(-1)=4, \lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$.

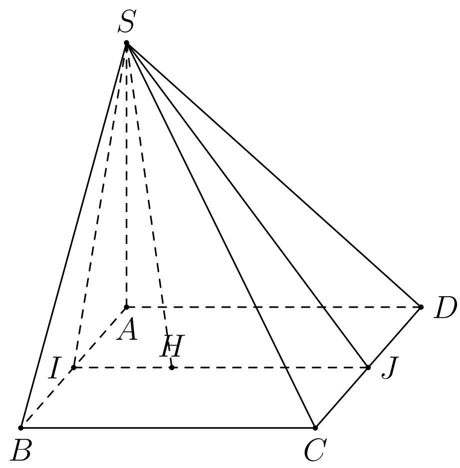
Vậy $\min\limits_{[-4;+\infty)} y=4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, biết $SA=SB, SC=SD, (SAB)\perp(SCD)$. Tổng diện tích hai tam giác SAB, SCD bằng $\dfrac{7a^2}{10}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

(A) $\dfrac{a^3}{15}$.
(B) $\dfrac{4a^3}{25}$.
(C) $\dfrac{a^3}{5}$.
(D) $\dfrac{4a^3}{15}$.

Lời giải.



Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD.

$\triangle SAB, \triangle SCD$ cân tại $S \Rightarrow SI \perp AB, SJ \perp CD$.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp SJ \\ CD \perp IJ \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SIJ) \Rightarrow (SCD) \perp (SIJ)$

Tương tự: $(SAB) \perp (SIJ) \Rightarrow ((SAB),(SCD)) = (SI, SJ) = \widehat{ISJ} = 90°$.

Kẻ $SH \perp JI$. Mà $SH \subset (SIJ) \Rightarrow SH \perp CD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ta có: $S_{SAB} + S_{SCD} = \frac{1}{2}SI \cdot AB + \frac{1}{2}SJ \cdot CD = \frac{1}{2}SI \cdot a + \frac{1}{2}SJ \cdot a = \frac{1}{2}(SI + SJ)a = \frac{7a^2}{10}$

$\Rightarrow SI + SJ = \frac{7a}{5}$.

$\triangle SIJ$ vuông tại $S \Rightarrow SI^2 + SJ^2 = JI^2 \Rightarrow (SI + SJ)^2 - 2SI \cdot SJ = a^2 \Leftrightarrow \left(\frac{7a}{5}\right)^2 - 2SI \cdot SJ = a^2 \Leftrightarrow SI \cdot SJ = SH \cdot JI \Leftrightarrow \frac{12a^2}{25} = SH \cdot a \Leftrightarrow SH = \frac{12a}{25}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{12a}{25}a^2 = \frac{4a^3}{25}$.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{\sqrt{4x^2 - 2x + m}}$ có hai đường tiệm cận đứng?

(A) 2020. (B) 4038. (C) 2018. (D) 2019.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{4x^2 - 2x + m} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x + m = 0$.

Đặt $f(x) = 4x^2 - 2x + m$ có $\Delta' = 1 - 4m$.

Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng khi và chỉ khi $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{1}{2}$.

Điều này tương đương với $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4m > 0 \\ 1 + 1 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ m < \frac{1}{4} \quad m \neq -2 \right.$.

Lại có $m \in \mathbb{Z}, m \in [-2019; 2019] \Rightarrow m \in \{-2019; -2018; ...; 0\} \setminus \{-2\}$.

Vậy có 2019 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên 2 thẻ và nhân 2 số ghi trên thẻ với nhau. Tính xác suất để tích 2 số ghi trên 2 thẻ được rút là số lẻ.

(A) $\frac{1}{9}$. (B) $\frac{7}{18}$. (C) $\frac{5}{18}$. (D) $\frac{3}{18}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_9^2 = 36$.

Gọi A là biến cố "tích 2 số ghi trên 2 thẻ được rút ra là số lẻ".
Để tích 2 số là số lẻ thì 2 số đó đều phải là 2 số lẻ, do đó ta có $n(A) = \mathrm{C}_5^2 = 10$.
Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$.
Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A $\displaystyle\int \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \mathrm{d}x = \frac{\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x}, (g(x) \neq 0, \forall x \in \mathrm{R})$.

B $\displaystyle\int f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

C $\displaystyle\int k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x, (k \neq 0, k \in \mathbb{R})$.

D $\displaystyle\int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo tính chất của nguyên hàm ta có mệnh đề sai là $\displaystyle\int \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \mathrm{d}x = \frac{\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x}, (g(x) \neq 0, \forall x \in \mathrm{R})$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Số nghiệm của phương trình $\ln(x^2 - 6x + 7) = \ln(x - 3)$ là

A 2. **B** 1. **C** 0. **D** 3.

Lời giải.
Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 7 = x - 3 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 10 = 0 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 5 \end{array}\right. \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Chọn đáp án B □

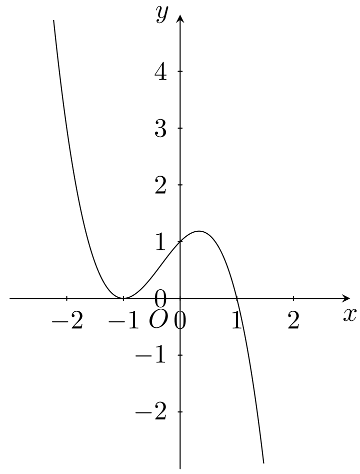
Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+6z-1 = 0$. Tâm của mặt cầu (S) là

A $I(2;-1;3)$. **B** $I(-2;1;3)$. **C** $I(2;-1;-3)$. **D** $I(2;1;-3)$.

Lời giải.
Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;-3)$.
Chọn đáp án C □

Câu 46.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f(1) = 1, f(-1) = -\dfrac{1}{3}$. Đặt $g(x) = f^2(x) - 4f(x)$. Cho biết đồ thị của $y = f'(x)$ có dạng như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



Ⓐ Hàm số $g(x)$ có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

B Hàm số $g(x)$ có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

Ⓒ Hàm số $g(x)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

Ⓓ Hàm số $g(x)$ không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Từ hình vẽ suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$-\dfrac{1}{3}$	↗	1	↘	

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x) \le 1 \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $g(x) = f^2(x) - 4f(x) \Rightarrow g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) - 4f'(x) = 2f'(x) \cdot (f(x) - 2)$.

Vì $f(x) \le 1 \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x) - 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↘	-3	↗	

Từ bảng biên thiên suy ra hàm số có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 47. Đầu năm 2016, Curtis Cooper và các cộng sự tại nhóm nghiên cứu Đại học Central Mis-souri, Mỹ công bố số nguyên tố lớn nhất tại thời điểm đó. Số nguyên tố này là một dạng Mersenne, có giá trị bằng $M = 2^{74207281} - 1$. Hỏi M có bao nhiêu chữ số?

Ⓐ 2233862. Ⓑ 22338623. Ⓒ 22338617. **D** 22338618.

Lời giải.

Nếu $10^n \le M < 10^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ thì số M có $n + 1$ chữ số.

Trước hết, ta xác định số chữ số của $M + 1 = 2^{74207281}$.

Ta có

$$10^n \le 2^{74207281} < 10^{n+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 10^n \le 2^{74207281} \\ 10^{n+1} > 2^{74207281} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \le \log\left(2^{74207281}\right) \\ n+1 > \log\left(2^{74207281}\right) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} n \le 74207281 \cdot \log 2 \approx 22338617,5 \\ n+1 > 74207281 \cdot \log 2 \approx 22338618 \end{cases} \Leftrightarrow n = 22338617$$

Vậy $M+1 = 2^{74207281}$ có $n+1 = 22338618$ chữ số.
Bây giờ, ta tìm số chữ số của $M = 2^{74207281} - 1$.
Vì $M+1$ là số có 22338618 chữ số nên M hoặc có 22338618 chữ số hoặc có 22338617 chữ số.
Nếu M có 22338617 chữ số thì $M+1 = 10^{22338617} \Leftrightarrow 2^{74207281} = 10^{22338617} \Leftrightarrow 2^{51868664} = 5^{22338617}$.
Điều này là vô lý do 2 là số chẵn và 5 là số lẻ.
Vậy $M = 2^{74207281} - 1$ là số có 22338618 chữ số.
Chọn đáp án D □

Câu 48. Có bao nhiêu giá trị thực của m để bất phương trình

$$(2m+2)(x+1)\left(x^3-1\right) - \left(m^2+m+1\right)\left(x^2-1\right) + 2x + 2 < 0$$

vô nghiệm?

(A) Vô số . (B) 0. (C) 1. **(D) 2.**

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned} &(2m+2)(x+1)\left(x^3-1\right) - \left(m^2+m+1\right)\left(x^2-1\right) + 2x + 2 < 0 \\ \Leftrightarrow &(x+1)\left[(2m+2)\left(x^3-1\right) - \left(m^2+m+1\right)(x-1) + 2\right] < 0 \\ \Leftrightarrow &(x+1)\left[(2m+2)x^3 - (2m+2) - \left(m^2+m+1\right)x + \left(m^2+m+1\right) + 2\right] < 0 \\ \Leftrightarrow &(x+1)\left[(2m+2)x^3 - \left(m^2+m+1\right)x + \left(m^2-m+1\right)\right] < 0 \qquad (1) \end{aligned}$$

Bất phương trình (1) vô nghiệm khi và chỉ khi

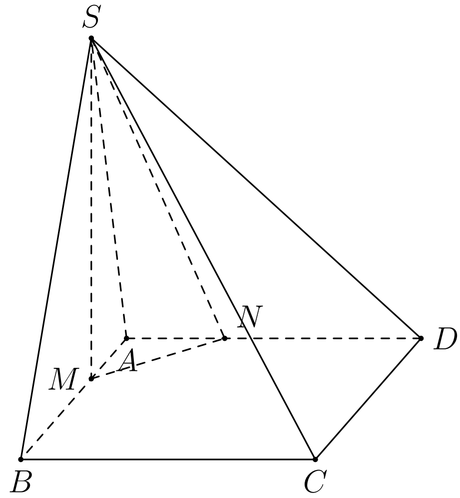
$$(x+1)\left[(2m+2)x^3 - \left(m^2+m+1\right)x + \left(m^2-m+1\right)\right] \ge 0 \text{ luôn đúng với mọi } x. \qquad (2)$$

Suy ra $x=-1$ là nghiệm của $(2m+2)x^3 - (m^2+m+1)x + (m^2-m+1)$.
$\Leftrightarrow -(2m+2) + (m^2+m+1) + (m^2-m+1) = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$.
+) $m=0$, ta có (2) $\Leftrightarrow (x+1)(4x^3-3x+1) \ge 0, \forall x$ (thoả mãn).
+) $m=1$, ta có (2) $\Leftrightarrow (x+1)(4x^3-3x+1) \ge 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(4x^2-4x+1) \ge 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(2x-1)^2 \ge 0, \forall x$(thoả mãn).
Vậy có 2 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án D □

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Hai điểm M, N thuộc các cạnh AB và AD (M, N không trùng với A, B, D) sao cho $\dfrac{AB}{AM} + 2.\dfrac{AD}{AN} = 4$. Kí hiệu V, V_1 lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $S.MBCDN$. Tìm giá trị lớn nhất của $\dfrac{V_1}{V}$.

(A) $\dfrac{2}{3}$. **B** $\dfrac{3}{4}$. (C) $\dfrac{1}{6}$. (D) $\dfrac{14}{17}$.

Lời giải.



Do các khối chóp $S.ABCD$ và $S.MBCDN$ có cùng chiều cao kẻ từ S nên $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{S_{MBCDN}}{S_{ABCD}}$

Ta có: $\dfrac{AB}{AM}+2\dfrac{AD}{AN}=4$.

ÁP dụng BĐT cô-si, ta có:

$\dfrac{AB}{AM}+2\dfrac{AD}{AN}\ge 2\sqrt{\dfrac{AB}{AM}.2\dfrac{AD}{AN}}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\dfrac{AB\cdot AD}{AM\cdot AN}}$ (với $\dfrac{AB}{AM}>1$, $\dfrac{AD}{AN}>1$)

$\Rightarrow 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\dfrac{AB\cdot AD}{AM\cdot AN}}\le 4\Leftrightarrow\dfrac{AB\cdot AD}{AM\cdot AN}\le 2$

$\Rightarrow\dfrac{S_{ABD}}{S_{AMN}}\le 2\Rightarrow\dfrac{S_{ABCD}}{S_{AMN}}\le 4$ (do $S_{ABD}=\dfrac{1}{2}S_{ABCD}$)

$\Rightarrow\dfrac{S_{AMN}}{S_{ABCD}}\geqslant\dfrac{1}{4}\Rightarrow\dfrac{S_{ABCDN}}{S_{ABCD}}\geqslant\dfrac{3}{4}\Rightarrow\dfrac{V_1}{V}\le\dfrac{3}{4}$.

Tỉ số $\dfrac{V_1}{V}$ đạt GTLN bằng $\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{AB}{AM}+2\dfrac{AD}{AN}=4\\ \dfrac{AB}{AM}=2\dfrac{AD}{AN}\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}\dfrac{AB}{AM}=2\\ \dfrac{AD}{AN}=1\end{cases}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 50. Cho hàm số $y=\left|\sin^3x-m\sin x+1\right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Tính số phần tử của S.

A 1. (B) 2. (C) 3. (D) 0.

Lời giải.

Trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, hàm số $y=\sin x$ đồng biến.

Đặt $t=\sin x, x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$.

Khi đó hàm số $y=\left|\sin^3x-m\sin x+1\right|$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi $y=f(t)=|t^3-mt+1|$ đồng biến trên $(0;1)$.

Xét hàm số $y=f(t)=|t^3-mt+1|$ trên khoảng $(0;1)$ có $f'(t)=3t^2-m$.

- Khi $m=0: f'(x)=3x^2>0,\forall x\Rightarrow y=f(x)=x^3+1$ đồng biến trên $(0;1)$.
  Và đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3+1$ cắt Ox tại điểm duy nhất $x=-1$.
  $\Rightarrow y=g(x)=|x^3-mx+1|$ đồng biến trên $(0;1)\Rightarrow m=0$ thoả mãn.
- $m>0: f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1=-\sqrt{\dfrac{m}{3}}, x_2=\sqrt{\dfrac{m}{3}}$.
  Hàm số $y=f(x)=x^3-mx+1$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{\dfrac{m}{3}}\right)$ và $\left(\sqrt{\dfrac{m}{3}};+\infty\right)$.
  Nhận xét: $(0;1)\not\subset\left(\sqrt{\dfrac{m}{3}};+\infty\right),(0;1)\not\subset\left(-\infty;-\sqrt{\dfrac{m}{3}}\right),\forall m>0$.

TH1:$-\sqrt{\dfrac{m}{3}}<0<\sqrt{\dfrac{m}{3}}<1 \Leftrightarrow 0<m<3$

x		$-\sqrt{\dfrac{m}{3}}$		0		$\sqrt{\dfrac{m}{3}}$		1	
$f'(x)$	$+$		$-$		$-$		$+$		$+$

Để $y=g\left(x\right)=\left|x^3-mx+1\right|$ đồng biến trên $(0;1)$ thì $x^3-mx+1=0$ có nghiệm (bội lẻ) là $x=\sqrt{\dfrac{m}{3}}$

$\Rightarrow \dfrac{m\sqrt{m}}{3\sqrt{3}}-\dfrac{m\sqrt{m}}{\sqrt{3}}+1=0 \Leftrightarrow -2m\sqrt{m}+3\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow m\sqrt{m}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow m=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$(TM).

TH2:$-\sqrt{\dfrac{m}{3}}<0<1\le\sqrt{\dfrac{m}{3}} \Leftrightarrow m\ge 3$

x		$-\sqrt{\dfrac{m}{3}}$		0		1		$\sqrt{\dfrac{m}{3}}$	
$f'(x)$	$+$		$-$		$-$		$-$		$+$

Để $y=g\left(x\right)=\left|x^3-mx+1\right|$ đồng biến trên $(0;1)$ thì $x^3-mx+1\le 0, \forall x\in(0;1)$

$\Rightarrow mx\le x^3+1, \forall x\in(0;1) \Rightarrow m\le x^2+\dfrac{1}{x}, \forall x\in(0;1)$.

Xét hàm số $y=x^2+\dfrac{1}{x}, \forall x\in(0;1) \Rightarrow y'=2x-\dfrac{1}{x^2}, y'=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\in(0;1)$.

Hàm số liên tục trên $(0;1)$ và $y\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}; y\left(1\right)=2; \lim\limits_{x\to 0^+} y=+\infty \Rightarrow \min\limits_{(0;1)} y=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Để $m\le x^2+\dfrac{1}{x}, \forall x\in(0;1)$ thì $m\le\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow$ không có giá trị của m thoả mãn.

Vậy chỉ có giá trị $m=0$ thoả mãn.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. D	3. B	4. C	5. B	6. D	7. B	8. D	9. A	10. C
11. C	12. A	13. D	14. D	15. C	16. B	17. C	18. B	19. D	20. A
21. C	22. B	23. C	24. D	25. C	26. B	27. C	28. A	29. D	30. D
31. A	32. C	33. D	34. C	35. A	36. C	37. C	38. A	39. C	40. B
41. D	42. C	43. A	44. B	45. C	46. B	47. D	48. D	49. B	50. A

11 ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN QUỐC HỌC, HUẾ – LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Tìm hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\frac{x}{2}+\frac{4}{x}\right)^{18}$ với $x \neq 0$.

A $2^9\mathrm{C}_{18}^9$. **B** $2^{11}\mathrm{C}_{18}^7$. **C** $2^8\mathrm{C}_{18}^8$. **D** $2^8\mathrm{C}_{18}^{10}$.

Lời giải.

Ta có $\left(\frac{x}{2}+\frac{4}{x}\right)^{18}=\sum\limits_{k=0}^{18}\mathrm{C}_{18}^k\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{18-k}\cdot\left(\frac{4}{x}\right)^k=\sum\limits_{0}^{18}\mathrm{C}_{18}^k\cdot 2^{3k-18}\cdot x^{18-2k}$.

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(\frac{x}{2}+\frac{4}{x}\right)^{18}$ là $\mathrm{C}_{18}^k\cdot 2^{3k-18}\cdot x^{18-2k}$.

Số hạng không chứa x tương ứng với $18-2k=0 \Leftrightarrow k=9$. Suy ra hệ số của số hạng không chứa x là $2^9\cdot\mathrm{C}_{18}^9$.

Chọn đáp án A □

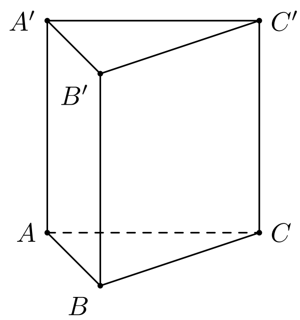
Câu 2. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=2a$, $AA'=\sqrt{3}a$. Tính thể tích của khối chóp $ABC.A'B'C'$ theo a.

A $V=a^3$. **B** $V=3a^3$. **C** $V=\frac{a^3}{4}$. **D** $V=\frac{3a^3}{4}$.

Lời giải.

Diện tích tam giác đều ABC có cạnh $2a$ là $S=\frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}a^2$.

Suy ra thể tích của khối lăng trụ là $V=B\cdot h=\sqrt{3}a^2\cdot\sqrt{3}a=3a^3$.



Chọn đáp án B □

Câu 3. Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019;2019]$ của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A 2007. **B** 2010. **C** 2009. **D** 2008.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}=0$ nên đồ thị hàm số luôn có 1 tiệm cận ngang $y=0$. Để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có đúng 1 tiệm cận đứng.

Trường hợp 1. $x^2+x-m=0 \quad (1)$ có nghiệm kép $x_1=x_2\geq 3$, suy ra $\Delta=1+4m=0\Leftrightarrow m=-\frac{1}{4}$ (loại do m nguyên).

Trường hợp 2. (1) có nghiệm x_1; x_2 thỏa $x_1<3, x_2=3$. Phương trình (1) nhận 3 là nghiệm khi $3^2+3-m=0\Leftrightarrow m=12$. Thử lại thỏa mãn.

Trường hợp 3. (1) có nghiệm x_1; x_2 thỏa

$$x_1<3<x_2$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad 1\cdot f(3)<0\\&\Leftrightarrow\quad 9+3-m<0\\&\Leftrightarrow\quad m>12.\end{aligned}$$

Kết hợp 3 trường hợp ta được $m \geq 12$, lại có $m \in [-2019; 2019]$ nên $m \in [12; 2019]$ nên có 2008 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Cho đa thức $f(x) = (1+3x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$. Tìm hệ số a_3, biết rằng $a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n = 49152n$.

A $a_3 = 945$. B $a_3 = 252$. C $a_3 = 5670$. D $a_3 = 1512$.

Lời giải.

Xét khai triển $(1+3x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (1)$.

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được $3n(1+3x)^{n-1} = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} \quad (2)$.

Thay $x = 1$ vào (2) ta được

$3n \cdot 4^{n-1} = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n \Leftrightarrow 3n \cdot 4^{n-1} = 49152n \Leftrightarrow 4^{n-1} = 4^7 \Leftrightarrow n = 8$.

Xét khai triển nhị thức Niu–tơn $(1+3x)^8 = \sum\limits_{k=0}^{8} \mathrm{C}_8^k \cdot (3x)^k = \sum\limits_{k=0}^{8} \mathrm{C}_8^k \cdot 3^k \cdot x^k$.

Số hạng thứ 4 có $k = 3$ nên $a_3 = \mathrm{C}_8^3 \cdot 3^3 = 1512$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\dfrac{1}{3}\left|\cos^3 x\right| - 3\cos^2 x + 5|\cos x| - 3 + 2m = 0$ có đúng bốn nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 2\pi]$.

A $-\dfrac{3}{2} < m < -\dfrac{1}{3}$. B $\dfrac{1}{3} \leq m < \dfrac{3}{2}$. C $\dfrac{1}{3} < m < \dfrac{3}{2}$. D $-\dfrac{3}{2} \leq m \leq -\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t = \cos x$, $t \in (-1; 1]$.

Phương trình trở thành $2m = -\dfrac{1}{3}\left|t^3\right| + 3t^2 - 5|t| + 3 \Leftrightarrow 2m = f(|t|)$ với $f(t) = -\dfrac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 5t + 3$.

Ta có $f'(t) = -t^2 + 6t - 5 \leq 0, \forall t \in (-1; 1]$.

Bảng biến thiên

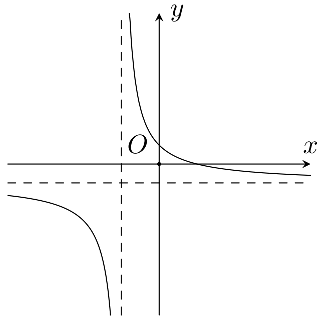
t	-1	0	1
$f'(t)$	0	-	0
$f(t)$	$\dfrac{34}{3}$	3	$\dfrac{2}{3}$
$f(\lvert t\rvert)$	$\dfrac{2}{3}$	3	$\dfrac{2}{3}$

Phương trình $\dfrac{1}{3}\left|\cos^3 x\right| - 3\cos^2 x + 5|\cos x| - 3 + 2m = 0$ có đúng bốn nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ khi và chỉ khi phương trình $2m = f(|t|)$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $(-1; 1]$. Điều này tương đương với $\dfrac{2}{3} < 2m < 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} < m < \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 6.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề dưới đây.

A Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị trái dấu.

B Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.

C Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị nằm bên phải trục tung.

D Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ nằm bên trái trục tung.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có tiệm cận đứng $y = \dfrac{a}{c}$ nằm bên trái trục tung nên ta có $\dfrac{a}{c} < 0$ hay $ac < 0$.

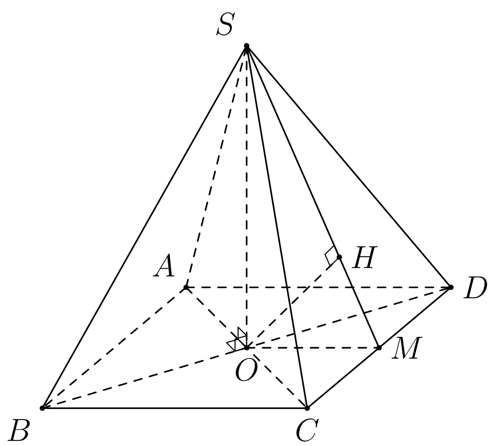
Xét hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Hàm số bậc ba không có hoặc có hai cực trị. Hàm số bậc ba này có $ac < 0$ nên $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu hay hàm số bậc ba có hai điểm cực trị trái dấu.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách d từ tâm O của đáy $ABCD$ đến một mặt bên theo a.

A $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. B $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. C $d = \dfrac{2a\sqrt{5}}{3}$. D $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của CD.

Vì $S.ABCD$ là chóp tứ giác đều nên $SC = SD$.

Do đó $\triangle SCD$ cân tại $S \Rightarrow SM \perp CD$.

Lại có $ABCD$ là hình vuông nên ta có $OM \perp CD$; $OM = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Suy ra $CD \perp (SOM) \Rightarrow CD \perp OH$ (1).

Trong mặt phẳng (SOM) kẻ $OH \perp SM$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $OH \perp (SCD)$

nên $\mathrm{d}(O; (SCD)) = OH$

Xét $\triangle SOM$ vuông tại O (do $SO \perp (ABCD)$) có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{9}{2a^2}$.

Suy ra $OH = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Cho tích phân $I = \int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 32$. Tính tích phân $J = \int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x$.

(A) 32. (B) 64. (C) 8. **D** 16.

Lời giải.

Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$. Với $x = 0$ thì $t = 0$, $x = 2$ thì $t = 4$.

Suy ra $\int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(t)dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot 32 = 16$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Gọi T là tổng các nghiệm của phương trình $\log^2_{\frac{1}{3}} x - 5\log_3 x + 4 = 0$. Tính T.

(A) $T = 4$. (B) $T = -5$. **C** $T = 84$. (D) $T = 5$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log^2_{\frac{1}{3}} x - 5\log_3 x + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (-\log_3 x)^2 - 5\log_3 x + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \log^2_3 x - 5\log_3 x + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = 4 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 3^4 = 81. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là $3 + 81 = 84$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2a - \dfrac{5}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

(A) $a = -\frac{3}{4}$. (B) $a = \frac{4}{3}$. (C) $a = -\frac{4}{3}$. **D** $a = \frac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2} = \frac{1}{4}$.

Ta lại có $f(0) = 2a - \frac{5}{4}$.

Để hàm số liên tục tại $x = 0$ thì $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \frac{1}{4} = 2a - \frac{5}{4} \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Tìm giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

A 6. (B) 3. (C) -26. (D) -20.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

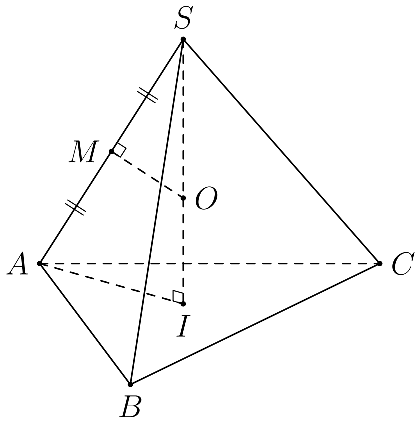
$y'' = 6x - 6$, $y''(-1) = -12 < 0$, $y''(3) = 12 > 0$. Do đó hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, giá trị cực đại $y = 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho mặt cầu tâm O và tam giác ABC có ba đỉnh nằm trên mặt cầu với góc $\widehat{BAC} = 30°$ và $BC = a$. Gọi S là điểm nằm trên mặt cầu, không nằm trên mặt phẳng (ABC) và thoả mãn $SA = SB = SC$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Tính thể tích V của khối cầu tâm O theo a.

A $V = \dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi a^3$. **B** $V = \dfrac{32\sqrt{3}}{27}\pi a^3$. **C** $V = \dfrac{4\sqrt{3}}{27}\pi a^3$. **D** $V = \dfrac{15\sqrt{3}}{9}\pi a^3$.

Lời giải.



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Vì $SA = SB = SC$ nên $SI \perp (ABC)$.

Khi đó ta có $(SA, (ABC)) = \widehat{SAI} = 60°$.

Xét $\triangle ABC$, theo định lí hàm số sin ta có

$\dfrac{BC}{\sin\widehat{BAC}} = 2R_{\triangle ABC} \Leftrightarrow \dfrac{a}{\sin 30°} = 2AI$

$\Rightarrow AI = a \Rightarrow SI = AI \cdot \tan 60° = a\sqrt{3}$.

Ta có $\triangle SMO \sim \triangle SIA$, suy ra $\dfrac{SM}{SI} = \dfrac{SO}{SA}$.

Do đó $SO = \dfrac{SM \cdot SA}{SI} = \dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$.

Vậy thể tích khối cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{2\sqrt{3}a}{3}\right)^3 = \dfrac{32\sqrt{3}}{27}\pi a^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Cho tích phân $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Tính tích phân $J = \displaystyle\int_0^2 [3f(x) - 2]\,\mathrm{d}x$.

A $J = 6$. **B** $J = 2$. **C** $J = 8$. **D** $J = 4$.

Lời giải.

Ta có $J = \displaystyle\int_0^2 [3f(x) - 2]\,\mathrm{d}x = 3\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_0^2 \mathrm{d}x = 3 \cdot 2 - (2x)\Big|_0^2 = 6 - 4 = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x) = x^2\mathrm{e}^{ax}\,(a \neq 0)$ sao cho $F\left(\dfrac{1}{a}\right) = F(0) + 1$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A $0 < a \leq 1$. **B** $a < -2$. **C** $a \geq 3$. **D** $1 < a < 2$.

Lời giải.

Ta có $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $F\left(\dfrac{1}{a}\right) = F(0) + 1$. Khi đó ta có

$$F\left(\tfrac{1}{a}\right) - F(0) = 1$$
$$\Leftrightarrow \int\limits_0^{\frac{1}{a}} x^2 \cdot \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} \end{cases}$. Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2}{a} \cdot \mathrm{e}^{ax}\Big|_0^{\frac{1}{a}} - \frac{2}{a} \cdot \int\limits_0^{\frac{1}{a}} x\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{e}}{a^3} - \frac{2}{a} \cdot \int\limits_0^{\frac{1}{a}} x\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{e}}{a^3} - \frac{2}{a} \cdot I_1 \text{ với } I_1 = \int\limits_0^{\frac{1}{a}} x\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} \end{cases}$. Suy ra

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{x}{a} \cdot \mathrm{e}^{\alpha x}\Big|_0^{\frac{1}{a}} - \frac{1}{a}\int\limits_0^{\frac{1}{a}} \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{e}}{a^2} - \frac{\mathrm{e}}{a^2} + \frac{1}{a^2} \\ &= \frac{1}{a^2}. \end{aligned}$$

Do đó $I = \dfrac{\mathrm{e}}{a^3} - \dfrac{2}{a^3} = \dfrac{e-2}{a^3} = 1 \Rightarrow a = \sqrt[3]{\mathrm{e}-2} \Rightarrow 0 < a \leq 1$.

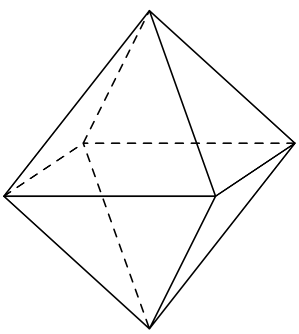
Chọn đáp án A □

Câu 15. Hình bát diện đều thuộc loại khối đa diện đều nào sau đây?

A $\{3,4\}$. **B** $\{3,3\}$. **C** $\{5,3\}$. **D** $\{4,3\}$.

Lời giải.

Hình bát diện đều mỗi mặt có 3 cạnh và mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng bốn mặt nên nó thuộc loại $\{3,4\}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực đại tại $x = 0$.

(A) $m = 1$. (B) $m = 2$. (C) $m = -2$. (D) $m = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m$; $y'' = 6x - 6$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y'(0) = 0 \\ y''(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ -6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$.

Thử lại, thay $m = 0$, hàm số trở thành $y = x^3 - 3x^2$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$. Vậy $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$?

(A) $y = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$. (B) $y = \log_{\frac{\pi}{4}}\left(2x^2 + 1\right)$.

(C) $y = \left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^x$. (D) $y = \log_{\frac{2}{3}} x$.

Lời giải.

Hàm số $y = \left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^x$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ và có cơ số $0 < \dfrac{2}{\mathrm{e}} < 1$ nên hàm số nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$.

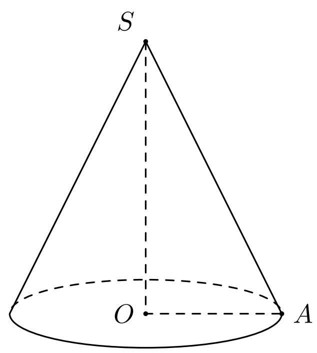
Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Gọi l, h, r lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính mặt đáy của một hình nón. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đó theo l, h, r.

(A) $S_{\text{xq}} = 2\pi rl$. (B) $S_{\text{xq}} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$. (C) $S_{\text{xq}} = \pi rh$. (D) $S_{\text{xq}} = \pi rl$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính diện tích xung quanh của hình nón $S_{\text{xq}} = \pi rl$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x} < \frac{1}{4}$.

(A) $S = [1; 2]$. (B) $S = (-\infty; 1)$. (C) $S = (1; 2)$. (D) $S = (2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x} < \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x} < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow\ & -x^2 + 3x > 2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 3x + 2 < 0 \\ \Leftrightarrow\ & 1 < x < 2. \end{aligned}$$

Vậy $S = (1; 2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA' = \frac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó theo a.

(A) $V = a^3\sqrt{\frac{3}{2}}$. (B) $V = \frac{2a^3}{3}$. (C) $V = \frac{3a^3}{4\sqrt{2}}$. (D) $V = a^3$.

Lời giải.

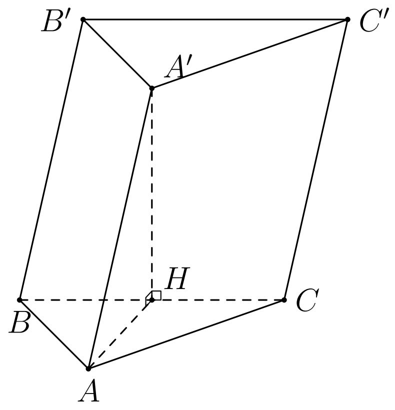
Gọi H là trung điểm BC.

Ta có $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$\triangle A'AH$ vuông tại H nên ta có

$A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{ABC} = \frac{3a^3}{4\sqrt{2}}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$.

(A) $\frac{937}{12}$. (B) $\frac{343}{12}$. (C) $\frac{793}{4}$. (D) $\frac{397}{4}$.

Lời giải.

Xét phương trình $-x^3 + 12x = -x^2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -3 \\ x = 4. \end{array}\right.$

Diện tích S của hình phẳng (H) là

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_{-3}^{4} \left|x^3 - x^2 - 12x\right| \, \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{-3}^{0} \left|x^3 - x^2 - 12x\right| \, \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{4} \left|x^3 - x^2 - 12x\right| \, \mathrm{d}x \\ &= \left|\int\limits_{-3}^{0} \left(x^3 - x^2 - 12x\right) \, \mathrm{d}x\right| + \left|\int\limits_{0}^{4} \left(x^3 - x^2 - 12x\right) \, \mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6x^2\right)\Bigg|_{-3}^{0}\right| + \left|\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6x^2\right)\Bigg|_{0}^{4}\right| \\ &= \frac{937}{12}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

(A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.
B Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
(D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số không thể đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Tìm hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3 - 4x}{x - 2}$ tại điểm có tung độ $y = -\dfrac{7}{3}$.

(A) $\dfrac{9}{5}$.
(B) $-\dfrac{5}{9}$.
C $\dfrac{5}{9}$.
(D) -10.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{5}{(x-2)^2}$. Gọi $M\left(x_0; -\dfrac{7}{3}\right)$ là tiếp điểm, ta có

$$\begin{aligned} \frac{3 - 4x_0}{x_0 - 2} = -\frac{7}{3} &\Leftrightarrow 5x_0 = -5 \\ &\Leftrightarrow x_0 = -1. \end{aligned}$$

Vậy hệ số góc tiếp tuyến tại $M\left(x_0; -\dfrac{7}{3}\right)$ là $k = y'(-1) = \dfrac{5}{9}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0;\pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$.

B $F\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

C $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$.

D $F\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=3-\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int \frac{2\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x-\int\frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\\ &= 2\int\frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}(\sin x)-\int\frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Do đó $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{\sin x}+\cot x+C$.

Ta có $F'(x)=f(x)=\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}=0\Leftrightarrow\cos x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}\in(0;\pi)$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		$\nearrow$	$F\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\searrow$	

Hàm $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=\dfrac{\pi}{3}$.

Suy ra $-\dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}+\cot\dfrac{\pi}{3}+C=\sqrt{3}\Leftrightarrow-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}+C=\sqrt{3}\Leftrightarrow C=2\sqrt{3}$.

Do đó $F(x)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+2\sqrt{3}$ nên $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y=f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A 18. **B** 17. **C** 16. **D** 20.

Lời giải.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có $y'=(2x+3)f'\left(x^2+3x-m\right)$.

Vì $2x+3>0,\forall x\in(0;2)$. Do đó, để hàm số $y=f\left(x^2+3x-m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ thì

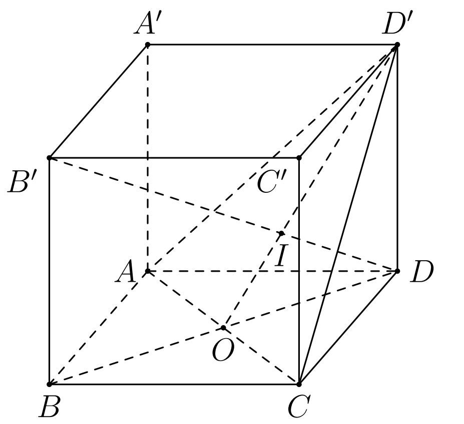
$f'\left(x^2+3x-m\right) \geq 0, \forall x \in (0;2) \quad (*)$
Đặt $t = x^2+3x-m$. Vì $x \in (0;2)$ nên $t \in (-m; 10-m)$.
Khi đó (*) trở thành $f'(t) \geq 0, \forall t \in (-m; 10-m)$.
Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có $\left[\begin{array}{l}10-m \leq -3\\ 1 \leq -m\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m \geq 13\\ m \leq -1\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}13 \leq m \leq 20\\ -10 \leq m \leq -1\end{array}\right.\\ m \in \mathbb{Z}.\end{cases}$
Suy ra $m \in \{-10; -9; \ldots; -2; -1; 13; 14; \ldots; 19; 20\}$. Vậy có 18 giá trị m thỏa yêu cầu đề bài.
Chọn đáp án A □

Câu 26. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Biết tích của khoảng cách từ điểm B' và điểm D đến mặt phẳng $(D'AC)$ bằng $6a^2$ $(a > 0)$. Giả sử thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là ka^3. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A $k \in (20; 30)$. **B** $k \in (100; 120)$. **C** $k \in (50; 80)$. **D** $k \in (40; 50)$.

Lời giải.

Gọi x là độ dài cạnh của hình lập phương. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, I là giao điểm của $B'D$ và $D'O$, suy ra I là giao điểm của $B'D$ và $(D'AC)$.
Đặt $h = \mathrm{d}(D, (D'AC))$.
Ta có $\dfrac{\mathrm{d}(B', (D'AC))}{\mathrm{d}(D, (D'AC))} = \dfrac{IB'}{ID} = 2$.
$\Rightarrow \mathrm{d}(B', (D'AC)) = 2\mathrm{d}(D, (D'AC)) = 2h$.
Theo giả thiết $2h^2 = 6a^2 \Rightarrow h^2 = 3a^2$.



Lại có tứ diện $DD'AC$ là tứ diện vuông tại đỉnh D nên ta có

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} + \frac{1}{DD'^2} = \frac{3}{x^2} \Rightarrow h^2 = \frac{x^2}{3}.$$

Suy ra $\dfrac{x^2}{3} = 3a^2 \Leftrightarrow x = 3a$.
Do đó thể tích khối lập phương bằng $27a^3 \Rightarrow k = 27$.
Chọn đáp án A □

Câu 27. Cho cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu $u_1 = -6$ và công sai $d = 4$. Tính tổng S của 14 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

A $S = 46$. **B** $S = 308$. **C** $S = 644$. **D** $S = 280$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng ta được

$$S = \frac{14}{2}\left(2u_1 + 13d\right) = 7\left(-6 \cdot 2 + 13 \cdot 4\right) = 280.$$

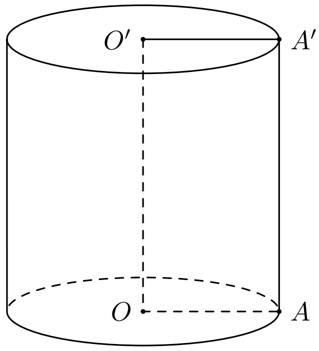
Chọn đáp án D □

Câu 28. Một khối trụ có thể tích bằng 25π. Nếu chiều cao của hình trụ tăng lên năm lần và giữ nguyên bán kính đáy thì được một hình trụ mới có diện tích xung quanh bằng 25π. Tính bán kính đáy r của hình trụ ban đầu.

(A) $r=15$. (B) $r=5$. **(C)** $r=10$. (D) $r=2$.

Lời giải.

Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình trụ ban đầu lần lượt là r, h.



Ta có hệ $\begin{cases} \pi r^2 h = 25\pi \\ 2\pi r 5h = 25\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} rrh = 25 \\ rh = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow r = 10.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 sao cho $y^x \cdot (\mathrm{e}^x)^{\mathrm{e}^y} \geq x^y \cdot (\mathrm{e}^y)^{\mathrm{e}^x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_x \sqrt{xy} + \log_y x$.

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (B) $2\sqrt{2}$. **(C)** $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$. (D) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & y^x \cdot (\mathrm{e}^x)^{\mathrm{e}^y} \geq x^y \cdot (\mathrm{e}^y)^{\mathrm{e}^x} \\ \Leftrightarrow\ & x \cdot \ln y + x \cdot \mathrm{e}^y \geq y \cdot \ln x + y \cdot \mathrm{e}^x \\ \Leftrightarrow\ & x \cdot (\ln y + \mathrm{e}^y) \geq y \cdot (\ln x + \mathrm{e}^x) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\ln y + \mathrm{e}^y}{y} \geq \frac{\ln x + \mathrm{e}^x}{x} \\ \Leftrightarrow\ & f(y) \geq f(x), \text{với hàm đặc trưng } f(t) = \frac{\ln t + e^t}{t}, t > 1. \end{aligned}$$

Ta có $f'(t) = -\dfrac{-\mathrm{e}^t t + \ln t + \mathrm{e}^t - 1}{t^2}$.

Đặt $g(t) = -\mathrm{e}^t t + \ln t + e^t - 1$.

Ta có $g'(t) = -e^t \cdot t + \dfrac{1}{t} < 0, \forall t > 1$ nên $f'(t) > 0, \forall t > 1$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$. Do đó $f(y) \geq f(x) \Leftrightarrow y \geq x \Leftrightarrow \log_x y \geq 1$.

Ta có $P = \log_x \sqrt{x \cdot y} + \log_y x = \dfrac{1}{2}(1 + \log_x y) + \dfrac{1}{\log_x y}$.

Đặt $u = \log_x y \Rightarrow u \geq 1$. Khi đó $P(u) = \dfrac{1}{2}(1+u) + \dfrac{1}{u}$, $P'(u) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{u^2} = 0 \Leftrightarrow u = \sqrt{2}$.

Bảng biến thiên:

x	-1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	2	↘	$\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$	↗	$+\infty$

Suy ra giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \dfrac{1}{x}$.

(A) $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$.

(B) $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$.

(C) $\dfrac{x^3}{3} - 3^x + \dfrac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$.

(D) $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3^x}{\ln 3} - \dfrac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \left(x^2 - 3^x + \dfrac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Tìm số hạng đầu u_1 của cấp số nhân (u_n) biết $u_1 + u_2 + u_3 = 168$ và $u_4 + u_5 + u_6 = 21$.

(A) $u_1 = 24$. (B) $u_1 = \dfrac{1344}{11}$. (C) $u_1 = 96$. (D) $u_1 = \dfrac{217}{3}$.

Lời giải.

Ta gọi q là công bội của cấp số nhân, khi đó ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 168 \\ u_1q^3 + u_1q^4 + u_1q^5 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 168 \\ q^3(u_1 + u_1q + u_1q^2) = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = \dfrac{1}{8} \\ u_1 + u_1q + u_1q^2 = 168 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \dfrac{1}{2} \\ u_1 = 96. \end{cases}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Cho hàm số $y = \dfrac{mx + 1}{x - 2m}$ với tham số $m \neq 0$. Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng có phương trình nào dưới đây?

(A) $2x + y = 0$. (B) $y = 2x$. (C) $x - 2y = 0$. (D) $x + 2y = 0$.

Lời giải.

Giao điểm hai đường tiệm cận là $I(2m; m)$ khi đó thấy I thuộc đường thẳng $x - 2y = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Tìm đạo hàm của hàm số $y = 3^{x^2 - 2x}$.

(A) $y' = 3^{x^2-2x} \ln 3$.

(B) $y' = \dfrac{3^{x^2-2x}(2x - 2)}{\ln 3}$.

(C) $y' = 3^{x^2-2x}(2x - 2) \ln 3$.

(D) $y' = \dfrac{3^{x^2-2x}}{\ln 3}$.

Lời giải.

Ta có $(3^{x^2-2x})' = (2x - 2) \cdot 3^{x^2-2x} \ln 3$.

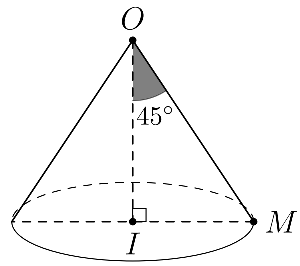
Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Trong không gian cho tam giác OIM vuông tại I, góc $\widehat{IOM} = 45^\circ$ và cạnh $IM = a$. Khi quay tam giác OIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình nón tròn xoay. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón tròn xoay đó theo a.

(A) $S_{\text{xq}} = \pi a^2\sqrt{2}$. (B) $S_{\text{xq}} = \pi a^2$. (C) $S_{\text{xq}} = \pi a^2\sqrt{3}$. (D) $S_{\text{xq}} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $S_{\text{xq}} = \pi r l$, trong đó $r = IM = a$, $l = OM \cdot \sin\widehat{IOM} = \dfrac{IM}{OM}$
$\Rightarrow \sin 45^\circ = \dfrac{a}{OM}$.
Suy ra $OM = a\sqrt{2} \Rightarrow S_{\text{xq}} = \pi r l = \pi a \cdot a\sqrt{2} = \pi a^2\sqrt{2}$.



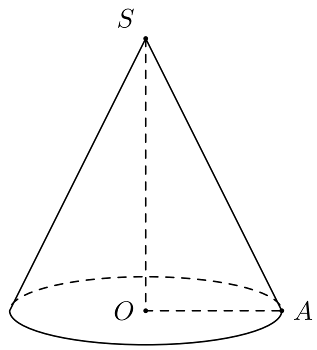
Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Cho khối nón có bán kính đáy $r = 3$, chiều cao $h = \sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối nón.

(A) $V = \dfrac{3\pi\sqrt{2}}{3}$. (B) $V = 3\pi\sqrt{11}$. **(C)** $V = \dfrac{9\pi\sqrt{2}}{3}$. (D) $V = 9\pi\sqrt{2}$.

Lời giải.

Thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3}h\pi r^2 = \dfrac{1}{3}\sqrt{2}\pi 3^2 = \dfrac{9\pi\sqrt{2}}{3}$ (đvtt).



Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Cho tập hợp $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Gọi M là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau lấy từ S sao cho tổng các chữ số hàng đơn vị, hàng chục và hàng trăm lớn hơn tổng chữ số các hàng còn lại 3 đơn vị. Tính tổng T của các phần tử trong tập hợp M.

(A) $T = 11.003.984$. **(B)** $T = 36.011.952$. (C) $T = 12.003.984$. (D) $T = 18.005.967$.

Lời giải.

Gọi số có 6 chữ số thỏa mãn yêu cầu bài ra, có dạng $\overline{abcdef}$.

Ta có $a + b + c + 3 = d + e + f$, suy ra $\begin{cases} d + e + f = 12 \\ a + b + c = 9. \end{cases}$

Các tập số thỏa mãn $\{a, b, c\}$ là $\{1, 2, 6\}$, $\{2, 3, 4\}$ và $\{1, 3, 5\}$.

Các tập số tương ứng thỏa mãn bộ $\{d, e, f\}$ là $\{3, 4, 5\}$, $\{1, 5, 6\}$ và $\{2, 4, 6\}$.

Có ba tập số $\{a, b, c\}, \{d, e, f\}$ mà mỗi tập số thì các số a, b, c, d, e và f đều xuất hiện 12 lần.

Tổng số các số của tập M là

$$T = 3 \cdot 12\left[(a + b + c)(10^5 + 10^4 + 10^3) + (d + e + f)(10^2 + 10 + 1)\right] = 36.011.952.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Cho tích phân $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{b}{c} + a\ln 2$ với a là số thực và b, c là các số nguyên dương, đồng thời $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = 2a + 3b + c$.

(A) $P = 6$. (B) $P = -6$. (C) $P = 5$. **(D)** $P = 4$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \\ v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$. Suy ra

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\ln x}{x}\bigg|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{x}\bigg|_1^2 \\ &= -\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 2$ hay $P = 2a + 3b + c = 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (m-1)x + 2m^2 + 1$ (m là tham số). Xác định khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.

(A) $\dfrac{2}{9}$. (B) $\sqrt{3}$. (C) $2\sqrt{3}$. (D) $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 4mx + m - 1$.

Mặt khác $y = \left(\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2m}{3}\right)(x^2 - 4mx + m - 1) + \dfrac{2}{3}(m - 1 - 4m^2)x + \dfrac{4m^2}{3} + \dfrac{2m}{3} + 1$.

Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (m-1)x + 2m^2 + 1$ là

$$y = \frac{2}{3}(m - 1 - 4m^2)x + \frac{4m^2}{3} + \frac{2m}{3} + 1 \quad (\Delta).$$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm mà đường thẳng $y = \dfrac{2}{3}(m - 1 - 4m^2)x + \dfrac{4m^2}{3} + \dfrac{2m}{3} + 1$ luôn đi qua.

Khi đó $y_0 = \dfrac{2}{3}(m - 1 - 4m^2)x_0 + \dfrac{8m^2}{3} - \dfrac{2m}{3} + 1 \Leftrightarrow (1 - x_0)(\dfrac{8m^2}{3} - \dfrac{2m}{3} + 1) + \dfrac{1}{3} - y_0 = 0$.

Suy ra $x_0 = 1, y_0 = \dfrac{1}{3}$. Khi đó $M\left(1; \dfrac{1}{3}\right)$ hay $OM = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên d. Khi đó $\mathrm{d}(O, \Delta) = OH \le OM$.

Vậy khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (m-1)x + 2m^2 + 1$ là $OM = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Gieo đồng thời hai con súc sắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất P để hiệu số chấm trên các mặt xuất hiện của hai con súc sắc bằng 2.

(A) $P = \dfrac{1}{3}$. (B) $P = \dfrac{2}{9}$. (C) $P = \dfrac{1}{9}$. (D) $P = 1$.

Lời giải.

Ta có số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36$ phần tử.

Gọi a $(1 \le a \le 6)$ là số chấm trên mặt của con súc sắc đầu tiên gieo được.

Suy ra số chấm trên mặt của con súc sắc thứ hai phải là $a + 2$ hoặc $a - 2$.

Trường hợp 1. Con súc sắc thứ hai gieo mặt có $a+2$ chấm. Khi đó $\begin{cases}1 \le a+2 \le 6\\ 1 \le a \le 6\end{cases} \Leftrightarrow 1 \le a \le 4.$

Trường hợp 2. Con súc sắc thứ hai gieo mặt có $a-2$ chấm. Khi đó $\begin{cases}1 \le a-2 \le 6\\ 1 \le a \le 6\end{cases} \Leftrightarrow 3 \le a \le 6.$

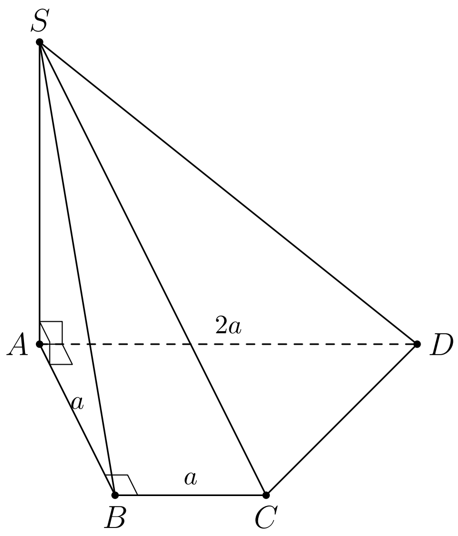
Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{4+4}{36} = \dfrac{2}{9}$.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B; có $AB = a$, $AD = 2a$, $BC = a$. Biết rằng $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.BCD$ theo a.

A $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B** $V = \dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **C** $V = 2a^3\sqrt{2}$. **D** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải.



Diện tích đa giác đáy là

$$S_{ABCD} = \frac{(AD+BC)\cdot AB}{2} = \frac{(a+2a)\cdot a}{2} = \frac{3a^2}{2}.$$

Vậy thể tích khối chóp là

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}SA\cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3}\cdot a\sqrt{2}.\frac{3a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$

Mặt khác, ta có thể tích

$$V_{S.ABD} = \frac{1}{3}SA\cdot S_{ABD} = \frac{1}{3}\cdot a\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}a\cdot 2a = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

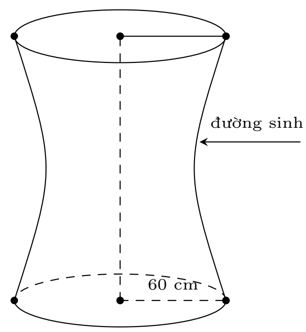
Vậy thể tích V của khối chóp $S.BCD$ là

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2} - \frac{a^3\sqrt{2}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 41.

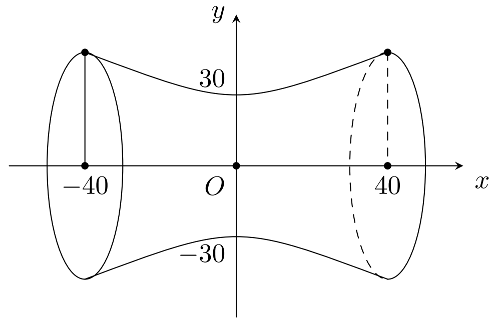
Cho một chiếc trống như hình vẽ, có đường sinh là nữa elip được cắt bởi trục lớn với độ dài trục lớn bằng 80 cm, độ dài trục bé bằng 60 cm và đáy trống là hình tròn có bán kính bằng 60 cm. Tính thể tích V của trống (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



A $V = 344.963\ \text{cm}^3$. **B** $V = 344.964\ \text{cm}^3$.
C $V = 20.8347\ \text{cm}^3$. **D** $V = 20.8346\ \text{cm}^3$.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Khi đó chiếc trống là hình tròn xoay được sinh bởi một nửa elip, dưới của elip có phương trình là $\dfrac{x^2}{40^2}+\dfrac{(y-60)^2}{30^2}=1$. Khi đó nửa đường elip dưới có phương trình $y=60-\dfrac{3}{4}\sqrt{40^2-x^2}$.



Vậy thể tích của chiếc trống là

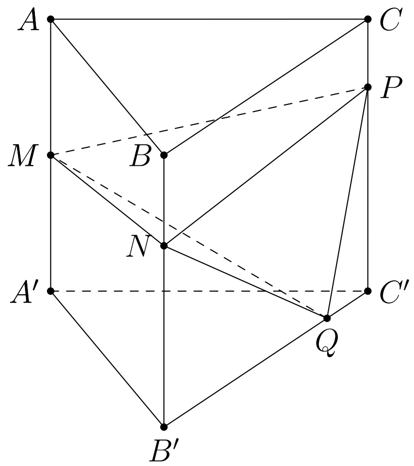
$$\begin{aligned} V &= \pi\cdot\int\limits_{-40}^{40}\left(60-\frac{3}{4}\sqrt{40^2-x^2}\right)^2\mathrm{d}x \\ &\approx 344.964\ \mathrm{cm}^3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 42. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N,P, Q lần lượt là các điểm thuộc cạnh AA', BB', CC', $B'C'$ thỏa mãn $\dfrac{AM}{AA'}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{BN}{BB'}=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{CP}{CC'}=\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{C'Q}{C'B'}=\dfrac{1}{5}$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối tứ diện $MNPQ$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{11}{30}$. **B** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{11}{45}$. **C** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{19}{45}$. **D** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{22}{45}$.

Lời giải.



Ta có $V_{M.NPQ}=V_{A.NPQ}$ và

$$\begin{aligned} S_{NPQ} &= S_{BCB'C'}-S_{BCP}-S_{PBN}-S_{PQC'}-S_{B'QN} \\ &= S_{BCB'C'}-\frac{1}{8}S_{BCB'C'}-\frac{1}{6}S_{BCB'C'}-\frac{3}{40}S_{BCB'C'}-\frac{4}{15}S_{BCB'C'} \\ &= \frac{11}{30}S_{BCB'C'}. \\ &\Rightarrow\ V_{A.NPQ}=\frac{11}{30}V_{BCB'C'}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V_2} &= \frac{V_{A.NPQ}}{V_2}=\frac{11}{30}\cdot\frac{V_{BCB'C'}}{V_2} \\ &= \frac{11}{30}\cdot\frac{V_2-V_{A.A'B'C'}}{V_2}=\frac{11}{30}\cdot\frac{V_2-\frac{1}{3}V_2}{V_2} \end{aligned}$$

$$= \frac{11}{45}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 43. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng d cắt hai trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm $A(a;0)$, $B(0;b)$ $(a \neq 0, b \neq 0)$. Viết phương trình đường thẳng d.

A $d\colon \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$. **B** $d\colon \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$. **C** $d\colon \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. **D** $d\colon \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$.

Lời giải.

Theo phương trình đoạn chắn, đường thẳng d có phương trình $d\colon \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - \sqrt{4 - x^2}$. Tính tổng $M + m$.

A $M + m = 2 - \sqrt{2}$. **B** $M + m = 2(1 + \sqrt{2})$.

C $M + m = 2(1 - \sqrt{2})$. **D** $M + m = 4$.

Lời giải.

Điều kiện : $-2 \leq x \leq 2$.

Ta có $y' = 1 + \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{4 - x^2} = 0 \quad (1)$.

Giải phương trình (1) và đối chiếu với điều kiện có nghiệm $x = -\sqrt{2}$.

Do đó $y(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}; y(2) = 2; y(-2) = -2$.

Vậy $M = y(2) = 2; m = y(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$, suy ra $M + m = 2(1 - \sqrt{2})$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Tính giới hạn $L = \lim \frac{n^3 - 2n}{3n^2 + n - 2}$.

A $L = +\infty$. **B** $L = 0$. **C** $L = \frac{1}{3}$. **D** $L = -\infty$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } L = \lim \frac{n^3 - 2n}{3n^2 + n - 2} = \lim \frac{n^3\left(1 - \frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}\right)} = \lim \left[n \cdot \left(\frac{1 - \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}}\right)\right] = +\infty,$$

$$\text{vì } \begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim \dfrac{1 - \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}} = \dfrac{1 - 2 \cdot 0}{3 + 0 - 2 \cdot 0} = \dfrac{1}{3} > 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án A □

Câu 46. Gọi T là tổng các nghiệm của phương trình $\log^2_{\frac{1}{3}} x - \log_3 x + 4 = 0$. Tính T.

A $T = 4$. **B** $T = -5$. **C** $T = 84$. **D** $T = 5$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\log^2_{\frac{1}{3}} x - 5\log_3 x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (-\log_3 x)^2 - 5\log_3 x + 4 = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \log_3^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x = 4\\ \log_3 x = 1\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 3^4\\ x = 3\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 81\\ x = 3.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

So sánh với điều kiện $x > 0$, phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 81$ và $x = 3$ nên $T = 81 + 3 = 84$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Tìm nghiệm của phương trình $\sin^4 x - \cos^4 x = 0$.

A $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.
B $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
C $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
D $x = k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin^4 x - \cos^4 x = 0\\
\Leftrightarrow\ &(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0\\
\Leftrightarrow\ &-\cos 2x \cdot 1 = 0\\
\Leftrightarrow\ &\cos 2x = 0\\
\Leftrightarrow\ &2x = \frac{\pi}{2} + k\pi\\
\Leftrightarrow\ &x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 48. Tìm điều kiện cần và đủ của a, b, c để phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ có nghiệm.

A $a^2 + b^2 > c$.
B $a^2 + b^2 \le c^2$.
C $a^2 + b^2 = c^2$.
D $a^2 + b^2 \ge c^2$.

Lời giải.

Điều kiện cần và đủ của a, b, c để phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ có nghiệm là $a^2 + b^2 \ge c^2$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x^2 - 1)^{-4}$.

A $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
B $\mathscr{D} = (-1; 1)$.
C $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$.
D $\mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

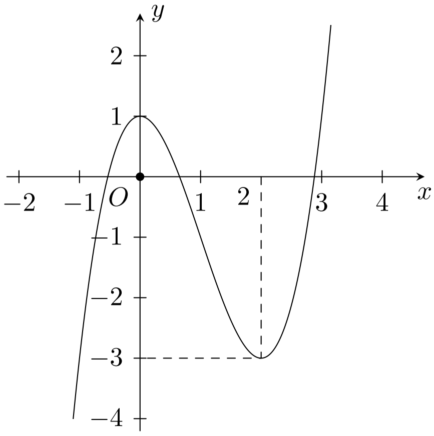
Lời giải.

Điều kiện $x^2 - 1 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \pm 1$ (-4 là số mũ nguyên âm).

Vậy tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 50.
Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



A $y = x^3 - 3x^2 + 1$. **B** $y = 2x^3 - 6x^2 + 1$.

C $y = -x^3 - 3x^2 + 1$. **D** $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$ và đồ thị đi qua điểm $(2; -3)$ nên chọn hình vẽ bên là của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. B	3. D	4. D	5. C	6. A	7. D	8. D	9. C	10. D
11. A	12. B	13. B	14. A	15. A	16. D	17. C	18. D	19. C	20. C
21. B	22. B	23. C	24. A	25. A	26. A	27. D	28. C	29. C	30. B
31. C	32. C	33. C	34. A	35. C	36. B	37. D	38. D	39. B	40. D
41. B	42. B	43. C	44. C	45. A	46. C	47. A	48. D	49. C	50. A

12 ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ, HÒA BÌNH – LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + 3$ là

A. $\dfrac{x^3}{3} + 3x + C$. B. $x^3 + 3x + C$. C. $\dfrac{x^3}{2} + 3x + C$. D. $x^2 + 3 + C$.

Lời giải.

Sử dụng công thức $\displaystyle\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{7}{5}$. B. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{7}$. C. $-\dfrac{4}{35}$. D. $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{7}{5}$.

(2D3B2-1)

Lời giải.

Sử dụng công thức $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Cho số phức $z = 2 + 5i$. Điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng Oxy có tọa độ là

A. $(5; 2)$. B. $(2; 5)$. C. $(-2; 5)$. D. $(2; -5)$.

(2D4B1-2)

Lời giải.

Phương pháp: Số phức $z = a + bi, (a; b \in \mathbb{R})$ có điểm biểu diễn số phức trong mặt phẳng Oxy là $(a; b)$.

Cách giải: Điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng Oxy có tọa độ là $(2; 5)$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Một bạn học sinh có 3 cái quần khác nhau và 2 cái áo khác nhau. Hỏi bạn học sinh đó có bao nhiêu cách lựa chọn 1 bộ quần áo.

A. 5. B. 4. C. 3. D. 6.

(1D2B1-2)

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng quy tắc nhân.

Cách giải: Học sinh đó có $3 \cdot 2 = 6$ cách lựa chọn 1 bộ quần áo.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-3;1)$ là

A $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3 \\ z=1-t \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-3t \\ z=1+t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t \end{cases}$.

(2H3B3-2)

Lời giải.

Phương pháp: Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$ là $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct. \end{cases}$

Cách giải: Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-3;1)$ là $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 6. Trong không gian cho $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(4;5;6)$ Tọa độ $\vec{a}+\vec{b}$ là

A $(3;3;3)$. **B** $(2;5;9)$. **C** $(5;7;9)$. **D** $(4;10;18)$.

Lời giải.

Phương pháp: $\begin{cases} \vec{u}=(x_1;y_1;z_1) \\ \vec{v}=(x_2;y_2;z_2) \end{cases} \Rightarrow \vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2;y_1+y_2;z_1+z_2)$.

Cách giải: Tọa độ $\vec{a}+\vec{b}$ là $(5;7;9)$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-2z+4=0$. Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

A $\vec{n}=(1;1;-2)$. **B** $\vec{n}=(1;0;-2)$. **C** $\vec{n}=(1;-2;4)$. **D** $\vec{n}=(1;-1;2)$.

Lời giải.

Phương pháp: Mặt phẳng $(P)\colon Ax+By+Cz+D=0$ nhận $\vec{n}=(A;B;C)$ là 1 vec-tơ pháp tuyến.

Cách giải: Một vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(1;1;-2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

(A) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1 bằng 1.

(B) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

(C) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

(D) Hàm số có đúng hai điểm cực trị.

Lời giải.

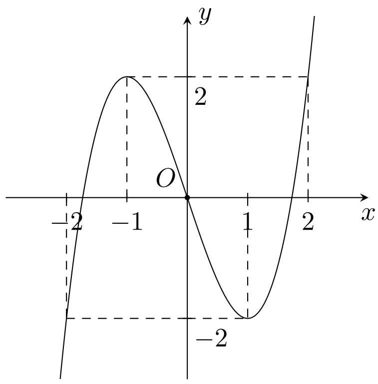
Phương pháp: Đánh giá dấu của $f'(x)$ và chỉ ra cực đại, cực tiểu của hàm số $y = f(x)$.

- Cực tiểu là điểm mà tại đó $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương.
- Cực đại là điểm mà tại đó $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm.

Cách giải: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ. Khẳng định nào **sai**?



(A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

(B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

(C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

(D) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Phương pháp: Dựa vào đồ thị hàm số xác định các khoảng đơn điệu của hàm số.

Cách giải: Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ là khẳng định sai.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Phương trình $\log_2(x + 1) = 2$ có nghiệm là

(A) $x = -3$. (B) $x = 1$. (C) $x = 3$. (D) $x = 8$.

Lời giải.

Phương pháp: $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$.

Cách giải: $\log_2(x + 1) = 2 \Leftrightarrow x + 1 = 2^2 \Leftrightarrow x + 1 = 4 \Leftrightarrow x = 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Đồ thị hàm số nào đi qua điểm $M(1; 2)$?

(A) $y = \dfrac{-2x - 1}{x + 2}$. (B) $y = 2x^3 - x + 1$.

(C) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 2}$. (D) $y = -x^4 + 2x^2 - 2$.

Lời giải.

Phương pháp: Thay tọa độ của điểm M vào các hàm số.

Cách giải: Ta có $2 = 2 \cdot 1^3 - 1 + 1 \Rightarrow M(1; 2)$ thuộc đồ thị hàm số $y = 2x^3 - x + 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Cho một cấp số cộng (u_n) là $u_1 = \dfrac{1}{2}, u_2 = \dfrac{7}{2}$. Khi đó công sai d bằng

(A) $\dfrac{3}{2}$. (B) 6. (C) 5. (D) 3.

Lời giải.

Phương pháp: Số hạng tổng quát của cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d là $u_n = u_1 + (n-1)d$

Cách giải: Ta có: $u_2 = u_1 + d \Leftrightarrow \dfrac{7}{2} = \dfrac{1}{2} + d \Leftrightarrow d = 3$

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$. (B) $y = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$. (C) $y = \left(\dfrac{2}{e}\right)^x$. (D) $y = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$.

Lời giải.

Phương pháp: Hàm số $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$

- Nếu $a > 1$ thì hàm số $y = a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì hàm số $y = a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Cách giải: Ta có $\dfrac{\pi}{3} > 1 \Rightarrow$ Hàm số $y = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Thể tích V của khối trụ có bán kính đáy $r = 4$ và chiều cao $h = 4\sqrt{2}$ là

(A) $V = 32\pi$. (B) $V = 32\sqrt{2}\pi$. (C) $V = 64\sqrt{2}\pi$. (D) $V = 128\pi$.

Lời giải.

Phương pháp: Thể tích V của khối trụ có bán kính đáy r và chiều cao h là $V = \pi r^2 h$.

Cách giải: Thể tích V của khối trụ có bán kính đáy $r = 4$ và chiều cao $h = 4\sqrt{2}$ là $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 4\sqrt{2} = 64\sqrt{2}\pi$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Thể tích của một khối lăng trụ có đường cao bằng $3a$ diện tích mặt đáy bằng $4a^2$ là

(A) $12a^3$. (B) $4a^3$. (C) $4a^2$. (D) $12a^2$.

Lời giải.

Phương pháp: Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy là S và chiều cao h là $V = S \cdot h$.

Cách giải: Thể tích của khối lăng trụ đó là: $V = S \cdot h = 4a^2 \cdot 3a = 12a^3$.

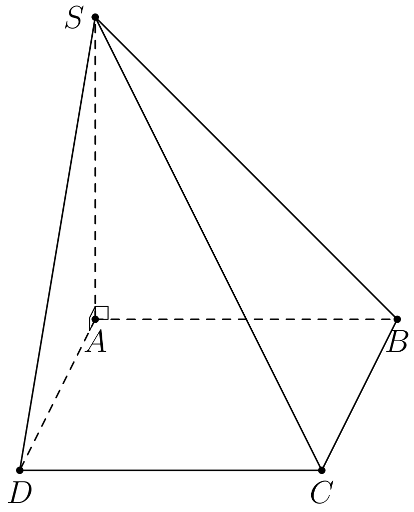
Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và đường thẳng SD tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc $30°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. (B) $\dfrac{2a^3}{3}$. (C) $\sqrt{3}a^3$. (D) $\dfrac{2\sqrt{6}a^3}{3}$.

Lời giải.

Phương pháp: Gọi a' là hình chiếu vuông góc của a trên mặt phẳng (P).
Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) là góc giữa đường thẳng a và a'.
Thể tích khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là $V = \frac{1}{3}Sh$.
Cách giải:
Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SD; (ABCD)) = \widehat{SDA} = 30^\circ$.
ΔSAD vuông tại $A \Rightarrow SA = AD \cdot \tan \widehat{SDA} = a\sqrt{3} \cdot \tan 30^\circ = a$.
Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD} = a \cdot a\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$.
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là
$V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3}a^2\sqrt{3} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{3}a^3$.



Chọn đáp án A □

Câu 17. Đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^2$ bằng

A $6x^5 - 20x^4 + 4x^3$. B $6x^5 - 20x^4 - 16x^3$.
C $6x^5 + 16x^3$. D $6x^5 - 20x^4 + 16x^3$.

Lời giải.
Phương pháp: Đạo hàm hàm hợp $[f(u(x))]' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$.
Cách giải:

$$\begin{aligned} y = (x^3 - 2x^2)^2 \Rightarrow y' &= 2(x^3 - 2x^2)(3x^2 - 4x) = 2(3x^5 - 4x^4 - 6x^4 + 8x^3) \\ &= 2(3x^5 - 10x^4 + 8x^3) = 6x^5 - 20x^4 + 16x^3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 18. Gọi M và N là giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ và $y = -x^2 + 4$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN là

A $(1; 0)$. B $(0; 2)$. C $(2; 0)$. D $(0; 1)$.

Lời giải.
Phương pháp: Giải phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số. Tìm tọa độ giao điểm M và N. Tìm tọa độ trung điểm I của MN.
Cách giải: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ và $y = -x^2 + 4$ là $x^4 - 2x^2 + 2 = -x^2 + 4 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = -1 \\ x^2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2}. \end{array}\right.$

- $x = \sqrt{2} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow M\left(\sqrt{2}; 2\right)$.
- $x = -\sqrt{2} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow M\left(-\sqrt{2}; 2\right)$.

Tọa độ trung điểm I của MN là $(0; 2)$.
Chọn đáp án B □

Câu 19. Diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi hai đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$ là

A $S = \frac{397}{4}$. B $S = \frac{937}{12}$. C $S = \frac{3943}{12}$. D $S = \frac{793}{4}$.

Lời giải.

Phương pháp: Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$ trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công thức $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Cách giải: Giải phương trình $-x^3 + 12x = -x^2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \\ x = -3. \end{array}\right.$

Diện tích S của hình phẳng (H) là

$$\begin{aligned}
S &= \int\limits_{-3}^{4} \left|\left(-x^3 + 12x\right) - \left(-x^2\right)\right|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-3}^{4} \left|-x^3 + 12x + x^2\right|\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{-3}^{0} \left|-x^3 + 12x + x^2\right|\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{4} \left|-x^3 + 12x + x^2\right|\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{-3}^{0} \left(-x^3 + 12x + x^2\right)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{4} \left(-x^3 + 12x + x^2\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \left.\left(\frac{1}{4}x^4 - 6x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\right|_{-3}^{0} + \left.\left(\frac{1}{4}x^4 - 6x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\right|_{0}^{4} \\
&= 0 - \left(\frac{1}{4}\cdot 3^4 - 6\cdot 3^2 + \frac{1}{3}\cdot 3^3\right) + \left(-\frac{1}{4}\cdot 4^4 + 6\cdot 4^2 + \frac{1}{3}\cdot 4^3\right) - 0 = \frac{937}{12}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 1; 1), B(0; -1; 1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 8$.

B. $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$.

C. $(x+1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 8$.

D. $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$.

Lời giải.

Phương pháp: Phương trình mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$, bán kính R là $(x-a)2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$.

Cách giải: Tâm mặt cầu là trung điểm của AB, có tọa độ là $I(-1; 0; 1)$.

Bán kính mặt cầu: $R = IA = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$.

Phương trình mặt cầu đường kính AB: $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 21. Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ có giá trị cực tiểu lần lượt là y_1, y_2. Khi đó $y_1 + y_2$ bằng

A. 7. B. 1. C. 3. D. -1.

Lời giải.

Phương pháp: Lập bảng biến thiên của hàm số.

Cách giải: $y = -x^4 + 2x^2 + 3 \Rightarrow y' = -4x^3 + 4x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = -x^4+2x^2+3$ có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu lần lượt là $y_1 = 4, y_2 = 3 \Rightarrow y_1+y_2 = 7$.

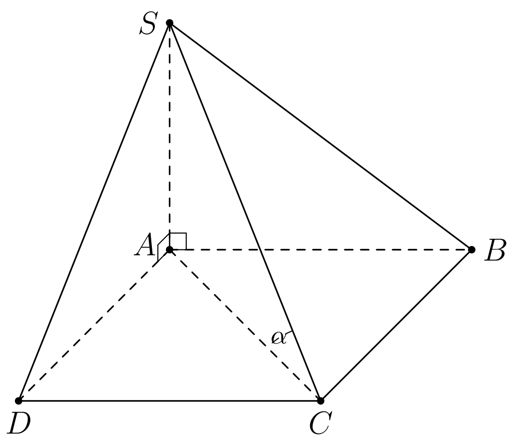
Chú ý: Cần phân biệt điểm cực đại và giá trị cực đại cũng như điểm cực tiểu và giá trị cực tiểu của hàm số.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, BC = a\sqrt{3}$ cạnh $SA = 2a, SA \perp (ABCD)$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng $(ABCD)$. Giá trị $\tan\alpha$ bằng

(A) 2. (B) $\sqrt{2}$. (C) 1. (D) $\frac{1}{2}$.

Lời giải.



Phương pháp: Gọi a' là hình chiếu vuông góc của a trên mặt phẳng (P).

Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) là góc giữa đường thẳng a và a'.

Cách giải: $ABCD$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SC, (ABCD)) = \widehat{SCA} \Rightarrow \alpha = \widehat{SCA}$

$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{2a}{2a} = 1$

Chọn đáp án C □

Câu 23. Thể tích của khối nón có đường sinh bằng 10 và bán kính đáy bằng 6 là:

(A) 196π. (B) 48π. (C) 96π. (D) 60π.

Lời giải.

Phương pháp: Thể tích của khối nón có đường cao bằng h và bán kính đáy bằng r là $V = \frac{1}{3}\pi r^2$.

Cách giải: Độ dài đường cao của khối nón: $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

Thể tích của khối nón đó là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + 2i)z = 6 - 3i$. Phần thực của số phức z là:

(A) -3. (B) 3. (C) 0. (D) $-3i$.

Lời giải.

Phương pháp: Giải phương trình phức cơ bản tìm số phức z.

Cách giải: Ta có

$$\begin{aligned}(1+2i)\,z &= 6-3i\\ \Leftrightarrow z &= \frac{6-3i}{1+2i}\\ \Leftrightarrow z &= \frac{(6-3i)\,(1-2i)}{(1+2i)\,(1-2i)}\\ \Leftrightarrow z &= \frac{6-12i-3i-6}{1+4} = -3i.\end{aligned}$$

Phần thực của số phức z là 0.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x+2) \geq -1$ là

A $S=[0;3]$. B $S=[0;2)\cup(3;7]$. C $S=[0;1]\cup(2;3]$. D $S=(1;+\infty)$.

Lời giải.

Phương pháp: $\log_a f(x) \geq b \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<1 \\ 0<f(x)\leq a^b. \end{cases}$

Cách giải: Ta có:

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-3x+2\right) \geq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2>0 \\ x^2-3x+2 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<1 \end{array}\right. \\ 0\leq x\leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[0;1)\cup(2;3].$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=[0;1]\cup(2;3]$.

Chú ý: Học sinh cần chú ý Điều kiện xác định của hàm logarit.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-2z-9=0, (Q)\colon x-y-6=0$. Góc giữa hai mặt phẳng $(P),(Q)$ bằng

A $90°$. B $30°$. C $45°$. D $60°$.

Lời giải.

Phương pháp: $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$ lần lượt là 2 véc-tơ pháp tuyến của $(P),(Q)$, khi đó $\cos((P);(Q)) = \dfrac{|\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\,|\overrightarrow{n_2}|}$.

Cách giải: $(P)\colon 2x-y-2z-9=0$ có 1 véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(2;-1;-2)$.

$(Q)\colon x-y-6=0$ có 1 véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=(1;-1;0)$.

$\cos((P);(Q)) = \dfrac{|\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\,|\overrightarrow{n_2}|} = \dfrac{|2\cdot1+(-1)(-1)+0|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+0}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow ((P);(Q))=45°$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 2018 = 0$. Khi đó giá trị biểu thức $A = |z_1 + z_2 - z_1z_2|$ bằng

Ⓐ 2017. Ⓑ 2019. Ⓒ 2018. **D** 2016.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng định lý Vi-ét.

Cách giải: z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 2018 = 0 \Rightarrow \left[\begin{aligned} z_1 + z_2 &= 2 \\ z_1z_2 &= 2018. \end{aligned}\right.$

$A = |z_1 + z_2 - z_1z_2| = |2 - 2018| = 2016$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 28. Tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-7}{x+2}$ là

Ⓐ $(2; -3)$. **B** $(-2; 3)$. Ⓒ $(3; -2)$. Ⓓ $(-3; 2)$.

Lời giải.

Phương pháp: Tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ là $\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$.

Cách giải: Tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-7}{x+2}$ là $(-2; 3)$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 29. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x+3}{2x-3}$ trên đoạn $[2; 5]$ bằng

Ⓐ $\dfrac{7}{8}$. **B** $\dfrac{8}{7}$. Ⓒ 5. Ⓓ $\dfrac{2}{7}$.

Lời giải.

Phương pháp: Để tìm GTNN, GTLN của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ ta làm như sau:

- Tìm các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thuộc khoảng $(a; b)$ mà tại đó hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.
- Tính $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(a), f(b)$.
- So sánh các giá trị vừa tìm được. Số lớn nhất trong các giá trị đó chính là GTLN của $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$, số nhỏ nhất trong các giá trị đó chính là GTNN của $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Cách giải: $y = \dfrac{x+3}{2x-3} \Rightarrow y' = -\dfrac{9}{(2x-3)^2} < 0, \forall x \in [2; 5]$.

$\Rightarrow$ hàm số $y = \dfrac{x+3}{2x-3}$ nghịch biến trên $[2; 5]$.

$\Rightarrow \min\limits_{x \in [2;5]} y = y(5) = \dfrac{8}{7}$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 30. Cho $a = \log_3 2, b = \log_3 5$. Khi đó $\log 60$ bằng

Ⓐ $\dfrac{-2a+b-1}{a+b}$. **B** $\dfrac{2a+b+1}{a+b}$. Ⓒ $\dfrac{2a+b-1}{a+b}$. Ⓓ $\dfrac{2a-b-1}{a+b}$.

Lời giải.

Phương pháp: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}, \log_a b^c = c\log_a b$ (các biểu thức trên đều xác định).

Cách giải:

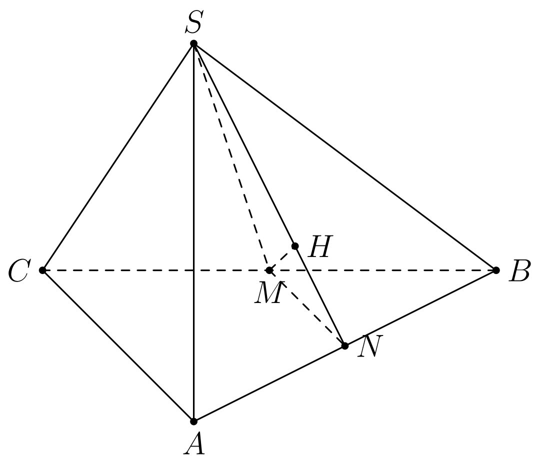
$\log 60 = \dfrac{\log_3 60}{\log_3 10} = \dfrac{\log_3 2^2 + \log_3 3 + \log_3 5}{\log_3 2 + \log_3 5} = \dfrac{2\log_3 2 + 1 + \log_3 5}{\log_3 2 + \log_3 5} = \dfrac{2a+b+1}{a+b}$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $A, \widehat{ABC} = 30°$. SBC là tam giác đều cạnh a và mặt bên (SBC) vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) là:

A $a\sqrt{5}$. **B** $\dfrac{3}{4}a$. **C** $\dfrac{\sqrt{39}a}{13}$. **D** $\dfrac{1}{13}a$.

Lời giải.



Phương pháp: Đưa về dựng khoảng cách từ M đến (SAB) với M là trung điểm của BC.

Cách giải: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AB.

Kẻ $MH \perp SN, H \in SN$.

Tam giác SBC đều, $SM \perp BC$.

Mà $(SBC) \perp (ABC), (SBC) \cap (ABC) = BC$

$\Rightarrow SM \perp (ABC) \Rightarrow SM \perp AB$.

Ta có: $MN \parallel AC$ (do MN là đường trung bình của tam giác ABC) mà $AB \perp AC \Rightarrow MN \perp AB$

$\Rightarrow AB \perp (SMN) \Rightarrow AB \perp MH$.

Mà $MH \perp SN \Rightarrow MH \perp (SAB) \Rightarrow \mathrm{d}(M;(SAB)) = MH \Rightarrow \mathrm{d}(C;(SAB)) = 2MH$ (do M là trung điểm của BC).

$\triangle ABC$ vuông tại A có $\widehat{ABC} = 30° \Rightarrow AC = BC \cdot \sin 30° = \dfrac{a}{2} \Rightarrow MN = \dfrac{a}{4}$.

$\triangle SBC$ đều, cạnh $a \Rightarrow SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\triangle SMN$ vuông tại $M, MH \perp SN$.

$\Rightarrow \dfrac{1}{MH^2} = \dfrac{1}{SM^2} + \dfrac{1}{MN^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{4}\right)^2} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{16}{a^2} = \dfrac{52}{3a^2} \Rightarrow MH = \sqrt{\dfrac{3}{52}}a$.

$\Rightarrow \mathrm{d}(C;(SAB)) = 2 \cdot \sqrt{\dfrac{3}{52}}a = \sqrt{\dfrac{3}{13}}a = \dfrac{\sqrt{39}}{13}a$.

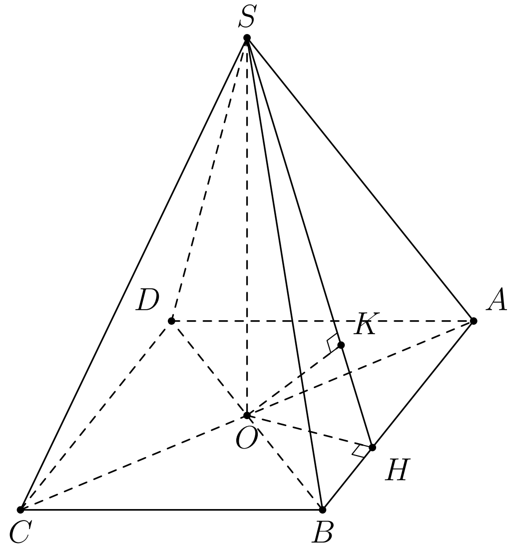
Chọn đáp án C □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm $O, AC = 2\sqrt{3}a, BD = 2a$, hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết khoảng cách từ điểm O đến (SAB) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải.

Phương pháp: $\begin{cases} (P)\perp(\alpha) \\ (Q)\perp(\alpha) \Rightarrow (d)\perp(\alpha). \\ (P)\cap(Q)=d \end{cases}$



Cách giải: Ta có:

$\begin{cases} (SAC)\perp(ABCD) \\ (SBD)\perp(ABCD) \Rightarrow (SO)\perp(ABCD). \\ (SAC)\cap(SBD)=SO \end{cases}$

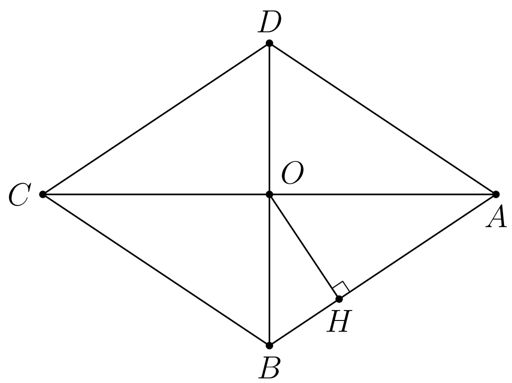
Dựng $OH\perp AB, H\in AB, OK\perp SH$.

Ta có: $\begin{cases} AB\perp OH \\ AB\perp SO \end{cases} \Rightarrow AB\perp(SOH)\Rightarrow AB\perp OK$.

Mà $OK\perp SH \Rightarrow OK\perp(SAB)$

$\Rightarrow \mathrm{d}(O;(SAB)) = OK = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

$\triangle OAB$ vuông tại O, $OH\perp AB \Rightarrow \dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}=\dfrac{1}{3a^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{4}{3a^2}\Rightarrow OH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



$\triangle SOH$ vuông tại O, $OK\perp SH \Rightarrow \dfrac{1}{OK^2}=\dfrac{1}{OS^2}+\dfrac{1}{OH^2}\Leftrightarrow \dfrac{1}{\frac{3}{16}a^2}=\dfrac{1}{OS^2}+\dfrac{4}{\frac{3}{4}a^2}\Rightarrow SO=\dfrac{1}{2}a$.

Diện tích hình thoi $ABCD$: $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD=\dfrac{1}{2}2\sqrt{3}a\cdot 2a=2\sqrt{3}a^2$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}\cdot SO=\dfrac{1}{3}\cdot 2\sqrt{3}a^2\cdot\dfrac{1}{2}a=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Biết rằng trên khoảng $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$ hàm số $f(x)=\dfrac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$ có một nguyên hàm $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{2x-3}, (a,b,c\in\mathbb{Z})$. Tổng $S=a+b+c$ bằng

A 6. B 5. C 4. **D** 3.

Lời giải.

Phương pháp: $f(x)$ có một nguyên hàm $F(x)\Leftrightarrow (F(x))'=f(x)$.

Cách giải:

$$\begin{aligned} F(x) &= \left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{2x-3} \\ \Rightarrow (F(x))' &= (2ax+b)\sqrt{2x-3}+\frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{2x-3}}=\frac{(2ax+b)(2x-3)+ax^2+bx+c}{\sqrt{2x-3}} \\ &= \frac{5ax^2+(3b-6a)x-3b+c}{\sqrt{2x-3}}. \end{aligned}$$

$f(x)$ có một nguyên hàm $F(x) \Leftrightarrow (F(x))'=f(x)$, khi đó $\begin{cases} 5a=20 \\ 3b-6a=-30 \\ -3b+c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-2 \\ c=1 \end{cases}.$

$\Rightarrow S=a+b+c=3.$

Chọn đáp án D □

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x\cdot f'(2x)\,\mathrm{d}x$

(A) 13. (B) 12. (C) 20. (D) 7.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng công thức từng phần: $\int\limits_a^b u\,\mathrm{d}v=uv|_a^b-\int\limits_a^b v\,\mathrm{d}u$.

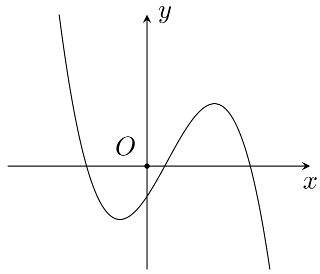
Cách giải:

$$\begin{aligned} I=\int\limits_0^2 x\cdot f'(2x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}\left(f(2x)\right) \\ &= \frac{1}{2}x\cdot f(2x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}f(2)-\frac{1}{4}\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}(2x) \\ &\overset{\text{đặt } t=2x}{=} \frac{1}{2}f(2)-\frac{1}{4}\int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}f(2)-\frac{1}{4}\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot 16-\frac{1}{4}\cdot 4=8-1=7. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$. **B** $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

C $a > 0, b > 0, c < 0, d < 0$. **D** $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

Lời giải.

Phương pháp: Nhận biết dạng của đồ thị hàm số bậc ba.

Cách giải: Quan sát đồ thị hàm số, ta thấy

- Khi $x \to +\infty$ thì $y \to -\infty \Rightarrow a > 0$: Loại phương án C.
- Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow d > 0$: Loại phương án B.
- $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c$

  Hàm số có 2 cực trị trái dấu $\Rightarrow ac < 0 \Rightarrow c > 0$ (do $a < 0$): Loại phương án A.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Số nghiệm của phương trình $(\log_2 4x)^2 - 3\log_{\sqrt{2}} x - 7 = 0$ là

A 1. **B** 3. **C** 2. **D** 4.

Lời giải.

Phương pháp: $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc), \log_{a^c} b = \dfrac{1}{c}\log_a b$.

Cách giải: ĐKXĐ: $x > 0$.

Ta có: $(\log_2 4x)^2 - 3\log_{\sqrt{2}} x - 7 = 0 \Leftrightarrow (2 + \log_2 x)^2 - 6\log_2 x - 7 = 0$.

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \log_2 x & = -1 \\ \log_2 x & = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x & = \dfrac{1}{2} \\ x & = 8 \end{array}\right. .$$

Phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = \dfrac{1}{2}, x = 8$.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Cho hàm số $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m + 2)x - 5$. Tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$ là $[a; b]$. Khi đó $a - 3b$ bằng

A 5. **B** 1. **C** 6. **D** -1.

Lời giải.

Phương pháp: Hàm số bậc ba nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a & < 0 \\ \Delta & \le 0 \end{cases}$.

Cách giải: $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m + 2)x - 5 \Rightarrow y' = -x^2 + 2mx + 3m + 2$.

Hàm số bậc ba nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \begin{cases} -1 < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases} & \Leftrightarrow \quad m^2 + 3m + 2 \le 0 \\ & \Leftrightarrow \quad -2 \le m \le -1 \\ & \Rightarrow \quad a = -2, b = -1 \Rightarrow a - 3b = 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 38. Ba người A, B, C đi săn độc lập với nhau, cùng nổ súng bắn vào mục tiêu. Biết rằng xác suất bắn trúng mục tiêu của A, B, C tương ứng là 0,7; 0,6; 0,5. Xác suất để có ít nhất một người bắn trúng là

A 0,94. B 0,8. C 0,45. D 0,75.

Lời giải.

Phương pháp: Áp dụng quy tắc cộng và nhân xác suất.

Cách giải: Xác suất để có ít nhất một người bắn trúng là

$1-(1-0{,}7)(1-0{,}6)(1-0{,}5)=1-0{,}3\cdot 0{,}4\cdot 0{,}5=0{,}94.$

Chọn đáp án A □

Câu 39. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-2i|=\sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo?

A 3. B 1. C 2. D 4.

Lời giải.

Phương pháp: Gọi số phức đó là $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$. Tìm điều kiện của a, b.

Cách giải: Gọi số phức đó là $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$. Ta có:

$|z-2i|=\sqrt{2}\Leftrightarrow|a+bi-2i|=\sqrt{2}\Leftrightarrow a^2+(b-2)^2=2\quad(1)$

$z^2=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$ là số thuần ảo $\Rightarrow a^2-b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\a=-b.\end{array}\right.$

- $a=b$. Thay vào (1): $a^2+(a-2)^2=2\Leftrightarrow 2a^2-4a+2=0\Leftrightarrow a=1=b\Rightarrow z=1+i$.
- $a=-b$. Thay vào (1): $a^2+(-a-2)^2=2\Leftrightarrow 2a^2+4a+2=0\Leftrightarrow a=-1, b=1\Rightarrow z=-1+i$.

Vậy, có 2 số phức z thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$, $d_2\colon \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$. Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;2;3)$ vuông góc với d_1 và cắt đường thẳng d_2 có phương trình là

A $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$.

B $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-3}$.

C $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-5}$.

D $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{4}$.

Lời giải.

Phương pháp:

- Gọi $B=\Delta\cap d_2\Rightarrow$ Tham số hóa tọa độ điểm B.
- Đường thẳng $\Delta\perp d_1\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}_{d_1}=0\Rightarrow$ Tọa độ điểm B.
- Viết phương trình Δ.

Cách giải: $d_2\colon\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$ có PTTS là $\begin{cases}x=1-t\\y=1+2t\\z=-1-t.\end{cases}$

Gọi giao điểm của Δ và d_2 là $B(1-t;1+2t;-1-t)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(-t;2t-1;-t-4)$.

Đường thẳng $\Delta\perp d_1\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}_{d_1}=0$.

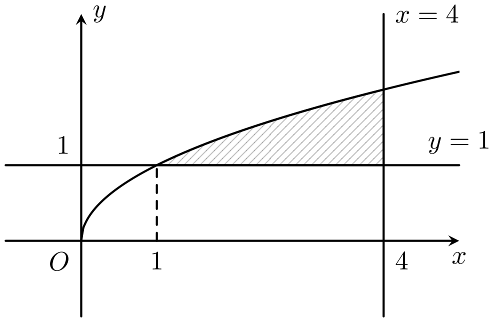
$\Rightarrow -t\cdot 3+(2t-1)\cdot 2+(-t-4)(-1)=0\Leftrightarrow 2t+2=0\Leftrightarrow t=-1.$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1; -3; -3)$ là 1 véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

Phương trình Δ: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-3}{-3}$.

Chọn đáp án B □

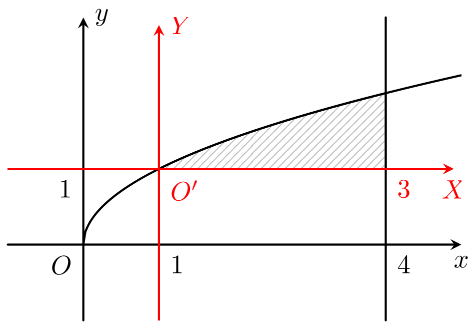
Câu 41. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số sau $y = \sqrt{x}, y = 1$ đường thẳng $x = 4$ (tham khảo hình vẽ). Thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình (H) khi quay quanh đường thẳng $y = 1$ bằng



A $\dfrac{9}{2}\pi$. **B** $\dfrac{119}{6}\pi$. **C** $\dfrac{7}{6}\pi$. **D** $\dfrac{21}{2}\pi$.

Lời giải.

Phương pháp: Gắn hệ trục tọa độ mới. Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khi đó thể tích vật thể tròn xoay giới hạn bởi hai đồ thị số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ khi quay quanh trục Ox là: $V = \pi \displaystyle\int_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right| \mathrm{d}x$.



Cách giải: Đặt $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases}$. Ta được hệ trục tọa độ OXY như hình vẽ:

Ta có: $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow Y + 1 = \sqrt{X+1} \Leftrightarrow Y = \sqrt{X+1} - 1$.

Thể tích cần tìm là

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^3 \left(\sqrt{X+1} - 1\right)^2 \mathrm{d}X = \pi \int_0^3 \left(X + 2 - 2\sqrt{X+1}\right) \mathrm{d}X \\ &= \pi \left(\frac{1}{2}X^2 + 2X - \frac{4}{3}(X+1)\sqrt{X+1}\right)\Bigg|_0^3 = \pi \left[\left(\frac{9}{2} + 6 - \frac{32}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)\right] = \frac{7\pi}{6}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 1. Gọi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ và N là trung điểm của DD'. Mặt phẳng (AMN) chia hình hộp thành hai phần, thể tích phần có chứa điểm A' bằng

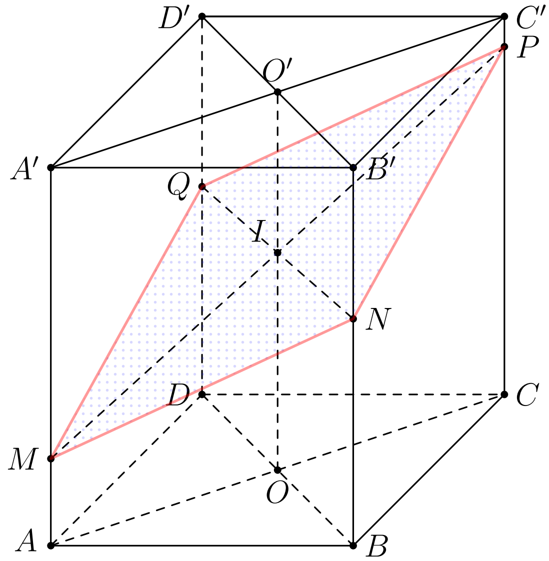
A $\dfrac{67}{144}$. **B** $\dfrac{4}{9}$. **C** $\dfrac{3}{8}$. **D** $\dfrac{181}{432}$.

Lời giải.

Phương pháp:

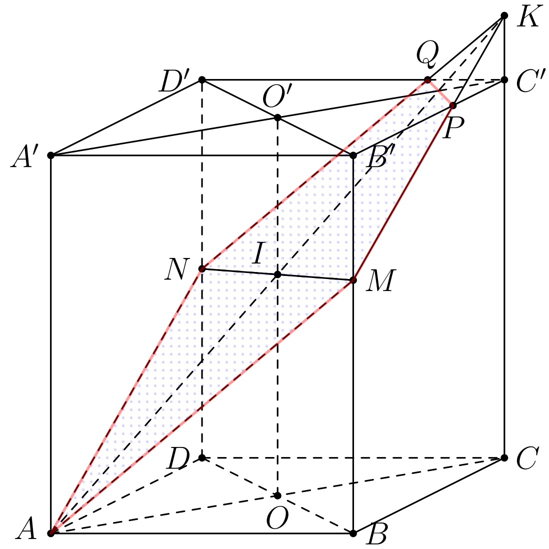
$\dfrac{AM}{AA'}=x, \dfrac{BN}{BB'}=y, \dfrac{CP}{CC'}=z, \dfrac{DQ}{DD'}=t.$

$\Rightarrow \begin{cases} x+z=y+t \\ \dfrac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\dfrac{x+y+z+t}{4}. \end{cases}$



Cách giải: Gọi O, O' lần lượt là tâm của các hình bình hành $ABCD$, $A'B'C'D'$.

- Trong $(BDD'B')$, gọi I là giao điểm của OO' và MN.
- Trong $(ACC'A')$, gọi K là giao điểm của AI và CC'.
- Trong $(CDD'C')$, gọi Q là giao điểm của NK và $C'D'$.
- Trong $(CBB'C')$, gọi P là giao điểm của MK và $C'B'$.
- Thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng (AMN) là ngũ giác $AMPQN$.



Đặt $\dfrac{AA'}{AA'}=x=0, \dfrac{BM}{BB'}=y=\dfrac{2}{3}, \dfrac{CK}{CC'}=z, \dfrac{DN}{DD'}=t=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x+z=y+t \\ \dfrac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\dfrac{x+y+z+t}{4}\cdot \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 0+z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3} \Rightarrow z=\dfrac{7}{6} \\ \dfrac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\dfrac{x+y+z+t}{4}=\dfrac{0+\frac{2}{3}+\frac{7}{6}+\frac{1}{2}}{4}=\dfrac{7}{12} \end{cases}\cdot$

$\Rightarrow V_{ABCD.AMKN}=\dfrac{7}{12}V_{ABCD.A'B'C'D'}=\dfrac{7}{12} \quad (1).$

$V_{K.CQP}=\dfrac{1}{3}d_{(K;(A'B'C'D'))}\cdot S_{\Delta CQP}.$

Mà $\mathrm{d}_{(K;(A'B'C'D'))}=\dfrac{1}{6}\mathrm{d}_{(C;(A'B'C'D'))}$ do $z=\dfrac{CK}{CC'}=\dfrac{7}{6}$ và $S_{\triangle CQP}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{3}S_{\Delta C'B'D'}=\dfrac{1}{24}S_{A'B'C'D'}.$

$\dfrac{CQ}{D'Q}=\dfrac{C'K}{ND'}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{C'Q}{C'D'}=\dfrac{1}{4}; \dfrac{C'P}{PB'}=\dfrac{C'K}{MB'}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{C'P}{B'C'}=\dfrac{1}{3}.$

$\Rightarrow V_{K.CQP}=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}_{(C';(A'B'C'D'))}\cdot\dfrac{1}{24}S_{A'B'C'D'}=\dfrac{1}{432}\mathrm{d}_{(C';(A'B'C'D'))}\cdot S_{A'B'C'D'}.$

$=\dfrac{1}{432}V_{ABCD.A'B'C'D'}=\dfrac{1}{432} \quad (2).$

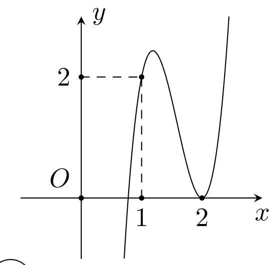
Từ $(1),(2)\Rightarrow V_{ABCD.MPCQN}=\dfrac{7}{12}-\dfrac{1}{432}=\dfrac{251}{432}.$

Thể tích cần tìm là $1 - \dfrac{251}{432} = \dfrac{181}{432}$.

Chọn đáp án D □

Câu 43.

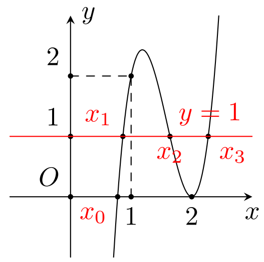
Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $g\left(x\right) = \dfrac{\left(x^2 - 4x + 4\right)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x) - f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



(A) 5. (B) 2. (C) 3. (D) 6.

Lời giải.

Phương pháp: Định nghĩa tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.



Nếu $\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to a^+} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to a^-} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to a^-} = -\infty \end{array}\right.$ thì $x = a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Cách giải: Từ đồ thị hàm số ta có:

$f(1) = 2, f(x_0) = f(2) = 0, f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 1.$

Xét hàm số $g\left(x\right) = \dfrac{\left(x^2 - 4x + 4\right)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x) - f(x)\right]}$ có TXĐ là

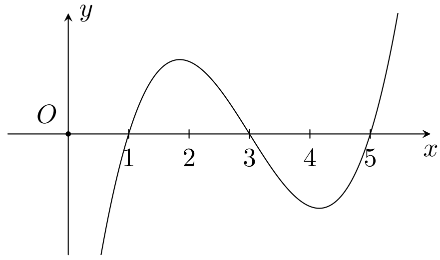
$$\left\{\begin{array}{r} x \geq 1 \\ x \neq 0 \\ f\left(x\right) \neq 0 \\ f\left(x\right) \neq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \neq 0 \\ x \neq x_0 \\ x \neq x_1 \\ x \neq x_2 \\ x \neq x_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \neq x_2\ , 1 < x_2 < 2 < x_3. \\ x \neq x_3 \end{array}\right.$$

- $\lim\limits_{x \to x_2} g\left(x\right) = \lim\limits_{x \to x_2} \dfrac{\left(x^2 - 4x + 4\right)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2\left(x\right) - f\left(x\right)\right]} = \infty.$
- $\lim\limits_{x \to x_3} g\left(x\right) = \lim\limits_{x \to x_3} \dfrac{\left(x^2 - 4x + 4\right)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2\left(x\right) - f\left(x\right)\right]} = \infty.$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $g\left(x\right) = \dfrac{\left(x^2 - 4x + 4\right)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x) - f(x)\right]}$ có 2 đường tiệm cận đứng.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ biết hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(x+1)$. Kết luận nào sau đây là đúng?



(A) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;4)$.

(B) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

(C) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(4;6)$.

(D) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Phương pháp: Xét dấu của $g'(x)$ dựa vào dấu của $f'(x)$.

Cách giải: $g(x) = f(x+1) \Rightarrow g'(x) = f'(x+1)$.

Với $x \in (0;1)$ thì $x+1 \in (1;2)$, $f'(x+1) > 0, \forall x \in (0;1) \Rightarrow g'(x) > 0, \forall x \in (0;1)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B. Biết $AB = BC = a, AD = 2a, SA = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}, SA \perp (ABCD)$. M, N theo thứ tự là trung điểm của SB, SA. Khoảng cách từ N đến mặt phẳng (MCD) bằng

(A) $\dfrac{a}{3}$. (B) $\dfrac{a}{4}$. (C) $\dfrac{4a}{3}$. (D) $\dfrac{3a}{4}$.

Lời giải.

Phương pháp: Gắn hệ trục tọa độ.

Cách giải: Gắn hệ trục tọa độ.

$A \equiv O(0;0;0), B(1;0;0), C(1;1;0), D(0;2;0), S\left(0;0;\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

$\Rightarrow M\left(\dfrac{1}{2};0;\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right), N\left(0;0;\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{MC} = \left(\dfrac{1}{2};1;-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right)$, lấy $\overrightarrow{a} = 4\overrightarrow{MC} = \left(2;4;-3\sqrt{2}\right)$.

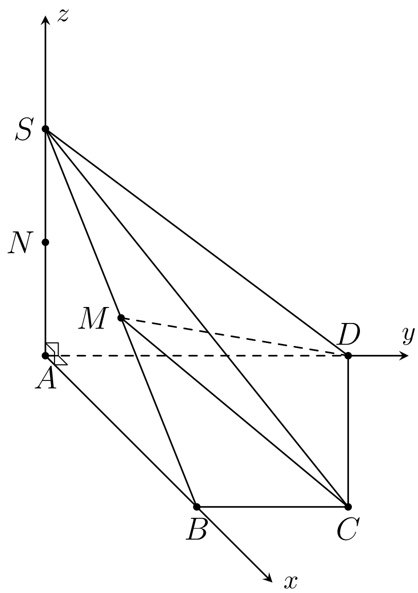
$\overrightarrow{CD} = (-1;-1;0)$, lấy $\overrightarrow{b} = (-1;-1;0)$.

Mặt phẳng (MCD) có 1 véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = \dfrac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \left(1;1;\sqrt{2}\right)$, đi qua $C(-1;-1;0)$ có phương trình là

$1(x-1) + 1(y-1) + \sqrt{2}(z-0) = 0 \Leftrightarrow x + y + \sqrt{2}z - 2 = 0$.

$\Rightarrow \mathrm{d}(N;(MNC)) = \dfrac{\left|0+0+\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{4} - 2\right|}{\sqrt{1+1+2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4}$.

Vậy, khoảng cách từ N đến mặt phẳng (MCD) bằng $\dfrac{1}{4}a$.



Chọn đáp án (B) □

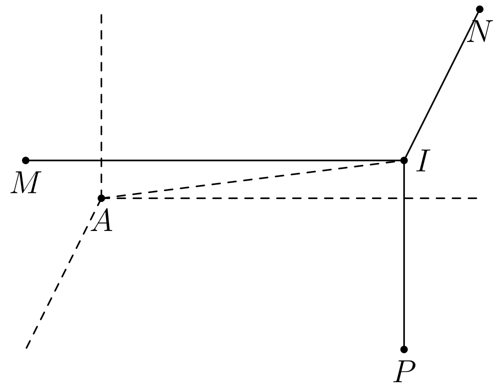
Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=16$ và điểm $A(1;2;3)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua A và đôi một vuông góc với nhau cắt mặt cầu theo ba đường tròn. Gọi S là tổng diện tích của ba hình tròn đó. Khi đó S bằng

(A) 32π. (B) 36π. **(C) 38π.** (D) 16π.

Lời giải.

Phương pháp:

Cách giải:



$(S)\colon (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=16$ có tâm $I(1;-1;2)$ và bán kính $R=4$.

Gọi M,N,P là các hình chiếu vuông góc của I lên 3 mặt phẳng, r_1,r_2,r_3 là bán kính của đường tròn giao tuyến tương ứng. Khi đó A,I,P,N là 4 đỉnh của một hình hộp chữ nhật, ta có:

$$IM^2+IP^2+IN^2=IA^2=0^2+3^2+1^2=10.$$

$\Leftrightarrow R^2-r_1^2+R^2-r_2^2+R^2-r_3^2=10 \Leftrightarrow 3\cdot 16-(r_1^2+r_2^2+r_3^2)=10 \Leftrightarrow r_1^2+r_2^2+r_3^2=18.$

Tổng diện tích của ba hình tròn đó là $S=\pi\left(r_1^2+r_2^2+r_3^2\right)=38\pi$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Cho hàm số $f(x)=mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để hàm số $g(x)=|f(x)|$ có 5 điểm cực trị?

(A) 9. (B) 7. **(C) 10.** (D) 11.

Lời giải.

Phương pháp: Hàm số $g(x)=|f(x)|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Cách giải: Hàm số $g(x)=|f(x)|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Xét $mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m-0 \Leftrightarrow (x-1)(mx^2-2mx+m-2)=0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ mx^2-2mx+m-2=0 \quad (1)\end{array}\right..$$

$f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m^2-m(m-2)>0 \\ m\cdot 1^2-2m\cdot 1+m-2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 2m>0 \\ -2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow m>0.$$

Mà $m\in[-10;10], m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{1;2;3;\ldots;10\}$. Có 10 giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

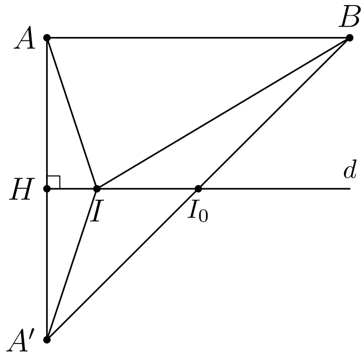
Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(3;-4;-2)$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=2+4t \\ y=-6t \\ z=-1-8\end{cases}$

Điểm $I(a;b;c)$ thuộc d là điểm thỏa mãn $IA+IB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T=a+b+c$ bằng

(A) $\dfrac{23}{58}$. (B) $-\dfrac{43}{58}$. (C) $\dfrac{65}{29}$. **(D) $-\dfrac{21}{58}$.**

Lời giải.

Cách giải:



$d\colon \begin{cases} x = 2+4t \\ y = -6t \\ z = -1-8t \end{cases}$ có một véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (4;-6;-8)$.

$A = (1;-1;2), B = (3;-4;-2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2;-3;-4)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;-3;-4)$ cùng phương với $\overrightarrow{u} = (4;-6;-8)$.

Mà $A(1;-1;2) \notin d \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel d \Rightarrow A, B, d$ đồng phẳng.

Xét mặt phẳng chứa AB và d. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua d, (α) là mặt phẳng qua A, vuông góc với d.

Khi đó, giao điểm H của d với (α) là trung điểm của AA'.

(α) có 1 véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (2;-3;-4)$ đi qua $A(1;-1;2)$ có phương trình:

$2(x-1) - 3(y+1) - 4(z-2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y - 4z + 3 = 0$.

$H \in d\colon \begin{cases} x = 2+4t \\ y = -6t \\ z = -1-8t \end{cases} \Rightarrow$ giả sử $H(2+4t;-6t;-1-8t)$.

$H \in (\alpha) \Rightarrow 2\left(2+4t\right) - 3\left(-6t\right) - 4\left(-1-8t\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow 58t + 11 = 0$.

$\Leftrightarrow t = -\dfrac{11}{58} \Rightarrow H\left(\dfrac{36}{29};\dfrac{33}{29};\dfrac{15}{29}\right)$.

Ta có $IA + IB = IA' + IB' \geq A'B \Rightarrow \min(IA+IB) = A'B$ khi và chỉ khi I trùng với I_0 là giao điểm của $A'B$ và d.

HI_0 là đường trung bình của tam giác $A'AB$

$$\Rightarrow \overrightarrow{HI_0} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{I_0} - \dfrac{36}{29} = \dfrac{1}{2}\cdot 2 \\ y_{I_0} - \dfrac{33}{29} = \dfrac{1}{2}\cdot(-3) \\ z_{I_0} - \dfrac{15}{29} = \dfrac{1}{2}\cdot(-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{I_0} = \dfrac{65}{29} \\ y_{I_0} = -\dfrac{21}{58} \\ z_{I_0} = -\dfrac{43}{29} \end{cases}.$$

$\Rightarrow I_0\left(\dfrac{65}{29};-\dfrac{21}{58};-\dfrac{43}{29}\right)$.

Vậy để $IA + IB$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $I\left(\dfrac{65}{29};-\dfrac{21}{58};-\dfrac{43}{29}\right) \Rightarrow a+b+c = \dfrac{65}{29} - \dfrac{21}{58} - \dfrac{43}{29} = -\dfrac{21}{58}$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 3, |z_2| = 4, |z_1 - z_2| = \sqrt{41}$. Xét số phức $z = \dfrac{z_1}{z_2} = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Khi đó $|b|$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. B. $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. C. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. D. $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải.

Phương pháp:

- Biểu diễn lượng giác của số phức.
- $\dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|, z_2 \neq 0$.

Cách giải:

Cách 1: Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của số phức z_1, z_2.

Theo đề bài, ta có $OA = 3, OB = 4, AB = \sqrt{41}$. $\Rightarrow \cos\widehat{AOB} = \dfrac{3^2 + 4^2 - 41}{2 \cdot 3 \cdot 4} = -\dfrac{2}{3}$.
Đặt

$$\begin{aligned}
z_1 &= 3(\cos\varphi + i\sin\varphi).\\
\Rightarrow z_2 &= 4(\cos(\varphi \pm AOB))\\
&= 4(\cos(\varphi\pm\alpha) + i\sin(\varphi\pm\alpha)) \quad \left(\alpha = \widehat{AOB}\right).\\
\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{4(\cos(\varphi\pm\alpha) + i\sin(\varphi\pm\alpha))}\\
&= \frac{3}{4}\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos(\varphi\pm\alpha) - i\sin(\varphi\pm\alpha))\\
&= \frac{3}{4}\left[(\cos\varphi\cdot\cos(\varphi\pm\alpha) + \sin\varphi\cdot\sin(\varphi\pm\alpha)) + i(\sin\varphi\cdot\cos(\varphi\pm\alpha)) - \cos\varphi\cdot\sin(\varphi\pm\alpha)\right]\\
&= \frac{3}{4}\left[\cos(\pm\alpha) + i\cdot\sin(\pm\alpha)\right] = \frac{3}{4}\cdot(\cos\alpha \pm i\sin\alpha).\\
\Rightarrow b &= \pm\frac{3}{4}\sin\alpha \Rightarrow |b| = \frac{3}{4}\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}.
\end{aligned}$$

Cách 2: Ta có

$$|z_1| = 3, |z_2| = 4, |z_1 - z_2| = \sqrt{41} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{3}{4}\\ \dfrac{|z_1 - z_2|}{|z_2|} = \dfrac{\sqrt{41}}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{3}{4}\\ \left|\dfrac{z_1}{z_2} - 1\right| = \dfrac{\sqrt{41}}{4}\end{cases}.$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = a + bi, (a, b \in R) \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2\\ (a-1)^2 + b^2 = \left(\dfrac{\sqrt{41}}{4}\right)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \dfrac{9}{16}\\ (a-1)^2 + b^2 = \dfrac{41}{16}\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \dfrac{9}{16} - a^2\\ (a-1)^2 + \dfrac{9}{16} - a^2 = \dfrac{41}{16}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \dfrac{5}{16}\\ a = -\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |b| = \dfrac{\sqrt{5}}{4}\\ a = -\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Vậy $|b| = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$.
Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(x) + 2f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$. B. $\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4\mathrm{e}^2}$. C. $\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4\mathrm{e}^2}$. D. $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

Lời giải.

Phương pháp: $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$.

Cách giải: Ta có

$$\begin{aligned}
f'(x) + 2f(x) = 1 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}f'(x) + \mathrm{e}^{2x}\cdot 2f(x) = \mathrm{e}^{2x}\\
&\Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{2x}\cdot f(x)\right)' = \mathrm{e}^{2x}\\
&\Rightarrow \mathrm{e}^{2x}\cdot f(x) = \int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{2x} \cdot f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C.$$

Mà

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ \Rightarrow 1 &= \frac{1}{2} + C \\ \Rightarrow C &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \mathrm{e}^{2x} \cdot f(x) &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow f(x) &= \frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{2\mathrm{e}^{2x}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{2\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}\right)\Big|_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4\mathrm{e}^2}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4\mathrm{e}^2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

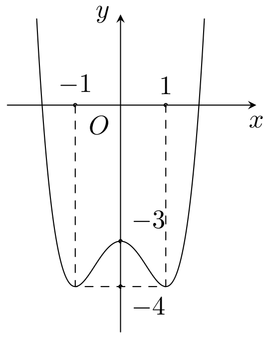
1. A	2. A	3. B	4. D	5. D	6. C	7. A	8. C	9. B	10. C
11. B	12. D	13. A	14. C	15. A	16. A	17. D	18. B	19. B	20. B
21. A	22. C	23. C	24. C	25. C	26. C	27. D	28. B	29. B	30. B
31. C	32. B	33. D	34. D	35. D	36. C	37. B	38. A	39. C	40. B
41. C	42. D	43. B	44. B	45. B	46. C	47. C	48. D	49. D	50. B

13 ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN KHTN, HÀ NỘI, LẦN 2 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m+1$ có bốn nghiệm phân biệt.

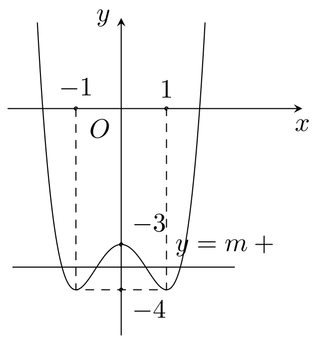


Ⓐ $-5 \leq m \leq -4$. Ⓑ $-4 < m < -3$.

Ⓒ $-4 \leq m \leq -3$. D $-5 < m < -4$.

Lời giải.

Phương trình $f(x) = m+1$ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = m+1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại bốn điểm phân biệt. Điều này tương đương với



$$\begin{aligned} & -4 < m+1 < -3 \\ \Leftrightarrow \quad & -5 < m < -4. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;3;4)$ trên mặt phẳng $(P)\colon 2x - y - z + 6 = 0$ là điểm nào dưới đây?

Ⓐ $(2;8;2)$. B $\left(1;\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right)$. Ⓒ $\left(3;\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$. Ⓓ $(1;3;5)$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua M và vuông góc mặt phẳng (P). Khi đó phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 3-t \\ z = 4-t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Gọi M' là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (M). Tọa độ điểm M' là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 3-t \\ z = 4-t \\ 2x-y-z+6=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \\ y = \frac{7}{2} \\ z = \frac{9}{2}. \end{cases}$

Vậy $M'\left(1;\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right)$

Chọn đáp án B □

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon 2x+6y+z-3=0$ cắt trục

Oz và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-6}{-1}$ lần lượt tại A và B. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=36$.
B $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=9$.
C $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=36$.
D $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=9$.

Lời giải.

Do điểm $A\in Oz$ nên suy ra $A(0;0;c)$, mà ta lại có $A\in(P)$ nên suy ra $c=3$. Do đó $A(0;0;3)$.

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases}x=5+t\\ y=2t\\ z=6-t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Tọa độ điểm B là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases}x=5+t\\ y=2t\\ z=6-t\\ 2x+6y+z-3=0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\ x=4\\ y=-2\\ z=7\end{cases}$

Do đó $B(4;-2;7)$.

Gọi I là tâm mặt cầu đường kính AB nên I là trung điểm AB, suy ra $I(2;-1;5)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-2;4)$ suy ra $AB=\sqrt{4^2+(-2)^2+7^2}=6$ nên bán kính mặt cầu là $R=\dfrac{AB}{2}=3$.

Phương trình mặt cầu là $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=9$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Cho bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↗	0	↘		↗	0	↘	
	$-\infty$				-1				$-\infty$

A Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.
B Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên tập $\mathbb{R}$ bằng -1.
C Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên tập $\mathbb{R}$ bằng 0.
D Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có đường tiệm cận.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y=f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất.

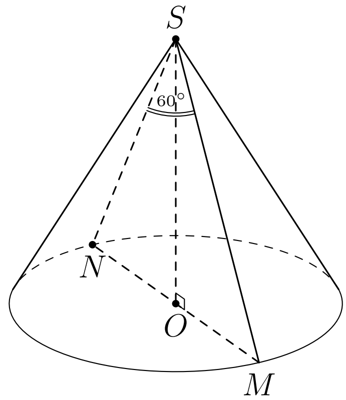
Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 60° và bán kính đáy bằng a. Diện tích xung quanh của hình nón bằng bao nhiêu?

A $2\pi a^2$.
B $4\pi a^2$.
C πa^2.
D $\pi a^2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Hình nón đã cho có đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O đường kính MN như hình vẽ.
Ta có bán kính đáy $r = OM = a$, góc $\widehat{MSN} = 60^\circ$ suy ra $\widehat{MSO} = 30^\circ$.
$\triangle SOM$ vuông tại O, ta có
$\sin\widehat{MSO} = \dfrac{OM}{SM}$, suy ra $SM = \dfrac{OM}{\sin\widehat{MSO}} = 2a$, hay đường sinh $l = 2a$.
Vậy diện tích xung quanh hình nón là



$$S_{\text{xq}} = \pi \cdot r \cdot l = 2\pi a^2.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2\left|x^2-4\right|$ với đường thẳng $y = 3$ là

(A) 8. (B) 2 . (C) 4. **D** 6 .

Lời giải.

Phương tình hoành độ giao điểm $x^2\left|x^2-4\right| = 3\,(1)$
nếu $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \cup 2 \leq x$.
Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2(x^2-4) = 3 \Leftrightarrow x^4-4x^2-3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 2+\sqrt{7} \\ x^2 = 2-\sqrt{7}\text{ (loại)}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2+\sqrt{7}}$.
nếu $x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.
Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2(x^2-4) = -3 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 3 \\ x^2 = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{3} \\ x = \pm 1\end{array}\right.$.
Vậy phương trình có 6 nghiệm.
Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ phương trình nào sau đây không phải là phương trình của một mặt cầu?

(A) $x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 4z - 3 = 0$. (B) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - x - y - z = 0$.
C $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 10 = 0$. (D) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 8y + 6z + 3 = 0$.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình mặt cầu là $R = a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.
Dựa vào bốn đáp án ta có đáp án C là $a = 1, b = -2, c = 2, d = 10 \Rightarrow R = -1 < 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 5$ và tổng 40 số hạng đầu bằng 3320. Tìm công sai của cấp số cộng đó.

A 4 . (B) -4 . (C) 8. (D) -8 .

Lời giải.

Tổng của n số hạng đầu của cấp số cộng là $S_n = nu_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$

$\Leftrightarrow 3320 = 40 \cdot 5 + \dfrac{40 \cdot 39}{2}d \Leftrightarrow d = 4$

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{25-x^2}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = (-5; 5)$

Hàm số đã cho liên tục trong $[-5; 5]$ và $\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{x-1}{\sqrt{25-x^2}} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{x-1}{\sqrt{25-x^2}} = +\infty$.

Nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng là $x = 5, x = -5$ và đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ cho điểm $A(-3; 1; 2)$. Tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua trục Oy là:

(A) $(3; -1; -2)$. (B) $(3; -1; 2)$. (C) $(-3; -1; 2)$. (D) $(3; 1; -2)$.

Lời giải.

Toạ độ điểm A' đối xứng với $A\,(-3; 1; 2)$ qua trục Oy là $(3; 1; -2)$

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{7-x}$ là

(A) $\left[2; 2\sqrt{2}\right]$. (B) $[3; 7]$. (C) $\left[0; 2\sqrt{2}\right]$. (D) $(3; 7)$.

Lời giải.

Phương pháp:

Tìm Tập xác định của hàm số sau đó xét sự biến thiên, lập bảng biến thiên và tìm tập giá trị của hàm số.

Cách giải:

TXĐ $\mathscr{D} = [3; 7]$.

Xét hàm số $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{7-x}$.

Ta có $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-3}} - \dfrac{1}{2\sqrt{7-x}}$.

Suy ra

$$\begin{aligned} y' = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{x-3}} - \frac{1}{2\sqrt{7-x}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x-3} = \sqrt{7-x} \\ &\Leftrightarrow \quad x - 3 = 7 - x \\ &\Leftrightarrow \quad x = 5 \end{aligned}$$

Ta có bảng biến thiên như sau

x	3		5		7
y'	‖	$+$	0	$-$	‖
y			$2\sqrt{2}$		
	2	$\nearrow$		$\searrow$	2

Vậy tập giá trị của hàm số là $\left[2; 2\sqrt{2}\right]$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\ln(\ln x)}$ là

A $f'(x) = \dfrac{1}{2x\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}$.
B $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}$.
C $f'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(\ln x)}}$.
D $f'(x) = \dfrac{1}{\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng công thức đạo hàm của các hàm số cơ bản và hàm hợp $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}, (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Cách giải:

Ta có $f'(x) = \left(\sqrt{\ln(\ln x)}\right)' = \dfrac{[\ln(\ln x)]'}{2\sqrt{\ln(\ln x)}} = \dfrac{\dfrac{(\ln x)'}{\ln x}}{2\sqrt{\ln(\ln x)}} = \dfrac{1}{2x\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}$

Chọn đáp án A □

Câu 13. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn

$$|z + 2 - i| + |z - 4 - i| = 10$$

A 12π.
B 20π.
C 15π.
D Đáp án khác.

Lời giải.

Phương pháp:

Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức bài cho sau đó tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các điểm đó.

Cách giải:

Ta có $|z + 2 - i| + |z - 4 - i| = 10 \Leftrightarrow |z - (-2 + i)| + |z - (4 + i)| = 10 \ (*)$.

Gọi $z = x + yi \Rightarrow M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z.

Gọi $A(-2; 1)$ là điểm biểu diễn cho số phức $-2 + i$ và $B(4; 1)$ là điểm biểu diễn cho số phức $4 + i$.

Từ $(*) \Rightarrow MA + MB = 10$ nên tập hợp điểm M là elip có A, B là hai tiêu điểm và độ dài trục lớn bằng 10.

Ta có $AB = \sqrt{6^2} = 6 = 2c \Rightarrow c = 3$ và $MA + MB = 2a = 10 \Rightarrow a = 5$.

$\Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2 \Rightarrow b = 4$.

Vậy $S_{(E)} = \pi \cdot ab = \pi \cdot 5 \cdot 4 = 20\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ với bảng biến thiên dưới đây:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	3	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			-2				-4		

Hỏi hàm số $y = |f(|x|)|$ có bao nhiêu cực trị?

Ⓐ 5. Ⓑ 3. Ⓒ 1. **D** 7.

Lời giải.

Phương pháp:

+ Cách 1: Dựa vào BBT, vẽ BBT của đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$ và suy ra số các điểm cực trị của hàm số.

+ Cách 2: Từ BBT suy ra công thức hàm số $y = f(x)$ từ đó vẽ đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$ và suy ra số các điểm cực trị của hàm số.

Cách giải:

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị $(-1; -2), (0; 3), (2; -4)$.

Khi đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |f(|x|)|$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		2		3		4		$+\infty$
	$y = 0$								
			-2				-4		

Bảng biến thiên của hàm số $y = |f(|x|)|$ là

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		4		3		4		$+\infty$
	$y = 0$								
			-4				-4		

Như vậy hàm số $y = |f(|x|)|$ có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và BC'. Khi đó đường thẳng AB' song song với mặt phẳng

A $(C'MN)$. **B** $(A'CN)$. **C** $(A'BN)$. **D** (BMN).

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng quan hệ song song trong không gian để chứng minh và chọn đáp án đúng.

Cách giải:

+) Xét $(C'MN)$:

Ta có $(C'MN)$ chính là $(C'MB')$

$\Rightarrow AB' \cap (C'MN) = \{B'\}$

$\Rightarrow$ loại đáp án "$(C'MN)$".

+) Xét $(A'BN)$:

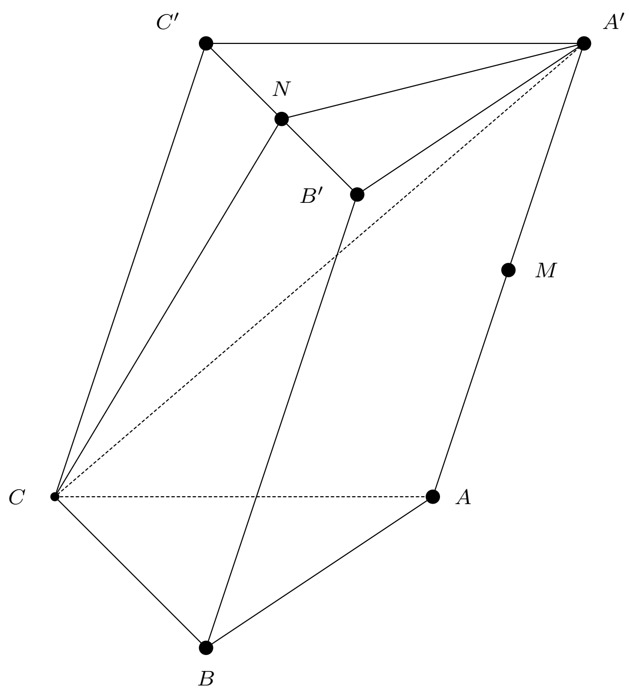
Ta có $AB' \cap A'B$ vì hai đường thẳng cùng thuộc $(A'B'BA)$

$\Rightarrow$ loại đáp án "$(A'BN)$".

+) Xét (BMN):

Ta có $AB' \cap BM$ do hai đường thẳng này cùng thuộc $(A'B'BA)$

$\Rightarrow$ loại đáp án "(BMN)".



Chọn đáp án B □

Câu 16. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x+m}{x+1}$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A $0 < m < 4$. **B** $4 < m < 8$. **C** $8 < m < 10$. **D** $m > 10$.

Lời giải.

Phương pháp:

+) Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên $[a; b]$ bằng cách:

+) Giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm x_i.

+) Tính các giá trị $f(a), f(b), f(x_i)$ $(x_i \in [a; b])$. Khi đó:

$\min\limits_{[a;b]} f(x) = \min\{f(a); f(b); f(x_i)\}$, $\max\limits_{[a;b]} f(x) = \min\{f(a); f(b); f(x_i)\}$

Cách giải:

TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có: $y' = \dfrac{x+1-x-m}{(x+1)2} = \dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Vì hàm số đã cho là hàm bậc nhất trên bậc nhất nên hàm số đơn điệu trên từng khoảng xác định

của hàm số.
Xét trên $[1;2]$ ta có: $y(1)=\dfrac{1+m}{2}$; $y(2)=\dfrac{2+m}{3}$ là các GTNN và GTLN của hàm số.
$\Rightarrow y(1)+y(2)=\dfrac{m+1}{2}+\dfrac{m+2}{3}=8\Leftrightarrow 3m+3+2m+4=48\Leftrightarrow m=\dfrac{41}{5}$.
$\Rightarrow 8<m<10$.
Chọn đáp án C □

Câu 17. Số $20182019^{20192020}$ có bao nhiêu chữ số?

A. 147501991. B. 147501992. C. 147433277. D. 147433276.

Lời giải.

Phương pháp: Số các chữ số của số a^m là $[\log a^m]+1$ chữ số.

Cách giải:

Ta có: $[\log 20182019^{20192020}]+1=[20192020\log 20182019]+1=147501991+1=14750192$.
Chọn đáp án B □

Câu 18. Phương trình $\cos 2x+2\cos x-3=0$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0;2019)$?

A. 1009. B. 1010. C. 320. D. 321.

Lời giải.

Phương pháp:

Giải phương trình lượng giác tìm nghiệm $x=\alpha+k\pi$ sau đó cho nghiệm đó thuộc $(0;2019)$ tìm số các giá trị $k\in\mathbb{Z}$ rồi suy ra số nghiệm của phương trình đã cho.

Cách giải:

Ta có:

$$\begin{aligned}&\cos 2x+2\cos x-3=0\\ \Leftrightarrow\ &2\cos^2 x+2\cos x-4=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos x=-2\ (\text{loại})\end{array}\right.\\ \Leftrightarrow\ &x=k2\pi\ (k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm thuộc $(0;2019)$
$\Rightarrow 0<k2\pi<2019\Leftrightarrow 0<k<321,33$
$\Rightarrow k\in\{1;2;\ldots;321\}$.
Chọn đáp án D □

Câu 19. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}7-4x^2 \text{ khi } 0\le x\le 1\\ 4-x^2 \text{ khi } x>1\end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x=0$, $x=3$, $y=0$.

A. $\dfrac{16}{3}$. B. $\dfrac{20}{3}$. C. 10. D. 9.

Lời giải.

Phương pháp: Công thức tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường thẳng $x=a, x=b$ $(a<b)$ và các đồ thị hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ là $S=\displaystyle\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx$.

Cách giải:

Xét các phương trình hoành độ giao điểm:

- $4-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \notin (1;+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=2.$
- $7-4x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2} \notin [0;1].$

$$\Rightarrow S=\int\limits_0^1 \left|7-4x^2\right| \mathrm{d}x+\int\limits_1^2 \left|4-x^2\right| \mathrm{d}x+\int\limits_2^3 \left|4-x^2\right| \mathrm{d}x$$

$$=\int\limits_0^1 \left(7-4x^2\right) \mathrm{d}x+\int\limits_1^2 \left(7-4x^2\right) \mathrm{d}x+\int\limits_2^3 \left(7-4x^2\right) \mathrm{d}x$$

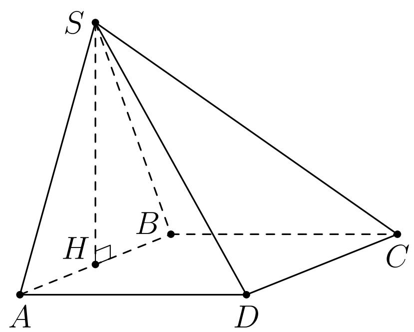
$$=7-1+\frac{16}{3}-\frac{11}{3}-3+\frac{16}{3}=10.$$

Chọn đáp án C □

Câu 20. Cho hình chóp tứ giác $ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAB) là một tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A $\dfrac{a^3}{6}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D** $\dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải.



Phương pháp:

Công thức tính thể tích khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là: $V=\dfrac{1}{3}S.h$.

Cách giải: Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

$\Rightarrow SH=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}a^2=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}.$

Chọn đáp án C □

Câu 21. Cho số tự nhiên n thỏa mãn $\mathrm{C}_n^2+\mathrm{A}_n^2=15n$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A n chia hết cho 7. **B** n không chia hết cho 2.

C n chia hết cho 5. **D** n không chia hết cho 11.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} n \geq 2 \\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Ta có

$\mathrm{C}_n^2+\mathrm{A}_n^2=15n$

$\Leftrightarrow \dfrac{n!}{2!(n-2)!}+\dfrac{n!}{(n-2)!}=15n$ với $(n\geq 2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)}{2}+\dfrac{n(n-1)}{1}=15n$

$\Leftrightarrow n^2-n+2n^2-2n-30n=0$

$\Leftrightarrow 3n^2-33n=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=0 \text{ (loại)} \\ n=11 \text{ (nhận).} \end{array}\right.$

Vậy n không chia hết cho 2.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho H là trực tâm của $\triangle ABC$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

(A) $\dfrac{81\pi}{2}$. **B** $\dfrac{243\pi}{2}$. (C) 81π. (D) 243π.

Lời giải.

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ lần lượt thuộc các trục tọa độ Ox, Oy, Oz.

Khi đó ta có phương trình mặt phẳng (α) đi qua các điểm A, B, C là $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

$H\in(\alpha)\Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}-\dfrac{2}{c}=1 \quad (1).$

Ta có: $\overrightarrow{AH}=(1-a;2;-2)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-b;c)$, $\overrightarrow{BH}=(1;2-b;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(-a;0;c)$.

Theo đề bài ta có H là trực tâm $\triangle ABC$, ta có

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} -2b-2c=0 \\ -a-2c=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a=-2c \\ b=-c. \end{cases} \end{aligned}$$

Thay vào (1) ta có $\dfrac{1}{-2c}+\dfrac{2}{-c}-\dfrac{2}{c}=1\Rightarrow -\dfrac{9}{2c}=1\Leftrightarrow c=-\dfrac{9}{2}$.

$\Rightarrow \begin{cases} a=-2c=9 \\ b=-c=\dfrac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(9;0;0) \\ B\left(0;\dfrac{9}{2}0\right) \\ C\left(0;0;-\dfrac{9}{2}\right). \end{cases}$

Gọi $I\left(x_0;y_0;z_0\right)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp tứ giác $OABC$, ta có

$$\begin{cases}OI=LA\\OI=IB\\OI=IC\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2+y_0^2+z_0^2=\left(x_0-9\right)^2+y_0^2+z_0^2\\x_0^2+y_0^2+z_0^2=x_0^2+\left(y_0-\dfrac{9}{2}\right)^2+z_0^2\\x_0^2+y_0^2+z_0^2=x_0^2+y_0^2+\left(z_0+\dfrac{9}{2}\right)^2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2=\left(x_0-9\right)^2\\y_0^2=\left(y_0-\dfrac{9}{2}\right)^2\\z_0^2=\left(z_0+\dfrac{9}{2}\right)^2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=-x_0+9\\y_0=-y_0+\dfrac{9}{2}\\z_0=-z_0-\dfrac{9}{2}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=\dfrac{9}{2}\\y_0=\dfrac{9}{4}\\z_0=-\dfrac{9}{4}.\end{cases}$$

Suy ra $I\left(\dfrac{9}{2};\dfrac{9}{4};\dfrac{9}{4}\right)$, $R=OI=\dfrac{9\sqrt{6}}{4}$.

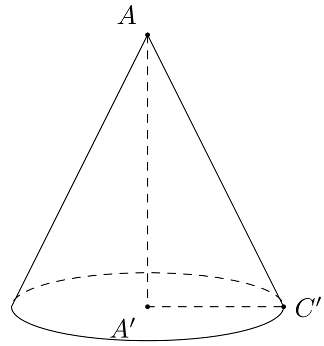
Vậy $S_{(I)}=4\pi R^2=4\pi\cdot\left(\dfrac{9\sqrt{6}}{4}\right)^2=\dfrac{243\pi}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính diện tích toàn phần của vật tròn xoay thu được khi quay tam giác $AA'C'$ quanh trục AA'.

A $\pi\left(\sqrt{6}+2\right)a^2$. **B** $\pi\left(\sqrt{3}+2\right)a^2$. **C** $2\pi\left(\sqrt{2}+1\right)a^2$. **D** $2\pi\left(\sqrt{6}+1\right)a^2$.

Lời giải.



Khi quay tam giác $AA'C'$ quanh trục AA' ta được hình nón có bán kính đáy $R=A'C'=a\sqrt{2}$, đường sinh $l=AC'$ và chiều cao $h=AA'=a$.
Ta có $l=AC'=\sqrt{A'C'^2+AA'^2}=\sqrt{2a^2+a^2}=a\sqrt{3}$.
Ta có
$$S_{tp}=\pi Rl+\pi R^2=\pi(\sqrt{6}+2)a^2.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Một mô hình gồm các khối cầu xếp chồng lên nhau tạo thành một cột thẳng đứng. Biết rằng mỗi khối cầu có bán kính gấp đôi bán kính của khối cầu nằm ngay trên nó và bán kính khối cầu dưới cùng là 50 cm. Hỏi mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) Mô hình có thể đạt được chiều cao tùy ý. (B) Chiều cao mô hình không quá $1,5$ mét.
(C) Chiều cao mô hình tối đa là 2 mét. **D** Chiều cao mô hình dưới 2 mét.

(2H2K2-4)

Lời giải.

Gọi các quả cầu được xếp trong mô hình là n quả ($n \in \mathbb{N}^*$).
Suy ra bán kính các quả cầu tạo thành cấp số nhân có công bội là 2.
Gọi bán kính quả cầu trên cùng hay quả cầu nhỏ nhất là R_1 $(0 < R_1 < 50)$.
Suy ra bán kính quả cầu dưới cùng là $R_n = 50 = R_1 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow 2^n = \dfrac{100}{R_1}$.
Khi đó chiều cao của mô hình có thể là

$$h = 2S_n = \frac{2 \cdot R_1 \left(2^n - 1\right)}{2-1} = 2R_1\left(\frac{100}{R_1} - 1\right) = 200 - 2R_1 < 200cm = 2m.$$

Vậy chiều cao của mô hình là dưới 2 mét.
Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho khối chóp tứ giác $SABCD$ có thể tích V, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh SB, BC, CD, DA. Tính thể tích khối chóp $M.CNQP$ theo V.

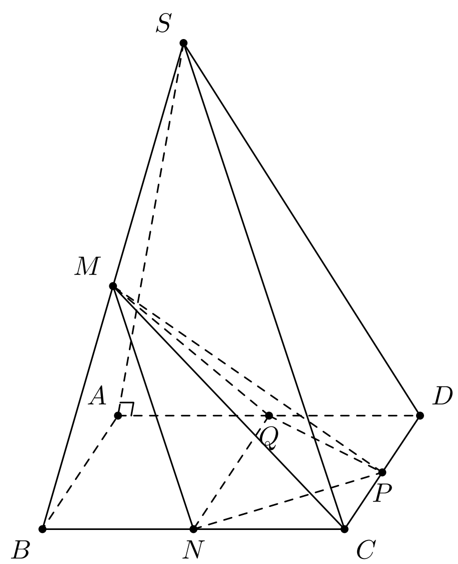
(A) $\dfrac{3V}{4}$. (B) $\dfrac{3V}{8}$. **C** $\dfrac{3V}{16}$. (D) $\dfrac{V}{16}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} S_{CNPQ} &= S_{NQDC} - S_{DPQ} \\ &= \frac{1}{2}S_{ABCD} - S_{DPQ} = \frac{1}{2}S - \frac{1}{8}S \\ &= \frac{3}{8}S. \end{aligned}$$

Lại có $\mathrm{d}\left(M; (ABCD)\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(A; (ABCD)\right)$.
Suy ra $V_{MCNPQ} = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}\left(M; (ABCD)\right) \cdot S_{CNPQ} = \dfrac{1}{2}h \cdot \dfrac{3}{8}S = \dfrac{3}{16}V$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = 4x + 3$ và $f(1) = -1$. Biết rằng phương trình $f(x) = 10$ có hai nghiệm thực x_1, x_2. Tính tổng $\log_2|x_1| + \log_2|x_2|$.

(A) 8. (B) 16. (C) 4. **D** 3.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng công thức: $f(x)=\int f'(x)\,dx$ để tìm hàm số $f(x)$ sau đó giải phương trình và tính tổng đề bài yêu cầu.

Ta có: $f(x)=\int(4x+3)\,dx=2x^3+3x+C$.

Lại có: $f(1)=-1\Rightarrow 2\cdot 1+3\cdot 1+C=-1\Leftrightarrow C=-6\Rightarrow f(x)=2x^2+3x-6$.

$\Rightarrow f(x)=10\Leftrightarrow 2x^2+3x-6=10\Leftrightarrow 2x^2+3x-16=0\quad(*)$.

Ta có: $ac=2\cdot(-16)=-32<0\Rightarrow(*)$ luôn có hai nghiệm trái dấu.

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{3}{2}\\ x_1x_2=-8.\end{cases}$

Ta có: $\log_2|x_1|+\log_2|x_2|=\log_2|x_1x_2|=\log_2|-8|=\log_2 2^3=3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Cho khai triển $\left(\sqrt{3}+x\right)^{2019}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_{2019}x^{2019}$.
Hãy tính tổng $S=a_0-a_2+a_4-a_6+\ldots+a_{2016}-a_{2018}$.

(A) $\left(\sqrt{3}\right)^{1009}$. **B** 0. (C) 2^{2019}. (D) 2^{1009}.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng công thức khai triển của nhị thức: $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k a^{n-k}b^k$.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}+x\right)^{2019}&=\sum_{k=0}^{2019}\mathrm{C}_{2019}^k\left(\sqrt{3}\right)^k x^{2019-k}\\&=\mathrm{C}_{2019}^0\left(\sqrt{3}\right)^{2019}+\mathrm{C}_{2019}^1\left(\sqrt{3}\right)^{2018}x+\ldots+\mathrm{C}_{2019}^{2018}\cdot\sqrt{3}x^{2018}+\mathrm{C}_{2019}^{2019}x^{2019}\\&=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_{2019}x^{2019}.\end{aligned}$$

Ta có: $i^m=\begin{cases}1 & \text{khi } m=4l\\ i & \text{khi } m=4l+1\\ -1 & \text{khi } m=4l+2\\ -i & \text{khi } m=4l+3\end{cases}\quad(l\in\mathbb{Z})$.

Chọn $x=i$ ta có:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}+i\right)^{2019}&=\sum_{k=0}^{2019}\mathrm{C}_{2019}^k\left(\sqrt{3}\right)^k i^{2019-k}\ \left(i^2=-1\right)\\&=\mathrm{C}_{2019}^0\left(\sqrt{3}\right)^{2019}+\mathrm{C}_{2019}^1\left(\sqrt{3}\right)^{2018}i+\ldots+\mathrm{C}_{2019}^{2018}\cdot\sqrt{3}\cdot i^{2018}+\mathrm{C}_{2019}^{2019}i^{2019}\\&=a_0+a_1i+a_2i^2+a_3i^3+\ldots+a_{2018}i^{2018}+a_{2019}i^{2019}\\&=a_0+a_1i-a_2-a_3i+\ldots-a_{2018}-a_{2019}i.\end{aligned}$$

Chọn $x=-i$ ta có:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}-i\right)^{2019} &= \sum_{k=0}^{2019} \mathrm{C}_{2019}^{k}\left(\sqrt{3}\right)^{k}(-i)^{2019-k}\\ &= \mathrm{C}_{2019}^{0}\left(\sqrt{3}\right)^{2019} - \mathrm{C}_{2019}^{1}\left(\sqrt{3}\right)^{2018} i - \ldots + \mathrm{C}_{2019}^{2018}\cdot\sqrt{3}\cdot i^{2018} - \mathrm{C}_{2019}^{2019} i^{2019}\\ &= a_0 - a_1 i + a_2 i^2 - a_3 i^3 + \ldots + a_{2018} i^{2018} - a_{2019} i^{2019}\\ &= a_0 - a_1 i - a_2 + a_3 i + \ldots - a_{2018} + a_{2019} i.\\ &\Rightarrow \left(\sqrt{3}+1\right)^{2019} + \left(\sqrt{3}-1\right)^{2019} = 2\left(a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \ldots + a_{2016} - a_{2018}\right).\\ &\Leftrightarrow 2S = \left[\left(\sqrt{3}+1\right)^{3}\right]^{673} + \left[\left(\sqrt{3}-1\right)^{3}\right]^{673} = (8i)^{673} + (-8i)^{673} = 0\\ &\Leftrightarrow 2S = 8^{673}\cdot i^{673} - 8^{673}\cdot i^{673} = 0 \Leftrightarrow S = 0.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 28. Biết tổng các hệ số trong khai triển nhị thức Newton của $(5x-1)^n$ bằng 2^{100}. Tìm hệ số của x^3.

A -161700. B -19600. C -2450000. D -20212500.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng công thức khai triển của nhị thức $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$.

Ta có: $(5x-1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (5x)^k (-1)^{n-k}$.

Chọn $x = 1$ ta được tổng các hệ số của khai triển

$$\begin{aligned} & (5\cdot 1 - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 5^k (-1)^{n-k} = 2^{100}\\ \Leftrightarrow\quad & 2^{100} = 4^n \Leftrightarrow 2^{100} = 2^{2n} \Leftrightarrow 2n = 100 \Leftrightarrow n = 50.\end{aligned}$$

Vậy hệ số của x^3 trong khai triển là: $C_{50}^3\cdot 5^3\cdot(-1)^{50-3} = -C_{50}^3\cdot 5^3 = -2450000$.

Chọn đáp án C □

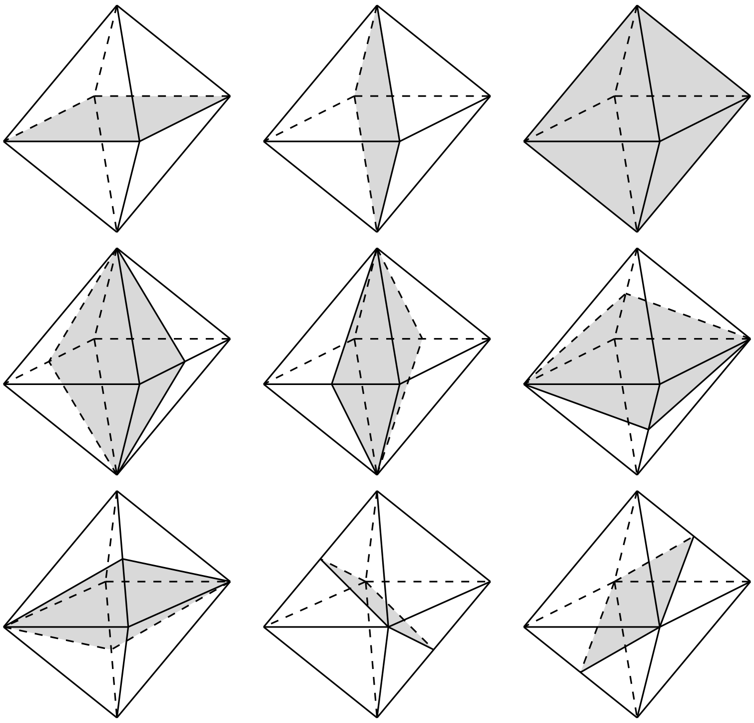
Câu 29. Số mặt phẳng đối xứng của hình bát diện đều là:

A 3. B 5. C 7. D 9.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng lý thuyết khối đa diện để làm bài toán.

Cách giải:



Hình bát diện đều có 9 mặt phẳng đối xứng.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 8$ và $\int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$.

Tính $\int\limits_{-1}^1 (|4x-1|)\,\mathrm{d}x$.

A 3. B 6. C $\frac{9}{4}$. D $\frac{11}{4}$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng phương pháp tích phân đổi biến.

Ta có: $I = \int\limits_{-1}^1 f\left(|4x-1|\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{\frac{1}{4}} f\left(-4x+1\right)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{1}{4}}^1 f\left(4x-1\right)\,\mathrm{d}x$.

Xét $I_1 = \int\limits_{-1}^{\frac{1}{4}} f\left(-4x+1\right)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $-4x+1 = t \Rightarrow \mathrm{d}t = -4\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=-1 \Rightarrow t=5 \\ x=\dfrac{1}{4} \Rightarrow t=0. \end{cases}$

$\Rightarrow I_1 = -\frac{1}{4}\int\limits_5^0 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int\limits_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cdot 4 = 1.$

Xét $I_2 = \int\limits_{\frac{1}{4}}^1 f\left(4x-1\right)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $4x-1=t \Rightarrow \mathrm{d}t = 4\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=3 \\ x=\dfrac{1}{4} \Rightarrow t=0. \end{cases}$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{4}\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cdot 8 = 2$$

$I = I_1 + I_2 = 1 + 2 = 3$

Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho hai số thực $a>1$, $b>1$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $a^x \cdot b^{x^2-1} = 1$. Trong trường hợp biểu thức $S = \left(\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}\right)^2 - 4x_1 - 4x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất, mệnh đề nào sau đây là đúng?

A $a<b$. **B** $ab=4$. **C** $ab=2$. **D** $a>b$.

Lời giải.

Ta có: $a^x = b^{1-x^2} \Leftrightarrow x\cdot\log_b a = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + (\log_b a)\,x - 1 = 0$

Khi đó

$$\begin{cases} x_1+x_2 = -\log_b a \\ x_1x_2 = -1. \end{cases}$$

Do đó $S = \left(\dfrac{-1}{-\log_b a}\right)^2 - 4\left(-\log_b a\right) = \dfrac{1}{\left(\log_b a\right)^2} + 4\log_b a$.

Đặt $t = \log_b a > \log_b 1 = 0$. Khi đó $S = \dfrac{1}{t^2} + 4t = \dfrac{1}{t^2} + 2t + 2t \overset{Cauchy}{\geqslant} 3\sqrt[3]{4}$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \ \min S = 3\sqrt[3]{4} \Leftrightarrow 2t = \frac{1}{t^2} \\ &\Leftrightarrow \ t^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ &\Leftrightarrow \ \log_b a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ &\Rightarrow \ a = b^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} < b^1 \Rightarrow a < b. \end{aligned}$$

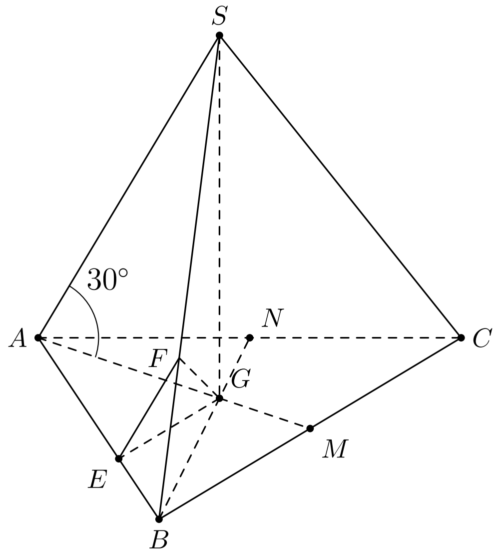
Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác vuông cân tại B với trọng tâm G, cạnh bên SA tạo với đáy (ABC) một góc 30°. Biết hai mặt phẳng (SBG) và (SCG) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính cô-sin của góc giữa hai đường thẳng SA và BC.

A $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **B** $\dfrac{3\sqrt{15}}{20}$. **C** $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$. **D** $\dfrac{\sqrt{30}}{20}$.

Lời giải.

Hai mặt phẳng (SBG) và (SCG) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên $SG \perp (ABC)$.
Gọi cạnh $AB = BC = a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$,
$AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{\sqrt{5}}{3}a \Rightarrow SG = AG \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{15}}{9}a$,
$SA = \dfrac{AG}{\cos 30^\circ} = \dfrac{2\sqrt{15}}{9}a$.
Từ G kẻ $GE \parallel BC$ $(E \in AB)$, từ E kẻ $EF \parallel SA$ $(F \in SB)$
suy ra$(SA, BC) = (EF, EG)$.



Có:

$$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BS} \Leftrightarrow \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{GS} - \overrightarrow{GB}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{GF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{GS} \Leftrightarrow GF^2 = \frac{4}{9}GB^2 + \frac{1}{9}GS^2$$
$$\Leftrightarrow \quad GF^2 = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{5}{27 \cdot 9}a^2 = \frac{29}{27 \cdot 9}a^2.$$

Xét $\triangle EFG$ có $EF = \dfrac{1}{3}SA = \dfrac{2\sqrt{15}}{27}a$, $EG = \dfrac{2}{3}BM = \dfrac{a}{3}$.
Khi đó:

$$\cos \widehat{FEG} = \frac{EF^2 + EG^2 - FG^2}{2EF \cdot EG}$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos \widehat{FEG} = \frac{\dfrac{4 \cdot 15a^2}{27 \cdot 27} + \dfrac{a^2}{9} - \dfrac{29a^2}{27 \cdot 9}}{2\dfrac{2a\sqrt{15}}{27} \cdot \dfrac{a}{3}}$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos \widehat{FEG} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{10}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 33. Có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có 5 ghế. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh, gồm 5 nam và 5 nữ vào hai dãy ghế đó sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi. Tính xác suất để mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ.

A $\dfrac{1}{252}$. **B** $\dfrac{1}{945}$. **C** $\dfrac{8}{63}$. **D** $\dfrac{1}{63}$.

Lời giải.
Số phần tử không gian mẫu là $10!$.
Xếp 5 bạn nữ vào 5 ghế của dãy thứ nhất, có $5!$ cách.
Sau đó xếp tiếp 5 bạn nam vào 5 ghế của dãy thứ hai, có $5!$ cách.
Cứ hai ghế đối diện nhau ta lại đảo chỗ ngồi cho cặp nam nữ, có $2!$ cách.

Vậy số cách xếp mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ là $5!5!(2!)^5$ cách.

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{5!5!(2!)^5}{10!} = \dfrac{8}{63}$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Phương trình $\sin x = \dfrac{x}{2019}$ có bao nhiêu nghiệm thực? (Đã sửa câu hỏi so với đề gốc $\sin x = 2019x$)

A 1288. **B** 1287. **C** 1290. **D** 1289.

Lời giải.

Điều kiện phương trình có nghiệm: $-1 \le \sin x \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \dfrac{x}{2019} \le 1 \Leftrightarrow -2019 \le x \le 2019$.

Ta có: $\sin x = \dfrac{x}{2019} \Leftrightarrow \sin x - \dfrac{x}{2019} = 0$.

Xét hàm số $f(x) = \sin x - \dfrac{x}{2019}$ trên $[-2019; 2019]$.

- $f(-x) = \sin(-x) - \dfrac{-x}{2019} = -\sin x + \dfrac{x}{2019} = -f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.
  $\Rightarrow x_0$ là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ thì $-x_0$ là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.
- $x = 0$ là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$
- $f'(x) = \cos x - \dfrac{1}{2019}$.
  Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2019} \Leftrightarrow x = \pm \arccos\left(\dfrac{1}{2019}\right) + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Xét trên $(0; 2\pi]$ ta có bảng biến thiên:

x	0		$\arccos\left(\dfrac{1}{2019}\right)$		$-\arccos\left(\dfrac{1}{2019}\right) + 2\pi$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	≈ 0.99	↘	≈ -1.00	↗	≈ -0.003

$\Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm thuộc $(0; 2\pi]$.

Xét trên $(2\pi; 4\pi]$ ta có bảng biến thiên:

x	2π		$\arccos\left(\dfrac{1}{2019}\right) + 2\pi$		$-\arccos\left(\dfrac{1}{2019}\right) + 4\pi$		4π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	≈ -0.003	↗	≈ 0.99	↘	≈ -1.00	↗	≈ -0.006

$\Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm thuộc $(2\pi; 4\pi]$.

Tương tự, phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm thuộc mỗi chu kỳ $(4\pi; 6\pi], (6\pi; 8\pi], \ldots, (640\pi; 642\pi]$.

Xét trên $(642\pi; 2019]$ ta có bảng biến thiên:

x	642π		$\arccos\left(\dfrac{1}{2019}\right)+642\pi$		2019
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	≈ -0.99	$\nearrow$	≈ 0.00	$\searrow$	≈ -0.13

$\Rightarrow$ phương trình $f(x)=0$ có 2 nghiệm thuộc $(642\pi;2019]$.
$\Rightarrow$ phương trình $f(x)=0$ có 643 nghiệm dương.
Hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ $\Rightarrow$ phương trình $f(x)=0$ có 643 nghiệm âm.
$\Rightarrow$ Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=0$ là: $643+643+1=1287$ (nghiệm).
Chọn đáp án B □

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng $(d)\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta)\colon x+y-2z+1=0$. Hỏi giao tuyến của (α) và (β) đi qua điểm nào dưới đây?

A. $(1;-2;0)$. B. $(2;3;3)$. C. $(5;6;8)$. D. $(0;1;3)$.

Lời giải.

Ta $(\alpha)\colon \begin{cases} d\subset(\alpha)\\ (\beta)\perp(\alpha)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(2;3;0)\in d\Rightarrow A\in(\alpha)\\ \vec{n}_\alpha\perp\vec{u}_d=(1;1;2)\\ \vec{n}_\alpha\perp\vec{n}_\beta=(1;1;-2)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(2;3;0)\in(\alpha)\\ \vec{n}_\alpha=[\vec{u}_d;\vec{n}_\beta]=(-4;4;0).\end{cases}$

Suy ra $(\alpha)\colon x-y+1=0$.
Khi đó giao tuyến thỏa hệ
$$\begin{cases} x-y+1=0\\ x+y-2z+1=0.\end{cases}$$
Thay các phương án vào hệ, ta nhận phương án $(2;3;3)$.
Chọn đáp án B □

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-16}{x-2}=12$. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{5f(x)-16}-4}{x^2+2x-8}$.

A. $\dfrac{5}{24}$. B. $\dfrac{1}{5}$. C. $\dfrac{5}{12}$. D. $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Do $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-16}{x-2}=12$.
Nên ta có $f(2)-16=0$ hay $f(2)=16$.
Ta có
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{5f(x)-16}-4}{x^2+2x-8} &= \lim_{x\to 2}\frac{5(f(x)-16)}{(x-2)(x+4)\left(\sqrt[3]{(5f(x)-16)^2}+4\sqrt[3]{5f(x)-16}+16\right)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-16}{x-2}\cdot\frac{5}{(x+4)(\sqrt[3]{(5f(x)-16)^2}+4\sqrt[3]{5f(x)-16}+16)}\\ &= 12\cdot\frac{5}{6\cdot 48}=\frac{5}{24}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

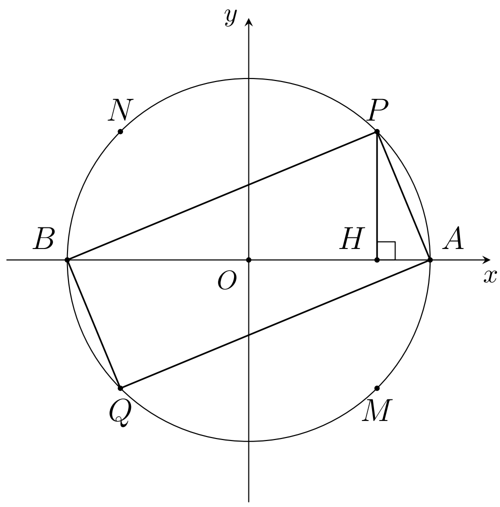
Câu 37. Cho phương trình $\dfrac{\cos 4x - \cos 2x + 2\sin^2 x}{\cos x + \sin x} = 0$. Tính diện tích đa giác có các đỉnh là các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác.

A $\sqrt{2}$. (B) $2\sqrt{2}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\cos x + \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương



$$\begin{aligned} & \cos 4x - \cos 2x + 2\sin^2 x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2\cos^2 2x - 1 - \cos 2x + 1 - \cos 2x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2\cos^2 2x - 2\cos 2x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = 1 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + l\pi \\ 2x = h2\pi \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{l\pi}{2} \\ x = h\pi \end{array}\right. (l, h \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Điều kiện: $x \neq -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ được biểu diễn lên đường tròn lượng giác là khác các điểm M, N.

Nghiệm $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{l\pi}{2}\ (l \in \mathbb{Z})$ được biểu diễn lên đường tròn lượng giác là các điểm M, P, N, Q.

Nghiệm $x = h\pi\ (h \in \mathbb{Z})$ được biểu diễn lên đường tròn lượng giác là các điểm A, B.

Khi đó nghiệm của phương trình được biểu diễn trên đường tròn là hình chữ nhật $APBQ$.

Trong tam giác ABP như hình vẽ - kẻ đường cao PH.

Diện tích tứ giác $APBQ$ là $S_{APBQ} = 2S_{\triangle ABP} = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Biết rằng trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng thỏa mãn các điều kiện sau: đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$ đồng thời cắt các trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm cách đều O. Giả sử (P) có phương trình $x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ và (Q) có phương trình $x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Tính giá trị biểu thức $b_1b_2 + c_1c_2$.

(A) 7. **B** -9. (C) -7. (D) 9.

Lời giải.

Ta có Vì (P) có phương trình $x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$.

(P) đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$.

Nên ta có $\begin{cases} 1 + b_1 + c_1 + d_1 = 0 \\ -2b_1 + 2c_1 + d_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 + 3b_1 - c_1 = 0.$ (1)

Vì (P) cắt các trục tọa độ Ox, Oy tại $A_1\left(-d_1;0;0\right), B_1\left(0;\dfrac{-d_1}{b_1};0\right)$.

Vì hai điểm cách đều O nên ta có $|d_1| = \dfrac{|d_1|}{|b_1|} \Rightarrow |b_1| = 1$.

Trường hợp 1: Với $b_1 = 1$

Thay vào (1) ta được $c_1 = 4$.

Vì (Q) có phương trình $x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ và (Q) đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$.

Nên ta có $\begin{cases} 1 + b_2 + c_2 + d_2 = 0 \\ -2b_2 + 2c_2 + d_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 + 3b_2 - c_2 = 0.$ (2)

Vì (Q) cắt các trục tọa độ Ox, Oy tại $A_2\left(-d_2;0;0\right)$, $B_2\left(0;-\dfrac{d_2}{b_2};0\right)$.

Vì hai điểm cách đều O nên ta có $|d_2| = \dfrac{|d_2|}{|b_2|} \Rightarrow |b_2| = 1$.

Vì $b_1 \neq b_2$ nên ta có $b_2 = -1$, thay vào (2) ta được $c_2 = -2$.

Suy ra $b_1b_2 + c_1c_2 = -9$.

Trường hợp 2: Với $b_1 = -1$

Thay vào (1) ta được $c_1 = -2$.

Vì (Q) có phương trình $x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ và (Q) đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$.

Nên ta có $\begin{cases} 1 + b_2 + c_2 + d_2 = 0 \\ -2b_2 + 2c_2 + d_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 + 3b_2 - c_2 = 0.$ (2)

Vì (Q) cắt các trục tọa độ Ox, Oy tại $A_2\left(-d_2;0;0\right)$, $B_2\left(0;-\dfrac{d_2}{b_2};0\right)$.

Vì hai điểm cách đều O nên ta có $|d_2| = \dfrac{|d_2|}{|b_2|} \Rightarrow |b_2| = 1$.

Vì $b_1 \neq b_2$ nên ta có $b_2 = 1$, thay vào (2) ta được $c_2 = 2$.

Suy ra $b_1b_2 + c_1c_2 = -9$.

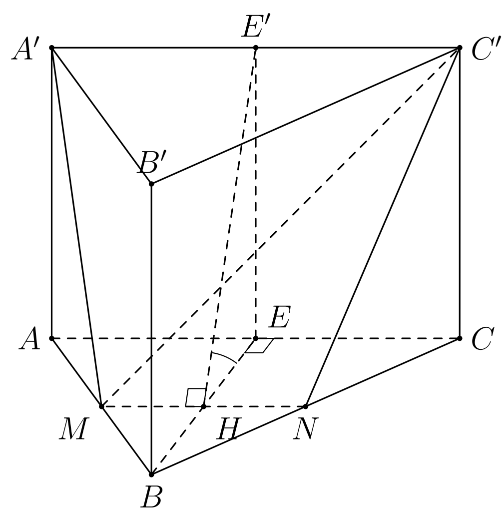
Kết luận: $b_1b_2 + c_1c_2 = -9$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AB. Diện tích thiết diện cắt lăng trụ đã cho bởi mặt phẳng $(A'C'M)$ là

A. $\dfrac{7\sqrt{2}}{16}a^2$. B. $\dfrac{3\sqrt{35}}{16}a^2$. C. $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}a^2$. D. $\dfrac{9}{8}a^2$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm BC.

Kẻ $MN \parallel AC \Rightarrow MN \parallel A'C'$.

Mặt phẳng $(A'C'M)$ cắt lăng trụ theo thiết diện là hình thang $A'C'NM$.

Gọi E, E' lần lượt là trung điểm AC và $A'C'$. Gọi H là giao điểm của MN và BE. Khi đó $MN \perp (E'HE)$.

Ta có: $\begin{cases} (A'C'NM) \cap (ABC) = MN \\ EH \perp MN \\ E'H \perp MN \end{cases}$

$\Rightarrow ((A'C'NM), (ACNM)) = (HE, HE') = \widehat{E'HE} = \varphi$.

Ta có

$$\begin{aligned} BE = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HE &= \frac{a\sqrt{3}}{4}\cdot E'H \\ &= \sqrt{E'E^2+EH^2} \\ &= \sqrt{2a^2+\frac{3a^2}{16}} \\ &= \frac{a\sqrt{35}}{4}. \end{aligned}$$

Từ đó $\cos\varphi = \dfrac{HE}{HE'} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{4}{a\sqrt{35}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$.

Diện tích hình thang cân S_{ACMN}

$$\begin{aligned} S_{ACMN} &= \frac{(MN+AC)\cdot HE}{2} \\ &= \frac{\left(\frac{a}{2}+a\right)\frac{a\sqrt{3}}{4}}{2} \\ &= \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}. \end{aligned}$$

Ta có $S_{ACNM} = S_{A'C'MM}\cdot\cos\varphi$.

Vậy $S_{A'C'MM} = \dfrac{S_{ACNM}}{\cos\varphi} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{16}\cdot\dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{3}} = \dfrac{3a^2\sqrt{35}}{16}$.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $y = \ln(x^2+2) - mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A 2019. **B** 2020. **C** 4038. **D** 1009.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{2x}{x^2+2} - m$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{2x}{x^2+2} - m \geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow m \leq \dfrac{2x}{x^2+2}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Xét $h(x) = \dfrac{2x}{x^2+2}$ với $x\in\mathbb{R}$.

Ta có $h'(x) = \dfrac{4-2x^2}{(x^2+2)^2}$.

Cho $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 4-2x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x &= \sqrt{2} \\ x &= -\sqrt{2}. \end{aligned}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	↘	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	↗	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	↘	0

Suy ra $m \leq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, m là số nguyên trong đoạn $[-2019; 2019]$ nên có 2019 số.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Cho hai số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Đặt $P = \dfrac{x^2 + 6xy}{1 + 2xy + 2y^2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A Giá trị nhỏ nhất của P là -3.

B Giá trị lớn nhất của P là 1.

C P không có giá trị lớn nhất.

D P không có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Do $x^2 + y^2 = 1$ nên tồn tại giá trị α sao cho $\begin{cases} x = \sin\alpha \\ y = \cos\alpha \end{cases}$. Khi đó ta có

$$P = \frac{\sin^2\alpha + 6\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{1 + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + 2\cos^2\alpha} \Leftrightarrow P(1 + \sin 2\alpha + 1 + \cos 2\alpha) = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + 3\sin 2\alpha$$
$$\Leftrightarrow (2P + 1)\cos 2\alpha + (2P - 6)\sin 2\alpha = 1 - 4P \quad (*)$$

Từ phương trình $(*)$ ta có điều kiện tồn tại α là

$$(2P + 1)^2 + (2P - 6)^2 \geq (1 - 4P)^2 \Leftrightarrow 8P^2 + 12P - 36 = 0 \Leftrightarrow -3 \leq P \leq \frac{3}{2}.$$

Suy ra $\min P = -3$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3x+1} - 2x}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -\dfrac{5}{4} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tính $f'(1)$.

A $f'(1) = 0$.

B $f'(1) = -\dfrac{7}{50}$.

C $f'(1) = -\dfrac{9}{64}$.

D $f'(1)$ không tồn tại.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\dfrac{\sqrt{3x+1} - 2x}{x - 1} + \dfrac{5}{4}}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{4\sqrt{3x+1} - 8x + 5x - 5}{4(x-1)^2}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{4\sqrt{3x+1} - 3x - 5}{4(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(4\sqrt{3x+1} - 3x - 5)(4\sqrt{3x+1} + 3x + 5)}{4(x-1)^2(4\sqrt{3x+1} + 3x + 5)}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{16(3x+1) - (9x^2 + 30x + 25)}{4(x-1)^2(4\sqrt{3x+1} + 3x + 5)} = \lim_{x\to 1} \frac{-9x^2 + 18x - 9}{4(x-1)^2(4\sqrt{3x+1} + 3x + 5)}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{-9(x-1)^2}{4(x-1)^2(4\sqrt{3x+1} + 3x + 5)} = \lim_{x\to 1} \frac{-9}{4(4\sqrt{3x+1} + 3x + 5)}$$
$$= -\frac{9}{64}.$$

Suy ra $f'(1) = -\dfrac{9}{64}$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(0; 0; 3)$, $B(-2; 0; 1)$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x - y + 2z + 8 = 0$. Hỏi có bao nhiêu điểm C trên mặt phẳng (α) sao cho tam giác ABC đều.

A 2. **B** 0. **C** 1. **D** vô số.

Lời giải.

Ta có tam giác ABC đều nên C nằm trên mặt phẳng (β) trung trực của AB.

Mặt khác C cũng thuộc mặt phẳng (α) nên $C \in (\alpha) \cap (\beta)$.

Gọi I là trung điểm của AB, suy ra $I(-1;0;2)$.

Ta có $CI = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB = \sqrt{6} < \mathrm{d}(I,(\alpha)) = \dfrac{|-2+4+8|}{\sqrt{4+1+4}} = \dfrac{10}{3}$.

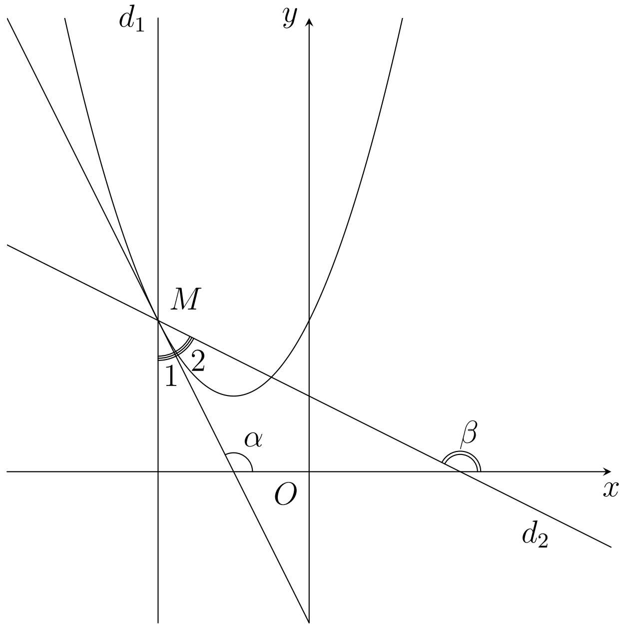
Suy ra không có điểm C nào thỏa mãn.

Chọn đáp án **B** □

Câu 44. Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x + 2$ và điểm M di chuyển trên (C). Gọi d_1, d_2 là các đường thẳng đi qua M sao cho d_1 song song với trục tung và d_1, d_2 đối xứng nhau qua tiếp tuyến của (C) tại M. Biết rằng khi M di chuyển trên (C) thì d_2 luôn đi qua một điểm $I(a;b)$ cố định. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A $ab = -1$. **B** $a + b = 0$. **C** $3a + 2b = 0$. **D** $5a + 4b = 0$.

Lời giải.



$y' = 2(x+1)$.

Giả sử điểm $M(x_0 - 1; x_0^2 + 1)$.

Hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(x_0 - 1) = \tan\alpha = 2x_0$.

Hệ số góc của đường thẳng d_2 là $k = \tan\beta$.

Ta có $\begin{cases} \beta = 90^\circ + \widehat{M_1} + \widehat{M_2} \\ \alpha = 90^\circ + \widehat{M_1} \end{cases} \Rightarrow \beta = 2\alpha - 90^\circ$ (do $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$).

Suy ra $k = \tan\beta = -\cot 2\alpha = -\dfrac{1 - tan^2\alpha}{2\tan\alpha} = -\dfrac{1 - 4x_0^2}{4x_0}$.

Phương trình đường thẳng d_2 là

$$\begin{aligned} & y=-\frac{1-4x_0^2}{4x_0}(x-x_0+1)+x_0^2+1 \\ \Leftrightarrow\ & 4y(x_0)=(4x_0^2-1)x+4x_0^2+5x_0-1 \\ \Leftrightarrow\ & (4x_0^2-1)(x+1)+x_0(5-4y)=0. \end{aligned}$$

Dễ thấy đường thẳng d_2 luôn đi qua điểm $I\left(-1;\dfrac{5}{4}\right)$.

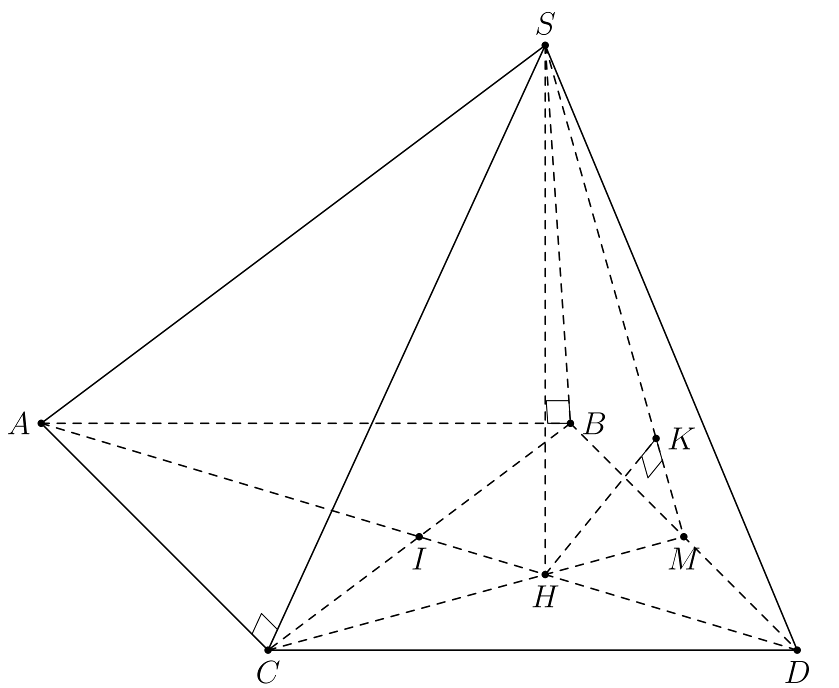
Suy ra $5a+4b=0$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 45. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $\widehat{SBA}=\widehat{SCA}=90^\circ$. Biết góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 45°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC là:

A $\dfrac{2\sqrt{51}}{17}a$. **B** $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}a$. **C** $\dfrac{\sqrt{39}}{13}a$. **D** $\dfrac{2\sqrt{13}}{13}a$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của BC, gọi AH là đường kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

$\Rightarrow HB\perp AB$, $HC\perp AC$.

Ta có $\begin{cases} CH\perp AC \\ SC\perp AC\end{cases}\Rightarrow AC\perp(SCH)\Rightarrow AC\perp SH.$ (1)

Chứng minh tương tự ta có $AB\perp SH$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SH\perp(ABC)$.

Suy ra AH là hình chiếu của SA lên mặt phẳng (ABC).

Suy ra góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{SAH}=45^\circ$.

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABDC$. Ta có

$AC\parallel(SBD)\Rightarrow d(SB;AC)=d(AC;(SBD))=d(C;(SBD))=3d(H,(SBD))$

(H là trọng tâm của $\triangle BCD$).
Gọi M là trung điểm của BD. Ta có
$\begin{cases} BD \perp HM \\ BD \perp SH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SHM) \Rightarrow (SBM) \perp (SHM)$.
Gọi K là hình chiếu của H lên $SM \Rightarrow HK \perp (SBD) \Rightarrow d(H;(SBM)) = HK$.
Ta có: $SH = AH = \dfrac{4}{3}AI = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$, $HM = \dfrac{1}{3}CM = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a$.
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SMH ta có:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} = \frac{51}{4a^2} \Rightarrow HK = \frac{2a\sqrt{51}}{51}.$$

Vậy $d(SB;AC) = \dfrac{2a\sqrt{51}}{17}$.
Chọn đáp án A □

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x f(\cos^2 x)\,\mathrm{d}x = \int_1^8 \frac{f(\sqrt[3]{x})}{x}\,\mathrm{d}x = 6$.

Tính tích phân $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f(x^2)}{x}\,\mathrm{d}x$.

A 4. B 6. C 7. D 10.

Lời giải.

- Xét tích phân $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x f(\cos^2 x)\,\mathrm{d}x = 6$.
  Đặt $t = \cos^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t = -2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x$.
  Khi $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t = \dfrac{1}{4}$. Ta có

$$I_1 = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-2\sin x\cos x}{2\cos^2 x} f(\cos^2 x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{f(t)}{2t}\,\mathrm{d}t = 6 \Rightarrow \int_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(x)}{2x}\,\mathrm{d}x = 6.$$

- Xét tích phân $I_2 = \displaystyle\int_1^8 \frac{f(\sqrt[3]{x})}{x}\,\mathrm{d}x$.
  Đặt $t = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x = t^3 \Rightarrow \mathrm{d}x = 3t^2\,\mathrm{d}t$.
  Khi $x = 1 \Rightarrow t = 1$, $x = 8 \Rightarrow t = 2$. Ta có

$$I_2 = \int_1^2 \frac{3t^2 f(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t = 6 \Rightarrow \int_1^2 \frac{f(x)}{2x}\,\mathrm{d}x = 1.$$

- Xét tích phân $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f(x^2)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$. Khi $x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$, khi $x = \sqrt{2} \Rightarrow t = 2$. Ta có

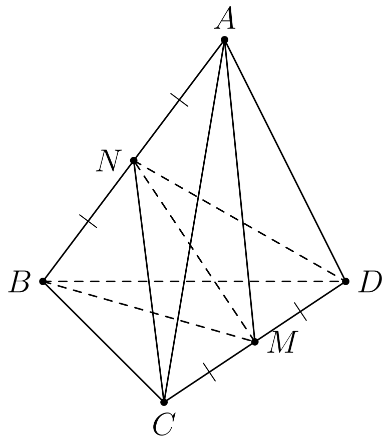
$$I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2xf(x^2)}{2x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(t)}{2t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(x)}{2x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{f(x)}{2x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} \frac{f(x)}{2x}\,\mathrm{d}x = 6 + 1 = 7.$$

Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD = BC = BD = a$, $(ACD) \perp (BCD)$ và $(ABC) \perp (ABD)$. Tính độ dài cạnh CD.

A $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B** $2a\sqrt{2}$. **C** $a\sqrt{2}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD, AB. $\triangle ACD$ và $\triangle BCD$ cân $\Rightarrow AM \perp CD$, $BM \perp CD$. Ta có

$$\begin{cases} (ACD) \cap (BCD) \\ CD \perp AM \subset (ACD) \\ CD \perp BM \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow (\widehat{(ACD);(BCD)}) = \widehat{(AM;BM)} = 90^\circ.$$

Suy ra $AM \perp BM$.

Và ta dễ dàng chứng minh được $\triangle ACD = \triangle BCD$ (c.c.c) $\Rightarrow$ $AM = BM \Rightarrow \triangle ABM$ vuông cân tại $M \Rightarrow MN \perp AB$.

Đặt $CD = x$. Áp dụng định lý Py-ta-go ta có: $AM^2 = a^2 - \dfrac{x^2}{4}$.

$\triangle ABM$ vuông cân tại $M \Rightarrow AB^2 = 2AM^2 = 2a^2 - \dfrac{x^2}{2} \Rightarrow AN^2 = \dfrac{1}{4}AB^2 = \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{x^2}{8}$.

Áp dụng định lý Py-ta-go ta có: $DN^2 = AD^2 - AN^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{x^2}{8} = \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{x^2}{8}$.

$\triangle CDN$ vuông cân tại $N \Rightarrow CD^2 = 2DN^2 = a^2 + \dfrac{x^2}{4} = x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Cho một đa giác đều có 48 đỉnh. Lấy ngẫu nhiên ba đỉnh của đa giác. Tính xác suất để tam giác tạo thành từ ba đỉnh đó là một tam giác nhọn.

A $\dfrac{22}{47}$. **B** $\dfrac{11}{47}$. **C** $\dfrac{33}{47}$. **D** $\dfrac{33}{94}$.

Lời giải.

Số cách chọn 3 đỉnh bất kì của đa giác là: $n_\Omega = \mathrm{C}_{48}^3$.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đều.

Gọi biến cố A: "Chọn 3 đỉnh bất kì của đa giác để được một tam giác nhọn". Lấy điểm A thuộc đường tròn (O), kẻ đường kính AA', A' cũng thuộc đường tròn (O). Khi đó AA' chia đường tròn (O) thành hai nửa, mỗi nửa có 23 đỉnh.

Chọn 2 đỉnh B, C cùng thuộc 1 nửa đường tròn có C_{23}^2 cách chọn $\Rightarrow$ có C_{23}^2 tam giác ABC là tam giác tù.

Tương tự như vậy đối với nửa còn lại nên ta có $2 \cdot \mathrm{C}_{23}^2$ tam giác tù được tạo thành. Đa giác đều có 48 đỉnh nên có 24 đường chéo $\Rightarrow$ có $24 \cdot 2 \cdot \mathrm{C}_{23}^2$ tam giác tù.

Ứng với mỗi đường kính ta có $23 \cdot 2$ tam giác vuông. Vậy số tam giác vuông là: $23 \cdot 2 \cdot 24 = 1104$ tam giác. Suy ra $n_A = \mathrm{C}_{48}^3 - 48\mathrm{C}_{23}^2 - 1104 = 4048$ tam giác. Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{4048}{\mathrm{C}_{48}^3} = \dfrac{11}{47}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x$ có đồ thị (C). Gọi A, B, C, D là bốn điểm trên đồ thị (C) với hoành độ lần lượt là a, b, c, d sao cho tứ giác $ABCD$ là một hình thoi đồng thời hai tiếp tuyến tại A, C song song với nhau và đường thẳng AC tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân. Tính tích $abcd$.

(A) 144. (B) 60. (C) 180. **D** 120.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 9$, $y'' = -6x + 6 \Rightarrow y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 11$. Vậy điểm uốn của đồ thị là $I(1; 11)$. Đây cũng chính là điểm đối xứng của đồ thị hàm bậc ba.

Vì tiếp tuyến tại A và C song song với nhau nên

$$y'(a) = y'(c) \Leftrightarrow -3a^2 + 6a + 9 = -3c^2 + 6c + 9 \Leftrightarrow 3(a-c)(a+b-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - c = 0 \text{ (loại)} \\ a + c = 2. \end{array}\right.$$

Suy ra $x_A + x_C = 2x_I$. Lại có

$$\begin{aligned} & y_A + y_C = -(a^3 + c^3) + 3(a^2 + c^2) + 9(a + c) \\ = \ & -(a+c)(a^2 + c^2 - ac) + 3(a^2 + c^2) + 18 \\ = \ & a^2 + c^2 + 2ac + 18 = (a+c)^2 + 18 = 22 = 2y_I. \end{aligned}$$

Suy ra I là trung điểm của AC. Một đường thẳng đi qua I, vuông góc với AC cắt (C) tại B, D thì theo tính chất đối xứng của đồ thị ta có $IB = ID \Rightarrow ABCD$ là hình thoi.

Theo đầu bài thì AC tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân nên hệ số góc của đường thẳng AC bằng 1 hoặc -1. Vì $BD \perp AC \Rightarrow k_{BD}$ bằng -1 hoặc 1. Ta có

$$\begin{aligned} & k_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{(a^3 - c^3) - 3(a^2 - c^2) - 9(a - c)}{c - a} \\ = \ & a^2 + c^2 + ac - 15 = (a+c)^2 - ac - 15 = -11 - ac \Rightarrow ac = -11 - k_{AC}. \end{aligned}$$

Tương tự $bd = -11 - k_{BD}$. Suy ra $abcd = (-11 - k_{AC})(-11 - k_{BD}) = (-10)(-12) = 120$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(8; 5; -11)$, $B(5; 3; -4)$, $C(1; 2; -6)$ và mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2 = 9$. Gọi điểm $M(a; b; c)$ là điểm trên (S) sao cho $\left|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm $a + b$.

(A) 9. (B) 4. **C** 2. (D) 6.

Lời giải.

Gọi $I(a; b; c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. (1)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - a - 5 + a - 1 + a = 0 \\ 5 - b - 3 + b - 2 + b = 0 \\ -11 - c + 4 + c + 6 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow I(-2; 0; 1).$$

Ta có $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IC}\right|=\left|\overrightarrow{MI}\right|=MI$.
Vậy $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI đạt giá trị nhỏ nhất.
Ta có (S) có tâm $J(2;4;-1)$, $R=3$ và $M\in(S)\Rightarrow MI_{\min}=IJ-R=\sqrt{16+16+4}-3=3$.
Suy ra $MI=MJ\Rightarrow M$ là trung điểm của $IJ\Rightarrow M(0;2;0)\Rightarrow a+b=2$.
Chọn đáp án C □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. B	3. D	4. B	5. A	6. D	7. C	8. A	9. B	10. D
11. A	12. A	13. B	14. D	15. B	16. C	17. B	18. D	19. C	20. C
21. B	22. B	23. A	24. D	25. C	26. D	27. B	28. C	29. D	30. A
31. A	32. D	33. C	34. B	35. B	36. A	37. A	38. B	39. B	40. A
41. A	42. C	43. B	44. D	45. A	46. C	47. A	48. B	49. D	50. C

14 ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG, GIA LAI, LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$ đi qua điểm nào dưới đây?

(A) $M\,(1;3;-1)$. **(B)** $M\,(-3;5;3)$. (C) $M\,(3;5;3)$. (D) $M\,(1;2;-3)$.

Lời giải.

Nếu một điểm nằm trên một đường thẳng thì khi thay tọa độ điểm đó vào phương trình đường thẳng thì sẽ thỏa mãn phương trình đường thẳng.

Lần lượt thay tọa độ M từ các phương án vào phương trình đường thẳng d ta được $M\,(-3;5;3)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Cho hàm số $y = \dfrac{3-x}{2x-1}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right)$.

(B) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(C) Hàm số đồng biến trên $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

(D) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Ta có $y' = \dfrac{-5}{(2x-1)^2} < 0, \forall x \in \mathscr{D}$.

Vậy hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right), \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \geq \dfrac{1}{8}$ có tập nghiệm là

(A) $[3;+\infty)$. (B) $(-\infty;-1]$. **(C)** $[-1;3]$. (D) $(-1;3)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} && \geq \frac{1}{8} \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} && \geq \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 2x && \leq 3 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 2x - 3 && \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & -1 \leq x \leq 3. \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = [-1;3]$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có tổng hoành độ và tung độ bằng

A 5. **B** 1. **C** 3. **D** -1.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 12x + 9, y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy điểm cực đại của đồ thị hàm số có tọa độ là $(1; 4)$, nên tổng hoàng độ và tung độ bằng 5.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho khối trụ có độ dài đường sinh bằng $2a$ và bán kính đáy bằng a. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A πa^3. **B** $2\pi a^3$. **C** $\dfrac{\pi a^3}{3}$. **D** $\dfrac{\pi a^3}{6}$.

Lời giải.

Dựa vào công thức tính thể tích khối trụ ta có $V = \pi r^2 h = \pi \cdot a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, điểm M thuộc trục Oy và cách đều hai mặt phẳng $(P)\colon x + y - z + 1 = 0$ và $(Q)\colon x - y + z - 5 = 0$ có tọa độ là

A $M(0; -3; 0)$. **B** $M(0; 3; 0)$. **C** $M(0; -2; 0)$. **D** $M(0; 1; 0)$.

Lời giải.

Ta có $M \in Oy$ suy ra $M(0; m; 0)$.

Theo đề $\mathrm{d}(M, (P)) = \mathrm{d}(M, (Q)) \Leftrightarrow \dfrac{|m+1|}{\sqrt{3}} = \dfrac{|-m-5|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow m = -3$. Vậy $M(0; -3; 0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$ và $u_{14} = 18$. Giá trị công sai d của cấp số cộng đó là

A $d = -3$. **B** $d = 3$. **C** $d = 4$. **D** $d = -2$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_4 = -12 \\ u_{14} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = -12 \\ u_1 + 13d = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -21 \\ d = 3. \end{cases}$

Vậy $d = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Họ các nguyên hàm của hàm số $y = \cos x + x$ là

A $\sin x + \dfrac{1}{2}x^2 + C$. **B** $\sin x + x^2 + C$.

(C) $-\sin x + \dfrac{1}{2}x^2 + C$. (D) $-\sin x + x^2 + C$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \displaystyle\int (\cos x + x)\,\mathrm{d}x = \sin x + \dfrac{1}{2}x^2 + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - 2x + 4) = 2$ là

(A) $\{0; -2\}$. (B) $\{2\}$. (C) $\{0\}$. **(D)** $\{0; 2\}$.

Lời giải.

Ta có $x^2 - 2x + 4 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; 2\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = (x+1)(x+2)(x-1)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số cực trị của hàm số đã cho là

(A) 3. (B) 1. **(C)** 2. (D) 0.

Lời giải.

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2 \\ x = 1. \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	CT	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy số cực trị của hàm số đã cho là 2.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 10 = 0$, mặt phẳng $(P)\colon x + 2y - 2z + 10 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) (P) tiếp xúc với (S).

(B) (P) cắt (S) theo giao tuyến đường tròn khác đường tròn lớn.

(C) (P) và (S) không có điểm chung.

(D) (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn lớn.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; -1)$ và bán kính $R = 4$.

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là $\mathrm{d}_{(I,(P))} = 4 = R$.

Vậy mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Hàm số $y = x2^x$ có đạo hàm là

(A) $y' = (1 - x\ln 2)2^x$. **(B)** $y' = (1 + x\ln 2)2^x$.

(C) $y' = (1+x)2^x$. (D) $y' = 2^x + x^2 2^{x-1}$.

Lời giải.

Ta có $y' = (x2^x)' = 2^x + x2^x \ln 2 = (1 + x\ln 2)2^x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 6 = 0$ là

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 0.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải.

Ta có $3f(x) - 6 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2$.

Do đó số nghiệm của phương trình $3f(x) - 6 = 0$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 2$. Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra phương trình có 3 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm thực.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Nếu $a^{2x} = 3$ thì $3a^{6x}$ bằng

(A) 54. (B) 45. (C) 27. (D) 81.

Lời giải.

Ta có $3a^{6x} = 3\left(a^{2x}\right)^3 = 3 \cdot 3^3 = 81$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $S = \displaystyle\int_0^2 3^x \,\mathrm{d}x$. (B) $S = \pi \displaystyle\int_0^2 3^{2x} \,\mathrm{d}x$. (C) $S = \pi \displaystyle\int_0^2 3^x \,\mathrm{d}x$. (D) $S = \displaystyle\int_0^2 3^{2x} \,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $S = \displaystyle\int_0^2 |3^x| \,\mathrm{d}x = \int_0^2 3^x \,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Đồ thị của hàm số $y = x^4 + 3x^2 - 4$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

(A) 4. (B) 2. (C) 3. (D) 0.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa đồ thị và trục hoành là

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = -4 \quad (\text{vô nghiệm}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Vậy đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 2 điểm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x + 2019}{x + 2}$?

(A) $x = 2$. (B) $y = 2$. (C) $y = 3$. (D) $x = 3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x+2019}{x+2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3+\dfrac{2019}{x}}{1+\dfrac{2}{x}} = 3$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3$ trên đoạn $[1;3]$. Giá trị $T = 2M + m$ bằng

A 3. B 5. C 4. D 2.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$ và $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin [1;3] \\ x = 2 \in [1;3]. \end{array}\right.$

Ta tính được $y(1) = 1$, $y(3) = 3$, $y(2) = -1$.

Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $[1;3]$.

Do đó, $M = \max\limits_{x\in[1;3]} y = 3 = y(3)$, $m = \min\limits_{x\in[1;3]} y = -1 = y(2)$.

Vậy $T = 2M + m = 2 \cdot 3 - 1 = 5$.

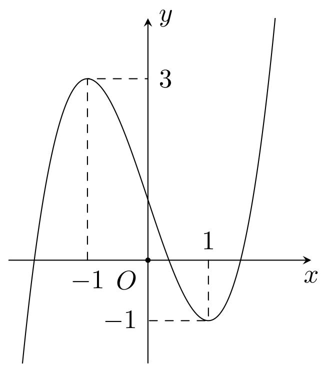
Chọn đáp án B □

Câu 19.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A $y = x^3 - 3x - 1$. B $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.

C $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. D $y = x^3 - 3x + 1$.



Lời giải.

Đường cong trong hình vẽ có dạng đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$.

Dựa vào đồ thị, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$. Suy ra $a > 0$.

Mặt khác, giao điểm của đồ thị với trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ thỏa mãn các đặc điểm trên.

Vậy đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Với a, b là hai số thực dương. Khi đó, $\log\left(a^2b\right)$ bằng

A $2\log a - \log b$. B $2\log a + b$. C $2\log a + \log b$. D $2\log b + \log a$.

Lời giải.

Ta có $\log\left(a^2b\right) = \log a^2 + \log b = 2\log a + \log b$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Một hình hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c. Thể tích V của khối hộp chữ nhật đó là

(A) $V = (a+b)c$. (B) $V = \frac{1}{3}abc$. (C) $V = abc$. (D) $V = (a+c)b$.

Lời giải.

Thể tích khối hộp chữ nhật đã cho là: $V = abc$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Thể tích của khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a là

(A) $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (B) $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. (C) a^3. (D) $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $V = \frac{1}{3}a^2\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;-1)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và chứa trục Ox là

(A) $x+y=0$. (B) $x+z=0$. (C) $y-z=0$. (D) $y+z=0$.

Lời giải.

Mp(P) có vtpt $\vec{n} = (0;1;1)$ và đi qua điểm $A(1;1;-1)$. Suy ra phương trình $(P): y+z=0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị thực m thỏa mãn $\int\limits_0^m (2x+1)\,\mathrm{d}x < 2$.

(A) $m < -2$. (B) $-2 < m < 1$. (C) $m \geq 1$. (D) $m > 2$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^m (2x+1)dx < 2 \Leftrightarrow \left(x^2+x\right)\Big|_0^m < 2 \Leftrightarrow m^2+m-2<0 \Leftrightarrow -2<m<1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Cho khối tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = 2OB = 3OC = 3a$. Thể tích của khối tứ diện đã cho bằng

(A) $6a^3$. (B) $\frac{4a^3}{3}$. (C) $9a^3$. (D) $\frac{3a^3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $OA = 3a, OB = \frac{3a}{2}, OC = a \Rightarrow V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot OC = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot OC = \frac{3a^3}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, giao điểm của mặt phẳng $(P): 3x+5y-z-2=0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ là điểm $M(x_0;y_0;z_0)$. Giá trị tổng $x_0+y_0+z_0$ bằng

(A) 1. (B) 2. (C) 5. (D) -2.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của Δ và mặt phẳng (P) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x+5y-z-2=0 \\ \dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1} \end{cases} = \begin{cases} 3x+5y-z-2=0 \\ 3x-4y=0 \\ y-3z-6=0 \end{cases}$$

.

$M(0;0;-2) \Rightarrow x_0+y_0+z_o=-2$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Hội nghị thượng đỉnh Mỹ-Triều lần hai được tổ chức tại Hà Nội, sau khi kết thúc Hội nghị. Ban tổ chức mời 10 người lãnh đạo cấp cao của cả hai nước (Trong đó có Tổng thống Mỹ Donald Trump và Chủ tịch Triều Tiên Kim Jong-un) tham gia họp báo. Ban tổ chức sắp xếp 10 người ngồi vào 10 cái ghế thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho ông Donald Trump và Kim Jong-un ngồi cạnh nhau

A $8!\cdot 2!$. B $9!$. C $9!\cdot 2!$. D $10!$.

Lời giải.

Số cách sắp 10 người sao cho ông Trump và ông Kim ngồi cạnh nhau: $9!\cdot 2!$

Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{x+1+\ln x}$ với $x>0$. Khi đó $-\dfrac{y'}{y^2}$ bằng

A $\dfrac{x}{x+1}$. B $1+\dfrac{1}{x}$. C $\dfrac{x}{1+x+\ln x}$. D $\dfrac{x+1}{1+x+\ln x}$.

Lời giải.

Ta có: $y'=-\dfrac{(x+1+\ln x)'}{(x+1+\ln x)^2}=-\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{(x+1+\ln x)^2}=-\dfrac{x+1}{x(x+1+\ln x)^2}; y^2=\dfrac{1}{(x+1+\ln x)^2}$.

Do đó: $-\dfrac{y'}{y^2}=\dfrac{1+x}{x}=1+\dfrac{1}{x}$.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ trong đó $b\cdot c\neq 0$ và mặt phẳng $(P): y-z+1=0$ $(P): y-z+1=0$. Mối liên hệ giữa b,c để mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) là

A $2b=c$. B $b=2c$. C $b=c$. D $b=3c$.

Lời giải.

$(ABC): \dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 \Leftrightarrow x+\dfrac{1}{b}y+\dfrac{1}{c}z-1=0; (ABC)\perp(P) \Leftrightarrow 0\cdot 1+1\cdot\dfrac{1}{b}+(-1)\cdot\dfrac{1}{c}=0 \Leftrightarrow b=c$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Anh Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn là một quý với lãi suất 3% một quý. Sau đúng 6 tháng anh Nam gửi thêm 100 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó. Hỏi sau 1 năm số tiền (cả vốn lẫn lãi) anh Nam nhận được là bao nhiêu ? (Giả sử lãi suất không thay đổi).

A $218,64$ triệu đồng. B $208,25$ triệu đồng. C $210,45$ triệu đồng. D $209,25$ triệu đồng.

Lời giải.

Số tiền thu được cả vốn lẫn lãi sau 6 tháng: $100 \cdot (1+3\%)^2$.

Tổng số tiền thu được sau 1 năm: $[100(1+3\%)^2+100]\cdot(1+3\%)^2 = 218,64$ triệu đồng

Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 12$.

Giá trị tích phân $I=\int\limits_1^2 f(2x+1)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B. 6.** C. 8. D. 12.

Lời giải.

Đặt $t=2x+1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x,\ x=1\Rightarrow t=3;\ x=2\Rightarrow t=5$.

Vậy $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_3^5 f(t)\,\mathrm{d}t = 6$.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Biết rằng đồ thị hàm số $y=x^4-2ax^2+b$ có một điểm cực trị là $(1;2)$. Khi đó khoảng cách giữa điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho bằng

A. 2. B. $\sqrt{26}$. C. $\sqrt{5}$. **D. $\sqrt{2}$.**

Lời giải.

Dựa vào điểm cực trị ta tìm được $a=1;\ b=3$. Tọa độ điểm cực đại $A(0;3)$, tọa độ một điểm cực tiểu là $B(1;2)$.

Khoảng cách giữa điểm cực đại và điểm cực tiểu là $AB=\sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$. Gọi α là góc SD và mặt phẳng (SAC). Giá trị $\sin\alpha$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm AC và BD. Dễ dàng xác định được góc giữa SD và mặt phẳng (SAC) là góc OSD.

Ta tính được $SD=2a;\ OD=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \sin\alpha=\dfrac{OD}{SD}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}:2a=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Gọi S là tập hợp các tham số nguyên a thỏa mãn $\lim\left(\dfrac{3n+2}{n+2}+a^2-4a\right)=0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4. B. 3. C. 5. D. 2.

Lời giải.

$\lim\left(\dfrac{3n+2}{n+2}+a^2-4a\right)=3+a^2-4a=0\Leftrightarrow a\in\{1;3\}\Rightarrow S=4$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và SA vuông góc với đáy. Cho biết $B(2;3;7),\ D(4;1;3)$. Lập phương trình mặt phẳng (SAC).

(A) $x + y - 2z + 9 = 0$.
(B) $x - y - 2z - 9 = 0$.
(C) $x - y - 2z + 9 = 0$.
(D) $x - y + 2z + 9 = 0$.

Lời giải.

Dễ dàng chứng minh được (SAC) là mặt phẳng trung trực của BD.

Chọn véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAC) là $\overrightarrow{BD} = (2; -2; -4)$.

Mặt phẳng (SAC) đi qua trung điểm $I(3; 2; 5)$ của BD và có vtcp $\overrightarrow{BD}$ nên có phương trình: $x - y - 2z + 9 = 0$.

Chọn đáp án (C) □

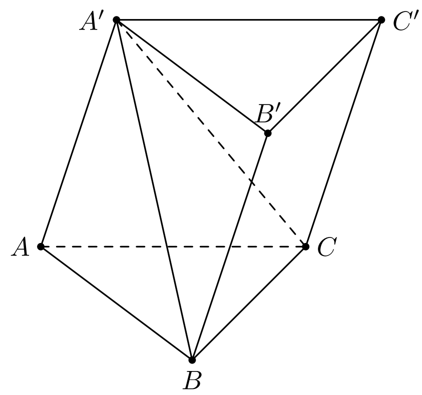
Câu 36. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 1 và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng 2. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

(A) 1.
(B) 6.
(C) 2.
(D) 3.

Lời giải.

Ta có $V_{A'.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{A'BC} \cdot d(A, (A'BC)) = \dfrac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 = \dfrac{2}{3}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{A'.ABC} = 2$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Cho một hình vuông, mỗi cạnh hình vuông được chia thành n đoạn bằng nhau bởi $n-1$ điểm chia (không tính hai đầu mút mỗi cạnh). Xét các tứ giác có 4 đỉnh là 4 điểm chia trên 4 cạnh của hình vuông đã cho. Gọi a là số các tứ giác tạo thành và b là số các hình bình hành trong a tứ giác đó. Giá trị n thỏa mãn $a = 9b$ là

(A) $n = 8$.
(B) $n = 5$.
(C) $n = 4$.
(D) $n = 12$.

Lời giải.

Mỗi tứ giác được tạo thành bằng cách chọn 4 đỉnh trên 4 cạnh. Số cách chọn 1 đỉnh trên 1 cạnh là $n - 1$. Như vậy số tứ giác là $a = (n - 1)^4$.

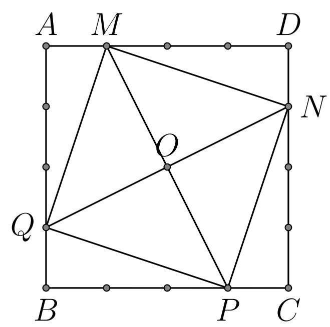
Dễ dàng thấy rằng nếu tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành thì M và P, N và Q đối xứng nhau qua tâm hình vuông.

Do MN và PQ là hai đường chéo đi qua tâm hình vuông.

Suy ra một hình bình hành được hoàn toàn xác định bằng cách chọn 2 đỉnh liên tiếp trên 2 cạnh liên tiếp của hình vuông.

Như vậy số các hình bình hành là $b = (n - 1)^2$.

Theo giả thiết ta có $(n - 1)^4 = 9(n - 1)^2 \Rightarrow n = 4$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Cho hai số thực dương a và b thỏa mãn $\log_9 a^4 + \log_3 b = 8$ và $\log_3 a + \log_{\sqrt[3]{3}} b = 9$. Giá trị biểu thức $P = ab + 1$ bằng

(A) 82. (B) 27. (C) 243. **D** 244.

Lời giải.

Theo điều kiện ta có $\begin{cases} \log_9 a^4 + \log_3 b = 8 \\ \log_3 a + \log_{\sqrt[3]{3}} b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_3 a + \log_3 b = 8 \\ \log_3 a + 3\log_3 b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 a = 3 \\ \log_3 b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 27 \\ b = 9. \end{cases}$

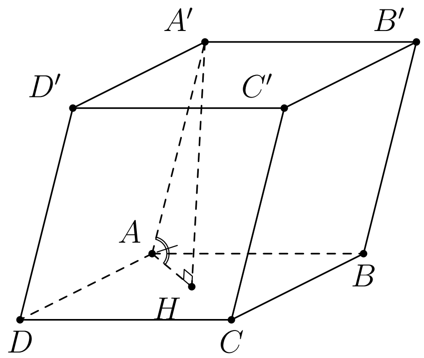
Vậy $P = ab + 1 = 244$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Cho một khối lập phương có thể tích V_1 và một khối hình hộp có tất cả các cạnh bằng nhau và có thể tích V_2. Biết rằng cạnh của khối lập phương bằng cạnh của khối hình hộp. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

(A) $V_1 = V_2$. **B** $V_1 \geq V_2$. (C) $V_1 > V_2$. (D) $V_1 \leq V_2$.

Lời giải.



Gọi cạnh hình lập phương là a khi đó $V_1 = a^3$ (đvtt).

Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ cũng có cạnh là a.

Dựng $A'H$ vuông góc với $(ABCD)$ tại H.

Đặt góc $\widehat{A'AH} = \alpha \Rightarrow A'H = A'A \cdot \sin\alpha$.

Gọi góc $\widehat{BAC} = \beta \Rightarrow S_{ABCD} = a^2 \sin\beta \Rightarrow$

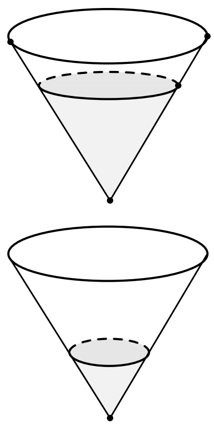
$V_2 = V_{ABCD.A'B'C'D'} = a^3 \sin\alpha \sin\beta \leq a^3$.

Dấu $=$ xảy ra khi và chỉ khi $\alpha = \beta = 90^\circ$.

Vậy $V_2 \leq V_1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40.



Hai hình nón bằng nhau có chiều cao bằng 2 dm, được đặt như hình vẽ bên (mỗi hình đều đặt thẳng đứng với đỉnh nằm phía dưới). Lúc đầu, hình nón trên chứa đầy nước và hình nón dưới rỗng. Sau đó, nước được chảy xuống hình nón dưới thông qua lỗ trống ở đỉnh của hình nón trên. Hãy tính chiều cao của nước trong hình nón dưới tại thời điểm khi mà chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm.

A $\sqrt[3]{7}$. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $\sqrt[3]{5}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi R là bán kính đáy của mỗi hình nón. Khi độ cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm, ta đặt bán kính của " hình nón trên của nước" bằng r , bán kính của " hình nón dưới của nước " là s, chiều cao của " hình nón dưới của nước " là x. $\dfrac{r}{R} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow r = \dfrac{R}{2}$.

Thể tích nước của hình nón trên tại thời điểm chiều cao bằng 1 là $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{R}{2}\right)^2 \cdot 1 = \dfrac{\pi R^2}{12}$

mặt khác: $\dfrac{s}{R} = \dfrac{x}{2} \Rightarrow s = \dfrac{Rx}{2}$

Thể tích nước hình nón dưới $V_2 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{Rx}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2 x^3}{12}$.

Thể tích nước của hình nón trên khi đầy nước :$V = \frac{2\pi R^2}{3}$.

Ta có:$V_1 + V_2 = V \Leftrightarrow \frac{\pi R^2}{12} + \frac{\pi R^2 x^3}{12} = \frac{\pi R^2 2}{3} \Leftrightarrow 1 + x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{7}$

Chọn đáp án A □

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O,các đỉnh $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;b)$ với $a, b > 0$ và $a + b = 2$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC' .Thể tích của khối tứ diện $BDA'M$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{64}{27}$. B. $\frac{32}{27}$. C. $\frac{8}{27}$. D. $\frac{4}{27}$.

Lời giải.

Tọa độ điểm $C(a;a;0), C'(a;a;b), M\left(a;a;\frac{b}{2}\right)$ suy ra $\overrightarrow{BA'} = (-a;0;b), \overrightarrow{BD} = (-a;a;0), \overrightarrow{BM} = \left(0;a;\frac{b}{2}\right)$, $\left[\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BD}\right] = (-ab;-ab;-b^2)$.

Nên $V_{BDA'M} = \frac{1}{6}\left[\left[\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BD}\right]\overrightarrow{BM}\right| = \frac{a^2b}{4}$.

Ta có $a \cdot a \cdot (2b) \leq \left(\frac{a+a+2b}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \Rightarrow a^2b \leq \frac{32}{27} \Rightarrow V_{BDA'M} \leq \frac{8}{2}$

Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho $\int\limits_0^1 \left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^2 \mathrm{d}x = a + b\ln 2$ với a, b là các số hữu tỉ. Giá trị của $2a + b$ bằng

A. -1. B. 6. C. 5. D. 4.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 \left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^2 \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(2 - \frac{1}{x+1}\right)^2 \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(4 - \frac{4}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) \mathrm{d}x$

$= \left(4 - 4\ln|x+1| - \frac{1}{x+1}\right)\Big|_0^1 = \frac{9}{2} - 4\ln 2 \Rightarrow a = \frac{9}{2}, \mathrm{b} = -4 \Rightarrow P = 5.$

Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho S là tập hợp các số tự nhiên từ 1 đến 100. Chọn ngẫu nhiên độc lập hai số a và b thuộc tập hợp S (với mỗi phần tử của tập S có khả năng lựa chọn như nhau). Xác suất để số $x = 3^a + 3^b$ chia hết cho 5 bằng.

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{5}$. D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Các lũy thừa nguyên dương của 3 có tận cùng là $3, 9, 7$ và 1 với các khả năng xuất hiện bằng nhau khi số mũ chạy từ 1 đến 100 . Lập bảng các tổng của các số hàng đơn vị của 3^a và 3^b cho các kết quả như bảng dưới đây. Số các chữ số tận cùng là 0 sẽ là bội của 5 đều xuất hiện 4 lần trong tổng số 16, nên xác suất là $\frac{1}{4}$.

	3	9	7	1

3	6	2	0	3
9	2	8	6	0
7	0	6	4	8
1	4	0	8	2

Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, trên cạnh SA lấy điểm M và đặt $\dfrac{SM}{SA}=x$. Giá trị x để mặt phẳng (MBC) chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau là

A $x=\dfrac{1}{3}$. **B** $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. **C** $x=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D** $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\dfrac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{2V_{SMBC}}{V}=\dfrac{SM}{SA}=x$$
$$\dfrac{V_{S.MCN}}{V_{S,ACD}}=\dfrac{2V_{SMCN}}{V}=\dfrac{SM}{SA}\cdot\dfrac{SN}{SD}=x^2$$
$$\dfrac{2\left(V_{S.MCN}+V_{S.MBC}\right)}{V}=x+x^2\Leftrightarrow\dfrac{2V_{SMBCN}}{V}=x+x^2\Rightarrow\qquad 1=x+x^2\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3-m$, với m là tham số. Gọi A,B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $I(2;-2)$. Giá trị thực $m<1$ để ba điểm I,A,B tạo thành một tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$ là

A $m=\dfrac{2}{17}$. **B** $m=\dfrac{3}{17}$. **C** $m=\dfrac{4}{17}$. **D** $m=\dfrac{5}{17}$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-6mx+3m^2-3=3\left[(x-m)^2-1\right]$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m+1\\x=m-1\end{array}\right.$

Do đó, hàm số luôn có hai cực trị với mọi m.

Giả sử $A(m+1;-4m-2)$; $B(m-1;-4m+2)$. Ta có $AB=2\sqrt{5},\quad\forall m\in\mathbb{R}$.

Mặt khác, vì $\triangle IAB$ có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R=\sqrt{5}$ nên từ $\dfrac{AB}{\sin\widehat{AIB}}=2R$ suy ra $\sin\widehat{AIB}=\dfrac{AB}{2R}=1\Rightarrow AIB=90^\circ$ hay $\triangle AIB$ vuông tại I.

Gọi M là trung điểm của AB, ta có $M(m;-4m)$ và $IM=\dfrac{1}{2}AB\Leftrightarrow IM^2=\dfrac{AB^2}{4}=5$

$\Leftrightarrow(m-2)^2+(-4m+2)^2=5\Leftrightarrow 17m^2-20m+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\dfrac{3}{17}.\end{array}\right.$.

Vậy $m=\dfrac{3}{17}$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị dương trên khoảng $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f'(x) = f(x) \cdot (3x^2 + 2mx + m)$ với m là tham số. Giá trị của tham số m để $f(3) = e^{-4}$ là

Ⓐ $m = -2$. Ⓑ $m = \sqrt{3}$. **C** $m = -3$. Ⓓ $m = 4$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 3x^2 + 2mx + m \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int (3x^2 + 2mx + m)\,\mathrm{d}x$.

Nên $\ln[f(x)] = x^3 + mx^2 + mx + C \Rightarrow f(x) = e^{x^3+mx^2+mx+C}$.

Do $f(1) = 1 \Rightarrow e^{1+2m+C} = 1 \Rightarrow C = -2m - 1$.

Vậy $f(x) = e^{x^3+mx^2+mx-2m-1} \Rightarrow f(3) = e^{-4} \Leftrightarrow e^{26+10m} = e^{-4} \Leftrightarrow m = -3$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\left[\dfrac{1}{3}; 3\right]$ thỏa mãn $f(x) + xf\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^3 - x$.

Giá trị tích phân $I = \displaystyle\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3} \dfrac{f(x)}{x^2 + x}\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\dfrac{8}{9}$. Ⓑ $\dfrac{16}{9}$. Ⓒ $\dfrac{2}{3}$. Ⓓ $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Theo giả thiết $f(x) + xf\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^3 - x$.

Đặt $x = \dfrac{1}{t} \Rightarrow \mathrm{d}x = -\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t; x = 3 \Rightarrow t = \dfrac{1}{3}; x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow t = 3$.

Suy ra $I = \displaystyle\int\limits_{3}^{\frac{1}{3}} \dfrac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \frac{1}{t}} \cdot \left(-\dfrac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{1}{3}}^{3} \dfrac{tf\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2 + t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{1}{3}}^{3} \dfrac{xf\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 + x}\,\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow 2I = \displaystyle\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3} \dfrac{f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 + x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{3}}^{3} \dfrac{x^3 - x}{x^2 + x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{3}}^{3} (x - 1)\,\mathrm{d}x = \dfrac{16}{9}$.

$\Rightarrow I = \dfrac{8}{9}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 48. Cho hàm số $y = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ thõa mãn $9a + 3b + c < -54$ và $a - b + c > 2$. Gọi S là số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $S = 3$. Ⓑ $S = 1$. Ⓒ $S = 2$. Ⓓ $S = 0$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $a - b + c > 2 \Leftrightarrow a - b + c - 2 > 0$ mà $f(-1) = -2 + a - b + c$ nên $f(-1) > 0$.

Mặt khác $9a + 3b + c < -54 \Leftrightarrow 9a + 3b + c + 54 < 0$ mà $f(3) = 54 + 9a + 3b + c$ nên $f(3) < 0$.

Ta lại có $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ nên tồn tại số $m < -1$ sao cho $f(m) < 0$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$ nên tồn tại số $k > 0$ sao cho $f(3) > 0$.

Vậy $f(m) \cdot f(-1) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(m; -1)$.

Và $f(-1)\cdot f(3)<0$ nên phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1;3)$.
Và $f(3)\cdot f(k)<0$ nên phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(3;k)$.
Từ đó suy ra đồ thị hàm số có 3 điểm chung với trục hoành.
Chọn đáp án A □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;0)$ và $M(1;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua hai điểm A và M, cắt các trục Oy, Oz lần lượt tại các điểm B, C. Giả sử $B(0;b;0), C(0;0;c), b>0, c>0$. Diện tích tam giác ABC có giá trị nhỏ nhất bằng

A $3\sqrt{3}$. **B** $4\sqrt{3}$. **C** $2\sqrt{6}$. **D** $4\sqrt{6}$.

Lời giải.
Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.
Ta có $M\in(P)$ nên $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1\Leftrightarrow 2b+2c=bc$.
Mặt khác $\overrightarrow{AB}=(-2;b;0)$; $\overrightarrow{AC}=(-2;0;c)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(bc;2c;2b)$.
Diện tích tam giác ABC:

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+4b^2+4c^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(bc)^2+4[(b+c)^2-2bc]}=\frac{1}{2}\sqrt{2(bc)^2-8bc}.\end{aligned}$$

Mà $\dfrac{bc}{2}=b+c\geq 2\sqrt{bc}\Leftrightarrow bc\geq 16$.
$\Rightarrow S=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(bc-2)^2-8}\geq\dfrac{1}{2}\sqrt{484}=4\sqrt{6}$.
Vậy diện tích nhỏ nhất $S=4\sqrt{6}$ khi $b=c=4$.
Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho hai số thực dương a và b thỏa mãn $4^{ab}\cdot 2^{a+b}=\dfrac{8(1-ab)}{a+b}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=ab+2ab^2$ bằng

A 3. **B** 1. **C** $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. **D** $\dfrac{3}{17}$.

Lời giải.
Theo giả thiết ta có $ab<1$.

$$\begin{aligned}4^{ab}\cdot 2^{a+b}=\frac{8(1-ab)}{a+b} &\Leftrightarrow 2^{2ab+a+b-3}=\frac{1-ab}{a+b}\\ &\Leftrightarrow 2ab+a+b-3=\log_2\frac{1-ab}{a+b}\\ &\Leftrightarrow \log_2(1-ab)-\log_2(a+b)=2ab+a+b-3\\ &\Leftrightarrow \log_2(2-2ab)+(2-2ab)=\log_2(a+b)+(a+b). \qquad (1)\end{aligned}$$

Xét hàm số: $f(t)=\log_2 t+t$, $(t>0)\Rightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0$, $\forall t>0$.
$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến $\forall t>0$.
Từ (1) ta có $2-2ab=a+b\Leftrightarrow a=\dfrac{2-b}{1+2b}\Rightarrow P=ab(1+2b)=2b-b^2$.
Giá trị lớn nhất của $P=1$ tại $b=1$ và $a=\dfrac{1}{3}$.
Chọn đáp án B □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. A	3. C	4. A	5. B	6. A	7. B	8. A	9. D	10. C
11. A	12. B	13. B	14. D	15. A	16. B	17. C	18. B	19. D	20. C
21. C	22. A	23. D	24. B	25. D	26. D	27. C	28. B	29. C	30. A
31. B	32. D	33. A	34. A	35. C	36. C	37. D	38. D	39. B	40. A
41. C	42. C	43. D	44. B	45. B	46. C	47. A	48. A	49. D	50. B

15 ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, ĐIỆN BIÊN, LẦN 3 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 2z - 3 = 0$. Điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng (α)?

(A) $M(2;0;1)$. (B) $Q(2;1;1)$. (C) $P(2;-1;1)$. (D) $N(1;0;1)$.

Lời giải.

Ta thấy tọa độ điểm $N(1;0;1)$ thỏa mãn phương trình mặt phẳng (α) nên điểm N nằm trên (α).

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Cho các số thực a, b thỏa mãn $0 < a < 1 < b$. Tìm khẳng định đúng:

(A) $\ln a > \ln b$. (B) $(0,5)^a < (0,5)^b$. (C) $\log_a b < 0$. (D) $2^a > 2^b$.

Lời giải.

Ta có:

a) $\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$ (sai vì $0 < a < b < 1$).

b) $(0,5)^a < (0,5)^b \Leftrightarrow a > b$ (sai vì $0 < a < b < 1$).

c) $\log_a b < 0 \Leftrightarrow b > 1$ (đúng vì $0 < a < 1 < b$).

d) $2^a > 2^b \Leftrightarrow a > b$ (sai vì $0 < a < 1 < b$).

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Phương trình $9^x - 6^x = 2^{2x+1}$ có bao nhiêu nghiệm âm?

(A) 2. (B) 3. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
& 9^x - 6^x = 2^{2x+1} \\
\Leftrightarrow\ & 9^x - 6^x = 2 \cdot 4^x \\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{ll} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2 & \text{(nhận)} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = -1 & \text{(loại)} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & x = \log_{\frac{3}{2}} 2 > 0.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình không có nghiệm âm nào.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Thiết diện qua trục của một hình trụ là một hình vuông có cạnh bằng $2a$. Tính theo a thể tích khối trụ đó.

(A) πa^3. (B) $2\pi a^3$. (C) $4\pi a^3$. (D) $\frac{2}{3}\pi a^3$.

Lời giải.

Ta có: $V_{\text{Trụ}} = h\pi r^2 = 2a \cdot \pi \cdot a^2 = 2\pi a^3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Tập nghiệm của phương trình $\log_{0,25}\left(x^2 - 3x\right) = -1$ là:

Ⓐ $\{4\}$.

Ⓑ $\left\{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}; \dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}\right\}$.

Ⓒ $\{1; -4\}$.

D $\{-1; 4\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 3 \end{array}\right.$.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_{0,25}\left(x^2 - 3x\right) = -1 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 3x = 4 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 3x - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{ll} x = -1 & \text{(nhận)} \\ x = 4 & \text{(nhận)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $S = \{-1; 4\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Số phức liên hợp của số phức z là:

Ⓐ $\overline{z} = 3 - 2i$. Ⓑ $\overline{z} = 3 + 2i$. Ⓒ $\overline{z} = -2 - 3i$. **D** $\overline{z} = 2 + 3i$.

Lời giải.

Do định nghĩa số phức liên hợp nên số phức liên hợp của $z = 2 - 3i$ là $\overline{z} = 2 + 3i$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'	$+\infty$	↘	-1	↗	0	↘	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) > 2^x + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi:

Ⓐ $m > f(1) - 2$. **B** $m \leq f(1) - 2$. Ⓒ $m \leq f(-1) - \dfrac{1}{2}$. Ⓓ $m > f(-1) - \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Từ $f(x) > 2^x + m \Leftrightarrow f(x) - 2^x > m$. Đặt $g(x) = f(x) - 2^x \Rightarrow g'(x) = f'(x) - 2^x \ln 2 < 0, \forall x \in (-1, 1)$ vì theo bảng biến thiên $f'(x) < 0, \forall x \in (-1, 1)$ và $2^x \ln 2 > 0$.

Khi đó $g(x) > g(1) = f(1) - 2, \forall x \in (-1, 1)$.

Do đó bất phương trình $f(x) > 2^x + m, \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow m \leq g(1) = f(1) - 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x^2-2)(x^4-4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

Ⓐ 3. **B** 1. Ⓒ 4. Ⓓ 2.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = (x-1)(x^2-2)(x^4-4) = (x-1)(x^2-2)^2(x^2+2)$. Suy ra $f'(x)$ chỉ qua điểm và đổi dấu tại $x = 1$.

Vậy hàm số chỉ có một cực trị tại $x = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Trên kệ sách có 10 cuốn sách Toán và 5 cuốn sách Văn. Lấy lần lượt 3 cuốn mà không để lại trên kệ. Tính xác suất để được hai cuốn sách đầu là Toán, cuốn thứ ba là Văn.

A $\frac{18}{91}$. B $\frac{7}{45}$. C $\frac{8}{15}$. D $\frac{15}{91}$.

Lời giải.

+ Số phần tử không gian mẫu $n(\Omega) = 2730$.

+ Gọi A là biến cố sao cho ba cuốn lấy ra liên tiếp trong đó hai cuốn toán, một cuốn văn.

+ Khi đó $n(A) = 450$.

+ Xác suất cần tìm $\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{15}{91}$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho $(S)\colon (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ và điểm $A(2;2;2)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM luôn tiếp xúc với (S). M luôn thuộc một mặt phẳng cố định có phương trình là

A $x + y + z - 6 = 0$. B $x + y + z - 4 = 0$.

C $3x + 3y + 3z - 8 = 0$. D $3x + 3y + 3z - 4 = 0$.

Lời giải.

Ta có tọa độ tâm mặt cầu (S): $I(1,1,1)$.

Gọi $M(x,y,z)$, khi đó $\overrightarrow{AM} = (x-2, y-2, z-2)$ và $\overrightarrow{IM} = (x-1, y-1, z-1)$. Theo đề bài

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{IM} = 0 &\Leftrightarrow (x-2)(x-1) + (y-2)(y-1) + (z-2)(z-1) = 0\\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0. \qquad (1')\end{aligned}$$

Mặt khác phương trình mặt cầu

$$(S)\colon (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0 \qquad (3)$$

Lấy $(1')$ trừ (1) ta được $x + y + z - 4 = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = 3x + m(\sin x + \cos x + m)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A 3. B Vô số. C 4. D 5.

Lời giải.

Ta có $y' = 3 + m(\cos x - \sin x) = 3 + m\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \min_{\mathbb{R}} y' \geq 0 \Leftrightarrow 3 - |m\sqrt{2}| \geq 0 \Leftrightarrow |m| \leq \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m \in \{0; -1; 1; -2; 2\}.$$

Vậy có 5 giá trị nguyên của m.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x^2+y^2+z^2+4mx+2my-2mz+9m^2-28=0$ là phương trình của mặt cầu?

A 7. B 8. C 9. D 6.

Lời giải.

Ta có $a=-2m$; $b=-m$; $c=m$ và $d=9m^2-28$.

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi

$$a^2+b^2+c^2-d>0 \Leftrightarrow 4m^2+m^2+m^2-9m^2+28>0 \Leftrightarrow 28-3m^2>0 \Leftrightarrow -\frac{2\sqrt{21}}{3}<m<\frac{2\sqrt{21}}{3}.$$

Do m nguyên nên $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$.

Vậy có tất cả 7 giá trị nguyên của m.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f(x)-5=0$ là:

A 4. B 0. C 3. D 2.

Lời giải.

Ta có $2f(x)-5=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{5}{2}$.

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=\frac{5}{2}$. Dựa vào bảng biến thiên ta có đường thẳng $y=\frac{5}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại đúng 4 điểm phân biệt. Do đó phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh Ox với (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$ và trục hoành.

A $\frac{31\pi}{3}$. B $\frac{32\pi}{3}$. C $\frac{34\pi}{3}$. D $\frac{35\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{4x-x^2}=0 \Leftrightarrow 4x-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4. \end{array}\right.$

Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục Ox là

$$V=\pi\int\limits_0^4\left(\sqrt{4x-x^2}\right)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^4\left(4x-x^2\right)\,\mathrm{d}x=\pi\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4=\frac{32\pi}{3}\text{ đvtt.}$$

Chọn đáp án B □

Câu 15. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + mx - 2019$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ là:

A $m \leq -1$. **B** $m < -1$. **C** $m > -1$. **D** $m \leq 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = -x^2 + 2x + m$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y' \leq 0,\ \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \leq x^2 - 2x,\ \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \leq \min_{(0;+\infty)} \left(x^2 - 2x\right) \Leftrightarrow m \leq -1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 16. Tìm tập xác định của hàm số $y = \ln(1 - x)$.

A $\mathscr{D} = (-\infty; -1)$. **B** $\mathscr{D} = (-1; +\infty)$. **C** $\mathscr{D} = (-\infty; 1)$. **D** $\mathscr{D} = (1; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y = \ln(1 - x)$ xác định $\Leftrightarrow 1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$. Do đó tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (-\infty; 1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 1}{x - 1}$.

A 0. **B** $+\infty$. **C** $-\infty$. **D** 1.

Lời giải.

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = -\infty$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^x$.

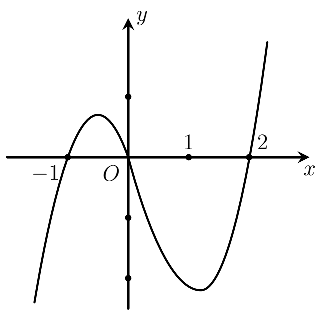
A $y' = \frac{2^x}{\ln 2}$. **B** $y' = 2^x \ln 2$. **C** $y' = x.2^{x-1} \ln 2$. **D** $y' = x.2^{x-1}$.

Lời giải.

Sử dụng công thức đạo hàm $(a^x)' = a^x \ln a$. Do đó ta có $(2^x)' = 2^x \ln 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng về hàm số $y = f(x)$?



A Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$. **B** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

C Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$. **D** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy $f'(x) > 0, \forall x \in (-1; 0)$. Suy ra hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(3; 0; 0), B(0; 0; 4)$. Chu vi tam giác OAB bằng

(A) 14. (B) 7. (C) 6. (D) 12.

Lời giải.

$\triangle OAB$ có

$$\begin{aligned} OA &= \sqrt{(3-0)^2 + (0-0)^2 + (0-0)^2} = 3 \\ OB &= \sqrt{(0-0)^2 + (0-0)^2 + (4-0)^2} = 4 \\ AB &= \sqrt{(0-3)^2 + (0-0)^2 + (4-0)^2} = 5. \end{aligned}$$

Do đó chu vi của $\triangle OAB$ bằng $OA + OB + AB = 3 + 4 + 5 = 12$.

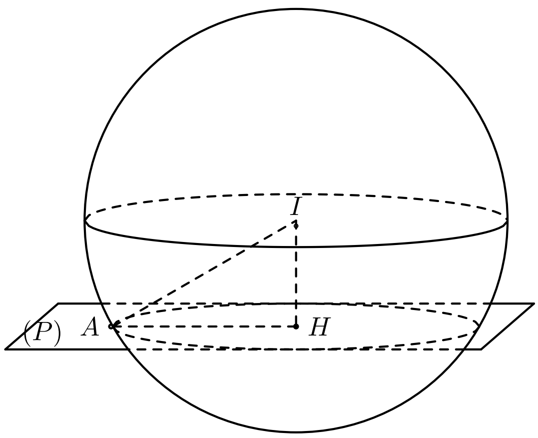
Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cắt mặt cầu (S) bằng một mặt phẳng cách tâm một khoảng bằng 4cm được thiết diện là một hình tròn có diện tích $9\pi\text{cm}^2$. Tính thể tích khối cầu (S).

(A) $\dfrac{250\pi}{3}\ \text{cm}^3$. (B) $\dfrac{2500\pi}{3}\ \text{cm}^3$. (C) $\dfrac{25\pi}{3}\ \text{cm}^3$. (D) $\dfrac{500\pi}{3}\ \text{cm}^3$.

Lời giải.

- Gọi I là tâm mặt cầu (S), H là tâm đường tròn giao tuyến, A là một điểm bất kì trên đường tròn, R là bán kính của (S).
- Ta có $\mathrm{d}(I, (P)) = 4$.
- $S_{(C)} = \pi AH^2 = 9\pi \Rightarrow AH = 3$.
- Ta có $R = \sqrt{AH^2 + \mathrm{d}(I, (P))} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
- Thể tích khối cầu (S) là $V_{(S)} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{500\pi}{3}$.



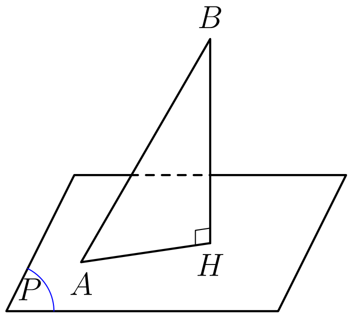
Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1)$, $B(3; 0; 3)$. Biết mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách B một khoảng lớn nhất. Phương trình mặt phẳng (P) là

(A) $x - 2y + 2z + 5 = 0$. (B) $x - y + 2z + 3 = 0$.

(C) $2x - 2y + 4z + 3 = 0$. (D) $2x - y + 2z = 0$.

Lời giải.



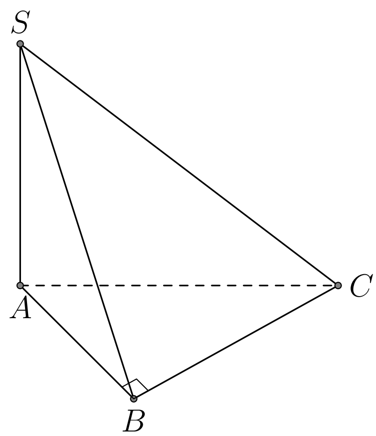
- Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên (P), suy ra $\mathrm{d}(B,(P)) = AH$.
- Ta có $BH \leq AB$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv A \Rightarrow BH_{\max} = AB$ khi $AB \perp (P)$.
- Ta có $\begin{cases} AB \perp (P) \\ A \in (P) \end{cases} \Rightarrow (P)\colon 2x-2y+4z+6 = 0 \Leftrightarrow x-y+2z+3 = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$ và $AC = a\sqrt{3}$. Biết $SA \perp (ABC)$ và $SB = a\sqrt{5}$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

A $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

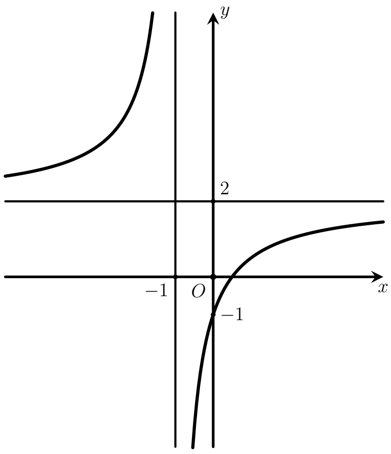
Lời giải.



- Xét $\triangle SAB$ vuông tại A nên $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 2a$.
- Xét $\triangle ABC$ vuông tại B nên $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$.
- Ta có $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \times SA \times S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3} \times 2a \times \dfrac{1}{2} \times a \times a\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?



A $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$. **B** $y = \dfrac{x-1}{x-2}$. **C** $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$. **D** $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.

Lời giải.

Từ đồ thị ta có

- Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$.
- Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$.

- Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; -1)$.

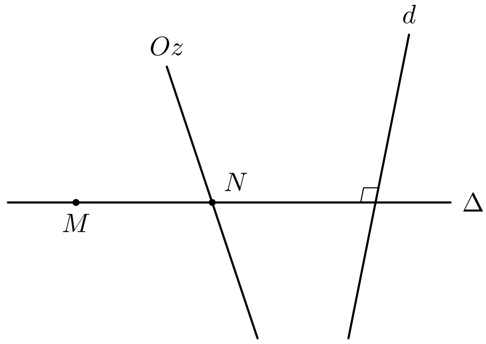
Chọn đáp án (D) □

Câu 25.]Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 0; 1)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{3}$. Đường thẳng đi qua M, vuông góc với d và cắt Oz có phương trình là

A $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}$.

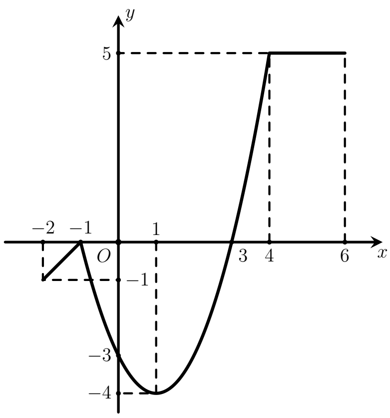
Lời giải.

- Gọi Δ là đường thẳng cần tìm, N là giao điểm của Δ và Oz. Ta có $N(0; 0; z)$.
- Ta có $\overrightarrow{MN} = (-1; 0; z-1)$, $\vec{u}_d = (1; 2; 3)$.
- $\Delta \perp d \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow -1 + 3(z-1) = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{4}{3} \Rightarrow N\left(0; 0; \dfrac{4}{3}\right)$.
- $\vec{u}_\Delta = \overrightarrow{MN} = \left(-1; 0; \dfrac{1}{3}\right) \mathbin{/\!/} (-3; 0; 1) \Rightarrow \Delta\colon \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 6]$ và có đồ thị như hình bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2; 6]$. Giá trị của $M - m$ bằng:

A 9. (B) -8. (C) -9. (D) 8.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị của hàm số trên đoạn từ $[-2; 6]$ ta có $M = 5$ và $m = -4$. Do đó $M - m = 9$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log\left(x^2 - 4x - m + 1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

(A) $m > -4$. (B) $m < 0$. (C) $m < -4$. **D** $m < -3$.

Lời giải.

Hàm số $y = \log\left(x^2 - 4x - m + 1\right)$ xác định khi và chỉ khi $x^2 - 4x - m + 1 > 0$.

Yêu cầu bài toán thỏa mãn $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ 16 + 4m - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -3$.

Chọn đáp án D □

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha) : ax - y + 2z + b = 0$ đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(P) : x - y - z + 1 = 0$ và $(Q) : x + 2y + z - 1 = 0$. Tính $a + 4b$.

A -16. **B** -8. **C** 0. **D** 8.

Lời giải.

Xét giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) là đường thẳng $\begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$.

Chọn $x = 0$ ta được $\begin{cases} -y - z + 1 = 0 \\ 2y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow A(0; 0; 1)$.

Chọn $x = -1$ ta được $\begin{cases} -y - z = 0 \\ 2y + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow B(-1; 2; -2)$.

Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A, B \Rightarrow \begin{cases} 2 + b = 0 \\ -a - 2 - 4 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow a + 4b = -16$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_4 x^2 - \log_2 3 = 1$ là

A 6. **B** 0. **C** 5. **D** 4.

Lời giải.

Xét phương trình $\log_4 x^2 - \log_2 3 = 1$, điều kiện $x \neq 0$.

Với điều kiện phương trình $\Leftrightarrow \log_4 x^2 = 1 + \log_2 3 = \log_2 6 = \log_4 36 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = \pm 6$.

Do đó tổng các nghiệm của phương trình là 0.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số bằng:

A -2. **B** -1. **C** 2. **D** 3.

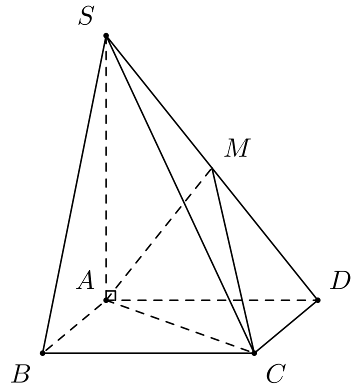
Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực đại của hàm số là 3.

Chọn đáp án D □

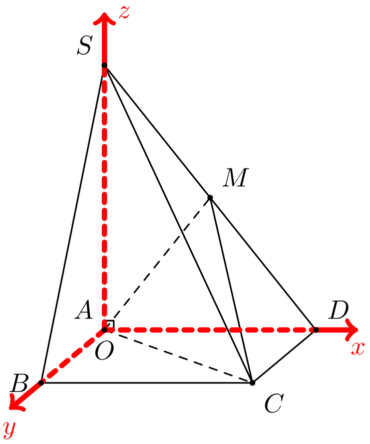
Câu 31.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD. Tính tang của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) bằng



(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, sao cho $A \equiv O(0;0;0)$, $D(a;0;0) \in Ox$, $B(0;a;0) \in Oy$, $S(0;0;2a) \in Oz$. Suy ra $C \in (Oxy)$ và $C(a;a;0)$, $M\left(\dfrac{a}{2};0;a\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \left(\dfrac{a}{2};0;a\right)$; $\overrightarrow{AC} = (a;a;0) \Rightarrow \overrightarrow{n}_{(AMC)} = \left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right] = \left(-a^2;a^2;\dfrac{a^2}{2}\right)$.

Hay $\overrightarrow{n}_{(AMC)} = \left(-a;a;\dfrac{a}{2}\right)$.

$\overrightarrow{SB} = (0;a;-2a)$, $\overrightarrow{SC} = (a;a;-2a)$

$\Rightarrow \overrightarrow{n}_{(SBC)} = [\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}] = (0;-2a;-a)$.

Đặt $((AMC),(SBC)) = \alpha$.

Khi đó $\cos((AMC),(SBC)) = \cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{n}_{(MAC)}\cdot\overrightarrow{n}_{(SBC)}\right|}{\left|\overrightarrow{n}_{(MAC)}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n}_{(SBC)}\right|} = \dfrac{5a^2}{2\cdot\dfrac{3a}{2}\cdot a\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Mặt khác $\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 32. Một người thả một lá bèo vào một chậu nước. Sau 12 giờ, bèo sinh sôi phủ kín mặt nước trong chậu. Biết rằng sau mỗi giờ lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì bèo phủ kín $\dfrac{1}{5}$ mặt nước trong chậu (kết quả làm tròn đến 1 chữ số phần thập phân).

(A) $9,1$ giờ. (B) $9,7$ giờ. **C** $10,4$ giờ. (D) $11,3$ giờ.

Lời giải.

Gọi lượng bèo ban đầu là x ($x > 0$).

Số lượng bèo phủ kín mặt nước trong chậu là $x\cdot 10^{12}$.

Sau t (giờ) thì số bèo phủ kín $\dfrac{1}{5}$ mặt nước trong chậu nên ta có

$$x\cdot 10^t = \frac{1}{5}x\cdot 10^{12} \Rightarrow t = 12 + \log\frac{1}{5} \simeq 10,4 \text{ (giờ)}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Tính thể tích V của khối chóp có đáy là hình vuông cạnh $2a$ và chiều cao là $3a$.

A $V = 4a^3$. (B) $V = 2a^3$. (C) $V = 12a^3$. (D) $V = \dfrac{4}{3}\pi a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối chóp đã cho là $V = \dfrac{1}{3} \cdot 3a \cdot (2a)^2 = 4a^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1;3]$ thoả: $\displaystyle\int_1^3 [f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x = 10$, $\displaystyle\int_1^3 [2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 6$. Tính $\displaystyle\int_1^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$

A 7. B 6. C 8. D 9.

Lời giải.

Đặt $I_1 = \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$, $I_2 = \displaystyle\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x$. Theo bài ra ta có

$$\begin{cases} \displaystyle\int_1^3 [f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x = 10 \\ \displaystyle\int_1^3 [2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 10 \\ 2\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_1 + 3I_2 = 10 \\ 2I_1 - I_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_1 = 4 \\ I_2 = 2. \end{cases}$$

Vậy $\displaystyle\int_1^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2 = 6$.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A 2. B 4. C 1. D 3.

Lời giải.

Hàm số xác định trên $\mathscr{D} = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

Ta có :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5-\dfrac{8}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}} = 5 \Rightarrow y = 5$ là một đường tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5-\dfrac{8}{x}}{-\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}} = -5 \Rightarrow y = -5$ là một đường tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = -\infty \Rightarrow x = 0$ là một đường tiệm cận đứng.
- $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = +\infty \Rightarrow x = 3$ là một đường tiệm cận đứng.

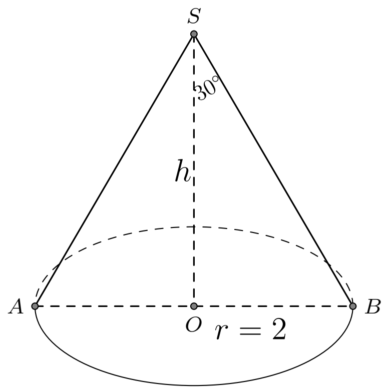
Vậy đồ thị hàm số đã cho có tất cả 4 đường tiệm cận.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 2 cm, góc ở đỉnh bằng $60°$. Tính thể tích của khối nón đó.

A $\dfrac{8\sqrt{3}\pi}{9}$ cm^3. **B** $8\sqrt{3}\pi$ cm^3. **C** $\dfrac{8\sqrt{3}\pi}{3}$ cm^3. **D** $\dfrac{8\pi}{3}$ cm^3.

Lời giải.



Vì góc ở đỉnh bằng 60° nên đường cao của hình nón là

$$h = r \cdot \cot 30^\circ = 2\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Khi đó, thể tích khối nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{8\pi\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3.$$

Chọn đáp án C □

Câu 37. Trong các số phức z thỏa mãn: $|z-1+i| = |\overline{z}+1-2i|$, số phức z có mô đun nhỏ nhất có phần ảo là

A $\dfrac{3}{10}$. **B** $\dfrac{3}{5}$. **C** $-\dfrac{3}{5}$. **D** $-\dfrac{3}{10}$.

Lời giải.

Đặt $z = x + iy$ (với x, $y \in \mathbb{R}$ và $i^2 = -1$). Khi đó,

$$\begin{aligned} & |z-1+i| = |\overline{z}+1-2i| \\ \Leftrightarrow\ & |(x-1)+i(y+1)| = |(x+1)-i(y+2)| \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2 + (y+1)^2 = (x+1)^2 + (y+2)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 4x + 2y + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & y = -2x - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Ta có

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2 + \left(-2x - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{5\left(x+\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{9}{20}} \geq \sqrt{\frac{9}{20}}.$$

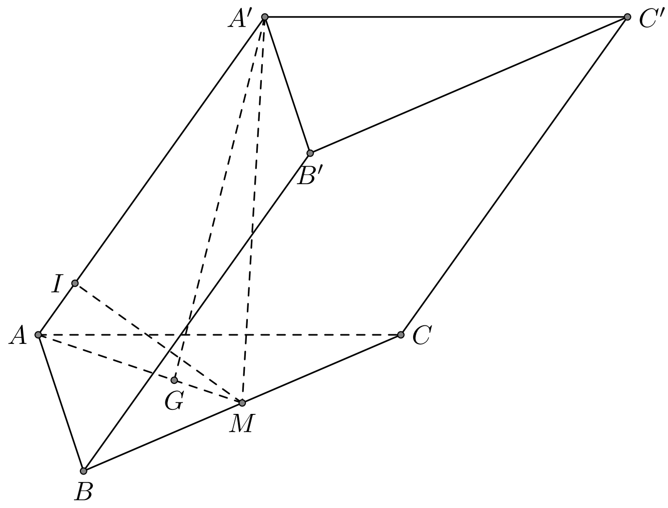
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = -\dfrac{3}{5} \\ y = -2x - \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{5} \\ y = -\dfrac{3}{10}. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ đó.

A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC và I là hình chiếu vuông góc của M lên trên cạnh AA'.
Vì $AM \perp BC$ và $A'O \perp BC$ nên $BC \perp (AA'M)$. Suy ra $BC \perp MI$.
Vì $BC \perp MI$ và $BC \perp AA'$ nên MI là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng BC và AA'.
Suy ra $MI = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Vì hai tam giác $AA'O$ và AMI đồng dạng nên ta có $\dfrac{A'O}{MI} = \dfrac{AO}{AI}$. Suy ra

$$A'O = \frac{MI.AO}{AI} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{3a}{4}} = \frac{a}{3}.$$

Khi đó, thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.A'O = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12} \text{ (dvtt)}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16$, $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \displaystyle\int_0^1 x.f'(2x)\,\mathrm{d}x$.

A 7. **B** 12. **C** 20. **D** 13.

Lời giải.

Đặt $t = 2x$, ta có $\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$.
Đổi cận: + Với $x = 0 \Rightarrow t = 0$.
+ Với $x = 1 \Rightarrow t = 2$.
Khi đó, ta có

$$I = \frac{1}{4}\int_0^2 tf'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Đặt $\begin{cases} u = t \\ \mathrm{d}v = f'(t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ v = f(t) \end{cases}$, ta có

$$\begin{aligned} & I = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot f(2) - \frac{1}{4}\int\limits_0^2 f(t)dt \\ \Leftrightarrow\ & I = \frac{1}{2}f(2) - \frac{1}{4}\cdot 4 \\ \Leftrightarrow\ & I = 7. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 40. Tính $\displaystyle\int (x - \sin 2x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{x^2}{2} + \cos 2x + C$.
B. $x^2 + \dfrac{1}{2}\cos 2x + C$.
C. $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x + C$.
D. $\dfrac{x^2}{2} + \sin x + C$.

Lời giải.

$$\int (x - \sin 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x + C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2; -1)$.
B. $(2; +\infty)$.
C. $(0; 2)$.
D. $(-1; 0)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy $f'(x) \le 0 \Leftrightarrow x \le 2$; $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 2$.

Xét hàm số $y = f\left(x^2 - 2\right)$.

Ta có $y' = \left[f\left(x^2 - 2\right)\right]' = 2x \cdot f'\left(x^2 - 2\right)$.

$$\begin{aligned} y' \le 0 \quad & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x \le 0 \\ f'\left(x^2 - 2\right) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x \ge 0 \\ f'\left(x^2 - 2\right) \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 0 \\ x^2 - 2 \ge 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - 2 \le 2 \end{cases} \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -2 \\ 0 \le x \le 2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vì vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$; $(0;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Giả sử $I=\int\limits_1^{64}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=a\ln\dfrac{2}{3}+b$ với a,b là số nguyên. Khi đó giá trị $a-b$ là:

A -17. B 5. **C** -5. D 17.

Lời giải.

Đặt $\sqrt[6]{x}=t\Leftrightarrow x=t^6;\ t\geq 0$. Khi đó ta có $dx=6t^5\cdot\mathrm{d}t$.

Ta có

$$\begin{aligned}I&=\int\limits_1^{64}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\limits_1^{2}\frac{6t^5\cdot\mathrm{d}t}{t^3+t^2}=\int\limits_1^{2}\frac{6t^3.\mathrm{d}t}{t+1}\\&=\int\limits_1^{2}\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\cdot\mathrm{d}t=\left.\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)\right|_1^2=6\ln\frac{2}{3}+11.\end{aligned}$$

Do đó $a=6;\ b=11$. Vậy $a-b=-5$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t,(t\in\mathbb{R})\\z=-7\end{cases}$. Mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là:

A $y+z+1=0$. B $x+3y+5z+2=0$.

C $x-2y-3=0$. D $3x-2y-4z-8=0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;1;0)$ và bán kính $R=2$.

Đường thẳng d có vec-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}=(2;1;-1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên d.

(α) là mặt phẳng qua I và vuông góc với d. Phương trình mặt phẳng (α) là $2x+y+z-7=0$.

Tọa độ H là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=-t\\2x+y+z-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=0\\z=-1\end{cases}\Rightarrow H(3;0;-1)$.

(P) là mặt phẳng chứa d và K là hình chiếu của I trên (P). Đường tròn thiết diện có bán kính r.

Khi đó ta có $IK\leq IH,\ \forall K\in(P)$.

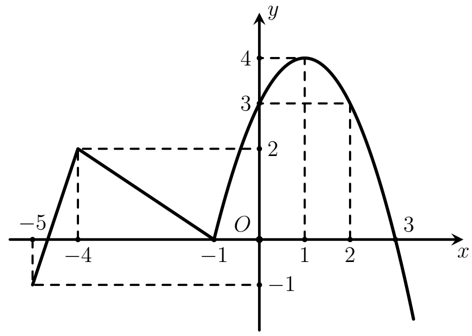
Mặt khác $R^2=r^2+IK^2$ nên r nhỏ nhất khi IK lớn nhất bằng IH.

(P) là mặt phẳng qua H và có vec-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{IH}=(0;-1;-1)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P): $y+z+1=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-5; 3]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y = ax^2 + bx + c$).



Biết $f(0) = 0$, giá trị của $2f(-5) + 3f(2)$ bằng:

(A) 33. (B) $\dfrac{109}{3}$. (C) $\dfrac{35}{3}$. (D) 11.

Lời giải.

Từ đồ thị ta có $f'(x) = \begin{cases} 3x + 14 & \text{nếu } -5 \le x \le -4 \\ -\dfrac{2}{3}(x+1) & \text{nếu } -4 \le x \le -1 \\ -x^2 + 2x + 3 & \text{nếu } -1 \le x \le 3 \end{cases}$.

Suy ra $f(x) = \begin{cases} 3 \cdot \dfrac{x^2}{2} + 14x + C_1 & \text{nếu } -5 \le x \le -4 \\ -\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x^2}{2} + x\right) + C_2 & \text{nếu } -4 \le x \le -1 \\ -\dfrac{x^3}{3} + x^2 + 3x + C_3 & \text{nếu } -1 \le x \le 3 \end{cases}$.

Mặt khác

$f(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$.

$f(-1) = -\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2} - 1\right) + C_2 = -\dfrac{1}{3} + 1 - 3 \Rightarrow C_2 = -2$.

$f(-4) = 24 - 56 + C_1 = -\dfrac{16}{3} + \dfrac{8}{3} - 2 \Rightarrow C_1 = \dfrac{82}{3}$.

Khi đó $2f(-5) + 3f(2) = \dfrac{35}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 45. Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x + 2yi) + (3 - i) = 4x - 3i$ với i là đơn vị ảo.

(A) $x = 3; y = -1$. (B) $x = \dfrac{2}{3}; y = -1$. (C) $x = 3; y = -3$. (D) $x = -3; y = -1$.

Lời giải.

Ta có

$(3x + 2yi) + (3 - i) = 4x - 3i \Leftrightarrow (3x + 3) + (2y - 1)i = 4x - 3i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3 = 4x \\ 2y - 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1. \end{cases}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Kí hiệu $z_1; z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - z + 1 = 0$. Tính $P = |z_1| + |z_2|$.

(A) $P = \dfrac{\sqrt{14}}{3}$. (B) $P = \dfrac{2}{3}$. (C) $P = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (D) $P = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $3z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{11}}{6} \\ z_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{11}}{6} \end{array}\right.$.

Do đó $P = |z_1| + |z_2| = 2\sqrt{\left(\dfrac{1}{6}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{11}}{6}\right)^2} = 2\sqrt{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z biết $|z - (2 - 3i)| \leq 2$.

(A) Một đường thẳng. **B** Một hình tròn. (C) Một đường tròn. (D) Một đường elip.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$, $|z - (2 - 3i)| = |(x - 2) + (y + 3)\, i| = \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2}$.

Do đó $|z - (2 - 3i)| \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} \leq 2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 \leq 4$.

Vậy điểm biểu diễn số phức z nằm trên hình tròn có bán kính $r = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau?

(A) C_6^3. (B) 6^3. **C** A_6^3. (D) $6!$.

Lời giải.

Có thể lập A_6^3 số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau.

Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2(x^4 - 16) + m(x^2 - 4) - 28(x - 2) \geq 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng:

(A) $-\dfrac{15}{8}$. (B) -1. **C** $-\dfrac{1}{8}$. (D) $\dfrac{7}{8}$.

Lời giải.

Ta có $m^2\left(x^4 - 16\right) + m\left(x^2 - 4\right) - 28\left(x - 2\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)\left(m^2 (x + 2)\left(x^2 + 4\right) + m\,(x + 2) - 28\right) \geq 0$.

• Điều kiện cần: $x = 2$ là một nghiệm của phương trình

$m^2 (x + 2)\left(x^2 + 4\right) + m\,(x + 2) - 28 = 0 \Leftrightarrow 32m^2 + 4m - 28 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = \dfrac{7}{8} \end{array}\right.$.

• Điều kiện đủ:

+ Với $m = -1$: *bpt* $\Leftrightarrow (x - 2)\left((x + 2)\left(x^2 + 4\right) - (x + 2) - 28\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2\left(x^2 + 4x + 11\right) \geq 0$ (thỏa mãn).

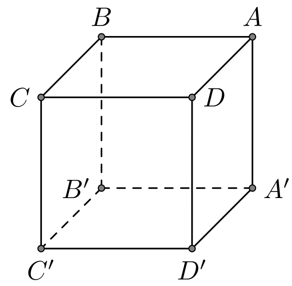
+ Với $m = \dfrac{7}{8}$ thì *bpt* $\Leftrightarrow (x - 2)\left(\frac{49}{64}(x + 2)\left(x^2 + 4\right) + \dfrac{7}{8}(x + 2) - 28\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{7}{64}(x - 2)^2\left(7x^2 + 28x + 92\right) \geq 0$ (thỏa mãn).

Vậy $S = \left\{-1; \dfrac{7}{8}\right\}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa AC' và BD.



A 90°. **B** 45°. **C** 60°. **D** 120°.

Lời giải.

Gọi O' và I lần lượt là tâm hình vuông $ABCD$ và trung điểm CC'. Khi đó, ta có IO' song song AC'. Suy ra $(AC', BD) = (IO', BD)$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AA'C) \Rightarrow BD \perp IO' \Rightarrow (IO', BD) = 90^\circ$.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. C	3. C	4. B	5. D	6. D	7. B	8. B	9. D	10. B
11. D	12. A	13. A	14. B	15. A	16. C	17. C	18. B	19. A	20. D
21. D	22. B	23. C	24. D	25. A	26. A	27. D	28. A	29. B	30. D
31. D	32. C	33. A	34. B	35. B	36. C	37. D	38. A	39. A	40. C
41. C	42. C	43. A	44. C	45. A	46. D	47. B	48. C	49. C	50. A

16 ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN QUANG TRUNG – BÌNH PHƯỚC - LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Số tập con của tập $M = \{1;2;3\}$ là

(A) $\mathrm{A}_3^0 + \mathrm{A}_3^1 + \mathrm{A}_3^2 + \mathrm{A}_3^3$. (B) $\mathrm{P}_0 + \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_3$.
(C) $3!$. **(D)** $\mathrm{C}_3^0 + \mathrm{C}_3^1 + \mathrm{C}_3^2 + \mathrm{C}_3^3$.

Lời giải.

Để thỏa mãn bài toán có các trường hợp sau:

- Tập hợp con không có phần tử nào của M.
  Suy ra số các tập con là C_3^0.
- Tập hợp con chứa 1 phần tử của M.
  Suy ra số các tập con là C_3^1.
- Tập hợp con chứa 2 phần tử của M.
  Suy ra số các tập con là C_3^2.
- Tập hợp con chứa 3 phần tử của M.
  Suy ra số các tập con là C_3^2.

Vậy số các tập con của M là $\mathrm{C}_3^0 + \mathrm{C}_3^1 + \mathrm{C}_3^2 + \mathrm{C}_3^3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng song song với trục Ox?

(A) $\vec{u} = (1;0)$. (B) $\vec{u} = (1;-1)$. (C) $\vec{u} = (1;1)$. (D) $\vec{u} = (0;1)$.

Lời giải.

Véc-tơ $\vec{i} = (1;0)$ là một véc-tơ chỉ phương của trục Ox. Do đó đường thẳng song song với trục Ox có một véc-tơ là $\vec{u} = (1;0)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Cho tứ giác $ABCD$, có bao nhiêu véc-tơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tứ giác.

(A) 8. **(B)** 12. (C) 6. (D) 4.

Lời giải.

Mỗi cặp điểm khác nhau sẽ tạo thành hai véc-tơ khác nhau và khác véc-tơ $\vec{0}$. Do đó số các véc-tơ thỏa mãn bài toán là $\mathrm{A}_4^2 = 12$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm

(A) $x = 1$. (B) $x = 5$. (C) $x = 2$. **(D)** $x = 0$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy y' đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x = 0$ nên $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau.

A $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{N}^*$. **B** $\mathbb{N}^* \cap \mathbb{R} = \mathbb{N}^*$. **C** $\mathbb{R}^* \cup \mathbb{N} = \mathbb{R}^*$. **D** $\mathbb{N} \cap \mathbb{R}^* = \mathbb{N}$.

Lời giải.

Vì $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$ nên $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{N}$

Chọn đáp án A □

Câu 6. Nếu $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ thì $\sin 2x$ bằng

A $\frac{3}{4}$. **B** $\frac{3}{8}$. **C** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D** $-\frac{3}{4}$.

Lời giải.

Do $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ nên

$$(\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{3}{4}.$$

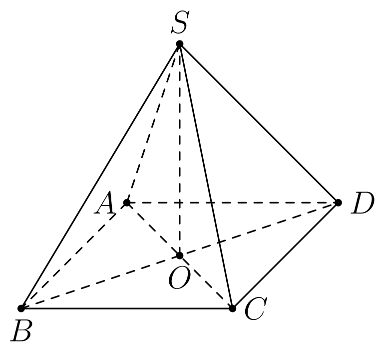
Chọn đáp án D □

Câu 7. Hình chóp tứ giác đều có cạnh bằng a, chiều cao $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Góc giữa cạnh bên với mặt phẳng đáy là

A 60°. **B** 15°. **C** 45°. **D** 30°.

Lời giải.

Giả sử hình chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ và O là tâm hình vuông $ABCD$. Do giả thiết $SO \perp (ABCD)$ suy ra góc giữa cạnh bên và mặt đáy là góc $\widehat{SBO}$.



Xét $\triangle SOB$ ta có $BO = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Mà $SO = h$ nên $SO = OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\triangle OSB$ vuông cân đỉnh O suy ra $\widehat{SBO} = 45^\circ$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Cho hàm số $y = -\frac{1}{x}$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là

A $y^{(2)} = \frac{2}{x^3}$. **B** $y^{(2)} = -\frac{2}{x^2}$. **C** $y^{(2)} = -\frac{2}{x^3}$. **D** $y^{(2)} = \frac{2}{x^2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có $y' = \frac{1}{x^2}$ nên $y'' = -\frac{(x^2)'}{x^4} = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Hàm số nào dưới đây luôn tăng trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = 2018$. (B) $y = x^4 + x^2 + 1$. (C) $y = x + \sin x$. (D) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x + \sin x$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 1 + \cos x$.

Vì $1 + \cos x \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Dấu đẳng thức xảy ra tại đếm được điểm nên hàm số luông đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số $y = \cos x$ là hàm số lẻ.
(B) Hàm số $y = \tan 2x - \sin x$ là hàm số lẻ.
(C) Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn.
(D) Hàm số $y = \tan x \cdot \sin x$ là hàm số lẻ.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \tan 2x - \sin x$.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Giả sử với x bất kỳ thuộc $\mathscr{D}$ suy ra $-x \in \mathscr{D}$.

Mà $f(-x) = \tan(-2x) - \sin(-x) = -\tan 2x + \sin x = -f(x)$.

Do đó hàm số $y = \tan 2x - \sin x$ là hàm số lẻ.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Dãy số (u_n) là cấp số cộng, công sai d. Tổng $S_{100} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{100}$, $u_1 \neq 0$ là

(A) $S_{100} = 2u_1 + 99d$.
(B) $S_{100} = 50u_{100}$.
(C) $S_{100} = 50(u_1 + u_{100})$.
(D) $S_{100} = 100(u_1 + u_{100})$.

Lời giải.

Do dãy số (u_n) là cấp số cộng, công sai d nên

$$S_{100} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{100} = \frac{100}{2}(u_1 + u_{100}) = 50(u_1 + u_n).$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng

(A) $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}+1}{2019}$. (B) $y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$. (C) $y = \dfrac{x^2}{x^2+2018}$. (D) $y = \dfrac{x}{x+12}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \dfrac{x}{x+12}$ trên $\mathbb{R} \setminus \{-12\}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to (-12)^+} \dfrac{x}{x+12} = +\infty$ nên $x = -12$ là tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Điều kiện xác định của phương trình $x + \sqrt{x-2} = 3 + \sqrt{x-2}$ là

(A) $x = 2$. (B) $x \geq 3$. (C) $x \geq 2$. (D) $x = 3$.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình xác định là $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14.
Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

A. $(-\infty; 0)$.
B. $(0; 2)$.
C. $(-2; 0)$.
D. $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Giới hạn $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x-3}{x+2}$ bằng

A. $-\dfrac{3}{2}$.
B. -3.
C. -1.
D. 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x-3}{x+2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-1-\dfrac{3}{x}}{1+\dfrac{2}{x}} = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Thể tích V của khối lăng trụ có chiều cao bằng h và diện tích bằng B là

A. $V = Bh$.
B. $V = \dfrac{1}{6}Bh$.
C. $V = \dfrac{1}{3}Bh$.
D. $V = \dfrac{1}{2}Bh$.

Lời giải.

Ta có $V = hB$.

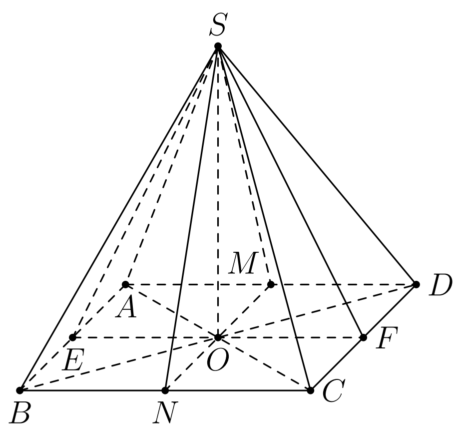
Chọn đáp án A □

Câu 17. Số mặt đối xứng của hình chóp đều $S.ABCD$ là

A. 2.
B. 4.
C. 7.
D. 6.

Lời giải.

Gọi E, F, M,N lần lượt là trung điểm của AB, CD, AD, BC. Khi đó các mặt đối xứng của hình chóp là (SAC), (SBD), (SEF) và (SMN).



Chọn đáp án B □

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x\left(x^2+2x\right)^3\left(x^2-\sqrt{2}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số là

A. 4.
B. 1.
C. 2.
D. 3.

Lời giải.

Xét $f'(x) = 0$ suy ra

$$x\left(x^2+2x\right)^3\left(x^2-\sqrt{2}\right)=0 \Leftrightarrow x^4(x+2)^3\left(x-\sqrt[4]{2}\right)\left(x-\sqrt[4]{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x+2=0 \\ x-\sqrt[4]{2}=0 \\ x+\sqrt[4]{2}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x=\sqrt[4]{2} \\ x=-\sqrt[4]{2}. \end{array}\right.$$

Xét dấu $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt[4]{2}$		0		$\sqrt[4]{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa bảng xét dấu suy ra hàm số có 3 cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Tập nghiệm S của bất phương trình $(x-1)\sqrt{x+1} \geq 0$ là

A. $S=[-1;+\infty)$.
B. $S=\{-1\}\cup(1;+\infty)$.
C. $S=\{-1\}\cup[1;+\infty)$.
D. $S=(1;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \quad (*)$.

Với điều kiện $(*)$ ta xét các trường hợp sau

- Nếu $x=-1$ thì bất phương trình trở thành $0 \geq 0$ nên $x=-1$ là nghiệm của bất phương trình.
- Nếu $x>-1$ thì $x+1>0$ nên $(x-1)\sqrt{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\{-1\}\cup[1;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Cho $f(x)=x^{2018}+1009x^2+2019x$. Giá trị của $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x+1)-f(1)}{\Delta x}$ bằng

A. 1009.
B. 1008.
C. 2018.
D. 2019.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x^{2018}-1009x^2+2019x$ trên $\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ do đó $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x+1)-f(1)}{\Delta x}=f'(1)$.

Mà $f'(x)=2018\cdot x^{2017}-2018\cdot x+2019$

nên $f'(1)=2018-2018+2019=2019$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Số giá trị nguyên m để phương trình $\sqrt{4m-4}\cdot\sin x\cdot\cos x+\sqrt{m-2}\cdot\cos 2x=\sqrt{3m-9}$ có nghiệm là

A. 7.
B. 6.
C. 5.
D. 4.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 4m-4\geq 0 \\ m-2\geq 0 \\ 3m-9\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\geq 1 \\ m\geq 2 \\ m\geq 3\end{cases} \Leftrightarrow m\geq 3 \quad (*)$.

Với điều kiện $(*)$ ta có

$$\begin{aligned} &\sqrt{4m-4}\cdot\sin x\cdot\cos x+\sqrt{m-2}\cdot\cos 2x=\sqrt{3m-9} \\ \Leftrightarrow\ &\sqrt{m-1}\cdot\sin 2x+\sqrt{m-2}\cdot\cos 2x=\sqrt{3m-9}\quad (1)\end{aligned}$$

Để phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

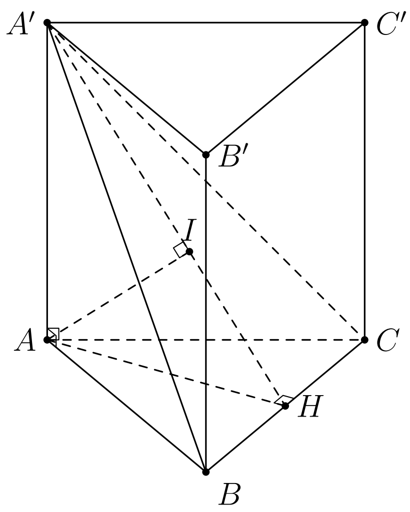
$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{m-1}\right)^2+\left(\sqrt{m-2}\right)^2\geq\left(\sqrt{3m-9}\right)^2 \\ \Leftrightarrow\ & m-1+m-2\geq 3m-9\Leftrightarrow m\leq 6.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 22. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của BC, do giả thiết $\triangle ABC$ đều nên $AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AH\perp BC\quad (1)$.

Do $AA'\perp(ABC)$ suy ra $AA'\perp BC\quad (2)$.

Từ (1), (2) ta suy ra $BC\perp(AA'H)$.

Trong mặt phẳng $(AA'H)$ kẻ $AI\perp A'H\quad (3)$.

Theo chứng minh trên $BC\perp(AA'H)$ nên $BC\perp AI\quad (4)$.

Từ (3), (4) suy ra $AI\perp(AA'H)$ do đó khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ là AI.

Xét $\triangle AA'H$ ta có $\dfrac{1}{AI^2}=\dfrac{1}{AA'^2}+\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{4}{3a^2}$

suy ra $AI^2=\dfrac{3a^2}{7}\Leftrightarrow AI=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

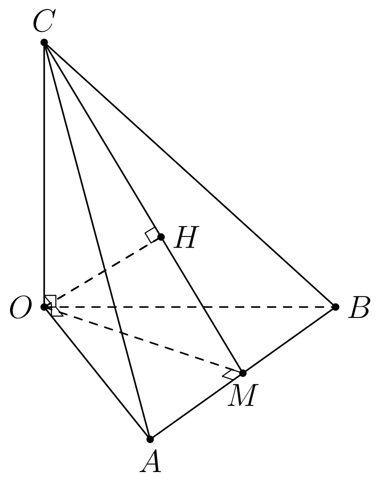
Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BA'C)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau $OA=OB=OC=\sqrt{3}$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng

A $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B** 1. **C** $\dfrac{1}{2}$. **D** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.



Do giả thiết $\begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{cases}$ suy ra $OC \perp (OAB)$ nên $OC \perp AB \quad (1)$.

Gọi M là trung điểm của AB, do giả thiết $\triangle OAB$ cân nên $OM \perp AB \quad (2)$.

Từ (1), (2) ta suy ra $AB \perp (OCM)$.

Trong mặt phẳng (OCM) kẻ $OH \perp CM \quad (3)$.

Theo chứng minh trên $AB \perp (OCM)$ nên $AB \perp OH \quad (4)$.

Từ (3), (4) suy ra $OH \perp (ABC)$ do đó khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) là OH.

Vì $\triangle OAB$ vuông cân đỉnh O nên $AB = OA\sqrt{2} = \sqrt{6}$.

Mà $OM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Xét $\triangle OCM$ ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OC^2} + \dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = 1$ suy ra $OH^2 = 1 \Leftrightarrow OH = 1$.

Vậy khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng 1.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A $V = \dfrac{4\sqrt{7}a^3}{3}$. **B** $V = 4\sqrt{7}a^3$. **C** $V = \dfrac{4\sqrt{7}a^3}{9}$. **D** $V = \dfrac{4a^3}{3}$.

Lời giải.

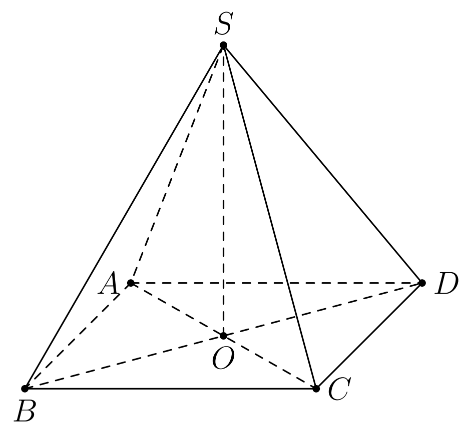
Gọi O là giao điểm của AC và BD. Khi đó $SO \perp (ABCD)$ suy ra $SO \perp OB$.

Xét $\triangle SOB$ ta có $SO^2 = SB^2 - OB^2$.

Mà $OB = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}a}{2} = \sqrt{2}a$

nên $SO^2 = (3a)^2 - \left(\sqrt{2}a\right)^2 = 7a^2$ suy ra $SO = a\sqrt{7}$.

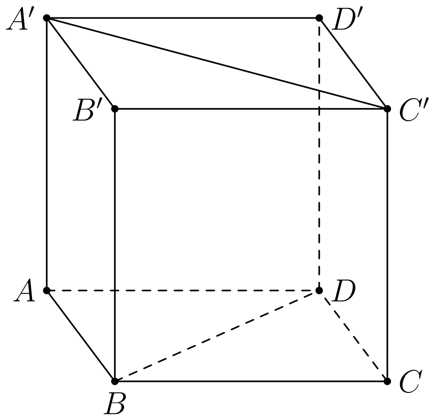
Khi đó $V = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{7} \cdot 4a^2 = \dfrac{4\sqrt{7}a^3}{3}$.



Chọn đáp án A □

Câu 25.

Cho hình hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a như hình vẽ bên. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng



A a. **B** $\sqrt{2}a$. **C** $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **D** $\sqrt{3}a$.

Lời giải.

Do giả thiết ta có $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$ nên

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(BD; A'C'\right) &= \mathrm{d}\left[(ABCD)\,; (A'B'C'D')\right] \\ &= \mathrm{d}\left(A; (A'B'C'D')\right) = AA' = a. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 26.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f(x) = -1$ là

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	
y	1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-1

A 1. **B** 2. **C** 4. **D** 3.

Lời giải.

Số nghiệm của phương trình $f(x) = -1$ tương ứng với số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = -1$. Dựa vào bảng biến thiên suy ra số giao điểm hai đồ thị là 2 điểm.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Giới hạn $\lim \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2}\right)$ bằng

A 1. **B** 0. **C** $\dfrac{1}{3}$. **D** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}\right) &= \lim \left(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}\right) \\ &= \lim \left(\frac{\frac{(1+n)\,n}{2}}{n^2}\right) = \lim \frac{1+n}{2n} \\ &= \frac{1}{2} \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 28. Đề thi THPT Quốc gia 2019 có 5 câu vận dụng cao, mỗi câu có 4 phương án lựa chọn A, B, C, D trong đó 5 câu đều có một phương án đúng là A. Một thí sinh chọn ngẫu nhiên một phương án ở mỗi câu. Tính xác suất để học sinh đó không đúng câu nào.

Ⓐ $\frac{5}{4^5}$. Ⓑ $\frac{20}{4^5}$. Ⓒ $\frac{1024}{4^5}$. **D** $\frac{243}{4^5}$.

Lời giải.

Gọi A là biến cố để học sinh không làm đúng câu nào.

Do mỗi câu có 4 phương án lựa chọn nên số cách chọn phương án trả lời cho 5 câu là $4{\cdot}4{\cdot}4{\cdot}4{\cdot}4 = 4^5$.

Vì mỗi câu có 3 phương án trả lời sai nên số cách chọn để học sinh trả lời sai cả 5 câu hỏi là $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$.

Khi đó $P(A) = \frac{3^5}{4^5} = \frac{243}{4^5}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 29. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 12$ trên đoạn $[-3; 1]$.

A 66. Ⓑ 72. Ⓒ 10. Ⓓ 12.

Lời giải.

Xét hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 12$ trên đoạn $[-3; 1]$.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x$.

Xét $y' = 0$ suy ra $-3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

x	-3		0		1
y'		$+$	0	$-$	
y	66	$\searrow$	12	$\nearrow$	14

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{x \in [-3;1]} y = 66$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 30. Số nghiệm $x \in (0; 12\pi)$ thỏa mãn phương trình $\cos 2x + \cos^2 x - \sin^2 x = 2$ là

Ⓐ 10. Ⓑ 1. Ⓒ 12. **D** 11.

Lời giải.

Ta có

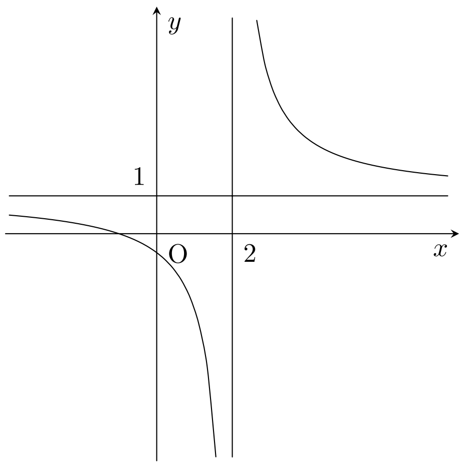
$$\begin{aligned} & \cos 2x + \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \\ \Leftrightarrow \quad & 2\cos 2x = 2 \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Để thỏa mãn bài toán khi $0 < k\pi < 12\pi \Leftrightarrow 0 < k < 12$ mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 1, 2 \ldots, 11$ suy ra có 11 nghiệm $x \in (0; 12\pi)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 31.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+1}{bx-2}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính $T = a + b$.



A $T = 2$. **B** $T = 0$. **C** $T = -1$. **D** $T = 3$.

Lời giải.

Do giả thiết suy ra $a \neq 0$ và $b \neq 0$.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{2}{b}\right\}$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{b}\right)^+} \dfrac{ax+1}{bx-2} = \infty$ suy ra $x = \dfrac{2}{b}$ là tiệm cận đứng. Do đó $\dfrac{2}{b} = 2 \Leftrightarrow b = 1$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ax+1}{bx-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a+\dfrac{1}{x}}{b-\dfrac{2}{x}} = \dfrac{a}{b}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{ax+1}{bx-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a+\dfrac{1}{x}}{b-\dfrac{2}{x}} = \dfrac{a}{b}$.

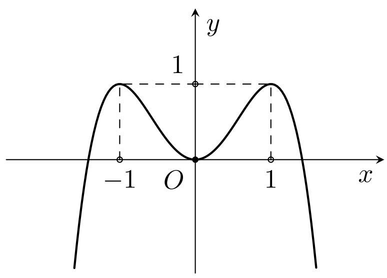
Vậy $y = \dfrac{a}{b}$ là tiệm cận ngang. Khi đó $\dfrac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b$ nên $a = 1$.

Do đó $T = 1 + 1 = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 32.

Đường con trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A $y = -x^2 + 2x$. **B** $y = -x^3 + 3x$.

C $y = -x^4 + 2x^2$. **D** $y = x^4 - 2x^2$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị suy ra hàm số là hàm bậc 4 và có hệ số bậc 4 là âm. Nên hàm số thỏa mãn là $y = -x^4 + 2x^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = -x^3 + x^2 + 5x - 5$ là

A $(-1; -8)$. **B** $(0; -5)$. **C** $\left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{40}{27}\right)$. **D** $(1; 0)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -3x^2 + 2x + 5$.

Xét $y' = 0$ suy ra $-3x^2 + 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{5}{3}. \end{array}\right.$

Xét dấu y'

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu y' suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ suy ra $y_{\text{CT}} = -8$.
Vậy tọa độ điểm cực tiểu là $(-1; -8)$.
Chọn đáp án A □

Câu 34. Phương trình nào dưới đây tương đương với phương trình $x^2 - 3x = 0$?

(A) $x^2 + \sqrt{2x-1} = 3x + \sqrt{2x-1}$.
(B) $x^2\sqrt{x-3} = 3x\sqrt{x-3}$.
C $x^2 + \sqrt[3]{x-3} = 3x + \sqrt[3]{x-3}$.
(D) $x^2 - x + \dfrac{1}{x} = 2x + \dfrac{1}{x}$.

Lời giải.

Ta có $x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; 3\}$.
Trong các trường phương án thì phương trình $x^2 + \sqrt[3]{x-3} = 3x + \sqrt[3]{x-3}$ có cùng tập nghiệm.
Chọn đáp án C □

Câu 35. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x+3}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

(A) Hàm số xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
(B) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
(C) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.
D Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
Ta có $y' = \dfrac{2(x+3) - (2x-3)}{(x+3)^2} = \dfrac{9}{(x+3)^2}$.
Dễ thấy $y' > 0,\ \forall x \neq -3$.
Do đó hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.
Chọn đáp án D □

Câu 36. Gọi S là tập các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} + (m^2 + 2018m - 1) \cdot \dfrac{x^2}{2} - 2019m$ tăng trên $(-\infty; -2018)$. Tổng tất cả các giá trị của tập hợp S là

A -2039189.
(B) -2039190.
(C) -2019.
(D) -2018.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Ta có $y' = x^2 + (m^2 + 2018m - 1)x$.
Để hàm số tăng trên khoảng $(-\infty; -2018)$ khi và chỉ khi

$$y' \geq 0,\ \forall x \in (-\infty; -2018)$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad x^2+\left(m^2+2018m-1\right)x\ge 0,\ \forall x\in(-\infty;-2018)\\&\Leftrightarrow\quad x\le -\left(m^2+2018m-1\right),\ \forall x\in(-\infty;-2018).\end{aligned}$$

Suy ra $-(m^2+2018m-1)\ge -2018 \Leftrightarrow -2019\le m\le 1$.

Vậy tổng số các phần tử của tập hợp S là

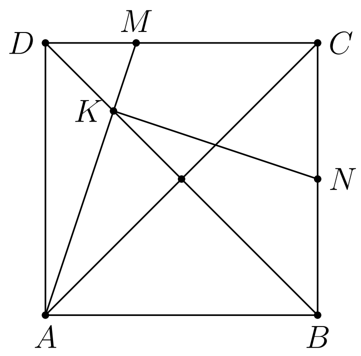
$-2019-2018-2017-\cdots-1+0+1=\dfrac{(-2019+1)\,2021}{2}=-2039189$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình vuông $ABCD$. Điểm M thuộc cạnh CD sao cho $\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{DM}$, $N(0;2019)$ là trung điểm của BC, K là giao điểm của hai đường thẳng AM và BD. Biết đường thẳng AM có phương trình $x-10y+2018=0$. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng NK bằng

A. 2019. B. $2019\sqrt{101}$. C. $\dfrac{2018}{11}$. D. $\dfrac{2019\sqrt{101}}{101}$.

Lời giải.



Gọi cạnh hình vuông bằng a. Do $\triangle ABK \backsim \triangle MDK$

nên $\dfrac{MD}{AB}=\dfrac{DK}{KB}=\dfrac{1}{3}$ suy ra $\dfrac{DK}{DB}=\dfrac{1}{4}$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ (1).

Mặt khác

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NK}&=\overrightarrow{BK}-\overrightarrow{BN}\\&=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\&=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\quad(2).\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NK}=\dfrac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{4}\cdot\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DC}=0$ suy ra $AM\perp NK$.

Do đó NK có phương trình tổng quát là $10x+y-2019=0$.

Khi đó $\mathrm{d}(O,NK)=\dfrac{|-2019|}{\sqrt{10^2+1^2}}=\dfrac{2019\sqrt{101}}{101}$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số $y=|3x^4-4x^3-12x^2+m|$ có 7 điểm cực trị?

A. 4. B. 6. C. 3. D. 5.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=12x^3-12x^2-24x$.

Xét $f'(x)=0$ suy ra

$$\begin{aligned}12x^3-12x^2-24x=0 \quad&\Leftrightarrow\quad 12x\left(x^2-x-2\right)=0\\&\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=2.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Xét dấu $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$ có ba điểm cực trị. Do đó để hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $f(x) = 0$ có tổng số nghiệm bội lẻ là 4 suy ra $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Mà $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = -m$. Khi đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0	$\searrow$	-32	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên để phương trình có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-5 < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 5$. Do đó các giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán là $\{1; 2; 3; 4\}$.

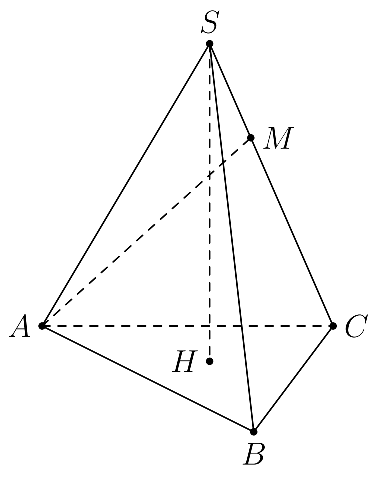
Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA = 9a$, $AB = 6a$. Gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SM = \frac{1}{3}SC$. Côsin góc giữa hai đường thẳng SB và AM bằng

A $\frac{7}{2\sqrt{48}}$. **B** $\frac{1}{2}$. **C** $\frac{\sqrt{19}}{7}$. **D** $\frac{14}{3\sqrt{48}}$.

Lời giải.

Ta có



$$\begin{aligned}\cos\widehat{ASB} &= \frac{SA^2 + SB^2 - AB^2}{2 \cdot SA \cdot SB}\\ &= \frac{(9a)^2 + (9a)^2 - (6a)^2}{2 \cdot 9a \cdot 9a} = \frac{7}{9}.\end{aligned}$$

Do giả thiết suy ra $\cos\widehat{CSB} = \cos\widehat{ASC} = \frac{7}{9}$.

Xét $\triangle ASM$ theo định lý hàm số côsin ta có

$$\begin{aligned}AM^2 &= SA^2 + SM^2 - 2 \cdot SA \cdot SM \cdot \cos\widehat{ASC}\\ &= (9a)^2 + (3a)^2 - 2 \cdot 9a \cdot 3a \cdot \frac{7}{9} = 81a^2 + 9a^2 - 42a^2 = 48a^2.\end{aligned}$$

suy ra $AM = 4\sqrt{3}a$.

Mà $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}$.

Do đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{SB} &= \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}\right) \cdot \overrightarrow{SB}\\ &= \frac{1}{3} \cdot SC \cdot SB \cdot \cos\widehat{BSC} - SA \cdot SB \cdot \cos\widehat{ASB}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 9a \cdot 9a \cdot \frac{7}{9} - 9a \cdot 9a \cdot \frac{7}{9} = 21a^2 - 63a^2 = -42a^2$$

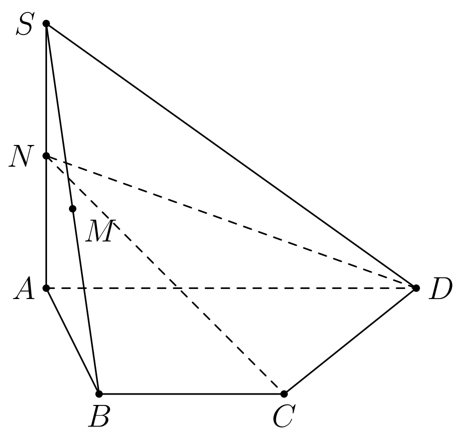
nên $\cos(AM; SB) = \dfrac{|AM \cdot SB|}{AM \cdot SB} = \dfrac{42a^2}{4\sqrt{3}a \cdot 9a} = \dfrac{14}{3\sqrt{48}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, biết $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB, SA. Tính khoảng cách từ M đến (NCD) theo a

(A) $\dfrac{\sqrt{66}a}{11}$. (B) $\dfrac{\sqrt{66}a}{22}$. (C) $2\sqrt{66}a$. (D) $\dfrac{\sqrt{66}a}{44}$.

Lời giải.



Do giả thiết $SA \perp (ABCD)$ suy ra $SA \perp AD$, $SA \perp AB$.

Ta chọn hệ tọa độ $Oxyz$ sao cho $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;2a;0)$, $S\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$.

Khi đó tọa độ điểm $C(a;a;0)$, $M\left(\dfrac{a}{2};0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ và $N\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

Nên $\overrightarrow{NC} = \left(a;a;-\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ và $\overrightarrow{ND} = \left(0;2a;-\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ suy ra $\left[\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{ND}\right] = \left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2};\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2};2a^2\right)$.

Gọi $\vec{n}$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (NCD) ta chọn $\vec{n} = \left(\sqrt{3};\sqrt{3};4\right)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (NCD) là $\sqrt{3}x + \sqrt{3}y + 4z - 2\sqrt{3}a = 0$.

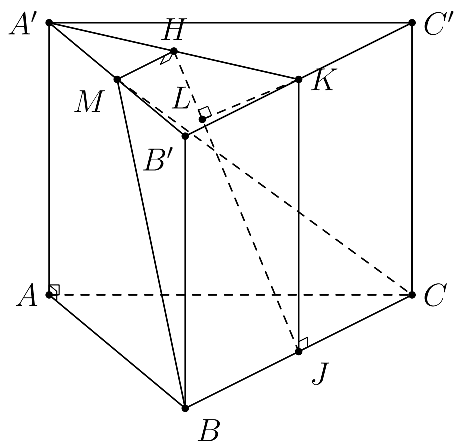
Nên $\mathrm{d}(M,(NCD)) = \dfrac{\left|\dfrac{a}{2}\cdot\sqrt{3} + 0 + 4\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3}a\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 4^2}} = \dfrac{\sqrt{66}a}{44}$.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, $AB = 2a$, M là trung điểm $A'B'$ và khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng (MBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

(A) $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$. (C) $\dfrac{3\sqrt{2}a^3}{2}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$.

Lời giải.



Gọi J, K, H lần lượt là trung điểm của BC, $B'C'$, KA' do $MH \parallel B'C'$ nên $MH \parallel BC$. Do đó mặt phẳng (MBC) trùng với mặt phẳng $(MHJB)$.

Khi đó $\mathrm{d}\left(C', (MBC)\right) = \mathrm{d}\left(K, (MBC)\right)$.

Do giả thiết $\begin{cases} MH \perp A'K \\ MH \perp KJ \end{cases} \Rightarrow MH \perp (JKH)$

nên $(JKH) \perp (MHJB)$.

Gọi L là hình chiếu vuông góc của K trên JH. Theo chứng minh trên suy ra $KL \perp (BMHJ)$.

Do đó $\mathrm{d}\left(K, (MBC)\right) = KL$ hay $\mathrm{d}\left(C', (MBC)\right) = KL$.

Xét $\triangle JKH$ vuông ở K ta có $KL = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $KH = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

Khi đó $\dfrac{1}{LK^2} = \dfrac{1}{KH^2} + \dfrac{1}{KJ^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{KJ^2} = \dfrac{1}{\frac{2a^2}{4}} - \dfrac{1}{\frac{3a^2}{4}} \Leftrightarrow KL^2 = \dfrac{3a^2}{2}$ suy ra $KL = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Do đó thể tích $V_{ABC.A'B'C'} = KJ \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a^2\sqrt{3} = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m (biết $m \geq -2019$) để hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x^2 + x - \sqrt[3]{y} = 1 - 2m \\ 2x^3 - x^2\sqrt[3]{y} - 2x^2 + x\sqrt[3]{y} = m \end{cases} \quad (I)$$

có nghiệm thực?

A. 2021. B. 2019. C. 2020. D. 2018.

Lời giải.

Đặt $z = \sqrt[3]{y}$ khi đó hệ phương trình (I) trở thành

$$\begin{cases} x^2 + x - z = 1 - 2m \\ 2x^3 - x^2z - 2x^2 + xz = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 2x - z = 1 - 2m \\ 2x\left(x^2 - x\right) - z\left(x^2 - x\right) = m \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 2x - z = 1 - 2m \\ \left(x^2 - x\right)(2x - z) = m \end{cases} \quad (II).$$

Đặt $\begin{cases} u = x^2 - x \\ v = 2x - z \end{cases}$ điều kiện $u \geq -\dfrac{1}{4}$.

Hệ phương trình (II) trở thành $\begin{cases} u + v = 1 - 2m \\ uv = m. \end{cases}$

Khi đó u, v là nghiệm của phương trình $X^2 - (1 - 2m)X + m = 0 \quad (*)$.

Để thỏa mãn bài toán khi $(*)$ có hai nghiệm trong đó có ít nhất một nghiệm thuộc $\left[-\dfrac{1}{4}; +\infty\right)$.

Mà $(*) \Leftrightarrow X - X^2 = (2X + 1)m$.

Dễ thấy $X = -\dfrac{1}{2}$ không là nghiệm của phương trình $(*)$ nên $(*) \Leftrightarrow m = \dfrac{X - X^2}{2X + 1}$.

Xét hàm số $g(X)=\dfrac{X-X^2}{2X+1}$ trên $\left[-\dfrac{1}{4};+\infty\right)$.

Ta có $g'(X)=\dfrac{(1-2X)(2X+1)-(X-X^2)}{(2X+1)^2}=\dfrac{1-X-3X^2}{(2X+1)^2}$.

Xét $g'(X)=0$ suy ra $1-X-3X^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \\ X=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

X	$-\frac{1}{4}$		$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$		$+\infty$
$g'(X)$		$+$	0	$-$	
$g(X)$	$-\frac{5}{8}$	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{13}}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Chọn đáp án C □

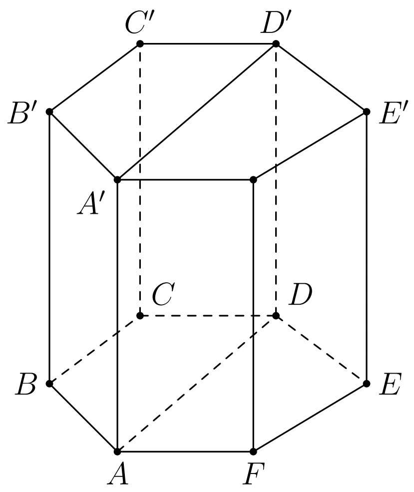
Câu 43. Cho lăng trụ lục giác đều $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$. Hỏi có bao nhiêu hình chóp tứ giác có 5 đỉnh là đỉnh của lăng trụ?

A 492. **B** 200. **C** 360. **D** 510.

Lời giải.

Do giả thiết có các trường hợp sau

- Trường hợp 1. Có 3 bộ, mỗi bộ gồm 6 đường thẳng song song với nhau
  Đa giác đáy của hình chóp gồm 1 đường thẳng ở nhóm 3 đường thẳng song song trên $(ABCDEF)$ và có 1 đường thẳng ở nhóm 3 đường thẳng song song trên $(A'B'C'D'E'F')$.
  Suy ra số đa giác đáy là $\mathrm{C}_3^1\cdot\mathrm{C}_3^1$. Suy ra số hình chóp $3\cdot\mathrm{C}_3^1\cdot 8\cdot\mathrm{C}_3^1=216$.
- Trường hợp 2. Đa giác đáy của hình chóp là tứ giác nằm trên một mặt đáy của hình lăng trụ. Số đa giác đáy là $2\cdot\mathrm{C}_6^2$. Suy ra số hình chóp $2\cdot 6\cdot\mathrm{C}_6^4=180$.



- Trường hợp 3. Có 3 bộ gồm 4 đường thẳng song song. Đa giác đáy của hình chóp gồm 1 đường thẳng có ở nhóm 2 đường chéo song song trên $(ABCDEF)$ và 1 đường thẳng ở nhóm 2 đường chéo song song trên $(A'B'C'D'E'F')$.
  Số đa giác đáy là $\mathrm{C}_2^1\cdot\mathrm{C}_2^1$. Suy ra số hình chóp $3\cdot\mathrm{C}_2^1\cdot 8\cdot\mathrm{C}_2^1=96$.

Vậy số hình chóp cần tìm là $216+180+96=492$.

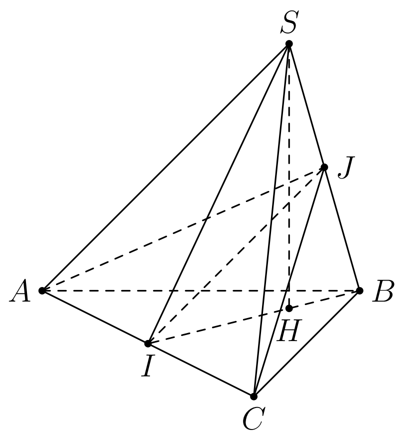
Chọn đáp án A □

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SC = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $SB = a\sqrt{2}$, $AB = BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $AC = a$. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC).

A 90°. **B** 45°. **C** 30°. **D** 60°.

Lời giải.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, SB, H là hình chiếu vuông góc của điểm S trên IB.



Do giả thiết $SA = SC$ nên $\triangle SAC$ cân đỉnh S suy ra $SI \perp AC$.

Xét $\triangle SAB$ và $\triangle SBC$ ta có $\begin{cases} SA = SC \\ BA = BC \\ SB \text{ chung.} \end{cases}$

Suy ra $\triangle SAB = \triangle SCB$ nên $JA = JC$. Khi đó $\triangle JAC$ cân đỉnh J.

Mà I là trung điểm của AC nên $IJ \perp AC$ (1).

Mặt khác $\triangle SAC$ cân đỉnh S nên $SI \perp AC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AC \perp (SIB)$ nên $AC \perp SH$.

Do đó $\begin{cases} SH \perp AC \\ SH \perp BI \end{cases}$ suy ra $SH \perp (ABC)$. Nên $\widehat{(SB,(ABC))} = \widehat{SBI}$.

Xét $\triangle SIA$ theo định lý Py-ta-go $SA^2 = SI^2 + IA^2$ suy ra

$SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Tương tự trong $\triangle IAB$ ta có $IB = \sqrt{AB^2 - AI^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a}{2}$.

Khi đó, xét $\triangle SIB$ theo định lý hàm số côsin ta có

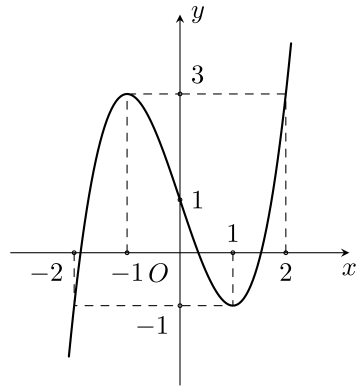
$$\begin{aligned} \cos\widehat{SBI} &= \dfrac{SB^2 + IB^2 - SI^2}{2\cdot SB\cdot IB} \\ &= \dfrac{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2\cdot a\sqrt{2}\cdot\dfrac{a}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Vì $0 < \widehat{SBI} < 90^\circ$ nên $\cos\widehat{SBI} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \widehat{SBI} = 45^\circ$.

Chọn đáp án B □

Câu 45.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x^2 - 2x + 1) + 2018$ giảm trên khoảng



A $(-\infty; 1)$. **B** $(2; +\infty)$. **C** $(0; 1)$. **D** $(1; 2)$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x^2 - 2x + 1) + 2018$ khi đó $y' = 2(x-1) f'(x^2 - 2x + 1)$.

Để hàm số nghịch biến khi $y' \le 0 \Leftrightarrow 2(x-1) f'(x^2 - 2x + 1) \le 0$,

ở đó dấu đẳng thức xảy ra tại một số hữu hạn điểm.

Nếu $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ suy ra

$$\begin{aligned} f'\left(x^2 - 2x + 1\right) \le 0 &\Leftrightarrow -1 \le x^2 - 2x + 1 \le 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 2 \ge 0 \\ x^2 - 2x \le 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x \le 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le 2. \end{aligned}$$

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Cho hàm số $y = \dfrac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a; 1)$. Biết $a = \dfrac{m}{n}$ (với mọi $m, n \in \mathbb{N}$ và $\dfrac{m}{n}$ tối giản) là giá trị để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A. Khi đó giá trị $m + n$ là

A 2. **B** 7. **C** 5. **D** 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \dfrac{-(x-1) - (-x+2)}{(x-1)^2} = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

Giả sử $M_0(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến d đi qua $A(a; 1)$ với đồ thị hàm số.

Khi đó phương trình tiếp tuyến d là $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$.

Do $y_0 = \dfrac{-x_0 + 2}{x_0 - 1}$ và $x_0 \ne 1$ nên phương trình d là

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \frac{-x_0+2}{x_0-1} \\ &= -\frac{1}{(x_0-1)^2}x + \frac{-x_0^2 + 4x_0 - 2}{(x_0-1)^2} \end{aligned}$$

Do $A \in d$ nên

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{(x_0-1)^2}a + \frac{-x_0^2 + 4x_0 - 2}{(x_0-1)^2} = 1 \\ \Leftrightarrow\ & -a - x_0^2 + 4x_0 - 2 = (x_0 - 1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad -a - x_0^2 + 4x_0 - 2 = x_0^2 - 2x_0 + 1\\&\Leftrightarrow\quad 2x_0^2 - 6x_0 + a + 3 = 0 \quad (*).\end{aligned}$$

Để thỏa mãn bài toán khi và chỉ khi $(*)$ có nghiệm kép khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta' = 0\\ 2 - 6 + a + 3 \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9 - 2(a+3) = 0\\ a - 1 \neq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a = \dfrac{3}{2}\\ a \neq 1\end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}.$$

Để thỏa mãn bài toán khi và chỉ khi $(*)$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta' > 0\\ 2 - 6 + a + 3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9 - 2(a+3) > 0\\ a - 1 = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a < \dfrac{3}{2}\\ a \neq 1\end{cases} \Leftrightarrow a = 1.$$

Chọn đáp án C □

Câu 47.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2018}{f(x)}$ là

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A. 1. B. 2. **C. 3.** D. 4.

Lời giải.

Do hàm số $y = \dfrac{2018}{f(x)}$ suy ra số tiệm cận đứng của hàm số sẽ tương ứng với số nghiệm phân biệt của phương trình $f(x) = 0 \quad (*)$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ suy ra số nghiệm phân biệt của phương trình $(*)$ là 3. Nên số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2018}{f(x)}$ là 3.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 7; 9\}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên 8 chữ số khác nhau lập từ A, biết các chữ số chẵn không đứng cạnh nhau.

A. 7200. B. 15000. C. 10200. **D. 12000.**

Lời giải.

Giả sử số có 8 chữ số có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$.

Do giả thiết tập hợp A có 5 số lẻ $\{1; 3; 5; 7; 9\}$ và 3 số chẵn $\{0; 2; 4\}$.

Ta đặt 5 vị trí số lẻ trên vào ô có ký hiệu $(*)$ và giãn ra đều 1 vị trí xen kẽ và kể hai đầu mút ngoài cùng là 6 vị trí xem kẽ ký hiệu là $(?)$ như sau

?	$*$	?	$*$	?	$*$	?	$*$	?	$*$	?

Các vị trí (?) là nơi ta đặt 3 chữ số chẵn vào. Khi đó

- Ta đi tìm các số thỏa mãn bài toán kể các số mà chữ số đầu có chữ số 0 ta có số cách sắp 3 chữ số chẵn là A_6^3. Số các sắp xếp 5 chữ số lẻ là 5!. Do đó số thỏa mãn yêu cầu là $5! \cdot A_6^3$.

- Ta đi tìm số các số thỏa mãn bài toán khi chữ số 0 đứng đầu ta có số cách sắp 2 chữ số chẵn là A_6^2. Số các sắp xếp 5 chữ số lẻ là 5!. Do đó số thỏa mãn yêu cầu là $5! \cdot A_6^2$.

Do đó số các số thỏa mãn bài toán là $5! \cdot A_6^3 - 5! \cdot A_6^2 = 1200$ (số).

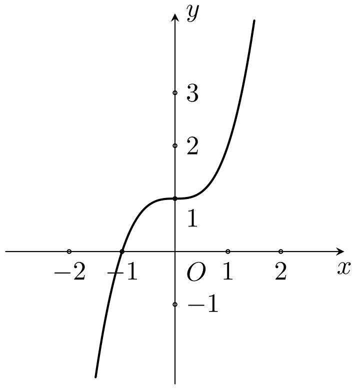
Chọn đáp án D □

Câu 49.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình

$$f\left(16\cos^2 x + 6\sin 2x - 8\right) = f\left(m(m+1)\right)$$

có nghiệm $x \in \mathbb{R}$?



(A) 10. (B) 4. (C) 8. D 6.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$\begin{aligned} & f\left(16\cos^2 x + 6\sin 2x - 8\right) = f\left(m(m+1)\right) \\ \Leftrightarrow\ & 16\cos^2 x + 6\sin 2x - 8 = m(m+1) \\ \Leftrightarrow\ & 8(\cos 2x + 1) + 6\sin 2x - 8 = m(m+1) \\ \Leftrightarrow\ & 8\cos 2x + 6\sin 2x = m(m+1). \end{aligned}$$

Để phương trình có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & m^2(m+1)^2 \le 8^2 + 6^2 \Leftrightarrow m^2(m+1)^2 \le 100 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} m(m+1) \le 10 \\ m(m+1) \ge -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 10 \le 0 \\ m^2 + m + 10 \ge 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & m^2 + m - 10 \le 0 \Leftrightarrow -\frac{1+\sqrt{41}}{2} \le m \le \frac{-1+\sqrt{41}}{2}. \end{aligned}$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ suy ra $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$. Vậy có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình

$$4\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = m^2 + \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x.$$

có nghiệm?

(A) 7. (B) 1. (C) 3. D 5.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& 4\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=m^2+\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & 2\left[\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\frac{\pi}{2}\right]=m^2+\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+2=m^2+\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & \cos 2x=\frac{m^2-2}{2}.
\end{aligned}$$

Để phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\left|\frac{m^2-2}{2}\right|\le 1\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{m^2-2}{2}\ge -1\\ \dfrac{m^2-2}{2}\le 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}m^2\ge 0\\ m^2\le 4\end{cases}\Leftrightarrow -2\le m\le 2.$$

Do $m\in\mathbb{Z}$ suy ra $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$. Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. A	3. B	4. D	5. A	6. D	7. C	8. C	9. C	10. B
11. C	12. D	13. C	14. B	15. C	16. A	17. B	18. D	19. C	20. D
21. D	22. B	23. B	24. A	25. A	26. A	27. D	28. D	29. A	30. D
31. A	32. C	33. A	34. C	35. D	36. A	37. D	38. A	39. D	40. D
41. C	42. C	43. A	44. B	45. D	46. C	47. C	48. D	49. D	50. D

17 ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN BẮC NINH, BẮC NINH – LẦN 3 (2019)

Câu 1. Hình hộp chữ nhật đứng đáy là hình thoi có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

(A) 2. (B) 1. **C** 3. (D) 4.

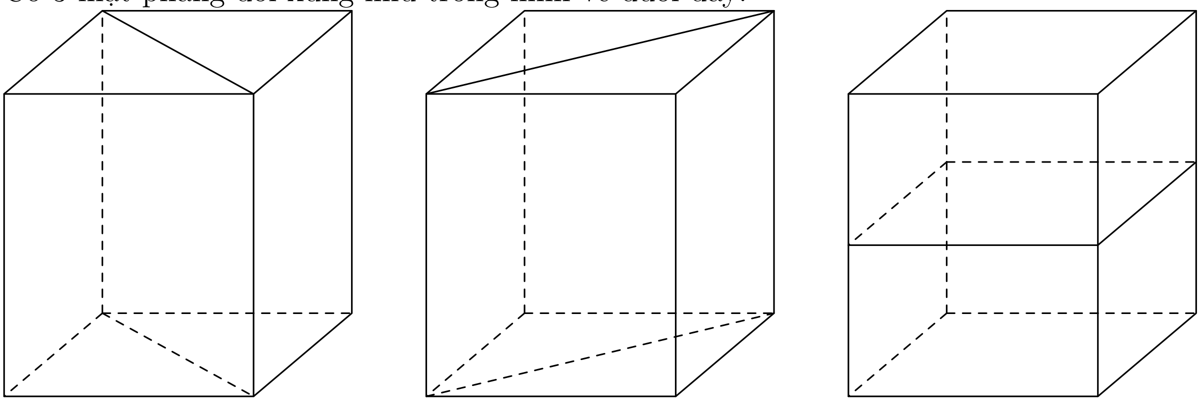
Lời giải.

Phương pháp:

Dựa vào lý thuyết các khối đa diện đều.

Cách giải:

Có 3 mặt phẳng đối xứng như trong hình vẽ dưới đây:



Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào có giá trị bằng $+\infty$?

(A) $\lim \dfrac{2n^3+3}{1-2n^2}$. **B** $\lim\left(n^3-4n^2+1\right)$.

(C) $\lim \dfrac{3^{n+1}+2n}{5+3^n}$. (D) $\lim \dfrac{3n^2+n}{4n^2-5}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng MTCT tính giới hạn ở từng đáp án và kết luận.

Cách giải:

Phương án A: $\lim \dfrac{2n^3+3}{1-2n^2}=-\infty$.

Phương án B: $\lim\left(n^3-4n^2+1\right)=+\infty$.

Phương án C: $\lim \dfrac{3^{n+1}+2n}{5+3^n}=3$.

Phương án D: $\lim \dfrac{3n^2+n}{4n^2-5}=\dfrac{3}{4}$.

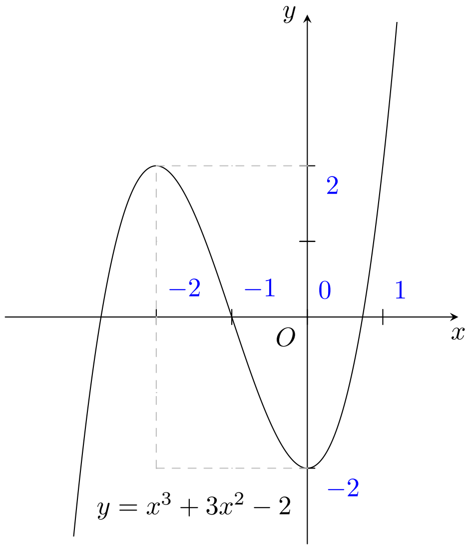
Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3+3x^2-2=m$ có hai nghiệm phân biệt.

(A) $m\in(-\infty;-2]$. (B) $m\notin[-2;2]$. (C) $m\in[2;+\infty)$. **D** $m\in\{-2;2\}$.

Lời giải.

Phương pháp:
+) Số nghiệm của phương trình $f(x) = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m$.
+) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$ sau đó suy ra giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.



Cách giải:
Số nghiệm của phương trình $x^3 + 3x^2 - 2 = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ và đường thẳng $y = m$.

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$. Ta có đồ thị hàm số như hình vẽ:

Quan sát đồ thị hàm số ta có: đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -2 \end{array}\right.$.

Chú ý khi giải: Để làm bài nhanh hơn, các em có thể vẽ BTT thay cho đồ thị hàm số.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Trên đồ thị (C): $y = \dfrac{x+1}{x+2}$ có bao nhiêu điểm M mà tiếp tuyến với (C) tại M song song với đường thẳng d: $x + y = 1$?

A 0. B 4. C 3. D 2.

Lời giải.

Phương pháp:
Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = x_0$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ song song với đường thẳng $y = kx + b$ khi và chỉ khi $f'(x_0) = k$
(Lưu ý: Thử lại để loại trường hợp trùng).

Cách giải:
TXĐ: $D = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$. Ta có: $y' = \dfrac{2.1 - 1.1}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{(x+2)^2}$

Gọi $M\left(x_0; \dfrac{x_0+1}{x_0+2}\right) \in (C)$

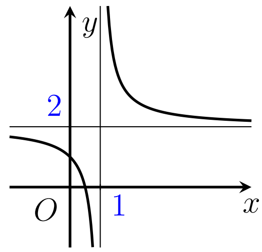
Ta có phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x = x_0$ là:
$y' = \dfrac{1}{(x_0+2)^2}(x - x_0) + \dfrac{x_0+1}{x_0+2}\ (d')$.

Để $(d')//(d) : x + y = 1 \Leftrightarrow y = -x - 1 \Rightarrow \dfrac{1}{(x_0+2)^2} = -1$ (vô nghiệm) $\Rightarrow$ Không có điểm M nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chú ý: Phải đưa phương trình đường thẳng d về dạng $y = kx + b$ và xác định hệ số góc của đường thẳng d cho chính xác, tránh sai lầm khi cho hệ số góc của đường thẳng d trong bài toán này bằng 1.

Chọn đáp án A □

Câu 5.
Xác định các hệ số a, b, c để đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax-1}{bx+c}$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên:



(A) $a = 2, b = 2, c = -1$.
(B) $a = 2, b = -1, c = 1$.
(C) $a = 2, b = 1, c = 1$.
(D) $a = 2, b = 1, c = -1$.

Lời giải.
Phương pháp:
Dựa vào đồ thị hàm số để nhận xét và đưa ra công thức đúng về đồ thị hàm số, từ đó suy ra các giá trị a, b, c.
Cách giải:
Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đồ thị hàm số có TCN là: $y = 2 \Rightarrow y = \dfrac{a}{b} = 2 \Rightarrow$ loại đáp án A, B. Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 1) \Rightarrow -\dfrac{1}{c} = 1 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow$ chọn D.
Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của x để $f\left(\dfrac{1}{x}\right) < f(1)$.

(A) $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$.
(B) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.
(C) $(-\infty; 1)$.
(D) $(0; 1)$.

Lời giải.
Phương pháp:
Hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) > 0, \forall x \in R$ thì đồng biến trên R.
Sử dụng khái niệm hàm số đồng biến, với $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
Cách giải: Hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) > 0 \forall x \in R$ thì đồng biến trên R.
Khi đó ta có $f\left(\dfrac{1}{x}\right) < f(1) \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < 0 \end{array}\right.$
Vậy $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.
Chú ý: Khi giải bất phương trình $\dfrac{1}{x} < 1$ nhiều HS có cách giải sai như nhau $\dfrac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow x < 1$ và chọn đáp án C.
Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$có đạo hàm $y' = x^2(x-2)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên R.
(B) Hàm số đồng biến trên $(0; 2)$.
(C) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.
(D) Hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Lời giải.
Phương pháp: Hàm số đồng biến trên $(a; b) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (a; b)$.
Hàm số nghịch biến trên$(a; b) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (a; b)$.
Giải phương trình $y' = 0$ và lập BBT, từ đó chọn đáp án đúng.

Cách giải: Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow x^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào BBT ta thấy hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$ và đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$ và biểu thức $20u_1 - 10u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng thứ bảy của cấp số nhân (u_n).

A 2000000. B 136250. C 39062. D 31250.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng công thức SHTQ của cấp số nhân $u_n = u_1.q^{n-1}$.

Cách giải: Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho ta có:

$$20u_1 - 10u_2 + u_3 = 20u_1 - 10u_1q + u_1q^2 = 40 - 20q + 2q^2 = 2(q^2 - 10q + 25) - 10$$
$$= 2(q-5)^2 - 10 \geq -10$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow q = 5$.

Khi đó số hạng thứ sáu của cấp số nhân trên là $u_7 = u_1q^6 = 2.5^6 = 31250$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2; 1; -3)$ đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q)\colon x + y + 3z = 0$, $(R)\colon 2x - y + z = 0$ là:

A $4x + 5y - 3z + 22 = 0$. B $4x - 5y - 3z - 12 = 0$.

C $2x + y - 3z - 14 = 0$. D $4x + 5y - 3z - 22 = 0$.

Lời giải.

Phương pháp: Mặt phẳng (P) vuông góc với (Q), $(R) \Rightarrow \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_Q}, \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_R} \Rightarrow \overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{n_Q}, \overrightarrow{n_R}]$

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$ là:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Cách giải: Mặt phẳng (P) vuông góc với (Q), (R) $\Rightarrow \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_Q}, \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_R} \Rightarrow \overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{n_Q}, \overrightarrow{n_R}]$

Ta có: $\overrightarrow{n_Q} = (1; 1; 3), \overrightarrow{n_R} = (2; -1; 1) \Rightarrow \overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{n_Q}, \overrightarrow{n_R}] = (4; 5; -3)$

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $B(2; 1; -3)$ và có VTPT $\vec{n} = (4; 5; -3)$ là:

$4(x-2) + 5(y-1) - 3(z+3) = 0 \Leftrightarrow 4x + 5y - 3z - 22 = 0$

Chọn đáp án C □

Câu 10. Đạo hàm của hàm số $y = \ln(5 - 3x^2)$ là

A $\dfrac{6}{3x^2 - 5}$. B $\dfrac{2x}{5 - 3x^2}$. C $\dfrac{6x}{3x^2 - 5}$. D $\dfrac{-6x}{3x^2 - 5}$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng công thức tính đạo hàm $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

Cách giải: $[\ln(5 - 3x^2)]' = \dfrac{-6x}{5 - 3x^2} = \dfrac{6x}{3x^2 - 5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Đặt $a = \log_2 5$ và $b = \log_3 5$. Biểu diễn đúng $\log_6 5$ của theo a, b là

(A) $\dfrac{1}{a+b}$. (B) $a+b$. **C** $\dfrac{ab}{a+b}$. (D) $\dfrac{a+b}{ab}$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng các công thức: $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}; \log_a b + \log_a c = \log_a bc\,(0 < a, b \neq 1; c > 0)$.

Cách giải: Ta có:

$\log_5 2 = \dfrac{1}{\log_2 5} = \dfrac{1}{a}$.

$\log_5 3 = \dfrac{1}{\log_3 5} = \dfrac{1}{b}$.

$\log_6 5 = \dfrac{1}{\log_5 6} = \dfrac{1}{\log_5 2 + \log_5 3} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} = \dfrac{ab}{a+b}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Cho hai góc nhọn a và b thỏa mãn $\tan a = \dfrac{1}{7}$ và $\tan b = \dfrac{3}{4}$. Tính $a + b$.

(A) $\dfrac{\pi}{3}$. (B) $\dfrac{2\pi}{3}$. (C) $\dfrac{\pi}{6}$. **D** $\dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng công thức $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$

Cách giải: Do $0 < a, b < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < a + b < \pi$.

Ta có: $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b} = \dfrac{\dfrac{1}{7} + \dfrac{3}{4}}{1 - \dfrac{1}{7}.\dfrac{3}{4}} = 1 \Leftrightarrow a + b = \dfrac{\pi}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Một hình lăng trụ tam giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

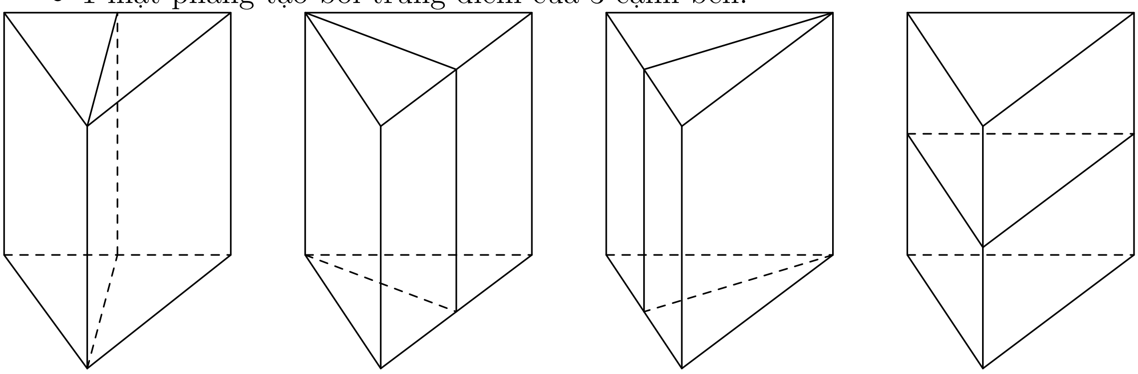
(A) 5. (B) 3. **C** 4. (D) 6.

Lời giải.

Phương pháp: Dựa vào lý thuyết các khối đa diện đều.

Cách giải: Hình lăng trụ tam giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng như hình vẽ bên dưới, trong đó:

- 3 mặt phẳng tạo bởi 1 cạnh bên và trung điểm của các cạnh đối diện.
- 1 mặt phẳng tạo bởi trung điểm của 3 cạnh bên.



Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Công thức nào sau đây là **sai**?

(A) $\int x^3 dx = \dfrac{1}{4}x^4 + C$. **B** $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = \cot x + C$.

(C) $\int \sin x dx = -\cos x + C$. (D) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng bảng nguyên hàm cơ bản.

Cách giải: Ta có $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$ do đó đáp án B sai.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bên vuông góc với mặt đáy. Gọi M là trung điểm của SA, N là hình chiếu vuông góc của A lên SO. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $AC \perp (SBD)$. (B) $DN \perp (SAB)$. **C** $AN \perp (SOD)$. (D) $AM \perp (SBC)$.

Lời giải.

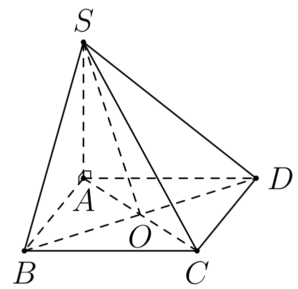
Phương pháp: Sử dụng quan hệ vuông góc trong không gian.

Cách giải: Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$.

Lại có: $BD \perp AC$ (do ABCD là hình vuông).

$\Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AN$.

Mà $AN \perp SO$ (gt) $\Rightarrow AN \perp (SBD) \Rightarrow AN \perp (SOD)$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Gọi A, B lần lượt là các giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x + m^2 + 2m}{x - 2}$ trên đoạn $[3; 4]$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A + B = \frac{19}{2}$.

A $m = 1; m = -3$. (B) $m = -1; m = 3$. (C) $m = \pm 3$. (D) $m = -4$.

Lời giải.

Phương pháp:

Hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất đơn điệu trên trên từng khoảng xác định của nó.

Cách giải:

TXĐ: $D = R \setminus \{2\}$.

Ta có: $y' = \frac{-2.1 - 1.(m^2 + 2m)}{(x-2)^2} = \frac{-m^2 - 2m - 2}{(x-2)^2} = \frac{-(m+1)^2 - 1}{(x-2)^2} < 0 \forall x \in D \Rightarrow y' < 0 \forall x \in [3; 4] \Rightarrow$ Hàm số đã cho nghịch biến trên $[3; 4]$.

$\Rightarrow \min\limits_{[3;4]} y = y(4) = \frac{m^2 + 2m + 4}{2}; \max\limits_{[3;4]} y = y(3) = m^2 + 2m + 3$.

$\Rightarrow A = \frac{m^2 + 2m + 4}{2}; B = m^2 + 2m + 3$

Theo bài ra ta có $A + B = \frac{19}{2} \Leftrightarrow \frac{m^2 + 2m + 4}{2} + m^2 + 2m + 3 = \frac{19}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{m^2 + 2m + 4 + 2m^2 + 4m + 6}{2} = \frac{19}{2} \Leftrightarrow 3m^2 + 6m - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -3 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

A Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một và không nằm trong mặt phẳng đồng quy.

B Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng.

C Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một thì cùng nằm trong một mặt phẳng.

D Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng.

Lời giải.

Phương pháp: Đọc kĩ từng đáp án sau đó loại trừ và chọn đáp án đúng.

Cách giải: Xét đáp án A: Giả sử ta có 3 đường thẳng a, b, c và $a \cap b = \{A\}, b \cap c = \{B\}, c \cap a = \{C\}$

Giả sử điểm $A \equiv B$ ta có:

+) Nếu $A \neq C \Rightarrow a \equiv c \Rightarrow$ mâu thuẫn với giả thiết a, c không đồng phẳng.

+) Nếu $A \equiv C \Rightarrow A \equiv B \equiv C \Rightarrow a, b, c$ đồng quy.

Vậy a, b, c đồng quy $\Rightarrow$ đáp án A đúng

Chọn đáp án A □

Câu 18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm $A(-2; 4)$ và $B(8; 4)$. Tìm tọa độ điểm C trên trục Ox, có hoành độ dương sao cho tam giác ABC vuông tại C.

A $C(3; 0)$. **B** $C(1; 0)$. **C** $C(5; 0)$. **D** $C(6; 0)$.

Lời giải.

Phương pháp: Tam giác ABC vuông tại $C \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0$

Cách giải: Gọi $C(c; 0) \in \text{Ox}(c0)$ ta có $\begin{cases} \overrightarrow{CA} = (-2-c; 4) \\ \overrightarrow{CB} = (8-c; 4) \end{cases}$.

Tam giác ABC vuông tại C $\Leftrightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (-2-c)(8-c) + 16 = 0 \; -16 + 2c - 8c + c^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow c^2 - 6c = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0(ktm) \\ c = 6(tm) \end{array}\right. \Rightarrow C(6; 0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^2 + \dfrac{16}{x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{3}{2}; 4\right]$ bằng:

A 24. **B** 20. **C** 12. **D** $\dfrac{155}{12}$.

Lời giải.

Phương pháp: Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên $[a; b]$ bằng cách:

+) Giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm x_1.

+) Tính các giá trị $f(a), f(b), f(x_i)$ $(x_i \in [a; b])$.

Khi đó: $\min\limits_{[a;b]} f(x) = \min\{f(a), f(b), f(x_i)\}, \underset{[a;b]}{max} f(x) = max\{f(a), f(b), f(x_i)\}$.

Cách giải: Ta có: $y' = 2x - \dfrac{16}{x^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 2x^3 = \dfrac{16}{x^2} \Leftrightarrow 2x^3 = 16 \Leftrightarrow x = 2 \in \left[\dfrac{3}{2}; 4\right]$

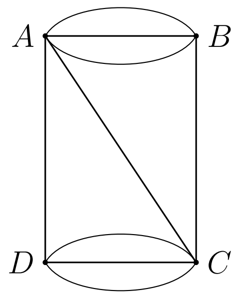
$y\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{155}{12}; y(2) = 12; y(4) = 20$ Vậy $\max\limits_{\left[\frac{3}{4};4\right]} y = 20$ khi$x = 4$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có AB và CD thuộc hai đáy hình trụ, $AB = 4a$; $AC = 5a$. Tính thể tích khối trụ:

A $V = 8\pi a^3$. **B** $V = 16\pi a^3$. **C** $V = 12\pi a^3$. **D** $V = 4\pi a^3$.

Lời giải.



Phương pháp: Sử dụng công thức tính thể tích khối trụ có chiều cao h và bán kính đáy r là $V = \pi r^2 h$.

Cách giải:

Áp dụng định lí Pytago trong tam giác vuông ABC có

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{25a^2 - 16a^2} = 3a$.

Vậy thể tích khối trụ là $V = \pi\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 .BC = \pi.(2a)^2.3a = 12\pi a^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Cho hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}}|x|$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **sai**?

A Hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định.

B Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

C Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng là trục tung.

D Hàm số đã cho có tập xác định là $D = R\backslash\{0\}$.

Lời giải.

Phương pháp: Xét hàm số $y = \log_a x$ ta có:

+) TXĐ: $D = (0; +\infty)$.

+) Đồ thị hàm số nhận trục Oy làm TCĐ.

+) Có $a > 1$ thì hàm số luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$ và $0 < a < 1$ thì hàm số luôn nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

+) Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $(1; 0), (a; 1)$ và nằm bên phải trục tung.

Cách giải: Tập xác định của hàm số: $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \Rightarrow$ đáp án D đúng.

Ta có: $y = \log_{\frac{1}{2}}|x| = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x & \text{khi} \quad x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(-x) & \text{khi} \quad x < 0 \end{cases}$.

Vì $0 < a = \dfrac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$ và hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Cho x là số thực dương, khai triển nhị thức $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^{12}$ ta có hệ số của số hạng chứa x^m bằng 792. Giá trị của m là:

A $m = 3$ và $m = 9$. B $m = 0$ và $m = 9$. C $m = 9$. D $m = 0$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng khai triển nhị thức Newton: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$.

Cách giải: Ta có: $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^{12} = \sum\limits_{k=0}^{12} C_1 2^k (x^2)^{12-k} \left(\dfrac{1}{x}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{12} C_1 2^k x^{24-3k}$, do đó hệ số của số hạng chứa x^m trong khai triển trên ứng với $24 - 3k = m \Leftrightarrow k = \dfrac{24-m}{3}$.

Theo bài ra ta có $C_{12}^{\frac{24-m}{3}} = 792 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{24-m}{3} = 5 \\ \dfrac{24-m}{3} = 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 9 \\ m = 3 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Tìm tập nghiệm S của phương trình $2^{x+1} = 4$

(A) $S = \{4\}$. (B) $S = \{1\}$. (C) $S = \{3\}$. (D) $S = \{2\}$.

Lời giải.

Phương pháp: Giải phương trình mũ: $a^{f(x)} = a^m \Leftrightarrow f(x) = m$.

Cách giải: Ta có: $2^{x+1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^2 \Leftrightarrow x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{1\}$.

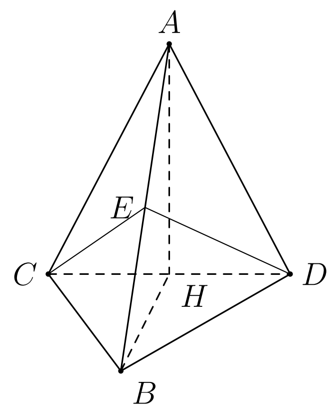
Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$ có $(ACD) \perp (BCD), AC = AD = BC = BD = a, CD = 2x$. Giá trị của x để hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau là:

(A) $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

Phương pháp:



+) Gọi E là trung điểm của AB, chứng minh $\left(\widehat{(ABC),(ABD)}\right) = \left(\widehat{CE, DE}\right) = \widehat{CED}$.

+) Sử dụng định lí Pytago trong các tam giác vuông tìm x.

Cách giải:

Gọi H là trung điểm của CD. Do tam giác ACD cân tại A và tam giác BCD cân tại B.

$\Rightarrow \begin{cases} CD \perp AH \\ CD \perp BH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp AB.$

Gọi E là trung điểm của AB, do tam giác ABC cân tại C $\Rightarrow CE \perp AB$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp CD \\ AB \perp CE \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CDE) \Rightarrow AB \perp DE$

$\begin{cases} (ABC) \cap (ABD) = AB \\ (ABC) \supset CE \perp AB \\ (ABD) \supset DE \perp AB \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(ABC),(ABD)}\right) = \left(\widehat{CE, DE}\right) = \widehat{CED} = 90°.$

Ta có $\Delta ABC = \Delta ADC(c.c.c) \Rightarrow CE = DE \Rightarrow \Delta CDE$ vuông cân tại E.

$\Rightarrow CD = CE\sqrt{2} \Leftrightarrow 2x = CE\sqrt{2} \Leftrightarrow CE = x\sqrt{2}(*)$.

Xét tam giác vuông CBH có $BH^2 = BC^2 - CH^2 = a^2 - x^2$.

Xét tam giác vuông ACH có $AH^2 = AC^2 - CH^2 = a^2 - x^2$.

Xét tam giác vuông ABH có $AB^2 = AH^2 + BH^2 = 2a^2 - 2x^2 \Rightarrow AE = \dfrac{\sqrt{2a^2 - 2x^2}}{2}$.

Xét tam giác vuông ACE có $CE^2 = AC^2 - AE^2 = a^2 - \dfrac{a^2 - x^2}{2} = \dfrac{a^2 + x^2}{2} \Rightarrow CE = \dfrac{\sqrt{a^2 + x^2}}{2}$.

Thay vào (*) ta có $\dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{2}} = x\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 + x^2 = 4x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$, ΔSACvuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, cạnh bên SA tạo với đáy góc $60°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **B** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{24}$. **D** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Công thức tính thể tích khối chóp có chiều cao h và diện tích đáy S là: $V=\dfrac{1}{3}hS$.

Cách giải: Gọi H là hình chiếu của S trên AC.

Ta có $\begin{cases}(SAC)\cap(ABCD)=AC\\(SAC)\supset SH\perp AC\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$

Khi đó $\left(\widehat{SA,(ABCD)}\right)=\left(\widehat{SA,AH}\right)=\left(\widehat{SA,AC}\right)=\widehat{SAC}$.

Ta có: $AC=AB\sqrt{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2}=a$.

Xét ΔSAC vuông tại S ta có: $\begin{cases}SA=AC\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{a}{2}\\SC=AC\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

Áp dụng hệ thức lượng cho ΔSAC vuông tại S và có đường cao SH ta có:

$SH=\dfrac{SA.SC}{AC}=\dfrac{\dfrac{a}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{a}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x^3+x-1$ là:

A x^4+x^2+x+C. **B** $12x^2+1+C$. **C** $x^4+\dfrac{1}{2}x^2-x+C$. **D** $x^4-\dfrac{1}{2}x^2-x+C$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng nguyên hàm cơ bản $\displaystyle\int x^n\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$.

Cách giải: $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=4\cdot\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^2}{2}-x+C=x^4+\dfrac{1}{2}\cdot x^2-x+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên khoảng K và $x_0\in K$. *Mệnh đề nào sau đây đúng?*

A Nếu $f''(x_0)=0$ thì x_0 là điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.

B Nếu x_0 thì là điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ thì $f''(x_0)\neq 0$.

C Nếu x_0 thì là điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ thì $f'(x_0)=0$.

D Nếu x_0 thì là điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ thì $f''(x_0)>0$.

Lời giải.

Phương pháp: Dựa vào lý thuyết về các điểm cực trị của hàm số.

Cách giải:

Nếu $x=x_0$ là điểm cực trị của hàm số thì $f'(x_0)=0$. Nếu $x=x_0$ là điểm cực trị của hàm số thì $\begin{cases}f'(x_0)=0\\f''(x_0)>0\end{cases}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x+2)^2}$?

(A) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\ln x+2}+C.$

B $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{-1}{\ln x+2}+C.$

(C) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{x}{\ln x+2}+C.$

(D) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\ln x+2+C.$

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng bảng nguyên hàm cơ bản $\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}=\dfrac{-1}{x}+C$ và công thức vi phân $\mathrm{d}\left[f(x)\right]=f'(x)\mathrm{d}x$.

Cách giải: $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{x(\ln x+2)^2}\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{d}(\ln x+2)}{(\ln x+2)^2}=\dfrac{-1}{\ln x+2}+C.$

Chú ý: HS có thể sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ để giải bài toán này bằng cách đặt $t=\ln x+2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Tính tích tất cả các nghiệm của phương trình $2^{2x^2+5x+4}=4$.

A 1.

(B) $\dfrac{5}{2}$.

(C) $-\dfrac{5}{2}$.

(D) -1.

Lời giải.

Phương pháp:

+) Giải phương trình mũ: $a^{f(x)}=a^m\Leftrightarrow f(x)=m$.

+) Áp dụng hệ thức Vi-ét.

Cách giải:

Ta có: $2^{2x^2+5x+4}=4\Leftrightarrow 2x^2+5x+4=2\Leftrightarrow 2x^2+5x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\x=-2\end{array}\right.\Rightarrow x_1x_2=1.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Cho hai góc lượng giác a và b. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định **sai**?

(A) $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b.$

B $\sin(a-b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b.$

(C) $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b.$

(D) $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b.$

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng các công thức:

$$\begin{array}{l}\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b\\ \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b\\ \cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b\\ \cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b\end{array}.$$

Cách giải: $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$, do đó đáp án B sai.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $\vec{a}=(1;-2;3)$ và $\vec{b}=(2;-1;-1)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Vectơ $\vec{a}$ không vuông góc với vectơ $\vec{b}$.

(B) Vectơ $\vec{a}$ cùng phương với vectơ $\vec{b}$.

C $|\vec{a}|=\sqrt{14}$.

(D) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(-5;-7;-3)$.

Lời giải.

Phương pháp:

+) Sử dụng máy tính để bấm máy tích có hướng.

+) Ta có: $\vec{a}\,(a_1; a_2) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

+) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$.

+) $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}$.

Cách giải:

Ta có: $\vec{a}.\vec{b} = 1.2 - 2.(-1) + 3.(-1) = 1 \neq 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ không vuông góc $\Rightarrow$ loại đáp án A.

Ta thấy không tồn tại số k để $\vec{a} = k\vec{b} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương $\Rightarrow$ loại đáp án B.

$|\vec{a}| = \sqrt{1 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14} \Rightarrow$ Đáp án C đúng.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SC = x\,(0 < x < a\sqrt{3})$, các cạnh còn lại đều bằng a. Biết rằng thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất khi và chỉ khi $x = \dfrac{a\sqrt{m}}{n}(m, n \in \mathbb{N}*)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m + 2n = 10$. B. $2m^2 - 3n < 15$. C. $m^2 - n = 30$. D. $4m - n^2 = -20$.

Lời giải.

Phương pháp:

+) Chứng minh hình chiếu vuông của S trên $(ABCD)$ trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.

+) Chứng minh tam giác SAC vuông tại S, tính AC.

+) Tính BD.

+) Sử dụng công thức tính thể tích $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$.

Cách giải:

Vì $SA = SB = SD = a$ nên hình chiếu vuông của S trên $(ABCD)$ trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD. Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Do tam giác ABD cân tại $A \Rightarrow H \in AC$.

Dễ dàng chứng minh được: $\Delta SBD = \Delta ABD$ (c.c.c)

$\Rightarrow SO = AO = \dfrac{AC}{2} \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S (Tam giác có trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy) $\Rightarrow AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = \sqrt{a^2 + x^2}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAC có $SH = \dfrac{SA.SC}{AC} = \dfrac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Ta có $OA = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2 + x^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2}$

$\Rightarrow BD = \sqrt{3a^2 - x^2}$.

Do ABCD là hình thoi $\Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD$.

Khi đó ta có: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{6}.\dfrac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}\sqrt{a^2 + x^2}.\sqrt{3a^2 - x^2} = \dfrac{1}{6}ax\sqrt{3a^2 - x^2}$.

Áp dụng BĐT Cô-si ta có: $x\sqrt{3a^2 - x^2} \leq \dfrac{x^2 + 3a^2 - x^2}{2} = \dfrac{3a^2}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} \leq \dfrac{1}{6} \cdot a \cdot \dfrac{3a^2}{2} = \dfrac{a^3}{4}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = 3a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{3a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{a\sqrt{m}}{n} \Rightarrow \begin{cases} m = 6 \\ n = 2 \end{cases} \Rightarrow m + 2n = 10.$

Chọn đáp án A □

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số: $y = x^8 + (m+1)x^5 - (m^2-1)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. Vô số. B. 3. C. 2. D. 4.

Lời giải.

Phương pháp:

Nếu $x = x_0$ là điểm cực trị của hàm số thì $f'(x_0) = 0$.

Nếu $x = x_0$ là điểm cực tiểu của hàm số thì $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$.

Cách giải: Ta có $y' = 8x^7 + 5\left(m+1\right)x^4 - 4(m^2-1)x^3; y'' = 56x^6 + 20(m+1)x^3 - 12(m^2-1)x^2$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 8x^7 + 5(m+1)x^4 - 4(m^2-1)x^3 = 0$

$\Leftrightarrow x^3\left[8x^4 + 5(m+1)x - 4(m^2-1)\right] = 0$

TH1: Xét $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$ +) Khi $m = 1$ ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x^3(8x^4 + 10x) = x^4(8x^3 + 10) \Rightarrow x = 0$ là nghiệm bội 4 $\Rightarrow x = 0$ không là cực trị của hàm số. +) Khi $m = -1$ ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x^3.8x^4 = 0 \Leftrightarrow 8x^7 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ là nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow x = 0$ là điểm cực trị của hàm số. Hơn nữa qua điểm $x = 0$ thì y' đổi dấu từ âm sang dương nên $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

TH2: Xét $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$ ta có:

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2\left[8x^5 + 5(m+1)x^2 - 4(m^2-1)x\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ 8x^5 + 5(m+1)x^2 - 4(m^2-1)x = 0 \end{array}\right.$

Vì $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ là nghiệm bội chẵn không là cực trị của hàm số, do đó cực trị của hàm số ban đầu là nghiệm của phương trình $g(x) = 8x^5 + 5(m+1)x^2 - 4(m^2-1)x = 0$.

Ta có $g'(x) = 40x^4 + 10(m+1)x - 4(m^2-1)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0 \Leftrightarrow g'(0) > 0 \Leftrightarrow g'(0) > 0 \Leftrightarrow -4(m^2-1) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 < 0$

$\Leftrightarrow -1 < m < 1$.

Vậy kết hợp 2 trường hợp ta có $-1 \leq m < 1$. Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 0\}$ có 2 giá trị m nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình $\left(x + 2 - \sqrt{x^2+1}\right)^2 + \dfrac{18\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}{x + 2 + \sqrt{x^2+1}} = m\left(x^2+1\right)$ có nghiệm thực?

A. 25. B. 2019. C. 2018. D. 2012.

Lời giải.

Phương pháp:

+) Cô lập m, đưa phương trình về dạng $f(x) = m$.

+) Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow m \in [\min f(x); max f(x)]$.

Cách giải:

$\left(x + 2 - \sqrt{x^2+1}\right)^2 + \dfrac{18(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}{x + 2 + \sqrt{x^2+1}} = m(x^2+1) \Leftrightarrow \dfrac{\left(x + 2 - \sqrt{x^2+1}\right)^2}{x^2+1} + \dfrac{18\sqrt{x^2+1}}{x + 2 + \sqrt{x^2+1}} =$

m

Đặt $f(x)=\dfrac{\left(x+2-\sqrt{x^2+1}\right)^2}{x^2+1}+\dfrac{18\sqrt{x^2+1}}{x+2+\sqrt{x^2+1}}$.

Sử dụng chức năng MODE 7, ta tìm min $f(x)=7 \Leftrightarrow x=0$.

Để phương trình $f(x)=m$ có nghiệm $\Rightarrow m \geq 7$.

Kết hợp điều kiện ta có $m \in [7;2018]\,, m \in \mathbb{Z}$. Vậy có $(2018-7)+1=2012$ giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\left(7-3\sqrt{5}\right)^{x^2}+m\left(7+3\sqrt{5}\right)^{x^2}=2^{x^2-1}$ có đúng bốn nghiệm phân biệt.

A $0<m<\dfrac{1}{16}$. B $0\leq m<\dfrac{1}{16}$. C $-\dfrac{1}{2}<m<0$. D $-\dfrac{1}{2}<m\leq\dfrac{1}{16}$.

Lời giải.

Phương pháp:

+) Ta có: $\left(7+3\sqrt{5}\right)\left(7-3\sqrt{5}\right)=49-45=4 \Rightarrow 7-3\sqrt{5}=\dfrac{4}{7+3\sqrt{5}}$

+) Đặt ẩn phụ và đưa phương trình đã cho về phương trình bậc hai ẩn t từ đó tìm m theo yêu cầu của đề bài.

Cách giải:

Ta có: $\left(7+3\sqrt{5}\right)\left(7-3\sqrt{5}\right)=49-45=4 \Rightarrow 7+3\sqrt{5}=\dfrac{4}{7-3\sqrt{5}}$

Khi đó $\left(7-3\sqrt{5}\right)^{x^2}+m\left(7+3\sqrt{5}\right)^{x^2}=2^{x^2-1}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{7+3\sqrt{5}}\right)^{x^2}+m\left(7+3\sqrt{5}\right)^{x^2}=\frac{1}{2}.2^{x^2}$$

$$\Leftrightarrow 2.2^{x^2}-2^{x^2}.\left(7+3\sqrt{5}\right)^2+2m\left(7+3\sqrt{5}\right)^{x^2}=0$$

$$\Leftrightarrow 2.\left(\frac{2}{7+3\sqrt{5}}\right)^{2x^2}-\left(\frac{2}{7+3\sqrt{5}}\right)^{x^2}+2m=0(*)$$

Đặt $\left(\dfrac{2}{7+3\sqrt{5}}\right)^{2x^2}=t \Rightarrow x^2=\log_{\frac{2}{7+3\sqrt{5}}}t$.

Ta có: $0<\dfrac{2}{7+3\sqrt{5}}<1 \Rightarrow \log_{\frac{2}{7+3\sqrt{5}}}t>0 \Leftrightarrow 0<t<1 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow 2t^2-t+2m=0(1)$

Để phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ pt (1) có hai nghiệm phân biệt $t\in(0;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ af(0)>0\\ af(1)>0\\ 0<-\dfrac{b}{2a}<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-16m>0\\ 4m>0\\ 2(2m+1)>0\\ 0<\dfrac{1}{2}<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<\dfrac{1}{16}\\ m>0 \Leftrightarrow 0<m<\dfrac{1}{16}\\ m>-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Chọn đáp án A □

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho $A\left(-3;0;0\right);B\left(0;0;3\right);C\left(0;-3;0\right)$ và mặt phẳng (P): $x+y+z-3=0$. Tìm trên (P) điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

A $M\left(3;3;-3\right)$. B $M\left(3;-3;3\right)$. C $M\left(-3;3;3\right)$. D $M\left(-3;-3;3\right)$.

Lời giải.

Phương pháp:
+) Gọi điểm $I(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$, sử dụng các công thức cộng trừ vectơ xác định điểm I.
+) Phân tích $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ bằng cách chèn điểm I, đánh giá và tìm GTNN của $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$.
Cách giải:
Gọi điểm $I(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{IA}=(-3-a;-b;-c)\\ \overrightarrow{IB}=(-a;-b;3-c)\\ \overrightarrow{IC}=(-a;-3-b;-c)\end{cases}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=(-3-a;3-b;3-c)=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\begin{cases}-3-a=0\\ 3-b=0\\ 3-c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\ b=3\\ c=3\end{cases}\Rightarrow I(-3;3;3)$$

$$\begin{aligned}\text{Ta có }\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|&=\left|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IC}\right|\\ &=\left|\overrightarrow{MI}+\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\right)\right|=\left|\overrightarrow{MI}\right|=MI\end{aligned}.$$

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất $\Rightarrow M$ là hình chiếu của I trên (P).
Ta thấy $-3+3+3-3=0\Rightarrow I\in(P)\Rightarrow$.
Hình chiếu của I trên (P) là chính nó. Do đó $M\equiv I\Rightarrow M(-3;3;3)$.
Chọn đáp án C □

Câu 37. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log\left(2x^2+3\right)<\log\left(x^2+mx+1\right)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

(A) Vô số. (B) 2. (C) 5. (D) 0.

Lời giải.
Phương pháp: Tìm điều kiện xác định của bất phương trình. Giải bất phương trình logarit: $\log f(x)<\log g(x)\Leftrightarrow 0<f(x)<g(x)$.
Cách giải:

$$\log\left(2x^2+3\right)<\log\left(x^2+mx+1\right),\forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow 0<2x^2+3<x^2+mx+1\Leftrightarrow x^2-mx+2<0,\forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1<0\\ \Delta=m^2-8<0\end{cases}\text{(vô nghiệm)}$$

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án D □

Câu 38. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=6\sqrt{x^2-6x+12}+6x-x^2-4$. Tính tích các nghiệm của phương trình $f(x)=M$.

(A) -6. (B) 3. (C) -3. (D) 6.

Lời giải.
Phương pháp: Đặt $t=\sqrt{x^2-6x+12}=\sqrt{(x-3)^2+3}\geq 3$ tìm GTLN của hàm số $f(t)$ với $t\geq 3$.

Cách giải: $\begin{matrix} f(x) = 6\sqrt{x^2 - 6x + 12} + 6x - x^2 - 4 \\ f(x) = 6\sqrt{x^2 - 6x + 12} - (x^2 - 6x + 12) + 8 \end{matrix}.$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 6x + 12} = \sqrt{(x-3)^2 + 3} \geq 3$, khi đó ta có $f(t) = -t^2 + 6t + 8, \forall x \geq 3$. Ta có $f'(t) = -2t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 3$. BBT:

x	3 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(t)$	$-$
$f(t)$	$17 \searrow -\infty$

$\begin{matrix} \Rightarrow \underset{[3;+\infty)}{max} f(t) = 17 \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + 3} = 3 \Leftrightarrow x = 3 \\ \Rightarrow max f(x) = 17 = M \Leftrightarrow x = 3 \end{matrix}.$

Vậy phương trình $f(x) = M$ có nghiệm duy nhất $x = 3$, do đó tích các nghiệm của chúng bằng 3.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ thỏa mãn $F(0) = 5$. Khi đó phương trình $F(x) = 5$ có số nghiệm thực là:

A 0. **B 1.** C 2. D 3.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng các công thức nguyên hàm cơ bản để tìm $F(x)$ sau đó giải phương trình.

Cách giải:

Ta có: $F(x) = \int (x^3 - 2x^2 + 1)dx = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3} + x + C$.

Lại có: $F(0) = 5 \Leftrightarrow C = 5 \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3} + x + 5$.

$F(x) = 5 \Leftrightarrow \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3} + x = 0 \Leftrightarrow x\left(\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x \approx -1,04 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Cho một tập hợp A gồm 9 phần tử. Có bao nhiêu cặp tập con khác rỗng không giao nhau của tập A?

A 9330. B 9586. C 255. D 9841.

Lời giải.

Gọi X, Y là hai tập hợp con của A sao cho $X \cap Y = \varnothing; X \neq \varnothing; Y \neq \varnothing$.

Giả sử $A = \{x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; x_7; x_8; x_9\}$.

Phần tử x_1 có 3 khả năng: hoặc $x_1 \in X$ hoặc $x_1 \in Y$ hoặc $\begin{cases} x_1 \notin X \\ x_1 \notin Y \end{cases}$

....

Cứ như vậy đến phần tử x_9.

Do đó ta có 3^9 cặp 2 tập hợp không giao nhau (chứa cả cặp tập hợp rỗng).

Số cách chọn tập $X \neq \varnothing; Y = \varnothing$ là $2^9 - 1$ cách chọn.

Số cách chọn tập $X = \varnothing; Y \neq \varnothing$ là $2^9 - 1$ cách chọn.

$\Rightarrow$ số cặp 2 tập hợp khác rỗng không giao nhau thực sự là $3^9 - 2(2^9 - 1)$.

Do $(X;Y)$ và $(Y;X)$ là trùng nhau nên số cặp 2 tập hợp không giao nhau thực sự là
$\dfrac{3^9-2(2^9-1)}{2}=9330$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y'=x^2-3x+m^2+5m+6$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên $(3;5)$.

(A) $m\in(-\infty;-3)\cup(-2;+\infty)$.

B $m\in(-\infty;-3]\cup[-2;+\infty)$.

(C) $m\in[-3;-2]$.

(D) Với mọi $m\in\mathbb{R}$.

Lời giải.

Phương pháp: Hàm số đồng biến trên $(a;b)\Leftrightarrow y'\geq 0,\forall x\in(a;b)$.

Cách giải: Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(3;5)\Leftrightarrow y'>0\forall x\in(3;5)$.

$\Leftrightarrow x^2-3x+m^2+5m+6\geq 0,\forall x\in(3;5)$

$\Leftrightarrow x^2-3x\geq -m^2-5m-6,\forall x\in(3;5)(*)$.

Đặt $g(x)=x^2-3x$.

$(*)\Leftrightarrow g(x)\geq -m^2-5m-6,\forall x\in(3;5)$

$\Rightarrow -m^2-5m-6\leq \min\limits_{(3;5)} g(x)$

Khảo sát hàm số $g(x)=x^2-3x$ ta được:

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		3		5		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{9}{4}$	↗	0	↗	10	→	$+\infty$

$$-m^2-5m-6\leq 0\Leftrightarrow m^2+5m+6\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\geq -2\\ m\leq -3\end{array}\right.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Một giải thi đấu bóng đá quốc gia có 12 đội bóng thi đấu vòng tròn hai lượt tính điểm (2 đội bất kì thi đấu với nhau đúng 2 trận). Sau mỗi trận đấu, đội thắng 3 điểm, đội thua 0 điểm, nếu hòa mỗi đội được 1 điểm. Sau giải đấu ban tổ chức thống kê được 60 trận hòa. Hỏi tổng số điểm của tất cả các đội sau giải đấu là

A 336. (B) 630. (C) 360. (D) 306.

Lời giải.

Phương pháp:

+) Tính tổng số trận đấu, tính số trận hòa, trận không hòa.

+) Tính số điểm của các trận hòa, số điểm của các trận không hòa và suy ra số điểm của toàn giải đấu.

Cách giải: Vì 12 đội bóng thi đấu vòng tròn hai lượt tính điểm (2 đội bất kì thi đấu với nhau đúng 2 trận (nên mỗi đội sẽ thi đấu với 11 đội còn lại, do đó tổng số trận đấu là $12.11=132$ (trận).

Số trận hòa là 16 trận, số trận không hòa là $132 - 60 = 72$. 60 trận hòa, mỗi đội được 1 điểm, vậy có 120 điểm. 72 trận không hòa, mỗi trận đội thắng được 3 điểm, vậy có $72.3 = 216$ điểm.
Vậy tổng số điểm của tất cả các đội sau giải đấu là $120 + 216 = 336$.
Chọn đáp án A □

Câu 43. Một hộp sữa hình trụ có thể tích V (không đổi) được làm từ một tấm tôn có diện tích đủ lớn. Nếu hộp sữa chỉ kín một đáy thì để tốn ít vật liệu nhất, hệ thức giữa bán kính đáy R và đường cao h bằng:

A. $h = \sqrt{3}R$. B. $h = \sqrt{2}R$. C. $h = 2R$. D. $h = R$.

Lời giải.
Phương pháp: Thể tích khối trụ có bán kính đáy R và chiều cao h là: $V = \pi R^2 h$.
Diện tích xung quanh và 1 đáy của hình trụ là: $S = 2\pi Rh + \pi R^2$.
Cách giải:
Ta có thể tích khối trụ có bán kính đáy R và chiều cao h là: $V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi R^2}$.
Diện tích xung quanh và 1 đáy của hình trụ là: $S = 2\pi Rh + \pi R^2 \Rightarrow S = 2\pi.R\dfrac{V}{\pi R^2} + \pi R^2 = \dfrac{2V}{R} + \pi R^2$.
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương $\dfrac{V}{R}; \dfrac{V}{R}; \pi R^2$ ta có:
$\dfrac{V}{R} + \dfrac{V}{R}\pi R^2 \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{V}{R} + \dfrac{V}{R}\pi R^2} = 3\sqrt[3]{\pi V^2}$.
Dấu "=" xảy ra $\Rightarrow \dfrac{V}{R} = \pi R^2 \Leftrightarrow R^3 = \dfrac{V}{\pi} \Leftrightarrow V = \pi R^3 \Rightarrow h = \dfrac{\pi R^3}{\pi R^2} = R$.
Chọn đáp án D □

Câu 44. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{4x+7}{\log_{2018}\left(x^2 - 2x + m^2 - 6m + 10\right)}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ là:

A. $(2; 4) \setminus \{3\}$. B. $[2; 4] \setminus \{3\}$.
C. $[4; +\infty)$. D. $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$.

Lời giải.
Phương pháp: +) Hàm số $y = \log_a f(x) (0 < a \neq 1)$ xác định $\Leftrightarrow f(x > 0)$.
+) Hàm số $\dfrac{1}{A}$ xác định $\Leftrightarrow A \neq 0$.
Cách giải: Hàm số $y = \dfrac{4x+7}{\log_{2018}\left(x^2 - 2x + m^2 - 6m + 10\right)}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\log_{2018}\left(x^2-2x+m^2-6m+10\right)\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}\\ x^2-2x+m^2-6m+10>0,\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+m^2-6m+10\neq 1,\forall x\in\mathbb{R}\\ x^2-2x+m^2-6m+10>0,\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+(m-3)^2\neq 1,\forall x\in\mathbb{R}\\ (x-1)^2+(m-3)^2>0,\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}.$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}(m-3)^2\neq 1-(x-1)^2,\forall x\in\mathbb{R}\\ (x-1)^2+(m-3)^2>0,\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}(m-3)^2>1\\ m-3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>4\\ m<2\end{array}\right.\\ m\neq 3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>4\\ m<2\end{array}\right.$$

Chọn đáp án D □

Câu 45. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD\perp(ABC), ABC$có tam giác vuông tại B. Biết $BC=2a, AB=2a\sqrt{3}, AD=6a$. Quay tam giác ABC và ABD (bao gồm cả điểm bên trong 2 tam giác) xung quanh đường thẳng AB ta được hai khối tròn xoay. Thể tích phần chung của 2 khối tròn xoay đó bằng:

A. $\frac{5\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. B. $\frac{3\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. C. $\frac{64\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. D. $\frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{2}$.

Lời giải.

Phương pháp: Công thức tính thể tích khối nón tròn xoay có chiều cao h và bán kính đáy R là: $V=\frac{1}{4}\pi R^2 h$.

Cách giải:

Ta có:

Khối nón (N_1) được sinh bởi ΔABC khi quay quanh AB có chiều cao $h_1=AB$ và bán kính đáy $R_1=BC$.

Khối nón (N_2) được sinh bởi ΔADB khi quay quanh AB có chiều cao $h_2=AB$ và bán kính đáy $R_2=AD$.

Do hai khối nón cùng có chiều cao AB nên hai đáy của hai khối nón nằm trong hai mặt phẳng song song.

Trong mặt phẳng đáy của hình nón (N_1) kẻ đường kính $GH//DE$. Dễ dàng chứng minh được DEGH là hình thang cân.

Gọi $M=AG\cap BE; N=AH\cap BD, I=AB\cap MN$. Khi đó phần chung giữa hai khối nón (N_1) và (N_2) là hai khối nón: Khối nón (N_3) đỉnh B, đường cao BI, bán kính đáy $IN\Rightarrow V_3=\frac{1}{3}\pi.IN^2.BI$

Khối nón (N_4) đỉnh A, đường cao AI, bán kính đáy $IN\Rightarrow V_4=\frac{1}{3}\pi.IN^2.AI$

Thể tích phần chung $V=V_3+V_4=\frac{1}{3}\pi.IN^2.BI+\frac{1}{3}\pi.IN^2.AI=\frac{1}{3}\pi.IN^2.(AI+BI)=\frac{1}{3}\pi.IN^2.AB$

Áp dụng định lí Ta-lét ta có:

$\dfrac{MN}{GH}=\dfrac{AI}{AB};\dfrac{MN}{DE}=\dfrac{BI}{AB}\Rightarrow\dfrac{MN}{GH}+\dfrac{MN}{DE}=\dfrac{AI+BI}{AB}=1$

$\Rightarrow MN\left(\dfrac{1}{2BC}+\dfrac{1}{2AD}\right)=1\Leftrightarrow MN.\left(\dfrac{1}{2.2a}+\dfrac{1}{2.6a}\right)=1\Leftrightarrow MN=3a$

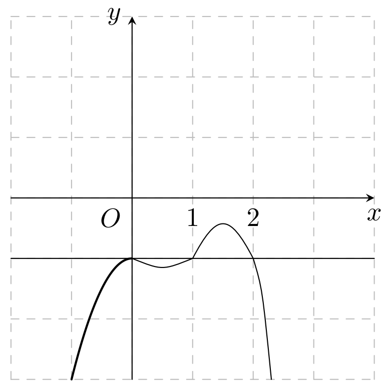
Dễ thấy I là trung điểm của MN $\Rightarrow IN=\dfrac{MN}{2}=\dfrac{3a}{2}$.

Vậy $V=\dfrac{1}{3}\pi.\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2.2a\sqrt{3}=\dfrac{3\sqrt{3}\pi a^3}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 46.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)$. Biết rằng đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Xác định điểm cực đại của hàm số $g(x)=f(x)+x$.



A Không có giá trị. **B** $x=0$.

C $x=1$. **D** $x=2$.

Lời giải.

Phương pháp: Giải phương trình $g'(x)=0$, lập BBT của đồ thị hàm số $y=g(x)$ và kết luận.

Cách giải:

Ta có $g'(x)=f'(x)+1=0\Leftrightarrow f'(x)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

BBT

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↘		↘		↗		↘	

Dựa vào BBT ta thấy hàm số $y=g(x)$ có 1 điểm cực đại là $x=2$.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2+f(x).f''(x)=x^3-2x\forall x\in R$ và $f(0)=f'(0)=2$. Tính giá trị của $T=f^2(2)$.

A $\dfrac{268}{15}$. **B** $\dfrac{160}{15}$. **C** $\dfrac{268}{30}$. **D** $\dfrac{4}{15}$.

Lời giải.

Phương pháp:

+) Dựa vào phương trình đã cho của bài toán ta có thể thấy: $VT=[f(x).f'(x)]'$.

+) Lấy nguyên hàm hai vế và dựa vào giả thiết bài toán để làm tiếp.

Cách giải:

Ta có: $VT = [f(x).f'(x)]' = f'(x).f'(x) + f(x).f''(x) = [f'(x)]^2 + f(x).f''(x) \Rightarrow [f'(x).f(x)]' = x^3 - 2x(*)$.

Nguyên hàm hai vế của (*) ta được: $f'(x).f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^2 + C(1)$.

Lại có: $f'(0) = f(0) = 2 \Rightarrow C = 2.2 = 4$

$(1) \Rightarrow f(x).f'(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^2 + 4$

$$\Rightarrow \int f(x)\cdot f'(x)dx = \int \left(\frac{x^4}{4} - x^2 + 4\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \int f(x)df(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{3} + 4x + A$$

$$\Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{3} + 4x + A \Leftrightarrow f^2(x) = \frac{x^5}{10} - \frac{2x^3}{3} + 8x + 2A$$

Có $f(0) = 2 \Rightarrow 4 = 2A \Leftrightarrow A = 2$

$$\Rightarrow f^2(x) = \frac{x^5}{10} - \frac{2x^3}{3} + 8x + 4$$

$$\Rightarrow f^2(2) = \frac{2^5}{10} - \frac{2.2^3}{3} + 8.2 + 4 = \frac{268}{15}$$

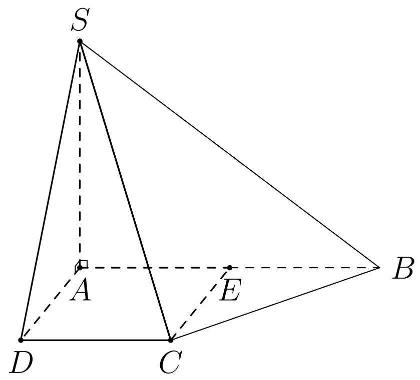
Chọn đáp án A □

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, D, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Biết $AB = 2AD = 2DC = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là $60°$. Độ dài cạnh SA là:

A $a\sqrt{2}$. **B** $2a\sqrt{3}$. **C** $3a\sqrt{2}$. **D** $a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Phương pháp:



+) Xác định góc giữa (SAB) và (SBC).

+) Sử dụng tam giác đồng dạng, suy ra các tỉ số và tínhSA.

Cchgii : Gọi E là trung điểm của AB. Ta dễ dàng chứng minh được $ABCE$ là hình vuông $\Rightarrow \begin{cases} CE \perp AB \\ CE \perp SA \end{cases} \Rightarrow CE \perp (SAB) \Rightarrow CE \perp SB$.

Trong (SAB) kẻ $HE \perp SB$ ta có:

$$\begin{cases} SB \perp EH \\ SB \perp CE \end{cases} \Rightarrow SB \perp (CHE) \Rightarrow SB \perp CH$$

$$\begin{cases} (SAB) \cap (SBC) = SB \\ (SAB) \supset EH \perp SB \\ (SAC) \supset CH \perp SB \end{cases} \Rightarrow (\widehat{(SAB), (SBC)}) = \widehat{(EH, CH)} = \widehat{CHE} = 60°$$

Xét tam giác vuông CEH có $EH = CE.\cot 60° = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

Ta có $\Delta SAB \sim \Delta EHG$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{SA}{EH} = \dfrac{SB}{BE} \Rightarrow SA = \dfrac{EH.SB}{BE} = \dfrac{\frac{a}{\sqrt{3}}.\sqrt{SA^2 + 4a^2}}{a}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}SA = \sqrt{SA^2 + 4a^2} \Leftrightarrow 3SA^2 = SA^2 + 4a^2 \Leftrightarrow SA^2 = 2a^2 \Leftrightarrow SA = a\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho hàm số $y = \dfrac{3x+b}{ax-2}(ab \neq -2)$. Biết rằng a và b là các giá trị thỏa mãn tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(1;-4)$ song song với đường thẳng $d : 7x + y - 4 = 0$. Khi đó giá trị của $a - 3b$ bằng:

A -2. B 4. C 5. D -1.

Lời giải.

Phương pháp: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = x_0$ thuộc đồ thị hàm số là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Hai đường thẳng $y = a_1x + b_1$ và $y = a_2x + b_2$ song song với nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$

Cách giải:

Điều kiện: $ax - 2 \neq 0$.

Ta có $y' = \dfrac{-6 - ab}{(ax-2)^2}$

$d : 7x + y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = -7x + 4$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số có dạng: $d' : y = -7x + y_0 (y_0 \neq 4)$.

Ta có: $A(1;-4) \in d' \Rightarrow -4 = -7.1 + y_0 \Leftrightarrow y_0 = 3$ (thỏa mãn) $\Rightarrow d' : y = -7x + 3$ $A(1;-4)$ thuộc đồ thị hàm số và hệ số góc của d' là: $f'(1) = -7$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4 = \dfrac{3.1 + b}{a-2} \\ \dfrac{-6 - ab}{(a-2)^2} = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + 3 = -4(a-2) \\ -6 - ab = -7(a-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a + 5 \\ -6 - a(-4a+5) = -7a^2 + 28a - 28 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a + 5 \\ 11a^2 - 33a + 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a + 5 \\ \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \text{(thỏa mãn) } ab \neq -2) \\ \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \text{(thỏa mãn) } ab \neq -2) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a - 3b = 11 \\ a - 3b = -2 \end{array}\right.$$

Chọn đáp án A □

Câu 50. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho ba mặt phẳng $(P) \colon x - 2y + z - 1 = 0; (Q) \colon x - 2y + z + 8 = 0; (R) \colon x - 2y + z - 4 = 0$. Một đường thẳng d thay đổi cắt ba mặt $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại A, B, C. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = AB^2 + \dfrac{144}{AC^2}$.

A 24. B 36. C 72. D 144.

Lời giải.

Phương pháp:

+) Nhận xét $(P)//(Q)//(R)$

+) Sử dụng BĐT Cô-si và định lí Ta-let đánh giá biểu thức T.

Cách giải: Dễ dàng nhận thấy $(P)//(Q)//(R)$. Kẻ đường thẳng qua B vuông góc với cả 3 mặt phẳng $(P), (Q), (R)$, cắt (P) tại H và cắt (Q) tại K.

Ta có $BH = d\left((Q), (P)\right) = 9; HK = d\left((P), (R)\right) = 3$.

Khi đó ta có: $T = AB^2 + \dfrac{144}{AC^2} \geq 2\sqrt{AB^2.\dfrac{144}{AC^2}} = 24\dfrac{AB}{AC} = 24.\dfrac{BH}{HK} = 24.\dfrac{9}{3} = 72$.

Vậy $T_{\min} = 72$.

Chọn đáp án C $\square$

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. B	3. D	4. A	5. D	6. C	7. D	8. D	9. C	10. C
11. C	12. D	13. C	14. B	15. C	16. A	17. A	18. D	19. B	20. C
21. A	22. A	23. B	24. B	25. A	26. C	27. C	28. B	29. A	30. B
31. C	32. A	33. C	34. D	35. A	36. C	37. D	38. B	39. B	40. A
41. B	42. A	43. D	44. D	45. B	46. D	47. A	48. A	49. A	50. C

18 ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN BẮC NINH, BẮC NINH, LẦN 2 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ bằng

A. $\max\limits_{\left[-\frac{1}{2};1\right]} y = 4$. B. $\max\limits_{\left[-\frac{1}{2};1\right]} y = 6$. C. $\max\limits_{\left[-\frac{1}{2};1\right]} y = 3$. D. $\max\limits_{\left[-\frac{1}{2};1\right]} y = 5$.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Ta có $y' = 6x^2 + 6x$. Xét $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$.
- Ta có $y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$, $y(0) = -1$, $y(1) = 4$.
- Vậy $\max\limits_{\left[-\frac{1}{2};1\right]} y = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Xét các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

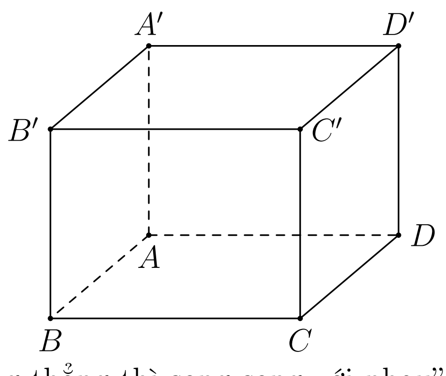
B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song songvới nhau.

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Lời giải.

- "Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau" và mệnh đề "Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau" là mệnh đề sai, ví dụ trong hình lập phương trên ta có $(C'B'BC)$ và $(D'B'BD)$ cùng vuông góc với $(ABCD)$ nhưng 2 mặt phẳng đó lại cắt nhau.



- "Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau" là mệnh đề sai ví dụ như trong hình lập phương trên ta có $A'B'$ và $C'B'$ cùng vuông góc với $B'B$ nhưng $A'B' \perp C'B'$.
- "Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau" là mệnh đề đúng .

Chọn đáp án C □

Câu 3. Một hình trụ có bán kính đáy , $r = a$ độ dài đường sinh $l = 2a$ Diện tích toàn phần của hình trụ này là

A. $2\pi a^2$. B. $4\pi a^2$. C. $6\pi a^2$. D. $5\pi a^2$.

Lời giải.
$S_{tp} = 2S_d + S_{xq} = 2\pi a^2 + 2\pi a \cdot 2a = 6\pi a^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến một đường thẳng thành chính nó?
(A) 1. (B) 2. (C) Không có. (D) Vô số.

Lời giải.
Có vô số phép tịnh tiến biến một đường thẳng thành chính nó. Đó là các phép tịnh tiến có véc tơ tịnh tiến là véc tơ không hoặc véc tơ tịnh tiến là véc tơ chỉ phương của đường thẳng đó.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{2x-1} > 27$ là
(A) $(3;+\infty)$. (B) $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$. (C) $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. (D) $(2;+\infty)$.

Lời giải.
- $3^{2x-1} > 27 \Leftrightarrow 3^{2x-1} > 3^3 \Leftrightarrow 2x-1>3 \Leftrightarrow x>2$.
- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(2;+\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$?
(A) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. (B) $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$.
(C) $y = \left(\frac{2}{e}\right)^x$. (D) $y = \log_{\frac{\pi}{4}} (2x^2+1)$.

Lời giải.
Hàm số $y = \left(\dfrac{2}{e}\right)^x$ là hàm số mũ, có cơ số $0 < a = \dfrac{2}{e} < 1$ nên hàm sốnghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Cho hàm số có $f(x)$ đạo hàm trên khoảng I. Xét các mệnh đề sau
(I) Nếu$f'(x) < 0 \quad \forall x \in$ I, thì hàm số nghịch biến trên I.
(II) Nếu $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$ (dấu bằng chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên I) thì hàm số nghịch biến trên I.
(III) Nếu $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$ thì số nghịch biến trên khoảng I.
(IV) Nếu $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$ và $f'(x) = 0$ tại vô số điểm trên I thì hàm số $f(x)$ không thể nghịch biến trên khoảng I.

Trong các mệnh đề trên. Mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào **sai**?
(A) (I), (II) và (IV) đúng, còn (III) sai. (B) (I), (II), (III) và (IV) đúng.
(C) (I) và (II) đúng, còn (III) và (IV) sai. (D) (I), (II) và (III) đúng, còn (IV) sai.

Lời giải.
- Câu (III) sai vì thiếu dấu bằng chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên I.
- Câu (IV) sai vì có thể vô số điểm trên I xuất hiện rời rạc thì vẫn có thể nghịch biến trên khoảng I.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Một nhóm có 10 người, cần chọn ra ban đại diện gồm 3 người. Số cách chọn là

(A) 240. (B) A_{10}^3. **C** C_{10}^3. (D) 360.

Lời giải.

Số cách chọn ra 3 người vào ban đại diện trong 10 người là C_{10}^3 (không phân biệt thứ tự).

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Trong mặt phẳng tọa độ cho Oxy bốn điểm $A(3;-5)$, $B(-3;3)$, ,$C(-1;-2)$, $D(5;-10)$. Hỏi $G\left(\dfrac{1}{3};-3\right)$ là trọng tâm của tam giác nào dưới đây?

(A) $\triangle ABC$. **B** $\triangle BCD$. (C) $\triangle ACD$. (D) $\triangle ABD$.

Lời giải.

- Ta thấy $\overrightarrow{BC}=(2;-5)$,$\overrightarrow{BD}=(8;-13)$ nên chúng không cùng phương B, C, D là 3 đỉnh của một tam giác.
- Mặt khác, ta lại có $\begin{cases}\dfrac{x_B+x_C+x_D}{3}=\dfrac{-3-1+5}{3}=\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{y_B+y_C+y_D}{3}=\dfrac{3-2-10}{3}=-3\end{cases}$.
- Vậy $G\left(\dfrac{1}{3};-3\right)$ là trọng tâm của tam giác BCD.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{5}}$ là

(A) $(0;+\infty)$. (B) $[1;+\infty]$. **C** $(1;+\infty)$. (D) $\mathbb{R}$.

Lời giải.

- Điều kiện xác định của hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{5}}$ là $x-1>0\Leftrightarrow x>1$.
- Vậy tập xác định $\mathscr{D}=(1;+\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

(A) $y=\tan x$. (B) $y=\sin x$. **C** $y=\cos x$. (D) $y=\cot x$.

Lời giải.

- Các hàm số $y=\sin x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$ là các hàm số lẻ.
- Hàm số $y=\cos x$ là hàm số chẵn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Gọi là d tiếp tuyến tại điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) d có hệ số góc dương. (B) d song song với đường thẳng $x=3$.

(C) d có hệ số góc âm. **D** d song song với đường thẳng $y=3$.

Lời giải.

- Ta có $y' = 3x^2 - 6x, y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = 2 \Rightarrow y = -2 \end{array}\right.$.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

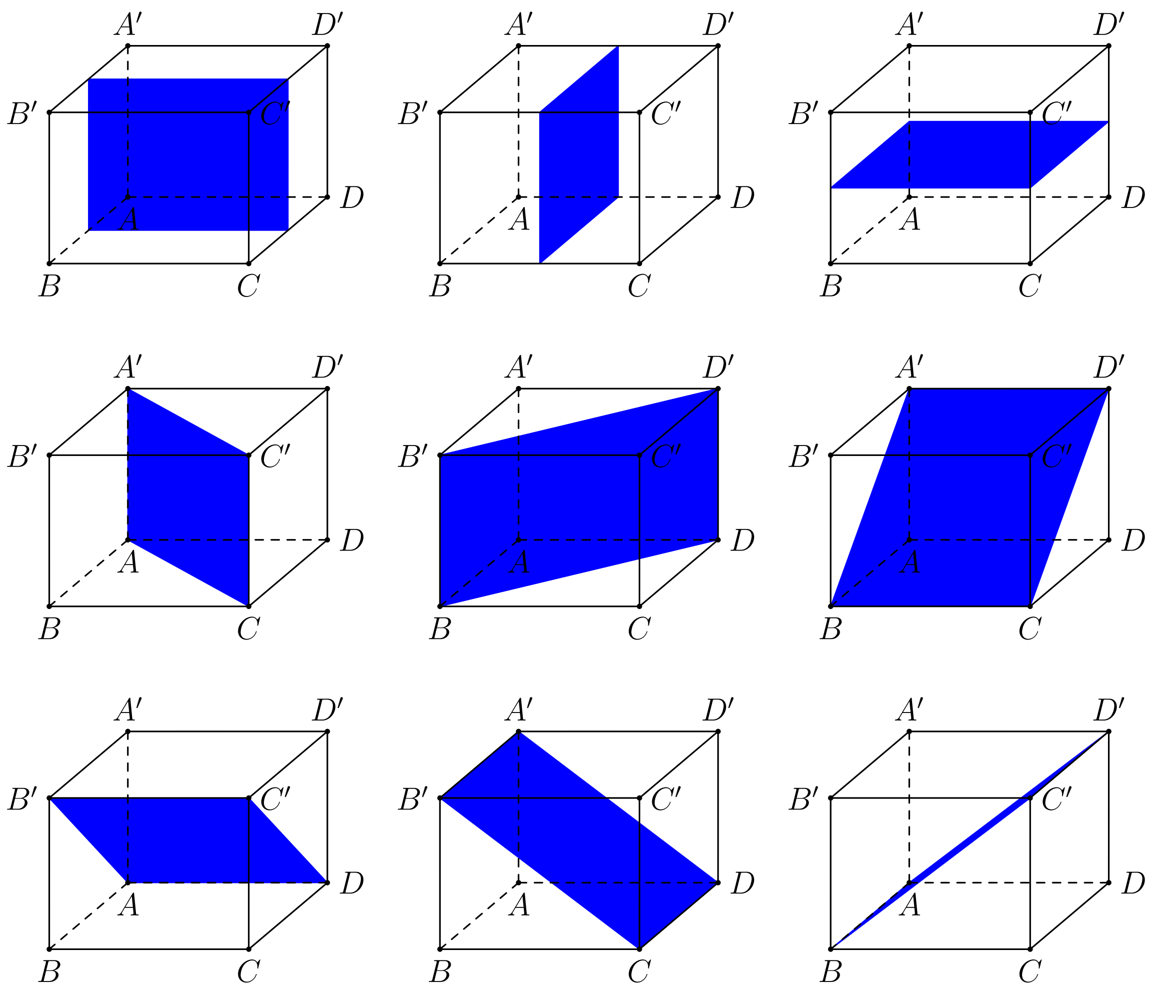
- Từ bảng biến thiên ta suy ra đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(0; 2)$.
- Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm cực đại là $y = 2$.
- Do đó song song d với đường thẳng $y = 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Hình lập phương có mấy mặt phẳng đối xứng?

A. 6. B. 8. C. 9. D. 7.

Lời giải.



Chọn đáp án C □

Câu 14. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số cộng?

Ⓐ $u_n = 3^{n+1}$. Ⓑ $u_n = \dfrac{2}{n+1}$. Ⓒ $u_n = \sqrt{n^2+1}$. **D** $u_n = \dfrac{5n-2}{3}$.

Lời giải.

- Ta có dãy (u_n) là cấp số cộng khi $u_{n+1} - u_n = d, \forall n \in \mathbb{N}^*$
- Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = \dfrac{5(n+1)-2}{3} - \dfrac{5n-2}{3} = \dfrac{5}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Vậy $u_n = \dfrac{5n-2}{3}$ là cấp số cộng.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 15. Cho dãy số $(u_n) : \begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Số 20 là số hạng thứ mấy trong dãy?

Ⓐ 5. **B** 6. Ⓒ 9. Ⓓ 10.

Lời giải.

- Ta có $u_1 = 5$, $u_2 = 6$, $u_3 = 8$, $u_4 = 11$, $u_5 = 16$, $u_6 = 20$.
- Vậy số là 20 số hạng thứ 6 .

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 16. A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng

Ⓐ $4\sqrt{2}$. **B** 4. Ⓒ 2. Ⓓ $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

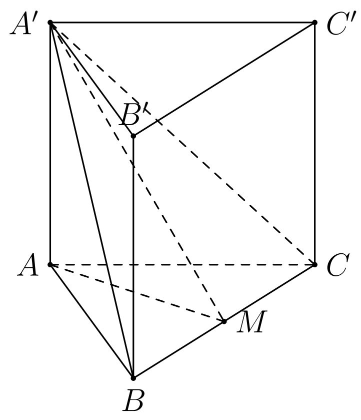
- Gọi $A\left(a; \dfrac{a}{a-2}\right)$ và $B\left(b; \dfrac{b}{b-2}\right)$ là hai điểm thuộc hai nhánh của (C), $(a < 2 < b)$.
- Ta có $\overrightarrow{AB} = \left(b-a; \dfrac{b}{b-2} - \dfrac{a}{a-2}\right) = \left(b-a; \dfrac{b-a}{(b-2)(2-a)}\right)$.
- Áp dụng BĐT Côsi ta có $(b-2)(2-a) \leq \dfrac{(b-a)^2}{4}$.
- $AB^2 = (b-a)^2 + \dfrac{(b-a)^2}{[(b-2)(2-a)]^2} \geq (b-a)^2 + \dfrac{64}{(b-a)^2} \geq 16 \Rightarrow AB \geq 4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = 2-\sqrt{2}$ và $b = 2+\sqrt{2}$.
- Vậy AB nhỏ nhất bằng 4.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 17. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 30° và tam giác có ABC diện tích bằng $8a^2$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A $8a^3\sqrt{3}$. Ⓑ $8a^3$. Ⓒ $\dfrac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. Ⓓ $\dfrac{8a^3}{3}$.

Lời giải.



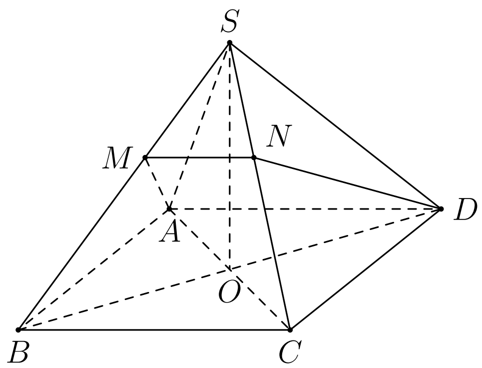
- Gọi là trung M điểm của BC. Ta chứng minh được $BC \perp (AA'M)$ nên góc giữa hai mặt phẳng và $(A'BC)$ mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{A'MA} = 30°$.
- Đặt $AB = x$, Tam giác ABC là hình chiếu của tam giác $A'BC$ lên mặt phẳng (ABC) nên $S_{ABC} = S_{A'B'C'} \cdot \cos 30^0 = 4a^2\sqrt{3}$ $\Rightarrow x = 4a \Rightarrow AM = 2a\sqrt{3}$.
- $\dfrac{AA'}{AM} = \tan 30° \Rightarrow AA' = 2a$.
- Vậy $V_{ABCA'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = 8a^3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành; M là một điểm thuộc đoạn SB (M khác S và B). Mặt phẳng (ADM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

(A) Hình bình hành. (B) Tam giác . (C) Hình chữ nhật. **(D) Hình thang.**

Lời giải.



- Ta có là M một điểm thuộc đoạn SB với M khác S và B.
- Suy ra $\begin{cases} M \in (ADM) \cap (SBC) \\ AD \subset (ADM) \\ BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases}$
  $\Rightarrow (ADM) \cap (SBC) = Mx \parallel BC \parallel AD$.
- Gọi $N = Mx \cap SC$ thì (ADM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác. Vì $MN \parallel AD$ và MN với AD không bằng nhau nên tứ giác $AMND$ là hình thang.

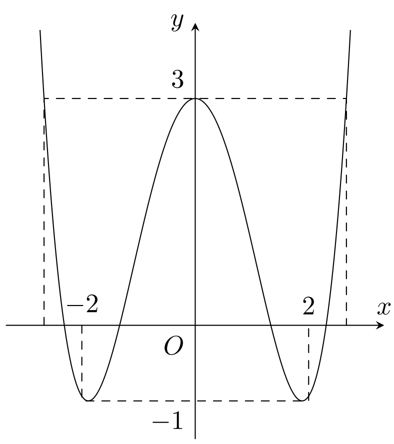
Chọn đáp án (D) □

Câu 19.

Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?

(A) $y = -x^4 + 4x^2 + 3$. (B) $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

(C) $y = (x^2 - 2)^2 - 1$. (D) $y = (x^2 + 2)^2 - 1$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có hệ số $a > 0$ và hàm số có ba điểm cực trị nên $a \cdot b < 0$ nên chọn $y = (x^2 - 2)^2 - 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{1}{\log_2(5-x)}$ là

A $(-\infty; 5) \setminus \{4\}$. (B) $(5; \infty)$. (C) $(-\infty, 5)$. (D) $[5; +\infty)$.

Lời giải.

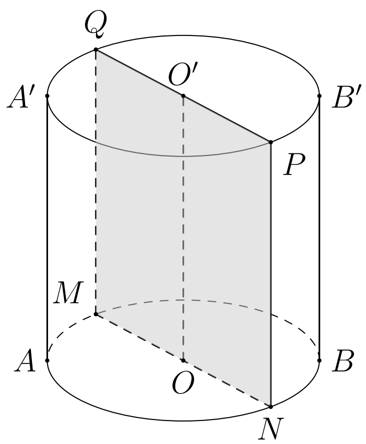
- Điều kiện $\begin{cases} 5 - x > 0 \\ \log_2(5-x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ 5 - x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x \neq 4 \end{cases}$.
- Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (-\infty; 5) \setminus \{4\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Cắt hình trụ (T) bằng một mặt phẳng đi qua trục được thiết diện là một hình chữ nhật có diện tích bằng 30cm^2 và chu vi bằng 26cm . Biết chiều dài của hình chữ nhật lớn hơn đường kính mặt đáy của hình trụ (T). Diện tích toàn phần của (T) là

(A) $23\pi\text{cm}^2$. (B) $\dfrac{23\pi}{2}\text{cm}^2$. **C** $\dfrac{69\pi}{2}\text{cm}^2$. (D) $69\pi\text{cm}^2$.

Lời giải.



Gọi h, r lần lượt là đường cao và bán kính đáy của hình trụ (T). Thiết diện của mặt phẳng và hình trụ (T) là hình chữ nhật $MNPQ$. Khi đó theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} h > 2r \\ S_{ABCD} = h \cdot 2r = 30 \\ C_{ABCD} = 2(h + 2r) = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h > 2r \\ hr = 15 \\ h + 2r = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h > 2r \\ h = 13 - 2r \\ -2r^2 + 15r - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h > 2r \\ h = 13 - 2r \\ \left[\begin{array}{l} r = 5 \Rightarrow h = 3 \\ r = \dfrac{3}{2} \Rightarrow h = 10 \text{ (n} \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy $S_{tp} = S_{xq} + 2S = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot \dfrac{3}{2} \cdot 10 + 2\pi \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{69\pi}{2}\text{cm}^2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Cho $\log_{12} 3 = a$. Tính $\log_{24} 18$ theo a

(A) $\dfrac{3a-1}{3-a}$. **B** $\dfrac{3a+1}{3-a}$. (C) $\dfrac{3a+1}{3+a}$. (D) $\dfrac{3a-1}{3+a}$.

Lời giải.

- $a = \log_{12} 3 = \dfrac{\log_2 3}{\log_2 12} = \dfrac{\log_2 3}{\log_2 (2^2 \cdot 3)} = \dfrac{\log_2 3}{\log_2 (2^2) + \log_2 3} = \dfrac{\log_2 3}{2 + \log_2 3} \Rightarrow \log_2 3 = \dfrac{2a}{1-a}$.
- $\log_{24} 18 = \dfrac{\log_2 18}{\log_2 24} = \dfrac{\log_2 (2.3^2)}{\log_2 (2^2 \cdot 3)} = \dfrac{1 + 2\log_2 3}{3 + \log_2 3} = \dfrac{1 + 2 \cdot \dfrac{2a}{1-a}}{3 + \dfrac{2a}{1-a}} = \dfrac{3a+1}{3-a}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Hệ số của số hạng chứa x^6 trong khai triển nhị thức $\left(\dfrac{3}{x} - \dfrac{x}{3}\right)^{12}$ (với $x \neq 0$) là

A $-\dfrac{220}{729}$. (B) $\dfrac{220}{729}x^6$. (C) $\dfrac{-220}{729}x^6$. (D) $\dfrac{220}{729}$.

Lời giải.

- Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(\dfrac{3}{x} - \dfrac{x}{3}\right)^{12}$ là

$$T = C_{12}^k \left(\frac{3}{x}\right)^{12-k} \left(-\frac{x}{3}\right)^k = C_{12}^k (-1)^k \cdot 3^{12-2k} x^{2k-12} (k \in \mathbb{Z}, k \leq 12).$$

- Số hạng chứ x^6 nên $2k - 12 = 6 \Leftrightarrow k = 9$.
- Vậy hệ số cần tìm là $C_{12}^9 (-1)^9 \cdot 3^6 = -\dfrac{220}{729}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Khối nón (N) có bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh bằng 15π. Tính thể tích V của khối nón (N).

(A) $V = 36\pi$. (B) $V = 60\pi$. (C) $V = 20\pi$. **D** $V = 12\pi$.

Lời giải.

- Ta có $S_{xq} = \pi r l \Rightarrow l = \dfrac{S_{xq}}{\pi r} = \dfrac{15\pi}{3\pi} = 5$ và chiều cao $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$.
- Vậy $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$.

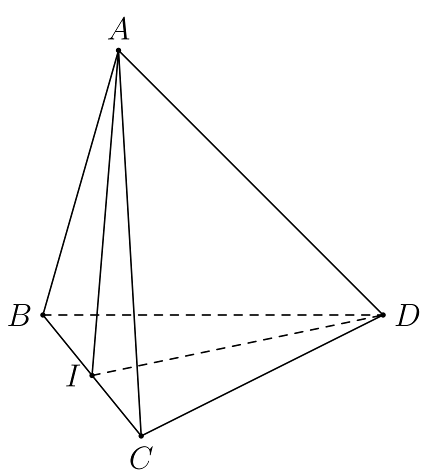
Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$, $DB = DC$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $AB \perp BC$. (B) $CD \perp (ABD)$. **C** $BC \perp AD$. (D) $AB \perp (ABC)$.

Lời giải.

- Gọi I là trung điểm BC. Ta có $AB = AC$, $IB = IC$ nên $BC \perp AI$. Tương tự $BC \perp DI$.
- Suy ra $BC \perp (AID)$ nên $BC \perp AD$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Cho phương trình $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$ Tính tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ của phương trình trên.

(A) $\frac{7\pi}{2}$. (B) π. (C) $\frac{3\pi}{2}$. (D) $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải.

- $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-\frac{\pi}{4}=x+\frac{3\pi}{4}+k2\pi\\2x-\frac{\pi}{4}=\pi-x-\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\x=\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.
  - ⊞ Xét $x=\pi+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.
    Do $0<x<\pi\Leftrightarrow 0<\pi+k2\pi<\pi\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<k<0$ vì $k\in\mathbb{Z}$ nên không có giá trị của k.
  - ⊞ Xét $x=\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbb{Z})$.
    Do $0<x<\pi\Leftrightarrow 0<\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}<\pi\Leftrightarrow -\frac{1}{4}<k<\frac{5}{4}$. Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên $k=0$, $k=1$. Suya ra $x=\frac{\pi}{6}$ và $x=\frac{5\pi}{6}$.
- Vậy tổng các nghiệm của phương trình đã cho trong khoảng $(0;\pi)$ là $\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}=\pi$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Hàm số nào trong bốn hàm số được liệt kê dưới đây không có cực trị?

(A) $y=\frac{2x-3}{x+2}$. (B) $y=x^4$. (C) $y=-x^3+x$. (D) $y=|x+2|$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=\frac{2x-3}{x+2}$.

- Tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$.
- $y'=\frac{7}{(x+2)^2}>0$, $\forall x\in\mathscr{D}$ nên hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định. Do đó hàm số không có cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{2x-3}{x+2}$ đi qua giao điểm hai đường tiệm cận?

(A) 1. (B) Không có. (C) Vô số. (D) 2.

Lời giải.

- Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=-\frac{d}{c}=-2$ làm tiệm cận đứng.
- Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y=\frac{a}{c}=2$ làm tiệm cận ngang.
- Vậy $I(-2;2)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.
- Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và $y'=\frac{7}{(x+2)^2}$.
  - ⊞ Gọi tiếp tuyến tại $M\left(x_0;y_0\right)$ có dạng $\Delta: y=y'\left(x_0\right)\cdot\left(x-x_0\right)+y_0$ hay $\Delta: y=\frac{7}{\left(x_0+2\right)^2}\cdot\left(x-x_0\right)+\frac{2x_0-3}{x_0+2}$.

⊞ Vì Δ đi qua $I(-2;2)$ nên

$$2=\frac{7}{(x_0+2)^2}\cdot(-2-x_0)+\frac{2x_0-3}{x_0+2} \Leftrightarrow 2=\frac{-7}{(x_0+2)^2}\cdot(x_0+2)+\frac{2x_0-3}{x_0+2}$$
$$\Leftrightarrow 2=\frac{-7}{(x_0+2)}+\frac{2x_0-3}{x_0+2}\Leftrightarrow 2=\frac{2x_0-10}{x_0+2}$$
$$\Leftrightarrow 4=-10 \text{ (vô nghiệm)}$$

- Vậy không tồn tại tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x+2}$ mà đi qua giao điểm của hai tiệm cận.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $D(3;4)$, $E(6;1)$, $F(7;3)$ lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA. Tính tổng tung độ của ba đỉnh tam giác ABC.

(A) $\frac{16}{3}$. (B) $\frac{8}{3}$. (C) 8. (D) 16.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} y_A+y_B=2y_D=2.4=8\\ y_A+y_C=2y_F=2.3=6\\ y_B+y_C=2y_E=2.1=2\end{cases} \Rightarrow 2\left(y_A+y_B+y_C\right)=8+6+2=16 \Rightarrow y_A+y_B+y_C=8.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Cho hình chóp có S.ABC đáy ABC là tam giác vuông cân $BA=BC=a$, $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^\circ$ biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) là

(A) $\frac{\pi}{6}$. (B) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$. (C) $\frac{\pi}{3}$. (D) $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải.

- Gọi là hình D chiếu vuông góc của S lên (ABC) và H chiếu vuông góc của D lên SC. Khi đó

  ⊞ $\begin{cases} AB\perp SA\\ AB\perp SD\end{cases} \Rightarrow AB\perp(SAD)\Rightarrow AB\perp AD.$

  ⊞ $\begin{cases} BC\perp SC\\ BC\perp SD\end{cases} \Rightarrow BC\perp(SDC)\Rightarrow BC\perp DC>$ Suy ra $ABCD$ là hình vuông và $CD=a.$

- Ta có $AD \parallel BC$ nên $AB \parallel (SBC)$. Do đó $d_{(A(SBC))}=d_{(D(SB))}=DH\Rightarrow DH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- VìDC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$ nên $\widehat{SCD}$ là góc của SC và (ABC).
- Ta có $\sin\widehat{SCD}=\frac{DH}{DC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\widehat{SCD}=\frac{\pi}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 31. Cho hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-3x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M\left(x_1;y_1\right)$ và $N\left(x_2;y_2\right)$ (M,N khác A) thỏa mãn $y_1-y_2=5\left(x_1-x_2\right)$?

Ⓐ 1. **B** 2. Ⓒ 0. Ⓓ 3.

Lời giải.

Ta có $y'=x^3-6x$.

- Gọi $A\left(x_0;\frac{1}{4}x_0^4-3x_0^2\right)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến tại A. Phương trình tiếp tuyến tại A là đường thẳng (d) có phương trình $y=\left(x_0^3-6x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{1}{4}x_0^4-3x_0^2$.
- Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C) là
$$\left(x_0^3-6x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{1}{4}x_0^4-3x_0^2=\frac{1}{4}x^4-3x^2 \Leftrightarrow \left(x-x_0\right)^2\left(x^2+2x_0x+3x_0^2-12\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-x_0=0\\ x^2+2x_0x+3x_0-12=0 \quad (2)\end{array}\right.$$
- (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt khác A khi và chỉ chi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác x_0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0\neq\pm\sqrt{2}\\ -\sqrt{6}<x_0<\sqrt{6}\end{array}\right. \quad (3).$
- Khi đó, phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;y_1)$, $N(x_2;y_2)$ trong đó
  - ⊞ $y_1=\left(x_0^3-6x_0\right)\left(x_1-x_0\right)+\frac{1}{4}x_0^4-3x_0^2$ và $y_2=\left(x_0^3-6x_0\right)\left(x_2-x_0\right)+\frac{1}{4}x_0^4-3x_0^2$.
  - ⊞ Suy ra $y_1-y_2=\left(x_0^3-6x_0\right)\left(x_1-x_2\right)$.
  - ⊞ Từ giả thiết ta có $\left(x_0^3-6x_0\right)\left(x_1-x_2\right)=5\left(x_1-x_2\right)\Leftrightarrow x_0^3-6x_0=5\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=-1\\ x_0=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\\ x_0=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\end{array}\right.$

    (vì $x_1\neq x_2$).
- Kết hợp với điều kiện (3) có hai giá trị x_0 thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\left[\begin{array}{l}x_0=-1\\ x_0=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\end{array}\right.$.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Giả sử đồ thị hàm số $y=\left(m^2+1\right)x^4-2mx^2+m^2+1$ có 3 điểm cực trị là A, B, C mà $x_A<x_B<x_C$.Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC ta được một khối tròn xoay. Giá trị của m để thể tích khối tròn xoay đó lớn nhất thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

Ⓐ $(4;6)$. **B** $(2;4)$. Ⓒ $(-2;0)$. Ⓓ $(0;2)$.

Lời giải.

- $y'=4\left(m^2+1\right)x^3-4mx=4x\left[\left(m^2+1\right)x^2-m\right]$.
- $y'=0\Leftrightarrow 4x\left[\left(m^2+1\right)x^2-m\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\sqrt{\dfrac{m}{m^2+1}} \quad (m>0)\end{array}\right.$
  - ⊞ Với $m>0$ thì hàm số có ba điểm cực trị với $x_A<x_B<x_C$ là $A\left(-\sqrt{\frac{m}{m^2+1}};-\frac{m^2}{m^2+1}+m^2+1\right)$, $B\left(0;m^2+1\right)$, $C\left(\sqrt{\frac{m}{m^2+1}};-\frac{m^2}{m^2+1}+m^2+1\right)$.

⊞ Quay $\triangle ABC$ quanh AC được khối tròn xoay có thể tích là

$$V = 2\cdot\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi BIIC = \frac{2}{3}\pi\left(\frac{m^2}{m^2+1}\right)\cdot\sqrt{\frac{m}{m^2+1}} = \frac{2}{3}\pi\sqrt{\frac{m^9}{(m^2+1)^5}}.$$

⊞ Xét hàm số $f(x) = \dfrac{m^9}{(m^2+1)^5}$ có

$*$ $f(x) = \dfrac{m^8(9-m^2)}{(m^2+1)^6}$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow m = 3 (m > 0)$.

$*$ Bảng biến thiên

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	max	↘	0

Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Giải phương trình $8\cos 2x\cdot\sin 2x\cdot\cos 4x = -\sqrt{2}$

(A) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{32} + k\dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{3\pi}{32} + k\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$.

(B) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{8} \\ x = \dfrac{3\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{8} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$.

(C) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{32} + k\dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{5\pi}{32} + k\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$.

(D) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{16} + k\dfrac{\pi}{8} \\ x = \dfrac{3\pi}{16} + k\dfrac{\pi}{8} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} 8\cos 2x\cdot\sin 2x\cdot\cos 4x = -\sqrt{2} &\Leftrightarrow 4\sin 4x\cdot\cos 4x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sin 8x = -\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow \sin 8x = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ 8x = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{32} + k\dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{5\pi}{32} + k\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{m\log_2 x - 2}{\log_2 x - m - 1}$ nghịch biến trên $(4;+\infty)$.

(A) $m < -2$ hoặc $m > 1$.

(B) $m \le -2$ hoặc $m = 1$.

(C) $m < -2$ hoặc $m = 1$.

(D) $m < -2$.

Lời giải.

- Đặt $t = \log_2 x$; Ta có $x \in (4;+\infty) \Rightarrow t \in (2;+\infty)$.
- Hàm số được viết lại $y = \dfrac{mt-2}{t-m-1}$. (1)

- Vì $t = \log_2 x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên yêu cầu bài toán Tương đương với (1) nghịch biến trên $(2; +\infty)$

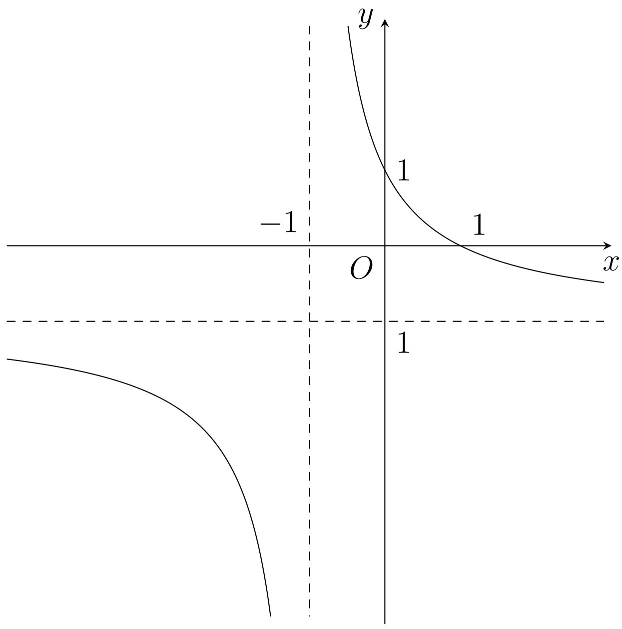
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m(m+1)+2<0 \\ m+1 \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>1 \end{array}\right. \\ m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow m<-2.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 35.
Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

(A) $y = \dfrac{-2x+1}{2x+1}$. **B** $y = \dfrac{-x+1}{x+1}$.

(C) $y = \dfrac{-x+2}{2x+1}$. (D) $y = \dfrac{-x}{x+1}$.



Lời giải.
Từ đồ thị của hàm số đã cho ta có

- Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng có phương trình $x = -1$.
- Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng có phương trình $y = -1$.
- Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(1; 0)$ và $(0; 1)$.
- Suy ra hàm số cần tìm là $y = \dfrac{-x+1}{x+1}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m+1)x^2 + (3-m)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

A $m \ge 3$. (B) $m > 3$. (C) $-\dfrac{1}{2} < m$. (D) $-\dfrac{1}{2} < m \le 3$.

Lời giải.
Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m+1)x^2 + (3-m)x + 2$.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ và $y' = 3x^2 - 2(2m+1)x + (3-m)$.
- Hàm số $y = f(|x|)$ có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa $x_1 \le 0 < x_2$.
  - ⊞ *Trường hợp 1.* Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm $x_1 \le 0 < x_2 \Leftrightarrow 3(3-m) < 0 \Leftrightarrow m > 3$.

⊞ *Trường hợp 2.* Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 0 < x_2$. Ta có $y'(0) = 0 \Rightarrow m = 3$.

Với $m = 3$ thì $y' = 3x^2 - 14x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{14}{3} > 0 \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

- Vậy $m \leq 3$ thì hàm số $y = f(|x|)$ có ba điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ $\overline{abc}$ sao cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác cân.

(A) 45. (B) 216. (C) 81. **D** 165.

Lời giải.

- *Trường hợp 1.* a, b, c là ba cạnh của một tam giác đều. Trường hợp này có 9 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- *Trường hợp 2.* a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác cân và không đều. Không mất tính tổng quát, giả sử $a = b$.

  ⊞ $a = b > c$

  $*$ $a = b = 2 \Rightarrow c = 1$.

  $*$ $a = b = 3 \Rightarrow c = 1, 2$.

  $*$ $a = b = 4 \Rightarrow c = 1, 2, 3$.

  ...

  $*$ $a = b = 9 \Rightarrow c = 1, 2, 3, \cdot, 8$

  Có $1 + 2 + 3 + \cdot + 8 = 36$ số.

  ⊞ $a = b < c$. Do $a + b > c \Rightarrow \dfrac{c}{2} < a < c$.

  $*$ $c = 9 \Rightarrow \dfrac{9}{2} < a < 9 \Rightarrow a = 5, 6, 7, 8$.

  $*$ $c = 8 \Rightarrow 4 < a < 8 \Rightarrow a = 5, 6, 7$.

  $*$ $c = 7 \Rightarrow \dfrac{7}{2} < a < 7 \Rightarrow a = 4, 5, 6$.

  $*$ $c = 6 \Rightarrow 3 < a < 6 \Rightarrow a = 4, 5$.

  $*$ $c = 5 \Rightarrow \dfrac{5}{2} < a < 4 \Rightarrow a = 3, 4$.

  $*$ $c = 4 \Rightarrow 2 < a < 4 \Rightarrow a = 3$.

  $*$ $c = 3 \Rightarrow \dfrac{3}{2} < a < 3 \Rightarrow a = 2$.

  $*$ $c = 2, 1$ không có a tương ứng.

  Có $4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 = 16$ số.

  $*$ Trường hợp $a = b \neq c$ có $36 + 16 = 52$ số.

  ⊞ Tương tự, mỗi trường hợp $b = c \neq a$ và $c = a \neq b$ đều có 52 số.

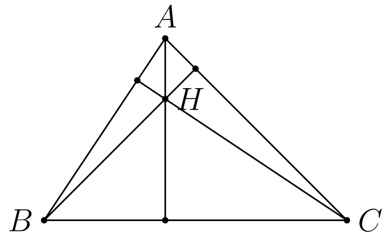
- Theo quy tắc cộng ta có $9 + 52 \cdot 3 = 165$ số thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-3; 0)$, $B(3; 0)$ và $C(2; 6)$. Gọi $H(a; b)$ là trực tâm tam giác ABC. Tính $6ab$.

A 10. (B) $\dfrac{5}{3}$. (C) 60. (D) 6.

Lời giải.



- Đường thẳng AH đi qua $A(-3;0)$ và nhận $\overrightarrow{BC} = (-1;6)$ làm véc-tơ pháp tuyến. Suy ra phương trình $AH\colon x - 6y + 3 = 0$.
- Đường thẳng BH qua $B(3;0)$ và nhận $\overrightarrow{AC} = (5;6)$ làm véc-tơ pháp tuyến. Suy ra phương trình đường thẳng $BH\colon 5x + 6y - 15 = 0$.
- Ta có $H = AH \cap BH$ tọa độ điểm H là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 6y + 3 = 0 \\ 5x + 6y - 15 = 0 \end{cases}$. Suy ra $H\left(2;\dfrac{5}{6}\right)$.
- Do đó $a = 2$, $b = \dfrac{5}{6}$ nên $6ab = 10$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Một chiếc thùng đựng nước có hình của một khối lập phương chứa đầy nước . Đặt vào trong thùng đó một khối có dạng nón sao cho đỉnh trùng với tâm một mặt của lập phương, đáy khối nón tiếp xúc với các cạnh của mặt đối diện. Tính tỉ số thể tích của lượng nước trào ra ngoài và lượng nước còn lại ở trong thùng.

A $\dfrac{\pi}{12-\pi}$. **B** $\dfrac{1}{11}$. **C** $\dfrac{\pi}{12}$. **D** $\dfrac{11}{12}$.

Lời giải.

- Coi khối lập phương có cạnh 1. Thể tích khối lập phường là $V = 1$
- Từ giả thiết ta suy ra khối nón có chiều cao $h = 1$, bán kính đáy $r = \dfrac{1}{2}$.
- Thể tích lượng nước trào ra ngoài là thể tích V_1 của khối nón. Ta có $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi\cdot 1 = \dfrac{\pi}{12}$.
- Thể tích lượng nước còn lại trong thùng là $V_2 = V - V_1 = 1 - \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{12-\pi}{12}$.
- Do đó $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\pi}{12-\pi}$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. CHo giới hạn $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}} = \dfrac{a}{b}$ (phân số tối giản). Giá trị của $T = 2a - b$ bằng

A $\dfrac{1}{9}$. **B** -1. **C** 10. **D** $\dfrac{9}{8}$.

Lời giải.

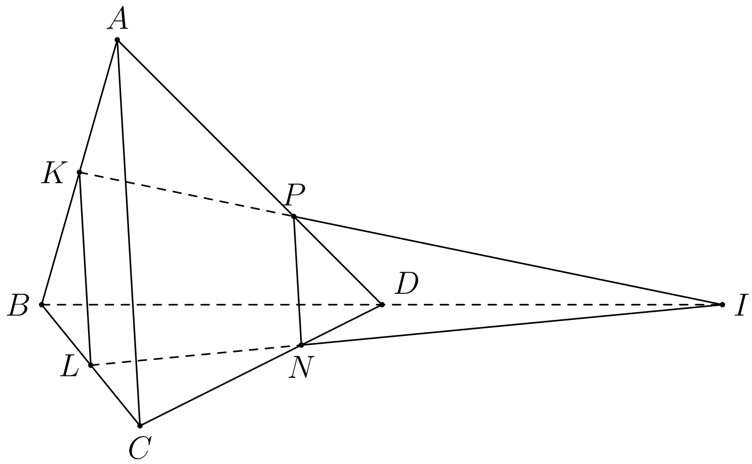
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}} &= \lim \lim_{x\to 3}\frac{\left(x^2-3x\right)\left(x+\sqrt{4x-3}\right)}{\left(x^2-\sqrt{4x-3}\right)\left(x+1+\sqrt{5x+1}\right)} \\ &= \lim_{x\to 3}\frac{x\left(x+\sqrt{4x-3}\right)}{(x+1)\left(x+1+\sqrt{5x+1}\right)} = \frac{9}{8}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 41. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi K, L lần lượt là trung điểm của AB và BC; N là điểm thuộc đoạn CD sao cho $CN = 2ND$. Gọi P là giao điểm của AD với mặt phẳng (KLM). Tính tỉ số $\dfrac{PA}{PD}$

(A) $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{1}{2}$. (B) $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{2}{3}$. (C) $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{3}{2}$. (D) $\dfrac{PA}{PD} = 2$.

Lời giải.



- Giả sử $LN \cap BD = I$; nối K với I cắt AD tại P; suy ra $(KLN) \cap AD = P$.
- Ta có $KL \parallel AC \Rightarrow \dfrac{PA}{PD} = \dfrac{NC}{ND} = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Tìm số nghiệm của phương trình $\log_2 x + \log_2(x-1) = 2$.

(A) 0. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

- Điều kiện $x > 1$.
- Ta có

$$\begin{aligned}\log_2 x + \log_2(x-1) = 2 &\Leftrightarrow \log_2 x(x-1) = 2 \Leftrightarrow x(x-1) = 2\\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\\ x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\end{array}\right. .\end{aligned}$$

- Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{x+\sqrt{17}}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Hàm số $y = \ln\left(x^2 + mx + 1\right)$ xác định với mọi giá trị của x khi

(A) $\left[\begin{array}{l} m < -2\\ m > 2\end{array}\right.$. (B) $m > 2$. (C) $-2 < m < 2$. (D) $m < 2$.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow x^2 + mx + 1 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Trong một lớp có $(2n+3)$ học sinh gồm An, Bình, Chi cùng $2n$ học sinh khác. Khi xếp tùy ý các học sinh này vào dãy ghế được đánh số từ 1 đến $(2n+3)$, mỗi học sinh ngồi một ghế thì xác xuất để số ghế của An, Bình, Chi theo thứ tự lập thành cấp số cộng là $\dfrac{17}{1155}$. Số học sinh của lớp là

(A) 27. (B) 25. (C) 45. **(D) 35.**

Lời giải.

- Số cách xếp học sinh vào ghế là $(2n+3)!$.
- Nhận xét: Nếu ba số tự nhiên a, b, c lập thành một cấp số cộng thì $a+c=2b$ nên $a+c$ là số chẵn. Như vậy a, c phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Từ 1 đến $2n+3$ có $n+1$ số chẵn và $n+2$ số lẻ.
- Muốn có một cách xếp học sinh thỏa số ghế của An, Bình, Chi theo thứ tự lập thành một cấp số cộng ta sẽ tiến hành như sau
  - ⊞ *Bước 1.* chọn hai ghế có số thứ tự cùng chẵn hoặc cùng lẻ rồi xếp An và Chi vào, sau đó xếp Bình vào ghế chính giữa. Bước này có $\mathrm{A}_{n+1}^2+\mathrm{A}_{n+2}^2$ cách.
  - ⊞ *Bước 2.* xếp chỗ cho $2n$ học sinh có $(2n)!$. Như vậy số cách xếp thỏa yêu cầu này là $\left(\mathrm{A}_{n+1}^2+\mathrm{A}_{n+2}^2\right)\cdot(2n)!$. Ta có

$$\frac{\left(\mathrm{A}_{n+1}^2+\mathrm{A}_{n+2}^2\right)\cdot(2n)!}{(2n+3)!}=\frac{17}{1155}\Leftrightarrow\frac{n(n+1)+(n+1)(n+2)}{(2n+1)+(2n+2)(2n+3)}=\frac{17}{1155}$$
$$\Leftrightarrow 68n^2-1019n-1104=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=16\\ n=-\dfrac{69}{68}.\end{array}\right.$$

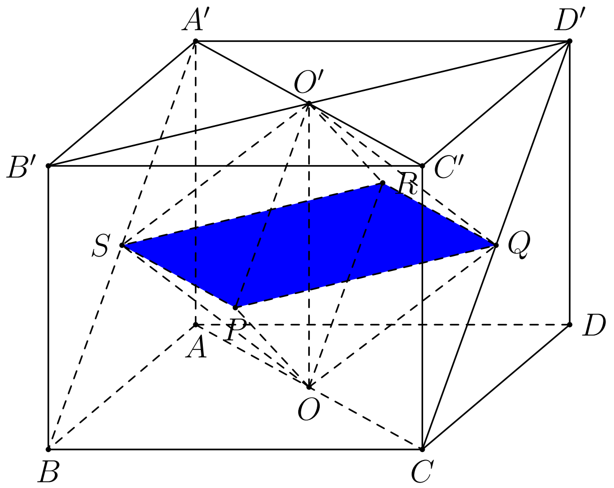
- Vậy số học sinh của lớp là 35.

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Cho một khối lập phương có cạnh bằng a. Tính theo a thể tích của khối bát diện đều có các đỉnh là tâm các mặt của khối lập phương.

(A) $\dfrac{a^3}{4}$. **(B) $\dfrac{a^3}{6}$.** (C) $\dfrac{a^3}{12}$. (D) $\dfrac{a^3}{8}$.

Lời giải.



- Giả sử hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a và tâm các mặt là P, Q, R, S, O, O' như hình vẽ.
- Ta có là PQ đường trung bình của tam giác đều $B'CD'$ cạnh $a\sqrt{2}$ nên $PQ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Do đó $S_{PQRS} = PQ^2 = \dfrac{1}{2}a^2$ và $OO' = a$.
- Vậy thể tích bát diện cần tìm là $V = \dfrac{1}{3}S_{PQRS} \cdot OO' = \dfrac{1}{6}a^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y = a^x (a > 0; a \neq 1)$ qua điểm $I(1;1)$. Giá trị của biểu thức $f\left(2 + \log_a \dfrac{1}{2018}\right)$ bằng

A. 2016. **B.** -2016. C. 2020. D. -2020.

Lời giải.

- Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = a^x$; (C_1) là đồ thị hàm số $y = f(x)$.
- $M\left(2 + \log_a \dfrac{1}{2018}; y_M\right) \in (C_1) \Leftrightarrow y_M = f\left(2 + \log_a \dfrac{1}{2018}\right)$.
- Gọi N đối xứng với M qua $I(1;1) \Rightarrow N\left(-\log_a \dfrac{1}{2018}; 2 - y_M\right)$.
- Do đồ thị (C_1) đối xứng (C) qua $I(1;1)$ nên $N\left(-\log_a \dfrac{1}{2018}; 2 - y_M\right) \in (C)$.
- $N \in (C) \Leftrightarrow 2 - y_M = a^{-\log \frac{1}{2018}} \Leftrightarrow 2 - y_M = 2018 \Leftrightarrow y_M = -2016$.
- Vậy $f\left(2 + \log_a \dfrac{1}{2018}\right) = -2016$.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m \sin x - 1$ đồng biến trên đoạn $\left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right]$

A. $m \geq -3$. **B.** $m \geq 0$. C. $m \leq -3$. D. $m \leq 0$.

Lời giải.

- Ta có $y = f(x) = \sin^3 x + 3\sin^2 x - m\sin x - 4 \quad (1)$. Đặt $t = \sin x$, do $x \in \left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1;0]$.
- Hàm số (1) trở thành $y = g(t) = t^3 + 3t^2 - mt - 4. \quad (2)$
- Hàm số (1) đồng biến trên $\left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi hàm số (2) nghịch biến trên $[-1;0]$ $\Leftrightarrow g'(t) \leq 0, \forall t \in [-1;0]$ ($g'(t) = 0$ tại hữa hạn điểm).
- Xét hàm số $y = g(t) = t^3 + 3t^2 - mt - 4$ trên $[-1;0]$. Ta có $g'(t) = 3t^2 + 6t - m$. Suy ra

$$\begin{aligned} g'(t) \leq 0,\ t \in [-1;0] &\Leftrightarrow 3t^2 + 6t - m \leq 0 \quad \forall t \in [-1;0] \\ &\Leftrightarrow 3t^2 + 6t \leq m, \quad \forall t \in [-1;0]. \end{aligned}$$

- Xét hàm số $y = h(t) = 3t^2 + 6t$ trên đoạn $[-1;0]$.
  Ta có $h'(t) = 6t + 6 \geq 0, \quad t \in [-1;0] \Rightarrow h(t)$ đồng biến trên $[-1;0]$. Vậy max $\lim\limits_{[-1;0]} h(t) =$

$h(0) = 0$.

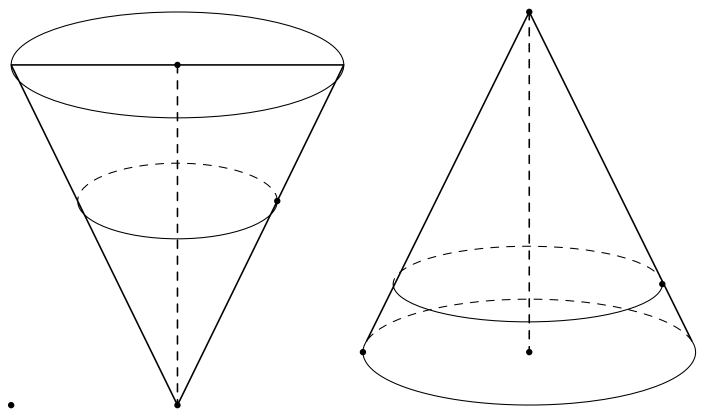
Tức là $g'(t) \le 0, \quad t \in [-1;0] \Leftrightarrow \max \lim\limits_{[-1;0]} h(t) \le m, \quad t \in [-1;0]$. Do đó, $m \ge 0$.

Hàm số (1) đồng biến trên $\left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi $m \in [0;+\infty)$.

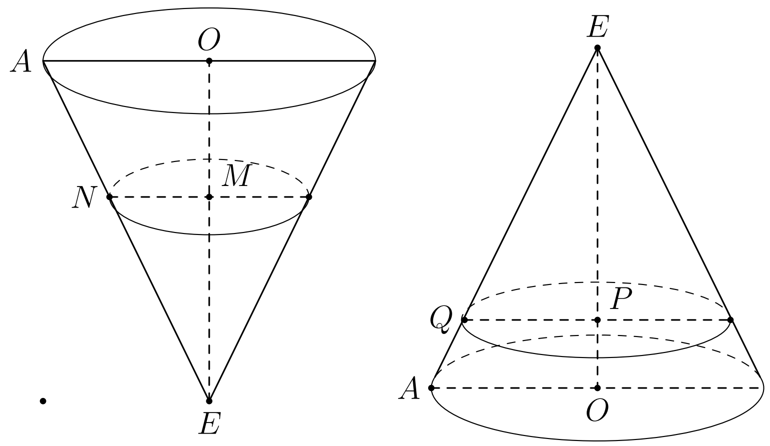
Chọn đáp án B □

Câu 48. Một cái phễu có dạng hình nón chiều cao của phễu là 30cm. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu bằng 15cm. Nếu bịt kín miệng phễu rồi lật ngược phễu lên thì chiều cao của cột nước trong phễu gần bằng với giá trị nào sau đây?

(A) 1,553cm. (B) 1,306cm. (C) 1,233cm. (D) 15cm.



Lời giải.



- Phễu có dạng hình nón, gọi E là đỉnh, đáy là đường tròn tâm O, bán kính OA chiều cao $OE = 30$cm.
- Gọi V là thể tích của khối nón có đỉnh E đáy là đường tròn tâm O , bán kính OA. Ta có $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot OA^2 \cdot OE = 10\pi OA^2$.
- Gọi M là trung điểm của đoạn OE, N là trung điểm của EA.Khi đổ nước vào phễu chiều cao của cột nước là $EM = 15$cm. Gọi V_1 là thể tích của khối nón có đỉnh E, đáy là đường tròn tâm M, bán kính MN. Thể tích nước là $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi \cdot MN^2 - EM = 5\pi \cdot MN^2 = \dfrac{5}{4}\pi \cdot OA^2 \Rightarrow V_1 = \dfrac{1}{8}V$.
- Khi bịt kín miệng phễu rồi lật ngược phễu lên, chiều cao của cột nước là OP. Gọi V_2 là thể

tích của khối nón có đỉnh E , đáy là đường tròn tâm P , bán kính PQ. Ta có

$$V_2 = V - V_1 = \frac{7}{8}V \Leftrightarrow \frac{V_2}{2} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3}\pi \cdot PQ^2 \cdot PE}{\frac{1}{3}\pi \cdot \mathrm{OA}^2 \cdot \mathrm{OE}} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \frac{PQ^2PE}{\mathrm{OA}^2 \cdot \mathrm{OE}} = \frac{7}{8} \quad (1).$$

- Ta có $\triangle PEQ$ vuông tại P và $\triangle OEA$ vuông tại O. Ta có $\widehat{OEA} = \overline{PEQ} \Rightarrow \triangle PEQ$ và $\triangle OEA$ đồng dạng nên $\dfrac{PQ}{OA} = \dfrac{PE}{OE}$. Do đó

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{PE}{OE}\right)^3 = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \frac{PE}{OE} = \frac{\sqrt[3]{7}}{2} \Leftrightarrow \frac{OE - OP}{OE} = \frac{\sqrt[3]{7}}{2}$$
$$\Leftrightarrow DP = OE\left(1 - \frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right) = 30\left(1 - \frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right) \approx 1{,}306.$$

Chọn đáp án B □

Câu 49. Hàm số $y = \log_2\left(4^x - 2^x + m\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi

A $m \geq \dfrac{1}{4}$. **B** $m > 0$. **C** $m < \dfrac{1}{4}$. **D** $m > \dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

- Điều kiện $4^x - 2^x + m > 0$.
- Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R} \Leftrightarrow 4^x - 2^x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m > -4^x + 2^x, \forall x \in \mathbb{R}$. $(*)$

- Đặt $t = 2^x$, $t > 0$. Khi đó $(*)$ trở thành $m > -t^2 + t, \forall t > 0 \Leftrightarrow \max \lim\limits_{(0;+\infty)} f(t)$ với $f(t) = -t^2 + t$, $t > 0$.
  - ⊞ Ta có $f'(t) = -2t + 1$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$.
  - ⊞ Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$+\infty$

  - ⊞ Từ bảng biến thiên ta thấy $\max \lim\limits_{(0;+\infty)} f(t) = \dfrac{1}{4}$ đạt được khi $t = \dfrac{1}{2}$.
  - ⊞ Vậy $m > \max\limits_{(0;+\infty)} f(t) \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho hình thang vuông $ABCD$ với đường cao $AB = 2a$, các cạnh đáy $AD = a$ và $BC = 3a$. Gọi M là điểm trên đoạn AC sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$. Tìm k để $BM \perp CD$.

A $\dfrac{4}{9}$. **B** $\dfrac{3}{7}$. **C** $\dfrac{1}{3}$. **D** $\dfrac{2}{5}$.

Lời giải.

- Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho gốc tọa độ trùng với điểm B, điểm A thuộc trục Oy và điểm C thuộc trục Ox.

- Theo bài ra ta có $B(0;0)$, $A(0;2)$, $C(3;0)$ và $D(1;2)$.
- Khi đó, $\overrightarrow{AC}=(3;-2)$. Phương trình tham số của đường thẳng AC là $\begin{cases}x=3t\\ y=2-2t.\end{cases}$
- Gọi $M\in AC\Rightarrow M(3t;2-2t)$. Ta có $\overrightarrow{BM}=(3t;2-2t)$ và $\overrightarrow{DC}=(2;-2)$.
- Để $BM\perp DC$ thì $\overrightarrow{BM}\overrightarrow{DC}=0\Leftrightarrow 6t-4+4t=0\Leftrightarrow t=\dfrac{2}{5}\Rightarrow M\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{6}{5}\right)$.
- Khi đó $\overrightarrow{AM}=\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{-4}{5}\right)\Rightarrow AM=\dfrac{\sqrt{52}}{5}$ và $\overrightarrow{AC}(3;-2)\Rightarrow AC=\sqrt{13}$.
- Vì $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng chiều nên $k=\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{\sqrt{52}}{5\sqrt{13}}=\dfrac{2}{5}$.

Chọn đáp án D □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. C	3. C	4. D	5. D	6. C	7. C	8. C	9. B	10. C
11. C	12. D	13. C	14. D	15. B	16. B	17. A	18. D	19. C	20. A
21. C	22. B	23. A	24. D	25. C	26. B	27. A	28. B	29. C	30. C
31. B	32. B	33. B	34. D	35. B	36. A	37. D	38. A	39. A	40. C
41. D	42. B	43. C	44. D	45. B	46. B	47. B	48. B	49. D	50. D

19 ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN BẮC NINH - BẮC NINH - LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 5$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(0; 2)$. (B) $(0; +\infty)$.
(C) $(-\infty; 2)$. **(D)** $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là một cấp số cộng?

(A) $u_n = n^2 + 1$, $n \geq 1$. (B) $u_n = 2^n$, $n \geq 1$.
(C) $u_n = \sqrt{n+1}$, $n \geq 1$. **(D)** $u_n = 2n - 3$, $n \geq 1$.

Lời giải.

Xét dãy số (u_n) với $u_n = 2n - 3$, $n \geq 1$. Ta có $u_{n+1} - u_n = (2n - 1) - (2n - 3) = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Nên (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Hàm số có đạo hàm bằng $2x + \dfrac{1}{x^2}$ là

(A) $y = \dfrac{2x^3 - 2}{x^3}$. (B) $y = \dfrac{x^3 + 1}{x}$. (C) $y = \dfrac{3x^3 + 3x}{x}$. **(D)** $y = \dfrac{x^3 + 5x - 1}{x}$.

Lời giải.

Ta xét $\displaystyle\int \left(2x + \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x = x^2 - \frac{1}{x} + C = \frac{x^3 + Cx - 1}{x}$.

Chọn $C = 5$ ta được hàm số thoả yêu cầu bài toán là $y = \dfrac{x^3 + 5x - 1}{x}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là

(A) $y = f'(x)(x - x_0) + f(x_0)$. (B) $y = f'(x)(x - x_0) - f(x_0)$.
(C) $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. (D) $y = f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$.

Lời giải.

Theo ý nghĩa hình học của đạo hàm, phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ là $y = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + f\left(x_0\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}-2}{x-2}$ bằng

A $-\infty$. B 1. C $+\infty$. D -1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}-\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{2}{x}} = \dfrac{\sqrt{1+0}-0}{1-0} = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Cho tập hợp S gồm 20 phần tử. Tìm số tập con gồm 3 phần tử của S.

A A_{20}^3. B C_{20}^3. C 60. D 20^3.

Lời giải.

Số tập con gồm 3 phần tử trong một tập hợp 20 phần tử là một tổ hợp chập 3 của 20.

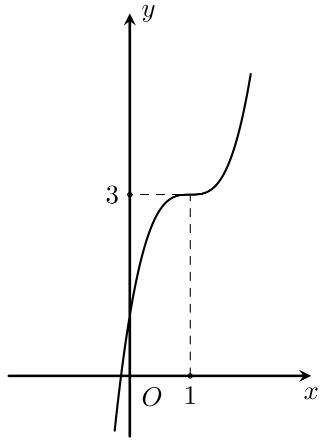
Chọn đáp án B □

Câu 7.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số ở dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A $y = 2x^3 - x^2 + 6x + 1$. B $y = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 1$.

C $y = 2x^3 - 6x^2 - 6x + 1$. D $y = -2x^3 - 6x^2 - 6x + 1$.



Lời giải.

Dựa vào hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số đi qua điểm $I\left(1;3\right)$. Thay lần lượt toạ độ điểm I vào từng đáp án, nhận thấy rằng chỉ có hàm số $y = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 1$ là thoả mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là

A $x = 1$ và $y = 2$. B $x = 2$ và $y = 1$. C $x = 1$ và $y = -3$. D $x = -1$ và $y = 2$.

Lời giải.

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x-3}{x-1} = 2$ nên $y = 2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị.
- $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{2x-3}{x-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{2x-3}{x-1} = +\infty$ nên $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Có 7 bông hồng đỏ, 8 bông hồng vàng và 10 bông hồng trắng, các bông hồng khác màu nhau từng đôi một. Hỏi có bao nhiêu cách lấy 3 bông hồng có đủ ba màu?

(A) 319. (B) 3014. (C) 310. **D** 560.

Lời giải.

Có 7 cách chọn một bông hồng đỏ, 8 cách chọn một bông hồng vàng, 10 cách chọn một bông hồng trắng.

Vậy số cách để lấy 3 bông hồng có đủ ba màu là $7 \cdot 8 \cdot 10 = 560$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Giá trị của m làm cho phương trình $(m-2)\,x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt là

(A) $m > 6$. (B) $m < 6$ và $m \neq 2$.

C $2 < m < 6$ hoặc $m < -3$. (D) $m < 0$ hoặc $2 < m < 6$.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán tương đương với

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m^2 - (m-2)(m+3) > 0 \\ \dfrac{2m}{m-2} > 0 \\ \dfrac{m+3}{m-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m < 6 \\ \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < m < 6 \\ m < -3 \end{array}\right..$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định **sai**?

A Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

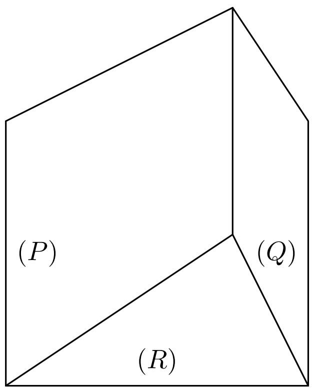
(B) Nếu một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì cũng vuông góc với đường thẳng còn lại.

(C) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

(D) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Lời giải.

Trong hình bên ta thấy hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với (R) nhưng không song song với nhau.



Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), AH là đường cao trong tam giác SAB. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định **sai**?

A $AH \perp AC$. **B** $AH \perp BC$. **C** $SA \perp BC$. **D** $AH \perp SC$.

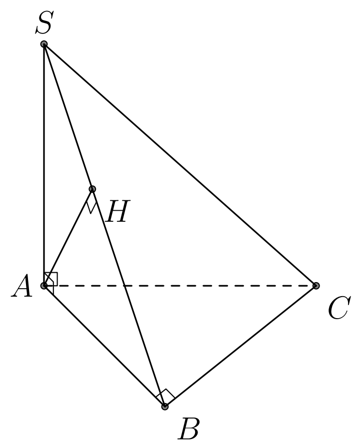
Lời giải.

Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ (1).

Mà $SB \perp AH$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $AH \perp (SBC)$ nên $AH \perp SC$.



Chọn đáp án A □

Câu 13. Cho hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = f'(x_0) = -9$.

A $y + 16 = -9(x + 3)$. **B** $y = -9(x + 3)$.

C $y - 16 = -9(x - 3)$. **D** $y - 16 = -9(x + 3)$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 + 6x$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là toạ độ tiếp điểm.

Tiếp tuyến với đồ thị (C) tại M có hệ số góc $k = f'(x_0) = -9$

$\Leftrightarrow x_0^2 + 6x_0 = -9 \Leftrightarrow x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 16$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại tiếp điểm M là

$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y - 16 = -9(x + 3)$.

Chọn đáp án D □

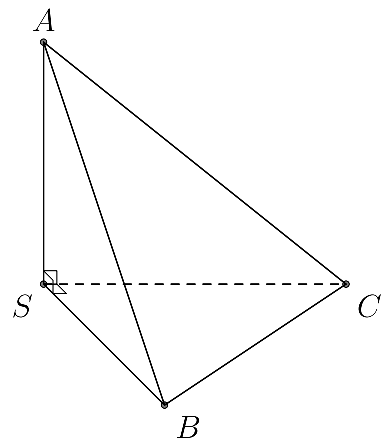
Câu 14. Cho tứ diện $SABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Biết $SA = 3a$, $SB = 4a$, $SC = 5a$. Tính theo a thể tích V của khối tứ diện $SABC$.

A $V = 20a^3$. **B** $V = 10a^3$. **C** $V = \dfrac{5a^3}{2}$. **D** $V = 5a^3$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} SA \perp SC \\ SA \perp SB \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC)$.

Nên $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta SBC} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot \dfrac{1}{2} \cdot SB \cdot SC = 10a^3$.



Chọn đáp án B □

Câu 15. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Tứ diện có bốn cạnh bằng nhau là tứ diện đều.

(B) Hình chóp tam giác đều là tứ diện đều.

(C) Tứ diện có bốn mặt là bốn tam giác đều là tứ diện đều.

(D) Tứ diện có đáy là tam giác đều là tứ diện đều.

Lời giải.

Theo định nghĩa.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Hàm số $y = \dfrac{2\sin x + 1}{1 - \cos x}$ xác định khi

(A) $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$. (B) $x \neq k\pi$. (C) $x \neq k2\pi$. (D) $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $1 - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng (a, b). Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

(A) Hàm số $y = f(x+1)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$.

(B) Hàm số $y = -f(x) + 1$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$.

(C) Hàm số $y = f(x) + 1$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$.

(D) Hàm số $y = -f(x) - 1$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng (a, b) nên $f'(x) \geq 0$, $\forall\, x \in (a, b)$ và dấu bằng chỉ xảy ra hữu hạn điểm thuộc (a, b).

Hàm số $y = -f(x) + 1$ và $y = -f(x) - 1$ có đạo hàm bằng $f'(x) \leq 0$, $\forall\, x \in (a, b)$ nên hai hàm số trên nghịch biến trên (a, b).

Hàm số $y = f(x) + 1$ có đạo hàm bằng $f'(x) \geq 0$, $\forall\, x \in (a, b)$ nên hàm số đồng biến trên (a, b).

Hàm số $y = f(x+1)$ đồng biến trên khoảng $(a - 1; b - 1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - 4x\right)$ là

A $-4\cos 4x$. **B** $4\cos 4x$. **C** $4\sin 4x$. **D** $-4\sin 4x$.

Lời giải.

Ta có $y = \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - 4x\right) = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{2} - 4x\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 4x\right) = -\cos 4x$ nên $y' = 4\sin 4x$.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Phương trình $\cos x - m = 0$ vô nghiệm khi m là

A $-1 \le m \le 1$. **B** $m > 1$. **C** $m < -1$. **D** $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Phương trình $\cos x - m = 0 \Leftrightarrow \cos x = m$.

Vì $-1 \le \cos x \le 1$, $\forall x$ nên phương trình trên vô nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right.$.

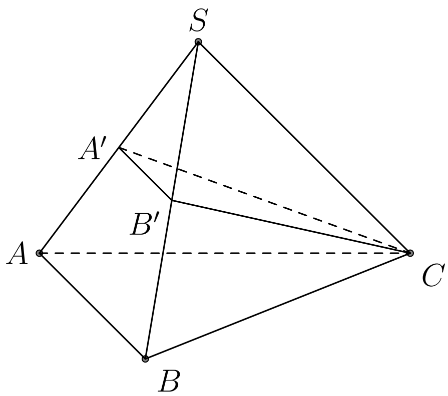
Chọn đáp án D □

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có A', B' lần lượt là trung điểm của SA, SB. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối chóp $S.A'B'C'$ và $S.ABC$. Tính tỷ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A $\dfrac{1}{8}$. **B** $\dfrac{1}{4}$. **C** $\dfrac{1}{2}$. **D** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{SA'}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.



Chọn đáp án B □

Câu 21. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $A(2;1)$, $B(-1;2)$, $C(3;0)$. Tứ giác $ABCE$ là hình bình hành khi toạ độ điểm E là cặp số nào dưới đây?

A $(6;-1)$. **B** $(0;1)$. **C** $(1;6)$. **D** $(6;1)$.

Lời giải.

$ABCE$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E - 2 = 4 \\ y_E - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 6 \\ y_E = -1 \end{cases}$. Vậy $E(6;-1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Cho đường thẳng $d : 2x - y + 1 = 0$. Để phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ biến đường thẳng d thành chính nó thì $\vec{v}$ phải là véc-tơ nào sau đây?

A $\vec{v} = (-1;2)$. **B** $\vec{v} = (2;-1)$. **C** $\vec{v} = (1;2)$. **D** $\vec{v} = (2;1)$.

Lời giải.

Phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ biến đường thẳng d thành chính nó khi và chỉ khi $\vec{v} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v}$ là một véc-tơ chỉ phương của d. Từ phương trình đường thẳng d, ta thấy $\vec{v} = (1; 2)$ là một véc-tơ chỉ phương của d.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Hàm số nào sau đây đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A $y = x^3 + 2$. B $y = x^2 + 1$. C $y = -x^3 + x - 1$. D $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^2 + 1$ có $y' = 2x$ và $y'' = 2$.

Vì $\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y''(0) = 2 > 0 \end{cases}$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 24.

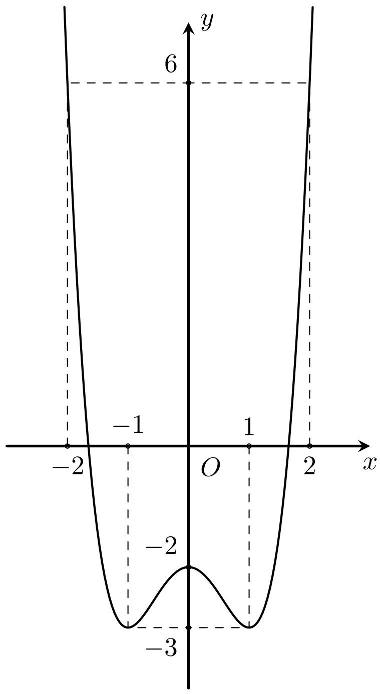
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

B Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

C Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

D Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

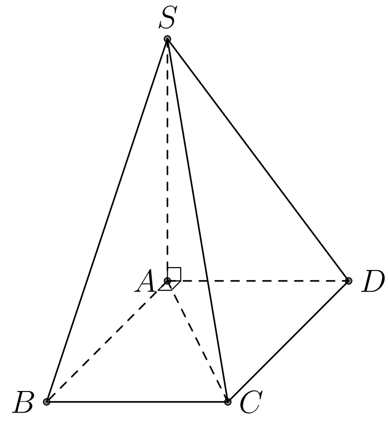
Chọn đáp án A □

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA = 2a$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$

A $\dfrac{a^3}{3}$. B $\dfrac{a^3}{6}$. C $\dfrac{a^3}{4}$. D $\dfrac{2a^3}{5}$.

Lời giải.

Ta có $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2}{2} \cdot 2a = \dfrac{a^3}{3}$.



Chọn đáp án A ☐

Câu 26.

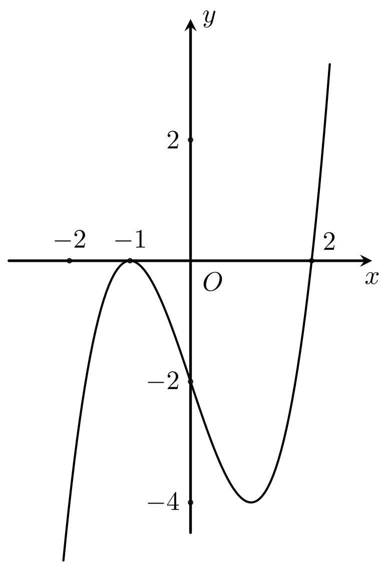
Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$.

(B) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

(C) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.

(D) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 0)$.



Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 2)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2 - 2\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2 = -1 \\ x^2 - 2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Ta có $g'(3) = 6 \cdot f'(7) > 0$.

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 27. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx + 1}{x + m}$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

A $-2 \leq m < -1$ hoặc $m > 1$.
B $m \leq -1$ hoặc $m > 1$.
C $-1 < m < 1$.
D $m < -1$ hoặc $m \geq 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{-m\}$.

Ta có $y' = \dfrac{m^2 - 1}{(x+m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0,\ \forall x \in (2; +\infty) \\ -m \notin (2; +\infty) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 > 0 \\ -m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right. \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \leq m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right. .$$

Chọn đáp án A □

Câu 28. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và $u_1 > 0$. Điều kiện của q để cấp số nhân (u_n) có ba số hạng liên tiếp có độ dài ba cạnh của một tam giác là

A $0 < q \leq 1$.
B $1 < q < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
C $q \geq 1$.
D $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < q < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Giả sử ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân là u_1q^n, u_1q^{n+1}, u_1q^{n+2}.

Ba số hạng này là dộ dài của một tam giác

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^n + u_1q^{n+2} - u_1q^{n+1} > 0 \\ u_1q^n + u_1q^{n+1} - u_1q^{n+2} > 0 \\ u_1q^{n+1} + u_1q^{n+2} - u_1q^n > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^2 - q + 1 > 0 \\ 1 + q - q^2 > 0 \\ q + q^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 29. Cho tam giác ABC có $A(1; -1)$, $B(3; -3)$, $C(6; 0)$. Diện tích tam giác ABC là

A 6.
B $6\sqrt{2}$.
C 12.
D 9.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -2)$, $\overrightarrow{BC} = (3; 3)$. Do $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ nên $\triangle ABC$ vuông tại B.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 6.$

Chọn đáp án A □

Câu 30. Tính tổng $\mathrm{C}_{2000}^0 + 2\mathrm{C}_{2000}^1 + 3\mathrm{C}_{2000}^2 + \cdots + 2001\mathrm{C}_{2000}^{2000}$.

A $1000 \cdot 2^{2000}$.
B $2001 \cdot 2^{2000}$.
C $2000 \cdot 2^{2000}$.
D $1001 \cdot 2^{2000}$.

Lời giải.

Ta có $S = \mathrm{C}_{2000}^0 + 2\mathrm{C}_{2000}^1 + 3\mathrm{C}_{2000}^2 + \cdots + 2001\mathrm{C}_{2000}^{2000}$ (1).

Hay $S = 2001\mathrm{C}_{2000}^{2000} + 2000\mathrm{C}_{2000}^{1999} + 1999\mathrm{C}_{2000}^{1998} + \cdots + \mathrm{C}_{2000}^0$

$\Leftrightarrow S = 2001\mathrm{C}_{2000}^0 + 2000\mathrm{C}_{2000}^1 + 1999\mathrm{C}_{2000}^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2000}^{2000}$ (2).

Cộng vế theo vế của (1) và (2) ta được

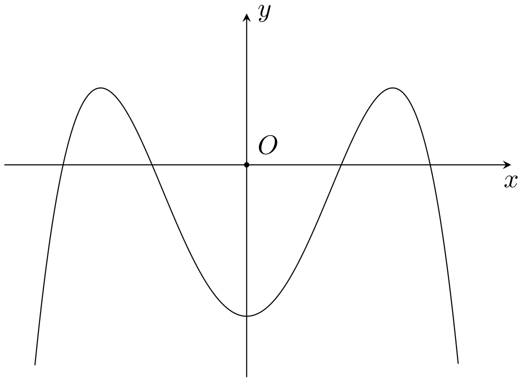
$2S = 2002\mathrm{C}_{2000}^0 + 2002\mathrm{C}_{2000}^1 + 2002\mathrm{C}_{2000}^2 + \cdots + 2002\mathrm{C}_{2000}^{2000}$

$\Leftrightarrow S = 1001\left(\mathrm{C}_{2000}^0 + \mathrm{C}_{2000}^1 + \mathrm{C}_{2000}^2 \cdots + \mathrm{C}_{2000}^{2000}\right) = 1001 \cdot 2^{2000}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 31.

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) $a > 0,\ b < 0,\ c < 0$.
(B) $a < 0,\ b < 0,\ c < 0$.
(C) $a < 0,\ b > 0,\ c < 0$.
(D) $a > 0,\ b < 0,\ c > 0$.

Lời giải.

Dựa vào hình dạng đồ thị suy ra $a < 0$.

Hàm số có 3 điểm cực trị nên $ab < 0 \Rightarrow b > 0$.

Giao điểm với trục tung nằm dưới trục hoành nên $c < 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 27x + 3m - 2$ đạt cực trị tại $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $|x_1 - x_2| \leq 5$. Biết $S = (a; b]$. Tính $T = 2b - a$.

(A) $T = \sqrt{51} + 6$.
(B) $T = \sqrt{61} + 3$.
(C) $T = \sqrt{61} - 3$.
(D) $T = \sqrt{51} - 6$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 27$ và $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + 27 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 9 = 0$. (1)

Để hàm số đạt cực trị tại $x_1,\ x_2$ thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt. Điều đó tương đương với

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 3. \end{array}\right. \tag{2}$$

Theo định lí Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = 9. \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| \leq 5 &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \leq 25 \\ &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 25 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 4m^2 - 61 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{61}}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{61}}{2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Kết hợp (2), (3) và m dương ta được

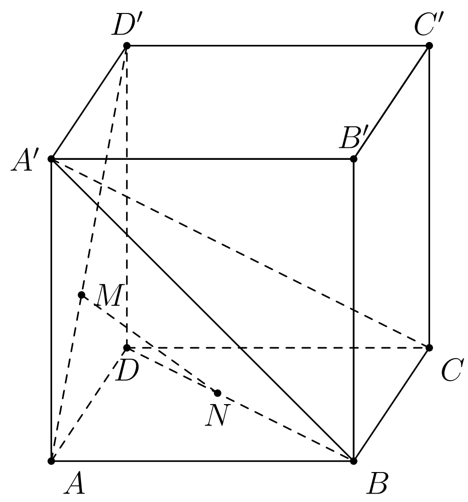
$$3 < m \leq \frac{\sqrt{61}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \dfrac{\sqrt{61}}{2} \end{cases} \Rightarrow T = 2b - a = \sqrt{61} - 3.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt là hình vuông cạnh a. Các điểm M, N lần lượt nằm trên AD', DB sao cho $AM = DN = x$ $(0 < x < a\sqrt{2})$. Khi x thay đổi, đường thẳng MN luôn song song với mặt phẳng cố định nào sau đây?

A. $(CB'D')$. B. $(A'BC)$. C. $(AD'C)$. D. $(BA'C')$.

Lời giải.



Áp dụng định lý Ta-lét đảo cho D, N, $B \in DB$ và A, M, $D' \in AD'$. Từ tỉ lệ

$$\frac{AM}{AD'} = \frac{DN}{DB} \left(= \frac{x}{a\sqrt{2}}\right)$$

ta suy ra AD, MN, BD' cùng song song với một mặt phẳng (α) nào đó.

Ta chọn mặt phẳng (P) chứa BD' và song song với AD. Mặt phẳng (P) chính là mặt phẳng $(BCD'A')$ và là mặt phẳng cố định.

Suy ra $MN \parallel (\alpha) \parallel (BCD'A')$ hay $MN \parallel (A'BC)$.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Một hộp đựng 11 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 11. Chọn ngẫu nhiên 4 tấm thẻ từ hộp đó. Gọi P là xác suất để tổng các số ghi trên 4 tấm thẻ ấy là một số lẻ. Khi đó giá trị của P bằng bao nhiêu?

A. $\mathrm{P} = \dfrac{1}{12}$. B. $\mathrm{P} = \dfrac{16}{33}$. C. $\mathrm{P} = \dfrac{10}{33}$. D. $\mathrm{P} = \dfrac{2}{11}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{11}^4$.

Trong 11 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 11 có 6 tấm thẻ ghi số lẻ và 5 tấm thẻ ghi số chẵn.

Gọi A là biến cố: "Tổng các số ghi trên 4 tấm thẻ là một số lẻ".

- Trường hợp 1. Chọn được 1 tấm thẻ ghi số lẻ và 3 tấm thẻ ghi số chẵn, có $\mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_5^3 = 60$ cách.
- Trường hợp 2. Chọn được 3 tấm thẻ ghi số lẻ và 1 tấm thẻ ghi số chẵn, có $\mathrm{C}_6^3 \cdot \mathrm{C}_5^1 = 100$ cách.

Vậy số phần tử của A là $n(A) = 60 + 100 = 160$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{160}{330} = \dfrac{16}{33}$.

Chọn đáp án B □

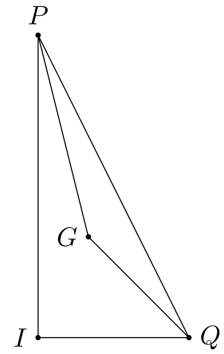
Câu 35. Cho đồ thị $(C)\colon y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. Gọi M là điểm bất kì thuộc đồ thị (C). Gọi tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M cắt các tiệm cận của (C) tại hai điểm P và Q. Gọi G là trọng tâm của tam giác IPQ (với I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C)). Diện tích tam giác GPQ bằng bao nhiêu?

A. 2. B. 4. C. $\dfrac{2}{3}$. D. 1.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$. Giả sử $M\left(a; \dfrac{2a+1}{a-1}\right)$ thuộc đồ thị (C).

Phương trình tiếp tuyến tại M là $d\colon y = -\dfrac{3}{(a-1)^2}(x-a) + \dfrac{2a+1}{a-1}$.
Đồ thị (C) có hai đường tiệm cận có phương trình là $d_1\colon x = 1$ và $d_2\colon y = 2$.
Do đó d cắt d_1 tại $P\left(1; \dfrac{2a+4}{a-1}\right)$, d cắt d_2 tại $Q(2a-1;2)$ và d_1 cắt d_2 tại $I(1;2)$.



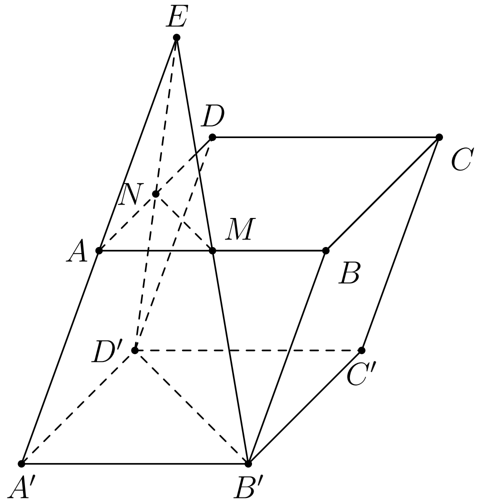
Ta có
$$IP = \frac{6}{|a-1|},\ IQ = 2|a-1|.$$
Khi đó
$$S_{GPQ} = \frac{1}{3}S_{IPQ} = \frac{1}{6}IP\cdot IQ = \frac{1}{6}\cdot\frac{6}{|a-1|}\cdot 2|a-1| = 2.$$

Chọn đáp án A □

Câu 36. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2018. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Mặt phẳng $(MB'D')$ chia khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối đa diện. Tính thể tích phần khối đa diện chứa đỉnh A.

(A) $\dfrac{5045}{6}$. (B) $\dfrac{7063}{6}$. (C) $\dfrac{10090}{17}$. **(D)** $\dfrac{7063}{12}$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng $(ABB'A')$, gọi $E = B'M \cap AA'$.
Trong mặt phẳng $(ADD'A')$, gọi $N = ED' \cap AD$.
Vì M là trung điểm AB nên M cũng là trung điểm EB'.
Tương tự, N là trung điểm ED'.
Ta có
$$\frac{V_{E.AMN}}{V_{E.A'B'D'}} = \frac{EA}{EA'}\cdot\frac{EM}{EB'}\cdot\frac{EN}{ED'} = \frac{1}{8}. \qquad (1)$$
Từ (1) suy ra
$$\begin{aligned} V_{AMNA'B'D'} &= \frac{7}{8}V_{E.A'B'D'} \\ &= \frac{7}{8}\cdot 2V_{A.A'B'D'} \\ &= \frac{7}{8}\cdot 2\cdot\frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{7}{24}\cdot 2018 = \frac{7063}{12}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 37. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Gọi I là điểm thuộc CC' sao cho $\overrightarrow{C'I} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{C'C}$, điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}$. Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{IG}$ qua véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

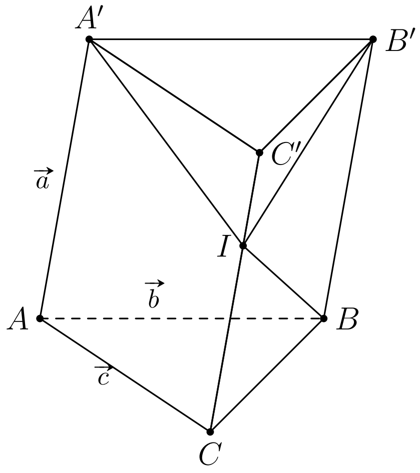
(A) $\overrightarrow{IG} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}\right)$. (B) $\overrightarrow{IG} = \dfrac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}\right)$.

Ⓒ $\overrightarrow{IG}=\dfrac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b}\right)$. Ⓓ $\overrightarrow{IG}=\dfrac{1}{4}\left(\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}-2\vec{a}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow\overrightarrow{IG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{IC'}\right). \quad (1)$$



Mà

$$\begin{cases}\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CB}=-\dfrac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\\ \overrightarrow{IA'}=\overrightarrow{IC'}+\overrightarrow{C'A'}=\dfrac{1}{3}\vec{a}-\vec{c}\\ \overrightarrow{IB'}=\overrightarrow{IC'}+\overrightarrow{C'B'}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\\ \overrightarrow{IC'}=\dfrac{1}{3}\vec{a}.\end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IG}&=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{IC'}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{a}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}\right).\end{aligned}$$

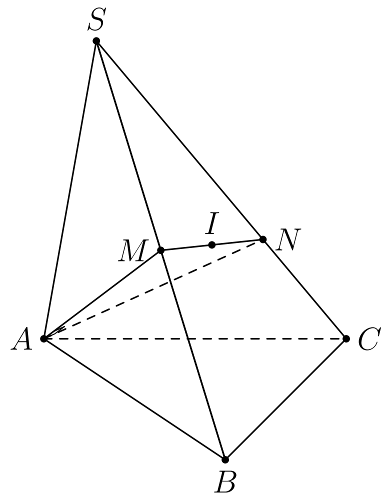
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=1$, $SB=2$, $SC=3$ và $\widehat{ASB}=60^\circ$, $\widehat{BSC}=120^\circ$, $\widehat{CSA}=90^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓑ $\sqrt{2}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

Trên cạnh SB, SC lần lượt lấy điểm M, N sao cho $SM=SN=1$.
Ta có $AM=1$, $AN=\sqrt{2}$, $MN=\sqrt{3}$ nên tam giác AMN vuông tại A.
Hình chóp $S.AMN$ có $SA=SM=SN=1$ nên hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (AMN) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông AMN và đó là điểm trung điểm I của MN.
Trong $\triangle SIM$, $SI=\sqrt{SM^2-IM^2}=\sqrt{1-\dfrac{3}{4}}=\dfrac{1}{2}$.
Khi đó,



$$V_{S.AMN}=\frac{1}{3}SI\cdot S_{AMN}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{12}.$$

Ta có

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SB}\cdot\frac{SN}{SC}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow V_{S.ABC}=6\cdot\frac{\sqrt{2}}{12}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

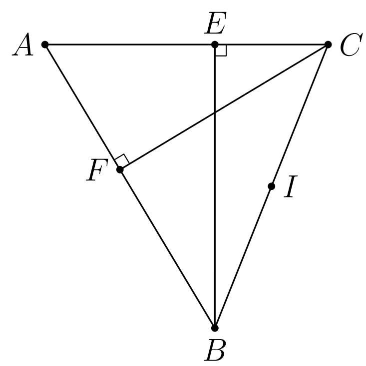
Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng $BC\colon x+7y-13=0$. Các chân đường cao kẻ từ $B,\ C$ lần lượt là $E(2;5),\ F(0;4)$. Biết tọa độ đỉnh A là $A(a;b)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $a-b=5$. (B) $2a+b=6$. (C) $a+2b=6$. **D** $b-a=5$.

Lời giải.

Gọi $I(13-7n;n)$ là trung điểm cạnh BC, suy ra $IE=IF$ (1).
Mà $IE=\sqrt{(11-7n)^2+(n-5)^2}$ và $IF=\sqrt{(13-7n)^2+(n-4)^2}$.
Khi đó, từ (1) suy ra $n=\dfrac{3}{2}$.
Vậy $I\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. Gọi $B(13-7m;m)$, do $I\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ là trung điểm BC nên $C(7m-8;3-m)$.
Khi đó $\overrightarrow{BE}=(7m-11;5-m)$ và $\overrightarrow{CE}=(10-7m;2+m)$.



Vì $BE\perp AC$ nên

$$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=0\Leftrightarrow m^2-3m+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=2.\end{array}\right.$$

Với $m=1$ thì $B(6;1),\ C(-1;2)$, suy ra $A\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{11}{3}\right)$. Trường hợp này không thỏa đáp án.
Với $m=2$ thì $B(-1;2),\ C(6;1)$, suy ra $A\,(1;6)$. Trường hợp này thỏa đáp án $b-a=5$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}$ có hai nghiệm thực phân biệt.

(A) $3\le m<1$. (B) $-2<m\le\dfrac{1}{3}$. (C) $-1\le m\le\dfrac{1}{4}$. **D** $0\le m<\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện phương trình đã cho là $x\ge 1$.
Ta có

$$3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}\Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+m=2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}. \quad (1)$$

Đặt $t=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}=\sqrt[4]{1-\dfrac{2}{x+1}}$, vì $x\ge 1$ nên $0\le t<1$. Phương trình (1) trở thành

$$-3t^2+2t=m. \quad (2)$$

Với mỗi giá trị t thuộc $[0;1)$ ta chỉ tìm một giá trị x thuộc $[1;+\infty)$ thỏa $t=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$.
Do đó để phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt thì phương trình (2) phải có hai nghiệm t thuộc $[0;1)$.
Xét hàm số $f(t)=-3t^2+2t$. Ta có $f'(t)=-6t+2$ và $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$. Ta xét bảng biến thiên sau

$$\begin{array}{|c|ccccc|}
\hline
t & 0 & & \frac{1}{3} & & 1 \\
\hline
f'(t) & & + & 0 & - & \\
\hline
 & & & \frac{1}{3} & & \\
f(t) & & \nearrow & & \searrow & \\
 & 0 & & & & -1 \\
\hline
\end{array}$$

Dựa vào bảng biến thiên trên, giá trị m thỏa đề bài là $0 \leq m < \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Tìm nghiệm của phương trình $\sin^4 x + \cos^4 x + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{3}{2} = 0$.

(A) $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
(B) $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
(C) $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
(D) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) + \frac{1}{2}\left(\sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2x\right) - \frac{3}{2} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) + \frac{1}{2}(\sin 2x - \cos 4x) - \frac{3}{2} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) + \left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2} + \sin^2 2x\right) - \frac{3}{2} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{2}\sin 2x - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -2 (\text{vô nghiệm}) \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 42. Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức $u_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \cdots + \dfrac{2n-1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Tính $\lim u_n$.

(A) $\lim u_n = 0$.
(B) $\lim u_n = +\infty$.
(C) $\lim u_n = -\infty$.
(D) $\lim u_n = 1$.

Lời giải.

Ta có $u_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \cdots + \dfrac{2n-1}{n^2} = \dfrac{1 + 3 + \cdots + (2n-1)}{n^2} = \dfrac{\frac{n}{2}(1 + (2n-1))}{n^2} = 1$.

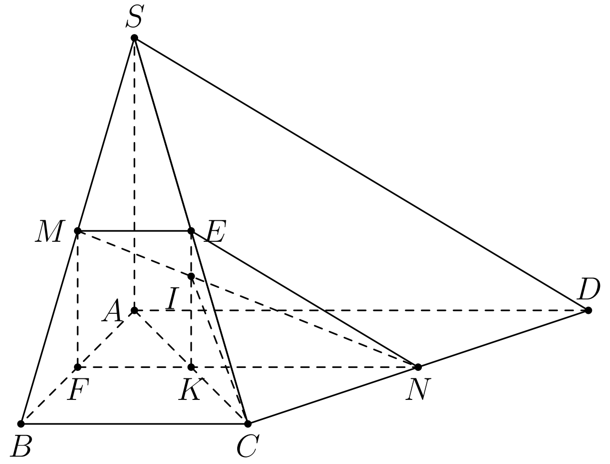
Do đó $\lim u_n = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = AB = BC = a$, $AD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB, CD. Tính sin góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC).

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.
(B) $\dfrac{\sqrt{55}}{10}$.
(C) $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.
(D) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.



Gọi $E,\ F$ lần lượt là trung điểm của $SC,\ AB$.
Vì $ME,\ NF$ cùng song song với BC nên $ME\ /\!/\ NF$.
Do đó tứ giác $MENF$ là hình thang.
Do $SA\perp(ABCD)$ và $MF\ /\!/\ SA$ nên $MF\perp(ABCD)$. Khi đó tứ giác $MENF$ là hình thang vuông tại $M,\ F$.
Trong $(ABCD)$, gọi $K=AC\cap FN$; trong $(MENF)$, gọi $I=MN\cap EK$.
Khi đó $MN\cap(SAC)=I$.
Ta có $\begin{cases}NC\perp AC\\ NC\perp SA\end{cases}\Rightarrow NC\perp(SAC)$ hay C là hình chiếu vuông góc của N lên (SAC).
Từ đó suy ra $(MN,(SAC))=(MN,CI)=\widehat{NIC}=\alpha$.
Xét tam giác vuông NIC ta có $\sin\alpha=\dfrac{NC}{IN}$.
Ta có $NC=\dfrac{CD}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Vì $\triangle NIK\sim\triangle MIE$ nên

$$\frac{IN}{IM}=\frac{KN}{ME}=2\Leftrightarrow IN=\frac{2}{3}MN=\frac{2}{3}\sqrt{MF^2+FN^2}=\frac{a\sqrt{10}}{3}.$$

Vậy $\sin\alpha=\dfrac{CN}{IN}=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.
Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho hai số thực $x,\ y$ thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2=2$. Gọi $M,\ m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=2(x^3+y^3)-3xy$. Tính giá trị của $M+m$.

A. $M+m=-4$.
B. $M+m=-\dfrac{1}{2}$.
C. $M+m=-6$.
D. $M+m=1-4\sqrt{2}$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}P=2(x^3+y^3)-3xy &= 2(x+y)(x^2+y^2-xy)-3xy\\ &= 2(x+y)(2-xy)-3xy.\end{aligned}$$

Đặt $x+y=t$, khi đó

$$x^2+y^2=2\Leftrightarrow xy=\frac{(x+y)^2}{2}-1\Leftrightarrow xy=\frac{t^2}{2}-1.$$

Do

$$(x+y)^2\ge 4xy\Leftrightarrow t^2\ge 4\left(\frac{t^2}{2}-1\right)\Leftrightarrow -2\le t\le 2.$$

Xét hàm số $f(t) = P = 2t\left(2 - \left(\frac{t^2}{2} - 1\right)\right) - 3\left(\frac{t^2}{2} - 1\right) = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3$ trên đoạn $[-2; 2]$.

Ta có $f'(t) = -3t^2 - 3t - 6$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow -3t^2 - 3t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \in [-2; 2] \\ t = -2 \in [-2; 2] \end{array}\right.$. Khi đó

$$f(-2) = -7;\ f(1) = \frac{13}{2};\ f(2) = 1.$$

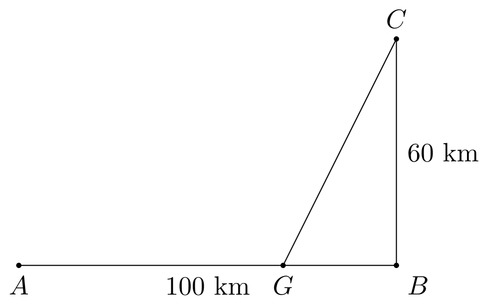
Suy ra $M = \max\limits_{t \in [-2;2]} f(t) = \frac{13}{2}$ và $m = \min\limits_{t \in [-2;2]} f(t) = -7$.

Vậy $M + m = \frac{13}{2} - 7 = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 45.

Đường dây điện 110 KV kéo từ trạm phát (điểm A) trong đất liền ra đảo (điểm C). Biết khoảng cách từ C đến B là 60 km, khoảng cách từ A đến B là 100 km. Mỗi km dây điện dưới nước chi phí là 100 triệu đồng, chi phí mỗi km dây điện trên bờ là 60 triệu đồng. Hỏi điểm G cách điểm A bao nhiêu km để mắc dây điện từ A đến G, rồi từ G đến C chi phí thấp nhất? (Đoạn AB trên bờ, đoạn GC dưới nước).

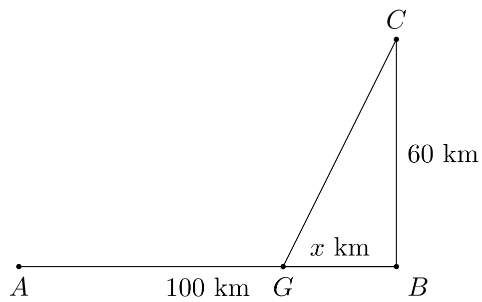


A 50 km. B 60 km. C 55 km. D 45 km.

Lời giải.

Đặt $GB = x$ km, $0 < x < 100$. Khi đó $GC = \sqrt{x^2 + 3600}$ km. Số tiền để mắc dây điện từ A đến G và từ G đến C là

$$f(x) = 60(100 - x) + 100\sqrt{x^2 + 3600} \text{ triệu đồng.}$$



Ta có $f'(x) = \frac{100x}{\sqrt{x^2 + 3600}} - 60$ và

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{100x}{\sqrt{x^2 + 3600}} - 60 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 100x = 60\sqrt{x^2 + 3600} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 < x < 100 \\ 25x^2 = 9(x^2 + 3600) \end{cases} \Leftrightarrow x = 45. \end{aligned}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	0		45		100
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	10800	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = 45$ km, khi đó $AG = 100 - 45 = 55$ km.

Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1|$ có 7 điểm cực trị.

(A) $(0;6)$. (B) $(6;33)$. (C) $(1;33)$. (D) $(1;6)$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1$. Ta có $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2)$ và

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m-6$	$\nearrow$	$m-1$	$\searrow$	$m-33$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị khi đồ thị $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

Điều đó tương đương với

$$m - 6 < 0 < m - 1 \Leftrightarrow 1 < m < 6.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos 2x - \tan^2 x = \dfrac{\cos^2 x - \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}$ trên đoạn $[1;70]$.

(A) 188π. (B) 263π. (C) 363π. (D) 365π.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình là $\cos x \neq 0$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (2\cos^2 x - 1)\cdot\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \cos^2 x - \cos^3 x - 1 \\ \Leftrightarrow\ & 2\cos^4 x + \cos^3 x - \cos^2 x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \pi + k_1 2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k_2 2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k_3 2\pi \end{array}\right. \quad (k_1,\ k_2,\ k_3 \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vì $x \in [1;70]$ nên $0 \le k_1,\ k_2 \le 10$ và $1 \le k_3 \le 11$.

Áp dụng công thức tính tổng 11 số hạng đầu tiên của một cấp số cộng, ta có

$$S = \frac{11}{2}(\pi + 21\pi) + \frac{11}{2}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{61\pi}{3}\right) + \frac{11}{2}\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{65\pi}{3}\right) = 363\pi.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 48. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + 2x + 5$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến của (C), tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất có hệ số góc bằng bao nhiêu?

(A) $\frac{4}{3}$. **B** $\frac{5}{3}$. (C) $\frac{2}{3}$. (D) $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ và Δ là tiếp tuyến của (C) tại M.

Đặt $f'(x) = y' = 3x^2 - 2x + 2$. Khi đó hệ số góc của Δ là $f'(x_0) = 3x_0^2 - 2x_0 + 2$.

Đặt $g(x) = 3x^2 - 2x + 2$, rõ ràng giá trị nhỏ nhất của $f'(x_0)$ bằng với giá trị nhỏ nhất của $g(x)$.

Ta có $g'(x) = 6x - 2$ và $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau

x	$+\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy giá trị hệ số góc của Δ nhỏ nhất bằng $\frac{5}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{mx^2 - 2x + 3}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số đã cho có đúng hai đường tiệm cận.

(A) 2. **B** 3. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho luôn có 1 tiệm cận ngang với mọi m.

Do đó bài toán trở thành tìm m để đồ thị hàm số đã cho có đúng 1 tiệm cận đứng.

- Với $m = 0$, $y = \frac{x-1}{-2x+3}$. Đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng $x = \frac{3}{2}$.
- Với $m \neq 0$. Đồ thị hàm số đã cho có đúng 1 tiệm cận đứng khi phương trình $mx^2 - 2x + 3 = 0$ có nghiệm kép hoặc nghiệm $x = 1$.

  Điều đó tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} 1 - 3m = 0 \\ m - 2 + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{1}{3} \\ m = -1. \end{array}\right.$$

Vậy có 3 giá trị m thỏa mãn đề bài là $-1,\ 0,\ \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 50. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$. Tìm đạo hàm cấp 2018 của hàm số $f(x)$.

(A) $f^{(2018)}(x) = \frac{2018!x^{2018}}{(1-x)^{2018}}$. **B** $f^{(2018)}(x) = \frac{2018!}{(1-x)^{2019}}$.

(C) $f^{(2018)}(x) = -\dfrac{2018!}{(1-x)^{2019}}$.

(D) $f^{(2018)}(x) = \dfrac{2018!x^{2018}}{(1-x)^{2019}}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x} = -x - 1 - \dfrac{1}{x-1}$. Khi đó

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -1 + \frac{1}{(x-1)^2}\\
f''(x) &= -\frac{2\cdot 1}{(x-1)^3} = -\frac{2!}{(x-1)^3}\\
f^{(3)}(x) &= \frac{3\cdot 2\cdot 1}{(x-1)^4} = \frac{3!}{(x-1)^4}\\
f^{(4)}(x) &= -\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(x-1)^5} = -\frac{4!}{(x-1)^5}\\
\ldots\\
f^{(2018)}(x) &= -\frac{2018!}{(x-1)^{2019}} = \frac{2018!}{(1-x)^{2019}}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

——— **HẾT** ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. D	3. D	4. C	5. B	6. B	7. B	8. A	9. D	10. C
11. A	12. A	13. D	14. B	15. C	16. C	17. A	18. C	19. D	20. B
21. A	22. C	23. B	24. A	25. A	26. D	27. A	28. D	29. A	30. D
31. C	32. C	33. B	34. B	35. A	36. D	37. A	38. A	39. D	40. D
41. D	42. D	43. C	44. B	45. C	46. D	47. C	48. B	49. B	50. B

20 ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN BẮC GIANG, BẮC GIANG – LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho cung lượng giác có số đo x thỏa mãn $\tan x = 2$. Giá trị của biểu thức $M = \dfrac{\sin x - 3\cos^2 x}{5\sin^3 x - 2\cos x}$ bằng

A $\dfrac{7}{30}$. (B) $\dfrac{7}{33}$. (C) $\dfrac{7}{32}$. (D) $\dfrac{7}{31}$.

Lời giải.

Do $\tan x = 2 \Rightarrow \cos x \neq 0$.

Ta có $M = \dfrac{\sin x - 3\cos^3 x}{5\sin^3 x - 2\cos x} = \dfrac{\tan x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} - 3}{5\tan^3 x - \dfrac{2}{\cos^2 x}} = \dfrac{\tan x\left(1+\tan^2 x\right) - 3}{5\tan^3 x - 2\left(1+\tan^2 x\right)} = \dfrac{7}{30}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Biết n là số tự nhiên thỏa mãn $1 \cdot 2\mathrm{C}_n^1 + 2 \cdot 3\mathrm{C}_n^2 + \cdots + n \cdot (n+1)\,\mathrm{C}_n^n = 180 \cdot 2^{n-2}$. Số hạng có hệ số lớn nhất trong khai triển $(1+x)^n$ là

(A) $925x^5$. **B** $924x^6$. (C) $923x^4$. (D) $926x^7$.

Lời giải.

Cách 1.

Đặt $f(x) = x(1+x)^n, n \in N \Rightarrow f(x) = \mathrm{C}_n^0 x + \mathrm{C}_n^1 x^2 + \mathrm{C}_n^2 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^{n+1}$.

$\Rightarrow \begin{cases} f'(x) = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} \\ f'(x) = \mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 x + 3\mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + (n+1)\mathrm{C}_n^n x^n. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} f''(x) = n(1+x)^{n-1} + n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} = 2n(1+x)^{n-1} = n(n-1)x(1+x)^{n-2} \\ f'(x) = 1 \cdot 2\mathrm{C}_n^1 + 2 \cdot 3\mathrm{C}_n^2 x + \cdots + n(n+1)\mathrm{C}_n^n x^{n-1}. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} f''(1) = 2n(1+1)^{n-1} + n(n-1)(1+1)^{n-2} = \left(n^2+3n\right)2^{n-2} \\ f''(1) = 1 \cdot 2\mathrm{C}_n^1 + 2 \cdot 3\mathrm{C}_n^2 + \cdots + n(n+1)\mathrm{C}_n^n. \end{cases}$

Từ giả thiết suy ra $\left(n^2+3n\right)2^{n-2} = 180.2^{n-2} \Leftrightarrow n^2 + 3n - 180 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n = 12 & \text{(thỏa mãn)} \\ n = -15 & \text{(loại).} \end{array}\right.$

Vậy số hạng của khai triển $(1+x)^{12}$ có hệ số lớn nhất $\mathrm{C}_{12}^6 x^6 = 924x^6$.

Cách 2.

Xét khai triển

$$(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n \Rightarrow x(1+x)^n = x\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x^2 + \mathrm{C}_n^2 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^{n+1}. \quad (1)$$

Lấy đạo hàm 2 vế của (1) ta được

$$(1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} = \mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 x + 3\mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + (n+1)\mathrm{C}_n^n x^n. \quad (2)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (2) ta được

$$n(x+1)^{n-1} + n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} = 1 \cdot 2C_n^1 + \cdots + n(n+1)C_n^n x^{n-1}. \quad (3)$$

Theo giả thiết ta có

$n \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^{n-1} + n \cdot (n-1) \cdot 2^{n-2} = 180 \cdot 2^{n-2} \Leftrightarrow 2n \cdot 2^{n-1} + n(n-1) \cdot 2^{n-2} = 180 \cdot 2^{n-2}$

$\Leftrightarrow 4n \cdot 2^{n-2} + n(n-1) \cdot 2^{n-2} = 180 \cdot 2^{n-2} \Leftrightarrow n^2 + 3n = 180 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n = 12 & \text{(nhận)} \\ n = -15 & \text{(loại)} \end{array}\right.$

Số hạng tổng quát của khai triển $(1+x)^{12}$ là $T_{k+1} = \mathrm{C}_{12}^k x^k$ với $\begin{cases} 0 \le k \le 12 \\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$ $(*)$

Xét $\mathrm{C}_{12}^k \le \mathrm{C}_{12}^{k+1} \Leftrightarrow k \le \dfrac{11}{2}$ dấu bằng không xảy ra vì (*).

Do đó $\mathrm{C}_{12}^0 < \mathrm{C}_{12}^1 < \ldots < \mathrm{C}_{12}^6 > \mathrm{C}_{12}^7 > \ldots > \mathrm{C}_{12}^{12}$, hay C_{12}^6 là giá trị lớn nhất.

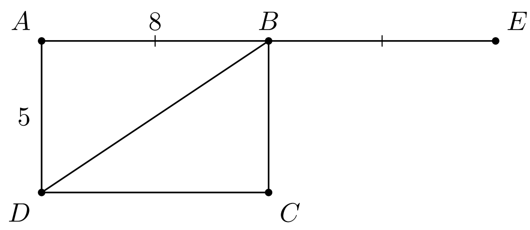
Vậy số hạng của khai triển $(1+x)^{12}$ có hệ số lớn nhất $\mathrm{C}_{12}^6 x^6 = 924x^6$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8$, $AD = 5$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$.

(A) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 62$. **B** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -64$. (C) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -62$. (D) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$.

Lời giải.



Giả sử E là điểm đối xứng với A qua B ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$.

Xét tam giác ABD có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{89}$.

Xét tam giác ABD có $\cos \widehat{ABD} = \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{8}{\sqrt{89}}$ suy ra $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BD}) = \cos \widehat{DBE} = -\cos \widehat{ABD} = -\dfrac{8}{\sqrt{89}}$.

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BD}) = 8 \cdot \sqrt{89} \cdot \left(\dfrac{-8}{\sqrt{89}}\right) = -64$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Hàm số $y = -x^3 + 6x^2 + 2$ luôn đồng biến trên khoảng nào sau đây?

(A) $(2; +\infty)$. (B) $(0; +\infty)$. **C** $(0; 4)$. (D) $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

Ta có $y = -x^3 + 6x^2 + 2 \Rightarrow y' = -3x^2 + 12x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 = 12x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	34	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 4)$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Tổng các nghiệm trong đoạn $[0;2\pi]$ của phương trình $\sin^3 x - \cos^3 x = 1$ bằng

(A) $\dfrac{5\pi}{2}$. (B) $\dfrac{7\pi}{2}$. (C) 2π. **(D)** $\dfrac{3\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\sin^3 x - \cos^3 x = 1 \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(1+\sin x\cos x) = 1$. (1)

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right), -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$.

Có $t^2 = 1 - 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x = \dfrac{1}{2}(1-t^2)$.

(1) trở thành $t\left[1+\dfrac{1}{2}(1-t^2)\right] = 1 \Leftrightarrow t^3 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^3+t-2) = 0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2\,(\text{loại}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + l2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + l2\pi \end{array}\right. (k,\, l \in \mathbb{Z})$.

Có $x \in [0;2\pi]$ nên ta có các nghiệm $x = \pi; x = \dfrac{\pi}{2}$.

Vậy tổng các nghiệm $x \in [0;2\pi]$ của phương trình đã cho là $\dfrac{3\pi}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của AD. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) $\overrightarrow{B'M} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{B'C'}$.

(B) $\overrightarrow{C'M} = \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{C'D'} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{C'B'}$.

(C) $\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{B'C'} = 2\overrightarrow{B'D}$.

(D) $\overrightarrow{C'M} = \overrightarrow{C'C} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{C'D'} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{C'B'}$.

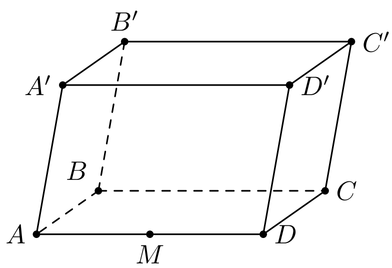
Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{C'B'}$.

Mà $\overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{C'M} + \overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MA} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{C'B'}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{C'M} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{C'B'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{C'M} = \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{C'D'} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{C'B'}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Trong mặt phẳng Oxy, khoảng cách từ điểm $M(0;4)$ đến đường thẳng $\Delta\colon x\cos\alpha + \sin\alpha + 4(2-\sin\alpha) = 0$ bằng

(A) $\sqrt{8}$. (B) $4\sin\alpha$. (C) $\dfrac{4}{\cos\alpha + \sin\alpha}$. **(D)** 8.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}(M,\Delta) = \dfrac{|0\cdot\cos\alpha + 4\cdot\sin\alpha + 4(2-\sin\alpha)|}{\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}} = 8$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào đồng biến trên tập $\mathbb{R}$.

(A) $y = \log_{\sqrt{10}-3} x$. (B) $y = \log_2(x^2 - x)$. (C) $y = \left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)^{2x}$. **(D)** $y = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^{x}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \log_{\sqrt{10}-3} x$ có cơ số $a = \sqrt{10} - 3$ nên hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.
Hàm số $y = \log_2 (x^2 - x)$ có tập xác định $D = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Hàm số $y = \left(\dfrac{e}{3}\right)^{2x}$ có $\dfrac{e}{3} < 1$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
Hàm số $y = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^{x}$ có $\dfrac{\pi}{3} > 1$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$ có $A(0;1;-1), B(1;1;2), C(1;-1;0), D(0;0;1)$. Tính độ dài đường cao AH của tứ diện $ABCD$.

A $3\sqrt{2}$. B $2\sqrt{2}$. C $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA} = (-1;0;-3); \overrightarrow{BC} = (0;-2;-2); \overrightarrow{BD} = (-1;-1;-1)$.
$\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right] = (0;-2;-2) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right] \cdot \overrightarrow{BA} = 6$.
$V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right] \cdot \overrightarrow{BA}\right| = \dfrac{1}{6} \cdot 6 = 1$ (đvdt)
Ta có $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot AH \cdot S_{BCD} \Rightarrow AH = \dfrac{3V_{ABCD}}{S_{BCD}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.
Chọn đáp án D □

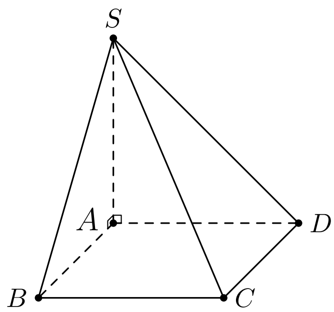
Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $AB = a$, $AD = 2a$. Góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°. Thể tích hình chóp $S.ABCD$ bằng

A $\dfrac{2a^3}{3}$. B $\dfrac{a^3}{3}$. C $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{18}$. D $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = a \cdot 2a = 2a^2$.
$\widehat{(SB, (ABCD))} = \widehat{SBA} = 45^0$.
Do tam giác SAB vuông cân tại A nên $SA = AB = a$.
Vậy thể tích của khối chóp là

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} 2a^2 \cdot a = \frac{2a^3}{3}.$$



Chọn đáp án A □

Câu 11. Ba mặt phẳng $x + 2y - z = 0$, $2x - y + 3a + 13 = 0$, $3x - 2y + 3z + 16 = 0$ cắt nhau tại điểm A. Tọa độ của A là

A $A(-1;2;-3)$. B $A(1;-2;3)$. C $A(-1;-2;3)$. D $A(1;2;3)$.

Lời giải.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y - z - = 0 \\ 2x - y + 3z + 13 = 0 \\ 3x - 2y + 3z + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow A(-1;2;-3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị của thực của tham số m để phương trình $9^{|\cos x|}-(m-1)\,3^{|\cos x|}-m-2=0$ có nghiệm thực.

A. $m\geq \dfrac{5}{2}$. B. $m\leq 0$. C. $0<m<\dfrac{5}{2}$. **D.** $0\leq m\leq \dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t=3^{|\cos x|}$, $(1\leq t\leq 3)$. Phương trình đã cho trở thành

$$t^2-(m-1)\,t-m-2=0\Leftrightarrow m\,(1+t)=t^2+t-2\Leftrightarrow m=\frac{t^2+t-2}{t+1}=f\,(t)\,,t\in[1;3]\,.\quad (1)$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương tình (1) có nghiệm thực thuộc $[1;3]$

$$\Leftrightarrow \min_{[1;3]} f\,(t)\leq m\leq \max_{[1;3]} f\,(t)\,.$$

Ta có $f'\,(t)=\dfrac{t^2+2t+3}{(t+1)^2}>0$, $\forall t\in[1;3]$. Và $f\,(1)=0$; $f\,(3)=\dfrac{5}{2}$.

Vậy $0\leq m\leq \dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Bất phương trình $6\cdot 4^x-13\cdot 6^x+6\cdot 9^x>0$ có tập nghiệm là?

A. $S=(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

C. $S=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. D. $S=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải.

Chia cả hai vế của bất phương trình cho 9^x ta được $6\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x}-13\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x}+6>0$.

Đặt $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x}=t$ $(t>0)$. Ta được bất phương trình mới $6t^2-13t+6>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<\dfrac{3}{2}\\ t>\dfrac{3}{2}.\end{array}\right.$

Suy ra $\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x}<\dfrac{2}{3}\\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x}>\dfrac{3}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>1\\ x<-1.\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Số các số hạng có hệ số là số hữu tỉ trong khai triển $\left(\sqrt[3]{3}+\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^{15}$ là

A. 2. B. 4. **C.** 3. D. 5.

Lời giải.

Ta có $\left(\sqrt[3]{3}+\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^{15}=\sum\limits_{k=0}^{15}\mathrm{C}_{15}^{k}\left(\sqrt[3]{3}\right)^{15-k}\cdot\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^{k}=\sum\limits_{k=0}^{15}\mathrm{C}_{15}^{k}3^{5-\frac{k}{3}}2^{\frac{-k}{2}}x^k$.

Hệ số của số hạng thứ $k+1$ là $a_{k+1}=\mathrm{C}_{15}^{k}3^{5-\frac{k}{3}}2^{\frac{-k}{2}}$ a_{k+1} là số hữu tỉ thì

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5-\dfrac{k}{3}\in\mathbb{Z}\\ \dfrac{-k}{2}\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow k\,\vdots\,6\Leftrightarrow k=6t,(t\in\mathbb{Z})\,.$$

Mà $0 \leq k \leq 15 \Leftrightarrow 0 \leq 6t \leq 15 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq \dfrac{15}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \\ t=2. \end{array}\right.$

Vậy có 3 giá trị của t, tức là có 3 số hạng có hệ số là số hữu tỷ.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 7, \int\limits_3^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 8, \int\limits_3^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$. Giá trị của $I = \int\limits_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $I = 5$. **(B) $I = 6$.** (C) $I = 7$. (D) $I = 8$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_3^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_3^6 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_3^{10} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_3^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 8 - 9 = -1$

Khi đó $I = \int\limits_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 7 - 1 = 6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để tích phân $\int\limits_1^{1+a} \dfrac{\mathrm{d}x}{x(x-5)(x-4)}$ tồn tại.

(A) $-1 < a < 3$. (B) $a < -1$. (C) $a \neq 4, a \neq 5$. (D) $a < 3$.

Lời giải.

Tích phân $\int\limits_1^{1+a} \dfrac{\mathrm{d}x}{x(x-5)(x-4)}$ tồn tại khi và chỉ khi hàm số $y = \dfrac{1}{x(x-5)(x-4)}$ liên tục trên $[1; 1+a]$ hoặc $[1+a; a]$.

Mà hàm số $y = \dfrac{1}{x(x-5)(x-4)}$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 0)$; $(0; 4)$; $(4; 5)$; $(5; +\infty)$.

Nên hàm số liên tục trên $[1; 1+a]$ hoặc $[1+a; 1] \Leftrightarrow 0 < 1 + a < 4 \Leftrightarrow -1 < a < 3$.

Vậy $-1 < a < 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình $3\sqrt{x-1} - m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$ có nghiệm là

(A) $m < -\dfrac{1}{3}$. (B) $-\dfrac{1}{3} < m \leq 1$. **(C) $-\dfrac{1}{3} \leq m < 1$.** (D) $-\dfrac{1}{3} < m < 1$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$.

Ta có $3\sqrt{x-1} - m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1} \Leftrightarrow m = \dfrac{3\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} - \dfrac{2\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x+1}} = 3\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} - 2\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Đặt $t = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}, (0 \leq t < 1)$, (vì $\dfrac{x-1}{x+1} = 1 - \dfrac{2}{x+1}$ mà $0 < \dfrac{2}{x+1} \leq 1, \forall x \geq 1$ nên $0 \leq \dfrac{x-1}{x+1} <$

1).

Ta được $m = 3t^2 - 2t = f(t), (0 \le t < 1)$; $f'(t) = 6t - 2$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} \le m < 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$. Khi đó $4M - 2m$ bằng

A 10. **B** 6. **C** 5. **D** 4.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{7}{(x+2)^2} > 0, \forall x \neq -2$. Do đó hàm số đồng biến trên $[0;2]$.

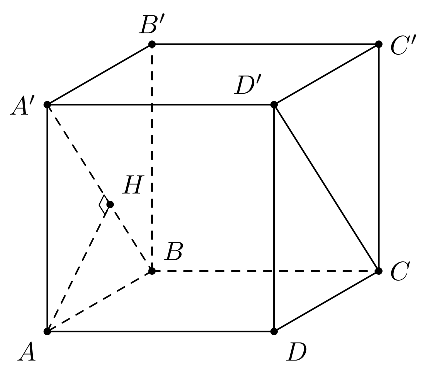
Suy ra $m = y(0) = -\dfrac{1}{2}$; $M = y(2) = -\dfrac{5}{4}$. Do đó $4M - 2m = 6$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BCD')$ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích hình hộp theo a.

A $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B** $V = a^3\sqrt{3}$. **C** $V = \dfrac{a^3\sqrt{21}}{7}$. **D** $V = a^3$.

Lời giải.



Kẻ $AH \perp A'B$. (1)

Ta có $\begin{cases} A'D' \perp A'B' \\ A'D' \perp AA' \\ AA' \cap A'B' = A' \end{cases} \Rightarrow A'D' \perp (ABB'A') \Rightarrow A'D' \perp AH.$ (2)

$A'B \cap A'D' = A'$. (3)
Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow AH \perp (A'BCD')$ do đó AH là khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BCD')$.
Xét tam giác $A'AB$ vuông tại A ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AA'^2} \Rightarrow \frac{1}{AA'^2} = \frac{AB^2 - AH^2}{AB^2 \cdot AH^2} = \frac{a^2 - \frac{3a^2}{4}}{a^2 \cdot \frac{3a^2}{4}} = \frac{1}{3a^2} \Rightarrow AA' = a\sqrt{3}.$$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA' \cdot S_{ABCD} = a^2 \cdot a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2(m-1)x^2 + 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác vuông.

(A) $m = -1$. **(B)** $m = 0$. **(C)** $m = 1$. **D** $m = 2$.

Lời giải.
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Ta có $y' = 4x^3 - 4(m-1)x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m - 1 \end{array}\right.$
Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$. $(*)$
Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;1)$, $B\left(\sqrt{m-1}; 2m - m^2\right)$, $C\left(-\sqrt{m-1}; 2m - m^2\right)$.
Hàm số đã cho là hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng
$\Rightarrow \Delta ABC$ cân tại $A \Rightarrow \Delta ABC$ vuông khi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
$\overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{m-1}; 2m - m^2 - 1\right), \overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{m-1}; 2m - m^2 - 1\right)$.
Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -(m-1) + (2m - m^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (m-1)^4 - (m-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2. \end{array}\right.$
Kết hợp với điều kiện $(*) \Rightarrow m = 2$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - x - 11$. Giá trị cực tiểu của hàm số là

(A) 2. **(B)** $\frac{-1}{3}$. **C** $\frac{-5}{3}$. **(D)** -1.

Lời giải.
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Ta có $y' = x^2 - 1$. Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{3}$	$\searrow$	$-\frac{5}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

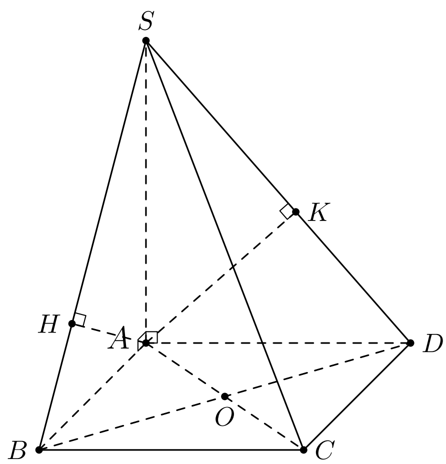
Giá trị cực tiểu của hàm số là $\dfrac{-5}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$. Biết $SA = a$ và vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng φ, với $\cos\varphi = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

A $\dfrac{4}{3}a^3$. **B** $\dfrac{2}{3}a^3$. **C** $2a^3$. **D** $\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải.



Gọi $AD = x$ $(x > 0)$.

Kẻ $AH \perp SB$, $AK \perp SD$ dễ dàng chứng minh được $AH \perp (SBC)$, $AK \perp (SCD) \Rightarrow ((SBC),(SCD)) = (AH, AK)$.

Trong tam giác SBC ta có

$$\begin{aligned}\cos BSD &= \frac{SB^2 + SD^2 - BD^2}{2SB \cdot SD}\\ &= \frac{2a^2 + (a^2 + x^2) - (a^2 + x^2)}{2 \cdot a\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + x^2}}\\ &= \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + x^2}}.\end{aligned}$$

Trong tam giác SAD có $SK = \dfrac{SA^2}{SD} = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Xét tam giác AHK có

$$\begin{aligned}HK^2 &= SH^2 + SK^2 - 2SH \cdot SK \cdot \cos BSD\\ &= \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{a^4}{a^2 + x^2} - 2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + x^2}}\\ &= \frac{a^2}{2} \Rightarrow AH = \frac{a}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Xét tam giác AHK có $AK = \dfrac{SA \cdot AD}{SD} = \dfrac{a \cdot x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ $\cos HAK = \dfrac{AH^2 + AK^2 - HK^2}{2AH \cdot AK}$

$\Rightarrow \sqrt{\dfrac{2}{5}} = \dfrac{\dfrac{2a^2}{4} + \dfrac{a^2x^2}{a^2 + x^2} - \dfrac{a^2}{2}}{2\dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}}$

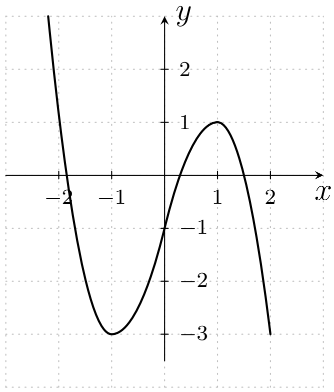
$\Rightarrow \sqrt{\dfrac{2}{5}} = \dfrac{x}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + x^2}} \Rightarrow \dfrac{2}{5} = \dfrac{x^2}{2a^2 + 2x^2} \Rightarrow x = 2a.$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot 2a \cdot a = \dfrac{2a^3}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 23.

Cho hàm số $y = f(x)$, có đạo hàm là $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu cực trị?



A 1. **B** 0.
C 3. **D** 2.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = b \\ x = c \end{array}\right.$ (trong đó $-2 < a < 0 < b < c < 2$).

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số $y = f(x)$ có 3 cực trị.

Chọn đáp án C □

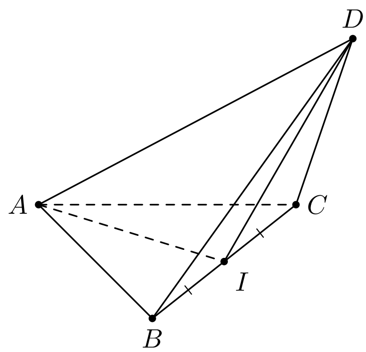
Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và DBC là hai tam giác đều cạnh chung $BC = 2$. Gọi I là trung điểm của BC, $\widehat{AID} = 2\alpha$ mà $\cos 2\alpha = -\dfrac{1}{3}$. Hãy xác định tâm O của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đó.

A O là trung điểm của AD. **B** O là trung điểm của BD.
C O thuộc mặt phẳng (ADB). **D** O là trung điểm của AB.

Lời giải.

Ta có $AI = DI = \sqrt{3}$ và $\cos AID = -\dfrac{1}{3}$ nên

$$AD^2 = AI^2 + DI^2 - 2 \cdot AI \cdot DI \cdot \cos \widehat{AID} = 8.$$



Sử dụng định lí Pytago đảo dễ dàng suy ra tam giác ACD và tam giác ABD vuông có chung cạnh huyền AD.

Vậy tâm cầu ngoại tiếp tứ diện là trung điểm O của AD.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Với các số thực dương x, y. Ta có 8^x, 4^4, 2 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân và các số $\log_2 45$, $\log_2 y$, $\log_2 x$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Khi đó y bằng

A 225. **B** 15. **C** 105. **D** $\sqrt{105}$.

Lời giải.

Từ 8^x, 4^4, 2 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân nên công bội $q = \dfrac{2}{4^4} = \dfrac{1}{2^7}$

Suy ra $4^4 = 8^x \cdot \dfrac{1}{2^7} \Rightarrow x = 5$.

Mặt khác $\log_2 45$, $\log_2 y$, $\log_2 x$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng suy ra

$$\log_2 y = (\log_2 45 + \log_2 x) : 2 \Leftrightarrow \log_2 y = (\log_2 45 + \log_2 5) : 2 \Leftrightarrow \log_2 y = \log_2 \sqrt{225} \Leftrightarrow y = 15.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Hàm số $F(x) = x^2 \ln(\sin x - \cos x)$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

(A) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sin x - \cos x}$.

(B) $f(x) = 2x \ln(\sin x - \cos x) + \dfrac{x^2}{\sin x - \cos x}$.

C $f(x) = 2x \ln(\sin x - \cos x) + \dfrac{x^2(\cos x + \sin x)}{\sin x - \cos x}$.

(D) $f(x) = \dfrac{x^2(\sin x + cosx)}{\sin x - \cos x}$.

Lời giải.

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên

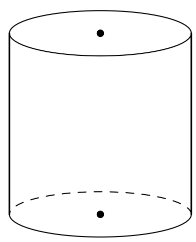
$$f(x) = F'(x) = 2x \cdot \ln(\sin x - \cos x) + x^2 \cdot \frac{(\sin x - \cos x)'}{\sin x - \cos x} = 2x \cdot \ln(\sin x - \cos x) + x^2 \cdot \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng S, diện tích đáy bằng diện tích một mặt cầu bán kính a. Khi đó thể tích của hình trụ bằng

A Sa. (B) $\dfrac{1}{2}Sa$. (C) $\dfrac{1}{3}Sa$. (D) $\dfrac{1}{4}Sa$.

Lời giải.



Gọi r là bán kính đáy của hình trụ, h là chiều cao của hình trụ.

Theo bài ra ta có $\begin{cases} S = 2\pi rh \\ \pi r^2 = 4\pi a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2a \\ h = \dfrac{S}{4\pi a}. \end{cases}$

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4a^2 \cdot \dfrac{S}{4\pi a} = Sa$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Cho hàm số $y = 2\cos^3 x - 3\cos^2 x - m \cos x$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(A) $m \in \left[-\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$. (B) $m \in \left(-2; \dfrac{3}{2}\right)$. (C) $m \in \left(\dfrac{3}{2}; 2\right)$. **D** $m \in \left(-\infty; -\dfrac{3}{2}\right]$.

Lời giải.

Cách 1:

$y' = -6\cos^2 x \sin x + 6 \cos x \sin x + m \sin x = sin\left(-6\cos^2 x + 6\cos x + m\right)$

Hàm số $y = 2\cos^3 x - 3\cos^2 x - m\cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$\Leftrightarrow \sin x\left(-6\cos^2 x + 6\cos x + m\right) \le 0,\ \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ (vì $\sin x > 0,\ \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$)

$\Leftrightarrow \left(-6\cos^2 x + 6\cos x + m\right) \le 0,\ \forall \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -6\cos^2 x + 6\cos x \le -m,\ \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ (1)

Xét $f(x) = -6\cos^2 x + 6\cos x,\ \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Đặt $t = \cos x$. Vì $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x \in (0; 1)$.

Ta có $f(t) = -6t^2 + 6t$, $\forall t \in (0;1)$ là Parabol có đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ và hệ số $a < 0$ nên có giá trị lớn nhất là $\frac{3}{2}$ tại $t = \frac{1}{2}$.

Để (1) xảy ra $\Leftrightarrow \max\limits_{(0;1} f(x) \leq -m \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq -m \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{2}$

Cách 2: Đặt $t = \cos x$. Vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x \in (0;1)$.

Ta có $y = 2t^3 - 3t^2 - mt \Leftrightarrow y' = 6t^2 - 6t - m$.

Hàm số $y = 2\cos^3 x - 3\cos^2 x - m\cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $y = 2t^3 - 3t^2 - mt$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$

$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall t \in (0;1)$

$\Leftrightarrow 6t^2 - 6t - m \geq 0, \forall t \in (0;1) \Leftrightarrow f(t) = 6t^2 - 6t \geq m, \forall t \in (0;1)$.

Xét $f(t) = 6t^2 - 6t$, $\forall t \in (0;1)$; $f'(t) = 12t^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)'$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m \leq -\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 - 3x^2 + m - 1}}$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

A $1 < m < 5$. B $-1 < m < 2$. C $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right.$. D $\left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 5 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^3 - 3x^2 + m - 1}} = 0$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - 3x^2 + m - 1 = -\infty$ nên không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^3 - 3x^2 + m - 1}}$.

Do vậy đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận ngang $y = 0$.

Để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận thì phương trình $x^3 - 3x^2 + m - 1 = 0$ (1) có ba nghiệm phân biệt.

Ta có (1) $\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 1 - m$. (2)

Số nghiệm của (2) là giao điểm của đường thẳng y = 1 –m và đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$.

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Ta có $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy (2) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4 < 1 - m < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Cho hàm số $f'(x) = (x-2)^2(x^2-4x+3)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - 10x + m + 9)$ có 5 điểm cực trị?

(A) 17. (B) 18. (C) 15. **(D) 16.**

Lời giải.

Ta có $[f(x^2-10x+m+9)]' = (2x-10)(x^2-10x+m+7)^2(x^2-10x+m+8)(x^2-10x+m+6)$.

Hàm số $y = f(x^2-10x+m+9)$ có 5 điểm cực trị điều kiện cần và đủ là các phương trình $x^2-10x+m+8=0$ (1) và $x^2-10x+m+6=0$ (2) đều có hai nghiệm phân biệt khác 5, điều kiện tương đương là $\begin{cases} \Delta'_1 > 0 \\ \Delta'_2 > 0 \\ 25-50+m+8 \neq 0 \\ 25-50+m+6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17-m>0 \\ 19-m>0 \\ m \neq 17 \\ m \neq 19 \end{cases} \Leftrightarrow m < 17$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) - xf(x) = 0, f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Giá trị của$f(1)$ bằng

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$. (B) $\dfrac{1}{e}$. **(C) $\sqrt{e}$.** (D) e.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = x \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \ln[f(x)] = \dfrac{1}{2}x^2 + C$ (do $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

Do đó $\ln[f(0)] = \dfrac{1}{2}\cdot 0^2 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \ln f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \Rightarrow f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow f(1) = \sqrt{\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x) = \log_3\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-x}{2018}\right)$. Khi đó $f'(1)$ bằng

(A) $\dfrac{1}{(\mathrm{e}-1)\ln 3}$. **(B) $\dfrac{2\mathrm{e}-1}{(\mathrm{e}-1)\ln 3}$.** (C) $\dfrac{4\mathrm{e}-1}{(\mathrm{e}-1)\ln 3}$. (D) $\dfrac{2}{(\mathrm{e}-1)\ln 3}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \log_3\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-x}{2018}\right) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-x}{2018}\cdot\ln 3}\cdot\dfrac{2x\cdot\mathrm{e}^{x^2}-1}{2018} = \dfrac{2x\cdot\mathrm{e}^{x^2}-1}{(\mathrm{e}^{x^2}-x)\cdot\ln 3}$.

Suy ra $f'(x) = \dfrac{2\cdot 1\cdot\mathrm{e}^1 - 1}{(\mathrm{e}^1 = 1)\cdot\ln 3} = \dfrac{2\mathrm{e}-1}{(\mathrm{e}-1)\cdot\ln 3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị là đường cong (C). Tổng hoành độ của các điểm có tọa độ nguyên nằm trên (C) bằng

(A) 7. (B) -4. (C) 5. (D) 6.

Lời giải.

Tập xác định $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có $y = \dfrac{2x-1}{x+1} = 2 - \dfrac{3}{x+1}$ nên điểm $M(x;y) \in (C)$ có tọa độ nguyên khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ 3 \vdots (x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ (x+1) \in \{-3;-1;1;3\} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-4;-2;0;2\}.$$

Vậy tổng hoành độ của các điểm có tọa độ nguyên nằm trên (C) là $-4+(-2)+0+2=-4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Số thực x thỏa mãn $\log_2(\log_4 x) = \log_4(\log_2 x) - a$, với $a \in \mathbb{R}$. Giá trị của $\log_2 x$ bằng bao nhiêu?

(A) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^a$. (B) a^2. (C) 2^{1-a}. (D) 4^{1-a}.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \log_2(\log_4 x) = \log_4(\log_2 x) - a &\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right) = \frac{1}{2}\log_2(\log_2 x) - a \\ &\Leftrightarrow \log_2(\log_2 x) - 1 = \frac{1}{2}\log_2(\log_2 x) - a \\ &\Leftrightarrow \log_2(\log_2 x) = 2 - 2a \\ &\Leftrightarrow \log_2 x = 2^{2-2a} = 4^{1-a}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = \sin^2 2x \cdot \sin x$. Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm $f(x)$.

(A) $y = \dfrac{4}{3}\cos^3 - \dfrac{4}{5}\sin^5 x + C$.

(B) $y = -\dfrac{4}{3}\cos^3 x + \dfrac{4}{5}\cos^5 x + C$.

(C) $y = \dfrac{4}{3}\sin^3 x - \dfrac{4}{5}\cos^5 x + C$.

(D) $y = -\dfrac{4}{3}\sin^3 x + \dfrac{4}{5}\sin^5 x + C$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \sin^2 2x \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = 4\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= -4\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \mathrm{d}(\cos x) = -4\int \left(1-\cos^2 x\right)\cdot \cos^2 x \cdot \mathrm{d}(\cos x) \\ &= -4\int \left(\cos^2 x - \cos^4 x\right)\cdot \mathrm{d}(\cos x) = -\frac{4}{3}\cos^3 x + \frac{4}{5}\cos^5 x + C. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Cho $a, b > 0$, $\log_3 a = p$, $\log_3 b = p$. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

(A) $\log_3\left(\dfrac{3^r}{a^m b^d}\right) = r + pm - qd$.

(B) $\log_3\left(\dfrac{3^r}{a^m b^d}\right) = r + pm + qd$.

(C) $\log_3\left(\dfrac{3^r}{a^m b^d}\right) = r - pm - qd$.

(D) $\log_3\left(\dfrac{3^r}{a^m b^d}\right) = r - pm + qd$.

Lời giải.

Ta có $\log_3\left(\dfrac{3}{a^m b^d}\right) = \log_3 3^r - \log_3\left(a^m b^d\right) = r - \log_3 a^m - \log_3 b^d = r - m\log_3 a - d\log_3 b$

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Cho các số thực không âm x, y thay đổi. M, n lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{(x-y)(1-xy)}{(x+1)^2(y+1)^2}$. Giá trị của $8M + 4m$ bằng

Ⓐ 3. **B** 1. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Lời giải.

Ta có $P = \dfrac{(x-y)(1-xy)}{(x+1)^2(y+1)^2} = \dfrac{x-y-x^2y+xy^2}{(x+1)^2(y+1)^2} = \dfrac{x+xy^2+2xy-(y+x^2y+2xy)}{(x+1)^2(y+1)^2}$

$= \dfrac{x(y+1)^2 - y(1+x)^2}{(x+1)^2(y+1)^2} = \dfrac{x}{(x+1)^2} - \dfrac{y}{(y+1)^2}$.

Đặt $f(t) = \dfrac{1}{(t+1)^2}$ với $t \geq 0$. $\Rightarrow f'(t) = \dfrac{1-t^2}{(1+t)^4}$.

Ta có bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{4}$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất của $f(t) = \dfrac{1}{4}$ khi t $= 1$, giá trị nhỏ nhất của $f(t) = 0$ khi $t = 0$.

Vậy giá trị lớn nhất của $M = \max\limits_{t\in[0;+\infty)} f(t) - \min\limits_{t\in[0;+\infty)} f(t) = \dfrac{1}{4} - 0 = \dfrac{1}{4}$ đạt được khi $x = \dfrac{1}{4}$, $y = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $m = \min\limits_{t\in[0;+\infty)} f(t) - \max\limits_{t\in[0;+\infty)} f(t) = 0 - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{4}$ đạt được khi $x = 0$, $y = \dfrac{1}{4}$.

Vậy $8M + 4m = 8.\dfrac{1}{4} + 4\left(-\dfrac{1}{4}\right) = 2 - 1 = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

A Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 khi và chỉ khi đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi qua x_0.

Ⓑ Nếu $f'(x) = 0$ và $f''(x) < 0$ thì x_0 là cực tiểu của hàm số $y = f(x)$.

Ⓒ Nếu $f'(x) = 0$ và $f''(x) = 0$ thì x_0 không phải là cực trị của hàm số đã cho.

Ⓓ Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 khi và chỉ khi x_0 là nghiệm của đạo hàm.

Lời giải.

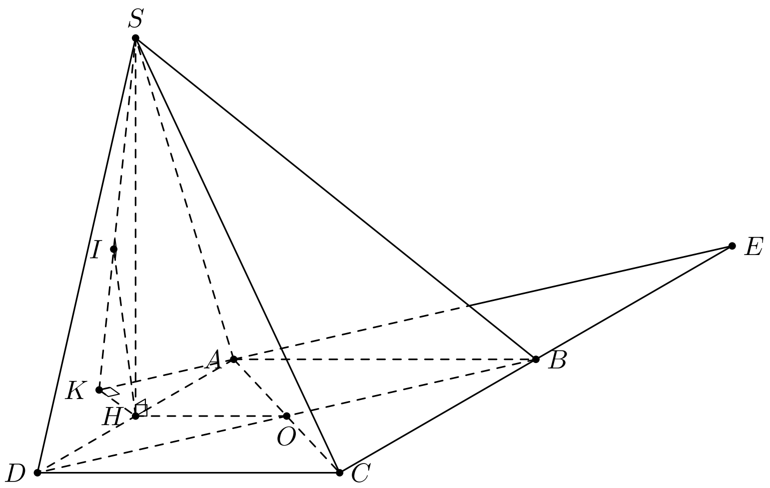
Theo định nghĩa ta có: Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 khi và chỉ khi đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi qua x_0

Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d gữa hai đường thẳng SA và BD.

Ⓐ $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. Ⓑ $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C** $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. Ⓓ $d = a$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AD suy ra $SH \perp (ABCD)$ vì $(SAD) \perp (ABCD)$ và tam giác SAD đều.
Dựng hình bình hành $ADBE$ khi đó $BD \parallel (SAE)$ do đó $d(SA, BD) = \mathrm{d}(D; (SAE)) = 2\mathrm{d}(H; (SAE))$.
Gọi K là hình chiếu của H trên AE và I là hình chiếu của H trên SK.
Ta có $HI = \mathrm{d}(H; (SAE))$.
Do tam giác SAD đều và $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $HK = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.
Do đó ta tính được $HI = a\sqrt{\dfrac{3}{28}}$, suy ra $\mathrm{d}(SA; BD) = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Cho khối chóp $S.ABC$. Trên các đoạn SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' sao cho $SA' = \dfrac{1}{2}SA$, $SB' = \dfrac{1}{3}SB$; $SC' = \dfrac{1}{4}SC$. Khi đó tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'$ và $S.ABC$ bằng

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) $\dfrac{1}{12}$. **C** $\dfrac{1}{24}$. (D) $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải.
Ta có $\dfrac{V'_{SA'BC}}{V_{SABC}} = \dfrac{SA'}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{24}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 41. Cho hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x}}{x-1}$. Tất cả các đường thẳng là đường tiệm cận của đồ thị hàm số trên là

(A) $x = 1$; $y = 0$; $y = 2$; $y = 1$. (B) $x = 1$; $y = 2$; $y = 1$.
(C) $x = 1$; $y = 0$; $y = 1$. **D** $x = 1$; $y = 0$.

Lời giải.
Ta có tập xác định của hàm số $D = (-\infty, 0] \cup (1 + \infty)$.
Ta có $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x}}{x-1} = +\infty$ nên $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x}}{x-1} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x+1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x}\right)} = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Tích phân $\int\limits_0^{\pi^2} \left(\sin\sqrt{x} - \cos\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x = A + B\pi$. Tính $A+B$.

(A) 7. (B) 6. (C) 5. (D) 4.

Lời giải.

Đặt $y = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = \,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \pi^2 \Rightarrow t = \pi$ Suy ra $I = 2\int\limits_0^{\pi} (\sin t - \cos t)t\,\mathrm{d}t$.

Đặt $u = t$; $\mathrm{d}v = (\sin t - \cos t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \,\mathrm{d}u = \,\mathrm{d}t; v = -\cos t - \sin t$.

$$I = 2\left[t(-\cos t - \sin t)\Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} (\cos t + \sin t)\,\mathrm{d}t\right] = 2\left[\pi + (\sin t - \cos t)\Big|_0^{\pi}\right] = 4 + 2\pi.$$

Nên $A = 4$; $B = 2 \Rightarrow A + B = 6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng (P); (Q) có các véc tơ pháp tuyến là $\vec{a}\,(a_1; b_1; c_1)$; $\vec{b}\,(a_2; b_2; c_2)$. Góc α là góc giữa hai mặt phẳng đó $\cos\alpha$ là biểu thức nào sau đây

(A) $\dfrac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}$.

(B) $\dfrac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$.

(C) $\dfrac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\left|\left[\vec{a};\vec{b}\right]\right|}$.

(D) $\dfrac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}$.

Lời giải.

Theo công thức góc giữa hai mặt phẳng ta có $\cos\alpha = |\cos(\vec{a}, \vec{b})| = \dfrac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Một hộp đựng tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Một bạn rút ngẫu nhiên đồng thời 3 tấm thẻ. Tính xác suất để tổng 3 số ghi trên thẻ được rút chia hết cho 3.

(A) $\dfrac{5}{14}$. (B) $\dfrac{9}{14}$. (C) $\dfrac{3}{14}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Xét phép thử "Rút ngẫu nhiên đồng thời 3 tấm thẻ trong một hộp đựng 9 tấm thẻ ".

Gọi là biến cố "Rút được 3 tấm thẻ có tổng 3 số ghi trên 3 thẻ là số chia hết cho 3 ".

Trong 9 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 9 có

- 3 tấm thẻ ghi số chia cho 3 dư 1 là $(1; 4; 7)$;
- 3 tấm thẻ ghi số chia cho 3 dư 2 là $(2; 5; 8)$;
- 3 tấm thẻ ghi số chia hết cho 3 là $(3; 6; 9)$.

Ta có các trường hợp sau để rút được 3 thẻ có tổng 3 số ghi trên thẻ là số chia hết cho 3:

TH1. Lấy được 3 thẻ ghi số chia hết cho 3, có $\mathrm{C}_3^3 = 1$ cách.

TH2. Lấy được 3 thẻ ghi số chia cho 3 dư 1, có $\mathrm{C}_3^3 = 1$ cách.

TH3. Lấy được 3 thẻ ghi số chia cho 3 dư 2, có $\mathrm{C}_3^3 = 1$ cách.

TH4. Lấy được 3 thẻ trong đó có 1 thẻ ghi số chia cho 3 dư 1, 1 thẻ ghi số chia cho 3 dư 2, 1 thẻ ghi số chia hết cho 3, có $\mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_3^1 = 27$ cách. $\Rightarrow n\,(A) = 1 + 1 + 1 + 27 = 30$.

Vậy xác suất cần tìm là $P\left(A\right) = \dfrac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)} = \dfrac{30}{84} = \dfrac{5}{14}$.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Cho hình nón có chiều cao h và góc ở đỉnh bằng 90°. Thể tích của khối nón xác định bởi hình nón trên:

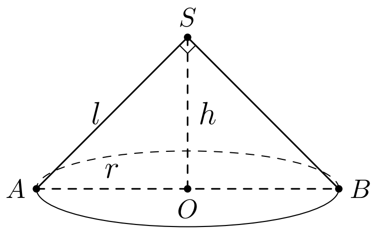
A. $\dfrac{2\pi}{3}$. B. $\dfrac{\sqrt{6}\pi}{3}$. C. $\dfrac{\pi}{3}$. D. 2π.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra bán kính nón $r = h$.

Vậy thể tích khối nón tương ứng là

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi h^3}{3}.$$



Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang cân đáy lớn AD. Gọi M, lần lượt là hai trung điểm của AB, CD. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua MN và cắt mặt bên (SBC) theo một giao tuyến. Thiết diện của (P) và hình chóp là

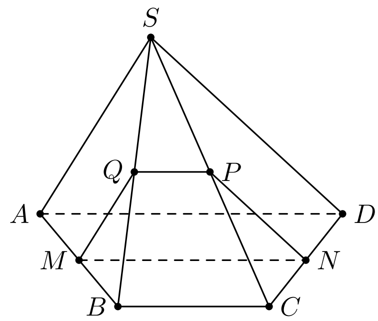
A. Hình bình hành. B. Hình chữ nhật. C. Hình thang. D. Hình vuông.

Lời giải.

Giả sử mặt phẳng (P) cắt (SBC) theo giao tuyến PQ.

Khi đó do $MN \parallel BC$ nên theo định lý ba giao tuyến song song hoặc đồng quy áp dụng cho ba mặt phẳng (P); (SBC); $(ABCD)$ thì ta được ba giao tuyến MN; BC; PQ đôi một song song.

Do đó thiết diện là một hình thang.



Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho phương trình $4^x - \left(10m+1\right)2^x + 32 = 0$ biết rằng phương trình này có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_1 x_2} = 1$. Khi đó, khẳng định nào sau đây về m là đúng?

A. $0 < m < 1$. B. $2 < m < 3$. C. $-1 < m < 0$. D. $1 < m < 2$.

Lời giải.

Đặt $2^x = t\,(t > 0)$. Khi đó phương trình trở thành $t^2 - \left(10m+1\right)t + 32 = 0$. $(*)$

Phương trình ban đầu có hai nghiệm x_1, x_2

$\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(10m+1\right)^2 - 4.32 > 0 \\ \left(10m+1\right) > 0 \\ 32 > 0. \end{cases}.$$

Theo định lý Viet ta có $\begin{cases} t_1 + t_2 = 10m + 1 \\ t_1 t_2 = 32. \end{cases}$

Với $t_1 \cdot t_2 = 32 \Rightarrow 2^{x_1} + x_2 = 32 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 5$.
Lại có $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_1x_2} = 1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 1 = x_1x_2$ nên $x_1x_2 = 6$.

Khi đó ta có x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $X^2 - 5X + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 2 \Rightarrow t_1 = 4 \\ X = 3 \Rightarrow t_2 = 8 \end{array}\right.$.

Mặt khác $t_1 + t_2 = 10m + 1 \Leftrightarrow 12 = 10m + 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{11}{10}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $1 < m < 2$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 48. Tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\left(\sqrt{10}+1\right)^x - m\left(\sqrt{10}-1\right)^x > 3^{x+1}.$$

Ⓐ $m < -\dfrac{7}{4}$. **B** $m < -\dfrac{9}{4}$. Ⓒ m < -2. Ⓓ $m < -\dfrac{11}{4}$.

Lời giải.

Xét bất phương trình $(\sqrt{10}+1)^8 - m(\sqrt{10}-1)^8 > 3^{x+1} \Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^x - m\left(\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^x > 3$.

Nhận xét $\dfrac{\sqrt{10}+1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{10}-1}{3} = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{-1}$

Do đó (1) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^x - m\left(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{-x} > 3$.

Đặt $t = \left(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^x, t > 0$.

Khi đó (1) trở thành $t - \dfrac{m}{t} > 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t > m$ (2).

Ta có bảng biến thiên hàm số $y = t^2 - 3t$.

t	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $m < -\dfrac{4}{9}$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 49. Tính giới hạn $M = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x} - \sqrt{x^2-x}\right)$.

Ⓐ $-\dfrac{3}{2}$. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. **C** $\dfrac{3}{2}$. Ⓓ $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $M = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x} - \sqrt{x^2-x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x^2-x}}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x}{|x|\left(\sqrt{1-\dfrac{4}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{\sqrt{1-\dfrac{4}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}} = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $\left(2-\sqrt{3}\right)^x + \left(2+\sqrt{3}\right)^x = 4$. Khi đó $x_1^2 + 2x_2^2$ bằng

A 2. B 5. C 4. D 3.

Lời giải.

Ta có $(2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x - 4 \Leftrightarrow (2-\sqrt{3})^x + \dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^x} = 4$

$$\Leftrightarrow (2-\sqrt{3})^{2x} - 4(2-\sqrt{3})^x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(2-\sqrt{3})^x = 2+\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^{-1}\\ (2-\sqrt{3})^x = 2-\sqrt{3}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -1\\ x = 1\end{array}\right..$$

Do đó $x_1^2 + 2x_2^2 = |x_1|^2 + 2|x_2|^2 = 1 + 2 = 3$.

Chọn đáp án D □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. B	3. B	4. C	5. D	6. B	7. D	8. D	9. D	10. A
11. A	12. D	13. B	14. C	15. B	16. A	17. C	18. B	19. B	20. D
21. C	22. B	23. C	24. A	25. B	26. C	27. A	28. D	29. A	30. D
31. C	32. B	33. B	34. D	35. B	36. C	37. B	38. A	39. C	40. C
41. D	42. B	43. D	44. D	45. C	46. C	47. D	48. B	49. C	50. D

21 ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN BẮC GIANG - LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

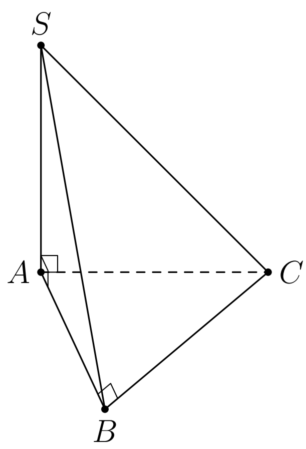
Câu 1. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a, \widehat{ACB} = 45^\circ$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, cạnh SB tạo với đáy một góc 60°. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (C) $V = \dfrac{a^3}{4\sqrt{3}}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$.

Lời giải.

Ta có $\triangle SAB$ vuông tại A có $\angle SBA = 60^\circ$ nên $SA = \sqrt{3}a$. Mà $\triangle ABC$ vuông cân tại B nên $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = \dfrac{1}{2}a^2$.

Do đó $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3}\sqrt{3}a \cdot \dfrac{1}{2}a^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a^3$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Trong các hàm số sau, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

(A) $y = x^4 + 3x^2 - 1$. (B) $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 2$.
(C) $y = x^4 - 3x^2 - 5$. (D) $y = \dfrac{3-2x}{x+1}$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 2$ có $y' = 3x^2 - 6x + 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số này đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Cho hàm số phù hợp với bảng biến thiên sau.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	-1	↗	11	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

Mệnh đề nào đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-1; 0) \cup (0; 1)$.
(B) Hàm số đồng biến trên hai khoảng $(-\infty; -1)\,; (11; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-1; 11)$.
(C) Hàm số đồng biến trên hai khoảng $(-\infty; -1)\,; (1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
(D) Hàm số đồng biến trên hai khoảng $(-\infty; -1)\,; (1; +\infty)$ và nghịch biến trên hai khoảng $(-1; 0)\,; (0; 1)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên hai khoảng $(-\infty;-1)\,;(1;+\infty)$ và nghịch biến trên hai khoảng $(-1;0)\,;(0;1)$.

Chọn đáp án D □

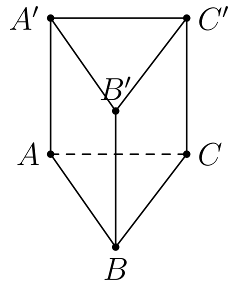
Câu 4. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=2a$, $AA'=a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $3a^3$. B a^3. C $\dfrac{a^3}{4}$. D $\dfrac{3a^3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}AB^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot(2a)^2=\sqrt{3}a^2$.

Do đó $V_{ABC.A'B'C'}=S_{\triangle ABC}AA'=\sqrt{3}a^2\cdot a\sqrt{3}=a^3$.



Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại B, $AB=BC=a$ và $\widehat{ABC}=120^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a$. Tính theo a bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

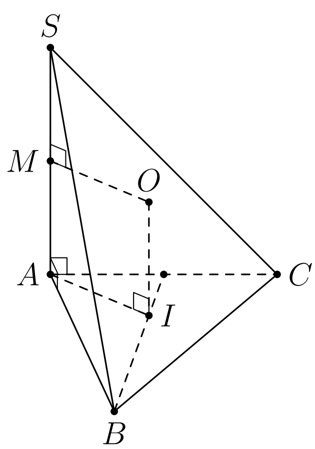
A $\dfrac{a\sqrt{2}}{5}$. B $a\sqrt{2}$. C $a\sqrt{5}$. D $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

Dựng tam giác đều IAB (I và C cùng phía bờ AB). Ta có $\widehat{IBC}=120^\circ-60^\circ=60^\circ$ và $IB=BC$ nên $\triangle IBC$ đều, $IA=IB=IC=a$.

Qua I dựng đường thẳng song song với SA, cắt đường trung trực của SA tại O thì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Gọi M là trung điểm của SA. Ta có $OM=IA=a$; $AM=\dfrac{SA}{2}=a$ nên $OA=\sqrt{OM^2+MA^2}=\sqrt{2}a$, $R=\sqrt{2}a$.



Chọn đáp án B □

Câu 6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=AA'=a$, $AC=2a$. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ACD') là

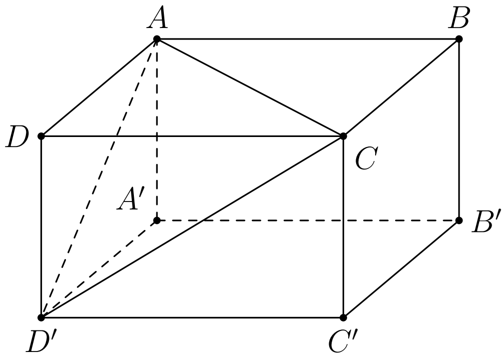
A $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. B $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. C $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. D $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải.

Ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3}a$. Do đó $DA = \sqrt{3}a$; $DC = DD' = a$

Tứ diện $DACD'$ vuông tại D nên ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{h^2} &= \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} + \frac{1}{DD'^2}\\ &= \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2}\\ &= \frac{7}{3a^2}.\end{aligned}$$



Suy ra $h = \sqrt{\frac{3}{7}}a = \frac{\sqrt{21}}{7}a$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Nếu cạnh của một hình lập phương tăng lên gấp 3 lần thì thể tích của hình lập phương đó tăng lên bao nhiêu lần?

A 27. **B** 9. **C** 6. **D** 4.

Lời giải.

$V' = (3a)^3 = 3^3 \cdot a^3 = 27V$.

Chọn đáp án (A) □

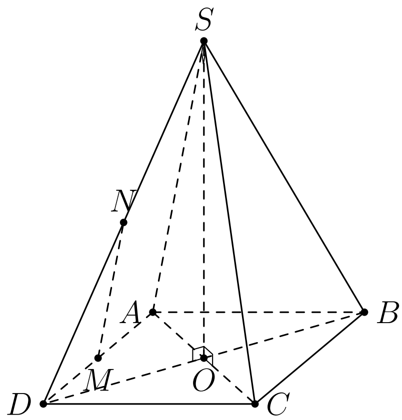
Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo góc (MN, SC) bằng

A 45°. **B** 30°. **C** 90°. **D** 60°.

Lời giải.

Ta có MN là đường trung bình của tam giác DAS nên $MN \parallel SA$. Suy ra góc của SA với SC bằng góc giữa MN với SC. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, vì $SA = SC = SB = SD$ nên $SO \perp (ABCD)$.

Có $AC = \sqrt{2} \Rightarrow AO = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $\sin\widehat{ASO} = \frac{AO}{SA} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \angle ASO = 45^\circ$ nên $\widehat{ASC} = 90^\circ$.



Chọn đáp án (C) □

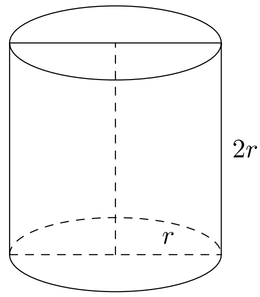
Câu 9. Cho hình trụ có diện tích toàn phần là 8π và có thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là hình vuông. Tính thể tích khối trụ?

A $\frac{4\pi}{9}$. **B** $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$. **C** $\frac{16\pi\sqrt{3}}{9}$. **D** $\frac{\pi\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải.

Gọi bán kính đường tròn đáy là r. Vì thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là hình vuông nên chiều cao hình trụ là $2r$. Ta có $S_{tp} = 2S_d + S_{xq} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2$.

Theo đề bài $S_{tp} = 8\pi \Rightarrow r^2 = \dfrac{4}{3} \Rightarrow r = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $V = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 = 2\pi \cdot \dfrac{8\sqrt{3}}{9} = \dfrac{16\sqrt{3}\pi}{9}$.



Chọn đáp án C □

Câu 10. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ khi và chỉ khi $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a; b)$.

B Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$.

C Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ khi và chỉ khi $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$.

D Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$.

Lời giải.

Nếu $f'(x) > 0\ \forall x \in (a; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, đường thẳng DB' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ góc $30°$. Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$

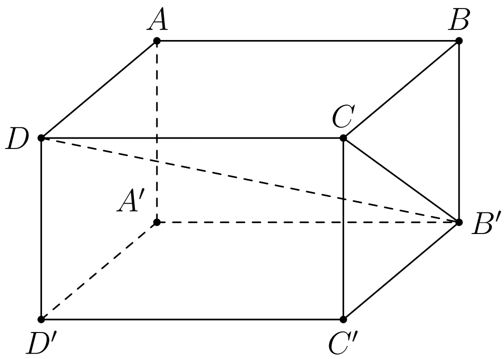
A $a^3\sqrt{3}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C** $8a^3\sqrt{2}$. **D** a^3.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của D xuống mặt phẳng $(BCC'B')$ là điểm C. Theo đề bài, ta có $\angle DB'C = 30°$; $B'C = DC \cdot \cot 30° = 2a\sqrt{3} = 2\sqrt{3}a$.

$\Rightarrow BB' = \sqrt{B'C^2 - BC^2} = \sqrt{12a^2 - 4a^2} = 2\sqrt{2}a$.

Do đó $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot BB' = 2\sqrt{2}a \cdot 4a^2 = 8\sqrt{2}a^3$.



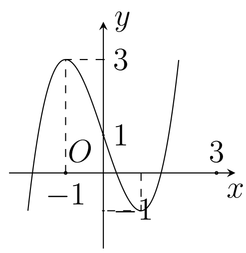
Chọn đáp án C □

Câu 12.

Đồ thị trong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau

A $y = x^3 - 3x + 1$. **B** $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

C $y = -x^3 + 3x - 1$. **D** $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.



Lời giải.

Quan sát đồ thị ta thấy nhánh bên phải đi lên nên loại đáp án $y = -x^3 + 3x - 1$. Mặt khác ta thấy đồ thị hàm số có hai cực trị là $(1; -1)$ và $(-1; 3)$ nên ta chọn đáp án $y = x^3 - 3x + 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào là đường thẳng đi qua điểm $A(3;0)$ và tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3+3x$?

A $y=\dfrac{2}{5}x+\dfrac{7}{5}$. **B** $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{9}{4}$. **C** $y=6x-18$. **D** $y=-6x+18$.

Lời giải.

Giả sử phương trình đường thẳng đó là $y=k(x-3)$. Đường thẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+3x$ thì hệ phương trình $\begin{cases}-\dfrac{1}{3}x^3+3x=k(x-3)\\ -x^2+3=k\end{cases}$ có nghiệm.

Từ $-x^2+3=k$, thế vào phương trình đầu, ta có $-\dfrac{1}{3}x^3+3x=(-x^2+3)(x-3)\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2}$ hoặc $x=3$. Do đó $k=\dfrac{3}{4}$ hoặc $k=-6$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Với a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A $\ln 3a=\ln 3+\ln a$. **B** $\ln\dfrac{a}{3}=\dfrac{1}{3}\ln a$.

C $\ln a^5=\dfrac{1}{5}\ln a$. **D** $\ln(3+a)=\ln 3+\ln a$.

Lời giải.

Ta có $\ln 3a=\ln 3+\ln a$.

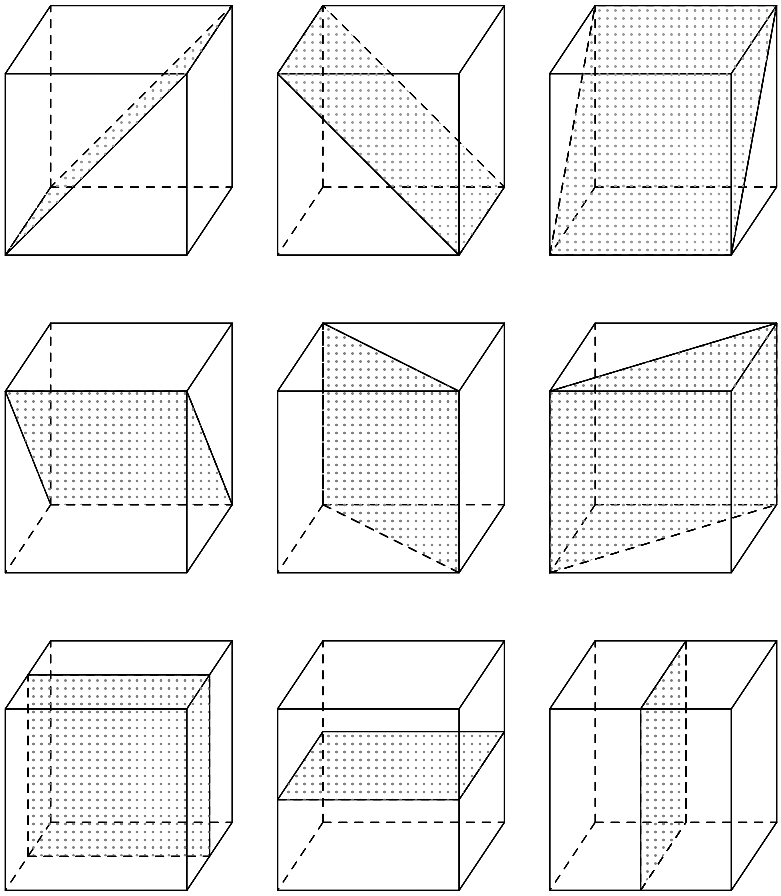
Chọn đáp án A □

Câu 15. Hình lập phương có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A 3. **B** 9. **C** 6. **D** 4.

Lời giải.

Hình lập phương có tất cả 9 mặt đối xứng gồm:



- 3 mặt phẳng chia hình lập phương thành 2 khối hộp hình chữ nhật.
- 6 mặt phẳng chia hình lập phương thành 2 khối lăng trụ tam giác.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ là

A -25. (B) 3. (C) 7. (D) -20.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x+1)(x-3)$, từ đó $x_{CT} = 3$ nên $y_{CT} = y(3) = -25$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) $1 + \sin 2x - \cos 2x = 2\sqrt{2}\cos x \cdot \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

(B) $1 + \sin 2x - \cos 2x = 2\cos x(\sin x - \cos x)$.

C $1 + \sin 2x - \cos 2x = 2\sqrt{2}\sin x \cdot \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

(D) $1 + \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}\cos x \cdot \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải.

Ta có $1 + \sin 2x - \cos 2x = 2\sin x\cos x + 2\sin^2 x = 2\sin x(\sin x + \cos x) = 2\sqrt{2}\sin x \cdot \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = \log_5 x$. (B) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. (C) $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-x}$. **D** $y = \left(\dfrac{e}{3}\right)^x$.

Lời giải.

chú ý rằng $\frac{e}{3} < 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Gọi E là tập hợp các số tự nhiên gồm 3 chữ số phân biệt từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Chọn ngẫu nhiên 2 số khác nhau từ tập hợp E. Tính xác suất để 2 số được chọn có đúng 1 số có chữ số 5.

(A) $\frac{7}{22}$. (B) $\frac{5}{63}$. (C) $\frac{144}{295}$. (D) $\frac{132}{271}$.

Lời giải.

Số phần tử của tập hợp E là $|E| = \mathrm{A}_5^3 = 60$(phần tử).

Không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{60}^2 = 1770$. Số số thuộc E không có chữ số 5 là $\mathrm{C}_4^2 \cdot 3! = 36$(số). Số trường hợp thỏa mãn là $36.24 = 864$. Xác suất cần tính $\mathrm{P} = \frac{864}{1770} = \frac{144}{295}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$.

(A) $-\frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $+\infty$. (D) 0.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-x-1)}{\left(\sqrt{1-x}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x}+1} = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Khoảng cách từ điểm $M(3;-4)$ đến đường thẳng $\Delta\colon 3x - 4y - 1 = 0$ bằng

(A) $\frac{8}{5}$. (B) $\frac{24}{5}$. (C) 5. (D) $\frac{7}{5}$.

Lời giải.

$\mathrm{d}(M,\Delta) = \frac{|3\cdot 3 - 4(-4) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{24}{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log a = x$, $\log b = y$. Tính $P = \log(a^2b^3)$

(A) $P = 6xy$. (B) $p = x^2y^3$. (C) $P = x^2 + y^3$. (D) $P = 2x + 3y$.

Lời giải.

Ta có $\log(a^2b^3) = \log(a^2) + \log(b^3) = 2\log a + 3\log b = 2x + 3y$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Trong khoảng $(-\pi;\pi)$, phương trình $\sin^6 x + 3\sin^2 x\cos x + \cos^6 x = 1$ có

(A) 4 nghiệm. (B) 1 nghiệm. (C) 3 nghiệm. (D) 2 nghiệm.

Lời giải.

Ta có $\sin^6 x + \cos^6 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$.

Do đó phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} & 3\sin^2 x\cos x - 3\sin^2 x\cos^2 x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \sin^2 x\cos x(1-\cos x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\cos x = 0 \\ \cos x = \pm 1.\end{array}\right. \end{aligned}$$

Vẽ đường tròn đơn vị ra, ta thấy phương trình có 3 nghiệm trên $(-\pi;\pi)$, nên tập nghiệm là $S=\left\{-\dfrac{\pi}{2};0;\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Tập xác định của hàm số $y=(2-x)^{\sqrt{3}}$ là

(A) $\mathscr{D}=(2;+\infty)$. (B) $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **C** $\mathscr{D}=(-\infty;2)$. (D) $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $2-x>0\Leftrightarrow x<2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Tính thể tích V của khối nón có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 6.

A $V=18\pi$. (B) $V=54\pi$. (C) $V=108\pi$. (D) $V=36\pi$.

Lời giải.

Ta có $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi\cdot 3^2\cdot 6=18\pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Cho hàm số $y=\dfrac{2^x}{\ln 2}-2x+3$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

(B) Hàm số có giá trị cực tiểu là $y=\dfrac{2}{\ln 2}+1$.

(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

(D) Hàm số đạt cực trị tại $x=1$.

Lời giải.

Ta có $y'=2^x-2\Rightarrow\forall x\in(0;1),y'>0$ nên hàm số nghịch biến trên $(0;1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Trong các số tự nhiên từ 100 đến 999 có bao nhiêu số mà các chữ số của nó tăng dần hoặc giảm dần.

(A) 168. **B** 204. (C) 216. (D) 120.

Lời giải.

Với ba chữ số khác nhau thuộc tập hợp $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, ta viết được 2 số có 3 chữ số theo thứ tự tăng dần hoặc giảm dần ($\overline{abc}$ với $a>b>c$ hoặc $a<b<c$), có $2\mathrm{C}_9^3=168$ số.

Với 2 chữ số khác nhau thuộc tập hợp $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ và 1 chữ số 0, ta viết được 1 số theo thứ tự tăng dần hoặc giảm dần ($\overline{ab0}$ với $a>b>0$), có $\mathrm{C}_9^2=36$ số.

Vậy có tất cả $168+36=204$ (số).

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=-2x^4+4x^2+3$ trên đoạn $[0;2]$ lần lượt là

(A) 6 và -12. (B) 6 và -13. **C** 5 và -13. (D) 6 và -31.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=-8x^3+8x=-8x(x^2-1)=-8x(x-1)(x+1)$.

Xét $f(0)=3$, $f(1)=5$ và $f(2)=-13$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Giá trị của m để phương trình $x^4 - 8x^2 + 3 - 4m = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt là

(A) $-\frac{13}{4} \leq m \leq \frac{3}{4}$. (B) $-\frac{13}{4} < m < \frac{3}{4}$. (C) $m \leq \frac{3}{4}$. (D) $m \geq -\frac{13}{4}$.

Lời giải.

Đặt $x^2 = t \geq 0$, phương trình tương đương với $t^2 - 8t + 3 - 4m = 0$,(1).

Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì (1) có nghiệm t dương phân biệt

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ 3 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 3 + 4m > 0 \\ m < \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{13}{4} < m < \frac{3}{4}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 7) = 0$ bằng

(A) 6. (B) 7. (C) 13. (D) 5.

Lời giải.

Phương trình tương đương với $x^2 - 5x + 7 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$, tổng các nghiệm của phương trình này là 5 (theo định lý Vi-et).

Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Trong các mệnh đều sau, mệnh đề nào **sai**?

(A) Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

(B) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

(C) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

(D) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Lời giải.

Mệnh đề "Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau "là mệnh đề sai do hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba chúng có thể song song nhau hoặc chéo nhau.

Chọn đáp án (D) □

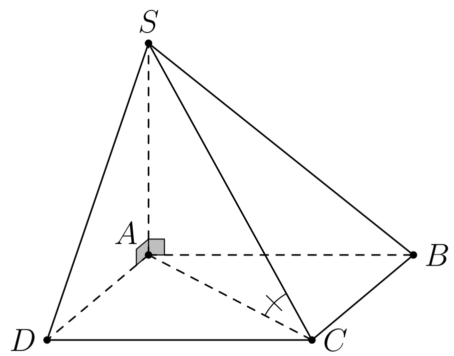
Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$

(A) $30°$. (B) $60°$. (C) $75°$. (D) $45°$.

Lời giải.

Góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\angle SCA$;

Suy ra $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ nên $\angle SCA = 30°$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Phương trình $2^{x-2} = 3^{x^2+2x-8}$ có một nghiệm dạng $x = \log_a b - 4$ với a, b là các số nguyên dương thuộc khoảng $(1; 5)$. Khi đó $a + 2b$ bằng

(A) 6. (B) 14. (C) 9. **D** 7.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & (x-2)\log_3 2 = x^2 + 2x - 8 \\ \Leftrightarrow\ & (x-2)\log_3 2 = (x-2)(x+4) \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \log_3 2 - 4. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $a = 3$; $b = 2$ nên $a + 2b = 7$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 34. Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ là

(A) $x = 1$; $y = -2$. **B** $x = 1$; $y = 2$. (C) $x = 1$; $y = 0$. (D) $x = -1$; $y = 2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 2$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$. Mặt khác $\lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - 1) = \log_2(2x)$ là

(A) $S = \left\{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right\}$. **B** $S = \left\{1+\sqrt{2}\right\}$.

(C) $S = \left\{1+\sqrt{2}; 1-\sqrt{2}\right\}$. (D) $S = \{2; 4\}$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(x^2 - 1) = \log_2(2x) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 2x \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)^3(x+2)$. Số điểm cực trị của hàm số là

(A) 0. (B) 1. **C** 2. (D) 3.

Lời giải.

Hàm số có 2 điểm cực trị là $x = -1$ và $x = -2$. Chú ý rằng $f'(0) = 0$ nhưng $f'(x)$ không đổi dấu khi qua điểm $x = 0$ nên $x = 0$ không là cực trị của hàm số.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Số hạng không chứa x trong khai triển $P(x) = \left(x^3 - \dfrac{1}{x^2}\right)^5$ với $(x \neq 0)$ là số hạng thứ

(A) 3. (B) 6. **C** 4. (D) 5.

Lời giải.

$P(x) = \sum\limits_{k=0}^{5} \mathrm{C}_5^k \left(x^3\right)^{5-k} (-1)^k \left(x^{-2}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{5} \mathrm{C}_5^k (-1)^k x^{15-5k}$. Số hạng không chứa x ứng với $k = 3$, số hạng này là số hạng thứ 4.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Cho x, y là những số thực thỏa mãn $x^2 - xy + y^2 = 1$. Gọi Mvà m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = \dfrac{x^4 + y^4 + 1}{x^2 + y^2 + 1}$. Giá trị của $A = M + 15m$ là

A $A = 17 - 2\sqrt{6}$. **B** $A = 17 - \sqrt{6}$. **C** $A = 17 + \sqrt{6}$. **D** $A = 17 + 2\sqrt{6}$.

Lời giải.

Đặt $xy + 2 = t$, ta có $x^2 + y^2 = 1 + xy = t - 1$.

Từ $(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow t - 1 \geq 2(t - 2) \Rightarrow t \leq 3$.

Mặt khác $(x + y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy \geq 0 \Rightarrow t - 1 + 2(t - 2) \geq 0 \Rightarrow t \geq \dfrac{5}{3}$.

Các dấu bằng đều xảy ra nên $t \in \left[\dfrac{5}{3}; 3\right]$.

Ta có $x^2 + y^2 + 1 = 2 + xy = 2 + (t - 2) = t$;

$x^4 + y^4 + 1 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 + 1 = (t - 1)^2 - 2(t - 2)^2 + 1 = -t^2 + 6t - 6$.

Do đó $P = -t + 6 - \dfrac{6}{t}$; xét hàm $f(t) = -t - \dfrac{6}{t} + 6$.

Có $f'(t) = -1 + \dfrac{6}{t^2} = \dfrac{(\sqrt{6} - t)(\sqrt{6} + t)}{t^2}$.

$f\left(\dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{11}{15}$; $f(3) = 1$; $f(\sqrt{6}) = 6 - 2\sqrt{6}$.

Do đó $m = \min\limits_{\left[\frac{5}{3};3\right]} P = \dfrac{11}{15}$; $M = \max\limits_{\left[\frac{5}{3};3\right]} P = 6 - 2\sqrt{6}$.

Vậy $A = M + 15m = 17 - 2\sqrt{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho biểu thức $P = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ với x, y khác 0. Giá trị nhỏ nhất của P bằng

A -2. **B** 0. **C** -1. **D** 1.

Lời giải.

$P + 1 = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} + 1 = \dfrac{(x + y)^2}{x^2 + y^2} \geq 0$ nên $P \geq -1$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = -y \neq 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho khai triển $(1 + 2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ và các hệ số thỏa mãn $a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \cdots + \dfrac{a_n}{2^n} = 4096$. Hệ số lớn nhất là

A 126720. **B** 1293600. **C** 729. **D** 924.

Lời giải.

Bước 1 Tìm n.

- **Cách 1:** Từ $(1 + 2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, thay $x = \dfrac{1}{2}$ vào, ta được: $(1 + 1)^n = a_0 + a_1\dfrac{1}{2} + a_2\dfrac{1}{2^2} + \cdots + a_n\dfrac{1}{2^n} = 4096 \Rightarrow n = 12$.
- **Cách 2:** $(1 + 2x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k 2^k x^k \Rightarrow a_k = \mathrm{C}_n^k 2^k$ với $k \in \{0; 1; 2; \cdots; n\}$.

Theo đề bài $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2^k} = 4096 \Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k = 4096$.

Chú ý rằng $2^n = (1+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k$, do đó $2^n = 2^{12} \Rightarrow n = 12$.

Vậy $a_k = \mathrm{C}_{12}^k 2^k$.

Bước 2 Tìm hệ số lớn nhất.

$a_0 = 1$; $a_{12} = 2^{12}$. Xét các hệ số a_i, ta có:

$$\begin{aligned} a_i - a_{i-1} &= \mathrm{C}_{12}^{i-1}2^i - \mathrm{C}_{12}^{i-1}2^{i-1} \\ &= 2^{i-1}\left(2\mathrm{C}_{12}^{i} - \mathrm{C}_{12}^{i-1}\right) \\ &= 2^{i-1}\left(2\frac{12!}{i!(12-i)!} - \frac{12!}{(i-1)!(13-i)!}\right) \\ &= \frac{2^{i-1}\cdot 12!}{(i-1)!\cdot(12-i)!}\left(\frac{2}{i} - \frac{1}{13-i}\right) \\ &= \frac{2^{i-1}\cdot 12!}{(i-1)!\cdot(12-i)!}\cdot\frac{26-3i}{i(13-i)}. \end{aligned}$$

Do đó $a_i > a_{i-1} \Leftrightarrow 26 - 3i > 0 \Leftrightarrow i < \frac{26}{3} \Leftrightarrow i \leq 8$;

Mà $a_i < a_{i-1} \Leftrightarrow 26 - 3i < 0 \Leftrightarrow i \geq 9$.

Vậy $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_7 < a_8$ và $a_8 > a_9 > a_{10} > a_{11} > a_{12}$ nên hệ số lớn nhất là $a_8 = \mathrm{C}_{12}^8 \cdot 2^8 = 126720$.

Chú ý

Với bài toán này giá trị n khá nhỏ ($n = 12$) nên hoàn toàn có thể thử bằng máy tính bởi chức năng TABLE, nhập hàm $f(x) = \mathrm{C}_{12}^x \cdot 2^x$. START $x = 0$, END $x = 12$ và STEP 1.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2}{2} - mx + \ln(x-1)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A 4. B 1. C 3. D 2.

Lời giải.

Hàm số luôn xác định trên $(1; +\infty)$, có $y' = x - m + \frac{1}{x-1} = x + \frac{1}{x-1} - m$.

Để hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow x + \frac{1}{x-1} \geq m, \forall x \in (1; +\infty)$.

Với $x > 1$, áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$g(x) = x + \frac{1}{x-1} = x - 1 + \frac{1}{x-1} + 1 \geq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}} + 1 = 3.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$, (thỏa mãn).

Vậy $\min\limits_{(1;+\infty)} g(x) = 3$, hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $m \leq 3$ mà $m \in \mathbb{Z}^+$, suy ra $m \in \{1; 2; 3\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+m-3}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi

(A) $m<1$. (B) $m=1$. (C) $m\geq 3$. (D) $m\neq 1$.

Lời giải.

$y'=\dfrac{m-3+2}{(x+m-3)^2}=\dfrac{m-1}{(x+m-3)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m-1>0 \\ x=3-m\notin(0;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow m\geq 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 43. Cho hàm số $f(x)=\ln 2018-\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.Tính $S=f'(1)+f'(2)+f'(3)+\cdots+f'(2017)$

(A) $\dfrac{4035}{2018}$. (B) 2017. (C) $\dfrac{2016}{2017}$. (D) $\dfrac{2017}{2018}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=-\dfrac{x}{x+1}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$.

Do đó $S=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2017}-\dfrac{1}{2018}=1-\dfrac{1}{2018}=\dfrac{2017}{2018}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác véc-tơ không và thỏa mãn $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với véc-tơ $\vec{v}=2\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{m}=5\vec{a}-3\vec{b}$ vuông góc với $\vec{n}=-2\vec{a}+7\vec{b}$. Tính góc tạo bởi hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

(A) 60°. (B) 45°. (C) 90°. (D) 30°.

Lời giải.

Do $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)=0\Rightarrow 2\vec{a}^2-3\vec{b}^2=\vec{a}\cdot\vec{b}$, (1).

Mặt khác $\vec{m}\cdot\vec{n}=0\Rightarrow\left(5\vec{a}-3\vec{b}\right)\left(-2\vec{a}+7\vec{b}\right)=0\Rightarrow 10\vec{a}^2+21\vec{b}^2=41\vec{a}\cdot\vec{b}$, (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\vec{a}^2=2\vec{b}^2\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{2}\left|\vec{b}\right|\Rightarrow|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}\left|\vec{b}\right|^2=\sqrt{2}\vec{b}^2$.

Từ (1) ta lại có $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 2\vec{b}^2-3\vec{b}^2=\vec{b}^2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|$.

Do đó $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nên góc hợp bởi hai véc-tơ bằng 45°.

Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-6x^2+(m-2)x+11$ có hai điểm cực trị trái dấu là

(A) $(-\infty;38)$. (B) $(-\infty;2)$. (C) $(-\infty;2]$. (D) $(2;38)$.

Lời giải.

Ta có $y'=x^2-12x+m-2$.

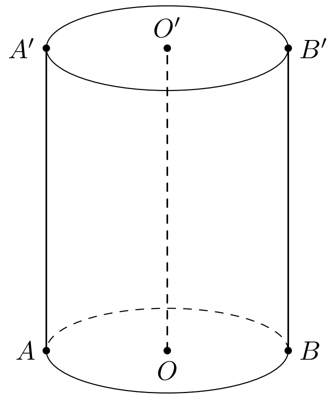
Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu khi và chỉ khi $m-2<0\Leftrightarrow m<2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ hộp ít nhất (diện tích toàn phần của lon nhỏ nhất). Bán kính đáy của vỏ lon là bao nhiêu khi muốn thể tích của lon là 314 cm^3.

(A) $r=\sqrt[3]{\dfrac{314}{4\pi}}$ cm. (B) $r=942\sqrt[3]{2\pi}$ cm. (C) $r=\sqrt[3]{\dfrac{314}{2\pi}}$ cm. (D) $r=\sqrt[3]{\dfrac{314}{\pi}}$ cm.

Lời giải.



Gọi bán kính đáy của vỏ lon là x (cm), với $x>0$.

Theo đề bài, thể tích của lon là 314 cm^3 nên chiều cao của lon là $h=\dfrac{314}{\pi x^2}$.

Diện tích toàn phần của lon

$$S_{\text{toàn phần}}=2S_{\text{đáy}}+S_{\text{xung quanh}}=2\pi x^2+2\pi xh=2\pi\left(x^2+\frac{314}{\pi x}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$x^2+\frac{314}{2\pi x}+\frac{314}{2\pi x}\geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{314}{2\pi}\right)^2}$$

$\Rightarrow S_{\text{toàn phần}}\geq 2\pi\cdot 3\sqrt[3]{\left(\dfrac{314}{2\pi}\right)^2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x^2=\dfrac{314}{2\pi x}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{314}{2\pi}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Tập hợp các giá trị m để hàm số $y=\dfrac{mx^2+6x-2}{x+2}$ có tiệm cận đứng là

(A) $\left\{\dfrac{7}{2}\right\}$. (B) $\mathbb{R}$. (C) $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{7}{2}\right\}$. (D) $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{7}{2}\right\}$.

Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{mx^2+6x-2}{x+2}$ có tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $mx^2+6x-2=0$ không có nghiệm $x=-2\Leftrightarrow m\cdot(-2)^2+6\cdot(-2)-2\neq 0\Leftrightarrow 4m-14\neq 0\Leftrightarrow m\neq\dfrac{7}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Một người gửi 50 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $8,4\%$/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập làm vốn ban đầu để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm, người đó được lĩnh số tiền không ít hơn 80 triệu đồng (cả vốn ban đầu lẫn lãi), biết rằng trong suốt thời gian gửi tiền người đó không rút tiền và lãi suất không thay đổi?

(A) 4 năm. (B) 7 năm. (C) 5 năm. (D) 6 năm.

Lời giải.

Số tiền người đó thu được sau n năm là $P=A(1+r)^n=50(1+8{,}4\%)^n$ (triệu đồng).

$P\geq 80\Leftrightarrow 1{,}084^n\geq\dfrac{8}{5}\Leftrightarrow n\geq\log_{1{,}084}\dfrac{8}{5}\approx 5{,}83$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;2018]$ để hệ phương trình $\begin{cases}x-y+m=0\\ \sqrt{xy}+y=1\end{cases}$ có nghiệm?

(A) 2016. (B) 2018. (C) 2019. (D) 2017.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{xy}+y=1 \Leftrightarrow \sqrt{xy}=1-y \Leftrightarrow \begin{cases} xy=1-y \\ y\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=1-2y+y^2 \\ y\le 1. \end{cases}$ (1)

- Nếu $y=0$, hiển nhiên không thỏa mãn hệ.
- Nếu $y\ne 0$, khi đó hệ(1) trở thành $\begin{cases} x=\dfrac{1}{y}-2+y \\ y\le 1. \end{cases}$

Thế vào $x-y+m=0$, ta có $\dfrac{1}{y}-2+y-y+m=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{y}=2-m$, (2).

Để hệ có nghiệm thì (2) có nghiệm $y\in(-\infty;1]\setminus\{0\}$. Xét hàm $f(y)=\dfrac{1}{y}$ có $f'(y)=-\dfrac{1}{y^2}<0$ với mọi $y\in(-\infty;1]\setminus\{0\}$ nên ta có bảng biến thiên hàm $f(y)$ như sau

y	$-\infty$	0	1
$f'(y)$	$-$	‖	$-$
$f(y)$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 1$

Dựa vào bảng biến thiên trên, ta thấy (2) có nghiệm $y\in(-\infty;1]\setminus\{0\}$ khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} 2-m<0 \\ 2-m\ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m\le 1. \end{array}\right.$$

Mà $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[0;2018]$ nên $m\in\{0;1;3;4;5;6;\cdots;2018\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $9\cdot 9^{x^2-2x}-(2m+1)\,15^{x^2-2x+1}+(4m-2)\,5^{2x^2-4x+2}=0$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

A. $\dfrac{1}{2}<m<1$.

B. $m>\dfrac{3+\sqrt{6}}{2}$ hoặc $m<\dfrac{3-\sqrt{6}}{2}$.

C. $m>1$ hoặc $m<\dfrac{1}{2}$.

D. $\dfrac{3-\sqrt{6}}{2}<m<\dfrac{3+\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 9\cdot 9^{x^2-2x}-(2m+1)15^{x^2-2x+1}+(4m-2)5^{2x^2-4x+2}=0 \\ \Leftrightarrow\ & 9^{x^2-2x+1}-(2m+1)15^{x^2-2x+1}+(4m-2)5^{2x^2-4x+2}=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\left(\frac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}\right]^2-(2m+1)\left(\frac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}+4m-2=0, (1). \end{aligned}$$

Đặt $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}=t>0$.

Khi đó (1) trở thành

$$t^2-(2m+1)t+4m-2=0 \Leftrightarrow (t-2)(t-2m+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=2m-1. \end{array}\right.$$

Chú ý rằng với $t=2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}=2 \Leftrightarrow (x-1)^2=\log_{\frac{3}{5}} 2$, mà $\log_{\frac{3}{5}} 2<0$ và $(x-1)^2 \geq 0$ nên phương trình này vô nghiệm.

Do đó (1) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}=2m-1$. (2)

Xét hàm $f(x)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}$ có $f'(x)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^{(x-1)^2} \cdot \ln\left(\dfrac{3}{5}\right) \cdot 2(x-1)$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên hàm số $f(x)$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên hàm $f(x)$, ta thấy để phương trình (1) có 2 nghiệm thực x phân biệt thì phương trình (2) phải có duy nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$, nghiệm còn lại (nếu có) khác 1.

Số nghiệm của (2) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left(\dfrac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}$ và đường thẳng $y=2m-1$ nên điều kiện của m thỏa mãn là $0<2m-1<1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<m<1$.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. B	3. D	4. B	5. B	6. D	7. A	8. C	9. C	10. D
11. C	12. A	13. D	14. A	15. B	16. A	17. C	18. D	19. C	20. A
21. B	22. D	23. C	24. C	25. A	26. A	27. B	28. C	29. D	30. D
31. D	32. A	33. D	34. B	35. B	36. C	37. C	38. A	39. C	40. A
41. C	42. C	43. D	44. B	45. B	46. C	47. D	48. D	49. B	50. A

22 ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN THOẠI NGỌC HẦU, AN GIANG – LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho các mệnh đề sau
(I). Cơ số của lôgarit phải là số dương.
(II). Chỉ số số thực dương mới có lôgarit.
(III). $\ln(A+B) = \ln A + \ln B$ với mọi $A > 0, B > 0$.
(IV). $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$ với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Số mệnh đề đúng là

A 1. **B** 3. **C** 4. **D** 2.

Lời giải.
(I) Sai vì cơ số của $\log_a b$ chỉ cần thỏa mãn $0 < a \neq 0$.
(II) Đúng vì điều kiện có nghĩa của $\log_a b$ là $b > 0$.
(III) Sai vì $\ln A + \ln B = \ln(AB) \neq \ln(A+B)$ với $A, B > 0$.
(IV) Sai vì nếu $a, b, c < 0$ thì các biểu thức $\log_a b, \log_b c, \log_c a$ không có nghĩa.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	$-1 \| -1$	↗	3	↘	2

A Có một điểm. **B** Có ba điểm. **C** Có hai điểm. **D** Có bốn điểm.

Lời giải.
Từ bảng biến thiên ta có hàm số có hai điểm cực trị là $x = -1$ và $x = 1$.
Chọn đáp án C □

Câu 3. Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h là

A $V = \frac{1}{3}Bh$. **B** $V = \frac{1}{6}Bh$. **C** $V = \frac{1}{2}Bh$. **D** $V = Bh$.

Lời giải.
Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h là $V = Bh$.

Chọn đáp án D □

Câu 4.

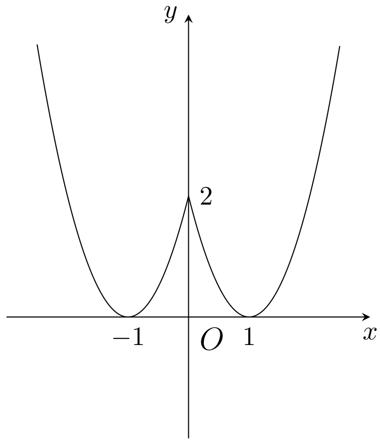
Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên

(I). Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

(II). Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

(III). Hàm số có ba điểm cực trị.

(IV). Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2.



Số mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên là

A 4. B 2. C 3. D 1.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta thấy

- Đồ thị đi xuống trên khoảng $(0;1)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Do đó (I) đúng.
- Đồ thị đi lên trên khoảng $(-1;0)$, đi xuống trên khoảng $(0;1)$ và đi lên trên khoảng $(1;2)$ nên trên khoảng $(-1;2)$ hàm số không hoàn toàn đồng biến. Do đó (II) sai.
- Đồ thị hàm số có ba điểm hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại nên (III) đúng.
- Giá trị lớn nhất của hàm số là tung độ của điểm cao nhất của đồ thị hàm số nên (IV) sai.

Như vậy ta có hai mệnh đề đúng là (I) và (III).

Chọn đáp án B □

Câu 5. Hàm số nào có đồ thị nhận đường thẳng $x=2$ làm đường tiệm cận?

A $y=\dfrac{1}{x+1}$. B $y=\dfrac{5x}{2-x}$.

C $y=x-2+\dfrac{1}{x+1}$. D $y=\dfrac{1}{x+2}$.

Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{5x}{2-x}$ nhận $x=2$ làm tiệm cận đứng nên chọn B.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ là

A 1. B 3. C 2. D 0.

Lời giải.

a) Tiệm cận ngang

- Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+1}=2$ nên $y=2$ là tiệm cận ngang.
- Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+1}=0$ nên $y=0$ là tiệm cận ngang.

b) Tiệm cận đứng

- Ta có $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+1}=+\infty$ nên $x=-1$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 tiệm cận.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Tính bình phương tổng các nghiệm của phương trình $3\sqrt{\log_2 x} - \log_2(4x) = 0$.

(A) 5. (B) 324. (C) 9. (D) 260.

Lời giải.

Điều kiện : $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$

Khi đó

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{\log_2 x} - \log_2(4x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3\sqrt{\log_2 x} - (2 + log_2 x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -\log_2 x + 3\sqrt{\log_2 x} - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = 2 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 16. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Ta thấy $x = 2, x = 16$ thỏa điều kiện.

Vậy tổng bình phương các nghiệm bằng $2^2 + 16^2 = 260$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$, một học sinh làm như sau:

(1). Tập xác định $\mathscr{D} = [-1; 4]$ và $y' = \dfrac{-2x + 3}{\sqrt{-x^2 + 3x + 4}}$.

(2). Hàm số không có đạo hàm $x = -1, x = 4$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

(3). Kết luận. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\dfrac{5}{2}$ khi $x = \dfrac{3}{2}$ và giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi $x = -1, x = 4$.

Cách giải trên

(A) Cả ba bước (1),(2),(3) đều đúng. (B) Sai từ bước (2).

(C) Sai ở bước (3). (D) Sai từ bước (1).

Lời giải.

- Tập xác định :

$$\begin{aligned} & -x^2 + 3x + 4 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & -1 \leq x \leq 4 \\ \Rightarrow\ & \mathscr{D} = [-1; 4]\,. \end{aligned}$$

- $y' = \dfrac{-3x + 2}{2\sqrt{-x^2 + 3x + 4}}$.

Nên cách giải trên sai từ bước 1.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ nghịch biến trên khoảng nào?

A $(-\infty; -2)$. **B** $(0; +\infty)$. **C** $(-2; +\infty)$. **D** $(-2; 0)$.

Lời giải.

Ta có : $y' = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

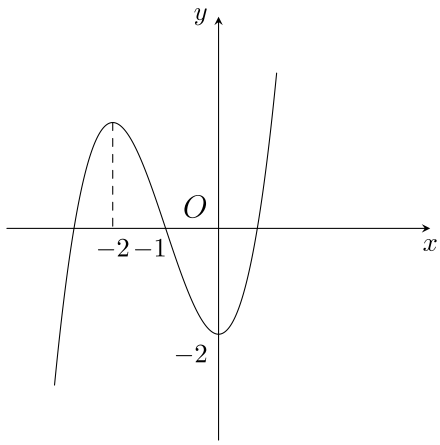
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 10.

Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



A $y = -x^3 - 3x^2 - 2$. **B** $y = x^3 + 3x^2 - 2$.

C $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. **D** $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

Lời giải.

Từ hình vẽ ta thấy $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ nên loại A và C.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1; 0)$ nên chỉ có B thỏa.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Giá trị của biểu thức $P = \log_a \left(a \sqrt[3]{a\sqrt{a}}\right)$ bằng

A 3. **B** $\dfrac{3}{2}$. **C** $\dfrac{1}{3}$. **D** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \log_a \left(a \sqrt[3]{a\sqrt{a}}\right) \\ &= \log_a \left(a \sqrt[3]{a \cdot a^{\frac{1}{2}}}\right) \end{aligned}$$

$$= \log_a\left(a\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}}\right)$$
$$= \log_a\left(a\cdot a^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \log_a a^{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 12. Cho $m>0$. Biểu thức $m^{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^{\sqrt{3}-2}$ bằng

A $m^{2\sqrt{3}-2}$. B $m^{2\sqrt{3}-3}$. C m^{-2}. D m^2.

Lời giải.

Ta có

$$m^{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^{\sqrt{3}-2} = m^{\sqrt{3}}\cdot\left(m^{-1}\right)^{\sqrt{3}-2} = m^{\sqrt{3}}\cdot m^{2-\sqrt{3}} = m^{\sqrt{3}+2-\sqrt{3}} = m^2.$$

Chọn đáp án D □

Câu 13. Hình bát diện đều có tất cả bao nhiêu cạnh?

A 8. B 12. C 30. D 16.

Lời giải.

Số cạnh $=\dfrac{8\cdot 3}{2}=12$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

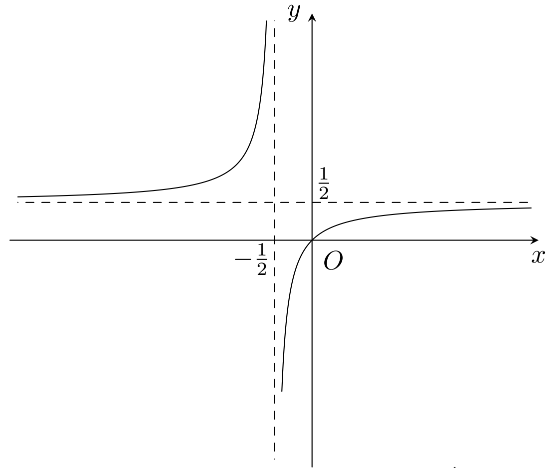
A $(2;+\infty)$. B $(-2;2)$. C $(-\infty;3)$. D $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Dựa bào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 15.
Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



Ⓐ $y = \dfrac{x+3}{2x+1}$. Ⓑ $\dfrac{x+1}{2x+1}$. **C** $y = \dfrac{x}{2x+1}$. Ⓓ $y = \dfrac{x-1}{2x+1}$.

Lời giải.
Quan sát đồ thị, ta thấy đồ thị đi qua điểm $O(0;0)$ chỉ có đáp án C thỏa.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(a;b)$. Phát biểu nào sau đây là **sai?**

Ⓐ $f'(x) < 0, \forall x \in (a;b)$ thì hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến trên $(a;b)$.
Ⓑ Hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a;b)$ và $f'(x) = 0$ tại hữu hạn giá trị $x \in (a;b)$.
Ⓒ Hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $\forall x_1, x_2 \in (a;b) : x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
D Hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a;b)$.

Lời giải.
Hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a;b)$ và $f'(x) = 0$ tại hữu hạn giá trị $x \in (a;b)$ nên D sai.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 17. Cho $\log_a b = \sqrt{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$.

A $P = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-2}$. Ⓑ $P = \sqrt{3}-1$. Ⓒ $P = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+2}$. Ⓓ $P = \sqrt{3}+1$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned} P &= \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \\ &= \frac{\log_a \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}}{\log_a \dfrac{\sqrt{b}}{a}} \\ &= \frac{\log_a \sqrt{b} - \log_a \sqrt{a}}{\log_a \sqrt{b} - \log_a a} \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\log_a b - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\log_a b - 1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Nếu $3^{2x} + 9 = 10 \cdot 3^x$ thì giá trị của $x^2 + 1$ bằng

A 1 và 5. (B) 5. (C) 0 và 2. (D) 1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 3^{2x} + 9 = 10 \cdot 3^x \\ \Leftrightarrow\ & 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 3^x = 1 \\ 3^x = 9 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $x = 0$ thì $x^2 + 1 = 1$.

Với $x = 2$ thì $x^2 + 1 = 5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Một tổ có 10 học sinh gồm 6 nam và 4 nữ. Giáo viên cần chọn ngẫu nhiên hai bạn hát song ca. Tính xác suất P để hai học sinh được chọn là một cặp song ca nam nữ.

(A) $P = \frac{4}{5}$. **B** $P = \frac{8}{15}$. (C) $P = \frac{12}{19}$. (D) $P = \frac{2}{9}$.

Lời giải.

Phép thử : "Chọn ngẫu nhiên 2 trong 10 bạn " $\Rightarrow n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^2$.

Biến cố A : "Chọn được 1 nam và 1 nữ " $\Rightarrow n(A) = \mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_4^1 = 24$.

Vậy $P(A) = \frac{24}{\mathrm{C}_{10}^2} = \frac{8}{15}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A $V = a^3$. (B) $V = 3a^3$. (C) $V = \frac{3a^2}{2}$. (D) $V = \frac{a^3}{2}$.

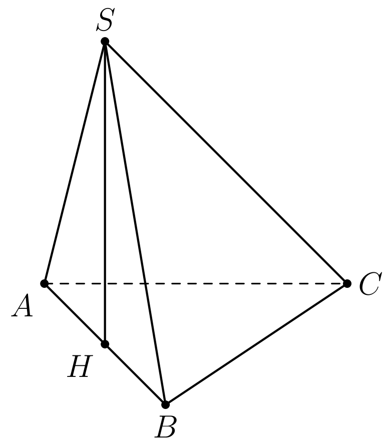
Lời giải.

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB$.

Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \\ SH \perp AB, SH \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Mặt khác : $S_{\triangle ABC} = \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$ và $SH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp : $V = \dfrac{1}{3}Bh = \dfrac{1}{3}a^2\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} = a^3$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. $30°$. B. $45°$. C. $60°$. D. $75°$.

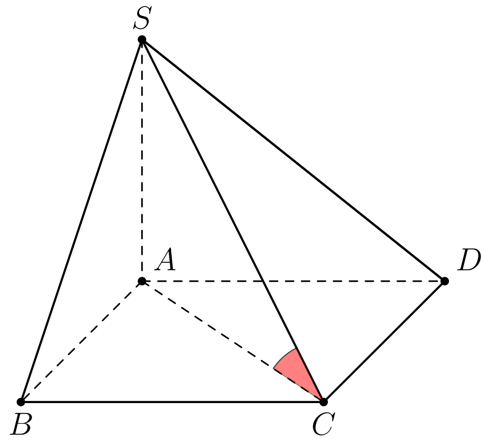
Lời giải.

Do $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\widehat{SCA}$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AC = a\sqrt{2}$.

Ta có $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy : $\widehat{SCA} = 30°$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Có bao nhiêu nghiệm của phương trình $\sin^2 x - \sin x = 0$ thỏa mãn điều kiện $0 < x < \pi$?

A. 3. B. 1. C. 2. D. Không có x.

Lời giải.

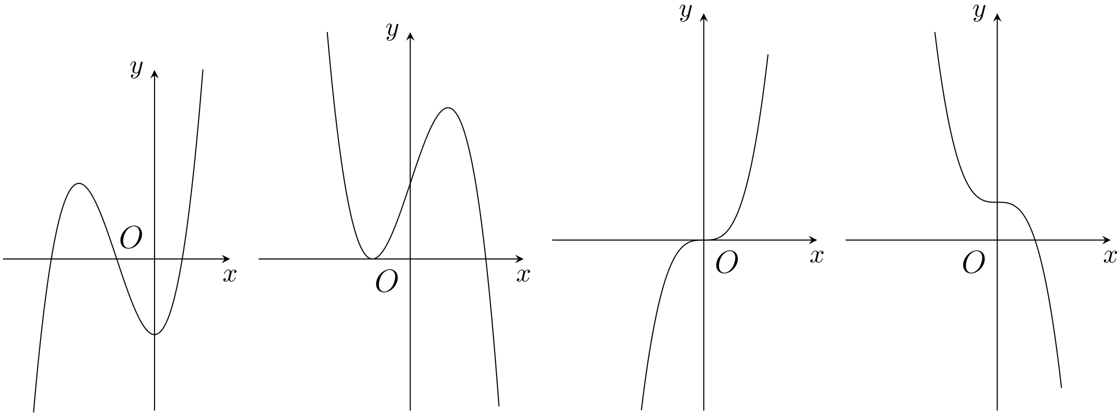
Ta có

$$\begin{aligned} &\sin^2 x - \sin x = 0 \\ \Leftrightarrow &\left[\begin{aligned} &\sin x = 0 \\ &\sin x = 1 \end{aligned}\right. \\ \Leftrightarrow &\left[\begin{aligned} &x = k\pi \\ &x = \frac{\pi}{2} + k2\pi. \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

Do $0 < x < \pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$



(I) (II) (III) (IV)

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A Đồ thị (III) xảy ra khi $a > 0$ và $f'(x) = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

B Đồ thị (IV) xảy ra khi $a > 0$ và $f'(x) = 0$ có có nghiệm kép.

C Đồ thị (II) xảy ra khi $a \neq 0$ và $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

D Đồ thị (I) xảy ra khi $a < 0$ và $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Đồ thị (III) đi lên từ trái qua phải nên $a > 0$ và hàm số không có cực trị nên $f'(x) = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ thì cơ số phải thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

A Cơ số phải là số thực khác 0.

B Cơ số phải là số nguyên .

C Cơ số phải là số thực tùy ý.

D Cơ số phải là số thực dương.

Lời giải.

Theo định nghĩa lũy thừa mũ hữu tỉ $a^{\frac{m}{n}}$ thì $a > 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A Gia tốc của chuyển động khi $t = 3s$ là $v = 24m/s$.

B Gia tốc của chuyển động khi $t = 4s$ là $a = 9m/s^2$.

C Gia tốc của chuyển động khi $t = 3s$ là $v = 12m/s^2$.

D Gia tốc của chuyển động khi $t = 4s$ là $a = 18m/s^2$.

Lời giải.

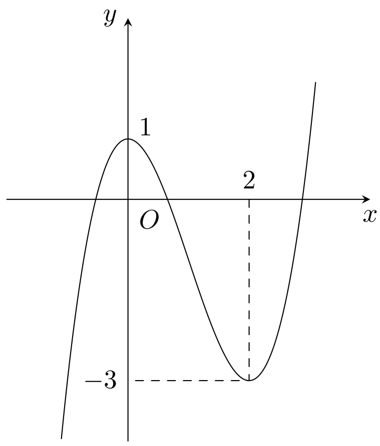
Ta có $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t$ và $a(t) = v'(t) = 6t - 6$.

Tại $t = 3s \Rightarrow a = 12m/s^2$ nên loại A và C.

Tại $t = 4s \Rightarrow a = 18m/s^2$ nên D đúng.

Chọn đáp án D □

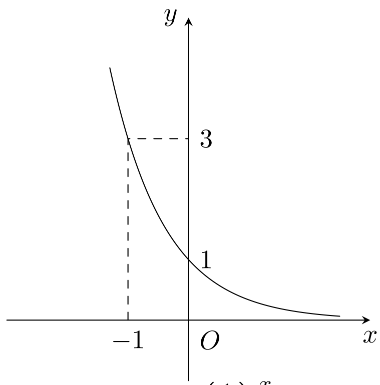
Câu 26.
Đồ thị dưới đây là của hàm số nào?



A $y = -\dfrac{x^3}{3} + x^2 + 1$.
B $y = -x^3 - 3x^2 + 1$.
C $y = 2x^3 - 6x^2 + 1$.
D $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Lời giải.
Từ hình vẽ ta thấy hệ số $a > 0$ nên loại A và B.
Đồ thị hàm số đi qua điểm $(2; -3)$ chỉ có đáp án D thỏa.
Chọn đáp án D □

Câu 27.
Đồ thị hình bên là của hàm số nào?



A $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$.
B $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$.
C $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.
D $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

Lời giải.
Đồ thị đi xuống nên hàm số đã cho là nghịch biến nên loại A và B.
Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1; 3)$ nên chỉ có đáp án C thỏa.
Chọn đáp án C □

Câu 28. Tính $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, biết $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\dfrac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|$ (với $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$).

A $135°$.
B $60°$.
C $150°$.
D $120°$.

Lời giải.
Ta có

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|$$
$$\Rightarrow \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 120^\circ.$$

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = a$. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của S trên AB, AC. Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'$.

A $V = \frac{a^3}{24}$. (B) $V = \frac{a^3}{12}$. (C) $V = \frac{a^3}{6}$. (D) $V = \frac{a^3}{48}$.

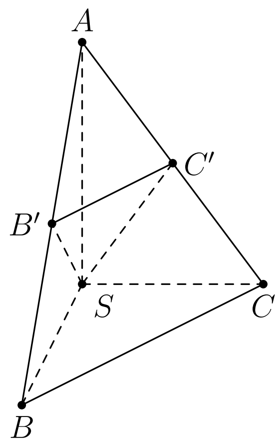
Lời giải.

Do các tam giác SAB, SAC vuông cân tại S nên B', C' lần lượt là trung điểm của AB, AC.

Ta có $\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{A.SB'C'}}{V_{A.SBC}} = \frac{AB'}{AB} \cdot \frac{AC'}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Mặt khác $V_{S.ABC} = \frac{1}{6} SA \cdot SB \cdot SC = \frac{1}{6} a^3$.

Vậy : $V_{S.AB'C'} = \frac{1}{4} V_{S.ABC} = \frac{a^3}{24}$.



Chọn đáp án (A) ☐

Câu 30. Biết đồ thị hàm số $y = (3a^2 - 1)x^3 - (b^3 + 1)x^2 + 3c^2x + 4d$ có hai điểm cực trị là $(1; -7), (2; -8)$. Tính tổng $M = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

(A) $M = -18$. **B** $M = 18$. (C) $M = 15$. (D) $M = 8$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3(3a^2 - 1)x^2 - 2(b^3 + 1)x + 3c^2$.

Từ giả thiết ta có : $\begin{cases} 8(3a^2 - 1) - 4(b^3 + 1) + 6c^2 + 4d = -8 \\ (3a^2 - 1) - (b^3 + 1) + 3c^2 + 4d = -7 \\ 3(3a^2 - 1) - 2(b^3 + 1) + 3c^2 = 0 \\ 3(3a^2 - 1) \cdot 2^2 - 2 \cdot 2(b^3 + 1) + 3c^2 = 0. \end{cases}$

Đặt $A = 3a^2 - 1, B = b^3 + 1, C = 3c^2, D = 4d$ ta có hệ mới

$$\begin{cases} 8A - 4B + 2C + D = 0 \\ A - B + C + D = 0 \\ 3A - 2B + C = 0 \\ 12A - 4B + C = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 9 \\ C = 12 \\ D = -12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a^2 - 1 = 2 \\ b^3 + 1 = 9 \\ 3c^2 = 12 \\ 4d = -12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \\ c^2 = 4 \\ d^2 = 9. \end{cases}$$

Vậy : $M = 1 + 4 + 4 + 9 = 18$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $y = \left(\dfrac{3}{\pi}\right)^x$.

B $y = \left(\dfrac{\pi}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^x$.

C $y = \left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}\right)^x$.

D $y = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$.

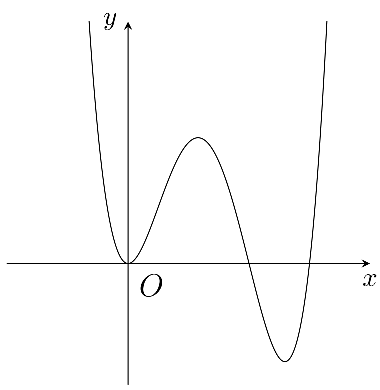
Lời giải.

Do $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3} > 1$ nên hàm số $y = \left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}\right)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 32.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ bên dưới. Khi đó trên $\mathbb{R}$ hàm số $y = f(x)$



A có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.

B có 1 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

C có 2 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.

D có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

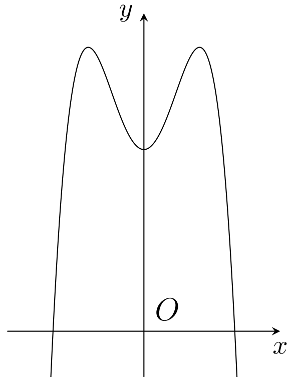
Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$,ta lập bảng biến thên của hàm số $y = f(x)$:

x	$-\infty$		0		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	↗				y_1	↘	y_2	↗	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có 1 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.
Chọn đáp án (B) □

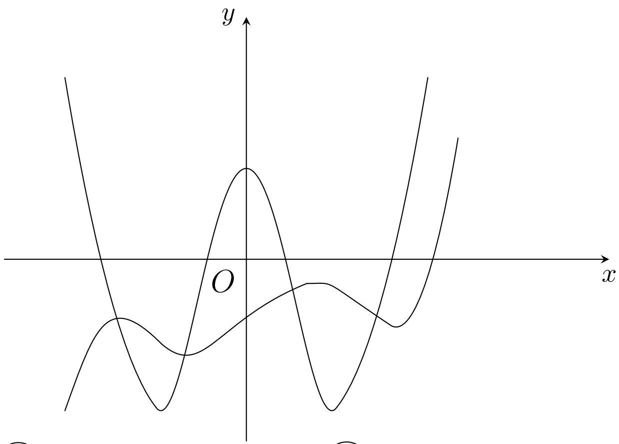
Câu 33.
Hỏi hàm số nào có đồ thị là đường cong có dạng như hình vẽ sau?



(A) $y = -x^3 + 2x + 4$.
(B) $y = -x^2 + x - 4$.
(C) $y = -x^4 + 3x^2 + 4$.
(D) $y = x^4 - 3x^2 - 4$.

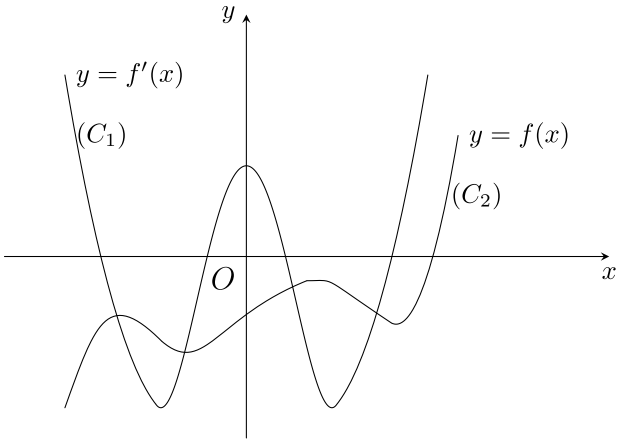
Lời giải.
Đây là đồ thị hàm số trùng phương nên loại A và B.
Đồ thị cắt trục tung tại tung độ 4 nên chọn C.
Chọn đáp án (C) □

Câu 34.
Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của $f(x); f'(x)$ như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?



(A) $f'(-1) \geq f''(1)$.
(B) $f'(-1) > f''(1)$.
(C) $f'(-1) < f''(1)$.
(D) $f'(-1) = f''(1)$.

Lời giải.



- Nếu (C_2) là đồ thi của $f'(x)$ thì ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 1 lần nên hàm số $f(x)$ có 1 cực trị. Đồ thị còn lại (C_1) là của hàm số $f(x)$ có 3 cực trị nên vô lí.
- Do đó từ hình vẽ, ta có (C_1) là đồ thị của $f'(x)$ và (C_2) là đồ thị của $f(x)$.
- Từ đồ thị ta thấy hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0$.
- hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0$ và $f''(1) < 0$.
- Do đó $f'(-1) > f''(1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Tập xác định của hàm số $y = (x^3 - 27)^{\frac{\pi}{2}}$ là

A $\mathscr{D} = (3; +\infty)$. B $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. C $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. D $\mathscr{D} = [3; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x^3 - 27 > 0 \Leftrightarrow x > 3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (3; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Khối tám mặt đều có tất cả bao nhiêu đỉnh?

A 12. B 10. C 6. D 8.

Lời giải.

Số cạnh C của khối bát diện là $C = \dfrac{8 \cdot 3}{2} = 12$.

Số mặt M của khối bát diện đều là 8 .

Theo công thức Ơ-le : $D + M = C + 2 \Rightarrow D = C + 2 - M = 12 + 2 - 8 = 6$.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $9^x - 4 \cdot 3^x + m + 2 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A 2019. B 15. C 12. D 2018.

Lời giải.

Đặt $t = 3^x, t > 0$ thì phương trình đã cho trở thành $t^2 - 4t + m + 2 = 0 \quad (1)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiêm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-(m-2)>0 \\ 4>0 \\ m-2>0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-m>0 \\ m>2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \ 2<m<6.$$

Các giá trị nguyên thỏa yêu cầu bài toán là $3, 4, 5$.
Vậy tổng $S = 3 + 4 + 5 = 12$.
Chọn đáp án C □

Câu 38. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Biết đáy ABC là tam giác vuông có $BA = BC = a$, gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

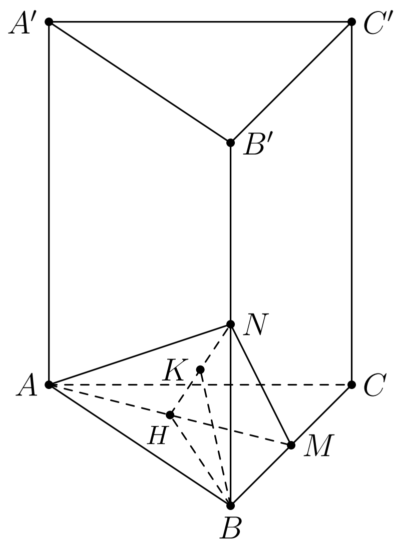
A $\mathrm{d}\left(AM, B'C\right) = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

B $\mathrm{d}\left(AM, B'C\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

C $\mathrm{d}\left(AM, B'C\right) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

D $\mathrm{d}\left(AM, B'C\right) = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm của BB' suy ra $MN \parallel B'C$.
Suy ra $B'C \parallel (AMN)$.
Do đó

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(AM, B'C\right) &= \mathrm{d}\left(B'C, (AMN)\right)\\ &= \mathrm{d}\left(B', (AMN)\right)\\ &= \mathrm{d}\left(B, (AMN)\right).\end{aligned}$$

Kẻ $BH \perp AM, BK \perp HN \Rightarrow BK \perp (AMN)$
Suy ra $\mathrm{d}\left(AM, B'C\right) = \mathrm{d}\left(B, (AMN)\right) = BK$.
Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{BH^2} &= \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BM^2}\\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2}\\ &= \frac{5}{a^2}\\ \Rightarrow BH &= \frac{a}{\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

Ta có $BN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Tam giác ABM vuông tại B nên

$$\begin{aligned}\frac{1}{BK^2} &= \frac{1}{BH^2} + \frac{1}{BN^2}\\ &= \frac{5}{a^2} + \frac{2}{a^2}\\ &= \frac{7}{a^2}\\ \Rightarrow BK &= \frac{a\sqrt{7}}{7}.\end{aligned}$$

Vậy : $\mathrm{d}\left(AM, B'C\right) = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho khối lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông cân tại A, $AC = AB = 2a$, góc giữa AC' và mặt phẳng (ABC) bằng 30°. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A $\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$. B $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. C $\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. D $\dfrac{4a^2}{3}$.

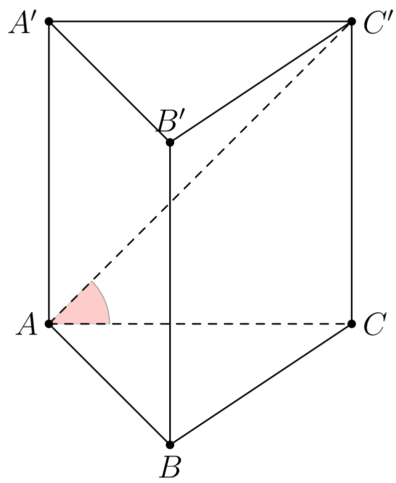
Lời giải.

Vì $C'C \perp (ABC)$ nên góc giữa AC' và (ABC) là $\widehat{CAC'}$.

Ta có : $\tan\widehat{CAC'} = \dfrac{CC'}{AC} \Rightarrow CC' = AC \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích đáy : $S_{\triangle ABC} = \dfrac{AB \cdot AC}{2} = \dfrac{2a \cdot 2a}{2} = 2a^2$.

Vậy : $V_{ABC.A'B'C'} = Bh = 2a^2 \cdot \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án C □

Câu 40. Với $a, b, c > 0$ thỏa $c = 8ab$ thì biểu thức $P = \dfrac{1}{4a+2b+3} + \dfrac{c}{4bc+3c+2} + \dfrac{c}{2ac+3c+4}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{m}{n}$ $(m, n \in \mathbb{Z}$ và $\dfrac{m}{n}$ tối giản$)$. Tính $2m^2 + n$.

A 9. **B** 4. C 8. D 3.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{4a+2b+3} + \frac{c}{4bc+3c+2} + \frac{c}{2ac+3c+4} \\ &= \frac{1}{4a+2b+3} + \frac{1}{4b+3+\frac{2}{c}} + \frac{1}{2a+3+\frac{4}{c}}. \end{aligned}$$

Đặt $2a = x, 2b = y, \dfrac{2}{c} = z \Rightarrow xyz = 2a \cdot 2b \cdot \dfrac{8ab}{c} = 1$ (vì $c = 8ab$).

Khi đó $P = \dfrac{1}{2x+y+3} + \dfrac{1}{y+z+3} + \dfrac{1}{2z+x+3}$.

Mặt khác $2x + y + 3 = x + x + y + 1 + 2 \geq 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{x} + 2 = 2\left(\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 1\right)$.

Tương tự :

$$\begin{aligned} 2y+z+3 &\geq 2\left(\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1\right) \\ 2z+x+3 &\geq 2\left(\sqrt{xz}+\sqrt{z}+1\right). \end{aligned}$$

Do đó :

$$\begin{aligned} P &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1} + \frac{1}{\sqrt{xz}+\sqrt{z}+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{y}+1} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{xy}}+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+1}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 1}$$
$$= \frac{1}{2}.$$

Suy ra $P \leq \dfrac{1}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 1$, nên $\max P = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $m = 1, n = 2 \Rightarrow 2m^2 + n = 4$.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng 3. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

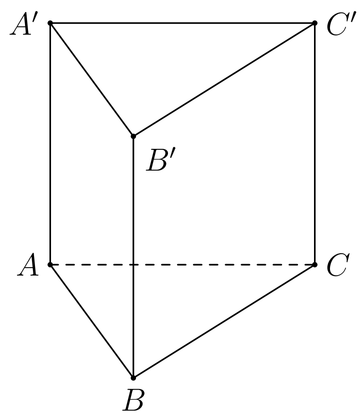
(A) $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$. **(B)** $\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$. (C) $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$. (D) $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Diện tích đáy $B = \dfrac{3^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

Độ dài đường cao của khối lăng trụ $h = 3$.

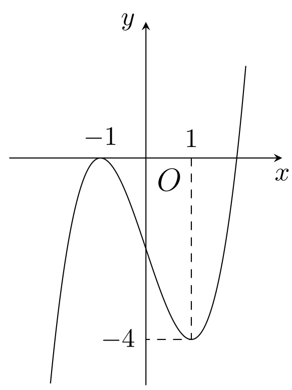
Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là $V = Bh = \dfrac{9\sqrt{3}}{4} \cdot 3 = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}$.



Chọn đáp án B □

Câu 42.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, đồ thị hình bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$. Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai?**



(A) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

(B) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

(C) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

(D) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x^2 - 2) \cdot (x^2 - 2)' = 2xf'(x^2 - 2)$.

Từ đồ thị ta có $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$ và $x \neq 1$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến thì

$$\begin{aligned} g'(x) < 0 &\Leftrightarrow 2xf'\left(x^2-2\right) < 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ f'(x^2-2) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ f'(x^2-2) > 0 \end{cases} \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ x^2-2 < 2 \\ x \neq -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x^2-2 > 2 \end{cases} \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ -2 < x < 2 \\ x \neq -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -2 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ x < -2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(0;2)$ và $(-\infty;-2)$ nên D sai.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2-1)(x-2)$. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x^2+m)$ có 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là

A 4. **B** 1. **C** 3. **D** 2.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = (x^2-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$.

Xét $g(x) = f(x^2+m)$, $g'(x) = 2xf'(x^2+m)$. Ta có

$$\begin{aligned} &g'(x) = 0 \\ \Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2+m = 2 \\ x^2+m = 1 \\ x^2+m = -1 \end{array}\right. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=2-m \\ x^2=1-m \\ x^2=-1-m. \end{array}\right. \quad (*)$$

Hàm số $y=g(x)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow g'(x)=0$ có 5 nghiệm bội lẻ phân biệt.

a) Trường hợp 1: $m=2$ thì $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=0 \\ x^2=1 \\ x^2=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1. \end{array}\right.$ (loại)

b) Trường hợp 2: $m=1$ thì $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=1 \\ x^2=0 \\ x^2=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1. \end{array}\right.$ (loại)

c) Trường hợp 3: $m=-1$ thì $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=3 \\ x^2=2 \\ x^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \\ x=\pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$ (thỏa yêu cầu bài toán)

d) Trường hợp 4: $m>2$ thì $\begin{cases} 2-m<0 \\ 1-m<0 \\ -1-m<0 \end{cases}$ nên $g'(x)=0$ chỉ có 1 nghiệm $x=0$ (loại).

e) Trường hợp 5: $1<m<2$ thì
+ Phương trình $x^2=2-m$ có 2 nghiệm phân biệt.
+ Phương trình $x^2=1-m$ và $x^2=-1-m$ vô nghiệm.
Do đó $g'(x)=0$ không có đủ 5 nghiệm phân biệt (loại).

f) Trường hợp 6: $-1<m<1$
+ phương trình $x^2=2-m$ có hai nghiệm phân biệt.
+ phương trình $x^2=1-m$ có hai nghiệm phân biệt.
+ phương trình $x^2=-1-m$ vô nghiệm.
Do đó $g'(x)=0$ có đủ 5 nghiệm đơn phân biệt (thỏa yêu cầu bài toán).

g) Trường hợp 7: $m<-1$ thì các phương trình $x^2=2-m, x^2=1-m, x^2=-1-m$ đều có hai nghiệm phân biệt.
Do đó $g'(x)=0$ có 7 nghiệm phân biệt và hàm số đã cho không có 5 điểm cực trị (loại).

Vậy tập hợp các giá trị của m để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị là $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ -1<m<1 \end{array}\right.$ hay $-1 \le m < 1$.

Do m nguyên nên $m=-1, m=0$ nên có 2 giá trị thỏa đề bài.

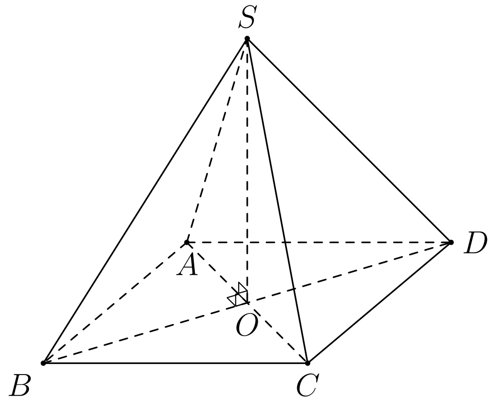
Chọn đáp án D ☐

Câu 44. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đá bằng $2a$ cạnh bên bằng $3a$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho?

A $V = \dfrac{4\sqrt{7}a^3}{9}$. **B** $V = 4\sqrt{7}a^3$. **C** $V = \dfrac{4\sqrt{7}a^3}{3}$. **D** $V = \dfrac{4a^3}{3}$.

Lời giải.

Ta có $BO = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$.
Mặt khác $SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \sqrt{9a^2 - 2a^2} = a\sqrt{7}$.
Diện tích đáy $S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$.
Vậy : $V = \dfrac{1}{3}Bh = \dfrac{1}{3} \cdot 4a^2 \cdot a\sqrt{7} = \dfrac{4\sqrt{7}a^3}{3}$.



Chọn đáp án C □

Câu 45. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m nhỏ hơn 2018 để hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x + 3$ nghịch biến trên khoảng có độ dài lớn hơn 3.

A 2009. **B** 2010. **C** 2011. **D** 2012.

Lời giải.

Ta có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2) = 6\left[x^2 + (m-1)x + (m-2)\right]$.

$$\begin{aligned} & y' = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + (m-1)x + (m-2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2-m \end{array}\right. \end{aligned}$$

Yêu cầu bài toán khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -1 \neq 2-m \\ |-1-2+m| > 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} m \neq 3 \\ |m-3| > 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} m \neq 3 \\ \left[\begin{array}{l} m-3 > 3 \\ m-3 < -3 \end{array}\right. \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} m \neq 3 \\ \left[\begin{array}{l} m > 6 \\ m < 0. \end{array}\right. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $m \in (-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$.
Do m nguyên dương nên $m \in \{7; 8; 9 \ldots 2017\}$. Do đó có 2011 số m thỏa đề bài.
Chọn đáp án C □

Câu 46. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C)\colon (x-1)^2+(y+3)^2=16$.

(A) $I(1;-3), R=16$. (B) $I(-1;3), R=4$. (C) $I(-1;3), R=16$. (D) $I(1;-3), R=4$.

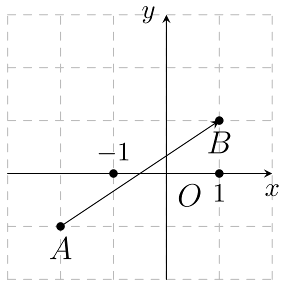
Lời giải.

Từ phương trình đường tròn, ta có tâm $I(1;-3)$ và bán kính $R=4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 47.

Cho véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ như hình vẽ. Tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là



(A) $(3;2)$. (B) $(-2;3)$. (C) $(-3;-2)$. (D) $(-1;0)$.

Lời giải.

Ta có $A(-2;-1), B(1;1)$.

Vậy $\overrightarrow{AB}=(3;2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Một khối lăng trụ tam giác có thể phân chia ít nhất thành n khối tứ diện có thể tích bằng nhau. Khẳng định nào sau đây là **đúng?**.

(A) 8. (B) 3. (C) 6. (D) 4.

Lời giải.

Vì thể tích khối lăng trụ $V_1=Bh$ và thể tích khối chóp (tứ diện) $V_2=\dfrac{1}{3}Bh$ suy ra $V_1=3V_2$ nên ít nhất ta có thể chia lăng trụ thành ba khối tứ diện (vì chiều cao lớn nhất của khối tứ diện bằng chiều cao lăng trụ và diện tích đáy lớn nhất của tứ diện bằng diện tích đáy lăng trụ).

Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Hệ phương trình $\begin{cases} y^2-|xy|+2=0 \\ 8-x^2=(x+2y)^2 \end{cases}$ có các nghiệm là $(x_1;y_1),(x_2;y_2)$ (với x_1,x_2,y_1,y_2 là các số vô tỉ). Tính $x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2$.

(A) 20. (B) 0. (C) 10. (D) 22.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 8-x^2=(x+2y)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 8-x^2=x^2+4xy+4y^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2+2xy+2y^2-4=0. \end{aligned}$$

a) Trường hợp 1: $xy \geq 0$ thì hệ trở thành

$$\begin{cases} y^2 - xy + 2 = 0 \\ x^2 + 2xy + 2y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 - 2xy + 4 = 0 \\ x^2 + 2xy + 2y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 0 \\ y^2 - xy + 2 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ y^2 - xy + 2 = 0 \end{cases} \text{(vô nghiệm)}.$$

b) Trường hợp 2: $xy < 0$ thì hệ trở thành

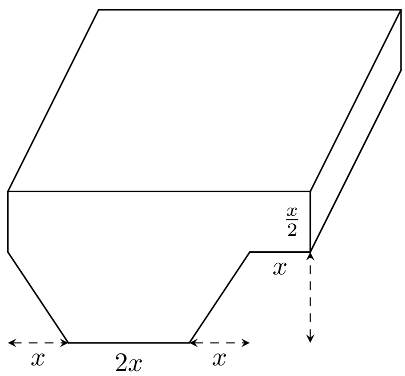
$$\begin{cases} y^2 + xy + 2 = 0 \\ x^2 + 2xy + 2y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 + 2xy + 4 = 0 \\ x^2 + 2xy + 2y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8 = 0 \\ y^2 + xy + 2 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y^2 + xy + 2 = 0. \end{cases}$$

Nếu $x = 2\sqrt{2}$ thì $y^2 + 2\sqrt{2}y + 2 = 0 \Leftrightarrow (y + \sqrt{2})^2 = 0 \Leftrightarrow y = -\sqrt{2}$ (thỏa $xy < 0$).
Nếu $x = -2\sqrt{2}$ thì $y^2 - 2\sqrt{2}y + 2 = 0 \Leftrightarrow (y - \sqrt{2})^2 = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{2}$ (thỏa $xy < 0$).

Vậy hệ có hai nghiệm $(2\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ và $(-2\sqrt{2}; \sqrt{2})$.
Do đó $x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = 8 + 8 + 2 + 2 = 20$.
Chọn đáp án A □

Câu 50.

Người ta muốn xây dựng một bể bơi (hình vẽ bên) có thể tích là $V = \dfrac{968}{4 + 2\sqrt{2}}(m^3)$. Khi đó giá trị thực của x để diện tích xung quanh của bể bơi là nhỏ nhất thuộc khoảng nào sau đây?

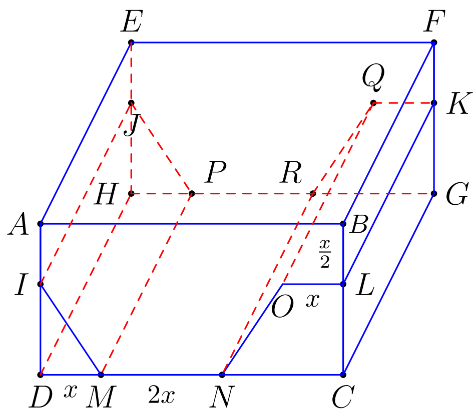


A $(0; 3)$. **B** $(3; 5)$. **C** $(5; 6)$. **D** $(2; 4)$.

Lời giải.

Gọi chiều cao của khối lăng trụ bể bơi là h.

Ta có



$$\begin{aligned} V &= S\cdot h \\ &= \left(5x\cdot\frac{3x}{2}-\frac{x\cdot x}{2}-\frac{2x+x}{2}\right)\cdot h \\ &= \frac{11x^2}{2} \\ &\Rightarrow h=\frac{2V}{11x^2} \end{aligned}$$

Diện tích xung quanh của bể bơi là

$$\begin{aligned} S_{xq} &= S_{AIJE}+S_{IMPJ}+S_{MNPR}+S_{NOQR}+S_{OLKQ}+S_{BLKF}+2S_{MNIABLON} \\ &= \frac{x}{2}\cdot h+x\sqrt{2}\cdot h+2x\cdot h+x\sqrt{2}\cdot h+xh+\frac{x}{2}\cdot h+2\cdot\frac{11x^2}{2} \\ &= (4+2\sqrt{2})xh+2\cdot\frac{11x^2}{2} \\ &= (4+2\sqrt{2})\cdot\frac{2V}{11x}+11x^2. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số ta có

$$S_{xq} = \frac{(4+2\sqrt{2})V}{11x}+\frac{(4+2\sqrt{2})V}{11}+11x^2\geq 3\sqrt[3]{\frac{(4+2\sqrt{2})^2\cdot V^2}{11}}.$$

Vậy $\min S_{xq} = 3\sqrt[3]{\dfrac{(4+2\sqrt{2})^2\cdot V^2}{11}}$ khi và chỉ khi $\dfrac{(4+2\sqrt{2})V}{11x}=11x^2\Rightarrow x^3=\dfrac{(4+2\sqrt{2})V}{121}=8\Rightarrow x=2$.

Chọn đáp án A □

——— HẾT ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. C	3. D	4. B	5. B	6. B	7. D	8. D	9. D	10. B
11. C	12. D	13. B	14. A	15. C	16. D	17. A	18. A	19. B	20. A
21. A	22. B	23. A	24. D	25. D	26. D	27. C	28. D	29. A	30. B
31. C	32. B	33. C	34. B	35. A	36. C	37. C	38. D	39. C	40. B
41. B	42. D	43. D	44. C	45. C	46. D	47. A	48. B	49. A	50. A

23 ĐỀ THI THỬ THPT TRẦN HƯNG ĐẠO, VĨNH PHÚC – LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Trong khai triển nhị thức $(2x-1)^{10}$, hệ số của số hạng chứa x^8 là

(A) 45. (B) 11520. (C) -11520. (D) 256.

Lời giải.

Ta có

$$(2x-1)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^{k}(2x)^{10-k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{10}(-1)^k \cdot 2^{10-k}\mathrm{C}_{10}^{k}x^{10-k}.$$

Số hạng chứa x^8 ứng với $10-k=8$ hay $k=2$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^8 là $(-1)^2 \cdot 2^8\mathrm{C}_{10}^2 = 11520$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 10$. (B) $y = -x^3 + x^2 - 3x + 1$.

(C) $y = x^4 + x^2 + 1$. (D) $y = x^3 + 3x^2 + 1$.

Lời giải.

Cả bốn hàm số trong bốn phương án đều có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 10$ có $y' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0$ khi $x = 1$. Vậy hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 10$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y = -x^3 + x^2 - 3x + 1$ có $y' = -3x^2 + 2x - 3 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số $y = -x^3 + x^2 - 3x + 1$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y = x^4 + x^2 + 1$ có $y' = 4x^3 + 2x = 2x(2x^2+1)$ và $y' > 0$ khi $x \in (0; +\infty)$. Vậy hàm số $y = x^4 + x^2 + 1$ chỉ đồng biến trên $(0; +\infty)$.
- Hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có $y' = 3x^2 + 6x$ và $y' > 0$ khi $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$. Vậy hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ đồng biến trên $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - x + 2$ trên đoạn $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$. Khi đó tích $M \cdot m$ bằng

(A) $\frac{45}{4}$. (B) $\frac{212}{27}$. (C) $\frac{125}{36}$. (D) $\frac{100}{9}$.

Lời giải.

Hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - x + 2$ xác định và liên tục trên $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$.

Ta có $y' = -3x^2 + 4x - 1$ và $y' = 0$ có một nghiệm thuộc $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$ là $x = \frac{1}{3}$.

Mặt khác $y(-1) = 6$, $y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{50}{27}$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8}$.

Vậy $M = \max\limits_{\left[-1;\frac{1}{2}\right]} y = 6$, $m = \min\limits_{\left[-1;\frac{1}{2}\right]} y = \frac{50}{27}$.

Do đó $M \cdot m = \dfrac{100}{9}$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Chọn ngẫu nhiên 4 quả cầu từ một bình đựng 6 quả cầu xanh và 8 quả cầu đỏ. Xác suất để chọn được 4 quả cùng màu bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{15}{1001}$. B. $\dfrac{105}{1001}$. C. $\dfrac{95}{1001}$. D. $\dfrac{85}{1001}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{14}^4 = 1001$.

Gọi A là biến cố "chọn được 4 quả cùng màu".

Số phần tử của A là $n(A) = \mathrm{C}_6^4 + \mathrm{C}_8^4 = 85$.

Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{85}{1001}$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 3m^2$, với m là tham số. Tìm m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị lập thành tam giác nhận $G(0;2)$ làm trọng tâm.

A. $m = 1$. B. $m = -\sqrt{\dfrac{2}{7}}$. C. $m = -1$. D. $m = -\sqrt{\dfrac{6}{7}}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 + 4mx = 4x(x^2 + m)$.

Đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số đã cho có ba điểm cực trị hay phương trình $x^2 + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0, tức là $m < 0$.

Khi đó đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị là $A(0;3m^2)$, $B\left(-\sqrt{-m};2m^2\right)$, $C\left(\sqrt{-m};2m^2\right)$.

Tam giác ABC nhận $G(0;2)$ làm trọng tâm nên

$$\begin{cases} \dfrac{0 + (-\sqrt{-m}) + \sqrt{-m}}{3} = 0 \\ \dfrac{3m^2 + 2m^2 + 2m^2}{3} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow 7m^2 = 6 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{\dfrac{6}{7}}.$$

Kết hợp điều kiện $m < 0$ ta được $m = -\sqrt{\dfrac{6}{7}}$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Cạnh SA vuông góc với đáy, $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA = a\sqrt{3}$. Số đo của góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 75°.

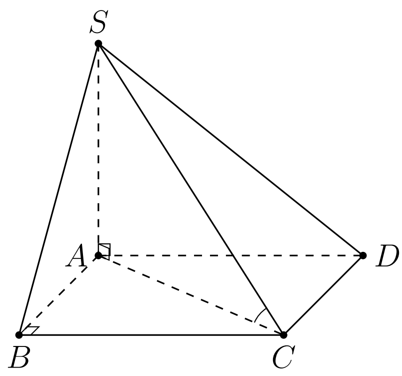
Lời giải.

Ta có $SC \cap (ABCD) = C$ và $SA \perp (ABCD)$ tại A. Suy ra AC là hình chiếu vuông góc của SC xuống $(ABCD)$.

Vậy góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc giữa SC và AC, chính là $\widehat{SCA}$.

Tam giác ABC vuông tại B nên

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}.$$



Tam giác SAC vuông tại A nên

$$\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ.$$

Vậy góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Tính giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

A $y_{CD} = 2$. B $y_{CD} = 1$. C $y_{CD} = 4$. D $y_{CD} = 6$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 12x + 9$ và $y' = 0$ có nghiệm $x = 1$, $x = 3$.

Mặt khác $y'' = 6x - 12$ và $y''(1) = -6$, $y''(3) = 6$.

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và giá trị cực đại của hàm số bằng 6.

Chọn đáp án D □

Câu 8.

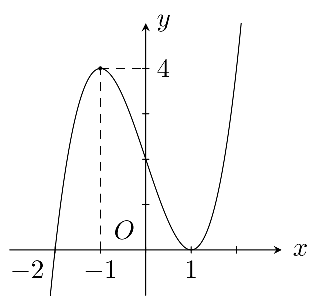
Cho hàm số $y = f(x)$. Biết rằng $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A Hàm $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

B Hàm $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

C Trên $(-1; 1)$ hàm $y = f(x)$ luôn tăng.

D Hàm $y = f(x)$ giảm trên đoạn có độ dài bằng 2.



Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, ta có

- $f'(x) > 0$ khi $-2 < x < 1$ hoặc $x > 1$.
- $f'(x) < 0$ khi $x < -2$.

Do đó hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-2; 1)$, $(1; +\infty)$; nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào có kết quả là 0?

A $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^3 - 1}$. B $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x + 5}{x + 10}$.

C $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$. D $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$.

Lời giải.

- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^3 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x^2 + x + 1} = \dfrac{1}{3}$.

- $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x+5}{x+10} = \dfrac{2(-2)+5}{-2+10} = \dfrac{1}{8}$.
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x-2} = -2$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}\right) = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Đạo hàm của hàm số $y = x\sin x$ là

A $y' = \sin x - x\cos x$. B $y' = \sin x + x\cos x$.
C $y' = -x\cos x$. D $y' = x\cos x$.

Lời giải.

Ta có $y' = (x\sin x)' = \sin x + x\cos x$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Tính $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$.

A $\dfrac{2}{3}$. B $+\infty$. C 1. D -1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x-2) = -1$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Cho hàm số $y = -x^2 - 4x + 3$ có đồ thị (P). Nếu tiếp tuyến tại điểm M của (P) có hệ số góc bằng 8 thì hoành độ điểm M bằng

A 12. B -6. C -1. D 5.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có $y' = -2x - 4$.

Theo đề bài ta có

$$y'(x_0) = 8 \Leftrightarrow -2x_0 - 4 = 8 \Leftrightarrow -2x_0 = 12 \Leftrightarrow x_0 = -6.$$

Vậy hoành độ điểm M bằng -6.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m+15)x + 7$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A $-3 \le m \le 5$. B $m \le -3$ hoặc $m \ge 5$.
C $-3 < m < 5$. D $m < -3$ hoặc $m > 5$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + 2m + 15$.

Hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi

$$x^2 - 2mx + 2m + 15 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ m^2 - 2m - 15 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 2m - 15 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 5.$$

Vậy $-3 \leq m \leq 5$ hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m+15)x + 7$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án A □

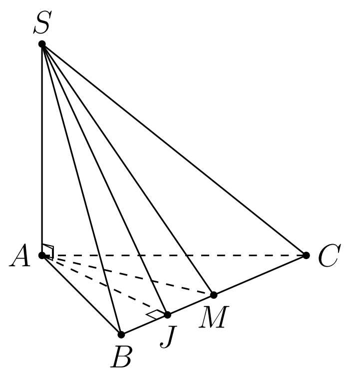
Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm BC, J là hình chiếu của A lên BC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $BC \perp (SAC)$. B. $BC \perp (SAM)$. **C.** $BC \perp (SAJ)$. D. $BC \perp (SAB)$.

Lời giải.

Xét đường thẳng BC và mặt phẳng (SAJ). Ta có $SA \perp BC$ (do $SA \perp (ABC)$) và $AJ \perp BC$ (giả thiết).

Vậy $BC \perp (SAJ)$.



Chọn đáp án C □

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$-$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số có giá trị cực đại bằng 1. B. Hàm số có đúng hai cực trị.

C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 2. D. Hàm số không xác định tại $x = 1$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và giá trị cực đại của hàm số bằng 2.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{-3x-1}{x+1}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

A. -2. B. $-\dfrac{5}{2}$. C. $\dfrac{5}{2}$. D. 1.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{-3x-1}{x+1}$ xác định và liên tục trên đoạn $[1;3]$.

Ta có $y' = -\dfrac{2}{(x+1)^2} < 0, \forall x \neq -1$.

Lại có $y(1) = -2$, $y(3) = -\dfrac{5}{2}$.

Vậy $\max\limits_{[1;3]} y = -2$ tại $x = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Tính $L = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^4+x^2+2}{(x^3+1)(3x-1)}}$.

(A) $L = -\sqrt{3}$. **B** $L = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (C) $L = \sqrt{3}$. (D) $L = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$L = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^4+x^2+2}{(x^3+1)(3x-1)}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^4}}{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(3-\dfrac{1}{x}\right)}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Trên khoảng $(0;+\infty)$, cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng -1.
(B) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1.
C Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 3.
(D) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 3.

Lời giải.

Trên khoảng $(0;+\infty)$, hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ có $y' = -3x^2 + 3$.

Phương trình $y' = 0$ chỉ có nghiệm $x = 1$ thuộc $(0;+\infty)$.

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 3 tại $x = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Hàm số $y = \dfrac{m}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \dfrac{1}{3}$, với m là tham số, đồng biến trên $(2;+\infty)$ thì m thuộc tập nào sau đây?

A $m \in \left(\dfrac{2+\sqrt{6}}{2};+\infty\right)$.
(B) $m \in \left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right)$.
(C) $m \in (-\infty;-1)$.
(D) $m \in \left(-\infty;\dfrac{-2-\sqrt{6}}{2}\right)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$.

- Với $m = 0$ ta được $y' = 2x - 6$ và $y' > 0$ khi $x > 3$. Vậy hàm số chỉ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$. Do đó $m = 0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Với $m \neq 0$, ta có $\Delta'_{y'} = (m-1)^2 - 3m(m-2) = -2m^2 + 4m + 1$.
  - Dễ thấy $m < 0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.
  - Xét trường hợp $m > 0$.

    Nếu $\Delta'_{y'} \leq 0$ hay $m \geq \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$ thì hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$, cho nên nó đồng biến trên $(2; +\infty)$.

    Nếu $\Delta'_{y'} > 0$ hay $0 < m < \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$, thì yêu cầu bài toán thỏa mãn khi

$$x_1 < x_2 \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < \dfrac{2+\sqrt{6}}{2} \\ 4m - 4(m-1) + 3(m-2) \geq 0 \\ \dfrac{2(m-1)}{2m} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < \dfrac{2+\sqrt{6}}{2} \\ 3m - 2 \geq 0 \\ \dfrac{-m-1}{m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} \leq m < \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}.$$

Kết hợp các trường hợp ta được $m \in \left[\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$ thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Trong khai triển nhị thức $\left(x + \dfrac{8}{x^3}\right)^8$, số hạng không chứa x là

A 1792. B 1700. C 1800. D 1729.

Lời giải.

Ta có

$$\left(x + \dfrac{8}{x^3}\right)^8 = \sum_{k=0}^{8} \mathrm{C}_8^k x^{8-k} \cdot 8^k \cdot x^{-3k} = \sum_{k=0}^{8} 8^k \mathrm{C}_8^k x^{8-4k}.$$

Số hạng không chứa x ứng với $8 - 4k = 0$ hay $k = 2$.

Vậy số hạng không chứa x là $8^2 \mathrm{C}_8^2 = 1792$.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $(2x+3)^8$.

A $\mathrm{C}_8^5 \cdot 2^3 \cdot 3^5$. B $\mathrm{C}_8^3 \cdot 2^5 \cdot 3^3$. C $-\mathrm{C}_8^5 \cdot 2^5 \cdot 3^3$. D $\mathrm{C}_8^3 \cdot 2^3 \cdot 3^5$.

Lời giải.

Ta có

$$(2x+3)^8 = \sum_{k=0}^{8} \mathrm{C}_8^k (2x)^{8-k} \cdot 3^k = \sum_{k=0}^{8} 2^{8-k} \cdot 3^k \mathrm{C}_8^k x^{8-k}.$$

Số hạng chứa x^5 ứng với $8 - k = 5$ hay $k = 3$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^8 là $2^5 \cdot 3^3 \cdot \mathrm{C}_8^3 = 48384$.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-2}$. Tiếp tuyến với đồ thị tại điểm có hoành độ bằng 0 có phương trình là phương trình nào sau đây?

Ⓐ $y=-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$. **C** $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi $(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta có $x_0=0$ nên $y_0=\dfrac{1}{2}$.

Lại có $y'=-\dfrac{3}{(x-2)^2}$ nên $y'(x_0)=y'(0)=-\dfrac{3}{4}$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 23. Một tổ học sinh có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người. Tính xác suất sao cho 2 người được chọn không có nữ nào cả.

Ⓐ $\dfrac{8}{15}$. **B** $\dfrac{7}{15}$. Ⓒ $\dfrac{1}{5}$. Ⓓ $\dfrac{1}{15}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=\mathrm{C}_{10}^2=45$.

Gọi A là biến cố "2 người được chọn không có nữ nào cả".

Số phần tử của biến cố A là $n(A)=\mathrm{C}_7^2=21$.

Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{21}{45}=\dfrac{7}{15}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 24. Hàm số $y=-x^4-2x^2+1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

Ⓐ $(0;+\infty)$. Ⓑ $(-1;1)$.

C $(-\infty;0)$. Ⓓ $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-4x^3-4x=-4x(x^2+1)$.

$$y'>0\Leftrightarrow -4x(x^2+1)>0\Leftrightarrow -4x>0\Leftrightarrow x<0.$$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;0)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 25. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số và trục Ox là

Ⓐ $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}$. Ⓑ $y=-3x+1$. **C** $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{2}{3}$. Ⓓ $y=3x-1$.

Lời giải.

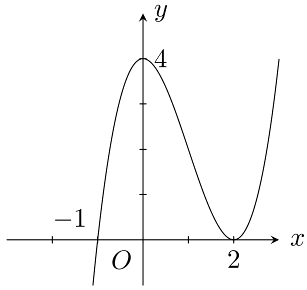
Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ cắt trục Ox tại điểm $\left(\dfrac{1}{2};0\right)$.

Ta có $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}$ nên $y'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{4}{3}$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=\dfrac{4}{3}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ hay $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 26.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?



(A) 0. **B** 2. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.
Dựa vào hình vẽ thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.
Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Cho hàm số $y = \sqrt{x + \dfrac{1}{x}}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0; +\infty)$ bằng

(A) 2. **B** $\sqrt{2}$. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.
Với $x > 0$ ta luôn có $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ (hệ quả bất đẳng thức AM-GM).
Suy ra $\sqrt{x + \dfrac{1}{x}} \geq \sqrt{2}$ với mọi $x > 0$.
Đẳng thức xảy ra khi $x > 0$ và $x = \dfrac{1}{x}$ hay $x = 1$.
Do đó giá nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x + \dfrac{1}{x}}$ trên $(0; +\infty)$ bằng $\sqrt{2}$ khi $x = 1$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) $(x)' = 1$. (B) $(x^3)' = 3x^2$. **C** $(x^5)' = 5x$. (D) $(x^4)' = 4x^3$.

Lời giải.
Ta có

- $(x)' = 1$;
- $(x^3)' = 3x^2$;
- $(x^4)' = 4x^3$;
- $(x^5)' = 5x^4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2x + 1$ nhận điểm $x = 1$ làm điểm cực tiểu.

(A) Không tồn tại m. (B) $m = \dfrac{5}{2}$. (C) Có vô số m. **D** $m = \dfrac{5}{6}$.

Lời giải.
Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 2$ và $y'' = 6x - 6m$.
Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ nên $3 \cdot 1^2 - 6m \cdot 1 + 2 = 0$ hay $m = \dfrac{5}{6}$.
Với $m = \dfrac{5}{6}$ thì $y'' = 6x - 5$ và $y''(1) = 6 \cdot 1 - 5 = 1 > 0$, cho nên $x = 1$ là điểm cực tiểu của hàm số.
Vậy $m = \dfrac{5}{6}$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

(A) $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
B $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 6)$.
(C) $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
(D) $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 3)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-1; 3)$; hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$, $(3; +\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Tính giá trị của $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^3 - x^2 - 1}{x - 2}$.

(A) 5.
(B) 1.
C $\dfrac{5}{3}$.
(D) $-\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^3 - x^2 - 1}{x - 2} = \dfrac{3(-1)^3 - (-1)^2 - 1}{-1 - 2} = \dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Trong các hình chữ nhật có chu vi bằng 300 m, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng

(A) 22500 m^2.
(B) 900 m^2.
C 5625 m^2.
(D) 1200 m^2.

Lời giải.

Gọi a, b (với $a, b > 0$) là độ dài hai cạnh kề của hình chữ nhật.

Ta có $2(a + b) = 300$ hay $a + b = 150$.

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \leq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow ab \leq \left(\frac{150}{2}\right)^2 \Leftrightarrow ab \leq 5625.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b$ và $a + b = 150$ hay $a = b = 75$.

Vậy hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng 5625 m^2.

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Đội văn nghệ của nhà trường gồm 4 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 2 học sinh lớp 12C. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ đội văn nghệ để biểu diễn trong lễ bế giảng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn?

A 98.
(B) 102.
(C) 126.
(D) 100.

Lời giải.

Số cách chọn 5 học sinh bất kỳ là $C_9^5 = 126$.

Số cách chọn 5 học sinh từ hai lớp bất kỳ là $C_7^5 + C_6^5 + C_5^5 = 28$.

Số cách chọn 5 học sinh sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn là $126 - 28 = 98$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$ là

A $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B $x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Cho hàm số $y = \dfrac{-2x + 1}{x - 1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

B Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

C Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

D Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \dfrac{1}{(x - 1)^2} > 0, \forall x \neq 1$.

Vậy hàm số đã cho luôn đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Một tổ học sinh có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người. Tính xác suất sao cho 2 người được chọn có ít nhất một nữ.

A $\dfrac{1}{15}$. **B** $\dfrac{8}{15}$. **C** $\dfrac{7}{15}$. **D** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{10}^2 = 45$.

Gọi A là biến cố "2 người được chọn không có nữ nào cả".

Khi đó $\overline{A}$ là biến cố "2 người được chọn có ít nhất nữ".

Số phần tử của biến cố A là $n(A) = C_7^2 = 21$.

Xác suất của biến cố A là $P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = 1 - \dfrac{21}{45} = \dfrac{8}{15}$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x + 3}{x + 2}$ chắn hai trục tọa độ một tam giác vuông cân?

A $y = x + 2$. **B** $y = x - 2$. **C** $y = -x + 2$. **D** $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.
Ta có $y' = \dfrac{1}{(x+2)^2}$.
Phương trình tiếp tuyến tại điểm $(x_0; y_0)$ là $y = \dfrac{1}{(x_0+2)^2}(x - x_0) + \dfrac{2x_0+3}{x_0+2}$.
Tiếp tuyến này cắt trục Ox tại $A(-2x_0^2 - 6x_0 - 6; 0)$ và điểm $B\left(0; \dfrac{2x_0^2+6x_0+6}{(x_0+2)^2}\right)$.
Dễ thấy tam giác OAB vuông tại O.
Để tam giác OAB vuông cân tại O thì

$$OA = OB \Leftrightarrow |-2x_0^2 - 6x_0 - 6| = \left|\dfrac{2x_0^2+6x_0+6}{(x_0+2)^2}\right| \Leftrightarrow \dfrac{1}{(x_0+2)^2} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = -3. \end{array}\right.$$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn là $y = x$ và $y = x + 2$.
Chọn đáp án A □

Câu 38. Trong khai triển nhị thức $(1+x)^6$ xét các khẳng định sau:
(I) Gồm có 7 số hạng.
(II) Số hạng thứ hai là $6x$.
(III) Hệ số của x^5 là 5.
Trong các khẳng định trên

- A. Chỉ (I) và (III) đúng.
- B. Chỉ (II) và (III) đúng.
- C. Chỉ (I) và (II) đúng.
- D. Cả (I), (II), (III) đều đúng.

Lời giải.

- Số mũ của nhị thức bằng 6 nên số số hạng của khai triển này bằng 7.
- Số hạng thứ hai của khai triển là $\mathrm{C}_6^1 \cdot (1)^5 \cdot x = 6x$.
- Số hạng chứa x^5 là $\mathrm{C}_6^5 \cdot 1 \cdot x^5 = 6x^5$. Do đó hệ số của x^5 bằng 6.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Trong các khẳng định sau khẳng định nào **sai**?

- A. Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên tập xác định.
- B. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn chu kì 2π.
- C. Hàm số $y = \cos x$ có đồ thị là đường hình sin.
- D. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

Lời giải.
Theo tính chất của hàm số $y = \cos x$, ta có

- Tập xác định của hàm số $y = \cos x$ là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn chu kì 2π.
- Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ (với $k \in \mathbb{Z}$).
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.
- Hàm số $y = \cos x$ có đồ thị là đường cong hình sin.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Tập nghiệm của phương trình $\sin 2x + \cos x = 0$ là

(A) $S=\left\{-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k2\pi}{3}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.
B $S=\left\{-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{k2\pi}{3}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

(C) $S=\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.
(D) $S=\left\{-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Ta có

$$\sin 2x+\cos x=0\Leftrightarrow\cos x(2\sin x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+l\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+l2\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{6}+l2\pi\end{array}\right.(l\in\mathbb{Z}).$$

Biểu diễn các nghiệm này trên đường tròn lượng giác ta được tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{k2\pi}{3}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Hàm số $y=-x^3-3x^2+2$ có giá trị cực tiểu bằng

(A) 2. (B) 4. (C) -4. **D** -2.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-3x^2-6x$ và $y'=0$ có nghiệm $x=0$, $x=-2$.

Mặt khác $y''=-6x-6$ và $y''(0)=-6$, $y''(-2)=6$.

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$ và giá trị cực đại của hàm số bằng -2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$.

A $S=\left\{-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi,\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.
(B) $S=\left\{\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

(C) $S=\left\{-\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.
(D) $S=\left\{k2\pi,\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Ta có

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi,\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y=-3x$ có phương trình là

A $y=-3x-1$, $y=-3x+11$.
(B) $y=-3x+10$, $y=-3x-4$.

(C) $y=-3x+5$, $y=-3x-5$.
(D) $y=-3x+2$, $y=-3x-2$.

Lời giải.
Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.
Ta có $y' = -\dfrac{3}{(x-1)^2}$.
Vì tiếp tuyến xong song với đường thẳng $y = -3x$ nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng -3. Khi đó

$$y'(x_0) = -3 \Leftrightarrow \frac{1}{(x_0-1)^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 1 \neq 0 \\ (x_0-1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 2. \end{array}\right.$$

- Với $x_0 = 0$ thì $y_0 = -1$. Phương trình tiếp tuyến là $y = -3x - 1$.
- Với $x_0 = 2$ thì $y_0 = 5$. Phương trình tiếp tuyến là $y = -3x + 11$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Xác suất bắn trúng mục tiêu của một vận động viên khi bắn một viên đạn là 0,6. Người đó bắn hai viên một cách độc lập. Xác suất để một viên trúng và một viên trượt mục tiêu là

A 0,48. B 0,4. C 0,24. D 0,45.

Lời giải.
Gọi A_1, A_2 lần lượt là các biến cố vận động viên bắn trúng mục tiêu ở viên thứ nhất và thứ hai.
Ta có $\mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}(A_2) = 0{,}6$.
Xác suất để người đó bắn hai viên có một viên trúng và một viên trượt mục tiêu là

$$\mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(\overline{A_2}) + \mathrm{P}(\overline{A_1}) \cdot \mathrm{P}(A_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}48.$$

Chọn đáp án A □

Câu 45. Hãy chọn cụm từ (hoặc từ) cho dưới đây để sau khi điền nó vào chỗ trống của mệnh đề sau trở thành mệnh đề đúng.

"Số cạnh của một hình đa diện luôn .... số mặt của hình đa diện ấy."

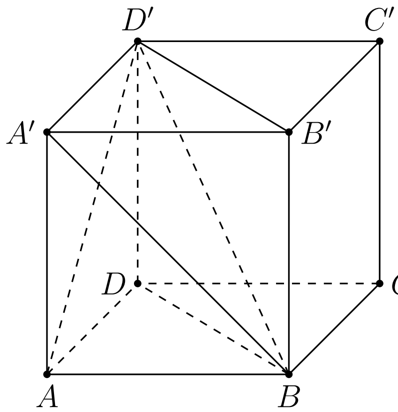
A bằng. B nhỏ hơn hoặc bằng.
C nhỏ hơn. D lớn hơn.

Lời giải.
Số cạnh của một hình đa diện luôn **lớn hơn** số mặt của hình đa diện ấy.
Chọn đáp án D □

Câu 46. Có thể chia hình lập phương thành bao nhiêu tứ diện bằng nhau?

A 2. B Vô số. C 4. D 6.

Lời giải.
Chia lăng trụ $ABD.A'B'D'$ thành ba tứ diện $DABD'$, $A'ABD'$, $A'B'BD'$. Phép đối xứng qua (ABD') biến $DABD'$ thành $A'ABD'$. Phép đối xứng qua $(BA'D')$ biến $A'ABD'$ thành $A'B'BD'$ nên ba tứ diện $DABA'$, $A'ABD'$, $A'B'BD'$ bằng nhau.
Làm tương tự đối với lăng trụ $BCD.B'C'D'$ ta sẽ chia được hình lập phương thành sáu tứ diện bằng nhau.



Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $x + 3y + 2 = 0$ tại điểm có hoành độ

(A) $x = 0$.

(B) $x = -2$.

C $x = 0$ hoặc $x = -2$.

(D) $x = 0$ hoặc $x = 2$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng $x + 3y + 2 = 0$ được viết lại là $y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}$.

Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta có $y' = \dfrac{3}{(x+1)^2}$.

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}$ nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3. Khi đó

$$y'(x_0) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{(x_0+1)^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 1 \neq 0 \\ (x_0+1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & x_0 = 0 \\ & x_0 = -2. \end{aligned}\right.$$

- Với $x_0 = 0$ thì $y_0 = -1$. Phương trình tiếp tuyến là $y = 3x - 1$.
- Với $x_0 = -2$ thì $y_0 = 5$. Phương trình tiếp tuyến là $y = 3x + 11$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 48. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_{17} = 33$ và $u_{33} = 65$ thì công sai bằng

(A) 1. (B) 3. (C) -2. **D** 2.

Lời giải.

Gọi u_1, d lần lượt là số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n).

Ta có $u_{17} = u_1 + 16d$ và $u_{33} = u_1 + 32d$.

Khi đó

$$u_{33} - u_{17} = 32 \Leftrightarrow u_1 + 32d - u_1 - 16d = 32 \Leftrightarrow 16d = 32 \Leftrightarrow d = 2.$$

Vậy cấp số cộng (u_n) có công sai $d = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Cho hàm số $y = x + \sqrt{12 - 3x^2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

B Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

(C) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

(D) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = [-2; 2]$.

Với mọi $x \in (-2; 2)$ ta có $y' = 1 + \dfrac{(12-3x^2)'}{2\sqrt{12-3x^2}} = 1 - \dfrac{3x}{\sqrt{12-3x^2}} = \dfrac{\sqrt{12-3x^2} - 3x}{\sqrt{12-3x^2}}$.

$$y' = 0 \Rightarrow \sqrt{12-3x^2} - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 12x^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên

x	-2		1		2
y'		$+$	0	$-$	
y	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	2

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{4}{x-1}$. Khi đó $f'(-1)$ bằng

A -1. **B** -2. **C** 2. **D** 1.

Lời giải.

Với $x \neq 1$ ta có $f'(x) = -\dfrac{4}{(x-1)^2}$.

Do đó $f'(-1) = -\dfrac{4}{(-1-1)^2} = -1$.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

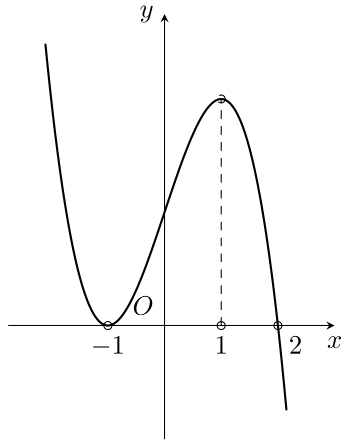
1. B	2. A	3. D	4. D	5. D	6. B	7. D	8. D	9. D	10. B
11. D	12. B	13. A	14. C	15. C	16. A	17. B	18. C	19. A	20. A
21. B	22. C	23. B	24. C	25. C	26. B	27. B	28. C	29. D	30. B
31. C	32. C	33. A	34. A	35. A	36. B	37. A	38. C	39. A	40. B
41. D	42. A	43. A	44. A	45. D	46. D	47. C	48. D	49. B	50. A

24 ĐỀ THI THỬ THPT ĐỒNG ĐẬU - VĨNH PHÚC - LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Nhận xét nào đúng về hàm số $g(x) = f^2(x)$?



Ⓐ Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
Ⓑ Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
Ⓒ Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
Ⓓ Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có

Phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$ trong đó $x = -1$ là nghiệm kép.

Phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$ và $f'(x) > 0$ khi $-1 < x < 1$.

Xét hàm số $g(x) = f^2(x)$ có $g'(x) = 2f(x).f'(x)$.

Giải phương trình

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta có $g'(x) > 0$ khi $x \in (-1; 1) \cup (2; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 2. Tập xác định của hàm số $\sqrt{-x^2 + 2x + 3}$ là

Ⓐ $(1; 3)$.
Ⓑ $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.
Ⓒ $[-1; 3]$.
Ⓓ $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$ xác định khi $-x^2 + 2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = [-1; 3]$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, ACC', $A'B'C'$. Mặt phẳng nào sau đây song song với (IJK)?

A $(BC'A)$. **B** $(AA'B)$. **C** $(BB'C)$. **D** $(CC'A)$.

Lời giải.

Do I, J, K lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, ACC' nên $\dfrac{AI}{AM} = \dfrac{AJ}{AN} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow IJ \parallel MN$.

Suy ra $IJ \parallel (BCC'B')$

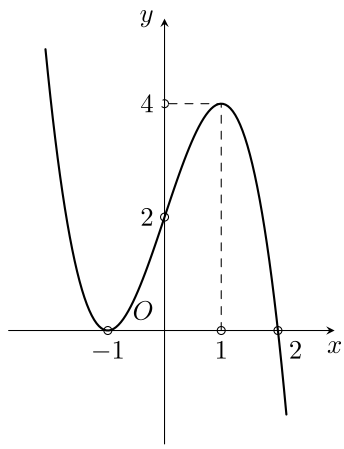
Tương tự $IK \parallel (BCC'B') \Rightarrow (IJK) \parallel (BCC'B')$ hay $(IJK) \parallel (BB'C)$.

Chọn đáp án C □

Câu 4.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên tập số thực và có đồ thị như hình vẽ bên. Biết $f(-1) = \dfrac{13}{4}$, $f(2) = 6$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên $[-1; 2]$ bằng

A $\dfrac{1573}{64}$. **B** 198. **C** $\dfrac{37}{4}$. **D** $\dfrac{14245}{64}$.



Lời giải.

Bảng biến thiên

x	-1		2
$f'(x)$	0	$+$	0
$f(x)$	$\dfrac{13}{4}$	$\nearrow$	6

Ta có $g'(x) = 3f^2(x).f'(x) - 3f'(x)$.

Xét trên đoạn $[-1; 2]$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(x)[f^2(x) - 1] = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	-1		2
$g'(x)$	0	$+$	0
$g(x)$		$\nearrow$	

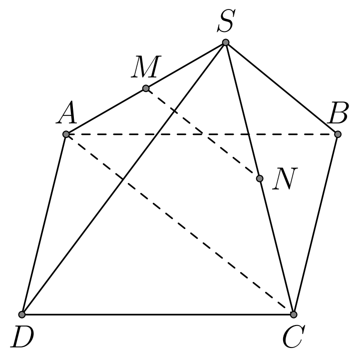
$\Rightarrow \min\limits_{[-1;2]} g(x) = g(-1) = f^3(-1) - 3f(-1) = \dfrac{1573}{64}$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC. Tìm mệnh đề đúng.

A $MN \parallel (ABCD)$. **B** $MN \perp (SCD)$. **C** $MN \parallel (SAB)$. **D** $MN \parallel (SBC)$.

Lời giải.



Theo bài ra ta có MN là đường trung bình của $\Delta SAC \Rightarrow MN \parallel AC$.

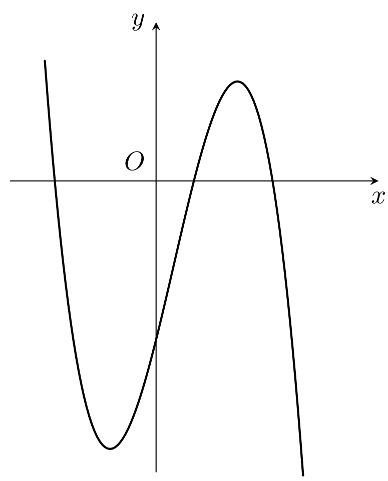
Ta có: $\begin{cases} MN \parallel AC \\ AC \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (ABCD)$.

Chọn đáp án A □

Câu 6.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm mệnh đề đúng.

A $a < 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d < 0$. **B** $a < 0,\ b < 0,\ c > 0,\ d < 0$.
C $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d < 0$. **D** $a < 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d < 0$.



Lời giải.

a) Ta thấy $\lim_{x\to+\infty} y = -\infty \Rightarrow a < 0$.

b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tung độ $y_0 < 0 \Rightarrow d < 0$.

c) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị trái dấu nên $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\Rightarrow 3ac < 0 \Rightarrow c > 0$.

d) Hoành độ điểm uốn nằm bên phải trục tung nên $y'' = 6ax + 2b = 0$ có nghiệm dương $\Rightarrow x = \dfrac{-b}{3a} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{b}{a} < 0 \Rightarrow b > 0$.

Vậy $a < 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d < 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Cho một đa giác lồi (H) có 10 cạnh. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà ba đỉnh của nó là ba đỉnh của (H), nhưng ba cạnh không phải ba cạnh của (H)?

A 40. **B** 100. **C** 60. **D** 50.

Lời giải.

a) Số tam giác được tạo thành từ 10 đỉnh của đa giác lồi (H) là C_{10}^3.

b) Xét trường hợp số tam giác chỉ chứa hai cạnh của đa giác, là số tam giác có 3 đỉnh liên tiếp của đa giác. Có 10 tam giác như vậy

c) Xét trường hợp số tam giác chứa đúng một cạnh của đa giác, là số tam giác có 2 đỉnh là 2 đỉnh liên tiếp của đa giác và đỉnh còn lại không kề với hai đỉnh kia. Khi đó, xét một cách bất kỳ ta có C_{10-4}^1 cách chọn đỉnh còn lại của tam giác (trừ hai đỉnh đã chọn với hai đỉnh kề nó). Trường hợp này có $10 \times \mathrm{C}_6^1$ tam giác.

Vậy số tam giác không chứa cạnh của đa giác (H) là $\mathrm{C}_{10}^1 - 10 - 10 \times \mathrm{C}_6^1 = 50$ tam giác.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;1)$, đường cao BH có phương trình $x - 3y - 7 = 0$ và trung tuyến CM có phương trình $x + y + 1 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C?

A. $A(-1;0)$. B. $(4;-5)$. C. $(1;-2)$. D. $(1;4)$.

Lời giải.

a) Điểm C thuộc đường trung tuyến CM nên gọi tọa độ điểm $C(x;x-1)$.

b) Tọa độ $\overrightarrow{AC} = (x-2;-x-2)$, tọa độ véc-tơ chỉ phương của đường thẳng BH là $\vec{u} = (3;1)$.

c) Vì $AC \perp BH$ nên $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH} = 0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot 3 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

Vậy $C(4;-5)$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = -\dfrac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (4m-8)x + 2$ nghịch biến trên toàn trục số?

A. 9. B. 7. C. Vô số. D. 8.

Lời giải.

$y' = -x^2 - 2(m+1)x + 4m - 8$. Hàm số nghịch biến trên toàn trục số $\Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

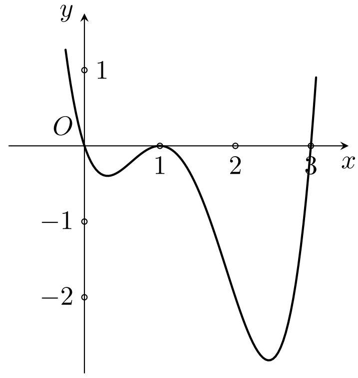
Ta có $y' \le 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 6m - 7 \le 0 \Leftrightarrow -7 \le m \le 1$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-7;-6;\ldots;-1;0;1\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 10.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị của hàm số $y = f^2(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại, cực tiểu?



A. 1 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

B. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

C. 3 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

D. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

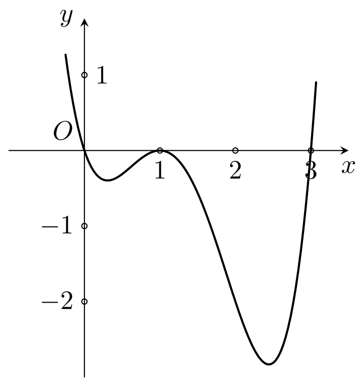
Lời giải.

a) Ta có $y = f^2(x) \Rightarrow y' = 2f(x)f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right.$.

b) Từ đồ thị ta có

(a) $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1, \text{ trong đó } x=1 \text{ là nghiệm kép.} \\ x=3 \end{array}\right.$

(b) $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \text{ (với } 0<a<1) \\ x=1 \\ x=b \text{ (với } 1<b<3) \end{array}\right.$



c) Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f^2(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		m		1		n		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số $y=f^2(x)$ có 2 điểm cực đại và 3 điểm cực tiểu

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x-\dfrac{1}{x}$ trên $(0;3]$ bằng

(A) $\dfrac{28}{9}$. (B) 0. **C** $\dfrac{8}{3}$. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $y'=1+\dfrac{1}{x^2}>0$, $\forall x\in(0;3]$. Do đó $\max\limits_{(0;3]} y=y(3)=\dfrac{8}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12.

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	-1	↗	$+\infty$

(A) Hàm số có điểm cực tiểu $x=0$.

(B) Hàm số có điểm cực đại $x=5$.

(C) Hàm số có điểm cực tiểu $x=-1$.

D Hàm số có điểm cực tiểu $x=1$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có điểm cực tiểu $x=1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Biết tập nghiệm của bất phương trình $x-\sqrt{2x+7}\le 4$ là $[a;b]$. Tính giá trị của biểu thức $P=2a+b$.

A $P=2$. (B) $P=17$. (C) $P=11$. (D) $P=-1$.

Lời giải.

$$x-\sqrt{2x+7}\le 4 \Leftrightarrow \sqrt{2x+7}\ge x-4 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-4<0\\2x+7\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x-4\ge 0\\2x+7\ge (x-4)^2\end{cases}\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<4\\x\ge -\dfrac{7}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 4\\x^2-10x+9\le 0\end{cases}\end{array}\right.$$

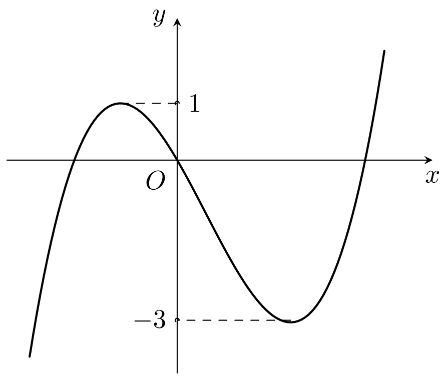
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\dfrac{7}{2}\le x<4\\ \begin{cases}x\ge 4\\1\le x\le 9\end{cases}\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\dfrac{7}{2}\le x<4\\4\le x\le 9\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow -\dfrac{7}{2}\le x\le 9.$$

Bất phương trình có tập nghiệm $S=\left[-\dfrac{7}{2};9\right]$. Vậy ta có $a=-\dfrac{7}{2}$ và $b=9$. Suy ra $P=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 14.

Cho hàm số đa thức bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=|f(x)+m|$ có ba điểm cực trị.



A $m\le -1$ hoặc $m\ge 3$. **B** $m\le -3$ hoặc $m\ge 1$.

C $m=-1$ hoặc $m=3$. **D** $1\le m\le 3$.

Lời giải.

a) Ta có số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)+m|$ "=" số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)+m$ "+" số nghiệm của phương trình $f(x)+m=0$ (không tính nghiệm kép).

b) Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)+m$ "=" số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$. Từ đồ thị ta thấy hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

c) Như vậy, để hàm số $y=|f(x)+m|$ có ba điểm cực trị thì phương trình $f(x)=-m$ phải có một nghiệm đơn hoặc một nghiệm đơn và một nghiệm kép.

Suy ra, $\left[\begin{array}{l}-m\ge 1\\-m\le -3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\le -1\\m\ge 3\end{array}\right.$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Số điểm biểu diễn tập nghiệm của phương trình $\sin^3 x-3\sin^2 x+2\sin x=0$ trên đường tròn lượng giác là

A 2. **B** 1. **C** 3. **D** 5.

Lời giải.

$$\sin^3 x-3\sin^2 x+2\sin x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\\sin x=1\\\sin x=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\mathrm{k}\pi\\x=\mathrm{k}2\pi\end{array}\right. (\mathrm{k}\in\mathbb{Z}).$$

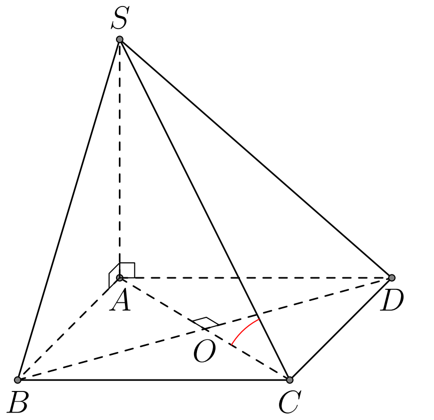
Vậy có ba điểm biểu diễn.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $3a$, SA vuông góc với đáy, $SB = 5a$. Tính sin của góc giữa cạnh SC và mặt đáy $(ABCD)$.

Ⓐ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Ⓑ $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. Ⓒ $\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$. **D** $\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$.

Lời giải.



a) Tam giác SAB vuông tại A nên $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 4a$.

b) Tam giác ABC vuông tại B nên $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 3a\sqrt{2}$.

c) Tam giác SAC vuông tại A nên $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{34}$.

d) Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên $(SC, (ABCD)) = \widehat{SCA}$.

e) Tam giác SAC vuông tại A nên $\sin\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{SC} = \dfrac{2\sqrt{34}}{17}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 17. Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên toàn trục số?

Ⓐ $y = x^3 - 3x^2 + 4$. Ⓑ $y = -x^4 - 2x^2 - 3$.

Ⓒ $y = x^3 + 3x$. **D** $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x - 3 = -3\left(x^2 - 2x + 1\right) = -3\left(x - 1\right)^2 \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

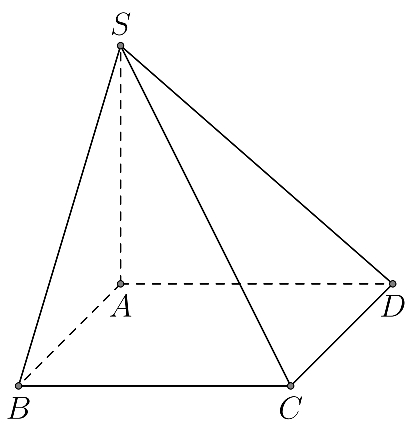
Do đó hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$ nghịch biến trên toàn trục số.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $BA \perp (SAD)$. Ⓑ $BA \perp (SAC)$. Ⓒ $BA \perp (SBC)$. Ⓓ $BC \perp (SCD)$.

Lời giải.



Ta có $BA \perp AD$ và $BA \perp SA$ nên $BA \perp (SAD)$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 19. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

(A) $I(-1;2)$; $R=4$. **B** $I(1;-2)$; $R=2$. (C) $I(-1;2)$; $R=\sqrt{5}$. (D) $I(1;-2)$; $R=4$.

Lời giải.

Tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+(-2)^2-1}=2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+10}{2x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$?

(A) 4. (B) 5. **C** 6. (D) 9.

Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{mx+10}{2x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-20<0 \\ -\dfrac{m}{2}\notin(0;2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{20}<m<\sqrt{20} \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{m}{2}\le 0 \\ -\dfrac{m}{2}\ge 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{20}<m<\sqrt{20} \\ \left[\begin{array}{l} m\ge 0 \\ m\le -4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{20}<m\le -4 \\ 0\le m<\sqrt{20}. \end{array}\right.$$

Vậy $m\in\{-4;0;1;2;3;4;\}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+2}{3-x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

(A) 4. **B** 2. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có hai đường tiệm là đường tiệm cận đứng $x=3$ và đường tiệm cận ngang $y=-1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Hàm số $y=-\dfrac{1}{4}x^4-2x^2+2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 2. **B** 1. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $y'=-x^3-4x=0 \iff x=0$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số có một điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Hàm số $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ có giá trị lớn nhất là M, giá trị nhỏ nhất là m. Tính giá trị biểu thức $P=M^2+m^2$.

(A) $P=\dfrac{1}{4}$. **B** $P=\dfrac{1}{2}$. (C) $P=2$. (D) $P=1$.

Lời giải.

a) Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

b) $y' = \dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

c) Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	0

d) Từ bảng biến thiên ta có $m = -\dfrac{1}{2}$ và $M = \dfrac{1}{2}$. Vậy $P = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + mx + 4 = 0$ có nghiệm.

A $-4 \le m \le 4$.

B $m \le -4$ hoặc $m \ge 4$.

C $m \le -2$ hoặc $m \ge 2$.

D $-2 \le m \le 2$.

Lời giải.

Phương trình $x^2 + mx = 4 = 0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 16 \ge 0 \Leftrightarrow m \le -4$ hoặc $m \ge 4$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Hàm số $y = x^3 - 9x^2 + 1$ có hai điểm cực trị là x_1, x_2. Tính $x_1 + x_2$.

A 6.

B -106.

C 0.

D -107.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 18x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=6 \end{array}\right.$. Vậy $x_1 + x_2 = 0 + 6 = 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Số nghiệm của phương trình $\dfrac{\sin 3x}{1-\cos x} = 0$ trên đoạn $[0;\pi]$ là

A 4.

B 2.

C 3.

D Vô số.

Lời giải.

a) ĐKXĐ: $\cos x \ne 1$.

b) Phương trình tương đương $\sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = \mathrm{k}\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\mathrm{k}\pi}{3}$ với $(\mathrm{k} \in \mathbb{Z})$.

c) Ta có $0 \le x \le \pi \Leftrightarrow 0 \le \dfrac{\mathrm{k}\pi}{3} \le \pi \Leftrightarrow 0 \le \mathrm{k} \le 3$. Suy ra $\mathrm{k}=0$, $\mathrm{k}=1$, $\mathrm{k}=2$, $\mathrm{k}=3$. Do đó $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{3}$, $x=\dfrac{2\pi}{3}$, $x=\pi$.

So sánh điều kiện ta có $x=\dfrac{\pi}{3}$, $x=\dfrac{2\pi}{3}$, $x=\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, I là trung điểm của AB, hình chiếu S lên mặt đáy là trung điểm H của CI, góc giữa SA và đáy là $45°$. Khoảng cách giữa SA và CI bằng

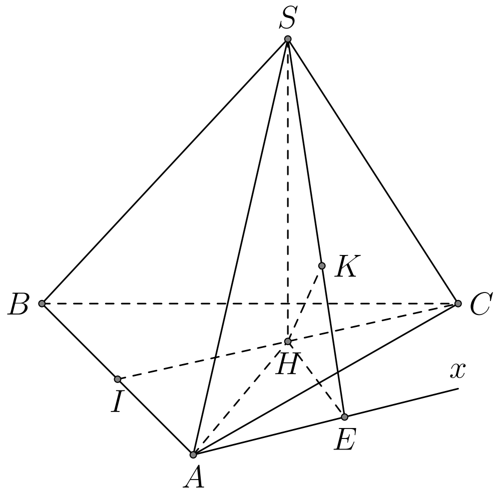
A $\dfrac{a}{2}$.

B $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

C $\dfrac{a\sqrt{77}}{22}$.

D $\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$.

Lời giải.



a) $SH \perp (ABC) \Rightarrow (SA,(ABC)) = \widehat{SAH} = 45°$. Do đó, tam giác SAH vuông cân tại H nên $SH = AH$. Xét tam giác AIH vuông tại I ta có $AH = \sqrt{AI^2 + HI^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{4} \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{7}}{4}$.

b) Vẽ Ax song song CI và HE vuông góc Ax tại E. Ta có $IC \parallel AE$ nên $IC \parallel (SAE) \Rightarrow \mathrm{d}(IC; SA) = \mathrm{d}(IC;(SAE)) = \mathrm{d}(H;(SAE))$.

c) Vẽ $HK \perp SE$ tại K. Ta có $\begin{cases} AE \perp HE \\ AE \perp SH \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SHE) \Rightarrow AE \perp HK$, mà $HK \perp SE$ nên $HK \perp (SAE)$, do đó $\mathrm{d}(H;(SAE)) = HK$.

d) Ta có $AHIE$ là hình bình hành nên $HE = AI = \dfrac{a}{2}$.

e) Tam giác SHE vuông tại H nên $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HE^2} = \dfrac{44}{7a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{77}}{22}$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ có hai điểm cực trị.

A $m \leq 3$. **B** $m > 3$. **C** $m > -3$. **D** $m < 3$.

Lời giải.

a) TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

b) $y' = 3x^2 - 6x + m$.

c) Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta' = 9 - 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $x + y - 1 = 0$ và đường tròn $(C) : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$. Ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (4; 0)$ cắt đường tròn cắt đường tròn (C) tại hai điểm $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$. Giá trị $x_1 + x_2$ bằng

A 5. **B** 8. **C** 6. **D** 7.

Lời giải.

a) Gọi d' là ảnh của d qua $\mathrm{T}_{\vec{v}}$. Lấy $M(x; y) \in d$ và $M'(x'; y') \in d'$. Ta có $\overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} x' - x = 4 \\ y' - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - 4 \\ y = y' \end{cases}$. Thay vào d ta có $x' + y' - 5 = 0$. Do đó d' có phương trình là $x + y - 5 = 0$.

b) Ta có A, B là giao điểm giữa d' và (C), suy ra tọa độ A, B là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + y - 5 = 0 & (1) \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 = 1 & (2) \end{cases}$. Từ (1) ta có $y = -x + 5$, thay vào (2) ta được $(x-3)^2 +$

$$(-x+4)^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 14x + 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 4 \end{array}\right..$$

Vậy $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ suy ra $x_1 + x_2 = 7$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-m}} + \sqrt{-x+2m+6}$ xác định trên $(-1;0)$.

(A) $-6 < m \le -1$. (B) $-6 \le m < -1$. (C) $-3 \le m < -1$. **D** $-3 \le m \le -1$.

Lời giải.

a) ĐKXĐ: $\begin{cases} x - m > 0 \\ -x + 2m + 6 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > m \\ x \le 2m + 6 \end{cases} \Rightarrow m < x \le 2m+6 \Rightarrow \mathscr{D} = (m; 2m+6]$.

b) Để hàm số xác định trên $(-1;0)$ thì $(-1;0) \subset \mathscr{D} \Rightarrow \begin{cases} m \le -1 \\ 2m + 6 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \le -1 \\ m \ge -3 \end{cases} \Rightarrow -3 \le m \le -1$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{5-4x}$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng

(A) 9. **B** 3. (C) 1. (D) $-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = -\dfrac{2}{\sqrt{5-4x}} < 0$, $\forall x \in [-1;1]$. Suy ra $\max\limits_{[-1;1]} y = y(-1) = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Hàm số $y = -\dfrac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-2;0)$. (B) $(0;+\infty)$. (C) $(2;+\infty)$. **D** $(0;1)$.

Lời giải.

a) Ta có $y' = -x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right..$

b) Bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu ta có hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Với giá trị nào của m thì hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + m$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;2]$ bằng -4?

A $m = -8$. (B) $m = -4$. (C) $m = 0$. (D) $m = -\dfrac{80}{27}$.

Lời giải.

a) Ta có $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0;2] \\ x = 3 \notin [0;2] \end{array}\right..$

b) Ta có $y(1) = m+4$, $y(0) = m$, $y(2) = m+2$. Rõ ràng $m < m+2 < m+4$ nên $\max\limits_{[0;2]} y = m+4$.

c) Theo giả thiết ta có $m + 4 = -4 \Leftrightarrow m = -8$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}$ có ba đường tiệm cận.

(A) $m < 1$. (B) $m \neq 1$ và $m \neq -8$.
(C) $m \leq 1$ và $m \neq -8$. **D** $m < 1$ và $m \neq -8$.

Lời giải.

a) Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} y = 1$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y = 1$.

b) Để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có hai đường tiệm cận đứng, tức là phương trình $x^2 - 2x + m = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1 và -2. Từ đó, ta có

$$\begin{cases}\Delta' = 1 - m > 0\\ 1 - 2 + m \neq 0\\ 4 + 4 + m \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1\\ m \neq 1\\ m \neq -8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1\\ m \neq -8.\end{cases}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - m\sqrt{x^2+1} + m + 4 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

A $m > 6$. (B) $m \geq 6$.
(C) $m \in \varnothing$. (D) $m \geq 6$ hoặc $m \leq -2$.

Lời giải.

a) Đặt $\sqrt{x^2+1} = t \Leftrightarrow x^2 = t^2 - 1$ $(t \geq 1)$.

b) Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 1 - mt + m + 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - mt + m + 3 = 0 \ (1).$$

c) Để phương trình ban đầu có bốn nghiệm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 lớn hơn 1. Do đó ta có

$$\begin{cases} a = 1 \neq 0\\ \Delta = m^2 - 4(m+3) > 0\\ t_1 > 1\\ t_2 > 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m - 12 > 0\\ t_1 - 1 >\\ t_2 - 1 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{aligned} & m > 6\\ & m < -2\end{aligned}\right.\\ (t_1 - 1) + (t_2 - 1) > 0\\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) > 0\end{cases}$$

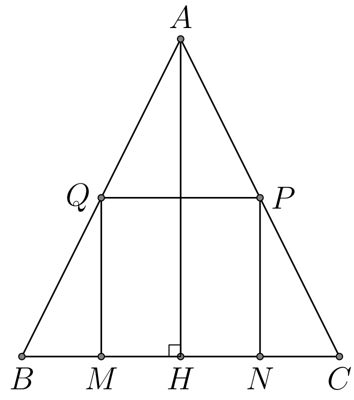
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{aligned} & m > 6\\ & m < -2\end{aligned}\right.\\ t_1 + t_2 - 2 > 0\\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{aligned} & m > 6\\ & m < -2\end{aligned}\right.\\ m - 2 > 0\\ m + 3 - m + 1 > 0\end{cases} \Leftrightarrow m > 6.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Cho tam giác đều ABC có cạnh 8 cm. Dựng hình chữ nhật $MNPQ$ với cạnh MN nằm trên cạnh BC và hai đỉnh P, Q lần lượt nằm trên các cạnh AC, AB của tam giác. Tính BM sao cho hình chữ nhật $MNPQ$ có diện tích lớn nhất.

A $BM = 2$ cm. (B) $BM = 8\sqrt{3}$ cm. (C) $BM = 4$ cm. (D) $BM = 4\sqrt{2}$ cm.

Lời giải.



a) Đặt $BM = x\ (x > 0) \Rightarrow MN = 8 - 2x\ (x < 4)$.

b) Gọi H là trung điểm BC. Tam giác ABH có $MQ \parallel AH \Rightarrow$ $\dfrac{QM}{AH} = \dfrac{BM}{BH} \Rightarrow QM = \dfrac{4\sqrt{3}x}{4} = \sqrt{3}x$.

c) Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là

$$S = MQ \cdot MN = \sqrt{3}x(8-2x) = -2\sqrt{3}\left(x^2 - 4x\right) = -2\sqrt{3}\left(x-2\right)^2 + 8\sqrt{3} \le 8\sqrt{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 2$. Vậy $BM = 2$ cm.

Chọn đáp án A $\square$

Câu 37. Thể tích của khối chóp có diện tích mặt đáy bằng B, chiều cao bằng h được tính bởi công thức

A $V = \dfrac{1}{3}Bh$. B $V = Bh$. C $V = \dfrac{1}{2}Bh$. D $V = 3Bh$.

Lời giải.

Công thức tính thể tích chóp.

Chọn đáp án A $\square$

Câu 38. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1+4x}{1+x}$ là

A $I(4;-1)$. B $I(-1;1)$. C $I(4;1)$. D $I(-1;4)$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có tâm đối xứng I là giao điểm hai đường tiệm cận, tức là $I\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$.

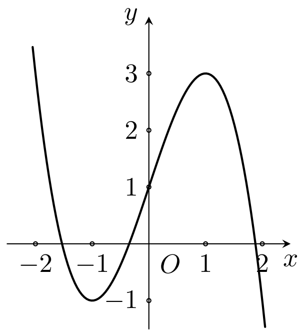
Chọn đáp án D $\square$

Câu 39.

Đồ thị hình bên là của hàm số nào?

A $y = x^3 - 3x^2 + 1$. B $y = -x^3 - 3x^2 + 1$.

C $y = x^3 - 3x + 1$. D $y = -x^3 + 3x + 1$.



Lời giải.

Từ đồ thị ta có $a < 0$ và hàm số có hai điểm cực trị là $x = -1$, $x = 1$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x-5}{x-m}$ có tiệm cận đứng nằm bên phải trục tung.

A $m < 0$. B $m > 0$ và $m \ne \dfrac{5}{4}$.

C $m > 0$. D $m < 0$ và $m \ne -\dfrac{5}{4}$.

Lời giải.

a) Đồ thị hàm số có tiệm cận khi $-4m + 5 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne \dfrac{5}{4}$.

b) Khi đó, đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = m$.

c) Để đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng bên phải trục tung thì $m > 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6. Có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau?

A 216. B 120. C 504. D 6.

Lời giải.

a) Gọi số có ba chữ số là $\overline{abc}$.

b) Chọn a: có 6 cách.

c) Chọn b ($b \neq a$): có 5 cách.

d) Chọn c ($c \neq a$ và $c \neq b$): có 4 cách.

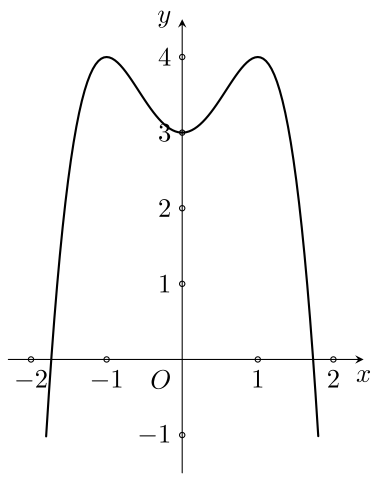
Vậy ta có $6 \times 5 \times 4 = 120$ số.

Chọn đáp án B □

Câu 42.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Phương trình $f(x) = \pi$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A 1. B 2. C 3. D 4.



Lời giải.

Ta có $\pi = 3{,}14$ nên từ đồ thị ta thấy phương trình $f(x) = \pi$ có bốn nghiệm thực phân biệt.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x+1)$. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

A 1. B 3. C 2. D 0.

Lời giải.

a) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

b) Bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

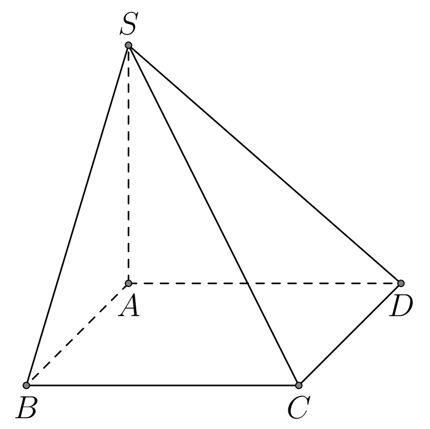
Vậy hàm số có hai điểm cực trị là $x = -1$ và $x = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Khi đó, thể tích của khối chóp bằng

A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C** $a^3\sqrt{3}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.



$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \times SA \times S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \times a\sqrt{3} \times a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A Khối tứ diện là khối đa diện lồi.

B Khối hộp là khối đa diện lồi.

C Lắp ghép hai khối hộp bất kì thì được một khối đa diện lồi.

D Khối lăng trụ tam giác là khối đa diện lồi.

Lời giải.

Theo định nghĩa khối đa diện lồi:

Khối tứ diện là khối đa diện lồi nên đáp án A đúng.

Khối hộp là khối đa diện lồi nên đáp án B đúng.

Khối lăng trụ tam giác là khối đa diện lồi nên đáp án D đúng.

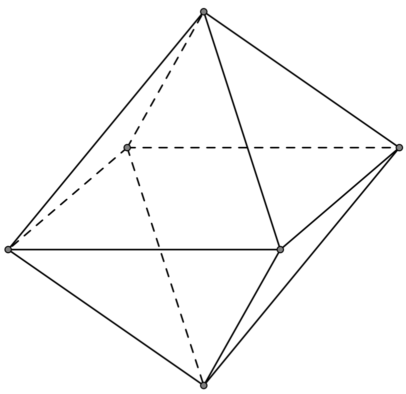
Lắp ghép hai khối hộp bất kì thì không phải lúc nào cũng được một khối đa diện lồi, nên đáp án C là đáp án sai.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Khối đa diện loại $\{3;4\}$ có số đỉnh, số cạnh và số mặt tương ứng là

A 6, 12, 8. **B** 4, 6, 4. **C** 8, 12, 6. **D** 8, 6, 12.

Lời giải.



Khối đa diện đều loại $\{3;4\}$ chính là khối bát diện đều. Do đó có số đỉnh là 6, số cạnh là 12, số mặt là 8.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Khối tứ diện đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

(A) 3. (B) 4. **C** 6. (D) 9.

Lời giải.

Mỗi mặt phẳng đối xứng của tứ diện đều là mặt phẳng đi qua trung điểm 1 cạnh và chứa cạnh đối diện của tứ diện đều. Tứ diện đều có 6 cạnh nên số mặt phẳng đối xứng là 6.

Chọn đáp án (C) □

Câu 48. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

(B) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

C Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

(D) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Lời giải.

a) $y' = -\dfrac{3}{(x-1)^2}$.

b) Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

Vậy hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Hai đội A và B thi đấu trận chung kết bóng chuyền nữ chào mừng ngày $20-10$ (trận chung kết tối đa 5 hiệp). Đội nào thắng 3 hiệp trước thì thắng trận. Xác suất đội A thắng mỗi hiệp là 0,4 (không có hòa). Tính xác suất P để đội A thắng trận.

(A) $P \approx 0{,}125$. **B** $P \approx 0{,}317$. (C) $P \approx 0{,}001$. (D) $P \approx 0{,}29$.

Lời giải.

a) Xác suất đội A thắng mỗi hiệp là 0,4 (không có hòa) nên xác suất đội A thua mỗi hiệp là 0,6.

b) Gọi X là biến cố đội A thắng trận đấu với đội B.
Gọi X_1, X_2, X_3 tương ứng là biến cố đội A thắng đội B với tỉ số lần lượt là $3-0$; $3-1$; $3-2$.
Khi đó $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ và X_1, X_2, X_3 là đôi một xung khắc.
Do đó ta có $\mathrm{P}(X) = \mathrm{P}(X_1 \cup X_2 \cup X_3) = \mathrm{P}(X_1) + \mathrm{P}(X_2) + \mathrm{P}(X_3)$.

c) Ta xét ba trường hợp sau

+ Xét biến cố X_1: đội A thắng đội B với tỉ số $3-0$.
Khi đó hai đội sẽ đấu ba hiệp và đội A thắng cả ba hiệp, suy ra $P(X_1) = (0{,}4)^3 = \dfrac{8}{125}$.

+ Xét biến cố X_2: đội A thắng đội B với tỉ số $3-1$.
Khi đó hai đội sẽ đấu bốn hiệp và đội B thắng một trong ba hiệp đầu, suy ra $P(X_2) = \mathrm{C}_1^3 \cdot 0{,}6 \cdot (0{,}4)^2 = \dfrac{72}{625}$.

+ Xét biến cố X_3: đội A thắng đội B với tỉ số $3-2$.
Khi đó hai đội sẽ đấu năm hiệp và đội B thắng hai trong bốn hiệp đầu, suy ra $P(X_3) = \mathrm{C}_2^4 \cdot (0{,}6)^2 \cdot (0{,}4)^2 \cdot 0{,}4 = \dfrac{432}{3125}$.

Vậy xác suất để đội A thắng là $\mathrm{P}(X) = \dfrac{8}{125} + \dfrac{72}{625} + \dfrac{432}{3125} = \dfrac{992}{3125} \approx 0{,}317$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

A $m = 1$. **B** $m \in \{-1; 1\}$. **C** $m \in \{-1; 0; 1\}$. **D** $m \in \{0; 1\}$.

Lời giải.

a) $y' = 4x^3 - 4m^2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m^2 \end{array}\right.$. Để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị thì phương trình $y' = 0$ phải có ba nghiệm phân biệt, suy ra $m \neq 0$.

b) Khi đó, đồ thị có ba điểm cực trị là $A(0; 1)$, $B\left(m; -m^4 + 1\right)$, $C\left(-m; -m^4 + 1\right)$.

c) Ta có $\overrightarrow{AB} = (m; -m^4)$, $\overrightarrow{AC} = (-m; -m^4)$. Suy ra $AB = \sqrt{m^2 + m^8}$, $AC = \sqrt{m^2 + m^8}$. Do đó tam giác ABC luôn cân ở A. Vậy để tam giac ABC vuông thì tam giác ABC phải vuông ở A.

d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -m^2 + m^8 = 0 \Leftrightarrow m^6 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án B □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. C	3. C	4. A	5. A	6. A	7. D	8. B	9. A	10. B
11. C	12. D	13. A	14. A	15. C	16. D	17. D	18. A	19. B	20. C
21. B	22. B	23. B	24. B	25. A	26. C	27. C	28. D	29. D	30. D
31. B	32. D	33. A	34. D	35. A	36. A	37. A	38. D	39. D	40. B
41. B	42. D	43. C	44. A	45. C	46. A	47. C	48. C	49. B	50. B

25 ĐỀ THI THỬ THPT THIỆU HÓA, THANH HÓA, LẦN 3 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng hai nghiệm.

Ⓐ $-2 < m < -1$. Ⓑ $m = -2, m \geq -1$. Ⓒ $m > 0, m = -1$. **D** $m = -2, m > -1$.

Lời giải.

Ta có $f(x) - 1 = m \Leftrightarrow f(x) = m + 1$.

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng hai nghiệm khi

$$\left[\begin{array}{l} m+1=-1 \\ m+1>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m>-1. \end{array}\right.$$

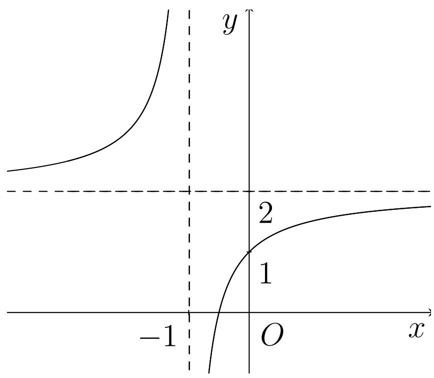
Chọn đáp án D □

Câu 2.

Đồ thị sau đây là của hàm số nào?

Ⓐ $y = \dfrac{x+2}{x+1}$. Ⓑ $y = \dfrac{x+3}{1-x}$.

C $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$. Ⓓ $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = 2$ và cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Tính giá trị của $a^{\log_{\sqrt{a}} 4}$ với $a > 0, a \neq 1$.

Ⓐ 8. Ⓑ 4. **C** 16. Ⓓ 2.

Lời giải.

Ta có $a^{\log_{\sqrt{a}} 4} = a^{2\log_a 4} = a^{\log_a 16} = 16$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y = \log_\pi (4x^2 + 1)$. Ⓑ $y = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$. Ⓒ $y = \log_{\frac{1}{3}} x$. **D** $y = \left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^x$.

Lời giải.

Ta có: $0 < \dfrac{2}{\mathrm{e}} < 1 \Rightarrow$ hàm số $y = \left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^x$ nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho hàm số $y = \dfrac{mx+1}{x-2m}$ với tham số $m \neq 0$. Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng có phương trình nào dưới đây?

A $2x + y = 0$. B $x - 2y = 0$. C $y = 2x$. D $x + 2y = 0$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = m \Rightarrow$ đường thẳng $y = m$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Hơn nữa $\lim\limits_{x\to(2m)^+} y = +\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x = 2m$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Suy ra giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là $(2m; m)$ thuộc đường thẳng $x = 2y$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị hàm số $y = \dfrac{3-4x}{x-2}$ tại điểm có tung độ $y = -\dfrac{7}{3}$.

A $\dfrac{9}{5}$. B $\dfrac{5}{9}$. C -10. D $-\dfrac{5}{9}$.

Lời giải.

Khi $y_0 = -\dfrac{7}{3} \Rightarrow \dfrac{3-4x_0}{x_0-2} = -\dfrac{7}{3} \Leftrightarrow 3(3-4x_0) = -7(x_0-2) \Leftrightarrow x_0 = -1$.

Ta có $y' = \dfrac{5}{(x-2)^2}$, suy ra $y'(-1) = \dfrac{5}{9}$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - \ln x$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2}; 3\right]$ theo thứ tự là

A 1 và e. B 1 và $\dfrac{1}{2} + \ln 2$. C 1 và $\mathrm{e} - 1$. D $\dfrac{1}{2} + \ln 2$ và $\mathrm{e} - 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 1 - \dfrac{1}{x}$, suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in \left(\dfrac{1}{2}; 3\right)$. Do đó $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + \ln 2, y(1) = 1, y(\mathrm{e}) = \mathrm{e} - 1$.

Vậy $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};3\right]} y = \mathrm{e} - 1$ và $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};3\right]} y = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$.

A $m \in (1; 3)$. B $m \in \left(\dfrac{9}{2}; 5\right)$. C $m \in (3; 5)$. D $m \in (-2; -1)$.

Lời giải.

Ta có $4^x - m2^{x+1} + 2m = 0 \Leftrightarrow 4^x - 2m2^x + 2m = 0$. (1)

Đặt $t = 2^x > 0$, phương trình (1) trở thành $t^2 - 2mt + 2m = 0$. (2)

Phương trình (1) có hai nghiệm thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$, khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm thỏa mãn $t_1 \cdot t_2 = 8$. Tức là $\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m \geq 0 \\ 2m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{\sqrt[3]{a^7} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-5}}}$ với $a > 0$ ta được kết quả $A = a^{\frac{m}{n}}$, trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $m^2 + n^2 = 543$. **B** $m^2 - n^2 = 312$. (C) $m^2 - n^2 = -312$. (D) $m^2 + n^2 = 409$.

Lời giải.

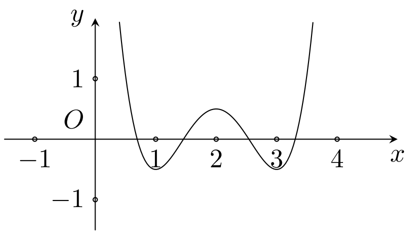
Ta có:
$A = \dfrac{\sqrt[3]{a^7} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-5}}} = \dfrac{a^{\frac{7}{3}} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot a^{-\frac{5}{7}}} = \dfrac{a^6}{a^{\frac{23}{7}}} = a^{6-\frac{23}{7}} = a^{\frac{19}{7}}$.
Suy ra $m = 19, n = 7$ nên $m^2 + n^2 = 410$ và $m^2 - n^2 = 312$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

A 3. (B) 1. (C) 4. (D) 2.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có hàm số có 3 cực trị, trong đó có 2 cực tiểu và một cực đại.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 6t^2$ với t là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $s(t)$ là quãng đường đi được trong khoảng thời gian t. Tính thời điểm t tại đó vận tốc đạt giá trị lớn nhất.

A $t = 2$. (B) $t = 1$. (C) $t = 4$. (D) $t = 3$.

Lời giải.

Vận tốc của chất điểm tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t = 12 - 3(t-2)^2 \leq 12$.
Vậy tại thời điểm $t = 2$ tại đó vận tốc đạt giá trị lớn nhất.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Gọi T là tổng các nghiệm của phương trình $\log^2_{\frac{1}{3}} x - 5\log_3 x + 4 = 0$. Tính T

A $T = 84$. (B) $T = 4$. (C) $T = 5$. (D) $T = -5$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$. Ta có

$$\log^2_{\frac{1}{3}} x - 5\log_3 x + 4 = 0 \Leftrightarrow \log^2_3 x - 5\log_3 x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_5 x = 1\\ \log_3 x = 4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 3\\ x = 81.\end{array}\right.$$

Vậy $T = 84$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Hàm số $f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{5-x} - 3x^2 + 6x$ đạt giá trị lớn nhất bằng

(A) -1. (B) Một giá trị khác. **C** 1. (D) 0.

Lời giải.

Điều kiện $x \in [-3;5]$. Đặt $t = \sqrt{3+x} + \sqrt{5-x}, x \in [-3;5]$.
$t^2 = 8+2\sqrt{(3+x)(5-x)} \geq 8 \Rightarrow t \geq 2\sqrt{2}, t = 1\sqrt{3+x}+1\sqrt{5-x} \leq \sqrt{(1^2+1^2)(3+x+5-x)} = 4$.
Suy ra $t \in \left[2\sqrt{2};4\right]$ và $-x^2+2x = \left(\dfrac{t^2-8}{2}\right)^2 - 15$. Khi đó $f(t) = t + 3\left[\left(\dfrac{t^2-8}{2}\right)^2 - 15\right], t \in [2\sqrt{2};4]$.
$f'(t) = 1 + 6t\left(t^2-8\right) > 0, \forall t \in [2\sqrt{2};4] \Rightarrow \max\limits_{[2\sqrt{2};4]} f(t) = f(4)$. Với $t = 4 \Rightarrow x = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - \sqrt{4-x^2}$. Tính tổng $M+m$.

A $2-\sqrt{2}$. B $2\left(1-\sqrt{2}\right)$. C $2\left(1+\sqrt{2}\right)$. D 4.

Lời giải.

Điều kiện $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.
Ta có $y' = \dfrac{\sqrt{4-x^2}+x}{\sqrt{4-x^2}}; y' = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$.
Mà $y(2) = 2$, $y(-2) = -2$, $y(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$. Suy ra $M + m = 2 - 2\sqrt{2} = 2\left(1-\sqrt{2}\right)$.
Chọn đáp án B □

Câu 15. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2a$, $A'A = a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a.

A $V = \dfrac{3a^3}{4}$. B $V = a^3$. C $V = 3a^3$. D $V = \dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.

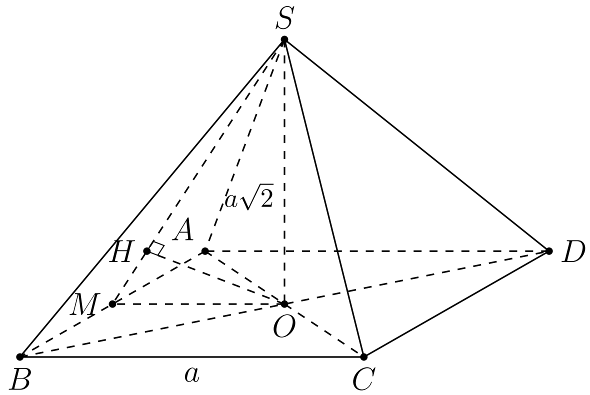
Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\triangle ABC} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.
Thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = 3a^3$.
Chọn đáp án C □

Câu 16. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách d từ tâm O của đáy $ABCD$ đến một mặt bên theo a.

A $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. B $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. C $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. D $d = \dfrac{2a\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm AB, H là hình chiếu của O lên OM ta có $OH \perp (SAB)$. Xét tam giác SOM, ta có
$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{1}{2a^2} = \dfrac{9}{2a^2}$
$\Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

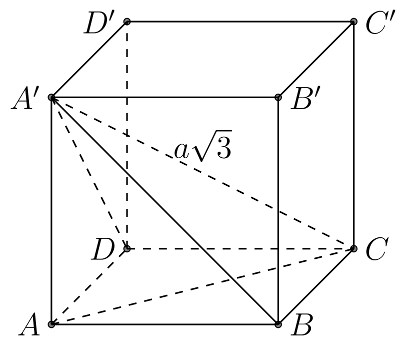


Chọn đáp án A □

Câu 17. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có đường chéo bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $A'.ABCD$.

Ⓐ $2\sqrt{2}a^3$. **B** $\dfrac{a^3}{3}$. Ⓒ a^3. Ⓓ $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.



Áp dụng định lí Pitago, ta có

$AC'^2 = AA^2 + AC^2 = AA^2 + AB^2 + AD^2 = 3AB^2$

$\Rightarrow 3a^2 = 3AB^2 \Rightarrow AB = a$.

Vậy $V_{A'.ABCD} = \dfrac{1}{3}AA'S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\cdot a\cdot a^2 = \dfrac{a^3}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \dfrac{1}{x}$.

Ⓐ $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3^x}{\ln 3} - \dfrac{1}{x^2} + C,\ C \in \mathbb{R}$. Ⓑ $\dfrac{x^3}{3} - 3^x + \dfrac{1}{x^2} + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Ⓒ $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}$. **D** $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \left(x^2 - 3^x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Cho tích phân $I = \displaystyle\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 32$. Tính tích phân $J = \displaystyle\int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ $J = 64$. Ⓑ $J = 8$. **C** $J = 16$. Ⓓ $J = 32$.

Lời giải.

Đặt $t = 2x \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}t}{2} = \mathrm{d}x$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 2 \Rightarrow t = 4$.

Khi đó $J = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot 32 = 16$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{2}{4x-3}$.

Ⓐ $\displaystyle\int \frac{2}{4x-3}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln|4x-3| + C$. Ⓑ $\displaystyle\int \frac{2}{4x-3}\mathrm{d}x = 2\ln\left|2x - \frac{3}{2}\right| + C$.

C $\displaystyle\int \frac{2}{4x-3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|2x - \frac{3}{2}\right| + C$. Ⓓ $\displaystyle\int \frac{2}{4x-3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(2x - \frac{3}{2}\right) + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \frac{2}{4x-3}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2x - \frac{3}{2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|2x - \frac{3}{2}\right| + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0;\pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A $F\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

B $F\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=3-\sqrt{3}$.

C $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$.

D $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}F(x)&=\int f(x)\mathrm{d}x=\int \frac{2\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x-\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x\\&=\int \frac{2}{\sin^2 x}\mathrm{d}(\sin x)-\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x\\&=-\frac{2}{\sin x}+\cot x+C.\end{aligned}$$

Suy ra $F'(x)=f(x)=\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$.

Trên khoảng $(0;\pi)$, $F'(x)=0\Leftrightarrow 2\cos x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0;\pi)$ là $\sqrt{3}$ nên ta có

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow -\frac{3\sqrt{3}}{3}+C=\sqrt{3}\Leftrightarrow C=2\sqrt{3}.$$

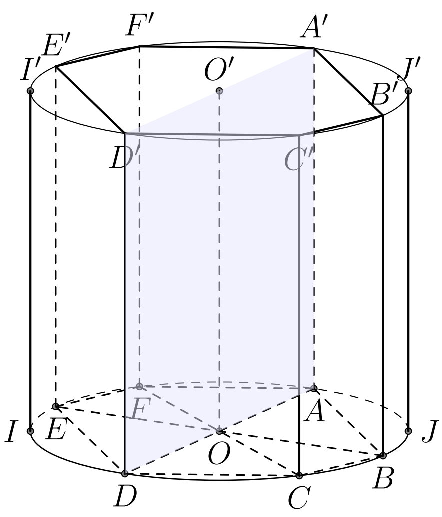
Vậy $F(x)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+2\sqrt{3}$. Do đó $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng $36\pi a^2$. Tính thể tích V của lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ.

A $V=27\sqrt{3}a^3$. **B** $V=24\sqrt{3}a^3$. **C** $V=36\sqrt{3}a^3$. **D** $V=81\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.



Thiết diện qua trục hình trụ là hình vuông $ADD'A'$. Gọi O,O' lần lượt là hai tâm đường tròn đáy (hình vẽ). Suy ra $l=2r$.

Theo giả thiết ta có

$S_{xq}=2\pi rl=36\pi a^2\Leftrightarrow 2\pi r\cdot 2r=36\pi a^2\Rightarrow r=3a\Rightarrow l=6a$.

Lăng trụ lục giác đều $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$ nội tiếp hình trụ có chiều cao là $h=6a$.

$S_{ABCDEF}=6S_{\Delta OAB}=6\cdot\dfrac{(3a)^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{27a^2\sqrt{3}}{2}$ (vì ΔOAB đều, cạnh bằng $3a$).

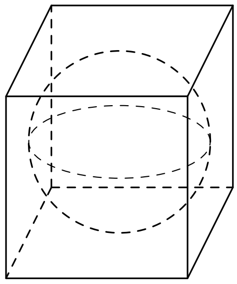
Suy ra $V=\dfrac{27a^2\sqrt{3}}{2}\cdot 6a=81a^3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Cho hình lập phương có thể tích bằng $64a^3$. Thể tích của khối cầu nội tiếp hình lập phương đó bằng

(A) $V = \dfrac{8\pi a^3}{3}$. (B) $V = \dfrac{16\pi a^3}{3}$. (C) $V = \dfrac{64\pi a^3}{3}$. (D) $V = \dfrac{32\pi a^3}{3}$.

Lời giải.



Khối lập phương có thể tích $64a^3$ nên cạnh bằng $4a$.

Khối cầu nội tiếp khối lập phương có bán kính $R = \dfrac{4a}{2} = 2a$ nên thể tích khối cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi(2a)^3 = \dfrac{32\pi a^3}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Khối nón có bán kính đáy $r = 3$, chiều cao $h = \sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối nón

(A) $V = 9\pi\sqrt{2}$. (B) $V = 3\pi\sqrt{11}$. (C) $V = 3\pi\sqrt{2}$. (D) $V = \pi\sqrt{2}$.

Lời giải.

Thể tích của khối nón $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot \sqrt{2} = \dfrac{9\pi\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (α)là mặt phẳng song song với mặt phẳng $(\beta): 2x - 4y + 4z + 3 = 0$ và cách điểm $A(2; -3; 4)$ một khoảng $k = 3$. Phương trình mặt phẳng (α) là

(A) $2x - 4y + 4z - 5 = 0$ hoặc $2x - 4y + 4z - 13 = 0$.

(B) $x - 2y + 2z - 25 = 0$.

(C) $x - 2y + 2z - 7 = 0$.

(D) $x - 2y + 2z - 25 = 0$ hoặc $x - 2y + 2z - 7 = 0$.

Lời giải.

Vì $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow (\alpha): 2x - 4y + 4z + m = 0$ $(m \neq 3)$.

Giả thiết có $d(A, (\alpha)) = 3 \Leftrightarrow \dfrac{|32 + m|}{6} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -14 \\ m = -50. \end{array}\right.$

Vậy $(\alpha): x - 2y + 2z - 7 = 0, (\alpha): x - 2y + 2z - 25 = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Điều kiện cần và đủ để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + m^2 - 9m + 4 = 0$ là phương trình mặt cầu là

(A) $2x - 4y + 4z - 5 = 0$ hoặc $2x - 4y + 4z - 13 = 0$.

(B) $x - 2y + 2z - 25 = 0$.

(C) $x - 2y + 2z - 7 = 0$.

(D) $x - 2y + 2z - 25 = 0$ hoặc $x - 2y + 2z - 7 = 0$.

Lời giải.

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + m^2 - 9m + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (z-3)^2 = -m^2 + 9m + 10.$$

Do đó điều kiện cần và đủ để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu là

$$-m^2+9m+10>0 \Leftrightarrow -1<m<10.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là $x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $A\ (0;-1;2)$. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có chu vi nhỏ nhất. Phương trình của (P) là

A $y-2z+5=0$. **B** $x-y+2z-5=0$.
C $-y+2z+5=0$. **D** $y-2z-5=0$.

Lời giải.
Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R=3$. $A(0;-1;2)$ là điểm nằm bên trong mặt cầu (S).
(P) là mặt phẳng qua A và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính r.
Gọi H là hình chiếu của O lên (P). Ta có

$$r^2=R^2-OH^2.\ r_{\min} \Leftrightarrow OH_{\max} \Leftrightarrow H \equiv A.$$

Khi đó (P) nhận $\overrightarrow{OA}=(0;-1;2)$ là véc-tơ pháp tuyến. Vậy phương trình $(P)\colon y-2z+5=0$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;-1;6)$, $B(-3;-1;-4)$, $C(5;-1;0)$ và $D(1;2;1)$. Tính thể tích V của tứ diện $ABCD$.

A 40. **B** 60. **C** 50. **D** 30.

Lời giải.

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-5;0;-10)\\ \overrightarrow{AC}=(3;0;-6)\end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(0;-60;0) \Rightarrow V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}\right|=30.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(6;-2;3)$, $B(0;1;6)$, $C(2;0;;-1)$ và $D(4;1;0)$. Gọi (S) là mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D. Hãy viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm A.

A $4x-y-9=0$. **B** $4x-y-26=0$.
C $x+4y+3z-1=0$. **D** $x+4y+3z+1=0$.

Lời giải.
Gọi tâm của mặt cầu là $I(x;y;z)$. Khi đó $\overrightarrow{AI}=(x-6;y+2;z-3)$, $\overrightarrow{BI}=(x;y-1;z-6)$, $\overrightarrow{CI}=(x-2;y;z+1)$, $\overrightarrow{DI}=(x-4;y-1;z)$. Ta có $IA=IB=IC=ID$, suy ra

$$IA^2=IB^2=IC^2=ID^2 \Leftrightarrow \begin{cases}(x-6)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=(x-4)^2+(y-1)^2+z^2\\ x^2+(y-1)^2+(z-6)^2=(x-4)^2+(y-1)^2+z^2\\ (x-2)^2+y^2+(z+1)^2=(x-4)^2+(y-1)^2+z^2\end{cases} \Rightarrow I(2;-1;3).$$

Vậy mặt phẳng cần tìm qua A và vuông góc với IA là $4x-y-26=0$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $G(1;4;3)$. Viết phương trình mặt phẳng cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho G là trọng tâm tứ diện $OABC$?

A $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{16}+\dfrac{z}{12}=1$. **B** $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{16}+\dfrac{z}{12}=0$. **C** $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{12}+\dfrac{z}{9}=0$. **D** $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{12}+\dfrac{z}{9}=1$.

Lời giải.

- Do A, B, C lần lượt thuộc các trục Ox, Oy, Oz nên $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$.
- Do G là trọng tâm tứ diện $OABC$ nên suy ra $a=4$, $b=16$, $c=12$.
- Vậy phương trình đoạn chắn của mặt phẳng (ABC): $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{16}+\dfrac{z}{12}=1$.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Tìm hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{4}{x}\right)^{18}$ với $x\neq 0$.

A $2^9C_{18}^9$. **B** $2^{11}C_{18}^7$. **C** $2^8C_{18}^8$. **D** $2^8C_{18}^{10}$.

Lời giải.

Ta có: $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{4}{x}\right)^{18}=\sum\limits_{k=0}^{18}C_{18}^k\left(\dfrac{x}{2}\right)^{18-k}\left(\dfrac{4}{x}\right)^k=\sum\limits_{k=0}^{18}2^{3k-18}C_{18}^kx^{18-2k}$.

$x^{18-2k}=x^0\Leftrightarrow 18-2k=0\Leftrightarrow k=9$.

Hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{4}{x}\right)^{18}$ là: $2^{3.9-18}C_{18}^9=2^9C_{18}^9$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên nhỏ hơn 300. Gọi A là biến cố “số được chọn không chia hết cho 3”. Tính xác suất $P(A)$ của biến cố A.

A $P(A)=\dfrac{2}{3}$. **B** $P(A)=\dfrac{124}{300}$. **C** $P(A)=\dfrac{1}{3}$. **D** $P(A)=\dfrac{99}{300}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=300$.

Số các số tự nhiên nhỏ hơn 300 mà chia hết cho 3 là $\dfrac{297-0}{3}+1=100\Rightarrow n\left(\overline{A}\right)=100$.

$\Rightarrow P\left(\overline{A}\right)=\dfrac{n\left(\overline{A}\right)}{n(\Omega)}=\dfrac{100}{300}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow P(A)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Tập nghiệm của phương trình $\sin^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\tan^2x-\cos^2\dfrac{x}{2}=0$ là.

A $\left[\begin{array}{l}x=\pi+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.$. **B** $\left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.$. **C** $\left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.$. **D** $\left[\begin{array}{l}x=\pi+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.$.

Lời giải.

Điều kiện $\cos x\neq 0\quad(*)$.

Khi đó $\quad \sin^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\tan^2 x-\cos^2\dfrac{x}{2}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[1-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{2}(1+\cos x)$$

$$\Leftrightarrow (1-\sin x)\sin^2 x=(1+\cos x)\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow (1-\sin x)(1-\cos x)(1+\cos x)=(1+\cos x)(1-\sin x)(1+\sin x)$$

$$\Leftrightarrow (1-\sin x)(1+\cos x)(\sin x+\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \cos x=-1\\ \tan x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, x=\pi+k2\pi, x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Chọn đáp án B □

Câu 34. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3$ với m là tham số. Gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng khi m thay đổi, điểm cực tiểu của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định. Xác định hệ số góc k của đường thẳng d.

A $k=-3$. **B** $k=\dfrac{1}{3}$. **C** $k=3$. **D** $k=-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1).y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=m-1\\ x=m+1\end{array}\right.$

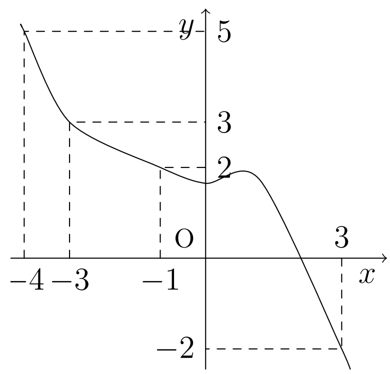
Vì là hàm số bậc ba với hệ số $a=1>0$ nên điểm cực tiểu của hàm số là $A(m+1;-3m-2)$.
Lại có $-3m-2=-3(m+1)+1$ nên điểm cực tiểu của hàm số luôn thuộc đường thẳng $d: y=-3x+1$, hệ số góc $k=-3$.

Chọn đáp án A □

Câu 35.

Cho hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Trên $[-4;3]$ hàm số $g(x)=2f(x)+(1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm?

A $x_0=-4$.
B $x_0=3$.
C $x_0=-3$.
D $x_0=-1$.



Lời giải.

Trên $[-4;3]$, ta có: $g'(x)=2f'(x)-2(1-x)$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=1-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-4\\ x=-1 \quad x=3\end{array}\right.$

Bảng biến thiên.

x	-4		0		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Hàm số $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0 = -1$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Tính tổng T của các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\mathrm{e}^x + (m^2 - m)\,\mathrm{e}^{-x} = 2m$ có đúng hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn $\dfrac{1}{\log \mathrm{e}}$.

A. $T = 28$. B. $T = 20$. C. $T = 21$. D. $T = 27$.

Lời giải.

Đặt $t = \mathrm{e}^x$, $t > 0$. Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2mt + m^2 - m = 0$ (1).

Phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn $\dfrac{1}{\log \mathrm{e}}$ khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa $0 < t_1 < t_2 < 10$.

Nghĩa là

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(10) > 0 \\ 0 < \dfrac{S}{2} < 10 \\ P > 0. \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \dfrac{21 - \sqrt{41}}{2}.$$

Vì m nguyên nên $m \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Vậy $T = 27$.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 sao cho $y^x \cdot (\mathrm{e}^x)^{\mathrm{e}^y} \geq x^y \cdot (\mathrm{e}^y)^{\mathrm{e}^x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_x \sqrt{xy} + \log_y x$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\dfrac{1 + 2\sqrt{2}}{2}$. D. $\dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y^x \cdot (\mathrm{e}^x)^{\mathrm{e}^y} \geq x^y \cdot (\mathrm{e}^y)^{\mathrm{e}^x} \Leftrightarrow x \ln y + x\mathrm{e}^y \geq y \ln x + y\mathrm{e}^x \Leftrightarrow \dfrac{\ln y + \mathrm{e}^y}{y} \geq \dfrac{\ln x + \mathrm{e}^x}{x}$.

Đặt $f(t) = \dfrac{\ln t + \mathrm{e}^t}{t}$, với $t > 1$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t\,(t-1) + 1 - \ln t}{t^2}$.

Xét hàm số $g(t) = \mathrm{e}^t\,(t-1) + 1 - \ln t$ có $g'(t) = \mathrm{e}^t\,(t-1) + \mathrm{e}^t - \dfrac{1}{t} > 0$, mọi $t > 1$. Suy ra $g(t) > g(1) > 0$ với mọi $t > 1$, suy ra $f'(t) > 0$ với mọi $t > 1$.

Do vậy $\dfrac{\ln y + \mathrm{e}^y}{y} \geq \dfrac{\ln x + \mathrm{e}^x}{x} \Leftrightarrow y \geq x \Rightarrow \log_x y > 1$. Vậy nên

$$\begin{aligned} P = \log_x \sqrt{xy} + \log_y x = \frac{1}{2}(1 + \log_x y) + \frac{1}{\log_x y} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_x y + \frac{1}{\log_x y} \\ &\geq \frac{1}{2} + \sqrt{2} \\ &= \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 38. Tìm giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2 + x - m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A 2008. B 2010. C 2009. D 2007.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2 + x - m} = 0$ suy ra đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang với mọi m.

Để đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2 + x - m}$ có đúng hai đường tiệm cận thì phương trình $x^2 + x - m = 0$ có nghiệm kép $x \geq 3$ hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó $x_1 \geq 3$ và $x_2 < 3$.

- $\Delta = 1 + 4m = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{4}$ (loại).
- $\Delta = 1 + 4m > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{1}{4}$.

  Khi đó phương trình $x^2 + x - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó $x_1 \geq 3$ và $x_2 < 3$ khi
  $$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 3 \\ -1 < 3 \end{cases} \\ (x_1 - 3)(x_2 - 3) < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 12 \\ m > 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \geq 12.$$

Vậy số giá trị m thỏa mãn là 2008.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = (x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 20]$ để hàm số $y = f\left(x^2 + 3x - m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

A 18. B 17. C 16. D 20.

Lời giải.

Đặt $g(x) = f\left(x^2 + 3x - m\right)$, suy ra $g'(x) = (2x + 1)f'\left(x^2 + 3x - m\right)$.

Hàm số đồng biến trên $(0;2)$ khi

$$\begin{aligned} & g'(x) \leq 0 \text{ với mọi } x \in (0;2) \\ \Leftrightarrow\ & (2x+1)f'\left(x^2+3x-m\right) \leq 0 \text{ với mọi } x \in (0;2) \\ \Leftrightarrow\ & f'\left(x^2+3x-m\right) \leq 0 \text{ với mọi } x \in (0;2) \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & x^2+3x-m \leq -3 \\ & x^2+3x-m \geq 1 \end{aligned}\right. \text{ với mọi } x \in (0;2) \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & x^2+3x+3 \leq m \\ & x^2+3x-1 \geq m \end{aligned}\right. \text{ với mọi } x \in (0;2) \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & m \geq 13 \\ & m \leq -1. \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

Do m thuộc đoạn $[-10;20]$ nên có 18 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp một, đạo hàm cấp hai liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f''(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$. Giá trị của biểu thức $\dfrac{\mathrm{e}f'(1)-f'(0)}{\mathrm{e}f(1)-f(0)}$ bằng

(A) -1. **B** 1. (C) 2. (D) 2.

Lời giải.

Đặt $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f''(x)\,\mathrm{d}x = k$.

- $k = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f''(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}f'(x) = \mathrm{e}^x f'(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x f'(x)\Big|_0^1 - k$.

  Suy ra $2k = \mathrm{e}^x f'(x)\Big|_0^1$.
- $k = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}f(x) = \mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1 - k$.

  Suy ra $2k = \mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1$.

Vậy $\dfrac{\mathrm{e}f'(1)-f'(0)}{\mathrm{e}f(1)-f(0)} = \dfrac{\mathrm{e}^x f'(x)\Big|_0^1}{\mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1} = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $f(0)=2018$, $f(2)=2019$. Tính $S=f(3)-f(-1)$.

(A) $S=\ln 4035$. (B) $S=4$. (C) $S=\ln 2$. **D** $S=1$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{x-1}\mathrm{d}x = \ln|x-1| + C$

Khi đó $f(-1) = \ln 2 + C_1$; $f(0) = C_2 = 2018$; $f(2) = C_3 = 2019$; $f(3) = \ln 2 + C_4$

- $\int_2^3 f'(x)dx = \int_2^3 \dfrac{1}{x-1}dx \Leftrightarrow f(3) - f(2) = \ln 2 \Leftrightarrow \ln 2 + C_4 - C_3 = \ln 2 \Rightarrow C_3 = C_4$
- $\int_{-1}^0 f'(x)dx = \int_{-1}^0 \dfrac{1}{x-1}dx \Leftrightarrow f(0) - f(-1) = -\ln 2 \Leftrightarrow C_2 - C_1 - \ln 2 = -\ln 2 \Rightarrow C_1 = C_2$

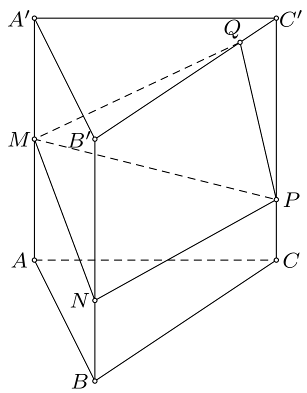
Vậy $S = f(3) - f(-1) = C_4 - C_1 = 2019 - 2018 = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P, Q là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC', $B'C'$ thỏa mãn $\dfrac{AM}{AA'} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{BN}{BB'} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{CP}{CC'} = \dfrac{1}{4}$, $\dfrac{CQ}{C'B'} = \dfrac{1}{5}$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối tứ diện $MNPQ$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

(A) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{22}{45}$. (B) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{11}{45}$. (C) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{19}{45}$. (D) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{11}{30}$.

Lời giải.



$V_{A'ABC} = \dfrac{1}{3}V_2 \Rightarrow V_{ABCCB'} = V_{M.BCCB'} = \dfrac{2}{3}V_2$

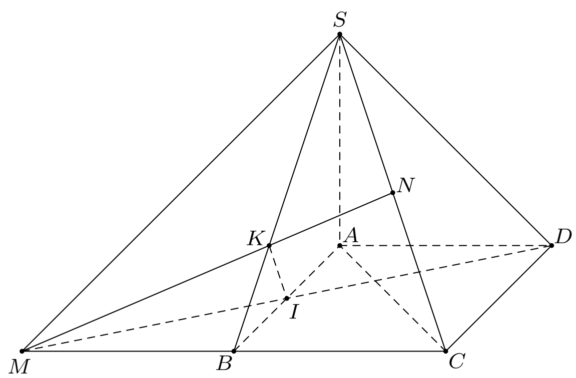
Mà $S_{B'NQ} = \dfrac{4}{15}S_{BCC'B'}, S_{C'PQ} = \dfrac{3}{40}S_{BCC'B'}, S_{BCPN} = \dfrac{7}{24}S_{BCC'B'}$

Suy ra $S_{NPQ} = S_{BCCB'} - S_{B'NQ} - S_{C'PQ} - S_{BCPN} = \dfrac{11}{30}S_{BCCB}$

Do đó $V_1 = V_{MNPQ} = \dfrac{11}{30}V_{MBCCB} = \dfrac{11}{45}V_2$ tức là $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{11}{45}$.

Chọn đáp án B □

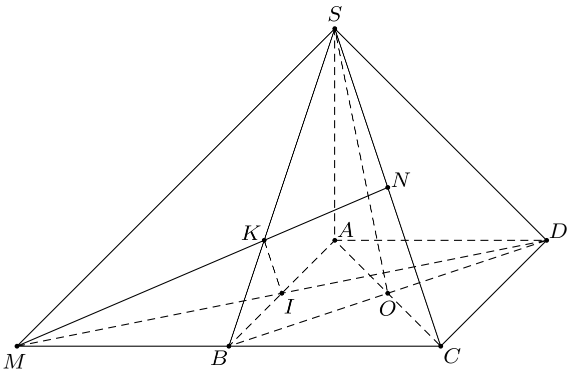
Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi canh a, $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 45°. Gọi M là điểm đối xứng của C qua B và N là trung điểm của SC. Mặt phẳng (MND) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh S có thể tích V_1, khối đa diện còn lại có thể tích V_2 (tham khảo hình vẽ sau).



Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

(A) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{5}$. (B) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{5}{3}$. (C) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{12}{7}$. (D) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{7}{5}$.

Lời giải.



Gọi $I = DM \cap AB$ và $K = MN \cap SB$ Ta có: B, N lần lượt là trung điểm của MC, SC nên K là trọng tâm tam giác SMC .Và BI là đường trung bình của tam giác MCD

Khi đó $\dfrac{V_{MBKI}}{V_{MCND}} = \dfrac{MB}{MC} \cdot \dfrac{MK}{MN} \cdot \dfrac{MI}{MD} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow V_{MBKI} = \dfrac{1}{6} V_{MCND} \Rightarrow V_{BKICND} = 5V_{MBKI}$

+) Tính thể tích của khối $SABCD$

$ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \triangle BAD$ đều,

$\Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Mặt khác $[(SBD), (ABCD)] = \widehat{SOA} = 45^\circ \Rightarrow SA = OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow V_{SBCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3}{4}$.

+) Tính thể tích khối $KMIB$

$V_{KMBB} = \dfrac{1}{3} \cdot \mathrm{d}(K, (MIB)) \cdot S_{MBB} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \mathrm{d}(S, (MIB)) \cdot S_{MB} = \dfrac{1}{9} \cdot SA \cdot \dfrac{1}{2} \cdot S_{ABD} = \dfrac{1}{18} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{48}$.

Do đó $V_2 = \dfrac{5a^3}{48}$ và $V_1 = \dfrac{a^3}{4} - \dfrac{5a^3}{48} = \dfrac{7a^3}{48} \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{7}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Trong số các hình trụ có diện tích toàn phần đều bằng S thì bán kính R và chiều cao h của khối trụ có thể tích lớn nhất là

A $R = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$; $h = 2\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$.

B $R = \sqrt{\dfrac{S}{4\pi}}$; $h = \sqrt{\dfrac{S}{4\pi}}$.

C $R = \sqrt{\dfrac{2S}{3\pi}}$; $h = 4\sqrt{\dfrac{2S}{3\pi}}$.

D $R = \sqrt{\dfrac{S}{2\pi}}$; $h = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{S}{2\pi}}$.

Lời giải.

Gọi thể tích khối trụ là V, diện tích toàn phần của hình trụ là S.

Ta có $S = 2S_{day} + S_{xq} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$.

Từ đó suy ra $\dfrac{S}{2\pi} = R^2 + Rh \Leftrightarrow \dfrac{S}{2\pi} = R^2 + \dfrac{V}{\pi R} = R^2 + \dfrac{V}{2\pi R} + \dfrac{V}{2\pi R} \geq \sqrt[3]{\dfrac{V^2}{4\pi^2}}$,

tức là $27\dfrac{V^2}{4\pi^2} \leq \left(\dfrac{S}{2\pi}\right)^3 \Leftrightarrow V \leq \sqrt{\dfrac{S^3}{54\pi}}$.

Vậy $V_{\max} = \sqrt{\dfrac{S^3}{54\pi}}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow R^2 = \dfrac{V}{2\pi R} = \dfrac{\pi R^2 h}{2\pi R} = \dfrac{Rh}{2} \Leftrightarrow h = 2R$.

Khi đó $S = 6\pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ và $h = 2R = 2\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$.

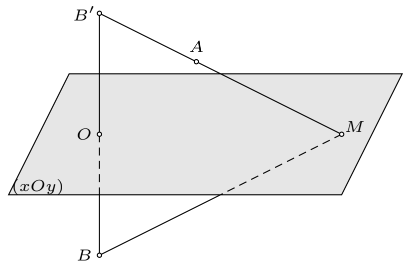
Chọn đáp án A □

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 2; 1)$ và $B(-1; 4; -3)$. Điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $|MA - MB|$ lớn nhất.

A $M(-5; 1; 0)$. **B** $M(5; 1; 0)$. **C** $M(5; -1; 0)$. **D** $M(-5; -1; 0)$.

Lời giải.

Phương trình $(xOy): z = 0$. Vì $z_A \cdot z_B = 1 \cdot (-3) < 0$ nên A, B nằm khác phía so với (xOy). Gọi B' là điểm đối xứng của B qua (xOy). Khi đó: $|MA - MB| = |MA - MB'| \leq AB'$ Suy ra $|MA - MB|$ lớn nhất khi M, A, B' thẳng hàng hay M là giao điểm của đường thẳng AB' và (xOy). Mà $B'(-1; 4; 3)$. Suy ra tọa độ M là $(5; 1; 0)$.



Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy cạnh bằng a, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi A', B', C' tương ứng là các điểm đối xứng của A, B, C qua S. Thể tích V của khối bát diện có các mặt ABC, $A'B'C'$, $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$, $AB'C'$, $BA'C'$, $CA'B'$ là

A $V = \dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **B** $V = 2\sqrt{3}a^3$. **C** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **D** $V = \dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải.

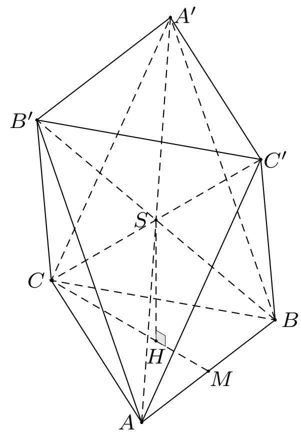
Ta tính thể tích khối chóp $S.ABC$:

Gọi H là tâm tam giác ABC đều cạnh $a \Rightarrow CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$

$\Rightarrow \widehat{SCH} = 60° \Rightarrow SH = a \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

$V = 2V_{B.ACA'C'} = 2.4V_{B.ACS} = 8V_{S.ABC} = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án A □

Câu 47. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(1; 20)$ để $\forall x \in \left(\dfrac{1}{3}; 1\right)$ đều là nghiệm của bất phương trình $\log_m x > \log_x m$?

A 18. **B** 16. **C** 17. **D** 0.

Lời giải.

ĐK $0 < x \neq 1$. BPT $\Leftrightarrow \log_m x > \dfrac{1}{\log_m x} \Leftrightarrow \dfrac{(\log_m x)^2 - 1}{\log_m x} > 0$. $(*)$

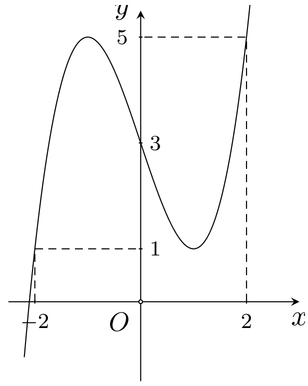
Do $x \in \left(\dfrac{1}{3}; 1\right) \Rightarrow \log_m x < 0$. Do đó $(*) \Leftrightarrow -1 < \log_m x < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{m} < x < m$

Để mọi $x \in \left(\dfrac{1}{3}; 1\right)$ đều là nghiệm của BPT thì $\dfrac{1}{m} \leq \dfrac{1}{3} < 1 \leq m \Leftrightarrow m \geq 3 \Rightarrow m \in \{3; 4; \ldots; 19\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 48.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \dfrac{1}{2}x^2 - 3x$. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng ?



A $g(-4) = g(-2)$.

B $g(0) \le g(2)$.

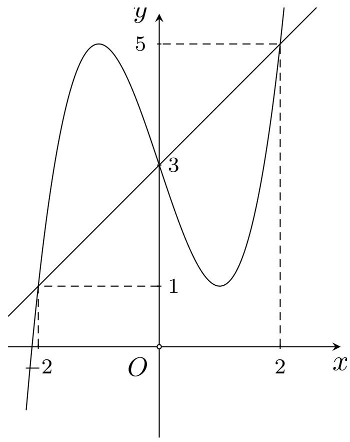
C $g(2) < g(4)$.

D $g(-2) > g(0)$.

Lời giải.

Ta có $g(x) = f(x) - \dfrac{1}{2}x^2 - 3x \Rightarrow g'(x) = f'(x) - (x+3)$.

Vẽ đường thẳng $AB : y = x + 3$ trên cùng hệ trục với đồ thị hàm số $y = f'(x)$.



Quan sát đồ thị hàm số ta thấy $f'(x) < x + 3$ với $x \in (0;2)$ hoặc $x \in (-\infty; -2)$ và $f'(x) > x + 3$ với $x \in (-2;0)$ hoặc $x \in (2;+\infty)$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$:

x	-4		-2		0		2		4
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$g(-4)$	$\searrow$	$g(-2)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$g(2)$	$\nearrow$	$g(4)$

Từ bảng biến thiên của hàm số ta suy ra $g(2) < g(4)$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d sao cho khoảng cách từ điểm A đến (P) là lớn nhất. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (P) bằng

A $\sqrt{2}$.

B $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$.

C $\dfrac{11\sqrt{2}}{6}$.

D $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

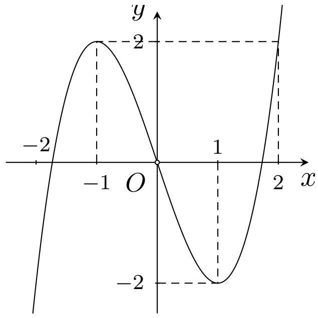
Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên d và H là hình chiếu vuông góc của A trên (P) thì $d(A,(P)) = AH \le AK$ không đổi. Vậy $d(A,(P))$ lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv K$, khi đó (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với AK.

Tìm được $(P) : x - 4y + z - 3 = 0 \Rightarrow \mathrm{d}(O,(P)) = \dfrac{3}{\sqrt{18}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 50.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right) = m$ có nghiệm $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$.



A 5.

B 3.

C 2.

D 4.

Lời giải.

Ta có với $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \cos x \in (-1; 0] \Rightarrow f(\cos x) \in (0; 2] \Rightarrow \sqrt{2f(\cos x]} \in [0; 2)$ khi đó $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right) \in [-2; 2)$.

Do vậy phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$ khi và chỉ khi $m \in [-2; 2)$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án D □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. C	3. C	4. D	5. B	6. B	7. C	8. C	9. B	10. A
11. A	12. A	13. C	14. B	15. C	16. A	17. B	18. D	19. C	20. C
21. C	22. D	23. D	24. C	25. D	26. D	27. A	28. D	29. B	30. A
31. A	32. A	33. B	34. A	35. D	36. D	37. C	38. A	39. A	40. B
41. D	42. B	43. D	44. A	45. B	46. A	47. C	48. C	49. D	50. D

26 ĐỀ THI THỬ THPT QUẢNG XƯƠNG, THANH HÓA – LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Với a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\log(2018a) = 2018\log a$.
(B) $\log a^{2018} = \dfrac{1}{2018}\log a$.
(C) $\log(2018a) = \dfrac{1}{2018}\log a$.
(D) $\log a^{2018} = 2018\log a$.

Lời giải.

Phương pháp

Sử dụng các công thức: $\log ab = \log a + \log b$; $\log a^n = n\log a$

Cách giải:

Ta có: $\log(2018a) = \log 2018 + \log a$

$\log a^{2018} = 2018\log a$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$.
(B) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.
(C) $y = \log_{\frac{\pi}{4}}(x^2+1)$.
(D) $y = \left(\dfrac{2}{e}\right)^x$.

Lời giải.

Phương pháp

Hàm số $y = a^x$ với $0 < a < 1$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Cách giải:

Xét đáp án A có: $\dfrac{\pi}{3} \approx 1.047 > 0 \Rightarrow y = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$ đồng biến trên loại đáp án A.

Loại đáp án B vì TXĐ là:$(0;+\infty)$.

Xét đáp án C có: $y' = \dfrac{2x}{(x^2+1)\ln\dfrac{\pi}{4}} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow$ hàm số không thể nghịch biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ loại đáp án C.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{x^2-4x+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

(A) 0.
(B) 2.
(C) 1.
(D) 3.

Lời giải.

Phương pháp

Đường thẳng $x = a$ được gọi là TCĐ của đồ thị hàm số $y = \dfrac{g(x)}{h(x)} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ hoặc $x = a$ là nghiệm của $h(x) = 0$ mà không là nghiệm của $g(x) = 0$.

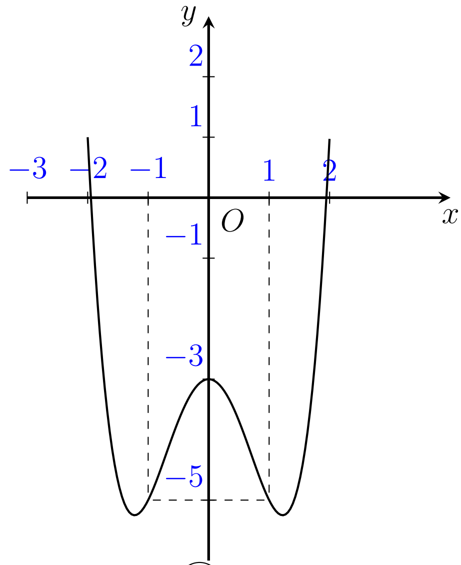
Cách giải:

Ta có: $y = \dfrac{x+2}{x^2-4x+3} = \dfrac{x+2}{(x-1)(x-3)} \Rightarrow x = 1; x = 3$ là 2 đường TCĐ của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4.

Đồ thị sau đây là của hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 3$. Với giá trị nào của m thì phương trình $x^4 - 3x^2 - 3 = m$ có 3 nghiệm phân biệt



(A) $m = -4$. (B) $m = -3$. (C) $m = 0$. (D) $m = -5$.

Lời giải.

Phương pháp

Số nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 3$ và đường thẳng $y = m$. Dựa vào đồ thị hàm số để xác định m thỏa mãn bài toán.

Cách giải:

Số nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 3$ và đường thẳng $y = m$. Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 3$ tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m = -3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ và đồ thị hàm số $y = 3x^2 - 2x - 1$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

(A) 0. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Phương pháp

Số nghiệm của hai đồ thị hàm số là số giao điểm của phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị.

Giải phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số.

Cách giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là:

$-x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 3x^2 - 2x - 1$

$\Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right.$

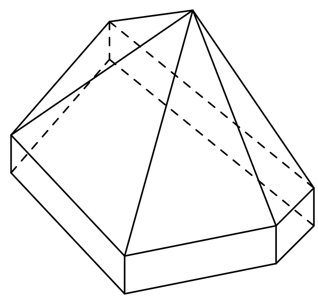
$\Rightarrow$ Hai đồ thị hàm số có 3 điểm chung.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Hình đa diện sau có bao nhiêu mặt?

A 11. B 20. C 12. D 10.

Lời giải.



Phương pháp

Dựa vào hình vẽ, đếm tổng số mặt bên và mặt đáy của khối đa diện.

Cách giải:

Ta thấy khối đa diện trong hình vẽ có 11 mặt cả mặt đáy.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Số đỉnh của một hình bát diện đều là:

A 21. B 14. C 8. D 6.

Lời giải.

Phương pháp

Dựa vào lý thuyết đa diện.

Cách giải:

Khối bát diện đều có 6 đỉnh, 12 cạnh và 8 mặt.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Tìm nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1$

A $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$. B $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$. C $x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$. D $x = \dfrac{k\pi}{2}$.

Lời giải.

Phương pháp

Sử dụng công thức giải phương trình lượng giác đặc biệt: $\sin f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

Cách giải:

$\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Từ các chữ số $1; 2; 3$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau?

A 8. B 6. C 9. D 3.

Lời giải.

Phương pháp

Sử dụng quy tắc nhân hoặc chỉnh hợp.

Cách giải:

Gọi số cần lập có dạng: $\overline{abc} \quad (a \neq b \neq c)$.

Khi đó có $A_3^3 = 3! = 6$ cách chọn.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục và có đạo hàm trên khoảng $(-\infty; +\infty)$, có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

B Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

(D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Phương pháp

Dựa vào BBT để kết luận tính đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Cách giải:

Dựa vào BBT ta thấy hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Đồ thị hàm số nào sau đây có đúng 1 điểm cực trị?

A $y = -x^4 - 3x^2 + 4$.

(B) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$.

(C) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$.

(D) $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$.

Lời giải.

Phương pháp

Số cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là số nghiệm bội lẻ của phương trình $f'(x) = 0$

Cách giải:

+) Xét đáp án A ta có: $y' = -4x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có đúng 1 điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $(1 + x)^{12}$ là:

(A) 972.

(B) 495.

C 792.

(D) 924.

Lời giải.

Phương pháp

Sử dụng công thức số hạng tổng quát của nhị thức: $(a + b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

Cách giải:

Ta có: $(1+x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k x^k$

Để có số hạng không chứa x trong khai triển thì: $k = 5$.

Vậy hệ số cần tìm là: $C_{12}^5 = 792$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2018}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình?

(A) $y = 2018$. (B) $x = 0$. **(C) $y = 0$.** (D) $x = 1$.

Lời giải.

Phương pháp

+) Đường thẳng $y = b$ được gọi là TCN của đồ thị hàm số $y = f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$

Cách giải:

Ta có: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2018}{x-1} = 0 \Rightarrow y = 0$ là TCN của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -2$ là:

(A) $y = 3x + 5$. (B) $y = -3x + 1$. **(C) $y = 3x + 11$.** (D) $y = -3x - 1$.

Lời giải.

Phương pháp

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = x_0$ là $y = y'(x_0)(x - x_0) + f'(x_0)$

Cách giải:

Ta có: $y' = \dfrac{3}{(x+1)^2}$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ tại điểm $x = -2$ là:

$y = \dfrac{3}{(-2+1)^2}(x+2) + \dfrac{2.(-2)-1}{-2+1} = 3x + 11$

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Cho $\left(\sqrt{2019} - \sqrt{2018}\right)^a > \left(\sqrt{2019} - \sqrt{2018}\right)^b$. Kết luận nào sau đây đúng?

(A) $a > b$. **(B) $a < b$.** (C) $a = b$. (D) $a \geq b$.

Lời giải.

Phương pháp

Với $0 < a < 1 \Rightarrow a^m > a^m \Leftrightarrow n < m$

Cách giải:

Ta có: $0 < \sqrt{2019} - \sqrt{2018} < 1 \Rightarrow \left(\sqrt{2019} - \sqrt{2018}\right)^a > \left(\sqrt{2019} - \sqrt{2018}\right)^b \Leftrightarrow a < b$

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Tính giới hạn $\lim \dfrac{2n+1}{3n+2}$

A $\frac{2}{3}$. **B** $\frac{3}{2}$. **C** $\frac{1}{2}$. **D** 0.

Lời giải.

Phương pháp

Sử dụng các quy tắc tính giới hạn của dãy số.

Cách giải:

Ta có: $\lim \dfrac{2n+1}{3n+2} = \lim \dfrac{2+\dfrac{1}{n}}{3+\dfrac{2}{n}} = \dfrac{2}{3}$

Chọn đáp án A □

Câu 17. Cho $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

A $V = \dfrac{a^3}{3}$. **B** $V = \dfrac{3a^3}{2}$. **C** $V = \dfrac{a^3}{6}$. **D** $V = a^3$.

Lời giải.

Phương pháp

Công thức tính thể tích khối chóp có diện tích đáy là Svà chiều cao h là: $V = \dfrac{1}{3}Sh$.

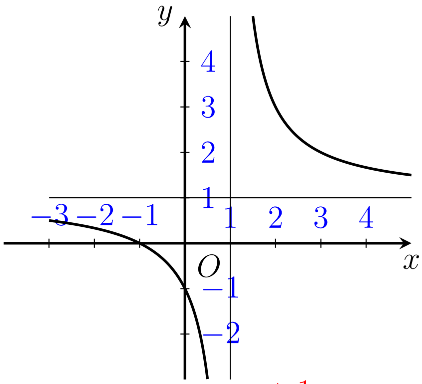
Cách giải:

Ta có: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}a.a^2 = \dfrac{a^3}{3}$

Chọn đáp án A □

Câu 18.

Đồ thị hình dưới đây là đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau?



A $y = \dfrac{2x-3}{2x-2}$. **B** $y = \dfrac{x}{x-1}$. **C** $\dfrac{x-1}{x+1}$. **D** $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Lời giải.

Phương pháp

Dựa vào đồ thị hàm số để đưa ra các nhận xét và chọn hàm số phù hợp.

Cách giải:

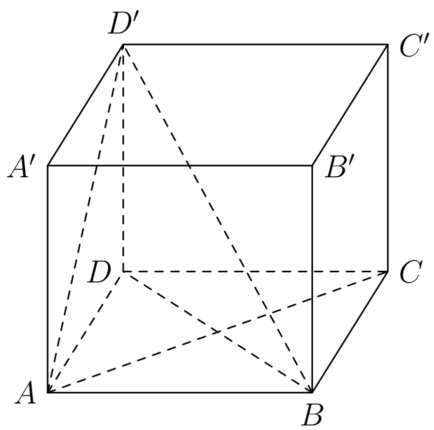
Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đồ thị hàm số TCĐ là $x = 1 \Rightarrow$ loại đáp án C.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-1; 0)$ và $(0; -1)$

$\Rightarrow$ chỉ có đáp án D đúng.

Chọn đáp án D □

Câu 19.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ dưới). Góc giữa hai đường thẳng AC và BD' bằng:



(A) $30°$. **B** $90°$. (C) $60°$. (D) $45°$.

Lời giải.

Phương pháp

Chứng minh các đường thẳng vuông góc với mặt phẳng để suy ra góc giữa các đường thẳng đề bài yêu cầu.

Cách giải:

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow BD \perp AC = \{O\}$

Ta có: $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp DD' \end{cases} \Rightarrow AC \perp (DD'B) \Rightarrow AC' \perp BD'$

$\Rightarrow \widehat{(AC; BD')} = 90°$

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Thể tích V của khối trụ có bán kính và chiều cao đều bằng 3.

(A) $V = 9\pi$. (B) $V = 12\pi$. (C) $V = 3\pi$. **D** $V = 27\pi$.

Lời giải.

Phương pháp

Thể tích khối trụ có bán kính đáy r và chiều cao h là: $V = \pi r^2 h$.

Cách giải:

Ta có: $V = \pi r^2 h = \pi .3^2.3 = 27\pi$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho hình bình hành $ABCD$. Tổng các vecto $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ là

(A) $\overrightarrow{AC}$. **B** $2\overrightarrow{AC}$. (C) $3\overrightarrow{AC}$. (D) $5\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Phương pháp

Sử dụng quy tắc hình bình hành: Cho hình bình hành $ABCD$ ta có : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Cách giải:

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}\right) = 2\overrightarrow{AC}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Trong mặt phẳng Oxy, cho các điểm $A(1;3)$, $B(4;0)$, $C(2;-5)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$ là:

(A) $M\,(1;18)$. (B) $M\,(-1;18)$. **(C)** $M\,(1;-18)$. (D) $M\,(-18;1)$.

Lời giải.

Phương pháp

Sử dụng các công thức : $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)$,$(a_;a_2)+(b_1;b_2)=(a_1+b_1;a_2+b_2)$,$(a_;a_2)=(b_1;b_2)\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\end{cases}$.

Cách giải:

Gọi $M\,(x_0;y_0)$ ta có $\overrightarrow{MA}=(4-x_0;-y_0)$;$\overrightarrow{MC}=(2-x_0;-5-y_0)$

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow(-1+x_0;18+y_0)=(0;0)$

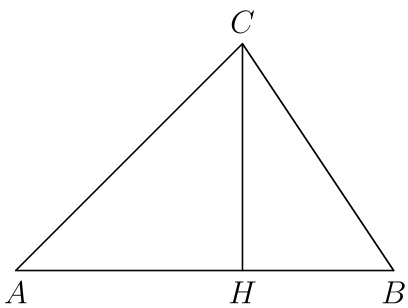
$\Leftrightarrow\begin{cases}-1+x_0=0\\18+y_0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=1\\y_0=-18\end{cases}\Rightarrow M(1;-18)$

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Cho tam giác ABC có $A(1;-2)$, đường cao $CH: x\breve{\ }y+1=0$, đường thẳng chứa cạnh BC có phương trình $2x+y+5=0$. Tọa độ điểm B là:

(A) $B\,(4;3)$. (B) $B\,(4;-3)$. **(C)** $B\,(-4;3)$. (D) $B\,(-4;-3)$.

Lời giải.



Phương pháp

Ta có: $CH\perp AB\Rightarrow$ lập được phương trình đường thẳng đi qua A và vuông góc với CH.

Khi đó tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình gồm phương trình đường thẳng BC và AB.

Cách giải:

Ta có: $CH\perp AB\Rightarrow$ lập được phương trình đường thẳng AB đi qua A và vuông góc với CH là: $x-1+y-2=0\Leftrightarrow x+y+1=0$

$B=AB\cap BC\Rightarrow$

tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:$\begin{cases}2x+y+5=0\\x+y+1=0\end{cases}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Cho cấp số nhân $(u_n): u_1=1, q=2$. Hỏi 2048 là số hạng thứ mấy?

(A) 12. (B) 9. (C) 11. (D) 10.

Lời giải.

Phương pháp

Cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu là u_1 và công bội q thì số hạng $u_n=u_1.q^{n-1}$

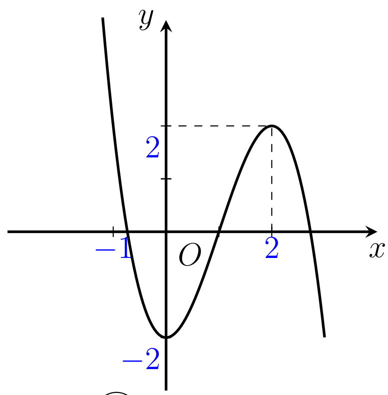
Cách giải:

Giả sử 2048 là số hạng thứ n ta có: $u_n=u_1.q^{n-1}=1.2^{n-1}=2048\Leftrightarrow n-1=11\Leftrightarrow n=12$

Chọn đáp án (A) □

Câu 25.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình bên. Phương trình $f(x) = 1$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt nhỏ hơn 2?



(A) 0. (B) 1. **C** 2. (D) 3.

Lời giải.

Phương pháp

Số nghiệm của phương trình $f(x) = 1$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 1$.

Dựa vào đồ thị hàm số để biện luận số nghiệm của phương trình.

Cách giải:

Số nghiệm của phương trình $f(x) = 1$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 1$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt trong đó có hai điểm có hoành độ nhỏ hơn 2.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng:

(A) 5. **B** 4. (C) 3. (D) $\dfrac{13}{3}$.

Lời giải.

Phương pháp

Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên $[a; b]$ bằng cách:

- Giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm x_i .
- Tính các giá trị $f(a); f(b); f(x_i) \quad (x_i \in [a; b])$. Khi đó:

$\min\limits_{[a;b]} f(x) = \min\{f(a); f(b); f(x_i)\}$

$\max\limits_{[a;b]} f(x) = \max\{f(a); f(b); f(x_i)\}$

Cách giải:

Ta có: $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \in [1; 3] \\ x = -2 \notin [1; 3] \end{array}\right.$

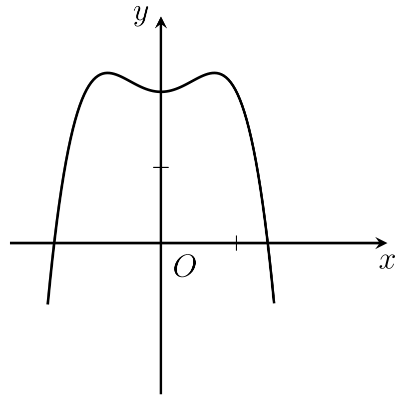
$f(1) = 5; f(2) = 4; f(3) = \dfrac{13}{3}$

$\Rightarrow \min\limits_{[1;3]} f(x) = f(2) = 4.$

Chọn đáp án B □

Câu 27.

Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A $a < 0, b > 0, c > 0$.
B $a < 0, b > 0, c < 0$.
C $a > 0, b < 0, c > 0$.
D $a < 0, b < 0, c > 0$.

Lời giải.

Phương pháp

Dựa vào đồ thị hàm số nhận xét số điểm cực trị, các điểm thuộc đồ thị hàm số và các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số và đưa ra kết luận đúng.

Cách giải:

Ta thấy đồ thị hàm số có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu $\Rightarrow a < 0$ và $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Có: $y' = 4ax^3 + 2bx = 0 \Leftrightarrow 2x\left(2ax^2 + b\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -\dfrac{b}{a}(1) \end{array}\right.$

Phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Pt(1) có 2 nghiệm phân biệt $\neq 0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{b}{a} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{b}{a} < 0$ mà $a < 0 \Rightarrow b > 0$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn $0 \Rightarrow c > 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}} + \ln(x-1)$ là

A $\mathscr{D} = [1; 2]$. **B** $\mathscr{D} = (1; +\infty)$. **C** $\mathscr{D} = (1; 2)$. **D** $\mathscr{D} = (-\infty; 2)$.

Lời giải.

Phương pháp

Hàm số $y = \dfrac{1}{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x) > 0$

Hàm số $y = \ln f(x)$ xác định $\Leftrightarrow f(x) > 0$

Cách giải:

Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 1 \end{cases}.$

Chọn đáp án C □

Câu 29. Phương trình $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x-1}$ có bao nhiêu nghiệm?

A 0. **B** 1. **C** 3. **D** 2.

Lời giải.

Phương pháp

Sử dụng công thức: $a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}$

Giải phương trình mũ: $a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)$.

Cách giải:

$\left(\dfrac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}=7^{x-1}\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}=\left(\dfrac{1}{7}\right)^{1-x}$

$x^2-2x-3=1-x\Leftrightarrow x^2-x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\\x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\end{array}\right.$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+\sqrt{y^2-x^2}=12-y\\x\sqrt{y^2-x^2}=12\end{cases}$ ta được hai nghiệm $(x_1;y_1)$ và $(x_2;y_2)$. Tính giá trị biểu thức $T=x_1^2+x_2^2-y_1^2$

(A) $T=-25$. (B) $T=0$. (C) $T=25$. (D) $T=50$.

Lời giải.

Phương pháp

- Đặt điều kiện cho hệ phương trình xác định.
- Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế sau đó tính giá trị của biểu thức.

Cách giải:

Điều kiện: $y^2\geq x^2$.

$\begin{cases}x+\sqrt{y^2-x^2}=12-y\quad(1)\\x\sqrt{y^2-x^2}=12\quad(2)\end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}12-y\geq 0\\x^2+2x\sqrt{y^2-x^2}+y^2-x^2=144-24y+y^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\leq 12\\2x\sqrt{y^2-x^2}=144-24y\quad(*)\end{cases}$

Thế (2) vào $(*)$ ta được: $2.12=144-24y\Leftrightarrow y=5\ \ (tm)$

$\Rightarrow x\sqrt{25-x^2}=12\Leftrightarrow x^2\left(25-x^2\right)=144$

$x^4-25x^2+144=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=16\\x^2=9\end{array}\right.$

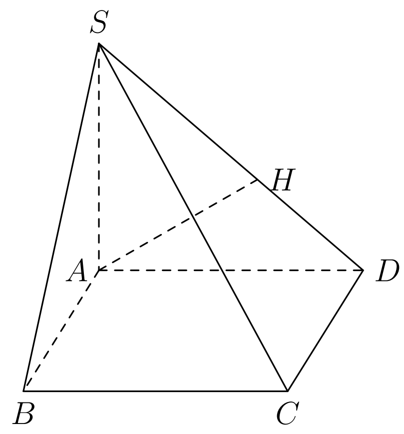
$\Rightarrow T=x_1^2+x_2^2-y_1^2=16+9-5^2=0$

Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng:

(A) $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. (B) $a\sqrt{3}$. (C) $\dfrac{a}{2}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Phương pháp

Chứng minh để tìm khoảng cách sau đó áp dụng hệt thức lượng trong tam giác vuông để tính toán.

Cách giải:

Kẻ $AH \perp SB = \{H\}$

Ta có: $\begin{cases} SA \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

$\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A;(SBC)) = AH$

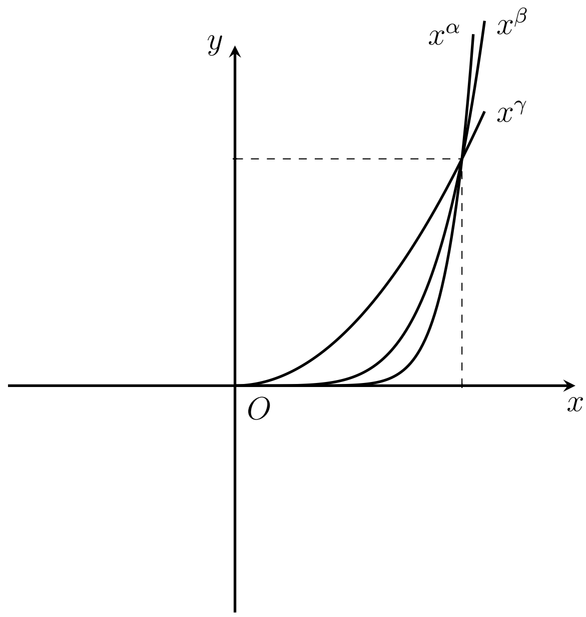
Áp dụng hệ thức lượng trong $\triangle SAB$ có đường cao AH ta có:

$d(A;(SBC)) = AH = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2 + a^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 32.

Cho đồ thị hàm số $y = x^\alpha$; $y = x^\beta$; $y = x^\gamma$ trên $(0; +\infty)$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A $\gamma < \beta < \alpha < 0$.

B $0 < \gamma < \beta < \alpha < 1$.

C $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$.

D $1 < \gamma < \beta < \alpha$.

Lời giải.

Phương pháp

Sử dụng đơn điệu của hàm số mũ $y = a^x$: Với $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ với $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Cách giải:

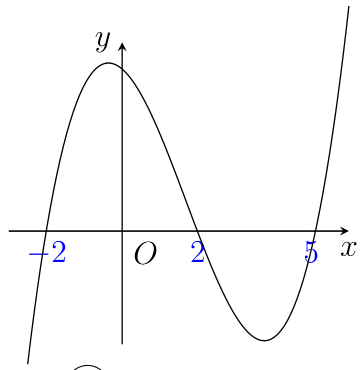
Ta có: $a < x < 1$ thì $x^\alpha < x^\beta < x^\gamma < x^2 \Rightarrow \alpha > \beta > \gamma > 1$

Với $x > 1$ thì : $a^1 < x^\gamma < x^\beta < x^\alpha \Rightarrow 1 < \gamma < \beta < \alpha$.

Chọn đáp án D □

Câu 33.

Cho hàm số $f(x)$ Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



(A) $(0;2)$. (B) $(1;3)$. **C** $(-\infty;-1)$. (D) $(-l;+\infty)$.

Lời giải.

Phương pháp

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ và chọn đáp án đúng.

Cách giải:

Ta có:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < x < 2 \\ x > 5 \end{array}\right.$$

$$g'(x) = [f(3-2x)]' = -2f'(3-2x)$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < 3-2x < 2 \\ 3-2x > 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} < x < \frac{5}{2} \\ x < -1 \end{array}\right..$$

Chọn đáp án C □

Câu 34. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2 = 4$. Phép vị tự tâm O (với O là gốc tọa độ) tỉ số $k = 2$ biến (C) thành đường tròn nào trong các đường tròn có phương trình sau?

(A) $(x-1)^2+(y-1)^2 = 8$.

(B) $(x-2)^2+(y-2)^2 = 8$.

C $(x-2)^2+(y-2)^2 = 16$.

(D) $(x+2)^2+(y+2)^2 = 16$.

Lời giải.

Phương pháp

Cho điểm O và hệ số $k \neq 0$ Phép biến hình mỗi điểm M thành M' sao cho: $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O tỉ số k. Ký hiệu: $V_{(O,k)}$.

Cách giải:

Ta có: $I(1,1), R = 2$

$$V_{(O,2)}(I) \Leftrightarrow \overrightarrow{OI'} = 2\overrightarrow{OI} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ y' = 2 \end{cases} \Rightarrow I'(2;2)$$

$$\Rightarrow R' = 2R \Rightarrow (C'):(x-2)^2+(y-2)^2 = 16$$

Chọn đáp án C □

Câu 35. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) trong đó $a \perp (P)$. Trong các mệnh đề sau đây, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

I. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$

II. Nếu $b \perp (P)$ thì $b \mathbin{/\!/} a$

I. Nếu $b \perp a$ thì $b \mathbin{/\!/} (P)$

I. Nếu $b \mathbin{/\!/} (P)$ thì $b \perp a$

(A) 1. (B) 4. (C) 2. **D** 3.

Lời giải.

Phương pháp

Dựa vào lý thuyết quan hệ song song và quan hệ vuông góc trong không gian.

Cách giải:

Ta có mệnh đề (III) sai vì có thể b nằm trong (P).

Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) > \log_3(2-x)$ là $S = (a;b) \cup (c;d)$ với a, b, c, d là các số thực. Khi đó $a+b+c+d$ bằng:

(A) 4. (B) 1. (C) 3. **D** 2.

Lời giải.

Phương pháp

- Tìm điều kiện xác định của bất phương trình.
- Giải bất phương trình.

Cách giải:

Ta có:

$$\begin{cases} x+1>0 \\ 2-x>0 \\ \log_{\frac{1}{3}}(x+1) > \log_3(2-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x<2 \\ -\log_3(x+1) > \log_3(2-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<2 \\ \log_3(2-x)+\log_3(x+1)<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<2 \\ x^2+x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<2 \\ \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \left(-1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 2\right)$$

$$a+b+c+d = -1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 2 = 2.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Một hình trụ có trục OO' chứa tâm của một mặt cầu bán kính R, các đường tròn đáy của hình trụ đều thuộc mặt cầu trên, đường cao của hình trụ bằng R. Tính thể tích V của khối trụ.

A $V = \dfrac{3\pi R^3}{4}$. (B) $V = \pi R^3$. (C) $V = \dfrac{\pi R^3}{4}$. (D) $V = \dfrac{\pi R^3}{3}$.

Lời giải.

Phương pháp

Thể tích khối trụ có bán kính đáy R và chiều cao h là: $V = \pi R^2 h$.

Cách giải:

Đường kính đáy của khối trụ là: $2r = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = R\sqrt{3} \Rightarrow r = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

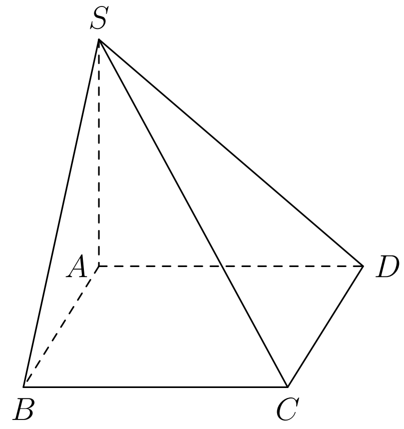
$V = \pi r^2 h = \pi \left(\dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 R = \dfrac{3\pi R^3}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a ,$SA \perp (ABCD)$,$SA = a\sqrt{2}$. Tìm số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD).

(A) $45°$. (B) $30°$. (C) $90°$. (D) $60°$.

Lời giải.



Phương pháp

Góc giữa đường thẳng d với mặt phẳng (P) là góc giữa đường thẳng d với hình chiếu của đường thẳng d trên (P).

Cách giải:

Ta có $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$

$\widehat{(SC;(SAD))} = \widehat{CSD}$

$\widehat{CSD} = \dfrac{CD}{SD} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+2a^2}} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

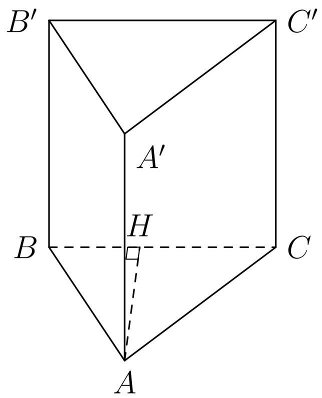
$\widehat{CSD} = 30°$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2a$; $AB = a\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC là:

(A) $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.

Lời giải.



Phương pháp

Xác định đường vuông góc chung giữa hai đường thẳng sau đó tính khoảng cách.

Cách giải:

Ta có: $AA' \parallel (BCC'B') \Rightarrow d(AA';BC) = d(A,(BCC'B'))$

Kẻ $AH \perp BC$

$\Rightarrow AH \perp (BCC'B') \Rightarrow AH = (AA';BC)$

$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$

$\Rightarrow AH = d(AA';BC) = \dfrac{AB.AC}{\sqrt{AB^2+AC^2}} = \dfrac{a.a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $(x^2 - 5x + 4)\sqrt{x-m} = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

(A) 4. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Phương pháp

Giải phương trình tích

Cách giải:

Điều kiện xác định $x - m \geq 0 \Leftrightarrow x \geq m$

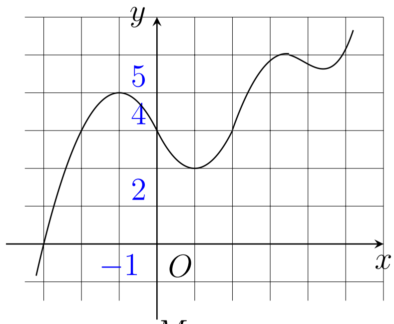
$$(x^2 - 5x + 4)\sqrt{x - m} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 4 = 0 \\ x - m = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 1 \\ x = m \end{array}\right.$$

Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x = m$ vô nghiệm hoặc có nghiệm có nghiệm $x = 1, x = 4 \Leftrightarrow 1 \leq m < 4$

Chọn đáp án C □

Câu 41.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(x^2 - 2x\right)$ trên đoạn $\left[-\dfrac{3}{2}; \dfrac{7}{2}\right]$. Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau.



A. $M + m > 7$. B. $Mm > 10$. C. $M - m = 3$. D. $\dfrac{M}{m} = 2$.

Lời giải.

Phương pháp

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho và biến đổi, đặt ẩn phụ để tìm đáp án đúng.

Cách giải:

Đặt $t = x^2 - 2x, x \in \left[-\dfrac{3}{2}; \dfrac{7}{2}\right] \Rightarrow t \in \left[-1; \dfrac{21}{4}\right]$

Từ đồ thị hàm số ta xét hàm số $y = f(t), \quad t \in \left[-1; \dfrac{21}{4}\right]$

$m = \min\limits_{\left[-1; \frac{21}{4}\right]} f(t) = f(2) = 2$

$M = \max\limits_{\left[-1; \frac{21}{4}\right]} f(t) > f\left(\dfrac{21}{4}\right) = 5$

$M + m > 7$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có diện tích mặt bên ABB_1A_1 bằng 6, khoảng cách giữa cạnh CC_1 và mặt phẳng ABB_1A_1 bằng 8. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng:

A. 24. B. 8. C. 16. D. 32.

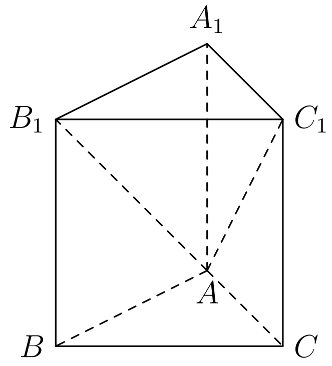
Lời giải.

Phương pháp

Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy S và chiều cao h là $V = Sh$

Chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành khối chóp $C_1.ABC$ và khối tứ giác $C_1.ABB_1A_1$

Ta có: $V_{C_1.ABC} = \frac{1}{3}V \Rightarrow \begin{cases} V_{C_1ABB_1A_1} = \frac{2}{3}V \\ V_{C_1ABB_1A_1} = \frac{1}{3}d\left(A;(ABB_1A_1)\right) = \frac{1}{3}.6.8 = 16 \end{cases}$



Chọn đáp án A

Câu 43. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) biết cả hai đường thẳng $d_1 : y = a_1x + b_1$,$d_2 : y = a_2x + b_2$ đi qua điểm $I(1;1)$ và cắt đồ thị (C) tại 4 điểm tạo thành một hình chữ nhật. Khi $a_1 + a_2 = \frac{5}{2}$,giá trị biểu thức $P = b_1b_2$ bằng:

A $\frac{5}{2}$. **B** $\frac{1}{2}$. **C** $-\frac{1}{2}$. **D** $-\frac{5}{2}$.

Lời giải.

Gọi α, β lần lượt là các góc tạo bởi tia Ox và phần đồ thị phía trên trục Ox của d_1, d_2.

Khi đó ta có: $a_1 = \tan\alpha$,$a_2 = \tan\beta$.

Cách giải:

Gọi α, β lần lượt là các góc tạo bởi tia Ox và phần đồ thị phía trên trục Ox của d_1, d_2.

Khi đó ta có: $a_1 = \tan\alpha$,$a_2 = \tan\beta$.

Vẽ đồ thị như hình vẽ bên.

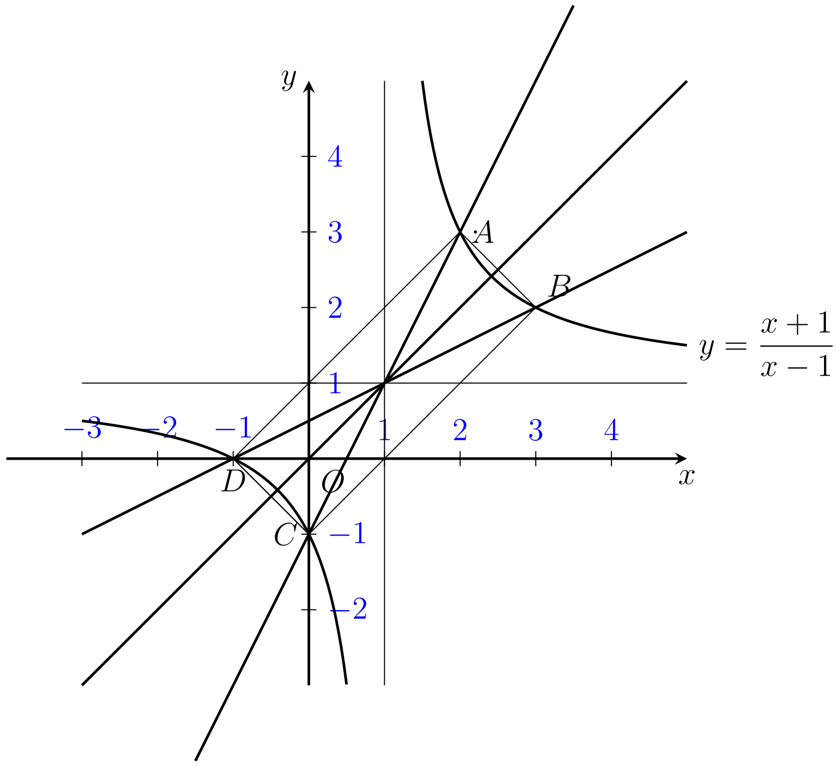
Theo tính chất đối xứng của đồ thị hàm số ta có: $\alpha + \beta = 90°$

$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{a_2}$

Lại có: $a_1 + a_2 = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = -1 \\ b_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow P = b_1.b_2 = -\frac{1}{2}$.

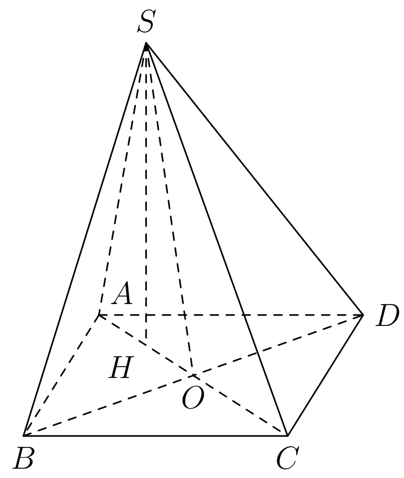


Chọn đáp án C

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SC = x$ $\left(0 < x < \sqrt{3}\right)$ các cạnh còn lại đều bằng 1. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B** $\frac{1}{4}$. **C** $\frac{1}{3}$. **D** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Phương pháp

Thể tích của khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là: $V = Sh$.

Cách giải:

Ta có: $\triangle SBD = \triangle ABD \quad (c.c.c) \Rightarrow AO = SO = OC \Rightarrow \triangle SAC$ vuông tại S. (tam giác có đường trung tuyến từ đỉnh S đến cạnh AC bằng nửa cạnh AC).

$\Rightarrow AO = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{SA^2 + SC^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{1+x^2}$

$\Rightarrow BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{1 - \dfrac{1+x^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{3-x^2}}{2}$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD = \dfrac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\sqrt{3-x^2}$

$SH = \dfrac{SA.SC}{\sqrt{SA^2+SC^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}.\dfrac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\sqrt{3-x^2}$

$= \dfrac{1}{6}x\sqrt{3-x^2} = \dfrac{\sqrt{x^2(3-x^2)}}{6} \leq \dfrac{1}{2}\dfrac{x^2+3-x^2}{6} = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow \max V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 45. Thầy Tuấn có 15 cuốn sách gồm 4 cuốn sách Toán , 5 cuốn sách Lý và 6 cuốn sách Hóa. Các cuốn sách đôi một khác nhau. Thầy chọn ngẫu nhiên 8 cuốn sách để làm phầnt hưởng cho một học sinh. Tính xác suất để số cuốn sách còn lại thầy Tuấn còn đủ 3 môn.

(A) $\dfrac{54}{715}$. (B) $\dfrac{661}{715}$. (C) $\dfrac{2072}{2145}$. (D) $\dfrac{73}{2145}$.

Lời giải.

Phương pháp

Tính xác xuất của biến cố đối: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

Cách giải:

Số phần tử của không gian mẫu là: $n_\Omega = C_{15}^8$

Gọi biến cố A: "Số cuốn sách còn lại của thầy Tuấn có đủ cả ba môn".

Khi đó ta có biến cố:$\overline{A}$: "Số cuốn sách còn lại của thầy Tuấn không có đủ cả 3 môn".

Ta có các trường hợp xảy ra:

- TH1: 7 cuốn sách còn lại chỉ có Toán và Lý. Số cách chọn là: C_9^7 .
- TH2: 7 cuốn sách còn lại chỉ có Lý và Hóa. Số cách chọn là: C_{11}^7
- TH3: 7 cuốn sách còn lại chỉ có Hóa và Toán. Số cách chọn là: $7C_{10}^7$

$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \dfrac{C_9^7 + C_{11}^7 + C_{10}^7}{C_{15}^8} = 1 - \dfrac{54}{715} = \dfrac{661}{715}$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 46. Cho a, b, c là các số thực dương khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức

$P = \dfrac{8a + 3b + 4\left(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt[3]{abc}\right)}{1 + (a+b+c)^2}$ gần với giá trị nào nhất trong các đáp án sau:

(A) 4.65. **B** 4.66. (C) 4.67. (D) 4.64.

Lời giải.

Phương pháp

Sử dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương và ba số dương.

Khảo sát sự biến thiên của hàm số, tìm giá trị lớn nhất của hàm số.

Cách giải:

Áp dụng bất đẳng thức cho hai số dương ta có:

$$P=\frac{8a+3b+4\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt[3]{abc}\right)}{1+(a+b+c)^2}$$

$$\leq\frac{8a+3b+4\left(\frac{a+4b}{4}+\frac{b+4c}{4}+\frac{a+4b+16c}{12}\right)}{1+(a+b+c)^2}$$

$$=\frac{28}{3}\frac{a+b+c}{1+(a+b+c)^2}$$

Đặt $a+b+c=t.\quad(t>0)$

Ta có: $P=\dfrac{28}{3}f(t)=\dfrac{28}{3}\dfrac{t}{t^2+1}\qquad(t>0)$

Có: $f'(t)=\dfrac{1+t^2-2t^2}{(1+t^2)^2}\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}t=1 & (tm)\\ t=-1 & (ktm)\end{array}\right.$

Ta có BBT:

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	

Dựa vào BBT ta có: $\max f(t)=\dfrac{1}{2}$ khi $t=1$

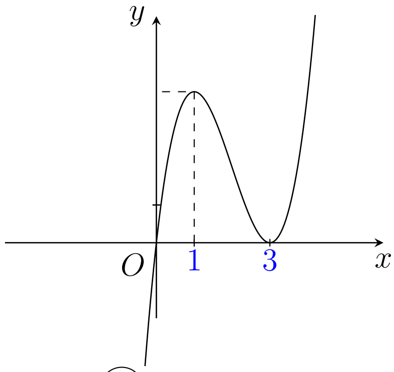
$\max P=\dfrac{28}{3}\dfrac{1}{2}=\dfrac{14}{3}$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{4}=b\\ \dfrac{b}{4}=c\\ a+b+c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4b\\ b=4c\\ 21c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{16}{21}\\ b=\dfrac{4}{21}\\ c=\dfrac{1}{21}\end{cases}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 47.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới . Để đồ thị hàm số $h(x) = |f^2(x) + f(x) + m|$ có số điểm cực trị ít nhất thì giá trị nhỏ nhất của tham số $m = m_0$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:



A $m_0 \in (0; 1)$. **B** $m_0 \in (-1; 0)$. **C** $m_0 \in (-\infty; -1)$. **D** $m_0 \in (1; +\infty)$.

Lời giải.

Phương pháp

Dựa vào đồ thị hàm số khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$ sau đó xác định sự biến thiên của hàm số $h(x)$ và chọn đáp án đúng.

Cách giải:

Xét hàm số: $g(x) = f^2(x) + f(x) + m \Rightarrow g'(x) = 2f(x).f'(x) + f'(x) = f'(x)\,[2f(x) + 1]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ 2f(x) = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f(x) = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $\left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right. \\ f(x) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = a \quad (a < 0) \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(1) = f^2(1) + f(1) + m = m > m \\ g(3) = f^2(3) + f(3) + m = m \\ g(a) = f^2(a) + f(a) + m = m - \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		a		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$g(a)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

$\Rightarrow h(x) = |g(x)| = |f^2(x) + f(x) + m| = \left|\left[f(x) + \dfrac{1}{2}\right]^2 + m - \dfrac{1}{4}\right|$ có điểm cực trị ít nhất là 3.

Đồ thị hàm số $g(x)$ nằm phía trên trục Ox (kể cả trường hợp tiếp xúc với Ox)

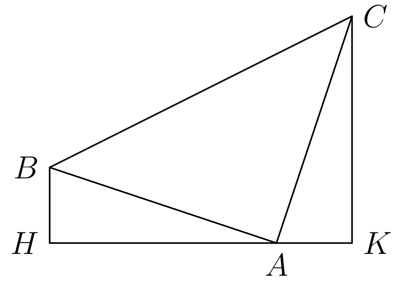
$\Rightarrow m \geq \dfrac{1}{4} \Rightarrow x_0 = \dfrac{1}{4}$

Chọn đáp án A □

Câu 48. Biết hai điểm $B(a;b)$, $C(c;d)$ thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$ sao cho tam giác ABC vuông cân tại đỉnh $A(2;0)$, khi đó giá trị biểu thức $T=ab+cd$ bằng:

A 6. **B** 0. **C** -9. **D** 8.

Lời giải.



Phương pháp

Sử dụng các tính chất của tam giác vuông cân.

Cách giải:

Gọi $B\left(a;2+\dfrac{2}{a-1}\right);C\left(c;2+\dfrac{2}{c-1}\right)\quad(a<1<c)$

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của B,C trên trục $Ox\Rightarrow H(a;0),K(c;0)$

$\triangle ABC$ vuông cân $\Rightarrow\begin{cases}AB=AC\\ \widehat{BAC}=90^\circ\end{cases}$

Ta có: $\widehat{BCA}=\widehat{CAK}+\widehat{ACK}=\widehat{BAH}+\widehat{ABH}$

Mà: $\widehat{BAH}+\widehat{CAK}=90^\circ$

$\Rightarrow\widehat{BAH}=\widehat{ACK}$

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle CAK$ ta có:

$\widehat{BAH}=\widehat{ACK}\quad(cmt)$

$AC=AB\quad(gt)$

$\triangle ABH=\triangle CAK\quad(ch-gn)$

$AH=CK;HB=AK$(các cạnh tương ứng bằng nhau)

Ta có: $AH\,|a-2|=2-1;\ AK=|c-2|;\quad(a<1)$

$BH=\left|2+\dfrac{2}{a+1}\right|;\ CK=\left|2++\dfrac{2}{c-1}\right|=2+\dfrac{2}{c-1}\quad(c>1)$

$\begin{cases}AH=CK\\HB=AK\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-a=2+\dfrac{2}{c-1}\\ \left|2+\dfrac{2}{a-1}\right|=|c-2|\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2}{1-c}\\ \left[\begin{array}{l}2+\dfrac{2}{a-1}=c-2\\2+\dfrac{2}{a-1}=2-c\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2}{1-c}\\ \left[\begin{array}{l}2+\dfrac{2}{\dfrac{2}{1-c}-1}=c-2\\2+\dfrac{2}{a-1}=\dfrac{2}{1-\dfrac{2}{1-c}}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$\begin{cases}b=-1\quad(tm)\\c=3\quad(tm)\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}B(-1;1)\\C(3;3)\end{cases}\Rightarrow T=(-1).1+3.3=8$

Chọn đáp án D ☐

Câu 49. Biết đồ thị hàm số $y=a\log_2^2x+b\log_2x+c$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ thuộc đoạn $[1; 2]$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}$ bằng:

Ⓐ 2. Ⓑ 5. **C** 3. Ⓓ 4.

Lời giải.

Phương pháp

Đặt $\log_2 x = t$, xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành sau đó biện luận và áp dụng định lý Vi-ét.

Cách giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là:

$a\log_2^2 x + b\log_2 x + c = 0 \quad (*)$

Đặt $\log_2 x = t$,ta có $(*) \Rightarrow at^2 + bt + c = 0, \qquad (1)$

Có: $x \in [1; 2] \Rightarrow t \in [0; 1]$

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1; 2]$ phương trình (1) có hai nghiệm $t_1, t_2 \in [0; 1]$

Áp dụng định lý Vi-ét ta có:

$\begin{cases} t_1 + t_2 = -\dfrac{b}{a} \quad t_1t_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Theo đề bài ta có:

$$P = \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)} = \frac{2a^3 - 3ab + b^2}{a^2 - ab + ca} = \frac{2 - 3\dfrac{b}{a} + \left(\dfrac{b}{a}\right)^2}{a - \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a}} = \frac{(t_1+t_2)^2 + 3(t_1+t_2) + 2}{1 + t_1 + t_2 + t_1t_2}$$

Lại có: $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \Rightarrow t_1^2 \leq t_1t_2; t_2^2 \leq 1 \leq\Rightarrow (t_1+t_2)^2 \leq 3t_1t_2 + 1$

$\Rightarrow P = \dfrac{(t_1+t_2)^2 + 3(t_1+t_2) + 2}{1 + (t_1+t_2) + t_1.t_2} \leq \dfrac{3t_1t_2 +! + 3(t_1+t_2) + 2}{1 + t_1t_2 + t_1 + t_2} = 3$

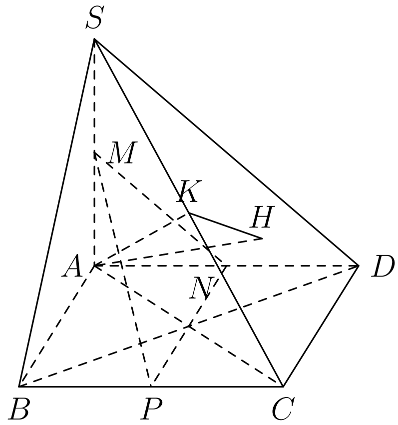
$\Rightarrow P_{\min} = 3.$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 50. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành,$AB = 3$,$AD = 4$,$\widehat{BAD} = 120^\circ$. Cạnh bên $SA = 2\sqrt{3}$ vuông góc với đáy . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, AD và BC,α là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (MNP). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây.

A $\alpha \in (60^\circ; 90^\circ)$. Ⓑ $\alpha \in (0^\circ; 30^\circ)$. Ⓒ $\alpha \in (30^\circ; 45^\circ)$. Ⓓ $\alpha \in (45^\circ; 60^\circ)$.

Lời giải.



Phương pháp

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến chung của hai mặt phẳng đó.

Cách giải:

Ta có: $\begin{cases} MN \parallel SD \\ NP \parallel CD \end{cases} \Rightarrow (MNP) \parallel (SCD)$

$\Rightarrow \widehat{((SAC),(MNP))} = \widehat{((SAC),(SCD))} = \alpha$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống (SCD), K là hình chiếu của H xuống $SC \Rightarrow \alpha = \widehat{AKH}$

Ta có: $V_{S.ACD} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.2S_{ABD} = \dfrac{1}{3}SA.AB.AD.\sin\widehat{BAD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.3.4.\sqrt{3}.2\sqrt{3} = 6$

Có: $AC^2 = 13 \Rightarrow SC^2 = SA^2 + AC*2 = 25$

$SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{28}$

$\Rightarrow S_{SCD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

$\Rightarrow AH = d\left(A;(CSD)\right) = \dfrac{3V_{S.ACD}}{S_{SCD}} = \dfrac{3.6}{2\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

$AK = \dfrac{SA.AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{2\sqrt{39}}{5}$

$\sin\alpha = \dfrac{AH}{AK} = \sqrt{6}.\dfrac{5}{2\sqrt{39}} = \dfrac{5\sqrt{26}}{26} \Rightarrow \alpha \in (60^\circ; 90^\circ).$

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. D	3. B	4. B	5. C	6. A	7. D	8. D	9. B	10. B
11. A	12. C	13. C	14. C	15. B	16. A	17. A	18. D	19. B	20. D
21. B	22. C	23. C	24. A	25. C	26. B	27. A	28. C	29. D	30. B
31. D	32. D	33. C	34. C	35. D	36. D	37. A	38. B	39. B	40. C
41. A	42. A	43. C	44. C	45. B	46. B	47. A	48. D	49. C	50. A

27 ĐỀ THI THỬ THPT NGUYỄN TRÃI, THANH HÓA – LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Đồ thị hàm số $y = -x^4 - x^2 + 3$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. B. 3. **C. 1.** D. 0.

Lời giải.

Đạo hàm đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi qua $x = 0$ nên $x = 0$ là điểm cực trị duy nhất của hàm số.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m-3)x - 3$ đạt cực đại tại $x = 1$?

A. $m \leq 3$. B. $m = 3$. C. $m < 3$. **D. $m > 3$.**

Lời giải.

Để hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ thì $\begin{cases} y'(1) = 3.1^2 - 2m.1 + 2m - 3 = 0 \\ y''(1) = 6.1 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Bác An gửi vào ngân hàng số tiền 5 triệu đồng với lãi xuất $0,7\%$/tháng. Sau sáu tháng gửi tiền, lãi xuất tăng lên $0,9\%$/tháng. Đến tháng thứ 10 sau khi gửi tiền, lãi xuất giảm xuống $0,6\%$/ tháng và giữ ổn định. Biết rằng nếu bác An không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi là lãi kép). Hỏi sau một năm gửi tiền, bác An rút được số tiền gần nhất với số nào sau đây?

A. 5.453.000 đồng. B. 5.436.000 đồng. C. 5.468.000 đồng. D. 5.463.000 đồng.

Lời giải.

Gọi số tiền gửi vào là M đồng, lãi xuất r/ tháng.

Cuối tháng thứ n: số vốn tích lũy được là:

$T_n = M(1+r)^n$.

Số vốn tích lũy của bác An sau 6 tháng gửi tiền với lãi suất $0,7\%$/ tháng là:

$T_1 = 5(1,007)^6$ triệu đồng.

Số vốn tích lũy của bác An sau 9 tháng gửi tiền (3 tháng tiếp theo với lãi suất $0,9\%$/ tháng) là:

$T_2 = T_1.(1,009)^3 = 5.(1,007)^6.(1,009)^3$ triệu đồng.

Do đó số tiền bác An lĩnh được sau 1 năm (12 tháng) từ ngân hàng (3 tháng tiếp theo sau đó với lãi suất $0,6\%$/ tháng) là:

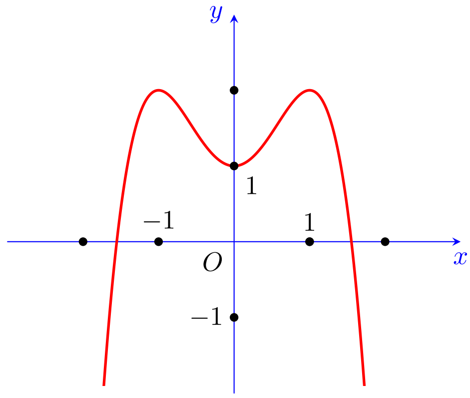
$T = T_2.(1,006)^3 = 5.(1,007)^6.(1,009)^3.(1,006)^3$ triệu đồng $\approx 5452733,453$ đồng.

Chọn đáp án A □

Câu 4.

Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?

A $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. **B** $y = -x^4 - 2x^2 + 1$.
C $y = x^4 - 3x^2 + 1$. **D** $y = x^4 - 2x^2 + 1$.



Lời giải.

Đây là hàm số bậc 4 trùng phương có 3 cực trị và đồ thị hướng xuống nên $a < 0, b > 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{mx^2 - 2x + 3}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận?

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

$f(x) = mx^2 - 2x + 3$ nên đồ thị hàm số luôn có 1 tiệm cận ngang.

Do đó đồ thị hàm số cần có đúng 1 tiệm cận đứng.

Với $m = 0$ đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow m = 0$ thỏa mãn bài toán.

Với $m \neq 0$ đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $mx^2 - 2x + 3 = 0$ có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có nghiệm $x = 1$ hay:

$$\left[\begin{array}{l}\Delta_f = 0\\ \begin{cases}\Delta_f > 0\\ f(1) = 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1 - 3m = 0\\ \begin{cases}1 - 3m > 0\\ m + 1 = 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m = \dfrac{1}{3}\\ m = -1\end{array}\right.$$

Vậy $m \in \left\{0; \dfrac{1}{3}; -1\right\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 5$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên không chia hết cho 5, gồm 4 chữ số khác nhau?

A 120. **B** 72. **C** 69. **D** 54.

Lời giải.

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$

d có 3 cách chọn ($d \neq \{0; 5\}$).

a có 3 cách chọn ($a \neq \{0; d\}$).

b có 3 cách chọn ($b \neq \{a; d\}$).

c có 2 cách chọn.

Vậy theo quy tắc nhân có $3.3.3.2 = 54$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-3)x-m+2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A $-3\le m\le 1$. **B** $m\le 1$. **C** $\left[\begin{array}{l}m\le -3\\ m\ge 1\end{array}\right.$. **D** $-3<m<1$.

Lời giải.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=-x^2-2mx+2m-3$.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì:

$y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{y'}<0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<0\\ m^2+2m-3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -3\le m\le 1$

Chọn đáp án A □

Câu 8. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d:y=x+m$. Giá trị của tham số m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB=\sqrt{10}$ là

A $m=-1$ hoặc $m=6$. **B** $0\le m\le 5$.

C $m=0$ hoặc $m=6$. **D** $m=0$ hoặc $m=7$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d là:

$\dfrac{2x+1}{x+1}=x+m\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne -1\\ x^2+(m-1)x+m-1=0\quad(1)\end{cases}$

Khi đó d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A,B khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $-1\Leftrightarrow\begin{cases}(m-1)^2-4(m-1)>0\\ (-1)^2-(m-1)+m-1\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<1\\ m>5\end{array}\right.(*)$

Ta có:

$A(x_1;x_1+m),B(x_2;x_2+m)\Rightarrow\overline{AB}=(x_2-x_1;x_2-x_1)\Rightarrow AB=\sqrt{2(x_2-x_1)^2}=\sqrt{2}\,|x_2-x_1|$

Và $\begin{cases}x_1+x_2=1-m\\ x_1x_2=m-1\end{cases}$. Từ đây ta có:

$AB=\sqrt{10}\Leftrightarrow|x_2-x_1|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(x_2+x_1)^2-4x_1x_2=5$

$\Leftrightarrow(1-m)^2-4(m-1)=5\Leftrightarrow m^2-6m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=6\end{array}\right.$ (thỏa mãn) $(*)$.

Vậy $\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=6\end{array}\right.$

Chọn đáp án C □

Câu 9. Bất phương trình $|2-x|+3x-1\le 6$ có tập nghiệm là

A $(-\infty;2]$. **B** $\left(-\infty;\dfrac{9}{4}\right]$. **C** $\left(-\infty;\dfrac{9}{4}\right)$. **D** $(-\infty;2)$.

Lời giải.

$|2-x|+3x-1\le 6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2-x\ge 0\\ 2-x+3x-1\le 6\end{cases}\\ \begin{cases}2-x<0\\ -2+x+3x-1\le 6\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le 2\\ 2<x\le\dfrac{9}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow x\le\dfrac{9}{4}$. Bất phương trình có

tập nghiệm là $S = \left(-\infty; \frac{9}{4}\right]$.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Phương trình nào sau đây là phương trình của đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính bằng 3?

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$.
B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$.
C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$.
D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$.

Lời giải.

Phương trình đường tròn tâm $I(-1;2)$ bán kính $r = 3$ là: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$

Chọn đáp án D □

Câu 11. Cho tập hợp A gồm 12 phần tử. Số tập con gồm 4 phần tử của tập hợp A là

A. A_{12}^8.
B. C_{12}^4.
C. $4!$.
D. A_{12}^4.

Lời giải.

Số cách chọn 4 phần tử từ 12 phần tử bằng: C_{12}^4.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Bất phương trình $\frac{1}{(2x-1)^2} > \frac{1}{x+1}$ có tập nghiệm là

A. $(-\infty;-1) \cup \left(0;\frac{5}{4}\right) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
B. $(-\infty;-1] \cup \left(0;\frac{5}{4}\right) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
C. $(-\infty;-1) \cup \left(0;\frac{5}{4}\right] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
D. $(-\infty;-1) \cup \left(0;\frac{5}{4}\right]$.

Lời giải.

$$\frac{1}{(2x-1)^2} > \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{-4x^2+5x}{(2x-1)^2(x+1)} > 0$$

Bất phương trình có tập nghiệm $S = (-\infty;-1) \cup \left(0;\frac{5}{4}\right) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Cho hai đường thẳng song song d_1, d_2. Trên d_1 lấy 6 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 4 điểm phân biệt. Xét tất cả các tam giác được tạo thành khi nối các điểm đó với nhau. Chọn ngẫu nhiên một tam giác. Xác suất để thu được tam giác có hai đỉnh thuộc d_1 là

A. $\frac{2}{9}$.
B. $\frac{5}{9}$.
C. $\frac{3}{8}$.
D. $\frac{5}{8}$.

Lời giải.

$n(\Omega) = C_6^2.C_4^1 + C_6^1.C_4^2$.

Gọi A là biến cố được tam giác có hai đỉnh thuộc d_1 thì $n(A) = C_6^2.C_4^1$.

Xác suất để thu được tam giác có hai đỉnh thuộc d_1 là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_6^2.C_4^1}{C_6^2.C_4^1 + C_6^1.C_4^2} = \frac{5}{8}$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $3\sin x + m\cos x = 5$ vô nghiệm?

A. $m > 4$.
B. $|m| \geq 4$.
C. $m < -4$.
D. $-4 < m < 4$.

Lời giải.

Phương trình $3\sin x + m\cos x = 5$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

$3^2 + m^2 < 5^2 \Leftrightarrow m^2 < 4^2 \Leftrightarrow -4 < m < 4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t) = -\frac{1}{4}t^4 + 3t^2 - 2t - 4$. Trong đó t tính bằng (s) và S tính bằng mét (m). Tại thời điểm nào vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất?

(A) $t = 1$. **B** $t = \sqrt{2}$. (C) $t = 2$. (D) $t = \sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có vận tốc $v(t) = S'(t) = -t^3 + 6t - 2 \Rightarrow v'(t) = -3t^2 + 6$.

$v'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta có $v(t)$ đạt giá trị lớn nhất khi $t = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trọng tâm $G\left(\frac{2}{3}; 0\right)$, biết $M(1; 1)$ là trung điểm cạnh BC. Tọa độ đỉnh A là

(A) $(2; 0)$. (B) $(-2; 0)$. (C) $(0; -2)$. **D** $(0; 2)$.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên: $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MG} \Rightarrow A(0; 2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Một tổ có 4 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Số cách xếp các học sinh đó thành một hàng dọc sao cho 4 học sinh nam đứng liền nhau là

(A) 17820. **B** 17280. (C) 5760. (D) 2820.

Lời giải.

Coi 4 học sinh nam là một phần tử X, hoán vị 6 phần tử gồm X và 5 học sinh nữ có $6!$ cách.

Ứng với mỗi cách xếp trên đều có $4!$ cách hoán vị 4 học sinh nam

$\Rightarrow$ Theo quy tác nhân số cách xếp là: $6!4! = 17280$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Giới hạn $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x + 1 - \sqrt{5x + 1}}{x - \sqrt{4x - 3}} = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a - b$ là

A 1. (B) -1. (C) $\frac{9}{8}$. (D) $\frac{1}{9}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 3} \frac{x + 1 - \sqrt{5x + 1}}{x - \sqrt{4x - 3}} &= \lim_{x \to 3} \frac{\left(x + \sqrt{4x - 3}\right)(x - 3)x}{\left(x + 1 + \sqrt{5x + 1}\right)(x - 3)(x - 1)} \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{x\left(x + \sqrt{4x - 3}\right)}{(x - 1)\left(x + 1 + \sqrt{5x + 1}\right)} \\ &= \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

Suy ra $a = 9; b = 8 \Rightarrow a - b = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Cho hai số thực dương a và b. Biểu thức $\sqrt[5]{\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{a}{b}}}}$ được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

A $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{30}{31}}$. **B** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{7}}$. **C** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{6}}$. **D** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{31}{30}}$.

Lời giải.

$$\sqrt[5]{\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{a}{b}}}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{5}}\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{15}}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{30}}=\dfrac{a^{\frac{1}{5}-\frac{1}{15}+\frac{1}{30}}}{b^{\frac{1}{5}-\frac{1}{15}+\frac{1}{30}}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{6}}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 20. Tập xác định của hàm số $y=\log_2\dfrac{x+3}{2-x}$ là

A $D=\mathbb{R}\setminus\{-3;2\}$. **B** $D=(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$.

C $D=[-3;2]$. **D** $D=(-3;2)$.

Lời giải.

Hàm số $\log_2\dfrac{x+3}{2-x}$ có nghĩa khi $\dfrac{x+3}{2-x}>0\Leftrightarrow -3<x<2$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Số nghiệm của phương trình $\cos^2 x+\cos x-2=0$ trong đoạn $[0;2\pi]$ là

A 2. **B** 4. **C** 3. **D** 1.

Lời giải.

Ta có $\cos^2 x+\cos x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos x=-2\quad(\text{vô nghiệm})\end{array}\right.\Leftrightarrow x=k2\pi.$

$x\in[0;2\pi]\Rightarrow x=0;x=2\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-3x+2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Lời giải.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-3x^2+6x-3=-3(x-1)^2\le 0,\quad\forall x\in\mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{(x^2-5x+6)\sqrt{4-x}}$ là

A $[-1;4)\setminus\{2;3\}$. **B** $[-1;4)$. **C** $(-1;4]\setminus\{2;3\}$. **D** $(-1;4)\setminus\{2;3\}$.

Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{(x^2-5x+6)\sqrt{4-x}}$ có nghĩa khi:

$$\begin{cases}x+1\ge 0\\ 4-x>0\\ x^2-5x+6\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x<4\\ x\ne 2\\ x\ne 3\end{cases}.$$

TXĐ $D = [-1; 4) \setminus \{2; 3\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4\sin^4 x + \cos^2 x + 3$ bằng

A $\dfrac{31}{8}$. (B) 5. (C) 4. (D) $\dfrac{24}{5}$.

Lời giải.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Biến đổi $y = 2\sin^4 x - \sin^2 x + 4$. Đặt $t = \sin^2 x, 0 \le t \le 1$.

Xét hàm số $f(t) = 2t^4 - t^2 + 4$ liên tục trên đoạn $[0; 1].f'(t) = 8t^3 - 2t = 2t\left(4t^2 - 1\right)$

Trên khoảng $(0; 1)$ phương trình $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$

Ta có: $f(0) = 4, f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{31}{8}, f(1) = 5$.

Vậy $\min\limits_{t \in [0;1]} f(t) = \dfrac{31}{8}$ tại $t = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \min\limits_{\mathbb{R}} y = \dfrac{31}{8}$ khi $\sin^2 x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Phương trình các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1 - 3x}{x + 2}$ lần lượt là

A $x = -2$ và $y = -3$. (B) $y = -2$ và $x = -3$.

(C) $x = -2$ và $y = 1$. (D) $x = 2$ và $y = 1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to (-2)^+} \dfrac{1 - 3x}{x + 2} = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to (-2)^-} \dfrac{1 - 3x}{x + 2} = -\infty$

Nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -2$

Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1 - 3x}{x + 2} = -3$

Nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = -3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Một lớp có 20 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Xác suất để 4 học sinh được chọn có cả nam và nữ là

(A) $\dfrac{4651}{5236}$. B $\dfrac{4615}{5236}$. (C) $\dfrac{4610}{5236}$. (D) $\dfrac{4615}{5263}$.

Lời giải.

$n(\Omega) = C_{35}^4$

Gọi A là biến cố 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ. Khi đó $n(A) = C_{35}^4 - C_{20}^4 - C_{15}^4$.

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{C_{35}^4 - C_{20}^4 - C_{15}^4}{C_3 5^4} = \dfrac{4615}{5236}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Cho $a, b, c > 0, a \ne 1; b \ne 1$.Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

(A) $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$. (B) $\log_a b.\log_b c = \log_a c$.

(C) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$. D $\log_{a^c} b = c\log_a b$.

Lời giải.

Sai, vì $\log_{a^c} b = \dfrac{1}{c}\log_a b$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^{45}$ là

(A) C_{45}^{5}. (B) $-C_{45}^{5}$. (C) C_{45}^{15}.. **D** $-C_{45}^{15}$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát $C_{45}^{k}x^{45-k}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)^{k}=C_{45}^{k}.(-1)^k\dfrac{x^{45-k}}{x^{2k}}C_{45}^{k}x^{45-3k}$

Số hạng không chứa x tương úng với $45-3k=0\Leftrightarrow k=15$.

Vậy số hạng cần tìm $C_{45}^{15}.(-1)^{15}=-C_{45}^{15}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a. Côsin của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

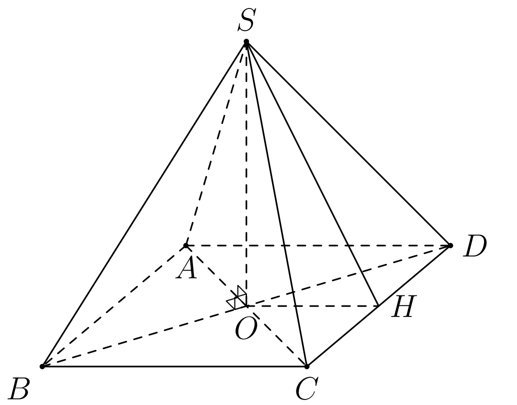
Lời giải.

H là trung điểm CD

Ta có: $OA=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Khi đó $\tan\varphi=\tan\widehat{SHO}=\dfrac{SO}{OH}=\sqrt{2}$.

Do đó $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Hàm số $y=\sqrt{4-x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại:

A $x=\pm 2$. (B) $x=0$. (C) $x=0;x=2$. (D) $x=0;x=-2$.

Lời giải.

TXĐ: $D=[-2;2]$.

Ta có $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}};y'=0\Leftrightarrow\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}=0\Leftrightarrow x=0$

Khi đó: $y(-2)=0;y(0)=2;y(2)=0$

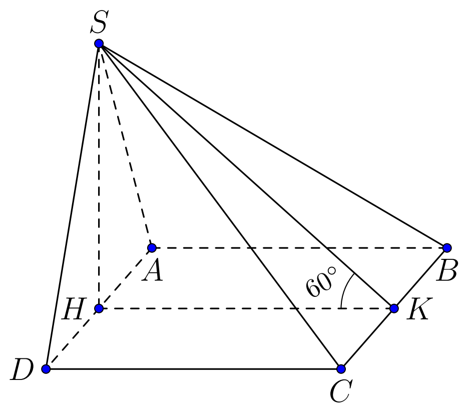
$\Rightarrow$Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ $x=\pm 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SAD vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $AB=a,SA=2SD$, mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy một góc 60°. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

(A) $\dfrac{15a^3}{2}$. (B) $\dfrac{3a^3}{2}$. **C** $\dfrac{5a^3}{2}$. (D) $5a^3$.

Lời giải.



Kẻ $SH \perp AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

- $\left(\widehat{(SBC);(ABCD)}\right) = \widehat{SKH} = 60°$.
- $SH = HK \tan 60° = a\sqrt{3}$.
- $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SD^2} \Rightarrow \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{5}{4SD^2} \Rightarrow SD = \dfrac{\sqrt{15}a}{2}, SA = a\sqrt{15}, AD = \dfrac{5\sqrt{3}a}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{3}.a.\dfrac{5\sqrt{3}a}{2} = \dfrac{5a^3}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng $-\infty$?

A $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x+4}{x-2}$. **B** $\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{-3x+4}{x-2}$. **C** $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{-3x+4}{x-2}$. **D** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x+4}{x-2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to2^+}(-3x+4) = -2 < 0$ và $\begin{cases} \lim\limits_{x\to2^+}(x-2) = 0 \\ x-2 > 0, \forall x > 2 \end{cases}$

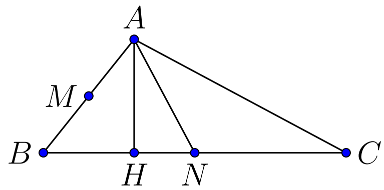
Vậy $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{-3x+4}{x-2} = -\infty$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $M(2;0)$ là trung điểm của cạnh AB. Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh A lần lượt có phương trình là $7x-2y-3=0$ và $6x-y-4=0$. Phương trình đường thẳng AC là

A $3x-4y-5=0$. **B** $3x+4y+5=0$. **C** $3x-4y+5=0$. **D** $3x+4y-5=0$.

Lời giải.



Tọa độ A là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} 7x-2y-3=0 \\ 6x-y-4=0 \end{cases} \Rightarrow A(1;2)$.

B đối xứng với A qua $M \Rightarrow B(3;-2)$

Đường thẳng BC đi qua B và vuông góc với đường thẳng BH nên $BC: x+6y+9=0$.

Tọa độ trung điểm N của BC là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} 7x-2y-3=0 \\ x+6y+9=0 \end{cases} \Rightarrow N\left(0;-\dfrac{3}{2}\right)$.

$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MN} = (-4;3) \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $AC: 3x-4y+5=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Điều kiện xác định của hàm số $y = \tan 2x$ là

A $x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi$. **B** $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. **C** $x \neq \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}$. **D** $x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$.

Lời giải.

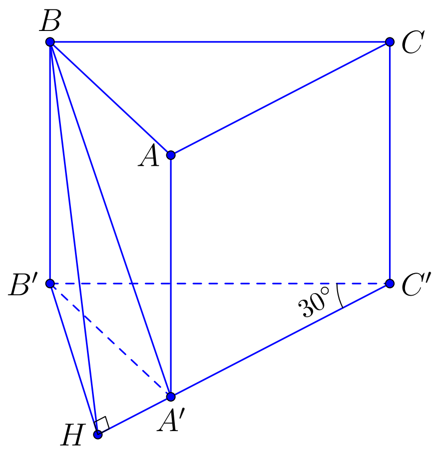
Hàm số $y = \tan 2x = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}$ xác định khi và chỉ khi:
$\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.AB'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a, \widehat{BAC} = 120°$, mặt phẳng $(A'BC')$ tạo với đáy một góc $60°$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. B $\dfrac{9a^3}{8}$. C $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. D $\dfrac{3a^3}{8}$.

Lời giải.

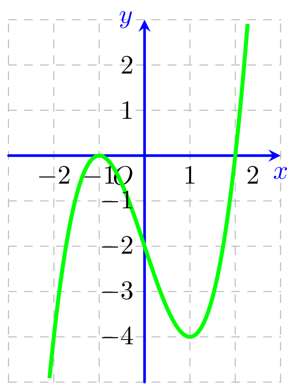
Ta có: $B'H = \sin 30°.B'C' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$
$\widehat{BHB'} = 60° \Rightarrow BB' = B'H.\tan 60° = \dfrac{3a}{2}$
$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.BB' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{3a}{2} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.



Chọn đáp án A □

Câu 36.

Cho hàm số $y = f(x)$có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?



A Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$. B Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.
C Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$. D Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 0)$.

Lời giải.

Xét $g(x) = f(x^2 - 2)$
$g'(x) = f'(x^2 - 2).2x$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(x^2 - 2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2 = -1 \\ x^2 - 2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$ là sai.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Cho $a, b > 0; a, b \neq 1; a \neq b^2$. Biểu thức $P = \log_{\sqrt{a}} b^2 + \dfrac{2}{\log_{\frac{a}{b^2}} a}$ có giá trị bằng

A 6. B 4. C 2. D 3.

Lời giải.

Ta có

$P = \log_{\sqrt{a}} b^2 + \dfrac{2}{\log_{\frac{a}{b^2}} a} = 4\log_a b + 2\log_a \dfrac{a}{b^2} = 4\log_a b + 2\left(\log_a a - 2\log_a b\right) = 2.$

Chọn đáp án C □

Câu 38. Dân số thế giới cuối năm 2010, ước tính khoảng 7 tỉ người. Hỏi với mức tăng trưởng $1,5\%$ mỗi năm thì sau ít nhất bao nhiêu năm nữa dân số thế giới sẽ lên đến 10 tỉ người?

A 2. B 28. C 23. D 24.

Lời giải.

Áp dụng công thức: $S_n = A(1+r)^n$

Suy ra: $n = \log_{(1+r)} \left(\dfrac{S_n}{A}\right)$

Trong đó: $A = 7; S_n = 10; r = 1,5\% = \dfrac{1,5}{100}$.

Ta được $n = 23,95622454$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có $AC = 2a$, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt đáy bằng $45°$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A $a^3\sqrt{2}$. B $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. C $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. D $\dfrac{a^3}{2}$.

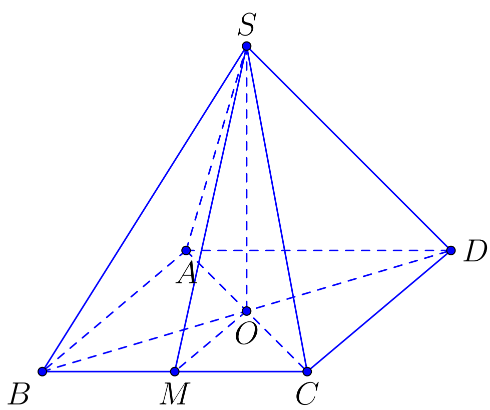
Lời giải.

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow \begin{cases} SM \perp BC \\ OM \perp BC \end{cases}$

Suy ra $((SBC); (ABCD)) = (SM; OM) = \widehat{SMO} = 45°$.

Vì $AC = 2a$ nên $AB = BC = a\sqrt{2} \Rightarrow SO = OM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$V_{SABCD} = \dfrac{1}{3} SO.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \left(a\sqrt{2}\right)^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.



Chọn đáp án C □

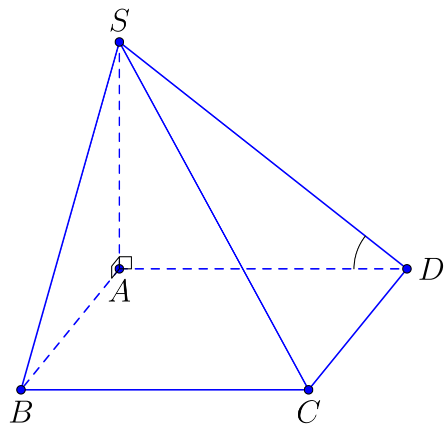
Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

(A) $\arcsin \dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **(B)** 45^0. **(C)** 60^0. **(D)** 30^0.

Lời giải.

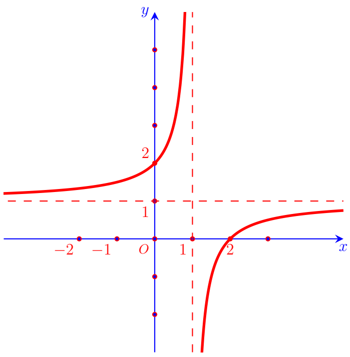
Vì $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SDA}$.

Tam giác SAD vuông tại A nên $\tan \widehat{SDA} = \dfrac{SA}{AD} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SDA} = 60^0$.

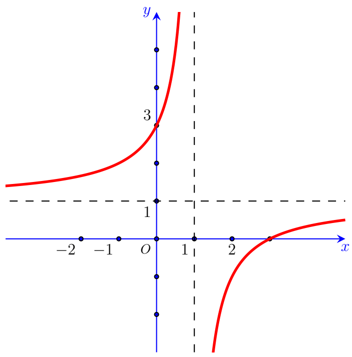


Chọn đáp án (C) □

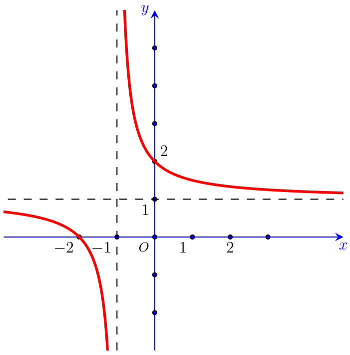
Câu 41. Hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-1}$ có đồ thị là hình nào sau đây?



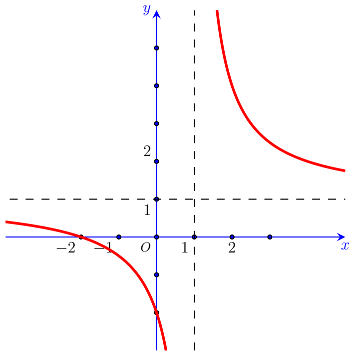
A .



(B) .



(C) .



(D) .

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-1}$ có tiệm cận đứng $x = 1$. Tiệm cận ngang $y = 1$.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-1}$ đi qua điểm $(0; 2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

(A) $m \geq 0$. **(B)** $m \leq 0$. **(C)** $m \geq 12$. **(D)** $m \leq 12$.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 12x + m$. Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty) \Leftrightarrow m \geq 12x - 3x^2 = g(x), \forall x \in (0;+\infty)$
Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0;+\infty)$

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	12	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \geq \max\limits_{(0;+\infty)} g(x) \Leftrightarrow m \geq 12$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Bất phương trình $mx^2 - 2(m+1)x + m + 7 < 0$ vô nghiệm khi

A $m \geq \frac{1}{5}$. B $m > \frac{1}{4}$. C $m > \frac{1}{5}$. D $m > \frac{1}{25}$.

Lời giải.

Điều kiện: $mx^2 - 2(m+1)x + m + 7 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\,(*)$
Trường hợp 1: $m = 0$
$(*) \Leftrightarrow -2x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{7}{2}$.
Loại $m = 0$ vì trường hợp này bất phương trình có nghiệm.
Trường hợp 2: $m \neq 0$
$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5m + 1 \leq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{1}{5} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{5}$.
Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm khi $m \geq \frac{1}{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Bất phương trình $mx - \sqrt{x-3} \leq m$ có nghiệm khi

A $m \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$. B $m \geq 0$. C $m < \frac{\sqrt{2}}{4}$. D $m \geq \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 3$.
Bất phương trình $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-3}}{x-1} \geq m$, xét hs $y = \frac{\sqrt{x-3}}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{5-x}{2\sqrt{x-3}(x-1)^2}$.
$y' = 0 \Leftrightarrow x = 5$.
Bảng biến thiên

x	3		5		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\searrow$	0

Vậy bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $y(5) \geq m \Leftrightarrow m \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và cạnh bên SB vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $SB = 3a, AB = 4a, BC = 2a$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng

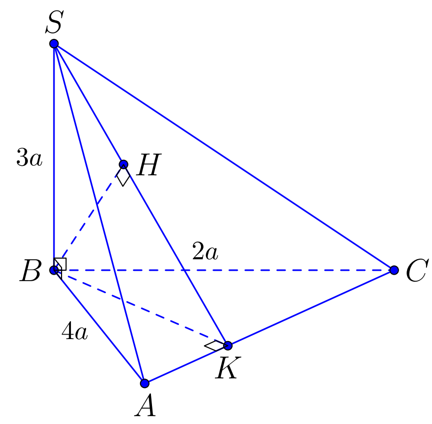
A $\dfrac{12\sqrt{61}a}{61}$. **B** $\dfrac{3\sqrt{14}a}{14}$. **C** $\dfrac{4a}{5}$. **D** $\dfrac{12\sqrt{29}a}{29}$.

Lời giải.

Kẻ $BK \perp AC, BH \perp SK$

- $d\left(B,(SAC)\right) = BBH$.
- $\dfrac{1}{BK^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{1}{16a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{5}{16a^2}$.
- $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{BK^2} + \dfrac{1}{BS^2} = \dfrac{5}{16a^2} + \dfrac{1}{9a^2} = \dfrac{61}{144a^2}$.

Vậy $BH = \dfrac{12a}{\sqrt{61}}$.



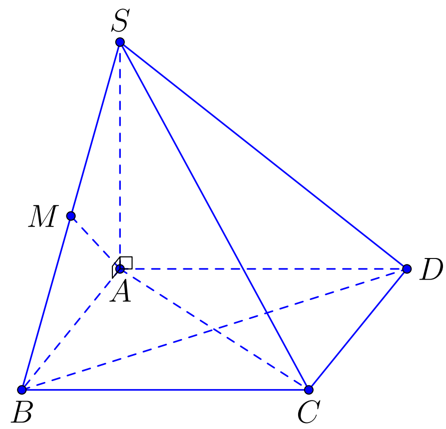
Chọn đáp án A □

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là hình chiếu của A trên SB. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $AM \perp SD$. **B** $AM \perp (SCD)$. **C** $AM \perp CD$. **D** $AM \perp (SBC)$.

Lời giải.

$$\begin{cases} AM \perp SB \\ AM \perp BC \quad (\text{do } BC \perp (SAB)) \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC).$$



Chọn đáp án D □

Câu 47. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d : y = x - 1$. Số giao điểm của (C) và d là

A 1. **B** 3. **C** 0. **D** 2.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$2x^3 - 3x^2 + 1 = x - 1 \Leftrightarrow (x-1)\left(2x^2 - x - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4} \\ x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4} \end{array}\right.$$

Vậy số giao điểm là 3.

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-2x+5}=x^2-2x+3$ là

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Điều kiện: $x^2-2x+3\geq 0$

Đặt $t=\sqrt{x^2-2x+5}, t\geq 0\,(*)\,,\Rightarrow x^2-2x=t^2-5$, phương trình đã cho trở thành:

$$t=t^2-5+3\Leftrightarrow t^2-t-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-1\quad\text{(loại)}\\ t=2\end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện $(*)$ ta có $t=2$.

Với $t=2$ ta có $\sqrt{x^2-2x+5}=2\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow x=1$.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x=1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi M là trung điểm SC, mặt phẳng (P) chứa AM và song song với BD chia khối chóp thành 2 khối đa diện. Đặt V_1 là thể tích khối đa diện có chứa đỉnh S và V_2 là thể tích khối đa diện có chứa đáy. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

(A) $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{3}{2}$. (B) $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{2}{3}$. (D) $\dfrac{V_1}{V_2}=1$.

Lời giải.

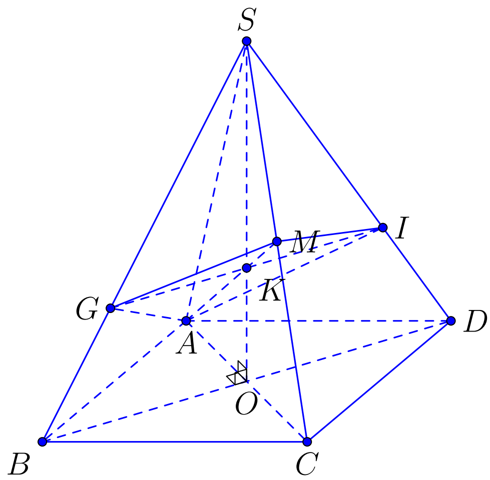
Nhìn hình vẽ ta thấy $V_1=V_{S.MIAG}$.

Gọi $V_{S.ABCD}=V\Rightarrow V_{S.ABC}=V_{S.ADC}=\dfrac{V}{2}$.

Có $\dfrac{V_{S.AGM}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SG}{SB}\cdot\dfrac{SM}{SC}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow V_{S.AGM}=\dfrac{V}{6}$.

Có $\dfrac{V_{S.AMI}}{V_{S.ADC}}=\dfrac{SM}{SC}\cdot\dfrac{SI}{SD}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow V_{S.AMI}=\dfrac{V}{6}\Rightarrow V_{S.MIAG}=\dfrac{V}{3}\Rightarrow V_2=V-\dfrac{V}{3}=\dfrac{2}{3}V\Rightarrow\dfrac{V_2}{V_1}=2$.



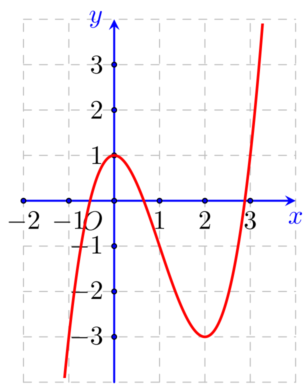
Chọn đáp án (B) □

Câu 50.

Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?

(A) $y=x^3-3x^2+1$. (B) $y=x^3-3x^2-1$.

(C) $y=-x^3-3x^2+1$. (D) $y=-\dfrac{x^3}{3}+x^2+1$.



Lời giải.

ĐTHS có điểm cực đại $(0;1)$ điểm cực tiểu $(2;-3)$.

Chọn đáp án A □

——— **HẾT** ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. D	3. A	4. A	5. D	6. D	7. A	8. C	9. B	10. D
11. B	12. A	13. D	14. D	15. B	16. D	17. B	18. A	19. C	20. D
21. A	22. B	23. A	24. A	25. A	26. B	27. D	28. D	29. A	30. A
31. C	32. C	33. C	34. D	35. A	36. D	37. C	38. D	39. C	40. C
41. A	42. C	43. A	44. A	45. A	46. D	47. B	48. C	49. B	50. A

28 ĐỀ THI THỬ THPT HÀM RỒNG, THANH HÓA – LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$, trên các cạnh BC, BD, AC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $BC = 3BM$, $BD = \frac{3}{2}BN$, $AC = 2AP$. Mặt phẳng (MNP) chia khối tứ diện $ABCD$ thành 2 phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

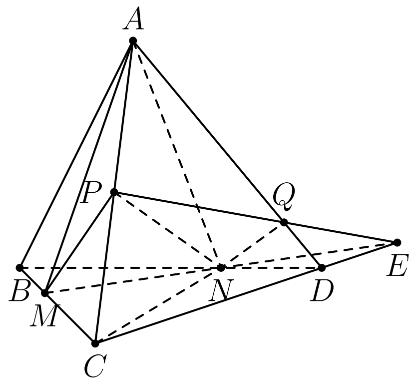
A $\frac{V_1}{V_2} = \frac{26}{19}$. **B** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{19}$. **C** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{15}{19}$. **D** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{26}{13}$.

Lời giải.

Gọi $E = MN \cap CD$ và $Q = AD \cap PE$.

Khi đó thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (MNP) là tứ giác $MNQP$.

Từ đó ta có $V_{ABMNQP} = V_{ABMN} + V_{AMNP} + V_{ANPQ}$. $(*)$



Áp dụng định lí Menelaus trong tam giác BCD ta có:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{ND}{NB} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{EC}{ED} = 4$$

Áp dụng định lí Menelaus trong tam giác ACD ta có:

$$\frac{PA}{PC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{QD}{QA} = 1 \Rightarrow 1 \cdot 4 \cdot \frac{QD}{QA} = 1 \Rightarrow \frac{QD}{QA} = \frac{1}{4}.$$

Ta có $\frac{S_{BMN}}{S_{BCD}} = \frac{BM}{BC} \cdot \frac{BN}{BD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}} = \frac{2}{9} \Rightarrow V_{ABMN} = \frac{2}{9}V_{ABCD}$. (1)

Lại có $\frac{S_{NMC}}{S_{DBC}} = \frac{d(N; BC) \cdot MC}{d(D; BC) \cdot BC} = \frac{NB}{DB} \cdot \frac{MC}{BC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{V_{AMNC}}{V_{ABCD}} = \frac{4}{9} \Rightarrow V_{AMNC} = \frac{4}{9}V_{ABCD}$.

Do đó $\frac{V_{AMNP}}{V_{AMNC}} = \frac{AP}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{AMNP} = \frac{1}{2}V_{AMNC} = \frac{2}{9}V_{ABCD}$. (2)

Lại có $\frac{S_{CND}}{S_{CBD}} = \frac{DN}{DB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_{ACDN}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{ACDN} = \frac{1}{3}V_{ABCD}$.

Do đó $\frac{V_{APQN}}{V_{ACDN}} = \frac{AP}{AC} \cdot \frac{AQ}{AD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5} \Rightarrow V_{APQN} = \frac{2}{5}V_{ACDN} = \frac{2}{15}V_{ABCD}$. (3)

Thay (1), (2) và (3) vào $(*)$, ta có $V_{ABMNQP} = \frac{2}{9}V_{ABCD} + \frac{2}{9}V_{ABCD} + \frac{2}{15}V_{ABCD} = \frac{26}{45}V_{ABCD}$.

Gọi $V_1 = V_{ABMNQ}$ và V_2 là thể tích phần còn lại ta có $\frac{V_1}{V_2} = \frac{26}{19}$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2 + 4x) + \log_{\frac{1}{3}}(2x + 3) = 0$ là

A 2. **B** 3. **C** 0. **D** 1.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^2 + 4x > 0 \\ 2x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -4 \end{array}\right. \\ x > -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}\log_3\left(x^2+4x\right)-\log_3\left(2x+3\right)=0 &\Leftrightarrow \log_3\frac{x^2+4x}{2x+3}=0\\ &\Leftrightarrow \frac{x^2+4x}{2x+3}=1\\ &\Leftrightarrow x^2+4x=2x+3\\ &\Leftrightarrow x^2+2x-3=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=-3\ (\text{loại}).\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có duy nhất 1 nghiệm.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để bất phương trình

$$\left(6+2\sqrt{7}\right)^x+(2-m)\left(3-\sqrt{7}\right)^x-(m+1)2^x\geq 0$$

nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$?

A 10. B 9. C 12. D 11.

Lời giải.

Chia cả 2 vế của bất phương trình cho $2^x>0$ ta được

$$\left(3+\sqrt{7}\right)^x+(2-m)\left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)^x-(m+1)\geq 0.$$

Nhận thấy $\left(3+\sqrt{7}\right)^x\cdot\left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)^x=1$, do đó đặt $t=\left(3+\sqrt{7}\right)^x\ (t>0)\Rightarrow\left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)^x=\frac{1}{t}$.

Phương trình trở thành

$$\begin{aligned}t+(2-m)\frac{1}{t}-(m+1)\geq 0 &\Leftrightarrow t^2-(m+1)t+2-m\geq 0\\ &\Leftrightarrow t^2-t+2\geq m(t+1)\\ &\Leftrightarrow m\leq\frac{t^2-t+2}{t+1}.\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-t+2}{t+1}$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{(2t-1)(t+1)-t^2+t-2}{(t+1)^2}=\dfrac{t^2+2t-3}{(t+1)^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

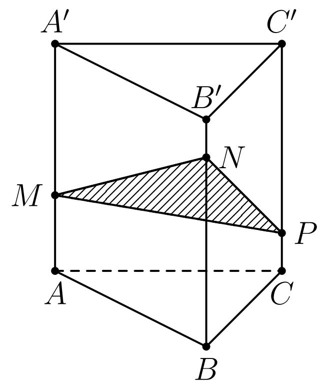
Từ bảng biến thiên ta có $m \leq 1$.
Kết hợp điều kiện đề bài có 12 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{3}$. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC', diện tích tam giác MNP bằng 4. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (MNP).

A. 120°. B. 45°. C. 30°. D. 90°.

Lời giải.

Gọi α là góc giữa 2 mặt phẳng (ABC) và (MNP).
Dễ thấy $\triangle ABC$ là hình chiếu của $\triangle MNP$ trên mặt phẳng (ABC).
Do đó ta có $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle MNP} \cos\alpha$.
Từ đó suy ra $\cos\alpha = \dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MNP}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$.
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (MNP) bằng 30°.



Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho hai hàm số $f(x)$ và $f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x) + 3f(-x) = \dfrac{1}{4+x^2}$.
Tính $I = \displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{\pi}{20}$. B. $I = \dfrac{\pi}{10}$. C. $I = -\dfrac{\pi}{20}$. D. $I = -\dfrac{\pi}{10}$.

Lời giải.

Đặt $t = -x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$.
Đổi cận $x = -2 \Rightarrow t = 2$; $x = 2 \Rightarrow t = -2$, ta có

$$I = -\int_{2}^{-2} f(-t)\ \mathrm{d}t = \int_{-2}^{2} f(-x)\ \mathrm{d}x.$$

Theo bài ra ta có

$$2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{4+x^2} \quad \Leftrightarrow 2\int_{-2}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x + 3\int_{-2}^{2} f(-x)\ \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow 3I + 2I = \int_{-2}^{2} \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{5}\int_{-2}^{2} \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $x = 2\tan u$ ta có $\mathrm{d}x = 2\dfrac{1}{\cos^2 u}\mathrm{d}u = 2\left(1 + \tan^2 u\right)\mathrm{d}u$.

Đổi cận $x=-2\Rightarrow u=-\dfrac{\pi}{4}$; $x=2\Rightarrow u=\dfrac{\pi}{4}$, ta có

$$I=\frac{1}{5}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\left(1+u^2\right)}{4+4\tan^2 u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{10}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}u=\frac{1}{10}u\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{10}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{20}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Cho $\displaystyle\int\limits_1^2 f\left(x\right)\,\mathrm{d}x=2$. Hãy tính $\displaystyle\int\limits_1^4\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

A $I=4$. (B) $I=1$. (C) $I=\dfrac{1}{2}$. (D) $I=2$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=1\Leftrightarrow t=1$; $x=4\Rightarrow t=2$, ta có

$$I=2\int\limits_1^2 f\left(t\right)\,\mathrm{d}t=2\int\limits_1^2 f\left(x\right)\,\mathrm{d}x=2\cdot 2=4.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Cho các số thực dương a,b với $a\neq 1$ và $\log_a b>0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\left[\begin{array}{l}0<a,b<1\\0<a<1<b\end{array}\right.$. **B** $\left[\begin{array}{l}0<a,b<1\\1<a,b\end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l}0<a,b<1\\0<b<1<a\end{array}\right.$. (D) $\left[\begin{array}{l}0<b<1<a\\1<a,b\end{array}\right.$.

Lời giải.

TH1: $0<a<1\Rightarrow \log_a b>0=\log_a 1\Leftrightarrow 0<b<1$.

TH2: $a>1\Rightarrow\log_a b>0=\log_a 1\Leftrightarrow b>1$.

Vậy $\left[\begin{array}{l}0<a,b<1\\1<a,b.\end{array}\right.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)\left(x^2-1\right)^3,\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

(A) 2. **B** 1. (C) 8. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=x^2(x-1)\left[(x-1)(x+1)\right]^3=x^2(x-1)(x-1)^3(x+1)^3=x^2(x-1)^4(x+1)^3$.

Suy ra $f'(x)$ có $x=0$ là nghiệm bội 2, $x=1$ là nghiệm bội 4 và $x=-1$ là nghiệm bội 3.

Do đó $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi đi qua điểm $x=-1$.

Vậy hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị $x=-1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Cho $\displaystyle\int\limits_{-2}^5 f\left(x\right)\,\mathrm{d}x=8$ và $\displaystyle\int\limits_5^{-2} g\left(x\right)\,\mathrm{d}x=3$. Tính $I=\displaystyle\int\limits_{-2}^5\left[f\left(x\right)-4g\left(x\right)-1\right]\,\mathrm{d}x$.

A $I=13$. (B) $I=27$. (C) $I=-11$. (D) $I=3$.

Lời giải.

Theo tính chất của tích phân ta có

$$I=\int\limits_{-2}^{5}\left[f\left(x\right)-4g\left(x\right)-1\right]\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{5}f\left(x\right)\,\mathrm{d}x-4\int\limits_{-2}^{5}g\left(x\right)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{-2}^{5}\,\mathrm{d}x=8\cdot4\cdot(-3)-x\Big|_{-2}^{5}=13.$$

Chọn đáp án A □

Câu 10. Cho hàm số $y=x^4+ax^3+bx^2+cx+4$ có đồ thị (C). Biết (C) cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=20a^2+20b^2+5c^2$.

A 32. B 64. C 16. D 8.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+4=0\Leftrightarrow ax^3+bx^2+cx=-x^4-4. \tag{1}$$

Nhận thấy $x=0$ không phải nghiệm của (1).

Do đó theo giả thiết $\exists x_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ sao cho $ax_0^3+bx_0^2+cx_0=-x_0^4-4$.

Bình phương hai vế ta có

$$x_0^2\left(ax_0^2+bx_0+c\right)^2=\left(x_0^2+4\right)^2\Leftrightarrow\left(ax_0^2+bx_0+c\right)^2=\frac{\left(x_0^2+4\right)^2}{x_0^2}.$$

Theo bất đẳng thức Buniakovsky, ta có

$$\left(ax_0^2+bx_0+c\right)^2\le\left(20a^2+20b^2+5c^2\right)\left(\frac{x_0^4}{20}+\frac{x_0^2}{20}+\frac{1}{5}\right)=\frac{T}{20}\left(x_0^4+x_0^2+4\right).$$

Từ đó suy ra

$$\frac{T}{20}\ge\frac{\left(ax_0^2+bx_0+c\right)^2}{x_0^4+x_0^2+4}=\frac{\left(x_0^2+4\right)^2}{x_0^2\left(x_0^4+x_0^2+4\right)}.$$

Đặt $x_0^2=t>0$, ta có $\dfrac{T}{20}\ge\dfrac{\left(t^2+4\right)^2}{t^3+t^2+4t}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{\left(t^2+4\right)^2}{t^3+t^2+4t}$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{4t\left(t^2+4\right)\left(t^3+t^2+4t\right)-\left(t^2+4\right)^2\left(3t^2+2t+4\right)}{\left(t^3+t^2+4t\right)^2}=\dfrac{\left(t^2+4\right)\left(t+2\right)\left(t^3-8\right)}{\left(t^3+t^2+4t\right)^2}$.

Vì $t>0$ nên $f'(t)=0\Leftrightarrow t=2$, ta có bảng biến thiên

t	0		2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{64}{20}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{(0;+\infty)} f(t) = f(2) = \dfrac{64}{20}$. Suy ra $\dfrac{T}{20} \geq \dfrac{64}{20} \Leftrightarrow T \geq 64$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x_0^2 = 2 \\ ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 = -x_0^4 - 4 \\ \dfrac{20a}{x_0^2} = \dfrac{20b}{x_0} = 5c \end{cases}$. (2)

<u>TH1</u>: $x_0 = \sqrt{2}$, ta có (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2a\sqrt{2} + 2b + \sqrt{2}c = -8 \\ a = \sqrt{2}b \\ c = 2\sqrt{2}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{4\sqrt{2}}{5} \\ b = -\dfrac{4}{5} \\ c = -\dfrac{8\sqrt{2}}{5} \end{cases} \Rightarrow T = 64$ (TM).

<u>TH2</u>: $x_0 = -\sqrt{2}$, ta có (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} -2a\sqrt{2} + 2b - \sqrt{2}c = -8 \\ a = -\sqrt{2}b \\ c = -2\sqrt{2}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{4\sqrt{2}}{5} \\ b = -\dfrac{4}{5} \\ c = \dfrac{8\sqrt{2}}{5} \end{cases} \Rightarrow T = 64$ (TM).

Vậy T có giá trị nhỏ nhất bằng 64.

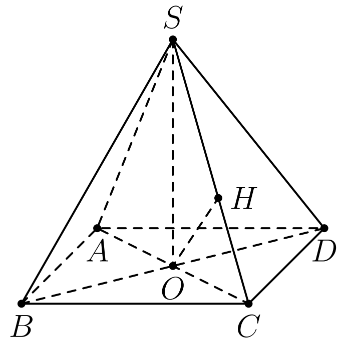
Nhận xét: Đây là một bài toán phức tạp, không phù hợp là một bài tập trắc nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh $2a$, cạnh bên $SA = a\sqrt{5}$. Khoảng cách giữa BD và SC là

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{30}}{5}$. C. $\dfrac{a\sqrt{15}}{6}$. D. $\dfrac{a\sqrt{30}}{6}$.

Lời giải.



Vì chóp $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Trong (SOC) kẻ $OH \perp SC$ $(H \in SC)$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SOC) \Rightarrow OH \perp BD$.

Suy ra OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC.

Do đó $d\,(BD; SC) = OH$.

Ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$ nên $OC = \dfrac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$.

Suy ra $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{5a^2 - 2a^2} = a\sqrt{3}$.

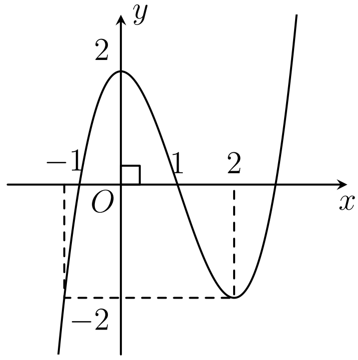
Trong $\triangle SOC$ vuông tại O có $OH = \dfrac{SO \cdot OC}{SC} = \dfrac{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{30}}{5}$.

Vậy $d\,(BD; SC) = OH = \dfrac{a\sqrt{30}}{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 12.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\cos x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $\left(0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ là



A $[-2; 2]$. **B** $(0; 2)$. **C** $(-2; 2)$. **D** $[0; 2)$.

Lời giải.

Đặt $t = \cos x$, phương trình trở thành $f(t) = m$. (1)

Với $x \in \left(0; \dfrac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1; 1)$.

Nếu $t = -1$ hoặc $t \in (0; 1)$ thì ứng với một giá trị của x; nếu $t \in (-1; 0]$ thì ứng với 2 giá trị của x.

Xét đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên $[-1; 1)$, ta thấy:

+) $m = -2$ thì (1) có 1 nghiệm $t = -1$ nên phương trình đã cho có 1 nghiệm;

+) $-2 < m \leq 0$ thì (1) có 1 nghiệm $t \in (-1; 0)$ nên phương trình đã cho có 2 nghiệm;

+) $0 < m < 2$ thì (1) có 1 nghiệm $t \in (-1; 0)$ và 1 nghiệm $t \in (0; 1)$ nên phương trình đã cho có 3 nghiệm;

+) $m = 2$ thì (1) có 1 nghiệm $t = 0$ nên phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in (0; 2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Phát biểu nào sau đây **đúng**?

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

A Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

B Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.

C Hàm số có 3 cực tiểu.

D Hàm số có giá trị cực tiểu là 0.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$. Thể tích tứ diện $OABC$ bằng

A $\dfrac{1}{3}$. **B** $\dfrac{1}{6}$. **C** 1. **D** 2.

Lời giải.

Tứ diện $OABC$ vuông tại O nên ta có $V_{OABC} = \dfrac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \dfrac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - \sqrt{4 - x^2}$. Khi đó $M - m$ bằng

A 4. **B** $2\left(\sqrt{2}-1\right)$. **C** $2-\sqrt{2}$. **D** $2\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=[-2;2]$.

Ta có $y'=1-\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=1+\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Do đó $y'=0\Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}=-1\Leftrightarrow -x=\sqrt{4-x^2}\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ x^2=4-x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=-\sqrt{2}$.

Khi đó $y(2)=2; y(-2)=-2; y\left(-\sqrt{2}\right)=-2\sqrt{2}$.

Suy ra $m=y\left(-\sqrt{2}\right)=-2\sqrt{2}, M=y(2)=2$. Vậy $M-m=2+2\sqrt{2}=2\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua các điểm $A(-2;0;0), B(0;3;0)$ Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

A $3x-2y+2z+6=0$. **B** $2x+2y-z-1=0$.

C $x+y+z+1=0$. **D** $x-2y-z-3=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có phương trình $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{-3}=1\Leftrightarrow 3x-2y+2z+6=0$.

Suy ra (P) có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_p}=(3;-2;2)$.

Xét A: $3x-2y+2z+6=0$ có $\overrightarrow{a}=(3;-2;2)$ là 1 VTPT và $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{n_P}=9+4+4=17\neq 0$.

Xét B: $2x+2y-z-1=0$ có $\overrightarrow{b}=(2;2;-1)$ là 1 VTPT và $\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{n_P}=6-4-2=0\Rightarrow \overrightarrow{b}\perp\overrightarrow{n_P}$.

Vậy (P) vuông góc với mặt phẳng $2x+2y-z-1=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;2)$, $B(-2;1;3)$, $C(3;2;4)$, $D(6;9;-5)$. Tọa độ trọng tâm của tứ diện $ABCD$ là

A $(2;3;1)$. **B** $(2;3;-1)$. **C** $(-2;3;1)$. **D** $(2;-3;1)$.

Lời giải.

Gọi $I(x;y;z)$ là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, ta có

$$\begin{cases}x=\dfrac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4}=\dfrac{1-2+3+6}{4}=2\\ y=\dfrac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4}=\dfrac{0+1+2+9}{4}=3\\ z=\dfrac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}=\dfrac{2+3+4-5}{4}=1.\end{cases}$$

Vậy $I(2;3;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Tập xác định của hàm số $y=(x^2-3x+2)^{\pi}$ là

A $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **B** $(1;2)$.

C $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$. **D** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2-3x+2>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+9=0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu là

(A) $I(1;-2;3)$ và $R=5$.
(B) $I(1;-2;3)$ và $R=\sqrt{5}$.
(C) $I(-1;2;-3)$ và $R=5$.
(D) $I(-1;2;-3)$ và $R=\sqrt{5}$.

Lời giải.

Mặt cầu $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+9=0$ có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{1+4+9-9}=\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Tích phân $\int\limits_0^2 \dfrac{x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{7}{3}$.
(B) $\ln\dfrac{7}{3}$.
(C) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{7}$.
(D) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{7}{3}$.

Lời giải.

Đặt $u=x^2+3\Rightarrow \mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x\Rightarrow x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}u$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow u=3$; $x=2\Rightarrow u=7$, ta có

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_3^7 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\ln|u|\Big|_3^7=\frac{1}{2}\ln 7-\frac{1}{2}\ln 3=\frac{1}{2}\ln\frac{7}{3}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau?

(A) $\int 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=2\left(\mathrm{e}^x+C\right)$.
(B) $\int x^3\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^4+C}{4}$.
(C) $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln x+C$.
(D) $\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$.

Lời giải.

Ta có $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln|x|+C$ nên mệnh đề ở phương án C sai.

Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Đầu mỗi tháng anh A gửi vào ngân hàng 3 triệu đồng với lãi suất kép là 0,6% mỗi tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng (khi ngân hàng đã tính lãi) thì anh A có được số tiền cả lãi và gốc nhiều hơn 100 triệu, biết lãi suất không đổi trong quá trình gửi.

(A) 30 tháng.
(B) 40 tháng.
(C) 35 tháng.
(D) 31 tháng.

Lời giải.

Ta có $T=\dfrac{M}{r}\left[(1+r)^n-1\right](1+r)$.

Giả sử sau n tháng sau anh A nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu, khi đó ta có

$$\frac{3}{0,6\%}\left[(1+0,6\%)^n-1\right](1+0,6\%)>100\Leftrightarrow n>30{,}3.$$

Vậy sau ít nhất sau 31 tháng thì anh A có được số tiền cả lãi và gốc nhiều hơn 100 triệu.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng 2 nghiệm.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Ⓐ $-2 < m < -1$.

Ⓑ $m > 0, m = -1$.

C $m = -2, m > -1$.

Ⓓ $m = -2, m \geq -1$.

Lời giải.

Ta có $f(x) - 1 = m \Leftrightarrow f(x) = m + 1$. (1)

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m + 1$.

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có đúng 2 nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+1>0 \\ m+1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>-1 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 24. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^{2x}$?

Ⓐ $\displaystyle\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x = 2.5^{2x}\ln 5 + C$.

Ⓑ $\displaystyle\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x = 2.\frac{5^{2x}}{\ln 5} + C$.

C $\displaystyle\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{25^x}{2\ln 5} + C$.

Ⓓ $\displaystyle\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{25^{x+1}}{x+1} + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.\frac{5^{2x}}{\ln 5} + C = \frac{25^x}{2\ln 5} + C$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của $\vec{a}$ là

Ⓐ $(-3; 2; -1)$. Ⓑ $(2; -1; -3)$. **C** $(-1; 2; -3)$. Ⓓ $(2; -3; -1)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow \vec{a} = (-1; 2; -3)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 26.

Cho hàm số $f(x)$ có $f(2) = f(-2) = 0$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình bên. Hàm số $y = [f(3-x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

A $(2; 5)$. Ⓑ $(1; +\infty)$. Ⓒ $(-2; -1)$. Ⓓ $(1; 2)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng xét dấu $f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Từ đó suy ra $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $g(x) = [f(3-x)]^2 \Rightarrow g'(x) = -2f(3-x)f'(3-x)$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến suy ra $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < 3-x < 1 \\ 3-x > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < x < 5 \\ x < 1 \end{array}\right.$.

Nhận xét: Bài này đề ra không chính xác vì chọn được cả phương án A và C.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Tính khoảng cách giữa các tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$ tại các điểm cực trị của (C).

A 4. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Với $x = 1 \Rightarrow y = -1$, ta có phương trình tiếp tuyến tại $(1; -1)$ là $d_1 : y = -1$.

Với $x = -1 \Rightarrow y = 3$, ta có phương trình tiếp tuyến tại $(-1; 3)$ là $d_2 : y = 3$.

Vậy $d(d_1; d_2) = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Khối trụ tròn xoay có đường kính bằng $2a$, chiều cao $h = 2a$ có thể tích là

A $V = 2\pi a^2$. **B** $V = 2\pi a^3$. **C** $V = 2\pi a^2 h$. **D** $V = \pi a^3$.

Lời giải.

Khối trụ tròn xoay có bán kính bằng $\dfrac{2a}{2} = a$ nên có thể tích là $V = \pi a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 29.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A 3. **B** 4. **C** 1. **D** 2.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-1 \,\|\|\, -\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$ và tiệm cận đứng $x = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Gọi l, h, r lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính mặt đáy của hình nón. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón là

A $S_{\text{xq}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. **B** $S_{\text{xq}} = \pi r h$. **C** $S_{\text{xq}} = 2\pi r l$. **D** $S_{\text{xq}} = \pi r l$.

Lời giải.

Công thức tính diện tích xung quanh của hình nón là $S_{\text{xq}} = \pi r l$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên $[0;2]$ và $f(2) = 16$; $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int\limits_0^1 x f'(2x)\,\mathrm{d}x$.

A $I = 7$. (B) $I = 20$. (C) $I = 12$. (D) $I = 13$.

Lời giải.

Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = 2$, ta có

$$I = \int\limits_0^2 \frac{t}{2} f'(t) \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int\limits_0^2 t f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Đặt $\begin{cases} u = t \\ \mathrm{d}v = f'(t)\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ v = f(t) \end{cases}$, ta có

$$I = \frac{1}{4}\left[t f(t)\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t \right] = \frac{1}{4}\left[2f(2) - 4\right] = \frac{1}{4}(2\cdot 16 - 4) = 7.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = b, AA' = c$. Thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ bằng bao nhiêu?

(A) $\frac{1}{3}abc$. (B) $3abc$. **C** abc. (D) $\frac{1}{2}abc$.

Lời giải.

Thể tích khối hộp chữ nhật bằng tích của ba kích thước. Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB \cdot AD \cdot AA' = abc$.

Nhận xét: Bài này đề gốc cho $AC = c$ nên không có phương án đúng. Tôi sửa đề thành $AA' = c$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Hai đồ thị của hai hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ và $y = 3x^2 - 2x - 1$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

(A) 1. (B) 2. (C) 0. **D** 3.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$-x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 3x^2 - 2x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Vậy hai đồ thị của hai hàm số đã cho có 3 điểm chung.

Chọn đáp án (D) □

Câu 34. Đặt $a = \log_2 5, b = \log_3 5$. Hãy biểu diễn $\log_6 5$ theo a và b.

(A) $\log_6 5 = \dfrac{1}{a+b}$. (B) $\log_6 5 = \dfrac{ab}{a+b}$. (C) $\log_6 5 = a^2 + b^2$. (D) $\log_6 5 = a + b$.

Lời giải.

Ta có $\log_6 5 = \dfrac{1}{\log_5 6} = \dfrac{1}{\log_5 2 + \log_5 3} = \dfrac{1}{\frac{1}{\log_2 5} + \dfrac{1}{\log_3 5}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} = \dfrac{ab}{a+b}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Cho các hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

(A) $\displaystyle\int_a^a kf(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(B) $\displaystyle\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x = x\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(C) $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

(D) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dựa vào các đáp án ta dễ dàng nhận thấy các đáp án A, C, D đúng, đáp án B sai.

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên gồm 7 chữ số khác nhau có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$. Tính xác suất để số được chọn luôn có mặt chữ số 2 và thỏa mãn $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 > a_5 > a_6 > a_7$.

(A) $\dfrac{1}{243}$. (B) $\dfrac{1}{486}$. (C) $\dfrac{1}{1215}$. (D) $\dfrac{1}{972}$.

Lời giải.

Số các số tự nhiên có 7 chữ số khác nhau là $9 \times \mathrm{A}_9^6 = 544320$ số.

Ta có $a_1 \neq 0 \Rightarrow 0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 > a_5 > a_6 > a_7$.

Số được chọn có các chữ số khác nhau nên $6 \leq a_4 \leq 9$.

TH1: $a_4 = 6$, ta có $a_1, a_2, a_3, a_5, a_6, a_7 \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Chọn bộ số $a_1a_2a_3$ có $\mathrm{C}_5^3 = 10$ cách, chọn bộ số $a_5a_6a_7$ có $\mathrm{C}_3^3 = 1$ cách.

Cách cách chọn này luôn có mặt chữ số 2 nên trường hợp này có $10 \times 1 = 10$ số.

TH2: $a_4 = 7$, ta có $a_1, a_2, a_3, a_5, a_6, a_7 \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Chọn các bộ số tùy ý có $\mathrm{C}_6^3 \times \mathrm{C}_4^3 = 80$ cách.

Chọn các bộ số không có mặt chữ số 2 có $\mathrm{C}_5^3 \times \mathrm{C}_3^3 = 10$ cách.

Do đó trường hợp này có $80 - 10 = 70$ số.

TH3: $a_4 = 8$, ta có $a_1, a_2, a_3, a_5, a_6, a_7 \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Chọn các bộ số tùy ý có $\mathrm{C}_7^3 \times \mathrm{C}_5^3 = 350$ cách.

Chọn các bộ số không có mặt chữ số 2 có $\mathrm{C}_6^3 \times \mathrm{C}_4^3 = 80$ cách.

Do đó trường hợp này có $350 - 80 = 270$ số.

TH4: $a_4 = 9$, ta có $a_1, a_2, a_3, a_5, a_6, a_7 \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Chọn các bộ số tùy ý có $\mathrm{C}_8^3 \times \mathrm{C}_6^3 = 1120$ cách.
Chọn các bộ số không có mặt chữ số 2 có $\mathrm{C}_7^3 \times \mathrm{C}_5^3 = 350$ cách.
Do đó trường hợp này có $1120 - 350 = 770$ số.
Từ đó suy ra có $10 + 70 + 270 + 770 = 1120$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{1120}{544320} = \dfrac{1}{486}$.
Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Kết quả $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$ bằng

A $I = 8$. B $I = 4$. C $I = 2$. D $I = \frac{1}{4}$.

Lời giải.
Đặt $t = -x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$.
Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = -1$; $x = -1 \Rightarrow t = 1$, ta có

$$I = e\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = -\int_{1}^{-1} \frac{f(-t)}{1+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{f(-x)}{1+\frac{1}{\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^x f(-x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$$

Do $f(x)$ là hàm số chẵn nên $f(x) = f(-x), \forall x \in [-1;1] \Rightarrow I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^x f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

Từ đó suy ra

$$I + I = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^x f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{(\mathrm{e}^x+1)\,f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 4.$$

Vậy $I = 2$.
Chọn đáp án C □

Câu 38. Trong khai triển nhị thức $(a+2)^{n+6}$ có tất cả 17 số hạng. Khi đó giá trị n bằng

A 12. B 11. C 10. D 17.

Lời giải.
Trong khai triển nhị thức $(a+2)^{n+6}$ có tất cả $n+7$ số hạng.
Theo giả thiết ta có $n + 7 = 17 \Leftrightarrow n = 10$.
Chọn đáp án C □

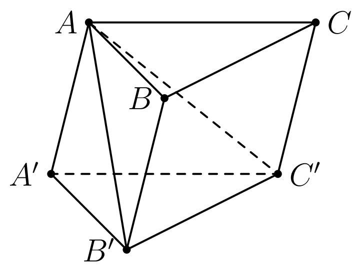
Câu 39. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Tính thể tích khối tứ diện $ABCB'C'$.

A $\dfrac{V}{4}$. B $\dfrac{V}{2}$. C $\dfrac{3V}{4}$. D $\dfrac{2V}{3}$.

Lời giải.

Ta có $V_{A.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}d(A,(A'B'C')S_{\triangle A'B'C'} = \dfrac{1}{3}V$.

Do đó $V_{ABCB'C'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} = V - \dfrac{1}{3}V = \dfrac{2}{3}V$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Một khối gỗ hình lập phương có thể tích V_1. Một người thợ mộc muốn gọt giũa khối gỗ đó thành một khối trụ có thể tích là V_2. Tỉ số $k = \dfrac{V_2}{V_1}$ lớn nhất bằng bao nhiêu?

(A) $k = \dfrac{\pi}{4}$. (B) $k = \dfrac{2}{\pi}$. **C** $k = \dfrac{\pi}{2}$. (D) $k = \dfrac{4}{\pi}$.

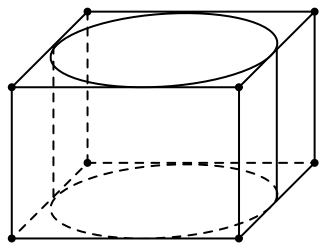
Lời giải.

Gọi a là cạnh của hình lập phương.

Ta có thể tích của khối lập phương là $V_1 = a^3$.

Suy ra tỉ số $k = \dfrac{V_2}{V_1}$ lớn nhất khi và chỉ khi V_2 lớn nhất.

Khi đó hình trụ có chiều cao bằng cạnh của hình lập phương và có đường tròn đáy nội tiếp một mặt của hình lập phương.



Do đó hình trụ có chiều cao $h = a$ và bán kính đáy $r = \dfrac{a}{2}$.

Ta có $V_2 = \pi r^2 h = \pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \cdot a = \dfrac{\pi a^3}{2}$. Vậy $k = \dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 41.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

(A) $(-\infty;-1)$. (B) $(-1;1)$.

C $(1;+\infty)$. (D) $(0;1)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Tính $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+1}-\sqrt{n+2}}{2n-3}$.

(A) $+\infty$. **B** 1. (C) 2. (D) $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+1}-\sqrt{n+2}}{2n-3} = \lim \dfrac{\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}}{2-\dfrac{3}{n}} = \dfrac{2}{2} = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{2}{5}}(x-4)+1>0$.

Ⓐ $\left[\dfrac{13}{2};+\infty\right)$. Ⓑ $\left(-\infty;\dfrac{13}{2}\right)$. Ⓒ $(4;+\infty)$. **D** $\left(4;\dfrac{13}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{2}{5}}(x-4)+1>0 \Leftrightarrow \log_{\frac{2}{5}}(x-4)>-1 \Leftrightarrow 0<x-4<\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1} \Leftrightarrow 4<x<\dfrac{13}{2}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(4;\dfrac{13}{2}\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số của tập $X=\{1;3;5;8;9\}$?

Ⓐ P_5. Ⓑ P_4. Ⓒ C_5^4. **D** A_5^4.

Lời giải.

Số các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau được tạo thành từ $X=\{1;3;5;8;9\}$ là A_5^4 số.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n=6^n-1$. Tìm số hạng thứ 5 của cấp số nhân đã cho.

A 6480. Ⓑ 6840. Ⓒ 7775. Ⓓ 12005.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} S_5=u_1+u_2+u_3+u_4+u_5 \\ S_4=u_1+u_2+u_3+u_4 \end{cases} \Rightarrow u_5=S_5-S_4=6^5-1-(6^4-1)=6480.$

Chọn đáp án A □

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;1)$, $B(3;-2;0)$, $C(1;2;-2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A sao cho tổng khoảng cách từ B và C đến (P) lớn nhất, biết rằng (P) không cắt đoạn BC. Khi đó vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

Ⓐ $\vec{n}=(2;-2;-1)$. Ⓑ $\vec{n}=(1;0;2)$. Ⓒ $\vec{n}=(-1;2;-1)$. **D** $\vec{n}=(1;0;-2)$.

Lời giải.

Kiểm tra A: Mặt phẳng (P) có phương trình $2x-2y-z-1=0$. Thay tọa độ B,C vào (P) ta thấy B,C nằm về 2 phía (P) nên loại A.

Kiểm tra B: Mặt phẳng (P) có phương trình $x+2z-3=0$. Thay tọa độ B,C vào (P) ta thấy $B\in(P)$ nên loại B.

Kiểm tra C: Mặt phẳng (P) có phương trình $-x+2y-z+2=0$. Thay tọa độ B,C vào (P) ta thấy B,C nằm về 2 phía (P) nên loại C.

Kiểm tra D: Mặt phẳng (P) có phương trình $x-2z+1=0$. Thay tọa độ B,C vào (P) ta thấy B,C nằm về cùng phía (P) nên chọn D.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;-2;-1)$, $B(-2;-4;3)$, $C(1;3;-1)$. Tìm điểm $M\in(Oxy)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A $\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{3}{5};0\right)$. Ⓑ $\left(-\dfrac{1}{5};\dfrac{3}{5};0\right)$. Ⓒ $\left(\dfrac{1}{5};-\dfrac{3}{5};0\right)$. Ⓓ $\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{4}{5};0\right)$.

Lời giải.

Gọi $I(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.
Ta có $\overrightarrow{IA}=(-a;-2-b;-1-c)$; $\overrightarrow{IB}=(-2-a;-4-b;3-c)$; $\overrightarrow{IC}=(1-a;3-b;-1-c)$.
Suy ra $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=(-5a+1;-5b+3;-5c+1)$.

Khi đó $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}-5a+1=0\\-5b+3=0\\-5c+1=0\end{cases}\Rightarrow I\left(\frac{1}{5};\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$.

Lại có $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{MI}+3\overrightarrow{IC}\right|=\left|5\overrightarrow{MI}\right|=5MI$.
Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ đạt giá trị nhỏ nhất.
Khi đó M là hình chiếu của I trên (Oxy). Vậy $M\left(\frac{1}{5};\frac{3}{5};0\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(m-1)x^2-4mx$ đồng biến trên đoạn $[1;4]$.

A $m\in\mathbb{R}$. B $m\le\frac{1}{2}$. C $\frac{1}{2}<m<2$. D $m\le 2$.

Lời giải.
Ta có $y'=x^2-2(m-1)x-4m$.
Hàm số đồng biến trên $[1;4]$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}y'\ge 0,\forall x\in[1;4]&\Leftrightarrow x^2-2(m-1)x-4m\ge 0,\forall x\in[1;4]\\&\Leftrightarrow x^2+2x\ge 2m(x+2),\forall x\in[1;4]\\&\Leftrightarrow x\ge 2m,\forall x\in[1;4]\\&\Leftrightarrow m\le\frac{x}{2},\forall x\in[1;4]\\&\Leftrightarrow m\le\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(2;m-1;3)$, $\vec{b}=(1;3;-2n)$. Tìm m,n để các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

A $m=7,n=-\frac{3}{4}$. B $m=1,n=0$. C $m=7,n=-\frac{4}{3}$. D $m=4,n=-3$.

Lời giải.
Ta có $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng $\Leftrightarrow\exists k>0$ sao cho $\vec{a}=k\vec{b}$.

Từ đó suy ra $\begin{cases}2=k.1\\m-1=3k\\3=-2nk\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=2\\m-1=6\\3=-4n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=2\\m=7\\n=-\frac{3}{4}.\end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 50. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực?

A $y=\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^x$. B $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^x$.

C $y=\log_{\frac{\pi}{4}}(2x^2+1)$. D $y=\log_{\frac{1}{2}}x$.

Lời giải.

Loại phương án C và D vì các hàm số trong các phương án này không xác định trên $\mathbb{R}$.

Chọn A vì $\frac{2}{\mathrm{e}} < 1$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. D	3. C	4. C	5. A	6. A	7. B	8. B	9. A	10. B
11. B	12. B	13. A	14. C	15. D	16. B	17. A	18. D	19. C	20. D
21. C	22. D	23. C	24. C	25. C	26. A	27. A	28. B	29. D	30. D
31. A	32. C	33. D	34. B	35. B	36. B	37. C	38. C	39. D	40. C
41. C	42. B	43. D	44. D	45. A	46. D	47. A	48. B	49. A	50. A

29 ĐỀ THI THỬ THPT BỈM SƠN, THANH HÓA – LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Với giá trị nào của m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt?

Ⓐ $m < -8$. Ⓑ $-8 < m < 8$. **C** $\forall m \in \mathbb{R}$. Ⓓ $m > 8$.

Lời giải.

ĐKXĐ : $x \neq -1$

Xét phương trình có hoành độ giao điểm $\dfrac{x-1}{x+1} = -x + m \qquad (*)$

Với $x \neq -1$ thì $(*) \Leftrightarrow x - 1 = (x+1)(-x+m)$

$x - 1 = -x^2 + (m-1)x + m \Leftrightarrow x^2 - (m-2)x - m - 1 = 0 \qquad (**)$

Đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(**)$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-2)^2 + 4(m+1) > 0 \\ (-1)^2 - (m-2)(-1) - m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 8 > 0 \\ -2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \mathbb{R}.$$

Vậy $m \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 2. Cho $A = \{a; b; c\}$ và $B = \{a; c; d; e\}$. Hãy chọn khẳng định đúng.

Ⓐ $A \cap B = \{a; b; c; d; e\}$. Ⓑ $A \cap B = \{a\}$.
C $A \cap B = \{a; c\}$. Ⓓ $A \cap B = \{d; e\}$.

Lời giải.

Ta có $A = \{a; b; c\}$ và $B = \{a; c; d; e\}$ nên $A \cap B = \{a; c\}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 3. Cho $\vec{a} = (3; -4)$, $\vec{b} = (-1; 2)$. Tìm tọa độ của $\vec{a} + \vec{b}$

A $(2; -2)$. Ⓑ $(-3; -8)$. Ⓒ $(4; -6)$. Ⓓ $(-4; 6)$.

Lời giải.

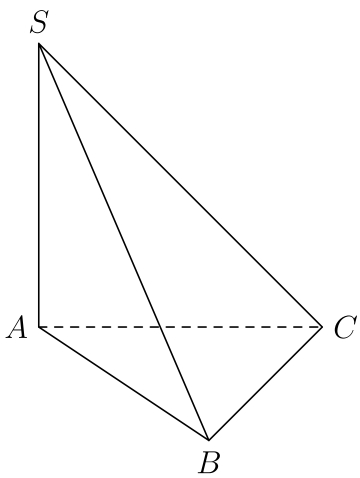
Ta có $\vec{a} + \vec{b} = (3 + (-1); -4 + 2) = (2; -2)$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 4. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hai mặt (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp biết $SC = a\sqrt{3}$.

Ⓐ $\dfrac{2a^3\sqrt{6}}{9}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. Ⓒ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Ⓓ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Từ đề bài ta có
$\begin{cases}(SAB)\perp(ABC)\\(SAC)\perp(ABC)\end{cases} \Rightarrow SA\perp(ABC)$.
Vì tam giác ABC đều cạnh
$a \Rightarrow S_{ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ và $AB=AC=BC=a$.
Tam giác SAC vuông tại A (do $SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp AC$) nên theo định lí Pytago ta có $SA=\sqrt{SC^2-AC^2}=\sqrt{3a^2-a^2}=a\sqrt{2}$.
Thể tích khối chóp là
$V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}S_{ABC}\cdot SA=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot a\sqrt{2}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$(đvtt).

Chọn đáp án B □

Câu 5. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=1+x+\dfrac{4}{x}$ trên đoạn $[-3;-1]$ là

A -5. **B** -6. **C** -4. **D** 5.

Lời giải.

Hàm số đã xác định và liên tục trên $[-3;-1]$.

Ta có: $y'=1-\dfrac{4}{x^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\in[-3;-1]\\x=2\notin[-3;-1]\end{array}\right.$

Lại có $y(-3)=-\dfrac{10}{3}; y(-1)=-4; y(-2)=-3\Rightarrow \min y=-4$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A $y=|x+3|+|x-3|$. **B** $y=x^{2018}-2017$.

C $y=\sqrt{2x+3}$. **D** $y=\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}$.

Lời giải.

+) Xét hàm số $y=f(x)=|x+3|+|x-3|$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$ nên $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.
Lại có $f(-x)=|-x+3|+|-x-3|=|x+3|+|x-3|=f(x)$ nên hàm số đã cho là hàm chẵn.
+) Xét hàm số $y=f(x)=x^{2018}-2017$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$ nên $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.
Lại có $f(-x)=(-x)^{2018}-2017=x^{2018}-2017=f(x)$ nên hàm số đã cho là hàm số chẵn.
+) Xét hàm số $y=\sqrt{2x+3}$ có tập xác định $D=\left[\dfrac{-3}{2};+\infty\right)$, giả sử ta lấy $2\in D\Rightarrow -2\in D$ nên hàm số đã cho không là hàm số lẻ.
+) Xét hàm số $y=f(x)=\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}$ có $D=[-3;3]$ nên với $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$ (1).
Xét $f(-x)=\sqrt{3-x}-\sqrt{3-(-x)}=\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}=-\left(\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}\right)=-f(x)$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra hàm số hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Điều kiện để biểu thức $P=\tan(\alpha+\dfrac{\pi}{3})+\cot(\alpha-\dfrac{\pi}{6})$ xác định là

A $\alpha\neq\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{R}$. **B** $\alpha\neq\dfrac{-\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{R}$.

C $\alpha\neq\dfrac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{R}$. **D** $\alpha\neq\dfrac{2\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{R}$.

Lời giải.

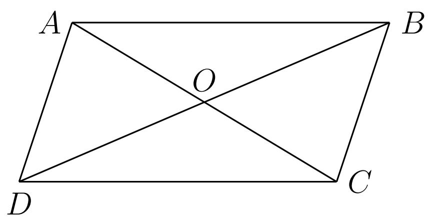
Biểu thức xác định khi $\begin{cases} \alpha + \dfrac{\pi}{3} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \alpha - \dfrac{\pi}{6} \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \neq \dfrac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{R})$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

A $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
B $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}|$.
C $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
D $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.



+) Vì $ABCD$ là hình bình hành tâm O nên O là trung điểm hai đường chéo AC, BD. Suy ra
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$; $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
+) Lại có $ABCD$ là hình bình hành nên theo qui tắc hình bình hành ta có

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD};\ \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} \Rightarrow |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DB}| = BD.$$

+) Ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (theo quy tắc hình bình hành).
+) Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \neq \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.
Chọn đáp án D □

Câu 9. Giới hạn sau $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 1}$ có giá trị là

A 2. B $+\infty$. C $\dfrac{1}{2}$. D 0.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 10. Tập xác định của hàm số $f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x}{x^2 + 1}$ là tập hợp nào sau đây?

A $\mathbb{R} \backslash \{-1; 1\}$. B $\mathbb{R}$. C $\mathbb{R} \backslash \{1\}$. D $\mathbb{R} \backslash \{-1\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq -1$ (luôn đúng vì $x^2 \geq 0; \forall x$)
Suy ra tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Chọn đáp án B □

Câu 11. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số tuần hoàn?

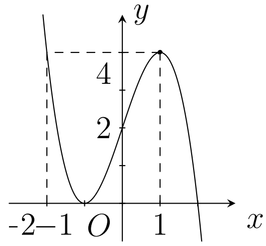
A $y = \sin x$. B $y = \dfrac{x - 1}{x + 2}$. C $y = x^2$. D $y = x^3 + 2$.

Lời giải.

Trong các đáp án đã cho chỉ có hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn (chu kỳ $T = 2\pi$).
Chọn đáp án A □

Câu 12.

Đường cong sau đây là đồ thị hàm số nào?



(A) $y = -x^3 - 3x + 2$. (B) $y = x^3 - 3x + 2$.

C $y = -x^3 + 3x + 2$. (D) $y = x^3 + 3x - 2$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta có $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ nên ta loại đáp án có hệ số $a > 0$.

Lại thấy đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(-1; 0)$ nên chỉ có hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{4x^2 + 3x + 1}$ là hàm số nào sau đây?

(A) $y = \dfrac{1}{2\sqrt{4x^2 + 3x + 1}}$. (B) $y = 12x + 3$.

(C) $y = \dfrac{8x + 3}{\sqrt{4x^2 + 3x + 1}}$. **D** $y = \dfrac{8x + 3}{2\sqrt{4x^2 + 3x + 1}}$.

Lời giải.

Ta có : $y' = (\sqrt{4x^2 + 3x + 1})' = \dfrac{(4x^2 + 3x + 1)'}{2\sqrt{4x^2 + 3x + 1}} = \dfrac{8x + 3}{2\sqrt{4x^2 + 3x + 1}}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Tam thức $f(x) = 3x^2 + 2(2m - 1)x + m + 4$ dương với mọi x khi

(A) $-\dfrac{11}{4} < m < 1$. (B) $m < -1$ hoặc $m > \dfrac{11}{4}$.

C $-1 < m < \dfrac{11}{4}$. (D) $-\dfrac{11}{4} \leq m \leq 1$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = 3x^2 + 2(2m - 1)x + m + 4$

Khi đó $f(x) > 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ \Delta' = (2m - 1)^2 - 3(m + 4) < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 7m - 11 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < \dfrac{11}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Biết ba số hạng đầu của cấp số cộng là $-2; x; 6$. Tìm số hạng thứ năm của cấp số cộng đó.

(A) 2. (B) 18. (C) 10. **D** 14.

Lời giải.

Áp dụng tính chất của cấp số cộng $u_n = u_1 + (n - 1)d$.

Suy ra $d = \dfrac{u_3 - u_1}{2} = 4 \Rightarrow u_5 = u_1 + 4d = -2 + 4.4 = 14$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Hệ số của x^7 trong khai triển của nhị thức Niu- tơn $(3 - x)^9$ là

(A) $-\mathrm{C}_9^7$. (B) C_9^7. (C) $9\mathrm{C}_9^7$. **D** $-9\mathrm{C}_9^7$.

Lời giải.

Ta có $(3-x)^9 = \sum\limits_{k=0}^{9} \mathrm{C}_9^k 3^{9-k}(-x)^k = \sum\limits_{k=0}^{9} \mathrm{C}_9^k 3^{9-k}(-1)^k.x^k$

Số hạng chứa x^7 trong khai triển ứng với $k=7$ nên hệ số của x^7 là $\mathrm{C}_9^7 3^{9-7}(-1)^7 = -9\mathrm{C}_9^7$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{c} - \vec{b})$.
B $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b})$.
C $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d})$.
D $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c})$.

Lời giải.

Vì P là trung điểm của CD nên

$\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AM}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-3}{2x+1}$ là

A $x = -\frac{1}{2}$.
B $y = -\frac{1}{2}$.
C $x = \frac{1}{2}$.
D $y = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-3}{2x+1}$ nhận đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}$ làm tiệm cận ngang.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Hình nào sau đây không có tâm đối xứng?

A Hình tròn.
B Hình thoi.
C Hình tam giác đều .
D Hình vuông.

Lời giải.

Hình tròn có tâm đối xứng là tâm hình tròn.

Hình thoi có tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo.

Hình tam giác đều không có tâm đối xứng.

Hình vuông có tâm đối xứng là giao điểm hai đường chéo(tâm hình vuông).

Chọn đáp án C □

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để hàm số $y = (m-2)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A 2017.
B 2015.
C Vô số.
D 2016.

Lời giải.

Hàm số $y = (m-2)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$

Mà $m \in [-2018; 2018]; m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{3; 4; 5; 6; ...; 2018\}$. Vậy có 2016 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

(A) 4. (B) 2. (C) 1. **D** 3.

Lời giải.

TXĐ $D=(-\infty;-1)\bigcup(1;+\infty)$

Ta có $\lim\limits_{x\to1^+} y=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty$ nên $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to1^-} y=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-(x+1)^2}{\sqrt{-x-1}.\sqrt{-x+1}}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-\sqrt{-x-1}}{\sqrt{-x+1}}=0$ nên $x=-1$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số .

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{1}}=1\Rightarrow$ Tiệm cận ngang $y=1$.

Lại có $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\dfrac{1}{-\sqrt{1}}=-1\Rightarrow$ Tiệm cận ngang $y=-1$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả 3 tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Đồ thị hàm số nào sau đây có tiệm cận?

(A) $y=x^2$. (B) $y=0$. **C** $y=\dfrac{x-1}{x}$. (D) $y=2x$.

Lời giải.

Các đồ thị hàm số $y=x^2$; $y=0$; $y=2x$ đều không có tiệm cận.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x}$ có $y=1$ là TCN và $x=0$ là TCĐ.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Mỗi đỉnh của một hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất

(A) Bốn cạnh. (B) Năm cạnh. (C) Hai cạnh. **D** Ba cạnh.

Lời giải.

Mỗi đỉnh của một hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất 3 cạnh.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Họ nghiệm của phương trình $\sin x=1$ là

(A) $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$. **B** $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$. (C) $x=\dfrac{-\pi}{2}+k2\pi$. (D) $x=k\pi$.

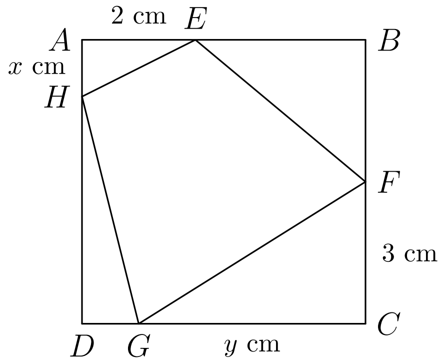
Lời giải.

Ta có $\sin x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25.

Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Trong đó $AE=2$ cm, $AH=x$ cm, $CF=3$ cm, $CG=y$ cm. Tìm tổng $x+y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.



(A) $x+y=7$. (B) $x+y=5$.

C $x+y=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$. (D) $x+y=4\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $S_{EFGH} = S_{ABCD} - S_{AEH} - S_{BEF} - S_{CFG} - S_{DGH}$.

Mà $S_{ABCD} = 6 \cdot 6 = 36$;

$S_{BEF} = \frac{1}{2}BE \cdot BF = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$

nên $S_{EFGH} = 30 - (S_{\triangle AEH} + S_{\triangle CFG} + S_{\triangle DGH})$.

Do đó S_{EFGH} nhỏ nhất $\Leftrightarrow S = (S_{\triangle AEH} + S_{\triangle CFG} + S_{\triangle DGH})$ lớn nhất.

Ta có $S = \frac{1}{2}AE \cdot AH + \frac{1}{2}CF \cdot CG + \frac{1}{2}DG \cdot DH = x + \frac{3y}{2} + \frac{(6-x)(6-y)}{2}$.

$\Rightarrow 2S = 2x + 3y + (6-x)(6-y) = xy - 4x - 3y + 36 \quad (1)$.

Ta có $EFGH$ là hình thang $\Rightarrow AEH = CGF$

$\Rightarrow \triangle AEH = \triangle CGF \Rightarrow \frac{AE}{CG} = \frac{AH}{CF} \Rightarrow \frac{2}{y} = \frac{x}{3} \Rightarrow xy = 6 \qquad (2)$.

Từ (1)và (2) suy ra $2S = 42 - \left(4x + \frac{18}{x}\right)$.

Để $2S$ lớn nhất khi và chỉ khi $4x + \frac{18}{x}$ nhỏ nhất.

Mà $4x + \frac{18}{x} \geq 2\sqrt{4x \cdot \frac{18}{x}} = 12\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 4x = \frac{18}{x} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính cosin của góc giữa hai mặt bên không liền kề nhau.

A $\frac{1}{3}$. B $\frac{1}{\sqrt{2}}$. C $\frac{1}{2}$. D $\frac{5}{3}$.

Lời giải.

Hình chóp tứ diện đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a, ta tìm góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

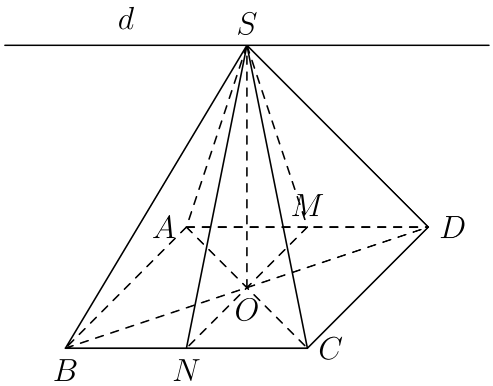
Gọi M, N là trung điểm các cạnh AD và BC, khi đó $SM \perp AD$ và $SN \perp BC$ (do các tam giác SBC; SAD là các tam giác đều).

Vì $BC // AD$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng d qua S và song song AD, BC.

Vì $SM \perp AD$ và $SN \perp BC$ nên $SM \perp d$ và $SN \perp d$ mà $SM \subset (SAD)$; $SN \subset (SBC)$ góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là góc $\widehat{MSN}$.

Mặt bên là các tam giác đều cạnh a nên $SM = SN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $MN = AB = a$.

Khi đó



$$\cos\widehat{MSN} = \frac{SM^2 + SN^2 - MN^2}{2SM \cdot SN} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{3a^2}{2}} = \frac{1}{3}.$$

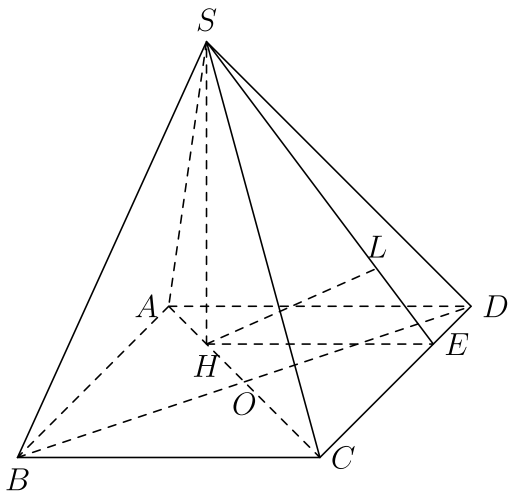
Chú ý khi giải: Các em có thể tính SO theo tỉ số lượng giác và suy ra $\widehat{MSN} = 2\widehat{MSO}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $S.ABCD$ là trung điểm của H của đoạn thẳng AO. Tính khoảng cách d giữa các đường SD và AB.

A d $= 4a$. **B** d $= \dfrac{4a\sqrt{22}}{11}$. **C** d $= 2a$. **D** d $= \dfrac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

Lời giải.



Do $AB//CD$ nên $\mathrm{d}(SD, AB) = \mathrm{d}(AB, (SCD))$

$= \mathrm{d}(A, (SCD)) = \dfrac{4}{3}\mathrm{d}(H, (SCD))$ (do $AC = \dfrac{4}{3}HC$).

Kẻ $HE \perp CD$, kẻ $HL \perp SE$ suy ra $\mathrm{d}(H, (SCD) = HL$.

Ta có $SA = 2a$, $AC = 4a\sqrt{2} \Rightarrow AH = \dfrac{1}{4}AC = a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a\sqrt{2}$.

$\dfrac{HE}{AD} = \dfrac{CH}{CA} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow HE = \dfrac{3}{4}AD = 3a$.

Khi đó $\mathrm{d}(H, (SCD)) = HL = \dfrac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

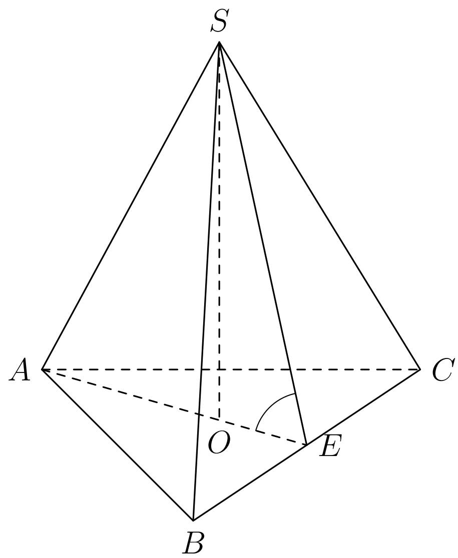
Vậy $\mathrm{d}(SD, AB) = \dfrac{4}{3}HL = \dfrac{4a\sqrt{22}}{11}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và đáy bằng $60°$. Tính theo thể tích khối chóp $S.ABC$.

A $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **B** $V = \dfrac{a^3}{8}$. **C** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải.



Gọi E là trung điểm của BC, O là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow SO \perp (ABC)$ (do $S.ABC$ là hình chóp đều)

Suy ra $AE \perp BC$ (do $\triangle ABC$ đều) và $SE \perp BC$ (do $\triangle SBC$ cân tại S).

Ta có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ AE \perp BC; AE \subset (ABC) \\ SE \perp BC; SE \subset (SBC) \end{cases}$

nên góc giữa (ABC) và (SBC) là $\widehat{SEA}$.

Từ giả thiết suy ra $\widehat{SEA} = 60°$.

Tam giác ABC đều cạnh a

$\Rightarrow AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OE = \dfrac{1}{3}AE = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Xét tam giác SOE vuông tại O (do $SO \perp (ABC) \Rightarrow SO \perp AE$).

Ta có $SO = OE \cdot \tan\widehat{SEO} = \dfrac{AE}{3} \cdot \tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{a}{2}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot SO = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$?

A $-2 < m \leq -1$. **B** $-2 \leq m \leq -1$. **C** $-2 \leq m \leq 2$. **D** $-2 < m < 2$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{-m\}$. Ta có $y' = \dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1) \Leftrightarrow y' < 0,\ \forall x \in (-\infty; 1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ 1 \leq -m \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1.$

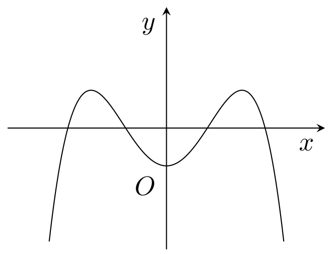
Chọn đáp án A □

Câu 30.

Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A $a < 0, b > 0, c > 0$. **B** $a < 0, b > 0, c < 0$.

C $a < 0, b < 0, c > 0$. **D** $a < 0, b < 0, c < 0$.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta có

+) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = -\infty \Rightarrow a < 0$.

+) Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $ab < 0$ mà $a < 0 \Rightarrow b > 0$.

+ Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$.

Vậy $a < 0,\ b > 0,\ c < 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BC = a$, mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 30° và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng $a^2\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. **B** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Ta có $V = Bh = S_{ABC} \cdot AA'$

Do $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'B.$

Và $\begin{cases} BC \perp AB \subset (ABC) \\ BC \perp A'B \subset (A'BC) \\ BC = (ABC) \cap (A'BC) \end{cases}$

$\Rightarrow ((ABC), (A'BC)) = (AB, A'B) = \widehat{ABA'}.$

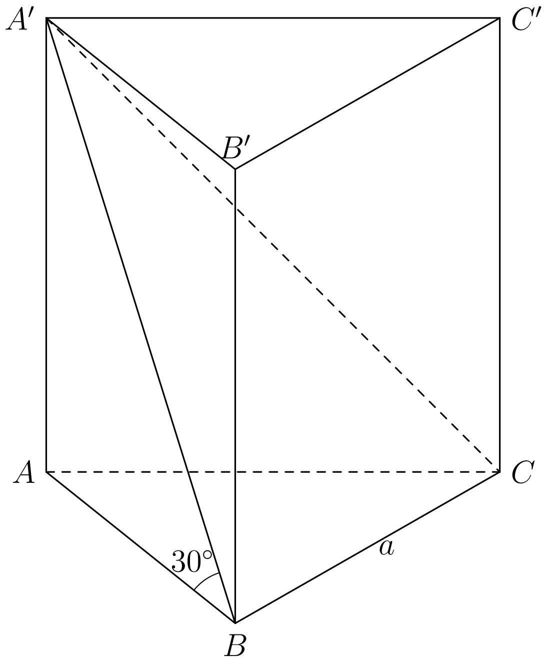
Ta có $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} A'B \cdot BC$

$\Rightarrow A'B = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \dfrac{2a^2\sqrt{3}}{a} = 2a\sqrt{3}.$

$AB = A'B \cdot \cos \widehat{ABA'} = 2a\sqrt{3} \cos 30^\circ = 3a.$

$AA' = A'B \cdot \sin \widehat{ABA'} = 2a\sqrt{3} \sin 30^\circ = a\sqrt{3}.$

$V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot AA' = \dfrac{1}{2} \cdot 3a \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}.$



Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có diện tích bằng $2a^2$, $AB = a\sqrt{2}$, $BC = 2a$. Gọi M là trung điểm của DC. Hai mặt phẳng (SBD) và (SAM) cùng vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAM) bằng

A $\dfrac{4a\sqrt{10}}{15}$. **B** $\dfrac{3a\sqrt{10}}{5}$. **C** $\dfrac{2a\sqrt{10}}{5}$. **D** $\dfrac{3a\sqrt{10}}{15}$.

Lời giải.

Gọi $H = AM \cap BD$

Ta có $\begin{cases} (SBD) \perp (ABC) \\ (SAM) \perp (ABC) \\ (SBD) \cap (SAM) = SH \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Vì AB song song CD nên theo định lý Ta-lét ta có

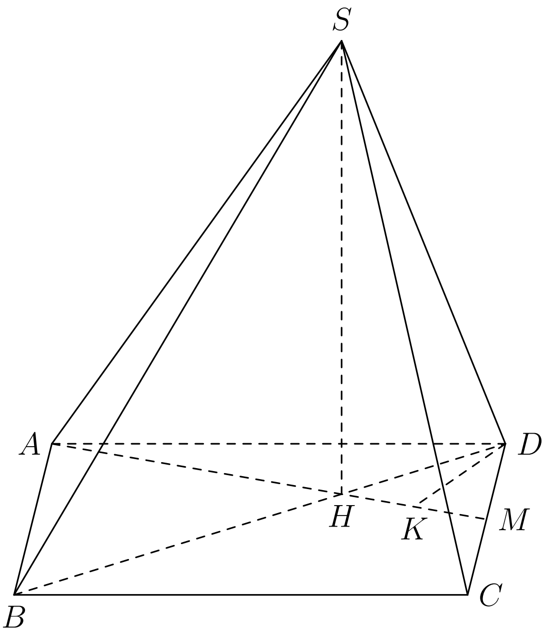
$$\frac{HB}{HD} = \frac{AB}{DM} = 2 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}(B; (SAM))}{\mathrm{d}(D; (SAM))} = \frac{HB}{HD} = 2$$

$\Rightarrow \mathrm{d}(B; (SAM)) = 2\mathrm{d}(D; (SAM)).$

Kẻ $DK \perp AM$ tại K.

Ta có $\begin{cases} DK \perp AM \\ DK \perp SH (SH \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow DK \perp (SAM)$ tại $K \Rightarrow \mathrm{d}(D; (SAM)) = DK$

Nên $d(B; (SAM)) = 2DK$



Vì M là trung điểm của DC và $ABCD$ là hình bình hành có diện tích $2a^2$ nên ta có $S_{ADM} = \dfrac{1}{2} S_{ADC} = \dfrac{1}{4} S_{ABCD} = \dfrac{2a^2}{4} = \dfrac{a^2}{2}.$

Lại có $CD = AB = a\sqrt{2} \Rightarrow DM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}; AD = BC = 2a.$

Khi đó $S_{ADM} = \dfrac{1}{2}AD \cdot DM \cdot \sin D \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot 2a \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sin D \Rightarrow \sin D = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{D} = 45^\circ$.
Do vậy xét trong tam giác ADM ta có

$$\begin{aligned} AM^2 &= AD^2 + DM^2 - 2AD.DM \cdot \cos 45^\circ \\ &= 4a^2 + \frac{a^2}{2} - 2 \cdot 2a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{5a^2}{2}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow AM = \dfrac{\sqrt{10}}{2}a$.

Lại có $S_{ADM} = \dfrac{1}{2}DK \cdot AM \Rightarrow DK = \dfrac{2S_{ADM}}{AM} = \dfrac{2a}{\sqrt{10}} = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

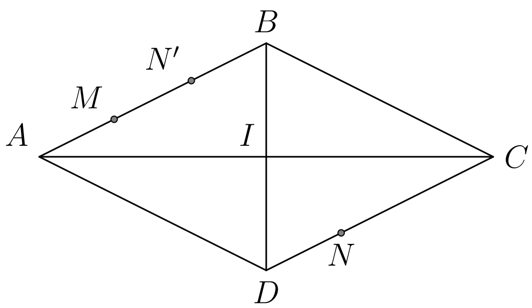
Từ đó $\mathrm{d}(B; (SAM)) = 2. \cdot DK = \dfrac{2a\sqrt{10}}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Trong mặt phẳng với hệ ton độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I(2; 1)$ và $AC = 2BD$ điểm $M(0; \dfrac{1}{3})$ thuộc đường thẳng AB, điểm $N(0; 7)$ thuộc đường thẳng CD. Tìm tọa độ đỉnh B biết B có hoành độ dương.

A $(4; 2)$. **B** $(1; -1)$. **C** $(1; \dfrac{3}{5})$. **D** $(2; -\dfrac{7}{3})$.

Lời giải.



Gọi N' đối xứng với N qua I thì $N' \in AB$.

$\Rightarrow \begin{cases} x_{N'} = 2x_I - x_N = 2 \cdot 2 - 0 = 4 \\ y_{N'} = 2y_I - y_N = 2 \cdot 1 - 7 = -5 \end{cases} \Rightarrow N'(4; -5)$.

Ta có $\overrightarrow{MN'} = \left(4; -\dfrac{16}{3}\right)$.

Đường thẳng AB đi qua $N'(4; -5)$ và nhận $\vec{n} = (4; 3)$ làm VTPT nên đường thẳng AB có phương trình $4(x - 4) + 3(y + 5) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 1 = 0$.

Khoảng cách từ I đến đường thẳng AB là $\mathrm{d}(I, AB) = \dfrac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2$.

Vì $AC = 2BD$ nên $AI = 2BI$, đặt $BI = x \Rightarrow AI = 2x$.

Trong tam giác vuông ABI có

$$\frac{1}{\mathrm{d}^2(I; AB)} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \Rightarrow BI = \sqrt{5} \Rightarrow BI^2 = 5.$$

Do $\begin{cases} B \in AB \\ BI^2 = 5 \end{cases}$ nên tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4x + 3y - 1 = 0 \\ (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; y = 1 \\ x = -\dfrac{1}{5}; y = \dfrac{3}{5}. \end{array}\right.$

Vì B có hoành độ dương nên $B(1; -1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \dfrac{(m - 2n - 3)x + 5}{x - m - n}$ nhận hai trục tọa độ làm hai đường tiệm cận. Tính tổng $S = m^2 + n^2 - 2$.

(A) $S = 2$. **B** $S = 0$. (C) $S = -1$. (D) $S = 1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{(m-2n-3)x+5}{x-m-n}$ nhận đường thẳng $y = m - 2n - 3$ làm tiệm cận ngang và đường thẳng $x = m + n$ làm tiệm cận đứng. Từ giả thiết ta có $\begin{cases} m - 2n - 3 = 0 \\ m + n = 0 \end{cases}$

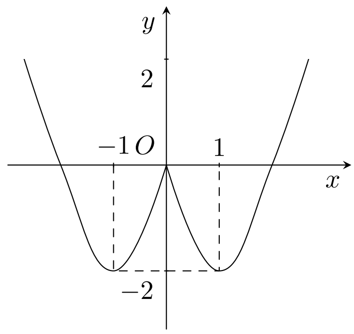
$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -1 \end{cases} \Leftrightarrow S = m^2 + n^2 - 2 = 0.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 35.

Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A $y = |x^3| - 3|x|$. (B) $y = |x^3 + 3x|$.
(C) $y = |x^3 - 3x|$. (D) $y = |x^3| + 3|x|$.



Lời giải.

Quan sát đồ thị hàm số ta thấy vẫn có phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành nên loại các đáp án $y = |x^3 + 3x|$, $y = |x^3 - 3x|$, $y = |x^3| + 3|x|$ (các hàm số này đều có giá trị không âm).

Hàm số có đồ thị như hình bên là $y = |x^3| - 3|x|$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Số tiếp tuyến đi qua điểm $A(1; -6)$ của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ là

(A) 0. (B) 2. **C** 1. (D) 3.

Lời giải.

Gọi k là hệ số góc tiếp tuyến (Δ) với đồ thị (C) đi qua A(1;-6) nên $\Rightarrow$ (Δ) có dạng $y = k(x-1) - 6$.

Để (Δ) tiếp xúc với (C) thì $\begin{cases} x^3 - 3x + 1 = k(x-1) - 6 \\ k = 3x^2 - 3 \end{cases}$ có nghiệm

$\Rightarrow x^3 - 3x + 1 = (3x^2 - 3)(x - 1) - 6$

$\Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(2x^2 + x + 2) = 0$

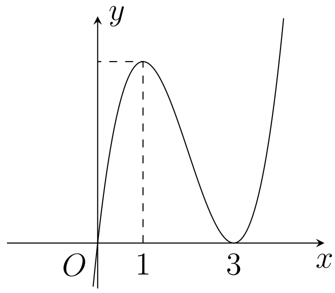
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ 2x^2 + x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 2.$

Vậy có 1 phương trình tiếp tuyến đi qua $A(1; -6)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x) = |f^2(x) + f(x) + m|$ có đúng 3 điểm cực trị.



Ⓐ $m \leq 1$. Ⓑ $m > \dfrac{1}{4}$. Ⓒ $m < 1$. **D** $m \geq \dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Xét $g(x) = f^2(x) + f(x) + m$ có $g'(x) = 2f(x)f'(x) + f'(x) = f'(x)[2f(x) + 1]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ 2f(x) + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \\ x = a(a < 0) \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} g(1) = f^2(1) + f(1) + m \\ g(3) = m \\ g(a) = m - \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$

x	$-\infty$		a		1		3		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$g(a)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Suy ra đồ thị hàm số $h(x) = |f^2(x) + f(x) + m|$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = g(x)$ nằm hoàn toàn phía trên trục Ox (kể cả tiếp xúc). Do đó $g(a) \geq 0 \Leftrightarrow m - \dfrac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (4m - 3)x + 2017$. Tìm giá trị lớn nhất của tham số thực m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ⓐ $m = 2$. **B** $m = 3$. Ⓒ $m = 4$. Ⓓ $m = 1$.

Lời giải.

Tập xác định$\mathcal{D} = \mathbb{R}$

Đạo hàm $y' = x^2 - 2mx + 4m - 3$. Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \geq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$ ($y' = 0$ có hữu hạn nghiệm). Điều này tương đương với $\begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' = m^2 - 4m + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 3$.

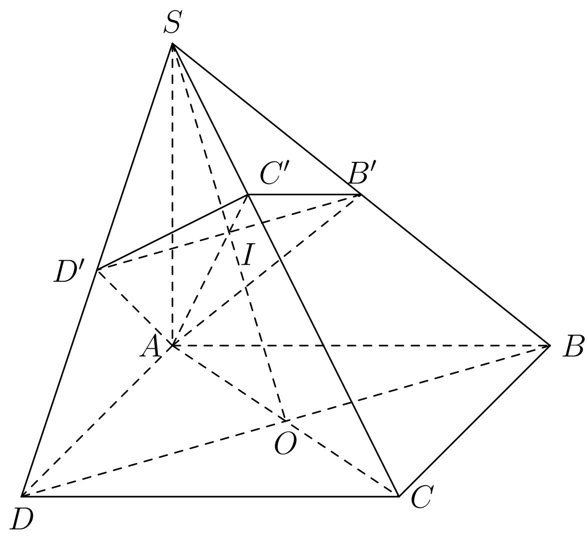
Suy ra giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, gọi B' và D' theo thứ tự là trung điểm các cạnh SB, SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt cạnh SC tại C'. Tính tỷ số thể tích của hai khối đa diện được chia ra bởi mặt phẳng $(AB'D')$

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $\dfrac{1}{6}$. Ⓒ $\dfrac{1}{12}$. **D** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$ và SO cắt $B'D'$ tại I.
Nối AI cắt SC tại C' nên A, B', C', D' đồng phẳng
Đặt $V_{S.ABCD} = V \Rightarrow V_{S.ACD} = V_{S.ABC} = \dfrac{V}{2}$.
Ta có $\dfrac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} = \dfrac{SC'}{SC} . \dfrac{SD'}{SD}$
và $\dfrac{V_{S.AC'B'}}{V_{S.ACB}} = \dfrac{SC'}{SC} . \dfrac{SB'}{SB}$.
Do đó,
$\dfrac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} + \dfrac{V_{S.AC'B'}}{V_{S.ACB}} = \dfrac{SC'}{SC} . \left(\dfrac{SB'}{SB} + \dfrac{SD'}{SD}\right)$.
Hay $\dfrac{2V_{S.AC'B'}}{V} + \dfrac{2V_{S.AC'D'}}{V} = \dfrac{SC'}{SC}$.
Ta có $B'D' = \dfrac{1}{2} BD \Rightarrow SI = \dfrac{1}{2} SO$.

Xét tam giác $\triangle SCO$ có C', I, A thẳng hàng nên áp dụng định lý Mê-nê-la-úyt ta có

$$\frac{C'S}{C'C} \cdot \frac{AC}{AO} \cdot \frac{IO}{IS} = 1 \Leftrightarrow \frac{C'S}{C'C} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{3}.$$

Suy ra $\dfrac{2V_{S.AB'C'D'}}{V} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow V_{S.AB'C'D'} = \dfrac{V}{6} \Rightarrow V_{AB'C'D'BCD} = V - \dfrac{V}{6} = \dfrac{5V}{6}$.
Vậy tỷ số thể tích của hai khối đa diện được chia ra bởi $(AB'D')$ là $\dfrac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{AB'C'D'BCD}} = \dfrac{V}{6} : \dfrac{5V}{6} = \dfrac{1}{5}$.
Chọn đáp án D □

Câu 40. Một chi đoàn có 3 đoàn viên nữ và một số đoàn viên nam. Cần lập một đội thanh niên tình nguyện gồm 4 người. Biết xác suất để trong 4 người được chọn có 3 nữ bằng $\dfrac{2}{5}$ lần xác suất 4 người được chọn toàn nam. Hỏi chi đoàn đó có bao nhiêu đoàn viên?

A 9. **B** 11. **C** 10. **D** 12.

Lời giải.
Gọi x là số đoàn viên nam $(x \geq 4; x \in \mathbb{N})$, suy ra chi đoàn có tất cả $x + 3$ (đoàn viên).
Số cách chọn ra 4 người lập thành đội thanh niên tình nguyện là C_{x+3}^4 cách.
Số cách chọn ra 4 người lập thành đội thanh niên tình nguyện trong đó có ba nữ, một nam là $\mathrm{C}_3^3.\mathrm{C}_x^1 = x$ cách.
Số cách chọn ra 4 người lập thành đội thanh niên tình nguyện toàn nam là C_x^4 cách.
Xác suất lập ra đội thanh niên tình nguyện 4 người trong đó có ba nữ, một nam là $\dfrac{x}{\mathrm{C}x + 3^4}$.
Xác suất lập ra đội thanh niên tình nguyện gồm 4 nam là: $\dfrac{\mathrm{C}_x^4}{\mathrm{C}_{x+3}^4}$.
Theo giả thiết ta có phương trình
$\dfrac{x}{C_{x+3}^4} = \dfrac{2}{5} \dfrac{C_x^4}{C_{x+3}^4}$
$\Rightarrow 5x = 2.C_x^4$
$\Leftrightarrow 5x = 2\dfrac{x!}{4!(x-4)!}$
$\Rightarrow 60x = x(x-1)(x-2)(x-3)$
$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 6x - 66 = 0$

$\Leftrightarrow (x-6)(x^2+11)=0 \Rightarrow x=6(\text{TM})$

Vậy chi đoàn có $6+3=9$ đoàn viên.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+5}$ bằng

A) $\dfrac{1}{5}$. B) $\dfrac{1}{4}$. C) $\dfrac{1}{2}$. D) $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $P=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+5} \Leftrightarrow \dfrac{1}{P}=\dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\dfrac{4}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x^2+1}\dfrac{4}{\sqrt{x^2+1}}}=4.$

Suy ra $\dfrac{1}{P}\geq 4$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x^2+1}=\dfrac{4}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow x^2+1=4 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$.

Vậy $P\leq \dfrac{1}{4} \Rightarrow P_{max}=\dfrac{1}{4}$ khi $x=\pm\sqrt{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2017;2018]$ để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ có hai điểm cực trị nằm trong khoảng $(0;+\infty)$.

A) 2015. B) 2016. C) 2018. D) 4035.

Lời giải.

Ta có $y'=x^2-2mx+m+2$.

Từ yêu cầu bài toán ta phải tìm m để hàm số có hai điểm cực trị dương hay phương trình $y'=0$ có hai nghiệm dương phân biệt. Khi đó

$$\begin{cases}1\neq 0\\ \triangle'=m^2-m-2>0\\ S=\dfrac{-b}{a}>0\\ P=\dfrac{c}{a}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m-1)(m-2)>0\\ 2m>0\\ m+2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>2\end{array}\right.\\ m>0\\ m>-2\end{cases} \Leftrightarrow m>2.$$

Vì $m\in\mathbb{R}$ và $m\in[-2017;2018] \Rightarrow m\in\{3;4;5;...;2018\}$ nên ta có $2018-3+1=2016$ giá trị m thỏa mãn ycbt.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Công ty du lịch Ban Mê dự định tổ chức tua xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tua là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất?

A) 1375000. B) 3781250. C) 2500000. D) 3000000.

Lời giải.

Gọi x (triệu đồng) là giá tua.

Số tiền được giảm đi so với ban đầu là $2-x$.

Số người tham gia được tăng thêm nếu bán với giá x là $\dfrac{(2-x)20}{0,1}=400-200x$.

Số người sẽ tham gia nếu bán giá x là $150+(400-200x)=550-220x$.

Tổng doanh thu là $f(x)=x(550-200x)=-200x^2+550x$.

$f'(x) = -440x + 550 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{11}{8}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{11}{8}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{3025}{8}$	$\searrow$	$+\infty$

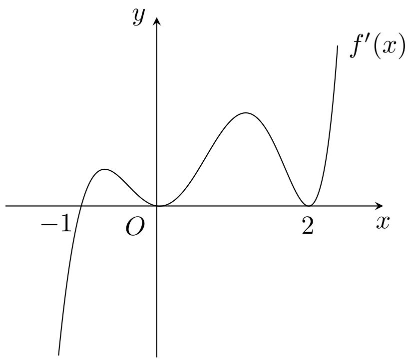
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = \dfrac{11}{8} = 1,375$.

Vậy công ty cần đặt gói tua 1375000 đồng thì tổng doanh thu sẽ cao nhất là 378125000 đồng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 44.

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên khoảng K. Hỏi hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A 0. **B** 4. **C** 3. **D** 1.

Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ ta thấy có một giao điểm với trục hoành (không tính điểm tiếp xúc) nên hàm số $f(x)$ có một cực trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-1000; 1000)$ để hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

A 999. **B** 1001. **C** 1998. **D** 1000.

Lời giải.

Ta có $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1) = 6\left[x^2 - (2m+1)x + m(m+1)\right]$.

Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - (2m+1)x + m(m+1) = 0$ có $\triangle = (2m+1)^2 - 4m(m+1) = 1 > 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

Suy ra phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm $x_1 = \dfrac{2m+1-1}{2} = m$; $x_2 = \dfrac{2m+1+1}{2} = m+1$.

Dễ thấy $x_1 = m < m+1 = x_2$ và $a = 1 > 0$ nên hàm số đồng biến trong khoảng $(m+1; +\infty)$ và $(-\infty; m)$.

Bài toán thỏa mãn $\Leftrightarrow m + 1 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 1$.

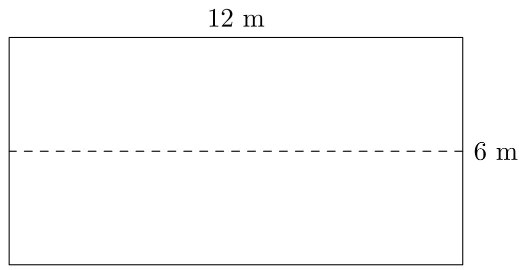
Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-1000; 1000)$ nên $m \in \{-999; -998; ...; 0; 1\}$.

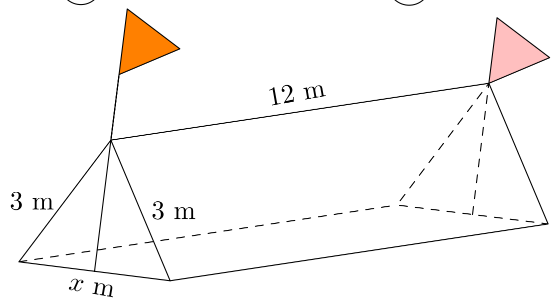
Vậy có $[1 - (-999)] : 1 + 1 = 1001$ giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Trong một đợt tổ chức cho học sinh tham gia dã ngoại ngoài trời. Để có thể có chỗ nghỉ ngơi trong quá trình tham quan dã ngoại, các bạn học sinh đã dựng trên mặt đất bằng phẳng 1 chiếc lều bằng bạt từ một tấm bạt hình chữ nhật có chiều dài là $12m$ và chiều rộng bằng $6m$ bằng cách: Gấp đôi tấm bạt lại theo đoạn nối trung điểm hai cạnh là chiều rộng của tấm bạt sao cho hai mép chiều dài còn lại của tấm bạt sát đất và cách nhau $x(m)$ (xem hình vẽ). Tìm x để khoảng không gian phía trong lều là lớn nhất?

(A) $x = 3\sqrt{3}$. (B) $x = 3\sqrt{2}$. (C) $x = 2$. (D) $x = 4$.





Lời giải.

Gọi tên như hình vẽ với $AH \perp BC \Leftrightarrow H$ là trung điểm của $BC \Leftrightarrow BH = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{x}{2}$.

Xét tam giác AHB vuông tại B theo định lý

$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{3^2 - \dfrac{x^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{36 - x^2}}{2} (0 < x < 6)$.

$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.AA' = \dfrac{1}{2}AH.BC.AA' = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{36 - x^2}}{2} \cdot x \cdot 12 = 3x\sqrt{36 - x^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức, $ab \leq \dfrac{a^2 + b^2}{2}$ ta có

$x\sqrt{36 - x^2} \leq \dfrac{x^2 + 36 - x^2}{2} \Leftrightarrow x\sqrt{36 - x^2} \leq 18 \Leftrightarrow 3x\sqrt{36 - x^2} \leq 54$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = \sqrt{36 - x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = 36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3\sqrt{2}\,(\text{loại}) \\ x = 3\sqrt{2}\,(\text{thỏa mãn}) \end{array}\right.$

Vậy $V_{\max} = 54 \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2}$.

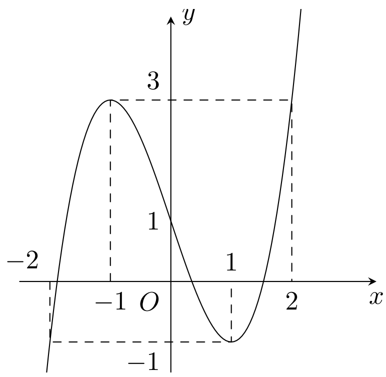
Chọn đáp án (B) □

Câu 47.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) + m - 2018 = 0$ có duy nhất một nghiệm.

(A) $m \leq 2015, m \geq 2019$. (B) $2015 < m < 2019$.

(C) $m = 2015, m = 2019$. (D) $m < 2015, m > 2019$.



Lời giải.

Phương trình $f(x) + m - 2018 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2018 - m$

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 2018 - m$ (có phương trình song song hoặc trùng với trục hoành)

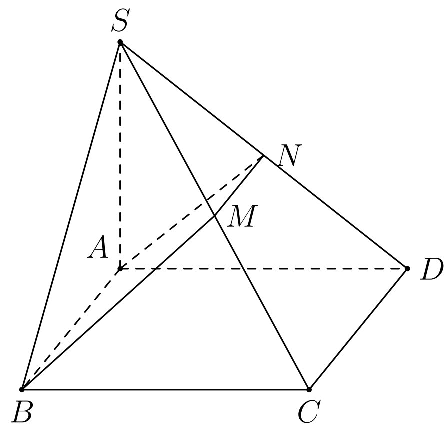
Dựa vào đồ thị, ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2018 - m > 3 \\ 2018 - m < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 2015 \\ m > 2019. \end{array}\right.$

Chọn đáp án D □

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$, $SA \perp (ABCD)$. Mặt phẳng qua AB cắt SC và SD lần lượt tại M và N sao cho $\dfrac{SM}{SC} = x$. Tìm x biết $\dfrac{V_{S.ABMN}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{11}{200}$.

A $0,1$. **B** $0,3$. **C** $0,2$. **D** $0,25$.

Lời giải.



Lấy $M \in SC$, qua M kẻ đường thẳng song song với AB cắt SD tại N ta được mặt phẳng $(ABMN)$ thỏa mãn điều kiện.

Vì MN song song CD nên theo định lý Ta-lét ta có

$$\frac{SM}{SC} = \frac{SN}{SD} = x.$$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên

$$V_{S.ACB} = V_{S.ACD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} V.$$

Ta có

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACD}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} = x^2;$$
$$\frac{V_{S.AMB}}{V_{S.ACB}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SB}{SB} = x.$$

Do đó

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACD}} = 2\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} = x^2 \Rightarrow \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{x^2}{2}.$$
$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACB}} = 2\frac{V_{S.AMB}}{V_{S.ABCD}} = x \Rightarrow \frac{V_{S.AMB}}{V_{S.ABCD}} = \frac{x}{2}.$$

Mà $V_{S.AMN} + V_{S.AMB} = V_{S.ABMN}$ nên

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} + \frac{V_{S.AMB}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.ABMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{x^2 + x}{2}.$$

Theo giả thiết ta có $\dfrac{V_{S.ABMN}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{11}{200}$.

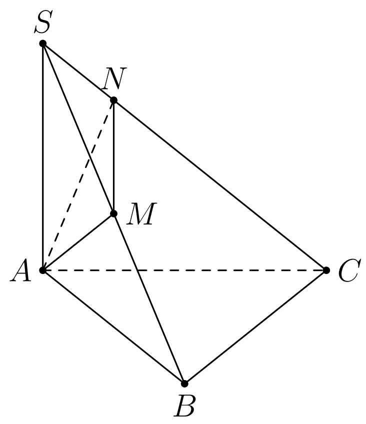
$\Rightarrow \dfrac{x^2 + x}{2} = \dfrac{11}{200} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 100x^2 + 100x - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0,1.$

Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. $SA = 2a$ và $SA \perp (ABC)$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC. Tính $\dfrac{50V\sqrt{3}}{a^3}$, với V là thể tích khối chóp $A.BCMN$.

A 10. **B** 12. **C** 9. **D** 11.

Lời giải.



Xét tam giác SAB và SAC là các tam giác vuông tại A có hai cạnh góc vuông là a và $2a$ nên $SB = SC = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$.
Tam giác SAB vuông A tại có đường cao AM.
Khi đó $SA^2 = SM \cdot SB \Rightarrow \dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{SM}{SB} \Rightarrow \dfrac{SM}{SB} = \dfrac{4}{5}$.
Tương tự ta có $\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{4}{5}$.
Lại có $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot 2a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$.
Mặt khác $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{16}{25}$.
Do đó, $V = V_{A.BCNM} = \dfrac{9}{25}V_{S.ABC} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{50}$, suy ra $\dfrac{50V\sqrt{3}}{a^3} = 9$.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+1}{x^2 - |x| - 2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A 4. B 3. C 1. D 2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2 - |x| + 2} = 1$, suy ra đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Xét phương trình $x^2 - |x| + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2. \end{array}\right.$

$\lim\limits_{x\to 2^+} y = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+1}{x^2 - |x| + 2} = +\infty$ suy ra $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
$\lim\limits_{x\to 2^-} y = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+1}{x^2 - |x| + 2} = -\infty$ suy ra $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
vậy đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

Chọn đáp án B □

—— **HẾT** ——

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. C	3. A	4. B	5. C	6. D	7. A	8. D	9. C	10. B
11. A	12. C	13. D	14. C	15. D	16. D	17. A	18. D	19. C	20. D
21. D	22. C	23. D	24. B	25. C	26. A	27. B	28. A	29. A	30. B
31. A	32. C	33. B	34. B	35. A	36. C	37. D	38. B	39. D	40. A
41. B	42. B	43. A	44. D	45. B	46. B	47. D	48. A	49. C	50. B

30 ĐỀ THI THỬ THPT BẠCH ĐẰNG, QUẢNG NINH, LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Để đầu tư dự án trồng rau sạch theo công nghệ mới bác Năm đã làm hợp đồng xin vay vốn ngân hàng với số tiền 100 triệu đồng với lãi xuất $x\%$ trên một năm. Điều kiện kèm theo của hợp đồng là số tiền lãi tháng trước sẽ được tính làm vốn để sinh lãi cho tháng sau. Sau hai năm thành công với dự án rau sạch của mình, bác Năm đã thanh toán hợp đồng ngân hàng số tiền làm tròn là 129.512.000 đồng. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $x = 13$. (B) $x = 15$. (C) $x = 12$. **(D)** $x = 14$.

Lời giải.

Lãi suất mỗi tháng là $\dfrac{x}{12}\%$. Theo công thức lãi kép, ta có

$$100 \cdot \left(1 + \frac{x}{12}\%\right)^{24} = 129{,}512 \Rightarrow \frac{x}{12}\% = \sqrt[24]{\frac{129{,}100}{100}} - 1 \approx 0{,}0108.$$

Vậy $x \approx 13$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_{2019}|x|$, $\forall x \neq 0$.

(A) $y' = \dfrac{1}{|x|\ln 2019}$. (B) $y' = \dfrac{1}{|x|}$. **(C)** $y' = \dfrac{1}{x\ln 2019}$. (D) $y' = x\ln 2019$.

Lời giải.

Theo công thức đạo hàm, ta có $y' = \dfrac{1}{x\ln 2019}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Hộp A có 4 viên bi trắng, 5 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. Hộp B có 7 viên bi trắng, 6 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp một viên bi, tính xác suất để hai viên bi được lấy ra có cùng màu.

(A) $\dfrac{91}{135}$. **(B)** $\dfrac{44}{135}$. (C) $\dfrac{88}{135}$. (D) $\dfrac{45}{88}$.

Lời giải.

Số cách chọn mỗi hộp một viên bi là $(4+5+6)(7+6+5) = 270$.

Số cách chọn mỗi hộp một viên bi sao cho hai viên cùng màu (hoặc trắng hoặc đỏ hoặc xanh) là $4\cdot 7 + 5\cdot 6 + 6\cdot 5 = 88$.

Xác suất cần tìm là $\dfrac{88}{270} = \dfrac{44}{135}$.

Chọn đáp án (B) □

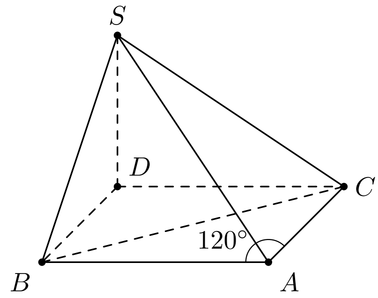
Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh bên bằng nhau. Biết rằng ABC là tam giác cân tại A có $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Khi đó hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy ABC là

(A) trung điểm cạnh BC. (B) đỉnh A của $\triangle ABC$.

(C) đỉnh D của hình thoi $ABDC$. (D) tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle ABC$.

Lời giải.

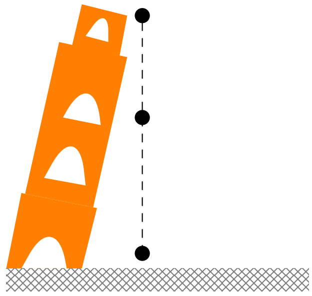
Do tứ diện $S.ABC$ có các cạnh bên SA, SB, SC bằng nhau nên hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy là tâm đường tròn ngoại tiếp D tam giác ABC.



Do tam giác ABC cân tại A và $\widehat{BAC} = 120°$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 30°$, suy ra $\widehat{ADB} = \widehat{ADC} = 60°$ (góc ở tâm). Do đó ADB và ADC là các tam giác đều. Vậy $ABDC$ là hình thoi.

Chọn đáp án C □

Câu 5.
Từ độ cao 55,8m của tháp nghiêng Pisa nước Italia người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\dfrac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt trước đó. Tổng độ dài hành trình của quả bóng được thả từ lúc ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?



A $(67\text{m}; 69\text{m})$. **B** $(60\text{m}; 63\text{m})$. **C** $(64\text{m}; 66\text{m})$. **D** $(69\text{m}; 72\text{m})$.

Lời giải.

Ta có nhận xét

- Độ cao của quả bóng sau mỗi lần nảy lên là một cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với $u_1 = 55{,}8\text{m}$, $q = \dfrac{1}{10}$.
- Sau khi nảy lên, qua bóng rơi xuống một quãng đường đúng bằng chiều cao.

Từ đó tổng quãng đường mà quả bóng đã di chuyển là

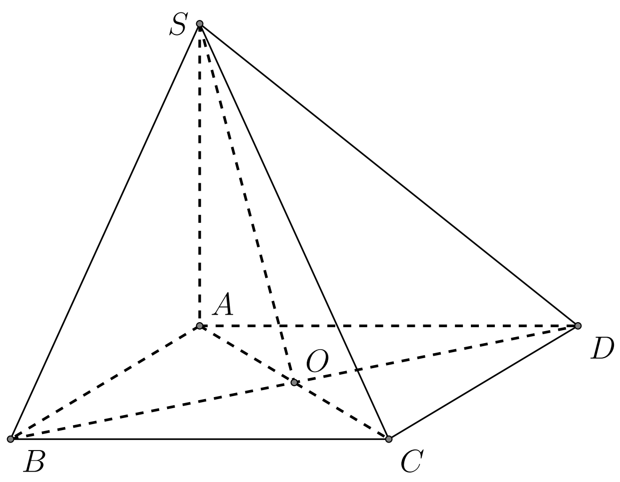
$$\begin{aligned} &u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 + \cdots \\ =\ &u_1 + 2u_1q + 2u_1q^2 + 2u_1q^3 + \cdots \\ =\ &u_1 + \frac{2u_1q}{1-q} = \frac{11}{9}u_1 = 68{,}2\text{m}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60°$, $SB = a\sqrt{2}$. Hai mặt bên SAD và SAB cùng vuông góc với mặt đáy $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A $S_{ABCD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **B** $SC = a\sqrt{3}$. **C** $(SAC) \perp (SBD)$. **D** $V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.



Ta có $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên suy ra $\triangle ABC$ là tam giác đều.

$\Rightarrow S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABC} = 2 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Loại phương án A.

Vì hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy $ABCD$ nên suy ra $SA \perp (ABCD)$. Xét tam giác SAB vuông tại A. Khi đó:

$\Rightarrow SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - a^2} = a$.

Xét tam giác SAC vuông tại A. Khi đó:

$\Rightarrow SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$. Do đó loại phương án B.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot 2 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Do đó loại phương án D.

Ta có $\begin{cases} SA \perp BD \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Mà $BD \subset (SBD)$ suy ra $(SAC) \perp (SBD)$. Do đó chọn phương án đúng là C.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Tìm tọa độ giao điểm của đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+2}$.

A $(2; 1)$. B $(-2; 2)$. C $(-2; -2)$. D $(-2; 1)$.

Lời giải.

Tiệm cận đứng: $x = -2$.

Tiệm cận ngang: $y = 1$.

Vậy giao điểm là $I(-2; 1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2019	$\searrow$	-2019	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = |f(x - 2018) + 2019|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 5. B 4. C 2. D 3.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = f(x-2018)+2019$.

$g'(x) = (x-2018)'f'(x-2018) = f'(x-2018)$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2018=-1 \\ x-2018=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2017 \\ x=2021. \end{array}\right.$

Ta có $g(2017) = f(2017-2018)+2019 = 4038$; $g(2021) = f(2021-2018)+2019 = 0$;

Bảng biến thiên hàm $g(x)$

x	$-\infty$		2017		2021		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4038	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó bảng biến thiên $|g(x)|$ là:

x	$-\infty$		x_0		2017		2021		$+\infty$
$\lvert g(x)\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4038	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $y = |f(x-2018)+2019|$ có ba điểm cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Phương trình $3^{1-x} = 2 + \left(\dfrac{1}{9}\right)^x$ có bao nhiêu nghiệm âm?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

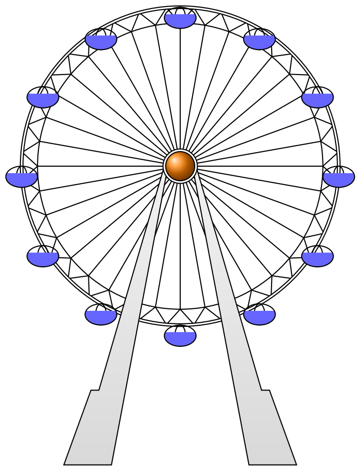
$$3^{1-x} = 2+\left(\frac{1}{9}\right)^x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^x - 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]^2 - 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x = 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\log_3 2. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm âm.

Chọn đáp án B □

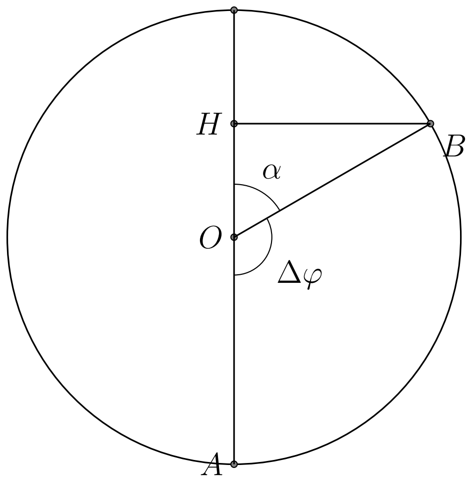
Câu 10.



Vòng quay mặt trời Hạ Long Sun Wheel trong khu giải trí Sun World Ha Long Park có đường kính $115m$, quay hết một vòng trong thời gian 20 phút. Lúc bắt đầu quay, một người ở cabin thấp nhất cách mực nước biển $100m$. Hỏi người đó đạt được độ cao $200m$ (so với mực nước biển) lần đầu tiên sau bao nhiêu giây (làm tròn đến 1/10 giây)?

A. $458,9$ giây. B. $408,6$ giây. C. $460,6$ giây. D. $407,9$ giây.

Lời giải.



$OA = \dfrac{115}{2}m$; $OH = 100 - OA = \dfrac{85}{2}m$.

$\cos\alpha = \dfrac{OH}{OB} = \dfrac{\frac{85}{2}}{\frac{115}{2}} = \dfrac{17}{23} \Rightarrow \Delta\varphi = \pi - \alpha \approx 0,765\pi$.

$t = \dfrac{\Delta\varphi}{\omega}$ với ω là tốc độ góc.

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ với T là chu kì.

$T = 20$ phút $= 20 \cdot 60 = 1200$ giây.

$\Rightarrow \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{1200} = \dfrac{\pi}{600} \Rightarrow t \approx \dfrac{0,765\pi}{\frac{\pi}{600}} \approx 459$ giây.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$ trên đoạn $[1;3]$.

A. $\max\limits_{[1;3]} f(x) = -7$. B. $\max\limits_{[1;3]} f(x) = -4$. C. $\max\limits_{[1;3]} f(x) = -2$. D. $\max\limits_{[1;3]} f(x) = \dfrac{67}{27}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 \\ & f'(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3x^2 - 4x - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 2 \quad (\text{nhận}) \\ x = -\dfrac{2}{3} \quad (\text{loại}) \end{array}\right. \end{aligned}$$

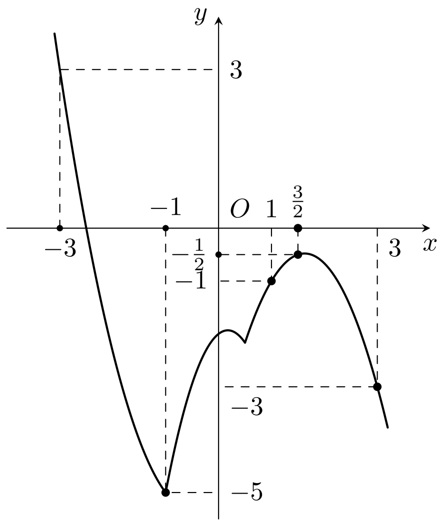
Ta lại có $f(1) = -4, f(2) = -7, f(3) = -2$.

Vậy : $\max\limits_{[1;3]} f(x) = -2$.

Chọn đáp án C □

Câu 12.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y = f(1-x) + \dfrac{x^2}{2} - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



;

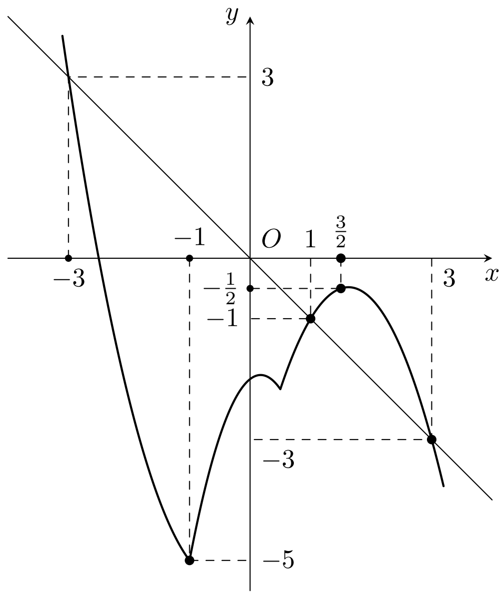
A $(-3;1)$. **B** $(-2;0)$. **C** $(1;3)$. **D** $\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -f'(1-x) + x - 1$.

Hàm số đã cho nghịch biến khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & y' \le 0 \\ \Leftrightarrow\ & -f'(1-x) + x - 1 \le 0 \\ \Leftrightarrow\ & f'(1-x) \ge -(1-x) \end{aligned}$$



;

Đặt $t = 1 - x$, ta có $f'(t) \le -t$.

Dựa vào đồ thị $f'(t) \ge -t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le -3 \\ 1 \le t \le 3. \end{array}\right.$

- $t \le -3 \Rightarrow 1 - x \le -3 \Leftrightarrow x \ge 4$.
- $1 \le t \le 3 \Rightarrow 1 \le 1 - x \le 3 \Leftrightarrow -2 \le x \le 0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $[-2;0]$ và $[4;+\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A 4. **B** 5. **C** 3. **D** 6.

Lời giải.

Ta có $x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Ta có :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}} = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}} = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}} = +\infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng.

- $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}} = +\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng.
- $\lim\limits_{x \to -(\sqrt{2})^-} \dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}} = +\infty \Rightarrow x = -\sqrt{2}$ là tiệm cận đứng.
- $\lim\limits_{x \to (\sqrt{2})^+} \dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}} = +\infty \Rightarrow x = \sqrt{2}$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận ngang và 4 tiệm cận đứng nên đồ thị đã cho có 5 tiệm cận.

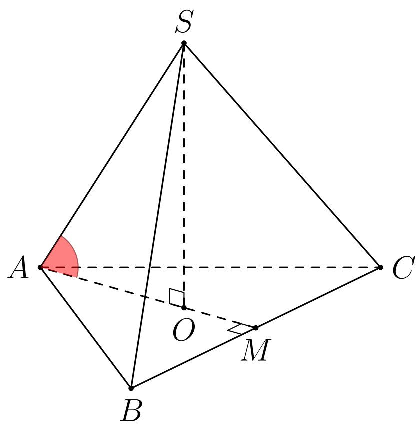
Chọn đáp án B □

Câu 14. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D** $a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.

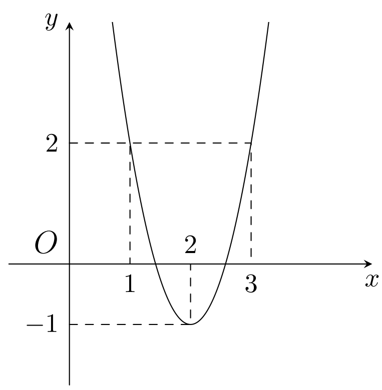
- Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC \Rightarrow SO \perp (ABC)$ nên $\widehat{SAO} = 60^\circ$.
- Ta có $AO = \dfrac{2}{3} \cdot 2a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ và $SH = AO \cdot \tan 60^\circ = 2a$.
- Diện tích đáy : $S_{\triangle ABC} = \dfrac{(2a)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.
- Thể tích : $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}Bh = \dfrac{1}{3} \cdot a^2\sqrt{3} \cdot 2a = \dfrac{2a^2\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án A □

Câu 15.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x-2)+2$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

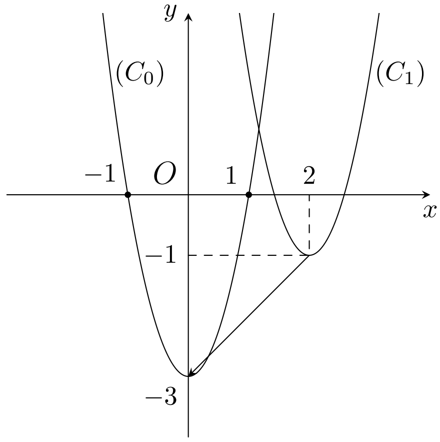


A $(-1; 1)$. **B** $(-\infty; 2)$. **C** $\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2}\right)$. **D** $(2; +\infty)$.

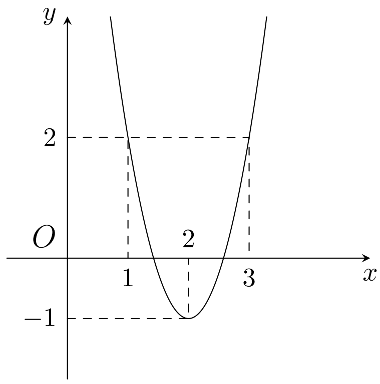
Lời giải.

a) **Cách 1:**

- Từ đồ thị (C_1) của hàm số $y = f'(x-2)+2$ ta thu được đồ thị đồ thị (C_0) bằng cách tiện tiến theo véc-tơ $\vec{u} = (-2; -2)$.
- Từ đồ thị (C_0) của $y = f'(x)$ ta thấy $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.



b) **Cách 2:**
Hàm số nghịch biến khi $f'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x+2-2)+2 < 2 \quad (1)$.
Đặt $t = x+2$ thì (1) trở thành $f'(t-2)+2 < 2 \Leftrightarrow 1 < t < 3$.
Ta được $1 < x+2 < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.



Chọn đáp án A □

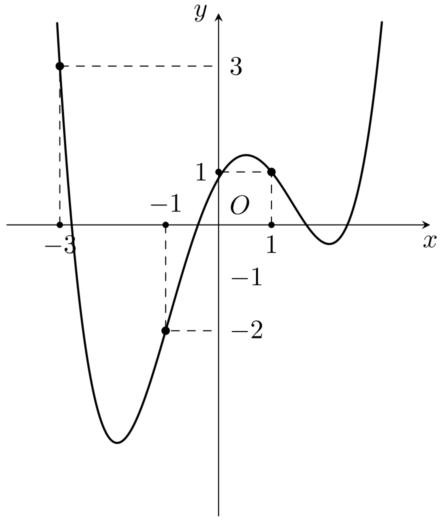
Câu 16. Hai chuồng nhốt thỏ, mỗi con thỏ có lông chỉ mang màu trắng hoặc màu đen. Bắt ngẫu nhiên mỗi chuồng đúng một con thỏ. Biết tổng số thỏ trong hai chuồng là 35 và xác suất bắt được hai con thỏ lông màu đen là $\dfrac{247}{300}$. Tính xác suất để bắt được hai con thỏ có lông màu trắng.

A $\dfrac{7}{150}$. B $\dfrac{1}{150}$. C $\dfrac{1}{75}$. D $\dfrac{7}{75}$.

Lời giải.
Gọi a, b lần lượt là số thỏ ở hai lồng $(a, b \in \mathbb{N}^*, a < 35, \mathrm{b} < 35)$.
Gọi c, d lần lượt là số thỏ có lông màu đen ở hai lồng $(c, d \in \mathbb{N}^*, c < 35, d < 35)$.
Theo giả thiết $a + b = 35$ (1).
Chọn ngẫu nhiên mỗi chuồng 1 con thỏ, không gian mẫu có $n(\Omega) = C_a^1 \cdot C_b^1 = a.b$ phần tử.
Xác suất để bắt được hai con thỏ có lông mầu đen là: $\dfrac{C_c^1 \cdot C_d^1}{ab} = \dfrac{cd}{ab} = \dfrac{247}{300}$.
Do $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ và $(247, 300) = 1$ nên $a.b = 300m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ (2).
Từ (1), (2) $\Rightarrow a, b$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 35x + 300m = 0$ (3).
Phương trình (3) có nghiệm khi $\Delta = 1225 - 1200m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{49}{48} \Rightarrow m = 1$ vì $m \in \mathbb{N}^*$.
Với $m = 1$ phương trình có hai nghiệm $x = 15; x = 20 \Rightarrow$ Số thỏ ở hai lồng là 15 con và 20 con.
Với $m = 1 \Rightarrow c.d = 247 = 13.19 \Rightarrow$ số thỏ lông đen ở hai lồng là 13 con và 19 con.
Vậy xác suất để bắt được hai con thỏ có lông trắng là $P = \dfrac{(15-13)\cdot(20-19)}{15.20} = \dfrac{1}{150}$.
Chọn đáp án B □

Câu 17.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x-2)+2$ như hình vẽ bên.
Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$, mệnh đề nào sau đây đúng?



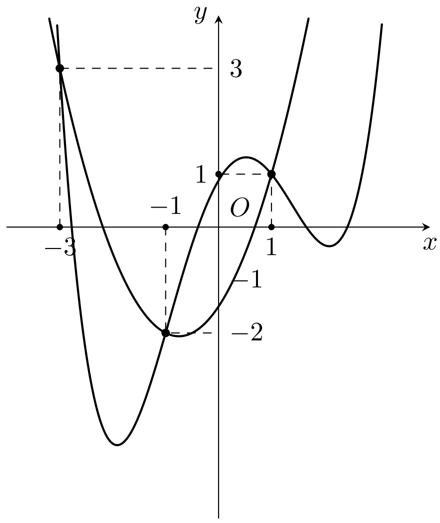
;

A $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.
B $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = \dfrac{g(-3)+g(1)}{2}$.
C $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$.
D $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(1)$.

Lời giải.

a) Ta có $g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = f'(x) - \left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right)$.

- Vẽ parabol $(P): y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$. Ta thấy (P) đi qua các điểm có toạ độ $(-3;3), (-1;2), (1;1)$.
- Trên khoảng $(-3;-1)$ ta có $f'(x) < \left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow g'(x) < 0$.
- Trên khoảng $(-1;1)$ ta có $f'(x) > \left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow g'(x) > 0$.
- Trên khoảng $(1;+\infty)$ ta có $f'(x) < \left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow g'(x) < 0$.



b) Ta có bảng biến thiên

x	-3		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$g(-3)$	$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2019]$ để hàm số $y = \dfrac{\ln x - 6}{\ln x - 3m}$ đồng biến trên khoảng $(1; e^6)$?

A 2020. **B** 2021. **C** 2018. **D** 2019.

Lời giải.

Đặt $t = lnx$. Khi đó hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; e^6)$ khi và chỉ khi hàm số $f(t) = \dfrac{t-6}{t-3m}$ đồng biến trên khoảng $(0; 6)$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{-3m+6}{(t-3m)^2}$.

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; 6)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} -3m+6>0 \\ 3m \notin (0;6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<2 \\ m \leq 0 \text{ hoặc } m \geq 2 \end{cases} \Rightarrow m \leq 0.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2019, -2018, ..., 0\}$.

Vậy có tất cả 2020 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Nghiệm của phương trình $9^x - 4.3^x - 45 = 0$ là

A $x = 9$.
B $x = -5$ hoặc $x = 9$.
C $x = 2$ hoặc $x = \log_3 5$.
D $x = 2$.

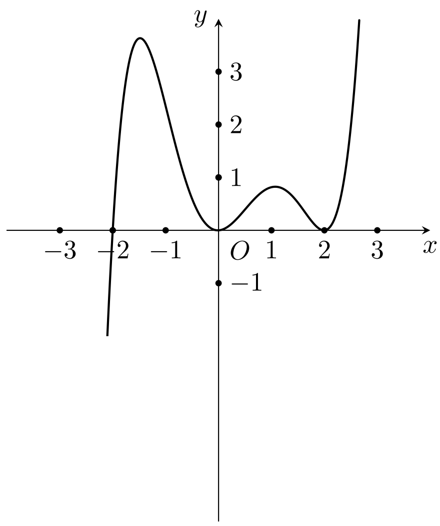
Lời giải.

$$9^x - 4.3^x - 45 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 9 \\ 3^x = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 2.$$

Chọn đáp án D □

Câu 20.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trơn (không bị gãy khúc), tham khảo hình vẽ. Gọi hàm số $g(x) = f[f(x)]$. Hỏi phương trình $g'(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?



;

A 14.
B 10.
C 12.
D 8.

Lời giải.

Ta có $g(x) = f[f(x)] \Rightarrow g'(x) = f'[f(x)] \cdot f'(x)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{array}\right. .$$

Trường hợp 1. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \in (-2;0) \\ x = x_2 \in (1;2) \\ x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$ (có 4 nghiệm phân biệt).

Trường hợp 2. $f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = x_1 \in (-2;0) \\ f(x) = x_2 \in (1;2) \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{array}\right.$.

+) Với $f(x) = x_1 \in (-2;0)$ từ đồ thị hàm số ta thấy phương trình này có 1 nghiệm duy nhất.

+) Với $f(x) = x_2 \in (1;2)$ phương trình này có 3 nghiệm phân biệt khác với các nghiệm ở trên đã tìm.

+) Với $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$ chỉ có nghiệm -2 là khác với các nghiệm đã tìm ở trên.

+) Với $f(x) = 2$ phương trình có 3 nghiệm phân biệt khác với các nghiệm đã tìm ở trên.

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả 12 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án C □

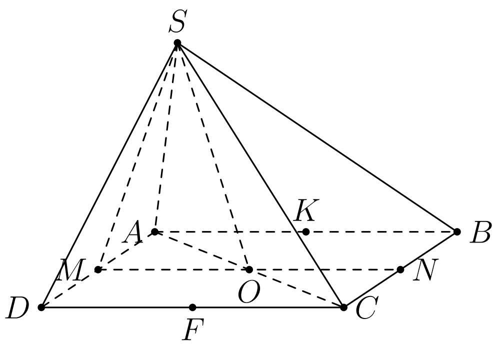
Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. K, F lần lượt là trung điểm của AB và CD. Giao tuyến của (SMN) và (SAC) là

A SK. **B** SO. **C** SF. **D** SD.

Lời giải.

Xét (SMN) và (SAC), ta có S chung, $MN \cap AC = O$.

Do đó giao tuyến cần tìm là SO.



Chọn đáp án B □

Câu 22. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 5 \end{cases}$. Tìm số hạng thứ 2020 của dãy.

A $u_{2020} = 3 \cdot 2^{2020} - 5$. **B** $u_{2020} = 3 \cdot 2^{2019} + 5$.
C $u_{2020} = 3 \cdot 2^{2019} - 5$. **D** $u_{2020} = 3 \cdot 2^{2020} + 5$.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1} = 2u_n + 5 \Leftrightarrow u_{n+1} + 5 = 2(u_n + 5)$.

Xét dãy (v_n) với $v_n = u_n + 5$. Ta có $\begin{cases} v_1 = 6 \\ v_{n+1} = 2v_n. \end{cases}$

Như vậy dãy (v_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu bằng 6 và công bội bằng 2. Ta tính được $v_{2020} = 6 \cdot 2^{2019} = 3 \cdot 2^{2020}$.

Suy ra $u_{2020} = v_{2020} - 5 = 3 \cdot 2^{2020} - 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \dfrac{1}{5}m^2x^5 - \dfrac{1}{3}mx^3 + 10x^2 - (m^2 - m - 20)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng các giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

(A) $\dfrac{5}{2}$. (B) -2. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= m^2x^4 - mx^2 + 20x - m^2 + m + 20 \\ &= (x+1)\left[m^2x^3 - m^2x^2 + (m^2-m)x - m^2 + m + 20\right] \\ &= (x+1)\left[(x+1)(m^2x^2 - 2m^2x + 3m^2 - m) - 4m^2 + 2m + 20\right]. \end{aligned}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x+1=0 & (1) \\ (x+1)(m^2x^2-2m^2x+3m^2-m)-4m^2+2m+20=0 & (2) \end{array}\right..$$

Hàm số đồng biến trên R tương đương với $y' \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra $x=-1$ là nghiệm kép của $y'=0$ tức là $x=-1$ là nghiệm của phương trình (2) $\Rightarrow -4m^2+2m+20=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$.

Với $m=-2$, ta có $f'(x) = (x+1)^2 \cdot (4x^2 - 8x + 14) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Với $m = \dfrac{5}{2}$, ta có $f'(x) = \dfrac{5}{4}(x+1)^2 \cdot (5x^2 - 10x + 13) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy $m=-2$ và $m=\dfrac{5}{2}$ đều thỏa yêu cầu bài toán. Do đó tổng cần tìm bằng $\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0 \leq x, y \leq 1$, trong đó x, y không đồng thời bằng 0 hoặc 1 và $\log_3\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right) + (x+1)\cdot(y+1) - 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P với $P = 2x + y$.

(A) 2. (B) 1. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) 0.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \log_3\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + (x+1)\cdot(y+1) - 2 = 0 &\Leftrightarrow \log_3(x+y) - \log_3(1-xy) + xy + x + y - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \log_3(x+y) + (x+y) = \log_3(1-xy) + 1 - xy. \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3(t) + t,\ t \in (0;2)$, ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 3} + 1 > 0\ \forall t \in (0;2)$. Do đó phương trình trên tương đương với

$$x + y = 1 - xy \Leftrightarrow y = \frac{1-x}{1+x}.$$

Từ đó suy ra $P = 2x + y = 2x + \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{2x^2+x+1}{x+1}$.

$P' = \dfrac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$, $P' = 0$ có nghiệm $x=0$ thuộc $[0;1]$.

Lần lượt thay $x=0$ và $x=1$ vào P, ta nhận được giá trị nhỏ nhất của P bằng 1.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Cho phương trình $\log_{\sqrt{2}}(mx - 6x^3) + 2\log_{\frac{1}{2}}(-14x^2 + 29x - 2) = 0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có ba nghiệm phân biệt.

(A) $18 < m < \dfrac{39}{2}$. (B) $18 < m < 20$. (C) $19 < m < 20$. (D) $19 < m < \dfrac{39}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_{\sqrt{2}}(mx-6x^3)+2\log_{\frac{1}{2}}(-14x^2+29x-2)=0 \Leftrightarrow \log_2(mx-6x^3)=\log_2(-14x^2+29x-2)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -14x^2+29x-2>0 \\ mx-6x^3=-14x^2+29x-2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{14}<x<2 \\ \dfrac{6x^3-14x^2-2}{x}=m-29. \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{6x^3-14x^2-2}{x}$ với $x\in\left(\dfrac{1}{14};2\right)$, ta có $f'(x)=\dfrac{12x^3-14x^2+2}{x^2}$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-\dfrac{1}{3} & \text{(loại)} \\ x=\dfrac{1}{2} & \text{(nhận)} \\ x=1 & \text{(nhận).} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{14}$		$\frac{1}{2}$		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{2839}{98}$	$\nearrow$	$-\frac{19}{2}$	$\searrow$	-10	$\nearrow$	-5

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để phương trình có 3 nghiệm thì $-10<m-29<-\dfrac{19}{2}\Leftrightarrow 19<m<\dfrac{39}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ cắt đường thẳng $y=m$ tại ba điểm phân biệt.

A $m\in(-\infty;-4)$.

B $m\in(-4;0)$.

C $m\in(0;+\infty)$.

D $m\in(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2$. Ta có

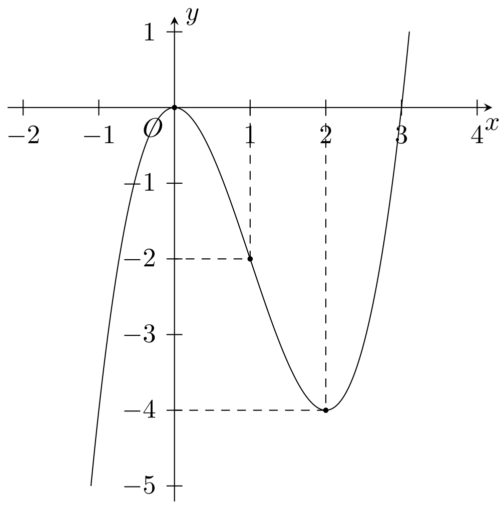
$f'(x)=3x^2-6x$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

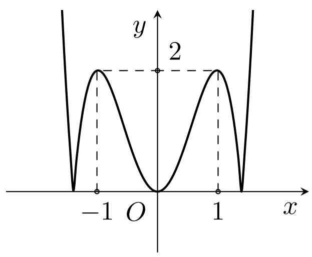
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$



Đồ thị hàm số $y = m$ là đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng m.
Dựa vào đồ thị ta thấy, hai đồ thị cắt nhau tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi $-4 < m < 0$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.

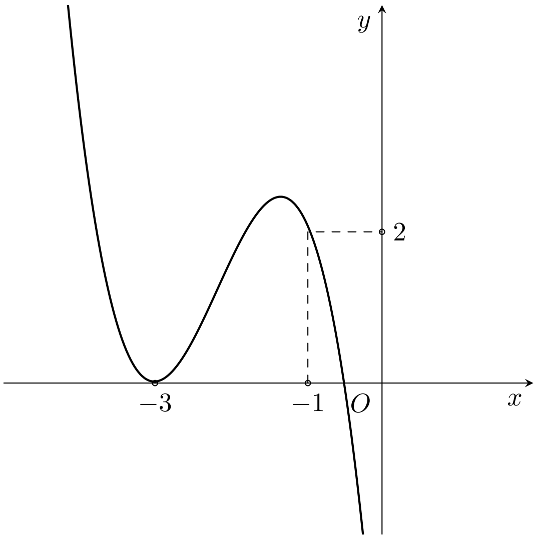


Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 4. **B** 5. (C) 2. (D) 3.

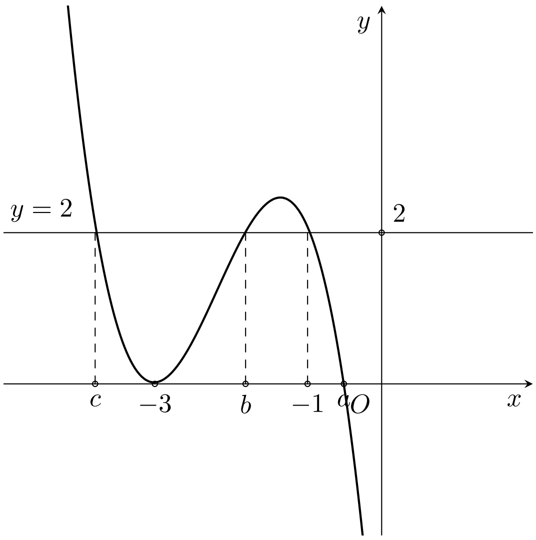
Lời giải.
Đồ thị hàm số có 5 cực trị.
Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $y = \dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x) - 2f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 6.

Lời giải.



Ta thấy phương trình bậc ba $f(x) = 2$ có 3 nghiệm phân biệt là $x_1 = c < -3, x_2 = b$, với $-3 < b < -1$ và $x_3 = -1$.

Phương trình bậc ba $f(x) = 0$ có nghiệm kép $x = -3$ và nghiệm đơn $x = a$ với $-1 < a < 0$.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ nên không mất tính tổng quát, ta giả sử

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -(x+3)^2(x-a) = 0$ và $f(x) = 2 \Leftrightarrow -(x-c)(x-b)(x+1) = 0$.

Ta có: $y = \dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x) - 2f(x)\right]} = \dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{xf(x)[f(x)-2]}$.

Khi đó: $\lim\limits_{x\to0^+} y = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}f(x)[f(x)-2]} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-3^+} y = \lim\limits_{x\to-3^+} \dfrac{(x+1)\sqrt{x(x+1)}}{-x(x+3)(x-a)[f(x)-2]} = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to c^+} y = \lim\limits_{x\to c^+} \dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{-xf(x)(x-c)(x-b)(x+1)} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to b^+} y = \lim\limits_{x\to b^+} \dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{-xf(x)(x-c)(x-b)(x+1)} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-1^-} y = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{(x+3)\sqrt{x}(x+1)}{-xf(x)(x-c)(x-b)} = 0$.

$\lim\limits_{x\to -1^+} y$ không tồn tại.

Vậy đồ thị hàm số $y = \dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}$ có 4 đường tiệm cận đứng là $x=0$, $x=-3$, $x=c$ và $x=b$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Cho hàm số $y = \dfrac{1-m\sin x}{\cos x+2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của thuộc đoạn $[0;10]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn -2.

A 1. B 9. C 3. **D** 6.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Gọi y_0 thuộc tập giá trị của hàm số, khi đó phương trình $y_0 = \dfrac{1-m\sin x}{\cos x+2}$ có nghiệm x.

$\Leftrightarrow m\sin x + y_0\cos x = 1-2y_0$ có nghiệm x.

$\Leftrightarrow m^2+y_0^2 \geq (1-2y_0)^2$

$\Leftrightarrow 3y_0^2-4y_0+1-m^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3} \leq y_0 \leq \dfrac{2+\sqrt{1+3m^2}}{3}$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $\dfrac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3}$

Để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn -2 thì $\dfrac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3} < -2$

$\Leftrightarrow 8 < \sqrt{1+3m^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{21}<m\\ m<-\sqrt{21}\end{array}\right.$.

Do m nguyên thuộc đoạn $[0;10]$ nên $m \in \{5;6;7;8;9;10\}$

Vậy có 6 giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[0;10]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn -2 .

Chọn đáp án D □

Câu 30. Tập nghiệm của bất phương trình $4^{x+1} \leq 8^{x-2}$ là

A $[8;+\infty)$. B $\varnothing$. C $(0;8)$. D $(-\infty;8]$.

Lời giải.

Ta có: $4^{x+1} \leq 8^{x-2} \Leftrightarrow 2^{2x+2} \leq 2^{3x-6} \Leftrightarrow 2x+2 \leq 3x-6 \Leftrightarrow 8 \leq x$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[8;+\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Với a,b là các số thực dương tùy ý và a khác 1, đặt $P=\log_a b^3+\log_{a^2} b^6$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $P=27\log_a b$. B $P=15\log_a b$. C $P=9\log_a b$. **D** $P=6\log_a b$.

Lời giải.

Ta có $P=\log_a b^3+\log_{a^2} b^6 = 3\log_a b+\dfrac{6}{2}\log_a b = 3\log_a b+3\log_a b = 6\log_a b$.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\sqrt{\log x+1-1}$.

A $\mathscr{D}=(10;+\infty)$. **B** $\mathscr{D}=(9;+\infty)$. C $\mathscr{D}=(-\infty;9)$. D $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x+1>0 \\ \log x+1-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ \log x+1\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ x+1\geq 10 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 9.$

Vậy $\mathscr{D}=(9;+\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Một người vay ngân hàng 200 triệu đồng với lãi suất là $0,6\%$ một tháng theo thỏa thuận; sau đúng một tháng kể từ ngày vay thì ông bắt đầu trả nợ và đều đặn cứ mỗi tháng người đó sẽ trả cho ngân hàng 9 triệu đồng cho đến khi hết nợ (biết rằng, tháng cuối cùng có thể trả dưới 9 triệu đồng). Hỏi sau bao nhiêu tháng thì người đó trả được hết nợ ngân hàng.

A 24. **B** 23. **C** 22. **D** 25.

Lời giải.

Gọi số tiền nợ ban đầu là $\mathrm{A}_0=200$.

Tiền nợ tháng thứ nhất là $\mathrm{A}_1=\mathrm{A}_0(1+r\%)-9$.

Tiền nợ tháng thứ hai là $\mathrm{A}_2=\mathrm{A}_1(1+r\%)-9=\mathrm{A}_0(1+r\%)^2-9(1+r\%)-9$.

Tiền nợ tháng thứ ba là $\mathrm{A}_3=\mathrm{A}_0\left(1+r^\circ/0\right)^3-9(1+r\%)^2-9(1+r\%)-9$.

....

Tiền nợ tháng thứ n là $\mathrm{A}_n=\mathrm{A}_n(1+r\%)^n-9(1+r\%)^{n-1}-9(1+r\%)^{n-2}-\cdots-9$.

Để tháng thứ n hết nợ $\Rightarrow \mathrm{A}_n=0 \Leftrightarrow \mathrm{A}_0(1+r\%)^n=9\left[(1+r\%)^{n-1}+(1+r\%)^{n-2}+\cdots+1\right]$.

$\Leftrightarrow 200(1+0,6\%)^n=9\dfrac{\left[(1+0,6\%)^n-1\right]}{0,6\%} \Leftrightarrow 1,006^n=\dfrac{15}{13} \Leftrightarrow n\approx 23,9216.$

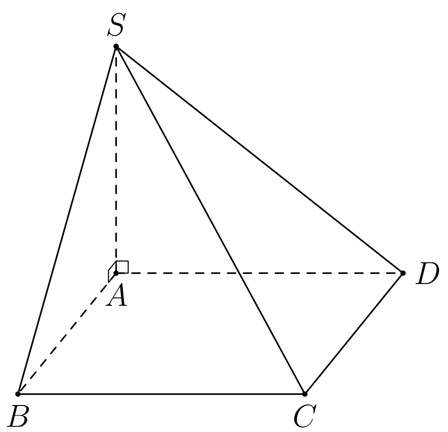
Vậy $n=24$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với đường chéo $AC=2a, SA$ vuông góc mặt phẳng $ABCD$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là:

A $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **B** $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **C** $a\sqrt{2}$. **D** $a\sqrt{3}$.

Lời giải.



Ta có: $\begin{cases} BC\perp SA \\ BC\perp AB \end{cases} \Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB$ tại B và $BC\perp CD$ tại C.

Suy ra BC là đoạn vuông góc chung của SB và CD.

$\Rightarrow d(SB,CD)=BC=\dfrac{AC}{\sqrt{2}}-a\sqrt{2}.$

Chọn đáp án C □

Câu 35. Tính giá trị biểu thức: $P = \log_{a^2} a^{10}b^2 + \log_{\sqrt{a}}\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right) + \log_{\sqrt[3]{5}} b^{-2}$ (Với $0 < a \neq 1; 0 < b \neq 1$)

(A) $\sqrt{3}$. **B** 1. (C) $\sqrt{2}$. (D) 2.

Lời giải.

Ta có

$P = \log_{a^2}\left(a^{10}b^2\right) + \log_{\sqrt{a}}\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right) + \log_{\sqrt[3]{5}}\left(b^{-2}\right)$.

$= \log_{a^2} a^{10} + \log_{a^2} b^2 + \log_{\sqrt{a}} a - \log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} - 2\log_{\frac{1}{3}} b$.

$= 5 + \log_a b + 2 - \log_a b - 6 = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, SA vuông góc với đáy. Hỏi mệnh đề nào sau đây sai ?

(A) $\mathrm{d}(B,(SCD)) = 2\cdot \mathrm{d}(O,(SCD))$. **B** $\mathrm{d}(A,(SBD)) = \mathrm{d}(B,(SAC))$.

(C) $\mathrm{d}(C,(SAB)) = \mathrm{d}(C,(SAD))$. (D) $\mathrm{d}(S,(ABCD)) = SA$.

Lời giải.

Xét đáp án A có : $BO \cap (SCD) = D, BD = 2BO$

$\Rightarrow \mathrm{d}(B,(SCD)) = 2\cdot \mathrm{d}(O,(SCD))$ nên A loại.

Xét đáp án B: Gọi H là hình chiếu của A trên SO

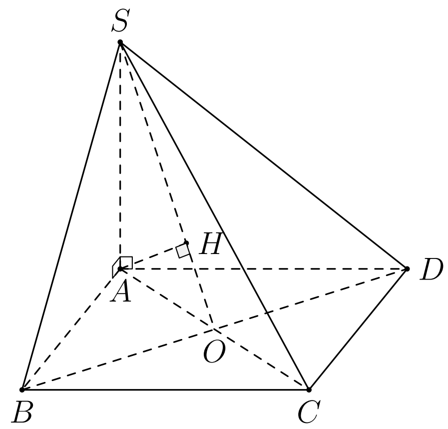
$\Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AO^2}$. Khi đó $\mathrm{d}(A,(SBD)) = AH$.

$\mathrm{d}(B,(SAC)) = BO \neq AH$ nên chọn B

Xét đáp án C : $\mathrm{d}(C,(SAB)) = CB, \mathrm{d}(C,(SAD)) = CD$

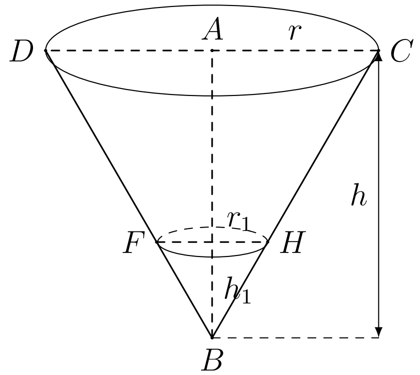
$CB = AD$ nên C loại

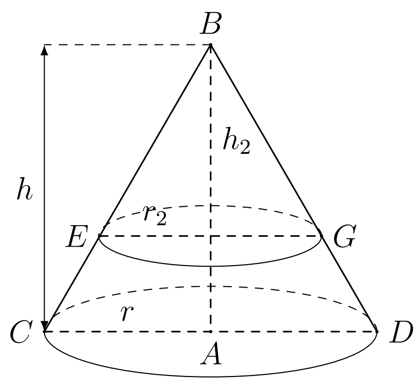
Xét đáp án D: Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \mathrm{d}(S,(ABCD)) = SA$ do đó đáp án D loại.



Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Một cái phễu có dạng hình nón. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của lượng nước trong phễu bằng $\dfrac{1}{3}$ chiều cao của phễu. Hỏi nếu bịt kín miệng phễu rồi lộn ngược phễu lên thì chiều cao của mực nước xấp xỉ bằng bao nhiêu? Biết rằng chiều cao của phễu là 15 cm.





(A) 0,501 (cm). (B) 0,302 (cm). (C) 0,216 (cm). **D** 0,188(cm).

Lời giải.

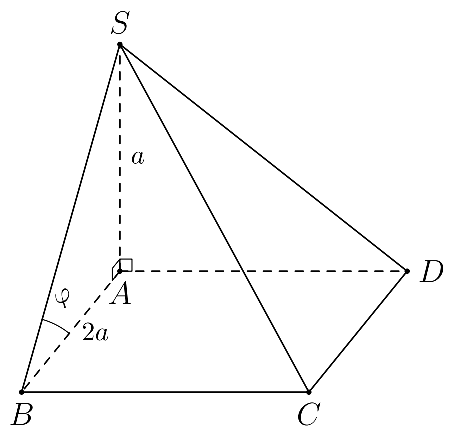
Ta gọi chiếc phễu trên là khối nón (N) có bán kính đáy r và chiều cao $h = 15$ cm và thể tích là V.
Thể tích lượng nước đỗ vào phễu cũng bằng thể tích V_1 của khối nón (N_1) có bán kính đáy r_1 và chiều cao h_1.
Áp dụng định lý ta-lét ta có $\dfrac{h_1}{h} = \dfrac{r_1}{r} = \dfrac{1}{3}$
Suy ra $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \dfrac{1}{3}\pi(\dfrac{r}{3})^2 \cdot \dfrac{h}{3} = \dfrac{1}{81}\pi r^2 h = \dfrac{1}{27}V$
Khi bịt kín miệng phễu rồi lộn ngược phễu lên thì nước trong phễu vẫn giữ nguyên. Phần không chứa nước trong phễu chính là khối nón (N_2) với bán kính đáy r_2, chiều cao h_2 và thể tích là $V_2 = V - V_1 = \dfrac{26}{27}V$.
Áp dụng định lý ta-lét ta có $\dfrac{r_2}{r} = \dfrac{h_2}{h}$.
Nên suy ra: $V_2 = \dfrac{26}{27}V \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = \dfrac{26}{27}\dfrac{1}{3}\pi r^2 h \Leftrightarrow (\dfrac{r_2}{r})^2\dfrac{h_2}{h} = \dfrac{26}{27} \Leftrightarrow (\dfrac{h_2}{h})^3 = \dfrac{26}{27} \Leftrightarrow h_2 = 5\sqrt[3]{26}$
Vậy chiều cao của mực nước trong phễu sau khi úp ngược là: $15 - 5\sqrt[3]{26} = 0,188$ cm.
Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a$. Gọi φ là góc tạo bởi SB và mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định $\cot\varphi$?

A $\cot\varphi = 2$. **B** $\cot\varphi = \dfrac{1}{2}$. **C** $\cot\varphi = 2\sqrt{2}$. **D** $\cot\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

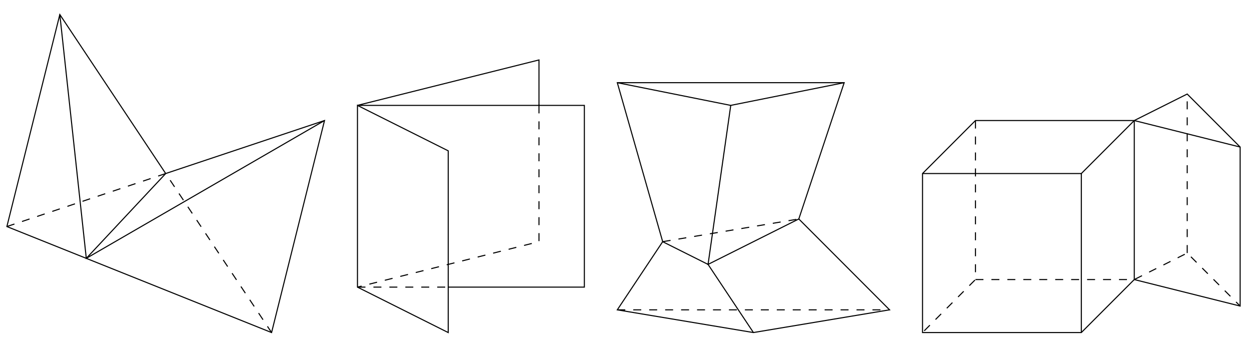
Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra hình chiếu của SB lên mặt phẳng $(ABCD)$ là AB
Do đó $(\widehat{SB,(ABCD)}) = \widehat{SB, AB} = \widehat{SBA} = \varphi$ (vì tam giác SAB vuông tại A nên $\widehat{SBA}$ nhọn)
Xét tam giác SAB vuông tại A có $\cot\varphi = \cot\widehat{SAB} = \dfrac{AB}{SA} = 2$



Chọn đáp án A □

Câu 39. Trong các hình dưới đây, hình nào là hình đa diện?



Hình 1 **Hình 2** **Hình 3** **Hình 4**

A Hình 4. **B** Hình 2. **C** Hình 1. **D** Hình 3.

Lời giải.

Hình 3 là hình đa diện.

Hình 2 có 1 cạnh là cạnh chung của 3 mặt nên không phải là hình đa diện.

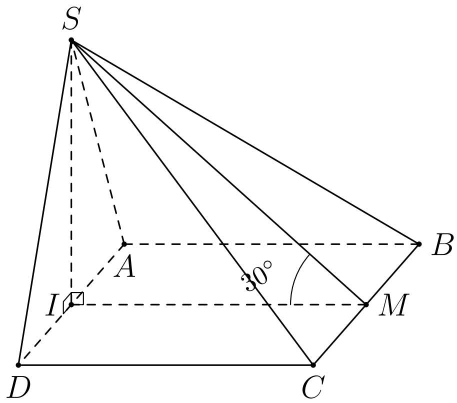
Hình 1, Hình 4 có 1 cạnh là cạnh chung của 4 mặt nên không phải là hình đa diện.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác đều cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$ là $30°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là :

(A) $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. **D** $2a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.



Trong tam giác đều SAD gọi I là trung điểm AD

$\Rightarrow SI \perp AD \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.(Vì $(SAD) \perp (ABCD)$)

Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow BC \perp IM$ (1)

Mặt khác $SI \perp (ABCD) \Rightarrow BC \perp SI$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $BC \perp SM$.

Vậy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$ chính là $\widehat{SMI} = 30°$.

Xét tam giác vuông SIM có $IM = \dfrac{SI}{\tan 30°} = 3a$ (vì tam giác SAD là tam giác đều cạnh $2a$ nên $SI = a\sqrt{3}$).

Vậy, thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

$V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SI = \dfrac{1}{3}AD \cdot BC \cdot SI = 2a^3\sqrt{3}$.

.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (1 - x)(x + 2)g(x) + 2018$ với $g(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(1 - x) + 2018x + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A $(3; +\infty)$. (B) $(-\infty; 3)$. (C) $(1; +\infty)$. (D) $(0; 3)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -f'(1 - x) + 2018 = -x(3 - x) \cdot g(1 - x)$.

Suy ra $y' \le 0 \Leftrightarrow -x(3 - x) \cdot g(1 - x) \le 0 \Leftrightarrow x(3 - x) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 0 \\ x \ge 3. \end{array}\right.$

$$(\text{do } g(1 - x) < 0 \text{ nên } -g(1 - x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}).$$

Vậy hàm số $y = f(1 - x) + 2018x + 2019$ nghịch biến trên $(3; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $AC = 2a\sqrt{3}$, cạnh bên $AA' = 2a$. Thể tích khối lăng trụ bằng bao nhiêu?

(A) a^3. (B) $a^3\sqrt{3}$. (C) $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **D** $2a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $V = AA' \cdot S_{ABC} = 2a \cdot \dfrac{a \cdot 2a\sqrt{3}}{2} = 2a^3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Một thầy giáo gửi 200 triệu đồng loại kì hạn 6 tháng vào một ngân hàng với lãi suất 6,9%/năm. Hỏi sau 6 năm 9 tháng. thầy giáo đó nhận số tiền cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu? Biết rằng thầy giáo đó không rút lãi ở tất cả các kì hạn trước đó và nếu rút trước thì ngân hàng sẽ trả lãi suất theo loại không kì hạn 0,002%/ngày (Giả sử một tháng có 30 ngày).

A 471688328 đồng. **B** 321556228 đồng. **C** 311392503 đồng. **D** 302088933 đồng.

Lời giải.

Ta có lãi suất trên một kì hạn 6 tháng là $\dfrac{6{,}9\%}{2} = 3{,}45\%$.

Tổng thời gian gửi là 6 năm 9 tháng bằng 13 kì hạn và 90 ngày.

Tổng số tiền sau 13 kì hạn là $T_1 = 200 \cdot 10^6 \cdot (1 + 3{,}45\%)^{13}$.

Tổng số tiền sau 90 ngày (do rút trước kì hạn) là $T_2 = T_1(1 + 0{,}002\%)^{90} = 311392503$ đồng.

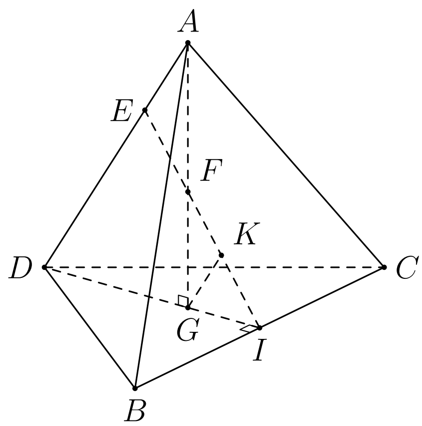
Vậy tổng số tiền mà thầy giáo đó nhận được cả gốc và lãi là $T = T_2 = 311392503$ đồng.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Mặt phẳng (P) chứa cạnh BC và cắt cạnh AD tại E. Biết góc giữa hai mặt phẳng (P) và (BCD) có số đo α thỏa mãn $\tan\alpha = \dfrac{5\sqrt{2}}{7}$. Gọi thể tích của hai tứ diện $ABCE$ và tứ diện $BCDE$ lần lượt là V_1 và V_2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A $\dfrac{3}{8}$. **B** $\dfrac{1}{8}$. **C** $\dfrac{3}{5}$. **D** $\dfrac{5}{8}$.

Lời giải.



Gọi G là trọng tâm tam giác BCD, I là trung điểm của BC.

Gọi F là giao điểm của AG và IE.

Lấy điểm K trên EI sao cho $GK \parallel AD$.

Do $ABCD$ là tứ diện đều cạnh a nên $GI = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $AG = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Ta có (P) chính là mặt phẳng (EBC).

$\Rightarrow ((P),(BCD)) = (EI, DI) = \widehat{EID} = \widehat{FIG} = 60°$.

Theo giả thiết $\tan\alpha = \dfrac{5\sqrt{2}}{7}$ nên $GF = GI\tan\alpha = \dfrac{5a\sqrt{6}}{42}$

và $AF = AG - GF = \dfrac{3a\sqrt{6}}{14}$. Suy ra $\dfrac{GF}{AF} = \dfrac{5}{9}$.

Do $GK \parallel AD$ nên $\dfrac{GK}{AE} = \dfrac{GF}{AF} = \dfrac{5}{9}$, $\dfrac{GK}{DE} = \dfrac{GI}{DI} = \dfrac{1}{3}$.

Do đó $\dfrac{AE}{DE} = \dfrac{3}{5}$. Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{AE}{DE} = \dfrac{3}{5}$.

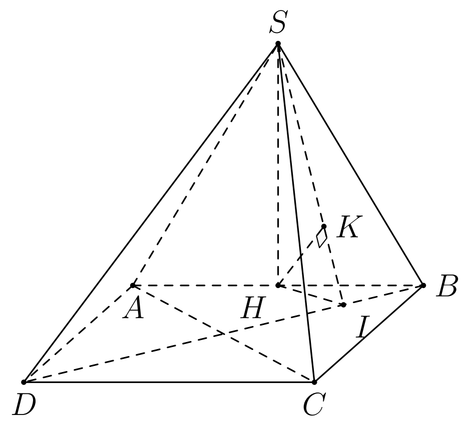
Chọn đáp án C □

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, cạnh $AB = 2AD = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

A $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{a}{2}$. **D** a.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB.
Do ΔSAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $ABCD$ nên $SH \perp (ABCD)$.
Kẻ $HI \perp BD$ tại I, kẻ $HK \perp SI$ tại K.
Suy ra $\mathrm{d}[A,(SBD)] = 2\mathrm{d}[H,(SBD)] = 2HK$.
Xét ΔSAB đều có $SH = 2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.
Ta có ΔHIB đồng dạng ΔDAB nên $\dfrac{HI}{DA} = \dfrac{HB}{DB}$.
$\Rightarrow HI = \dfrac{HB \cdot DA}{DB} = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$.
Xét ΔSHI vuông tại H có $HK = \dfrac{HI \cdot SH}{\sqrt{HI^2 + SH^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Vậy $\mathrm{d}[A,(SBD)] = 2HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

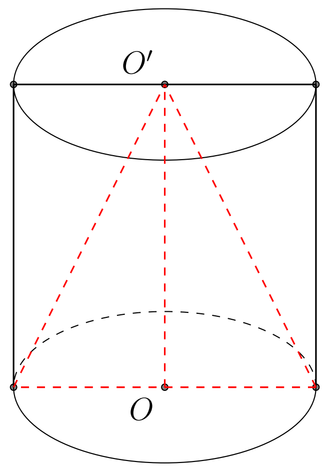


Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O') chiều cao $R\sqrt{3}$ và bán kính đáy R. Một hình nón có đỉnh (O') và đáy là hình tròn $(O;R)$. Tỷ lệ diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón bằng?

A 3. **B** $\sqrt{2}$. **C** 2. **D** $\sqrt{3}$.

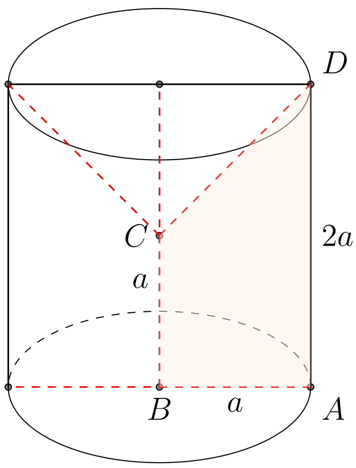
Lời giải.



+ Diện tích xung quanh hình trụ là: $S_1 = 2\pi Rh = 2\pi R^2\sqrt{3}$.
+ Độ dài đường sinh hình nón là: $l = \sqrt{\left(R\sqrt{3}\right)^2 + R^2} = 2R$.
+ Diện tích xung quanh hình nón là: $S_2 = \pi Rl = \pi R \cdot 2R = 2\pi R^2$.
Suy ra tỉ lệ cần tìm là: $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{2\pi R^2 \cdot \sqrt{3}}{2\pi R^2} = \sqrt{3}$.

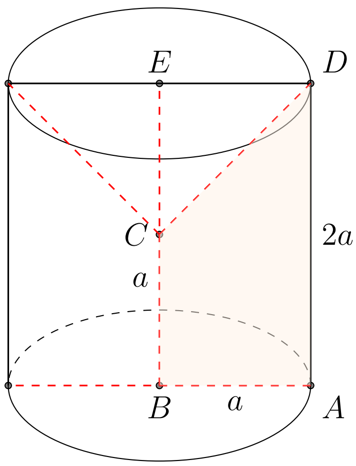
Chọn đáp án D □

Câu 47. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B với $AB = BC = \dfrac{AD}{2} = a$. Quay hình thang và miền trong của nó quanh đường thẳng chứa cạnh BC. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



Ⓐ $V = \dfrac{4\pi a^3}{3}$. Ⓑ $V = \dfrac{5\pi a^3}{3}$. Ⓒ $V = \pi a^3$. Ⓓ $V = \dfrac{7\pi a^3}{3}$.

Lời giải.



Dựng hình chữ nhật $ABED$ với E nằm trên tia BC.

Thể tích khối trụ sinh bởi hình chữ nhật $ABED$ khi quay quanh đường thẳng chứa cạnh BC là

$$V_1 = AD \cdot \pi \cdot AB^2 = 2a \cdot \pi \cdot a^2 = 2\pi a^3.$$

Thể tích khối nón sinh bởi tam giác EDC khi xoay quanh đường thẳng chứa cạnh BC là

$$V_2 = \frac{1}{3} CE \cdot \pi \cdot ED^2 = \frac{1}{3} a \cdot \pi \cdot a^2 = \frac{\pi a^3}{3}.$$

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là: $V = V_1 - V_2 = \dfrac{5\pi a^3}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\ln x^2 < 0$.

Ⓐ $S = (-1; 1)$. Ⓑ $S = (-1; 0)$. Ⓒ $S = (-1; 1) \setminus \{0\}$. Ⓓ $S = (0; 1)$.

Lời giải.

Ta có $\ln x^2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-1; 1) \setminus \{0\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến $\mathbb{R}$?

A 6. **B** 4. **C** 7. **D** 5.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -3m^2 - 2mx + 4m + 9$.

Do phương trình $y' = 0$ có hữu hạn nghiệm nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad -3x^2 - 2mx + 4m + 9 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}. \\ &\Leftrightarrow \quad \Delta' = m^2 + 12m + 27 \leq 0 \,(\text{do } a = -3 < 0) \\ &\Leftrightarrow \quad -9 \leq m \leq -3. \end{aligned}$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-9; -8; -7; -5; -4; -3\}$.

Vậy có 7 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho $M = \log_{12} x = \log_3 y$. Khi đó M bằng biểu thức nào sau đây?

A $\log_4 \dfrac{x}{y}$. **B** $\log_{36} \dfrac{x}{y}$. **C** $\log_9(x-y)$. **D** $\log_{15}(x+y)$.

Lời giải.

Do $M = \log_{12} x = \log_3 y$ nên $\begin{cases} x = 12^M > 0 \\ y = 3^M > 0 \end{cases}$.

Suy ra $\dfrac{x}{y} = \dfrac{12^M}{3^M} = 4^M$ hay $M = \log_4 \dfrac{x}{y}$.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. C	3. B	4. C	5. B	6. C	7. D	8. D	9. B	10. A
11. C	12. B	13. B	14. A	15. A	16. B	17. A	18. A	19. D	20. C
21. B	22. A	23. C	24. B	25. D	26. B	27. B	28. C	29. D	30. A
31. D	32. B	33. A	34. C	35. B	36. B	37. D	38. A	39. D	40. D
41. A	42. D	43. C	44. C	45. B	46. D	47. B	48. C	49. C	50. A

31 ĐỀ THI THỬ THPT THANH THỦY, PHÚ THỌ – LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \dfrac{2017}{\sin x}$ là

Ⓐ $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ⓑ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Ⓒ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ⓓ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

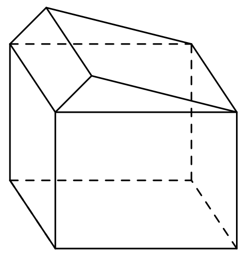
Lời giải.

Điều kiện

Chọn đáp án B □

Câu 2.

Số đỉnh của hình đa diện dưới đây là



Ⓐ 8. Ⓑ 9. Ⓒ 10. Ⓓ 11.

Lời giải.

Hình đa diện đã cho có số đỉnh là 10.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

Ⓐ $u_n = \dfrac{n^2 - 2}{5n + n^2}$. Ⓑ $u_n = \dfrac{n^2 - 2n}{5n + n^2}$. Ⓒ $u_n = \dfrac{1 - 2n}{5n + n^2}$. Ⓓ $u_n = \dfrac{1 - 2n^2}{5n + n^2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{n^2 - 2}{5n + n^2} = \lim \dfrac{1 - \dfrac{2}{n^2}}{\dfrac{5}{n} + 1} = 1$; $\lim \dfrac{n^2 - 2n}{5n + n^2} = \lim \dfrac{1 - \dfrac{2}{n}}{\dfrac{5}{n} + 1} = 1$.

$\lim \dfrac{1 - 2n}{5n + n^2} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{2}{n}}{\dfrac{5}{n} + 1} = 0$; $\lim \dfrac{1 - 2n^2}{5n + n^2} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{n^2} - 2}{\dfrac{5}{n} + 1} = -2$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 9x + 20$ đồng biến trên khoảng

Ⓐ $(-3; 1)$. Ⓑ $(1; 2)$. Ⓒ $(-3; +\infty)$. Ⓓ $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 - 6x + 9 = -3(x^2 + 2x - 3)$.

Khi đó $y' \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in (-3; 1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Hàm số $y = \cos x \cdot \sin^2 x$ có đạo hàm là biểu thức nào sau đây?

Ⓐ $\sin x(3\cos^2 x + 1)$. Ⓑ $\sin x(\cos^2 x - 1)$. Ⓒ $\sin x(\cos^2 x + 1)$. Ⓓ $\sin x(3\cos^2 x - 1)$.

Lời giải.

Ta có $y = \cos x \cdot \sin^2 x = \cos x - \cos^3 x$.

Vậy $y' = -\sin x + 3\cos^2 x \cdot \sin x = \sin x\,(3\cos^2 x - 1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đầu lần lượt là $5; 9; 13; 17; \ldots$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng.

Ⓐ $u_n = 4n + 1$. Ⓑ $u_n = 5n - 1$. Ⓒ $u_n = 5n + 1$. **D** $u_n = 4n - 1$.

Lời giải.

Dãy số đã cho là cấp số cộng có $u_1 = 5; u_2 = 9 \Rightarrow d = u_2 - u_1 = 4$.

Do đó $u_n = u_1 + (n-1)d = 5 + (n-1)4 = 4n + 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Sắp xếp năm bạn học sinh An, Bình, Chi, Dũng, Lệ vào một chiếc ghế dài có 5 chỗ ngồi. Số cách sắp xếp sao cho bạn Chi luôn ngồi chính giữa là

A 24. Ⓑ 120. Ⓒ 16. Ⓓ 60.

Lời giải.

Vì có 5 bạn học sinh, nên số cách cho bạn Chi ngồi chính giữa là 1 cách. Bốn bạn còn lại xếp vào bốn ghế, chính là hoán vị của 4 phần tử nên có 4! cách.

Vậy có $1 \cdot 4! = 24$ cách.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Chọn 3 học sinh để tham gia vệ sinh công cộng toàn trường, hỏi có bao nhiêu cách chọn như trên?

Ⓐ 2300. Ⓑ 59280. Ⓒ 445. **D** 9880.

Lời giải.

Số cách chọn 3 học sinh để tham gia vệ sinh công cộng toàn trường là $\mathrm{C}_{40}^3 = 9880$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x$ có điểm cực tiểu là

Ⓐ $(-1; 0)$. Ⓑ $(1; 0)$. Ⓒ $(1; -2)$. **D** $(-1; -2)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 + 3 = 3(1 - x^2)$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

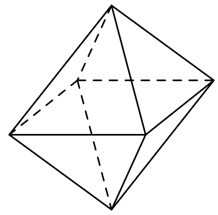
Chọn đáp án D □

Câu 10. Khối bát diện đều thuộc loại khối đa diện đều nào sau đây?

Ⓐ $\{3; 5\}$. Ⓑ $\{4; 3\}$. **C** $\{3; 4\}$. Ⓓ $\{5; 3\}$.

Lời giải.

Khối bát diện đều thuộc loại khối đa diện đều là $\{3;4\}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Một hộp có 6 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 4 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi sao cho có đủ cả ba màu. Số cách chọn là

(A) 840. (B) 3843. (C) 2170. (D) 3003.

Lời giải.

Cách chọn 5 viên bi bất kỳ trong 15 viên bi trong hộp là: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^3 = 3003$.

Cách chọn 5 viên bi không đủ cả 3 màu:

Trường hợp 1: Cách chọn 5 viên bi chỉ có một màu là $\mathrm{C}_6^5 + \mathrm{C}_5^5 = 7$ cách chọn.

Trường hợp 2: Cách chọn 5 viên biên chỉ có hai màu.

+ 5 viên bi chỉ có hai màu xanh và đỏ là: $\mathrm{C}_{10}^5 - \mathrm{C}_6^5 = 246$ cách chọn.

+ 5 viên bi chỉ có hai màu xanh và vàng là: $\mathrm{C}_{11}^5 - \mathrm{C}_6^5 - \mathrm{C}_5^5 = 455$ cách chọn.

+ 5 viên bi chỉ có hai màu đỏ và vàng là:$\mathrm{C}_9^5 - \mathrm{C}_5^5 = 125$ cách chọn.

Số cách chọn 5 viên bi không đủ 3 màu là: $7 + 455 + 246 + 125 = 833$ cách chọn.

Vậy số cách chọn 5 viên bi đủ cả ba màu là: $3003 - 833 = 2170$ cách chọn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Tìm tất cả giá trị của x để ba số $2x-1$; x; $2x+1$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân.

(A) $x = \pm\dfrac{1}{3}$. (B) $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (C) $x = \pm\sqrt{3}$. (D) $x = \pm 3$.

Lời giải.

Do ba số $2x-1$; x; $2x+1$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân nên ta có:

$$(2x-1)(2x+1) = x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho $L = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-3x+1}{1-x^2}$. Khi đó

(A) $L = \dfrac{1}{4}$. (B) $L = -\dfrac{1}{2}$. (C) $L = -\dfrac{1}{4}$. (D) $L = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

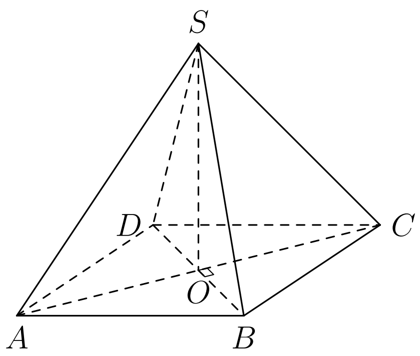
Ta có $L = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-3x+1}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(2x-1)}{(1-x)(1+x)} = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Thể tích khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a là

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Gọi khối chóp tứ giác đều là $S.ABCD$.
Gọi O là tâm của đáy $ABCD$. Do $S.ABCD$ là khối chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$.
Vậy SO là chiều cao của khối chóp $S.ABCD$.
Xét ΔSOB vuông tại O, ta có
$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là
$V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \dfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ bằng

A $\dfrac{\pi}{9}$. B $\dfrac{\pi}{6}$. C $-\dfrac{\pi}{6}$. D $-\dfrac{\pi}{9}$.

Lời giải.

Ta có $\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2\pi}{3} + l2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7\pi}{36} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{11\pi}{36} + \dfrac{l2\pi}{3} \end{array}\right. (k, l \in \mathbb{Z})$.

Trường hợp 1: $x < 0$, x lớn nhất.

Chọn $\left[\begin{array}{l} k = -1; x = -\dfrac{17\pi}{36} \\ l = -1; x = -\dfrac{13\pi}{36} \end{array}\right. \Rightarrow x = -\dfrac{13\pi}{36}$ (nhận).

Trường hợp 2: $x > 0$, x nhỏ nhất.

Chọn $\left[\begin{array}{l} k = 0; x = \dfrac{7\pi}{36} \\ l = 0; x = \dfrac{11\pi}{36} \end{array}\right. \Rightarrow x = \dfrac{7\pi}{36}$ (nhận).

Vậy tổng cần tìm là: $-\dfrac{13\pi}{36} + \dfrac{7\pi}{36} = -\dfrac{\pi}{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Đồ thị hàm số nào sau đây không có tiệm cận ngang?

A $y = \dfrac{3}{x^2 - 1}$. B $y = \dfrac{\sqrt{x^4 + 3x^2 + 7}}{2x - 1}$.

C $y = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$. D $y = \dfrac{3}{x - 2} + 1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của hàm số $y = \dfrac{3}{x^2 - 1}$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^4 + 3x^2 + 7}}{2x - 1} = \pm\infty \Rightarrow$ hàm số $y = \dfrac{3}{x^2 - 1}$ không có tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x - 3}{x + 1} = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang của hàm số $y = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{3}{x - 2} + 1\right) = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang của hàm số $y = \dfrac{3}{x - 2} + 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Cho $f(x) = x^5 + x^3 - 2x - 2$. Tính $f'(1) + f'(-1) + 4f(0)$.

A 4. B 7. C 6. D 5.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 - 2 \Rightarrow f'(1) = 6 = f'(-1)$ và $f(0) = -3$.

Vậy $f'(1) + f'(-1) + 4f(0) = 4$

Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho phương trình $\cos x + \cos \dfrac{x}{2} + 1 = 0$. Nếu đặt $t = \cos \dfrac{x}{2}$, ta được phương trình nào sau đây?

A $2t^2 + t - 1 = 0$. B $-2t^2 + t + 1 = 0$. C $-2t^2 + t = 0$. D $2t^2 + t = 0$.

Lời giải.

Ta có $\cos x + \cos \dfrac{x}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos \dfrac{x}{2} - 1 + \cos \dfrac{x}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos \dfrac{x}{2} + \cos \dfrac{x}{2} = 0$. Đặt $t = \cos \dfrac{x}{2}$, ta được phương trình $2t^2 + t = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

B Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.

C Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

D Một đường thẳng vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Lời giải.

Đáp án A sai vì hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba có thể chéo nhau.

Đáp án B sai vì hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì hai mặt phẳng đó có thể song song hoặc cắt nhau.

Đáp án C sai vì hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này có thể song song với mặt phẳng kí.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB = a, BC = 2a, A'C = a\sqrt{21}$ có thể tích bằng

A $4a^3$. B $\dfrac{8a^3}{3}$. C $8a^3$. D $\dfrac{4a^3}{3}$.

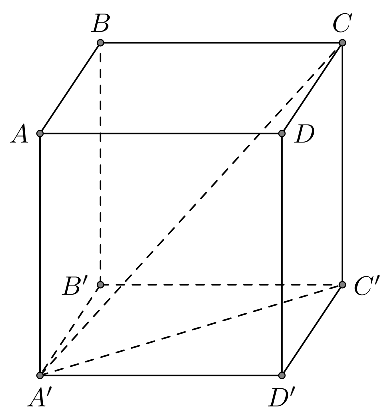
Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = 2a^2$.

$A'C' = \sqrt{A'B'^2 + B'C'^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$.

$CC' = \sqrt{A'C^2 - A'C'^2} = \sqrt{21a^2 - 5a^2} = 4a$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot CC' = 2a^2 \cdot 4a = 8a^3$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Tìm số hạng chứa x^{31} trong khai triển $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^{40}$.

(A) $\mathrm{C}_{40}^{4}x^{31}$. (B) $-\mathrm{C}_{40}^{37}x^{31}$. (C) $\mathrm{C}_{40}^{37}x^{31}$. (D) $\mathrm{C}_{40}^{2}x^{31}$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^{40}$ là $T_{k+1}=\mathrm{C}_{40}^{k}x^{40-k}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{k}=\mathrm{C}_{40}^{k}x^{40-3k}$.

Số hạng chứa x^{31} thỏa mãn $40-3k=31 \Leftrightarrow k=3$.

Vậy số hạng chứa x^{31} trong khai triển $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^{40}$ là $\mathrm{C}_{40}^{37}x^{31}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Đạo hàm của hàm số $y=-x^3+3mx^2+3(1-m^2)x+m^3-m^2$ (với m là tham số) bằng

(A) $3x^2-6mx-m+3m^2$. (B) $-x^2-3mx-1-3m$.
(C) $-3x^2+6mx+1-m^2$. (D) $-3x^2+6mx+3-3m^2$.

Lời giải.

Ta có $y'=-3x^2+6mx+3(1-m^2)=-3x^2+6mx+3-3m^2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{-x^2+3x-3}{2(x-1)}$ bằng biểu thức có dạng $\dfrac{ax^2+bx}{2(x-1)^2}$. Khi đó $a\cdot b$ bằng

(A) -1. (B) 6. (C) 4. (D) -2.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{2(-2x+3)(x-1)-(-x^2+3x-3)2}{4(x-1)^2}=\dfrac{-x^2+2x}{2(x-1)^2}\Rightarrow a=-1; b=2$.

Vậy $a\cdot b=-2$.

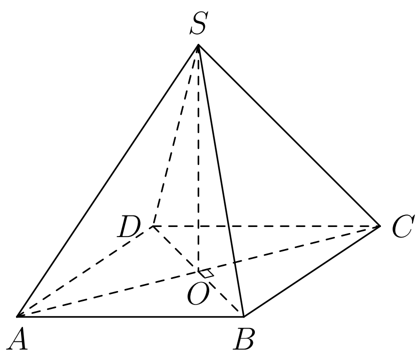
Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, $SA=SC$, $SB=SD$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào **đúng**?

(A) $SA\perp(ABCD)$. (B) $SO\perp(ABCD)$. (C) $SC\perp(ABCD)$. (D) $SB\perp(ABCD)$.

Lời giải.

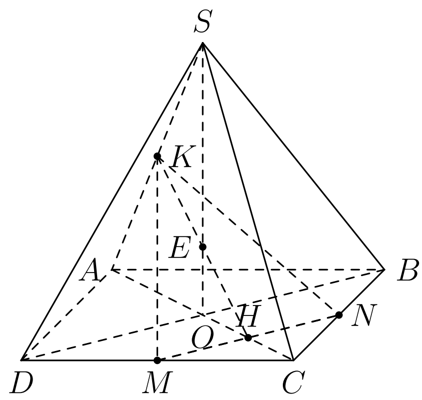
Ta có $\begin{cases}SA=SC\\SB=SD\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}SO\perp AC\\SO\perp BD\end{cases}\Rightarrow SO\perp(ABCD)$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 25.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của CD, CB, SA. H là giao điểm của AC và MN. Giao điểm của SO với (MNK) là điểm E. Hãy chọn cách xác định điểm E đúng nhất trong bốn phương án sau.



A. E là giao của MN với SO.

B. E là giao của KN với SO.

C. E là giao của KH với SO.

D. E là giao của KM với SO.

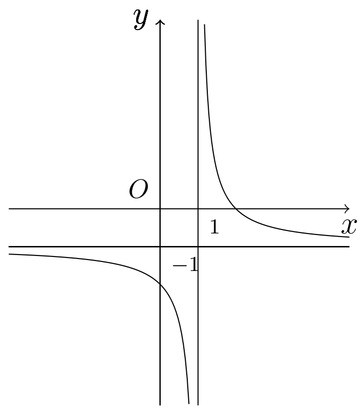
Lời giải.

Gọi $E = KH \cap SO \Rightarrow \begin{cases} E \in KH \subset (KMN) \\ E \in SO \end{cases} \Rightarrow E = SO \cap (KMN)$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho hàm số $y = \dfrac{ax - b}{x - 1}$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $b < 0 < a$. B. $a < 0 < b$. C. $0 < b < a$. D. $b < a < 0$.



Lời giải.

Nhìn đồ thị ta thấy hàm số luôn nghịch biến trên các khoảng xác định nên

$$y' = \frac{-a + b}{(x-1)^2} < 0 \Leftrightarrow b < a.$$

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = a < 0$.

Vậy $b < a < 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (\alpha)$.

B. $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$.

C. $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$.

D. $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.

Lời giải.

A sai vì b có thể nằm trên (α) hoặc $b \perp (\alpha)$.

B sai vì b có thể song song với (α).

D sai vì b có thể nằm trên (α).

Chọn đáp án D □

Câu 28. Cho hai đường thẳng a và b. Điều kiện nào sau đây đủ để kết luận a và b chéo nhau?

A a và b không nằm trên bất kì mặt phẳng nào.

B a và b không có điểm chung..

C a và b là hai cạnh của một tứ diện..

D a và b nằm trên hai mặt phẳng phân biệt.

Lời giải.

B sai vì a và b có thể song song.

C sai vì a và b có thể cắt nhau.

D sai vì a và b có thể song song.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Cho tập hợp $A = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số trong tập A. Chọn ngẫu nhiên một chữ số từ S. Xác suất để số được chọn mà trong mỗi số luôn luôn có mặt hai chữ số chẵn và hai chữ số lẻ là

A $\frac{1}{5}$. **B** $\frac{18}{35}$. **C** $\frac{17}{35}$. **D** $\frac{3}{35}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{A}_7^4 = 840$.

Gọi X là biến cố: "chọn ngẫu nhiên một số từ tập A".

Nhận xét: Trong tập A có 4 số chẵn và 3 số lẻ.

Do đó số phần tử của X là $n(X) = \mathrm{A}_4^2 \cdot \mathrm{A}_3^2 \cdot \mathrm{C}_4^2 = 432$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(X) = \dfrac{n(X)}{n(\Omega)} = \dfrac{18}{35}$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ trên tập hợp $D = (-\infty; -1] \subset [1; \frac{3}{2}]$. Khi đó $T = m \cdot M$ bằng

A $\frac{1}{9}$. **B** 0. **C** $\frac{3}{2}$. **D** $-\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \setminus \{2\}$.

Ta có $y' = \dfrac{\dfrac{x(x-1)}{\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x^2-1}}{(x-2)^2} = \dfrac{-2x+1}{(x-2)^2\sqrt{x^2-1}}$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -1$.

Bảng biến thiên

x	$-\sqrt{2}$		-1		$\sqrt{2}$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$4-2\sqrt{2}$	↘	1	↗	$4+2\sqrt{2}$

Từ bảng biến thiên suy ra $M = 0; m = \sqrt{5}$.
Vậy $T = m \cdot M = 0$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Tập hợp S tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2+2m)x - 3$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ là

(A) $S = \varnothing$. (B) $S = [0;1]$. (C) $S = [-1;0]$. **D** $S = \{-1\}$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = m+2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		m		$m+2$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			$y(m)$				$+\infty$
	$-\infty$	↗		↘	$y(m+2)$	↗	

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ thì $\begin{cases} m \le -1 \\ m+2 \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le -1 \\ m \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, có bảng biên thiên

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
y				↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↗	$+\infty$
		↗	1				$\dfrac{27}{4}$		
	$-\infty$								

Tất cả các giá trị của m để phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt là

A $m > \dfrac{27}{4}$. (B) $m < 0$. (C) $0 < m < \dfrac{27}{4}$. (D) $m > 0$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên để phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt khi $m > \dfrac{27}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Cho hàm số $y = (m-1)x^3 - 3(m+2)x^2 - 6(m+2)x + 1$. Tập giá trị của m để $y' \ge 0 \forall x \in \mathbb{R}$ là

(A) $[3;+\infty)$. **B** $\varnothing$. (C) $[4\sqrt{2};+\infty)$. (D) $[1;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3(m-1)x^2 - 6(m+2)x - 6(m+2)$.

Nếu $m = 1 \Rightarrow y' = -18x - 18 \ge 0 \Leftrightarrow x \le -1$. Do đó $m = 1$ không thỏa mãn yêu cầu.

Nếu $m \neq 1$ thì

$$y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1>0 \\ \Delta = 9(m+2)^2 + 24(m-1)(m+2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -2 \leq m \leq \dfrac{6}{33} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing.$$

Vậy $m \in \varnothing$.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Một chất điểm chuyển động được xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t được tính bằng giây và s được tính bằng mét. Gia tốc chuyển động khi $t = 3$ là

A $12\ \mathrm{m}/s^2$. **B** $17\ \mathrm{m}/s^2$. **C** $24\ \mathrm{m}/s^2$. **D** $14\ \mathrm{m}/s^2$.

Lời giải.

Ta có $s' = 3t^2 - 6t + 5 = v(t) \Rightarrow a(t) = s'' = 6t - 6$.

Vậy gia tốc chuyển động khi $t = 3$ là $a(3) = 12\ \mathrm{m}/s^2$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng ?

A 90°. **B** 60°. **C** 45°. **D** 30°.

Lời giải.

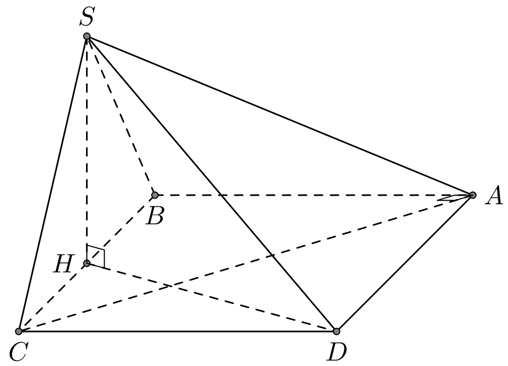
Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{x}, \overrightarrow{AC} = \vec{y}, \overrightarrow{AS} = \vec{z}$.

Theo giả thiết ta có $|\vec{x}| = |\vec{y}| = |\vec{z}|$, $\vec{x} \perp \vec{y}$ và $(\vec{z}, \vec{x}) = 60^\circ$.

Ta có $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AS} = (\vec{y} - \vec{z}) \cdot \vec{x} = -a^2 \cdot \cos 60^\circ = -\dfrac{a^2}{2}$.

Vậy $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}) = \dfrac{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}}{SC \cdot AB} = -\dfrac{a^2}{2}$

$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}) = 120^\circ \Rightarrow (SC, AB) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.



Chọn đáp án B □

Câu 36. Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}$, $OA = a$. Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) bằng

A 30°. **B** 90°. **C** 45°. **D** 60°.

Lời giải.

Ta có $(ABC) \cap (OBC) = BC$.

Trong (OBC) kẻ $OH \perp BC$ tại H khi đó $BC \perp (OAH)$.

Khi đó $(OAH) \cap (ABC) = AH$ và $(OAH) \cap (OBC) = OH$.

Do đó $((ABC); (OBC)) = (OH, AH) = \widehat{AHO}$.

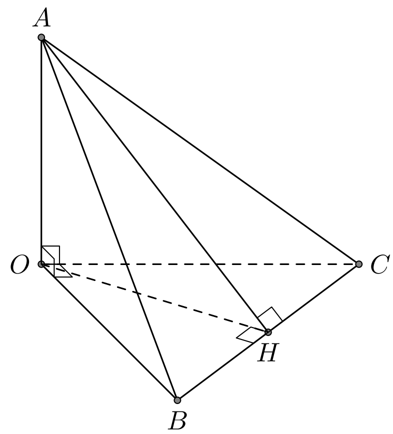
Xét Δ vuông OBC ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2} = \dfrac{1}{3a^2}$

$\Rightarrow OH = a\sqrt{3}$.

Trong Δ vuông OAH ta có $\tan AHO = \dfrac{OA}{OH} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \widehat{AHO} = 30^\circ$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) bằng 30°.

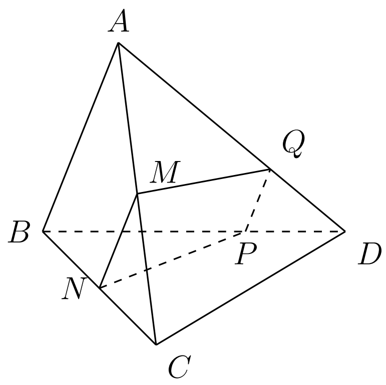


Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Cho hình tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $6a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CA, CB. P là điểm trên cạnh BD sao cho $BP = 2PD$. Diện tích S thiết diện của tứ diện $ABCD$ bị cắt bởi (MNP) là

(A) $S = \dfrac{5a^2\sqrt{147}}{2}$. (B) $S = \dfrac{5a^2\sqrt{147}}{4}$. (C) $S = \dfrac{5a^2\sqrt{51}}{2}$. (D) $S = \dfrac{5a^2\sqrt{51}}{4}$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (ABD) qua P kẻ đường thẳng song song AB cắt AD tại Q. Ta có $\dfrac{DP}{DB} = \dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow PQ = 2a$.

Dễ thấy MN là đường trung bình của ΔABC nên $MN \parallel AB \parallel PQ$, nên 4 điểm M, N, P, Q đồng phẳng và $MN = 3a$, thiết diện cần tìm chính là hình thang $MNPQ$, do tất cả các cạnh cạnh của tứ diện $ABCD$ bằng $6a$ nên $\Delta BNP = \Delta AMQ$. Vậy $MNPQ$ là hình thang cân.

Ta có $MQ = \sqrt{AM^2 + AQ^2 - 2AM \cdot AQ \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{9a^2 + 16a^2 - 2 \cdot 3a \cdot 4a \cdot \dfrac{1}{2}} = a\sqrt{13}$.

Kẻ đường cao QI, ta có:

$QI = \sqrt{MQ^2 - MI^2} = \sqrt{13a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{51}}{2}$

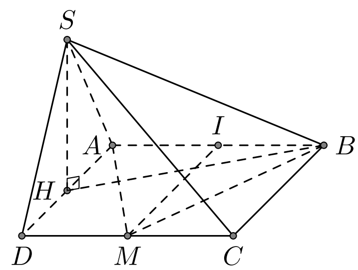
$\Rightarrow S_{MNPQ} = \dfrac{(MN + PQ) \cdot QI}{2} = \dfrac{3a + 2a}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{51}}{2} = \dfrac{5a^2\sqrt{51}}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của AD, M là trung điểm của CB, cạnh bên SB hợp với đáy một góc 60°. Thể tích của khối chóp $S.ABM$ là

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{12}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{4}$.

Lời giải.



Kẻ $MI \perp AB \Rightarrow MI = a$ và $S_{\Delta ABM} = \dfrac{1}{2} \cdot MI \cdot AB = \dfrac{a^2}{2}$.

Ta có $\widehat{SBH} = 60^\circ$.

Xét ΔSHB vuông tại H có $\tan SBH = \tan 60^\circ = \dfrac{SH}{HB} \Rightarrow$

$SH = \sqrt{3}HB = \sqrt{3}\sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABM} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta ABM} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{15}}{2} \cdot \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{12}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nữa diện tích của đế tháp (có diện tích là 12288 m^2). Tính diện tích mặt trên cùng?

Ⓐ $8\ \mathrm{m}^2$. Ⓑ $6\ \mathrm{m}^2$. Ⓒ $10\ \mathrm{m}^2$. Ⓓ $12\ \mathrm{m}^2$.

Lời giải.

Diện tích bề mặt của mỗi tầng (kể từ tầng 1) lập thành một cấp số nhân có công bội $q = \dfrac{1}{2}$ và $u_1 = \dfrac{12288}{2} = 6144$.

Khi đó diện tích mặt trên cùng là $u_{11} = u_1 \cdot q^{10} = \dfrac{6144}{2^{10}} = 6$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0$ có nghiệm trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$?

Ⓐ $-1 \le m < 0$. Ⓑ $-1 < m < 0$. Ⓒ $-1 \le m \le 0$. Ⓓ $-1 \le m < \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Do $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x \in [-1; 0)$.

Ta có $\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - (2m+1)\cos x + m = 0$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\cos x - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} \quad \text{loại} \\ \cos x = m \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $-1 \le m < 0$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 41. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = 2a$, tam giác ABC vuông tại B có $AB = a, BC = 2a$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

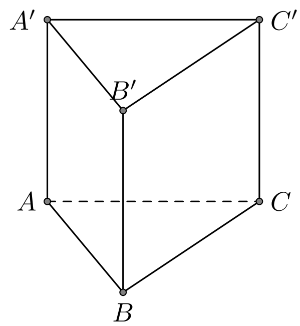
Ⓐ $2a^3$. Ⓑ $\dfrac{2a^3}{3}$. Ⓒ $\dfrac{4a^3}{3}$. Ⓓ $4a^3$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = a^2$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = 2a^3$.



Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 42. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^2 - m$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

Ⓐ Vô số. Ⓑ Không có. Ⓒ 1. Ⓓ 4.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m. \end{array}\right.$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị khi $m > 0 \quad (*)$. Khi đó hàm số có ba điểm cực trị là $A(0; 2m^2 - m), B(\sqrt{m}; m^2 - m), C(\sqrt{m}; m^2 - m)$.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{m}; m^2), \overrightarrow{AC} = (-\sqrt{m}; m^2) \Rightarrow AB = AC = \sqrt{m + m^4}$.
Vậy ΔABC cân tại A nên ΔABC vuông cân tại A.
Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -m + m^4 = 0 \Leftrightarrow m(m^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1. \end{array}\right.$
Kết hợp với $(*)$ ta có $m = 1$.
Chọn đáp án C □

Câu 43. Có 4 hành khách bước lên một đoàn tàu gồm 4 toa. Mỗi hành khách độc lập với nhau và chọn ngẫu nhiên một toa. Tính xác suất để 1 toa có 3 người, 1 toa có 1 người, 2 toa còn lại không có ai.

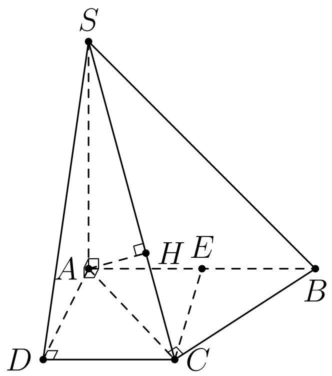
A $\dfrac{1}{4}$. **B** $\dfrac{3}{4}$. **C** $\dfrac{13}{16}$. **D** $\dfrac{3}{16}$.

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$.
Gọi A là biến cố " Một toa có 3 người, một toa có 1 người, hai toa còn lại không có ai ".
Có C_4^3 cách chọn 3 người trong 4 người và 4 cách chọn một toa cho nhóm 3 người đó lên.
Có 3 cách chọn toa cho người còn lại lên. Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n(A) = \mathrm{C}_4^3 \cdot 4 \cdot 3 = 48$.
Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{48}{256} = \dfrac{3}{16}$.
Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đường cao $SA = 2a$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông ở A và D, $AB = 2a$, $AD = CD = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. **B** $\dfrac{2a}{\sqrt{2}}$. **C** $\dfrac{2a}{3}$. **D** $a\sqrt{2}$.

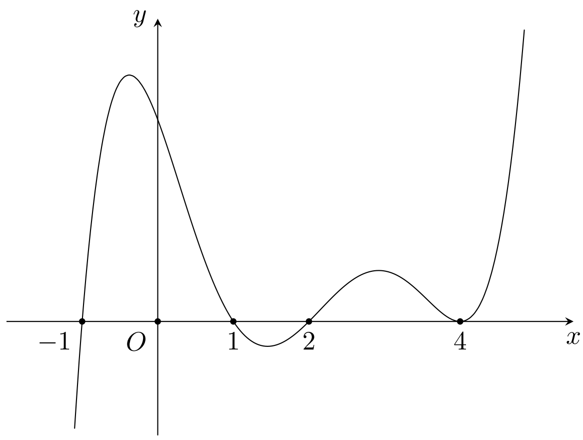
Lời giải.
Gọi K là trung điểm $AB \Rightarrow AK = KB = a$.
Dễ thấy tứ giác $ADCK$ là hình vuông nên $CK = a$.
ΔACB có trung tuyến $CK = \dfrac{1}{2}AB \Rightarrow \Delta ACB$ vuông tại C.



Ta có $\begin{cases} CB \perp AC \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAC)$.
Trong ΔSAC kẻ $AH \perp SC$ tại $H \Rightarrow AH \perp (SBC)$.
Vậy $d(A; (SBC)) = AH$.
Ta có ΔSAC vuông tại A nên
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{(2a)^2} + \dfrac{1}{(a\sqrt{2})^2} = \dfrac{3}{4a^2}$
$\Rightarrow d(A; (SBC)) = AH = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.
Chọn đáp án D □

Câu 45.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(1-2x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



(A) $(-1;0)$. (B) $(-\infty;0)$.
(C) $(0;1)$. **(D)** $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = -2f'(1-2x)$.

Để hàm số $g(x) = f(1-2x)$ đồng biến suy ra $g'(x) \geq 0$ hay $-2f'(1-2x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) \leq 0$.

Dựa vào đồ thị suy ra $\left[\begin{array}{l} 1-2x \leq -1 \\ 1 \leq 1-2x \leq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ -\dfrac{1}{2} \leq x \leq 0. \end{array}\right.$

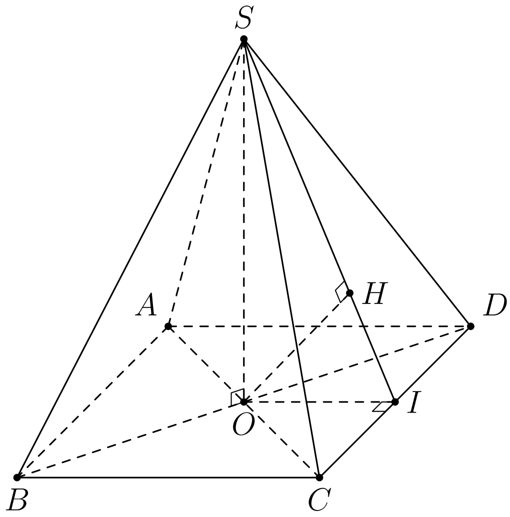
Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 46. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có khoảng cách từ tâm O của đáy đến (SCD) bằng $2a$, a là hằng số dương. Đặt $AB = x$, giá trị của x để thể tích $S.ABCD$ đạt giá trị nhỏ nhất là

(A) $\sqrt{3}a$. **(B)** $2\sqrt{6}a$. (C) $\sqrt{2}a$. (D) $\sqrt{6}a$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, hạ $OI \perp CD \quad (1)$. Do giả thiết $SO \perp (ABCD)$ suy ra $SO \perp OI$ và $SO \perp CD \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $CD \perp (SOI)$.

Trong mặt phẳng (SOI) kẻ $OH \perp SI$, từ chứng minh trên ta suy ra $CD \perp OH$.

Khi đó $\begin{cases} OH \perp CD \\ OH \perp SH \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SCD)$.

Nên $\mathrm{d}\left(O, (SCD)\right) = OH$.

Do $AB = x$ nên $OI = \dfrac{x}{2}$, trong tam giác SOI ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OI^2} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{4a^2} - \frac{1}{\frac{x^2}{4}} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{4a^2} - \frac{4}{x^2} \\ &\Leftrightarrow \quad SO^2 = \frac{4a^2x^2}{x^2 - 16a^2} \Leftrightarrow SO = \sqrt{\frac{4a^2x^2}{x^2-16a^2}}. \end{aligned}$$

Gọi V là thể tích khối chóp $S.ABCD$ ta có $V = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \sqrt{\dfrac{4a^2x^2}{x^2-16a^2}} \cdot x^2 = \dfrac{2ax^3}{3\sqrt{x^2-16a^2}}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{2ax^3}{3\sqrt{x^2-16a^2}}$ trên khoảng $(4a; +\infty)$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3ax^2\sqrt{x^2-16a^2} - \dfrac{ax^4}{\sqrt{x^2-16a^2}}}{(x^2-16a^2)} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2ax^4 - 48a^3x^2}{(x^2-16a^2) \cdot \sqrt{x^2-16a^2}}$.

Xét $f'(x) = 0$ suy ra

$$\begin{aligned} 2ax^4 - 48a^3x^2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2ax^2\left(x^2 - 24a^2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 24a^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2\sqrt{6}a \\ x = -2\sqrt{6}a \end{array}\right. \Rightarrow x = 2\sqrt{6}a. \end{aligned}$$

Mà $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2ax^3}{3\sqrt{x^2-16a^2}} = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 4a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4a^+} \dfrac{2ax^3}{3\sqrt{x^2-16a^2}} = +\infty$

Ta có bảng biến

x	$4a$		$2\sqrt{6}a$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$16\sqrt{3}a^3$	$\nearrow$	$+\infty$

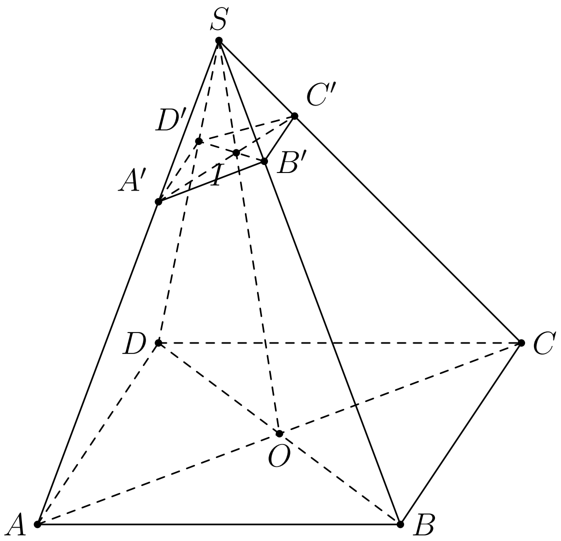
Dựa vào bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{x\in(4a;+\infty)} f(x) = 16\sqrt{3}a^3$ khi $x = 2\sqrt{6}a$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm A', C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC'} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $A'C'$ cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D' và đặt $k = \dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị nhỏ nhất của k là

(A) $\dfrac{4}{15}$. **(B) $\dfrac{1}{30}$.** (C) $\dfrac{1}{60}$. (D) $\dfrac{\sqrt{15}}{16}$.

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của AC và BD; I là giao điểm của SO và $A'C'$.

Do giả thiết ta có $V_{SABC} = V_{SADC} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}$.

Mà $V_{SA'B'C'D'} = V_{SA'B'C'} + V_{SA'D'C'}$.

Mặt khác ta có
$\dfrac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \dfrac{SA'}{SA}\cdot\dfrac{SB'}{SB}\cdot\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{1}{15}\cdot\dfrac{SB'}{SB}$.

Tương tự
$\dfrac{V_{SA'D'C'}}{V_{SADC}} = \dfrac{SA'}{SA}\cdot\dfrac{SD'}{SD}\cdot\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{1}{15}\cdot\dfrac{SD'}{SD}$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
&\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} + \frac{V_{SA'D'C'}}{V_{SADC}} = \frac{2V_{SA'B'C'}}{V_{SABCD}} + \frac{2V_{SA'D'C'}}{V_{SABCD}}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{15}\cdot\frac{SB'}{SB} + \frac{1}{15}\cdot\frac{SD'}{SD} = \frac{2V_{SA'B'C'D}}{V_{SABCD}}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{30}\cdot\left(\frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD}\right) = k
\end{aligned}$$

Mặt khác ta có
$\dfrac{S_{\triangle SA'I}}{S_{\triangle SAO}} = \dfrac{SA'}{SA}\cdot\dfrac{SI}{SO} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{SI}{SO}$ và $\dfrac{S_{\triangle SC'I}}{S_{\triangle SCO}} = \dfrac{SC'}{SC}\cdot\dfrac{SI}{SO} = \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{SI}{SO}$.

Mà $S_{\triangle SAO} = S_{\triangle SCO} = \dfrac{1}{2}\cdot S_{\triangle SAC}$ nên

$$\begin{aligned}
&\frac{S_{\triangle SA'I}}{S_{\triangle SAO}} + \frac{S_{\triangle SC'I}}{S_{\triangle SCO}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{SI}{SO} + \frac{1}{5}\cdot\frac{SI}{SO} = \frac{8}{15}\cdot\frac{SI}{SO}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{2S_{\triangle SA'I}}{S_{\triangle SAC}} + \frac{2S_{\triangle SC'I}}{S_{\triangle SAC}} = \frac{8}{15}\cdot\frac{SI}{SO}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{2S_{\triangle SA'C'}}{S_{\triangle SAC}} = \frac{8}{15}\cdot\frac{SI}{SO}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{SA'}{SA}\cdot\frac{SC'}{SC} = \frac{4}{15}\cdot\frac{SI}{SO} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} = \frac{4}{15}\cdot\frac{SI}{SO} \Leftrightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{1}{4} \quad (1).
\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự

$$\Leftrightarrow \frac{2S_{\triangle SB'D'}}{S_{\triangle SBD}} = \frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SI}{SO} + \frac{SD'}{SD}\cdot\frac{SI}{SO}$$

$$\Leftrightarrow \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{SI}{SO} \cdot \left(\frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} \right) \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} \right) \quad (*)$.

Dễ chứng minh được $\left(\frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} \right)^2 \geq 4 \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SD'}{SD} \quad (**)$.

Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra $\left(\frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} \right)^2 \geq \frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} \Leftrightarrow \frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} \geq 1$.

Do đó $30k \geq 1 \Leftrightarrow k \geq \frac{1}{30}$. Nên $\min k = \frac{1}{30}$.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Năm đoạn thẳng có độ dài 1 cm; 3 cm; 5 cm; 7 cm; 9 cm. Lấy ngẫu nhiên ba đoạn thẳng trong năm đoạn thẳng trên. Xác suất để ba đoạn thẳng lấy ra có thể tạo thành một tam giác là

A $\frac{3}{5}$. **B** $\frac{2}{5}$. **C** $\frac{3}{10}$. **D** $\frac{7}{10}$.

Lời giải.

Gọi A là số biến cố để chọn được ba đoạn thẳng lấy ra có thể tạo thành một tam giác.

Số cách chọn ra 3 đoạn thẳng là $\mathrm{C}_5^3 = 10$.

Giả sử a, b, c là độ dài ba đoạn thẳng lập thành một tam giác. Không mất tính tổng quát giả sử $a \leq b \leq c$ suy ra $c < a + b$.

- Nếu $c = 9$ cm suy ra cặp a, b thỏa mãn là $\begin{cases} a = 5\,\text{cm} \\ b = 7\,\text{cm} \end{cases}$ và $\begin{cases} a = 3\,\text{cm} \\ b = 7\,\text{cm} \end{cases}$.

- Nếu $c = 7$ cm suy ra cặp a, b thỏa mãn $\begin{cases} a = 3\,\text{cm} \\ b = 5\,\text{cm} \end{cases}$.

- Nếu $c = 5$ cm suy ra không có cặp a, b thỏa mãn.

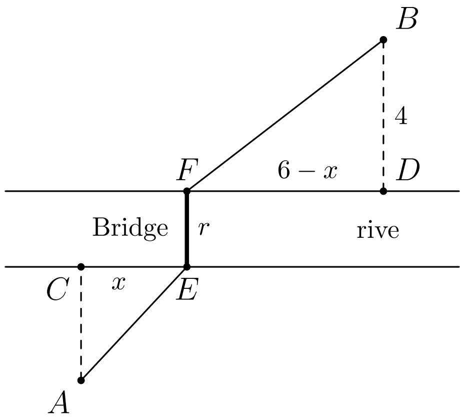
Do đó $P(A) = \frac{3}{10}$.

Chọn đáp án C □

Câu 49.

Một con đường được xây dựng giữa hai thành phố A, B. Hai thành phố này bị ngăn cách bởi một con sông có chiều rộng r (m). Người ta cần xây một cây cầu bắc qua sông biết rằng A cách con sông một khoảng bằng 2 m, B cách con sông một khoảng bằng 4 (m). Để con đường nối hai thành phố A, B là ngắn nhất nhất thì giá trị x (m) bằng

A $x = 2$ m. **B** $x = 4$ m. **C** $x = 3$ m. **D** $x = 1$ m.



Lời giải.

Gọi d là độ dài con đường nối giữa hai thành phố A, B ta có $d = AE + EF + FB$.

Mà $FB = \sqrt{FD^2 + BD^2} = \sqrt{(6-x)^2 + 16}$.

Tương tự $AE = \sqrt{AC^2 + CE^2} = \sqrt{x^2 + 4}$.

Khi đó $d = \sqrt{(6-x)^2+16} + \sqrt{x^2+4} + r$ với $0 \le x \le 6$.

Ta chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \le \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \quad (*)$$

Thật vậy

$$\begin{aligned}
(*) \quad &\Leftrightarrow \quad (a+c)^2+(b+d)^2 \le \left(a^2+b^2\right) + 2\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)} + \left(c^2+d^2\right)\\
&\Leftrightarrow \quad ac+bd \le \sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)}\\
&\Leftrightarrow \quad (ac+bd)^2 \le \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\\
&\Leftrightarrow \quad a^2c^2+b^2d^2+2acbd \le a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2\\
&\Leftrightarrow \quad b^2c^2+a^2d^2-2acbd \ge 0 \Leftrightarrow (bc-ad)^2 \ge 0.
\end{aligned}$$

Dễ thấy bất đẳng thức luôn đúng với mọi a, b, c, d. Áp dụng $(*)$ ta có

$$\sqrt{(6-x)^2+16} + \sqrt{x^2+4} \ge \sqrt{(6-x+x)^2+(4+2)^2} = 6\sqrt{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{6-x}{x} = \dfrac{4}{2} \Leftrightarrow 6-x = 2x \Leftrightarrow x = 2$.

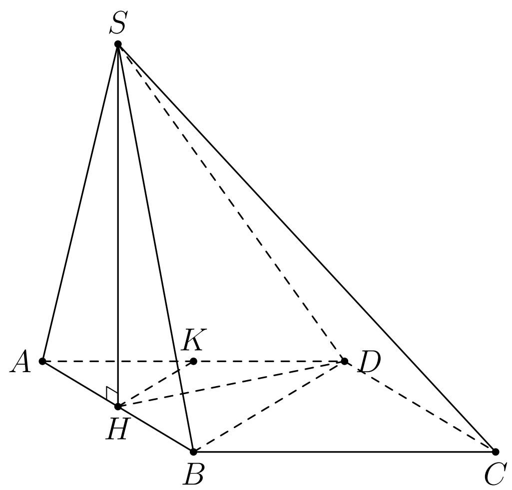
Vậy $\min d = 6\sqrt{2}\,(\mathrm{m})$ khi $x = 2\,(\mathrm{m})$.

Chọn đáp án A □

Câu 50.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SD = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$, hình chiếu vuông góc H của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn AB. Gọi K là trung điểm đoạn AD (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD theo a là

A $\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{45}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{3}}{25}$.



Lời giải.

Do giả thiết suy ra $HK \parallel BD$ nên $HK \parallel (SBD)$.

Do đó $\mathrm{d}(HK, SD) = \mathrm{d}(HK, (SBD)) = \mathrm{d}(H, (SBD))$.

Xét tam giác vuông HAD ta có

$HD^2 = AD^2 + AH^2 \Leftrightarrow HD^2 = a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow HD^2 = \dfrac{5a^2}{4} \Leftrightarrow HD = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Vì $SH \perp (ABCD)$ nên $SH \perp HD$. Khi đó trong tam giác SHD ta có

$$\begin{aligned}
SH^2 = SD^2 - HD^2 \quad &\Leftrightarrow \quad SH^2 = \left(\frac{a\sqrt{17}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2\\
&\Leftrightarrow \quad SH^2 = \frac{17a^2}{4} - \frac{5a^2}{4}\\
&\Leftrightarrow \quad SH^2 = 3a^2 \Leftrightarrow SH = a\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Chọn hệ $Oxyz$ sao cho $H\left(0;0;0\right)$, $B\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $A\left(-\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $S\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$.
Suy ra $C\left(\dfrac{a}{2};a;0\right)$ và $D\left(-\dfrac{a}{2};a;0\right)$.
Khi đó $\overrightarrow{BS}=\left(-\dfrac{a}{2};0;a\sqrt{3}\right)$ và $\overrightarrow{BD}=(-a;a;0)$ nên $\left[\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BD}\right]=\left(-a^2\sqrt{3};-a^2\sqrt{3};-\dfrac{a^2}{2}\right)$.
Gọi $\overrightarrow{n}$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBD) ta chọn $\overrightarrow{n}=\left(\sqrt{3};\sqrt{3};\dfrac{1}{2}\right)$, khi đó phương trình mặt phẳng (SBD) là

$$\sqrt{3}\left(x-\frac{a}{2}\right)+\sqrt{3}y+\frac{1}{2}z=0\Leftrightarrow 2\sqrt{3}x+2\sqrt{3}y+z-\sqrt{3}a=0.$$

Nên $\mathrm{d}\left(H,(SBD)\right)=\dfrac{\left|-a\sqrt{3}\right|}{\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2+1}}=\dfrac{\sqrt{3}a}{5}$.

Chọn đáp án A □

——— HẾT ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. C	3. C	4. A	5. D	6. D	7. A	8. D	9. D	10. C
11. C	12. C	13. B	14. D	15. C	16. B	17. A	18. D	19. D	20. C
21. C	22. D	23. D	24. B	25. C	26. D	27. D	28. A	29. B	30. B
31. D	32. A	33. B	34. A	35. B	36. A	37. D	38. B	39. B	40. A
41. A	42. C	43. D	44. D	45. D	46. B	47. B	48. C	49. A	50. A

32 ĐỀ THI THỬ THPT SỞ GD DT PHÚ THỌ, LẦN 3 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x^2$ là

A $\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} + C$. **B** $x^4 + x^3$. **C** $3x^2 + 2x$. **D** $\dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{4}x^3$.

Lời giải.

$\displaystyle\int \left(x^3 + x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C.$

Chọn đáp án A □

Câu 2. Với k và n là hai số nguyên dương tùy ý thỏa mãn $k \le n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $\mathrm{P}_n = \dfrac{n!}{(n-k)}!$. **B** $\mathrm{P}_n = (n-k)!$. **C** $\mathrm{P}_n = \dfrac{n!}{k!}$. **D** $\mathrm{P}_n = n!$.

Lời giải.

Số hoán vị của tập gồm n phần tử là $\mathrm{P}_n = n!$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;1;2)$ và $B(3;-5;0)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là

A $(2;-4;2)$. **B** $(4;-6;2)$. **C** $(1;-2;1)$. **D** $(2;-3;-1)$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm AB, khi đó tọa độ của M được tính bởi

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + y_A}{2} = 1 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = -2 \\ z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2} = 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án C □

Câu 4. Phương trình $3^{x-4} = 1$ có nghiệm là

A $x = -4$. **B** $x = 4$. **C** $x = 0$. **D** $x = 5$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$3^{x-4} = 3^0 \Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗	1	↘		↗	$+\infty$
	0				-3		

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(2;+\infty)$. **B** $(-\infty;1)$. **C** $(0;+\infty)$. **D** $(0;2)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2n+5$. Số hạng u_4 bằng

A 19. **B** 11. **C** 21. **D** 13.

Lời giải.

Ta có $u_4 = 2 \cdot 4 + 5 = 13$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-5}{x-2}$ là

A $x = 2$. **B** $y = 2$. **C** $x = 3$. **D** $y = 3$.

Lời giải.

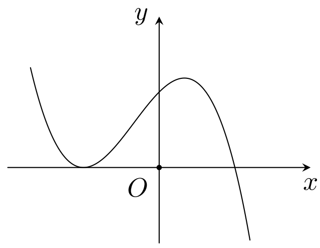
Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3x-5}{x-2} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3x-5}{x-2} = -\infty$ nên $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Chọn đáp án A □

Câu 8.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A 2. **B** 1. **C** 0. **D** 3.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số, số điểm cực trị của hàm số đã cho là 2.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Cho khối lăng trụ đứng có diện tích đáy bằng $2a^2$ và cạnh bên bằng $3a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A $2a^3$. **B** $3a^3$. **C** $18a^3$. **D** $6a^3$.

Lời giải.

$V = S_{\text{đáy}} h = 2a^2 \cdot 3a = 6a^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;1;-3)$ và $B(1;0;-2)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A $3\sqrt{3}$. **B** 11. **C** $\sqrt{11}$. **D** 27.

Lời giải.

$AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-0)^2 + (-3-(-2))^2} = \sqrt{11}$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Trong không gian $Oxyx$, cho mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

(A) $I(-2;1;-1), R=3$. (B) $I(-2;1;-1), R=9$.
(C) $I(2;-1;1), R=3$. (D) $I(2;-1;1), R=9$.

Lời giải.

Ta có tọa độ tâm $I(2;-1;1)$ và bán kính $R=3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Cho $x>0$, biểu thức $P=x\sqrt[5]{x}$ bằng

(A) $x^{\frac{7}{5}}$. (B) $x^{\frac{6}{5}}$. (C) $x^{\frac{1}{5}}$. (D) $x^{\frac{4}{5}}$.

Lời giải.

Ta có $P=x\sqrt[5]{x}=x\cdot x^{\frac{1}{5}}=x^{\frac{6}{5}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Giá trị của $\int\limits_{-1}^{0} \mathrm{e}^{x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $1-\mathrm{e}$. (B) $\mathrm{e}-1$. (C) $-\mathrm{e}$. (D) e.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{-1}^{0} \mathrm{e}^{x+1}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x+1}\Big|_{-1}^{0}=\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^0=\mathrm{e}-1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 5 và chiều cao bằng 7 . Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

(A) $\dfrac{175\pi}{3}$. (B) 175π. (C) 70π. (D) 35π.

Lời giải.

Ta có $S_{xq}=2\pi rl=2\pi\cdot 5\cdot 7=70\pi$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Trong mặt phẳng, cho tập hợp S gồm 10 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh đều thuộc S ?

(A) 720. (B) 120. (C) 59049. (D) 362880.

Lời giải.

Số tam giác tạo thành từ tập S là số tổ hợp chập 3 của 10 .

Vậy có $\mathrm{C}_{10}^3=120$ tam giác .

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như hình vẽ?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A $y = x^3 - 3x$. **B** $y = x^3 - 3x - 1$. **C** $y = x^3 + 3x$. **D** $y = x^4 - 2x^2$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có 2 cực trị nên loại C và D.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1; 2)$ nên chọn A.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 18$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng

A 2. **B** 11. **C** 27. **D** 1.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 16x$.

$$\begin{aligned} & y' = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 4x^3 - 16x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \quad \text{(loại)} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Ta có $y(-1) = 11, y(0) = 18, y(1) = 11, y(2) = 2, y(3) = 27$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng 10 và diện tích xung quanh bằng 60π . Thể tích của khối nón đã cho bằng

A 360π. **B** 288π. **C** 120π. **D** 96π.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = \pi r l = 10\pi r = 60\pi \Rightarrow r = 6$.

và $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

Vậy thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -1; -3)$ và $B(0; 3; -1)$. Phương trình của mặt cầu đường kính AB là

(A) $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=6$. (B) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=24$.
(C) $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=24$. (D) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^=6$.

Lời giải.

Tâm I của mặt cầu là trung điểm của $AB \Rightarrow I(1;1;-2)$.

Bán kính của mặt cầu là $R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{2^2+4^2+2^2}}{2}=\sqrt{6}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ thỏa mãn $F(\mathrm{e}+1)=4$. Tìm $F(x)$.

(A) $F(x)=2\ln(x-1)+2$. (B) $F(x)=\ln(x-1)+3$.
(C) $F(x)=4\ln(x-1)$. (D) $F(x)=\ln(x-1)-3$.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\displaystyle\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x=\ln(x-1)+C$.

$F(\mathrm{e}+1)=4 \Rightarrow \ln \mathrm{e}+C=4 \Rightarrow C=3$.

Vậy $F(x)=\ln(x-1)+3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Phương trình $3^{x-4}=1$ có nghiệm là

(A) $x=-4$. (B) $x=5$. (C) $x=4$. (D) $x=0$.

Lời giải.

Phương trình tương đương: $3^{x-4}=1 \Leftrightarrow x-4=\log_3 1=0 \Leftrightarrow x=4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Cho khối lăng trụ đứng có diện tích đáy bằng $2a^2$ và cạnh bên bằng $3a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $2a^3$. (B) $3a^3$. (C) $18a^3$. (D) $6a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ đứng $V=2a^2\cdot 3a=6a^3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=-\dfrac{1}{4}$ và công sai $d=\dfrac{1}{4}$. Giá trị của $u_1+u_2+\cdots+u_5$ bằng

(A) $\dfrac{4}{5}$. (B) $-\dfrac{4}{5}$. (C) $\dfrac{5}{4}$. (D) $\dfrac{15}{8}$.

Lời giải.

Tổng của 5 số hạng đầu $u_1+u_2+\cdots+u_5=5u_1+\dfrac{5\,(5-1)}{2}d=\dfrac{5}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, mặt bên (SBC) tạo với đáy một góc 30°. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

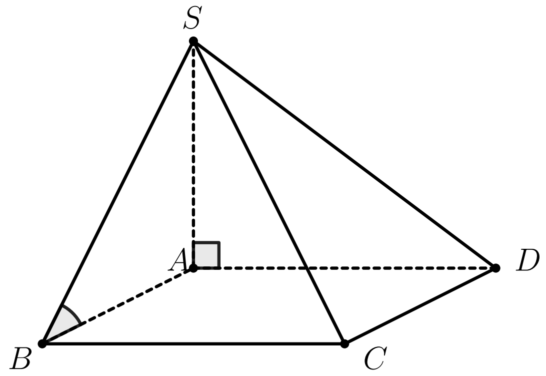
(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (B) $\dfrac{8a^3\sqrt{3}}{9}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. (D) $\dfrac{8a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ AB \perp BC \\ SB \perp BC \end{cases} \Rightarrow$ Góc giữa (SBC) và đáy là $\widehat{SBA} = 30°$.

Lại có $SA = AB \cdot \tan 30° = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot 4a^2 = \dfrac{8a^3\sqrt{3}}{9}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Đặt $a = \log_3 2$, khi đó $\log_6 48$ bằng

(A) $\dfrac{3a-1}{a-1}$. (B) $\dfrac{3a+1}{a+1}$. (C) $\dfrac{4a-1}{a-1}$. (D) $\dfrac{4a+1}{a+1}$.

Lời giải.

$\log_6 48 = \log_6 3 + \log_6 16 = \dfrac{1}{\log_3 2 + 1} + \dfrac{4}{\log_2 3 + 1} = \dfrac{1}{a+1} + \dfrac{4}{\dfrac{1}{a} + 1} = \dfrac{4a+1}{a+1}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_3(11-2x) \geq 0$ là

(A) $(-\infty; 4)$. (B) $(1; 4]$. (C) $(1; 4)$. (D) $\left[4; \dfrac{11}{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: $1 < x < \dfrac{11}{2}$.

Bất phương trình tương đương $-\log_3(x-1) + \log_3(11-2x) \geq 0$

$\Leftrightarrow \log_3 \dfrac{11-2x}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{11-2x}{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{12-3x}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow 1 < x \leq 4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2, y = 0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

(A) $\displaystyle\int_0^2 (2x - x^2)\mathrm{d}x$. (B) $\displaystyle\pi\int_0^2 (2x - x^2)^2\mathrm{d}x$. (C) $\displaystyle\int_0^2 (2x - x^2)^2\mathrm{d}x$. (D) $\displaystyle\pi\int_0^2 (2x - x^2)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Theo công thức thể tích giới hạn bởi các đường ta có

$V = \pi \displaystyle\int_0^2 (2x - x^2)^2\mathrm{d}x$

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = x(x-3)^2(x-2)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

Ⓐ 3. **B** 1. Ⓒ 5. Ⓓ 2.

Lời giải.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f'(x)$ chỉ đổi dấu một lần từ âm sang dương nên hàm số $f(x)$ có một cực tiểu.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, điểm $B(3;-4;1)$ và $C(2;0;1)$. Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là

Ⓐ $1;-2;3$. Ⓑ $(-2;2;-1)$. **C** $(2;-2;1)$. Ⓓ $(-1;2;-3)$.

Lời giải.

Từ giả thiết $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow A(1;-2;3)$.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có: $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = 2 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = -2 \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow G(2;-2;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Cho $\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 3$ và $\displaystyle\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x = -1$. Giá trị của $\displaystyle\int_0^2 [f(x) - 5g(x) + x]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 12. Ⓑ 0. Ⓒ 8. **D** 10.

Lời giải.

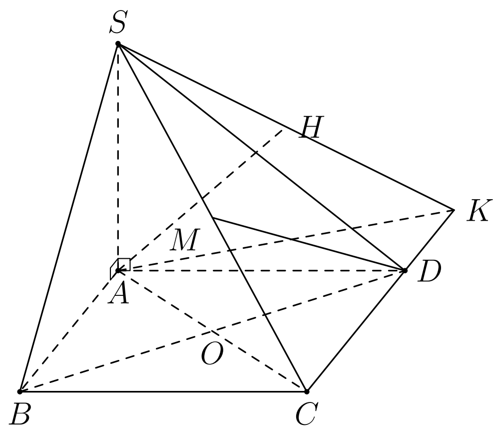
Ta có $\displaystyle\int_0^2 [f(x) - 5g(x) + x]\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x - 5\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x + \int_0^2 x\mathrm{d}x = 3 - 5\cdot(-1) + \frac{1}{2}(2^2 - 0) = 10.$

Chọn đáp án D □

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh bằng $a\sqrt{2}, \widehat{BAD} = 60^\circ, SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt đáy. Gọi M là trung điểm của SC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng MD và AB bằng

A a. Ⓑ $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. Ⓒ $\dfrac{a\sqrt{30}}{5}$. Ⓓ $3a$.

Lời giải.



Ta có $AB \parallel CD \subset (SCD) \Rightarrow AB \parallel (SCD)$ và $DM \subset (SCD)$
$\Rightarrow d(AB, DM) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD))$.
Trong $(ABCD)$ kẻ $AK \perp CD$ với $K \in CD$.
Khi đó $AK \perp CD$, $SA \perp CD \Rightarrow (SAK) \perp CD \subset (SCD)$
$\Rightarrow (SCD) \perp (SAK)$.
Trong (SAK) kẻ $AH \perp SK$ với $H \in SK$.
Ta có $\begin{cases} AH \perp SK \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD)$
$\Rightarrow d(A, (SCD)) = AH$.
Do $\widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ADC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ADK} = 60^\circ$.
Xét tam giác AKD vuông tại K ta có: $\sin 60^\circ = \dfrac{AK}{AD}$
$\Rightarrow AK = AD \sin 60^\circ = a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Xét tam giác SAK vuông tại A ta có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{2}{3a^2} = \dfrac{1}{a^2} \Rightarrow AH = a$.
Vậy $d(AB, DM) = AH = a$.
Chọn đáp án A □

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-1)z + 3m^2 - 5 = 0$ là phương trình của một mặt cầu?

A 4. B 6. C 5. D 7.

Lời giải.

Phương trình đã cho là phương trình của một mặt cầu khi và chỉ khi
$(m+2)^2 + (m-1)^2 - 3m^2 + 5 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 10 < 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{11} < m < 1 + \sqrt{11}$.
Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$. Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án D □

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $16^x - 2(m+1)4^x + 3m - 8 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

A 6. B 7. C 0. D 3.

Lời giải.

Đặt $t = 4^x, t > 0$.
Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 0 < x_2$ khi và chỉ khi phương trình $t^2 - 2(m+1)t + 3m - 8 = 0$ có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn

$$0 < t_1 < 1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m + 9 > 0 \\ m > -1 \\ m > \dfrac{8}{3} \\ m < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{8}{3} < m < 9.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.
Chọn đáp án A □

Câu 34. Số giá trị nguyên của m để hàm số $y = \dfrac{mx - 2}{-2x + m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$

là

(A) 4. (B) 5. **C** 3. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{m^2-4}{(-2x+m)^2}$. Hàm số $y = \dfrac{mx-2}{-2x+m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ \dfrac{m}{2} \le \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2<m\le 1$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-1;0;1\}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Cho hàm số $y = x^3-3x^2+2$ có đồ thị (C) và điểm $M(m;-2)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m để qua M kẻ được đúng hai tiếp tuyến đến (C). Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A $\dfrac{8}{3}$. (B) 3. (C) $\dfrac{2}{3}$. (D) 2.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng qua $M(m;-2)$ có dạng: $y = k(x-m)-2$ (Δ).

(Δ) tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3x^2+2 = k(x-m)-2 \\ 3x^2-6x = k \end{cases}$ $(*)$ có nghiệm.

$\Rightarrow x^3-3x^2+2 = \left(3x^2-6x\right)(x-m)-2 \Leftrightarrow (x-2)(2x^2+(-3m+1)x+2) = 0$.

$\Leftrightarrow x = 2$ hoặc $2x^2+(-3m+1)x+2 = 0$ (1).

Qua M kẻ được đúng hai tiếp tuyến đến (C) khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt. Hay phương trình (1) có nghiệm kép khác 2 hoặc phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = 2 \neq x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-3m+1)^2-4.2.2 = 0 \\ 2.2^2+(-3m+1)2+2 \neq 0 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} (-3m+1)^2-4.2.2 > 0 \\ 2.2^2+(-3m+1)2+2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=\dfrac{5}{3} \\ m=2 \end{array}\right..$$

Suy ra $S = \left\{-1, \dfrac{5}{3}, 2\right\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Cho $a>0, b>0$ thoả mãn $\log_{16}(a+3b) = \log_9 a = \log_{12} b$. Giá trị của $\dfrac{a^3-ab^2+b^3}{a^3+a^2b+3b^3}$ bằng

(A) $\dfrac{6-\sqrt{13}}{11}$. (B) $\dfrac{82-17\sqrt{13}}{69}$. **C** $\dfrac{5-\sqrt{13}}{6}$. (D) $\dfrac{3-\sqrt{13}}{11}$.

Lời giải.

Đặt $t = \log_{16}(a+3b) = \log_9 a = \log_{12} b$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 16^t = a+3b \\ 9^t = a \\ 12^t = b \end{cases} \Rightarrow 9^t+3.12^t = 16^t \Rightarrow \left(\dfrac{9}{16}\right)^t + 3\left(\dfrac{3}{4}\right)^t = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{3}{4}\right)^t = \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2} = \dfrac{a}{b}$$

Vậy $\dfrac{a^3-ab^2+b^3}{a^3+a^2b+3b^3} = \dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^3-\dfrac{a}{b}+1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^3+\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+3} = \dfrac{5-\sqrt{13}}{6}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Họ nguyên hàm của hàm số $y = 3x(x + \cos x)$ là

A $x^3 + 3(x \sin x + \cos x) + C$. **B** $x^3 - 3(x \sin x + \cos x) + C$.
C $x^3 + 3(x \sin x - \cos x) + C$. **D** $x^3 - 3(x \sin x - \cos x) + C$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int 3x(x + \cos x)\mathrm{d}x = \int \left(3x^2 + 3x\cos x\right)\mathrm{d}x = x^3 + 3\int x\cos x\mathrm{d}x$.

Tính $J = \displaystyle\int x\cos x\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} x = u \\ \cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ \sin x = v \end{cases}$.

$\Rightarrow J = x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C$.

Vậy $I = x^3 + 3(x\sin x + \cos x) + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Cho $\displaystyle\int\limits_3^4 \frac{5x-8}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x = a\ln 3 + b\ln 2 + c\ln 5$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị 2^{a-3b+c} bằng

A 12. **B** 6. **C** 1. **D** 64.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_3^4 \frac{5x-8}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x = \int\limits_3^4 \left(\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x-2}\right)\mathrm{d}x = 3\ln|x-1|\Big|_3^4 + 2\ln|x-2|\Big|_3^4$

$= 3\ln 3 - 3\ln 2 + 2\ln 2 = -\ln 2 + 3\ln 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \Rightarrow a - 3b + c = 6 \\ c = 0 \end{cases}$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Một lớp có 20 học sinh nữ và 25 học sinh nam. Bạn lớp trưởng nữ chọn ngẫu nhiên 4 học sinh khác tham gia một hoạt động của Đoàn trường. Xác suất để 4 học sinh được chọn có cả nam và nữ (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 4) là

A $0,0849$. **B** $0,8826$. **C** $0,8783$. **D** $0,0325$.

Lời giải.

Theo bài ra, bạn lớp trưởng sẽ chọn ngẫu nhiên 4 học sinh trong 19 học sinh nữ và 25 học sinh nam. Số cách chọn 4 học sinh trong 44 học sinh của lớp là: $\mathrm{C}_{44}^4 = 135751$. Số cách Chọn cả 4 học sinh đều là nữ là: C_{19}^4.

Số cách Chọn Cả học sinh đều là nam là: C_{25}^4.

Số cách chọn 4 học sinh trong đó có cả nam và nữ là: $\mathrm{C}_{44}^4 - \mathrm{C}_{19}^4 - \mathrm{C}_{25}^4 = 119225$ cách.

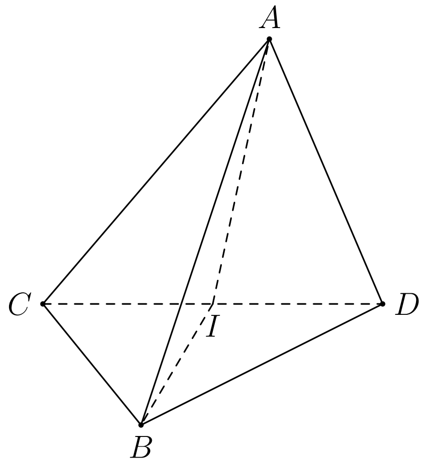
Xác suất để 4 học sinh được Chọn có cả nam và nữ là: $\dfrac{119225}{135751} \approx 0,8783$. .

Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = BC = AC = BD = 2a$, $AD = a\sqrt{3}$; hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

A $\dfrac{64\pi a^2}{27}$. **B** $\dfrac{4\pi a^2}{27}$. **C** $\dfrac{16\pi a^2}{9}$. **D** $\dfrac{64\pi a^2}{9}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của CD. Do $BC = BD$ nên $BI \perp CD$.
Theo bài ra $(ACD) \perp (BCD)$ nên $BI \perp (ACD)$.
Xét các tam giác vuông AIB và DIB có: BI chung và $AB = BD = 2a$ nên hai tam giác đó bằng nhau, suy ra $AI = ID$.
Do đó tam giác ACD vuông tại A. Suy ra tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ thuộc đường thẳng BI.
Tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.
Áp dụng định lí Pitago ta có $CD = \sqrt{AC^2 + AD^2} = a\sqrt{7}$.
Diện tích tam giác BCD là
$S_{BCD} = \sqrt{p(p - BC)(p - CD)(p - BD)} = \dfrac{3a\sqrt{4}}{7}$
với $p = \dfrac{BC + CD + DB}{2}$.

Bán kính mặt cầu là $R = \dfrac{BC.CD.DB}{4S_{BCD}} = \dfrac{4a}{3}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là: $S = 4\pi R^2 = \dfrac{64\pi a^2}{9}$.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = 3f^3(x) + 4f^2(x) + 1$ là

A 4. **B** 9. **C** 5. **D** 3.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = 9f^2(x) \cdot f'(x) + 8f(x)f'(x)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = -\dfrac{8}{9}. \end{array}\right.$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 < -1 \\ x = x_2 > 1 \end{array}\right.$; $f(x) = -\dfrac{8}{9} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = x_3, & x_1 < x_3 < -1 \\ x = x_4, & 1 < x_4 < x_2 \end{array}\right.$.

Vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ nên ta có bảng biến thiên cho $g(x)$ như sau

x	$-\infty$		x_1		x_3		-1		0		1		x_4		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(x_1)$	$\nearrow$	$g(x_3)$	$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$g(x_4)$	$\searrow$	$g(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đây ta suy ra được số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)$ là 4.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+2)^2+(y-1)^2+(z+\sqrt{2})^2 = 9$ và hai điểm $A(-2;0;-2\sqrt{2})$, $B(-4;-4;0)$. Biết tập tất cả các điểm M thuộc (S) để $MA^2 + \overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MB} = 16$ là một đường tròn. Bán kính của đường tròn đó bằng

A $\sqrt{3}$. **B** $\sqrt{2}$. **C** $2\sqrt{2}$. **D** $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y;z) \in (S)$, ta có $\overrightarrow{AM} = (x+2; y; z+2\sqrt{2})$, $\overrightarrow{OM} = (x;y;z)$, $\overrightarrow{BM} = (x+4; y+4; z)$. Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + \overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MB} = 16 &\Leftrightarrow MA^2 + \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{BM} = 16 \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 + (z+2\sqrt{2})^2 + x(x+4) + y(y+4) + z^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+4x+4y+2\sqrt{2}z-2 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} M \in (S) &\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+\sqrt{2})^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+4x-2y+2\sqrt{2}z-2 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+4x+4y+2\sqrt{2}z-2 = 0 \\ x^2+y^2+z^2+4x-2y+2\sqrt{2}z-2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0.$$

Vậy tập hợp tất cả các điểm M là đường tròn giao tuyến (C) của (S) và mặt phẳng $(P)\colon y = 0$.

Mặt cầu (S) có bán kính $R = 3$, tâm $I(-2;1;-\sqrt{2})$ nên $d\,[I,(P)] = 1$.

Suy ra đường tròn (C) có bán kính $r = \sqrt{R^2 - (d\,[I,(P)])^2} = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 43.

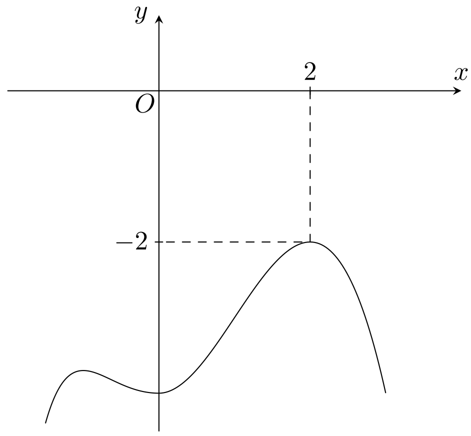
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$$9\cdot 6^{f(x)} + \left(4 - f^2(x)\right)\cdot 9^{f(x)} \le \left(-m^2+5m\right)\cdot 4^{f(x)}$$

nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A 10. **B** 4.

C 5. **D** 9.



Lời giải.

Ta có

$9\cdot 6^{f(x)}+(4-f^2(x))\cdot 9^{f(x)} \le (-m^2+5m)\cdot 4^{f(x)} \Leftrightarrow -m^2+5m \ge 9\left(\dfrac{3}{2}\right)^{f(x)}+[4-f^2(x)]\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2f(x)}$.

(1)

Từ đồ thị suy ra $f(x)\le -2\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} 9\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{f(x)} \le 4, & \forall x\in\mathbb{R} \\ \left[4-f^2(x)\right]\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2f(x)} \le 0, & \forall x\in\mathbb{R}. \end{cases}$

Do đó $g(x)=9\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{f(x)}+\left[4-f^2(x)\right]\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2f(x)} \le 4,\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \max\limits_{\mathbb{R}} g(x)=4$.

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow -m^2+5m\ge 4 \Leftrightarrow 1\le m\le 4$.

Vậy $m\in\{1;2;3;4\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-2)$ và $B\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{8}{3}\right)$. Biết $I(a;b;c)$ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OAB. Giá trị của $a-b+c$ bằng

A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Lời giải.

Gọi M là chân đường phân giác vẽ từ đỉnh O. Ta có $OA=3$, $OB=4$, $AB=5$ nên tam giác OAB vuông tại O.

Do $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{3}{4}$ nên $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{3}{7}$. Từ đó $\overrightarrow{AM}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AB} \Rightarrow M\left(\dfrac{12}{7};\dfrac{12}{7};0\right) \Rightarrow \overrightarrow{OM}=\left(\dfrac{12}{7};\dfrac{12}{7};0\right)$ nên $\vec{u}_{OM}=(1;1;0)$.

Do đó $OM\colon \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow I(t;t;0)$. Gọi H là hình chiếu của I lên OA. Khi đó $IH=\dfrac{S}{p}=1$.

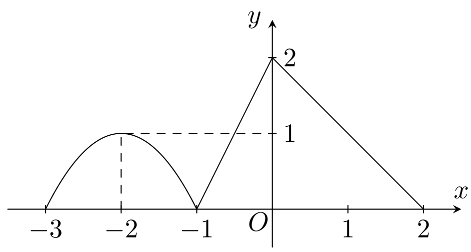
Trong tam giác OIH vuông tại H, ta có $OI=\dfrac{IH}{\sin 45^\circ}=\sqrt{2} \Rightarrow 2t^2=2 \Leftrightarrow t=\pm 1$.

Do $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OM}$ cùng hướng nên $t=1$. Vậy $I(1;1;0)$ và $a-b+c=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 45.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ trên $[-3;2]$ như hình bên (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y=ax^2+bx+c$). Biết $f(-3)=0$, giá trị của $f(-1)+f(1)$ bằng



A. $\dfrac{23}{6}$. B. $\dfrac{31}{6}$. C. $\dfrac{35}{3}$. D. $\dfrac{9}{2}$.

Lời giải.

Parabol $y=ax^2+bx+c$ có đỉnh $I(-2;1)$ và đi qua điểm $(-3;0)$ nên ta có

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=-2 \\ 4a-2b+c=1 \\ 9a-3b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-4 \\ c=-3 \end{cases} \Rightarrow y=-x^2-4x-3.$$

Do $f(-3) = 0$ nên

$$\begin{aligned}
f(-1) + f(1) &= [f(1) - f(0)] + [f(0) - f(-1)] + 2\,[f(-1) - f(3)] \\
&= \int\limits_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^0 f'(x)\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_{-3}^{-1} (-x^2 - 4x - 3)\,\mathrm{d}x \\
&= S_1 + S_2 + 2\int\limits_{-3}^{-1} (-x^2 - 4x - 3)\,\mathrm{d}x \\
&= 1 + \frac{3}{2} + \frac{8}{3} = \frac{31}{6}.
\end{aligned}$$

Với S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 0$ và $x = 0$, $x = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tồn tại các số thực x, y thỏa mãn $\mathrm{e}^{3x+5y-10} - \mathrm{e}^{x+3y-9} = 1 - 2x - 2y$ và $\log_5^2(3x + 2y + 4) - (m + 6)\log_5(x + 5) + m^2 + 9 = 0$?

A 3. **B** 5. **C** 4. **D** 6.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{3x+5y-10} - \mathrm{e}^{x+3y-9} = 1 - 2x - 2y &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x+5y-10} - \mathrm{e}^{x+3y-9} = (x + 3y - 9) - (3x + 5y - 10) \\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x+5y-10} + (3x + 5y - 10) = \mathrm{e}^{x+3y-9} + (x + 3y - 9) \\
&\Leftrightarrow f(3x + 5y - 10) = f(x + 3y - 9) \qquad (1)
\end{aligned}$$

với $f(t) = \mathrm{e}^t + t$. Vì $f'(t) = \mathrm{e}^t + 1 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow 3x + 5y - 10 = x + 3y - 9 \Leftrightarrow 2y = 1 - 2x$. Thay vào điều kiện còn lại, ta được phương trình

$$\log_5^2(x + 5) - (m + 6)\log_5(x + 5) + m^2 + 9 = 0 \qquad (2)$$

Bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm x, điều này xảy ra khi $\Delta = 3m^2 + 12m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

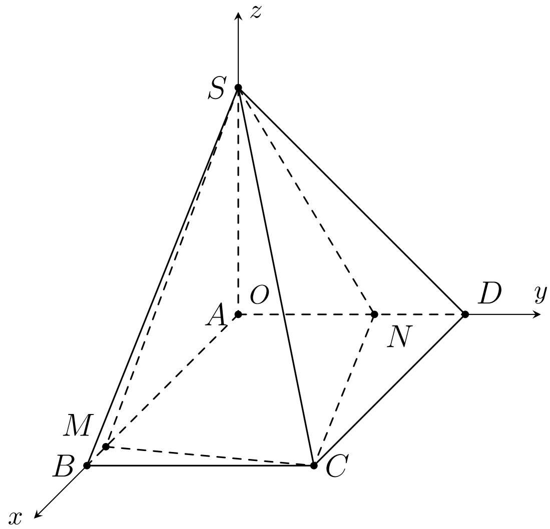
Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là hai ddierm thay đổi trên các cạnh AB, AD $(AN < AM)$ sao cho mặt phẳng $(SMC) \perp (SNC)$. Khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị $\dfrac{1}{AN^2} + \dfrac{16}{AM^2}$ bằng

A $\dfrac{17}{4}$. **B** 5. **C** $\dfrac{5}{4}$. **D** 2.

Lời giải.

Đặt $AM = m$, $AN = n$ với $m > n > 0$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, khi đó ta có $A(0;0;0)$, $S(0;0;2)$, $M(m;0;0)$, $N(0;n;0)$ và $C(2;2;0)$.
Ta có $\overrightarrow{SC} = (2;2;-2)$, $\overrightarrow{SM} = (m;0;-2)$ và $\overrightarrow{SN} = (0;n;-2)$ suy ra $\vec{n}_1 = \left[\overrightarrow{SN}, \overrightarrow{SC}\right] = (-2n+4;-4;-2n)$, $\vec{n}_2 = [SM, SC] = (4;2m-4;2m)$ lần lượt là các véc-tơ pháp tuyến của (SNC) và (SMC).



$$\begin{aligned}(SMC) \perp (SNC) &\Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2\\ &\Leftrightarrow 2m + 2n + mn - 8 = 0\\ &\Leftrightarrow m = \frac{-2n+8}{n+2} = -2 + \frac{12}{n+2}.\end{aligned}$$

Do $2 \geq m > n > 0 \Rightarrow \begin{cases} n > 0 \\ \dfrac{-2n+8}{n+2} > n \\ \dfrac{-2n+8}{n+2} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n > 0 \\ n^2 + 4n - 8 < 0 \\ -2n + 8 \leq 2n + 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq n < -2 + 2\sqrt{3}.$

Mặt khác, thể tích khối chóp $S.AMCN$ là $V = \dfrac{2}{3}(m+n)$ đạt giá trị lớn nhất khi $m+n$ lớn nhất.

Xét $f(n) = m + n = n - 2 + \dfrac{12}{n+2}$ có $f'(n) = 1 - \dfrac{12}{(n+2)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -2 + 2\sqrt{3} \\ n = -2 - 2\sqrt{3}. \end{array}\right.$

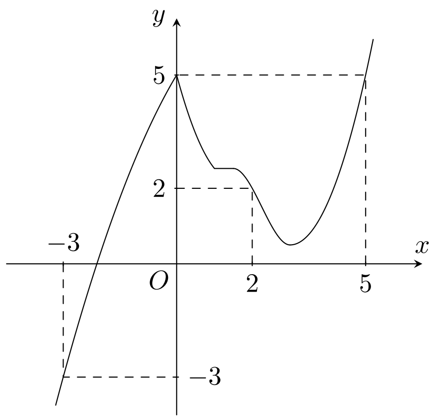
Do đó $f'(n) < 0,\ \forall n \in [1; -2 + 2\sqrt{3})$.

Suy ra $\max\limits_{[1;-2+2\sqrt{3})} f(n) = f(1) = 3$ đạt được khi $n = 1 \Rightarrow m = 2$. Do vậy $\dfrac{1}{AN^2} + \dfrac{16}{AM^2} = 5$.

Chọn đáp án B □

Câu 48.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $g(x) = f(-2x+1) + (x+1)(-2x+4)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



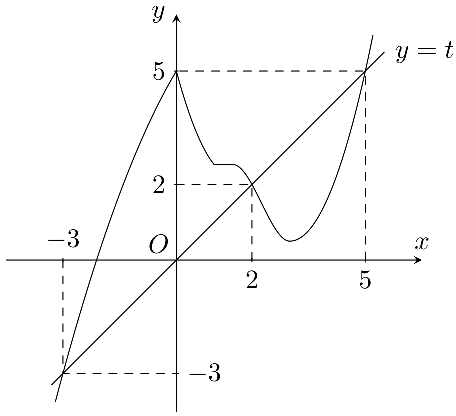
A $\left(-2; -\dfrac{1}{2}\right)$.

B $(-\infty; -2)$.

C $\left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

D $\left(-\dfrac{1}{2}; 2\right)$.

Lời giải.



Ta có $g'(x) = -2f'(-2x+1) - 4x + 2$ nên
$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(-2x+1) < -2x+1 \Leftrightarrow f'(t) < t$.
Xét hàm số $y = f'(t)$ có đồ thị như hình vẽ và đường thẳng $y = t$. Ta có $f'(t) = t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t = 2 \\ t = 5. \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị, ta có $f'(t) < t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < t < 5 \\ t < -3. \end{array}\right.$

Suy ra $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < -2x+1 < 5 \\ -2x+1 < -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < x < -\dfrac{1}{2} \\ x > 2. \end{array}\right.$

Chọn đáp án A □

Câu 49. Ông A mua một chiếc ô tô trị giá 1 tỷ đồng, do chưa đủ tiền nên ông chọn mua bằng hình thức trả góp hàng tháng (số tiền trả góp mỗi tháng như nhau) với lãi suất 12%/năm và trả trước 500 triệu đồng. Hỏi mỗi tháng ông phải trả số tiền gần nhất với số tiền nào dưới đây để sau đúng 2 năm kể từ lúc mua xe, ông trả hết nợ, biết kỳ trả nợ đầu tiên sau ngày mua ô tô đúng một tháng và chỉ tính lãi hàng tháng trên số dư nợ thực tế của tháng đó?

A 23.573.000 đồng. **B** 23.537.000 đồng. **C** 23.703.000 đồng. **D** 24.443.000 đồng.

Lời giải.

Số tiền thực tế ông A phải trả góp là 500 triệu đồng.
Với lãi suất đã cho, sau 12 tháng, tổng số tiền phải trả là $500.000.000 \times (1+1\%)^{24}$.
Mỗi tháng ông A góp X đồng. Với lãi suất đã cho thì sau 2 năm ông A góp được

$$\begin{aligned} X + X\cdot(1+1\%) + X\cdot(1+1\%)^2 + \cdots + X(1+1\%)^{23} &= X\cdot\frac{(1+1\%)^{24}-1}{1+1\%-1} \\ &= 100X\cdot\left[(1+1\%)^{24}-1\right]. \end{aligned}$$

Sau 2 năm ông A trả hết nợ, tức là ta có phương trình

$$500.000.000(1+1\%)^{24} = 100X\cdot\left[(1+1\%)^{24}-1\right] \Leftrightarrow X \approx 23.537.000.$$

Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x + 2\cos x)}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = a\ln 3 + b\ln 2 + c\pi$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của abc bằng

A $\dfrac{15}{8}$. **B** $\dfrac{5}{8}$. **C** $\dfrac{5}{4}$. **D** $\dfrac{17}{8}$.

Lời giải.

Đặt $u = \ln(\sin x + 2\cos x) \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{\cos x - 2\sin x}{\sin x + 2\cos x}\mathrm{d}x$.

$\mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$, chọn $v = \tan x + 2 = \dfrac{\sin x + 2\cos x}{\cos x}$. Khi đó

$$\begin{aligned}I &= (\tan x + 2)\cdot \ln(\sin x + 2\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - 2\frac{\sin x}{\cos x}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= 3\ln\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\ln 2 - (x + 2\ln(\cos x))\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 3\ln\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\ln 2 - \frac{\pi}{4} - 2\ln\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 3\ln 3 - \frac{5}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}\pi.\end{aligned}$$

Vậy $abc = \dfrac{15}{8}$.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. D	3. C	4. B	5. A	6. D	7. A	8. A	9. D	10. C
11. C	12. B	13. B	14. C	15. B	16. A	17. A	18. D	19. D	20. B
21. C	22. D	23. C	24. B	25. D	26. B	27. B	28. B	29. C	30. D
31. A	32. D	33. A	34. C	35. A	36. C	37. A	38. D	39. C	40. D
41. A	42. C	43. B	44. D	45. B	46. C	47. B	48. A	49. B	50. A

33 ĐỀ THI THỬ THPT BÌNH MINH, NINH BÌNH – LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là

(A) $V = a^3$. (B) $V = 2a^3$. (C) $V = \dfrac{a^3}{8}$. (D) $V = \dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải.

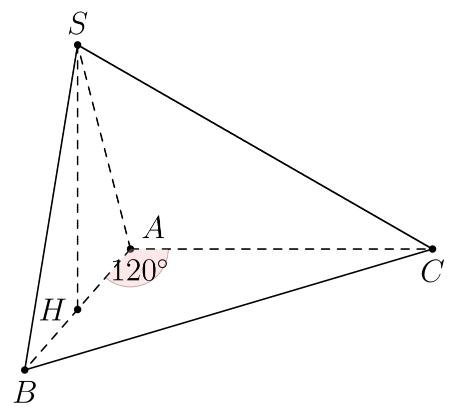
Gọi H là trung điểm của AB

$\Rightarrow SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Ta có: $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

và $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 120^0 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{8}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ là

(A) 7. (B) -25. (C) -20. (D) 3.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x - 9$.

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \Rightarrow y = -25 \\ x = -1 \Rightarrow y = 7 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	-25	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, giá trị cực tiểu của hàm số đã cho là -25.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = (m^2 - 1)x^4 + mx^2 + m - 2$ chỉ có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.

(A) $-1,5 < m \leq 0$. (B) $m \leq -1$. (C) $-1 \leq m \leq 0$. (D) $-1 < m < 0,5$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

- Xét $m^2-1=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$.
  - ⊞ Với $m=1$, hàm số đã cho trở thành: $y=x^2-1$.
    Hàm số này đạt cực tiểu tại điểm $A\,(0;-1)$ nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.
  - ⊞ Với $m=-1$, hàm số đã cho trở thành: $y=-x^2-3$.
    Hàm số này đạt cực đại tại điểm B(0;-3) nên thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- Xét $m \neq \pm 1$, ta có $y'=4\left(m^2-1\right)x^3+2mx$.

  Xét $y'=0 \Leftrightarrow 4\left(m^2-1\right)x^3+2mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=-\dfrac{m}{2\left(m^2-1\right)} \end{array}\right.$.
  - ⊞ Với $m=0$ phương trình $y'=0$ có nghiệm bội 3 và $m^2-1=0^2-1=-1<0$ nên hàm số đạt cực đại tại điểm $C(0;-1)$ nên thỏa mãn yêu cầu bào toán.
  - ⊞ Với $m \neq 0$, hàm số đã cho chỉ có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu khi và chỉ khi $\begin{cases} -\dfrac{m}{2\left(m^2-1\right)}<0 \\ m^2-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ m^2-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ -1<m<1 \end{cases} \Leftrightarrow -1<m<0.$

Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, góc tạo bởi $A'B$ và đáy bằng 60°. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $\dfrac{3a^3}{4}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C** $a^3\sqrt{3}$. **D** $3a^3$.

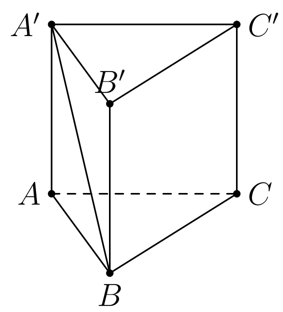
Lời giải.

Ta có: $BB' \perp (A'B'C')$ nên $\left(\widehat{A'B,(A'B'C')}\right)=\widehat{BA'B'}=60^\circ$.

Xét tam giác $BB'A'$ vuông tại B' có $\tan 60^\circ=\dfrac{BB'}{B'A'} \Rightarrow BB'=a\sqrt{3}$.

Và $S_{\Delta A'B'C'}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=BB'\cdot S_{\Delta A'B'C'}=a\sqrt{3}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3a^3}{4}$.



Chọn đáp án A □

Câu 5. Tìm tập các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}+x^2+(m-1)\,x+2018$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A $[1;+\infty)$. **B** [1;2]. **C** $(-\infty;2]$. **D** $[2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $y'=x^2+2x+m-1$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0\,\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Trong các đường tròn sau đây, đường tròn nào tiếp xúc với trục Ox?

A $x^2+y^2=5$. **B** $x^2+y^2-4x-2y+4=0$.

C $x^2+y^2-10x+1=0$. **D** $x^2+y^2-2x+10=0$.

Lời giải.

Xét đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ có tâm $I(2;1)$ và bán kính $R = 1$.
Do $\mathrm{d}(I; Ox) = y_I = 1 = R \Rightarrow (C)$ tiếp xúc với Ox.
Chọn đáp án (B) □

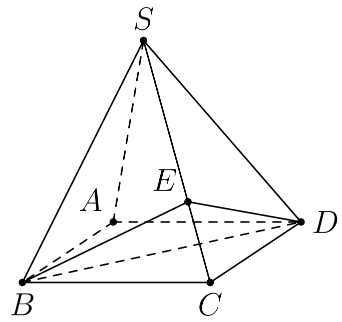
Câu 7. Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 1 và đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên cạnh SC lấy điểm E sao cho $SE = 2EC$. Tính thể tích V của khối tứ diện $S.EBD$.

(A) $V = \frac{1}{6}$. **B** $V = \frac{1}{3}$. (C) $V = \frac{1}{12}$. (D) $V = \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{V_{S.EBD}}{V_{S.BCD}} = \dfrac{SE}{SC} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow V_{S.EBD} = \dfrac{2}{3} V_{S.BCD} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}$.



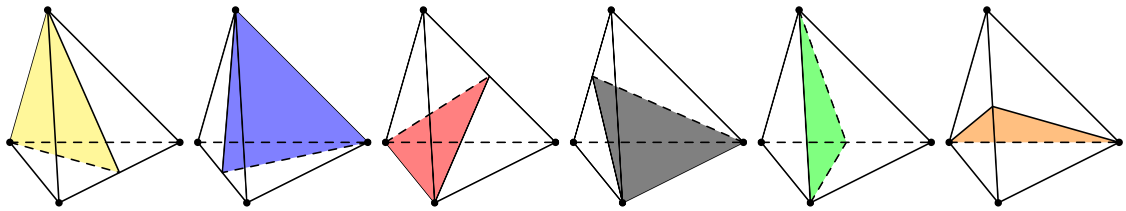
Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Khối tứ diện đều có mấy mặt đối xứng?

(A) 5. **B** 6. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

Khối tứ diện đều có 6 mặt đối xứng.



Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng hai nghiệm.

(A) $m = -2, m \geq -1$. (B) $m > 0, m = -1$. **C** $m = -2, m > -1$. (D) $-2 < m < -1$.

Lời giải.

$f(x) - 1 = m \Leftrightarrow f(x) = m + 1$.

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng hai nghiệm thì

$$\left[\begin{array}{l} m+1>0 \\ m+1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>-1 \\ m=-2. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Cho Parabol $(P_1)\colon y = f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - x$ và $(P_2)\colon y = g(x) = ax^2 - 4ax + b\ (a > 0)$. Gọi I_1, I_2 lần lượt là các đỉnh của (P_1), (P_2) và A, B là giao điểm của (P_1) với trục Ox. Biết rằng bốn điểm A, B, I_1, I_2 tạo thành tứ giác lồi có diện tích bằng 10. Tính diện tích S của tam giác IAB với I là đỉnh của Parabol $(P)\colon y = h(x) = f(x) + g(x)$.

A $S = 6$. (B) $S = 4$. (C) $S = 9$. (D) $S = 7$.

Lời giải.

$(P_1)\colon y = f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - x$ có đỉnh $I_1(2; -1)$.

$(P_2)\colon y = g(x) = ax^2 - 4ax + b\ (a > 0)$ có đỉnh $I_2(2; b - 4a)$.

$(P) : y = h(x) = f(x) + g(x) = \left(\dfrac{1}{4} + a\right)x^2 - (1 + 4a)\,x + b$ có đỉnh $I(2; b - 4a - 1)$.

Suy ra I_1, I_2, I cùng nằm trên đường thẳng $x = 2$.

Mà giao điểm của (P_1) và Ox là $A\,(4; 0)$ và $B\,(0; 0)$

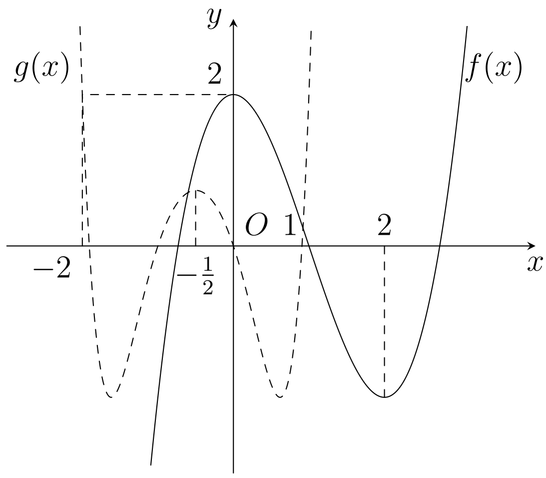
Suy ra tứ giác lồi AI_1BI_2 có hai đường chéo vuông góc và $b - 4a > 0$

$S_{AI_1BI_2} = \dfrac{1}{2}\cdot AB \cdot I_1I_2 \Leftrightarrow 10 = \dfrac{1}{2}4\cdot|b - 4a + 1| = 10 \Leftrightarrow b - 4a + 1 = 5 \Leftrightarrow b - 4a = 4.$

Tam giác IAB có diện tích là $S = \dfrac{1}{2}\cdot AB \cdot \mathrm{d}(I, Ox) = \dfrac{1}{2}\cdot 4|b - 4a - 1| = 6.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Cho hàm số bậc ba $f(x)$ và $g(x) = f(mx^2 + nx + p)$ $(m, n, p \in \mathbb{Q})$ có đồ thị như hình dưới (Đường nét liền là đồ thị hàm số $f(x)$, nét đứt là đồ thị của hàm $g(x)$, đường thẳng $x = -\dfrac{1}{2}$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số $g(x)$).



Giá trị của biểu thức $P = (n + m)(m + p)(p + 2n)$ bằng bao nhiêu?

A 12. (B) 16. (C) 24. (D).

Lời giải.

Ta có $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Hàm số đạt cực trị tại $x = 0$; $x = 2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; 0)$, $(0; 2)$ nên

$\begin{cases} f'(0)=0\\ f'(2)=0\\ f(1)=0\\ f(0)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1\\ b=-3\\ c=0\\ d=2 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^3-3x^2+2.$

Ta có $g(x)=(mx^2+nx+p)^3-3(\mathrm{mx}^2+nx+p)^2+2$. Hệ số tự do bằng p^3-3p^2+2.

Đồ thị hàm số $g(x)$ đi qua điểm $(0;0)$ nên $p^3-3p^2=2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p=1\\ p=1-\sqrt{3}\\ p=1+\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Vì $p\in\mathbb{Q}$ nên $p=1$.

Đồ thị hàm số $g(x)=f(mx^2+nx+p)$ có trục đối xứng là $x=-\dfrac{1}{2}$ nên đồ thị hàm số $y=mx^2+nx+p$ cũng có trục đối xứng là $x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow -\dfrac{n}{2m}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow m=n$.

Đồ thị hàm số $g(x)$ qua điểm $(-2;2)$ nên $g(-2)=0\Rightarrow g(x)=(2m+1)^3-3(2m+1)^2+2=2$

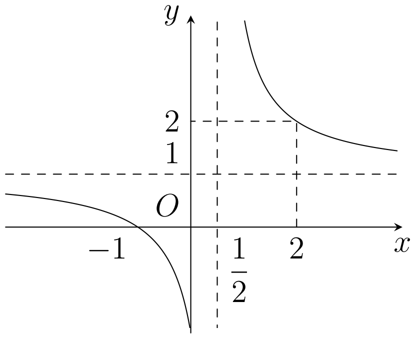
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=n=1\\ m=n=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Do đồ thị có hướng quay lên trên, suy ra $m>0\Rightarrow m=n=p=1$.

$\Rightarrow P=(n+m)(m+p)(p+2n)=12$.

Chọn đáp án A □

Câu 12.
Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.



(A) $\max\limits_{[1;2]} f(x)=2$.
(B) $\max\limits_{[-2;1]} f(x)=0$.
(C) $\max\limits_{[-3;0]} f(x)=f(-3)$.
(D) $\max\limits_{[3;4]} f(x)=f(4)$.

Lời giải.

Từ đồ thị dễ thấy hàm số nghịch biến và liên tục trên $[-3;0]$ nên $\max\limits_{[-3;0]} f(x)=f(-3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-4x}{2x-1}$?

(A) $y=2$.
(B) $y=\dfrac{1}{2}$.
(C) $y=4$.
(D) $y=-2$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-2$ nên đường thẳng $y=-2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Cho 2 tập hợp $M=(2;11]$ và $N=[2;11)$. Khi đó $M\cap N$ là

(A) (2;11).
(B) [2;11].
(C) 2.
(D) 11.

Lời giải.

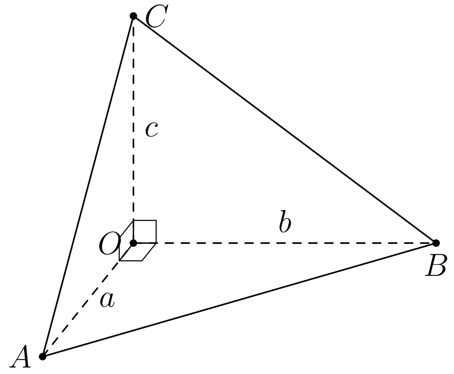
Ta có: $M \cap N = (2; 11)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Tính thể tích khối tứ diện $O.ABC$.

(A) $\dfrac{abc}{3}$. (B) $\dfrac{abc}{4}$. **(C)** $\dfrac{abc}{6}$. (D) $\dfrac{abc}{2}$.

Lời giải.

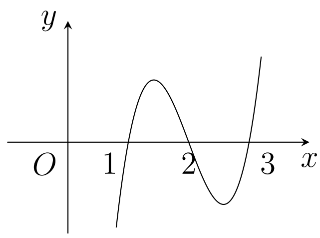


Ta có: $V_{O.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\Delta BOC} \cdot OA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} bca = \dfrac{1}{6} abc$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Khẳng định nào sau đây là đúng?



(A) $f(1,5) < 0 < f(2,5)$. (B) $f(1,5) < 0, f(2,5) < 0$.

(C) $f(1,5) > 0, f(2,5) > 0$. **(D)** $f(1,5) > 0 > f(2,5)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(1,5) > 0$ và $f(2,5) < 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Biết đồ thị hàm số $y = \dfrac{(2m-n)x^2 + mx + 1}{x^2 + mx + n - 6}$ (m, n là tham số) nhận trục hoành và trục tung làm hai đường tiệm cận. Tính $m + n$.

(A) -6. **(B)** 9. (C) 6. (D) 8.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2m-n)x^2 + mx + 1}{x^2 + mx + n - 6} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2m-n) + \dfrac{m}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{1 + \dfrac{m}{x} + \dfrac{n-6}{x^2}} = 2m - n$.

Tương tự, ta cũng có $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(2m-n)x^2 + mx + 1}{x^2 + mx + n - 6} = 2m - n$.

Vậy $y = 2m - n$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

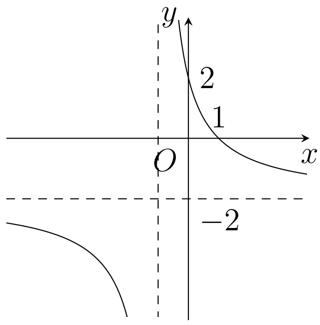
Theo giả thiết, ta có $2m - n = 0$ (1).

Để hàm số nhận trục tung làm tiệm cận đứng thì điều kiện cần là phương trình $x^2 + mx + n - 6 = 0$ có một nghiệm $x = 0$ hay $n - 6 = 0 \Leftrightarrow n = 6$ (2).

Do $x = 0$ không là nghiệm của phương trình $(2m-n)x^2 + mx + 1 = 0$ nên với $n = 6$ thì đồ thị

hàm số nhận trục tung làm tiệm cận đứng.
Từ (1) và (2) suy ra $m = 3$. Vậy $m + n = 9$.
Chọn đáp án B □

Câu 18.
Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số sau?



(A) $y = \dfrac{x-2}{x+1}$. (B) $y = \dfrac{-2x+2}{x+1}$.
(C) $y = \dfrac{-x+2}{x+2}$. (D) $y = \dfrac{2x-2}{x+1}$.

Lời giải.
Giả sử hàm số có dạng: $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad - bc \neq 0)$.
Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$ suy ra $-\dfrac{d}{c} = -1 \Leftrightarrow c - d = 0$ (1).
Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$ suy ra $\dfrac{a}{c} = -2 \Leftrightarrow a + 2c = 0$ (2).
Đồ thị hàm số đi qau điểm $(1;0)$ suy ra $\dfrac{a+b}{c+d} = 0 \Leftrightarrow a + b = 0$ (3).
Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;2)$ suy ra $\dfrac{b}{d} = 2 \Leftrightarrow b - 2d = 0$ (4).
Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $\begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \\ c = 1 \\ d = 1 \end{cases}$.
Vậy hàm số cần tìm có dạng $y = \dfrac{-2x+2}{x+1}$.
Chọn đáp án B □

Câu 19. Hàm số $y = x^4 - x$ nghịch biến trên khoảng nào?
(A) $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right)$. (B) $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$. (C) $(0; +\infty)$. (D) $(-\infty; 0)$.

Lời giải.
Ta có: $y' = 4x^3$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
Chọn đáp án D □

Câu 20. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $(d): y = x+1$ và đường cong $(C): y = \dfrac{2x+4}{x-1}$. Hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng MN bằng?

A. 1. B. 2. C. $\dfrac{5}{2}$. D. $-\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x+1 = \frac{2x+4}{x-1} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1+\sqrt{6} \\ x = 1-\sqrt{6} \end{array}\right..$$

Suy ra hoành độ trung điểm của đoạn MN là $x_I = \dfrac{1+\sqrt{6}+1-\sqrt{6}}{2} = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Cho ba số x, 5, $2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và ba số x ; 4; 2y theo thứ tự lập thành cấp số nhân thì $|x-2y|$ bằng

A. $|x-2y| = 10$. B. $|x-2y| = 9$. C. $|x-2y| = 6$. D. $|x-2y| = 8$.

Lời giải.

Theo tính chất của cấp số cộng và cấp số nhân ta có

$$\begin{cases} x+2y = 2\cdot 5 \\ x\cdot 2y = 4^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = 10 \\ xy = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy $|x-2y| = 6$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 - mx + 1$ có đồ thị (C). Tìm tham số m để (C) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt.

A. $m < 0$. B. $m > 1$. C. $m \leq 1$. D. $m \geq 0$.

Lời giải.

Cách 1:

Để (C) cắt Ox tại ba điểm phân biệt thì p.trình $x^3 - x^2 - mx + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt, hay phương trình $x^3 - x^2 + 1 = mx$ có ba nghiệm phân biệt.

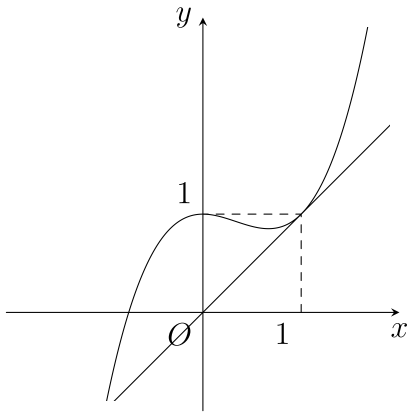
Điều này tương đương với đường thẳng $y = mx$ cắt đồ thị hàm số

$y = x^3 - x^2 + 1$ tại ba điểm phân biệt.

Đường thẳng $y = mx$ đi qua gốc tọa độ.

Đường thẳng $y = x$ là tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + 1$ (như hình minh họa bên).

Do đó với $m > 1$ thì đường thẳng $y = mx$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + 1$ tại ba điểm phân biệt



Cách 2:

Để (C) cắt Ox tại ba điểm phân biệt thì phương trình $x^3 - x^2 - mx + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Dễ thấy $x = 0$ không thể là nghiệm nên $x^3 - x^2 - mx + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x}$.

Xét hàm số $y = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x}$ trên tập $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Để phương trình $m = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x}$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Một đội gồm 5 nam và 8 nữ. lập một nhóm gồm bốn người hát tốp ca. Tính xác suất để bốn người được có ít nhất ba nữ.

A $\dfrac{56}{143}$. **B** $\dfrac{73}{143}$. **C** $\dfrac{87}{143}$. **D** $\dfrac{70}{143}$.

Lời giải.

Số cách lập nhóm có đúng 3 bạn nữ là $\mathrm{C}_8^3.\mathrm{C}_5^1 = 280$.

Số cách lập nhóm có đúng 4 bạn nữ là $\mathrm{C}_8^4\mathrm{C}_5^0 = 70$.

Tổng số cách lập nhóm thỏa mãn yêu cầu là 350 cách.

Tổng số cách lập nhóm là $\mathrm{C}_{13}^4 = 715$.

Xác suất cần tìm là $\dfrac{350}{715} = \dfrac{70}{143}$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Cho đồ thị (C) của hàm số $y' = (1+x)(x+2)^2(x-3)^3(1-x^2)$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai.

A (C) có một điểm cực trị.

B (C) có ba điểm cực trị.

C (C) có hai điểm cực trị.

D (C) có bốn điểm cực trị.

Lời giải.

Ta có $y' = (1+x)^2(x+2)^2(x-3)^3(1-x)$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		-1		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Ta thấy đạo hàm đổi dấu hai lần nên hàm số có hai điểm cực trị suy ra đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

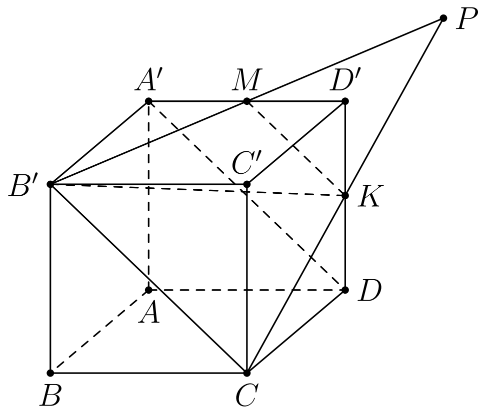
Trắc nghiệm: Ta thấy phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm đơn hoặc bội lẻ nên đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm của DD'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK, $A'D$.

(A) a. (B) $\frac{3a}{8}$. (C) $\frac{2a}{5}$. (D) $\frac{a}{3}$.

Lời giải.



Cách 1:

Trong mặt phẳng $(CDD'C)$ gọi P là giao điểm của CK và $C'D'$.

Suy ra KD' là đường trung bình của $\Delta PCC' \Rightarrow D'$ là trung điểm của PC'.

Trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$ gọi M là giao điểm của PB' và $A'D'$.

Ta có $A'D \mathbin{/\!/} B'C \Rightarrow A'D \mathbin{/\!/} (AKB') \Rightarrow \mathrm{d}\left(CK, A'D\right) = \mathrm{d}\left(A', (CKB')\right) = \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(C', (CPB')\right)$.

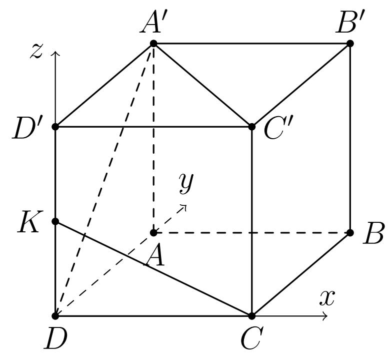
Tứ diện $PCC'B'$ có $C'P, C'B$ và $C'B$ đôi một vuông góc với nhau.

Đặt $\mathrm{d}\left(C', (CPB')\right) = x$, thì $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{CC'^2} + \frac{1}{C'B'^2} + \frac{1}{C'P} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{9}{4a^2}$.

Suy ra $\mathrm{d}\left(C', (CPB')\right) = x = \frac{2a}{3}$.

Vậy $\mathrm{d}\left(CK, A'D\right) = \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(C', (CPB')\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}a = \frac{a}{3}$.

Cách 2: (Đã học chương 3, HH12) Chọn hệ trục tọa độ sao cho: $D(0;0;0)$, trục Ox trùng với cạnh DC, trục Oy trùng với cạnh DA, trục Oz trùng với cạnh DD' , chọn $a = 1$.



Ta có : $C\left(1;0;0\right)$, $K\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$, $A'\left(0;1;1\right)$.

$\overrightarrow{CK} = \left(-1;0;\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{A'D} = \left(0;-1;-1\right)$, $\overrightarrow{DK} = \left(0;0;\frac{1}{2}\right)$

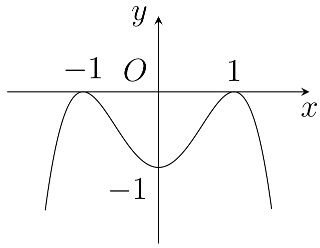
nên $\left[\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{A'D}\right] = \left(\frac{1}{2};-1;1\right)$.

$$\mathrm{d}\left(CK; A'D\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{A'D}\right].\overrightarrow{DK}\right|}{\left[\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{A'D}\right]} = \frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 26.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số nào?



(A) $y = -x^4 + 3x^2 - 3$.
(B) $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.
(C) $y = -x^4 + x^2 - 1$.
(D) $y = -x^4 + 3x^2 - 2$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị thấy đây là đồ thị của hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ với hệ số $a < 0$, $b > 0$, $c = -1$ nên loại đáp án A: $y = -x^4 + 3x^2 - 3$ và D: $y = -x^4 + 3x^2 - 2$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm 1$ nên chỉ có đáp án B: $y = -x^4 + 2x^2 - 1$ thỏa mãn.

Đáp án C loại vì: $y = -x^4 + x^2 - 1 \Rightarrow y' = -4x^3 + 2x$.

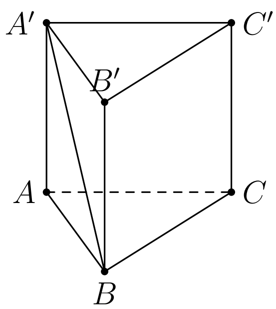
$$y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. .$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = BC = a$, $BB' = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$.

(A) $60°$.
(B) $90°$.
(C) $45°$.
(D) $30°$.

Lời giải.



Ta có: $\left.\begin{array}{l} A'B' \perp B'C' \\ A'B' \perp BB' \end{array}\right\} \Rightarrow A'B' \perp (BCC'B')$ nên BB' là hình chiếu của $A'B$ trên $(BCC'B')$.

Vậy góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ là góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và BB' và là góc $\widehat{A'BB'}$.

Lại có: $\tan \widehat{A'BB'} = \dfrac{A'B'}{BB'} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, do đó $\widehat{A'BB'} = 30°$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Cho hàm số $y = \dfrac{x^4}{2} - 3x^2 + \dfrac{5}{2}$, có đồ thị (C) và điểm $M \in (C)$ có hoành độ $x_M = a$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại hai điểm phân biệt khác M.

(A) 0.
(B) 3.
(C) 2.
(D) 1.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \dfrac{x^4}{2} - 3x^2 + \dfrac{5}{2}$, ta có: $y' = 2x^3 - 6x$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M: $y = (2a^3 - 6a)(x - a) + \dfrac{a^4}{2} - 3a^2 + \dfrac{5}{2}$ (d).

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C):

$$\begin{aligned} & \left(2a^3 - 6a\right)(x - a) + \frac{a^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2} = \frac{x^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & (x - a)^2 \left(x^2 + 2ax + 3a^2 - 6\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-a)^2\left(x^2+2ax+3a^2-6\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=a \\ x^2+2ax+3a^2-6=0\,(2). \end{array}\right.$$

Đường thẳng (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt khác M khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác $a \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 6-2a^2>0 \\ a^2+2a^2+3a^3-6\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}<a<\sqrt{3} \\ a\neq \pm 1. \end{cases}$

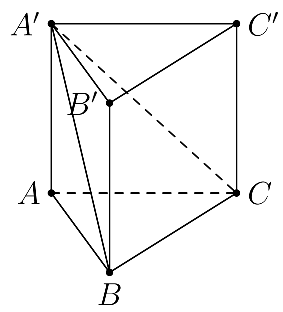
Mà a nguyên nên $a=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AC=a\sqrt{2}$, biết góc giữa $(A'BC)$ và đáy bằng $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ.

A $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **C** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.



Do đáy tam giác vuông cân tại B, $AC=a\sqrt{2}$ nên AB = a.

Lại có: $(A'BC)\cap(ABC)=BC$ mà $BC\perp(A'B'BA)$ nên góc tạo bởi $(A'BC)$ và đáy là $\widehat{A'BA}$.

Theo bài ra: $\widehat{A'BA}=60°$.

$AA'=AB\cdot\tan\widehat{A'BA}=a\cdot\tan 60°=a\sqrt{3}$.

Thể tích V của khối lăng trụ: $V=A'A\cdot S_{ABC}=a\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2}a^2=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^4}{2}-4x^2+1$ trên $[-1;3]$. Tính giá trị của $2M+m$.

A 4. **B** -5. **C** 12. **D** -6.

Lời giải.

Xét hàm số $y=\dfrac{x^4}{2}-4x^2+1$ trên [-1;3].

Ta có: $y'=2x^3-8x$. Do đó $y'=0\Leftrightarrow 2x^3-8x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2\notin[-1;3] \\ x=0\in[-1;3] \\ x=2\in[-1;3] \end{array}\right.$.

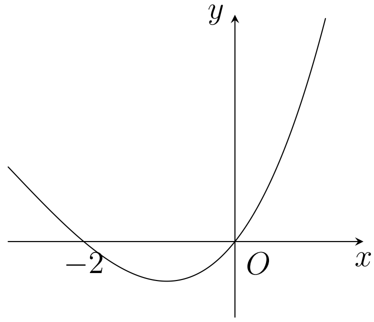
Lại có: $y(0)=1$, $y(-1)=-\dfrac{5}{2}$, $y(3)=\dfrac{11}{2}$ và $y(2)=-7$.

Do đó $M=\dfrac{11}{2}$ và $m=-7\Rightarrow 2M+m=11-7=4$.

Chọn đáp án A □

Câu 31.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên. Trong các mệnh đều sau, mệnh đề nào **sai**?



A f đạt cực tiểu tại $x = 0$.

B f đạt cực tiểu tại $x = -2$.

C f đạt cực đại tại $x = -2$.

D Cực tiểu của f nhỏ hơn cực đại.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên:

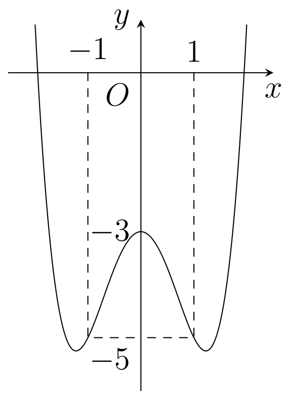
x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	$f(-2)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	

Chọn đáp án **B** □

Câu 32.

Đồ thị sau đây của hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 3$. Với giá trị nào của m thì phương trình $x^4 - 3x^2 + m = 0$ có ba nghiệm phân biệt?

A $m = -4$. **B** $m = 0$. **C** $m = -3$. **D** $m = 4$.



Lời giải.

Ta có: $x^4 - 3x^2 + m = 0 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 = -m \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 3 = -m - 3$.

Dựa vào đồ thị ta có phương trình có ba nghiệm phân biệt khi $-m - 3 = -3 \Leftrightarrow m = 0$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 33. Một xưởng in có 8 máy in, mỗi máy in được 3600 bản in trong một giờ. Chi phí để vận hành một máy trong mỗi lần in là 50 nghìn đồng. Chi phí cho n máy chạy trong một giờ là $10(6n + 10)$ nghìn đồng. Hỏi nếu in 50000 tờ quảng cáo thì phải sử dụng bao nhiêu máy in để được lãi nhiều nhất?

A 4 máy. **B** 6 máy. **C** 5 máy. **D** 7 máy.

Lời giải.

Gọi $x\,(0 \le x \le 8; x \in \mathbb{Z})$ là số máy in sử dụng trong một giờ để được lãi nhiều nhất. Khi đó chi phí dành cho x máy in trong một giờ là $10(6x + 10) = 60x + 100$ nghìn đồng.

Chi phí vận hành $50x$ nghìn đồng.

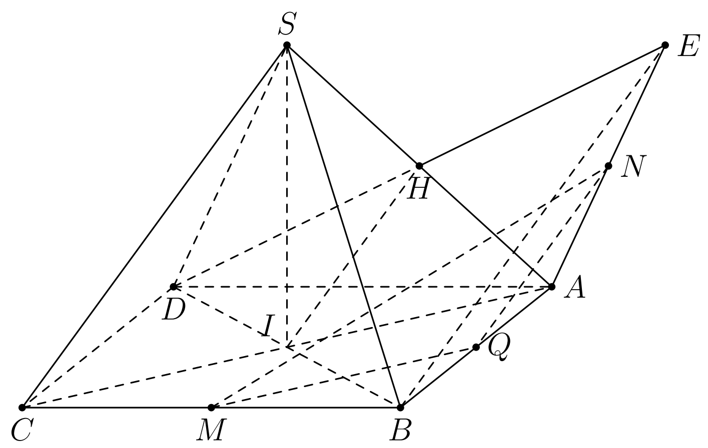
Số bản in trong một giờ là $3600x \Rightarrow$ thời gian để in xong 50000 tờ quảng cáo là $\dfrac{50000}{3600x} = \dfrac{125}{9x}$ giờ.

Vậy tổng chi phí là $f(x) = (60x + 100)\dfrac{25}{9x} + 50x$ nghìn đồng.
Để lãi là nhiều nhất thì tổng chi phí là thấp nhất, vậy ta tìm giá trị nhỏ nhất của tổng chi phí.
Thay các giá trị $x = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ ta thấy giá trị nhỏ nhất là $f(5) = \dfrac{12250}{9}$.
Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, E là điểm đối xứng của D qua trung điểm SA. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE và BC. Góc giữa hai đường thẳng MN và BD bằng

A. $60°$. B. $90°$. C. $45°$. D. $75°$.

Lời giải.



Gọi $H = DF \cap SA \Rightarrow H$ là trung điểm của ED. $I = AC \cap BD \Rightarrow I$ là trung điểm BD.
Vậy HI là đường trung bình của tam giác $BED \Rightarrow HI \parallel EB$ (1).
Ta có $BD \perp AC$, $BD \perp SI$ (chóp tứ giác đều, hình chiếu của đỉnh S xuống đáy là I)
$\Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp HI$ (2).
Từ (1) và (2) ta có $BD \perp EB$.
Gọi Q là trung điểm AB, dễ thấy NQ là đường trung bình của tam giác ABE
$\Rightarrow NQ \parallel BE \Rightarrow BD \perp NQ$.
Gọi M là trung điểm BC, dễ thấy $MQ \parallel AC$, mà $AC \perp BD$ nên $MQ \perp BD$.
Ta có $\begin{cases} BD \perp NQ \\ BD \perp MQ \end{cases} \Rightarrow BD \perp (MNQ) \Rightarrow BD \perp NM$.
Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và BD bằng $90°$.
Chọn đáp án B □

Câu 35. Hàm số nào sau đây có tập xác định là $\mathbb{R}$?

A. $y = 3x^3 - 2\sqrt{x} - 3$. B. $y = 3x^3 - 2x - 3$.
C. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$. D. $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

Lời giải.
Nhìn vào hàm số thấy $y = 3x^3 - 2x - 3$ tồn tại giá trị với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Chọn đáp án B □

Câu 36. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển biểu thức $\left(2x - \dfrac{1}{x^2}\right)^9$.

Ⓐ 5376. Ⓑ 672. Ⓒ -672. **D** -5376.

Lời giải.

Ta có $\left(2x-\dfrac{1}{x^2}\right)^9=\sum\limits_{k=0}^{9}\mathrm{C}_9^k(2x)^{9-k}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)^k=\sum\limits_{k=0}^{9}\mathrm{C}_9^k2^{9-k}(-1)^kx^{9-3k}$.

Theo đề bài ta tìm số hạng không chứa x nên $9-3k=0\Rightarrow k=3$.

Với $k=3$ ta có số hạng không chứa x là $\mathrm{C}_9^3.2^6.(-1)^3=-5376$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 37. Phép vị tự tâm O tỷ số 2 biến điểm $A(-1;1)$ thành điểm A'. Chọn khẳng định đúng.

A $A'(-4;2)$. Ⓑ $A'\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$. Ⓒ $A'(4;-2)$. Ⓓ $A'\left(2;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Do $\mathrm{V}_{(O;2)}(A)=A'(x';y')$ nên $\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=2x\\y'=2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-4\\y'=2\end{cases}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 38. Có 9 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 9. Chọn ngẫu nhiên ra 2 tấm thẻ. Tính xác suất để tích của hai số trên hai tấm thẻ là một số chẵn.

A $\dfrac{13}{18}$. Ⓑ $\dfrac{55}{56}$. Ⓒ $\dfrac{5}{28}$. Ⓓ $\dfrac{1}{56}$.

Lời giải.

Lấy ngẫu nhiên tấm thẻ từ 9 tấm thẻ có $\mathrm{C}_9^2=36$ cách $\Rightarrow$ số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=36$.

Gọi A là biến cố : "Tích của hai số trên tấm thẻ là một số chẵn".

Để tích của hai số trên tấm thẻ là một số chẵn thì ít nhất một trong hai tấm thẻ phải là số chẵn.

Ta có hai trường hợp

TH1: Cả hai thẻ được lấy ra đều là số chẵn có $\mathrm{C}_4^2=6$ cách.

TH2: Hai thẻ lấy ra có một thẻ là số chẵn, một thẻ là số lẻ $\mathrm{C}_4^1.\mathrm{C}_5^1=20$ cách.

Số kết quả thuận lợi cho A là $n(A)=6+20=26$.

Vậy xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{13}{18}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 39. Tính côsin góc giữa hai đường thẳng $d_1\colon x+2y-7=0,\ d_2\colon 2x-4y+9=0$.

Ⓐ $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. Ⓑ $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Ⓒ $\dfrac{1}{5}$. **D** $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

Có $\cos(d_1,d_2)=\dfrac{|1.2+2.(-4)|}{\sqrt{1^2+2^2}.\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\dfrac{3}{5}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 40. Tập nghiệm của phương trình $2\cos 2x+1=0$ là

Ⓐ $S=\left\{\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. Ⓑ $S=\left\{\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi,-\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C $S=\left\{\dfrac{\pi}{3}+k\pi,-\dfrac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. Ⓓ $S=\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi,-\dfrac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Có $2\cos 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow cos2x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{\pi}{3} + k\pi, -\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+2-m}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng mà nó xác định?

A $m \leq 1$. B $m < 1$. C $m < -3$. D $m \leq -3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$.

Có $y' = \dfrac{m-1}{(x+1)^2}$.

Hàm số nghịch bến trên mỗi khoảng của tập xác định $\Leftrightarrow \dfrac{m-1}{(x+1)^2} < 0,\ \forall x \in \mathscr{D} \Leftrightarrow m < 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Cho các hàm số: $y = \sqrt{20-x^2}$, $y = -7x^4 + 2|x| + 1$, $y = \dfrac{x^4+10}{x}$, $y = |x+2| + |x-1|$, $y = \dfrac{\sqrt{x^4-x}+\sqrt{x^4+x}}{|x|+4}$. Trong các hàm số đó, có bao nhiêu hàm số chẵn?

A 3. B 1. C 4. D 2.

Lời giải.

Các hàm số chẵn:

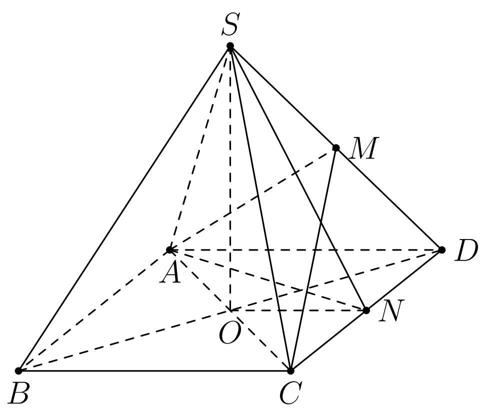
$y = \sqrt{20-x^2}$, $y = -7x^4 + 2|x| + 1$, $y = \dfrac{\sqrt{x^4-x}+\sqrt{x^4+x}}{|x|+4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SD, DC . Thể tích khối tứ diện $ACMN$ là

A $\dfrac{a^3}{8}$. B $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. C $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm mặt đáy, suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Góc giữa mặt bên và mặt đáy là $\widehat{SNO} = 60°$.

$SO = ON \cdot \tan 60° = a\sqrt{3}$.

Vì M là trung điểm của SD nên $\mathrm{d}\left(M,(ACN)\right)=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(S,(ABCD)\right)=\dfrac{1}{2}SO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
$S_{ANC}=\dfrac{1}{2}S_{ACD}=\dfrac{1}{4}S_{ABCD}=\dfrac{1}{4}\cdot(2a)^2=a^2$.
Vậy $V_{ACMN}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot a^2=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.
Chọn đáp án C □

Câu 44. Gọi $(x_1;y_1),(x_2;y_2)$ là hai nghiệm phân biệt của hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2-xy+x+y=8\\ xy+3(x+y)=1\end{cases}$.
Tính $|x_1-x_2|$.

A 3. B 2. C 1. D 0.

Lời giải.
Đặt $\begin{cases}S=x+y\\ P=xy\end{cases}$, điều kiện: $S^2-4P\geq 0$.
$$\begin{cases}x^2+y^2-xy+x+y=8\\ xy+3(x+y)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2-3xy+x+y=8\\ xy+3(x+y)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S^2+S-3P=8\ (1)\\ P+3S=1\ (2).\end{cases}$$
Từ (1) $\Rightarrow P=1-3S$. Thay vào (2) ta được:
$$S^2+S-3(1-3S)=8\Leftrightarrow S^2+10S-11=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}S=1\\ S=-11\end{array}\right..$$
TH1: $S=1\Rightarrow P=-2\Rightarrow\begin{cases}x+y=1\\ xy=-2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\ y=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1\\ y=2\end{cases}\end{array}\right..$
TH2: $S=-11\Rightarrow P=34$ (không thỏa mãn điều kiện).
Vậy $|x_1-x_2|=3$.
Chọn đáp án A □

Câu 45. Bất phương trình $|2x-1|>x$ có tập nghiệm là

A $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$. B $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.
C $\mathbb{R}$. D Vô nghiệm.

Lời giải.
$$|2x-1|>x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-1\geq 0\\ 2x-1>x\end{cases}\\ \begin{cases}2x-1<0\\ -2x+1>x\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq\dfrac{1}{2}\\ x>1\end{cases}\\ \begin{cases}x<\dfrac{1}{2}\\ x<\dfrac{1}{3}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>1\\ x<\dfrac{1}{3}\end{array}\right..$$
Chọn đáp án A □

Câu 46. Cho tam giác ABC với $A(1;1)$, $B(0;-2)$, $C(4;2)$. Phương trình tổng quát của đường trung tuyến đi qua điểm B của tam giác ABC là

A $7x+7y+14=0$. B $5x-3y+1=0$.

(C) $3x + y - 2 = 0$. **D** $-7x + 5y + 10 = 0$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của AC. Ta có $M\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{MB}\left(-\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}\right)$.

Do đó đường trung tuyến đi qua B của tam giác ABC đi qua $B\,(0; -2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (7; -5)$, nên phương trình là

$7\,(x - 0) - 5\,(y + 2) = 0 \Leftrightarrow 7x - 5y - 10 = 0 \Leftrightarrow -7x + 5y + 10 = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{3}\sin x}{\cos x + 1}$. Tính $M \cdot m$.

(A) 2. (B) 0. (C) -2. **D** -1.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \dfrac{\sqrt{3}\sin x}{\cos x + 2}$ (1) có tập xác định $\mathbb{R}$ (vì $\cos x + 2 > 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$).

Khi đó, (1) tương đương với $y\cos x + 2y = \sqrt{3}\sin x \Leftrightarrow y\cos x - \sqrt{3}\sin x = -2y\ (*)$.

Phương trình $(*)$ có nghiệm x khi $y^2 + 3 \geq 4y^2 \Leftrightarrow y^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1$.

Do đó: $M = 1,\ \ m = -1$. Vậy $M \cdot m = -1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

A $m = 0$. (B) $m = 1$. (C) $m = 2$. (D) $m = -2$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + m$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$. Suy ra $y'\,(2) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^2 - 6.2 + m = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Với $m = 0$ ta có $y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			0				$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

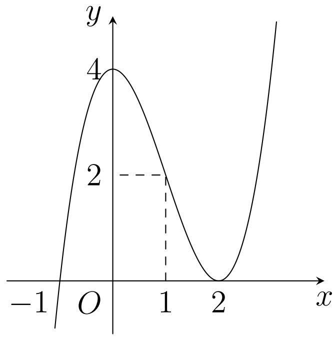
Dựa vào bảng biến thiên, ta nhận thấy với $m = 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 49.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cắt Ox tại điểm $(2; 0)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A $(-1; +\infty)$. **B** $(-\infty; 0)$. **C** $(-2; 0)$. **D** $(-\infty; -1)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Từ đồ thị đã cho ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$			$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta nhận thấy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị (C). Biết rằng (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x_1 > x_2 > x_3 > 0$ và trung điểm nối hai điểm cực trị của (C) có hoành độ $x_0 = \dfrac{1}{3}$. Biết rằng $(3x_1 + 4x_2 + 5x_3)^2 = 44(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$. Hãy xác định tổng $S = x_1 + x_2^2 + x_3^2$.

A $\dfrac{137}{216}$. **B** $\dfrac{45}{157}$. **C** $\dfrac{133}{216}$. **D** 1.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y = 3ax^2 + 2bx + c$.

Do đồ thị (C)có hai điểm cực trị nên ta có phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt hay là phương trình $3ax^2 + 2bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_i, x_j và hai nghiệm này cũng chính là hoành độ của hai điểm cực trị của đồ thị (C).

Theo vi-ét ta có $x_i + x_j = -\dfrac{2b}{3a}$.

Suy ra hoành độ giao điểm nối hai điểm cực trị là

$x_0 = \dfrac{x_i + x_j}{2} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{2b}{3a} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow b = -a$.

Mặt khác, do giả thiết ta có phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 nên theo vi-ét ta có

$x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{a}{a} = 1$.

Ta có:

$$\begin{aligned} & (3x_1 + 4x_2 + 5x_3)^2 = 44(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) \\ \Leftrightarrow\ & 9x_1^2 + 16x_2^2 + 25x_3^2 = 20x_1x_2 + 4x_2x_3 + 14x_3x_1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{20}{3}x_1^2+\frac{40}{3}x_2^2+x_2^2+4x_3^2+\frac{7}{3}x_1^2+21x_3^2=20x_1x_2+4x_2x_3+14x_3x_1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

- $\frac{5}{3}\left(4x_1^2+9x_2^2\right)\geq\frac{5}{3}\cdot2\sqrt{4x_1^1\cdot9x_2^2}=20x_1x_2$ (1) .
- $x_2^2+4x_3^2\geq2\sqrt{x_2^2\cdot4x_3^2}=4x_1x_2$ (2).
- $\frac{7}{12}\left(4x_1^2+36x_3^2\right)\geq\frac{7}{12}\cdot2\sqrt{4x_1^2\cdot36x_3^2}=14x_3x_1$ (3) .

Lấy (1) + (2) + (3) vế theo vế ta có: $9x_1^2+16x_2^2+25x_3^2\geq20x_1x_2+4x_2x_3+14x_3x_1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}4x_1^2=9x_2^2\\x_2^2=4x_3^2\\4x_1^2=36x_3^2\\x_1+x_2+x_3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\frac{3}{2}x_2\\x_2=2x_3\\x_3=\frac{1}{3}x_1\\x_1+x_2+x_3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}\\x_2=\frac{1}{3}\\x_3=\frac{1}{6}\end{cases}$.

Vậy $S=x_1+x_2^2+x_3^2=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{133}{216}$.

Chọn đáp án C □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. B	3. C	4. A	5. D	6. B	7. B	8. B	9. C	10. A
11. A	12. C	13. D	14. A	15. C	16. D	17. B	18. B	19. D	20. A
21. C	22. B	23. D	24. C	25. D	26. B	27. D	28. D	29. A	30. A
31. B	32. B	33. C	34. B	35. B	36. D	37. A	38. A	39. D	40. C
41. B	42. A	43. C	44. A	45. A	46. D	47. D	48. A	49. A	50. C

34 ĐỀ THI THỬ CỤM TRƯỜNG TP. NAM ĐỊNH, NAM ĐỊNH, LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-19=0$ và mặt phẳng (P): $2x-y-2z+m+3=0$, với m là tham số. Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có chu vi 6π. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc T bằng:

A. 4. B. 24. C. -20. **D.** -16.

Lời giải.

Mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=25$ có tâm $I(2;1;-1)$ và bán kính $R=5$.

Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có chu vi bằng 6π nên bán kính đường tròn bằng $r=3$.

Do đó khoảng cách từ tâm I của mặt cầu đến mặt phẳng là $\mathrm{d}(I,(P))=\sqrt{R^2-r^2}=4$

$$\Leftrightarrow \frac{|4-1+2+m+3|}{3}=4 \Leftrightarrow |m+8|=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=-20. \end{array}\right.$$

Vậy tổng giá trị của các phần tử thuộc T bằng -16.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nào sau đây?

A. $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$. B. $y=\sqrt{x^2-1}$. C. $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{1}{x^2-1}$.

Lời giải.

Đường thẳng $x=x_0$ được gọi là được gọi là tiệm cận đứng của đồ thị của hàm số $y=f(x)$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} y=\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^-} y=\infty$.

Xét hàm số $y=\dfrac{1}{x^2-1}$. Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} y=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x^2-1}=+\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{x^2-1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Hàm số $y=3^{x^2+2}$ có đạo hàm là

A. $y'=\dfrac{3^{x^2+2}}{\ln 3}$. B. $y'=\dfrac{2x\cdot 3^{x^2+2}}{\ln 3}$.

C. $y'=2x\cdot 3^{x^2+2}\cdot\ln 3$. D. $y'=2x\cdot 3^{x^2+2}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\left(3^{x^2+2}\right)'=3^{x^2+2}\ln 3\cdot(x^2+2)'=2x\cdot 3^{x^2+2}\ln 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Một lớp có 38 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ngẫu nhiên hai bạn học sinh trong lớp?

A. 406. **B.** 703. C. 360. D. 38.

Lời giải.

Số cách chọn ngẫu nhiên hai bạn học sinh từ 38 học sinh là $\mathrm{C}_{38}^2=703$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \ln \dfrac{x+1}{x+4}$.

Tính giá trị của biểu thức $P = f'(0) + f'(3) + f'(6) + \cdots + f'(2019)$.

(A) $\dfrac{1}{4}$. (B) $\dfrac{2024}{2023}$. **C** $\dfrac{2022}{2023}$. (D) $\dfrac{2020}{2023}$.

Lời giải.

Với $x \in [0; +\infty)$ ta có $x+1 > 0$ và $x+4 > 0$ nên $f(x) = \ln \dfrac{x+1}{x+4} = \ln(x+1) - \ln(x+4)$.

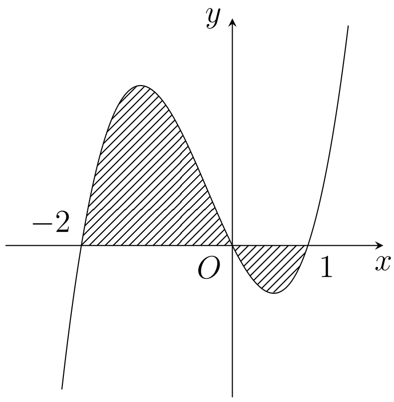
Từ đó $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+4}$. Do đó

$$\begin{aligned} P &= f'(0) + f'(3) + f'(6) + \ldots + f'(2019) \\ &= \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2020} - \frac{1}{2023}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2023} = \frac{2022}{2023}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 6.

Đồ thị trong hình bên là của hàm số $y = f(x)$, S là diện tích hình phẳng (phần tô đậm trong hình). Chọn khẳng định đúng.



(A) $S = \displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(B) $S = \displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(C) $S = \displaystyle\int_{0}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

D $S = \displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Từ đồ thị ta có $f(x) \geq 0, \forall x \in [-2; 0]$ và $f(x) \leq 0, \forall x \in [0; 1]$.

Do đó $S = \displaystyle\int_{-2}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > -3$ là

(A) 6. **B** 7. (C) 8. (D) 9.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 1 < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 9 \end{cases}$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là S $= (1; 9)$, suy ra có 7 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2019; 2020)$ để hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 2019$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

A. 2021. B. 2020. C. 2018. D. 2019.

Lời giải.

Ta có $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m^2 + 6m$.

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - (2m+1)x + m^2 + m = 0$, có $\Delta = (2m+1)^2 - 4\left(m^2+m\right) = 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Suy ra phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = m$; $x_2 = m+1$. Dễ thấy $x_1 < x_2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		m		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$y(m)$	$\searrow$	$y(m+1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; m)$; $(m+1; +\infty)$. Vì thế, hàm số đồng biến trên $(2 : +\infty)$ khi $m + 1 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Suy ra có 2020 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; -3)$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x - 2y + 4z - 5 = 0$. Mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $(Q)\colon 3x - 2y + 4z - 4 = 0$.
B. $(Q)\colon 3x - 2y + 4z + 4 = 0$.
C. $(Q)\colon 3x - 2y + 4z + 5 = 0$.
D. $(Q)\colon 3x + 2y + 4z + 8 = 0$.

Lời giải.

Do mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; -2; 4)$.

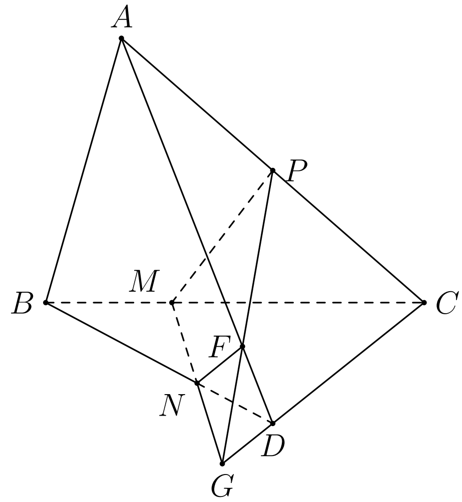
Phương trình mặt phẳng $(Q)\colon 3(x-2) - 2(y+1) + 4(z+3) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + 4z + 4 = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$, trên các cạnh BC,BD,AC lần lượt lấy các điểm M,N,P sao cho $BC = 3BM$, $BD = \dfrac{3}{2}BN, AC = 2AP$. Mặt phẳng (MNP) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích là V_1, V_2, trong đó khối đa diện chứa cạnh CD có thể tích là V_2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{26}{19}$. B. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{26}{13}$. C. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{15}{19}$. D. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{3}{19}$.

Lời giải.



Áp dụng định lí Me-ne-la-uyt ta có:
$\dfrac{MB}{MC}\cdot\dfrac{ND}{NB}\cdot\dfrac{GC}{GD}=1\Rightarrow\dfrac{GC}{GD}=4$
và $\dfrac{GC}{GD}\cdot\dfrac{FD}{FA}\cdot\dfrac{PA}{PC}=1\Rightarrow\dfrac{FD}{FA}=\dfrac{1}{4}$

- $V_{DCPMNF}=V_{CPMF}+V_{CMNF}+V_{CNFD}$
- $\dfrac{V_{CPMF}}{V_{ABCD}}=\dfrac{\frac{1}{3}\mathrm{d}\left(F,(CPM)\right)\cdot S_{CPM}}{\frac{1}{3}\mathrm{d}\left(D,(ABC)\right)\cdot S_{ABC}}=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{15}$
- $\dfrac{V_{CNMF}}{V_{ABCD}}=\dfrac{\frac{1}{3}\mathrm{d}\left(F,(CNM)\right)\cdot S_{CNM}}{\frac{1}{3}\mathrm{d}\left(A,(CBD)\right)\cdot S_{CBD}}=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{45}$
- $\dfrac{V_{CNDF}}{V_{ABCD}}=\dfrac{\frac{1}{3}\mathrm{d}\left(C,(FND)\right)\cdot S_{FND}}{\frac{1}{3}\mathrm{d}\left(C,(ABD)\right)\cdot S_{ABD}}=\dfrac{1}{5}.\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{15}$

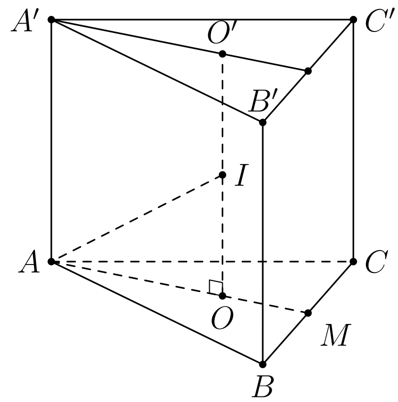
$\Rightarrow\dfrac{V_2}{V_{ABCD}}=\dfrac{4}{15}+\dfrac{4}{45}+\dfrac{1}{15}=\dfrac{19}{45}\Rightarrow\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{45-19}{19}=\dfrac{26}{19}$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a là

A $\dfrac{7\pi a^2}{3}$. **B** $\dfrac{\pi a^3}{8}$. **C** πa^2. **D** $\dfrac{7\pi a^2}{9}$.

Lời giải.



Gọi O, O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp hai tam giác ABC và $A'B'C'$.

Trên OO' lấy trung điểm I. Khi đó, $IA=IB=IC=IA'=IB'=IC'$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

Bán kính mặt cầu là

$$R=IA=\sqrt{OI^2+OA^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

Vậy diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ là $S=4\pi\left(\dfrac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2=\dfrac{7\pi a^2}{3}$.

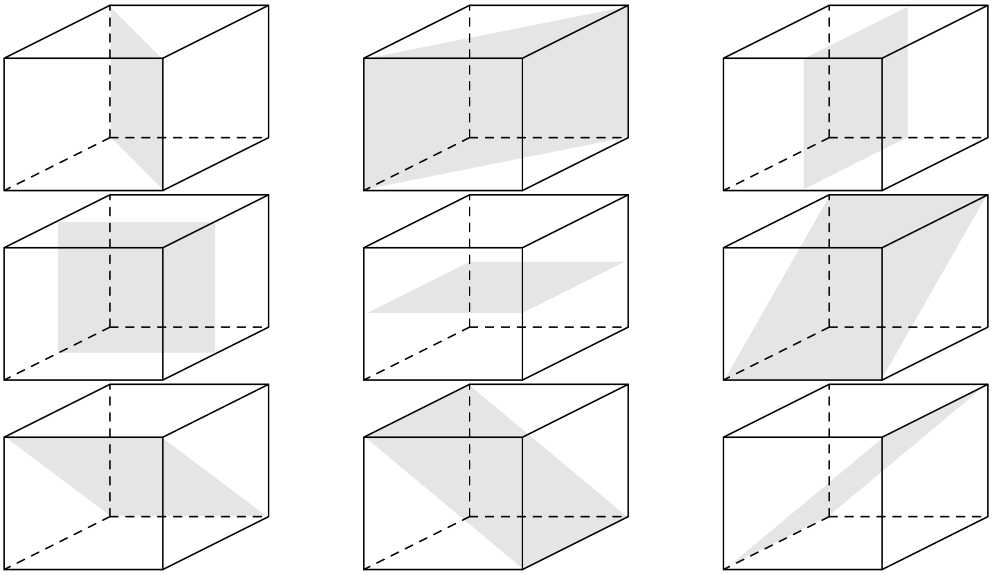
Chọn đáp án A □

Câu 12. Hình lập phương có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A 6. **B** 7. **C** 8. **D** 9.

Lời giải.

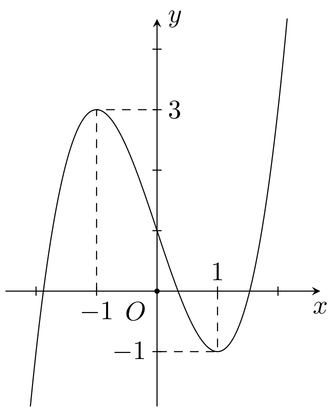
Hình lập phương có 9 mặt phẳng đối xứng.



Chọn đáp án (D) □

Câu 13.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là



A 3. **B** 1. **C** 2. **D** 0.

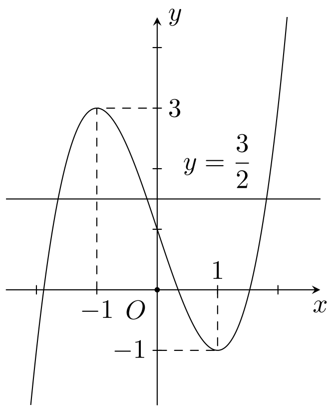
Lời giải.

Ta có $2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{3}{2} \quad (*)$.

Số nghiệm của phương trình $(*)$ bằng số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \dfrac{3}{2}$.

Dựa vào hình vẽ, hai đồ thị cắt nhau tại 3 điểm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.



Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ biết $f(0) = 1$, $f'(x)$ liên tục trên $[0;3]$ và $\displaystyle\int_0^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = 9$. Tính $f(3)$.

A $f(3) = 9$. **B** $f(3) = 10$. **C** $f(3) = 8$. **D** $f(3) = 7$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = 9 \Leftrightarrow f(x)\big|_0^3 = 9 \Leftrightarrow f(3) - f(0) = 9 \Leftrightarrow f(3) = 9 + f(0) = 9 + 1 = 10.$

Vậy $f(3) = 10$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Cho hàm số $y = x^3 - 2(m-1)x^2 + 2\left(m^2 - 2m\right)x + 4m^2$ có đồ thị (C) và đường thẳng $(d)\colon y = 4x + 8$. Đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$. .

A $\max P = 16\sqrt{2} - 8$.
B $\max P = -8$.
C $\max P = -16\sqrt{2} - 8$.
D $\max P = 8$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa (d) và (C) là

$$\begin{aligned} & x^3 - 2(m-1)x^2 + 2\left(m^2 - 2m\right)x + 4m^2 = 4x + 8 \\ \Leftrightarrow\ & x^3 - 2(m-1)x^2 + 2\left(m^2 - 2m - 2\right)x + 4m^2 - 8 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x+2)\left(x^2 - 2mx + 2m^2 - 4\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x^2 - 2mx + 2m^2 - 4 = 0 \quad (*). \end{array}\right. \end{aligned}$$

Như thế đường thẳng (d) và đồ thị (C) luôn có giao điểm với hoành độ giao điểm (ta ký hiệu là x_3) $x_3 = -2$. Do đó, đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác -2. Điều kiện tương đương là

$$\begin{cases} \Delta' = 4 - m^2 > 0 \\ 2m^2 + 4m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq 0 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq 0. \end{cases}$$

Khi đó, theo Vi-et thì $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 2m^2 - 4 \end{cases}$ và

$$P = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) - 8 = 8m^3 - 6m\left(2m^2 - 4\right) - 8 = -4m^3 + 24m - 8.$$

Ta xem P là hàm số biến số m với $m \in (-2; 2) \setminus \{0\}$.

Ta có $P' = -12m^2 + 24$ và $P' = 0 \Leftrightarrow m^2 = 2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên của P như sau

m	-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2
P'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
P	-24	↘	$-16\sqrt{2} - 8$	↗	-8 ‖ -8	↗	$16\sqrt{2} - 8$	↘	8

Từ bảng biến thiên ta có $P \leq 16\sqrt{2} - 8$. Đẳng thức xảy ra khi $m = \sqrt{2}$.

Vậy $\max P = 16\sqrt{2} - 8$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_4(x+y)+\log_4(x-y)\geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2x-y$.

A 4. **B** -4. **C** $2\sqrt{3}$. **D** $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x+y>0 \\ x-y>0 \end{cases}$. Từ đó suy ra $x>0$.

$\log_4(x+y)+\log_4(x-y)\geq 1 \Leftrightarrow \log_4\left(x^2-y^2\right)\geq 1 \Leftrightarrow x^2-y^2\geq 4 \Leftrightarrow x\geq\sqrt{y^2+4}$ (do $x>0$).

$P=2x-y\geq 2\sqrt{y^2+4}-y$ với $y\in\mathbb{R}$.

Xét hàm số $f(y)=2\sqrt{y^2+4}-y$ với $y\in\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$f'(y)=\dfrac{2y}{\sqrt{y^2+4}}-1=\dfrac{2y-\sqrt{y^2+4}}{\sqrt{y^2+4}}$; $f'(y)=0\Leftrightarrow 2y=\sqrt{y^2+4}\Leftrightarrow\begin{cases} y\geq 0 \\ y^2=\dfrac{4}{3} \end{cases}\Leftrightarrow y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Bảng biến thiên

y	$-\infty$		$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(y)$		$-$	0	$+$	
$f(y)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{y\in\mathbb{R}} f(y)=2\sqrt{3}=f\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$

Suy ra $P\geq 2\sqrt{3}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x=\sqrt{y^2+4} \\ y=\dfrac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\dfrac{4}{\sqrt{3}} \\ y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

Vậy $\min P=2\sqrt{3}$ đạt được khi $(x;y)=\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}};\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;-2)$, $B(3;1;1)$ và $C(-2;0;3)$. Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm nào dưới đây ?

A $N(2;1;0)$. **B** $Q(-2;1;0)$. **C** $M(2;-1;0)$. **D** $M(-2;-1;0)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;0;3)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;-1;5)$ và $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(3;-21;-3)$.

Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $B(3;1;1)$, có 1 véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=\dfrac{1}{3}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;-7;-1)$ nên có phương trình là $x-7y-z+5=0$. Vì $2-7\cdot 1-0+5=0$ nên $N(2;1;0)\in(ABC)$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Biết đồ thị của hàm số $y=f(x)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y=\log_a x\quad(0<a\neq 1)$ qua điểm $I(2;2)$. Giá trị của $f\left(4-a^{2018}\right)$ là

A -2020. **B** 2014. **C** -2014. **D** 2020.

Lời giải.

Gọi $M\left(x;\log_a x\right)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\log_a x$ thì điểm đối xứng với M qua I là $M'\left(4-x;4-\log_a x\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Do đó $f\left(4-x\right)=4-\log_a x$. Suy ra: $f\left(4-a^{2018}\right)=4-\log_a a^{2018}=-2014$

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Cho hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y=3x+1$?

(A) 3. **B** 1. (C) 0. (D) 2.

Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$, có $y'=x^2-4x+3$. Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến và đồ thị (C), khi đó hệ số góc của tiếp tuyến là $k=x_0^2-4x_0+3$.

Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y=3x+1$ khi và chỉ khi

$$x_0^2-4x_0+3=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\Rightarrow y_0=1\\ x_0=4\Rightarrow y_0=\dfrac{7}{3}.\end{array}\right.$$

- Với $M(0;1)$ phương trình tiếp tuyến của (C) là $y=3x+1$.
- Với $M\left(4;\dfrac{7}{3}\right)$ phương trình tiếp tuyến của (C) là $y=3x-\dfrac{29}{3}$.

Vậy tiếp tuyến của (C) song song với $y=3x+1$ là $y=3x-\dfrac{29}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $S\colon x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0$. Bán kính R của mặt cầu S bằng

A $R=3$. (B) $R=2$. (C) $R=6$. (D) $R=9$.

Lời giải.

Ta có $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$, nên bán kính mặt cầu S bằng 3.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_n=2-3n$. Công sai d của cấp số cộng là

(A) $d=3$. (B) $d=2$. **C** $d=-3$. (D) $d=-2$.

Lời giải.

Ta có: $u_{n+1}-u_n=2-3(n+1)-(2-3n)=-3,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Vậy cấp số cộng (u_n) có công sai $d=-3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Tính chiều cao của khối lăng trụ tam giác đều biết thể tích bằng $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$, cạnh đáy bằng a.

(A) $3a$. **B** $2a$. (C) a. (D) $6a$.

Lời giải.

Khối lăng trụ tam giác đều có đáy là tam giác đều.

Theo bài ra ta có đáy là tam giác đều cạnh a.

Diện tích đáy là $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
Gọi h là chiều cao của khối lăng trụ.
Ta có: $V = S.h \Rightarrow h = \dfrac{V}{S} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2} : \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Một khối nón có thể tích bằng $9a^3\pi\sqrt{2}$. Tính bán kính R đáy khối nón khi diện tích xung quanh nhỏ nhất.

A $R = 3a$. (B) $R = \dfrac{3a}{\sqrt[6]{2}}$. (C) $R = \sqrt[3]{9}a$. (D) $R = \dfrac{3a}{\sqrt[3]{2}}$.

Lời giải.
Gọi h, l lần lượt là chiều cao và độ dài đường sinh của khối nón.
$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = 9a^3\pi\sqrt{2} \Rightarrow h = \dfrac{27a^3\sqrt{2}}{R^2} \Rightarrow l = \sqrt{R^2 + h^2} = \sqrt{R^2 + 2\cdot\dfrac{729a^6}{R^4}}$.
$S_{\text{xq}} = \pi R l = \pi\sqrt{R^4 + \dfrac{729a^6}{R^2} + \dfrac{729a^6}{R^2}} \geq \pi\sqrt{\sqrt[3]{R^4\cdot\dfrac{729a^6}{R^2}\cdot\dfrac{729a^6}{R^2}}}$.
$\Rightarrow S_{\text{xq}} = 9\pi a^2$. Nên $\min S_{\text{xq}} = 9\pi a^2$ khi $R^4 = \dfrac{729a^6}{R^2} \Leftrightarrow R = 3a$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 1 + \dfrac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Tìm m?

(A) $m = 5$. **B** $m = 4$. (C) $m = 2$. (D) $m = 3$.

Lời giải.
Tập xác định $D = R \setminus \{1\}$.
$y' = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}, y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'						$-$	0	$+$	
y					$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow m = \min\limits_{(1;+\infty)} y = 4$ khi $x = 3$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $AC = a$, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

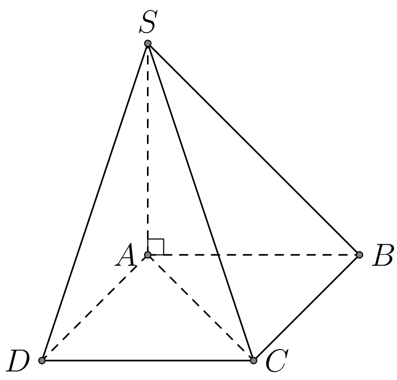
(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Ta có ΔABC là tam giác đều cạnh a.

$\Rightarrow S_{ABCD} = AB.BC\sin 60^\circ = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

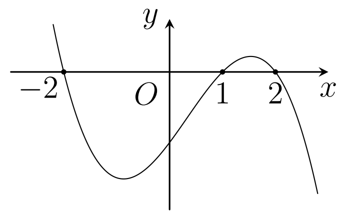
Vậy $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}\cdot SA = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}\cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.



Chọn đáp án D □

Câu 26.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thoả $f(2) = f(-2) = 0$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ có dạng như hình bên. Hàm số $y = [f(x)]^2$ đạt cực đại tại điểm nào?



A 2. B -2. C 1. D 0.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$; $f(2) = f(-2) = 0$. Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$\Rightarrow f(x) < 0; \forall x \neq \pm 2$.

Xét $y = (f(x))^2 \Rightarrow y' = 2f(x)\cdot f'(x)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 2 \\ x = 1; x = \pm 2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$-$		$-$	0	$-$	
$y = (f(x))^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y = [f(x)]^2$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; -3)$, $B(-2; 2; 1)$. Véctơ có $\overrightarrow{AB}$ tọa độ là

A $(-3; 3; 4)$. B $(-1; 1; 2)$. C $(3; -3; 4)$. D $(-3; 1; 4)$.

Lời giải.

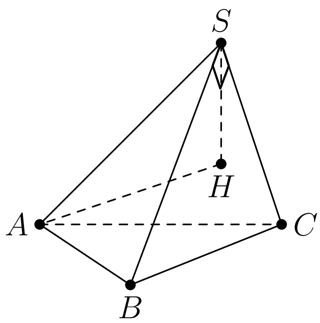
Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2-1; 2+1; 1+3) = (-3; 3; 4)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Cho khối chóp $S.ABC$, mặt bên (SBC) là tam giác vuông cân tại S có $BC = 2a$, cạnh $SA = a\sqrt{2}$ và tạo với mặt phẳng (SBC) một góc $30°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải.



Ta có $\triangle SBC$ vuông cân tại S nên $BC = SC\sqrt{2} \Rightarrow SC = \dfrac{BC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$, $S_{\triangle SBC} = a^2$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC) suy ra $\widehat{ASH} = 30°$.

Ta có $\sin 30° = \dfrac{AH}{SA} \Rightarrow AH = SA \cdot \sin 30° = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Từ đó ta có $V = \dfrac{1}{3}AH \cdot S_{\triangle SBC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-3x} = \dfrac{1}{4}$ là

(A) $S = \varnothing$. **B** $S = \{1; 2\}$. (C) $S = \{0\}$. (D) $S = \{1\}$.

Lời giải.

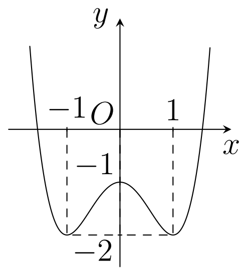
$2^{x^2-3x} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{x^2-3x} = 2^{-2} \Leftrightarrow x^2 - 3x = -2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Giá trị cực đại của hàm số bằng

(A) -2. (B) 0. **C** -1. (D) 1.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta suy ra giá trị cực đại bằng -1.

Chọn đáp án (C) □

Câu 31. Cho hình nón có độ dài đường sinh $l = 4a$, bán kính đáy bằng $R = \sqrt{3}a$. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

(A) $8\sqrt{3}\pi a^2$. (B) $\dfrac{4\sqrt{3}\pi a^2}{3}$. **C** $4\sqrt{3}\pi a^2$. (D) $2\sqrt{3}\pi a^2$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh hình nón là: $s_{xq} = \pi Rl = \pi a\sqrt{3}4a = 4\sqrt{3}\pi a^2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P): $2x - y + 3 = 0$. Một véc tơ pháp tuyến của (P) có tọa độ là

(A) $(2;1;0)$. (B) $(2;-1;3)$. **C** $(2;-1;0)$. (D) $(2;1;3)$.

Lời giải.

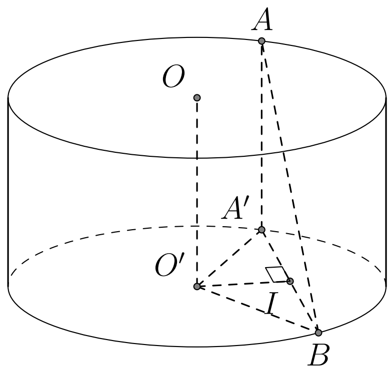
Mặt phẳng (P) có VTPT là $\vec{n}=(2;-1;0)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Cho hình trụ có trục OO', chiều cao bằng a. Trên hai đường tròn đáy (O) và (O') lần lượt lấy hai điểm A và B sao cho khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OO' bằng $\frac{a}{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và OO' bằng 60°. Thể tích của khối trụ đã cho là

(A) $\frac{2\pi a^3}{3}$. (B) $\frac{\pi a^3}{3}$. (C) $2\pi a^3$. **D** πa^3.

Lời giải.



Dựng AA' vuông góc với mặt phẳng đáy.

$AB\subset(ABA')$ nên $d(AB,OO')=d(OO',(ABA'))=d(O',(ABA'))$.

Gọi I là trung điểm BA'. Ta có $O'I\perp BA'$ (vì $\Delta O'BA'$ cân).

Mà $O'I\perp AA'$ nên $O'I\perp(ABA')$

hay $d(O',(ABA'))=O'I=\frac{a}{2}$.

Mặt khác $\widehat{AB,OO'}=\widehat{AB,AA'}=\widehat{A'AB}=60^\circ$.

Xét $\Delta ABA'$ vuông tại A' có $\tan 60^\circ=\frac{A'B}{AA'}\Rightarrow A'B=a\sqrt{3}$ và $BI=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét $\Delta O'BI$ vuông tại I có $O'B=\sqrt{O'I^2+BI^2}=a$.

Vậy thể tích của khối trụ đã cho là

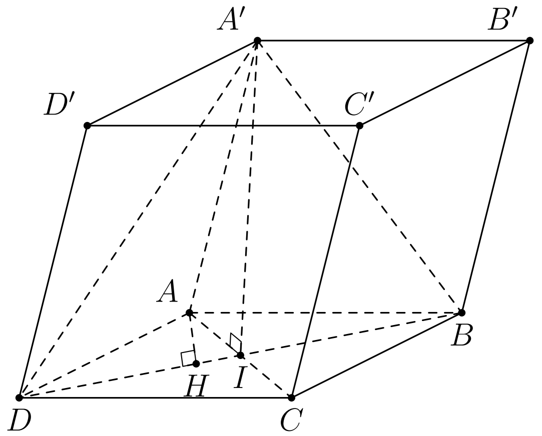
$V=\pi\cdot O'B^2\cdot OO'=\pi\cdot a^2\cdot a=\pi a^3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 34. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD. Khoảng cách từ B' đến mặt phẳng $(A'BD)$ là

(A) $\frac{a}{2}$. (B) $a\sqrt{3}$. (C) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **D** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Gọi I là giao điểm của AC và BD.
Dựng $AH \perp BD$.
Ta có $A'I \perp (ABCD)$ mà $AH \subset (ABCD)$ nên $A'I \perp AH$.
Từ đó ta được $AH \perp (A'BD)$.
Suy ra $d(B', (A'BD)) = d(A, (A'BD)) = AH$.
Xét ΔABC vuông tại A có
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \sqrt{\dfrac{AB^2 \cdot AD^2}{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Vậy $d(B', (A'BD)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm cấp một và cấp hai trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A Hàm số đạt cực đại tại x_0 thì $y'(x_0) = 0$.
B $y'(x_0) = 0$ và $y''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.
C $y'(x_0) = 0$ và $y''(x_0) = 0$ thì x_0 không là điểm cực trị của hàm số.
D $y'(x_0) = 0$ và $y''(x_0) \neq 0$ thì x_0 là điểm cực trị của hàm số.

Lời giải.

- Hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm cấp một và cấp hai trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$, nên hàm số đạt cực đại tại x_0 thì $y'(x_0) = 0$, **A** đúng.
- $y'(x_0) = 0$ và $y''(x_0) = 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số, **B** đúng, theo điều kiện đủ để hàm số có cực trị.
- $y'(x_0) = 0$ và $y''(x_0) = 0$ thì x_0 không là điểm cực trị của hàm số, **C** sai.
  Ví dụ, xét hàm số $f(x) = x^4 - 1$.
  TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
  Ta có $f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
  Ta có $f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $f(x) = x^4 - 1$ có $f'(0) = 0$; $f''(0) = 0$ nhưng vẫn đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = -1$.
+ $y'(x_0) = 0$ và $y''(x_0) \neq 0$ thì x_0 là điểm cực trị của hàm số, **D** đúng.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức Niu tơn của $\left(\dfrac{1}{x^4}-2x^7\right)^n$ biết rằng

$$\mathrm{C}_{2n+1}^{n+1}+\mathrm{C}_{2n+1}^{n+2}+\ldots+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n}=2^{20}-1 \text{ (n nguyên dương.)}$$

A 13440. **B** -13440. **C** 210. **D** -120.

Lời giải.

Xét khai triển

$$(1+x)^{2n+1}=\mathrm{C}_{2n+1}^{0}+\mathrm{C}_{2n+1}^{1}x+\mathrm{C}_{2n+1}^{2}x^2+\ldots+\mathrm{C}_{2n+1}^{n+1}x^{n+1}+\mathrm{C}_{2n+1}^{n+2}x^{n+2}+\ldots+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n}x^{2n}+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1}.$$

Lấy $x=1$ được $2^{2n+1}=\mathrm{C}_{2n+1}^{0}+\mathrm{C}_{2n+1}^{1}+\mathrm{C}_{2n+1}^{2}+\ldots+\mathrm{C}_{2n+1}^{n+1}+\mathrm{C}_{2n+1}^{n+2}+\ldots+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n}+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}$.
Mà $\mathrm{C}_{2n+1}^{0}=\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}=1;\mathrm{C}_{2n+1}^{1}=\mathrm{C}_{2n+1}^{2n};\ldots;\mathrm{C}_{2n+1}^{n}=\mathrm{C}_{2n+1}^{n+1}$.

$$\begin{aligned}
2^{2n+1}&=\mathrm{C}_{2n+1}^{0}+\mathrm{C}_{2n+1}^{1}+\mathrm{C}_{2n+1}^{2}+\ldots+\mathrm{C}_{2n+1}^{n+2}+\mathrm{C}_{2n+1}^{n+2}+\ldots+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n}+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}.\\
2^{2n+1}&=\mathrm{C}_{2n+1}^{0}+\mathrm{C}_{2n+1}^{1}+\mathrm{C}_{2n+1}^{2}+\ldots+\mathrm{C}_{2n+1}^{n+1}+\mathrm{C}_{2n+1}^{n+2}+\ldots+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n}+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}.\\
\Rightarrow 2^{2n+1}&=2\left(\mathrm{C}_{2n+1}^{n+1}+\mathrm{C}_{2n+1}^{n+2}+\ldots+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n}\right)+2.\\
\Rightarrow 2^{2n+1}&=2\cdot\left(2^{20}-1\right)+2\Leftrightarrow 2^{2n+1}=2^{21}\Leftrightarrow n=10.
\end{aligned}$$

Với $n=10$

$$\left(\frac{1}{x^4}-2x^7\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}\mathrm{C}_{10}^{k}\left(\frac{1}{x^4}\right)^{10-k}\left(-2x^7\right)^k=\sum_{k=0}^{10}\mathrm{C}_{10}^{k}(-2)^kx^{11k-40}.$$

Số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức Niu tơn của $\left(\dfrac{1}{x^4}-2x^7\right)^{10}$ có $11k-40=26\Leftrightarrow k=6$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển là $\mathrm{C}_{10}^{6}(-2)^6=13440$.
Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến và có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $2[f(x)]^2-f(x)\cdot f''(x)+[f'(x)]^2=0$ với $\forall x\in[0;2]$. Biết $f(0)=1;\ f(2)=e^6$.

Tích phân $I=\displaystyle\int_{-2}^{0}(2x+1)f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A $1+e$. **B** $1-e^2$. **C** $1-e$. **D** $1-e^{-1}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&2[f(x)]^2-f(x)\cdot f''(x)+[f'(x)]^2=0\Leftrightarrow f(x)\cdot f''(x)-[f'(x)]^2=2[f(x)]^2\\
\Leftrightarrow\ &\frac{f(x)\cdot f''(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}=2\Leftrightarrow\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=2\\
\Leftrightarrow\ &\int\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'dx=\int 2dx\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=2x+\mathrm{C}_1\\
\Leftrightarrow\ &\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int 2x+C_1\Leftrightarrow\ln|f(x)|=x^2+C_1x+C_2
\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \Rightarrow \ln 1 = C_2 \Rightarrow C_2 = 0 \\ f(2) &= e^6 \Rightarrow 6 = 4 + 2C_1 \Rightarrow C_1 = 1 \\ \Rightarrow \quad \ln|f(x)| &= x^2 + x \Rightarrow f(x) = e^{x^2+x} \\ \Rightarrow \quad I &= \int\limits_{-2}^{0} (2x+1)e^{x^2+x}dx = e^{x^2+x}\Big|_{-2}^{0} = 1 - e^2 \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

A $30°$. **B** $60°$. **C** $75°$. **D** $45°$.

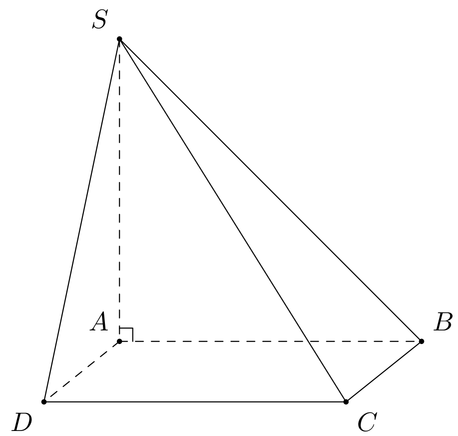
Lời giải.

Có A là hình chiếu S lên mặt phẳng $(ABCD)$.

$\Rightarrow \left(\widehat{SC, (ABCD)}\right) = \widehat{SCA}$.

Có $ABCD$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A có $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SAC} = 30°$.



Chọn đáp án A □

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;-1;3)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;-3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x + y - z - 4 = 0$. Gọi $M(a,b,c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức $T = |3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S = a + b + c$.

A $S = 3$. **B** $S = -1$. **C** $S = 2$. **D** $S = 1$.

Lời giải.

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$.

Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IA} &= (1-x; -1-y; 3-z) \Rightarrow 3\overrightarrow{IA} = (3-3x; -3-3y; 9-3z). \\ \overrightarrow{IB} &= (2-x; 1-y; -z) \Rightarrow 2\overrightarrow{IB} = (4-2x; 2-2y; -2z). \end{aligned}$$

$\overrightarrow{IC} = (-3-x; -1-y; -3-z)$.

Khi đó $3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = (-2x-4; -2y-6; -2z+6) = 0$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x-4=0 \\ -2y-6=0 \\ -2z+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \\ z=3 \end{cases}$. Vậy $I(-2;-3;3)$.

Ta có $T = \left|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = \left|3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})\right| = 2\left|\overrightarrow{MI}\right|$.

Suy ra $T_{\min} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MI}\right|_{\min}$ khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

Đường thẳng MI đi qua $I(-2;-3;3)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình tham số là $MI : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -3 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$. Lấy $M(-2+t;-3+t;3-t) \in MI$.

Mặt khác $M \in (P) \Rightarrow (-2+t) + (-3+t) - (3-t) - 4 = 0 \Rightarrow t = 4$.

Suy ra $M(2;1;-1)$. Vậy $a + b + c = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Tổng các nghiệm của phương trình $\sin\left(\frac{5\pi}{4} - 6x\right) + 15\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 16$ trên đoạn $[-2019; 2019]$ bằng

A. $\frac{1282\pi}{8}$. B. $\frac{1285\pi}{8}$. C. $\frac{1283\pi}{8}$. D. $\frac{1284\pi}{8}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin\left(\frac{5\pi}{4} - 6x\right) + 15\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 16 \\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(2\pi - \frac{3\pi}{4} - 6x\right) + 15\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 16 \\
\Leftrightarrow\ & -\sin\left(6x + \frac{3\pi}{4}\right) + 15\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 16 \\
\Leftrightarrow\ & 4\sin^3\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 12\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 16 = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\
\Leftrightarrow\ & 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Ta có $-2019 \le \frac{\pi}{8} + k\pi \le 2019 \Leftrightarrow -2019 - \frac{\pi}{8} \le k\pi \le 2019 - \frac{\pi}{8}, (\Leftrightarrow -642,8 \le k \le 642,5)$.

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = \{-642; -642; \ldots; 641; 642\}$.

Xét tổng các nghiệm là

$$\begin{aligned}
T &= \left(\frac{\pi}{8} - 642\pi\right) + \ldots + \left(\frac{\pi}{8} - \pi\right) + \frac{\pi}{8} + \left(\frac{\pi}{8} + \pi\right) + \ldots + \left(\frac{\pi}{8} + 642\pi\right) \\
T &= 642\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\right) + \frac{\pi}{8} = \frac{1285\pi}{8}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 41. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $f(x) = (x+1)^{\pi}$.

A. $\mathscr{D} = R$. B. $\mathscr{D} = [-1; +\infty)$. C. $\mathscr{D} = (-1; +\infty)$. D. $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.

Lời giải.

Vì π không nguyên, nên điều kiện xác định $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (-1; +\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + \cos x$. Tìm khẳng định đúng.

A. $F(x) = \mathrm{e}^{-x} + \sin x + 2019$. B. $F(x) = \mathrm{e}^{-x} + \cos x + 2019$.

C $F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \sin x + 2019$. **D** $F(x) = -\mathrm{e}^{-x} - \cos x + 2019$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\int (\mathrm{e}^{-x} + \cos x)\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x} + \sin x + C$, với C là hằng số

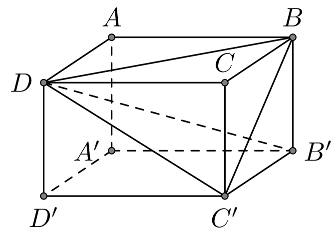
Cho $C = 2019$ ta có $F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \sin x + 2019$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $AA' = 2a$. Tính thể tích khối tứ diện $BDB'C'$.

A $\dfrac{a^3}{6}$. **B** $\dfrac{a^3}{4}$. **C** $\dfrac{a^3}{2}$. **D** $\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải.



Ta có $V_{BDB'C'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_{ABD.A'B'D'} - V_{D.B'C'D'} - V_{C'.BCD}$.

Có $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2a \cdot a^2 = 2a^3$, $V_{ABD.A'B'D'} = \dfrac{1}{2}V_{ABCD.A'B'C'D'} = a^3$.

Hai khối chóp $D.B'C'D'$ và $C'.BCD$ có chung chiều cao và đáy có diện tích bằng nửa hình hộp chữ nhật $\Rightarrow V_{D.B'C'D'} = V_{C'.BCD} = \dfrac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \dfrac{a^3}{3}$.

Vậy $V_{BDB'C'} = 2\mathrm{a}^3 - a^3 - \dfrac{a^3}{3} - \dfrac{a^3}{3} = \dfrac{a^3}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Biết rằng tập hợp tất các các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - x + 2(1-x)\sqrt{x-m} - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt là $[a; b)$. Tính $T = a + b$.

A 0. **B** $\dfrac{1}{4}$. **C** -2. **D** $-\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Đặt $\sqrt{x-m} = t$, $t \geq 0$

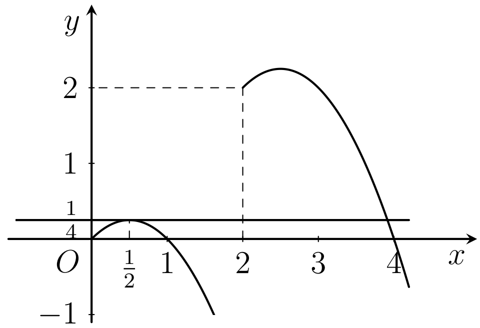
Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - x + 2(1-x)t - m = 0 \\ x - m = t^2. \end{cases}$

Trừ từng vế ta có $x^2 - 2x + 2(1-x)t = -t^2 \Leftrightarrow x^2 - 2(1+t)x + t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = t \\ x = 2 + t. \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{x-m} \\ x = 2 + \sqrt{x-m} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ m = -x^2 + x \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 2 \\ m = -x^2 + 5x - 4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Đặt $f(x) = -x^2 + x,\ x \geq 0$ và $g(x) = -x^2 + 5x - 4,\ x \geq 2$

Ta có đồ thị các hàm số



Từ đồ thị hàm số, phương trình đã cho có 3 nghiệm khi $m \in \left[0; \dfrac{1}{4}\right)$.

Suy ra $a = 0, b = \dfrac{1}{4} \Rightarrow T = a + b = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Nếu $f(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-1}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = \dfrac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x-1}}$ trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ thì $a + b + c$ có giá trị bằng

A 3. **B** 0. **C** 2. **D** 4.

Lời giải.

Ta có: $g(x) = f'(x) = (2ax + b)\sqrt{2x-1} + \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}(ax^2 + bx + c) = \dfrac{(2ax+b)(2x-1) + (ax^2 + bx + c)}{\sqrt{2x-1}}$ $= \dfrac{5ax^2 + (3b - 2a)x + c - b}{\sqrt{2x-1}}$.

Theo bài ra: $g(x) = \dfrac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x-1}}$ nên

$$\frac{5ax^2 + (3b-2a)x + c - b}{\sqrt{2x-1}} = \frac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x-1}} \Rightarrow \begin{cases} 5a = 10 \\ 3b - 2a = -7 \\ c - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 1. \end{cases}$$

Vậy $a + b + c = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số liên tục trên $[1;3]$ và thỏa mãn $\displaystyle\int_1^3 [f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x = 10$; $\displaystyle\int_1^3 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 6$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_1^3 [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A $I = 6$. **B** $I = 7$. **C** $I = 8$. **D** $I = 9$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \displaystyle\int_1^3 [f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x = 10 \\ \displaystyle\int_1^3 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 10 \\ 2\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4 \\ \displaystyle\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 2. \end{cases}$

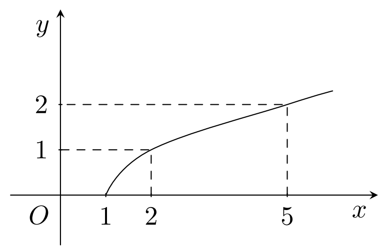
Vậy $I = \int\limits_1^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 4+2=6.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Một bình cắm hoa dạng khối tròn xoay, biết đáy bình và miệng bình có đường kính lần lượt là 2 dm và 4 dm. Mặt xung quanh của bình là một phần của mặt tròn xoay có đường sinh là đồ thị hàm số $y=\sqrt{x-1}$. Tính thể tích bình cắm hoa đó.

(A) 8π dm^2. (B) $\dfrac{15\pi}{2}$ dm^2. (C) $\dfrac{14\pi}{3}$ dm^3. **D** $\dfrac{15\pi}{2}$ dm^3.

Lời giải.



Vì đáy bình và miệng bình có đường kính lần lượt là 2 dm và 4 dm nên đáy và miệng có bán kính đáy lần lượt là 1 dm và 2 dm.

Ta có $\sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow x=2$ và $\sqrt{x-1}=2 \Leftrightarrow x=5$.

Vậy thể tích bình hoa là $S=\pi\int\limits_2^5 (\sqrt{x-1})^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{15\pi}{2}$ dm^3.

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;-1;3)$, $B(0;1;-5)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A $(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=21$. (B) $(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=17$.

(C) $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=27$. (D) $(x+2)^2+y^2+(z-1)^2=21$.

Lời giải.

Vì mặt cầu (S) có đường kính AB nên mặt cầu có tâm là trung điểm $I(2;0;-1)$ của AB và bán kính $R=\dfrac{AB}{2}=\sqrt{21}$.

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=21$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Đặt $\log_2 3=a$; $\log_3 5=b$. Khi đó $\log_6 15$ bằng

A $\dfrac{a(b+1)}{a+1}$. (B) ab. (C) $\dfrac{a+b}{a+1}$. (D) $\dfrac{a^2+b}{a(a+1)}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \log_6 15 = \frac{\log_2 15}{\log_2 6} = \frac{\log_2(5\cdot 3)}{\log_2(2\cdot 3)} = \frac{\log_2 5+\log_2 3}{1+\log_2 3} = \frac{\log_2 3\cdot\log_3 5+\log_2 3+\log_2 3}{1+\log_2 3}$$
$$= \frac{ab+a}{a+1} = \frac{a(b+1)}{a+1}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Tính thể tích V của khối trụ có bán kính đáy bằng 6 và chiều cao bằng 3.

A $V = 216\pi$. **B** $V = 108\pi$. **C** $V = 72\pi$. **D** $V = 36\pi$.

Lời giải.

Áp dụng công thức thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h = 6^2 \cdot 3\pi = 108\pi$.

Chọn đáp án B □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. D	3. C	4. B	5. C	6. D	7. B	8. B	9. B	10. A
11. A	12. D	13. A	14. B	15. A	16. C	17. A	18. C	19. B	20. A
21. C	22. B	23. A	24. B	25. D	26. C	27. A	28. D	29. B	30. C
31. C	32. C	33. D	34. D	35. C	36. A	37. B	38. A	39. C	40. B
41. C	42. C	43. D	44. B	45. C	46. A	47. D	48. A	49. A	50. B

35 ĐỀ THI THỬ THPT NGHĨA HƯNG B, NAM ĐỊNH – LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào vô nghiệm?

A. $\tan x = 99$.

B. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

C. $\cot 2018x = 2017$.

D. $\sin 2x = -\frac{3}{4}$.

Lời giải.

Vì $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \leq 1$ và $\frac{2\pi}{3} > 1$ nên phương trình $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ vô nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ và đường thẳng $y = -2x + 1$ là

A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^3 + x + 2 = -2x + 1 \Leftrightarrow x^3 + 3x + 1 = 0$.

Xét $f(x) = x^3 + 3x + 1$, ta có $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$. Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Hàm số nào sau đây không có cực trị?

A. $y = x^3 - 1$. B. $y = x^3 + 3x^2 + 1$. C. $y = x^3 - x$. D. $y = x^4 + 3x^2 + 2$.

Lời giải.

Ta xét

a) $y = x^3 - 1$, có $y' = 3x^2 \geq 0$. Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↗	$+\infty$

Vậy $y = x^3 - 1$ không có cực trị.

b) $y = x^3 + 3x^2 + 1$, có $y' = 3x^2 + 6x$. Xét $y' = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -2$. Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Vậy $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có 2 cực trị.

c) $y = x^3 - x$, có $y' = 3x^2 - 1$. Xét $y' = 0 \Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	$-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$	↗	$+\infty$

Vậy $y = x^3 - x$ có 2 cực trị.

d) $y = x^4 + 3x^2 + 2$, có $y' = 4x^3 + 6x$. Xét $y' = 0 \Rightarrow x = 0$. Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Vậy $y = x^4 + 3x^2 + 2$ có 1 cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f''(x_0) > 0$ hoặc $f''(x_0) < 0$.

B. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì hàm số không có đạo hàm tại x_0 hoặc $f'(x_0) = 0$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

D. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại x_0.

Lời giải.

Trong các khẳng định trên thì khẳng định "Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì hàm số không có đạo hàm tại x_0 hoặc $f'(x_0) = 0$".

Chọn đáp án B □

Câu 5. Trong giỏ có 5 đôi tất khác nhau, các chiếc tất cùng đôi thì cùng màu. Lấy ngẫu nhiên ra 2 chiếc, tính xác suất để 2 chiếc đó cùng màu.

A. $\dfrac{1}{24}$. B. $\dfrac{1}{18}$. C. $\dfrac{1}{9}$. D. $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Xác xuất để chọn được hai chiếc tất cùng màu là

$$\frac{C_5^1}{C_{10}^2} = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{\sin 2x - 1}{\sin 2x + m}$ đồng biến trên $\left(-\dfrac{\pi}{12}; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

(A) $m \geq -1$. **B** $m \geq \dfrac{1}{2}$. **(C)** $m > -1$. **(D)** $m > 1$.

Lời giải.

Vì $-\dfrac{\pi}{12} < x < \dfrac{\pi}{4}$ nên $-\dfrac{\pi}{6} < 2x < \dfrac{\pi}{2}$. Đặt $t = \sin 2x \Rightarrow -\dfrac{1}{2} < t < 1$. Khi đó ta có $y = \dfrac{t-1}{t+m}$.

Điều kiện $t \neq -m$. Do $-\dfrac{1}{2} < t < 1$ nên $\left[\begin{array}{l} -m \leq -\dfrac{1}{2} \\ -m \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq \dfrac{1}{2} \\ m \leq -1. \end{array}\right.$

Ta có $y'_x = \dfrac{m+1}{(t+m)^2} \cdot t'_x$. Mà $t'_x = 2\cos 2x > 0$ với mọi $x \in \left(-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên để hàm số $y = \dfrac{t-1}{t+m}$ đồng biến trên $\left(-\dfrac{1}{2}; 1\right)$ thì điều kiện cần và đủ là

$$\begin{cases} \dfrac{m+1}{(t+m)^2} > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m \geq \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \dfrac{1}{2}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) và $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) (C) không có tiệm cận ngang.

(B) (C) có tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 2$ và $x = -2$.

(C) (C) có đúng một tiệm cận ngang.

D (C) có tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 2$ và $y = -2$.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$ nên (C) có tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 2$ và $y = -2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$ có thể tích V là

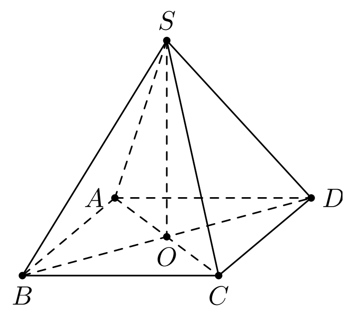
A $V = \dfrac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. **(B)** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **(C)** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **(D)** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = 4a^2$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, khi đó $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $AO = \dfrac{AC}{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = a\sqrt{2}$.

Do vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{4a^3\sqrt{2}}{3}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Khối đa diện đều loại $\{3;4\}$ có số cạnh là

(A) 10. (B) 12. (C) 14. (D) 8.

Lời giải.

Khối đa diện đều loại $\{3;4\}$ có số cạnh là 12.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{-3x^2+2x+1}}{x}$ là

(A) 3. (B) 1. (C) 0. (D) 2.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = \left[-\dfrac{1}{3};1\right] \setminus \{0\}$, do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

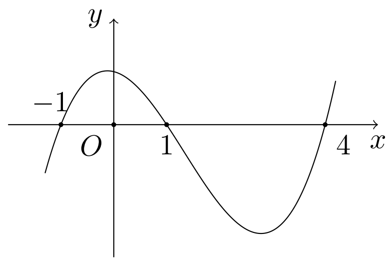
Lại có $\lim\limits_{x\to 0^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 0^-} y = -\infty$ nên $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11.

Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

(A) $(4;7)$. (B) $(2;3)$. (C) $(-1;2)$. (D) $(-\infty;-1)$.



Lời giải.

- Với $x>3$, ta có $g(x) = f(x-3) \Rightarrow g'(x) = f'(x-3)$.
  Hàm số $g(x)$ đồng biến khi và chỉ khi
  $$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x-3) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x-3 < 1 \\ x-3 > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < x < 4 \\ x > 7. \end{array}\right.$$
  Vì $x>3$ nên $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;4)$ hoặc $(7;+\infty)$.
- Với $x<3$, ta có $g(x) = f(3-x) \Rightarrow g'(x) = -f'(3-x)$.
  Hàm số $g(x)$ đồng biến khi và chỉ khi
  $$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(3-x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-x < -1 \\ 1 < 3-x < 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4 \\ -1 < x < 2. \end{array}\right.$$
  Vì $x<3$ nên $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3+3x+1$ trên đoạn $[1;3]$ là

(A) $\min\limits_{[1;3]} f(x) = 3$. (B) $\min\limits_{[1;3]} f(x) = 6$. (C) $\min\limits_{[1;3]} f(x) = 37$. (D) $\min\limits_{[1;3]} f(x) = 5$.

Lời giải.

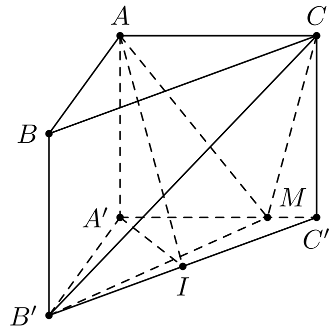
Ta có $f'(x) = 3x^2+3 > 0$ với mọi x. Lại có $f(1)=5$, $f(3)=37$ nên $\min\limits_{[1;3]} f(x) = 5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC cân tại A với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, mặt bên $(AB'C')$ tạo với đáy (ABC) một góc 60°. Gọi M là điểm thuộc cạnh $A'C'$ sao cho $A'M = 3MC'$. Tính thể tích V của khối chóp $CMBC'$.

(A) $V = \dfrac{3a^3}{8}$. (B) $V = \dfrac{a^3}{24}$. (C) $V = \dfrac{a^3}{8}$. (D) $V = \dfrac{a^3}{32}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của $B'C' \Rightarrow A'I \perp B'C' \Rightarrow \widehat{IA'B'} = 60^\circ$.

Xét tam giác $A'IB'$ vuông tại I có $A'I = A'B'\cos 60^\circ = \dfrac{a}{2}$.

Ta có $B'C' \perp A'I$ và $B'C' \perp AA'$ nên góc giữa $(AB'C')$ và (ABC) là $\widehat{AIA'} = 60^\circ$.

Xét tam giác $A'IA$ vuông tại A' có $AA' = A'I \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mà $S_{\triangle MCC'} = \dfrac{1}{4}S_{\triangle A'CC'}$ nên

$$\begin{aligned} V_{CMBC'} &= \frac{1}{4}V_{BA'CC'} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} \\ &= \frac{1}{12}\cdot AA'\cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\sin 120^\circ\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{32}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 14.

Bảng biến thiên ở hình vẽ bên là của hàm số nào trong các hàm số sau?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 1$

(A) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. (B) $y = \dfrac{x+2}{x-1}$.

(C) $y = \dfrac{x+1}{1-x}$. (D) $y = \dfrac{2x+1}{2x+3}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận ngang $y = 1$ và nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

Xét $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ có

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = 1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 1$ nên $y = 1$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to1^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^-} y = -\infty$ nên $x = 1$ là tiệm cận đứng.

Lại có $y' = -\dfrac{2}{(x-1)^2} < 0$ nên $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định, do đó bảng biến thiên trên là của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x^3-3x^2-m}$ có đúng một tiệm cận đứng.

(A) $\left[\begin{array}{l} m \ge 0 \\ m \le -4 \end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m \le -4 \end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -4 \end{array}\right.$. (D) $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Xét phương trình $x^3 - 3x^2 - m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = m$. (*)

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$, có $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Do đó $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = 2$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	-4	0		-4		$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x^3 - 3x^2 - m}$ có đúng một tiệm cận đứng khi thỏa mãn một trong các trường hợp sau

TH1. Phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x \neq -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -4 \\ m > 0. \end{array}\right.$

TH2. Phương trình (*) có hai nghiệm, trong đó một nghiệm $x = -1$ và một nghiệm $x \neq -1$ $\Leftrightarrow m = -4$.

Kết luận với $\left[\begin{array}{l} m \leq -4 \\ m > 0 \end{array}\right.$ thì đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận đứng.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. Hàm số không có giá trị lớn nhất trên đoạn $[a; b]$.

B. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a; b]$.

C. Hàm số luôn có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a; b]$.

D. Hàm số luôn có cực đại và cực tiểu trên đoạn $[a; b]$.

Lời giải.

Theo định lý về tính liên tục trên một đoạn thì hàm số luôn có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a; b]$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + x + m|$ trên đoạn $[2; 4]$ và m_0 là giá trị của tham số m để M đạt giá trị nhỏ nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $1 < m_0 < 5$. B. $m_0 < -8$. C. $-4 < m_0 < 0$. D. $-7 < m_0 < -5$.

Lời giải.

Xét hàm $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + m$ trên đoạn $[2; 4]$, ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1 > 0$ với mọi $x \in [2; 4]$. Suy ra $f(x)$ luôn đồng biến trên đoạn $[2; 4]$, do vậy

$$\min_{[2;4]} f(x) = f(2) = m - 2 \text{ và } \max_{[2;4]} f(x) = f(4) = m + 20 \Rightarrow M = \max_{[2;4]} |f(x)| = \max\{|m-2|, |m+20|\}.$$

Ta có

$$2M \geq |m - 2| + |m + 20| \geq |m - 2 - m - 20| = 22 \Rightarrow M \geq 11.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} |m - 2| = |m + 20| \\ (m - 2)(m + 20) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -9$.

Vậy $m_0 = -9$.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Đồ thị hàm số nào sau đây **không** có tiệm cận đứng?

(A) $y = -\dfrac{1}{x}$. (B) $y = \dfrac{1}{x^2+2x+1}$. (C) $y = \dfrac{3x-1}{x^2-1}$. **D** $y = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x+2}$.

Lời giải.

Ta xét

a) $y = -\dfrac{1}{x}$ có $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-1}{x} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-1}{x} = -\infty$ nên $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

b) $y = \dfrac{1}{x^2+2x+1}$ có $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{1}{x^2+2x+1} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{1}{x^2+2x+1} = +\infty$ nên $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

c) $y = \dfrac{3x-1}{x^2-1}$ có $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{3x-1}{x^2-1} = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{3x-1}{x^2-1} = +\infty$ nên $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

d) $y = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x+2}$ có tập xác định $\mathscr{D} = [3; +\infty)$. Ta thấy trên tập xác định thì hàm số luôn liên tục và $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{x-3}}{x+2} = 0$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và cực tiểu tại $x = -2$.

B Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và cực tiểu tại $x = 2$.

(C) Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và cực tiểu tại $x = 0$.

(D) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ và cực tiểu tại $x = 0$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$. Xét $y' = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = 2$. Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+m}{x^2+x+1}$ có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ nhỏ hơn hoặc bằng 1.

(A) $m \geq 1$. (B) $m \geq -1$. (C) $m \leq -1$. **D** $m \leq 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathbb{R}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to -\infty} y = \lim\limits_{x\to +\infty} y = 0$.

$y' = \dfrac{-x^2 - 2mx + 1 - m}{(x^2+x+1)^2}$. Xét $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2mx + m - 1 = 0$. (1)

Ta có $\Delta' = m^2 - m + 1 > 0$ với mọi m nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$. Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	0

Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x_2 = -m + \sqrt{m^2 - m + 1}$. Khi đó

$$\frac{1}{-2m + 2\sqrt{m^2 - m + 1} + 1} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - 2m + 2\sqrt{m^2 - m + 1} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{m^2 - m + 1} \geq m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ \begin{cases} m \geq 0 \\ m^2 - m + 1 \end{cases} \geq m^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \leq 1.$$

Chọn đáp án D □

Câu 21. Hàm số nào trong các hàm số sau đây nghịch biến trên tập $\mathbb{R}$?

A $y = -x^3 + x^2 - 10x + 1$.

B $y = x^4 + 2x^2 - 5$.

C $y = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

D $y = \cot 2x$.

Lời giải.

Ta xét $y = -x^3 + x^2 - 10x + 1$ có $y' = -3x^2 + 2x - 10 < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy $y = -x^3 + x^2 - 10x + 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án A □

Câu 22.

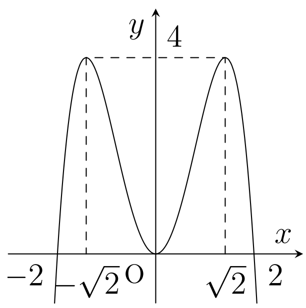
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 2]$ là

A $\max\limits_{[0;2]} f(x) = \sqrt{2}$.

B $\max\limits_{[0;2]} f(x) = 2$.

C $\max\limits_{[0;2]} f(x) = 0$.

D $\max\limits_{[0;2]} f(x) = 4$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy $\max\limits_{[0;2]} f(x) = f(\sqrt{2}) = 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Có tất cả bao nhiêu khối đa diện đều?

(A) 7. (B) 4. **C** 5. (D) 6.

Lời giải.

Có 5 khối đa diện đều là khối tứ diện đều, khối lập phương, khối bát diện đều, khối mười hai mặt đều và khối hai mươi mặt đều.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-1; 5)$. (B) $(-\infty; 5)$.

(C) $(-\infty; -1)$. (D) $(-1; +\infty)$.

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	a	$\searrow$	b	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên miền $(-1; 5)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N là các điểm thuộc cạnh SA, SB sao cho $MA = 2SM$, $SN = 2NB$. Mặt phẳng (α) đi qua MN và song song với SC. Kí hiệu $(\mathscr{H}_1)$ và $(\mathscr{H}_2)$ là các khối đa diện có được khi chia khối chóp $S.ABC$ bởi mặt phẳng (α), trong đó $(\mathscr{H}_1)$ chứa điểm S và $(\mathscr{H}_2)$ chứa điểm A. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của $(\mathscr{H}_1)$, $(\mathscr{H}_2)$. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

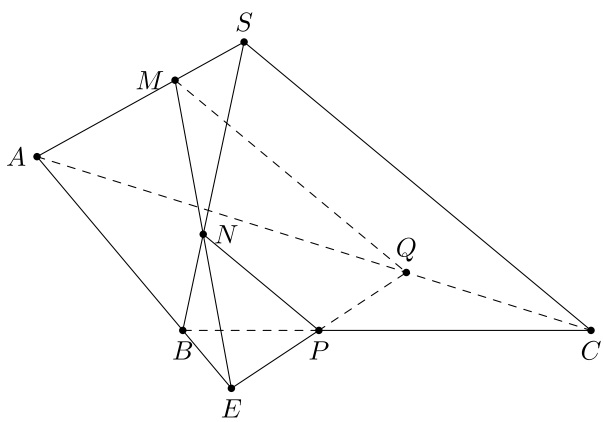
(A) $\dfrac{4}{3}$. (B) $\dfrac{5}{4}$. (C) $\dfrac{3}{4}$. **D** $\dfrac{4}{5}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) qua MN và song song với SC, cắt BC và AC lần lượt tại P, Q. Gọi E là giao điểm của MN và $AB \Rightarrow PQ$ đi qua E.

Ta có $NP \parallel SC$ nên $\dfrac{BP}{BC} = \dfrac{BN}{BS} = \dfrac{1}{3}$. Áp dụng Mê-nê-la-uýt cho tam giác SAB ta có

$$\frac{MS}{MA}\cdot\frac{EA}{EB}\cdot\frac{NB}{NS} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{EA}{EB}\cdot\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{EA}{EB} = 4.$$



Áp dụng Mê-nê-la-uýt cho tam giác ABC ta có

$$\frac{QC}{QA}\cdot\frac{EA}{EB}\cdot\frac{PB}{PC} = 1 \Rightarrow \frac{QC}{QA}\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{QC}{QA} = \frac{1}{3}.$$

Khi đó

$$\frac{V_{M.QAE}}{V_{S.ABC}} = \frac{AM}{SA} \cdot \frac{S_{\triangle QAE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{AQ}{CA} \cdot \frac{EA}{AB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{27} \Rightarrow V_{M.QAE} = \frac{16}{27} V_{S.ABC};$$
$$\frac{V_{N.PBE}}{V_{S.ABC}} = \frac{BN}{BS} \cdot \frac{S_{\triangle PBE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{BE}{BA} \cdot \frac{BP}{BC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27} \Rightarrow V_{N.PBE} = \frac{1}{27} V_{S.ABC};$$
$$V_{\mathscr{H}_2} = V_{M.AEQ} - V_{N.BEP} = \left(\frac{16}{27} - \frac{1}{27}\right) V_{S.ABC} = \frac{15}{27} V_{S.ABC};$$
$$V_{\mathscr{H}_1} = V_{S.ABC} - V_{\mathscr{H}_2} = \frac{12}{27} V_{S.ABC}.$$

Vậy $\dfrac{V_{\mathscr{H}_1}}{V_{\mathscr{H}_2}} = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A Hàm số không có cực trị. **B** Hàm số chỉ có đúng ba điểm cực trị.

C Hàm số chỉ có đúng hai điểm cực trị. **D** Hàm số chỉ có đúng một điểm cực trị.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$. Xét $y' = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = \pm 1$. Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số có ba cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

A 1. **B** -1. **C** 3. **D** -3.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m = 0$. (1)

Để hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Theo Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = \dfrac{m}{3}. \end{cases}$

Mà $x_1^2 + x_2^2 = 6 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 6 \Leftrightarrow 4 - 2 \cdot \dfrac{m}{3} = 6 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa mãn điều kiện $m < 3$).

Vậy $m = -3$.

Chọn đáp án D □

Câu 28. Hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 3x}$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A $\left(-\infty; \dfrac{3}{2}\right)$. **B** $\left(0; \dfrac{3}{2}\right)$. **C** $\left(\dfrac{3}{2}; 3\right)$. **D** $\left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [0;3]$.

Ta có $y' = \dfrac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x}}$. Xét $y' = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$. Bảng biến thiên

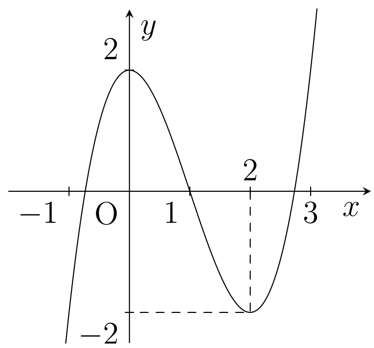
x	0		$\frac{3}{2}$		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	0

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



A $y = x^3 - 3x^2 + 2$. (B) $y = x^3 + 3x^2 + 1$.
(C) $y = x^4 - 3x^2 + 2$. (D) $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.

Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta thấy đây là đồ thị của hàm bậc 3 với hệ số $a > 0$. Ta xét $y = x^3 - 3x^2 + 2$, có $y' = 6x^2 - 6x$. Xét $y' = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = 2$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

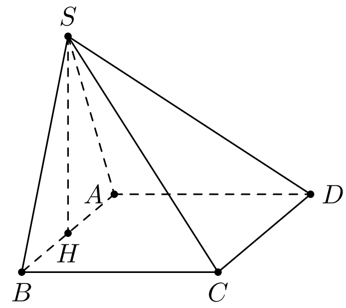
Vậy đây là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, đường chéo $AC = 2\sqrt{2}a$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

(A) a^3. (B) $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **D** $\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

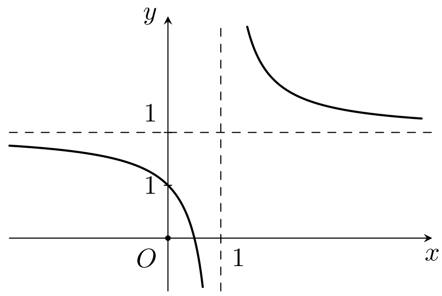
Lời giải.



Hạ đường cao SH của tam giác SAB.
Vì $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.
Xét hình vuông $ABCD$ có $AC = 2\sqrt{2}a \Rightarrow AB = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = 2a$,
suy ra $S_{ABCD} = 4a^2$.
Trong tam giác đều SAB có $SH = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = a\sqrt{3}$.
Do đó $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot 4a^2 = \dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 31.
Cho hàm số $y = \dfrac{ax-1}{bx+c}$ có đồ thị như hình bên. Tính giá trị biểu thức $T = a + 2b + 3c$.



A $T = 1$. **B** $T = 2$. **C** $T = 3$. **D** $T = 4$.

Lời giải.
Từ đồ thị ta có tiệm cận đứng $x = - = \dfrac{c}{b} = 1$, tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{b} = 2$ và đồ thị đi qua điểm $(0, 1)$ tương ứng với $-\dfrac{1}{c} = 1$.
Từ đó ta tính được $c = -1 \Rightarrow b = 1$ và $a = 2$.
Vì thế $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ và $a + 2b + 3c = 2 + 2 - 3 = 1$.
Chọn đáp án A □

Câu 32. Số nghiệm của phương trình $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ trên đoạn $[0; 2\pi]$ là

A 3. **B** 1. **C** 4. **D** 2.

Lời giải.
Ta có

$$2\sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $x \in [0; 2\pi]$ nên phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm $x = \dfrac{\pi}{3}$ và $x = \dfrac{2\pi}{3}$.
Chọn đáp án D □

Câu 33. Cho hàm số $f(x) = \cos 2x - \cos x + 1$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là

A $\min f(x) = -\dfrac{1}{8}$. **B** $\min f(x) = -\dfrac{1}{4}$. **C** $\min f(x) = \dfrac{1}{8}$. **D** $\min f(x) = \dfrac{1}{4}$.

Lời giải.
Ta có $f(x) = 2\cos^2 x - \cos x = 2\left(\cos x - \dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{1}{16}\right) - \dfrac{1}{8} = 2\left(\cos x - \dfrac{1}{4}\right)^2 - \dfrac{1}{8} \geq -\dfrac{1}{8}$.
Mặt khác, $\cos x = \dfrac{1}{4}$ luôn có nghiệm thực x nên $\min f(x) = -\dfrac{1}{8}$.
Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-2)^2(x-3)^3$. Hỏi hàm số $f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A 2. B 3. C 1. D 5.

Lời giải.

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)^2(x-3)^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$. Lập bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$		$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	

Vậy hàm số $f(x)$ có đúng 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Hàm số nào sau đây đạt cực đại tại $x = 1$?

A $y = 2\sqrt{x} - x$. B $y = x^5 - 5x^2 + 5x - 13$.

C $y = x^4 - 4x + 3$. D $y = x + \dfrac{1}{x}$.

Lời giải.

Hàm số $y = 2\sqrt{x} - x$ có tập xác định $\mathscr{D} = [0; +\infty)$, liên tục và có đạo hàm trên $(0; +\infty)$.

Ta có $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ và $y'' = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow y''(1) < 0$. Do đó $x_{\text{CĐ}} = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Phương trình $\sin x - 3\cos x = 0$ có nghiệm dạng $x = \operatorname{arccot} m + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ thì giá trị m là bao nhiêu?

A $m = -3$. B $m = \dfrac{1}{3}$. C $m = 3$. D $m = 5$.

Lời giải.

Với $\sin x = 0$ thay vào phương trình suy ra $\cos x = 0$, loại vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$.

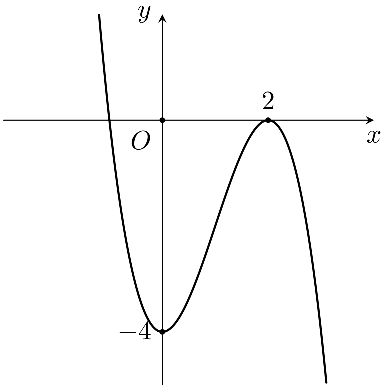
Do đó $\sin x - 3\cos x = 0 \Leftrightarrow 1 - 3\cot x = 0 \Leftrightarrow \cot x = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot}\dfrac{1}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $m = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 37.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt.



A $-4 \le m \le 0$.

B $\left[\begin{array}{l} m > -4 \\ m < 0 \end{array}\right.$.

C $\left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -4 \end{array}\right.$.

D $-4 < m < 0$.

Lời giải.

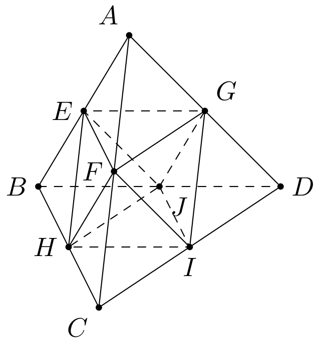
Phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt tương đương với đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt. Từ đồ thị suy ra $-4 < m < 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho khối tứ diện có thể tích V. Gọi V' là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh tứ diện đã cho. Tính tỉ số $\dfrac{V'}{V}$.

A $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{4}$. **B** $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{5}{8}$. **C** $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{3}{8}$. **D** $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.



Giả sử khối đa diện là $ABCD$. Gọi E, F, G, H, I, J lần lượt là trung điểm của AB, AC, AD, BC, CD, BD.

Ta có $\dfrac{V_{AEFG}}{V} = \dfrac{AE}{AB} \cdot \dfrac{AF}{AC} \cdot \dfrac{AG}{AD} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow V_{AEFG} = \dfrac{1}{8}V$.

Tương tự, $V_{BEHJ} = \dfrac{1}{8}V$; $V_{CHIF} = \dfrac{1}{8}V$; $V_{DGIJ} = \dfrac{1}{8}V$.

Do đó $V' = V - V_{AEFG} - V_{BEHJ} - V_{CHIF} - V_{DGIJ} = \dfrac{1}{2}V$.

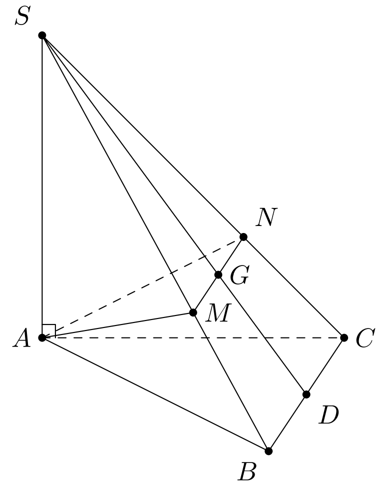
Vậy $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2}$, biết SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC, (α) là mặt phẳng đi qua AG và song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại M và N. Tính thể tích V của khối đa diện $AMNBC$.

A $V = \dfrac{4}{9}a^3$. **B** $V = \dfrac{2}{27}a^3$. **C** $V = \dfrac{5}{27}a^3$. **D** $V = \dfrac{5}{54}a^3$.

Lời giải.



Do (α) đi qua $G \in (SBC)$, song song với BC nên (α) cắt mặt phẳng (SBC) theo giao tuyến MN qua G và song song với BC.

Suy ra $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{2}{3}$ và do đó

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{4}{9}.$$

Từ đó suy ra $\dfrac{V_{AMNCB}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{5}{9}$. Do tam giác ABC vuông cân tại B và có $AC = a\sqrt{2}$ nên $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot a = \dfrac{a^2}{2}$.

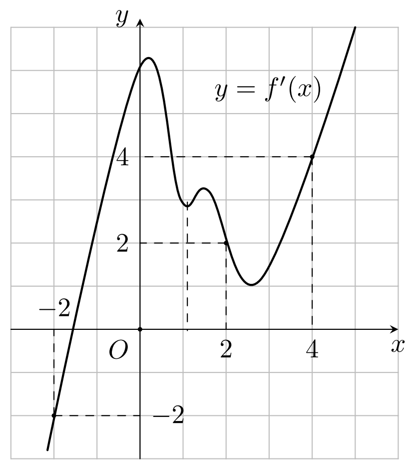
Do $SA \perp (ABC)$ nên $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2}{2} \cdot a = \dfrac{a^3}{6}$.

Suy ra $V_{AMNCB} = \dfrac{5}{9} V_{S.ABC} = \dfrac{5}{9} \cdot \dfrac{a^3}{6} = \dfrac{5}{54} a^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 40.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xét hàm số $h(x) = 2f(3x+1) - 9x^2 - 6x + 4$. Hãy chọn khẳng định đúng.



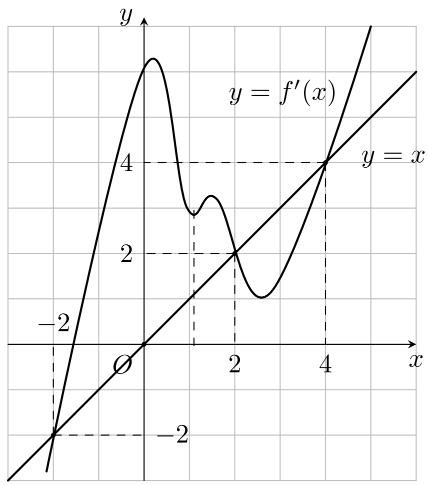
A Hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B Hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $\left(-1; \dfrac{1}{3}\right)$.

C Hàm số $h(x)$ đồng biến trên $\left(-1; \dfrac{1}{3}\right)$.

D Hàm số $h(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.



Ta có $h'(x) = 6f'(3x+1) - 6(3x+1)$. Xét bất phương trình

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow 6f'(3x+1) - 6(3x+1) > 0 \Leftrightarrow f'(3x+1) > 3x+1 \ (*)$.

Từ đồ thị trên ta vẽ thêm đường thẳng $y = x$.

Quan sát hình vẽ ta thấy:

Xét trên khoảng $(-2; 4)$ thì $f'(x) > x \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow -2 < 3x + 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < \dfrac{1}{3}$.

Vậy hàm số $h(x)$ đồng biến trên $\left(-1; \dfrac{1}{3}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Cho hình hộp chữ nhật có diện tích của ba mặt lần lượt là 60 cm^2, 72 cm^2, 81 cm^2. Khi đó, thể tích V của khối hộp chữ nhật gần nhất với giá trị nào sau đây?

A 595 cm^3. **B** 592 cm^3. **C** 593 cm^3. **D** 594 cm^3.

Lời giải.

Giả sử khối hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c. Khi đó thể tích khối hộp chữ nhật là $V = abc$.
Từ giả thiết ta có

$$\begin{cases} ab = 60 \\ bc = 72 \\ ac = 81 \end{cases} \Rightarrow (abc)^2 = 60 \cdot 72 \cdot 81 = 349920.$$

Suy ra $V = abc = \sqrt{349920} \approx 591{,}54$. Vậy thể tích V của khối hình hộp chữ nhật gần với giá trị $592\ \text{cm}^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{\cot x}{\cos x - 1}$ là

A) $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
B) $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{k}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C) $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
D) $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq l2\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy, tập xác định của hàm số $y = \dfrac{\cot x}{\cos x - 1}$ là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Một lớp có 12 nam và 18 nữ. Có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh đi dự hội nghị?

A) 216. B) 4060. C) 1255. D) 24360.

Lời giải.

Số cách chọn 3 học sinh bất kì trong 30 học sinh là $\mathrm{C}_{30}^3 = 4060$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi M là điểm bất kì thuộc đồ thị (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M cắt hai tiệm cận của đồ thị (C) tại P và Q. Giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng PQ bằng

A) $3\sqrt{2}$. B) $4\sqrt{2}$. C) $2\sqrt{2}$. D) $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Giả sử $M\left(a; 2 + \dfrac{1}{a-1}\right)$ thuộc đồ thị (C) (với $a \neq 1$).

$y' = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M có dạng

$$y = -\frac{1}{(a-1)^2}(x-a) + 2 + \frac{1}{a-1}.$$

Tiếp tuyến này cắt đường tiệm cận đứng $x = 1$ và đường tiệm cận ngang $y = 2$ lần lượt tại $P\left(1; \dfrac{2a}{a-1}\right)$ và $Q\left(2a-1; 2\right)$.

Khi đó $PQ = \sqrt{(2a-2)^2 + \left(2 - \dfrac{2a}{a-1}\right)^2} = 2\sqrt{(a-1)^2 + \dfrac{1}{(a-1)^2}} \geq 2\sqrt{2}$.

Dấu "= "xảy ra khi $(a-1)^2 = \dfrac{1}{(a-1)^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-1=1 \\ a-1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=0. \end{array}\right.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của PQ bằng $2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau từ các chữ số $\{0;1;2;3;4\}$?

A 60. B 24. C 48. D 11.

Lời giải.

Số các chỉnh hợp chập 3 chữ số khác nhau từ các chữ số $\{0;1;2;3;4\}$ là A_5^3 số.

Số các chỉnh hợp chập 3 chữ số khác nhau từ các chữ số $\{0;1;2;3;4\}$ và có số 0 đứng đầu là A_4^3 số.

Vậy, số các số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau từ các chữ số $\{0;1;2;3;4\}$ là $\mathrm{A}_5^3 - \mathrm{A}_4^2 = 48$ số.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

A Đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

B Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

C Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

D Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	-1 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	1

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -1$ nên đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là $y=1$, $y=-1$.

Do $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$. Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m-1)x^3 + (m-1)x^2 - (2m+1)x + 5$ nghịch biến trên tập xác định.

A $-\dfrac{5}{4} \le m \le 1$. B $-\dfrac{2}{7} \le m < 1$. C $-\dfrac{7}{2} \le m < 1$. D $-\dfrac{2}{7} \le m \le 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3(m-1)x^2 + 2(m-1)x - (2m+1)$.

+ Xét $m=1$. Ta có $y' = -3 < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên tập xác định.

+ Xét $m \ne 1$. Để hàm số trên nghịch biến trên tập xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m-1<0 \\ \Delta' = (m-1)^2 + 3(m-1)(2m+1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ 7m^2 - 5m - 2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{7} \le m < 1.$$

Vậy, với $-\dfrac{2}{7} \le m < 1$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên tập xác định.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 + (5-2m)x - \dfrac{1}{x+1} - 3$ đồng biến trên $(-1; +\infty)$.

A $\forall m \in \mathbb{R}$. **B** $m \leq 6$. **C** $m \geq -3$. **D** $m \leq 3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Khoảng cần xét thuộc vào tập xác định của hàm số với mọi số thực m.

Đạo hàm: $y' = 2x + 5 - 2m + \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} y' \geq 0,\ \forall x \in (-1; +\infty) &\Leftrightarrow 2x + 5 - 2m + \frac{1}{(x+1)^2} \geq 0,\ \forall x \in (-1; +\infty) \\ &\Leftrightarrow 2x + 5 + \frac{1}{(x+1)^2} \geq 2m,\ \forall x \in (-1; +\infty). \end{aligned}$$

Để hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$ thì $2m \leq \min\limits_{(-1;+\infty)}$ với $g(x) = 2x + 5 + \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Ta xét hàm số $g(x) = 2x + 5 + \dfrac{1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Đạo hàm: $g'(x) = 2 - \dfrac{2}{(x+1)^3} = \dfrac{2x^3 + 6x^2 + 6x}{(x+1)^3}$.

Xét $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 6x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow g(0) = 6$.

Bảng biến thiên

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $2m \leq 6 \Leftrightarrow m \leq 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}|x|^3 - (m-1)x^2 + (m-3)|x| + m^2 - 4m + 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có 5 điểm cực trị.

A $m > 3$. **B** $m > 1$. **C** $m > 4$. **D** $-3 < m < -1$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + (m-3)x + m^2 - 4m + 1$.

Khi đó $y = f(|x|) = \dfrac{1}{3}|x|^3 - (m-1)x^2 + (m-3)|x| + m^2 - 4m + 1$.

Ta có $f'(x) = x^2 - 2(m-1)x + (m-3)$.

Để có đồ thị của hàm số $y = f(|x|)$ ta giữ nguyên phần bên phải trục tung của đồ thị hàm số $y = f(x)$, sau đó lấy đối xứng phần đồ thị này qua trục tung.

Như vậy, đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị có hoành độ dương.

Đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + (m-3)x + m^2 - 4m + 1$ có 2 điểm cực trị có hoành độ dương khi và chỉ khi phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 3m + 4 > 0 \\ S = 2(m-1) > 0 \\ P = m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$$

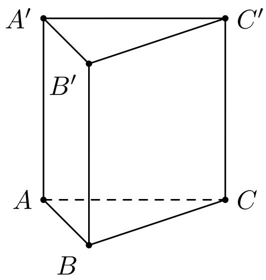
Vậy giá trị của tham số m cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m > 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A $V = \dfrac{1}{3}a^3$. **B** $V = 6a^3$. **C** $V = a^3$. **D** $V = \dfrac{2}{3}a^3$.

Lời giải.



Tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a \Rightarrow BA = BC = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$.

Diện tích của tam giác ABC: $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot BC = a^2$.

Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = BB' \cdot S_{\triangle ABC} = a \cdot a^2 = a^3$.

Chọn đáp án C □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. D	3. A	4. B	5. C	6. B	7. D	8. A	9. B	10. B
11. C	12. D	13. D	14. A	15. B	16. C	17. B	18. D	19. B	20. D
21. A	22. D	23. C	24. A	25. D	26. B	27. D	28. B	29. A	30. D
31. A	32. D	33. A	34. A	35. A	36. B	37. D	38. D	39. D	40. C
41. B	42. C	43. B	44. C	45. C	46. A	47. D	48. D	49. A	50. C

36 ĐỀ THI THỬ THPT NGUYỄN HUỆ - TT. HUẾ - LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

A 1. B 2. C 3. D 0.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ có tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$.

Ta có

- $\lim\limits_{x \to -1^+} y = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = +\infty$ (do $\lim\limits_{x \to -1^+} (\sqrt{x+9}-3) = -3+2\sqrt{2} < 0$, $\lim\limits_{x \to -1^+} (x^2+x) = 0$ và $x^2+x < 0$ khi $x \to -1^+$).
  Suy ra $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- $\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} y = \lim\limits_{x \to 0^{\pm}} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = \lim\limits_{x \to 0^{\pm}} \dfrac{1}{(x+1)(\sqrt{x+9}+3)} = \dfrac{1}{6}$.
  Suy ra $x = 0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 1 đường tiệm cận đứng là $x = -1$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 9$ trên đoạn $[1; 3]$.

A $\max\limits_{[1;3]} f(x) = 5$. B $\max\limits_{[1;3]} f(x) = \dfrac{13}{27}$. C $\max\limits_{[1;3]} f(x) = -6$. D $\max\limits_{[1;3]} f(x) = 0$.

Lời giải.

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[1; 3]$. Ta có

$$f'(x) = 3x^2 - 16x + 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \notin [1;3] \\ x = \dfrac{4}{3} \in [1;3] \end{array}\right.$$

Mà $f(1) = 0$, $f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{13}{27}$, $f(3) = -6$.

Vậy $\max\limits_{[1;3]} f(x) = \dfrac{13}{27}$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x^2-4}$ là

A 2. B 1. C 4. D 3.

Lời giải.

Ta có

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = 0$, suy ra đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y = 0$.
- $\lim\limits_{x \to 2^+} y = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-1}{x^2-4} = +\infty$, suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 2$.
- $\lim\limits_{x \to -2^+} y = \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x-1}{x^2-4} = +\infty$, suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -2$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ có các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang lần lượt là

A $x = 1$ và $y = 2$. (B) $x = 2$ và $y = 1$. (C) $x = 1$ và $y = -3$. (D) $x = -1$ và $y = 2$.

Lời giải.

Hàm số đã cho là hàm nhất biến nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 1$, đường tiệm cận ngang là $y = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \dfrac{1}{x}$ trên $\left[\dfrac{1}{2}; 3\right]$. Khi đó, $3M + m$ bằng

(A) 12. (B) $\dfrac{35}{6}$. (C) $\dfrac{7}{2}$. (D) 10.

Lời giải.

Hàm số đã cho liên tục trên $\left[\dfrac{1}{2}; 3\right]$. Ta có $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in \left[\dfrac{1}{2}; 3\right] \\ x = -1 \notin \left[\dfrac{1}{2}; 3\right] \end{array}\right.$

Mà $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5}{2}$, $y(1) = 2$, $y(3) = \dfrac{10}{3}$.

Suy ra $M = \max\limits_{\left[\frac{1}{2};3\right]} y = \dfrac{10}{3}$ và $m = \min\limits_{\left[\frac{1}{2};3\right]} y = 2$.

Vậy $3M + m = 12$. □

Câu 6. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

(A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

(B) Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

C Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x-1)^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số

$$y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)x - m + 2$$

luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(A) $m \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. **B** $-3 \leq m \leq 1$.

(C) $m \leq 1$. (D) $-3 < m < 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -x^2 - 2mx + 2m - 3$.

Hàm số đã cho là hàm bậc ba nên hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi chỉ khi

$$y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1.$$

Chọn đáp án B □

Câu 8.
Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây. Khẳng định nào sau đây **sai**?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$ ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

A Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

B Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

C Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

D Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

Lời giải.
Dựa vào bảng biến thiên, ta có: hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$. Do đó, khẳng định "Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$" sai.
Chọn đáp án D □

Câu 9. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{2 - x^2} - x$ bằng

A $2 + \sqrt{2}$. **B** 2. **C** 1. **D** $2 - \sqrt{2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$. Ta có $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{2-x^2}} - 1 = \dfrac{-x-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2-x^2}}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x^2} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\sqrt{2}$		-1		$\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\max\limits_{[-\sqrt{2};\sqrt{2}]} y = 2$, $\min\limits_{[-\sqrt{2};\sqrt{2}]} y = -\sqrt{2}$.

Vậy $\max\limits_{[-\sqrt{2};\sqrt{2}]} y + \min\limits_{[-\sqrt{2};\sqrt{2}]} y = 2 - \sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Hàm số $y = \sqrt{4-x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào?

A $(0; 2)$. **B** $(-2; 0)$. **C** $(0; +\infty)$. **D** $(-2; 2)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [-2; 2]$.

Ta có $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên

x	-2		0		2
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Vậy hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm

$$f'(x) = (x+1)(x-2)^2(x-3)(x+5)^4$$

Hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A 4. **B** 2. **C** 5. **D** 3.

Lời giải.

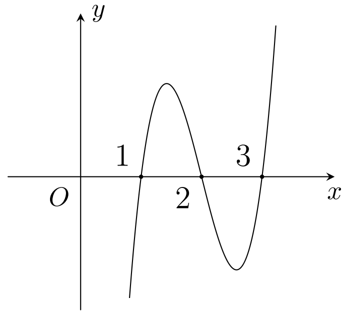
Ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \text{ (nghiệm đơn)} \\ x = 2 \text{ (nghiệm kép bội chẵn)} \\ x = 3 \text{ (nghiệm đơn)} \\ x = -5 \text{ (nghiệm kép bội chẵn)} \end{array}\right.$$

Vì $f'(x)$ đổi dấu khi x qua các điểm $x=-1$, $x=3$ nên hàm số có 2 cực trị. □

Câu 12.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây **đúng**?



A Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

B Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị.

C Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bốn điểm cực trị.

D Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực trị.

Lời giải.

Vì phương trình $f'(x)=0$ có 3 nghiệm và khi qua 3 nghiệm $f'(x)$ đều đổi dấu nên nên đồ thị hàm số có ba điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 13.

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

A Hàm số đạt cực đại tại $x=2$.

B Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$.

C Hàm số đạt cực đại tại $x=4$.

D Hàm số đạt cực đại tại $x=3$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số đạt cực đại tại $x=2$ và đạt cực tiểu tại $x=4$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=3x^4-4x^3-6x^2+12x+1$ là điểm $M(x_0;y_0)$. Tính tổng $T=x_0+y_0$.

A $T=8$. **B** $T=4$. **C** $T=-11$. **D** $T=3$.

Lời giải.

Ta có $y'=12x^3-12x^2-12x+12$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \text{ (nghiệm đơn)} \\ x=1 \text{ (nghiệm kép)} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-10	↗		↗	$-\infty$

Dựa vào điểm biến thiên suy ra điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là $M(-1;-10)$, suy ra $x_0 = -1$, $y_0 = -10$. Do đó, $T = -11$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$

(A) $\min\limits_{[2;3]} y = -3$. (B) $\min\limits_{[2;3]} y = 3$. (C) $\min\limits_{[2;3]} y = 2$. (D) $\min\limits_{[2;3]} y = 4$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2} < 0 \Rightarrow$ Hàm số đã cho nghịch biến trên $[2;3]$.

Suy ra $\min\limits_{[2;3]} y = y(3) = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-m}{mx-1}$ không có đường tiệm cận đứng?

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

- Trường hợp $m = 0$: hàm số đã cho trở thành $y = -x$, là hàm số không có tiệm cận đứng nên $m = 0$ thỏa yêu cầu bài toán.
- Trường hợp $m \neq 0$: hàm số đã cho có tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{m}\right\}$.

  Hàm số không có tiệm cận đứng khi chỉ khi $x = \dfrac{1}{m}$ là nghiệm của phương trình $x - m = 0$ hay $\dfrac{1}{m} - m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \end{array}\right.$.

Vậy có 3 giá trị tham số m để hàm số đã cho không có tiệm cận đứng. □

Câu 17. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + n$ có tọa độ điểm cực tiểu là $(1;3)$. Khi đó, $m+n$ bằng

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 4mx + m^2$, $y'' = 6x - 4m$

Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(1;3)$, suy ra

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y(1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 3 = 0 \\ m^2 - 2m + n + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m = 1 \\ n = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} m = 3 \\ n = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Với $\begin{cases} m = 1 \\ n = 3 \end{cases}$, ta có $y''(1) = 2 > 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$. Do đó, $m = 1$, $n = 3$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $m + n = 4$.

Với $\begin{cases} m = 3 \\ n = -1 \end{cases}$, ta có $y''(1) = -6 < 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x = 1$. Do đó, $m = 3$, $n = -1$ không thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-3;3)$ sao cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang?

A 2. (B) 0. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

- Trường hợp $m = 0$: hàm số trở thành $y = x + 1$, đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang nên $m = 0$ không thỏa yêu cầu bài toán.
- Trường hợp $m < 0$: tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \left(-\sqrt{-\dfrac{1}{m}}; \sqrt{-\dfrac{1}{m}}\right)$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
- Trường hợp $m > 0$: tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 1$. Suy ra đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.

Vì $m \in \mathbb{Z} \cap (-3;3)$ nên $m = 1; 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ trên tập hợp $\mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup \left[1; \dfrac{3}{2}\right]$. Tính $P = M + m$.

(A) $P = 2$. (B) $P = 0$. C $P = -\sqrt{5}$. (D) $P = \sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{1-2x}{(x-2)^2\sqrt{x^2-1}}$, $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \notin \mathscr{D}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{3}{2}$
y'		$+$	‖		‖	$-$	
y	-1	↗	0 ‖		‖ 0	↘	$-\sqrt{5}$

Vậy $M = \max\limits_{\mathscr{D}} y = 0$ và $m = \min\limits_{\mathscr{D}} y = -\sqrt{5}$.

Do đó $P = -\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ. Hàm số $y = f\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) + x$ nghịch bến trên khoảng nào?

x	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	3 ↘	1 ↘	-1 ↗	2 ↗	4

(A) $(-2;0)$. B $(-4;-2)$.

(C) $(0;2)$. (D) $(2;4)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $f'(x) = 2$ có hai nghiệm phân biệt là $x = 2$ và $x = a$ với $-1 < a < 0$.
Đặt $g(x) = f\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) + x$ thì $g'(x) = -\dfrac{1}{2}f'\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) + 1$.
Ta có $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) > 2$.

- $f'\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) > 2 \Rightarrow 2 < 1 - \dfrac{x}{2} < 3 \Leftrightarrow -4 < x < -2$.
- $f'\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) > 2 \Rightarrow -1 < 1 - \dfrac{x}{2} < a \Leftrightarrow 2 - 2a < x < 4$.
  Vì $-1 < a < 0$ nên $2 < 2 - 2a < 4$. Do đó $(2 - 2a; 4) \subset (2; 4)$.

Vậy hàm số $y = f\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) + x$ nghịch biến trên $(-4; -2)$.
Chọn đáp án B □

Câu 21. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{x - 1}{x - m}$ nghịch biến trên $(4; +\infty)$. Tính tổng P của các giá trị m của S.

(A) $P = 10$. (B) $P = 9$. (C) $P = -9$. (D) $P = -10$.

Lời giải.
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.
Ta có $y' = \dfrac{1 - m}{(x - m)^2}$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(4; +\infty)$ khi chỉ khi

$$\begin{cases} y' < 0, \forall x \in (4; +\infty) \\ m \notin (4; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m < 0 \\ m \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \leq 4.$$

Vì m chỉ nhận giá trị nguyên nên $m = 2; 3; 4$. Suy ra $P = 2 + 3 + 4 = 9$.
Chọn đáp án B □

Câu 22. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx + 1}{4x + m}$ luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định của hàm số?

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) vô số.

(2D1K1-3)

Lời giải.
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{m}{4}\right\}$.
Ta có $y' = \dfrac{m^2 - 4}{(4x + m)^2}$. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định khi chỉ khi

$$m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

Vì m chỉ nhận các giá trị nguyên nên $m \in \{-1; 0; 1\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Câu 23. Tìm các mối liên hệ giữa các tham số a và b sao cho hàm số $y = f(x) = 2x + a\sin x + b\cos x$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$?

(A) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$. (B) $a + 2b \geq \dfrac{1 + \sqrt{2}}{3}$. (C) $a^2 + b^2 \leq 4$. (D) $a + 2b = 2\sqrt{3}$.

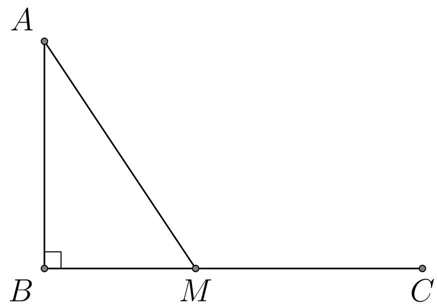
Lời giải.

Ta có $y' = f'(x) = 2 + a\cos x - b\sin x$.
Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2 + a\cos x + b\sin x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Mà $2 + a\cos x + b\sin x \geq 2 - \sqrt{a^2+b^2}, \forall x \in \mathbb{R}$ (dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{a}{\cos x} = \dfrac{b}{\sin x} < 0$).
Do đó $\min\limits_{\mathbb{R}} f'(x) = 2 - \sqrt{a^2+b^2}$.
Suy ra $(*) \Leftrightarrow 2 - \sqrt{a^2+b^2} \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 4$.
Chọn đáp án C □

Câu 24.
Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A có khoảng cách đến bờ biển $AB = 5$ km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng bằng $BC = 7$ km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h. Vị trí của điểm M cách B một khoảng bao nhiêu để người đó đi đến C nhanh nhất?



(A) 0 km. (B) $\dfrac{14+5\sqrt{5}}{12}$ km.
(C) $2\sqrt{5}$ km. (D) 7 km.

Lời giải.
Gọi khoảng cách từ M đến B là x km $(0 \leq x \leq 7)$.
Khi đó, $MC = 7 - x$ và $AM = \sqrt{x^2+25}$.
Người đó đi từ A đến C hết khoảng thời gian là $f(x) = \dfrac{7-x}{6} + \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4}$ giờ.
Hàm số $f(x) = \dfrac{7-x}{6} + \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4}$ liên tục trên $[0;7]$ và

$$f'(x) = -\frac{1}{6} + \frac{x}{4\sqrt{x^2+25}}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}.$$

Mà $f(0) = \dfrac{29}{12}$, $f(2\sqrt{5}) = \dfrac{14+5\sqrt{5}}{12}$, $f(7) = \dfrac{\sqrt{74}}{4}$.
Suy ra $\min\limits_{[0;7]} f(x) = \dfrac{14+5\sqrt{5}}{12}$.
Vậy M cách B một khoảng $2\sqrt{5}$ km.
Chọn đáp án C □

Câu 25. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m-2)x + 2m - 3$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 18$. Tính tổng P của tất cả các giá trị m trong S.

(A) $P = -4$. (B) $P = 1$. (C) $P = -\dfrac{3}{2}$. (D) $P = -5$.

Lời giải.
Ta có $y' = x^2 - 2(m+1)x + (m-2)$, $\Delta' = (m+1)^2 - (m-2) = m^2 + m + 3$.
Hàm số đã cho là hàm bậc ba nên có hai điểm cực trị khi chỉ khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 + m + 3 > 0$ (luôn

đúng với mọi $m \in \mathbb{R}$).

Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = 2(m+1)$, $x_1x_2 = m - 2$.

Mà $x_1^2 + x_2^2 = 18 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 18 \Leftrightarrow 4m^2 + 6m - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$.

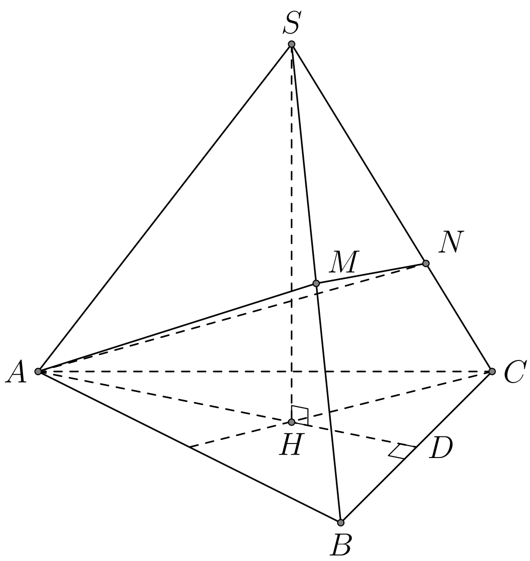
Vì m chỉ nhận giá trị nguyên nên $m = 1$. Vậy $P = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Cho hình chóp đều $S.ABC$ cạnh bằng a, cạnh bên bằng $2a$. Gọi M là trung điểm của SB, N là điểm trên đoạn SC sao cho $NS = 2NC$. Thể tích V của khối chóp $A.BCNM$ bằng

A $V = \dfrac{a^3\sqrt{11}}{16}$. **B** $V = \dfrac{a^3\sqrt{11}}{24}$. **C** $V = \dfrac{a^3\sqrt{11}}{18}$. **D** $V = \dfrac{a^3\sqrt{11}}{36}$.

Lời giải.



Ta có $V_{A.BCNM} = V_{S.ABC} - V_{S.AMN}$.

Áp dụng công thức tỉ số thể tích, ta có

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{3}$$

Suy ra $V_{A.BCNM} = \dfrac{2}{3} V_{S.ABC}$.

Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC), theo tính chất hình chóp đều thì H là trọng tâm tam giác ABC.

Tam giác ABC đều cạnh a nên

$$AD = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{2}{3}AD = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

và $S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác SHA vuông tại H nên $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{33}}{3}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{33}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{11}}{12}$.

Vậy $V_{A.BCNM} = \dfrac{a^3\sqrt{11}}{18}$.

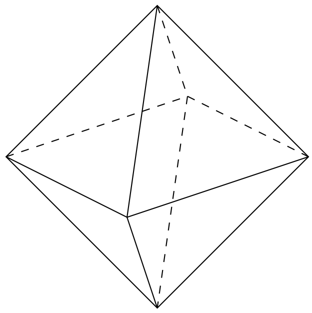
Chọn đáp án C □

Câu 27. Số đỉnh của hình bát diện đều là bao nhiêu?

A 12. **B** 6. **C** 8. **D** 10.

Lời giải.

Bát diện đều có 8 đỉnh.



Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Mỗi cạnh của một khối đa diện là cạnh chung của bao nhiêu mặt của khối đa diện?

(A) Bốn mặt. (B) Hai mặt. (C) Ba mặt. (D) Năm mặt.

Lời giải.

Hình đa diện phải thỏa mãn tính chất: mỗi cạnh là cạnh chung của đúng 2 mặt.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Cho khối chóp tam giác có đường cao bằng 100 cm và cạnh đáy bằng 20 cm, 21 cm, 29 cm. Tính thể tích khối chóp này.

(A) $7\,000\sqrt{2}$ cm^3. (B) $6\,000$ cm^3. (C) $6\,213$ cm^3. (D) $7\,000$ cm^3.

Lời giải.

Diện tích đáy

$$S=\sqrt{\frac{20+21+29}{2}\left(\frac{20+21+29}{2}-20\right)\left(\frac{20+21+29}{2}-21\right)\left(\frac{20+21+29}{2}-29\right)}=210\ \text{cm}^2.$$

Thể tích khối chóp

$$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 210\cdot 100=7\,000\ \text{cm}^3.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Cho hình 20 mặt đều có cạnh bằng 2. Gọi S là tổng diện tích của tất cả các mặt đa diện. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $S=20\sqrt{3}$. (B) $S=20$. (C) $S=10\sqrt{3}$. (D) $S=10$.

Lời giải.

Tổng diện tích tất cả các mặt đa diện

$$S=20\cdot\frac{2^2\sqrt{3}}{4}=20\sqrt{3}.$$

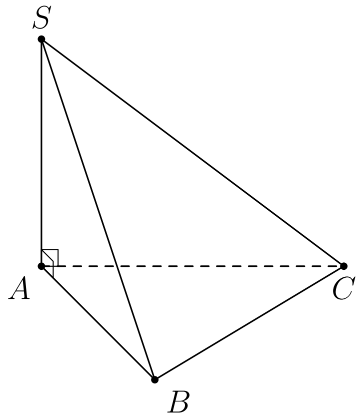
Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B, $SA=3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy, SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 60°. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

(A) $3a^3$. (B) $27a^3$. (C) $9a^3$. (D) $\dfrac{3a^3}{2}$.

Lời giải.

Góc giữa SB và (ABC) là $\widehat{SBA}$, do đó $\widehat{SBA} = 60^\circ$.
Xét tam giác SAB vuông tại A có $AB = \dfrac{SA}{\tan 60^\circ} = a\sqrt{3}$.
Tam giác ABC vuông cân tại B nên $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot BA \cdot BC = \dfrac{3a^2}{2}$.
Thể tích khối chóp $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SA = \dfrac{3a^3}{2}$.



Chọn đáp án D □

Câu 32. Hình lập phương có đường chéo của mặt bên bằng 4 cm. Tính thể tích khối lập phương đó.

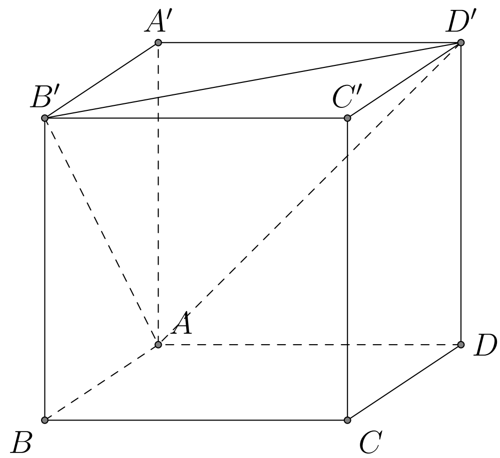
A $8\sqrt{2}$ cm^3. B $16\sqrt{2}$ cm^3. C 8 cm^3. D $2\sqrt{2}$ cm^3.

Lời giải.
Độ dài các cạnh hình lập phương là $\dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ cm.
Thể tích khối lập phương là $V = (2\sqrt{2})^3 = 16\sqrt{2}$ cm^3.
Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2$ cm; $AD = 5$ cm; $AA' = 3$ cm. Tính thể tích khối chóp $A.A'B'D'$

A 5 cm^3. B 10 cm^3. C 20 cm^3. D 15 cm^3.

Lời giải.
Ta có $V_{A.A'B'D'} = \dfrac{1}{3} \cdot AA' \cdot \dfrac{1}{2} \cdot A'B' \cdot A'D' = 5$ cm^3.



Chọn đáp án A □

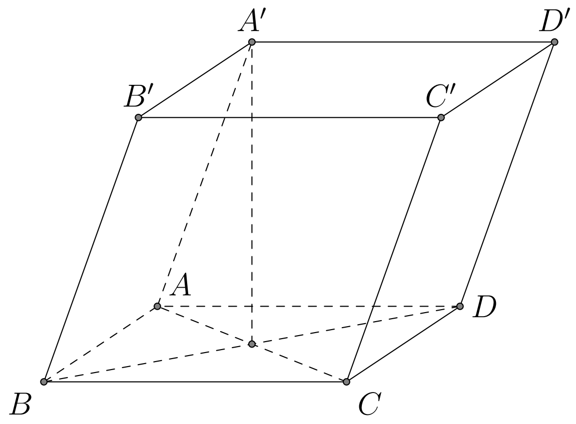
Câu 34. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng $2a$, đáy $ABCD$ là hình vuông. Hình chiếu của đỉnh A' trên mặt phẳng đáy trùng với tâm của đáy. Tính theo a thể tích V của khối hộp đã cho.

A $V = \dfrac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. B $V = 4a^3\sqrt{2}$. C $V = 8a^3$. D $V = \dfrac{8a^3}{3}$.

Lời giải.

Ta có $A'O \perp (ABCD)$, $AO = \dfrac{AC}{2} = a\sqrt{2}$,
$A'O = \sqrt{AA'^2 - AO^2} = a\sqrt{2}$.
Thể tích khối hộp

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'O = 4a^2 \cdot a\sqrt{2} = 4a^3\sqrt{2}$.



Chọn đáp án B $\square$

Câu 35. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên tạo với góc 60°. Gọi M là trung điểm của SC. Mặt phẳng qua AM và song song với BD, cắt SB, SD lần lượt tại E và F và chia khối chóp thành hai phần. Tính thể tích V của khối chóp không chứa đỉnh S.

A $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{36}$. **B** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{9}$. **C** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{18}$. **D** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải.

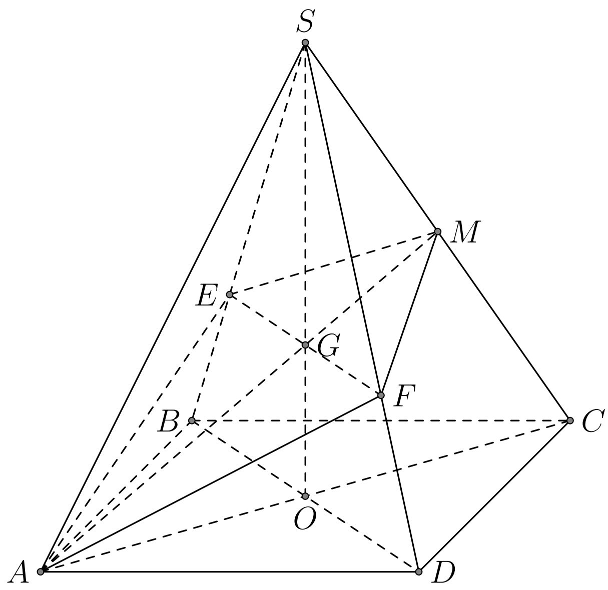
Gọi $O = AC \cap BD$, $G = AM \cap SO$, suy ra G là trọng tâm tam giác SAC nên $\dfrac{SG}{SO} = \dfrac{2}{3}$.
Ta có $(\widehat{SC, (ABCD)}) = \widehat{SCO} = 60^\circ$, do đó

$$OC = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}, SO = OC\tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa AM và song song với BD, suy ra (α) là mặt phẳng đi qua G, song song với BD và cắt SB, SD lần lượt tại E và F.



Do đó, (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $AEMF$, suy ra (α) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần là khối chóp $S.AEMF$ và khối đa diện $EMFABCD$.
Ta có EF đi qua G và song song BD nên $\dfrac{SE}{SB} = \dfrac{SF}{SD} = \dfrac{SG}{SO} = \dfrac{2}{3}$.
Xét hai khối chóp $S.AEF$ và $S.ABD$, ta có $\dfrac{V_{S.AEF}}{V_{S.ABD}} = \dfrac{SE}{SB} \cdot \dfrac{SF}{SD} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow V_{S.ABD} = \dfrac{2}{9}V_{S.ABCD}$.
Xét hai khối chóp $S.EFM$ và $S.BCD$, ta có $\dfrac{V_{S.EFM}}{V_{S.BCD}} = \dfrac{SE}{SB} \cdot \dfrac{SF}{SD} \cdot \dfrac{SM}{SC} = \dfrac{2}{9} \Rightarrow V_{S.EFM} = \dfrac{1}{9}V_{S.ABCD}$.
Ta có $V_{S.AEMF} = V_{S.AEF} + V_{S.EFM} = \dfrac{1}{3}V_{S.ABCD}$.
Thể tích khối chóp không chứa đỉnh S là

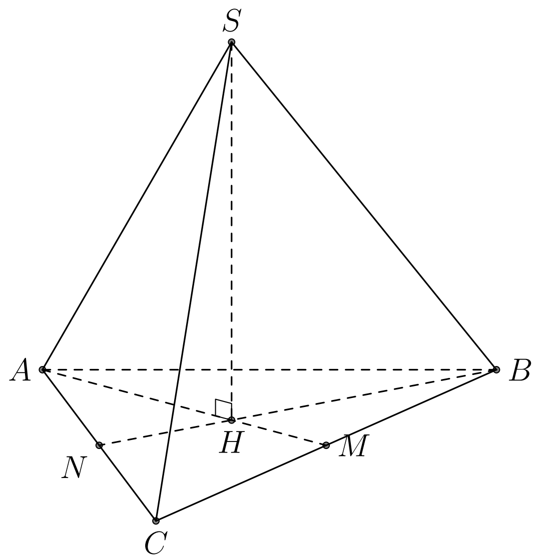
$$V = V_{S.ABCD} - V_{S.AEMF} = \frac{2}{3}V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{9}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$. Tính theo a thể tích V của hình chóp đã cho

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm của AC và H là trọng tâm $\triangle ABC$, ta có

$$BH = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Tam giác SHB vuông tại H nên

$$SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{\frac{21a^2}{36} - \frac{a^2}{3}} = \frac{a}{2}.$$

Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}.$$

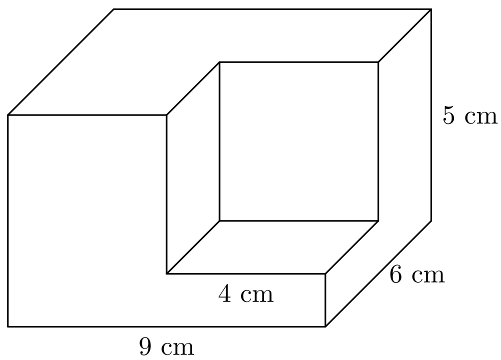
□

Câu 37.

Một khúc gỗ dạng hình hộp chữ nhật có kích thước như hình vẽ. Người ta cắt đi một phần khúc gỗ dạng hình lập phương cạnh 4 cm. Tính thể tích phần còn lại.

(A) 262 cm^3. (B) 54 cm^3.

(C) 145 cm^3. (D) 206 cm^3.



Lời giải.

Thể tích khối gỗ lúc đầu khi chưa bị cắt $V_1 = 5 \cdot 9 \cdot 6 = 270$ cm^3.

Thể tích khối gỗ cắt bớt ra $V_2 = 4^3 = 64$ cm^3.

Thể tích phần còn lại $V = V_1 - V_2 = 206$ cm^3.

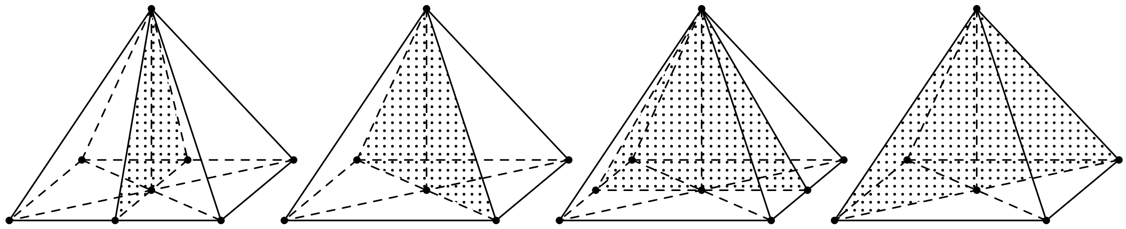
Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt đối xứng?

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Hình chóp tứ giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng.



Hình 1. **Hình** 2. **Hình** 3. **Hình** 4.

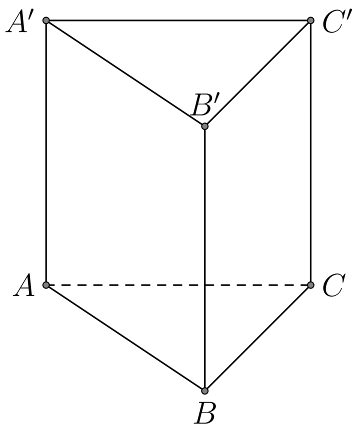
Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Cho (H) là khối lăng trụ đứng tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính thể tích của (H).

(A) $\dfrac{a^3}{2}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ đứng, tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a là $V = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và tổng diện tích các mặt bên bằng $3a^2$.

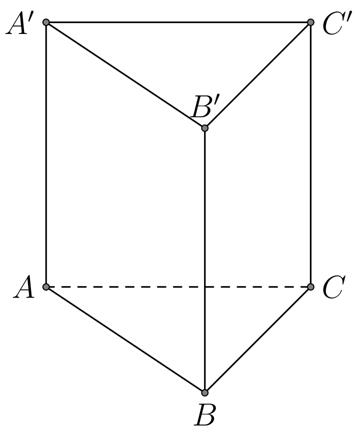
(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Theo đề bài, ta có $3S_{ABB'A'} = 3a^2 \Rightarrow AB \cdot AA' = a^2 \Leftrightarrow AA' = a$.

Thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

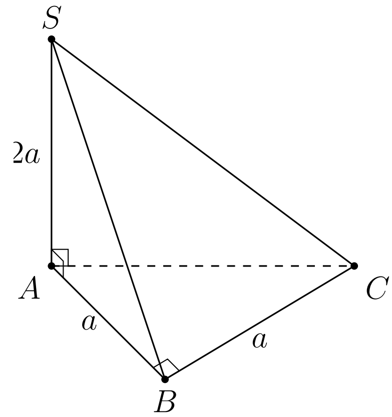


Chọn đáp án (C) □

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA = BC = a$. Cạnh bên $SA = 2a$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (B) $V = \dfrac{a^3}{3}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



Tam giác ABC vuông tại B nên $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} BA \cdot BC = \dfrac{a^2}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SA = \dfrac{a^3}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Một hình chóp có 100 cạnh thì có bao nhiêu mặt?

A. 53. B. 51. C. 50. D. 52.

Lời giải.

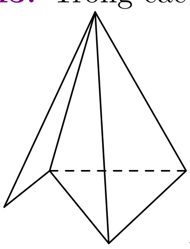
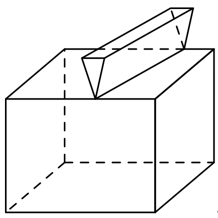
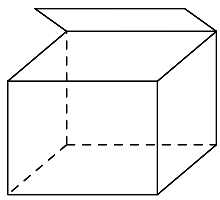
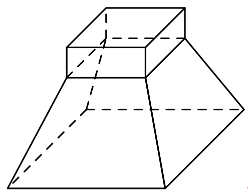
Gọi n là số cạnh đáy của hình chóp, khi đó, số cạnh của hình chóp là $2n$, số mặt là $m+1$, số đỉnh bằng 1.

Theo giả thuyết, ta có $2n = 100 \Rightarrow n = 50$.

Vậy số mặt của hình hình chóp có 100 cạnh là $n + 1 = 51$.

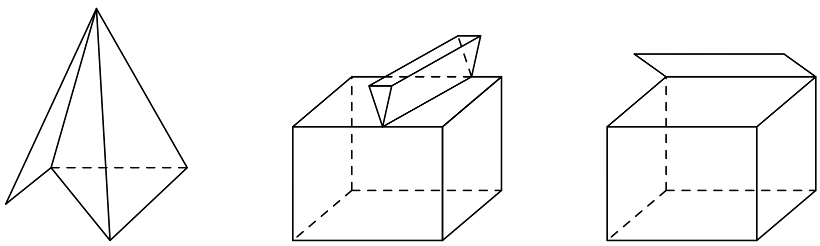
Chọn đáp án B □

Câu 43. Trong các vật thể sau đây, vật thể nào là hình đa diện?

A.  .
B.  .
C.  .
D.  .

Lời giải.

Các hình vi phạm khái niệm hình đa diện là



Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho khối chóp có thể tích $V = 36\ \text{cm}^3$ và diện tích mặt đáy $B = 6\ \text{cm}^2$. Tính chiều cao của khối chóp.

A. $h = 18$ cm. B. $h = \dfrac{1}{2}$ cm . C. $h = 6$ cm . D. $h = 72$ cm .

Lời giải.

Từ công thức thể tích khối chóp, ta suy ra $h = \dfrac{3V}{S} = \dfrac{3 \cdot 36}{6} = 18$ cm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Kim tự tháp Kheops (Kê-ốp) ở Ai cập được xây dựng vào khoảng 2500 năm trước công nguyên. Kim tự tháp này là một khối chóp tứ giác đều có chiều cao 147 m cạnh đáy dài 230 m. Tính thể tích của nó.

(A) 2592100 m^3. (B) 3888150 m^3. (C) 7776300 m^3. (D) 2952100 m^3.

Lời giải.

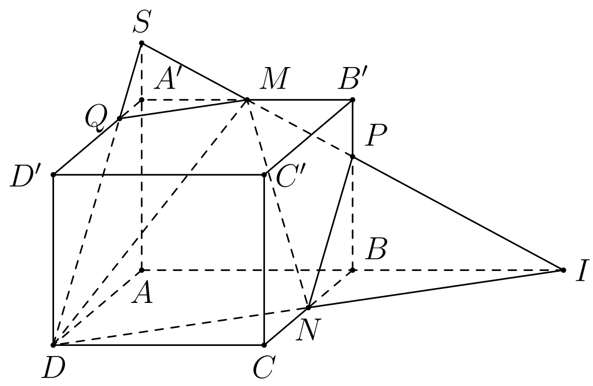
Diện tích đáy của kim tự tháp là $S = 230^2 = 54\,900$ m^2.

Thể tích của kim tự tháp $V = \dfrac{1}{3} \cdot S \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 52\,900 \cdot 147 = 2\,592\,100$ m^3. □

Câu 46. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh $A'B'$ và BC. Mặt phẳng (DMN) chia khối lập phương thành hai khối đa diện. Gọi (H) là khối đa diện chứa đỉnh A và (H') là khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\dfrac{V_{(H)}}{V_{(H')}}$.

A $\dfrac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \dfrac{55}{89}$. (B) $\dfrac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \dfrac{37}{48}$. (C) $\dfrac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.



Dựng được thiết diện như hình vẽ.

Ta có $\dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{SM}{SI} = \dfrac{SP}{SD} = \dfrac{AM}{AI} = \dfrac{1}{4}$, suy ra $\dfrac{V_{S.AMP}}{V_{S.ADI}} = \dfrac{1}{64} \Rightarrow V_{AMP.ADI} = \dfrac{63}{64} \cdot V_{S.ADI}$.

$V_{S.ADI} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot AD \cdot AI \cdot SA = \dfrac{4a^3}{9}$

$\Rightarrow V_{AMP.ADI} = \dfrac{63}{64} \cdot V_{S.ADI} \dfrac{63}{64} \cdot \dfrac{4a^3}{9} = \dfrac{7a^3}{16}$.

$V_{IPBN} = \dfrac{1}{6} \cdot BN \cdot BI \cdot BP = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot a \cdot \dfrac{2a}{3} = \dfrac{a^3}{18}$

$\Rightarrow V_{(H)} = V_{AMP.ADI} - V_{IPBN} = \dfrac{7a^3}{16} - \dfrac{a^3}{18} = \dfrac{55a^3}{144}$.

$V_{(H')} = V_{lp} - V_{(H)} = a^3 - \dfrac{55a^3}{144} = \dfrac{89a^3}{144}$ suy ra $\dfrac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \dfrac{55}{89}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tại A và D, $AB = AD = 2a$, $CD = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng $60°$. Gọi I là trung điểm của AD, biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

(A) $\dfrac{3\sqrt{17}}{5}a^3$. (B) $\dfrac{3\sqrt{23}}{5}a^3$. **C** $\dfrac{3\sqrt{15}}{5}.a^3$. (D) $\dfrac{3\sqrt{19}}{5}a^3$.

Lời giải.

Theo giả thuyết, ta có $SI \perp (ABCD)$.

Gọi K là trung điểm của AB ta suy ra $ADCK$ là hình chữ nhật.

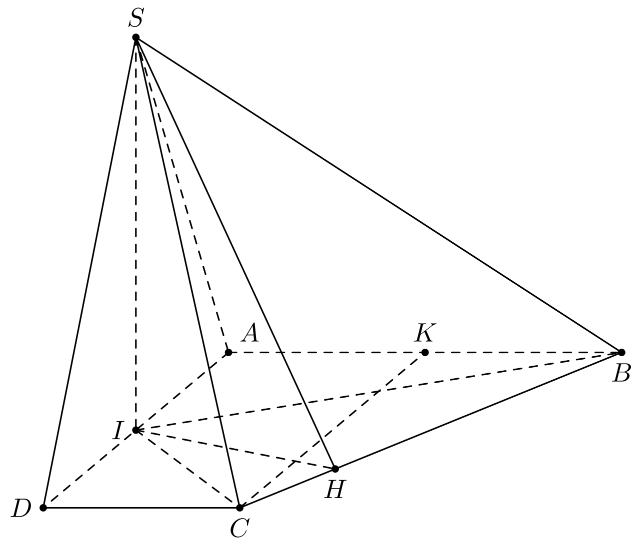
$\Rightarrow \begin{cases} CK \perp AB \\ BC = \sqrt{CK^2 + KB^2} = a\sqrt{5} \end{cases}$.

Dựng $IH \perp BC$ tại H, ta suy ra

$$\widehat{(SBC),(ABCD)} = \widehat{SHI} = 60^\circ.$$

Ta có

$$S_{\triangle BCI} = S_{ABCD} - S_{\triangle ABI} - S_{\triangle DCI}$$
$$= 3a^2 - a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}.$$



$$\Rightarrow \begin{cases} IH = \dfrac{2S_{\triangle BCI}}{BC} = \dfrac{3a^2}{a\sqrt{5}} \\ SI = IH \tan 60^\circ = \dfrac{3a\sqrt{15}}{5}. \end{cases}$$

Suy ra $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SI \cdot S_{ABCD} = \dfrac{3a^3\sqrt{15}}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = BD = CD = 1$. Khi thể tích khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất thì khoảng cách giữa hai đường thẳng AD vàBC bằng

(A) $\dfrac{1}{3}$. (B) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. (C) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **(D)** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

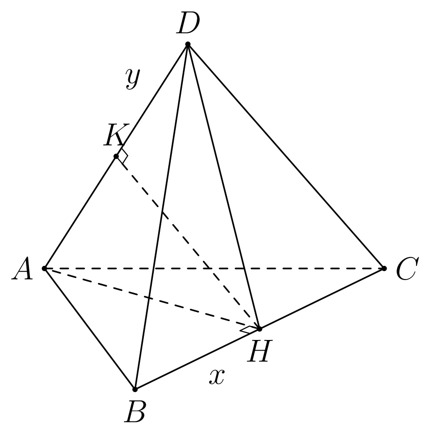
Lời giải.

Đặt $BC = x$, $AD = y$ $(x, y > 0)$.

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của BC và AD. Do các tam giác ABC và DBC cân tại A và D nên $AH \perp BC$, $DH \perp BC \Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp HK$.

Mặt khác, các tam giác ABC, DBC bằng nhau nên $AH = DH \Rightarrow HK \perp AD$ hay $HK = \mathrm{d}(AD, BC)$.

Ta có $\begin{cases} AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{2} \\ HK = \sqrt{AH^2 - AK^2} = \dfrac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{2} \end{cases}$.



Thể tích khối chóp $ABCD$ là $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot BC \cdot S_{\triangle HAD} = \dfrac{1}{12} xy\sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$V_{ABCD} = \frac{1}{12} xy\sqrt{4 - x^2 - y^2} = \frac{1}{12}\sqrt{x^2y^2(4 - x^2 - y^2)} \leq \frac{1}{12}\sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 + 4 - x^2 - y^2}{3}\right)^3} = \frac{2\sqrt{3}}{27}.$$

Dấu "=" xảy ra khi chỉ khi $x^2 = y^2 = 4 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x = y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Do đó, $\max V_{ABCD} = \dfrac{2\sqrt{3}}{27} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Khi đó, $HK = \dfrac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

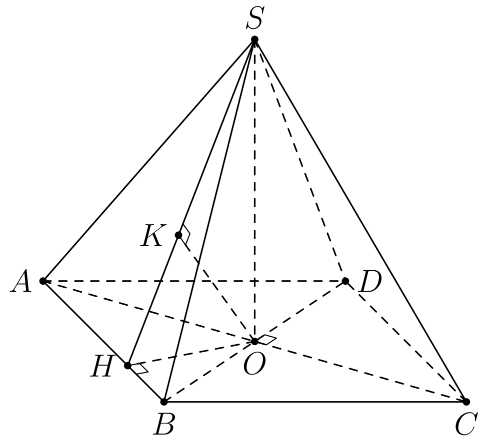
Vậy $\mathrm{d}(AD, BC) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, $AC = 2a\sqrt{3}$, $BD = 2a$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Biết khoảng cách từ tâm O đến (SAB) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$, tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A $V = a^2\sqrt{3}$. **B** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **D** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của AC và BD, theo giả thuyết ta có $SO \perp (ABCD)$.

Dựng $OH \perp AB$ tại H, ta có $AB \perp (SOH)$

$\Rightarrow (SAB) \perp (SOH)$ (giao tuyến SH).

Dựng $OK \perp SH$ tại K, ta có $SK \perp (SAB)$

$\Rightarrow OK = \mathrm{d}(O, (SAB)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vì $ABCD$ là hình thoi nên $OA \perp OB$ và

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$$

suy ra $\dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{1}{OK^2} - \dfrac{1}{OA^2} - \dfrac{1}{OB^2} = \dfrac{4}{a^2} \Rightarrow SO = \dfrac{a}{2}$.

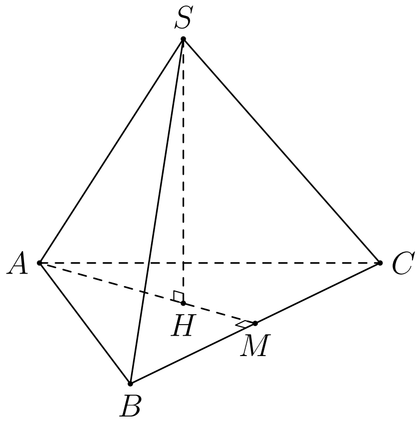
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot 2a^2\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều và có $SA = SB = SC = 1$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.

A $V_{\max} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$. **B** $V_{\max} = \dfrac{1}{6}$. **C** $V_{\max} = \dfrac{1}{12}$. **D** $V_{\max} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải.



Gọi H là trọng tâm tam giác đều ABC, theo giả thuyết suy ra $SH \perp (ABC)$.

Đặt $AB = x \Rightarrow AH = \dfrac{x\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SH = \sqrt{1 - \dfrac{3x^2}{9}} = \dfrac{\sqrt{9-3x^2}}{3}$ và $S_{\triangle ABC} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{9-3x^2}}{3} \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{12} x^2 \sqrt{3 - x^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta được

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{12\sqrt{2}} \sqrt{x^2 x^2 (6 - 2x^2)} \le \frac{1}{12\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{x^2 + x^2 + 6 - 2x^2}{3}\right)^3} = \frac{1}{6}.$$

Dấu "=" xảy ra khi chỉ khi $x^2 = 6 - 2x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Vậy $\max V_{S.ABC} = \dfrac{1}{6}$ khi chỉ khi $AB = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. B	3. D	4. A	6. C	7. B	8. D	9. D	10. A	12. B
13. A	14. C	15. C	17. A	18. A	19. C	20. B	21. B	23. C	24. C
25. B	26. C	27. C	28. B	29. D	30. A	31. D	32. B	33. A	34. B
35. B	37. D	38. D	39. C	40. C	41. B	42. B	43. D	44. A	46. A
47. C	48. D	49. B	50. B						

37 ĐỀ THI THỬ THPT TRẦN PHÚ, HÀ TĨNH, LẦN 2 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Diện tích đáy của khối chóp có chiều cao bằng h và thể tích bằng V là

(A) $B = \frac{6V}{h}$. (B) $B = \frac{3V}{h}$. (C) $B = \frac{2V}{h}$. (D) $B = \frac{V}{h}$.

Lời giải.

Ta có: $V = \frac{1}{3}Bh \Rightarrow B = \frac{3V}{h}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Phần thực và phần ảo của số phức $z = 1 + 2i$ lần lượt là

(A) 1 và 2. (B) 1 và i. (C) 1 và $2i$. (D) 2 và 1.

Lời giải.

Số phức z có phần thực là 1 và phần ảo là 2.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; -3)$, hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (Oxy) là điểm

(A) $M'(1; 0; -3)$. (B) $M'(0; 2; -3)$. (C) $M'(1; 2; 0)$. (D) $M'(1; 2; 3)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $M'(1; 2; 0)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x - 5}{-x + 3}$ bằng

(A) $-\frac{5}{3}$. (B) -1. (C) 3. (D) -2.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 5}{-x + 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(2 - \frac{5}{x}\right)}{x\left(-1 + \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - \frac{5}{x}}{-1 + \frac{3}{x}} = -2.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Một khối nón có thể tích bằng 4π và chiều cao bằng 3. Bán kính đường tròn đáy bằng

(A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. (B) $\frac{4}{3}$. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Ta có: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \Rightarrow 4\pi = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 3 \Rightarrow R^2 = 4 \Rightarrow R = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, tìm phương trình mặt phẳng (α) cắt ba trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm $A(-3; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; -2)$.

(A) $4x - 3y + 6z - 12 = 0$. (B) $4x + 3y - 6z + 12 = 0$.

(C) $4x - 3y + 6z + 12 = 0$. (D) $4x + 3y + 6z + 12 = 0$.

Lời giải.

Phương trình $(\alpha): \dfrac{x}{-3} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{-2} = 1 \Leftrightarrow 4x - 3y + 6z = -12 \Leftrightarrow 4x - 3y + 6z + 12 = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Cho tập hợp M có 10 phần tử. Số tập con gồm 3 phần tử của M là

A 3^{10}. B 10^3. C A_{10}^3. D C_{10}^3.

Lời giải.

Số tập con gồm 3 phần tử của M bằng C_{10}^3.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{5}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình nào dưới đây?

A $x = 1$. B $y = 5$. C $x = 0$. D $y = 0$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x-1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5}{x-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Cho $a, b > 0$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A $\log(ab^2) = 2\log a + 2\log b$. B $\log(ab) = \log a - \log b$.

C $\log(ab) = \log a \cdot \log b$. D $\log(ab^2) = \log a + 2\log b$.

Lời giải.

Ta có $\log(ab^2) = \log a + \log b^2 = \log a + 2\log b$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 4$ trên đoạn $[-2; 2]$ bằng

A 10. B 6. C 24. D 4.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Mặt khác: $f(-2) = -2$; $f(2) = 6$; $f(1) = 2$; $f(-1) = 6$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 2]$ là 6.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Phương trình $\log_3(3x - 2) = 3$ có nghiệm là

A $x = \dfrac{29}{3}$. B $x = 87$. C $x = \dfrac{11}{3}$. D $x = \dfrac{25}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện $3x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{2}{3}$.

Ta có: $\log_3(3x-2) = 3 \Leftrightarrow \log_3(3x-2) = \log_3 3^3 \Leftrightarrow 3x - 2 = 27 \Leftrightarrow x = \dfrac{29}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$.

A $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{2x} + C$. B $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2x} + C$.

Ⓒ $\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{2x+1} + C.$ **D** $\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C.$

Lời giải.

Ta có $\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}(2x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C.$

Chọn đáp án D □

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b,\ (a < b)$ được tính theo công thức

Ⓐ $S = \left|\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|.$ Ⓑ $S = \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$ Ⓒ $S = \pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$ **D** $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

Theo lí thuyết về tính diện tích hình phẳng ta có diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b,\ (a < b)$ được tính theo công thức $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$

Chọn đáp án D □

Câu 14. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_1^5 \dfrac{\mathrm{d}x}{1-2x}.$

Ⓐ $I = -\ln 9.$ Ⓑ $I = \ln 9.$ **C** $I = -\ln 3.$ Ⓓ $I = \ln 3.$

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_1^5 \dfrac{\mathrm{d}x}{1-2x} = -\dfrac{1}{2}\int_1^5 \dfrac{\mathrm{d}(1-2x)}{1-2x} = -\dfrac{1}{2}\ln|1-2x|\Big|_1^5 = -\ln 3.$

Chọn đáp án C □

Câu 15. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ là

Ⓐ 7. Ⓑ -20. **C** -25. Ⓓ 3.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	-25	$\nearrow$	$+\infty$

Nhìn vào BBT ta thấy giá trị cực tiểu của hàm số là -25.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A $(0; +\infty)$. **B** $(-\infty; 0)$. **C** $(-1; 0)$. **D** $(-\infty; -2)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$ nên chọn đáp án D.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Khối cầu có bán kính $R = 6$ có thể tích bằng bao nhiêu?

A 144π. **B** 288π. **C** 48π. **D** 72π.

Lời giải.

Ta có công thức tính thể tích khối cầu $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Từ đó suy ra thể tích khối cầu đã cho là $V = \dfrac{4}{3}\pi 6^3 = 288\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 3$ và đường thẳng $y = x$.

A 1. **B** 0. **C** 3. **D** 2.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - 3x + 3 = x \Leftrightarrow x^3 - 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{-1 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \dfrac{-1 - \sqrt{13}}{2}. \end{array}\right.$$

Phương trình có ba nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 3$ cắt đường thẳng $y = x$ tại ba điểm phân biệt.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều và có thể tích $V = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. Diện tích xung quanh S của hình nón đó là

A $S = 4\pi a^2$. **B** $S = 2\pi a^2$. **C** $S = \dfrac{1}{2}\pi a^2$. **D** $S = 3\pi a^2$.

Lời giải.

Gọi R là bán kính đáy của hình nón.

Vì thiết diện qua trục là tam giác đều nên chiều cao của hình nón là $h = R\sqrt{3}$.

Từ đây ta suy ra thể của khối nón $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{\pi R^3\sqrt{3}}{3}$. (1)

Theo giả thiết ta có $V = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $R = a$. Do đó diện tích xung quanh là $S = \pi a \cdot 2a = 2\pi a^2$.

Chọn đáp án B □

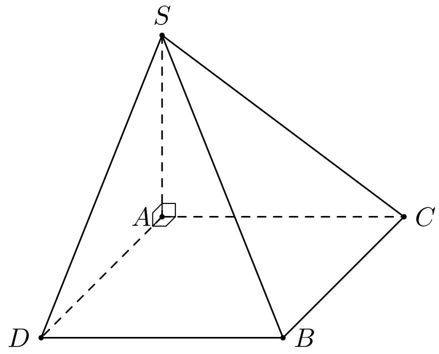
Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $3a^3$. B. $9a^3$. C. a^3. D. $\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải.

Ta có thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot a^2 = a^3.$$

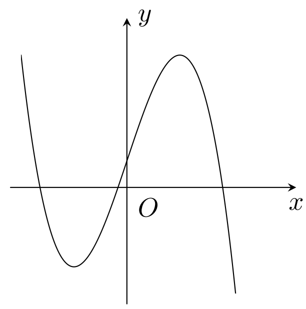


Chọn đáp án C □

Câu 21.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho có mấy điểm cực trị?

A. 0. B. 4. C. 2. D. 1.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có 2 điểm cực trị.

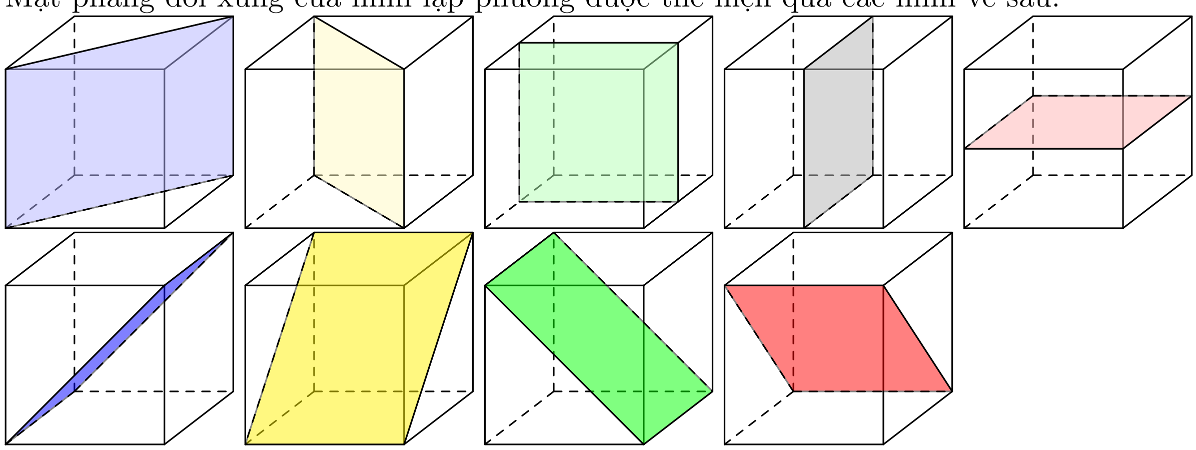
Chọn đáp án C □

Câu 22. Hình lập phương có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 15. B. 9. C. 6. D. 12.

Lời giải.

Mặt phẳng đối xứng của hình lập phương được thể hiện qua các hình vẽ sau:



Chọn đáp án B □

Câu 23. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2a$, $AA' = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $3a^3$. **B** a^3. **C** $\dfrac{3a^3}{4}$. **D** $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.

Vì tam giác ABC là tam giác đều cạnh $2a$ nên diện tích đáy $S_{\triangle ABC} = \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.

Lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên đường cao là AA'.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = a\sqrt{3} \cdot a^2\sqrt{3} = 3a^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Tính thể tích V của khối trụ có bán kính đáy và chiều cao đều bằng 2.

A $V = 12\pi$. **B** $V = 8\pi$. **C** $V = 16\pi$. **D** $V = 4\pi$.

Lời giải.

Theo đề bài ta có bán kính đáy $R = 2$, chiều cao khối trụ $h = 2$.

Do đó $V = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 2 = 8\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;1;1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;3;2)$. Đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC nhận véc-tơ nào dưới đây làm một véc-tơ chỉ phương?

A $\vec{a} = (1;1;0)$. **B** $\vec{c} = (-1;2;1)$. **C** $\vec{b} = (-2;2;2)$. **D** $\vec{d} = (-1;1;0)$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, suy ra tọa độ điểm $M(0;2;1)$.

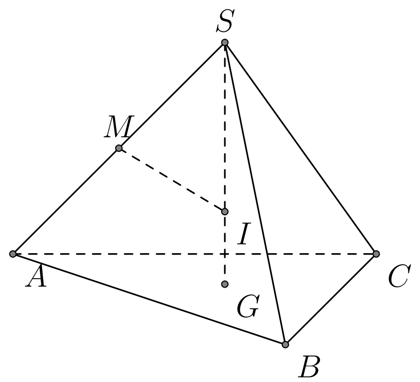
Đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AM} = (-1;1;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng $\sqrt{6}$ và chiều cao $h = 1$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp đó là

A $S = 9\pi$. **B** $S = 27\pi$. **C** $S = 6\pi$. **D** $S = 5\pi$.

Lời giải.



Gọi hình chóp tam giác đều là $S.ABC$. Gọi G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, suy ra đường cao hình chóp tam giác đều là $S.ABC$ là SG.

Ta có: $AG = \sqrt{2}; SA = \sqrt{SG^2 + AG^2} = \sqrt{3}$.

Tam giác ABC đều nên G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đáy.

Gọi d là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì d là SG.

Gọi M trung điểm của SA, dựng mặt phẳng trung trực SA cắt d tại I, khi đó $IA = IB = IC = IS$. Do đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$ là $R = IS$.

Ta có ΔSMI đồng dạng với ΔSGA, suy ra $SI = \dfrac{SA^2}{2SG} = \dfrac{3}{2}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là

$S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = 9\pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;1)$ và $B(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB.

(A) $(P): x+3y+4z-26=0$.
(B) $(P): x+y+2z-3=0$.
(C) $(P): x+y+2z-6=0$.
(D) $(P): x+3y+4z-7=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véctơ pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{AB}=(1;1;2)$.

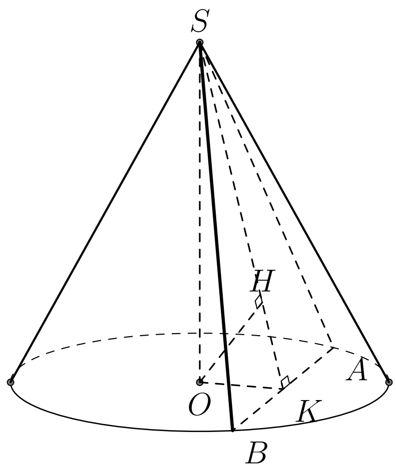
Phương trình mặt phẳng (P) là: $x+y-1+2(z-1)=0$ hay $(P): x+y+2z-3=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h=20$ (cm), bán kính đáy $r=25$ (cm). Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12 (cm). Tính diện tích của thiết diện đó.

(A) $S=400$ (cm^2). (B) $S=500$ (cm^2). (C) $S=406$ (cm^2). (D) $S=300$ (cm^2).

Lời giải.



Thiết diện qua đỉnh là tam giác SAB.

Gọi K là trung điểm $AB \Rightarrow OK\perp AB \Rightarrow AB\perp(SOK) \Rightarrow (SAB)\perp(SOK)$.

Kẻ $OH\perp SK\ (H\in SK) \Rightarrow OH\perp(SAB) \Rightarrow OH=12$(cm).

Ta có: $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OK^2}+\dfrac{1}{OS^2} \Rightarrow \dfrac{1}{OK^2}=\dfrac{1}{12^2}-\dfrac{1}{20^2}=\dfrac{1}{225} \Rightarrow OK=15$ (cm).

$KB=\sqrt{OB^2-OK^2}=\sqrt{25^2-15^2}=20 \Rightarrow AB=2BK=40$ (cm).

$SK=\sqrt{SO^2+OK^2}=\sqrt{20^2+15^2}=25$ (cm).

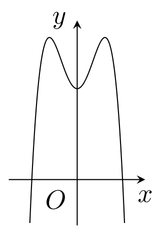
$\Rightarrow S_{\Delta SAB}=\dfrac{1}{2}.SK.AB=500$ (cm^2).

Chọn đáp án (B) □

Câu 29.

Hàm số nào sau đây có đồ thị là đường cong có dạng như hình vẽ bên?

(A) $y=-x^2+x-4$.
(B) $y=x^4-3x^2-4$.
(C) $y=-x^3+2x^2+4$.
(D) $y=-x^4+3x^2+4$.



Lời giải.

+) Quan sát đường cong có dạng như hình vẽ bên là đồ thị của hàm trùng phương $y=ax^4+bx^2+c\,(a\neq 0) \Rightarrow$ đáp án A, C loại.

+) $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$ nên $a<0$ (hoặc $y(0)>0$).

Vậy loại đáp án B, chọn đáp án D.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Tập xác định của hàm số $y=(x^2-3x+2)^{\pi}$ là

(A) $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.
(B) $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

(C) $(1;2)$. (D) $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2-3x+2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1 \\ x>2 \end{array}\right.$.

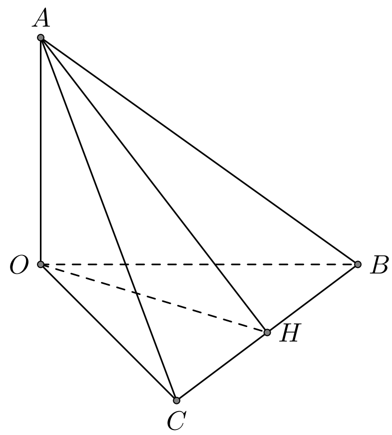
Vậy tập xác định của hàm số $y=(x^2-3x+2)^{\pi}$ là $D=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB=OC=a\sqrt{6}$, $OA=a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC).

A 30°. (B) 60°. (C) 90°. (D) 45°.

Lời giải.



Trong $\triangle OBC$ kẻ đường cao OH.

Theo đề bài ta có $\begin{cases} OA\perp OB \\ OA\perp OC \end{cases} \Rightarrow OA\perp BC$.

Lại có $BC\perp OH$ nên $BC\perp AH$.

Do đó góc giữa (ABC) và (OBC) là góc $\widehat{AHO}$.

Trong tam giác OBC vuông tại O có OH là đường cao nên

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{6a^2}+\frac{1}{6a^2}=\frac{1}{3a^2}\Rightarrow OH=a\sqrt{3}.$$

Từ đó $\tan\widehat{AHO}=\dfrac{OA}{OH}=\dfrac{a}{a\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow \widehat{AHO}=30^\circ$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Cho số phức z thỏa mãn $z(2-i)+13i=1$. Tính môđun của số phức z.

(A) $|z|=\dfrac{5\sqrt{34}}{3}$. (B) $|z|=34$. (C) $|z|=\dfrac{\sqrt{34}}{3}$. **D** $|z|=\sqrt{34}$.

Lời giải.

Ta có $z(2-i)+13i=1 \Leftrightarrow z=\dfrac{1-13i}{2-i}=3-5i \Rightarrow |z|=\sqrt{3^2+(-5)^2}=\sqrt{34}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Một hộp chứa 6 quả bóng đỏ (được đánh số từ 1 đến 6), 5 quả bóng vàng (được đánh số từ 1 đến 5), 4 quả bóng xanh (được đánh số từ 1 đến 4). Lấy ngẫu nhiên 4 quả bóng. Xác suất để 4 quả bóng lấy ra có đủ 3 màu mà không có quả bóng nào có số thứ tự trùng nhau bằng

(A) $\dfrac{43}{91}$. (B) $\dfrac{381}{455}$. **C** $\dfrac{74}{455}$. (D) $\dfrac{48}{91}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là số cách chọn 4 bi từ 15 bi.

Gọi A là biến cố "4 bi được chọn có đủ 3 màu và không có số thứ tự trùng nhau".

Trường hợp 1: 4 bi được chọn có số thứ tự từ 1 đến 4:

Chọn 1 màu xuất hiện 2 bi: C_3^1.

Chọn 2 số thuộc màu đó: C_4^2.

Chọn 2 bi thuộc 2 số còn lại: $2!$.

Trường hợp này có $\mathrm{C}_3^1\cdot\mathrm{C}_4^2\cdot 2!$ cách chọn.

Trường hợp 2: 4 bi được chọn có số thứ tự từ 1 đến 5 và có số 5:

Chọn bi mang số 5: C_2^1.

Chọn 3 số từ 1 đến 4: C_4^3.

Chọn 3 bi khác màu từ 3 số: $3! + 6 = 12$.

Trường hợp này có $C_2^1 \cdot C_4^3 \cdot 12$ cách chọn.

Trường hợp 3: 4 bi được chọn có số thứ tự từ 1 đến 6 và có số 6 không có số 5:

Chọn 3 số từ 1 đến 4: C_4^3.

Chọn 3 bi khác màu từ 3 số: $3! + 6 = 12$.

TH này có $C_4^3 \cdot 12$ cách chọn.

Trường hợp 4: 4 bi được chọn có số thứ tự từ 1 đến 6 và có số 6 và số 5:

TH A: 2 bi 5 và 6 đều là bi đỏ: 1.

Chọn 2 số từ 1 đến 4: C_4^2.

Chọn 2 bi khác màu từ các bi xanh và vàng: $2!$.

TH này có $C_4^2 \cdot 2!$ cách.

TH B: 2 bi 5 và 6 khác màu: 1.

Chọn 2 số từ 1 đến 4: C_4^2.

Chọn 2 bi khác màu và phải có 1 bi xanh: 5

TH này có $C_4^2 \cdot 5$ cách.

Vậy $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{222}{1365} = \dfrac{74}{455}$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 2$ biết rằng mỗi đơn vị dài trên các trục tọa độ là 2 cm.

A $\dfrac{15}{4}$ cm^2. **B** $\dfrac{17}{4}$ cm^2. **C** 17 cm^2. **D** 15 cm^2.

Lời giải.

Ta có $S = \displaystyle\int_{-1}^{2} |x^3|\, dx = \int_{-1}^{0} |x^3|\, dx + \int_{0}^{2} |x^3|\, dx = -\int_{-1}^{0} x^3\, dx + \int_{0}^{2} x^3\, dx = -\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{0} + \left.\frac{x^4}{4}\right|_{0}^{2} = \frac{17}{4}$.

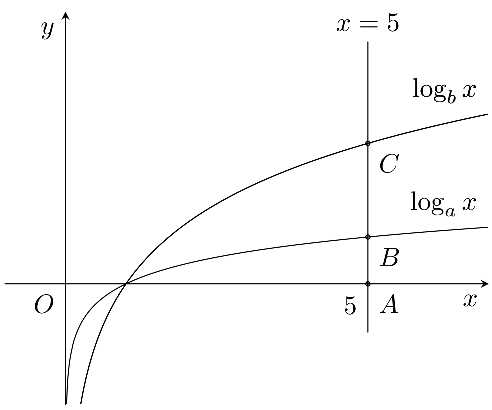
Do mỗi đơn vị trên trục là 2 cm nên $S = \dfrac{17}{4} \cdot 2^2$ cm$^2 = 17$ cm^2.

Chọn đáp án C □

Câu 35.

Cho các hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x = 5$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ lần lượt tại A, B và C. Biết rằng $CB = 2AB$. Mệnh đề nào sau đay là **đúng**?

A $a = 5b$. **B** $a = b^2$. **C** $a = b^3$. **D** $a^3 = b$.



Lời giải.

Ta có $A(5;0), B(5;\log_a 5), C(5;\log_b 5)$.

$CB = 2AB \Leftrightarrow \log_b 5 - \log_a 5 = 2\log_a 5 \Leftrightarrow \log_b 5 = 3\log_a 5 \Leftrightarrow \log_5 b = \dfrac{1}{3}\log_5 a \Leftrightarrow a = b^3$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $ABCD$ và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

A $\dfrac{2a\sqrt{3}}{15}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$. **D** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{15}$.

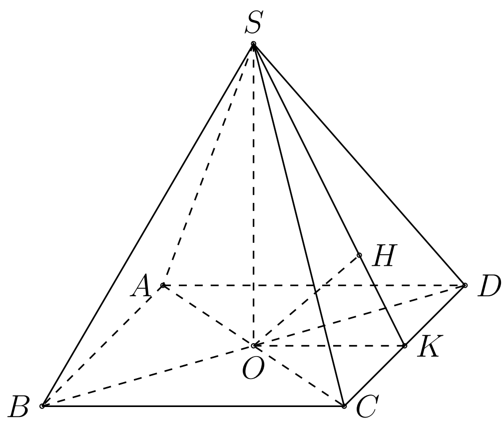
Lời giải.

Vì $AB \parallel (SCD)$ nên $\mathrm{d}(AB, SC) = \mathrm{d}(AB, (SCD)) = \mathrm{d}(A, (SCD)) = 2\mathrm{d}(O, (SCD))$.

Gọi K là trung điểm của CD. Khi đó $OK \perp CD \Rightarrow CD \perp (SOK)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên $SK \Rightarrow OH \perp (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(O, (SCD)) = OH$. Ta có

$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OK^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $\mathrm{d}(AB, SC) = 2OH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.



Chọn đáp án D □

Câu 37. Chị Lan có 400 triệu đồng mang đi gửi tiết kiệm ở hai loại kì hạn khác nhau đều theo thể thức lãi kép. Chị gửi 200 triệu đồng theo kì hạn quý với lãi suất 2,1% một quý, 200 triệu đồng còn lại chị gửi theo kì hạn tháng với lãi suất 0,73% một tháng. Sau khi gửi được đúng 1 năm, chị rút ra một nửa số tiền ở loại kì hạn theo quý và gửi vào loại kì hạn theo tháng. Hỏi sau đúng 2 năm kể từ khi gửi tiền lần đầu, chị Lan thu được tất cả bao nhiêu tiền lãi (làm tròn đến hàng nghìn)?

A 70656000 đồng. **B** 65393000 đồng. **C** 79760000 đồng. **D** 74813000 đồng.

Lời giải.

Số tiền chị Loan thu được ở năm thứ nhất là

+ Gửi kỳ hạn theo quý: $200000000(1 + r_1)^4 = A$.

+ Gửi kỳ hạn theo tháng: $200000000(1 + r_2)^{12} = B$.

Số tiền chị Loan thu được ở sau năm thứ hai là

+ Gửi kỳ hạn theo quý: $\dfrac{A}{2}(1 + r_1)^4$.

+ Gửi kỳ hạn theo tháng: $\left(\dfrac{A}{2} + B\right)(1 + r_2)^{12}$.

Số tiền lãi chị Loan thu được là $\dfrac{A}{2}(1+r_1)^4 + \left(\dfrac{A}{2} + B\right)(1+r_2)^{12} - 400000000 = 74813000$ (đồng).

Chọn đáp án D □

Câu 38. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có hai điểm cực trị A, B. Khi đó phương trình đường thẳng AB là

A $y = 2x - 1$. **B** $y = x - 2$. **C** $y = -x + 2$. **D** $y = -2x + 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$. Lấy y chia cho y' ta được $y = \frac{1}{3}x(3x^2-3) - 2x + 1$. Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y = -2x + 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích $V = 12$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB, P là điểm thuộc cạnh SC sao cho $PS = 2PC$. Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh SD tại Q. Thể tích khối chóp $S.MNPQ$ bằng

(A) $\frac{5}{18}$. **(B)** $\frac{7}{3}$. (C) $\frac{4}{3}$. (D) $\frac{12}{25}$.

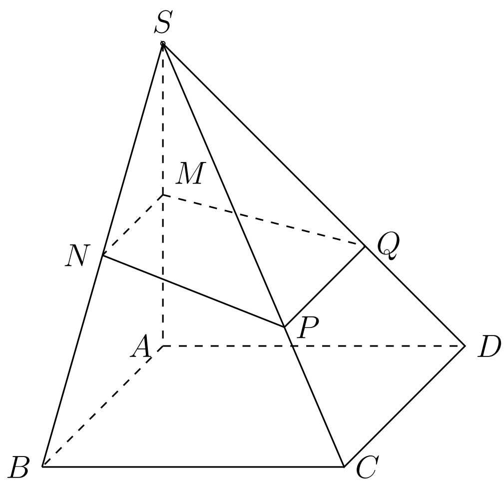
Lời giải.

Ta có $P \in (MNP) \cap (SCD)$ và $MN \parallel CD$. Do đó giao tuyến của (MNP) và (SCD) song song với CD. Qua P trong mặt phẳng (SCD) kẻ đường thẳng song song với CD cắt SD tại Q. Khi đó $(MNP) \cap (SCD) = PQ$ và $PQ \parallel CD \Rightarrow \frac{SP}{SC} = \frac{SQ}{SD} = \frac{2}{3}$. Ta có

$\frac{V_{SMNP}}{V_{SABCD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{V_{SMNP}}{V} = \frac{1}{12}$.

$\frac{V_{SMQP}}{V_{SABCD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{V_{SMQP}}{V} = \frac{1}{9}$.

Vậy $V_{SMNPQ} = \frac{7}{36}V = \frac{7}{3}$.



Chọn đáp án B □

Câu 40. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích của các hình nón tròn xoay sinh bởi tam giác ABC khi quay quanh các cạnh BC, AC, AB. Biết $V_2 = 3\pi, V_3 = 4\pi$. Tính V_1.

(A) $V_1 = \frac{19\pi}{5}$. (B) $V_1 = \frac{8\pi}{5}$. (C) $V_1 = \frac{16\pi}{5}$. **(D)** $V_1 = \frac{12\pi}{5}$.

Lời giải.

Ta có

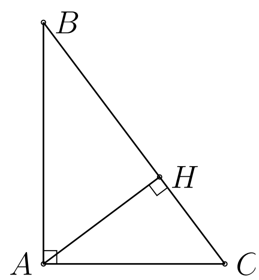
$V_1 = \frac{1}{3}(BH+CH)\pi AH^2 = \frac{1}{3}BC\pi AH^2$, $V_2 = \frac{1}{3}AC\pi AB^2$, $V_3 = \frac{1}{3}AB\pi AC^2$.

$\Rightarrow \frac{V_2}{V_3} = \frac{AB}{AC} = \frac{3\pi}{4\pi} = \frac{3}{4} \Rightarrow AB = \frac{3}{4}AC$.

$\Rightarrow V_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}AC\pi AC^2 = \frac{1}{4}\pi AC^3 = 4\pi$.

$\Rightarrow AC = \sqrt[3]{16} \Rightarrow AB = \frac{3}{4}\sqrt[3]{16} \Rightarrow AH = \frac{3}{5}\sqrt[3]{16} = \frac{5}{6}\sqrt[3]{16}, BC = \frac{5}{4}\sqrt[3]{16}$.

Vậy $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4}\sqrt[3]{16}\pi \cdot \left(\frac{3}{5}\sqrt[3]{16}\right)^2 = \frac{12\pi}{5}$.



Chọn đáp án D □

Câu 41. Biết $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = a\sqrt{\mathrm{e}} + b$ với $a,b \in \mathbb{Z}$. Tính $P = ab$.

(A) $P = 4$. **(B)** $P = -8$. (C) $P = 8$. (D) $P = -4$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \\ v = 2\sqrt{x} \end{cases}$, ta có

$$\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_{\mathrm{e}}^{1} - 2\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_{\mathrm{e}}^{1} - 4\sqrt{x}\Big|_{\mathrm{e}}^{1} = -2\sqrt{\mathrm{e}} + 4.$$

Từ đó suy ra $\begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$. Vậy $P = ab = -8$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Cho hàm số $y = \dfrac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Tìm số phần tử của S.

A 2. **B** 3. **C** 1. **D** 5.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{m}{2}\right\}$.

Ta có $y = \dfrac{mx+2}{2x+m} \Rightarrow y' = \dfrac{m^2-4}{(2x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi $y' < 0$, $\forall x \in (0;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ -\dfrac{m}{2} \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{m}{2} \le 0 \\ -\dfrac{m}{2} \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 0 \\ m \le 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m < 2.$$

Chọn đáp án A □

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(-1;2;0)$, $B(0;0;-2)$, $C(1;0;1)$, $D(2;1;-1)$. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên đoạn BC và BD sao cho $2\dfrac{BC}{BM} + 3\dfrac{BD}{BN} = 10$ và $\dfrac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}} = \dfrac{6}{25}$. Phương trình mặt phẳng (AMN) có dạng $ax + by + cz + 32 = 0$. Tính $S = a - b + c$.

A $S = 98$. **B** $S = 26$. **C** $S = 27$. **D** $S = 97$.

Lời giải.

Đặt: $\dfrac{BC}{BM} = x$; $\dfrac{BD}{BN} = y \Rightarrow 2\dfrac{BC}{BM} + 3\dfrac{BD}{BN} = 10 \Leftrightarrow 2x + 3y = 10 \Leftrightarrow x = \dfrac{10-3y}{2}$.

Ta có: $\dfrac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}} = \dfrac{6}{25} \Leftrightarrow \dfrac{BM}{BC} \cdot \dfrac{BN}{BD} = \dfrac{1}{xy} = \dfrac{6}{25} \Leftrightarrow \dfrac{10-3y}{2} \cdot y = \dfrac{25}{6} \Leftrightarrow y = \dfrac{5}{3} \Rightarrow x = \dfrac{5}{2}$.

Suy ra:

$$+\ \frac{BC}{BM} = \frac{5}{2} \Rightarrow 5\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{2x_C + 3x_B}{5} \\ y_M = \dfrac{2y_C + 3y_B}{5} \\ z_M = \dfrac{2z_C + 3z_B}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{2}{5}; 0; -\frac{4}{5}\right).$$

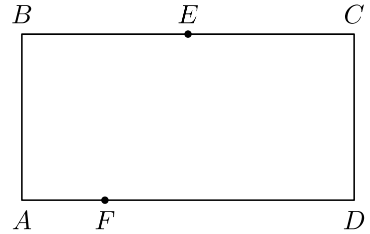
$$+\ \frac{BD}{BN} = \frac{5}{3} \Rightarrow 5\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{BD} \Rightarrow \begin{cases} x_N = \dfrac{3x_D + 2x_B}{5} \\ y_N = \dfrac{3y_D + 3y_B}{5} \\ z_N = \dfrac{3z_D + 3z_B}{5} \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{6}{5}; \frac{3}{5}; -\frac{7}{5}\right).$$

Thay A, M, N vào phương trình $ax + by + cz + 32 = 0$ ta có $a = 42$; $b = 5$; $c = 61 \Rightarrow S = 98$.

Chọn đáp án (A) □

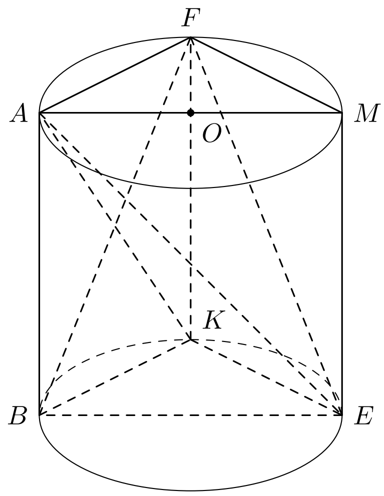
Câu 44.

Có một mảnh bìa hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 2a$, $AD = 4a$. Người ta đánh dấu E là trung điểm BC và $F \in AD$ sao cho $AF = a$. Sau đó người ta cuốn mảnh bìa lại sao cho cạnh DC trùng cạnh AB tạo thành một hình trụ. Tính thể tích tứ diện $ABEF$ với các đỉnh A, B, E, F nằm trên hình trụ vừa tạo thành.



(A) $\dfrac{16a^3}{3\pi^2}$. (B) $\dfrac{8a^3}{3\pi^2}$. (C) $\dfrac{a^3}{3\pi}$. (D) $\dfrac{8a^3}{\pi^2}$.

Lời giải.



Hai đáy của hình trụ là hai đường tròn bán kính $R = \dfrac{C}{2\pi} = \dfrac{2a}{\pi}$ (chu vi $C = AD = 4a$).

Gọi K là hình chiếu của F lên mặt đáy $\Rightarrow ABKF$ là hình chữ nhật.

Vì $\overset{\frown}{AF} = \dfrac{1}{4}(O, R) \Rightarrow AF = R\sqrt{2} = \dfrac{2\sqrt{2}a}{\pi}$

$\Rightarrow S_{ABKF} = AB \cdot AF = 2a \cdot \dfrac{2\sqrt{2}a}{\pi} = \dfrac{4\sqrt{2}a^2}{\pi}$.

$EK = \sqrt{BE^2 - BK^2} = \sqrt{\left(\dfrac{4a}{\pi}\right)^2 - \left(\dfrac{2\sqrt{2}a}{\pi}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{2}a}{\pi}$

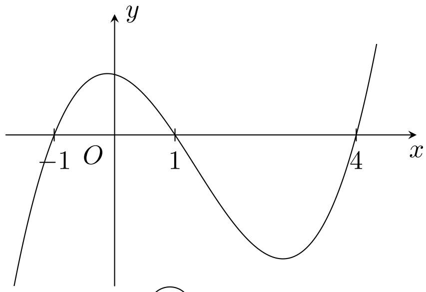
$\Rightarrow V_{E.ABKF} = \dfrac{1}{3}EK \cdot S_{ABKF} = \dfrac{16a^3}{3\pi}$

$\Rightarrow V_{E.ABF} = \dfrac{1}{2}V_{E.ABKF} = \dfrac{8a^3}{3\pi}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 45.

Cho hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$ trong đó m, n, p, q, $r \in \mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tập nghiệm của phương trình $f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r$ có tất cả bao nhiêu phần tử?



(A) 5. (B) 3. (C) 4. (D) 6.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt là -1, 1 và 4. Suy ra $m \neq 0$.

Khi đó $f'(x) = 4m(x+1)(x-1)(x-4) = 4m(x^3 - 4x^2 - x + 4)$. Suy ra

$$f(x) = m\left(x^4 - \frac{16}{3}x^3 - 2x^2 + 16x\right) + C.$$

Đồng nhất với $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$ ta được $\begin{cases} n = -\dfrac{16m}{3} \\ p = -2m \\ q = 16m \\ r = C \end{cases}$.

Từ đó, $f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r$

$\Leftrightarrow mx^4 - \dfrac{16m}{3}x^3 - 2mx^2 + 16mx + r = 16m + 8 \cdot \left(-\dfrac{16m}{3}\right) + 4 \cdot (-2m) + 2.16m + r$

$\Leftrightarrow mx^4 - \dfrac{16m}{3}x^3 - 2mx^2 + 16mx + \dfrac{8}{3}m = 0 \Leftrightarrow x^4 - \dfrac{16}{3}x^3 - 2x^2 + 16x + \dfrac{8}{3} = 0$ (vì $m \neq 0$).

Xét hàm số $g(x) = x^4 - \dfrac{16}{3}x^3 - 2x^2 + 16x + \dfrac{8}{3}$. Ta có

$$g'(x) = 4(x+1)(x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	-9	↗	$\dfrac{37}{3}$	↘	$-\dfrac{152}{3}$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra: $g(x) = 0$ có 4 nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$ và các điểm $A(0;1;1)$, $B(-1;-2;-3)$, $C(1;0;-3)$. Điểm D thuộc mặt cầu (S). Thể tích lớn nhất của tứ diện $ABCD$ bằng

A 9. **B** $\dfrac{8}{3}$. **C** 7. **D** $\dfrac{16}{3}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm là $I(1;0;-1)$ và bán kính $R = 2$.

Khi V_{DABC} lớn nhất thì $\dfrac{V_{DABC}}{V_{IABC}} = \dfrac{d(D,(ABC))}{d(I,(ABC))} = \dfrac{R + d(I,(ABC))}{d(I,(ABC))}$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;-3;-4)$, $\overrightarrow{AC} = (1;-1;-4)$, $\overrightarrow{AI} = (1;-1;-2)$. Suy ra

$$V_{IABC} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \cdot \overrightarrow{AI}\right| = \frac{4}{3},$$

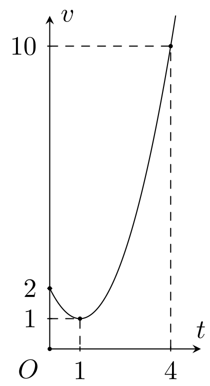
$$d(I,(ABC)) = \frac{6V_{IABC}}{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|} = \frac{2}{3}.$$

Khi đó, $V_{DABC} = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{2 + \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{16}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 47.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v(km/h) phụ thuộc thời gian t(h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật đi được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



A $s = \dfrac{40}{3}$(km). **B** $s = 8$(km). **C** $s = \dfrac{46}{3}$(km). **D** $s = 6$(km).

Lời giải.

Vì đồ thị của hàm số $v(t)$ có dạng là một phần của parabol nên $v(t) = at^2 + bt + c$ $(a \neq 0, t \geq 0)$.
Đồ thị hàm số $v(t)$ đi qua các điểm $(0;2)$, $(1;1)$, $(4;10)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} c = 2 \\ a + b + c = 1 \\ 16a + 4b + c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2. \end{cases}$$

Do đó $v(t) = t^2 - 2t + 2$.

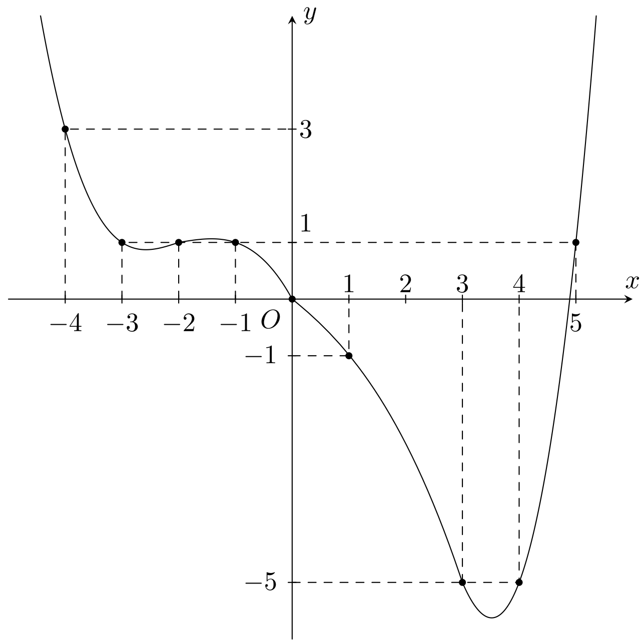
Vậy quãng đường mà vật đi được là $s = \displaystyle\int_0^4 v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^4 (t^2 - 2t + 2)\,\mathrm{d}t = \dfrac{40}{3}$(km).

Chọn đáp án A □

Câu 48.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f\left(3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}\right) = m - 3$ có nghiệm.

A 13. **B** 12. **C** 8. **D** 10.



Lời giải.

Điều kiện $x \in \left[0; \dfrac{2}{3}\right]$.

Đặt $t = 3 - 4\sqrt{6x - 9x^2} = 3 - 4\sqrt{1 - (3x-1)^2}$.

Ta có $x \in \left[0; \dfrac{2}{3}\right] \Leftrightarrow 3x - 1 \in [-1;1] \Leftrightarrow (3x-1)^2 \in [0;1] \Leftrightarrow 1 - (3x-1)^2 \in [0;1] \Leftrightarrow t \in [-1;3]$.

Yêu cầu bài toán tương đương với tìm m để phương trình $f(t) = \dfrac{m-3}{2}$ có nghiệm trên $[-1;3]$.
Từ đồ thị đã cho, điều này tương đương với $-5 \leq \dfrac{m-3}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -7 \leq m \leq 5$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-7;-6;-5;\ldots;3;4;5\}$. Vậy có 13 giá trị nguyên của tham số m.
Chọn đáp án A □

Câu 49. Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8)$ có hai nghiệm phân biệt là

A Vô số. B 4. C 3. D 5.

Lời giải.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ mx - 8 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ m = \dfrac{x^2 - 2x + 9}{x} \quad (*) \end{cases}$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.
Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 9}{x}$ trên khoảng $(0;1)$. Ta có $f'(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (do $x > 1$).
Cùng với $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 8$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như sau.

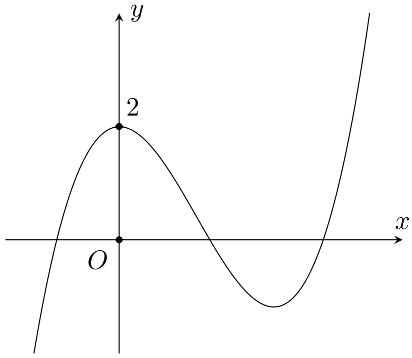
x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	8	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên, ta thấy phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 khi và chỉ khi $4 < m < 8$.
Do $m \in Z$ nên $m \in \{5;6;7\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 50.

Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ bên. Biết $\displaystyle\int_1^4 xf''(x-1)\,\mathrm{d}x = 7$ và $\displaystyle\int_1^2 2xf'(x^2-1)\,\mathrm{d}x = -3$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 3$ là

A $y = x - 4$. B $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{2}$.
C $y = 2x - 7$. D $y = 3x - 10$.



Lời giải.
Từ đồ thị hàm số ta suy ra $f(0) = 2$ và $f'(0) = 0$.
Xét tích phân $\displaystyle\int_1^2 2xf'(x^2-1)\,\mathrm{d}x$. Đặt $u = x^2 - 1 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$.
Đổi cận $x = 1 \Rightarrow u = 0$; $x = 2 \Rightarrow u = 3$.

Do đó $\int\limits_1^2 2xf'(x^2-1)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 f'(u)\,\mathrm{d}u = f(u)\Big|_0^3 = f(3)-f(0) \Rightarrow f(3)-f(0)=-3 \Leftrightarrow f(3)=-1$.

Xét tích phân $\int\limits_1^4 xf''(x-1)\,\mathrm{d}x$. Đặt $u=x-1 \Rightarrow x=u+1 \Rightarrow \mathrm{d}x=\mathrm{d}u$.

Đổi cận $x=1 \Rightarrow u=0$; $x=4 \Rightarrow u=3$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int\limits_1^4 xf''(x-1)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 (u+1)f''(u)\,\mathrm{d}u &= \int\limits_0^3 (u+1)\,\mathrm{d}f'(u) = (u+1)f'(x)\Big|_0^3 - \int\limits_0^3 f'(u)\,\mathrm{d}u\\ &= 4f'(3)-f'(0)-f(u)\Big|_0^3 = 4f'(3)-f'(0)-f(3)+f(0).\end{aligned}$$

Do đó $4f'(3)-f'(0)-f(3)+f(0)=7 \Leftrightarrow 4f'(3)=7+f(3)-f(0)=4 \Leftrightarrow f'(3)=1$.

Như vậy, $f(3)=-1, f'(3)=1$. Suy ra phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x=3$ là $y=x-4$.

Chọn đáp án A □

HẾT

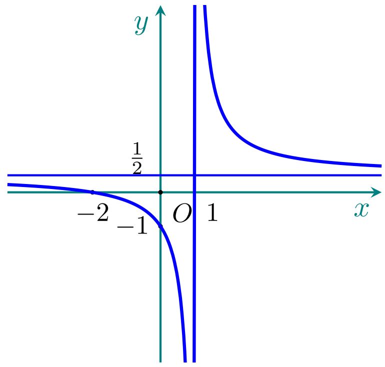
ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. A	3. C	4. D	5. D	6. C	7. D	8. D	9. D	10. B
11. A	12. D	13. D	14. C	15. C	16. D	17. B	18. C	19. B	20. C
21. C	22. B	23. A	24. B	25. D	26. A	27. B	28. B	29. D	30. A
31. A	32. D	33. C	34. C	35. C	36. D	37. D	38. D	39. B	40. D
41. B	42. A	43. A	44. B	45. C	46. D	47. A	48. A	49. C	50. A

38 ĐỀ THI THỬ THPT CẨM BÌNH, HÀ TĨNH, LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.
Đồ thị (C) ở hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



(A) $y = \dfrac{1}{2x+2}$.
(B) $y = \dfrac{x-2}{2x-2}$.
(C) $y = \dfrac{x+2}{2x-2}$.
(D) $y = x^3 - 2x + 3$.

Lời giải.
Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$ và tiệm cận ngang là $y = \dfrac{1}{2}$ nên A và D loại.
Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$ nên $y' < 0$, $\forall x \neq 1$. Vậy C đúng.
Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Diện tích mặt cầu có đường kính bằng $2a$ là
(A) $16\pi a^3$.
(B) πa^2.
(C) $\dfrac{4\pi a^3}{3}$.
(D) $4\pi a^2$.

Lời giải.
Đường kính $d = 2a$. Suy ra bán kính mặt cầu là $R = \dfrac{d}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$.
Vậy diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4\pi a^2$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Dãy số nào sau đây là cấp số nhân?
(A) $u_n = n^2$.
(B) $u_n = \cos n$.
(C) $u_n = 2^{n-1}$.
(D) $u_n = 2n - 1$..

Lời giải.
Ta có $u_n = 2^{n-1} \Rightarrow u_{n+1} = 2^n$, suy ra $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2$. Vậy dãy số (u_n) với $u_n = 2^{n-1}$ là cấp số nhân với công bội $q = 2$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Số cách chọn 5 học sinh trong 10 học sinh của một lớp đi tham quan di tích Ngã Ba Đồng Lộc là
(A) 5.
(B) C_{10}^5.
(C) P_5.
(D) A_{10}^5.

Lời giải.
Mỗi cách chọn 5 học sinh trong số 10 học sinh là một tổ hợp chập 5 của 10. Vậy cách chọn 5 học sinh trong 10 học sinh của một lớp đi tham quan di tích Ngã Ba Đồng Lộc là C_{10}^5.
Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Nghiệm của phương trình $3^{2x-1} = 27$ là
(A) $x = 2$.
(B) $x = 3$.
(C) $x = 0$.
(D) $x = -2$.

Lời giải.
Ta có: $3^{2x-1} = 27 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Đồ thị hàm số $y = x^3 - mx + m + 5$ đi qua điểm $I(-1; -2)$, giá trị m là

(A) $m = 3$. (B) $m = \dfrac{2}{3}$. (C) $m = -\dfrac{2}{3}$. **D** $m = -3$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = x^3 - mx + m + 5$ đi qua điểm $I(-1; -2)$ nên ta có:

$-2 = -1 + m + m + 5 \Leftrightarrow m = -3$.

Vậy với $m = -3$ thì đồ thị hàm số $y = x^3 - mx + m + 5$ đi qua điểm $I(-1; -2)$.

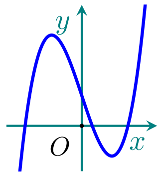
Chọn đáp án (D) □

Câu 7.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

(A) Hàm số không có cực trị. **B** Giá trị cực đại dương.

(C) Điểm cực tiểu âm. (D) Giá trị cực tiểu dương.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy:

- Hàm số có hai cực trị $\Rightarrow A$ sai.
- Điểm cực đại nằm phía trên trục hoành $\Rightarrow$ Giá trị cực đại dương $\Rightarrow B$ đúng.
- Điểm cực tiểu nằm phía bên phải trục tung $\Rightarrow$ Điểm cực tiểu dương $\Rightarrow C$ sai.
- Điểm cực tiểu nằm phía dưới trục hoành $\Rightarrow$ Giá trị cực tiểu âm $\Rightarrow D$ sai.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Giao điểm của mặt phẳng $(P): x + y - z - 2 = 0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$.

A $(1; 1; 0)$. (B) $(0; 2; 4)$. (C) $(0; 4; 2)$. (D) $(2; 0; 3)$.

Lời giải.

Gọi $A(x; y; z)$ là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P).

Ta có: $2 + t - t - (3 + 3t) - 2 = 0 \Leftrightarrow -3t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1$.

Suy ra $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \\ z = 0 \end{cases}$ Vậy $A(1; 1; 0)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, trục Ox có phương trình tham số là

(A) $x = 0$. (B) $y + z = 0$. (C) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Lời giải.

Trục Ox đi qua $O(0; 0; 0)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{i}(1; 0; 0)$ nên có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = 0 + 1.t \\ y = 0 + 0.t \\ z = 0 + 0.t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0. \\ z = 0 \end{cases}$$

Chọn đáp án D □

Câu 10. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \cos x$ là

A $2x - \sin x + C$. **B** $\frac{1}{3}x^3 + \sin x + C$. C $\frac{1}{3}x^3 - \sin x + C$. D $x^3 + \sin x + C$.

Lời giải.

Ta có: $\int (x^2 + \cos x)dx = \frac{1}{3}x^3 + \sin x + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Nếu $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$, $\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$ thì $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A -2. B 2. C 3. **D** 4.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 5 + (-1) = 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bằng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↘	0	↗	3	↘	0	↗	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A $(-\infty; 0)$. B $(0; 3)$. **C** $(-1; 0)$. D $(0; 1)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Tính thể tích khối hộp chữ nhật có độ dài 3 cạnh xuất phát từ một đỉnh là $2a$, $3a$, $4a$.

A a^3. B $9a^3$. C $24a$. **D** $24a^3$.

Lời giải.

Gọi x, y, z là 3 cạnh của hình hộp chữ nhật.

Ta có: $V = x.y.z = 2a.3a.4a = 24a^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Với a, b là hai số thực dương tùy ý, $\ln \frac{a^4 e}{b}$ bằng

A $4\ln a - \ln b + 1$. **B** $4\ln b - \ln a + 1$. **C** $4\ln a + \ln b - 1$. **D** $4\ln a + \ln b + 1$.

Lời giải.

Ta có: $\ln \dfrac{a^4 e}{b} = \ln a^4 + \ln e - \ln b = 4\ln a + 1 - \ln b = 4\ln a - \ln b + 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;-1)$, $B(2;1;2)$. Độ dài đoạn AB bằng

A $\sqrt{10}$. **B** $\sqrt{14}$. **C** 9. **D** 10.

Lời giải.

Ta có: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (1-1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{10}$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Phương trình $2\sin x - \sqrt{2} = 0$ có công thức nghiệm là

A $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

B $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

C $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

D $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có: $2\sin x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là

A 1. **B** 2. **C** 0. **D** 3.

Lời giải.

Ta có $2f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{3}{2}$ là PTHĐGĐ của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = -\dfrac{3}{2}$. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy (C) và d cắt nhau tại 1 điểm. Vậy Phương trình $2f(x) + 3 = 0$ có 1 nghiệm.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

A 2. **B** 3. **C** 1. **D** 4.

Lời giải.

Ta có: $y' = -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0;2] \\ x = -1 \notin [0;2] \end{array}\right.$.

$y(0) = 1; y(1) = 3; y(2) = -1$.

Khi đó $\max\limits_{[0;2]} y = 3; \min\limits_{[0;2]} y = -1$. Vậy $\max\limits_{[0;2]} y + \min\limits_{[0;2]} y = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-4}$ là

A 4. B 3. C 2. D 1.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{R} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-4}$ có $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-4} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-4} = -\infty$ nên đồ thị có hai tiệm cận đứng là $x = 2$ và $x = -2$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-4} = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 0$.

Do đó đồ thị có 3 tiệm cận.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Diện tích hình phẳng H được giới hạn bởi hai đồ thị $y = x^3 - 2x - 1$ và $y = 2x - 1$ được tính theo công thức

A $S = \displaystyle\int_{-2}^{0} \left|x^3 - 4x\right| \mathrm{d}x$.

B $S = \displaystyle\int_{0}^{2} \left|x^3 - 4x\right| \mathrm{d}x$.

C $S = \displaystyle\int_{-2}^{2} \left(x^3 - 4x\right) \mathrm{d}x$.

D $S = \displaystyle\int_{-2}^{2} \left|x^3 - 4x\right| \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^3 - 2x - 1$ và $y = 2x - 1$ là

$$x^3 - 2x - 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right..$$

Vậy diện tích hình phẳng H được giới hạn bởi hai đồ thị $y = x^3 - 2x - 1$ và $y = 2x - 1$ được tính theo công thức $S = \displaystyle\int_{-2}^{2} \left|x^3 - 4x\right| \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. [2H3B3-5] Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x + 2y - 8 = 0$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$. Khoảng cách giữa đưởng thẳng d và mặt phẳng P bằng

A $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$. B $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. C $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. D $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

(Kiều Văn Công)

Lời giải.

Đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$ đi qua $A(1; 2; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (2; -1; 1)$.

Mặt phẳng (P): $x + 2y - 8 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (1; 2; 0)$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 2 - 2 + 0 = 0 \\ A \notin (P) \end{cases}$, nên đường thẳng d song song với mặt phẳng (P).

Vậy khoảng cách giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P).

$\mathrm{d}(d; (P)) = \mathrm{d}(A; (P)) = \dfrac{|1 + 4 - 8|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. [2H2Y1-2] Cho hình nón có đường cao $h = a$, bán kính $r = a$. Diện tích xung quanh hình nón là

A $4\pi a^2$. **B** $2\pi a^2$. **C** $2\sqrt{2}\pi a^2$. **D** $\sqrt{2}\pi a^2$.

(Kiều Văn Công)

Lời giải.

Độ dài đường sinh của hình nón trên là $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot a\sqrt{2} \cdot a = \sqrt{2}\pi a^2$.

Chọn đáp án D □

Câu 23. [2H1B3-1] Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau và diện tích toàn phần bằng $9 + 9\sqrt{3}$. Độ dài cạnh hình chóp bằng

A 2. **B** 3. **C** 1. **D** 4.

(Kiều Văn Công)

Lời giải.

Gọi độ dài cạnh của hình chóp bằng $x (x > 0)$.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên đáy $ABCD$ là hình vuông. Hình chóp có tất cả các cạnh bằng x nên các mặt bên là các tam giác đều cạnh bằng x.

Diện tích toàn phần của hình chóp bằng $9 + 9\sqrt{3}$ nên

$S_{ABCD} + 4S_{SAB} = 9 + 9\sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 + 4 \cdot \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = 9 + 9\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x^2(1 + \sqrt{3}) = 9(1 + \sqrt{3}) \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy độ dài cạnh hình chóp bằng 3.

Chọn đáp án B □

Câu 24. [2D2B6-2] Nghiệm của bất phương trình $\log_{2-\sqrt{3}}(2x - 5) \geq \log_{2-\sqrt{3}}(x - 1)$ là

A $\dfrac{5}{2} < x \leq 4$. **B** $1 < x \leq 4$. **C** $\dfrac{5}{2} \leq x \leq 4$. **D** $x \geq 4$.

(Kiều Văn Công)

Lời giải.

$\log_{2-\sqrt{3}}(2x-5) \geq \log_{2-\sqrt{3}}(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5 \leq x-1 \\ 2x-5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x > \dfrac{5}{2}. \end{cases}$

Vậy nghiệm của bất phương trinh là $\dfrac{5}{2} < x \leq 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. [2D2B3-1] Đặt $\log_5 2 = a$. Khi đó $\log_{25} 800$ bằng.

A $\dfrac{5a+2}{2}$. **B** $\dfrac{2a-5}{2}$. **C** $\dfrac{5a-2}{2}$. **D** $\dfrac{2a+5}{2}$.

(Kiều Văn Công)

Lời giải.

Ta có $\log_{25} 800 = \dfrac{\log_5 800}{\log_5 25} = \dfrac{\log_5 2^5 \cdot 5^2}{\log_5 5^2} = \dfrac{5\log_5 2 + 2}{2} = \dfrac{5a+2}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. [2D1B2-1] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x^2-x)(x-1)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A 1. **B** 3. **C** 2. **D** 0.

(Kiều Văn Công)

Lời giải.

Ta thấy $f'(x) = (x+1)(x^2-x)(x-1) = x(x+1)(x-1)^2$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=1. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu đạo hàm:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số đạt cực trị tại hai điểm $x=-1$ và $x=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. [2D2Y2-2] Hàm số $y = 2^{x^2-x}$ có đạo hàm là.

A $y' = (2x-1)2^{x^2-x}$. **B** $y' = (x^2-x)2^{x^2-x-1}$.
C $y' = (2x-1)2^{x^2-x}\ln 2$. **D** $y' = 2^{x^2-x}\ln 2$.

(Kiều Văn Công)

Lời giải.

$y' = (x^2-x)' \cdot 2^{x^2-x} \cdot \ln 2 = (2x-1) \cdot 2^{x^2-x} \cdot \ln 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. [2H3Y1-3] Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầy $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 1 = 0$ có tâm I và bán kính R là.

A $I(-1;0;2), R = 2$. **B** $I(-1;0;2), R = 4$. **C** $I(1;0;-2), R = 2$. **D** $I(1;0;-2), R = 4$.

(Kiều Văn Công)

Lời giải.

Dễ thấy mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 1 = 0$ có:

Tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2 - 1} = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. [1D5B2-2] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-1}$ tại điểm có hoàn độ $x = 2$ là.

A $y = 2x + 9$. **B** $y = -2x + 9$. **C** $y = -2x - 9$. **D** $y = -2x - 9$.

(Kiều Văn Công)

Lời giải.

$y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2}, y'(2) = -2$.

Khi $x = 2 \Rightarrow y = 5$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -2(x-2) + 5 \Leftrightarrow y = -2x + 9$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. [2H1B3-2] Tính thể tích khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh bằng $2a$.

A $2a^3\sqrt{3}$. **B** $2a^3\sqrt{2}$. **C** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **D** $\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

(Kiều Văn Công)

Lời giải.

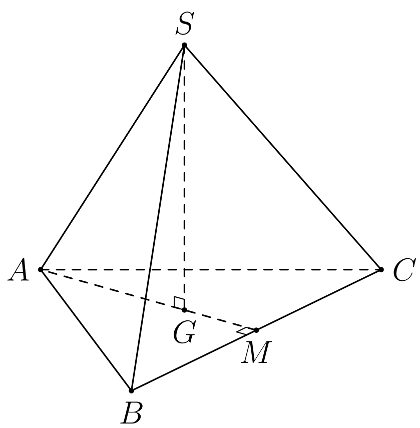
Gọi M là trung điểm BC, G là trọng tậm tam giác ABC.

$SG \perp (ABC), AM = a\sqrt{3}, AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot a^2\sqrt{3} \cdot \dfrac{2a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.



Chọn đáp án D □

Câu 31. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{2}m^2x^2 + 2m$ đồng biến trên $(1;+\infty)$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A 0. **B** 1. **C** 3. **D** 2.

(2D1K1-3)

Lời giải.

Do hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nên nếu hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ thì cũng đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Ta có $y' = x^3 - m^2x$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' \geq 0$, $\forall x \in [1;+\infty) \Leftrightarrow m^2 \leq \dfrac{x^3}{x}$, $\forall x \in [1;+\infty)$.

$\Leftrightarrow m^2 \leq f(x) = x^2$, $\forall x \in [1;+\infty) \Leftrightarrow m^2 \leq \min\limits_{x\in[1;+\infty)} f(x)$.

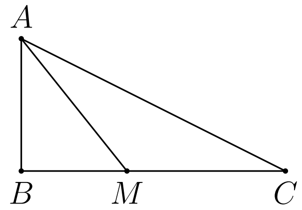
$\Leftrightarrow m^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$.

Do m nguyên nên $m \in \{-1;0;1\} \Rightarrow S = -1+0+1 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 32.

Một chiếc tàu quân sự đậu ở vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 5$ km. Một người lính muốn đột nhập vào căn cứ của đối phương ở vị trí C cách B một khoảng là 7 km. Người lính đó chèo đò từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc 6 km/h rồi chạy bộ đến C với vận tốc 12 km/h (xem hình vẽ ở bên).Tính độ dài đoạn BM để người đó đến C nhanh nhất?



(A) $x = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$. (B) $x = 2$. (C) $x = 4$. **D** $x = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$.

(2D1T3-6)

Lời giải.

Gọi khoảng cách $BM = x$ (km) (với $0 \leq x \leq 7$).

Khi đó $AM = \sqrt{25+x^2}$.

$\Rightarrow$ Thời gian đi từ A đến C là $f(x) = \dfrac{\sqrt{25+x^2}}{6} + \dfrac{7-x}{12}$, với $x \in [0;7]$.

Bài toán trở thành: Tìm x để $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;7]$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{x}{6\sqrt{25+x^2}} - \dfrac{1}{12}$, với $x \in [0;7]$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \sqrt{25+x^2}$, với $x \in [0;7]$.

$\Leftrightarrow x = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$.

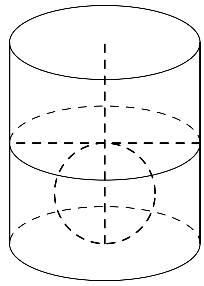
Bảng biến thiên

x	0		$\frac{5}{\sqrt{3}}$		7
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $f(x)$ có cực tiểu duy nhất trên đoạn $[0;7]$ nên thời gian đi từ A đến C nhanh nhất khi $BM = x = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án D □

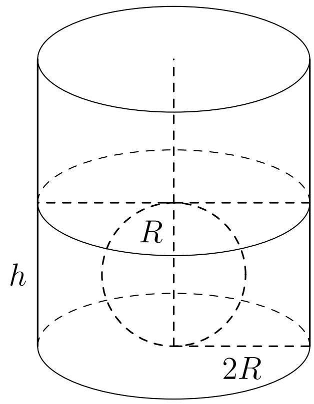
Câu 33.
Người ta thả một viên bi có dạng hình cầu có bán kính 2,7 cm vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước (tham khảo hình vẽ). Biết rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng 5,4 cm và chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng 4,5 cm. Khi đó chiều cao của mực nước trong cốc là



A 5,4 cm. **B** 5,7 cm. **C** 5,6 cm. **D** 5,5 cm.

(2H2T1-4)

Lời giải.



Gọi $R = 2{,}7$ cm là bán kính của viên bi.
Ta có bán kính phần trong đáy cốc là $2R$.
Thể tích nước ban đầu là $V_1 = \pi \cdot (2R)^2 \cdot 4{,}5 = 18\pi R^2$.
Thể tích viên bi là $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.
Thể tích nước sau khi thả viên bi là $V = V_1 + V_2 = 2\pi R^2\left(9 + \dfrac{2}{3}R\right)$.
Gọi h là chiều cao mực nước sau khi thả viên bi vào.
Mà $V = \pi(2R)^2 \cdot h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi(2R)^2} = \dfrac{9 + \frac{2}{3}R}{2} = 5{,}4$ (cm).

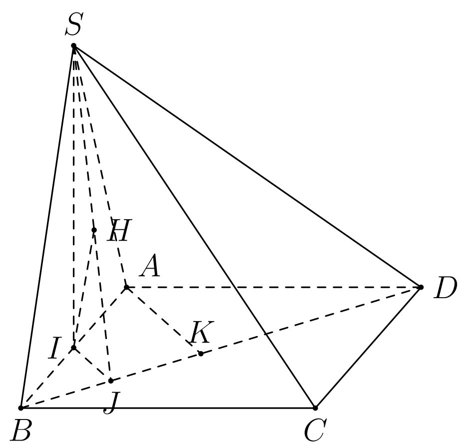
Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = 2AD = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD).

A $\dfrac{a}{2}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D** a.

(2H1K3-4)

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow SI \perp AB$.

Ta có $\begin{cases} SI \perp AB \\ (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.

Xét ΔSAB đều cạnh $2a$ có $SI = a\sqrt{3}$.
Kẻ $AK \perp BD$ tại K.
Xét ΔBAD có $AK = \dfrac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.
Kẻ $JI \perp BD$ tại $J \Rightarrow JI \parallel AK \Rightarrow JI = \dfrac{1}{2}AK = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.
Ta có $BD \perp SI \Rightarrow BD \perp (SJI)$.
Kẻ $HI \perp SJ$ tại $H \Rightarrow IH \perp (SBD)$ tại $H \Rightarrow \mathrm{d}(I, (SBD)) = IH$.
Xét ΔSIJ có $HI = \dfrac{JI \cdot SI}{\sqrt{JI^2 + SI^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Do I là trung điểm của AB nên $\mathrm{d}(A, (SBD)) = 2\mathrm{d}(I, (SBD)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Một nhóm có 7 học sinh lớp A và 5 học sinh lớp B. Xếp ngẫu nhiên 12 học sinh trên ngồi vào một dãy 12 ghế hàng ngang sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi. Tính xác suất sao cho không có bất kì 2 học sinh lớp B nào ngồi cạnh nhau.

A $\dfrac{7}{99}$. **B** $\dfrac{1}{132}$. **C** $\dfrac{7}{264}$. **D** $\dfrac{1}{792}$.

(1D2K5-2)

Lời giải.

- Xếp 12 học sinh ngồi vào một dãy 12 ghế hàng ngang sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi có 12! cách.
- Xếp 7 học sinh lớp A vào 7 ghế, có 7! cách.
  Khi đó 7 ghế đã xếp học sinh lớp A tạo ra 8 khoảng trống, ta xếp 5 học sinh lớp B vào 5 trong 8 khoảng trống đó, có A_8^5 cách.
  $\Rightarrow$ có $7! \cdot \mathrm{A}_8^5$ cách xếp 12 học sinh mà các học sinh lớp B không ngồi cạnh nhau.
  Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{7! \cdot \mathrm{A}_8^5}{12!} = \dfrac{7}{99}$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^x$ là

A $(2x-1)\mathrm{e}^x + C$. **B** $(2x+3)\mathrm{e}^x + C$. **C** $2x\mathrm{e}^x + C$. **D** $(2x-2)\mathrm{e}^x + C$.

(2D3B1-3)

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = 2x+1 \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x. \end{cases}$

$\Rightarrow \displaystyle\int (2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (2x+1)\mathrm{e}^x - \int 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (2x+1)\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + C = (2x-1)\mathrm{e}^x + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Chị Minh vay ngân hàng 200 triệu đồng theo phương thức trả góp để mua nhà. Nếu cuối mỗi tháng, bắt đầu từ tháng thứ nhất chị Minh trả 6 triệu đồng và chịu lãi số tiền chưa trả là 0,5% mỗi tháng (biết lãi suất không thay đổi) thì sau bao lâu, chị Minh trả hết số tiền trên?

A 46 tháng. **B** 37 tháng. **C** 47 tháng. **D** 36 tháng.

(2D2T5-6)

Lời giải.

Sau tháng thứ 1 chị Minh còn nợ ngân hàng $T_1 = 200(1+r) - 6$.

Sau tháng thứ 2 chị Minh còn nợ ngân hàng $T_2 = T_1(1+r) - 6 = 200(1+r)^2 - 6(1+r) - 6$.

Sau tháng thứ 3 chị Minh còn nợ ngân hàng $T_3 = T_2(1+r) - 6 = 200(1+r)^3 - 6(1+r)^2 - 6(1+r) - 6$.

....

Sau tháng thứ n chị Minh còn nợ ngân hàng

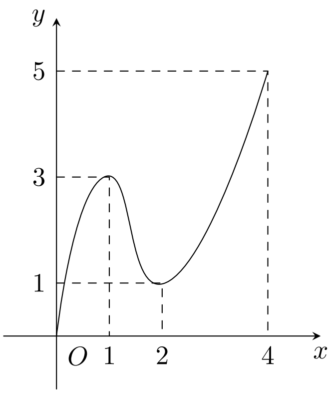
$$T_n = T_{n-1}(1+r) - 6 = 200(1+r)^n - 6(1+r)^{n-1} - \cdots - 6(1+r)^2 - 6(1+r) - 6.$$

Nếu sau tháng thứ n chị Minh trả hết nợ thì $T_n = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 200(1+r)^n = 6(1+r)^{n-1} + \cdots + 6(1+r)^2 + 6(1+r) + 6\\
&\Leftrightarrow \quad 200(1+r)^n = 6\left[(1+r)^{n-1} + \cdots + (1+r)^2 + (1+r) + 1\right]\\
&\Leftrightarrow \quad 200(1+r)^n = 6 \cdot 1 \cdot \frac{1-(1+r)^n}{1-(1+r)}\\
&\Leftrightarrow \quad 100r(1+r)^n = 3(1+r)^n - 3 \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{3}{3-100r}\\
&\Leftrightarrow \quad n = \log_{1+r}\left(\frac{3}{3-100r}\right) \approx 36{,}56.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị trên đoạn $[0;4]$ như hình vẽ bên dưới.



Đặt $M = \max f\left(\sqrt{4-x^2}\right)$, $m = \min f\left(\sqrt{4-x^2}\right)$. Tổng $M+m$ bằng

A 3. B 6. C 4. D 5.

(2D1G3-1)

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{4-x^2}$. Khi đó $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $t \in [0;2]$.

Xét hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[0;2]$ ta thấy $M = \max\limits_{x\in[0;2]} f(t) = 3$ và $M = \min\limits_{x\in[0;2]} f(t) = 0$.

Vậy $M + m = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\log_3(x+3) + m\log_{\sqrt{x+3}} 9 = 16$ có hai nghiệm thỏa mãn $-2 < x_1 < x_2$.

A 17. B 16. C 14. D 15.

(2D2G5-3)

Lời giải.

Điều kiện xác định $x > -3$ và $x \neq 2$.

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
&\log_3(x+3) + 4m\log_{(x+3)} 3 - 16 = 0\\
\Leftrightarrow \quad &\log_3^2(x+3) - 16\log_3(x+3) + 4m = 0 \qquad (1).
\end{aligned}$$

Đặt $\log_3(x+3) = t$, phương trình (1) trở thành $t^2 - 16t + 4m = 0$ (2).
Ta có $\log_3(x+3) = t \Leftrightarrow x = 3^t - 3$.
Theo điều kiện đề bài thì $x > -2$ nên $3^t - 3 > -2 \Leftrightarrow t > 0$.
Vậy phương trình $\log_3(x+3) + m\log_{\sqrt{x+3}} 9 = 16$ có hai nghiệm thỏa mãn $-2 < x_1 < x_2$ thì phương trình (2) phải có hai nghiệm t dương phân biệt

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ t_1 + t_2 = 16 > 0 \\ t_1 \cdot t_2 = 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 64 - 4m > 0 \\ 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 16.$$

Vậy có 15 giá trị nguyên m thỏa mãn.
Chọn đáp án D □

Câu 40. Phương trình $4^x - 2^{x+2} + 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1 < x_2$. Đặt $P = 2x_1 + 3x_2$. Khi đó

A $P = 3\log_3 2$. **B** $P = 3\log_2 3$. **C** $P = 0$. **D** $P = 2\log_3 2$.

(2D2B5-3)

Lời giải.

Ta có $4^x - 2^{x+2} + 3 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 4\cdot 2^x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_2 3. \end{array}\right.$

Do $x_1 < x_2$ nên $x_1 = 0$, $x_2 = \log_2 3$.
Vậy $P = 2x_1 + 3x_2 = 3\log_2 3$.
Chọn đáp án B □

Câu 41. Tính thể tích khối tròn xoay sinh bởi Elip $(E): \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$ quay quanh trục Ox.

A $\dfrac{64\pi}{9}$. **B** $\dfrac{10\pi}{3}$. **C** $\dfrac{8\pi}{3}$. **D** $\dfrac{8\pi^2}{3}$.

Lời giải.

(E) có $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$. Do đó hai đỉnh thuộc trục lớn có tọa độ $A'(-2;0)$ và $(2;0)$.
Vì $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - \dfrac{x^2}{4}$.

Do đó thể tích khối tròn xoay là $V_{Ox} = \pi\displaystyle\int_{-2}^{2} y^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_{-2}^{2}\left(1 - \dfrac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{8\pi}{3}$.

Vậy $V_{Ox} = \dfrac{8\pi}{3}$(đvtt).
Chọn đáp án C □

Câu 42.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau. Bất phương trình $f(x) > \sin x + m$ có nghiệm trên khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

A. $m > f(1) - \sin 1$.

B. $m \geq f(1) - \sin 1$.

C. $m \leq f(-1) + \sin 1$.

D. $m < f(-1) + \sin 1$.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - \sin x$.

$g'(x) = f'(x) - \cos x$.

Với $\forall x \in (-1;1)$, ta có $f'(x) < -1 \Rightarrow f'(x) - \cos x < -1 - \cos x < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ nên $g(x) < g(-1) = f(-1) + \sin 1$.

Do đó bất phương trình $f(x) > \sin x + m$ có nghiệm trên khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi bất phương trình $m < f(x) - \sin x$ có nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

$\Leftrightarrow m < \max\limits_{[-1;1]} g(x) \Leftrightarrow m < f(-1) + \sin 1$.

Vậy $m < f(-1) + \sin 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha) : x - 2z - 6 = 0$ và đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α) cắt đồng thời vuông góc với d.

A. $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z+2}{1}$.

B. $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$.

C. $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$.

D. $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$.

Lời giải.

Giao điểm I của d và (α) là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 - t \\ x - 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(2;4;-2)$.

Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;0;-2)$; đường thẳng d có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;1;-1)$.

Khi đó đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $[\vec{n}, \vec{u}] = (2;-1;1)$.

Đường thẳng Δ qua điểm $I(2;4;-2)$ và có một vectơ chỉ phương $[\vec{n}, \vec{u}] = (2;-1;1)$ nên có phương trình chính tắc: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$, với a, b là các số hữu tỷ. Khi đó $a+b$ bằng

(A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) -1.

Lời giải.

Xét $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)\Bigg|_0^1 = 2\ln 2 - \ln 3$.

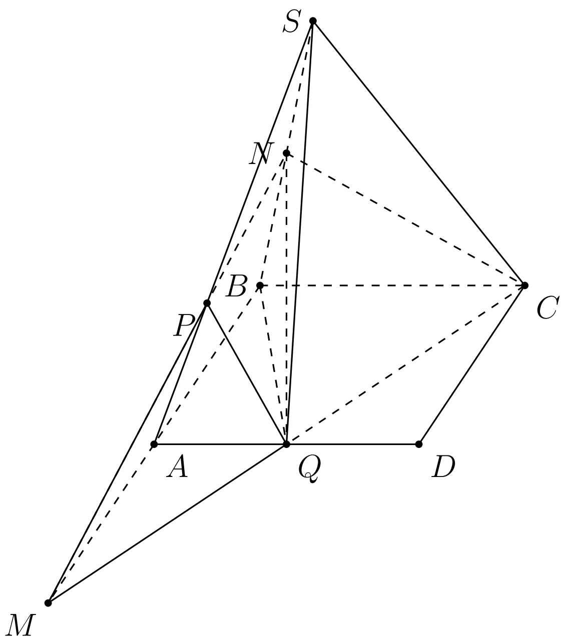
Vậy $a = 2, b = -1 \Rightarrow a + b = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 45. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi N là trung điểm cạnh SB, M là điểm đối xứng với B qua A. Mặt phẳng (MNC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2 với $V_1 < V_2$ và V là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tính tỷ số $\dfrac{V_1}{V}$.

(A) $\dfrac{7}{12}$. (B) $\dfrac{7}{24}$. (C) $\dfrac{5}{24}$. (D) $\dfrac{5}{12}$.

Lời giải.



Gọi $P = MN \cap SA, Q = MC \cap AD$. Ta có thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNC) là tứ giác $CNPQ$. Dễ thấy P là trọng tâm của tam giác SBM và Q là trung điểm của đoạn AD. Gọi V_0 thể tích của phần chứa điểm S, S là diện tích của tứ giác $ABCD$ và h chiều cao của hình chóp $S.ABCD$.

Ta có $V_0 = V_{S.NPQ} + V_{S.NQC} + V_{S.QDC}$.

Mà $V_{S.NPQ} = \dfrac{SP}{SA}\cdot\dfrac{SN}{SB}\cdot V_{S.BAQ} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot S_{ABQ}\cdot h = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}S\cdot h = \dfrac{1}{12}V$.

$V_{S.NQC} = \dfrac{SN}{SB}\cdot V_{S.BQC} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}.S_{BQC}\cdot h = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}S\cdot h = \dfrac{1}{4}V$.

$V_{S.QDC} = \dfrac{1}{3}\cdot S_{QDC}\cdot h = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}S\cdot h = \dfrac{1}{4}V$.

Suy ra $V_0 = \dfrac{1}{12}V + \dfrac{1}{4}V + \dfrac{1}{4}V = \dfrac{7}{12}V$.

Dẫn đến $V_2 = \dfrac{7}{12}V$ và $V_1 = V - V_2 = \dfrac{5}{12}V$.
Vậy $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{5}{12}$.
Nhận xét: kết quả này đúng cho hình chóp có đáy là hình bình hành.
Chọn đáp án D □

Câu 46. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \dfrac{1}{5}m^2x^5 - \dfrac{1}{3}mx^3 - 10x^2 - (m^2 - m - 20)\,x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tích giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A -2. B -5. C $\dfrac{3}{2}$. D $\dfrac{1}{2}$.

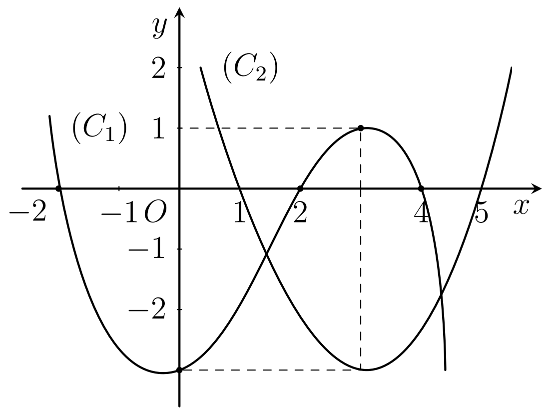
Lời giải.
Ta có hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m^2x^4 - mx^2 - 20x - \left(m^2 - m - 20\right) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left[m^2x^3 + m^2x^2 + \left(m^2 - m\right)x + m^2 - m - 20\right] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \qquad (*).$$

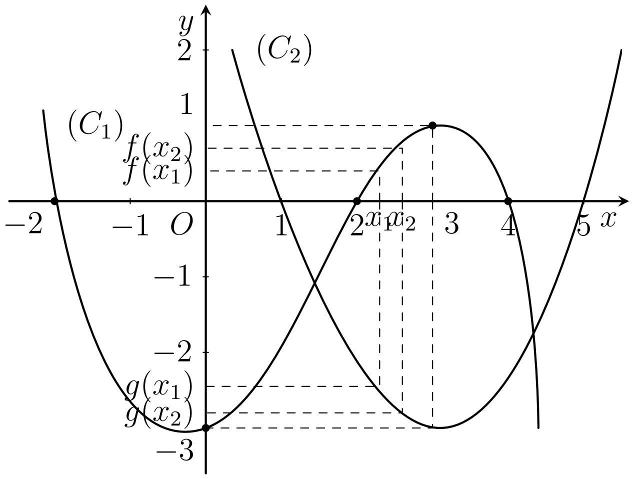
Xét $g(x) = m^2x^3 + m^2x^2 + (m^2 - m)\,x + m^2 - m - 20$.
Nếu $g(x) = 0$ không có nghiệm $x = 1$ thì $f'(x)$ sẽ đổi dấu khi x đi qua 1, nên muốn $(*)$ thỏa thì điều kiện cần là $g(1) = 1 \Leftrightarrow 2m^2 - m - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{5}{2} \\ m = -2 \end{array}\right.$.
Ta cần kiểm tra xem hai giá trị tìm được có thỏa $(*)$không.
Nếu $m = \dfrac{5}{2}$ thì $g(x) = \dfrac{25}{4}x^3 + \dfrac{25}{4}x^2 + \dfrac{15}{4}x - \dfrac{65}{4} = \dfrac{5}{4}(x-1)\left(5x^2 + 10x + 13\right)$, thỏa $(*)$.
Nếu $m = -2$ thì $g(x) = 4x^3 + 4x^2 + 6x - 14 = (x-1)\left(4x^2 + 8x + 14\right)$, thỏa $(*)$.
Vậy $S = \left\{\dfrac{5}{2}; -2\right\}$.
Chọn đáp án B □

Câu 47.
Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị lần lượt là $(C_1), (C_2)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x).g(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-\infty; 0)$. B $(4; 5)$.
C $(2; 3)$. D $(0; 1)$.



Lời giải.



Ta xét khoảng $(2;3)$, với mọi $x_1, x_2 \in (2;3), x_1 < x_2$ ta có:

$$\begin{cases} 0 < f(x_1) < f(x_2) \\ 0 > g(x_1) > g(x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < f(x_1) < f(x_2) \\ 0 < -g(x_1) < -g(x_2) \end{cases}.$$

$$\Rightarrow f(x_1).[-g(x_1)] < f(x_2).[-g(x_2)] \Rightarrow f(x_1).g(x_1) > f(x_2).g(x_2).$$

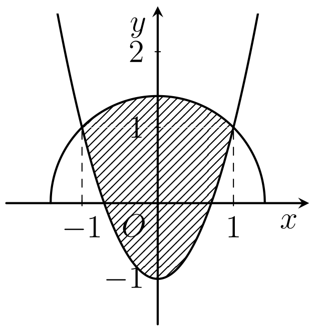
$$\Rightarrow y(x_1) > y(x_2).$$

Hay hàm số nghịch biến trên $(2;3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 48.

Người ta cần trồng một vườn hoa Cẩm Tú Cầu theo hình giới hạn bởi một đường Parabol và nửa đường tròn có bán kính $\sqrt{2}$ mét (phần tô trong hình vẽ). Biết rằng: để trồng mỗi m^2 hoa cần ít nhất là 250000 đồng, số tiền tối thiểu để trồng xong vườn hoa Cẩm Tú Cầu gần bằng



- **A** 893000 đồng.
- **B** 476000 đồng.
- **C** 809000 đồng.
- **D** 559000 đồng.

Lời giải.

Nửa đường tròn (T) có phương trình $y = \sqrt{2 - x^2}$.

Xét parabol (P) có trục đối xứng Oy nên có phương trình dạng: $y = ax^2 + c$.

(P) cắt Oy tại điểm $(0; -1)$ nên ta có: $c = -1$.

(P) cắt (T) tại điểm $(1;1)$ thuộc (T) nên ta được: $a + c = 1 \Rightarrow a = 2$.

Phương trình của (P) là: $y = 2x^2 - 1$.

Diện tích miền phẳng D (tô màu trong hình) là:

$$S = \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{2 - x^2} - 2x^2 + 1\right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \sqrt{2 - x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} \left(-2x^2 + 1\right) \mathrm{d}x.$$

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \left(-2x^2 + 1\right) \mathrm{d}x = \left(-\frac{2}{3}x^3 + x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}.$$

Xét $I_2=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x$, đặt $x=\sqrt{2}\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ thì $\mathrm{d}x=\sqrt{2}\,\mathrm{cost}\,dt$.

Đổi cận: $x=-1$ thì $t=-\frac{\pi}{4}$, với $x=1$ thì $t=\frac{\pi}{4}$, ta được:

$$I_2=\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\sqrt{2-2\sin^2 t}\sqrt{2}\cos t dt=\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}2\cos^2 t dt$$
$$=\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}(1+\cos 2t)\,dt=\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}=1+\frac{\pi}{2}.$$

Suy ra $S=I_1+I_2=\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}\ \mathrm{m}^2$.

Số tiền trồng hoa tối thiểu là: $250000\left(\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\approx 809365$ đồng.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(x)=x.\ln\left(\frac{x^3}{x.f'(x)-f(x)}\right)$ và $f(1)=0$. Tính tích phân $I=\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $12\ln 13-13$. B $13\ln 13-12$. C $12\ln 13+13$. D $13\ln 13+12$.

Lời giải.

Từ giả thiết và

$$f(x)=x.\ln\left(\frac{x^3}{x.f'(x)-f(x)}\right)\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}=\ln\frac{x^3}{x.f'(x)-f(x)}.$$
$$\Leftrightarrow\ \mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}}=\frac{x^3}{x.f'(x)-f(x)}\Leftrightarrow\frac{x.f'(x)-f(x)}{x^2}.\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}}=x.$$
$$\Leftrightarrow\ \left[\frac{f(x)}{x}\right]'.\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}}=x.\qquad(1)$$

Lấy nguyên hàm hai vế của (1) suy ra $\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}}=\frac{x^2}{2}+C$.

Do $f(1)=0\Rightarrow C=\frac{1}{2}$, nên $\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}}=\frac{x^2+1}{2}\Rightarrow f(x)=x\ln\frac{x^2+1}{2}$ với $x\in(0;+\infty)$.

$I=\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^5 x.\ln\frac{x^2+1}{2}\,\mathrm{d}x\qquad(2)$.

Đặt $u=\ln\frac{x^2+1}{2}\Rightarrow du=\frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x$; $dv=x\,\mathrm{d}x$, chọn $v=\frac{x^2+1}{2}$.

Theo công thức tích phân từng phần, ta được:

$$I=\left(\frac{x^2+1}{2}.\ln\frac{x^2+1}{2}\right)\Big|_1^5-\int\limits_1^5 x\,\mathrm{d}x=13\ln 13-\frac{x^2}{2}\Big|_1^5=13\ln 13-12.$$

Chọn đáp án B □

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(P): x+y+z-6=0$ và cách đều các điểm $A(1;6;0), B(-2;2;-1), C(5;-1;3)$. Tích $a \cdot b \cdot c$ bằng

A 5. **B** 0. **C** -6. **D** 6.

Lời giải.

Do $M \in (P)$ và $MA^2 = MB^2 = MC^2$, nên ta được hệ

$$\begin{cases} a+b+c=6 \\ (a-1)^2+(b-6)^2+c^2=(a+2)^2+(b-2)^2+(c+1)^2 \\ (a-1)^2+(b-6)^2+c^2=(a-5)^2+(b+1)^2+(c-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=6 \\ 3a+4b+c=14 \\ 4a-7b+3c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=3. \end{cases}$$

Từ đó ta được $abc=6$.

Chọn đáp án D □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. D	3. C	4. B	5. A	6. D	7. B	8. A	9. D	10. B
11. D	12. C	13. D	14. A	15. A	16. B	17. A	18. A	19. B	20. D
21. C	22. D	23. B	24. A	25. A	26. C	27. C	28. C	29. B	30. D
31. A	32. D	33. A	34. B	35. A	36. A	37. B	38. A	39. D	40. B
41. C	42. D	43. B	44. C	45. D	46. B	47. C	48. C	49. B	50. D

39 ĐỀ THI THỬ THPT VIỆT ĐỨC – HÀ NỘI - LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - m$. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

Ⓐ $\left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ m \geq 4 \end{array}\right.$. Ⓑ $m \in [0; 4]$. Ⓒ $\left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 4 \end{array}\right.$. $\boxed{\text{D}}$ $m \in (0; 4)$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt khi phương trình $x^3 + 3x^2 = m$ có 3 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $g(x) = x^3 + 3x^2$.

TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$g'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

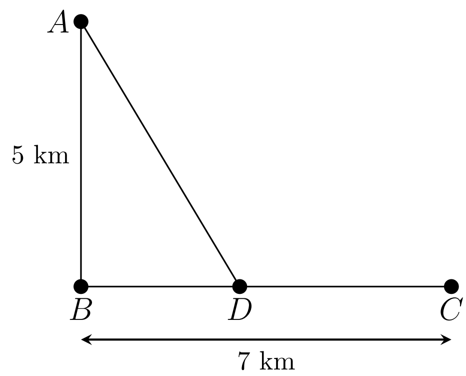
x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT phương trình $x^3 + 3x^2 = m$ có 3 nghiệm phân biệt khi $m \in (0; 4)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 2.

Một đoàn cứu trợ lũ lụt đang ở vị trí A của một tỉnh miền trung muốn đến xã C để tiếp tế lương thực và thuốc men. Để đi đến C, đoàn cứu trợ phải chèo thuyền từ A đến vị trí D với vận tốc 4 km/h, rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h. Biết A cách B một khoảng 5 km, B cách C một khoảng 7 km (hình vẽ). Hỏi vị trí điểm D cách A bao xa để đoàn cứu trợ đi đến xã C nhanh nhất?



Ⓐ $AD = 5\sqrt{3}$ km. Ⓑ $AD = 2\sqrt{5}$ km.

Ⓒ $AD = 5\sqrt{2}$ km. $\boxed{\text{D}}$ $AD = 3\sqrt{5}$ km.

Lời giải.

Ta tìm vị trí điểm D để đoàn cứu trợ đi từ A đến C nhanh nhất.

Đặt $AD = x, (x \geq 5)$.

Thời gian chèo thuyền từ A đến D: $\dfrac{x}{4}$.

Có $BD = \sqrt{x^2 - 25}, DC = 7 - \sqrt{x^2 - 25}$.

Thời gian đi bộ đi từ D đến C: $\dfrac{7 - \sqrt{x^2 - 25}}{6}$.

Thời gian đi từ A đến C là $f(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{7 - \sqrt{x^2 - 25}}{6}$. Ta tìm GTNN của $f(x)$.
Điều kiện xác định $x \geq 5$.
Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{12}\left(3 - \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 25}}\right)$.
$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 - 25} = 2x, (x \geq 5) \Leftrightarrow 9(x^2 - 25) = 4x^2 \Leftrightarrow x^2 = 45 \Leftrightarrow x = 3\sqrt{5}$ (do $x \geq 5$).
Bảng biến thiên

x	5		$3\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{29}{12}$	$\searrow$	$\frac{14+5\sqrt{5}}{12}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên $f(x)$ đạt GTNN khi $x = 3\sqrt{5}$.
Lúc đó $AD = 3\sqrt{5}$ km.
Chọn đáp án D □

Câu 3. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x - 3}}{x^2 + x - 6}$ có bao nhiêu tiệm cận?

A 2. B 1. C 3. D 0.

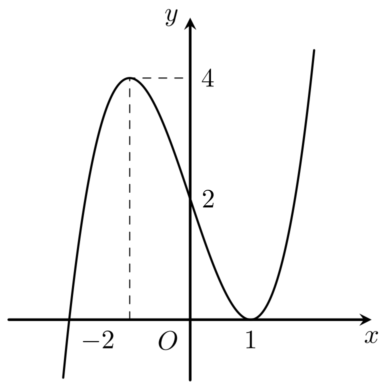
Lời giải.
TXĐ: $\mathscr{D} = [3; +\infty)$.

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x - 3}}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{3}{x^4}}}{1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{6}{x^2}} = 0.$$

$\Rightarrow$ Đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận.
Chọn đáp án B □

Câu 4.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Khẳng định sau đây là **sai**?

A Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
B Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.
C Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
D Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.



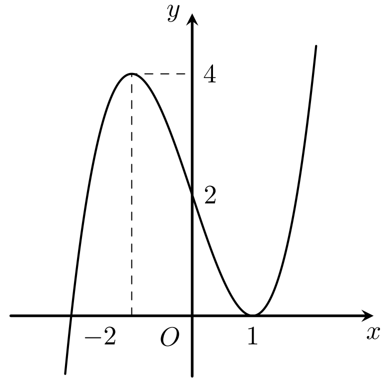
Lời giải.
Từ đồ thị của hàm $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-2)$		$\nearrow$		$+\infty$

Chọn đáp án C □

Câu 5.

Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ sau. Hàm số đó là hàm số nào?



(A) $y = x^3 - x^2 + 1$.
(B) $y = x^3 + x^2 + 1$.
(C) $y = x^3 - 3x + 2$.
(D) $y = -x^3 + 3x + 2$.

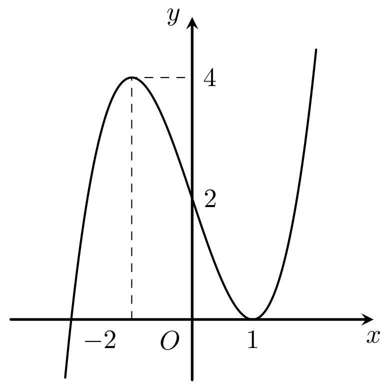
Lời giải.

Từ đồ thị thấy hệ số $a > 0$ và đi qua điểm $A(0; 2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 6.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị hàm số như hình bên. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau



(A) $(-\infty; 2); (1; +\infty)$.
(B) $(-2; +\infty) \setminus \{1\}$.
(C) $(-2; +\infty)$.
(D) $(-4; 0)$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên cho hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-2)$		$\nearrow$		$+\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy ngay trong khoảng $(-2; +\infty)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Trong một khối đa diện, mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) Hai cạnh bất kì có ít nhất một điểm chung.

(B) Ba mặt bất kì có ít nhất một điểm chung.
(C) Hai mặt bất kì có ít nhất một điểm chung.
(D) Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

Lời giải.

Trong một khối đa diện, mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Cho hàm số $y = \dfrac{8x-5}{x+3}$. Kết luận nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3) \cup (-3;+\infty)$.
(B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.
(C) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
(D) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Ta có $y' = \dfrac{29}{(x+3)^2} > 0, \forall x \in \mathscr{D}$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Bảng biến thiên sau là bảng biến thiên của hàm số nào sau đây?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

(A) $y = -x^3 - 3x - 2$.
(B) $y = x^3 - 3x^2 - 1$.
(C) $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.
(D) $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

Lời giải.

Cách 1: Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $a > 0$ nên hàm số có bảng biến thiên là $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

Cách 2: Ta có $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 0 \\ &x = 2. \end{aligned}\right.$

BBT:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x - m - \sqrt{9-x^2} = 0$ có đúng 1 nghiệm dương?

A $m \in (-3; 3]$. **B** $m \in (-3; 3] \cup \{-3\sqrt{2}\}$.
C $m \in [0; 3]$. **D** $m = \pm 3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Điều kiện: $-3 \leq x \leq 3$.

Phương trình tương đương với $x - \sqrt{9 - x^2} = m$.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x - \sqrt{9 - x^2}$ và đường thẳng $y = m$.

Xét hàm số $y = x - \sqrt{9 - x^2}$ với $-3 \leq x \leq 3$

$y' = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2}} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{9 - x^2} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 9 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{-3\sqrt{2}}{2} \in [-3; 3]$.

BBT:

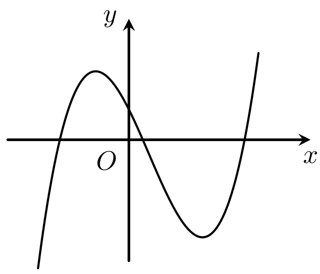
x	-3		$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$		0		3
y'	$\|$	$-$	0	$+$		$+$	$\|$
y	-3	$\searrow$	$-3\sqrt{2}$	$\nearrow$	-3	$\nearrow$	3

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $-3 < m \leq 3$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 11.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?



A $ab < 0, bc > 0, cd < 0$. **B** $ab < 0, bc < 0, cd > 0$.
C $ab > 0, bc > 0, cd < 0$. **D** $ab > 0, bc > 0, cd > 0$.

Lời giải.

Từ dáng điệu của đồ thị ta có ngay được

- $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty \Rightarrow a > 0$.
- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại một điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Mặt khác dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu và tổng hai nghiệm này luôn dương nên $\begin{cases} ac < 0 \\ -\dfrac{2b}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c < 0 \\ b < 0 \end{cases}$ (do $a > 0$).

Do đó $ab < 0, bc > 0, cd < 0$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	-1	↘	$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây

A $(0; 1)$. **B** $(-1; 0)$. **C** $(-\infty; 1)$. **D** $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 2. **B** 3. **C** 4. **D** 5.

Lời giải.

Cách 1: Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ bằng số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ cộng với số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục hoành (không tính điểm cực trị)

Vì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị và cắt trục Ox tại 1 điểm nên đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có $2 + 1 = 3$ điểm cực trị.

Cách 2: $|f(x)| = \sqrt{f^2(x)} \Rightarrow (|f(x)|)' = \dfrac{f(x) \cdot f'(x)}{|f(x)|} \Rightarrow$ dấu của $(|f(x)|)'$ là dấu của $f(x) \cdot f'(x)$.

Ta có $f(x) \cdot f'(x)$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1; x = 3$.

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 < -1$.

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		x_0		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	⋮	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	⋮	$+$	⋮	$+$	
$f'(x) \cdot f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng biến thiên ta thấy $f(x) \cdot f'(x)$ đổi dấu 3 lần nên hàm số $|f(x)|$ có 3 cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Cho đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Số các tiếp tuyến với đồ thị (C) mà các tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng $d\colon y = -\dfrac{1}{3}x + 1$ là

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 0.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$.

Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d\colon y = -\dfrac{1}{3}x + 1$ nên có hệ số góc bằng 3.

$\Rightarrow y' = 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3\cos 2x - 4\sin x$ là

A 1. **B** -7. **C** -5. **D** $\dfrac{11}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y = 3(1 - 2\sin^2 x) - 4\sin = -6\sin^2 - 4\sin x + 3$.

Đặt $\sin x = t, t \in [-1; 1]$.

Khi đó, $f(t) = -6t^2 - 4t + 3, t \in [-1; 1]$, có $f'(t) = -12t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{3} \in (-1, 1)$.

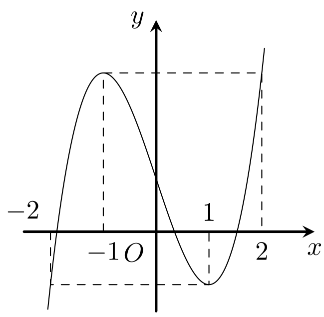
$f(-1) = 1, f(1) = -7, f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{11}{3} \Rightarrow \min\limits_{[-1;1]} f(t) = \min y = -7$.

Chọn đáp án B □

Câu 16.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $3f(x + 2) - 4 = 0$ trên đoạn $[-2; 2]$ là?

A 4. **B** 2. **C** 3. **D** 1.



Lời giải.

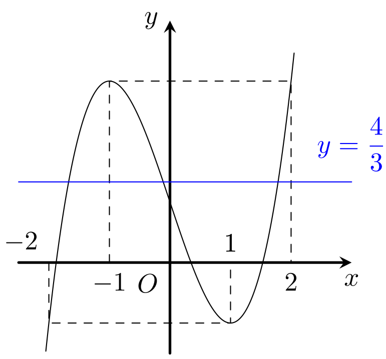
Xét phương trình $3f(x + 2) - 4 = 0 \Leftrightarrow f(x + 2) = \dfrac{4}{3}$. (1)

Đặt $X = x + 2$, do $-2 \le x \le 2 \Leftrightarrow 0 \le x + 2 \le 4 \Leftrightarrow 0 \le X \le 4$.

Khi đó ta có (1) $\Leftrightarrow f(X) = \dfrac{4}{3}$. (*)

Vậy phương trình (1) có nghiệm trên đoạn $[-2, 2]$ khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm trên đoạn $[0; 4]$.

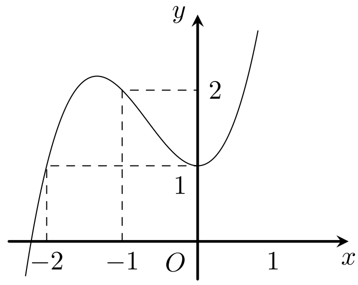
Dựa vào hình vẽ ta nhận thấy trên đoạn $[0; 4]$ thì đường thẳng $y = \dfrac{4}{3}$ cắt đồ thị hàm số đã cho đúng tại một điểm. Do đó phương trình (*) có đúng 1 nghiệm hay phương trình (1) có đúng một nghiệm.



Chọn đáp án B □

Câu 17.

Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Chọn kết luận **sai** trong các kết luận sau:



(A) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.
(B) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0; 1)$.
(C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; -1)$.

Lời giải.

Theo hình vẽ hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, nên đáp án A đúng.
Hàm số cắt trục tung tại $(0; 1)$ nên đáp án B đúng.
Trên khoảng $(0; +\infty)$, x tăng, y tăng nên hàm đồng biến, nên đáp án C đúng.
Trên khoảng $(-2; -1)$ hàm số vừa đồng biến, vừa nghịch biến nên kết luận ở đáp án D sai.
Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Hàm số $y = x^3 - (m+2)x + m$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ khi:

(A) $m = -1$. (B) $m = 2$. (C) $m = -2$. (D) $m = 1$.

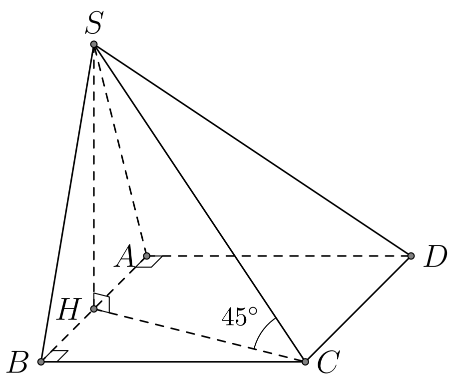
Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - m - 2, y'' = 6x$.
Vì hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ nên $y'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 - m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.
Với $m = 1$ ta có $y''(1) = 6 > 0$. Vậy hàm số $y = x^3 - (m+2)x + m$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ khi $m = 1$
Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 45°. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{24}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$.

Lời giải.

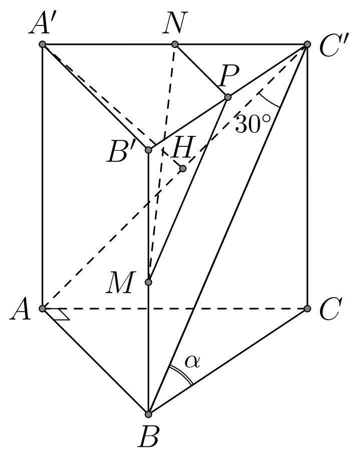


Gọi H là trung điểm của AB.
$(SAB) \perp (ABCD), (SAB) \cap (ABCD) = AB$,
mà $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
Do đó $(SC, (ABCD)) = \widehat{SCH} = 45^\circ$.
Xét tam giác vuông BHC có $HC = \sqrt{BC^2 + BH^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Xét tam giác vuông SHC có $SH = HC = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Suy ra $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AC = a\sqrt{3}$. Biết BC' hợp với mặt phẳng $(AA'C'C)$ với một góc 30° và hợp với mặt phẳng đáy góc α sao cho $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh BB' và $A'C'$. Khoảng cách MN và AC' là

A $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$. **D** $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải.



Ta có $(BC', (AA'C'C)) = \widehat{BC'A} = 30^\circ$ và $(BC', (ABC)) = \widehat{C'BC} = \alpha$.

Đặt $AB = x \Rightarrow BC = \sqrt{3a^2 + x^2}$.

$CC' = BC \cdot \tan\alpha = \sqrt{\dfrac{3(x^2 + 3a^2)}{5}}$.

$AC' = AB \cdot \cot 30^\circ = x\sqrt{3}$.

Ta có $AC^2 + CC'^2 = AC'^2 \Rightarrow x = a\sqrt{2} \Rightarrow CC' = a\sqrt{3}, AC' = a\sqrt{6}$.

Gọi P là trung điểm của $B'C'$, suy ra $(MNP) \parallel (ABC')$, $d(MN, AC') = d(N, (ABC')) = \dfrac{1}{2}d(A', (ABC'))$.

Kẻ $A'H \perp AC'$ tại $H \Rightarrow A'H \perp (ABC')$,

$$d(A', (ABC')) = A'H = \frac{AA'.A'C'}{AC'} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Suy ra: $d(MN, AC') = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$

Chọn đáp án A □

Câu 21. Cho hàm số $y = x^3 = 3x^2 - 9x + 2$. Chọn kết luận đúng?

A Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$. **B** Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.
C Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$. **D** Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6x - 9$, cho $y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	7	↘	-25	↗	$+\infty$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$ có tiệm cận ngang.

A $m = 1$. **B** $m = -1$. **C** $m \pm 1$. **D** Không có m.

Lời giải.

Cách 1: Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang.

$\Rightarrow$ Hàm số xác định trên một trong các miền $(-\infty, a), (-\infty; a], (a, +\infty)$ hoặc $[a; +\infty) \Rightarrow m \geq 0$

TH1: $m = 0 \Rightarrow y = x - \sqrt{-3x+7}$ đồ thị hàm số không tiệm cận ngang.
TH2: $m > 0 \Rightarrow y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$.
Khi $x \to +\infty, y = x - x\sqrt{m - \frac{3}{x} + \frac{7}{x}^2}$, đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi và chỉ khi $m = 1$.
Khi $x \to -\infty, y = x + x\sqrt{m - \frac{3}{x} + \frac{7}{x}^2} \to -\infty$, đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
KL: $m = 1$.
Cách 2: Với $m < 0$, ta có hàm số $y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$ không tồn tại giới hạn tại dương vô cùng.

- Với $m \in (0;1)$, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}) = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}(x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}) = -\infty$.
- Với $m > 1$, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}) = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}(x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}) = -\infty$.
- Với $m = 1$, ta có

$$\lim_{x\to+\infty}(x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x - 7}{x + \sqrt{x^2 - 3x + 7}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3 - \frac{7}{x}}{1 + \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x}^2}} = \frac{3}{2},$$

đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Số giao điểm của đường cong $y = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ và đường thẳng $y = 1 - x$ là

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 0.

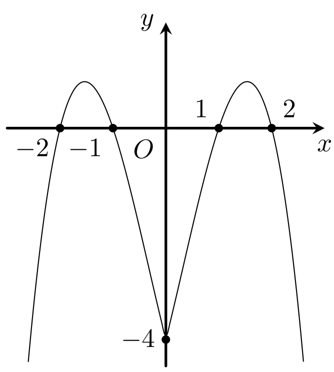
Lời giải.
Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường trên là

$$x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 1 - x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Phương trình có một nghiệm nên đường cong và đường thẳng có một giao điểm.
Chọn đáp án A □

Câu 24.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ như hình vẽ. Chọn kết luận đúng trong các kết luận sau:

A $f(x) = -x^3 + x^2 + 4x - 4$. **B** $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.
C $f(x) = -x^3 - x^2 + 4x + 4$. **D** $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$.



Lời giải.
Cách 1: Ta đã biết từ đồ thị (C): $y = f(x)$ suy ra đồ thị (C_1): $y = f(|x|)$ sẽ gồm hai phần.

- Phần 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C) ở bên phải trục tung.
- Phần 2: Bỏ phần đồ thị (C) bên trái trục tung và lấy đối xứng phần 1 qua trục tung. Từ dáng điệu của đồ thị đã cho ta quan sát phần đồ thị bên phải có ngay được
  - ⊞ $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty \Rightarrow y = f(x)$ có hệ số $a < 0$.

⊞ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại một điểm có tung độ âm nên $y = f(x)$ có hệ số $d < 0$.

Cách 2: Nhận xét đồ thị đi qua điểm $A(1;0), B(0;-4), C(2;0)$ nê ta kiểm tra các đáp án.

Ta có $-1^3+1^2+4.1-4 = 0; -0^3+0^2+4.0-4 = -4; -2^3+2^2+4.2-4 = 0$ nên $A(1;0), B(0;-4), C(2;0)$ thuộc $y = f(x) = -x^3 + x^2 + 4x - 4$

Chọn đáp án A □

Câu 25. Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$ (với m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A 7. B 6. C 5. D 8.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 - 2mx + 4m + 9$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ y' \leq 0,\ \forall x \in (-\infty; +\infty)\\
&\Leftrightarrow\ -3x^2 - 2mx + 4m + 9 \leq 0,\ \forall x \in (-\infty; +\infty)\\
&\Leftrightarrow\ \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < 0 \\ m^2 + 12m + 27 \leq 0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow\ -9 \leq m \leq -3\\
&\Rightarrow\ m \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3\} \text{ (vì } m \text{ là số nguyên)}
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB = AD = a, CD = 2a$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của BD. Biết thể tích tứ diện $SBCD$ bằng $\dfrac{a^3}{\sqrt{6}}$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là

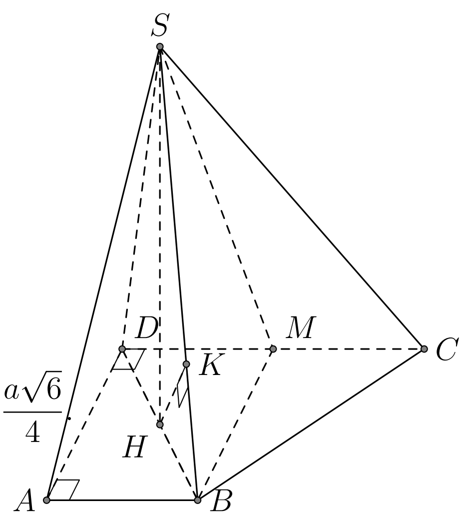
A $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. B $\dfrac{a\sqrt{2}}{6}$. C $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. D $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải.

Cách 1: Gọi H là trung điểm BD và M là trung điểm của $CD \Rightarrow ABMD$ là hình vuông cạnh bằng a.

$BM = \dfrac{1}{2}DC$, tam giác BCD vuông cân tại B.

Ta có $BC \perp SB$ (vì $BC \perp BD, BC \perp SH$)



$$SH = \frac{3V_{SBCD}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow d(A,(SBC)) = \frac{3V_{SABC}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{3}SH \cdot (S_{ABCD} - S_{\Delta ADC})}{\frac{1}{2}SB \cdot BC} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

Cách 2: Gọi M là trung điểm của CD, H là trung điểm của BD.

Ta có ΔBCD có $BM = \dfrac{1}{2}DC \Rightarrow \Delta BCD$ vuông tại B.

$$BD = BC = a\sqrt{2} \Rightarrow S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}BD \cdot BC = a^2.$$

$$V_{SBCD}=\frac{1}{3}SH\cdot S_{\Delta BCD}\Rightarrow SH=\frac{3V_{SBCD}}{S_{\Delta BCD}}=\frac{3a^3}{\sqrt{6}a^2}=\frac{\sqrt{6}a}{2}.$$

Ta có $AH \parallel (SBC)\Rightarrow d(A,(SBC))=d(H,(SBC))$.

Kẻ $HK\perp SB$ ta được $\begin{cases}BC\perp SH\\ BC\perp BD\end{cases}\Rightarrow BC\perp (SHB)\Rightarrow BC\perp HK$.

Do đó $HK\perp (SBC)\Rightarrow d(H,(SBC))=HK$ ΔSHB có

$$\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HB^2}=\frac{4}{6a^2}+\frac{4}{2a^2}=\frac{16}{2a^2}\Rightarrow HK=\frac{a\sqrt{6}}{4}=d(A,(SBC)).$$

Chọn đáp án D □

Câu 27. Một khối lập phương có cạnh bằng a cm. Khi tăng kích thước của mỗi cạnh thêm 2 cm thì thể tích tăng thêm 98 cm^3. Giá trị của a bằng

A 6 cm. B 5 cm. C 4 cm. D 3 cm.

Lời giải.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối lập phương ban đầu và thể tích khối lập phương khi tăng kích thước của mỗi cạnh thêm 2 cm.

Ta có $V_1=a^3$ cm^3; $V_2=(a+2)^3$ cm^3.

Theo đề bài suy ra $(a+2)^3-a^3=98\Leftrightarrow 6a^2+12a-90=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=3\ (\text{N})\\ a=-5\ (\text{L}).\end{array}\right.$

Vậy $a=3$ cm.

Chọn đáp án D □

Câu 28. Cho đồ thị $(C)\colon y=x^3-3x^2$. Có bao nhiêu số nguyên $b\in(-10;10)$ để có đúng một tiếp tuyến của (C) qua $(0;b)$

A 9. B 16. C 2. D 17.

Lời giải.

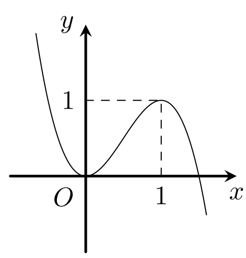
Ta có $y'=3x^2-6x$.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm $M(x_0,x_0^3-3x_0)$ là

$$y=(3x_0^2-6x_0)(x-x_0)+x_0^3-3x_0^2$$

Tiếp tuyến qua $(0;b)\Leftrightarrow (3x_0^2-6x_0)(0-x_0)+x_0^3-3x_0^2=b\Leftrightarrow b=-2x_0^3+3x_0^2$.

Có đúng một tiếp tuyến của (C) qua $(0;b)\Leftrightarrow b=-2x_0^3+3x_0$ có đúng một nghiệm x_0.



Dựa vào đồ thị hàm số $f(t)=-2t^3+3t^2$ suy ra có 17 số nguyên $b\in[-9;9]\setminus\{0;1\}$ để đồ thị hàm số $y=-2x^3+3x^2$ cắt đường thẳng $y=b$ tại đúng một điểm.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCDE$ có đáy hình ngũ giác và có thể tích là V. Nếu tăng chiều cao của hình chóp lên 3 lần đồng thời giảm độ dài các cạnh đi 3 lần thì ta được khối chóp mới $S'.A'B'C'D'E'$ có thể tích là V'. Tỷ số thể tích $\frac{V'}{V}$ là

(A) 3. (B) $\dfrac{1}{5}$. (C) 1. (D) $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có công thức tính thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}Sh$.

Hai đa giác đồng dạng với nhau nên $S_{S'.A'B'C'D'E'} = \dfrac{1}{9}S_{S.ABCDE}$.

Chiều cao của hình chóp $S'.A'B'C'D'E'$ tăng lên 3 lần nên ta có

$$V' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}S_{S.ABCDE}3h = \frac{1}{3}V.$$

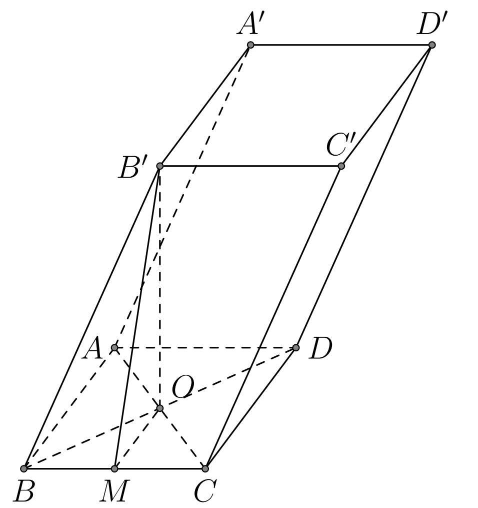
Do đó tỉ số thể tích $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60°$. Chân đường cao hạ từ B' trùng với tâm O của đáy $ABCD$; góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ với đáy bằng $60°$. Thể tích lăng trụ bằng

(A) $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. (B) $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. (C) $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. (D) $\dfrac{3a^3}{4}$.

Lời giải.



Từ giả thiết suy ra tam giác ABC đều nên

$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Gọi M là hình chiếu của O trên BC thì BC vuông góc với mặt phẳng $(B'OM)$.

Suy ra góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ và mặt phẳng đáy là góc $\widehat{B'MO} = 60°$.

Ta lại có tam giác BOC vuông tại O, có đường cao OM nên

$$\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{16}{3a^2}$$

$\Rightarrow OM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác $B'OM$ vuông tại O nên $B'O = OM\cdot\tan 60° = \dfrac{3a}{4}$

$$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = B'O\cdot S_{ABCD} = \frac{3a}{4}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2-x}{1+|x|}$ là

(A) 2. (B) 0. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

TXĐ $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-x}{1+|x|} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-x}{1+x} = -1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-x}{1+|x|} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-x}{1-x} = 1$.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2-x}{1+|x|}$ có 2 đường TCN $y = 1, y = -1$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\sin x - m}{\sin x + 1}$. Tìm giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $\left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$ bằng -2?

A $m = 5$. (B) $\left[\begin{array}{l} m = 5 \\ m = 2 \end{array}\right.$. (C) $m = 2$. (D) $m = 3$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x, x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right] \Rightarrow t \in (0; 1)$.

Ta được hàm số $g(t) = \dfrac{t-m}{t+1}, t \in [0; 1]$.

Ta có $g'(t) = \dfrac{1+m}{(t+1)^2}$.

- $m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1 \Rightarrow g'(t) > 0 \Rightarrow \max\limits_{[0;1]} g(t) = -2 \Leftrightarrow g(1) = -2 \Leftrightarrow \dfrac{1-m}{2} = -2 \Leftrightarrow m = 5$ (thỏa mãn).
- $m+1 < 0 \Leftrightarrow m < -1 \Rightarrow g'(t) < 0 \Rightarrow \max\limits_{[0;1]} g(t) = -2 \Leftrightarrow g(0) = -2 \Leftrightarrow \dfrac{-m}{1} = -2 \Leftrightarrow m = 2$ (không thỏa mãn).

Vậy $m = 5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Hình bát diện đều có bao nhiêu đỉnh?

(A) 10. (B) 8. **C** 6. (D) 12.

Lời giải.

Hình bát diện đều có 6 đỉnh.

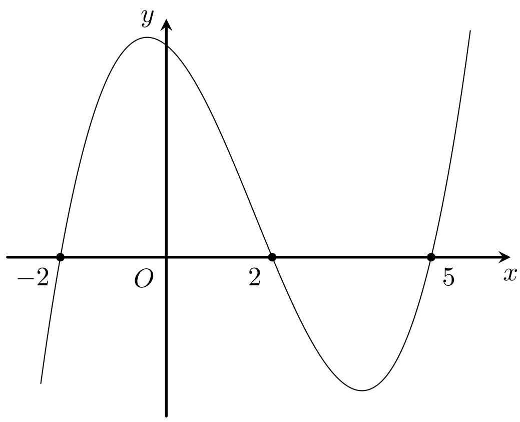
Chọn đáp án (C) □

Câu 34.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

(A) $(-1; +\infty)$. **B** $(-\infty; -1)$.

(C) $(1; 3)$. (D) $(0; 2)$.



Lời giải.

Cách 1: Có $g'(x) = -2f'(3-2x)$.

Hàm số nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x) \le 0$, dấu "=" chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm.

$$\Leftrightarrow -2f'(3-2x) \le 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \le 3-2x \le 2 \\ 3-2x \ge 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{2}\right] \\ x \in (-\infty; -1]. \end{array}\right.$$

Cách 2: Dựa vào đồ thị hàm số ta có $f'(x) = (x+2)^{2n+1}(x-2)^{2m+1}(x-5)^{2k+1}, (m, n, k \in \mathbb{N})$.
Mà $g'(x) = -2f'(3-2x)$.

$$\text{Nên } g'(x) = -2(5-2x)^{2n+1}(1-2x)^{2m+1}(-2-2x)^{2k+1} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$(5-2x)^{2n+1}$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$(1-2x)^{2m+1}$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$(-2-2x)^{2k+1}$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
-2		$-$		$-$		$-$		$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào BXD ta có hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1]; \left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{2}\right]$.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Hình lăng trụ có thể có số cạnh là số nào sau đây?

(A) 2017. **B** 2019. (C) 2018. (D) 2020.

Lời giải.

Giả sử số đỉnh của đa giác đáy của lăng trụ là n.
Khi đó số cạnh của 2 mặt đáy là $2n$ và số cạnh bên của lăng trụ là n.
Vậy số cạnh của lăng trụ là $3n$. Ta thấy $3 \cdot 673 = 2019$ nên chọn đáp án B.
Chọn đáp án B □

Câu 36. Một xưởng sản xuất cần làm 100 chiếc hộp inox bằng nhau, hình dạng là hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông (hộp không có nắp), với thể tích là 108 dm^3/1 hộp. Giá inox là 47000 đồng/1dm^2. Hãy tính toán sao cho tổng tiền chi phí cho 100 chiếc hộp là ít nhất, và số tiền tối thiểu đó là bao nhiêu (nếu chỉ tính số inox vừa đủ để sản xuất 100 chiếc hộp, không có phần dư thừa, cắt bỏ)?

(A) 1692000000 đồng. **B** 507666000 đồng. (C) 1015200000 đồng. (D) 235800000 đòng.

Lời giải.

Gọi độ dài cạnh đáy của hộp là x dm $\Rightarrow$ Chiều cao của hộp là $h = \dfrac{108}{x^2}$ dm.

$\Rightarrow$ Số inox cần thiết để làm 1 hộp là $S = x^2 + 4x \cdot h = x^2 + \dfrac{432}{x}$ dm^2.

Tổng số tiền chi phí cho 100 chiếc hộp là $T = 47000 \cdot 100 \cdot S = 4700000 \cdot \left(x^2 + \dfrac{432}{x}\right)$.

Ta có $T' = 4700000 \cdot \left(2x - \dfrac{432}{x^2}\right) \Rightarrow T' = 0 \Leftrightarrow x = 6$.

x	0		6		$+\infty$
T'		$-$	0	$+$	
T		$\searrow$	507600000	$\nearrow$	

Chọn đáp án B □

Câu 37. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d)\colon y = 9x + 17$ là

A $\left[\begin{array}{l} y = 9x + 19 \\ y = 9x - 21 \end{array}\right.$. B $\left[\begin{array}{l} y = 9x - 19 \\ y = 9x + 21 \end{array}\right.$. C $\left[\begin{array}{l} y = 9x - 15 \\ y = 9x + 17 \end{array}\right.$. D $y = 9x - 15$.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp tuyến của tiếp điểm cần tìm.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$. Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d)\colon y = 9x + 17$ nên phương trình tiếp tuyến có dạng $y = 9x + b, (b \neq 17)$.

Khi đó $y'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$.

- Với $x_0 = 2$, ta có $y_0 = 2^3 - 3.2 + 1 = 3$.
  Do đó phương trình tiếp tuyến là $y = 9(x - 2) + 3 \Leftrightarrow y = 9x - 15$.
- Với $x_0 = -2$, ta có $y_0 = (-2)^3 - 3.(-2) + 1 = -1$.
  Do đó phương trình tiếp tuyến là $y = 9(x + 2) - 1 \Leftrightarrow y = 9x + 17$ (loại vì $b \neq 17$).

Vậy phương trình tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu đề bài là $y = 9x - 15$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

A 11. B 10. C 6. D 15.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [-1; 2] \\ x = -2 \notin [-1; 2]. \end{array}\right.$

Mà $f(-1) = 15, f(1) = -5, f(2) = 6$.

Do đó $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(-1) = 15$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A Hai khối lập phương lần lượt có cạnh là 4 cm và 8 cm là hai khối đa diện đồng dạng.

B Khối chóp tam giác đều là khối chóp có đáy là tam giác đều.

C Hai khối tứ diện đều có diện tích mỗi mặt là 3 m^2 và 12 m^2 là hai khối đa diện đều.

D Khối lăng trụ tứ giác đều và khối hộp chữ nhật là hai khối đa diện đồng dạng.

Lời giải.

Khối lăng trụ tứ giác đều có đáy là hình vuông nên không đồng dạng với khối hộp chữ nhật.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Trung điểm các cạnh của hình tứ diện đều là đỉnh của hình

A Hình lập phương.

B Hình tứ diện đều.

C Hình lăng trụ tam giác.

D Hình bát diện đều.

Lời giải.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Cho hàm số $y = x - \sin 2x + 3$. Chọn kết luận đúng.

A Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{\pi}{3}$.

B Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -\dfrac{\pi}{6}$.

C Hàm số đạt cực đại tại $x = \dfrac{\pi}{6}$.

D Hàm số đạt cực đại tại $x = -\dfrac{\pi}{6}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 1 - 2\cos 2x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

Và $y'' = 1 + 4\sin 2x$

- $y''\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1 + 2\sqrt{3} > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{\pi}{6}$.
- $y''\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = 1 - 2\sqrt{3} < 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = -\dfrac{\pi}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của hàm số nào sau đây?

A $y = \dfrac{2x^2+1}{2-x}$.

B $y = \dfrac{x^2+2x+1}{1+x}$.

C $y = \dfrac{x+1}{1-2x}$.

D $y = \dfrac{2x-2}{x+2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-2}{x+2} = 2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-2}{x+2} = 2$.

Vậy $y = 2$ là tiệm cận ngang của hàm số $y = \dfrac{2x-2}{x+2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 43.

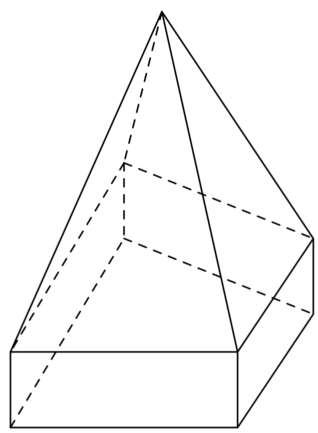
Hình đa diện bên có bao nhiêu cạnh?

A 15.

B 12.

C 20.

D 16.



Lời giải.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 2. **B** 3. (C) 4. (D) 5.

Lời giải.

Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ bằng số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ cộng với số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục hoành (không tính điểm cực trị).

Vì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị và cắt trục Ox tại 1 điểm trên đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có $2 + 1 = 3$ điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) Hàm số đồng biến trên $(-2; 0)$.

B Hàm số đạt giá trị lớn nhất là 4.

(C) Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt.

(D) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(1; 0)$ là

(A) $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$. **B** $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$. (C) $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$. (D) $y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

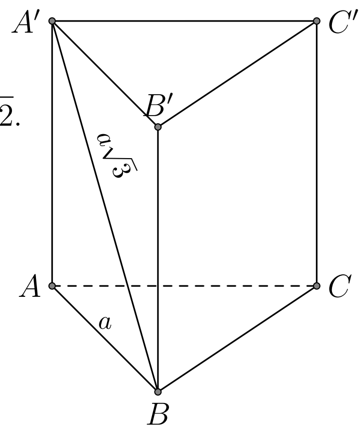
Cách 1: $y = \dfrac{x-1}{x+1} \Rightarrow y' = \dfrac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow y'(1) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(1; 0)$ là $y = \dfrac{1}{2}(x-1) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$, $A'B = a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B** $\dfrac{a^3}{6}$. **C** $\dfrac{a^3}{2}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Do tam giác $A'AB$ vuông tại A nên theo Py-ta-go ta có

$$A'B^2 = AA'^2 + AB^2 \Leftrightarrow AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - a^2} = a\sqrt{2}.$$

Lại có tam giác ABC vuông cân tại B nên $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB^2 = \dfrac{1}{2}a^2$.

Thể tích khối lăng trụ đã cho

$$V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$

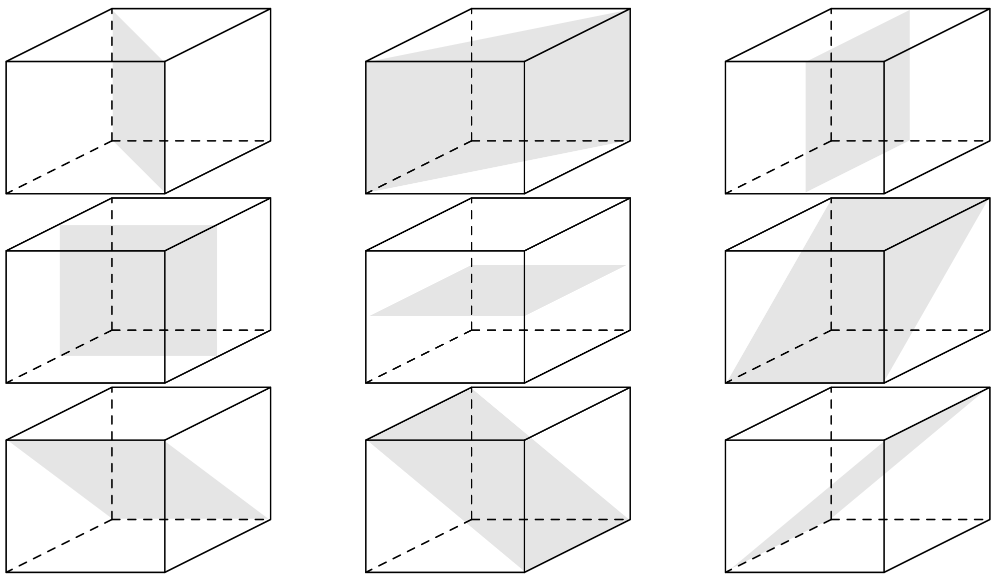
Chọn đáp án D □

Câu 48. Số mặt phẳng đối xứng của hình lập phương là

A 3. **B** 6. **C** 8. **D** 9.

Lời giải.

Hình lập phương có 9 mặt phẳng đối xứng.



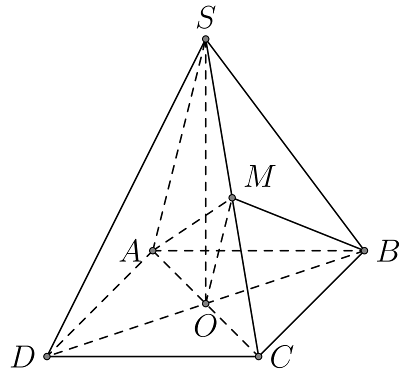
Chọn đáp án D □

Câu 49. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có thể tích V, có O là tâm của đáy. Lấy M là trung điểm của cạnh bên SC. Thể tích khối tứ diện $ABMO$ bằng

A $\dfrac{V}{4}$. **B** $\dfrac{V}{2}$. **C** $\dfrac{V}{16}$. **D** $\dfrac{V}{8}$.

Lời giải.

Ta có



$$\begin{aligned} V_{ABMO} &= \frac{1}{2}V_{ABMC};\\ V_{ABMC} &= \frac{1}{2}V_{SABC} = \frac{1}{4}V_{SABCD} = \frac{1}{4}V\\ \Rightarrow V_{ABMO} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}V = \frac{1}{8}V \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SC vuông góc với mặt phẳng $(ABC), SC = a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

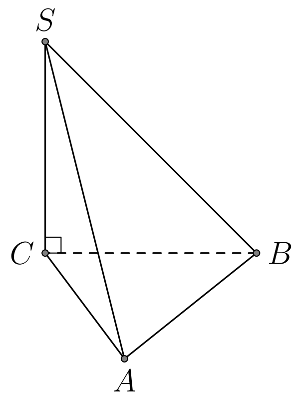
A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.

Đáy ABC là tam giác đều cạnh a nên diện tích bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Đường cao của hình chóp là $SC = a$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $\dfrac{1}{3}SC \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3}a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ (đvdt)



Chọn đáp án D □

——— HẾT ———

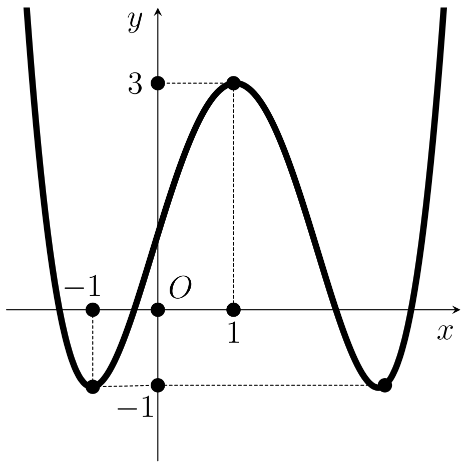
ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. D	3. B	4. C	5. C	6. C	7. D	8. D	9. B	10. A
11. A	12. A	13. B	14. B	15. B	16. B	17. D	18. D	19. D	20. A
21. A	22. A	23. A	24. A	25. A	26. D	27. D	28. D	29. D	30. A
31. A	32. A	33. C	34. B	35. B	36. B	37. D	38. D	39. D	40. D
41. D	42. D	43. D	44. B	45. B	46. B	47. D	48. D	49. D	50. D

40 ĐỀ THI THỬ THPT THĂNG LONG, HÀ NỘI – LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?



(A) $(-\infty; -1)$. (B) $(0; 1)$. (C) $(1; +\infty)$. (D) $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng cách đọc đồ thị hàm số để tìm khoảng đồng biến, nghịch biến.

Xét từ trái qua phải trên khoảng $(a; b)$ nếu đồ thị đi xuống thì hàm số nghịch biến trên$(a; b)$, nếu đồ thị đi lên thì hàm số đồng biến trên$(a; b)$.

Cách giải:

Từ hình vẽ ta thấy: Xét từ trái qua phải thì đồ thị hàm số đi lên trên khoảng $(-1; 1)$.

Nên hàm số đồng biến trên $(-1; 1)$ suy ra hàm số đồng biến trên $(0; 1)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy là a và mặt bên tạo với đáy một góc $45°$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

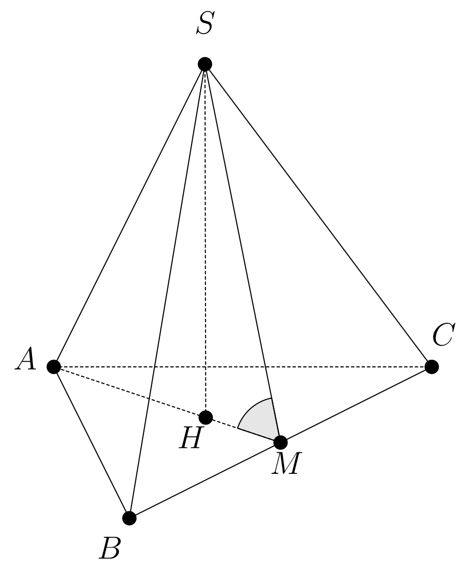
(A) $\dfrac{a^3}{8}$. (B) $\dfrac{a^3}{24}$. (C) $\dfrac{a^3}{12}$. (D) $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Tính diện tích đáy và chiều cao rồi áp dụng công thức $V = \dfrac{1}{3}Sh$ tính thể tích.

Cách giải:

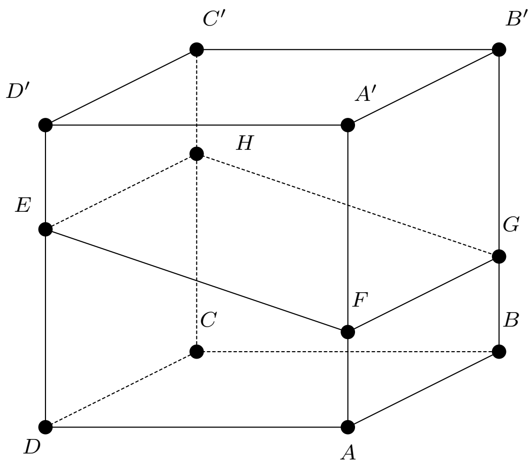


Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC suy ra SH là đường cao.
Góc giữa mặt bên và đáy là góc giữa SM và AM với M là trung điểm của BC.
Tam giác ABC đều cạnh a nên $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MH = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$
Tam giác vuông SHM có $MH = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}, SMH = 45^\circ$ nên $SH = HM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.
Vậy thể tích $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a^3}{24}$.
Chọn đáp án B □

Câu 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $\sqrt{3}$. Mặt phẳng (α) cắt tất cả các cạnh bên của hình lập phương. Tính diện tích thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng (α) biết (α) tạo với mặt $(ABB'A')$ một góc 60°.

A $2\sqrt{3}$. **B** $\dfrac{3}{2}$. **C** 6. **D** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.
Phương pháp:
Ta sử dụng công thức diện tích hình chiếu $S' = S \cdot \cos\alpha$.
Với S là diện tích hình H, S' và là diện tích hình chiếu của H trên mặt phẳng (P), αlà góc tạo bởi mặt phẳng chứa hình H và mặt phẳng (P).
Cách giải:



Mặt phẳng (α) cắt các cạnh $DD'; AA'; BB'; CC'$ lần lượt tại$E;F;G;\ H$.

Khi đó $(\alpha) = (EFGH)$.

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $(ABB'A') \perp (ABCD)$ mà $(EFGH)$ tạo với $(ABB'A')$ góc 60° nên góc giữa $(EFGH)$ và $(ABCD)$ là 30°.

Lại có hình chiếu của $EFGH$ xuống mặt phẳng $(ABCD)$ là hình vuông $ABCD$ cạnh $\sqrt{3}$.

Theo công thức tính diện tích hình chiếu ta có $S_{ABCD} = S_{EFGH} \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow S_{EFGH} = \dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{\cos 30^\circ} = 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{3}$, $AB = a$, $BC = 2a$, $AC = a\sqrt{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

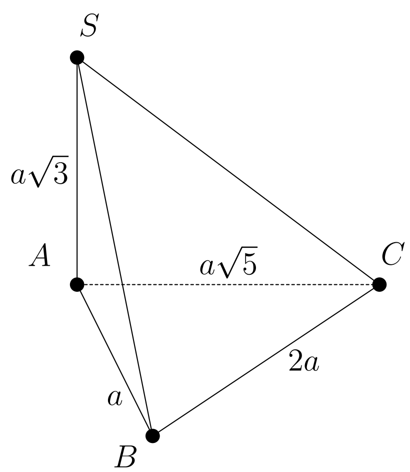
A $2a^3\sqrt{3}$. **B** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **C** $\dfrac{a^3}{\sqrt{3}}$. **D** $a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Tính diện tích đáy và chiều cao rồi áp dụng công thức $V = \dfrac{1}{3}Sh$ tính thể tích.

Cách giải:



Xét tam giác ABC có $AB^2 + BC^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2 = AC^2$.

Nên tam giác ABC vuông tại B (Định lí Pytago đảo).

Thể tích $V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot SA = \frac{1}{6} \cdot a \cdot 2a \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_4 x^2 - \log_2 3 = 1$ là

(A) 6. (B) 5. (C) 4. **D** 0.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng phương pháp đưa về cùng cơ số.

Sử dụng các công thức

a) $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$. b) $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$ với $(a; b > 0; a \neq 1)$.

Cách giải:

Điều kiện: $x \neq 0$.

Ta có $\log_4 x^2 - \log_2 3 = 1 \Leftrightarrow \log_2^2 x^2 - \log_2 3 = 1 \Leftrightarrow \log_2 |x| - \log_2 3 = 1$

$\Leftrightarrow \log_2 \frac{|x|}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{|x|}{3} = 2 \Leftrightarrow |x| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \text{ (thoả mãn)} \\ x = -6 \text{ (thoả mãn)} \end{array}\right.$

Tổng các nghiệm của phương trình là $6 + (-6) = 0$.

Chú ý: $\log_a x^2 = \log_a |x|$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Xác suất sút bóng thành công tại chấm 11 mét của hai cầu thủ Quang Hải và Văn Đức lần lượt là $0,8$ và $0,7$. Biết mỗi cầu thủ sút một quả tại chấm 11 mét và hai người sút độc lập. Tính xác suất để ít nhất một người sút bóng thành công.

(A) $0,44$. **B** $0,94$. (C) $0,38$. (D) $0,56$.

Lời giải.

Phương pháp: Tính xác suất theo phương pháp biến cố đối: "Không có cầu thủ nào sút vào".

Cách giải: Gọi A là biến cố: "Ít nhất một cầu thủ sút vào".

Khi đó $\overline{A}$ là biến cố: "Không có cầu thủ nào sút vào".

Xác suất xảy ra biến cố này là $\mathrm{P}(\overline{A}) = (1 - 0,8) \cdot (1 - 0,7) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - 0,06 = 0,94$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt đáy là góc giữa hai đường thẳng nào dưới đây?

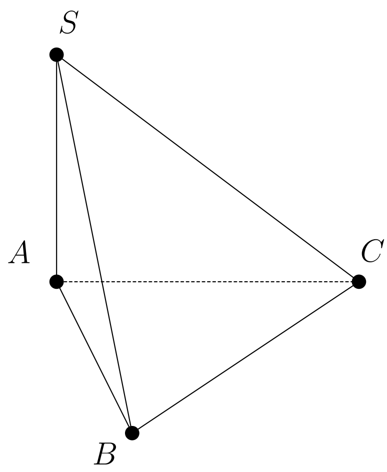
A SB và AB. (B) SB và SC. (C) SA và SB. (D) SB và BC.

Lời giải.

Phương pháp:

Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là góc giữa đường thẳng d và đường thẳng d' là hình chiếu của d trên (P).

Cách giải:

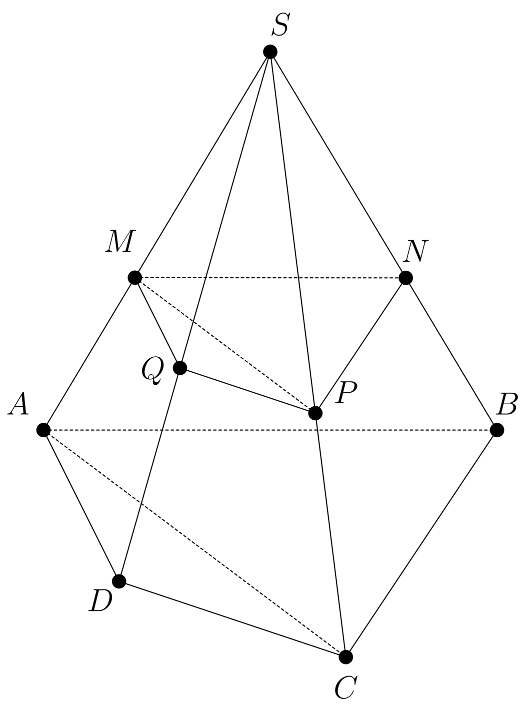


Ta có $SA \perp (ABC)$ tại A nên hình chiếu của S trên (ABC) là điểm A.
Suy ra hình chiếu của SB lên (ABC) là AB.
Do đó, góc giữa SB và (ABC) là góc giữa SB và AB.
Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết thể tích khối chóp $S.MNPQ$ là 1.

(A) 16. **(B) 8.** (C) 2. (D) 4.

Lời giải.
Phương pháp: Sử dụng công thức tính tỉ số thể tích đối với khối chóp tam giác: $\dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SN}{SB} \cdot \dfrac{SP}{SC}$ với M, N, P lần lượt thuộc SA, SB, SC.
Cách giải:



Ta có $\dfrac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ADC}} = \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SP}{SC} \cdot \dfrac{SQ}{SD} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$ $\dfrac{V_{S.MPN}}{V_{S.ACB}} = \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SP}{SC} \cdot \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$

Suy ra $\dfrac{1}{8} = \dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ADC}} = \dfrac{V_{S.MPN}}{V_{S.ACB}} = \dfrac{V_{S.MPN} + V_{S.MPN}}{V_{S.ADC} + V_{S.ACB}} = \dfrac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = 8V_{S.MNPQ} = 8.$

Chú ý: Công thức tỉ số thể tích trên chỉ áp dụng đối với chóp tam giác.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3-2x}{x+1}$ là

A $x = -2$. **B** $x = -1$. **C** $y = -2$. **D** $y = 3$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}\left(x \neq -\dfrac{d}{c}\right)$ nhận đường thẳng $y = \dfrac{a}{c}$ làm tiệm cận ngang và đường thẳng $x = -\dfrac{d}{c}$ làm tiệm cận đứng.

Cách giải:

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{3-2x}{x+1}$ nhận đường thẳng $y = -2$ làm tiệm cận ngang.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như sau

x	-3		-1		0		1		2
$f(x)$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$. Tính $M + m$.

A 3. **B** 2. **C** 1. **D** 4.

Lời giải.

Phương pháp:

Quan sát bảng biến thiên và tìm $GTLN$, $GTNN$ của hàm số trên đoạn $[-1; 2]$ rồi kết luận.

Cách giải:

Quan sát bảng biến thiên ta thấy trên đoạn $[-1; 2]$ thì hàm số đạt $GTNN$ bằng 0 tại $x = 0$ và đạt $GTLN$ bằng 3 tại $x = -1$.

Do đó $M = 3; m = 0 \Rightarrow M + m = 3 + 0 = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Tập nghiệm của phương trình $\log_{0,25}(x^2 - 3x) = -1$ là

A $\{4\}$. **B** $\{1; -4\}$.

C $\left\{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}; \dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}\right\}$. **D** $\{-1; 4\}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$.

Cách giải:

Điều kiện: $x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 3 \end{array}\right.$

Ta có $\log_{0,25}\left(x^2 - 3x\right) = -1 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0,25^{-1} \Leftrightarrow x^2 - 3x = 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -1 & (\text{ nhận}) \\ x = 4 & (\text{ nhận}) \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \{-1; 4\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Từ một nhóm có 10 học sinh nam và 8 học sinh nữ, có bao nhiêu cách chọn ra 5 học sinh trong đó có 3 học sinh nam và 2 học sinh nữ?

A $\mathrm{C}_{10}^3 \cdot \mathrm{C}_8^2$. B $\mathrm{A}_{10}^3 \cdot \mathrm{A}_6^2$. C $\mathrm{A}_{10}^3 + \mathrm{A}_8^2$. D $\mathrm{C}_{10}^3 + \mathrm{C}_8^2$.

Lời giải.

Phương pháp:

- Đếm số cách chọn 3 trong 10 bạn nam và 2 trong 8 bạn nữ.
- Sử dụng quy tắc nhân đếm số cách chọn.

Cách giải:

Số cách chọn 3 trong 10 bạn nam là C_{10}^3.

Số cách chọn 2 trong 8 bạn nữ là C_8^2.

Số cách chọn 5 bạn thỏa mãn bài toán là $\mathrm{C}_{10}^3 \cdot \mathrm{C}_8^2$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số dưới đây. Tìm hàm số đó.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

A $y = x^3 - 5x^2 + x + 6$. B $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

C $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 7$. D $y = x^4 + x^2 - 3$.

Lời giải.

Phương pháp:

Dựa vào cách đọc Bảng biến thiên để xác định hàm số.

Tìm ra các điểm thuộc đồ thị hàm số rồi thay tọa độ vào các hàm số ở đáp án để loại trừ.

Cách giải:

Từ bảng biến thiên, ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ nên loại $y = -x^3 + 6x^2 - 9x +$ vày $= x^4 + x^2 - 3$.

Ta thấy điểm $(3; -1)$ thuộc đồ thị hàm số $f(x)$ nên thay $x = 3$; $y = -1$ vào hai hàm số ở phương án $y = x^3 - 5x^2 + x + 6$ và phương án $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ ta thấy chỉ có hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ thỏa mãn nên hàm số cần tìm là $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Phương trình $9^x - 6^x = 2^{2x+1}$ có bao nhiêu nghiệm âm?

A 3. B 0. C 1. D 2.

Lời giải.

Phương pháp:

Chuyển vế, chia cả hai vế cho 4^x và giải phương trình thu được tìm nghiệm.

Cách giải:

$9^x - 6^x = 2^{2x+1} \Leftrightarrow 9^x - 2.4^x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0$

Đặt $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t > 0$ thì $t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 2 \text{ (nhận)} \end{array}\right. \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} 2 > 0.$

Vậy phương trình không có nghiệm nào âm.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Hình lập phương có độ dài đường chéo là 6 thì có thể tích là

A $2\sqrt{2}$. B $54\sqrt{2}$. C $24\sqrt{3}$. D 8.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng công thức hình lập phương cạnh a có độ dài đường chéo chính là $a\sqrt{3}$.

Thể tích hình lập phương cạnh a là $V = a^3$.

Cách giải:

Gọi độ dài cạnh hình lập phương là a, $(a > 0)$ thì độ dài đường chéo hình lập phương là $a\sqrt{3} = 6 \Leftrightarrow a = 2\sqrt{3}$.

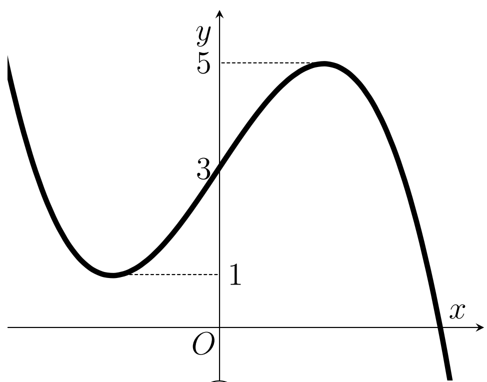
Thể tích hình lập phương là $V = \left(2\sqrt{3}\right)^3 = 24\sqrt{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 16.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Phương trình $2f(x) - 5 = 0$ có bao nhiêu nghiệm âm?



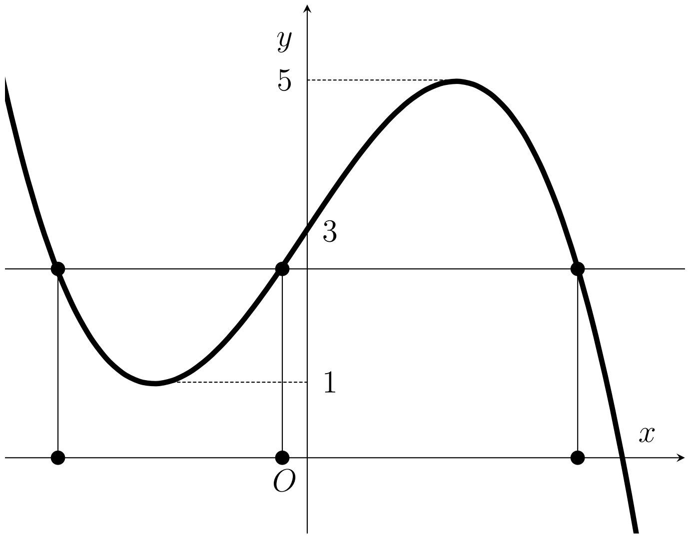
A 0. B 2. C 1. D 3.

Lời giải.

Phương pháp:

Tìm giao điểm của đường thẳng $y = \frac{5}{2}$ với đồ thị hàm số và nhận xét tính chất nghiệm.

Cách giải:



Ta có $2f(x)-5=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{5}{2}$.

Nghiệm của phương trình chính là hoành độ giao điểm của đường thẳng $y=\dfrac{5}{2}$ với đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Quan sát đồ thị ta thấy đường thẳng $y=\dfrac{5}{2}$ cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm phân biệt, trong đó có 2 điểm có hoành độ âm và 1 điểm có hoành độ dương.

Vậy phương trình có 2 nghiệm âm.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{-x+1}{3x-2}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung có hệ số góc là

A -1. B $\dfrac{1}{4}$. C $-\dfrac{5}{4}$. D $-\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=x_0$ là $k=f'(x_0)$.

Cách giải:

Ta có $y'=\dfrac{-1}{(3x-2)^2}$.

Giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{-x+1}{3x-2}$ với trục tung có hoành độ $x=0$.

Do đó hệ số góc của tiếp tuyến tại tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $y'(0)=\dfrac{-1}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Tính theo a thể tích của một khối trụ có bán kính đáy là a, chiều cao bằng $2a$.

A $2\pi a^3$. B $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. C $\dfrac{\pi a^3}{3}$. D πa^3.

Lời giải.

Phương pháp:

Công thức tính thể tích khối trụ $V=\pi r^2 h$.

Cách giải:

Ta có $V=\pi\cdot r^2\cdot h=\pi\cdot a^2\cdot 2a=2\pi\cdot a^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh $2a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $4a^3$. Tính khoảng cách từ điểm O tới mặt bên của hình chóp.

Ⓐ $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Ⓑ $\dfrac{3a}{4}$. Ⓒ $\dfrac{3a\sqrt{10}}{10}$. Ⓓ $\dfrac{a\sqrt{10}}{10}$.

Lời giải.

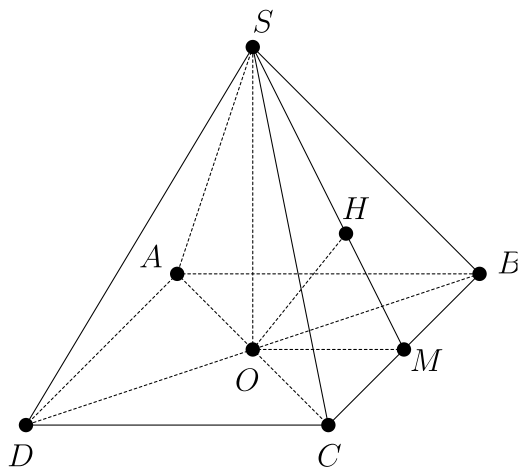
Phương pháp:

Sử dụng quan hệ vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng để xác định khoảng cách $\mathrm{d}(O;(P)) = OH$ với $OH \perp (P)$ tại H.

(Để chứng minh $OH \perp (P)$ ta chứng minh OH vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (P)).

Ta tính SO dựa vào công thức thể tích hình chóp, tính OH dựa vào hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Cách giải:



Vì $S.ABCD$ là chóp tứ giác đều có O là tâm đáy nên $SO \perp (ABCD)$.

Gọi M là trung điểm BC, trong tam giác SOM kẻ $OH \perp SM$ tại H.

Vì $ABCD$ là hình vuông tâm O nên $OB = OC = OA = OD = \dfrac{BD}{2}$.

Suy ra $OM \perp BC$ (vì ΔOBC vuông cân có OM là trung tuyến cũng là đường cao).

Ta có $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BC$, lại có $OM \perp BC$ nên $BC \perp (SOM)$ suy ra $BC \perp OH$.

Từ đó vì $\begin{cases} OH \perp SM \\ OH \perp BC \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SBC)$ tại $H \Rightarrow \mathrm{d}(O;(SBC)) = OH$.

Xét tam giác OBC vuông cân tại O có trung tuyến $OM = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2} \cdot 2a = a$.

Diện tích đáy $S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$.

Ta có $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} \Leftrightarrow 4a^3 = \dfrac{1}{3}SO \cdot 4a^2 \Rightarrow SO = 3a$.

Xét tam giác SOM vuông tại M có OH là đường cao nên theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{1}{(3a)^2} + \dfrac{1}{a^2} \Leftrightarrow OH^2 = \dfrac{10}{9a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{3a\sqrt{10}}{10}$.

Vậy $\mathrm{d}(O;(SBC)) = \dfrac{3a\sqrt{10}}{10}$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Hàm số $y = 2x^3 - x^2 + 5$ có điểm cực đại là

(A) $x = \dfrac{1}{3}$. (B) $x = 5$. (C) $x = 3$. (D) $x = 0$.

Lời giải.

Phương pháp:

- Tính y' tìm nghiệm của $y' = 0$.

- Tính y'' và tìm giá trị của y'' tại các điểm vừa tìm được.

Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai tại điểm x_0 thì điểm x_0 là điểm cực đại của hàm số trên nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0. \end{cases}$

Cách giải:

Ta có $y' = 6x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$

$y'' = 12x - 2 \Rightarrow y''(0) = -2 < 0$; $y''\left(\dfrac{1}{3}\right) = 2 > 0$.

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Một khối nón có bán kính đáy bằng 3 và góc ở đỉnh bằng 60° thì có thể tích bằng bao nhiêu?

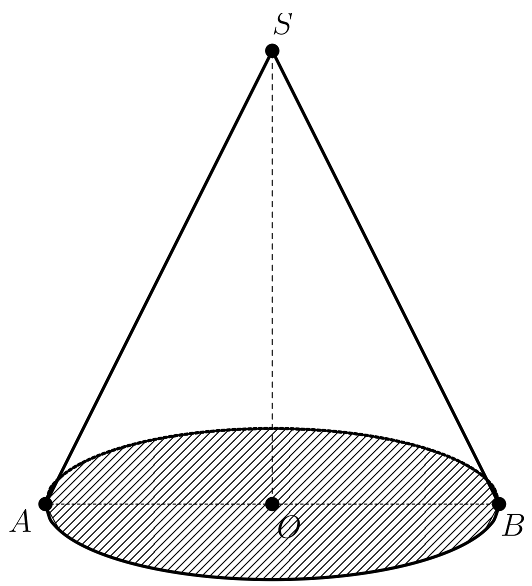
(A) $9\pi\sqrt{3}$. (B) $27\pi\sqrt{3}$. (C) $3\pi\sqrt{3}$. (D) $6\pi\sqrt{3}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng công thức tính thể tích khối nón $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$ với r là bán kính đáy, h là chiều cao hình chóp.

Cách giải:



Cắt hình nón bằng mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là tam giác cân SAB có $AB = 2R = 6$ và $ASB = 60^\circ$ nên tam giác SAB đều cạnh 6 $\Rightarrow$ trung tuyến $SO = \dfrac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3\sqrt{3} = 9\pi\sqrt{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Cho các số thực a, b thỏa mãn $0 < a < 1 < b$. Tìm khẳng định **đúng**

A $\log_a b < 0$. B $\ln a > \ln b$. C $(0,5)^a < (0,5)^b$. D $2^a > 2^b$.

Lời giải.

Phương pháp:

Xét tính đúng sai của từng đáp án dựa vào điều kiện của a, b.

Cách giải:

a) $\log_a b < \log_a 1 = 0$ (vì $0 < a < 1$ và $b > 1$) nên $\log_a b < 0$ đúng.

b) $\ln a < \ln b$ vì $a < b$ nên $\ln a > \ln b$ sai.

c) Vì $0 < 0,5 < 1$ và $a < b$ nên $(0,5)^a > (0,5)^b$ nên $(0,5)^a < (0,5)^b$ sai.

d) Vì $2 > 1$ và $a < b$ nên $2^a < 2^b$ nên $2^a > 2^b$ sai.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Với n là số nguyên dương, biểu thức $T = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \ldots + \mathrm{C}_n^n$ bằng

A n^2. B C_{2n}^n. C $n!$. D 2^n.

Lời giải.

Phương pháp:

Ta sử dụng công thức $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k . x^k$ sau đó thay $x = 1$ để tính tổng các hệ số.

Cách giải:

Ta có $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k . \cdot x^k$

Chọn $x = 1$ ta có $(1+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \cdot 1^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \ldots + \mathrm{C}_n^n \Leftrightarrow T = 2^n$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Một mặt cầu có diện tích xung quanh là π thì có bán kính bằng

A $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B $\sqrt{3}$. C $\frac{1}{2}$. D 1.

Lời giải.

Phương pháp:

Công thức tính diện tích mặt cầu bán kính R là $S = 4\pi \cdot R^2$.

Cách giải:

Ta có: $S = \pi = 4\pi \cdot R^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow R = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A 2. B 1. C 0. D 3.

Lời giải.

Phương pháp:

Xét phương trình $f'(x) = 0$, nếu x_0 là nghiệm bội bậc chẵn của phương trình thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số, nếu x_0 là nghiệm bội bậc lẻ của phương trình thì x_0 là điểm cực trị của hàm số.

Cách giải:

Xét phương trình $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$

Trong đó $x=0$, $x=2$ là các nghiệm bội bậc lẻ nên hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

(còn $x=1$; $x=3$ là các nghiệm bội bậc chẵn nên không phải là điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$).

Chú ý: Các em có thể lập bảng biến thiên của hàm $y=f(x)$ rồi kết luận số điểm cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Cho a, b là hai số thực dương tùy ý và $b \neq 1$. Tìm kết luận **đúng**.

A. $\ln a + \ln b = \ln(a+b)$.

B. $\ln(a+b) = \ln a \cdot \ln b$.

C. $\ln a - \ln b = \ln(a-b)$.

D. $\log_b a = \dfrac{\ln a}{\ln b}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng tính chất của logarit nhận xét tính đúng sai của từng đáp án.

Cách giải:

a) $\ln a + \ln b = \ln(ab) \neq \ln(a+b)$ nên $\ln a + \ln b = \ln(a+b)$ sai.

b) $\ln(a+b) \neq \ln a \cdot \ln b$ nên $\ln(a+b) = \ln a \cdot \ln b$ sai.

c) $\ln a - \ln b = \ln\dfrac{a}{b} \neq \ln(a-b)$ nên $\ln a - \ln b = \ln(a-b)$ sai.

d) $\log_b a = \dfrac{\ln a}{\ln b}$ nên $\log_b a = \dfrac{\ln a}{\ln b}$ đúng.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Trong các hàm số dưới đây, đồ thị hàm số nào nhận trục tung là đường tiệm cận?

A. $y = \log_3 x$.

B. $y = \dfrac{1}{3^x}$.

C. $y = \dfrac{1}{x+1}$.

D. $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng:

a) Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}\left(x \neq -\dfrac{d}{c}\right)$ nhận đường thẳng $y = \dfrac{a}{c}$ làm tiệm cận ngang và đường thẳng $x = -\dfrac{d}{c}$ làm tiệm cận đứng.

b) Đồ thị hàm số $y = \log_a x, (x>0)$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng.

c) Đồ thị hàm số $y = a^x, (a>0)$ nhận trục hoành làm tiệm cận ngang (không có tiệm cận đứng).

Cách giải:

a) Đồ thị hàm số $y = \log_3 x, (x>0)$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng.

b) Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{3^x} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ và $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$ nhận trục hoành làm tiệm cận ngang (không có tiệm cận đứng).

c) Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x+1}$ nhận $x=-1$ làm tiệm cận đứng và $y=0$ làm tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Một khối lăng trụ tứ giác đều có thể tích là 4. Nếu gấp đôi các cạnh đáy đồng thời giảm chiều cao của khối lăng trụ này hai lần thì được khối lăng trụ mới có thể tích là:

A 8. (B) 4. (C) 16. (D) 2.

Lời giải.

Phương pháp:

Nhận xét sự thay đổi về thể tích của khối lăng trụ theo cạnh đáy và chiều cao rồi kết luận.

Cách giải:

Gọi cạnh đáy và chiều cao khối lăng trụ đều là a; h thì thể tích $V = a^2h$.

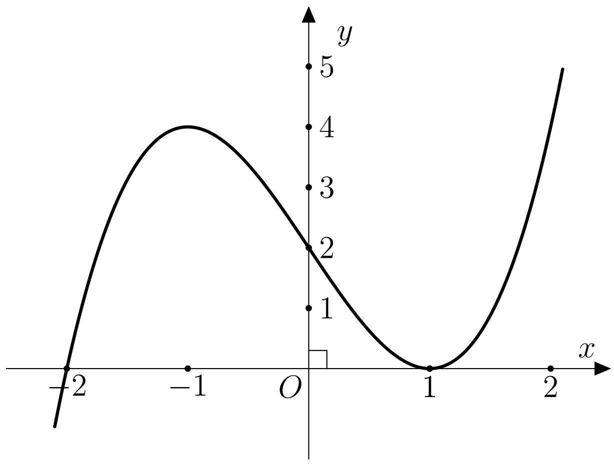
Nếu gấp đôi các cạnh đáy đồng thời giảm chiều cao của khối lăng trụ hai lần thì $V' = (2a^2) \cdot \dfrac{h}{2} = 2a^2h = 2V$.

Vậy thể tích khối lăng trụ được tăng lên 2 lần và bằng $4 \cdot 2 = 8$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm kết luận **đúng**



(A) Hàm số $y = f(x)$ có điểm cực tiểu là $x = 2$.

(B) Hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực đại là -1.

(C) Hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại là $x = 4$.

D Hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực tiểu là 0.

Lời giải.

Phương pháp:

Dựa vào cách đọc đồ thị hàm số để tìm điểm cực trị.

Ở đây cần lưu ý giá trị cực trị của hàm số là trung độ điểm cực trị của đồ thị hàm số, điểm cực trị của hàm số là hoành độ điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Cách giải:

Từ hình vẽ ta thấy đồ thị hàm số nhận $(1; 0)$ làm điểm cực tiểu và điểm $(-1; 4)$ làm điểm cực đại.

Nên hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực tiểu là $y_{\text{CT}} = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Tập xác định của hàm số $y = \log(x-2)^2$ là

(A) $\mathbb{R}$. **B** $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. (C) $(2; +\infty)$. (D) $[2; +\infty)$.

Lời giải.

Phương pháp:

Hàm số $y = \log_a f(x)$ xác định nếu $f(x)$ xác định và $f(x) > 0$.

Cách giải:

Hàm số $y = \log(x-2)^2$ xác định nếu $(x-2)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Vậy TXĐ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Chú ý: Khi giải nhiều học sinh biến đổi $(x-2)^2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ rồi chọn $\mathscr{D} = (2; +\infty)$ là sai.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \ln(1 + e^{2x})$.

A. $y' = \dfrac{-2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$. B. $y' = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$. C. $y' = \dfrac{1}{e^{2x}+1}$. D. $y' = \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng công thức đạo hàm $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$ và $(e^u)' = u'.e^u$.

Cách giải:

Ta có $y' = (\ln(1+e^{2x}))' = \dfrac{(1+e^{2x})'}{1+e^{2x}} = \dfrac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Đồ thị hàm số nào sau đây có trục đối xứng?

A. $y = x^3 + x$. B. $y = x^3$. C. $y = x^3 + 3x^2 - 1$. D. $y = |x|$.

Lời giải.

Phương pháp:

Đồ thị hàm số lẻ có tâm đối xứng, đồ thị hàm số chẵn có trục đối xứng.

Cách giải:

Nhận thấy hàm số $y = |x|$ là hàm số chẵn nên đồ thị có trục đối xứng.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Cho n, k là những số nguyên thỏa mãn $0 \leq k \leq n$ và $n \geq 1$. Tìm khẳng định **sai**.

A. $\mathrm{P}_n = \mathrm{A}_n^n$. B. $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$. C. $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{k!}$. D. $\mathrm{P}_k.\mathrm{C}_n^k = \mathrm{A}_n^k$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng các công thức

a) $\mathrm{P}_n = n!$. b) $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ c) $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Trong đó, $n \geq k \geq 0; n; k \in \mathbb{N})$.

Cách giải:

Ta có $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ nên đáp án $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{k!}$ là sai.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. $y = x^4 - x^2 + 3$. B. $y = \dfrac{x-2}{2x-3}$. C. $y = -x^3 + x - 1$. D. $y = \dfrac{3-x}{x+1}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Tìm các khoảng đồng biến của mỗi hàm số ở các đáp án và đối chiếu kết quả.

Cách giải:

a) Xét hàm số $y = x^4 - x^2 + 3$.

Ta có $y' = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$

Khi đó $y' > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < 0 \\ x > \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$

Nên hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$ và $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right) \supset (1; +\infty)$, chúng ta nhận hàm số này.

b) Xét hàm số $y = \dfrac{x-2}{2x-3}$.

$\Rightarrow y' = \dfrac{1}{(2x-3)^2} > 0, \forall x \in \left(-\infty; \dfrac{3}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$

Do đó hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; \dfrac{3}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$

Cả hai khoảng này đều không chứa khoảng $(1; +\infty)$ nên không nhận hàm số này.

c) Xét hàm số $y = -x^3 + x - 1$

$\Rightarrow y' = -3x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Khoảng này không chứa khoảng$(1; +\infty)$ nên loại hàm số này.

d) Xét hàm số $y = \dfrac{3-x}{x+1}$

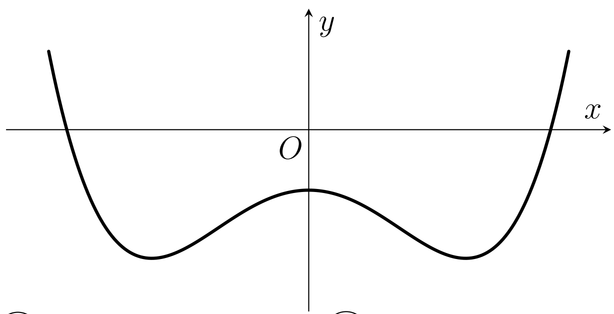
$\Rightarrow y' = \dfrac{-4}{(x+1)^2} < 0, \forall x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

Do đó hàm số không đồng biến.

Chọn đáp án A □

Câu 35.

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm kết luận **đúng**



(A) $a + b > 0$. (B) $bc > 0$. (C) $ab > 0$. (D) $ac > 0$.

Lời giải.

Phương pháp:

Dựa vào cách đọc đồ thị hàm số trùng phương bậc bốn $y = ax^4 + bx^2 + c$.

\+ Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị khi $ab < 0$, có một điểm cực trị khi $ab \geq 0$.

\+ Xác định dấu của hệ số tự do c dựa vào giao của đồ thị với trục tung.

\+ Xác định dấu của a dựa vào $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$,.

Nếu $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ thì $a > 0$.
Nếu $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$ thì $a < 0$.
Cách giải:
Từ hình vẽ ta thấy:
+ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ nên $a > 0$.
+ Đồ thị hàm số có ba cực trị nên $ab < 0$ mà $a > 0 \Rightarrow b < 0$.
+ Đồ thị cắt trục tung tại điểm nằm dưới trục Ox nên $c < 0$.
Từ đó ta có $a > 0; b > 0; c > 0 \Rightarrow bc > 0$.
Chọn đáp án B □

Câu 36. Có bao nhiêu số nguyên dương là ước của 2592 hoặc là ước của 2916?
A 24. B 51. C 36. D 32.

Lời giải.
Phương pháp:
- Đếm số các ước nguyên dương của 2592 và 2916.
Sử dụng công thức $X = a^n \cdot b^m$ thì số ước nguyên dương của X là $(m+1)(n+1)$.
- Dùng công thức tính số phần tử $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
Cách giải:
Ta có $2592 = 2^5 \cdot 3^4$ và $2916 = 2^2 \cdot 3^6$.
Gọi A là tập các ước nguyên dương của 2592 suy ra $|A| = (5+1) \cdot (4+1) = 30$.
Gọi B là tập các ước nguyên dương của 2916 suy ra $|B| = (2+1) \cdot (6+1) = 21$.
Lại có $UCLN\,(2592; 2916) = 2^2 \cdot 3^4$ nên số ước chung của 2592 và 2916 là số ước của $2^2 \cdot 3^4$ và có $(2+1) \cdot (4+1) = 15$ ước như vậy.
Vậy có $30 + 21 - 15 = 36$ số thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 37. Anh Bình gửi 200 triệu đồng vào ngân hàng VB với kì hạn cố định 12 tháng và hưởng mức lãi suất là $0,65\%$/tháng. Tuy nhiên, sau khi gửi được tròn 8 tháng anh Bình có việc phải dùng đến 200 triệu trên. Anh đến ngân hàng đnh rút tiền thì được nhân viên ngân hàng tư vấn: "Nếu rút tiền trước hạn, toàn bộ số tiền anh gửi chỉ được hưởng mức lãi suất không kì hạn là $0,02\%$/tháng. Anh nên thế chấp sổ tiết kiệm đó tại ngân hàng để vay ngân hàng 200 triệu với lãi suất $0,7\%$/tháng. Khi sổ của anh đến hạn, anh có thể rút tiền để trả nợ ngân hàng". Nếu làm theo tư vấn của nhân viên ngân hàng, anh Bình sẽ đỡ thiệt một số tiền gần nhất với con số nào dưới đây (biết rằng ngân hàng tính lãi theo thể thức lãi kép)?
A $10,85$ triệu đồng. B $10,51$ triệu đồng. C $10,03$ triệu đồng. D $10,19$ triệu đồng.

Lời giải.
Phương pháp:
Sử dụng công thức lãi kép $A = A_0(1+r)^n$ với A_0 là số tiền gốc ban đầu, r là lãi suất, A là tổng tiền cả gốc và lãi thu được sau n kì hạn.
Cách giải:
* Nếu anh Bình nghe theo nhân viên tư vấn ngân hàng
+ Tiền lãi sanh Bình nhận được sau khi gửi 200 triệu trong 12 tháng với mức lãi suất $0,65\%/$

tháng là $A = 200\left(1 + 0,65\%\right)^{12} - 200$ (triệu đồng).

+ Tiền lãi anh Bình phải trả khi vay nợ 200 triệu đồng với lãi suất $0,7\%/$ tháng là $B = 200\left(1 + 0,7\%\right)^{4} - 200$ (triệu đồng).

Tổng số tiền lãi anh Bình nhận được là $M = A - B$.

* Nếu anh Bình rút tiền ngay

Số tiền lãi anh Bình nhận được trong 8 tháng với mức lãi suất $0,02\%/$ tháng là $N = 200\left(1 + 0,02\%\right)^{12} - 200$.

Suy ra nếu làm theo nhân viên tư vấn ngân hàng thì anh Bình sẽ đỡ thiệt số tiền là $M - N \approx 10.19$ triệu đồng.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Mỗi bạn An , Bình chọn ngẫu nhiên 3 chữ số trong tập $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Tính xác suất để trong hai bộ ba chữ số mà An, Bình chọn ra có đúng một chữ số giống nhau.

(A) $\frac{7}{40}$. (B) $\frac{9}{10}$. (C) $\frac{6}{25}$. (D) $\frac{21}{40}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Đếm số khả năng có lợi cho biến cố bằng cách xét từng trường hợp trùng chữ số thứ nhất, trùng chữ số thứ 2 và trùng chữ số thứ ba.

Cách giải:

Số phần tử của không gian mẫu $\mathrm{n}\left(\Omega\right) = \mathrm{C}_{10}^3 \cdot \mathrm{C}_{10}^3 = 14400$.

Gọi A là biến cố "Trong hai bộ số của hai bạn có đúng một chữ số giống nhau".

Gọi ba chữ số An chọn được là $(a; b; c)$ thì có C_{10}^3 cách chọn ba chữ số của An.

+) *Trường hợp 1:* Bình chọn được a và không chọn được b, c thì hai chữ số còn lại của Bình phải là 2 trong 7 chữ

số khác a, b, c hay có C_7^2 cách chọn.

+) *Trường hợp 2:* Bình chọn được b và không chọn được a, c thì hai chữ số còn lại của Bình phải là 2 trong 7 chữ.

số khác a, b, c hay có C_7^2 cách chọn.

+) *Trường hợp 3:* Bình chọn được c và không chọn được a, b thì hai chữ số còn lại của Bình phải là 2 trong 7 chữ số khác a, b, c hay có C_7^2 cách chọn.

Do đó $\mathrm{n}(A) = 3 \cdot \mathrm{C}_7^2 \cdot \mathrm{C}_{10}^3 = 7560$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mathrm{n}(A)}{\mathrm{n}\left(\Omega\right)} = \dfrac{7560}{14400} = \dfrac{21}{40}$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$ có các mặt ABC và BCD là các tam giác đều cạnh 2, hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) vuông góc với nhau. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

(A) $2\sqrt{2}$. (B) $\sqrt{2}$. (C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. (D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

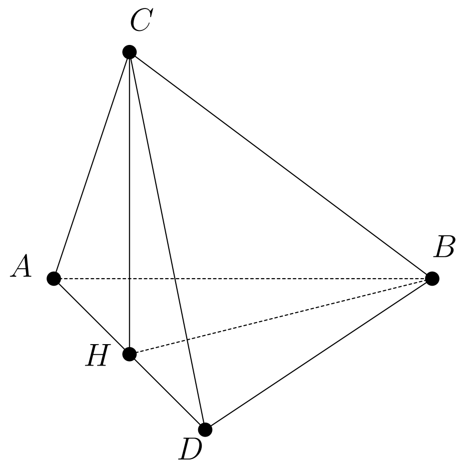
Lời giải.

Phương pháp:

Ta xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ chính là điểm cách đều bốn đỉnh A, B, C, D.

Dựa vào tính chất tam giác cân, hai tam giác bằng nhau, tỉ số lượng giác để chứng minh các đoạn thẳng bằng nhau từ đó tìm được tâm mặt cầu.

Cách giải:



Các tam giác đều ABC và BCD có cạnh 2.

$\Rightarrow BD = DC = BC = AB = AC = 2$.

Nên tam giác CAD cân tại C và tam giác BAD cân tại B.

Lấy H là trung điểm $AD \Rightarrow CH \perp AD$ (do tam giác CAD cân tại C)

Ta có $\begin{cases} (CAD) \perp (BAD) \\ (CAD) \cap (BAD) = AD \\ CH \perp AD, BH \subset (CAD) \end{cases} \Rightarrow CH \perp (BAD) \Rightarrow CH \perp BH$ (1)

Mặt khác, ta có $\Delta CAD = \Delta BAD\,(c-c-c)$ nên $BH = CH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tam giác CHB vuông cân tại H có cạnh huyền $CB = 2$.

Suy ra $BC^2 = BH^2 + CH^2 \Leftrightarrow 2BH^2 = 2^2 \Rightarrow BH = CH = \sqrt{2}$.

Xét tam giác CAH vuông tại H có $\cos \widehat{ACH} = \dfrac{CH}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{ACH} = 45^\circ$.

Lại thấy CH là phân giác của góc $\widehat{ACD}$ (vì ΔCAD cân tại C)

nên $\widehat{ACH} = \widehat{HCD} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{ACD} = 90^\circ$.

Hay tam giác CAD vuông cân tại $C \Rightarrow CH = \dfrac{1}{2}AD = HA = HD$ (3)

Vì $\Delta CAD = \Delta BAD\,(c-c-c)$ nên ΔABD vuông cân tại $B \Rightarrow BH = \dfrac{AD}{2} = HD = HA$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $HA = HB = HC = HD = \sqrt{2}$ hay H là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ và bán kính mặt cầu là $\sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $(x+3)^8 - x^2(2-x)^5$ thành đa thức là

A 13568. B 1472. C 1432. D 1552.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dung công thức khai triển nhị thức Newton $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$.

Cách giải:

Ta có

$$\begin{aligned}&(x+3)^8 - x^2(2-x)^5\\ =\ & \sum_{k=0}^{8} \mathrm{C}_8^k \cdot x^{8-k} \cdot 3^k - x^2 \cdot \sum_{i=0}^{5} \mathrm{C}_5^j \cdot 2^{5-j} \cdot (-x)^i\\ =\ & \sum_{k=0}^{8} \mathrm{C}_8^k \cdot x^{8-k} \cdot 3^k - \sum_{i=0}^{5} \mathrm{C}_5^i \cdot 2^{5-i} \cdot (-1)^i \cdot x^{i+2}\end{aligned}$$

Số hạng chứa x^5 ứng với $\begin{cases} 8-k=5 \\ i+2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=3 \\ i=3 \end{cases}$

Vậy hệ số $\mathrm{C}_8^3 \cdot 3^5 - \mathrm{C}_5^3 \cdot 2^2 = 1552$.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Gọi $(a;b)$ là tập các giá trị của tham số m để phương trình $2e^{2x} - 8e^x - m = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0;\ln 5)$. Tổng $a+b$ là

A. 2. B. 4. C. -6. D. -14.

Lời giải.

Phương pháp:

Đặt $t = e^x$. Đưa phương trình đã cho về phương trình ẩn t với $t \in (1;5)$.

Cô lập m và sử dụng phương pháp hàm số để phương trình ẩn t có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(1;5)$ khi đó phương trình đã cho cũng có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0;\ln 5)$.

Cách giải:

Đặt $t = e^x$. Khi đó với $x \in (0;\ln 5) \Rightarrow t \in \left(e^0; e^{\ln 5}\right)$ hay $t \in (1;5)$.

Phương trình đã cho trở thành $2t^2 - 8t - m = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 8t = m$ với $t \in (1;5)$.

Nhận thấy rằng để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $(0;\ln 5)$ thì phương trình $2t^2 - 8t = m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $(1;5)$.

Xét $f(t) = 2t^2 - 8t \Rightarrow f'(t) = 4t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \in (1;5)$

BBT của $f(t)$ trên $(1;5)$.

t	1		2		5
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-6	$\searrow$	-8	$\nearrow$	10

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $2t^2 - 8t = m$ có hai nghiệm phân biệt $t \in (1;5)$ khi và chỉ khi $-8 < m < -6$.

Vậy để phương trình $2e^{2x} - 8e^x - m = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;\ln 5)$ thì $m \in (-8;-6) \Rightarrow a = -8; b = -6 \Rightarrow a+b = -14$.

Chọn đáp án D □

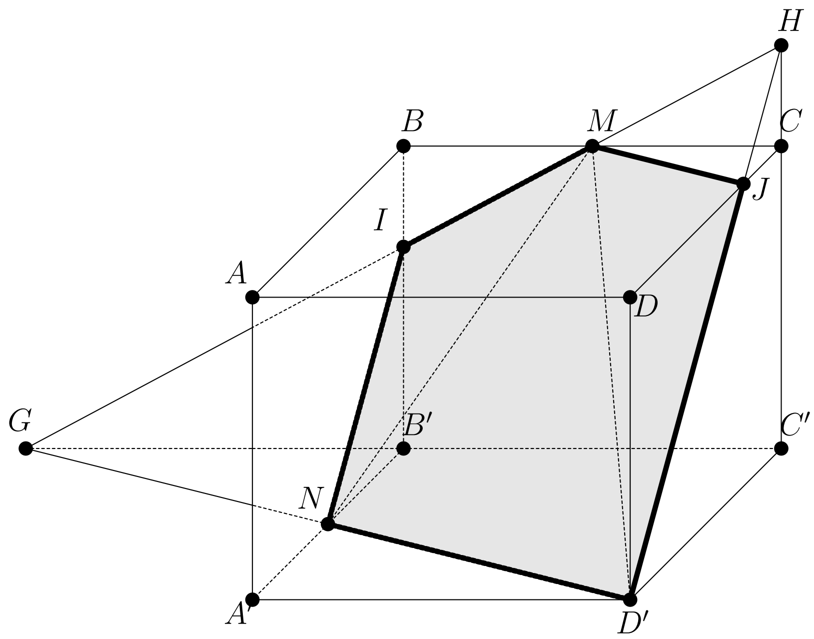
Câu 42. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a, Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và $A'B'$. Mặt phẳng (MND') chia khối lập phương thành hai khối đa diện, trong đó khối chứa điểm C gọi là (H). Tính thể tích khối (H).

Ⓐ $\dfrac{55a^3}{17}$. **B** $\dfrac{55a^3}{144}$. Ⓒ $\dfrac{181a^3}{486}$. Ⓓ $\dfrac{55a^3}{48}$.

Lời giải.

Phương pháp:

- Dựng thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi (MND').
- Sử dụng phương pháp phân chia khối đa diện để tính thể tích.



Gọi $G = D'N \cap B'C', GM$ cắt BB', CC' lần lượt tại I, H, $HD' \cap DC = J$. Do đó thiết diện là ngũ giác $MJD'NI$.

Thể tích khối đa diện cần tính $V_{(H)} = V_{CMIJNB'CD'} = V_{H.GD'C'} - V_{H.MCJ} - V_{GB'IN}$.

Vì $NB' \parallel C'D'$ nên $\dfrac{GB'}{GC'} = \dfrac{NB'}{C'D'} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow GC' = 2B'C' = 2a$.

Lại có $MB \parallel GB' \Rightarrow \dfrac{MB}{GB'} = \dfrac{BI}{IB'} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow IB' = \dfrac{2}{3}a, IB = \dfrac{a}{3}$.

Tam giác $\Delta MIB = \Delta MHC \Rightarrow HC = IB = \dfrac{a}{3}$.

Mà $JC \parallel D'C' \Rightarrow \dfrac{JC}{D'C'} = \dfrac{HC}{HC'} = \dfrac{\frac{a}{3}}{\frac{a}{3} + a} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow JC = \dfrac{a}{4}$.

Thể tích $V_{H.GD'C'} = \dfrac{1}{3} \cdot HC' \cdot \dfrac{1}{2}C'D' \cdot C'G = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}a \cdot 2a \cdot \dfrac{4}{3} \cdot a = \dfrac{4}{9}a^3$.

Thể tích $V_{H.CJM} = \dfrac{1}{3}S_{CMJ} \cdot HC = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a}{4} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a}{3} = \dfrac{a^3}{144}$.

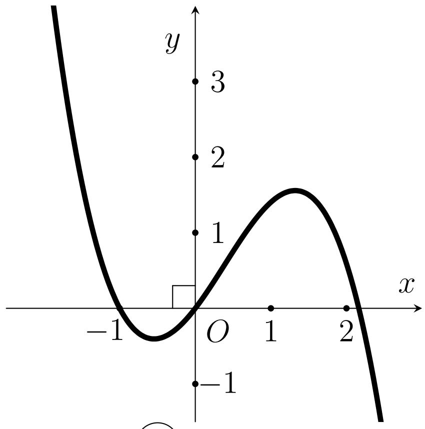
Thể tích $V_{I.GB'N} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot B'G \cdot B'N \cdot IB' = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{2}{3}a = \dfrac{a^3}{18}$.

Vậy thể tích khối đa diện (H) là $V_{(H)} = \dfrac{4}{9}a^3 - \dfrac{a^3}{144} - \dfrac{a^3}{18} = \dfrac{55a^3}{144}$.

Chọn đáp án B □

Câu 43.

Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?



A $a + c > 0$. **B** $a + b + c + d < 0$. **C** $a + c < b + d$. **D** $b + d - c > 0$.

Lời giải.

Phương pháp:

$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ Quan sát đồ thị và sử dụng công thức $\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)$ từ đó tìm ra mối quan hệ giữa các hệ số.

Cách giải:

Ta có $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$.

Từ đồ thị hàm $f'(x)$ ta có $f'(0) = 0 \Rightarrow d = 0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = +\infty \Rightarrow a < 0$

Ta xét $\int\limits_{-1}^{0} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\Big|_{-1}^{0} = e - (a - b + c - d + e) = -a + b - c + d$,

Mà $\int\limits_{-1}^{0} f'(x)\,\mathrm{d}x < 0 \Rightarrow -a + b - c + d < 0 \Leftrightarrow a + c > b + d$.

Nên $a + c < b + d$ sai.

Lại có $d = 0 \Rightarrow a + c > b \Leftrightarrow a > b - c$

Mà $a < 0 \Rightarrow b - c < 0$

Do đó $d + d - c < 0$ nên $b + d - c > 0$ sai.

Lại xét $\int\limits_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\Big|_0^1 = a + b + c + d + e - e = a + b + c + d$

Mà $\int\limits_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x > 0 \Rightarrow a + b + c + d > 0$ nên $a + b + c + d < 0$ sai.

Theo trên ta có $\begin{cases} a + b + c + d > 0 \\ -a + b - c + d < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a - b - c - d < 0 \\ -a + b - c + d < 0 \end{cases} \Rightarrow -2(a + c) < 0 \Leftrightarrow a + c > 0$

nên $a + c > 0$ đúng.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-10; 10)$ để đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x(x-m)} - 1}{x + 2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

A 12. **B** 11. **C** 0. **D** 10.

Lời giải.

Phương pháp:

Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số, từ đó suy ra điều kiện để bài toán thỏa.

Cách giải:

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{1-\dfrac{m}{x}}-1}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1-\dfrac{m}{x}}-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{2}{x}} = 1$ hay $y = 1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x\sqrt{1-\dfrac{m}{x}}-1}{x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-\sqrt{1-\dfrac{m}{x}}-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{2}{x}} = -1$ hay $y = -1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Do đó bài toán thỏa $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số chỉ có duy nhất một tiệm cận đứng.

Ta lại có $y = \dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2} = \dfrac{x^2-mx-1}{(x+2)\left(\sqrt{x(x-m)}+1\right)}$

Để đồ thị hàm số chỉ có duy nhất một đường TCĐ thì $x=-2$ không là nghiệm của tử và $x=-2$ thuộc tập xác định của hàm số.

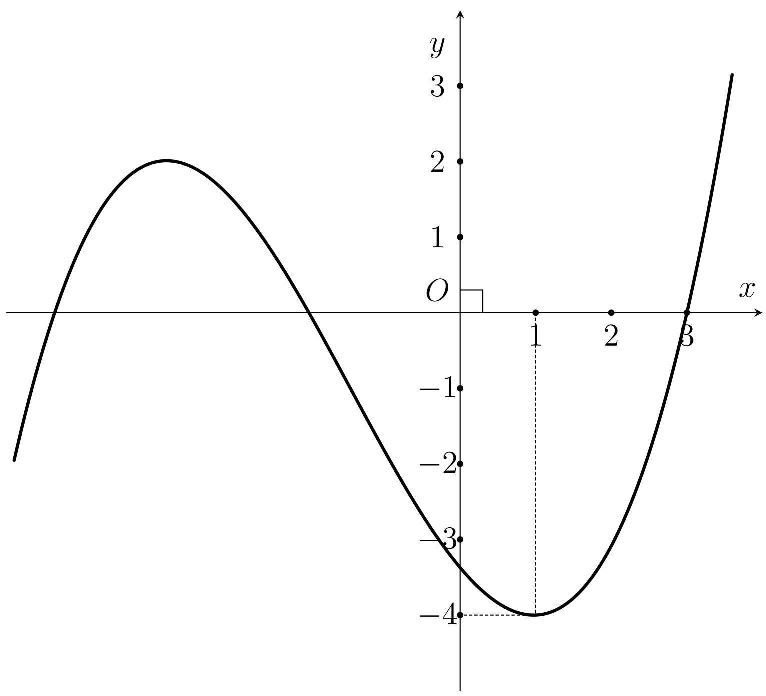
$\Leftrightarrow \begin{cases} -2(-2-m) \geq 0 \\ (-2)^2 - m\cdot(-2) - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ 2m+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m \neq -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Do $m \in (-10;10)$, $m \in \mathbb{Z}$.

Nên $m \in \{-2;-1;0;1;\ldots;8;9\}$ và có 12 giá trị thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(e^x) < m(3e^x + 2019)$ có nghiệm $x \in (0;1)$ khi và chỉ khi



Ⓐ $m > -\dfrac{4}{1011}$. Ⓑ $m \geq \dfrac{4}{3e+2019}$. Ⓒ $m > -\dfrac{2}{1011}$. Ⓓ $m > \dfrac{f(e)}{3e+2019}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Đặt $t = e^x$, $(t > 0)$.

Ta đưa bất phương trình đã cho thánh bất phương trình ẩn t, từ đó lập luận để có phương trình ẩn t có nghiệm thuộc $(1; e)$.

Ta chú ý rằng hàm số $y = f(x)$ và $y = f(t)$ có tính chất giống nhau nên từ đồ thị hàm số đã cho ta suy ra tính chất hàm $f(t)$.

Sử dụng phương pháp hàm số để tìm m sao cho bất phương trình có nghiệm.

Bất phương trình $m > f(X)$ có nghiệm trên $(a; b)$ khi $m > \min\limits_{[a;b]} f(X)$. *Cách giải:*

Xét bất phương trình $f(e^x) < m(3e^x + 2019)$ (*)

Đặt $e^x = t, (t > 0)$,.

Với $x \in (0; 1) \Rightarrow t \in (e^0; e^1) \Rightarrow t \in (1; e)$.

Ta được bất phương trình $f(t) < m(3t + 2019) \Leftrightarrow m > \dfrac{f(t)}{3t + 2019}$(1) (vì $3t + 2019 > 0$ với $t \in (1; e)$).

Để bất phương trình (*) có nghiệm $x \in (0; 1)$ thì bất phương trình (1) có nghiệm $t \in (1; e)$.

Ta xét hàm $g(t) = \dfrac{f(t)}{3t + 2019}$ trên $(1; e)$.

Ta có $g'(t) = \dfrac{f'(t)(3t + 2019) - 3f(t)}{(3t + 2019)^2}$.

Nhận xét rằng đồ thị hàm số $y = f(t)$ có tính chất giống với đồ thị hàm số $y = f(x)$ nên xét trên khoảng $(1; e)$ ta thấy rằng $f(t) < 0$ và đồ thị hàm số đi lên từ trái qua phải hay hàm số đồng biến trên $(1; e)$ nên $f'(t) > 0$.

Từ đó $g'(t) = \dfrac{f'(t)(3t + 2019) - 3f(t)}{(3t + 2019)^2} > 0$ với $t \in (1; e)$ hay hàm số $g(t)$ đồng biến trên $(1; e)$.

Ta có bảng biến thiên của $g(t)$ trên $[1; e]$

t	1		e
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$	$-\dfrac{2}{1011}$	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta thấy để bất phương trình $m > \dfrac{f(t)}{3t + 2019}$ có nghiệm $t \in (1; e)$ thì $m > \min\limits_{[1;e]} g(t) \Leftrightarrow m > -\dfrac{2}{1011}$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 8$. Tính tổng các giá trị nguyên của m để phương trình $f(|x - 1|) + m = 2$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

A -2. B -6. C 8. D 4.

Lời giải.

Phương pháp:

- Đặt $t = |x - 1|\,(t \geq 0)$ đưa phương trình về ẩn t.

- Phương trình đã cho có 3 nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình ẩn t có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương.

Cách giải:

Đặt $t = |x-1|\ (t \geq 0)$ ta được $f(t) + m = 2 \Leftrightarrow f(t) = 2 - m$.

Có $f(t) = t^3 - 3t^2 + 8 \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 6t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \in [0;+\infty) \\ t = 2 \in [0;+\infty) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $f(t) = t^3 - 3t^2 + 8$

t	0		2		$+\infty$
y'	0	$-$	0	$+$	
y	8	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình đã cho có 3 nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình ẩn t có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = 2 - m$ cắt đồ thị hàm số tại một điểm có hoành độ bằng 0 và điểm còn lại có hoành độ dương.

Quan sát bảng biến thiên ta thấy $2 - m = 8 \Leftrightarrow m = -6$.

Vậy tổng các giá trị của m là -6.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Một tấm bìa hình tròn có bán kính bằng 5 được cắt thành hai hình quạt, sau đó quấn hai hình quạt đó thành hai hình nón (không có đáy). Biết một trong hai hình nón này có diện tích xung quanh là 15π. Tính thể tích hình nón còn lại. Giả sử chiều rộng các mép dán không đáng kể.

A $\dfrac{4\pi\sqrt{21}}{3}$. **B** $2\pi\sqrt{21}$. **C** $\dfrac{2\pi\sqrt{21}}{3}$. **D** $4\pi\sqrt{21}$.

Lời giải.

Phương pháp:

+ Tính diện tích xung quanh hình nón còn lại.

+ Sử dụng công thức $S_{xq} = \pi \cdot R \cdot l$ để tính bán kính đáy của hình nón này.

+ Sử dụng công thức $R^2 + h^2 = l^2$ để tính chiều cao hình nón.

+ Sử dụng công thức $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot h$ để tính thể tích hình nón còn lại.

(với R là bán kính đáy hình nón, h là chiều cao hình nón và l là đường sinh hình nón)

Cách giải:

Diện tích hình tròn là $S = \pi \cdot r^2 = 25\pi$.

Diện tích xung quanh hình nón còn lại là $S_2 = 25\pi - 15\pi = 10\pi$.

Nhận xét rằng khi quấn hình quạt được cắt từ hình tròn thành hình nón thì đường sinh của hình nón chính là bán kính của hình tròn.

Từ đó hình nón còn lại có đường sinh $l = 5$.

Lại có diện tích xung quanh hình nón còn lại là 10π nên gọi R là bán kính hình nón này thì $S_{xq} = \pi \cdot R \cdot l \Rightarrow 10\pi = \pi R \cdot 5 \Rightarrow R = 2$.

Ta gọi chiều cao hình nón này là $h, (h > 0)$ thì $h^2 + R^2 = l^2 \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$.

Thể tích hình nón còn lại là $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot \sqrt{21} = \dfrac{4\pi\sqrt{21}}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Một trang trại mỗi ngày thu hoạch được một tấn rau. Mỗi ngày, nếu bán rau với giá 30000 đồng/kg thì hết sạch rau, nếu giá bán cứ tăng thêm 1000 đồng/kg thì số rau thừa lại tăng thêm $20kg$. Số rau thừa này được thu mua làm thức ăn chăn nuôi với giá 2000 đồng/kg. Hỏi số tiền bán rau nhiều nhất mà trang trại có thể thu được mỗi ngày là bao nhiêu?

A 32420000 đồng. **B** 32400000 đồng. **C** 34400000 đồng. **D** 34240000 đồng.

Lời giải.

Phương pháp:

- Gọi $x, (x \geq 0)$ (nghìn đồng) là số tiền tăng lên cho mỗi kg rau.
- Biểu diễn các điều kiện còn lại theo x thu được hàm số ẩn x.
- Tìm GTLN của hàm số trên và kết luận.

Cách giải:

Gọi $x, (x \geq 0)$ (nghìn đồng) là số tiền tăng lên cho mỗi kg rau.

Số tiền bán mỗi một kg rau sau khi tăng là $x + 30$ (nghìn đồng).

Số kg rau thừa là $20x\,(x \leq 50)$.

Tổng số kg rau bán được là $1000 - 20x\,(kg)$.

Tổng số tiền thu được là $T = (1000 - 20x)(30 = x) + 20x.2 = -20x^2 + 440x + 30000$.

Mà $-20x^2 + 440x + 30000 = 32420 - 20(x - 11)^2 \leq 32420$.

Do đó $T \leq 32420 \Rightarrow \max T = 32420$, dấu "=" xảy ra khi $x = 11$.

Vậy số tiền nhiều nhất bán được là 32420000 đồng.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2^{x-y} - 2^y + x = 2y \\ 2^x + 1 = (m^2 + 2).2^y.\sqrt{1 - y^2} \end{cases}$ (1), m là tham số.

Gọi S là tập các giá trị nguyên để hệ (1) có một nghiệm duy nhất. Tập S có bao nhiêu phần tử?

A 0. **B** 1. **C** 3. **D** 2.

Lời giải.

Phương pháp:

+ Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ để đưa về dạng $f(u) = f(v)$ mà f là hàm đơn điệu nên suy ra $u = v$.

Từ đó ta tìm được mối liên hệ giữa x và y.

+ Thay vào phương trình thứ hai ta được phương trình ẩn y. Lập luận phương trình này có nghiệm duy nhất thì hệ ban đầu sẽ có nghiệm duy nhất.

+ Biến đổi để chỉ ra nếu y_0 là nghiệm thì $-y_0$ cũng là nghiệm của phương trình ẩn y, từ đó suy ra $y_0 = 0$.

Thay vào phương trình để tìm m.
+ Sử dụng bất đẳng thức Cô-si để thử lại m.
Cách giải:
Điều kiện $1 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \in [-1;1]$.
+ Xét phương trình $2^{x-y} - 2^y + x = 2y \Leftrightarrow 2^{x-y} + x - y = 2^y + y$.
Xét hàm số $f(t) = 2^t + t \Rightarrow f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 + 1 > 0; \forall t$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Từ đó $2^{x-y} + x - y = 2^y + y \Rightarrow f(x-y) = f(y) \Leftrightarrow x - y = y \Leftrightarrow x = 2y$.
+ Thay $x = 2y$ vào phương trình $2^x + 1 = (m^2+2) \cdot 2^y \cdot \sqrt{1-y^2}$, ta được

$$2^{2y} + 1 = \left(m^2+2\right) \cdot 2^y \cdot \sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow 4^y + 1 = \left(m^2+2\right) \cdot 2^y \cdot \sqrt{1-y^2} (*)$$

Để hệ phương trình (1) có một nghiệm duy nhất thì phương trình (*) có nghiệm duy nhất $y \in [-1;1]$
Giả sử $y_0 \in [-1;1]$ là một nghiệm của phương trình (*) thì ta có

$$4^{y_0} + 1 = \left(m^2+2\right) \cdot 2^{y_0} \cdot sqrt1 - y_0^2 (**)$$

Xét với $-y_0$ ta có $4^{-y_0} + 1 = (m^2+2) \cdot 2^{-y_0} \cdot \sqrt{1-(-y_0)^2}$
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4^{y_0}} + 1 = (m^2+2) \dfrac{1}{2^{y_0}} \sqrt{1-y_0^2}$
$\Leftrightarrow 4^{y_0} + 1 = (m^2+2) \cdot 2^{y_0} \cdot \sqrt{1-y_0^2}$ (đúng do (**) hay $-y_0$ cũng là nghiệm của phương trình (*).
Do vậy để (*) có nghiệm duy nhất thì $y_0 = -y_0 \Leftrightarrow y_0 = 0$.
Thay $y = 0$ vào (*) ta được $4^0 + 1 = (m^2+2) \cdot 2^0 \sqrt{1-0^2} \Leftrightarrow m^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow m = 0$.
Thử lại: Thay $m = 0$ vào (*) ta được $4^y + 1 = 2 \cdot 2^y \sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow 2^y + \dfrac{1}{2^y} = 2\sqrt{1-y^2}$ (***)
Nhận thấy rằng vế trái (***) $= 2^y + \dfrac{1}{2^y} \overset{\text{Cô-si}}{\geq} 2\sqrt{2^y} \cdot \dfrac{1}{2^y} \Leftrightarrow VT(***) \geq 2$.
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2^y = \dfrac{1}{2^y} \Leftrightarrow y = 0$
Và $VP(***) = 2\sqrt{1-y^2} \leq 2 \Leftrightarrow VP(***) = 2 \Leftrightarrow y = 0$.
Vậy phương trình (***) có nghiệm duy nhất $y = 0$.
Kết luận: Với $m = 0$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất nên tập S có một phần tử.
Chú ý:
Các em có thể làm bước thử lại như sau:
Thay $m = 0$ vào (*) ta được
$4^y + 1 = 2.2^y \sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow (2^y)^2 - 2.2^y \sqrt{1-y^2} + 1 - y^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(2^y - \sqrt{1-y^2}\right)^2 + y^2 = 0$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^y - \sqrt{1-y^2} = 0 \\ y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^0 - \sqrt{1-0} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0.$
Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường thẳng d đi qua A và song song với BC. Cạnh BC quay xung quanh d tạo thành một mặt xung quanh của hình trụ có thể tích là V_1. Tam giác ABC quay xung quanh trục d được khối tròn xoay có thể tích là V_2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

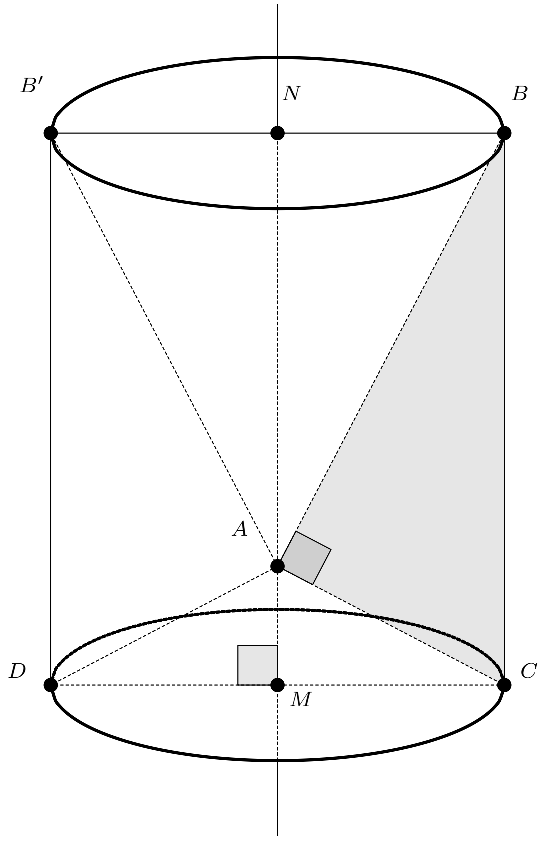
A. $\dfrac{2}{3}$. B. $\dfrac{1}{3}$. C. 3. D. $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Dựng hình, xác định các hình tròn xoay tạo thành khi quay và tính tỉ số thể tích.

Cách giải:



Thể tích khối trụ $V_1 = \pi \cdot R^2 \cdot h = \pi MC^2 \cdot BC$

Tổng thể tích hai khối nón $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi MC^2 \cdot AM + \dfrac{1}{3}\pi NB^2 \cdot AN$

$= \dfrac{1}{3}\pi MC^2 (AM + AN) = \dfrac{1}{3}\pi \cdot MC^2 \cdot BC = \dfrac{1}{3}V_1$.

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = 3$.

Chọn đáp án C □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. B	3. A	4. C	5. D	6. B	7. A	8. B	9. C	10. A
11. D	12. A	13. B	14. B	15. C	16. B	17. D	18. A	19. C	20. D
21. A	22. A	23. D	24. C	25. A	26. D	27. A	28. A	29. D	30. B
31. D	32. D	33. C	34. A	35. B	36. C	37. D	38. D	39. B	40. D
41. D	42. B	43. A	44. A	45. C	46. B	47. A	48. A	49. B	50. C

41 ĐỀ THI THỬ THPT LƯƠNG THẾ VINH, HÀ NỘI, LẦN 2 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho số phức z thỏa mãn $\overline{z} = 3 + 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.

(A) Phần thực bằng -3, phần ảo bằng 2.
(B) Phần thực bằng 3, phần ảo bằng 2.
(C) Phần thực bằng 3, phần ảo bằng -2.
(D) Phần thực bằng -3, phần ảo bằng -2.

Lời giải.

Vì $\overline{z} = 3 + 2i \Rightarrow z = 3 - 2i$. Do đó số phức z có phần thực bằng 3, phần ảo bằng -2.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$. Điểm M nằm trên đường thẳng Δ thì điểm M có dạng nào sau đây?

(A) $M(at; bt; ct)$.
(B) $M(x_0t; y_0t; z_0t)$.
(C) $M(a + x_0t; b + y_0t; c + z_0t)$.
(D) $M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (a; b; c)$ nên đường thẳng Δ có phương trình tham số là $\Delta\colon \begin{cases} z = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$.

Điểm M nằm trên đường thẳng Δ nên điểm M có dạng $M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm giá trị cực đại $y_{\text{CĐ}}$ và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho

(A) $y_{\text{CĐ}} = -2$ và $y_{\text{CT}} = 2$.
(B) $y_{\text{CĐ}} = 3$ và $y_{\text{CT}} = 0$.
(C) $y_{\text{CĐ}} = 2$ và $y_{\text{CT}} = 0$.
(D) $y_{\text{CĐ}} = 3$ và $y_{\text{CT}} = -2$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có $y_{\text{CĐ}} = 3$ và $y_{\text{CT}} = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; -1; 0)$ và $C(0; 0; 2)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

(A) $x - 2y + z = 0$.
(B) $x - y + \dfrac{z}{2} = 1$.
(C) $x + \dfrac{y}{2} - z = 1$.
(D) $2x - y + z = 0$.

Lời giải.

Áp dụng phương trình mặt phẳng đoạn chắn ta có phương trình mặt phẳng (ABC) là $x - y + \dfrac{z}{2} = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Đường thẳng $y = m$ tiếp xúc với đồ thị $(C)\colon y = -2x^4 + 4x^2 - 1$ tại hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Giá trị biểu thức $y_A + y_B$ bằng

A 2. **B** -1. **C** 1. **D** 0.

Lời giải.

Xét hàm số $(C)\colon y = -2x^4 + 4x^2 - 1$, tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = -8x^3 + 8x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1. \end{array}\right.$ Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để đường thẳng $y = m$ tiếp xúc với đồ thị $(C)\colon y = -2x^4 + 4x^2 - 1$ tại hai điểm phân biệt thì đường thẳng đó phải đi qua hai điểm cực đại, hay $m = 1$.

Khi đó hai tiếp điểm là $A(-1; 1)$ và $B(1; 1)$. Vậy $y_A + y_B = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào đồng biến trên tập $\mathbb{R}$?

A $y = 2^{1-3x}$. **B** $y = \log_2(x - 1)$. **C** $y = \log_2\left(2^x + 1\right)$. **D** $y = \log_2\left(x^2 + 1\right)$.

Lời giải.

Hàm số $y = \log_2\left(2^x + 1\right)$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = \dfrac{2^x}{2^x + 1} > 0\, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $y = \log_2\left(2^x + 1\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

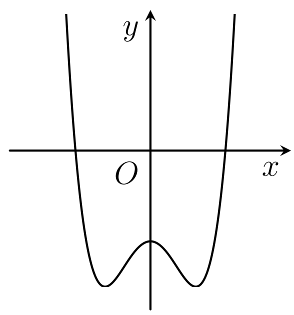
Chọn đáp án C □

Câu 7.

Đường cong như hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. **B** $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

C $y = x^4 - 2x^2 - 2$. **D** $y = -x^4 + 2x^2 - 2$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có:

+ Hàm số có ba cực trị nên đây là một hàm số bậc 4.

+ Với hệ số $a > 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Tìm tập xác định của hàm số $y = \left(x^2 + 2x - 3\right)^e$.

A $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. **B** $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.

(C) $(-3;1)$. (D) $[-3;1]$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x^2+2x-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ x>1 \end{array}\right.$.

Vậy tập xác định của hàm số là $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. Mệnh đề đúng là

(A) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

(B) Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên $(-1;1)$.

(C) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0, \forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Thể tích của khối cầu có bán kính R là

(A) πR^3. B $\dfrac{4\pi R^3}{3}$. (C) $2\pi R^3$. (D) $\dfrac{\pi R^3}{3}$.

Lời giải.

Thể tích của khối cầu có bán kính R là $V=\dfrac{4\pi R^3}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{R}$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

(A) $\displaystyle\int[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=\int f(x)dx-\int g(x)\mathrm{d}x$.

(B) $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$.

C $\displaystyle\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$.

(D) $\displaystyle\int[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Khẳng định A,B,D đúng theo tính chất của nguyên hàm.

Khẳng định C chỉ đúng khi $k\neq 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Cho lăng trụ tứ giác đều có đáy là hình vuông cạnh a, chiều cao $2a$. Tính thể tích khối lăng trụ.

(A) $\dfrac{2a^3}{3}$. (B) $\dfrac{4a^3}{3}$. (C) a^3. D $2a^3$.

Lời giải.

Đáy của lăng trụ tứ giác đều là hình vuông cạnh a nên diện tích đáy $S=a^2$. Khi đó thể tích lăng trụ là: $V=S.h=a^2.2a=2a^3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Tích của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng

(A) $\frac{65}{3}$. **B** 20. (C) 6. (D) $\frac{52}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $f(x) = x + \frac{4}{x}$ xác định và liên tục trên $[1; 3]$. Khi đó

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Nhận thấy: $-2 \notin [1; 3] \Rightarrow x = -2$ (loại).

$f(1) = 5$; $f(2) = 4$; $f(3) = \frac{13}{3}$. Khi đó: $\max\limits_{[1;3]} f(x) = 5$; $m = \min\limits_{[1;3]} f(x) = 4$. Vậy $M.m = 20$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-6}{-2}$; $d_2 : \frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{3}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2 là

(A) $(P) : x + 8y + 5z + 16 = 0$. **B** $(P) : x + 8y + 5z - 16 = 0$.

(C) $(P) : 2x + y - 6 = 0$. (D) $(P) : x + 4y + 3z - 12 = 0$.

Lời giải.

Phương trình tham số $d_1 : \begin{cases} x = 2 + 2t_1 \\ y = -2 + t_1, (t_1 \in \mathbb{R}). \\ z = 6 - 2t_1 \end{cases}$

d_1 đi qua điểm $M(2; -2; 6)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u_1} = (2; 1; -2)$.

Phương trình tham số $d_2 : \begin{cases} x = 4 + t_2 \\ y = -2 - 2t_2, (t_2 \in \mathbb{R}). \\ z = -1 + 3t_2 \end{cases}$

d_2 đi qua điểm $N(4; -2; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u_2} = (1; -2; 3)$.

Vì mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2, ta có: $\begin{cases} \vec{n}_{(P)} \perp \vec{u}_1 \\ \vec{n}_{(P)} \perp \vec{u}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_{(P)} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = -(1; 8; 5)$.

Mặt phẳng (P) đi qua $M(2; -2; 6)$ và vectơ pháp tuyến $\vec{u}_{(P)} = (1; 8; 5)$, nên phương trình mặt phẳng $(P) : (x - 2) + 8(y + 2) + 5(z - 6) = 0$ hay $(P) : x + 8y + 5z - 16 = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{1}$ cắt mặt phẳng $(P) : 2x - 3y + z - 2 = 0$ tại điểm $I(a; b; c)$. Khi đó $a + b + c$ bằng

(A) 9. (B) 5. (C) 3. **D** 7.

Lời giải.

Ta có $\{I\} = d \cap (P)$ suy ra $I \in d$ và $I \in (P)$.

Vì $I \in d$ nên tọa độ của I có dạng $(1 + 2t; 3 - t; 1 + t)$ với $t \in \mathbb{R}$.

Vì $I \in (P)$ nên ta có phương trình: $2(1+2t) - 3(3-t) + 1 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
Vậy $I(3; 2; 2)$ suy ra $a + b + c = 3 + 2 + 2 = 7$.
Chọn đáp án D □

Câu 16. Cho dãy số (u_n) là một cấp số cộng, biết $u_2 + u_{21} = 50$. Tính tổng của 22 số hạng đầu tiên của dãy.

A) 2018. B) 550. C) 1100. D) 50.

Lời giải.

Ta có $S_{22} = \dfrac{22}{2} \times (u_1 + u_{22}) = 11 \times (u_2 - d + u_{21} + d) = 11 \times (u_2 + u_{21}) = 11 \times 50 = 550$.
Chọn đáp án B □

Câu 17. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{|x| - 2x + 1}$ là

A) 4. B) 3. C) 2. D) 1.

Lời giải.

- Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{|x|-2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x-2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{-x+1} = -1$.
  Suy ra đường thẳng $y = -1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
  Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{|x|-2x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{-x-2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{-3x+1} = -\dfrac{1}{3}$.
  Suy ra đường thẳng $y = -\dfrac{1}{3}$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- Ta có $|x| - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow |x| = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ x^2 = (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.
  Ta có $\lim\limits_{x\to1^+} y = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x+1}{|x|-2x+1} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x+1}{-x+1} = -\infty$.
  Suy ra đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.
Chọn đáp án B □

Câu 18. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A) $V = \dfrac{a^3}{8}$. B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D) $V = \dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB, suy ra $SH \perp (ABCD)$.
Ta có $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \times SH \times S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{8}$.
Chọn đáp án A □

Câu 19. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x\left(1 + 3x^3\right)$ là

A) $x^2\left(1 + \dfrac{3}{2}x^2\right) + C$. B) $x^2\left(1 + \dfrac{6x^3}{5}\right) + C$.

C) $2x\left(x + \dfrac{3}{4}x^4\right) + C$. D) $x^2\left(x + \dfrac{3}{4}x^3\right) + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int 2x\left(1+3x^3\right)\,\mathrm{d}x = \int\left(2x+6x^4\right)\,\mathrm{d}x = x^2+\dfrac{6x^5}{5}+C = x^2\left(1+\dfrac{6x^3}{5}\right)+C.$

Chọn đáp án B □

Câu 20. Tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{1-3x} \geq \dfrac{25}{4}$.

A $S=[1;+\infty)$. B $S=\left[\dfrac{1}{3};+\infty\right)$. C $S=\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)$. D $S=(-\infty;1]$.

Lời giải.

Ta có $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{1-3x} \geq \dfrac{25}{4} \Leftrightarrow 1-3x \leq \log_{\frac{2}{5}}\dfrac{25}{4} \Leftrightarrow 1-3x \leq -2 \Leftrightarrow -3x \leq -3 \Leftrightarrow x \geq 1.$

Chọn đáp án A □

Câu 21. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;5;3)$ và hai mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z-8=0$, $(Q)\colon x-4y+z-4=0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và song song với hai mặt phẳng (P) và (Q).

A $\begin{cases} x=3+t \\ y=5-t \\ z=3 \end{cases}$. B $\begin{cases} x=3 \\ y=5+t \\ z=3-t \end{cases}$. C $\begin{cases} =3+t \\ y=5 \\ z=3-t \end{cases}$. D $\begin{cases} x=3+t \\ y=5 \\ z=3+t \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_{(P)}=(2;1;2)$ và $\vec{n}_{(Q)}=(1;-4;1)$.

$\left[\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}\right]=(9;0;-9)$. Do đường thẳng d song song với hai mặt phẳng (P) và (Q) nên d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;0;-1)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là $\begin{cases} x=3+t \\ y=5 \\ z=3-t. \end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 22. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;1;6)$ và đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=2+t \\ y=1-2t \\ z=2t \end{cases}$. Hình chiếu vuông góc của A trên Δ là

A $M(3;-1;2)$. B $H(11;-17;18)$. C $N(1;3;-2)$. D $K(2;1;0)$.

Lời giải.

Gọi B là hình chiếu của A xuống Δ. Do $B\in\Delta \Rightarrow B(2+t;1-2t;2t)$. $\overrightarrow{AB}=(3+t;-2t;2t-6)$.

Do $\overrightarrow{AB}\perp\vec{u}_\Delta \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}_\Delta=0 \Leftrightarrow 1\cdot(3+t)+(-2)\cdot(-2t)+2\cdot(2t-6)=0 \Leftrightarrow t=1.$

Vậy $B(3;-1;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=3$, $\displaystyle\int_0^2[f(x)-3g(x)]\,\mathrm{d}x=4$ và $\displaystyle\int_0^2[2f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=8$. Tính $I=\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I = 1$. **B** $I = 2$. **C** $I = 3$. **D** $I = 0$.

Lời giải.

Đặt $a = \displaystyle\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, $b = \displaystyle\int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} a - 3b = 4 \\ 2a + b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 0. \end{cases}$

$$\text{Ta có } \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 4 - 3 = 1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 24. Đồ thị hàm số $y = -\dfrac{x^4}{2} + x^2 + \dfrac{3}{2}$ cắt trục hoành tại mấy điểm?

A 0. **B** 2. **C** 4. **D** 3.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm là $-\dfrac{x^4}{2} + x^2 + \dfrac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3$ hoặc $x^2 = -1$ (vô nghiệm).

$x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$. Vậy đồ thị hàm số $y = -\dfrac{x^4}{2} + x^2 + \dfrac{3}{2}$ cắt trục hoành tại hai điểm.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(2;-1;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon\ x - 2y - 2z + 3 = 0$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

A $S\colon\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 3 = 0$. **B** $S\colon\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y + z - 3 = 0$.

C $S\colon\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 1 = 0$. **D** $S\colon\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y + z + 1 = 0$.

Lời giải.

Gọi R là bán kính mặt cầu.

Do (S) tiếp xúc với (P) nên $R = \mathrm{d}(I,(P)) = \dfrac{|2 - 2(-1) - 2(-1) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = 3$.

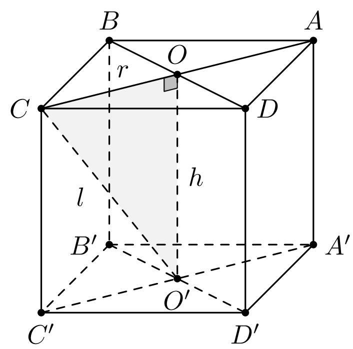
Vậy phương trình $S\colon\ (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 3 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Một hình nón có đỉnh là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông $ABCD$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.

A $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$. **B** $\pi a^2\sqrt{3}$. **C** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}$. **D** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Gọi O, O' lần lượt là tâm hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Hình nón có đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ có cạnh là a nên đáy của hình nón là đường tròn có bán kính

$$r = OC = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Hình nón có đỉnh là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ nên chiều cao của hình nón bằng độ dài cạnh của hình vuông. Suy ra $h = a$.

Khi đó độ dài đường sinh là $l = O'C = \sqrt{O'O^2 + OC^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy diện tích xung quanh của hình nón đó là $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Tìm hệ số của số hạng chứa x^9 trong khai triển nhị thức Newton của biểu thức $(3+x)^{11}$.

A 9. B 110. C 495. D 55.

Lời giải.

Ta có $(3+x)^{11} = \sum\limits_{k=0}^{11} \mathrm{C}_{11}^k 3^{11-k} x^k$.

Số hạng chứ x^9 ứng với $k = 9$. Do đó hệ số của số hạng chứa x^9 trong khai triển là $\mathrm{C}_{11}^9 3^2 = 495$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho số thực $a > 0$, $a \neq 1$. Giá trị của $\log_{a^2}\left(\sqrt[7]{a^3}\right)$ bằng

A $\dfrac{3}{14}$. B $\dfrac{6}{7}$. C $\dfrac{3}{8}$. D $\dfrac{7}{6}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{a^2}\left(\sqrt[7]{a^3}\right) = \dfrac{1}{2}\log_a a^{\frac{3}{7}} = \dfrac{3}{14}\log_a a = \dfrac{3}{14}$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Đạo hàm của hàm số $y = \log_8\left(x^3 - 3x - 4\right)$ là

A $\dfrac{3x^3-3}{(x^3-3x-4)\ln 2}$. B $\dfrac{x^2-1}{(x^3-3x-4)\ln 2}$. C $\dfrac{3x^3-3}{x^3-3x-4}$. D $\dfrac{1}{(x^3-3x-4)\ln 8}$.

Lời giải.

Ta có $y = \log_8\left(x^3 - 3x - 4\right) \Rightarrow y' = \dfrac{\left(x^3-3x-4\right)'}{(x^3-3x-4)\ln 8} = \dfrac{3\left(x^2-1\right)}{3\left(x^3-3x-4\right)\ln 2} = \dfrac{x^2-1}{(x^3-3x-4)\ln 2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 + u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 80 \end{cases}$. Tìm u_3.

A $u_3 = 8$. B $u_3 = 2$. C $u_3 = 6$. D $u_3 = 4$.

Lời giải.

Gọi công bội của cấp số nhân là q.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} u_1 + u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q^2) = 10 \\ u_1q^3(1+q^2) = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{10}{1+q^2} \\ \dfrac{10q^3(1+q^2)}{1+q^2} = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = 2. \end{cases}$

Vậy $u_3 = u_1q^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$.

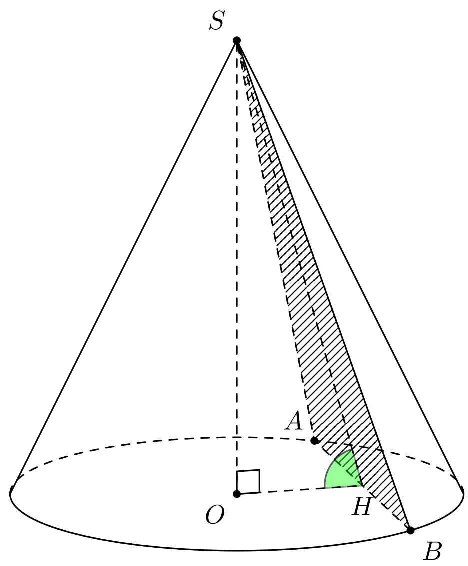
Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho khối nón (N) đỉnh S , có chiều cao là $a\sqrt{3}$ và độ dài đường sinh là $3a$. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh S, cắt và tạo với mặt đáy của khối nón một góc 60°. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) và khối nón (N).

A $2a^2\sqrt{5}$. B $a^2\sqrt{3}$. C $2a^2\sqrt{3}$. D $a^2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Khối nón có tâm đáy là điểm O, chiều cao là $SO = h = a\sqrt{3}$ và độ dài một đường sinh $l = 3a$.



Giả sử (P) cắt khối nón (N) theo thiết diện là tam giác SAB. Gọi H là trung điểm của AB.

Do $SA = SB = l \Rightarrow \triangle SAB$ cân tại $S \Rightarrow SH \perp AB$.

Mặt khác $\triangle OAB$ cân tại $O \Rightarrow OH \perp AB$ nên góc giữa mặt phẳng (P) và đáy của hình chóp là góc giữa OH và SH, hay $\widehat{SHO} = 60^\circ$.

Xét tam giác SOH vuông tại O, ta có

$SH = \dfrac{SO}{\sin \widehat{SHO}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2a$.

Mặt khác tam giác SHA vuông tại H, ta có

$HA^2 = SA^2 - SH^2 = 9a^2 - 4a^2 = 5a^2 \Rightarrow HA = a\sqrt{5} \Rightarrow AB = 2 \cdot HA = 2a\sqrt{5}$.

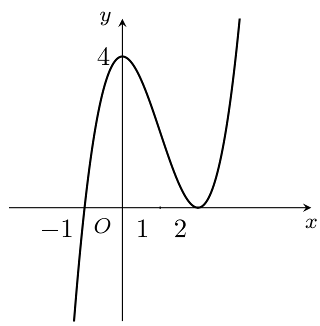
Vậy diện tích thiết diện cần tìm là

$S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{2} SH \cdot AB = \dfrac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a\sqrt{5} = 2a^2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 32.

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị (C) như hình vẽ và đường thẳng $d : y = m^3 - 3m^2 + 4$, (với m là tham số). Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt?



A 1. **B** 2. **C** 3. **D** Vô số.

Lời giải.

Từ đồ thị suy ra đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi

$$0 < m^3 - 3m^2 + 4 < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 - 3m^2 + 4 > 0 \\ m^3 - 3m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(m-2)^2 > 0 \\ m^2(m-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 3 \\ m \neq 0 \\ m \neq 2. \end{cases}$$

Vì m là số nguyên nên $m = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 3 - 2i + (4 - 3i)z$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A $r = 5$. **B** $r = 2\sqrt{5}$. **C** $r = 10$. **D** $r = 20$.

Lời giải.

Cách 1:

Giả sử $w = x + yi \Rightarrow z = \dfrac{x + yi - 3 + 2i}{4 - 3i} = \dfrac{4x - 3y - 18}{25} + \dfrac{3x + 4y - 1}{25} i$.

Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned}
|z| = 2 \;\Leftrightarrow\; & \frac{\sqrt{(4x-3y-18)^2+(3x+4y-1)^2}}{25} = 2 \\
\Leftrightarrow\; & (4x-3y-18)^2+(3x+4y-1)^2 = 2500 \\
\Leftrightarrow\; & x^2+y^2-6x+4y+13 = 100 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2 = 100.
\end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w theo yêu cầu là đường tròn có tâm $I(3,-2)$ và bán kính $r = 10$.

Cách 2:

Đặt $w = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$, ta có

$$\begin{aligned}
w = 3-2i+(4-3i)z \Leftrightarrow\; & w-(3-2i) = (4-3i)z \\
\Leftrightarrow\; & |w-(3-2i)| = |(4-3i)z| \\
\Leftrightarrow\; & |(x-3)+(y+2)i| = |4-3i||z| \\
\Leftrightarrow\; & \sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2} = \sqrt{4^2+(-3)^2}\cdot 2 \\
\Leftrightarrow\; & (x-3)^2+(y+2)^2 = 100
\end{aligned}$$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 3-2i+(4-3i)z$ là một đường tròn có tâm $I(3,-2)$, bán kính $r = 10$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho $9^x + 9^{-x} = 14$. Khi đó biểu thức $M = \dfrac{2+81^x+81^{-x}}{11-3^x-3^{-x}}$ có giá trị bằng

A 14. B 49. C 42. D 28.

Lời giải.

- $81^x + 81^{-x} = 9^{2x} + 9^{-2x} = (9^x+9^{-x})^2 - 2\cdot 9^x \cdot 9^{-x} = (9^x+9^{-x})^2 - 2 = 194.$
- $(3^x+3^{-x})^2 = 9^x+9^{-x}+2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x+3^{-x} = 4 \\ 3^x+3^{-x} = -4(\text{ vô lý}) \end{array}\right. \Rightarrow 3^x+3^{-x} = 4.$

Từ đó suy ra $M = \dfrac{2+81^x+81^{-x}}{11-3^x-3^{-x}} = \dfrac{2+81^x+81^{-x}}{11-(3^x+3^{-x})} = \dfrac{2+194}{11-4} = 28.$

Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $AA' = 2a$. Gọi α là góc giữa AB' và BC'. Tính $\cos\alpha$.

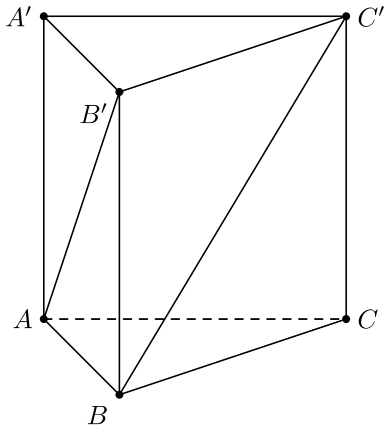
A $\cos\alpha = \dfrac{5}{8}$. B $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{51}}{10}$. C $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{39}}{8}$. D $\cos\alpha = \dfrac{7}{10}$.

Lời giải.

Từ giả thiết và định lý Pitago ta được:
$AB' = \sqrt{AB^2 + BB'^2} = a\sqrt{5}$, $BC' = \sqrt{BC^2 + CC'^2} = a\sqrt{5}$.
Xét $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}\right)\left(\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B'C'} + BB'^2$
$= -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + BB'^2 = \dfrac{7a^2}{2}$.

$\cos\left(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'}}{AB' \cdot BC'} = \dfrac{\frac{7a^2}{2}}{a\sqrt{5} \cdot a\sqrt{5}} = \dfrac{7}{10}$.

Vậy $\cos\alpha = \dfrac{7}{10}$.



Chọn đáp án D □

Câu 36. Cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ và $d_2\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-m}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$, (với m là tham số). Tìm m để hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau.

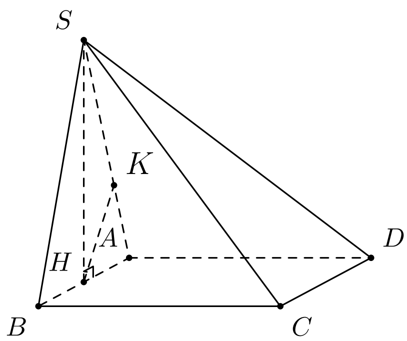
A $m = 4$. **B** $m = 9$. **C** $m = 7$. **D** $m = 5$.

Lời giải.
d_1 đi qua điểm $M_1(1;2;3)$ và có vec-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (1;-1;2)$.
d_2 đi qua điểm $M_2(1;m;-2)$ và có vec-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (2;1;-1)$.
$[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}] = (-1;5;3)$ và $\overrightarrow{M_1M_2} = (0;m-2;-5)$.
d_1 và d_2 cắt nhau $\Leftrightarrow [\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0 \Leftrightarrow -1 \cdot 0 + 5(m-2) - 15 = 0 \Leftrightarrow m = 5$.
Chọn đáp án D □

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách d từ điểm C đến mặt phẳng (SAD).

A $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **B** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.
Gọi H là trung điểm AB. Vì $\triangle SAB$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.
$BC \parallel (SAD) \Rightarrow \mathrm{d}(C,(SAD)) = \mathrm{d}(B,(SAD)) = 2\mathrm{d}(H,(SAD))$.
Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên SA.
Ta có :
$\begin{cases} HK \perp SA \\ HK \perp AD \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SAD) \Rightarrow \mathrm{d}(H,(SAD)) = HK$.
Trong $\triangle SAH$ vuông tại H, ta có : $HK = \dfrac{SH \cdot HA}{\sqrt{SA^2 + HA^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Vậy $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$



Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho một hộp chứa 5 quả bóng xanh, 6 quả bóng đỏ và 7 quả bóng vàng. Lấy ngẫu nhiên 4 quả bóng từ trong hộp. Tính xác suất để lấy được 4 quả bóng có đủ 3 màu.

(A) $\dfrac{35}{816}$. (B) $\dfrac{35}{68}$. (C) $\dfrac{175}{5832}$. (D) $\dfrac{35}{1632}$.

Lời giải.

Lấy ngẫu nhiên 4 quả bóng từ 18 quả bóng $\Rightarrow$ Số phần tử không gian mẫu Ω là $\mathrm{n}(\Omega) = \mathrm{C}_{18}^4 = 3060$.
Gọi A là biến cố "Chọn được 4 quả bóng có đủ 3 màu".

- **TH1:** Chọn được 2 xanh, 1 đỏ, 1 vàng có $\mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_7^1 = 420$ (cách).
- **TH2:** Chọn được 1 xanh, 2 đỏ, 1 vàng có $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{C}_7^1 = 525$ (cách).
- **TH3:** Chọn được 1 xanh, 1 đỏ, 2 vàng có $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_7^2 = 630$ (cách).

  Do đó : $n(A) = 1575$

Vậy xác suất là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{35}{68}$

Chọn đáp án (B) □

.

Câu 39. Cho phương trình $\log_3^2 x - 4\log_3 x + m - 3 = 0$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1 > x_2 > 1$.

(A) 6. (B) 4. (C) 3. (D) 5.

Lời giải.

Đặt $t = \log_3 x$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 4t + m - 3 = 0$ (*).
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt t_1,t_2 thỏa mãn $t_1 > t_2 > 0$.
Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt t_1,t_2 thỏa mãn $t_1 > t_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - m > 0 \\ m - 3 > 0 \\ 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 7.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d_m\colon y = mx + 1$ cắt đồ thị $(C)\colon y = x^3 - x^2 + 1$ tại 3 điểm A, $B(0;1)$ và C phân biệt sao cho tam giác AOC vuông tại O.

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của d_m và (C) là:

$$x^3 - x^2 + 1 = mx + 1 \Leftrightarrow x(x^2 - x - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - x - m = 0. \end{array}\right.$$

Đường thẳng d_m cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt A, $B(0;1)$ và C.
$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2 - x - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.
$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 + 4m > 0 \\ -m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{4} \\ m \neq 0. \end{cases}$

Khi đó: $A(x_1; mx_1+1)$ và $C(x_2; mx_2+1)$ Theo Vi-et: x_1 và x_2 là nghiệm phương trình $x^2-x-m=0$ nên ta có : $x_1+x_2=1$ và $x-1x_2=-m$.
$\triangle AOC$ vuông tại O.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0\\
&\Leftrightarrow\ x_1x_2+(mx_1+1)(mx_2+1)=0\\
&\Leftrightarrow\ (m^2+1)x_1x_2+m(x_1+x_2)+1=0\\
&\Leftrightarrow\ (m^2+1)(-m)+m+1=0\\
&\Leftrightarrow\ -m^3+1=0\\
&\Leftrightarrow\ m=1.(\text{Thỏa mãn điều kiện})
\end{aligned}$$

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 41. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm $M=(1;-1;2)$ và hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases}x=t\\ y=1-t,\\ z=-1\end{cases}$ $d_2\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{1}$. Đường thẳng Δ đi qua điểm M và cắt cả hai đường thẳng d_1,d_2 có véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;a;b)$.Tính $a+b$.

A $a+b=-1$. **B** $a+b=-2$. **C** $a+b=2$. **D** $a+b=1$.

Lời giải.
Gọi A,B lần lượt là giao điểm của đường thẳng Δ với d_1,d_2
$A\in d_1\Rightarrow A(t_1;1-t_1;-1)\,;B\in d_2\Rightarrow B(-1+2t_2;1+t_2;-2+t_2)$.
$M\in\Delta\Leftrightarrow M,A,B$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}\quad(1)$
$\overrightarrow{MA}=(t_1-1;2-t_1;-3)\,;\overrightarrow{MB}=(2t_2-2;t_2+2;t_2-4)$.

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}t_1-1=k(2t_2-2)\\ 2-t_1=k(t_2+2)\\ -3=k(t_2-4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1-2kt_2+2k=1\\ -t_1-kt_2-2k=-2\\ kt_2-4k=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=0\\ kt_2=\dfrac{1}{3}\\ k=\dfrac{5}{6}.\end{cases}$$

Từ $t_1=0\Rightarrow A(0;1;-1)$.Do đường thẳng Δ đi qua điểm A và M nên một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{AM}=(1;-2;3)$.
Vậy $a=-2,b=3\Rightarrow a+b=1$.
Chọn đáp án D □

Câu 42. Hai người A và B ở cách nhau 180(m) trên đoạn đường thẳng và cùng chuyển động theo một hướng với vận tốc biến thiên theo thời gian , A chuyển động với vận tốc $v_1(t)=6t+5$(m/s), B chuyển động với vận tốc $v_2(t)=2at-3$(m/s) (a là hằng số), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A và B bắt đầu chuyển động . Biết rằng lúc A đuổi theo B và sao 10(giây) thì đuổi kịp. Hỏi sau 20(giây), A cách B bao nhiêu mét?

A 320(m). **B** 720(m). **C** 360(m). **D** 380(m).

Lời giải.

Quảng đường A đi được trong 10 (giây): $\int\limits_0^{10}(6t+5)\,\mathrm{d}t=\left(3t^2+5t\right)\Big|_0^{10}=350(\mathrm{m})$.

Quảng đường B đi được trong 10 (giây): $\int\limits_0^{10}(2at-3)\,\mathrm{d}t=\left(at^2-3t\right)\Big|_0^{10}=100a-30(\mathrm{m})$.

Vì lúc đầu A đuổi theo B và sau 10 (giây) thì đuổi kịp nên ta có:

$$(100a-30)+180=350\Leftrightarrow a=2\Rightarrow v_2(t)=4t-3(\mathrm{m/s})$$

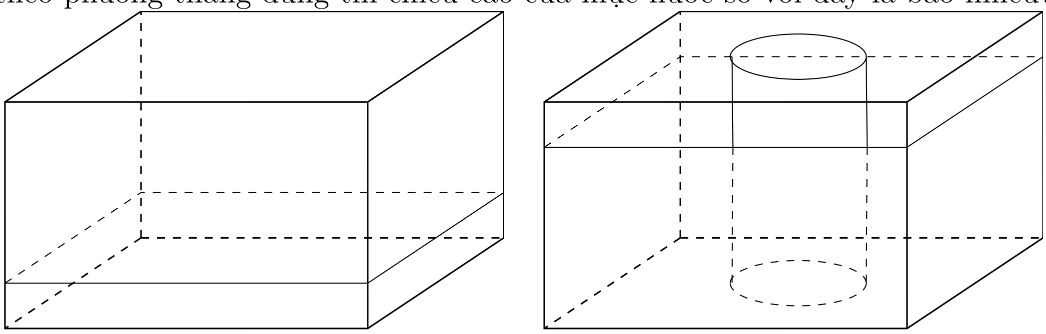
Sau 20(giây) quãng đường A đi được : $\int\limits_0^{20}(6t+5)\,\mathrm{d}t=\left(3t^2+5t\right)\Big|_0^{20}=1300(\mathrm{m})$.

Sau 20(giây) quãng đường B đi được : $\int\limits_0^{20}(4t-3)\,\mathrm{d}t=\left(2t^2-3t\right)\Big|_0^{20}=740(\mathrm{m})$.

Khoảng cách giữa A và B sau 20 (giây) $1300-740-180=380(\mathrm{m})$.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Một hình hộp chữ nhật có chiều cao 90cm, đáy hộp là hình chữ nhật có chiều rông 50cm và chiều dài là 80cm . trong khối hộp có chứa nước , mục nước so với đáy hộp có chiều cao 40cm. Hỏi khi đặt vào khối hộp một khối trụ có chiều cao bằng chiều cao khối hộp và bán kính đáy là 20cm theo phuong thẳng đứng thì chiều cao của mực nước so với đáy là bao nhiêu?



(A) 68,32cm. (B) 78,32cm. (C) 58,32cm. (D) 48,32cm.

Lời giải.

Trước khi đặt khối trụ vào trong hộp thì thể tích nước trong hộp là $V_n=40\cdot80\cdot50=160000\,(\mathrm{cm}^3)$

Gọi h (cm) là chiều cao của mặt nước so với đáy.

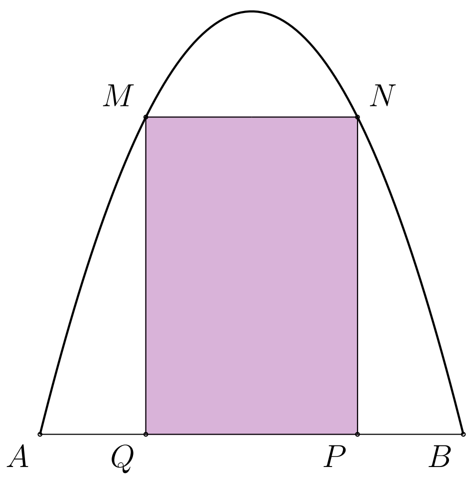
Sau khi đặt khối trụ vào hình hộp thì thể tích lượng nước là$V_n=h\cdot(4000-400\pi)\,(\mathrm{cm}^3)$.

Do lượng nước không đổi nên ta có $h\cdot(4000-400\pi)=160000\Leftrightarrow h=\dfrac{160000}{4000-400\pi}\approx58{,}32(\mathrm{cm})$.

Chọn đáp án C □

Câu 44.

Một chiếc cổng có hình dạng là một Parabol có khoảng cách hai chân cổng là $AB = 5$ m. Người ta treo một tấm phông hình chữ nhật có hai đỉnh M, N nằm trên Parabol và hai đỉnh P, Q nằm trên mặt đất (như hình vẽ). Ở phần ngoài phông (phần không tô đen) người ta mua hoa để trang trí với chi phí cho 1 m^2 cần số tiền mua hoa là 200000 đồng cho 1 m^2. Biết $MN = 4$ m, $MQ = 6$ m. Hỏi số tiền dùng để mua hoa trang trí chiếc cổng gần với số tiền nào sau đây?

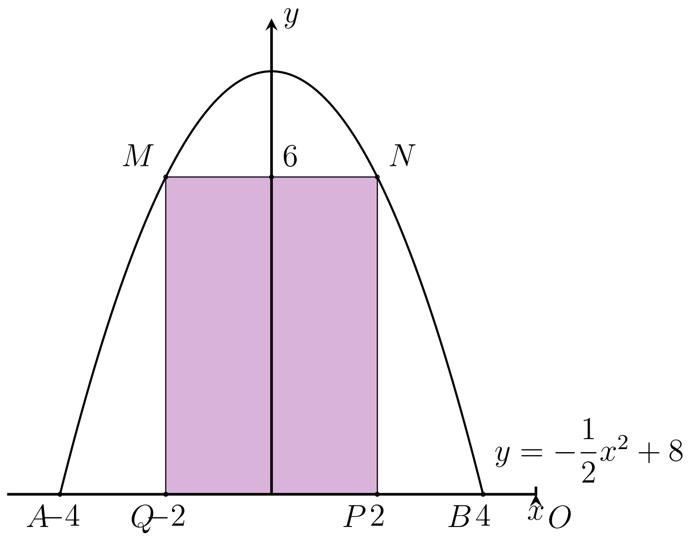


A 3735300 đồng. **B** 3437300 đồng. **C** 3734300 đồng. **D** 3733300 đồng.

(2D3K3-2)

Lời giải.

- Tính diện tích hình Parabol: Chọn hệ trục Oxy sao cho gốc O là trung điểm của AB như hình vẽ.



Khi đó $A(-4;0)$, $B(4;0)$, $M(-2;6)$ và $N(2;6)$. Khi đó phương trình Parabol có dạng $y = ax^2 + c$ đi qua A và M nên có hệ $\begin{cases} 16a + c = 0 \\ 4a + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ c = 8 \end{cases}$. Diện tích Parabol là

$$S_1 \quad \int_{-4}^{4} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 8\right) \mathrm{d}x$$
$$= \frac{128}{3}.$$

- Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là: $S_2 = MN \cdot MQ = 4 \cdot 6 = 24$.
- Diện tích phần trang trí hoa là $S = S_1 - S_2 = \frac{56}{3}$.
- Số tiền trang trí hoa là $S \cdot 200000 \approx 3733300$ đồng.

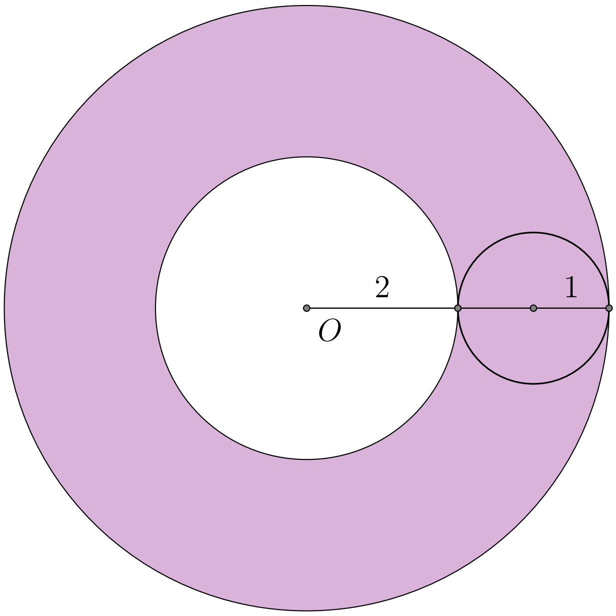
Chọn đáp án D □

Câu 45. Cho hai số phức z ,ω thay đổi sao cho $|z| = 3$, $|z - \omega| = 1$. Biết tập hợp điểm của số phức ω là hình phẳng H. Tính diện tích S của hình H.

(A) $S = 20\pi$. **B** $S = 12\pi$. (C) $S = 4\pi$. (D) $S =$.

(2D4G1-2)

Lời giải.



- Tập hợp số phức z là đường tròn (C) tâm O bán kính là 3.
- Bằng cách suy luận, với mỗi điểm trên (C) thì vẽ đường tròn bán kính 1, ta nhận thấy rằng tất cả các đường tròn tạo ra các vành khuyên như hình vẽ sau, đây chính là tập hợp biểu diễn số phức ω. Hình vành khuyên được giới hạn bởi đường tròn bán kính 4 và đường tròn bán kính 2 tâm O
- Diện tích hình vành khuyên đó là $\pi 4^2 - \pi 2^2 = 12\pi$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Cho $\int\limits_0^1 \frac{9^x + 3m}{9^x + 3} dx = m^2 - 1$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m

(A) $P = 12$. **B** $P = \frac{1}{2}$. (C) $P = 16$. (D) $P = 24$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} & \int\limits_0^1 \frac{9^x + 3m}{9^x + 3} dx = m^2 - 1 \\ \Leftrightarrow\ & \int\limits_0^1 \frac{9^x}{9^x + 3} dx + m \int\limits_0^1 \frac{3}{9^x + 3} dx = m^2 - 1 \\ \Leftrightarrow\ & m^2 - m \int\limits_0^1 \frac{3}{9^x + 3} dx - \int\limits_0^1 \frac{9^x}{9^x + 3} dx - 1 = 0 \end{aligned}$$

Phương trình trên là phương trình bậc hai đối với biến m, với các hệ số

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -\int_0^1 \frac{3}{9^x+3}dx \\ c &= -\int_0^1 \frac{9^x}{9^x+3}dx - 1 \end{aligned}$$

Áp dụng hệ thức Viet, tổng các giá trị của m là:

$$m_1 + m_2 = -\frac{b}{a} = \int_0^1 \frac{3}{9^x+3}dx = \frac{1}{2}$$

(dùng máy tính bỏ túi tính tích phân xác định)

Chọn đáp án B □

Câu 47. Có bao nhiêu cách phân tích số 15^9 thành tích của ba số nguyên dương, biết rằng các cách phân tích mà các nhân tử chỉ khác nhau về thứ tự thì chỉ được tính một lần?

A 517. B 516. C 493. D 492.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 15^9 &= 3^9.5^9 = \underbrace{3\ldots3}_{9 \text{ số } 3}.\underbrace{5\ldots5}_{9 \text{ số } 5} \\ &= \underbrace{\underbrace{3\ldots3}_{a_1 \text{ số } 3}.\underbrace{5\ldots5}_{b_1 \text{ số } 5}}_{\text{Đặt là } x}.\underbrace{\underbrace{3\ldots3}_{a_2 \text{ số } 3}.\underbrace{5\ldots5}_{b_2 \text{ số } 5}}_{\text{Đặt là } y}.\underbrace{\underbrace{3\ldots3}_{a_3 \text{ số } 3}.\underbrace{5\ldots5}_{b_3 \text{ số } 5}}_{\text{Đặt là } z} \end{aligned}$$

Viết lại là: đặt $x = 3^{a_1}.5^{b_1}, y = 3^{a_2}.5^{b_2}, z = 3^{a_3}.5^{b_3}$

Suy ra ta có hệ:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 &= 9 \\ b_1 + b_2 + b_3 &= 9 \end{cases}$$

Xét ba trường hợp

- Trường hợp 1: 3 số x, y, z bằng nhau $\to$ có 1 cách chọn
- Trường hợp 2: Trong ba số có hai số bằng nhau, giả sử $x = y \Rightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$
  $\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + a_3 &= 9 \\ 2b_1 + b_3 &= 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 &= 9 - 2a_1 \\ b_3 &= 9 - 2b_1 \end{cases}$
  Suy ra có 5 cách chọn a_1 và 5 cách chọn b_1
- Trường hợp 3: Số cách chọn ba số phân biệt.
  Số cách chọn $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 &= 9 \\ b_1 + b_2 + b_3 &= 9 \end{cases}$ là $C_{11}^2.C_{11}^2$
  Suy ra số cách chọn ba số phân biệt là $C_{11}^2.C_{11}^2 - 24.3 - 1$

Vậy số cách phân tích số 15^9 thành tích ba số nguyên dương là $\dfrac{C_{11}^2.C_{11}^2-24.3-1}{3!}+25=517$

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Cho các số thực $a,b>1$ thỏa mãn $a^{\log_b a}+16b^{\log_a\left(\frac{b^8}{a^3}\right)}=12b^2$. Giá trị của biểu thức $P=a^3+b^3$ là

(A) $P=20$. (B) $P=39$. (C) $P=125$. **(D)** $P=72$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
& a^{\log_b a}+16b^{\log_a\left(\frac{b^8}{a^3}\right)}=12b^2\\
\Leftrightarrow\ & a^{\log_b a}+16b^{\log_a b^8-\log_a a^3}=12b^2\\
\Leftrightarrow\ & a^{\log_b a}+16b^{8\log_a b-3}=12b^2\\
\Leftrightarrow\ & a^{\log_b a}+16b^{\frac{8}{\log_b a}-3}=12b^2
\end{aligned}$$

Đặt $t=\log_b a\Rightarrow t>0$. Khi đó: $b^{t^2}+16b^{\frac{8}{t}-3}=12b^2$

Ta có

$$\begin{aligned}
b^{t^2}+16b^{\frac{8}{t}-3}=b^{t^2}+8b^{\frac{8}{t}-3}+8b^{\frac{8}{t}-3} &\geq 3\sqrt[3]{b^{t^2}.8b^{\frac{8}{t}-3}.8b^{\frac{8}{t}-3}}\\
=12\sqrt[3]{b^{t^2+\frac{8}{t}-3+\frac{8}{t}-3}} &\geq 12\sqrt[3]{b^{3\sqrt[3]{t^2\cdot\frac{8}{t}\cdot\frac{8}{t}}-6}}=12b^2
\end{aligned}$$

Vậy ta có: $b^{t^2}+16b^{\frac{8}{t}-3}\geq 12b^2$. Yêu cầu bài toán tương đương với dấu bằng xảy ra

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t&=2\\b^4&=8b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_b a&=2\\b&=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a&=4\\b&=2\end{cases}$$

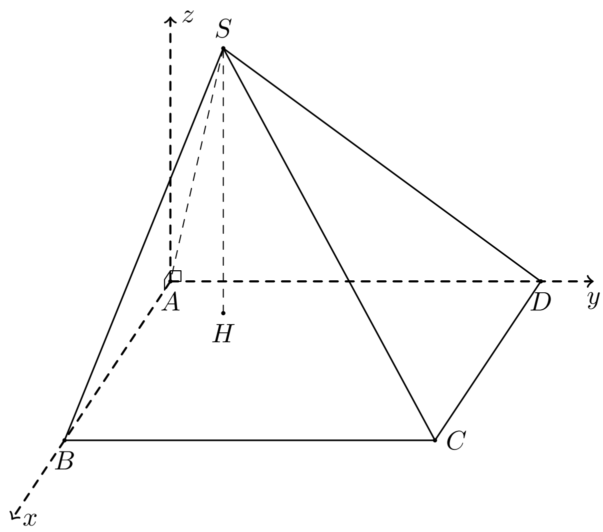
Từ đó ta có: $P=a^3+b^3=72$

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống mặt đáy nằm trong hình vuông $ABCD$. Hai mặt phẳng (SAD), (SBC) vuông góc với nhau; góc giữa hai mặt (SAB) và (SBC) là 60°; góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là 45°. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$, tính $\cos\alpha$

(A) $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$. (B) $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **(C)** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



Dựng hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ trên
Không mất tính tổng quát, giả sử $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng 1, chiều cao của hình chóp $S.ABCD$ bằng $c, (c > 0)$
Ta có tọa độ các điểm

$$A(0;0;0), B(1;0;0), C(1;1;0), D(0;1;0)$$

Do hình chiếu vuông góc H của đỉnh S xuống mặt đáy nằm trong hình vuông $ABCD$ nên gọi $H(a,b,0)$ với $0 < a, b < 1 \quad (*) \Rightarrow S(a;b;c)$.
Ta có $\overrightarrow{AS} = (a;b;c), \overrightarrow{AD} = (0;1;0)$ nên chọn $\overrightarrow{n}_{(SAD)} = \left[\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AD}\right] = (-c;0;a)$

$\overrightarrow{BS} = (a-1;b;c), \overrightarrow{BC} = (0;1;0)$ nên chọn $\overrightarrow{n}_{(SBC)} = \left[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BC}\right] = (-c;0;a-1)$

$\overrightarrow{AB} = (1;0;0), \overrightarrow{AS} = (a;b;c)$ nên chọn $\overrightarrow{n}_{(SAB)} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}\right] = (0;-c;b)$

Chọn $\overrightarrow{n}_{(ABCD)} = \overrightarrow{k} = (0;0;1)$

Do $(SAD) \perp (SBC) \Rightarrow \overrightarrow{n}_{(SAD)} \cdot \overrightarrow{n}_{(SBC)} = 0 \Leftrightarrow c^2 + a(a-1) = 0 \Leftrightarrow c^2 + a^2 = a \quad (1)$

Góc giữa (SAB) và (SBC) là 60°

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \cos 60^\circ &= \frac{\left|\overrightarrow{n}_{(SAB)}.\overrightarrow{n}_{(SBC)}\right|}{\left|\overrightarrow{n}_{(SAB)}\right|.\left|\overrightarrow{n}_{(SBC)}\right|}\\
\Leftrightarrow \frac{1}{2} &= \frac{|b(a-1)|}{\sqrt{c^2+(a-1)^2}.\sqrt{c^2+b^2}}\\
\Leftrightarrow \frac{1}{2} &= \frac{b(a-1)}{\sqrt{1-a}.\sqrt{c^2+b^2}} \quad \text{do } (*) \text{ và } (1)\\
\Leftrightarrow \frac{b\sqrt{1-a}}{\sqrt{c^2+b^2}} &= \frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow \frac{b}{\sqrt{c^2+b^2}} &= \frac{1}{2\sqrt{1-a}} \quad (2)
\end{aligned}$$

Góc giữa (SAB) và (SAD) là 45°

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \cos 45^\circ &= \frac{\left|\vec{n}_{(SAB)}.\vec{n}_{(SAD)}\right|}{\left|\vec{n}_{(SAB)}\right|.\left|\vec{n}_{(SAD)}\right|}\\
\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{|ab|}{\sqrt{c^2+a^2}.\sqrt{c^2+b^2}}\\
\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{ab}{\sqrt{a}.\sqrt{c^2+b^2}} \quad \text{do } (*)\\
\Leftrightarrow \frac{ab}{\sqrt{a}.\sqrt{c^2+b^2}} : \frac{b\sqrt{1-a}}{\sqrt{c^2+b^2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1-a}} &= \sqrt{2}\\
\Leftrightarrow a &= \frac{2}{3} \quad (3)
\end{aligned}$$

Góc giữa (SAB) và $(ABCD)$ là α

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \cos\alpha &= \frac{\left|\vec{n}_{(SAB)}.\vec{n}_{(ABCD)}\right|}{\left|\vec{n}_{(SAB)}\right|.\left|\vec{n}_{(ABCD)}\right|}\\
&\overset{(2),(3)}{=} \frac{b}{\sqrt{c^2+b^2}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho hai hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (3m^2+4m+5)x + 2019$ và $g(x) = (m^2+2m+5)x^3 - (2m^2+4m+9)x^2 - 3x + 2$ (với m là tham số). Hỏi phương trình $g(f(x)) = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 9. (B) 0. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
g(x)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-2)\left((m^2+2m+5)x^2+x-1\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x & = 2\\ (m^2+2m+5)x^2+x-1 & = 0 \quad (*)\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 2 với $\forall m$ vì $\left\{\begin{array}{ll} m^2+2m+5 & >0, \forall m\\ \Delta = 1+(m^2+2m+5) & >0, \forall m\\ (m^2+2m+5).2^2+2-1 & \neq 0, \forall m\end{array}\right.$

Vậy $g(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt (1).

Mặt khác, xét hàm số $y = f(x)$ ta có :

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 - 2(m+1)x + (3m^2 + 4m + 5) \\ &= (x-(m+1))^2 + 2(m^2+m+2) > 0 \forall m \end{aligned}$$

$\Rightarrow y = f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ với $\forall m$

Do $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 3 và đồng biến trên nên phương trình $f(x) = k$ luôn có 1 nghiệm duy nhất với mỗi số $k \in \mathbb{R}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $g(f(x)) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án C □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. D	3. B	4. B	5. A	6. C	7. C	8. A	9. D	10. B
11. C	12. D	13. B	14. B	15. D	16. B	17. B	18. A	19. B	20. A
21. C	22. A	23. A	24. B	25. A	26. D	27. C	28. A	29. B	30. A
31. A	32. A	33. C	34. D	35. D	36. D	37. B	38. B	39. C	40. B
41. D	42. D	43. C	44. D	45. B	46. B	47. A	48. D	49. C	50. C

42 ĐỀ THI THỬ THPT KIM LIÊN, HÀ NỘI – LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Với a, b là hai số thực khác 0 tùy ý, $\ln\left(a^2b^4\right)$ bằng

A $2\ln|a| + 4\ln|b|$. **B** $4(\ln|a| + \ln|b|)$. **C** $2\ln a + 4\ln b$. **D** $4\ln a + 2\ln b$.

Lời giải.

Ta có: $\ln\left(a^2b^4\right) = \ln a^2 + \ln b^4 = 2\ln|a| + 4\ln|b|$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Với k và n là hai số nguyên dương tùy ý thỏa mãn $k \leq n$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. **B** $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{k!}$. **C** $\mathrm{A}_n^k = n!$. **D** $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n+k)!}$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Cho hình nón có bán kính đáy bằng a và diện tích toàn phần bằng $3\pi a^2$. Độ dài đường sinh l của hình nón bằng:

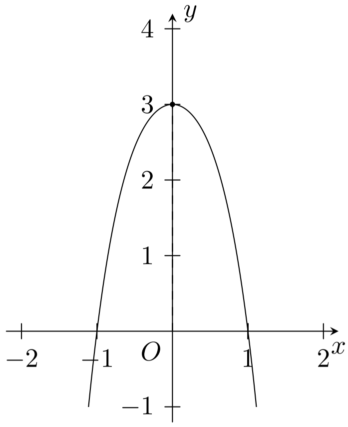
A $l = 4a$. **B** $l = a\sqrt{3}$. **C** $l = 2a$. **D** $l = a$.

Lời giải.

Ta có: $S_{\text{tp}} = \pi rl + \pi r^2 \Leftrightarrow 3\pi a^2 = \pi \cdot al + \pi a^2 \Leftrightarrow 2\pi a^2 = \pi al \Leftrightarrow l = 2a$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



A $y = -x^4 - 2x^2 + 3$. **B** $y = x^4 + 2x^2 - 3$.

C $y = -x^4 + 2x^2 + 3$. **D** $y = -x^2 + 3$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $\lim_{x\to+\infty} y = -\infty \Rightarrow$ Loại đáp án B.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ 1 và -1 nên chọn đáp án A vì:

Phương trình hoành độ giao điểm $-x^4 - 2x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Mặt cầu bán kính a có diện tích bằng.

A $\dfrac{4}{3}\pi a^2$. **B** πa^2. **C** $4\pi a^2$. **D** $\dfrac{4}{3}\pi a^3$.

Lời giải.

Diện tích mặt cầu bán kính a là $S = 4\pi a^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho khối lăng trụ $ABCA'B'C'$ có diện tích đáy ABC bằng S và chiều cao bằng h. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng:

A $2Sh$. **B** $\dfrac{1}{3}Sh$. **C** $\dfrac{2}{3}Sh$. **D** Sh.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ có chiều cao h và diện tích đáy bằng S là $V = S \cdot h$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực trị tại điểm x_0

A 0. **B** -4. **C** 1. **D** -3.

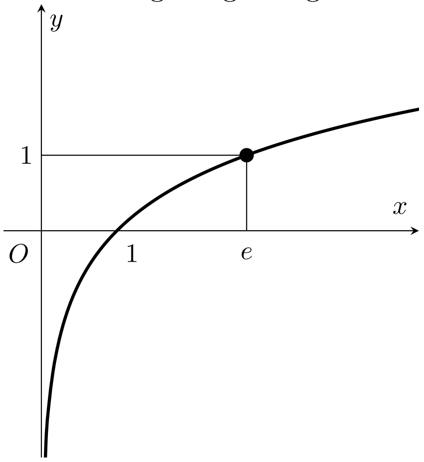
Lời giải.

Dựa vào BBT ta thấy hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 0$.

Chú ý: Không kết luận hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -3$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây.



A $y = \ln x$. **B** $y = -e^x$. **C** $y = |\ln x|$. **D** $y = \mathrm{e}^x$.

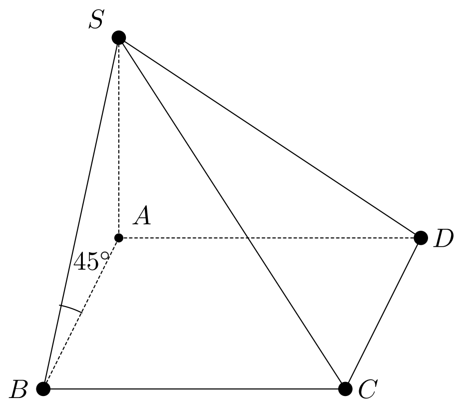
Lời giải.

Hàm số $\psi = |\ln x|$ và $y = \mathrm{e}^x$ luôn nằm phía trên trục Ox, hàm số $y = -\mathrm{e}^x$ luôn nằm phía dưới trục Ox, do đó loại các đáp án B, C, D.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và cạnh bên SB tạo với đáy một góc 45°. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (C) $\dfrac{a^3}{3}$. (D) a^3.



Lời giải.

Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB lên $(ABCD)$.

$\Rightarrow \angle(SB;(ABCD)) = \angle(SB;AB) = \angle SBA = 45^\circ$ (Do $\angle SBA < 90^\circ$)

Xét tam giác vuông SAB ta có: $SA = AB \cdot \tan 45^\circ = a$ Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot a^2 = \dfrac{a^3}{3}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{2}} \sqrt[8]{x}$

(A) x^4. (B) $x^{\frac{5}{16}}$. (C) $x^{\frac{5}{8}}$. (D) $x^{\frac{1}{16}}$.

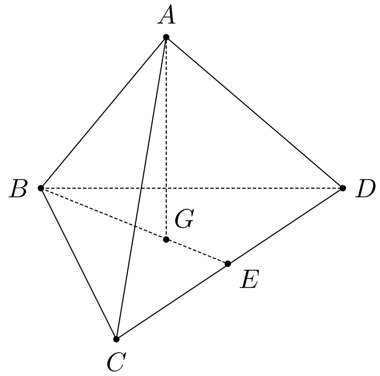
Lời giải.

Ta có: $P = x^{\frac{1}{2}} \sqrt[8]{x} = x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{8}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}} = x^{\frac{5}{8}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Cho khối tứ diện đều có tất cả các cạnh bằng $2a$. Thể tích khối tứ diện đã cho bằng:

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. (D) $\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.



Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác $BCD \Rightarrow AG \perp (BCD)$.

Gọi E là trung điểm của CD. Do đó tam giác BCD đều có cạnh $2a$.

$\Rightarrow BE = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow BG = \dfrac{2}{3}BE = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Áp dụng định lí Pytago trong tam giác vuông ABG ta có $AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$

Tam giác BCD đều cạnh $2a \Rightarrow S_{BCD} = \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{A} = a^2\sqrt{3}$

Vậy $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}AG \cdot S_{BCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2a\sqrt{6}}{3} \cdot a^2\sqrt{3} = \dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$

Chọn đáp án D □

Câu 12. Tập hợp các điểm M trong không gian cách đường thẳng Δ cố định một khoảng R không đổi $(R > 0)$ là

A. Hai đường thẳng song song.
B. Một mặt cầu.
C. Một mặt nón.
D. Một mặt trụ.

Lời giải.

Tập hợp các điểm M trong không gian cách đường thẳng Δ cố định một khoảng R không đổi $(R > 0)$ là một mặt trụ.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Số nghiệm thực của phương trình $\log_3(x^2 - 3x + 9) = 2$ bằng

A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Lời giải.

Ta có: $\log_3(x^2 - 3x + 9) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 9 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $(u_1 = 3)$ và công sai $d = 2$.Giá trị của u_7 bằng

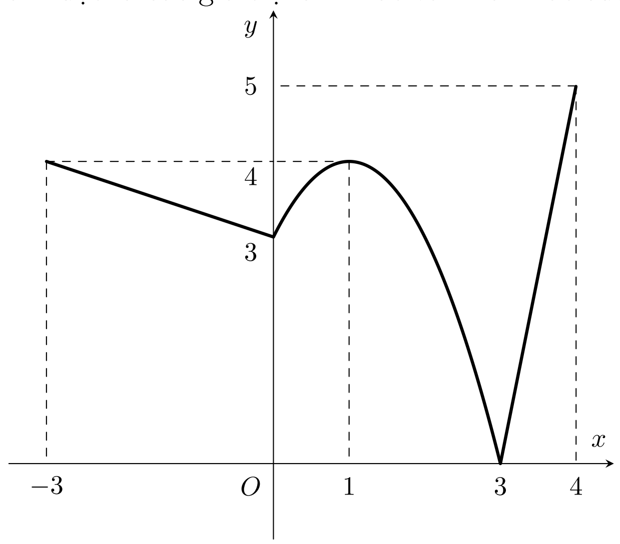
A. 15. B. 17. C. 19. D. 13.

Lời giải.

Ta có: $u_7 = u_1 + 6d = 3 + 6 \cdot 2 = 15$

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3;4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3;4]$. Tính $M+m$.



(A) 5. (B) 8. (C) 7. (D) 1.

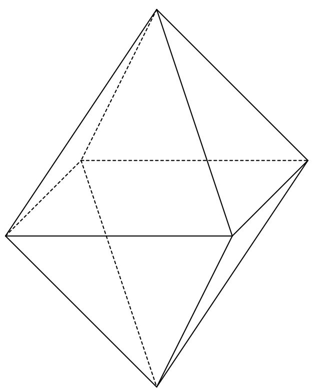
Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta dễ dàng suy ra được $M = \max_{[-3;4]} f(x) = 5; m = \min_{[-3;4]} f(x) = 0$

Vậy $M+m = 5+0 = 5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Hình bát diện đều có bao nhiêu đỉnh?



(A) 10. (B) 8. (C) 12. (D) 6.

Lời giải.

Hình bát diện đều có 6 đỉnh.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{2x-3}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ có hệ số góc bằng

(A) 5. **B** $-\dfrac{1}{5}$. (C) -5. (D) $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ .Ta có:$y' = \dfrac{1.(-3) - 1.2}{(2x-3)^2} = \dfrac{-5}{(2x-3)^2}$

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là $y'(-1) = \dfrac{-5}{[2(-1)-3]^2} = -\dfrac{1}{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Cho đường thẳng Δ. Xét một đường thẳng l cắt Δ tại một điểm. Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng l khi quay quanh đường thẳng Δ được gọi là:

(A) Mặt trụ. **B** Mặt nón. (C) Hình trụ. (D) Hình nón.

Lời giải.

Cho đường thẳng Δ. Xét một đường thẳng l cắt Δ tại một điểm. Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng l khi quay quanh đường thẳng Δ được gọi là mặt nón.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) Tồn tại một hình đa diện có số đỉnh bằng số mặt.

(B) Tồn tại một hình đa diện có số cạnh gấp đôi số mặt.

(C) Số đỉnh của một hình đa diện bất kì luôn lớn hơn hoặc bằng 4.

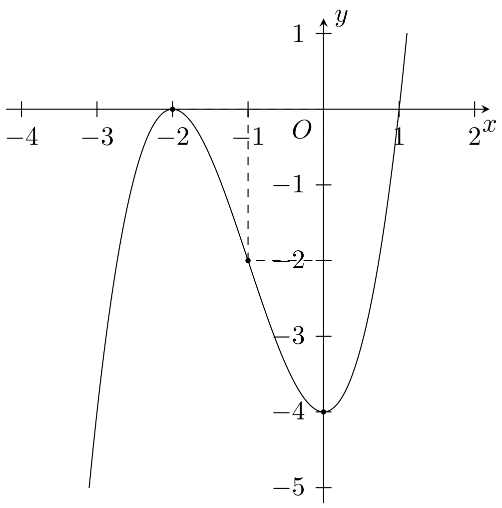
D Tồn tại một hình đa diện có số cạnh bằng số mặt.

Lời giải.

Đáp án A đúng vì tứ diện có 4 đỉnh và 4 mặt. Đáp án B đúng vì hình lập phương có 12 cạnh và 6 mặt. Đáp án C đúng, khối đa diện có ít đỉnh nhất là khối tứ diện, có 4 đỉnh.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-1;+\infty)$. **B** $0;+\infty$. Ⓒ $(-2;0)$. Ⓓ $(-4;+\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 21. Giá trị còn lại của một chiếc xe ô tô loại M thuộc hàng xe Toyota sau r năm kể từ khi mua được các nhà kinh tế nghiên cứu và ước lượng bằng công thức $G(t)=600\cdot \mathrm{e}^{-0{,}12t}$ (triệu đồng). Ông A mua một chiếc xe ô tô loại X thuộc hãng xe đó từ khi xe mới xuất xưởng và muốn bán sau một thời gian sử dụng với giá từ 300 triệu đến 400 triệu đồng. Hỏi ông A phải bán trong khoảng thời gian nào gần nhất với kết quả dưới đây kể từ khi mua?

Ⓐ Từ 2,4 năm đến 3,2 năm. **B** Từ 3,4 năm đến 5,8 năm.

Ⓒ Từ 3 năm đến 4 năm. Ⓓ Từ 4,2 năm đến 6,6 năm.

Lời giải.

Theo đề bài ta có: $300\le G(t)=600\mathrm{e}^{-012t}\le 400 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\le e^{-0.12t}\le \dfrac{2}{3}\Leftrightarrow \ln\dfrac{1}{2}\le -0,12t\le \ln\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow$ $3,4\le t\le 5,8$

Vậy ông A phải bán trong khoảng thời gian từ 3,4 năm đến 5,8 năm.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 22. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[0;2018]$ để bất phương trình $m+e^{\frac{\pi}{2}}\ge\sqrt[4]{\mathrm{e}^{2z}+1}$ có nghiệm với mọi $x\in\mathbb{R}$?

Ⓐ 2016. Ⓑ 2017. Ⓒ 2018. **D** 2019.

Lời giải.

Để bất phương trình $m+e^{\frac{\pi}{2}}\ge\sqrt[4]{\mathrm{e}^{2x}+1}=f(x)$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m+e^{\frac{\pi}{2}}\ge \max_{x\in\mathbb{R}} f(x)$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[4]{\mathrm{e}^{2x}+1}$ta có$f'(x)=\dfrac{1}{4}\left(e^{2x}+1\right)^{\frac{-3}{4}}\cdot 2\mathrm{e}^{2x}>0\forall x\in\mathbb{R}$.

BDT:

t	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(t)$	$+$
$f(t)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy BPT nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m+e^{\frac{\pi}{2}}>1\Leftrightarrow m> 1-e^{\frac{\pi}{2}}\approx -3,81$

Kết hợp với điều kiện đề bài $\Rightarrow\begin{cases} m\in[0;2018]\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow$ có 2019 giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 23. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ bằng

Ⓐ 5. **B** 35. Ⓒ 45. Ⓓ 7.

Lời giải.

Ta có $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7=\sum\limits_{k=0}^{7}\mathrm{C}_7^k(\sqrt[3]{x})^{7-k}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k=\sum\limits_{k=0}^{7}\mathrm{C}_7^k x^{\frac{7-k}{3}}x^{-\frac{k}{4}}=\sum\limits_{k=0}^{7}\mathrm{C}_7^k x^{\frac{7-k}{3}-\frac{k}{4}}$

Số hạng không chứa x trong khải triển ứng với $\dfrac{7-k}{3}-\dfrac{k}{4}=0\Leftrightarrow\dfrac{28-4k-3k}{12}=0\Leftrightarrow k=4$

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển trên là $\mathrm{C}_7^4=35$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 24. Cho hàm số $y=7^{\frac{x}{2}}$ có đồ thị(C) . Hàm số nào sau đây có đồ thị đối xứng với (C) qua đường thẳng có phương trình $y=x$.

A $\log_7 x^2$.
B $\log_7\dfrac{x}{2}$.
C $y=\dfrac{1}{2}\log_7 x$.
D $y=\log_{\sqrt{7}}x$.

Lời giải.

Ta có $y=7^{\frac{x}{2}}=(\sqrt{7})^x$. Do đó hàm số có đồ thị đối xứng với (C) qua đường thẳng có phương trình $y=x$ là $y=\log_{\sqrt{7}}x$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 25. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_5(6-5^x)=1-x$ bằng

A 2.
B 1.
C 0.
D 6.

Lời giải.

Ta có:$\log_5(6-5^x)=1-x\Leftrightarrow 6-5^x=5^{1-x}=\dfrac{5}{5^x}\Leftrightarrow(5^x)^2-6\cdot5^x+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5^x=5\\5^x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $S=\{0;1\}$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 26. Tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\tan\dfrac{\pi}{7}\right)^{x^2-x-9}\le\left(\tan\dfrac{\pi}{7}\right)^{x-1}$ là:

A $S=[-2\sqrt{2};2\sqrt{2}]$.
B $S=(-\infty;-2\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2};+\infty)$.
C $[-2;4]$.
D $(-\infty;2]\cup[4;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $\left(\tan\dfrac{\pi}{7}\right)^{x^2-x-9}\le\left(\tan\dfrac{\pi}{7}\right)^{x-1}\Leftrightarrow x^2-x-9\ge x-1\Leftrightarrow x^2-2x-8\ge0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge4\\x\le2\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty;2]\cup[4;+\infty)$

Chọn đáp án D ☐

Câu 27. Cho hàm số $y=f()$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)(x+2)^3(2-x)\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho bằng

A 7.
B 2.
C 4.
D 3.

Lời giải.

Xét phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2(x-1)(x+2)^3(2-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-2\\x=2\end{array}\right.$.

Hàm số không đạt cực trị tại điểm $x=0$ vì đó là nghiệm bội hai của phương trình $f'(x)=0$. Vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án D ☐

Câu 28. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6mx - 8$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5;5]$ để (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số nhân?

A 8. **B** 7. **C** 9. **D** 11.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$x^3 - 3mx^2 + 6mx - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+2x+4\right) - 3mx(x-2) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[x^2 + (2-3m)x + 4\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ g(x) = x^2 + (2-3m)x + 4 = 0 \end{array}\right. \quad (1)$$

Để đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (2-3m)^2 - 16 > 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 12m - 12 > 0 \\ 4 + 4 - 6m + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < \frac{-2}{3} \end{array}\right. \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < \frac{-2}{3} \end{array}\right.$$

Giả sử $x_1, x_2\,(x_1 < x_2)$ là 2 nghiệm phân biệt của phương trình $(*)$. Áp dụng định lí Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3m - 2 \\ x_1x_2 = 4 \end{cases}$$

TH1: x_1,x_2,2 theo thứ tự lập thành cấp số nhân khi đó $2x_1 = x_2^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_2^2}{2} + x_2 = 3m - 2 \\ \dfrac{x_2^2}{2}x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2 \\ 4 = 3m - 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 \text{ (không thỏa mãn)}$$

TH2: 2,x_1,x_2 theo thứ tự lập thành cấp số nhân, tương tự TH1 ta tìm được $m = 2$ (Không thỏa mãn).

Vậy kết hợp điều kiện đầu bài khi $m \in \left[-5; \dfrac{-2}{3}\right) \cup (2;5]$ thì có 8 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A ☐

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y			-2		|| $+\infty$				$+\infty$
	$-\infty$				$-\infty$ ||		2		

Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 4$ bằng

A 4. **B** 3. **C** 2. **D** 1.

Lời giải.

Số nghiệm của phương trình $f(x) = 4$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 4$ song song với trục hoành.
Dựa vào BBT ta thấy đường thẳng $y = 4$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 2 điểm phân biệt.
Vậy phương trình $f(x) = 4$ có 2 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Cho $\log_3 a = 5$ và $\log 3b = \dfrac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $I = 2\log_6\left[\log_5(5a)\right] + \log_{\frac{1}{9}} b^3$

(A) $I = 3$. (B) $I = -2$. (C) $I = 1$. (D) $I = log_6 5 + 1$.

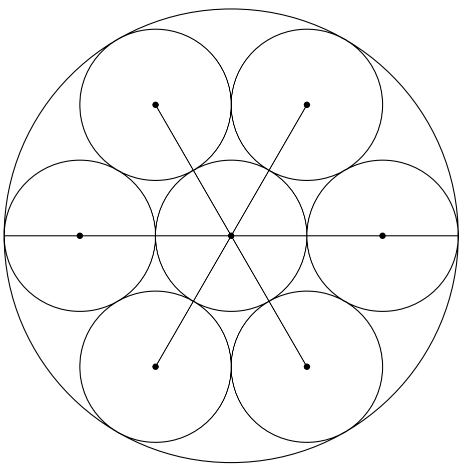
Lời giải.
Ta có: $I = 2\log_6\left[\log_5(5a)\right] + \log_{\frac{1}{9}} b^3 = 2\log_6\left[1 + \log_5 a\right] - \dfrac{3}{2}\log_3 b = 2\log_6 6 - \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

Chọn đáp án (C) □

Câu 31. Người ta xếp bảy viên bi là các khối cầu có cùng bán kính R vào một cái lọ hình trụ. Biết rằng các viên bi đều tiếp xúc với hai đáy, viên bi nằm chính giữa tiếp xúc với sáu viên bi xung quanh và mỗi viên bi xung quanh đều tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ. Tính theo R thể tích lượng nước cần dùng để đổ đầy vào lọ sau khi đã xếp bi.

(A) $6\pi R^3$. (B) $\dfrac{26\pi R^3}{3}$. (C) $18\pi R^3$. (D) $\dfrac{28\pi R^3}{3}$.

Lời giải.
Ta mô phỏng hình vẽ đáy của hình trụ như sau:



Khi đó ta có $R_{ht} = 3R$ và chiều cao hình trụ chính bằng đường kính viên bi và $h = 2 \cdot R$
$\Rightarrow V_{kt} = \pi R_{kt}^2 h = \pi \cdot (3R)^2 .2R = 18\pi R^3$
Thể tích 7 viên bi là $7 \cdot \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{28\pi R^3}{3}$. Vậy thể tích lượng nước cần dùng để đổ đầy vào lọ sau khi đã xếp bi là $18\pi R^3 - \dfrac{28\pi R^3}{3} = \dfrac{26\pi R^3}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Hàm số $f(x) = \log_3(sinx)$ có đạo hàm là

(A) $f'(x) = \dfrac{\cot x}{\ln 3}$. (B) $f'(x) = \dfrac{\tan x}{\ln 3}$. (C) $f'(x) = \cot x \ln 3$. (D) $f'(x) = \dfrac{1}{\sin x \ln 3}$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{(\sin x)'}{\sin x \ln 3} = \dfrac{\cos x}{\sin x \ln 3} = \dfrac{\cot x}{\ln 3}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\cos 2x) - 2m - 1 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{4}\right)$ là

A $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$. (B) $\left(0; \dfrac{1}{2}\right]$. (C) $\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}\right]$. (D) $\left(\dfrac{-2+\sqrt{2}}{4}; \dfrac{1}{4}\right)$.

Lời giải.

Đặt $t = \cos 2x$ vì $x \in \left(-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 2x \in \left(-\dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos 2x \in [-1; 0)$

Phương trình trở thành $f(t) = 2m + 1$ có nghiệm thuộc $\left(-\dfrac{1}{2}; 1\right]$

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$ và đường thẳng $y = 2m+1$ song song với trục hoành.

Dựa vào BBT ta có để phương trình trở thành $f(t) = 2m + 1$ có nghiệm thuộc $\left(-\dfrac{1}{2}; 1\right]$ thì $1 \le 2m + 1 \le 2 \Leftrightarrow 0 \le m \le \dfrac{1}{2}$

Vậy $m \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm M thuộc (C) có tung độ nguyên dương sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng 3 lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang của đồ thị (C) .

(A) 0. (B) 3. **C** 2. (D) 1.

Lời giải.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \backslash \{1\}$.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có tiệm cận đứng là $x = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 0\,(d_1)$ và tiệm cận ngang $y = 2 \Leftrightarrow y - 2 = 0\,(d_2)$.

Gọi $M\left(m; \dfrac{2m+1}{m-1}\right) \in (C)$ ta có: $d\left(M; d_1\right) = |m-1|; d\left(M; (d_2)\right) = \left|\dfrac{2m+1}{m-1} - 2\right| = \dfrac{3}{|m-1|}$

Vì khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng 3lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang nên

$d\left(M;d_1\right)=3d\left(M;\left(d_2\right)\right)\Leftrightarrow|m-1|=\dfrac{9}{|m-1|}\Leftrightarrow(m-1)^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\Rightarrow M(4;3)(tm)\\m=-2\Rightarrow M(-2;1)(tm)\end{array}\right.$

Vậy có 2 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $(d): y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB\leq 2\sqrt{2}$. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A -6. **B** 0. **C** 9. **D** -27.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$-x+m=\dfrac{-2x+1}{x+1}(x\neq-1)\Leftrightarrow -x^2-x+mx+m=-2x+1\Leftrightarrow x^2-(m+1)x-m+1=0$

Để đường thẳng $d: y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A,B thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác -1.

$\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)^2-4(-m+1)>0\\1+m+1-m+1\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+6m-3>0\\3\neq0(\text{luon dung})\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>-3+2\sqrt{3}\\m<-3-2\sqrt{3}\end{array}\right..$

Gọi $A\left(x_A;-x_A+m\right);B\left(x_B;-x_B+m\right)$ khi đó x_A,x_B là hai nghiệm phân biệt của phương trình $(*)$. Áp dụng định lý Vi-ét ta có: $\begin{cases}x_A+x_B=m+1\\x_Ax_B=-m+1\end{cases}$

Ta có: $AB^2=\left(x_A-x_B\right)^2+\left(-x_A+m+x_B-m\right)^2=2\left(x_A-x_B\right)^2=2\left[\left(x_A+x_B\right)^2-4x_1x_2\right]$
$=2\left[(m+1)^2-4(-m+1)\right]=2\left(m^2+6m-3\right)\leq 8\Leftrightarrow m^2+6m-3\leq 4\Leftrightarrow -7\leq m\leq 1.$

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow\begin{cases}m\in\mathbb{Z}\\m\in[-7;-3-2\sqrt{3})\cup(-3+2\sqrt{3};1]\end{cases}\Leftrightarrow S=\{-7;1\}$

Chọn đáp án A □

Câu 36. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. Giá trị $(\min\limits_{x\in[2;3]}y)^2+(\max\limits_{x\in[2;3]}y)^2$.

A 16. **B** $\dfrac{45}{4}$. **C** $\dfrac{25}{4}$. **D** $\dfrac{89}{4}$.

Lời giải.

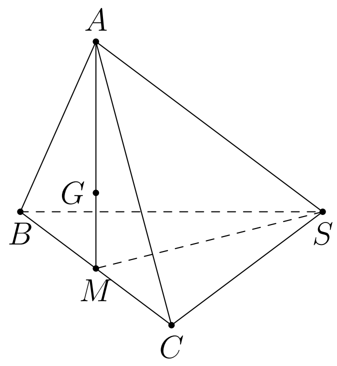
TXĐ: $D=\mathbb{R}\backslash\{1\}$ Ta có: $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}<0\forall x\in D\Rightarrow$ Hàm số đã cho nghịch biến trên $[2;3]$.

$\Rightarrow\begin{cases}\min\limits_{x\in[2;3]}y=y(3)=\dfrac{5}{2}\\\max\limits_{x\in[2;3]}y=4\end{cases}\Rightarrow(\min\limits_{x\in[2;3]}y)^2+(\max\limits_{x\in[2;3]}y)^2=(\dfrac{5}{2})^2+4^2=\dfrac{89}{4}.$

Chọn đáp án D □

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Mặt bên (SBC) vuông góc với đáy và $\widehat{CSB}=90^o$. Tính theo a bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$?

A $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D** $a\sqrt{3}$.



Lời giải.

Gọi G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Rightarrow GA = GB = GC$ (1) .

Gọi M là trung điểm của BC ta có :

$$\begin{cases} (ABC) \cap (SBC) = BC \\ (ABC) \perp (SBC) \\ AM \subset (ABC), AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp (SBC)$$

Ta lại có $\triangle SBC$ vuông tại $S \Rightarrow M$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSBC.

$\Rightarrow SM$ là trục của ΔSBC.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - x + 1)^{\frac{1}{3}}$

A $y' = \dfrac{2x-1}{3\sqrt[3]{x^2-x+1}}$.

B $y' = \dfrac{2x-1}{3\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2}}$.

C $y' = \dfrac{2x-1}{\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2}}$.

D $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2}}$.

Lời giải.

Ta có: $y' = \dfrac{1}{3}(x^2 - x + 1)^{\frac{-2}{3}}(2x - 1) = \dfrac{2x-1}{3\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Xét các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 \geq 4$ và $\log_{x^2+y^2}(4x - 2y) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 3x + 4y - 5$ là $a + b\sqrt{5}$ với a, b là các số nguyên. Tính $T = a^3 + b^3$

A $T = 0$. B $T = 250$. C $T = 152$. **D** $T = 98$.

Lời giải.

Chọn D.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2(m - 1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên $(1; 5)$ là

A $m < 2$. B $1 < m < 2$. **C** $m \leq 2$. D $1 \leq m \leq 2$.

Lời giải.

Ta có : $y' = 4x^3 - 4(m - 1)x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m - 1 \end{array}\right.$

TH1: $m \leq 1 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(1; 5)$ thõa mãn.

TH2: $m > 1 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{m-1} \\ x = -\sqrt{m-1} \end{array}\right.$

Bảng xét dấu:

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy để hàm số đồng biến trên $(1;5) \Leftrightarrow \sqrt{m-1} \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 2$
$\Rightarrow 1 < m \leq 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	
y	5	$\searrow$	$-\infty \,\|\, 4$	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho bằng

A. 1. B. 2. **C. 3.** D. 4.

Lời giải.

Dựa vào BBT ta thấy:

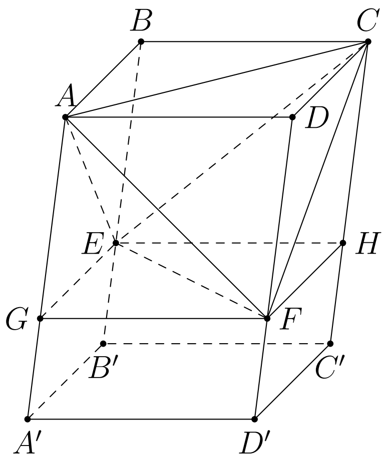
$\lim_{x\to-\infty} y = 5 \Rightarrow y = 5$ là TCN của đồ thị hàm số.
$\lim_{x\to 2^-} y = -\infty \Rightarrow x = 2$ là TCĐ của đồ thị hàm số.
$\lim_{x\to 3^-} y = -\infty; \lim_{x\to 3^+} y = +\infty \Rightarrow x = 3$ TCĐ của đồ thị hàm số.
Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho khối hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có thể tích bằng 1. Gọi E, F lần lượt là các điểm thuộc các cạnh BB' và DD' sao cho $BE = 2EB'$,$DF = 2FD'$. Tính thể tích khối tứ diện $ACEF$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B. $\dfrac{2}{9}$.** C. $\dfrac{1}{9}$. D. $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải.



Lấy $G \in AA', H \in CC'$ sao cho $AG = 2GA', CH = 2HC'$, dễ thấy $(EGFH)//(ABCD)$ và $V_{ABCD \cdot EGFH} = \dfrac{2}{3}V_{ABCD \cdot A'C'D'} = \dfrac{2}{3}$.

Ta có: $V_{ABCD \cdot EGFH} = V_{AGEF} + V_{C \cdot EFH} + V_{FACD} + V_{EABC} + V_{ACEF}$

$\Rightarrow V_{ACEF} = V_{ABCD \cdot EGFH} - (V_{A \cdot GEF} + V_{C \cdot EFH} + V_{F \cdot ACD} + V_{E \cdot ABC})$

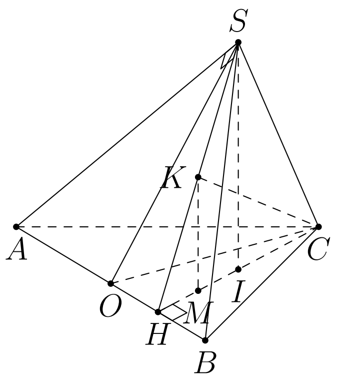
$= \dfrac{2}{3} - 4 \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9}$

Chọn đáp án B □

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại C, CH vuông góc với AB tại H, I là trung điểm của đoạn HC. Biết SI vuông góc với mặt phẳng đáy, $\widehat{ASB} = 90^o$. Gọi O là trung điểm của đoạn AB, O' là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABSI$, α là góc giữa OO' và mặt phẳng (ABC) . Tính $cosa$.

A $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B** $\dfrac{2}{3}$. **C** $\dfrac{1}{2}$. **D** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Ta có: $SI \perp (ABC) \Rightarrow SI \perp HC$. Xét ΔSHC có SI là đường trung tuyến đồng thời là đường cao $\Rightarrow \Delta SHC$ cân tại $S \Rightarrow SH = SC \quad (1)$

Ta có: $\begin{cases} AB \perp HC \\ AB \perp SI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHC) \Rightarrow AB \perp SH.$

Do ΔABC vuông tại C và ΔSAB vuông tại S, lại có O là trung điểm của $AB \Rightarrow OA = OB = OS = OC$.

Xét tam giác OSH và tam giác vuông OCH có: $OS = OC$ và OH cạnh chung.

$\Rightarrow \Delta OSH = \Delta OCH$ (Cạnh huỳnh - cạnh góc vuông) $\Rightarrow SH = CH \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta SHC$ đều.

Gọi K là trung điểm của SH ta có $CK \perp SH$.
Do $AB \perp (SHC)$ (Cmt) $\Rightarrow AB \perp CK \Rightarrow CK \perp (SAB)(3)$
Vì tam giác SAB vuông tại $S \Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSAB . O' là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABSI \Rightarrow OO'$ là trục của $\Delta SAB \Rightarrow OO' \perp (SAB)$ (4).
Từ (3) và (4) $\Rightarrow CK//OO' \Rightarrow \angle(OO';(ABC)) = \angle(CK;(ABC))$
Trong (SHC) kẻ $KM//SI(M \in CH) \Rightarrow CM$ là hình chiếu của CK trên $(ABC) \Rightarrow \angle(CK,(ABC)) = \angle(CK,CM) = \angle KCM = \angle KCH$

Do tam giác SHC là tam giác đều (cmt) $\Rightarrow$ Đường cao CK đồng thời là phân giác $\Rightarrow \angle KCH = 30^\circ$.
Vậy $\angle(OO';(ABC)) = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 44. Gọi n là số các giá trị của tham số m để bất phương trình $(2m-4)(x^3+2x^2)+(m^2-3m+2)(x^2+2x)-(m^3-m^2-2m)(x+2)<0$ vô nghiệm. Giá trị của n bằng

(A) $n=5$. **B** $n=1$. (C) $n=4$. (D) $n=2$.

Lời giải.
Ta có: $(2m-4)(x^3+2x^2)+(m^2-3m+2)(x^2+2x)-(m^3-m^2-2m)(x+2)<0$
$\Leftrightarrow 2x^2(m-2)(x+2)+x(m-1)(m-2)(x+2)-m(m+1)(m-2)(x+2)<0$
$\Leftrightarrow (m-2)(x+2)\left[2x^2+(m-1)x-m(m+1)\right]<0$
$\Leftrightarrow (m-2)(x+2)(x+m)(2x-m-1)<0$
TH1: $m=2 \Rightarrow 0<0 \Rightarrow$ Bất phương trình vô nghiệm $\Rightarrow m=2$ (Thỏa mãn).
TH2: $m \neq 2$, vế trái của (*) $f(x)=(m-2)(x+2)(x+m)(2x-m-1)$ là đa thức bậc ba, do đó luôn tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ để $f(x_0)<0 \Rightarrow$ Bất phương trình luôn có nghiệm $\forall m \neq 2$.
Vậy tồn tại duy nhất $m=2$ để bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-6		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $f(2x-2)-2e^x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

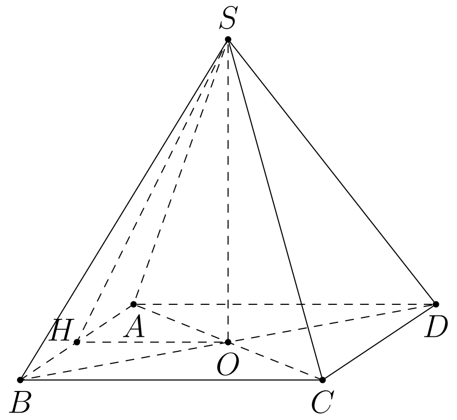
A $(0;1)$. (B) $(1;+\infty)$. (C) $(-\infty;-1)$. (D) $(-2;0)$.

Lời giải.
Đặt $g(x)=f(2x-2)-2e^x$ Ta có: $g'(x)=2f'(2x-2)-2e^x=2\left[f'(2x-2)-e^x\right]$
Với $x \in (0;1)$ ta có $\begin{cases} 2x-2 \in (-2;0) \Rightarrow f'(2x-2)<0 \\ x \in (0;1) \Rightarrow e^x \in (1;e)>0 \end{cases}$
$\Rightarrow g'(x)=2\left[f'(2x-2)-e^x\right]<0 \forall x \in (0;1) \Rightarrow$ Hàm số $f(2x-2)-2e^x$ nghịch biến trên $(0;1)$
Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với O là tâm của đáy và chiều cao $SO = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$. Tính góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng đáy

A 90°. **B** 60°. **C** 30°. **D** 45°.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AB. Tam giác SAB cân tại $S \Rightarrow SH \perp AB$.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp SO \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHO) \Rightarrow AB \perp OH$

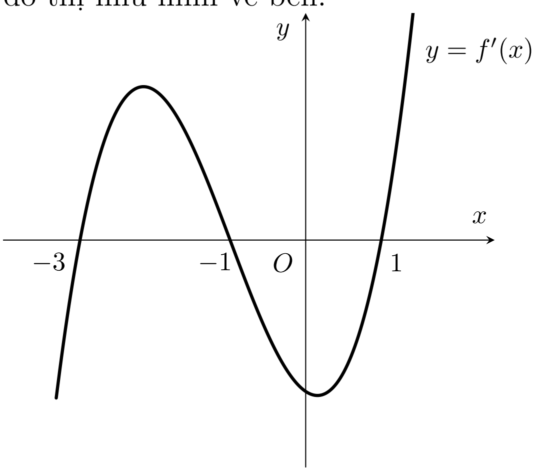
$\begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ (SAB) \supset SH \perp AB \\ (ABCD) \supset OH \perp AB \end{cases}$

$\Rightarrow \angle((SAB); (ABCD)) = \angle(SH, OH) = \angle SHO$

Xét tam giác vuông SHO có $\tan \angle SHO = \dfrac{SH}{OH} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}AB}{\frac{AB}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle SHO = 60^\circ$.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + 2bx^3 - 3cx^2 - 4dx + 5h (a, b, c, d, h \in \mathbb{Z})$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tập nghiệm thực của phương trình $f(x) = 5h$ có số phần tử bằng

A 3. **B** 4. **C** 2. **D** 1.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Ta có BBT của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0		$-$		0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↗		↘	$5h$	↘		↗	$+\infty$ $y = 5h$

Ta có: $f(0) = 5h$.

Số nghiệm của phương trình $f(0) = 5h$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 5h$ song song với trục hoành.

Dựa vào BBT ta thấy phương trình $f(x) = 5h$ có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Một đề kiểm tra trắc nghiệm 45 phút môn Tiếng Anh của lớp 10 là một đề gồm 25 câu hỏi độc lập, mỗi câu có 4 đáp án trả lời trong đó chỉ có một đáp án đúng. Mỗi câu trả lời đúng được 0,4 điểm, câu trả lời sai không được điểm. Bạn Bình vì học kém môn Tiếng Anh nên làm bài theo cách chọn ngẫu nhiên câu trả lời cho tất cả 25 câu. Gọi A là biến cố "Bình làm đúng k câu", biết xác suất của biến cố A đạt giá trị lớn nhất. Tính k.

A $k = 5$. **B** $k = 1$. **C** $k = 25$. **D** $k = 6$.

Lời giải.

Do mỗi câu có 4 đáp án trong đó chỉ có 1 đáp án đúng nên xác suất để trả lời đúng 1 câu là $\frac{1}{4}$ và xác suất để trả lời sai 1 câu là $\frac{3}{4}$. Gọi A là biến cố "Bình làm đúng k câu", xác suất của biến cố A là $P(A) = C_{25}^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{25-k}$. Xét khai triển $1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)^{25} = \sum\limits_{k=0}^{25} C_{25}^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{25-k}$

Giả sử $A_k = C_{25}^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{25-k}$ là số hạng lớn nhất trong khai triển trên ta có

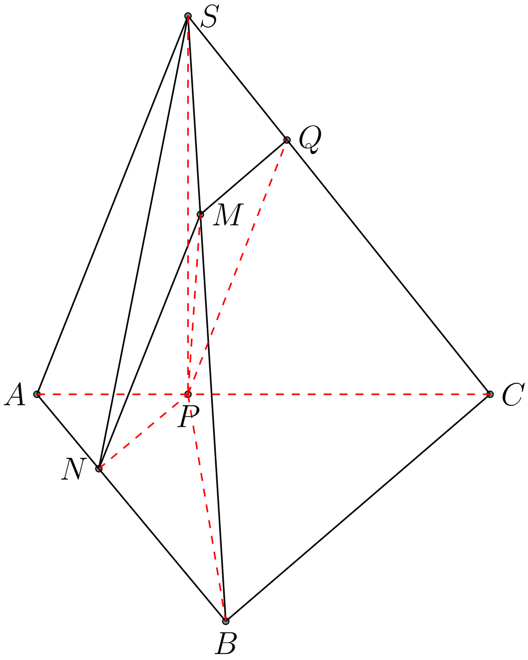
$$\begin{cases} A_k > A_{k-1} \\ A_k > A_{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{25}^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{25-k} > C_{25}^{k-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \left(\frac{3}{4}\right)^{26-k} \\ C_{25}^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{25-k} > C_{25}^{k+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \left(\frac{3}{4}\right)^{24-k} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{26 - k - 3k}{k(26-k)} > 0 \\ \dfrac{3k + 3 - 25 + k}{(25-k)(k+1)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < \dfrac{26}{4} \\ k > \dfrac{22}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{22}{4} < k < \frac{26}{4}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 6$$

Chọn đáp án D □

Câu 49. Cho khối chóp $S.ABC$ có thể tích V. M là một điểm trên cạnh SB. Thiết diện qua M song song với đường thẳng SA và BC chia khối chóp thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích phần khối chóp $S.ABC$ chứa cạnh SA. Biết $\frac{V_1}{V} = \frac{20}{27}$. Tính tỉ số $\frac{SM}{SB}$.

Ⓐ $\frac{4}{4}$. **B** $\frac{2}{3}$. Ⓒ $\frac{3}{4}$. Ⓓ $\frac{1}{2}$.



Lời giải.

Dựng $MN \parallel SA(N \in AB), NP \parallel BC(P \in AC); PQ \parallel SA(Q \in SC)$

Khi đó thiết diện cần tìm là $MNPQ$

Ta có $V_1 = V_{S\cdot ANP} + V_{S\cdot NPM} + V_{S\cdot PMQ}$

Đặt $\frac{SM}{SB} = x \Rightarrow \frac{SQ}{SC} = \frac{AP}{AC} = \frac{AN}{AB} = x$

Ta có: $\frac{V_{S\cdot ANP}}{V_{SABC}} = \frac{S_{ANP}}{S_{ABC}} = \frac{AN}{AB} \cdot \frac{AP}{AC} = x^2 \Rightarrow V_{S\cdot ANP} = x^2 V$

$\frac{V_{S,NPM}}{V_{S\cdot NPB}} = \frac{SM}{SB} = x(x < 1) \Rightarrow V_{SNPM} = xV_{S\cdot NPB}$

$\frac{S_{BNP}}{S_{BAP}} = \frac{BN}{BA} = 1 - x; \frac{S_{BAP}}{S_{ABC}} = \frac{AP}{AC} = x$

$\Rightarrow \frac{S_{BVP}}{S_{BAP}} \cdot \frac{S_{BAP}}{S_{ABC}} = (1-x)x \Rightarrow \frac{S_{BVP}}{S_{ABC}} = (1-x)x$

$\Rightarrow \frac{V_{SNPB}}{V_{S\cdot ABC}} = \frac{S_{BNP}}{S_{ABC}} = (1-x)x \Rightarrow V_{SNPB} = (1-x)xV$

$\Rightarrow V_{S\cdot NPM} = x^2(1-x)V$

$\frac{V_{S\cdot PMQ}}{V_{SPBC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SQ}{SC} = x^2$

$\frac{V_{S\cdot PBC}}{V_{S\cdot ABC}} = \frac{S_{PBC}}{S_{ABC}} = \frac{PC}{AC} = 1 - x$

$\Rightarrow \frac{V_{S\cdot PMQ}}{V_{S\cdot ABC}} = x^2(1-x) \Rightarrow V_{S.PMQ} = x^2(1-x)V$

$\Rightarrow V_1 = V_{S\cdot ANP} + V_{S\cdot NPM} + V_{SPMQ} = \left(x^2 + 2x^2(1-x)\right)V \Rightarrow \frac{V_1}{V} = x^2 + 2x^2(1-x) = 3x^2 - 2x^3$

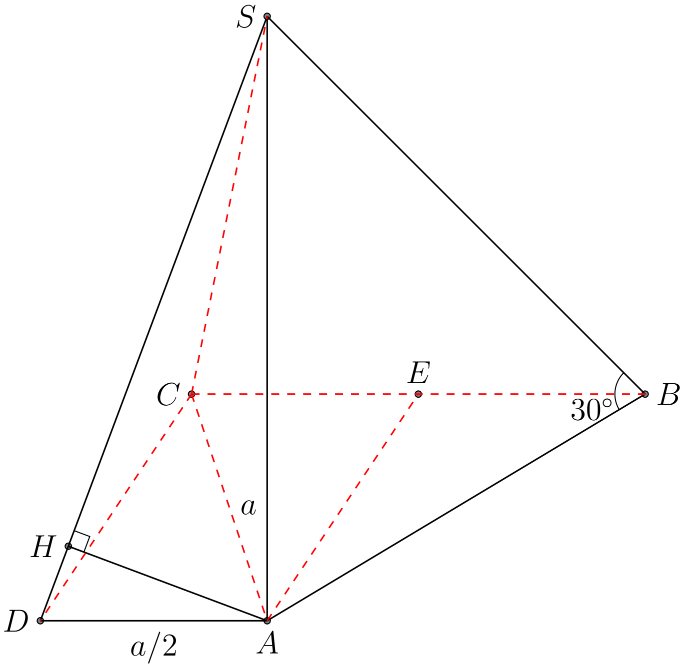
Mà $\frac{V_1}{V} = \frac{20}{27} \Leftrightarrow 3x^2 - 2x^3 = \frac{20}{27} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại C và $D, \widehat{ABC} = 30^o$. Biết $AC = a, CD = \frac{a}{2}, SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B

đến mặt phẳng (SCD) bằng.

A $a\sqrt{6}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Lời giải.

Kẻ $AE \perp BC (E \in BC)$ ta có: $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = CE$

$BE = AE \cdot \cot 30^\circ = \dfrac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow E$ là trung điểm của BC

$\Rightarrow d(B;(SCD)) = 2d(E;(SCD)) = d(A;(SCD))$

Trong (SAD) kẻ $AH \perp SD (H \in SD)$ ta có:

$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$

$\begin{cases} AH \perp CD \\ AH \perp SD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A;(SCD)) = AH$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAD ta có:

$$AH = \dfrac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$$

Vậy: $d(B;(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Chọn đáp án B □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. A	3. C	4. A	5. C	6. D	7. A	8. A	9. C	10. C
11. D	12. D	13. D	14. A	15. A	16. D	17. B	18. B	19. D	20. B
21. B	22. D	23. B	24. D	25. B	26. D	27. D	28. A	29. C	30. C
31. B	32. A	33. A	34. C	35. A	36. D	37. C	38. B	39. D	40. C
41. C	42. B	43. A	44. B	45. A	46. B	47. B	48. D	49. B	50. B

43 ĐỀ THI THỬ THPT TRẦN NGUYỄN HÃN, HẢI PHÒNG – LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_1 = 3$, $u_2 = -1$. Tìm u_3.

Ⓐ $u_3 = 4$. Ⓑ $u_3 = 2$. **C** $u_3 = -5$. Ⓓ $u_3 = 7$.

Lời giải.

Công thức tổng quát của cấp số cộng có số hạng đầu là u_1 và công sai d là $u_n = u_1 + (n-1)d$.

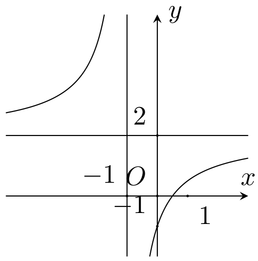
Vậy ta có $d = u_2 - u_1 = -1 - 3 = -4 \Rightarrow u_3 = u_2 + d = -1 + (-4) = -5$.

Chọn đáp án C □

Câu 2.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị hàm số nào dưới đây?

Ⓐ $y = \dfrac{1-2x}{x+1}$. **B** $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$. Ⓒ $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. Ⓓ $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.



Lời giải.

Từ hình vẽ ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$ (loại phương án A), tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$ (loại phương án C) và đi qua điểm có tọa độ $(0; -1)$ (loại phương án D).

Chọn đáp án B □

Câu 3. Hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 9x + 20$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

Ⓐ $(3; +\infty)$. Ⓑ $(1; 2)$. Ⓒ $(-\infty; 1)$. **D** $(-3; 1)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$; $y' > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2-2x}{x+1}$.

Ⓐ $x = -1$. Ⓑ $x = -2$. Ⓒ $y = 2$. **D** $y = -2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2-2x}{x+1} = -2 \Rightarrow y = -2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng a. Tính diện tích xung quanh S của khối trụ đó.

Ⓐ $S = 2\pi a^2$. Ⓑ $S = \dfrac{\pi a^2}{2}$. **C** $S = \pi a^2$. Ⓓ $S = 4\pi a^2$.

Lời giải.

Do thiết diện là hình vuông cạnh a nên bán kính đáy bằng $\frac{a}{2}$ và chiều cao $h = a$.

Diện tích xung quanh: $S = 2\pi \times \frac{a}{2} \times a = \pi a^2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Một mặt cầu có đường kính bằng a có diện tích S bằng bao nhiêu?

(A) $S = \frac{4\pi a^2}{3}$. (B) $S = \frac{\pi a^2}{3}$. **(C)** $S = \pi a^2$. (D) $S = 4\pi a^2$.

Lời giải.

Vì đường kính mặt cầu bằng a nên bán kính mặt cầu là $r = \frac{a}{2}$.

Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \pi a^2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(3x - 2) = 3$.

(A) $x = \frac{8}{3}$. **(B)** $x = \frac{10}{3}$. (C) $x = \frac{16}{3}$. (D) $x = \frac{11}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(3x - 2) = 3 \Leftrightarrow 3x - 2 = 2^3 \Leftrightarrow 3x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Cho biểu thức $P = 2^x \times 2^y$, $x; y \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $P = 2^{x-y}$. (B) $P = 4^{xy}$. (C) $P = 2^{xy}$. **(D)** $P = 2^{x+y}$.

Lời giải.

Ta có $P = 2^x \times 2^y = 2^{x+y}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính thể tích V của khối chóp $D'.ABCD$.

(A) $V = \frac{a^3}{4}$. (B) $V = \frac{a^3}{6}$. **(C)** $V = \frac{a^3}{3}$. (D) $V = a^3$.

Lời giải.

Diện tích đáy $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$, chiều cao $D'D = a$.

Do đó $V_{D'.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot D'D = \frac{1}{3} a^2 \cdot a = \frac{a^3}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Trong khai triển nhị thức $(2x - 1)^{10}$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^8.

(A) 45. **(B)** 11520. (C) −11520. (D) 256.

Lời giải.

Ta có $(2x - 1)^{10} = \sum\limits_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^k \cdot (2x)^{10-k} \cdot (-1)^k = \sum\limits_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^k \cdot x^{10-k} \cdot 2^{10-k} \cdot (-1)^k$.

Số hạng chứa x^8 trong khai triển ứng với $10 - k = 8 \Leftrightarrow k = 2$.

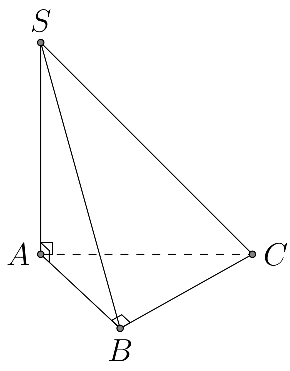
Nên hệ số của số hạng chứa x^8 là $\mathrm{C}_{10}^2 2^{10-2} \cdot (-1)^2 = 11520$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy ABC. Tam giác ABC vuông cân tại B và $SA = a\sqrt{2}$, $SB = a\sqrt{5}$. Tính góc giữa SC và mặt phẳng (ABC).

(A) 45°. **(B)** 30°. (C) 120°. (D) 60°.

Lời giải.



Vì $SA \perp (ABC)$ nên góc $(\widehat{SC,(ABC)}) = (\widehat{SC,AC}) = \widehat{SCA}$ (vì $\widehat{SCA} < 90^\circ$).

Tam giác SAB vuông tại A có

$$SA = a\sqrt{2}, SB = a\sqrt{5} \Rightarrow AB = \sqrt{SB^2 - SA^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow BC = a\sqrt{3}.$$

Do đó $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3a^2 + 3a^2} = a\sqrt{6}$.

Tam giác SAC có $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^\circ$.

Vậy $(SC,(ABC)) = \widehat{SCA} = 30^\circ$.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Phương trình $\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x = 1$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$?

A 5. B 3. C 2. D 4.

Lời giải.

Ta có phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow -\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ -\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{6} + l\pi.\end{array}\right.$$

Vì $x \in [0; 2\pi]$ nên ta có

- $0 \le \dfrac{\pi}{2} + k\pi \le 2\pi \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \le k \le \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}k = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}\\ k = 1 \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2}.\end{array}\right.$
- $0 \le \dfrac{\pi}{6} + l\pi \le 2\pi \Leftrightarrow -\dfrac{1}{6} \le m \le \dfrac{11}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}l = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}\\ l = 1 \Rightarrow x = \dfrac{7\pi}{6}.\end{array}\right.$.

Vậy phương trình có bốn nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2}$. Tính $M - m$.

A $M - m = 2\sqrt{2}$.
B $M - m = 2\sqrt{2} + 2$.
C $M - m = 4$.
D $M - m = 2\sqrt{2} - 2$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = [-2; 2]$.

Ta có $y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases}x \ge 0\\ 4 - x^2 = x^2\end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Do $y(-2) = -2, y(2) = 2, y\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$.

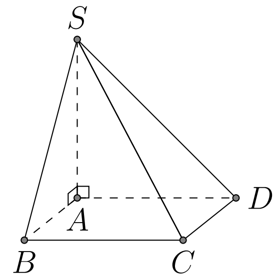
Vậy $M = 2\sqrt{2}, m = -2$, suy ra $M - m = 2\sqrt{2} + 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$. Biết SA vuông góc với đáy và $SC = a\sqrt{5}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A $V = \dfrac{2a^3}{3}$. (B) $V = 2a^3$. (C) $V = \dfrac{a^3}{3}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$ nên $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$.
Tam giác SAC vuông tại A có $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = a$.
Thể tích của khối chóp

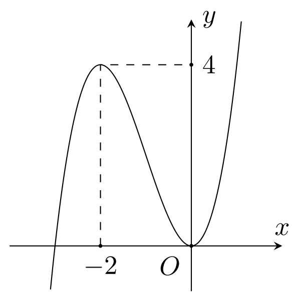
$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3}a \cdot \left(a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{2a^3}{3}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 15.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm khoảng đồng biến của hàm số.

(A) $(3; +\infty)$. (B) $(-\infty; 1)$ và $(0; +\infty)$.
C $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$. (D) $(-2; 0)$.



Lời giải.

Quan sát đồ thị hàm số ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Một tổ có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người. Tính xác suất sao cho hai người được chọn có ít nhất một nữ.

(A) $\dfrac{7}{15}$. **B** $\dfrac{8}{15}$. (C) $\dfrac{1}{5}$. (D) $\dfrac{1}{15}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = \mathrm{C}_{20}^2$.
Gọi A là biến cố "Hai người được chọn có it nhất một nữ" thì $\overline{A}$ là biến cố hai người được chọn không có nữ nào, tức là ta chọn 2 người trong số 7 nam.
Khi đó $n\left(\overline{A}\right) = \mathrm{C}_7^2$ suy ra $n(A) = \mathrm{C}_{10}^2 - \mathrm{C}_7^2$.
Xác suất để hai người được chọn có it nhất một nữ là $P = \dfrac{\mathrm{C}_{10}^2 - \mathrm{C}_7^2}{\mathrm{C}_{10}^2} = \dfrac{8}{15}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Cho hai số thực a, b với $a > 0, a \neq 1, b \neq 0$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $\log_{a^3}|b| = \dfrac{1}{2}\log_a|b|$. (B) $\dfrac{1}{2}\log_a b^2 = \log_a|b|$.
(C) $\dfrac{1}{2}\log_a a^2 = 1$. **D** $\dfrac{1}{2}\log_a b^2 = \log_a b$.

Lời giải.

Dễ thấy các phương án A, B, C đều đúng theo tính chất logarit. Đáp án D sai vì chưa biết $b > 0$ hay $b < 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Đồ thị hàm số nào sau đây có 3 điểm cực trị?

(A) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$.
(B) $y = (x^2+1)^2$.
(C) $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$.
(D) $y = -x^4 - 3x^2 + 4$.

Lời giải.

- Đáp án A: $y' = 3x^2 - 6x + 9 = 0$ vô nghiệm nên hàm số không có cực trị. Loại A.
- Đáp án B: $y' = 4x(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ nên hàm số có 1 cực trị. Loại B.
- Đáp án C: Đây là hàm trùng phương có $ab = -8 < 0$ nên hàm số có 3 cực trị. Chọn C.
- Đáp án D: Đây là hàm trùng phương có $ab = 3 > 0$ nên hàm số có 1 cực trị. Loại D.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)^3(x+2)$. Hàm số $f(x)$ có mấy điểm cực trị?

(A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Do $f'(x) = x^2(x+1)^3(x+2)$ có các nghiệm $x = 0$ (bội 2) nên loại.
Ngoài ra $f'(x) = 0$ có hai nghiệm bội lẻ, đó là $x_1 = -1; x_2 = -2$.
Vậy hàm số có có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Cho $\log_a b = 2$; $\log_a c = 3$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_a(ab^3c^3)$.

(A) $P = 251$. (B) $P = 21$. (C) $P = 22$. (D) $P = 252$.

Lời giải.

Ta có $P = \log_a(ab^3c^3) = \log_a a + \log_a b^3 + \log_a c^3 = 1 + 3\log_a b + 5\log_a c = 1 + 3\cdot 2 + 5\cdot 3 = 22$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.
(B) $y = \sin x$.
(C) $y = \dfrac{x+2}{x-1}$.
(D) $y = -x^3 - 2x$.

Lời giải.

Đáp án A sai vì hàm bậc bốn trùng phương không nghịch biến trên $\mathbb{R}$ (nó luôn có cực trị).
Đáp án B sai vì hàm $y = \sin x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$.
Đáp án C sai và hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
Đáp án D đúng vì hàm số $y = -x^3 - 2x$ có nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Trong hộp có 7 quả cầu đỏ và 5 quả cầu xanh kích thước giống nhau. Lấy ngẫu nhiên 5 quả cầu từ hộp. Hỏi có bao nhiêu cách lấy được số quả cầu xanh nhiều hơn số quả cầu đỏ?

(A) 3360. (B) 3480. (C) 246. (D) 245.

Lời giải.

Lấy ngẫu nhiên 5 quả cầu mà số quả cầu xanh lớn hơn số quả cầu đỏ ta có các trường hợp sau:
TH1: 5 quả cầu xanh, 0 quả cầu đỏ thì số cách chọn là C_5^5 (cách).

TH2 : 4 quả cầu xanh, 1 quả cầu đỏ thì số cách chọn là $C_5^4 \cdot C_7^1$ (cách).
TH3 : 3 quả cầu xanh, 2 quả cầu đỏ thì số cách chọn là $C_5^3 \cdot C_7^2$ (cách).
Vậy số cách chọn thỏa mãn đề bài là $C_5^5 + C_5^4 \cdot C_7^1 + C_5^3 \cdot C_7^2 = 246$ (cách).
Chọn đáp án C □

Câu 23. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \dfrac{1}{x}$ trên $\left[\dfrac{1}{3}; 3\right]$. Tính $3M + 2m$.

A $3M + 2m = \dfrac{16}{3}$. B $3M + 2m = 15$. **C** $3M + 2m = 14$. D $3M + 2m = 12$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in \left[\dfrac{1}{3}; 3\right] \\ x = -1 \notin \left[\dfrac{1}{3}; 3\right] \end{array}\right.$.

Lại có $y\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{10}{3}; y(1) = 2, y(3) = \dfrac{10}{3}$.

Vậy $M = \dfrac{10}{3}$, $m = 2$ suy ra $3M + 2m = 3 \cdot \dfrac{10}{3} + 2 \cdot 2 = 14$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Tìm nghiệm của phương trình $\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{2x+1} = 2 - \sqrt{3}$.

A $x = \dfrac{1}{4}$. **B** $x = -\dfrac{3}{4}$. C $x = -1$. D $x = -\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{2x+1} = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow 2x + 1 = \log_{7+4\sqrt{3}}\left(2 - \sqrt{3}\right) \Leftrightarrow 2x + 1 = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $7^{x^2-5x+9} = 343$. Tính $x_1 + x_2$.

A $x_1 + x_2 = 4$. B $x_1 + x_2 = 6$. **C** $x_1 + x_2 = 5$. D $x_1 + x_2 = 3$.

Lời giải.

Ta có $7^{x^2-5x+9} = 343 \Leftrightarrow 7^{x^2-5x+9} = 7^3 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 9 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Do đó tổng hai nghiệm $x_1 + x_2 = 2 + 3 = 5$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Thiết diện qua trục của hình nón tròn xoay là một tam giác đều cạnh $2a$. Tính thể tích V của khối nón đó.

A $V = \pi a^3\sqrt{3}$. **B** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. C $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$. D $V = \dfrac{3\pi a^3}{8}$.

Lời giải.

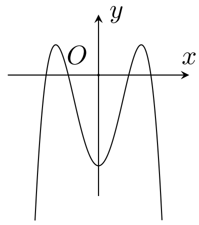
Cắt hình nón bằng mặt phẳng qua trục ta dược thiết diện là tam giác đều suy ra $2r = 2a \Rightarrow r = a$ và đường cao $h = a\sqrt{3}$.

Thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3} \cdot \pi a^2 \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 27.

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A $a < 0,\ b < 0,\ c < 0$. **B** $a > 0,\ b < 0,\ c > 0$.

C $a < 0,\ b > 0,\ c < 0$. **D** $a > 0,\ b < 0,\ c < 0$.

Lời giải.

Quan sát dáng đồ thị hàm số ta thấy $a < 0$, loại phương án B và D.

Đồ thị cắt trục Oy tại $(0; c)$ nên $c < 0$.

Hàm số có ba điểm cực trị suy ra $ab < 0$ nên $b > 0$ (do $a < 0$) (loại phương án B).

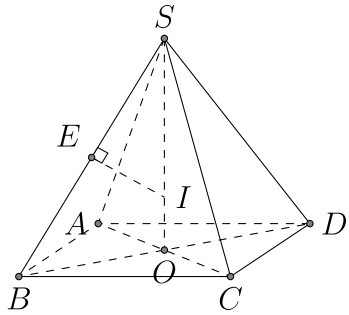
Vậy $a < 0, b > 0, c < 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng $2a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B** $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **C** $R = a\sqrt{2}$. **D** $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và E là trung điểm SB.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Trong mặt phẳng (SBO) kẻ đường trung trực của SB cắt SO tại I, khi đó

$$IA = IB = IC = ID = IS$$

nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ và bán kính mặt cầu là $R = IS$.

Ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a \Rightarrow BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow BO = \dfrac{BD}{2} = a\sqrt{2}$.

Ta có $SA = SB = SC = SD = 2a$ (vì $S.ABCD$ là hình chóp đều) nên $SE = EB = \dfrac{2a}{2} = a$.

Xét tam giác SBO vuông tại O, ta có $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}$.

Ta có ΔSEI đồng dạng với tam giác $SOB(g-g) \Rightarrow \dfrac{SI}{SB} = \dfrac{SE}{SO} \Leftrightarrow IS = \dfrac{SB.SE}{SO} = \dfrac{2a.a}{a\sqrt{2}} = \sqrt{2}a$.

Vậy bán kính $R = a\sqrt{2}$.

Chú ý:

Công thức tính nhanh bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đều có cạnh bên là $SA = l$ và chiều cao $S0 = h$ là $R = \dfrac{SA^2}{2SO} = \dfrac{l^2}{2h}$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Cho lăng trụ tam giác đều, có độ dài tất cả các cạnh bằng 2. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó.

A $V = 2\sqrt{3}$. **B** $V = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C** $V = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **D** $V = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Diện tích đáy tam giác đều cạnh 2 là $S = \dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$.

Thể tích của khối lăng trụ là $V = S \cdot h = \sqrt{3} \cdot 2 = 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ biết nó song song với đường thẳng $y = 9x + 6$.

(A) $y = 9x + 26; y = 9x - 6$. **(B)** $y = 9x - 26$.
(C) $y = 9x - 26; y = 9x + 6$. **(D)** $y = 9x + 26$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$. Gọi $M\left(x_0; y_0\right)$ là tọa độ tiếp điểm.

Khi đó hệ số góc của d là $k = f'\left(x_0\right) = 3x_0^2 - 6x_0$

Mà d song song với $y = 9x + 6 \Rightarrow f'\left(x_0\right) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -3 \\ x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 1. \end{array}\right.$

- Với $M(-1; -3) \Rightarrow d\colon y = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + y_0 = 9(x + 1) - 3 = 9x + 6$ (loại vì trùng với đường thẳng $y = 9x + 6$).
- Với $M(3; 1) \Rightarrow d\colon y = f'(x_0)\left(x - x_0\right) + y_0 = 9(x - 3) + 1 = 9x - 26$ (thỏa mãn).

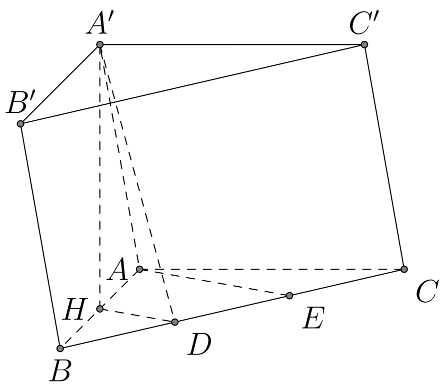
Vậy phương trình tiếp tuyến là $y = 9x - 26$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$. Biết góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng (ABC) bằng 60° và hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm H của AB. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó.

(A) $V = \dfrac{a^3}{6}$. **(B)** $V = \dfrac{a^3}{2}$. **(C)** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **(D)** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H, A lên BC.

Ta có $\begin{cases} HD \perp BC \\ A'H \perp BC \end{cases} \Rightarrow (A'HD) \perp BC \Rightarrow A'D \perp BC$.

Khi đó $(A'BC)$ và (ABC) chính là góc giữa hai đường thẳng $A'D$ và HD hay $\widehat{A'DH} = 60^\circ$.

Xét tam giác vuông ABC, $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{3}$.

Nên $AE = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ suy ra $HD = \dfrac{1}{2}AE = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Từ đó $A'H = HD \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{6}}{6} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

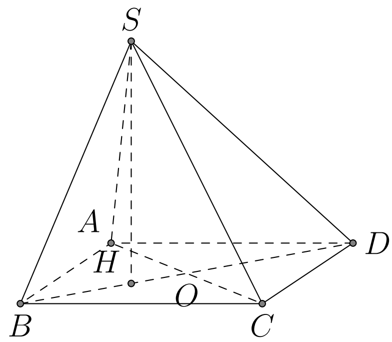
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'H = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC \cdot A'H = \dfrac{1}{2}a \cdot a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $ABC = 60^\circ$, $SA = SB = SC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$. **(B)** $V = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{2}$. **(C)** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **(D)** $V = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.



Vì $ABCD$ là hình thoi nên $AB = BC$ mà $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên ABC là tam giác đều cạnh a.
Gọi H là trọng tâm tam giác ABC, O là giao điểm hai đường chéo hình thoi.
Vì $SA = SB = SC$ nên S thuộc trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC hay chân đường cao hạ từ S xuống (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp H của tam giác ABC suy ra $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
Vì ABC đều cạnh a tâm H nên $AC = a$, $BO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $BH = \dfrac{2}{3}BO = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Xét tam giác BHD vuông tại H có $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.
Diện tích hình thoi $ABCD$ là $\dfrac{1}{2}AC \cdot BD = \dfrac{1}{2}AC \cdot 2BO = \dfrac{1}{2}a \cdot 2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
Thể tích $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{2}SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$.
Chọn đáp án A □

Câu 33. Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B và $AB \leq 4$?

A 1. **B** 6. **C** 2. **D** 7.

Lời giải.
Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{2x-1}{x+1} = x + m \Leftrightarrow 2x - 1 = (x+1)(x+m) \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + m + 1 = 0 \ (1).$$

(Ta có $x = -1$ không là nghiệm phương trình (1).)
Đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

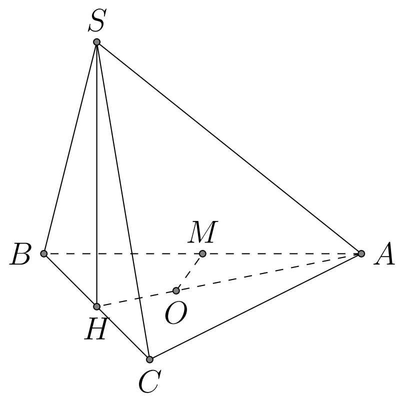
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0 \\ \Delta = (m-1)^2 - 4(m+1) = m^2 - 6m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 + 2\sqrt{3} \\ m < 3 - 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 + 2\sqrt{3} \\ m < 3 - 2\sqrt{3} \end{array}\right. (*).$$

Gọi tọa độ giao điểm $A(x_1; x_1 + m), B(x_2; x_2 + m)$ với x_1, x_2 là nghiệm của (1).
Khi đó $AB = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 6m - 3} \leq 4 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 19 \leq 0 \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{7} \leq m \leq 3 + 2\sqrt{7}$.
Kết hợp với điều kiện (∗), ta được $\left[\begin{array}{l} 3 + 2\sqrt{3} < m < 3 + 2\sqrt{7} \\ 3 - 2\sqrt{7} \leq m \leq 3 - 2\sqrt{3}. \end{array}\right.$
Mà m nguyên dương nên $m = 7 \vee m = 8$.
Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, biết $AB = a$, $SA = SB = a$ và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính SC biết bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng a.

Ⓐ $SC = a\sqrt{3}$. **B** $SC = a\sqrt{2}$. Ⓒ $SC = a$. Ⓓ $SC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm BC suy ra $AH \perp BC$ (do $\triangle ABC$ cân tại A).

Lại có $\begin{cases} (SBC) \perp (ABC) \\ (SBC) \cap (ABC) = BC \end{cases}$ nên $AH \perp (SBC)$.

Từ đề bài ta có $AS = AB = AC$ nên A thuộc trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC, lại có $AH \perp (SBC)$ tại H nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC.

Suy ra $HB = HS = HC$ nên tam giác SBC vuông tại S.

Gọi M là trung điểm của AB, kẻ đường trung trực của AB cắt AH tại O. Khi đó, ta có $OA = OB = OC = OS$ hay O là tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC \Rightarrow OA = R = a$.

Ta có ΔOMA đồng dạng với $\Delta BHA\,(g-g) \Rightarrow \dfrac{OA}{AB} = \dfrac{MA}{HA} \Leftrightarrow \dfrac{a}{a} = \dfrac{\frac{a}{2}}{HA} \Rightarrow HA = \dfrac{a}{2}$.

Xét tam giác vuông AHC có $HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = 2HC = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SBC vuông tại S có $SC = \sqrt{BC^2 - SB^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x+4}{x^2+2x+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

Ⓐ 1. **B** 2. Ⓒ 3. Ⓓ 0.

Lời giải.

TXĐ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có $y = \dfrac{4x+4}{x^2+2x+1} = \dfrac{4\,(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{4}{x+1}$.

Do đó đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = 0$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Cho hàm số $f(x) = x^3 - (2m-1)\,x^2 + (2-m)\,x + 2$. Tìm tất cá các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = f\,(|x|)$ có 5 cực trị.

Ⓐ $-2 < m < \dfrac{5}{4}$. Ⓑ $-\dfrac{5}{4} < m < 2$. Ⓒ $\dfrac{5}{4} \le m \le 2$. **D** $\dfrac{5}{4} < m < 2$.

Lời giải.

Nhận thấy rằng nếu $x_0 \ge 0$ là điểm cực trị của hàm số $y = f\,(|x|)$ cũng là điểm cực trị của hàm số $y = f\,(|x|)$ (1)

Lại thấy vì đồ thị hàm số $y = f\,(|x|)$ nhận trục Oy làm trục đối xứng mà $f\,(x)$ là hàm đa thứ bậc ba nên $x = 0$ luôn là một điểm cực trị của hàm số $y = f\,(|x|)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra để hàm số $y = f\,(|x|)$ có 5 điểm cực trị thì hàm số $f\,(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$ có hai điểm cực trị dương phân biệt.

Hay phương trình $f'(x) = 3x^2 - 2(2m-1)x + 2 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt dương.

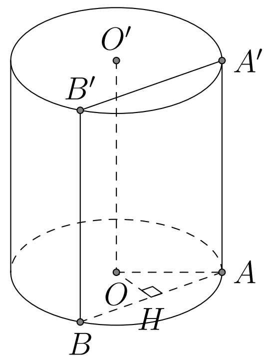
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 5 > 0 \\ \dfrac{2m-1}{3} > 0 \\ 2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \vee m > \dfrac{5}{4} \\ \dfrac{1}{2} < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{5}{4} < m < 2.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng $a\sqrt{2}$. Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng, song song với trụ của hình trụ và cách trục của hình trụ một khoảng bằng $\dfrac{a}{2}$ ta được thiết diện là một hình vuông. Tính thể tích V của khối trụ đã cho.

(A) $V = \pi a^3\sqrt{3}$. (B) $V = \dfrac{2\pi a^3\sqrt{7}}{3}$. (C) $V = 2\pi a^3\sqrt{7}$. (D) $V = \pi a^3$.

Lời giải.



Gọi O, O' lần lượt là tâm các đáy và thiết diện là hình vuông $ABCD$.

Gọi H là trung điểm AB, ta có $\begin{cases} OH \perp AB \\ OH \perp AA' \end{cases}$ suy ra $OH \perp (ABB'A')$.

Do đó $\mathrm{d}\left(OO', (ABCD)\right) = OH = \dfrac{a}{2}$.

Tam giác OAH vuông tại H nên $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{2a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Suy ra $AB = AA' = OO' = 2AH = a\sqrt{7}$ (do $ABCD$ là hình vuông).

Vậy thể tích $V = \pi R^2 h = \pi \cdot \left(a\sqrt{2}\right)^2 \cdot a\sqrt{7} = 2\pi a^3\sqrt{7}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Cho tập hợp X gồm các số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau có dạng $\overline{abcdef}$. Từ tập X lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để s ố lấy ra là số lẻ và thõa mãn $a < b < c < d < e < f$.

(A) $\dfrac{29}{68040}$. (B) $\dfrac{1}{2430}$. (C) $\dfrac{31}{68040}$. (D) $\dfrac{33}{68040}$.

Lời giải.

- Số có 6 chữ số khác nhau là $\overline{abcdef}$ với $a, b, c, d, e, f \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

  Nên a có 9 cách chọn, b có 9 cách chọn, c có 8 cách chọn, d có 7 cách chọn, e có 6 cách chọn và f có 5 cách chọn.

  Suy ra số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 136080$.

- Gọi A là biến cố $\overline{abcdef}$ là số lẻ và $a < b < c < d < e < f$.

  Suy ra không thể có chữ số 0 trong số $\overline{abcdef}$ và $f \in \{7; 9\}$.

  ⊞ Nếu $f = 7 \Rightarrow a, b, c, d, e \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ mà với mỗi bộ 5 số được lấy ra ta chỉ có duy nhất 1 cách sắp xếp theo thứ tự tăng dần nên có thể lập được $\mathrm{C}_6^5 = 6$ số thỏa mãn.

  ⊞ Nếu $f = 9 \Rightarrow a, b, c, d, e \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ mà với mỗi bộ 5 số được lấy ra ta chỉ có duy nhất 1 cách sắp xếp theo thứ tự tăng dần nên có thể lập được $\mathrm{C}_8^5 = 56$ số thỏa mãn.

  Suy ra $n(A) = 6 + 56 = 62$.

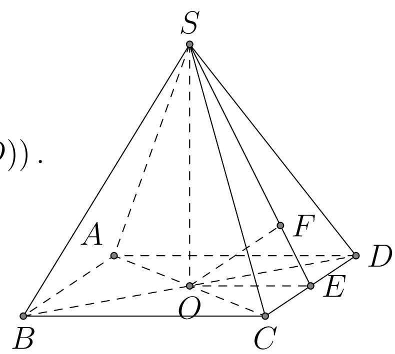
- Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{62}{136080} = \dfrac{31}{68040}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a. SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách d giữa SC và AB.

(A) $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{5}$. (B) $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. (C) $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. (D) $d = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



Gọi E là trung điểm của CD và F là hình chiếu của O lên SE.

Ta có $AB \parallel CD \subset (SCD)$ suy ra $AB \parallel (SCD)$ nên

$$d = \mathrm{d}\left(AB, SC\right) = \mathrm{d}\left(AB, (SCD)\right) = \mathrm{d}\left(A, (SCD)\right) = 2 \cdot \mathrm{d}\left(O, (SCD)\right).$$

Do $\begin{cases} CD \perp OE \\ CD \perp SO \end{cases}$ suy ra $CD \perp (SOE) \supset OF$ nên $OF \perp SE$.

Mà $OF \perp SE$ suy ra $OF \perp (SCD)$, do đó $\mathrm{d}\left(O, (SCD)\right) = OF$.

Xét tam giác SOE vuông tại O, ta có $OF = \dfrac{SO \cdot OE}{\sqrt{SO^2 + OE^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Vậy $d = \mathrm{d}\left(AB, SC\right) = 2 \cdot \mathrm{d}\left(O, (SCD)\right) = 2 \cdot OF = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị khác nhau của tham số m để hàm số $y = \dfrac{5^{-x} + 2}{5^{-x} - m}$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

(A) $m < -2$. (B) $m \leq -2$. (C) $-2 < m \leq 1$. (D) $-2 < m < 1$.

Lời giải.

ĐK: $5^{-x} \neq m$. Đặt $t = 5^{-x}$ là hàm nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ (1), suy ra $t \in (1; +\infty)$.

Xét hàm số $y = f(t) = \dfrac{t+2}{t-m}$, $f'(t) = \dfrac{-m-2}{(t-m)^2}$.

Do (1), để hàm số $y = \dfrac{5^{-x} + 2}{5^{-x} - m}$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$ thì hàm số $f(t) = \dfrac{t+2}{t-m}$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow f'(t) < 0, \forall t \in (1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m - 2 < 0 \\ m \notin (1, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq 1.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m+3)\,9^x + (2m-1)\,3^x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

(A) $-3 < m < -1$. (B) $-3 < m < -\dfrac{3}{4}$. (C) $-1 < m < -\dfrac{3}{4}$. (D) $m \geq -3$.

Lời giải.

Đặt $t = 3^x > 0$ ta có phương trình $(m+3)\,t^2 + (2m-1)t + m + 1 = 0$ (1).

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu (giả sử $x_1 < 0 < x_2$) $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm dương phân biệt thỏa $0 < t_1 = 3^{x_1} < 1 < 3^{x_2} = t_2$, nghĩa là $0 < t_1 < 1 < t_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+3 \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ (t_1-1)(t_2-1) < 0 \\ t_1t_2 > 0 \\ t_1+t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -3 \\ -20m-11 > 0 \\ t_1t_2-(t_1+t_2)+1 < 0 \\ t_1t_2 > 0 \\ t_1+t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -3 \\ m < -\dfrac{11}{20} \\ \dfrac{m+1}{m+3} + \dfrac{2m-1}{m+3} + 1 < 0 \\ \dfrac{m+1}{m+3} > 0 \\ -\dfrac{2m-1}{m+3} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -3 \\ m < -\dfrac{11}{20} \\ \dfrac{4m+3}{m+3} < 0 \\ \dfrac{m+1}{m+3} > 0 \\ -\dfrac{2m-1}{m+3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -3 \\ m < -\dfrac{11}{20} \\ -3 < m < -\dfrac{3}{4} \\ m < -3 \vee m > -1 \\ -3 < m < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < -\dfrac{3}{4}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + 4x - 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(A) $0 < m < 1$. **B** $-1 \leq m \leq 1$. (C) $0 \leq m \leq 1$. (D) ˘$1 < m < 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 4mx + 4$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' = (-2m)^2 - 4 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leqslant m \leqslant 1.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 + 2 - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

(A) $0 < m < 1$. (B) $1 < m < 2$. (C) $-2 < m < 0$. **D** $-2 < m < 2$.

Lời giải.

Ta có $x^3 - 3x^2 + 2 - m = 0 \Leftrightarrow m = x^3 - 3x^2 + 2$ (1).

Xét hàm $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Đặt $a=\log_7 11, b=\log_2 7$. Hãy biểu diễn $\log_{\sqrt[3]{7}}\dfrac{121}{8}$ theo a và b.

(A) $\log_{\sqrt[3]{7}}\dfrac{121}{8}=6a+\dfrac{9}{b}$.
(B) $\log_{\sqrt[3]{7}}\dfrac{121}{8}=6a-\dfrac{9}{b}$.
(C) $\log_{\sqrt[3]{7}}\dfrac{121}{8}=6a-9b$.
(D) $\log_{\sqrt[3]{7}}\dfrac{121}{8}=\dfrac{2}{3}a-\dfrac{9}{b}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\sqrt[3]{7}}\dfrac{121}{8}=3\left(\log_7 121-\log_7 8\right)=6\log_7 11-9\log_7 2=6\cdot\log_7 11-9\cdot\dfrac{1}{\log_2 7}=6a-\dfrac{9}{b}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_2^2 x+\log_2 x-m=0$ có nghiệm $x\in(0;1)$.

(A) $m\geq 0$.
(B) $m\geq -\dfrac{1}{4}$.
(C) $m\geq -1$.
(D) $m\leq -\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Đặt $t=\log_2 x$, vì $0<x<1$ nên $t<0$ hay $t\in(-\infty;0)$.

Phương trình trở thành $t^2+t-m=0\Leftrightarrow m=t^2+t$.

Xét hàm $f(t)=t^2+t$ trên $(-\infty;0)$.

Đồ thị hàm số $y=f(t)$ là parabol có hoành độ đỉnh $t=-\dfrac{1}{2}\in(-\infty;0)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;1)$ khi và chỉ khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại ít nhất 1 điểm thuộc $(-\infty;0)\Leftrightarrow m\geq -\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như bên dưới

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=3f(x+3)-x^3+12x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-1;0)$.
(B) $(0;2)$.
(C) $(-\infty;-1)$.
(D) $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $y'=3.f'\left(x+3\right)-3x^2+12$.

Đặt $t=x+3\Rightarrow x=t-3$ ta có $y'=3f'(t)-3\left(t-3\right)^2+12=3f'(t)-3t^2+18t-15$.

Để hàm số nghịch biến thì $y'<0\Leftrightarrow 3.f'(t)-3t^2+18t-15<0\Leftrightarrow f'(t)<t^2-6t+5$.

Ta chọn t sao cho $\begin{cases}f'(t)<0\\ t^2-6t+5>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<t<1\vee t>5\\ t<1\vee t>5\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<t<1\\ t>5.\end{array}\right.$

Mà $t = x + 3$ nên $\left[\begin{array}{l} -1 < t < 1 \\ t > 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x + 3 < 1 \\ x + 3 > 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 < x < -2 \\ x > 2. \end{array}\right.$

Vậy hàm số $y = 3f(x+3) - x^3 + 12x$ nghịch biến trên $(-4; 2)$ và $(2; +\infty)$.

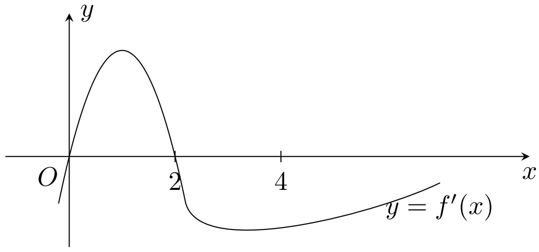
Chọn đáp án D □

Câu 47.

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ dưới đây và

$$f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(x)$ trên $[0; 4]$.



A $m = f(4)$. **B** $m = f(0)$. **C** $m = f(2)$. **D** $m = f(1)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên

x	0		1		2		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$f(3)$	$\searrow$	$f(4)$

Từ bảng biến thiên, ta thấy GTNN của hàm số đạt được bằng $f(0)$ và $f(4)$.

Ta sẽ so sánh $f(0)$ và $f(4)$ như sau

$$\begin{aligned} & f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3) \\ \Leftrightarrow\ & f(0) - f(4) = 2f(2) - f(1) - f(3) \\ \Leftrightarrow\ & f(0) - f(4) = [f(2) - f(1)] + [f(2) - f(3)] > 0 \text{ (do } f(2) > f(1), f(2) > f(3)). \end{aligned}$$

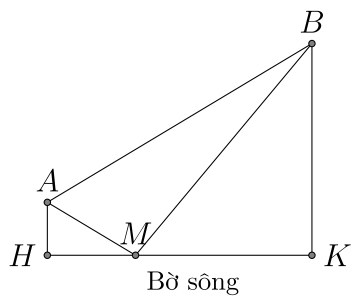
Do đó $f(0) - f(4) > 0 \Leftrightarrow f(0) > f(4)$.

Vậy $m = f(4)$.

Chọn đáp án A □

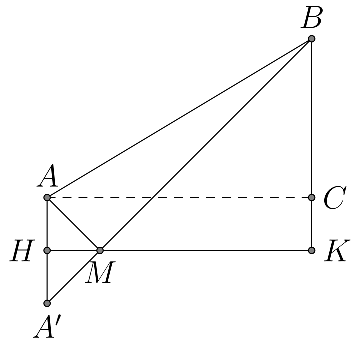
Câu 48.

Cho hai vị trí A, B cách nhau 615 m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ song lần lượt là 118 m và 487 m. Một người đi từ A đến bờ sông lấy nước mang về B. Tính đoạn đường ngắn nhất mà người ấy có thể đi.



A 779,8 m. **B** 671,4 m. **C** 741,2 m. **D** 596,5 m.

Lời giải.



Gọi H, K là hình chiếu của A, B trên bờ sông, lấy A' đối xứng với A qua bờ HK. Nối $A'B$ cắt bờ HK tại M. Suy ra $AM = A'M$.
Ta có $AM + MB = A'M + MB \geq A'B$ nên quãng đường ngắn nhất người đó đi là $AM + MB = A'B$.
Kẻ $AC \perp BK$ tại $C \Rightarrow AHKC$ là hình chữ nhật có $CK = AH = 118$ m.
Suy ra $CB = BK - CK = 487 - 118 = 369$ m.
Tam giác CAB vuông tại $C \Rightarrow AC = HK = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 492$ m.
Ta có $HA' \mathbin{/\!/} BK \Rightarrow \dfrac{HM}{MK} = \dfrac{A'M}{MB} = \dfrac{A'H}{BK} = \dfrac{118}{487}$
$\Rightarrow \dfrac{HM}{MK} = \dfrac{118}{487} \Rightarrow \dfrac{HM}{HM+MK} = \dfrac{118}{118+487} = \dfrac{118}{605} \Leftrightarrow \dfrac{HM}{HK} = \dfrac{118}{605}$

$\Leftrightarrow \dfrac{HM}{492} = \dfrac{118}{605} \Rightarrow HM = \dfrac{58056}{605}$.

Xét tam giác HMA' có $MA' = \sqrt{HM^2 + HA'^2} = \sqrt{\left(\dfrac{58056}{605}\right)^2 + 118^2} \approx 152,093$.

Tù đó $\dfrac{A'M}{MB} = \dfrac{118}{487} \Rightarrow \dfrac{A'M}{A'M+MB} = \dfrac{118}{118+487} \Leftrightarrow \dfrac{A'M}{A'B} = \dfrac{118}{05} \Leftrightarrow A'B = \dfrac{A'M.605}{118} \approx 779{,}8$ m.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{5}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$.
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{3x+2y+1}{x+y+6}$.

A $\max P = 1$.   **B** $\max P = 4$.   **C** $\max P = 2$.   **D** $\max P = 3$.

Lời giải.

Điều kiện $\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} > 0$. Theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned}
& \log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy \\
\Leftrightarrow\ & \log_{\sqrt{3}}(x+y) - \log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2+xy+2\right) = x^2+y^2+xy-3(x+y) \\
\Leftrightarrow\ & \log_{\sqrt{3}}(x+y) + 3(x+y) = \log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2+xy+2\right) + x^2+y^2+xy \\
\Leftrightarrow\ & \log_{\sqrt{3}}(x+y) + 3(x+y) + 2 = \log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2+xy+2\right) + \left(x^2+y^2+xy+2\right) \\
\Leftrightarrow\ & \log_{\sqrt{3}}[3(x+y)] + 3(x+y) = \log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2+xy+2\right) + x^2+y^2+xy+2.
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_{\sqrt{3}} t + t$ với $t > 0$, ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln\sqrt{3}} + 1 > 0, \forall t > 0$.
Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến và liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$. Do đó

$$\begin{aligned}
& f(3(x+y)) = f\left(x^2+y^2+xy+2\right) \\
\Leftrightarrow\ & 3(x+y) = x^2+y^2+xy+2 (1) \\
\Leftrightarrow\ & xy = (x+y)^2 - 3(x+y) + 2.
\end{aligned}$$

Ta có $x = x + xy - xy = x(y+1) - xy \leq \left(\dfrac{x+y+1}{2}\right)^2 - xy$.
Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x = y + 1$.

Do đó từ (1), suy ra
$$x \leq \frac{(x+y+1)^2}{4} - (x+y)^2 + 3(x+y) - 2.$$
Đặt $t = x+y$, $t > 0$. Suy ra
$$P = \frac{2(x+y)+1+x}{x+y+6} \leq \frac{2t+1+\dfrac{(t+1)^2}{4} - t^2 + 3t - 2}{t+6} = \frac{-3t^2+22t-3}{4(t+6)} = f(t).$$
Ta có $f'(t) = \dfrac{-3t^2-36t+135}{4(t+6)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$. Suy ra bảng biến thiên

t	0		3		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\dfrac{1}{8}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\max P = \max\limits_{(0;+\infty)} f(t) = f(3) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+1 \\ x+y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$

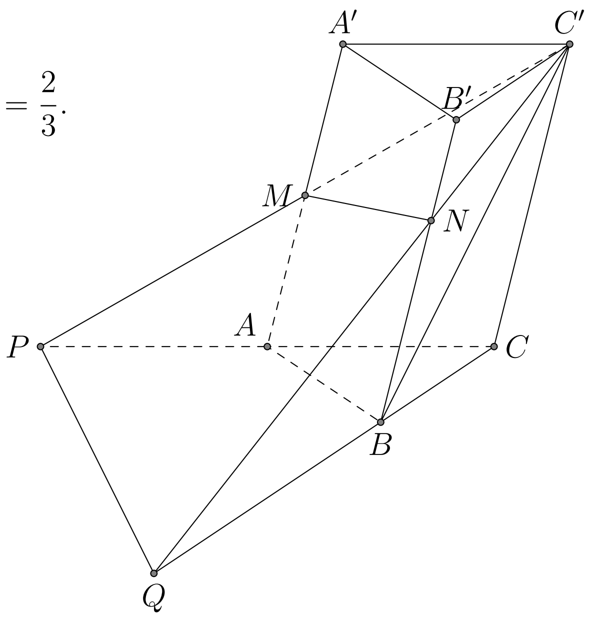
Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 2. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên cạnh AA', BB' sao cho M là trung điểm của AA' và $BN = \dfrac{1}{2}NB'$. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P, đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q. Tính thể tích V của khối đa diện $A'MPB'NQ$.

A $V = \dfrac{13}{18}$. **B** $V = \dfrac{23}{9}$. **C** $V = \dfrac{5}{9}$. **D** $V = \dfrac{7}{18}$.

Lời giải.

Ta có



$$V_{C.A'B'C'} = \frac{1}{3}d\left(C,(A'B'C')\right).S_{A'B'C'} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3}.$$

Suy ra $V_{C.ABB'A'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{C.A'B'C'} = 2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$.

Ta thấy $ABNM$ là hình thang nên

$$\begin{aligned} S_{ABNM} &= \frac{(AM+BN)\,d(BN;AM)}{2} \\ &= \frac{\left(\dfrac{AA'}{2}+\dfrac{BB'}{3}\right).d(BB',AA')}{2} \\ &= \frac{5}{12}AA'.d(BB',AA'). \end{aligned}$$

Mà

$$S_{ABB'A'} = AA' \cdot d(AA',BB') \Rightarrow S_{ABNM} = \frac{5}{12} \cdot S_{ABB'A'}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
V_{C.ABNM} &= \frac{1}{3}d\left(C,(ABNM)\right)\cdot S_{ABCNM}\\
&= \frac{1}{3}d\left(C,(ABB'A')\right)\cdot \frac{5}{12}\cdot S_{ABB'A'}\\
&= \frac{5}{12}\cdot\frac{1}{3}d\left(C,(ABB'A')\right)\cdot S_{ABB'A'}\\
&= \frac{5}{12}\cdot V_{CABB'A'}\\
&= \frac{5}{9}.
\end{aligned}$$

Suy ra $V_{CC'B'NMA'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{C.ABNM} = 2 - \frac{5}{9} = \frac{13}{9}$.

Ta có $A'M \,/\!/\, CC' \Rightarrow \frac{PA'}{PC'} = \frac{A'M}{CC'} = \frac{1}{2} \Rightarrow PA' = \frac{1}{2}PC' = A'C' \Rightarrow PC' = 2A'C'$.

Và $B'N \,/\!/\, CC' \Rightarrow \frac{B'N}{CC'} = \frac{QB'}{QC'} = \frac{2}{3} \Rightarrow QC' = 3B'C'$.

Mà $S_{A'B'C'} = \frac{1}{2}C'A'\cdot C'B'\cdot \sin C'$ suy ra

$\Leftrightarrow S_{C'PQ} = \frac{1}{2}C'P\cdot C'Q\cdot\sin C' = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot A'C'\cdot 3B'C'\sin C = 6\cdot\left(\frac{1}{2}A'C'\cdot B'C'\cdot\sin C\right) = 6S_{A'B'C'}$.

Ta có $V_{C.C'PQ} = \frac{1}{3}d\left(C;(A'B'C')\right)\cdot S_{C'PQ} = \frac{1}{3}d\left(C;(A'B'C')\right)\cdot 6S_{C'A'B'} = 6\cdot V_{C.A'B'C'} = 6\cdot\frac{2}{3} = 4$.

Từ đó $V_{A'MPB'NQ} = V_{C.C'PQ} - V_{CC'B'NMA'} = 4 - \frac{13}{9} = \frac{23}{9}$.

Chọn đáp án B □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. B	3. D	4. D	5. C	6. C	7. B	8. D	9. C	10. B
11. B	12. D	13. B	14. A	15. C	16. B	17. D	18. C	19. B	20. C
21. D	22. C	23. C	24. B	25. C	26. B	27. C	28. C	29. A	30. B
31. B	32. A	33. A	34. B	35. B	36. D	37. C	38. C	39. D	40. C
41. C	42. B	43. D	44. B	45. B	46. D	47. A	48. A	49. A	50. B

44 ĐỀ THI THỬ QUỐC GIA, SỞ GIÁO DỤC HẢI PHÒNG, LẦN 2 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (Oxy) ?

A $M(2;2;0)$. **B** $Q(3;-1;3)$. **C** $N(3;-1;2)$. **D** $P(0;0;2)$.

Lời giải.

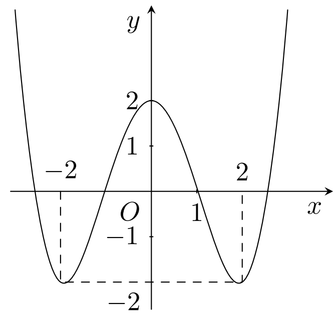
Mặt phẳng (Oxy) có phương trình $z=0$, suy ra $M(2;2;0)\in(Oxy)$.

Chọn đáp án A □

Câu 2.

Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $3f(x)-8=0$ bằng

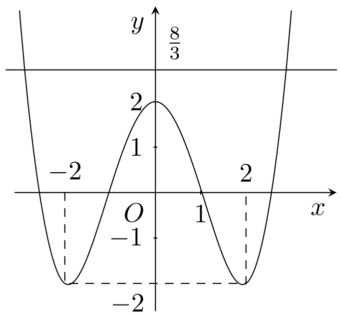
A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 4.



Lời giải.

Ta có $3f(x)-8=0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{8}{3}$.

Dựa vào đồ thị, đường thẳng $y=\dfrac{8}{3}$ cắt đồ thị $y=f(x)$ tại hai điểm phân biệt. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.



Chọn đáp án B □

Câu 3. Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh bằng 3 và bán kính đáy bằng 2 là

A 4π. **B** 6π. **C** 12π. **D** 5π.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính diện tích xung quanh của hình nón

$$S_{\text{xq}}=\pi rl=\pi\cdot 2\cdot 3=6\pi.$$

Chọn đáp án B □

Câu 4. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ và trục Ox bằng

A 2. **B** 1. **C** 3. **D** 4.

Lời giải.

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ và trục Ox $(y=0)$ bằng số nghiệm của phương trình

$$x^3-3x+1=0.$$

Phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x + z - 2 = 0$. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là

A $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 \\ z = -1 + t \end{cases}$.
B $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + t \\ z = -1 \end{cases}$.
C $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$.
D $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -t \end{cases}$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon x + z - 2 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (1;0;1)$.

Đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với (P) nhận $\vec{n}_{(P)}$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình là

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 \\ z = -1 + t. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x-5)(3x+2)$. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ là

A 4 .
B 3 .
C 1 .
D 2 .

Lời giải.

$f'(x) = (x-1)^2(x-5)(3x+2)$. Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu tại các điểm có hoành độ là $x = 5$ và $x = -\dfrac{2}{3}$ nên số điểm cực trị của hàm số là 2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Giá trị của $\displaystyle\int\limits_0^1 (2019x^{2018} - 1)\mathrm{d}x$ bằng

A 0.
B $2^{2017} + 1$.
C $2^{2017} - 1$.
D 1.

Lời giải.

$\displaystyle\int\limits_0^1 (2019x^{2018} - 1)\mathrm{d}x = 2019\int\limits_0^1 x^{2018}\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 \mathrm{d}x = \left(x^{2019} - x + C\right)\Big|_0^1 = 0$

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Nghiệm của phương trình $2^{7x-1} = 8^{2x-1}$ là

A $x = 2$.
B $x = -3$.
C $x = -2$.
D $x = 1$.

Lời giải.

$2^{7x-1} = 8^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{7x-1} = 2^{6x-3} \Leftrightarrow 7x - 1 = 6x - 3 \Leftrightarrow x = -2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Hình cầu có đường kính bằng 2 thì thể tích bằng

A $\dfrac{32}{3}\pi$.
B $\dfrac{4}{3}\pi$.
C 4π .
D 16π.

Lời giải.

Thể tích hình cầu bán kính R được tính theo công thức $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, với $R = 1$ ta có $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \dfrac{4}{3}\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Số nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - 4x) = 2$ bằng

A 2. B 4. C 3. D 1.

Lời giải.

Để logarit có nghĩa thì $x^2 - 4x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ hoặc $x > 4$.

Khi đó $\log_2(x^2-4x) = 2 \Leftrightarrow \log_2(x^2-4x) = \log_2 4 \Leftrightarrow x^2-4x-4 = 0 \Leftrightarrow x = 2+2\sqrt{2} > 4$ hoặc $x = 2-2\sqrt{2} < 0$, thỏa mãn điều kiện. Phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Hàm số $y = \dfrac{x-7}{x+4}$ đồng biến trên khoảng

A $(-5;1)$. B $(1;4)$. C $(-\infty;+\infty)$. D $(-6;0)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

Ta có $y' = \dfrac{11}{(x+4)^2} > 0,\ \forall x \in \mathscr{D}$.

Do đó hàm số $y = \dfrac{x-7}{x+4}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-4)$ và $(-4;\infty)$.

Vậy hàm số $y = \dfrac{x-7}{x+4}$ đồng biến trên khoảng $(1;4)$.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$. Tọa độ điểm A là

A $(0;1;-2)$. B $(1;-2;0)$. C $(1;0;-2)$. D $(0;-1;2)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k} \Leftrightarrow A(0;1;-2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Biết $\log_2 a = x$ và $\log_2 b = y$, biểu thức $\log_2(4a^2b^3)$ bằng

A x^3y^2. B $2x+3y+2$. C x^2+y^3+4. D $6xy$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(4a^2b^3) = \log_2 4 + \log_2 a^2 + \log_2 b^3 = 2\log_2 a + 3\log_2 b + 2 = 2x+3y+2$.

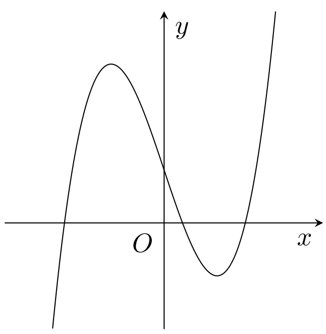
Chọn đáp án B □

Câu 14.

Hàm số nào dưới đây có đồ thị như trong hình bên ?

A $y = x^3 - 3x + 1$. B $y = -x^2 + x - 1$.

C $y = -x^3 + 3x + 1$. D $y = x^4 - x^2 + 1$.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta thấy đây là hàm bậc ba và có hệ số $a > 0$ nên đáp án là hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x} + 5}{x^2 - x - 6}$ là

(A) 3 . (B) 1 . (C) 2 . (D) 4 .

Lời giải.

Hàm số có tập xác định là $\mathscr{D} = [0; +\infty) \setminus \{3\}$.

Có $\lim\limits_{x \to 3^+} = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 3^-} = -\infty$.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng $x = 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Hình lăng trụ có chiều cao h và diện tích đáy S thì thể tích bằng

(A) $\dfrac{1}{6}Sh$. (B) $\dfrac{1}{3}Sh$. (C) $\dfrac{1}{2}Sh$. (D) Sh.

Lời giải.

Thể tích của khối lăng trụ là $V = Sh$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Cho a là số thực dương tùy ý khác 3, giá trị của $\log_{\frac{a}{3}} \left(\dfrac{a^2}{9} \right)$ bằng

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) $-\dfrac{1}{2}$. (C) 2. (D) -2.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{a}{3}} \left(\dfrac{a^2}{9} \right) = \log_{\frac{a}{3}} \left(\dfrac{a}{3} \right)^2 = 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 + mx^2 + (m^2 - 12)\,x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = -1$ thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $(-4; 0)$. (B) $(5; 9)$. (C) $(0; 3)$. (D) $(3; 6)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 + 2mx + m^2 - 12$ và $y'' = -6x + 2m$.

Điều kiện cần để hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ là

$$y'(-1) = 0 \Leftrightarrow -3 - 2m + m^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 5 \\ m = -3. \end{array}\right.$$

Với $m = -3$ thì $y' = -3x^2 - 6x - 3 = -3(x + 1)^2 \leq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số không đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Với $m = 5$ thì $y''(-1) = 16 > 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m = 5 \in (3; 6)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Gọi M, m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{4}{x} + x + 1$ trên đoạn $[1; 3]$. Tính $M - m$.

(A) 4. (B) 9. **C** 1. (D) 5.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = -\frac{4}{x^2} + 1$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{x^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \in [1;3] \\ x = -2 \notin [1;3]. \end{array}\right.$

Ta tính được $f(1) = 6,\ f(2) = 5,\ f(3) = \frac{16}{3}$.

Kết hợp với $f(x)$ liên tục trên $[1;3]$ nên $M = \max\limits_{x\in[1;3]} f(x) = 6 = f(1)$ và $m = \min\limits_{x\in[1;3]} f(x) = 5 = f(2)$.

Vậy $M - m = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Hàm số $f(x) = \cos(4x+7)$ có một nguyên hàm là

(A) $-\sin(4x+7)+x$. **B** $\frac{1}{4}\sin(4x+7) - 3$.

(C) $\sin(4x+7) - 1$. (D) $-\frac{1}{4}\sin(4x+7) + 3$.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = \cos(4x+7)$ có một nguyên hàm là $\frac{1}{4}\sin(4x+7) - 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng chứa trục Ox và đi qua điểm $A(1;1;-1)$ có phương trình là

(A) $z+1=0$. (B) $x-y=0$. (C) $x+z=0$. **D** $y+z=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng chứa trục Ox có dạng $By + Cz = 0, (B^2 + C^2 \neq 0)$.

Mặt phẳng đi qua điểm $A(1;1;-1)$ nên $B - C = 0 \Leftrightarrow B = C$. Do đó chọn $B = C = 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Số nghiệm nguyên của phương trình $4^{x+1} - 2^{x+2} + 1 = 0$ bằng

(A) 0. (B) 4. **C** 1. (D) 2.

Lời giải.

$4^{x+1} - 2^{x+2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 4\cdot 2^{2x} - 4\cdot 2^x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\cdot 2^x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Biết phương trình $8\log_2^2 \sqrt[3]{x} + 2(m-1)\log_{\frac{1}{4}} x - 2019 = 0$ có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $x_1x_2 = 4$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $m \in (1;2)$. **B** $m \in (2;5)$. (C) $m \in (0;1)$. (D) $m \in (4;7)$.

Lời giải.

Ta có $8\log_2^2 \sqrt[3]{x} + 2(m-1)\log_{\frac{1}{4}} x - 2019 = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{9}\log_2^2 x - (m-1)\log_2 x - 2019 = 0$.

Đặt $t = \log_2 x \Leftrightarrow x = 2^t$ ta được $\frac{8}{9}t^2 - (m-1)t - 2019 = 0$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1x_2 = 4$ khi và chỉ khi

$$\frac{8}{9}t^2 - (m-1)t - 2019 = 0$$

có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

$$2^{t_1+t_2} = 4 \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 2 \Leftrightarrow \frac{9(m-1)}{8} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{25}{9} \in (2;5).$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\max\limits_{[1;3]}|x^3-3x^2+m| \leq 4$?

A 5. (B) 4. (C) 6. (D) Vô số.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2+m$ trên $[1;3]$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \notin (1;3) \\ x=2 \in (1;3)\,. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	1		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$m-2$	$\searrow$	$m-4$	$\nearrow$	m

Vì $m-4<m-2<m$ nên $\max\limits_{[1;3]}|f(x)| \leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} |m| \leq 4 \\ |m-4| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq m \leq 4 \\ 0 \leq m \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4.$

$\Rightarrow m \in \{0;1;2;3;4\}.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3-x)<2$ là

(A) $(-\infty;1)$. **B** $(-1;3)$. (C) $(1;3)$. (D) $(3;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $3-x>0 \Leftrightarrow x<3$.

$$\log_2(3-x)<2 \Leftrightarrow 3-x<4 \Leftrightarrow x>-1.$$

Kết hợp điều kiện ta được tập nghiệm $S=(-1;3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Biết $\int\limits_0^1 \dfrac{x^2+2x}{(x+3)^2}\mathrm{d}x=\dfrac{a}{4}-4\ln\dfrac{4}{b}$ với a, b là các số nguyên dương. Giá trị của biểu thức a^2+b^2 bằng

(A) 25. (B) 41. (C) 20. **D** 34.

Lời giải.

$I=\int\limits_0^1 \dfrac{x^2+2x}{(x+3)^2}\mathrm{d}x$. Đặt $t=x+3 \Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{d}x$, đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=3 \\ x=1 \Rightarrow t=4. \end{cases}$

$I=\int\limits_3^4 \dfrac{t^2-4t+3}{t^2}\mathrm{d}t=\int\limits_3^4 \left(1-\dfrac{4}{t}+\dfrac{3}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\left(t-4\ln|t|-\dfrac{3}{t}\right)\Big|_3^4=\dfrac{5}{4}-4\ln\dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2=34.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1;2;-1)$ tiếp xúc với mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-1=0$ có bán kính bằng

Ⓐ $\frac{4}{3}$. Ⓑ 4. Ⓒ 2. Ⓓ 9.

Lời giải.

Gọi R là bán kính mặt cầu tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P).

Khi đó, $R=d\left(I,(P)\right)=\dfrac{|1-2\cdot 2+2\cdot(-1)-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{|-6|}{\sqrt{9}}=2$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 28. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=2$ và $F(\mathrm{e})=\ln 2$. Giá trị của biểu thức $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)+F(\mathrm{e}^2)$ bằng

Ⓐ $3\ln 2+2$. Ⓑ $\ln 2+2$. Ⓒ $\ln 2+1$. Ⓓ $2\ln 2+1$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\int\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\ln|\ln x|+C$, $x>0$, $x\neq 1$.

Nên $F(x)=\begin{cases}\ln(\ln x)+C_1 \text{ khi } x>1\\ \ln(-\ln x)+C_2 \text{ khi } 0<x<1.\end{cases}$

Mà $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=2$ nên $\ln\left(-\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)+C_2=2\Leftrightarrow C_2=2$; $F(\mathrm{e})=\ln 2$ nên $\ln(\ln \mathrm{e})+C_1=\ln 2\Leftrightarrow C_1=\ln 2$.

Suy ra $F(x)=\begin{cases}\ln(\ln x)+\ln 2 \text{ khi } x>1\\ \ln(-\ln x)+2 \text{ khi } 0<x<1.\end{cases}$

Vậy $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)+F\left(\mathrm{e}^2\right)=\ln\left(-\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)+2+\ln(\ln\mathrm{e}^2)+\ln 2=3\ln 2+2$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 29. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2019;2019]$ để hàm số $y=(m-1)x^3+3mx^2+(4m+4)x+1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

Ⓐ 4036. Ⓑ 2017. Ⓒ 2018. Ⓓ 4034.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Đạo hàm: $y'=3(m-1)x^2+6mx+4m+4$.

Để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ thì $y'\geq 0$, $\forall x\in(-\infty;+\infty)$ ($y'=0$ tại hữu hạn điểm).

- TH1: $m-1=0\Leftrightarrow m=1$ thì $y'=6x+8\geq 0\Leftrightarrow x\geq -\dfrac{4}{3}$ (không thỏa mãn).
- TH2: $\begin{cases}a=m-1>0\\ \Delta'_{y'}=(3m)^2-3(m-1)(4m+4)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>1\\ -3m^2+12\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>1\\ \left[\begin{array}{l}m\geq 2\\ m\leq -2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\geq 2.$

Vì m là số nguyên và $m\in[-2019;2019]\Rightarrow m=\{2;3;4;\ldots;2019\}$.

Vậy có 2018 số nguyên m thuộc khoảng $m\in[-2019;2019]$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-1=0$. Đường thẳng đi qua A đồng thời song song với (P) và mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

Ⓐ $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = -1 \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -t \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có: $\vec{n}_{(P)} = (1; 1; 0)$, $\vec{n}_{(Oxy)} = (0; 0; 1)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua A đồng thời song song với (P) và mặt phẳng (Oxy).

Khi đó $\begin{cases} \vec{u}_d \perp \vec{n}_{(P)} \\ \vec{u}_d \perp \vec{n}_{(Oxy)} \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_d = \left[\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Oxy)}\right] = (1; -1; 0)$.

Vậy d: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = -1. \end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 31. Tập xác định của hàm số $y = \log_2 \dfrac{3 - x}{2x}$ là

Ⓐ $\mathscr{D} = (3; +\infty)$. Ⓑ $\mathscr{D} = (0; 3]$.

Ⓒ $\mathscr{D} = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$. **D** $\mathscr{D} = (0; 3)$.

Lời giải.

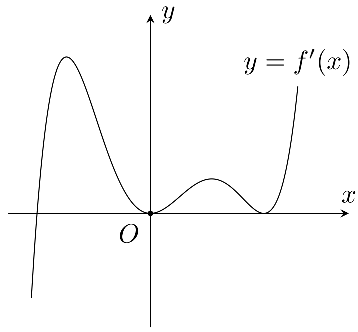
Hàm số đã cho xác định khi $\dfrac{3 - x}{2x} > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 32.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 4. **D** 1.



Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm lần lượt là x_1, x_2, x_3 (với $x_1 < x_2 < x_3$).

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu từ âm qua dương khi qua điểm x_1 này nên số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ bằng 1.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Cho hình nón có bán kính đáy $r = 4$ và diện tích xung quanh bằng 20π. Thể tích của khối nón đã cho bằng

Ⓐ 4π. **B** 16π. Ⓒ $\dfrac{16}{3}\pi$. Ⓓ $\dfrac{80}{3}\pi$.

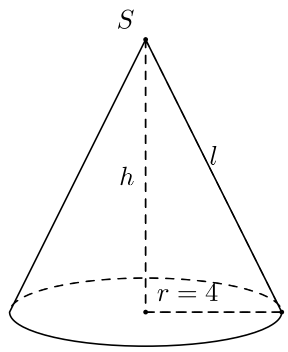
Lời giải.

Áp dụng công thức tính diện tích xung quanh của hình nón ta có

$$S_{xq} = \pi r l \Rightarrow 20\pi = \pi \cdot 4 \cdot l \Rightarrow l = 5.$$

Vì $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ nên $h = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$.

Khối nón có thể tích là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 16\pi$.



Chọn đáp án B □

Câu 34. Cho khối trụ có đường sinh bằng 5 và thể tích bằng 45π. Diện tích toàn phần của hình trụ là

A. 48π. B. 36π. C. 12π. D. 24π.

Lời giải.

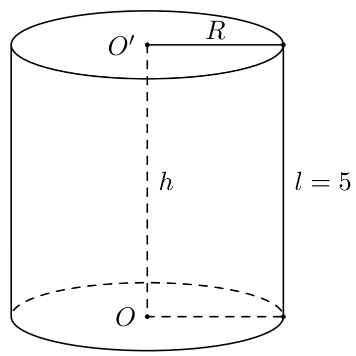
Vì hình trụ có đường cao bằng đường sinh nên $h = l = 5$.

Áp dụng công thức tính thể tích khối trụ ta có

$V = \pi R^2 h \Rightarrow 45\pi = \pi \cdot R^2 \cdot 5 \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R = 3$.

Diện tích toàn phần của hình trụ là

$S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi \cdot 3 \cdot 5 + 2\pi \cdot 3^2 = 30\pi + 18\pi = 48\pi$.



Chọn đáp án A □

Câu 35. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \cos x$; $y = 0$; $x = 0$ và $x = \dfrac{\pi}{2}$. Thể tích vật thể tròn xoay có được khi (H) quay quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{\pi^2}{4}$. B. 2π. C. $\dfrac{\pi}{4}$. D. $\dfrac{\pi^2}{2}$.

Lời giải.

Gọi V là thể tích khối tròn xoay cần tính. Ta có

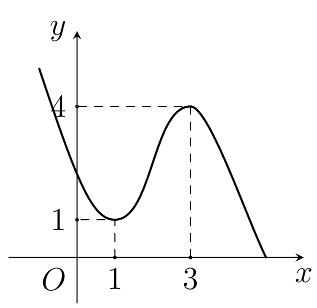
$$V = \pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} \, \mathrm{d}x = \pi \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 36.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các số thực, có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\mathrm{e}^{x^2}) = m$ có ba nghiệm phân biệt ?

A. 3. B. Vô số. C. 1. D. 2.



Lời giải.

Đặt $u = e^{x^2}$, vì $x^2 \geq 0$ nên $u \geq 1$.

Khi đó phương trình: $f(e^{x^2}) = m$ trở thành phương trình $f(u) = m$ với $u \geq 1$.

Nhận xét: phương trình $u = e^{x^2}$ có hai nghiệm phân biệt nếu $u > 1$, có 1 nghiệm nếu $u = 1$ và vô nghiệm nếu $u < 1$.

Vậy để phương trình $f(e^{x^2}) = m$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $f(u) = m$ có một nghiệm bằng 1 và một nghiệm lớn hơn 1.

Dựa vào đồ thị hàm số suy ra chỉ có $m = 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Một cốc đựng nước dạng hình trụ có chiều cao 15 cm đường kính đáy 8 cm và có mực nước trong cốc là 12 cm. Thả vào cốc nước 3 viên bi có cùng bán kính bằng 2 cm. Hỏi nước dâng cao cách mép cốc bao nhiêu ?

A 1,5. B 15. C 1. D 12,5.

Lời giải.

Tổng thể tích của 3 viên bi là $V = 3 \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 = 32\pi$ cm^3.

Gọi h là chiều cao tăng thêm của mực nước khi cho 3 viên bi vào.

Ta có: $\pi \cdot 4^2 \cdot h = 32\pi \Leftrightarrow h = 2$ cm.

Do đó nước dâng cao cách mép cốc là $15 - (12 + 2) = 1$ cm.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx + 9}{x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A 5. B 3. C 4. D 2.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có $y' = \dfrac{m^2 - 9}{(x + m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0 \\ -m \notin (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 9 < 0 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 3$.

Do đó có 4 giá trị nguyên của m là $-1; 0; 1; 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\dfrac{4}{9}$ và $f'(x) = x^3 f^2(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A $-\dfrac{2}{3}$. B $-\dfrac{1}{2}$. C -1. D $-\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Cách 1:

Từ điều kiện bài toán ta có: $f'(x) = x^3 f^2(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = x^3$.

Khi đó ta có $\displaystyle\int_1^2 \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\,dx = \int_1^2 x^3\,dx \Leftrightarrow \left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)\Big|_1^2 = \left(\dfrac{x^4}{4}\right)\Big|_1^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(1)} - \dfrac{1}{f(2)} = \dfrac{15}{4}$.

Do $f(2) = -\dfrac{4}{9} \Rightarrow \dfrac{1}{f(1)} = \dfrac{15}{4} - \dfrac{19}{4} = -1 \Rightarrow f(1) = -1$.

Vậy $f(1) = -1$.

Cách 2:

Từ điều kiện bài toán ta có: $f'(x) = x^3 f^2(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = x^3$.

Ta có $\displaystyle\int \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int x^3\,\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{-1}{f(x)} = \dfrac{x^4}{4} + C$.

Vì $f(2) = -\dfrac{4}{9} \Rightarrow C = \dfrac{3}{4} \Rightarrow f(x) = \dfrac{-4}{x^4+3}$.

Vậy $f(1) = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+t \\ z = -2-t \end{cases}$ và $\Delta_2\colon \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+3}{2}$. Gọi d là đường thẳng qua $A(-1;0;-1)$ cắt đường thẳng Δ_1 và tạo với đường thẳng Δ_2 một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là

A $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$.

B $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$.

C $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{2}$.

D $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$.

Lời giải.

Gọi $M = d \cap \Delta_1 \Rightarrow$ tọa độ $M(1+2t; 2+t; -2-t)$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = (2+2t; 2+t; -1-t)$. Đường thẳng Δ_2 có véc tơ chỉ phương là $\vec{a} = (-1;2;2)$.

Khi đó $\cos(d;\Delta_2) = \dfrac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{a}|}{|\overrightarrow{AM}|\cdot|\vec{a}|} = \dfrac{|-2t|}{3\sqrt{6t^2+14t+9}}$.

Dễ nhận thấy d tạo với Δ_2 một góc lớn nhất $\Leftrightarrow t = 0$.

Khi đó d đi qua $A(-1;0;-1)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{AM} = (2;2;-2)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;3;2)$, mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + z - 10 = 0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$. Đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm M,N sao cho A là trung điểm của đoạn MN. Biết $\vec{u} = (a;b;1)$ là một véctơ chỉ phương của Δ, giá trị của $a+b$ bằng

A 11. **B** -11. **C** 3. **D** -3.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $N\,(2t-2; t+1; 1-t) \in d$ và A là trung điểm của đoạn MN.

Do đó, tọa độ điểm $M\,(4-2t; 5-t; 3+t)$.

Do $M \in (P)$ nên $2\,(4-2t) - (5-t) + (3+t) - 10 = 0 \Leftrightarrow t = -2$.

Suy ra tọa độ điểm $N\,(-6;-1;3)$ và $M(8;7;1)$. Suy ra $\overrightarrow{MN} = (-14;-8;2)$.

Vì $\vec{u} = (a;b;1)$ là một véctơ chỉ phương của Δ nên $\vec{u}, \overrightarrow{MN}$ là 2 véctơ cùng phương.

Do đó ta có $\dfrac{a}{-14} = \dfrac{b}{-8} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = -4 \end{cases} \Rightarrow a+b = -11$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Cho hàm số $f(x) = (m-2)x^3 - 2(2m-3)x^2 + (5m-3)x - 2m - 2$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị?

A 0. **B** 3. **C** 1. **D** 2.

Lời giải.

Trường hợp 1: $m = 2$ thì hàm số $f(x) = -2x^2 + 7x - 6$ thì rõ ràng hàm số $y = |f(x)|$ có nhiều nhất 3 cực trị. Ta loại trường hợp này.

Trường hợp 2: $m \neq 2$ thì hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc 3. Do đó, hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

$\Leftrightarrow f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow (x-2)\left[(m-2)x^2 + (2-2m)x + m + 1\right] = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow (m-2)x^2 + (2-2m)x + m + 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - (m-2)(m+1) > 0 \\ (m-2)2^2 + (2-2m)2 + m + 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m < 3 \end{cases}.$$

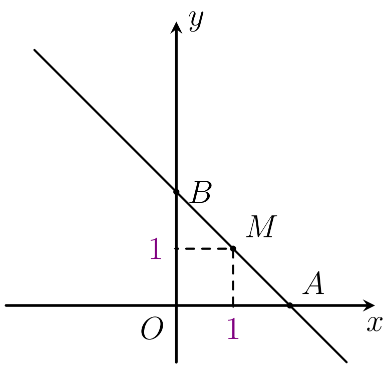
Kết hợp cả 2 trường hợp trên và điều kiện m nguyên dương ta suy ra $m = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Gọi d là đường thẳng tùy ý đi qua điểm $M(1;1)$ và có hệ số góc âm. Giả sử d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B. Quay tam giác OAB quanh trục Oy thu được một khối tròn xoay có thể tích là V. Giá trị nhỏ nhất của V bằng

A 3π. **B** $\dfrac{9\pi}{4}$. **C** 2π. **D** $\dfrac{5\pi}{2}$.

Lời giải.



Giả sử $A(a;0), B(0;b)$. Phương trình đường thẳng $d : \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1 \Rightarrow d : y = -\dfrac{b}{a}x + b (1)$.

Mà $M(1;1) \in d$ nên $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1 \Rightarrow a + b = ab (2)$.

Từ (1) suy ra d có hệ số góc là $k = -\dfrac{b}{a}$, theo giả thiết ta có $-\dfrac{b}{a} < 0 \Rightarrow ab > 0$.

Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$ thì $a+b < 0$ mâu thuẫn với (2). Suy ra $a > 0, b > 0$. Mặt khác từ (2) suy ra $b = \dfrac{a}{a-1}$

kết hợp với $a > 0, b > 0$ suy ra $a > 1$.

Khi quay ΔOAB quanh trục Oy, ta được hình nón có chiều cao $h = b$ và bán kính đường tròn đáy $r = a$.

Thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi a^2.b = \frac{1}{3}\pi.\frac{a^3}{a-1}$.

Suy ra V đạt giá trị nhỏ nhất khi $\frac{a^3}{a-1}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x-1} = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$.

$f'(x) = 2x + 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của V bằng $\frac{1}{3}\pi.f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9\pi}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $\int\limits_0^3 [2x\ln(x+1) + xf'(x)]\,\mathrm{d}x = 0$ và $f(3) = 1$. Biết $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}$ với a, b là các số thực dương. Giá trị của $a + b$ bằng

A 35. **B** 29. **C** 11. **D** 7.

Lời giải.

Tính $I = \int\limits_0^3 2x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = 2x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ v = x^2 \end{cases}$. Khi đó

$I = x^2\ln(x+1)\Big|_0^3 - \int\limits_0^3 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = 9\ln 4 - \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|\right)\Big|_0^3 = 16\ln 2 - \frac{3}{2}$.

Tính $J = \int\limits_0^3 xf'(x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u_J = x \\ dv_J = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u_J = \mathrm{d}x \\ v_J = f(x) \end{cases}$.

$J = \int\limits_0^3 xf'(x)\,\mathrm{d}x = xf(x)|_0^3 - \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3 - \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Mà $\int\limits_0^3 [2x\ln(x+1)+xf'(x)]\,\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow I+J=0\Rightarrow 16\ln 2-\dfrac{3}{2}+3-\int\limits_0^3 f(x)dx=0\Rightarrow \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=16\ln 2+\dfrac{3}{2}=\dfrac{3+32\ln 2}{2}$.

Suy ra $\begin{cases}a=3\\b=32\end{cases}$. Vậy $a+b=35$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Cho (P) là đường parabol đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=mx^4-(m^2+1)\,x^2+m^2-m+1$ và A,B là giao điểm của (P) với trục hoành. Khi $AB=2$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $m\in(4;6)$. (B) $m\in(2;4)$. (C) $m\in(-3;-1)$. (D) $m\in(-1;2)$.

Lời giải.

Ta có: $y'=4mx^3-2\,(m^2+1)\,x$.

$y'=0\Leftrightarrow 4mx^3-2\,(m^2+1)\,x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\2mx^2-m^2-1=0(*)\end{array}\right.$.

Để đồ thị hàm số $y=mx^4-(m^2+1)\,x^2+m^2-m+1$ có ba điểm cực trị M,N,P thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác $0\Leftrightarrow -2m\,(m^2+1)<0\Leftrightarrow m>0$. (**)

Ta có ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=mx^4-(m^2+1)\,x^2+m^2-m+1$:

$M\,(0;m^2-m+1)\,,N\left(\sqrt{\dfrac{m^2+1}{2m}};-\dfrac{(m^2+1)^2}{4m}+m^2-m+1\right)$,

$P\left(-\sqrt{\dfrac{m^2+1}{2m}};-\dfrac{(m^2+1)^2}{4m}+m^2-m+1\right)$.

Parabol đi qua ba điểm M,N,P nên có đỉnh là $M\,(0;m^2-m+1)\Rightarrow (P):y=ax^2+m^2-m+1$.

Vì $N\in(P)\Rightarrow -\dfrac{(m^2+1)^2}{4m}+m^2-m+1=a\cdot\dfrac{m^2+1}{2m}+m^2-m+1\Leftrightarrow a=-\dfrac{m^2+1}{2}$.

$\Rightarrow (P):y=-\dfrac{m^2+1}{2}.x^2+m^2-m+1$.

Vì (P) cắt Ox tại hai điểm A,B nên ta có x_A,x_B là hai nghiệm phân biệt của phương trình $-\dfrac{m^2+1}{2}.x^2+m^2-m+1=0\Leftrightarrow (m^2+1)\,x^2-2\,(m^2-m+1)=0$.

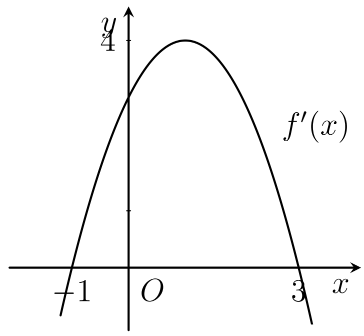
Ta có: $AB=2\Leftrightarrow |x_B-x_A|=2\Leftrightarrow \sqrt{(x_B+x_A)^2-4x_Ax_B}=2\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{8\,(m^2-m+1)}{m^2+1}}=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{2\,(m^2-m+1)}{m^2+1}}=1\Leftrightarrow m^2-2m+1=0\Leftrightarrow m=1$. (nhận)

Chọn đáp án (D) □

Câu 46.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(2x^4 - 1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A $(1; +\infty)$. **B** $\left(1; \dfrac{3}{2}\right)$. **C** $(-\infty; -1)$. **D** $\left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = 8x^3 \cdot f'(2x^4 - 1)$

TH1: $x \geq 0$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến thì

$f'(2x^4 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq 2x^4 - 1 \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x^4 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt[4]{2} \leq x \leq \sqrt[4]{2}$

$\Rightarrow 0 \leq x \leq \sqrt[4]{2} \Leftrightarrow x \in \left[0; \sqrt[4]{2}\right]$.

TH2: $x < 0$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến thì

$f'(2x^4 - 1) \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^4 - 1 \leq -1 \\ 2x^4 - 1 \geq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 (L) \\ x^2 \geq \sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \sqrt[4]{2} \\ x \leq -\sqrt[4]{2}. \end{array}\right.$

So sánh với điều kiện$x < 0 \Rightarrow x \leq -\sqrt[4]{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\sqrt[4]{2}\right]$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left[0; \sqrt[4]{2}\right]$ và $\left(-\infty; -\sqrt[4]{2}\right]$.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và BC. Mặt phẳng (DMN) chia hình lập phương thành 2 phần. Gọi V_1 là thể tích của phần chứa đỉnh A và V_2 là thể tích của phần còn lại. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A $\dfrac{1}{2}$. **B** $\dfrac{55}{89}$. **C** $\dfrac{2}{3}$. **D** $\dfrac{37}{48}$.

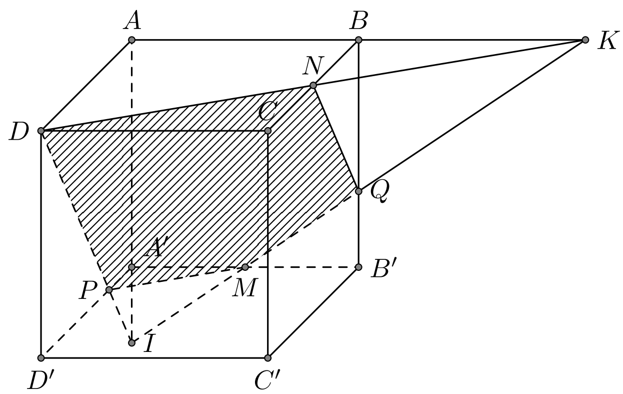
Lời giải.

Gọi $K = DN \cap AB$, $Q = MK \cap BB'$, $I = MK \cap AA'$, $P = DI \cap A'D'$.

Vậy thiết diện của hình lập phương cắt bởi mp (DMN) là $MPDNQ$.

Do N là trung điểm của $BC \Rightarrow B$ là trung điểm của $AK \Rightarrow BK = AB = 1$.

Vì $A'I = B'Q$ và $\dfrac{B'Q}{BQ} = \dfrac{B'M}{BK} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow B'Q = A'I = \dfrac{1}{3}, BQ = \dfrac{2}{3}$.



Tương tự $\dfrac{A'P}{AD} = \dfrac{A'I}{AI} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow A'P = \dfrac{1}{4}$.

Ta có $V_{IA'MP} = \dfrac{1}{3} \cdot A'I \cdot S_{\triangle A'MP} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{144}$;

$V_{KBNQ} = \dfrac{1}{3} \cdot BK \cdot S_{\triangle BNQ} = \dfrac{1}{3} \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{18}$;

$V_{I.ADK} = \dfrac{1}{3} \cdot AI \cdot S_{\triangle ADK} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{4}{3} \cdot 1 = \dfrac{4}{9}$.

Do đó $V_1 = V_{I.ADK} - V_{IA'MP} - V_{KBNQ} = \dfrac{4}{9} - \dfrac{1}{144} - \dfrac{1}{18} = \dfrac{55}{144} \Rightarrow V_2 = 1 - V_1 = \dfrac{89}{144}$.

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{55}{89}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Một người gửi 100 triệu đồng vào tài khoản tiết kiệm ngân hàng với lãi suất $0,6\%$ / tháng, cứ sau mỗi tháng người đó rút ra 500 nghìn đồng. Hỏi sau đúng 36 lần rút tiền, số tiền còn lại trong tài khoản của người đó gần nhất với phương án nào dưới đây? (biết rằng lãi suất không thay đổi và tiền lãi mỗi tháng tính theo số tiền có thực tế trong tài khoản của tháng đó).

A 104 triệu đồng. (B) 106 triệu đồng. (C) 102 triệu đồng. (D) 108 triệu đồng.

Lời giải.

Số tiền còn lại trong tài khoản sau tháng thứ 1 là $100.1,006 - 0{,}5$ (triệu đồng).

Số tiền còn lại trong tài khoản sau tháng thứ 2 là

$(100 \cdot 1{,}006 - 0{,}5) \cdot 1{,}006 - 0,5 = 100 \cdot (1{,}006)^2 - 0{,}5\,(1 + 1{,}006)$ (triệu đồng).

Số tiền còn lại trong tài khoản sau tháng thứ 3 là

$100 \cdot (1{,}006)^3 - 0{,}5\left[1 + 1{,}006 + (1{,}006)^2\right]$ (triệu đồng).

Cứ như vậy, số tiền còn lại trong tài khoản sau tháng thứ 36 là

$100 \cdot (1{,}006)^{36} - 0,5 \cdot \left[1 + 1{,}006 + (1{,}006)^2 + \cdots + (1{,}006)^{35}\right] = 100 \cdot (1{,}006)^{36} - 0{,}5 \cdot \dfrac{1 - (1{,}006)^{36}}{1 - 1{,}006}$

$= 104{,}0050268$ (triệu đồng).

Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m sao cho phương trình $\log_2 \dfrac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x - m + 2$ có nghiệm?

(A) Vô số. (B) 4. (C) 6. **D** 5.

Lời giải.

Điều kiện $3x^2 + 3x + m + 1 > 0$.

$$\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x - m + 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(3x^2 + 3x + m + 1\right) - \log_2\left(2x^2 - x + 1\right) = x^2 - 5x - m + 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(3x^2 + 3x + m + 1\right) + \left(3x^2 + 3x + m + 1\right) = \log_2\left(4x^2 - 2x + 2\right) + \left(4x^2 - 2x + 2\right) \qquad (*)$$

Xét hàm $f(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t \cdot \ln 2} + 1 > 0$ với mọi $t > 0$.

Vậy hàm $f(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$, luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Do đó phương trình $(*) \Leftrightarrow f\left(3x^2 + 3x + m + 1\right) = f\left(4x^2 - 2x + 2\right) \Leftrightarrow 3x^2 + 3x + m + 1 = 4x^2 - 2x + 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x - m + 1 = 0$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 25 - 4.(-m + 1) \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{21}{4}$.

Do m nguyên âm nên $m \in \{-5; -4; -3; -2; -1\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, xét mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(2; 1; 3)$ đồng thời cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại M, N, P sao cho tứ diện $OMNP$ có thể tích nhỏ nhất. Giao điểm của đường thẳng d: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + t \end{cases}$ với (P) có toạ độ là

A $(4; 6; 1)$. **B** $(4; 1; 6)$. **C** $(-4; 6; -1)$. **D** $(4; -1; 6)$.

Lời giải.

Gọi $M(a; 0; 0)$, $N(0; b; 0)$, $P(0; 0; c)$. Theo giả thiết, ta có a, b, c là các số dương.

Phương trình mặt phẳng (P) là $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

(P) đi qua điểm $A(2; 1; 3)$ nên $\dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{3}{c} = 1$.

Ta có $\dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{2}{a} \cdot \dfrac{1}{b} \cdot \dfrac{3}{c}} = \dfrac{3\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{abc}} \Leftrightarrow 1 \geq \dfrac{3\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{abc}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{abc} \geq 3\sqrt[3]{6} \Leftrightarrow abc \geq 112$.

$V_{OMNP} = \dfrac{abc}{6} \geq 27$. Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{2}{a} = \dfrac{1}{b} = \dfrac{3}{c} \\ \dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{3}{c} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \\ c = 9. \end{cases}$

Vậy $(P) : \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{9} = 1$.

Tọa độ giao điểm của d và (P) là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + t \\ \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{9} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \\ z = 6 \\ t = 2. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. B	3. B	4. C	5. A	6. D	7. A	8. C	9. B	10. A
11. B	12. A	13. B	14. A	15. B	16. D	17. C	18. D	19. C	20. B
21. D	22. C	23. B	24. A	25. B	26. D	27. C	28. A	29. C	30. B
31. D	32. D	33. B	34. A	35. A	36. C	37. C	38. C	39. C	40. A
41. B	42. C	43. B	44. A	45. D	46. D	47. B	48. A	49. D	50. D

45 ĐỀ THI THỬ THPT TỨ KỲ, HẢI DƯƠNG – LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ là điểm

A $M(1;3)$. B $N(-1;7)$. C $Q(3;1)$. D $P(7;-1)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$. $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

$y'' = 6x$. Ta có $y''(1) = 6 > 0$ và $y(1) = 3$.

Do đó điểm cực tiểu của đồ thị là $M(1;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - 1$ là

A $x^3 + C$. B $\dfrac{x^3}{3} + x + C$. C $6x + C$. D $x^3 - x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = \int (3x^2 - 1)\,\mathrm{d}x = x^3 - x + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Tìm các số thực m để hàm số $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$ có cực trị.

A $\left[\begin{array}{l} m \neq 2 \\ -3 < m < 1 \end{array}\right.$. B $-3 < m < 1$. C $\left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 1 \end{array}\right.$. D $-2 < m < 1$.

Lời giải.

Với $m = -2$, hàm số trở thành $y = 3x^2 - 2x - 5$.

$y' = 6x - 2, y' = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{3}$.

Vì $y' = 0$ có nghiệm và đổi dấu khi đi qua nghiệm nên với $m = -2$ hàm số có cực trị.

Với $m \neq -2$, $y' = 3(m+2)x^2 + 6x + m$.

Để hàm số có cực trị thì $\Delta' > 0 \Rightarrow 9 - 3m(m+2) > 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1$.

Kết hợp cả hai trường hợp suy ra $-3 < m < 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Khối bát diện đều là khối đa diện loại nào?

A $\{3;4\}$. B $\{3;5\}$. C $\{5;3\}$. D $\{4;3\}$.

Lời giải.

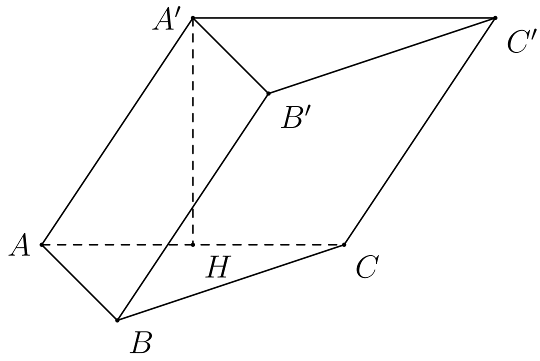
Khối bát diện đều là khối đa diện loại $\{3;4\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 1$, $AC = 2$, cạnh $AA' = \sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt đáy (ABC) trùng với chân đường cao hạ từ B của tam giác ABC. Thể tích V của khối lăng trụ đã cho là

A $V = \dfrac{\sqrt{21}}{12}$. B $V = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$. C $V = \dfrac{\sqrt{21}}{4}$. D $V = \dfrac{3\sqrt{21}}{4}$.

Lời giải.



Gọi H là chân đường cao hạ từ B trong tam giác ABC.
Theo đề $A'H$ là đường cao của lăng trụ.
Xét ΔABC
$AB^2 = AH \cdot AC \Rightarrow AH = \dfrac{AB^2}{AC} = \dfrac{1}{2}$.
$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{3}$.
Xét $\Delta AA'H$. ta có $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.
Thể tích cần tìm

$$V = S_{\Delta ABC} \cdot AH = \left(\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC\right) AH = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{21}{4}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho hình bát diện đều cạnh 2. Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình bát diện đó. Khi đó, S bằng

A. $S = 32$. B. $S = 8\sqrt{3}$. C. $S = 4\sqrt{3}$. D. $S = 16\sqrt{3}$.

Lời giải.
Ta có hình bát diện đều có 8 mặt là 8 tam giác đều cạnh bằng 2.
Do đó $S = 8 \cdot 2^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} = 8\sqrt{3}$.
Chọn đáp án B □

Câu 7. Phép vị tự tâm $O(0;0)$ tỉ số $k = 3$ biến đường tròn $(C)\colon (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ thành đường tròn có phương trình

A. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$. B. $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 1$.
C. $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$. D. $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$.

Lời giải.
Đường tròn $(C)\colon (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ có tâm $I(1;-1)$ và bán kính $R = 1$.
Gọi (C') là ảnh của đường tròn (C) qua $\mathrm{V}_{(\mathrm{O},3)}$.
Khi đó, ta có $\begin{cases} x_{I'} = k \cdot x_I = 3 \cdot 1 = 3 \\ y_{I'} = k \cdot y_I = 3 \cdot (-1) = -3 \end{cases} \Rightarrow$ tâm $I'(3;-3)$, bán kính $R' = 3R = 3$.
Phương trình $(C')\colon (x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$.
Chọn đáp án C □

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↗	3	↘		↗	3	↘	
	$-\infty$				-1				$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = -2018$ tại bao nhiêu điểm?

A. 4. B. 0. C. 2. D. 1.

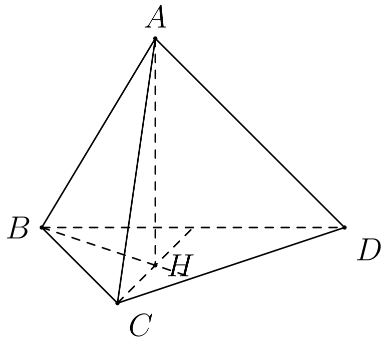
Lời giải.
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = -2018$ nằm dưới điểm cực tiểu của đồ thị hàm số, suy ra đường thẳng $y = -2018$ cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$, $AC \perp BD$. Góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$ là

A 30°. **B** 45°. **C** 60°. **D** 90°.

Lời giải.



Kẻ $AH \perp (BCD), H \in (BCD)$.

Ta có $\left.\begin{matrix} CD \perp AH \\ CD \perp AB \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow CD \perp (ABH)$,

mà $BH \subset (ABH) \Rightarrow CD \perp BH (1)$.

Tương tự $\left.\begin{matrix} BD \perp AH \\ BD \perp AC \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow BD \perp (ACH)$,

mà $CH \subset (ACH) \Rightarrow BD \perp CH (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm tam giác BCD.

Ta có $\left.\begin{matrix} BC \perp AH \\ BC \perp DH \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow BC \perp (ADH)$, mà $AD \subset (ADH) \Rightarrow BC \perp AD$.

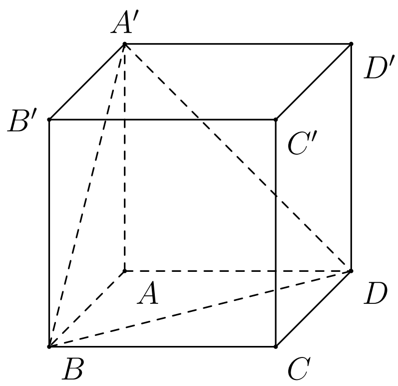
Vậy góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$ là 90°.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Gọi V là thể tích của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, V_1 là thể tích tứ diện $A'ABD$. Hệ thức nào sau đây đúng?

A $V = 3V_1$. **B** $V = 4V_1$. **C** $V = 6V_1$. **D** $V = 2V_1$.

Lời giải.



Gọi a là cạnh của hình lập phương.

Khi đó, ta có $V = a^3$ và $V_1 = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot AA' = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} a^2 \cdot a = \dfrac{a^3}{6}$

Vậy $V = 6V_1$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x^2 - mx + 1}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

A $-2 < m < 2$. **B** $\left\{\begin{array}{l} m > 2 \\ \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m \neq -\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \end{array}\right.$. **C** $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right.$. **D** $\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} m > 2 \\ m \neq -\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \\ m < -2 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Điều kiện: $x^2 - mx + 1 \neq 0$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x-2}{x^2 - mx + 1} = 0 \Rightarrow$ đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x^2 - mx + 1}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x^2 - mx + 1}$ có hai đường tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 - mx + 1 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt khác 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4 > 0 \\ 2^2 - 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m > 2 \\ m \neq \dfrac{5}{2} \end{cases} \\ m < -2. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án D □

Câu 12. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \dfrac{1}{\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)}$.

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{(1+2k)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

B. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{(1+2k)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{1}{\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)}$ xác định khi $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{2} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy TXĐ của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{(1+2k)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Chọn đáp án C □

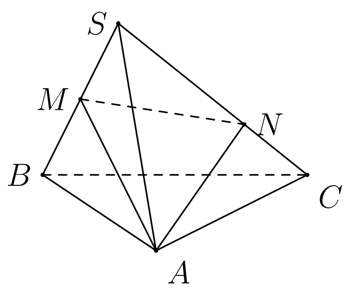
Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 9, diện tích đáy bằng 5. Gọi M là trung điểm cạnh SB và N thuộc cạnh SC sao cho $NS = 2NC$. Thể tích V của khối chóp $A.BMNC$ là

A. $V = 10$. B. $V = 30$. C. $V = 5$. D. $V = 15$.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AMN} = \dfrac{1}{3} V_{S.ABC}$

Suy ra: $V_{A.BMNC} = \dfrac{2}{3} V_{S.ABC} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 5 \cdot 9 = 10$



Chọn đáp án A □

Câu 14.

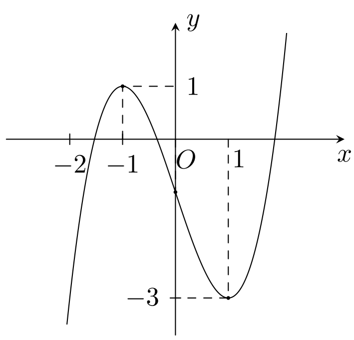
Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị như hình bên?

A. $y = x^3 - 3x - 1$.

B. $y = x^3 - 3x^2 - 3x - 1$.

C. $y = \dfrac{1}{3}x^3 + 3x - 1$.

D. $y = x^3 + 3x^2 - 3x + 1$.



Lời giải.

Đồ thị đi qua điểm $(0; -1)$ nên phương án D bị loại và đồ thị đi qua điểm $(2; 1)$ nên B loại.

Đồ thị có hai điểm cực trị nên phương án C bị loại (có $y' = x^2 + 3 > 0$).

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; 3)$, thay vào phương án A thấy thỏa mãn.

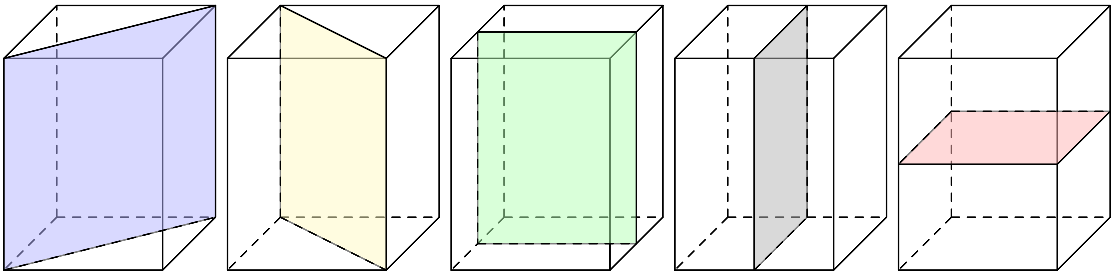
Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước là $3, 3, 4$. Số mặt phẳng đối xứng của hình hộp chữ nhật đó là

(A) 4. (B) 6. **(C)** 5. (D) 9.

Lời giải.

Có 5 mặt phẳng đối xứng.



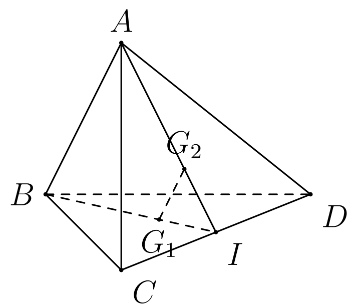
Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD và ACD. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

(A) $G_1G_2 = \frac{2}{3}AB$. (B) $G_1G_2 \parallel (ABD)$.

(C) $G_1G_2 \parallel (ABC)$. (D) BG_1, AG_2 và CD đồng qui.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm cạnh CD.

Khi đó $\frac{IG_1}{IB} = \frac{1}{3} = \frac{IG_2}{IA}$ (Vì G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác BCD và ACD)

Suy ra $\frac{G_1G_2}{AB} = \frac{1}{3}$ và $G_1G_2 \parallel AB$

Hay $G_1G_2 = \frac{1}{3}AB$ nên A sai.

$G_1G_2 \parallel AB$ nên B và C đúng.

Dễ thấy BG_1, AG_2 và CD đồng qui tại điểm I nên D đúng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Thể tích của khối nón có chiều cao $h = 6$ và bán kính đáy $R = 4$ bằng

(A) $V = 32\pi$. (B) $V = 96\pi$. (C) $V = 16\pi$. (D) $V = 48\pi$.

Lời giải.

Thể tích của khối nón $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 32\pi$

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Rút gọn biểu thức $B = \log_{\frac{1}{a}} \frac{a.\sqrt[4]{a^3}.\sqrt[3]{2}}{\sqrt{a}.\sqrt[4]{a}}$, (giả sử tất cả các điều kiện đều được thỏa mãn) ta được kết quả là

(A) $\frac{60}{91}$. (B) $-\frac{91}{60}$. (C) $\frac{3}{5}$. **(D)** $-\frac{5}{3}$.

Lời giải.

Ta có $B = \log_{\frac{1}{a}} \frac{a \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a}} = \log_{a^{-1}} \frac{a \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}}} = \log_{a^{-1}} \frac{a^{\frac{29}{12}}}{a^{\frac{3}{4}}} = \log_{a^{-1}} a^{\frac{5}{3}} = -\frac{5}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2017x - 2018}{x + 1}$ có đường tiệm cận đứng là

(A) $x = 2017$. (B) $x = -1$. (C) $y = -1$. (D) $y = 2017$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \dfrac{2017x - 2018}{x + 1} = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{2017x - 2018}{x + 1} = +\infty$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x = -1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Tiếp tuyến đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại điểm $A(3; 1)$ là đường thẳng

(A) $y = -9x - 26$. (B) $y = -9x - 3$. (C) $y = 9x - 2$. (D) $y = 9x - 26$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y'(3) = 9$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $A(3; 1)$ là $y = 9(x - 3) + 1 \Leftrightarrow y = 9x - 26$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Trong các hàm số sau, hàm số nào không xác định trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = 3^x$. (B) $y = \log(x^2)$. (C) $y = \ln(|x| + 1)$. (D) $y = (0{,}3)^x$.

Lời giải.

Hàm số $y = \log(x^2)$ xác định khi $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, khoảng cách từ điểm $M(3; -4)$ đến đường thẳng $\Delta \colon 3x - 4y - 1 = 0$ là

(A) $\dfrac{8}{5}$. (B) $\dfrac{24}{5}$. (C) $\dfrac{12}{5}$. (D) $-\dfrac{24}{5}$.

Lời giải.

$\mathrm{d}(M, \Delta) = \dfrac{|3 \cdot 3 - 4 \cdot (-4) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{24}{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Tích của giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng

(A) $\dfrac{65}{3}$. (B) 6. (C) 20. (D) $\dfrac{52}{3}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Ta có $f(1) = 5; f(2) = 4; f(3) = \dfrac{13}{3}$.

Suy ra $\min\limits_{[1;3]} f(x) = 4; \max\limits_{[1;3]} f(x) = 5$.

Do đó tích giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $4 \cdot 5 = 20$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Số nghiệm của phương trình $9^x + 2.3^{x+1} - 7 = 0$ là

(A) 0. (B) 2. (C) 4. (D) 1.

Lời giải.

Đặt $t = 3^x, t > 0$

Phương trình đã cho trở thành $t^2 + 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \ \ (\text{nhận}) \\ t = -7 \ \ (\text{loại}) \end{array}\right.$.

Với $t = 1$ thì $3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Cho phương trình $m\cos^2 x - 4\sin x\cos x + m - 2 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình có đúng một nghiệm thuộc $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$?

A 2. **B** 3. **C** 1. **D** 0.

Lời giải.

Ta có $m\cos^2 x - 4\sin x\cos x + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m \cdot \dfrac{1 + \cos 2x}{2} - 2\sin 2x + m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow m\cos 2x - 4\sin 2x + 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{4 + 4\sin 2x}{3 + \cos 2x}$.

Xét $f(x) = \dfrac{4 + 4\sin 2x}{3 + \cos 2x}$ trên $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ ta có $f'(x) = \dfrac{8 + 24\cos 2x + 8\sin 2x}{(3 + \cos 2x)^2}$

Nhận xét $f'(x) > 0$ với mọi $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ nên để phương trình có nghiệm trên $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ thì $f(0) \le m \le f\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 1 \le m \le \dfrac{8}{3}$.

Vì m nguyên nên $m = 1$ và $m = 2$.

Khi đó phương trình $m\cos 2x - 4\sin 2x + 3m - 4 = 0$ có đúng một nghiệm trên $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $q = -2$. Tính tổng 10 số hạng đầu liên tiếp của cấp số nhân?

A $S_{10} = -511$. **B** $S_{10} = 1023$. **C** $S_{10} = 1025$. **D** $S_{10} = -1025$.

Lời giải.

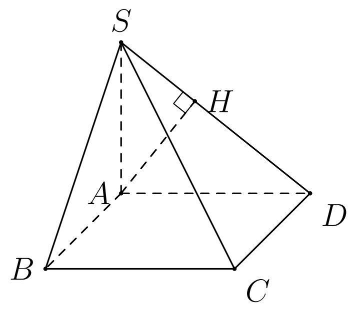
Ta có $S_{10} = u_1 \cdot \dfrac{1 - q^{10}}{1 - q} = -3 \cdot \dfrac{1 - (-2)^{10}}{1 - (-2)} = 1023$.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD = 2a$; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng

A $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B** $\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D** $\dfrac{3a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải.



Ta có $\left.\begin{array}{l} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)$ theo giao tuyến SD.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên $SD \Rightarrow AH \perp (SCD)$

$\Rightarrow \mathrm{d}(A, (SCD)) = AH$.

Xét ΔSAD vuông tại A đường cao AH.

$AH = \dfrac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \dfrac{a \cdot 2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

$\Rightarrow d(A, (SCD)) = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a mặt bên SAB là tam giác đều, mặt bên SCD là tam giác vuông cân tại S, gọi M là điểm thuộc đường thẳng CD sao cho BM vuông góc với SA. Tính thể tích V của khối chóp $S.BDM$?

A $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$. (B) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. (C) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{32}$. (D) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải.

Gọi E,F lần lượt là trung điểm của đoạn CD và AB, ta có

ΔSAB đều $\Rightarrow AB\perp SF \Rightarrow CD\perp SF$ (do $CD\parallel AB$) (1).

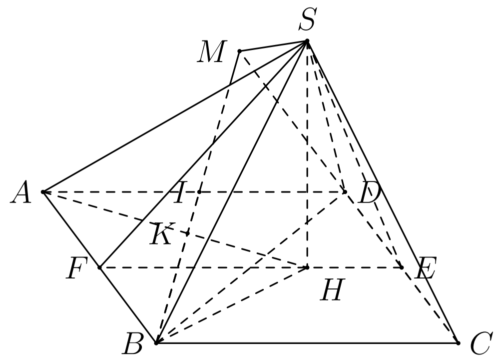
ΔSCD vuông cân tại $S\Rightarrow CD\perp SE$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $CD\perp(SEF)\Rightarrow (SEF)\perp(ABCD)$ theo giao tuyến EF.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên EF

$\Rightarrow SH\perp(ABCD)$

Dựng $BK\perp AH$ tại $K\Rightarrow BK\perp(SAH)\Rightarrow BK\perp SA$.



Gọi $M=BK\cap CD$ ta có $SH\perp(ABCD)$ hay $SH\perp(BDM)$. Suy ra $V_{S.BDM}=\dfrac{1}{3}SH\cdot S_{\Delta BDM}$.

ΔSCD vuông cân tại $S\Rightarrow SE=\dfrac{CD}{2}=\dfrac{a}{2}$; ΔSAB đều cạnh $AB=a\Rightarrow SF=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $EF=a$.

$\Rightarrow SE^2+SF^2=\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{3a^2}{4}=a^2=EF^2\Rightarrow \Delta SEF$ vuông cân tại S

$$\Rightarrow SH=\frac{SE\cdot SF}{EF}=\frac{\frac{a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow AH=\sqrt{SA^2-SH^2}=\sqrt{a^2-\frac{3a^2}{16}}=\frac{a\sqrt{13}}{4} \text{ và } HF=\sqrt{SF^2-SH^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{3a^2}{16}}=\frac{3a}{4}$$

Ta có $BK\cdot AH=HK\cdot AB\Rightarrow BK=\dfrac{HK\cdot AB}{AH}=\dfrac{\frac{3a}{4}\cdot a}{\frac{a\sqrt{13}}{a}}=\dfrac{3a}{\sqrt{13}}$

ΔKBA và ΔABI là hai tam giác vuông đồng dạng (với $I=BM\cap AD$)

$$\Rightarrow \frac{BI}{AB}=\frac{AB}{BK}\Rightarrow BI=\frac{AB^2}{BK}=\frac{a^2}{\frac{3a}{\sqrt{13}}}=\frac{a\sqrt{13}}{3}$$

$$\Rightarrow AI=\sqrt{BI^2-AB^2}=\sqrt{\frac{13a^2}{9}-a^2}=\frac{2a}{3}\Rightarrow ID=\frac{a}{3}$$

ΔDIM và ΔAIB là hai tam giác vuông đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{DM}{AB}=\frac{DI}{AI}=\frac{\frac{a}{3}}{\frac{2a}{3}}=\frac{1}{2}\Rightarrow DM=\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}\Rightarrow S_{\Delta BDM}=\frac{1}{2}BC\cdot DM=\frac{1}{2}a\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow V_{S.BDM}=\frac{1}{3}SH\cdot S_{\Delta BDM}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a^2}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{48}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}, & \text{khi } x\neq 1\\ 3x+m, & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

A $m=0$. **B** $m=6$. **C** $m=4$. **D** $m=2$.

Lời giải.

Ta có: $f(1)=m+3$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2)=3.$

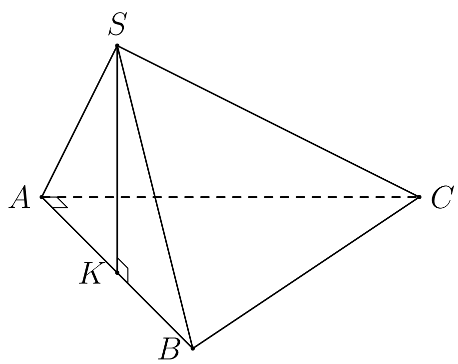
Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow m+3=3\Leftrightarrow m=0.$

Chọn đáp án A □

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là

A $V=\dfrac{2a^3\sqrt{6}}{12}$. **B** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **C** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải.



Gọi K là trung điểm của đoạn AB.

Ta có ΔSAB đều $\Rightarrow SK\perp AB$.

Mà $(SAB)\perp(ABC)$ theo giao tuyến AB

$\Rightarrow SK\perp(ABC)\Rightarrow V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SK\cdot S_{\Delta ABC}$

Ta có ΔABC vuông tại A có $AB=a, BC=a\sqrt{3}$

$\Rightarrow AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{3a^2-a^2}=a\sqrt{2}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC=\dfrac{1}{2}a\cdot a\sqrt{2}=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$

ΔSAB đều cạnh $AB=a\Rightarrow$ đường cao $SK=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}.$

Chọn đáp án C □

Câu 31. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$. Tập nghiệm S của bất phương trình $f'(x)\geq f(x)$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

A 1. **B** 2. **C** 0. **D** 3.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\left[\begin{array}{l}x\leq 0\\ x\geq 2\end{array}\right.$

Ta có $f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$

Khi đó $f'(x)\geq f(x)\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\geq\sqrt{x^2-2x}\Leftrightarrow x-1\geq x^2-2x$

$\Leftrightarrow x^2-3x+1\leq 0\Leftrightarrow\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\leq x\leq\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Vì x là nghiệm nguyên nên $S=\{1;2\}$

Chọn đáp án B □

Câu 32. Cho hàm số $y = mx^3 - x^2 - 2x + 8m$ có đồ thị (C_m). Tìm tất cả giá trị tham số m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

(A) $m \in \left[-\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right]$.

(B) $m \in \left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)$.

C $m \in \left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$.

(D) $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành là

$$mx^3 - x^2 - 2x + 8m = 0 \Leftrightarrow (x+2)[mx^2 - (2m+1)x + 4m] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x + 2 = 0 & \\ mx^2 - (2m+1)x + 4m = 0 & (1) \end{array}\right.$$

Để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt thì (1) có hai nghiệm phân biệt khác -2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = -12m^2 + 4m + 1 > 0 \\ 4m + (2m+1)2 + 4m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\frac{1}{6} < m < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Với giá trị nào của x thì biểu thức $B = \log_2(2x - 1)$ xác định?

(A) $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. (B) $x \in (-1; +\infty)$. (C) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. **D** $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Để biểu thức $B = \log_2(2x - 1)$ xác định thì $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 34. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x+1)^{\frac{1}{3}}$ là

(A) $\mathscr{D} = (-\infty; -1)$. (B) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. (C) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. **D** $\mathscr{D} = (-1; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y = (x+1)^{\frac{1}{3}}$ xác định khi $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(-\infty; +\infty)$, có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề sau đây đúng?

A Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.

(B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

(C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ nên đồng biến trên $(-\infty; -3)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, chiều cao của chóp bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A 60°. **B** 75°. **C** 30°. **D** 45°.

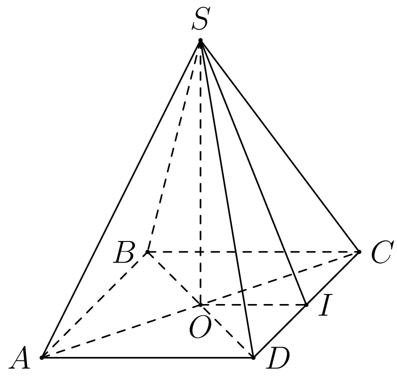
Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$, hạ $OI \perp CD$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right) = \widehat{SIO} = \alpha$

Ta có $OI = \dfrac{a}{2}; SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{SO}{OI} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SIO} = \alpha = 60^\circ$



Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Trên đồ thị của hàm số $y = \dfrac{2x-5}{3x-1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ là các số nguyên?

A Vô số. **B** 4. **C** 0. **D** 2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

Ta có $y = \dfrac{2x-5}{3x-1} = 1 - \dfrac{x+4}{3x-1}$.

Để $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x+4) \vdots (3x-1) \Rightarrow (3x-1+13) \vdots (3x-1) \Rightarrow 13 \vdots (3x-1)$

$$\text{Nên } \left[\begin{array}{l} 3x-1=1 \\ 3x-1=-1 \\ 3x-1=13 \\ 3x-1=-13 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{3} \text{ (loại)} \\ x=0 \\ x=\dfrac{14}{3} \text{ (loại)} \\ x=-4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=5 \\ y=1 \end{array}\right.$$

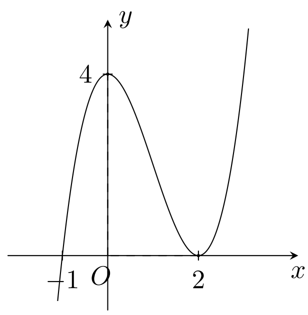
Vậy trên đồ thị hàm số có hai điểm có tọa độ nguyên là $(0;5)$ và $(-4;1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trên khoảng $(-1;3)$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A 0. **B** 2. **C** 3. **D** 1.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có trên khoảng $(-1;3)$ có hai điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Giải bất phương trình $\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x)$ được tập nghiệm là $(a; b)$. Hãy tính tổng $S = a + b$.

(A) $S = \frac{8}{3}$. (B) $S = \frac{28}{15}$. (C) $S = \frac{11}{5}$. (D) $S = \frac{31}{6}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 6-5x > 0 \\ 3x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{6}{5} \\ x > \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} < x < \frac{6}{5}$.

$\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x) \Leftrightarrow 3x-2 > 6-5x \Leftrightarrow x > 1$.

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $1 < x < \frac{6}{5} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{6}{5}. \end{cases}$

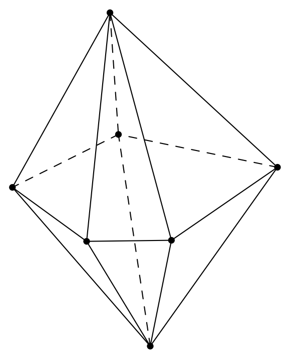
Vậy $S = a + b = 1 + \frac{6}{5} = \frac{11}{5}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 40.

Hình đa diện ở hình bên có bao nhiêu mặt?

(A) 8. (B) 12. (C) 10. (D) 11.



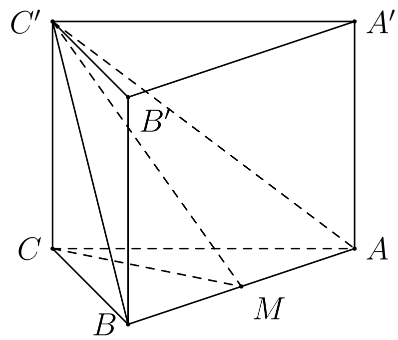
Lời giải.

Chọn đáp án (C) □

Câu 41. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $S_{ABC} = \sqrt{3}$. Mặt phẳng (ABC') tạo với đáy một góc α. Tính $\cos\alpha$ để $V_{ABC.A'B'C'}$ lớn nhất.

(A) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. (B) $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. (C) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. (D) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



Ta có $AB = a$. Gọi M là trung điểm của AB

$\Rightarrow \widehat{C'MC} = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{MC}{MC'} \Rightarrow CC' = MC'\sin\alpha$

$S_{\Delta ABC'} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{AB \cdot C'M}{2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{a \cdot CM}{\cos\alpha} = 2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \frac{a \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos\alpha} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{a^2}{4}$

$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot CC' = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot MC \cdot \tan\alpha$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{\sqrt{3}}{2}a\tan\alpha = \frac{3}{8}a^3\sqrt{\frac{16}{a^4} - 1} = \frac{3}{8}\sqrt{16a^2 - a^6}$

Xét $f(x) = 16x - x^3 (0 \le x \le 4)$, ta có $f'(x) = 16 - 3x^2 (0 \le x \le 4)$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 16 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{\sqrt{3}}; f(0) = 0; f(4) = 0; f\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{128}{3\sqrt{3}}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}$ lớn nhất khi $a = \sqrt{x} = \dfrac{2}{\sqrt[4]{3}}$ nên $\cos\alpha = \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{4}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Từ một hộp có 1000 thẻ được đánh số từ 1 đến 1000. Chọn ngẫu nhiên ra hai thẻ. Tính xác suất để chọn được hai thẻ sao cho tổng của các số ghi trên hai thẻ nhỏ hơn 700.

A $\dfrac{243250}{\mathrm{C}^2_{1000}}$. **B** $\dfrac{121801}{\mathrm{C}^2_{1000}}$. **C** $\dfrac{243253}{\mathrm{C}^2_{1000}}$. **D** $\dfrac{121975}{\mathrm{C}^2_{1000}}$.

Lời giải.

Gọi A là biến cố chọn được hai thẻ sao cho tổng của các số ghi trên hai thẻ nhỏ hơn 700.

Ta có $n_\Omega = \mathrm{C}^2_{1000}$

Gọi số thứ nhất là a; số thứ hai là b, ta có

$a = 1 \Rightarrow b = 2 \to 698 \Rightarrow n_b = 697$

$a = 2 \Rightarrow b = 1; 3 \to 697 \Rightarrow n_b = 696$

$a = 3 \Rightarrow b = 1; 2; 4 \to 696 \Rightarrow n_b = 695$

...

$a = 698 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow n_b = 1$

$n_A = 697 + 696 + 695 + \cdots + 1 = \dfrac{698 \cdot 697}{2} = 243253$

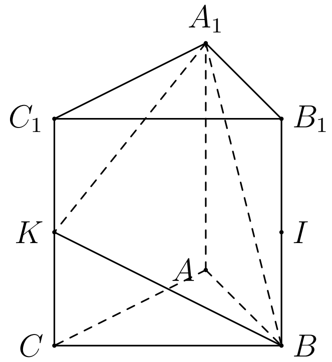
Vậy $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{243253}{\mathrm{C}^2_{1000}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $AA_1 = 2a\sqrt{5}$ và $\widehat{BAC} = 120°$. Gọi K, I lần lượt là trung điểm của các cạnh CC_1, BB_1. Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (A_1BK) bằng

A $a\sqrt{15}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{5}}{6}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{15}}{3}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.



Ta có $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos 120°} = a\sqrt{7}$

$A_1B = \sqrt{A_1A^2 + AB^2} = a\sqrt{21}$; $A_1K = \sqrt{A_1C_1^2 + C_1K^2} = 3a$;

$KB = \sqrt{KC^2 + CB^2} = 2a\sqrt{3}$

$d(I, (A_1BK)) = \dfrac{1}{2}d(B_1, (A_1BK)) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3V_{B_1A_1BK}}{S_{\Delta A_1BK}}$

Mà $V_{B_1A_1BK} = \dfrac{1}{2}V_{K.A_1B_1BA} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3}V_{ABC.A_1B_1C_1}$

$= \dfrac{1}{3} \cdot 2a\sqrt{5}\dfrac{1}{2}a \cdot 2a \cdot \sin 120° = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$

Diện tích tam giác A_1BK bằng

$S = \sqrt{p\left(p - 2a\sqrt{3}\right)(p - 3a)\left(p - a\sqrt{21}\right)} = 3a^2\sqrt{3}$ với $p = \dfrac{2a\sqrt{3} + 3a + a\sqrt{21}}{2}$

Vậy $\mathrm{d}\left(I, (A_1BK)\right) = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{\dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}}{3a^2\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

A 2007. B 2030. C 2005. D 2018.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 12x + m.$

Hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ $\Leftrightarrow m \leq -3x^2 + 12x, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \geq \max\limits_{(0;+\infty)} (-3x^2 + 12x) \Leftrightarrow m \geq 12.$

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $-2018 \leq m \leq 2018$ nên $m \in \{12, 13, 14, \cdots, 2018\}$.

Vậy có 2007 số nguên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Do thời tiết ngày càng khắc nghiệt và nhà cách xa trường học, nên một thầy giáo muốn đúng 5 năm nữa có 500 triệu đồng để mua ô tô đi làm. Để đạt nguyện vọng, thầy có ý định mỗi tháng dành ra một số tiền cố định gửi vào ngân hàng (hình thức lãi kép) với lãi suất $0,5\%$/tháng. Hỏi số tiền ít nhất cần dành ra mỗi tháng để gửi tiết kiệm là bao nhiêu (chọn đáp án gần nhất với số tiền thực)?

A 7.632.000. B 6.820.000. C 7.540.000. D 7.131.000.

Lời giải.

Gọi số tiền ít nhất mà thầy giáo cần dành ra mỗi tháng để gửi tiền tiết kiệm là x (đồng).

Số tiền tiết kiệm gửi vào ngân hàng sau 60 tháng là

$T_{60} = x\left(1{,}005^1 + 1{,}005^2 + \cdots + 1{,}005^{60}\right) = x \cdot 1{,}005 \cdot \dfrac{1{,}005^{60} - 1}{0{,}005}$

Theo đề bài ta có: $x \cdot 1{,}005 \cdot \dfrac{1{,}005^{60} - 1}{0{,}005} = 5 \cdot 10^8 \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \cdot 10^8 \cdot 0{,}005}{1{,}005\left(1{,}005^{60} - 1\right)} = 7130747.$

Chọn đáp án D □

Câu 46. Cho hàm số $y = x^4 - 2(1 - m^2)x^2 + m + 1$. Tìm tất các giá trị của tham số m để hàm số cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị lập thành một tam giác có diện tích lớn nhất.

A $m = \dfrac{1}{2}$. B $m = 0$. C $m = 1$. D $m = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

Ta có $y' = 4x^3 - 4(1 - m^2)x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 1 - m^2 \end{array}\right.$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 = 1 - m^2$ có hai nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m^2 > 0 \\ 1 - m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 1$

Khi đó gọi ba điểm cực trị là $A(0; 1+m)$, $B\left(\sqrt{1 - m^2}; m + 2m^2 - m^4\right)$, $C\left(-\sqrt{1 - m^2}; m + 2m^2 - m^4\right)$

Ta có $BC = |x_C - x_B| = 2\sqrt{1 - m^2}$; $\mathrm{d}(A, BC) = (1 - m^2)^2$

Lại có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot \mathrm{d}(A, BC) = (1 - m^2)^2 \sqrt{1 - m^2} \leq 1 \Rightarrow S_{\max} = 1$ khi $m = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x) = 2019\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}} + \sqrt{\mathrm{e}}\right)$. Tính giá trị biểu thức

$$A = f'(1) + f'(2) + \cdots + f'(2018).$$

Ⓐ 2018. **B** 1009. Ⓒ $\frac{2017}{2}$. Ⓓ $\frac{2019}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = f'(x) = 2019\dfrac{\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}} + \sqrt{\mathrm{e}}\right)'}{\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}} + \sqrt{\mathrm{e}}\right)} = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}} + \sqrt{\mathrm{e}}}$

Do đó

$$\begin{aligned} f'(x) + f'(2019 - x) &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}} + \sqrt{\mathrm{e}}} + \frac{\mathrm{e}^{\frac{2019-x}{2019}}}{\mathrm{e}^{\frac{2019-x}{2019}} + \sqrt{\mathrm{e}}} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}} + \sqrt{\mathrm{e}}} + \frac{\mathrm{e}^{1-\frac{x}{2019}}}{\mathrm{e}^{1-\frac{x}{2019}} + \sqrt{\mathrm{e}}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}} + \sqrt{\mathrm{e}}} + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e} + \sqrt{\mathrm{e}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}} + \sqrt{\mathrm{e}}} + \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\sqrt{\mathrm{e} + \mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}}} = 1 \end{aligned}$$

Bởi vậy $2A = [f'(1) + f'(2018)] + [f'(2) + f'(2017)] + \cdots + [f'(2018) + f'(1)] = 2018$

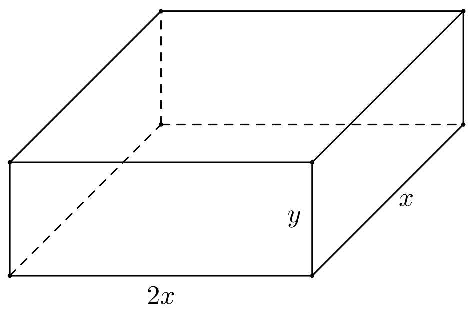
Nên $A = \dfrac{2018}{2} = 1009$.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Một công ty cần xây dựng một cái kho chứa hàng dạng hình hộp chữ nhật (có nắp) bằng vật liệu gạch và xi măng có thể tích 2000 m^3, đáy là hình chữ nhật có chiều dài bằng hai lần chiều rộng. Người ta cần tính toán sao cho chi phí xây dựng là thấp nhất, biết giá xây dựng là 500.000 đồng/m^2. Khi đó chi phí thấp nhất gần với số nào dưới đây?

Ⓐ 495969987. Ⓑ 495279087. Ⓒ 495288088. **D** 495289087.

Lời giải.



Gọi kích thước đáy của cái kho cần xây dựng là x(m) và $2x$ (m), chiều cao của kho là y (m), (với $x, y > 0$)

Ta có $V = 2x^2y = 2000 \Rightarrow y = \dfrac{1000}{x^2}$ (m)

Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật là

$s_{tp} = 2\left(x\cdot 2x + x\cdot y + 2x\cdot y\right) = 4x^2 + 6xy = 4x^2 + \dfrac{6000}{x}$

$= 4x^2 + \dfrac{3000}{x} + \dfrac{3000}{x} \geq 3\sqrt[3]{4x^2\cdot\dfrac{3000}{x}\cdot\dfrac{3000}{x}} = 300\sqrt[3]{36}$ (m^2)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow 4x^2 = \dfrac{3000}{x} \Leftrightarrow 4x^3 - 3000 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{3000}{4}}$.

Chi phí xây dựng thấp nhất khi đó sấp sỉ là $300\cdot\sqrt[3]{36}\cdot 500000 \approx 495289087$ đồng.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Nếu phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt thì phương trình $2f(x)\cdot f''(x) = [f'(x)]^2$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

Ⓐ 1 nghiệm. **B** 4 nghiệm. Ⓒ 3 nghiệm. Ⓓ 2 nghiệm.

Lời giải.

Xét đa thức bậc 4 $g(x) = 2f(x)f''(x) - (f'(x)')^2$.

Ta có $g'(x) = 2f(x)f'''(x) = 12f(x)$.

Vì $g(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt nên $g(x) = 0$ có tối đa bốn nghiệm.

Vậy phương trình $2f(x)f''(x) = [f'(x)]^2$ có tối đa bốn nghiệm.
Giả sử $x_1 < x_2 < x_3$ là ba nghiệm của $f(x) = 0$.
Mà các nghiệm này đều phân biệt nên ta có $f'(x_1), f'(x_2), f'(x_3)$ đều khác 0.
Ta có

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(x_1)$	$\nearrow$	$g(x_2)$	$\searrow$	$g(x_3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Nhận thấy:

$$\begin{aligned}
g(x_1) &= 2f(x_1)f''(x_1) - (f'(x_1))^2 = -(f'(x_1))^2 < 0\\
g(x_2) &= 2f(x_2)f''(x_2) - (f'(x_2))^2 = -(f'(x_2))^2 < 0\\
g(x_3) &= 2f(x_3)f''(x_3) - (f'(x_3))^2 = -(f'(x_3))^2 < 0
\end{aligned}$$

Nên từ bảng biến thiên suy ra phương trình $g(x) = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt.
Do đó phương trình $2f(x)f''(x) = [f'(x)]^2$ có đúng hai nghiệm phân biệt.
Chọn đáp án B □

Câu 50. Tìm m để hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng $3\sqrt{2}$

A $m = 2\sqrt{2}$. B $m = \sqrt{2}$. C $m = -\sqrt{2}$. D $m = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.
Tập xác định của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2} + m$ là $\mathscr{D} = [-2; 2]$.
Ta có $y' = \dfrac{\sqrt{4 - x^2} - x}{\sqrt{4 - x^2}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Tính được $y\left(\sqrt{2}\right) = m + 2\sqrt{2}$, $y(-2) = m - 2$ và $y(2) = m + 2$.
Để ý rằng $m - 2 < m + 2 < m + 2\sqrt{2}$ nên $\max\limits_{[-2;2]} y = m + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$.
Chọn đáp án B □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. D	3. B	4. A	5. C	6. B	7. C	8. C	9. D	10. C
11. D	12. C	13. A	14. A	15. C	16. A	17. A	18. D	19. B	20. D
21. B	22. B	23. C	24. D	25. A	26. B	27. C	28. A	29. A	30. C
31. B	32. C	33. D	34. D	35. A	36. A	37. D	38. B	39. C	40. C
41. B	42. C	43. B	44. A	45. D	46. B	47. B	48. D	49. B	50. B

46 ĐỀ THI THỬ THPT ĐOÀN THƯỢNG - HẢI DƯƠNG - LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3\cos x - 1 = 0$ trên đoạn $[0; 4\pi]$ là

(A) $\dfrac{15\pi}{2}$. (B) 6π. (C) $\dfrac{17\pi}{2}$. (D) 8π.

Lời giải.

Trường hợp 1: $x = \arccos\dfrac{1}{3} + k2\pi$.

Ta có $0 \leqslant \arccos\dfrac{1}{3} + k2\pi \leqslant 4\pi \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2\pi}\arccos\dfrac{1}{3} \leqslant k \leqslant \dfrac{1}{2\pi}\left(4\pi - \arccos\dfrac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 0 \leqslant k \leqslant 1$.

Khi đó các nghiệm là $x = \arccos\left(\dfrac{1}{3}\right); x = \arccos\left(\dfrac{1}{3}\right) + 2\pi$.

Trường hợp 2: $x = -\arccos\dfrac{1}{3} + k2\pi$.

Ta có $0 \leqslant -\arccos\dfrac{1}{3} + k2\pi \leqslant 4\pi \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi}\arccos\dfrac{1}{3} \leqslant k \leqslant \dfrac{1}{2\pi}\left(4\pi + \arccos\dfrac{1}{3}\right) \Leftrightarrow k \in \{1; 2\}$.

Khi đó các nghiệm là $x = -\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right) + 2\pi; x = -\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right) + 4\pi$.

Vậy tổng các nghiệm là 8π.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Có bao nhiêu cách lấy ra 3 phần tư tùy ý từ một tập hợp có 12 phần tử

(A) 3^{12}. (B) 12^3. (C) A_{12}^3. (D) C_{12}^3.

Lời giải.

lấy ra 3 phần tư tùy ý từ một tập hợp có 12 phần tử là C_{12}^3.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Có 16 tấm bìa ghi 16 chữ "HỌC", "ĐỂ", "BIẾT", "HỌC", "ĐỂ", "LÀM", "HỌC", "ĐỂ", "CHUNG", "SỐNG", "HỌC", "ĐỂ", "TỰ", "KHẲNG", "ĐỊNH", "MÌNH". Một người xếp ngẫu nhiên 16 tấm bìa cạnh nhau. Tính xác suất để xếp các tấm bìa được dòng chữ "HỌC ĐỂ BIẾT HỌC ĐỂ LÀM HỌC ĐỂ CHUNG SỐNG HỌC ĐỂ TỰ KHẲNG ĐỊNH MÌNH".

(A) $\dfrac{8}{16!}$. (B) $\dfrac{4!}{16!}$. (C) $\dfrac{1}{16!}$. (D) $\dfrac{4!.4!}{16!}$.

Lời giải.

Sắp xếp ngẫu nhiên 16 tấm bìa $n(\Omega) = 16!$.

Do có 4 tấm bìa "HỌC" và "ĐỂ" nên số cách sắp xếp theo yêu cầu bài toán là $n(A) = 4!.4!$.

Vậy xác suất là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{4!.4!}{16!}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 5 học sinh lớp 12C trên một bàn tròn. Tính xác suất để các học sinh cùng lớp luôn ngồi cạnh nhau.

(A) $\dfrac{1}{1260}$. (B) $\dfrac{1}{126}$. (C) $\dfrac{1}{28}$. (D) $\dfrac{1}{252}$.

Lời giải.

Kí hiệu học sinh lớp 12A, 12B, 12C lần lượt là A, B, C.

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = 9!$.

Gọi E là biến cố các học sinh cùng lớp luôn ngồi cạnh nhau. Ta có các bước sắp xếp như sau:

- Xếp 5 học sinh lớp 12C ngồi vào bàn sao cho các học sinh này ngồi sát nhau. Số cách sắp xếp là 5!.
- Xếp 3 học sinh lớp 12B vào bàn sao cho các học sinh này ngồi sát nhau và sát nhóm của học sinh 12C. Số cách sắp xếp là $3! \cdot 2$.
- Xếp 2 học sinh lớp 12A vào hai vị trí còn lại của bàn. Số cách sắp xếp là 2!.

Số phần tử thuận lợi cho biến cố E là $n(E) = 5! \cdot 3! \cdot 2 \cdot 2!$.

Xác suất của A là $\mathrm{P}(E) = \dfrac{n(E)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{126}$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{15} trong khai triển $(2x^3 - 3)^n$ thành đa thức, biết n là số nguyên dương thỏa mãn hệ thức $\mathrm{A}_n^3 + \mathrm{C}_n^1 = 8\mathrm{C}_n^2 + 49$.

A 6048. **B** 6480. **C** 6408. **D** 4608.

Lời giải.

Điều kiện: $n \geqslant 3, n \in \mathbb{N}$.

Ta có $\mathrm{A}_n^3 + \mathrm{C}_n^1 = 8\mathrm{C}_n^2 + 49 \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + n = 8.\dfrac{n(n-1)}{2} + 49 \Leftrightarrow n^3 - 7n^2 + 7n - 49 = 0$
$\Leftrightarrow (n-7)(n^2+7) = 0 \Leftrightarrow n = 7$.

Với $n = 7$ ta có khai triển $(2x^3 - 3)^7 = \sum\limits_{k=0}^{7} \mathrm{C}_7^k \cdot (2x^3)^k \cdot (-3)^{7-k} = \sum\limits_{k=0}^{7} \mathrm{C}_7^k \cdot 2^k \cdot (-3)^{7-k} \cdot x^{3k}$.

Xét hạng tử x^{15} suy ra $3k = 15$ hay $k = 5$.

Từ đó hệ số của hạng tử x^{15} bằng $\mathrm{C}_7^5.2^5.(-3)^2 = 6048$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Tính giới hạn $P = \lim\limits_{x \to -\infty} x\sqrt{\dfrac{x^{2017} - 1}{x^{2019}}}$.

A $P = -\infty$. **B** $P = 1$. **C** $P = -1$. **D** $P = 0$.

Lời giải.

Ta có $P = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{|x|}\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^{2017}}} = \lim\limits_{x \to -\infty} (-1)\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^{2017}}} = -1$.

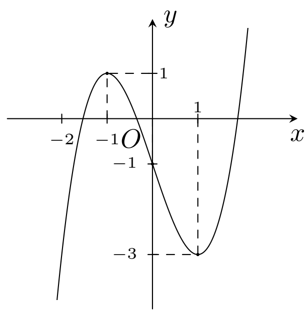
Chọn đáp án C □

Câu 7. Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-2; 1)$. **B** $(-1; 2)$.

C $(-2; -1)$. **D** $(-1; 1)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị, hàm số đồng biến trên $(-2; -1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Kết luận nào sau đây về tính đơn điệu của hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ là đúng?

A Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
B Hàm số luôn luôn đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
C Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
D Hàm số luôn luôn nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Cho hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A Hàm số có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.
B Hàm số có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.
C Hàm số có 1 điểm cực trị.
D Hàm số có 2 điểm cực trị.

Lời giải.

Do hàm số trùng phương có hệ số $a > 0$ và $ab < 0$, suy ra hàm số có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Trong các hàm số sau đây hàm số nào có cực trị?

A $y = \sqrt{x}$.
B $y = x^4 - 2x^2 + 3$.
C $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 3x - 1$.
D $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$.

Lời giải.

Do hàm số trùng phương $y = x^4 - 2x^2 + 3$ có hệ số $a = 1 > 0$ và $ab = -2 < 0$, suy ra hàm số có cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$, mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

A $f(x)$ có giá trị cực đại là -3.
B $f(x)$ đạt cực đại tại $x = -2$.
C $M(-2; -2)$ là điểm cực đại.
D $M(0; 1)$ là điểm cực tiểu.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Đạo hàm $y' = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$.
- $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \Rightarrow y = -3 \\ x = 0 \Rightarrow y = 1 \end{array}\right.$
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Vậy mệnh đề sai là $M(-2;-2)$ là điểm cực đại.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Gọi M, N là các điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 - 8x^2 + 3$. Độ dài đoạn thẳng MN bằng

(A) 10. (B) 6. (C) 8. (D) 4.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm $y' = x^3 - 16x$.
- $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ x = \pm 4 \Rightarrow y = -61 \end{array}\right.$
- Giới hạn $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = +\infty$.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-61	$\nearrow$	3	$\searrow$	-61	$\nearrow$	$+\infty$

- Ta có $M(-4;-61)$, $N(4;-61)$ suy ra $\overrightarrow{MN} = (8;0)$ nên $MN = 8$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x+2)^3(2x-3)$. Tìm số điểm cực trị của $f(x)$.

(A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -2 \vee x = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$.

(A) $-\dfrac{1}{3}$. (B) -5. (C) 5. (D) $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-8}{(x-3)^2} < 0, \forall x \in [0;2]$ mà $y(0) = \dfrac{1}{3}$, $y(2) = -5$.

Vậy $\max\limits_{x\in[0;2]} y = y(0) = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Gọi M, N lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ trên $[1;2]$. Khi đó tổng $M + N$ bằng

(A) 2. (B) -4. (C) 0. (D) -2.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$.

Do $f(1) = -1$, $f(2) = -3$ suy ra $\max\limits_{x\in[1;2]} y = y(1) = -1$ và $\min\limits_{x\in[1;2]} y = y(2) = -3$.

Vậy $M + N = -4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $\lim\limits_{x \to (-3)^+} f(x) = -5$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3$ và có bảng biến thiên như sau

x	-3		-1		1		2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-5	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3

Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

(A) Hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(-3; 2)$.

(B) Giá trị cực đại của hàm số bằng 0.

(C) Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $(-3; 2)$ bằng 0.

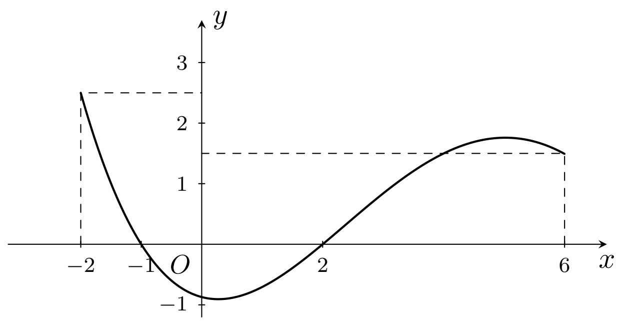
(D) Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -2.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $(-3; 2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ bên. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.



(A) $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = f(-2)$.

(B) $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = f(6)$.

(C) $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = \max\{f(-1), f(6)\}$.

(D) $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = f(-1)$.

Lời giải.

x	-2		-1		2		6
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(6)$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy

- Hàm số đồng biến trên $(-2; -1)$ và $(2; 6)$ do $f'(x) > 0$, suy ra
$$f(-1) > f(-2) \text{ và } f(6) > f(2) \ (1).$$
- Hàm số nghịch biến trên $(-1; 2)$ do $f'(x) < 0$, suy ra
$$f(-1) > f(2) \ (2).$$

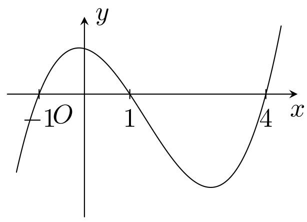
Từ (1), (2) suy ra $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = \max\{f(-2), f(-1), f(2), f(6)\} = \max\{f(-1), f(6)\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$.

Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Hàm số $y = f(x^2)$ có bao nhiêu khoảng nghịch biến.



Ⓐ 5. **B** 3. Ⓒ 4. Ⓓ 2.

Lời giải.

Ta có $y' = [f(x^2)]' = 2x.f'(x^2)$. Ta có

$$y' < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 0\\ f'(x^2) < 0\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0\\ f'(x^2) > 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 0\\ x^2 < -1 \vee 1 < x^2 < 4\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0\\ -1 < x^2 < 1 \vee x^2 > 4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1 < x < 2\\ x < -2 \vee -1 < x < 0\end{array}\right.$$

Vậy hàm số $y = f(x^2)$ có 3 khoảng nghịch biến.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Cho hàm số $y = \dfrac{x - m}{x + 2}$ thỏa mãn $\min\limits_{[0;1]} y + \max\limits_{[0;1]} y = \dfrac{7}{6}$. Vậy m thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

Ⓐ $(-\infty; -1)$. **B** $(-2; 0)$. Ⓒ $(0; 2)$. Ⓓ $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số liên tục và đơn điệu trên đoạn $[0; 1]$.

Do đó $\min\limits_{[0;1]} y + \max\limits_{[0;1]} y = \dfrac{7}{6} \Leftrightarrow f(0) + f(1) = \dfrac{7}{6} \Leftrightarrow m = -1$

Chọn đáp án B □

Câu 20. Xét đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 + 3ax + b$ với a, b là các số thực. Gọi M, N là hai điểm phân biệt thuộc (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại hai điểm đó có hệ số góc bằng 3. Biết khoảng cách từ gốc tọa độ tới đường thẳng MN bằng 1, giá trị nhỏ nhất của $a^2 + b^2$ bằng

Ⓐ $\dfrac{3}{2}$. Ⓑ $\dfrac{4}{3}$. **C** $\dfrac{6}{5}$. Ⓓ $\dfrac{7}{6}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 3a$.

Tiếp tuyến tại M và N của (C) có hệ số góc bằng 3 nên tọa độ của M và N thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases}3x^2 + 3a = 3 & (1)\\ y = x^3 + 3ax + b & (2).\end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow x^2 = 1 - a$. (1) có hai nghiệm phân biệt nên $a < 1$.

Từ (2) $\Rightarrow y = x(1 - a) + 3ax + b$ hay $y = (2a + 1)x + b$.

Tọa độ M và N thỏa mãn phương trình $y = (2a + 1)x + b$ nên phương trình đường thẳng MN là

$$y = (2a + 1)x + b \Leftrightarrow (2a + 1)x - y + b = 0.$$

Ta có

$$d\left(O, MN\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{|b|}{\sqrt{\left(2a+1\right)^2+1}} = 1 \Leftrightarrow b^2 = 4a^2+4a+2 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 5a^2+4a+2.$$

Xét $f\left(a\right) = 5a^2+4a+2$ với $a < 1$. Ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{6}{5}$	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó a^2+b^2 có gia trị nhỏ nhất là $\dfrac{6}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Tìm tất cả các đường tiệm cận đứng của đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2-1}{3-2x-5x^2}$.

A $x = 1$ và $x = \dfrac{3}{5}$. B $x = -1$ và $x = \dfrac{3}{5}$. C $x = -1$. **D** $x = \dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

Ta có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-1; \dfrac{3}{5}\right\}$ và

$$\lim_{x\to(-1)^+} y = -\frac{19}{75} \text{ và } \lim_{x\to \frac{3}{5}^+} y = +\infty.$$

Do đó đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là $x = \dfrac{3}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Đồ thị hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?

A $y = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x+1}$. B $y = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. C $y = \dfrac{2x^2+1}{x}$. D $y = \sqrt{x^2-1}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x+1}$ với $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 0$.

Do đó đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x+1}$ có tiệm cận ngang $y = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{ax^2+1}}$ có đồ thị (C). Tìm a để đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đó cách đường tiếp tuyến của (C) một khoảng bằng $\sqrt{2}-1$.

A $a > 0$. B $a = 2$. C $a = 3$. **D** $a = 1$.

Lời giải.

Điều kiện cần để đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $a > 0$.

Khi đó đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $TCN\colon y = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm x_0 là $\Delta\colon y = \dfrac{1-ax_0}{\sqrt{ax_0^2+1}^3}(x-x_0)+\dfrac{x_0+1}{\sqrt{ax_0^2+1}}$.

Do $\mathrm{d}(TCN,\Delta)=\sqrt{2}-1 \Rightarrow TCN \,/\!/\, \Delta \Rightarrow 1-ax_0=0 \Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{a}$.

Khi đó $\mathrm{d}(TCN,\Delta)=\left|\sqrt{1+\dfrac{1}{a}}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right|=\sqrt{2}-1 \Leftrightarrow a=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm số nghiệm của phương trình $2|f(x)|-1=0$.

A. 0. B. 3. C. 4. D. 6.

Lời giải.

Ta có $2|f(x)|-1=0\ (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{1}{2} \\ f(x)=-\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình (1) có 6 nghiệm.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên mỗi nửa khoảng $(-\infty;-2]$ và $[2;+\infty)$, có bảng biến thiên như hình trên.

Tìm tập hợp các giá trị của m để phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $\left(\dfrac{7}{4};2\right)\cup(22;+\infty)$. B. $[22;+\infty)$.

C. $\left(\dfrac{7}{4};+\infty\right)$. D. $\left(\dfrac{7}{4};2\right]\cup[22;+\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, $f(x)=m$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \dfrac{7}{4}<m\le 2 \vee m\ge 22$.

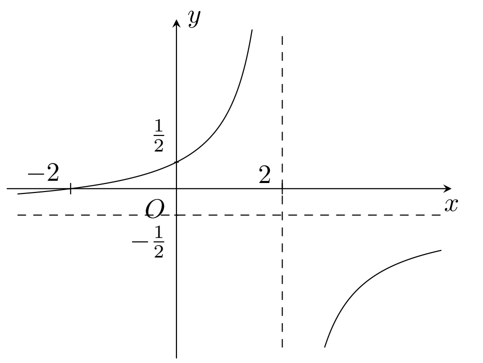
Chọn đáp án D □

Câu 26.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y=\dfrac{x+2}{-2x+4}$. B. $y=\dfrac{-x+1}{x-2}$.

C. $y=\dfrac{2x-3}{x+2}$. D. $y=\dfrac{-x+3}{2x-4}$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 2$ (loại phương án C), tiệm cận ngang $y = -\dfrac{1}{2}$ (loại phương án B) và đi qua điểm $(-2; 0)$ (loại phương án D).

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Bảng biến thiên trong hình dưới là của hàm số nào trong các hàm số đã cho?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-1

(A) $y = \dfrac{-x-3}{x-1}$. **(B)** $y = \dfrac{-x+3}{x-1}$. (C) $y = \dfrac{x+3}{x-1}$. (D) $y = \dfrac{-x-2}{x-1}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -1$ (loại phương án C và D) và nghịch biến trên mỗi khoảng xác định (loại phương án A).

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2 + 6mx + 4}{mx + 2}$ đi qua điểm $A(-1; 4)$.

(A) $m = 1$. **(B)** $m = -1$. (C) $m = \dfrac{1}{2}$. (D) $m = 2$.

Lời giải.

Ta có $A(-1; 4) \in (C)$: $\dfrac{2x^2 + 6mx + 4}{mx + 2} \Leftrightarrow \dfrac{2 - 6m + 4}{-m + 2} = 4 \Leftrightarrow -6m + 6 = -4m + 8 \Leftrightarrow m = -1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Biết hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$, $f(1) = -3$ và đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. Tính giá trị của hàm số tại $x = 3$.

(A) $f(3) = 81$. (B) $f(3) = 27$. **(C)** $f(3) = 29$. (D) $f(3) = -29$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ nên $f'(1) = 3 + 2a + b = 0 \Leftrightarrow 2a + b = -3$.

$f(1) = -3 \Leftrightarrow 1 + a + b + c = -3 \Leftrightarrow a + b + c = -4$.

Mặt khác đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 nên $2 = c$.

Ta có $\begin{cases} 2a + b = -3 \\ c = 2 \\ a + b + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -9. \\ c = 2 \end{cases}$

Thử lại $f''(x) = 6x + 6$, $f''(1) = 12 > 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

Vậy $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$ suy ra $f(3) = 29$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Cho hàm số $y = (x + 2)(x^2 - 3x + 3)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) (C) cắt trục hoành tại 3 điểm. **(B)** (C) cắt trục hoành tại 1 điểm.

Ⓒ (C) cắt trục hoành tại 2 điểm. Ⓓ (C) không cắt trục hoành.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox: $(x+2)(x^2-3x+3)=0 \Leftrightarrow x=-2$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Tìm tọa độ giao điểm I của đồ thị hàm số $y=4x^3-3x$ với đường thẳng $y=-x+2$.

Ⓐ $I(2;2)$. Ⓑ $I(2;1)$. Ⓒ $I(1;1)$. Ⓓ $I(1;2)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d: $4x^3-3x=-x+2 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1$.

Vậy tọa độ giao điểm $I(1;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y=x+1$ và đường cong $y=\dfrac{2x+4}{x-1}$. Khi đó hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng MN bằng

Ⓐ $-\dfrac{5}{2}$. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d: $\dfrac{2x+4}{x-1}=x+1 \Leftrightarrow x^2-2x-5=0$.

Do đó hoành độ trung điểm I là $x_I=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{b}{2a}=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+3$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=1$.

Ⓐ $y=2x-1$. Ⓑ $y=-x+2$. Ⓒ $y=-3x+3$. Ⓓ $y=-3x+4$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-6x$; với $x_0=1$ suy ra $y_0=1$ và $y'(1)=-3$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=1$ là $y=-3\cdot(x-1)+1 \Leftrightarrow y=-3x+4$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Đồ thị hàm số $y=x^2(x^2-3)$ tiếp xúc với đường thẳng $y=2x$ tại bao nhiêu điểm?

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải.

(C) tiếp xúc với $d \Leftrightarrow \begin{cases} x^4-3x^2=2x & (1) \\ 4x^3-6x=2 & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Ta có $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-1 & (\text{ thỏa } (1)) \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2} & (\text{ không thỏa } (1)). \end{array}\right.$

Chọn đáp án B □

Câu 35. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$ cắt đường thẳng $y=m-1$ tại 3 điểm phân biệt.

Ⓐ $1\le m<5$. Ⓑ $1<m<5$. Ⓒ $1<m\le 5$. Ⓓ $0<m<4$.

Lời giải.

⋆ Đạo hàm $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = 4 \\ x = 1 \Rightarrow y = 0. \end{array}\right.$

⋆ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, theo đề, ta có $0 < m - 1 < 4 \Leftrightarrow 1 < m < 5$.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số m sao cho hàm số $y = -x^4 + (2m - 3)\,x^2 + m$ nghịch biến trên đoạn $[1; 2]$?

A 1. **B** 2. **C** 4. **D** Vô số.

Lời giải.

Ta có $y' = x[-x^2 + 2\,(2m - 3)]$. Do đó, hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn $[1; 2]$ khi và chỉ khi

$$-x^2 + 2\,(2m - 3) \leq 0,\ \forall x \in [1; 2]\,.$$

Trường hợp 1: $\Delta' = 2\,(2m - 3) < 0$. Chỉ có giá trị $m = 1$ thỏa mãn. Trường hợp 2: $\begin{cases} \Delta' = 2\,(2m - 3) \geq 0 \\ -1 + 2\,(2m - 3) < 0 \end{cases}$.

Không có giá trị m nguyên dương thỏa mãn.

Vậy có duy nhất 1 giá trị $m = 1$ thỏa yêu cầu.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho hàm số $f\,(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa mãn $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; $a > 0$ và $\begin{cases} d > 2019 \\ 8a + 4b + 2c + d - 2019 \end{cases}$

Số cực trị của hàm số $y = |f\,(x) - 2019|$ bằng

A 3. **B** 2. **C** 1. **D** 5.

Lời giải.

Ta có hàm số $g\,(x) = f\,(x) - 2019$ là hàm số bậc ba liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do $a > 0$ nên $\lim\limits_{x \to -\infty} g\,(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g\,(x) = +\infty$.

Để ý $g\,(0) = d - 2019 > 0$; $g\,(2) = 8a + 4b + 2c + d - 2019 < 0$.

Nên phương trình $g\,(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt trên $\mathbb{R}$.

Khi đó đồ thị hàm số $g\,(x) = f\,(x) - 2019$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên hàm số $y = |f\,(x) - 2019|$ có đúng 5 cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho hàm số $y = 2x^4 - 8x^2$ có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số song song với trục hoành?

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Tiếp tuyến song song với trục hoành suy ra tiếp tuyến có hệ số góc $k = 0$.

Ta có $y' = 8x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \Rightarrow y = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} & \Rightarrow y = -8. \end{array}\right.$

Vậy có một tiếp tuyến là $y = -8$ (loại $y = 0$ do trùng với trục hoành).

Chọn đáp án B □

Câu 39. Có một tấm gỗ hình vuông cạnh 200 cm. Cắt một tấm gỗ có hình tam giác vuông, có tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng 120 cm từ tấm gỗ trên sao cho tấm gỗ hình tam giác vuông có diện tích lớn nhất. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ này là bao nhiêu?

A 40 cm. **B** $40\sqrt{3}$ cm. **C** 80 cm. **D** $40\sqrt{2}$ cm.

Lời giải.

Kí hiệu cạnh góc vuông $AB = x$, $0 < x < 60$.

Khi đó cạnh huyền $BC = 120 - x$, cạnh góc vuông kia là $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{120^2 - 240x}$.

Diện tích tam giác ABC là $S(x) = \dfrac{1}{2}x.\sqrt{120^2 - 240x}$.

Ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số này trên khoảng $(0; 60)$.

Ta có $S'(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{120^2 - 240x} + \dfrac{1}{2} \cdot x \cdot \dfrac{-240}{\sqrt{120^2 - 240x}} = \dfrac{14400 - 360x}{2\sqrt{120^2 - 240x}} \Rightarrow S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 40$.

Lập bảng biến thiên:

x	0		40		60
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	$S(0)$	$\nearrow$	$S(40)$	$\searrow$	$S(60)$

Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi $BC = 80$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ $\overrightarrow{MN} = k\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$?

A $k = 3$. **B** $k = \dfrac{1}{2}$. **C** $k = 2$. **D** $k = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} \end{cases}$

Suy ra $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

Do đó $k = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Cho hình tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 0$. **B** $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$.

C $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$. **D** $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.

Lời giải.

Do $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$ nên đáp án D sai.

Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{DC}$. Tìm x để các vectơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

(A) $x = -1$. (B) $x = -3$. **C** $x = -2$. (D) $x = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \left(3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{DC}\\ &= \left(3\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{DC} - 2\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{DB}\right) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{DC}\\ &= 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DB} + (x+3)\,\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + (x+3)\,\overrightarrow{DC}\\ &= 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + (x+2)\,\overrightarrow{DC}\end{aligned}$$

Ba vectơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 43. Hình lăng trụ tam giác đều không có tính chất nào sau đây

(A) Các cạnh bên bằng nhau và hai đáy là tam giác đều.

(B) Cạnh bên vuông góc với hai đáy và hai đáy là tam giác đều.

C Tất cả các cạnh đều bằng nhau.

(D) Các mặt bên là các hình chữ nhật.

Lời giải.

Cạnh đứng và cạnh đáy có thể không bằng nhau.

Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

A Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

(B) Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

(C) Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

(D) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Lời giải.

Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng có thể chéo nhau. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì chúng có thể cắt nhau. Ví dụ hai mặt bên của hình lập phương cùng vuông góc với mặt đáy. Do đó, khẳng định đúng là "*Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau*".

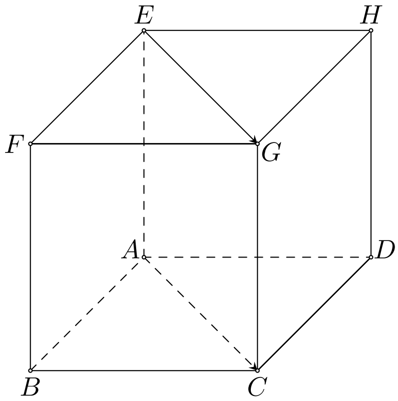
Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có các cạnh bằng a, khi đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$ bằng

(A) $a^2\sqrt{2}$. (B) $a^2\sqrt{3}$. **C** a^2. (D) $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos 45^\circ = a.a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = a^2$.



Chọn đáp án C ☐

Câu 46. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

A $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D** a.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng AB và CD. Khi đó, khoảng cách cần tìm bằng độ dài của đoạn thẳng MN.

Ta có $MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại C, mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng (ABC), $SA = SB$, I là trung điểm AB. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) là

A Góc $\widehat{SCA}$. **B** Góc $\widehat{SCI}$. **C** Góc $\widehat{ISC}$. **D** Góc $\widehat{SCB}$.

Lời giải.

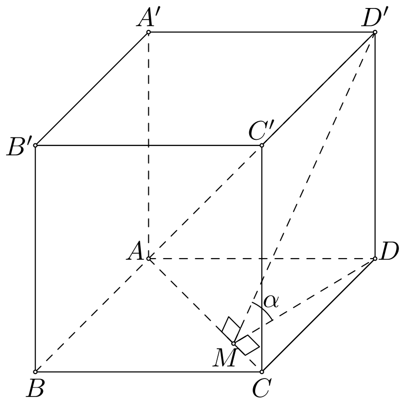
Ta có $(SI) \perp (AB)$ do $SA = SB$ và $(CI) \perp (AB)$ do tam giác ABC cân tại C. Suy ra $\widehat{SIC}$ là góc giữa 2 mặt phẳng (SAB) và (ABC). Do đó (CI) là hình chiếu của (SC) lên mặt phẳng (ABC). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SCI}$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 48. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, BC = a\sqrt{2}$, $AA' = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$ (tham khảo hình vẽ). Giá trị $\tan\alpha$ bằng

A $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

C 2. **D** $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.



Lời giải.

Ta có $(ACD') \cap (ABCD) = AC$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ $DM \perp AC$ thì $AC \perp D'M$. Suy ra $\left(\widehat{(ACD'), (ABCD)}\right) = \widehat{DMD'}$.

Tam giác ACD vuông tại D có $\dfrac{1}{DM^2} = \dfrac{1}{AD^2} + \dfrac{1}{DC^2} \Rightarrow DM = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Tam giác MDD' vuông tại D có $\tan\alpha = \dfrac{DD'}{MD} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Gọi O là tâm của đáy ABC, d_1 là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) và d_2 là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC). Tính $d = d_1 + d_2$.

A $d = \dfrac{2a\sqrt{2}}{11}$. **B** $d = \dfrac{2a\sqrt{2}}{33}$. **C** $d = \dfrac{8a\sqrt{2}}{33}$. **D** $d = \dfrac{8a\sqrt{2}}{11}$.

Lời giải.

Do tam giác ABC đều tâm O suy ra $AO \perp BC$ tại M là trung điểm của BC.

Ta có: $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, MO = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}, OA = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Từ giả thiết hình chóp đều suy ra $SO \perp (ABC)$, $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{3a^2 - \dfrac{3a^2}{9}} = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Dựng $OK \perp SM, AH \perp SM \Rightarrow AH//OK; \dfrac{OK}{AH} = \dfrac{OM}{AM} = \dfrac{1}{3}$.

Có $\begin{cases} BC \perp SO \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp OK$.

Có $\begin{cases} OK \perp SM \\ OK \perp BC \end{cases} \Rightarrow OK \perp (SBC), AH \perp (SBC)$ (do $AH//OK$).

Từ đó có $d_1 = d(A, (SBC)) = AH = 3OK; d_2 = d(O, (SBC)) = OK$. Trong tam giác vuông OSM có đường cao OK nên $\dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{36}{3a^2} + \dfrac{9}{24a^2} = \dfrac{99}{8a^2} \Rightarrow OK = \dfrac{2a\sqrt{2}}{33}$.

Vậy $d = d_1 + d_2 = 4OK = \dfrac{8a\sqrt{2}}{33}$.

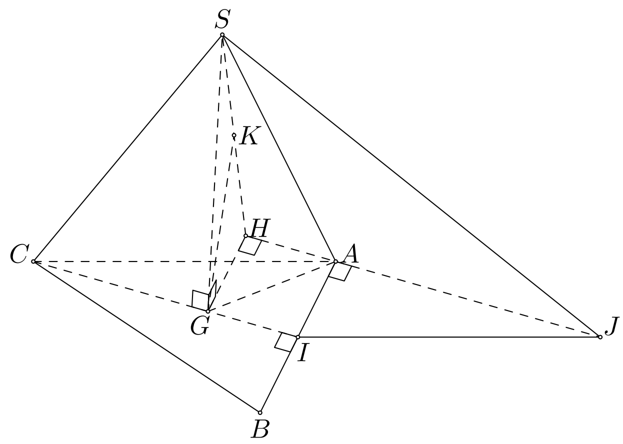
Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa đường thẳng SA với mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, khoảng cách giữa hai đường thẳng GC và SA bằng

A $\dfrac{a\sqrt{5}}{10}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{2}}{5}$. **D** $\dfrac{a}{5}$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} SA = SB = SC \\ GA = GB = GC \end{cases}$ nên SG là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Do đó $SG \perp (ABC)$.
Ta có: $(SA; (ABC)) = \widehat{SAG} = 60^\circ$.
Gọi I là trung điểm AB. Trong $(ABCD)$, kẻ AJ sao cho $ACIJ$ là hình bình hành.
Suy ra $CI // AJ$, do đó $CI // (SAJ)$.
Suy ra $d(GC; SA) = d(CI; (SAJ)) = d(G; (SAJ))$ (do $G \in CI$).

Trong $(ABCD)$: Kẻ $GH \perp AJ$ tại H.
Mà $SG \perp AJ$ (do (1)).
Nên $AJ \perp (SGH)$.
Suy ra $(SAJ) \perp (SGH)$.
Từ $(SAJ) \cap (SGH) = SH$. Trong (SGH) kẻ $(GK) \perp (SH)$ tại K, ta được $(GK) \perp (SAJ)$.
Do đó $d(G; (SAJ)) = GK$.
Ta có: $AG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ nên $SG = AG.\tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\tan 60^\circ = a$.
Mặt khác: $GH = AI = \dfrac{a}{2}$. Do đó $\dfrac{1}{GK^2} = \dfrac{1}{SG^2} + \dfrac{1}{GH^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{5}{a^2}$.

Suy ra $GK = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.
Vậy $d(GC; SA) = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.
Chọn đáp án B □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. D	3. D	4. B	5. A	6. C	7. C	8. A	9. A	10. B
11. C	12. C	13. B	14. D	15. B	16. C	17. C	18. B	19. B	20. C
21. D	22. A	23. D	24. D	25. D	26. A	27. B	28. B	29. C	30. B
31. C	32. B	33. D	34. B	35. B	36. A	37. D	38. B	39. C	40. B
41. D	42. C	43. C	44. A	45. C	46. A	47. B	48. A	49. C	50. B

47 ĐỀ THI THỬ SỞ GD&ĐT BÌNH PHƯỚC, LẦN 1 (2019)

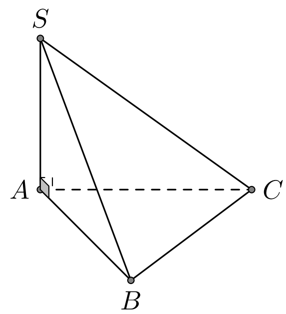
NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2$, tam giác ABC vuông cân tại A và $AB = 1$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) $\frac{1}{6}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) 1. (D) $\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Cho khối trụ có thể tích V và bán kính đáy R. Chiều cao của khối trụ đã cho bằng

(A) $\frac{V}{\pi R^2}$. (B) $\frac{V}{3\pi R^2}$. (C) $\frac{V}{R^2}$. (D) $\frac{V}{3R^2}$.

Lời giải.

Ta có $V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi R^2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu tiên $u_1 = \frac{1}{2}$, công bội $q = 2$. Giá trị của u_{25} bằng

(A) 2^{26}. (B) 2^{23}. (C) 2^{24}. (D) 2^{25}.

Lời giải.

Theo công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân ta có $u_{25} = u_1 \cdot q^{24} = \frac{1}{2} \cdot 2^{24} = 2^{23}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Với k và n là hai số nguyên dương tùy ý thỏa mãn $k \leq n$, mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $A_k^n = \frac{(n-k)!}{n!}$. (B) $A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$. (C) $A_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. (D) $A_k^n = \frac{n!}{k!}$.

Lời giải.

Theo công thức tính số chỉnh hợp chập k của n ta có $A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Với a và b là hai số dương tùy ý, $\log_2(a^3b^4)$ bằng

(A) $\frac{1}{3}\log_2 a + \frac{1}{4}\log_2 b$. (B) $3\log_2 a + 4\log_2 b$. (C) $2(\log_3 a + \log_4 b)$. (D) $4\log_2 a + 3\log_2 b$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(a^3b^4) = \log_2 a^3 + \log_2 b^4 = 3\log_2 a + 4\log_2 b$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(\alpha)\colon x - y + 2z - 3 = 0$ đi qua điểm nào dưới đây?

A $M\left(1;1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B** $N\left(1;-1;-\dfrac{3}{2}\right)$. **C** $P(1;6;1)$. **D** $Q(0;3;0)$.

Lời giải.

Xét điểm $M\left(1;1;\dfrac{3}{2}\right)$, ta có $1-1+2\cdot\dfrac{3}{2}-3=0$ đúng nên $M\in(\alpha)$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng nào sau đây nhận $\vec{u}=(2;1;1)$ là một véc-tơ chỉ phương?

A $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$. **B** $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

C $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{-1}$. **D** $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$.

Lời giải.

Xét đường thẳng $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{-1}$, có một véc-tơ chỉ phương là $(-2;-1;-1)=-(2;1;1)$ (thỏa đề bài).

Chọn đáp án C □

Câu 8. Tập nghiệm của phương trình $9^x-4\cdot 3^x+3=0$ là

A $\{0;1\}$. **B** $\{1\}$. **C** $\{0\}$. **D** $\{1;3\}$.

Lời giải.

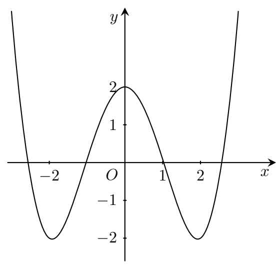
Ta có $9^x-4\cdot 3^x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x=1\\3^x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1.\end{array}\right.$

Chọn đáp án A □

Câu 9.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(0;1)$. **B** $(-1;0)$. **C** $(-2;-1)$. **D** $(-1;1)$.



Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Cho hàm $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

A $x=4$. **B** $x=3$. **C** $x=2$. **D** $x=1$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \sin x$ là

(A) $x^2 + \cos x + C$. (B) $x^2 - \cos x + C$. (C) $\dfrac{x^2}{2} - \cos x + C$. (D) $\dfrac{x^2}{2} + \cos x + C$.

Lời giải.

Cách 1: Dựa vào bảng nguyên hàm các hàm số cơ bản ta có $\displaystyle\int (x + \sin x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2} - \cos x + C$.

Cách 2: Lấy đạo hàm các hàm số trên ta được kết quả.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Cho $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\displaystyle\int_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x = -1$, khi đó $\displaystyle\int_{-1}^{2} [x + 2f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $\dfrac{5}{2}$. (B) $\dfrac{7}{2}$. (C) $\dfrac{17}{2}$. (D) $\dfrac{11}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $\displaystyle\int_{-1}^{2} [x + 2f(x) + 3g(x)]\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} x\mathrm{d}x + 2\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x + 3\int_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2} + 4 - 3 = \dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tâm mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ là điểm có tọa độ

(A) $(-2; -4; -6)$. (B) $(1; 2; 3)$. (C) $(-1; -2; -3)$. (D) $(2; 4; 6)$.

Lời giải.

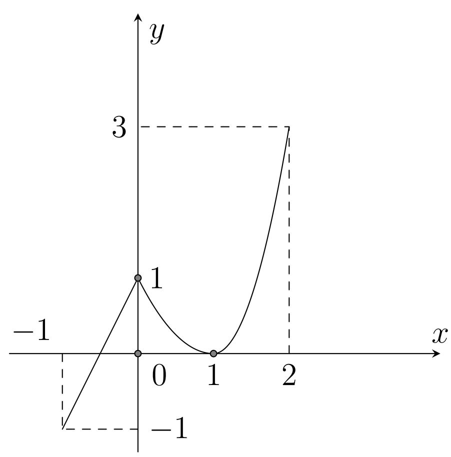
Viết lại phương trình mặt cầu ta có: $(S)\colon (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$, suy ra tâm mặt cầu có tọa độ $I(1; 2, 3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 2]$. Giá trị của $M \cdot m$ bằng

(A) 3. (B) -3. (C) 1. (D) -2.



Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1; 2]$. Từ đồ thị của hàm số đã cho ta thấy giá trị lớn nhất và nhỏ nhất hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 2]$ lần lượt là $M = 3$ và $m = -1$. Vậy $M \cdot n = -3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Số phức nào sau đây có điểm biểu diễn là $M(1;-2)$?

(A) $-1-2i$. (B) $1+2i$. (C) $1-2i$. (D) $-2+i$.

Lời giải.

$M(1;-2)$ là điểm biểu diễn cho số phức có phần thực bằng 1 và phần ảo bằng -2, tức là $1-2i$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Cho $\log_2 3 = a$ và $\log_2 5 = b$, khi đó $\log_{15} 8$ bằng

(A) $\dfrac{a+b}{3}$. (B) $\dfrac{1}{3(a+b)}$. (C) $3(a+b)$. (D) $\dfrac{3}{a+b}$.

Lời giải.

$\log_{15} 8 = 3\log_{15} 2 = \dfrac{3}{\log_2 15} = \dfrac{3}{\log_2 3 + \log_2 5} = \dfrac{3}{a+b}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Hàm số $y = (x^2 - x + 1)\mathrm{e}^x$ có đạo hàm là

(A) $y' = (2x-1)\mathrm{e}^x$. (B) $y' = (x^2-x)\mathrm{e}^x$. (C) $y' = (x^2+x)\mathrm{e}^x$. (D) $y' = (x^2+1)\mathrm{e}^x$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = (x^2 - x + 1)' \, \mathrm{e}^x + (x^2 - x + 1)\left(\mathrm{e}^x\right)' = (x^2 + x)\, \mathrm{e}^x$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a, các mặt bên hợp với mặt đáy một góc $60°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

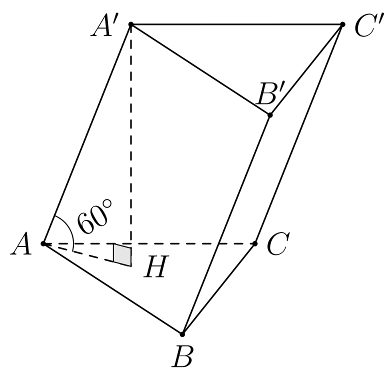
(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. (B) $\dfrac{3a^3}{8}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. (D) $\dfrac{a^3}{8}$.

Lời giải.

Kẻ $A'H \perp (ABC) \Rightarrow (A'A, (ABC)) = \widehat{A'AH} = 60°$.

Xet $\triangle AHA' : \sin 60° = \dfrac{A'H}{AA'} \Leftrightarrow A'H = AA' \sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = S_{\triangle ABC} \cdot A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a^3}{8}$.

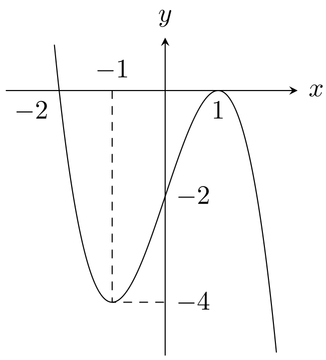


Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A) $y = x^3 - 3x - 2$. (B) $y = -x^3 + 3x + 2$.

(C) $y = x^3 - 3x + 2$. (D) $y = -x^3 + 3x - 2$.



Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy đây là đồ thị của hàm số bậc 3 có hệ số $a < 0$ và đồ thị cắt trục Oy tại điểm -2 nên hàm số có hệ số tự do bằng -2.

Do đó đáp án đúng là $y = -x^3 + 3x - 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ và $F(0) = \dfrac{201}{2}$. Giá trị $F\left(\dfrac{1}{2}\right)$ là

(A) $\dfrac{1}{2}\mathrm{e} + 200$. (B) $2\mathrm{e} + 200$. (C) $\dfrac{1}{2}\mathrm{e} + 50$. (D) $\dfrac{1}{2}\mathrm{e} + 100$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C$.

Theo đề bài ta có $F(0) = \dfrac{201}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^0 + C = \dfrac{201}{2} \Leftrightarrow C = 100$.

Vậy $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + 100 \Rightarrow F(2) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e} + 100$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(2;-4;-1)$ tới đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$ bằng

(A) $\sqrt{14}$. (B) $\sqrt{6}$. (C) $2\sqrt{14}$. (D) $2\sqrt{6}$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua $N(0;2;3)$, có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;-1;2)$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (-2;6;4)$ và $\left[\overrightarrow{MN}, \vec{u}\right] = (16;8;-4)$.

Vậy khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ là

$$\mathrm{d}(M,\Delta) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{MN}, \vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{336}}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{14}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

(A) 3. (B) 5. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \\ x = 4. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$			$\searrow$				$\nearrow$		

Vậy số điểm cực trị của hàm số đã cho là 2.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Tính diện tích mặt cầu (S) khi biết chu vi đường tròn lớn của nó bằng 4π.

A $S = 32\pi$. B $S = 16\pi$. C $S = 64\pi$. D $S = 8\pi$.

Lời giải.

Đường tròn lớn có bán kính bằng bán kính R của mặt cầu.

Do đó, chu vi của đường tròn lớn là $2\pi R = 4\pi \Leftrightarrow R = 2$.

Vậy diện tích của mặt cầu (S) là $4\pi R^2 = 16\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Tổng phần thực và phần ảo của số phức z thoả mãn $iz + (1-i)\overline{z} = -2i$ bằng

A 6. B -2. C 2. D -6.

Lời giải.

Số phức z có dạng $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có

$$\begin{aligned} iz + (1-i)\overline{z} = -2i &\Leftrightarrow i(x+yi) + (1-i)(x-yi) = -2i \\ &\Leftrightarrow x - 2y - yi = -2i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tổng phần thực và phần ảo của z là $x + y = 4 + 2 = 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Cho $a, b \in \mathbb{R}$ và thỏa mãn $(a+bi)i - 2a = 1 + 3i$, với i là đơn vị ảo. Giá trị $a - b$ bằng

A 4. B -10. C -4. D 10.

Lời giải.

Ta có $(a+bi)i - 2a = 1 + 3i \Leftrightarrow -2a - b + ai = 1 + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} -2a - b = 1 \\ a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -7. \end{cases}$

Vậy $a - b = 3 + 7 = 10$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$-$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	2

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng có phương trình

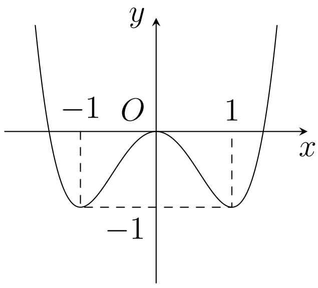
(A) $x = 2$. (B) $y = 2$. (C) $x = 1$. (D) $y = 1$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số không xác định tại $x = 1$ và $\lim\limits_{x \to 1^+} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^-} y = -\infty$ nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng có phương trình $x = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm của phương trình $2019f(x) + 1 = 0$ là

(A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $2019f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{1}{2019}$.

Số nghiệm phương trình $2019f(x) + 1 = 0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $d\colon y = -\dfrac{1}{2019}$ (cùng phương với trục Ox).

Dựa vào đồ thị như hình vẽ ta có d cắt đồ thị tại 4 điểm phân biệt.

Vậy phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x + 1) < 2$ là

(A) $\left[-\dfrac{1}{3}; 1\right)$. (B) $\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$. (C) $\left(-\dfrac{1}{3}; 1\right)$. (D) $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

ĐK: $x > -\dfrac{1}{3}$

$$\log_2(3x + 1) < 2 \Leftrightarrow 3x + 1 < 4 \Leftrightarrow x < 1.$$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là $-\dfrac{1}{3} < x < 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\left(-\dfrac{1}{3}; 1\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3; -2; 5)$, $N(-1; 6; -3)$. Mặt cầu đường kính MN có phương trình là

(A) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 6$. (B) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 6$.

(C) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 36$. (D) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 36$.

Lời giải.

Tâm I của mặt cầu là trung điểm đoạn $MN \Rightarrow I\,(1;2;1)$.

Bán kính mặt cầu $R = \dfrac{MN}{2} = \dfrac{\sqrt{(-1-3)^2+(6+2)^2+(-3-5)^2}}{2} = 6$.

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2 = 36$.

Chọn đáp án D □

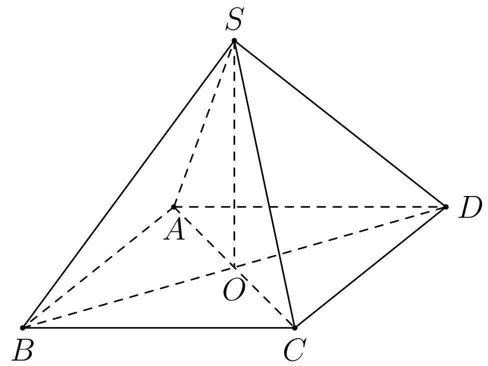
Câu 30. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a, tam giác ABD đều, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = 2a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D** $a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $h = SO = 2a$, $S = S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}Sh = \dfrac{1}{3}\cdot S_{ABCD}\cdot SO = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}\cdot 2a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án B □

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$?

A $m \in (-\infty;-5)$. **B** $m \in [5;2)$. **C** $m \in (2;+\infty)$. **D** $m \in (-\infty;2]$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 - 4(m-1)x$.

- **Trường hợp 1**: $m \leq 1$

  $\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

  Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

  Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $(1;3)$.

- **Trường hợp 2**: $m > 1$

  $\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m-1}. \end{array}\right.$

  Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{m-1}$		0		$\sqrt{m-1}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-\sqrt{m-1})$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(\sqrt{m-1})$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy để hàm số đồng biến trên $(1;3) \Rightarrow \sqrt{m-1} \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 2$.

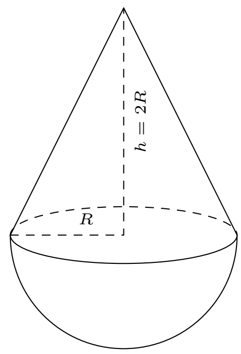
Suy ra $m \in (1;2]$ thì hàm số đồng biến trên $(1;3)$.

Vậy $m \in (-\infty;1] \cup (1;2] = (-\infty;2]$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $(1;3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 32.

Một đồ vật được thiết kế bởi một nửa khối cầu và một khối nón úp vào nhau sao cho đáy của khối nón và thiết diện của nửa mặt cầu chồng khít lên nhau như hình vẽ bên. Biết khối nón có đường cao gấp đôi bán kính đáy, thể tích của toàn bộ khối đồ vật bằng 36π cm^3. Diện tích bề mặt của toàn bộ đồ vật đó bằng



A $\pi(\sqrt{5}+3)$ cm^2.
B $9\pi(\sqrt{5}+2)$ cm^2.
C $9\pi(\sqrt{5}+3)$ cm^2.
D $\pi(\sqrt{5}+2)$ cm^2.

Lời giải.

Ta có thể tích của toàn bộ đồ vật V bằng tổng thể tích khối nón V_1 và nữa thể tích khối cầu V_2.

$\Rightarrow V = V_1 + V_2 = \dfrac{1}{3} \cdot \pi r^2 h + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{2}{3}\pi r^3 + \dfrac{2}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \Leftrightarrow r = 3$ cm.

$\Rightarrow$ đường sinh của khối nón $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{5r^2} = r\sqrt{5}$.

Diện tích bề mặt toàn bộ đồ vật S bằng tổng diện tích xung quanh khối nón S_1 và nữa diện tích xung quanh khối cầu S_2.

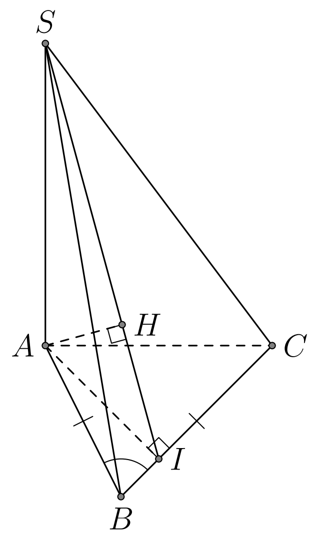
$\Rightarrow S = S_1 + S_2 = \pi r l + \dfrac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 = \pi r^2\sqrt{5} + 2\pi r^2 = \pi r^2(\sqrt{5}+2) = \pi \cdot 3^2(\sqrt{5}+2) = 9\pi(\sqrt{5}+2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3a$ và $SA \perp (ABC)$. Biết $AB = BC = 2a$ và $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A $\dfrac{3a}{2}$. **B** $\dfrac{a}{2}$. **C** a. **D** $2a$.

Lời giải.



Gọi I là hình hình chiếu vuông góc của A trên BC, ta có $AI \perp BC$. (1)

Mặt khác $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SIA)$. (3)

Gọi H là hình hình chiếu vuông góc của A trên SI, ta có $AH \perp SI$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $AH \perp (SBC)$ nên khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là AH.

Xét tam giác BIA vuông tại I, ta có

$$AI = AB \cdot \sin 120^\circ = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Xét tam giác SAI vuông tại A, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AI^2} \Rightarrow AH = \sqrt{\frac{AS^2 \cdot AI^2}{AS^2 + AI^2}} = \sqrt{\frac{(3a)^2 \cdot (a\sqrt{3})^2}{(3a)^2 + (a\sqrt{3})^2}} = \frac{3a}{2}.$$

Vậy khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{3a}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) \cdot g(x)$ biết $F(1) = 3$, biết $\int f(x)\mathrm{d}x = x + 2018$ và $\int g(x)\mathrm{d}x = x^2 + 2019$.

A $F(x) = x^3 + 1$. B $F(x) = x^3 + 3$. **C** $F(x) = x^2 + 2$. D $F(x) = x^2 + 3$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = x + 2018 \Rightarrow f(x) = (x + 2018)' = 1$

và $\int g(x)\mathrm{d}x = x^2 + 2019 \Rightarrow g(x) = (x^2 + 2019)' = 2x$.

$\Rightarrow f(x) \cdot g(x) = 2x \Rightarrow F(x) = \int f(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x = x^2 + C$.

Mặt khác $F(1) = 3 \Rightarrow 1^2 + C = 3 \Rightarrow C = 2$.

Vậy $F(x) = x^2 + 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $2|z - i| = |z - \overline{z} + 2i|$ là

A một điểm. B một đường tròn. C một đường thẳng. **D** một Parabol.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$; $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có

$$\begin{aligned}
& 2|z - i| = |z - \overline{z} + 2i| \\
\Leftrightarrow\ & 4|z - i|^2 = |z - \overline{z} + 2i|^2 \\
\Leftrightarrow\ & 4|x + yi - i|^2 = |x + yi - (x - yi) + 2i|^2 \\
\Leftrightarrow\ & 4\left[x^2 + (y - 1)^2\right] = 4(y + 1)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad 4x^2-16y=0\\&\Leftrightarrow\quad x^2=4y\end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là một Parabol.

Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Cho $\int_0^2 \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$ với a, b, c là các số thực. Giá trị của $a+b^2-c^3$ bằng

(A) 3. **B** 6. (C) 5. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_2^3 \dfrac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)} = \int\limits_2^3 \left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \ln\left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|\Bigg|_2^3 = \ln\dfrac{4}{5}-\ln\dfrac{3}{4} = 4\ln 2-\ln 3-\ln 5.$

Suy ra $a=4, b=-1, c=-1$. Vậy $a+b^2-c^3=6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+3=0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích là 2π. Mặt cầu (S) có phương trình là

(A) $x^2+(y+2)^2+(z+1)^2=2$. **B** $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$.

(C) $x^2+(y+2)^2+(z+1)^2=3$. (D) $x^2+(y+2)^2+(z+1)^2=1$.

Lời giải.

Gọi R, r lần lượt là bán kính của mặt cầu và đường tròn giao tuyến. Theo giải thiết ta có:

$$\pi r^2 = 2\pi \Leftrightarrow r^2=2.$$

Mặt khác $\mathrm{d}(I,(P))=1$ nên $R^2=r^2+[\mathrm{d}(I,(P))]^2=3$.

Vậy phương trình mặt cầu là $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Tích các nghiệm của phương trình $\log_2 x\cdot\log_4 x\cdot\log_8 x\cdot\log_{16} x=\dfrac{81}{24}$ là

(A) 3. (B) 2. (C) $\dfrac{1}{2}$. **D** 1.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$.

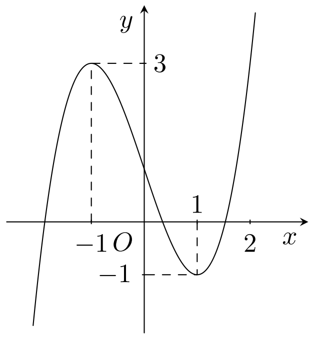
Ta có

$$\begin{aligned}\log_2 x\cdot\log_4 x.\log_8 x\cdot\log_{16} x=\frac{81}{24} \quad&\Leftrightarrow\quad \log_2 x\cdot\log_{2^2} x\cdot\log_{2^3} x\cdot\log_{2^4} x=\frac{81}{24}\\&\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\log_2^4 x=\frac{81}{24}\Leftrightarrow \log_2^4 x=81\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=3\\\log_2 x=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=8\\x=\frac{1}{8}\end{array}\right.\end{aligned}$$

Do đó tích các nghiệm của phương trình bằng 1.

Chọn đáp án (D) □

Câu 39.
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\pi^x\right) - \dfrac{m^2-1}{8} = 0$ có hai nghiệm phân biệt là



(A) 7. (B) 6. (C) 5. (D) 4.

Lời giải.
Đặt $t = \pi^x, (t > 0)$, khi đó: $f\left(\pi^x\right) - \dfrac{m^2-1}{8} = 0$ có hai nghiệm phân biệt.
$\Leftrightarrow f(t) = \dfrac{m^2-1}{8}$ có hai nghiệm dương phân biệt.
$\Leftrightarrow -1 < \dfrac{m^2-1}{8} < 1 \Leftrightarrow -3 < m < 3$.
Vì m là số nguyên nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với kì hạn 3 tháng, lãi suất $1,95\%$ một kì theo thể thức lãi kép. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu kì, người gửi sẽ có số tiền lãi lớn hơn số tiền gốc ban đầu, giả sử người đó không rút lãi trong tất cả các kì.

(A) 36 kì. (B) 35 kì. (C) 34 kì. (D) 33 kì.

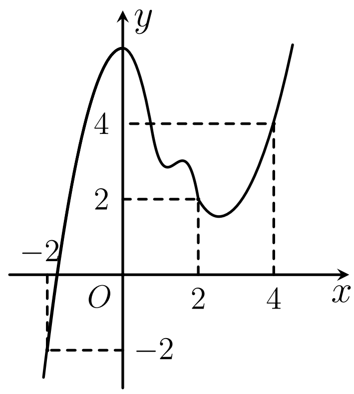
Lời giải.
Số tiền cả gốc lẫn lãi người đó nhận được sau n kì là: $A(1+r)^n$ (với A: tiền gốc ban đầu, r: lãi suất).
Để số tiền lãi người đó nhận được lớn hơn tiền gốc ban đầu thì:

$$A(1+r)^n - A > A \Leftrightarrow (1+r)^n > 2 \Leftrightarrow n > \log_{1+r} 2 = \log_{1+1,956} 2 \approx 35{,}89 \Rightarrow n = 36.$$

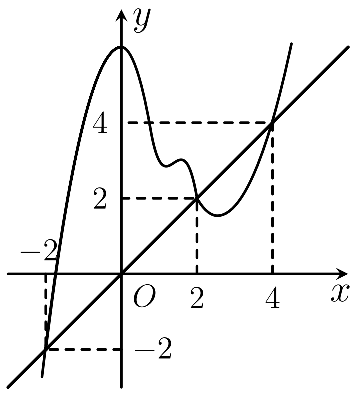
Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.
Đồ thị hàm số $g(x) = |2f(x) - x^2|$ có tối đa bao nhiêu cực trị?

(A) 7. (B) 5. (C) 6. (D) 3.



Lời giải.



Xét hàm số $h(x) = 2f(x) - x^2 \Rightarrow h'(x) = 2f'(x) - 2x = 2\left(f'(x) - x\right)$.

Từ đồ thì hàm số $f'(x)$ ta có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \\ x = 4. \end{array}\right.$

Vậy $\displaystyle\int_{-2}^{2} (2f'(x) - 2x)\,\mathrm{d}x > \int_{2}^{4} (2x - 2f'(x))\,\mathrm{d}x > 0 \Leftrightarrow h(x)\Big|_{-2}^{2} > -h(x)\Big|_{2}^{4} \Leftrightarrow h(2) - h(-2) > -\left(h(4) - h(2)\right)$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		2		4		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$h(-2)$	$\nearrow$	$h(2)$	$\searrow$	$h(4)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $g(x) = |2f(x) - x^2|$ có tối đa 7 cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho các số thực a, b, c, d, e, f thỏa mãn $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 - 2a + 4b + 2c - 6 = 0 \\ 2d - e + 2f - 14 = 0 \end{cases}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $(a-d)^2 + (b-e)^2 + (c-f)^2$ bằng

A. $7 - 4\sqrt{3}$. B. 1. C. $4 - 2\sqrt{3}$. D. $28 - 16\sqrt{3}$.

Lời giải.

Xét mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 6 = 0$ có tâm $I(1; -2; -1)$, bán kính $R = 2\sqrt{3}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 2z - 14 = 0$.

Lấy $M(a; b; c) \in (S)$, $N(d; e; f) \in (P) \Rightarrow MN^2 = (a-d)^2 + (b-e)^2 + (c-f)^2$.

Vậy $\left[(a-d)^2 + (b-e)^2 + (c-f)^2\right]_m in \Leftrightarrow MN_{\min} \Leftrightarrow MN = d(I; (P)) - R = 4 - 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow \left[(a-d)^2 + (b-e)^2 + (c-f)^2\right]_m in = 28 - 16\sqrt{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn $f(x)+\tan x f'(x)=\dfrac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=a\pi\sqrt{3}+b\ln 3$ trong đó $a,b\in\mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $P=a+b$ bằng

A $\dfrac{14}{9}$. **B** $-\dfrac{2}{9}$. **C** $\dfrac{7}{9}$. **D** $-\dfrac{4}{9}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)+\tan x f'(x)=\dfrac{x}{\cos^3 x}\Leftrightarrow \cos x\cdot f(x)+\sin x f'(x)=\dfrac{x}{\cos^2 x}\Leftrightarrow [\sin x\cdot f(x)]'=\dfrac{x}{\cos^2 x}$.

Do đó $\displaystyle\int[\sin x\cdot f(x)]'\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\Rightarrow \sin x\cdot f(x)=\int\dfrac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Tính $I=\displaystyle\int\dfrac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\tan x.\end{cases}$

Khi đó $I=x\cdot\tan x-\displaystyle\int\tan x\,\mathrm{d}x=x\cdot\tan x-\int\dfrac{\mathrm{d}\cos x}{\cos x}=x\cdot\tan x+\ln|\cos x|$.

Suy ra $f(x)=\dfrac{x\cdot\tan x+\ln|\cos x|}{\sin x}=\dfrac{x}{\cos x}+\dfrac{\ln|\cos x|}{\sin x}$.

Do $\sqrt{3}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=a\pi\sqrt{3}+b\ln 3=\sqrt{3}\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{2\ln 2}{\sqrt{3}}\right)-\left(\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}+2\ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{5\pi\sqrt{3}}{9}\ln 3$.

Khi đó $\begin{cases}a=\dfrac{5}{9}\\ b=-1\end{cases}$.

Vậy $P=a+b=-\dfrac{4}{9}$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Gọi S là tập hợp các số phức thỏa mãn $|z-1|=\sqrt{34}$ và $|z+1+mi|=|z+m+2i|$, trong đó $m\in\mathbb{R}$. Gọi z_1,z_2 là hai số phức thuộc S sao cho $|z_1-z_2|$ lớn nhất, khi đó giá trị của $|z_1+z_2|$ bằng

A 2. **B** 10. **C** $\sqrt{2}$. **D** $\sqrt{130}$.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$.

Khi đó $|z-1|=\sqrt{34}\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=34$.

Mặt khác $|z+1+mi|=|z+m+2i|\Leftrightarrow 2(m-1)x+2(2-m)y+3=0$.

Do đó tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là giao điểm của đường tròn $(C)\colon(x-1)^2+y^2=34$ và đường thẳng $d\colon 2(m-1)x+2(2-m)y+3=0$.

Gọi A, B là hai điểm biểu diễn z_1,z_2. Suy ra $(C)\cap d=\{A,B\}$.

Mặt khác $|z_1-z_2|=AB\le 2R=2\sqrt{34}$ do đó $\max|z_1-z_2|=2\sqrt{34}\Leftrightarrow AB=2\sqrt{34}\Leftrightarrow I(1;0)\in d$.

Từ đó $m=-\dfrac{1}{2}$ nên ta có $d\colon 3x-5y-3=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=6+3i\\ z_2=-4-3i.\end{array}\right.$

Vậy $z_1+z_2=2$.

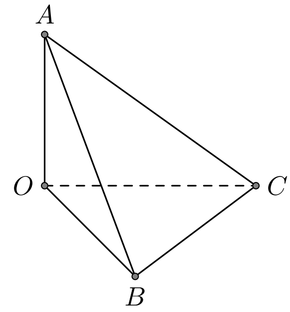
Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho các tia Ox,Oy,Oz cố định đôi một vuông góc nhau. Trên các tia đó lần lượt lấy các điểm A,B,C thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $OA+OB+OC+AB+BC+CA=1$ trong đó

A, B, C không trùng với O. Giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện $OABC$ bằng $\dfrac{1}{m\left(1+\sqrt{n}\right)^3}$ trong đó $m, n \in \mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $P = m + n$ bằng

A 192. **B** 150. **C** 164. **D** 111.

Lời giải.



Đặt $OA = a$, $OB = c$, $OC = c$ với $a, b, c > 0$.

Khi đó $V_{O.ABC} = \dfrac{abc}{6}$

và $OA + OB + OC + AB + BC + CA = a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} = 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có:

$$1 = a + b + c + \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} \geq a + b + c + \frac{a+b}{\sqrt{2}} + \frac{b+c}{\sqrt{2}} + \frac{c+a}{\sqrt{2}}$$

$\Leftrightarrow 1 \geq (1+\sqrt{2})(a+b+c) \Leftrightarrow a + b + c \leq \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $V_{O.ABC} = \dfrac{abc}{6} \geq \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3 \leq \dfrac{1}{162\left(1+\sqrt{2}\right)^3}$.

Vậy $\max V_{O.ABC} = \dfrac{1}{162\left(1+\sqrt{2}\right)^3} \Rightarrow m = 162, n = 2 \Rightarrow P = m + n = 164$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$\sqrt[3]{\frac{m}{2} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}m + \frac{4}{3}\sin(x^2+2019)}} = \sin(x^2+2019)$$

có nghiệm thực?

A 3. **B** 2. **C** 7. **D** 6.

Lời giải.

Đặt $\sin\left(x^2+2019\right) = a, (a \in [-1;1]) \Rightarrow \sqrt[3]{\dfrac{m}{2} + \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}m + \dfrac{4}{3}a}} = a$.

Đặt $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}m + \dfrac{4}{3}a} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{m}{2} + \dfrac{4}{3}t} = a \\ \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}m + \dfrac{4}{3}a} = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{2} + \dfrac{4}{3}t = a^3 \\ \dfrac{m}{2} + \dfrac{4}{3}a = t^3 \end{cases} \Rightarrow a^3 + \dfrac{4}{3}a = t^3 + \dfrac{4}{3}t. \quad (*)$

Xét hàm $f(x) = x^3 + \dfrac{4}{3}x$ với $x \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = 3x^2 + \dfrac{4}{3} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ $(*)$ suy ra $f(a) = f(t) \Leftrightarrow a = t$.

Do đó $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}m + \dfrac{4}{3}a} = a \Leftrightarrow m = 2a^3 - \dfrac{8}{3}a = f(a)$ với $a \in [-1;1]$.

Ta có $f'(a) = 6a^2 - \dfrac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow a = \pm\dfrac{2}{3} \in [-1;1]$.

Khi đó $f(-1) = \dfrac{2}{3}$; $f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{32}{27}$; $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{32}{27}$; $f(1) = -\dfrac{2}{3}$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \min\limits_{[-1;1]} f(a) \le m \le \max\limits_{[-1;1]} f(a) \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{32}{27} \le m \le \dfrac{32}{27} \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho x, y là các số thực dương. Xét các khối chóp $S.ABC$ có $SA = x$, $BC = y$ các cạnh còn lại đều bằng 1. Khi x, y thay đổi, thể tích khối chóp $S.ABC$ có giá trị lớn nhất bằng.

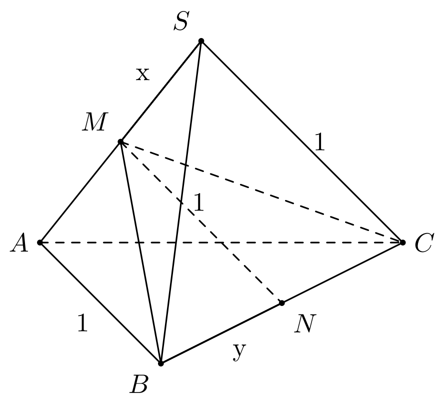
A $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$. B $\dfrac{1}{8}$. C $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. D $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Vì tam giác SAB, SAC lần lượt cân tại B và C nên $BM \perp SA$, $CM \perp SA$. Suy ra $SA \perp (BMC)$.

Ta có $V_{S.MBC} = V_{S.AMBC}$ nên

$$V_{S.ABC} = V_{S.MBC} + V_{S.AMBC} = 2V_{S.MBC} = \frac{2}{3}.SM \cdot S_{\triangle MBC}.$$



Ta có $BM = CM = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4}}$, tam giác BCM cân tại M nên $MN = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4}}$.

$$V_{S \cdot ABC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} y \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x^2}{4} \cdot \frac{y^2}{4}\left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}\right)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}\right) \ge 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{4} \cdot \frac{y^2}{4} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}\right)} \Rightarrow \frac{x^2}{4} \cdot \frac{y^2}{4}\left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}\right) \le \frac{1}{27}.$$

Dấu "="xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất bằng

$$V_{S \cdot ABC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{27}} = \frac{2\sqrt{3}}{27}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 48. Gọi S là tập hợp gồm các số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số trong tập S. Xác suất để số lấy ra có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ thỏa mãn $a_1 < a_2 < a_3$ và $a_3 > a_4 > a_5$ bằng

A $\dfrac{1}{24}$. B $\dfrac{1}{30}$. C $\dfrac{1}{36}$. D $\dfrac{1}{48}$.

Lời giải.

Gọi A là biến cố lấy ra số có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ với $a_1 < a_2 < a_3$ và $a_3 > a_4 > a_5$.

Giả sử $a_3 = n$, $n \in \{0; 1; 2; \ldots; 9\}$. Vì a_1; a_2; a_3; a_4; a_5 đôi một khác nhau và $a_1 < a_2 < a_3 > a_4 > a_5$ nên $n \ge 4$.

Ta có $a_1 \ne 0$ và $a_1 < a_2 < a_3 > a_4 > a_5$ nên ta có a_1; a_2; a_4; a_5 thuộc tập hợp $\{0; 1; 2; \ldots; n-1\}$.

Số cách chọn cặp $(a_1; a_2)$ là C_{n-1}^2 (Vì $a_1 \ne 0$ và $a_2 > a_1$).

Số cách chọn cặp $(a_4; a_5)$ là C_{n-2}^2 (Vì $a_4 > a_5$).

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $\sum\limits_{n=4}^{9} C_{n-1}^2 \cdot C_{n-2}^2 = 1134$.

Số phần tử của không gian mẫu là $9 \cdot A_9^4 = 27216$.

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{1134}{27216} = \dfrac{1}{24}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Rút gọn biểu thức $T = \mathrm{C}_n^0 + \dfrac{1}{2}\mathrm{C}_n^1 + \dfrac{1}{3}\mathrm{C}_n^2 + \ldots + \dfrac{1}{n+1}\mathrm{C}_n^n$, với $N \in \mathbb{N}^*$ ta được kết quả là

(A) $\dfrac{2^n}{n+1}$. (B) 2^{n+1}. **(C)** $\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$. (D) $\dfrac{2^n-1}{n+1}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} &(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n \\ \Rightarrow\ &\int\limits_0^1 (1+x)^n \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n\right) \mathrm{d}x. \\ \Leftrightarrow\ &\left.\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = C_n^0\, x\big|_0^1 + C_n^1 \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + C_n^2 \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \ldots + C_n^n \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 \\ \Leftrightarrow\ &\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Hàm số $y = f(x^2-2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(2; +\infty)$. (B) $(0; 2)$. (C) $(-\infty; -2)$. (D) $(-2; 0)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2xf'(x^2-2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2-2\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2 = -2 \\ x^2 - 2 = 0 \\ x^2 - 2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm 2 \end{array}\right. .$$

Do các nghiệm của phương trình $y' = 0$ đều là nghiệm bội lẻ, mà $y'(3) = 6f'(7) < 0$ nên ta có bảng xét dấu y'

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số $y = f\left(x^2 - 2\right)$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. A	3. B	4. B	5. B	6. A	7. C	8. A	9. A	10. B
11. C	12. A	13. B	14. B	15. C	16. D	17. C	18. B	19. D	20. D
21. C	22. C	23. B	24. A	25. D	26. C	27. D	28. C	29. D	30. B
31. D	32. B	33. A	34. C	35. D	36. B	37. B	38. D	39. C	40. A
41. A	42. D	43. D	44. A	45. C	46. A	47. D	48. A	49. C	50. A

48 ĐỀ TẬP HUẤN THI THPT QUỐC GIA SỞ GD & ĐT BẮC NINH (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ với trục hoành là

(A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 1.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^4 - x^2 + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x^2-4)(x^2-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 2 \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$$

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục hoành là 4.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Hàm số nào sau đây không có điểm cực trị?

(A) $y = x^3 + 3x + 1$. (B) $y = x^2 - 2x$. (C) $y = x^4 + 4x^2 + 1$. (D) $y = x^3 - 3x - 1$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^3 + 3x + 1$. Ta có $y' = 3x^2 + 3 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số không có cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có AB và CD thuộc hai đáy của hình trụ, $AB = 4a$, $AC = 5a$. Thể tích V của khối trụ là

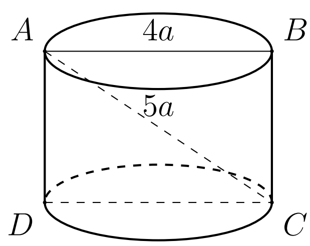
(A) $V = 16\pi a^3$. (B) $V = 4\pi a^3$. (C) $V = 12\pi a^3$. (D) $V = 8\pi a^3$.

Lời giải.

Ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{25a^2 - 16a^2} = 3a$.

Bán kính đáy $r = \dfrac{AB}{2} = 2a$, chiều cao $BC = 3a$.

Vậy $V = h\pi r^2 = 3a \cdot 4a^2 = 12\pi a^3$.



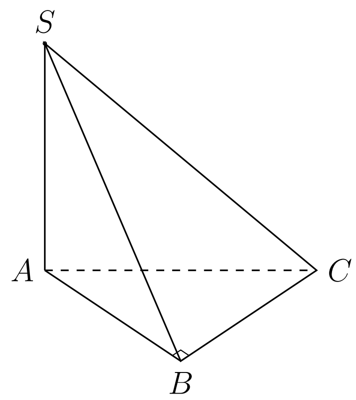
Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy. Tam giác ABC vuông cân tại B, biết $SA = AC = 2a$. Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là

(A) $V = \dfrac{2a^3}{3}$. (B) $V = \dfrac{a^3}{3}$. (C) $V = 2a^3$. (D) $V = \dfrac{4a^3}{3}$.

Lời giải.

Do tam giác ABC vuông cân tại B nên
$AB = AC = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$.
$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SA \cdot \dfrac{1}{2}BA \cdot BC = \dfrac{1}{3} \cdot 2a \cdot \dfrac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{2a^3}{3}$.



Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho k, n $(k < n)$ là các số nguyên dương. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A) $C_n^k = C_n^{n-k}$. B) $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. C) $A_n^k = k!C_n^k$. D) $A_n^k = n!C_n^k$.

Lời giải.

Ta có $C_n^k = C_n^{n-k}$, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ và $A_n^k = k!C_n^k$ là các công thức đúng.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Gọi M là trung điểm cạnh BB' điểm N thuộc cạnh CC' sao cho $CN = 2C'N$. Tính thể tích V'của khối chóp $A.BCNM$ theo V.

A) $V' = \dfrac{7V}{12}$. B) $V' = \dfrac{7V}{18}$. C) $V' = \dfrac{V}{3}$. D) $V' = \dfrac{V}{2}$.

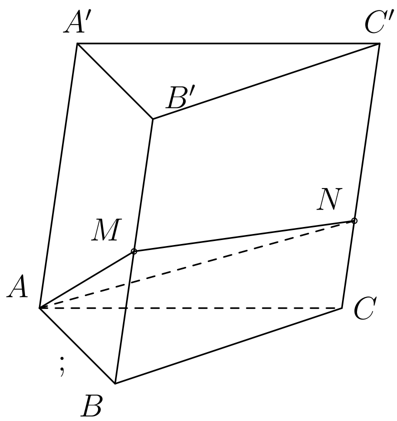
Lời giải.

Gọi $h = \mathrm{d}(B', CC')$. Khi đó ta có $S_{BCC'B'} = h \cdot CC'$ và $S_{BMNC} = \dfrac{(BM + CN) \cdot h}{2} = \dfrac{1}{2}h \cdot \left(\dfrac{1}{2}CC' + \dfrac{2}{3}CC'\right) = \dfrac{7}{12}h \cdot CC'$.

Ta có $\dfrac{V'}{V_{ABCC'B'}} = \dfrac{S_{BMNC}}{S_{BCC'B'}} = \dfrac{7}{12}$.

Mặt khác ta có $V_{ABCC'B'} = \dfrac{2}{3}V$.

Vậy $V' = \dfrac{7}{12} \cdot \dfrac{2}{3}V = \dfrac{7V}{18}$.



Chọn đáp án B □

Câu 7. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$.
B) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
C) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và khoảng $(1; +\infty)$.
D) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2; 1)$.

Lời giải.

Tập xác định là $\mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng xét dấu của y' như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Do đó, hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên $(-1;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$, gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD và ACD. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A $G_1G_2 \mathbin{/\mkern-5mu/} (ABD)$.

B $G_1G_2 \mathbin{/\mkern-5mu/} (ABC)$.

C $G_1G_2 = \dfrac{2}{3}AB$.

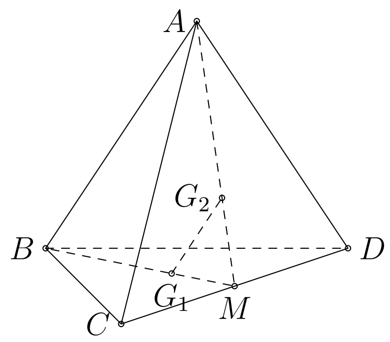
D Ba đường thẳng BG_1, AG_2 và CD đồng quy.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của CD, ta có B, G_1, M thẳng hàng và A, G_2, M thẳng hàng, do đó BG_1, AG_2, CD đồng quy tại M, do đó đáp án D đúng.

Ta có $\dfrac{MG_1}{MB} = \dfrac{MG_2}{MA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 \mathbin{/\mkern-5mu/} AB$ và $G_1G_2 = \dfrac{1}{3}AB$

do đó đáp án A, B đúng và C sai.



Chọn đáp án C □

Câu 9. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2\mathrm{e}^{x^3+1}$.

A $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x^3+1} + C$.

B $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{e}^{x^3+1} + C$.

C $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3+1} + C$.

D $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\mathrm{e}^{x^3+1} + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \mathrm{e}^{x^3+1}\,\mathrm{d}(x^3+1) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3+1} + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Phương trình $7^{2x^2+6x+4} = 49$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

A 1. B $\dfrac{5}{2}$. C -1. D $-\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

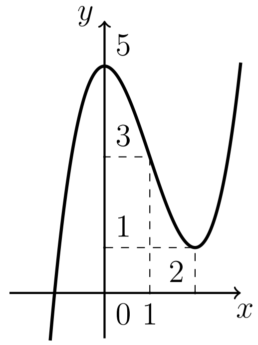
$$7^{2x^2+6x+4} = 7^2 \Leftrightarrow 2x^2+5x+4 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm bằng $-\dfrac{1}{2} - 2 = -\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 11.

Đường cong như hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào?



(A) $y = -x^3 + 3x^2 + 5$.

(B) $y = 2x^3 - 6x^2 + 5$.

(C) $y = x^3 - 3x^2 + 5$.

(D) $y = x^3 - 3x + 5$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho là hàm đa thức bậc ba có $a > 0$ do $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty \Rightarrow$ Loại đáp án A. Đồ thị hàm số đi qua điểm $(2; 1) \Rightarrow$ loại các đáp án B và D.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh $AB = a$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng $45°$. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là

(A) $V = \dfrac{a^3}{3}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (C) $V = \dfrac{a^3}{6}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

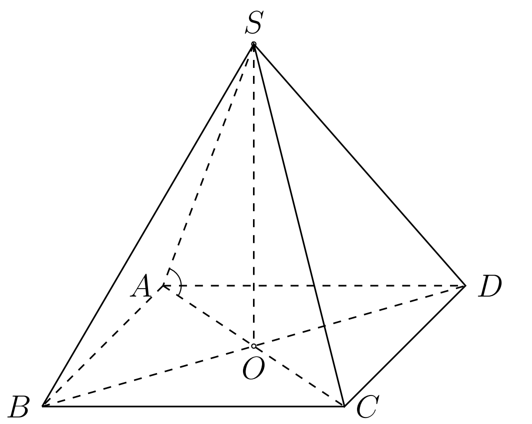
Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có $SO \perp (ABCD)$.

$\Rightarrow (SA, (ABC)) = (SA, (ABCD)) = \widehat{SAO}$

$\Rightarrow SO = OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x + C$.

(B) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x + C$.

(C) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x + C$.

(D) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \int x \,\mathrm{d}\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Khối đa diện nào có số đỉnh nhiều nhất?

(A) Khối nhị thập diện đều (20 mặt đều). (B) Khối bát diện đều (8 mặt đều).

(C) Khối thập nhị diện đều (12 mặt đều). (D) Khối tứ diện đều.

Lời giải.

Bảng tóm tắt các khối đa diện đều.

Loại	Tên gọi	Số đỉnh	Số cạch	Số mặt
$\{3;3\}$	Tứ diện đều	4	6	4
$\{4;3\}$	Lập phương	8	12	6
$\{3;4\}$	Bát diện đều	6	12	8
$\{5;3\}$	Mười hai mặt đều	20	30	12
$\{3;5\}$	Hai mươi mặt đều	12	30	20

Vậy khối đa diện đều có nhiều đỉnh nhất là khối mười hai mặt đều.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{5x+4}$.

A. $F(x) = \dfrac{1}{\ln 5} \ln|5x+4| + C$.

B. $F(x) = \ln|5x+4| + C$.

C. $F(x) = \dfrac{1}{5} \ln|5x+4| + C$.

D. $F(x) = \dfrac{1}{5} \ln(5x+4) + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \frac{1}{5x+4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\ln|5x+4| + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB = 2$, $AC = 4$, $SA = \sqrt{3}$. Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình chóp $S.ABC$ có bán kính R là

A. $R = \dfrac{5}{2}$.

B. $R = 5$.

C. $R = \dfrac{10}{3}$.

D. $R = \dfrac{25}{2}$.

Lời giải.

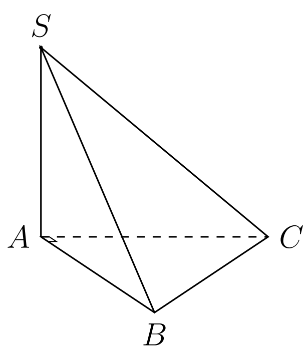
Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5}$.

Tam giác ABC vuông tại A nên nội tiếp đường tròn đường kính BC.

Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Rightarrow r = \dfrac{BC}{2} = \sqrt{5}$.

Sử dụng công thức tính nhanh bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, suy ra

$R = \sqrt{\dfrac{SA^2}{4} + r^2} = \sqrt{\dfrac{5}{4} + 5} = \dfrac{5}{2}$.



Chọn đáp án A □

Câu 17. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2}$ là

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-x+1}{x^2-x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = 1$.

Do đó hàm số có tiệm cận ngang là $y = 1$.

$\displaystyle\lim_{x\to2^+} \frac{x^2-x+1}{x^2-x-2} = +\infty$ và $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \frac{x^2-x+1}{x^2-x-2} = -\infty$.

$\displaystyle\lim_{x\to2^-} \frac{x^2-x+1}{x^2-x-2} = -\infty$ và $\displaystyle\lim_{x\to1^-} \frac{x^2-x+1}{x^2-x-2} = +\infty$.

Do đó hàm số có hai tiệm cận ngang là $x = 1$ và $x = 2$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Cho khối nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và chiều cao $h = 4$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

(A) $V = 12\pi$. **B** $V = 4\pi$. (C) $V = 4$. (D) $V = 12$.

Lời giải.

Thể tích khối nón là

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(\sqrt{3})^2 \cdot 4 = 4\pi$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x^2 - 3x - 4)^{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

(A) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash (-1; 4)$. (B) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

C $\mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$. (D) $\mathscr{D} = (-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số là $x^2 - 3x - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4 \\ x < -1. \end{array}\right.$

Vậy $\mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Cho a là số thực dương khác 5. Tính $I = \log_{\frac{a}{5}} \left(\frac{a^3}{125}\right)$.

(A) $I = -\frac{1}{3}$. (B) $I = -3$. (C) $I = \frac{1}{3}$. **D** $I = 3$.

Lời giải.

Ta có $I = \log_{\frac{a}{5}} \left(\frac{a^3}{125}\right) = \log_{\frac{a}{5}} \left(\frac{a}{5}\right)^3 = 3\log_{\frac{a}{5}} \left(\frac{a}{5}\right) = 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho $a > 0$, $b > 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$T = 2(a+b)^{-1}(ab)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

A $T = 1$. (B) $T = \frac{1}{3}$. (C) $T = \frac{2}{3}$. (D) $T = \frac{1}{2}$.

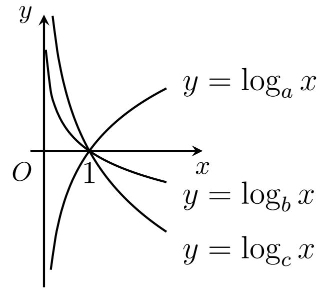
Lời giải.

Ta có $T = \frac{2}{a+b}\sqrt{ab}\left[1 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a-b}{\sqrt{ab}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{1 + \frac{(a-b)^2}{4ab}} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4ab}} = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22.

Cho a, b, c dương và khác 1. Các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào dưới đây đúng?



Ⓐ $b > c > a$.

Ⓑ $a > b > c$.

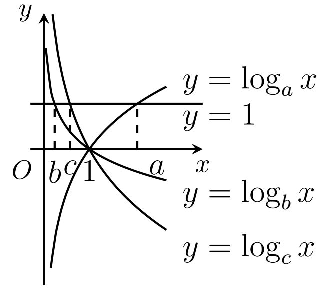
C $a > c > b$.

Ⓓ $c > b > a$.

Lời giải.

Kẻ đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị của các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ lần lượt tại các điểm có hoành độ là a, b, c.

Từ đồ thị ta có $a > c > b$.



Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 23. Tập xác định của hàm số $y = \sin 2x$ là

Ⓐ $[0; 2]$. Ⓑ $[-2; 2]$. **C** $\mathbb{R}$. Ⓓ $[-1; 1]$.

Lời giải.

Hàm số $y = \sin 2x$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 24. Cho $a > 0$, $b > 0$ thỏa mãn $a^2 + 4b^2 = 5ab$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $2\log(a + 2b) = 5(\log a + \log b)$. Ⓑ $\log(a + 1) + \log b = 1$.

C $2\log\dfrac{a + 2b}{3} = \dfrac{\log a + \log b}{2}$. Ⓓ $\log(a + 2b) = \log a - \log b$.

Lời giải.

Ta có $a^2 + 4b^2 = 5ab \Leftrightarrow (a + 2b)^2 = 9ab$.

Logarit cơ số 10 hai vế ta được

$$\begin{aligned}
\log(a + 2b)^2 = \log(9ab) &\Leftrightarrow 2\log(a + 2b) = \log 9 + \log a + \log b \\
&\Leftrightarrow 2(\log(a + 2b) - \log 3) = \log a + \log b \\
&\Leftrightarrow 2\log\frac{a + 2b}{3} = \frac{\log a + \log b}{2}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 25. Cho tập X có 26 phần tử. Hỏi X có bao nhiêu tập con gồm 6 phần tử?

Ⓐ A_{26}^6. Ⓑ 6. Ⓒ P_6. **D** C_{26}^6.

Lời giải.

Số tập con gồm 6 phần tử trong tập A gồm 26 phần tử là C_{26}^6.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 26. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất, xác suất để mặt có số chấm chẵn xuất hiện là

(A) 1. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{2}{3}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = 6$.

Gọi biến cố A: "mặt chẵn chấm xuất hiện". Ta có $A = \{2; 4; 6\} \Rightarrow n(A) = 3$.

Vậy xác suất $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_3(11-2x) \geq 0$ là

(A) $S = \left(3; \dfrac{11}{2}\right)$. (B) $S = (-\infty; 4]$. (C) $S = (1; 4]$. (D) $S = (1; 4)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x-1>0 \\ 11-2x>0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < \dfrac{11}{2}$. Ta có

$$\begin{aligned} & \log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_3(11-2x) \geq 0 \Leftrightarrow -\log_3(x-1) + \log_3(11-2x) \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \log_3 \frac{11-2x}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{11-2x}{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{11-2x}{x-1} - 1 \geq 0 (\text{vì } x-1>0) \\ \Leftrightarrow\ & 12 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4. \end{aligned}$$

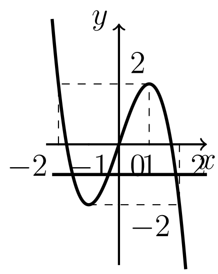
Kết hợp với điều kiện ta có $1 < x \leq 4$.

Vậy $S = (1; 4]$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây **sai**?



(A) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

(B) Nếu $|m| > 2$ thì phương trình $f(x) = m$ có nghiệm duy nhất.

(C) Hàm số $y = f(x)$ có cực tiểu bằng -1.

(D) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$ bằng 2.

Lời giải.

Đáp án A: đúng.

Đáp án B: Với $m > 2$ hoặc $m < -2$ thì đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số tại một điểm duy nhất nên B đúng.

Đáp án C: Hàm số đạt cực tiểu tại chứ không phải đạt cực tiểu bằng -1 nên C sai.

Đáp án D: Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2; 2]$ đạt được bằng 2 tại $x = -2$ nên D đúng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Cho hàm số $f(x) = 2x + \mathrm{e}^x$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2019$.

(A) $F(x) = \mathrm{e}^x - 2019$. (B) $F(x) = x^2 + \mathrm{e}^x - 2018$.

(C) $F(x) = x^2 + \mathrm{e}^x + 2017$. (D) $F(x) = x^2 + \mathrm{e}^x + 2018$.

Lời giải.

$F(x) = \int (2x + \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = x^2 + \mathrm{e}^x + C$.

Do $F(0) = 2019$ nên $0^2 + \mathrm{e}^0 + C = 2019 \Leftrightarrow C = 2018$.

Vậy $F(x) = x^2 + \mathrm{e}^x + 2018$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Tập tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $m \in [-1; 1]$. B. $m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.
C. $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. D. $m \in (-1; 1)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho là hàm số bậc ba có $a = 1 > 0$, có $y' = 3x^2 - 6mx + 3$. Do đó y đồng biến trên $\mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta' = 9m^2 - 9 \le 0$.

Vậy $m \in [-1; 1]$.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho a, b là các số dương thỏa mãn $\log_9 a = \log_{16} b = \log_{12} \dfrac{5b - a}{2}$. Tính giá trị $T = \dfrac{a}{b}$.

A. $T = \dfrac{3 + \sqrt{6}}{4}$. B. $T = 7 - 2\sqrt{6}$. C. $T = 7 + 2\sqrt{6}$. D. $T = \dfrac{3 - \sqrt{6}}{4}$.

Lời giải.

Đặt $\log_9 a = \log_{16} b = \log_{12} \dfrac{5b - a}{2} = t$, ta được $a = 9^t$, $b = 16^t$, $\dfrac{5b - a}{2} = 12^t$.

Suy ra $\dfrac{5 \cdot 16^t - 9^t}{2} = 12^t \Leftrightarrow 5 \cdot 16^t - 2 \cdot 12^t - 9^t = 0 \Leftrightarrow 5 - 2 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^t - \left(\dfrac{3}{4}\right)^{2t} \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{4}\right)^t = \sqrt{6} - 1$.

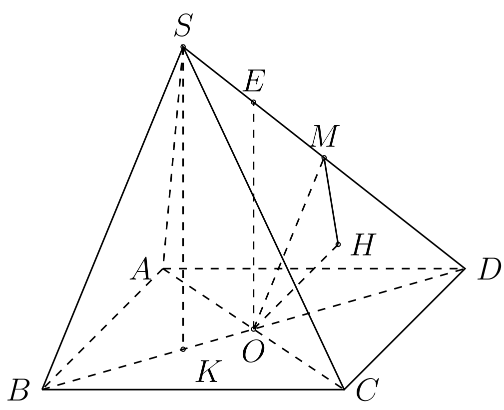
Do đó $\dfrac{a}{b} = \dfrac{9^t}{16^t} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{2t} = (\sqrt{6} - 1)^2 = 7 - 2\sqrt{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm tam giác ABC. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD), tính $\sin\varphi$ biết rằng $SB = a$.

A. $\sin\varphi = \dfrac{1}{4}$. B. $\sin\varphi = \dfrac{1}{2}$. C. $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của SD, nhận xét góc giữa SB và (SCD) cũng bằng góc giữa OM và (SCD) (Vì $OM \parallel SB$). Gọi H là hình chiếu của O trên $(SCD) \Rightarrow (OM, (SCD)) = (OM, MH) = OMH$. Trong (SBD) kẻ $OE \parallel SK$, trong đó K là hình chiếu của S lên mặt đáy, khi đó tứ diện $OECD$ là tứ diện vuông nên $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OC^2} + \dfrac{1}{OD^2} + \dfrac{1}{OE^2}$.

Ta cũng có $OC = \dfrac{a}{2}$, $OD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Lại có $\dfrac{OE}{SK} = \dfrac{OD}{KD} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow OE = \dfrac{3}{4}SK$, mà $SK = \sqrt{SB^2 - BK^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Do đó $OE = \dfrac{3}{4}SK = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Suy ra $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2} = \dfrac{a^2}{8} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Tam giác OMH vuông tại H có $OM = \dfrac{1}{2}SB = \dfrac{a}{2}$, $OH = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

$\Rightarrow \sin\widehat{OMH} = \dfrac{OH}{OM} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)(x^2-6x+m)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $g(x) = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

(A) 2010. (B) 2012. (C) 2011. (D) 2009.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} g'(x) &= -f'(1-x) = -(1-x)^2(1-x-2)\left[(1-x)^2 - 6(1-x) + m\right] \\ &= -(x-1)^2(-1-x)(x^2+4x+m-5) = (x-1)^2(x+1)(x^2+4x+m-5). \end{aligned}$$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow\ g'(x) \le 0 \text{ với mọi } x \in (-\infty; -1) \\ &\Leftrightarrow\ (x+1)(x^2+4x+m-5) \le 0 \text{ với mọi } x \in (-\infty; -1) \\ &\Leftrightarrow\ x^2+4x+m-5 \ge 0 \text{ với mọi } x \in (-\infty; -1) \text{ (Do } x \in (-\infty; -1) \Rightarrow x+1 < 0) \\ &\Leftrightarrow\ h(x) = x^2+4x-5 \ge -m \text{ với mọi } x \in (-\infty; -1) \\ &\Leftrightarrow\ -m \le \min_{x \in (-\infty; -1]} h(x). \end{aligned}$$

Ta có $h'(x) = 2x + 4$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$. Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	-9	↗	

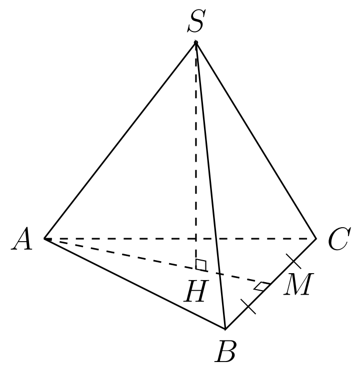
Do đó $-m \le -9 \Leftrightarrow m \ge 9$. Mặt khác $m \in [-2019; 2019]$ và m nguyên nên $m \in \{9; 10; 11; \cdots; 2019\}$ hay có $2019 - 9 + 1 = 2011$ giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC = 4$, $BC = 2$, $SA = 4\sqrt{3}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SAC} = 30°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A $V=8$. **B** $V=6$. **C** $V=4$. **D** $V=12$.

Lời giải.



Ta có $\triangle SAB = \triangle SAC$ $c.g.c$ hay tam giác SBC cân.

Gọi M là trung điểm BC ta có $AM \perp BC$, $SM \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAM)$.

Gọi H là hình chiếu của S trên AM thì $SH \perp AM$, $SH \perp BC$ nên SH là đường cao của hình chóp. Xét tam giác SAB có $SB^2 = SA^2 + AB^2 - 2 \cdot SA \cdot AB \cdot \cos 30^\circ = 16 \Rightarrow SB = 4 \Rightarrow SC = 4$.

Do đó $SM^2 = \dfrac{SB^2+SC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} = 15 \Rightarrow SM = \sqrt{15}$.

Tam giác ABC có $AM^2 = \dfrac{AB^2+AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} = 15 \Rightarrow AM = \sqrt{15}$.

Khi đó $S_{SAM} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 6$.

Do đó $SH = \dfrac{2S_{SAM}}{AM} = \dfrac{2\cdot 6}{\sqrt{15}} = \dfrac{4\sqrt{15}}{5}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} AM \cdot BC \cdot SH = 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↗	$\frac{15}{13}$	↘	

Giá trị lớn nhất của m để phương trình $e^{2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) + \frac{3}{2}} = m$ có nghiệm trên đoạn $[0;2]$ là

A e^4. **B** e^3. **C** $e^{\frac{15}{13}}$. **D** e^5.

Lời giải.

Ta có $e^{2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) + \frac{3}{2}} = m \Leftrightarrow 2f^3(x) - \dfrac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) + \dfrac{3}{2} = \ln m$.

Xét hàm số $g(x) = 2f^3(x) - \dfrac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) + \dfrac{3}{2}$ có

$g'(x) = 6f^2(x)f'(x) - 13f(x)f'(x) + 7f'(x) = f'(x)\left[6f^2(x) - 13f(x) + 7\right]$

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ 6f^2(x) - 13f(x) + 7 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f(x) = 1 \\ f(x) = \dfrac{7}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; x = 3 \\ x = 1; x = x_1 > 3 \\ x = x_2 < 1. \end{array}\right.$

Xét $g(x)$ trên đoạn $[0;2]$.

+ Trong khoảng $(0;1)$ ta có $f'(x) < 0$, $f(x) > 1$, $f(x) < \dfrac{7}{6}$ nên $f'(x)(f(x)-1)\left(f(x) - \dfrac{7}{6}\right) > 0$ hay $g'(x) > 0$.

+ Trong khoảng $(1;2)$ ta có $f'(x)>0$, $f(x)>1$, $f(x)<\dfrac{7}{6}$ nên $f'(x)(f(x)-1)\left(f(x)-\dfrac{7}{6}\right)<0$ hay $g'(x)<0$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau

x	0		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	4	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên ta thấy $\max\limits_{x\in[0;2]} g(x)=4$.

Vậy yêu cầu bài toán thỏa nếu và chỉ nếu $\ln m\le 4 \Leftrightarrow m\le \mathrm{e}^4$, hay giá trị lớn nhất của m là e^4.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Cho phương trình $(2\sin x-1)(\sqrt{3}\tan x+2\sin x)=3-4\cos^2 x$ Tổng tất cả các nghiệm thuộc đoạn $[0;20\pi]$ của phương trình bằng

A $\dfrac{1150}{3}\pi$. **B** $\dfrac{570}{3}\pi$. **C** $\dfrac{880}{3}\pi$. **D** $\dfrac{875}{3}\pi$.

Lời giải.

Điều kiện $\cos x\ne 0 \Leftrightarrow x\ne \dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

$$\begin{aligned}
& (2\sin x-1)(\sqrt{3}\tan x+2\sin x)=3-4\cos^2 x\\
\Leftrightarrow\ & (2\sin x-1)\cdot\frac{\sqrt{3}\sin x+2\sin x\cos x}{\cos x}=3-4\cos^2 x\\
\Leftrightarrow\ & (2\sin x-1)\cdot(\sqrt{3}\sin x+\sin 2x)+(4\cos^3 x-3\cos x)=0\\
\Leftrightarrow\ & 2\sqrt{3}\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x+2\sin x\sin 2x-\sin 2x+\cos 3x=0\\
\Leftrightarrow\ & 2\sqrt{3}\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x+\cos x-\cos 3x-\sin 2x+\cos 3x=0\\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{3}\sin x(2\sin x-1)-\cos x(2\sin x-1)=0\\
\Leftrightarrow\ & (2\sin x-1)(\sqrt{3}\sin x-\cos x)=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2\sin x-1=0\,(1)\\ \sqrt{3}\sin x-\cos x=0\,(2)\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Giải (1): $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Giải (2): $\Leftrightarrow \tan x=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Do đó $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Với $x \in [0; 20\pi]$ ta có $x \in \left\{\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}+\pi; \cdots; \dfrac{\pi}{6}+19\pi; \dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}+2\pi; \cdots; \dfrac{5\pi}{6}+18\pi\right\}$.

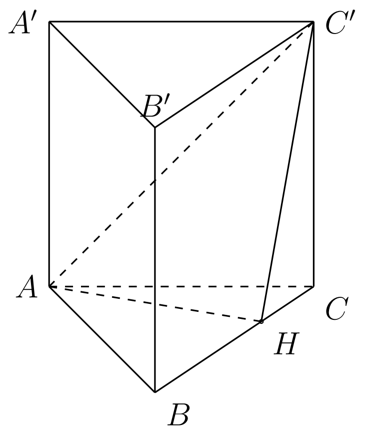
Vậy tổng các nghiệm là $\left\{\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}+\pi+\cdots+\dfrac{\pi}{6}+19\pi+\dfrac{5\pi}{6}+\dfrac{5\pi}{6}+2\pi+\cdots+\dfrac{5\pi}{6}+18\pi\right\} = \dfrac{875}{3}\pi$.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$, đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30°. Diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho bằng

A $S = 6\pi a^2$. **B** $S = 3\pi a^2$. **C** $S = 4\pi a^2$. **D** $S = 24\pi a^2$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (ABC) kẻ $AH \perp BC$ $(H \in BC)$.

Lại có $AH \perp BB'$ (do $BB' \perp (ABC)$ suy ra $AH \perp (BCC'B')$.

Suy ra $(AC', (BCC'B')) = \widehat{AC'H} = 30^\circ$.

Ta có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a$, $AH = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$AC' = \dfrac{AH}{\sin \widehat{AC'H}} = a\sqrt{3} \Rightarrow CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = a\sqrt{2}$.

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ, khi đó $R = \sqrt{r^2 + \dfrac{h^2}{4}}$ với $r = \dfrac{BC}{2} = a$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông ABC và $h = CC' = a\sqrt{2}$.

Do đó $R = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = 6\pi a^2$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $f(0) = 2\sqrt{2}, f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(x).f'(x) = (2x+1)\sqrt{1+f^2(x)}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khi đó giá trị $f(1)$ bằng

A $\sqrt{15}$. **B** $\sqrt{23}$. **C** $\sqrt{24}$. **D** $\sqrt{26}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $2x+1 = \dfrac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}\, dx = \int (2x+1)\, dx$.

Bây giờ ta tính $I = \displaystyle\int \dfrac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}\, dx$.

Đặt $\sqrt{1+f^2(x)} = t \Rightarrow 1+f^2(x) = t^2 \Rightarrow 2f(x)f'(x)dx = 2tdt \Rightarrow f(x)f'(x)dx = tdt$.

Do đó $I = \displaystyle\int \dfrac{t}{t}\, dx = \int dt = t + C = \sqrt{1+f^2(x)} + C$.

Ta nhận được $\sqrt{1+f^2(x)} + C = x^2 + x$. $f(0) = 2\sqrt{2} \Rightarrow C = -3$.

Từ đó $\sqrt{1+f^2(x)} - 3 = x^2 + x$. Khi $x = 1$ ta có

$\sqrt{1+f^2(1)} - 3 = 1 + 1 \Rightarrow 1 + f^2(1) = 25 \Rightarrow f(1) = \sqrt{24}$.

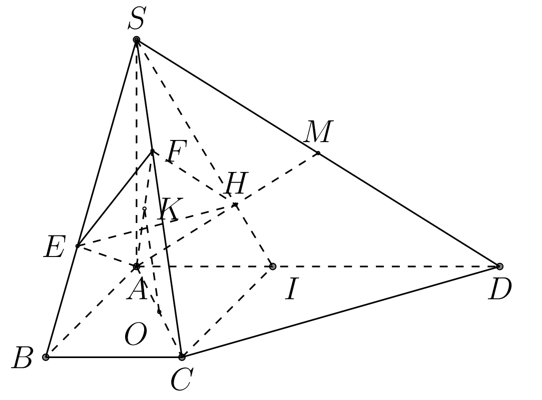
Chọn đáp án C □

Câu 39. Cho hình chóp $S.BCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$; tứ giác $ABCD$ là hình thang vuông với cạnh đáy AD, BC; $AD = 3BC = 3a$; $AB = a, SA = a\sqrt{3}$. Điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AI}$; M là trung điểm SD, H là giao điểm của AM và SI. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SC. Tính thể tích V của khối nón có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác

EFH và đỉnh thuộc mặt phẳng $(ABCD)$.

(A) $V = \dfrac{\pi a^3}{2\sqrt{5}}$. (B) $V = \dfrac{\pi a^3}{\sqrt{5}}$. **C** $V = \dfrac{\pi a^3}{10\sqrt{5}}$. (D) $V = \dfrac{\pi a^3}{5\sqrt{5}}$.

Lời giải.



Xét tam giác SAD vuông tại A có $SA = a\sqrt{3}$, $AD = 3a \Rightarrow \widehat{SDA} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MAI} = 30^\circ$.

Lại có tam giác SAI vuông tại A có $SA = a\sqrt{3}$, $AI = a \Rightarrow \widehat{SIA} = 60^\circ$ nên tam giác AHI có $\widehat{AHI} = 90^\circ$ hay $AH \perp SI$.

Mà $AH \perp IC$ do $IC \parallel BA \perp (SAD)$ nên $AH \perp (SIC) \Rightarrow AH \perp SC$.

Ngoài ra, $AE \perp SB$, $AE \perp BC$ $(BC \perp (SAB)) \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$.

Mà $AE \perp SC$ nên $SC \perp (AEFH)$ và $AEFH$ là tứ giác có $\widehat{E} = \widehat{H} = 90^\circ$ nên nội tiếp đường tròn tâm K là trung điểm AF đường kính AF. Gọi O là trung điểm AC thì $OK \parallel SC$ mà $SC \perp (AEFH)$ nên $OK \perp (AEFH)$ hay O chính là đỉnh hình nón và đường tròn đáy là đường tròn đường kính AF.

Ta tính AF, OK.

Xét tam giác SAC vuông tại A đường cao AF nên

$AF = \dfrac{SA \cdot AC}{SC} = \dfrac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$; $OK = \dfrac{1}{2}CF = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{CA^2}{CS} = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

Vậy thể tích $V = \dfrac{1}{2}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \dfrac{a}{\sqrt{5}} \cdot \left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\right)^2 = \dfrac{\pi a^3}{10\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Cho phương trình $m\ln^2(x+1) - (x+2-m)\ln(x+1) - x - 2 = 0$ (1). Tập tất cả giá trị của tham số m để phương trình (1) có các nghiệm, trong đó có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ là khoảng $(a; +\infty)$. Khi đó, a thuộc khoảng

(A) $(3,8; 3,9)$. **B** $(3,7; 3,8)$. (C) $(3,6; 3,7)$. (D) $(3,5; 3,6)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x > -1$. Ta có

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow m\ln^2(x+1) - (x+2-m)\ln(x+1) - x - 2 = 0\\
&\Leftrightarrow m\ln^2(x+1) - (x+2)\ln(x+1) + m\ln(x+1) - (x+2) = 0\\
&\Leftrightarrow m\ln(x+1)\left[\ln(x+1)+1\right] - (x+2)\left[\ln(x+1)+1\right] = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\ln(x+1)+1\right]\left[m\ln(x+1) - x - 2\right] = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\ln(x+1)+1 = 0\\ m\ln(x+1) - x - 2 = 0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \mathrm{e}^{-1} - 1 < 0 \text{ (loại)}\\ m\ln(x+1) - x - 2 = 0\,(*)\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $m = 0$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm $x = -2 < 0$ (loại) nên không thỏa bài toán.

Với $m \neq 0$ thì $(*) \Leftrightarrow \dfrac{\ln(x+1)}{x+2} = \dfrac{1}{m}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x+2}$ có $f'(x) = \dfrac{\frac{x+2}{x+1} - \ln(x+1)}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow x = x_0 \in (2;3)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+2}$ nên ta có bảng biến thiên trên $(-1;+\infty)$ như sau

x		-1		0		2		x_0		3		4		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$			0		$\dfrac{\ln 3}{4}$		c				$\dfrac{\ln 5}{6}$		6

Để phương trình có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ thì $0 < \dfrac{1}{m} < \dfrac{\ln 5}{6} \Rightarrow \dfrac{6}{\ln 5} \approx 3{,}728$. Suy ra $a \in (3,7;3,8)$.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m - 2$ có đồ thị C. Gọi S là tập các giá trị của m sao cho đồ thị C có đúng một tiếp tuyến song song với trục Ox. Tổng tất cả các phần tử của S là

A. 3. B. 8. **C. 5.** D. 2.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$. $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Lại có $y' = 12x^2 - 4 \Rightarrow y'(0) = -4 < 0$ nên $x = 0$ là điểm cực đại của hàm số và $y''(-1) = 8 > 0$ nên $x = 1; x = -1$ là các điểm cực tiểu của hàm số.

Nhận thấy rằng đây là hàm trùng phương nên hai điểm cực tiểu sẽ đối xứng nhau qua Oy. Từ đó để tiếp tuyến của đồ thị song song với trục Ox thì tiếp điểm là điểm cực trị của đồ thị hàm số. Do đó để có đúng một tiếp tuyến song song với trục Ox thì điểm cực đại hoặc cực tiểu phải nằm trên trục Ox. Hay $\left[\begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y(\pm 1) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m - 2 = 0 \\ m - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = 3. \end{array}\right.$

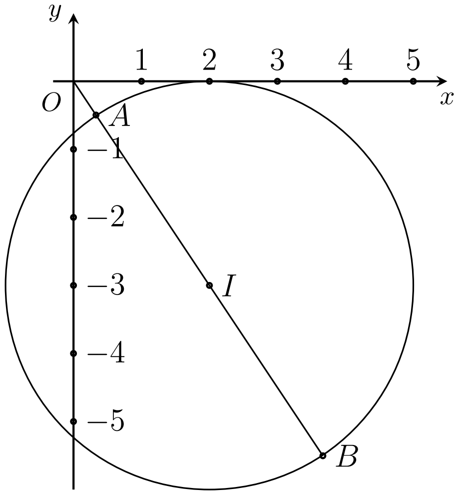
Vậy $S = \{2;3\} \Rightarrow$ tổng các phần tử của S là $2 + 3 = 5$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 + \sqrt{y^2 + 6y + 10} = \sqrt{6 + 4x - x^2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \left|\sqrt{x^2+y^2} - a\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$ của tham số a để $M \geq 2m$?

A. 17. **B. 16.** C. 15. D. 18.

Lời giải.



Ta có

$$\begin{aligned}
& x^2+y^2-4x+6y+4+\sqrt{y^2+6y+10}=\sqrt{6+4x-x^2}\\
\Leftrightarrow\ & x^2+y^2-4x+6y+4+\sqrt{y^2+6y+10}-\sqrt{6+4x-x^2}=0\\
\Leftrightarrow\ & x^2+y^2-4x+6y+4+\frac{y^2+6y+10-(6+4x-x^2)}{\sqrt{y^2+6y+10}+\sqrt{6+4x-x^2}}=0\\
\Leftrightarrow\ & x^2+y^2-4x+6y+4+\frac{x^2+y^2-4x+6y+4}{\sqrt{y^2+6y+10}+\sqrt{6+4x-x^2}}=0\\
\Leftrightarrow\ & (x^2+y^2-4x+6y+4)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{y^2+6y+10}+\sqrt{6+4x-x^2}}\right)=0.
\end{aligned}$$

Vì $1+\dfrac{1}{\sqrt{y^2+6y+10}+\sqrt{6+4x-x^2}}>0$, ta có

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & x^2+y^2-4x+6y+4=0\\
\Leftrightarrow\ & (x-3)^2+(y+3)^2=9.
\end{aligned}$$

Phương trình $(x-3)^2+(y+3)^2=9$ là phương trình đường tròn (C) tâm $I(2;-3)$ và bán kính $R=3$.

Gọi $N(x;y)\in(C)$ ta suy ra $ON=\sqrt{x^2+y^2}$ suy ra $T=|ON-a|$.

Gọi A,B là giao điểm của đường tròn (C) và đường thẳng OI. Khi đó $OA=OI-R=\sqrt{13}-3$ và $OB=\sqrt{13}+3$ Suy ra $\sqrt{13}-3\le\sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{13}+3$.

TH1: Nếu $\sqrt{13}-3\le a\le\sqrt{13}+3$ thì $\left|\sqrt{x^2+y^2}-a\right|\ge 0\Rightarrow \min T=0\Rightarrow M\ge 2m\Rightarrow a\in\{1;2;3;4;5;6\}$

TH2: Nếu $a<\sqrt{13}-3\Rightarrow a<\sqrt{13}$ nên $\left|\sqrt{13}+3-a\right|>\left|\sqrt{13}-3-a\right|$, do đó $M=\left|\sqrt{13}+3-a\right|$; $m=\left|\sqrt{13}-3-a\right|$. Vì

$$\begin{aligned}
& M\ge 2m\Rightarrow\left|\sqrt{13}+3-a\right|\ge 2\left|\sqrt{13}-3-a\right|\\
\Leftrightarrow\ & (\sqrt{13}+3-a)^2-(2\sqrt{13}-6-2a)^2\ge 0\\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{13}-9\le a\le\sqrt{13}+1\Rightarrow m\in\{-5;-4;-3;-3;-1;0\}.
\end{aligned}$$

TH3: Nếu $a > \sqrt{13}+3 \Rightarrow a > \sqrt{13}$ nên $\left|\sqrt{13}+3-a\right| < \left|\sqrt{13}-3-a\right|$, do đó $M = \left|\sqrt{13}-3-a\right|$; $m = \left|\sqrt{13}+3-a\right|$. Vì

$$\begin{aligned} & M \geq 2m \Rightarrow \left|\sqrt{13}-3-a\right| \geq 2\left|\sqrt{13}+3-a\right| \\ \Leftrightarrow\ & (\sqrt{13}-3-a)^2 - (2\sqrt{13}+6-2a)^2 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{13}+1 \leq a \leq \sqrt{13}+9 \Rightarrow m \in \{7;8;9;10\}. \end{aligned}$$

Vậy có 16 giá trị của a thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án B □

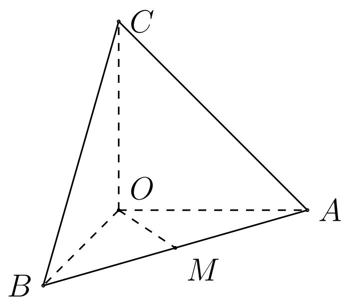
Câu 43. Cho hình chóp $S.ABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Góc hợp bởi hai véc tơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{OM}$ bằng

A $120°$. **B** $150°$. **C** $135°$. **D** $60°$.

Lời giải.

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c) \Rightarrow M\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$. Ta có $\overrightarrow{OM} = \left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right) \Rightarrow |\overrightarrow{OM}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $\overrightarrow{BC} = (0;-a;a) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = a\sqrt{2}$.

Từ đó $\cos(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{OM}) = \dfrac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{OM}|} = \dfrac{\frac{a}{2}\cdot 0 + \frac{a}{2}(-a) + 0\cdot a}{a\sqrt{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}} = -\dfrac{1}{2}$



Nên góc giữa hai véc tơ $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{OM}$ là $120°$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Cho số nguyên dương n thỏa mãn điều kiện $720\left(\mathrm{C}_7^7+\mathrm{C}_8^7+\cdots+\mathrm{C}_n^7\right) = \dfrac{1}{4032}\mathrm{A}_{n+1}^{10}$. Hệ số của x^7 trong khai triển $\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^n$ $(x \neq 0)$ bằng

A -560. **B** 120. **C** 560. **D** -120.

Lời giải.

+ Sử dụng công thức $\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k+1} = \mathrm{C}_{n+1}^{k+1}$, ta có

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_n^8 + \mathrm{C}_n^7 &= \mathrm{C}_{n+1}^8 \\ \mathrm{C}_{n-1}^7 + \mathrm{C}_{n-1}^8 &= \mathrm{C}_n^8 \\ \mathrm{C}_{n-2}^7 + \mathrm{C}_{n-2}^8 &= \mathrm{C}_{n-1}^8 \\ &\dots \\ \mathrm{C}_8^8 + \mathrm{C}_8^7 &= \mathrm{C}_9^8 \\ \mathrm{C}_8^8 &= \mathrm{C}_8^8. \end{aligned}$$

Cộng vế với vế ta được $\mathrm{C}_8^8+\mathrm{C}_8^7+\mathrm{C}_9^7+\cdots+\mathrm{C}_n^7+ = \mathrm{C}_{n+1}^8$ mà $\mathrm{C}_8^8 = \mathrm{C}_7^7$ nên $\mathrm{C}_7^7+\mathrm{C}_8^7+\mathrm{C}_9^7+\cdots\mathrm{C}_n^7 = \mathrm{C}_{n+1}^8$.

Khi đó ta có

$720\cdot\mathrm{C}_{n+1}^8 = \dfrac{1}{4032}\mathrm{A}_{n+1}^{10} \Rightarrow 720\dfrac{(n+1)!}{8!(n-7)!} = \dfrac{1}{4032}\dfrac{(n+1)!}{8!(n-9)!} \Leftrightarrow n^2-15n+56 = 72 \Rightarrow \left[\begin{aligned} & n=-1 \\ & n=16. \end{aligned}\right.$

Do $n \geq 9$, nên $n = 16$.

Với $n = 16$ ta có
$\left(x - \dfrac{1}{x^2}\right)^{16} = \sum_{k=0}^{16} \mathrm{C}_{16}^k x^{16-k}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{16} \mathrm{C}_{16}^k (-1)^k x^{16-3k}$.
Số hạng chứa x^7 ứng với $16 - 3k = 7 \Rightarrow k = 3$.
Nên hệ số cần tìm là $(-1)^3 \mathrm{C}_{16}^k 3 = -560$.
Chọn đáp án A □

Câu 45. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x - m^2 - 2}{x - m}$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng -1?

A 3. B 2. C 1. D 0.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq m$.
Ta có $y' = \dfrac{m^2 - m + 2}{(x - m)^2}$ nhận thấy $m^2 - m + 2 > 0$ với mọi m nên $y' > 0$ với mọi m.
Hay hàm số đồng bến trên từng khoảng xác định.
Để hàm số đạt GTLN trên $[0; 4]$ thì $m \in \mathbb{R}\backslash[0; 4] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 4 \end{array}\right.$. Suy ra $\max\limits_{x\in[0;4]} y(4) = \dfrac{4 - m^2 - 2}{4 - m}$.
Theo bài ra ta có $\dfrac{4 - m^2 - 2}{4 - m} = -1 \Rightarrow m^2 + 2 = m - 4 \Rightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \text{ (loại)} \\ m = -3. \end{array}\right.$
Vậy có một giá trị của m thỏa mãn.
Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho hàm số $y = \dfrac{x - 3}{x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-6; 6]$ của tham số m để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận?

A 12. B 9. C 8. D 11.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - 3}{x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m} = \lim\limits_{x\Rightarrow\infty} \dfrac{\dfrac{x}{x^3} - \dfrac{3}{x^3}}{1 - 3m\dfrac{x^2}{x^3} + (2m^2 + 1)\dfrac{x}{x^3} - \dfrac{m}{x^3}} = 0$.
Suy ra $y = 0$ là tiệm ngang của đồ thị hàm số.
Vậy để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có 3 đường tiệm cận đứng.
Hay phương trình $x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = 0$ (1) có ba nghiệm phân biệt $x \neq 3$. Ta có
$(1) \Leftrightarrow (x - m)(x^2 - 2mx + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x^2 - 2mx + 1 = 0 (*). \end{array}\right.$
Để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt khác 3 thì $m \neq 3$ và phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác m và khác 3. Do đó

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - 1 > 0 \\ 3^2 - 2m3 + 1 \neq 0 \\ m^2 - 2m^2 + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{5}{3} \\ m \neq -1 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $\begin{cases} m \neq 3 \\ -6 \leq m \leq 6 \end{cases} \Rightarrow m \in \{-6; -5; -4; -3; -2; 2; 4; 5; 6\}$.

Vậy có 9 giá trị của m thỏa mãn điều kiện.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(x\sqrt{x^2+2}+4-x^2\right)+2x+\sqrt{x^2+2} \leq 1$ là $\left(-\sqrt{a}; -\sqrt{b}\right]$. Khi đó ab bằng

A $\frac{12}{5}$. **B** $\frac{5}{12}$. **C** $\frac{15}{16}$. **D** $\frac{16}{15}$.

Lời giải.

Điều kiện:

$$\begin{aligned}
& x\sqrt{x^2+2}+4-x^2>0 \Leftrightarrow x\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)+4>0 \\
\Leftrightarrow\ & x\cdot\frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}+4>0 \Leftrightarrow \frac{2x+4\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)}{\sqrt{x^2+2}+x}>0 \\
\Leftrightarrow\ & 4\sqrt{x^2+2}+6x>0 \text{ (vì } \sqrt{x^2+2}+x>0, \forall x) \\
\Leftrightarrow\ & 2\sqrt{x^2+2}>-3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3x<0 \\ \begin{cases} -3x \geq 0 \\ 4(x^2+2)>(-3x)^2 \end{cases} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x>0 \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ 5x^2<8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ -\frac{40}{5}<x \leq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
& \log_2\left(x\sqrt{x^2+2}+4-x^2\right)+2x+\sqrt{x^2+2} \leq 1 \\
\Leftrightarrow\ & \log_2\left(\frac{6x+4\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}+x}\right)+2x+\sqrt{x^2+2} \leq 1 \\
\Leftrightarrow\ & \log_2(6x+4\sqrt{x^2+2})-\log_2(\sqrt{x^2+2}+x)+2x+\sqrt{x^2+2} \leq 1 \\
\Leftrightarrow\ & \log_2\left[2\left(3x+2\sqrt{x^2+2}\right)\right]-\log_2(\sqrt{x^2+2}+x)+2x+\sqrt{x^2+2} \leq 1 \\
\Leftrightarrow\ & \log_2 2+\log_2(3x+2\sqrt{x^2+2})-\log_2(\sqrt{x^2+2}+x)+2x+\sqrt{x^2+2} \leq 1 \\
\Leftrightarrow\ & \log_2(3x+2\sqrt{x^2+2})+3x+2\sqrt{x^2+2} \leq \log_2(\sqrt{x^2+2}+x)+x+\sqrt{x^2+2}(*)
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=t+\log_2 t$ với $t>0$ ta có $f'(t)=1+\frac{1}{t\ln 2}>0$ với mọi $t>0$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Từ đó

$$\begin{aligned}
(*) \Leftrightarrow\ & f(3x+2\sqrt{x^2+2}) \leq f(x+\sqrt{x^2+2}) \\
\Leftrightarrow\ & 3x+2\sqrt{x^2+2} \leq x+\sqrt{x^2+2} \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{x^2+2} \leq -2x \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \geq 0 \\ x^2+2 \leq 4x^2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \le 0 \\ 3x^2 \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ \left[\begin{array}{l} x \ge \dfrac{\sqrt{6}}{3} \\ x \le -\dfrac{\sqrt{6}}{3} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \le -\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Kết hợp điều kiện $\left[\begin{array}{l} x > 0 \\ -\dfrac{\sqrt{40}}{5} < x \le 0 \end{array}\right.$ ta có $-\dfrac{\sqrt{40}}{5} < x \le -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ hay $-\sqrt{\dfrac{8}{5}} < x \le -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Tập nghiệm bất phương trình $S = \left(-\sqrt{\dfrac{8}{5}}; -\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right]$ nên $a = \dfrac{8}{5}$; $b = \dfrac{2}{3} \Rightarrow ab = \dfrac{16}{15}$.

Chọn đáp án D □

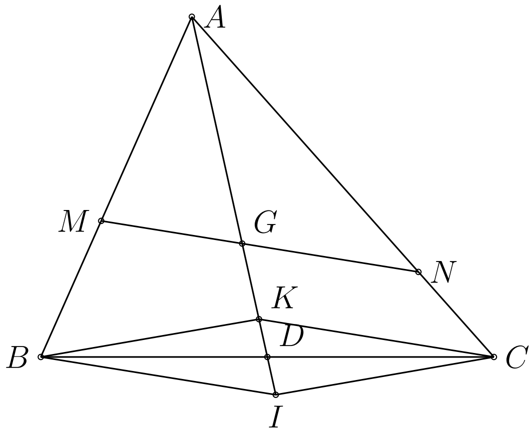
Câu 48. Cho tứ diện $S.ABC$ và G là trọng tâm của tứ diện, mặt phẳng quay quanh AG và cắt các cạnh SB, SC tương ứng tại M, N. Giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}$ là

A $\dfrac{1}{2}$. **B** $\dfrac{1}{3}$. **C** $\dfrac{3}{8}$. **D** $\dfrac{4}{9}$.

Lời giải.

Xét bài toán phụ sau:

Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Đường thẳng bất kì đi qua G cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Khi đó ta có $\dfrac{AB}{AM} + \dfrac{AC}{AN} = 3$.

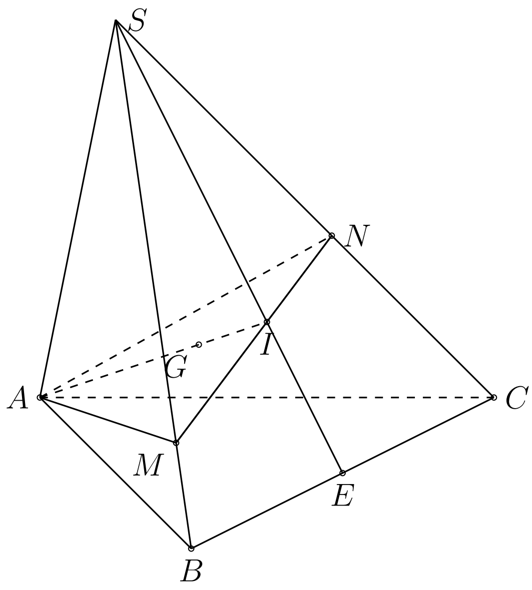


Qua B, C kẻ các đường thẳng song song với MN cắt đường thẳng AG tại K và I. Gọi D là trung điểm BC.

Theo định lý Ta-lét ta có $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AI}{AG}; \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{AK}{AG} \Rightarrow \dfrac{AB}{AM} + \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{AI + AK}{AG}$.

Mà $\triangle IBD = \triangle KCD$ (g-c-g) $\Rightarrow KD = ID \Rightarrow AI + AK = AD + DI + AK = 2AD = 2\dfrac{3}{2}AG = 3$.

Do đó $\dfrac{AB}{AM} + \dfrac{AC}{AN} = 3$.

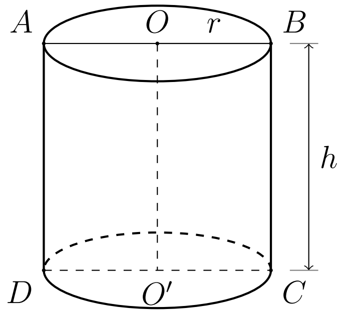


Đặt $\dfrac{SM}{SB} = a$; $\dfrac{SN}{SC} = b$ $(0 < a, b < 1)$.
Lấy E là trung điểm BC. Trong (SAE), kéo dài AG cắt SE tại I. Khi đó $I \in MN$ và I là trọng tâm tam giác SBC. Khi đó trong tam giác SBC ta luôn có $\dfrac{SB}{SM} + \dfrac{SC}{SN} = 3$ (tính chất đã được chứng minh ở trên).
Lại có $\dfrac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SC} = ab$.
Ta có $\dfrac{SB}{SM} + \dfrac{SC}{SN} = 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 3$.
Theo bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương ta được $3 = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq \dfrac{2}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow ab \geq \dfrac{4}{9}$.
Dấu $=$ xảy ra khi $a = b = \dfrac{2}{3}$.
Từ đó $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = ab \geq \dfrac{4}{9}$ hay tỉ số $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}$ nhỏ nhất là bằng $\dfrac{4}{9}$.
Chọn đáp án D □

Câu 49. Thiết diện của hình trụ và mặt phẳng chứa trục của hình trụ là hình chữ nhật có chu vi là 12 cm. Giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ là

A 32π cm^2. **B** 64π cm^2. **C** 8π cm^2. **D** 16π cm^2.

Lời giải.

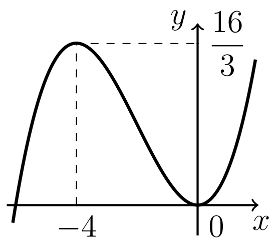


Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình trụ lần lượt là r và h $(r, h > 0)$.
Thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có chu vi $2(AB + BC) = 2(h + 2r)$.
Theo giả thiết ta có $2(h + 2r) = 12 \Leftrightarrow h + 2r = 6 \Leftrightarrow h = 6 - 2r$ $(r < 3)$.
Thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h = \pi r^2(6 - 2r) = \pi rr(6 - 2r)$.
Áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số $r, r, 6 - 2r$ ta được
$r+r+(6-2r) \geq 3\sqrt[3]{rr(6-2r)} \Leftrightarrow r^2(6-2r) \leq 8 \Leftrightarrow \pi r^2(6-2r) \leq 8\pi$
Hay $V \leq 8\pi$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $r = 6 - 2r \Leftrightarrow r = 2$ (thỏa mãn).
Vậy giá trị lớn nhất của khối trụ là $V = 8\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 50.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|\dfrac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right|\right) = f(m^2 + 4m + 4)$ có nghiệm?



A 4. **B** 5. **C** Vô số. **D** 3.

Lời giải.

Vì $-1 \leq \sin x \leq 1$; $-1 \leq \cos x \leq 1$ nên $2\cos x - \sin x > -3 \Rightarrow 2\cos x - \sin x + 4 > 0$.
Đặt $\dfrac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4} = t \Leftrightarrow (2t + 1)\cos x - (t + 3)\sin x = -4t - 1$.
Phương trình trên có nghiệm khi
$(2t + 1)^2 + (t + 3)^2 \geq (-4t - 1)^2 \Leftrightarrow 11t^2 - 2t - 9 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{9}{11} \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |t| \leq 1$.
Từ đồ thị hàm số ta thấy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; 1)$, nên phương trình $f(x) = f(|t|)$ với $t \in [0; 1]$ có nghiệm duy nhất khi $x = |t| \Rightarrow x \geq 0$.
Do đó phương trình $f\left(\left|\dfrac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right|\right) = f(m^2 + 4m + 4)$ có nghiệm
$\Leftrightarrow |t| = m^2 + 4m + 4$ có nghiệm với $0 \leq |t| \leq 1$
$\Leftrightarrow 0 \leq m^2 + 4m + 4 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1$.
Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3; -2; -1\}$. Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án D □

—— HẾT ——

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

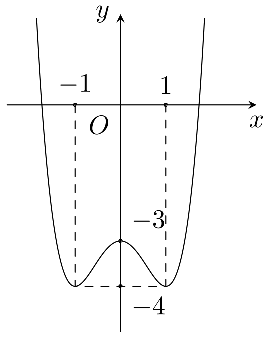
1. C	2. A	3. C	4. A	5. D	6. B	7. C	8. C	9. C	10. D
11. C	12. B	13. B	14. C	15. C	16. A	17. C	18. B	19. C	20. D
21. A	22. C	23. C	24. C	25. D	26. D	27. C	28. C	29. D	30. A
31. B	32. D	33. C	34. C	35. A	36. D	37. A	38. C	39. C	40. B
41. C	42. B	43. A	44. A	45. C	46. B	47. D	48. D	49. C	50. D

49 ĐỀ THI THỬ THPT LÝ THÁI TỔ, BẮC NINH, LẦN 2 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.

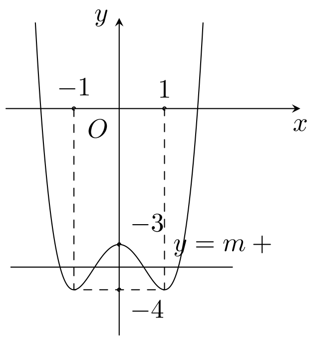
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m+1$ có bốn nghiệm phân biệt.



Ⓐ $-5 \leq m \leq -4$. Ⓑ $-4 < m < -3$.
Ⓒ $-4 \leq m \leq -3$. **D** $-5 < m < -4$.

Lời giải.

Phương trình $f(x) = m+1$ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = m+1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại bốn điểm phân biệt. Điều này tương đương với



$$\begin{aligned} & -4 < m+1 < -3 \\ \Leftrightarrow \quad & -5 < m < -4. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;3;4)$ trên mặt phẳng $(P)\colon 2x - y - z + 6 = 0$ là điểm nào dưới đây?

Ⓐ $(2;8;2)$. **B** $\left(1;\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right)$. Ⓒ $\left(3;\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$. Ⓓ $(1;3;5)$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua M và vuông góc mặt phẳng (P). Khi đó phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 3-t \\ z = 4-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Gọi M' là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (M). Tọa độ điểm M' là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 3-t \\ z = 4-t \\ 2x - y - z + 6 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \\ y = \frac{7}{2} \\ z = \frac{9}{2}. \end{cases}$

Vậy $M'\left(1;\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right)$

Chọn đáp án B □

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon 2x + 6y + z - 3 = 0$ cắt trục

Oz và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-6}{-1}$ lần lượt tại A và B. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=36$. **B** $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=9$.

C $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=36$. **D** $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=9$.

Lời giải.

Do điểm $A\in Oz$ nên suy ra $A(0;0;c)$, mà ta lại có $A\in(P)$ nên suy ra $c=3$. Do đó $A(0;0;3)$.

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases}x=5+t\\y=2t\\z=6-t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Tọa độ điểm B là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases}x=5+t\\y=2t\\z=6-t\\2x+6y+z-3=0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\x=4\\y=-2\\z=7\end{cases}$

Do đó $B(4;-2;7)$.

Gọi I là tâm mặt cầu đường kính AB nên I là trung điểm AB, suy ra $I(2;-1;5)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-2;4)$ suy ra $AB=\sqrt{4^2+(-2)^2+7^2}=6$ nên bán kính mặt cầu là $R=\dfrac{AB}{2}=3$.

Phương trình mặt cầu là $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=9$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Cho bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

A Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

B Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên tập $\mathbb{R}$ bằng -1.

C Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên tập $\mathbb{R}$ bằng 0.

D Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có đường tiệm cận.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y=f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 60° và bán kính đáy bằng a. Diện tích xung quanh của hình nón bằng bao nhiêu?

A $2\pi a^2$. **B** $4\pi a^2$. **C** πa^2. **D** $\pi a^2\sqrt{3}$.

Lời giải.

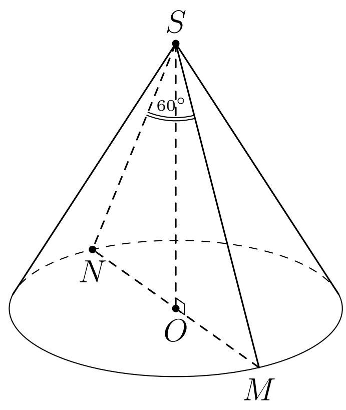
Hình nón đã cho có đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O đường kính MN như hình vẽ.

Ta có bán kính đáy $r = OM = a$, góc $\widehat{MSN} = 60^\circ$ suy ra $\widehat{MSO} = 30^\circ$.

$\triangle SOM$ vuông tại O, ta có

$\sin\widehat{MSO} = \dfrac{OM}{SM}$, suy ra $SM = \dfrac{OM}{\sin\widehat{MSO}} = 2a$, hay đường sinh $l = 2a$.

Vậy diện tích xung quanh hình nón là



$$S_{\text{xq}} = \pi \cdot r \cdot l = 2\pi a^2.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$. Véc-tơ nào trong các véc-tơ dưới đây không phải là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d?

A $\overrightarrow{u_4} = (1;2;1)$. (B) $\overrightarrow{u_3} = (-1;2;-1)$. (C) $\overrightarrow{u_2} = (2;-4;2)$. (D) $\overrightarrow{u_1} = (-3;6;-3)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có 1 véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_2} = (1;-2;1)$. Do đó véc-tơ $\overrightarrow{u_4} = (1;2;1)$ không là véc-tơ chỉ phương của d.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Ông Toán gửi ngân hàng 150 triệu đồng với lãi suất 0,8%/tháng, sau mỗi tháng tiền lãi được nhập vào vốn. Hỏi sau một năm số tiền lãi ông Toán thu được là bao nhiêu? (làm tròn đến nghìn đồng)

(A) 15.050.000 đồng. **B** 165.050.000 đồng. (C) 165.051.000 đồng. (D) 15.051.000 đồng.

Lời giải.

Ta có $P_n = P_0 \cdot (1+r)^n$, trong đó P_0 là số tiền gửi ban đầu; r là lãi suất; n là số kỳ hạn đã gửi.

Số tiền ông Toán thu được sau 1 năm là $P_{12} = 150.000.000 \cdot (1+0.8\%)^{12} = 165.050.000$ đồng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_8(6x-5)$.

A $y' = \dfrac{2}{(6x-5)\ln 2}$. (B) $y' = \dfrac{1}{(6x-5)\ln 8}$.

(C) $y' = \dfrac{6}{6x-5}$. (D) $y' = \dfrac{6}{(6x-5)\ln 4}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{(6x-5)'}{(6x-5)\cdot\ln 8} = \dfrac{6}{3(6x-5)\cdot\ln 2} = \dfrac{2}{(6x-5)\cdot\ln 2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Số hạng chứa x^{31} trong khai triển $\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)^{40}$, với $x \neq 0$ là

A $\mathrm{C}_{40}^{3}x^{31}$. (B) C_{40}^{37}. (C) C_{40}^{2}. (D) $\mathrm{C}_{40}^{2}x^{31}$.

Lời giải.

Số hạng thứ $k+1$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 \le k \le 40$ trong khai triển $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^{40}$ là

$$T_{k+1} = \mathrm{C}_{40}^k \cdot x^{40-k} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = \mathrm{C}_{40}^k \cdot x^{40-3k}.$$

Số hạng chứa x^{31} khi và chỉ khi $40-3k=31 \Leftrightarrow k=3$.
Vậy số hạng cần tìm là $\mathrm{C}_{40}^3 x^{31}$.
Chọn đáp án A □

Câu 10. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-3z+5=0$. Giá trị của $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. B. 3. C. $\sqrt{5}$. D. 10.

Lời giải.
Phương trình $z^2-3z+5=0$ có hai nghiệm là $z_1=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{11}}{2}i$; $z_2=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{11}}{2}i$.
Do đó $|z_1|+|z_2| = 2\cdot\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{5}$.
Chọn đáp án A □

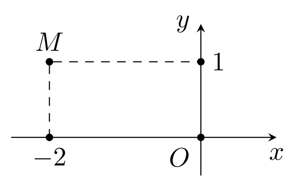
Câu 11. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x+\sin x)\,\mathrm{d}x$

A. $I=5$. B. $I=3$. C. $I=4$. D. $I=2$.

Lời giải.
Ta có: $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x+\sin x)\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{2}\cdot\cos 2x-\cos x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$
Chọn đáp án D □

Câu 12. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức nào?

A. $z=1+2i$. B. $z=1-2i$. C. $z=-2+i$. D. $z=2+i$.



Lời giải.
Ta có $M(-2;1)$ là điểm biểu diễn của số phức có phần thực bằng -2 và phần ảo bằng 1.
Suy ra điểm biểu diễn của M là số phức $z=-2+i$.
Chọn đáp án C □

Câu 13. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$?

A. $y=\left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)^x$. B. $y=\log_{\frac{1}{2}} x$. C. $y=\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^x$. D. $y=\log_2 x$.

Lời giải.
Nhận xét:

- Hàm số $y=\left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ vì cơ số $\left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)<1$.
- Hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ có tập xác định $\mathscr{D}=(0;+\infty)$ nên không thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- $y = \left(\dfrac{4}{\pi}\right)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ vì có cơ số $\left(\dfrac{4}{\pi}\right) > 1$.
- Hàm số $y = \log_2 x$ có tập xác định $\mathscr{D} = (0; +\infty)$ nên không thể nghich biến hoặc đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy $y = \left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)^x$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Phương trình $\ln(x-2) \cdot \ln(x+1) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$, với điều kiện trên ta có

$\ln(x-2) \cdot \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln(x-2) = 0 \\ \ln(x+1) = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 1 \\ x + 1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \text{ (nhận)} \\ x = 0 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{3}$, $AD = a$, cạnh SA có độ dài bằng $2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.BCD$.

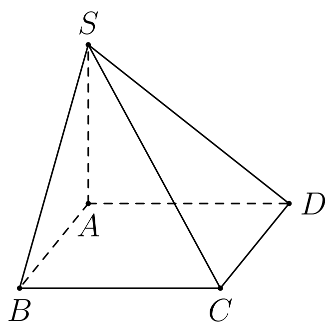
(A) $\dfrac{2a^3}{3}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải.

Diện tích tam giác BCD là $S_{BCD} = \dfrac{1}{2} S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} a^2\sqrt{3}$.

Đường cao của khối chóp là $SA = 2a$.

Thể tích khối chóp $S.BCD$ là $V_{S.BCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{BCD} \cdot SA = \dfrac{1}{3} a^3\sqrt{3}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Cho a, b là hai số thực dương bất kỳ. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

(A) $\log_3(3ab)^3 = 3(1 + \log_3 a + \log_3 b)$. (B) $\log_3(3ab)^3 = 3 + 3\log_3(ab)$.
(C) $\log_3(3ab)^3 = (1 + \log_3 a + \log_3 b)^3$. (D) $\log_3(3ab)^3 = 3 + \log_3(ab)^3$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \log_3(3ab)^3 &= 3(\log_3 3 + \log_3 a + \log_3 b) \\ &= 3(1 + \log_3 a + \log_3 b) \\ &= 3 + 3\log_3 ab \\ &= 3 + \log_3(ab)^3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

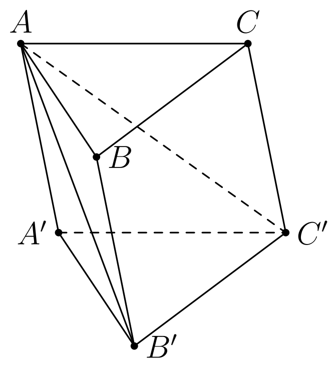
Câu 17. Lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Khi đó, thể tích khối chóp $A.BCC'B'$ bằng

Ⓐ $\dfrac{V}{2}$. Ⓑ $\dfrac{3V}{4}$. **C** $\dfrac{2V}{3}$. Ⓓ $\dfrac{V}{3}$.

Lời giải.

Ta có $V_{A.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}V$.

Suy ra $V_{A.BCC'B'} = V - V_{A.A'B'C'} = \dfrac{2}{3}V$.



Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 18. Một tổ có 7 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 2 bạn trực nhật sao cho có nam và nữ?

A 35. Ⓑ 49. Ⓒ 12. Ⓓ 25.

Lời giải.

Theo bài ra ta có chọn 2 bạn trực nhật sao cho có nam và nữ.

Suy ra chọn 1 nam và 1 nữ.

Vậy số cách chọn là: $\mathrm{C}_7^1 \cdot \mathrm{C}_5^1 = 35$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 19. Tính nguyên hàm $I = \displaystyle\int \left(2x^2 - \dfrac{3}{x}\right)\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ $I = \dfrac{2}{3}x^3 - 3\ln x + C$. **B** $I = \dfrac{2}{3}x^3 - 3\ln|x| + C$.

Ⓒ $I = \dfrac{2}{3}x^3 + 3\ln x + C$. Ⓓ $I = \dfrac{2}{3}x^3 + 3\ln|x| + C$.

Lời giải.

$I = \displaystyle\int \left(2x^2 - \dfrac{3}{x}\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}x^3 - 3\ln|x| + C$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 20. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ tại điểm có hoành độ bằng -2 là

Ⓐ $y = -3x + 1$. Ⓑ $y = 3x + 1$. **C** $y = 3x + 11$. Ⓓ $y = -3x + 11$.

Lời giải.

$y' = \dfrac{3}{(x+1)^2}$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Theo bài ra ta có: $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 5,\ y'(-2) = 3$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ tại điểm $M(-2; 5)$ là

$$y = 3(x+2) + 5 \Leftrightarrow y = 3x + 11.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$ trên đoạn $[-2; 1]$. Tính giá trị $T = 2M - m$.

(A) $T = 16$. (B) $T = 26$. (C) $T = 20$. (D) $T = 36$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$ liên tục trên $[-2; 1]$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

Ta có $y(-2) = -3$, $y(-1) = 4$, $y(1) = -12$.

Vậy $M = 4$ và $m = -12 \Rightarrow 2M - m = 20$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Cho (D) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\ln x}$, trục Ox và đường thẳng $x = 2$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (D) xung quanh trục Ox.

(A) $V = 2(\ln 2 - 1)$. (B) $V = 2\pi(\ln 2 - 1)$. (C) $V = 2\ln 2 - 1$. (D) $V = \pi(2\ln 2 - 1)$.

Lời giải.

Ta có $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay là

$$V = \pi \int\limits_1^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \pi \ln x \cdot x \Big|_1^2 - \pi \int\limits_1^2 x \cdot (\ln x)' \,\mathrm{d}x = 2\pi \ln 2 - \pi \int\limits_1^2 \mathrm{d}x = \pi(2\ln 2 - 1).$$

□

Câu 23. Cho hàm số $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$ có đồ thị (C). Gọi d là đường thẳng đi qua giao điểm của (C) với trục tung. Để d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt thì d có hệ số góc k thỏa mãn.

(A) $k < 0$. (B) $\begin{cases} k < 0 \\ k \neq -9 \end{cases}$. (C) $\begin{cases} k > 0 \\ k \neq 9 \end{cases}$. (D) $-9 < k < 0$.

Lời giải.

Gọi A là giao điểm của (C) với trục tung, suy ra $A(0; 4)$.

Đường thẳng d có phương trình $d\colon y = k(x - 0) + 4 = kx + 4$. Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình

$$-x^3 + 6x^2 - 9x + 4 = kx + 4 \Leftrightarrow x(x^2 - 6x + 9 - k) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ g(x) = x^2 - 6x + 9 + k = 0. \end{array}\right.$$

Đường thẳng d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0, tương đương với

$$\begin{cases} \Delta'_g > 0 \\ g(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - (9 + k) > 0 \\ 9 + k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < 0 \\ k \neq -9. \end{cases}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A Hình chóp có đáy là hình thang cân thì có mặt cầu ngoại tiếp.
B Hình chóp có đáy là tứ giác thì có mặt cầu ngoại tiếp.
C Hình chóp có đáy là hình thang vuông thì có mặt cầu ngoại tiếp.
D Hình chóp có đáy là hình bình hành thì có mặt cầu ngoại tiếp.

Lời giải.

Hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp khi và chỉ khi đáy nội tiếp được trong một đường tròn. Trong các hình gồm: hình thang cân, tứ giác thường, hình thang vuông và hình bình hành thì chỉ có hình thang cân nội tiếp trong một đường tròn. Vậy hình chóp có đáy là hình thang cân thì có mặt cầu ngoại tiếp.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Tính mô-đun của số phức z thỏa mãn $(1+i)^2z+(-3+i)\overline{z}=-13+21i$.

A $2\sqrt{5}$. B 5. C $\sqrt{10}$. D $5\sqrt{2}$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$ $(a,\ b\in\mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned}&(1+i)^2z+(-3+i)\overline{z}=-13+21i\Leftrightarrow 2i(a+bi)+(-3+i)(a-bi)=-13+21i\\ \Leftrightarrow\quad &(-3a-b)+(3a+3b)i=-13+21i\Leftrightarrow\begin{cases}-3a-b=-13\\3a+3b=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=4.\end{cases}\end{aligned}$$

Vậy $z=3+4i\Rightarrow |z|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Tìm tập nghiệm S của phương trình $(0,6)^{\frac{1}{x}}\le(0,6)^{\frac{1}{6}}$

A $S=(-\infty;6]$. B $S=(0;6]$.
C $[0;6]$. D $(-\infty;0)\cup[6;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $(0,6)^{\frac{1}{x}}\le(0,6)^{\frac{1}{6}}\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}\ge\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{6}\ge0\Leftrightarrow\dfrac{6-x}{x}\ge0\Leftrightarrow 0<x\le6$.
Tập nghiệm bất phương trình là $S=(0;6]$.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+(6m-4)x^2+1-m$ có 3 điểm cực trị

A $m\ge\dfrac{2}{3}$. B $m\le\dfrac{2}{3}$. C $m>\dfrac{2}{3}$. D $m<\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $y=x^4+(6m-4)x^2+1-m$ (1)
Để đồ thị hàm số (1) có 3 điểm cực trị khi: $6m-4<0\Leftrightarrow m<\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án D □

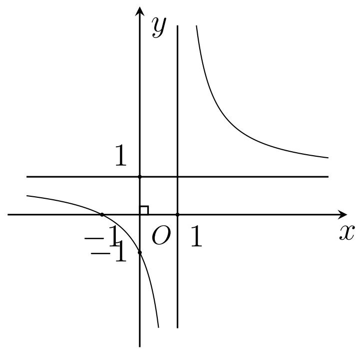
Câu 28. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+3y-z-1=0$ và $(\beta)\colon 4x+6y-mz-2=0$. Tìm m để hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau.

A Không tồn tại m. B $m=1$. C $m=2$. D $m=-2$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=(2;3;-1)$.
Mặt phẳng (β) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}=(4;6;-m)$.
Để $(\alpha)\parallel(\beta)$ khi: $\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{-1}{-m}\neq\dfrac{-1}{-2}$. Không tồn tại m.
Chọn đáp án A □

Câu 29.
Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?



A. $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. B. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. C. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. D. $y=\dfrac{x+1}{1-x}$.

Lời giải.
Dựa và đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=1$ và đường tiệm cận ngang $y=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}=(1;-2;1)$ và $\vec{v}=(2;1;-1)$. Vectơ nào dưới đây vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$?
A. $\overrightarrow{w_1}=(1;-3;5)$. B. $\overrightarrow{w_4}=(1;4;7)$. C. $\overrightarrow{w_3}=(1;-4;5)$. D. $\overrightarrow{w_2}=(1;3;5)$.

Lời giải.
Vectơ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là vectơ $[\vec{u},\vec{v}]=(1;3;5)$.
Chọn đáp án D □

Câu 31. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-2+i|=1$, $|z_2-7|=|\overline{z}_2-7+2i|$. Biết $\dfrac{z_1-z_2}{1+i}$ là một số thực. Tìm giá trị lớn nhất của $T=|z_1-z_2|$.
A. $T_{\max}=\sqrt{2}$. B. $T_{\max}=2\sqrt{2}$. C. $T_{\max}=3\sqrt{2}$. D. $T_{\max}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.
Gọi $z_1=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R},i^2=-1)$ và $z_2=a'+b'i$ $(a',b'\in\mathbb{R},i^2=-1)$.
Ta có

- $|z_1-2+i|=1\Leftrightarrow|a-2+(b+1)i|=1\Leftrightarrow(a-2)^2+(b+1)^2=1\Rightarrow(b+1)^2\le1\Leftrightarrow-2\le b\le0$.
- $|z_2-7|=|\overline{z}_2-7+2i|\Leftrightarrow|a'-7+b'i|=|a'-7+(2-b')i|\Leftrightarrow b'^2=(2-b')^2\Leftrightarrow b'=1$.
- $\dfrac{z_1-z_2}{1+i}=\dfrac{[(a-a')+(b-b')i](1-i)}{2}=\dfrac{(a-a'+b-b')+(b-b'+a'-a)i}{2}$.
  $\dfrac{z_1-z_2}{1+i}$ là số thực nên $b-b'+a'-a=0\Leftrightarrow b-b'=a-a'$.
- $T=|z_1-z_2|=\sqrt{(b-b')^2+(a-a')^2}=\sqrt{2(b-1)^2}=\sqrt{2}(1-b)\le3\sqrt{2}$ (do $-2\le b\le0$).
  Dấu "=" xảy ra khi $b=-2\Rightarrow\begin{cases}a=2\\a'=5\end{cases}$.
  Vậy $T_{\max}=3\sqrt{2}$ khi $z_1=2-2i$, $z_2=5+i$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, gọi S là tập hợp các số có 8 chữ số đôi một khác nhau lập từ tập A. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S, xác suất để số được chọn có tổng 4 chữ số đầu bằng tổng 4 chữ số cuối bằng

(A) $\dfrac{3}{35}$. (B) $\dfrac{4}{35}$. (C) $\dfrac{12}{245}$. (D) $\dfrac{1}{10}$.

Lời giải.

Mỗi số thuộc tập S có tổng các chữ số bằng $\dfrac{7 \cdot 8}{2} = 28$.

Ta chia tập A thành hai tập con B và C sao cho mỗi tập có 4 phần tử, tổng các phần tử ở mỗi tập bằng 14 và $B \cap C = \emptyset$. Ta có bảng sau

B	C
$\{0; 1; 6; 7\}$	$\{2; 3; 4; 5\}$
$\{0; 2; 5; 7\}$	$\{1; 3; 4; 6\}$
$\{0; 3; 4; 7\}$	$\{1; 2; 5; 6\}$
$\{0; 3; 5; 6\}$	$\{1; 2; 4; 7\}$

Số các số có 8 chữ số lập từ tập A là $7 \cdot 7!$.

Gọi $\overline{a_1a_2 \cdot a_8}$ là số có 8 chữ số thỏa mãn tổng 4 chữ số đầu bằng tổng 4 chữ số cuối.

Trường hợp 1. $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ lấy các chữ số từ tập C, khi đó, có $4 \cdot 4! \cdot 4!$ số thỏa mãn.

Trường hợp 2. $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ lấy các chữ số từ tập B, khi đó, có $4 \cdot 3 \cdot 3! \cdot 4!$ số thỏa mãn.

Vậy có $4 \cdot 4! \cdot 4! + 4 \cdot 3 \cdot 3! \cdot 4! = 4 \cdot 4!(4! + 3 \cdot 3!)$ số thỏa mãn tổng 4 chữ số đầu bằng tổng 4 chữ số cuối.

Xác suất cần tìm là $P = \dfrac{4 \cdot 4!(3 \cdot 3! + 4!)}{7 \cdot 7!} = \dfrac{4}{35}$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{-x^2 + 2018x + 2019} - 24\sqrt{14}}{x^2 - (m+1)x + m}$ có đúng hai đường tiệm cận?

(A) 2020. (B) 2019. (C) 2018. (D) 2021.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} -x^2 + 2018x + 2019 \geq 0 \\ x^2 - (m+1)x + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 2019 \\ x \neq 1; x \neq m \end{cases}$.

Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang vì $-1 \leq x \leq 2019$.

Ta có

$$\begin{aligned} y = \frac{\sqrt{-x^2 + 2018x + 2019} - 24\sqrt{14}}{x^2 - (m+1)x + m} &= \frac{(-x^2 + 2018x + 2019) - (24\sqrt{14})^2}{(x-1)(x-m)(\sqrt{-x^2 + 2018x + 2019} + 24\sqrt{14})} \\ &= \frac{-x^2 + 2018x - 6045}{(x-1)(x-m)(\sqrt{-x^2 + 2018x + 2019} + 24\sqrt{14})} \\ &= \frac{-(x-3)(x-2015)}{(x-1)(x-m)(\sqrt{-x^2 + 2018x + 2019} + 24\sqrt{14})} \end{aligned}$$

Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận đứng khi chỉ khi $\begin{cases} -1 \leq m \leq 2019 \\ m \neq 1; m \neq 3; m \neq 2015 \end{cases}$.

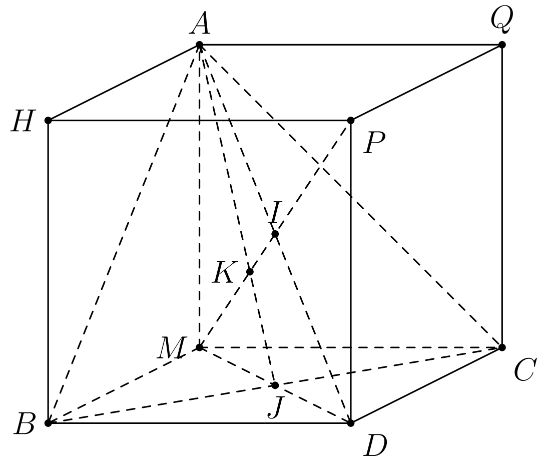
Mặt khác, m là số nguyên nên ta có $2021 - 3 = 2018$ giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x+2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=99$ và điểm $M(1;7;-8)$. Qua điểm M kẻ các tia Ma, Mb, Mc đôi một vuông góc nhau và cắt mặt cầu tại điểm thứ hai tương ứng là A, B, C. Biết rằng mặt phẳng (ABC) luôn đi qua một điểm cố định $K(x_k;y_k;z_k)$. Tính giá trị $P=x_k+2y_k-z_k$.

A $P=11$. B $P=5$. C $P=7$. D $P=12$.

Lời giải.



Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;4;1)$, bán kính $R=\sqrt{99}$.
Ta có $M(1;7;-8)\in(S)$.
Xét hình hộp chữ nhật $AHPQ.MBDC$.
Gọi $J=MD\cap BC$, $K=MP\cap AJ\Rightarrow K\in(ABC)$.
Rõ ràng, tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $MABC$ là trung điểm của đoạn MP (cũng là tâm của (S)).
Mặt khác K là trọng tâm của tam giác MAD hay $\overrightarrow{MK}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{MI}$. Vì M, I cố định nên K cố định. Vậy K chính là điểm cố định mà mặt phẳng (ABC) luôn luôn đi qua.
Ta có $\overrightarrow{MK}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{MI}\Rightarrow K(-1;5;-2)$
$\Rightarrow P=x_k+2y_k-z_k=-1+2\cdot5-(-2)=11$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{(3m+2)x^2}{2}+(2m^2+3m+1)x+m-2$ (1). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số (1) có cực đại, cực tiểu $x_{\text{CĐ}}$, x_{CT} sao cho $3x_{\text{CĐ}}^2=4x_{\text{CT}}$. Khi đó, tổng các phần tử của tập S bằng

A $S=\dfrac{-4-\sqrt7}{6}$. B $S=\dfrac{4+\sqrt7}{6}$. C $S=\dfrac{-4+\sqrt7}{6}$. D $S=\dfrac{4-\sqrt7}{6}$.

Lời giải.

Ta có $y'=x^2-(3m+2)x+(2m^2+3m+1)$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2m+1\\x=m+1\end{array}\right.$.

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi chỉ khi $m\neq0$.

- Trường hợp $m>0$. Khi đó, $x_{\text{CĐ}}=m+1$, $x_{\text{CT}}=2m+1$.

  Ta có $3x_{\text{CĐ}}^2=4x_{\text{CT}}\Leftrightarrow3(m+1)^2=4(2m+1)\Leftrightarrow3m^2-2m-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\text{ (nhận)}\\m=-\dfrac{1}{3}\text{ (loại)}\end{array}\right.$.

- Trường hợp $m<0$. Khi đó, $x_{\text{CĐ}}=2m+1$, $x_{\text{CT}}=m+1$.

  Ta có $3x_{\text{CĐ}}^2=4x_{\text{CT}}\Leftrightarrow3(2m+1)^2=4(m+1)\Leftrightarrow12m^2+8m-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{-2+\sqrt7}{6}\text{ (loại)}\\m=\dfrac{-2-\sqrt7}{6}\text{ (nhận)}\end{array}\right.$.

Vậy $S=\{1;\dfrac{-2-\sqrt7}{6}\}$. Do đó, tổng $1+\dfrac{-2-\sqrt7}{6}=\dfrac{4-\sqrt7}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 99 \\ u_{n+1} = u_n - 2n - 1,\ n \geq 1 \end{cases}$. Hỏi số -861 là số hạng thứ mấy?

(A) 35. (B) 31. (C) 21. (D) 34.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} - 2n + 1 \\ u_{n-1} &= u_{n-2} - 2n + 3 \\ \vdots\ &\ \vdots\quad \vdots \\ u_3 &= u_2 - 2n + 2n - 5 \\ u_2 &= u_1 - 2n + 2n - 3 \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 - 2n \cdot (n-1) + 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-5) + (2n-3) \\ u_n &= 99 - 2n^2 + 2n + \frac{n-1}{2}\left[2 \cdot 1 + (n-2) \cdot 2\right] = 100 - n^2 \end{aligned}$$

Giả sử $u_n = -861 \Rightarrow n^2 = 961 \Rightarrow n = 31$ $\big($ vì $n \in \mathbb{N}\big)$.

Vậy số -861 là số hạng thứ 31.

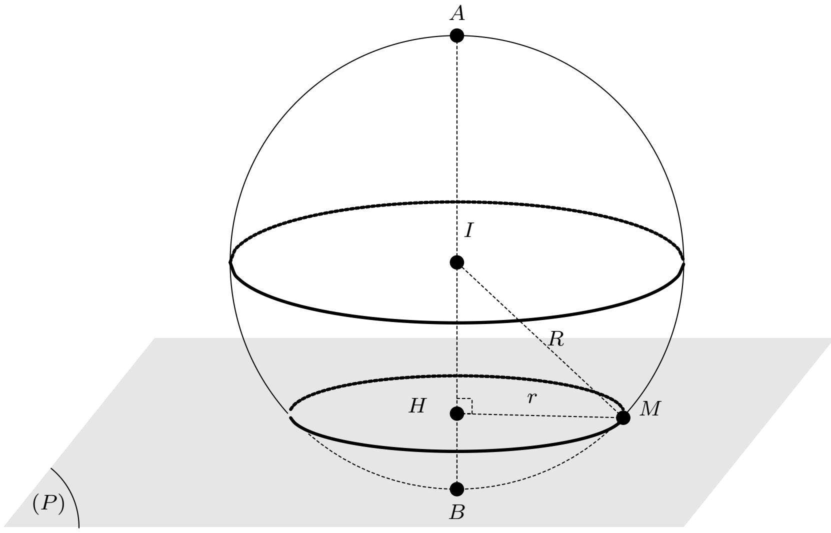
Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$ và $B(6;5;5)$. Gọi (S) là mặt cầu có đường kính AB. Mặt phẳng (P) vuông góc với đoạn AB tại H sao cho khối nón đỉnh A và đáy là hình tròn tâm H (giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P)) có thể tích lớn nhất, biết rằng $(P) : 2x + by + cz + d = 0$ với $b, c, d \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị $T = b - c + d$.

(A) $T = -18$. (B) $T = -20$. (C) $T = -21$. (D) $T = -19$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; 4; 2)$.
Mà $\overrightarrow{AB} \perp (P)$
Nên $\dfrac{2}{4} = \dfrac{b}{4} = \dfrac{c}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 1. \end{cases}$
Suy ra $(P)\colon 2x + 2y + z + d = 0$.
Ta có $AB = 6$.
Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB, suy ra $I\,(4; 3; 4)$.
Ta có (S) là mặt cầu có đường kính AB nên $(S)\colon \begin{cases} \text{tâm } I\,(4; 3; 4) \\ \text{bán kính } R = \dfrac{AB}{2} = 3 \end{cases}$.



Gọi r là bán kính đường tròn tâm H. Khi đó, thể tích khối nón đỉnh cần tìm được xác định bởi công thức Ta có

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot (R + IH) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \left(R + \sqrt{R^2 - r^2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(3 \cdot r^2 + r^2 \cdot \sqrt{9 - r^2}\right)$$

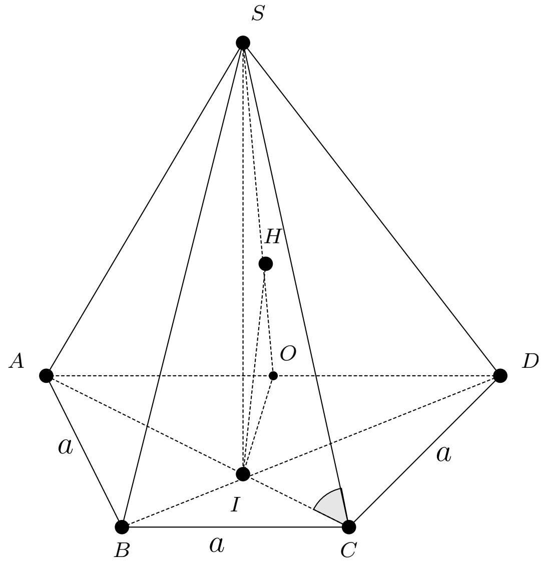
Đặt $f(r) = 3 \cdot r^2 + r^2 \cdot \sqrt{9 - r^2}$, $r \in (0; 3]$.
Ta có $f'(r) = r\left(6 + 2 \cdot \sqrt{9 - r^2} - \dfrac{r^2}{\sqrt{9 - r^2}}\right)$.
Suy ra $f'(r) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = 0\,(\text{ loại }) \\ 6 + 2 \cdot \sqrt{9 - r^2} - \dfrac{r^2}{\sqrt{9 - r^2}} = 0 \end{array}\right.$
$\Leftrightarrow 2\sqrt{9 - r^2} = r^2 - 6$, $\left(\text{ điều kiện } r^2 \geq 6\right)$.
$\Leftrightarrow r^4 - 8r^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = 0 \quad (\text{ loại }) \\ r^2 = 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = -2\sqrt{2}\,(\text{ loại }) \\ r = 2\sqrt{2}\,(\text{ nhận }) \end{array}\right.$
Suy ra $HI = \sqrt{R^2 - r^2} = 1$.
Ta có $\dfrac{AH}{AI} = \dfrac{AI + HI}{AI} = \dfrac{R + HI}{R} = \dfrac{4}{3}$.
Suy ra $AH = \dfrac{4}{3}AI \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AI} \Rightarrow H\left(\dfrac{13}{3}; \dfrac{11}{3}; \dfrac{13}{3}\right)$.
Mà $H\left(\dfrac{13}{3}; \dfrac{11}{3}; \dfrac{13}{3}\right) \in (P)\colon 2x + 2y + z + d = 0 \Rightarrow d = -21$.
Vậy $T = b - c + d = -20$.
Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều và $AB = BC = CD = a$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SC và

$(ABCD)$ bằng 60°. Tính sin góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD).

A $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. **B** $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **C** $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. **D** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Gọi I là giao điểm của AC và BD.

Ta có $\begin{cases}(SAC)\perp(ABCD)\\(SBD)\perp(ABCD)\\(SAC)\cap(SBD)=SI\end{cases} \Rightarrow SI\perp(ABCD)$.

Ta có góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCI}$ nên $\widehat{SCI}=60^\circ$.

Xét $\triangle BCD$, ta có

$$\begin{aligned}BD^2 &= BC^2+CD^2-2\cdot BD\cdot CD\cdot\cos\widehat{BCD}\\&=a^2+a^2-2\cdot a\cdot a\cdot\cos120^\circ\\&=3a^2\end{aligned}$$

Suy ra $AC=BD=a\sqrt{3}$.

Vì $BC\parallel AD\Rightarrow\triangle IBC\backsim\triangle IDA$, suy ra $\dfrac{IC}{IA}=\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{1}{2}$.

Do đó $\dfrac{IC}{AC-IC}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{IC}{a\sqrt{3}-IC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow IC=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow IA=2IC=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Xét $\triangle SIC$ vuông tại I, ta có $\begin{cases}SI=IC\cdot\tan60^\circ=a\\SC=\dfrac{IC}{\cos60^\circ}=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\end{cases}$

Gọi O là trung điểm của AD.

Xét $\triangle AID$ cân tại I với trung tuyến IO, ta có $IO^2=\dfrac{IA^2+ID^2}{2}-\dfrac{AD^2}{4}=\dfrac{a^2}{3}\Rightarrow IO=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Dựng IH vuông góc với SO tại H.

Suy ra $\mathrm{d}\left(I,(SAD)\right)=IH=\dfrac{a}{2}$.

Ta có $CI\cap(SAD)=A\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}\left(C,(SAD)\right)}{\mathrm{d}\left(I,(SAD)\right)}=\dfrac{AC}{AI}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\mathrm{d}\left(C,(SAD)\right)=\dfrac{3a}{4}$.

Gọi K là hình chiếu của C lên mặt phẳng (SAD).

Suy ra SK là hình chiếu của CK lên mặt phẳng (SAD) và $CK=\mathrm{d}\left(C,(SAD)\right)=\dfrac{3a}{4}$.

Suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) là $\widehat{CSK}$ và $\sin\widehat{CSK}=\dfrac{CK}{SC}=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho các số thực x,y thay đổi thoả mãn $e^{x^2+2xy+y^2}+4x^2+2xy+y^2-3=\dfrac{1}{e^{3x^2-3}}$. Gọi m_0 là giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|x^2+2xy-y^2+3m-2|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, m_0 thuộc vào khoảng nào?

A $m_0\in(1;2)$. **B** $m_0\in(-1;0)$. **C** $m_0\in(2;3)$. **D** $m_0\in(0;1)$.

Lời giải.

Ta có $e^{x^2+2xy+y^2}+4x^2+2xy+y^2-3=\dfrac{1}{e^{3x^2-3}}$.

$\Leftrightarrow e^{(x+y)^2}+(x+y)^2=e^{3-3x^2}+3-3x^2 \quad (*)$.
Xét hàm số $f(t)=e^t+t$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
Ta có $f'(t)=e^t+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Mà $(*)\Leftrightarrow f\left[(x+y)^2\right]=f\left(3-3x^2\right)$.
Suy ra $(x+y)^2=3-3x^2$.
Vì $(x+y)^2\geq 0\Leftrightarrow 3-3x^2\geq 0\Leftrightarrow x^2\leq 1$.
Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}
& (x+y)^2=3-3x^2\\
\Leftrightarrow\ & 4x^2+2xy+y^2=3\\
\Leftrightarrow\ & 16x^2+8xy+y^2=12-3y^2\\
\Leftrightarrow\ & (4x+y)^2=12-3y^2
\end{aligned}$$

Vì $(4x+y)^2\geq 0\Leftrightarrow 12-3y^2\geq 0\Leftrightarrow y^2\leq 4$.
Mặt khác, ta có $(x+y)^2=3-3x^2\Leftrightarrow 4x^2+2xy+y^2=3$.
Ta có

$$\begin{aligned}
& P=\left|3x^2+2y^2-(3m+1)\right|\\
\Leftrightarrow\ & 3P=\left|9x^2+6y^2-3\cdot(3m+1)\right|\\
\Leftrightarrow\ & 3P=\left|9x^2+6y^2-\left(4x^2+2xy+y^2\right)(3m+1)\right|\\
\Leftrightarrow\ & 3P=\left|(5-2m)\,x^2-(6m+2)\,xy+(5-3m)\,y^2\right|\\
\Leftrightarrow\ & P=\left|\frac{(5-2m)\,x^2-(6m+2)\,xy+(5-3m)\,y^2}{3}\right|\\
\Leftrightarrow\ & P=\left|\frac{(5-2m)\,x^2-(6m+2)\,xy+(5-3m)\,y^2}{4x^2+2xy+y^2}\right|
\end{aligned}$$

Trường hợp 1: $y=0$. Ta có $P=\left|\dfrac{5-2m}{4}\right|=\dfrac{|5-2m|}{4}$.
Trường hợp 2: $y\neq 0$. Đặt $t=\dfrac{x}{y}$.
Suy ra $P=\left|\dfrac{(5-2m)\,t^2-(6m+2)\,t+(5-3m)}{4t^2+2t+1}\right|$.
Đặt $f(t)=\dfrac{(5-2m)\,t^2-(6m+2)\,t+(5-3m)}{4t^2+2t+1}$.
Ta có $f'(t)=\dfrac{18t^2-30t-12}{\left(4t^2+2t+1\right)^2}$.
Ta có $f'(t)=0\Leftrightarrow 18t^2-30t-12=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=2 & \Rightarrow f(2)=1-3m\\ t=-\dfrac{1}{3} & \Rightarrow f(-\dfrac{1}{3})=8-3m\end{array}\right.$

t	$-\infty$		$-\dfrac{1}{3}$		2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\dfrac{5-2m}{4}$	$\nearrow$	$8-3m$	$\searrow$	$1-3m$	$\nearrow$	$\dfrac{5-2m}{4}$

Suy ra $\max P \in \{|1-3m|\,;|8-3m|\} = \{|3m-1|\,;|8-3m|\} \geq \dfrac{|3m-1+8-3m|}{2} = \dfrac{7}{2}$.

Suy ra giá trị lớn nhất đạt giá trị nhỏ nhất khi $3m-1 = 8-3m \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$.

Vậy $m = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$ thoả mãn $z + 7 + i - |z|(2+i) = 0$ và $|z| < 3$. Tính giá trị $P = a + b$

(A) $P = \dfrac{5}{2}$. (B) $P = 7$. (C) $P = -\dfrac{1}{2}$. (D) $P = 5$.

Lời giải.

Ta có $z + 7 + i - |z|(2+i) = 0 \Leftrightarrow a + bi + 7 + i - \sqrt{a^2+b^2}\,(2+i) = 0$.

$\Leftrightarrow \left(a + 7 - 2\sqrt{a^2+b^2}\right) + \left(b + 1 - \sqrt{a^2+b^2}\right) i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 7 - 2\sqrt{a^2+b^2} = 0 \\ b + 1 - \sqrt{a^2+b^2} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 5 \\ \sqrt{a^2+b^2} = b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 5 \\ 4b^2 - 22b + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 5 \\ b = 4 \text{ hay } b = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Với $b = 4 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow |z| = 5$ (vô lý).

Với $b = \dfrac{3}{2} \Rightarrow a = -2 \Rightarrow |z| = \dfrac{5}{2} < 3$.

Suy ra $P = a + b = -2 + \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Cho bất phương trình $8^x - 3.2^{2x+1} + 9.2^x + m - 5 > 0$ (1) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 2]$?

(A) Vô số. (B) 4. (C) 5. (D) 6.

Lời giải.

Đặt $t = 2^x$ vì $x \in [1; 2] \Rightarrow t \in [2; 4]$.

Bất phương trình đã cho trở thành $t^3 - 6t^2 + 9t - 5 > -m$ có nghiệm đúng với $t \in [2; 4]$.

Đặt $g(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 5 \Rightarrow g'(t) = 3t^2 - 12t + 9 > 0\, \forall t \in [2; 4]$.

$\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra $-m < Min\, g(t) = g(2) = -5 \Leftrightarrow m > 5$.

Vậy có vô số giá trị của m.

Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Cho hai quả bóng A, B di chuyển ngược chiều nhau va chạm với nhau. Sau va chạm mỗi quả bóng nảy ngược lại một đoạn thì dừng hẳn. Biết sau khi va chạm, quả bóng A nảy ngược lại với vận tốc $v_A(t) = 8 - 2t\,(m/s)$ và quả bóng B nảy ngược lại với vận tốc $v_B(t) = 12 - 4t\,(m/s)$. Tính khoảng cách giữa hai quả bóng sau khi đã dừng hẳn (Giả sử hai quả bóng đều chuyển động thẳng).

(A) 36 mét. (B) 32 mét. **C** 34 mét. (D) 30 mét.

Lời giải.

Thời gian quả bóng A chuyển động từ lúc va chạm đến khi dừng hẳn $v_A(t) = 0 \Leftrightarrow 8 - 2t = 0 \Rightarrow t = 4s$.

Quãng đường quả bóng A di chuyển $S_A = \displaystyle\int_0^4 (8 - 2t)\,\mathrm{d}x = 16m$

Thời gian quả bóng B chuyển động từ lúc va chạm đến khi dừng hẳn $v_B(t) = 0 \Leftrightarrow 12 - 4t = 0 \Rightarrow t = 3s$.

Quãng đường quả bóng B duy chuyển $S_B = \displaystyle\int_0^3 (12 - 4t)\,\mathrm{d}x = 18m$

Vậy: Khoảng cách hai quả bóng sau khi dừng hẳn là $S = S_A + S_B = 34m$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, SC. Mặt phẳng (AMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa điểm B có thể tích là V_1. Gọi V là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tính tỷ số $\dfrac{V_1}{V}$.

(A) $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{13}{24}$. **B** $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{11}{24}$. (C) $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{17}{24}$. (D) $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{7}{12}$.

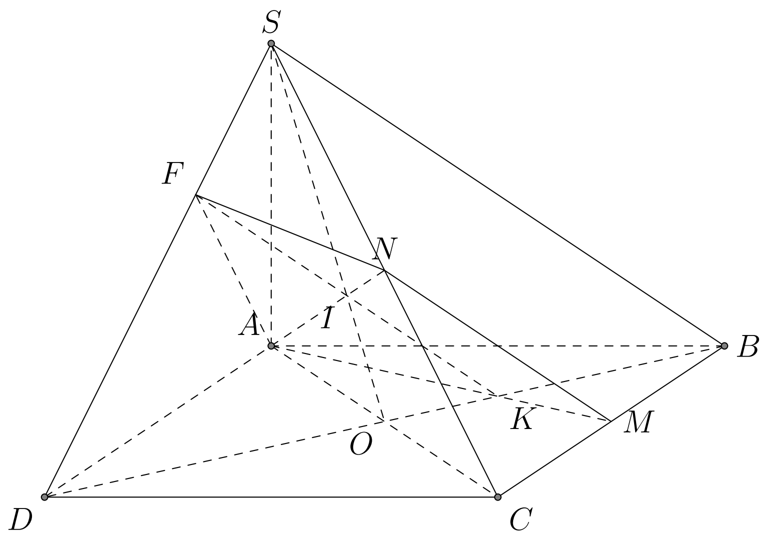
Lời giải.

Gọi O là giao điểm của BD và AC. I là giao điểm của SO và AN. K là giao điểm của AM và BD. Kéo dài IK cắt SD tại F.

Suy ra thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (AMN) là $AMNF$.

Vì I là giao điểm của hai đường trung tuyến AN và SO của tam giác SAC nên I là trọng tâm của tam giác SAC.

Vì K là giao điểm của hai đường trung tuyến AM và BO của tam giác ABC nên K là trọng tâm của tam giác SAC.



$\Rightarrow \dfrac{OK}{OB} = \dfrac{OI}{OS} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow IK \parallel SB$.

Hay $KF \parallel SB$

$\Rightarrow \dfrac{DK}{DB} = \dfrac{DF}{DS} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{SF}{SD} = \dfrac{1}{3}$.

Dễ thấy $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle AMC} = \dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{4}S_{ABCD} \Rightarrow V_{SAMC} = V_{SAMB} = \dfrac{1}{2}V_{SABC} = \dfrac{1}{4}V$.

Ta có: $\dfrac{V_{SAFN}}{V_{SADC}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SF}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$.

$\dfrac{V_{SAMN}}{V_{SACM}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SN}{SC} \cdot \dfrac{SM}{SM} = \dfrac{1}{2}$.

$\Rightarrow V_1 = V_{SAFN} + V_{SAMN} + V_{SAMB} = \dfrac{1}{12}V + \dfrac{1}{8}V + \dfrac{1}{4} = \dfrac{11}{24}V \Rightarrow \dfrac{V_1}{V} = \dfrac{11}{24}$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$ và với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $f'(x) \cdot f(x) - \sin 2x = f'(x) \cdot \cos x - f(x).\sin x$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I = 1$. **B** $I = \sqrt{2} - 1$. **C** $I = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1$. **D** $I = 2$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) \cdot f(x) - \sin 2x = f'(x) \cdot \cos x - f(x) \cdot \sin x \Leftrightarrow f'(x) \cdot f(x) - \sin 2x = [f(x) \cdot \cos x]'$.

Lấy nguyên hàm hai vế: $\int [f'(x) \cdot f(x) - \sin 2x]\,\mathrm{d}x = \int [f(x) \cdot \cos x]'\,\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \dfrac{f^2(x)}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x = \cos x \cdot f(x) + C$.

Vì $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f^2(x) + \cos 2x = 2\cos x \cdot f(x) \Leftrightarrow f^2(x) - 2\cos x \cdot f(x) + \cos^2 x = \sin^2 x$.

$\Leftrightarrow (f(x) - \cos x)^2 = \sin^2 x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) - \cos x = \sin x \\ f(x) - \cos x = -\sin x \end{array}\right.$.

Vì $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$ nên nhận $f(x) = \cos x - \sin x$.

Vậy $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x = (\cos x - \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1.$

Chọn đáp án B □

Câu 45. Từ một khối đất sét hình trụ có chiều cao bằng $36(cm)$ và đường tròn đáy có đường kính bằng $24(cm)$. Bạn Toán muốn chế tạo khối đất đó thành nhiều khối cầu và chúng có cùng bán kính $6(cm)$. Hỏi bạn Toán có thể làm ra được tối đa bao nhiêu khối cầu như thế ?

A 108. B 54. C 72. D 18.

Lời giải.

Thể tích khối trụ đất sét là:$V_T = \pi R_T^2 h = \pi \cdot 12^2 \cdot 36 = 5184\pi$.

Thể tích khối cầu $V_C = \dfrac{4}{3}\pi R_C^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi$.

Số khối cầu có thể chế tạo từ khối trụ là $\dfrac{V_T}{V_C} = \dfrac{5184\pi}{288\pi} = 18$.

Chọn đáp án D □

Câu 46.

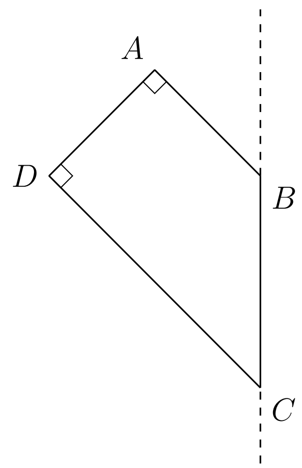
Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D có $CD = 2AB = 2AD = 4$. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra bởi hình thang $ABCD$ khi quay xung quanh đường thẳng BC.

A $V = \dfrac{20\pi\sqrt{2}}{3}$.

B $V = \dfrac{32\pi\sqrt{2}}{3}$.

C $10\pi\sqrt{2}$.

D $V = \dfrac{28\pi\sqrt{2}}{3}$.



Lời giải.

□

Gọi A', D' lần lượt là điểm đối xứng của A, D qua đường thẳng BC.

Gọi M là giao điểm của AD và $A'D'$.

Ta có $AB = AD = 2$, $CD = 4$ suy ra $AH = BH = \sqrt{2}$ và $BD = BC = 2\sqrt{2}$.

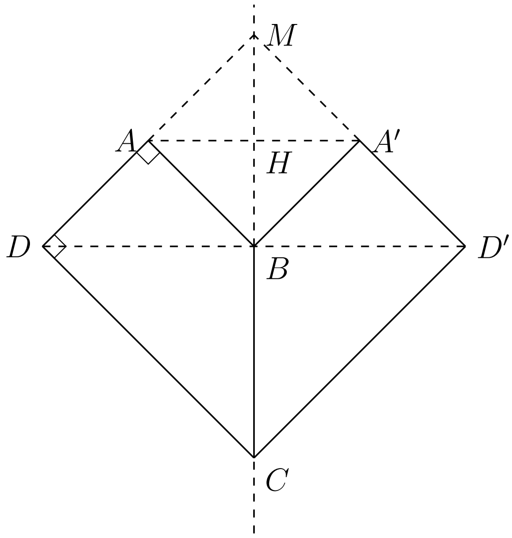
Ta có $\dfrac{AA'}{DD'} = \dfrac{1}{2}$ suy ra $MA = AD = 2$ và $MB = 2\sqrt{2}$.

Gọi V_1 là thể tích của khối nón có chiều cao $BC = 2\sqrt{2}$ và bán kính đường tròn đáy là $BD = 2\sqrt{2}$.

Gọi V_2 là thể tích của khối nón có chiều cao $BM = 2\sqrt{2}$ và bán kính đường tròn đáy là $BD = 2\sqrt{2}$.

Gọi V_3 là thể tích của khối nón có chiều cao $BH = \sqrt{2}$ và bán kính đường tròn đáy là $AH = \sqrt{2}$.

Gọi V_4 là thể tích của khối nón có chiều cao $MH = \sqrt{2}$ và bán kính đường tròn đáy là $AH = \sqrt{2}$.



Ta có $V_1 = V_2$ và $V_3 = V_4$.

Khi đó

$V = V_1 + V_2 - V_3 - V_4 = 2V_1 - 2V_3$

$= 2\frac{1}{3}\left[(2\sqrt{2})^2\pi \cdot 2\sqrt{2} - (\sqrt{2})^2\pi \cdot \sqrt{2}\big)\right] = \dfrac{28\pi\sqrt{2}}{3}$.

Câu 47. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = x$, $AD = 1$. Biết góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $ABB'A'$ bằng 30°. Tìm giá trị lớn nhất $V_{\max}$ của thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A $V_{\max} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **B** $V_{\max} = \dfrac{1}{2}$. **C** $V_{\max} = \dfrac{3}{2}$. **D** $V_{\max} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $V = AA' \cdot S_{ABCD}$. Hình chiếu của $A'C$ trên mặt $(ABB'A')$ là $A'B$, do đó góc giữa $A'C$ và $(ABB'A')$ là góc $\widehat{BA'C} = 30^\circ$.

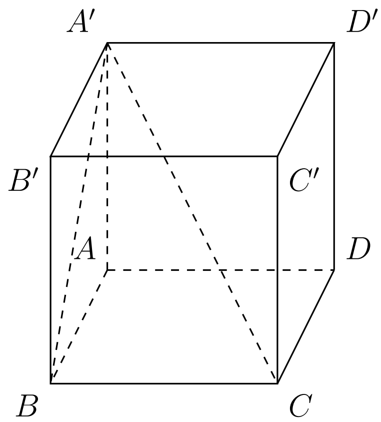
Xét tam giác vuông $\Delta A'BC$ có

$\tan 30^\circ = \dfrac{BC}{A'B} \Rightarrow A'B = \sqrt{3}BC = \sqrt{3}$.

Ta có $AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = \sqrt{3 - x^2}$. Vậy $V = x\sqrt{3 - x^2}$.

Xét $f(x) = x\sqrt{3 - x^2}$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{3 - 2x^2}{\sqrt{3 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ với $0 < x < \sqrt{3}$.



Bảng biến thiên

x	0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$\sqrt{3}$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	

Vậy $V_{\max} = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện đều $ABCD$ có $A(4;-1;2)$, $B(1;2;2)$, $C(1;-1;5)$, $D(x_D;y_D;z_D)$ với $y_D>0$. Tính $P=2x_D+y_D-z_D$.

A $P=-3$. **B** $P=1$. **C** $P=-7$. **D** $P=5$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, suy ra $G(2;0;3)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;3;0)$, $\overrightarrow{AC}=(-3;0;3)\Rightarrow\vec{n}=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(1;1;1)$ và $AB=3\sqrt{2}$.

Đường thẳng đi qua G vuông góc với (ABC) có phương trình $\begin{cases}x=2+t\\y=t\\z=3+t.\end{cases}$

Do đó $D(2+t;t;3+t)$. Mà $AD=AB\Rightarrow(t-2)^2+2(t+1)^2=18\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=-2\end{array}\right.$.

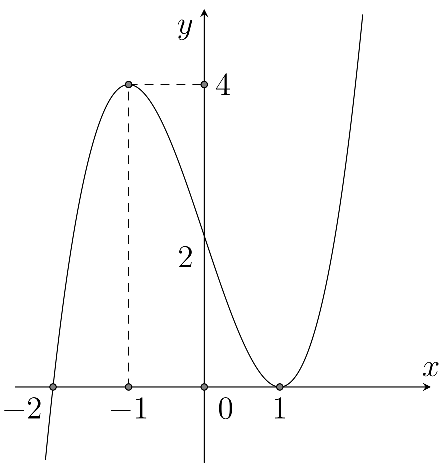
Vì $y_D>0\Rightarrow y=2\Rightarrow 2x_D+y_D-z_D=5$.

Chọn đáp án D □

Câu 49.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Khi đó, số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f^2(x)-2f(x)-8\right|$ là

A 9. **B** 10. **C** 11. **D** 7.



Lời giải.

Ta xét hàm $y=h(x)=f^2(x)-2f(x)-8\Rightarrow y'=2f(x)f'(x)-2f'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f(x)=1.\end{array}\right.$

$f'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1.\end{array}\right.$

$f(x)=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\text{ với }-2<x_1<-1\\x=x_2\text{ với }0<x<1\\x=x_3\text{ với }x_3>1.\end{array}\right.$

Ta có $y=h(x)=(f(x)-4)(f(x)+2)$

$\Rightarrow h(x_1)=h(x_2)=h(x_3)=(1-4)\cdot 3=-9$ và $h(-1)=0$, $h(1)=-8$.

Ta có bảng biến thiên hàm $y=h(x)=f^2(x)-2f(x)-8$

x	$-\infty$		x_1		-1		x_2		1		x_3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	0	$\searrow$	-9	$\nearrow$	-8	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy số điểm cực trị của hàm $y = g(x) = |h(x)|$ là 7.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_0^5 f(x)\mathrm{d}x = 6$. Tính tích phân $I = \int\limits_{-1}^{1} f(|3x-2|)\mathrm{d}x$

A $I = 3$. **B** $I = -2$. **C** $I = 4$. **D** $I = 9$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{-1}^{1} f(|3x-2|)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{\frac{2}{3}} f(-3x+2)\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{2}{3}}^{1} f(3x-2)\mathrm{d}x = I_1 + I_2$.

$I_1 = \int\limits_{-1}^{\frac{2}{3}} f(-3x+2)\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{\frac{2}{3}} f(-3x+2)\mathrm{d}(-3x+2)$.

Đặt $t = -3x+2$ suy ra $x = -1 \Rightarrow t = 5$; $x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 0$. Do đó $I_1 = \frac{1}{3}\int\limits_0^5 f(t)\mathrm{d}t = 2$.

$I_2 = \int\limits_{\frac{2}{3}}^{1} f(3x-2)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{2}{3}} 1f(3x-2)\mathrm{d}(3x-2)$.

Đặt $t = 3x-2$ suy ra $x = 1 \Rightarrow t = 1$; $x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 0$. Do đó $I_2 = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 1$.

Vậy $I = I_1 + I_2 = 3$.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. B	3. D	4. B	5. A	6. A	7. B	8. A	9. A	10. A
11. D	12. C	13. A	14. C	15. B	16. C	17. C	18. A	19. B	20. C
21. C	23. B	24. A	25. B	26. B	27. D	28. A	29. C	30. D	31. C
32. B	33. C	34. A	35. D	36. B	37. B	38. A	39. A	40. C	41. A
42. C	43. B	44. B	45. D	47. C	48. D	49. D	50. A		

50 ĐỀ THI THỬ THPT LƯƠNG TÀI 2, BẮC NINH – LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Trên đường tròn tâm O cho 12 điểm phân biệt. Từ các điểm đã cho có thể tạo được bao nhiêu tứ giác nội tiếp đường tròn tâm O?

(A) 3. **(B)** C_{12}^4. (C) 4!. (D) A_{12}^4.

Lời giải.

Mỗi tứ giác nội tiếp tạo thành từ các điểm đã cho là một cách chọn 4 điểm bất kỳ trong 12 điểm. Suy ra số tứ giác nội tiếp là: C_{12}^4.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Trên mặt phẳng, cho hình vuông có cạnh bằng 2. Chọn ngẫu nhiên một điểm thuộc hình vuông đã cho (kể cả các điểm nằm trên cạnh của hình vuông). Gọi P là xác suất để điểm được chọn thuộc vào hình tròn nội tiếp hình vuông đã cho (kể cả các điểm nằm trên đường tròn nội tiếp hình vuông), giá trị gần nhất của P là

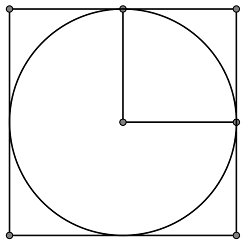
(A) $0,242$. (B) $0,215$. **(C)** $0,785$. (D) $0,758$.

Lời giải.

Bán kính đường tròn nội tiếp hình vuông: $R = 1$.

Xác suất P chính là tỉ lệ giữa diện tích hình tròn trên diện tích hình vuông.

Do đó: $P = \dfrac{\pi \cdot 1^2}{2^2} \approx 0{,}785$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Cho hàm số $y = -\dfrac{1}{4}x^4 + x^2 + 2$. Tìm khoảng đồng biến của hàm số đã cho?

(A) $(0; 2)$. **(B)** $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right)$ và $\left(0; \sqrt{2}\right)$.

(C) $\left(-\sqrt{2}; 0\right)$ và $\left(\sqrt{2}; +\infty\right)$. (D) $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$$y' = -x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu y':

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right)$ và $\left(0; \sqrt{2}\right)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Tìm m để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\sqrt{x-2} & \text{khi } x \geq 2 \\ 5x - 5m + m^2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A $m=2; m=3$. **B** $m=-2; m=-3$. **C** $m=1; m=6$. **D** $m=-1; m=-6$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

+Xét trên $(2;+\infty)$ khi đó $f(x)=x^2+2\sqrt{x-2}$.

$\forall x_0\in(2;+\infty)$: $\lim\limits_{x\to x_0}\left(x_0^2+2\sqrt{x_0-2}\right)=x_0^2+2\sqrt{x_0-2}=f(x_0)\Rightarrow$ hàm số liên tục trên $(2;+\infty)$.

+Xét trên $(-\infty;2)$ khi đó $f(x)=5x-5m+m^2\sqrt{x-2}$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số liên tục trên $(-\infty;2)$.

+Xét tại $x_0=2$, ta có: $f(2)=4$.

$\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\left(x^2+2\sqrt{x-2}\right)=4$; $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(5x-5m+m^2)=m^2-5m+10$.

Để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ thì nó phải liên tục tại $x_0=2$.

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=f(2)\Leftrightarrow m^2-5m+6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=2\\ m=3\end{array}\right.$

Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên đoạn $\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{5}$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$2\sqrt{5}$

Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A $\min\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{5}]}y=0$. **B** $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{5}]}y=2$. **C** $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{5}]}y=2\sqrt{5}$. **D** $\min\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{5}]}y=2$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên có $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{5}]}y=2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A,cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC). Biết $AB=2a$ và $SB=2\sqrt{2}a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$?

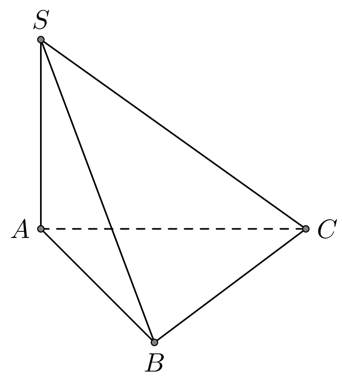
A $V=\dfrac{8a^3}{3}$. **B** $V=\dfrac{4a^3}{3}$. **C** $V=4a^3$. **D** $V=8a^3$.

Lời giải.

ΔSAB vuông tại A có $SA^2=SB^2-AB^2=4a^2$ nên $SA=2a$.

Có $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC=2a^2$.

Có $V=\dfrac{1}{3}SA\cdot S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}2a\cdot 2a^3=\dfrac{4}{3}a^3$.



Chọn đáp án B □

Câu 7. Cho elip (E) có độ dài trục lớn gấp hai lần độ dài trục nhỏ và tiêu cự bằng 6. Viết phương trình của (E)?

A $\dfrac{x^2}{12} - \dfrac{y^2}{3} = 1$. **B** $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{3} = 1$. **C** $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{12} = 1$. **D** $\dfrac{x^2}{48} + \dfrac{y^2}{12} = 1$.

Lời giải.

Ta có: $a = 2b$, $2c = 6 \Rightarrow c = 3$.

Mà $a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow 4b^2 - b^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 3 \\ a^2 = 12 \end{cases}$.

Vậy phương trình $(E) : \dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{3} = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Tìm cực trị của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 + 4$?

A $x_{CĐ} = -1$, $x_{CT} = 0$. **B** $x_{CĐ} = 5$, $x_{CT} = 4$.

C $x_{CĐ} = 0$, $x_{CT} = -1$. **D** $x_{CĐ} = 4$, $x_{CT} = 5$.

Lời giải.

+Ta có $y' = 6x^2 + 6x = 6x\,(x + 1) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

+Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $y_{CĐ} = 5$; $y_{CT} = 4$.

Trắc nghiệm: Bài toán hỏi cực trị hàm số nên loại A, C. Mặt khác $y_{CĐ} > y_{CT}$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Có tất cả bao nhiêu cách xếp 6 quyển sách khác nhau vào một hàng ngang trên giá sách?

A $5!$. **B** 6^5. **C** $6!$. **D** 6^6.

Lời giải.

Mỗi cách sắp xếp 6 quyển sách khác nhau vào một hàng ngang trên giá sách là một hoán vị của 6 phần tử.

Vậy số cách sắp xếp là $6!$.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Cho biểu thức $P = x^{-\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\sqrt{x^5}}$, $x > 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $P = x^{-2}$. **B** $P = x^{-\frac{1}{2}}$. **C** $P = x^{\frac{1}{2}}$. **D** $P = x^2$.

Lời giải.

$P = x^{-\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\sqrt{x^5}} = x^{-\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{5}{4}} = x^{\frac{1}{2}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Trên hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có tâm $I(-3;2)$ và một tiếp tuyến của nó có phương trình là: $3x+4y-9=0$. Viết phương trình của đường tròn (C).

A $(x+3)^2+(y-2)^2=2$.
B $(x-3)^2+(y+2)^2=2$.
C $(x-3)^2+(y+2)^2=4$.
D $(x+3)^2+(y-2)^2=4$.

Lời giải.

Vì đường tròn (C) có tâm $I(-3;2)$ và một tiếp tuyến của nó là đường thẳng Δ có phương trình là $3x-4y-9=0$ nên bán kính của đường tròn là $\mathrm{d}(I,\Delta)=\dfrac{|3\cdot(-3)+4\cdot 2-9|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$.

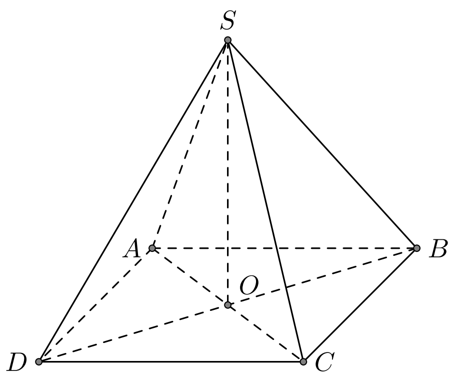
Vậy phương trình đường tròn là: $(x+3)^2+(y-2)^2=4$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{6}$, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$?

A $V=9a^3$.
B $V=2a^3$.
C $V=3a^3$.
D $V=6a^3$.

Lời giải.



Ta có hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $a\sqrt{6}\Rightarrow AB=BC=CD=AD=a\sqrt{6}$.

Ta có $BD=\sqrt{DC^2+CB^2}=2\sqrt{a}\Rightarrow OB=\dfrac{BD}{2}=a\sqrt{3}$.

Diện tích ΔABC là $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC=3a^2$.

Vì góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°\Rightarrow\widehat{SBO}=60°$.

Ta có $SO=OB\cdot\tan\widehat{SBO}=3a$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SO\cdot S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot 3a\cdot 3a^2=3a^3$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Biết rằng đường thẳng $y=2x+2m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị của tham số m. Tìm hoành độ trung điểm của AB?

A $m+1$.
B $-m-1$.
C $-2m-2$.
D $-2m+1$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa đường thẳng $y=2x+2m$ và đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^+3}{x+1}$:

$$2x+2m=\frac{x+3}{x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}(2x+2m)(x+1)=x^2+3\\ x+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2(m+1)x+2m-3=0\ (*)\\ x\neq -1\end{cases}.$$

Gọi x_A, x_B là hai nghiệm phân biệt của phương trình $(*)$.

Theo định lý Vi-et: $x_A+x_B=-2(m+1)$.

Khi đó hoành độ trung điểm của AB bằng $\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{-2(m+1)}{2}=-m-1$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2-3x+1+|x-2|\leq 0$ có tất cả bao nhiêu số nguyên?

A Vô số.
B 4.
C 2.
D 3.

Lời giải.

$$x^2-3x+1+|x-2|\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^-3x+1+2-x\le 0\\ x<2\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-3x+1+x-2\le 0\\ x\ge 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^-4x+3\le 0\\ x<2\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-2x-1\le 0\\ x\ge 2\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}1\le x\le 3\\ x<2\end{cases}\\ \begin{cases}1-\sqrt{2}\le x\le 1+\sqrt{2}\\ x\ge 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1\le x\le 2\\ 2\le x\le 1+\sqrt{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow 1\le x\le 1+\sqrt{2}.$$ Với $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{1;2\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Véctơ nào sau đây là một véctơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta:\ 6x-2y+3=0$?

A $\vec{u}=(1;3)$. B $\vec{u}=(6;2)$. C $\vec{u}=(-1;3)$. D $\vec{u}=(3;-1)$.

Lời giải.

+Một véctơ pháp tuyến của đường thẳng Δ là $\vec{n}\,(6;-2)$ nên véctơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}\,(1;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Phương trình $\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{2x+1}-x\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A 1. B 4. C 3. D 2.

Lời giải.

+Điều kiện $\begin{cases}x^2-1\ge 0\\ 2x+1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1$.

$+\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{2x+1}-x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-1}=0\\ \sqrt{2x+1}-x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-1=0\ (1)\\ \sqrt{2x+1}=x\ (2)\end{array}\right.$.

Giải (1): $x^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\ \text{(n)}\\ x=-1\ \text{(l)}\end{array}\right.$.

Giải (2): $\sqrt{2x+1}=x \Rightarrow 2x+1=x^2\,(\text{do } x\ge 1) \Leftrightarrow x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{2}\ \text{(n)}\\ x=1-\sqrt{2}\ \text{(l)}\end{array}\right.$.

Vậy số nghiệm của phương trình là 2.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Một hình lăng trụ có đúng 11 cạnh bên thì hình lăng trụ đó có tất cả bao nhiêu cạnh?

A 31. B 30. C 22. D 33.

Lời giải.

Hình lăng trụ có đúng 11 cạnh bên suy ra đáy là đa giác có 11 đỉnh và đa giác đáy có 11 cạnh .

Vậy hình lăng trụ có đúng 11 cạnh bên thì có $11+11\cdot 2=33$ cạnh.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2-2x}{x+1}$.

A $y=-2$. **B** $x=-1$. **C** $x=-2$. **D** $y=2$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim_x \to \pm\infty \frac{2-2x}{x+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2}{x}-2}{1+\frac{1}{x}} = -2 \Rightarrow y=-2$ là đường tiệm cận ngang của hàm số.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A $\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$. **B** $\cos(a-b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$.

C $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$. **D** $2\cos a\cos b = \cos(a-b)+\cos(a+b)$.

Lời giải.

Câu A, D là công thức biến đổi đúng.

Câu C là công thức cộng đúng.

Câu B sai vì $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$.

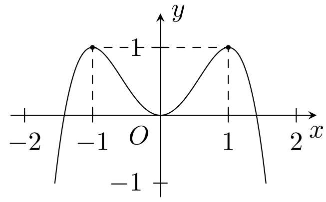
Chọn đáp án (B) □

Câu 20.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Phương trình $1-2f(x)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A 4. **B** 3. **C** Vô ngiệm. **D** 2.



Lời giải.

Phương trình $1-2f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}$ (1).

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $(d): y=\frac{1}{2}$.

Dựa vào đồ thị, đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 4 điểm phân biệt

Nên phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Khi đặt $t=\tan x$ thì phương trình $2\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 1$ trở thành phương trình nào sau đây?

A $2t^2-3t-1=0$. **B** $3t^2-3t-1=0$. **C** $2t^2+3t-3=0$. **D** $t^2+3t-3=0$.

Lời giải.

Ta có:

$2\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 2\cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x + 3\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$.

Do $\cos x = 0$ không thỏa mãn phương trình $\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$ nên chia hai vế cho $\cos^2 x \neq 0$ ta được $\tan^2 x + 3\tan x - 3 = 0$.

Đặt $\tan x = t$ ta được phương trình $t^2+3t-3=0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Tính tổng bình phương giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^4+4x^2+3$ trên đoạn $[-1;1]$?

(A) 121. (B) 64. (C) 73. (D) 22.

Lời giải.

Ta có $y' = (x^4 + 4x^2 + 3)' = 4x^3 + 8x$.

Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in (-1; 1)$.

Đặt $m = \min\limits_{[-1;1]} y$; $M = \max\limits_{[-1;1]} y$.

Do $y(-1) = y(1) = 8$; $y(0) = 3$ nên $M = \max\limits_{[-1;1]} y = y(\pm 1) = 8$; $m = \min\limits_{[-1;1]} y = y(0) = 3$.

$\Leftrightarrow M^2 + m^2 = 8^2 + 3^2 = 73$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Giải phương trình $\left(2\cos\dfrac{x}{2} - 1\right)\left(\sin\dfrac{x}{2} + 2\right) = 0$?

(A) $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$. (B) $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

(C) $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z})$. (D) $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có: $\left(2\cos\dfrac{x}{2} - 1\right)\left(\sin\dfrac{x}{2} + 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos\dfrac{x}{2} - 1 = 0 \ (1) \\ \sin\dfrac{x}{2} + 2 = 0 \ (2) \end{array}\right.$.

Giải (1): $2\cos\dfrac{x}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Giải (2): $\sin\dfrac{x}{2} + 2 = 0$, phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có họ nghiệm là $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$.

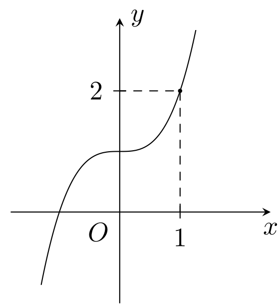
Chọn đáp án (D) □

Câu 24.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số được cho bởi các phương án A, B, C, D dưới đây.

(A) $y = 2x^3 + 1$. (B) $y = x^3 + x + 1$.

(C) $y = x^3 + 1$. (D) $y = -x^3 + 2x + 1$.



Lời giải.

Nhìn vào đồ thị ta thấy đồ thị là dạng đồ thị hàm số bậc 3 có hệ số $a > 0$ nên ta loại đáp D.

Mặt khác đồ thị đi qua điểm có tọa độ $(1; 2)$, thay vào hàm số ở các đáp án A, B, C thì chỉ có C thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Gọi S là tập các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau được tạo từ tập $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S. Tính xác suất để số được chọn là một số chẵn?

(A) $\dfrac{3}{4}$. (B) $\dfrac{2}{5}$. (C) $\dfrac{3}{5}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi A là biến cố chọn ngẫu nhiên một số từ tập S sao cho số đó là số chẵn.

Số phần tử không gian mẫu $n(\Omega) = \mathrm{A}_5^4$.

Gọi số có 4 chữ số khác nhau là số chẵn có dạng $\overline{abcd}$.
Chọn $d = \{2; 4\}$ có 2 cách. Chọn ba số xếp vào ba vị trí a,b,c có A_4^3.
Vậy có $2 \cdot \mathrm{A}_4^3$ số chẵn có 4 chữ số khác nhau.
Suy ra $n(A) = 48 \Rightarrow P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{48}{120} = \dfrac{2}{5}$.
Chọn đáp án B □

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -\dfrac{1}{3}x^3 - 2(2m+3)x + 4$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A $-1 \leq m \leq 3$. **B** $-3 < m < 1$. **C** $-1 < m < 3$. **D** $-3 \leq m \leq 1$.

Lời giải.
Ta có $y' = -x^2 + 2mx - 2m - 3$.
Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' = -x^2 + 2mx - 2m - 3 \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 \leq 0 \leq\Leftrightarrow -1 \leq m \leq 3$. Chọn A.
Chọn đáp án A □

Câu 27. Tìm điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{x}$.

A $N(-2; -2)$. **B** $x = -2$. **C** $M(2; -2)$. **D** $x = 2$.

Lời giải.
$y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{x}$ (TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$)
$\Rightarrow y' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{x^2 - 4}{2x^2}$.
Có $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$; y' không xác định $\Leftrightarrow x = 0$.
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	-2	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -2 \Rightarrow y = -2$.
Vậy đồ thị hàm số có điểm cực đại là $N(-2; 2)$.
Chọn đáp án A □

Câu 28. Cho các hàm số $f(x) = x^4 + 2018$, $g(x) = 2x^3 - 2018$ và $h(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$. Trong các hàm số đã cho, có tất cả bao nhiêu hàm số ***không có*** khoảng nghịch biến?

A 2. **B** 1. **C** 0. **D** 3.

Lời giải.
*$f(x) = x^4 + 2018$ (TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$) $\Rightarrow f'(x) = 4x^3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$, do đó hàm số không thỏa mãn đề bài.

$*g(x) = x^3 - 2018$ (TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$) $\Rightarrow g'(x) = 6x^2 \geq 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$.

Suy ra hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó hàm số thỏa mãn đề bài.

$*h(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ (TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$) $\Rightarrow h'(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2} > 0$ $(\forall x \in \mathscr{D})$.

Suy ra hàm số luôn đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$, do đó hàm số thỏa mãn đề bài.

Vậy có hai hàm số ***không có*** khoảng nghịch biến.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$?

A $y = (2 + \sqrt{x})^\pi$. B $y = \left(2 + \dfrac{1}{x^2}\right)^\pi$. C $y = (2 + x^2)^\pi$. D $y = (2 + x)^\pi$.

Lời giải.

Hàm số $y = (2 + \sqrt{x})^\pi$ có tập xác định $\mathscr{D} = [0; +\infty)$.

Hàm số $y = \left(2 + \dfrac{1}{x^2}\right)^\pi$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Hàm số $y = (2 + x^2)^\pi$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Hàm số $y = (2 + x)^\pi$ có tập xác định $\mathscr{D} = (-2; +\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ tại điểm có hoành độ bằng 2?

A $y = -9x + 16$. B $y = -9x + 20$. C $y = 9x - 20$. D $y = 9x - 16$.

Lời giải.

$y'(x) = 3x^2 - 3$.

Ta có $y(2) = 2$ và $y'(2) = 9$. Do đó phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 9(x-2) + 2 \Leftrightarrow y = 9x - 16$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Tính giới hạn $I = \lim \dfrac{2n+1}{2+n-n^2}$?

A $I = -\infty$. B $I = -2$. C $I = 1$. D $I = 0$.

Lời giải.

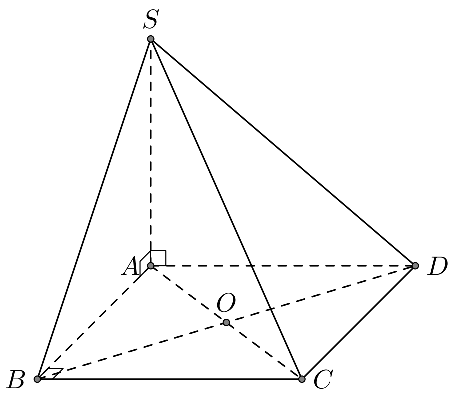
Ta có: $L = \lim \dfrac{2n+1}{2+n-n^2} = \lim \dfrac{\dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{2}{n^2} + \dfrac{1}{n} - 1} = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$. Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A $CD \perp (SBC)$. B $SA \perp (ABC)$. C $BC \perp (SAB)$. D $BD \perp (SAC)$.

Lời giải.



Từ giả thiết, ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow$ B đúng.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow$ C đúng.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow$ D đúng.

Do đó: A sai. Chọn A.

Nhận xét: Ta cũng có thể giải như sau:

$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

Mà (SCD) và (SAD) không song song hay trùng nhau nên $CD \perp (SBC)$ là sai. Chọn A.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y = (m-3)\,x^4 + (m+3)\,x^2 + \sqrt{m} + 1$ có 3 điểm cực trị?

A 5. (B) 4. (C) 3. (D) Vô số.

Lời giải.

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 4x^3\,(m-3) + 2x\,(m+3) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có: $4x^3\,(m-3) + 2x\,(m+3) = 0\ \ (1)$.

$\Leftrightarrow x\left[4x^2\,(m-3) + 2\,(m+3)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 4x^2\,(m-3) + 2\,(m+3) = 0\ \ (2) \end{array}\right.$

(1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ \dfrac{-2\,(m+3)}{4\,(m-3)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 3$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Cách tính nhanh: Hàm số bậc 4 có 3 cực trị $\Leftrightarrow a \cdot b < 0 \Leftrightarrow (m-3)\,(m+3) < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Cho cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu tiên $u_1 = 2$ và công sai $d = 2$. Tìm u_{2018}?

(A) $u_{2018} = 2^{2018}$. (B) $u_{2018} = 2^{2017}$. C $u_{2018} = 4036$. (D) $u_{2018} = 4038$.

Lời giải.

Ta có: $u_n = u_1 + (n-1)\,d \Rightarrow u_{2018} = 2 + (2018-1) \cdot 2 = 4036$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x+4}{x^2+2x+1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A 2. (B) 0. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{4x+4}{x^2+2x+1} = 0$ nên đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x+4}{x^2+2x+1}$ có tiệm cận ngang $y = 0$.

$\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{4x+4}{x^2+2x+1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{4\,(x+1)}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{4}{x+1} = +\infty$ nên đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x+4}{x^2+2x+1}$

có tiệm cận đứng $x=-1$.
Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x+4}{x^2+2x+1}$ có tất cả hai đường tiệm cận. Chọn đáp án A.
Chọn đáp án A □

Câu 36. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=2x+\sqrt{8-2x^2}$ trên tập xác định của nó?

A. $M=2\sqrt{5}$. B. $M=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. **C.** $M=2\sqrt{6}$. D. $M=4$.

Lời giải.
Tập xác định của hàm số: $\mathscr{D}=[-2;2]$.
Ta có $y'=2+\dfrac{-2x}{\sqrt{8-2x^2}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{8-2x^2}=x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0\\ 8-2x^2=x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0\\ 8=3x^2\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\in[-2;2].$$

$y(-2)=-4$; $y(2)=4$; $y\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)=2\sqrt{6}$.
Vậy giá trị lớn nhất M của hàm số là $M=2\sqrt{6}$. Chọn C.
Chọn đáp án C □

Câu 37. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn đồng thời các biểu thức: $x+2y+3z=0$; $3x+y+2z-13=0$ và $2x+3y+z-13=0$. Tính $T=2(x+y+z)$?

A. $T=12$. B. $T=-12$. C. $T=-6$. D. $T=6$.

Lời giải.
Cách 1:

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+2y+3z-10=0\\ 3x+y+2z-13=0\\ 2x+3y+z-13=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3\\ y=2\\ z=1\end{cases}$.

Khi đó: Tính $T=2(x+y+z)=2(3+2+1)=12$.

Cách 2:

Ta có: $\begin{cases} x+2y+3z-10=0\\ 3x+y+2z-13=0\\ 2x+3y+z-13=0\end{cases} \Leftrightarrow (x+2y+3z)+(3x+y+2z)+(2x+3y+z)=6(x+y+z)=36$.

$\Leftrightarrow 2(x+y+z)=12$
Chọn đáp án A □

Câu 38. Tính góc giữa hai đường thẳng $\Delta: x-\sqrt{3}y+2=0$ và $\Delta': x+\sqrt{3}y-1=0$?

A. 90°. B. 120°. **C.** 60°. D. 30°.

Lời giải.
Δ có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=\left(1;-\sqrt{3}\right)$. Δ' có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=\left(1;\sqrt{3}\right)$.

Khi đó: $\cos(\Delta,\Delta')=\left|\cos(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2})\right|=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{\left|1\cdot 1+\left(-\sqrt{3}\right)\sqrt{3}\right|}{\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}\cdot\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}=\dfrac{|-2|}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}}=\dfrac{1}{2}$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng Δ, Δ' là 60°.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Trên hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 6y - 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(2; -1)$ và cắt đường tròn (C) theo một dây cung có độ dài lớn nhất?

(A) $4x + y - 1 = 0$. **B** $2x - y - 5 = 0$. (C) $3x - 4y - 10 = 0$. (D) $4x + 3y - 5 = 0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1; -3)$.

Đường thẳng d đi qua $A(2; -1)$ và cắt đường tròn theo một dây cung có độ dài lớn nhất

$\Leftrightarrow d$ đi qua tâm I của đường tròn.

$\Leftrightarrow d$ là đường thẳng đi qua hai điểm A và I.

$\overrightarrow{AI} = (-1; -2)$ suy ra véctơ pháp tuyến của d là $\vec{n}(2; -1)$ và d đi qua điểm $A(2; -1)$.

Phương trình đường thẳng d là: $2(x - 2) - 1(y + 1) = 0$.

Vậy phương trình đường thẳng d là: $2x - y - 5 = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Viết công thức tính thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy là B (đvdt) và chiều cao có độ dài là h.

(A) $V = B^2h$. **B** $V = Bh$. (C) $V = \frac{1}{3}Bh$. (D) $V = 3Bh$.

Lời giải.

Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Cho hai số thực a và b với $a > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 0$. Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

(A) $\log_{a^2}|b| = \frac{1}{2}\log_a|b|$. (B) $\frac{1}{2}\log_a a^2 = 1$.

(C) $\frac{1}{2}\log_a b^2 = \log_a|b|$. **D** $\frac{1}{2}\log_a b^2 = \log_a b$.

Lời giải.

Vì $\frac{1}{2}\log_a b^2 = \log_a|b|$ nên câu D sai.

Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ với O' là tâm hình vuông $A'B'C'D'$. Biết rằng tứ diện $O'BCD$ có thể tích bằng $6a^3$. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

(A) $V = 18a^3$. (B) $V = 54a^3$. (C) $V = 12a^3$. **D** $V = 36a^3$.

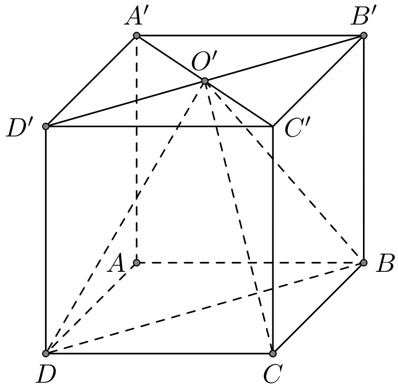
Lời giải.

Ta có: $V = AA' \cdot S_{ABCD}$

$= \mathrm{d}_{[(O';(ABCD))]} \cdot 2S_{BCD}.$

$= 6V_{O'BCD} = 36a^3$

Do đó, chọn D.



Chọn đáp án D ☐

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, mặt bên (SAB) là một tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và có diện tích bằng $\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$(đvdt). Một mặt phẳng đi qua trọng tâm tam giác (SAB) và song song với mặt đáy $(ABCD)$ chia khối chóp $(S.ABCD)$ thành hai phần, tính thể tích V của phần chứa điểm S?

A. $V = 24$. B. $V = 8$. C. $V = 12$. D. $V = 36$.

Lời giải.

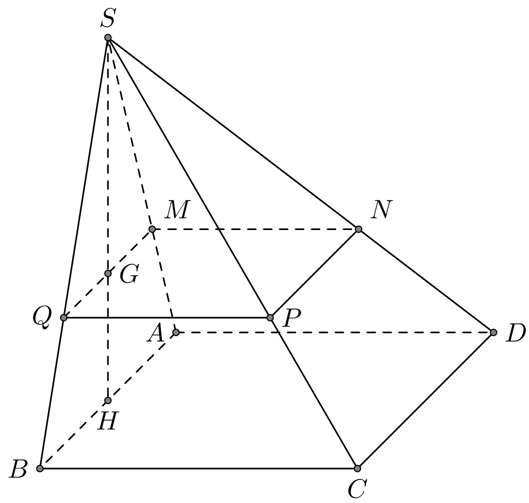
Gọi H là trung điểm của AB, do tam giác SAB đều nên $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

$S_{\Delta SAB} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{27\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow x^2 = 27 \Leftrightarrow x = 3\sqrt{3}$.

Vậy $SH = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = \dfrac{9}{2}$.

Suy ra $S_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{9}{2}\left(3\sqrt{3}\right)^2 = \dfrac{81}{2}$.

Dễ thấy mặt phẳng đi qua G song song với mặt đáy cắt hình chóp theo thiết diện là hình vuông $MNPQ$ như hình vẽ.



Ta có $\dfrac{MQ}{AB} = \dfrac{SG}{SH} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow MQ = \dfrac{3\sqrt{3}\cdot 2}{3} = 2\sqrt{3}$

và $SG = \dfrac{2}{3}SH = \dfrac{2\cdot\dfrac{9}{2}}{3} = 3$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3}SG \cdot S_{MNPQ} = \dfrac{1}{3}\cdot 3\cdot\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 44. Trong khai triển nhị thức Niu tơn của $P(x) = \left(\sqrt[3]{2}x + 3\right)^{2018}$ thành đa thức, có tất cả bao nhiêu số hạng có hệ số nguyên dương?

A. 673. B. 675. C. 674. D. 672.

Lời giải.

$$P(x) = \left(\sqrt[3]{2}x+3\right)^{2018} = \sum_{k=0}^{2018}\left(\sqrt[3]{2}x\right)^{2018-k}3^k = \sum_{k=0}^{2018} 2^{\frac{2018-k}{3}}\cdot 3^k x^{2018-k}.$$

Để hệ số nguyên dương thì $(2018-k) \vdots 3 \Leftrightarrow 2018-k = 3t \Leftrightarrow k = 2018-3t$

do $0 \le k \le 2018$ nên ta có $0 \le 2018 - 3t \le 2018 \Leftrightarrow 0 \le t \le \dfrac{2018}{3} \approx 672{,}6$.

Vậy $t = 0, 1, 2, \ldots 672$ nên có 673 giá trị.

Chọn đáp án (A) □

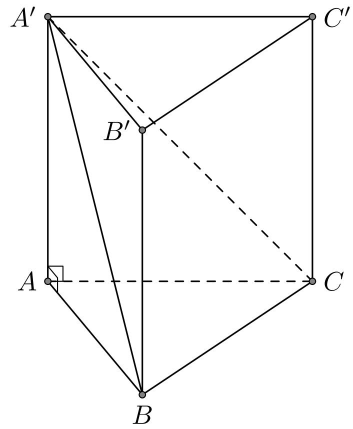
Câu 45. Cho lăng trụ tam giác đều $(ABC.A'B'C')$ có diện tích đáy bằng $\sqrt{3}a^2$(đvdt), diện tích tam giác bằng $A'BC$ bằng $2a^2$(đvdt). Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC)?

(A) $120°$. (B) $60°$. (C) $30°$. (D) $45°$.

Lời giải.

+Ta có ΔABC là hình chiếu vuông góc của $\Delta A'BC$ lên mặt phẳng (ABC). +Gọi φ là góc giữa $(A'BC)$ và (ABC).

ta có: $\cos\varphi = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'BC}} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2a^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 30°$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Giải bất phương trình $4(x+1)^2 < (2x+10)\left(1-\sqrt{3+2x}\right)^2$ ta được tập nghiệm T là

(A) $T = (-\infty; 3)$.

(B) $\left[-\dfrac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; 3]$.

(C) $\left[-\dfrac{3}{2}; 3\right)$.

(D) $\left[-\dfrac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; 3)$.

Lời giải.

Cách 1:

+Xét bất phương trình $4(x+1)^2 < (2x+10)\left(1-\sqrt{3+2x}\right)^2$ (1).

+Điều kiện xác định $x \ge -\dfrac{3}{2}$ $(*)$.

+Với điều kiện $(*)$ ta có: (1) $\Leftrightarrow 4(x+1)^2\left(1+\sqrt{3+2x}\right)^2 < (2x+10)\cdot 4(x+1)^2$.

$\Leftrightarrow 4(x+1)^2\left(4+2x+2\sqrt{3+2x}-2x-10\right) < 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2\left(2\sqrt{3+2x}-6\right) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -1 \\ 3+2x \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -1 \\ x \le 3 \end{cases}$.

+Kết hợp điều kiện $(*)$ ta được $\begin{cases} x \ne -1 \\ -\dfrac{3}{2} \le x \le 3 \end{cases}$.

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình (1) là $T = \left[-\dfrac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; 3)$.

Cách 2:

+Thay $x = -1$ vào bất phương trình ta được $0 < 0$ (vô lý), loại A,C.

+Thay $x = 3$ vào bất phương trình ta được $64 < 64$ (vô lý), loại B.

Chọn đáp án D.

Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \dfrac{2x+m+1}{x+m+1}$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -4)$ và $(11; +\infty)$?

A 13. **B** 12. **C** Vô số. **D** 14.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq -m+1$, $y' = \dfrac{m-3}{(x+m-1)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -4)$ và $(11; +\infty)$ thì hàm số phải xác định trên mỗi khoảng $(-\infty; -4)$ và $(11; +\infty)$, $\Rightarrow -4 \leq -m+1 \leq 11 \Leftrightarrow -10 \leq m \leq 5$.

Khi đó để hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -4)$ và $(11; +\infty)$ thì $m-3 < 0 \Leftrightarrow m < 3$, lấy giao với $-10 \leq m \leq 5 \Rightarrow -10 \leq m < 3$.

Từ đó có các giá trị nguyên của $m \in \{-10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

Suy ra đáp án A.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Cho hàm số $y = x^3 - 11x$ có đồ thị là (C). Gọi M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x = 2$. Tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1, tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác M_2,..., tiếp tuyến của (C) tại M_{n-1} cắt (C) tại điểm M_n khác M_{n-1} M_{n-1} $(n \in \mathbb{N}, n \geq 4)$. Gọi $(x_n; y_n)$ là tọa độ của điểm M_n. Tìm n sao cho $11x_n + y_n + 2^{2019} = 0$.

A $n = 675$. **B** $n = 673$. **C** $n = 674$. **D** $n = 672$.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 11$.

Lấy $M_0\left(x_0; x_0^3 - 11x_0\right) \in (C)$, phương trình tiếp tuyến của (C) tại M_0 là $y = \left(3x_0^2 - 11\right)(x - x_0) + x_0^3 - 11x_0$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 11x = \left(3x_0^2 - 11\right)(x - x_0) + x_0^3 - 11x_0 \Leftrightarrow \left(x^3 - x_0^3\right) - 11(x - x_0) - \left(3x_0^2 - 11\right)(x - x_0) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ x^2 + x_0 x - 2x_0^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ x = -2x_0 \end{array}\right.$.

Cho $M_0 \equiv M_1(x_1; y_1) \Rightarrow M_2\left(-2x_1; (-2x_1)^3 - 11(-2x_1)\right)$.

Bằng cách lập luận tương tự $M_n\left((-2)^{n-1}x_1; \left[(-2)^{n-1}x_1\right]^3 - 11\left((-2)^{n-1}x_1\right)\right)$.

$11x_n + y_n + 2^{2019} = 0 \Leftrightarrow 11\left((-2)^{n-1}x_1\right) + \left[(-2)^{n-1}x_1\right]^3 - 11\left((-2)^{n-1}x_1\right) + 2^{2019} = 0$

$\Leftrightarrow \left[(-2)^{n-1}x_1\right]^3 = -2^{2019}$.

Thay $x_1 = -2 \Rightarrow (-2)^{3n} = (-2)^{2019} \Leftrightarrow 3n = 2019 \Leftrightarrow n = 673$. Suy ra đáp án B.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Cho lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy bằng a và khoảng cách giữa hai đáy của lăng trụ bằng $4a$. Tính thể tích V của lăng trụ đã cho?

A $V = 9\sqrt{3}a^3$. **B** $V = 6\sqrt{3}a^3$. **C** $V = 2\sqrt{3}a^3$. **D** $V = 3\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.

Diện tích đáy: $S = 6 \cdot S_{\Delta AOB} = 6 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2}$.

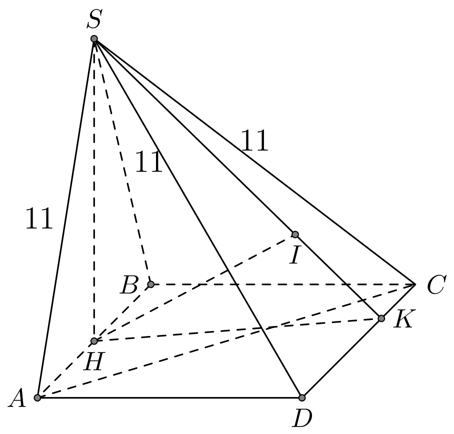
Khi đó thể tích của khối lăng trụ là: $V = S \cdot h = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2} \cdot 4a = 6\sqrt{3}a^3$.

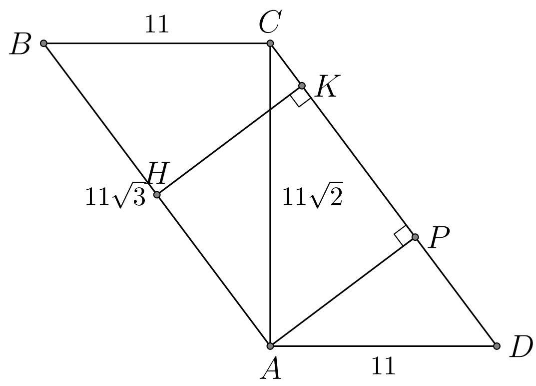
Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và $SA = SB = SC = 11$, $\widehat{SAB} = 30^\circ$, $\widehat{SBC} = 60^\circ$ và $\widehat{SCA} = 45^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SD?

A $d = 4\sqrt{11}$. **B** $d = 2\sqrt{22}$. **C** $d = \dfrac{\sqrt{22}}{2}$. **D** $d = \sqrt{22}$.

Lời giải.





Dựa vào định lý cosin ta dễ dàng tính được $AB = 11\sqrt{3}$, $BC = 11$, $AC = 11\sqrt{2}$.
Khi đó ΔABC vuông tại C. Do $SA = SB = SC$, nên hình chiếu của S xuống mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của AB. Nên $SH \perp (ABCD)$, $SH = SA \cdot \sin \widehat{SAB} = \dfrac{11}{2}$.
Kẻ $HK \perp CD$, $AP \perp CD$, tứ giác $APKH$ là hình chữ nhật, $HK = AP = \dfrac{11\sqrt{6}}{3}\left(\dfrac{1}{AP^2} = \dfrac{1}{AD^2} + \dfrac{1}{AC^2}\right)$.
Trong tam giác vuông SHK, kẻ $HI \perp SK$. Do $AB \parallel CD$ nên $\mathrm{d}\,(AB,SD) = \mathrm{d}\,(H,SD) = HI$.
Ta có, $\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{HI^2} + \dfrac{1}{HI^2} \Rightarrow HI = \sqrt{22}$.
Vậy $\mathrm{d}\,(AB,SD) = \sqrt{22}$.
Chọn đáp án D □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. C	3. B	4. A	5. C	6. B	7. B	8. B	9. C	10. C
11. D	12. C	13. B	14. C	15. A	16. D	17. D	18. A	19. B	20. A
21. D	22. C	23. D	24. C	25. B	26. A	27. A	28. A	29. C	30. D
31. D	32. A	33. A	34. C	35. A	36. C	37. A	38. C	39. B	40. B
41. D	42. D	43. C	44. A	45. C	46. D	47. A	48. B	49. B	50. D

51 ĐỀ THI THỬ THPT LÊ VĂN THỊNH - BẮC NINH - LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là:

(A) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
(B) $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.
(C) $\mathbb{R}$.
(D) $\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Nghiệm của phương trình $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ là

(A) $\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.
(B) $\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=-\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.
(C) $\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.
(D) $\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

Phương trình $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 3n-2$. Tìm công sai d của cấp số cộng.

(A) $d=3$.
(B) $d=2$.
(C) $d=-2$.
(D) $d=-3$.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1}-u_n = 3(n+1)-2-3n+2=3$. Suy ra $d=3$ là công sai của cấp số cộng

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

(A) $u_n=\left(\frac{-2}{3}\right)^n$.
(B) $u_n=\left(\frac{6}{5}\right)^n$.
(C) $u_n=\frac{n^3-3n}{n+1}$.
(D) $u_n=n^2-4n$.

Lời giải.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-2}{3}\right)^n=0$ (Vì $\left|\frac{-2}{3}\right|=\frac{2}{3}<1$)

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Trong không gian cho bốn điểm không đồng phẳng. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ các điểm đã cho?

(A) 6.
(B) 4.
(C) 3.
(D) 2.

Lời giải.

Vì 4 điểm không đồng phẳng tạo thành một tứ diện mà tứ diện có 4 mặt

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề sai.

(A) Nếu $b \| a$ thì $b \| (P)$.
(B) Nếu $b \| a$ thì $b \perp (P)$.
(C) Nếu $b \perp (P)$ thì $b \| a$.
(D) Nếu $b \| (P)$ thì $b \perp a$.

Lời giải.

Nếu $a \perp (P)$ và $b \| a$ thì $b \perp (P)$

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
(B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta chọn đáp án D.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[a; b]$. Ta xét các khẳng định sau:

1) Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x_0 \in (a; b)$ thì $f(x_0)$ là giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.
2) Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x_0 \in (a; b)$ thì $f(x_0)$ là giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$
3) Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 và đạt cực tiểu tại điểm x_1 $(x_0, x_1 \in (a; b))$ thì ta luôn có $f(x_0) > f(x_1)$.

Số khẳng định đúng là?

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

Chọn đáp án C.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số đã cho có đạo hàm không đổi dấu trên $\mathbb{R}$ nên nó không có cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[2;4]$ là:

(A) $\min\limits_{[2;4]} y = 3$. (B) $\min\limits_{[2;4]} y = 7$. (C) $\min\limits_{[2;4]} y = 5$. (D) $\min\limits_{[2;4]} y = 0$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \notin [2;4] \\ x = -1 \notin [2;4] \end{array}\right.$ mà $\begin{cases} f(2) = 7 \\ f(4) = 57 \end{cases} \Rightarrow \min\limits_{[2;4]} y = 7$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-3}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình?

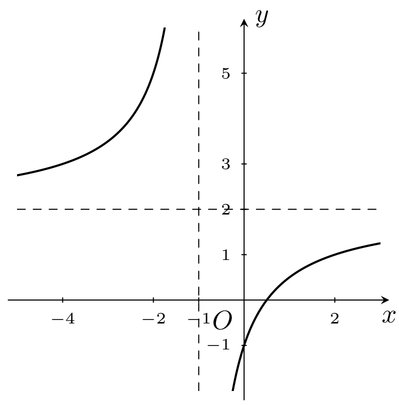
(A) $y = 5$. (B) $y = 0$. (C) $x = 1$. (D) $y = 1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-3}{x-1} = 1 \Rightarrow$ đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



(A) $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.

(B) $y = \dfrac{1-2x}{x+1}$.

(C) $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

(D) $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = -1 \Rightarrow$ loại đáp án C.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;-1) \Rightarrow$ loại đáp án B và D.

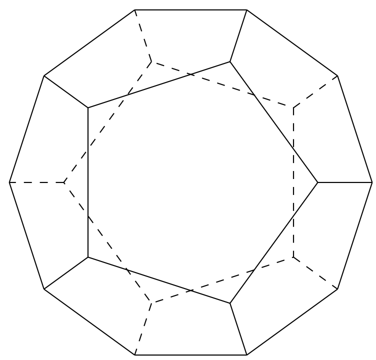
Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Khối đa diện đều có 12 mặt thì có số cạnh là:

(A) 30. (B) 60. (C) 12. (D) 24.

Lời giải.

Khối đa diện đều có 12 mặt là khối đa diện đều loại $\{5;3\}$ thì có số cạnh là 30



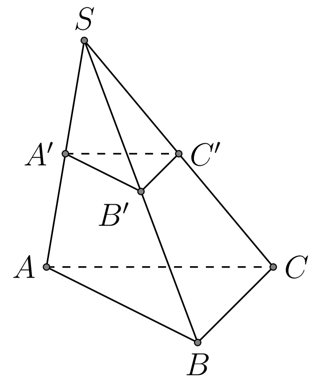
Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Cho tứ diện $S.ABC$. Gọi $A'; B'; C'$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $SA; SB; SC$. Tỉ số thể tích $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{3}$. Ⓑ $\dfrac{1}{4}$. Ⓒ $\dfrac{1}{6}$. **D** $\dfrac{1}{8}$.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$.



Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 15. Cho tập $A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$; $B = \{3; 4; 5; 6; 7\}$. Tập $A \backslash B$ là

Ⓐ $\{0; 6; 8\}$. **B** $\{0; 2; 8\}$. Ⓒ $\{3; 6; 7\}$. Ⓓ $\{0; 2\}$.

Lời giải.

Ta có $A \backslash B = \{0; 2; 8\}$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 16. Phương trình $\cos 2x + 4 \sin x + 5 = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $(0; 10\pi)$?

A 5. Ⓑ 4. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải.

PT đã cho $\Leftrightarrow -2\sin^2 x + 4 \sin x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = 3 (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Theo đề: $x \in (0; 10\pi) \Rightarrow 0 < -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi < 10\pi \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} < k < \dfrac{21}{4}$.

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Vậy PT đã cho có 5 nghiệm trên khoảng $(0; 10\pi)$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 17. Một tổ công nhân có 12 người. Cần chọn 3 người để đi làm cùng một nhiệm vụ, hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Ⓐ A_{12}^3. Ⓑ $12!$. **C** C_{12}^3. Ⓓ 12^3.

Lời giải.

Số cách chọn 3 người, là C_{12}^3 (cách chọn)

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 18. Tìm hệ số của x^6 trong khai triển thành đa thức của $(2 - 3x)^{10}$.

Ⓐ $C_{10}^6 . 2^6 . (-3)^4$. **B** $C_{10}^6 . 2^4 . (-3)^6$. Ⓒ $-C_{10}^4 . 2^6 . (-3)^4$. Ⓓ $-C_{10}^6 . 2^4 . 3^6$.

Lời giải.

Chọn đáp án B. Ta có:

$(2 - 3x)^{10} = \sum\limits_{k=0}^{10} C_{10}^k . 2^{10-k} . (-3x)^k = \sum\limits_{k=0}^{10} C_{10}^k . 2^{10-k} . (-3)^k . x^k$

Theo giả thiết suy ra: $k = 6$. Vậy hệ số của x^6 trong khai triển là $C_{10}^{6}.2^{10-6}.(-3)^6 = C_{10}^{6}.2^4.(-3)^6$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$, công bội $q = -2$. Hỏi -192 là số hạng thứ mấy của (u_n)?

A Số hạng thứ 6. **B** Số hạng thứ 7. **C** Số hạng thứ 5. **D** Số hạng thứ 8.

Lời giải.

Giả sử -192 là số hạng thứ n của (u_n) với $n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có $-192 = u_1.q^{n-1} \Leftrightarrow -192 = (-3).(-2)^{n-1} \Leftrightarrow 64 = (-2)^{n-1} \Leftrightarrow (-2)^6 = (-2)^{n-1} \Leftrightarrow 6 = n-1$ $\Leftrightarrow 7 = n$. Do đó -192 là số hạng thứ 7 của (u_n).

Chọn đáp án B □

Câu 20. Phát biểu nào sau đây là sai?

A $\lim u_n = c$ ($u_n = c$ là hằng số). **B** $\lim q^n = 0\,(|q| > 1)$.

C $\lim \dfrac{1}{n} = 0$. **D** $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0\,(k > 1)$.

Lời giải.

Theo định nghĩa giới hạn hữu hạn của dãy số (SGK ĐS11-Chương 4) thì $\lim q^n = 0\,(|q| < 1)$

Chọn đáp án B □

Câu 21. Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$:

A $y' = -\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)}$. **B** $y' = \dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)}$.

C $y' = \dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)}$. **D** $y' = -\dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)}$.

Lời giải.

$$y' = \left(\frac{\pi}{4} - x\right)'.\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = -\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 22. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $2x - y + 1 = 0$. Phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ nào sau đây biến đường thẳng d thành chính nó?

A $\vec{v} = (2; 4)$. **B** $\vec{v} = (2; 1)$. **C** $\vec{v} = (-1; 2)$. **D** $\vec{v} = (2; -4)$.

Lời giải.

Phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ biến đường thẳng d thành chính nó khi vectơ $\vec{v}$ cùng phương với vectơ chỉ phương của d. Mà d có VTCP $\vec{u} = (1; 2)$

Chọn đáp án A □

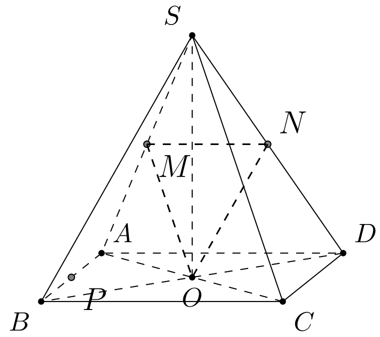
Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB. Khẳng định nào sau đây đúng?

A (NOM) cắt (OPM). **B** $(MON)//(SBC)$.

C $(PON) \cap (MNP) = NP$. **D** $(NMP)//(SBD)$.

Lời giải.

Xét hai mặt phẳng (MON) và (SBC).
Ta có: $OM//SC$ và $ON//SB$.
Mà $BS \cap SC = C$ và $OM \cap ON = O$.
Do đó $(MON)//(SBC)$.



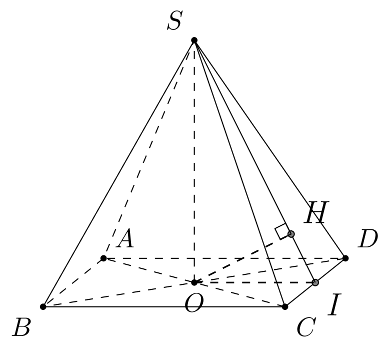
Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Cho hình chóp đều $S.ABCD$, cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy là $60°$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

(A) $\dfrac{a}{4}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (D) $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{d(B;(SCD))}{d(O;(SCD))} = \dfrac{BD}{OD} = 2$
$\Rightarrow d(B;(SCD)) = 2.d(O;(SCD)) = 2OH$.
Trong đó H là hình chiếu vuông góc của O lên (SCD).
Gọi I là trung điểm của CD ta có: $\begin{cases} SI \perp CD \\ OI \perp CD \end{cases}$
$\Rightarrow ((SCD);(ABCD)) = (OI;SI) = \widehat{SIO} = 60°$.



Xét tam giác SOI vuông tại O ta có: $SO = OI.\tan 60 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Do $SOCD$ là tứ diện vuông tại O nên: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OC^2} + \dfrac{1}{OD^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{16}{3a^2}$
$\Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow d(B;(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{2-x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.
(B) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.
(C) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;2) \cup (2;+\infty)$.
(D) Hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Lời giải.

Ta có $y = \dfrac{x+1}{2-x} = \dfrac{x+1}{-x+2} = \dfrac{3}{(-x+2)^2} > 0, \forall x \neq 2$. Do đó hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$
Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Cho hàm số $y = \dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[0;1]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $1 \leq m < 3$. (B) $m > 6$. (C) $m < 1$. **D** $3 < m \leq 6$.

Lời giải.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Với $m=1 \Rightarrow y=1, \forall x\in[0;1]$ thì $\min\limits_{[0;1]} y \neq 3$. Suy ra $m\neq 1$.

Khi đó $y'=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}$ không đổi dấu trên từng khoảng xác định.

TH1: $y'>0 \Leftrightarrow m<1$ thì $\min\limits_{[0;1]} y = y(0) \Rightarrow m=3$ (loại)

TH2: $y'<0 \Leftrightarrow m>1$ thì $\min\limits_{[0;1]} y = y(1) \Rightarrow m=5$ (thỏa mãn)

Chọn đáp án D □

Câu 27. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}(C)$, đồ thị (C) có bao nhiêu đường tiệm cận?

A 0. B 1. C 2. D 3.

Lời giải.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\{1;2\}$.

Ta có $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=1$ và tiệm cận đứng là $x=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $A.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$.

A $\dfrac{1}{16}$. B $\dfrac{1}{4}$. C $\dfrac{1}{8}$. D $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SD'}{SD}=\dfrac{1}{8}\Rightarrow\dfrac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{1}{16}$.

Và $\dfrac{V_{S.B'D'C'}}{V_{S.ABCD}}+\dfrac{V_{S.B'D'C'}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{8}\Rightarrow\dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{1}{8}$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA'=\dfrac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là trung điểm BC. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó.

A $V=a^3$. B $V=\dfrac{2a^3}{3}$. C $V=\dfrac{3a^3}{4\sqrt{2}}$. D $V=a^3\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm BC.

Theo giả thiết, $A'H$ là đường cao hình lăng trụ và $A'H=\sqrt{AA'^2-AH^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy, thể tích khối lăng trụ là $V=S_{\Delta ABC}.A'H=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết $A(1;3), B(-2;-2), C(3;1)$. Tính cosin góc A của tam giác.

A $\cos A=\dfrac{2}{\sqrt{17}}$. B $\cos A=\dfrac{1}{\sqrt{17}}$. C $\cos A=-\dfrac{2}{\sqrt{17}}$. D $\cos A=-\dfrac{1}{\sqrt{17}}$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}=(-3;-5), \overrightarrow{AC}=(2;-2)$ $\cos A=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC}=\dfrac{-3.2+5.2}{\sqrt{34}.2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{17}}$

Chọn đáp án B □

Câu 31. Tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $4\sin x+(m-4)\cos x-2m+5=0$ có nghiệm là:

(A) 5. (B) 6. (C) 10. (D) 3.

Lời giải.

$4\sin x+(m-4)\cos x-2m+5=0 \Leftrightarrow 4\sin x+(m-4)\cos x=2m-5.$

Phương trình có nghiệm khi $4^2+(m-4)^2-(2m-5)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow -3m^2+12m+7 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{6-\sqrt{57}}{3} \leq m \leq \dfrac{6+\sqrt{57}}{3}$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0;1;2;3;4\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm là 10

Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y=\dfrac{\sin x+2\cos x+1}{\sin x+\cos x+2}$ là

(A) $m=-\dfrac{1}{2}; M=1$. (B) $m=1; M=2$. (C) $m=-2; M=1$. (D) $m=-1; M=2$.

Lời giải.

Ta có $y=\dfrac{\sin x+2\cos x+1}{\sin x+\cos x+2} \Leftrightarrow (y-1)\sin x+(y-2)\cos x=1-2y\,(*)$

Phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow (y-1)^2+(y-2)^2 \geq (1-2y)^2 \Leftrightarrow y^2+y-2 \leq 0$

$\Leftrightarrow -2 \leq y \leq 1$. Vậy $m=-2; M=1$

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 2 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất để trong ba quyển sách lấy ra có ít nhất một quyển là toán.

(A) $\dfrac{2}{7}$. (B) $\dfrac{3}{4}$. (C) $\dfrac{37}{42}$. (D) $\dfrac{10}{21}$.

Lời giải.

Số kết quả có thể khi chọn bất kì 3 quyển sách trong 9 quyển sách là $C_9^3=84$.

Gọi A là biến có "Lấy được ít nhất 1 sách toán trong 3 quyển sách."

$\overline{A}$ là biến cố "Không lấy được sách toán trong 3 quyển sách."

Ta có xác suất để xảy ra A là $P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\dfrac{C_5^3}{84}=\dfrac{37}{42}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1, x \geq 0 \\ ax-b-1, x<0 \end{cases}$. Khi hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0=0$. Hãy tính $T=a+2b$.

(A) $T=-4$. (B) $T=0$. (C) $T=-6$. (D) $T=4$.

Lời giải.

Ta có $f(0)=1$. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(ax^2+bx+1)=1$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(ax-b-1)=-b-1$.

Để hàm số có đạo hàm tại $x_0=0$ thì hàm số phải liên tục tại $x_0=0$ nên:

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$. Suy ra $-b-1=1 \Leftrightarrow b=-2$.

Khi đó: $f(x)=\begin{cases} ax^2-2x+1, x \geq 0 \\ ax+1, x<0 \end{cases}$. Xét:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{ax^2-2x+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(ax-2)=-2$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{ax+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(a)=a.$

Hàm số có đạo hàm tại $x_0=0$ thì $a=-2$.

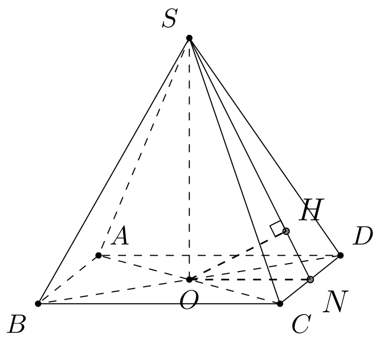
Vậy với $a=-2, b=-2$ thì hàm số có đạo hàm tại $x_0=0$ khi đó $T=-6$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO=a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

A $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{15}$. **D** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm của các cạnh CD,

H là hình chiếu vuông góc của O trên SN. Vì $AB\parallel CD$ nên $d(AB,SC)=d(AB,(SCD))=d(A,(SCD))=2d(O,(SCD))$

(vì O là trung điểm đoạn MN.)

Ta có $\begin{cases}CD\perp SO\\ CD\perp ON\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SON)\Rightarrow CD\perp OH.$

Khi đó $\begin{cases}CD\perp OH\\ OH\perp SN\end{cases}\Rightarrow OH\perp(SCD)$

$\Rightarrow d(O;(SCD))=OH.$

Tam giác SON vuông tại O nên: $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{ON^2}+\dfrac{1}{OS^2}=\dfrac{1}{\frac{a^2}{4}}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{5}{a^2}$

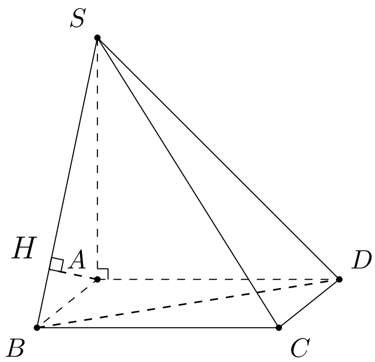
$\Rightarrow OH=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$. Vậy $d(AB,SC)=2OH=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a, BC=a\sqrt{3}, SA=a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Tính $\sin\alpha$, với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC).

A $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{7}}{8}$. **B** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **D** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải.



$ABCD$ là hình chữ nhật nên $BD=2a$, ta có $AD\parallel(SBC)$ nên suy ra:

$d[D,(SBC)]=d[A,(SBC)]=AH$ với $AH\perp SB$.

Tam giác SAB vuông cân tại A nên H là trung điểm của SB suy ra $AH=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy:

$\sin\widehat{BD,(SBC)}=\dfrac{d[D,(SBC)]}{BD}=\dfrac{d[A,(SBC)]}{BD}=\dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2a}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}.$

Chọn đáp án C □

Câu 37. Cho hàm số $y = \dfrac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Tìm số phần tử của S.

(A) 1. (B) 5. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{m}{2}\right\}$. $y' = \dfrac{m^2-4}{(2x+m)^2}$.

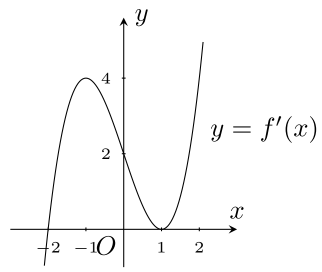
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ \dfrac{-m}{2} \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{-m}{2} \le 0 \\ \dfrac{-m}{2} \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 0 \\ m \le -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m < 2.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x^2-3\right)$.

(A) 4. (B) 2.

(C) 5. (D) 3.



Lời giải.

Quan sát đồ thị ta có $y = f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x = -2$ nên hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị là $x = -2$.

Ta có $y' = \left[f\left(x^2-3\right)\right]' = 2x.f'\left(x^2-3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-3=-2 \\ x^2-3=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm1 \\ x=\pm2 \end{array}\right.$.

Mà $x = \pm2$ là nghiệm kép, còn các nghiệm còn lại là nghiệm đơn nên hàm số $y = f\left(x^2-3\right)$ có ba cực trị

Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

(A) 3. (B) 0. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Tập xác định: $D = [-1;+\infty)\setminus\{0\}$.

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\sqrt{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}}{1+\dfrac{2}{x}} = 0$$

$\Rightarrow y = 0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x\to0} y = \lim_{x\to0} \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x} = \lim_{x\to0} \frac{(5x+1)^2-x-1}{\left(x^2+2x\right)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)} = \lim_{x\to0} \frac{25x^2+9x}{\left(x^2+2x\right)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)} =$$
$$\lim_{x\to0} \frac{25x+9}{(x-2)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)} = \frac{-9}{4}$$

$\Rightarrow x = 0$ không là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 1 đường tiệm cận.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và AB' bằng

A $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $BC \| B'C' \Rightarrow BC \| (AB'C')$.

Suy ra:

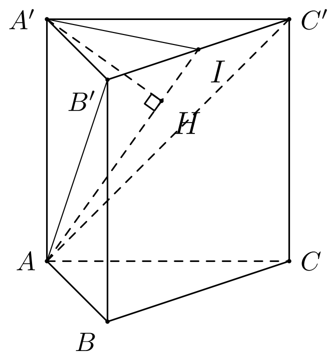
$d(BC, AB') = d(BC, (AB'C')) = d(B, (AB'C')) = d(A', (AB'C'))$.

Gọi I và H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A' trên $B'C'$ và AI.

Ta có: $B'C' \perp A'I$ và $B'C' \perp A'A$

nên $B'C' \perp (A'AI) \Rightarrow B'C' \perp A'H$.

Mà $AI \perp A'H$. Do đó $(AB'C') \perp A'H$.



Khi đó: $d(A', (AB'C')) = A'H = \dfrac{A'A.A'I}{\sqrt{A'A^2 + A'I^2}} = \dfrac{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy khoảng cách cần tìm là $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Biết n là số nguyên dương thỏa mãn $x^n = a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2 + ... + a_n(x-2)^n$ và $a_1 + a_2 + a_3 = 2^{n-3}.192$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $n \in (9; 16)$. **B** $n \in (8; 12)$. (C) $n \in (7; 9)$. (D) $n \in (5; 8)$.

Lời giải.

Ta có: $x^n = [2 + (x-2)]^n = \mathrm{C}_n^0.2^n + \mathrm{C}_n^1.2^{n-1}(x-2) + \mathrm{C}_n^2.2^{n-2}(x-2)^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n(x-2)^n$.

Do đó: $a_1 + a_2 + a_3 = 2^{n-3}.192 \Leftrightarrow \mathrm{C}_n^1.2^{n-1} + \mathrm{C}_n^2.2^{n-2} + \mathrm{C}_n^3.2^{n-3} = 2^{n-3}.192$

$\Leftrightarrow \mathrm{C}_n^1.4 + \mathrm{C}_n^2.2 + C_n^3 = 192 \Leftrightarrow n = 9$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ biết $AD = 2AB$, đường thẳng AC có phương trình $x + 2y + 2 = 0$, $D(1; 1)$ và $A(a; b)$ $(a, b \in \mathbb{R}, a > 0)$. Tính $a + b$.

(A) $a + b = -4$. (B) $a + b = -3$. (C) $a + b = 4$. **D** $a + b = 1$.

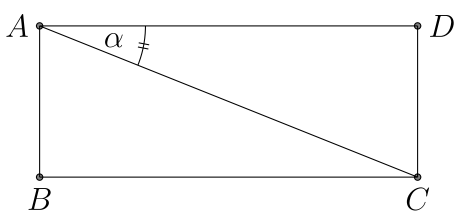
Lời giải.

Gọi $A(a; b)$. Vì $A \in AC : x + 2y + 2 = 0$ nên:

$a + 2b + 2 = 0 \Rightarrow a = -2b - 2$.

Do $a > 0$ nên $-2b - 2 > 0 \Rightarrow b < -1$ $(*)$.

Khi đó $A(-2b - 2; b)$. Ta có $\overrightarrow{AD} = (2b + 3; 1 - b)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng AD.



$\vec{u} = (2; -1)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng AC.

Trên hình vẽ, $\tan\alpha = \dfrac{DC}{AD} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (1).

Lại có $\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{AD}.\vec{u}\right|}{\left|\overrightarrow{AD}\right|.\left|\vec{u}\right|} = \dfrac{5|b+1|}{\sqrt{5}\sqrt{b^2+2b+2}}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{5|b+1|}{\sqrt{5}\sqrt{b^2+2b+2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow b^2+2b-3=0 \Rightarrow b=-3$ (do $(*)$) $\Rightarrow a=4$.

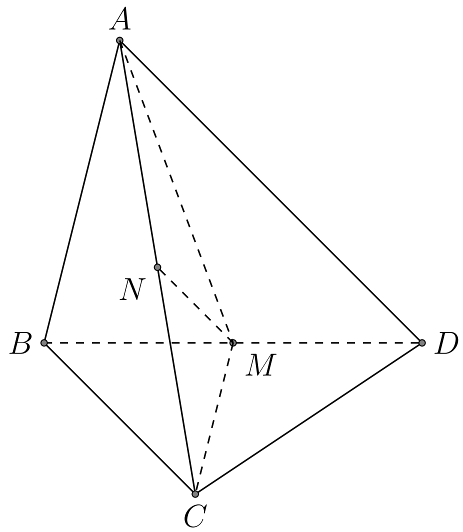
Khi đó $A(4;-3)$, suy ra $a+b=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Xét tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AB = BC = CD = DA = 1$ và AC, BD thay đổi. Giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng

A $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$. B $\dfrac{4\sqrt{3}}{27}$. C $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. D $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD, AC.

Đặt $BD = 2x, AC = 2y$ $(x, y > 0)$.

Ta có $CM \perp BD, AM \perp BD \Rightarrow BD \perp (AMC)$.

Ta có $MA = MC = \sqrt{1-x^2}, MN = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

$S_{AMN} = \dfrac{1}{2}MN.AC = \dfrac{1}{2}y\sqrt{1-x^2-y^2}$.

$V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.DS.S_{AMC} = \dfrac{1}{3}.2x.y\sqrt{1-x^2-y^2} =$

$\dfrac{2}{3}\sqrt{x^2.y^2.(1-x^2-y^2)} \le \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{(x^2+y^2+1-x^2-y^2)^3}{27}}$

$\Rightarrow V_{ABCD} \le \dfrac{2\sqrt{3}}{27}$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Cho hàm số $y = \left|\dfrac{x^4+ax+a}{x+1}\right|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1;2]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để $M \ge 2m$.

A 15. B 14. C 17. D 16.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^4+ax+a}{x+1}$. Ta có $f'(x) = \dfrac{3x^4+4x^3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [1;2]$

Do đó $f(1) \le f(x) \le f(2), \forall x \in [1;2]$ hay $a + \dfrac{1}{2} \le f(x) \le a + \dfrac{16}{3}, \forall x \in [1;2]$

Ta xét các trường hợp sau:

TH1: Nếu $a + \dfrac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow a > -\dfrac{1}{2}$ thì $M = a + \dfrac{16}{3}; m = a + \dfrac{1}{2}$ Theo đề bài $a + \dfrac{16}{3} \ge 2\left(a + \dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow a \le \dfrac{13}{3}$. Do a nguyên nên $a \in \{0;1;2;3;4\}$.

TH2: Nếu $a + \dfrac{16}{3} < 0 \Leftrightarrow a < -\dfrac{16}{3}$ thì $m = -\left(a + \dfrac{16}{3}\right); M = -\left(a + \dfrac{1}{2}\right)$.

Theo đề bài $-\left(a + \dfrac{1}{2}\right) \ge -2\left(a + \dfrac{16}{3}\right) \Leftrightarrow a \ge -\dfrac{61}{6}$. Do a nguyên nên $a \in \{-10;-9;...;-6\}$.

TH3: Nếu $a + \dfrac{1}{2} \le 0 \le a + \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{16}{3} \le a \le -\dfrac{1}{2}$ thì $M \ge 0; m = 0$ (Luôn thỏa mãn). Do a

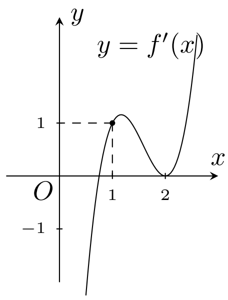
nguyên nên $a \in \{-5; -4; ...; -1\}$.
Vậy có 15 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2(C)$. Biết rằng đường thẳng $d : y = ax + b$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt M, N, P. Tiếp tuyến tại ba điểm M, N, P của đồ thị (C) cắt (C) tại các điểm M', N', P' (tương ứng khác M, N, P). Khi đó đường thẳng đi qua ba điểm M', N', P' có phương trình là

A $y = (4a + 9)x + 18 - 8b$. **B** $y = (4a + 9)x + 14 - 8b$.
C $y = ax + b$. **D** $y = -(8a + 18)x + 18 - 8b$.

Lời giải.
Giả sử $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$.
Ta có phương trình tiếp tuyến tại A của đồ thị (C) là:
$\Delta_1 : y = (3x_1^2 - 3)(x - x_1) + x_1^3 - 3x_1 + 2$
Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và Δ_1 là:
$$(3x_1^2 - 3)(x - x_1) + x_1^3 - 3x_1 + 2 = x_3 - x + 2 \Leftrightarrow (x - x_1)^2 (x + 2x_1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = -2x_1 \end{array}\right.$$
Do đó $A'(-2x_1; -8x_1^3 + 6x_1 + 2)$.
Lại có: $-8x_1^3 + 6x_1 + 2 = -8(x_1^3 - 3x_1 + 2) - 18x_1 + 18 = -8(ax_1 + b) - 18x_1 + 18$
$= -8(ax_1 + b) - 18x_1 + 18 = -2x_1(4a + 9) + 18 - 8b$.
Khi đó $y_{A'} = x_{A'}(4a + 9) + 18 - 8b$.
Vậy phương trình đường thẳng đi qua 3 điểm A', B', C' là $y = x(4a + 9) + 18 - 8b$.
Chọn đáp án A □

Câu 46. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên . Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{2x - 1}}{x[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A 5. **B** 4. **C** 6. **D** 3.

Lời giải.
Điều kiện: $x \geq \dfrac{1}{2}; f(x) \neq 0; f(x) \neq 1$.
$$\text{Xét phương trình } x[f^2(x) - f(x)] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = a\,(a \in (0;5;1)) \\ x = 2 \\ x = 1 \\ x = b\,(b \in (1;2)) \\ x = c\,(c \in (2;3)) \end{array}\right. .$$
Đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận đứng $x = a; x = b; x = c; x = 2$
Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho hai đường thẳng cố định a và b chéo nhau. Gọi AB là đoạn vuông góc chung của a và b (A thuộc a, B thuộc b). Trên a lấy điểm M (khác A), trên b lấy điểm N (khác B) sao cho $AM = x, BN = y, x + y = 8$. Biết $AB = 6$, góc giữa hai đường thẳng a và b bằng $60°$. Khi thể tích khối tứ diện $ABNM$ đạt giá trị lớn nhất hãy tính độ dài đoạn MN (trong trường hợp $MN > 8$).

A. $2\sqrt{21}$. B. 12. C. $2\sqrt{39}$. D. 13.

Lời giải.

Dựng hình chữ nhật $ABNC$.

$\left(\widehat{AM, BN}\right) = \left(\widehat{AM, AC}\right) = 60°$

Ta có: $\begin{cases} AB \perp AM \\ AB \perp BN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB \perp AM \\ AB \perp AC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ACM)$

$V_{ABNM} = V_{MABC} = \dfrac{1}{3} AB.S_{ACM} = \dfrac{1}{6} AB.AC.AM \sin \widehat{CAM} = \dfrac{1}{6}.6.x.y.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} xy.$

$V_{ABNM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} xy \le \dfrac{\sqrt{3}}{2} \dfrac{(x+y)^2}{4} = 8\sqrt{3}.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 4$. Khi đó $AM = BN = AC = 4$.

Lại có $AB \| CN \Rightarrow CN \perp (AMC) \Rightarrow CN \perp CM \Rightarrow MN^2 = CM^2 + CN^2$.

Mặt khác $\widehat{MAC} = 60°$ hoặc $\widehat{MAC} = 120°$.

Trường hợp 1: $\widehat{MAC} = 60° \Rightarrow \Delta AMC$ đều $\Rightarrow CM = 4 \Rightarrow MN = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$.

Trường hợp 2: $\widehat{MAC} = 120° \Rightarrow CM = \sqrt{AM^2 + AC^2 - 2AM.AC \cos 120°} = \sqrt{48} \Rightarrow MN = \sqrt{48 + 6^2} = 2\sqrt{41}$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; ...; 100\}$. Gọi S là tập hợp gồm tất cả các tập con của A, mỗi tập con này gồm 3 phần tử của A và có tổng bằng 91. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của S. Xác suất chọn được phần tử có 3 số lập thành cấp số nhân bằng?

A. $\dfrac{4}{645}$. B. $\dfrac{2}{645}$. C. $\dfrac{3}{645}$. D. $\dfrac{1}{645}$.

Lời giải.

Giả sử tập con bất kì $\{a; b; c\} \in S \Rightarrow 1 \le a, b, c \le 100; a, b, c$ phân biệt: $a + b + c = 91$.

Đây là bài toán chia kẹo Euler nên số bộ a, b, c là C_{91-1}^{3-1}.

Tuy nhiên trong các bộ trên vẫn chứa các bộ có 2 chữ số giống nhau, số bộ có 2 chữ số giống nhau là $3.45 = 135$ (bộ). Vậy $n(\Omega) = (C_9 0^2 - 3.45) : 3! = 645$.

Gọi A là biến cố: "a, b, c lập thành cấp số nhân".

Gọi q là công bội của cấp số nhân.

Theo bài ra ta có $q > 0$ $a + aq + aq^2 = 91 \Leftrightarrow a(1 + q + q^2) = 1.91 = 13.7$

Trường hợp 1: $\begin{cases} a = 1 \\ 1 + q + q^2 = 91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ q = 9 \end{cases}$.

Trường hợp 2: $\begin{cases} a = 91 \\ 1 + q + q^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 91 \\ q = 0 \end{cases}$ (loại)

Trường hợp 3: $\begin{cases} a = 13 \\ 1 + q + q^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 13 \\ q = 2 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Trường hợp 4: $\begin{cases} a = 7 \\ 1 + q + q^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ q = 3 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy $n(A) = 3 \Rightarrow P(A) = \dfrac{3}{645}$

Chọn đáp án C □

Câu 49. Biết m là giá trị để hệ bất phương trình $\begin{cases} 0 < x + y \le 1 \\ x + y + \sqrt{2xy + m} \ge 1 \end{cases}$ có nghiệm thực duy nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $m \in \left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{3}\right)$. **B** $m \in \left(-\dfrac{3}{4}; 0\right)$. **C** $m \in \left(\dfrac{1}{3}; 1\right)$. **D** $m \in (-2; -1)$.

Lời giải.

Hệ phương trình tương đương với:

$\begin{cases} 0 < x + y \le 1 \\ \sqrt{2xy + m} \ge 1 - (x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x + y \le 1 \\ 2xy + m \ge 1 - 2x - 2y + (x + y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x + y \le 1 (I) \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \le m + 1 (II) \end{cases}$

Tập nghiệm của (I) là phần nằm giữa hai đường thẳng $d : y = -x; d' : y = -x + 1$ và trên d'.

Nếu $m \le -1$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

Nếu $m > -1$ thì tập nghiệm của (II) là hình tròn (C) (kể cả biên) có tâm $A(1; 1)$ bán kính $R = \sqrt{m + 1}$.

Do đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi d' là tiếp tuyến của đường tròn (C).

Nghĩa là: $\sqrt{m + 1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi $m = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho phương trình: $\sin^3 x + 2\sin x + 3 = (2\cos^3 x + m)\sqrt{2\cos^3 x + m - 2} + 2\cos^3 x + \cos^2 x + m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có đúng 1 nghiệm $x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right)$?

A 2. **B** 1. **C** 3. **D** 4.

Lời giải.

Ta có: $\sin^3 x + \sin^2 x + 2\sin x = \left(\sqrt{2\cos^3 x + m - 2}\right)^3 + (2\cos^3 x + m - 2) + 2\sqrt{2\cos^3 x + m - 2}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + 2t$ có $f'(t) = 6t^2 + 2t + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bởi vậy: (1) $\Leftrightarrow f(\sin x) = f\left(\sqrt{2\cos^3 x + m - 2}\right) \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{2\cos^3 x + m - 2}$ (2).

Với $x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right)$ thì (2)$\Leftrightarrow \sin^2 x = 2\cos^3 x + m - 2 \Leftrightarrow -2\cos^3 x - \cos^2 x + 3 = m$ (3).

Đặt $t = \cos x$, phương trình (3) trở thành $-2t^3 - t^2 - 1 = m$ (4).

Ta thấy, với mỗi $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$ thì phương trình $\cos x = t$ cho ta một nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$.

Xét hàm số $g(t) = -2t^3 - t^2 + 3$ với $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Ta có $g'(t) = -6t^2 - 2t, g'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0		1
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	3	$\searrow$	$\frac{80}{27}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

Do đó, để phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$ điều kiện cần và đủ là phương trình (4) có đúng một nghiệm $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m \in \left[0; \frac{80}{27}\right] \end{array}\right. \Rightarrow m \in \{3; 2; 1; 0\}$ (Do m nguyên).

Chọn đáp án D $\square$

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. D	3. A	4. A	5. B	6. B	7. D	8. C	9. C	10. B
11. B	12. A	13. A	14. D	15. B	16. A	17. C	18. B	19. B	20. B
21. A	22. A	23. B	24. C	25. A	26. D	27. C	28. C	29. C	30. B
31. C	32. C	33. C	34. C	35. D	36. C	37. C	38. D	39. D	40. A
41. B	42. D	43. A	44. A	45. A	46. A	47. A	48. C	49. B	50. D

52 ĐỀ THI THỬ THPT HÀN THUYÊN, BẮC NINH – LẦN 2 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) Hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ đồng biến khi $a > 1$.

(B) Hàm số logarit $y = \log_a x\,(a > 0, a \neq 1)$ có tập xác định là $(0; +\infty)$.

(C) Hàm số mũ $y = a^x\ (a > 0, a \neq 1)$ có tập xác định là $(0; +\infty)$.

(D) Đồ thị hàm số mũ $y = a^x\ (a > 0, a \neq 1)$ nhận Ox làm tiệm cận ngang.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng tính chất hàm mũ và lôgarit.

- Hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ đồng biến khi $a > 1$ và nghịch biến khi $0 < a < 1$.
- Hàm số lôgarit $y = \log_a x\,(a > 0, a \neq 1)$ có tập xác định là $(0; +\infty)$ và tập giá trị $\mathbb{R}$; đồ thị có tiệm cận đứng là trục Ox.
- Hàm số mũ $y = a^x\ (a > 0, a \neq 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị $(0; +\infty)$; đồ thị có tiệm cận ngang là trục Oy.

Cách giải:

Phát biểu sai là: Hàm số mũ $y = a^x\ (a > 0, a \neq 1)$ có tập xác định là $(0; +\infty)$.

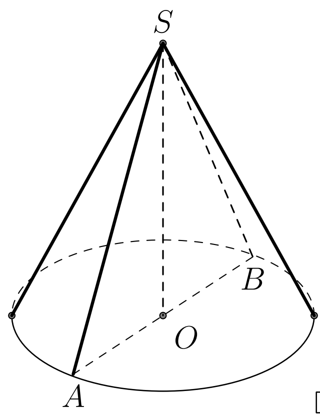
Sửa lại: Hàm số mũ $y = a^x\ (a > 0, a \neq 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Cắt khối nón bởi một mặt phẳng qua trục tạo thành một tam giác đều có cạnh bằng a. Thể tích của khối nón là

(A) $\pi a^3\sqrt{2}$. (B) $\dfrac{3\pi a^3}{8}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{3}\pi a^3}{9}$. (D) $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải.



Phương pháp: Thể tích khối nón $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Cách giải:

Tam giác SAB đều cạnh $a \Rightarrow \begin{cases} R = OA = OB = \dfrac{a}{2}. \\ h = SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

Thể tích khối nón: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\pi\sqrt{3}}{24}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Kết luận nào là đúng về GTLN và GTNN của hàm số $y = \sqrt{x - x^2}$?

(A) Không có GTLN và không có GTNN. (B) Có GTLN và không có GTNN.

(C) Có GTLN và GTNN. (D) Có GTNN và không có GTLN.

Lời giải.

Phương pháp:

+ Tìm TXĐ: $\mathscr{D} = [a; b]$ của hàm số.

+ Tính y', giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm $x_i \in \mathscr{D}$ với $i = 1, 2, \ldots$
+ Tính $y(a), y(b), y(x_i)$. So sánh các kết quả và kết luận.
Cách giải: TXĐ $\mathscr{D} = [0; 1]$.
Ta có $y = \sqrt{x - x^2} \Rightarrow y' = \dfrac{1 - 2x}{2\sqrt{x - x^2}} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \in [0; 1]$.
Hàm số đã cho liên tục trên $[0; 1]$ có $y(0) = y(1) = 0, y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.
Vậy hàm số có GTNN là 0 và GTLN là $\dfrac{1}{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 4. Thể tích khối cầu có bán kính bằng $\dfrac{a}{2}$ là

(A) $\dfrac{\pi a^3}{2}$. (B) $\dfrac{\pi a^2}{4}$. **C** $\dfrac{\pi a^3}{6}$. (D) πa^2.

Lời giải.
Phương pháp: Công thức tính thể tích khối cầu có bán kính r là: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.
Cách giải: Thể tích khối cầu có bán kính bằng $\dfrac{a}{2}$ là: $V = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^3 = \dfrac{\pi a^3}{6}$.
Chọn đáp án C □

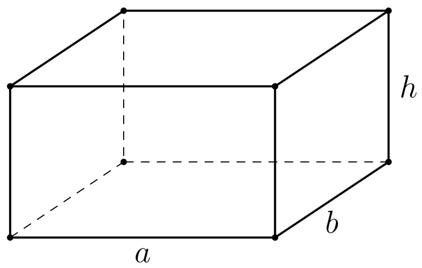
Câu 5. Một hồ bơi có dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài 50 m, chiều rộng 19 m. Biết rằng trong hồ bơi có 1900000 lít nước. Độ sâu của hồ bơi lúc này là

(A) 1,8 m. (B) 1,4 m. (C) 1,6 m. **D** 2 m.

Lời giải.

Vậy, độ sâu của hồ bơi lúc này là 2 m.

Phương pháp:
Công thứ tính thể tích khối hộp chữ nhật là: $V = abh$.
Cách giải: Đổi 1900000 lít $= 1900$ m^3.
Theo đề bài ta có: $1900 = 50.19.h \Leftrightarrow h = 2$ m.



Chọn đáp án D □

Câu 6. Giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + \left(m^2 - 3m + 2\right)x + 5$ đạt cực đại tại 0 là

(A) $m = 1$. (B) $m = 1$ hoặc $m = 2$.
(C) $m = 6$. **D** $m = 2$.

Lời giải.
Phương pháp:
Tính y' và y''.
Hàm số đạt cực trị tại x_0 thì $y'(x_0) = 0 \Leftrightarrow m = m_i, i = 1, 2, \ldots$
Với các giá trị m_i tính $y''(x_0)$.
+ Nếu $y''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.
+ Nếu $y''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.

+ Nếu $y''(x_0) = 0$ chưa kết luận gì, ta sẽ thay giá trị $m = m_i$ tương ứng vào hàm số kiểm tra.

Cách giải:

$y = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + (m^2 - 3m + 2)\,x + 5.$

$\Rightarrow y' = x^2 - 2(m-1)\mathrm{x} + m^2 - 3m + 2.$

$\Rightarrow y'' = 2x - 2(m-1).$

Ta có $y'(0) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

+) Với $m = 1$ ta có $y''(0) = 0$ chưa thể kết luận nên ta thay $m = 1$ vào đề bài được $y = \frac{1}{3}x^3 + 5$ hàm này không có cực trị nên $m = 1$ loại.

+) Với $m = 2$ ta có $y''(0) = -2 < 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = 0$. Vậy $m = 2$ nhận.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Số nghiệm của phương trình $2^{2x^2-7x+5} = 1$ là

A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải.

Phương pháp:

Phương trình $a^x = b\,(a, b > 0, a \neq 1) \Leftrightarrow x = \log_a b$.

Cách giải:

Ta có: $2^{2x^2-7x+5} = 1 \Leftrightarrow 2^{2x^2-7x+5} = 2^0 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{5}{2} \end{array}\right.$.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau, $AB = 6a, AC = 5a, AD = 4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm của các cạnh BC, CD, DB. Thể tích V của tứ diện $AMNP$ là

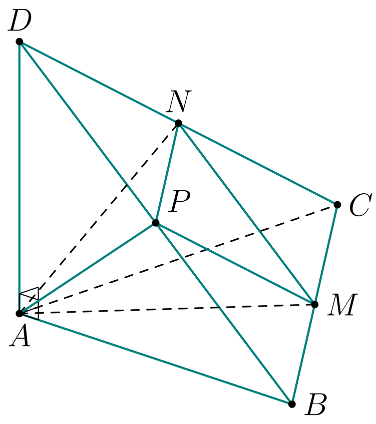
A. $V = \frac{5a^3}{3}$. B. $V = \frac{20a^3}{3}$. C. $V = 5a^3$. D. $V = 10a^3$.

Lời giải.

Phương pháp:

Thể tích khối tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và có độ dài các cạnh đó lần lượt bằng a, b, c là: $V = \frac{1}{6}abc$.

Cách giải:



Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB.AC\cdot AD=\frac{1}{6}.6a.5a.4a=20a^3.$$

Ta có:

$$\frac{V_{A.MNP}}{V_{ABCD}}=\frac{\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta MNP}\cdot d(A,(BCD))}{\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta BCD}\cdot d(A,(BCD))}=\frac{S_{\Delta MCP}}{S_{\Delta BCD}}=\frac{1}{4}$$

(do $S_{\Delta DNP}=S_{\Delta BPM}=S_{\Delta BPM}=\frac{1}{4}S_{\Delta BCD}$).

Chọn đáp án C ☐

Câu 9. Trong khai triển $\left(a^2+\frac{1}{b}\right)^7$, số hạng thứ 5 là

A $-35a^4b$. B $35a^4b^{-5}$. C $-35a^6b^{-4}$. D $35a^6b^{-4}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Áp dụng Công thức khai triển nhị thức Newton: $(x+y)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i\cdot x^{n-i}\cdot y^i$.

Cách giải:

Ta có: $\left(a^2+\frac{1}{b}\right)^7=\sum\limits_{i=0}^{7}C_7^i\cdot(a^2)^{7-i}\cdot(b^{-1})^i$.

Vậy số hạng thức 5 trong khai triển ứng với $i=4$ bằng $C_7^4\cdot(a^2)^3\cdot(b^{-1})^4=35a^6b^{-4}$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 10. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R, chiều cao bằng h. Biết rằng hình trụ đó có diện tích toàn phần gấp ba diện tích xung quanh. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $R=2h$. B $h=\sqrt{3}R$. C $R=3h$. D $h=2R$.

Lời giải.

Phương pháp:

Công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq}=2\pi Rl=2\pi Rh$.

Công thức tính diện tích toàn phần của hình trụ: $S_{tp}=2\pi Rl+2\pi R^2=2\pi Rh+2\pi R^2$.

Cách giải:

Hình trụ đó có diện tích toàn phần gấp ba diện tích xung quanh nên ta có:

$$2\pi Rh+2\pi R^2=3.2\pi Rh\Leftrightarrow 2\pi R^2=4\pi Rh\Leftrightarrow R=2h.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = 3 - 2\cos^2 3x$.

A $\min y = 1, \max y = 3$. **B** $\min y = 1, \max y = 5$.
C $\min y = 2, \max y = 3$. **D** $\min y = -1, \max y = 3$.

Lời giải.

Phương pháp:

Tập giá trị của hàm số $y = \cos x$ là $[-1; 1]$.

Cách giải:

Ta có

$$-1 \leq \cos 3x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \cos^2 3x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq -2\cos^2 3x \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq 3 - 2\cos^2 3x \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 3.$$

Vậy $\min y = 1, \max y = 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Tỉ lệ tăng dân số ở Việt Nam được duy trì ở mức 1,05%. Theo số liệu của Tổng cục thống kê, dân số Việt Nam năm 2014 có 90.728.900 người. Với tốc độ tăng dân số như thế đến năm 2030 thì dân số của Việt Nam là bao nhiêu?

A 105.971.355 người. **B** 106.118.331 người. **C** 107.232.573 người. **D** 107.232.574 người.

Lời giải.

Phương pháp:

Công thức lãi kép, không kỳ hạn: $A_n = M(1 + r\%)^n$.

Với: A_n là số tiền nhận được sau tháng thứ n,

M là số tiền gửi ban đầu,

n là thời gian gửi tiền (tháng),

r là lãi suất định kì (%).

Cách giải:

Từ năm 2014 đến năm 2030 cách nhau số năm là: $2030 - 2014 = 16$ năm.

Dân số Việt Nam năm 2030: $A_{16} = 90728900(1 + 1{,}05\%)^{16} \approx 107232574$ (người).

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Cho đa giác đều n đỉnh, $n \in \mathbb{R}$ và $n > 3$. Tìm n biết rằng đa giác đã cho có 135 đường chéo.

A $n = 15$. **B** $n = 8$. **C** $n = 18$. **D** $n = 27$.

Lời giải.

Phương pháp:

Số đường chéo của đa giác có n đỉnh $(n \in \mathbb{N}; n > 3)$ là: $C_2^2 - n$.

Cách giải:

Theo đề bài ta có

$$C_n^2 - n = 135 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 135 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 270 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 18\,(\text{tm}) \\ n = -15\,(\text{ktm}). \end{array}\right.$$

Vậy $n = 18$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}$ là

A 3. **B** 1. **C** 2. **D** 0.

Lời giải.

Phương pháp:

- Định nghĩa tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.
  Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a \Rightarrow y = a$ là TCN của đồ thị hàm số.
- Định nghĩa tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.
  Nếu $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ thì $x = a$ là TCĐ của đồ thị hàm số.

Cách giải:

TXĐ: $\mathscr{D} = (-1; +\infty) \setminus \{1\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1+x}}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3}}}{\frac{1}{x^2} - 1} = 0$. Suy ra đồ thị hàm số có TCN là $y = 0$.

$\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{\sqrt{1+x}}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}} = +\infty$. Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$.

$\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{\sqrt{1+x}}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{\sqrt{1+x}}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}} = +\infty$. Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 3 đường tiệm cận.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $y = \tan x$. **B** $y = \dfrac{x}{x+1}$.

C $y = \left(x^2-1\right)^2 - 3x + 2$. **D** $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Hàm số $y = f(x)$ có:

+ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

+ $y' \geq 0, \forall x$ và $y' = 0$ tại hữu hạn điểm.

Cách giải:

$y = \tan x$: loại vì $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$y = \dfrac{x}{x+1}$: loại vì $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$y = \left(x^2-1\right)^2 - 3x + 2$: loại vì $y' = 2.2x\left(x^2-1\right) - 3 = 4x^3 - 4x - 3$ có khoảng mang dấu dương, có khoảng mang dấu âm.

$y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$: thỏa mãn vì $y' = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Tập xác định của hàm số $y = \log_2\left(4 - x^2\right)$ là tập hợp nào sau đây?

A $\mathscr{D} = (-2; 2)$.
B $\mathscr{D} = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.
C $\mathscr{D} = [-2; 2]$.
D $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{-2; 2\}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Điều kiện để hàm số $y = \log_a f(x)\,(0 < a \neq 1)$ có nghĩa là $f(x) > 0$.

Cách giải:

Điều kiện xác định $4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

A Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ có cực đại, cực tiểu.
B Hàm số $y = x^3 + 3x + 1$ có cực trị.
C Hàm số $y = -2x + 1 + \dfrac{1}{x+2}$ không có cực trị.
D Hàm số $y = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$ có 2 cực trị.

Lời giải.

Phương pháp:

Quy tắc 1:

- Tìm TXĐ của hàm số.
- Tính $f'(x)$. Tìm các điểm mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc không xác định.
- Lập bảng xét dấu $f'(x)$.
- Đưa ra kết luận về cực trị.

Quy tắc 2:

- Tìm TXĐ của hàm số.
- Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm các nghiệm $x_i, i = 1, 2, 3, \ldots$
- Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.
- Dựa vào dấu $f''(x_i)$ đưa ra kết luận về cực trị.

Cách giải:

+) $y = -x^3 + 3x^2 + 1 \Rightarrow y' = -3x^2 + 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ có cực đại, cực tiểu.

+) $y = x^3 + 3x + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \Rightarrow$ Hàm số $y = x^3 + 3x + 1$ không có cực trị.

Vậy, khẳng định ở câu B là sai.

+) $y = -2x + 1 + \dfrac{1}{x+2}, (\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{-2\}) \Rightarrow y' = -2 - \dfrac{1}{(x+2)^2} < 0, \forall x \in \mathscr{D} \Rightarrow$ Hàm số $y = -2x + 1 + \dfrac{1}{x+1}$ không có cực trị.

+) $y = x - 1 + \frac{1}{x-1}, (\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{-1\}) \Rightarrow y' = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in \mathscr{D} \\ x = 2 \in \mathscr{D}. \end{array}\right.$

Dễ dàng kiểm tra $y' = 0$ đổi dấu tại $x = 0; x = 2$. Suy ra hàm số $y = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$ có 2 cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x > \log_2(2x+1)$ là

(A) $S = \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$. **B** $S = \varnothing$. (C) $S = (-\infty; -1)$. (D) $S = (1; 3)$.

Lời giải.

Phương pháp:

+ Với $a > 1 : \log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y$.

+ Với $0 < a < 1 : \log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x < y$.

Cách giải:

Ta có: $\log_2 x > \log_2(2x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2x+1 \\ x > 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 0 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x > \log_2(2x+1)$ là $S = \varnothing$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ có bảng biến thiên sau, tìm a và b.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	a	$\nearrow$	0	$\searrow$	b	$\nearrow$	$+\infty$

(A) $a = +\infty; b = 2$. **B** $a = -\infty; b = -4$. (C) $a = -\infty; b = 1$. (D) $a = +\infty; b = 3$.

Lời giải.

Phương pháp:

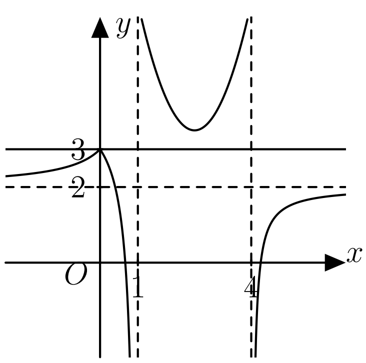
Tính giới hạn của hàm số khi x tiến đến $-\infty$ để tìm a và tính giá trị của hàm số tại $x = 0$ để tìm b.

Cách giải:

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty, y(0) = -4 \Rightarrow a = -\infty; b = -4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Chọn khẳng định đúng.



(A) Hàm số liên tục trên $(-\infty; 4)$. **B** Hàm số liên tục trên $(1; 4)$.

(C) Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. (D) Hàm số liên tục trên $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Phương pháp:

Dựa vào đồ thị hàm số để nhận xét và chọn đáp án đúng.

Cách giải:

Hàm số liên tục trên $(1;4)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Nếu một hình chóp đều có chiều cao và cạnh đáy cùng tăng lên 3 lần thì thể tích của nó tăng lên

(A) 18 lần. (B) 54 lần. (C) 9 lần. (D) 27 lần.

Lời giải.

Phương pháp:

Công thức tính thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3}Sh$.

Cách giải:

Giả sử hình chóp có chiều cao là h và cạnh đáy là a. Thể tích khối chóp là: $V = \frac{1}{3}.a^2.h$.

Khi chiều cao và cạnh đáy cùng tăng lên 3 lần thì thể tích của khối chóp là:

$$V' = \frac{1}{3}(3a)^2.3h = 27.\frac{1}{3}.a^2.h = 27V.$$

Vậy thể tích tăng 27 lần.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Một hình hộp đứng có đáy là hình thoi (không phải hình vuông) có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

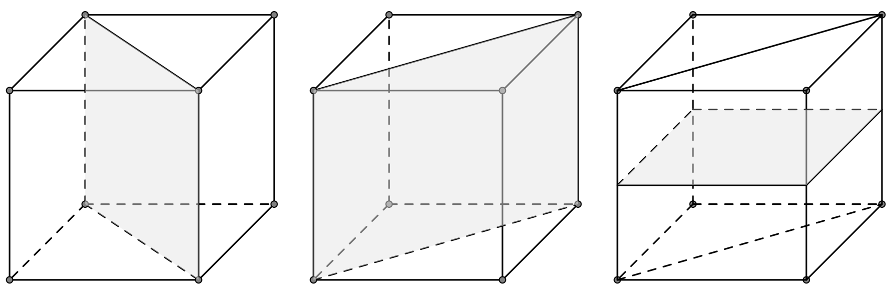
(A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng lý thuyết khối đa diện để là bài toán.

Cách giải:



Hình đã cho có 3 mặt phẳng đối xứng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

(A) $M\left(-3; -\frac{16}{3}\right)$. (B) $M(-2;0)$. (C) $M\left(-1; \frac{4}{3}\right)$. (D) $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{8}\right)$.

Lời giải.

Phương pháp:

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0)$ là: $y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + y_0$.

Hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$ vuông góc nhau nên $a.a' = -1$.

Cách giải:

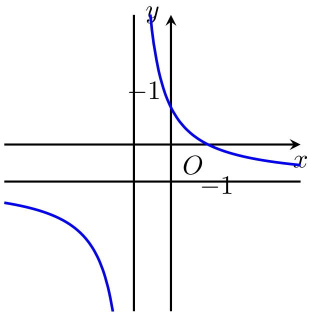
Gọi d là tiếp tuyến cần tìm, $M(x_0; y_0), (x_0 < 0)$ là tiếp điểm. Do d vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$ nên d có hệ số góc bằng 3.

Ta có $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x + \dfrac{2}{3} \Rightarrow y' = x^2 - 1 \Rightarrow x_0^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2\,(\text{ktm}) \\ x_0 = -2\,(\text{tm}). \end{array}\right.$

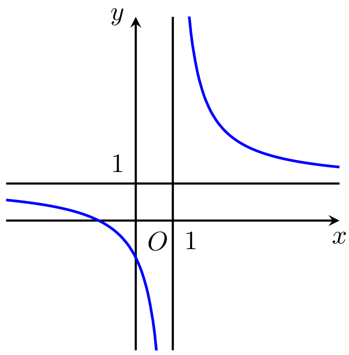
Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow M(2; 0)$.

Chọn đáp án B □

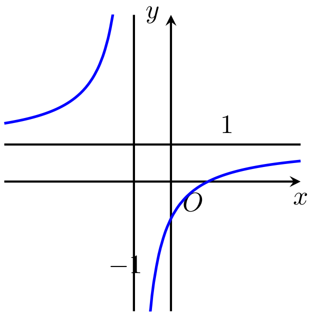
Câu 24. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{1-x}$ có dạng

A 

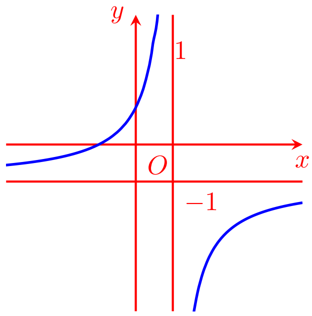
.

B 

.

C 

.

D 

.

Lời giải.

Phương pháp:

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}, (ad - bc \neq 0, c \neq 0)$ có TCĐ: $x = -\dfrac{d}{c}$ và TCN: $y = \dfrac{a}{c}$.

Nếu $ad - bc > 0$ thì hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Nếu $ad - bc < 0$ thì hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Cách giải:

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{1-x}$ có TCĐ: $x = 1$ và TCN $y = -1$ và đồng biến trên từng khoảng xác định do $1.1 - 1.(-1) = 2 > 0$.

Vậy chọn đồ thị ở câu D.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm của BC, M là điểm trên cạnh DC. Một mặt phẳng (α) qua M, song song BC và AI. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của (α) với BD và AD.

Xét các mệnh đề sau:

$$(1)\, MP \parallel BC \quad (2)\, MQ \parallel AC \quad (3)\, PQ \parallel AI \quad (4)\, (MPQ) \parallel (ABC)$$

Số mệnh đề đúng là

A 1. **B** 3. **C** 2. **D** 4.

Lời giải.

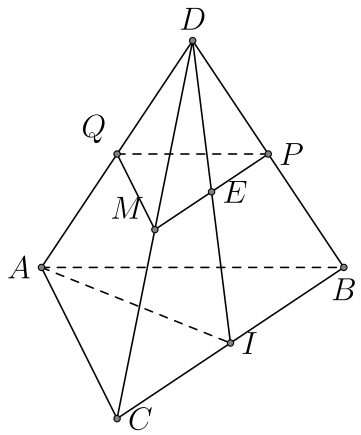
Phương pháp:

+) Với $(P), (Q), (R)$ là 3 mặt phẳng phân biệt, có $\begin{cases} (P) \parallel (Q) \\ (R) \cap (P) = a \\ (R) \cap (Q) = b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$.

+) Chứng minh hai mặt phẳng song song: $\begin{cases} a, b \parallel (P) \\ a, b \subset (Q) \\ a \cap b = I \end{cases} \Rightarrow (P) \parallel (Q)$.

Cách giải:

Ta có: $\begin{cases} BC, AI \subset (\alpha) \\ BC, AI \subset (ABC) \\ BC \cap AI = I \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (ABC)$.



Hay $(MNP) \parallel (ABC)$: (4) đúng.

Ta có: $\begin{cases} (ACD) \cap (MNP) = MQ \\ (ACD) \cap (ABC) = AC \\ (MNP) \parallel (ABC) \end{cases} \Rightarrow MQ \parallel AC$: (2) đúng.

Tương tự: $MP \parallel BC$: (1) đúng.

(3): $PQ \parallel AI$: sai ($PQ \parallel AB$, mà AB khác phương AI).

Chọn đáp án B □

Câu 26. Cho $a, b, c > 1$. Biết rằng biểu thức $P = \log_a(bc) + \log_b(ac) + 4\log_c(ab)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng m khi $\log_b c = n$. Tính giá trị $m + n$.

A $m + n = 14$. **B** $m + n = \dfrac{25}{2}$. **C** $m + n = 12$. **D** $m + n = 10$.

Lời giải.

Phương pháp:

$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}, (a, b > 0; a, b \neq 1)$.

Áp dụng BĐT Cô-si cho 2 số dương: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Cách giải:

Do $a, b, c > 1$ nên $\log_a b, \log_c a, \log_b c > 0$.

$$\begin{aligned} P &= \log_a(bc) + \log_b(ac) + 4\log_c(ab) = \log_a b + \log_a c + \log_b a + \log_b c + 4\log_c a + 4\log_a b \\ &= (\log_a b + \log_b a) + (\log_a c + 4\log_c a) + (\log_b c + 4\log_c b) \\ &= \left(\log_a b + \frac{1}{\log_a b}\right) + \left(\frac{1}{\log_c a} + 4\log_c a\right) + \left(\log_b c + \frac{4}{\log_b c}\right) \\ &\geq 2\sqrt{\log_a b \cdot \frac{1}{\log_a b}} + 2\sqrt{\frac{1}{\log_c} \cdot 4\log_c a} + 2\sqrt{\log_b c \cdot \frac{4}{\log_b c}} = 2 + 4 + 4 = 10. \end{aligned}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \log_a b = \dfrac{1}{\log_a b} \\ \dfrac{1}{\log_c a} = 4\log_c a \\ \log_b c = \dfrac{4}{\log_c b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a b = 1 \\ \log_c a = \dfrac{1}{2} \\ \log_b c = 2. \end{cases}$

Vậy, đạt giá trị nhỏ nhất là 10 khi $\log_b c = 2 \Rightarrow m = 10, n = 2 \Rightarrow m + n = 12$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Cho x, y là hai số không âm thỏa mãn $x + y = 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + y^2 - x + 1$ là

A. $\min P = 5$.
B. $\min P = \frac{115}{3}$.
C. $\min P = \frac{7}{3}$.
D. $\min P = \frac{17}{3}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Đưa biểu thức P về hàm số 1 ẩn x.

Khảo sát, tìm GTNN của hàm số đó.

Cách giải:

x, y là hai số không âm thỏa mãn $x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x, (0 \leq x \leq 2)$.

Khi đó: $P = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + y^2 - x + 1 = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + (2 - x)^2 - x + 1 = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 5$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 5, x \in [0; 2]$ có $f'(x) = x^2 + 4x - 5 \Rightarrow f'(x) = 0 \left[\begin{array}{l} x = 1\,(\text{tm}), \\ x = -5\,(\text{ktm}). \end{array}\right.$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 2]$, có $f(0) = 5, f(1) = \frac{7}{3}, f(2) = \frac{17}{3} \Rightarrow \min\limits_{[0;2]} f(x) = f(1) = \frac{7}{3}$.

Vậy $\min P = \frac{7}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Ba số x, y, z lập thành một cấp số cộng và có tổng bằng 21. Nếu lần lượt thêm các số $2; 3; 9$ vào ba số đó (theo thứ tự của cấp số cộng) thì được ba số lập thành một cấp số nhân. Tính $F = x^2 + y^2 + z^2$.

A. $F = 389$ hoặc $F = 179$.
B. $F = 441$ hoặc $F = 357$.
C. $F = 395$ hoặc $F = 179$.
D. $F = 389$ hoặc $F = 395$.

Lời giải.

Phương pháp:

Ba số x, y, z lập thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow x + z = 2y$.

Và số x, y, z lập thành một cấp số nhân $\Leftrightarrow xz = y^2$.

Cách giải:

Do 3 số x, y, z lập thành một cấp số cộng và có tổng bằng 21 nên ta có

$$\begin{cases} x+z=2y \\ x+y+z=21. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=14 \\ y=7. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=14-z \\ y=7. \end{cases} \quad (1)$$

Nếu lần lượt thêm các số $2; 3; 9$ vào ba số đó (theo thứ tự của cấp số cộng) thì được ba số lập thành một cấp số nhân nên ta có: $(x+2)(z+9)=(y+3)^2$. (2)

Thay (1) vào (2) ta có: $(14-z+2)(z+9)=(7+3)^2 \Leftrightarrow z^2-7z-44=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=11 \\ z=-4. \end{array}\right.$

$z=11 \Rightarrow z=14-11=3 \Rightarrow F=x^2+y^2+z^2=3^2+7^2+11^2=179.$

$z=-4 \Rightarrow x=14-(-4)=18 \Rightarrow F=x^2+y^2+z^2=18^2+7^2+(-4)^2=389.$

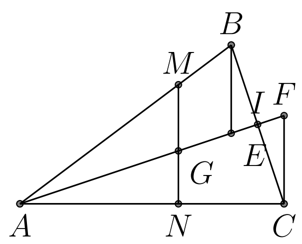
Chọn đáp án A □

Câu 29. Cho tứ diện đều $S.ABC$ có cạnh bằng 1. Mặt phẳng (P) đi qua điểm S và trọng tâm G của tam giác ABC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Tính thể tích nhỏ nhất $V_{\min}$ của khối tứ diện $SAMN$.

A $V_{\min}=\dfrac{\sqrt{2}}{27}$. **B** $V_{\min}=\dfrac{4}{27}$. **C** $V_{\min}=\dfrac{\sqrt{2}}{18}$. **D** $V_{\min}=\dfrac{\sqrt{2}}{36}$.

Lời giải.

Phương pháp:



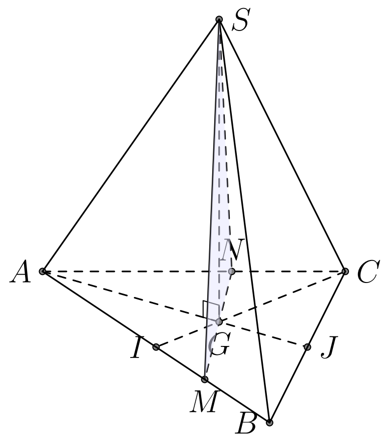
Cho tam giác đều ABC, G là trọng tâm tam giác ABC. Đường thẳng qua G cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Khi đó, $\dfrac{AB}{AM}+\dfrac{AC}{AN}=3$.

Thật vậy, gọi I là trung điểm của BC, qua B, C kẻ các đường thẳng song song MN, cắt đường thẳng AI tại E, F. Khi đó, $\Delta BIE=\Delta CIF \Rightarrow IE=IF$.

Ta có:

$$\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}=\frac{AE}{AG}+\frac{AF}{AG}=\frac{AE+AF}{AG}=\frac{2.AI}{AG}=\frac{2.AI}{\frac{2}{3}AI}=3.$$

Cách giải:



Do $SABC$ là tứ diện đều, G là trọng tâm tam giác ABC. Suy ra $SG \perp (ABC)$.
Vậy thể tích khối tứ diện $SAMN$ là $V = \dfrac{1}{3} \cdot SG \cdot S_{AMN}$.

+) Tam giác ABC đều, cạnh bằng 1 nên $AJ = \dfrac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AG = \dfrac{2}{3} \cdot AJ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SAG vuông tại $G \Rightarrow SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

+) Diện tích tam giác AMN

$S_{AMN} = \dfrac{1}{2} \cdot AN \cdot AM \cdot \sin A = \dfrac{1}{2} \cdot AN \cdot AM \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot AN \cdot AM$.

Ta có $\dfrac{AB}{AM} + \dfrac{AC}{AN} = 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{AN} = 3$.

Mà $\dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{AN} \geq \dfrac{2}{\sqrt{AM.AN}} \Rightarrow 3 \geq \dfrac{2}{\sqrt{AM \cdot AN}}$.

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{AM.AN}}{2} \geq \dfrac{1}{3} \Rightarrow AM \cdot AN \geq \dfrac{4}{9}$.

$\Rightarrow S_{AMN} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \mathrm{AN} \cdot \mathrm{AM} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{4}{9} = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

$\Rightarrow V_{S.AMN} \geq \dfrac{1}{3} \cdot \sqrt{\dfrac{2}{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{9} = \dfrac{\sqrt{2}}{27}$.

Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $AM = AN = \dfrac{2}{3}$.

Vậy $(V_{SAMN})_{\min} = \dfrac{\sqrt{2}}{27}$ khi và chỉ khi $AM = AN = \dfrac{2}{3}$ hay MN là đường thẳng qua G song song với BC.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác $ABC, AA' = 2a$. M là trung điểm của $B'C'$. Khi đó khoảng cách từ C' đến mặt phẳng $(A'BM)$ là

A $\dfrac{a\sqrt{11}}{\sqrt{47}}$. B $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. C $\dfrac{a\sqrt{26}}{\sqrt{107}}$. D $\dfrac{a}{2}$.

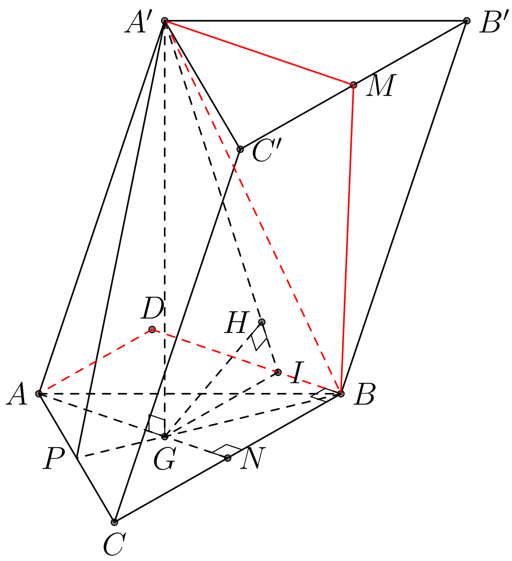
Lời giải.

Phương pháp:

$$\begin{cases} (P) \parallel (Q) \\ A \in (P) \end{cases} \Rightarrow d((P),(Q)) = d(A,(Q)).$$

$\begin{cases} a \parallel (Q) \\ A, B \in a \end{cases} \Rightarrow d(A,(Q)) = d(B,(Q)) = d(a,(Q)).$

Cách giải:



Gọi N là trung điểm của BC, G là trọng tâm tam giác ABC. Dựng hình chữ nhật $ANBD$. Kẻ $GI \parallel BC(I \in BD), GH \perp A'I(H \in A'I)$.

+) Ta có: $C'N \parallel (A'MB)$ (do $C'N \parallel MB$). Suy ra $d(C',(A'BM)) = d(N,(A'BM))$.

Mà $GN \parallel (A'BM)$ (do $GN \parallel A'M$) $\Rightarrow d(N,(A'BM)) = d(G,(A'BM)) \Rightarrow d(C',(A'BM)) = d(G,(A'BM))$.

+) Ta có: $BD \parallel AN, AN \parallel A'M \Rightarrow BD \parallel A'M \Rightarrow A', M, B, D$ đồng phẳng.

+) $\begin{cases} BD \perp GI (\text{do } ANBD \text{ là HCN}) \\ BD \perp A'G (\text{do } A'G \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BD \perp (A'GI) \Rightarrow BD \perp GH.$

Mà $A'I \perp GH \Rightarrow GH \perp (A'MB) \Rightarrow d(G,(A'BM)) = GH$.

+) Tính GH:

ΔABC đều, cạnh $a \Rightarrow AN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, AG = \dfrac{2}{3}AN = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$\Delta AA'G$ vuông tại $G \Rightarrow A'G = \sqrt{AA'^2 - AG^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{\sqrt{33}}{3}a$.

$GNBI$ là hình chữ nhật $\Rightarrow GI = NB = \dfrac{a}{2}$.

$\Delta A'GI$ vuông tại G có $GH \perp A'I$ nên $\dfrac{1}{GH^2} = \dfrac{1}{GI^2} + \dfrac{1}{A'G^2} = \dfrac{1}{\frac{a^2}{4}} + \dfrac{1}{\frac{11a^2}{3}} = \dfrac{47}{11a^2}$.

Suy ra $GH = \sqrt{\dfrac{11}{47}}a$. Vậy $d(C',(A'BM)) = \dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{47}}a$.

Chọn đáp án A □

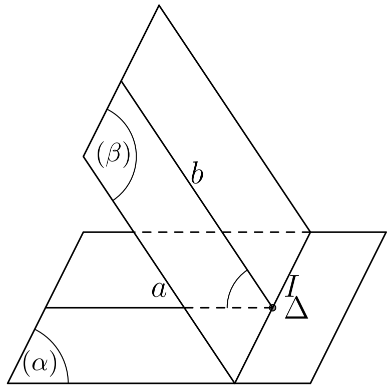
Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $AB = a, \widehat{BAD} = 60^\circ, SO \perp (ABCD)$ và mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc 60°. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **C** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{48}$. **D** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

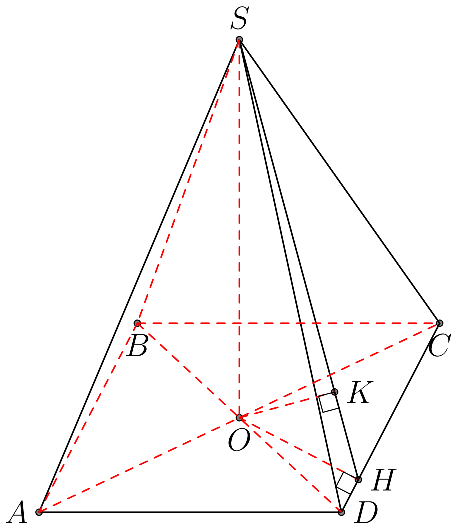
Lời giải.

Phương pháp - Xác định góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β).

- Tìm giao tuyến Δ của (α) và (β).
- Xác định một mặt phẳng $(\gamma) \perp \Delta$.
- Tìm các giao tuyến $a = (\alpha) \cap (\gamma); b = (\beta) \cap (\gamma)$.
- Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là: $\widehat{((\alpha),(\beta))} = \widehat{(a,b)}$.



Cách giải:



Kẻ $OH \perp CD, (H \in CD)$.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp OH \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOH) \Rightarrow \widehat{((SCD);(ABCD))} = \widehat{SHO} = 60^\circ$.

$ABCD$ là hình thoi tâm O, $\widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \Delta BCD$ đều nên $OH = \dfrac{1}{2}d(B, CD) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

ΔSOH vuông tại $O \Rightarrow SO = OH.\tan\widehat{SHO} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}.\tan 60^\circ = \dfrac{3a}{4}$.

Diện tích hình thoi $ABCD$ là $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3a}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính 70 cm. Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Khi đó hình nón có bán kính đáy là

A 40 cm. **B** $10\sqrt{2}$ cm. **C** $70\sqrt{2}$ cm. **D** 35 cm.

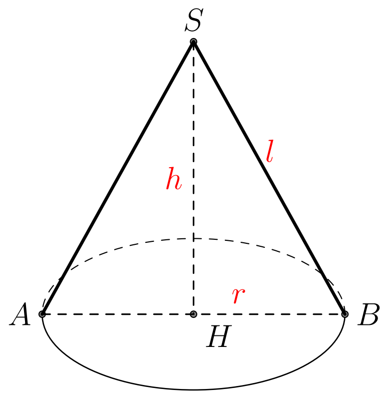
Lời giải.

Phương pháp:

Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq} = \pi rl$.

Diện tích toàn phần của hình nón: $S_{tp} = \pi rl + \pi r^2$.

Cách giải:



Miếng tôn hình tròn có diện tích: $\pi.70^2 = 4900\pi$ cm^2.
Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình nón lần lượt là $r, h(r, h > 0)$.
Khi đó ta có $l = SA = \sqrt{r^2 + h^2}$.
Suy ra diện tích toàn phần của hình nón là: $S_{tp} = \pi r^2 + r\pi\sqrt{r^2 + h^2}$.
Theo đề bài ta có phương trình:

$$\begin{aligned}\pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + h^2} = 4900\pi &\Leftrightarrow r\sqrt{r^2 + h^2} = 4900 - r^2\\ &\Leftrightarrow r^2\left(r^2 + h^2\right) = 4900^2 - 2.4900r^2 + r^4\\ &\Leftrightarrow r^2 = \frac{4900^2}{h^2 + 9800}.\end{aligned}$$

Thể tích của khối nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{4900^2}{h^2 + 9800}h = \frac{4900^2\pi}{3} \cdot \frac{h}{h^2 + 9800}.$$

Suy ra V đạt max $\Leftrightarrow f(h) = \dfrac{h^2 + 9800}{h}$ đạt min.
Ta có: $f'(h) = \dfrac{2h^2 - h^2 - 9800}{h^2} = \dfrac{h^2 - 9800}{h^2}$.
$\Rightarrow f'(h) = 0 \Leftrightarrow h^2 = 9800 \Leftrightarrow h = 70\sqrt{2}$ cm.
$\Rightarrow r^2 = \dfrac{4900^2}{h^2 + 9800} = \dfrac{4900^2}{9800.2} = 1225$ cm.
$\Rightarrow r = \sqrt{1225} = 35$ cm.
Chọn đáp án D □

Câu 33. Cho $x, y \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\cos 2x + \cos 2y + 2\sin(x + y) = 2$. Tìm GTNN của

$$P = \frac{\sin^4 x}{y} + \frac{\cos^4 y}{x}.$$

A $\min P = \dfrac{3}{\pi}$. **B** $\min P = \dfrac{2}{\pi}$. **C** $\min P = \dfrac{5}{\pi}$. **D** $\min P = \dfrac{2}{3\pi}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Áp dụng bất đẳng thức: $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} \geq \dfrac{(a + b)^2}{x + y}$, $(x, y, a, b > 0)$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$.

Cách giải:

$$P=\frac{\sin^4 x}{y}+\frac{\cos^4 y}{x}\geq\frac{\left(\sin^2 x+\cos^2 y\right)^2}{x+y}\geq\frac{1}{x+y}\qquad(1)$$

Ta có:

$$\begin{aligned}\cos 2x+\cos 2y+2\sin(x+y)=2 &\Leftrightarrow 2\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)+2\sin(x+y)=2\\ &\Leftrightarrow \cos(x+y)\cdot\cos(x-y)=1-\sin(x+y).\end{aligned}$$

Mà $1-\sin(x+y)\geq 0,\forall x,y;\cos(x-y)>0,\forall x,y\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\cos(x+y)\geq 0$.

$\Rightarrow 0<x+y\leq\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\dfrac{1}{x+y}\geq\dfrac{2}{\pi}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P\geq\dfrac{2}{\pi},\forall x,y\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{\sin^2 x}{y}=\dfrac{\cos^2 y}{x}\\ \sin^2 x+\cos^2 y=1\\ x+y=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow x=y=\dfrac{\pi}{4}$.

Vậy $P_{\min}=\dfrac{2}{\pi}$ khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{\pi}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Cho hàm số $y=\dfrac{x}{1-x}(C)$. Tìm m để đường thẳng $d: y=mx-m-1$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt M,N sao cho AM^2+AN^2 đạt giá trị nhỏ nhất với $A(-1;1)$.

A $m=2$. B $m=0$. C $m=1$. D $m=-1$.

Lời giải.

Phương pháp:

Xét phương trình hoành độ giao điểm, áp dụng định lí Vi-ét.

Cách giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$\begin{aligned}\frac{x}{1-x}=mx-m-1,(x\neq 1) &\Leftrightarrow x=mx-m-1-mx^2+mx+x\\ &\Leftrightarrow mx^2-2mx+m+1=0\qquad(1)\end{aligned}$$

Để (C) cắt d tại 2 điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ \Delta'>0\\ m\cdot 1^2-2m.1+m+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ m^2-m(m+1)>0\\ 1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m<0.$

Khi đó, giả sử x_1,x_2 là nghiệm của (1), áp dụng định lsy Vi-ét ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2,\\ x_1x_2=\dfrac{m+1}{m}.\end{cases}$

Tọa độ giao điểm là: $A\left(x_1;mx_1-m-1\right),B\left(x_2;mx_2-m-1\right)\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AM}=(x_1+1;mx_1-m-2)\\ \overrightarrow{AN}=(x_2+1;mx_2-m-2).\end{cases}$

Gọi I là trung điểm của $MN\Rightarrow\begin{cases}x_I=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{2}{2}=1\\ y_I=\dfrac{mx_1-m-1+mx_2-m-1}{2}=-1\end{cases}\Rightarrow I(1;-1)$.

Ta có:

$$\begin{aligned}AM^2+AN^2&=\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IM}\right)^2+\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IN}\right)^2\\&=2AI^2+2\overrightarrow{AI}.\left(\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}\right)+IM^2+IN^2\\&=2AI^2+\frac{1}{2}MN^2.\end{aligned}$$

Do vậy, $(AM^2+AN^2)_{\min}$ khi và chỉ khi $MN_{\min}$.

Ta có: $\overrightarrow{MN}=(x_2-x_1;mx_2-mx_1)$, suy ra

$$\begin{aligned}\sqrt{(1+m^2)(x_2-x_1)^2}&=\sqrt{(1+m)^2\left((x_2+x_1)^2-4x_1x_2\right)}\\&=\sqrt{(1+m^2)\left(4-\frac{4(m+1)}{n}\right)}\\&=\sqrt{\frac{-4(1+m^2)}{m}}\\&=\sqrt{\frac{4}{(-m)}+(-4m)}\\&\geq\sqrt{2.\sqrt{\frac{4}{-m}.(-4m)}}=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Suy ra $MN_{\min}=2\sqrt{2}$ khi và chỉ khi $\frac{4}{-m}=-4m\Leftrightarrow m^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\,(\text{ktm}).\\m=-1\,(\text{tm}).\end{array}\right.$

Vậy để $(AM^2+AN^2)_{\min}$ thì $m=-1$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Trong kì thi THPT Quốc Gia, mỗi phòng thi gồm 24 thí sinh được sắp xếp vào 24 bàn khác nhau. Bạn Nam là một thí sinh dự thi, bạn đăng kí 4 môn thi và cả 4 lần đều thi tại 1 phòng duy nhất. Giả sử giám thị xếp thí sinh vào vị trí một cách ngẫu nhiên, tính xác suất để trong 4 lần thi thì bạn Nam có đúng 2 lần ngồi vào cùng 1 vị trí.

A $\frac{26}{35}$. B $\frac{899}{1152}$. C $\frac{253}{1152}$. D $\frac{4}{7}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Xác suất của biến cố A: $\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$.

Cách giải:

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega)=(24!)^4$.

Gọi A là biến cố : "bạn Nam có đúng 2 lần ngồi vào cùng 1 vị trí".

Chọn 2 lượt thi mà Nam ngồi trùng vị trí có: C_4^2 cách.

Trong 2 lượt đó, lượt đầu: Nam có 24 cách chọn vị trí, có 23! cách xếp vị trí cho 23 thí sinh còn lại; lượt sau: Nam có 1 cách chọn vị trí, có 23! cách xếp vị trí cho 23 thí sinh còn lại.

Ở 2 lượt còn lại: Số cách xếp: $\mathrm{A}_{23}^2\cdot(23!)^2$.

$\Rightarrow n(A)=(24\cdot 23!)\cdot(1\cdot 23!)\cdot(A_{23}^2\cdot(23!))=(23!)^4\cdot 24\cdot 22$.

$\Rightarrow \mathrm{P}(A)=\frac{C_4^2\cdot(23!)^4\cdot 24\cdot 23\cdot 22}{(24!)^4}=\frac{6\cdot 23\cdot 22}{24\cdot 24\cdot 24}=\frac{253}{1152}$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Tìm số nguyên dương n sao cho

$$C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2.C_{2n+1}^2 - \cdots + (2n+1).2^n.C_{2n+1}^{2n+1} = 2005.$$

A $n = 1002$. **B** $n = 1114$. **C** $n = 102$. **D** $n = 1001$.

Lời giải.

Phương pháp:

Áp dụng công thức khai triển nhị thức Newton: $(x+y)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i.x^i.y^{n-i}$.

Cách giải:

Xét $(1+x)^{2n+1} = \sum\limits_{i=0}^{2n+1} C_{2n+1}^i x^i \Rightarrow (1+x)^{2n+1} = (2n+1)(1+x)^{2n} = \sum\limits_{i=1}^{2n+1} i.C_{2n+1}^i.x^{i-1}$.

Chọn $x = -2$ ta có: $(2n+1)(1-2)^{2n} = C_{2n+1}^1 - 2.2.C_{2n+1}^2 + 3.2^2.C_{2n+1}^3 - \cdots + (2n+1).2^n.C_{2n+1}^{2n+1}$.

Suy ra $2n+1 = 2005 \Leftrightarrow 2n = 2004 \Leftrightarrow n = 1002$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$. Tìm số phần tử của S.

A 3. **B** 10. **C** 1. **D** 9.

Lời giải.

Cách giải:

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - mx + 1, f'(x) = 3x^2 - m$.

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = |f(x)| = |x^3 - mx + 1|$ được dựng từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng cách giữ lại phần đồ thị hàm số phái trên trục Ox và lấy đối xứng phần phái dưới Ox qua trục Ox (xóa bỏ phần đồ thị của $y = f(x)$ nằm phái dưới Ox).

TH1: Với $m = 0$ ta có hàm số $y = f(x) = x^3 + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Có $f(1) = 2 > 0 \Rightarrow$ Hàm số $y = |f(x)| = |x^3 - mx + 1|$ đồng biến trên $[1; +\infty)$.

$\Rightarrow m = 0$: thỏa mãn.

TH2: Với $m > 0$ ta có:

$f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Để hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$ đồng biến trên $[1; +\infty)$ thì

$$\begin{cases} m > 0 \\ x_1 < x_2 \leq 1 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -\dfrac{m}{3} + 1 \geq 0 \\ 2 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 2.$$

Mà $m \in \mathbb{N} \Rightarrow m \in \{1; 2\}$.
Vậy, $S = \{0; 1; 2\}$. Số phần tử của S là 3.
Chọn đáp án A □

Câu 38. Số tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 2$ sao cho tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x - 29$ là

A 0. B 2. C 3. D 1.

Lời giải.

Phương pháp:

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0)$ là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

Cách giải:

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$.
Gọi d là tiếp tuyến cần tìm, $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.
Do d song song với đường thẳng $y = 9x - 29$ nên d có hệ số góc bằng 9.
Suy ra $y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = 3. \end{array}\right.$
$x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow (d) : y = 9(x + 1) + 0 \Leftrightarrow y = 9x + 9\,(\text{tm})$.
$x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = -2 \Rightarrow (d) : \mathrm{y = 9(x - 3) - 2 \Leftrightarrow y = 9x - 29}\,(\text{ktm})$.
Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x) = 2^{2018}x^3 + 3.2^{2018}x^2 - 2018$ có đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3. Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{1}{f'(x_1)} + \dfrac{1}{f'(x_2)} + \dfrac{1}{f'(x_3)}$.

A $P = 0$. B $P = 2^{2018}$. C $P = -2018$. D $P = 3.2^{2018} - 1$.

Lời giải.

Phương pháp:

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Cách giải:

Đồ thị hàm số $y = f(x) = 2^{2018}x^3 + 3.2^{2018}x^2 - 2018$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3.
$\Rightarrow f(x) = 2^{2018}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.
$f'(x) = 2^{2018}\left[(x - x_2)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_2)\right]$.
$\Rightarrow \begin{cases} f'(x_1) = 2^{2018}(x - x_2)(x - x_3) \\ f'(x_2) = 2^{2018}(x - x_1)(x - x_3) \\ f'(x_3) = 2^{2018}(x - x_1)(x - x_2). \end{cases}$
Ta có $P = \dfrac{1}{f'(x_1)} + \dfrac{1}{f'(x_2)} + \dfrac{1}{f'(x_3)}$.
$= \dfrac{1}{2^{2018}}\left(\dfrac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \dfrac{1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \dfrac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}\right)$.
$= \dfrac{1}{2^{2018}} \cdot \dfrac{-(x_2 - x_3) - (x_3 - x_1) - (x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)} = \dfrac{1}{2^{2018}.} \cdot \dfrac{0}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)} = 0.$
Vậy $P = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 5$ có ba cực trị, đồng thời ba điểm cực trị với gốc tọa độ tạo thành một tứ giác nội tiếp. Tìm số phần tử của S.

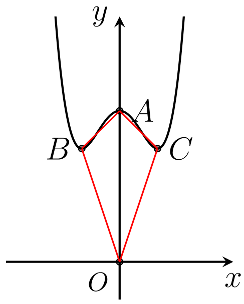
(A) 3. **B** 2. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng dấu hiệu nhận biết của tứ giác nội tiếp.

Cách giải:



Ta có: $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 5 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4m^2x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = m \\ x = -m. \end{array}\right.$

Để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị thì $m \neq 0$.

Khi đó, tọa độ ba điểm cực trị là: $A(0; m^4 + 5), B(-m; 5), C(m; 5)$.

Dễ dàng chứng minh: $\Delta ABO = \Delta ACO \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}$.

Mà tứ giác $ABOC$ nội tiếp, nên $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$.

Khi đó

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow (-m).(-m) + (-m^4).5 = 0 - 5m^4 + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2(1 - 5m^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0\,(\text{ktm}) \\ m = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\,(\text{tm}). \end{array}\right.$$

Vậy tập hợp S tất cả các giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu đề bài có 2 phần tử là $\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Cho hàm số $y = x^4 - (3m+4)x^2 + m^2$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

(A) $\begin{cases} m > -\dfrac{4}{5} \\ m \neq 0 \end{cases}$. (B) $m > 0$. (C) $m = 12$. **D** $\left[\begin{array}{l} m = 12 \\ m = -\dfrac{12}{19} \end{array}\right.$.

Lời giải.

Phương pháp:

Ba số a, b, c lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi $a + c = 2b$.

Cách giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với Ox: $x^4 - (3m+4)x^2 + m^2 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$, phương trình (1) trở thành $t^2 - (3m+4)t + m^2 = 0$ (2)
Để (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt thì (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S = 3m+4 > 0 \\ P = m^2 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m+4)^2 - 4m^2 > 0 \\ m > -\frac{4}{3} \\ m \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m^2 + 24m + 16 > 0 \\ m > -\frac{4}{3} \\ m \neq 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > -\dfrac{4}{5} \\ m < -4 \end{array}\right. \\ m > -\dfrac{4}{3} \\ m \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{4}{5} \\ m \neq 0. \end{cases}$$

Khi đó, phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt $t_1, t_2 (t_1 < t_2)$, dẫn tới (1) có 4 nghiệm phân biệt sắp xếp tăng dần như sau: $-\sqrt{t_2}, -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}$.

Để dãy số trên là dãy cấp số cộng thì $\begin{cases} -\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1} = -2\sqrt{t_1} \\ -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow 3\sqrt{t_1} = \sqrt{t_2} \Leftrightarrow 9t_1 = t_2$.

Theo hệ thức Vi – ét ta có:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 3m+4 \\ t_1 t_2 = m^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 9t_1 = 3m+4 \\ t_1 . 9t_2 = m^2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{3m+4}{10} \\ t_1 = \dfrac{|m|}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{3m+4}{10} = \frac{|m|}{3}. \quad (3)$$

+) Với $m > 0$: (3) $\Leftrightarrow 9m + 12 = 10m \Leftrightarrow m = 12$ (tm).

+) Với $m < 0$: (3) $\Leftrightarrow 9m + 12 = -10m \Leftrightarrow m = -\dfrac{12}{19}$ (tm).

Vậy $m = 12$ hoặc $m = -\dfrac{12}{19}$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Trên sân bay có một máy bay cất cánh trên đường băng d (từ trái sang phải) và bắt đàu rời mặt đất tại điểm O. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với mặt đất và cắt mặt đất theo giao tuyến là đường băng d của máy bay. Dọc theo đường băng d cách vị trí máy bay cất cánh O một khoảng 300 m về phía bên phải có 1 người quan sát A . Biết máy bay chuyển động trong mặt phẳng (P) và độ cao y của máy bay xác định bởi phương trình $y = x^2$ (với x là độ dời của máy bay dọc theo đường thẳng d và tính từ O). Khoảng cách ngắn nhất từ người A (đứng cố định) đến máy bay là:

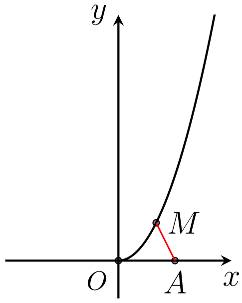
(A) $100\sqrt{3}$ m. (B) 200 m. (C) $100\sqrt{5}$ m. (D) 300 m.

Lời giải.

Phương pháp:

Gắn hệ trục tọa độ, xác định tọa độ điểm M trên parabol $y = x^2$ để độ dài đoạn AM nhỏ nhất.

Cách giải:



Lấy $M(m; m^2) \in (P): y = x^2, (m \geq 0)$.
Ta có: $A(3;0) \Rightarrow AM = \sqrt{(m-3)^2 + m^4} \Leftrightarrow AM^2 = (m-3)^2 + m^4$.
Xét hàm số:
$f(m) = (m-3)^2 + m^4; m \geq 0 \Rightarrow f'(m) = 2(m-3) + 4m^3 = 4m^3 + 2m - 6$.
$f''(m) = 12m^2 + 2 > 0, \forall m \Rightarrow f'(m) = 0$ có nghiệm duy nhất $m = 1$.
Bảng biến thiên:

m	0		1		$+\infty$
$f'(m)$		$-$	0	$+$	
$f(m)$	9	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $AM_{\min} = \sqrt{5}$ hm $= 100\sqrt{5}$ m.
Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_{16} a = \log_{25} \dfrac{2a-b}{3}$. Tính tỉ số $T = \dfrac{a}{b}$.

A. $0 < T < \dfrac{1}{2}$. B. $\dfrac{1}{2} < T < \dfrac{2}{3}$. C. $1 < T < 2$. D. $-2 < T < 0$.

Lời giải.
Phương pháp:
Sử dụng công thức: $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$.
Cách giải:

Đặt $\log_{16} a = \log_{20} b = \log_{25} \dfrac{2a-b}{3} = t \Rightarrow \begin{cases} a = 16^t \\ b = 20^t \\ 2a - b = 3.25^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.16^t - 20^t = 3.25^t & (1) \\ \dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^t. \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\dfrac{16}{25}\right)^t - \left(\dfrac{4}{5}\right)^t - 3 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\dfrac{4}{5}\right)^{2t} - \left(\dfrac{4}{5}\right)^t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{4}{5}\right)^t = -1 < 0 \\ \left(\dfrac{4}{5}\right)^t = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{5}\right)^t = \dfrac{3}{2}.$

Vậy $T = \dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow 1 < T < 2$.
Chọn đáp án C □

Câu 44. Thể tích V của khối lập phương có các đỉnh là trọng tâm các mặt của một khối bát diện đều cạnh bằng 1 là

A. $\dfrac{1}{27}$. B. $\dfrac{16\sqrt{2}}{27}$. C. $\dfrac{8}{27}$. D. $\dfrac{2\sqrt{2}}{27}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Thể tích khối lập phương cạnh a là: $V = a^3$.

Cách giải:

Khối lập phương có các đỉnh lần lượt là trọng tâm các mặt của khối bát diện đều cạnh $a = 1$ có độ dài cạnh là $x = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1 \cdot \sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Thể tích cần tìm là : $V = x^3 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Một sinh viên A mua máy tính xách tay theo hình thức trả góp với giá tiền 20 triệu đồng, mức lãi suất $1,2\%$/tháng trong năm đầu tiên, mỗi tháng anh A phải trả 800 ngàn đồng, cả gốc và lãi. Sau một năm lãi suất tăng lên là $1,5\%$/tháng và anh A phải trả 1 triệu đồng cả gốc và lãi mỗi tháng (trừ tháng cuối). Hỏi sau tối đa bao nhiêu tháng anh A trả hết nợ (tháng cuối trả không quá 500 ngàn đồng)

A 28 tháng. B 26 tháng. C 25 tháng. **D 27 tháng.**

Lời giải.

Phương pháp:

Giả sử anh A nợ ngân hàng a (ngàn đồng), mỗi tháng anh A gửi vào ngân hàng x ngàn đồng, lãi suất ngân hàng là $r(\%)$/tháng. Số tiền anh A còn nợ ngân hàng :

- Gọi P_n là số tiền còn nợ lại sau tháng thứ n.
- ***Sau tháng thứ nhất*** số tiền gốc và lãi là: $a + ar = a(1 + r) = ad$ với $d = 1 + r$.
  Trả x đồng thì số tiền còn lại ***sau tháng thứ nhất*** là: $P_1 = ad - x = ad - x.\dfrac{d-1}{d-1}$.
- ***Sau tháng thứ hai*** số tiền gốc và lãi là: $ad - x + (ad - x)r = (ad - x)(1 + r) = (ad - x)d$.
  Trả x đồng thì số tiền còn lại ***sau tháng thứ 2*** là:
  $P_2 = (ad - x)d - x = ad^2 - xd - x = ad^2 - x(d + 1) = ad^2 - x.\dfrac{d^2-1}{d-1}$.
  Trả x đồng thì số tiền còn lại ***sau tháng thứ 3*** là:
  $P_3 = [ad^2 - x(d + 1)]d - x = ad^3 - xd^2 - xd - x = ad^3 - x(d^2 + d + 1) = ad^3 - x.\dfrac{d^3-1}{d-1}$.
  ....
- Số tiền còn lại ***sau tháng thứ*** n là
  $P_n = ad^n - x.\dfrac{d^n-1}{d-1} \Leftrightarrow P_n = a(1 + r)^n - x.\dfrac{(1+r)^n-1}{r}$.
  Với $d = 1 + r$.
- Do sau tháng thứ n người vay tiền đã trả hết số tiền đã vay ta có
  $P_n = 0 \Leftrightarrow ad^n - x.\dfrac{d^n-1}{d-1} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{a(1+r)^n.r}{(1+r)^n-1} \Leftrightarrow n = \log_{1+r}\left(\dfrac{x}{x-ar}\right)$.

Cách giải:

Số tiền sinh viên A còn nợ sau 1 năm (12 tháng) đầu là:

$P_{12} = 20 \cdot 10^6 \cdot (1 + 1,2\%)^{12} - 800 \cdot 10^3 \cdot \dfrac{(1+1,2\%)^{12}-1}{1,2\%} \approx 12.818.000$ (đồng).

Gọi n là số tháng (tính từ năm thứ hai) mà sinh viên A trả được hết nợ, với số tiền nợ gốc

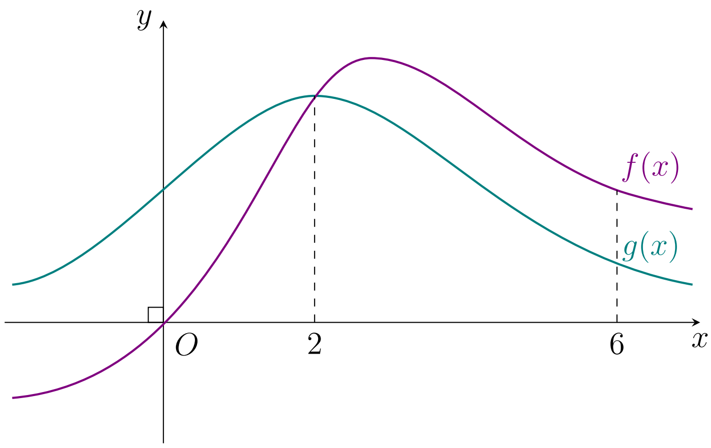
$a = 12.818.000$ đồng, ta có:

$$\begin{aligned} P_n = 0 &\Leftrightarrow a(1+r)^n - x.\frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0 \\ &\Leftrightarrow n = \log_{1+r}\left(\frac{x}{x - ar}\right) \\ &\Leftrightarrow n = \log_{1+1,5\%}\left(\frac{10^6}{10^6 - 12818 \cdot 10^3 \cdot 1,5\%}\right) \approx 14{,}3. \end{aligned}$$

Vậy, số tháng để sinh viên A trả hết nợ là: $12 + 15 = 27$ (tháng).

Chọn đáp án D □

Câu 46. Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đạo hàm là $f'(x), g'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x), g'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây



Biết rằng $f(0) - f(6) < g(0) - g(6)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ lần lượt là

A $h(6), h(2)$. **B** $h(0), h(2)$. **C** $h(2), h(6)$. **D** $h(2), h(0)$.

Lời giải.

Cách giải:

Xét hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$, ta có $h'(x) = f'(x) - g'(x)$.

Dựa vào đồ thị ta có: $\begin{cases} h'(x) = f'(x) - g'(x) < 0, \forall x \in (0; 2) \\ h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0, \forall x \in (2; 6). \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	0		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h	$h(0)$	$\searrow$	$h(2)$	$\nearrow$	$h(6)$

Lại có: $f(0) - f(6) < g(0) - g(6) \Leftrightarrow f(0) - g(0) < f(6) - g(6) \Leftrightarrow h(0) < h(6)$.

$\Rightarrow \min\limits_{[0;6]} h(x) = h(2); \max\limits_{[0;6]} h(x) = \max\{h(0); h(6)\} = h(6)$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Với mức tiêu thụ thức ăn của trang trại A không đổi như dự định thì lượng thức ăn dự trữ sẽ hết sau 100 ngày. Nhưng thực tế, mức tiêu thụ thức ăn tăng thêm 4% mỗi ngày (ngày sau tăng 4% so với ngày trước đó). Hỏi thực tế, lượng thức ăn dự trữ đó sẽ hết sau khoảng bao nhiêu ngày? (làm tròn đến hàng đơn vị)

Ⓐ 37 ngày. Ⓑ 41 ngày. Ⓒ 40 ngày. **D** 43 ngày.

Lời giải.

Phương pháp:

Lượng thức ăn mà trang trại ăn hết ở ngày thứ k là: $M(1+4\%)^{k-1}, k \in \mathbb{N}^*$.

Cách giải:

Theo dự định, mỗi ngày, trang trại ăn hết $1:100 = \dfrac{1}{100}$ (lượng thức ăn).

Lượng thức ăn mà trang trại ăn hết ở ngày thứ k là: $\dfrac{1}{100}(1+4\%)^{k-1}, k \in \mathbb{N}^*$.

Xác định số tự nhiên n nhỏ nhất để

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{100} + \frac{1}{100}(1+4\%) + \frac{1}{100}(1+4\%)^2 + \cdots + \frac{1}{100}(1+4\%)^{n-1} \geq 1. \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{100} + \frac{1}{100} \cdot 1,04 + \frac{1}{100} \cdot 1,04^2 + \cdots + \frac{1}{100} \cdot 1,04^{n-1} \geq 1. \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{100}\left(1 + 1,04 + 1,04^2 + \cdots + 1,04^{n-1}\right) \geq 1. \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{100} \cdot \frac{1,04^{n-1}-1}{1,04-1} \geq 1. \\
\Leftrightarrow\ & 1,04^{n-1} - 1 \geq 4 \Leftrightarrow n-1 \geq \log_{1,04} 5 \Leftrightarrow n \geq \log_{1,04} 5 + 1 \Leftrightarrow n \geq 42,03 \Rightarrow n_{\min} = 43.
\end{aligned}$$

Vậy thực tế lượng thức ăn dự trữ đó sẽ hết sau khoảng 43 ngày.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

Ⓐ $V = \dfrac{108\pi}{3}$. Ⓑ $V = \dfrac{64\sqrt{2}\pi}{3}$. Ⓒ $V = \dfrac{125\pi}{6}$. **D** $V = \dfrac{32\pi}{3}$.

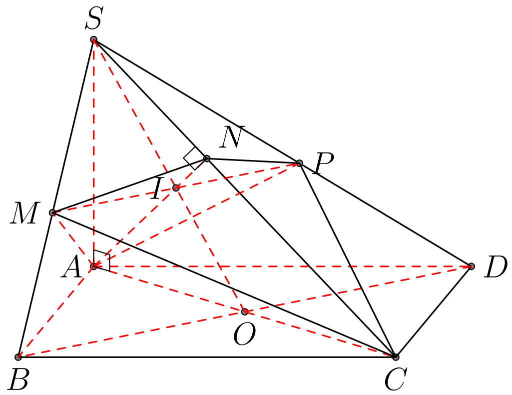
Lời giải.

Phương pháp:

+ Chứng minh: O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$ (với O là tâm của hình vuông $ABCD$).

+ Thể tích khối cầu có bán kính r là: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Cách giải:



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD \Rightarrow O$ là trung điểm AC.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AP.$

Mặt khác, $\begin{cases} SC \perp AP (\text{do } SC \perp (\alpha)) \\ CD \perp AP \end{cases} \Rightarrow AP \perp (SCD) \Rightarrow AP \perp CP.$

Vậy ΔAPC vuông tại $P \Rightarrow OA = OC = OP$.

Tương tự, ta có: ΔAMC vuông tại $M \Rightarrow OA = OC = OM$.

Lại có, $SC \perp AN$ (do $SC \perp (\alpha)$) $\Rightarrow \Delta ANC$ vuông tại N.

$\Rightarrow OA = OC = ON$

$\Rightarrow OA = OC = OP = OM = ON \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

Bán kính: $R = OA = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$.

Thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$ là: $V = \dfrac{4}{3}\pi.2^3 = \dfrac{32\pi}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Biết x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right) + 4x^2 + 1 = 6x$ và $x_1 + 2x_2 = \dfrac{1}{4}(a+\sqrt{b})$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

A $a+b=16$. **B** $a+b=14$. **C** $a+b=13$. **D** $a+b=11$.

Lời giải.

Phương pháp:

Giải phương trình bằng phương pháp xét hàm số.

Cách giải:

ĐKXĐ: $x \neq \dfrac{1}{2}, x > 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_7\left(\frac{4x^2-4x+1}{2x}\right) + 4x^2 + 1 = 6x. \\ \Leftrightarrow\ & \log_7\left(4x^2-4x+1\right) - \log_7(2x) + 4x^2 + 1 = 6x. \\ \Leftrightarrow\ & \log_7\left(4x^2-4x+1\right) + 4x^2 - 4x + 1 = \log_7(2x) + 2x \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_7 t + t, t > 0$ ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 7} + 1 > 0, \forall t > 0$.

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Khi đó, (1) $\Leftrightarrow f\left(4x^2-4x+1\right)=f(2x) \Leftrightarrow 4x^2-4x+1=2x \Leftrightarrow 4x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}\ (\text{tm}) \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}\ (\text{tm}). \end{array}\right.$

TH1: $x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}; x_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4} \Rightarrow x_1+2x_2=\dfrac{9-\sqrt{5}}{4}=\dfrac{1}{4}(a+\sqrt{b})$: Vô lí.

TH2: $x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}; x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4} \Rightarrow x_1+2x_2=\dfrac{9+\sqrt{5}}{4}=\dfrac{1}{4}(a+\sqrt{b}) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=9 \\ b=5 \end{array}\right. \Rightarrow a+b=14.$

Chọn đáp án B □

Câu 50. Một người thợ có một khối đá hình trụ. Kẻ hai đường kính MN, PQ của hai đáy sao cho $MN \perp PQ$. Người thợ đó cắt khối đá theo các mặt cắt đi qua 3 trong 4 điểm M, N, P, Q để thu được khối đá có hình tứ diện $MNPQ$. Biết rằng $MN = 60$ cm và thể tích khối tứ diện $MNPQ$ bằng 36 dm^2. Tìm thể tích của lượng đá bị cắt bỏ (làm tròn kết quả đến 1 chữ số thập phân).

A 133,6 dm^3. **B** 113,6 dm^3. **C** 143,6 dm^3. **D** 123,6 dm^3.

Lời giải.

Phương pháp:

Thể tích khối trụ: $V=\pi R^2 h$.

Thể tích khối lăng trụ: $V=Sh$.

Cách giải:

Dựng hình lăng trụ $MP'NQ'.M'PN'Q$ (như hình vẽ).

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} V_{MNPQ} &= V_{MP'NQ'.M'PN'Q}-\left(V_{P.MNP'}+V_{Q.MNQ'}+V_{M.M'PQ}+V_{N.N'PQ}\right) \\ &= V_{MP'NQ'.N'PN'Q}-4.V_{P.MNP'} \\ &= V_{MP'NQ'.M'PN'Q}-4.\frac{1}{2}.V_{P.MQ'NP'}=V_{MP'NQ'.M'PN'Q}-2V_{P.MQ'NP'} \\ &= V_{MP'NQ'.M'PN'Q}-2.\frac{1}{3}.V_{MP'NQ'.PN'Q} \\ &= \frac{1}{3}V_{MP'NQ'.PN'Q'} \end{aligned}$$

Suy ra $\dfrac{1}{3}V_{MP'NQ'.PN'Q}=36\,\text{dm}^3 \Leftrightarrow V_{MP'NQ'.PN'Q}=108\,\text{dm}^3$.

Thể tích của lượng đó bị cắt bỏ là: $54\pi-36 \approx 133,6$ dm^3.

Do $MN \perp PQ, PQ \parallel P'Q'$ nên

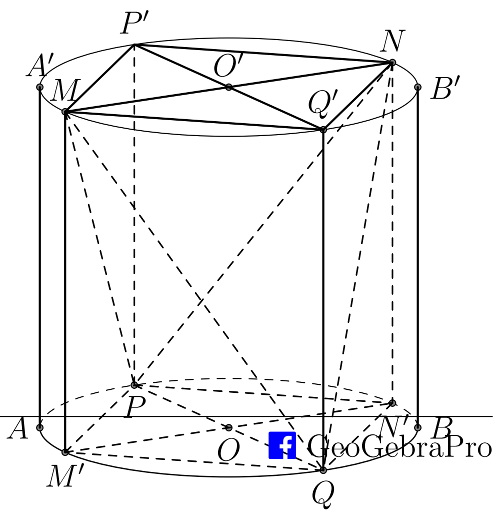
$MN \perp P'Q' \Rightarrow MP'NQ'$ là hình vuông.

Ta có

$MN=60cm \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} MQ=\dfrac{60}{\sqrt{2}}=30\sqrt{2}\,\text{cm}=3\sqrt{2}\,\text{dm} \\ OM=\dfrac{60}{2}=30\,\text{cm}=3\,\text{dm} \end{array}\right.$

Suy ra $S_{MP'NQ'}=(3\sqrt{2})^2=18$ dm^2.

$V_{MP'NQ'.PN'Q}=S_{MP'NQ'}.h \Rightarrow 18h=108 \Leftrightarrow h=6$ dm.



Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. D	3. C	4. C	5. D	6. D	7. C	8. C	9. D	10. A
11. A	12. D	13. C	14. A	15. D	16. A	17. B	18. B	19. B	20. B
21. D	22. C	23. B	24. D	25. B	26. C	27. C	28. A	29. A	30. A
31. B	32. D	33. B	34. D	35. C	36. A	37. A	38. D	39. A	40. B
41. D	42. C	43. C	44. C	45. D	46. C	47. D	48. D	49. B	50. A

53 ĐỀ THI THỬ SỞ GD&ĐT BẠC LIÊU - CỤM CHUYÊN MÔN 1 - LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

B Hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị.

C Hàm số đã cho không có giá trị cực tiểu.

D Hàm số đã cho không có giá trị cực đại.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Vậy hàm số có hai điểm cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x+2}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đó tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\dfrac{1}{18}$?

A $y = \dfrac{9}{4}x + \dfrac{1}{2}$; $y = \dfrac{4}{9}x + \dfrac{2}{9}$.

B $y = \dfrac{9}{4}x + \dfrac{1}{2}$; $y = \dfrac{4}{9}x + \dfrac{4}{9}$.

C $y = \dfrac{9}{4}x + \dfrac{31}{2}$; $y = \dfrac{4}{9}x + \dfrac{2}{9}$.

D $y = \dfrac{9}{4}x + \dfrac{1}{2}$; $y = \dfrac{4}{9}x + \dfrac{1}{9}$.

Lời giải.

Ta có: $y' = \dfrac{4}{(x+2)^2}$. Gọi $M(x_0; y_0)$ $(x_0 \neq -2)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm với đồ thị (C).

Khi đó phương trình tiếp tuyến là $y = \dfrac{4}{(x_0+2)^2}(x - x_0) + \dfrac{2x_0}{x_0+2} = \dfrac{4x}{(x_0+2)^2} + \dfrac{2x_0^2}{(x_0+2)^2}$ (d).

(d) cắt hai trục tọa độ tại $A\left(0; \dfrac{2x_0^2}{(x_0+2)^2}\right)$; $B\left(-\dfrac{x_0^2}{2}; 0\right)$.

Vì tam giác OAB có diện tích $\dfrac{1}{18}$ nên $\dfrac{x_0^4}{(x_0+2)^2} = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow (3x_0^2)^2 = (x_0+2)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = -\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$

Do đó phương trình tiếp tuyến: $y = \dfrac{4}{9}x + \dfrac{2}{9}$; $y = \dfrac{9}{4}x + \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Cho hàm số $y = (x-2)(x^2 - 5x + 6)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) (C) không cắt trục hoành.
(B) (C) cắt trục hoành tại 3 điểm.
(C) (C) cắt trục hoành tại 1 điểm.
(D) (C) cắt trục hoành tại 2 điểm.

Lời giải.

Ta có $(x-2)\left(x^2-5x+6\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=3\end{array}\right.$. Suy ra đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Cho hàm số $y=x^4-8x^2-4$. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng.

(A) $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.
(B) $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.
(C) $(-2;0)$ và $(0;2)$.
(D) $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$y'=4x^3-16x$.

Ta có: $y'<0 \Leftrightarrow 4x^3-16x<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-2\\0<x<2\end{array}\right.$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Cho khai triển $(1-2x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ biết $S=|a_1|+2|a_2|+\cdots+n|a_n|=34992$. Tính giá trị của biểu thức $P=a_0+3a_1+9a_2+\cdots+3^na_n$.

(A) -78125.
(B) 9765625.
(C) -1953125.
(D) 390625.

Lời giải.

Ta có $(1-2x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k(-2)^k x^k=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$.

Nên $a_k=C_n^k(-2)^k \Rightarrow |a_k|=2^kC_n^k, k=0,1,2,\ldots,n$.

$\Rightarrow S=|a_1|+2|a_2|+\cdots+n|a_n|=2^1C_n^1+2\cdot2^2C_n^2+3\cdot2^3C_n^3+\cdots+n2^nC_n^n=34992(1)$.

Ta có:

$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\cdots+C_n^nx^n$

$\Rightarrow n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+\cdots+nC_n^nx^{n-1}$

$\Rightarrow nx(1+x)^{n-1}=C_n^1x+2C_n^2x^2+3C_n^3x^3+\cdots+nC_n^nx^n(*)$

Thay $x=2$ vào (*) ta có: $2n3^{n-1}=2^1C_n^1+2\cdot2^2C_n^2+3\cdot2^3C_n^3+\cdots+n2^nC_n^n$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $2n3^{n-1}=34992 \Leftrightarrow n3^n=52488 \Leftrightarrow n=8$.

Với $n=8 \Rightarrow P=a_0+3a_1+3^3a_2+\cdots+3^8a_8=(1-2\cdot3)^8=390625$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ là

(A) 2.
(B) 3.
(C) 0.
(D) 1.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=1 \Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to2^\pm} y=\lim\limits_{x\to2^\pm}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2^\pm}\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{1}{4} \Rightarrow x=2$ không là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to(-2)^\pm} y=\lim\limits_{x\to(-2)^\pm}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to(-2)^\pm}\dfrac{x-1}{x+2}=\mp\infty \Rightarrow x=-2$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 2 đường tiệm cận.

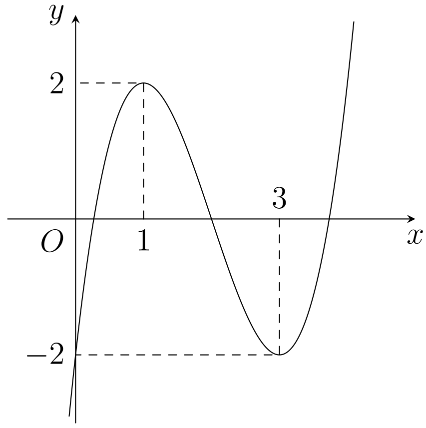
Chọn đáp án (A) □

Câu 7.

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ có đồ thị (C) như hình vẽ.

Khi đó phương trình $|f(x)| = m$ (m là tham số) có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

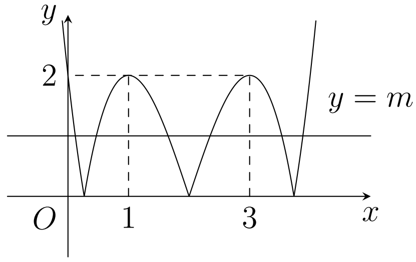
(A) $-2 \leq m \leq 2$.
B $0 < m < 2$.
(C) $0 \leq m \leq 2$.
(D) $-2 < m < 2$.



Lời giải.

+ Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có được bằng cách biến đổi đồ thị (C): $y = f(x)$ như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành.
- Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm dưới trục hoành qua trục hoành.
- Xóa phần đồ thị (C) nằm dưới trục hoành.



+ Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = m$.

Vậy phương trình có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 2$.

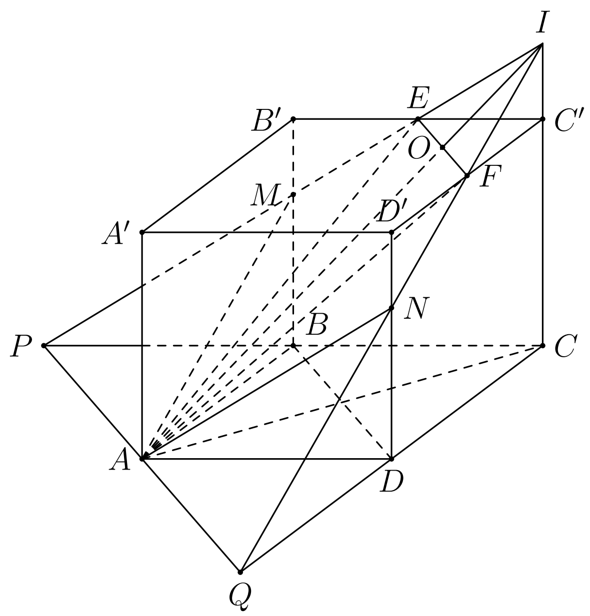
Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm E, F lần lượt là trung điểm của $C'B'$ và $C'D'$. Mặt phẳng (AEF) cắt khối lập phương đã cho thành hai phần, gọi V_1 là thể tích khối chứa điểm A' và V_2 là thể tích khối còn lại. Khi đó $\dfrac{V_1}{V_2}$ là:

A $\dfrac{25}{47}$.
(B) 1.
(C) $\dfrac{8}{17}$.
(D) $\dfrac{17}{25}$.

Lời giải.

Dựng PQ qua A và song song với BD (vì $P \in BC$, $Q \in CD$).
PE cắt các cạnh BB', CC' tại M và I. Thiết diện là $AMEFN$.
Dựa vào đường trung bình BD và định lí Ta-lét cho các tam giác IAC, DNQ, $D'NF$ ta tính được: $IC' = \dfrac{a}{3}, ND = \dfrac{2a}{3}$.
Tương tự ta tính được: $MB = \dfrac{2a}{3}$. Và ta có: $QD = PB = a$.
Ta có: $V_{IEFC'} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3}{72}$.



Dùng tỉ lệ thể tích ta có: $V_{IPQC} = 4^3 \cdot V_{IEFC'} = 64 \cdot \dfrac{a^3}{72} = \dfrac{8a^3}{9}$.
$V_{NADQ} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2a}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot a = \dfrac{a^3}{9} = V_{MPAB} \Rightarrow V_2 = \dfrac{8a^3}{9} - \dfrac{a^3}{72} - 2 \cdot \dfrac{a^3}{9} = \dfrac{47a^3}{72}$.
Thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là a^3 nên $V_1 = a^3 - \dfrac{47a^3}{72} = \dfrac{25a^3}{72}$.
$\Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{25}{47}$.
Chọn đáp án A □

Câu 9. Gọi $(x; y)$ là nghiệm dương của hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4 \\ x^2 + y^2 = 128 \end{cases}$. Tổng $x + y$ bằng

A 12. **B** 8. **C** 16. **D** 0.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x, y > 0 \\ x + y \geq 0 \\ x - y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq y > 0$.

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4 & (1) \\ x^2 + y^2 = 128 & (2). \end{cases}$

Ta có:
$(1) \Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{x^2 - y^2} = 16 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - y^2} = 8 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - x \geq 0 \\ x^2 - y^2 = (8-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ y^2 = 16x - 64 \quad (3). \end{cases}$

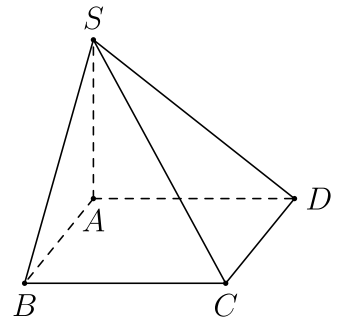
Thế (3) vào (2) ta được: $x^2 + 16x - 64 = 128 \Leftrightarrow x^2 + 16x - 192 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = -24 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 8$ (vì $x > 0$).
$\Rightarrow y^2 = 64 \Leftrightarrow y = 8$(Vì $y > 0$).
$\Rightarrow$ Nghiệm của hệ là $(x; y) = (8; 8) \Rightarrow x + y = 16$.
Chọn đáp án C □

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$. Cạnh bên vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và CD là

(A) 90°. (B) 60°. (C) 30°. **D** 45°.

Lời giải.

Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{(SB;CD)} = \widehat{(SB;AB)} = \widehat{SBA} = 45^\circ$ (do $\triangle SBA$ vuông cân tại A).



Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Gieo một con súc sắc cân đối đồng chất một lần. Tính xác xuất để xuất hiện mặt chẵn.

A $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{6}$. (C) $\frac{1}{4}$. (D) $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Không gian mẫu $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$.

Gọi A là biến cố " con súc sắc xuất hiện mặt chẵn" $\Rightarrow n(A) = 3$.

Xác suất tìm được là: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\sqrt{2\left(x^2-1\right)} \le x+1$ là:

(A) 3. (B) 1. **C** 4. (D) 2.

Lời giải.

$$\sqrt{2\left(x^2-1\right)} \le x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \ge 0 \\ 2\left(x^2-1\right) \le (x+1)^2 \\ x^2-1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x^2-2x-3 \le 0 \\ x^2-1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ -1 \le x \le 3 \\ \left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ x \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \le x \le 3 \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Vậy số nghiệm nguyên của bất phương trình là 4.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Phương trình đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ và song song với đường thẳng $\Delta\colon 2x+y+1=0$ là

A $2x+y-7=0$. (B) $2x+y=0$. (C) $-2x-y-1=0$. (D) $2x+y+7=0$.

Lời giải.

$y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$.

Đường thẳng $\Delta\colon 2x+y+1=0 \Leftrightarrow y=-2x-1$ có hệ số góc bằng -2.

Gọi d là tiếp tuyến cần tìm và x_0 là hoành độ tiếp điểm.

Vì d song song với Δ nên

$$\frac{-2}{(x-1)^2} = -2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=1 \\ x-1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0. \end{array}\right.$$

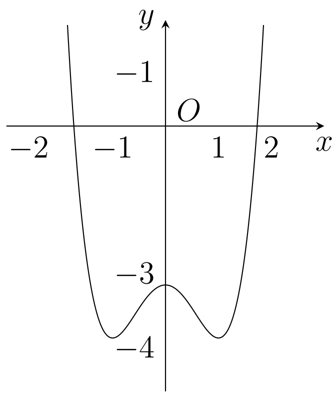
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $A(2;3)$ là: $2x+y-7=0$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $B(0;-1)$ là: $2x+y+1=0$ (loại vì trùng với Δ).

Chọn đáp án A □

Câu 14.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong 4 hàm số dưới đây. Tìm hàm số đó.



A $y=-x^3+x^2-2$.

B $y=-x^4+3x^2-2$.

C $y=x^4-2x^2-3$.

D $y=-x^2+x-1$.

Lời giải.

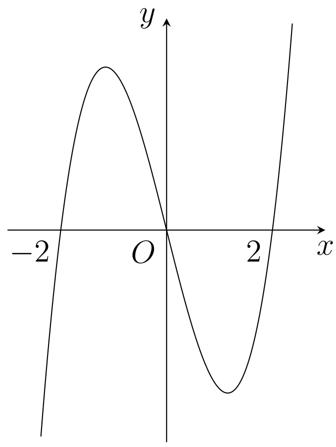
Đồ thị đi qua điểm $M(0;-3)$, suy ra loại các phương án A, B, D.

Chọn đáp án C □

Câu 15.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

B Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$.

C Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

D Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Lời giải.

Từ đồ thị của $y=f'(x)$, ta có với $x\in(0;2)$, $f'(x)<0$. Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Từ một hộp đựng 11 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 11, chọn ngẫu nhiên 6 tấm thẻ. Gọi P là xác suất để tổng các số ghi trên 6 tấm thẻ là một số lẻ. Khi đó P bằng?

A $\frac{1}{2}$. B $\frac{100}{231}$. C $\frac{118}{231}$. D $\frac{115}{231}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega)=C_{11}^6=462$.

Gọi A là biến cố " Chọn được 6 tấm thẻ có tổng các chữ số trên đó là một số lẻ".

Các kết quả thuận lợi cho biến cố A.

- Lấy ra được 1 tấm thẻ lẻ và 5 tấm thẻ chẵn có $C_6^1 \cdot C_5^5$.
- Lấy ra được 3 tấm thẻ lẻ và 3 tấm thẻ chẵn có $C_6^3 \cdot C_5^3$.
- Lấy ra được 5 tấm thẻ lẻ và 1 tấm thẻ chẵn có $C_6^5 \cdot C_5^1$.

Vậy $n(A) = C_6^1 \cdot C_5^5 + C_6^3 \cdot C_5^3 + C_6^5 \cdot C_5^1 = 236$.

Vậy $P = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{236}{462} = \dfrac{118}{231}$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Điểm cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ là

A $x = 25$. **B** $x = 3$. **C** $x = 7$. **D** $x = -1$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Do đó điểm cực tiểu của hàm số là $x = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 18.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(0; +\infty)$. **B** $(-1; 1)$.

C $(-\infty; 0)$. **D** $(-\infty; -2)$.

Lời giải.

Ta có $y' < 0, \forall x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \Rightarrow y' < 0, \forall x \in (-\infty; -2)$.

Chọn đáp án D □

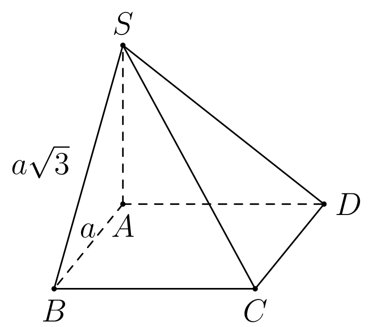
Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. $SA \perp (ABCD)$ và $SB = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

A $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C** $a^3\sqrt{2}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $S_{ABCD} = a^2, SA^2 = SB^2 - AB^2 = 3a^2 - a^2 = 2a^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$.

Do đó $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \dfrac{1}{3} a^2 a\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{3} a^3$.



Chọn đáp án D □

Câu 20. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ tại điểm $M(1; 0)$ là

A $y=-x+1$. **B** $y=-4x-4$. **C** $y=-4x+4$. **D** $y=-4x+1$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-6x-1 \Rightarrow y'(1)=-4$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(1;0)$ là $y=-4(x-1) \Leftrightarrow y=-4x+4$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$ bằng:

A 3. **B** 2. **C** 0. **D** 1.

Lời giải.

Xét hàm số $y=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$ trên $\mathscr{D}=[0;3]$.

$y=\dfrac{x^2-3x}{x+1} \Rightarrow y'=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \notin \mathscr{D} \\ x=1 \in \mathscr{D}. \end{array}\right.$

Ta có: $y(0)=y(3)=0, y(1)=-1$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên $[0;3]$ bằng 0.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+(m+3)x+m-4$. Tìm m để hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A $-3<m<-1$. **B** $m>1$. **C** $m>4$. **D** $m>0$.

Lời giải.

Có $y=f(|x|)$ là hàm số chẵn. Nên đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Xét $y=f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+(m+3)x+m-4$. Có $f'(x)=x^2-2(m+1)x+(m+3)$.

Hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow y=f(x)$ có 2 điểm cực trị có hoành độ dương.

$\Leftrightarrow f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1>0; x_2>0$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ x_1+x_2>0 \\ x_1x_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+m-2>0 \\ m+1>0 \\ m+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty;-2)\cup(1;+\infty) \\ m>-1 \\ m>-3. \end{cases}$

$\Leftrightarrow m>1$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng

A $y=2$. **B** $x=2$. **C** $y=1$. **D** $x=1$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=2;\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=2$.

Do đó tiệm cận ngang của đồ thị đã cho là $y=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Số cách xếp 5 người vào 5 vị trí ngồi thành hàng ngang là?

A 120. **B** 25. **C** 15. **D** 24.

Lời giải.

Mỗi cách xếp 5 người vào 5 vị trí ngồi thành hàng ngang là một hoán vị của 5 phần tử.

Suy ra số cách xếp là: $5!=120$ cách.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $m_0 \in (-1; 7)$. **B** $m_0 \in (-15; -7)$. **C** $m_0 \in (7; 10)$. **D** $m_0 \in (-7; -1)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m$.

Hàm số có 2 điểm cực trị khi và chỉ khi y' có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

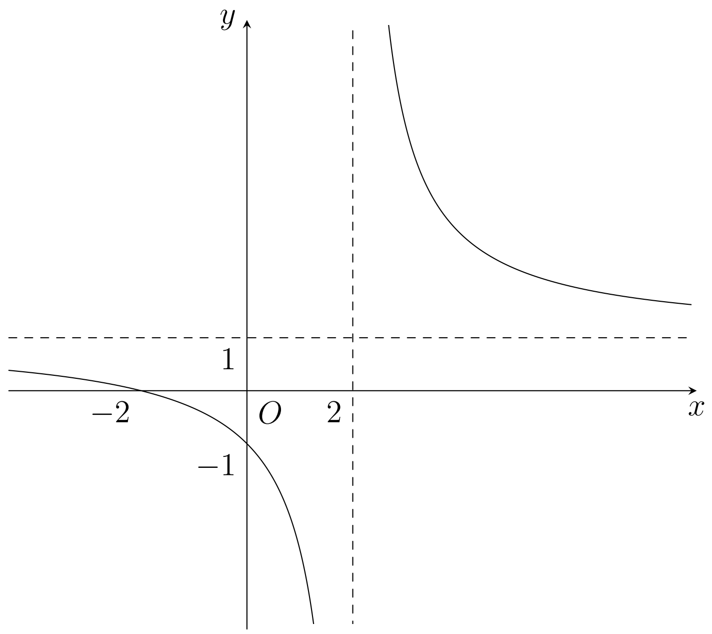
Khi đó x_1, x_2 là 2 nghiệm của y'. Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = \dfrac{m}{3}. \end{cases}$

Theo đề bài ra $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 13 \Leftrightarrow 4 - m = 13 \Leftrightarrow m = -9$.

Vậy $m_0 = -9$.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Đồ thị sau đây là của một trong 4 hàm số nào dưới đây?



A $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. **B** $y = \dfrac{x+2}{x-2}$. **C** $y = \dfrac{x+2}{x+1}$. **D** $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Lời giải.

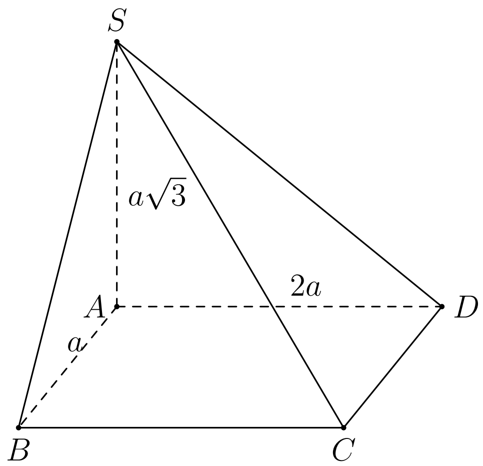
Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 2$. Vậy hàm số cần tìm là $y = \dfrac{x+2}{x-2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B** $a^3\sqrt{3}$. **C** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **D** $2a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.



Ta có: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Cho $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khi đó $\cos\alpha$ có giá trị là

(A) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$. (B) $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. (C) $\cos\alpha = \frac{8}{9}$. (D) $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos\alpha < 0$ mà $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$, do đó $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{-2x+1}{x-1}$ bằng

(A) $+\infty$. (B) $-\infty$. (C) $\frac{2}{3}$. (D) $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x \to 1^+} (-2x+1) = -1$, $\lim\limits_{x \to 1^+} (x-1) = 0$.

Lại có: $x \to 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$.

Vậy $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{-2x+1}{x-1} = -\infty$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Người ta muốn xây một bể chứa nước dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích $200m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công xây bể là 300.000 đồng/m^2. Chi phí thuê công nhân thấp nhất là:

(A) 51 triệu đồng. (B) 75 triệu đồng. (C) 46 triệu đồng. (D) 36 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi chiều rộng, chiều dài của đáy lần lượt là x và $2x$, chiều cao là y.

Diện tích các mặt bên và mặt đáy là $S = 6xy + 2x^2$.

Thể tích là $V = 2x^2y = 200 \Rightarrow xy = \frac{100}{x}$.

$S = \frac{600}{x} + 2x^2 = \frac{300}{x} + \frac{300}{x} + 2x^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{300}{x} \cdot \frac{300}{x} \cdot 2x^2} = 30\sqrt[3]{180}$.

Vậy chi phí thấp nhất là $T = 30\sqrt[3]{180} \cdot 300000 \approx 51$ triệu.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương nhỏ hơn 5 của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-3)x - \frac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

(A) 5. (B) 3. (C) 6. (D) 4.

Lời giải.

Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-3)x - \frac{2}{3}$ đồng biến trên $(1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow y' = x^2 + 2(m-1)x + (2m-3) \geq 0,\ \forall x \in (1; +\infty)$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \geq -2mx - 2m,\ \forall x \in (1; +\infty)$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \geq -2m(x+1),\ \forall x \in (1; +\infty)$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{x+1} \geq -2m,\ \forall x \in (1; +\infty)$$
$$\Leftrightarrow x - 3 \geq -2m,\ \forall x \in (1; +\infty)$$
$$\Leftrightarrow m \geq 1.$$

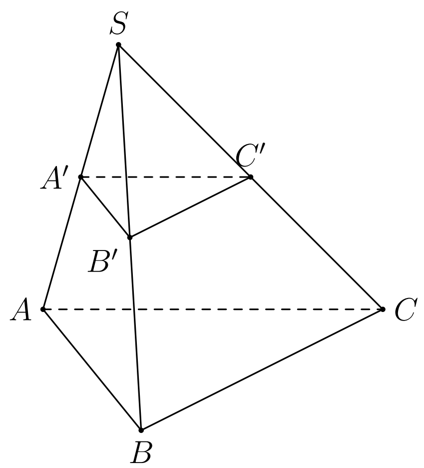
Mà $m \in \mathbb{Z}, m < 5 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4\}$. Suy ra có 4 giá trị của tham số m.

Chọn đáp án (D) □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có A', B', C' lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC. Tỷ số $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}$ bằng bao nhiêu?

(A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{1}{6}$. (C) $\frac{1}{8}$. (D) 8.

Lời giải.

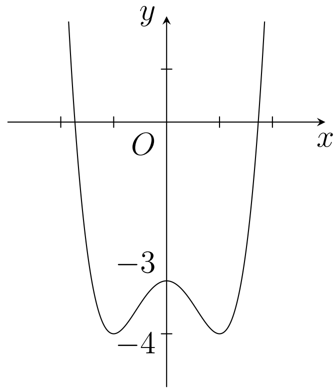


$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 33.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m + 2$ có bốn nghiệm phân biệt.



(A) $-4 < m < -3$. (B) $-4 \leq m \leq -3$.
(C) $-6 \leq m \leq -5$. (D) $-6 < m < -5$.

Lời giải.

Để phương trình $f(x) = m + 2$ có 4 nghiệm phân biệt thì đường thẳng $y = m + 2$ phải cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 4 điểm phân biệt.

Dựa vào đồ thị ta được $-4 < m + 2 < -3 \Leftrightarrow -6 < m < -5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 34. Gọi S là diện tích đáy, h là chiều cao của khối lăng trụ. Thể tích khối lăng trụ đó là:

(A) $V = \frac{1}{3}Sh$. (B) $V = \frac{1}{6}Sh$. (C) $V = Sh$. (D) $V = \frac{1}{2}Sh$.

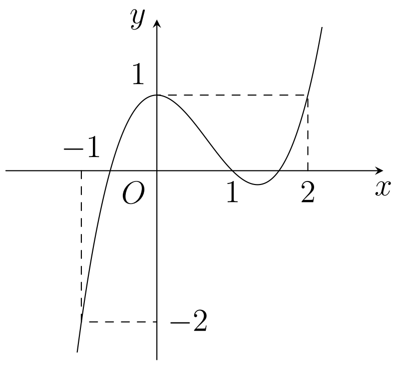
Lời giải.

Theo công thức sách giáo khoa ta có $V = Sh$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 35.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ đạt cực đại tại điểm nào?

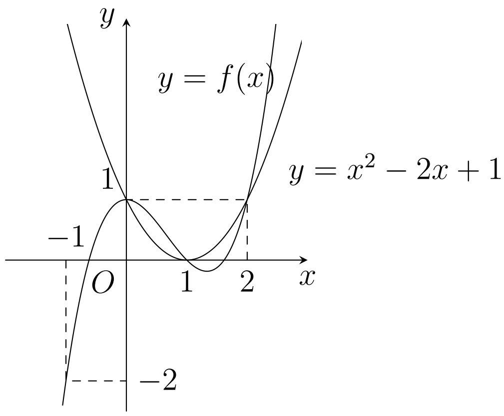


(A) $x = 2$. (B) $x = 0$. (C) $x = 1$. (D) $x = -1$.

Lời giải.

Ta có: $g'(x) = f'(x) - x^2 + 2x - 1$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$. (như hình vẽ).



Bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

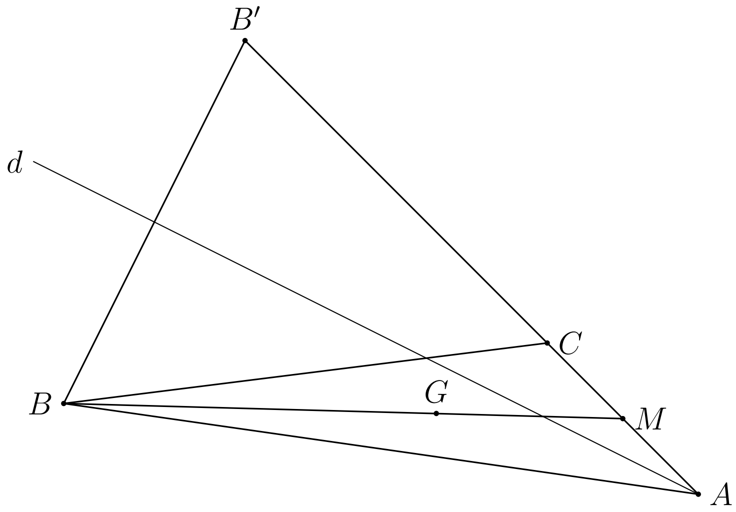
Từ bảng xét dấu của $g'(x)$ suy ra hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ (Oxy), cho tam giác ABC có đỉnh $B(-12; 1)$, đường phân giác của góc A có phương trình $d\colon x + 2y - 5 = 0$. $G\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ABC. Đường thẳng BC đi qua điểm nào sau đây?

A $(1; 0)$. **B** $(2; -3)$. **C** $(4; -4)$. **D** $(4; 3)$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của AC, $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GM} \Rightarrow M\left(\dfrac{13}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

Gọi B' là điểm đối xứng của B qua đường thẳng $d\colon x + 2y - 5 = 0 \Rightarrow B'(-6; 13)$.

Phương trình đường thẳng AC đi qua hai điểm B', M là $x + y - 7 = 0$.

A là giao điểm của hai đường thẳng d và $AC \Rightarrow A(9; -2)$.

M là trung điểm của $AC \Rightarrow C(4; 3)$.

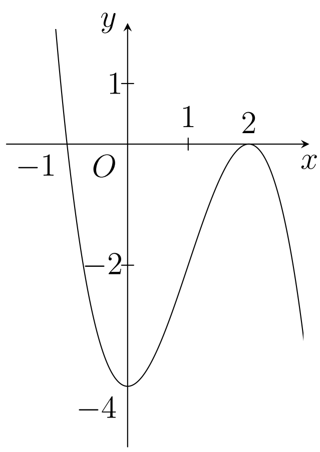
Phương trình đường thẳng $BC\colon x - 8y + 20 = 0$.

Đường thẳng $BC\colon x - 8y + 20 = 0$ đi qua $K(4; 3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 37.

Đồ thị ở hình bên là của hàm số nào dưới đây?



A $y = -x^3 - 3x^2 - 4$. **B** $y = x^3 - 3x - 4$.

C $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. **D** $y = x^3 - 3x - 4$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta suy ra hệ số cao nhất $a < 0$, loại được đáp án B và D.

Đồ thị đi qua điểm $(2; 0)$ nên C là đáp án đúng.

Chọn đáp án (C) □

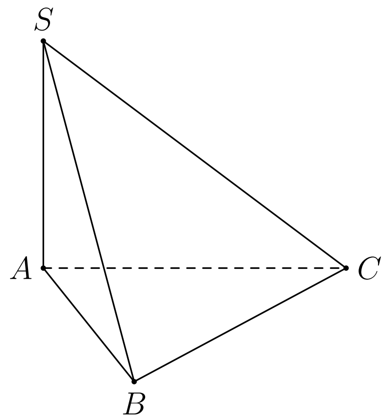
Câu 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

(A) $\dfrac{2a^3}{3}$. (B) $\dfrac{1}{4}$. **(C)** $\dfrac{a^3}{4}$. (D) $\dfrac{3a^3}{4}$.

Lời giải.

Ta có: $S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$SA \perp (ABC) \Rightarrow$ Thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}.S_{\triangle ABC}.SA = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3} = \dfrac{a^3}{4}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(m+3)x^2 + 18mx - 8$ tiếp xúc với trục hoành?

(A) 2. **(B)** 1. (C) 3. (D) 0.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:
$\begin{cases} 2x^3 - 3(m+3)x^2 + 18mx - 8 = 0 \ (1) \\ 6x^2 - 6(m+3)x + 18m = 0 \ (2). \end{cases}$

Từ (2) ta có: $x^2 - (m+3)x + 3m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = m. \end{array}\right.$

Với $x = 3$ ta thay vào (1) ta có $54 - 27(m+3) + 54m - 8 = 0 \Leftrightarrow 27m = 35 \Leftrightarrow m = \dfrac{35}{27}$.

Với $x = m$ ta thay vào (1) ta có $2m^3 - 3m^2(m+3) + 18m^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow m^3 - 9m^2 + 8 = 0$

$\Leftrightarrow (m-1)\left(m^2 - 8m - 8\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 4 - 2\sqrt{6} \\ m = 4 + 2\sqrt{6}. \end{array}\right.$

Vậy chỉ có một giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn điều kiện đề bài là $m = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Gọi S là tập hợp các số nguyên m để hàm số $y = f(x) = \dfrac{x + 2m - 3}{x - 3m + 2}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -14)$. Tính tổng T của các phần tử trong S?

(A) $T = -10$. (B) $T = -9$. (C) $T = -6$. (D) $T = -5$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{3m - 2\}$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{-5m + 5}{(x - 3m + 2)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-14) \Leftrightarrow \begin{cases} -5m+5>0 \\ 3m-2 \notin (-\infty;-14) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ 3m-2 \geq -14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ m \geq -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq m < 1.$$

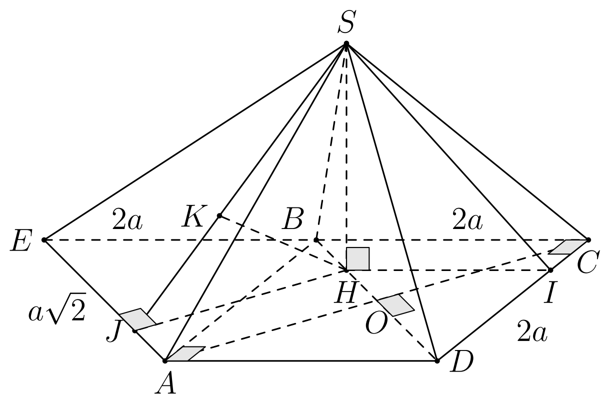
Vậy $S=\{-4;-3;-2;-1;0\} \Rightarrow T=-4-3-2-1=-10$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn BD sao cho $HD=3HB$. Biết góc giữa mặt (SCD) và mặt phẳng đáy bằng $45°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD là:

A. $\dfrac{2a\sqrt{38}}{17}$. B. $\dfrac{2a\sqrt{13}}{3}$. C. $\dfrac{2a\sqrt{51}}{13}$. D. $\dfrac{3a\sqrt{34}}{17}$.

Lời giải.



Kẻ $HI \parallel BC (I \in CD)$ ta có: $\begin{cases} CD \perp HI \\ CD \perp SI. \end{cases}$

Suy ra góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng đáy là góc $\widehat{SIH}=45°$.

Dựng hình bình hành $ADBE$.

Ta có $BD \parallel (SAE) \Rightarrow \mathrm{d}_{(SA,BD)} = \mathrm{d}_{(BD,(SAE))} = \mathrm{d}_{(B,(SAE))} = \mathrm{d}_{(H,(SAE))}$.

- Kẻ $HJ \perp AE (J \in AE)$ ta có $AE \perp (SHJ) \Rightarrow (SAE) \perp (SHJ)$ theo giao tuyến SJ.
- Kẻ $HK \perp SJ (K \in SJ)$ ta có $HK \perp (SAE) \Rightarrow HK = \mathrm{d}_{(H,(SAE))}$.

Ta có $HK = \dfrac{HJ \cdot HS}{SJ} = \dfrac{HJ \cdot HS}{\sqrt{HJ^2+HS^2}}$.

Với $HJ = AO = a\sqrt{2}$, $HS = HI = \dfrac{3}{4}BC = \dfrac{3a}{2}$

Vậy $HK = \dfrac{a\sqrt{2} \cdot \dfrac{3a}{2}}{\sqrt{2a^2 + \dfrac{9a^2}{4}}} = \dfrac{3a\sqrt{34}}{17}$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

D. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathscr{D}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Thể tích khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a là:

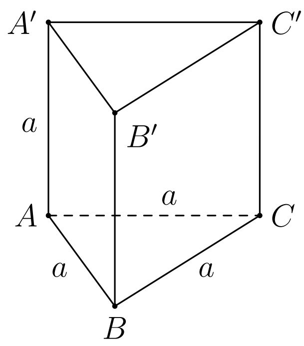
(A) $\dfrac{a^3}{3}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Lời giải.

Theo giả thiết mặt đáy của lăng trụ là tam giác đều cạnh a nên đáy có diện tích $B = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lăng trụ đứng chiều cao $h = a$, do vậy thể tích của khối lăng trụ đã cho là

$V = B \cdot h = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$. Biết góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng $60°$. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

(A) $a^3\sqrt{3}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải.

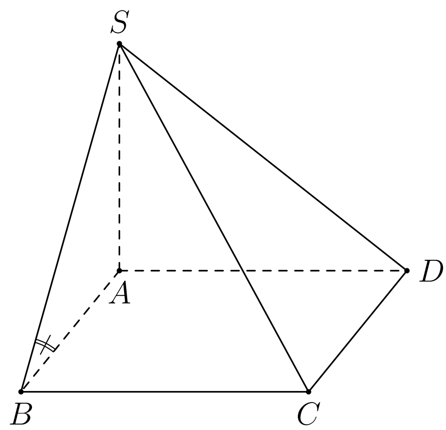
Góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là $\widehat{SBA} = 60°$.

Ta có: Diện tích đáy: $S_{ABCD} = a^2$.

Tam giác SAB vuông tại $A \Rightarrow SA = AB \cdot \tan\left(\widehat{SBA}\right) = a \cdot \tan 60° = a\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

$V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \dfrac{1}{3}a^2 \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án B □

Câu 45. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ là:

(A) $y_{\mathrm{CT}} = 3$. (B) $y_{\mathrm{CT}} = -3$. (C) $y_{\mathrm{CT}} = 4$. (D) $y_{\mathrm{CT}} = -4$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 4x^3 - 4x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Dấu y'

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và $x = 1$; $y_{\text{CT}} = -4$.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Phương trình $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{3}$ có tất cả các nghiệm là:

A $x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

B $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

C $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

D $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Phương trình $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 9x + 20$ đồng biến trên các khoảng nào?

A $(-3; 1)$. B $(-\infty; 1)$. C $(-3; +\infty)$. D $(1; 2)$.

Lời giải.

Tập xác định: $D = R$.

$y' = -3x^2 - 6x + 9$

$y' > 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 6x + 9 > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1$

Vậy hàm số đồng biến trên $(-3; 1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Khoảng cách từ $I(1; -2)$ đến đường thẳng $\Delta\colon 3x - 4y - 26 = 0$ bằng

A 3. B 12. C 5. D $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

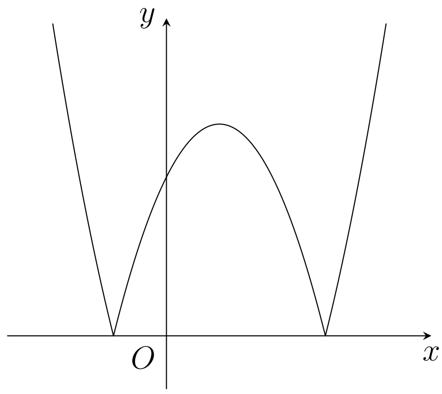
Ta có $\mathrm{d}_{(I;d)} = \dfrac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) - 26|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 49.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 1. B 2. C 3. D 4.



Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta có đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Tìm các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|\sqrt{2x - x^3} - 3m + 4\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$\boxed{\text{A}}$ $m = \dfrac{3}{2}$. (B) $m = \dfrac{1}{2}$. (C) $m = \dfrac{4}{3}$. (D) $m = \dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Gọi $A = \max y$. Ta đặt $t = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow t = \sqrt{1 - (x-1)^2}$ do đó $0 \leq t \leq 1$.

Khi đó hàm số được viết lại là $y = |t - 3m + 4|$ với $t \in [0;1]$ ta suy ra

$A = \max\limits_{[0;1]} |t - 3m + 4| = \max\{|-3m+4|, |5-3m|\} \geq \dfrac{|-3m+4| + |5-3m|}{2}$.

Áp dụng BĐT trị tuyệt đối ta có: $|-3m+4|+|5-3m| = |3m-4|+|5-3m| \geq |3m-4+5-3m| \geq 1$.

Do đó $A \geq \dfrac{1}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} |-3m+4| = |5-3m| \\ (3m-4)(5-3m) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

——— **HẾT** ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. A	3. D	4. B	5. D	6. A	7. B	8. A	9. C	10. D
11. A	12. C	13. A	14. C	15. D	16. C	17. B	18. D	19. D	20. C
21. C	22. B	23. A	24. A	25. B	26. B	27. A	28. D	29. B	30. A
31. D	32. C	33. D	34. C	35. C	36. D	37. C	38. C	39. B	40. A
41. D	42. B	43. B	44. B	45. D	46. C	47. A	48. A	49. C	50. A

54 ĐỀ THI THỬ THPT YÊN DŨNG 3 - BẮC GIANG - LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+y-3=0 \\ xy-2x+2=0 \end{cases}$ có nghiệm là $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$. Tính (x_1+x_2).

(A) 2. (B) 0. (C) -1. (D) 1.

Lời giải.

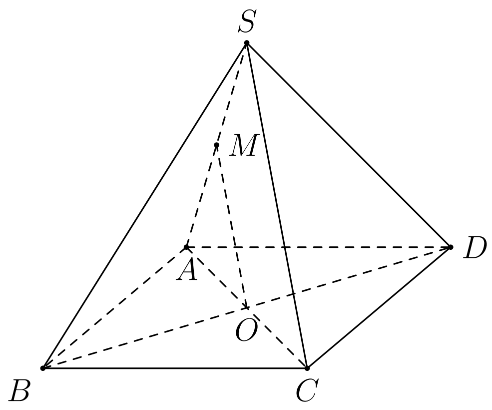
$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ xy-2x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ x(3-x)-2x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ x^2-x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow x_1+x_2=1.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Trong hệ tọa độ Oxy. Cho tam giác ABC có $A(2;3)$, $B(1;0)$, $C(-1;-2)$. Phương trình đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC là:

(A) $2x-y-1=0$. (B) $x-2y+4=0$. (C) $x+2y-8=0$. (D) $2x+y-7=0$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow I(0;-1)$.
Ta có $\overrightarrow{AI}=(-2;-4) \Rightarrow \vec{n}=(2;-1)$ là véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng AI.
Phương trình đường thẳng AI là: $2(x-2)-(y-3)=0 \Leftrightarrow 2x-y-1=0$.
Chọn đáp án (A) □

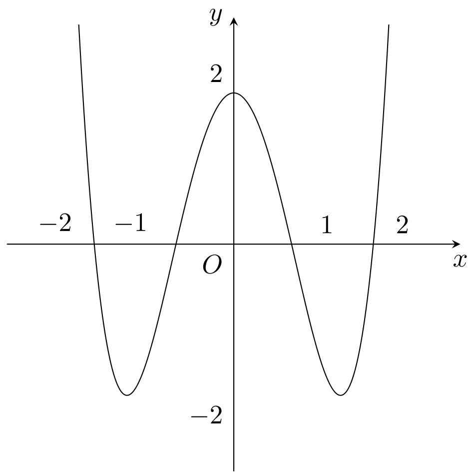
Câu 3. Cho hình chop $SABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành tâm O, M là trung điểm SA. Tìm mệnh đề sai.

(A) Khoảng cách từ O đến (SCD) bằng khoảng cách từ M đến (SCD).
(B) $OM \parallel (SCD)$.
(C) $OM \parallel (SAC)$.
(D) Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng khoảng cách từ B đến (SCD).

Lời giải.
Do $M \in SA; O \in AC$ nên $OM \subset mp(SAC)$ suy ra $OM \parallel mp(SAC)$ sai.
Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có dạng hình vẽ bên. Tính tổng tất cả giá trị nguyên của m để hàm số $y = |f(x) - 2m + 5|$ có 7 điểm cực trị.

(A) 6. (B) 3. **(C) 5.** (D) 2.



Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = f(x) - 2m + 5$ có được bằng cách tịnh tiến theo trục Oy là $-2m + 5$ đơn vị.
Muốn đồ thị $y = |f(x) - 2m + 5|$ có đủ 7 cực trị thì đồ thị hàm số $y = f(x) - 2m + 5$ phải cắt Ox như vậy thì $-2 < -2m + 5 < 2 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} < m < \dfrac{7}{2}$ do m nguyên nên chọn $m = 2; m = 3$. Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số trên tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$.

(A) $y = 3x - 2$. (B) $y = -3x - 2$. (C) $y = 3x - 3$. (D) $y = 3x + 2$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$y = \dfrac{x-2}{x+1} \Rightarrow y' = \dfrac{3}{(x+1)^2}$.

$y(0) = -2$, $y'(0) = 3$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số trên tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ là $y = 3(x-0)-2$
$\Leftrightarrow y = 3x - 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x-2)^4(x-1)(x+3)\sqrt{x^2+3}$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

(A) 1. **(B) 2.** (C) 6. (D) 3.

Lời giải.

$$f'(x) = (x-2)^4(x-1)(x+3)\sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2(nghiemboichan) \\ x = 1(nghiemdon) \\ x = -3(nghiemdon) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Hàm số có hai điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Cho hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - (m+1)x^2 + mx - 2$. Tìm m để hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

A $m = -1$. **B** $m = 1$. **C** không có m. **D** $m = -2$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = x^2 - 2(m+1)x + m$; $y'' = 2x - 2(m+1)$.

Vì hàm số đã cho là hàm số bậc ba nên

Hàm số có điểm cực đại là $x = -1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y'(-1) = 0 \\ y''(-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2(m+1) + m = 0 \\ -2 - 2(m+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} m = -1 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Trong hệ tọa độ Oxycho đường thẳng $d\colon x - 2y + 3 = 0$. Phép tịnh tiến $\vec{v}(2;2)$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d' có phương trình là:

A $2x - y + 5 = 0$. **B** $x + 2y + 5 = 0$. **C** $x - 2y + 5 = 0$. **D** $x - 2y + 4 = 0$.

Lời giải.

Vì phép tịnh tiến $\vec{v}$ biến d thành d' nên d' có dạng $x - 2y + c = 0, (x \in \mathbb{R})$.

Chọn $M(1;2) \in d$. Gọi ảnh của M qua phép tịnh tiến $\vec{v}$ là M'. Khi đó

$\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$. Suy ra $M'(3;4)$.

Từ $M \in d$ suy ra $M' \in d$. Thay tọa độ điểm M' và dạng phương trình d' ta được $c = 4$.

Vậy phương trình đường thẳng d' là $x - 2y + 4 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x+4}$. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số trên là:

A $x = -4$. **B** $y = 2$. **C** $x = 4$. **D** $y = \dfrac{-3}{4}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-3}{x+4} = 2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-3}{x+4} = 2$.

Vậy $y = 2$ là đường tiệm cận ngang.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Một người gửi vào ngân hàng 50 triệu đồng thời hạn 15 tháng, lãi suất $0,6\%$ tháng (lãi kép). Hỏi hết kì hạn thì số tiền người đó là bao nhiêu?

A $55,664000$ triệu. **B** $54,694000$ triệu. **C** $55,022000$ triệu. **D** $54,368000$ triệu.

Lời giải.

Gọi T là số tiền cả vốn lẫn lãi sau 15 tháng.

M là số tiền gửi ban đầu.

n là số kì hạn tính lãi.

r là suất định kỳ, tính theo %.

Hết kì hạn thì số tiền người đó là: $T = M(1+r)^n = 50000000.(1+0.6\%)^{15} = 54694003,63 \approx 54694000$ triệu.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số.

A 3. **B** 0. **C** 1. **D** 2.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Lời giải.

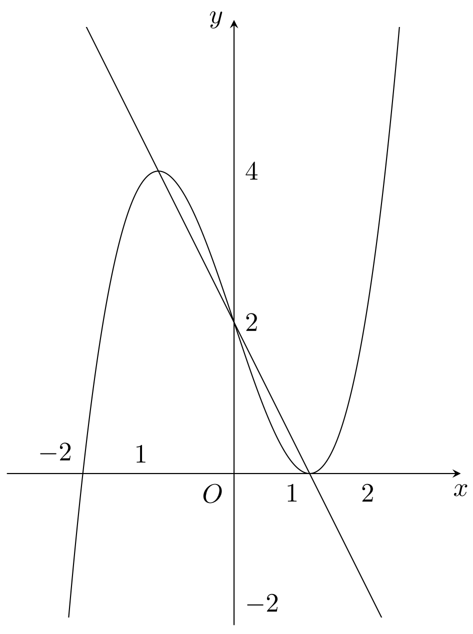
Dựa vào BBT suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị của hàm $y = f'(x)$, $y = g'(x)$ như hình vẽ. Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y = f(x) - g(x)$.

A $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$. **B** $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

C $(1; +\infty)$ và $(-2; -1)$. **D** $(-2; +\infty)$.



Lời giải.

Ta có $y' = f'(x) - g'(x)$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ ta có BBT

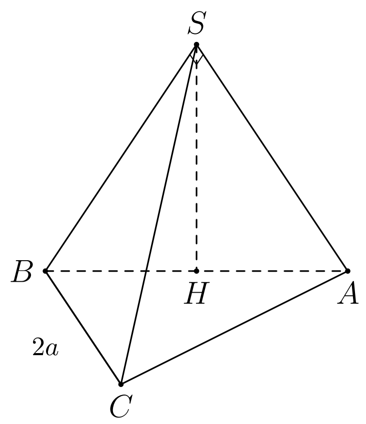
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

KL: Hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có $(SAB) \perp (ABC)$, tam giác ABC đều cạnh $2a$, tam giác SAB vuông cân tại S. Tính thể tích hình chóp $S.ABC$.

A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.

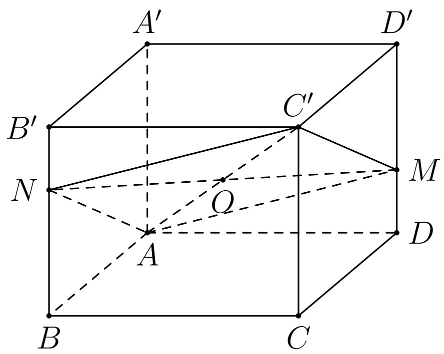


Kẻ $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABC)$ Vì $(ABC) \cap (ABC) = AB$ và $(ABC) \perp (ABC)$.
Ta có: $SH = \dfrac{AB}{2} = a$ (Do SAB là tam giác vuông cân tại S cạnh huyền $AB = 2a$).
Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = (2a)^2\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}a^2$.
Vậy thể tích khối chóp $SABC$ là: $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3}.a.\sqrt{3}a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, BC = 2a$. $AC' = a$. Điểm N thuộc cạnh BB' sao cho $BN = 2NB'$, điểm M thuộc cạnh DD' sao cho $D'M = 2MD$. $(A'MN)$ chia hình hộp chữ nhật làm hai phần, tính thể tích phần chứa điểm C'.

A $4a^3$. **B** a^3. **C** $2a^3$. **D** $3a^3$.

Lời giải.



Ta có $AC = \sqrt{CB^2 + AB^2} = a\sqrt{5}$, $CC' = \sqrt{C'A^2 - CA^2} = 2a$.
Khi đó thể tích khối hộp $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2a.a.2a = 4a^3$.
Ta có giao tuyến của $Mp(A'MN)$ và $(C'D'DC)$ là $C'M$.

Ta có giao tuyến của $Mp(A'MN)$ và $(B'C'CB)$ là CN.
Suy ra $AMC'N$ là hình bình hành.
Gọi O là tâm hình hộp Ta có phép đối xứng tâm O biến hình đa diện $C'CDMBAN$ thành hình đa diện $AA'B'ND'C'M$.
Nên $V_{C'CDMBAN} = V_{AA'B'ND'C'M} = \dfrac{1}{2}V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2a^3$.
Chọn đáp án C □

Câu 15. Cho khai triển $(2x-1)^{20} = a_0 + a_1x + a_{2x}^2 + \cdots + a_{20}x^{20}$. Tìm a_1.

A 20. B 40. **C** -40. D -760.

Lời giải.
Ta có: a_1 là hệ số của x
Hạng tử chứa x trong khai triển là: - $\mathrm{C}_{20}^{19}2x$.
Suy ra $a_1 = -\mathrm{C}_{20}^{19}2 = -40$.
Chọn đáp án C □

Câu 16. Hình bát diện đều kí hiệu là:

A $\{3;5\}$. B $\{5;3\}$. **C** $\{3;4\}$. D $\{4;3\}$.

Lời giải.
Khối bát diện đều hay khối tám mặt đều.
Chọn đáp án C □

Câu 17. Bất phương trình $\sqrt{2x-1} \leqslant 3x-2$ có tổng năm nghiệm nguyên nhỏ nhất là:

A 15. B 20. C 10. D 5.

Lời giải.

$$\sqrt{2x-1} \leqslant 3x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2 \geqslant 0 \\ 2x-1 \geqslant 0 \\ 2x-1 \leqslant (3x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{2}{3} \\ x \geqslant \dfrac{1}{2} \\ 9x^2-14x+5 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x \geqslant 1 \\ x \leqslant \dfrac{5}{9} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant 1.$$

Năm nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình là: $1;2;3;4;5$.
Vậy tổng của các nghiệm trên bằng $1+2+3+4+5=15$.
Chọn đáp án A □

Câu 18. Số cách phân 3 học sinh trong 12 học sinh đi lao động là:

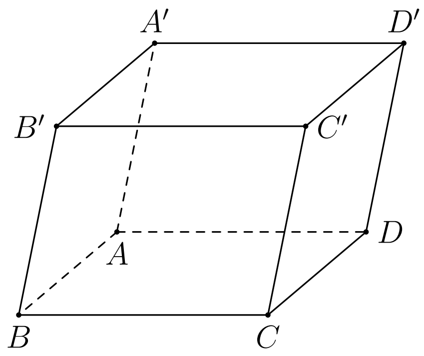
A P_{12}. B 36. C A_{12}^3. **D** C_{12}^3.

Lời giải.
Mỗi cách phân 3 học sinh trong 12 học sinh đi lao động là tổ hợp chập 3 của 12.
Vậy số cách phân học sinh lao động là C_{12}^3.
Chọn đáp án D □

Câu 19. Cho hình lăng trụ $ABCDA'B'C'D'$. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A $(AA'B'B)$ song song với $(CC'D'D)$.
B Diện tích hai mặt bên bất kì bằng nhau.
C AA' song song với CC'.
D Hai mặt phẳng đáy song song với nhau.

Lời giải.



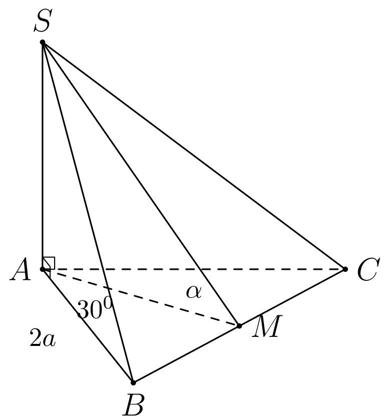
Đáp án là B.

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 20. Cho hình chop $SABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC đều cạnh $2a$, SB tạo với mặt phẳng đáy một góc $30°$. Khi đó (SBC) tạo với đáy một góc x. Tính $\tan x$.

(A) $\tan x = 2$. (B) $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (C) $\tan x = \dfrac{3}{2}$. **(D)** $\tan x = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.



Đáp án là D

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow AB$ là hình chiếu của AB lên (ABC).

Do đó $\widehat{SBA} = \widehat{(SB;(ABC))} = 30°$, $SA = AB\tan 30° = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có

$\triangle ABC$ đều cạnh $2a \Rightarrow AM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2}$ và $\begin{cases}(SBC)\cap(ABC) = BC\\ AM \perp BC\\ SM \perp BC\end{cases} \Rightarrow \widehat{SMA} = \widehat{(SBC;ABC)} = x.$

Vậy $\tan x = \dfrac{SA}{AM} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{2}{2a\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 21. Cho hàm số $y = (2x-1)^{\sqrt{3}}$. Tìm tập xác định của hàm số.

(A) $(1;+\infty)$. **(B)** $(\frac{1}{2};+\infty)$. (C) $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. (D) $[\frac{1}{2};+\infty)$.

Lời giải.

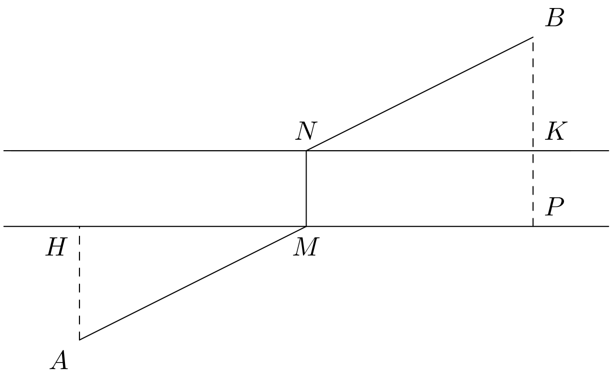
Đáp án là B

ĐK: $2x-1>0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ TXĐ: $\mathscr{D} = \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Người ta muốn làm một con đường đi từ thành phố A đến thành phố B ở hai bên bờ sông như hình vẽ, thành phố A cách bờ sông $AH = 3km$, thành phố B cách bờ sông $BK = \sqrt{28}km$, $HP = 10km$. Con đường làm theo đường gấp khúc $AMNB$. Biết chi phí xây dựng một km đường bên bờ có điểm B nhiều gấp $\dfrac{16}{15}$ lần chi phí xây dựng một km đường bên bờ A, chi phí làm cầu ở đoạn nào cũng như nhau. M là vị trí để xây cầu sao cho chi phí ít tốn kém nhất. Tìm mệnh đề đúng.

A $AM \in (\dfrac{17}{4}; 5)$. **B** $AM \in (\dfrac{10}{3}; 4)$. **C** $AM \in (\dfrac{16}{3}; 7)$. **D** $AM \in (4; \dfrac{16}{3})$.



Lời giải.

Đặt $HM = x, (0 \leqslant x \leqslant 10) \Rightarrow AM = \sqrt{x^2+9}; NK = MP = 10 - x; NB = \sqrt{x^2 - 20x + 128}$ Chi phí xây dựng $1km$ bên bờ sông A là $a, (a > 0)$. Chi phí xây dựng $1km$ bên bờ sông B là $\dfrac{16}{15}a$. x_0 là chi phí xây cầu MN ($x_0 > 0$ là hằng số).

Tổng chi phí xây dựng đường $AMNB$ là $y = a\sqrt{x^2+9} + \dfrac{16}{15}a\sqrt{x^2-20x+128} + x_0$, với $(0 \leqslant x \leqslant 10)$.

$y' = a\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} + \dfrac{16}{15}a\dfrac{x-10}{\sqrt{x^2-20x+128}}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow a\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} + \dfrac{16}{15}a\dfrac{x-10}{\sqrt{x^2-20x+128}} = 0 \Leftrightarrow x = 4(TM)$.

$y(0) = \left(3 + \dfrac{128\sqrt{2}}{15}\right)a + x_0; y(10) = \left(\sqrt{109} + \dfrac{16\sqrt{28}}{15}\right)a + x_0; y(4) = \dfrac{203}{15}a + x_0$

Do đó $\min\limits_{[0;10]} y = \dfrac{203}{15}a + x_0$ khi $x = 4$.

Khi đó $AM = \sqrt{4^2+9} = 5 \in \left(4; \dfrac{16}{3}\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Tính $\dfrac{a^{\frac{5}{3}}(a^{\frac{-2}{3}} + a^{\frac{1}{3}})}{a+1}$, với $a > 0$.

A $a - 1$. **B** $a^2 + 1$. **C** a. **D** $a + 1$.

Lời giải.

$$\dfrac{a^{\frac{5}{3}}\left(a^{\frac{-2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}\right)}{a+1} = \dfrac{a^{\frac{5}{3}}.a^{\frac{-2}{3}} + a^{\frac{5}{3}}.a^{\frac{1}{3}}}{a+1} = \dfrac{a+a^2}{a+1} = a.$$

Chọn đáp án C □

Câu 24. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A $\pi^{20} < e^{20}$. **B** $(\frac{2}{3})^{12} < (\frac{2}{3})^{10}$. **C** $(\frac{1}{5})^{18} > (\frac{1}{5})^{16}$. **D** $5^{20} < 5^{19}$.

Lời giải.

+) $\begin{cases} 20 > 0 \\ \pi > e \end{cases} \Leftrightarrow \pi^{20} > e^{20}$. Do đó mệnh đề A sai.

+) $\begin{cases} 12 > 10 \\ \frac{2}{3} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{12} < \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$. Do đó mệnh đề B đúng.

+) $\begin{cases} 18 > 16 \\ \frac{1}{5} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{18} < \left(\frac{1}{5}\right)^{16}$. Do đó mệnh đề C sai.

+) $\begin{cases} 20 > 19 \\ 5 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 5^{20} > 5^{19}$. Do đó mệnh đề D sai.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên $[0; 3]$. Tính $(M + m)$.

A 6. **B** 8. **C** 10. **D** 4.

Lời giải.

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin (0; 3) \\ x = 2 \in (0; 3) \end{array}\right.$

$y(0) = 2; y(2) = 6; y(3) = 2$. Vậy $M = 6; m = 2 \Rightarrow M + m = 8$.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Cho phương trình $x^3 - 3x^2 - 2x + m - 3 + 2\sqrt[3]{2x^3 + 3x + m} = 0$. Tập S là tập hợp các giá trị của m nguyên để phương trình có ba nghiệm phân biệt. Tính tổng các phần tử của S.

A 15. **B** 9. **C** 0. **D** 3.

Lời giải.

Ta có: $x^3 - 3x^2 - 2x + m - 3 + 2\sqrt[3]{2x^3 + 3x + m} = 0 \Leftrightarrow (2x^3 + 3x + m) + 2\sqrt[3]{2x^3 + 3x + m} = x^3 + 3x^2 + 5x + 3 \Leftrightarrow (2x^3 + 3x + m) + 2\sqrt[3]{2x^3 + 3x + m} = (x + 1)^3 + 2(x + 1)$ (1)

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$, TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow y = f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó: (1) $\Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{2x^3 + 3x + m}\right) = f(x + 1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x^3 + 3x + m} = x + 1 \Leftrightarrow m = -x^3 + 3x^2 + 1$ (2).

Xét hàm số $g(x) = -x^3 + 3x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, ta có: $g'(x) = -3x^2 + 6x$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 1 < m < 5$. Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in S = \{2; 3; 4\} \Rightarrow \sum m = 2 + 3 + 4 = 9$.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Cho hàm số $y = x^3 + x^2 + (m+1)x + 1$ và $y = 2x + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-10; 10)$ để hai đồ thị của hai hàm số trên cắt nhau tại ba điểm phân biệt.

A 9. **B** 10. **C** 1. **D** 11.

Lời giải.

Giả sử hàm số $y = x^3 + x^2 + (m+1)x + 1$ có đồ thị (C) và $d : y = 2x + 1$

Hoành độ giao điểm của (C) và d là nghiệm PT: $x^3 + x^2 + (m+1)x + 1 = 2x + 1$ (1)

$\Leftrightarrow x^3 + x^2 + (m-1)x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + x + m - 1 = 0 (2) \end{array}\right.$

Đặt $f(x) = x^2 + x + m - 1$

d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt $x \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 4m > 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{5}{4} \\ m \neq 1 \end{cases}$

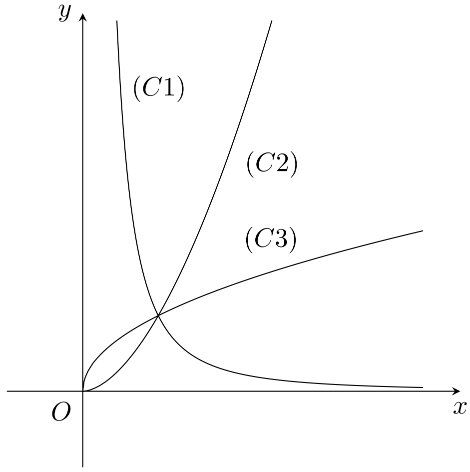
Kết hợp với điều kiện $m \in (-10; 10)$ ta được $m \in \left(-10; \dfrac{5}{4}\right) \setminus \{1\}$

Do m nguyên nên có 10 giá trị thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Cho ba hàm số $y = x^{\sqrt{3}}, y = x^{\frac{1}{2}}, y = x^{-2}$. Khi đó đồ thị của ba hàm số $y = x^{\sqrt{3}}, y = x^{\frac{1}{2}}, y = x^{-2}$ lần lượt là:

A $(C3), (C2), (C1)$. **B** $(C2), (C3), (C1)$. **C** $(C2), (C1), (C3)$. **D** $(C1), (C3), (C2)$.



Lời giải.

Nhìn vào đồ thị (C_1) ta thấy nó đi xuống từ trái sang phải. Là đồ thị của hàm số nghịch biến nên nó là đồ thị của hàm số $y = x^{-2}$.

Vì $\sqrt{3} > 1$ nên đồ thị của hàm số $y = x^{\sqrt{3}}$ là (C_2)

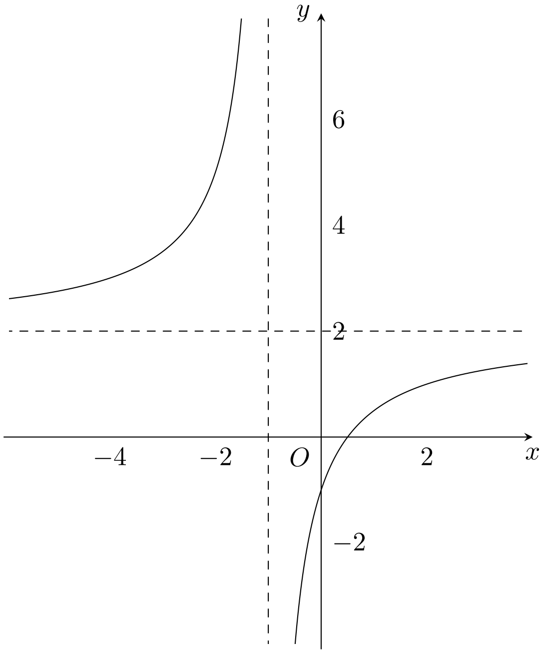
Do đó (C_3) là đồ thị của hàm số $y = x^{\frac{1}{2}}$;

Vậy đáp án là: B.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xác định hàm số trên.

A $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. B $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$. C $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$. D $y = \dfrac{3x+1}{2x+2}$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số nhận đường $x = -1$ là tiệm cận đứng nên ta loại ngay đáp án A và B vì đồ thị của hai hàm số này đều nhận đường $x = 1$ là tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số nhận đường $y = 2$ là tiệm cận ngang.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{x+1} = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{x+1}=2\Rightarrow y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.
Vậy hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 30. Cho hàm số $y=x^4-2(m+2)x^2+3(m+2)^2$. Đồ thị của hàm số trên có ba cực trị tạo thành tam giác đều. Tìm mệnh đề đúng.

A $m\in(-1;0)$. **B** $m\in(0;1)$. **C** $m\in(1;2)$. **D** $m\in(-2;-1)$.

Lời giải.

Ta có $y'=4x^3-4(m+2)x$.
Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt
$\Leftrightarrow 4x^3-4(m+2)x=0$ có 3 nghiệm phân biệt(1)
Lại có $4x^3-4(m+2)x=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=0\\&x^2=m+2\end{aligned}\right.$
Do đó (1) $\Leftrightarrow m+2>0\Leftrightarrow m>-2$ (*)
Khi đó $\left[\begin{aligned}&x=0\\&x=\pm\sqrt{m+2}\end{aligned}\right.$
Gọi ba điểm cực trị đó là $A(0;3(m+2)^2),B\left(\sqrt{m+2};2(m+2)^2\right),C\left(-\sqrt{m+2};2(m+2)^2\right)$
$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{m+2};-(m+2)^2\right)\\\overrightarrow{AC}=\left(-\sqrt{m+2};-(m+2)^2\right)\\\overrightarrow{BC}=\left(-2\sqrt{m+2};0\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AB=\sqrt{m+2+(m+2)^4}\\AC=\sqrt{m+2+(m+2)^4}\\BC=2\sqrt{m+2}\end{cases}$
Như vậy $AB=AC$ nên ta chỉ cần ép cho $AB=BC$
$\Rightarrow m+2+(m+2)^4=4(m+2)\Leftrightarrow(m+2)^4=3(m+2)\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&m=-2\\&m=\sqrt[3]{3}-2\end{aligned}\right.$
Kết hợp với (*) ta được $m=\sqrt[3]{3}-2$ thỏa mãn.
Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho $\sin x=\dfrac{1}{3},x\in(0;\dfrac{\pi}{2})$. Tính giá trị của $\tan x$.

A $\dfrac{-1}{2\sqrt2}$. **B** $\dfrac{3}{8}$. **C** $2\sqrt2$. **D** $\dfrac{1}{2\sqrt2}$.

Lời giải.

Ta có $\sin^2x+cos^2x=1\Rightarrow cos^2x=1-\sin^2x=1-\dfrac{1}{9}=\dfrac{8}{9}\Rightarrow cosx=\pm\dfrac{2\sqrt2}{3}$
Vì $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow cosx>0\Rightarrow cosx=\dfrac{2\sqrt2}{3}$
Vậy $\tan x=\dfrac{\sin x}{cosx}=\dfrac{1}{2\sqrt2}$.
Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho tập $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. Lập được bao nhiêu số có ba chữ số phân biệt lấy từ A.

A 216. **B** 60. **C** 20. **D** 120.

Lời giải.

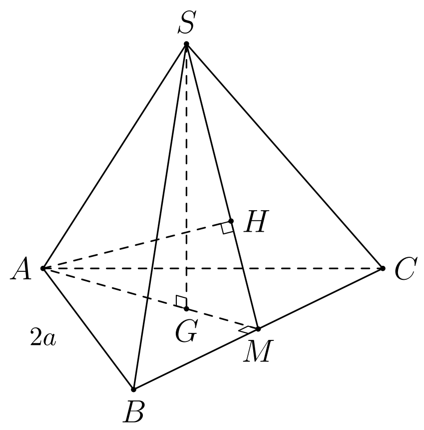
Gọi số tự nhiên có ba chữ số phân biệt có dạng $\overline{a_1a_2a_3};a_1\neq a_2\neq a_3$
a_1 có 6 cách chọn.

Vì $a_2 \neq a_1$ nên a_2 có 5 cách chọn.
Vì $a_3 \neq a_2 \neq a_1$ nên a_3 có 4 cách chọn.
Vậy có $6.5.4 = 120$ số.
Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $AB = 2a$, khoảng cách từ A đến (SBC) là $\dfrac{3a}{2}$. Tính thể tích hình chóp $S.ABC$.

(A) $a^3\sqrt{3}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

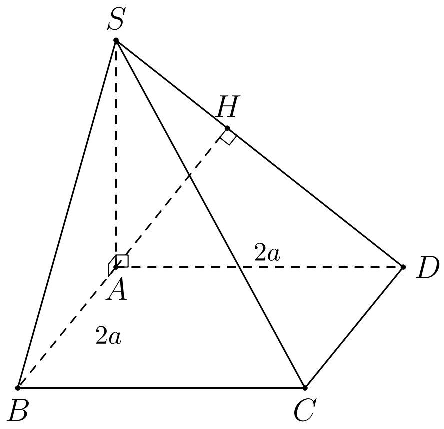


Đáp án là D
Gọi M là trung điểm của BC và G là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SG \perp (ABC)$ và G là trọng tâm $\triangle ABC$.
Ta có: $\begin{cases} AM \perp BC \\ SG \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$ hay $(SBC) \perp (SAM)$ theo giao tuyến SM.
Trong (SAM), kẻ $AH \perp SM, H \in SM \Rightarrow AH \perp (SBC)$.
Vậy $\mathrm{d}(A,(SBC)) = AH = \dfrac{3a}{2}$.
Vì $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh $2a$ nên $AM = \dfrac{2a.\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ và $S_{\triangle ABC} = \dfrac{(2a)^2.\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.
Đặt $SG = x$. Ta có: $GM = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Xét $\triangle SGM$ vuông tại G ta có: $SM = \sqrt{SG^2 + GM^2} = \sqrt{x^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}$
Xét $\triangle SAM$ ta có: $S_{\triangle SAM} = \dfrac{1}{2}SG.AM = \dfrac{1}{2}AH.SM \Rightarrow x.a\sqrt{3} = \dfrac{3a}{2}.\sqrt{x^2 + \dfrac{a^2}{3}}$
$\Leftrightarrow 4x^2 = 3\left(x^2 + \dfrac{a^2}{3}\right) \Leftrightarrow x = a$. Do đó: $SG = a$.
Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SG.S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3}a.a^2\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, khoảng cách C đến (SBD) là $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. Tính khoảng cách từ A đến (SCD).

(A) $x = a\sqrt{3}$. (B) $2a$. (C) $x = a\sqrt{2}$. (D) $x = 3a$.

Lời giải.



Ta có: $CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)$ theo giao tuyến SD.
Trong (SAD) kẻ $AH \perp SD, H \in SD \Rightarrow AH \perp (SCD)$.
Vậy $x = \mathrm{d}(A, (SCD)) = AH$.
Đặt $h = \mathrm{d}(A, (SBD))$. Ta có $h = \mathrm{d}(A, (SBD)) = \mathrm{d}(C, (SBD))$.
Theo bài $\mathrm{d}(C, (SBD)) = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ nên $h = \mathrm{d}(A, (SBD)) = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.
Vì tứ diện $SABD$ có ba cạnh AS, AB, AD đôi một vuông góc nên
$\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Rightarrow \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2} - \dfrac{1}{(2a)^2} - \dfrac{1}{(2a)^2} = \dfrac{1}{4a^2} \Rightarrow SA = 2a.$

Do đó $\triangle SAD$ vuông cân tại A có: $SD = AD\sqrt{2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow x = AH = \dfrac{SD}{2} = a\sqrt{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 35. Cho hai hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}$. Đồ thị hàm số trên cắt hai trục tọa độ tại hai điểm A, B phân biệt. Tính độ dài đoạn AB.

A $\sqrt{2}$. **B** 2. **C** 4. **D** $2\sqrt{2}$.

Lời giải.
Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại $A(-2; 0)$
Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại $B(0; -2)$
$\overrightarrow{AB} = (2; -2)$. Độ dài đoạn AB là $AB = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$.
Chọn đáp án D □

Câu 36. Đội tuyển học sinh giỏi Toán 12 trường thpt Yên Dũng số 3 gồm 8 học sinh trong đó có 5 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh đi thi học sinh giỏi cấp Huyện. Tính xác suất để 5 học sinh được chọn đi thi có cả nam và nữ và học sinh nam nhiều hơn học sinh nữ.

A $p = \dfrac{11}{56}$. **B** $p = \dfrac{45}{56}$. **C** $p = \dfrac{46}{56}$. **D** $p = \dfrac{55}{56}$.

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = \mathrm{C}_8^5 = 56$
Gọi A là biến cố: “ 5 học sinh được chọn đi thi có cả nam và nữ và học sinh nam nhiều hơn học sinh nữ”.
Xét các khả năng xảy ra của A

Trường hợp 1: 5 học sinh được chọn gồm 4 nam và 1 nữ. Số cách chọn là $\mathrm{C}_5^4.C_3^1 = 15$.
Trường hợp 2: 5 học sinh được chọn gồm 3 nam và 2 nữ. Số cách chọn là $\mathrm{C}_5^3.C_3^2 = 30$.
Số phần tử của biến cố A là $n(A) = 45$.
Xác suất của biến cố A là $p(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{45}{56}$.
Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 + u_4 = 8 \\ u_3 - u_2 = 2 \end{cases}$. Tính tổng 10 số hạng đầu của cấp số cộng trên.

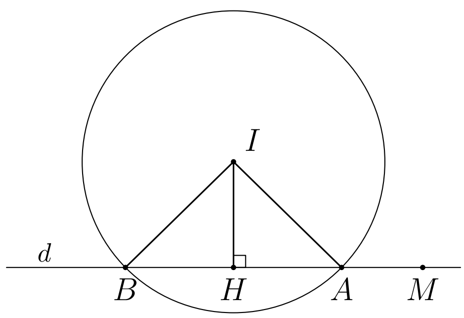
A 100. **B** 110. **C** 10. **D** 90.

Lời giải.
Gọi cấp cố cộng có công sai là d ta có $u_2 = u_1 + d; u_3 = u_1 + 2d; u_4 = u_1 + 3d$.
Khi đó $\begin{cases} u_1 + u_4 = 8 \\ u_3 - u_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 3d = 8 \\ d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$
Áp dụng công thức $S = nu_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$.
Vậy tổng của 10 số hạng đầu của cấp số cộng là $S_{10} = 10.1 + \dfrac{10.9}{2}.2 = 100$.
Chọn đáp án A □

Câu 38. Trong hệ tọa độ Oxy. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$. I là tâm (C), đường thẳng d qua $M(1; -3)$ cắt (C) tại A, B. Biết tam giác IAB có diện tích là 8. Phương trình đường thẳng d là $x + by + c = 0$. Tính $(b + c)$.

A có vô số giá trị. **B** 1. **C** 2. **D** 8.

Lời giải.



Đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$ có tâm $I(2; -1)$ bán kính $R = \sqrt{2^2 + 1^2 + 15} = 2\sqrt{5}$.
Vì đường thẳng d: $x + by + c = 0$ đi qua điểm $M(1; -3)$ ta có pt: $1 - 3b + c = 0 \Leftrightarrow c = 3b - 1$.
Khi đó $IH = \mathrm{d}(I, d) = \dfrac{|2 - b + c|}{\sqrt{1 + b^2}} = \dfrac{|2b + 1|}{\sqrt{1 + b^2}} \Rightarrow AH = \sqrt{IA^2 - IH^2} = \sqrt{20 - \dfrac{(2b+1)^2}{1 + b^2}}$.
Vì diện tích tam giác IAB bằng 8 nên $IH.AH = 8 \Leftrightarrow \dfrac{|2b + 1|}{\sqrt{1 + b^2}}.\sqrt{\dfrac{16b^2 - 4b + 19}{1 + b^2}} = 8$.

$\Leftrightarrow (2b+1)^2(16b^2-4b+19)=64(1+b^2)(1+b^2)$.

$\Leftrightarrow 64b^4+64b^3+16b^2-16b^3-16b^2-4b+76b^2+76b+19=64b^4+128b^2+64$.

$\Leftrightarrow 48b^3-52b^2+72b-45=0 \Leftrightarrow b=\dfrac{3}{4} \Rightarrow c=\dfrac{5}{4} \Rightarrow b+c=2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Hình chóp $S.ABC$ có chiều cao $h=a$, diện tích tam giác ABC là $3a^2$. Tính thể tích hình chóp $S.ABC$.

(A) $\dfrac{a^3}{3}$. (B) a^3. (C) $\dfrac{3}{2}a^3$. (D) $3a^3$.

Lời giải.

$V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}h.S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{3}.a.3a^2=a^3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Phương trình $\sin x.cos\dfrac{\pi}{5}+cosx.\sin\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{1}{2}$ có nghiệm là:

(A) $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-\pi}{30}+k2\pi \\ x=\dfrac{19\pi}{30}+k2\pi \end{array}\right.$ $k\in\mathbb{Z}$.

(B) $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{30}+k2\pi \\ x=\dfrac{-19\pi}{30}+k2\pi \end{array}\right.$ $k\in\mathbb{Z}$.

(C) $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.$ $k\in\mathbb{Z}$.

(D) $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-\pi}{30}+k2\pi \\ x=\dfrac{-19\pi}{30}+k2\pi \end{array}\right.$ $k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải.

$\sin x.cos\dfrac{\pi}{5}+cosx.\sin\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{5}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x+\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-\pi}{30}+k2\pi \\ x=\dfrac{19\pi}{30}+k2\pi \end{array}\right. k\in\mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Cho $a,b,c>0, a,b\neq 1$. Tình $A=\log_a(b^2).log_b(\sqrt{bc})-\log_a(c)$.

(A) $\log_a c$. (B) 1. (C) $\log_a b$. (D) $\log_a bc$.

Lời giải.

Có: $A=\log_a(b^2).log_b(\sqrt{bc})-\log_a(c)=2log_a b.\dfrac{1}{2}\log_b(bc)-\log_a(c)$

$=2log_a b.\dfrac{1}{2}(\log_b b+\log_b c)-\log_a(c)$

$=\log_a b.(1+\log_b c)-\log_a c=\log_a b+\log_a b.\log_b c-\log_a c=\log_a b+\log_a c-\log_a c=\log_a b$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Cho hàm số $y=x^3-2018x$ có đồ thị (C). M_1 thuộc (C) và có hoành độ là 1, tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại M_2, tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại M_3,.... Cứ như thế mãi và tiếp tuyến của (C) tại $M_n(x_n;y_n)$ thỏa mãn $2018x_n+y_n+2^{2019}=0$. Tìm n.

(A) 675. (B) 672. (C) 674. (D) 673.

Lời giải.

Có: $y'=3x^2-2018$.

Gọi d_n là tiếp tuyến của (C) tại điểm M_n.

Có điểm $M_1(1;-2017) \Rightarrow d_1\colon y+2017=y'(1).(x-1) \Leftrightarrow d_1\colon y=-2015x-2$.
Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và (C) là: $x^3-2018x=-2015x-2 \Leftrightarrow x^3-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=-2 \end{array}\right.$.
Có điểm $M_2(-2;4028) \Rightarrow d_2\colon y-4028=y'(-2).(x+2) \Leftrightarrow d_2\colon y=-2006x+16$.
Phương trình hoành độ giao điểm của d_2 và (C) là: $x^3-2018x=-2006x+16 \Leftrightarrow x^3-12x-16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_2=-2 \\ x_3=4 \end{array}\right.$.
Có điểm $M_3(4;-8008) \Rightarrow d_3\colon y+8008=y'(4).(x-4) \Leftrightarrow d_3\colon y=-1970x-128$.
Phương trình hoành độ giao điểm của d_3 và (C) là: $x^3-2018x=-1970x-128 \Leftrightarrow x^3-48x+128=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3=4 \\ x_4=-8 \end{array}\right.$.

Suy ra ta có dãy (x_n): $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-2 \\ x_3=4 \\ x_4=-8 \\ \ldots \end{cases} \Rightarrow x_n=(-2)^{n-1}=-\dfrac{1}{2}.(-2)^n \Rightarrow y_n=x_n^3-2018x_n$.

Giả thiết: $2018x_n+y_n+2^{2019}=0 \Leftrightarrow 2018x_n+x_n^3-2018x_n+2^{2019}=0 \Leftrightarrow x_n^3=-2^{2019} \Leftrightarrow x_n^3=(-2)^{2019} \Leftrightarrow (-2)^{3n-3}=(-2)^{2019} \Leftrightarrow 3n-3=2019 \Leftrightarrow n=674$.
Chọn đáp án D □

Câu 43. Cho hàm số $y=2x^3-3(3m+1)x^2+6(2m^2+m)x-12m^2+3m+1$. Tính tổng tất cả giá trị nguyên dương của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

A 0. B 3. C 1. D 2.

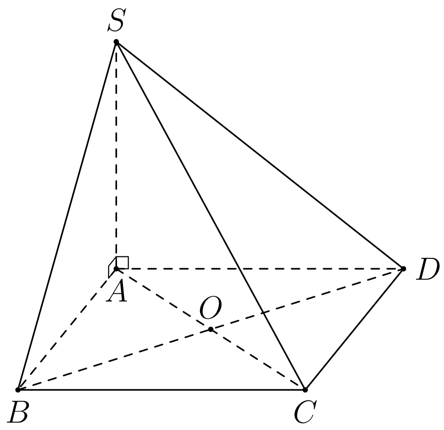
Lời giải.

Ta có
$y'=6x^2-6(3m+1)x+6(2m^2+m)$.
$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=2m+1 \end{array}\right.$
Vì m nguyên dương nên $m<2m+1$.
Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3) \Leftrightarrow m \leqslant 1<3 \leqslant 2m+1 \Leftrightarrow m=1$.
Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho hình chop $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$ và $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a, AC=a\sqrt{5}, SC=3a$. Tính thể tích hình chóp $S.ABCD$.

A $4a^3$. B $\dfrac{4a^3}{3}$. C $\dfrac{2a^3}{3}$. D $\dfrac{a^3}{3}$.

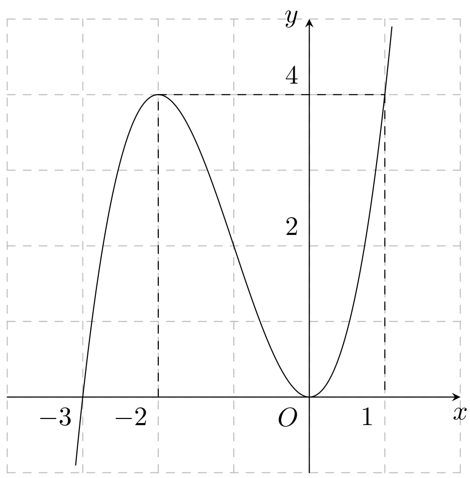
Lời giải.



Tam giác ABC vuông tại B nên $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a$.
Tam giác SAC vuông tại A nên $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = 2a$.
Thể tích hình chóp $SABCD$ là $V = \dfrac{1}{3}.2a.2a^2 = \dfrac{4}{3}a^3$.
Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm khoảng đồng biến của hàm số.

A $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.
B $(-3; +\infty)$.
C $(-\infty; -3)$ và $(0; +\infty)$.
D $(-2; 0)$.



Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta có hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.
Chọn đáp án A □

Câu 46. Cho hàm số $f(x) = (2x - 3)^{\frac{5}{6}}$. Tính $f'(2)$.

A $\dfrac{5}{6}$.
B $\dfrac{5}{3}$.
C $\dfrac{-5}{6}$.
D $\dfrac{-5}{3}$.

Lời giải.

TXĐ: $\left(\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$.

Ta có $f(x) = (2x - 3)^{\frac{5}{6}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{5}{3}.(2x - 3)^{\frac{-1}{6}} \Rightarrow f'(2) = \dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$.

(A) 2. (B) 1. (C) -2. (D) -1.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-2)=-1$.

Do đó.

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Cho ba số a, b, c là ba số liên tiếp của một cấp số cộng có công sai là 2. Nếu tăng số thứ nhất thêm 1, tăng số thứ hai thêm 1 và tăng số thứ ba thêm 3 thì được ba số mới là ba số liên tiếp của một cấp số nhân. Tính $(a+b+c)$.

(A) 12. (B) 18. (C) 3. (D) 9.

Lời giải.

Do a, b, c là ba số liên tiếp của một cấp số cộng có công sai là 2 nên $b=a+2, c=a+4$.

$a+1, a+3, a+7$ là ba số liên tiếp của một cấp số nhân $\Leftrightarrow (a+1)(a+7)=(a+3)^2 \Leftrightarrow a=1$.

Với $a=1$, ta có $\begin{cases} b=3 \\ c=5 \end{cases}$.

Suy ra $a+b+c=9$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x+1}-2)}{x^2-4x+3}$.

(A) 3. (B) 1. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D}=(1;+\infty)\setminus\{3\}$

Dễ thấy: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x+1}-2)}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=0$ Nên hs có 1 tiệm cận ngang

Lại có

$$\lim_{x\to 1^+} y=\lim_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x+1}-2)}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 3^\pm} y=\lim_{x\to 3^\pm}\dfrac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x+1}-2)}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3^\pm}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$$

Nên đt hàm số có 1 tiệm cận đứng. Vậy đồ thị hs có 2 tiệm cận.

Chọn đáp án (D) □

Câu 50. Cho hình lăng trụ $ABCDA'B'C'D'$ có hình chiếu A' lên $mp(ABCD)$ là trung điểm AB, $ABCD$ là hình thoi cạnh 2a, góc $\widehat{ABC}=60^\circ$, BB' tạo với đáy một góc 30°. Tính thể tích hình lăng trụ $ABCDA'B'C'D'$.

(A) $a^3\sqrt{3}$. (B) $\dfrac{2a^3}{3}$. (C) $2a^3$. (D) a^3.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A' trên $mp(ABCD)$. Dễ thấy góc $\measuredangle(BB';mp(ABCD))=\measuredangle(AA';mp(ABCD))=\measuredangle A'AH=30^o$

$AH=a\Rightarrow A'H=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Dễ dàng tính được diện tích đáy: $S_{ABCD}=2.(2a)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}=2a^2\sqrt{3}$.

Suy ra: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2a^3$.

Chọn đáp án C $\square$

HẾT

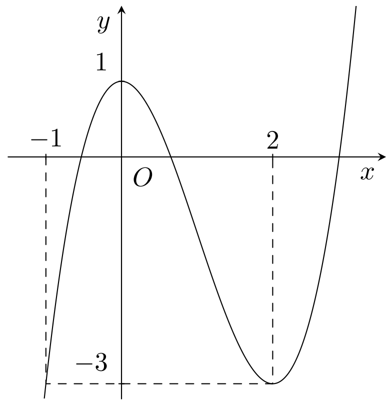
ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. A	3. C	4. C	5. A	6. B	7. A	8. D	9. B	10. B
11. A	12. A	13. A	14. C	15. C	16. C	17. A	18. D	19. B	20. D
21. B	22. D	23. C	24. B	25. B	26. B	27. B	28. B	29. C	30. A
31. D	32. D	33. D	34. C	35. D	36. B	37. A	38. C	39. B	40. A
41. C	42. D	43. C	44. B	45. A	46. B	47. D	48. D	49. D	50. C

55 ĐỀ THI THỬ THPT NHÃ NAM, BẮC GIANG – LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.
Đồ thị hình bên là của hàm số nào sau đây



Ⓐ $y = -\dfrac{x^3}{3} + x^2 + 1$. Ⓑ $y = x^3 + 3x^2 + 1$.
Ⓒ $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. Ⓓ $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Lời giải.
Đồ thị hàm số là đồ thị hàm bậc ba với $a > 0$. Mặt khác, đồ thị đi qua điểm có tọa độ $(2; -3)$ nên đáp án là $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 2. Cho $A(2; 5)$, $B(1; 1)$, $C(3; 3)$ một điểm E nằm trong mặt phẳng tọa độ thỏa mãn $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$. Tọa độ của điểm E là
Ⓐ $(-3; 3)$. Ⓑ $(-3; -3)$. Ⓒ $(3; -3)$. Ⓓ $(-2; -3)$.

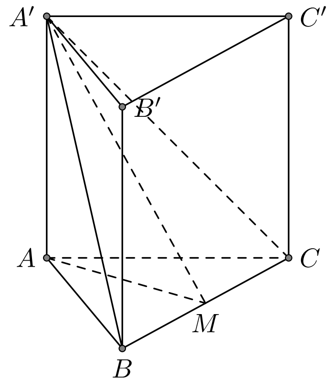
Lời giải.
Gọi $E(x, y)$. Ta có $\overrightarrow{AE} = (x - 2; y - 5)$, $\overrightarrow{AB} = (-1; -4)$, $\overrightarrow{AC} = (1; -2)$.
Do đó $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -3 - 2 \\ y - 5 = -12 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow E(-3; -3)$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 3. Có 20 bông hoa trong đó có 8 bông hoa màu đỏ, 7 bông màu vàng, 5 bông màu trắng. Chọn ngẫu nhiên 4 bông để tạo thành một bó. Có bao nhiêu cách chọn bó hoa có đủ cả ba màu?
Ⓐ 1190. Ⓑ 4760. Ⓒ 2380. Ⓓ 14280.

Lời giải.
Chọn một bó hoa gồm 4 bông hoa trong đó có đủ 3 màu, ta có các trường hợp
a) 1 bông hoa đỏ, 1 bông hoa vàng, 2 bông hoa trắng: có $C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_5^2$.
b) 1 bông hoa đỏ, 2 bông hoa vàng, 1 bông hoa trắng: có $C_8^1 \cdot C_7^2 \cdot C_5^1$.
c) 2 bông hoa đỏ, 1 bông hoa vàng, 1 bông hoa trắng: có $C_8^2 \cdot C_7^1 \cdot C_5^1$.
Suy ra số cách chọn là $C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_5^2 + C_8^1 \cdot C_7^2 \cdot C_5^1 + C_8^2 \cdot C_7^1 \cdot C_5^1 = 2380$.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 4. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết rằng góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là 30° tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 2. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng
Ⓐ $2\sqrt{6}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Ⓒ 2. Ⓓ $\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi độ dài cạnh $AA' = x, x > 0$.
Xét $\Delta A'AM$ vuông tại A ta có $\sin 30^\circ = \dfrac{A'A}{A'M} \Rightarrow A'M = \dfrac{A'A}{\sin 30^\circ} = 2x$.
$\tan 30^\circ = \dfrac{A'A}{AM} \Rightarrow AM = \dfrac{A'A}{\tan 30^\circ} = \dfrac{x}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = x\sqrt{3}$.
Xét tam giác ABC đều có đường cao AM, suy ra $\dfrac{2AM}{\sqrt{3}} = \dfrac{2x\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2x$.
Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot A'M \cdot BC = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}A'M \cdot BC = 2$
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.
Vậy $AA' = 1, AB = 2$. Do đó $V = Bh = S_{ABC} \cdot A'A = 2^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1 = \sqrt{3}$.

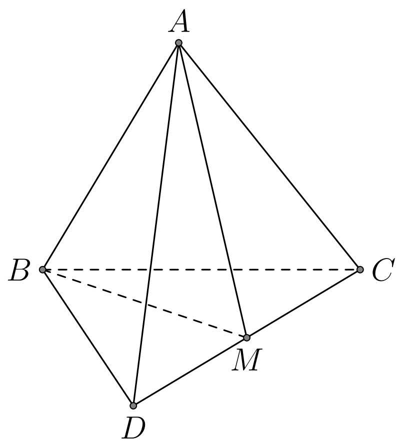
Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho tứ diện đều $ABCD$. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD là

A) 60°. **B) 90°.** C) 45°. D) 30°.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm CD thì $CD \perp (ABM)$ nên $CD \perp AB$.
Do đó $(AB, CD) = 90^\circ$.



Chọn đáp án B □

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{3}{2}x^4 - 2mx^2 + \dfrac{7}{3}$ có cực tiểu mà không có cực đại.

A) $m \geq 0$. **B) $m \leq 0$.** C) $m \geq 1$. D) $m = -1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 6x^3 - 4mx = 2x(3x^2 - 2m)$.
Do đó hàm số trùng phương có cực tiểu mà không có cực đại khi phương trình $y' = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$, tương đương $m \leq 0$.
Chọn đáp án B □

Câu 7. Cho $\vec{v} = (3; 3)$ và đường tròn $(C)\colon x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Ảnh của (C) qua $T_{\vec{v}}$ là (C') có phương trình

A) $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 9$. B) $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 9$.
C) $x^2 + y^2 + 8x + 2y - 4 = 0$. D) $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 4$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R=3$.

Qua phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{v}$, tâm I biến thành $I'=T_{\vec{v}}(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{I'}=4 \\ y_{I'}=1. \end{cases}$

Do phép tịnh tiến là phép dời hình nên đường tròn (C') có tâm $I'(4;1)$ và bán kính $R'=R=3$.

Vậy phương trình đường tròn (C') là $(x-4)^2+(y-1)^2=9$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Tập giá trị của hàm số $y=2\sin^2 x+8\sin x+\dfrac{21}{4}$ là

A $\left[-\dfrac{3}{4};\dfrac{61}{4}\right]$. (B) $\left[\dfrac{11}{4};\dfrac{61}{4}\right]$. (C) $\left[-\dfrac{11}{4};\dfrac{61}{4}\right]$. (D) $\left[\dfrac{3}{4};\dfrac{61}{4}\right]$.

Lời giải.

Ta có $y=2(\sin^2 x+4\sin x+4)-\dfrac{11}{4}=2(\sin x+2)^2-\dfrac{11}{4}$.

Do đó

$$\begin{aligned} & -1\le \sin x\le 1 \\ \Leftrightarrow\ & 1\le \sin x+2\le 3 \\ \Leftrightarrow\ & 1\le (\sin x+2)^2\le 9 \\ \Leftrightarrow\ & 2\le 2(\sin x+2)^2\le 18 \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{3}{4}\le 2(\sin x+2)^2-\frac{11}{4}\le \frac{61}{4}. \end{aligned}$$

Vậy tập giá trị của hàm số là $\left[-\dfrac{3}{4};\dfrac{61}{4}\right]$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Tam giác ABC có $AB=2, AC=1, \widehat{A}=60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC.

(A) $BC=\sqrt{2}$. **B** $BC=1$. (C) $BC=\sqrt{3}$. (D) $BC=2$.

Lời giải.

Theo định lý cosin ta có $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{A}=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+1}$ tại giao điểm với trục hoành cắt trục tung tại điểm có tung độ là

A $y=-2$. (B) $y=1$. (C) $y=2$. (D) $y=-1$.

Lời giải.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với trục hoành nên tọa độ tiếp điểm là $M(-2;0)$.

Ta có $y'=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$, $y'(-2)=-1$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $y=-x-2$.

Giao điểm của tiếp tuyến với trục tung có tọa độ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x=0 \\ y=-x-2 \end{cases} \Rightarrow y=-2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Gọi M,N lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x^2+1$ trên đoạn $[1;2]$. Khi đó tổng $M+N$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ -2. Ⓒ 0. **D** -4.

Lời giải.

Ta có $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin [1;2] \\ x = 2 \in [1;2]. \end{array}\right.$

$f(1) = -1, f(2) = -3$.

Suy ra $N = \min\limits_{[1;2]} f(x) = f(2) = -3, N = \max\limits_{[1;2]} f(x) = f(1) = -1$.

Vậy $M + N = -4$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Tổng các giá trị nguyên m để phương trình $(2m+1)\sin x - (m+2)\cos x = 2m+3$ vô nghiệm là

Ⓐ 9. Ⓑ 11. Ⓒ 12. **D** 10.

Lời giải.

Phương trình đã cho vô nghiệm khi

$$\begin{aligned} & (2m+1)^2 + (m+2)^2 < (2m+3)^2 \\ \Leftrightarrow\ & m^2 - 4m - 4 < 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2 - 2\sqrt{2} < m < 2 + 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Do m nguyên nên $m \in \{0;1;2;3;4\}$, suy ra tổng các giá trị nguyên của m là 10.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{2x - 4}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng

Ⓐ $y = 1$. Ⓑ $x = 1$. **C** $x = 2$. Ⓓ $x = -1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 2x + 3}{2x - 4} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 2x + 3}{2x - 4} = -\infty$. Vậy đường tiệm cận đứng của hàm số là đường thẳng $x = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$, tính giá trị biểu thức $A = y^3 \cdot y''$.

Ⓐ 1. Ⓑ 0. **C** -1. Ⓓ 2.

Lời giải.

Ta có $y = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow y^3 = (2x - x^2)\sqrt{2x - x^2}$.

$y' = \dfrac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$.

$y'' = \dfrac{-\sqrt{2x - x^2} - (1 - x)\dfrac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}}{2x - x^2} = \dfrac{-1}{(2x - x^2)\sqrt{2x - x^2}}$.

Vậy $A = y^3 \cdot y'' = (2x - x^2)\sqrt{2x - x^2} \cdot \dfrac{-1}{(2x - x^2)\sqrt{2x - x^2}} = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Một vật chuyển động với phương trình $s(t) = 4t^2 + t^3$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tìm gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc của vật bằng 11 m/s.

(A) 13 m/s^2. (B) 11 m/s^2. (C) 12 m/s^2. **D** 14 m/s^2.

Lời giải.

Ta có $v(t) = s'(t) = 8t + 3t^2$.

Vận tốc của vật đạt 11 m/s nên $v(t) = 11 \Leftrightarrow 8t + 3t^2 = 11 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1(\text{nhận}) \\ t = -\dfrac{11}{3}(\text{loại}). \end{array}\right.$

Gia tốc $a(t) = v'(t) = 8 + 6t \Rightarrow a(1) = 14$ m/s^2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Cho một hình chóp tam giác đều có cạnh bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Thể tích khối chóp đó là

A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$. (C) $\dfrac{a^3}{12}$. (D) $\dfrac{a^3}{36}$.

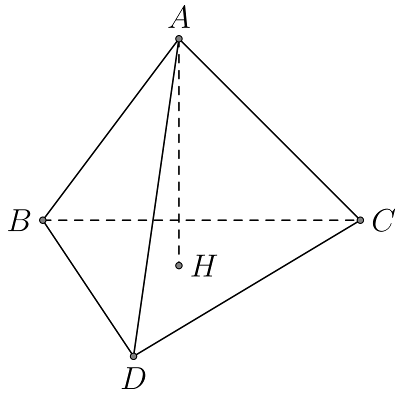
Lời giải.

Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy là $\widehat{SAH} = 60°$.

$AH = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$SH = AH \cdot \tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a$.

Do đó $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 2 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất để 3 quyển được lấy ra thuộc 3 môn khác nhau.

(A) $\dfrac{5}{42}$. (B) $\dfrac{37}{42}$. **C** $\dfrac{2}{7}$. (D) $\dfrac{1}{21}$.

Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu là số cách lấy 3 quyển sách trong 9 quyển sách, $n(\Omega) = \mathrm{C}_9^3$.

Gọi A là biến cố lấy được 3 quyển sách thuộc 3 môn khác nhau.

Ta có $n(A) = \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_2^1 = 24$.

Vậy xác suất $P(A) = \dfrac{24}{\mathrm{C}_9^3} = \dfrac{2}{7}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, biết $AB = 4a, SB = 6a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là V. Tỉ số $\dfrac{4a^3}{3V}$ có giá trị là

A $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$. (B) $\dfrac{3\sqrt{5}}{8}$. (C) $\dfrac{\sqrt{5}}{8}$. (D) $\dfrac{\sqrt{5}}{160}$.

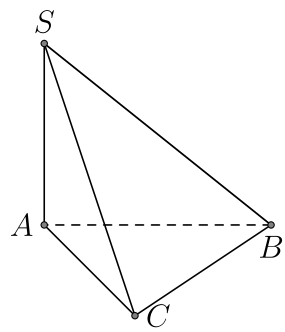
Lời giải.

Ta có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{36a^2 - 16a^2} = 2a\sqrt{5}$

$\Rightarrow AC = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{4a}{\sqrt{2}} = 2a\sqrt{2}$.

Do đó $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC^2 = \dfrac{1}{2}(2a\sqrt{2})^2 = 4a^2$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{ASC} = \dfrac{1}{3} \cdot 2a\sqrt{5} \cdot 4a^2 = \dfrac{8\sqrt{5}}{3}a^3 \Rightarrow \dfrac{4a^3}{3V} = \dfrac{\sqrt{5}}{10}$.



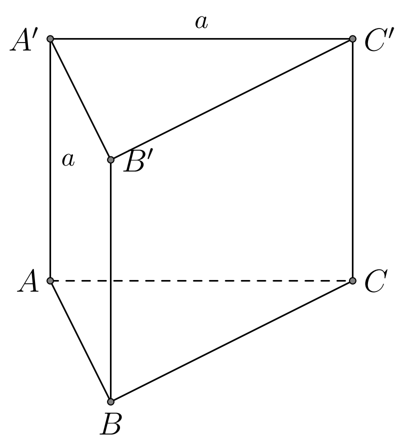
Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Thể tích của khối lăng trụ đứng tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. (B) $\dfrac{a^3}{3}$. **(C)** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V = h \cdot S_{ABC} = a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1\colon 2x + 3y + 1 = 0$ và $d_2\colon x - y - 2 = 0$. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến d_1 thành d_2?

(A) Vô số. (B) 4. (C) 1. **(D)** 0.

Lời giải.

Vì d_1 không song song hoặc trùng với d_2 nên không tồn tại phép tịnh tiến nào biến d_1 thành d_2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{2}x^4 - 3x^3 + \dfrac{3}{2}$ có đồ thị là (C) và điểm $A\left(-\dfrac{27}{16}; -\dfrac{15}{4}\right)$. Biết có ba điểm $M_1(x_1; y_1)$,$M_2(x_2; y_2)$,$M_3(x_3; y_3)$ thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của tại mỗi điểm đó đều đi qua A. Tính $S = x_1 + x_2 + x_3$.

(A) $S = \dfrac{7}{4}$. (B) $S = -3$. **(C)** $S = -\dfrac{5}{4}$. (D) $S = \dfrac{5}{4}$.

Lời giải.

Gọi $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ là tọa độ tiếp điểm. Khi đó phương trình tiếp tuyến tại điểm M_0 là

$$\Delta\colon y = (2x_0^3 - 6x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}x_0^4 - 3x_0^2 + \frac{3}{2}.$$

Vì tiếp tuyến đi qua $A\left(-\dfrac{27}{16};-\dfrac{15}{4}\right)$ nên

$$-\frac{15}{4}=\left(2x_0^3-6x_0\right)\left(-\frac{27}{16}-x_0\right)+\frac{1}{2}x_0^4-3x_0^2+\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=\dfrac{7}{4}\\x_0=-1\\x_0=-2.\end{array}\right.$$

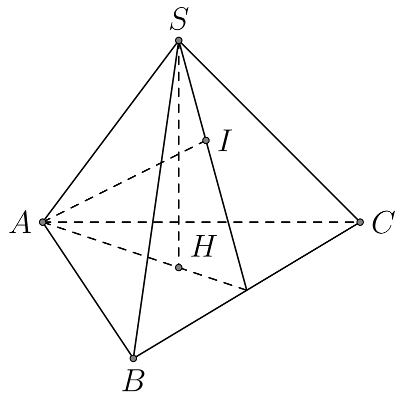
Do đó tổng các hoành độ cần tìm là $S=\dfrac{7}{4}-2-1=-\dfrac{5}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, mặt bên tạo với đáy một góc 60°. Khi đó khoảng cách từ A đến mặt phẳng (ABC) bằng

A $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. B $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. C $a\sqrt{3}$. D $\dfrac{3a}{4}$.

Lời giải.



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC, ta có $SH\perp(ABC)$.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có $BC\perp(SAM)$.

Do đó góc giữa (SBC) và (ABC) bằng $\widehat{SMH}=60^\circ$.

Kẻ $AI\perp SM$ tại I. Khi đó $AI\perp(SBC)$

$\Rightarrow AI=d(A,(SBC))$.

Ta có $HM=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $SH=\dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow SM=\dfrac{HM}{\cos 60^\circ}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

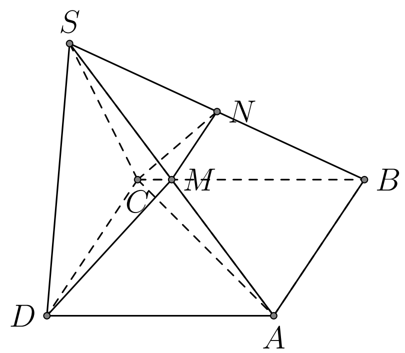
$\Rightarrow AI=\dfrac{SH\cdot AH}{SM}=\dfrac{3a}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M,N theo thứ là trung điểm của SA,SB. Tỉ số thể tích $\dfrac{V_{S.CDMN}}{V_{S.CDAB}}$ là

A $\dfrac{5}{8}$. B $\dfrac{3}{8}$. C $\dfrac{1}{4}$. D $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.



Ta có $V_{S.CDMN}=V_{S.CDM}+V_{S.CMN}$.

Mặt khác $\dfrac{V_{S,CDM}}{V_{S.CDA}}=\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow V_{S.CDM}=\dfrac{1}{2}V_{S.CDA}=\dfrac{1}{4}V_{S.ABCD}$.

$\dfrac{V_{S.CNM}}{V_{S.CBA}}=\dfrac{SN}{SB}\cdot\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow V_{S.CNM}=\dfrac{1}{4}V_{S.CBA}=\dfrac{1}{8}V_{S.ABCD}$.

$V_{S.CDMN}=V_{S.CDM}+V_{S.CMN}$

$=\dfrac{1}{4}V_{S.ABCD}+\dfrac{1}{8}V_{S.ABCD}=\dfrac{3}{8}V_{S.ABCD}$.

Vậy $\dfrac{V_{S.CDMN}}{V_{S.CDAB}}=\dfrac{3}{8}$.

□

Câu 24. Hình lăng trụ có thể có số cạnh là số nào sau đây?

A 3000. **B** 3001. **C** 3005. **D** 3007.

Lời giải.

Hình lăng trụ có đáy là đa giác n cạnh thì sẽ có số cạnh là $3n$. Vậy số cạnh của hình lăng trụ phải là một số chia hết cho 3.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x+1}$. Xác định m để đường thẳng $y = mx + m - 1$ luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh của đồ thị.

A $m < 1$. **B** $m > 0$. **C** $m < 0$. **D** $m = 0$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x+2}{2x+1} = mx + m - 1 \Rightarrow 2mx^2 + 3(m-1)x + m - 3 = 0$ (1).
Để đường thẳng luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh của đồ thị thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < -\dfrac{1}{2} < x_2$ (2).

(1) có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \neq 0 \\ m^2 + 6m + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -3. \end{cases}$

Theo định lý Vi-et, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{3(m-1)}{2m} \\ x_1x_2 = \dfrac{m-3}{2m}. \end{cases}$

Do đó

$$\begin{aligned}
(2) &\Leftrightarrow (2x_1+1)(2x_2+1) < 0 \\
&\Leftrightarrow 4x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 1 < 0 \\
&\Leftrightarrow 4 \cdot \frac{m-3}{2m} + 2 \cdot \left(-\frac{3(m-1)}{2m}\right) + 1 < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{4m - 12 - 6m + 6 + 2m}{2m} < 0 \\
&\Leftrightarrow -\frac{6}{2m} < 0 \\
&\Leftrightarrow m > 0.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 26. Nghiệm của phương trình $\mathrm{P}_2x^2 - \mathrm{P}_3x = 8$ là

A 4 và 6. **B** 2 và 3. **C** -1 và 4. **D** -1 và 5.

Lời giải.

$\mathrm{P}_2x^2 - \mathrm{P}_3x = 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 4. \end{array}\right.$

Chọn đáp án C □

Câu 27. Số hạng chứa x^4 trong khai triển $\left(x^3 + \dfrac{1}{x}\right)^8$ là

A $-\mathrm{C}_8^3x^4$. **B** $\mathrm{C}_8^5x^4$. **C** $-\mathrm{C}_8^5x^4$. **D** $\mathrm{C}_8^4x^4$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển $\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)^8$ là $\mathrm{C}_8^k(x^3)^{8-k}(x^{-1})^k=\mathrm{C}_8^k x^{24-4k}$,$k\in\mathbb{Z},k\leq 8$.

Theo đề bài, ta có $24-4k=4\Leftrightarrow k=5$.

Vậy số hạng chứa x^4 là $\mathrm{C}_8^5x^4$.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt qua một khoảng cách là 300 km. Vận tốc của dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t (giờ) là $E(v)=cv^3t$, trong đó c là hằng số, E được tính bằng jun. Tính vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao ít nhất.

A 6 km/h. **B** 9 km/h. **C** 12 km/h. **D** 15 km/h.

Lời giải.

Vận tốc của cá khi bơi ngược dòng nước là $v-6$ km/h.

Thời gian để cá vượt qua quãng đường 300 km là $t=\dfrac{300}{v-6}$ giờ.

Năng lượng tiêu hao của cá để vượt qua quãng đường đó là $E(v)=cv^3\cdot\dfrac{300}{v-6}$ (jun).

Ta có $E'(v)=600c\cdot\dfrac{v^2(v-9)}{(v-6)^2}\Rightarrow E'(v)=0\Leftrightarrow v=9E(9)=72900c$.

Lập bảng biến thiên ta thấy $E_{\min}=72900c$ khi $v=9$ km/h.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^3-3x^2-9x+m|$ trên đoạn $[-2;4]$ bằng 16. Số phần tử của S là

A 10. **B** 12. **C** 14. **D** 11.

Lời giải.

Xét hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2-9x+m$ có $y'=3x^2-6x-9$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	-2		-1		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$m-2$	$\nearrow$	$m+5$	$\searrow$	$m-27$	$\nearrow$	$m-20$

Giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^3-3x^2-9x+m|$ trên đoạn $[-2;4]$ bằng 16 khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m+5=16\\27-m\leq 16\end{cases}\\ \begin{cases}m-27=16\\m+5\leq 16\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow m=11.$$

Vậy $m = 11$ là giá trị duy nhất thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \dfrac{(n-3)x + n - 2017}{x + m + 3}$ (m, n là tham số) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung làm tiệm cận đứng. Tính tổng $m - 2n$.

A. 0. B. -3. **C.** -9. D. 6.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} = \dfrac{(n-3)x - n - 2017}{x+m+3} = n - 3$, $\lim\limits_{x\to-\infty} = \dfrac{(n-3)x - n - 2017}{x+m+3} = n - 3$.

Do đó để đồ thị hàm số nhận trục Ox làm tiệm cận ngang thì $n - 3 = 0 \Leftrightarrow n = 3$.

Khi đó hàm số đã cho trở thành $y = \dfrac{-2014}{x+m+3}$, ta có $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2014}{x+m+3}$ không xác định khi

$$m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -3.$$

Suy ra $m - 2n = -9$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Bảng biến thiên sau là của hàm số nào?

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	2	↘	$-\infty$

A. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. B. $y = x^4 + 2x^2 + 3$.

C. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$. D. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Lời giải.

Bảng biến thiên của đồ thị hàm số trùng phương với hệ số $a < 0$. Mặt khác điểm $(0;1)$ thuộc đồ thị hàm số nên chọn $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho điểm $A(0;1)$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$. Tìm điểm M thuộc d biết M có hoành độ âm và cách điểm A một khoảng bằng 5.

A. $M(4;4)$. **B.** $M\left(-\dfrac{24}{5}; -\dfrac{2}{5}\right)$. C. $\left[\begin{array}{l} M(4;4) \\ \left(-\dfrac{24}{5}; -\dfrac{2}{5}\right) \end{array}\right.$. D. $M(-4;4)$.

Lời giải.

Vì $M \in d$ nên tọa độ $M(2+2m;3+m)$, $m<-1$.

Ta có $MA=5 \Leftrightarrow (2+2m)^2+(2+m)^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1(\text{loại}) \\ m=-\dfrac{17}{5}(\text{nhận}) \end{array}\right. \Rightarrow M\left(-\dfrac{24}{5};-\dfrac{2}{5}\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Nghiệm của bất phương trình $|2x-1| \geq x+2$ là

A $-\dfrac{1}{3} \leq x \leq 3$. B $\mathbb{R}$. C $\left[\begin{array}{l} x>3 \\ x \leq -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$. D $\left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & |2x-1| \geq x+2 \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ \begin{cases} x \geq -2 \\ (2x-1)^2 \geq (x+2)^2 \end{cases} \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ \begin{cases} x \geq -2 \\ 3x^2-8x-3 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq -\dfrac{1}{3} \text{hoặc } x \geq 3 \end{cases} \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} x \leq -\dfrac{1}{3} \\ x \geq 3. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 34. Cho $y=\sin 3x-\cos 3x-3x+2009$. Giải phương trình $y'=0$

A $\dfrac{k2\pi}{3}$ và $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k2\pi}{3}$. B $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k2\pi}{3}$. C $\dfrac{k2\pi}{3}$. D $k2\pi$ và $\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3\cos 3x + 3\sin 3x - 3$.

$$\begin{aligned}
& y' = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \cos 3x + \sin 3x = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 3x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ 3x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 35. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 + 2(m+1)x + 9m - 5 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt.

A $m \in \left(\frac{5}{9}; 1\right) \cup (6; +\infty)$.
B $m \in (-2; 6)$.
C $m \in (6; +\infty)$.
D $m \in (-2; 1)$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - 7m + 6 > 0 \\ S = -2(m+1) < 0 \\ P = 9m - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 6 \end{array}\right. \\ m > -1 \\ m > \dfrac{5}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{5}{9} < m < 1 \\ m > 6. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án A □

Câu 36. Tìm tập giá trị T của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{9-x}$.

A $T = [1; 9]$.
B $T = [0; 2\sqrt{2}]$.
C $T = (1; 9)$.
D $T = [2\sqrt{2}; 4]$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [1; 9]$.

Ta có $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{9-x}}, \forall x \in (1; 9)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{9-x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{9-x} \Leftrightarrow x = 5 \in (1; 9)$.

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathscr{D}$, có $y(1) = 2\sqrt{2}, y(9) = 2\sqrt{2}, y(5) = 4$.

Do đó tập giá trị của hàm số là $T = [2\sqrt{2}; 4]$.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Cho tam giác ABC với $A(2; -1), B(4; 5), C(-3; 2)$. Phương trình tổng quát của đường cao BH là

A $3x + 5y - 37 = 0$.
B $5x - 3y - 5 = 0$.
C $3x - 5y - 13 = 0$.
D $3x + 5y - 20 = 0$.

Lời giải.

Đường cao BH đi qua B nhận véctơ $\overrightarrow{AC} = (-5;3)$ làm véctơ pháp tuyến. Suy ra phương trình đường cao BH là $-5(x-4)+3(y-5)=0 \Leftrightarrow 5x-3y-5=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Tìm điều kiện của tham số m để $A \cap B$ là một khoảng biết $A=(m;m+2), B(4;7)$.

A $4 \le m < 7$. B $2 < m < 7$. C $2 \le m < 7$. D $2 < m < 4$.

Lời giải.

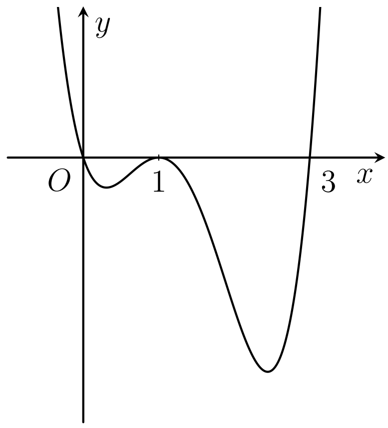
Để $A \cap B = \varnothing$ thì $\left[\begin{array}{l} m+2 \le 4 \\ m \ge 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 2 \\ m \ge 7. \end{array}\right.$

Suy ra, để $A \cap B$ là một khoảng thì $2 < m < 7$.

Chọn đáp án B □

Câu 39.

Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm m để hàm số $y=f(x^2-2m)$ có ba điểm cực trị.



A $m \in \left(-\dfrac{3}{2};0\right]$. B $m \in (3;+\infty)$. C $m \in \left[0;\dfrac{3}{2}\right]$. D $m \in (-\infty;0)$.

Lời giải.

Theo đồ thị ta có $f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>3 \end{array}\right., f'(x)<0 \Leftrightarrow x \in (0;3) \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \left[f\left(x^2-2m\right)\right]' = 2x \cdot f'(x^2-2m)$.

Cho $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2-2m)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2m=0 \\ x^2-2m=1 \\ x^2-2m=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=2m \\ x^2=2m+1 \\ x^2=2m+3. \end{array}\right.$

Để hàm số có 3 điểm cực trị thì phương trình $y'=0$ phải có 3 nghiệm bội lẻ.

Ta thấy $x=0$ là một nghiệm bội lẻ. Dựa vào đồ thị của $y=f'(x)$ ta thấy $x=1$ là nghiệm bội lẻ (không đổi dấu), do đó ta không xét trường hợp $x^2-2m=1$. Suy ra để hàm số có 3 điểm cực trị thì

a) $x^2=2m$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 và $x^2=2m+3$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép bằng $0 \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m \le -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing$.

b) $x^2 = 2m + 3$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 và $x^2 = 2m$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép bằng $0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{3}{2} \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2} < m \leq 0.$

Vậy hàm số có 3 điểm cực trị khi $m \in \left(-\dfrac{3}{2}; 0\right]$. □

Câu 40.

Cho hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$, các điểm C, D thuộc trục Ox sao cho tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật và $CD = \dfrac{2\pi}{3}$. Độ dài đoạn thẳng BC bằng

A $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B** $\dfrac{1}{2}$. **C** 1. **D** $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Cách Vì $CD = \dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow OD = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow x_D = x_A = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow y_A = \dfrac{1}{2}$.

Ta có $AD = \dfrac{1}{2} \Rightarrow BC = \dfrac{1}{2}$.

Cách Gọi $D(x_1; 0), C(x_2; 0) \Rightarrow x_2 - x_1 = \dfrac{2\pi}{3}$.

Tọa độ $A(x_1; \sin x_1), B(x_2; \sin x_2)$.

$AB = CD \Rightarrow \sin x_1 = \sin x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = \pi \Rightarrow x_2 = \dfrac{5\pi}{6}$.

Ta có $C\left(\dfrac{5\pi}{6}; 0\right), B\left(\dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow BC = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{6\sqrt{x+8} - x - 17}$.

A $-\infty$. **B** 0. **C** $+\infty$. **D** $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{6\sqrt{x+8} - x - 17} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x-2)(6\sqrt{x+8} + x + 17)}{-x^2 + 2x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-2)(6\sqrt{x+8} + x + 17)}{-x + 1} = +\infty.$$

Vì $\lim\limits_{x \to 1^+} (x-2)(6\sqrt{x+8} + x + 17) = -36 < 0$ và $1 - x < 0$ khi $x \to 1^+$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{\cot x}{\cot x - m}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ là

A $\left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{array}\right.$. **B** $1 \leq m < 2$. **C** $m \leq 0$. **D** $m > 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{2-m}{(\cot x - m)^2} \cdot (\cot x)' = \dfrac{2-m}{(\cot x - m)^2} \cdot \dfrac{-1}{\sin^2 x}$.

Khi $x \in \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $\cot x \in (0; 1)$ Để hàm số đồng biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ thì

$$\begin{cases} \cot x - m \neq 0 \\ y' > 0 \end{cases}, \forall x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin (0; 1) \\ 2 - m > 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+x^2}-2}{x^2}$.

A $\dfrac{1}{12}$. (B) $\dfrac{1}{4}$. (C) $\dfrac{1}{3}$. (D) $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt[3]{8+x^2}\Rightarrow t^3=8+x^2\Rightarrow x^2=t^3-8$. Khi $x\to 0\Rightarrow t\to 2$.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x^2}-2}{x^2} &= \lim_{t\to 2}\frac{t-2}{t^3-8}\\ = \lim_{t\to 2}\frac{t-2}{(t-2)(t^2+2t+4)} &= \lim_{t\to 2}\frac{1}{t^2+2t+4}\\ = \frac{1}{2^2+2.2+4} &= \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 44. Trong bốn hàm số $y=\cos 2x$, $y=\sin x$, $y=\tan 2x$, $y=\cot 4x$ có mấy hàm số tuần hoàn với chu kì π?

(A) 3. (B) 2. (C) 0. D 1.

Lời giải.

Hàm số $y=\sin(ax+b), y=\cos(ax+b)$ tuần hoàn với chu kỳ $T=\dfrac{2\pi}{|a|}$.

Hàm số $y=\tan(ax+b), y=\cot(ax+b)$ tuần hoàn với chu kỳ $T=\dfrac{\pi}{|a|}$.

Do đó trong các hàm số đã cho, chỉ có hàm số $y=\cos 2x$ tuần hoàn chu kỳ π.

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Một hình hộp chữ nhật (không phải hình lập phương) có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

(A) 4. (B) 2. C 3. (D) 1.

Lời giải.

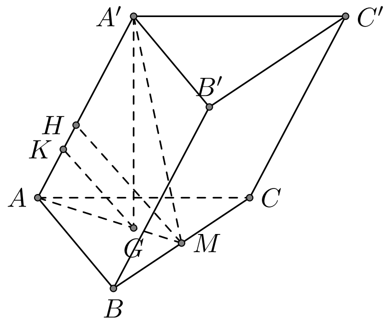
Hình hộp chữ nhật (không phải hình lập phương) có 3 mặt phẳng đối xứng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác (ABC). Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

(A) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. B $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (C) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (D) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Gọi M, G lần lượt là trung điểm của BC và trọng tâm của tam giác ABC.

Do tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, có

$\begin{cases} AM \perp BC \\ A'G \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'M)$.

Trong mặt phẳng $(AA'M)$ kẻ $MH \perp AA'$. Khi đó $MH \perp BC$ vì $BC \perp (AA'M)$.

Vậy MH là đoạn vuông góc chung của AA' và BC nên $MH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Trong tam giác $AA'G$ kẻ $GK \perp AH$ thì $GK \parallel MH \Rightarrow \dfrac{GK}{MH} = \dfrac{AG}{AM} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow GK = \dfrac{2}{3}MH = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Xét tam giác $AA'G$ vuông tại G ta có $\dfrac{1}{GK^2} = \dfrac{1}{A'G^2} + \dfrac{1}{GA^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \dfrac{1}{A'G^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{A'G^2} = \dfrac{36}{3a^2} - \dfrac{9}{3a^2} = \dfrac{9}{a^2} \Leftrightarrow A'G = \dfrac{a}{3}$.

Vậy thể tích của khối lăng trụ đã cho là $V = A'G \cdot S_{ABC} = \dfrac{a}{3}v \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 7x + 3} - 3\sqrt{-2x^2 + 9x - 4}$ là

A. $\left[\dfrac{1}{2}; 4\right]$. B. $[3; +\infty)$. **C.** $[3; 4] \cup \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. D. $[3; 4]$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x^2 - 7x + 3 \geq 0 \\ -2x^2 + 9x - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq \dfrac{1}{2} \\ x \geq 3 \end{array}\right. \\ \dfrac{1}{2} \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ 3 \leq x \leq 4. \end{array}\right.$

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = [3; 4] \cup \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

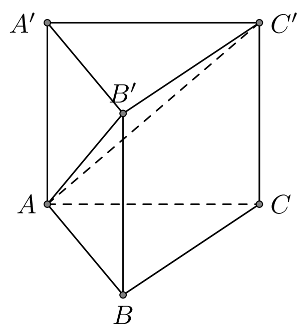
Chọn đáp án C □

Câu 48. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Tính thể tích khối đa diện $ABCB'C'$ theo V.

A. $\dfrac{3V}{4}$. **B.** $\dfrac{2V}{3}$. C. $\dfrac{V}{2}$. D. $\dfrac{V}{4}$.

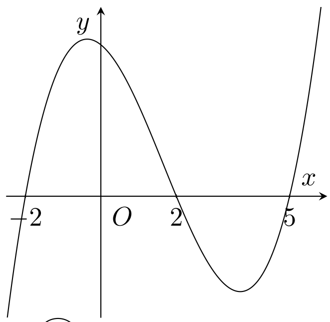
Lời giải.

Ta có $V_{A.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}V \Rightarrow V_{ABCB'C'} = V - \dfrac{1}{3}V = \dfrac{2V}{3}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 49.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



(A) $(-1; +\infty)$. (B) $(0; 2)$. (C) $(-\infty; -1)$. (D) $(1; 3)$.

Lời giải.
Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 2) \cup (5; +\infty)$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (2; 5)$.
Xét hàm số $y = f(3-2x)$ có $y' = -2 \cdot f'(3-2x)$.
Hàm số $y = f(3-2x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow -2 \cdot f'(3-2x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) > 0$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < 3-2x < 2 \\ 3-2x > 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{5}{2} \\ x < -1. \end{array}\right.$$
Vậy hàm số $y = f(3-2x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{2}\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Trong hai hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ và $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$ Hàm số nào nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

(A) Không có hàm số nào cả. (B) Chỉ $g(x)$.
(C) Cả $f(x)$ và $g(x)$. (D) Chỉ $f(x)$.

Lời giải.
Ta có $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ xác định trên $\mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3 + 4x$. Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
Hàm số $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$ xác định trên khoảng $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ và $g'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$ với mọi $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.
Do đó hàm số $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$. □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. B	3. C	4. D	5. B	6. B	7. A	8. A	9. B	10. A
11. D	12. D	13. C	14. C	15. D	16. A	17. C	18. A	19. C	20. D
21. C	22. D	24. A	25. B	26. C	27. B	28. B	29. D	30. C	31. A
32. B	33. D	34. A	35. A	36. D	37. B	38. B	40. B	41. C	42. A
43. A	44. D	45. C	46. B	47. C	48. B	49. C			

56 ĐỀ THI THỬ THPT NGÔ SĨ LIÊN, BẮC GIANG – LẦN 1 (2019)

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x = x_0$ là $f'(x_0)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

B. $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

C. $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

D. $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Lời giải.

Theo định nghĩa đạo hàm, chọn $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Giá trị của $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ bằng

A. -1. B. -2. C. 2. D. 3.

Lời giải.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1}(x + 1) = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Gọi S là tập các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m - 1009$ có đúng một tiếp tuyến song song với trục Ox. Tổng các giá trị của S bằng

A. 2016. B. 2019. C. 2017. D. 2018.

Lời giải.

Tiếp tuyến song song với trục Ox nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng 0.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Với $x = 0$ thì tiếp tuyến $y = m - 1009$.

Với $x = \pm 1$ thì tiế tuyến $y = m - 1010$.

Dễ thấy hai tiếp tuyến trên phân biệt nên để có đúng một tiếp tuyến song song với Ox thì một tiếp tuyến trùng với Ox.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} m - 1009 = 0 \\ m - 1010 = 0 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} m = 1009 \\ m = 1010 \end{array}\right.$. Suy ra $S = \{1009; 1010\}$.

Vậy tổng các giá trị của S bằng 2019.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Giá trị của biểu thức $P = 3^{1-\sqrt{2}} \cdot 3^{2+\sqrt{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}}$ bằng

A. 3. B. 81. C. 1. D. 9.

Lời giải.

Ta có $P = 3^{1-\sqrt{2}} \cdot 3^{2+\sqrt{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 3^{1-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}+1} = 3^4 = 81$.

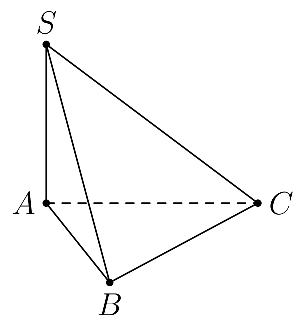
Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (B) $\dfrac{a^3}{2}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D** $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $V = \dfrac{1}{3}SA \cdot \mathrm{S}_{ABC} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{3}\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{4}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa x_0. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **đúng**?

(A) Nếu $f'(x_0) = 0$ thì hàm số đạt cực trị tại $x = x_0$.

(B) Nếu hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_0$ thì $f''(x_0) < 0$.

C Nếu hàm số đạt cực trị tại $x = x_0$ thì $f'(x_0) = 0$.

(D) Hàm số đạt cực trị tại $x = x_0$ khi và chỉ khi $f'(x_0) = 0$.

Lời giải.

Đáp án "Nếu $f'(x_0) = 0$ thì hàm số đạt cực trị tại $x = x_0$" và "Hàm số đạt cực trị tại $x = x_0$ khi và chỉ khi $f'(x_0) = 0$" cùng **sai**. Chẳng hạn xét hàm số $f(x) = x^3$ có $f'(x) = 3x^2, f'(0) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ nhưng hàm số không đạt cực trị tại $x = 0$.

Đáp án "Nếu hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_0$ thì $f''(x_0) < 0$" **sai** vì ít nhất ta cần có $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x_0)$ không xác địnhchứ không phải $f''(x) < 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ là

(A) $y = 2; x = 1$. **B** $y = 1; x = 1$. (C) $y = -2; x = 1$. (D) $y = 1; x = -2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 1$ suy ra đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Do $\lim\limits_{x\to1^+}(x+2) = 3 > 0$; $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1) = 0, x - 1 > 0\,\forall x > 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to1^+} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{x-1} = +\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x(5-2x)^2$ trên $[0; 3]$ là

(A) $\dfrac{250}{3}$. (B) 0. **C** $\dfrac{250}{27}$. (D) $\dfrac{125}{27}$.

Lời giải.

Ta có $y = 4x^3 - 10x^2 + 25x \Rightarrow y' = 12x^2 - 40x + 25$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{2} \in [0;3] \\ x = \dfrac{5}{6} \in [0;3] \end{array}\right.$.

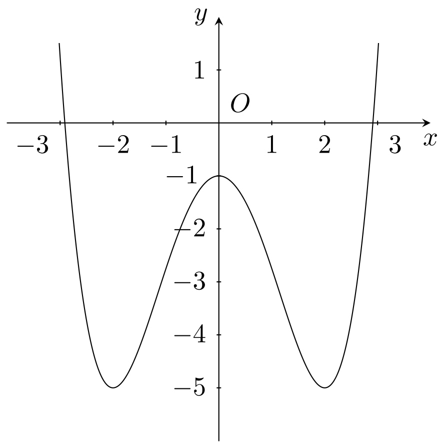
Ta có $y(0) = 0; y\left(\dfrac{5}{2}\right) = 0; y\left(\dfrac{5}{6}\right) = \dfrac{250}{27}; y(3) = 3$.

Vậy $\max\limits_{[0;3]} y = y\left(\dfrac{5}{6}\right) = \dfrac{250}{27}$.

Chọn đáp án C □

Câu 9.

Đồ thị trong hình vẽ bên là của hàm số



A $y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 - 1$. **B** $y = \dfrac{1}{4}x^4 - x^2 - 1$.

C $y = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 1$. **D** $y = -\dfrac{1}{4}x^4 + x^2 - 1$.

Lời giải.

Nhìn vào đồ thị có dạng là đồ thị hàm số trùng phương có hệ số $a > 0$, có điểm cực đại $(0; -1)$ và điểm cực tiểu $(-2; -5)$ và $(2; -5)$.

Vì $a > 0$ nên loại đáp án $y = -\dfrac{1}{4}x^4 + x^2 - 1$.

Thay điểm cực tiểu vào các đáp án còn lại ta được kết quả.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Biến đổi $P = \sqrt{x^{\frac{4}{3}}\sqrt[6]{x^4}}$ với $x > 0$ thành dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ, ta được

A $P = x^{\frac{4}{9}}$. **B** $P = x^{\frac{4}{3}}$. **C** $P = x$. **D** $P = x^2$.

Lời giải.

Ta có $P = \sqrt{x^{\frac{4}{3}}\sqrt[6]{x^4}} = \sqrt{x^{\frac{4}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}}} = \sqrt{x^2} = x$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung có phương trình

A $y = -3x + 1$. **B** $y = -3x - 2$. **C** $y = 3x + 13$. **D** $y = 3x - 2$.

Lời giải.

Gọi M là giao điểm của (C) với trục tung, suy ra $M(0; -2)$.

Ta có $y' = -3x^2 \Rightarrow y'(0) = 3$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm M là $y = y'(0)(x - 0) - 2 = 3x - 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Số các giá trị nguyên của m để phương trình $\sqrt{x^2 - 2x - m - 1} = \sqrt{2x - 1}$ có hai nghiệm phân biệt là

(A) 0. (B) 3. (C) 1. **D** 2.

Lời giải.

Phương trình tương đương với $\begin{cases} 2x-1=0 \\ x^2-2x-m-1=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ x^2-4x-m=0 \end{cases}$.

Để phương trình $\sqrt{x^2-2x-m-1}=\sqrt{2x-1}$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2-4x-m=0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa $x_2 > x_1 \geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1+x_2 > 1 \\ \left(x_1-\dfrac{1}{2}\right)\left(x_2-\dfrac{1}{2}\right) \geq 0 \end{cases}$

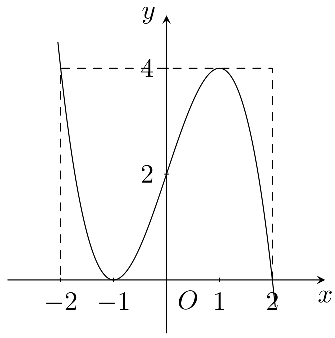
$\Leftrightarrow \begin{cases} 4+m>0 \\ 4>0 \\ x_1x_2-\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)+\dfrac{1}{4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+m>0 \\ -m-\dfrac{1}{2}4+\dfrac{1}{4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m \leq -\dfrac{7}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm

(A) $x=1$. (B) $x=-2$. (C) $x=2$. **D** $x=-1$.



Lời giải.

Căn cứ vào đồ thị, ta có

$f'(x)<0,\ \forall x \in (-2;-1)$ và $f'(x)>0,\ \forall x \in (-1,0)$ suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$.

$f'(x)>0,\ \forall x \in (0;1)$ và $f'(x)<0,\ \forall x \in (1;2)$ suy ra hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Chọn đáp án (D) □

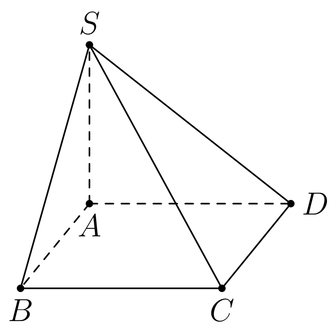
Câu 14. Cho khối chóp $S.ABCD$ cạnh bên SA vuông góc với đáy, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a, AD=2a, SA=3a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

(A) $6a^3$. (B) $\dfrac{a^3}{3}$. **C** $2a^3$. (D) a^3.

Lời giải.

Theo giả thiết $ABCD$ là hình chữ nhật nên thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V=\frac{1}{3}SA \cdot AB \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot a \cdot 2a = 2a^3.$$



Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Phương trình $2\cos x - 1 = 0$ có tập nghiệm là

A $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B $\left\{\pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C $\left\{\dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}; \dfrac{\pi}{6} + 12\pi,\ l \in \mathbb{Z}\right\}$.

D $\left\{-\dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}; -\dfrac{\pi}{6} + 12\pi,\ l \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

$$2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})\,.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $(1; +\infty)$?

A $y = x^4 + 2x^2 + 1$.

B $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$.

C $y = \dfrac{x^3}{2} - x^2 - 3x + 1$.

D $y = \sqrt{x - 1}$.

Lời giải.

Ta có: $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \Rightarrow y' = -3x^2 + 6x - 3$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'			$-$		
y	$+\infty$				$-\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 6x + \dfrac{3}{4}$.

A Đồng biến trên $(-2; 3)$.

B Nghịch biến trên $(-2; 3)$.

C Nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.

D Đồng biến trên $(-2; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			$\dfrac{97}{12}$				$+\infty$
	$-\infty$				$-\dfrac{51}{4}$		

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên $(-2;3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{2x-1}$ có đồ thị (C). Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm $M(0;-1)$ bằng

(A) 4. (B) 1. (C) 0. **D** -4.

Lời giải.

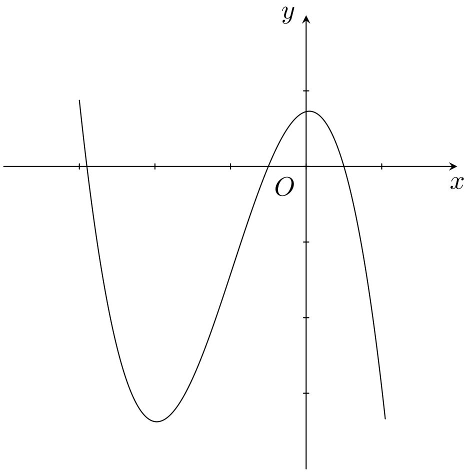
Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Ta có: $y' = -\dfrac{4}{(2x-1)^2}$.

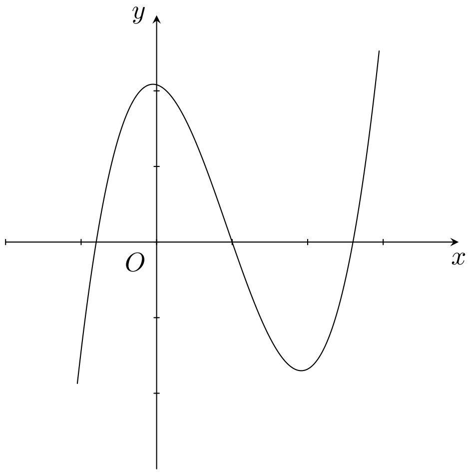
Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm $M(0;-1)$ là $y'(0) = -4$.

Chọn đáp án (D) □

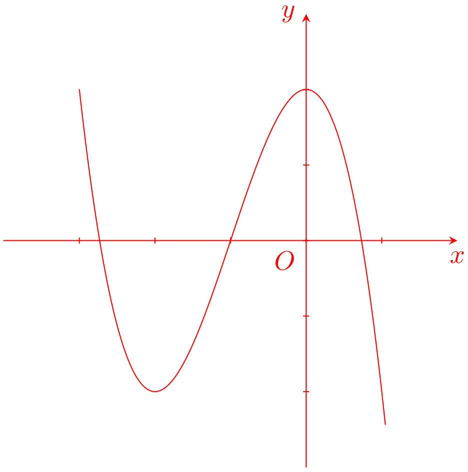
Câu 19. Đồ thị hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 2$ có dạng



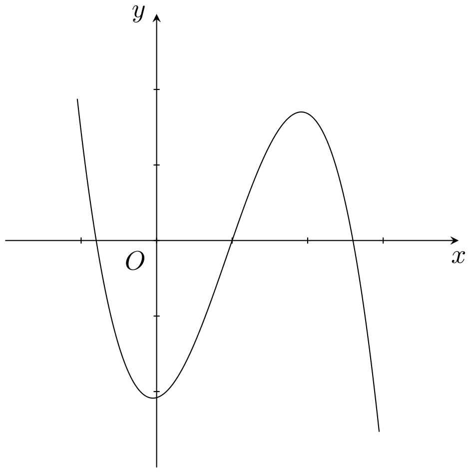
(A) .



(B) .



C .



(D) .

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$ nên chọn hình đồ thị có nhánh bên phải hướng xuống.

Chọn đồ thị đi qua điểm $(0;2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ xác định trên tập $\mathscr{D} = [0;1]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A Hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất trên $\mathscr{D}$.

(B) Hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất trên $\mathscr{D}$.
(C) Hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất trên $\mathscr{D}$.
(D) Hàm số $f(x)$ không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $\mathscr{D}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \sqrt{x - x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \in [0;1]$.

Ta có $f(0) = 0; f(1) = 0; f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $\max\limits_{[0;1]} y = \dfrac{1}{2}$ khi $x = \dfrac{1}{2}$, $\min\limits_{[0;1]} y = 0$ khi $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Giá trị của $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3+n}{n-1}$ bằng

A 1. (B) 3. (C) -1. (D) 3.

Lời giải.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3+n}{n-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n\left(\dfrac{3}{n}+1\right)}{n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\dfrac{3}{n}+1\right)}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)} = 1.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hai điểm $M(1;0)$ và $N(0;2)$. Đường thẳng đi qua $A\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ và song song với đường thẳng MN có phương trình là

A Không tồn tại đường thẳng như đề bài yêu cầu.
(B) $2x + y - 2 = 0$.
(C) $4x + y - 3 = 0$.
(D) $2x - 4y + 3 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (-1;2)$.

Đường thẳng (d) đi qua điểm $A\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ nhận $\overrightarrow{MN} = (-1;2)$ làm vec-tơ chỉ phương nên

$$(d)\colon 2\left(x - \frac{1}{2}\right) + y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2 = 0 \quad (1).$$

Thử lại thay tọa độ M vào (1) thì nghiệm đúng, suy ra loại (1).

Vậy không tồn tại đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm $I(1;1)$ và đường thẳng $(d): 3x+4y-2 = 0$. Đường tròn tâm I và tiếp xúc với đường thẳng (d) có phương trình

(A) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$. (B) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$.
C $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$. (D) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Đường tròn tâm I và tiếp xúc với đường thẳng (d) có bán kính $R = \mathrm{d}(I,d) = \dfrac{|3\cdot 1 + 4\cdot 1 - 2|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 1$.
Vậy đường tròn tâm có phương trình là $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.
Chọn đáp án C □

Câu 24. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Một tiếp tuyến của đồ thị hàm số vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{45}x + 2018$ có phương trình

A $y = 45x - 83$. B $y = 45x + 173$. C $y = -45x + 83$. **D** $y = 45x - 173$.

Lời giải.

Ký hiệu d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số và $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.
Ta có d vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{45}x + 2018$ nên $y'(x_0) = \dfrac{-1}{-\frac{1}{45}} = 45$.
Suy ra $3x_0^2 - 6x_0 = 45 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 5 \\ x_0 = -3 \end{array}\right.$.
Với $x_0 = 5 \Rightarrow y_0 = 52 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến của đồ thị là $y = 45(x-5) + 52 = 45x - 173$.
Với $x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = -52 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến của đồ thị là $y = 45(x+3) - 52 = 45x + 83$.
Chọn đáp án D □

Câu 25. Cho cấp số cộng $1, 4, 7, \ldots$. Số hạng thứ 100 của cấp số cộng là

A 297. B 301. C 295. **D** 298.

Lời giải.

Cấp số cộng $1, 4, 7, \ldots$ có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 3$.
Chọn đáp án D □

Câu 26. Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 - 2x + 1$. Hàm số có điểm cực đại tại $x = -1$, khi đó giá trị của tham số m thỏa mãn

A $m \in (-1; 0)$. **B** $m \in (0; 1)$. C $m \in (-3; -1)$. D $m \in (1; 3)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
$y = x^3 + 3mx^2 - 2x + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 6mx - 2$, $y'' = 6x + 6m$.
Hàm số có điểm cực đại tại $x = -1 \Rightarrow y'(-1) = 0 \Rightarrow 1 - 6m = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{6}$.
Với $m = \dfrac{1}{6} \Rightarrow \begin{cases} y'(-1) = 0 \\ y''(-1) < 0 \end{cases} \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.
Chọn đáp án B □

Câu 27. Giá trị của tổng $S = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{2018}$ bằng

A $S = \dfrac{3^{2019} - 1}{2}$. B $S = \dfrac{3^{2018} - 1}{2}$. C $S = \dfrac{3^{2020} - 1}{2}$. D $S = \dfrac{3^{2018} - 1}{2}$.

Lời giải.

Ta thấy S là tổng của 2019 số hạng đầu tiên của cấp số nhân với số hạng đầu là $u_1 = 1$, công bội $q = 3$.
Áp dụng công thức tính tổng của cấp số nhân ta có $S = 1 \cdot \dfrac{1 - 3^{2019}}{1 - 3} = \dfrac{3^{2019} - 1}{2}$.
Chọn đáp án A □

Câu 28. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+1}{bx-2}$ có đường tiệm cận đứng là $x = 2$ và đường tiệm cận ngang là $y = 3$. Tính giá trị của $a + b$?

Ⓐ 1. Ⓑ 5. **C** 4. Ⓓ 0.

Lời giải.

Với $b \neq 0$ và $b \neq -2a$, đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+1}{bx-2}$ nhận đường thẳng $x = \dfrac{2}{b}$ làm tiệm cận đứng.

Theo đề bài $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị nên $2 = \dfrac{2}{b} \Leftrightarrow b = 1$.

Với $b \neq 0$ đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+1}{bx-2}$ nhận đường thẳng $y = \dfrac{a}{b}$ làm tiệm cận ngang.

Theo đề bài $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nên $\dfrac{a}{b} = 3 \Leftrightarrow a = 3b \Leftrightarrow a = 3$.

Vậy $a + b = 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Cho số thực $a > 1$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}}{a} > 1$. **B** $a^{\frac{1}{3}} > \sqrt{a}$. Ⓒ $\dfrac{1}{a^{2018}} > \dfrac{1}{a^{2019}}$. Ⓓ $a^{-\sqrt{2}} > \dfrac{1}{a^{\sqrt{3}}}$.

Lời giải.

Áp dụng tính chất $\begin{cases} a > 1 \\ m > n \end{cases} \Rightarrow a^m > a^n$.

Với $\begin{cases} a > 1 \\ \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a^{\frac{1}{3}} < a^{\frac{1}{2}} \Rightarrow a^{\frac{1}{3}} > \sqrt{a}$ là mệnh đề sai.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Giá trị của biểu thức $\log_2 5 \cdot \log_5 64$ bằng

A 6. Ⓑ 4. Ⓒ 5. Ⓓ 2.

Lời giải.

$\log_2 5 \cdot \log_5 64 = \log_2 64 = \log_2 2^6 = 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Hình bát diện đều có số cạnh là

Ⓐ 6. Ⓑ 10. **C** 12. Ⓓ 8.

Lời giải.

Hình bát diện đều có 12 cạnh.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Bạn Đức có 6 quyển sách Văn khác nhau và 10 quyển sách Toán khác nhau. Hỏi bạn Đức có bao nhiêu cách chọn ra 3 quyển sách trong đó có đúng 2 quyển cùng loại.

Ⓐ 560. **B** 420. Ⓒ 270. Ⓓ 150.

Lời giải.

TH1. 3 quyển được chọn có 2 quyển sách Văn, 1 quyển sách Toán.

Chọn 2 quyển sách Văn trong 6 quyển Văn khác nhau có C_6^2 cách.

Chọn 1 quyển sách Toán trong 10 quyển Toán khác nhau có C_{10}^1 cách.

Áp dụng quy tắc nhân ta có $\mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{C}_{10}^1 = 150$.

TH2. 3 quyển sách được chọn có 2 quyển sách Toán, 1 quyển sách Văn.
Chọn 1 quyển sách Văn trong 6 quyển Văn khác nhau có C_6^1 cách.
Chọn 2 quyển sách Toán trong 10 quyển Toán khác nhau có C_{10}^2 cách.
Áp dụng quy tắc nhân ta có $C_6^1 \cdot C_{10}^2 = 270$.

Vậy số cách chọn ra 3 quyển sách trong đó có đúng 2 quyển cùng loại là $150 + 270 = 420$.
Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho hàm số $y = \dfrac{mx+4}{x+m}$. Giá trị của m để hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ là?

A $m > 2$. **B** $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right.$. **C** $m \leq -2$. **D** $m < -2$.

Lời giải.
Điều kiện xác định của hàm số $x \neq m$.
Đạo hàm $y' = \dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$.
Hàm số đã cho đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$y' > 0,\ \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ -m \notin (2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right. \\ -m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right. \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2.$$

Vậy khi $m > 2$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $(2;+\infty)$.
Chọn đáp án A □

Câu 34. Tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0;3\pi)$ của phương trình $\sin 2x - 2\cos 2x + 2\sin x = 2\cos x + 4$ là

A 3π. **B** π. **C** 2π. **D** $\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & 2\sin x\cos x - 2\cos x - 2\left(1 - 2\sin^2 x\right) + 2\sin x - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow & 2\cos x(\sin x - 1) + 4\sin^2 x + 2\sin x - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow & 2\cos x(\sin x - 1) + (\sin x - 1)(4\sin x + 6) = 0 \\ \Leftrightarrow & (\sin x - 1)(2\cos x + 4\sin x + 6) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ 2\cos x + 4\sin x = -6. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Phương trình $2\cos x + 4\sin x = -6$ vô nghiệm vì $a^2 + b^2 = 20 < 36 = c^2$.
$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

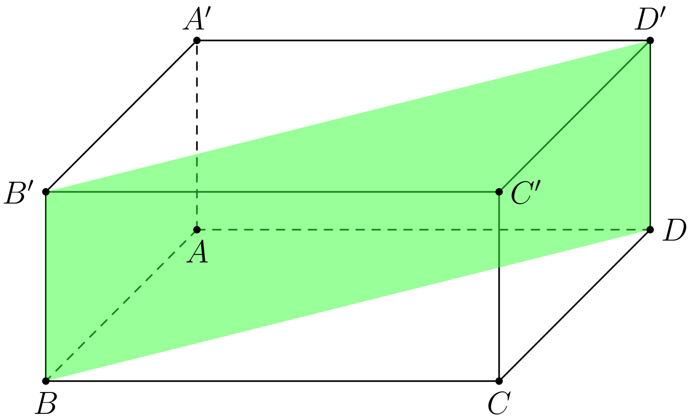
Lại có $x \in (0;3\pi) \Rightarrow \begin{cases} 0 < \dfrac{\pi}{2} + k2\pi < 3\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow k \in (0;1) \Leftrightarrow x \in \left\{\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi\right\}$.

Tổng các nghiệm là $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} + 2\pi = 3\pi$.
Chọn đáp án A □

Câu 35. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(BDD'B')$ chia khối lập phương thành

A Hai khối lăng trụ tam giác.
B Hai khối tứ diện.
C Hai khối lăng trụ tứ giác.
D Hai khối chóp tứ giác.

Lời giải.



Chọn đáp án A

Câu 36. Cho hàm số $y = x\sin x$, số nghiệm thuộc $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ của phương trình $y'' + y = 1$ là

A 2. **B** 0. **C** 1. **D** 3.

Lời giải.

Ta có $y' = \sin x + x\cos x$, $y'' = \cos x + \cos x - x\sin x = 2\cos x - x\sin x$.

Do đó $y'' + y = 1 \Leftrightarrow 2\cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Trường hợp 1. Với $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Do $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ nên $-\frac{\pi}{2} \le x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \le 2\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \le k \le \frac{5}{6}$.

Suy ra $k = 0$ ta được $x = \frac{\pi}{3}$.

Trường hợp 2. Với $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Suy ra $k = 0$ ta được $x = -\frac{\pi}{3}$, $k = 1$ ta được $x = \frac{5\pi}{3}$.

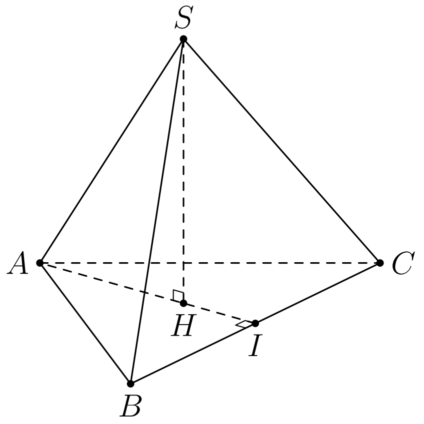
Vậy có 3 nghiệm thuộc $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ của phương trình $y'' + y = 1$ là $x = \frac{\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{5\pi}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và đáy bằng 30°. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$. **B** $\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$. **C** $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **D** $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC). Khối chóp $S.ABC$ đều nên H là trọng tâm của tam giác ABC.
Xét tam giác ABI ta có

$$AI = \sqrt{AB^2 - BI^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vì H là trọng tâm của tam giác ABC nên

$$AH = \frac{2}{3}AI = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Lại có AH là hình chiếu vuông góc của SA lên (ABC). Suy ra $\widehat{(SA,(ABC))} = \widehat{(SA,AH)} = 30°$.
Xét tam giác SAH ta có

$$SH = \tan 30° \cdot AH = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{3}.$$

Diện tích tam giác ABC là

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}SH = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{a}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}.$$

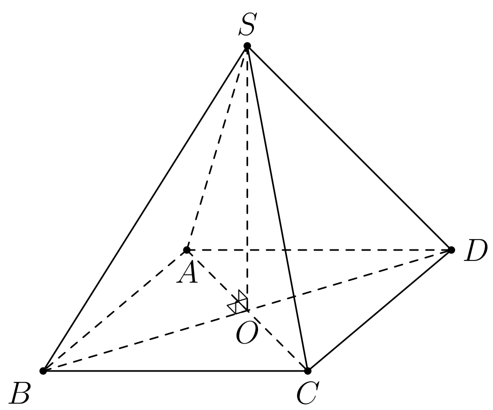
Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a, đường cao SO. Biết $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = a^2$.
Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.



Chọn đáp án A □

Câu 39. Các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{mx^2 - 3mx + 2}}$ có bốn đường tiệm cận phân biệt là

A $m > 0$. **B** $m > \frac{9}{8}$. **C** $m > \frac{8}{9}$. **D** $m > \frac{8}{9}$, $m \neq 1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{mx^2-3mx+2}}$ có 4 đường tiệm cận phân biệt $\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang phân biệt.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{mx^2-3mx+2}}$ có 2 đường tiệm cận ngang phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\exists \lim\limits_{x\to-\infty} y, \exists \lim\limits_{x\to+\infty} y\\ \lim\limits_{x\to-\infty} y \neq \lim\limits_{x\to+\infty} y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} y \neq \lim\limits_{x\to+\infty} y\end{cases}.$$

Với $m>0$ ta có

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{m-\frac{3m}{x}+\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{m-\frac{3m}{x}+\frac{2}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{m-\frac{3m}{x}+\frac{2}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{m-\frac{3m}{x}+\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{m-\frac{3m}{x}+\frac{2}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)}{-\sqrt{m-\frac{3m}{x}+\frac{2}{x^2}}}=\frac{-1}{\sqrt{m}}.$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} y \neq \lim\limits_{x\to+\infty} y$ luôn đúng $\Rightarrow m>0 \quad (1)$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{mx^2-3mx+2}}$ có 2 đường tiệm cận đứng phân biệt

$\Leftrightarrow mx^2-3mx+2=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0\\ \Delta>0\\ x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0\\ 9m^2-8m>0\\ m-3m+2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0\\ \left[\begin{array}{l} m<0\\ m>\frac{8}{9}\end{array}\right.\\ m\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0\\ m>\frac{8}{9}\\ m\neq 1\end{cases} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta được $\begin{cases} m>\frac{8}{9}\\ m\neq 1\end{cases}$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Với mọi giá trị dương của m phương trình $\sqrt{x^2-m^2}=x-m$ luôn có số nghiệm là

A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Lời giải.

Với mọi giá trị dương của m, ta có

$$\sqrt{x^2-m^2}=x-m \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq m\\ x^2-m^2=(x-m)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq m\\ 2xm=2m^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq m\\ x=m\end{cases} \Leftrightarrow x=m.$$

Vậy phương trình luôn có 1 nghiệm $x = m$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Giá trị của $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x^2}$ bằng

(A) 1. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) -1. (D) 0.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2+1-1}{x^2\left(\sqrt{x^3+x^2+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{\sqrt{x^3+x^2+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Lớp 12A có 10 học sinh giỏi trong đó có 1 nam và 9 nữ. Lớp 12B có 8 học sinh giỏi trong đó có 6 nam và 2 nữ. Cần chọn mỗi lớp 2 học sinh giỏi đi dực Đại hội Thi đua. Hai có bao nhiêu cách chọn sao cho trong 4 học sinh được chọn có 2 nam và 2 nữ?

(A) 1155. (B) 3060. (C) 648. (D) 594.

Lời giải.

Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. Chọn ở lớp 12A: 1 học sinh giỏi là nam, 1 học sinh giỏi là nữ; chọn ở lớp 12B: 1 học sinh giỏi là nam, 1 học sinh giỏi là nữ.
Số cách chọn $\mathrm{C}_1^1 \times \mathrm{C}_9^1 \times \mathrm{C}_6^1 \times \mathrm{C}_2^1 = 108$ (cách).

Trường hợp 2. Chọn ở lớp 12A: 2 học sinh giỏi là nữ; chọn ở lớp 12B: 2 học sinh giỏi là nữ.
Số cách chọn $\mathrm{C}_9^2 \times \mathrm{C}_6^2 = 540$ (cách).

Vậy có $108 + 540 = 648$ (cách).

Chọn đáp án (C) □

Câu 43. Gọi I là tâm của đường tròn $(C)\colon (x-1)^2+(y-1)^2=4$. Số các giá trị nguyên của m để đường thẳng $x+y-m=0$ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất là

(A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

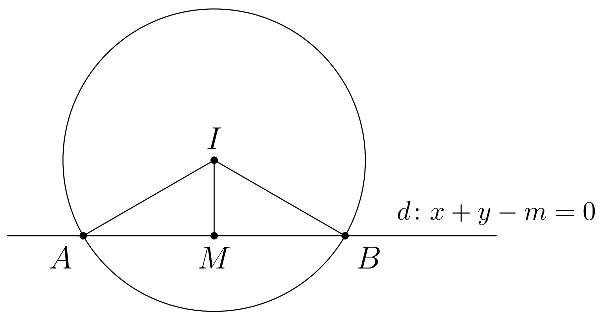
Gọi $d\colon x+y-m=0$ và (C) có tâm $I(1;1)$.

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi

$0 \le \mathrm{d}(I,d) < 2 \Leftrightarrow 0 \le \dfrac{|2-m|}{\sqrt{2}} < 2$

$\Leftrightarrow 2-2\sqrt{2} < m < 2+2\sqrt{2} \quad (*)$.

Xét $\triangle IAB$ có



$S_{IAB} = \dfrac{1}{2} \cdot IA \cdot IB \cdot \sin AIB = \dfrac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \sin AIB \le \dfrac{1}{2}R^2$.

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\sin AIB = 1 \Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ \Rightarrow AB = 2\sqrt{2} \Rightarrow \mathrm{d}(I,d) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|2-m|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=4 \end{array}\right.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Gọi Δ là tiếp tuyến tại điểm $M\left(x_0; y_0\right), x_0 < 0$ thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{x+1}$ sao cho khoảng cách từ $I(-1;1)$ đến Δ đạt giá trị lớn nhất, khi đó x_0, y_0 bằng

A -2. **B** 2. **C** -1. **D** 0.

Lời giải.

Gọi $\left(a; \dfrac{a+2}{a+1}\right) \in (C)\ (a < 0, a \neq 1)$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại A là:

$(\Delta)\colon y = y'(a)(x-a) + \dfrac{a+2}{a+1} \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{(a+1)^2}(x-a) + \dfrac{a+2}{a+1} \Rightarrow x + (a+1)^2 y - (a^2 + 4a + 2) = 0.$

$\mathrm{d}(I;d) = \dfrac{|-2a-2|}{\sqrt{(a+1)^4+1}} = \dfrac{2\,|a+1|}{\sqrt{(a+1)^4+1}}$

$\Rightarrow \mathrm{d}^2 = \dfrac{4(a+1)^2}{(a+1)^4+1} = \dfrac{4}{(a+1)^2 + \dfrac{1}{(a+1)^2}} \overset{\text{AM-GM}}{\leq} 2.$

$\Rightarrow \max \mathrm{d} = \sqrt{2}.$

Dấu "=" xảy ra khi $(a+1)^4 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a = 0 & \text{(loại)} \\ a = -2 & \text{(nhận)} \end{array}\right. \Rightarrow M(-2;0).$

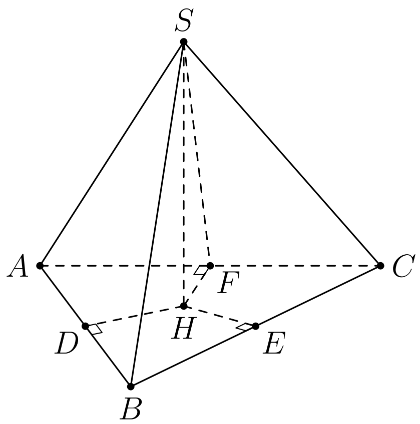
Suy ra $x_0 = -2; y_0 = 0 \Rightarrow x_0 \cdot y_0 = 0.$

Chọn đáp án D □

Câu 45. Cho khối chóp $S.ABC$ có $AB = 5$ cm, $BC = 4$ cm, $CA = 7$ cm. Các mặt bên tạo với mặt phẳng đáy (ABC) một góc 30°. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A $\dfrac{4\sqrt{2}}{3} cm^3$. **B** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3} cm^3$. **C** $\dfrac{4\sqrt{6}}{3} cm^3$. **D** $\dfrac{4\sqrt{3}}{4} cm^3$.

Lời giải.



Gọi H là chân đường cao của khối chóp $S.ABC$.

Lần lượt gọi hình chiếu của H lên các cạnh AB, BC, CA là D, E, F.

Khi đó ta có góc giữa các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCA)$ với mặt đáy (ABC) lần lượt là $\widehat{SDH}, \widehat{SHE}, \widehat{SFH}$

$\Rightarrow \widehat{SDH} = \widehat{SDH} = \widehat{SEH} = \widehat{SFH} = 30^\circ.$

Từ đó suy ra $DH = HE = HF$.

Suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có $p = \dfrac{AB+BC+CA}{2} = 8$ (cm).

$\Rightarrow S_{ABC} = \sqrt{p(p-5)(p-4)(p-7)} = 4\sqrt{6}.$

Mà $S_{ABC} = pr \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (cm).

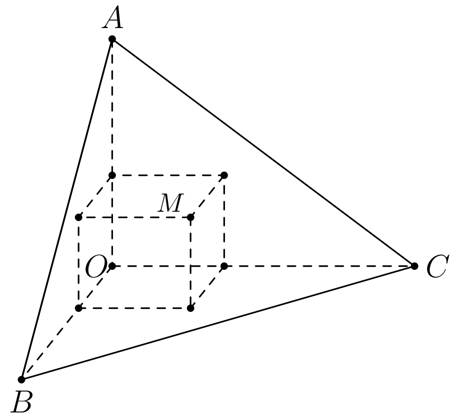
Do đó $SH = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (cm).

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt{2}}{2} 4\sqrt{6} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ (cm^3).

Chọn đáp án B □

Câu 46.

Có một khối gỗ dạng hình chóp $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = 3$ cm, $OB = 6$ cm, $OC = 12$ cm. Trên mặt (ABC) người ta đánh dấu một điểm M sau đó người ta cắt gọt khối gỗ để thu được một hình hộp chữ nhật có OM là một đường chéo đồng thời hình hộp có 3 mặt nằm trên 3 mặt của tứ diện (xem hình vẽ). Thể tích lớn nhất của khối gỗ hình hộp chữ nhật bằng



A 8 cm^3. **B** 24 cm^3. **C** 12 cm^3. **D** 36 cm^3.

Lời giải.

Gọi khoảng cách từ điểm M đến các mặt bên $(OAB), (OBC), (OCA)$ lần lượt là a, b, c.

Khi đó $V_{O.ABC} = V_{M.OAB} + V_{M.OBC} + V_{M.OAC}$.

Hay $\frac{1}{6}\cdot 3\cdot 6\cdot 12 = \frac{1}{3}\cdot a\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6 + \frac{1}{3}\cdot b\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 12 + \frac{1}{3}\cdot c\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 12$

$\Rightarrow 12 = a + 4b + 2c$.

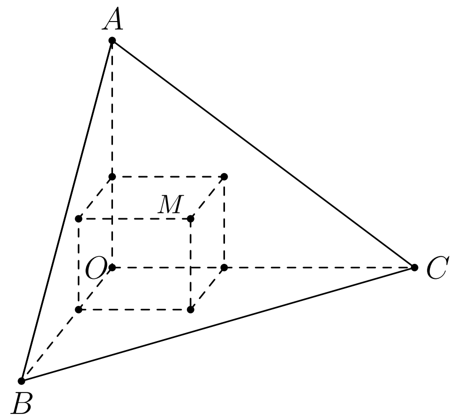
Thể tích khối gỗ hình hộp chữ nhật theo đề bài là $V = abc$.

Ta có $abc = \frac{1}{8}a\cdot 4b\cdot 2c \le \frac{1}{8}\left(\frac{a+4b+2c}{3}\right)^3 = \frac{1}{8}\cdot\frac{12^3}{27} = 8$

(Theo bất đẳng thức Cô-si).

Vậy $V = abc$ đạt giá trị lớn nhất bằng 8 cm^3.

Khi $a = 4b = 2c \Leftrightarrow a = 4$ cm, $b = 1$ cm, $c = 2$ cm.



Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho khối chóp tam giác $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), đáy là tam giác ABC cân tại A, độ dài trung tuyến AD bằng a, cạnh bên SB tạo với đáy góc $30°$ và tạo với mặt phẳng (SAD) góc $30°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A $\frac{a^3}{3}$. **B** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D** $\frac{a^3}{6}$.

Lời giải.

Đặt $SA = x > 0$. Ta có $BD \perp (SAD) \Rightarrow \widehat{BSD} = 30°, \widehat{SBA} = 30°$.

$AB = SA\cdot\tan 30° = x\sqrt{3}$.

$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2x$.

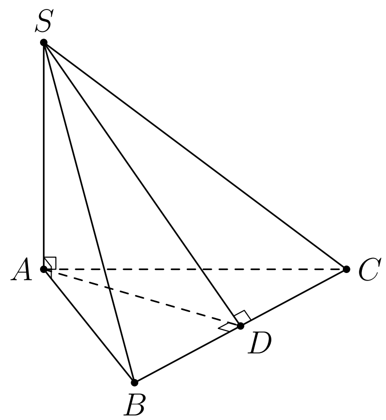
$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{3x^2 - a^2}$.

Xét tam giác vuông SBD, ta có

$\sin BSD = \frac{BD}{SB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{3x^2 - a^2} = 2x \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó $SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}, BC = 2BD = 2\sqrt{3\cdot\frac{a^2}{2} - a^2} = a\sqrt{2}$.

Vậy $V = \frac{1}{3}\cdot SA\cdot S_{ABC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot 12\cdot a\cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3}{6}$.



Chọn đáp án D □

Câu 48. Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2 + \dfrac{3}{2}$. Giá trị thực của m để phương trình $\left|2x^4 - 4x^2 + \dfrac{3}{2}\right| = m^2 - m + \dfrac{1}{2}$ có đúng 8 nghiệm thực phân biệt là

(A) $0 \leq m \leq 1$. (B) $0 < m < 1$. (C) $0 < m \leq 1$. (D) $0 \leq m < 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 8x^3 - 8x,\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên của hàm số sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy, phương trình $\left|2x^4 - 4x^3 + \dfrac{2}{3}\right| = m^2 - m + \dfrac{1}{2}$ có đúng 8 nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m + \dfrac{1}{2} > 0 \\ m^2 - m + \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Giá trị lớn nhất cả hàm số $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x} - \sqrt{(x-1)(5-x)} + 5$ là

(A) Không tồn tại. (B) 0. (C) 7. (D) $3 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Điều kiện $1 \leq x \leq 5$.

Đặt $t = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x},\ t \geq 0$.

Ta có $t^2 = 4 + 2\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{5-x} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(5-x)} = \dfrac{t^2 - 4}{2}$.

Do $\sqrt{(x-1)(5-x)} \geq 0,\ \forall x \in [1;5]$ nên $\dfrac{t^2-4}{2} \geq 0 \Rightarrow t \geq 2$.

$t = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5 \end{array}\right. \Rightarrow t \in \left[2; 2\sqrt{2}\right]$.

Khi đó ta có hàm số $g(t) = t - \dfrac{t^2-4}{2} + 5 = \dfrac{-t^2 + 2t + 14}{2}$ với $t \in \left[2; 2\sqrt{2}\right]$.

Ta có $g'(t) = -t = 1 < 0,\ \forall t \in \left[2; 2\sqrt{2}\right]$ suy ra $\max\limits_{t \in \left[2;2\sqrt{2}\right]} g(t) = g(2) = 7$.

Vậy $\max\limits_{x \in [1;5]} f(x) = 7 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(5-x)} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x)$, với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f\left(x^3 - 3x^2 + m\right)$ có 8 điểm cực trị là

(A) 1. (B) 4. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = (3x^2 - 6x)(x^3 - 3x^2 + m - 1)(x^3 - 3x^2 + m)(x^3 - 3x62 + m - 2)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, x = 2 \\ x^3 - 3x^2 = -2 \quad (1) \\ x^3 - 3x^2 = -m + 1 \quad (2) \\ x^3 - 3x^2 = -m + 2 \quad (3) \end{array}\right..$$

Ta thấy (1), (2), (3) không có nghiệm chung và $(x^3 - 3x^2 + m - 1)^2 \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Để hàm số $g(x)$ có 8 cực trị thì $(1), (3)$ đều có ba nghiệm phân biệt khác 0 và 2.

Xét hàm số $h(x) = x^3 - 3x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$ có $h'(x) = 3x^2 - 6x$.

$$h(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$			0				$+\infty$
		↗		↘		↗	
	$-\infty$				-4		

Từ bảng biến thiên để (1), (3) đều có ba nghiệm phân biệt khác 0 và 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < 0 \\ -4 < -m + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 4 \\ 2 < m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m < 4.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 3$.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. C	3. B	4. B	5. D	6. C	7. B	8. C	9. C	10. C
11. D	12. D	13. D	14. C	15. A	16. B	17. B	18. D	19. C	20. A
21. A	22. A	23. C	24. D	25. D	26. B	27. A	28. C	29. B	30. A
31. C	32. B	33. A	34. A	35. A	36. D	37. D	38. A	39. D	40. B
41. B	42. C	43. C	44. D	45. B	46. A	47. D	48. B	49. C	50. A

57 ĐỀ THI THỬ SGD LẠNG SƠN, 2017-2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Đồ thị hàm số $y = x^4 - x^3 - 3$ cắt trục tung tại mấy điểm?

A. 1 điểm. B. 2 điểm. C. 4 điểm. D. 3 điểm.

Lời giải.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm duy nhất có tọa độ $(0; -3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-3; 2; -1)$. Tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua gốc tọa độ O là

A. $A'(3; -2; 1)$. B. $A'(3; 2; -1)$. C. $A'(3; -2; -1)$. D. $A'(3; 2; 1)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} x_{A'} = 2x_O - x_A = 3 \\ y_{A'} = 2y_O - y_A = -2 \\ z_{A'} = 2z_O - z_A = 1 \end{cases}$. Vậy $A'(3; -2; 1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 1)$ là

A. 7. B. 5. C. 6. D. 4.

Lời giải.

$\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Tổng độ dài l của tất cả các cạnh của một hình lập phương cạnh a.

A. $l = 6a$. B. $l = 12a$. C. $l = 6$. D. $l = 12$.

Lời giải.

Hình lập phương có tất cả 12 cạnh nên $l = 12a$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Tìm nguyên hàm $I = \displaystyle\int \left(\mathrm{e}^{-x} + 2x\right) \mathrm{d}x$.

A. $I = -\mathrm{e}^{-x} + x^2 + C$. B. $I = \mathrm{e}^{-x} + x^2 + C$.

C. $I = -\mathrm{e}^{-x} - x^2 + C$. D. $I = \mathrm{e}^{-x} - x^2 + C$.

Lời giải.

$I = \displaystyle\int \left(\mathrm{e}^{-x} + 2x\right) \mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x} + x^2 + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Cho $0 < a \neq 1$ và $x > 0$, $y > 0$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

A. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$. B. $\log_a(xy) = \log_a x \cdot \log_a y$.

C. $\log_a(x + y) = \log_a x + \log_a y$. D. $\log_a(x + y) = \log_a x \cdot \log_a y$.

Lời giải.

Mệnh đề đúng là $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$. Tọa độ tâm I và bán kính R của (S) là

(A) $I(-1;2;1)$, $R=9$.
(B) $I(1;-2;-1)$, $R=9$.
C $I(1;-2;-1)$, $R=3$.
(D) $I(-1;2;1)$, $R=3$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-1)$, bán kính $R=3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+3}$ là

A 2. (B) 3. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Có $\lim\limits_{x\to(-3)^{\pm}}\dfrac{2x-1}{x+3}=\mp\infty$ nên $x=-3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số. Lại có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-1}{x+3}=2$ nên $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Xác định số điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$.

(A) 3. (B) 6. **C** 2. (D) 1.

Lời giải.

Hàm số có hai điểm cực tiểu là $x_1=-1$ và $x_2=1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Có hai kiểu mặt đồng hồ đeo tay (vuông, tròn) và có ba kiểu dây (kim loại, da, nhựa). Hỏi có bao nhiêu cách chọn một chiếc đồng hồ có một mặt và một dây?

(A) 8. (B) 7. (C) 5. **D** 6.

Lời giải.

Theo quy tắc nhân, số cách chọn ra một chiếc đồng hồ là $2\cdot 3=6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Số phức $z=2-3i$ có số phức liên hợp là

(A) $3-2i$. **B** $2+3i$. (C) $-2+3i$. (D) $3+2i$.

Lời giải.

$\overline{z}=\overline{2-3i}=2+3i$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x$, biết $F(0) = 4$. Tìm $F(x)$.

A $F(x) = \mathrm{e}^x + 2$. **B** $F(x) = \mathrm{e}^x + 3$. **C** $F(x) = \mathrm{e}^x + 4$. **D** $F(x) = \mathrm{e}^x + 1$.

Lời giải.

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \mathrm{e}^x$ nên $F(x) = \mathrm{e}^x + C$. Lại có $F(0) = 4$ nên $C = 3$ hay $F(x) = \mathrm{e}^x + 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa $A'C'$ và $D'C$ là

A $120°$. **B** $45°$. **C** $60°$. **D** $90°$.

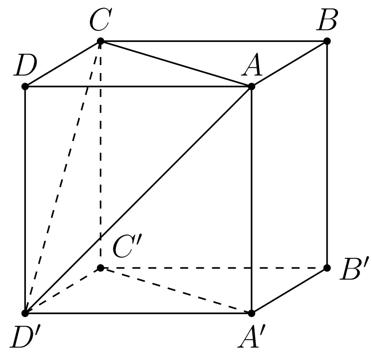
Lời giải.

Ta có $A'C' \parallel AC$ nên

$$(A'C', D'C) = (D'C, AC).$$

Dễ thấy tam giác ACD' là tam giác đều nên $\widehat{D'CA} = 60°$, do đó

$$(A'C', D'C) = (D'C, AC) = 60°.$$



Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho mặt cầu (S) tâm I bán kính R. Một mặt phẳng cắt mặt cầu (S) và cách tâm I một khoảng bằng $\frac{R}{2}$. Bán kính của đường tròn do mặt phẳng cắt mặt cầu tạo nên là

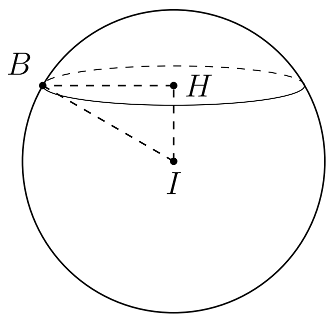
A $\frac{3R}{2}$. **B** $\frac{R\sqrt{3}}{4}$. **C** $\frac{R}{2}$. **D** $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng cắt mặt cầu, B là một điểm bất kì trên đường tròn giao tuyến. Khi đó

$$HB^2 = IB^2 - IH^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3R^2}{4}.$$

Vậy bán kính đường tròn giao tuyến là $HB = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án D □

Câu 15. Gieo một con súc sắc cân đối, đồng chất. Tính xác suất xuất hiện mặt có số chấm là chẵn.

A $\frac{1}{2}$. **B** $\frac{3}{5}$. **C** $\frac{1}{6}$. **D** $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Dễ thấy không gian mẫu là $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Gọi A là biến cố xuất hiện mặt có số chấm là chẵn, khi đó $A = \{2; 4; 6\}$. Vậy xác suất cần tìm là $\frac{|\Omega|}{|A|} = \frac{1}{2}$.

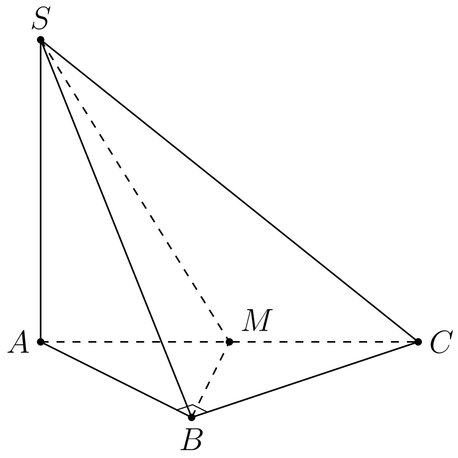
Chọn đáp án A □

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của AC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A $(SAB) \perp (SBC)$. **B** $(SBC) \perp (SAC)$. **C** $BM \perp AC$. **D** $(SBM) \perp (SAC)$.

Lời giải.

- Ta có $BC \perp AB$ và $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$, suy ra $(SAB) \perp (SBC)$.
- Do ABC là tam giác cân tại B nên $BM \perp AC$.
- Ta có $BM \perp SA$, $BM \perp AC$ nên $BM \perp (SAC)$, suy ra $(SBM) \perp (SAC)$.



Chọn đáp án **B** □

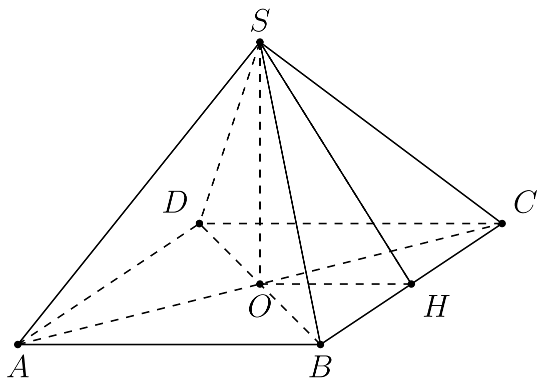
Câu 17. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 4, cạnh bên bằng 3. Gọi φ là góc giữa cạnh bên và mặt đáy. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $\varphi = 45°$. **B** $\varphi = 60°$. **C** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$. **D** $\tan\varphi = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Ta có $OA = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = 1$, suy ra

$$\varphi = (SA, (ABCD)) = (SA, AO) = \widehat{SAO}$$
$$\Rightarrow \tan\varphi = \frac{SO}{AO} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$



Chọn đáp án **D** □

Câu 18. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = 2x$.

A $S = \dfrac{5}{3}$ (đvdt). **B** $S = \dfrac{14}{3}$ (đvdt). **C** $S = \dfrac{20}{3}$ (đvdt). **D** $S = \dfrac{4}{3}$ (đvdt).

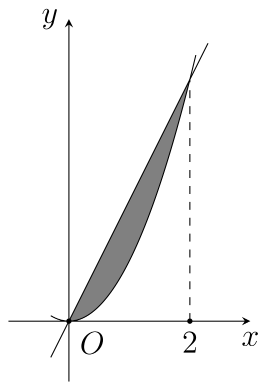
Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2 = 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^2 \left(2x - x^2\right)\, \mathrm{d}x = \frac{4}{3}.$$



Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Nếu $\left(2-\sqrt{3}\right)^{a-1} < 2+\sqrt{3}$ thì

(A) $a \geq 0$. (B) $a \leq 1$. **C** $a > 0$. (D) $a < 1$.

Lời giải.

Ta có

$$2+\sqrt{3} > \left(2-\sqrt{3}\right)^{a-1} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{1-a}.$$

Do $2+\sqrt{3} > 1$ nên $1 > 1-a$ hay $a > 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Tìm hệ số của x^2 trong khai triển $\left(2x+\dfrac{1}{x^2}\right)^5$.

A 80. (B) $\mathrm{C}_5^3 \cdot 2^2$. (C) C_5^1. (D) 40.

Lời giải.

Ta có

$$\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^5 = \sum_{k=0}^{5} \mathrm{C}_5^k (2x)^{5-k} \cdot \frac{1}{x^{2k}} = \sum_{k=0}^{5} \mathrm{C}_5^k 2^{5-k} x^{5-3k}.$$

Số hạng chứa x^2 là $\mathrm{C}_5^1 2^4 x^2$. Vậy hệ số của x^2 là $\mathrm{C}_5^1 \cdot 2^4 = 80$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $f(x) = m$ có đúng hai nghiệm.

(A) $m > 0$. (B) $m \geq -1$.

C $m > 0$ hoặc $m = -1$. (D) $m \geq 0$ hoặc $m = -1$.

Lời giải.

Phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hai điểm phân biệt. Dựa vào bảng biến thiên, ta tìm được $m > 0$ hoặc $m = -1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4x^3 - 3x^4$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

(A) -7. (B) -24. (C) 0. **D** -16.

Lời giải.

Ta có

$$y' = 12x^2 - 12x^3,$$
$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Do đó $\min\limits_{[-1;2]} y = \min\{y(-1); y(0); y(1); y(2)\}$, mà $y(-1) = -7$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y(2) = -16$ nên $\min\limits_{[-1;2]} y = -16$.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Cho số phức z thỏa mãn $\overline{z} = \dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^3}{1+i}$. Tính mô-đun của số phức $\overline{z} - iz$.

A $8\sqrt{2}$. B 8. C 16. D -8.

Lời giải.

Ta có $\overline{z} = -4 + 4i$, suy ra $z = -4 - 4i$. Vậy $|\overline{z} - iz| = |-8 + 8i| = 8\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Rút gọn biểu thức $A = a^{2\log_{\sqrt{a}} 3}$ với $0 < a \neq 1$ ta được kết quả là

A 9. B 6. C 3^4. D 3^8.

Lời giải.

$A = a^{2\log_{\sqrt{a}} 3} = a^{4\log_a 3} = a^{\log_a 3^4} = 3^4$.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;2;-3)$ và $B(7;0;-1)$?

A $\dfrac{x-7}{6} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$. B $\dfrac{x+7}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-1}{4}$.

C $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$. D $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+3}{1}$.

Lời giải.

Đường thẳng AB nhận véc-tơ $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (3;-1;1)$ làm véc-tơ chỉ phương. Do đó phương trình chính tắc của đường thẳng AB là $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+3}{1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ nghịch biến trên khoảng nào?

A $(1;+\infty)$. B $(-\infty;0)$. C $(2;+\infty)$. D $(-\infty;1)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D} = (-\infty;0] \cup [2;+\infty)$. Ta có $y' = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$, nên $y' < 0$ với mọi $x \in (-\infty;0)$. Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q)\colon x + 2y - 3z - 15 = 0$ và điểm $E(1;2;-3)$. Mặt phẳng (P) đi qua E và song song với (Q) có phương trình là

A $(P)\colon x + 2y - 3z - 14 = 0$. B $(P)\colon 2x - y + 5z + 15 = 0$.

(C) $(P)\colon x + 2y - 3z - 15 = 0$. (D) $(P)\colon 2x - y + 5z - 15 = 0$.

Lời giải.

Vì (P) song song với (Q) nên phương trình của (P) có dạng $x + 2y - 3z + c = 0$ $(c \neq -15)$. Do $E \in (P)$ nên

$$1 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-3) + c = 0 \Rightarrow c = -14.$$

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là $x + 2y - 3z - 14 = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{\sqrt[3]{a^8} \cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^5 \cdot \sqrt[4]{a^{-3}}}$ $(a > 0)$, ta được kết quả $A = a^{\frac{m}{n}}$, trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $3m^2 - 2n = 0$. **B** $m^2 + n^2 = 25$. (C) $m^2 - n^2 = 25$. (D) $2m^2 + n^2 = 10$.

Lời giải.

Ta có $A = \dfrac{a^{\frac{8}{3}} \cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^5 \cdot a^{-\frac{3}{4}}} = a^{\frac{3}{4}}$. Suy ra $m = 3$, $n = 4$ và $m^2 + n^2 = 25$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 3; -2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất, mặt phẳng (P) cắt trục Oy tại điểm B. Tọa độ của điểm B là

A $B\left(0; \dfrac{14}{3}; 0\right)$. (B) $B\,(0; 14; 0)$. (C) $B\,(0; -14; 0)$. (D) $B\left(0; -\dfrac{14}{3}; 0\right)$.

Lời giải.

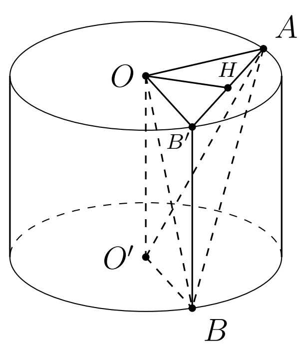
Dễ thấy, $\mathrm{d}(O; (P)) \leq OM$, nên mặt phẳng (P) đi qua M, cách O một khoảng lớn nhất khi (P) nhận $\overrightarrow{OM} = (1; 3; -2)$ làm véc-tơ pháp tuyến. Suy ra (P) có phương trình $x + 3y - 2z - 14 = 0$. Do đó giao điểm của (P) với trục Oy là $B\left(0; \dfrac{14}{3}; 0\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Cho một hình trụ có bán kính đáy bằng R và có chiều cao bằng $R\sqrt{3}$. Hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho khoảng cách giữa đường thẳng AB và trục của hình trụ bằng $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa AB và trục của hình trụ bằng

A $30°$. (B) $55°$. (C) $60°$. (D) $45°$.

Lời giải.



Giả sử hình trụ có hai đáy là hai đường tròn tâm O, O'; A nằm trên đường tròn tâm O, B nằm trên đường tròn tâm O'. Gọi B' là hình chiếu của B trên đường tròn O, H là trung điểm của AB'. Do $BB' \parallel OO'$ nên $BB' \perp OH$, suy ra $OH \perp (ABB')$, do đó

$$OH = d(O, (ABB')) = d(OO', AB) = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra

$$AB' = 2HA = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = R.$$

Ta có $(OO', AB) = (BB', AB) = \widehat{ABB'}$, mà

$$\tan \widehat{ABB'} = \frac{AB'}{BB'} = \frac{R}{R\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

nên $(OO', AB) = \widehat{ABB'} = 30^\circ$.
Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho f, g là hai hàm số liên tục trên $[1; 3]$, đồng thời thỏa mãn $\int\limits_1^3 [f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x = 10$ và $\int\limits_1^3 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 6$. Tính $\int\limits_1^3 [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A 6. **B** 8. **C** 7. **D** 9.

Lời giải.
Đặt $a = \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$, $b = \int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x$. Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} a + 3b = 10 \\ 2a - b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2. \end{cases}$$

Vậy $\int\limits_1^3 [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = a + b = 6$.
Chọn đáp án A □

Câu 32. Hàm số $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ có tập giá trị là $T = [a; b]$. Giá trị của $b - a$ là

A 4. **B** $\frac{1}{4}$. **C** $\frac{1}{2}$. **D** 1.

Lời giải.
Ta có

$$y' = \sin^4 x + \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Do $0 \le \sin^2 2x \le 1$ nên $\frac{1}{2} \le y \le 1$, hay $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$. Vậy $b - a = \frac{1}{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 2018(x-1)^{2017}(x-2)^{2018}(x-3)^{2019}$. Tìm số điểm cực trị của $f(x)$.

A 2. **B** 1. **C** 3. **D** 0.

Lời giải.
Đạo hàm $f'(x)$ có đổi dấu khi đi qua các điểm $x_1 = 1$, $x = 3$ nên hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.
Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thoả mãn $(1 - 3i)z + (2 + 3i)\overline{z} = 12 - i$. Tính $P = a^2 - b^3$.

(A) -3. (B) -1. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}12 - i &= (1-3i)z + (2+3i)\overline{z} = (1-3i)(a+bi) + (2+3i)(a-bi)\\ &= (3a+6b) - bi.\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{cases}3a+6b = 12\\ b = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = 2\\ b = 1.\end{cases}$$

Vậy $P = a^2 - b^3 = 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m|$ với $m \in [-5; 7]$ là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số có đúng ba điểm cực trị?

(A) 13. (B) 12. (C) 10. (D) 8.

Lời giải.

Đặt $g(x) = x^3 - 3x^2$, ta có

$$g'(x) = 3x^2 - 6x,$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 0\\ x = 2.\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $f(x)$ có đúng ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $g(x) = -m$ có đúng một nghiệm bội lẻ. Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g(x)$, điều này tương đương $-m \geq 0$ hoặc $-m \leq -4$. Do đó $m \leq 0$ hoặc $m \geq 4$. Từ đó có tất cả 10 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\ln(u_3 - 4) = \ln(2u_n - 4n + 3)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Tính tổng $S_{100} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{100}$.

(A) 4950. (B) 10000. (C) 9999. (D) 10100.

Lời giải.

Theo giả thiết, ta có

$$2u_n - 4n + 3 = u_3 - 4,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$
$$\Rightarrow u_n = \frac{u_3 + 4n - 7}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Thay $n = 3$, ta được $u_3 = 5$, do đó $u_n = 2n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy

$$S_{100} = \sum_{n=1}^{100} u_n = \sum_{n=1}^{100} (2n-1) = \frac{100(1+199)}{2} = 10000.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Tìm số thực $m > 1$ thỏa mãn $\int\limits_1^m (\ln x + 1)\, \mathrm{d}x = m$.

(A) $m = \mathrm{e} + 1$. (B) $m = 2\mathrm{e}$. (C) $m = \mathrm{e}^2$. **(D)** $m = \mathrm{e}$.

Lời giải.

Ta có

$$m = \int\limits_1^m (\ln x + 1)\, \mathrm{d}x = x(\ln x + 1)\Big|_1^m - \int\limits_1^m \mathrm{d}x$$
$$= m(\ln m + 1) - 1 - \left(x\Big|_1^m\right) = m \ln m.$$

Do $m > 1$ nên $m = \mathrm{e}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x + y + z - 3 = 0$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-8}{1} = \dfrac{z+1}{-3}$ và điểm $M(1;-1;0)$. Điểm N thuộc (P) sao cho MN song song với d. Độ dài MN là

(A) 3. (B) $\sqrt{59}$. **(C)** $\sqrt{11}$. (D) 5.

Lời giải.

Đường thẳng đi qua M song song với d có phương trình $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-3}$. Khi đó tọa độ của N là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-3} \\ x + y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = 3. \end{cases}$$

Vậy $MN = \sqrt{11}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[a;b]$ và $f(a) = f(b)$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\int\limits_a^b f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}$. (B) $\int\limits_a^b f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\, \mathrm{d}x = 1$.

C $\displaystyle\int_a^b f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(b-a)$.

D $\displaystyle\int_a^b f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = 0$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_a^b f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{e}^f\,\mathrm{d}f = e^f\Big|_a^b = \mathrm{e}^{f(b)} - \mathrm{e}^{f(a)} = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - (m-3)x + 2018$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì

A $m \le 4$. **B** $m \le 3$. **C** $m \le 2018$. **D** $m \le 9$.

Lời giải.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' = x^2 - (m-3) \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Điều này tương đương $m - 3 \le 0$ hay $m \le 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-3}{x^2 - 2mx + 1}$ có hai đường tiệm cận đứng.

A $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

B $m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

C $m \ne \dfrac{5}{3}$.

D $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \setminus \left\{\dfrac{5}{3}\right\}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $x^2 - 2mx + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt, khác 3. Điều này tương đương

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ 3^2 - 2m \cdot 3 + 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 > 0 \\ m \ne \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right. \\ m \ne \dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

Chọn đáp án D □

Câu 42. Cho $f(x) = a\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + bx^{2017} + 2018$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết rằng $f(\log(\log \mathrm{e})) = 2019$. Tính giá trị của $f(\log(\ln 10))$.

A 2019. **B** 2020. **C** 2018. **D** 2017.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= a\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + bx^{2017} + 2018 \\ &= a\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} + bx^{2017} + 2018 \\ &= -a\ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) + bx^{2017} + 2018 \\ &= -a\ln\left(\sqrt{(-x)^2+1} + (-x)\right) - b(-x)^{2017} + 2018 \\ &= 4036 - f(-x), \end{aligned}$$

mà $\log(\ln 10) = \log \dfrac{1}{\log \mathrm{e}} = -\log(\log \mathrm{e})$ nên

$$f\left(\log\left(\ln 10\right)\right) = 4036 - f\left(\log\left(\log \mathrm{e}\right)\right) = 4036 - 2019 = 2017.$$

Chọn đáp án D □

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - (4m-2)x + 2my + (4m+2)z - 7 = 0$. Giá trị nhỏ nhất của thể tích khối cầu là

A $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\pi$. **B** 972π. **C** 36π. **D** 300π.

Lời giải.

Khối cầu đã cho có bán kính là

$$R = \sqrt{(2m-1)^2 + m^2 + (2m+1)^2 + 7} = \sqrt{9m^2+9} \geq 3.$$

Đẳng thức xảy ra khi $m = 0$. Do đó giá trị nhỏ nhất của bán kính khối cầu đã cho là 3. Vậy giá trị nhỏ nhất của thể tích khối cầu là $\dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = 36\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 1 - i| = 2$ và $z_2 = iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z_1 - z_2|$.

A $m = \sqrt{2} - 1$. **B** $m = 2$. **C** $m = 2\sqrt{2} - 2$. **D** $m = 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1 và z_2. Do $z_2 = iz_1$ nên B là ảnh của A qua phép quay tâm O góc 90°. Khi đó, tam giác OAB vuông cân tại O nên

$$|z_1 - z_2| = AB = \sqrt{2}OA = \sqrt{2}|z_1|.$$

Ta có

$$\begin{aligned} & 2 = |z_1 + 1 - i| \leq |z_1| + |1 - i| = |z_1| + \sqrt{2} \\ \Rightarrow \quad & |z_1| \geq 2 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $|z_1| = \left(\sqrt{2} - 1\right) - \left(\sqrt{2} - 1\right) i$.

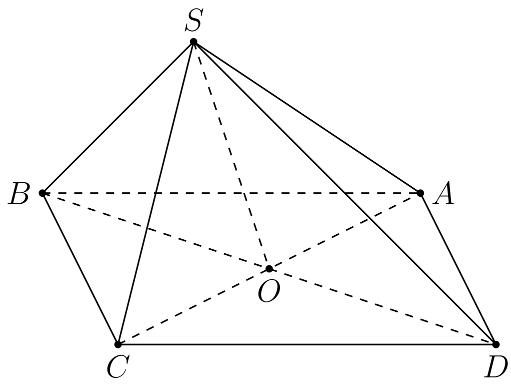
Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ là $\sqrt{2}\left(2 - \sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2} - 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $SA = SB = SC = a$, cạnh SD thay đổi. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất khi độ dài cạnh SD là

A a. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **D** $\dfrac{2a}{3}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm hình thoi $ABCD$. Đặt $\alpha = \widehat{BSC}$, $\beta = \widehat{CSA}$, $\gamma = \widehat{ASB}$, ta có

$$\begin{aligned} V_{S.ABCD} &= 2V_{S.ABC} \\ &= 2 \cdot \frac{SA \cdot SB \cdot SC}{6} \sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma} \\ &= \frac{a^3}{3}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\beta - \cos^2\beta} \\ &= \frac{a^3}{3}\sqrt{\frac{9}{16} - \left(\frac{1}{4} - \cos\beta\right)} \le \frac{a^3}{4}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\cos\beta = \dfrac{1}{4}$. Khi đó

$$\begin{aligned} AC^2 &= SA^2 + SC^2 - 2 \cdot SA \cdot SC \cos\beta = \frac{3a^2}{2}, \\ SO^2 &= SA^2 - \frac{AC^2}{4} = \frac{5a^2}{8}. \end{aligned}$$

Mặt khác $OD = OB = SO$ nên tam giác BSD vuông tại S. Vậy

$$SD = \sqrt{BD^2 - SB^2} = \sqrt{4SO^2 - SB^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

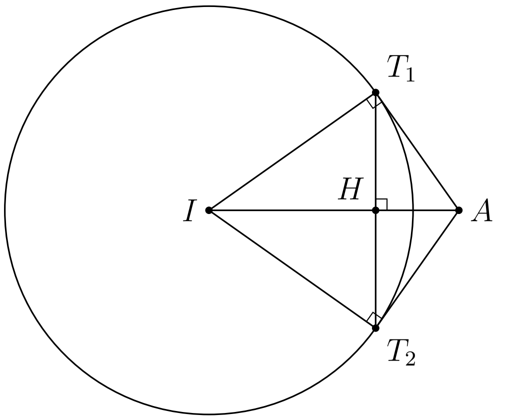
Chọn đáp án C □

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-13}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{4}$ và mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 67 = 0$. Qua d dựng các mặt phẳng tiếp xúc với (S) lần lượt tại T_1, T_2. Tìm tọa độ trung điểm H của T_1T_2.

(A) $H(7; -4; 6)$. (B) $H(9; 6; 4)$. (C) $H(2; 10; -2)$. (D) $H(8; 1; 5)$.

Lời giải.

Mặt cầu đã cho có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R = 9$. Gọi A là hình chiếu của I trên đường thẳng d, khi đó các điểm I, T_1, T_2, A đồng phẳng (cùng thuộc mặt phẳng qua I, vuông góc với đường thẳng d). Do $A \in d$ nên $A(13-t;t-1;4t)$, suy ra $\overrightarrow{IA} = (12-t;t-3;4t-3)$. Vì $IA \perp d$ nên



$$\overrightarrow{IA} \cdot \vec{u}_d = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2}.$$

Suy ra $A\left(\frac{23}{2};\frac{1}{2};6\right)$ và $\overrightarrow{IA} = \left(\frac{21}{2};-\frac{3}{2};3\right)$. Ta có

$$\overrightarrow{IH} = \frac{IH}{IA}\overrightarrow{IA} = \frac{IT_1^2}{IA^2}\overrightarrow{IA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IA} = (7;-1;2)$$

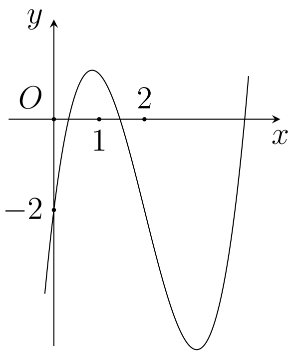
Vậy $H(8;1;5)$.

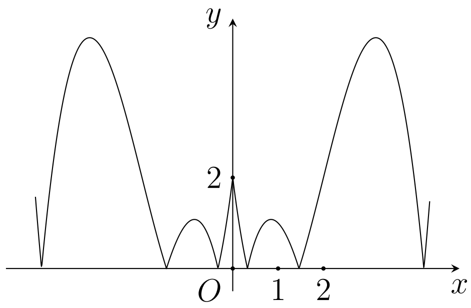
Chọn đáp án D □

Câu 47. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ thỏa mãn $\begin{cases} a+b>1 \\ 3+2a+b<0 \end{cases}$. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(|x|)|$ là

A 9. **B 11.** C 2. D 5.

Lời giải.



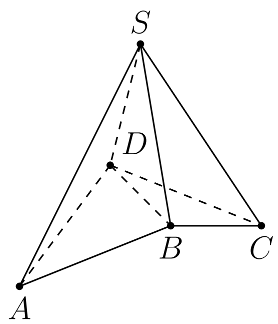


Dễ thấy $f(0) = -2 < 0$, $f(1) = a+b-1 > 0$, $f(2) = 2(2a+b+3) < 0$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} = +\infty$ nên phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt lần lượt thuộc các khoảng $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;+\infty)$. Do đó, đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị, một điểm nằm trên trục hoành một điểm nằm dưới trục hoành (xem hình vẽ). Từ đó, hàm số $y = |f(|x|)|$ có tất cả 11 điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 48.

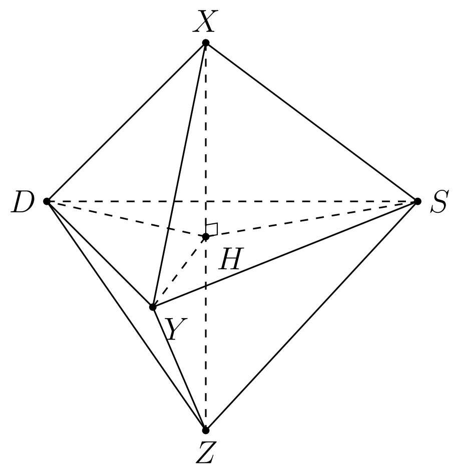
Cho hình đa diện $S.ABCD$ có $SA = 4$, $SB = 2$, $SC = 3$, $SD = 1$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSD} = \widehat{DSA} = \widehat{BSD} = 60^\circ$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) là



A $\frac{8\sqrt{6}}{\sqrt{9}}$. B $\frac{4\sqrt{6}}{3}$. C $\sqrt{2}$. D $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Trên cách cạnh SA, SB, SC lấy các điểm X, Y, Z sao cho $SX = SY = SZ = 1$. Khi đó $SXYD$ và $SZYD$ là các tứ diện đều cạnh 1. Gọi H là tâm của tam giác đều SDY. Ta có



$$V_{SXYZD} = 2V_{SXYD} = 2 \cdot \frac{1^3 \cdot \sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Suy ra

$$V_{XZDS} = V_{XZSY} = V_{XZYD} = \frac{V_{SXYZD}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{18}.$$

Do đó

$$\mathrm{d}(X, (SZD)) = \frac{3V_{XZDS}}{S_{SDZ}} = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{4}{1^2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{9}.$$

Vậy $\mathrm{d}(A, (SCD)) = 4\mathrm{d}(X, (SCD)) = 4 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{9} = \frac{8\sqrt{6}}{9}$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2) = -2$, $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^4 f'\left(\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x$.

A $I = -10$. **B** $I = 0$. **C** $I = -5$. **D** $I = -18$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x}$, suy ra $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. Khi $x = 0$ thì $t = 0$, khi $x = 4$ thì $t = 2$. Do đó

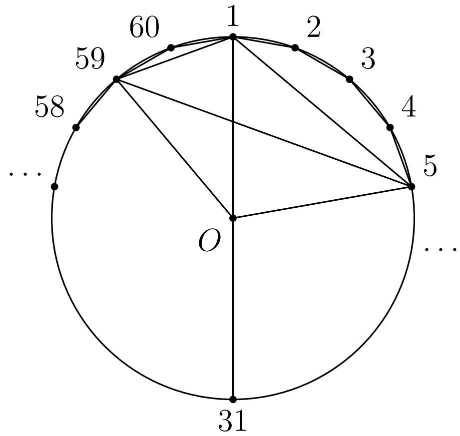
$$I = \int\limits_0^2 2tf'(t)\,\mathrm{d}t = 2tf(t)\Big|_0^2 - 2\int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2 \cdot 2f(2) - 2 \cdot 1 = -10.$$

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho đa giác đều 60 đỉnh nội tiếp một đường tròn. Số tam giác tù được tạo thành từ 3 trong 60 đỉnh của đa giác là

A 34220. **B** 24360. **C** 16420. **D** 48720.

Lời giải.



Ta đánh số các đỉnh của đa giác là 1, 2, 3, ..., 60 theo chiều kim đồng hồ như hình vẽ. Ta sẽ đếm số tam giác tù đỉnh 1. Gọi a, b $(2 \le a < b \le 60)$ là hai đỉnh còn lại. Tam giác gồm ba đỉnh 1, a, b tù tại đỉnh 1 khi và chỉ khi góc này chắn cung có số đo lớn hơn 180°. Điều này tương đương $\dfrac{360}{6}(b-a) > 180^\circ$ hay $b - 30 > a$. Ta sẽ đếm số bộ số gồm hai số a và $b - 30$ thỏa mãn $2 \le a < b - 30 \le 30$. Có tất cả C_{29}^2 bộ số như vậy, từ đó có C_{29}^2 cách chọn ra hai đỉnh a, b.
Hoàn toàn tương tự, số các tam giác tù tại các đỉnh 2, 3, ..., 60 cũng là C_{29}^2. Vậy có tất cả $60 \cdot \mathrm{C}_{29}^2 = 24306$ tam giác tù.
Chọn đáp án B □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. A	3. B	4. B	5. A	6. A	7. C	8. A	9. C	10. D
11. B	12. B	13. C	14. D	15. A	16. B	17. D	18. D	19. C	20. A
21. C	22. D	23. A	24. C	25. D	26. B	27. A	28. B	29. A	30. A
31. A	32. C	33. A	34. D	35. C	36. B	37. D	38. C	39. D	40. B
41. D	42. D	43. C	44. C	45. C	46. D	47. B	48. A	49. A	50. B

58 ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG THÁNG 10, 2017 - 2018 TRƯỜNG THPT LÊ QUÝ ĐÔN, QUẢNG TRỊ, LẦN 2

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Trong không gian, có bao nhiêu vị trí tương đối giữa một đường thẳng và một mặt phẳng?

A 3. B 2. C 1. D 4.

Lời giải.

Trong không gian có 3 vị trí giữa đường thẳng và mặt phẳng.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=4$. Tìm toạ độ tâm I và bán kính R của mặt cầu đã cho.

A $I(3;1;-4), R=2$. B $I(-3;-1;4), R=2$.

C $I(3;1;-4), R=4$. D $I(-3;-1;4), R=4$.

Lời giải.

Mặt cầu có tâm $I(3;1;-4)$ và bán kính $R=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_1=1$ và $u_4=8$. Tính u_{10}.

A 128. B 256. C 1024. D 512.

Lời giải.

Ta có $u_4=u_1\cdot q^3 \Rightarrow q^3=8 \Rightarrow q=2$. Từ đây suy ra $u_{10}=u_1\cdot q^9=2^9=512$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\sin 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ là

A $-\dfrac{\pi}{3}$. B $-\dfrac{\pi}{6}$. C $-\dfrac{5\pi}{6}$. D $-\dfrac{2\pi}{3}$.

Lời giải.

$$\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ 2x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $x=-\dfrac{2\pi}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 3)$.

B Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-1; 3)$.

(C) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-1; 4)$.

(D) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta dễ dàng nhận thấy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{2x+1}{1-x}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng

(A) $\dfrac{3}{4}$. **B** -5. (C) $-\dfrac{7}{2}$. (D) -3.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{3}{(1-x)^2} > 0$, $\forall x \neq 1$, suy ra hàm số đồng biến trên $[2; 3]$. Do đó, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[2; 3]$ là $f(2) = -5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} + x$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

A $F(x) = 2\ln|x| + \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2}{2} + C$.

(B) $F(x) = \ln x - \ln x^2 + \dfrac{x^2}{2} + C$.

(C) $F(x) = \ln x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2}{2} + C$.

(D) $F(x) = \ln|x| + \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2}{2} + C$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = 2\ln|x| + \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2}{2} + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Tìm phần ảo của số phức $z = 2017 - 2018i$.

A -2018. (B) 2017. (C) 2018. (D) $-2018i$.

Lời giải.

Phần ảo của $z = 2017 - 2018i$ là -2008.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Khối lăng trụ bát giác có tất cả bao nhiêu đỉnh?

(A) 8. **B** 16. (C) 24. (D) 12.

Lời giải.

Khối lăng trụ bát giác có 16 đỉnh.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Tính thể tích V của khối trụ có chiều cao bằng h và bán kính đáy bằng R.

(A) $V = R^2h$. (B) $V = \pi R^2 h$. (C) $V = \pi Rh$. (D) $V = 2\pi Rh$.

Lời giải.

Khối trụ có chiều cao bằng h và bán kính đáy bằng R có thể tích là $V = \pi R^2 h$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x - 3y + 4z + 2018 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

(A) $\vec{n}_1 = (1; 3; 4)$. (B) $\vec{n}_2 = (-1; 3; 4)$. (C) $\vec{n}_3 = (-1; 3; -4)$. (D) $\vec{n}_4 = (-1; -3; 4)$.

Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_3 = (-1; 3; -4)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

(A) Có một phép tịnh tiến theo vectơ khác vectơ-không biến mọi điểm thành chính nó.

(B) Có một phép đối xứng trục biến mọi điểm thành chính nó.

(C) Có một phép đối xứng tâm biến mọi điểm thành chính nó.

(D) Có một phép quay biến mọi điểm thành chính nó.

Lời giải.

Phép quay với góc quay bằng 0 biến mọi điểm thành chính nó.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Gọi d là tiếp tuyến tại điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^4 - 10x^2 + 5$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) d song song với đường thẳng $y = 5$. (B) d song song với đường thẳng $y = 0$.

(C) d song song với đường thẳng $y = x$. (D) d song song với đường thẳng $y = -x$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 20x^2$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm cực đại là $y = 5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Hàm số $y = \log_2(x^2 + 1)$ có đạo hàm y' bằng

(A) $\dfrac{2x}{(x^2+1)\ln 2}$. (B) $\dfrac{2x}{(x^2+1)}$. (C) $\dfrac{2x\ln 2}{x^2+1}$. (D) $\dfrac{1}{(x^2+1)\ln 2}$.

Lời giải.

$y' = \dfrac{2x}{(x^2+1)\ln 2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Cho số phức z thỏa mãn $(2 - 3i)z + 6 = 5i - 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\bar{z} = \dfrac{29}{13} + \dfrac{11}{13}i$. (B) $\bar{z} = \dfrac{29}{13} - \dfrac{11}{13}i$. (C) $\bar{z} = -\dfrac{29}{13} - \dfrac{11}{13}i$. (D) $\bar{z} = -\dfrac{29}{13} + \dfrac{11}{13}i$.

Lời giải.

$z=\dfrac{5i-7}{2-3i}=-\dfrac{29}{13}-\dfrac{11}{13}i\Rightarrow \overline{z}=-\dfrac{29}{13}+\dfrac{11}{13}i.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{31} trong khai triển của biểu thức $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^{40}$, với $x\neq 0$.

A C_{40}^{37}. **B** C_{40}^{31}. **C** C_{40}^{4}. **D** C_{40}^{2}.

Lời giải.

Số hạng tổng quát trong khai triển của biểu thức $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^{40}$ là $\mathrm{C}_{40}^{k}\cdot x^{40-k}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{k}=\mathrm{C}_{40}^{k}\cdot x^{40-3k}$.
Giả sử số hạng $\mathrm{C}_{40}^{k}\cdot x^{40-3k}$ chứa x^{31}, khi đó ta có $40-3k=31\Leftrightarrow k=3$. Vậy hệ số của số hạng chứa x^{31} trong khai triển của biểu thức $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^{40}$ là $\mathrm{C}_{40}^{3}=\mathrm{C}_{40}^{37}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Ảnh của đường tròn $(C):(x-3)^2+(y+2)^2=16$ qua phép tịnh tiến theo $\vec{u}=(2;-1)$ là

A $(C'):(x+1)^2+(y-3)^2=16$. **B** $(C'):(x-5)^2+(y+3)^2=16$.

C $(C'):(x+5)^2+(y-3)^2=16$. **D** $(C'):(x-5)^2+(y+3)^2=4$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm là $I(3;-2)$ và bán kính $R=4$. Phép tịnh tiến $\vec{u}=(2;-1)$ biến I thành $I'=(5;-3)$ là tâm của (C'). Mặt khác (C') có bán kính bằng R nên (C') có phương trình $(x-5)^2+(y+3)^2=16$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Trong các giới hạn hữu hạn sau, giới hạn nào có giá trị khác với các giới hạn còn lại?

A $\lim\dfrac{3n-1}{3n+1}$. **B** $\lim\dfrac{2n^2+1}{2n^2-3}$. **C** $\lim\dfrac{3n+1}{-3n+1}$. **D** $\lim\dfrac{n+1}{n-1}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\dfrac{3n-1}{3n+1}=\lim\dfrac{3-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}=1$; $\lim\dfrac{2n^2+1}{2n^2-3}=\lim\dfrac{2+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{3}{n^2}}=1$; $\lim\dfrac{3n+1}{-3n+1}=\lim\dfrac{3+\frac{1}{n}}{-3+\frac{1}{n}}=-1$; $\lim\dfrac{n+1}{n-1}=\lim\dfrac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}=1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;-2\sqrt{2})$. Tính khoảng cách từ $O(0;0;0)$ đến mặt phẳng (ABC).

A $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$. **B** $\dfrac{4}{\sqrt{7}}$. **C** $\dfrac{7}{16}$. **D** $\dfrac{16}{7}$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng $mp(ABC)$ là: $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{-2\sqrt{2}}=1\Leftrightarrow\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{-2\sqrt{2}}-1=0$. Từ đây suy ra $d(O;(ABC))=\dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{-2\sqrt{2}}\right)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{7}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 20$, $\int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

Tính $\int\limits_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) 22. (B) 18. **C** -18. (D) -22.

Lời giải.

$\int\limits_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -18.$

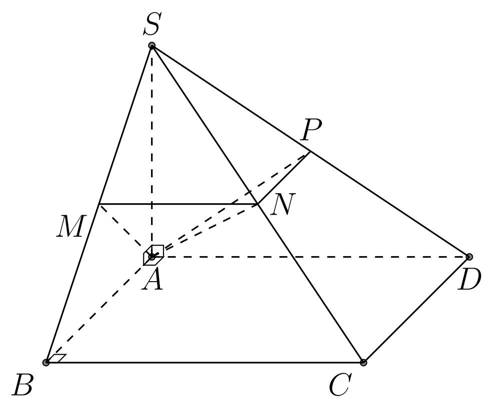
Chọn đáp án C □

Câu 21.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SB, SC, SD (tham khảo hình vẽ bên). Tính thể tích V của khối đa diện $SAMNP$.

A $V = \dfrac{a^3}{12}$. (B) $V = \dfrac{a^3}{6}$.

(C) $V = \dfrac{a^3}{24}$. (D) $V = \dfrac{a^3}{8}$.



Lời giải.

Ta có $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}a^3 \Rightarrow V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = \dfrac{a^3}{6}$. Lại có $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow$ $V_{S.AMN} = \dfrac{V_{S.ABC}}{4} = \dfrac{a^3}{24}$. Tương tự $V_{S.APN} = \dfrac{a^3}{24}$.

Vậy $V_{SAMNP} = V_{S.AMN} + V_{S.ANP} = \dfrac{a^3}{12}$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x}{x+1} & \text{với } x < 0, x \neq -1 \\ 1 & \text{với } x = -1 \\ \sqrt{x}\cos x & \text{với } x \geq 0. \end{cases}$

Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B $f(x)$ liên tục tại mọi điểm, trừ điểm $x = -1$.

(C) $f(x)$ liên tục tại mọi điểm, trừ điểm $x = 0$.

(D) $f(x)$ liên tục tại mọi điểm, trừ điểm $x = 0$ và $x = 1$.

Lời giải.

Ta có:

$f(x) = \sqrt{x}\cos x$ với $x \geq 0$ nên $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$.

$f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x+1}$ với $x < 0$, $x \neq -1$ nên $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; -1)$ và $(-1; 0)$.
Mặt khác $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - x}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x(x-1)(x+1)}{(x+1)} = \lim\limits_{x \to -1} x(x-1) = 2 \neq f(-1)$, suy ra $f(x)$ gián đoạn tại $x = -1$.
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x(x-1)(x+1)}{(x+1)} = 0$.
$\lim\limits_{x \to 0^+} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \cos x = 0 = f(0)$. Vậy $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.
Vậy $f(x)$ liên tục tại mọi $x \neq -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2i| = |\overline{z}i + 3i|$. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng có phương trình

(A) $6x + 4y - 5 = 0$. (B) $6x - 4y = 0$. (C) $6x - 4y + 5 = 0$. **(D)** $6x + 4y + 5 = 0$.

Lời giải.
Đặt $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, ta có $|z - 2i| = |\overline{z}i + 3i| \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = y^2 + (x+3)^2 \Leftrightarrow 6x + 4y + 5 = 0$.
Chọn đáp án D □

Câu 24. Cho hai số thực dương a và b. Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$.

(A) $A = \sqrt[6]{ab}$. **(B)** $A = \sqrt[3]{ab}$. (C) $A = \dfrac{1}{\sqrt[3]{ab}}$. (D) $A = \dfrac{1}{\sqrt[6]{ab}}$.

Lời giải.
Đặt $u = \sqrt[6]{a}$, $v = \sqrt[6]{b}$. Khi đó ta có $A = \dfrac{u^2v^3 + u^3v^2}{u+v} = u^2v^2 = \sqrt[3]{ab}$.
Chọn đáp án B □

Câu 25. Đạo hàm cấp 2018 của hàm số $y = \sin 2x$ là

(A) $2^{2018} \sin 2x$. (B) $\sin 2x$. **(C)** $-2^{2018} \sin 2x$. (D) $-2^{2018} \cos 2x$.

Lời giải.
Ta có $y' = 2\cos 2x$, $y'' = -2^2 \sin 2x$. Bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được $y^{(2n)} = (-1)^n 2^{2n} \sin 2x$.
Áp dụng cho $n = 1009$ ta có $y^{(2018)} = -2^{2018} \sin 2x$.
Chọn đáp án C □

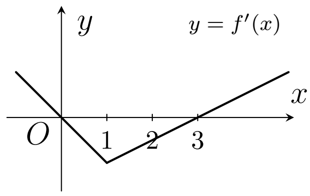
Câu 26. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m+2)x^2 + 3x - 3$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

(A) 6. **(B)** 7. (C) 8. (D) 5.

Lời giải.
$y' = 3x^2 + 2(m+2)x + 3$. YCBT tương đương với $y' \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Ta có $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq m \leq 1$.
Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn YCBT.
Chọn đáp án B □

Câu 27.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ có dạng như hình vẽ bên. Số nào bé nhất trong các số sau: $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$?



A $f(1)$. **B** $f(2)$. **C** $f(3)$. **D** $f(0)$.

Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $f(3)$ là số bé nhất trong các số $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Tìm số nghiệm của phương trình $\log_2(1 + x^3) + \log_{\frac{1}{3}}(1 - x^3) = 2018$.

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Điều kiện $-1 < x < 1$.

Đặt $f(x) = \log_2(1 + x^3) + \log_{\frac{1}{3}}(1 - x^3)$, ta có $y' = \dfrac{3x^2}{(1 + x^3)\ln 2} + \dfrac{3x^2}{(1 - x^3)\ln 3} \geq 0$, $\forall x \in (-1; 1)$, suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-1; 1)$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\log_2(1 + x^3) + \log_{\frac{1}{3}}(1 - x^3)\right) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^+}\left(\log_2(1 + x^3) + \log_{\frac{1}{3}}(1 - x^3)\right) = -\infty$.

Vậy phương trình có duy nhất nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Một ô tô chuyển động thẳng với vận tốc ban đầu bằng 10 m/s và gia tốc $a(t) = -2t + 8$ m/s^2, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây. Hỏi từ lúc chuyển động đến lúc có vận tốc lớn nhất thì xe đi được quãng đường bao nhiêu?

A $\dfrac{128}{3}$ m. **B** $\dfrac{248}{3}$ m. **C** 70 m. **D** 80 m.

Lời giải.

Ta có vận tốc ô tô là $v(t) = \displaystyle\int a(t)\mathrm{d}t = \int(-2t + 8)\mathrm{d}t = -t^2 + 8t + C$. Vì vận tốc ban đầu là 10 m/s nên ta có $v(t) = -t^2 + 8t + 10 = -(t - 4)^2 + 26 \geq 26$. Vậy vận tốc lớn nhất của ô tô bằng 26 m/s, đạt được khi $t = 4$. Do đó quãng đường xe đi được kể từ lúc chuyển động đến lúc có vận tốc lớn nhất là:

$$S = \int_0^4 v(t)\mathrm{d}t = \int_0^4(-t^2 + 8t + 10)\mathrm{d}t = \frac{248}{3}.$$

Chọn đáp án B □

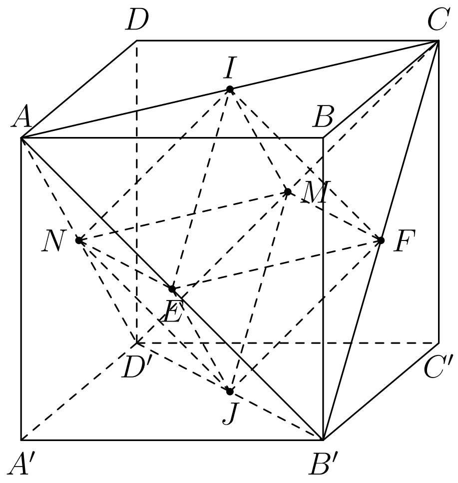
Câu 30. Tính thể tích của khối đa diện có các đỉnh là tâm các mặt hình lập phương cạnh bằng $\sqrt{2}a$.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. (B) $a^3\sqrt{2}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải.

Giải sử $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương cạnh $\sqrt{2}a$ và E, F, M, N, I, J là tâm các mặt như hình vẽ. Ta có $MNEF$ là hình bát diện đều có cạnh $IF = \dfrac{1}{2}AB' = a$.

$V_{IJMNEF} = 2V_{IMNEF} = \dfrac{1}{3}IJ \cdot S_{MNEF} = \dfrac{1}{3}\sqrt{2}a \cdot a^2 = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;3;1)$ và đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm là điểm I và cắt Δ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng 6.

(A) $(S) : (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 8$. (B) $(S) : (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 4$.

(C) $(S) : (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 10$. (D) $(S) : (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 37$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;3;-1)$ và có vec-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (2;1;-2)$. Ta có $\overrightarrow{IM} = (1;0;-2)$, $d(I;\Delta) = \dfrac{|[\overrightarrow{u};\overrightarrow{IM}]|}{|\overrightarrow{u}|} = 1$, từ đây suy ra bán kính mặt cầu (S) là $R = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$.

Do đó, phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 10$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-5}{-4}$ và mặt phẳng $(P) : 2x - 3y + z - 1 = 0$. Gọi d' là hình chiếu vuông góc của d trên (P). Tìm toạ độ một véc-tơ chỉ phương của d'.

(A) $(9;-10;12)$. (B) $(-46;15;47)$. (C) $(9;10;12)$. (D) $(46;15;-47)$.

Lời giải.

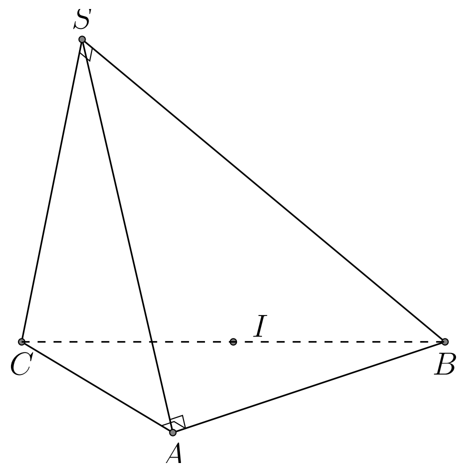
Ta có $\overrightarrow{u} = (2;3;-4)$, $\overrightarrow{n} = (2;-3;1)$ lần lượt là vec-tơ chỉ phương của d và vec-tơ pháp tuyến của (P). Mặt phẳng $(d;d')$ có một vec-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n'} = [\overrightarrow{n};\overrightarrow{u}] = (9;10;12)$. Đường thẳng d' là giao tuyến của (P) và $(d;d')$ nên có một vec-tơ chỉ chương là $\overrightarrow{u'} = [\overrightarrow{n'};\overrightarrow{n}] = (46;15;-47)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, tam giác SAC vuông cân tại S. Biết $AB = a$, $AC = 2a$, $(SAC) \perp (ABC)$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

(A) $4\pi a^2$. (B) $2\pi a^2$. (C) $5\pi a^2$. (D) $3\pi a^2$.

Lời giải.



Ta có $(SAC)\perp(ABC)$ và $AB\perp AC$ nên $AB\perp(SAC) \Rightarrow AB\perp SC$. Kết hợp với $SC\perp SA$ ta suy ra $SC\perp(SAB)$, do đó $SC\perp SB$. Theo giả thiết $AC\perp AB$ ta suy ra mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$ là mặt cầu đường kính BC. Do đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$ là $R=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, suy ra diện tích mặt cầu bằng $4\pi\left(\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2=5\pi a^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{\ln x}, y=0$ và $x=2$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) quanh trục Ox.

A. $V=2\pi\ln 2$. B. $V=2\pi\left(\ln 2-1\right)$. C. $V=\pi(2\ln 2-1)$. D. $V=\pi(\ln 2+1)$.

Lời giải.

Ta có $\ln x=0\Leftrightarrow x=1$, suy ra thể thích $V=\pi\displaystyle\int_1^2\ln x\mathrm{d}x=\pi(2\ln 2-1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Tìm m để phương trình $3\sin(-x)+4\cos x+1=m$ có nghiệm.

A. $m\in[-4;6]$. B. $m\in[-6;8]$. C. $m\in[2;8]$. D. $m\in[0;6]$.

Lời giải.

PT $\Leftrightarrow -3\sin x+4\cos x+1-m=0$. Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $(-3)^2+4^2\geq(1-m)^2\Leftrightarrow m^2-2m-24\leq 0\Leftrightarrow -4\leq m\leq 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Tìm tất cả các giá trị thực của a để đồ thị hàm số $y=ax+\sqrt{9x^2+4}$ có tiệm cận ngang.

A. $a=\pm3$. B. $a=-3$. C. $a=\pm\dfrac{1}{3}$. D. $a=-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(a^2-9)x^2-4}{ax-\sqrt{9x^2+4}}$. Để giới hạn này tồn tại hữu hạn thì $a^2-9=0\Leftrightarrow a=\pm3$.

Thử lại:

- Với $a=3$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a^2-9)x^2-4}{ax-\sqrt{9x^2+4}}=0$. Tiệm cận ngang $y=0$.
- Với $a=-3$ thì $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(a^2-9)x^2-4}{ax-\sqrt{9x^2+4}}=0$. Tiêm cận ngang $y=0$

Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho số phức z và z' thỏa mãn $|z-3-2i|=1$, $|z'+i|=|z'-1-i|$. Giá trị nhỏ nhất của $P=\left|z-\dfrac{5}{2}-i\right|+|z-z'|$ là

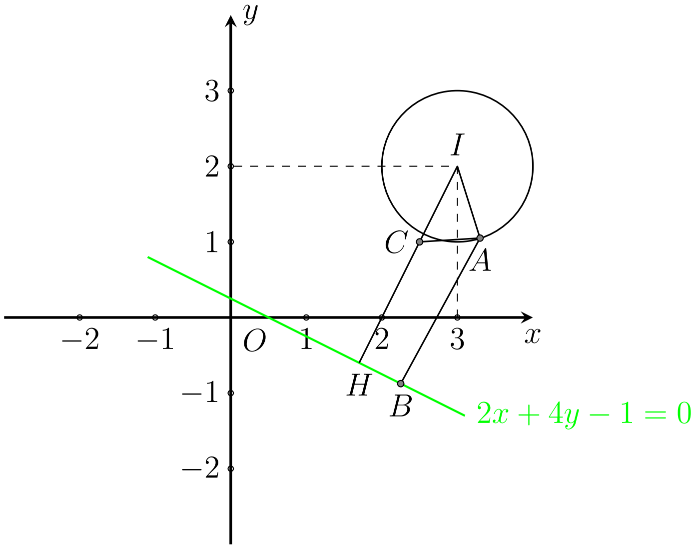
A. $\dfrac{9\sqrt{5}-10}{5}$. B. $\dfrac{9\sqrt{5}-5}{5}$. C. $\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$. D. $\dfrac{9\sqrt{5}+5}{5}$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$, $z' = x' + y'i$ với $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết ta có $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ và $2x' + 4y' - 1 = 0$. Như vậy tập các điểm biểu diễn z là đường tròn (C) tâm $I(3;2)$, bán kính $R = 1$ và tập các điểm biểu diễn z' là đường thẳng $d: 2x + 4y - 1 = 0$.

Gọi $A(x;y)$ và $B(x';y')$ lần lượt là điểm biểu diễn của z và z', $C = \left(\dfrac{5}{2}; 1\right)$ là điểm biểu diễn của $\dfrac{5}{2} - i$ và H là hình chiếu của C lên d. Nhận thấy rằng $IC \perp d$. Ta có $P = AB + AC \geq BI - AI + CI - IA \geq HI - AI + CI - IA = \dfrac{13}{2\sqrt{5}} + \dfrac{\sqrt{5}}{2} - 2 = \dfrac{9\sqrt{5} - 10}{5}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv B$ và A là giao của đoạn thẳng IC với đường tròn (C).



Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(m+1)x - m - 1$ có hai điểm cực trị nằm cùng phía đối với trục hoành.

(A) $m \in (-\infty; 0)$. (B) $m \in (-1; +\infty)$.

(C) $m \in (-1; 0)$. (D) $m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 6x + 3(m+1)$.

Đồ thị hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt, điều này tương đương với $\Delta' = 9 - 9(m+1) > 0 \Leftrightarrow m < 0$. Khi đó hàm số có hai điểm cực trị là x_1 và x_2. Theo Vi-et $x_1x_2 = m + 1$.

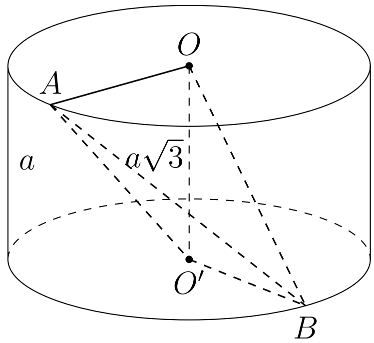
Mặt khác $y = y'\left(\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{2}\right) + 2mx$, suy ra $y_1 = 2mx_1$, $y_2 = 2mx_2$.

Yêu cầu bài toán tương đương với $y_1y_2 > 0 \Leftrightarrow 4m^2x_1x_2 > 0 \Leftrightarrow 4m^2(m+1) > 0 \Leftrightarrow m > -1$ (vì $m^2 > 0$). Kết hợp với $m > 0$ ta có $-1 < m < 0$.

Chọn đáp án (C) □

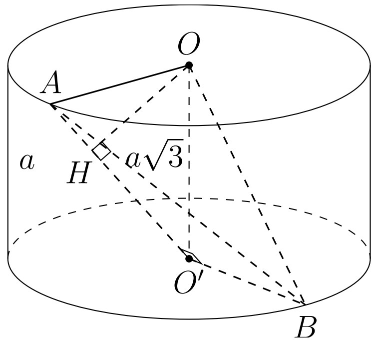
Câu 39.

Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên các đường tròn (O), (O') lần lượt lấy các điểm A và B sao cho $AB = a\sqrt{3}$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính thể tích khối tứ diện $OABO'$.



Ⓐ $\dfrac{a^3}{2}$. Ⓑ $\dfrac{a^3}{6}$. Ⓒ $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. Ⓓ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của O lên AO'. Ta có $AO' = a\sqrt{2}$, $AB = a\sqrt{3}$, $O'B = a$, theo định lý Pithago tam giác $\triangle AO'B$ vuông tại O'.

$\begin{cases} BO' \perp OO' \\ BO' \perp AO' \end{cases} \Rightarrow BO' \perp (AOO') \Rightarrow BO' \perp OH$. Kết hợp với $OH \perp AO'$ suy ra $OH \perp (AO'B)$.

Trong tam giác vuông AOO' ta có $OH = \dfrac{OA \cdot OO'}{AO'} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra $V_{OAO'B} = \dfrac{1}{3} OH \cdot S_{AO'B} = \dfrac{a^3}{6}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 40. Cho tập hợp $S = \{m \in \mathbb{Z} | -10 \le m \le 100\}$. Có bao nhiêu tập hợp con của S có số phần tử lớn hơn 2 và các phần tử đó tạo thành một cấp số cộng có tổng bằng 0?

Ⓐ 36. Ⓑ 32. Ⓒ 30. Ⓓ 34.

Lời giải.

Giả sử $\{u_1; u_2; ...; u_n\} \subset S$, $n > 2$ là một tập hợp thỏa mãn yêu cầu bài toán. Không mất tính tổng quát giả sử $u_1 < u_2 < ... < u_n$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng công sai $d > 0$. Ta có $S_n = 0 \Leftrightarrow u_1 + u_n = 0$, lại có $u_1 + (n-1)d = u_n$ nên suy ra $(n-1)d = 2u_n$, điều này chứng tỏ d là một ước nguyên dương của $2u_n$ và $d \ne 2u_n$ vì $n > 2$. Như vậy số tập hợp thỏa YCBT chính là tổng số số các ước thực sự của $2u_n$ với $u_n \in \{1; 2; ...; 10\}$. Bằng cách liệt kê ta có tất cả 34 ước của $2u_n$ với $u_n \in \{1; 2; ...; 10\}$.

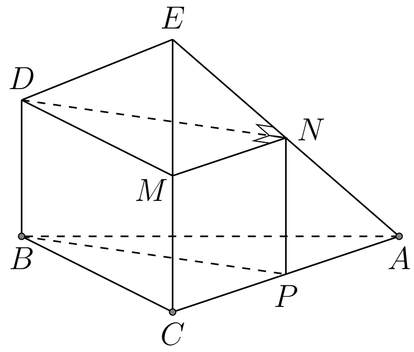
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 41. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác đều ABC cạnh a. Trên các đường thẳng vuông góc (P) tại B và C lần lượt lấy các điểm D, E nằm cùng một bên đối với (P) sao cho $BD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $CE = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ADE).

Ⓐ 30°. Ⓑ 90°. Ⓒ 45°. Ⓓ 60°.

Lời giải.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của EC, EA, AC. Dễ thấy mặt phẳng (DMN) song song với mặt phẳng ABC nên góc giữa mặt phẳng (ADE) và mặt phẳng (P) là góc giữa (ADE) và mặt phẳng (DMN).



Ta có $\begin{cases} BP \perp AC \\ BP \perp CE \end{cases} \Rightarrow BP \perp (ACE)$.

Mặt khác $NP \parallel BD$ và $NP = \dfrac{1}{2}EC = BD$ nên $BPNM$ là hình bình hành. Do đó $BP \parallel DN \Rightarrow DN \perp (EAC)$. Suy ra $DN \perp EN$ và $DN \perp MN$. Vậy góc giữa (P) và mặt phẳng (DMN) là góc giữa EN và MN. Dễ thấy $\widehat{ENM} = \widehat{EAC} = 60^\circ$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Cho đường thẳng $d: y = mx + m + 2$ (m là tham số) và đường cong $(C): y = \dfrac{2x-1}{x+1}$. Biết rằng khi $m = m_0$ thì (C) cắt d tại hai điểm A, B thỏa mãn độ dài AB ngắn nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $m_0 \in (-4; -3)$. **B** $m_0 \in (-5; -4)$. **C** $m_0 \in (-2; 0)$. **D** $m_0 \in (-3; -1)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $mx + m + 2 = \dfrac{2x-1}{x+1} \Leftrightarrow \dfrac{mx^2 + 2mx + m + 3}{x+1} = 0$. Điều kiện cần và đủ để d cắt C tại hai điểm phân biệt là phương trình $mx^2 + 2mx + m + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1. Điều này tương đương $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = -3m > 0 \\ 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$.

Với $m < 0$ thì d cắt C tại hai điểm $A(x_1; mx_1 + m + 2)$ và $B(x_2; mx_2 + m + 2)$. Theo Vi-et $x_1 + x_2 = -2$, $x_1x_2 = 1 + \dfrac{3}{m}$.

Ta có: $AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (mx_1 - mx_2)^2 = (m^2+1)((x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2) = -\dfrac{12}{m}(m^2+1) = -12m - \dfrac{12}{m} \geq 2\sqrt{\dfrac{-12}{m}(-12m)} = 24$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m^2 = 1$. Kết hợp với $m < 0$ ta có $m = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Gọi P là tập tất cả các giá trị thực của m sao cho phương trình $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt. Tính tổng các phần tử của P.

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Ta có $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$

$\Leftrightarrow 2^{x^2-2x+3} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 2^{2|x-m|+2} \cdot \log_2(2|x-m| + 2) \quad (*)$.

Xét hàm số $f(t) = 2^t \cdot \log_2 t$, $t \geq 2$.

Có $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 \cdot \log_2 t + \dfrac{2^t}{t \ln 2} > 0, \quad \forall t \geq 2$.

Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $[2; +\infty)$. Mà $x^2 - 2x + 3 \geq 2; 2|x-m| + 2 \geq 2$.

Suy ra

$$(*) \Leftrightarrow f(x^2-2x+3) = f(2|x-m|+2) \Leftrightarrow x^2-2x+3 = 2|x-m|+2$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1 = 2|x-m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x+1 = 2x-2m \\ x^2-2x+1 = 2m-2x \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (x-2)^2 = -2m+3 & (1) \\ x^2 = 2m-1 & (2). \end{array}\right.$$

Phương trình ban đầu có 3 nghiệm khi

• TH1: (1) có một nghiệm, (2) có hai nghiệm phân biệt khác nghiệm của (1).
Suy ra $-2m+3=0 \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$ (thỏa mãn).

• TH2: (2) có một nghiệm, (1) có hai nghiệm phân biệt khác nghiệm của (2).
Suy ra $2m-1=0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn).

• TH3: (1) và (2) có hai nghiệm phân biệt và có đúng một nghiệm chung.
Gọi x_0 là nghiệm chung của (1) và (2). Ta có

$$\begin{cases} (x_0-2)^2 = -2m+3 \\ x_0^2 = 2m-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = m \\ x_0^2 = 2m-1 \end{cases} \Rightarrow m^2 = 2m-1 \Rightarrow m = 1 \quad \text{(thỏa mãn)}.$$

Vậy $m \in \left\{\dfrac{1}{2}; 1; \dfrac{3}{2}\right\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Có bao nhiêu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn

$$\int_0^1 (f(x))^{2018}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (f(x))^{2019}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (f(x))^{2020}\,\mathrm{d}x.$$

A 3 . B 2. C 4. D 5.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\int_0^1 (f(x))^{2018}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (f(x))^{2020}\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 (f(x))^{2019}\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f(x))^{2018}(f(x)-1)^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

Do đó hoặc $f(x) = 0$ hoặc $f(x) = 1$. Vì $f(x)$ liên tục nên $f(x) = 0, \forall x \in [0;1]$ hoặc $f(x) = 1, \forall x \in [0;1]$.

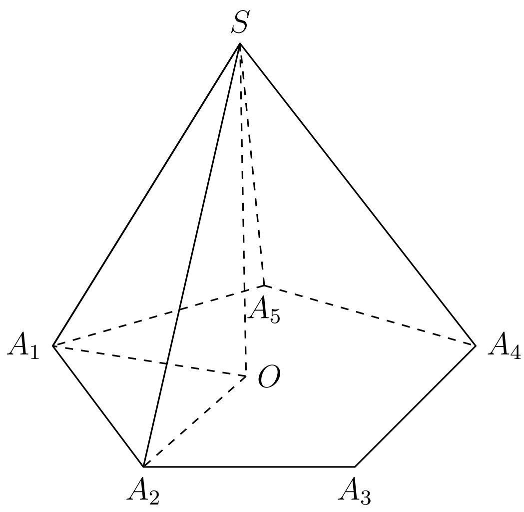
Chọn đáp án B □

Câu 45. Trong các khối chóp có tất cả các cạnh bằng 1, gọi S là thể tích của khối chóp có số cạnh nhiều nhất. Khi đó S gần bằng giá trị nào sau đây nhất?

A 0,2. B 0,1. C 0,3. D 0,4.

Lời giải.

Giả sử $S.A_1A_2...A_n$ là hình chóp đều có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi O là tâm của đáy. Xét tam giác OA_1A_2 cân tại O và $A_1A_2 = SA_1 > OA_1$ nên $\widehat{A_1OA_2} > \widehat{OA_1A_2} = \widehat{OA_2A_1} \Rightarrow \widehat{A_1OA_2} > 60^\circ \Rightarrow n < 6$. Dễ thấy hình chóp ngũ giác có tất cả các cạnh bằng 1 tồn tại. Vậy Trong các khối chóp có tất cả các cạnh bằng 1 khối chóp ngũ giác có số cạnh nhiều nhất.



Ta giác $\triangle A_1OA_2$ có $A_1A_2 = 1$, $\widehat{A_1OA_2} = 72^\circ$ suy ra $A_1O = A_2O = \dfrac{1}{2\cos 36^\circ}$.

$S_{A_1A_2A_3A_4A_5} = 5S_{\triangle A_1OA_2} = 5 \cdot \dfrac{1}{2} OA_1 \cdot OA_2 \sin \widehat{A_1OA_2} = 5\tan 36^\circ$. Lại có $SO = \sqrt{SA_1^2 - OA_1^2} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{4\cos^2 36^\circ}}$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3} SO \cdot S_{A_1A_2A_3A_4A_5} \approx 0{,}3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $A(1;3;2)$, $B(-3;1;0)$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1 \\ y = -t \\ z = -1 + t. \end{cases}$ Gọi $M(x_0; y_0; z_0)$ là tâm mặt cầu có bán kính bé nhất trong tất cả các mặt cầu đi qua A, B và tiếp xúc d. Tính tổng $P = x_0 + y_0 + z_0$.

(A) $P = -\dfrac{3}{2}$. **(B)** $P = \dfrac{3}{2}$. (C) $P = \dfrac{1}{2}$. (D) $P = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AB. Ta có $I = (-1;2;1)$, $\overrightarrow{AB} = (-4;-2;-2)$, suy ra phương trình mặt phẳng trung trực (α) của AB là: $2x + y + z - 1 = 0$. Dễ thấy $d \subset (\alpha)$. Do đó mặt cầu thỏa mãn yêu cầu bài toán có tâm nằm trên đường thẳng Δ đi qua I và vuông góc d.

Δ có vec-tơ chỉ phương $\vec{u} = [\vec{u_d}; \vec{n_\alpha}] = (-2;2;2)$. Suy ra phương trình của Δ: $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t. \end{cases}$ Ta thấy d cắt Δ tại $H(1;0;-1)$. Điểm $M \in \Delta$ nên $M = (-1-t; 2+t; 1+t)$.

Ta có $MA = MH \Leftrightarrow (-2-t)^2 + (-1+t)^2 + (-1+t)^2 = (-2-t)^2 + (2+t)^2 + (2+t)^2 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{2}$.

Từ đây suy ra $M = \left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Với mỗi cặp $(a;b)$ $(a, b \in \mathbb{R})$, ta đặt $M(a;b)$ là giá trị lớn nhất của $f(x) = |\cos x + a\cos 2x + b\cos 3x|$. Gọi $M = \min\limits_{a,b\in\mathbb{R}} M(a;b)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $M \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$. **(B)** $M \in \left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$. (C) $M \in \left(1; \dfrac{3}{2}\right)$. (D) $M \in \left(\dfrac{3}{2}; 2\right)$.

Lời giải.

$\max f(x) \geq \max\left\{f\left(\frac{\pi}{3}\right); f\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right\} = \max\left\{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{a}{2}\right|; \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{a}{2}\right|\right\} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Do đó $M(a;b) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow M \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Mặt khác xét $g(x) = \cos x - \frac{1}{6}\cos 3x$.

Ta có: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin x + \frac{1}{2}\sin 3x = 0 \Leftrightarrow 4\sin^3 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right.$.

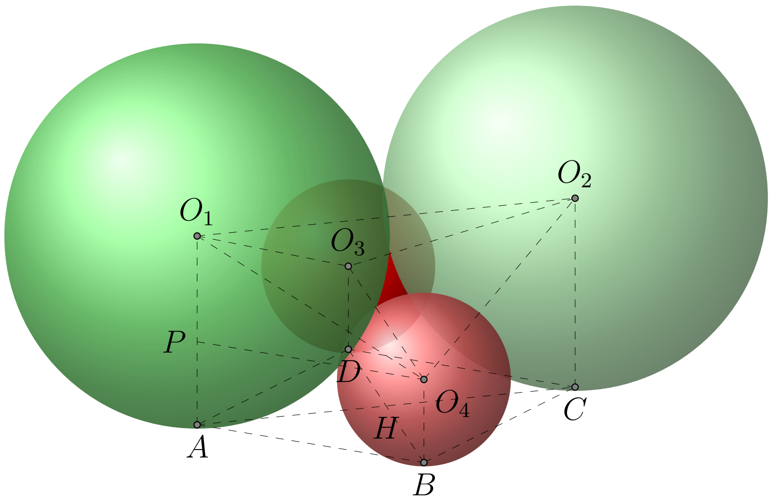
$g(k\pi) = \frac{5}{6}$, $g\left(\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Vậy $\max g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ hay $M \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Như vậy ta có $M = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Cho bốn hình cầu $S(O_1;R)$, $S(O_2;R)$, $S(O_3;R')$, $S(O_4;R')$, trong đó $R > R'$. Biết rằng mỗi hình cầu trong chúng đều tiếp xúc với ba hình cầu còn lại và tất cả chúng cùng tiếp xúc với một mặt phẳng. Tính tỉ số $\frac{R}{R'}$.

A $\frac{R}{R'} = 3$. **B** $\frac{R}{R'} = 2+\sqrt{3}$. **C** $\frac{R}{R'} = 4$. **D** $\frac{R}{R'} = 4-\sqrt{3}$.



Lời giải.

Gọi A, B, C, D lần lượt là các tiếp điểm của $S(O_1;R)$, $S(O_2;R)$, $S(O_3;R')$, $S(O_4;R')$ với mặt phẳng, H là giao điểm của AC và BD. Qua O_4 dựng đường thẳng song song với AB cắt AO_1 tại P.

Ta có: $HB = \frac{1}{2}DB = \frac{1}{2}O_3O_4 = R'$; $AH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}O_1O_2 = R$.;

$AB = PO_4 = \sqrt{O_1O_4^2 - O_1P^2} = \sqrt{(R+R')^2-(R-R')^2} = 4RR'$.

Tứ giác $ABCD$ có $AB = BC = CA = AD = R + R'$ nên nó là hình thoi, suy ra $AC \perp BD$.

Xét tam giác AHB vuông tại H nên:

$AH^2 + HB^2 = AB^2 \Rightarrow R^2 + R'^2 = 4RR' \Leftrightarrow \left(\dfrac{R}{R'}\right)^2 - 4\dfrac{R}{R'} + 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{R}{R'} = 2 + \sqrt{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(0) = f(2) = 0$, $\max\limits_{[0;2]} |f''(x)| = 1$ và $\left|\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \dfrac{2}{3}$. Tính $\left|\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

A $\dfrac{11}{12}$. **B** $\dfrac{11}{24}$. **C** $\dfrac{37}{12}$. **D** $\dfrac{37}{24}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\int_0^2 (2x - x^2)\,\mathrm{d}x \geq & \left|\int_0^2 f''(x)(2x - x^2)\,\mathrm{d}x\right| \\ = & \left| f'(x)(2x - x^2)\Big|_0^2 - \int_0^2 f'(x)(2 - 2x)\,\mathrm{d}x\right| \\ = & \left|\int_0^2 f'(x)(2 - 2x)\,\mathrm{d}x\right| \\ = & \left| f(x)(2 - 2x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)(-2)\,\mathrm{d}x\right| \\ = & 2\left|\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ = & \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Mà $\displaystyle\int_0^2 (2x - x^2)\,\mathrm{d}x = \dfrac{4}{3}$. Từ đó suy ra

$$\int_0^2 (2x - x^2)\,\mathrm{d}x = \left|\int_0^2 f''(x)(2x - x^2)\,\mathrm{d}x\right| \Leftrightarrow |f''(x)| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f''(x) = -1 \\ f''(x) = 1 \end{array}\right..$$

Mặt khác $f''(x)$ liên tục trên $[0;2]$ nên $\left[\begin{array}{l} f''(x) = -1, \forall x \in [0;2] \\ f''(x) = 1,\ \forall x \in [0;2] \end{array}\right.$.

a) $f''(x) = -1$ khi đó $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} + C_1x + C_2$. Vì $f(0) = f(2) = 0$ nên $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} + x$.

Khi đó $\left|\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \dfrac{11}{24}$.

b) $f''(x) = 1$ khi đó $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + C_1x + C_2$. Vì $f(0) = f(2) = 0$ nên $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - x$.

Khi đó $\left|\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \dfrac{11}{24}$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Có 50 học sinh là cháu ngoan Bác Hồ, trong đó có 4 cặp là anh em sinh đôi (không có anh chị em sinh ba trở lên). Cần chọn ra 5 học sinh trong 50 học sinh trên. Có bao nhiêu cách chọn mà trong nhóm 5 em chọn ra không có cặp anh em sinh đôi nào?

A 2049852. **B** 850668. **C** 2049300. **D** 2049576.

Lời giải.

a) Số cách chọn 5 học sinh trong 50 học sinh là C_{50}^5.

b) Gọi A là số cách chọn 5 học sinh mà có hai cặp sinh đôi. ta tính A:

- Chọn 2 cặp sinh đôi trong 4 cặp có C_4^2 cách.

- Chọn một học sinh trong 46 học sinh còn lại có C_{46}^1 cách.

Vậy $A = \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_{46}^1$.

c) Gọi B là số cách chọn 5 học sinh có đúng một cặp sinh đôi.Ta tính B.

- Chọn 1 cặp sinh đôi trong 4 cặp có C_4^1 cách.

- Gọi B' là số cách chọn 3 học sinh trong 48 học sinh còn lại sao cho không có cặp sinh đôi nào. Khi đó $B = \mathrm{C}_4^1 B'$. Ta tính B'.

+ Chọn 3 học sinh trong 48 học sinh có C_{48}^3 cách.

+ Chọn 3 học sinh trong 48 học sinh sao cho có đúng một cặp sinh đôi có $\mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_{46}^1$. Suy ra $B' = \mathrm{C}_{48}^3 - \mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_{46}^1$.

Vậy $B = \mathrm{C}_4^1(\mathrm{C}_{48}^3 - \mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_{46}^1)$.

Vậy số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\mathrm{C}_{50}^5 - A - B = \mathrm{C}_{50}^5 - \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_{46}^1 - \mathrm{C}_4^1(\mathrm{C}_{48}^3 - \mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_{46}^1) = 2049852$.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. A	3. D	4. D	5. B	6. B	7. A	8. A	9. B	10. B
11. C	12. D	13. B	14. A	15. D	16. A	17. B	18. C	19. B	20. C
21. A	22. B	23. D	24. B	25. C	26. B	27. C	28. B	29. B	30. C
31. C	32. D	33. C	34. C	35. A	36. A	37. A	38. C	39. B	40. D
41. D	42. C	43. D	44. B	45. C	46. B	47. B	48. B	49. B	50. A

59 ĐỀ THI THỬ SỞ BẮC GIANG NĂM HỌC 2017 - 2018, LẦN 2

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$.

(A) $F(x) = \mathrm{e}^{x} + C$. (B) $F(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{2} + C$. (C) $F(x) = \mathrm{e}^{2x} + C$. (D) $F(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + C$.

Lời giải.

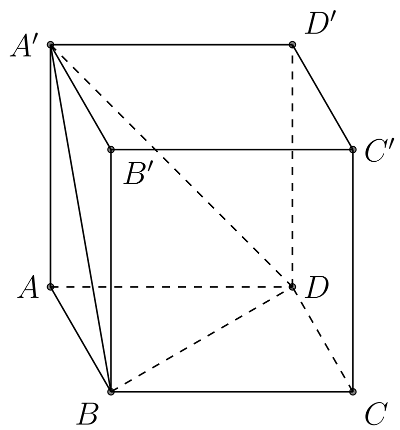
Ta có $F(x) = \displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (*tham khảo hình vẽ*). Giá trị sin của góc giữa hai mặt phẳng (BDA') và $(ABCD)$ bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

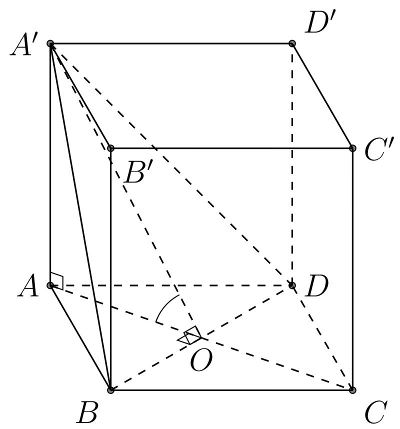


Lời giải.

Gọi O là tâm đáy $ABCD$, suy ra $AO \perp BD$. Mặt khác tam giác $A'BD$ đều nên $A'O \perp BD$, từ đó suy ra $((A'BD),(ABCD)) = \widehat{A'OA}$.

Tam giác ABD vuông tại A, suy ra $A'B = BD = A'D = a\sqrt{2}$, từ đó suy ra $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $A'O = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Tam giác $A'AO$ vuông tại A, suy ra $\sin\widehat{A'OA} = \dfrac{AA'}{A'O} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx + 25}{x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$?

(A) 11. (B) 4. (C) 5. (D) 9.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có $y' = \dfrac{m^2 - 25}{(x+m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m^2 - 25 < 0 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < m \leq -1$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4$; $u_2 = 1$. Giá trị của u_{10} bằng

(A) $u_{10} = 31$. (B) $u_{10} = -23$. (C) $u_{10} = -20$. (D) $u_{10} = 15$.

Lời giải.

Ta có công sai $d = u_2 - u_1 = -3$.

Suy ra $u_{10} = 4 + 9(-3) = -23$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(3;-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-3}{1}$ có phương trình là

(A) $3x - 2y + z - 12 = 0$. (B) $3x - 2y + z - 8 = 0$.

(C) $3x + 2y + z - 12 = 0$. (D) $x - 2y + 3z - 8 = 0$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (3;-2;1)$.

Mặt phẳng (P) qua M vuông góc với Δ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (3;-2;1)$, suy ra phương trình mặt phẳng (P) là

$$3(x-3) - 2(y+1) + (z-1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + z - 12 = 0.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0$ bằng

(A) 2. (B) -3. (C) $\dfrac{17}{2}$. (D) $\dfrac{9}{8}$.

Lời giải.

Ta có $\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = -1\\ \log_2 x = 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1 = \dfrac{1}{2}\\ x_2 = 8.\end{array}\right.$

Từ đó suy ra $S = x_1 + x_2 = \dfrac{1}{2} + 8 = \dfrac{17}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $T = \dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$.

(A) $T = \dfrac{3}{2}i$. (B) $T = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$. (C) $T = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $T = -\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } T = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 z_2} = \frac{(z_1+z_2)^2 - 2z_1z_2}{z_1z_2} = \frac{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 3}{\dfrac{3}{2}} = -\frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Đồ thị hàm số nào sau đây có tiệm cận ngang?

(A) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$. (B) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$. (C) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x-1}$. (D) $y = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{1+x}$.

Lời giải.

Ta có

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}} = 0.$

  Từ đó suy ra đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ có tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}} = \pm\infty$, suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}} = \pm\infty$, suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
- Hàm số $y = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x+1}$ có tập xác định $\mathscr{D} = [-2;2]\setminus\{-1\}$, suy ra hàm số không tồn tại giới hạn tại vô tận, từ đó suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Tính mô-đun của số phức $z = (1+2i)(2-i)$.

A $|z| = 5$. **B** $|z| = \sqrt{5}$. **C** $|z| = 10$. **D** $|z| = 6$.

Lời giải.

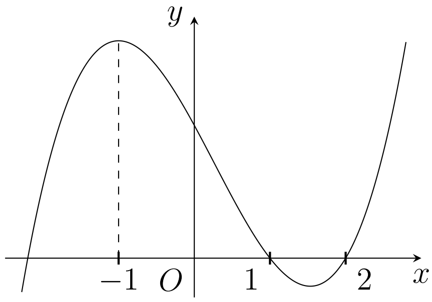
Ta có $|z| = |1+2i|\cdot|2-i| = 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 10.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị ở hình bên. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(0;1)$. **B** $(-\infty;0)$. **C** $(1;2)$. **D** $(2;+\infty)$.



Lời giải.

Nhận thấy đồ thị đi xuống trong khoảng $(0;1)$, suy ra hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 8,4%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau đúng 6 năm, người đó lĩnh được số tiền (*cả vốn lẫn lãi*) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong thời gian đó người này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

A 166 846 000 đồng. **B** 164 246 000 đồng. **C** 160 246 000 đồng. **D** 162 246 000 đồng.

Lời giải.

Tổng số tiền thu được sau 6 năm gửi là $S = 100000000\cdot(1+8{,}4\%)^6 \approx 162246000$ đồng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và thỏa mãn $f(-1)=4$; $f(3)=7$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{3} 5f'(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I=20$. (B) $I=3$. (C) $I=10$. **D** $I=15$.

Lời giải.

Ta có $I=\int\limits_{-1}^{3} 5f'(x)\,\mathrm{d}x = 5\ f(x)\big|_{-1}^{3} = 5\left(f(3)-f(-1)\right)=15$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a}=(2;1;-3)$, $\vec{b}=(2;5;1)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$. (B) $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$. **C** $\vec{a}\cdot\vec{b}=6$. (D) $\vec{a}\cdot\vec{b}=9$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 2+1\cdot 5-3\cdot 1=6$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$ trên đoạn $\left[-2;\dfrac{1}{2}\right]$.

(A) $-\dfrac{13}{3}$. (B) 1. **C** -3. (D) $-\dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2. \end{array}\right.$

Nhận thấy hàm số liên tục trên đoạn $\left[-2;\dfrac{1}{2}\right]$ và

- $f(-2)=-\dfrac{13}{3}$.
- $f(0)=-3$
- $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{7}{2}$.

Từ đó ta có $\max\limits_{\left[-2;\frac{1}{2}\right]} f(x)=-3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

(A) $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_{b}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

B $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{a}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{c}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x,\ \forall c\in\mathbb{R}$.

(C) $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$.

(D) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Lời giải.

Ta không biết được hàm số $y = f(x)$ có liên tục tại c hay không, nên biểu thức $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\forall c \in \mathbb{R}$ sai.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có đúng một nghiệm.

A $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. (B) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

(C) $(-2; 2)$. (D) $[-2; 2]$.

Lời giải.

Qua bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f(x) = m$ có đúng một nghiệm khi và chỉ khi $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2 = 1$. Xác định tọa độ tâm I của mặt cầu (S).

(A) $I(1; -2; 3)$. (B) $I(1; 2; -3)$. **C** $I(-1; 2; -3)$. (D) $I(-1; 2; 3)$.

Lời giải.

Tọa độ tâm mặt cầu là $I(-1; 2; -3)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Phương trình $\log_3(2x + 1) = 2$ có nghiệm là

(A) $x = 5$. (B) $x = -3$. (C) $x = 1$. **D** $x = 4$.

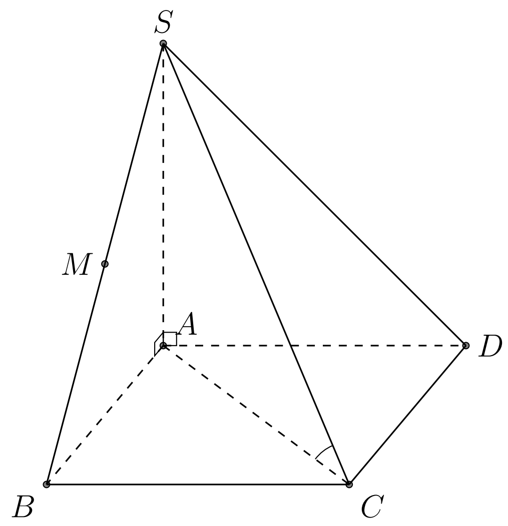
Lời giải.

Ta có $\log_3(2x + 1) = 2 \Leftrightarrow 2x + 1 = 9 \Leftrightarrow x = 4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19.

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$. Gọi M là trung điểm của cạnh SB (*tham khảo hình vẽ*). Tính khoảng cách từ điểm M tới mặt phẳng $(ABCD)$.



A $\mathrm{d}\left(M,(ABCD)\right) = \dfrac{a}{2}$.

B $\mathrm{d}\left(M,(ABCD)\right) = \dfrac{3a}{2}$.

C $\mathrm{d}\left(M,(ABCD)\right) = 2a\sqrt{3}$.

D $\mathrm{d}\left(M,(ABCD)\right) = a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Do $SA \perp (ABCD)$ suy ra góc giữa SC và đáy là $\widehat{SCA} = 60°$. (1)

Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AC = a\sqrt{3}$. (2)

Trong tam giác vuông SAC có $SA = AC \cdot \tan 60° = 3a$.

Do M là trung điểm cạnh SB nên $\mathrm{d}(M,(ABCD)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(S,(ABCD)) = \dfrac{3a}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho A là tập hợp gồm 20 điểm phân biệt. Số đoạn thẳng có hai đầu mút phân biệt thuộc tập A là

A 170. **B** 160. **C** 190. **D** 360.

Lời giải.

Số đoạn thẳng có hai đầu mút phân biệt thuộc tập A là $\mathrm{C}_{20}^2 = 190$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(2;1)$ và véc-tơ $\vec{a} = (1;3)$. Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{a}$ biến điểm A thành điểm A'. Tìm tọa độ điểm A'.

A $A'(-1;-2)$. **B** $A'(1;2)$. **C** $A'(4;3)$. **D** $A'(3;4)$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{T}_{\vec{a}}(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, suy ra tọa độ điểm A' là $(2;1) + (1;3) = (3;4)$.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau được chọn từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập A. Tính xác suất để số được chọn là số chia hết cho 5.

A $\dfrac{2}{3}$. **B** $\dfrac{1}{6}$. **C** $\dfrac{1}{30}$. **D** $\dfrac{5}{6}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{A}_6^4 = 360$.

Số số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau đôi một có dạng $\overline{abc5}$ là $\mathrm{A}_5^3 = 60$.

Xác suất cần tìm $\mathrm{P} = \dfrac{60}{360} = \dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Tìm hệ số góc k của tiếp tuyến đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$ tại điểm $M(1;2)$.

A $k = 12$. **B** $k = 3$. **C** $k = 5$. **D** $k = 4$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2$.

Hệ số góc tiếp tuyến tại điểm $M(1;2)$ của đồ thị hàm số là $k = f'(x_0) = f'(1) = 3$.

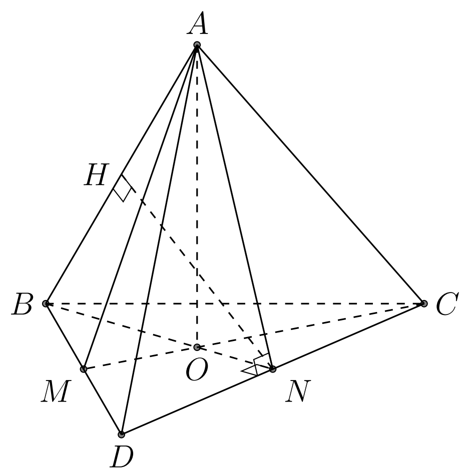
Chọn đáp án B □

Câu 24. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

A $\mathrm{d}(AB, CD) = \dfrac{3a}{2}$. **B** $\mathrm{d}(AB, CD) = a$.

C $\mathrm{d}(AB, CD) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D** $\mathrm{d}(AB, CD) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Lấy N, H lần lượt là trung điểm của CD, AB.

Theo bài ra, hai tam giác ACD và BCD đều, suy ra

$$\begin{cases} AN \perp CD \\ BN \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABN) \Rightarrow CD \perp NH. \quad (1)$$

Hơn nữa, $AN = BN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ suy ra tam giác ABN cân tại N, suy ra $NH \perp AB$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\mathrm{d}(AB, CD) = NH$.

Xét tam giác vuông AHN, có

$$NH = \sqrt{AN^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $\mathrm{d}(AB, CD) = NH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $3^{x-1} > 27$.

A $S = [4; +\infty)$. **B** $S = (4; +\infty)$. **C** $S = (0; 4)$. **D** $S = (-\infty; 4)$.

Lời giải.

Ta có $3^{x-1} > 27 \Leftrightarrow 3^{x-1} > 3^3 \Leftrightarrow x - 1 > 3 \Leftrightarrow x > 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S = (4; +\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Cho $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 12$, tính giá trị của tích phân $I = \displaystyle\int_2^6 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$.

A $I = 24$. **B** $I = 10$. **C** $I = 6$. **D** $I = 14$.

Lời giải.

Đặt $u = \dfrac{x}{2} \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{2} \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}u$.

Đổi cận

- Với $x = 2$ suy ra $u = 1$.
- Với $x = 6$ suy ra $u = 3$.

Suy ra $I = 2\int\limits_1^3 f(u)\,\mathrm{d}u = 24$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Điểm cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ là

(A) $x = 3$. (B) $x = 1$. (C) $x = 0$. (D) $x = -1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Do $y'' = 6x$, suy ra $y''(-1) = -6 < 0$, từ đó ta được hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;1)$ và hai đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{-1}$, $\Delta'\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-2}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A cắt cả hai đường thẳng Δ, Δ'.

(A) $d\colon \dfrac{x-1}{-6} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{7}$.

(B) $d\colon \dfrac{x+1}{-6} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+1}{7}$.

(C) $d\colon \dfrac{x-1}{-6} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-1}{7}$.

(D) $d\colon \dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{7}$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = (2;1;-1)$.

Lấy điểm $B(1;0;3) \in \Delta$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và đường thẳng Δ, khi đó (P) có hai véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta$ và $\overrightarrow{AB} = (0;1;2)$.

Suy ra véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_P = \left[\vec{u_\Delta}, \overrightarrow{AB}\right] = (3;-4;2)$.

Từ đó suy ra phương trình mặt phẳng (P)

$$3(x-1) - 4(y+1) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 2z - 9 = 0.$$

Tọa độ giao điểm C giữa (P) và Δ' là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x - 4y + 2z - 9 = 0 \\ \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-2}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 2z = 9 \\ 2x + y = -1 \\ x - z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{13} \\ y = \dfrac{-15}{13} \\ z = \dfrac{27}{13} \end{cases} \Rightarrow C\left(\dfrac{1}{13}; \dfrac{-15}{13}; \dfrac{27}{13}\right).$$

Dễ thấy, đường thẳng d đi qua A, C và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_d = \overrightarrow{CA} = \left(\dfrac{12}{13}; \dfrac{2}{13}; -\dfrac{14}{13}\right) = \dfrac{2}{13}(6;1;-7)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là $d\colon \dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{-7}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Tìm phần thực của số phức $z = 1 - 2i$.

(A) -2. (B) -1. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Phần thực của số phức $z = 1 - 2i$ là 1.

Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 + 2^2\mathrm{C}_n^2 + \cdots + 2^n\mathrm{C}_n^n = 14348907$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển của nhị thức $\left(x^2 - \dfrac{1}{x^3}\right)^n$ $(x \neq 0)$.

(A) -1365. (B) 32760. (C) 1365. (D) -32760.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 + 2^2\mathrm{C}_n^2 + \cdots + 2^n\mathrm{C}_n^n = (1+2)^n = 3^n = 14348907 \Rightarrow n = 15$.

Xét số hạng tổng quát thứ $(k+1)$: $T_{k+1} = (-1)^k\mathrm{C}_{15}^k\left(x^2\right)^{15-k} \cdot \dfrac{1}{x^{3k}} = (-1)^k\mathrm{C}_{15}^k x^{30-5k}$.

Để $x^{30-5k} = x^{10} \Leftrightarrow k = 4$, từ đó suy ra hệ số của x^{10} là $(-1)^4\mathrm{C}_{15}^4 = 1365$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 31. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ thỏa mãn $(f(0) - f(2))(f(3) - f(2)) > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số $f(x)$ có hai cực trị.

(B) Phương trình $f(x) = 0$ luôn có 3 nghiệm phân biệt.

(C) Hàm số $f(x)$ không có cực trị.

(D) Phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm duy nhất.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Do $(f(0) - f(2))(f(3) - f(2)) > 0$ nên ta có hai trường hợp:

- $\begin{cases} f(0) - f(2) > 0 \\ f(3) - f(2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(2) - f(0) = \displaystyle\int_0^2 f'(x)\,\mathrm{d}x < 0 \\ f(3) - f(2) = \displaystyle\int_2^3 f'(x)\,\mathrm{d}x > 0. \end{cases}$

  Từ đó suy ra $\exists x_1 \in (0;2)$, $f'(x_1) < 0$ và $\exists x_2 \in (2;3)$, $f'(x_2) > 0$, suy ra $f'(x_1)f'(x_2) < 0$, suy ra $f'(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(x_1;x_2)$, kết hợp $f'(x) = 0$ là phương trình bậc hai suy ra $f'(x) = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt.

  Vậy hàm số có hai cực trị.

- $\begin{cases} f(0) - f(2) < 0 \\ f(3) - f(2) < 0 \end{cases}$. Tương tự, hàm số cũng có hai cực trị.

Còn việc kết luận số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, ta chưa đủ điều kiện kết luận.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$ và $d'\colon \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng d tạo với đường thẳng d' một góc lớn nhất.

A $(P)\colon x - z + 1 = 0$.
B $(P)\colon x - 4y + z - 7 = 0$.
C $(P)\colon 3x - 2y - 2z - 1 = 0$.
D $(P)\colon -x + 4y - z - 7 = 0$.

Lời giải.

Đường thẳng d, d' có véc-tơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (2;1;2)$, $\vec{u}_2 = (1;2;1)$.

Lấy điểm $A(1;-1;2) \in d$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và cắt trục hoành tại điểm $B(b;0;0)$.

Khi đó (P) có cặp véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1$ và $\overrightarrow{AB} = (b-1;1;-2)$, suy ra (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P = \left[\vec{u}_1, \overrightarrow{AB}\right] = (-4; 2b+2; 3-b)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng d' và (P), suy ra

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|3b+3|}{\sqrt{5b^2+2b+29} \cdot \sqrt{6}}.$$

Đặt $y = \dfrac{b^2+2b+1}{5b^2+2b+29} \geq 0$, suy ra $\sin\varphi = \sqrt{y} \cdot \dfrac{3}{\sqrt{6}}$.

Nhận thấy, để góc φ lớn nhất thì $\sin\varphi$ lớn nhất, điều đó đồng nghĩa với y phải lớn nhất.

Xét $y = \dfrac{b^2+2b+1}{5b^2+2b+29} \Leftrightarrow (5y-1)b^2 + (2y-2)b + (29y-1) = 0.$ $(*)$

- Trường hợp $y = \dfrac{1}{5} \Rightarrow b = 3$.
- Trường hợp $y \neq \dfrac{1}{5}$.
  Phương trình $(*)$ có nghiệm b khi và chỉ khi

$$\Delta' = (y-1)^2 - (5y-1)(29y-1) \geq 0 \Leftrightarrow -144y^2 + 32y \geq 0 \Rightarrow 0 \leq y \leq \frac{2}{9}.$$

Từ đó suy ra, để tồn tại b suy ra $0 \leq y \leq \dfrac{2}{9}$.

Vậy $y_{\max} = \dfrac{2}{9}$ khi đó $b = 7$. Từ đó suy ra $\vec{n}_P = (-4;16;-4) = -4(1;-4;1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình

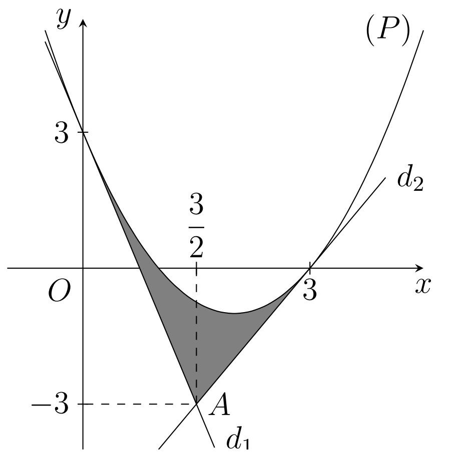
$$1(x-1) - 4(y+1) + 1(z-2) = 0 \Leftrightarrow x - 4y + z - 7 = 0.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 33. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 - 4x + 3\,(P)$ và các tiếp tuyến kẻ từ điểm $A\left(\dfrac{3}{2};-3\right)$ đến đồ thị (P). Tính giá trị của S.

A $S = 9$.
B $S = \dfrac{9}{8}$.
C $S = \dfrac{9}{4}$.
D $S = \dfrac{9}{2}$.

Lời giải.



Ta có $y' = f'(x) = 2x - 4$.

Giả sử đường thẳng d tiếp xúc với đồ thị (P) tại điểm $M(x_0; y_0)$, suy ra đường thẳng d có dạng

$$d\colon y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Đường thẳng d đi qua điểm A, nên ta có

$$\begin{aligned}
&(2x_0 - 4)\left(\frac{3}{2} - x_0\right) + x_0^2 - 4x_0 + 3 = -3\\
\Leftrightarrow\ & 3x_0 - 6 - 2x_0^2 + 4x_0 + x_0^2 - 4x_0 + 6 = 0\\
\Leftrightarrow\ & -x_0^2 + 3x_0 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0\\ x_0 = 3.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

- Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 3$, suy ra phương trình tiếp tuyến d_1 tại điểm $M_1(0; 3)$ là $y = -4x + 3$.
- Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 0$, suy ra phương trình tiếp tuyến d_2 tại điểm $M_2(3; 0)$ là $y = 2x - 6$.

Từ đó suy ra diện tích hình giới hạn

$$\int\limits_0^{\frac{3}{2}} \left|(x^2 - 4x + 3) - (-4x + 3)\right|\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{3}{2}}^{3} \left|(x^2 - 4x + 3) - (2x - 6)\right|\,\mathrm{d}x = \frac{9}{4}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0; 1; 2)$, mặt phẳng $(\alpha)\colon x - y + z - 4 = 0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A, vuông góc với (α) và đồng thời (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tìm tọa độ giao điểm M của (P) với trục hoành.

A $M\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$. **B** $M\left(-\frac{1}{3}; 0; 0\right)$. **C** $M(1; 0; 0)$. **D** $M\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right)$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3; 1; 2)$ và bán kính $R = 4$.

Mặt phẳng (α) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(\alpha)} = (1; -1; 1)$.

Giả sử (P) cắt trục hoành tại điểm $M(m; 0; 0)$, do $(P) \perp (\alpha)$, suy ra (P) có hai véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AM} = (m; -1; -2)$ và $\vec{n}_{(\alpha)} = (1; -1; 1)$.

Suy ra (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_P = \left[\vec{n}_{(\alpha)}, \overrightarrow{AM}\right] = (3; m+2; m-1)$.

Từ đó ta có, phương trình mặt phẳng (P)

$$3(x - 0) + (m+2)(y-1) + (m-1)(z-2) = 0 \Leftrightarrow 3x + (m+2)y + (m-1)z - 3m = 0.$$

Gọi d là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P), r là bán kính đường tròn giao tuyến giữa mặt phẳng (P) và mặt cầu (S), khi đó ta có $R^2 = d^2 + r^2$.

Suy ra, để r nhỏ nhất khi và chỉ khi $d = \mathrm{d}(I, (P))$ lớn nhất.

Ta có $d = \mathrm{d}(I, (P)) = \dfrac{|9 + (m+2) + (m-1)2 - 3m|}{\sqrt{3^2 + (m+2)^2 + (m-1)^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{2m^2 + 2m + 14}} = \dfrac{9}{\sqrt{2\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{2}}}$.

Lại có $2\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{27}{2}\geq\dfrac{27}{2}$, suy ra $d\leq\dfrac{9}{\sqrt{\dfrac{27}{2}}}=\sqrt{6}$, từ đó suy ra d lớn nhất khi $m=-\dfrac{1}{2}$.

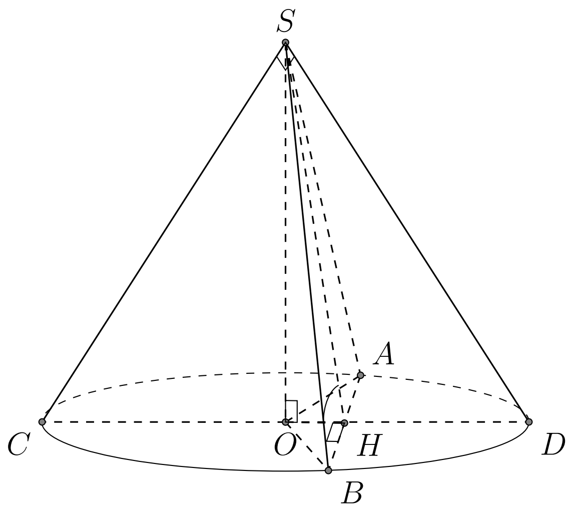
Vậy $M\left(-\dfrac{1}{2};0;0\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O. Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác có một góc bằng 120°, thiết diện qua đỉnh S cắt mặt phẳng đáy theo dây cung $AB=4a$ và là một tam giác vuông. Tính diện tích xung quanh của hình nón.

A $\pi\sqrt{3}a^2$. **B** $8\pi\sqrt{3}a^2$. **C** $2\pi\sqrt{3}a^2$. **D** $4\pi\sqrt{3}a^2$.

Lời giải.



Giả sử bán kính đáy, và chiều cao khối nón lần lượt là R, h.

Trong tam giác vuông SOD, ta có

$$\tan 60^\circ=\frac{OD}{SO}\Rightarrow R=h\sqrt{3}.$$

Gọi H là trung điểm dây cung AB, suy ra tam giác OHA vuông tại H, từ đó ta có

$$OH^2=OA^2-AH^2=R^2-4a^2.$$

Mặt khác tam giác SAB vuông, suy ra

$$SH=\frac{AB}{2}=2a.$$

Xét tam giác vuông SOH, ta có

$$SH^2=SO^2+OH^2\Leftrightarrow 4a^2=h^2+R^2-4a^2=4h^2-4a^2\Leftrightarrow h=a\sqrt{2}\Rightarrow R=a\sqrt{6}.$$

Trong tam giác vuông SOD, có $SD=\sqrt{SO^2+OD^2}=2a\sqrt{2}$.

Vậy diện tích xung quanh của hình nón $S=\pi Rl=\pi\cdot a\sqrt{6}\cdot 2a\sqrt{2}=4\pi\sqrt{3}a^2$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+1}$ có đồ thị là (C) và I là giao điểm hai đường tiệm cận của (C). Điểm M di chuyển trên (C). Xác định giá trị nhỏ nhất độ dài đoạn thẳng MI.

A 1. **B** $\sqrt{2}$. **C** $2\sqrt{2}$. **D** $\sqrt{6}$.

Lời giải.

Ta có giao điểm hai tiệm cận $I(-1;1)$.

Gọi $M\left(m;\dfrac{m+2}{m+1}\right)\in(C)$, khi đó ta có

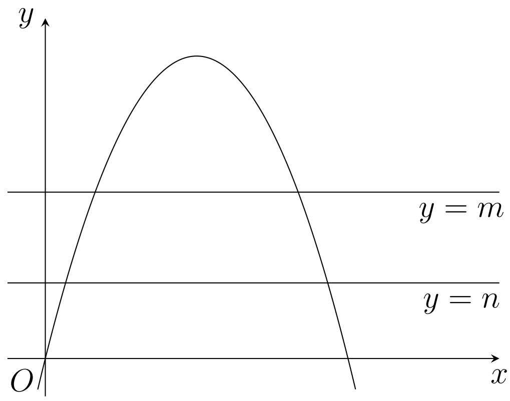
$$IM=\sqrt{(m+1)^2+\left(\frac{m+2}{m+1}-1\right)^2}=\sqrt{(m+1)^2+\frac{1}{(m+1)^2}}\geq\sqrt{2}.$$

Từ đó suy ra $IM_{\min} = \sqrt{2}$, dấu bằng xảy khi $(m+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -2. \end{array}\right.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 37.

Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2+4x$ và trục hoành. Hai đường thẳng $y = m$, $y = n$ chia hình (H) thành 3 phần có diện tích bằng nhau (*ta có thể tham khảo hình vẽ*). Tính giá trị biểu thức $T = (4-m)^3 + (4-n)^3$.



A $T = \dfrac{320}{9}$. **B** $T = \dfrac{75}{2}$.

C $T = \dfrac{512}{15}$. **D** $T = 405$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm giữa parabol và trục hoành là nghiệm của phương trình

$$-x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng (H) là $S = \displaystyle\int_0^4 \left|-x^2 + 4x\right| \,\mathrm{d}x = \dfrac{32}{3}$.

Ta có

$$-x^2 + 4x = y \Leftrightarrow x^2 - 4x + y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 - \sqrt{4-y} \\ x = 2 + \sqrt{4-y} \end{array}\right. (y < 4).$$

Suy ra diện tích hình giới hạn bởi $y = n$, $y = -x^2 + 4x$ và trục hoành là

$$S_1 = \int_0^n \left|\left(2+\sqrt{4-y}\right) - \left(2 - \sqrt{4-y}\right)\right| \,\mathrm{d}y = \int_0^n 2\sqrt{4-y}\,\mathrm{d}y = -\frac{4\sqrt{(4-y)^3}}{3}\Bigg|_0^n = \frac{32}{3} - \frac{4\sqrt{(4-n)^3}}{3}.$$

Tương tự ta có diện tích hình giới hạn bởi $y = m$, $y = -x^2 + 4x$ và trục hoành là

$$S_2 = \frac{32}{3} - \frac{4\sqrt{(4-m)^3}}{3}.$$

Để hai đường thẳng $y = n$, $y = m$ chia (H) thành ba phần có diện tích bằng nhau khi và chỉ khi

$$\begin{cases} S_1 = \dfrac{32}{9} \\ S_2 = \dfrac{64}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{32}{3} - \dfrac{4\sqrt{(4-n)^3}}{3} = \dfrac{32}{9} \\ \dfrac{32}{3} - \dfrac{4\sqrt{(4-m)^3}}{3} = \dfrac{64}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4\sqrt{(4-n)^3}}{3} = \dfrac{64}{9} \\ \dfrac{4\sqrt{(4-m)^3}}{3} = \dfrac{32}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-n)^3 = \dfrac{256}{9} \\ (4-m)^3 = \dfrac{64}{9} \end{cases}.$$

Từ đó suy ra $T = (4-m)^3 + (4-n)^3 = \dfrac{320}{9}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\displaystyle\int \frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5} + C$. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(2x)$ trên tập $\mathbb{R}^+$.

(A) $\dfrac{x+3}{2\left(x^2+4\right)} + C$. (B) $\dfrac{x+3}{x^2+4} + C$. (C) $\dfrac{2x+3}{4\left(x^2+1\right)} + C$. (D) $\dfrac{2x+3}{8\left(x^2+1\right)} + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int 2f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x+1}\right) = \frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{\sqrt{x+1}^2+4} + C$,

suy ra $\displaystyle\int f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x+1}\right) = \frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt{x+1}^2+4} + C$

Từ đó suy ra $\displaystyle\int f(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int f(2x)\,\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+3}{(2x)^2+4} + C = \frac{2x+3}{8\left(x^2+1\right)} + C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Biết rằng $\displaystyle\int_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}$, ở đó $a, b \in \mathbb{Z}^+$ và $4 < a+\sqrt{b} < 5$. Tính tổng $S = a+b$.

(A) $S = 5$. (B) $S = 7$. (C) $S = 4$. (D) $S = 6$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\frac{\pi}{6} = \int_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}}\,\mathrm{d}x = \int_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{4-(x-3)^2}}\,\mathrm{d}x.$ $(*)$

Đặt $x-3 = 2\sin t$, suy ra $\mathrm{d}x = 2\cos t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x = 4 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{6}$ và $x = a+\sqrt{b} \Rightarrow t = \arcsin\left(\dfrac{a+\sqrt{b}-3}{2}\right)$.

Thay vào $(*)$ ta có $\displaystyle\frac{\pi}{6} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin\left(\frac{a+\sqrt{b}-3}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t = \arcsin\left(\frac{a+\sqrt{b}-3}{2}\right) - \frac{\pi}{6}$.

Từ đó suy ra $\arcsin\left(\dfrac{a+\sqrt{b}-3}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \dfrac{a+\sqrt{b}-3}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = 3,\ b = 3$.

Vậy $S = a+b = 6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Cho số phức z thỏa mãn $|z+\overline{z}| \le 2$ và $|z-\overline{z}| \le 2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $T = |z-2i|$. Tính tổng $S = M+m$.

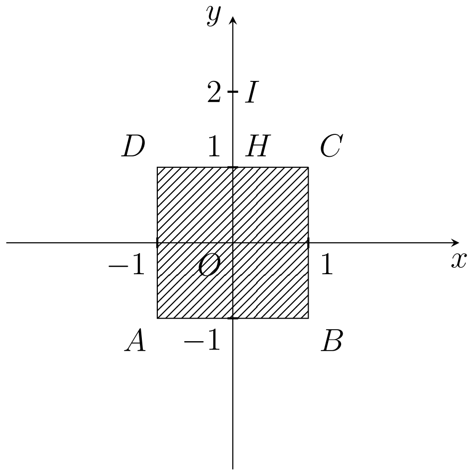
(A) $S = 1+\sqrt{10}$. (B) $S = \sqrt{2}+\sqrt{10}$. (C) $S = 4$. (D) $S = 1$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, khi đó ta có

- $|z + \overline{z}| \leq 2 \Leftrightarrow |2x| \leq 2 \Leftrightarrow |x| \leq 1$.
- $|z - \overline{z}| \leq 2 \Leftrightarrow |2yi| \leq 2 \Leftrightarrow |y| \leq 1$.

Từ đó ta có, tập hợp z là phần gạch sọc hình vẽ bên.
Gọi M là điểm biểu diễn cho số phức z, suy ra M thuộc miền gạch sọc.
Lấy $I(0, 2)$, suy ra $T = |z - 2i| = IM$, từ đó suy ra $T_{\max} = IA = IB = \sqrt{10}$ và $T_{\min} = IH = 1$.



Vậy $S = M + m = 1 + \sqrt{10}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_5 - 2\log u_2 = 2\left(1 + \sqrt{\log u_5 - 2\log u_2 + 1}\right)$ và $u_n = 3u_{n-1}$, $\forall n \geq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của n để $u_n < 7^{100}$.

(A) 191. **(B) 192.** (C) 176. (D) 177.

Lời giải.
Do $u_n = 3u_{n-1}$, suy ra dãy số là cấp số nhân với công bội $q = 3$, suy ra $u_n = u_1 \cdot 3^{n-1}$.
Đặt $t = \sqrt{\log u_5 - 2\log u_2 + 1} \geq 0$, ta có phương trình

$$t^2 - 1 = 2(1 + t) \Leftrightarrow (t + 1)(t - 3) = 0 \Rightarrow t = 3.$$

Từ đó ta có $\log u_5 - 2\log u_2 = 8 \Leftrightarrow \dfrac{u_5}{u_2^2} = 10^8 \Leftrightarrow \dfrac{u_1 \cdot 3^4}{u_1^2 \cdot 3^2} = 10^8 \Leftrightarrow u_1 = \dfrac{9}{10^8}$.
Suy ra $u_n = \dfrac{9}{10^8} \cdot 3^{n-1} < 7^{100} \Leftrightarrow 3^{n-1} < \dfrac{10^8}{9} \cdot 7^{100} \Leftrightarrow n < 192{,}9$.
Vậy giá trị lớn nhất của n là 192.
Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2; 3; 3)$, phương trình đường trung tuyến kẻ từ B là $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong của góc C là $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z-2}{-1}$. Đường thẳng BC có một véc-tơ chỉ phương là

(A) $\vec{u} = (2; 1; -1)$. (B) $\vec{u} = (1; 1; 0)$. **(C) $\vec{u} = (1; -1; 0)$.** (D) $\vec{u} = (1; 2; 1)$.

Lời giải.
Gọi d_1, d_2 lần lượt là đường trung tuyến kẻ từ B, đường phân giác kẻ từ C.
Lấy $C(2 + 2c; 4 - c; 2 - c) \in d_2$, suy ra tọa độ trung điểm của AC là $M\left(2 + c; \dfrac{7-c}{2}; \dfrac{5-c}{2}\right)$.
Suy ra điểm $M \in d_1$, từ đó ta có $\dfrac{2 + c - 3}{-1} = \dfrac{\dfrac{7-c}{2} - 3}{2} = \dfrac{\dfrac{5-c}{2} - 2}{-1} \Rightarrow c = 1 \Rightarrow C(4; 3; 1)$.
Giả sử mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với d_2, suy ra (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; -1; -1)$, suy ra phương trình (P) là

$$2(x - 2) - (y - 3) - (z - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - z + 2 = 0.$$

Tọa độ giao điểm H giữa (P) và d_2 là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x-y-z+2=0 \\ \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-2}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-z=-2 \\ x+2y=10 \\ x+2z=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow H(2;4;2).$$

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng d_2, suy ra H là trung điểm của AA', suy ra $A'(2;5;1)$.

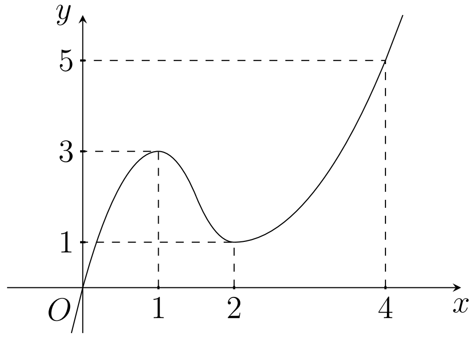
Do d_2 là đường phân giác góc trong tại C, suy ra $A' \in BC$, suy ra $\overrightarrow{A'C}=(2;-2;0)=2(1;-1;0)$ là một véc-tơ chỉ phương của BC.

Chọn đáp án C □

Câu 43.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Đặt $M=\max\limits_{\mathbb{R}} f\left(2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right)$, $m=\min\limits_{\mathbb{R}} f\left(2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right)$. Tính $S=M+m$.

A $S=6$. **B** $S=4$. **C** $S=5$. **D** $S=3$.



Lời giải.

Đặt $t=2(\sin^4 x+\cos^4 x)=2-\sin^2 2x$, suy ra $1 \le t \le 2$.

Từ đó suy ra $M=\max\limits_{[1;2]} f(t)=3$ và $m=\min\limits_{[1;2]} f(t)=1$.

Vậy $M+m=4$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAB cân tại S. Góc giữa mặt bên (SAB) và mặt đáy bằng 60°, góc giữa SA và mặt đáy bằng 45°. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. Tính chiều cao của hình chóp $S.ABCD$.

A $a\sqrt{3}$. **B** $a\sqrt{6}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

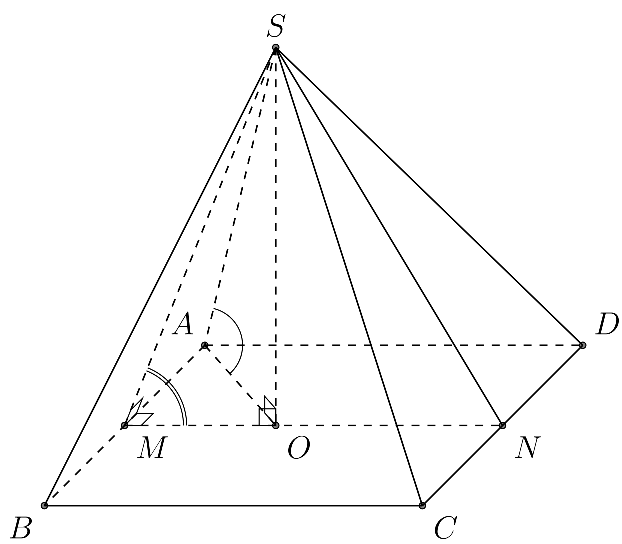
Lấy M, N theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, CD, suy ra MN là đường trung bình của hình vuông $ABCD$, suy ra $MN \perp AB$. (1)

Mặt khác, do tam giác SAB cân tại S, suy ra $SM \perp AB$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(SMN) \perp AB$ $(*)$, từ đó suy ra $((SAB),(ABCD))=\widehat{SMN}=60^\circ$.

Trong mặt phẳng (SMN), kẻ $SO \perp MN$ tại O, suy ra $SO \perp AB$ (do $(*)$), từ đó suy ra $SO \perp (ABCD)$, suy ra $SO \perp AO$.

Giả sử $SO=h$ và cạnh hình vuông bằng x.



Xét hai tam giác vuông SOM và SOA, có $OM = \dfrac{SO}{\tan 60^\circ} = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$ và $AO = SO = h$.

Xét tam giác vuông AMO, có $AO^2 = AM^2 + MO^2 \Leftrightarrow h^2 = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{h^2}{3} \Leftrightarrow h = \dfrac{x\sqrt{6}}{4}$.

Từ đó suy ra thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot x^2 = \frac{x^3\sqrt{6}}{12} = \frac{8a^3\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 2a\sqrt{2}.$$

Từ đó suy ra chiều cao khối chóp $h = \dfrac{2a\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{4} = a\sqrt{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn $|z+1| + |z-3-4i| = 10$. Tính giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = |\overline{z} - 1 + 2i|$.

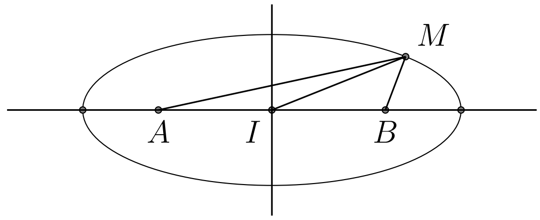
A $P_{\min} = \sqrt{17}$. **B** $P_{\min} = \sqrt{34}$. **C** $P_{\min} = 2\sqrt{10}$. **D** $P_{\min} = \dfrac{\sqrt{34}}{2}$.

Lời giải.

Giả sử điểm $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z, lấy điểm $A(-1; 0)$, $B(3; 4)$ và $I(1; 2)$.

Ta có $|z+1| + |z-3-4i| = 10 \Leftrightarrow AM + BM = 10$.

Suy ra quỹ tích điểm M là đường elip với trục lớn $2a = 10$ và hai tiêu điểm $A(-1; 0)$, $B(3; 4)$.



Nhận thấy, I là trung điểm của AB, suy ra I là tâm đối xứng của elip.

Mặt khác $P = |\overline{z} - 1 + 2i| = IM$, suy ra $P_{\min} = b$, với b là bán trục nhỏ.

Lại có $2c = AB \Rightarrow c = 2\sqrt{2}$, từ đó suy ra $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 8 = 17 \Rightarrow b = \sqrt{17}$.

Vậy ta có $P_{\min} = \sqrt{17}$.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy (ABC) bằng 60°, khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\dfrac{6\sqrt{7}}{7}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A $V = 8\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B** $V = 5\dfrac{\sqrt{7}}{3}$. **C** $V = 10\dfrac{\sqrt{7}}{3}$. **D** $V = 5\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AB; lấy O là giao điểm giữa CN và AM.

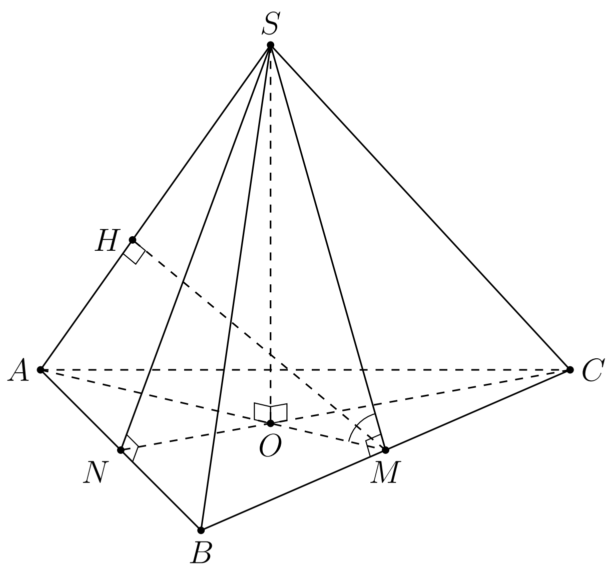
Từ đó ta có $AM \perp BC$ và $SM \perp BC$, suy ra $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SO$.

Tương tự ta chứng minh được $AB \perp SO$, kết hợp chứng minh trên suy ra $SO \perp (ABC)$.

Gọi a là độ dài cạnh đáy, suy ra $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $OM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác SOM vuông tại O, có

$$SO = OM \cdot \tan 60^\circ = \frac{a}{2}.$$



Trong tam giác vuông SOA, có $SA^2 = AO^2 + SO^2 = \dfrac{a^2}{3} + \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow SA = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.
Trong tam giác SAM, kẻ $MH \perp SA$ tại H, kết hợp chứng minh trên suy ra $MH \perp BC$, suy ra $MH = \dfrac{6\sqrt{7}}{7}$.

Từ đó ta có $SO \cdot AM = MH \cdot SA \Leftrightarrow \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{6\sqrt{7}}{7} \cdot \dfrac{a\sqrt{21}}{6} \Leftrightarrow a = 4$.

Vậy thể tích khối chóp $V = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot 2 \cdot \dfrac{4^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Phương trình $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = m$ có nghiệm khi và chỉ khi

A $1 \leq m \leq \sqrt{2}$. **B** $\sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2}$. **C** $2\sqrt{2} \leq m \leq 3$. **D** $3 \leq m \leq 4$.

Lời giải.

Đặt $t = 2^{\sin^2 x}$ suy ra $2^{\cos^2 x} = \dfrac{2}{t}$ $(1 \leq t \leq 2)$.

Từ đó ta có phương trình $t + \dfrac{2}{t} = m$. $(*)$

Xét hàm số $f(t) = t + \dfrac{2}{t}$ với $1 \leq t \leq 2$.

Ta có $f'(t) = 1 - \dfrac{2}{t^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\sqrt{2} \\ t = \sqrt{2}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	1		$\sqrt{2}$		2
y'		$-$	0	$+$	
y	3	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	3

Từ bảng biến thiên ta thấy, để phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $2\sqrt{2} \leq m \leq 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Một hộp đựng 26 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 26. Bạn Hải rút ngẫu nhiên cùng một lúc ba tấm thẻ. Hỏi có bao nhiêu cách rút sao cho bất kỳ hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị?

A 1768. **B** 1771. **C** 1350. **D** 2024.

Lời giải.

Số kết quả của không gian mẫu $n(\Omega) = \mathrm{C}_{26}^3 = 2600$.

Số cách rút ra ba thẻ, sao cho trong ba thẻ đó luôn có ít nhất hai thẻ mà số ghi trên hai thẻ đó là hai số tự nhiên liên tiếp, ta có các trường hợp

- Rút hai thẻ liên tiếp có cặp số là $1; 2$, thì thẻ thứ 3 ta có 24 cách rút.
- Rút hai thẻ liên tiếp có cặp số là $2; 3$, thì thẻ thứ 3 không thể là thẻ có số 1, suy ra có 23 cách rút thẻ thứ 3.
- Rút hai thẻ liên tiếp có cặp số là $3; 4$, thì thẻ thứ 3 không thể là thẻ có số 2, suy ra có 23 cách rút thẻ thứ 3.

- ...
- Rút hai thẻ liên tiếp có cặp số là $24; 25$, thì thẻ thứ 3 không thể là thẻ có số 23, suy ra có 23 cách rút thẻ thứ 3.
- Rút hai thẻ liên tiếp có cặp số là $25; 26$, thì thẻ thứ 3 không thể là thẻ có số 24, suy ra có 23 cách rút thẻ thứ 3.

Từ đó suy ra, có $24 + 23 \cdot 24 = 576$ cách rút ra ba thẻ sao cho trong ba thẻ luôn có ít nhất hai thẻ mà số ghi trên hai thẻ đó là hai số tự nhiên liên tiếp.

Vậy số cách rút ra ba thẻ mà trong hai thẻ bất kỳ lấy ra có hai số tương ứng luôn hơn kém nhau ít nhất hai đơn vị là $n(\Omega) - 576 = 2024$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Cho phương trình $\left(\sqrt{10}+1\right)^{x^2} + m\left(\sqrt{10}-1\right)^{x^2} = 2 \cdot 3^{x^2+1}$. Tìm số giá trị nguyên của $m \in (-10; 10)$ để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. 14. B. 15. C. 13. D. 16.

Lời giải.

Ta có phương trình

$$\left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{x^2} + m\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{x^2} = 6. \quad (1)$$

Đặt $t = \left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{x^2}$ $(t \geq 1)$, suy ra $\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{x^2} = \frac{1}{t}$, thay vào phương trình (1) ta có

$$t + \frac{m}{t} = 6 \Leftrightarrow t^2 - 6t + m = 0. \quad (2)$$

Để phương trình (1) có hai nghiệm x phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có đúng một nghiệm $t > 1$, tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta' = 0 \\ t = -\dfrac{b}{2a} > 1 \end{cases} \\ a \cdot f(1) < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 9 - m = 0 \\ 3 > 1 \end{cases} \\ 1 \cdot (m-5) < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 9 \\ m < 5. \end{array}\right.$$

Kết hợp với giả thiết, ta có 15 giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0; 2]$. Có bao nhiêu số nguyên $a \in [-4; 4]$ sao cho $M \leq 2m$?

A. 7. B. 5. C. 6. D. 4.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a$.

Ta có $g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$a+1$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			a				a		

Trên đoạn $[0,2]$ ta xét các trường hợp

- Nếu $\begin{cases} a+1>0 \\ a<0 \end{cases}$ thì $m = f_{\min} = 0$, suy ra $0 \leq M \leq 2m = 0 \Rightarrow f_{\max} = M = 0$ (vô lý).
- Nếu $a > 0$ thì $M = f_{\max} = a+1$ và $m = f_{\min} = a$, khi đó ta có

$$M \leq 2m \Leftrightarrow a+1 \leq 2a \Leftrightarrow a \geq 1. \tag{1}$$

- Nếu $a+1 < 0 \Leftrightarrow a < -1$ thì $M = f_{\max} = |a|$ và $f_{\min} = |a+1|$, khi đó ta có

$$M \leq 2m \Leftrightarrow -a \leq -2(a+1) \Leftrightarrow a \leq -2. \tag{2}$$

Từ (1), (2) và kết hợp giả thiết, suy ra $a \in [-4;-2] \cup [1;4]$.
Vậy a có 7 giá trị nguyên thỏa mãn.
Chọn đáp án A $\square$

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. C	3. B	4. B	5. A	6. C	7. D	8. A	9. A	10. A
11. D	12. D	13. C	14. C	15. B	16. A	17. C	18. D	19. B	20. C
21. D	22. B	23. B	24. D	25. B	26. A	27. D	28. C	29. C	30. C
31. A	32. B	33. C	34. A	35. D	36. B	37. A	38. D	39. D	40. A
41. B	42. C	43. B	44. A	45. A	46. A	47. C	48. D	49. B	50. A

60 ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA 2017 - 2018, SỞ GD PHÚ THỌ

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Phương trình $\log_2(x-2)=1$ có nghiệm là

(A) $x=1$. (B) $x=4$. (C) $x=3$. (D) $x=2$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_2(x-2)=1 \Leftrightarrow x-2=2 \Leftrightarrow x=4.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Giá trị của $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x^2+1}$ bằng

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) -2.

Lời giải.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=0.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$ ↗		2	↘	1	↗	2	↘	$-\infty$

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty;-1)$. (B) $(0;1)$. (C) $(-1;1)$. (D) $(-1;0)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

Chọn đáp án (D) □

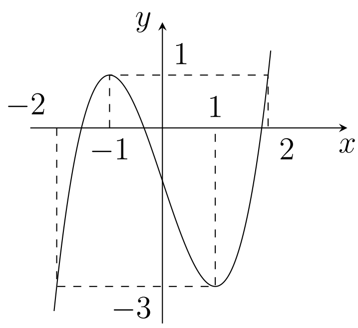
Câu 4.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên.

Hàm số đạt cực đại tại điểm

(A) $x=1$. (B) $x=2$.

(C) $x=-1$. (D) $x=-3$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a, đường cao bằng $a\sqrt{3}$ có thể tích bằng

A $a^3\sqrt{3}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $2a^3\sqrt{3}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ là $V = Bh$.

Trong đó, đáy là hình vuông cạnh a nên $B = a^2$, chiều cao $h = a\sqrt{3}$.

Suy ra thể tích khối lăng trụ là $V = a^2 \cdot a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Cho a là số thực dương bất kỳ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\log_3(3a) = 3 + \log_3 a$. (B) $\log_3(3a) = 1 + a$.

C $\log_3(3a) = 1 + \log_3 a$. (D) $\log_3(3a) = \log_3 a$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_3(3a) = \log_3 3 + \log_3 a = 1 + \log_3 a.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Một hộp có 3 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Số cách lấy ra hai viên bi, trong đó có 1 viên bi đỏ và 1 viên bi xanh bằng

(A) 7. (B) 81. (C) 64. **D** 12.

Lời giải.

Số cách lấy ra hai viên bi, trong đó có 1 viên bi đỏ và 1 viên bi xanh bằng $3 \cdot 4 = 12$ (cách).

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^x$ là

A $\dfrac{5^x}{\ln 5} + C$. (B) $5^x \cdot \ln 5 + C$. (C) $\dfrac{5^{x+1}}{x+1} + C$. (D) $5^{x+1} + C$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$, ta được

$$\int 5^x\,\mathrm{d}x = \frac{5^x}{\ln 5} + C.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Đồ thị hàm số nào dưới đây **không** có tiệm cận đứng?

(A) $y = \dfrac{x^2+1}{x+1}$. **B** $y = \dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$. (C) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. (D) $y = \dfrac{2}{x+1}$.

Lời giải.

Ta có

$\displaystyle\lim_{x\to(-1)^+} \frac{x^2+1}{x+1} = +\infty$, suy ra $x = -1$ là tiệm cận đứng.

$\displaystyle\lim_{x\to(-1)^+} \frac{x-1}{x+1} = -\infty$, suy ra $x = -1$ là tiệm cận đứng.

$\displaystyle\lim_{x\to(-1)^+} \frac{2}{x+1} = +\infty$, suy ra $x = -1$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x+2)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1}(x+2) = 1$, suy ra đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$ không có tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10.

Điểm M trong hình vẽ bên biểu diễn số phức $\overline{z}$.

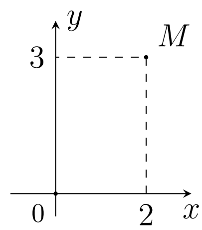
Số phức z bằng

(A) $2+3i$.

(B) $3+2i$.

C $2-3i$.

(D) $3-2i$.



Lời giải.

Từ hình vẽ, ta thấy điểm M biểu diễn của số phức $2+3i$, do đó từ giả thiết suy ra $\overline{z} = 2+3i$.

Vậy, $z = 2-3i$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11.

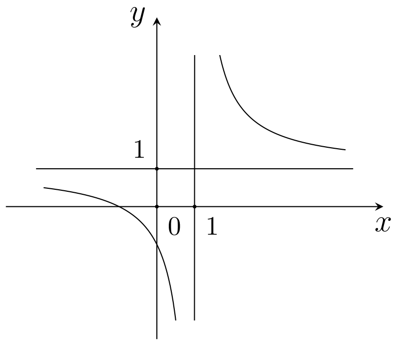
Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

(B) $y = -x^4+2x^2-1$.

(C) $y = x^3-3x+2$.

D $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy đây là đồ thị của hàm phân thức có dạng $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, hơn nữa, đồ thị có tiệm cận đứng là $x=1$ và tiệm cận ngang là $y=1$ nên đó là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính đáy $R=2$ và đường sinh $l=3$ bằng

(A) 6π.

(B) 4π.

C 12π.

(D) 24π.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của khối trụ bằng

$$S_{\text{xq}} = 2\pi Rl = 2\pi\cdot 2\cdot 3 = 12\pi.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-1)$, $B(1;2;3)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

(A) $\sqrt{3}$.

(B) $\sqrt{22}$.

(C) 18.

D $3\sqrt{2}$.

Lời giải.

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} = \sqrt{(1-2)^2+(2-1)^2+(3+1)^2} = 3\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x - z + 5 = 0$. Một véc-tơ pháp tuyến của (P) là

(A) $\vec{n}_1 = (2;1;5)$. (B) $\vec{n}_2 = (2;0;1)$. (C) $\vec{n}_3 = (2;-1;5)$. (D) $\vec{n}_4 = (2;0;-1)$.

Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (2;0;-1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(3;0;-4)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (5;1;-2)$ có phương trình là

(A) $\dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-4}{-2}$. (B) $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+4}{-2}$.

(C) $\dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+4}{-2}$. (D) $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-4}{-2}$.

Lời giải.

Đường thẳng đi qua điểm $A(3;0;-4)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (5;1;-2)$ có phương trình là
$$\frac{x-3}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z+4}{-2}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Một hộp chứa 12 quả cầu gồm 5 quả cầu xanh và 7 quả cầu đỏ. Chọn ngẫu nhiên lần lượt hai quả cầu từ hộp đó. Xác suất để hai quả cầu được chọn ra cùng màu bằng

(A) $\dfrac{31}{66}$. (B) $\dfrac{31}{33}$. (C) $\dfrac{25}{66}$. (D) $\dfrac{25}{33}$.

Lời giải.

Số các khả năng chọn ngẫu nhiên lần lượt hai quả cầu bằng $\mathrm{C}_{12}^2 = 66$. Suy ra $\mathrm{n}(\Omega) = 66$.

Số các khả năng chọn được hai quả cầu cùng màu bằng $\mathrm{C}_5^2 + \mathrm{C}_7^2 = 31$.

Gọi A là biến cố: "hai quả cầu chọn ra có cùng màu", thì $\mathrm{n}(A) = 31$.

Vậy xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mathrm{n}(A)}{\mathrm{n}(\Omega)} = \dfrac{31}{66}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - \dfrac{2}{3}$ trên đoạn $[0;5]$ bằng

(A) $\dfrac{2}{3}$. (B) $\dfrac{5}{3}$. (C) $-\dfrac{2}{3}$. (D) 5.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = x^2 - 6x + 5$. Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0;5] \\ x = 5 \in [0;5]. \end{array}\right.$

Do $f(0) = -\dfrac{2}{3}$, $f(1) = \dfrac{5}{3}$, $f(5) = -9$ nên $\max\limits_{[0;5]} f(x) = \dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 3$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành bằng

(A) $\dfrac{16}{15}$. (B) $\dfrac{4\pi}{3}$. (C) $\dfrac{16\pi}{15}$. (D) $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

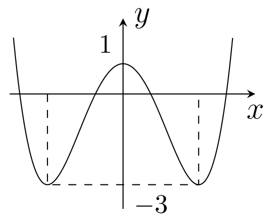
Thể tích của khối tròn xoay bằng

$$V = \pi \int_1^3 (x^2 - 4x + 3)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_1^3 (x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9) \, \mathrm{d}x = \frac{16\pi}{15}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 19.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình bên.
Số nghiệm của phương trình $f(x) - 1 = 0$ là



A 3. **B** 2.
C 4. **D** 1.

Lời giải.

Ta có $f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1$.
Đây là phương trình hoành độ giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 1$. Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị tại 3 điểm nên phương trình đã cho có 3 nghiệm.
Chọn đáp án A □

Câu 20. Gọi a, b lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^2 + \log_2(2-x)$ trên đoạn $[-2; 0]$. Tổng của $a + b$ bằng

A 0. **B** 6. **C** 5. **D** 7.

Lời giải.

Ta có $y' = 2x - \dfrac{1}{(2-x)\ln 2} < 0$, $\forall x \in [-2; 0]$ nên hàm số nghịch biến trên $[-2; 0]$. Do đó

$$\max_{[-2;0]} y = y(-2) = 6, \quad \min_{[-2;0]} y = y(0) = 1.$$

Vậy, $a = 1$, $b = 6$. Suy ra $a + b = 7$.
Chọn đáp án D □

Câu 21. Tổng bình phương tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x - 3\log_3 x \cdot \log_2 3 + 2 = 0$ bằng

A 18. **B** 20. **C** 6. **D** 25.

Lời giải.

Ta có $\log_2 3 \cdot \log_3 x = \log_2 x$. Do đó phương trình đã cho tương đương

$$\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Vậy tổng bình phương của các nghiệm bằng $2^2 + 4^2 = 20$.
Chọn đáp án B □

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và $\displaystyle\int_1^2 (x-1)f'(x) \, \mathrm{d}x = a$. Tính $\displaystyle\int_1^2 f(x) \, \mathrm{d}x$ theo a và $b = f(2)$.

A $a - b$. **B** $a + b$. **C** $b - a$. **D** $-b - a$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\int\limits_{\alpha}^{\beta} u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_{\alpha}^{\beta} - \int\limits_{\alpha}^{\beta} v\,\mathrm{d}u$, ta có

$$\begin{aligned} a &= \int\limits_1^2 (x-1)f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}\left(f(x)\right) = (x-1)f(x)\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= f(2) - \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = b - \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = b - a$.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Gọi $z_1,\ z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1^2| + |z_2^2|$ bằng

A. 10. B. 20. C. 6. D. $6 - 8i$.

Lời giải.

Theo định lí Vi-ét ta có $z_1 + z_2 = 4$, $z_1z_2 = 5$.

Chú ý rằng $|z_1^2| = |z_1| \cdot |z_1| = |z_1| \cdot |z_2| = |z_1z_2| = 5$, tương tự $|z_2^2| = 5$.

Vậy ta có $|z_1^2| + |z_2^2| = 10$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$. Biết thể tích khối chóp bằng $\dfrac{a^3}{2}$. Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$. C. $\dfrac{a\sqrt{2}}{6}$. D. $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

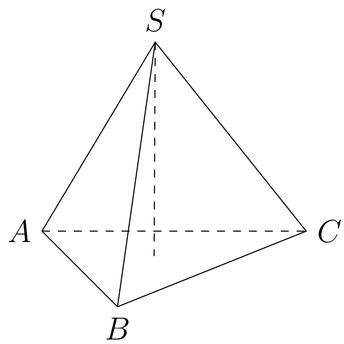
Lời giải.

Ta có $V = \dfrac{1}{3} \cdot \mathrm{d}\left(S, (ABC)\right) \cdot S_{\mathrm{ABC}}$, suy ra

$\mathrm{d}\left(S, (ABC)\right) = \dfrac{3V}{S_{\mathrm{ABC}}}$.

Trong đó $V = \dfrac{a^3}{2}$, $S_{\mathrm{ABC}} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\mathrm{d}\left(S, (ABC)\right) = \dfrac{3a^3}{2} \div \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án D □

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 9$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm $A(-2;1;-4)$ có phương trình là

A. $3x - 4y + 6z + 34 = 0$. B. $x - 2y - 2z - 4 = 0$.

C. $x + 2y + 2z + 8 = 0$. D. $-x + 2y + 2z + 4 = 0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;3;-2)$.
Vì mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm $A(-2;1;-4)$ nên có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IA}=(-1;-2;-2)=-(1;2;2)$. Do đó (P) có phương trình

$$1(x+2)+2(y-1)+2(z+4)=0 \Leftrightarrow x+2y+2z+8=0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 26. Hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển của biểu thức $\left(\dfrac{2}{x^3}-\sqrt{x^5}\right)^{12}$ (với $x>0$) bằng

A. -7920. B. -126720. C. 7920. D. 126720.

Lời giải.

Ta có
$$\left(\frac{2}{x^3}-\sqrt{x^5}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}\mathrm{C}_{12}^{k}\left(\frac{2}{x^3}\right)^{12-k}\left(-\sqrt{x^5}\right)^{k}.$$

Số hạng tổng quát
$$T_{k+1}=\mathrm{C}_{12}^{k}\left(\frac{2}{x^3}\right)^{12-k}\left(-\sqrt{x^5}\right)^{k}=(-1)^k\cdot\mathrm{C}_{12}^{k}\cdot 2^{12-k}\cdot x^{\frac{11k}{2}-36}.$$

Số hạng này chứa x^8 khi
$$\frac{11k}{2}-36=8\Leftrightarrow\frac{11k}{2}=44\Leftrightarrow k=8.$$
Vậy hệ số của số hạng chứa x^8 là $(-1)^8\cdot\mathrm{C}_{12}^{8}\cdot 2^{12-8}=7920$.
Chọn đáp án C □

Câu 27. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+10}{2x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 6. B. 5. C. 9. D. 4.

Lời giải.

Ta có tập xác định $\mathscr{D}=\left(-\infty;-\dfrac{m}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{m}{2};+\infty\right)$ và đạo hàm $y'=\dfrac{m^2-20}{(2x+m)^2}$.
Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}(0;2)\subset\mathscr{D}\\ y'<0,\ \forall x\in\mathscr{D}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}2\le-\dfrac{m}{2}\\ -\dfrac{m}{2}\le 0\end{array}\right.\\ m^2-20<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\le-4\\ m\ge 0\end{array}\right.\\ -2\sqrt{5}<m<2\sqrt{5}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2\sqrt{5}<m\le-4\\ 0\le m<2\sqrt{5}.\end{array}\right.$$

Vậy có 6 giá trị nguyên của m là $\{-4;0;1;2;3;4\}$.
Chọn đáp án A □

Câu 28. Số giá trị nguyên của m để phương trình $4^x-2^{x+3}+1=m$ có hai nghiệm phân biệt là

A. 17. B. 15. C. 14. D. 16.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương $2^{2x} - 8 \cdot 2^x + 1 = m$. (1)
Đặt $t = 2^x$, điều kiện $t > 0$, thu được phương trình $t^2 - 8t + 1 = m$. (2)
Chú ý rằng, với mỗi $t > 0$ thì sự tương ứng $t \leftrightarrow x$ là $1 - 1$. Do đó phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt.
Bảng biến thiên của hàm số $f(t) = t^2 - 8t + 1$ trên $(0; +\infty)$

t	0		4		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	1	$\searrow$	-15	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $-15 < m < 1$, tương ứng có $0 - (-14) + 1 = 15$ giá trị nguyên của m.
Chọn đáp án B □

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và thỏa mãn $2 \cdot f(3x) + 3 \cdot f\left(\dfrac{2}{x}\right) = -\dfrac{15x}{2}$, $\displaystyle\int_3^9 f(x)\,\mathrm{d}x = k$. Tính $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

A $I = -\dfrac{45+k}{9}$. **B** $I = \dfrac{45-k}{9}$. **C** $I = \dfrac{45+k}{9}$. **D** $I = \dfrac{45-2k}{9}$.

Lời giải.
Từ giả thiết $2 \cdot f(3x) + 3 \cdot f\left(\dfrac{2}{x}\right) = -\dfrac{15x}{2}$, suy ra

$$2\int_1^3 f(3x)\,\mathrm{d}x + 3\int_1^3 f\left(\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_1^3 \left(-\frac{15x}{2}\right)\mathrm{d}x = -30.$$

Xét tích phân $K = \displaystyle\int_1^3 f(3x)\,\mathrm{d}x$.
Đặt $t = 3x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}t$. Với $x = 1 \Rightarrow t = 3$; $x = 3 \Rightarrow t = 9$. Suy ra

$$K = \int_3^9 f(t)\frac{1}{3}\,\mathrm{d}t = \frac{k}{3}.$$

Xét tích phân $L = \displaystyle\int_1^3 f\left(\dfrac{2}{x}\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $\dfrac{1}{t} = \dfrac{2}{x} \Leftrightarrow x = 2t \Rightarrow \,\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t$. Với $x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$; $x = 3 \Rightarrow t = \dfrac{3}{2}$. Suy ra

$$L = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{1}{t}\right) 2\,\mathrm{d}t = 2I.$$

Vậy ta có

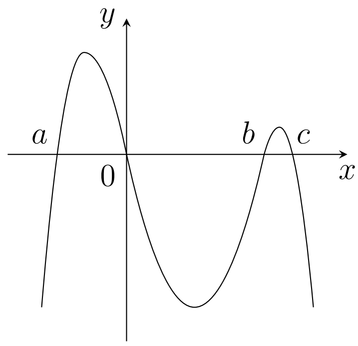
$$2 \cdot \frac{k}{3} + 3 \cdot 2I = -30 \Leftrightarrow I = -\frac{45+k}{9}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 30.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết rằng phương trình $f'(x) = 0$ có bốn nghiệm phân biệt a, 0, b, c với $a < 0 < b < c$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) $f(a) > f(b) > f(c)$. **B** $f(a) > f(c) > f(b)$.
(C) $f(c) > f(a) > f(b)$. (D) $f(b) > f(a) > f(c)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị, ta thấy

$$f(b) - f(a) = \int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x < 0 \Rightarrow f(a) > f(b).$$

$$f(c) - f(a) = \int\limits_a^c f'(x)\,\mathrm{d}x < 0 \Rightarrow f(a) > f(c).$$

$$f(c) - f(b) = \int\limits_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x > 0 \Rightarrow f(c) > f(b).$$

Vậy, $f(a) > f(c) > f(b)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Xét các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3 + 2i| = 5$. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = z + 1 - i$ là

(A) Đường tròn tâm $I(-4; 3)$, bán kính $R = 5$. (B) Đường tròn tâm $I(3; -2)$, bán kính $R = 5$.
C Đường tròn tâm $I(4; -3)$, bán kính $R = 5$. (D) Đường tròn tâm $I(-2; 1)$, bán kính $R = 5$.

Lời giải.

Ta có

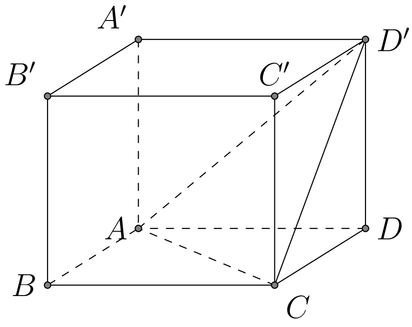
$$w - 4 + 3i = z - 3 + 2i$$
$$\Rightarrow |w - 4 + 3i| = |z - 3 + 2i| = 5.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(4; -3)$, bán kính $R = 5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 32.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = 2a$, $AA' = 3a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$ (tham khảo hình vẽ bên).



Giá trị của $\tan\alpha$ bằng

A $\dfrac{6\sqrt{5}}{2}$. **B** $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$. **C** 3. **D** $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$.

Lời giải.

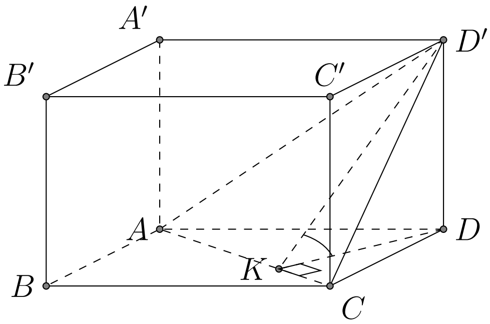
Gọi K là hình chiếu của D trên AC.

Vì $AC \perp DK$ và $AC \perp DD'$ nên $AC \perp KD'$.

Vậy góc giữa (ACD') và $(ABCD)$ bằng góc $\widehat{D'KD}$.

Ta có $KD = \dfrac{AD \cdot CD}{\sqrt{AD^2 + CD^2}} = \dfrac{2a \cdot a}{\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

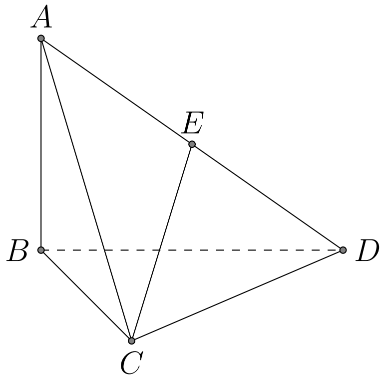
$\tan\alpha = \dfrac{DD'}{KD} = 3a \div \dfrac{2a}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.



Chọn đáp án B □

Câu 33.

Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD). Biết tam giác BCD vuông tại C và $AB = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $AC = a\sqrt{2}$, $CD = a$. Gọi E là trung điểm của AD (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng AB và CE bằng



A 45°. **B** 60°.

C 30°. **D** 90°.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của BD. Khi đó $EH \parallel AB$ và $EH \perp (BCD)$.

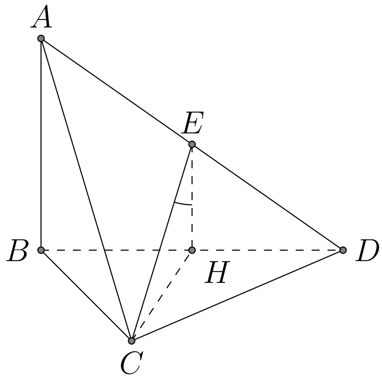
Góc giữa AB và CE bằng góc giữa EH và EC và bằng $\widehat{HEC}$.

Ta có $EH = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$, $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$,

$CH^2 = \dfrac{2(CB^2 + CD^2) - BD^2}{4} = \dfrac{3a^2}{8} \Rightarrow CH = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Vì $\tan\widehat{HEC} = \dfrac{CH}{EH} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4} \div \dfrac{a\sqrt{6}}{4} = 1$ nên $\widehat{HEC} = 45^\circ$.

Vậy góc giữa AB và CE bằng 45°.

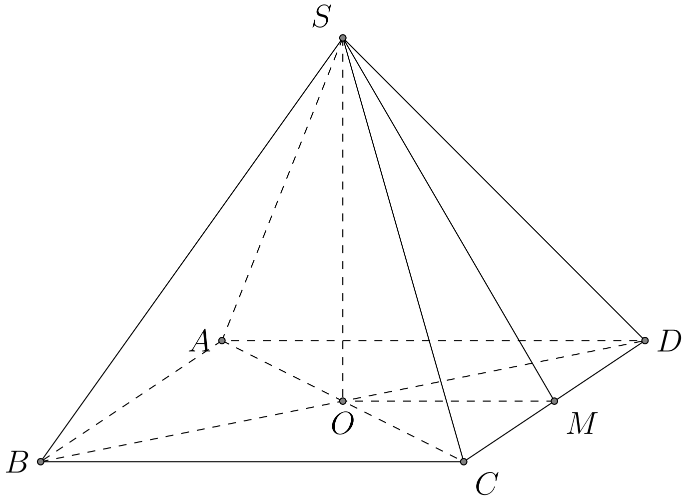


Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, diện tích mỗi mặt bên bằng a^2. Thể tích khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy nội tiếp hình vuông $ABCD$ bằng

A $\dfrac{\pi a^3\sqrt{15}}{8}$. **B** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{15}}{12}$. **C** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{15}}{18}$. **D** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{15}}{24}$.

Lời giải.



Đường tròn nội tiếp hình vuông có bán kính $R = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{a}{2}$. Do đó diện tích của hình tròn này bằng $B = \pi R^2 = \dfrac{\pi a^2}{4}$.

Gọi M là trung điểm của CD.

Theo giả thiết $S_{\mathrm{SCD}} = a^2$, suy ra $\dfrac{1}{2} \cdot SM \cdot CD = a^2 \Rightarrow SM = 2a$.

Tam giác SOM vuông tại O

$$SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

Vậy thể tích của khối nón cần tìm bằng $V = \dfrac{1}{3} \cdot B \cdot SO = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\pi a^2}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{15}}{2} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{15}}{24}$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-2}{-3}$ và mặt phẳng $(P)\colon x - y + 2z - 6 = 0$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P), cắt và vuông góc với d có phương trình

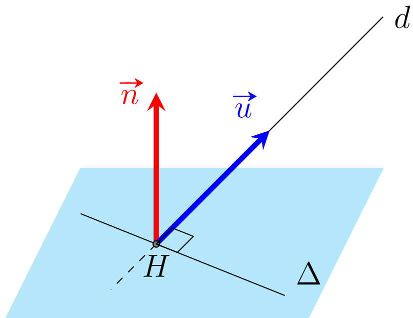
A. $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-4}{7} = \dfrac{z+1}{3}$.

B. $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-2}{7} = \dfrac{z-5}{3}$.

C. $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+2}{7} = \dfrac{z+5}{3}$.

D. $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+4}{7} = \dfrac{z-1}{3}$.

Lời giải.



Gọi Δ là đường thẳng cần tìm, H là giao điểm giữa d và (P).

Tọa độ của H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-2}{-3} \\ x - y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ z = 5 \end{cases} \Rightarrow H(-2; 2; 5).$$

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; 1; -3)$, mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -1; 2)$.

Vì Δ nằm trong (P), cắt và vuông góc với d nên Δ qua H và có một véc-tơ chỉ phương là $[\vec{u}, \vec{n}] = (-1; -7; -3) = -(1; 7; 3)$. Suy ra Δ có phương trình $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-2}{7} = \dfrac{z-5}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Lấy ngẫu nhiên một số tự nhiên có 5 chữ số. Xác suất để chọn được số tự nhiên có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ mà $a_1 \le a_2 + 1 \le a_3 - 3 < a_4 \le a_5 + 2$ bằng

A. $\dfrac{1001}{45000}$. B. $\dfrac{77}{1500}$. C. $\dfrac{7}{5000}$. D. $\dfrac{1001}{30000}$.

Lời giải.

Số các số tự nhiên có 5 chữ số bằng $99999 - 10000 + 1 = 90000$ (số). Suy ra $\mathrm{n}(\Omega) = 90000$.

Gọi A là biến cố: "số chọn được có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ mà $a_1 \le a_2 + 1 \le a_3 - 3 < a_4 \le a_5 + 2$".

Theo giả thiết bài toán, ta có

$$1 \le a_1 \le a_2 + 1 \le a_3 - 3 < a_4 \le a_5 + 2$$

$$\Leftrightarrow 1 \le a_1 < a_2 + 2 < a_3 - 1 < a_4 + 2 < a_5 + 5 \le 14.$$

Suy ra số cách chọn bộ $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_5)$ bằng số cách chọn ra 5 phần tử phân biệt trong 14 phần tử $\{1;2;3;\ldots;14\}$. Từ đó $\mathrm{n}(A) = \mathrm{C}_{14}^5 = 2002$.
Vậy xác suất cần tìm bằng $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mathrm{n}(A)}{\mathrm{n}(\Omega)} = \dfrac{2002}{90000} = \dfrac{1001}{45000}$.
Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho hàm số $y = \mathrm{e}^{-2x} \cdot \cos x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $y' + 4y'' + 5y = 0$. **B** $y'' + 4y' + 5y = 0$. **C** $y'' - 4y' + 5y = 0$. **D** $y' - 4y'' + 5y = 0$.

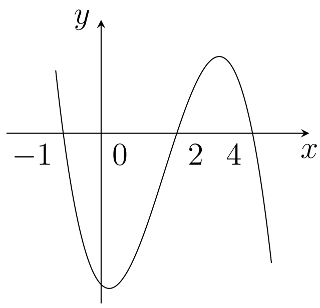
Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned} & y' = -2\mathrm{e}^{-2x}\cos x - \mathrm{e}^{-2x}\sin x = \mathrm{e}^{-2x}(-2\cos x - \sin x). \\ & y'' = -2\mathrm{e}^{-2x}(-2\cos x - \sin x) + \mathrm{e}^{-2x}(2\sin x - \cos x) = \mathrm{e}^{-2x}(3\cos x + 4\sin x). \\ \Rightarrow\ & y'' + 4y' = \mathrm{e}^{-2x}(3\cos x + 4\sin x - 8\cos x - 4\sin x) = -5\mathrm{e}^{-2x}\cos x = -5y. \end{aligned}$$

Vậy mệnh đề đúng là $y'' + 4y' + 5y = 0$.
Chọn đáp án B □

Câu 38.
Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(10 - 2^x)$ đồng biến trên khoảng

A $(2;4)$. **B** $(\log_2 6;4)$.
C $(-\infty;2)$. **D** $(\log_2 11;+\infty)$.



Lời giải.
Ta có $y' = -2^x \ln 2 f'(10 - 2^x)$.
Xét $y' > 0 \Leftrightarrow -2^x \ln 2 f'(10 - 2^x) > 0 \Leftrightarrow f'(10 - 2^x) < 0$.
Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(10 - 2^x) < 0$ khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} -1 < 10 - 2^x < 2 \\ 10 - 2^x > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -11 < -2^x < -8 \\ -2^x > -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 11 > x > 3 \\ x < \log_2 6 \simeq 2{,}6. \end{array}\right.$$

Vậy hàm số $y = f(10 - 2^x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.
Chọn đáp án C □

Câu 39. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + 2018$ với m là tham số. Tổng bình phương của tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1 + x_2 = 2$ bằng

A $\dfrac{52}{9}$. **B** $\dfrac{10}{9}$. **C** $\dfrac{73}{16}$. **D** $\dfrac{34}{9}$.

Lời giải.

Ta có $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$. Hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \dfrac{-\sqrt{6}+2}{2} < m < \dfrac{\sqrt{6}+2}{2}. \end{cases}$$

Với điều kiện trên thì hàm số có hai cực trị x_1, x_2. Theo định lí Vi-ét, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2m-2}{m} \\ x_1x_2 = \dfrac{3m-6}{m}. \end{cases}$$

Kết hợp với giả thiết $2x_1 + x_2 = 2$, ta được phương trình ẩn m

$$\frac{2}{m} \cdot \frac{2m-4}{m} = \frac{3m-6}{m} \Leftrightarrow 3m^2 - 10m + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = \dfrac{4}{3}. \end{array}\right.$$

Cả hai giá trị m này đều thỏa điều kiện ở trên nên nhận.
Vậy đáp số của bài toán là $2^2 + \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{52}{9}$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Biết $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+4}{x+1}$ sao cho độ dài đoạn thẳng AB nhỏ nhất. Tính $P = y_1^2 + y_2^2 - x_1x_2$.

A $P = 6$. B $P = 6 - 2\sqrt{3}$. C $P = 10 - \sqrt{3}$. D $P = 10$.

Lời giải.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 < -1 < x_2$.
Vì hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+4}{x+1}$ nên $y_1 = \dfrac{x_1+4}{x_1+1}$, $y_2 = \dfrac{x_2+4}{x_2+1}$.
Khi đó

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_2 - x_1)^2 + \left(\frac{x_2+4}{x_2+1} - \frac{x_1+4}{x_1+1}\right)^2 = (x_2-x_1)^2 + \frac{9(x_2-x_1)^2}{(x_2+1)^2(x_1+1)^2} \\ &= (x_2-x_1)^2\left[1 + \frac{9}{(x_1+1)^2(x_2+1)^2}\right]. \end{aligned}$$

Đặt $a = x_1 + 1 < 0$, $b = x_2 + 1 > 0$, ta được

$$AB^2 = [b + (-a)]^2\left(1 + \frac{9}{a^2b^2}\right) \geq 4(-a)b \cdot \frac{6}{(-a)b} = 24.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} b = -a \\ 1 = \dfrac{9}{a^2b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ b^4 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\sqrt{3} \\ b = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{3} - 1 \\ x_2 = \sqrt{3} - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 - \sqrt{3} \\ y_2 = 1 + \sqrt{3}. \end{cases}$$

Vậy $P = \left(1-\sqrt{3}\right)^2 + \left(1+\sqrt{3}\right)^2 - \left(-\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right) = 10$.

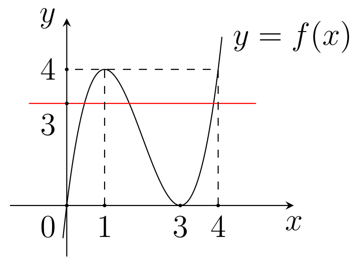
Chọn đáp án D □

Câu 41. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Đặt $f^k(x) = f\left(f^{k-1}(x)\right)$ với k là số nguyên dương lớn hơn 1. Hỏi phương trình $f^5(x) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm phân biệt?

(A) 120. (B) 365. $\boxed{\text{C}}$ 122. (D) 363.

Lời giải.

Ta có $f(x) = x(x-3)^2$. Suy ra $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3. \end{array}\right.$



Từ đó

$f^5(x) = 0 \Leftrightarrow f\left(f^4(x)\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f^4(x) = 0 \\ f^4(x) = 3. \end{array}\right.$

- Phương trình $f^4(x) = 0$ cho ta 2 nghiệm $f^3(x) = 0$ và $f^3(x) = 3$.
- Phương trình $f^4(x) = 3$ cho ta 3 nghiệm phân biệt $f^3(x) \in (0;4) \setminus \{1;3\}$.

Như vậy có 4 nghiệm phân biệt $f^3(x) \in (0;4)$ và một nghiệm $f^3(x) = 0$.

- Từ 4 nghiệm $f^3(x) \in (0;4)$, cho ta $4 \cdot 3 = 12$ nghiệm phân biệt $f^2(x) \in (0;4) \setminus \{1;3\}$.
- Còn từ $f^3(x) = 0$ cho ta 2 nghiệm $f^2(x) = 0$ và $f^2(x) = 3$.

Như thế có 13 nghiệm phân biệt $f^2(x) \in (0;4)$ và một nghiệm $f^2(x) = 0$.

Tiếp tục,

- Từ 13 nghiệm $f^2(x) \in (0;4)$ cho ta $13 \cdot 3 = 39$ nghiệm phân biệt $f(x) \in (0;4) \setminus \{1;3\}$.
- Từ $f^2(x) = 0$ cho ta 2 nghiệm $f(x) = 0$ và $f(x) = 3$.

Suy ra có 40 nghiệm phân biệt $f(x) \in (0;4)$ và một nghiệm $f(x) = 0$.

Cuối cùng,

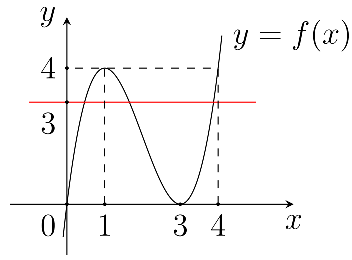
- Từ 40 nghiệm $f(x) \in (0;4)$ cho ta $40 \cdot 3 = 120$ nghiệm phân biệt $x \in (0;4) \setminus \{1;3\}$.
- Từ $f(x) = 0$ cho ta hai nghiệm $x = 0$ và $x = 3$.

Vậy phương trình đã cho có $120 + 2 = 122$ nghiệm phân biệt.

Cách 2. (Tổng quát)

Gọi a_k là số nghiệm của phương trình $f^k(x) = 0$ và b_k là số nghiệm của phương trình $f^k(x) = 3$.

Ta có



- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right. \Rightarrow a_1 = 2$.
- $f(x) = 3$ có ba nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2,\ x_3 \in (0;4) \setminus \{1;3\} \Rightarrow b_1 = 3$.

Với $k > 1$, ta có

- $f^k(x) = f\left(f^{k-1}(x)\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f^{k-1}(x) = 0 \\ f^{k-1}(x) = 3 \end{array}\right. \Rightarrow a_k = a_{k-1} + b_{k-1}$.
- $f^k(x) = f\left(f^{k-1}(x)\right) = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f^{k-1}(x) = m_1 \\ f^{k-1}(x) = m_2 \\ f^{k-1}(x) = m_3 \end{array}\right.$ với $m_1,\ m_2,\ m_3 \in (0;4) \setminus \{1;3\}$.

  Mỗi phương trình trên có 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;4) \setminus \{1;3\}$. Do đó $b_k = 3b_{k-1}$, suy ra (b_k) là cấp số nhân có công bội là $q = 3$, số hạng đầu $b_1 = 3$. Suy ra $b_k = 3 \cdot 3^{k-1} = 3^k$. Từ đó

$$\begin{aligned} a_k &= a_{k-1} + b_{k-1} \\ &= a_{k-2} + b_{k-2} + b_{k-1} \\ &= \ldots \\ &= a_1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{k-1} \\ &= 2 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{k-1} \\ &= 2 + 3 \cdot \frac{3^{k-1} - 1}{3 - 1} = \frac{3^k + 1}{2} \end{aligned}$$

Vậy, $a_5 = 122$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Số giá trị nguyên của $m \in (-200; 2000)$ để $3 \cdot a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}} > m\sqrt{\log_a b} + 2$ với mọi $a, b \in (1; +\infty)$ là

(A) 199. (B) 2199. **(C) 200.** (D) 2002.

Lời giải.

Đặt $x = \sqrt{\log_a b}$, điều kiện $x > 0$. Ta có $\begin{cases} \sqrt{\log_b a} = \dfrac{1}{x} \\ x^2 = \log_a b \Rightarrow b = a^{x^2} \end{cases}$, thu được

$3a^x - \left(a^{x^2}\right)^{\frac{1}{x}} > mx + 2 \Leftrightarrow 3a^x - a^x > mx + 2 \Leftrightarrow 2a^x > mx + 2 \Leftrightarrow m < \dfrac{2(a^x - 1)}{x}$. $(*)$

Vì $a > 1,\ x > 0$ nên $\dfrac{a^x - 1}{x} > 0$ và $\lim\limits_{x \to (0)^+} \dfrac{a^x - 1}{x} = 0$.

Từ đó suy ra $(*)$ đúng khi và chỉ khi $m \leq 0$.

Kết hợp điều kiện của m, ta được $m \in (-200; 0]$. Tập này có 200 số nguyên.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + x^4}$, $f(1) = a$ và $f(-2) = b$. Giá trị của biểu thức $f(-1) - f(2)$ bằng

(A) $a + b$. **(B) $b - a$.** (C) $a - b$. (D) $-a - b$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2 + x^4}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + 1}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$.

Do hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nên liên tục trên từng khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$. Do đó, hàm số $f(x)$ có dạng $\begin{cases} -\dfrac{1}{x} - \arctan x + C_1, & \text{nếu } x < 0 \\ -\dfrac{1}{x} - \arctan x + C_2, & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$

Thay $x = 1$, ta được $a = -\dfrac{1}{1} - \arctan 1 + C_2 \Rightarrow C_2 = a + 1 + \dfrac{\pi}{4}$.

Thay $x = -2$, ta được $b = -\dfrac{1}{-2} - \arctan(-2) + C_1 \Rightarrow C_1 = b - \dfrac{1}{2} - \arctan 2$.

Do đó

$$\begin{aligned} f(-1) - f(2) &= \left[-\frac{1}{-1} - \arctan(-1) + b - \frac{1}{2} - \arctan 2\right] - \left[-\frac{1}{2} - \arctan 2 + a + 1 + \frac{\pi}{4}\right] \\ &= b - a. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Cho $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos 2x+3\sin 2x)\ln(\cos x+2\sin x)\,\mathrm{d}x=c\ln 2-\frac{a}{b}$, trong đó $a,b,c\in\mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T=a+b+c$.

(A) $T=-11$. (B) $T=5$. (C) $T=7$. (D) $T=9$.

Lời giải.

Gọi I là tích phân đã cho. Ta có

$$\begin{aligned}[\ln(\cos x+2\sin x)]'&=\frac{-\sin x+2\cos x}{\cos x+2\sin x}=\frac{(-\sin x+2\cos x)(\cos x+2\sin x)}{(\cos x+2\sin x)^2}\\&=\frac{2\cos 2x+3\sin x\cos x}{\cos^2 x+4\sin^2 x+4\sin x\cos x}\\&=\frac{4\cos 2x+3\sin 2x}{4\sin 2x-3\cos 2x+5}.\end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases}u=\ln(\cos x+2\sin x)\\ \mathrm{d}v=(4\cos 2x+3\sin 2x)\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{4\cos 2x+3\sin 2x}{4\sin 2x-3\cos 2x+5}\,\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{2}\cdot(4\sin 2x-3\cos 2x+5)\end{cases}.$

Suy ra

$$I=\frac{1}{2}(4\sin 2x-3\cos 2x+5)\cdot\ln(\cos x+2\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos 2x+3\sin 2x)\,\mathrm{d}x$$

$$=4\ln 2-\frac{1}{2}\left(2\sin 2x-\frac{3}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=4\ln 2-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)=4\ln 2-\frac{3}{2}.$$

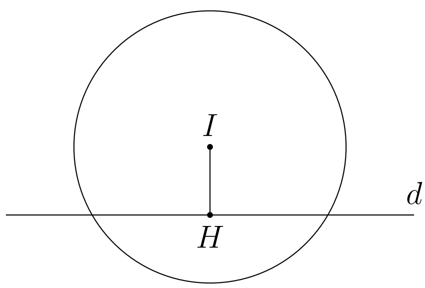
Vậy $c=4,\ a=3,\ b=2$. Suy ra $T=a+b+c=9$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để có đúng hai số phức z thỏa mãn $|z-(2m-1)-i|=10$ và $|z-1+i|=|\overline{z}-2+3i|$.

(A) 41. (B) 40. (C) 165. (D) 164.

Lời giải.



Gọi $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ có điểm biểu diễn là M. Ta có

$|z-1+i|=|\overline{z}-2+3i|$

$\Leftrightarrow |(a-1)+(b+1)i|=|(a-2)+(3-b)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2}=\sqrt{(a-2)^2+(3-b)^2}$

$\Leftrightarrow 2a+8b-11=0$.

Suy ra điểm M thuộc đường thẳng $d\colon 2x+8y-11=0$.

Mặt khác, từ $|z-(2m-1)-i|=10$, suy ra điểm M thuộc đường tròn (C) tâm $I(2m-1;1)$, bán kính bằng 10. Vậy M là giao điểm của d và (C).

Để tồn tại đúng hai số phức z, điều kiện là d phải cắt (C) tại đúng 2 điểm phân biệt. Điều này xảy ra khi

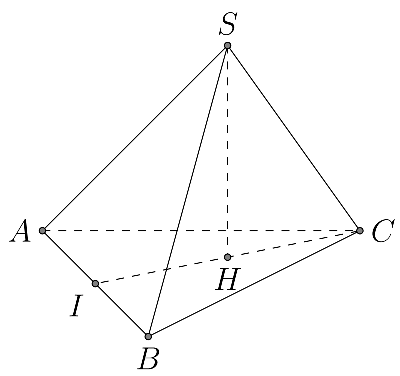
$$\mathrm{d}(I,d) < 10 \Leftrightarrow \frac{|2(2m-1)+8\cdot 1-11|}{\sqrt{2^2+8^2}} < 10 \Leftrightarrow \frac{5-10\sqrt{68}}{4} < m < \frac{5+10\sqrt{68}}{4}.$$

Vậy có $21-(-19)+1=41$ giá trị nguyên của m.

Chọn đáp án A □

Câu 46.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2a$. Gọi I là trung điểm của AB. Biết hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của CI, góc giữa SA và mặt đáy bằng 60° (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CI bằng



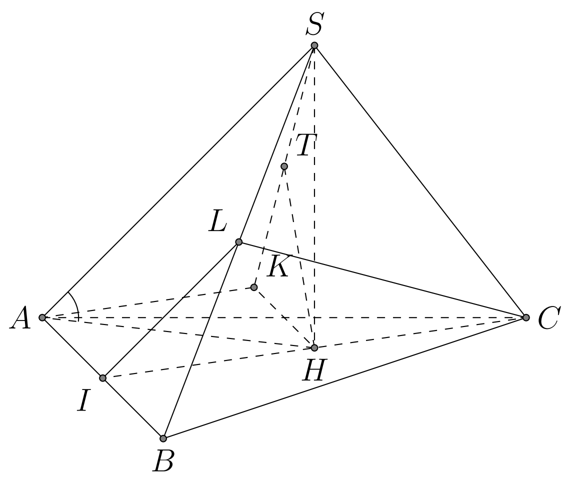
A $\frac{a\sqrt{57}}{19}$. **B** $\frac{a\sqrt{7}}{4}$. **C** $\frac{a\sqrt{21}}{5}$. **D** $\frac{a\sqrt{42}}{8}$.

Lời giải.

Vì AH là hình chiếu của SA lên mặt đáy nên góc giữa SA và mặt đáy bằng góc $\widehat{SAH}$, suy ra $\widehat{SAH}=60^\circ$.

Gọi L là trung điểm SB, K là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật $HIAK$. Khi đó $(SAK) \parallel (LIC)$. Suy ra khoảng cách giữa SA và CI bằng khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SAK).

Ta có $AK \perp (SKH)$, do đó nếu trong $\triangle SHK$ ta kẻ $HT \perp SK$ thì $HT \perp (SAK)$. Từ đó, khoảng cách từ H đến (SAK) bằng HT.



Ta có $HK = \frac{AB}{2} = a$, $SH = AH\cdot\tan 60^\circ = \sqrt{a^2+\left(\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{3}\right)^2}\cdot\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{21}}{2}$,

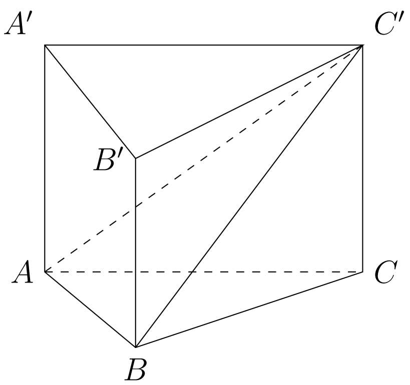
$$HT = \frac{HK\cdot HS}{\sqrt{HK^2+HS^2}} = \frac{a\cdot\frac{a\sqrt{21}}{2}}{\sqrt{a^2+\frac{21a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{21}}{5}.$$

Vậy khoảng cách giữa SA và CI bằng $\frac{a\sqrt{21}}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 47.

Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ (tham khảo hình vẽ bên).

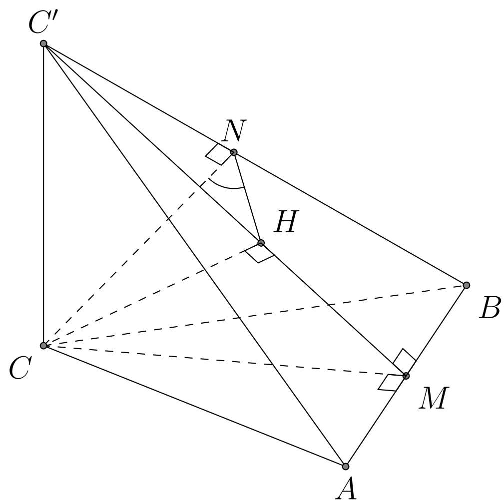


Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

(C) $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. (D) $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm AB, H là hình chiếu của C lên $C'M$ thì $CH \perp (ABC')$. Theo giả thiết, suy ra $CH = a$.

Gọi N là hình chiếu của C lên BC', khi đó $BC' \perp (CHN)$ nên $BC' \perp NH$. Suy ra góc giữa (ABC') và (BCC') bằng góc $\widehat{CNH}$, suy ra $\widehat{CNH} = \alpha$.

Đặt $AB = x$.

Tam giác CHN vuông tại H

$CN = \dfrac{CH}{\sin\alpha} = a \div \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \dfrac{2a\sqrt{33}}{11}$.

Mặt khác, ta có

$$\frac{1}{CC'^2} = \frac{1}{CN^2} - \frac{1}{BC^2}, \frac{1}{CC'^2} = \frac{1}{CH^2} - \frac{1}{CM^2}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{CN^2} - \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{CH^2} - \frac{1}{CM^2} \Leftrightarrow \frac{11}{12a^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{4}{3x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{12a^2} \Rightarrow x = 2a.$$

Vậy, $S_{\text{ABC}} = a\sqrt{3}$, $CC' = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Từ đó, $V_{\text{ABC.A'B'C'}} = S_{\text{ABC}} \cdot CC' = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2;5;3)$ cắt đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{2}$ tại hai điểm phân biệt A, B với chu vi tam giác IAB bằng $14 + 2\sqrt{31}$ có phương trình

A $(x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 49$. (B) $(x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 196$.

(C) $(x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 31$. (D) $(x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 124$.

Lời giải.

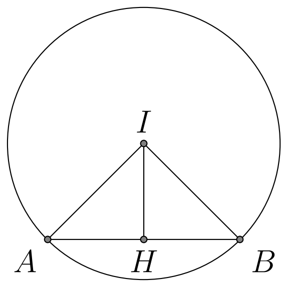
Gọi H là hình chiếu của I lên đường thẳng d. Đặt $AB = 2a$.

Vì $H \in d \Rightarrow H(1+2t; t; 2+2t)$. Ta có $\overrightarrow{IH} = (2t-1; t-5; 2t-1)$ và $\vec{u} = (2;1;2)$ là một véc-tơ chỉ phương của d.

Ta có $\overrightarrow{IH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow 2(2t-1) + 1(t-5) + 2(2t-1) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Thu được $H(3;1;4)$ và $IH = 3\sqrt{2}$.

Theo giả thiết bài toán



$$IA + AB + BI = 14 + 2\sqrt{31} \Leftrightarrow 2R + 2AH = 14 + 2\sqrt{31} \Leftrightarrow R + \sqrt{R^2 - 18} = 7 + \sqrt{31}.$$

Giải phương trình trên ta được nghiệm $R = 7$.

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-2)^2+(y-5)^2+(z-3)^2=49$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x-3y+2z-15=0$ và ba điểm $A(1;2;0)$, $B(1;-1;3)$, $C(1;-1;-1)$. Điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc (P) sao cho $2MA^2-MB^2+MC^2$ nhỏ nhất. Giá trị $2x_0+3y_0+z_0$ bằng

(A) 11. (B) 15. (C) 5. (D) 10.

Lời giải.

Gọi $G(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Từ hệ thức này, suy ra

$$\begin{cases}2(1-a)-(1-a)+(1-a)=0\\2(2-b)-(-1-b)+(-1-b)=0\\2(0-c)-(3-c)+(-1-c)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\\c=-2\end{cases}\Rightarrow G(1;2;-2).$$

Ta có

$$\begin{aligned}2MA^2-MB^2+MC^2&=2\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2\\&=2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2-\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2\\&=2MG^2+2GA^2-GB^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}\left(2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)\\&=2MG^2+2GA^2-GB^2+GC^2.\end{aligned}$$

Vì $2GA^2-GB^2+GC^2$ không đổi nên $2MA^2-MB^2+MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất. Điều này xảy ra khi M là hình chiếu của G lên (P).

Phương trình đường thẳng qua G và vuông góc với (P) là $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+2}{2}$.

Xét hệ $\begin{cases}\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+2}{2}\\3x-3y+2z-15=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=3\\2x-3z=8\\3x-3y+2z=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=-1\\z=0.\end{cases}$

Vậy $M(4;-1;0)$ và giá trị của biểu thức cần tìm bằng $2\cdot 4+3\cdot(-1)+0=5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;-6)$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$, $d_2\colon \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$. Đường thẳng đi qua điểm M và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 tại A, B. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

(A) $2\sqrt{10}$. (B) $\sqrt{38}$. (C) 8. (D) 12.

Lời giải.

Giả sử A, B tồn tại. Vì $A\in d_1\Rightarrow A(1+2a;1-a;-1+a)$, $B\in d_2\Rightarrow B(-2+3b;-1+b;2+2b)$.

Ta có $\overrightarrow{MA}=(2a-1;2-a;a+5)$, $\overrightarrow{MB}=(3b-4;b;2b+8)$.

Vì $M,\ A,\ B$ thẳng hàng nên $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ cùng phương. Điều này tương đương với

$$\begin{cases}2a-1=k(3b-4)\\2-a=kb\\a+5=k(2b+8)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-3kb+4k=1\\a+kb=2\\a-2kb-8k=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\kb=1\\k=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=2.\end{cases}$$

Vậy $A(3;0;0)$, $B(4;1;6)$ và $AB = \sqrt{(4-3)^2+1^2+6^2} = \sqrt{38}$.

Chọn đáp án B □

——— **HẾT** ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

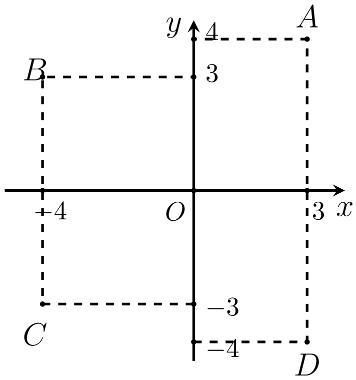
1. B	2. A	3. D	4. C	5. A	6. C	7. D	8. A	9. B	10. C
11. D	12. C	13. D	14. D	15. B	16. A	17. B	18. C	19. A	20. D
21. B	22. C	23. A	24. D	25. C	26. C	27. A	28. B	29. A	30. B
31. C	32. B	33. A	34. D	35. B	36. A	37. B	38. C	39. A	40. D
41. C	42. C	43. B	44. D	45. A	46. C	47. B	48. A	49. C	50. B

61 ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA, THÁNG 5 NĂM 2017 - 2018 TRƯỜNG THPT NGUYỄN KHUYẾN, NAM ĐỊNH

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.
Trong mặt phẳng tọa độ (hình vẽ bên), số phức $z = 3 - 4i$ được biểu diễn bởi điểm nào trong các điểm A, B, C, D?

(A) Điểm A. (B) Điểm B. (C) Điểm C. **(D) Điểm D.**



Lời giải.
Điểm biểu diễn số phức $z = 3 - 4i$ là điểm $D(3; -4)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Giới hạn $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - mx + m - 1}{x - 1}$ bằng

(A) $2 - m$. (B) $+\infty$. (C) 0. (D) $m - 2$.

Lời giải.
Ta có $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - mx + m - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x + 1 - m)(x - 1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1 - m) = 2 - m$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Sắp xếp năm bạn học sinh An, Bình, Chi, Dũng, Lệ vào một chiếc ghế dài có 5 chỗ ngồi. Số cách sắp xếp sao cho bạn Chi luôn ngồi chính giữa là

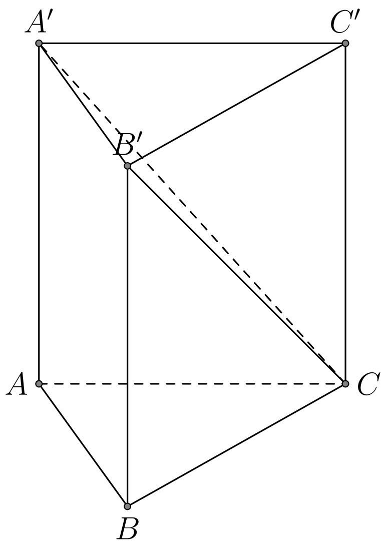
(A) 60. (B) 16. (C) 120. **(D) 24.**

Lời giải.
Số cách xếp Chi vào vị trí đứng giữa là 1, số cách xếp 4 bạn còn lại là $4! = 24$ cách. Vậy có 24 cách xếp.
Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích V. Thể tích khối tứ diện $C.A'B'C'$ bằng

(A) $\dfrac{2V}{3}$. (B) $\dfrac{V}{2}$. (C) $\dfrac{V}{6}$. **(D) $\dfrac{V}{3}$.**

Lời giải.
Ta có $V_{C.A'B'C'} = \dfrac{1}{3} d(C, (A'B'C')) \cdot S_{A'B'C'} = \dfrac{V}{3}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = \dfrac{x+2}{x-1}$.

(B) $y = -x^4 - x^2 - 1$.

C $y = -x^3 + x^2 - 3x + 11$.

(D) $y = \cot x$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = -x^3 + x^2 - 3x + 11 \Rightarrow y' = -3x^2 + 2x - 3 < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $y = -x^3 + x^2 - 3x + 11$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Trong không gian cho hai điểm phân biệt A, B. Tìm tập hợp tâm của các mặt cầu đi qua 2 điểm A, B.

A Mặt phẳng trung trực đoạn AB.

(B) Đường thẳng đi qua A và vuông góc với AB.

(C) Đường tròn đường kính AB.

(D) Chỉ có một tâm duy nhất là trung điểm AB.

Lời giải.

Tập hợp tâm của mặt cầu đi qua hai điểm A, B là mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Hàm số nào dưới đây chỉ có cực tiểu và không có cực đại?

(A) $y = -x^4 + x^2$.

(B) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

C $y = x^4 + 1$.

(D) $y = x^3 + x^2 + 2x - 1$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^4 + 1$ có $y' = 4x^3, y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

y' đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x = 0$ nên hàm số chỉ có cực tiểu không có cực đại.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Cho a, b, c là các số thực dương và $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$.

(B) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

(C) $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

D $\log_a(b + c) = \log_a b + \log_a c$.

Lời giải.

Khẳng định $\log_a(b+c) = \log_a b + \log_a c$ là một khẳng định sai.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + 2x + 3x^2$ thỏa mãn $F(1) = 2$. Tính $F(0) + F(-1)$.

A -3. B -4. C 3. D 4.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \int (1 + 2x + 3x^2)dx = x + x^2 + x^3 + c$.

Mà $F(1) = 2 \Rightarrow c = -1$ hay $F(x) = x + x^2 + x^3 - 1$.

Do đó $F(0) + F(-1) = -3$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x - z + 2 = 0$. Véc-tơ nào là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

A $\vec{n}(-1; 0; -1)$. B $\vec{n}(3; -1; 2)$. C $\vec{n}(3; -1; 0)$. D $\vec{n}(3; 0; -1)$.

Lời giải.

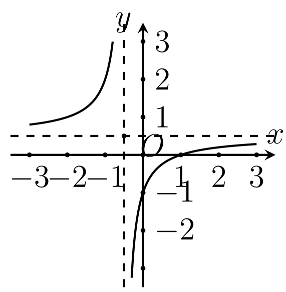
Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (3; 0; -1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 11.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$. B $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$. C $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. D $y = \dfrac{x-1}{2x+1}$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\dfrac{1}{2}$ tiệm cận ngang $y = \dfrac{1}{2}$.

Do đó các hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$, $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$, $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ không thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm $A(-1; 0; 1)$, $B(1; 1; 1)$ và $C(0; 0; 2)$ có phương trình là

A $x - 2y - z + 2 = 0$. B $x - 2y - z - 2 = 0$.

C $x - 2y + z - 2 = 0$. D $-x + 2y - z + 2 = 0$.

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1; -2; -1)$.

Phương trình mặt phẳng $(ABC)\colon x - 2y - z + 2 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2+4x} > \dfrac{1}{32}$ có tập nghiệm $S = (a; b)$. Khi đó $b - a$ bằng

(A) 4. (B) 2. (C) 6. (D) 8.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4x} > \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Leftrightarrow x^2+4x<5 \Leftrightarrow -1<x<5$.

Suy ra $a=-1, b=5 \Rightarrow S=b-a=6$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Hình trụ có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Tính độ dài đường sinh của hình trụ đó.

(A) $\frac{3a}{2}$. (B) $2\sqrt{2}a$. (C) $3a$. (D) $2a$.

Lời giải.

Ta có $S_{xq}=2\pi rl=2\pi al=3\pi a^2 \Rightarrow l=\frac{3}{2}a$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Phương trình nào sau đây là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(-1;3;2)$, $B(1;4;-2)$?

(A) $\begin{cases} x=-1-2t \\ y=3+t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=2+4t \end{cases}$. (B) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+2}{-4}$.

(C) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{4}$. (D) $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+2}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA}=(-2;-1;4)$ là vec-tơ chỉ phương của đường thẳng AB.

Đường thẳng AB đi qua điểm B nên có phương trình chính tắc là $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+2}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Cho hàm số $y=\frac{mx+n}{x-1}$ có đồ thị (C). Biết tiệm cận ngang của (C) đi qua $A(-1;2)$ và điểm $B(2;1)$ thuộc (C). Tính $m+n$.

(A) -3. (B) 3. (C) 1. (D) -1.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y=\frac{mx+n}{x-1}$ có tiệm cận ngang $y=m$.

Theo bài ra ta có $\begin{cases} m=2 \\ \frac{2m+n}{2-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=-3 \end{cases} \Rightarrow m+n=-1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ có bao nhiêu tiếp tuyến song song với trục Ox.

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Ta có $y'=4x^3-4x, y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm1 \end{array}\right.$.

- Với $x=0 \Rightarrow y=0$, khi đó phương trình tiếp tuyến $y=0$. (trường hợp loại vì trùng trục Ox)

- Với $x = 1 \Rightarrow y = -1$, khi đó phương trình tiếp tuyến $y = -1$.
- Với $x = -1 \Rightarrow y = -1$, khi đó phương trình tiếp tuyến $y = -1$.

Vậy có duy nhất tiếp tuyến $y = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho hàm số $y = x + \sqrt{18 - x^2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số. Khi đó $M + m$ bằng

A $6 - 3\sqrt{2}$. **B** 0. **C** 6. **D** $6 + 3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \left[-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}\right]$ Ta có $y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{18 - x^2}}, y' = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Ta có $y\left(-3\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{2}, y\left(3\right) = 6, y\left(3\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{2}$.

Vậy $m = 3\sqrt{2}, M = 6 \Rightarrow M + m = 6 + 3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x & \text{khi } x \geq 1 \\ 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I = 4$. **B** $I = 2$. **C** $I = \dfrac{3}{2}$. **D** $I = \dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 1\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x = \dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Cho số phức z thỏa mãn $2z + 3(1 - i)\overline{z} = 1 - 9i$. Tìm phần ảo của số phức $\overline{z}$.

A 1. **B** 3. **C** 2. **D** -3.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Theo bài ra

$$\begin{aligned} & 2z + 3(1 - i)\overline{z} = 1 - 9i \\ \Leftrightarrow & 5x - 3y - (3x + y)i = 1 - 9i \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 5x - y = 1 \\ 3x + y = 9 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phần ảo của số phức $\overline{z}$ bằng -3.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Cho tứ diện $ABCD$ có các tam giác ABC, DBC vuông cân và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. $AB = AC = DB = DC = 2a$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACD).

A $\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C** $a\sqrt{6}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

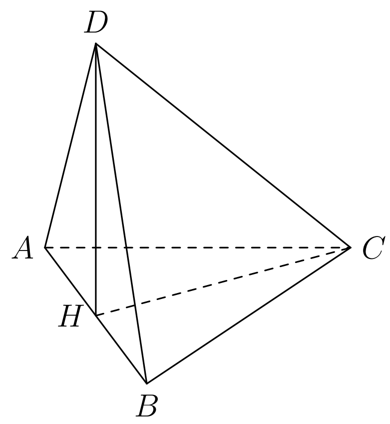
Gọi H là trung điểm của AB khi đó $SH \perp AB, CH \perp AB$ và $SH \perp HC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Do đó $d(A,(SBC)) = 2d(H,(SBC)) = 2h$. (1)

Mà $SH = HB = HC = \dfrac{AB}{2} = a\sqrt{2}$.

Suy ra $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{3}{2a^2} \Rightarrow h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $d(A,(BCD)) = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Một người gửi 200 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,4%/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi được nhập vào tiền vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau đó đúng 6 tháng người đó được lĩnh số tiền (cả vốn lẫn lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây biết trong thời gian này người đó không rút tiền và lãi xuất không đổi?

A 204848000 đồng. **B** 204847000 đồng. **C** 204034000 đồng. **D** 204032000 đồng.

Lời giải.

Số tiền nhận được sau 6 tháng là $2 \cdot 10^8 \cdot 1{,}004^6 = 204848256{,}8$ đồng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Trong một lớp học có 18 học sinh nam và 17 học sinh nữ. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả học sinh nam và học sinh nữ.

A $\dfrac{65}{71}$. **B** $\dfrac{69}{77}$. **C** $\dfrac{443}{506}$. **D** $\dfrac{68}{75}$.

Lời giải.

Số cách gọi 4 học sinh lên bảng là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{35}^4$.

Số cách gọi 4 học sinh chỉ có các bạn nam C_{18}^4.

Số cách gọi 4 học sinh chỉ có các bạn nữ C_{17}^4.

Số cách gọi 4 học sinh có cả học sinh nam và học sinh nữ là $\mathrm{C}_{35}^4 - \mathrm{C}_{18}^4 - \mathrm{C}_{17}^4 = 46920$.

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{46920}{\mathrm{C}_{35}^4} = \dfrac{69}{77}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Cho mặt phẳng $(\alpha): x - 2y - z - 3 = 0$ cắt mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 4z - 1 = 0$ theo giao tuyến là đường tròn. Tính chu vi của đường tròn đó.

A $\pi\sqrt{3}$. **B** 4π. **C** $2\pi\sqrt{3}$. **D** $2\sqrt{6}\pi$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;-2)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$.

Ta có $h = d(I,(\alpha)) = \sqrt{6}$ nên bán kính đường tròn giao tuyến $r^2 = R^2 - h^2 = 4 \Rightarrow r = 2$.

Vậy chu vi của đường tròn cần tìm là $2 \cdot \pi \cdot r = 4\pi$.

Chọn đáp án (B) □

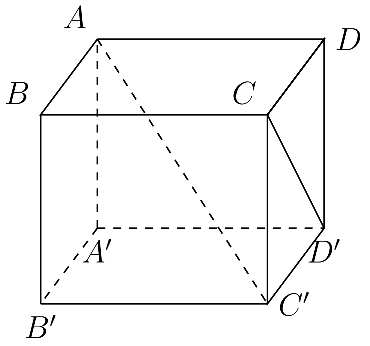
Câu 25. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng CD' và AC'.

(A) 30°. (B) 90°. (C) 60°. (D) 45°.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} CD' \perp C'D \\ CD' \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD' \perp (ADC'B') \Rightarrow CD' \perp AC'$.

Do đó góc giữa hai đường thẳng CD' và AC' bằng 90°.



Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + x \cdot f'(x) = 3x^2 + 2x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $f(1)$.

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

Lời giải.

Theo giả thiết $f(x) + x \cdot f'(x) = 3x^2 + 2x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $(xf(x))' = 3x^2 + 2x \Rightarrow \displaystyle\int_0^1 (xf(x))'\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (3x^2+2x)\,\mathrm{d}x = 2 \Rightarrow (xf(x))\Big|_0^1 = 2 \Rightarrow f(1) = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Tìm hệ số của số hạng x^4 trong khai triển nhị thức Niuton $\left(2x - \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^n$ với $x > 0$, biết n là số tự nhiên lớn nhất thỏa mãn $\mathrm{A}_n^5 \le 18\mathrm{A}_{n-2}^4$.

(A) 8064. (B) $-8064x^4$. (C) -8064. (D) $8064x^4$.

Lời giải.

Điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \ge 6$. Ta có

$\mathrm{A}_n^5 \le 18\mathrm{A}_{n-2}^4 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-5)!} \le 18\dfrac{(n-2)!}{(n-6)!} \Leftrightarrow n(n+1) \ge 18(n-5) \Leftrightarrow n^9 - 19n + 90 \le 0 \Leftrightarrow 9 \le n \le 10$.

Suy ra, số tự nhiên lớn nhất là $n = 10$.

Số hạng tổng quát trong khai triển có dạng $\mathrm{C}_{10}^k \cdot 2^{10-k} \cdot x^{10-k} \cdot x^{-\frac{k}{5}}$.

Số hạng chứa x^4 ứng với $10 - k - \dfrac{k}{5} = 4 \Leftrightarrow k = 5$.

Vậy hệ số của x^4 là $\mathrm{C}_{10}^5 \cdot 2^5 = 8064$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Phương trình $2\log_3 x = \dfrac{x+1}{x-1}$ có bao nhiêu nghiệm thực?

(A) 3. (B) 0. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x > 0, x \ne 1$

Với điều kiện đó phương trình $\Leftrightarrow \log_3 x - \dfrac{x+1}{2x-2} = 0$.

Xét $f(x) = \log_3 x - \dfrac{x+1}{2x-2}$, $\mathscr{D} = (0; +\infty) \setminus \{1\}$.

$f'(x) = \dfrac{1}{x\ln 3} + \dfrac{4}{(2x-2)^2} > 0, \forall x \in \mathscr{D}$.
Ta có bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
y'	||	$+$	||	$+$	
y	||	$-\infty \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow +\infty$	

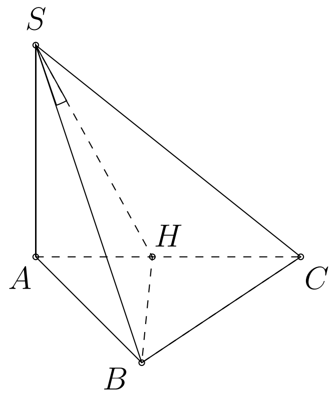
Từ bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.
Chọn đáp án C □

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng

A 45°. **B** 30°. **C** 60°. **D** 90°.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên $AC \Rightarrow BH \perp (SAC)$
Xét tam giác ABH vuông tại H, ta có
$\sin \widehat{BAH} = \dfrac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB \cdot \sin 60^\circ = a\sqrt{3}$
$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{6}$.
Xét tam giác SBH vuông tại H, ta có
$\sin \widehat{BSH} = \dfrac{BH}{SB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{BSH} = 45^\circ$
Vậy $\widehat{[SB,(SAC)]} = \widehat{BSH} = 45^\circ$.



Chọn đáp án A □

Câu 30. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{-1}$ và cắt hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$, $d_2\colon \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{3}$.

A $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$. **B** $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$.

C $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{-1}$. **D** $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}_d = (1;1;-1)$, $\vec{u}_{d_1} = (2;1;-1)$, $\vec{u}_{d_2} = (-1;1;3)$.
Gọi (P) là mặt phẳng song song với d và chứa d_1 thì (P) đi qua $A(-1;-1;2)$ và có một VTPT là $\vec{n}_1 = [\vec{u}_d, \vec{u}_{d_1}] = (0;-1;-1)$. Do đó $(P)\colon y + z - 1 = 0$.
Gọi (Q) là mặt phẳng song song với d và chứa d_2
Ta có (Q) đi qua $B(1;2;3)$ và có một VTPT là $\vec{n}_2 = [\vec{u}_d, \vec{u}_{d_2}] = (4;-2;2)$. Do đó $(Q)\colon 2x - y + z - 3 = 0$.

Khi đó, đường thẳng cần tìm Δ là giao điểm của (P) và (Q), ta có

$$\Delta\colon \begin{cases} y+z-1=0 \\ 2x-y+z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=t \qquad (t\in\mathbb{R}). \\ z=1-t \end{cases}$$

Hay $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+mx+2\ln x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

(A) $m\le -3$. (B) $m\ge -3$. (C) $m\ge 3$. (D) $m\le 3$.

Lời giải.

Với $x\in(0;+\infty)$, ta có $y'=x^2+m+\dfrac{2}{x}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x>0 \Leftrightarrow m\ge -x^2-\dfrac{2}{x},\forall x>0 \Leftrightarrow m\ge \max\limits_{x>0}\left\{-x^2-\dfrac{2}{x}\right\}$.

Mặt khác, với $x>0$, theo bất đẳng thức Cauchy ta có $x^2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\ge 3\sqrt[3]{x^2\cdot\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x}}=3$.

Suy ra $\max\limits_{x>0}\left\{-x^2-\dfrac{2}{x}\right\}=-3$ (vì với $x\in(0;+\infty)$ thì $-x^2-\dfrac{2}{x}<0$).

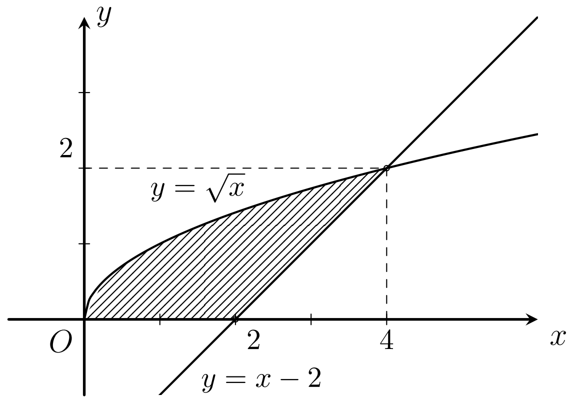
Suy ra $m\ge -3$.

Chọn đáp án B □

Câu 32.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi $y=\sqrt{x}$, $y=x-2$ và trục hoành (hình vẽ). Quay (H) xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành.

(A) $\dfrac{10\pi}{3}$. (B) $\dfrac{16\pi}{3}$. (C) $\dfrac{7\pi}{3}$. (D) $\dfrac{8\pi}{3}$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị, ta có

$$V_{(H)}=\pi\int_0^4(\sqrt{x})^2\,\mathrm{d}x-\pi\int_2^4(x-2)^2\,\mathrm{d}x=\frac{16\pi}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 33. Biết $\displaystyle\int_1^2\frac{4\mathrm{d}x}{(x+4)\sqrt{x}+x\sqrt{x+4}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-d$ với a,b,c,d là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c+d$.

(A) 48. (B) 46. (C) 54. (D) 52.

Lời giải.

Ta có

$$I=\int\limits_1^2 \frac{4\,\mathrm{d}x}{(x+4)\sqrt{x}+x\sqrt{x+4}}=\int\limits_1^2 \frac{4}{\sqrt{x(x+4)}\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x}\right)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+4)}}\,\mathrm{d}x.$$

Khi đó,

$$I=\int\limits_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+4}}\right)\mathrm{d}x=\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+4}\right)\Big|_1^2=2\sqrt{2}-2\sqrt{6}-2+2\sqrt{5}=\sqrt{8}+\sqrt{20}-\sqrt{24}-2.$$

Suy ra $a=8$, $b=20$, $c=24$, $d=2$. Do đó, $P=54$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 6. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và chiều cao bằng chiều cao của tứ diện $ABCD$.

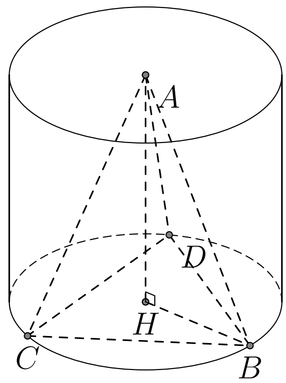
(A) $S_{\text{xq}}=24\sqrt{3}\pi$. (B) $S_{\text{xq}}=12\sqrt{3}\pi$. (C) $S_{\text{xq}}=12\sqrt{2}\pi$. (D) $S_{\text{xq}}=24\sqrt{2}\pi$.

Lời giải.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD là $R=\dfrac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$.

Đường cao $h=AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{6^2-12}=2\sqrt{6}$.

$S_{\text{xq}}=2\pi Rh=2\pi 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{6}=24\sqrt{2}\pi$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $9^x-2\cdot 6^x+(m-2)\cdot 4^x=0$ có nghiệm dương?

(A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

Ta có: $9^x-2\cdot 6^x+(m-2)\cdot 4^x=0\Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}-2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x}+m-2=0$.

Đặt $t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x}$, khi đó $x>0\Leftrightarrow t>1$.

Phương trình đã cho có nghiệm dương $\Leftrightarrow$ phương trình $t^2-2t+m-2=0$ có nghiệm $t>1\Leftrightarrow$ phương trình $(t-1)^2=3-m$ có nghiệm $t>1\Leftrightarrow m<3$.

Do m nguyên dương nên $m\in\{1,2\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Cho số phức $z=a+bi$ (a,b là các số thực) thỏa mãn $z\cdot|z|+2z+i=0$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b^3+5\sqrt{2}$.

(A) $T=4$. (B) $T=5$. (C) $T=7$. (D) $T=6$.

Lời giải.

Ta có $(a+bi)\cdot\sqrt{a^2+b^2}+2(a+bi)+i=0$.

Suy ra $\begin{cases} a\cdot\sqrt{a^2+b^2}+2a=0 \\ b\cdot\sqrt{a^2+b^2}+2b+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b\cdot|b|+2b+1=0 \quad (*) \end{cases}$

Với $b\geq 0$ thì $(*)\Leftrightarrow b^2+2b+1=0\Leftrightarrow b=-1$ (loại)

Với $b<0$ thì $(*)\Leftrightarrow -b^2+2b+1=0\Leftrightarrow b=1\pm\sqrt{2}$. Nhận giá trị $b=1-\sqrt{2}$.

Vậy $T=a+b^2=3-2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f\left(x^2+8x+2018\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

(A) 0. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x^2+8x+2018)=(2x+8)f'_{(x^2+8x+2018)}(x^2+8x+2018)$.

Vì $x^2+8x+2018>1\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'_{(x^2+8x+2018)}(x^2+8x+2018)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Suy ra ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x^2+8x+2018)$ như sau

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(2002)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $y=f\left(x^2+8x+2018\right)$ có một cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho hàm số $y=x^3-3x^2$ có đồ thị (C) và điểm $A(0;a)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để có đúng hai tiếp tuyến của (C) đi qua A. Tích các giá trị các phần tử của S là

(A) 1. (B) -1. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm thuộc đồ thị (C).

Khi đó tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình là $\Delta\colon y=(3x_0^2-6x_0)(x-x_0)+(x_0^3-3x_0^2)$.

Để có hai đường tiếp tuyến Δ đi qua A thì phương trình ẩn x_0 sau có hai nghiệm phân biệt

$$\begin{aligned} & a=(3x_0^2-6x_0)(0-x_0)+(x_0^3-3x_0^2) \\ \Leftrightarrow\ & a=-3x_0^3+6x_0^2+x_0^3-3x_0^2 \\ \Leftrightarrow\ & a=-2x_0^3+3x_0^2 \quad (1) \end{aligned}$$

Để (1) có hai nghiệm thì a bằng giá trị cực tiểu hoặc cực đại của hàm số $f(x)=-2x^3+3x^2$.

Như vậy $a=0$ hoặc $a=1$. Nên $S=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-9=0$. Hỏi có bao nhiêu điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (P) với a,b,c là các số nguyên không âm.

A 55. **B** 45. **C** 50. **D** 60.

Lời giải.

Ta có $(P)\colon x+y+z-9=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{9}+\dfrac{y}{9}+\dfrac{z}{9}=1$ nên mặt phẳng (P) đi qua các điểm $A(9;0;0)$, $B(0;9;0)$, $C(0;0;9)$.

Từ đó suy ra tất cả các điểm có toạ độ nguyên của mặt phẳng (P) đều nằm trong miền tam giác ABC.

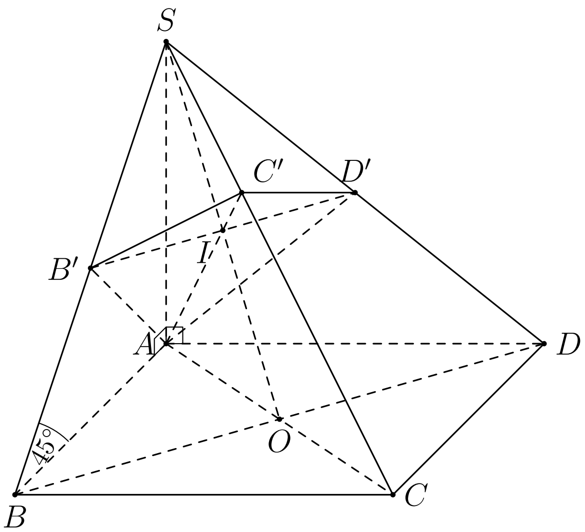
Tam giác ABC đều có các cạnh bằng $9\sqrt{2}$, chiếu các điểm có toạ độ nguyên của hình tam giác ABC xuống mặt phẳng (Oxy) ta được các điểm có toạ độ nguyên của hình tam giác OAB. Mà số điểm có toạ độ nguyên của tam giác OAB bằng $1+2+...+10=55$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, cạnh bên SB tạo với đáy góc $45°$. Một mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $AB'C'D'$ có diện tích bằng

A $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **B** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$. **D** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và kẻ $AC'\perp SC$ với $C'\in SC$.

Gọi $AC'\cap SO=I$ và qua I vẽ đường thẳng $B'D'\parallel BD$ (với $B'\in SB$; $D'\in SD$).

Khi đó thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) là tứ giác $AB'C'D'$.

Ta có $BD\perp(SAC)\Rightarrow B'D'\perp(SAC)$

$\Rightarrow B'D'\perp AC'$.

Diện tích thiết diện là $S_{AB'C'D'}=\dfrac{1}{2}AC'\cdot B'D'$.

Góc của SB với đáy là $\widehat{SBA}=45°\Rightarrow SA=AB=a$.

Trong tam giác vuông SAC có $\dfrac{1}{AC'^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{2a^2}=\dfrac{3}{2a^2}\Rightarrow AC'=\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Mặt khác, ta có $\begin{cases}AB'\perp BC\\AB'\perp SC\end{cases}\Rightarrow AB'\perp SB$.

Do đó B' là trung điểm SB (do tam giác SAB vuông cân tại A).

Tương tự D' là trung điểm SD (do tam giác SAD vuông cân tại A).

Do đó $B'D'=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

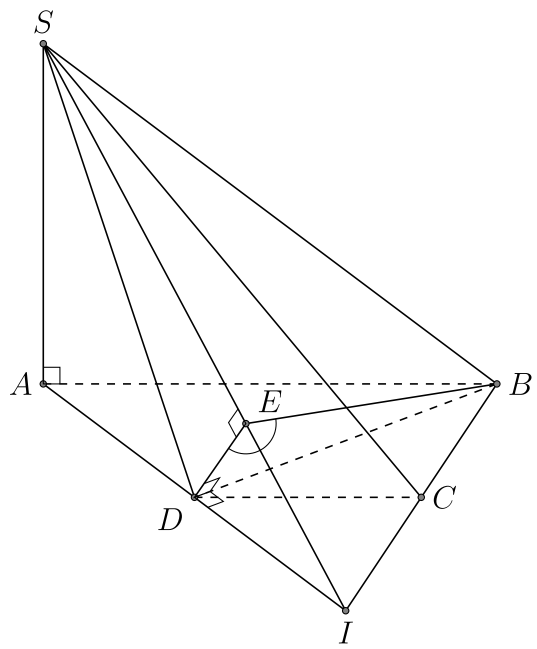
Vậy $S_{AB'C'D'}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a$, $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **(C)** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

Lời giải.



Gọi I là giao điểm của AD và BC.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAD)$.

Mà $SI \subset (SAD)$ nên $BD \perp SI$.

Kẻ $DE \perp SI$ tại E.

Ta có $\begin{cases} SI \perp DE \\ SI \perp BD \end{cases} \Rightarrow SI \perp (BDE) \Rightarrow SI \perp BE$.

Suy ra góc giữa (SAD) và (SBC) là góc giữa DE và BE.

Tính: $BD = a\sqrt{3}$, $\sin \widehat{AIS} = \dfrac{SA}{SI} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$,

$DE = DI \cdot \sin \widehat{AIS} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$,

$BE = \sqrt{BD^2 + DE^2} = \dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$.

Khi đó $\cos \widehat{BED} = \dfrac{DE}{BE} = \dfrac{a\sqrt{3}}{7} \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{2a\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sin^3 2x - \left(m + \sqrt{3}\cos 2x\right)^3 - m = 2\sin\left(2x + \dfrac{8\pi}{3}\right)$ có nghiệm?

(A) 6. (B) 4. (C) Vô số. **(D)** 5.

Lời giải.

$\sin^3 2x - \left(m + \sqrt{3}\cos 2x\right)^3 - m = 2\sin\left(2x + \dfrac{2\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \sin^3 2x + \sin 2x = \left(m + \sqrt{3}\cos 2x\right)^3 + m + \sqrt{3}\cos 2x$. (1)

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra phương trình (1) $\Leftrightarrow \sin 2x = m + \sqrt{3}\cos 2x$.

Do đó để phương trình đã cho có nghiệm thì điều kiện cần và đủ là $1 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 \geq m^2 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho trị lớn nhất của hàm số $y = |3x^2 - 6x + 2m - 1|$ trên đoạn $[-2;3]$ đạt giá trị nhỏ nhất. Số phần tử của tập S là

(A) 0. (B) 3. (C) 2. **(D)** 1.

Lời giải.

Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = |3x^2 - 6x + 2m - 1|$ trên đoạn $[-2; 3]$.

Ta có $M \geq f(-2) = |2m + 23|$, $M \geq f(1) = |2m - 4|$

$\Rightarrow 2M \geq |2m+23| + |2m-4| \geq |2m+23-2m+4| = 27 \Rightarrow M \geq \dfrac{27}{2}$. Khi $M = \dfrac{27}{2} \Rightarrow |2m+23| = |2m-4| \Leftrightarrow m = -\dfrac{19}{4}$.

Với $m = -\dfrac{19}{4}$, $\max\limits_{[-2;3]} f(x) = \max\{f(-2); f(1); f(3)\} = \dfrac{27}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho dãy (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 0 \\ \log_{\sqrt[3]{2}} u_{n+1} = 3 + \log_2 (5u_n + 45)^3, n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Tính u_{100}.

A $u_{100} = 10^{100} - 10$. **B** $u_{100} = 10^{99} - 10$. **C** $u_{100} = 10^{100} + 10$. **D** $u_{100} = 10^{99} + 10$.

Lời giải.

Theo giải thiết có

$\log_{\sqrt[3]{2}} u_{n+1} = 3 + \log_2 (5u_n + 45)^3 \Leftrightarrow u_{n+1} = 10u_n + 90 \Leftrightarrow u_{n+1} + 10 = 10(u_n + 10)$. (1)

Đặt $v_n = u_n + 10$ từ (1) ta có $v_{n+1} = v_n + 10$, $n \in \mathbb{N}$ do đó v_n là cấp số nhân với $\begin{cases} v_1 = u_1 + 10 = 10 \\ q = 10. \end{cases}$

Ta có $v_{100} = u_{100} + 10 = 10 \cdot 10^{99} = 10^{100} \Rightarrow u_{100} = 10^{100} - 10$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}|x^3| - (3-m)x^2 + (3m + 7)|x| - 1$ có 5 điểm cực trị?

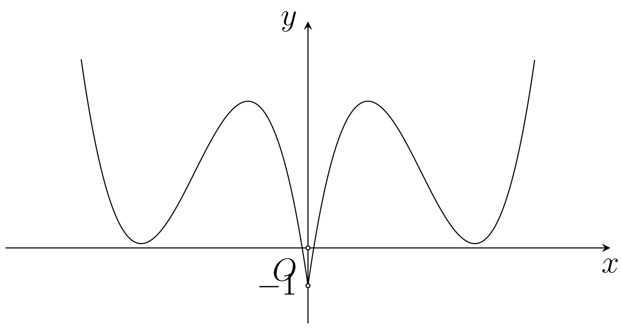
A 3. **B** 5. **C** 2. **D** 4.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (3-m)x^2 + (3m+7)x - 1 \quad (1)$.

Ta có $y' = x^2 - 2(3-m)x + 3m + 7$

Hàm số đã cho có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số (1) có hai điểm cực trị và $x_{\text{CD}} > 0, x_{\text{CT}} > 0$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3-m)^2 - 3m - 7 > 0 \\ 2(3-m) > 0 \\ 3m + 7 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 9m + 2 > 0 \\ -\frac{7}{3} < m < 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{3} < m < \frac{9-\sqrt{73}}{2}.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = -2, m = -1, m = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P), (P')$ chứa d và tiếp xúc với (S) tại T và T'. Tìm tọa độ trung điểm H của TT'.

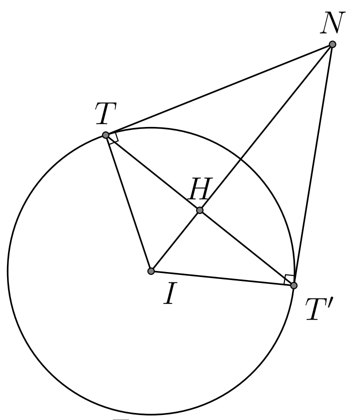
A $H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$. **B** $H\left(\frac{5}{6}; \frac{2}{3}; -\frac{7}{6}\right)$. **C** $H\left(-\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right)$. **D** $H\left(-\frac{7}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{7}{6}\right)$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; -1)$ và bán kính $R = 1$.

$\begin{cases} IT \perp (P) \Rightarrow IT \perp d \\ IT' \perp (P') \Rightarrow IT' \perp d \end{cases} \Rightarrow d \perp (ITT')$.

Gọi $N = d \cap (ITT') \Rightarrow N$ là hình chiếu của I trên d.



Đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow N(t; 2+t; -t)$ và $\overrightarrow{IN} = (t-1; 2+t; -t+1)$.

$$\overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow t - 1 + 2 + t + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow N(0; 2; 0) \Rightarrow \begin{cases} IN = \sqrt{6} \\ \overrightarrow{IN} = (-1; 2; 1). \end{cases}$$

Ta có $IH \cdot IN = IT^2 \Rightarrow IH = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Phương trình đường thẳng IN : $\begin{cases} x = -u \\ y = 2 + 2u \Rightarrow H(-u; 2+2u; u)\ u \in \mathbb{R} \\ z = u \end{cases}$

và $\overrightarrow{IH} = (-u-1; 2+2u; u+1)$.

$IH = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow IH^2 = \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow (-u-1)^2 + (2u+2)^2 + (u+1)^2 = \dfrac{1}{6}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -\dfrac{5}{6} \Rightarrow H\left(\dfrac{5}{6}; \dfrac{1}{3}; -\dfrac{5}{6}\right) \Rightarrow \overrightarrow{IH} = \left(-\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{6}\right) \\ u = -\dfrac{7}{6} \Rightarrow H\left(\dfrac{7}{6}; -\dfrac{1}{3}; -\dfrac{7}{6}\right) \Rightarrow \overrightarrow{IH} = \left(\dfrac{1}{6}; -\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{6}\right) \end{array}\right.$.

Vì $\overrightarrow{IH}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IN} \Rightarrow H\left(\dfrac{5}{6}; \dfrac{1}{3}; -\dfrac{5}{6}\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Xét các số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 3 + 3i| = \sqrt{2}$ và $|z-1+3i|+|z-3+5i|$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $P = a + b$.

A $P = -2$. (B) $P = -8$. (C) $P = 8$. (D) $P = 2$.

Lời giải.

Gọi $A(3; -3), B(1; -3), C(3; -5)$ và $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$.

Theo giả thiết ta có $|z - 3 + 3i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow MA = \sqrt{2}$ và $MB + MC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Yêu cầu của bài toán tương đương với tìm điểm M thuộc đường tròn tâm A bán kính $R = \sqrt{2}$ để $MA + MB$ nhỏ nhất.

Ta có $MB + MC \geq BC = 2\sqrt{2}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn BC.

Phương trình đường thẳng BC: $x + y + 2 = 0$, phương trình đường tròn tâm A bán kính $\sqrt{2}$ là

$$(x-3)^2 + (y+3)^2 = 2.$$

Tọa độ M thỏa mãn hệ $\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ (x-3)^2 + (y+3)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 2 \\ (x-3)^2 + (-x+1)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$.

Vậy $M(2; -4) \Rightarrow P = -2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(1; 5; 0)$, $B(3; 3; 6)$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm trên đường thẳng Δ sao cho chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $T = a + b + c$.

(A) $T = 2$. **B** $T = 3$. (C) $T = 4$. (D) $T = 5$.

Lời giải.

Chu vi tam giác ABM đạt giá trị nhỏ nhất khi tổng $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Do $M \in \Delta$: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ nên $M(-1 + 2t; 1 - t; 2t)$.

Ta có $MA = \sqrt{(2t-2)^2 + (t+4)^2 + 4t^2} = \sqrt{9t^2 + 20}$;

$MB = \sqrt{(2t-4)^2 + (t+2)^2 + (2t-6)^2} = \sqrt{9t^2 - 36t + 56}$.

Như vậy $MA + MB = \sqrt{9t^2+20} + \sqrt{9t^2-36t+56}$.

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{9t^2+20} + \sqrt{9t^2-36t+56}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{9t}{\sqrt{9t^2+20}} + \dfrac{9t-18}{\sqrt{9t^2-36t+56}} = \dfrac{9t}{\sqrt{9t^2+20}} + \dfrac{9(t-2)}{\sqrt{9(t-2)^2+20}}$.

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{t}{\sqrt{9t^2+20}} = -\dfrac{t-2}{\sqrt{9(t-2)^2+20}} \Leftrightarrow g(t) = g(2-t)$ (1).

Xét hàm số $g(t) = \dfrac{t}{\sqrt{9t^2+20}}$ có $g'(t) = \dfrac{20}{\left(\sqrt{9t^2+20}\right)^3} > 0$.

Do đó phương trình (1) $\Leftrightarrow t = 2 - t \Leftrightarrow t = 1$.

Bảng biến thiên của $f(t)$ là

t	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{29}$	$\nearrow$	$+\infty$

Theo bảng biến thiên, $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $t = 1 \Rightarrow M(1;0;2)$. Do đó $T = a + b + c = 3$

Chọn đáp án B □

Câu 49. Cho 5 chữ số $1, 2, 3, 4, 6$. Lập các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau từ 5 chữ số đã cho. Tính tổng của tất cả các số lập được.

(A) 12321. **B** 21312. (C) 12312. (D) 21321.

Lời giải.

Xét tập $X = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Số các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau lấy từ tập X là $5 \times 4 \times 3 = 60$.

Do vai trò các chữ số là như nhau, nên số lần xuất hiện của mỗi chữ số trong tập X tại mỗi hàng trăm, hàng chục, hàng đơn vị là $\dfrac{60}{5} = 12$.

Tổng các số lập được $S = (1+2+3+4+6) \times 12 \times 111 = 21312$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 0$, $f'(1) = \dfrac{9}{2}$, $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{39}{4}$, $\displaystyle\int_0^1 (x^2+x)f''(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{5}{2}$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = \dfrac{14}{3}$. (B) $I = 14$. (C) $I = \dfrac{7}{3}$. **D** $I = 7$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{5}{2} = \displaystyle\int_0^1 (x^2+x)f''(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2+x)\,\mathrm{d}f'(x) = (x^2+x)f'(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (2x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 (2x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{13}{2} \quad (1).$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 \left[4[f'(x)]^2 - 12(2x+1)f'(x) + 9(2x+1)^2\right]\,\mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 [2f'(x) - 3(2x+1)]^2\,\mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow 2f'(x) - 3(2x+1) = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{3(x^2+x)}{2} + C$

Từ $f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{3(x^2+x)}{2}$. Vậy $I = \int\limits_0^2 \dfrac{3(x^2+x)}{2}\,\mathrm{d}x = 7$.

Chọn đáp án D □

——— HẾT ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. A	3. D	4. D	5. C	6. A	7. C	8. D	9. A	10. D
11. D	12. A	13. C	14. A	15. D	16. D	17. C	18. A	19. D	20. D
21. A	22. A	23. B	24. B	25. B	26. A	27. C	28. C	29. A	30. B
31. B	32. B	33. C	34. D	35. B	36. C	37. D	38. C	39. A	40. C
41. C	42. D	43. D	44. A	45. A	46. A	47. A	48. B	49. B	50. D

62 ĐỀ THI THỬ THPTQG SỞ GD ĐT NAM ĐỊNH NĂM 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Tìm tọa độ điểm biểu diễn hình học của số phức $z = 8 - 9i$.

(A) $(8; 9)$. **(B)** $(8; -9)$. (C) $(-9; 8)$. (D) $(8; -9i)$.

Lời giải.

Tọa độ điểm biểu diễn số phức $z = 8 - 9i$ là $(8; -9)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Cho các số dương a, b, c với $a > 1$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

(A) $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$. (B) $\log_a b > 1 \Leftrightarrow b > a$.

(C) $\log_a b < 0 \Leftrightarrow b < 1$. **(D)** $\log_a b > c \Leftrightarrow b < a^c$.

Lời giải.

Với $a > 1$, ta có $\log_a b > c \Leftrightarrow \log_a b > \log_a a^c \Leftrightarrow b > a^c$

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Số nghiệm của phương trình $2^{2x^2-5x-1} = \dfrac{1}{8}$ là

(A) 0. (B) 1. **(C)** 2. (D) 3.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 2^{2x^2-5x-1} = 2^{-3} \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 - 5x - 1 = -3 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 - 5x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \text{(thỏa mãn).} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$ là

(A) $F(x) = -\dfrac{1}{2}\cos 2x + C$. (B) $F(x) = \cos 2x + C$.

(C) $F(x) = \dfrac{1}{2}\cos 2x + C$. (D) $F(x) = -\cos 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \sin 2x \,\mathrm{d}x = -\frac{\cos 2x}{2} + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Nếu $\displaystyle\int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ và $\displaystyle\int_b^d f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ (với $a < d < b$) thì $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A 3. **B** 7. **C** $\frac{5}{2}$. **D** 10.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_d^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^d f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_b^d f(x)\,\mathrm{d}x = 5 - 2 = 3.$

Chọn đáp án A □

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-2; 3; -1)$. Khi đó $\vec{a} + \vec{b}$ có tọa độ là

A $(-1; 5; 2)$. **B** $(3; -1; 4)$. **C** $(1; 5; 2)$. **D** $(1; -5; -2)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} + \vec{b} = (-1; 5; 2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; 2; 1)$ trên Ox có tọa độ là

A $(0; 0; 1)$. **B** $(3; 0; 0)$. **C** $(-3; 0; 0)$. **D** $(0; 2; 0)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; 2; 1)$ trên Ox có tọa độ là $(3; 0; 0)$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tâm I của mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-8x-2y+1=0$ có tọa độ là

A $I(4; 1; 0)$. **B** $I(4; -1; 0)$. **C** $I(-4; 1; 0)$. **D** $I(-4; -1; 0)$.

Lời giải.

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 16$. Do đó mặt cầu (S) có tọa độ tâm là $I(4; 1; 0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Cho tập hợp A có 100 phần tử. Số tập con gồm 2 phần tử của A là

A A_{100}^2. **B** A_{100}^{98}. **C** C_{100}^2. **D** 100^2.

Lời giải.

Số tập con gồm 2 phần tử của A là C_{100}^2.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Hàm số $y = x^4 - 2x^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A $(-1; 0)$. **B** $(0; 1)$. **C** $(0; +\infty)$. **D** $(-\infty; -1)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Tìm số đường tiệm cận ngang và đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$.

A 3. B 2. C 4. D 1.

Lời giải.

- Do $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$.
- Do $\begin{cases} \lim\limits_{x \to (-1)^+} y = -\infty \\ \lim\limits_{x \to (-1)^-} y = +\infty \end{cases}$. Suy ra $x = -1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Tìm giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ (với m là tham số thực).

A 0. B m. C 2. D $-4 + m$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Ta có $y'' = 6x - 6$.

- Do $y''(0) < 0$, suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, suy ra cực đại hàm số là $y(0) = m$.
- Do $y''(2) > 0$, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

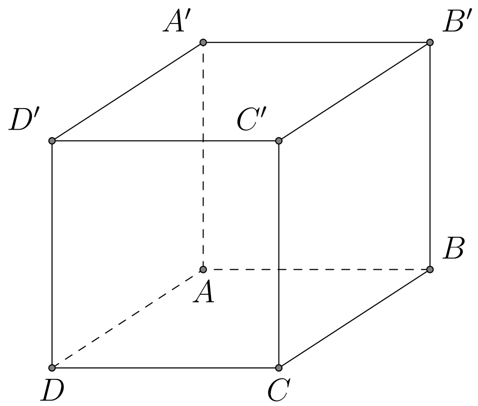
Chọn đáp án B □

Câu 13. Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các kích thước là $AB = x, BC = 2x$ và $CC' = 3x$. Tính thể tích của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

A $3x^3$. B x^3. C $2x^3$. D $6x^3$.

Lời giải.

Ta có $V_{ABCD.A'B'C'D'} = CC' \cdot S_{ABCD} = 6x^3$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+3x^2+2018)$ bằng

[A] $-\infty$. (B) $+\infty$. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+3x^2+2018)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^3\left(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2018}{x^3}\right)\right]=-\infty$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Cho phương trình $2\log_3(x^3+1)=\log_3(2x-1)^2+\log_{\sqrt{3}}(x+1)$. Tổng các nghiệm của phương trình là

(A) 2. [B] 3. (C) 4. (D) 1.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} x>-1\\ x\neq \dfrac{1}{2}.\end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} &\log_3(x^3+1)=\log_3|2x-1|+\log_3(x+1)\\ \Leftrightarrow\ &\log_3(x^3+1)=\log_3\left[|2x-1|(x+1)\right]\\ \Leftrightarrow\ &x^3+1=|2x-1|(x+1)\\ \Leftrightarrow\ &x^2-x+1=|2x-1|\quad(*)\quad \text{vì } x>-1.\end{aligned}$$

- Nếu $x>\dfrac{1}{2}$ thì phương trình $(*)$ tương đương với

$$\begin{aligned} &x^2-x+1=2x-1\\ \Leftrightarrow\ &x^2-3x+2=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{ll} x=1 & (\text{thỏa mãn})\\ x=2 & (\text{thỏa mãn}).\end{array}\right.\end{aligned}$$

- Nếu $x\in\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$ thì phương trình $(*)$ tương đương với

$$\begin{aligned} &x^2-x+1=1-2x\\ \Leftrightarrow\ &x^2+x=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{ll} x=0 & (\text{thỏa mãn})\\ x=-1 & (\text{loại}).\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng 3.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Một người gửi tiết kiệm 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% một năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu và lãi suất không đổi trong các năm gửi. Hỏi sau 5 năm mới rút lãi thì người đó thu được số tiền lãi gần với số nào nhất?

A 70,128 triệu. **B** 53,5 triệu. **C** 20,128 triệu. **D** 50,7 triệu.

Lời giải.

Áp dụng công thức $A = A_0(1+r)^n$, suy ra số tiền cả vốn và lãi người đó có được sau 5 năm là $A = 5\cdot 10^7 \cdot \left(1+\dfrac{7}{100}\right)^5 \approx 70127586$.

Vậy số tiền lãi người đó rút được sau 5 năm là $A - 50000000 \approx 20127568$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{1-2x}$.

A $y' = -2\cdot 2^{1-2x}$. **B** $y' = 2^{1-2x}\ln 2$. **C** $y' = -2^{2-2x}\ln 2$. **D** $y' = (1-2x)^{-2x}$.

Lời giải.

Ta có $y' = -2\cdot 2^{1-2x}\cdot \ln 2 = -2^{2-2x}\cdot \ln 2$

Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+3}{2-x}\,\mathrm{d}x = a\cdot \ln 2 + b$ (với a, b là các số nguyên). Khi đó giá trị của a là

A -7. **B** 7. **C** 5. **D** -5.

Lời giải.

Ta có

$$\int_0^1 \frac{2x+3}{2-x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{2(x-2)+7}{x-2}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \left(2+\frac{7}{x-2}\right)\mathrm{d}x = -\left(2x+7\ln|x-2|\right)\Big|_0^1 = 7\ln 2 - 2.$$

Do đó $a = 7$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Cho số phức $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A $z + \overline{z} = 2bi$. **B** $z - \overline{z} = 2a$. **C** $z\cdot\overline{z} = a^2 - b^2$. **D** $|z^2| = |z|^2$.

Lời giải.

Ta có $\overline{z} = a - bi$, do đó

- $z + \overline{z} = 2a$.
- $z - \overline{z} = 2bi$.
- $z\cdot\overline{z} = a^2 + b^2$.
- $|z^2| = |z\cdot z| = |z|\cdot|z| = |z|^2$.

Vậy chỉ có mệnh đề $|z^2| = |z|^2$ là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;1;1)$, $B(0;-2;3)$, $C(2;1;0)$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;-7)$ và song song với mặt phẳng (ABC) là

A $3x + y - 3z - 26 = 0$. **B** $3x + y - 3z - 32 = 0$.

C $3x + y + 3z + 16 = 0$. **D** $3x + y + 3z - 22 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-1;-3;2)\\ \overrightarrow{AC}=(1;0;-1)\end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(3;1;3)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (ABC).
Mà mặt phẳng (α) qua $M(1;2;-7)$, suy ra $(\alpha)\colon 3(x-1)+(y-2)+3(z+7)=0 \Leftrightarrow 3x+y+3z+16=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;1)$, $C(-3;6;4)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $MC=2MB$. Tính độ dài đoạn AM.

A $AM=3\sqrt{3}$. **B** $AM=2\sqrt{7}$. **C** $AM=\sqrt{29}$. **D** $AM=\sqrt{30}$.

Lời giải.

Gọi tọa độ điểm $M(a;b;c)$, do M thuộc đoạn BC và $MC=2MB \Rightarrow \overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{MB}\quad(*)$.
Ta có $\overrightarrow{CM}=(a+3;b-6;c-4)$ và $\overrightarrow{MB}=(-a;3-b;1-c)$.

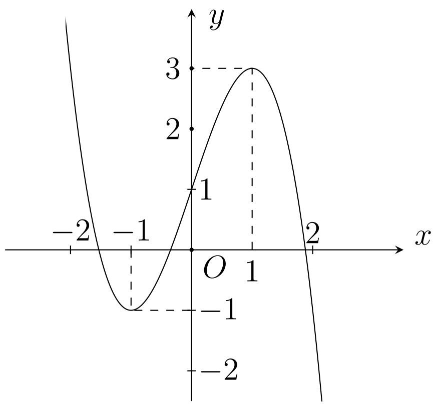
Do đó $(*) \Leftrightarrow \begin{cases}a+3=-2a\\ b-6=6-2b\\ c-4=2-2c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-1\\ b=4\\ c=2\end{cases} \Rightarrow M(-1;4;2) \Rightarrow \overrightarrow{AM}=(-3;4;2) \Rightarrow AM=\sqrt{29}$.

Chọn đáp án C □

Câu 22.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A $y=x^3-3x+1$. **B** $y=-x^3+3x+1$.
C $y=-x^3-3x+1$. **D** $y=-x^3+1$.



Lời giải.

- Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$ nên hệ số $a<0$.
- Vì hàm số có hai điểm cực trị $x_1=-1; x_2=1$ nên phương trình $y'=0$ có hai nghiệm là $x=\pm 1$.

Do chỉ có hàm số $y=-x^3+3x+1$ trong các hàm số đã cho thỏa mãn các điều trên. Vậy hàm số có đồ thị như hình vẽ trên là $y=-x^3+3x+1$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		$f(-1)$		-1		3		$-\infty$

Hỏi mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

B. Hàm số có 3 điểm cực trị.

C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận ngang.

D. Điểm cực tiểu của hàm số là $x = 0$.

Lời giải.

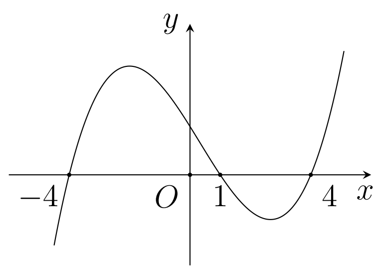
Do y' đổi dấu khi x qua 0 và 1 nên hàm số có hai điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 24.

Cho hàm số $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(5 - x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7. B. 9. C. 4. D. 3.



Lời giải.

Xét hàm số $y = f(5 - x^2)$, ta có

$$y' = -2x \cdot f'(5 - x^2) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 5 - x^2 = -4 \\ 5 - x^2 = 1 \\ 5 - x^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 9 \\ x^2 = 4 \\ x^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 3 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$$

Do đó hàm số $y = f(5 - x^2)$ có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 4x^2 + \dfrac{1}{x} - 4$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $\min\limits_{x \in (0;+\infty)} f(x) = -1$.

B. $\min\limits_{x \in (0;+\infty)} f(x) = -4$.

C. $\min\limits_{x \in (0;+\infty)} f(x) = 7$.

D. $\min\limits_{x \in (0;+\infty)} f(x) = -3$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = 4x^2 + \dfrac{1}{x} - 4 = 4x^2 + \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2x} - 4$.

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta có $f(x) \geq 3 \cdot \sqrt[3]{4x^2 \cdot \dfrac{1}{2x} \cdot \dfrac{1}{2x}} - 4 = -1$. Đẳng thức xảy ra

khi $4x^2 = \dfrac{1}{2x} \Leftrightarrow x^3 = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.
Vậy $\min\limits_{x\in(0;+\infty)} f(x) = -1$

Chọn đáp án A □

Câu 26. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức $\left(\sqrt{x}+\dfrac{2}{x}\right)^{15}$.

A $C_{15}^5 \cdot 2^5$. **B** $C_{15}^7 \cdot 2^7$. **C** C_{15}^5. **D** $C_{15}^8 \cdot 2^8$.

Lời giải.

Ta có $\left(\sqrt{x}+\dfrac{2}{x}\right)^{15} = \sum\limits_{k=0}^{15} C_{15}^k \cdot (\sqrt{x})^{15-k} \cdot \left(\dfrac{2}{x}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{15} C_{15}^k \cdot 2^k \cdot x^{\frac{15-3k}{2}}$.

Số hạng tổng quát của khai triển biểu thức đã cho là $C_{15}^k \cdot 2^k \cdot x^{\frac{15-3k}{2}}$.

Số hạng không chứa x ứng với k thỏa mãn $\dfrac{15-3k}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 5$.

Vậy số hạng không chứa x là $C_{15}^5 \cdot 2^5$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Một nhóm có 7 học sinh trong đó có 3 nam và 4 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp các học sinh trên thành một hàng ngang sao cho các học sinh nữ đứng cạnh nhau?

A 144. **B** 5040. **C** 576. **D** 1200.

Lời giải.

- Số cách xếp 3 học sinh nam thành một hàng là 3! cách.
- Ứng với mỗi cách xếp 3 học sinh nam thành một hàng, tạo ra 4 vị trí trống mà tại mỗi vị trí trống đó nếu xếp các học sinh nữ vào. Khi đó các học sinh nữ đứng cạnh nhau trong hàng.
- Ứng với mỗi cách xếp trên có 4! cách xếp các học sinh nữ

Vậy có $3! \cdot 4! \cdot 4 = 576$ cách xếp.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng $3a^3$. Biết diện tích của tam giác SAD bằng $2a^2$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SAD).

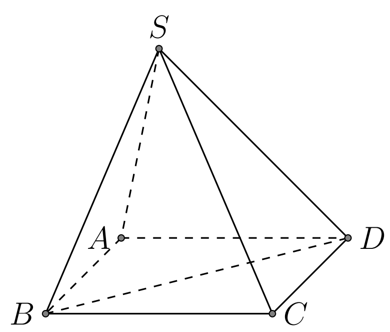
A $h = a$. **B** $h = \dfrac{9a}{4}$. **C** $h = \dfrac{3a}{2}$. **D** $h = \dfrac{4a}{9}$.

Lời giải.

Ta có $V_{B.SAD} = \dfrac{1}{2} V_{S.ABCD} = \dfrac{3a^3}{2}$.

Mà $V_{B.SAD} = \dfrac{1}{3} \cdot \mathrm{d}(B;(SAD)) \cdot S_{\triangle SAD}$.

Suy ra $\mathrm{d}(B;(SAD)) = \dfrac{3 \cdot V_{B.SAD}}{S_{\triangle SAD}} = \dfrac{9a}{4}$.

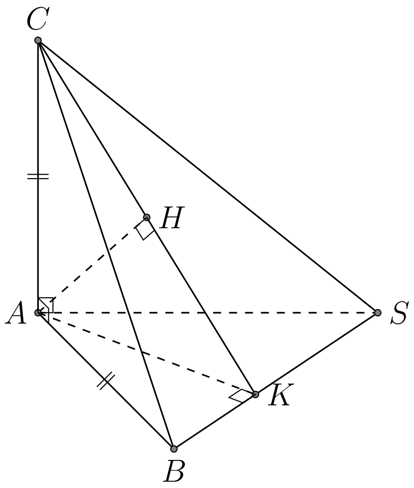


Chọn đáp án B □

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = AC = a$. Biết tam giác SAB có $\widehat{ABS} = 60^\circ$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) theo a.

A $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **B** $d = 3\sqrt{3}$. **C** $d = 2a\sqrt{3}$. **D** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases} CA \perp AB \\ (ABC) \perp (SAB) \\ (ABC) \cap (SAB) = AB \end{cases} \Rightarrow CA \perp (SAB)$.

Kẻ $AK \perp SB$ tại K và $AH \perp CK$ tại H.

Ta có $\begin{cases} SB \perp AK \\ SB \perp CA \end{cases} \Rightarrow SB \perp (ACK) \Rightarrow SB \perp AH$.

Do $\begin{cases} AH \perp CK \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(A; (SBC)) = AH$.

Xét $\triangle ABK$, ta có $AK = AB \cdot \sin \widehat{ABK} = a \sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

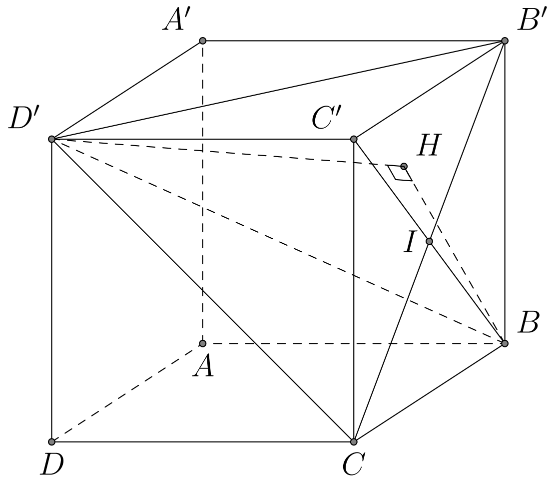
Xét $\triangle ACK$, ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AK^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{7}{3a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = a\sqrt{2}$, $AD = a\sqrt{6}$, $AA' = 2a\sqrt{2}$. Tính côsin của góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(B'D'C)$.

A $\sqrt{\dfrac{35}{38}}$. **B** $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$. **C** $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$. **D** $\sqrt{\dfrac{3}{11}}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng $(B'D'C)$, suy ra $D'H$ là hình chiếu của $D'B$ trên mặt phẳng $(B'D'C)$. Do đó góc $\widehat{BD'H} = \varphi$ là góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(B'D'C)$.

Gọi I là giao điểm của $B'C$ và CB', ta có I là trung điểm của $BC' \Rightarrow \mathrm{d}(B, (B'D'C)) = \mathrm{d}(C', (B'D'C))$.

Xét $\triangle BD'H$, ta có

$$\sin \varphi = \frac{BH}{D'B} = \frac{\mathrm{d}(B, (B'D'C))}{D'B} = \frac{\mathrm{d}(C', (B'D'C))}{D'B} \quad (*).$$

Xét tứ diện $C'.D'B'C$ có $C'D'$; $C'B'$; $C'C$ đôi một vuông góc với nhau tại C', ta có

$$\frac{1}{\mathrm{d}^2(B, (B'D'C))} = \frac{1}{CC'^2} + \frac{1}{C'B^2} + \frac{1}{C'D'^2} = \frac{19}{24a^2} \Rightarrow \mathrm{d}(C', (B'D'C)) = a\sqrt{\frac{24}{19}}.$$

Mà độ dài đường chéo hộp $DB' = \sqrt{2a^2 + 6a^2 + 8a^2} = 4a$.

Từ $(*)$, suy ra $\sin \varphi = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{6}{19}} \Rightarrow \cos \varphi = \sqrt{\dfrac{35}{38}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{2x^2-15x+100} - 2^{x^2+10x-50} + x^2 - 25x + 150 < 0$.

Ⓐ 6. **B** 4. Ⓒ 5. Ⓓ 3.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2^{2x^2-15x+100} + 2x^2 - 15x + 100 < 2^{x^2+10x-50} + x^2 + 10x - 50 \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ với $t \in \mathbb{R}$, ta có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà bất phương trình $(*)$ tương đương với

$$\begin{aligned} & f(2x^2 - 15x + 100) < f(x^2 + 10x - 50) \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 25x + 150 < 0 \\ \Leftrightarrow\ & 10 < x < 15. \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 32. Một ô tô đang chạy với vận tốc v_0 m/s thì gặp chướng ngại vật nên người lái xe đã đạp phanh. Từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a(t) = -8t$ m/s^2 trong đó t là thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Biết từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được 12 m. Tính v_0.

A $\sqrt[3]{1269}$ m/s. Ⓑ $\sqrt[3]{36}$ m/s. Ⓒ 12 m/s. Ⓓ 16 m/s.

Lời giải.

Ta có $v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t = -4t^2 + C$.

- Tại thời điểm $t = 0$, ta có $v_0 = C$.
- Tại thời điểm ô tô dừng hẳn $t = t_1$ ta có $v(t_1) = 0 \Leftrightarrow -4t_1^2 + C = 0 \Leftrightarrow t_1 = \dfrac{\sqrt{C}}{2}$.

Kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được 12 m, do đó

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_1} v(t)\,\mathrm{d}t = 12 \Leftrightarrow \left(-\frac{4}{3}t^3 + Ct\right)\Bigg|_0^{t_1} = 12 \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{4}{3}t_1^3 + Ct_1 = 12 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}\cdot\frac{C\sqrt{C}}{8} + \frac{C\sqrt{C}}{2} = 12 \\ \Leftrightarrow\ & C\sqrt{C} = 36 \Leftrightarrow C = \sqrt[3]{1296}. \end{aligned}$$

Vậy $v_0 = \sqrt[3]{1296}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0;4]$ và $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $I = \int_{-1}^1 f(|3x-1|)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = 4$. (B) $I = 2$. **C** $I = \frac{4}{3}$. (D) $I = 1$.

Lời giải.

Đặt $3x - 1 = t \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{3}$.

Khi $x = -1$ thì $t = -4$; khi $x = 1$ thì $t = 2$.

Ta có $I = \frac{1}{3}\int\limits_{-4}^{2} f(|t|)\ \mathrm{d}t \Rightarrow 3I = \int\limits_{-4}^{0} f(|t|)\ \mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{2} f(|t|)\ \mathrm{d}t = \int\limits_{-4}^{0} f(-t)\ \mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{2} f(t)\ \mathrm{d}t = J + 1$.

Tính $J = \int\limits_{-4}^{0} f(-t)\ \mathrm{d}t$. Đặt $-t = x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$.

Khi $t = -4$ thì $x = 4$; khi $t = 0$ thì $x = 0$.

Suy ra $J = -\int\limits_{4}^{0} f(x)\ \mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{4} f(x)\ \mathrm{d}x = 3$.

Vậy $3I = 4 \Leftrightarrow I = \frac{4}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 1$. Tính $\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) 1. (B) 2. (C) 5. **D** 4.

Lời giải.

Xét $A = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \tan x \Rightarrow \mathrm{d}t = (1 + \tan^2 x)\ \mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Khi $x = 0$ thì $t = 0$; khi $x = \frac{\pi}{4}$ thì $t = 1$.

Ta có $A = \int\limits_{0}^{1} \frac{f(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{1} \frac{f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_{0}^{1} \frac{f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 3 \quad (1)$.

Mà theo giả thiết, ta có $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 1 \quad (2)$.

Lấy (1) cộng (2) vế với vế, ta được $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2 f(x) + f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 4 \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - z + 2 = 0$. Tìm phần ảo của số phức $w = [(i - z_1)(i - z_2)]^{2018}$.

(A) 2^{1009}. **B** -2^{1009}. (C) 2^{2018}. (D) -2^{2018}.

Lời giải.

Áp dụng định lý Vi-et ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 \\ z_1 \cdot z_2 = 2. \end{cases}$

Mặt khác, ta có

$$w = \left[i^2 - i(z_1 + z_2) + z_1 z_2\right]^{2018} = (1-i)^{2018} = \left[(1-i)^2\right]^{1009} = (-2i)^{1009} = -2^{1009} \cdot i \cdot (i^2)^{504} = -2^{1009} \cdot i.$$

Vậy phần ảo của w là -2^{1009}.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V, hai điểm M, P lần lượt là trung điểm AB, CD, điểm N thuộc đoạn AD sao cho $DA = 3NA$. Tính V_{BMNP}.

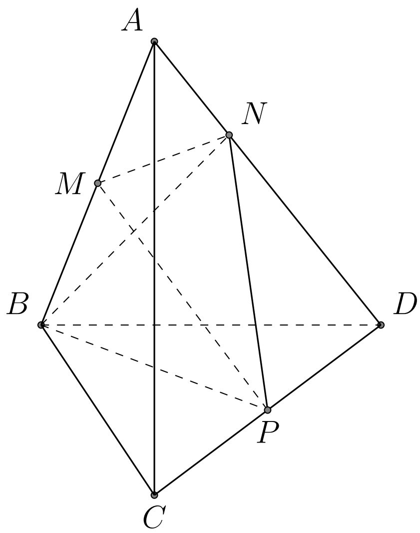
A $\dfrac{V}{16}$. **B** $\dfrac{V}{12}$. **C** $\dfrac{V}{4}$. **D** $\dfrac{V}{6}$.

Lời giải.

Vì P là trung điểm của CD nên $\mathrm{d}(P, (ABD)) = \dfrac{1}{2} \cdot \mathrm{d}(C, (ABD))$.

Do M là trung điểm của AB, suy ra $S_{\triangle BMN} = \dfrac{1}{2} \cdot S_{BAN}$, mà $S_{BAN} = \dfrac{1}{3} S_{ABD} \Rightarrow S_{BMN} = \dfrac{1}{6} S_{BAD}$.

Ta có $V_{PMNB} = \dfrac{1}{3} \cdot \mathrm{d}(P, (ABD)) \cdot S_{BMN} = \dfrac{V}{12}$.



Chọn đáp án B □

Câu 37. Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 3. Tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất.

A $\dfrac{64}{3}$. **B** $\dfrac{16\sqrt{6}}{3}$. **C** $\dfrac{64\sqrt{2}}{3}$. **D** $\dfrac{16}{3}$.

Lời giải.

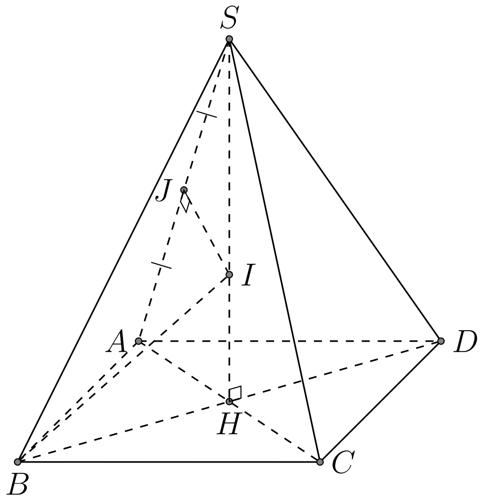
Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi H là giao điểm của AC và BD. Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$, ta có $IS = IB = 3$.

Đặt $AB = x$, ta có $BH = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$.

Xét $\triangle BIH$ ta có $HI = \sqrt{IB^2 - BH^2} = \sqrt{9 - \dfrac{x^2}{2}}$.

Suy ra $SH = 3 + \sqrt{9 - \dfrac{x^2}{2}}$. Mà $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD}$.

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = x^2 + \dfrac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \sqrt{9 - \dfrac{x^2}{2}}$.



Đặt $x^2 = t$, điều kiện $t \in (0; 18)$. Xét hàm số $f(t) = t + \dfrac{1}{3} \cdot t \cdot \sqrt{9 - \dfrac{t}{2}}$ với $t \in (0; 18)$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{12\sqrt{9 - \frac{t}{2}} + 36 - 3t}{4\sqrt{9 - \frac{t}{2}}} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow 12\sqrt{36 - \dfrac{t}{2}} = 3t - 36 \Leftrightarrow t = 16$.

Bảng biến thiên

x	0		16		18
y'		+	0	−	
y		↗	$\dfrac{64}{3}$	↘	

Vậy $\max V_{ABCD} = \dfrac{64}{3}$, xảy ra khi cạnh đáy hình chóp bằng 4.

Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng 2 và diện tích toàn phần phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy bằng bao nhiêu?

(A) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$. **(B)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$. **(C)** $\dfrac{2}{\pi}$. **(D)** $\dfrac{1}{2\pi}$.

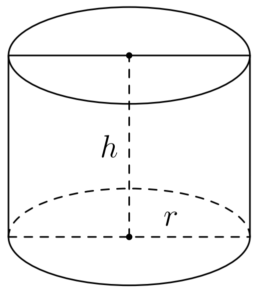
Lời giải.

Gọi h và r là chiều cao và bán kính đáy của lon. Ta có $V = h\pi r^2 \Rightarrow h = \dfrac{2}{\pi r^2}$.

Ta có $S_{\text{xq}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = \dfrac{2}{r} + \dfrac{2}{r} + 2\pi r^2$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $S_{\text{xq}} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{2}{r} \cdot \dfrac{2}{r} \cdot 2\pi r^2} = 6\sqrt[3]{\pi}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{2}{r} = 2\pi r^2 \Leftrightarrow r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$; $d_2\colon \begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \\ z=-1+t \end{cases}$ và điểm $A(1;2;3)$. Đường thẳng Δ đi qua A vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình là

(A) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{1}$.

(B) $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-1}$.

(C) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{5}$.

D $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-5}$.

Lời giải.

Gọi $M=\Delta\cap d_2$, do $M\in d_2 \Rightarrow M\left(1-t;1+2t;-1+t\right)\Rightarrow \overrightarrow{AM}=(-t;2t-1;t-4)$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

Đường thẳng d_1 có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(2;-1;1)$. Do $d_1\perp\Delta \Rightarrow \vec{u}_1\cdot\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow t=-1$.

Suy ra $\overrightarrow{AM}=(1;-3;-5)$, do đó $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z=0$ và hai điểm $A(1;2;0)$, $B(2;3;1)$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A,B và tiếp xúc với (P) tại điểm C. Biết rằng C luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó.

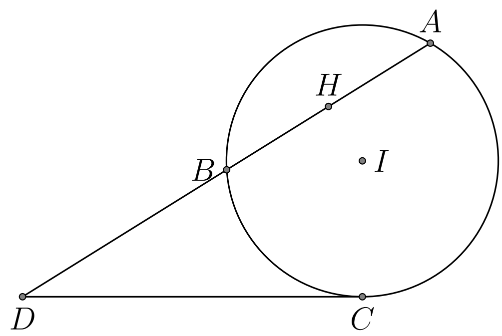
(A) $r=2\sqrt{3}$.

(B) $r=12$.

(C) $r=6$.

D $r=\sqrt{6}$.

Lời giải.



Gọi I là tâm của mặt cầu S.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;1;1;)\Rightarrow AB\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=t. \end{cases}$

Gọi D là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (P), suy ra $D(0;1;-1)$. Ta có $\overrightarrow{DA}=(1;1;1)$, $\overrightarrow{DB}=(2;2;2)$. Suy ra $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=6\quad(1)$.

Gọi H là trung điểm của AB. Ta có

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB} &= \left(\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HA}\right)\\
&= DH^2-HA^2\\
&= DI^2-IH^2-HA^2=DI^2-\left(IH^2+HA^2\right)\\
&= DI^2-IA^2=DI^2-IC^2\\
&= DC^2\quad(2).
\end{aligned}$$

Từ (1) và (2), suy ra $DC=\sqrt{6}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Tìm tập xác định của hàm số $f(x)=\sqrt{\dfrac{\sin 2x+2}{1-\cos x}}$.

(A) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
B $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}, k \in \mathbb{Z}$.
(C) $\mathscr{D} = \{k2\pi\}, k \in \mathbb{Z}$.
(D) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\sin 2x + 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó, hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi

$$1 - \cos x > 0 \Leftrightarrow \cos x < 1 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm thuộc đồ thị (C) với hoành độ $x_0 = 0$ cắt hai đường tiệm cận của đồ thị (C) tại hai điểm A, B. Tính diện tích tam giác IAB, với I là giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị (C).

A $S_{\triangle IAB} = 6$.
(B) $S_{\triangle IAB} = 3$.
(C) $S_{\triangle IAB} = 12$.
(D) $S_{\triangle IAB} = 6\sqrt[3]{2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1 \Rightarrow M(0; -1) \in (C)$. Ta có $y' = \dfrac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(0) = -3$.

Tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) tại M có phương trình : $y = y'(0) \cdot (x - 0) - 1 \Leftrightarrow y = -3x - 1$.

Đường tiệm cận đứng của đồ thị (C) là $d_1 \colon x = 1 \Rightarrow \Delta \cap d_1 = A(1; -4)$.

Đường tiệm cận ngang của đồ thị (C) là $d_2 \colon y = 2 \Rightarrow \Delta \cap d_2 = B(-1; 2)$.

Ta có $I(1; 2) \Rightarrow IA = 6$ và $IB = 2$. Do $\triangle IAB$ vuông tại I, suy ra $S_{\triangle IAB} = \dfrac{1}{2} IA \cdot IB = 6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-m}$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 2 để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$?

(A) 3.
(B) 4.
(C) 1.
D 2.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có $y' = \dfrac{-m-1}{(x-m)^2}, \quad \forall x \in \mathscr{D}$.

Hàm số nghịch biến trên $(2; 3) \Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0 & \forall x \in (2; 3) \\ (2; 3) \subset \mathscr{D} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m - 1 < 0 \\ \left[\begin{array}{l} m \leq 2 \\ m \geq 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < m \leq 2 \\ m \geq 3. \end{array}\right.$

Vậy có 2 trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có năm chữ số. Tính xác suất để số được chọn có dạng $\overline{abcde}$ trong đó $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq 9$.

A $\dfrac{143}{10000}$.
(B) $\dfrac{138}{1420}$.
(C) $\dfrac{11}{200}$.
(D) $\dfrac{3}{7}$.

Lời giải.

- Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử. Ta có $n(\Omega) = 9 \cdot 10^4$.
- Gọi A là biến cố: " Lấy được số dạng $\overline{abcde}$ trong đó $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq 9$".
  Ta có $1 \leq a < b+1 < c+2 < d+3 < e+4 \leq 13$. Suy ra $n(A) = \mathrm{C}_{13}^5$.
  Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{\mathrm{C}_{13}^5}{9 \cdot 10^4} = \dfrac{143}{10000}$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m lớn hơn -2019 để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x + 1 - m^2$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ?

A 2017. B Vô số. C 2019. D 2018.

Lời giải.

Gọi $A(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho, ta có

$$y_0 = x_0^3 - 3mx_0^2 + 3(m^2-1)x_0 + 1 - m^2 \quad (1).$$

Tọa độ điểm B đối xứng với A qua gốc tọa độ là $B(-x_0; -y_0)$. Điểm B thuộc đồ thị hàm số đã cho khi và chỉ khi

$$-y_0 = -x_0^3 - 3mx_0^2 - 3(m^2-1)x_0 + 1 - m^2 \quad (2).$$

Từ (1) và (2), suy ra $-6mx_0^2 + 2 - 2m^2 = 0 \Leftrightarrow 3mx_0^2 = 1 - m^2 \quad (*)$.

Nếu $x_0 = 0$ thì $y_0 = 1 - m^2 = -y_0 \Rightarrow y_0 = 0$ nên A trùng với B.

Nếu $m = 0$ thì phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Do đó, bài toán xảy ra khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm khác 0

$$\Leftrightarrow \frac{1-m^2}{3m} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < m < 1 \\ m < -1. \end{array}\right.$$

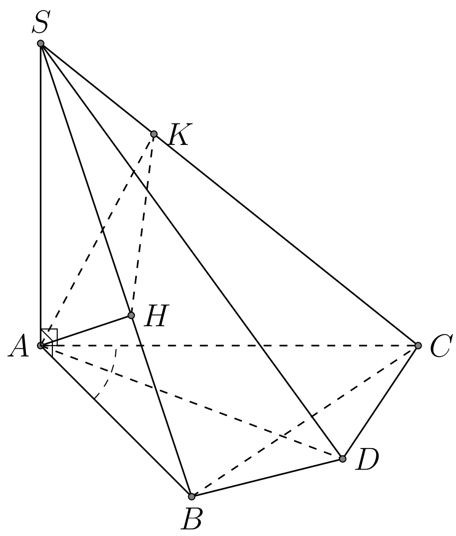
Vậy có 2017 giá trị nguyên của m lớn hơn -2019 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = BC = a$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và (ABC).

A $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. B $\dfrac{1}{3}$. C $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. D $\dfrac{\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải.



Kẻ AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có $\begin{cases} DB \perp AB \\ DB \perp SA \end{cases} \Rightarrow DB \perp (SAB) \Rightarrow DB \perp AH$, mà $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBD) \Rightarrow AH \perp SD$.

Ta có $\begin{cases} DC \perp AC \\ DC \perp SA \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAC) \Rightarrow DC \perp AK$, mà $AK \perp SC \Rightarrow AK \perp (SDC) \Rightarrow AK \perp SD$.

Do đó $SD \perp (AHK)$ (1).

Mà $SA \perp (ABC)$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và (ABC) bằng $\widehat{(SD;SA)} = \widehat{ASD} = \alpha$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC, ta có $\dfrac{BC}{\sin A} = AD \Rightarrow AD = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Xét $\triangle SAD$, ta có $\tan\alpha = \dfrac{AD}{AS} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Cho phương trình $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\left(m\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+16\sqrt[4]{x^2-x}\right)=1$, với m là tham số thực. Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt.

(A) 11. (B) 9. (C) 20. **(D) 4.**

Lời giải.

Điều kiện xác định $x > 1$.

Ta thấy $\sqrt{x}-\sqrt{x-1} > 0 \quad \forall x > 1$. Do đó phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & m\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}+16\sqrt[4]{x^2-x}=\sqrt{x}-\sqrt{x-1} \\ \Leftrightarrow\ & (m-1)\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1}+16\sqrt[4]{x(x-1)}=0 \\ \Leftrightarrow\ & (m-1)\sqrt{x}+\frac{x}{\sqrt{x-1}}+16\sqrt[4]{x(x-1)}=0 \\ \Leftrightarrow\ & m-1+\sqrt{\frac{x}{x-1}}+16\sqrt[4]{\frac{x-1}{x}}=0 \quad (*). \end{aligned}$$

Đặt $t=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x}}$, điều kiện $t \in (0;1)$. Ta thấy ứng với mỗi giá trị của $t \in (0;1)$ cho ta một giá trị của $x \in (1;+\infty)$.

Phương trình $(*)$ trở thành $\dfrac{1}{t^2}+16t=1-m$. Xét hàm số $f(t)=\dfrac{1}{t^2}+16t$, với $t \in (0;1)$.

Ta có $f'(t)=16-\dfrac{2}{t^3} \Rightarrow f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2} \in (0;1)$.

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	12	$\nearrow$	17

Do đó, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 12 < 1 - m < 17 \Leftrightarrow -16 < m < -11$.
Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m.
Chọn đáp án D □

Câu 48. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $5^{\sin^2 x} + 6^{\cos^2 x} = 7^{\cos^2 x} \cdot \log_2 m$ có nghiệm?

A 63. B 64. C 65. D 66.

Lời giải.
Điều kiện xác định $x \in \mathbb{R}$.
Với $m > 0$, phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{5^{1-\cos^2 x}}{7^{\cos^2 x}} + \left(\frac{6}{7}\right)^{\cos^2 x} = \log_2 m$$
$$\Leftrightarrow \quad 5 \cdot \left(\frac{1}{35}\right)^{\cos^2 x} + \left(\frac{6}{7}\right)^{\cos^2 x} = \log_2 m$$

Đặt $f(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{35}\right)^{\cos^2 x} + \left(\frac{6}{7}\right)^{\cos^2 x}$.
Vì $1 \geq \cos^2 x \geq 0$ và $\frac{1}{35}; \frac{6}{7} \in (0; 1)$, nên

$$5 \cdot \left(\frac{1}{35}\right)^{1} + \left(\frac{6}{7}\right)^{1} \leq 5 \cdot \left(\frac{1}{35}\right)^{\cos^2 x} + \left(\frac{6}{7}\right)^{\cos^2 x} \leq 5 \cdot \left(\frac{1}{35}\right)^{0} + \left(\frac{6}{7}\right)^{0}.$$

Suy ra $1 \leq f(x) \leq 6$, do đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi

$$1 \leq \log_2 m \leq 6 \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 64.$$

Vậy có 63 giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm.
Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$, biết $f'(x) + (2x+4)f^2(x) = 0$, $f(x) > 0 \ \forall x > 0$ và $f(2) = \frac{1}{15}$. Tính $S = f(1) + f(2) + f(3)$.

A $S = \frac{7}{15}$. B $S = \frac{11}{15}$. C $S = \frac{11}{30}$. D $S = \frac{7}{30}$.

Lời giải.
Từ giả thiết, ta có

$$\frac{f'(x)}{f^2(x)} = -(2x+4) \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\, \mathrm{d}x = -\int (2x+4)\, \mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}f(x)}{f^2(x)} = -\int (2x+4)\, \mathrm{d}x.$$

Suy ra $\dfrac{1}{f(x)} = x^2 + 4x + C$. Vì $f(2) = \dfrac{1}{15} \Rightarrow C = 3$ nên $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4x + 3}$.

Do đó $S = f(1) + f(2) + f(3) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{24} = \dfrac{7}{30}$.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + i| + |z + 1 - i| = \sqrt{13}$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z + 2 - i|$.

A $m = 1$. **B** $m = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$. **C** $m = \dfrac{\sqrt{13}}{13}$. **D** $m = \dfrac{1}{13}$.

Lời giải.

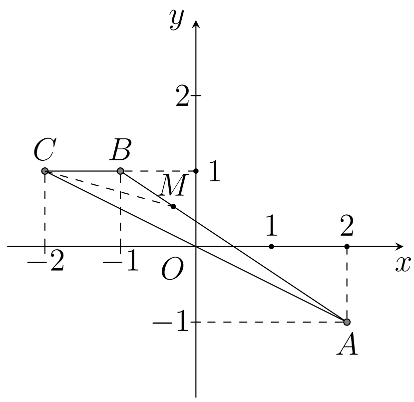
Đặt $z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow M(x; y)$ biểu biễn số phức z.

Xét $A(2; -1)$, $B(-1; 1)$, ta có $AB = \sqrt{13}$.

Do $|z - 2 + i| + |z + 1 - i| = \sqrt{13} \Rightarrow MA + MB = \sqrt{13}$, suy ra M nằm trên đoạn thẳng AB.

Lấy điểm $C(-2; 1)$, ta có $|z + 2 - i| = MC$.

Vì $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} < 0 \Rightarrow \triangle ABC$ tù tại B. Do đó $|z + 2 - i|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi M trùng với B hay $z = -i + i$. Vậy $m = BC = 1$.



Chọn đáp án A □

——— **HẾT** ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. D	3. C	4. A	5. A	6. A	7. B	8. A	9. C	10. A
11. B	12. B	13. D	14. A	15. B	16. C	17. C	18. B	19. D	20. C
21. C	22. B	23. B	24. A	25. A	26. A	27. C	28. B	29. A	30. A
31. B	32. A	33. C	34. D	35. B	36. B	37. A	38. B	39. D	40. D
41. B	42. A	43. D	44. A	45. A	46. A	47. D	48. A	49. D	50. A

63 ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA NĂM HỌC 2017-2018 THPT SƠN TÂY-HÀ NỘI

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y-3z-2=0$. Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) có một véc-tơ chỉ phương có tọa độ là

(A) $(1;-2;2)$. (B) $(1;-2;-3)$. (C) $(1;2;3)$. (D) $(1;-3;-2)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-2;-3)$.

Do $d\perp(P)$ nên véc-tơ $\vec{n}=(1;-2;-3)$ cũng là một véc-tơ chỉ phương của d.

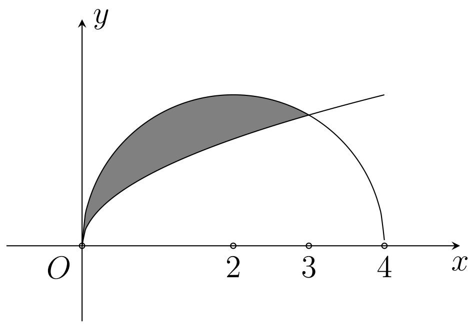
Chọn đáp án (B) □

Câu 2.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{x}$ và nửa đường tròn có phương trình $y=\sqrt{4x-x^2}$ (với $0\le x\le 4$) (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng

(A) $\dfrac{4\pi+15\sqrt{3}}{24}$. (B) $\dfrac{8\pi-9\sqrt{3}}{6}$.

(C) $\dfrac{10\pi-9\sqrt{3}}{6}$. (D) $\dfrac{10\pi-15\sqrt{3}}{6}$.



Lời giải.

Với $0\le x\le 4$ thì $\sqrt{4x-x^2}=\sqrt{x}\Leftrightarrow x^2-3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$.

Vậy diện tích cần tính là

$$S=\int\limits_0^3\left(\sqrt{4x-x^2}-\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^3\sqrt{4x-x^2}\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^3\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^3\sqrt{4x-x^2}\,\mathrm{d}x-2\sqrt{3}.$$

Đặt $x-2=2\sin t\Rightarrow\ \mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t$, suy ra

$$\int\limits_0^3\sqrt{4x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}2\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}2(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=(2t+\sin 2t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{8\pi+3\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy $S=\dfrac{8\pi+3\sqrt{3}}{6}-2\sqrt{3}=\dfrac{8\pi-9\sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2+\sqrt{3}z+3=0$. Giá trị của biểu thức $z_1^2+z_2^2$ bằng

(A) 3. (B) $\dfrac{3}{18}$. (C) $-\dfrac{9}{4}$. (D) $-\dfrac{9}{8}$.

Lời giải.

Ta có $2z^2+\sqrt{3}z+3=0 \Leftrightarrow z=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\pm\dfrac{\sqrt{21}}{4}i$.

Suy ra $z_1^2+z_2^2=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\sqrt{21}}{4}i\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{\sqrt{21}}{4}i\right)^2=-\dfrac{9}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(5;7;-13)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng Oyz. Tọa độ của H là

A. $(5;0;-13)$. B. $(0;7;-13)$. C. $(5;7;0)$. D. $(0;-7;13)$.

Lời giải.

Do H là hình chiếu vuông góc của M trên (Oyz) nên $H(0;7;-13)$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(2;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua H và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC.

A. $x-y-z=0$. B. $2x+y+z-6=0$.

C. $2x+y+z+6=0$. D. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{1}=1$.

Lời giải.

Vì tứ diện $OABC$ là tứ diện vuông tại đỉnh O và H là trực tâm tam giác ABC nên $OH\perp(ABC)$. Do đó $\overrightarrow{OH}=(2;1;1)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (ABC) và vì $H\in(ABC)$ nên phương trình (ABC) là

$$2(x-2)+(y-1)+(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x+y+z-6=0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 6. Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(m-1)x+2m$ có đồ thị là (C_m). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để từ $M(1;2)$ kẻ được đúng hai tiếp tuyến với (C_m). Tính tổng các phần tử của S.

A. $\dfrac{4}{3}$. B. $\dfrac{81}{109}$. C. $\dfrac{3}{4}$. D. $\dfrac{217}{81}$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-4x+m-1$.

Phương trình đường thẳng đi qua $M(1;2)$ có hệ số góc k có dạng $d\colon y=kx-k+2$.

Đường thẳng d tiếp xúc với (C_m) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^3-2x^2-(m-1)x+2m=kx-k+2 & (1)\\ 3x^2-4x+(m-1)=k & (2)\end{cases}$$

Thay (2) vào (1) và rút gọn ta được

$$2x^3-5x^2+4x-3(m-1)=0 \Leftrightarrow 2x^3-5x^2+4x=3(m-1)\quad (*)$$

Để từ M kẻ được đúng hai tiếp tuyến với (C_m) thì phương trình $(*)$ phải có đúng hai nghiệm phân biệt hay hai đồ thị $y=2x^3-5x^2+4x\quad(C)$ và $y=3(m-1)$ cắt nhau tại đúng hai điểm phân biệt.

Hàm số $y=2x^3-5x^2+4x$ có $y'=6x^2-10x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$ nên ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{28}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $\left[\begin{array}{l} 3(m-1)=1 \\ 3(m-1)=\dfrac{28}{27} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{4}{3} \\ m=\dfrac{109}{81} \end{array}\right.$.

Vậy tổng các phần tử của S là $\dfrac{4}{3}+\dfrac{109}{81}=\dfrac{217}{81}$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a, x=b\,(a<b)$ được tính theo công thức

A. $S=\displaystyle\int\limits_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$.

B. $S=\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\left|\displaystyle\int\limits_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x\right|$.

D. $S=\pi\displaystyle\int\limits_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Công thức đúng là $S=\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Kí hiệu M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$. Tính $\dfrac{M}{m}$.

A. 2.

B. $\dfrac{2}{3}$.

C. $\dfrac{4}{3}$.

D. $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y=x+\dfrac{4}{x+1}$ liên tục trên $[0;3]$ và $y'=1-\dfrac{4}{(x+1)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=2 \\ x+1=-2 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Vì $x\in[0;3]$ nên chỉ có $x=1$ thỏa mãn.

Có $f(1)=3$; $f(0)=4$; $f(3)=4$. Do đó $M=4$ và $m=3 \Rightarrow \dfrac{M}{m}=\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Bán kính đáy của khối trụ tròn xoay có thể tích bằng V và có chiều cao bằng h là

A. $r=\sqrt{\dfrac{3V}{\pi h}}$.

B. $r=\sqrt{\dfrac{V}{\pi h}}$.

C. $r=\sqrt{\dfrac{V}{2\pi h}}$.

D. $r=\sqrt{\dfrac{2V}{\pi h}}$.

Lời giải.

Ta có $V=\pi r^2 h \Leftrightarrow r^2=\dfrac{V}{\pi h} \Leftrightarrow r=\sqrt{\dfrac{V}{\pi h}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Có bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số mà tổng các chữ số trong mỗi số bằng 3 ?

(A) 19. **B** 15. (C) 21. (D) 36.

Lời giải.

Giả sử số cần lập là $\overline{abcde}$. Do $a+b+c+d+e=3$ nên a,b,c,d,e được chọn từ một trong các bộ năm số $A=(3,0,0,0,0,0)$, $B=(2,1,0,0,0)$ và $C=(1,1,1,0,0,0)$.

- Nếu $a,b,c,d,e \in A$ thì có 1 số thỏa mãn.
- Nếu $a,b,c,d,e \in B$ thì có $2\cdot 4=8$ số thỏa mãn.
- Nếu $a,b,c,d,e \in C$ thì có $\mathrm{C}_4^2=6$ số thỏa mãn.

Vậy có $1+8+6=15$ số.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Cho $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3}x-2}{x+3}=a$ là một số thực. Khi đó giá trị của a^2 bằng

(A) 9. **B** 3. (C) 4. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3}x-2}{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3}-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{3}{x}}=\sqrt{3}\Rightarrow a=\sqrt{3}\Rightarrow a^2=3.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Cho tập hợp $M=\{0;1;2;\ldots;9\}$ có 10 phần tử. Số tập con gồm hai phần tử của M và không chứa số 1 là

(A) C_{10}^2. (B) A_9^2. (C) 9^2. **D** C_9^2.

Lời giải.

Số tập con gồm hai phần tử của M và không chứa số 1 là số tổ hợp chập 2 của 9 phần tử và bằng C_9^2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$, đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng (α) có phương trình $x+y-z+3=0$. Đường thẳng Δ đi qua điểm A, cắt d và song song với mặt phẳng (α) có phương trình là

(A) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. (B) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.

(C) $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$. **D** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có véc-tơ pháp tuyến: $\vec{n}=(1;1;-1)$.

Điểm $B\in d\Rightarrow B(t+3;3t+3;2t)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(t+2;3t+1;2t+1)$.

$\Delta \parallel (\alpha)\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0\Leftrightarrow t+2+3t+1-2t-1=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(1;-2;-1)$. Do đó phương trình của Δ là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\dfrac{3\tan x-5}{1-\sin^2 x}$.

A $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pi+k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.
C $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\cos x\neq 0\\ 1-\sin^2 x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$$

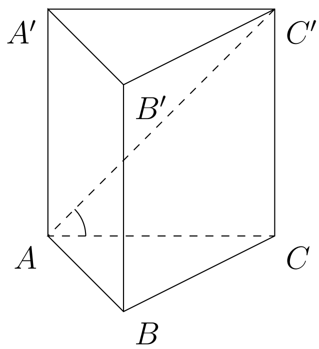
Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$, góc giữa AC' và (ABC) bằng 60°. Tính thể tích V của khối trụ nội tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$

A $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{108}$. **B** $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$. **C** $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{36}$. **D** $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{72}$.

Lời giải.



Gọi r và h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của khối trụ nội tiếp hình lăng trụ.

Ta có góc của AC' với mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{C'AC}=60^\circ$.

Do lăng trụ đều nên chiều cao $h=CC'=AC\cdot\tan 60^\circ=a\sqrt{3}$.

Tam giác ABC đều nên $r=\dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Vậy $V=\pi r^2h=\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước đến để khoang giếng. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80 000 đồng, kể từ mét khoan thứ hai giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50 m mới có nước. Hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

A 10 125 000 đồng. **B** 5 250 000 đồng. **C** 4 245 000 đồng. **D** 4 000 000 đồng.

Lời giải.

Số tiền phải trả ở mỗi mét khoan tạo thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1=80\,000$ và công sai $d=5000$.

Như vậy, tổng số tiền khi khoan đến mét thứ n được tính theo công thức

$$S_n=\frac{n}{2}\left[2u_1+(n-1)d\right].$$

Vậy tổng số tiền phải trả là

$$S_{50}=25\cdot(2\cdot 80\,000+49\cdot 5000)=10\,125\,000.$$

Chọn đáp án A □

Câu 17. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Tính diện tích xung quanh của hình tròn xoay sinh ra khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quay xung quanh cạnh AB.

A $2\pi a^2\sqrt{3}$. **B** $12\pi a^2\sqrt{3}$. **C** $12\pi a^2$. **D** $6\pi a^2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh AB ta được một khối trụ tròn xoay có chiều cao là $AB = a$ và bán kính đáy là $r = AD = a\sqrt{3}$.

Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{\text{xq}} = 2\pi \cdot AB \cdot AD = 2\pi a^2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Với a, b là các số thực dương bất kì, $a \neq 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $\log_{\sqrt{a}} b = \frac{1}{2}\log_a b$. **B** $\log_{\sqrt{a}} b = -\frac{1}{2}\log_a b$.

C $\log_{\sqrt{a}} b = -2\log_a b$. **D** $\log_{\sqrt{a}} b = 2\log_a b$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\sqrt{a}} b = \log_{a^{\frac{1}{2}}} b = 2\log_a b$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Giải bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-1} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{-2+x}$ ta được nghiệm là

A $x \geq 1$. **B** $x > 1$. **C** $x < 1$. **D** $x \leq 1$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-2x+1} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{-2+x} \Leftrightarrow 1 - 2x \leq -2 + x \Leftrightarrow x \geq 1.$$

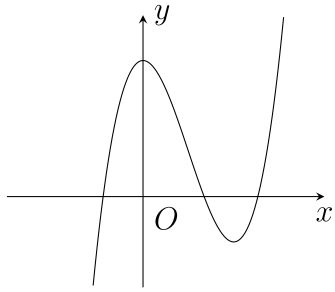
Chọn đáp án A □

Câu 20.

Đường cong như hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2$. **B** $y = 2x^3 + 3x^2 + 2$.

C $y = -3x^3 + 2x^2 + 2$. **D** $y = x^3 - 3x^2 + 3$.



Lời giải.

Từ đồ thị và các phương án ta thấy hàm số có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hệ số $a > 0, d > 0$ và có hai điểm cực trị có hoành độ không âm.

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3$ có $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$ nên có hai điểm cực trị.

Các hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2$, $y = 2x^3 + 3x^2 + 2$, $y = -3x^3 + 2x^2 + 2$ hoặc có hệ số $a < 0$ hoặc có hệ số $d < 0$ hoặc không có hai điểm cực trị nên không thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Cho nhị thức $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n, x \neq 0$ trong đó tổng các hệ số của khai triển nhị thức đó là 1024. Khi đó số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức đó bằng

A. 252. B. 125. C. -252. D. 525.

Lời giải.

Ta có $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^{n-k}\left(\dfrac{1}{x}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^{n-2k}$.

Tổng các hệ số trong khai triển bằng $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k = (1+1)^n = 2^n = 1024 \Leftrightarrow n = 10$.

Số hạng không chứa x ứng với $10-2k=0 \Leftrightarrow k=5$. Từ đó số hạng không chứa x bằng $\mathrm{C}_{10}^5 = 252$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Cho hàm số $y = \dfrac{m\sin x + 1}{\cos x + 2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5;5]$ để giá trị nhỏ nhất của y nhỏ hơn -1 ?

A. 6. B. 3. C. 4. D. 5.

Lời giải.

Do $\cos x + 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y = \dfrac{m\sin x + 1}{\cos x + 2} \Leftrightarrow m\sin x - y\cos x = 2y - 1$.

Do phương trình có nghiệm nên

$$m^2 + y^2 \geq (2y-1)^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - m^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{3m^2+1}}{3} \leq y \leq \frac{2+3m^2+1}{3}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của y bằng $\dfrac{2-\sqrt{3m^2+1}}{3}$.

Từ yêu cầu bài toán, ta có $\dfrac{2-\sqrt{3m^2+1}}{3} \leq -1 \Leftrightarrow 3m^2+1 > 25 \Leftrightarrow m^2 > 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2\sqrt{2} \\ m < -2\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Do m nhận giá trị nguyên thuộc đoạn $[-5;5]$ nên $m \in \{-5;-4;-3;3;4;5\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Tìm m để phương trình $4^{x^2} - 2^{x^2+2} + 6 = m$ có đúng 3 nghiệm.

A. $m > 3$. B. $m = 3$. C. $m = 2$. D. $2 < m < 3$.

Lời giải.

Đặt $t = 2^{x^2}$ với $t \geq 1$, ta được phương trình $t^2 - 4t + 6 - m = 0 \quad (1)$.

Một nghiệm $t = 1$ của (1) cho ta nghiệm $x = 0$ của phương trình ban đầu, một nghiệm $t > 1$ của (1) cho ta hai nghiệm đối nhau của phương trình ban đầu. Do đó, yêu cầu bài toán tương đương với phương trình (1) có một nghiệm bằng 1 và nghiệm còn lại lớn hơn 1.

Thay $t = 1$ vào (1) được $m = 3$.

Khi đó ta có phương trình $t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right.$ (phù hợp).

Chọn đáp án B □

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	-1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-1

Số nghiệm của phương trình $f(x) - x^2 + 2x - 1 = 0$ là

A vô số. **B** 0. **C** 2. **D** 1.

Lời giải.

Ta có $f(x) - x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = (x-1)^2$. (1)

Với $x > 1$ thì $f(x) < 0$ mà $(x-1)^2 \geq 0$ nên phương trình (1) không có nghiệm $x > 1$.

Với $x < 1$ thì hàm số $g(x) = f(x) - x^2 + 2x - 1$ có đạo hàm $g'(x) = f'(x) - 2x + 2 > 0$ nên $g(x)$ là hàm số đồng biến và liên tục trên $(-\infty; 1)$. Lại có $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$ nên phương trình có một nghiệm duy nhất trên $(-\infty; 1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Biết rằng trong tất cả các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $\log_2(x^2 + y^2 + 2) \leq 2 + \log_2(x + y - 1)$ chỉ có duy nhất một cặp $(x; y)$ thỏa mãn $3x + 4y - m = 0$. Khi đó, hãy tính tổng các giá trị m tìm được.

A 20. **B** 46. **C** 28. **D** 14.

Lời giải.

Ta có $\log_2(x^2 + y^2 + 2) \leq 2 + \log_2(x + y - 1) \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 2$.

Do chỉ có một cặp $(x; y)$ duy nhất thỏa mãn hệ $\begin{cases} 3x + 4y - m = 0 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 2 \end{cases}$ nên đường thẳng $3x + 4y - m = 0$ là tiếp tuyến của đường tròn $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$.

Do đó, $\dfrac{|3.2 + 4.2 - m|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -36 \\ m = 64. \end{array}\right.$

Từ đó chọn được đáp án.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 - x - m \quad (C_m)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (C_m) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng ?

A 2. **B** 3. **C** 1. **D** 0.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox :

$$x^3 + mx^2 - x - m = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+m)(x^2 - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -m \\ x = \pm 1 \end{array}\right..$$

Từ đó có ba trường hợp:

a) Trường hợp 1. Thứ tự các số hạng của cấp số cộng là $-m, -1, 1$.
Khi đó $m = 3$.

b) Trường hợp 2. Thứ tự các số hạng của cấp số cộng là $-1, -m, 1$.
Khi đó $m = 0$.

c) Trường hợp 3. Thứ tự các số hạng của cấp số cộng là $-m, 1, -1$.
Khi đó $m = -3$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $[-1; 1]$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'	‖	$+$	0	$-$	‖
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0.
(B) Hàm số có đúng một cực trị.
(C) Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.
(D) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

Lời giải.

Dễ thấy hàm số chỉ có đúng một cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1; 2; 1)$. Mặt phẳng qua A, vuông góc với trục Ox có phương trình là

(A) $x + y + z - 3 = 0$. (B) $y - 2 = 0$. (C) $x - 1 = 0$. (D) $x + 1 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng qua A, vuông góc với trục Ox nhận véc-tơ $\vec{i} = (1; 0; 0)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên có phương trình là $x + 1 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Đồ thị hàm số nào sau đây không có tiệm cận ngang?

(A) $y = \dfrac{x+2}{x-1}$. (B) $y = \dfrac{x+2}{x^2-1}$. (C) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$. (D) $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ có tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = +\infty$. Do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Trong mặt phẳng phức, gọi M là điểm biểu diễn cho số phức $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0)$, M' là điểm biểu diễn cho số phức $\overline{z}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) M' đối xứng với M qua Oy.
(B) M' đối xứng với M qua Ox.
(C) M' đối xứng với M qua đường thẳng $y = x$.

(D) M' đối xứng với M qua O.

Lời giải.

Điểm M' có tọa độ $M'(a;-b)$ đối xứng với M qua Ox.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $T=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất có dạng $(P)\colon x+ay+by+c=0$. Tính $S=a+b+c$.

(A) 19. (B) 6. (C) -9. (D) -5.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của O lên (ABC).

Tứ diện $OABC$ có ba góc ở đỉnh O vuông nên $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}=\dfrac{1}{OH^2}\geq\dfrac{1}{OM^2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $H\equiv M$ hay $OM\perp(ABC)$.

Ta có $\overrightarrow{OM}=(1;2;3)$, từ đó viết được phương trình mặt phẳng (P) là $x+2y+3z-14=0$.

Vậy $a+b+c=2+3-14=-9$.

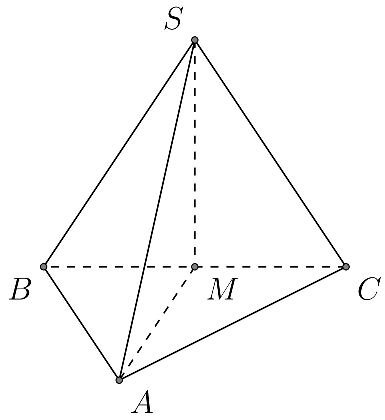
Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Biết tam giác SBC đều, tính góc giữa SA và (ABC).

(A) 60°. (B) 45°. (C) 90°. (D) 30°.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC. Khi đó góc giữa SA và (ABC) là góc giữa SA và MA. Tam giác SAM vuông tại M có $SM=MA=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $\widehat{SAM}=45^\circ$.



Chọn đáp án (B) □

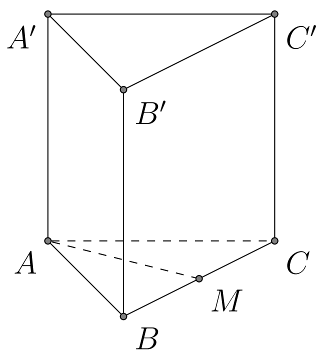
Câu 33. Đáy của hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là tam giác đều cạnh bằng 4. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC.

(A) $2\sqrt{3}$. (B) 1. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC. Khi đó $AM \perp AA'$ tại A, $AM \perp BC$ tại M.

Do đó, AM là đoạn vuông góc chung của AA' và BC. Từ đó, $d(AA', BC) = AM = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Số điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ trên đường tròn lượng giác là

(A) 6. (B) 1. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Mỗi họ nghiệm có hai điểm biểu diễn và điểm biểu diễn của họ này không trùng với điểm biểu diễn nghiệm thuộc họ còn lại nên có tất cả 4 điểm biểu diễn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Cho hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các phần tử của tập S là

(A) 3. (B) 10. (C) 6. (D) 5.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ khác phía so với Ox.

Các giá trị cực trị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ là $f(0) = m$ và $f(2) = m - 4$.

Hai điểm cực trị khác phía so với $Ox \Leftrightarrow f(0) \cdot f(2) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Do đó, $S = \{1; 2; 3\}$ nên tổng các phần tử của S là 6.

Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Biết $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{\mathrm{d}x}{1 + x + \sqrt{1 + x^2}} = a\sqrt{3} + b\sqrt{2} + c + \dfrac{1}{2}\ln(3\sqrt{2} - 3)$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính $P = a + b + c$.

(A) $P = \dfrac{1}{2}$. (B) $P = -1$. (C) $P = -\dfrac{1}{2}$. (D) $P = \dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{\mathrm{d}x}{1 + x + \sqrt{1 + x^2}} = \int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{(1 + x - \sqrt{1 + x^2})\,\mathrm{d}x}{2x} = \left(\dfrac{1}{2}\ln x + \dfrac{1}{2}x\right)\Bigg|_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{x\sqrt{1 + x^2}}{2x^2}\,\mathrm{d}x.$

$= \dfrac{1}{2}\ln\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2} - I.$

Xét $I = \int\limits_1^{\sqrt{3}} \dfrac{x\sqrt{1+x^2}}{2x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \sqrt{1+x^2}$, khi đó $t\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x$.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{t^2}{2(t^2-1)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[t\Big|_{\sqrt{2}}^{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\right]\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[2-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[2-\sqrt{2}\ln\sqrt{3} - \ln(\sqrt{2}-1)\right]. \end{aligned}$$

Vậy $I = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln(3\sqrt{2}-3)$.

Do đó $P = a+b+c = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Chị Trang gửi 100 triệu đồng vào tài khoản ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất 8%/ năm. Số tiền lãi thu được sau 10 năm gần nhất với số nào sau đây (biết rằng trong thời gian gửi tiền người đó không rút tiền và lãi suất ngân hàng không đổi)?

A. 215 triệu đồng. B. 115 triệu đồng. **C. 116 triệu đồng.** D. 216 triệu đồng.

Lời giải.

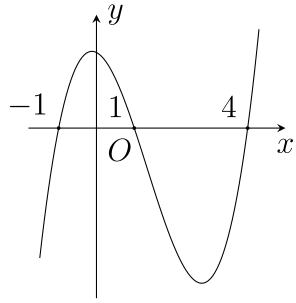
Số tiền lãi cần tìm bằng $10^8(1+0.08)^{10} - 10^8 \approx 115892499,7$ đồng.

Chọn đáp án C □

Câu 38.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1;2)$. B. $(-1;1)$. C. $(1;+\infty)$. **D. $(-2;-1)$.**



Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$ và $\begin{cases} f'(x) > 0 & \forall x \in (-1;1)\cup(4;+\infty) \\ f'(x) < 0 & \forall x \in (-\infty;-1)\cup(1;4) \end{cases}$.

Ta có $y = f(x^2) \Rightarrow y' = 2x\cdot f'(x^2)$.

Ta thấy khi $x \in (-2;-1)$ thì $x<0$ và $x^2 \in (1;4)$ nên $f'(x^2) < 0$, từ đó có $y' = 2x\cdot f'(x^2) > 0$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số sau đồng biến trên $\mathbb{R}$: $y = \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{3x} - m\mathrm{e}^{x} + 4x - 2018$.

(A) $m \geq -6$. **B** $m \leq 6$. (C) $m \leq -5$. (D) $m \geq 6$.

Lời giải.

Đặt $t = \mathrm{e}^{x}, t > 0$ thì ta có $y = \dfrac{2}{3}t^3 - mt + 4\ln t - 2018 = f(t)$. Ta có $f'(t) = 2t^2 - m + \dfrac{4}{t}, t > 0$.

Từ yêu cầu bài toán, ta có $y' \geq 0 \quad \forall t > 0 \Leftrightarrow 2t^2 + \dfrac{4}{t} \geq m \quad \forall t > 0$.

Ta có $2t^2 + \dfrac{4}{t} = 2t^2 + \dfrac{2}{t} + \dfrac{2}{t} \geq 3\sqrt[3]{8} = 6$. Đẳng thức xảy ra khi $t = 1$.

Từ đó ta có $m \leq 6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Bạn Trang có 10 đôi tất khác nhau. Sáng nay, trong tâm trạng vội vã đi thi, Trang đã lấy ngẫu nhiên 4 chiếc tất. Tính xác suất để trong 4 chiếc tất lấy ra có ít nhất một đôi tất.

(A) $\dfrac{6}{19}$. **B** $\dfrac{99}{323}$. (C) $\dfrac{224}{323}$. (D) $\dfrac{11}{969}$.

Lời giải.

Số cách lấy ngẫu nhiên 4 chiếc tất trong số 10 đôi tất khác nhau là C_{20}^4.

Số cách chọn có ít nhất 1 đôi tất là $10 \times 18 \times 8 + \mathrm{C}_{10}^2$.

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{10 \times 18 \times 8 + \mathrm{C}_{10}^2}{\mathrm{C}_{20}^4} = \dfrac{99}{323}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Cho hai mặt cầu $(S_1)\colon (x-3)^2+(y-2)^2+(z-2)^2 = 4$ và $(S_2)\colon (x-1)^2+y^2+(z-1)^2 = 1$. Gọi d là đường thẳng đồng thời tiếp xúc với hai mặt cầu trên, cắt đoạn thẳng nối tâm hai mặt cầu và cách gốc tọa độ một khoảng lớn nhất. Nếu $\vec{u} = (a;1;b)$ là một véc-tơ chỉ phương của d thì tổng $S = 2a + 3b$ bằng bao nhiêu?

A $S = 2$. (B) $S = 1$. (C) $S = 0$. (D) $S = 4$.

Lời giải.

Mặt cầu (S_1) có tâm $I_1(3;2;2)$, bán kính $R_1 = 2$, mặt cầu (S_2) có tâm $I_2(1;0;1)$ và bán kính $R_2 = 1$.

Do $I_1I_2 = 3 = R_1 + R_2$ nên (S_1) và (S_2) tiếp xúc ngoài nhau tại điểm $A\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right)$.

Vì d tiếp xúc với hai mặt cầu, đồng thời cắt đoạn nối tâm I_1I_2 nên d tiếp xúc với hai mặt cầu tại A, khi đó $d \perp I_1I_2$.

Mặt khác $d = d(O,d) \leq OA$. Đẳng thức xảy ra khi $d \perp OA$. Khi đó, d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u_1} = \left[\overrightarrow{I_1I_2}, \overrightarrow{OA}\right] = (6;-3;6) \Rightarrow \vec{u} = (-2;1;2)$ là một véc-tơ chỉ phương của d.

Vậy $a = -2, b = 2$ và $S = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = 1$

và $\int\limits_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x = 4$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^1 [f(x)]^3\,\mathrm{d}x$ bằng

A 1. **B** 8. **C** 10. **D** 80.

Lời giải.

Xét $\int\limits_0^1 [f(x)+(ax+b)]^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_0^1 [f(x)\cdot(ax+b)]\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 (ax+b)^2\,\mathrm{d}x$

$= 4 + 2a\int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x + 2b\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3a}(ax+b)\Big|_0^1 = 4 + 2(a+b) + \frac{a^2}{3} + ab + b^2.$

Cần xác định a, b sao cho $\frac{a^2}{3} + (2+b)a + b^2 + 2b + 4 = 0.$ (1)

Có $\Delta_{(a)} = b^3 + 4b + 4 - \frac{4}{3}(b^2+2b+4) = -\frac{(b-2)^2}{3} \leq 0$ nên (1) $\Leftrightarrow b = 2$ và $a = -6$.

Ta có $\int\limits_0^1 [f(x) - 6x + 2]\,\mathrm{d}x = 0$ nên $f(x) = 6x - 2$.

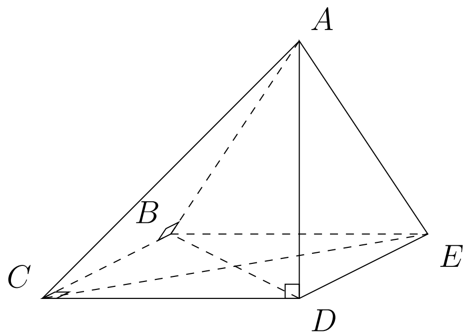
Vậy $\int\limits_0^1 [f(x)]^3\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (6x-2)^3\,\mathrm{d}x = 10.$

Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = 3, CD = 4, \widehat{BCD} = \widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$. Góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng 60°. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A $\frac{127\sqrt{127}\pi}{6}$. **B** $\frac{52\sqrt{13}\pi}{3}$. **C** $\frac{28\sqrt{7}\pi}{3}$. **D** $32\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.



Dựng hình chữ nhật $BCDE$. Khi đó, ta có:

$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp DE \end{cases} \Rightarrow CD \perp AE \quad (1);$

$\begin{cases} DE \perp AB \\ BE \perp DE \end{cases} \Rightarrow DE \perp AE \quad (2).$

Từ (1) và (2) ta có $AE \perp (CDE)$.

Suy ra mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ cũng là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCDE$. Mặt cầu này có đường kính là AC.

Lại có $(AD, BC) = \widehat{ADE} = 60^\circ \Rightarrow AD = 6 \Rightarrow AC = 2\sqrt{13}$.

Do đó bán kính của mặt cầu này là $R = \frac{1}{2}AC = \sqrt{13}$. Từ đó có thể tích của khối cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{52\sqrt{13}\pi}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Gọi n là số các số phức z đồng thời thỏa mãn $|iz + 1 + 2i| = 3$ và biểu thức $T = 2|z+5+2i| + 3|z-3i|$ đạt giá trị lớn nhất. Gọi M là giá trị lớn nhất của T. Giá trị của tích Mn

là

A $10\sqrt{21}$. **B** $6\sqrt{13}$. **C** $5\sqrt{21}$. **D** $2\sqrt{13}$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó $N(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z.

Từ giả thiết, $|iz + 1 + 2i| = 3 \Leftrightarrow |z + 2 - i| = 3 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

Ta có $T = 2|z + 5 + 2i| + 3|z - 3i| = 2NA + 3NB$ với $A(-5; -2)$ và $B(0; 3)$.

Nhận xét rằng A, B, I thẳng hàng và $2IA = 3IB$ ($I(-2; 1)$ là tâm đường tròn biểu diễn các số phức z).

Từ đó ta có $2NA^2 + 3NB^2 = 5NI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 = 105$.

Mà $T^2 = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}NA + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}NB)^2 \leq 5(2NA^2 + 3NB^2) = 525$ hay $T \leq 5\sqrt{21}$.

Đẳng thức xảy ra khi N là giao của đường trung trực đoạn AB với đường tròn tâm I, bán kính $R = 3$.

Vậy $n = 2$ và $Mn = 10\sqrt{21}$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $2^{2u_1+1} + 2^{3-u_2} = \dfrac{8}{\log_3\left(\dfrac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n > 5^{100}$ bằng

A 230. **B** 231. **C** 233. **D** 234.

Lời giải.

Theo giả thiết $u_{n+1} = 2u_n$ nên (u_n) là một cấp số nhân có công bội $q = 2$. Suy ra $u_n = u_1 \cdot 2^{n-1}$ với mọi $b \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

Ta lại có $2^{2u_1+1} + 2^{3-u_2} = \dfrac{8}{\log_3\left(\dfrac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)}$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 4^{u_1} + \frac{8}{4_1^u} = \frac{8}{\log_3\left(\dfrac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)} \quad (1).$$

Dễ thấy $2 \cdot 4^{u_1} + \dfrac{8}{4^{u_1}} \geq 8$ và $\dfrac{8}{\log_3\left(\dfrac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)} = \dfrac{8}{\log_3\left[\left(\dfrac{1}{2}u_3 - 1\right)^2 + 3\right]} \leq 8$ nên (1) tương đương với $2 \cdot 4^{u_1} + \dfrac{8}{4^{u_1}} = 8$ và $\dfrac{8}{\log_3\left(\dfrac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)} = 8$ hay $u_1 = \dfrac{1}{2}$.

Khi đó $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1\dfrac{1 - 2^n}{1 - 2} = \dfrac{2^n - 1}{2}$.

Do đó, $S_n > 5^{100} \Leftrightarrow \dfrac{2^n - 1}{2} > 5^{100} \Leftrightarrow \log_5 \dfrac{2^n - 1}{2} > 100 \Leftrightarrow n > 233$.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$, có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	-1

Gọi k, l là số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f(x) - 2018}$. Tính $k + l$.

A $k + l = 2$. **B** $k + l = 3$. **C** $k + l = 4$. **D** $k + l = 5$.

Lời giải.

Vì phương trình $f(x) = 2018$ có ba nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f(x) - 2018}$ có ba đường tiệm cận đứng.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x) - 2018} = -\dfrac{1}{2019}$ nên $y = -\dfrac{1}{2019}$ là một đường tiệm cận ngang.

Tương tự $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{f(x) - 2018} = 0$ nên $y = 0$ là một đường tiệm cận ngang.

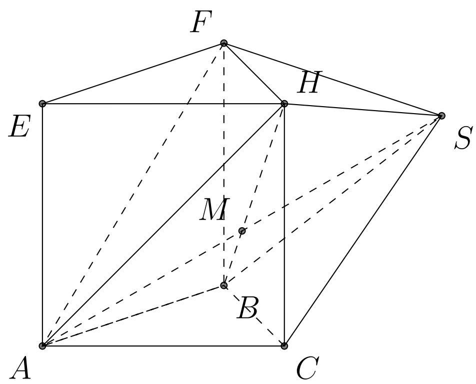
Vậy $k + l = 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Cho lăng trụ đều $ABC.EFH$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi S là điểm đối xứng của A qua BH. Thể tích khối đa diện $ABCSFH$ bằng

A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B** $\dfrac{a^3}{6}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D** $\dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải.



Thể tích của khối lăng trụ đều $ABC.EFH$ là $V = S_{ABC} \cdot AE = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối chóp $A.BCHF$ là $V_{A.BCHF} = V - V_{A.EFH} = V - \dfrac{1}{3}V = \dfrac{2}{3}V$.

Gọi $M = AS \cap BH$ thì M là trung điểm của AS nên $d(A, (BCHF)) = d(S, (BCHF))$. Do đó $V_{A.BCHF} = V_{S.BCHF}$.

Thể tích khối đa diện $ABCSFH$ là $V_{ABCSFH} = V_{A.BCHF} + V_{S.BCHF} = \dfrac{4}{3}V = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC nhọn có $H(2; 2; 1)$, $K\left(-\dfrac{8}{3}; \dfrac{4}{3}; \dfrac{8}{3}\right)$, O lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên các cạnh BC, AC, AB. Gọi I là trực tâm tam giác ABC. Phương trình mặt cầu tâm A và đi qua I là

A $(S)\colon (x + 4)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 20$. **B** $(S)\colon (x - 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 5$.

C $(S)\colon x^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 20$. **D** $(S)\colon (x + 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 5$.

Lời giải.

Theo tính chất của hình học phẳng thì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác HOK.

Do đó $HK \cdot \overrightarrow{IO} + OK \cdot \overrightarrow{IH} + OH \cdot \overrightarrow{IK} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow 5 \cdot \overrightarrow{IO} + 4 \cdot \overrightarrow{IH} + 3 \cdot \overrightarrow{IK} = \overrightarrow{0} \Rightarrow I(0;1;1)$.

Đường thẳng AH có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{IH} = (2;1;0)$ nên có phương trình $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1.+ \end{cases}$

Vì $A \in AH$ nên $A(2t;1+t;1) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (2t;t+1;1)$.

Mà $OI \perp OA$ nên $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \Leftrightarrow 2t \cdot 0 + (1+t) \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow A(-4;-1;1)$.

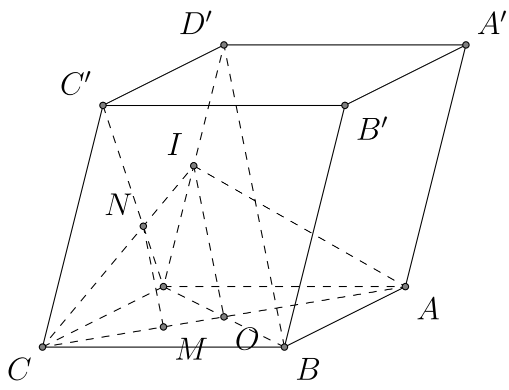
Vậy phương trình mặt cầu tâm A, bán kính AI là $(S)\colon (x+4)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 20$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $AM = 3MC$. Lấy N trên cạnh $C'D$ sao cho $C'N = xC'D$. Với giá trị nào của x thì $MN \parallel BD'$?

A $x = \dfrac{2}{3}$. **B** $x = \dfrac{1}{3}$. **C** $x = \dfrac{1}{4}$. **D** $x = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.



Từ giả thiết, ta có M là trọng tâm tam giác BCD.

Gọi O và I lần lượt là trung điểm của AC và DD'. Khi đó, ta có $BD' \parallel (IAC)$.

Trong $(CDD'C')$ gọi $N' = CI \cap C'D$, khi đó N' là trọng tâm tam giác CDD'.

Do đó $\dfrac{CM}{CO} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{CN'}{CI} \Rightarrow MN' \parallel OI$. Mà $OI \parallel BD'$ nên $MN \parallel BD'$.

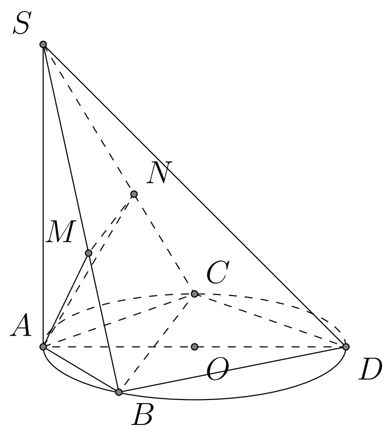
Vậy $N' \equiv N$ và $x = \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho tam giác ABC có $BC = a, \widehat{BAC} = 135^\circ$. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại A lấy điểm S thỏa mãn $SA = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC lần lượt là M, N. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AMN) là

A 30°. **B** 45°. **C** 60°. **D** 75°.

Lời giải.



Gọi AD là đường kính của đường tròn tâm O tiếp xúc với tam giác ABC.

Khi đó, ta có $\begin{cases} SA \perp DC \\ AC \perp DC \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAC)$.

Từ đó có $DC \perp AN$. MÀ $SC \perp AN$ nên $AN \perp SD$. (1)

Chứng minh tương tự, ta có $AM \perp SD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $SD \perp (AMN)$. Mà $SA \perp (ABC)$ suy ra $((ABC),(AMN)) = (SA, SD) = \widehat{ASD}$.

Ta có $AD = 2R = \dfrac{BC}{\sin A} = a\sqrt{2}$.

Trong tam giác ASD có $\tan \widehat{ASD} = \dfrac{AD}{AS} = 1 \Rightarrow \widehat{ASD} = 45^\circ$.

Chọn đáp án B □

— HẾT —

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. B	3. C	4. B	5. B	6. D	7. B	8. C	9. B	10. B
11. B	12. D	13. D	14. A	15. B	16. A	17. A	18. D	19. A	20. D
21. A	22. A	23. B	24. D	25. C	26. B	27. B	28. D	29. C	30. B
31. C	32. B	33. A	34. C	35. C	36. C	37. C	38. D	39. B	40. B
41. A	42. C	43. B	44. A	45. D	46. D	47. A	48. A	49. A	50. B

64 ĐỀ THI THỬ LẦN 1 THPTQG, 2017 - 2018 TRƯỜNG THPT AN PHƯỚC LẦN 1, NINH THUẬN.

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho $z_1 = 2+3i$; $z_2 = 4+5i$. Tìm số phức liên hợp của số phức w biết $w = 2(z_1 + z_2)$.

A $\overline{w} = 12 - 16i$. **B** $\overline{w} = 12 + 16i$. **C** $\overline{w} = -14 + 44i$. **D** $\overline{w} = -14 - 44i$.

Lời giải.

Ta có $w = 2(2 + 3i + 4 + 5i) = 12 + 16i$. Vậy $\overline{w} = 12 - 16i$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2-2}{2x^2+3}$ bằng

A $-\dfrac{2}{3}$. **B** 4. **C** 2. **D** -2.

Lời giải.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-2}{2x^2+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(4-\frac{2}{x^2})}{x^2(2+\frac{3}{x^2})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4-\frac{2}{x^2}}{2+\frac{3}{x^2}} = 2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 3. Cho đa giác đều có 10 đỉnh. Số véc-tơ khác véc-tơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của đa giác là

A A_{10}^8. **B** A_{10}^2. **C** C_{10}^2. **D** 10^2.

Lời giải.

Số véc-tơ khác véc-tơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của đa giác có 10 đỉnh là A_{10}^2.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Thể tích của khối lăng trụ có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B là

A $V = \dfrac{1}{3}Bh$. **B** $V = \dfrac{1}{6}Bh$. **C** $V = Bh$. **D** $V = \dfrac{1}{2}Bh$.

Lời giải.

Theo lý thuyết $V = Bh$.

Chọn đáp án C □

Câu 5.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-\infty; 2)$. **B** $(-\infty; 0)$.
C $(1; 2)$. **D** $(0; +\infty)$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Lời giải.

Nhìn bảng biến thiên thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi $\mathscr{D}$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$. Diện tích hình phẳng $\mathscr{D}$ được tính theo công thức là

A $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x$.

B $S = \int\limits_b^a |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x$.

C $S = \pi \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x$.

D $S = \left|\int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\, \mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Theo lý thuyết $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 7.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Cực đại của hàm số là

A -1. **B** 3. **C** 4. **D** -2.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải.

Nhìn bảng biến thiên ta thấy cực đại của hàm số là $y_{\text{CĐ}} = 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Với a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $\ln(2108a) = 2018 \ln a$.

B $\ln a^{2018} = \dfrac{1}{2018} \ln a$.

C $\ln a^{2018} = 2018 \ln a$.

D $\ln(2018a) = \dfrac{1}{2018} \ln a$.

Lời giải.

Ta thấy mệnh đề đúng là $\ln a^{2018} = 2018 \ln a$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^3 + \sin x - 2$ là

A $x^4 + \cos x - 2x + C$.

B $\dfrac{x^4}{4} + \cos x + C$.

C $12x + \cos x + C$.

D $x^4 - \cos x - 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int \left(4x^3 + \sin x - 2\right) \mathrm{d}x = x^4 - \cos x - 2x + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 1)$. Điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (Oyz) là điểm

A $M(-3; -1; 1)$. **B** $N(0; -1; 1)$. **C** $P(0; -1; 0)$. **D** $Q(0; 0; 1)$.

Lời giải.

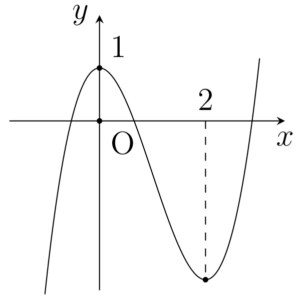
Giữ nguyên y, z và đổi dấu x nên ta suy ra điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (Oyz) là điểm $M(-3; -1; 1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A) $y = -x^4 + 2x^2 - 3$.
(B) $y = x^4 - 2x^2 + 3$.
C $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
(D) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.



Lời giải.

Nhìn hình vẽ ta thấy đồ thị là hàm bậc 3 và hệ số $a > 0$ suy ra $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{4}$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

A $\vec{u}_1 = (-3; 2; 4)$.
(B) $\vec{u}_2 = (-2; -1; 3)$.
(C) $\vec{u}_3 = (3; 2; 4)$.
(D) $\vec{u}_4 = (-2; -1; 3)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}_d = (-3; 2; 4)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3x} > \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x+6}$ là

(A) $(0; 6)$.
B $(-\infty; 6)$.
(C) $(0; 64)$.
(D) $(6; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3x} > \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x+6} \Leftrightarrow 3x < 2x + 6 \Leftrightarrow x < 6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Độ dài đường sinh của hình trụ đã cho bằng

(A) $2\sqrt{2}a$.
(B) $3a$.
(C) $2a$.
D $\dfrac{3a}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{S_{xq}} = 3\pi a^2$ và $r = a$ nên ta suy ra $2\pi rl = 3\pi a^2 \Leftrightarrow 2\pi al = 3\pi a^2 \Leftrightarrow l = \dfrac{3a}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A\,(2; -1; 2)$. Gọi M, N và P lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên Ox, Oy, Oz. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là

(A) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-1} + \dfrac{z}{2} = 0$.
(B) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-1} + \dfrac{z}{2} = -1$.
(C) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{1} + \dfrac{z}{2} = 1$.
D $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-1} + \dfrac{z}{2} = 1$.

Lời giải.

- Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $A\,(2; -1; 2)$ lên trục Ox, Oy, Oz có tọa độ lần lượt là $M\,(2; 0; 0)$,$N\,(0; -1; 0)$,$P\,(0; 0; 2)$.
- Phương trình mặt phẳng $(MNP) : \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-1} + \dfrac{z}{2} = 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?

(A) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$. (B) $y=\dfrac{x^3+3}{x^2+1}$. (C) $y=\sqrt{1-x^2}$. (D) $y=\dfrac{3x-2}{x^2+1}$.

Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{3x-2}{x^2+1}$ có bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu nên luôn có một tiệm cận ngang là $y=0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17.

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Số nghiệm của phương trình $f(x)+2=0$ là

(A) 0. (B) 3. (C) 4. (D) 2.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$		$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Lời giải.

Ta có $f(x)+2=0 \Leftrightarrow f(x)=-2$ suy ra số nghiệm của phương $f(x)=-2$ là 2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-4x^2+15$ trên đoạn $[-2;3]$ bằng

(A) 60. (B) 15. (C) 11. (D) 132.

Lời giải.

- Ta có $f'(x)=4x^3-8x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2}\in[-2;3] \\ x=-\sqrt{2}\in[-2;3] \\ x=0\in[-2;3]\end{array}\right.$.
- $f(2)=15, f(3)=60, f(\sqrt{2})=f(-\sqrt{2})=11, f(0)=15$.
- Vậy $\min\limits_{x\in[-2;3]} f(x)=11$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Tích phân $\displaystyle\int_0^2 \frac{a}{ax+3a}\,\mathrm{d}x, (a>0)$ bằng

(A) $\dfrac{16a}{225}$. (B) $a\log\dfrac{5}{3}$. (C) $\ln\dfrac{5}{3}$. (D) $\dfrac{2a}{15}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^2 \frac{a}{ax+3a}\,\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x=\ln(x+3)\Big|_0^2=\ln 5-\ln 3=\ln\frac{5}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Gọi z_1 và z_2 (z_2 có phần ảo âm) là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2-3z+3=z$. Giá trị của biểu thức $2018\,|2z_1|-2017\,|2z_2|$ bằng

(A) $3\sqrt{2}$. (B) $2\sqrt{3}$. (C) 3. (D) $\sqrt{3}$.

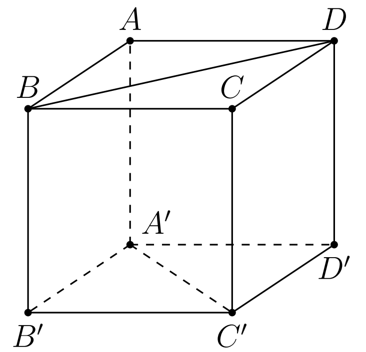
Lời giải.

- Ta có $4z^2 - 3z + 3 = z \Leftrightarrow 4z^2 - 4z + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i = z_1 \\ z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i = z_2 \end{array}\right. \Rightarrow |z_1| = |z_2| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
- Vậy $2018\,|2z_1| - 2017\,|2z_2| = 2018 \cdot 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 2017 \cdot 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 21.

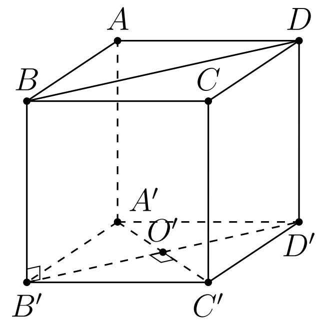
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và $A'C'$ bằng



A $\sqrt{3}a$. **B** a. **C** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **D** $\sqrt{2}a$.

Lời giải.

Ta có



$$\begin{cases} B'O' \perp A'C' \\ B'O' \perp BB' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ \mathrm{d}(BB', A'C') = B'O' = \frac{B'D'}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 22. Một người gửi 200 triệu đồng vào một ngân hàng với lại suất $0,6\%$/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau đúng 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

A 207 309 000 đồng. **B** 207 307 000 đồng. **C** 207 310 000 đồng. **D** 207 300 000 đồng.

Lời giải.

Theo công thức lãi kép $A = a\,(1 + r)^n = 200\,000\,000\,(1 + 0.6\%)^6 = 207\,308\,868$ đồng.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Một hộp chứa 11 viên bi gồm 5 viên bi màu trắng và 6 viên bi màu vàng. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp đó. Xác suất để chọn ra 2 viên bi khác màu bằng

A $\dfrac{5}{22}$. **B** $\dfrac{6}{11}$. **C** $\dfrac{5}{11}$. **D** $\dfrac{8}{11}$.

Lời giải.

- Số phần tử của biến cố $n\,(A) = \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_6^1 = 30$.
- Số phần tử của không gian mẫu $n\,(\Omega) = \mathrm{C}_{11}^2 = 55$.
- Xác suất của biến cố A: là $P\,(A) = \dfrac{30}{55} = \dfrac{6}{11}$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;1)$ và $B(2;1;0)$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) có đường kính AB tại A có phương trình là

A. $3x - y - z - 6 = 0$.
B. $3x - y - z + 6 = 0$.
C. $x + 3y + z - 5 = 0$.
D. $x + 3y + z - 6 = 0$.

Lời giải.

- Ta có mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(-1;2;1)$ và có VTPT $\vec{n}_P = \overrightarrow{AB} = (3;-1;-1)$.
- Vậy phương trình mặt phẳng (P): $3x - y - z + 6 = 0$.

Chọn đáp án B □

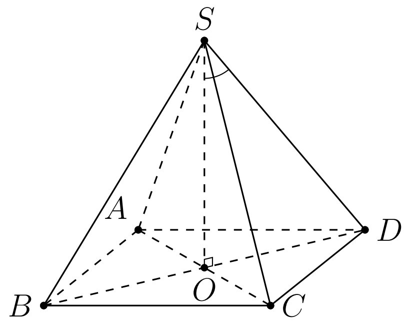
Câu 25. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Cô-sin của góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
C. $\dfrac{1}{2}$.
D. 1.

Lời giải.

- Ta có $OD \perp (SAC) \Rightarrow (SD,(SAC)) = (SD,SO)$.
- Trong tam giác SOD vuông tại O, ta có:

$$\cos\widehat{DSO} = \frac{SO}{SD} = \frac{\sqrt{SA^2 - AO^2}}{SD} = \frac{\sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Chọn đáp án A □

Câu 26. Với n là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^{n-2} = \mathrm{C}_{11}^2$, hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển của nhị thức $\left(x^3 - \dfrac{3}{x^2}\right)^n$ bằng

A. 153090.
B. 3360.
C. 61236.
D. -61236.

Lời giải.

- Ta có $\mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^{n-2} = \mathrm{C}_{11}^2 \Leftrightarrow \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 = \mathrm{C}_{11}^2 \Leftrightarrow \mathrm{C}_{n+1}^2 = \mathrm{C}_{11}^2 \Rightarrow n+1 = 11 \Rightarrow n = 10$.
- Số hạng tổng quát $\mathrm{C}_{10}^k \cdot (x^3)^{10-k} \cdot \left(-\dfrac{3}{x^2}\right)^k = \mathrm{C}_{10}^k \cdot (-3)^k \cdot x^{30-5k}$.
- Số hạng chứa $x^5 \Rightarrow 30 - 5k = 5 \Leftrightarrow k = 5$.
- Vậy hệ số của số hạng chứa x^5 là $\mathrm{C}_{10}^5 \cdot (-3)^5 = -61236$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Gọi T là tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3(\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x) = \log_3\left(\dfrac{2}{3}\right)$. Khi đó $T - 9$ bằng

A. $\dfrac{82}{9}$.
B. $\dfrac{80}{9}$.
C. 9.
D. $\dfrac{1}{9}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& \log_3\left(\log_3 x\cdot\log_9 x\cdot\log_{27} x\cdot\log_{81} x\right)=\log_3\left(\frac{2}{3}\right)\\
\Leftrightarrow\ & \log_3\left(\log_3 x\cdot\frac{1}{2}\log_3 x\cdot\frac{1}{3}\log_3 x\cdot\frac{1}{4}\log_3 x\right)=\log_3\left(\frac{2}{3}\right)\\
\Leftrightarrow\ & \log_3\left(\frac{1}{24}\cdot(\log_3 x)^4\right)=\log_3\left(\frac{2}{3}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{24}\cdot(\log_3 x)^4=\frac{2}{3}\\
\Leftrightarrow\ & (\log_3 x)^4=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x=2\\ \log_3 x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=9\\ x=\dfrac{1}{9}\end{array}\right..
\end{aligned}$$

Vậy $T-9=9+\dfrac{1}{9}-9=\dfrac{1}{9}$.

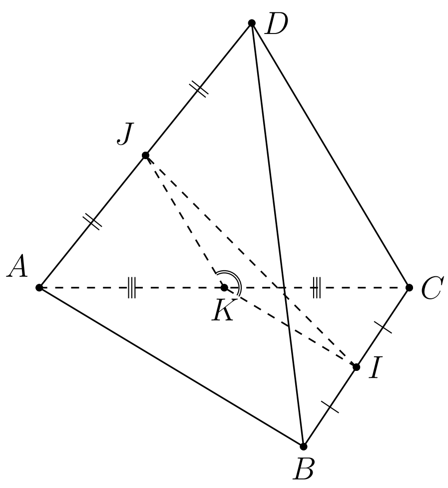
Chọn đáp án D □

Câu 28. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=a$, $IJ=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (I,J lần lượt là trung điểm của BC và AD). Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là

A. 90°. B. 30°. C. 60°. D. 45°.

Lời giải.

Gọi K là trung điểm của cạnh AC, ta suy ra $IK\parallel AB$ và $KJ\parallel CD$. Khi đó ta có:



$$\begin{aligned}
\cos(AB,CD) &= \cos(KI,KJ)=\left|\cos\widehat{IKJ}\right|\\
&=\left|\frac{KI^2+KJ^2-IJ^2}{2KI\cdot KJ}\right|\\
&=\left|\frac{\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{3a^2}{4}}{2\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{a}{2}}\right|=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Vậy $(AB,CD)=60^\circ$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 đường thẳng $d_1\colon\begin{cases}x=3+t\\ y=3+2t\\ z=-2-t\end{cases}$; $d_2\colon\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$ và $d_3\colon\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{3}$. Đường thẳng d song song với d_3, cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$. B. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$.

C. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+2}{3}$. D. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$.

Lời giải.

- Ta có (d) có VTCP $\vec{u}_d=\vec{u}_{d_3}=(1;2;3)$. Gọi $H=d\cap d_1$, $K=d\cap d_2$. Khi đó

$$H\left(3+t;3+2t;-2-t\right),K\left(5+3t';-1-2t';2-t'\right).$$
$$\overrightarrow{HK}=\left(2+3t'-t;-4-2t'-2t;4-t'+t\right).$$

- Mặt khác $\vec{u}$ cùng phương với $\overrightarrow{HK}$ nên $\dfrac{2+3t'-t}{1}=\dfrac{-4-2t'-2t}{2}=\dfrac{4-t'+t}{3}$.
- Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{2+3t'-t}{1}=\dfrac{-4-2t'-2t}{2}\\ \dfrac{2+3t'-t}{1}=\dfrac{4-t'+t}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8t'=-8\\10t'-4t=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t'=-1\\t=-2\end{cases}\Rightarrow H\left(1;-1;0\right).$$

- Vậy phương trình đường thẳng d: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-(m-1)x^4+2(m-3)x^2+5$ không có cực tiểu.

A $1\le m\le 3$. **B** $m\le 1$. **C** $m\ge 1$. **D** $1<m\le 3$.

Lời giải.

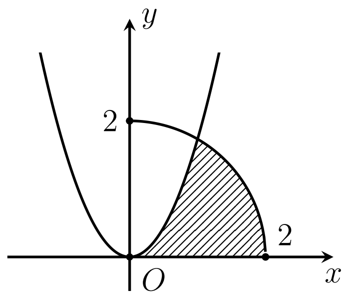
- TH 1: $a=0\Leftrightarrow m=1\Rightarrow y=-4x^2+5$ đồ thị là parabol có bề lõm hướng xuống nên chỉ có một cực đại $\Rightarrow m=1$ (nhận).
- TH 2: $a\neq 0$

  YCBT $\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ab\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\left(m-1\right)<0\\-2\left(m-1\right)\left(m-3\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\1\le m\le 3\end{cases}\Leftrightarrow 1<m\le 3.$
- Từ TH 1 và TH 2 ta suy ra $1\le m\le 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 31.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $0\le x\le 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng $S=\dfrac{a\pi-\sqrt{b}}{c}$, $(a,b,c\in\mathbb{Z})$. Tính $T=a+b+c$.



A 7. **B** 13. **C** 11. **D** 12.

Lời giải.

- Ta có $\sqrt{3}x^2=\sqrt{4-x^2}\Rightarrow 3x^4=4-x^2\Leftrightarrow 3x^4+x^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\x^2=-4\end{array}\right.\Rightarrow x=1\in[0;2]$.
- Diện tích của (H) được tính theo công thức

$$S=\int\limits_0^2\left|\sqrt{3}x^2\right|\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2\left|\sqrt{4-x^2}\right|\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\sqrt{3}x\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Tính $I_1=\displaystyle\int\limits_0^1\sqrt{3}x^2\,\mathrm{d}x=\left.\dfrac{\sqrt{3}x^3}{3}\right|_0^1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Tính

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\limits_1^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{0} \sqrt{4-(2\cos t)^2}\,\mathrm{d}(2\cos t) = -4\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{0} |\sin t|\sin t\,\mathrm{d}t \\ &= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $S=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{4\pi-\sqrt{3}}{6}\Rightarrow a=4, b=3, c=6\Rightarrow a+b+c=13.$

Chọn đáp án B □

Câu 32. Biết $I=\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{dx}{(2x+2)\sqrt{x}+2x\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}-c}{2}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P=a-b+c$.

A $P=24$. **B** $P=12$. **C** $P=18$. **D** $P=22$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)} \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2 = 2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1 = \frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2}{2} = \frac{\sqrt{32}-\sqrt{12}-2}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $a=32, b=12, c=2\Rightarrow P=a-b+c=32-12+2=22.$

Chọn đáp án D □

Câu 33. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 4. Tính thể tích $V_{(N)}$ của khối nón có một đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác BCD và chiều cao bằng chiều cao của tứ diện $ABCD$.

A $V_{(N)}=\dfrac{16\sqrt{6}\pi}{27}$. **B** $V_{(N)}=\dfrac{8\sqrt{6}\pi}{9}$. **C** $V_{(N)}=\dfrac{16\sqrt{6}\pi}{9}$. **D** $V_{(N)}=\dfrac{16\sqrt{6}\pi}{81}$.

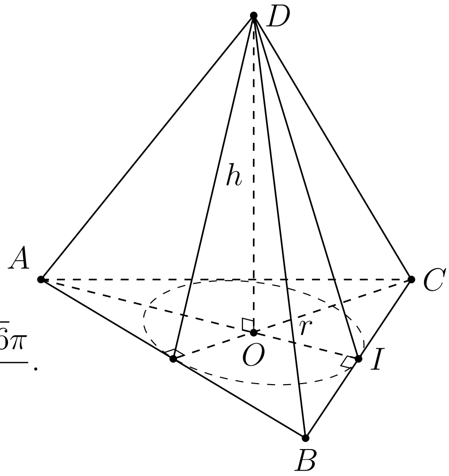
Lời giải.

- Chiều cao của hình nón

$$h=\sqrt{AD^2-AO^2}=\sqrt{4^2-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

- Bán kính khối nón $r=\frac{1}{3}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{6}$.
- Thể tích khối nón

$$V_{(N)}=\frac{1}{3}\cdot h\cdot\pi\cdot r^2=OI=\frac{1}{3}\cdot\frac{4\sqrt{6}}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{4\sqrt{3}}{6}\right)^2=\frac{16\sqrt{6}\pi}{27}.$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $9^x-2\cdot6^x+(m-3)4^x=0$ có nghiệm dương?

(A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

- Ta có $9^x-2\cdot6^x+(m-3)4^x=0\Leftrightarrow m=-\left(\frac{9}{4}\right)^x+2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x+3$.
- Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x$, vì $x>0\Rightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^x>1\Rightarrow t>1$.
- Xét hàm số $f(t)=-t^2+2t+3$ với $t\in(1;+\infty)$.Ta có $f'(t)=-2t+2=0\Leftrightarrow t=1$.

t	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

- Từ bảng biến thiên ta suy ra YCBT$\Leftrightarrow\begin{cases}m\in\mathbb{Z}^+\\m<4\end{cases}\Leftrightarrow m\in\{1;2;3\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình $\sqrt[3]{m+3\sqrt[3]{m+3\cos x}}=\cos x$ có nghiệm thực?

(A) 5. (B) 7. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

- Ta có: $\sqrt[3]{m+3\sqrt[3]{m+3\cos x}}=\cos x\Leftrightarrow m+3\sqrt[3]{m+3\cos x}=\cos^3x$.
- Đặt $\sqrt[3]{m+3\cos x}=u\Rightarrow m+3\cos x=u^3$ thì phương trình trên trở thành $m+3u=\cos^3x$.
- Đặt $\cos x=v$ thì ta được

$$\begin{cases}m+3v=u^3\\m+3u=v^3\end{cases}\Rightarrow 3(v-u)+(v-u)\left(v^2+uv+u^2\right)=0\Leftrightarrow(v-u)\left(3+v^2+uv+u^2\right)=0.$$

Do $3+v^2+uv+u^2>0, \forall u,v$ nên phương trình trên tương đương $u=v$.
Suy ra $\sqrt[3]{m+3\cos x}=\cos x \Leftrightarrow m=\cos^3 x-3\cos x$.

- Đặt $\cos x=t, (-1\le t\le 1)$ và xét hàm $f(t)=t^3-3t$ trên $[-1;1]$.
Ta có $f'(t)=3t^2-3\le 0, \forall t\in[-1;1]$.
Nên hàm số nghịch biến trên $[-1;1] \Rightarrow -1=f(1)\le f(t)\le f(-1)=2 \Rightarrow -2\le m\le 2$.
- Vậy $m\in\{-2;-1\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng -3. Tổng tất cả các phần tử của S là

A 1. B 2. **C 0.** D 6.

Lời giải.

- Nhận xét:
Tìm m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng -3
$\Leftrightarrow$ Tìm m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3.
- Xét hàm số $f(x)=x^3-3x+m$ liên tục trên đoạn $[0;2]$. Ta có $f'(x)=3x^2-3=0 \Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}x=1\ \ (n)\\ x=-1\ \ (l)\end{array}\right.$.
- Suy ra GTLN và GTNN của $f(x)$ thuộc $\{f(0), f(1), f(2)\}=\{m, m-2, m+2\}$.
- Xét hàm số $y=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ ta được giá trị lớn nhất của hàm số y là $\max\limits_{x\in[0;2]} y=\{|m|, |m-2|, |m+2|\}=3$.
  - ⊞ TH 1: $m\ge 0 \Rightarrow \max\limits_{x\in[0;2]} y=m+2=3 \Leftrightarrow m=1$.
  - ⊞ TH 2: $m<0 \Rightarrow \max\limits_{x\in[0;2]} y=2-m=3 \Leftrightarrow m=-1$.
- Vậy $m\in\{-1;1\}$ nên tổng các phần tử của S bằng 0.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Cho $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=a\sqrt{\mathrm{e}}+b$ với a,b là các số hữu tỉ. Tính $P=a\cdot b$.

A $P=-8$. B $P=8$. C $P=-4$. D $P=4$.

Lời giải.

- Ta có

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=4\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=4\int_1^{\mathrm{e}} \ln\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x}\right)=4\int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \ln x\,\mathrm{d}x=4\left(x\ln x-x\right)\Big|_1^{\sqrt{\mathrm{e}}}=-2\sqrt{\mathrm{e}}+4.$$

- Vậy $a=-2$ và $b=4 \Rightarrow P=a\cdot b=8$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+3+2i=(|z|+1)(1+i)$ và $|z|>1$. Tính $P=a-b$.

A $P=-1$. B $P=-5$. C $P=3$. D $P=7$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
& z+3+2i=(|z|+1)(1+i) \Leftrightarrow a+bi+3+2i=\left(\sqrt{a^2+b^2}+1\right)(1+i)\\
\Leftrightarrow\ & a+bi+3+2i=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b^2}\cdot i+1+i\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a+3=\sqrt{a^2+b^2}+1\\ b+2=\sqrt{a^2+b^2}+1\end{cases} \Rightarrow a-b=-1.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y=-(m^2-1)x^3-(m-1)x^2+x-7$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

- Ta có $y'=-3\left(m^2-1\right)x^2-2(m-1)x+1$.
  YCBT$\Leftrightarrow y'\geq 0, \forall x\in(-\infty;+\infty)$.
- TH 1: $a=0\Leftrightarrow m=\pm 1$.
  ⊞ Với $m=1\Rightarrow y'=1>0, \forall x\in(-\infty;+\infty)\Rightarrow m=1$ (nhận).
  ⊞ Với $m=-1\Rightarrow y'=4x+1>0, \forall x\in(-\infty;+\infty)(sai)\Rightarrow m=-1$ (loại).
- TH 2: $a\neq 0\Leftrightarrow m\neq\pm 1$.
  YCBT$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0\\ \Delta\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\left(m^2-1\right)>0\\ 16m^2-8m+-8\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<m<1\\ --\dfrac{1}{2}\leq m\leq 1\end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\leq m\leq 1.$
- Vậy $-\dfrac{1}{2}<m\leq 1\Rightarrow m=1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+2m+m^4$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.

A $m=\sqrt[3]{3}$. (B) $m=1$. (C) $m=\dfrac{\sqrt[3]{6}}{2}$. (D) $m=\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$.

Lời giải.

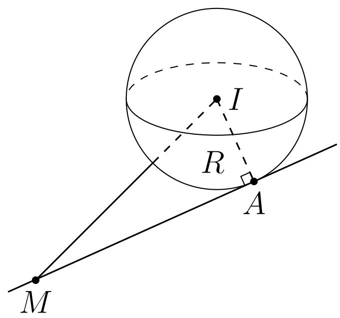
- Ta có $y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$. Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow m>0$.
- $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=-\sqrt{m}\\ x=\sqrt{m}\end{array}\right. \Rightarrow A\left(0;2m+m^4\right), B\left(-\sqrt{m};m^4-m^2+2m\right), C\left(\sqrt{m};m^4-m^2+2m\right).$
- Mặt khác: Tam giác ABC luôn cân tại A.
- Tam giác ABC đều $\Leftrightarrow AB=BC\Leftrightarrow m+m^4=4m\Leftrightarrow m^3=3\Leftrightarrow m=\sqrt[3]{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y+4z-19=0$ và điểm $M(4;-3;8)$. Qua điểm M kẻ tiếp tuyến MA với mặt cầu (S) trong đó A là tiếp điểm. Gọi I là tâm của mặt cầu (S). Tính diện tích của tam giác MAI.

(A) 125. **B** 25. (C) $\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$. (D) 50.

Lời giải.



- Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;-2)$, $R=\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2+19}=5$.
- $\overrightarrow{MI}=(-3;4;-10) \Rightarrow MI=\sqrt{(-3)^2+4^2+10^2}=5\sqrt{5}$ và $MA=\sqrt{MI^2-IA^2}=\sqrt{125-25}=10$.
- Diện tích tam giác MAI là $S_{\Delta MAI}=\dfrac{1}{2}\cdot IA\cdot MA=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 10=25$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Xét các số phức z thỏa mãn $\left|z+\sqrt{5}\right|+\left|z-\sqrt{5}\right|=2\sqrt{14}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $\left|z+\sqrt{5}\right|$. Tính $P=m+M$.

(A) $P=\sqrt{14}+\sqrt{5}$. (B) $P=2\sqrt{5}$. (C) $P=2\sqrt{14}+2\sqrt{5}$. (D) $P=2\sqrt{14}$.

Lời giải.

- Gọi $N(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z, $F_1\left(-\sqrt{5};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{5};0\right)$. Khi đó
$$\left|z+\sqrt{5}\right|+\left|z-\sqrt{5}\right|=2\sqrt{14} \Leftrightarrow MF_1+MF_2=2\sqrt{14}.$$
- M thuộc đường elip có hai tiêu điểm F_1, F_2 và độ dài trục lớn $2a=2\sqrt{14} \Rightarrow a=\sqrt{14}$.
- Ta có $\left|z+\sqrt{5}\right|=MF_1=a+\dfrac{c}{a}\cdot x_M$ với $-\sqrt{14}\le x\le\sqrt{14}$.
- Từ đó suy ra $m=\sqrt{14}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}\cdot\left(-\sqrt{14}\right)=\sqrt{14}-\sqrt{5}$ và $M=\sqrt{14}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}\cdot\sqrt{14}=\sqrt{14}+\sqrt{5}$.
- Vậy $P=m+M=\sqrt{14}-\sqrt{5}+\sqrt{14}+\sqrt{5}=2\sqrt{14}$.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Giá trị nào của m để phương trình $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$.

(A) $3\le m\le 8$. (B) $4\le m\le 8$. (C) $0\le m\le 2$. (D) $1\le m\le 16$.

Lời giải.

- Đặt $t=\sqrt{\log_3^2 x+1}$ với $x\in\left[1;3^{\sqrt{3}}\right] \Rightarrow t\in[1;2]$. Khi đó
- $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0 \Leftrightarrow t^2-1+t-2m-1=0 \Leftrightarrow t^2+t-2=2m$.
- Xét hàm số $f(t)=t^2+t-2, t\in[1;2] \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên đoạn $[1;2]$.
- Vậy YCBT $\Leftrightarrow f(1)\le 2m\le f(2) \Leftrightarrow 0\le 2m\le 4 \Leftrightarrow 0\le m\le 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+2)^2+(y-1)^2+z^2=18$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1 \\ y=2-t \\ z=-4+t \end{cases}$, biết d cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm tọa độ hai điểm A và B.

(A) $A(1;1;-3), B(1;2;0)$. (B) $A(1;1;3), B(1;-2;0)$.
(C) $A(1;1;-3), B(1;-2;0)$. (D) $A(1;-1;-3), B(1;-2;0)$.

Lời giải.

- Xét phương trình $(1+2)^2+(2-t-1)^2+(-4+t)^2=18 \Leftrightarrow 2t^2-10t+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=4. \end{array}\right.$
- Vậy $A(1;1;-3), B(1;-2;0)$.

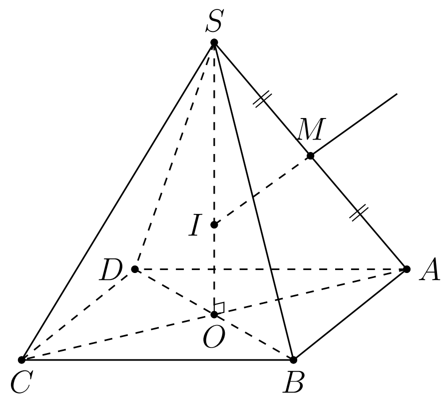
Chọn đáp án C □

Câu 45. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a$, cạnh bên bằng $5a$. Tính thể tích V của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

A) $V=\dfrac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. B) $V=\dfrac{15625\pi a^3}{384}$. C) $V=4\sqrt{3}\pi a^3$. D) $V=\dfrac{32\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

- Ta có $OD=\dfrac{BD}{2}=\dfrac{3a\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}=3a \Rightarrow SO=\sqrt{SA^2-OD^2}=\sqrt{25a^2-9a^2}=4a$.
- Trong tam giác SAO kẻ đường thẳng trung trực của cạnh SA cắt SA tại M và cắt SO tại I. Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $R=SI$.
- Trong tam giác SAO vuông tại O ta có $\cos\widehat{OSA}=\dfrac{SO}{SA}=\dfrac{SM}{SI}\Rightarrow SI=\dfrac{SM\cdot SA}{SO}=\dfrac{SA^2}{2SO}=\dfrac{25a^2}{8a}=\dfrac{25}{8}a$.
- Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{25}{8}a\right)^3=\dfrac{15625\pi a^3}{384}$.



Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho số phức z thoả mãn$|z-3+4i|=2, w=2z+1-i$. Khi đó $|w|$ có giá trị lớn nhất là

A) $16+\sqrt{74}$. B) $2+\sqrt{130}$. C) $4+\sqrt{74}$. D) $4+\sqrt{130}$.

Lời giải.

- Ta có $w=2z+1-i \Leftrightarrow w=2(z-3+4i+3-4i)+1-i \Leftrightarrow w-7+9i=2(z-3+4i)$.
- Ta suy ra $|w-7+9i|=2|z-3+4i| \Leftrightarrow |w-7+9i|=4 \Rightarrow w \in$ đường tròn $\begin{cases}\text{Tâm } I(7;-9)\\ R=4\end{cases}$.
- Vậy $|w|_{\max}=OI+R=\sqrt{7^2+9^2}+4=4+\sqrt{130}$.

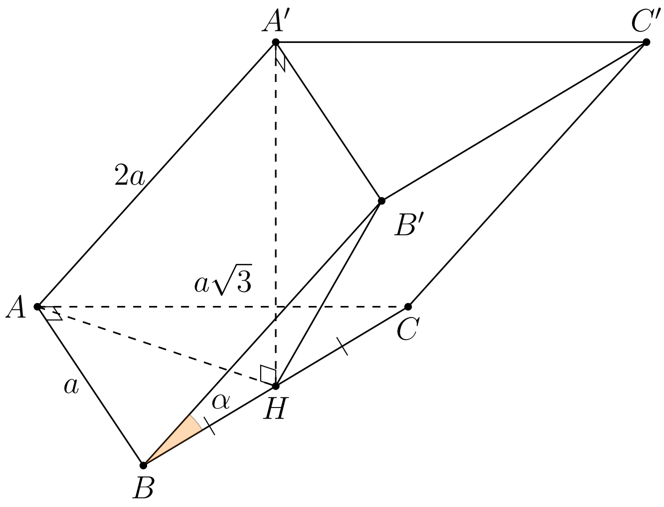
Chọn đáp án D □

Câu 47. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Gọi α là số đo góc giữa hai đường thẳng AA', $B'C'$, khẳng định nào sau đây đúng?

A) $\cos\alpha=\dfrac{1}{4}$. B) $\cos\alpha=\dfrac{3}{10}$. C) $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$. D) $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

- Gọi H là trung điểm của cạnh BC. Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a \Rightarrow AH = a \Rightarrow A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = a\sqrt{3}$ $\cos(AA', B'C') = \cos(BB', BC) = \cos\alpha$.
- Ta có $A'H \perp (ABC) \Rightarrow A'H \perp (A'B'C') \Rightarrow \Delta A'HB'$ vuông tại A'.
- Ta suy ra $B'H^2 = \sqrt{A'H^2 + A'B'^2} = 2a$.
- Trong tam giác $B'BH$ có
$$\cos\widehat{B'BH} = \frac{B'B^2 + BH^2 - B'H^2}{2B'B \cdot BH} = \frac{1}{4}.$$
- Vậy $\cos\alpha = \frac{1}{4}$.



Chọn đáp án A □

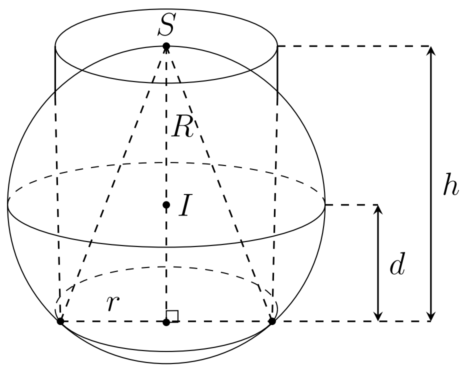
Câu 48. Cho mặt cầu tâm O, bán kính R. Xét mặt phẳng (P) thay đổi cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C). Hình nón (N) có đỉnh S nằm trên mặt cầu, có đáy là đường tròn (C) và có chiều cao là h $(h > R)$. Hình trụ (T) có đáy là đường tròn (C) và có cùng chiều cao với hình nón (N). Tính thể tích V khối trụ được tạo nên bởi (T) theo R, biết V có giá trị lớn nhất.

A $V = \frac{32}{27}\pi R^3$. **B** $V = \frac{32}{81}\pi R^3$. **C** $V = \frac{16}{27}\pi R^3$. **D** $V = \frac{64}{9}\pi R^3$.

Lời giải.

Gọi khoảng cách từ O đến mặt phẳng (P) là d với $(0 \le d \le R)$, đường tròn (C) có bán kính là r.
$V = h \cdot \pi \cdot r^2 = \pi(R + d)(R^2 - d^2) = \pi(-d^3 - Rd^2 + R^2d + R^3)$.

$$V'(d) = \pi(-3d^2 - 2Rd + R^2) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d = -1 \\ d = \frac{R}{3} \end{array}\right. \Rightarrow d = \frac{R}{3}.$$



Ta có $V(0) = \pi R^3, V(R) = 0$ và $V\left(\frac{R}{3}\right) = \frac{32}{27}\pi R^3$.

Vậy $V = \frac{32}{27}\pi R^3$

Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho đa giác đều 12 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh trong 12 đỉnh của đa giác. Xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành tam giác đều là

A $P = \frac{1}{14}$. **B** $P = \frac{1}{220}$. **C** $P = \frac{1}{4}$. **D** $P = \frac{1}{55}$.

Lời giải.

- Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_{12}^3 = 220$.

- Ta chia 12 đỉnh của đa giác đều thành ba nhóm, cứ 4 đỉnh liền nhau tạo thành một nhóm. Mỗi nhóm ta chọn ra 1 đỉnh sao cho chúng cách đều nhau suy ra có 4 tam giác đều $\Rightarrow n(A) = 4$.
- Xác suất $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{4}{220} = \dfrac{1}{55}$.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = 7$ và $\int\limits_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}$. Tích phân $\int\limits_0^1 [f(x)+2]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{17}{5}$. B. 3. C. $\dfrac{15}{4}$. D. 6.

Lời giải.

- Ta có

$$\int\limits_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow f(x)\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x^3}{3}\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\int\limits_0^1 \frac{x^3}{3}\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = -1.$$
$$\Rightarrow \int\limits_0^1 14x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = -14.$$

- Ta lại có $\int\limits_0^1 49x^6\,\mathrm{d}x = 7$.
- Suy ra

$$\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 14x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 49x^6\,\mathrm{d}x = 7 - 14 + 7 = 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 \left[f'(x) + 7x^3\right]^2\,\mathrm{d}x = 0.$$
$$\Rightarrow f'(x) = -7x^3 \Rightarrow f(x) = \frac{-7}{4}x^4 + \mathrm{C} \Rightarrow f(1) = -\frac{7}{4} + \mathrm{C} = 0 \Rightarrow \mathrm{C} = \frac{7}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{-7}{4}x^4 + \frac{7}{4}.$$

- Vậy $\int\limits_0^1 [f(x)+2]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(-\dfrac{7}{4}x^4 + \dfrac{7}{4} + 2\right)\mathrm{d}x = \dfrac{17}{5}$.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. C	3. B	4. C	5. C	6. A	7. C	8. C	9. D	10. A
11. C	12. A	13. B	14. D	15. D	16. D	17. D	18. C	19. C	20. D
21. C	22. A	23. B	24. B	25. A	26. D	27. D	28. C	29. A	30. A
31. B	32. D	33. A	34. D	35. D	36. C	37. A	38. A	39. A	40. A
41. B	42. D	43. C	44. C	45. B	46. D	47. A	48. A	49. D	50. A

65 ĐỀ THI THỬ LẦN 3 NĂM HỌC 2017 - 2018 TRƯỜNG THPT CHU VĂN AN, THÁI NGUYÊN

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Số nghiệm thực của phương trình $2\log_2(x-3) = 2 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{3-2x}$ là

A 0. **B** 3. **C** 2. **D** 1.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x-3>0 \\ 3-2x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x<\dfrac{3}{2} \end{cases}$ (vô nghiệm).

Chọn đáp án A □

Câu 2. Điều kiện cần và đủ để phương trình $m\sin x - 3\cos x = 5$ có nghiệm là $m \in (-\infty; a] \cup [b; +\infty)$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $a+b$.

A -4. **B** 0. **C** 4. **D** 8.

Lời giải.

Điều kiện cần và đủ để phương trình có nghiệm là

$$m^2 + (-3)^2 \geq 5^2 \Leftrightarrow m^2 \geq 16 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty).$$

Suy ra $a=-4$, $b=4$ nên $a+b=0$.

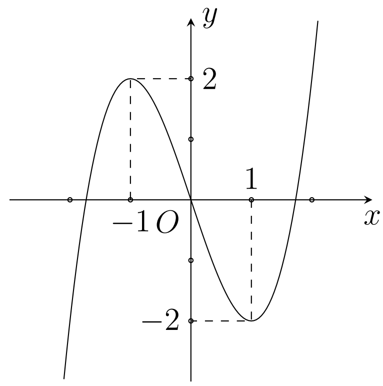
Chọn đáp án B □

Câu 3.

Đồ thị hình bên là của hàm số nào?

A $y = -x^3 - 3x$. **B** $y = x^3 + 3x$.

C $y = x^3 - 3x$. **D** $y = -x^3 + 3x$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số nhận $x=-1$ và $x=1$ là các điểm cực trị nên

$$f'(x) = a(x-1)(x+1) = a(x^2-1) \Rightarrow f(x) = \frac{ax^3}{3} - ax + C.$$

Đồ thị hàm số đi qua $O(0;0)$ và điểm $(1;-2)$ nên $\begin{cases} C=0 \\ -2 = -\dfrac{2a}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=0 \\ a=3 \end{cases} \Rightarrow y = x^3 - 3x.$

Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho các số phức $z_1 = 1+3i$, $z_2 = -2+2i$, $z_3 = -1-i$ được biểu diễn lần lượt bởi các điểm A, B, C trên mặt phẳng phức. Gọi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Khi đó điểm M biểu diễn số phức

A $z = 6i$. **B** $z = -6i$. **C** $z = 2$. **D** $z = -2$.

Lời giải.

Tọa độ $A(1;3)$, $B(-2;2)$, $C(-1;-1)$. Gọi tọa độ điểm $M(x;y)$.
$\overrightarrow{AM} = (x-1; y-3)$, $\overrightarrow{AB} = (-3;-1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2;-4)$.
Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = -3-(-2) \\ y-3 = (-1)-(-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow z = 6i$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x+1}{2-x}$ là

A $y = 2$. **B** $y = \dfrac{3}{2}$. **C** $y = -3$. **D** $y = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x+1}{2-x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{2}{x}-1} = \dfrac{3}{-1} = -3$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{1} = 1$. Véc-tơ nào sau đây là véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A $\vec{n} = (6;3;2)$. **B** $\vec{n} = (2;3;6)$. **C** $\vec{n} = (1;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3})$. **D** $\vec{n} = (3;2;1)$.

Lời giải.

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow 2x + 3y + 6z - 6 = 0.$$

Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng là $\vec{n} = (2;3;6)$.
Chọn đáp án B □

Câu 7. Hàm số nào sau đây là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. **B** $y = (x^2-1)^2 - 3x + 2$.
C $y = \dfrac{x}{x+1}$. **D** $y = \tan x$.

Lời giải.

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow y' = \frac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} > 0 (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Nên hàm số $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Chọn đáp án A □

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = k\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$. Với giá trị nào của k thì $f'(1) = \dfrac{3}{2}$?

A $k = 3$. **B** $k = -3$. **C** $k = 1$. **D** $k = \dfrac{9}{2}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \dfrac{k}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \dfrac{k}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow k = 3$.
Chọn đáp án A □

Câu 9. Tập xác định của hàm số $y = \left(3x - \sqrt{x+3}\right)^{2018}$ là

A $[-3; +\infty)$.
B $(-3; +\infty)$.
C $\mathbb{R} \setminus \left\{1; -\dfrac{3}{4}\right\}$.
D $\left(-\infty; -\dfrac{3}{4}\right] \cup [1; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = [-3; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn $\displaystyle\int_1^3 [f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x = 10$, $\displaystyle\int_1^3 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 6$. Tính $\displaystyle\int_1^3 [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A 9. **B** 8. **C** 6. **D** 7.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \displaystyle\int_1^3 [f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x = 10 \\ \displaystyle\int_1^3 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4 \\ \displaystyle\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 2 \end{cases} \Rightarrow \displaystyle\int_1^3 [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = 4 + 2 = 6.$

Chọn đáp án C □

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $f(0) = 0$ và $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{4}$. Tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A 2. **B** 1. **C** $\dfrac{\pi}{2}$. **D** $\dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}\cos x = \cos x f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}.$$

Mặt khác $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

Như vậy ta có $0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x) - \cos x]^2\,\mathrm{d}x \geq 0$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $f'(x) = \cos x \Rightarrow f(x) = \sin x + C$. Mà $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

Vậy $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Cho $\log_b a = x$ và $\log_b c = y$. Hãy biểu diễn $\log_{a^2}\left(\sqrt[3]{b^5c^4}\right)$ theo x và y.

A. $\dfrac{5+4y}{6x}$. B. $\dfrac{20y}{3x}$. C. $\dfrac{5+3y^4}{3x^2}$. D. $20x+\dfrac{20y}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{a^2}\left(\sqrt[3]{b^5c^4}\right) = \dfrac{1}{6}\log_a(b^5c^4) = \dfrac{5}{6}\log_a b + \dfrac{2}{3}\log_a c = \dfrac{5}{6\log_b a} + \dfrac{2\log_b c}{3\log_b a} = \dfrac{5+4y}{6x}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Cho cấp số nhân (u_n), $(u_1 = 3, q = -2)$. Số 192 là số hạng thứ mấy của (u_n)?

A. Số hạng thứ 15. B. Số hạng thứ 7. C. Số hạng thứ 6. D. Số hạng thứ 8.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow 192 = 3\cdot(-2)^{n-1} \Leftrightarrow (-2)^{n-1} = 64 = (-2)^6 \Rightarrow n = 7$.

Vậy 192 là số hạng thứ 7 của dãy số.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+9=0$. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. $I(-1;2;3)$, $R=\sqrt{5}$. B. $I(1;-2;3)$, $R=\sqrt{5}$.

C. $I(1;-2;3)$, $R=5$. D. $I(-1;2;-3)$, $R=5$.

Lời giải.

Mặt cầu có tâm $I(1;-2;3)$ và $R = \sqrt{a^2+b^2+c^2-d} = \sqrt{1^2+(-2)^2+3^2-9} = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Cho đường thẳng a thuộc mặt phẳng (P) và đường thẳng b thuộc mặt phẳng (Q). Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $a \parallel b \Rightarrow (P) \parallel (Q)$. B. $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel b$.

C. $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel (Q)$ và $b \parallel (P)$. D. a và b chéo nhau.

Lời giải.

$(P) \parallel (Q)$ suy ra (P) và (Q) không có điểm chung. Mặt khác $a \in (P)$ nên a và (Q) cũng không có điểm chung. Suy ra $a \parallel (Q)$. Tương tự ta cũng có $b \parallel (P)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung bằng

A. -2. B. 2. C. 1. D. -1.

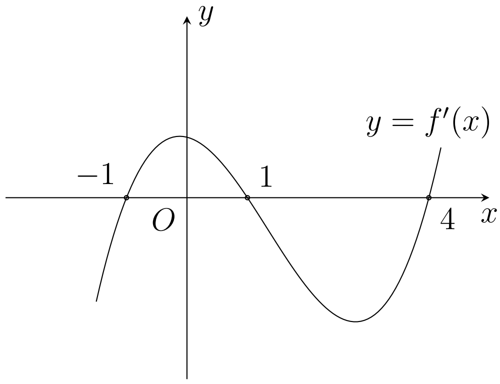
Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{2}{(x-1)^2}$. Hệ số góc của tiếp tuyến tại giao điểm với trục tung $(x=0)$ là $y'(0) = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng



(A) $(-2; +\infty)$. (B) $(-1; 1)$.

(C) $(1; 2)$. (D) $(-2; -1)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2xf'(x^2) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 4. \end{array}\right.$

Để hàm số nghịch biến thì $y' \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ f'(x^2) \le 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x \le 0 \\ f'(x^2) \ge 0. \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} x \ge 0 \\ f'(x^2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 1 \le x^2 \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le x \le 2.$

và $\begin{cases} x \le 0 \\ f'(x^2) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ 0 \le x^2 \le 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x \le 0 \\ x^2 \ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \le -2$ hoặc $-1 \le x \le 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Gọi A, B là giao điểm của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$ với đường thẳng $y = x - 2$. Độ dài AB bằng

(A) $2\sqrt{2}$. (B) 1. (C) $4\sqrt{2}$. (D) $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình

$$\frac{2x-1}{x+2} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = (x-2)(x+2) \\ x \ne 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x \ne 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Khi $x = 3 \Rightarrow y = 1$, $x = -1 \Rightarrow y = -3$.

Tọa độ $A(3; 1)$, $B(-1; -3)$, $\overrightarrow{AB} = (-4; -4) \Rightarrow AB = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3}{x - \sqrt{3}} & \text{khi } x \ne \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & \text{khi } x = \sqrt{3}. \end{cases}$ Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

(I). $f(x)$ liên tục tại $x = \sqrt{3}$.

(II). $f(x)$ gián đoạn tại $x = \sqrt{3}$.

(III). $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(A) Chỉ I và II. (B) Chỉ I và III.

(C) Cả I, II, III đều đúng. (D) Chỉ II và III.

Lời giải.

Với $x_0 \in \left(-\infty; \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$ ta có $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{3}} = \dfrac{x_0^2-3}{x_0-\sqrt{3}} = f(x_0)$. Suy ra hàm số liên tục với mọi $x_0 \in \left(-\infty; \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$ (1)

Ta có $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{3}} = \lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}{x-\sqrt{3}} = \lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \left(x+\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3} = f(\sqrt{3})$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trên $[-2018; 2018]$ để phương trình

$$(x^2-1)\log^2(x^2+1) - m\sqrt{2(x^2-1)} \cdot \log(x^2+1) + m + 4 = 0$$

có đúng hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $1 \leq |x_1| \leq |x_2| \leq 3$?

A 4024. B 4028. C 4026. D 4030.

Lời giải.

Đặt $t = x^2$. Để phương trình có đúng hai nghiệm thỏa mãn $1 \leq |x_1| \leq |x_2| \leq 3$ tương đương với phương trình có đúng một nghiệm $1 \leq t \leq 9$.

Đặt $u = \sqrt{2(x^2-1)}\log(x^2+1) = \sqrt{2(t-1)}\log(t+1) = f(t)$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2(t-1)}}\log(t+1) + \sqrt{2(t-1)}\dfrac{1}{t+1} > 0$ với $1 \leq t \leq 9$.

Vì hàm $f(t)$ là hàm đồng biến nên ứng với mỗi giá trị của t chỉ có duy nhất một giá trị của u.

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để phương trình $g(u) = \dfrac{1}{2}u^2 - mu + m + 4 = 0$ có đúng một nghiệm thỏa mãn $f(1) = 0 \leq u_1 \leq u_2 \leq f(9) = 4 \Leftrightarrow m = \dfrac{\frac{1}{2}u^2+4}{u-1} = g(u)$.

Ta có $g'(u) = \dfrac{(u-4)(u+2)}{2(u-1)^2} < 0$ với mọi $u \in (0; 4)$.

Ta có bảng biến thiên như sau

u	0	1	4
$g'(u)$	$-$	‖	$-$
$g(u)$	$-4 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 4$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để phương trình có đúng một nghiệm thì $\left[\begin{array}{l} m \leq -4 \\ m \geq 4 \end{array}\right.$. Kết hợp với m là giá trị nguyên và $m \in [-2018; 2018]$ thì có tất cả 4030 giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Trong các mệnh đề sau, hãy chọn mệnh đề **đúng**. Trong một khối đa diện thì

A hai mặt bất kì có ít nhất một cạnh chung.

B hai cạnh bất kì có ít nhất một điểm chung.

C hai mặt bất kì có ít nhất một điểm chung.

D mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

Lời giải.

Trong khối đa diện thì mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh nên nó là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Cho $a > 0, b > 0; a \neq 1, b \neq 1, n \in \mathbb{N}^*$, một học sinh tính biểu thức

$$P = \frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \ldots + \frac{1}{\log_{a^n} b}$$

theo các bước sau.

I. $P = \log_b a + log_b a^2 + \ldots + log_b a^n$.

II. $P = \log_b a \cdot a^2 \ldots a^n$.

III. $P = \log_b a^{1+2+3+\ldots+n}$.

IV. $P = n(n+1) \log_b a$.

Bạn học sinh trên đã giải **sai** ở bước nào?

(A) III. (B) II. (C) I. **D** IV.

Lời giải.

Ta có $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ nên bạn học sinh trên đã làm sai ở bước IV.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm phần ảo của số phức $w = (1+i)z - (2-i)\overline{z}$.

A -5. (B) -9. (C) $-5i$. (D) $-9i$.

Lời giải.

$$w = (1+i)z - (2-i)\overline{z} = (1+i)(2-3i) - (2-i)(2+3i) = -2 - 5i.$$

Phần ảo của số phức w là -5.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Một đa giác đều có số đường chéo gấp đôi số cạnh. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu cạnh?

(A) 6. **B** 7. (C) 5. (D) 8.

Lời giải.

Gọi số đỉnh của đa giác là n. Mà số cạnh bằng số đỉnh nên số cạnh của đa giác là n.

Cứ mỗi đỉnh nối với $(n-3)$ đỉnh còn lại tạo thành $(n-3)$ đường chéo nên số đường chéo của đa giác là $\dfrac{n(n-3)}{2}$ (do mỗi đường chéo được tính hai lần). Vì số đường chéo gấp đôi số cạnh nên

$$\frac{n(n-3)}{2} = 2n \Leftrightarrow n - 3 = 4 \Leftrightarrow n = 7.$$

Vậy đa giác có 7 cạnh.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Nguyên hàm của hàm số $y = \dfrac{1}{2-3x}$ là

(A) $\dfrac{1}{3} \ln |2-3x| + C$. (B) $-3 \ln |2-3x| + C$.

C $-\dfrac{1}{3}\ln|2-3x|+C$. **D** $\ln|2-3x|+C$.

Lời giải.

$$\int \frac{1}{2-3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{2-3x}\,\mathrm{d}(2-3x) = -\frac{1}{3}\ln|2-3x|+C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 26. Hãy tìm khẳng định **sai**.

A Phép quay là phép dời hình. **B** Phép tịnh tiến là phép dời hình.

C Phép đồng nhất là phép dời hình. **D** Phép vị tự là phép dời hình.

Lời giải.

Phép vị tự không phải là phép dời hình do phép vị tự không bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-1 \,\|\, -1$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

A Có ba điểm. **B** Có bốn điểm. **C** Có một điểm. **D** Có hai điểm.

Lời giải.

Theo định nghĩa về cực trị, nhìn trên bảng biến thiên ta thấy chỉ có $x = -1$ và $x = 1$ là thỏa mãn đồng thời cả hai điều kiện. Vậy hàm số có hai điểm cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 28. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục có $F(x)$, $G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x)$, $g(x)$. Xét các mệnh đề sau:

(I). $F(x) + G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) + g(x)$.

(II). $kF(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $kf(x)$, $(k \in \mathbb{R})$.

(III). $F(x) \cdot G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) \cdot g(x)$.

Mệnh đề nào là mệnh đề **đúng**?

A (I) và (III). **B** (I) và (II). **C** (II) và (III). **D** (III).

Lời giải.

Chỉ có mệnh đề (I) và (II) là hai mệnh đề đúng.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4; 4]$. Tính $M \cdot m$.

A -1640. **B** -984. **C** 1640. **D** 320.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

$y(-4) = -41$, $y(-1) = 40$, $y(3) = 8$, $y(4) = 15$. Vậy $M = 40$, $m = -41$ và $M \cdot m = -1640$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Trong khai triển $\left(x + \dfrac{8}{x^2}\right)^9$, $x \neq 0$. Số hạng không chứa x là

A 84. **B** 258048. **C** 43008. **D** 512.

Lời giải.

Ta có

$$\left(x + \frac{8}{x^2}\right)^9 = \sum_{k=0}^{9} \mathrm{C}_n^k \cdot x^k \cdot \left(\frac{8}{x^2}\right)^{9-k} = \sum_{k=0}^{9} \mathrm{C}_n^k \cdot x^{3k-18} \cdot 8^{9-k}.$$

Số hạng không chứa x ứng với k thỏa mãn $3k - 18 = 0 \Leftrightarrow k = 6$.

Vậy số hạng không chứa x là $\mathrm{C}_9^6 \cdot 8^3 = 43008$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 + mx^2 - 2x - 2m - \dfrac{1}{3}$ có đồ thị (C). Biết $m = \dfrac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$, $(a; b) = 1$ và $m \in \left(0; \dfrac{5}{6}\right)$ sao cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và các đường thẳng $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ có diện tích bằng 4. Tính $P = 2a^2 + b^2$.

A 18. **B** 8. **C** 6. **D** 12.

Lời giải.

Xét phương trình $\dfrac{1}{3}x^3 + mx^2 - 2x - 2m - \dfrac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{\dfrac{1}{3}x^3 - 2x - \dfrac{1}{3}}{2 - x^2}$ (do $x = \pm\sqrt{2}$ không phải là nghiệm của phương trình).

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x - \dfrac{1}{3}$.

$f'(x) = x^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$. Ta có bảng biến thiên sau

x	0		$\sqrt{2}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\dfrac{1}{3}$	$\searrow$	$-\dfrac{4\sqrt{2}+1}{3}$	$\nearrow$	$-\dfrac{5}{3}$

Dễ thấy với $x > \sqrt{2}$ thì $2 - x^2 < 0$ mà $\dfrac{1}{3}x^3 - 2x - \dfrac{1}{3} < 0$ nên $\dfrac{\dfrac{1}{3}x^3 - 2x - \dfrac{1}{3}}{2 - x^2} < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Với $x > \sqrt{2}$ thì $m = \dfrac{\frac{1}{3}x^3 - 2x - \frac{1}{3}}{2 - x^2} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}x^3 - 2x - \dfrac{1}{3}\right) \geq \dfrac{5}{6}$.

Như vậy phương trình $m = \dfrac{\frac{1}{3}x^3 - 2x - \frac{1}{3}}{2 - x^2}$ vô nghiệm với $m \in \left(0; \dfrac{5}{6}\right)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và các đường thẳng $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ là

$$\begin{aligned} V &= \int\limits_0^2 \left(-\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + 2x + 2m + \frac{1}{3}\right) \mathrm{d}x \\ &= \left(-\frac{1}{12}x^4 - \frac{mx^3}{3} + x^2 + 2mx + \frac{1}{3}x\right)\Bigg|_0^2 \\ &= \frac{10}{3} + \frac{4m}{3} = 4 \\ \Rightarrow &\quad m = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nên $a = 1$, $b = 2$ và $P = 2a^2 + b^2 = 6$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai đường tiệm cận ngang.

A $m < 0$.

B $m = 0$.

C Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

D $m > 0$.

Lời giải.

Với $m = 0 \Rightarrow y = x + 1$. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Với $m \neq 0$. Để hàm số xác định thì $mx^2 + 1 > 0$ với mọi x. Suy ra $m > 0$.

Với $m > 0$ ta có

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = -\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{m + \frac{1}{x^2}}} = -\dfrac{1}{\sqrt{m}}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{m + \frac{1}{x^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{m}}$

Vậy $m > 0$ thì đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Cho hai số phức $z_1 = 2 + i$ và $z_2 = 1 - i$. Tìm số phức $z = z_1 + 2z_2$.

A $1 + i$. B 1. C $4 - i$. D $2i$.

Lời giải.

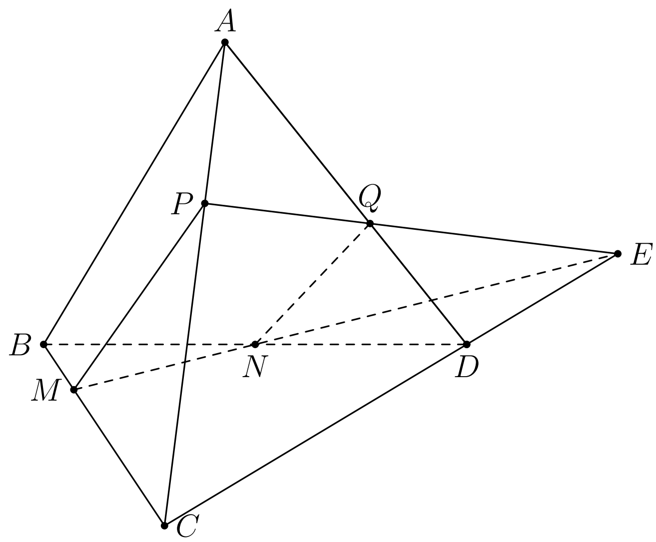
$z = z_1 + 2z_2 = 2 + i + 2(1 - i) = 4 - i$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho tứ diện $ABCD$, M, N, P lần lượt thuộc BC, BD, AC sao cho $BC = 4BM$, $BD = 2BN$, $AC = 3AP$, khi đó mặt phẳng (MNP) chia khối tứ diện $ABCD$ làm hai phần. Gọi $V_{(A)}$ là thể tích của phần chứa điểm A, $V_{(C)}$ là thể tích của phần chứa điểm C. Tính tỉ số $\dfrac{V_{(A)}}{V_{(C)}}$.

A $\dfrac{7}{13}$. **B** $\dfrac{2}{3}$. **C** $\dfrac{5}{13}$. **D** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.



Sử dụng định lý Menelaus cho tam giác BCD có

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{EC}{ED}\cdot\frac{ND}{NB} = 1 \Rightarrow \frac{EC}{ED} = 3.$$

Sử dụng định lý Menelaus cho tam giác ACD có

$$\frac{PA}{PC}\cdot\frac{EC}{ED}\cdot\frac{QD}{QA} = 1 \Rightarrow \frac{QD}{QA} = \frac{2}{3}.$$

Ta có $\dfrac{V_{C.MPE}}{V_{C.ABD}} = \dfrac{CM}{CB}\cdot\dfrac{CE}{CD}\cdot\dfrac{CP}{CA} = \dfrac{3}{4}$.

Mặt khác $\dfrac{V_{D.QNE}}{V_{D.ABC}} = \dfrac{DQ}{DA}\cdot\dfrac{DN}{DB}\cdot\dfrac{DE}{DC} = \dfrac{1}{10}$.

Ta có $V_{(C)} = V_{DCMNPQ} = V_{C.MPE} - V_{D.NQE} = V_{ABCD}\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{10}\right) = \dfrac{13}{20}V_{ABCD}$

$\Rightarrow V_{(A)} = V_{ABCD} - V_{(C)} = \dfrac{7}{20}V_{ABCD} \Rightarrow \dfrac{V_{(A)}}{V_{(C)}} = \dfrac{7}{13}$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Cho đa giác đều 12 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh trong 12 đỉnh của đa giác đó. Xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành tam giác đều là

A $\dfrac{1}{4}$. **B** $\dfrac{1}{220}$. **C** $\dfrac{1}{14}$. **D** $\dfrac{1}{55}$.

Lời giải.

Gọi không gian mẫu Ω là tập hợp các tam giác tạo thành từ 12 đỉnh: $|\Omega| = \mathrm{C}_{12}^3$.

Gọi biến cố A là số tam giác đều được tạo thành từ đa giác đều 12 đỉnh: $|A| = 4$.

Xác suất để lấy ra 3 điểm để tạo thành một tam giác đều là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{4}{\mathrm{C}_{12}^3} = \dfrac{1}{55}$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $|z_1 - 1 + 2i| = 1$, $|z_2 - 3 - i| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z_1 - z_2|$.

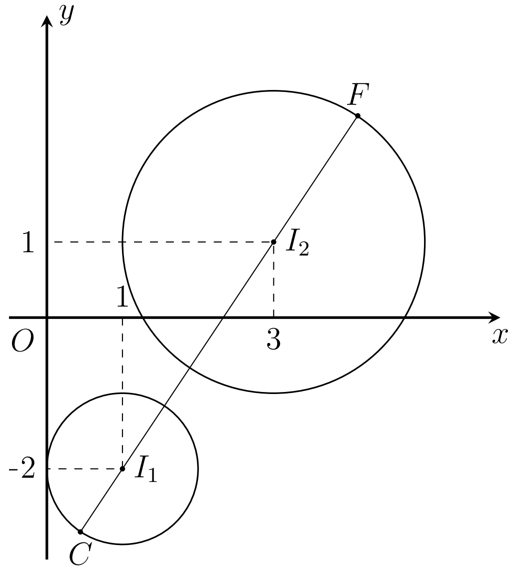
A $\sqrt{13} + 6$. **B** $\sqrt{13} + 3$. **C** $\sqrt{13} + 4$. **D** $\sqrt{13} + 2$.

Lời giải.

Giả sử $z_1 = a_1 + b_1 i$ và $z_2 = a_2 + b_2 i$ (với a_1, b_1, a_2, $b_2 \in \mathbb{R}$).

- $|z_1 - 1 + 2i| = 1 \Leftrightarrow (a_1 - 1)^2 + (b_1 + 2)^2 = 1$.
  Tập hợp điểm M_1 biểu diễn z_1 là đường tròn tâm $I_1(1; -2)$ và bán kính $R_1 = 1$.
- $|z_2 - 3 - i| = 2 \Leftrightarrow (a_2 - 3)^2 + (b_2 - 1)^2 = 4$.
  Tập hợp điểm M_2 biểu diễn z_2 là đường tròn tâm $I_2(3; 1)$ và bán kính $R_2 = 2$.

Mà $|z_1 - z_2| = M_1M_2 \leq CF = R_1 + I_1I_2 + R_2 = 1 + \sqrt{13} + 2 = 3 + \sqrt{13}$.



Chọn đáp án B □

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = t_1 \end{cases}$, $d_2\colon \begin{cases} x = t_2 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$, $d_3\colon \begin{cases} x = 1 \\ y = t_3 \\ z = 0 \end{cases}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua $M(1; 2; 3)$ và cắt ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 lần lượt tại A, B, C sao cho M là trực tâm của tam giác ABC. Tính khoảng cách $d = \mathrm{d}(O, (P))$ (O là gốc tọa độ của hệ trục $Oxyz$).

A $d = 2\sqrt{2}$. **B** $d = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **C** $d = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D** $d = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

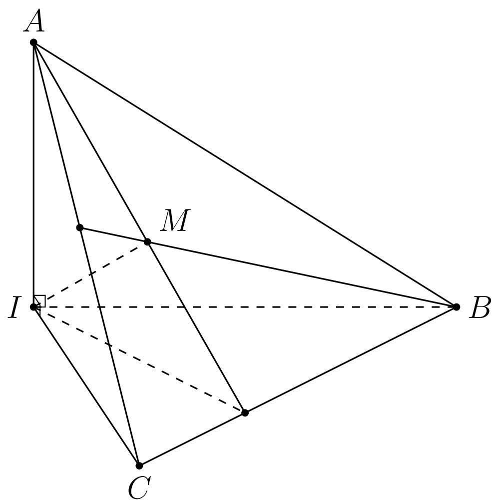
Lời giải.

Gọi véc-tơ chỉ phương của các đường thẳng d_1, d_2, d_3 là $\vec{u}_{d_1} = (0; 0; 1)$, $\vec{u}_{d_2} = (1; 0; 0)$ và $\vec{u}_{d_3} = (0; 1; 0)$.

Ta có $\vec{u}_{d_1} \cdot \vec{u}_{d_2} = 0$, $\vec{u}_{d_1} \cdot \vec{u}_{d_3} = 0$, $\vec{u}_{d_2} \cdot \vec{u}_{d_3} = 0$ và d_1, d_2 và d_3 cắt nhau tại điểm $I(1; -1; 0)$ nên IA, IB, IC đôi một vuông góc với nhau.

Từ $\begin{cases} IA \perp IB \\ IA \perp IC \end{cases} \Rightarrow IA \perp (IBC) \Rightarrow IA \perp BC$.

Từ $\begin{cases} IB \perp IA \\ IB \perp IC \end{cases} \Rightarrow IB \perp (IAC) \Rightarrow IB \perp AC$.



Mặt khác từ $\begin{cases} AM \perp BC \\ IA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (IAM) \Rightarrow BC \perp IM \quad (1)$

Mà $\begin{cases} BM \perp AC \\ IB \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp (IBM) \Rightarrow AC \perp IM \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $IM \perp (ABC)$. Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm M và nhận $\overrightarrow{IM} = (0;3;3)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

$$(ABC)\colon 3(y-2)+3(z-3)=0 \Leftrightarrow y+z-5=0.$$

Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) là $d = \dfrac{|-5|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, biết $SA \perp (ABC)$ và $AB = 2a$, $AC = 3a$, $SA = 4a$. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC).

A $d = \dfrac{12a\sqrt{61}}{61}$. **B** $d = \dfrac{2a}{\sqrt{11}}$. **C** $d = \dfrac{a\sqrt{43}}{12}$. **D** $d = \dfrac{6a\sqrt{29}}{29}$.

Lời giải.

Kẻ $AM \perp BC$ tại M. Kẻ $AH \perp SM$ tại H.

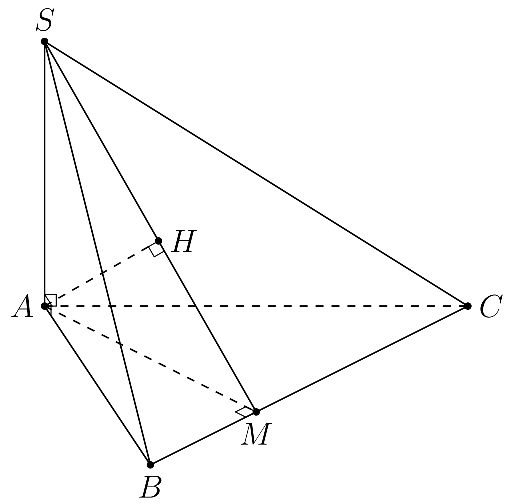
Vì $\begin{cases} SA \perp BC \\ AM \perp \end{cases}$ nên $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AH$.

Từ $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SM \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Nên AH là khoảng cách từ A đến (SBC).

Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$

$\Rightarrow AH = \dfrac{12a\sqrt{61}}{61}$.



Chọn đáp án A □

Câu 39. Người ta bỏ ba quả bóng bàn cùng kích thước vào trong một chiếc hộp hình trụ có đáy bằng hình tròn lớn của quả bóng bàn và chiều cao bằng ba lần đường kính quả bóng bàn. Gọi S_1 là tổng diện tích của ba quả bóng bàn, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ bằng

A $\dfrac{6}{5}$. **B** 1. **C** 2. **D** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Gọi R là bán kính quả bóng bàn. Suy ra bán kính đáy hình trụ bằng R và đường cao của hình trụ bằng $6R$.

Diện tích của ba quả bóng bàn là $S_1 = 3 \cdot 4\pi R^2 = 12\pi R^2$.

Diện tích xung quanh của hình trụ $S_2 = 6R \cdot 2\pi R = 12\pi R^2$.

Vậy $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{12\pi R^2}{12\pi R^2} = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều, $SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm của AB, J là trung điểm của CD. Gọi H là hình chiếu của S trên $(ABCD)$. Qua H kẻ đường thẳng song song với AB, đường thẳng này cắt AD và BC kéo dài lần lượt tại M, N. Xét các mệnh đề sau

(I). Tam giác SIJ là tam giác nhọn.

(II). $\sin \widehat{SIH} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

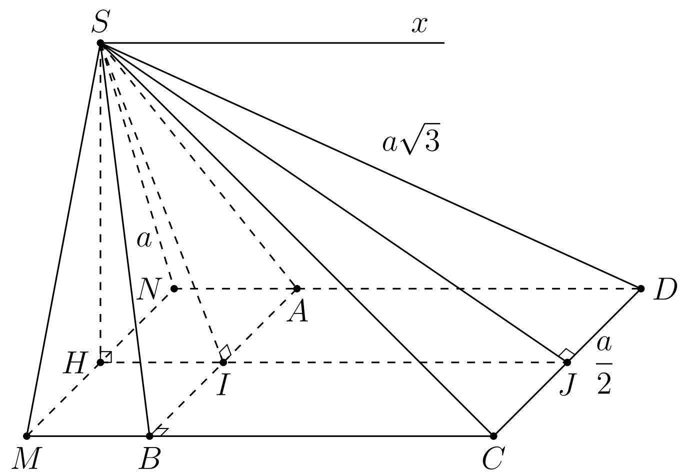
(III). $\widehat{MSN}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

(IV). $\cos \widehat{MSN} = \dfrac{1}{3}$.

Các mệnh đề **đúng** là

A (I) và (II). **B** (II) và (III). **C** (III). **D** (III) và (IV).

Lời giải.



Vì tam giác SAB và tam giác SCD cân tại S và I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $SI \perp AB$ và $SJ \perp CD \Rightarrow AB \perp SJ$.

Từ $\begin{cases} AB \perp SI \\ AB \perp SJ \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SIJ)$.

Vì $\begin{cases} AB \in (ABCD) \\ AB \perp (SIJ) \end{cases} \Rightarrow (SIJ) \perp (ABCD)$.

Kẻ $SH \perp IJ = (SIJ) \cap (ABCD)$. Suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Trong $\triangle SAB$ có $SI = SA \sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Trong $\triangle(SCD)$ có $SJ = \sqrt{SD^2 - JD^2} = \dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.

Đặt $HI = x \Rightarrow SH^2 = SI^2 - x^2 = SJ^2 - (a+x)^2 \Rightarrow x = \dfrac{a}{2}$.

- Vì đường thẳng qua H song song với AB cắt các cạnh AD, BC kéo dài nên H nằm ngoài đoạn IJ nên $\triangle SIJ$ tù. Mệnh đề (I) sai.
- $\cos \widehat{SIJ} = \dfrac{SI^2 + SJ^2 - IJ^2}{2SI \cdot SJ} = \dfrac{5\sqrt{33}}{33}$. Mệnh đề (II) sai
- Vì $AD \parallel BC$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng Sx đi qua S và song song với BC và AD.

  Ta có $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp MN$ mà $SH \perp BC$ suy ra $BC \perp (SMN) \Rightarrow Sx \perp (SMN)$ nên $\widehat{MSN}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC). Mệnh đề (III) đúng.
- Ta có $SH = \sqrt{SI^2 - HI^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SM = \sqrt{SH^2 + HM^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

  Trong tam giác MSN có $\cos \widehat{MSN} = \dfrac{SM^2 + SN^2 - AB^2}{2 \cdot SM \cdot SN} = \dfrac{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{4} - a^2}{2\dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{1}{3}$.

  Mệnh đề (IV) đúng.

Vậy các mệnh đề đúng là (III) và (IV).

Chọn đáp án D □

Câu 41. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau, gọi $d = (\alpha) \cap (\beta)$. Xét các mệnh đề sau:

(I). Nếu $a \subset (\alpha)$ và $a \perp d$ thì $a \perp (\beta)$

(II). Nếu $d' \perp (\alpha)$ thì $d' \perp d$.

(III). Nếu $b \perp d$ thì $b \subset (\alpha)$ hoặc $b \subset (\beta)$.
(IV). Nếu $d \perp (\gamma)$ thì $(\gamma) \perp (\alpha)$ và $(\gamma) \perp (\beta)$.
Số mệnh đề **sai** là

A 4. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

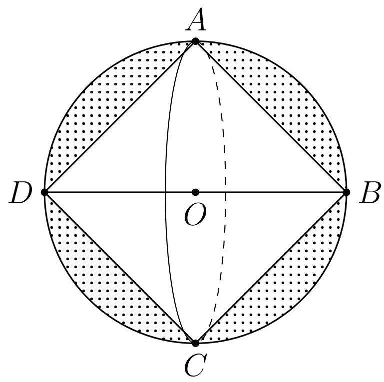
Chỉ có mệnh đề (III) sai.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Gọi (H) là hình gồm các điểm nằm trong hình tròn $(O; R)$ nhưng không nằm trong hình vuông $ABCD$. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình (H) khi quay quanh một đường chéo của hình vuông $ABCD$.

A $\frac{1}{3}\pi R^3$. **B** $\frac{2}{3}\pi R^3$. **C** $\frac{4}{3}\pi R^3$. **D** $\frac{3}{4}\pi R^3$.

Lời giải.



Thể tích của hình (H) có được bằng cách lấy thể tích của khối cầu trừ đi thể tích của hình vuông $ABCD$ khi quay quanh đường chéo.

Thể tích của hình vuông khi quay quanh đường chéo bằng hai lần thể tích của hình nón đỉnh là B và D và đáy là đường tròn đường kính AC có đường cao $h = R$ và bán kính đáy $r = R$ nên $V_1 = 2\frac{1}{3}h \cdot \pi r^2 = \frac{2}{3}\pi R^3$.

Thể tích hình cầu là $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Thể tích của hình H là $V = V_2 - V_1 = \frac{2}{3}\pi R^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x-1)\mathrm{e}^{2x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

A $\frac{\mathrm{e}^4}{4} - \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{3}{4}$. **B** $\frac{\mathrm{e}^4}{4} - \frac{\mathrm{e}^2}{2} + \frac{3}{4}$. **C** $\frac{\mathrm{e}^4}{4} + \frac{\mathrm{e}^2}{2} + \frac{3}{4}$. **D** $\frac{\mathrm{e}^4}{4} + \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{3}{4}$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x-1)e^{2x}$ và trục hoành là nghiệm của phương trình

$$(x-1)\mathrm{e}^{2x} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường là

$$\begin{aligned}S &= \int\limits_0^2 |(x-1)\mathrm{e}^{2x}|\,\mathrm{d}x\\ &= \int\limits_0^1 (1-x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 (x-1)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x}) + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (x-1)\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})\\ &= \frac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}(x-1)\mathrm{e}^{2x}\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\mathrm{e}^4}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\Big|_1^2\\ &= \frac{\mathrm{e}^4}{4} + \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;1;1)$, $B(1;0;1)$, $C(1;1;0)$. Có bao nhiêu điểm M cách đều các mặt phẳng (ABC), (OBC), (OAC), (OAB)?

A Vô số điểm M. **B** 3. **C** 5. **D** 1.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OA} = (0;1;1)$, $\overrightarrow{OB} = (1;0;1)$, $\overrightarrow{OC} = (1;1;0)$, $\overrightarrow{AB} = (1;-1;0)$, $\overrightarrow{AC} = (1;0;-1)$.

- Ta có $\left[\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right] = (1;1;-1) \Rightarrow (OAB)\colon x+y-z=0$.
- Ta có $\left[\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right] = (-1;1;1) \Rightarrow (OBC)\colon -x+y+z=0$.
- Ta có $\left[\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right] = (-1;1;-1) \Rightarrow (OAC)\colon -x+y-z=0$.
- Ta có $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right] = (1;1;1) \Rightarrow (ABC)\colon x+y+z-2=0$.

Gọi điểm $M(a;b;c)$ cách đều các mặt phẳng (OAB), (OBC), (OAC), (ABC).

Từ $\mathrm{d}(M,(OAB)) = \mathrm{d}(M,(OBC)) \Leftrightarrow \dfrac{|a+b-c|}{\sqrt{3}} = \dfrac{|-a+b+c|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a=c & (1)\\ b=c & (2)\end{array}\right.$

Từ $\mathrm{d}(M,(OAB)) = \mathrm{d}(M,(OAC)) \Leftrightarrow \dfrac{|a+b-c|}{\sqrt{3}} = \dfrac{|-a+b-c|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a=0 & (3)\\ b=c & (4)\end{array}\right.$

Từ $\mathrm{d}(M,(OAB)) = \mathrm{d}(M,(ABC)) \Leftrightarrow \dfrac{|a+b-c|}{\sqrt{3}} = \dfrac{|a+b+c|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} c=0 & (5)\\ a=-b & (6)\end{array}\right.$

Từ (1), (3), (5) suy ra $a=c=0$, b khác 0 tùy ý. Như vậy có vô số điểm cách đều bốn mặt phẳng.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;3)$, $B(-3;0;-4)$. Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm A và B?

A $\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-4}{7}$. **B** $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+4}{3}$.

C $\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+4}{7}$. **D** $\dfrac{x-3}{-4} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-4}{-7}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA} = (4; -1; 7)$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB.

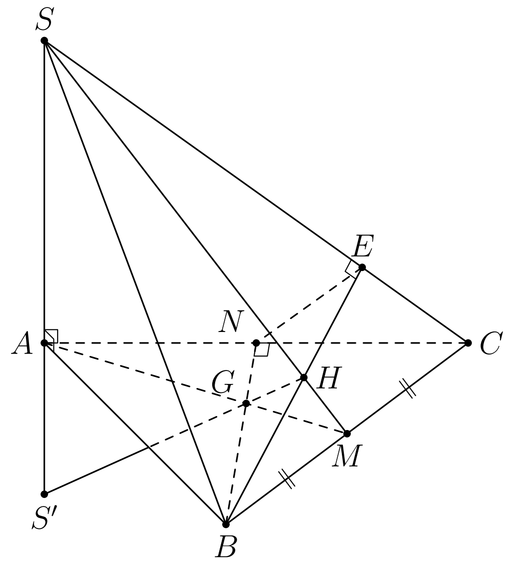
Phương trình chính tắc của đường thẳng AB là $\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+4}{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-2; 0; 0)$, $B(0; 4; 2)$, $C(2; 2; -2)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC), S là điểm di động trên đường thẳng d, G và H lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và trực tâm của tam giác SBC. Đường thẳng GH cắt đường thẳng d tại S'. Tính tích $SA.S'A$.

A $SA.S'A = \dfrac{3}{2}$. **B** $SA.S'A = \dfrac{9}{2}$. **C** $SA.S'A = 12$. **D** $SA \cdot S'A = 6$.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 4; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (4; 2; -2)$, $\overrightarrow{BC} = (2; -2; 4)$ nên $AB = BC = CA = 2\sqrt{6}$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AC.

Từ $\begin{cases} BN \perp AC \\ SA \perp BN \end{cases} \Rightarrow BN \perp (SAC) \Rightarrow BN \perp SC$.

Từ $\begin{cases} BN \perp SC \\ BE \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BNE) \Rightarrow SC \perp GH$.

Mặt khác $\begin{cases} AM \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp GH$.

Vì $\begin{cases} GH \perp SC \\ GH \perp BC \end{cases} \Rightarrow GH \perp (SBC) \Rightarrow GH \perp SM$

Dễ thấy rằng $\triangle MAS \backsim \triangle S'AG \Rightarrow \dfrac{MA}{S'A} = \dfrac{AS}{AG} \Rightarrow AS \cdot AS' = MA \cdot AG = \dfrac{2}{3}AM^2$.

Mà $AM = AB \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{2} \Rightarrow AS \cdot AS' = \dfrac{2}{3}\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 12$.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 2; 0)$, $B(2; 1; 1)$, $C(0; 3; -1)$. Xét bốn khẳng định sau

(I). $BC = 2AB$.

(II). Điểm B thuộc đoạn AC.

(III). Ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác.

(IV). Ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Trong bốn khẳng định trên các khẳng định **sai** là

A (I) và (II). **B** (II) và (III). **C** (II) và (IV). **D** (III) và (IV).

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 1; -1) = -\overrightarrow{AB}$ nên điểm A là trung điểm của BC và A, B, C thẳng hàng. Từ đó ta thấy kết luận (II) và (III) là sai.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, biết đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(2;4)$, $B(3;9)$ và $C(4;16)$. Các đường thẳng AB, AC, BC cắt đồ thị lần lượt tại các điểm D, E, F. Biết $x_D + x_E + x_F = -18$. Tính $f(0)$.

$\boxed{\text{A}}$ $-\dfrac{8}{3}$. (B) $-\dfrac{1}{3}$. (C) 0. (D) $-\dfrac{1}{8}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(2;4)$, $B(3;9)$ và $C(4;16)$ nên ta có

$$\begin{cases} 4 = 8a + 4b + 2c + d \\ 9 = 27a + 9b + 3c + d \\ 16 = 64a + 16b + 4c + d \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 8a + 4b + 2c + d \\ 19a + 5b + c = 5 \\ 56a + 12b + 2c = 12 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - 9a \\ c = 26a \\ d = -24a. \end{cases}$$

- Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;5) \Rightarrow \vec{n}_{AB} = (5;-1) \Rightarrow AB\colon y = 5x - 6$.
- Ta có $\overrightarrow{AC} = (1;6) \Rightarrow \vec{n}_{AC} = (6;-1) \Rightarrow AC\colon y = 6x - 8$.
- Ta có $\overrightarrow{BC} = (1;7) \Rightarrow \vec{n}_{BC} = (7;-1) \Rightarrow BC\colon y = 7x - 12$.

Khi đó hàm số $y = a(x^3 - 9x^2 + 26x - 24) + x^2$.

- Hoành độ giao điểm của của đồ thị hàm số với đường thẳng AB là nghiệm của

$$\begin{aligned} & a(x^3 - 9x^2 + 26x - 24) + x^2 = 5x - 6 \\ \Leftrightarrow\ & (x-2)(x-3)(ax - 4a + 1) = 0 \\ \Rightarrow\ & x_D = \frac{4a-1}{a}. \end{aligned}$$

- Hoành độ giao điểm của của đồ thị hàm số với đường thẳng AC là nghiệm của

$$\begin{aligned} & a(x^3 - 9x^2 + 26x - 24) + x^2 = 6x - 8 \\ \Leftrightarrow\ & (x-2)(x-4)(ax - 3a + 1) = 0 \\ \Rightarrow\ & x_E = \frac{3a-1}{a}. \end{aligned}$$

- Hoành độ giao điểm của của đồ thị hàm số với đường thẳng AB là nghiệm của

$$\begin{aligned} & a(x^3 - 9x^2 + 26x - 24) + x^2 = 7x - 12 \\ \Leftrightarrow\ & (x-3)(x-4)(ax - 2a + 1) = 0 \\ \Rightarrow\ & x_F = \frac{2a-1}{a}. \end{aligned}$$

Từ $x_D + x_E + x_F = -18 \Rightarrow \dfrac{4a-1}{a} + \dfrac{3a-1}{a} + \dfrac{2a-1}{a} = -18 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{9}$ nên $f(0) = d = -\dfrac{8}{3}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 49. Tổng số giữa giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ là

A. 6. B. 2. C. 4. D. -2.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $y_{\text{CĐ}} + y_{\text{CT}} = 1 + (-3) = -2$.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Một khối cầu có bán kính 5 dm, người ta cắt bỏ 2 phần bằng 2 mặt phẳng song song và vuông góc với bán kính, hai mặt phẳng đó đều cách tâm của khối cầu 3 dm để làm một chiếc lu đựng nước. Tính thể tích nước mà chiếc lu chứa được (coi độ dày của bề mặt không đáng kể).

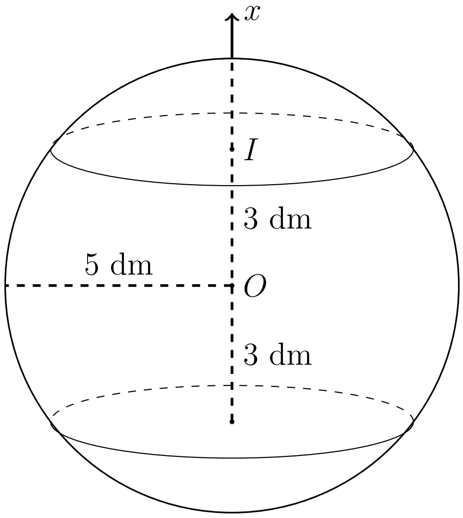
A. 132π dm^3. B. 41π dm^3. C. $\dfrac{100}{3}\pi$ dm^3. D. 43π dm^3.

Lời giải.

Đặt trục tọa độ như hình vẽ. Thể tích cái được tính bằng cách cho đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y^2 = 25 - x^2$ quay quanh trục Ox.

Thể tích cái lu bằng

$$V = \pi \int\limits_{-3}^{3} (25 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi(25x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-3}^{3} = 132\pi \text{ dm}^3.$$



Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. B	3. C	4. A	5. C	6. B	7. A	8. A	9. A	10. C
11. B	12. A	13. B	14. B	15. C	16. B	17. C	18. C	19. B	20. D
21. D	22. D	23. A	24. B	25. C	26. D	27. D	28. B	29. A	30. C
31. C	32. D	33. C	34. A	35. D	36. B	37. D	38. A	39. B	40. D
41. B	42. B	43. D	44. A	45. C	46. D	47. B	48. A	49. D	50. A

66 ĐỀ THI THỬ TRƯỜNG THPT LƯƠNG THẾ VINH - HÀ NỘI NĂM 2017 - 2018 LẦN 3.

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + \dfrac{2}{3}$. Toạ độ điểm cực đại của đồ thị hàm số là

A. $(1; 2)$. B. $(-1; 2)$. C. $\left(3; \dfrac{2}{3}\right)$. D. $(1; -2)$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 4x + 3$, $\quad y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\dfrac{2}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn đáp án A □

Câu 2. Số điểm cực trị của hàm số $f(x) = 21x^4 + 5x^2 + 2018$ là

A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 84x^3 + 10x = 2x \cdot (42x^2 + 5)$.

Phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$ và $f'(x)$ đổi dấu qua nghiệm này. Vậy hàm số có 1 cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + ax + b$ có đồ thị là (C). Biết (C) có điểm cực tiểu là $A(1; 2)$. Giá trị $2a - b$ bằng

A. -1. B. 1. C. -5. D. 5.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 2x + a$. Theo giả thiết ta có $f'(1) = 0 \Leftrightarrow a = -1$.

Ta lại có $f(1) = 2 \Leftrightarrow 2 = 1^3 - 1^2 - 1 + b \Leftrightarrow b = 3$.

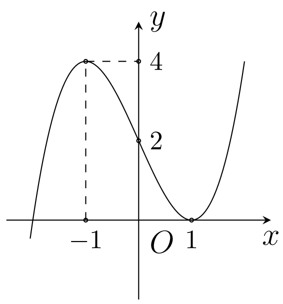
Kiểm tra lại ta có đồ thị $f(x) = x^3 - x^2 - x + 3$ có điểm cực tiểu là $(1; 2)$. Vậy $2a - b = -5$.

Chọn đáp án C □

Câu 4.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm $f(x)$ như hình vẽ. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 1}{f^2(x) - 4f(x)}$ bằng

A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.



Lời giải.

Xét $f^2(x) - 4f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = 4. \end{array}\right.$

Xét $f(x) = 0$ có hai nghiệm, nghiệm $x_1 \neq \pm 1$ và nghiệm $x_2 = 1$ là nghiệm bội (do đồ thị tiếp xúc với trục hoành tại $x = 1$. Trường hợp này có 2 tiệm cận đứng.

Xét $f(x) = 4$ có hai nghiệm, nghiệm $x_3 \neq \pm 1$ và nghiệm $x_4 = -1$ là nghiệm bội (do đồ thị tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại $x = -1$. Trường hợp này có 2 tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị có 4 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) mà có hệ số góc lớn nhất là

A $y = 3x + 1$. **B** $y = -3x + 1$. **C** $y = 3x - 1$. **D** $y = -3x - 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x = -3(x-1)^2 + 3 \leq 3$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 1$.

Với $x = 1$, ta có $y(1) = 4$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $y = 3(x-1) + 4 \Leftrightarrow y = 3x + 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 5$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A Hàm số đồng biến trên $(-1; 3)$; nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1), (3; +\infty)$.

B Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -3), (1; +\infty)$; nghịch biến trên $(-3; 1)$.

C Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1), (3; +\infty)$; nghịch biến trên $(-1; 3)$.

D Hàm số đồng biến trên $(-1; 3)$; nghịch biến trên $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 9$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-10	$\nearrow$	22	$\searrow$	$-\infty$

Chọn đáp án A □

Câu 7. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 2]$ bằng

A 25. **B** 5. **C** -5. **D** 0.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \in [-2; 2] \\ x = 3 \notin [-2; 2]. \end{array}\right.$

Ta có $y(-1) = 16$, $y(-2) = 9$, $y(2) = -11$. Vậy $\max\limits_{x \in [-2;2]} y = 16$, $\min\limits_{x \in [-2;2]} y = -11$. Vậy tổng là $16 - 11 = 5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Trong các hàm số sau hàm số nào có cực đại, cực tiểu và $x_{\text{CT}} < x_{\text{CĐ}}$?

A $y = -x^3 + 9x^2 + 3x + 2$. (B) $y = -x^3 - 3x - 2$.

(C) $y = x^3 - 9x^2 - 3x + 5$. (D) $y = x^3 + 2x^2 + 8x + 2$.

Lời giải.

- Hàm số $y = -x^3 - 3x - 2$ và $y = x^3 + 2x^2 + 8x + 2$ không có cực trị.
- Hàm số $y = x^3 - 9x^2 - 3x + 5$ có hai cực trị, vì hệ số $a > 0$ nên $x_{\text{CT}} > x_{\text{CĐ}}$.
- Hàm số $y = -x^3 + 9x^2 + 3x + 2$ có hai cực trị, vì hệ số $a < 0$ nên $x_{\text{CT}} < x_{\text{CĐ}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Cho hàm số $y = \dfrac{2\sqrt{x} + m}{\sqrt{x+1}}$. Giá trị nguyên lớn hơn 1 của tham số m sao cho $\max\limits_{x\in[0;4]} y \leq 3$ thỏa mãn

(A) $m > 8$. (B) $4 < m \leq 6$. (C) Không có m. **D** $1 < m < 5$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x+1} - (2\sqrt{x} + m) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} = \dfrac{2(x+1) - \sqrt{x} \cdot (2\sqrt{x} + m)}{2\sqrt{x+1} \cdot (x+1)} = \dfrac{2 - m \cdot \sqrt{x}}{2\sqrt{x+1} \cdot (x+1)}.$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{m^2}$. Vì $m > 1$ nên $\dfrac{4}{m^2} \in [0;4]$. Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{4}{m^2}$		4
y'		$+$	0	$-$	
y	m	$\nearrow$	$\sqrt{m^2+4}$	$\searrow$	$\dfrac{4+m}{\sqrt{5}}$

Từ giả thiết ta có $\sqrt{m^2+4} \leq 3 \Rightarrow m \leq \sqrt{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = (1 - m^3)x^3 + 3x^2 + (4 - m)x + 2$ với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2018; 2018]$ sao cho $f(x) \geq 0$ với mọi giá trị $x \in [2; 4]$?

A 2020. (B) 2019. (C) 4037. (D) 2021.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$(x+1)^3 + (x+1) \geq (mx)^3 + mx \qquad \forall x \in [2;4]$$

Vì $g(t) = t^3 + t$ là hàm đồng biến nên từ đó ta suy ra

$$x + 1 \geq mx \quad \forall x \in [2;4] \Leftrightarrow m \leq \min_{x\in[2;4]} \dfrac{x+1}{x} = \min_{x\in[2;4]} h(x)$$

Ta có $h'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0\ \forall x \in [2;4]$. Vậy $\min\limits_{x\in[2;4]} h(x) = h(4) = \dfrac{5}{4}$.

Từ đó suy ra $m \le \dfrac{5}{4}$. Mà m nguyên nên $m \in \{-2018; -2017; \cdots; 0; 1\}$.

Vậy có tất cả 2020 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Cho $a, b > 0$ và $2\log_2 b - 3\log_2 a = 2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) $b^2 - a^3 = 4$. (B) $2b - 3a = 2$. (C) $2b - 3a = 4$. **D** $b^2 = 4a^3$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\log_2\left(\dfrac{b^2}{a^3}\right) = 2 \Leftrightarrow b^2 = 4a^3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Cho $\log_3\left(\sqrt{a^2+9}+a\right) = 2$. Giá trị biểu thức $\log_3\left(2a^2+9-2a\sqrt{a^2+9}\right)$ bằng

(A) 3. **B** 0. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

Từ giả thiết có $\sqrt{a^2+9}+a = 9 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+9}-a = 1$. Ta có

$$\log_3\left(2a^2+9-2a\sqrt{a^2+9}\right) = \log_3\left(\sqrt{a^2+9}-a\right)^2 = \log_3 1 = 0.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Cho hàm số $y = \log_3(2x+1)$. Chọn khẳng định đúng.

A Khoảng đồng biến của hàm số là $\left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

(B) Khoảng đồng biến của hàm số là $(0; +\infty)$.

(C) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(D) Hàm số nghịch biến trên $\left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$. Ta có $y' = \dfrac{2}{2x+1} > 0,\quad \forall x \in \mathscr{D}$. Vậy hàm số đồng biến trên khoảng xác định.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Tập xác định của hàm số $y = (3x - x^2)^{-\frac{3}{2}}$ là

(A) $\mathbb{R}$. (B) $\mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$.

C $(0; 3)$. (D) $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $3x - x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Tìm số thực a để đường cong $y = 3^x(3^x - a + 2) + a^2 - 3a$ tiếp xúc với đường cong $y = 3^x + 1$.

(A) $a = \dfrac{5-2\sqrt{10}}{3}$. **B** $a = \dfrac{5+2\sqrt{10}}{3}$. (C) $a = \dfrac{5\pm2\sqrt{10}}{3}$. (D) $a = 1$.

Lời giải.

Để hai đường cong tiếp xúc thì hệ $\begin{cases} 3^x(3^x-a+2)+a^2-3a=3^x+1 & (1) \\ \left(3^x(3^x-a+2)+a^2-3a\right)'=(3^x+1)' & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Từ (2) ta có $3^x\ln 3(2\cdot 3^x-a+2)=3^x\ln 3 \Leftrightarrow 2\cdot 3^x-a+2=1 \Leftrightarrow 3^x=\dfrac{a-1}{2}$ chú ý khi đó $a>1$.

Thay lên (1) ta có

$$\begin{aligned} & \frac{a-1}{2}\left(\frac{a-1}{2}-a+1\right)+a^2-3a-1=0 \\ \Leftrightarrow\quad & -(a-1)^2+4a^2-12a-4=0 \\ \Leftrightarrow\quad & 3a^2-10a-5=0 \\ \Leftrightarrow\quad & \left[\begin{array}{ll} a=\dfrac{5+2\sqrt{10}}{3} & \text{(thỏa mãn)} \\ a=\dfrac{5-2\sqrt{10}}{3} & \text{(loại)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 16. Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép, kỳ hạn 1 năm với lãi suất 7% một năm. Hỏi sau bao nhiêu năm người gửi sẽ có ít nhất 200 triệu đồng từ số tiền gửi ban đầu (giả sử trong suốt quá trình gửi lãi suất không thay đổi và người gửi không rút tiền)?

A 11 năm. **B** 10 năm. **C** 12 năm. **D** 9 năm.

Lời giải.

Đặt $r=0{,}07$. Số tiền người đó nhận được sau n năm gửi với hình thức lãi kép là

$$A_n=A_0\cdot(1+r)^n.$$

với A_0 là số tiền gửi ban đầu. Từ giả thiết ta có

$$n>\log_{1+r}2\approx 10{,}24.$$

Vậy sau 11 năm người gửi có ít nhất 200 triệu đồng.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}(x-4)+1\geq 0$ là

A $(-\infty;6)$. **B** $(4;6]$. **C** $(4;+\infty)$. **D** $\left(4;\dfrac{9}{2}\right]$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương

$$0<x-4\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\Leftrightarrow 4<x\leq 6.$$

Chọn đáp án B □

Câu 18. Mệnh đề nào trong bốn mệnh đề sau **sai**?

A $\displaystyle\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln x+C$. **B** $\displaystyle\int 0\,\mathrm{d}x=C$.

C $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$. **D** $\displaystyle\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$.

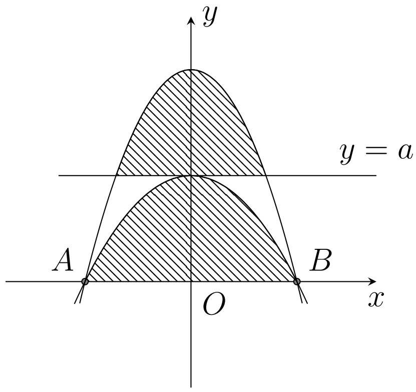
Lời giải.

Mệnh đề $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C$ sai.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19.

Cho parabol $(P_1): y = -x^2 + 4$ cắt trục hoành tại hai điểm A, B và đường thẳng $d: y = a$ $(0 < a < 4)$. Xét parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1 = S_2$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính $T = a^3 - 8a^2 + 48a$.



(A) $T = 32$. **B** $T = 64$. (C) $T = 72$. (D) $T = 99$.

Lời giải.

Đường thẳng $y = a$ cắt (P_1) tại hai điểm có hoành độ $-\sqrt{4-a}$ và $\sqrt{4-a}$. Vậy

$$S_1 = \int\limits_{-\sqrt{4-a}}^{\sqrt{4-a}} (-x^2 + 4 - a)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{4-a} \cdot (4-a).$$

Parabol (P_2) có dạng $y = m\left(x^2 - 4\right)$. Chú ý vì nó còn đi qua điểm $(0; a)$ nên $m = -\dfrac{a}{4}$. Vậy $(P_2): y = -\dfrac{a}{4}x^2 + a$. Từ đó suy ra

$$S_2 = \int\limits_{-2}^{2} \left(-\frac{a}{4}x^2 + a\right)\,\mathrm{d}x = \frac{8a}{3}.$$

Từ đó ta có

$$\frac{16(4-a)^3}{9} = \frac{64a^2}{9} \Leftrightarrow a^3 - 8a^2 + 48a = 64.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\displaystyle\int\limits_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{x^2} + x^4 - 1$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(4)$ là

(A) $f(4) = \mathrm{e}^4 + 4$. (B) $f(4) = 4\mathrm{e}^4$. (C) $f(4) = 1$. **D** $\mathrm{e}^4 + 8$.

Lời giải.

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Từ giả thiết ta có $F(x^2) - F(0) = \mathrm{e}^{x^2} + x^4 - 1$. Lấy đạo hàm hai vế ta được

$$2x \cdot f(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2} + 4x^3 \Leftrightarrow f(x) = \mathrm{e}^{x^2} + 2x.$$

Vậy $f(4) = \mathrm{e}^4 + 8$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Biết $F(x) = (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x^2 + 5x + 5)\mathrm{e}^x$. Giá trị của $2a + 3b + c$ là

(A) 10. (B) 6. (C) 8. (D) 13.

Lời giải.

Ta có $F'(x) = (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^x + (2ax + b)\mathrm{e}^x = (ax^2 + (2a + b)x + b + c)\mathrm{e}^x$.

Từ giả thiết ta có hệ

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 5 \\ b + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 2. \end{cases}$$

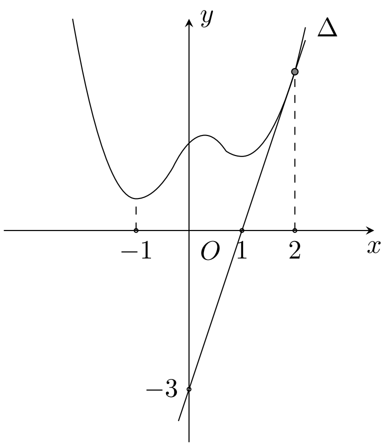
Vậy $2a + 3b + c = 13$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x = -1$, có đồ thị như hình vẽ và đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng 2. Tính $\int\limits_1^4 f''(x-2)\,\mathrm{d}x$.

(A) 3. (B) 4. (C) 1. (D) 2.



Lời giải.

Đường thẳng $\Delta\colon y = 3x - 3$. Vậy $f'(2) = 3$.

Từ giả thiết ta có

$$\int\limits_1^4 f''(x-2)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^2 f''(x)\,\mathrm{d}x = f'(2) - f'(1) = 3 - 0 = 3.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đường cong $y = x^2 - 2x$ và $y = 2x^2 - x - 2$ là

(A) $\dfrac{9}{2}$. (B) 9. (C) 5. (D) 4.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2x = 2x^2 - x - 2 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$.

Vậy $S = \int\limits_{-2}^1 \left|(x^2 - 2x) - (2x^2 - x - 2)\right|\,\mathrm{d}x = \dfrac{9}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Biết z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị biểu thức $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$ là

(A) $\dfrac{16}{5}$. (B) $\dfrac{-4}{5}$. (C) $\dfrac{3}{5}$. (D) $\dfrac{6}{5}$.

Lời giải.

Theo định lý Vi-ét ta có $z_1 + z_2 = 4, z_1 \cdot z_2 = 5$. Vậy

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 z_2} = \frac{(z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2}{z_1 z_2} = \frac{6}{5}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 25. Cho số phức $w = (2+i)^2 - 3(2-i)$. Giá trị của $|w|$ là

A $\sqrt{54}$. B $\sqrt{58}$. C $2\sqrt{10}$. D $\sqrt{43}$.

Lời giải.

Ta có $w = -3 + 7i$ nên $|w| = \sqrt{58}$.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Cho z và w là hai số phức liên hợp thỏa mãn $\frac{z}{w^2}$ là số thực và $|z - w| = 2\sqrt{3}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A $|z| < 1$. B $3 < |z| < 4$. C $|z| > 4$. D $1 < |z| < 3$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $z = \overline{w}, \overline{z} = w$ và $|z| = |w|$.

Từ $|z - w| = 2 \Leftrightarrow (z-w)(\overline{z} - \overline{w}) = 4 \Leftrightarrow |z|^2 + |w|^2 - z\overline{w} - \overline{z}w = 4 \Leftrightarrow 2|z|^2 - z^2 - \overline{z}^2 = 4 \qquad (*)$.

Do $\frac{z}{w^2}$ là số thực nên $\frac{z}{w^2} = \overline{\frac{z}{w^2}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}^2}$. Từ đó suy ra $\frac{z}{w^2} = \frac{w}{z^2}$, hay

$$z^3 = w^3 \Leftrightarrow (z - w)(z^2 - zw + w^2) = 0.$$

Vậy $z^2 + w^2 = zw = |z|^2$. Thay vào $(*)$ ta có

$$|z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2.$$

Chọn đáp án D □

Câu 27. Cho số phức z thỏa mãn $z^2 - 2z + 3 = 0$. Tính $|w|$ biết $w = z^{2018} - z^{2017} + z^{2016} + 3z^{2015} + 3z^2 - z + 9$.

A $\sqrt{3}$. B $2018\sqrt{3}$. C $9\sqrt{3}$. D $5\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $w = z^{2016}(z^2 - 2z + 3) + z^{2015}(z^2 - 2z + 3) + 3(z^2 - 2z + 3) + 5z = 5z$.

Vậy $|w| = 5|z|$.

Từ phương trình ta tìm được $z = 1 \pm i\sqrt{2}$, từ đó dễ dàng tìm được $|z| = \sqrt{3}$. Vậy $|w| = 5\sqrt{3}$.

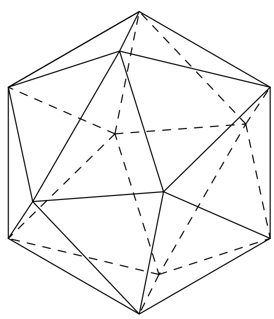
Chọn đáp án D □

Câu 28. Khối 20 mặt đều có bao nhiêu cạnh?

A 30. B 40. C 24. D 28.

Lời giải.

Khối 20 mặt đều có 30 cạnh.



Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Hình lăng trụ tứ giác có tối đa bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

(A) 8. **(B) 9.** (C) 10. (D) 6.

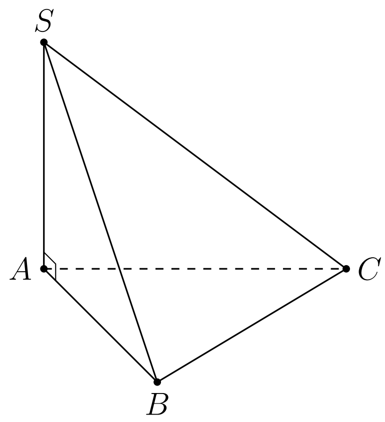
Lời giải.

Hình lăng trụ tứ giác có nhiều mặt phẳng đối xứng nhất là hình lập phương có 9 mặt phẳng đối xứng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, SA vuông góc với (ABC). Diện tích tam giác SBC bằng $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$ (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng



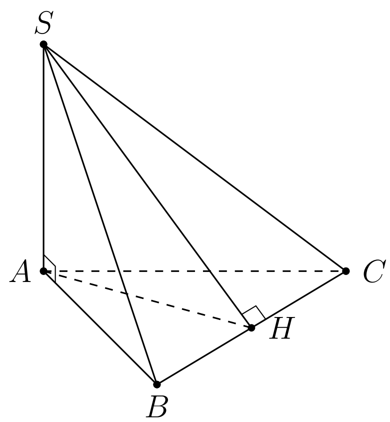
(A) $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. (B) $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **(C) $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.** (D) $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Kẻ $SH \perp BC$ (H là trung điểm của BC). Khi đó $SH = \frac{2S_{\triangle SBC}}{BC} = a\sqrt{3}$.

$SA = \sqrt{SH^2 - AH^2} = \frac{3a}{2}$.

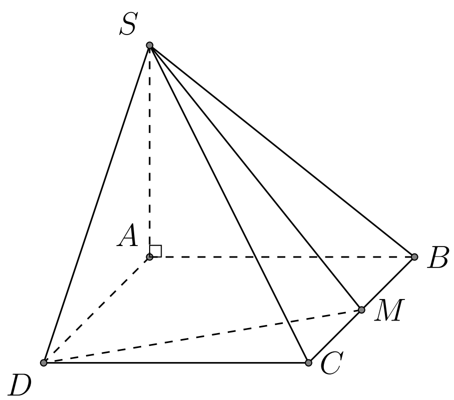
$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.



□

Câu 31.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = a$ và vuông góc $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ bên). Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SMD) và $(ABCD)$.



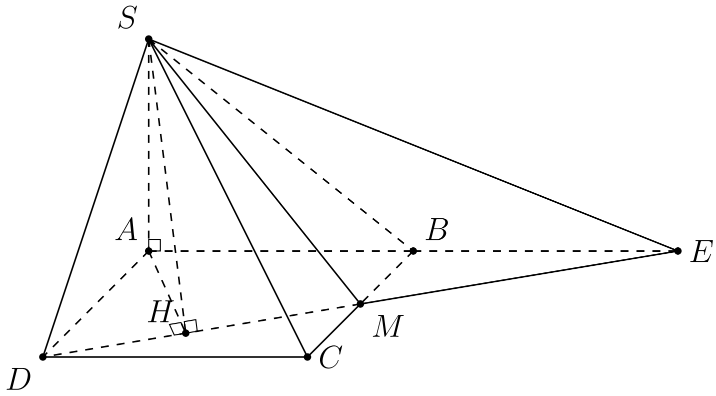
(A) $\frac{3}{\sqrt{10}}$. (B) $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **(C) $\frac{2}{3}$.** (D) $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Kéo dài DM cắt AB tại E. Kẻ $AH \perp DM$ $(H \in DM)$. Khi đó B là trung điểm của AE ,góc $\widehat{SHA}$ là góc giữa (SMD) và đáy.

Ta có $AH = \dfrac{AD \cdot AE}{\sqrt{AD^2 + AE^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

$\tan \widehat{SHA} = \dfrac{SA}{AH} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos \widehat{SHA} = \sqrt{\dfrac{1}{1 + \tan^2 \widehat{SHA}}} = \dfrac{2}{3}$.



Chọn đáp án C □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = a$. Hình cầu có bán kính nhỏ nhất chứa được hình chóp $S.ABC$ có diện tích là

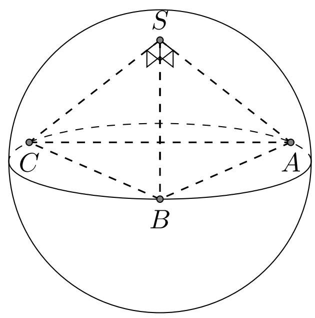
A $3\pi a^2$. **B** $\dfrac{2\pi a^2}{3}$. **C** $\dfrac{4\pi a^2}{3}$. **D** $\dfrac{8\pi a^2}{3}$.

Lời giải.

Đường tròn Lớn của mặt cầu khi đó ngoại tiếp tam giác ABC. Ta sẽ chứng minh S cũng nằm trong mặt cầu.

Tam giác ABC đều có cạnh $a\sqrt{2}$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Mà $\dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{SC^2} \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} < R$. Vậy S cũng nằm trong mặt cầu.



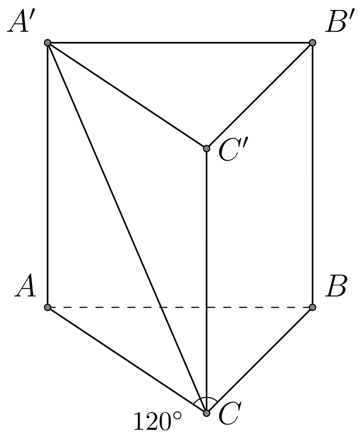
Vậy $S = 4\pi R^2 = \dfrac{8\pi a^2}{3}$.

Chọn đáp án D □

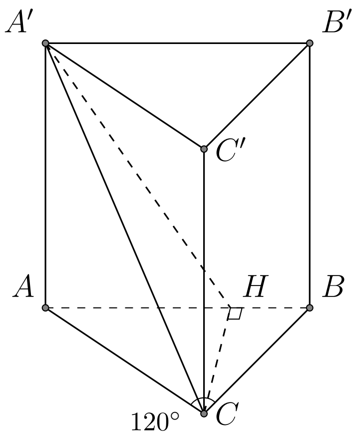
Câu 33.

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AC = a, BC = 2a, \widehat{ACB} = 120°$ và đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ một góc $30°$(tham khảo hình vẽ bên). Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A $\dfrac{a^3\sqrt{105}}{7}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{105}}{14}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{35}}{7}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{105}}{28}$.



Lời giải.



Kẻ $CH \perp AB$ $(H \in AB)$. Khi đó $\widehat{HA'C}$ là góc giữa $A'C$ với $(ABB'A')$.
Ta có $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos 120^\circ} = a\sqrt{7}$.
$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin 120^\circ = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
Từ đó có $CH = \dfrac{2S_{ABC}}{AB} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Suy ra $A'C = \dfrac{CH}{\sin 30^\circ} = \dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$.
Suy ra $A'A = \sqrt{A'C^2 - AC^2} = \dfrac{a\sqrt{35}}{7}$.
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{35}}{7} = \dfrac{a^3\sqrt{105}}{14}$.
Chọn đáp án B □

Câu 34. Diện tích ba mặt của hình hộp chữ nhật lần lượt là 15 cm^2, 24 cm^2, 40 cm^2. Thể tích của khối hộp đó là

A. 120 cm^3. B. 100 cm^3. C. 140 cm^3. D. 150 cm^3.

Lời giải.
Gọi a, b, c là ba kích thước của hình hộp và $S_1 = ab, S_2 = ac, S_3 = bc$ là diện tích ba mặt.
Thể tích khối hộp $V = a \cdot b \cdot c = \sqrt{S_1 \cdot S_2 \cdot S_3} = 120 \text{ cm}^3$.
Chọn đáp án A □

Câu 35. Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác đều cạnh có độ dài $2a$. Thể tích của khối nón là

A. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.
Từ giả thiết ta có $l = 2a, R = a \Rightarrow h = a\sqrt{3}$. Vậy $V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. □

Câu 36. Cho phương trình $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x - 3\cos x + 2} = 0$. Tính tổng tất cả các nghiệm trong đoạn $[0; 2018\pi]$ của phương trình trên

A. 1020100π. B. 1018081π. C. 1018080π. D. 1018018π.

Lời giải.
Điều kiện $\cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
Phương trình tương đương $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Vậy tổng tất cả các nghiệm trong đoạn $[0; 2018\pi]$ của phương trình trên là

$$\pi \cdot (1 + 3 + 5 + \cdots + 2017) = 1018081\pi.$$

Chọn đáp án B □

Câu 37. Từ các chữ số $1, 2, 3, 5, 6, 8, 9$ lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số phân biệt và chia hết cho 3?

A. 480. B. 720. C. 2520. D. 360.

Lời giải.

Tổng các chữ số trên bằng 34. Để 5 chữ số có tổng chia hết cho 3 ta bỏ đi hai chữ số mà có tổng chia 3 dư 1.

Có 6 bộ như vậy: $(1;3)$, $(2;5)$, $(1;6)$, $(2;8)$, $(1;9)$, $(5;8)$. Vậy có tất cả $6 \cdot 5! = 720$ số.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Tính $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^2+x+1)^{2018}+(x+2)^{2018}-2\cdot 3^{2018}}{(x-1)(x+2017)}$

A $4\cdot 3^{2017}$. B 3^{2017} . C $2\cdot 3^{2017}$. D $8\cdot 3^{2017}$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = (x^2+x+1)^{2018}+(x+2)^{2018}$. Ta có

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^2+x+1)^{2018}+(x+2)^{2018}-2\cdot 3^{2018}}{(x-1)(x+2017)} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{2018\cdot(x-1)} = \frac{f'(1)}{2018}.$$

Mà $f'(x) = 2018\cdot(x^2+x+1)^{2017}\cdot(2x+1)+2018\cdot(x+2)^{2017}$.

Nên $f'(1) = 2018\cdot 4\cdot 3^{2017}$. Vậy kết quả bằng $4\cdot 3^{2017}$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho đa giác đều 20 đỉnh. Trong các tứ giác có bốn đỉnh là đỉnh của đa giác, chọn ngẫu nhiên một tứ giác. Tính xác suất để tứ giác chọn được là hình chữ nhật.

A $\dfrac{6}{323}$. B $\dfrac{15}{323}$. C $\dfrac{3}{323}$. D $\dfrac{14}{323}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu $|\Omega| = \mathrm{C}_{20}^4$.

Chọn hai đường kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác ta có 4 đỉnh của hình chữ nhật.

Số cách chọn là C_{10}^2.

Khi đó $\mathrm{P(A)} = \dfrac{\mathrm{C}_{10}^2}{\mathrm{C}_{20}^4} = \dfrac{3}{323}$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 2018$ và $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n < \dfrac{1}{2018}$ bằng

A 4072326. B 4072324. C 4072325. D 4072327.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} = \frac{1}{u_n^2}+1.$$

Đặt $v_n = \dfrac{1}{u_n^2}$ khi đó $v_1 = \dfrac{1}{2018^2}$ và $v_{n+1} = v_n + 1$. Vậy (v_n) là một cấp số cộng.

Ta có $v_n = \dfrac{1}{2018^2}+(n-1)$. Vậy từ đó suy ra $u_n = \dfrac{2018}{\sqrt{1+(n-1)\cdot 2018^2}}$.

Theo giả thiết ta có

$$\frac{2018}{\sqrt{1+(n-1)\cdot 2018^2}} < \frac{1}{2018} \Leftrightarrow n > \frac{2018^4-1}{2018^2}+1 = 4072325 - \frac{1}{2018^2}.$$

Vậy n nhỏ nhất bằng 4072325.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Cho cấp số cộng (u_n). Gọi $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Biết rằng $\dfrac{S_p}{S_q} = \dfrac{p^2}{q^2}$ với $p \neq q$, $p, q \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{u_{2017}}{u_{2018}}$.

A $\dfrac{4034}{4035}$. **B** $\dfrac{4031}{4035}$. **C** $\dfrac{4031}{4033}$. **D** $\dfrac{4033}{4035}$.

Lời giải.

Từ giả thiết thay $p = 1, q = 2$ vào đẳng thức ta có

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{u_1}{2u_1 + d} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow d = 2u_1.$$

Vậy $\dfrac{u_{2017}}{u_{2018}} = \dfrac{u_1 + 2016d}{u_1 + 2017d} = \dfrac{\dfrac{d}{2} + 2016d}{\dfrac{d}{2} + 2017d} = \dfrac{4033}{4035}$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon x + 2y - 5 = 0$ nhận vec-tơ nào trong các vec-tơ sau làm vec-tơ pháp tuyến?

A $\vec{n}(1; 2; -5)$. **B** $\vec{n}(0; 1; 2)$. **C** $\vec{n}(1; 2; 0)$. **D** $\vec{n}(1; 2; 5)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) nhận $\vec{n}(1; 2; 0)$ làm vec-tơ pháp tuyến.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(2; 0; 0)$; $B(0; 3; 0)$; $C(0; 0; 1)$ và $M(2; 1; 2)$. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (ABC) là

A 2. **B** $\dfrac{15}{7}$. **C** $\dfrac{13}{7}$. **D** 3.

Lời giải.

Mặt phẳng $(ABC)\colon \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow 3x + 2y + 6z - 6 = 0$. Vậy

$$\mathrm{d}(M; (ABC)) = \frac{|3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 6 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}} = 2.$$

Chọn đáp án A □

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$ cho vec-tơ $\vec{u}(1; 1; 2)$ và $\vec{v}(2; 0; m)$. Tìm giá trị của tham số m biết $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \dfrac{4}{\sqrt{30}}$.

A $m = 1$. **B** $m = -11$. **C** $m = 1; m = -11$. **D** $m = 0$.

Lời giải.

Ta có

$\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \dfrac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot m}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + m^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{30}} \Leftrightarrow \sqrt{5} \cdot (2m + 2) = 4\sqrt{4 + m^2} \Leftrightarrow m = 1.$

Chọn đáp án A □

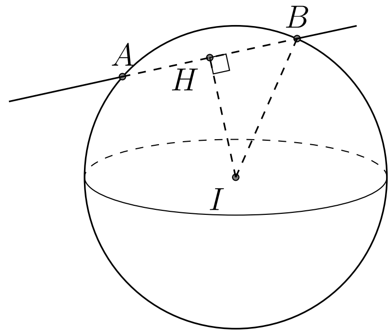
Câu 45. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{6}$ và mặt cầu $(S)\colon (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 9$. Biết đường thẳng d cắt mặt cầu (S) theo dây cung AB. Độ dài AB là

A $2\sqrt{5}$. **B** $4\sqrt{2}$. **C** $2\sqrt{3}$. **D** 4.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB. Khi đó

$$AB = 2\sqrt{IB^2 - IH^2} = 2\sqrt{R^2 - \mathrm{d}^2(I;d)}.$$



d đi qua điểm $M(3;2;0)$ và $\vec{u}_d = (2;3;6)$. Vậy

$$\mathrm{d}(I;d) = \frac{\left|[\overrightarrow{IM};\vec{u}_d]\right|}{|\vec{u}_d|}.$$

Ta có $\overrightarrow{IM} = (2;1;0) \Rightarrow [\overrightarrow{IM};\vec{u}_d] = (6;-12;4)$. Vậy $\left|[\overrightarrow{IM};\vec{u}_d]\right| = 14$.

Mà $|\vec{u}_d| = \sqrt{2^2+3^2+6^2} = 7 \Rightarrow \mathrm{d}(I;d) = 2$.

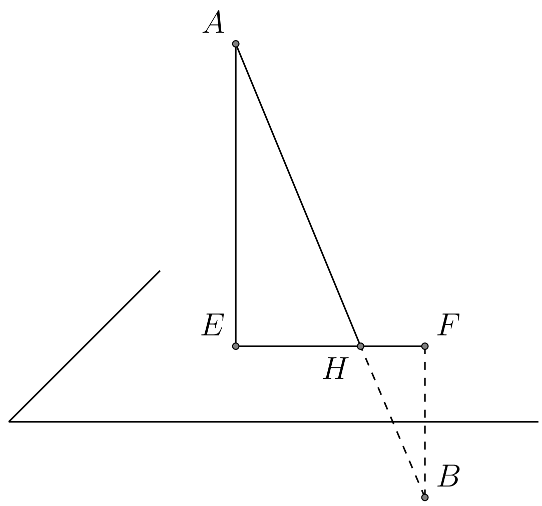
Vậy $AB = 2\sqrt{3^2-2^2} = 2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+z-3=0$ và hai điểm $A(m;1;0)$; $B(1;-m;2)$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A, B lên mặt phẳng (P). Biết $EF = \sqrt{5}$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m là

(A) 2. (B) 3. **(C) -6.** (D) -3.

Lời giải.



- Xét trường hợp $m=1$. Khi đó cả A, B đều thuộc (P). Trong trường hợp này $EF = AB = 2\sqrt{2}$ (loại).
- Khi $m \neq 1$. Ta tính toán các đại lượng

  $$\mathrm{d}(A;(P)) = \frac{|2m-2|}{\sqrt{6}} \qquad \mathrm{d}(B;(P)) = \frac{|1-m|}{\sqrt{6}}.$$

  Từ đó suy ra A, B khác phía với (P) và $\mathrm{d}(A;(P)) = 2\mathrm{d}(B;(P))$.

Gọi H là giao điểm của AB với (P).

Theo Thales ta có $EH = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$, $AH = \dfrac{2}{3}AB = \dfrac{2}{3}\sqrt{(1-m)^2+(m+1)^2+2^2}$.

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác AEH ta có

$$\begin{aligned} & AE^2 + EH^2 = AH^2 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{(2m-2)^2}{6} + \left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}\left((1-m)^2+(m+1)^2+4\right) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{3\cdot(4m^2-8m+4)}{18} + \frac{40}{18} = \frac{8\cdot(2m^2+6)}{18} \\ \Leftrightarrow\ & 4m^2+24m-4=0. \end{aligned}$$

Phương trình này có hai nghiệm và tổng hai nghiệm đó bằng $-\dfrac{24}{4} = -6$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=5$. Phép tịnh tiến vec-tơ $\vec{v}(1;2)$ biến tập hợp biểu diễn số phức z thành tập hợp biểu diễn số phức z'. Tìm $P=\max|z-z'|$.

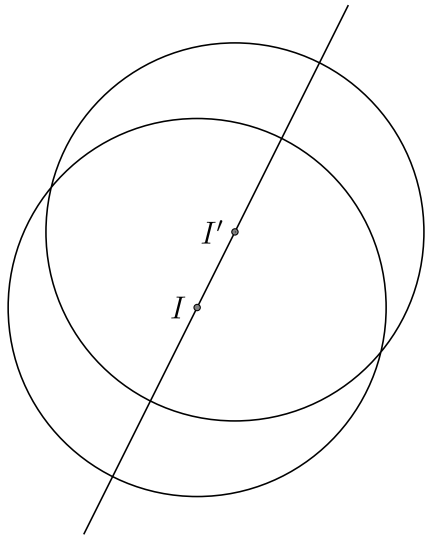
(A) $P=15$. (B) $P=20-\sqrt{5}$. (C) $P=10+\sqrt{5}$. (D) $P=12$.

Lời giải.

Xét hai đường tròn $(I;5)$ và $(I';5)$ với $I(1;-2), I'(2;0)$.

Khi đó $\max|z-z'|=AB$ với AB là các giao điểm của đường thẳng II' với $(I;5)$ và $(I';5)$ (A không nằm trong $(I';5)$ và B không nằm trong $(I;5)$).

Khi đó $AB=2R+II'=10+\sqrt{5}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-4)^2+(z+3)^2=36$. Số mặt phẳng (P) chứa trục Ox và tiếp xúc với mặt cầu (S) là

(A) 1. (B) 2. (C) Vô số. (D) 0.

Lời giải.

Gọi $I(-1;4;-3)$ là tâm mặt cầu. Ta có $\mathrm{d}(I;Ox)=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5<R=6$.

Vậy mặt cầu cắt Ox tại hai điểm phân biệt. Khi đó không có mặt phẳng (P) chứa Ox và tiếp xúc với mặt cầu.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$ cho 3 điểm $A(2;0;0)$; $B(0;3;0)$; $C(2;3;6)$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$ là

(A) 49π. (B) $\dfrac{1372\pi}{3}$. (C) $\dfrac{341\pi}{6}$. (D) $\dfrac{343\pi}{6}$.

Lời giải.

Chú ý bốn đỉnh O,A,B,C là bốn đỉnh của hình hộp chữ nhật có các kích thước $2;3;6$. Vậy $R=\dfrac{1}{2}\sqrt{2^2+3^2+6^2}=\dfrac{7}{2}$.

Từ đó suy ra $V=\dfrac{4}{3}\pi\cdot R^3=\dfrac{343\pi}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 50. Tập hợp các điểm có tọa độ $(x;y;z)$ sao cho $|x|\le 1$, $|y|\le 2$, $|z|\le 2$ là tập hợp các điểm trong của một khối đa diện (lồi). Tính thể tích của khối đa diện đó.

(A) 36. (B) 32. (C) 6. (D) 12.

Lời giải.

Khối đa diện giới hạn bởi các mặt phẳng $x = \pm 1,\ y = \pm 2,\ z = \pm 2$, là hình hộp chữ nhật có ba kích thước $2; 4; 4$. Vậy thể tích là $V = 2 \times 4 \times 4 = 32$.

Chọn đáp án B □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. A	3. C	4. D	5. A	6. A	7. B	8. A	9. D	10. A
11. D	12. B	13. A	14. C	15. B	16. A	17. B	18. A	19. B	20. D
21. D	22. A	23. A	24. D	25. B	26. D	27. D	28. A	29. B	30. C
31. C	32. D	33. B	34. A	35. A	36. B	37. B	38. A	39. C	40. C
41. D	42. C	43. A	44. A	45. A	46. C	47. C	48. D	49. D	50. B

67 ĐỀ THI THỬ LẦN 2, 2017 - 2018 TRƯỜNG THPT NGÔ QUYỀN, HẢI PHÒNG

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Tập hợp nào dưới đây chứa được tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^4 - 8x^2 - m|$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 14?

A $(-\infty; -5) \cup (-3; +\infty)$.
B $(-5; -2)$.
C $(-7; 1)$.
D $(-4; 2)$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 8x^2 - m$ trên đoạn $[0; 3]$ có $f'(x) = 4x^3 - 16x$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$.

$f(0) = -m$; $f(2) = -m - 16$; $f(3) = -m + 9$.

Khi đó $\max\limits_{x \in [0;3]} y = \left[\begin{array}{l} |-m-16| \\ |-m+9| \end{array}\right.$.

Nếu $|-m-16| \geq |-m+9| \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{7}{2} \Rightarrow \max\limits_{x \in [0;3]} y = |-m-16| = 14 \Leftrightarrow m = -2$.

Nếu $|-m-16| < |-m+9| \Leftrightarrow m < -\dfrac{7}{2} \Rightarrow \max\limits_{x \in [0;3]} y = |-m+9| = 14 \Leftrightarrow m = -5$.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn và thuộc khoảng $(-7; 1)$.

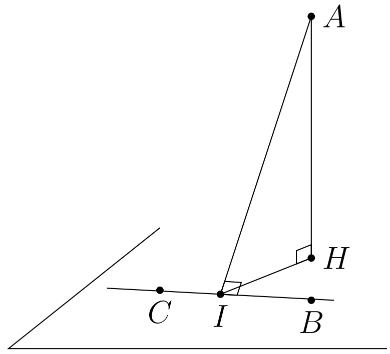
Chọn đáp án C □

Câu 2. Cho mặt phẳng $(\alpha): ax + by + cz + d = 0$, $(a^2 + b^2 + c^2 > 0)$ đi qua hai điểm $B(1; 0; 2)$, $C(5; 2; 6)$ và cách $A(2; 5; 3)$ một khoảng lớn nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T = \dfrac{a}{b + c + d}$ là

A $\dfrac{3}{4}$.
B $\dfrac{1}{6}$.
C $-\dfrac{1}{6}$.
D -2.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng $BC: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$.



Gọi I là hình chiếu của A trên BC suy ra $I(3; 1; 4)$.

Kẻ $AH \perp (P)$, ta có AH đạt giá trị lớn nhất khi H trùng I hay $AI \perp (P)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $x - 4y + z - 3 = 0$.

Vậy $T = \dfrac{a}{b + c + d} = -\dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Tính giới hạn của dãy số

$$u_n = \frac{1}{n}\left[f(1) + \sqrt{\frac{n}{3+n}} \cdot f\left(\sqrt{\frac{n+3}{n}}\right) + \sqrt{\frac{n}{6+n}} \cdot f\left(\sqrt{\frac{n+6}{n}}\right) + \cdots + \sqrt{\frac{n}{4n-3}} \cdot f\left(\sqrt{\frac{4n-3}{n}}\right)\right].$$

A $\lim u_n = 2$. **B** $\lim u_n = \frac{2}{3}$. **C** $\lim u_n = 1$. **D** $\lim u_n = \frac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có:

$$u_n = \frac{f(1)}{n} + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}} f\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}\right) + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\cdot 3}{n}}} f\left(\sqrt{1+\frac{2\cdot 3}{n}}\right) + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3(n-1)}{n}}} f\left(\sqrt{1+\frac{3(}{}\right.\right.$$

$$\Rightarrow \lim u_n = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+3x}} f\left(\sqrt{1+3x}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $t = \sqrt{1+3x} \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{3}{2\sqrt{1+3x}}\mathrm{d}x \Rightarrow \lim u_n = \frac{2}{3}\int\limits_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-x^2} = 5^{6x-10}$. Khi đó tổng x_1+x_2 bằng

A -5. **B** $\log_5 2 + 1$. **C** 7. **D** 10.

Lời giải.

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-x^2} = 5^{6x-10} \Leftrightarrow 5^{x^2-x} = 5^{6x-10}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 6x - 10 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 5 \end{array}\right. \Rightarrow x_1 + x_2 = 7.$$

Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 12 & \text{khi } x \le 3 \\ \dfrac{x^2-3x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x > 3 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^8 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I = \frac{2441}{15}$. **B** $I = \frac{1906}{15}$. **C** $I = \frac{1606}{15}$. **D** $I = \frac{2541}{15}$.

Lời giải.

Dễ dàng chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 3$.

$$I = \int\limits_0^8 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_3^8 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 12\,\mathrm{d}x + \int\limits_3^8 \frac{x^2-3x}{\sqrt{x+1}-2}\,\mathrm{d}x.$$

$$= 12x\Big|_0^3 + \int\limits_3^8 x\left(\sqrt{x+1}+2\right)\,\mathrm{d}x = 91 + \int\limits_3^8 x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Xét $J = \int\limits_3^8 x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 3 \Rightarrow t = 2; x = 8 \Rightarrow t = 3$.

Vậy $J = 2\int\limits_2^3 t^2\left(t^2-1\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1076}{15} \Rightarrow I = \frac{2441}{15}$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Hình lăng trụ nào sau đây có mặt cầu ngoại tiếp?

(A) Hình lăng trụ có đáy là đa giác nội tiếp đường tròn.

(B) Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành với hai đường chéo không bằng nhau.

(C) Hình lăng trụ có đáy là hình chữ nhật.

D Hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác.

Lời giải.

Lăng trụ đứng có đáy là đa giác nội tiếp đường tròn thì có mặt cầu ngoại tiếp.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Cho $\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$, tính $I = \int\limits_0^1 f(3x+1)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = 9$. **B** $I = 3$. (C) $I = 1$. (D) $I = 27$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_0^1 f(3x+1)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 f(3x+1)\,\mathrm{d}(3x+1) = \dfrac{1}{3}\int\limits_1^4 f(t)\,\mathrm{d}t = 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Xét khai triển $(3x+1)^{1000} = a_0 + a_1x + \cdots + a_{1000}x^{1000}$. Tìm $a = \max\{a_0, a_1, \cdots, a_{1000}\}$.

(A) $a = a_{749}$. (B) $a = a_{501}$. **C** $a = a_{750}$. (D) $a = a_{500}$.

Lời giải.

Ta có $(3x+1)^{1000} = \sum\limits_{k=0}^{k=1000} \mathrm{C}_{1000}^k 3^k x^k$.

$a_k > a_{k+1} \Leftrightarrow \mathrm{C}_{1000}^k 3^k > \mathrm{C}_{1000}^{k+1} 3^{k+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1000!}{k!(1000-k)!} > \dfrac{1000!3}{(k+1)!(999-k)!} \Leftrightarrow k+1 > 3(1000-k) \Leftrightarrow k > 749,75$.

Tương tự $a_k > a_{k-1} \Leftrightarrow \mathrm{C}_{1000}^k > \mathrm{C}_{1000}^{k-1} 3^{k-1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1000!3}{k!(1000-k)!} > \dfrac{1000!}{(k-1)!(1001-k)!} \Leftrightarrow 3(1001-k) > k \Leftrightarrow k < 750,75$.

Vậy a_k lớn nhất khi và chỉ chi $k = 750$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 9$ trên đoạn $\left[-\sqrt{3}; 2\right]$ bằng

(A) 5. **B** 9. (C) 6. (D) 8.

Lời giải.

Hàm số liên tục trên $\left[-\sqrt{3}; 2\right]$. Ta có $f'(x) = 4x^3 - 8x$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$.

$f(0) = 9, f\left(\pm\sqrt{2}\right) = 5, f\left(-\sqrt{3}\right) = 6, f(2) = 9$.

Vậy $\max\limits_{x\in\left[-\sqrt{3};2\right]} f(x) = 9$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon \dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1$. Véc-tơ nào sau đây là véc-tơ pháp tuyến của (P)?

Ⓐ $\vec{n} = (2;3;6)$. Ⓑ $\vec{n} = (6;3;2)$. Ⓒ $\vec{n} = (1;2;3)$. Ⓓ $\vec{n} = \left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};1\right)$.

Lời giải.

(P) nhận $\vec{n} = \left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}\cdot(6;3;2)$ là 1 véc-tơ pháp tuyến. Do đó nhận $(6;3;2)$ cũng là véc-tơ pháp tuyến.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 11. Với mọi số $a, b > 0$ thỏa mãn $9a^2 + b^2 = 10ab$ thì đẳng thức đúng là

Ⓐ $2\log(3a+b) = \log a + \log b$. Ⓑ $\frac{\log(3a+b)}{4} = \frac{\log a + \log b}{2}$.

Ⓒ $\log a + \log(b+1) = 1$. Ⓓ $\log\frac{3a+b}{4} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$.

Lời giải.

Ta có $9a^2 + b^2 = 10ab \Leftrightarrow 9a^2 + 6ab + b^2 = 16ab \Leftrightarrow (3a+b)^2 = 16ab$.

$\Leftrightarrow \log\frac{(3a+b)^2}{16} = \log(ab) \Leftrightarrow 2\log\frac{3a+b}{4} = \log a + \log b \Leftrightarrow \log\frac{3a+b}{4} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+2)^2(x-2)^3(3-x)$. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(2;3)$. Ⓑ $(-2;2)$. Ⓒ $(3;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;-2)$.

Lời giải.

Bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 13. Tìm hệ số của số hạng chứa x^6 trong khai triển $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$, $(x > 0)$.

Ⓐ $2^6\mathrm{C}_{12}^6$. Ⓑ $2^8\mathrm{C}_{12}^8$. Ⓒ $-2^8\mathrm{C}_{12}^8$. Ⓓ C_{12}^6.

Lời giải.

Ta có $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12} = \sum\limits_{k=0}^{k=12}\mathrm{C}_{12}^k(2x)^{12-k}\cdot\left(-x^{-\frac{1}{2}}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{k=12}\mathrm{C}_{12}^k 2^{12-k}(-1)^k\cdot x^{12-\frac{3}{2}k}$.

Số hạng tổng quát $a_k = \mathrm{C}_{12}^k\cdot 2^{12-k}\cdot(-1)^k$.

Số hạng chứa x^6 ứng với k thỏa mãn $12 - \frac{3}{2}k = 6 \Leftrightarrow k = 4$.

Hệ số cần tìm $a_4 = \mathrm{C}_{12}^4 2^8 = \mathrm{C}_{12}^8 2^8$.

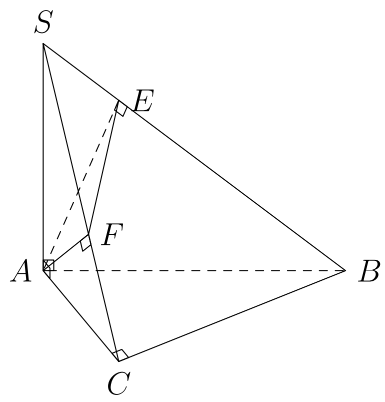
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABC)$, đáy ABC là tam giác vuông tại C. Cho $\widehat{ASC} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 45^\circ$, sin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng

Ⓐ $\frac{\sqrt{6}}{4}$. Ⓑ $\frac{\sqrt{7}}{7}$. Ⓒ $\frac{\sqrt{42}}{7}$. Ⓓ $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Dựng $AE \perp SB, AF \perp SC$. Dễ dàng chứng minh được $SB \perp (AEF)$.
Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là góc $\widehat{AEF}$.
Giả sử $SA = 1 \Rightarrow SC = 2, BC = 2, AC = \sqrt{3}$ và $AB = \sqrt{7}, SB = 2\sqrt{2}$.
Từ đó có $AF = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, AE = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$.
Tam giác AFE vuông tại F nên $\sin \widehat{FEA} = \dfrac{\sqrt{42}}{7}$.



Chọn đáp án C □

Câu 15. Một vật chuyển động thẳng có vận tốc và gia tốc tại thời điểm t lần lượt là $v(t)$ m/s và $a(t)$ m/s^2. Biết rằng 1 giây sau khi chuyển động, vận tốc của vật là 1 m/s đồng thời $a(t) + v^2(t) \cdot (2t - 1) = 0$. Tính vận tốc của vật sau 3 giây.

A $v(3) = \dfrac{1}{13}$ m/s. **B** $v(3) = \dfrac{1}{7}$ m/s. **C** $v(3) = \dfrac{1}{12}$ m/s. **D** $v(3) = \dfrac{1}{6}$ m/s.

Lời giải.

Ta có $a(t) + v^2(t)(2t - 1) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a(t)}{v^2(t)} = 1 - 2t \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{v(t)}\right)' = 2t - 1$.

$\Rightarrow \dfrac{1}{v(t)} = t^2 - t + C$.

Mà $v(1) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow v(t) = \dfrac{1}{t^2 - t + 1} \Rightarrow v(3) = \dfrac{1}{7}$ (m/s).

Chọn đáp án B □

Câu 16. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Tích các giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số bằng

A 0. **B** 6. **C** -6. **D** -3.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 6x;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $y_{CĐ} \cdot y_{CT} = -3$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $m(x + 3) = (x^2 - 2)(x^2 - 4)$ có 4 nghiệm thực phân biệt?

A 4. **B** 2. **C** 3. **D** 5.

Lời giải.

Dễ thấy $x=-3$ không phải nghiệm của phương trình đã cho.

Với $x\neq -3$ ta có $m=\dfrac{x^4-6x^2+8}{x+3}=x^3-3x^2+3x-9+\dfrac{35}{x+3}$.

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2+3x-9+\dfrac{35}{x+3}$.

Ta có: $f'(x)=3(x-1)^2-\dfrac{35}{(x+3)^2}=\dfrac{3(x^2+2x-3)^2-35}{(x+3)^2}$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x^2+2x-3=\sqrt{\frac{35}{3}}\\&x^2+2x-3=-\sqrt{\frac{35}{3}}\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x_1=-1-\sqrt{4+\sqrt{\frac{35}{3}}}\\&x_2=-1-\sqrt{4-\sqrt{\frac{35}{3}}}\\&x_3=-1+\sqrt{4-\sqrt{\frac{35}{3}}}\\&x_4=-1+\sqrt{4+\sqrt{\frac{35}{3}}}\end{aligned}\right..$$

$f(x_1)\approx -161,7; f(x_2)\approx -0,8; f(x_3)\approx 2,8; f(x_4)\approx -0,2$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_1		-3		x_2		x_3		x_4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$f(x_3)$	$\searrow$	$f(x_4)$	$\nearrow$	$+\infty$

Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $f(x_4)<m<f(x_3)$.

Do đó có 3 giá trị nguyên của $m\in\{0,1,2\}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Tìm m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3}mx^3+(2m^2-1)x^2+(m-1)x-m^3$ có các điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung.

(A) $\left[\begin{aligned}&m<0\\&m>1\end{aligned}\right.$. **(B)** $0<m<1$. (C) $m\geq 1$. (D) $m<0$.

Lời giải.

Ta có $y'=mx^2+2\left(2m^2-1\right)x+m-1$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3}mx^3+(2m^2-1)x^2+(m-1)x-m^3$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm trái dấu.

$\Leftrightarrow m(m-1)<0\Leftrightarrow 0<m<1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Cho hàm số $f(x)=\left(x^3+x^2+x+1\right)^9$. Tính $f^{(5)}(0)$.

(A) $f^{(5)}(0)=15120$. (B) $f^{(5)}(0)=\dfrac{201}{20}$. **(C)** $f^{(5)}(0)=144720$. (D) $f^{(5)}(0)=1206$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = (x^3+x^2+x+1)^9 = (x^2+1)^9 \cdot (x+1)^9 = \sum\limits_{i=0}^{i=9} \mathrm{C}_9^i x^{2i} \cdot \sum\limits_{j=0}^{j=9} \mathrm{C}_9^j x^j$.

Hệ số của x^5 trong khai triển là $\mathrm{C}_9^0\mathrm{C}_9^5 + \mathrm{C}_9^1\mathrm{C}_9^3 + \mathrm{C}_9^2\mathrm{C}_9^1 = 1206$.

Do đó, $f^{(5)}(0) = 1206 \cdot 5! = 144720$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu y' như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		3		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$. **B** Hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.

C Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$. **D** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 4)$.

Lời giải.

y' không xác định tại $x = 3 \in (1;4)$ nên khẳng định: Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;4)$ là khẳng định sai.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m \cdot 4^{x^2-2x-1} - (1-2m) \cdot 10^{x^2-2x-1} + m \cdot 25^{x^2-2x-1} \leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

A $m < 0$. **B** $m \geq \frac{100}{841}$. **C** $m \leq \frac{1}{4}$. **D** $m \leq \frac{100}{841}$.

Lời giải.

$m \cdot 4^{x^2-2x-1} - (1-2m) \cdot 10^{x^2-2x-1} + m \cdot 25^{x^2-2x-1} \leq 0$

$\Leftrightarrow m - (1-2m) \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{x^2-2x-1} + m \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2(x^2-2x-1)} \leq 0 \qquad (1).$

Đặt $t = \left(\frac{5}{2}\right)^{x^2-2x-1}, t > 0$.

Xét $u(x) = x^2 - 2x - 1, \forall x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

$u'(x) = 2x - 2; u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$u\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{4}; u(1) = -2; u(2) = -1 \Rightarrow \min\limits_{x \in \left[\frac{1}{2};2\right]} u(x) = -2; \max\limits_{x \in \left[\frac{1}{2};2\right]} u(x) = -1.$

$\Rightarrow \frac{4}{25} \leq t \leq \frac{2}{5}$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow m - (1-2m)t + mt^2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{t}{t^2+2t+1}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t}{t^2+2t+1},\ t \in \left[\frac{4}{25}; \frac{2}{5}\right]$.

$f'(t) = \frac{-t^2+1}{(t^2+2t+1)^2} > 0,\ \forall t \in \left[\frac{4}{25}; \frac{2}{5}\right]$.

$\Rightarrow \min\limits_{x \in \left[\frac{4}{25};\frac{2}{5}\right]} f(t) = f\left(\frac{4}{25}\right) = \frac{100}{841}$.

Vậy $m \leq \frac{100}{841}$ thì bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Cho hàm số $y = -\dfrac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 5)$.
(B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 5)$.
(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(5; +\infty)$.

Lời giải.

$y' = -x^2 + 6x - 5$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{4}{3}$	$\nearrow$	$\dfrac{28}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 5)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(5; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(-\log_2 x) < 0$ là

(A) $(0; 5)$.
(B) $(1; 2)$.
(C) $\left(\dfrac{1}{4}; 4\right)$.
(D) $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ -\log_2 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

$\log_{\frac{1}{3}}(-\log_2 x) < 0 \Leftrightarrow -\log_2 x > 1 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$.

Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Số giờ ánh sáng mặt trời của thành phố A trong ngày thứ t của 1 năm được cho bởi hàm số $d(t) = 3\sin\left[\dfrac{\pi}{182}(t - 80)\right] + 12$, $t \in \mathbb{Z}, 0 < t \leq 365$. Gọi T là ngày trong năm mà thành phố A có 9 giờ ánh sáng mặt trời trong một ngày. Hỏi T thuộc những tháng nào trong năm?

(A) Tháng 1 và tháng 11.
(B) Tháng 2.
(C) Tháng 12.
(D) Tháng 12 và tháng 1.

Lời giải.

Thành phố A có 9 giờ ánh sáng mặt trời trong một ngày ứng với t thỏa mãn phương trình:

$3\sin\left[\dfrac{\pi}{182}(t - 80)\right] + 12 = 9 \Leftrightarrow \sin\left[\dfrac{\pi}{182}(t - 80)\right] = -1 \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{182}(t - 80) = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

$\Leftrightarrow t = -11 + k \cdot 364$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Vì $0 < t \leq 365 \Rightarrow t = 353$.

Ngày thành phố A có 9 giờ ánh sáng mặt trời trong một ngày là ngày thứ 353 thuộc tháng 12.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Trong các hàm số sau, đồ thị hàm số nào có đường tiệm cận đứng $x = 3$?

A $y = \dfrac{x+3}{x-3}$. B $y = \dfrac{-x+3}{x+3}$. C $y = \dfrac{x-3}{x^2-9}$. D $y = \dfrac{3x+1}{x+3}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-3}$.

$\lim\limits_{x\to 3^{\pm}} y = \pm\infty \Rightarrow x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Biết $\int f(2x)\,\mathrm{d}x = \sin^2 x + \ln x + C$, tìm nguyên hàm $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin^2 \dfrac{x}{2} + \ln x + C$.

B $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2} + 2\ln x + C$.

C $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sin^2 x + 2\ln x - \ln 2 + C$.

D $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sin^2 2x + 2\ln x - \ln 2 + C$.

Lời giải.

Gọi $F(x)$ là 1 nguyên hàm của $f(x)$.

Khi đó $\int f(2x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{F(2x)}{2} + C = \sin^2 x + \ln x + C$.

$\Rightarrow F(2x) = 2\sin^2 x + 2\ln x + C = 2\sin^2\left(2\cdot\dfrac{x}{2}\right) + 2\ln\left(2\cdot\dfrac{x}{2}\right) + C$.

$\Rightarrow F(x) = 2\sin^2\dfrac{x}{2} + 2\ln\dfrac{x}{2} + C = 2\sin^2\dfrac{x}{2} + 2\ln x + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(x-2)$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là

A 1. B 6. C 5. D 3.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có được bằng cách giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ bên phải trục tung và đối xứng phần đồ thị đó qua trục tung.

Xét trên $(0; +\infty)$ ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$f(0)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dễ thấy hàm số đạt cực trị tại điểm $x = 0$.

Vậy hàm số có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho hàm số $y = \dfrac{2}{1-x}$ có đồ thị $(\mathscr{C})$. Viết phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại giao điểm của $(\mathscr{C})$ với trục tung.

A $y = 2x + 2$. B $y = x + 2$. C $y = -2x + 2$. D $y = 2x - 2$.

Lời giải.

Tọa độ tiếp điểm $M(0;2)$.

$y' = \dfrac{2}{(1-x)^2} \Rightarrow y'(0) = 2$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm: $y = 2x + 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Biết $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, tính $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} f\left(\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x$.

A $I = 4$. **B** $I = 2$. **C** $I = 1$. **D** $I = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow , \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$.

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 1, x = 4 \Rightarrow t = 2$.

Khi đó $I = 2\displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Tìm công thức nghiệm của phương trình $2\cos(x+\alpha) = 1$, (với $\alpha \in \mathbb{R}$).

A $\left[\begin{array}{l} x = -\alpha + \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\alpha + \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.

B $\left[\begin{array}{l} x = -\alpha + \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.

C $\left[\begin{array}{l} x = -\alpha + \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \alpha - \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.

D $\left[\begin{array}{l} x = -\alpha + \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\alpha - \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

$2\cos(x+\alpha) = 1 \Leftrightarrow \cos(x+\alpha) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x + \alpha = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\alpha + \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\alpha - \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{R})$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Cho các số thực dương a, b, x thỏa mãn $\log_5 x = \log_{\sqrt[3]{5}} b - 2\log_{\frac{1}{5}} a$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $x = a^2b^3$. **B** $x = a^3b$. **C** $x = a^3b^2$. **D** $x = \sqrt{a}b$.

Lời giải.

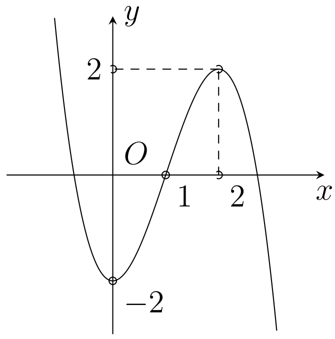
Ta có $\log_5 x = \log_{\sqrt[3]{5}} b - 2\log_{\frac{1}{5}} a \Leftrightarrow \log_5 x = 3\log_5 b + 2\log_5 a$

$\Leftrightarrow \log_5 x = \log_5\left(a^2b^3\right) \Leftrightarrow x = a^2b^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 32.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A $y = x^3 - 3x - 2$. **B** $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

C $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. **D** $y = -2x^3 + 6x^2 - 2$.

Lời giải.

Hướng đồ thị đi xuống $\Rightarrow a < 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; -2)$ và đi qua điểm $(2; 2)$.

Do đó đồ thị hàm số cần tìm thỏa mãn: $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Nghiệm của phương trình $\log_2(x - 1) = 5$ là

A $x = 33$. **B** $x = 6$. **C** $x = 26$. **D** $x = 32$.

Lời giải.

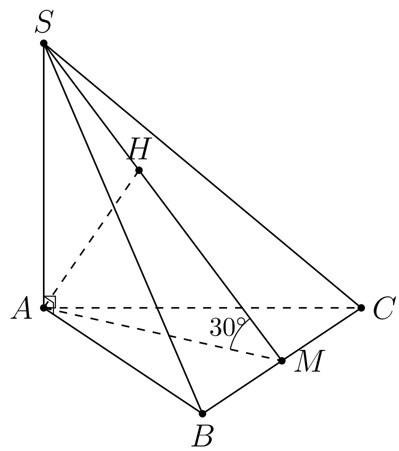
$\log_2(x - 1) = 5 \Leftrightarrow x - 1 = 2^5 = 32 \Rightarrow x = 33$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng $30°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A $72\sqrt{3}$. **B** $24\sqrt{3}$. **C** 24. **D** 72.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu của A lên SM.

Ta có $AM \perp BC$ và $SA \perp BC$ nên $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AH$.

Lại có $AH \perp SM$ nên $AH \perp (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(A, (SBC)) = AH = 3$.

Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $\widehat{SMA} = 30°$.

Xét tam giác AHM có:

$\sin\widehat{AMH} = \dfrac{AH}{AM} \Rightarrow AM = 6$ và $BC = 2AM = 12$.

Xét tam giác SAM có $\dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{1}{AH^2} - \dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{12} \Rightarrow SA = 2\sqrt{3}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{ABC} = 24\sqrt{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Cho khai triển $(a+b)^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^0 a^{2n} + \mathrm{C}_{2n}^1 a^{2n-1}b + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n} b^{2n}$. Tìm số hạng thứ n của khai triển.

A $\mathrm{C}_{2n}^{n-1} a^{n-1} b^{n-1}$. **B** $\mathrm{C}_{2n}^{n} a^n b^n$. **C** $\mathrm{C}_{2n}^{n} a^{n+1} b^{n-1}$. **D** $\mathrm{C}_{2n}^{n-1} a^{n+1} b^{n-1}$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_{2n}^k a^{2n-k} b^k$.

Số hạng thứ n của khai triển ứng với $k = n - 1$.

Do đó số hạng thứ n của khai triển là $\mathrm{C}_{2n}^{n-1} a^{n+1} b^{n-1}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $49^{x+1}+35\cdot 7^x+m=0$ có nghiệm

A $m<0$. (B) $m<\dfrac{9}{4}$. (C) $m\le\dfrac{6}{25}$. (D) $0\le m\le\dfrac{9}{4}$.

Lời giải.

Đặt $t=7^{x+1}, t>0$, phương trình đã cho trở thành: $t^2+5t+m=0\Leftrightarrow t^2+5t=-m \quad (*)$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+5t$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $y'=2t+5>0,\ \forall t>0$.

Phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm dương.

Phương trình $(*)$ có nghiệm dương khi và chỉ khi $-m>f(0)=0\Leftrightarrow m<0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu tâm $I(2;1;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P)\colon x+2y+2z+2=0$.

(A) $(x+2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=4$. (B) $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$.

(C) $(x+2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=16$. **D** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=16$.

Lời giải.

Bán kính mặt cầu $R=\mathrm{d}\left(I,(P)\right)=\dfrac{|2+2\cdot 1+2\cdot 3+2|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=4$.

Phương trình mặt cầu cần tìm: $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=16$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Thể tích của khối lăng trụ có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B là

A $V=Bh$. (B) $V=\dfrac{1}{3}Bh$. (C) $V=\dfrac{1}{6}Bh$. (D) $V=\dfrac{1}{2}Bh$.

Lời giải.

Chọn đáp án (A) □

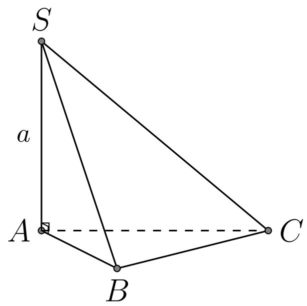
Câu 39. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC), SA=a$, tam giác ABC đều cạnh a. Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) là

(A) $\arctan 2$. (B) 60°. (C) 30°. **D** 45°.

Lời giải.

Ta có AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (ABC) nên góc giữa SC và (ABC) là góc $\widehat{SCA}$.

Tam giác SAC vuông cân tại A nên $\widehat{SCA}=45^\circ$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng $3a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,BC và E là điểm đối xứng với B qua D. Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V. Khi đó V bằng

A $\dfrac{11a^3\sqrt{2}}{8}$. (B) $\dfrac{7a^3\sqrt{2}}{8}$. (C) $\dfrac{11a^3\sqrt{6}}{24}$. (D) $\dfrac{13a^3\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng (ABD) nối ME cắt AD tại Q, trong mặt phẳng (BCD) nối NE cắt CD tại P, khi đó thiết diện $MNPQ$ chia tứ diện $ABCD$ thành hai đa diện $ACMNPQ$ và $BDMNPQ$.

Đặt $V_1 = V_{BDMNPQ} \Rightarrow V_1 = V_{MBNE} - V_{QDPE}$.

$S_{BNE} = \dfrac{1}{2}BN \cdot BE \cdot \sin\widehat{NBE} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot 2 \cdot BD \cdot \sin\widehat{CBD} = S_{BCD}$.

Do N, D lần lượt là trung điểm của BC và BE nên P là trọng tâm tam giác BCE.

$\Rightarrow CP = \dfrac{2}{3}CD \Rightarrow S_{DFE} = S_{CNP} = \dfrac{1}{2}BC\dfrac{2}{3}CD \cdot \sin\widehat{BCD} = \dfrac{1}{3}S_{BCD}$.

Do M là trung điểm AB nên $\mathrm{d}\left(M;(BCD)\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(A;(BCD)\right)$.

$\Rightarrow V_{M.BNE} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(A;(BCD)\right) \cdot S_{BCD} = \dfrac{1}{2}V_{A.BCD}$ (1).

Lại do Q là trọng tâm tam giác ABE nên $\mathrm{d}\left(Q;(BCD)\right) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}\left(A;(BCD)\right)$.

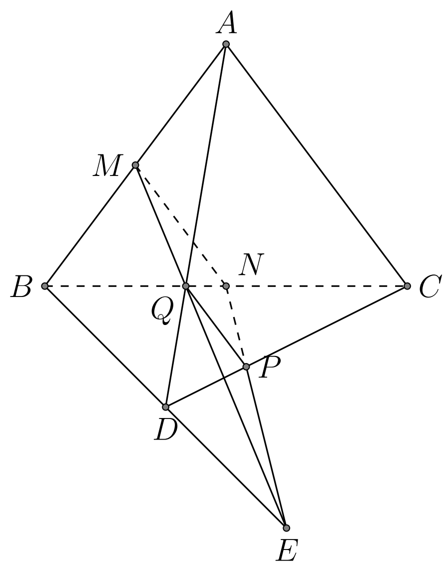
$\Rightarrow V_{Q.DPE} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3}\mathrm{d}\left(A;(BCD)\right) \cdot \dfrac{1}{3}S_{BCD} = \dfrac{1}{9}V_{A.BCD}$ (2).

Từ $(1)+(2)$ suy ra $V_1 = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{9}\right)V_{ABCD} = \dfrac{7}{18}V_{ABCD}$.

$\Rightarrow V = V_{ABCD} - V_1 = \dfrac{11}{18}V_{ABCD}$.

Tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $3a$ có thể tích bằng $V_{ABCD} = \dfrac{(3a)^3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{9a^3\sqrt{2}}{4}$.

Vậy $V = \dfrac{11a^3\sqrt{2}}{8}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K, a, b, c là các số thực thuộc K. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

B $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

C $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

D $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo tính chất của tích phân.

Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \dfrac{3a}{4}$. Đặt $x = \mathrm{d}\left(O, (SAB)\right)$, $y = \mathrm{d}\left(D, (SAB)\right)$, $z = \mathrm{d}\left(CD, SA\right)$. Tổng $x + y + z$ bằng

A $\dfrac{15a}{8}$. **B** $\dfrac{15a}{4}$. **C** $\dfrac{9a}{8}$. **D** $\dfrac{15a\sqrt{13}}{26}$.

Lời giải.

Tam giác ABC đều cạnh a nên đường cao $CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi N là trung điểm của $AM \Rightarrow ON \perp AB$ và $ON = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Kẻ $OH \perp SN \Rightarrow \mathrm{d}\left(O,(SAB)\right) = OH$.

$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{ON^2}$; $ON = \dfrac{1}{2}CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$; $SO = \dfrac{3a}{4}$

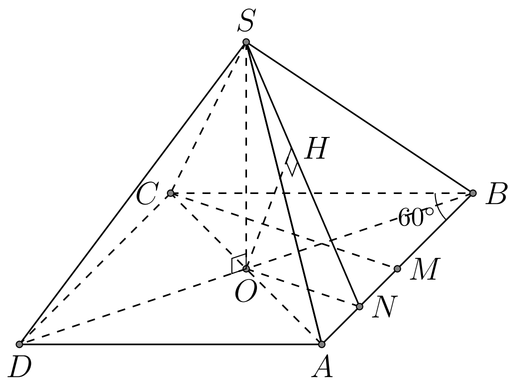
$\Rightarrow OH = \dfrac{3a}{8}$.

$x = \mathrm{d}\left(O,(SAB)\right) = \dfrac{3a}{8}$.

$y = \mathrm{d}\left(D,(SAB)\right) = 2\mathrm{d}\left(O,(SAB)\right) = 2x$

$z = \mathrm{d}\left(CD, SA\right) = \mathrm{d}\left(D,(SAB)\right) = 2x$.

Vậy $x + y + z = 5x = \dfrac{15a}{8}$.



Chọn đáp án A □

Câu 43. Cho hàm số $y = \dfrac{\sqrt{1-4x}}{x+1}$. Hỏi đồ thị hàm số trên có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và ngang?

(A) 0. (B) 3. (C) 1. **D** 2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \left(-\infty; \dfrac{1}{4}\right] \setminus \{-1\}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{1-4x}}{x+1} = 0 \Rightarrow y = 0$ là đường tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to(-1)^{\pm}} \dfrac{\sqrt{1-4x}}{x+1} = \pm\infty \Rightarrow x = -1$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có tổng 2 tiệm cận đứng và ngang.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu tâm $I(1;-1;4)$ và cắt mặt phẳng $(P)\colon 2x + 2y - z + 1 = 0$ theo một đường tròn có chu vi $2\sqrt{3}\pi$.

(A) $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = \left(1 + 2\sqrt{3}\right)^2$.

(B) $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 2$.

C $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 4$.

(D) $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 4$.

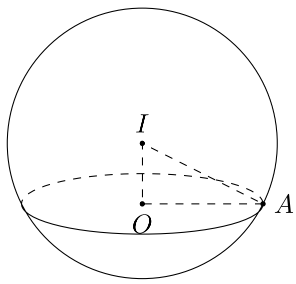
Lời giải.

Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng (P) là $IO = d\left(I,(P)\right) = 1$.

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến ta có $2\pi r = 2\sqrt{3}\pi \Rightarrow r = OA = \sqrt{3}$.

Bán kính mặt cầu $R = IA = \sqrt{3+1} = 2$.

Phương trình mặt cầu cần tìm: $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 4$.



Chọn đáp án C □

Câu 45. Cho hình nón đỉnh S, chiều cao $SO = h$. Gọi AB là một dây cung của đường tròn đáy sao cho tam giác OAB đều. Mặt phẳng (SAB) tạo với đáy hình nón góc 60°. Tính diện tích xung quanh hình nón theo h.

A $\dfrac{2\pi h^2\sqrt{13}}{9}$. (B) $\dfrac{4\pi h^2\sqrt{13}}{9}$. (C) $\dfrac{4\pi h^3}{27}$. (D) $\dfrac{\pi h^2\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải.

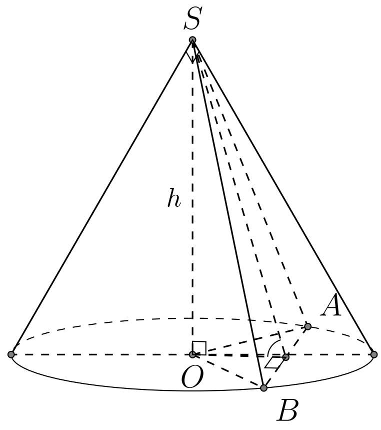
Gọi bán kính của hình nón là R, ta có $OM \perp AB, OM = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Mặt phẳng (SAB) tạo với đáy hình nón góc 60° nên $\widehat{SMO} = 60^\circ$.

$\tan \widehat{SMO} = \dfrac{h}{\dfrac{R\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow R = \dfrac{2h}{3}$.

Đường sinh của hình nón $l = \sqrt{h^2 + R^2} = \dfrac{h\sqrt{13}}{3}$.

Diện tích xung quanh của hình nón $S_{xq} = \pi Rl = \dfrac{\pi 2h^2\sqrt{13}}{9}$.



Chọn đáp án A □

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các véc-tơ $\vec{u} = (x; y; z)$, $\vec{v} = (x'; y'; z')$. Xác định mệnh đề đúng.

A. $\vec{u} - \vec{v} = (x' - x; y' - y; z' - z)$.
B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.
C. $\vec{u} + \vec{v} = (x' - x; y' - y; z' - z)$.
D. $[\vec{u}, \vec{v}] = (xx'; yy'; zz')$.

Lời giải.

Theo công thức tích vô hướng của hai véc-tơ.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; 2; 0)$, $\vec{b} = (-1; 2; 1)$, $\vec{b} = (-2; 1; 5)$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề cho dưới đây.

A. $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{6}$.
B. $\vec{a} \perp \vec{c}$.
C. $\vec{b} \cdot \vec{c} = 9$.
D. $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Lời giải.

Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \neq 0 \Rightarrow \vec{a}$ không vuông góc với $\vec{b}$.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4x\left(\sqrt{4x - m} - 2\right) = x^3 + (m - 8)\sqrt{4x - m}$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 4.
B. 5.
C. 8.
D. 6.

Lời giải.

Điều kiện: $4x - m \geq 0$.

Ta có: $4x\left(\sqrt{4x - m} - 2\right) = x^3 + (m - 8)\sqrt{4x - m} \Leftrightarrow x^3 + 8x = 4x\sqrt{4x - m} - (m - 8)\sqrt{4x - m}$.

$\Leftrightarrow x^3 + 8x = \sqrt{4x - m}(4x - m + 8) \Leftrightarrow x^3 + 8x = \left(\sqrt{4x - m}\right)^3 + 8\sqrt{4x - m} \qquad (1)$.

Từ (1) suy ra $x \geq 0$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 8t$ trên $[0; +\infty)$ ta có:

$f'(t) = 3t^2 + 8 > 0$, $\forall t \geq 0$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow f(x) = f\left(\sqrt{4x - m}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt{4x - m} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4x + m = 0 \quad (2) \end{cases}$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt không âm, điều này tương đương với $\begin{cases} 4 - m > 0 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 4$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Cho $\int\limits_3^4 \dfrac{1}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3, (a, b \in \mathbb{Z})$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $a+b+1=0$. **B** $a+3b+1=0$. (C) $a-2b=0$. (D) $a+b=-2$.

Lời giải.

$\int\limits_3^4 \dfrac{1}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_3^4 \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \left(\ln(x-2) - \ln(x-1)\right)\Big|_3^4$.

$= \ln 2 - \ln 3 - (\ln 1 - \ln 2) = 2\ln 2 - \ln 3 \Rightarrow a = 2; b = -1$.

Vậy $a+3b+1=0$ là khẳng định đúng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm $A(2;3;-1)$ trên mặt phẳng $(\alpha)\colon 16x+12y-15z+7=0$. Tính độ dài đoạn thẳng AH.

A $\dfrac{12}{25}$. (B) $\dfrac{12}{625}$. (C) $\dfrac{19}{625}$. (D) $\dfrac{19}{25}$.

Lời giải.

Độ dài đoạn thẳng AH bằng $\mathrm{d}\left(A;(\alpha)\right) = \dfrac{|16\cdot 2 + 12\cdot(-3) - 15\cdot 1 + 7|}{\sqrt{16^2+12^2+(-15)^2}} = \dfrac{12}{25}$.

Chọn đáp án (A) □

——— **HẾT** ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. C	3. B	4. C	5. A	6. D	7. B	8. C	9. B	10. B
11. B	12. A	13. B	14. C	15. B	16. D	17. C	18. B	19. C	20. D
21. D	22. C	23. D	24. C	25. A	26. B	27. C	28. A	29. B	30. D
31. A	32. C	33. A	34. B	35. D	36. A	37. D	38. A	39. D	40. A
41. A	42. A	43. D	44. C	45. A	46. B	47. D	48. A	49. B	50. A

68 ĐỀ THI THỬ TRƯỜNG THPT CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

(A) Mọi phép đối xứng trục đều là phép dời hình.
B Mọi phép vị tự đều là phép dời hình.
(C) Mọi phép tịnh tiến đều là phép dời hình.
(D) Mọi phép quay đều là phép dời hình.

Lời giải.

Các phép đối xứng trục, phép tịnh tiến, phép quay đều là phép dời hình. Phép vị tự là phép đồng dạng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{3-x}$.

A $y = -2$. (B) $y = \dfrac{2}{3}$. (C) $y = -1$. (D) $y = 3$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{3-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(\dfrac{3}{x}-1\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{3}{x}-1} = \dfrac{2+0}{0-1} = -2.$

Nên đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(x)$ là $y = -2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Tính $\lim \dfrac{\sin 2018n}{n}$.

A 0. (B) 1. (C) $+\infty$. (D) 2018.

Lời giải.

Ta có $-1 \leqslant \sin 2018n \leqslant 1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\sin 2018n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Vì $\lim\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \lim \dfrac{1}{n} = 0$ nên $\lim \dfrac{\sin 2018n}{n} = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x - \cos x$.

(A) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\sin x + \cos x + C$.
(B) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin x + \cos x + C$.
C $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\sin x - \cos x + C$.
(D) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin x - \cos x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int (\sin x - \cos x)\,\mathrm{d}x = -\cos x - \sin x + C = -\sin x - \cos x + C$

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Cho bốn mệnh đề:

(I) $b = a^{\log_a b}$ với mọi $1 \neq a > 0$, $b > 0$.
(II) $a^{\log_b c} = b^{\log_a c}$ với mọi $1 \neq a > 0$, $1 \neq b > 0$, $c > 0$.
(III) $\log_a b^{2m} = 2m \log_a b$ với mọi $0 < a \neq 1$, $b \neq 0$, $m \in \mathbb{Z}^+$.

(IV) $\log_{a^x} b = -x \log_a b$ với mọi $1 \neq a > 0$, $b > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Tìm số mệnh đề đúng trong bốn mệnh đề đã cho.

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 4.

Lời giải.

- (I) là mệnh đề đúng.
- (II) là mệnh đề sai vì $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.
- (III) là mệnh đề sai vì điều kiện phải có $b > 0$.
- (IV) là mệnh đề sai vì $\log_{a^x} b = \dfrac{1}{x} \log_a b$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Hàm số $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 1$ đồng biến trong khoảng nào sau đây?

A $(3; +\infty)$. **B** $(-1; +\infty)$. **C** $(-1; 3)$. **D** $(-\infty; 3)$.

Lời giải.

$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$.

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-1; 3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Trong không gian, cho hai điểm phân biệt A, B và số thực dương k. Tập hợp các điểm M sao cho diện tích tam giác MAB bằng k là

A một đường thẳng. **B** một mặt nón. **C** một mặt trụ. **D** một mặt cầu.

Lời giải.

Ta có $k = S_{\triangle MAB} = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(M; AB) \cdot AB \Rightarrow d(M; AB) = \dfrac{2k}{AB}$ (không đổi).

Vậy tập hợp các điểm M là một mặt trụ có trục là AB.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(x - 2) \geqslant 2$.

A $(-\infty; 11)$. **B** $(2; +\infty)$. **C** $[11; +\infty)$. **D** $(11; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Vì $3 > 1$ nên $\log_3(x - 2) \geqslant 2 \Leftrightarrow x - 2 \geqslant 3^2 \Leftrightarrow x \geqslant 11$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[11; +\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Cho số phức $z = \cos\varphi + i \sin\varphi$, $(\varphi \in \mathbb{R})$. Tìm mô-đun của z.

A $|\cos\varphi| + |\sin\varphi|$. **B** 1. **C** $|\cos\varphi + \sin\varphi|$. **D** $|\cos 2\varphi|$.

Lời giải.

Ta có $z = \cos\varphi + i\sin\varphi = 1\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ nên $r = 1$.

Vậy $|z| = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x + \dfrac{1}{x^2}$.

A $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3^x + \frac{1}{x} + C$. **B** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{1}{x} + C$.

(C) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3^x - \frac{1}{x} + C$.

(D) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x} + C$.

Lời giải.

Ta có $\left(\dfrac{3^x}{\ln 3} - \dfrac{1}{x} + C\right)' = \dfrac{3^x \ln 3}{\ln 3} - \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 3^x + \dfrac{1}{x^2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Hình nào **không phải** là hình đa diện đều trong các hình dưới đây?

(A) Hình tứ diện đều.

(B) Hình hộp chữ nhật có diện tích các mặt bằng nhau.

(C) Hình lập phương.

(D) Hình chóp tam giác đều.

Lời giải.

Hình chóp tam giác đều chỉ biết mặt đáy là tam giác đều nhưng các mặt bên chưa chắc là tam giác đều.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b song song với c.

(B) Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai véc-tơ chỉ phương của hai đường thẳng đó.

(C) Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.

(D) Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c khi b song song hoặc trùng với c.

Lời giải.

- Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì hoặc $b \parallel c$ là phát biểu sai vì b có thể trùng với c
- Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai véc-tơ chỉ phương của hai đường thẳng đó là phát biểu sai vì góc giữa hai đường thẳng thuộc $[0^\circ; 90^\circ]$ còn góc giữa hai véc-tơ thuộc $[0^\circ; 180^\circ]$
- Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn là phát biểu sai vì góc giữa hai đường thẳng có thể bằng 90°.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Hình tứ diện đều có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

(A) 6. (B) 3. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

Mỗi mặt của hình tứ diện đều chứa 1 cạnh của tứ diện và đi qua trung điểm của cạnh đối diện. Do đó, hình tứ diện đều có 6 mặt phẳng đối xứng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Biết rằng thể tích của một khối lập phương bằng 8. Tính tổng diện tích các mặt của hình lập phương đó.

(A) 16. (B) 24. (C) 36. (D) 27.

Lời giải.

Khối lập phương có thể tích bằng 8 nên hình lập phương có cạnh bằng 2.
Hình lập phương có 6 mặt đều là hình vuông bằng nhau nên tổng diện tích cần tìm là $6 \times 2^2 = 24$.
Chọn đáp án B □

Câu 15. Cho tập X có 9 phần tử. Tìm số tập con có 5 phần tử của tập X.

(A) 120. **B** 126. (C) 15120. (D) 216.

Lời giải.

Chọn 5 phần tử trong 9 phần tử của tập X có $\mathrm{C}_9^5 = 126$ cách. Vậy có 126 tập con cần tìm.
Chọn đáp án B □

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): \dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

(A) $\vec{n}_1 = (3; 2; 1)$. (B) $\vec{n}_2 = (2; 3; 6)$. (C) $\vec{n}_3 = (1; 2; 3)$. **D** $\vec{n}_4 = (6; 3; 2)$.

Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của (P) có tọa độ là $\left(\dfrac{1}{1}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{6}(6; 3; 2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$ và mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{n}$ thì d song song với (P).

B $\vec{u}$ không vuông góc với $\vec{n}$ thì d cắt (P).

(C) d song song với (P) thì $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{n}$.

(D) d vuông góc với (P) thì $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{n}$.

Lời giải.

- $\vec{u}$ vuông góc $\vec{n}$ thì d có thể nằm trong (P).
- d song song (P) thì $\vec{u}$ vuông góc $\vec{n}$.
- d vuông góc (P) thì $\vec{u}$ cùng phương $\vec{n}$.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Tính thể tích V của khối nón có diện tích hình tròn đáy là S và chiều cao là h.

(A) $V = \dfrac{4}{3}Sh$. (B) $V = \dfrac{1}{3}Sh^2$. (C) $V = Sh$. **D** $V = \dfrac{1}{3}Sh$.

Lời giải.

Ta có công thức tính thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3}Sh$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên khoảng $\mathscr{K}$ và $x_0 \in \mathscr{K}$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A Nếu hàm số đạt cực đại tại x_0 thì $f''(x_0) < 0$.

(B) Nếu hàm số đạt cực đại tại x_0 thì tồn tại $a < x_0$ để $f'(a) > 0$.

(C) Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

(D) Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) \neq 0$ thì hàm số đạt cực trị tại x_0.

Lời giải.

Ta có định lý "**Nếu** $f''(x_0) < 0$ **thì** hàm số f đạt cực đại x_0". Chiều ngược lại không đúng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.
B Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$.
C Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.
D Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$.

Lời giải.

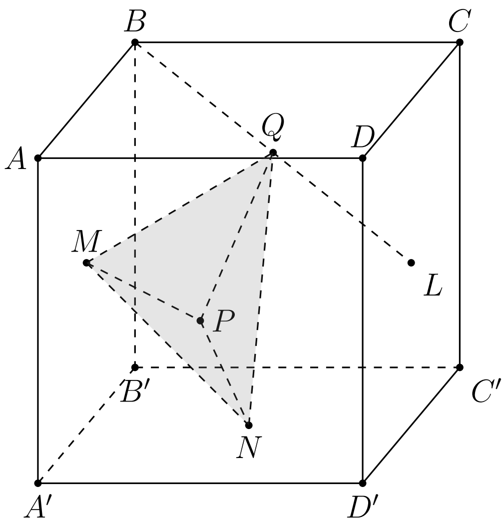
Nếu $b \perp a$ thì hoặc $b \parallel (P)$ hoặc $b \subset (P)$.

Chọn đáp án (C) □

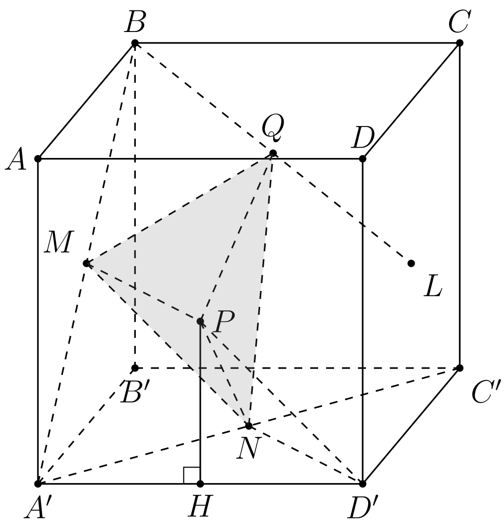
Câu 21.

Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh 1. Gọi M, N, P, L lần lượt là tâm các hình vuông $ABB'A', A'B'C'D', ADD'A'$ và $CDD'C'$. Gọi Q là trung điểm của BL. Tính thể tích khối tứ diện $MNPQ$ (tham khảo hình vẽ bên).

A $\dfrac{1}{24}$.
B $\dfrac{1}{16}$.
C $\dfrac{\sqrt{2}}{27}$.
D $\dfrac{\sqrt{3}}{27}$.



Lời giải.



Ta thấy $BL \parallel MPD'N$ là hình bình hành.

$$\Rightarrow V_{MNPQ} = V_{Q.MNP} = V_{B.MNB},$$

do $A'M = BM$ nên

$$V_{B.MNB} = V_{A'.MNP} = V_{A'.PD'N} = V_{P.A'D'N},$$

hơn nữa

$$V_{P.A'D'N} = \frac{1}{3} \cdot PH \cdot S_{A'D'N} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

Vậy $V_{MNPQ} = \dfrac{1}{24}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $y = \dfrac{x}{x+1}$.
B $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
C $y = (x^2-1)^2 - 3x + 2$.
D $y = \tan x$.

Lời giải.

Ta có phân tích các hàm số như sau

- Hàm số $y = \dfrac{x}{x+1}$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ nên không thể đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, xác định trên $\mathbb{R}$, ta tính đạo hàm như sau

$$y' = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

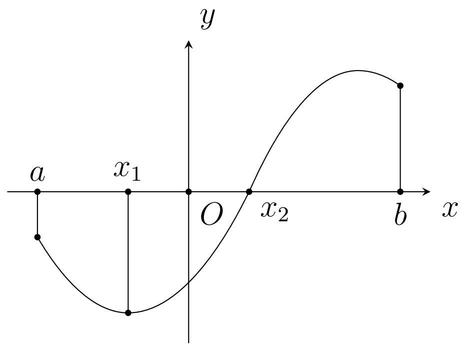
nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lưu ý. Hàm $y = \tan x$ tuần hoàn chu kì π, nên không thể luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên đoạn $[a; b]$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ là đường cong như hình vẽ bên. Khi đó, mệnh đề nào sau đây đúng?



(A) $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(b)$. (B) $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(x_1)$.

(C) $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(a)$. (D) $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(x_2)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị của $f'(x)$, ta có bảng biến thiên

x	a		x_2		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(a)$	↘	$f(x_2)$	↗	$f(b)$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(x_2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Biết rằng trong khai triển Newton của $(x+1)^{100}$ thì hệ số của hai số hạng chứa x^k và x^{3k} là bằng nhau ($k \in \mathbb{Z};\ 1 \le k \le 33$). Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) k chia hết cho 5. (B) k chia hết cho 4. (C) k chia hết cho 3. (D) k chia hết cho 7.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển là $T_{k+1} = \mathrm{C}_{100}^k \cdot x^k$.

Theo giả thiết, với $k \in \mathbb{Z};\ 1 \le k \le 33$ ta có

$$\mathrm{C}_{100}^k = \mathrm{C}_{100}^{3k} \Leftrightarrow \mathrm{C}_{100}^{100-k} = \mathrm{C}_{100}^{3k} \Leftrightarrow 100 - k = 3k \Leftrightarrow k = 25.$$

Vậy k chia hết cho 5.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Tìm phần ảo của số phức z biết $z-(2+3i)\overline{z}=1-9i$.

(A) 1. (B) -2. **(C) -1.** (D) 2.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned} z-(2+3i)\overline{z}=1-9i &\Leftrightarrow x+yi-(2+3i)(x-yi)=1-9i\\ &\Leftrightarrow x+yi-[2x+3y+(3x-2y)i]=1-9i\\ &\Leftrightarrow -x-3y-3(x-y)i=1-9i\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}-x-3y=1\\ -3(x-y)=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-1.\end{cases}\end{aligned}$$

Vậy phần ảo của số phức z là $y=-1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Cho x,y là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $\ln x+\ln y=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $x+y$.

(A) $\sqrt{3}$. (B) $\sqrt{2}$. (C) 3. **(D) 2.**

Lời giải.

Với $x,y>0$, ta có $\ln x+\ln y=0\Leftrightarrow \ln xy=0\Leftrightarrow xy=1$.
Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$1=xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\Rightarrow x+y\ge 2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $x+y$ là 2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x^{2018}(1+x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I=\frac{1}{2018}+\frac{1}{2019}$. (B) $I=\frac{1}{2020}+\frac{1}{2021}$. **(C) $I=\frac{1}{2019}+\frac{1}{2020}$.** (D) $I=\frac{1}{2017}+\frac{1}{2018}$.

Lời giải.

Ta có $I=\int\limits_0^1\left(x^{2018}+x^{2019}\right)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{x^{2019}}{20019}+\frac{x^{2020}}{2020}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2019}+\frac{1}{2020}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{nếu } x\ne 1\\ m & \text{nếu } x=1\end{cases}$, với m tham số thực. Tìm m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

(A) $m=2$. (B) $m=-2$. (C) $m=1$. (D) $m=-1$.

Lời giải.

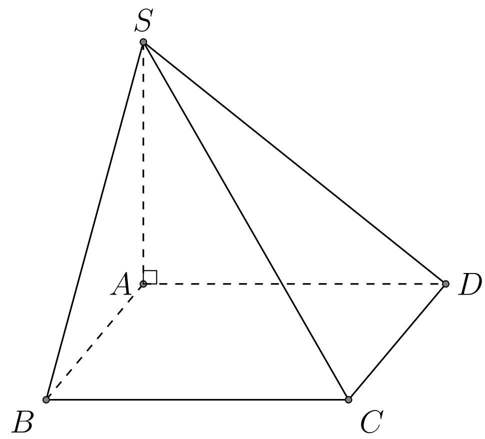
Ta có $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$.
Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD.

(A) $2a$. (B) $a\sqrt{2}$. (C) $a\sqrt{3}$. **D** a.

Lời giải.



Vì $CD \parallel AB$ nên $CD \parallel (SAB)$.
Mà $SB \subset (SAB)$ nên

$$\mathrm{d}(CD, SB) = \mathrm{d}\left[CD, (SAB)\right] = \mathrm{d}\left[D, (SAB)\right].$$

Ta có $\begin{cases} DA \perp SA\,(SA \perp (ABCD)) \\ DA \perp AB \end{cases} \Rightarrow DA \perp (SAB)$,
do đó

$$\mathrm{d}\left[D, (SAB)\right] = DA = a.$$

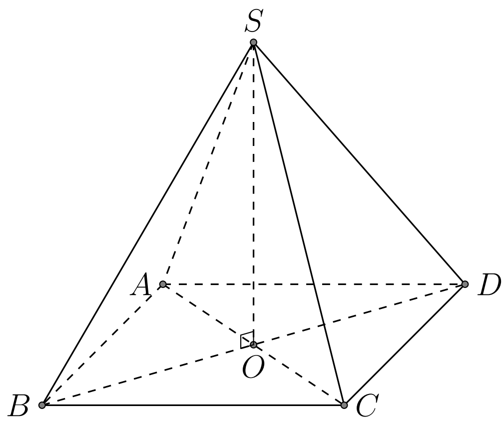
Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là a.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp đó theo a.

A $V = \dfrac{a^3\sqrt{10}}{6}$. (B) $V = \dfrac{a^3}{2}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.



Xét tam giác SOB vuông tại O.

$ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $OB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{3a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

Do đó

$$V = \frac{1}{3}\cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{10}}{2}\cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{10}}{6}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Cho hàm số $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 4x$. Tìm x sao cho $f'(x) < 0$.

(A) $x > \dfrac{4}{3}$ hoặc $x < -1$. **B** $-1 < x < \dfrac{4}{3}$.

(C) $x \geq \dfrac{4}{3}$ hoặc $x \leq -1$. (D) $-1 \leq x \leq \dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - x - 4 \Rightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Phương trình $(\sin x - \cos x)(\sin x + 2\cos x - 3) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực thuộc khoảng $\left(-\dfrac{3\pi}{4}; \pi\right)$?

(A) 3. (B) 0. [C] 1. (D) 2.

Lời giải.

Ta viết lại

$$(\sin x - \cos x)(\sin x + 2\cos x - 3) = 0. \quad (1)$$

Khi đó,

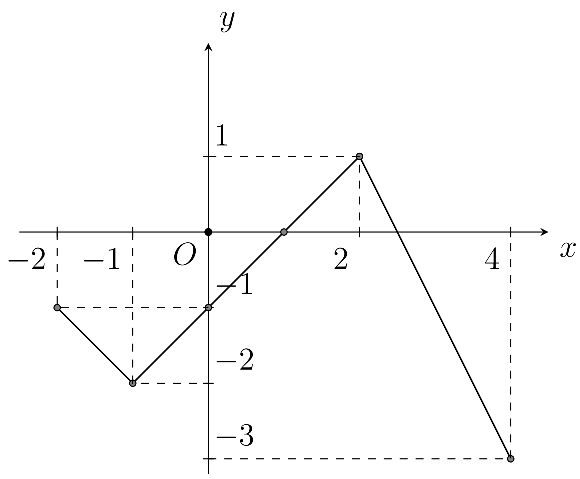
$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}). \\ \sin x + 2\cos x - 3 = 0 (\text{ vô nghiệm vì } \sqrt{1^2 + 2^2} < 3) \end{array}\right. .$$

Ta có $\dfrac{-3\pi}{4} < x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi < \pi \Rightarrow -1 < k < \dfrac{3}{4}$, vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 0$.

Vậy phương trình có 1 nghiệm thực trên khoảng $\left(-\dfrac{3\pi}{4}; \pi\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2; 4]$ như hình vẽ dưới đây.



Phương trình $|f(x)| = 2$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực thuộc đoạn $[-2; 4]$?

(A) 4. [B] 2. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Ta có

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x) \text{ nếu } f(x) < 0. \end{cases}$$

Từ đồ thị của hàm $y = f(x)$, ta suy ra bảng biến thiên của hàm $|f(x)|$ như sau

x	-2		-1		1		2		$\frac{5}{2}$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$\lvert f(x)\rvert$	1 $\nearrow$		2	$\searrow$	0 $\nearrow$		1	$\searrow$	0 $\nearrow$		3

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $|f(x)| = 2$ có 2 nghiệm thực thuộc đoạn $[-2; 4]$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\log_2 \dfrac{2x}{1-x^2}}$ có dạng $[a; b) \cup [c; d)$. Tính $a + b + c + d$.

(A) 1. (B) -2. (C) 3. (D) -4.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} \dfrac{2x}{1-x^2} > 0 \\ \log_2 \dfrac{2x}{1-x^2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2x}{1-x^2} \geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x-1}{1-x^2} \geq 0.$ (1)

Xét dấu vế trái (1), ta được $x \in \left[-1-\sqrt{2}; -1\right) \cup \left[-1+\sqrt{2}; 1\right)$.

Suy ra $a + b + c + d = -2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Cho dãy số (u_n) là cấp số cộng với $u_1 = 3; u_5 = 19$. Tính u_{12}.

(A) $u_{12} = 51$. (B) $u_{12} = 57$. (C) $u_{12} = 47$. (D) $u_{12} = \dfrac{207}{5}$.

Lời giải.

Ta có $u_5 = u_1 + 4d \Leftrightarrow 19 = 3 + 4d \Rightarrow d = 4$.

Do đó, $u_{12} = u_1 + 11d = 3 + 11 \cdot 4 = 47$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x + 3y + 4z - 5 = 0$ và điểm $A(1; -3; 1)$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P).

(A) $\dfrac{8}{9}$. (B) $\dfrac{8}{29}$. (C) $\dfrac{3}{\sqrt{29}}$. (D) $\dfrac{8}{\sqrt{29}}$.

Lời giải.

Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) là

$$\mathrm{d}\,[A, (P)] = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 - 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{8}{\sqrt{29}}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{2x}$; $y = 2x - 2$ và trục hoành. Tính diện tích của (H).

(A) $\dfrac{5}{3}$. (B) $\dfrac{16}{3}$. (C) $\dfrac{10}{3}$. (D) $\dfrac{8}{3}$.

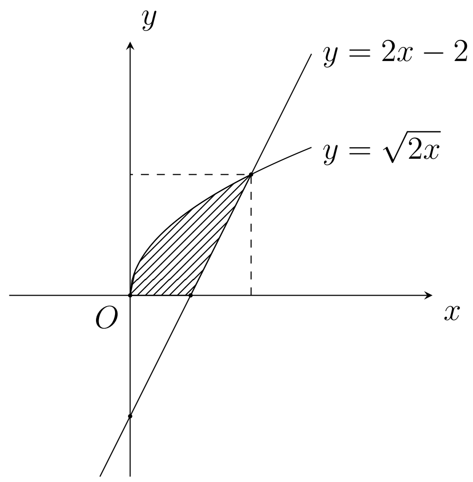
Lời giải.

Hoành độ giao điểm của đường cong $y=\sqrt{2x}$ và đường thẳng $y=2x-2$ là

$$\sqrt{2x}=2x-2 \Leftrightarrow x=2.$$

Đồ thị hàm số $y=2x-2$ cắt Ox tại điểm $(1;0)$.
Diện tích hình phẳng là

$$S=\int\limits_0^1 \sqrt{2x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2\left(\sqrt{2x}-2x+2\right)\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{5}{3}.$$



Chọn đáp án A □

Câu 38. Cho phương trình $2x^2-2(m+1)x+4-m=0$ với m là tham số thực. Biết rằng đoạn $[a;b]$ là tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có nghiệm thực thuộc đoạn $\left[0;\frac{3}{2}\right]$. Tính $a+b$.

A $3+\sqrt{11}$. **B** $2+\sqrt{11}$. **C** $2+3\sqrt{11}$. **D** $2-\sqrt{11}$.

Lời giải.

Trên đoạn $\left[0;\frac{3}{2}\right]$, phương trình tương đương với

$$m=\frac{2x^2-2x+4}{2x+1}.$$

Xét hàm số $f(x)=\frac{2x^2-2x+4}{2x+1}$, trên đoạn $\left[0;\frac{3}{2}\right]$. Ta có

$$f'(x)=\frac{(4x-2)(2x+1)-2(2x^2-2x+4)}{(2x+1)^2}=\frac{4x^2+4x-10}{(2x+1)^2};$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^2+4x-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{-1-\sqrt{11}}{2}\notin\left[0;\frac{3}{2}\right] \\ x=\frac{-1+\sqrt{11}}{2}\in\left[0;\frac{3}{2}\right] \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{-1+\sqrt{11}}{2}$		$\frac{3}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	$\searrow$	$-2+\sqrt{11}$	$\nearrow$	$\frac{11}{8}$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có nghiệm trên đoạn $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$ khi $-2+\sqrt{11}\le m\le 4$.

Do đó $a+b=2+\sqrt{11}$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Có tất cả bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số $\overline{abc}$ sao cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác cân?

A 81. B 165. C 216. D 45.

Lời giải.

Nếu a,b,c là ba cạnh của một tam giác, thì tất cả phải khác 0 và $a,b,c\in\{1;2;\ldots;9\}$.

- Nếu tam giác tạo thành là tam giác đều, có 9 số có tính chất như vậy.
- Nếu tam giác tạo thành là cân nhưng không đều. Trong số đó có đúng 2 chữ số khác nhau trong 3 chữ số. Gọi chúng là a và b. Số các cặp (a,b) là $2\cdot \mathrm{C}_9^2$. Nhưng nếu số lớn hơn (chẳng hạn là a) là độ dài cạnh đáy thì a phải thỏa mãn điều kiện $b<a<2b$ để đảm bảo bất đẳng thức tam giác. Tất cả các cặp không thỏa mãn điều kiện được liệt kê dưới bảng sau (có 20 cặp).

a	9	8	7	6	5	4	3	2	1
b	$4,3,2,1$	$4,3,2,1$	$3,2,1$	$3,2,1$	$2,1$	$2,1$	1	1	

  Mặt khác, có C_3^2 số được lập từ một cặp (a,b) cho trước. Suy ra có $\mathrm{C}_3^2\left(2\cdot\mathrm{C}_9^2-20\right)=156$ số.

Vậy số các số thỏa mãn là $9+156=165$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho hàm số $f(x)=mx^4+2x^2-1$ với m là tham số thực. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2018;2018)$ sao cho hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$?

A 2022. B 4032. C 4. D 2014.

Lời giải.

Trường hợp 1. Nếu $m=0$ thì $f(x)=2x^2-1$ là hàm đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$, do đó đồng biến trên $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Trường hợp 2. Nếu $m\neq 0$, thì $f'(x)=4x\left(mx^2+1\right)$.

- Với $m>0$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

  $\Rightarrow m>0$ thì hàm đồng biến trên $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

- Với $m < 0$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 0 \\ &x = \pm\sqrt{\dfrac{-1}{m}} \end{aligned}\right.$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{-1}{m}}$		0		$\sqrt{\frac{-1}{m}}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	y_0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	y_0	$\searrow$	$+\infty$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ khi $\sqrt{\dfrac{-1}{m}} \geq \dfrac{1}{2} \Rightarrow m \geq -4$.

Do $m < 0$ nên suy ra $-4 \leq m < 0$.

Kết hợp các trường hợp trên, suy ra $m \in [-4; 2018)$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên có 2022 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Cho biểu thức $P = 3x\sqrt{a - y^2} - 3y\sqrt{a - x^2} + 4xy + 4\sqrt{a^2 - ax^2 - ay^2 + x^2y^2}$ trong đó a là số thực dương cho trước. Biết rằng giá trị lớn nhất của P bằng 2018. Khi đó, mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $a = \sqrt{2018}$. (B) $a \in (500; 525]$. **C** $a \in (400; 500]$. (D) $a \in (340; 400]$.

Lời giải.

$P = 3x\sqrt{a - y^2} - 3y\sqrt{a - x^2} + 4xy + 4\sqrt{(a - x^2)(a - y^2)}$.

Ta có

$$\left|x\sqrt{a - y^2} - y\sqrt{a - x^2}\right| \leq \sqrt{x^2 + a - x^2} \cdot \sqrt{a - y^2 + y^2} = a,$$

và

$$4\sqrt{(a - x^2)(a - y^2)} \leq 2(a - x^2 + a - y^2) = 2(2a - (x^2 + y^2)) \leq 4a - 4xy.$$

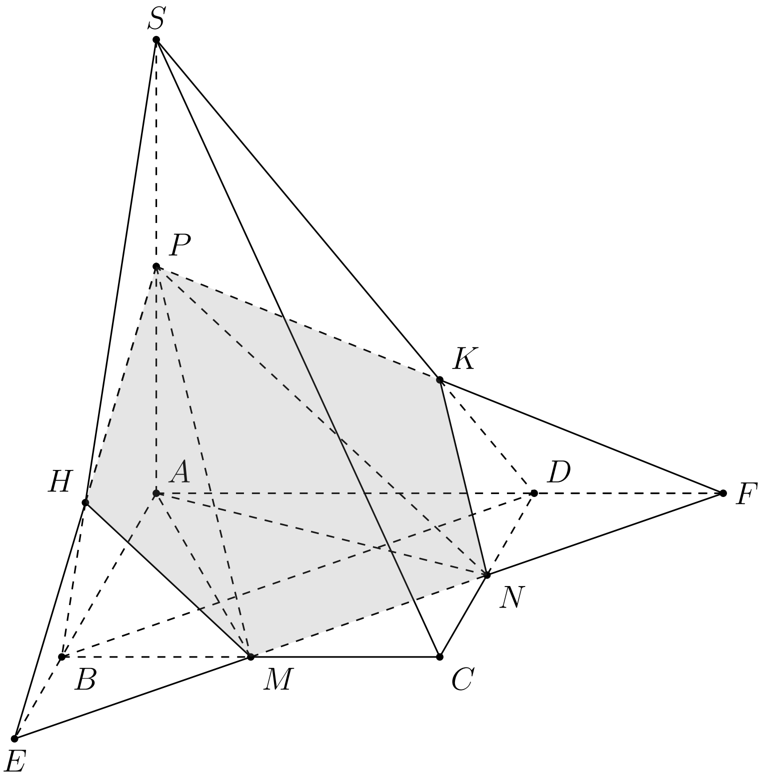
Suy ra $P \leq 5a = 2018 \Rightarrow a = \dfrac{2018}{5} = 403{,}6 \in (400; 500]$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm của các đoạn BC, CD và SA. Mặt phẳng (MNP) chia khối chóp thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1 và V_2. Biết rằng $V_1 \leq V_2$, tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

(A) 1. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{5}{6}$. **D** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.



Theo định lí menelaus ta có $\frac{EB}{EA} \cdot \frac{AP}{PS} \cdot \frac{SH}{HB} = 1 \Rightarrow SH = 3HB \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{3}{4}$.
Tương tự, ta cũng có $\frac{SK}{SD} = \frac{3}{4}$.
Gọi V_A và V_S lần lượt là thể tích của phần chứa đỉnh A và đỉnh S.
Ta chia khối chóp chứa đỉnh A thành ba khối có thể tích như sau

$$V_A = V_{M.BHPA} + V_{P.AMN} + V_{N.APKD}.$$

Ta có $S_{SAB} = \frac{1}{2} SA \cdot SB \cdot \sin \widehat{ASB} = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2} SA \cdot SB \cdot \sin \widehat{ASB} = \frac{8}{3} S_{SPH} \Rightarrow S_{BHPA} = \frac{5}{8} S_{SAB}$.
Suy ra

$$V_{M.BHPA} = \frac{1}{2} V_{C.BHPA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} V_{C.SAB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} V_{S.ABC} = \frac{5}{32} V_{S.ABCD} = \frac{5}{32} V.$$

Tương tự, ta có $V_{N.APKD} = \frac{5}{32} V$.
Dễ dàng tính được $S_{AMN} = \frac{3}{8} S_{ABCD} \Rightarrow V_{P.AMN} = \frac{1}{2} V_{S.AMN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} V_{S.ABCD} = \frac{3}{16} V$.
Khi đó

$$V_A = V_{M.BHPA} + V_{P.AMN} + V_{N.APKD}$$
$$= \frac{5}{32} V + \frac{3}{16} V + \frac{5}{32} V = \frac{1}{2} V \Rightarrow \frac{V_A}{V_S} = 1.$$

Chọn đáp án D □

Câu 43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (H) là tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = \left(1 + \sqrt{3}i\right) z + 2$ thỏa mãn $|z - 1| \leq 2$. Tính diện tích của hình (H).

A 8π. **B** 18π. **C** 16π. **D** 4π.

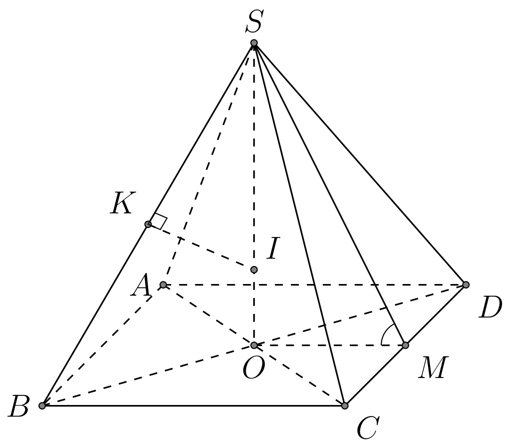
Lời giải.

Ta có $w = \left(1+\sqrt{3}i\right)(z-1)+3+\sqrt{3}i \Leftrightarrow w-3-\sqrt{3}i = \left(1+\sqrt{3}i\right)(z-1)$,
Lấy mô-đun 2 vế, ta được $|w-3-\sqrt{3}i| = |1+\sqrt{3}i|\cdot|z-1| \leq 2\cdot 2 = 4$.
Do đó, (H) là hình tròn bán kính 4 nên diện tích hình (H) bằng 16π.
Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho hình chóp tứ giác đều có góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Biết rằng mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó có bán kính $R = a\sqrt{3}$. Tính độ dài cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều nói trên.

A $\frac{9}{4}a$. **B** $2a$. **C** $\frac{3}{2}a$. **D** $\frac{12}{5}a$.

Lời giải.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.
Trong (SOB), kẻ KI là đường trung trực của đoạn SB $(K \in SB,\ I \in SO) \Rightarrow IS = IB$.
Mặt khác, $I \in SO$ nên $IA = IB = IC = ID$.
$\Rightarrow$ I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đều $S.ABCD$.
Ta có $\triangle SKI \backsim \triangle SOB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{SI}{SB} = \frac{KS}{SO},$$

từ đó $R = SI = \dfrac{SB^2}{2SO} = a\sqrt{3}$ (1)
Gọi M là trung điểm của CD.
Ta có $\begin{cases} OM \perp CD,\ OM \in (ABCD) \\ SM \perp CD \text{ (vì } CD \perp (SOM)),\ SM \in (SCD) \end{cases} \Rightarrow [(ABCD),(SCD)] = \widehat{SMO} = 60°$.
Tam giác SOM vuông tại O, ta có $SO = OM\cdot\tan 60° = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.
Tam giác SOB vuông tại O, ta có $SB^2 = SO^2 + OB^2 = \dfrac{3x^2}{4} + \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{5x^2}{4}$.
Do đó, (1) $\Leftrightarrow \dfrac{\frac{5x^2}{4}}{x\sqrt{3}} = a\sqrt{3} \Rightarrow x = \dfrac{12a}{5}$.
Chọn đáp án D □

Câu 45. Cho hàm số $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}(m-1)x^2 - 3mx - \dfrac{3m}{2}$ với m là tham số thực. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-20;18)$ sao cho đồ thị của hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm cùng một phía đối với trục hoành?

A 1. **B** 19. **C** 20. **D** 18.

Lời giải.

Ta có $y' = 3\left(x^2-(m-1)x-m\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2-(m-1)x-m = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=m. \end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị khi và chỉ khi $m \neq -1$.

- Nếu $m < -1$ thì $x = -1$ là điểm cực tiểu của hàm số, dựa vào hình dạng đồ thị hàm bậc ba có 2 cực trị $(a = 1 > 0)$, ta chỉ cần tìm điều kiện cho $f(-1) \geq 0$, hay $0 \geq 0$ (luôn đúng). $\Rightarrow$ Có 18 giá trị nguyên của m.
- Nếu $m > -1$, tương tự lập luận trên, ta có $f(m) \geq 0$, hay $m(m^2 + 3m + 3) \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$. $\Rightarrow m = 0$, có 1 giá trị nguyên của m.

Vậy có tất cả 19 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Lưu ý. Bài toán có thể giải theo cách tổng quát là $y_{\text{CĐ}} \cdot y_{\text{CT}} \geq 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho tích phân $I = \int\limits_{\frac{1}{12}}^{12} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\, \mathrm{d}x = \frac{a}{b} \cdot \mathrm{e}^{\frac{c}{d}}$ trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $bc - ad$.

A 24. **B** $\frac{1}{6}$. **C** 12. **D** 1.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_{\frac{1}{12}}^{12} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\, \mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{12}}^{12} \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\, \mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{1}{12}}^{12} \left(x - \frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\, \mathrm{d}x$.

Xét $I_1 = \int\limits_{\frac{1}{12}}^{12} \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\, \mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}} \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\, \mathrm{d}x \\ v = x. \end{cases}$

Do đó

$$I_1 = x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}} \Big|_{\frac{1}{12}}^{12} - \int\limits_{\frac{1}{12}}^{12} \left(x - \frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\, \mathrm{d}x.$$

Suy ra

$$I = x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}} \Big|_{\frac{1}{12}}^{12} = \frac{143}{12} \mathrm{e}^{\frac{145}{12}}.$$

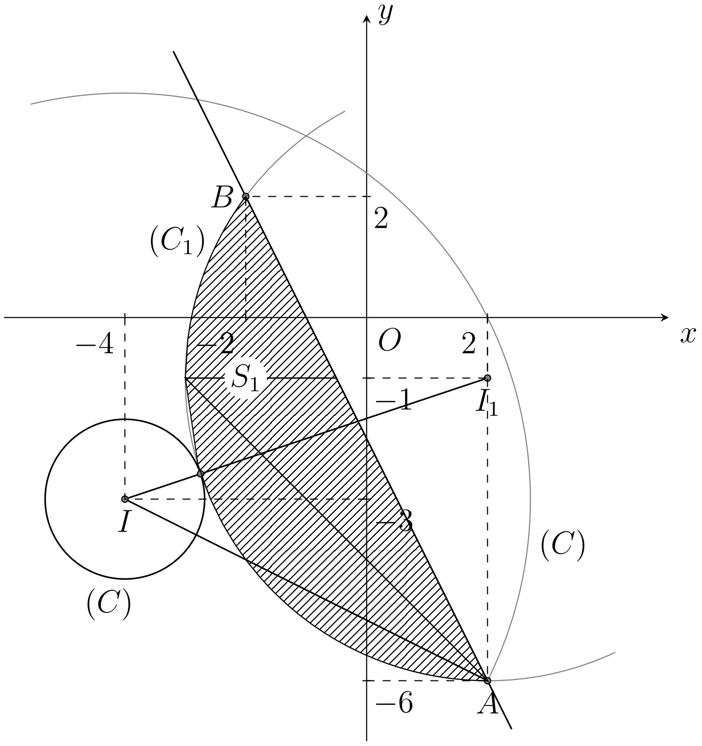
Vậy $a = 143$, $b = 12$, $c = 145$, $d = 12$ và $bc - ad = 24$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ là số phức thỏa điều kiện $|\overline{z} + 2 - 3i| \leq |z + i - 2| \leq 5$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 8x + 6y$. Tính $M + m$.

A $\frac{156}{5} - 20\sqrt{10}$. **B** $60 - 20\sqrt{10}$. **C** $\frac{156}{5} + 20\sqrt{10}$. **D** $60 + 20\sqrt{10}$.

Lời giải.



- $|\overline{z}+2-3i| \le |z+i-2| \Leftrightarrow 2x+y+2 \le 0$.
- $|z+i-2| \le 5 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2 \le 25$ là hình tròn (C_1) tâm $I_1(2;-1)$ và bán kính $R_1 = 5$.
- $M(z)$ thỏa điều kiện đề bài $\Leftrightarrow M \in (S_1)$: là phần gạch chéo kể cả biên với $A(2;-6)$, $B(-2;2)$.
- $P = x^2+y^2+8x+6y \Leftrightarrow x^2+y^2+8x+6y-P=0$. (1)

Xét điều kiện để (1) là phương trình đường tròn với tâm $I(-4;-3)$ và bán kính $R=\sqrt{25+P}$.

- $\begin{cases} M(z) \in (S_1) \\ M \in (C) \end{cases} \Leftrightarrow II_1 - R_1 \le R \le IA \Leftrightarrow 2\sqrt{10}-5 \le \sqrt{25+P} \le \sqrt{45}$

  $\Rightarrow 40-20\sqrt{10} \le P \le 20$

Suy ra $M+m = 60-20\sqrt{10}$.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S_m): $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-m)^2 = \dfrac{m^2}{4}$ (với $m>0$ là tham số thực) và hai điểm $A(2;3;5)$, $B(1;2;4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của m để trên (S_m) tồn tại điểm M sao cho $MA^2-MB^2=9$.

A $m=1$. **B** $m=3-\sqrt{3}$. **C** $m=8-4\sqrt{3}$. **D** $m=\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y;z)$, ta có

$$MA^2-MB^2=9 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2-(x-1)^2-(y-2)^2-(z-4)^2=9$$
$$\Leftrightarrow x+y+z-4=0.$$

Mặt cầu (S_m) có tâm $I(1;1;m)$ và bán kính $R = \dfrac{m}{2}$. Gọi $(\alpha)\colon x+y+z-4=0$. Khi đó,

$$M(1;1;m) \in (S_m) \Leftrightarrow \mathrm{d}\left[I,(\alpha)\right] \le R \Leftrightarrow \frac{|m-2|}{\sqrt{3}} \le \frac{m}{2}$$
$$\Rightarrow m-2 \ge -\frac{\sqrt{3}}{2}m \Rightarrow m \ge 8-4\sqrt{3}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của m là $8-4\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Cho hàm số $y = x^2 + m\left(\sqrt{2018-x^2}+1\right) - 2021$ với m là tham số thực. Gọi S là tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại đúng hai điểm phân biệt. Tính S.

(A) 860. **B** 986. (C) 984. (D) 990.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm với trục hoành

$$x^2 + m\left(\sqrt{2018-x^2}+1\right) - 2021 = 0 \qquad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{2018-x^2}$, $0 \le t \le \sqrt{2018}$. Khi đó, (1) trở thành $m = \dfrac{t^2+3}{t+1} = f(t)$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{t^2+2t-3}{(t+1)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Bảng biến thiên

t	0		1		$\sqrt{2018}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$f\left(\sqrt{2018}\right)$

Với mỗi nghiệm $0 \le t_0 < \sqrt{2018}$ thì phương trình (1) sẽ có 2 nghiệm phân biệt.

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $m = 2$ hoặc $3 < m < f\left(\sqrt{2018}\right) \approx 44,001$.

Vậy $S = 2 + (4+5+\cdots+44) = 1+2+\cdots+44-4 = \dfrac{44\cdot 45}{2} - 4 = 986$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 50. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Tại đỉnh A có một con sâu, mỗi lần di chuyển, nó bò theo cạnh của hình hộp chữ nhật và đi đến đỉnh kề với đỉnh nó đang đứng. Tính xác suất sao cho sau 9 lần di chuyển, nó đứng tại đỉnh C'.

(A) $\dfrac{1862}{6561}$. (B) $\dfrac{453}{2187}$. (C) $\dfrac{435}{2187}$. **D** $\dfrac{1640}{6561}$.

Lời giải.

- Mỗi lần di chuyển, con sâu có 3 phương án đi nên số phần tử của không gian mẫu là 3^9.

- Ta gắn tọa độ điểm $A(0;0;0)$ và $C'(1;1;1)$. Mỗi lần di chuyển, tọa độ mà nó đang đứng thay đổi đúng một trong ba thành phần x hoặc y hoặc z và thay đổi từ 0 thành 1 hoặc từ 1 thành 0.
- Vì tọa độ ban đầu là $(0;0;0)$ và tọa độ kết thúc là $(1;1;1)$ nên số lần thay đổi ở mỗi thành phần là số lẻ và tổng số lần thay đổi bằng 9.
- Có thể thấy số lần thay đổi ở các thành phần là $1-7-1$; $3-3-3$; $3-5-1$ và các hoán vị của nó. Do đó, số đường đi là $3\mathrm{C}_9^7\mathrm{C}_2^1+\mathrm{C}_9^3\mathrm{C}_6^3+3!\mathrm{C}_9^5\mathrm{C}_4^3=4920$.

Vậy xác suất cần tìm là $P=\dfrac{4920}{3^9}=\dfrac{1640}{6561}$.

Chọn đáp án D □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. A	3. A	4. C	5. A	6. C	7. C	8. C	9. B	10. D
11. D	12. D	13. A	14. B	15. B	16. D	17. B	18. D	19. A	20. C
21. A	22. B	23. D	24. A	25. C	26. D	27. C	28. A	29. D	30. A
31. B	32. C	33. B	34. B	35. C	36. D	37. A	38. B	39. D	40. A
41. C	42. D	43. C	44. D	45. B	46. A	47. B	48. C	49. B	50. D

69 ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG TSĐH LẦN 2, 2017 - 2018 TRƯỜNG THPT PHAN CHÂU TRINH, ĐÀ NẴNG

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Giá trị thực dương của tham số m sao cho $\int\limits_0^m x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = 2^{500}\mathrm{e}^{\sqrt{m^2+1}}$ là

Ⓐ $m = 2^{250}\sqrt{2^{500}-2}$.
Ⓑ $m = \sqrt{2^{1000}-1}$.
Ⓒ $m = \sqrt{2^{1000}+1}$.
Ⓓ $m = 2^{250}\sqrt{2^{500}+2}$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow t\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = m \Rightarrow t = \sqrt{m^2+1}$.

$$\Rightarrow I = \int\limits_0^m x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\sqrt{m^2+1}} t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

Đặt $\begin{cases} u = t \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ v = \mathrm{e}^t. \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= t\mathrm{e}^t\Big|_1^{\sqrt{m^2+1}} - \int\limits_1^{\sqrt{m^2+1}} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{m^2+1}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt{m^2+1}} - \mathrm{e} - \mathrm{e}^t\Big|_1^{\sqrt{m^2+1}} \\ &= \sqrt{m^2+1}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt{m^2+1}} - \mathrm{e} - \mathrm{e}^{\sqrt{m^2+1}} + \mathrm{e} \\ &= \left(\sqrt{m^2+1}-1\right)\mathrm{e}^{\sqrt{m^2+1}}. \end{aligned}$$

Theo giả thuyết

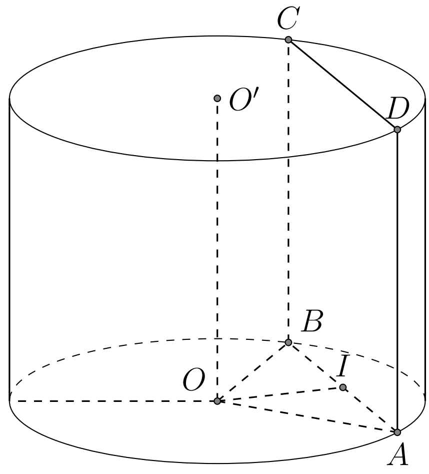
$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{m^2+1}-1\right)\mathrm{e}^{\sqrt{m^2+1}} = 2^{500}\mathrm{e}^{\sqrt{m^2+1}} \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{m^2+1}-1 = 2^{500} \\ \Leftrightarrow\ & m^2+1 = \left(2^{500}+1\right)^2 \\ \Leftrightarrow\ & m = \sqrt{\left(2^{500}+1\right)^2-1} \\ \Leftrightarrow\ & m = \sqrt{\left(2^{500}+1+1\right)\left(2^{500}+1-1\right)} \\ \Leftrightarrow\ & m = 2^{250}\sqrt{2^{500}+2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 2. Cho khối trụ có bán kính đáy bằng r và chiều cao h. Cắt khối trụ bằng một mặt phẳng (P) song song với trục và cách trục một khoảng bằng $\frac{r\sqrt{2}}{2}$. Mặt phẳng (P) chia khối trụ làm hai phần. Gọi V_1 là phần chứa tâm của đường tròn đáy và V_2 là phần không chứa tâm của đường tròn đáy. Tính tỉ số của $\frac{V_1}{V_2}$.

(A) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{3\pi - 2}{3\pi - 2}$. (B) $\dfrac{V_1}{V_2} = 3 + \sqrt{2}$. (C) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\pi - 2}{3\pi + 2}$. **D** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{3\pi + 2}{\pi - 2}$.

Lời giải.



Thể tích hình trụ $V = \pi r^2 h$.

Khi cắt khối trụ bằng mặt phẳng (P) song song với trục tạo thành hai khối có thể tích V_1, V_2 thì tỷ số thể tích $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng tỷ số diện tích của viên phân chứa điểm O và viên phân không chứa điểm O của đường tròn đáy.

Gọi I là trung điểm của AB khi đó $AB = 2\sqrt{r^2 - OI^2} = 2\sqrt{r^2 - \left(\dfrac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2} = r\sqrt{2}$.

Suy ra $\triangle AOI$ vuông cân tại I, suy ra $\widehat{AOB} = 90°$.

Diện tích quạt tròn AOB là $S_1 = \dfrac{\pi r^2}{4}$.

Diện tích tam giác $S_{OAB} = \dfrac{1}{2} OI \cdot AB = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{r\sqrt{2}}{2} \cdot r\sqrt{2} = \dfrac{r^2}{2}$.

Suy ra: $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\pi r^2 - \left(\dfrac{\pi r^2}{4} - \dfrac{r^2}{2}\right)}{\dfrac{\pi r^2}{4} - \dfrac{r^2}{2}} = \dfrac{3\pi + 2}{\pi - 2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Một hộp đựng 5 quả cầu xanh, 4 quả cầu đỏ và 3 quả cầu vàng. Từ hộp đó chọn ngẫu nhiên 3 quả cầu. Xác suất để chọn được 3 quả cầu khác màu.

(A) $\dfrac{3}{7}$. **B** $\dfrac{3}{11}$. (C) $\dfrac{3}{5}$. (D) $\dfrac{3}{14}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^3$.

Gọi A là biến cố "lấy được 3 quả cầu khác màu".

$$n(A) = \mathrm{C}_5^1 \mathrm{C}_4^1 \mathrm{C}_3^1 = 60 \Rightarrow \mathrm{P}(A) = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Trong không gian cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 6a$, $AC = 8a$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB.

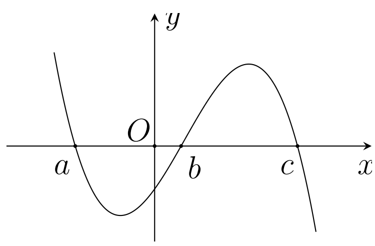
A $l = 10a$. (B) $l = 12a$. (C) $l = 100a$. (D) $l = 14a$.

Lời giải.

$l = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 10a$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5.



Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, biết $f(c) < 0$. Hỏi đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại nhiều nhất bao nhiêu điểm?

(A) 3. (B) 1. (C) 0. **D** 2.

Lời giải.

Từ giả thiết bài toán ta suy ra được bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ có dạng

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$	$-\infty$

Do $f(c) < 0$ nên từ bảng biến thiên trên suy ra đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại nhiều nhất là 2 điểm. (trường hợp $f(a) > 0 > f(c)$).

Chọn đáp án D ☐

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $2x - 2z - 5 = 0$. Tìm tọa độ điểm A nằm trên tia Oz sao cho khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) bằng $2\sqrt{2}$.

A. $A\left(0; 0; \dfrac{13}{2}\right)$.

B. $A\left(0; 0; \dfrac{3}{2}\right)$.

C. $A\left(0; 0; \dfrac{3}{2}\right)$ hoặc $A\left(0; 0; \dfrac{-13}{2}\right)$.

D. $A\left(0; 0; \dfrac{-13}{2}\right)$.

Lời giải.

Giả sử $A(0; 0; a) \in Oz$, ta có

$$\begin{aligned} & \mathrm{d}(A; (P)) = 2\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{|-2a-5|}{\sqrt{8}} = 2\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} -2a-5=8 \\ -2a-5=-8 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{-13}{2} \\ a=\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \\ \Rightarrow\ & \left[\begin{array}{l} A\left(0;0;\dfrac{-13}{2}\right) \\ A\left(0;0;\dfrac{3}{2}\right) \end{array}\right. . \end{aligned}$$

Chọn đáp án C ☐

Câu 7. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x$ và $y = x^2$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là

A. $\dfrac{2\pi}{15}$.

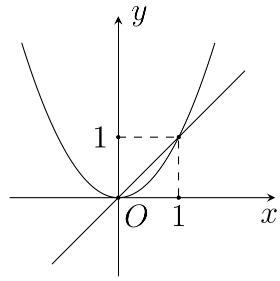
B. $\dfrac{3\pi}{25}$.

C. $\dfrac{\pi}{30}$.

D. $\dfrac{\pi}{6}$.

Lời giải.

Xét phương trình $x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$



Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là

$V = \pi \int\limits_0^1 \left(x^2 - x^4\right) \mathrm{d}x = \pi \left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \dfrac{2\pi}{15}.$

Chọn đáp án A □

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-6}{2} = \dfrac{z-1}{1}$ và $d_2\colon \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2 \end{cases}$. Đường thẳng Δ đi qua $A(0;1;1)$, vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình là

A $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-1}{1}$. **B** $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z+1}{4}$.

C $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1}{-5} = \dfrac{z-1}{1}$. **D** $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-1}{4}$.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (-2;2;1)$.

Gọi B là giao điểm của Δ và d_2, nên $B(t;-t;2)$, suy ra $\overrightarrow{AB} = (t;-t-1;1)$.

Do Δ vuông góc với d_1 nên $\overrightarrow{AB} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -2t + 2(-t-1) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{4}$.

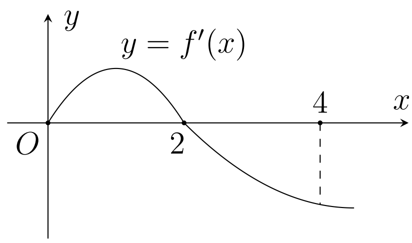
Do đó $\overrightarrow{AB}\left(-\dfrac{1}{4}; -\dfrac{3}{4}; 1\right)$, suy ra Δ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{a}\,(-1;-3;4)$.

Vậy phương trình Δ là: $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-1}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 9.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Giá trị nhỏ nhất m, giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$ là



A $m = f(4)$, $M = f(1)$. **B** $m = f(4)$, $M = f(2)$.

C $m = f(1)$, $M = f(2)$. **D** $m = f(0)$, $M = f(2)$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	0		2		4
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$f(4)$

Từ bảng biến thiên ta thấy $M = f(2)$.

Mặt khác, từ bảng biến thiên ta có $\begin{cases} f(1) < f(2) \\ f(3) < f(2) \end{cases} \Rightarrow f(1) + f(3) < 2f(2)$.

Do đó $f(4) = f(0) + f(1) + f(3) - 2f(2) < f(0) + f(2) + f(2) - 2f(2) = f(0) \Rightarrow m = f(4)$.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P), biết (P) tiếp xúc mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2x - 22 = 0$ tại điểm $M(4; -3; 1)$.

A. $3x - 4y - 7 = 0$.
B. $4x - 3y + z - 26 = 0$.
C. $4x - 3y + z - 8 = 0$.
D. $3x - 4y - 24 = 0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 1; 1)$ và bán kính $r = 5$.

Vì (P) tiếp xúc mặt cầu (S) tại điểm $M(4; -3; 1)$ nên $(P) \perp IM \Rightarrow (P)$ nhận $\overrightarrow{IM} = (3; -4; 0)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

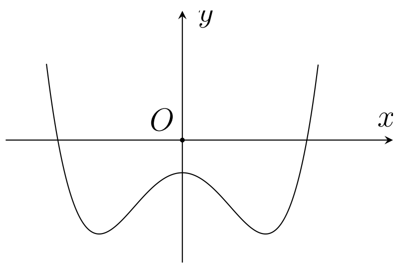
Vậy phương trình của (P) là $3x - 4y - 24 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 11.

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$.
B. $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$.
C. $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$.
D. $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$.



Lời giải.

Từ đồ thị ta suy ra $a > 0$.

Cho $x = 0 \Rightarrow y = c < 0$.

Vì đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $ab < 0 \Rightarrow b < 0$ (do $a > 0$).

Chọn đáp án A □

Câu 12. Trong khai triển nhị thức $(a+2)^{n+6}$, với n là số tự nhiên và $a \neq 0$, có tất cả 17 số hạng. Vậy n bằng

A. 11.
B. 10.
C. 12.
D. 17.

Lời giải.

Ta có, trong khai triển nhị thức $(a+2)^{n+6}$ có $(n+6)+1$ hạng tử.

Theo giả thiết, $(n+6)+1 = 17 \Leftrightarrow n = 10$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Cho hàm số $y = (m+1)x^4 - (m-1)x^2 + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số có một điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu?

(A) 1. (B) 2. (C) 3. **D** 0.

Lời giải.

- Với $m = -1$ hàm số có dạng: $y = 2x^2 + 1$.
  $y' = 2x$; $y'' = 2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
  $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
  Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0 \Rightarrow m = -1$ (loại).
- Với $m \neq -1$ để hàm số có một cực đại không có cực tiểu thì

$$\begin{cases} -(m+1)(m-1) \geq 0 \\ m+1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 1 \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Cho hàm số $y = \sqrt{3}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)$ với $\dfrac{\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{7\pi}{6}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đó.

A $-\sqrt{3}$. (B) -2. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

$y = \sqrt{3}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)$.

$\Rightarrow y' = \sqrt{3}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)$.

$$\begin{aligned} y' = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vì $\dfrac{\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{7\pi}{6} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$.

Ta có: $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2$, $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$, $y\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là: $y\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x-1}$ là

(A) 1. **B** 3. (C) 0. (D) 2.

Lời giải.

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x \leq -2 \\ x \geq 0;\ x \neq 1. \end{array}\right.$

Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x-1} = -1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x-1} = 1$ nên đồ thị có 2 đường tiệm cận ngang $y = \pm 1$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x-1} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x-1} = -\infty$ nên $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln\left(x + \dfrac{1}{x-1} + m\right)$ xác định với mọi x thuộc khoảng $(1; +\infty)$.

A $m \leq -3$. **B** $m \geq -3$. **C** $m > -3$. **D** $m < -3$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $x + \dfrac{1}{x-1} + m > 0$ với mọi $x \in (1; +\infty)$.

Suy ra $x + \dfrac{1}{x-1} > -m$ với mọi $x \in (1; +\infty)$.

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có $x + \dfrac{1}{x-1} = x - 1 + \dfrac{1}{x-1} + 1 \geq 3$ với $x > 1$.

Dấu "="xảy ra khi $x - 1 = \dfrac{1}{x-1} \Rightarrow x = 2$ (thỏa mãn).

Từ đó $3 > -m \Leftrightarrow m > -3$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4; 4]$. Khi đó $M - m$ nhận kết quả nào sau đây?

A $M - m = 1$. **B** $M - m = 86$. **C** $M - m = 76$. **D** $M - m = 81$.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 6x - 9$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \in [-4; 4] \\ x = 3 \in [-4; 4] \end{array}\right.$.

$y(-1) = 40$, $y(3) = 8$, $y(-4) = -41$, $y(4) = 15$.

$\Rightarrow M = 40$, $m = -41$.

Vậy $M - m = 81$.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{4x} \leq \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2-x}$ là

A $\left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right]$. **B** $\left(-\infty; \dfrac{2}{5}\right]$. **C** $\left(\dfrac{2}{5}; +\infty\right]$. **D** $\left[-\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải.

$$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{4x} \leq \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-4x} \leq \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow -4x \leq 2 - x \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{2}{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 19. Tích phân $I = \displaystyle\int_1^{2^{1000}} \dfrac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x}\,\mathrm{d}x$ bằng

A $I = 2^{1000} + \ln\left[2^{996}\left(1 + 2^{1000}\right)^2\right]$. **B** $I = 2^{1000} - 1 + \ln\left[2^{996}\left(1 + 2^{1000}\right)^2\right]$.

C $I = 2^{1000} - 1 + \ln\left[2^{998}\left(1 + 2^{1000}\right)^2\right]$. **D** $I = 2^{1000} - 1 + \ln\left[2^{1998}\left(1 + 2^{1000}\right)^2\right]$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_1^{2^{1000}} \frac{x^2+4x+1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_1^{2^{1000}} \frac{(x^2+x)+(2x+1)+x}{x^2+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_1^{2^{1000}} \left(1+\frac{2x+1}{x^2+x}+\frac{x}{x^2+x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_1^{2^{1000}} \mathrm{d}x + \int\limits_1^{2^{1000}} \frac{2x+1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^{2^{1000}} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= x\Big|_1^{2^{1000}} + \int\limits_1^{2^{1000}} \frac{\mathrm{d}\left(x^2+x\right)}{x^2+x} + \ln|x+1|\Big|_1^{2^{1000}} \\
&= 2^{1000}-1+\ln\left|x^2+x\right|\Big|_1^{2^{1000}} + \ln\left(2^{1000}+1\right)-\ln 2 \\
&= 2^{1000}-1+\left(\ln|x|+\ln|x+1|\right)\Big|_1^{2^{1000}} + \ln\left(2^{1000}+1\right)-\ln 2 \\
&= 2^{1000}-1+\ln 2^{1000}+\ln\left(2^{1000}+1\right)-\ln 2+\ln\left(2^{1000}+1\right)-\ln 2 \\
&= 2^{1000}-1+\ln 2^{1000}-2\ln 2+2\ln\left(2^{1000}+1\right) \\
&= 2^{1000}-1+\left(\ln 2^{1000}-\ln 2^2\right)+\ln\left(2^{1000}+1\right)^2 \\
&= 2^{1000}-1+\ln 2^{998}+\ln\left(2^{1000}+1\right)^2 \\
&= 2^{1000}-1+\ln\left[2^{998}\left(2^{1000}+1\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 20. Sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = Ae^{Nr}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Theo số liệu từ tổng cục thống kê, dân số Việt Nam năm 2015 là 91,7 triệu người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm của Việt Nam trong giai đoạn $2015-2030$ ở mức không đổi là 1,1%. Hãy ước tính dân số Việt Nam năm 2030 (kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân).

- **A** 109,35 triệu người.
- **B** 105,97 triệu người.
- **C** 477,48 triệu người.
- **D** 108,15 triệu người.

Lời giải.

$S = Ae^{Nr} \Rightarrow S = 91{,}7\cdot e^{15\cdot 1{,}1\%} = 108{,}15$ triệu người.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Trong mặt phẳng tọa độ, tập hợp các điểm biểu diễn cho số z thỏa mãn $|(1+2i)z-10| = |(2+i)\overline{z}+5|$ là

- **A** hai đường thẳng cắt nhau.
- **B** hai đường thẳng song song.
- **C** một đường thẳng.
- **D** một đường tròn.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.
Ta có

$$\begin{aligned}
& |(1+2i)z - 10| = |(2+i)\overline{z} + 5| \\
\Leftrightarrow\ & |(1+2i)(x+yi) - 10| = |(2+i)(x-yi) + 5| \\
\Leftrightarrow\ & |x - 2y - 10 + (2x+y)i| = |(2x+y) + (x-2y+5)i| \\
\Leftrightarrow\ & (x-2y-10)^2 + (2x+y)^2 = (2x+y)^2 + (x-2y+5)^2 \\
\Leftrightarrow\ & 2x - 4y - 5 = 0.
\end{aligned}$$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn cho số z là đường thẳng $2x - 4y - 5 = 0$.
Chọn đáp án C □

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0;2;1)$ và $B(-1;4;2)$ cắt mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 - 2x + 8y + 6z - 3 = 0$ theo một đường tròn (C) có bán kính lớn nhất.

A $(P)\colon 2x + 3y + 4z - 10 = 0$.
B $(P)\colon 2x + 5y - 4z - 6 = 0$.
C $(P)\colon 2x + 3y - 4z - 2 = 0$.
D $(P)\colon 2x - 3y - 4z + 10 = 0$.

Lời giải.
(P) cắt (S) theo một đường tròn có bán kính lớn nhất nên (P) đi qua tâm $I(1;-4;-3)$ của (S).
$\Rightarrow (P)$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}\right]$.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;2;1)$, $\overrightarrow{AI} = (1;-6;-4) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}\right] = (-2;-3;4)$.
$\Rightarrow (P)\colon -2(x-0) - 3(y-2) + 4(z-1) = 0 \Leftrightarrow (P)\colon 2x + 3y - 4z - 2 = 0$.
Chọn đáp án C □

Câu 23. Cho tích phân $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{f(\ln x^3)}{2x}\,\mathrm{d}x$.

A $\dfrac{3}{2}$.
B 9.
C $\dfrac{1}{6}$.
D 6.

Lời giải.
Đặt $t = \ln x^3 \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x^3} \cdot 3x^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{3}{x}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{2x} = \dfrac{1}{6}\,\mathrm{d}t$.

$\Rightarrow I = \dfrac{1}{6}\displaystyle\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{6}\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{6} \cdot 1 = \dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm M biểu diễn cho số phức z thỏa mãn $(1-i)z + (2-i)^2 = 5 - 4i$ là

A $M(1;1)$.
B $M(1;2)$.
C $M(1;-1)$.
D $M(-1;1)$.

Lời giải.
Ta có $z = \dfrac{5 - 4i - (2-i)^2}{1-i} = 1 + i \Rightarrow M = (1;1)$.
Chọn đáp án A □

Câu 25. Diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của 2 hàm số $y = |x^2 - 4|$ và $y = \dfrac{x^2}{2} + 4$ là

(A) $S=\dfrac{32}{3}$. (B) $S=16$. (C) $S=\dfrac{64}{3}$. (D) $S=8$.

Lời giải.

$$|x^2-4|=\frac{x^2}{2}+4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-4\ge 0\\ x^2-4=\dfrac{x^2}{2}+4\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-4<0\\ -\left(x^2-4\right)=\dfrac{x^2}{2}+4\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-4\ge 0\\ x^2=16\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-4<0\\ 3x^2=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\ x=-4\\ x=0.\end{array}\right.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}S &= \int\limits_{-4}^{0}\left||x^2-4|-\left(\frac{x^2}{2}+4\right)\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{4}\left||x^2-4|-\left(\frac{x^2}{2}+4\right)\right|\mathrm{d}x\\ &= \left|\int\limits_{-4}^{-2}\left(\frac{x^2}{2}-8\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{-2}^{0}\frac{-3x^2}{2}\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{0}^{2}\frac{-3x^2}{2}\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{2}^{4}\left(\frac{x^2}{2}-8\right)\mathrm{d}x\right|\\ &= \left|\left(\frac{x^3}{6}-8x\right)\Big|_{-4}^{-2}\right|+\left|\frac{-x^3}{2}\Big|_{-2}^{0}\right|+\left|\frac{-x^3}{2}\Big|_{0}^{2}\right|+\left|\left(\frac{x^3}{6}-8x\right)\Big|_{2}^{4}\right|\\ &= \frac{20}{3}+4+4+\frac{20}{3}\\ &= \frac{64}{3}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $m_0\in(-15;-7)$. (B) $m_0\in(-1;7)$. (C) $m_0\in(7;10)$. (D) $m_0\in(-7;-1)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6x+m$, cho $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x+m=0$.

Hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thì $\Delta'>0\Leftrightarrow 9-3m>0\Leftrightarrow m<3$.

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2\\ x_1x_2=\dfrac{m}{3}.\end{cases}$

Ta có $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=13\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-3x_1x_2-13=0\Rightarrow 4-m=13\Leftrightarrow m=-9$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Cho một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=a\cos^4 x-b\cos x$ với a, $b\in\mathbb{R}$ biết rằng $F(0)=F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{3\pi}{16}$. **B** $\cos\left(\dfrac{b}{a}\right) \approx 0{,}83$. (C) $ab < 0$. (D) $\cos\left(\dfrac{a}{b}\right) = 0{,}45$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= a\cos^4 x - b\cos x \\ &= a\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 - b\cos x \\ &= \frac{a}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) - b\cos x \\ &= \frac{a}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) - b\cos x. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \left(\frac{a}{4} + \frac{a}{2}\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{8} - b\cos x\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{3a}{8}x + \frac{a}{4}\sin 2x + \frac{a}{32}\sin 4x - b\sin x + C. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} &\begin{cases} F(0) = 0 \\ F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ \dfrac{3a\pi}{16} - b = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow\ & \frac{3a\pi}{16} - b = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{3\pi}{16} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{a}{b} = \frac{16}{3\pi} \Rightarrow \cos\left(\frac{b}{a}\right) \approx 0{,}83. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Phương trình $(2x^2 - x)^{4x^2-9x+2} = 1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

(A) 1. **B** 4. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

- $2x^2 - x = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow 1 = 1$ (luôn đúng).
- $4x^2 - 9x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Rightarrow 1 = 1$ (luôn đúng).

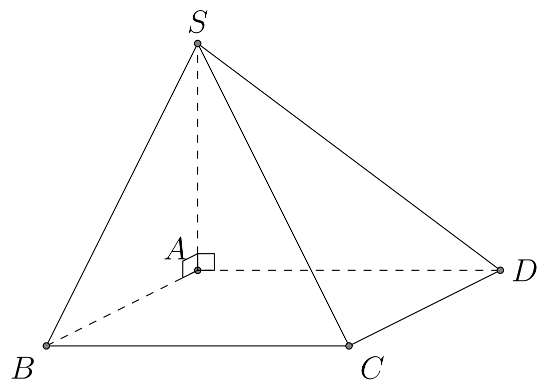
Vậy phương trình có 4 nghiệm thực phân biệt.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, biết $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy một góc 60°. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

(A) $V = 3a^3$. (B) $V = \dfrac{a^3}{3}$. (C) $V = \dfrac{\sqrt{3a^3}}{3}$. **D** $V = a^3$.

Lời giải.



Ta có $(SBC) \cap (ABCD) = BC$.

Mặt khác: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

$\Rightarrow ((SBC),(ABCD)) = (AB, SB) = \widehat{SBA} = 60^\circ$.

$\tan \widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} \Rightarrow SA = a\sqrt{3}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} = a^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Tỉ số giữa thể tích khối lập phương và khối cầu ngoại tiếp khối lập phương đó là

A $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{3}$. B $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\pi}$. C $\dfrac{3\pi}{2\sqrt{3}}$. D $\dfrac{3}{\pi\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối lập phương cạnh a và khối cầu ngoại tiếp hình lập phương đó.

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{a^3}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3} = \frac{2\sqrt{3}}{3\pi}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho hàm số $y = \dfrac{2mx-8}{x-1}$. Tìm tất cả giá trị của m để đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho cùng hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A Có một giá trị của m thuộc đoạn $[3; 5]$.

B Không tìm được m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

C Có một giá trị của m thuộc đoạn $[-5; -3]$.

D Tổng các giá trị tìm được của m bằng 0.

Lời giải.

Điều kiện: $-2m + 8 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 4$.

Tiệm cận ngang: $y = 2m$, tiệm cận đứng: $x = 1$.

Hình chữ nhật tạo bởi hai đường tiệm cận và hai trục tọa độ có kích thước là 1 và $2|m|$.

Suy ra, diện tích hình chữ nhật là: $2|m| = 8 \Leftrightarrow m = \pm 4$.

Kết hợp điều kiện, ta có: $m = -4 \in [-5; -3]$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm $A(0; 1; 2)$, $B(1; 3; 4)$ là

A $d\colon \begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. B $d\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 4 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Ⓒ $d\colon \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$ Ⓓ $d\colon \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 + 2t \\ z = 4 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 2)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

d đi qua điểm $B(1; 3; 4)$, nên có phương trình là: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 4 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Chọn đáp án B □

Câu 33. Gọi d là giá trị nhỏ nhất của mô-đun số phức z thỏa mãn $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| = 2$. Khẳng định nào sao đây là đúng?

Ⓐ $d \in \left(2; \dfrac{5}{2}\right)$. Ⓑ $d \in (1; 2)$. Ⓒ $d \in \left(\dfrac{5}{2}; 3\right)$. **D** $d \in (0; 1)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
& \left|z + \frac{1}{z}\right| = 2 \Leftrightarrow \left|z + \frac{1}{z}\right|^2 = 4 \\
\Leftrightarrow\ & \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right) = 4 \\
\Leftrightarrow\ & |z|^2 + \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} + \frac{1}{|z|^2} = 4 \\
\Leftrightarrow\ & |z|^2 + \frac{z^2 + \bar{z}^2}{|z|^2} + \frac{1}{|z|^2} = 4 \\
\Leftrightarrow\ & |z|^2 + \frac{(z + \bar{z})^2 - 2|z|^2}{|z|^2} + \frac{1}{|z|^2} = 4 \\
\Leftrightarrow\ & |z|^4 - 6|z|^2 + 1 = -(z + \bar{z})^2 \leq 0 \\
\Rightarrow\ & 3 - 2\sqrt{2} \leq |z|^2 \leq 3 + 2\sqrt{2} \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{2} - 1 \leq |z| \leq \sqrt{2} + 1.
\end{aligned}$$

$|z| = \sqrt{2} - 1$ khi $\begin{cases} z = -\bar{z} \\ |z| = \sqrt{2} - 1. \end{cases}$

Vậy $d = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow d \in (0; 1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

(I) Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

(II) Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

(III) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Ⓐ Chỉ (II). **B** Chỉ (I) và (III). Ⓒ Chỉ (II) và (III). Ⓓ Chỉ (I).

Lời giải.

Hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ có tập xác định $[0; +\infty) \setminus \{1\}$.

Vậy hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x=1 \Rightarrow (I)$ đúng.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow (III)$ đúng.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Có tất cả 120 cách chọn 3 học sinh từ nhóm n học sinh. Số n là nghiệm của phương trình nào sau đây?

A $n(n-1)(n-2)=720$.

B $n(n+1)(n+2)=720$.

C $n(n-1)(n-2)=120$.

D $n(n+1)(n+2)=120$.

Lời giải.

Chọn 3 học sinh từ nhóm n học sinh có $\mathrm{C}_n^3 = \dfrac{n!}{(n-3)!3!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}$ cách chọn.

Do đó $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!} = 120 \Leftrightarrow n(n-1)(n-2)=720$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;-1;3)$ và $B(2;-5;1)$, điểm M thỏa mãn $MA=2MB$. Khi đó M sẽ thuộc mặt cầu nào sau đây?

A $\left(x+\dfrac{10}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{19}{3}\right)^2+\left(z+\dfrac{1}{3}\right)^2=16$.

B $x^2+(y+3)^2+(z-2)^2=9$.

C $\left(x-\dfrac{10}{3}\right)^2+\left(y+\dfrac{19}{3}\right)^2+\left(z-\dfrac{1}{3}\right)^2=16$.

D $x^2+(y-3)^2+(z+2)^2=9$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y;z)$.

Ta có

$$\begin{aligned}
& MA=2MB \Leftrightarrow MA^2=4MB^2\\
\Leftrightarrow\ & (x+2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2 = 4\left[(x-2)^2+(y+5)^2+(z-1)^2\right]\\
\Leftrightarrow\ & x^2+y^2+z^2-\frac{20}{3}x+\frac{38}{3}y-\frac{2}{3}z+\frac{106}{3}=0\\
\Leftrightarrow\ & \left(x-\frac{10}{3}\right)^2+\left(y+\frac{19}{3}\right)^2+\left(z-\frac{1}{3}\right)^2=16.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 37. Trong các hàm số sau hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $y=\sqrt{x^2-3x+2}$. **B** $y=x^4+x^2+1$. **C** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **D** $y=x^3+5x+13$.

Lời giải.

Hàm số $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ có tập xác định là $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

Hàm số $y=x^4+x^2+1$ là hàm số bậc bốn trùng phương.

Hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ có tập xác định là $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Các hàm số trên đều không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Đồng thời với $y=x^3+5x+13$ thì $y'=3x^2+5>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số này đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (D) □

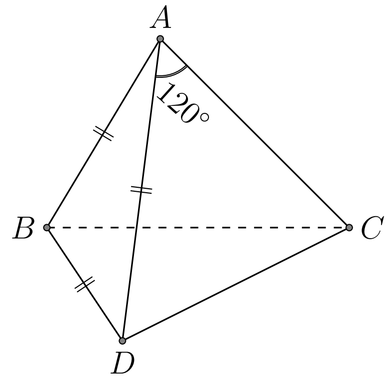
Câu 38. Cho tứ diện $ABCD$ biết $AB = AD = BD = a$, $AC = 2a$ và $\widehat{CAD} = 120^\circ$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

(A) $\dfrac{1}{2}a^2$. (B) $\dfrac{3}{2}a^2$. (C) $\dfrac{-1}{2}a^2$. **D** $\dfrac{-3}{2}a^2$.

Lời giải.

Theo giả thiết tam giác ABD là tam giác đều.

Ta có



$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} &= \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{AD}\\ &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}\\ &= AC \cdot AD \cdot \cos 120^\circ - AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ\\ &= \frac{-3}{2}a^2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Người ta cần làm một cái bồn chứa dạng hình trụ (có hai nắp) có thể tích $1000l$ để chứa nước. Tính bán kính đáy R (đơn vị mét) của cái bồn hình trụ đó sao cho ít tốn vật liệu nhất.

(A) $R = \sqrt[3]{\dfrac{1}{\pi}}(m)$. **B** $R = 10.\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}(m)$. (C) $R = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}(m)$. (D) $R = \sqrt[3]{\dfrac{2}{\pi}}(m)$.

Lời giải.

Gọi h là chiều cao của cái bồn hình trụ.

Ta có: $V = \pi R^2 h = 1000 \Leftrightarrow h = \dfrac{1000}{\pi R^2}$.

$S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R \cdot \dfrac{1000}{\pi R^2 + 2\pi R^2} = 2\pi\left(\dfrac{1000}{\pi R} + R^2\right) = 2\pi\left(\dfrac{500}{\pi R} + \dfrac{500}{\pi R} + R^2\right) \geq 6\pi\sqrt[3]{\dfrac{500^2}{\pi^2}}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{500}{\pi R} = R^2 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}} = 10.\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$.

Chọn đáp án (B) □

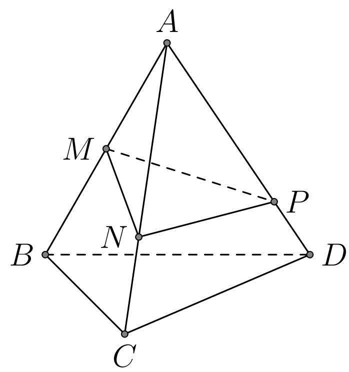
Câu 40. Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AB, AC, AD sao cho $MA = MB$, $NA = 2NC$, $PA = 3PD$. Biết thể tích khối tứ diện $AMNP$ bằng V thì khối tứ diện $ABCD$ tính theo V có giá trị là

A $4V$. (B) $6V$. (C) $12V$. (D) $8V$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{V_{AMNP}}{V_{ABCD}} = \dfrac{AM}{AB} \cdot \dfrac{AN}{AC} \cdot \dfrac{AP}{AD} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$.

$\Rightarrow V_{ABCD} = 4V_{AMNP} = 4V$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Cho hàm số f xác định, liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đạo hàm của f cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Giả sử $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{735}{1024}$, $f(1) = 2$, $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{17}{64}$. Tính $I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} (\sin 4x + 2\sin 2x) f'(\cos^2 x)\,\mathrm{d}x$.

A $\dfrac{1245}{1024}$. **B** $\dfrac{1245}{128}$. **C** $\dfrac{1245}{256}$. **D** $\dfrac{1245}{512}$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} 2\sin 2x(\cos 2x + 1) f'(\cos^2 x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} 4\sin 2x \cos^2 x f'(\cos^2 x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \cos^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin 2x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t = \dfrac{1}{4}$; $x = 0 \Rightarrow t = 1$.

$$I = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} t f'(t)\,\mathrm{d}t = t f(t)\Big|_{\frac{1}{4}}^{1} - \int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{17}{64} - \frac{735}{1024} = \frac{1245}{1024}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho $i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 2018i^{2018} = a + bi$ với a, $b \in \mathbb{R}$ và i là đơn vị ảo. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $a = -1010$. **B** $a = -1009$. **C** $a = 1010$. **D** $a = 1009$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2018}$.

$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + 2018x^{2017}$.

$\Rightarrow x f'(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + 2018x^{2018}$ (1)

Mặt khác: $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2018} = \dfrac{x^{2019} - 1}{x - 1}$.

$f'(x) = \left(\dfrac{x^{2019} - 1}{x - 1}\right)' = \dfrac{2019x^{2018}(x-1) - (x^{2019} - 1)}{(x-1)^2}$.

$\Rightarrow x f'(x) = x\dfrac{2019x^{2018}(x-1) - (x^{2019} - 1)}{(x-1)^2}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + 2018x^{2018} = x\dfrac{2019x^{2018}(x-1) - (x^{2019} - 1)}{(x-1)^2}$ (3)

Thay $x = i$ vào (3) ta được

$$i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 2018i^{2018} = i.\frac{2019i^{2018}(i-1) - (i^{2019} - 1)}{(i-1)^2} = -1010 + 1009i.$$

Vậy $a = -1010$.

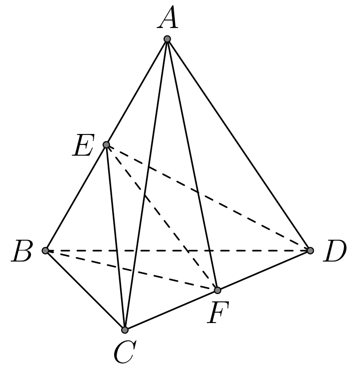
Chọn đáp án A □

Câu 43. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a > 0$, $AC = BD = b > 0$, $AD = BC = c > 0$. Các biểu thức $a^2 + b^2 - c^2$, $a^2 + c^2 - b^2$, $c^2 + b^2 - a^2$ đều có giá trị dương. Khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A $d = \sqrt{\dfrac{b^2 + c^2 + a^2}{2}}$. **B** $d = \sqrt{\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2}}$.

C $d=\sqrt{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}}$. **D** $d=\sqrt{\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2}}$.

Lời giải.



Gọi E, F lần lượt là trung điểm cảu AB và CD.

Dễ chứng minh được các tam giác CED cân tại E và tam giác AFB cân tại F.

Suy ra EF là đoạn vuông góc chung của AB và CD. Vậy d $= EF$.

Trong tam giác ABC trung tuyến $CE^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}$.

Trong tam giác CFE vuông tại F có:

$FE=\sqrt{CE^2-CF^2}=\sqrt{\left(\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}\right)-\dfrac{a^2}{4}}$.

Suy ra $d=EF=\sqrt{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho phương trình $\cos x\cdot\cos 7x=\cos 3x\cdot\cos 5x$. Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình đã cho?

A $\sin 2x=0$. **B** $\sin 4x=0$. **C** $\cos 4x=0$. **D** $\cos 2x=0$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
&\cos x\cdot\cos 7x=\cos 3x\cdot\cos 5x\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}(\cos 8x+\cos 6x)=\frac{1}{2}(\cos 8x+\cos 2x)\\
\Leftrightarrow\ &\cos 6x-\cos 2x=0\\
\Leftrightarrow\ &-2\sin 4x\cdot\sin 2x=0\\
\Leftrightarrow\ &\sin 4x=0.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 45. Gọi $Đ$, M, C lần lượt là tổng số đỉnh, tổng số mặt và tổng số cạnh của một hình lăng trụ tam giác. Biểu thức $Đ+C-3M$ có giá trị bằng

A 3. **B** 1. **C** 2. **D** 0.

Lời giải.

Ta có hình lăng trụ tam giác có tổng số đỉnh là 6, tổng số mặt là 5 và tổng số cạnh là 9.

Do đó $Đ+C-3M=6+9-3\cdot 5=0$.

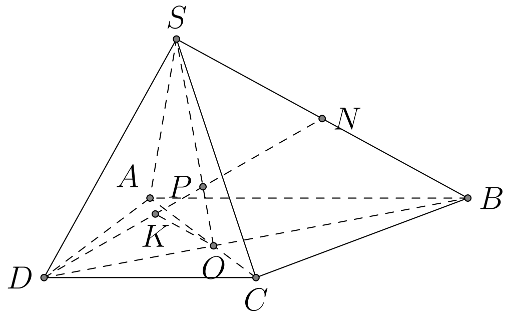
Chọn đáp án D □

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Biết $AB\parallel CD$ và $AB=\dfrac{3}{2}CD$. Gọi N là trung điểm cạnh SB và P là giao điểm của đường thẳng DN với mặt phẳng (SAC). Tính tỉ số $\dfrac{PO}{PS}$.

A $\dfrac{2}{5}$. **B** $\dfrac{3}{7}$. **C** $\dfrac{2}{7}$. **D** $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

Dựng $OK \parallel SB$, $K \in DN$.
Suy ra $\dfrac{PO}{PS} = \dfrac{OK}{SN} = \dfrac{OK}{NB} = \dfrac{DO}{DB}$.
Mà $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{OB}{OD} = \dfrac{3}{2}$.
Suy ra $\dfrac{PO}{PS} = \dfrac{2}{5}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;5)$, $B(m;2;7)$. Tìm tất cả các giá trị của m để độ dài đoạn $AB = 7$.

(A) $m = 9$ hoặc $m = -3$.
(B) $m = -3$ hoặc $m = -9$.
(C) $m = 9$ hoặc $m = 3$.
(D) $m = 3$ hoặc $m = -3$.

Lời giải.

$$AB = 7 \Leftrightarrow \sqrt{(m-3)^2 + 3^2 + 2^2} = 7 \Leftrightarrow (m-3)^2 = 36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-3 = 6 \\ m-3 = -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 9 \\ m = -3. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Giải bất phương trình $\log_3 \dfrac{5x+1}{(x-1)^2} \geq 3x^2 - 11x + 3$ ta được tập nghiệm S. Biết rằng S có dạng $[a;b]\backslash\{1\}$. Hãy tính $T = (a+b) - ab$.

(A) $\dfrac{23}{3}$.
(B) $\dfrac{11}{3}$.
(C) 3.
(D) $\dfrac{10}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x > -\dfrac{1}{5} \\ x \neq 1 \end{cases}$.

$$\begin{aligned}
& \log_3 \frac{5x+1}{(x-1)^2} \geq 3x^2 - 11x + 3 \\
\Leftrightarrow\ & \log_3(5x+1) - \log_3(x-1) \geq 3(x-1)^2 - (5x+1) + 1 \\
\Leftrightarrow\ & \log_3(5x+1) + (5x+1) \geq \log_3(x-1)^2 + 3(x-1)^2 + \log_3 3 \\
\Leftrightarrow\ & \log_3(5x+1) + (5x+1) \geq \log_3\left[3(x-1)^2\right] + 3(x-1)^2 \\
\Leftrightarrow\ & f(5x+1) \geq f\left[3(x-1)^2\right].
\end{aligned}$$

Xét hàm $f(t) = \log_3 t + t$, tới $t > 0$.
$f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 3} + 1 > 0$, với $\forall t > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.
Nên

$$\begin{aligned}
& f(5x+1) \geq f\left[3(x-1)^2\right] \\
\Leftrightarrow\ & 5x+1 > 3(x-1)^2 \\
\Leftrightarrow\ & 3x^2 - 11x + 2 \leq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{11-\sqrt{97}}{6} \leq x \leq \frac{11+\sqrt{97}}{6}.
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $\left[\dfrac{11-\sqrt{97}}{6};\dfrac{11+\sqrt{97}}{6}\right]\backslash\{1\}$.

Vậy $T=(a+b)-ab=3$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon z-1=0$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A $(\alpha) \mathbin{/\!/} (Oxy)$. **B** $(\alpha)\perp Oy$. **C** $(\alpha) \mathbin{/\!/} Ox$. **D** $(\alpha)\perp Oz$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(0;0;1)$.

Oy có véc-tơ chỉ phương $\vec{j}=(0;1;0)$.

Suy ra (α) không vuông góc với Oy.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Một hộp đựng 18 viên bi gồm 5 bi xanh, 3 bi vàng và 10 bi đỏ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 9 viên bi có đủ cả 3 màu?

A 42890. **B** 42910. **C** 42892. **D** 42912.

Lời giải.

$n(\Omega)=\mathrm{C}_{18}^{9}=48620$ cách.

Gọi biến cố A: “9 viên bi có đủ cả 3 màu”.

Suy ra biến cố $\overline{A}$: “9 viên bi không có đủ cả 3 màu”.

Trường hợp 1: chọn 9 viên bi màu xanh hoặc màu đỏ có $\mathrm{C}_{15}^{9}=5005$ cách.

Trường hợp 2: chọn 9 viên bi màu vàng hoặc màu đỏ có $\mathrm{C}_{13}^{9}=715$ cách.

Trong trường hợp 1 và 2 thì 9 viên bi màu đỏ chọn lặp lại hai lần nên

$$n(A)=48620-5005-715+\mathrm{C}_{10}^{9}=42910.$$

Chọn đáp án B □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

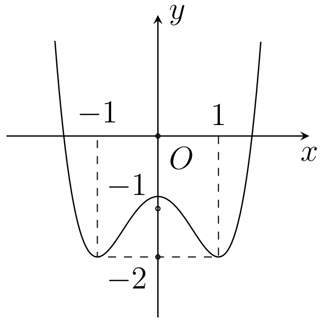
1. D	2. D	3. B	4. A	5. D	6. C	7. A	8. D	9. B	10. D
11. A	12. B	13. D	14. A	15. B	16. C	17. D	18. D	19. C	20. D
21. C	22. C	23. C	24. A	25. C	26. A	27. B	28. B	29. D	30. B
31. C	32. B	33. D	34. B	35. A	36. C	37. D	38. D	39. B	40. A
41. A	42. A	43. C	44. B	45. D	46. A	47. A	48. C	49. B	50. B

70 ĐỀ THI THỬ SỞ GIÁO DỤC BÌNH PHƯỚC NĂM 2017-2018 LẦN 2

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-\infty; -1)$. **B** $(-1; 1)$. **C** $(-\infty; 0)$. **D** $(0; +\infty)$.



Lời giải.
Từ đồ thị của hàm số ta có hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 2.
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

A Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

B Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -4$.

C Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

D Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

Lời giải.
Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.
Chọn đáp án C □

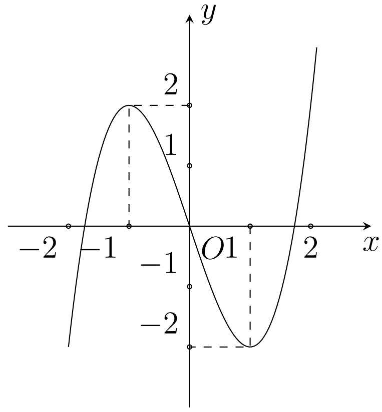
Câu 3. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{2x-1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.
Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x-1}{2x+1} = \dfrac{1}{2}$ và $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^+} \dfrac{x-1}{2x+1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^-} \dfrac{x-1}{2x+1} = +\infty$.
Do đó đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận $y = \dfrac{1}{2}$ và $x = -\dfrac{1}{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 4.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Khi đó $y = f(x)$ là hàm số nào sau đây?



A $y = x^3 - 3x$. **B** $y = -x^3 + 3x$.
C $y = x^3 + x^2 - 4$. **D** $y = x^3 - 3x + 1$.

Lời giải.

Vì đồ thị đi qua gốc tọa độ nên loại phương án $y = x^3 + x^2 - 4$ và $y = x^3 - 3x + 1$.

Từ hình dạng của đồ thị suy ra hệ số của x^3 phải dương nên loại thêm phương án $y = -x^3 + 3x$.

Vậy đồ thị trên là của hàm số $y = x^3 - 3x$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho $a, b, c > 0$ và $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$. **B** $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.
C $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$. **D** $\log_a(b + c) = \log_a b + \log_a c$.

Lời giải.

Các công thức $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$, $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$ là các tính chất của logarit nên đúng.

Công thức $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$ nên $\log_a(b + c) = \log_a b + \log_a c$ là sai.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Tập xác định của hàm số $y = (2x - 1)^{\sqrt{3}}$ là

A $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. **B** $\mathscr{D} = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **C** $\mathscr{D} = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$. **D** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Lời giải.

Hàm số $y = (2x - 1)^{\sqrt{3}}$ xác định khi $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A $\int 0 \, \mathrm{d}x = C$. **B** $\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C$.
C $\int x^a \, \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$. **D** $\int \mathrm{d}x = x + C$.

Lời giải.

Đáp án $\int x^a \, \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ không đúng với trường hợp $a = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos(2x + 3)$.

A $\int f(x) \, \mathrm{d}x = -\sin(2x + 3) + C$. **B** $\int f(x) \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sin(2x + 3) + C$.
C $\int f(x) \, \mathrm{d}x = \sin(2x + 3) + C$. **D** $\int f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin(2x + 3) + C$.

Lời giải.
$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x+3)+C$
Chọn đáp án D □

Câu 9. Giá trị nào của b để $\int\limits_1^b (2x-6)\,dx = 0$?

(A) $b=0$ hoặc $b=3$. (B) $b=0$ hoặc $b=1$. (C) $b=5$ hoặc $b=0$. (D) $b=1$ hoặc $b=5$.

Lời giải.
Ta có $\int\limits_1^b (2x-6)\,dx = (x^2-6x)\Big|_1^b = b^2-6b+5$.

Do đó $\int\limits_1^b (2x-6)\,dx = 0 \Leftrightarrow b^2-6b+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=5 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z=3+2i$.

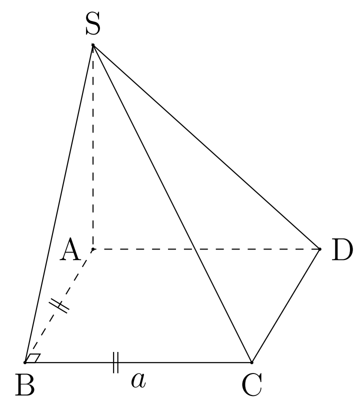
(A) Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng $-2i$.
(B) Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng -2.
(C) Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $2i$.
(D) Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2.

Lời giải.
Theo định nghĩa thì số phức $z=3+2i$ có phần thực và phần ảo tương ứng là 3 và 2.
Chọn đáp án D □

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

(A) $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (B) $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. (C) $V=a^3\sqrt{2}$. (D) $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



$V=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot a\sqrt{2}=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.
Chọn đáp án D □

Câu 12. Cho một hình trụ có bán kính đáy bằng R và có chiều cao bằng $R\sqrt{3}$. Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ lần lượt có giá trị là

Ⓐ $2\left(\sqrt{3}+1\right)\pi R^2$ và $2\sqrt{3}\pi R^2$.
B $2\sqrt{3}\pi R^2$ và $2\left(\sqrt{3}+1\right)\pi R^2$.
Ⓒ $2\sqrt{3}\pi R^2$ và $2\pi R^2$.
Ⓓ $2\sqrt{3}\pi R^2$ và $2\sqrt{3}\pi R^2 + R^2$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ $S_{\text{xq}} = 2\pi R \cdot R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi R^2$ (đvdt).

Diện tích toàn phần của hình trụ $S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + 2S_{\text{đáy}} = 2\sqrt{3}\pi R^2 + 2\pi R^2 = 2\left(\sqrt{3}+1\right)\pi R^2$ (đvdt).

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z-2=0$. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của (S).

A Tâm $I(-1;2;-3)$ và bán kính $R=4$.
Ⓑ Tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=4$.
Ⓒ Tâm $I(-1;2;3)$ và bán kính $R=4$.
Ⓓ Tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=16$.

Lời giải.

Ta có $(S)\colon (x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16$.

Do đó mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;-3)$ và bán kính $R=4$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x+4y+2z+4=0$ và điểm $A(1;-2;3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P).

Ⓐ $\mathrm{d}=\dfrac{5}{9}$.
Ⓑ $\mathrm{d}=\dfrac{5}{29}$.
C $\mathrm{d}=\dfrac{5}{\sqrt{29}}$.
Ⓓ $\mathrm{d}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}\left(A,(P)\right) = \dfrac{|3\cdot 1+4\cdot(-2)+2\cdot 3+4|}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=2-t \\ y=1+t \\ z=t. \end{cases}$ Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của d ?

Ⓐ $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$.
Ⓑ $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$.
Ⓒ $x-2=y=z+3$.
D $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;1;1)$ và đi qua điểm $M(2;1;0)$. Do đó phương trình chính tắc của d là $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 16. Một tổ có 6 học sinh nam và 9 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 6 học sinh đi lao động, trong đó có 2 học sinh nam?

Ⓐ $\mathrm{C}_6^2+\mathrm{C}_9^4$.
B $\mathrm{C}_6^2\cdot\mathrm{C}_9^4$.
Ⓒ $\mathrm{A}_6^2\cdot\mathrm{A}_9^4$.
Ⓓ $\mathrm{C}_9^2\cdot\mathrm{C}_6^4$.

Lời giải.

Chọn 4 học sinh nữ có C_9^4 cách, chọn 2 học sinh nam có C_6^2 cách.

Do đó có $\mathrm{C}_6^2\cdot\mathrm{C}_9^4$ cách chọn 6 học sinh đi lao động, trong đó có 2 học sinh nam.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 17. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A $1-4n$. **B** $\dfrac{n^3-3n}{n+1}$. **C** $\dfrac{n+1}{n^2}$. **D** $\dfrac{1-2n^3}{n^3+5n}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{n+1}{n^2} = \lim \left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right) = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $f(x)=m-1$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A $\left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>5. \end{array}\right.$ **B** $1<m<5$. **C** $m<1$. **D** $m>5$.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm thực phân biệt khi $\left[\begin{array}{l} m-1<0 \\ m-1>4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>5. \end{array}\right.$

Chọn đáp án A □

Câu 19. Gọi m là giá trị nhỏ nhất và M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=2x^3+3x^2-1$ trên đoạn $\left[-2;-\dfrac{1}{2}\right]$. Khi đó giá trị của $M-m$ bằng

A -5. **B** 1. **C** 4. **D** 5.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=6x^2+6x$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \notin \left[-2;-\dfrac{1}{2}\right] \\ x=-1 \in \left[-2;-\dfrac{1}{2}\right]. \end{array}\right.$

Do hàm số liên tục trên đoạn $\left[-2;-\dfrac{1}{2}\right]$ và có $f(-2)=-5$, $f(-1)=0$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $m=\min\limits_{\left[-2;-\frac{1}{2}\right]} f(x)=-5$, $M=\max\limits_{\left[-2;-\frac{1}{2}\right]} f(x)=0$ nên $M-m=5$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Cho hàm số $y=-x^2+5$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có tung độ $y_0=-1$, với hoành độ $x_0<0$ là kết quả nào sau đây?

A $y=2\sqrt{6}\left(x+\sqrt{6}\right)-1$. **B** $y=-2\sqrt{6}\left(x+\sqrt{6}\right)-1$.

C $y=2\sqrt{6}\left(x-\sqrt{6}\right)+1$. **D** $y=2\sqrt{6}\left(x-\sqrt{6}\right)-1$.

Lời giải.

Ta có $y_0 = -1 = -x_0^2 + 5 \Leftrightarrow x_0^2 = 6 \Leftrightarrow x_0 = \pm\sqrt{6}$. Do $x_0 < 0$ nên $x_0 = -\sqrt{6}$.
Lại có $y' = -2x$, suy ra tiếp tuyến cần tìm có hệ số góc là $k = y'\left(-\sqrt{6}\right) = 2\sqrt{6}$.
Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm tại điểm $\left(-\sqrt{6}; -1\right)$ là

$$y = 2\sqrt{6}\left(x + \sqrt{6}\right) - 1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 21. Giải bất phương trình $\log_2(3x-1) > 3$.

A $x > 3$. **B** $\dfrac{1}{3} < x < 3$. **C** $x < 3$. **D** $x > \dfrac{10}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(3x-1) > 3 \Leftrightarrow 3x - 1 > 2^3 \Leftrightarrow x > 3$.
Chọn đáp án A □

Câu 22. Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$.

A $S = 13$. **B** $S = \dfrac{81}{12}$. **C** $S = \dfrac{9}{4}$. **D** $S = \dfrac{37}{12}$.

Lời giải.

Ta có $x^3 - x = x - x^2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Vậy $S = \left|\displaystyle\int_{-2}^{0} \left(x^3 + x^2 - 2x\right)\, \mathrm{d}x\right| + \left|\displaystyle\int_{0}^{1} \left(x^3 + x^2 - 2x\right)\, \mathrm{d}x\right| = \dfrac{37}{12}$.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn $z^2 - 4z + 5 = 0$. Biểu thức $P = (z_1 - 1)^{2018} + (z_2 - 1)^{2018}$ có giá trị bằng

A 0. **B** 2^{2018}. **C** 2^{1009}. **D** 2.

Lời giải.

Ta thấy P là biểu thức có tính đối xứng với z_1 và z_2.
Ta có $\Delta' = -1 = i^2$. Do đó phương trình có hai nghiệm phức $z_1 = 2 - i$ và $z_2 = 2 + i$.
Khi đó

$$\begin{aligned} P &= (1-i)^{2018} + (1+i)^{2018} = \left[(1-i)^2\right]^{1009} + \left[(1+i)^2\right]^{1009} \\ &= (-2i)^{1009} + (2i)^{1009} = -2^{1009}i + 2^{1009}i = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 24. Một hình nón có cạnh bên bằng $2a$. Thiết diện qua trục của nó là một tam giác cân có góc ở đỉnh bằng 120°. Diện tích toàn phần của hình nón là

A $\pi^2\left(3 + \sqrt{3}\right)$. **B** $2\pi a^2\left(3 + \sqrt{3}\right)$. **C** $6\pi a^2$. **D** $\pi a^2\left(3 + 2\sqrt{3}\right)$.

Lời giải.

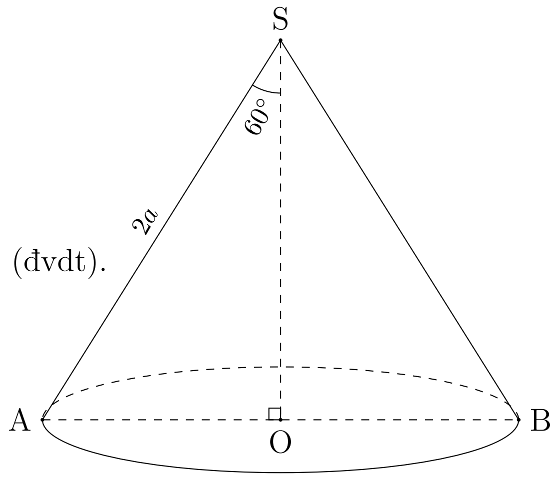
Gọi S là đỉnh, O là tâm của đáy, thiết diện qua trục là SAB.

Theo giả thiết ta có $SA = 2a$ và $\widehat{ASO} = 60^\circ$.

Trong tam giác SAO vuông tại O, ta có $OA = SA \sin 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Vậy diện tích toàn phần là

$$S_{\text{tp}} = \pi R\ell + \pi R^2 = \pi \cdot OA \cdot SA + \pi \cdot OA^2 = \pi a^2 \left(3 + 2\sqrt{3}\right) \text{ (đvdt)}.$$



Chọn đáp án D □

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(2; 1; -1)$, tiếp xúc với mặt phẳng tọa độ (Oyz). Phương trình của mặt cầu (S) là

A. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$.
B. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1$.
C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4$.
D. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 2$.

Lời giải.

Bán kính mặt cầu $R = \mathrm{d}\left(I, (Oyz)\right) = |x_I| = 2$.

Do đó phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; -1; 2)$, $B(4; -1; -1)$, $C(2; 0; 2)$. Mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C có phương trình là

A. $3x - 3y + z - 14 = 0$.
B. $3x + 3y + z - 8 = 0$.
C. $3x - 2y + z - 8 = 0$.
D. $2x + 3y - z + 8 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 0; -3)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 1; 0)$ suy ra $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (3; 3; 1)$.

Mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C có phương trình là $3x + 3y + z - 8 = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho d là đường thẳng đi qua $A(1; 2; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng (α): $4x + 3y - 7z + 1 = 0$. Phương trình tham số của đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = -2 + 3t \\ z = -3 - 7t. \end{cases}$
B. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - 7t. \end{cases}$
C. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 - 7t. \end{cases}$
D. $\begin{cases} x = -1 + 8t \\ y = -2 + 6t \\ z = -3 - 14t. \end{cases}$

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (4; 3; -7)$.

Vì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) nên véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (4; 3; -7)$.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Phương trình $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$ có tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ bằng

(A) $\frac{7\pi}{2}$. **B** π. (C) $\frac{3\pi}{2}$. (D) $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-\frac{\pi}{4}=x+\frac{3\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ 2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-x+l2\pi,\ l\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+l\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.,(k,l\in\mathbb{Z}).$$

- Họ nghiệm $x=\pi+k2\pi$ không có nghiệm nào thuộc khoảng $(0;\pi)$.
- $x=\frac{\pi}{6}+l\frac{2\pi}{3}\in(0;\pi)\Rightarrow 0<\frac{\pi}{6}+l\frac{2\pi}{3}<\pi\Leftrightarrow l\in\{0;1\}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ là $x=\frac{\pi}{6}$ và $x=\frac{5\pi}{6}$. Từ đó suy ra tổng các nghiệm của phương trình thuộc khoảng $(0;\pi)$ bằng π.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Hệ số của x^7 trong khai triển biểu thức $P(x)=(1-2x)^{10}$ là

A -15360. (B) 15360. (C) -15363. (D) 15363.

Lời giải.

Số hạng tổng quát trong khai triển biểu thức $P(x)$ là $\mathrm{C}_{10}^k\cdot 1^{10-k}\cdot(-2x)^k=\mathrm{C}_{10}^k\cdot(-2)^k\cdot x^k$.

Vì số hạng chứa x^7 nên $k=7$.

Vậy hệ số cần tìm là $\mathrm{C}_{10}^7\cdot(-2)^7=-15360$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Trong một chiếc hộp có 7 viên bi trắng, 8 viên bi đỏ, 10 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên ra 6 viên bi. Tính xác suất của biến cố A: "6 viên bi lấy ra cùng màu".

A $\mathrm{P(A)}=\frac{7}{5060}$. (B) $\mathrm{P(A)}=\frac{17}{5060}$. (C) $\mathrm{P(A)}=\frac{73}{5060}$. (D) $\mathrm{P(A)}=\frac{27}{5060}$.

Lời giải.

Ta có, để lấy 6 viên bi trong hộp ta có $\mathrm{C}_{25}^6\Rightarrow \mathrm{n}(\Omega)=\mathrm{C}_{25}^6=177100$.

Để lấy được các viên bi cùng màu ta có $\mathrm{C}_7^6+\mathrm{C}_8^6+\mathrm{C}_{10}^6$ cách. Vậy $\mathrm{n(A)}=245$.

Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P(A)}=\frac{7}{5060}$.

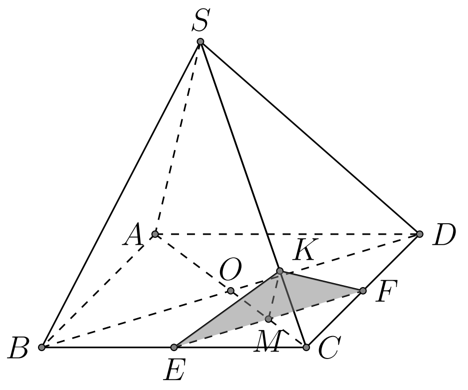
Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O. Gọi M là trung điểm của OC. Mặt phẳng (α) qua M và (α) song song với SA và BD. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (α) là hình gì?

A Hình tam giác. (B) Hình bình hành. (C) Hình chữ nhật. (D) Hình ngũ giác.

Lời giải.

Thiết diện là tam giác EFK như hình vẽ.



Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Góc giữa đường thẳng SB với mặt phẳng (SAC) xấp xỉ

A. 16°. B. 35°. C. 14°. D. 33°.

Lời giải.

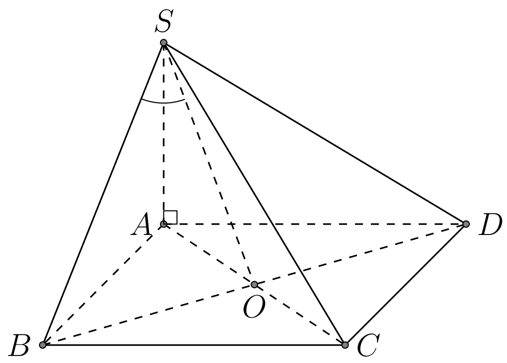
Ta có $\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp SA \end{cases} \Rightarrow BO \perp (SAC)$

suy ra SO là hình chiếu của SB trên (SAC).

Vậy $\widehat{(SB, (SAC))} = \widehat{BSO} = \varphi$.

$\sin\varphi = \dfrac{BO}{SB} = \dfrac{OB}{\sqrt{AB^2 + AS^2}} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{14}}{14}$.

$\Rightarrow \varphi \approx 16^\circ$.



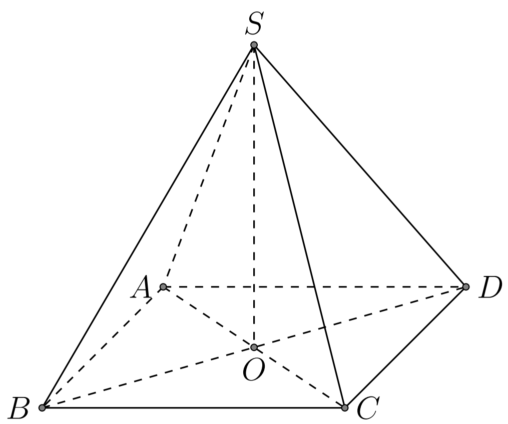
Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC$ và $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $SO \perp (ABCD)$. B. $CD \perp (SBD)$. C. $AB \perp (SAC)$. D. $BC \perp (SAC)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.



Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi

A $\left[\begin{array}{l} a=b;\ c>0 \\ b^2-3ac\leq 0 \end{array}\right.$.
B $\left[\begin{array}{l} a=b=c=0 \\ a>0;\ b^2-3ac<0 \end{array}\right.$.
C $\left[\begin{array}{l} a=b=0;\ c>0 \\ a>0;\ b^2-3ac\leq 0 \end{array}\right.$.
D $\left[\begin{array}{l} a=b=0;\ c>0 \\ a>0;\ b^2-3ac\geq 0 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Ta xét hai trường hợp $a=0$ và $a\neq 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị $A(1;-7)$, $B(2;-8)$. Tính $y(-1)$.

A $y(-1)=7$. **B** $y(-1)=11$. **C** $y(-1)=-11$. **D** $y(-1)=-35$.

Lời giải.

Ta có đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị $A(1;-7)$, $B(2;-8)$.

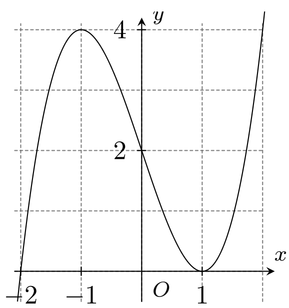
Suy ra $\begin{cases} y(1)=-7 \\ y'(1)=0 \\ y(2)=-8 \\ y'(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=-7 \\ 3a+2b+c=0 \\ 8a+4b+2c+d=-8 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-9 \\ c=12 \\ d=-12 \end{cases} \Rightarrow y(-1)=-a+b-c+d=-35.$

Chọn đáp án D □

Câu 36.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x-2009)+2017x-2018$.

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 4.



Lời giải.

Ta có: $y=f(x-2019)+2017x-2018$ suy ra $y'=f'(x-2019)+2017$.

Tịnh tiến đồ thị theo véc-tơ $\vec{v}=(2019;-2017)$ ta thấy $y'=f'(x-2019)+2017$ cắt trục Ox tại một điểm. Do đó hàm số có một cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Giá trị của tham số m để phương trình $4^x-m\cdot 2^{x+1}+2m=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=3$ là

A $m=1$. **B** $m=2$. **C** $m=3$. **D** $m=4$.

Lời giải.

Đặt $t=2^x$, phương trình đã cho với ẩn số t là $t^2-2mt+2m=0$.

Điều kiện $x_1+x_2=3\Rightarrow 2m=2^{x_1}\cdot 2^{x_2}=2^{x_1+x_2}=2^3=8\Rightarrow m=4$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Một khu rừng ban đầu có trữ lượng gỗ là $4\cdot 10^5$ mét khối gỗ. Gọi tốc độ sinh trưởng mỗi năm của khu rừng đó là $a\%$. Biết sau 5 năm thì sản lượng gỗ là xấp xỉ $4{,}8666\cdot 10^5$ mét khối.

Giá trị của a xấp xỉ

A 3,5%. **B** 4%. **C** 4,5%. **D** 5%.

Lời giải.

Trữ lượng gỗ sau một năm của khu rừng là: $N = 4 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^5 \cdot a\% = 4 \cdot 10^5(1 + a\%)$.

Trữ lượng gỗ sau năm thứ hai của khu rừng là: $N = 4 \cdot 10^5(1 + a\%)^2$

$\vdots$

Trữ lượng gỗ sau 5 năm của khu rừng: $N = 4 \cdot 10^5(1 + a\%)^5 = 4{,}8666 \cdot 10^5 \Rightarrow a \approx 4\%$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Biết rằng $I = \displaystyle\int_3^4 \frac{x^2 - x + 2}{x + \sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x = \frac{a - 4\sqrt{b}}{c}$. Với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $a + b + c$.

A 39. **B** 27. **C** 33. **D** 41.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^2 - x + 2}{x + \sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x = \int_3^4 (x - \sqrt{x-2})\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-2}\right)^3\right)\Bigg|_3^4 = \frac{25 - 8\sqrt{2}}{6} = \frac{25 - 4\sqrt{8}}{6}$.

Suy ra $a = 25$; $b = 8$; $c = 6$. Vậy $a + b + c = 39$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\,\mathrm{d}x = 2$. Tính $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I = 1$. **B** $I = 2$. **C** $I = 3$. **D** $I = 6$.

Lời giải.

Từ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\,\mathrm{d}x = 4$. Ta đặt $t = \tan x$, ta được $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2 + 1}\,\mathrm{d}t = 4$.

Từ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{(x^2 + 1 - 1)f(x)}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x = 2 \Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x = 2$.

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 + \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2 + 1}\mathrm{d}x = 2 + 4 = 6$.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Cho z_1, z_2 là các số phức thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$ và $|z_1 - 2z_2| = \sqrt{6}$. Tính giá trị của biểu thức $P = |2z_1 + z_2|$.

A $P = 2$. **B** $P = \sqrt{3}$. **C** $P = 3$. **D** $P = 1$.

Lời giải.

Đặt $z_1 = a_1 + b_1 i$; $z_2 = a_2 + b_2 i$. Suy ra $a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1$.

Và $|z_1 - 2z_2| = \sqrt{6} \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = -\dfrac{1}{4}$.

Suy ra $P = |2z_1 + z_2| = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của AB, góc giữa mặt phẳng $(A'CD)$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là $60°$. Tính theo a độ dài đoạn thẳng AC.

A $2a\sqrt[3]{2}$. **B** $\sqrt{2}a$. **C** $2a$. **D** $2\sqrt{2}a$.

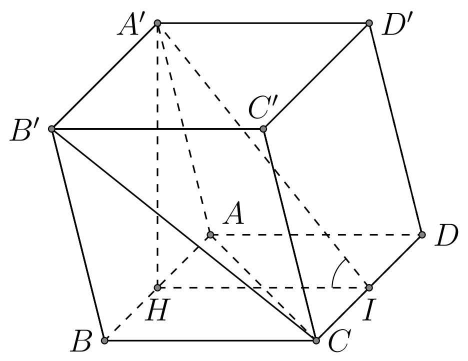
Lời giải.

Ta có: $((A'CD),(ABCD)) = \widehat{A'IH} = 60°$.

Gọi $AB = x$. Ta có: $A'H = x\sqrt{3}$.

Mặt khác: $V_{B'.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot A'H \cdot S_{ABCD} = \dfrac{8\sqrt{3}a^3}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \cdot x\sqrt{3} \cdot x^2 = \dfrac{8\sqrt{3}a^3}{3} \Leftrightarrow x = 2a$.

Vậy $AC = 2\sqrt{2}a$.



Chọn đáp án **D** □

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$, $B(0;0;2)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng chứa hai điểm A, B và tiếp xúc với mặt cầu (S).

A 3. **B** 0. **C** 1. **D** 2.

Lời giải.

Có: $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0 \Rightarrow \begin{cases} I(1;1;0) \\ R=1 \end{cases}$. Gọi (P) là mặt phẳng thỏa mãn bài toán.

Ta có: $A(1;0;0) \in (S)$ suy ra nếu tồn tại (P) thì (P) tiếp xúc với (S) tại A.

$\begin{cases} A \in (P) \\ \text{Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng là } \overrightarrow{IA} \end{cases} \Rightarrow (P)\colon y = 0.$

Ta thấy $B(0;0;2) \in (P)$ suy ra có duy nhất một mặt phẳng thỏa mãn bài toán.

Chú ý: Bài toán này thường sẽ có hai mặt phẳng thỏa mãn, nhưng với số liệu của bài này thì chỉ có một mặt phẳng thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án **C** □

Câu 44. Cho A là tập các số tự nhiên có 9 chữ số. Lấy ngẫu nhiên một số thuộc tập A. Tính xác suất lấy được một số lẻ và chia hết cho 9.

A $\dfrac{1}{18}$. **B** $\dfrac{1}{9}$. **C** $\dfrac{625}{1710}$. **D** $\dfrac{1250}{1710}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $\mathrm{n}(\Omega) = 9 \cdot 10^8$.

Gọi B là biến cố thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ta có các số lẻ có 9 chữ số chia hết cho 9 là 100000017, 100000035, $100000053, \ldots, 999999999$ lập thành một cấp số cộng với $u_1 = 100000017$ và công sai $d = 18$.

Nên số phần tử của dãy là $\dfrac{999999999-100000017}{18} + 1 = 50000000$.

Vậy $\mathrm{n(B)} = 5 \cdot 10^7$. Xác suất là $\mathrm{P(B)} = \dfrac{\mathrm{n(B)}}{\mathrm{n}(\Omega)} = \dfrac{5 \cdot 10^7}{9 \cdot 10^8} = \dfrac{1}{18}$.

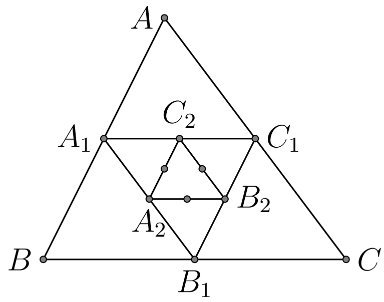
Chọn đáp án **A** □

Câu 45. Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC. Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, ...sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n + \cdots$?

A $S = \dfrac{15\pi}{4}$. **B** $S = 4\pi$. **C** $S = \dfrac{9\pi}{2}$. **D** $S = 5\pi$.

Lời giải.

Ta có: $S_1 = \pi \cdot \left(3 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 3\pi$; $S_2 = \pi \cdot \left(\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{1}{4} \cdot S_1$; $S_3 = \pi \cdot \left(\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \dfrac{3\pi}{16} = \dfrac{1}{4} \cdot S_2$



Ta có S_1; S_2; S_3;...;S_n; ...tạo thành cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu là $S_1 = 3\pi$ và công bội $q = \dfrac{1}{4}$.

Suy ra $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n + \cdots = \dfrac{S_n}{1-q} = \dfrac{3\pi}{1 - \dfrac{1}{4}} = 4\pi$.

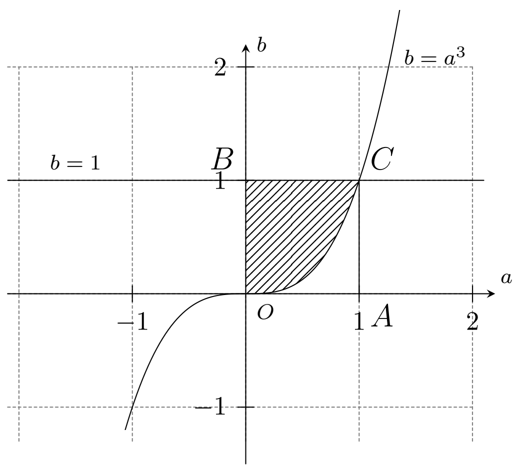
Chọn đáp án B □

Câu 46. Chọn ngẫu nhiên hai số thực $a, b \in [0;1]$. Tính xác suất để phương trình $2x^3 - 3ax^2 + b = 0$ có tối đa hai nghiệm.

A $\mathrm{P} = \dfrac{1}{4}$. **B** $\mathrm{P} = \dfrac{1}{2}$. **C** $\mathrm{P} = \dfrac{2}{3}$. **D** $\mathrm{P} = \dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Xét $y = 2x^3 - 3ax^2 + b$, $y' = 0 \Leftrightarrow 6x(x-a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = a \end{array}\right.$.



Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y(0) \cdot y(a) \geq 0 \Leftrightarrow b(b - a^3) \geq 0$.

Mà $b \in [0;1]$ nên $b(b - a^3) \geq 0 \Leftrightarrow b \geq a^3$.

Ta thấy việc chọn ngẫu nhiên hai số $a, b \in [0;1]$ chính là việc chọn ngẫu nhiên một điểm $M(a;b)$ *khi xét trên hệ trục toạ độ aBb.*

Gọi A là biến cố thỏa mãn bài toán. Ta có Ω là tập hợp các điểm $M(a;b)$ sao cho $a, b \in [0;1]$ và chính là các điểm thuộc hình vuông $OACB$ trên hình vẽ, do đó $\mathrm{n}(\Omega) = S_{OACB} = 1$.

n(A) là tập hợp các điểm thuộc hình phẳng $(\mathscr{H})$ giới hạn bởi các đồ thị $b = 1$, $b = a^3$, $a = 0$ (phần gạch chéo trên đồ thị). Xét phương trình hoành độ giao điểm $a^3 = 1 \Leftrightarrow a = 1$.

$$\Rightarrow \mathrm{n}(\mathrm{A}) = \int\limits_0^1 |1 - a^3|\,\mathrm{d}x = \left|\int\limits_0^1 (1 - a^3)\,\mathrm{d}x\right| = \left(a - \dfrac{a^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}.$$

Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P} = \dfrac{\frac{3}{4}}{1} = \dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) > 0, \forall x \in [1;2]$ và $\int\limits_1^2 \dfrac{[f'(x)]^3}{x^4}\,\mathrm{d}x = \dfrac{7}{375}$. Biết $f(1) = 1$, $f(2) = \dfrac{22}{15}$, tính $I = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $P = \dfrac{71}{60}$. **B** $P = \dfrac{6}{5}$. **C** $P = \dfrac{73}{60}$. **D** $P = \dfrac{37}{30}$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $\dfrac{[f'(x)]^3}{x^4} + \dfrac{x^2}{125} + \dfrac{x^2}{125} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{[f'(x)]^3}{x^4}\cdot\dfrac{x^2}{25}\cdot\dfrac{x^2}{25}} = \dfrac{3f'(x)}{25}$.

Lấy tích phân hai vế BĐT trên, ta có:

$$\int\limits_1^2 \frac{[f'(x)]^3}{x^4}\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_1^2 \frac{x^2}{125}\,\mathrm{d}x \geq \int\limits_1^2 \frac{3f'(x)}{25} \Leftrightarrow \int\limits_1^2 \frac{[f'(x)]^3}{x^4}\,\mathrm{d}x + 2\cdot\frac{7}{375} \geq \frac{3}{25}[f(2)-f(1)] \Leftrightarrow \int\limits_1^2 \frac{[f'(x)]^3}{x^4}\,\mathrm{d}x \geq \frac{7}{375}$$

Kết hợp với giả thiết ta có dấu "=" của BĐT trên xảy ra khi

$\dfrac{[f'(x)]^3}{x^4} = \dfrac{x^2}{125} \Leftrightarrow [f'(x)]^3 = \dfrac{x^6}{125} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{x^2}{5} \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^3}{15} + C$.

Mà $f(1) = 1 \Rightarrow 1 = \dfrac{1}{15} + C \Rightarrow C = \dfrac{14}{15} \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^3+14}{15}$.

Ta có $I = \int\limits_1^2 \dfrac{x^3+14}{15}\,\mathrm{d}x = \dfrac{71}{60}$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Gọi z_1, z_2 là hai trong tất cả các số phức thỏa mãn điều kiện $|(i-1)z - 3i + 3| = 2$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = |z_1| + |z_2|$. Giá trị của $S = m^3 + n^3$ bằng

A 72. **B** 90. **C** 54. **D** 126.

Lời giải.

Ta có: $|(i-1)z - 3i + 3| = 2 \Leftrightarrow |(i-1)(z-3)| = 2 \Leftrightarrow |z-3| = \sqrt{2}$.

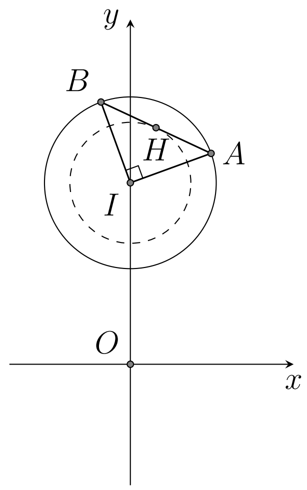
Gọi M là điểm biểu diễn của z.

Ta có M nằm trên đường tròn (C) tâm $I(3;0)$, $R = \sqrt{2}$.

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn cho z_1, z_2. Ta có $|z_1 - z_2| = 2 \Leftrightarrow AB = 2$.

Gọi H là trung điểm AB ta có tam giác IAB vuông tại I (theo định lí Pitago đảo)

$\Rightarrow IH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$.



$\Rightarrow H$ chạy trên đường tròn tâm I bán kính $R = 1$.

$P = |z_1| + |z_2| = OA + OB \leq \sqrt{(1^2+1^2)(OA^2+OB^2)}$

Mặt khác theo công thức độ dài đường trung tuyến ta có

$OA^2 + OB^2 = 2OH^2 + \dfrac{AB^2}{2} = 2OH^2 + \dfrac{2^2}{2} = 2OH^2 + 2$.

$\Rightarrow \max P = OI + R = 3 + 1 = 4$; $\min P = |OI - R| = 3 - 1 = 2 \Rightarrow m = 4; n = 2 \Rightarrow S = 64 + 8 = 72$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1)\colon x^2+y^2+z^2=1$, $(S_2)\colon x^2+(y-4)^2+z^2=4$ và các điểm $A(4;0;0)$, $B\left(\dfrac{1}{4};0;0\right)$, $C(1;4;0)$, $D(4;4;0)$. Gọi M là điểm thay đổi trên (S_1), N là điểm thay đổi trên (S_2). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=MA+2ND+4MN+6BC$ là

(A) $2\sqrt{265}$. (B) $\dfrac{5\sqrt{265}}{2}$. (C) $3\sqrt{265}$. (D) $\dfrac{7\sqrt{265}}{2}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S_1) có tâm $O(0;0;0)$ bán kính bằng 1; mặt cầu (S_2) có tâm $I(0;4;0)$ bán kính bằng 2.

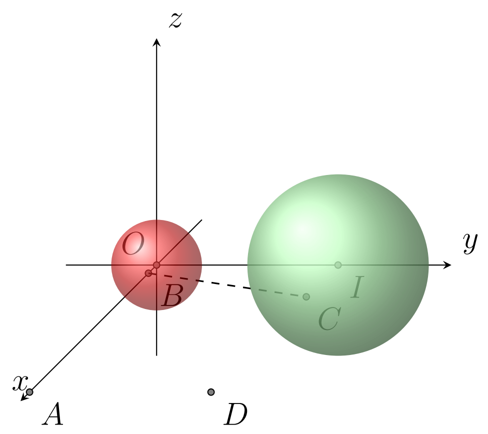
Ta có 4 điểm O, A, D, I là 4 đỉnh của hình vuông cạnh bằng 4 và $OB=\dfrac{1}{4}$, $IC=1$.

Ta có $\triangle OMA \backsim \triangle OBM$ (c.g.c)

$\Rightarrow \dfrac{MA}{BM}=\dfrac{OM}{OB}\Rightarrow MA=4MB$.

Ta có $\triangle IND \backsim \triangle ICN$ (c.g.c)

$\Rightarrow \dfrac{ND}{CN}=\dfrac{IN}{IC}=2\Rightarrow ND=2NC$.



$$\begin{aligned} Q &= 4MB+4NC+4MN+6BC \\ &= 4(BM+MN+NC)+6BC \\ &\geq 4BC+6BC=10BC=10\cdot\dfrac{\sqrt{265}}{4}=\dfrac{5\sqrt{265}}{2} \end{aligned}$$

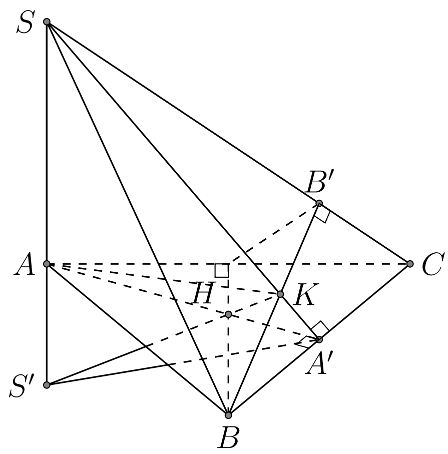
Vậy Q nhỏ nhất là bằng $\dfrac{5\sqrt{265}}{2}$, dấu "=" xảy ra khi M, N là giao điểm của BC với các mặt cầu.

Chọn đáp án (B) □

Câu 50. Cho tam giác ABC đều cạnh a, gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Trên d lấy điểm S và đặt $AS=x_0$ $(x>0)$. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC. Biết HK cắt d tại điểm S'. Khi SS' ngắn nhất thì khối chóp $S.ABC$ có thể tích bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{24}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{27}$.

Lời giải.



Xét tam giác $SA'S'$ có H là trực tâm, ta có:
$\triangle S'AH \backsim \triangle A'AS$
$\Rightarrow \dfrac{AS'}{AA'} = \dfrac{AH}{AS} \Rightarrow AS' \cdot AS = AA' \cdot AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2}{2}$.
Theo bất đẳng thức Cauchy ta có
$SS' = SA + AS' \geq 2\sqrt{AS \cdot AS'} = 2\sqrt{\dfrac{a^2}{2}} = a\sqrt{2}$.
Dấu "=" xảy ra khi $SA = AS' = x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Do đó SS' ngắn nhất khi $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Khi đó $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{24}$.
Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. C	3. C	4. A	5. D	6. B	7. C	8. D	9. D	10. D
11. D	12. B	13. A	14. C	15. D	16. B	17. C	18. A	19. D	20. A
21. A	22. D	23. A	24. D	25. C	26. B	27. B	28. B	29. A	30. A
31. A	32. A	33. A	34. C	35. D	36. A	37. D	38. B	39. A	40. D
41. A	42. D	43. C	44. A	45. B	46. D	47. A	48. A	49. B	50. A

71 ĐỀ THI THỬ CHUYÊN HÙNG VƯƠNG BÌNH DƯƠNG LẦN 5, 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho phương trình $\dfrac{2\left(1-3\sin^2 x\cos^2 x\right)-\sin x\cos x}{\sqrt{2}-2\sin x}=0$ có x_0 là nghiệm dương lớn nhất trên khoảng $(0;100\pi)$ và có dạng $x_0=a\pi+\dfrac{\pi}{b}$ $(a,b\in\mathbb{Z})$. Tính tổng $T=a+b$.

Ⓐ $T=100$. Ⓑ $T=101$. Ⓒ $T=102$. **D** $T=103$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq\dfrac{\pi}{4}+k2\pi$, $x\neq\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Phương trình tương đương với

$$3\sin^2 2x+\sin 2x-4=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}.$$

Đối chiếu điều kiện suy ra $x=\dfrac{5\pi}{4}+k2\pi$, mà $x\in(0;100\pi)$. Nên nghiệm lớn nhất là $x=99\pi+\dfrac{\pi}{4}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ khác hàm hằng, xác định trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$ và đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$. Xét 4 mệnh đề sau

(I) Số nghiệm của phương trình $f'(x)=0$ luôn bé hơn số nghiệm của phương trình $f(x)=0$.

(II) Nếu $y=f(x)$ là hàm số chẵn thì $y=f'(x)$ là hàm số lẻ.

(III) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ x_0 có hệ số góc $k=f'(x_0)$.

(IV) Nếu $f'(x_1)=f'(x_2)$ và $x_1\neq x_2$ thì tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại các điểm có hoành độ x_1, x_2 song song với nhau.

Số mệnh đề đúng là

Ⓐ 1. **B** 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Lời giải.

(I) Sai, ví dụ $f(x)=x^2+1$. Phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm và phương trình $f'(x)=0$ có một nghiệm $x=0$.

(II) Đúng, vì tập xác định của $f'(x)$ là $\mathbb{R}$ mà $f(x)$ là hàm chẵn nên$f(-x)=f(x)\Leftrightarrow -f'(-x)=f'(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Do đó $f'(x)$ là hàm số lẻ.

(III) Đúng.

(IV) Sai, ví dụ hàm số $f(x)=x^4-2x^2$ có $f'(1)=f'(-1)=0$ nhưng tiếp tuyến tại các điểm có hoành độ $x=1$ và $x=-1$ trùng nhau.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 3. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y=x^4+x$. Ⓑ $y=x^4-x$. Ⓒ $y=(x-1)^{2018}$. **D** $y=(x-1)^{2019}$.

Lời giải.

Xét $y=(x-1)^{2019}$. TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$, $y'=2019(x-1)^{2018}\geq 0$ và chỉ bằng 0 tại $x=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P)\colon x-2y+3z-4=0$ và $(Q)\colon 3x+2y-5z-4=0$. Khi đó hai mặt phẳng (P) và (Q)

(A) vuông góc.
(B) cắt nhau nhưng không vuông góc.
(C) song song.
(D) trùng nhau.

Lời giải.

(P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(1;-2;3)$ và (Q) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2=(3;2;-5)$. Ta có $[\vec{n}_1,\vec{n}_2]=(4;14;8)\neq\vec{0}$ và $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\neq 0$ nên hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau nhưng không vuông góc.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-2z-6=0$. Tính khoảng cách từ O đến (P).

(A) 3.
(B) $\dfrac{2}{3}$.
(C) -2.
(D) 2.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}(O,(P))=\dfrac{|-6|}{\sqrt{4+1+4}}=2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Cho số phức w thỏa mãn $|w+2|\leq 1$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\overline{z}=2w+1-i$ là một hình tròn. Tính diện tích S của hình tròn đó.

(A) $S=2\pi$.
(B) $S=4\pi$.
(C) 9π.
(D) π.

Lời giải.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$. Ta có

$$\overline{z}=2w+1-i\Leftrightarrow x-yi=2w+1-i\Leftrightarrow w=\frac{x-1}{2}-\frac{y-1}{2}i.$$

Lại có $|w+2|\leq 1$ nên

$$\left(\frac{x-1}{2}+2\right)^2+\left(\frac{y-1}{2}\right)^2\leq 1\Leftrightarrow (x+3)^2+(y-1)^2=4.$$

Nên tập hợp điểm biểu diễn z là hình tròn bán kính $R=2$ có diện tích $S=4\pi$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Trong tất cả các hình trụ có chung thể tích V, hỏi hình trụ có diện tích toàn phần nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

(A) $S_{\text{tp}}=3\sqrt[3]{2\pi V^2}$.
(B) $S_{\text{tp}}=\sqrt[3]{2\pi V^2}$.
(C) $S_{\text{tp}}=3\sqrt[3]{6\pi V^2}$.
(D) $S_{\text{tp}}=6\sqrt[3]{\pi V^2}$.

Lời giải.

Ta có $V=h\cdot\pi R^2\Rightarrow h=\dfrac{V}{\pi R^2}$. Nên diện tích toàn phần của hình trụ là

$$S_{\text{tp}}=2\pi R^2+h\cdot 2\pi R=2\pi R^2+\frac{2V}{R}.$$

Xét hàm S_{tp} ẩn R có

$$S'_{\text{tp}}=4\pi R-\frac{2V}{R^2},\quad S'_{\text{tp}}=0\Leftrightarrow R=\sqrt[3]{\frac{2V}{4\pi}}=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Lập bảng biến thiên ta suy ra được diện tích toàn phần lớn nhất đạt được khi $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. Khi đó diện tích toán phần bằng

$$S_{\text{tp}} = 2\pi \sqrt[3]{\frac{4V^2}{16\pi^2}} + 2V\sqrt[3]{\frac{4\pi}{2V}} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P)\colon x + y - 2z + 1 = 0$. Tìm một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

(A) $\vec{n} = (-1; 1; 2)$. **(B)** $\vec{n} = (1; -1; 2)$. **(C)** $\vec{n} = (-1; -1; 2)$. **(D)** $\vec{n} = (1; 1; 2)$.

Lời giải.

(P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}' = (1; 1; -2)$ nên $\vec{n} = -\vec{n}' = (-1; -1; 2)$ cũng là một véc-tơ pháp tuyến của (P).

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P)\colon 3x - 4y + 5z - 6 = 0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{1}$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P). Tìm khẳng định đúng.

(A) $\sin\varphi = \dfrac{1}{5\sqrt{28}}$. **(B)** $\cos\varphi = -\dfrac{1}{5\sqrt{28}}$. **(C)** $\cos\varphi = \dfrac{1}{5\sqrt{28}}$. **(D)** $\sin\varphi = -\dfrac{1}{5\sqrt{28}}$.

Lời giải.

(P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; -4; 5)$ và d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 3; 1)$. Khi đó ta có

$$\sin\varphi = |\cos(\vec{n}, \vec{u})| = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{u}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{u}|} = \frac{1}{5\sqrt{28}}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x}$ (C). Hỏi trên đồ thị (C) về phía bên phải trục tung có bao nhiêu điểm mà tại đó ta dựng được tiếp tuyến cắt hai trục tọa độ tạo thành tam giác cân.

(A) Vô số. **(B)** 2. **(C)** 1. **(D)** 0.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-1}{x^2}$, tiếp tuyến tại điểm $\left(x_0; \dfrac{x_0+1}{x_0}\right)$ thuộc đồ thị hàm số có phương trình là

$$d\colon y = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0) + \frac{x_0+1}{x_0}.$$

Gọi $A = d \cap Ox \Rightarrow A\left(x_0^2 + 2x_0; 0\right) \Rightarrow OA = |x_0^2 + 2x_0|$,

$B = d \cap Oy \Rightarrow B\left(0; \dfrac{x_0+2}{x_0}\right) \Rightarrow OB = \left|\dfrac{x_0+2}{x_0}\right|$.

Tiếp điểm nằm về bên phải trục tung nên $x_0 > 0$, để $\triangle OAB$ cân thì

$$OA = OB \Leftrightarrow \left|x_0^2 + 2x_0\right| = \left|\frac{x_0+2}{x_0}\right| \Leftrightarrow x_0 = 1.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$ với $AB = a$, $CD = b$ và các cạnh còn lại có độ dài bằng nhau. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD và $MN = m$. Biết rằng tồn tại một mặt cầu tiếp xúc với 6 cạnh của tứ diện đã cho. Tìm hệ thức đúng biểu diễn mối liên hệ giữa a, b và m.

(A) $ab = m^2$. **B** $ab = 2m^2$. (C) $2ab = m^2$. (D) $3ab = 2m^2$.

Lời giải.

Ta có $AB \perp (MCD)$, $CD \perp (NAB)$ nên MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

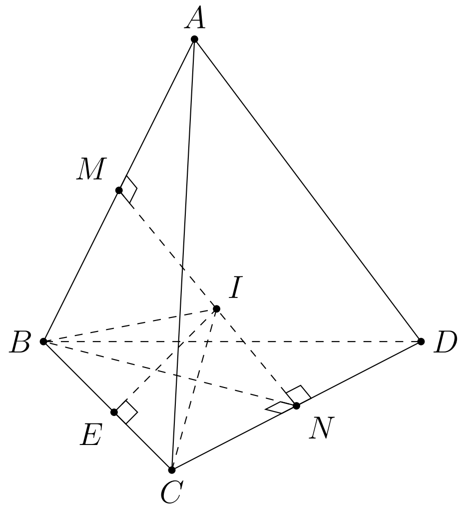
Gọi I là tâm mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của $ABCD$, suy ra I là trung điểm MN.

Kẻ $IE \perp BC$ khi đó $\triangle IEC = \triangle INC$ nên $EC = NC = \dfrac{b}{2}$.

Tương tự $BM = BE = \dfrac{a}{2}$. Do đó $BC = \dfrac{a+b}{2}$.

Lại có $MN^2 = BN^2 - BM^2 = BC^2 - CN^2 - BM^2 = \dfrac{ab}{2}$.

Vậy $m^2 = \dfrac{ab}{2}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{2019\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$.

A $I = 4038\sqrt{2}$. (B) $I = 2019\sqrt{2}$. (C) $I = 0$. (D) $I = 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2019\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{2019\pi} \sqrt{2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_0^{2019\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{2}\left(\int_0^{\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x + \int_{2\pi}^{3\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{2018\pi}^{2019\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x\right) \\ &= 2019\sqrt{2}\left|\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x\right|. \end{aligned}$$

Mà $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 2$. Suy ra $I = 4038\sqrt{2}$.

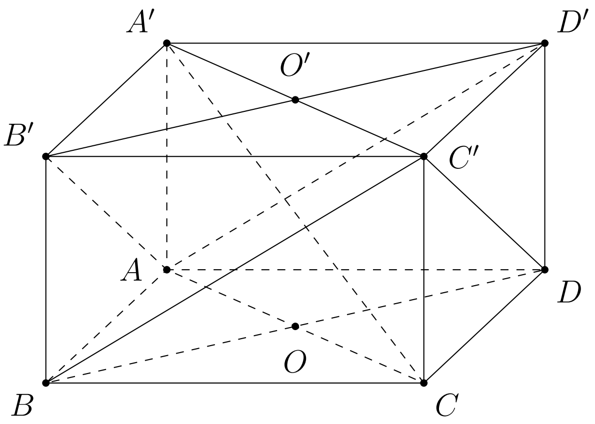
Chọn đáp án (A) □

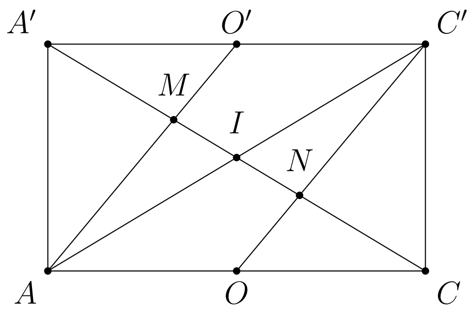
Câu 13. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AD'B')$ và $(C'BD)$.

(A) $\dfrac{abc}{6\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$. **B** $\dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$.

(C) $\dfrac{abc}{3\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$. (D) $\dfrac{abc}{2\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$.

Lời giải.



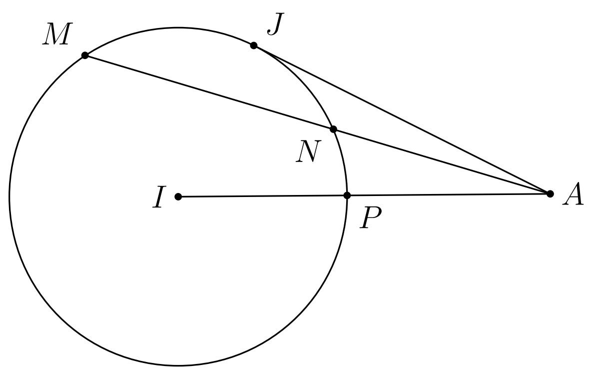


Gọi thêm các điểm như hình vẽ. khi đó M, N là giao điểm của $A'C$ với mặt phẳng $(AD'B')$ và mặt phẳng $(C'BD)$.
Do I là trung điểm $A'C$ và M, N là trọng tâm $\triangle AA'O'$ và $\triangle CC'O$ nên suy ra $A'M = MN = NC$.
Lại có $(AB'D') \mathbin{/\!/} (C'BD)$. Từ đó ta có $\mathrm{d}(A', (AB'D')) = \mathrm{d}((AB'D'), (C'BD))$.
Mà $\dfrac{1}{\mathrm{d}^2(A', (AB'D'))} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{A'B'^2} + \dfrac{1}{A'D'^2} \Rightarrow \mathrm{d}(A', (AB'D')) = \dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$.
Chọn đáp án B □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ và điểm $A(5;3;-2)$. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và luôn cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt M, N. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = AM + 4AN$.

A $S_{\min} = 30$. **B** $S_{\min} = 20$. **C** $S_{\min} = \sqrt{34} - 3$. **D** $S_{\min} = 5\sqrt{34} - 9$.

Lời giải.



Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;1)$, bán kính $R = 3$. Kẻ tiếp tuyến AJ, $P = AI \cap (S)$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + 4AN$ xảy ra trong trường hợp $AM > AN$.
Ta có $AP \leq AN < AJ$. Lại có $AI = \sqrt{34}$, $AJ = \sqrt{AI^2 - R^2} = 5$.
Do đó $\sqrt{34} - 3 \leq x < 5$, với $x = AN$.
Mà $AM \cdot AN = AJ^2 \Rightarrow AM = \dfrac{25}{x} \Rightarrow S = 4x + \dfrac{25}{x}$.
Xét $f(x) = 4x + \dfrac{25}{x}$ trên $\left[\sqrt{34} - 3; 5\right)$. Có $f'(x) = 4 - \dfrac{25}{x^2} > 0$, $\forall x \in \left[\sqrt{34} - 3; 5\right)$.
Suy ra $S_{\min} = f\left(\sqrt{34} - 3\right) = 5\sqrt{34} - 9$.
Chọn đáp án D □

Câu 15. Khi biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $P = 0{,}323232\ldots = 0{,}(32)$ dưới dạng phân số tối giản $P = \dfrac{m}{n}$ trong đó $m, N \in \mathbb{N}^*$. Tính hiệu $H = n - 3m$.

A 0. **B** -3. **C** 3. **D** 67.

Lời giải.

Ta có

$$0{,}(32) = 32\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \cdots\right) = 32 \cdot \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{32}{99}.$$

Do đó $n - 3m = 99 - 3 \cdot 32 = 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Một đa giác lồi có 10 cạnh và các góc trong của nó lập thành một cấp số cộng với công sai $d = 4^\circ$. Tìm góc trong nhỏ nhất của đa giác đó.

A 126°. **B** 26°. **C** 60°. **D** 162°.

Lời giải.

Ta có tổng các góc trong một 10-giác bằng $(10 - 2) \cdot 180^\circ = 1440^\circ$.

Gọi các góc trong 10-giác lần lượt là $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ lập thành cấp số cộng với công sai $d = 4^\circ$. Do đó tổng các góc trong 10-giác đó bằng $\dfrac{[2a_1 + (10-1)\cdot 4^\circ]\cdot 10}{2} = 1440 \Rightarrow a_1 = 126^\circ$.

Vì (a_n) là cấp số cộng với công sai dương nên $a_1 = 126^\circ$ là góc nhỏ nhất trong 10-giác.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Tìm m để phương trình $(\cos x + 1)\left(2\cos^2 x - 1 - m\cos x\right) - m\sin^2 x = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc $\left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$.

A $-1 < m \le 1$. **B** $-\dfrac{1}{2} < m \le 1$. **C** $0 < m \le \dfrac{1}{2}$. **D** $-1 < m \le -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} &(\cos x + 1)\left(2\cos^2 x - 1 - m\cos x\right) - m(1 - \cos x)(1 + \cos x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &(\cos x + 1)(\cos 2x - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos 2x = m. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$, mà $x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right] \Rightarrow$ Không thỏa mãn.

Do đó để phương trình đã cho có hai nghiệm thỏa mãn đề bài thì phương trình $\cos 2x = m$ phải có đúng hai nghiệm thuộc $\left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$, tức là $m \in \left(-1; -\dfrac{1}{2}\right]$.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A $S_{2020} = 0$. **B** $S_{2019} > 0$. **C** $S_{2017} < 0$. **D** $S_{2018} = 0$.

Lời giải.

- Với $n = 2k$ $(k \ge 1,\ k \in \mathbb{N})$ thì $u_n = u_{2k} = \sin k\pi = 0$ hay $u_2 = u_4 = \ldots = u_{2020} = 0$.
- Với $n = 2k + 1$ $(k \ge 0,\ k \in \mathbb{N})$ thì $u_n = u_{2k+1} = \sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

⊞ Khi k chẵn thì $u_1 = u_5 = \ldots = u_{2017} = 1$ (có 505 số hạng).

⊞ Khi k lẻ thì $u_3 = u_7 = \ldots = u_{2019} = -1$ (có 505 số hạng).

Vậy $S_{2020} = 0$; $S_{2019} = 0$; $S_{2017} = 1$; $S_{2018} = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Hàm số $y = 3\sin(x + 2018) - 4\cos(x + 2018) + m$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0. Tìm giá trị của m.

A $m = -7$. **B** $m = 5$. **C** $m = -5$. **D** $m = 7$.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình

$$3\sin(x + 2018) - 4\cos(x + 2018) = y - m$$

có nghiệm là $3^2 + 4^2 \geq (y - m)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -5 \leq y - m \leq 5 \Leftrightarrow m - 5 \leq y \leq m + 5$.

Do đó $\min y = m - 5 = 0 \Leftrightarrow m = 5$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Tọa độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là

A $B(-1; 4)$. **B** $D(2; 4)$. **C** $C(0; 2)$. **D** $A(1; 0)$.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$, $y'' = 6x$, $y''(1) = 6 > 0$, $y''(-1) = -6 < 0$ nên $A(1; 0)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Cho số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 1 + 3i| = |z + 3 - i|$ và $P = ||z - 1 - 2i| - |z + 1 - i||$ đạt giá trị lớn nhất. Tính tổng $S = x^3 + y^3$.

A $S = 0$. **B** $S = 16$. **C** $S = 54$. **D** $S = 27$.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$|z - 1 + 3i| = |z + 3 - i| \Leftrightarrow x - y = 0.$$

Gọi $A(1; 2)$, $B(-1; 1)$, khi đó $P = ||z - 1 - 2i| - |z + 1 - i|| = |MA - MB|$.

Bài toán trở thành: Tìm M thuộc đường thẳng d: $x - y = 0$ sao cho $|MA - MB|$ lớn nhất.

Xét $P(x, y) = x - y$, ta có $P(A) \cdot P(B) = 2 > 0$ nên A, B nằm cùng phía đối với d.

Gọi I là giao điểm của AB với d, ta tìm được $I(3; 3)$.

Ta có $|MA - MB| \leq AB$. Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv I$. Do đó P đạt giá trị lớn nhất khi tọa độ M là $(3; 3)$. Vậy $x = y = 3$ và $S = 3^3 + 3^3 = 54$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho hàm số bậc bốn $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ $(a \neq 0)$. Biết rằng các hệ số a, b, c, d, e là các số nguyên không âm và không lớn hơn 8 và $f(9) = 32078$. Tính tổng các hệ số $S = a + b + c + d + e$.

A $S = 4$. **B** $S = 10$. **C** $S = 12$. **D** $S = 14$.

Lời giải.

Ta có $f(9) = 6561a + 729b + 81c + 9d + e = 32078$.

Suy ra $32078 - e = 6561a + 729b + 81c + 9d \Rightarrow (32078 - e) \vdots 9$.

Mà $e \in \mathbb{N}$, $0 \leq e \leq 8$ nên suy ra $e = 2$.

Vậy ta có $6561a + 729b + 81c + 9d = 32076 \Leftrightarrow 729a + 81b + 9c + d = 3564$.

$\Rightarrow d = 3564 - (729a + 81b + 9c + d) \vdots 9$. Mà $d \in \mathbb{N}$, $0 \leq d \leq 8$ nên suy ra $d = 0$.

Từ đó ta có $729a + 81b + 9c = 3564 \Rightarrow 81a + 9b + c = 396 \Rightarrow c = 396 - (81a + 9b) \vdots 9$.

mà $c \in \mathbb{N}$, $0 \leq c \leq 8$ nên $c = 0$. Suy ra $81a + 9b = 396 \Rightarrow 9a + b = 44 \Rightarrow 9a = 44 - b$.

Vì $b \in \mathbb{N}$, $0 \leq b \leq 8$ nên suy ra $36 \leq 9a \leq 44 \Rightarrow a = 4, b = 8$. Vậy $S = 14$.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Gọi M, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2$ trên đoạn $[-2; 1]$. Tính giá trị của $T = M + m$.

A $T = -20$. **B** $T = -22$. **C** $T = -4$. **D** $T = 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \text{ (loại)} \end{array}\right.$.

Lại có $f(-2) = -20$, $f(0) = 0$, $f(1) = -2$. Nên $M = 0$, $m = -20$ và $T = -20$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Cho khai triển $\left(2018x^2 + x + 2018\right)^{2018} = a_0 + a_1x + \cdots + a_{4036}x^{4036}$. Tính tổng $S = a_1 - a_3 + a_5 - \cdots + a_{4035}$.

A $S = 0$. **B** $S = -1$. **C** $S = 2^{2018}$. **D** $S = 1$.

Lời giải.

Cho $x = i$ $(i^2 = -1)$ trong khai triển $\left(2018x^2 + x + 2018\right)^{2018} = a_0 + a_1x + \cdots + a_{4036}x^{4036}$ ta được

$$\begin{aligned} & i^{2018} = a_0 + a_1i + a_2i^2 + \cdots + a_{4036}i^{4036} \\ \Leftrightarrow \quad & -1 = (a_0 - a_2 + a_4 - \cdots + a_{4036}) + (a_1 - a_3 + a_5 - \cdots + a_{4035})\, i \end{aligned}$$

Vậy $S = a_1 - a_3 + \cdots + a_{4035} = 0$.

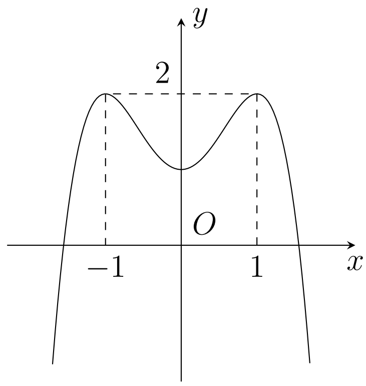
Chọn đáp án A □

Câu 25.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A $y = -x^4 + 1$. **B** $y = -|x|^3 + 3|x| + 1$.

C $y = -x^4 - 2x^2 + 1$. **D** $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.



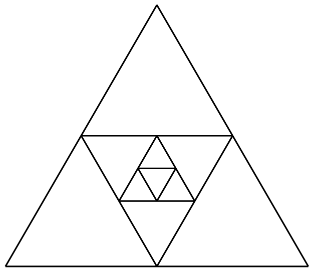
Lời giải.

Đường cong nhận $(1; 2)$, $(-1; 2)$ làm điểm cực đại, $(0; 1)$ làm điểm cực tiểu. Chỉ có hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ có đồ thị thỏa mãn điều này. Hàm số $y = -x^4 + 1$ và $y = -x^4 - 2x^2 + 1$ chỉ có một điểm cực trị, hàm số $y = -|x|^3 + 3|x| + 1$ không đi qua điểm $(1; 2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26.

Cho $\triangle ABC$ đều có cạnh bằng 1. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm BC, CA, AB ta được $\triangle A_1B_1C_1$. Tương tự $\triangle A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Quá trình lặp lại sau n bước ($n \in \mathbb{N}^*$) ta được $\triangle A_nB_nC_n$. Gọi S_0, S_n lần lượt là diện tích $\triangle ABC$ và $\triangle A_nB_nC_n$. Đặt T_n là tổng diện tích các tam giác ABC, $A_1B_1C_1, \ldots, A_nB_nC_n$. Hỏi T_n không vượt quá số nào sau đây



(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. (B) $\dfrac{11\sqrt{3}}{36}$. **C** $\dfrac{100\sqrt{3}}{299}$. (D) $\dfrac{19\sqrt{3}}{240}$.

Lời giải.

Ta có tam giác đều cạnh a có diện tích bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Mà $A_nB_n = \dfrac{1}{2} \cdot A_{n-1}B_{n-1}$ nên $S_n = \dfrac{1}{4} \cdot S_{n-1}$.

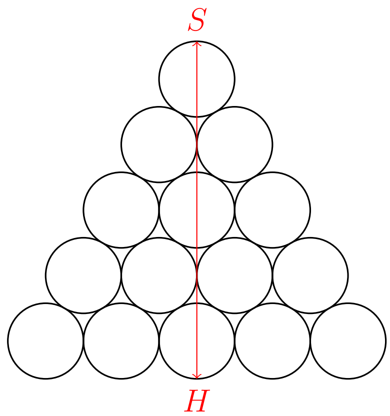
Hay (S_n) là cấp số nhân công bội $q = \dfrac{1}{4}$.

Ta có $\lim T_n = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} < \dfrac{100\sqrt{3}}{299}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 27.

Ở một số nước nông nghiệp phát triển, sau khi thu hoạch lúa xong, rơm người ta cuộn thành những cuộn hình trụ rồi chất thành từng đống để chở về nhà. Mỗi đống rơm thường chất thành 5 chồng sao cho các cuộn rơm tiếp xúc ngoài với nhau. Giả sử đường kính của mỗi cuộn rơm là 1 m. Hãy tính chiều cao SH của đống rơm ở hình bên.



A $SH = \left(2\sqrt{3} + 1\right)$ m. (B) $SH = 5$ m.

(C) $SH = 2\sqrt{3}$ m. (D) $SH = 2{,}5$ m.

Lời giải.

Ta có tam giác có đỉnh là tâm ba đường tròn ở 3 đỉnh của đống rơm là tam giác đều cạnh 4 m.

Chiều cao của tam giác đó bằng $\dfrac{4 \cdot \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. Do đó chiều cao của đống rơm là $2\sqrt{3} + 1$ m.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{3-y}{3} = \dfrac{z+1}{-2}$. Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là

A $\vec{u} = (2; 3; -2)$. **B** $\vec{u} = (2; -3; -2)$. (C) $\vec{u} = (-2; -3; -2)$. (D) $\vec{u} = (2; -3; 2)$.

Lời giải.

Ta có $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{3-y}{3} = \dfrac{z+1}{-2} \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z+1}{-2}$.

Do đó d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -3; -2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Biết rằng hàm số $y = \dfrac{x+m}{x-2}$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ và tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $x_0 = 1$ cắt hai trục tọa độ tạo thành một tam giác vuông cân. Tìm giá trị của tham số m.

A $m = -3$. **B** $m = -4$. **C** $m = -5$. **D** $m = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-2-m}{(x-2)^2}$, hàm số đồng biến nên $m < -2$. Tiếp tuyến tại $x_0 = 1$ là

$$d\colon y = (m+2)(x-1) - m - 1.$$

Gọi $A = d \cap Ox$, $A\left(\dfrac{2m+3}{m+2}; 0\right) \Rightarrow OA = \left|\dfrac{2m+3}{m+2}\right|$. $B = d \cap Oy$, $B(-2m-3) \Rightarrow OB = |2m+3|$.
Mà $\triangle OAB$ vuông cân nên $OA = OB \Leftrightarrow m = -3$.
Chọn đáp án A □

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn điều kiện $f(x) + 2f(1-x) = 3x^2 - 6x$, $\forall x \in [0; 1]$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 f\left(1-x^2\right) \mathrm{d}x$.

A $I = -\dfrac{4}{15}$. **B** $I = 1$. **C** $I = -\dfrac{2}{15}$. **D** $I = \dfrac{2}{15}$.

Lời giải.

Đặt $t = 1 - x$, thì $x \in [0; 1] \Leftrightarrow t \in [0; 1]$.
Ta có

$$\begin{aligned} & f(x) + 2f(1-x) = 3x^2 - 6x \Leftrightarrow f(x) + 2f(1-x) = 3(x-1)^2 - 3 \\ \Leftrightarrow\ & f(1-t) + 2f(t) = 3t^2 - 3 \Leftrightarrow 2f(x) + f(1-x) = 3x^2 - 3. \end{aligned}$$

Xét hệ phương trình

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f(x) + 2f(1-x) = 3x^2 - 6x \\ 2f(x) + f(1-x) = 3x^2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + 2f(1-x) = 3x^2 - 6x \\ 4f(x) + 2f(1-x) = 6x^2 - 6 \end{cases} \\ \Rightarrow\ & 3f(x) = 3x^2 + 6x - 6 \Leftrightarrow f(x) = (x+1)^2 - 3, \forall x \in [0; 1]. \end{aligned}$$

Khi đó $f(1-x^2) = (2-x^2)^2 - 3 = x^4 - 4x^2 + 1$.
Suy ra $I = \displaystyle\int_0^1 f\left(1-x^2\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^4 - 4x^2 + 1\right) \mathrm{d}x = -\dfrac{2}{15}$.
Chọn đáp án C □

Câu 31. Phương trình $m + \dfrac{2}{3}\sqrt{x - x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm duy nhất. Tìm số phần tử của S.

A 3. **B** 2. **C** 1. **D** 0.

Lời giải.

Đặt $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = t$, ta có $t' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$, $t' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$. Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{2}$		1
t'	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$
t	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1

Như vậy $t \in \left[1; \sqrt{2}\right]$, và tương ứng với $t \in \left[1; \sqrt{2}\right)$ thì cho 2 giá trị của $x \in [0; 1]$, với $t = \sqrt{2}$ cho một giá trị của $x = \dfrac{1}{2}$. Ta được phương trình

$$m + \frac{t^2 - 1}{3} = t \Leftrightarrow t^2 - 3t - 1 = -3m. \quad (*)$$

Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì $(*)$ nhận $\sqrt{2}$ là một nghiệm và nghiệm còn lại không thuộc $\left[1; \sqrt{2}\right)$. Thay $t = \sqrt{2}$ vào $(*)$ được $m = \dfrac{3\sqrt{2} - 1}{3}$, nghiệm còn lại là $3 - \sqrt{2} \notin \left[1; \sqrt{2}\right)$. Nhưng $m = \dfrac{3\sqrt{2} - 1}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho góc $\widehat{MON} = 39^\circ$, xét phép vị tự tâm I, tỉ số $k = -3$ với $I \neq O$. Biết phép vị tự trên biến $\triangle MON$ thành $\triangle M'O'N'$. Tính số đo góc $\widehat{M'O'N'}$.

A $\widehat{M'O'N'} = 39^\circ$. **B** $\widehat{M'O'N'} = 117^\circ$. **C** $\widehat{M'O'N'} - 117^\circ$. **D** $\widehat{M'O'N'} = 13^\circ$.

Lời giải.

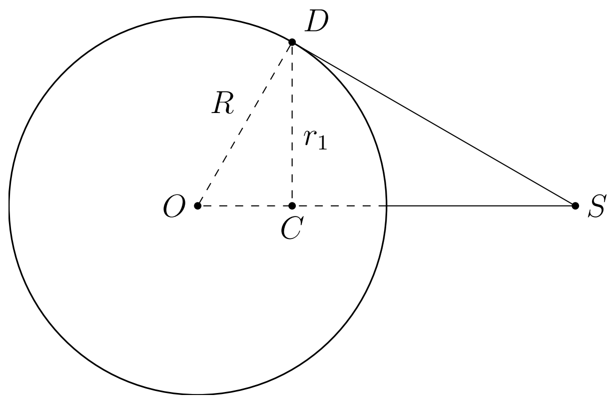
Phép vị tự trên biến $\triangle MON$ thành $\triangle M'O'N'$ đồng dạng với $\triangle MON$ nên $\widehat{M'O'N'} = \widehat{MON} = 39^\circ$.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Trong không gian cho một hình cầu (S) tâm O có bán kính R và một điểm S cho trước sao cho $SO = 2R$. Từ S kẻ các tiếp tuyến với mặt cầu với tiếp điểm thuộc đường tron (C_1). Trên mặt phẳng (P) chứa đường tròn (C_1) ta lấy điểm E thay đổi nằm ngoài mặt cầu (S). Gọi N là hình nón có đỉnh là E và đáy là đường tròn (C_2) gồm các tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ E đến mặt cầu (S). Biết rằng hai đường tròn (C_1) và (C_2) luôn có cùng bán kính. Tính theo R bán kính R' của đường tròn cố định mà E di động trên đó.

A $R' = \dfrac{R\sqrt{15}}{4}$. **B** $R' = \dfrac{R\sqrt{15}}{2}$. **C** $R' = \dfrac{3R}{2}$. **D** $R' = \dfrac{R\sqrt{17}}{2}$.

Lời giải.



Gọi bán kính của (C_1), (C_2) lần lượt là r_1, r_2. Gọi C là tâm của (C_1) và D là một điểm trên (C_1).
Ta có $\triangle OSD$ vuông tại D nên $CD \cdot OS = DO \cdot DS$.
Do đó $r_1 = CD = \dfrac{R\sqrt{OS^2 - R^2}}{OS} = R\sqrt{1 - \dfrac{R^2}{OS^2}}$.
Tương tự ta có $r_2 = R\sqrt{1 - \dfrac{R^2}{OE^2}}$. Mà $r_1 = r_2$ nên $OE = OS = 2R$.
Suy ra E di động trên đường tròn giao tuyến của mặt cầu tâm O bán kính $2R$ với mặt phẳng (P).
Lại có $OC = \dfrac{OD^2}{OS} = \dfrac{R}{2} \Rightarrow R' = \sqrt{OE^2 - OC^2} = \sqrt{4R^2 - \dfrac{R^2}{4}} = \dfrac{R\sqrt{15}}{2}$.
Chọn đáp án B □

Câu 34. Tìm nghiệm của phương trình $\log(x-1) = 2$.

A. 99. B. 101. C. $\mathrm{e}^2 - 1$. D. $\mathrm{e}^2 + 1$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với $x - 1 = 10^2 \Leftrightarrow x = 101$.
Chọn đáp án B □

Câu 35. Tại một thời điểm t trước lúc đỗ xe ở điểm dừng xe, một chiếc xe đang chuyển động đều với vận tốc là 60 km/h. Chiếc xe di chuyển trong trạng thái đó 5 phút rồi bắt đầu đạp phanh và chuyển động chậm dần đều thêm 8 phút nữa rồi mới dừng hẳn ở điểm đỗ xe. Tính quãng đường mà xe đi được từ thời điểm t nói trên đến khi dừng hẳn.

A. 4 km. B. 5 km. C. 9 km. D. 6 km.

Lời giải.

Vận tốc xe khi bắt đầu phanh là $v = 60 + at$ (km/h), mà xe dừng khi chạy được 8 phút $= \dfrac{2}{15}$ giờ thì dừng hẳn nên $0 = 60 + \dfrac{2a}{15} \Leftrightarrow a = -450$ (m/h^2). Khi đó quãng đường xe đi được kể từ lúc đạp phanh là

$$\int\limits_0^{\frac{2}{15}} (60 - 450t)\,\mathrm{d}t = 4.$$

Vậy tổng quãng đường cần tính là $60 \cdot \dfrac{5}{60} + 4 = 9$ km.
Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho dãy (u_n) là một cấp số nhân có tất cả các số hạng đều dương và có công bội q. Xét dãy (v_n) với $v_n = \log_a u_n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, trong đó $0 < a \neq 1$. Xác định công sai d của cấp số cộng (v_n).

A $d = \log_a \frac{1}{q}$. **B** $d = \log_a 2q$. **C** $d = \log_a q$. **D** $d = \log_a q^2$.

Lời giải.

Ta có $u_n = q \cdot u_{n-1} \Leftrightarrow \log_a u_n = \log_a (q \cdot u_{n-1}) = \log_a q + \log_a u_{n-1} \Leftrightarrow v_n = \log_a q + v_{n-1}$.

Do đó (v_n) là cấp số cộng với công sai $d = \log_a q$.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{1 - x}$.

A -1. **B** -3. **C** 3. **D** 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{1 - x} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{1-x} = \lim\limits_{x \to 1} (-x^2 - x - 1) = -3$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[a; b]$ với $f(a) = 0$. Đặt $M = \max\limits_{[a;b]} |f(x)|$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $\displaystyle\int_a^b [f'(x)]^2 \, dx$.

A $M(b-a)$. **B** $M^2(b-a)$. **C** $\dfrac{M^2}{b-a}$. **D** $\dfrac{M}{b-a}$.

Lời giải.

Gọi $x_0 \in [a; b]$, sao cho $|f(x_0)| = M$. Ta có

$$\left(\int_a^{x_0} f'(x) \, dx \right)^2 \leq \int_a^{x_0} [f'(x)]^2 \, dx \cdot \int_a^{x_0} dx \Leftrightarrow [f(x_0) - f(a)]^2 \leq (x_0 - a) \int_a^{x_0} [f'(x)]^2 \, dx$$

$$\Leftrightarrow \quad f^2(x_0) \leq (x_0 - a) \cdot \int_a^{x_0} [f'(x)]^2 \, dx \Leftrightarrow M^2 \leq (x_0 - a) \cdot \int_a^{x_0} [f'(x)]^2 \, dx.$$

Mà $(x_0 - a) \cdot \displaystyle\int_a^{x_0} [f'(x)]^2 \, dx \leq (b - a) \cdot \int_a^{x_0} [f'(x)]^2 \, dx$.

Suy ra $M^2 \leq (b-a) \cdot \displaystyle\int_a^{x_0} [f'(x)]^2 \, dx \Rightarrow \int_a^{x_0} [f'(x)]^2 \, dx \geq \dfrac{M^2}{b-a}$.

Dấu bằng xảy ra khi $f'(x) = 1$ tức là khi chẳng hạn $f(x) = x$.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ có tâm đối xứng I là

A $I(-2; 1)$. **B** $I(2; 1)$. **C** $I(2; -1)$. **D** $I(-2; -1)$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ có tâm đối xứng là $I(2; 1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1| + |z_2|$.

A $P_{\max} = 2\sqrt{26}$. **B** $P_{\max} = 104$. **C** $P_{\max} = 32 + 3\sqrt{2}$. **D** $P_{\max} = 4\sqrt{6}$.

Lời giải.

Ta có $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) \geq (|z_1| + |z_2|)^2$.

Suy ra $P = |z_1| + |z_2| \leq 2\sqrt{26}$, dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ z_1 + z_2 = 8 + 6i \\ |z_1 - z_2| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{17}{5} + \dfrac{19}{5}i \\ z_1 = \dfrac{23}{5} + \dfrac{11}{5}i \end{array}\right. \\ z_2 = 8 + 6i - z_1 \end{cases}.$$

Vậy $P_{\max} = 2\sqrt{26}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 41. Cho số phức $z = 1 + 3i$. Gọi M là điểm biểu diễn của số phức liên hợp $\overline{z}$. Tọa độ điểm M là

A $M(-1; -3)$. **B** $M(1; 3)$. **C** $M(1; -3)$. **D** $M(-1; 3)$.

Lời giải.

Số phức liên hợp $\overline{z} = 1 - 3i$ nên $M(1; -3)$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và mặt phẳng $(P)\colon x + y + z - 3 = 0$. Gọi (S') là mặt cầu chứa đường tròn giao tuyến của (S) và (P) đồng thời (S') tiếp xúc với mặt phẳng $(Q)\colon x - y + z - 5 = 0$. Gọi $I(a; b; c)$ là tâm của mặt cầu $(S)'$. Tính tích $T = abc$.

A $T = 1$. **B** $T = -\dfrac{1}{8}$. **C** $T = -1$. **D** $T = \dfrac{1}{8}$.

Lời giải.

Phương trình mặt cầu (S') có dạng

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 - 9 + m(x + y + z - 3) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + y^2 + z^2 + mx + my + mz - 9 - 3m = 0. \end{aligned}$$

Mặt cầu (S') có tâm $I\left(-\dfrac{m}{2}; -\dfrac{m}{2}; -\dfrac{m}{2}\right)$, bán kính $R = \sqrt{\dfrac{3m^2}{4} + 3m + 9}$.

(S') tiếp xúc với (Q) nên

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(I, (Q)) = R \ &\Leftrightarrow\ \dfrac{\left|-\frac{m}{2} - 5\right|}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{3m^2}{4} + 3m + 9} \\ &\Leftrightarrow\ |m + 10| = \sqrt{9m^2 + 36m + 108} \\ &\Leftrightarrow\ m = -1 \Rightarrow I\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Vậy $T = abc = \dfrac{1}{8}$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 43. Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có điểm uốn nằm trên đường thẳng $y = x$. Tìm giá trị của tham số m.

A $m = 1$. **B** $m = -1$. **C** $m = 3$. **D** $m = 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$, $y'' = 6x - 6$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = m - 2$. Điểm uốn của đồ thị hàm số là $U(1; m-2) \in y = x \Rightarrow m = 3$.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 44. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy $\triangle ABC$ đều cạnh a tâm O. Hình chiếu của C' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của $\triangle ABC$. Cạnh bên CC' tạo với mặt phẳng đáy (ABC) một góc $60°$. Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng $A'B'$.

A $\dfrac{7a}{4}$. **B** $\dfrac{a}{2}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. **D** $\dfrac{7a}{2}$.

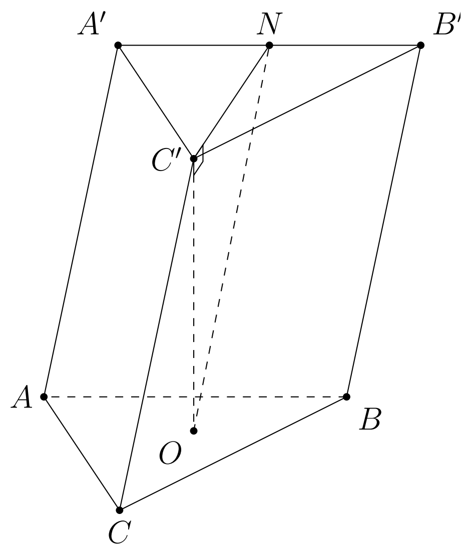
Lời giải.

Gọi N là trung điểm $A'B'$, ta có $A'B' \perp (OC'N)$ nên khoảng cách từ O đến $A'B'$ chính là đoạn ON.

Ta có $C'N = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $OC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $OC' = OC \cdot \tan 60° = a$.

Mà $A'B' \perp (OC'N)$ nên $\triangle OC'N$ vuông tại C', suy ra

$$ON = \sqrt{OC'^2 + C'N^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$



Chọn đáp án C $\square$

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;1;0)$, $B(-2;0;1)$, $C(0;0;2)$ và mặt phẳng $(P)\colon x + 2y + z + 4 = 0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho $S = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $Q = a + b + 6c$.

A $Q = 2$. **B** $Q = -2$. **C** $Q = 0$. **D** $Q = 1$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$ ta có $G\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}; 1\right)$. Lại có

$$\begin{aligned} A &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} \\ &= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} \\ &= 3MG^2 + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}. \end{aligned}$$

Vì $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$ là một hằng số nên S nhỏ nhất khi MG nhỏ nhất, hay M là hình chiếu của G lên (P).

Từ đó ta tìm được $M\left(-\dfrac{11}{9}; -\dfrac{13}{9}; \dfrac{1}{9}\right)$ và $Q = a + b + 6c = -2$.

Chọn đáp án B $\square$

Câu 46. Hai thí sinh A và B tham gia một kì thi vấn đáp. Cán bộ coi thi đưa cho mỗi thí sinh một bộ câu hỏi thi gồm 15 câu hỏi khác nhau và đựng trong 15 phong bì dán kín có hình thức giống nhau, mỗi phong bì đựng một câu hỏi. Thí sinh chọn ngẫu nhiên ba phong bì trong số đó để xác định câu hỏi của mình. Biết rằng 15 câu hỏi dành cho hai thí sinh có nội dung như nhau. Tính xác suất để A và B chọn được ba câu hỏi giống hệt nhau.

A. $\dfrac{1}{345}$. B. $\dfrac{1}{455}$. C. $\dfrac{1}{360}$. D. $\dfrac{1}{2730}$.

Lời giải.

A và B cùng có số cách chọn đề là C_{15}^3 nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \left(\mathrm{C}_{15}^3\right)^2$.

Gọi biến cố X: "A và B chọn được ba câu hỏi giống hệt nhau".

Do mỗi cách chọn đề của A thì B chỉ có một cách để chọn giống A nên $n(X) = \mathrm{C}_{15}^3$.

Vậy $P(X) = \dfrac{n(X)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{455}$.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2 - 1\right)x + 1 - m^2$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ O.

A. $0 < m < 1$.
B. $0 \leq m < 1$ hoặc $m \leq -1$.
C. $m < -1$.
D. $0 < m < 1$ hoặc $m < -1$.

Lời giải.

Để đồ thị (C) của hàm số có hai điểm đối xứng nhau qua $O(0;0)$ thì điểm $(x;y) \in (C)$ và $(-x;-y) \in (C)$ với $x^2 + y^2 \neq 0$. Khi đó

$$\begin{cases} y = x^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2 - 1\right)x + 1 - m^2 \\ -y = -x^3 - 3mx^2 - 3\left(m^2 - 1\right)x + 1 - m^2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad 3mx^2 + m^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

- Nếu $x = 0$ thì $m = \pm 1 \Rightarrow y = 0$ (không thỏa mãn).
- Với $m = 0$, (1) vô nghiệm (không thỏa mãn).
- Với $m \neq 0$, để thỏa mãn đề bài thì (1) $\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{m^2 - 1}{3m}$ phải có nghiệm khác 0. Suy ra $\dfrac{m^2 - 1}{3m} > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$ hoặc $m < -1$.

Chọn đáp án D □

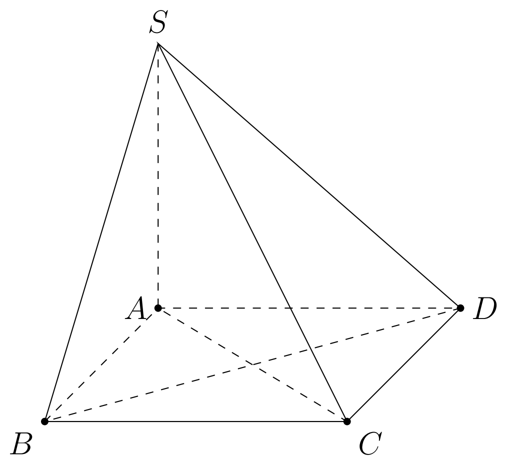
Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Biết rằng $\triangle SBD$ là tam giác đều. Tính cạnh của hình vuông đáy theo a.

A. $2a$. B. a. C. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $a\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi cạnh đáy hình vuông là x thì $BD = x\sqrt{2}$, $SB = \sqrt{2a^2 + x^2}$. Mà $\triangle SBD$ đều nên

$$x\sqrt{2} = \sqrt{2a^2 + x^2} \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}.$$



Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Tính thể tích của khối lập phương có diện tích toàn phần bằng $24a^2$.

A $8a^3$. (B) $64a^3$. (C) $4a^3$. (D) a^3.

Lời giải.

Hình lập phương có cạnh bằng x thì diện tích toàn phần bằng $6x^2 = 24a^2 \Leftrightarrow x = 2a$. Vậy thể tích hình lập phương là $V = 8a^3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Đồ thị hàm số $y = (x-1)(x^2-1)(x^3-1)$ cắt trục hoành tại mấy điểm phân biệt?

(A) 3. (B) 1. C 2. (D) 4.

Lời giải.

Xét phương trình $(x-1)(x^2-1)(x^3-1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm.

Chọn đáp án (C) □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. B	3. D	4. B	5. D	6. B	7. A	8. C	9. A	10. C
11. B	12. A	13. B	14. D	15. C	16. A	17. D	18. A	19. B	20. D
21. C	22. D	23. A	24. A	25. D	26. C	27. A	28. B	29. A	30. C
31. D	32. A	33. B	34. B	35. C	36. C	37. B	38. C	39. B	40. A
41. C	42. D	43. C	44. C	45. B	46. B	47. D	48. D	49. A	50. C

72 ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA 2018 MÔN TOÁN SỞ GD VÀ ĐT - ĐIỆN BIÊN, NĂM 2017 - 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho a, b, c là các số thực dương và a, $b \neq 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

(A) $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$.
(B) $a^{\log_a b} = b$.
(C) $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$.
(D) $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$.

Lời giải.

Ta có

a) Nếu $a > 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$.

b) Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Hàm số nào sau đây **không** có GTLN, GTNN trên $[-2; 2]$?

(A) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.
(B) $y = x^2$.
(C) $y = -x + 1$.
(D) $y = x^3 + 2$.

Lời giải.

Xét

a) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Điều kiện xác định $x \neq -1$.

Ta có $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0$, với mọi $x \neq -1$.

$\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x-1}{x+1} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x-1}{x+1} = -\infty$. Ta có bảng biến thiên

x	-2		-1		2
y'		$+$	‖	$+$	
y	3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{3}$

Vậy hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ không có GTLN và GTNN trên đoạn $[-2; 2]$.

b) $y = x^2$.

Điều kiện xác định $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 2x$. Do đó, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Ta có bảng biến thiên

x	-2		0		2
y'		$-$	0	$+$	
y	4	↘	0	↗	4

Do đó trên đoạn $[-2; 2]$, GTLN của hàm số là 4 và GTNN của hàm số là 0.

c) $y = -x + 1$.

Điều kiện xác định $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -1 < 0$. Ta có bảng biến thiên

x	-2		2
y'		$-$	
y	3	$\searrow$	-1

Do đó trên đoạn $[-2; 2]$, GTLN của hàm số là 3 và GTNN của hàm số là -1.

d) $y = x^3 + 2$.

Điều kiện xác định $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 \geq 0$. Ta có bảng biến thiên

x	-2		2
y'		$+$	
y	-6	$\nearrow$	10

Do đó trên đoạn $[-2; 2]$, GTLN của hàm số là 10 và GTNN của hàm số là -6.

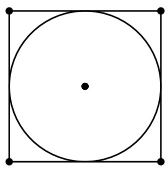
Chọn đáp án A □

Câu 3. Cho hình lập phương có cạnh bằng a. Tính diện tích mặt cầu nội tiếp hình lập phương đó.

A $S = \pi a^2$. **B** $S = \dfrac{1}{3}\pi a^2$. **C** $S = \dfrac{4}{3}\pi a^2$. **D** $S = 4\pi a^2$.

Lời giải.

Vì hình lập phương cạnh a nên đường kính mặt cầu nội tiếp hình lập phương đó bằng $a \Rightarrow$ bán kính mặt cầu bằng $\dfrac{a}{2}$. Do vậy, diện tích mặt cầu nội tiếp hình lập phương là $S = 4\pi \cdot \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \pi a^2$.



Chọn đáp án A □

Câu 4. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-5x+6} < 1$.

A $(-3; 2)$. **B** $(1; 6)$. **C** $(2; 3)$. **D** $(-6; -1)$.

Lời giải.

$$2^{x^2-5x+6} < 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3.$$

Chọn đáp án C □

Câu 5.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(1; +\infty)$. **B** $(0; 1)$.

C $(-\infty; 3)$. **D** $(-4; +\infty)$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên miền $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho véc-tơ $\overrightarrow{OA} = -2\vec{j} + 3\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm A.

(A) $A(-2; 3; 0)$. (B) $A(-2; 0; 3)$. (C) $A(0; 2; -3)$. (D) $A(0; -2; 3)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OA} = -2\vec{j} + 3\vec{k} = (0; -2; 3) \Rightarrow A(0; -2; 3)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Cho số phức $z = 6 - 7i$. Tìm số phức liên hợp của số phức z.

(A) $\overline{z} = -6 + 7i$. (B) $\overline{z} = -6 - 7i$. (C) $\overline{z} = 6 + 7i$. (D) $\overline{z} = -i$.

Lời giải.

Ta có $\overline{z} = 6 + 7i$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Cho hàm số $y = \dfrac{ax+1}{bx-2}$. Tìm a và b để đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng và đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

(A) $a = 1,\ b = 2$. (B) $a = 2,\ b = 2$. (C) $a = 2,\ b = -2$. (D) $a = -1,\ b = -2$.

Lời giải.

Vì $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nên $\begin{cases} a \cdot 1 + 1 \neq 0 \\ b \cdot 1 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -1 \\ b = 2. \end{cases}$

Lại có $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{ax+1}{bx-2} = \dfrac{a}{b}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ax+1}{bx-2} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow y = \dfrac{a}{b}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $\Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow b = 2a \Rightarrow a = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$.

(A) $\dfrac{1}{3}\sin 3x + C$. (B) $-\dfrac{1}{3}\sin 3x + C$. (C) $-3\sin 3x + C$. (D) $-\sin 3x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \cos 3x \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin 3x + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$ và $B(3; -4; 5)$. Phương trình nào sau đây **không phải** là phương trình của đường thẳng AB?

(A) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -4 - 6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -4 + 3t \\ z = 5 - t \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -4 - 3t \\ z = 5 + t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 6t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -6; 2) \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương với các véc-tơ có tọa độ $(-1; 3; -1)$, $(1; -3; 1)$. Phương trình đường thẳng AB là $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -4 - 3t \\ z = 5 + t. \end{cases}$

Ta thấy điểm $M(1;-4;1)$ không thỏa mãn phương trình đường thẳng AB.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Khối mười hai mặt đều là khối đa diện đều loại

A $\{5;3\}$. (B) $\{4;3\}$. (C) $\{2;4\}$. (D) $\{3;5\}$.

Lời giải.

Vì mỗi mặt của khối mười hai mặt đều có 5 cạnh và mỗi đỉnh là giao điểm của 3 cạnh nên khối mười hai mặt đều thuộc loại $\{5;3\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Diện tích hình phẳng D được xác định bởi công thức

(A) $S=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **B** $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. (C) $S=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. (D) $S=\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích miền D giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ là $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

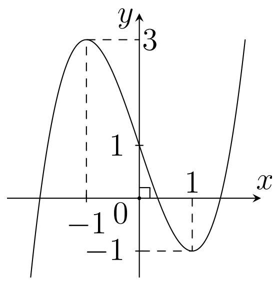
Chọn đáp án (B) □

Câu 13.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

(A) $y=-x^3-3x+1$. (B) $y=-x^3+3x+1$.

(C) $y=x^3+3x+1$. **D** $y=x^3-3x+1$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy đây là đồ thị hàm bậc ba, có hệ số $a>0$ và có hai điểm cực trị.

- Xét $y=x^3+3x+1$, ta có $y'=3x^2+3>0$ với mọi $x \Rightarrow$ hàm số không có cực trị.
- Xét $y=x^3-3x+1$, ta có $y'=3x^2-3$. Do đó $y'=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Vậy đồ thị của hình vẽ bên là của hàm số $y=x^3-3x+1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số $\{1; 2; 3; 4; 5\}$?

A A_5^4. **B** C_5^4. **C** P_4. **D** P_5.

Lời giải.

Số các số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ là A_5^4.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Cho hai mặt phẳng $(P)\colon -6x + my - 2mz - m^2 = 0$ và $(Q)\colon 2x + y - 2z + 3 = 0$ (m là tham số). Tìm m để mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q).

A $m = \dfrac{5}{12}$. **B** $m = 12$. **C** $m = \dfrac{12}{5}$. **D** $m = \dfrac{12}{7}$.

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_P = (-6; m; -2m)$, véc-tơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_Q = (2; 1; -2)$.
Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) khi và chỉ khi

$$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0 \Leftrightarrow -12 + m + 4m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{12}{5}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 16. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$ $(k \in \mathbb{N}^*)$. **B** $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

C $\lim \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$. **D** $\lim q^n = 0$ $(q < 1)$.

Lời giải.

Ta có

- Với $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$.
- $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
- $\lim \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$.
- Với $q = -2$, $\lim(-2)^n = +\infty$ nếu n chẵn và $\lim(-2)^n = -\infty$ nếu n lẻ.

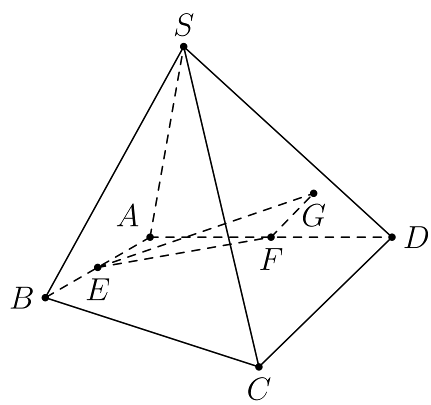
Chọn đáp án D □

Câu 17.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có G là điểm nằm trong tam giác SCD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và AD (tham khảo hình vẽ bên). Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (EFG) là

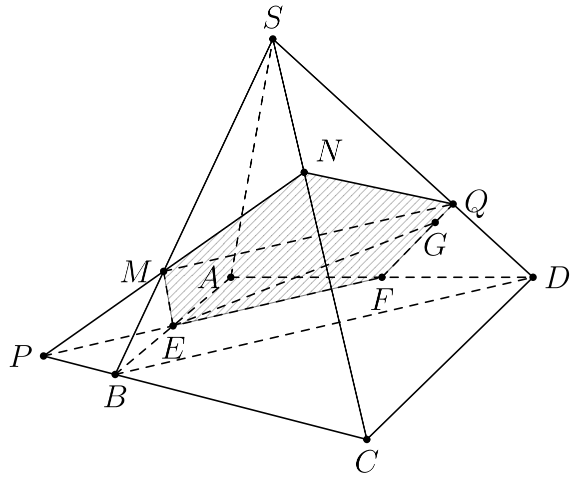
A hình tam giác. **B** hình tứ giác.

C hình ngũ giác. **D** hình lục giác.



Lời giải.

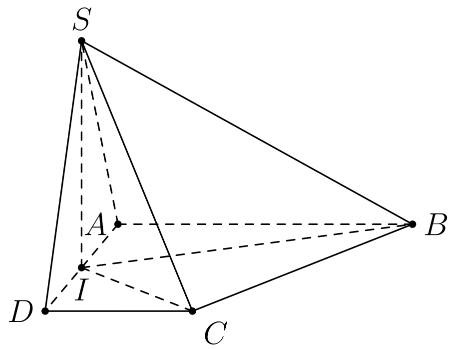
Vì E, F lần lượt là trung điểm của AB, AD nên $EF \parallel BD$. Kéo dài EF cắt BC tại P. Gọi Q là giao điểm của FG và SD. Kẻ $QM \parallel BD$ ($M \in SB$). Nối PM cắt SC tại N. Khi đó, thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi (EFG) là ngũ giác $EMNQF$.



Chọn đáp án C □

Câu 18.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, có $AB = AD = 2a$, $CD = a$. Gọi I là trung điểm cạnh AD, biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy và thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{3\sqrt{15}a^3}{5}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.



A 60°. **B** 36°. **C** 30°. **D** 45°.

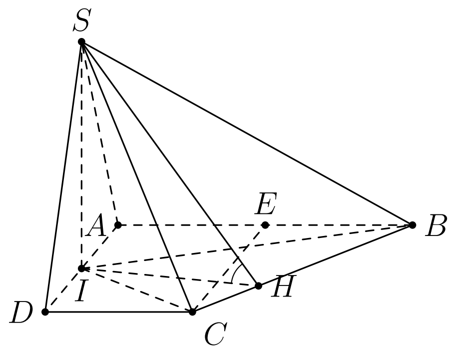
Lời giải.

Gọi E là trung điểm $AB \Rightarrow BE = AE = CD = a$. Vì $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D nên $ADCE$ là hình chữ nhật $\Rightarrow CE = 2a$.

Xét tam giác CEB vuông tại E có

$BC = \sqrt{CE^2 + EB^2} = a\sqrt{5}$.

Vì hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy nên $SI \perp (ABCD)$.



Ta có $S_{ABCD} = \dfrac{AD(AB + CD)}{2} = \dfrac{2a \cdot 3a}{2} = 3a^2$.

Mà $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SI \cdot S_{ABCD} \Rightarrow SI = \dfrac{3 \cdot \dfrac{3\sqrt{15}a^3}{5}}{3a^2} = \dfrac{3\sqrt{15}a}{5}$.

Lại có $S_{ICD} = \dfrac{a^2}{2}$, $S_{IAB} = \dfrac{2a^2}{2} = a^2 \Rightarrow S_{ICB} = 3a^2 - a^2 - \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{3a^2}{2}$.

Kẻ $IH \perp BC$ tại $H \Rightarrow BC \perp (SIH) \Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là $\widehat{SHI}$.

Vì $S_{ICB} = \dfrac{IH \cdot BC}{2} \Rightarrow IH = \dfrac{2 \cdot \dfrac{3a^2}{2}}{a\sqrt{5}} = \dfrac{3a}{\sqrt{5}}$.

Xét tam giác SHI có $\tan \widehat{SHI} = \dfrac{SI}{IH} = \dfrac{3\sqrt{15}a}{5} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{3a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SHI} = 60^\circ$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Đại hội đại biểu đoàn trường THPT X có 70 đoàn viên tham dự, trong đó có 25 đoàn viên nữ. Chọn ngẫu nhiên một nhóm gồm 10 đoàn viên. Tính xác suất để trong nhóm chọn ra có 4 đoàn viên là nữ.

A $\dfrac{C_{25}^4 C_{45}^6}{C_{70}^{10}}$. **B** $\dfrac{C_{25}^4 C_{45}^6}{A_{70}^{10}}$. **C** $\dfrac{A_{25}^4 A_{45}^6}{A_{70}^{10}}$. **D** $\dfrac{A_{25}^4 A_{45}^6}{C_{70}^{10}}$.

Lời giải.

Số cách chọn 4 đoàn viên nữ trong 25 đoàn viên nữ là C_{25}^4.

Số cách chọn 6 đoàn viên nam trong 45 đoàn viên nam là C_{45}^4.

Số cách chọn 10 đoàn viên trong 70 đoàn viên là C_{70}^{10}.

Xác suất để chọn được một nhóm gồm 10 đoàn viên trong đó có 4 đoàn viên nữ là $\dfrac{C_{25}^4 C_{45}^6}{C_{70}^{10}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m-1)x + x^2 + \ln(2x-1)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ là nửa khoảng $[-a\sqrt{b}; +\infty)$ (với a, b là các số thực dương xác định). Khi đó

A $a \leq b$. **B** $a \geq b$. **C** $a = b$. **D** $a < b$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x > \dfrac{1}{2}$.

Ta có $y' = \dfrac{2}{2x-1} + 2x + m - 1$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$ với mọi $x > 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{2x-1} + 2x \geq -m + 1$ với mọi $x > 1$.

Xét hàm $f(x) = \dfrac{2}{2x-1} + 2x$ trên miền $(1; +\infty)$. Ta có $f'(x) = 2 - \dfrac{4}{(2x-1)^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$. Ta có bảng biến thiên

x	1		$\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	$\searrow$	$1+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ khi $-m + 1 \leq 1 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m \geq -2\sqrt{2}$

$\Rightarrow a = 2$, $b = 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Biết phương trình $z^2 + az + b = 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$ có nghiệm $z = -2 + i$. Tính $a + b$.

A 4. **B** 9. **C** -1. **D** 1.

Lời giải.

Ta có $(-2+i)^2 + a(-2+i) + b = 0 \Leftrightarrow (a-4)i + (b+3-2a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow a + b = 9$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78.685.800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A \cdot \mathrm{e}^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là số dân sau N năm và r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm). Nếu dân số vẫn tăng với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người?

A. 2020. **B.** 2026. C. 2022. D. 2025.

Lời giải.

Ta có $120 = 78{,}6858 \cdot \mathrm{e}^{0{,}017N} \Rightarrow N \approx 24{,}83$.

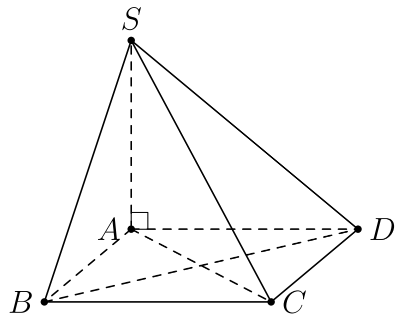
Vậy nếu dân số tăng với tỉ lệ 1,7%/năm thì đến năm 2026 dân số nước ta ở mức 120 triệu người.

Chọn đáp án B □

Câu 23.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, đường chéo $AC = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ (tham khảo hình vẽ). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD.

A. $a\sqrt{2}$. B. $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. C. $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. D. $a\sqrt{3}$.



Lời giải.

Vì $AB \parallel CD \Rightarrow CD \parallel (SAB) \Rightarrow \mathrm{d}(CD, (SAB)) = \mathrm{d}(D, (SAB))$.

Mà $AD \perp (SAB) \Rightarrow \mathrm{d}(D, (SAB)) = AD$.

Xét tam giác ABD vuông tại A, có $AB^2 + AD^2 = BD^2 = 4a^2 \Rightarrow AD = a\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = -x^3 + 2(2m-1)x^2 - (m^2 - 8)x + 2$ đạt giá trị cực tiểu tại điểm $x = -1$.

A. $m = -2$. B. $m = 3$. **C.** $m = 1$. D. $m = -9$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = -3x^2 + 4(2m-1)x - (m^2 - 8) \Rightarrow f''(x) = -6x + 4(2m-1)$.

Hàm số đạt giá trị cực tiểu tại điểm $x = -1$ thì $f'(-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -9. \end{array}\right.$

- Với $m = 1$, ta có $f''(-1) = 10 > 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.
- Với $m = -9$, ta có $f''(-1) = -70 < 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Vậy $m = 1$ thì hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{C}_n^2 - \mathrm{C}_n^1 = 44$. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^4}\right)^n$, với $x > 0$.

A. 525. B. 485. C. 238. **D.** 165.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{C}_n^2 - \mathrm{C}_n^1 = 44 \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)}{2} - n = 44 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 88 = 0 \Leftrightarrow n = 11$ (vì n nguyên dương).

Số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_{11}^k (x\sqrt{x})^k \cdot x^{-4(11-k)} = \mathrm{C}_{11}^k x^{\frac{11k}{2} - 44}$.

Xét $x^{\frac{11k}{2}-44} = x^0 \Leftrightarrow \dfrac{11k}{2} - 44 = 0 \Leftrightarrow k = 8$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $\mathrm{C}_{11}^8 = 165$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Biết $\displaystyle\int\limits_2^3 \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x+1}\mathrm{d}x = a\ln 7 + b\ln 3 + c\ln 2 + d$ (với a, b, c, d là các số nguyên). Tính giá trị của biểu thức $T = a + 2b^2 + 3c^3 + 4d^4$.

(A) $T = 6$. (B) $T = 7$. (C) $T = 9$. **(D)** $T = 5$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_2^3 \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x+1}\mathrm{d}x = \int\limits_2^3 \left(1 - \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x = \left(x - \ln\left|x^2-x+1\right|\right)\Big|_2^3 = 1 - \ln 7 + \ln 3$

$\Rightarrow a = -1,\ b = 1,\ c = 0,\ d = 1 \Rightarrow T = 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, $f(1) = 2$ và $f(2) = 2018$. Tính $I = \displaystyle\int\limits_1^2 f'(x)\mathrm{d}x$.

(A) $I = -2016$. (B) $I = 2018$. **(C)** $I = 2016$. (D) $I = 1016$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int\limits_1^2 f'(x)\mathrm{d}x = f(2) - f(1) = 2016$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d\colon y = 2x - 3$. Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm A và B. Tính khoảng cách giữa hai điểm A và B.

(A) $AB = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **(B)** $AB = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$. (C) $AB = \dfrac{2}{5}$. (D) $AB = \dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ $\dfrac{2x-1}{x+1} = 2x - 3 \Leftrightarrow 2x - 1 = (x+1)(2x-3) \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0.(1)$

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1). Theo Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{3}{2} \\ x_1x_2 = -1. \end{cases}$

Giả sử $A(x_1; 2x_1 - 3)$, $B(x_2; 2x_2 - 3) \Rightarrow AB = \sqrt{5(x_1-x_2)^2} = \sqrt{5[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]} = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1;2;-2)$, $B(2;-1;4)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta)\colon x - 2y - z + 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (α).

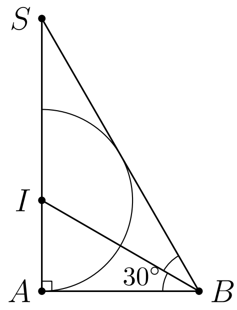
(A) $15x + 7y - z - 27 = 0$. (B) $15x + 7y + z + 27 = 0$.

(C) $15x + 7y + z - 27 = 0$. (D) $15x - 7y + z - 27 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -3; 6)$ và véc-tơ pháp tuyến của (α) là $\overrightarrow{n}_\alpha = (1; -2; -1) \Rightarrow$ véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) là $\overrightarrow{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n}_\alpha\right] = (15; 7; 1)$.
Phương trình mặt phẳng (β) là $15(x-1) + 7(y-2) + (z+2) = 0 \Leftrightarrow 15x + 7y + z - 27 = 0$.
Chọn đáp án C □

Câu 30.
Cho tam giác SAB vuông tại A, $\widehat{ABS} = 60°$. Đường phân giác trong góc $\widehat{ABS}$ cắt SA tại I. Vẽ nửa đường tròn tâm I, bán kính IA (như hình vẽ). Cho ΔSAB và nửa đường tròn trên cùng quay quanh SA tạo nên các khối cầu và khối nón có thể tích tương ứng là V_1, V_2. Khẳng định nào dưới đây đúng?



(A) $2V_1 = 3V_2$. (B) $9V_1 = 4V_2$. (C) $4V_1 = 9V_2$. (D) $V_1 = 3V_2$.

Lời giải.
Đặt $AB = x$ $(x > 0)$. Ta có

- $AI = AB\tan 30° = \dfrac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow V_1 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot \dfrac{x^3}{3\sqrt{3}} = \dfrac{4x^3}{9\sqrt{3}}$.
- $AS = AB\tan 60° = x\sqrt{3} \Rightarrow V_2 = \dfrac{1}{3}\pi \cdot x^2 \cdot x\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}x^3}{3}$.

Do đó $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{4x^3}{9\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{x^3} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow 9V_1 = 4V_2$.
Chọn đáp án B □

Câu 31. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x + y - z - 2 = 0$. Đường thẳng nào dưới đây nằm trong mặt phẳng (α), đồng thời vuông góc và cắt đường thẳng d?

(A) $\dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z+4}{-1}$. (B) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{z-4}{3}$.
(C) $\dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-5}{1}$. (D) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{1}$.

Lời giải.
Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (α), vuông góc và cắt (d).
Ta có véc-tơ pháp tuyến của (α) là $\overrightarrow{n}_\alpha = (1; 1; -1)$ và véc-tơ chỉ phương của (d) là $\overrightarrow{u}_d = (1; 2; 1)$ $\Rightarrow$ véc-tơ chỉ phương của (Δ) là $\overrightarrow{u} = [\overrightarrow{u}_d, \overrightarrow{n}_\alpha] = (-3; 2; -1)$.

Ta có $d\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$. Thay vào phương trình mặt phẳng (α), ta có

$$1 + t + 2 + 2t - 3 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Tọa độ giao điểm của (d) và (α) là $M(2; 4; 4) \Rightarrow$ phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = 2 - 3u \\ y = 4 + 2u \\ z = 4 - u. \end{cases}$

Chọn $u = -1 \Rightarrow N(5; 2; 5) \in \Delta \Rightarrow \Delta\colon \dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-5}{1}$.
Chọn đáp án C □

Câu 32. Biết phương trình $2\log_2 x + 3\log_x 2 = 7$ có hai nghiệm thực $x_1 < x_2$. Tính giá trị của biểu thức $T = (x_1)^{x_2}$.

A $T = 32$. **B** $T = 64$. **C** $T = 16$. **D** $T = 8$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x > 0; x \neq 1$.

Ta có $2\log_2 x + 3\log_x 2 = 7 \Leftrightarrow 2\log_2 x + \dfrac{3}{\log_2 x} - 7 = 0 \Leftrightarrow 2\log_2^2 x - 7\log_2 x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = 3\\ \log_2 x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = 8\\ x = \sqrt{2}\end{array}\right. \Rightarrow T = 16.$

Chọn đáp án C □

Câu 33. Tìm số giá trị nguyên của tham số $m \in [0; 30]$ để phương trình $x^4 - 6x^3 + mx^2 - 12x + 4 = 0$ có nghiệm.

A 17. **B** 16. **C** 15. **D** 14.

Lời giải.

Dễ thấy $x = 0$ không thỏa mãn phương trình. Khi đó, ta có

$$x^4 - 6x^3 + mx^2 - 12x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} - 6\left(x + \frac{2}{x}\right) + m = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - 6\left(x + \frac{2}{x}\right) + m - 4 = 0.$$

Nhận xét x và $\dfrac{2}{x}$ cùng dấu nên $\left|x + \dfrac{2}{x}\right| = |x| + \left|\dfrac{2}{x}\right| \geq 2\sqrt{2}$. Đặt $t = x + \dfrac{2}{x} \Rightarrow |t| \geq 2\sqrt{2}$.

Ta có phương trình $t^2 - 6t + m - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t = -m + 4$.

Xét $f(t) = t^2 - 6t$ trên miền $(-\infty; -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = 2t - 6$. Suy ra $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$. Ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$		$-2\sqrt{2}$		$2\sqrt{2}$		3		$+\infty$
$f'(t)$		$-$				$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$8+12\sqrt{2}$		$8-12\sqrt{2}$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-m + 4 \geq -9 \Leftrightarrow m \leq 13$. Vì $m \in [0; 30]$ nên có 14 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Xét các điểm A, B, C trong mặt phẳng phức theo thứ tự là điểm biểu diễn các số phức $\dfrac{4i}{-1+i}$, $(1-i)(1+2i)$, $\dfrac{2+6i}{3-i}$. Gọi $I(a; b)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.

A $P = 0$. **B** $P = 1$. **C** $P = 2$. **D** $P = -1$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{4i}{-1+i} = 2-2i \Rightarrow A(2;-2)$, $(1-i)(1+2i) = 3+i \Rightarrow B(3;1)$, $\dfrac{2+6i}{3-i} = 2i \Rightarrow C(0;2)$.
Lại có

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2+(b+2)^2 = (a-3)^2+(b-1)^2 \\ (a-2)^2+(b+2)^2 = a^2+(b-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+3b = 1 \\ a-2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow P = 1.$$

Chọn đáp án B □

Câu 35. Phương trình $2018^{\sin x} = \sin x + \sqrt{2-\cos^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thực trong đoạn $[4\pi; 2018\pi]$?

A 0. B 2023. C 2015. D 2014.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow -1 \le t \le 1$. Ta có phương trình

$$2018^t = t + \sqrt{1+t^2} \Leftrightarrow 2018^t = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}-t} \text{ (vì } \sqrt{t^2+1} > t) \Leftrightarrow 2018^t(\sqrt{t^2+1}-t) = 1. \quad (1)$$

Xét $f(t) = 2018^t(\sqrt{t^2+1}-t) - 1$, có
$f'(t) = 2018^t \ln 2018(\sqrt{t^2+1}-t) + +2018^t\left(\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}} - 1\right) = 2018^t(\sqrt{t^2+1}-t)\left(\ln 2018 - \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right)$.

Ta có $\begin{cases} \sqrt{t^2+1} - t > 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} \le 1 \end{cases} \Rightarrow f'(t) > 0$. Do vậy phương trình (1) có nhiều nhất 1 nghiệm.

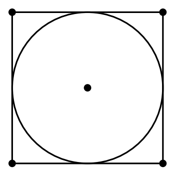
Ta thấy $t = 0$ thỏa mãn phương trình (1). Do đó, (1) có nghiệm duy nhất $t = 0$.
Với $t = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow$ trong đoạn $[4\pi; 2018\pi]$ nên có $\dfrac{2018-4}{1} + 1 = 2015$ nghiệm thực.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho hình lập phương có cạnh bằng 40 và một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích toàn phần của hình lập phương và diện tích toàn phần của hình trụ. Tính $S = S_1 + S_2$ (đvdt).

A $S = 2400(4+3\pi)$. B $S = 2400(4+\pi)$. C $S = 4(2400+3\pi)$. D $S = 4(2400+\pi)$.

Lời giải.



Diện tích toàn phần của hình lập phương là $S_1 = 6 \cdot 1600 = 9600$ (đvdt).
Bán kính đáy của hình trụ là $R = 20 \Rightarrow$ diện tích toàn phần của hình trụ là $S_2 = 2\pi \cdot 400 + 2\pi \cdot 20 \cdot 40 = 2400\pi$ (đvdt).
Do đó $S = 2400(4+\pi)$ (đvdt).

Chọn đáp án B □

Câu 37. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ và mặt phẳng $(P)\colon y - z + 1 = 0$. Biết b, $c > 0$, $(ABC) \perp (P)$ và $\mathrm{d}(O;(ABC)) = \dfrac{1}{3}$. Tính $T = b + c$.

A $T = 2$. B $T = 1$. C $T = \dfrac{1}{2}$. D $T = \dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $x+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1\Leftrightarrow x+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}-1=0$.

Khoảng cách từ O đến (ABC) là $\dfrac{|-1|}{\sqrt{1+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=9\Leftrightarrow \dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=8.$ (1)

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_P=(0;1;-1)$ và véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n}=\left(1;\dfrac{1}{b};\dfrac{1}{c}\right)$. Vì $(ABC)\perp(P)$ nên $\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}=0\Leftrightarrow b=c$. (2)

Thay (2) vào (1) ta được $\dfrac{2}{b^2}=8\Leftrightarrow b^2=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow b=\dfrac{1}{2}$ (do $b>0$), suy ra $c=\dfrac{1}{2}\Rightarrow T=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)\neq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $3f'(x)+2f^2(x)=0$. Tính $f(1)$ biết rằng $f(0)=1$.

A. $\dfrac{1}{5}$. B. $\dfrac{4}{5}$. C. $\dfrac{3}{5}$. D. $\dfrac{2}{5}$.

Lời giải.

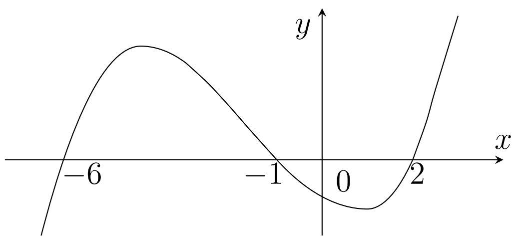
Ta có $3f'(x)+2f^2(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=-\dfrac{2}{3}$. Lấy tích phân hai vế ta được

$$\int\limits_0^1\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=-\int\limits_0^1\frac{2}{3}\mathrm{d}x\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}\Big|_0^1=-\frac{2}{3}x\Big|_0^1\Leftrightarrow\frac{1}{f(1)}-1=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{f(1)}=\frac{5}{3}\Leftrightarrow f(1)=\frac{3}{5}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 39.

Cho hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(3-x^2)+2018$ đồng biến trong khoảng nào dưới đây?



A. $(2;3)$. B. $(-2;-1)$.
C. $(0;1)$. D. $(-1;0)$.

Lời giải.

Ta có $[f(3-x^2)+2018]'=f'(3-x^2)(-2x)$. Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có

$$[f(3-x^2)]'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(3-x^2)=0\\x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-x^2=-6\\3-x^2=-1\\3-x^2=2\\x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm3\\x=\pm2\\x=\pm1\\x=0.\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số $y=3-x^2$

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$3-x^2$	$-\infty$	-6	-1	2	3	2	-1	-6	$-\infty$

Từ đó, ta có bảng xét dấu của $[f(3-x^2)+2018]'$

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		2		3		$+\infty$
$-2x$		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	
$f'(3-x^2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$[f(3-x^2)+2018]'$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu, ta có hàm số $y=f(3-x^2)+2018$ đồng biến trên $(-1;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho đường cong $(C)\colon y=x^4-4x^2+2$ và điểm $A(0;a)$. Nếu qua A kẻ được 4 tiếp tuyến với (C) thì a phải thỏa mãn điều kiện

A $a\in\left(2;\dfrac{10}{3}\right)$.

B $a\in(2;+\infty)$.

C $a\in(-\infty;2)\cup\left(\dfrac{10}{3};+\infty\right)$.

D $a\in\left(-\infty;\dfrac{10}{3}\right)$.

Lời giải.

Ta có $y'=4x^3-8x$. Gọi tọa độ tiếp điểm là $M_0(x_0;x_0^4-4x_0^2+2)\Rightarrow y'(x_0)=4x_0^3-8x_0$. Do đó, phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M_0 là

$$y=(4x_0^3-8x_0)(x-x_0)+x_0^4-4x_0^2+2.$$

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $A(0;a)$ nên ta có

$$a=(4x_0^3-8x_0)(0-x_0)+x_0^4-4x_0^2+2\Leftrightarrow a=-3x_0^4+4x_0^2+2. \qquad (*)$$

Xét $f(t)=-3t^4+4t^2+2$, có $f'(t)=-12t^3+8t$. Do đó, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=0$, $t=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$		$-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$		0		$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{10}{3}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\dfrac{10}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Để qua $A(0; a)$ kẻ được 4 tiếp tuyến đến (C) thì phương trình $(*)$ phải có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow a \in \left(2; \dfrac{10}{3}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |x^3 + 3x^2 - 3 + m|$ có ba điểm cực trị.

A $m = 3$ hoặc $m = -1$.
B $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$.
C $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$.
D $1 \leq m \leq 3$.

Lời giải.

Xét hàm $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3 + m$, có $f'(x) = 3x^2 + 6x$. Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$m+1$	$\searrow$	$m-3$	$\nearrow$	$+\infty$

Ta thấy

- Nếu $m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$ thì đồ thị hàm số $f(x)$ sẽ cắt trục hoành tại điểm $x_0 \in (-\infty; -2)$.
- Nếu $m + 1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -1$ thì đồ thị hàm số $f(x)$ sẽ cắt trục hoành tại điểm $x_0 \in (0; +\infty)$.

Để hàm số $y = |x^3 + 3x^2 - 3 + m|$ có ba điểm cực trị thì bảng biến thiên của $y = |x^3 + 3x^2 - 3 + m|$ phải có dạng

x	$-\infty$		x_0		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$m+1$	$\searrow$	$m-3$	$\nearrow$	$+\infty$

hoặc

x	$-\infty$		-2		0		x_0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-m-1$	$\nearrow$	$-m+3$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Do vậy, để hàm số $y = |x^3 + 3x^2 - 3 + m|$ có ba điểm cực trị thì $\left[\begin{array}{l} m-3 \geq 0 \\ m+1 \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 3 \\ m \leq -1. \end{array}\right.$

Chọn đáp án C □

Câu 42. Tìm số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^{x+1} + 4^{1-x} = (m+1)(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 16 - 8m$ có nghiệm trên đoạn $[0;1]$.

A 1. **B** 4. **C** 3. **D** 2.

Lời giải.

Ta có

$$4^{x+1} + 4^{1-x} = (m+1)(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 16 - 8m \Leftrightarrow 2^{2x} + \frac{1}{2^{2x}} = (m+1)\cdot\left(2^x - \frac{1}{2^x}\right) + 4 - 2m. \quad (*)$$

Đặt $t = 2^x$. Vì $0 \leq x \leq 1$ nên $1 \leq t \leq 2$.

Xét $f(t) = t - \frac{1}{t}$, ta có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0$ với mọi $t \in [1;2]$. Do đó $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{2}$.

Đặt $a = t - \frac{1}{t} \Rightarrow 0 \leq a \leq \frac{1}{2}$.

Phương trình $(*)$ có dạng $a^2 + 2 = (m+1)a + 4 - 2m \Leftrightarrow \dfrac{a^2 - a - 2}{a-2} = m$.

Xét $f(a) = \dfrac{a^2 - a - 2}{a-2} = a + 1$, ta có $f'(a) = 1 > 0$. Ta có bảng biến thiên

a	0		$\frac{1}{2}$
$f'(a)$		$+$	
$f(a)$	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

Để phương trình $(*)$ có nghiệm trong đoạn $[0;1]$ thì $1 \leq m \leq \frac{3}{2} \Rightarrow$ có 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_5 - 2\log u_2 = 2\left(1 + \sqrt{\log u_5 - 2\log u_2 + 1}\right)$ và $u_n = 3u_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Giá trị lớn nhất của n để $u_n < 7^{100}$ bằng

A $n = 179$. **B** $n = 177$. **C** $n = 191$. **D** $n = 192$.

Lời giải.

Vì $u_n = 3u_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy (u_n) là một cấp số nhân với công bội $q = 3$. Do đó $u_5 = 3^3 u_2$.

Do vậy,

$$\log u_5 - 2\log u_2 = 2\left(1+\sqrt{\log u_5 - 2\log u_2 + 1}\right) \quad \Leftrightarrow 25\log u_2 = 2\sqrt{25\log u_2 + 1} + 2$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{25\log u_2 + 1} + 1\right)^2 - 2\cdot\left(\sqrt{25\log u_2+1}+1\right) - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{25\log u_2+1} = 1 \text{ (thỏa mãn)}\\ \sqrt{25\log u_2+1} = -3 \text{ (loại)}\end{array}\right.$$

Với $\sqrt{25\log u_2 + 1} = 1 \Leftrightarrow \log u_2 = 0 \Leftrightarrow u_2 = 1 \Leftrightarrow u_1 = \dfrac{1}{3}$. Do đó $u_n = \dfrac{1}{3}\cdot 3^{n-1} = 3^{n-2}$.
Khi đó

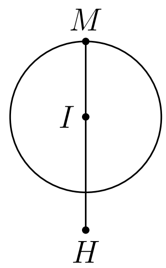
$$u_n < 7^{100} \Leftrightarrow 3^{n-2} < 7^{100} \Leftrightarrow n - 2 < 100\cdot\log_3 7 \Leftrightarrow n < 2 + 100\cdot\log_3 7 \approx 179{,}124.$$

Chọn đáp án A □

Câu 44. Xét các số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = 5$. Tính $P = a + b$ khi $Q = |z + 2 - 2i|^2 + 2|z - 4 + i|^2 + 3|z + 2i|^2$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P = 11$. B. $P = 14$. C. $P = 13$. D. $P = 12$.

Lời giải.



Gọi $M(a; b)$ và $I(4; 3) \Rightarrow M$ nằm trên đường tròn tâm I, bán kính 5.
Xét $A(-2; 2)$, $B(4; -1)$, $C(0; -2) \Rightarrow Q = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$.
Gọi $H(x; y)$ là điểm thỏa mãn

$$\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB} + 3\overrightarrow{HC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+2) + 2(x-4) + 3x = 0\\ (y-2) + 2(y+1) + 3(y+2) = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1\\ y = -1\end{cases} \Rightarrow H(1; -1).$$

Ta có $Q = \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB}\right)^2 + 3\left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HC}\right)^2 = 6MH^2 + HA^2 + 2HB^2 + 3HC^2 + 2\overrightarrow{MH}\left(\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB} + 3\overrightarrow{HC}\right) = 6MH^2 + HA^2 + 2HB^2 + 3HC^2$.
Do A, B, C, H cố định nên $HA^2 + 2HB^2 + 3HC^2$ là hằng số, do vậy Q lớn nhất khi MH lớn nhất $\Leftrightarrow M$, I, H theo thứ tự thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{HM} = \dfrac{HM}{IM}\overrightarrow{IM}$.
Ta có $HI = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow HM = HI + MI = 5 + 5 = 10 \Rightarrow \overrightarrow{HM} = 2\overrightarrow{IM}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - 1 = 2(a-4)\\ b + 1 = 2(b-3)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7\\ b = 7\end{cases} \Rightarrow P = 14.$$

Chọn đáp án B □

Câu 45. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt cầu $(S_1)\colon (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 1$, $(S_2)\colon x^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 4$, $(S_3)\colon x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y - 1 = 0$. Có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3)?

A. 2. B. 6. C. 8. D. 4.

Lời giải.

Ta có (S_1), (S_2), (S_3) có tâm lần lượt là $I_1(-3; 2; 4)$, $I_2(0; 2; 4)$, $I_3(-2; 2; 0)$ và bán kính lần lượt là $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $R_3 = 3$.
Gọi $(P)\colon ax + by + cz + d = 0$ $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$ là mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu nói trên.

Khi đó

$$\begin{cases} \mathrm{d}(I_1;(P)) = R_1 \\ \mathrm{d}(I_2;(P)) = R_2 \\ \mathrm{d}(I_3;(P)) = R_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |-3a+2b+4c+d| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |2b+4c+d| = 2\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |-2a+2b+d| = 3\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |2b+4c+d| = 2\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ 2|-3a+2b+4c+d| = |2b+4c+d| \\ 3|2b+4c+d| = 2|-2a+2b+d|. \end{cases}$$

Xét phương trình

$$3|2b+4c+d| = 2|-2a+2b+d| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3(2b+4c+d) = 2(-2a+2b+d) \\ 3(2b+4c+d) = -2(-2a+2b+d) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = -4a-2b-12c \\ 5d = 4a-10b-12c. \end{array}\right.$$

a) Với $d = -4a-2b-12c$. Thay vào $2|-3a+2b+4c+d| = |2b+4c+d|$, ta được

$$2|-7a-8c| = |-4a-8c| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7a+8c = 2a+4c \\ 7a+8c = -2a-4c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -\dfrac{6c}{5} \\ a = -\dfrac{4c}{3}. \end{array}\right.$$

- Với $a = -\dfrac{6c}{5} \Rightarrow d = -\dfrac{36c}{5} - 2b$.
  Thay vào $|-3a+2b+4c+d| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, ta được

$$\left|\frac{18c}{5} + 2b + 4c - \frac{36c}{5} - 2b\right| = \sqrt{\left(-\frac{6c}{5}\right)^2 + b^2 + c^2}$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{2c}{5}\right| = \frac{1}{5}\cdot\sqrt{25b^2+61c^2} \Leftrightarrow 4c^2 = 25b^2+61c^2 \Leftrightarrow b = c = 0.$$

  Với $b = c = 0 \Rightarrow a = 0,\ d = 0$ (vô lí).
- Với $a = -\dfrac{4c}{3} \Rightarrow d = -\dfrac{20c}{3} - 2b$.
  Thay vào $|-3a+2b+4c+d| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, ta được

$$\left|\frac{12c}{5} + 2b + 4c - \frac{20c}{5} - 2b\right| = \sqrt{\left(-\frac{4c}{3}\right)^2 + b^2 + c^2}$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{4c}{3}\right| = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{9b^2+25c^2} \Leftrightarrow 16c^2 = 9b^2+25c^2 \Leftrightarrow b = c = 0.$$

  Với $b = c = 0 \Rightarrow a = 0,\ d = 0$ (vô lí).

b) Với $5d = 4a-10b-12c$. Thay vào $2|-3a+2b+4c+d| = |2b+4c+d|$, ta được

$$2|-11a+8c| = |4a+8c| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 11a-8c = 2a+4c \\ 11a-8c = -2a-4c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{4c}{13} \\ a = \dfrac{4c}{3}. \end{array}\right.$$

- Với $a = \dfrac{4c}{13} \Rightarrow 5d = -\dfrac{140c}{13} - 10b$.
  Thay vào $|-3a+2b+4c+d| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, ta được

$$\left|\frac{60c}{13}\right| = \frac{5}{13}\cdot\sqrt{169b^2+185c^2} \Leftrightarrow 11c^2 = 169b^2 \Leftrightarrow c = \pm\frac{13b}{\sqrt{11}}.$$

⊞ Với $c = \dfrac{13b}{\sqrt{11}}$: chọn $b = \sqrt{11} \Rightarrow c = 13 \Rightarrow$ tồn tại một mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3).

⊞ Với $c = -\dfrac{13b}{\sqrt{11}}$: chọn $b = \sqrt{11} \Rightarrow c = -13 \Rightarrow$ tồn tại một mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3).

- Với $a = \dfrac{4c}{3} \Rightarrow 5d = -\dfrac{20c}{3} - 10b$.
  Thay vào $|-3a + 2b + 4c + d| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, ta được
  $$\left|\frac{20c}{3}\right| = \frac{5}{3} \cdot \sqrt{9b^2 + 25c^2} \Leftrightarrow 9c^2 + 9b^2 = 0 \Leftrightarrow b = c = 0.$$
  Với $b = c = 0 \Rightarrow a = 0$, $d = 0$ (vô lí).

Vậy tồn tại 2 mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3).

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;1)$ và $B(-1;2;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB).

(A) $\Delta\colon \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$. **(B)** $\Delta\colon \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$. **(C)** $\Delta\colon \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$. **D** $\Delta\colon \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OA} = (1;0;1)$, $\overrightarrow{OB} = (-1;2;1) \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Rightarrow OA \perp OB$. Do vậy, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là $(0;1;1)$.

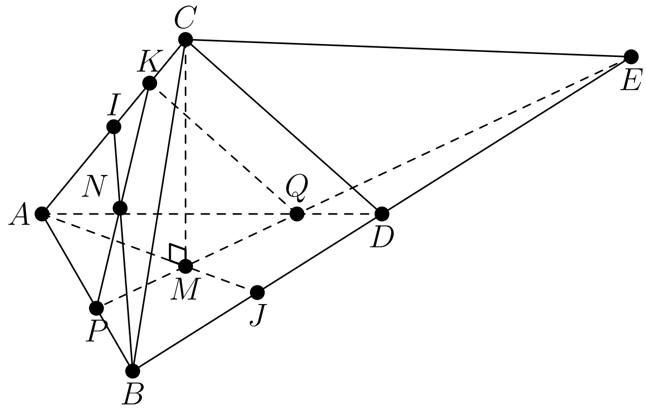
Lại có $\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right] = (-2;-2;2) \Rightarrow$ véc-tơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{n} = (1;1;-1) \Rightarrow$ phương trình đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABD, ABC và E là điểm đối xứng của B qua D. Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện không chứa đỉnh A có thể tích V. Tính V.

(A) $V = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{320}$. **(B)** $V = \dfrac{9\sqrt{2}a^3}{320}$. **(C)** $V = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{80}$. **D** $V = \dfrac{53\sqrt{2}a^3}{960}$.

Lời giải.



Xét tam giác đều ABD có M là trọng tâm nên $AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.
Xét tam giác CMA vuông tại M có $CM = \sqrt{CD^2 - AM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.
Diện tích tam giác ABD là $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
$\Rightarrow$ thể tích khối chóp $ABCD$ là $V_{ABCD} = \frac{CM \cdot S}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.
Gọi J, I lần lượt là trung điểm BD, AC. Nối ME cắt BA tại P và cắt AD tại Q. Nối PN cắt AC tại K. Khi đó thiết diện là tam giác PQK.
Áp dụng định lý Mê-nê-la-uýt cho:

- tam giác JAD có $\frac{AM}{MJ} \cdot \frac{JE}{ED} \cdot \frac{DQ}{QA} = 1 \Rightarrow \frac{DQ}{QA} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AQ}{AD} = \frac{3}{4}$.
- tam giác ADB có $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BE}{ED} \cdot \frac{DQ}{QA} = 1 \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{3}{5}$.
- tam giác ABI có $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BN}{NI} \cdot \frac{IK}{KA} = 1 \Rightarrow \frac{IK}{KA} = \frac{1}{3} \Rightarrow IK = \frac{1}{2}AI = \frac{1}{4}AC \Rightarrow \frac{AK}{AC} = \frac{3}{4}$.

Khi đó ta có

$$\frac{V_{APQK}}{V_{ABDC}} = \frac{AP}{AB} \cdot \frac{AQ}{AD} \cdot \frac{AK}{AC} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{80} \Rightarrow V = \frac{53}{80} \cdot V_{ABDC} = \frac{53\sqrt{2}a^3}{960}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0) = 1$, $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{30}$, $\int\limits_0^1 (2x-1)f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{30}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

(A) $\frac{1}{30}$. (B) $\frac{11}{30}$. (C) $\frac{11}{12}$. (D) $\frac{11}{4}$.

Lời giải.

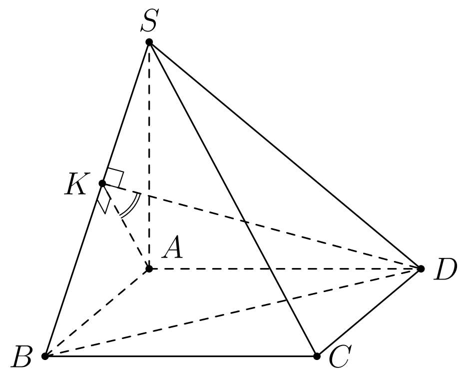
Ta có $-\frac{1}{30} = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}(x^2-x) = (x^2-x)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (x^2-x)f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 (x^2-x)f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{30}$.
Ta tìm m thỏa mãn
$0 = \int_0^1 \left(f'(x) + m(x^2-x)\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x + 2m\int_0^1 f'(x)(x^2-x)\mathrm{d}x + m^2\int_0^1 (x^2-x)^2\mathrm{d}x \Rightarrow m = -1$.
Do vậy, $f'(x) - (x^2-x) = 0 \Rightarrow f'(x) = x^2 - x \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C$.
Mà $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1\right)\mathrm{d}x = \frac{11}{12}$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 1$, $AD = 2$, cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = \sqrt{5}$. Gọi α là số đo góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBD). Giá trị $\cos\alpha$ bằng

A $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **B** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C** $\dfrac{\sqrt{29}}{25}$. **D** $\dfrac{\sqrt{145}}{29}$.

Lời giải.



Vì $AD \perp AB$, $AD \perp SA$ nên $AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SB$.

Kẻ $AK \perp SB$ $(K \in SB) \Rightarrow SB \perp (ADK) \Rightarrow SB \perp DK$

góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBD) là $\widehat{AKD}$.

Xét tam giác SAB vuông tại A có

$\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{5} + 1 = \dfrac{6}{5} \Rightarrow AK = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$.

Xét tam giác ADK vuông tại A có

$KD = \sqrt{AK^2 + AD^2} = \sqrt{\dfrac{5}{6} + 4} = \dfrac{\sqrt{29}}{\sqrt{6}}$

$\Rightarrow \cos \widehat{AKD} = \dfrac{AK}{DK} = \dfrac{\sqrt{145}}{29}$.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Một bài trắc nghiệm có 10 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn trong đó có 1 đáp án đúng. Giả sử mỗi câu trả lời đúng được 4 điểm và mỗi câu trả lời sai bị trừ đi 2 điểm. Một học sinh không học bài và đánh hú họa các câu trả lời (giả sử học sinh đó chọn đáp án cho đủ 10 câu hỏi). Tìm xác suất để học sinh này nhận điểm dưới 1.

A 0,7759. **B** 0,7336. **C** 0,7124. **D** 0,783.

Lời giải.

Gọi a và b lần lượt là số câu chọn được đáp án đúng và sai $(a, b \in \mathbb{N},\ a + b = 10)$.

Để nhận được dưới 1 điểm thì $4a - 2b < 1$. Vì $a + b = 10$ nên $b = 10 - a$. Do vậy,

$$4a - 2(10 - a) < 1 \Leftrightarrow 6a < 21 \Leftrightarrow a < 3{,}5.$$

- Với $a = 0 \Rightarrow b = 10 \Rightarrow$ xác suất xảy ra trường hợp này là $0{,}75^{10} = 0{,}05631$.
- Với $a = 1 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow$ xác suất xảy ra trường hợp này là $\mathrm{C}_{10}^{1} \cdot 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^9 = 0{,}18771$.
- Với $a = 2 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow$ xác suất xảy ra trường hợp này là $\mathrm{C}_{10}^{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^8 = 0{,}28156$.
- Với $a = 3 \Rightarrow b = 7 \Rightarrow$ xác suất xảy ra trường hợp này là $\mathrm{C}_{10}^{3} \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^7 = 0{,}22028$.

Vậy xác suất để học sinh đó nhận được dưới 1 điểm là

$$0{,}05631 + 0{,}18771 + 0{,}28156 + 0{,}22028 = 0{,}77586.$$

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. A	3. A	4. C	5. A	6. D	7. C	8. A	9. A	10. A
11. A	12. B	13. D	14. A	15. C	16. D	17. C	18. A	19. A	20. C
21. B	22. B	23. A	24. C	25. D	26. D	27. C	28. B	29. C	30. B
31. C	32. C	33. D	34. B	35. C	36. B	37. B	38. C	39. D	40. A
41. C	42. A	43. A	44. B	45. A	46. D	47. D	48. C	49. D	50. A

73 ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA 2018 TRƯỜNG THPT ĐẶNG THÚC HỨA - NGHỆ AN - LẦN 2

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hình nón đỉnh S biết rằng nếu cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Diện tích xung quanh của hình nón là

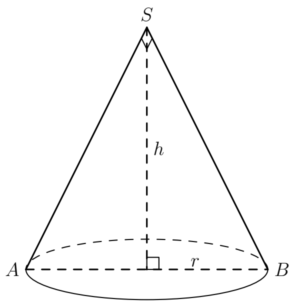
A) $S_{xq} = \dfrac{\pi\sqrt{2}a^2}{2}$. B) $S_{xq} = \pi a^2$. C) $S_{xq} = \sqrt{2}\pi a^2$. D) $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2}{2}$.

Lời giải.

Tam giác SAB vuông cân tại S có $AB = a\sqrt{2}$ nên $SB = a$.

Bán kính đường tròn đáy của hình nón là $r = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy diện tích xung quanh là $S_{xq} = \dfrac{\pi\sqrt{2}a^2}{2}$.



Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $3\log a + 2\log b = 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A) $a^3 + b^2 = 1$. B) $3a + 2b = 10$. C) $a^3b^2 = 10$. D) $a^3 + b^2 = 10$.

Lời giải.

Ta có: $3\log a + 2\log b = 1 \Leftrightarrow \log a^3 + \log b^2 = 1 \Leftrightarrow \log\left(a^3b^2\right) = 1 \Leftrightarrow a^3b^2 = 10$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Tính tích phân $I = \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x$.

A) $\dfrac{\pi}{2} - 1$. B) $\dfrac{\pi}{2} + 1$. C) 1. D) $\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \cos x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \sin x. \end{cases}$

Ta có $I = (x\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = (x\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{2} - 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1;2;0)$, $B(2;3;1)$ và song song với trục Oz có phương trình là

A) $x - y + 1 = 0$. B) $x + y - 3 = 0$. C) $x + z - 3 = 0$. D) $x - y - 3 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;1;1)$, $\overrightarrow{k} = (0;0;1)$.

Do mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A,B và song song với trục Oz nên mặt phẳng (P) có một

véctơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{k}\right] = (1; -1; 0)$.
Mặt phẳng (P) qua A nên phương trình là

$$1(x-1) - (y-2) = 0 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0.$$

Chọn đáp án A □

Câu 5. Đồ thị hàm số nào sau đây **không** có tiệm cận ngang?

A $y = \sqrt{x^2 - 1}$. **B** $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$. **C** $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2}$. **D** $y = x - \sqrt{x^2 + 1}$.

Lời giải.

- Xét hàm số $y = \sqrt{x^2 - 1}$ với $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. Ta có:
  + $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} x\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} = +\infty$.
  + $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} -x\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} = +\infty$.

  Nên đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 - 1}$ không có tiệm cận ngang.
- Xét hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ có $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x+1} = 2$.
  Nên đồ thị hàm số có một tiệm ngang là $y = 2$.
- Xét hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2}$ có $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2} = 1$.
  Nên đồ thị hàm số có một tiệm ngang là $y = 1$.
- Xét hàm số $y = x - \sqrt{x^2 + 1}$ có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 1}\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = 0$.
  Nên đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $f(x) = 0{,}025x^2(30 - x)$, trong đó x (miligam) là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân. Khi đó liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là

A 20 miligam. **B** 10 miligam. **C** 15 miligam. **D** 30 miligam.

Lời giải.

Điều kiện: $0 \le x \le 30$.

Ta có $f(x) = \dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{1}{40}x^3 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{40}x^2$. Do đó, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 20. \end{array}\right.$

Mà $f(0) = 0$; $f(20) = 100$; $f(30) = 0$.

Vậy huyết áp giảm nhiều nhất khi bệnh nhân được tiêm 20 miligam thuốc.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, SC tạo với đáy một góc $60°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

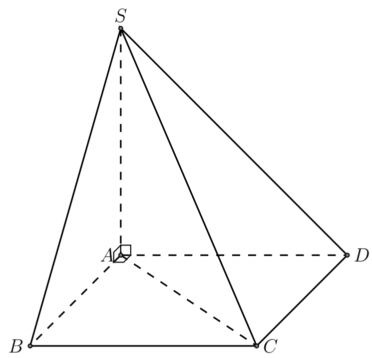
A $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Góc giữa cạnh SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SCA} = 60°$.
Xét tam giác SCA vuông tại A có:

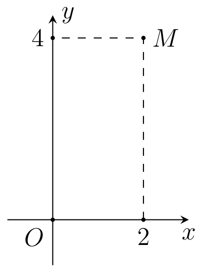
- $AC = a\sqrt{2}$;
- $SA = AC \cdot \tan 60° = a\sqrt{6}$.

Suy ra $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{6} \cdot a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 8.
Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn cho số phức nào trong 4 số phức được liệt kê dưới đây?



(A) $z = 4 - 2i$. **B** $z = 2 + 4i$. (C) $z = 4 + 2i$. (D) $z = 2 - 4i$.

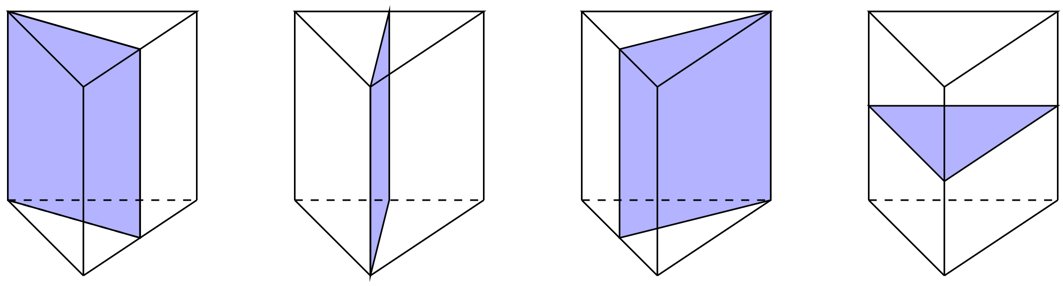
Lời giải.
Ta có tọa độ $M(2; 4)$, suy ra số phức biểu diễn bởi M là $z = 2 + 4i$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Hình lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

(A) 6. **B** 4. (C) 3. (D) 5.

Lời giải.
Các mặt phẳng đối xứng của hình lăng trụ là:

- Mặt phẳng trung trực của các cạnh đáy: 3 mặt phẳng.
- Mặt phẳng trung trực của cạnh bên: 1 mặt phẳng.



Vậy hình đã cho có tất cả 4 mặt phẳng đối xứng.
Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, khoảng cách h từ điểm $A(-4; 3; 2)$ đến trục Ox là

(A) $h = 4$. **B** $h = \sqrt{13}$. (C) $h = 3$. (D) $h = 2\sqrt{5}$.

Lời giải.
Ta có $H(-4; 0; 0)$ là hình chiếu của điểm $A(-4; 3; 2)$ trên trục Ox.
Khoảng cách từ A đến trục Ox là $AH = \sqrt{13}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=-1+2t \\ y=1 \\ z=2-t \end{cases}$. Tìm một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

A $\vec{u}_2=(2;0;-1)$. **B** $\vec{u}_4=(2;1;2)$. **C** $\vec{u}_3=(2;0;2)$. **D** $\vec{u}_1=(-1;1;2)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;0;-1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{\sqrt{4x^2+1}-2}$.

A $\dfrac{1}{4}$. **B** $\dfrac{1}{2}$. **C** $-\dfrac{3}{2}$. **D** 0.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{\sqrt{4x^2+1}-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{2}{x}}=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Có bao nhiêu tập hợp con gồm 3 phần tử của tập hợp $X=\{1;2;3;4;7;8;9\}$?

A A_7^3. **B** C_9^3. **C** C_7^3. **D** A_9^3.

Lời giải.

Số tập con gồm 3 phần tử của tập hợp X có 7 phần tử là C_7^3.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\mathrm{e}^x$ và các đường thẳng $y=0$; $x=0$ và $x=1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A $V=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$. **B** $V=\pi\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$. **C** $V=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$. **D** $V=\pi\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích cần tính là $V=\pi\displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$ tương ứng có phương trình là

A $x=2$ và $y=1$. **B** $x=-1$ và $y=2$. **C** $x=1$ và $y=-3$. **D** $x=1$ và $y=2$.

Lời giải.

Ta có

- $\lim\limits_{x\to-1^-} y=+\infty$. Suy ra tiệm cận đứng của đồ thị là $x=-1$.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=2$. Suy ra tiệm cận ngang của đồ thị là $y=2$.

Do đó đồ thị hàm số nhận $x = -1$ là tiệm cận đứng và $y = 2$ làm tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Tổng hoành độ các giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3$ và đường thẳng $y = x$ là

A 3. (B) 2. (C) 4. (D) 0.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm là

$$x^3 - 3x^2 + 3 = x \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Vậy đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3$ cắt đường thẳng $y = x$ tại ba điểm phân biệt và tổng hoành độ các giao điểm này bằng 3.

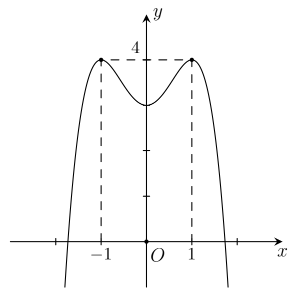
Chọn đáp án (A) □

Câu 17.

Đường cong bên là hình biểu diễn của đồ thị hàm số nào sau đây?

(A) $y = -x^4 + 4x^2 + 3$. (B) $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

(C) $y = -x^3 + 3x + 3$. **D** $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.



Lời giải.

* **Cách 1:** Giả sử hàm số có dạng $y = ax^4 + bx^2 + c$.

Dựa vào hình vẽ suy ra $\begin{cases} a < 0 \\ y(0) = c = 3 \\ a + b + c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ c = 3 \\ a + b = 1. \end{cases}$

Mặt khác, đồ thị hàm số có hoành độ hai điểm cực đại là ± 1 nên $\dfrac{b}{2a} = \pm 1$ hay $b = \pm 2a$.

- Với $b = 2a \Rightarrow 3a = 1$ (loại).
- Với $b = -2a \Rightarrow a = -1, b = 2$.

Vậy hàm số cần tìm là $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

* **Cách 2:** Dựa vào đồ thị ta có $a < 0$ và đồ thị có 3 điểm cực trị là $A(0;3)$, $B(-1;4)$, $C(4;4)$ nên chọn hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

(A) $(-3; 2)$.

(B) $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$.

(C) $(-\infty; -3)$.

D $(0; 1)$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-3	↗	$+\infty$

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $3^{2x-1} > 243$.

(A) $S = (-\infty; 3)$. **B** $S = (3; +\infty)$. (C) $S = (2; +\infty)$. (D) $S = (-\infty; 2)$.

Lời giải.

Ta có

$$3^{2x-1} > 243 \Leftrightarrow 3^{2x-1} > 3^5 \Leftrightarrow 2x - 1 > 5 \Leftrightarrow x > 3.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (3; +\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+3}$.

(A) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x\sqrt{2x+3} + C$. **B** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} + C$.

(C) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} + C$. (D) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{2x+3} + C$.

Lời giải.

Xét $I = \int \sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \sqrt{2x+3}$, suy ra $t^2 = 2x+3$. Khi đó $t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Ta có

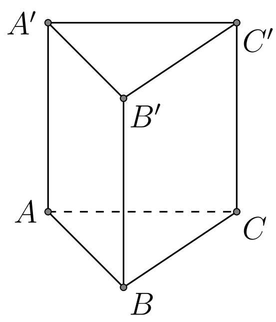
$$I = \int \sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x = \int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} + C.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 21.

Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC (*tham khảo hình vẽ bên*).

(A) 90°. (B) 30°. (C) 45°. **D** 60°.



Lời giải.

Dựng AP sao cho song song và bằng với CB như hình vẽ.

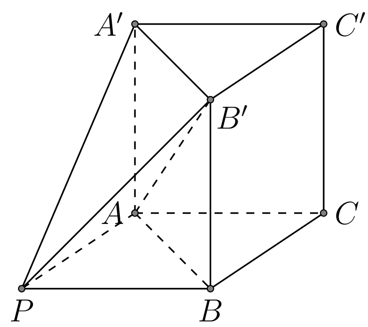
Suy ra $(BC, AB') = (AP, AB')$.

Ta có $AP = CB = a\sqrt{3}$.

Ta lại có $AB' = \sqrt{B'B^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$;

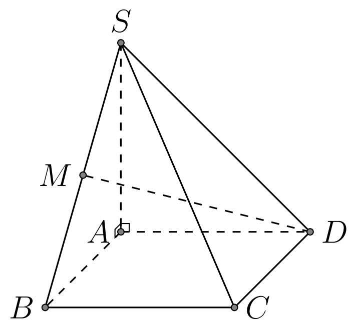
$B'P = \sqrt{B'B^2 + PB^2} = a\sqrt{3}$.

Vậy $\triangle APB'$ đều nên $(BC, AB') = (AP, AB') = 60^\circ$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 22.

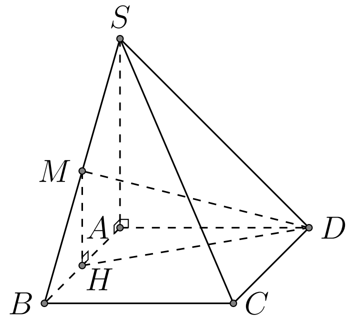


Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a có $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm SB (*tham khảo hình vẽ bên*).

Tính tan của góc giữa đường thẳng DM và $(ABCD)$.

A $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B** $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$. **C** $\dfrac{2}{5}$. **D** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AB. Khi đó, $MH \parallel SA$ nên $MH \perp (ABCD)$, góc giữa DM và $(ABCD)$ là góc $\widehat{MDH}$.

Ta có $MH = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $DH = \sqrt{AH^2 + AD^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét tam giác MDH vuông tại H có $\tan\widehat{MDH} = \dfrac{MH}{DH} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 4$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-3; 3)$.

A 12. **B** 11. **C** 13. **D** 10.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - m$.

Để hàm số có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-3; 3)$ khi và chỉ khi $3x^2 - 6x = m \quad (*)$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $(-3; 3)$.

Xét hàm số $g(x) = 3x^2 - 6x$, có $g'(x) = 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Ta có bảng biến thiên

x	-3		1		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	45	$\searrow$	-3	$\nearrow$	9

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $-3 < m < 9$ thì (*) có hai nghiệm phân biệt thuộc $(-3; 3)$.

Vậy có 11 giá trị nguyên m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả giá trị của tham số m để đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$ song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x + (1-2m)y + m^2z + 1 = 0$

A $m \in \{-1; 3\}$. **B** $m = 3$.

C Không có giá trị nào của m. **D** $m = -1$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(2;1;0)$ và nhận $\vec{u}=(-2;1;1)$ làm véc-tơ chỉ phương.
Mặt phẳng (P) nhận $\vec{n}=(2;1-2m;m^2)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Ta có $d \parallel (P) \Leftrightarrow \begin{cases} M \notin (P) \\ \vec{u}\cdot\vec{n}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cdot 2+(1-2m)\cdot 1+1 \neq 0 \\ m^2-2m-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 3 \\ \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m=-1.$

Chọn đáp án D □

Câu 25. Tìm số hạng chứa x^4 trong khai triển biểu thức $\left(\dfrac{2}{x}-x^3\right)^n$ với mọi $x\neq 0$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{C}_n^2+n\mathrm{A}_n^2=476$.

A $1792x^4$. B -1792. C 1792. D $-1792x^4$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \mathrm{C}_n^2+n\mathrm{A}_n^2=476 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}+\frac{n\cdot n!}{(n-2)!}=476 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{n(n-1)}{2}+n\cdot n(n-1)=476 \\ \Leftrightarrow\ & 2n^3-n^2-n-952=0 \\ \Leftrightarrow\ & n=8. \end{aligned}$$

Với $n=8$, ta được nhị thức $\left(\dfrac{2}{x}-x^3\right)^8$ có số hạng tổng quát là

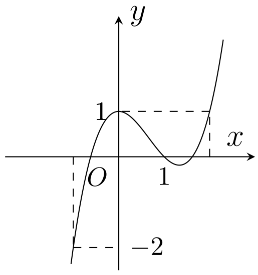
$$\mathrm{T}_{k+1}=\mathrm{C}_8^k\left(\frac{2}{x}\right)^{8-k}\cdot\left(-x^3\right)^k=\mathrm{C}_8^k(2)^{8-k}\cdot(-1)^k\cdot(x)^{4k-8}.$$

Như vậy, số hạng chứa x^4 khi và chỉ khi $4k-8=4 \Leftrightarrow k=3$.
Vậy số hạng chứa x^4 là $\mathrm{T}_4=-1792x^4$.
Chọn đáp án D □

Câu 26.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có 3 nghiệm phân biệt.

A 0. B 3. C 1. D 2.



Lời giải.

Số nghiệm của phương trình $f(x)=m$ là số giao điểm của hai đồ thị hàm số $(C)\colon y=f(x)$ với đường thẳng $y=m$. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$, phương trình $f(x)=m$ có 3 nghiệm phân biệt khi chỉ khi m nhận giá trị nguyên bằng 0.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Một hộp đựng 5 viên bi đỏ, 4 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp đó. Tính xác suất lấy được ít nhất 1 viên đỏ.

(A) $\dfrac{37}{42}$. (B) $\dfrac{1}{21}$. (C) $\dfrac{5}{42}$. (D) $\dfrac{20}{21}$.

Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu $n(\Omega) = \mathrm{C}_9^3$.

Gọi A: "lấy được ít nhất 1 bi đỏ" $\Rightarrow \bar{A}$: "không lấy được bi đỏ nào".

Mà $n(\bar{A}) = \mathrm{C}_4^3 \Rightarrow n(A) = \mathrm{C}_9^3 - \mathrm{C}_4^3$.

Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{\mathrm{C}_9^3 - \mathrm{C}_4^3}{\mathrm{C}_9^3} = \dfrac{20}{21}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 3$. Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = z(1 + i)$ là đường tròn nào dưới đây?

(A) Tâm $I(3; -1)$, $R = 3\sqrt{2}$. (B) Tâm $I(-3; 1)$, $R = 3$.

(C) Tâm $I(-3; 1)$, $R = 3\sqrt{2}$. (D) Tâm $I(3; -1)$, $R = 3$.

Lời giải.

Ta có $w = z(1 + i) \Leftrightarrow z = \dfrac{w}{1 + i}$. Thay z vào điều kiện $|z - 1 + 2i| = 3$, ta được

$$\left|\frac{w}{1+i} - 1 + 2i\right| = 3 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{1+i}\right| \cdot |w - 3 + i| = 3$$
$$\Leftrightarrow |w - 3 + i| = 3\sqrt{2}.$$

Giả sử số phức $w = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Ta được

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = (3\sqrt{2})^2.$$

Vậy tập hợp của số phức w là đường tròn tâm $I(3; -1)$, bán kính $R = 3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Cho $\displaystyle\int_0^1 f(2x + 1)\,\mathrm{d}x = 12$ và $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin^2 x\right) \sin 2x\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) 26. (B) 22. (C) 27. (D) 15.

Lời giải.

- Với $I_1 = \displaystyle\int_0^1 f(2x + 1)\,\mathrm{d}x = 12$.

  Đặt $t = 2x + 1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{2}$.

  Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = 1 \Rightarrow t = 3$.

  Do đó, $I_1 = \displaystyle\int_1^3 f(t)\frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{2}\int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 24$.

- Với $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin^2 x\right) \sin 2x\,\mathrm{d}x = 3$.

  Đặt $t = \sin^2 x \Rightarrow \mathrm{d}x = \sin 2x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=0$, $x=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t=1$.

Do đó, $I_2=\displaystyle\int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=3$.

Vậy $\displaystyle\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=3+24=27$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+3=0$. Đường thẳng Δ đi qua $A(1;2;-1)$, cắt d và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là phương trình nào dưới đây?

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.
B. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$.
C. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$.
D. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Lời giải.

- **Cách 1:** Gọi $B=d\cap\Delta \Rightarrow \begin{cases} B\in d\\ B\in\Delta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(3+t;3+3t;2t)\\ \overrightarrow{AB}=(2+t;1+3t;2t+1) \text{ là véc-tơ chỉ phương của } \Delta.\end{cases}$
  Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(1;1;-1)$.
  Vì $\Delta \,/\!/\, (P)$ nên $\vec{n}_{(P)}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow 2+t+1+3t-2t-1=0 \Leftrightarrow 2t=-2 \Leftrightarrow t=-1$.
  Vậy đường thẳng Δ đi qua $A(1;2;-1)$ và nhận véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(1;-2;-1)$ có phương trình là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$.
- **Cách 2:** Gọi (β) là mặt phẳng qua $A(1;2;-1)$ và song song với (α) nên có phương trình $x+y-z-4=0$.
  Gọi $B=d\cap(\beta)$. Khi đó, tọa độ x,y,z của B là nghiệm của hệ phương trình
  $$\begin{cases}\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z}{2}\\ x+y-z-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x-y=6\\ 2x-z=6\\ x+y-z-4=0\end{cases} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=0\\ z=-2.\end{cases}$$
  Suy ra $B(2;0;-2)$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $(1+i)z+\bar{z}$ là số thuần ảo và $|z-2i|=1$.

A. 2. B. 1. C. 0. D. Vô số.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi$ trong đó $a,b\in\mathbb{R}$, ta có $\bar{z}=a-bi$.

Số phức $(1+i)z+\bar{z}=(1+i)(a+bi)+(a-bi)=2a-b+ai$ là số thuần ảo khi chỉ khi $2a-b=0 \Leftrightarrow b=2a$.

Mặt khác

$$|z-2i|=1 \Leftrightarrow |a+bi-2i|=1 \quad\Leftrightarrow\quad a^2+(2a-2)^2=1$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ 5a^2-8a+3=0\\&\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}a=1\Rightarrow b=2\Rightarrow z=1+2i\\ a=\dfrac{3}{5}\Rightarrow b=\dfrac{6}{5}\Rightarrow z=\dfrac{3}{5}+\dfrac{6}{5}i.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy có 2 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;1)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-2=0$. Điểm $M(a;b;c)$ nằm trên mặt phẳng (P) thỏa mãn $MA=MB=MC$. Tính $T=a+2b+3c$.

A $T=5$. **B** $T=3$. **C** $T=2$. **D** $T=4$.

Lời giải.

Ta có $M(a;b;c)\in(P)\Leftrightarrow a+b+c-2=0 \quad (1)$

- $MA^2=(a-2)^2+(b-0)^2+(c-1)^2=a^2+b^2+c^2-4a-2c+5$.
- $MB^2=(a-1)^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2-2a+1$.
- $MC^2=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=a^2+b^2+c^2-2a-2b-2c+3$.

Với $MA=MB$, ta có $a+c-2=0 \quad (2)$

Với $MA=MC$, ta có $a-b-1=0 \quad (3)$

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình $\begin{cases}a+b+c=2\\a+c=2\\a-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\\c=1.\end{cases}$

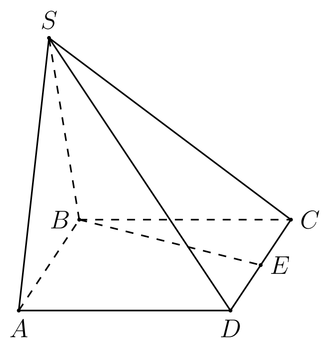
Vậy $T=a+2b+3c=4$.

Chọn đáp án D □

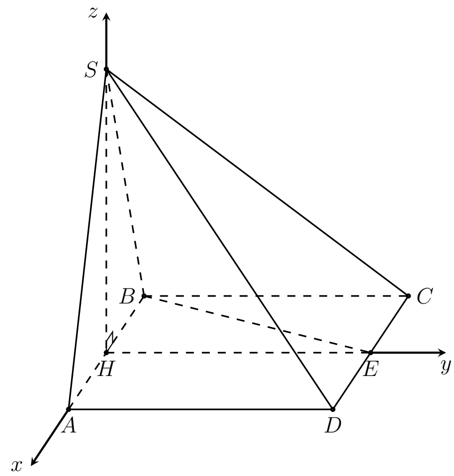
Câu 33.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=2a$, $BC=a$, tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi E là trung điểm của CD. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng BE và SC.

A $\dfrac{a\sqrt{30}}{10}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **D** a.



Lời giải.

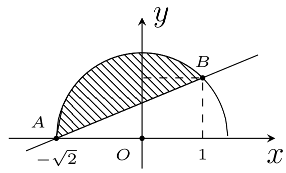


Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có $H(0;0;0)$, $B(-a;0;0)$, $C(-a;a;0)$, $E(0;a;0)$ và $S(0;0;a\sqrt{3})$.
Ta có $\overrightarrow{BE}=(a;a;0)$, $\overrightarrow{SC}=(-a;a;-a\sqrt{3})$, $\overrightarrow{EC}=(-a;0;0)$.
Khi đó, $[\overrightarrow{BE},\overrightarrow{SC}]=\left(-a^2\sqrt{3};a^2\sqrt{3};2a^2\right)$.
Khoảng cách giữa BE và SC là

$$\mathrm{d}(BE,SC)=\frac{\left|[\overrightarrow{BE},\overrightarrow{SC}]\cdot\overrightarrow{EC}\right|}{\left|[\overrightarrow{BE},\overrightarrow{SC}]\right|}=\frac{a^2\sqrt{3}}{a\sqrt{10}}=\frac{a\sqrt{30}}{10}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 34.



Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn $y=\sqrt{2-x^2}$, đường thẳng AB biết $A(-\sqrt{2};0)$, $B(1;1)$ (phần tô đậm như hình vẽ).

A $\dfrac{\pi+\sqrt{2}}{4}$. **B** $\dfrac{3\pi+2\sqrt{2}}{4}$. **C** $\dfrac{\pi-2\sqrt{2}}{4}$. **D** $\dfrac{3\pi-2\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng d: $\dfrac{x+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{y}{1}\Rightarrow d\colon y=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}(x+\sqrt{2})$.
Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned}S&=\int\limits_{-\sqrt{2}}^{1}\left[\sqrt{2-x^2}-\frac{1}{1+\sqrt{2}}(x+\sqrt{2})\right]\mathrm{d}x\\&=\int\limits_{-\sqrt{2}}^{1}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\left(\frac{x^2}{2}+\sqrt{2}x\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{1}\\&=I-\frac{1+\sqrt{2}}{2}.\text{ Trong đó } I=\int\limits_{-\sqrt{2}}^{1}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Tính $I=\displaystyle\int\limits_{-\sqrt{2}}^{1}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x$.
Đặt $x=\sqrt{2}\sin t,\ t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\mathrm{d}x=\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t$.
Đổi cận $x=-\sqrt{2}\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{2}$, $x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$.
Do đó $I=\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}2|\cos t|\cdot\cos t\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$.
Do đó, $S=\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Chọn đáp án D □

Câu 35. Tích các nghiệm của phương trình $\log_3(3x)\cdot\log_3(9x)=4$ bằng bao nhiêu?

A $\frac{1}{3}$. **B** $\frac{4}{3}$. **C** $\frac{1}{27}$. **D** 1.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có

$$\begin{aligned}\log_3(3x)\cdot\log_3(9x) = 4 &\Leftrightarrow (1+\log_3 x)(2+\log_3 x) = 4\\ &\Leftrightarrow \log_3^2 x + 3\log_3 x - 2 = 0. \quad (*)\end{aligned}$$

Phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt $\log_3 x_1$, $\log_3 x_2$ và

$$\log_3 x_1 + \log_3 x_2 = -3 \Rightarrow x_1\cdot x_2 = 3^{-3} \Rightarrow x_1\cdot x_2 = \frac{1}{27}.$$

Vậy tích các nghiệm phương trình là $x_1\cdot x_2 = \frac{1}{27}$.

Chọn đáp án A □

Câu 36.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $y = f(x^2-2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 4.

Lời giải.

Xét $g(x) = f(x^2-2x)$. Ta có $g'(x) = (x^2-2x)'\cdot f'(x^2-2x) = 2(x-1)f'(x^2-2x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0\\ x^2-2x=-2 \text{ (vô nghiệm)}\\ (x^2-2x-1)^2=0,\ \text{ vì } x=1 \text{ là nghiệm kép của phương trình } f'(x)=0.\\ x^2-2x=3\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=1+\sqrt{2} \text{ (nghiệm kép)}\\ x=1-\sqrt{2} \text{ (nghiệm kép)}\\ x=-1\\ x=3.\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$ của hàm số $g(x) = f(x^2-2x)$

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		3		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x^2-2x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có 1 điểm cực tiểu.

Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 37. Gọi S là tập hợp các nghiệm thuộc khoảng $(0; 100\pi)$ của phương trình $\left(\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 3$. Tính tổng các phần tử của S.

(A) $\dfrac{7400\pi}{3}$. (B) $\dfrac{7525\pi}{3}$. (C) $\dfrac{7375\pi}{3}$. (D) $\dfrac{7550\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 3 &\Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\\ &\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1\\ &\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Vì $x \in (0; 100\pi)$ nên $0 < \dfrac{\pi}{6} + k2\pi < 100\pi \Leftrightarrow -\dfrac{1}{12} < k < \dfrac{599}{12}$.

Suy ra $k \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, 49\}$. Mà theo thứ tự tăng dần, các phần tử trong tập S lập thành cấp số cộng có 50 phần tử với $u_1 = \dfrac{\pi}{6}$ và công sai $d = 2\pi$.

Do đó, tổng cần tìm là $50 \cdot \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{50 \cdot 49}{2} \cdot 2\pi = \dfrac{7375\pi}{3}$.

Chọn đáp án (C) $\square$

Câu 38. Cho $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{x + \ln x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{b}\ln 2 - \frac{1}{c}$, với a, b, c là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $S = \dfrac{a+b}{c}$.

(A) $S = \dfrac{2}{3}$. (B) $S = \dfrac{5}{6}$. (C) $S = \dfrac{1}{2}$. (D) $S = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{x + \ln x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2$.

Trong đó $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$, $I_2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

- Tính

$$\begin{aligned}I_1 = \int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x = \left[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1}\right]\Bigg|_1^2\\ &= \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

- Tính $I_2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

  Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ v' = \dfrac{1}{(x+1)^2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \dfrac{1}{x} \\ v = -\dfrac{1}{x+1}.\end{cases}$

Suy ra

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{\ln x}{x+1}\bigg|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln 2}{3} + \ln\frac{x}{x+1}\bigg|_1^2 \\ &= -\frac{\ln 2}{3} + \ln\frac{2}{3} + \ln 2 = \frac{2\ln 2}{3} - \ln 3 + \ln 2. \end{aligned}$$

Do đó $I = \dfrac{2}{3}\ln 2 - \dfrac{1}{6}$. Suy ra $a = 2$, $b = 3$ và $c = 6$. Vậy $S = \dfrac{5}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (0; 2018)$ để phương trình $m + 10x = m\mathrm{e}^x$ có hai nghiệm phân biệt?

A 9. B 2017. C 2016. D 2007.

Lời giải.

Với $x = 0$, phương trình trở thành $m = m$ (luôn đúng), suy ra với mọi $m \in (0; 2018)$ phương trình luôn có 1 nghiệm $x = 0$.

Với $x \neq 0$, ta có $m + 10x = m\mathrm{e}^x \Leftrightarrow m = \dfrac{10x}{\mathrm{e}^x - 1}$.

Xét hàm số $y = f(x) = \dfrac{10x}{\mathrm{e}^x - 1}$ trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ta có $f'(x) = \dfrac{10(\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 1)}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} < 0\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Thật vậy, xét hàm số $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 1$. Ta có $g'(x) = \mathrm{e}^x - (\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x) = -x\mathrm{e}^x$.

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	10 ‖ 10	$\searrow$	0

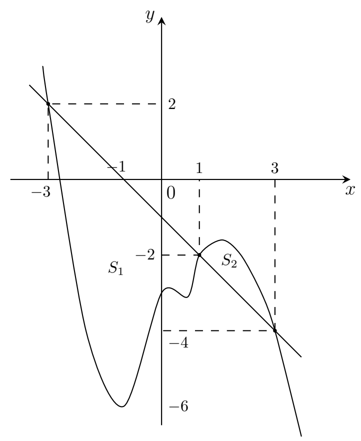
Suy ra yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi $\begin{cases} 0 < m < 2018 \\ m \neq 10. \end{cases}$

Do đó, có 2016 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 40.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3; 3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = -x - 1$ lần lượt là M, m. Tính tích phân $\int\limits_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.



(A) $6 + m - M$. (B) $6 - m - M$.

(C) $M - m + 6$. **(D)** $m - M - 6$.

Lời giải.

Tính diện tích S_1. Ta có

$$S_1 = \int\limits_{-3}^{1} [-x - 1 - f(x)]\,\mathrm{d}x = M \Leftrightarrow \int\limits_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = -M - \int\limits_{-3}^{1} (x+1)\,\mathrm{d}x.$$

Tính diện tích S_2. Ta có

$$S_2 = \int\limits_{1}^{3} [f(x) + x + 1]\,\mathrm{d}x = m \Leftrightarrow \int\limits_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = m - \int\limits_{1}^{3} (x+1)\,\mathrm{d}x.$$

Do đó

$$\int\limits_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = m - M - \int\limits_{-3}^{3} (x+1)\,\mathrm{d}x = m - M - 6.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Cho cấp số cộng (u_n) có tất cả các số hạng đều dương và thỏa mãn $u_1 + u_2 + \cdots + u_{2018} = 4(u_1 + u_2 + \cdots + u_{1009})$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_3^2 u_2 + \log_3^2 u_5 + \log_3^2 u_{14}$ bằng bao nhiêu?

(A) 3. (B) 1. **(C)** 2. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $S_{2018} = 4S_{1009} \Leftrightarrow 2018u_1 + \dfrac{2018 \cdot 2017}{2}d = 4\left(1009u_1 + \dfrac{1009 \cdot 1008}{2}d\right) \Leftrightarrow d = 2u_1$.

Suy ra $\begin{cases} u_2 = 3u_1 \\ u_5 = 9u_1 \\ u_{14} = 27u_1. \end{cases}$

Do đó,

$$\begin{aligned} P = \log_3^2 u_2 + \log_3^2 u_5 + \log_3^2 u_{14} &= \log_3^2(3u_1) + \log_3^2(9u_1) + \log_3^2(27u_1) \\ &= 3\log_3^2 u_1 + 12\log_3 u_1 + 14 \\ &= 3\left(\log_3 u_1 + 2\right)^2 + 2 \geq 2 \end{aligned}$$

Vậy $P_{\min} = 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x - 2(2m+1)3^x + 3(4m-1) = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2) = 12$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A $(3;9)$. B $(9;+\infty)$. C $\left(\dfrac{1}{4};3\right)$. D $\left(-\dfrac{1}{2};2\right)$.

Lời giải.

Đặt $t = 3^x$, điều kiện $t > 0$, phương trình trở thành

$$t^2 - 2(2m+1)t + 3(4m-1) = 0 \Leftrightarrow (t-3)(t-4m+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = 4m-1. \end{array}\right.$$

Phương trình có hai nghiệm thực x_1, x_2 khi và chỉ khi $\begin{cases} 4m-1 > 0 \\ 4m-1 \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{4} \\ m \neq 1. \end{cases}$

Với $t = 3$ ta có $x_1 = 1$.

Với $t = 4m-1$ ta có $x_2 = \log_3(4m-1)$.

Mà

$$\begin{aligned} (x_1+2)(x_2+2) = 12 &\Leftrightarrow x_1x_2 + 2(x_1+x_2) - 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow \log_3(4m-1) + 2\left[1 + \log_3(4m-1)\right] - 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow \log_3(4m-1) = 2 \Leftrightarrow 4m-1 = 9 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2} \in \left(\frac{1}{4};3\right). \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;0;1)$, $C(-2;2;3)$. Đường thẳng Δ qua trực tâm H của tam giác ABC và nằm trong mặt phẳng (ABC) cùng tạo với các đường thẳng AB, AC một góc $\alpha < 45^\circ$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (a;b;c)$ với c là số nguyên tố và a, b là số nguyên. Giá trị biểu thức $ab + bc + ca$ bằng bao nhiêu?

A -67. B 23. C -33. D -37.

Lời giải.

Ta có

- $\overrightarrow{AB} = (1;-2;2)$; $\overrightarrow{AC} = (-3;0;4)$.
- $\vec{n}_{(ABC)} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-8;-10;-6)$.
- $\cos(AB,\Delta) = \dfrac{|a-2b+2c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.
- $\cos(AC,\Delta) = \dfrac{|-3a+4c|}{5\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Theo đề bài, ta suy ra

$$\begin{aligned} & \cos(AB,\Delta) = \cos(AC,\Delta) \\ \Leftrightarrow\ & 5|a-2b+2c| = 3|-3a+4c| \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{ll} 7a - 5b - c = 0 & (1) \\ 2a + 5b - 11c = 0 & (2) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vì $\Delta \subset (ABC)$ nên $\vec{u} \cdot \vec{n}_{(ABC)} = 0 \Leftrightarrow 4a + 5b + 3c = 0.\quad (3)$

* **Trường hợp 1:** Xét hệ phương trình $\begin{cases}7a-5b=c\\4a+5b=-3c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-\dfrac{2c}{11}\\b=-\dfrac{5c}{11}\end{cases} \Rightarrow \vec{u}=\left(-\dfrac{2c}{11};-\dfrac{5c}{11};c\right)$.

Chọn $c=11$, ta có $\vec{u}=(-2;-5;11)$ (kiểm tra lại điều kiện $\alpha<45^\circ$ ta thấy $\vec{u}$ đang xét thỏa mãn).

* **Trường hợp 2:** Xét hệ phương trình $\begin{cases}2a+5b-11c=0\\4a+5b+3c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-7c\\b=5c\end{cases} \Rightarrow \vec{u}=(-7c;5c;c)$.

Chọn $c=2$, ta có $\vec{u}=(-14;10;2)$ (kiểm tra lại điều kiện $\alpha<45^\circ$ ta thấy $\vec{u}$ đang xét không thỏa mãn).

Vậy $ab+bc+ca=-67$.

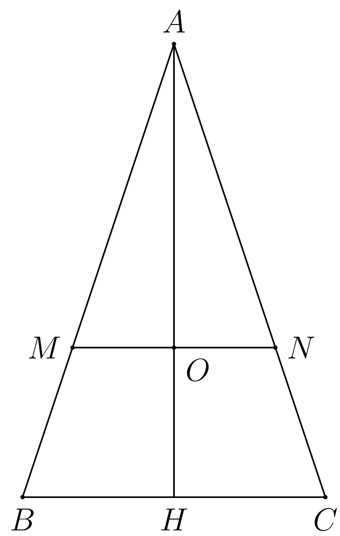
Chọn đáp án A □

Câu 44. Tìm giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+2m+3$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho trục hoành chia tam giác ABC thành một tam giác và một hình thang, biết rằng tỉ số diện tích tam giác nhỏ được chia ra và diện tích tam giác ABC bằng $\dfrac{4}{9}$.

A $m=\dfrac{1+\sqrt{15}}{2}$. **B** $m=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$. **C** $m=\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}$. **D** $m=\dfrac{-1+\sqrt{15}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y'=4x^3-4(m+1)x=4x[x^2-(m+1)]$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m+1.\end{array}\right.$



Đồ thị hàm số có điểm cực trị khi và chỉ khi $m+1>0 \Leftrightarrow m>-1$.

Giả sử ba điểm cực trị của hàm số số lần lượt là $A(0;2m+3)$, $B(\sqrt{m+1};2-m^2)$, $C(-\sqrt{m+1};2-m^2)$.

Giả sử trục hoành cắt $\triangle ABC$ tại các điểm như hình vẽ.

Theo đề bài, ta có $\dfrac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{AM}{AB}\cdot\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{AO^2}{AH^2}=\dfrac{4}{9}\Rightarrow\dfrac{AO}{AH}=\dfrac{2}{3}$.

Do H là trung điểm BC, suy ra O là trọng tâm của tam giác ABC.

Do đó

$$\begin{aligned}&2m+3+2-m^2+2-m^2=0\\ \Leftrightarrow\ &-2m^2+2m+7=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{1+\sqrt{15}}{2},\ \text{nhận vì thỏa } m>-1\\ m=\dfrac{1-\sqrt{15}}{2},\ \text{loại vì không thỏa } m>-1.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy $m=\dfrac{1+\sqrt{15}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases}x=1+3a+at\\y=-2+t\\z=2+3a+(1+a)t\end{cases}$.

Biết rằng khi a thay đổi luôn tồn tại một mặt cầu cố định đi qua điểm $M(1;1;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ. Tìm bán kính của mặt cầu đó.

A $5\sqrt{3}$. **B** $4\sqrt{3}$. **C** $7\sqrt{3}$. **D** $3\sqrt{5}$.

Lời giải.

Với mọi $M(1+3a+at; -2+t; 2+3a+t+at) \in \Delta$, ta có $M \in (P): x+y-z+3=0$, suy ra $\Delta \subset (P)$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Mặt khác với mọi $a \in \mathbb{R}$, đường thẳng Δ luôn đi qua điểm $A(1; -5; -1)$.

Gọi (S) là mặt cầu (có tâm là I) cố định thỏa mãn yêu cầu bài toán, suy ra mặt cầu (S) luôn luôn tiếp xúc với đường thẳng Δ khi a thay đổi tại điểm A. Suy ra IA vuông góc với (P) và có phương trình là $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -5+t \\ z = -1-t. \end{cases} \Rightarrow I(1+t; -5+t; -1-t)$.

Điểm $M(1; 1; 1) \in (S)$ nên $IM = IA \Leftrightarrow t^2 + (t-6)^2 + (t+2)^2 = t^2 + t^2 + t^2 \Leftrightarrow t = 5$

$\Rightarrow R = IA = \sqrt{t^2+t^2+t^2} = 5\sqrt{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0; a)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để từ A kẻ được hai tiếp tuyến AM, AN đến (C) với M, N là các tiếp điểm và $MN = 4$. Tổng các phần tử của S bằng bao nhiêu?

A 4. **B** 3. **C** 6. **D** 1.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2}$.

Gọi d là đường thẳng đi qua $A(0; a)$ và có hệ số góc k, ta có $d\colon y = kx + a$.

Đường thẳng d là tiếp tuyến của (C) khi chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{2x}{x+1} = kx + a & (1) \\ \dfrac{2}{(x+1)^2} = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Thế (2) vào (1), ta có $\dfrac{2x}{x+1} = \dfrac{2x}{(x+1)^2} + a \Leftrightarrow (a-2)x^2 + 2ax + a = 0 \quad (*)$

Yêu cầu bài toán thỏa khi chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt (lưu ý phương trình không thể nhận $x = -1$ làm nghiệm) $\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 2 \\ a > 0. \end{cases}$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $(*)$, suy ra $M(x_1; 2 - \dfrac{2}{x_1+1})$, $N(x_2; 2 - \dfrac{2}{x_2+1})$.

Ta có

$$\begin{aligned} MN^2 &= (x_2 - x_1)^2 + 4\frac{(x_1-x_2)^2}{[x_1x_2 + (x_1+x_2) + 1]^2} \\ &= \left[\frac{8a}{(a-2)^2}\right]\left[1 + (a-2)^2\right] \\ &= \frac{8(a^3 - 4a^2 + 5a)}{a^2 - 4a + 4}. \end{aligned}$$

Trong đó

- $(x_1 - x_2)^2 = (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 = \dfrac{4a^2}{(a-2)^2} - \dfrac{4a}{a-2} = \dfrac{8a}{(a-2)^2}$.

- $x_1x_2 + (x_1 + x_2) + 1 = \dfrac{a}{a-2} - \dfrac{2a}{a-2} + 1 = -\dfrac{2}{a-2}$.

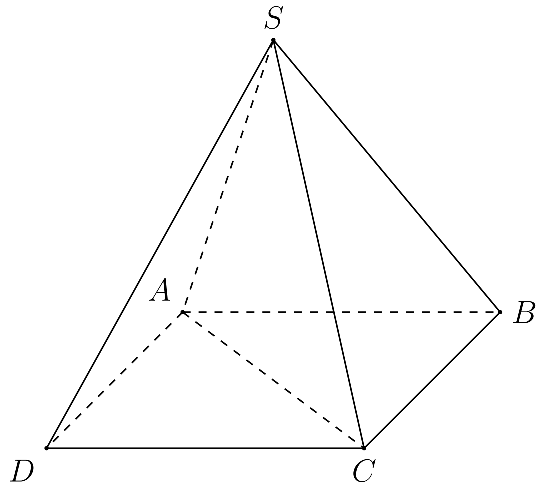
Mà $MN = 4 \Leftrightarrow 16 = \dfrac{8(a^3 - 4a^2 + 5a)}{a^2 - 4a + 4} \Leftrightarrow a^3 - 6a^2 + 13a - 8 = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 47.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 3$, $BC = 4$. Tam giác SAC nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng SA bằng 4. Cô-sin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng bao nhiêu?

A $\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$. **B** $\dfrac{3\sqrt{34}}{34}$. **C** $\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$. **D** $\dfrac{5\sqrt{34}}{17}$.



Lời giải.

Gọi K là hình chiếu của C lên SA, ta có $CK = 4$, $AK = 3$, $AC = 5$.

Gọi H là hình chiếu của K lên $(ABCD)$, ta có $KH \perp (ABCD)$.

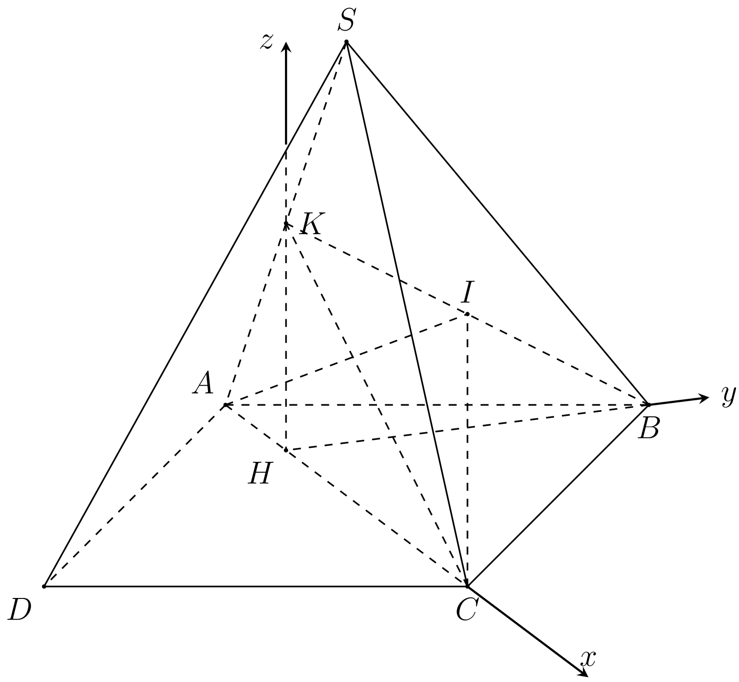
Gọi I là trung điểm KB. Ta có

$\begin{cases} KB \perp AI \\ KB \perp CI \end{cases} \Rightarrow KB \perp AC.$

$\begin{cases} KH \perp AC \\ KB \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp BH.$

Ta có

- $HK = \dfrac{KA \cdot KC}{AC} = \dfrac{12}{5}$,
- $HA = \sqrt{9 - \left(\dfrac{12}{5}\right)^2} = \dfrac{9}{5}$,
- $HB = \dfrac{AB \cdot BC}{AC} = \dfrac{12}{5}$.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có $H(0;0;0)$, $B\left(0;\dfrac{12}{5};0\right)$, $A\left(-\dfrac{9}{5};0;0\right)$, $K\left(0;0;\dfrac{12}{5}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{KA} = \left(-\dfrac{9}{5};0;-\dfrac{12}{5}\right)$, $\overrightarrow{KB} = \left(\dfrac{9}{5};\dfrac{12}{5};0\right)$.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAB) là $\vec{n}_1 = (-16;12;12)$.

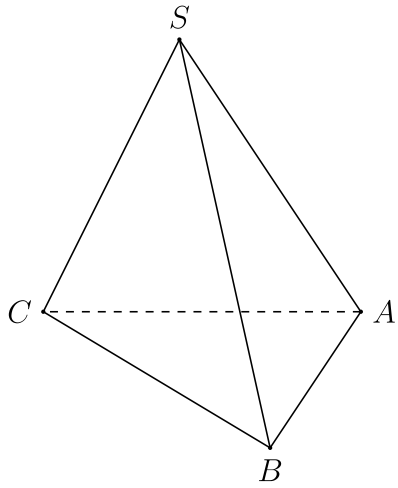
Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAC) là $\vec{j} = (0;0;1)$.

Do đó $\cos((SAB),(SAC)) = \dfrac{|12|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\sqrt{16^2+12^2+12^2}} = \dfrac{3\sqrt{34}}{34}$.

Chọn đáp án B □

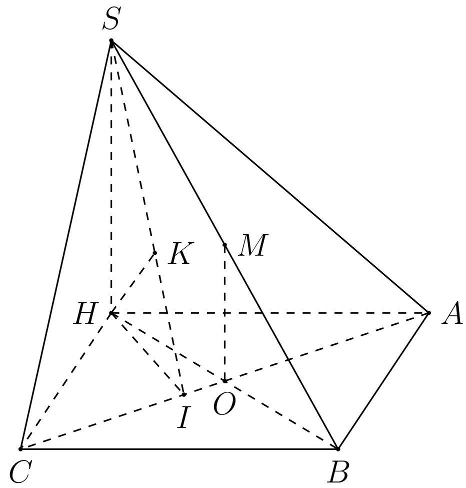
Câu 48.

Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $SB > 2a$ và $\widehat{ABC} = \widehat{BAS} = \widehat{BCS} = 90^\circ$. Sin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $\dfrac{\sqrt{11}}{11}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.



Ⓐ $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{9}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{9}$. **C** $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{6}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm SB, ta có $MC = MB = MA = \dfrac{SB}{2}$.
Gọi O là trung điểm AC, ta có $OA = OC = OB$.
Suy ra OM là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $MO \perp (ABC)$.
Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC), suy ra H đối xứng với B qua O.
Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của H lên AC, SI. Ta có $\mathrm{d}(H,(SAC)) = HK$.

Ta có $\sin(SB,(SAC)) = \dfrac{\mathrm{d}(B,(SAC))}{SB} = \dfrac{\mathrm{d}(H,(SAC))}{SB} = \dfrac{HK}{SB}$.

$\Rightarrow \dfrac{SB^2}{HK^2} = 11$.

Ta có $(SH^2 + AB^2 + BC^2) = 11\left(\dfrac{SH^2 \cdot \dfrac{2a^2}{3}}{SH^2 + \dfrac{2a^2}{3}}\right)$

$\Leftrightarrow SH^2 + 3a^2 = 11\dfrac{2a^2 \cdot SH^2}{3SH^2 + 2a^2}$

$\Leftrightarrow 3SH^4 - 11a^2SH^2 + 6a^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} SH = a\sqrt{3}, \text{ nhận vì thỏa điều kiện } SB > 2a \\ SH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}, \text{ loại vì không thỏa điều kiện } SB > 2a. \end{array}\right.$

Vậy thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{6}SH \cdot BA \cdot BC = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Đội thanh niên xung kích của một trường THPT gồm 15 học sinh trong đó có 4 học sinh khối 12; có 5 học sinh khối 11 và có 6 học sinh khối 10. Chọn ngẫu nhiên ra 6 học sinh đi làm nhiệm vụ. Tính xác suất để chọn được 6 học sinh có đủ 3 khối.

Ⓐ $\dfrac{4248}{5005}$. Ⓑ $\dfrac{757}{5005}$. **C** $\dfrac{850}{1001}$. Ⓓ $\dfrac{151}{1001}$.

Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^6 = 5005$.
Gọi A: "chọn được 6 học sinh có đủ 3 khối". Xét các trường hợp:

- Số cách chọn được 6 học sinh bao gồm 10 và 11 là $\mathrm{C}_{11}^6 - \mathrm{C}_6^6$ (trừ lại trường hợp chọn được cả 6 học sinh khối 10).
- Số cách chọn được 6 học sinh bao gồm 10 và 12 là $\mathrm{C}_{10}^6 - \mathrm{C}_6^6$ (trừ lại trường hợp chọn được cả 6 học sinh khối 10).
- Số cách chọn được 6 học sinh bao gồm 11 và 12 là C_9^6.
- Số cách chọn được cả 6 học sinh lớp 10 là C_6^6.

Suy ra $n(\bar{A}) = \mathrm{C}_{11}^6 + \mathrm{C}_{10}^6 + \mathrm{C}_9^6 - \mathrm{C}_6^6 = 755 \Rightarrow n(A) = 5005 - 755 = 4250$.
Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{4250}{5005} = \dfrac{850}{1001}$.
Chọn đáp án C □

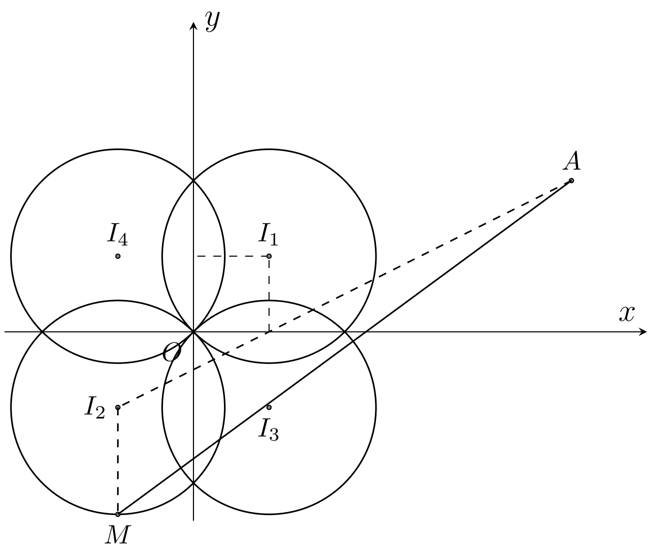
Câu 50. Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z^2|$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z - 5 - 2i|$ bằng bao nhiêu?

A $\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$. B $\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$. C $\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$. D $\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$.

Lời giải.
Giả sử $z = x + yi$ (trong đó $x, y \in \mathbb{R}$) có điểm biểu diễn là $M(x; y)$.
Ta có

$$\begin{aligned}|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z^2| &\Leftrightarrow |2x| + |2yi| = x^2 + y^2\\ &\Leftrightarrow 2|x| + 2|y| = x^2 + y^2\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \text{ là đường tròn tâm } I_1(1;1) \text{ bán kính } r = \sqrt{2}\\ x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0 \text{ là đường tròn tâm } I_2(-1;-1) \text{ bán kính } r = \sqrt{2}\\ x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \text{ là đường tròn tâm } I_3(1;-1) \text{ bán kính } r = \sqrt{2}\\ x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0 \text{ là đường tròn tâm } I_4(-1;1) \text{ bán kính } r = \sqrt{2}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Mà $P = |z - 5 - 2i| = MA$ với $A(5; 2)$ và M chạy trên 4 đường tròn như hình vẽ bên dưới.



Dựa vào hình minh họa, rõ ràng $P_{\max} = I_2A + r = \sqrt{36 + 9} + \sqrt{2} = 3\sqrt{5} + \sqrt{2}$.
Chọn đáp án B □

——— HẾT ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. C	3. A	4. A	5. A	6. A	7. A	8. B	9. B	10. B
11. A	12. B	13. C	14. D	15. B	16. A	17. D	18. D	19. B	20. B
21. D	22. D	23. B	24. D	25. D	26. C	27. D	28. A	29. C	30. D
31. A	32. D	33. A	34. D	35. A	36. A	37. C	38. B	39. C	40. D
41. C	42. C	43. A	44. A	45. A	46. D	47. B	48. C	49. C	50. B

74 ĐỀ THI THỬ THPT QG, 2017 - 2018 TRƯỜNG THPT BÌNH GIANG, HẢI DƯƠNG

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - x - 1$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung là

A $y = 2x - 1$. **B** $y = -x - 1$. **C** $y = -x + 1$. **D** $y = 2x + 2$.

Lời giải.

Giao điểm của (C) với truc tung là $x = 0 \Rightarrow y = -1$.

$y' = 3x^2 - 1$, $y'(0) = -1$.

Phương trình tiếp tuyến $y = -1(x - 0) - 1 = -x - 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ có đồ thị (C). Đường thẳng đi qua điểm $A(-1; 1)$ và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C) là

A $y = x + 3$. **B** $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$. **C** $y = \dfrac{-1}{2}x + \dfrac{3}{2}$. **D** $x - 2y - 3 = 0$.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 12x + 9$, $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = \left(\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}\right)(3x^2 - 12x + 9) + (-2x + 4)$.

Khi đó đường thẳng qua hai điểm cực trị của (C) có phương trình là $y = -2x + 4$.

Đường thẳng vuông góc với $y = -2x + 4$ có phương trình là $y = \dfrac{1}{2}x + b$.

Đường thẳng qua $A(-1; 1)$ suy ra $1 = \dfrac{1}{2} \cdot (-1) + b \Leftrightarrow b = \dfrac{3}{2}$.

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích bằng 36. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\dfrac{AM}{AA'} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{BN}{BB'} = \dfrac{2}{3}$; $\dfrac{CP}{CC'} = \dfrac{1}{3}$. Mặt phẳng (MNP) chia khối lăng trụ thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2) (trong đó (H_1) là đa diện có chứa đỉnh A). Tính thể tích của khối đa diện (H_1).

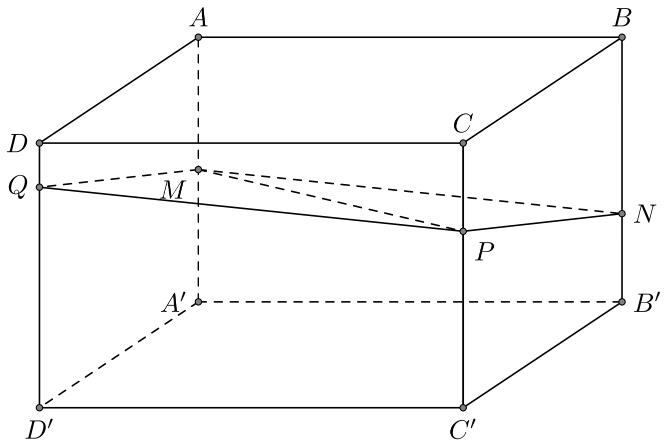
A 15 . **B** 18 . **C** 24 . **D** 16.

Lời giải.

Gọi V là thể tích khối trụ. Mặt phẳng (MNP) cắt DD' tại Q. Ta có

$$\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} = \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'}.$$

Suy ra $\dfrac{DQ}{DD'} = \dfrac{1}{6}$. Suy ra thể tích khối (H_1) là $V_{H_1} = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}}{4}V = \dfrac{5}{12} \cdot 36 = 15$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P). Chọn khẳng định đúng?

(A) Nếu $a \mathbin{/\!/} (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.
B Nếu $a \mathbin{/\!/} (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$.
(C) Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b \mathbin{/\!/} (P)$.
(D) Nếu $a \mathbin{/\!/} (P)$ và $b \mathbin{/\!/} (P)$ thì $b \mathbin{/\!/} a$.

Lời giải.

- Nếu $a \mathbin{/\!/} (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$ sai vì b có thể nằm trong (P).
- Nếu $a \mathbin{/\!/} (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$ đúng.
- Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b \mathbin{/\!/} (P)$ sai vì b có thể nằm trong (P).
- Nếu $a \mathbin{/\!/} (P)$ và $b \mathbin{/\!/} (P)$ thì $b \mathbin{/\!/} a$ sai vì a, b có thể chéo hoặc cắt nhau.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Một xe buýt bắt đầu đi từ một nhà chờ xe buýt A với vận tốc $v(t) = 10 + 3t^2$ (m/s) (khi bắt đầu chuyển động từ A thì $t = 0$) đến nhà chờ xe buýt B cách đó 175 m. Hỏi thời gian xe đi từ A đến B là bao nhiêu giây?

(A) 7 . (B) 8 . (C) 9 . **D** 5 .

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& \int_0^b v(t)\,\mathrm{d}t = 175 \\
\Leftrightarrow\ & \int_0^b (10 + 3t^2)\,\mathrm{d}t = 175 \\
\Leftrightarrow\ & \left.(10t + t^3)\right|_0^b = 175 \\
\Leftrightarrow\ & 10b + b^3 = 175 \\
\Leftrightarrow\ & b = 5.
\end{aligned}$$

Vậy xe đi từ A đến B mất 5 giây.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Bác Tôm có một cái ao có diện tích 50 m^2 để nuôi cá. Vụ vừa qua bác nuôi với mật độ 20 con/m^2 và thu được tất cả 1,5 tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá thu được, bác thấy cứ thả giảm đi 8 con/m^2 thì tương ứng sẽ có mỗi con cá thành phẩm thu được tăng thêm 0,5 kg. Hỏi vụ tới bác phải mua bao nhiêu con cá giống để đạt được tổng khối lượng cá thành phẩm cao nhất? (Giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi).

(A) 1100 con. (B) 1000 con. (C) 500 con. **D** 512 con.

Lời giải.

Số cá bác đã thả trong vụ vừa qua là $20 \cdot 50 = 1000$ con. Gọi x là số cá giảm đi, khi đó năng suất a tăng $a = \dfrac{0{,}5 \cdot x}{8} = 0{,}0625$ kg/con.

Vậy sản lượng thu được trong năm tới của bác Tôm sẽ là:

$$(1000 - x)(1,5 + 0{,}0625x) \text{ (kg)}.$$

Xét hàm số $f(x) = (1000 - x)(1,5 + 0{,}0625x) = -0{,}0625x^2 + 61x + 1500$.

x	0		488		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	16384	$\searrow$	

Vậy số cá giống cần mua là $1000 - 488 = 512$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Một lớp có 20 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi lên bảng có cả nam và nữ.

A $\dfrac{4651}{5236}$. B $\dfrac{4610}{5236}$. C $\dfrac{4615}{5236}$. D $\dfrac{4615}{5263}$.

Lời giải.

Gọi A là biến cố 4 học sinh được gọi lên bảng có cả nam và nữ.

Khi đó $\bar{A}$ là biến cố 4 học sinh được gọi lên bảng đều là nam hoặc đều là nữ.

Suy ra $n(\bar{A}) = \mathrm{C}_{20}^4 + \mathrm{C}_{15}^4$, $n(\Omega) = \mathrm{C}_{35}^4$.

$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\bar{A}) = 1 - \dfrac{\mathrm{C}_{20}^4 + \mathrm{C}_{15}^4}{\mathrm{C}_{35}^4} = \dfrac{4615}{5236}$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-1;1;3)$ và hai đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-1}{1}$, $\Delta'\colon \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M, vuông góc với Δ và Δ'.

A $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$. B $\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$. C $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$. D $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$.

Lời giải.

Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (3;2;1)$, Δ' có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (1;3;-2)$. Gọi d là đường thẳng cần tìm, khi đó d có véc-tơ chỉ phương là $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-7;7;7)$ hay $\vec{u} = (-1;1;1)$.

Phương trình đường thẳng d là $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(3;-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-3}{1}$?

A $3x - 2y + z + 12 = 0$. B $x - 2y + 3z + 3 = 0$.

C $3x - 2y + z - 12 = 0$. D $3x + 2y + z - 8 = 0$.

Lời giải.

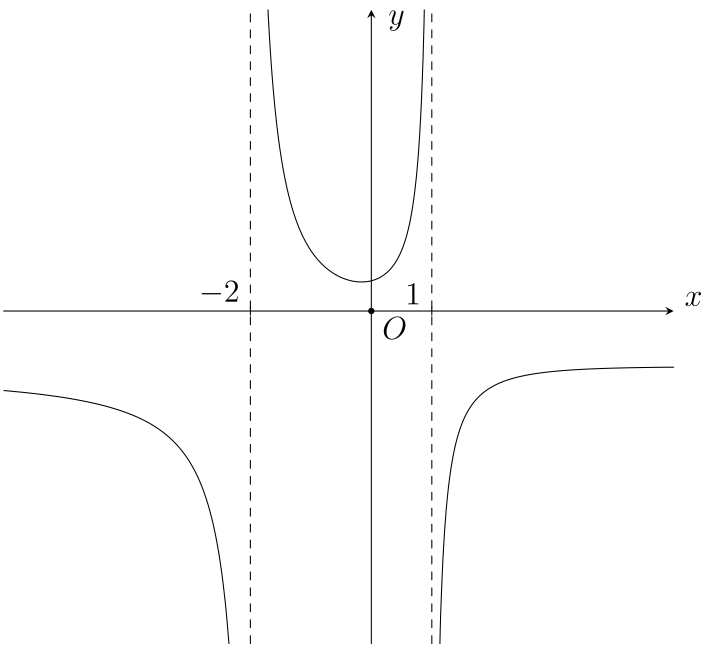
Mặt phẳng vuông góc đường thẳng (Δ) nhận véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; -2; 1)$. Phương trình mặt phẳng qua điểm M có dạng

$$3x - 2y + z - 12 = 0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 10.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$, $(1; +\infty)$, $f(x)$ không xác định tại $x = -2$ và $x = 1$, $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Chọn khẳng định đúng:



- A $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$.
- **B** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$.
- C $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$.
- D $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy

$$\lim_{x\to -2^-} y = -\infty,\ \lim_{x\to -2^+} y = +\infty,\ \lim_{x\to 1^-} y = +\infty,\ \lim_{x\to 1^+} y = -\infty.$$

Chọn đáp án B □

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua điểm $A(2; 3; 0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon x + 3y - z + 5 = 0$?

A $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$. B $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$. C $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$. D $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng cần tìm. Đường thẳng d vuông góc mặt phẳng (P) nhận $\vec{u} = (1; 3; -1)$ làm véc-tơ chỉ phương. Đường thẳng d qua A có phương trình là

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 3t \\ z = -t. \end{cases}$$

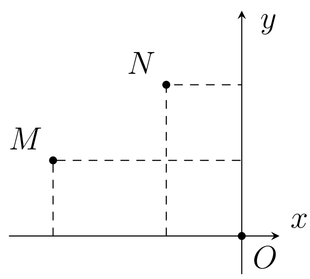
Với $t = -1$, đường thẳng d đi qua điểm $B(1; 0; 1)$. Suy ra đường thẳng d có phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 12.

Gọi M và N lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2 khác 0. Khi đó khẳng định nào sau đây **sai**?



A $|z_1 + z_2| = MN$. (B) $|z_2| = ON$.
(C) $|z_1 - z_2| = MN$. (D) $|z_1| = OM$.

Lời giải.

Gọi $z_1 = a_1 + b_1 i \Rightarrow M(a_1, b_1)$, $z_2 = a_2 + b_2 i \Rightarrow M(a_2, b_2)$.
Ta có $|z_1 + z_2| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$.
Mà $MN = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$. Suy ra $|z_1 + z_2| \neq MN$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Biết $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(2-a)x - 3}{x - \sqrt{x^2+1}} = +\infty$ (với a là tham số). Giá trị nhỏ nhất của $P = a^2 - 2a + 4$ là

A 4. (B) 3. (C) 5. (D) 1.

Lời giải.

Để $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(2-a)x - 3}{x - \sqrt{x^2+1}} = +\infty$ thì $2 - a < 0 \Rightarrow a > 2$.
Xét hàm số $f(a) = a^2 - 2a + 4$ với $a > 2$. Ta có bảng biến thiên sau

a	2	$+\infty$
$f(a)$	4 ↗	$+\infty$

Suy ra $\min P = 4$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số dạng $\overline{abcd}$, $a < b < c < d$?

(A) 210 . (B) 5040 . **C** 126 . (D) 3024 .

Lời giải.

Vì $a \neq 0$ nên để chọn 4 chữ số theo thứ tự tăng dần ta có $\mathrm{C}_9^5 = 126$ số.
Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 2]$ và thỏa mãn $f(2) = 0$, $\displaystyle\int_1^2 (f'(x))^2 \, \mathrm{d}x = \dfrac{5}{12} + \ln\dfrac{2}{3}$ và $\displaystyle\int_1^2 \dfrac{f(x)}{(x+1)^2} \, \mathrm{d}x = -\dfrac{5}{12} + \ln\dfrac{3}{2}$. Tính tích phân $\displaystyle\int_1^2 f(x) \, \mathrm{d}x$.

(A) $\dfrac{3}{4} + 2\ln\dfrac{2}{3}$. (B) $\ln\dfrac{3}{2}$. **C** $\dfrac{3}{4} - 2\ln\dfrac{3}{2}$. (D) $\dfrac{3}{4} + 2\ln\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_1^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{1}{2}f(x)\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{x-1}{x+1}\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{x-1}{x+1}\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vậy

$$-\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{x-1}{x+1}\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow\ -\int\limits_1^2 \frac{x-1}{x+1}\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{5}{6}+2\ln\frac{3}{2}. \qquad (1)$$

Mà

$$\int\limits_1^2 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{5}{3}-4\ln\frac{3}{2} \Rightarrow \int\limits_1^2 \left[\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right]\mathrm{d}x = \frac{5}{12}-\ln\frac{3}{2}. \qquad (2)$$

Mặt khác $\int\limits_1^2 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x = \frac{5}{12}+\ln\frac{2}{3} = \frac{5}{12}-\ln\frac{3}{2}.$ (3)

Từ (1), (2) và 3, ta được

$$\int\limits_1^2 \left[\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right]\mathrm{d}x - \int\limits_1^2 \frac{x-1}{x+1}\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_1^2 \left[f'(x)-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]^2\mathrm{d}x = 0$$

$$\Rightarrow\ f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$\Rightarrow\ f(x) = \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \ln|x+1| + C.$$

Mà $f(2)=0 \Rightarrow c = \ln 3 - 1$.

Vậy $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}-\ln\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Cho các số phức z thỏa mãn $|zi-(2+i)|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn. Tâm I của đường tròn đó là

A $I(1;-2)$. **B** $I(-1;2)$. **C** $I(-1;-2)$. **D** $I(1;2)$.

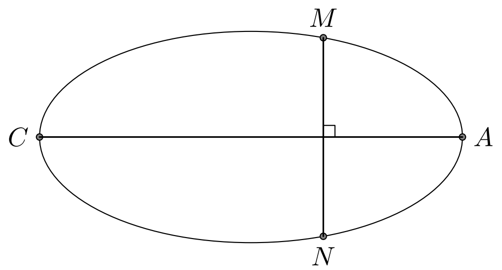
Lời giải.

Ta có $|i(z-1+2i)|=2 \Rightarrow |z-1+2i|=2 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=2$.

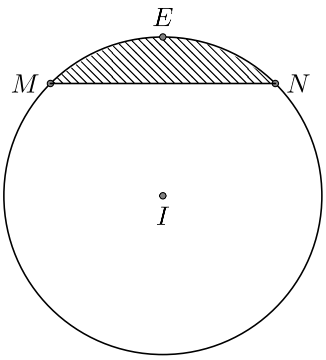
Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(1;-2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Sân vận động Sports Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức ở Singapore năm 2015. Nền sân là một Elip (E) có trục lớn dài 150 m, trục bé dài 90 m (Hình 3). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt Elip (E) ở M, N (Hình a) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong Hình b) với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN} = 90^0$. Để lắp máy điều hòa không khí cho sân vận động thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu làm mái không đáng kể. Hỏi thể tích đó xấp xỉ bao nhiêu?



Hình a



Hình b

(A) 57793 m^3 . (B) 115586 m^3 . (C) 32162 m^3 . (D) 101793 m^3 .

Lời giải.

Ta có $2a = 150 \Rightarrow a = 75$, $2b = 90 \Rightarrow b = 45$. Phương trình Elip có dạng $\dfrac{x^2}{75^2} + \dfrac{y^2}{45^2} = 1$.

Gọi $M(x,y) \in (E) \Rightarrow N(x,-y) \in (E) \Rightarrow MN = 2|y| = 2 \cdot \dfrac{45}{75}\sqrt{75^2 - x^2} = \dfrac{6}{5}\sqrt{75^2 - x^2}$.

Diện tích phần gạch sọc được tính bằng

$$\frac{1}{4}S_{(I,IM)} - S_{\triangle IMN} = \frac{1}{4}\pi IM^2 - \frac{1}{2}IM^2 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)IM^2 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{MN}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Khi đó, thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, được tính bằng

$$\int\limits_{-75}^{75}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{MN}{\sqrt{2}}\right)^2 \mathrm{d}x = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\int\limits_{-75}^{75}\frac{18}{25}(75^2 - x^2)\,\mathrm{d}x \approx 115586 \text{ m}^3.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}, \ldots, \dfrac{(-1)^n}{2^n}, \ldots$ là

(A) -1. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) $-\dfrac{1}{4}$. (D) $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Cấp số nhân lùi vô có số hạng đầu $u_1 = -\dfrac{1}{2}$, công bội $q = -\dfrac{1}{2}$. Tổng cấp số nhân vô hạn là $S = \dfrac{u_1}{1-q} = -\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19.

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Khẳng định nào dưới đây đúng?

x	-2		-1		0		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	11

(A) $\min\limits_{x\in[-2;2]} f(x) = -2;\ \max\limits_{x\in[-2;2]} f(x) = -1$.

(B) $\min\limits_{x\in[-2;2]} f(x) = 3;\ \max\limits_{x\in[-2;2]} f(x) = 4$.

(C) $\min\limits_{x\in[-2;2]} f(x) = -2;\ \max\limits_{x\in[-2;2]} f(x) = 2$.

(D) $\min\limits_{x\in[-2;2]} f(x) = 3;\ \max\limits_{x\in[-2;2]} f(x) = 11$.

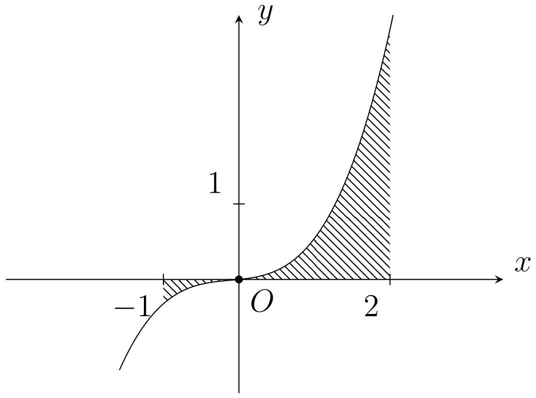
Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{x\in[-2;2]} f(x) = 3;\ \max\limits_{x\in[-2;2]} f(x) = 11$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20.

Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$ (như hình vẽ bên). Đặt $a = \int\limits_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x, b = \int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$, mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) $S = b - a$.
(B) $S = b + a$.
(C) $S = -b + a$.
(D) $S = -b - a$.

Lời giải.

Ta có diện tích hình phẳng

$$S = \int\limits_{-1}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = -a + b.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Phương trình $\dfrac{1}{\log_3 x - 3} + \dfrac{1}{\log_{27} x + 3} = 1$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 4 .
(B) 3 .
(C) 1 .
(D) 2.

Lời giải.

Đặt $t = \log_3 x$ với $x > 0$ và $\begin{cases} t \neq 3 \\ t \neq -9 \end{cases}$, phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t-3} + \frac{1}{\frac{1}{3}t + 3} = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{t-3} + \frac{3}{t+9} = 1 \\ \Leftrightarrow\ & t + 9 + 3(t-3) = (t-3)(t+9) \\ \Leftrightarrow\ & 4t + t^2 + 6t - 18 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2+2t-18=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1-\sqrt{19} \text{ (nhận)} \\ t=-1+\sqrt{19} \text{ (nhận)} \end{array}\right.$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x=-1-\sqrt{19} \\ \log_3 x=-1+\sqrt{19} \end{array}\right.$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=3^{-1-\sqrt{19}} \\ x=3^{-1+\sqrt{19}}. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm

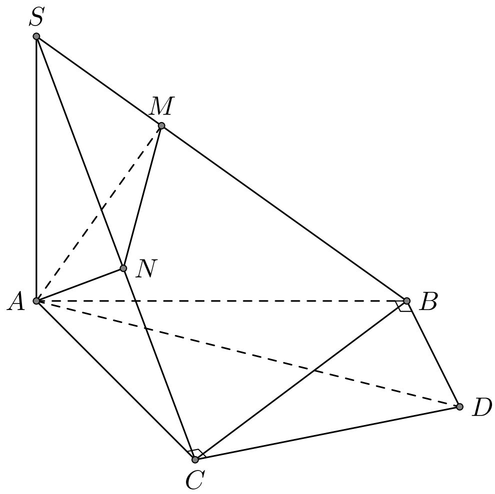
Chọn đáp án D □

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA=2BC$ và $\widehat{BAC}=120^\circ$. Hình chiếu của A trên các đoạn SB, SC lần lượt là M, N. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC)và (AMN).

A 45°. **B** 15°. **C** 30°. **D** 60°.

Lời giải.

Đặt $BC=a$. Dựng đường kính AD của đường tròn ngoại tiếp đáy.



Ta có $\begin{cases} CD\perp AC \\ CD\perp SA \end{cases} \Rightarrow CD\perp (SAC)\Rightarrow CD\perp AN.$

Mà $AN\perp SC\Rightarrow AN\perp (SCD)\Rightarrow AN\perp SD.$

Tương tự ta chứng minh $SD\perp AM$. Suy ra $SD\perp (AMN)$ lại có $SA\perp (ABC)$ nên $((AHK),(ABC))=(SD,SA)=\widehat{ASD}$.

Ta có $AD=\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

$\tan\widehat{ASD}=\dfrac{AD}{SA}=\dfrac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}}{2a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow \widehat{ASD}=30^\circ.$

Chọn đáp án C □

Câu 23. Giải phương trình: $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$. Một học sinh làm như sau:

- Bước 1: Điều kiện: $\begin{cases} x>2 \\ x\neq 4 \end{cases}$ $(*)$
- Bước 2: Phương trình đã cho tương đương với $2\log_3(x-2)+2\log_3(x-4)=0$.
- Bước 3: Hay là

$$\log_3(x-2)(x-4)=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-2)(x-4)=1$$
$$\Leftrightarrow\quad x^2-6x+7=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3+\sqrt{2} \\ x=3-\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện $(*)$, suy ra phương trình đã cho có nghiệm là $x=3+\sqrt{2}$.

Bài giải trên đúng hay **sai**? Nếu sai thì sai ở bước nào?

A Sai ở bước 2.

B Sai ở bước 1.

C Tất cả các bước đều đúng.

D Sai ở bước 3.

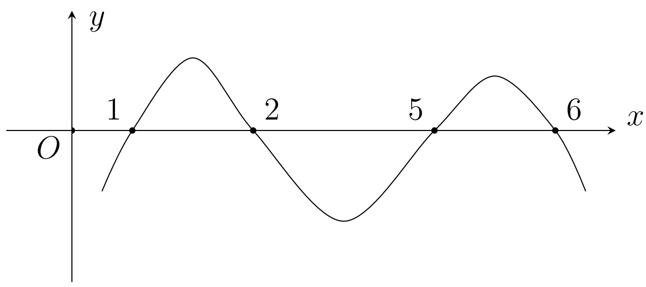
Lời giải.

Sai ở bước 2 vì $\log_3(x-4)^2 = 2\log_3|x-4|$.

Chọn đáp án A □

Câu 24.

Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ (đồ thị $f'(x)$ cắt Ox ở các điểm có hoành độ lần lượt là 1, 2, 5, 6). Chọn khẳng định đúng:



A $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

B $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$.

C $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;5)$.

D $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(4;5)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		2		5		6		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trong khoảng $(5;6)$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Do có nhiều cố gắng trong học kỳ 1 năm học lớp 12, Hoa được bố mẹ cho chọn một phần thưởng dưới 5 triệu đồng. Nhưng Hoa muốn mua một cái Laptop 10 triệu đồng nên bố mẹ đã cho Hoa 5 triệu đồng gửi vào ngân hàng (vào ngày 1 tháng 1 năm 2018) với lãi suất 1% trên tháng, đồng thời ngày đầu tiên mỗi tháng (bắt đầu từ ngày 1 tháng 2 năm 2018) bố mẹ sẽ cho Hoa 300000 đồng và cũng gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất 1% trên tháng. Biết hàng tháng Hoa không rút lãi ra và tiền lãi được cộng vào vốn cho tháng sau, chỉ rút vốn vào cuối tháng mới được tính lãi của tháng ấy. Hỏi ngày nào trong các ngày dưới đây là ngày gần nhất với ngày 1 tháng 2 năm 2018 mà bạn Hoa có đủ tiền để mua Laptop?

A Ngày 15.3.2019 . **B** Ngày 15.5.2019 . **C** Ngày 15.4.2019 . **D** Ngày 15.6.2019 .

Lời giải.

Đặt $A = 5000000$, $r = 1\%$, $B = 300000$.

Số tiền Hoa nhận được vào cuối tháng thứ n là

$$A(1+r)^{n+1} + \frac{B}{r}\left[(1+r)^n - 1\right](1+r).$$

Với yêu cầu bài toán

$$A(1+r)^{n+1} + \frac{B}{r}\left[(1+r)^n - 1\right](1+r) > 10^7$$

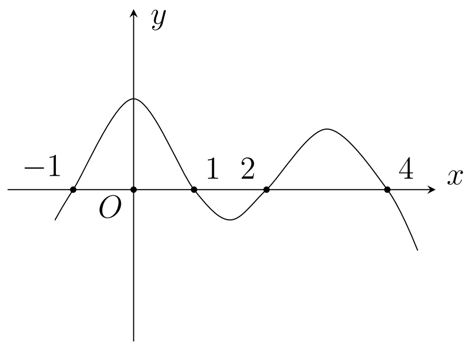
$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad 5\cdot 10^6\cdot(1{,}01)^{n+1}+303\cdot 10^5\left[1{,}01^n-1\right]>10^7\\
&\Leftrightarrow\quad 3535\cdot 10^4\cdot 1{,}01^n>403\cdot 10^5\\
&\Leftrightarrow\quad 1{,}01^n>\frac{806}{707}\\
&\Leftrightarrow\quad n>13{,}1.
\end{aligned}$$

Vậy sau 13 tháng hay 1 năm 1 tháng thì Hoa có đủ số tiền.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ (trên $\mathbb{R}$ thì đồ thị $y=f'(x)$ là một nét liền và chỉ có 4 điểm chung với Ox tại các điểm có hoành độ lần lượt là $-1,1,2,4$). Đặt $g(x)=f(1-x)$. Chọn khẳng định đúng:



(A) $g(x)$ đồng biến trên $(-3;0)$.

B $g(x)$ đồng biến trên $(-4;-3)$.

(C) $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$.

(D) $g(x)$ đồng biến trên $(-4;-3)$ và $(0;2)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x)=-f'(1-x)$.

- $g'(x)>0\Leftrightarrow f'(1-x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-x<-1\\1<1-x<2\\1-x>4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\-1<x<0\\x<-3.\end{array}\right.$

  Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)$, $(-1;0)$, $(2;+\infty)$.
- $g'(x)<0\Leftrightarrow f'(1-x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<1-x<1\\2<1-x<4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<2\\-3<x<-1.\end{array}\right.$

  Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$, $(-3;-1)$.

Ta thấy hàm số $g(x)$ đồng biến trong khoảng $(-4;-3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Một đề thi trắc nghiệm gồm 50 câu, mỗi câu có 4 phương án trả lời trong đó chỉ có 1 phương án đúng, mỗi câu trả lời đúng được 0,2 điểm. Bạn An làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên 1 trong 4 phương án ở mỗi câu. Tính xác suất để An được 6 điểm.

(A) $1-0{,}25^{20}.0{,}75^{30}$. (B) $0{,}25^{20}.0{,}75^{30}$. **C** $0{,}25^{30}.0{,}75^{20}$. (D) $0{,}25^{30}.0{,}75^{20}.C_{50}^{20}$.

Lời giải.

Để làm được 6 điểm thì An phải trả lời đúng 30 câu.

Xác suất trả lời đúng một câu là $\dfrac{1}{4}=0{,}25$.

Xác suất để A đạt 6 điểm là $0{,}25^{30}\cdot 0{,}75^{20}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x+2$

(A) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=3x^2+2x+C$. (B) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}x^2-2x+C$.

(C) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3x^2 - 2x + C$. (D) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$.

Lời giải.

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Phương trình $\sin 3x + 2\cos 2x - 2\sin x - 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $\left(-\frac{7\pi}{8}; 0\right)$:

(A) 3 . (B) 1 . (C) 2 . (D) 0 .

Lời giải.

$$\begin{aligned}
& \sin 3x + 2\cos 2x - 2\sin x - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 3\sin^3 x - 4\sin x + 2 - 4\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & -4\sin^3 x - 4\sin^2 x + \sin x + 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\sin x + 1)(1 - 4\sin^2 x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \\ \sin x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $k = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{6}$.

Với $k = -1 \Rightarrow x = -\frac{5\pi}{6}$.

Vậy có tất cả 3 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{7\pi}{8}; 0\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức New-tơn $\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^{21}$, $(x \neq 0$, $n \in N^*)$.

(A) $2^8 C_{21}^8$. (B) $-2^8 C_{21}^8$. (C) $2^7 C_{21}^7$. (D) $-2^7 C_{21}^7$.

Lời giải.

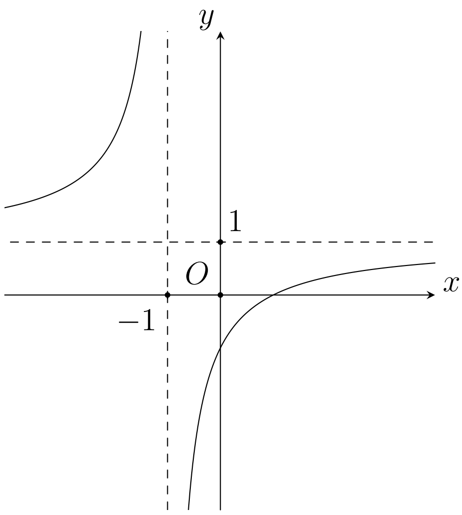
Số hạng tổng quát của khai triển là $C_{21}^k x^{21-k}\left(-\frac{2}{x^2}\right)^k = C_{21}^k(-2)^k x^{21-k-2k} = C_{21}^k(-2)^k x^{21-3k}$.

Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với $21 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 7$.

Số hạng không chứa x trong khai triển là $C_{21}^7(-2)^7 = -2^7 C_{21}^7$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 31.
Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ. Chọn khẳng định đúng.



(A) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.
(B) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.
(C) Hàm số đồng biến trên tập xác định.
(D) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.
Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.
Chọn đáp án (B) □

Câu 32.
Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-2; 2]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Chọn khẳng định đúng về tổng số các tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị $f(x)$.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
y	$0 \searrow -\infty$		‖ $+\infty \searrow -\infty$		‖ $+\infty \searrow -\infty$		

(A) Đồ thị hàm số có đúng 4 tiệm cận.
(B) Đồ thị hàm số có đúng 2 tiệm cận.
(C) Đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận.
(D) Đồ thị hàm số có đúng 3 tiệm cận.

Lời giải.
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy

- $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 0$ suy ra TCN $y = 0$.
- $\lim\limits_{x\to-2^{\pm}} y = \pm\infty$ suy ra TCĐ $x = -2$.
- $\lim\limits_{x\to 2^{\pm}} y = \pm\infty$ suy ra TCĐ $x = 2$.

Do đó đồ thị hàm số có ba tiệm cận.
Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy)?

(A) $\vec{j}(-5; 0; 0)$. (B) $\vec{k}(0; 0; 1)$. (C) $\vec{i} = (1; 0; 0)$. (D) $\vec{m} = (1; 1; 1)$.

Lời giải.
Mặt phẳng (Oxy): $z = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{mx^2}{2} + 2x + 2017$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(A) $-2\sqrt{2} \leqslant m \leqslant 2\sqrt{2}$. (B) $-2\sqrt{2} \leqslant m$.

(C) $m \leqslant 2\sqrt{2}$. **D** $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned} & x^2 + mx + 2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & \Delta \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & m^2 - 8 \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & -2\sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Tòa nhà Ericsson Globe (Thụy Điển) là tòa bán cầu lớn nhất thế giới, có hình dạng như một quả bóng màu trắng lớn, với đường kính khoảng 110 mét. Tòa nhà đã lắp đặt thang máy với tên gọi là Skyview, hệ thống thang máy hình cầu này được xây dựng ở bên ngoài tòa nhà. Giả sử nhà thiết kế đã thuê nhân công một công ty A để lắp đặt đường ray cho thang máy và sơn bên ngoài tòa nhà. Biết chi phí công lắp đặt đường ray cho thang máy là 10 đôla một mét dài (trên hình là hệ thống đường ray kép, có hai làn, nhưng khi tính tiền công thì tính chiều dài bằng chiều dài của một làn), công sơn một mét vuông bên ngoài tòa nhà cũng là 10 đôla. Coi tòa nhà là một hình bán cầu và độ dài đường ray tính bằng một nửa độ dài của đường tròn có bán kính bằng bán kính của hình cầu. Khi đó số tiền thuê nhân công trả cho công ty A xấp xỉ là bao nhiêu?

(A) 3486277 đô la. (B) 383588 đô la. **C** 191794 đô la. (D) 475165 đô la.

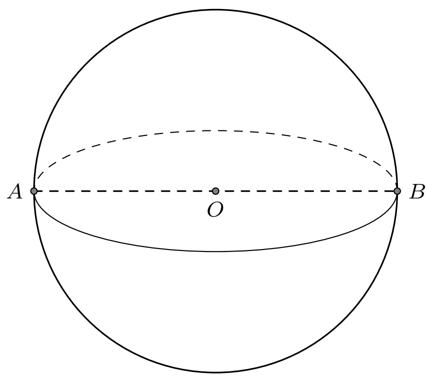
Lời giải.

Độ dài đường ray là nửa chu vi của đường tròn có đường kính 110 mét ta được $\pi R = 55\pi$.

Diện tích quét sơn là một nửa diện tích xung quanh của hình cầu đường kính 110 mét. Ta có $\dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi R^2 = 2 \cdot 55^2 \cdot \pi$.

Chi phí thực hiện toàn bộ công trình là

$$10 \cdot 55\pi + 10 \cdot 2 \cdot 55^2\pi \approx 191794 \text{ đô la.}$$



Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Cho số phức z thỏa mãn $(1-i)\cdot\overline{z} + \overline{(1+2i)}\cdot(1-2z) = 10+7i$. Tính mô đun của z.

(A) 3 . (B) $\sqrt{3}$. (C) 5 . **D** $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$. Ta có

$$\begin{aligned} & (1-i)\cdot\overline{z} + \overline{(1+2i)}\cdot(1-2z) = 10+7i \\ \Leftrightarrow\ & (1-i)(a-bi) + (1-2i)(1-2(a+bi)) = 10+7i \\ \Leftrightarrow\ & a - b - ai - bi + (1-2i)(1-2a-2bi) = 10+7i \\ \Leftrightarrow\ & a - b - ai - bi + 1 - 2a - 2(1-2a)i - 2bi - 4b = 10+7i \\ \Leftrightarrow\ & -3a - 5b + 1 + 3ai - 3bi - 2i = 10+7i \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a-5b+1=10 \\ 3a-3b-2=7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2. \end{cases}$$

$\Rightarrow |z|=|1-2i|=\sqrt{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Cho $a=\log_2 5$, $b=\log_5 3$, $\log_{30} 150=\dfrac{x\cdot a\cdot b+y\cdot a+z\cdot b+1}{m\cdot a\cdot b+n\cdot a+p\cdot b+q}$ (x, y, z, m, n, p, q là các số nguyên). Tính $x+y+z+m+n+p+q$.

A 5 . B 4 . C 6 . D 1 .

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \log_{30} 150 &= \frac{\log_5 150}{\log_5 30} \\ &= \frac{\log_5 5+\log_5 3+\log_5 2+\log_5 5}{\log_5 5+\log_5 3+\log_5 2} \\ &= \frac{2+b+\dfrac{1}{a}}{1+b+\dfrac{1}{a}} \\ &= \frac{ab+2a+1}{ab+a+1}. \end{aligned}$$

Khi đó, $x=1$, $y=2$, $z=0$, $m=1$, $n=1$, $p=0$, $q=1$ suy ra $x+y+z+m+n+p+q=6$.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$,cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-5=0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

A $M(1;1;6)$. B $N(-5;0;0)$. C $P(0;0;-5)$. D $Q(2;-1;5)$.

Lời giải.

Ta có $1-2(1)+6-5=0 \Rightarrow M\in(P)$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I, bán kính IM?

A $(x-1)^2+y^2+z^2=\sqrt{13}$. B $(x+1)^2+y^2+z^2=17$.

C $(x+1)^2+y^2+z^2=13$. D $(x-1)^2+y^2+z^2=13$.

Lời giải.

I là hình chiếu của M lên trục Ox suy ra $I(1;0;0)$. Do đó, ta có $\overrightarrow{IM}=(0;-2;3)$ suy ra $|\overrightarrow{IM}|=\sqrt{13}$.

Phương trình mặt cầu tâm I, bán kính IM có phương trình là

$$(x-1)^2+y^2+z^2=13.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Biết $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \sin x \, dx = \dfrac{e^a + 1}{b}$ với $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{N}$. Khi đó $\sin a + \cos 2a + b$ bằng

(A) 2 . (B) 4 . (C) 1 . (D) 0 .

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \sin x \\ dv = e^x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x \, dx \\ v = e^x \end{cases}$. Ta được

$$I = e^x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx$$

Xét $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx$, đặt $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x \, dx \\ v = e^x \end{cases}$, ta có

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx = e^x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \, dx = e^x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + I.$$

Do đó, $I = e^x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - e^x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - I \Leftrightarrow 2I = e^x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - e^x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}} + 1$.

Vậy $a = \dfrac{\pi}{2}$, $b = 0$ suy ra $\sin a + \cos 2a + b = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{3}{2}x + 1$. Trong 4 mệnh đề dưới đây:

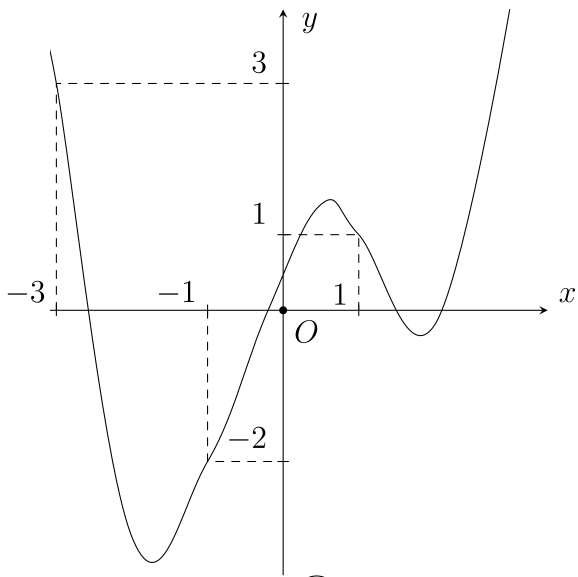
(I) $g(-3) < g(-1)$

(II) Hàm số g(x) đồng biến trên $(-3; 1)$.

(III) $\min\limits_{x \in [-1;0]} g(x) = g(-1)$

(IV) $\max\limits_{x \in [-3;1]} g(x) = \max\{g(-3); g(1)\}$.

Số mệnh đề đúng là



(A) 2 . (B) 1 . (C) 3 . (D) 4 .

Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x) - x^2 - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

Mà $f'(-3) = 3 \Rightarrow g'(-3) = 0$, $f'(-1) = -2 \Rightarrow g'(-1) = 0$, $f'(1) = 0 \Rightarrow g'(1) = 0$.

Ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(-3)$	$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy

(I) $g(-3\ ) < g(-1)$ đúng.

(II) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-3;1)$ **sai** vì hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-1;1)$.

(III) $\min\limits_{x\in[-1;0]} g(x) = g(-1)$ đúng.

(IV) $\max\limits_{x\in[-3;1]} g(x) = \max\{g(-3); g(1)\}$ đúng.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 + 3 + 2m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A $-2 \leqslant m \leqslant \dfrac{-3}{2}$. **B** $\dfrac{-3}{2} < m < 2$. **C** $-2 < m < \dfrac{-3}{2}$. **D** $3 < m < 4$.

Lời giải.

Ta có $-x^4 + 2x^2 + 3 + 2m = 0 \Leftrightarrow 2m + 3 = x^4 - 2x^2$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ và đường thẳng $y = 2m + 3$.

Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của hai đồ thị.

Xét hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có $y' = 4x^3 - 4x$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy để có bốn giao điểm thì

$$-1 < 2m + 3 < 0 \Leftrightarrow -4 < 2m < -3 \Leftrightarrow -2 < m < -\frac{3}{2}.$$

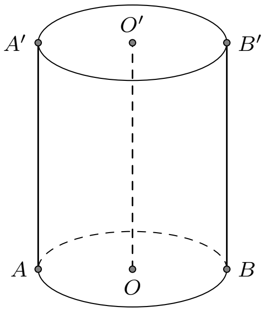
Chọn đáp án C □

Câu 43. Một nhà máy muốn làm một cái bồn nước hình trụ tròn xoay có tất cả vỏ được làm bằng inox. Bồn cao 10 mét, đường kính đáy là 6 mét. Tính gần đúng diện tích inox cần mua để làm vỏ một chiếc bồn như trên (coi như phần inox thừa trong khi làm là không đáng kể).

A $245{,}1\text{ m}^2$. **B** $603{,}2\text{ m}^2$. **C** $414{,}7\text{ m}^2$. **D** $490{,}1\text{ m}^2$.

Lời giải.

Diện tích cần mua để làm bồn chính là diện tích toàn phần của hình trụ $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}} = 2\pi \cdot R \cdot h + 2\pi R^2 = 2\pi \cdot 3 \cdot 10 + 2\pi \cdot 3^2 \approx 245{,}1\text{ m}^2$.



Chọn đáp án A □

Câu 44. Tổng $T = \mathrm{C}_{2017}^1 + \mathrm{C}_{2017}^3 + \mathrm{C}_{2017}^5 + \cdots + \mathrm{C}_{2017}^{2017}$ bằng

A 2^{2016}. **B** $2^{2016} - 1$. **C** 2^{2017}. **D** $2^{2017} - 1$.

Lời giải.

Xét khai triển

$$\begin{aligned}(1+x)^{2017} &= \mathrm{C}_{2017}^0 1^{2n} x^0 + \mathrm{C}_{2017}^1 1^{2n-1} x^1 + \mathrm{C}_{2017}^2 1^{2n-2} x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2017}^{2n} 1^1 x^{2n} + \mathrm{C}_{2017}^{2017} 1^0 x^{2017}\\ &= 1 + \mathrm{C}_{2017}^1 x + \mathrm{C}_{2017}^2 x^2 + \cdot + \mathrm{C}_{2017}^{2n} x^{2n} + \mathrm{C}_{2017}^{2017} x^{2017}\end{aligned}$$

Cho $x = 1$ suy ra

$$2^{2017} = 1 + \mathrm{C}_{2017}^1 + \mathrm{C}_{2017}^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2017}^{2n} + \mathrm{C}_{2017}^{2017}. \qquad (1)$$

Cho $x = -1$ suy ra

$$0 = 1 - \mathrm{C}_{2017}^1 + \mathrm{C}_{2017}^2 - \cdots + \mathrm{C}_{2017}^{2n} - \mathrm{C}_{2017}^{2017}. \qquad (2)$$

Lấy (1) − (2) suy ra $2^{2017} = 2(\mathrm{C}_{2017}^1 + \mathrm{C}_{2017}^3 + \cdots + \mathrm{C}_{2017}^{2n-1} + \mathrm{C}_{2017}^{2017})$

$\Rightarrow 2^{2016} = \mathrm{C}_{2017}^1 + \mathrm{C}_{2017}^3 + \cdots + \mathrm{C}_{2017}^{2n-1} + \mathrm{C}_{2017}^{2017}$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = a + b\cdot\sqrt{6} + c\cdot\ln\left(\frac{5\sqrt{6}+12}{5\sqrt{6}-12}\right) + d\cdot\ln 2$ với a, b, c, d là các số hữu tỉ. Tính tổng $a+b+c+d$.

A $-\dfrac{3}{20}$. **B** $-\dfrac{3}{2}$. **C** $-\dfrac{3}{24}$. **D** $-\dfrac{3}{25}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^4 \frac{x\sqrt{25-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = I$. Đặt $t = \sqrt{25-x^2} \Rightarrow \begin{cases} -t\,\mathrm{d}t = x\mathrm{d}x \\ x^2 = 25 - t^2 \end{cases}$.

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 2\sqrt{6}$, $x = 4 \Rightarrow t = 3$. Khi đó,

$$\begin{aligned} I &= \int_{2\sqrt{6}}^{3} \frac{-t^2\,\mathrm{d}t}{25-t^2}\\ &= \int_{2\sqrt{6}}^{3} \left[1 - \frac{25}{25-t^2}\right]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int\limits_{2\sqrt{6}}^{3} \left[1 - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{5-t} + \frac{1}{5+t}\right)\right] \mathrm{d}t \\
&= t + \frac{5}{2}\ln\left|\frac{5-t}{5+t}\right|\Bigg|_{2\sqrt{6}}^{3} \\
&= 3 + \frac{5}{2}\ln\frac{1}{4} - 2\sqrt{6} - \frac{5}{2}\ln\frac{5-2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}} \\
&= 3 - 5\ln 2 - 2\sqrt{6} + \frac{5}{2}\ln\frac{5\sqrt{6}+12}{5\sqrt{6}-12}.
\end{aligned}$$

Vậy $a = 3$, $b = -2$, $c = \frac{5}{2}$, $d = -5$ suy ra $a + b + c + d = -\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Cho a, b là các số nguyên và $\lim\limits_{x \to 1} \frac{ax^2 + bx - 5}{x - 1} = 7$. Tính $a^2 + b^2 + a + b$.

A 18 . (B) 1 . (C) 15 . (D) 5.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \to 1} \frac{ax^2 + bx - 5}{x - 1} = 7 \\
\Leftrightarrow\ & \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(ax + (a+b) - 5 + a + b)}{x - 1} = 7 \\
\Leftrightarrow\ & \lim_{x \to 1}(ax + (a+b) - 5 + a + b) = 7 \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a(1) + a + b = 7 \\ -5 + a + b = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} 2a + b = 7 \\ a + b = 5 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a = 2 \\ b = 3. \end{cases} \\
\Rightarrow\ & a^2 + b^2 + a + b = 18.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Phần ảo của số phức $z = \frac{1 - (1-i)^{33}}{1 - i} + \overline{(1 - 2i)}$ là

A $\frac{5}{2}$. (B) $\frac{5}{2}i$. (C) $-\frac{3}{2}i$. (D) $-\frac{3}{2}$.

Lời giải.

$z = \frac{1}{1-i} - (1-i)^{32} + 1 + 2i = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i - (1-i)^{32} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i - (-2i)^{16} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i - (-4)^{8}$.

Vậy phần ảo của số phức z là $\frac{5}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{2x^2+3x+7} + 1$. Khi đó S là

A $\{1;2\}$. **B** $\{1;2;-1\}$. **C** $\{1;2;-1;-5\}$. **D** $\varnothing$.

Lời giải.

Đặt $u=4^{x^2-3x+2}$, $v=4^{x^2+6x+5}$ suy ra $4^{2x^2+3x+7}=uv$. Khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & u+v=uv+1 \\ \Leftrightarrow\ & (u-1)(v-1)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} u=1 \\ v=1 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 4^{x^2-3x+2}=1 \\ 4^{x^2+6x+5}=1 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x^2-3x+2=0 \\ x^2+6x+7=0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=-1 \\ x=-5. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{1;2;-1;-5\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Hàm số $y=(x^2-x)^{\frac{3}{2}}$ có tập xác định là

A $\mathbb{R}$. **B** $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$.

C $(0;1)$. **D** $(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2-x>0\Leftrightarrow x<0$ hay $x>1$.

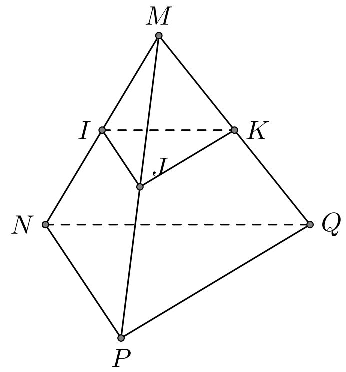
Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho tứ diện $MNPQ$. Gọi I; J; K lần lượt là trung điểm của các cạnh MN; MP; MQ.Gọi V_1 là thể tích của $MJIK$ và V_2 là thể tích của $MNPQ$. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A $\dfrac{1}{8}$. **B** $\dfrac{1}{4}$. **C** $\dfrac{1}{6}$. **D** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{MI}{MN}\cdot\dfrac{MJ}{MP}\cdot\dfrac{MK}{MQ}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$.



Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. B	3. A	4. B	5. D	6. D	7. C	8. A	9. C	10. B
11. A	12. A	13. A	14. C	15. C	16. A	17. B	18. D	19. D	20. A
21. D	22. C	23. A	24. B	25. A	26. B	27. C	28. D	29. A	30. D
31. B	32. D	33. B	34. D	35. C	36. D	37. C	38. A	39. D	40. D
41. C	42. C	43. A	44. A	45. B	46. A	47. A	48. C	49. B	50. A

75 ĐỀ THI THỬ TRƯỜNG ĐẠI HỌC HỒNG ĐỨC - THANH HÓA NĂM 2017-2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Giá trị $|p-q|$ của khối đa diện lồi, đều loại $\{p;q\}$ không thể bằng

A 0. **B** 2. **C** 1. **D** 3.

Lời giải.

Có 5 loại khối đa diện lồi, đều là $\{3;3\}$, $\{3;4\}$, $\{4;3\}$, $\{3;5\}$, $\{5;3\}$.

Chọn đáp án D □

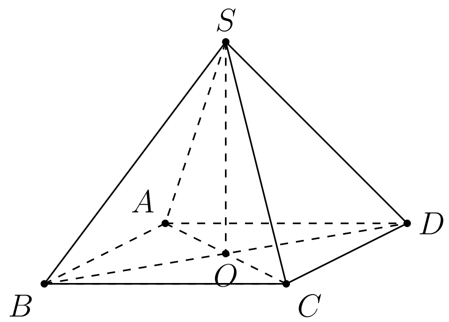
Câu 2. Cho khối tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $2a$. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

A $\dfrac{4a^3}{3}$. **B** $a^3\sqrt{3}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{32}}{3}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Khi đó SO là đường cao của hình chóp. Ta có $AO = \dfrac{1}{2}AC = a\sqrt{2}$, $SO = \sqrt{4a^2-2a^2} = a\sqrt{2}$ và $S_{ABCD} = 4a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}\cdot a\sqrt{2}\cdot 4a^2 = \dfrac{4}{3}a^3\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{32}}{3}$.



Chọn đáp án D □

Câu 3. Cho $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -2$ và $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $I = \displaystyle\int_a^b [2f(x)-3g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A $I=-13$. **B** $I=13$. **C** $I=-5$. **D** $I=5$.

Lời giải.

$$I = \int_a^b [2f(x)-3g(x)]\,\mathrm{d}x = 2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - 3\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 2\cdot(-2)-3\cdot 3 = -13.$$

Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho $\log_2 3 = a, \log_3 5 = b, \log_7 2 = c$. Tính $\log_{140} 63$ theo a,b,c.

A $\dfrac{2ac+1}{a+abc+2b}$. **B** $\dfrac{2bc+1}{2c+abc+1}$. **C** $\dfrac{2ac+1}{2c+abc+1}$. **D** $\dfrac{3ab+1}{2a+abc+b}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{140} 63 = \log_{(2^2\cdot 5\cdot 7)}(3^2\cdot 7) = \dfrac{2\log_2 3+\log_2 7}{2+\log_2 5+\log_2 7}$ và $\log_2 5 = \log_2 3\cdot\log_3 5 = ab$.

Vậy $\log_{140} 63 = \dfrac{2a+\dfrac{1}{c}}{2+ab+\dfrac{1}{c}} = \dfrac{2ac+1}{2c+abc+1}$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Đồ thị hàm số đã cho có tổng số bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

x	$-\infty$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
y	$6 \searrow 2$	$\Vert$	$+\infty \searrow 3$

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 0. **D** 3.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}\}$.

Ta thấy chỉ có 1 giá trị x_0 mà $\lim\limits_{x \to x_0^+} y$ hoặc $\lim\limits_{x \to x_0^-} y$ bằng $+\infty$ hoặc $-\infty$ nên $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}^+} y = +\infty$.

$\Rightarrow$ Đồ thị có 1 tiệm cận đứng là đường $x = \sqrt{2}$.

Mặt khác, ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} y = 6$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 3 \Rightarrow$ Đồ thị có 2 tiệm cận ngang là đường $y = 6$ và $y = 3$.

Vậy có tất cả 3 tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Tính tổng $T = \mathrm{C}_{10}^1 + 2\mathrm{C}_{10}^2 + 3\mathrm{C}_{10}^3 + \cdots + 10\mathrm{C}_{10}^{10}$.

Ⓐ $T = 2048$. **B** $T = 5120$. Ⓒ $T = 1024$. Ⓓ $T = 512$.

Lời giải.

Ta có $(x+1)^{10} = \mathrm{C}_{10}^0 + x\mathrm{C}_{10}^1 + x^2\mathrm{C}_{10}^2 + x^3\mathrm{C}_{10}^3 + \cdots + x^{10}\mathrm{C}_{10}^{10}$. Lấy đạo hàm 2 vế

$$10(x+1)^9 = \mathrm{C}_{10}^1 + 2x\mathrm{C}_{10}^2 + 3x^2\mathrm{C}_{10}^3 + \cdots + 10x^9\mathrm{C}_{10}^{10}.$$

Cho $x = 1 \Rightarrow \mathrm{C}_{10}^1 + 2\mathrm{C}_{10}^2 + 3\mathrm{C}_{10}^3 + \cdots + 10\mathrm{C}_{10}^{10} = 10 \cdot 2^9 = 5120$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Cho hình chóp tam giác $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O lên mặt phẳng ABC. Kí hiệu S_1, S_2, S_3 và S lần lượt là diện tích các tam giác OAB, OAC, OBC và ABC. Xét các khẳng định sau

a) $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

b) H là trọng tâm tam giác ABC.

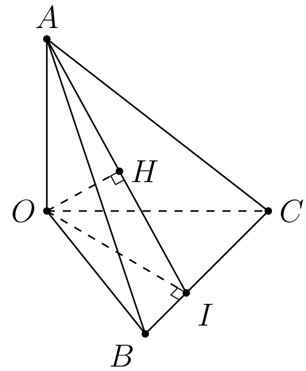
c) Tam giác ABC là tam giác nhọn.

d) $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$.

Số khẳng định **sai** trong các khẳng định trên là

Ⓐ 3. Ⓑ 0. **C** 1. Ⓓ 2 .

Lời giải.



Ta dễ dàng chứng minh H là trực tâm ΔABC nên

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OI^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}\quad (AH\perp BC \quad \text{tại} \quad I).$$

Vì H là trực tâm ΔABC. Suy ra ΔABC là tam giác nhọn.
Mặt khác, ta có $S_1=\frac{1}{2}OA\cdot OB, S_2=\frac{1}{2}OA\cdot OC, S_3=\frac{1}{2}OB\cdot OC$ và $S=\frac{1}{2}AI\cdot BC$. Suy ra

$$\begin{aligned} S_1^2+S_2^2+S_3^2 &= \frac{1}{4}\left(OA^2\cdot OB^2+OA^2\cdot OC^2+OB^2\cdot OC^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(OA^2\cdot BC^2+OB^2\cdot OC^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(OA^2\cdot BC^2+OI^2\cdot BC^2\right)\\ &= \frac{1}{4}AI^2\cdot BC^2\\ &= S^2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 8. Tìm phần ảo của số phức z thỏa mãn $(2-i)z=1-2i$.

A $-\frac{3}{5}$. **B** $\frac{i}{2}$. **C** $\frac{4}{5}$. **D** $\frac{-3i}{2}$.

Lời giải.

Ta có $(2-i)z=1-2i\Rightarrow z=\frac{1-2i}{2-i}=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Cho biết $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2018$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^1\frac{f(|x|)\,\mathrm{d}x}{1+2018^x}$.

A $I=\mathrm{e}^{2018}$. **B** $I=2018$. **C** $I=1009$. **D** $I=2019$.

Lời giải.

Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận $x=1\Rightarrow t=-1; x=-1\Rightarrow t=1$. Ta có

$$I=\int\limits_{-1}^1\frac{f(|x|)\,\mathrm{d}x}{1+2018^x}=-\int\limits_1^{-1}\frac{f(|-t|)\,\mathrm{d}t}{1+2018^{-t}}=\int\limits_{-1}^1\frac{2018^t\cdot f(|t|)\,\mathrm{d}t}{1+2018^t}=\int\limits_{-1}^1\frac{2018^x\cdot f(|x|)\,\mathrm{d}x}{1+2018^x}.$$

Khi đó $2I=\int\limits_{-1}^1 f(|x|)\,\mathrm{d}x=2\int\limits_0^1 f(|x|)\,\mathrm{d}x\Rightarrow I=\int\limits_0^1 f(|x|)\,\mathrm{d}x$.

Vì hàm $y=f(|x|)$ là hàm số chẵn trên $[-1;1]$, nên $I=\int\limits_0^1 f(|x|)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2018$.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Cho số phức z có môđun bằng 2018 và w là số phức thỏa mãn biểu thức $\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{1}{z+w}$. Môđun của số phức w bằng

A 2018. **B** 2019. **C** 2017. **D** $\sqrt{2019}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{w}=\dfrac{1}{z+w}\Rightarrow\dfrac{(z+w)^2-zw}{zw(z+w)}=0$, suy ra $\left(z+\dfrac{1}{2}w\right)^2=\left(-\dfrac{i\sqrt{3}w}{2}\right)^2$.

Khi đó $z=\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)w$ hoặc $z=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)w\Rightarrow|w|=-\dfrac{2018}{\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}}}=2018$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Tính $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-1}$.

(A) $-\dfrac{5}{2}$. (B) $-\dfrac{3}{2}$. (C) $\dfrac{3}{2}$. **(D)** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+4}{x+1}=\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(x;y;z)$. Xét các khẳng định

a) Hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (Oxy) là điểm có tọa độ $(x;y;0)$.

b) Khoảng cách từ điểm M lên trục Oz bằng $\sqrt{x^2+y^2}$.

c) Hình chiếu vuông góc của M lên trục Oy là điểm có tọa độ $(0;y;0)$.

d) Điểm đối xứng với điểm M qua trục Ox là điểm có tọa độ $(x;-y;-z)$.

e) Điểm đối xứng với điểm M qua gốc tọa độ O là điểm có tọa độ $(-x;-y;-z)$.

f) Độ dài véc-tơ $\overrightarrow{OM}$ bằng $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Số khẳng định đúng trong các khẳng định trên là

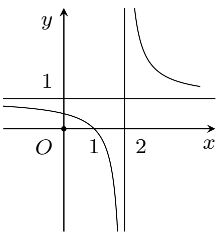
(A) 3. (B) 4. (C) 1. **(D)** 6.

Lời giải.

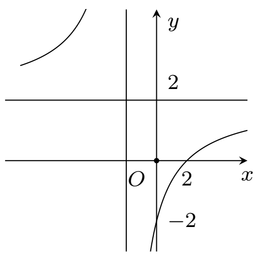
Tất cả các khẳng định trên đều đúng.

Chọn đáp án (D) □

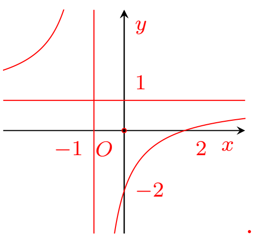
Câu 13. Cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ là một trong bốn đường cong được liệt kê trong bốn phương án dưới đây. Hỏi đồ thị đó là hình nào?

(A) 

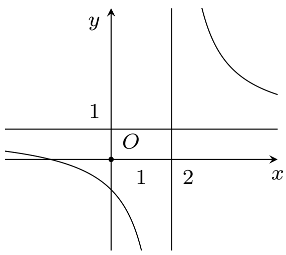
.

(B) 

.

(C) 

.

(D) 

.

Lời giải.

Đồ thị có đường tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=1$ và đi qua các điểm $(0;2),(-2;0)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là

(A) $y = 2x + 3$. (B) $y = 3$. (C) $y = 2x - 3$. **D** $y = -3$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0; -3)$, $y' = 4x^3 - 4x$, $y'(0) = 0$. Vậy phương trình tiếp tuyến là $y = -3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Bảng biến thiên trong hình dưới là bảng biến thiên của hàm số nào dưới đây?

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗			$+\infty$

(A) $y = x^4 - 2x^2 + 2$. (B) $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x - 1$.

C $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x - 1$. (D) $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x - 1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm bậc ba không có cực trị và có hệ số $a > 0$ tương ứng với hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x - 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Hàm số nào trong các hàm số sau đồng biến trên tập xác định?

(A) $y = \frac{2 - 3x}{1 + 5x}$. (B) $y = x^4 + 3x^2 + 18$.

(C) $y = x^3 + 2x^2 - 7x + 1$. **D** $y = x^3 + 3x^2 + 9x - 20$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 9x - 20$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 + 6x + 9 \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 9x - 20$ đồng biến trên tập xác định.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Cho các đường cong $(C_1)\colon y = x^3 - 3x^2 + 4$, $(C_2)\colon y = -x^4 + x^2 - 3$ và $(C_3)\colon y = \frac{5x + 2}{x - 1}$. Hỏi các đường cong nào có tâm đối xứng?

(A) (C_1), (C_2) và (C_3). **B** (C_1) và (C_3).

(C) (C_2) và (C_3). (D) (C_1) và (C_2).

Lời giải.

(C_1) có hoành độ tâm đối xứng là nghiệm của $y'' = 0$ và (C_3) có tâm đối xứng là giao hai tiệm cận.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+5}{4}$. Véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$ của d và điểm M thuộc đường thẳng d là

A. $\vec{u}=(6;-2;8), M(3;-1;4)$.
B. $\vec{u}=(2;3;-5), M(3;-1;4)$.
C. $\vec{u}=(3;-1;4), M(1;3;-4)$.
D. $\vec{u}=(6;-2;8), M(2;3;-5)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}=(6;-2;8)=2(3;-1;4), M(2;3;-5)$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Đạo hàm y' của hàm số $y=\log_2(2x^2+x+3)$ là

A. $y'=\dfrac{1}{2x^2+x+3}$.
B. $y'=\dfrac{(4x+1)\cdot\ln 2}{2x^2+x+3}$.
C. $y'=\dfrac{4x+1}{(2x^2+x+3)\cdot\ln 2}$.
D. $y'=\dfrac{1}{(2x^2+x+3)\cdot\ln 2}$.

Lời giải.

$y=\log_2(2x^2+x+3)\Rightarrow y'=\dfrac{(2x^2+x+3)'}{(2x^2+x+3)\cdot\ln 2}=\dfrac{4x+1}{(2x^2+x+3)\cdot\ln 2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm số giá trị nguyên $m\in[-2018;2018]$ để phương trình $(C)\colon x^2+y^2+z^2-2mx+2my-2mz+27=0$ là phương trình mặt cầu.

A. 4033.
B. 4030.
C. 4031.
D. 4032.

Lời giải.

Điều kiện $3m^2-27>0\Leftrightarrow m<-3$ hay $m>3$. Mặt khác

$$m\in[-2018;2018]\Rightarrow m\in\{-2018;-2017;\ldots;-5;-4;4;5;\ldots;2017;2018\}.$$

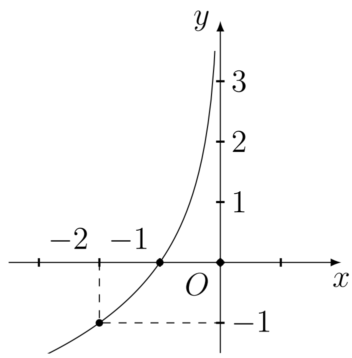
Có tất cả 4030 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 21.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A. $y=-2^{-x}$.
B. $y=2^{-x}$.
C. $y=\log_2(-x)$.
D. $y=-\log_2(-x)$.



Lời giải.

Từ đồ thị ta có $x=-1\Rightarrow y=0; x=-2\Rightarrow y=-1$.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Gọi V và S lần lượt là thể tích khối cầu, diện tích mặt cầu có bán kính x. Xét các khẳng định sau

a) $V = 4\pi x^3$. b) $S = 4\pi x^2$. c) $V' = S$. d) $3V = Sx$.

Số khẳng định **đúng** là

A 3. B 4. C 2. D 1.

Lời giải.

Chỉ có khẳng định b), c), d) đúng.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Bác Tâm đi du lịch từ thành phố A đến thành phố B sau đó đi đến đảo C. Biết rằng mỗi cách đi từ A đến B chỉ được chọn duy nhất một trong các phương tiện là máy bay, xe khách hoặc tàu hỏa và từ B đến C chỉ được chọn duy nhất một trong các phương tiện là máy bay hoặc tàu thủy. Hỏi bác Tâm có bao nhiêu cách đi du lịch từ thành phố A đến đảo C?

A 4. B 9. C 6. D 2.

Lời giải.

Áp dụng quy tắc nhân có $3 \cdot 2 = 6$ cách đi.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Hình trụ có bán kính đáy bằng R, đường cao gấp đôi bán kính đáy có diện tích toàn phần bằng

A $3\pi R^2$. B $6\pi R^2$. C $4\pi R^2$. D $8\pi R^2$.

Lời giải.

Ta có $S_{\text{tp}} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + 4\pi R^2 = 6\pi R^2$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{x^3}, (x \neq 0)$.

A $F(x) = x - 3\ln|x| - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + C$. B $F(x) = x - 3\ln|x| + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + C$.

C $F(x) = x + 3\ln|x| - \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{2x^2} + C$. D $F(x) = x - 3\ln|x| + \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{2x^2} + C$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = 1 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$, do đó $F(x) = x + 3\ln|x| - \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{2x^2} + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x + 2y - 3z + 6 = 0$. Véc-tơ nào sau đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

A $\vec{n}(-1; 2; -3)$. B $\vec{n}(1; -2; 3)$. C $\vec{n}(-1; -2; -3)$. D $\vec{n}(1; 2; -3)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}(1; 2; -3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Số lượng của một loại vi khuẩn X trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $x(t) = x(0) \cdot 2^t$, trong đó $x(0)$ là số lượng vi khuẩn X ban đầu, $x(t)$ là số lượng vi khuẩn X sau t (phút). Biết sau 2 phút thì số lượng vi khuẩn X là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc bắt đầu, số lượng vi khuẩn X là 10 triệu con.

A 7 phút. B 5 phút. C 8 phút. D 6 phút.

Lời giải.

Ta có $x(2) = x(0) \cdot 2^2 = 625 \cdot 10^3$. Mặt khác $x(t) = x(0) \cdot 2^t = 10 \cdot 10^6 \Rightarrow 2^{t-2} = \dfrac{10^7}{625 \cdot 10^3} \Leftrightarrow t = 6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Cho hình đa diện lồi, đều loại $\{3;5\}$ cạnh a. Tính diện tích toàn phần S của hình đa diện đó.

A $S = 5\sqrt{3}a^2$. (B) $S = 4\sqrt{3}a^2$. (C) $S = 3\sqrt{3}a^2$. (D) $S = 6a^2$.

Lời giải.

Đa diện lồi, đều loại $\{3;5\}$ có 20 mặt là tam giác đều cạnh a. Suy ra $S = 20 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 5\sqrt{3}a^2$.

Chọn đáp án (A) □

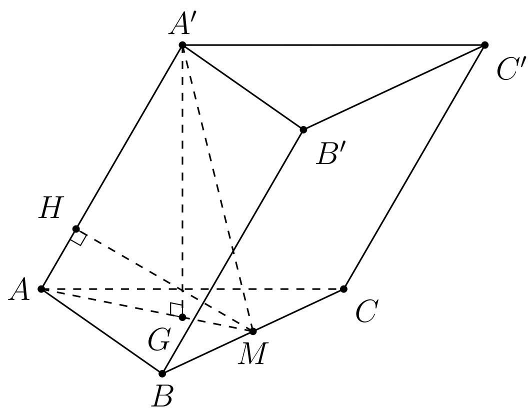
Câu 29. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích V của hình lăng trụ.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, H là hình chiếu vuông góc của M trên AA'. Suy ra MH là khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC. Ta có $AM = a\sqrt{3}$ và $AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. Do $A'G \cdot AM = MH \cdot AA'$ và $AA'^2 = AG^2 + A'G^2 \Rightarrow A'G = \dfrac{2a}{3}$.

Vậy thể tích $ABC.A'B'C'$ là $V = A'G {\cdot} S_{ABC} = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x) = \sin x + \cos^2 x$. Tính giá trị $S = \sqrt{7}(1 + \min y)^2 + 16 \max^2 y$.

(A) $S = \dfrac{25}{16}$. **B** $S = 25$. (C) $S = 4\sqrt{7} + 25$. (D) $25 - 4\sqrt{7}$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x, t \in [-1;1]$. Hàm số trở thành $y = g(t) = 1 + t - t^2$ và $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2} \in [-1;1]$.

Ta có $g(-1) = -1; g(1) = 1; g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5}{4}$. Suy ra $\min y = -1, \max y = \dfrac{5}{4}$. Vậy $S = 25$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Biết rằng tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\sqrt{3}} x\left(1 + \dfrac{1}{3}\log_{\sqrt[3]{3}} 3x\right) \le 6$ là $[a;b]$. Tính $T = 81a^2 + b^2$.

A $T = \dfrac{82}{9}$. (B) $T = \dfrac{84}{3}$. (C) $T = \dfrac{80}{9}$. (D) $T = \dfrac{80}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t = \log_3 x$, ta có bất phương trình $t^2 + 2t - 3 \le 0$, suy ra $-3 \le t \le 1$ hay $\dfrac{1}{27} \le x \le 3$. Do đó $[a;b] = \left[\dfrac{1}{27};3\right]$, dẫn đến $T = 81a^2 + b^2 = \dfrac{82}{9}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\log_4 a = \log_9 b = \log_6(a-b)$. Tính $M = \dfrac{a}{a+b}$.

A $M = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$. (B) $M = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. (C) $M = \dfrac{2+\sqrt{3}}{5}$. (D) $M = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Ta có $\log_4 a = \log_9 b = \log_6(a-b) = t \Rightarrow a = 4^t; b = 9^t; a-b = 6^t$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ 4^t - 9^t = 6^t\\
&\Leftrightarrow\ \left(\frac{2}{3}\right)^{2t} - \left(\frac{2}{3}\right)^{t} - 1 = 0\\
&\Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^{t} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \quad \text{(loại)}\\ \left(\frac{2}{3}\right)^{t} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\\
&\Rightarrow\ M = \frac{5+\sqrt{5}}{10}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

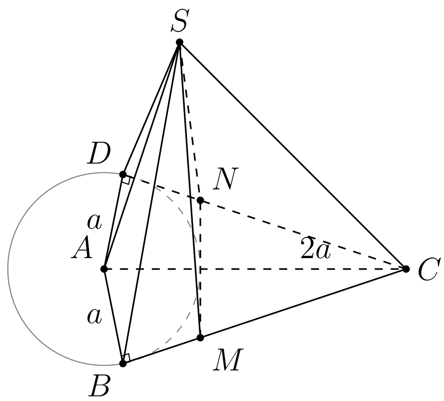
Câu 33. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, khoảng cách từ S đến mặt phẳng đáy $(ABCD)$ bằng $3a$, $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$, $AB = AD = a$, $AC = 2a$. Trên mặt phẳng đáy, đường thẳng tiếp xúc với đường tròn tâm A bán kính bằng a cắt các cạnh BC, CD lần lượt tại M và N. Thể tích khối chóp $S.MNC$ lớn nhất bằng

A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (D) $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có S_{ABCD} không đổi và

$$\begin{aligned}
S_{MNC} &= S_{ABCD} - S_{ABMND}\\
&= S_{ABCD} - 2S_{AMN}\\
&= S_{ABCD} - a \cdot MN.
\end{aligned}$$



Thể tích $S.MNC$ lớn nhất khi và chỉ khi diện tích tam giác MNC lớn nhất và S_{MNC} lớn nhất khi và chỉ khi MN ngắn nhất. Khi đó MN vuông góc với AC.

Hơn nữa $\sin\widehat{ACD} = \dfrac{1}{2}$. Suy ra tam giác MNC là tam giác đều với $MN = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. Do đó $S_{MNC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$ và $V_{S.MNC} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = \dfrac{x-m}{(m-1)x-2}$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

(A) $m \in (-1; 2)$. (B) $m \in (-1; 3]$. **C** $m \in [1; 2)$. (D) $m \in (1; 2]$.

Lời giải.

Với $m=1$ thì $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x$ là hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

Với $m\neq 1$. Ta có $y'=\frac{m^2-m-2}{[(m-1)x-2]^2}$. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2-m-2}{[(m-1)x-2]^2}<0, \forall x\in(-\infty;1) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m-2<0 \\ \dfrac{2}{m-1}\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1<m<2.$$

Vậy $m\in[1;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 (m/s) thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A 25 m. **B** $\frac{44}{5}$ m. **C** $\frac{25}{2}$ m. **D** $\frac{45}{4}$ m.

Lời giải.

Khi $v=0$ thì $t=5$, khi đó quãng đường ô tô đi được đến khi dừng hẳn là

$$S=\int_0^5 (10-2t)\,\mathrm{d}t=25 \quad \text{(m)}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 36. Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $x=y^2$ và đường thẳng $x=a$ với $a>0$. Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của vật thể trong xoay được sinh ra khi quay hình (H) quanh trục hoành và trục tung. Kí hiệu ΔV là giá trị lớn nhất của $V_1-\frac{V_2}{8}$ đạt được khi $a=a_0>0$. Hệ thức nào sau đây đúng?

A $5\Delta V=2\pi a_0$. **B** $5\Delta V=4\pi a_0$. **C** $4\Delta V=5\pi a_0$. **D** $2\Delta V=5\pi a_0$.

Lời giải.

Ta có $V_1=\pi\int_0^a x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi a^2}{2}$; $V_2=2\pi\int_0^{\sqrt{a}}(a^2-y^4)\,\mathrm{d}y=\frac{8\pi a^2\sqrt{a}}{5}$; $V_1-\frac{V_2}{8}=\frac{\pi}{10}a^2(5-2\sqrt{a})$.

Do đó $\Delta V\leq\frac{\pi}{20}\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt{a}+10-4\sqrt{a}}{5}\right)^5=\frac{32\pi}{20}=\frac{8\pi}{5}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=a_0=4\Rightarrow 5\Delta V=2\pi a_0$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Tính diện tích của S của hình phẳng giới hạn bởi elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, với $a,b>0$.

A $S=\pi\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)^2$. **B** $S=\pi(a+b)^2$. **C** $S=\pi ab$. **D** $S=\frac{\pi a^2b^2}{a+b}$.

Lời giải.

$$S=\frac{4b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\pi ab.$$

Chọn đáp án C □

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Phương trình đường thẳng d' đi qua A, vuông góc và cắt d là

A $d'\colon \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{3}$.
B $d'\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$.
C $d'\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.
D $d'\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

Lời giải.

Gọi $B=d\cap d'$, suy ra $B(t+1;t;2t-1)$ và $\overrightarrow{AB}=(t;t;2t-3)$. Do $\overrightarrow{AB}\perp\vec{u}_d \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}_d=0$ nên $t=1$. Do đó $\overrightarrow{AB}=(1;1;-1)$. Vậy phương trình $d'\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;2;0), B(-1;1;1), C(2;0;2)$, $D(3;1;0)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn đỉnh đã cho?

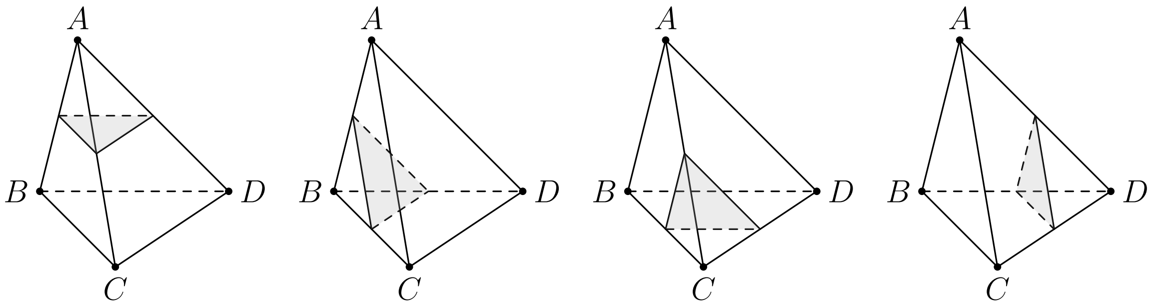
A 7. **B** 5. **C** Vô số. **D** 1.

Lời giải.

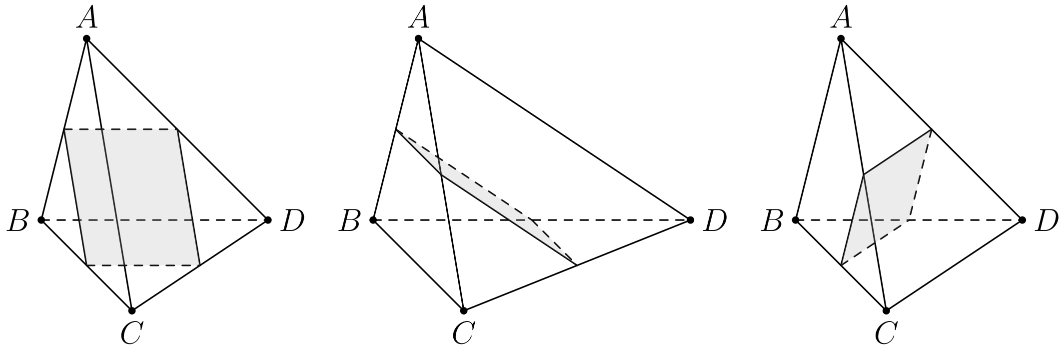
Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-1;1), \overrightarrow{AC}=(1;-2;2), \overrightarrow{AD}=(2;-1;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=-8\neq 0$ $\Rightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng.

Có 2 loại mặt phẳng thỏa mãn đề bài đó là

- **Loại 1.** Mặt phẳng đi qua trung điểm của 3 cạnh bên có chung đỉnh nên có 4 mặt phẳng loại này, vì có 4 đỉnh.



- **Loại 2.** Mặt phẳng qua trung điểm của 4 cạnh nên có 3 mặt phẳng loại này.

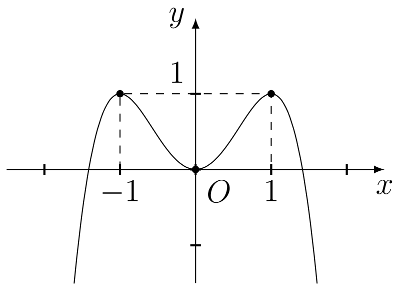


Do đó sẽ có 7 mặt phẳng cách đều 4 đỉnh đã cho.

Chọn đáp án A □

Câu 40.

Cho đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Hỏi có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn nghiệm của phương trình $f(f(\cos 2x)) = 0$?

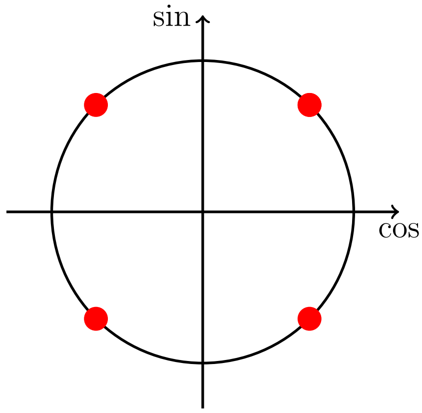


(A) 3 điểm. **B** 4 điểm. (C) 2 điểm. (D) 1 điểm.

Lời giải.

Từ đồ thị ta có $f(x) \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và suy ra được $f(\cos 2x) = \pm a \quad (a > 1)$ hoặc $f(\cos 2x) = 0$.

- Nếu $f(\cos 2x) = a > 1$, phương trình vô nghiệm.
- Nếu $f(\cos 2x) = -a < -1$ thì $|\cos 2x| > 1$, phương trình vô nghiệm.
- Nếu $f(\cos 2x) = 0 \Rightarrow \cos 2x = \pm a$ (vô nghiệm) và $\cos 2x = 0$. Do đó, tập nghiệm có 4 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.



Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Gọi M là tập tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số $y = x^4 + 2(m^2 - 16)x^2 + m^2$ có ba cực trị. Lấy ngẫu nhiên một giá trị m thuộc tập M. Tính xác suất P với m lấy được để hàm số có 3 cực trị lập thành một tam giác có diện tích lớn hơn hoặc bằng 3.

(A) $\mathrm{P} = \dfrac{3}{7}$. (B) $\mathrm{P} = \dfrac{5}{7}$. (C) $\mathrm{P} = \dfrac{5}{9}$. **D** $\mathrm{P} = 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 4(m^2 - 16)x^2 = 4x[x^2 + (m^2 - 16)]$. Để phương trình có 3 cực trị thì

$$m^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow m \in \{\pm 3; \pm 2; \pm 1; 0\} \Rightarrow n(\Omega) = 7.$$

Ta có

$$S^2 = -\frac{(m^2 - 16)^3}{1^3} \ge 3 \Leftrightarrow m^2 \le 16 - \sqrt[3]{9} \Leftrightarrow m \in \{\pm 3; \pm 2; \pm 1; 0\}.$$

Vậy $\mathrm{P} = 1$.

Chọn đáp án (D) □

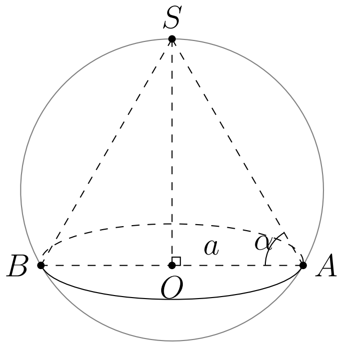
Câu 42. Cho hình nón có bán kính đường tròn đáy bằng a. Thiết diện qua trục hình nón là một tam giác cân có góc ở đáy bằng α. Tính thể tích V khối cầu ngoại tiếp hình nón.

A $V = \dfrac{4\pi a^3}{3\sin^3(2\alpha)}$. (B) $V = \dfrac{\pi a^3}{3\sin^3(2\alpha)}$.

(C) $V = \dfrac{4\pi a^3}{3\sin^2(2\alpha)\cos(2\alpha)}$. (D) $V = \dfrac{\pi a^3}{3\sin(2\alpha)\cos^2(2\alpha)}$.

Lời giải.

Gọi S là đỉnh của hình nón, thiết diện qua trục là tam giác cân SAB và $AB = 2a$, $\widehat{S} = 2\alpha$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón bằng $R = \dfrac{AB}{2\sin S} = \dfrac{a}{\sin(2\alpha)}$. Suy ra $V = \dfrac{4\pi R^3}{3} = \dfrac{4\pi a^3}{3\sin^3(2\alpha)}$.



Chọn đáp án A □

Câu 43. Cho n là số nguyên dương và n tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \ldots, A_nB_nC_n$, trong đó các điểm lần $A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}$ lượt nằm trên các cạnh $B_iC_i, A_iC_i, A_iB_i (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ sao cho $A_{i+1}C_i = 3A_{i+1}B_i, B_{i+1}A_i = 3B_{i+1}C_i, C_{i+1}B_i = 3C_{i+1}A_i$. Gọi S là tổng tất cả các diện tích của tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \ldots, A_nB_nC_n$ biết rằng tam giác $A_1B_1C_1$ có diện tích bằng $\dfrac{9}{16}$. Tìm số nguyên dương sao cho $S = \dfrac{16^{29} - 7^{29}}{16^{29}}$.

A $n = 28$. **B** $n = 2018$. **C** $n = 29$. **D** $n = 30$.

Lời giải.

Gọi $S_i (i = 1, 2, 3, ..., n)$ là diện tích của $\Delta A_iB_iC_i$. Ta có $\dfrac{S_{A_1B_2C_2}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{A_1B_2}{A_1C_1} \cdot \dfrac{A_1C_2}{A_1B_1} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{16}$.

Tương tự, ta có $\dfrac{S_{A_2B_1C_2}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{S_{A_2B_2C_1}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{3}{16}$. Do đó $\dfrac{S_{A_2B_2C_2}}{S_{A_1B_1C_1}} = 1 - 3 \cdot \dfrac{3}{16} = \dfrac{7}{16} \Rightarrow S_2 = \dfrac{7}{16}S_1$.

Tương tự, ta có $S_{i+1} = \dfrac{7}{16}S_i, i = 1, 2, \ldots, n$. Khi đó

$$S = S_1\left[1 + \frac{7}{16} + \cdots + \left(\frac{7}{16}\right)^{n-1}\right] = \frac{9}{16} \cdot \frac{1 - \left(\dfrac{7}{16}\right)^n}{1 - \dfrac{7}{16}} = 1 - \left(\frac{7}{16}\right)^n.$$

Theo giả thiết ta có $1 - \left(\dfrac{7}{16}\right)^n = 1 - \left(\dfrac{7}{16}\right)^{29} \Leftrightarrow n = 29$.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho 16 phiếu ghi các số thứ tự từ 1 đến 16. Lấy lần lượt 8 phiếu không hoàn lại, gọi a_i là số ghi trên phiếu thứ i lấy được $(1 \leq i \leq 8)$. Tính xác suất P để 8 phiếu lấy được thỏa mãn $a_1 < a_2 < \cdots < a_8$ và không có bất kỳ hai phiếu nào có tổng các số bằng 17.

A $\mathrm{P} = \dfrac{3^8}{\mathrm{A}_{16}^8}$. **B** $\mathrm{P} = \dfrac{2^8}{\mathrm{A}_{16}^8}$. **C** $\mathrm{P} = \dfrac{2^8}{\mathrm{C}_{16}^8}$. **D** $\mathrm{P} = \dfrac{3^8}{\mathrm{C}_{16}^8}$.

Lời giải.

Ta có $|\Omega| = \mathrm{A}_{16}^8$. Do 8 phiếu lấy được thỏa mãn điều kiện $a_1 < a_2 < \cdots < a_8$, nên ta có thể xem 8 phiếu lấy được như là một tập con của tập có 16 phần tử.

Gọi $S = \{1, 2, 3, \ldots, 16\}$ và $E \subset S$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Từ 1 đến 16 có 8 cặp số có tổng bằng 17 chia thành hai tập tương ứng là $M = \{1, 2, \ldots, 8\}$ và $N = \{16, 15, \ldots, 9\}$. Nếu E có k phần tử thuộc M thì có C_8^k cách chọn và khi đó E sẽ có tối đa $8 - k$ phần tử thuộc N nên có 2^{8-k} cách chọn, với $k \in \{0, 1, ..., 8\}$.

Vậy số tập hợp E thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\mathrm{C}_8^0 \cdot 2^8 + \mathrm{C}_8^1 \cdot 2^7 + \cdots + \mathrm{C}_8^8 \cdot 2^0 = 3 \Rightarrow \mathrm{P} = \dfrac{3^8}{\mathrm{A}_{16}^8}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Cho hai hàm số

$$f(x)=\ln\left(x-1009+\sqrt{(x-1009)^2+2018\mathrm{e}}\right);h(x)=\ln\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}+\mathrm{e}}\right).$$

Giả sử $S=f(1)+f(2)+\cdots+f(2017)$ và $T=h\left(\frac{1}{2018}\right)+h\left(\frac{2}{2018}\right)+h\left(\frac{3}{2018}\right)+\cdots+h\left(\frac{2017}{2018}\right)$. Khi đó $\frac{S}{T}$ bằng

(A) $\ln 2018$. **(B)** $1+\ln 2018$. (C) $1+\ln 2017$. (D) 2018.

Lời giải.

Ta có nhận xét $f(x)+f(2018-x)=1+\ln 2018$, suy ra

$$S=1008(1+\ln 2018)+f(1009)=\frac{2017}{2}(1+\ln 2018).$$

Mặt khác $h(x)+h(1-x)=1$, suy ra $T=1008+h\left(\frac{1009}{2018}\right)=\frac{2017}{2}$. Do đó $\frac{S}{T}=1+\ln 2018$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q)\colon x+2y-z-5=0$ và đường thẳng $d\colon \frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{1}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (Q) một góc nhỏ nhất là

(A) $(P)\colon x-2y-1=0$. **(B)** $(P)\colon y-z+4=0$.
(C) $(P)\colon x-z+4=0$. (D) $(P)\colon x-2z+7=0$.

Lời giải.

Vì (P) chứa d nên phương trình của (P) có dạng $(P)\colon a(x+1)+b(y+1)+c(z-3)=0$ với $a^2+b^2+c^2>0$ và $2a+b+c=0$. Gọi α là góc giữa (P) và (Q), ta có

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P|\cdot|\vec{n}_Q|}=\frac{|a+2b-c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{6}}=\frac{|3(a+b)|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{5a^2+4ab+2b^2}}.$$

- Nếu $a=0$ thì $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, suy ra $\alpha=30^\circ$.
- Nếu $a\neq 0$ thì $\cos\alpha=\frac{|3(1+t)|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{5+4t+2t^2}}$ với $t=\frac{b}{a}$. Khi đó $0\le\cos\alpha<\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ta có α nhỏ nhất khi và chỉ khi $\cos\alpha$ lớn nhất. Do đó $\alpha=30^\circ$ và $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Khi đó $a=0$, chọn $b=1,c=-1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Giả sử f là hàm số liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ với $f\left(0;\frac{\pi}{4}\right)=1$, thỏa mãn hai điều kiện $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^2f(x)}{(x\sin x+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{4-\pi}{4+\pi}$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{xf'(x)}{\cos x(x\sin x+\cos x)}\,\mathrm{d}x=0$. Tính $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

(A) $I=1$. (B) $I=\frac{\pi}{4-\pi}$. (C) $I=\frac{4}{4+\pi}$. (D) $I=\frac{\pi}{4+\pi}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{4-\pi}{4+\pi} &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2 f(x)}{(x\sin x+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xf(x)}{\cos x}\cdot\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xf(x)}{\cos x}\,\mathrm{d}\left(\frac{-1}{x\sin x+\cos x}\right)\\ &= -\frac{xf(x)}{\cos x}\cdot\frac{1}{x\sin x+\cos x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xf'(x)}{\cos x(x\sin x+\cos x)}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{-2\pi}{4+\pi}+I\\ &\Rightarrow\ I=\frac{4-\pi}{4+\pi}+\frac{2\pi}{4+\pi}=1.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Gọi z_1, z_2, z_3 và z_4 là các nghiệm của phương trình $\left(\frac{z-1}{2z-i}\right)^4=\frac{2018}{2019}$. Tính giá trị của biểu thức $P=(z_1^2+1)(z_2^2+1)(z_3^2+1)(z_4^2+1)$.

A $\frac{(81\cdot 2018-2019\cdot 16)(2018-2019\cdot 16)}{(2018\cdot 16-2019)^2}$.

(B) $\frac{(81\cdot 2018+2019\cdot 16)(2018-2019\cdot 16)}{(2018\cdot 16-2019)^2}$.

(C) $\frac{(81\cdot 2018-2019\cdot 16)(2018+2019\cdot 16)}{(2018\cdot 16-2019)^2}$.

(D) $\frac{(81\cdot 2019-2018\cdot 16)(2019-2018\cdot 16)}{(2018\cdot 16-2019)^2}$.

Lời giải.

Đặt $f(z)=2018(2z-i)^4-2019(z-1)^4=(2018\cdot 16-2019)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$.

Ta lại có $z_k^2+1=(z_k+i)(z_k-i)$, với $k=1,2,3,4$. Do đó

$$P=\frac{f(i)\cdot f(-i)}{(2018\cdot 16-2019)^2}=\frac{(81\cdot 2018-2019\cdot 16)(2018-2019\cdot 16)}{(2018\cdot 16-2019)^2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1-1)$, $B(-1;2;0)$, $C(3;-1;-2)$. Giả sử $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=861$ sao cho $P=2MA^2-7MB^2+4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị $|a|+|b|+|c|$ bằng

(A) 49. **B** 51. (C) 55. (D) 47.

Lời giải.

Gọi K là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{KA}-7\overrightarrow{KB}+4\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{0}$, suy ra $K(-21;16;10)$. Khi đó

$$P=2MA^2-7MB^2+4MC^2=-MK^2+2KA^2-7KB^2+4KC^2.$$

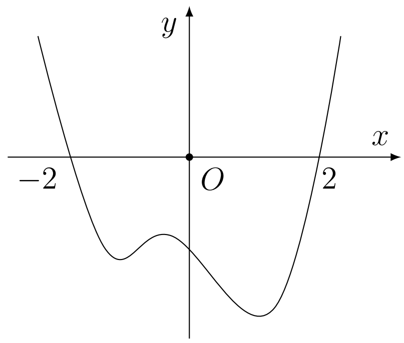
Suy ra $P_{\min}$ khi và chỉ khi $MK_{\max}$. Do $M\in(S)$ có tâm $I(1;0;-1)$, nên M là một trong hai giao điểm của đường thẳng KI với mặt cầu. Phương trình đường thẳng $KI\colon \frac{x-1}{22}=\frac{y}{-16}=\frac{z+1}{-11}$.

Đường thẳng KI cắt (S) tại hai điểm $K_1(23;-16;-12)$ và $K_2(-21;16;10)$. Vì $KK_1>KK_2$ nên $MK_{\max}\Leftrightarrow K\equiv K_1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 50.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có $f(-2) < 0$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?



Ⓐ Hàm số $y = |f(1 - x^{2018})|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Ⓑ Hàm số $y = |f(1 - x^{2018})|$ có hai cực tiểu.

C Hàm số $y = |f(1 - x^{2018})|$ có hai cực đại và một cực tiểu.

Ⓓ Hàm số $y = |f(1 - x^{2018})|$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Từ đồ thị của $f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2	1	2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-2)$	↘	$f(2)$	↗	$+\infty$

Từ giả thiết $f(-2) < 0$ và $1 - x^{2018} \leq 1 \Rightarrow f(1 - x^{2018}) < 0$ với mọi x. Đặt $t = 1 - x^{2018}$, ta có

$$\begin{cases} f'(t) < 0 \quad \text{khi} \quad t \in (-2; 1) \Leftrightarrow x \in (-\sqrt[2018]{3}; \sqrt[2018]{3}) \\ f'(t) > 0 \quad \text{khi} \quad t \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt[2018]{3}) \cup (\sqrt[2018]{3}; +\infty). \end{cases}$$

Đặt $g(x) = |f(1 - x^{2018})|$, ta có $g'(x) = -\dfrac{2018 \cdot x^{2017} \cdot f'(t) \cdot f(t)}{2\sqrt{f^2(t)}}$. Do đó, ta có bảng biến thiên của $y = g(x)$ như sau

x	$-\infty$		$-\sqrt[2018]{3}$		0		$\sqrt[2018]{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$

Vậy hàm số $y = |f(1 - x^{2018})|$ có hai cực đại và một cực tiểu.

Chọn đáp án C □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. D	3. A	4. C	5. D	6. B	7. C	8. A	9. B	10. A
11. D	12. D	13. C	14. D	15. C	16. D	17. B	18. D	19. C	20. B
21. D	22. A	23. C	24. B	25. C	26. D	27. D	28. A	29. C	30. B
31. A	32. A	33. A	34. C	35. A	36. A	37. C	38. D	39. A	40. B
41. D	42. A	43. C	44. A	45. B	46. B	47. A	48. A	49. B	50. C

76 ĐỀ THI DIỄN TẬP THPT QG, 2017 - 2018 SỞ GIÁO DỤC, ĐỒNG THÁP

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ là

(A) $y = 2$. (B) $x = 2$. (C) $y = 1$. (D) $x = 1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+1}{x-2} = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x+1}{x-2} = -\infty$. Suy ra $x = 2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Số điểm cực trị của hàm số $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 3$ là

(A) 0. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = -4x^3 + 4x$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Cách khác: Vì $a \cdot b < 0$ nên hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

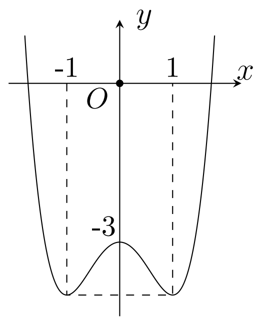
Chọn đáp án (C) □

Câu 3.

Đường cong trong hình sau là đồ thị của hàm số nào?

(A) $y = -x^4 + 2x^2 + 3$. (B) $y = x^4 + 2x^2 - 3$.

(C) $y = x^4 - 2x^2 - 3$. (D) $y = -x^4 - 2x^2 + 3$.



Lời giải.

Đồ thị đi qua điểm $(0; -3)$ nên loại các hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ và $y = -x^4 - 2x^2 + 3$.

Hàm số có 3 điểm cực trị nên $a \cdot b < 0$ hay a, b trái dấu nên hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ thỏa đề bài.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{2x-1}$ là

A 3. **B** 0. **C** 2. **D** 1.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \dfrac{1}{2}$ nên đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\dfrac{1}{2}$ nên đường thẳng $y = -\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} y = -\infty$ nên đường thẳng $x = \dfrac{1}{2}$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 - 5$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M thuộc (C) và có hoành độ bằng 3 là

A $y = 18x + 49$. **B** $y = -18x - 49$. **C** $y = -18x + 49$. **D** $y = 18x - 49$.

Lời giải.

$y' = -6x^2 + 12x$.

Ta có $y'(3) = -18$ và $y(3) = -5$ nên phương trình tiếp tuyến là $y = -18x + 49$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2+2x+3}{x^2+1}$.

A 4. **B** 2. **C** 3. **D** 5.

Lời giải.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2+2x+3}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{5}{1} = 5.$$

Chọn đáp án D □

Câu 7. Tính tổng $S = 1 + i^3 + i^6 + \cdots + i^{2016}$.

A $S = 1$. **B** $S = -1$. **C** $S = i$. **D** $S = -i$.

Lời giải.

Ta có $1, i^3, i^6, \ldots, i^{2016}$ là một cấp số nhân có 673 số hạng với $u_1 = 1$ và $q = i^3$ nên

$$S = \frac{1-(i^3)^{673}}{1-i^3} = \frac{1 - i^3\cdot(-i)^{672}}{1+i} = \frac{1-i^3}{1+i} = 1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 8. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2+2x}$ là

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [0;2]$. Ta có $y' = \dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Tìm được $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y(2) = 0$. Suy ra $\max\limits_{x\in\mathscr{D}} y = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x+2}$, trục hoành và đường thẳng $x = 2$ là

(A) $3 - \ln 2$. (B) $3 - 2\ln 2$. (C) $3 + 2\ln 2$. (D) $3 + \ln 2$.

Lời giải.

Cho $\dfrac{x+1}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int\limits_{-1}^{2} \left|\frac{x+1}{x+2}\right| \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2} \left(1 - \frac{1}{x+2}\right) \mathrm{d}x = (x - \ln|x+2|)\Big|_{-1}^{2} = 3 - 2\ln 2.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $\int\limits_0^1 x\left(f'(x) - 2\right) \mathrm{d}x = f(1)$. Giá trị của $I = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 1. (B) 2. (C) -1. (D) -2.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \left(f'(x) - 2\right)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = f(x) - 2x \end{cases}$. Ta có

$$f(1) = x\left(f(x) - 2x\right)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \left(f(x) - 2x\right)\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow f(1) = f(1) - 2 - \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -2.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Phương trình $9^x - 3\cdot 3^x + 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$. Giá trị của biểu thức $A = 2x_1 + 3x_2$ bằng

(A) 2. (B) 0. (C) $4\log_2^3$. (D) $3\log_3 2$.

Lời giải.

$9^x - 3\cdot 3^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 1 \\ 3^x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_3 2. \end{array}\right.$

Vì $x_1 < x_2$ nên $x_1 = 0$ và $x_2 = \log_3 2$, suy ra $A = 3\log_3 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;1)$, $B(-2;1;1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là

(A) $-x+y+2=0$. (B) $x-y+1=0$. (C) $x-y-2=0$. (D) $x-y+2=0$.

Lời giải.

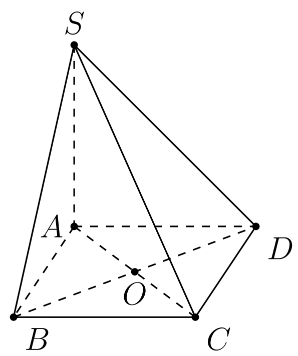
Gọi I là trung điểm AB. Ta có mặt phẳng trung trực của AB đi qua điểm $I\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2};1\right)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB}=(-1;1;0)$ nên có phương trình $x-y+2=0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông, SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$, $AC=a\sqrt{2}$. Khi đó thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

(A) $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (B) $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. (C) $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. (D) $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



$$\begin{aligned} & AB^2+BC^2=AC^2 \\ \Leftrightarrow\ & AB^2+AB^2=\left(a\sqrt{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow\ & AB^2=a^2. \end{aligned}$$

$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}\cdot AB^2\cdot SA=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot a\sqrt{3}=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Số nghiệm của phương trình $\log_2 x\cdot\log_3(2x-1)=2\log_2 x$ là

(A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

Điều kiện: $x>\frac{1}{2}$. Ta có

$$\log_2 x\cdot\log_3(2x-1)=2\log_2 x\Leftrightarrow\log_2 x\left[\log_3(2x-1)-2\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=0\\ \log_3(2x-1)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=5.\end{array}\right.$$

Hai giá trị $x=1$, $x=5$ đều thỏa mãn điều kiện. Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$. Tính thể tích khối lăng trụ.

(A) $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. (B) $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. (C) $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$. (D) $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC. Kẻ $AH \perp A'M$ $(H \in A'M)$.

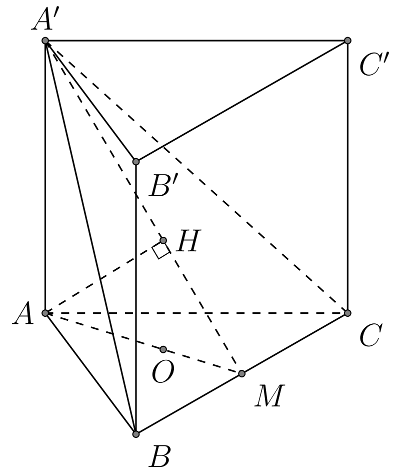
Ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'AM) \Rightarrow BC \perp AH.$

Mà $AH \perp A'M$ nên $AH \perp (A'BC)$.

Suy ra $AH = \mathrm{d}\left(A, (A'BC)\right) = 3\mathrm{d}\left(O, (A'BC)\right) = \dfrac{a}{2}$.

Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{A'A^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Rightarrow AA' = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'A = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{4} = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

(A) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

(B) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 6\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

(C) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

(D) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

Lời giải.

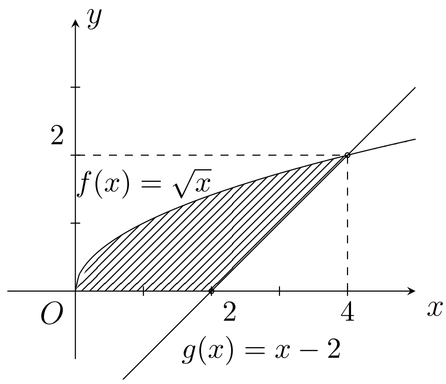
$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17.

Tính diện tích S của hình phẳng (phần gạch sọc) trong hình sau.

(A) $S = \dfrac{8}{3}$. (B) $S = \dfrac{11}{3}$. (C) $S = \dfrac{10}{3}$. (D) $S = \dfrac{7}{3}$.



Lời giải.

Dựa vào hình vẽ, ta có

$$S = \int_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int_2^4 \left(\sqrt{x} - x + 2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 + \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_2^4 = \frac{10}{3}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Nguyên hàm $\displaystyle\int \frac{1 + \ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ $(x > 0)$ bằng

(A) $x + \ln^2 x + C$. (B) $\ln^2 x + \ln x + C$. (C) $\dfrac{1}{2}\ln^2 x + \ln x + C$. (D) $x + \dfrac{1}{2}\ln^2 x + C$.

Lời giải.

Đặt $u = 1 + \ln x \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. Do đó

$$\int \frac{1+\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}u = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(1+\ln x)^2}{2} + C = \frac{1}{2}\ln^2 x + \ln x + C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 19. Mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z-2=0$ có tâm I và bán kính R lần lượt là

A $I(-1;2;-3),\ R=16$. **B** $I(-1;2;-3),\ R=4$.
C $I(-1;2;-3),\ R=\sqrt{12}$. **D** $I(1;-2;3),\ R=4$.

Lời giải.

Ta có $x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z-2=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16$.
Vậy mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;-3)$ và bán kính $R=4$.
Chọn đáp án B □

Câu 20. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $y=-x^3-x-2$. **B** $y=\dfrac{x-1}{x+3}$.
C $y=x^4+2x^2+3$. **D** $y=x^3+x^2+2x+1$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=x^3+x^2+2x+1$. Ta có $y'=3x^2+2x+2=3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{5}{3}>0, \forall x\in\mathbb{R}$.
Nên hàm số $y=x^3+x^2+2x+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Chọn đáp án D □

Câu 21. Cho hai số phức $z_1=1+2i$ và $z_2=2-3i$. Phần ảo của số phức $w=3z_1-2z_2$ là

A 12. **B** 1. **C** 11. **D** $12i$.

Lời giải.

$w=3z_1-2z_2=-1+12i$. Vậy w có phần ảo là 12.
Chọn đáp án A □

Câu 22. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d\colon y=x+m-1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=2\sqrt{3}$.

A $m=4\pm\sqrt{3}$. **B** $m=2\pm\sqrt{3}$. **C** $m=4\pm\sqrt{10}$. **D** $m=2\pm\sqrt{10}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d

$$\begin{aligned} &\frac{2x+1}{x+1} = x+m-1 \\ \Leftrightarrow\ & x^2+(m-2)x+m-2=0,\ (x\neq -1) \qquad (1) \end{aligned}$$

Để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác -1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ (-1)^2+(m-2)\cdot(-1)+m-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2-8m+12>0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &m>6 \\ &m<2. \end{aligned}\right. \qquad (*)$$

Khi đó d cắt (C) tại $A(x_1; x_1 + m - 1)$, $B(x_2; x_2 + m - 1)$. Ta có

$$\begin{aligned} & AB = 2\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow\ & (x_2 - x_1)^2 = 6 \Leftrightarrow (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2 = 6 \\ \Leftrightarrow\ & (m-2)^2 - 4(m-2) - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & m = 4 \pm \sqrt{10} \quad \text{(thỏa mãn điều kiện (*))}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1; 3; 2)$, $B(2; 0; 5)$, $C(0; -2; 1)$. Phương trình đường trung tuyến AM của tam giác ABC là

A. $\dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-2}{-4}$.
B. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-4} = \dfrac{z+2}{1}$.
C. $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+4}{3} = \dfrac{z-1}{2}$.
D. $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z-2}{1}$.

Lời giải.

Ta có $M(1; -1; 3)$ và $\overrightarrow{AM} = (2; -4; 1)$. Phương trình đường thẳng AM là

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-2}{1}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 24. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $2x + 1 + (1 - 2y)i = 2(2 - i) + yi - x$. Khi đó giá trị của $x^2 - 3xy - y$ bằng

A. -3.
B. 1.
C. -2.
D. -1.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & 2x + 1 + (1 - 2y)i = 2(2 - i) + yi - x \\ \Leftrightarrow\ & 2x + 1 + (1 - 2y)i = 4 - x + (y - 2)i \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} 2x + 1 = 4 - x \\ 1 - 2y = y - 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $x^2 - 3xy - y = -3$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+2}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta : 3x - y + 2 = 0$.

A. $y = 3x - 8$.
B. $y = 3x + 14$.
C. $y = 3x + 5$, $y = 3x - 8$.
D. $y = 3x + 14$, $y = 3x + 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{3}{(x+2)^2}$ và $d\colon y = 3x + 2$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ thuộc (C) là tiếp điểm. Vì tiếp tuyến của (C) tại M song song với d nên

$$\frac{3}{(x_0+2)^2} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = -3. \end{array}\right.$$

Với $x_0 = -1$ thì $y_0 = -1$ và phương trình tiếp tuyến là $y = 3x + 2$.
Với $x_0 = -3$ thì $y_0 = 5$ và phương trình tiếp tuyến là $y = 3x + 14$.
Chọn đáp án D □

Câu 26. Cho M là tập hợp các số phức z thỏa $|2z - i| = |2 + iz|$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc tập hợp M sao cho $|z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1 + z_2|$.

A $P = \sqrt{2}$. B $P = \sqrt{3}$. C $P = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. D $P = 2$.

Lời giải.
Gọi $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

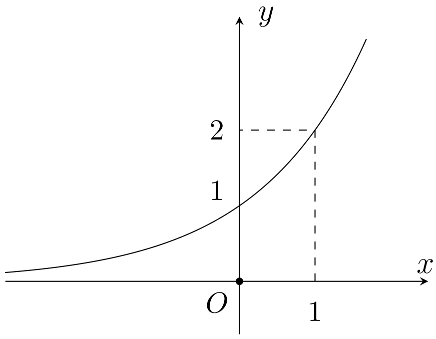
$$\begin{aligned} & |2z - i| = |2 + iz| \\ \Leftrightarrow\ & |2x + (2y - 1)i| = |2 - y + xi| \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + y^2 = 1. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn (C) có tâm O và bán kính $R = 1$.
Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2. Ta có A, B thuộc (C) và $|z_1 - z_2| = 1 \Leftrightarrow AB = 1$. Suy ra $\triangle OAB$ đều nên $P = |z_1 + z_2| = \left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right| = 2\left|\overrightarrow{OH}\right| = \sqrt{3}$.
Chọn đáp án B □

Câu 27.
Đường cong trong hình sau là đồ thị hàm số nào?

A $y = 2^x$. B $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$.

C $y = \log_2(2x)$. D $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.



Lời giải.
Đồ thị đi qua điểm có tọa độ $(1; 2)$ nên chỉ có hàm số $y = 2^x$ thỏa mãn.
Chọn đáp án A □

Câu 28. Diện tích hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng $y = 8x$, $y = x$ và đồ thị hàm số $y = x^3$ là phân số tối giản. Khi đó $a + b$ bằng

A 66. B 33. C 67. D 62.

Lời giải.

- Ta có $8x = x \Leftrightarrow x = 0$.
- $8x = x^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2\sqrt{2}. \end{array}\right.$
- $x^3 = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^1 |8x - x|\,\mathrm{d}x + \int_1^{2\sqrt{2}} \left|8x - x^3\right|\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}&= \int\limits_0^1 (8x - x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^{2\sqrt{2}} \left(8x - x^3\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \left.\frac{7}{2}x^2\right|_0^1 + \left.\left(4x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\right|_1^{2\sqrt{2}}\\ &= \frac{63}{4}.\end{aligned}$$

Suy ra $a = 63$ và $b = 4$ nên $a + b = 67$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; -2; 0)$, $B(3; 3; 2)$, $C(-1; 2; 2)$, $D(3; 3; 1)$. Độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ đỉnh D xuống mặt phẳng (ABC) bằng

A. $\dfrac{9}{7\sqrt{2}}$. B. $\dfrac{9}{7}$. C. $\dfrac{9}{\sqrt{2}}$. D. $\dfrac{9}{14}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 5; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; 4; 2)$. Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm A có véc-tơ pháp tuyến là $\dfrac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (1; -4; 9)$ nên có phương trình $x - 4y + 9z - 9 = 0$.

Do đó

$$\mathrm{d}\,(D, (ABC)) = \frac{|3 - 4 \cdot 3 + 9 \cdot 1 - 9|}{\sqrt{1^2 + 4^2 + 9^2}} = \frac{9}{7\sqrt{2}}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Cho $\vec{a} = (-1; 2; 3)$, $\vec{b} = (2; 1; 0)$ với $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ thì tọa độ của $\vec{c}$ là

A. $(-4; 3; 3)$. B. $(-4; 3; 6)$. C. $(-4; 1; 3)$. D. $(-1; 3; 5)$.

Lời giải.

Ta có $2\vec{a} = (-2; 4; 6)$ do đó $2\vec{a} - \vec{b} = (-4; 3; 6)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \dfrac{1}{x}$ là

A. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + \ln x + C$. B. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + \ln|x| + C$.

C. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3}{2}x^2 + \ln x + C$. D. $F(x) = 2x - 3 - \dfrac{1}{x} + C$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \displaystyle\int \left(x^2 - 3x + \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + \ln|x| + C$.

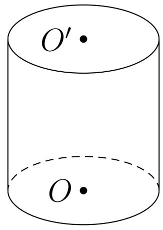
Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Khi đó diện tích toàn phần của hình trụ bằng

A. $\pi a^2\sqrt{3}$. B. $2\pi a^2(\sqrt{3} - 1)$. C. $\pi a^2(1 + \sqrt{3})$. D. $2\pi a^2(1 + \sqrt{3})$.

Lời giải.

Ta có $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot a \cdot a\sqrt{3} + 2 \cdot \pi a^2 = 2\pi a^2(1+\sqrt{3})$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Cho $\vec{a} = (-2; 1; 3)$, $\vec{b} = (1; 2; m)$. Véc-tơ $\vec{a}$ vuông góc với véc-tơ $\vec{b}$ khi

(A) $m = 1$. (B) $m = -1$. (C) $m = 2$. **(D)** $m = 0$.

Lời giải.

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow -2 + 2 + 3m = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Chọn đáp án (D) □

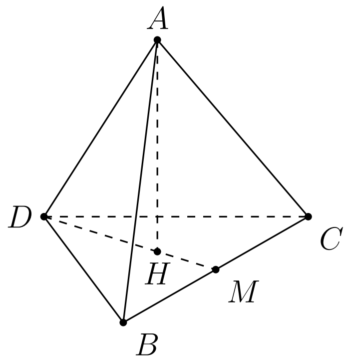
Câu 34. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng $a > 0$. Khi đó khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng (BCD) bằng

(A) $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **(B)** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{8}}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A trên mặt phẳng (DBC). Khi đó $\mathrm{d}\left(A, (DBC)\right) = AH$. Vì $AD = AB = AC$ nên $HD = HB = HC$ hay H là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có $DH = \dfrac{2}{3}DM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất, xác suất để mặt có số chấm chẵn xuất hiện là

(A) $\dfrac{2}{3}$. (B) $\dfrac{1}{3}$. **(C)** $\dfrac{1}{2}$. (D) 1.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = 6$.

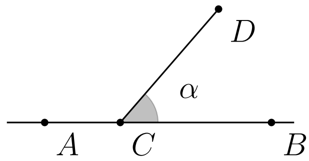
Gọi A là biến cố: "con súc sắc xuất hiện mặt có số chấm chẵn".

Ta có $n(A) = 3$. Do đó $\mathrm{P}(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 36.

Từ kho hàng hóa A dọc theo đường sắt AB cần phải xây một kho trung chuyển tại điểm C và xây dựng một con đường từ C đến D. Biết rằng vận tốc trên đường sắt là v_1 và trên đường bộ là v_2 $(v_1 > v_2)$. Tìm điều kiện của $\cos\alpha$ để điểm C được chọn là địa điểm sao cho thời gian chuyển hàng hóa từ A đến D qua C là nhanh nhất (góc α như hình vẽ).

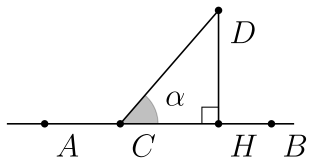


(A) $\cos\alpha = \dfrac{v_1}{v_2}$. **(B)** $\cos\alpha = \dfrac{v_1+v_2}{2}$. **(C)** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **(D)** $\cos\alpha = \dfrac{v_2}{v_1}$.

Lời giải.

Kẻ $DH \perp AB$. Dễ thấy $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$.

Thời gian chuyển hàng từ A đến D qua D là



$$t = \frac{AC}{v_1} + \frac{CD}{v_2} = \frac{AH - CH}{v_1} + \frac{CD}{v_2} = \frac{AH - DH\cdot\cot\alpha}{v_1} + \frac{DH}{v_2\sin\alpha}.$$

Ta có

$$t' = \frac{DH}{v_1}\cdot\frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{DH}{v_2}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{DH}{v_1v_2\sin^2\alpha}\left(v_2 - v_1\cos\alpha\right).$$

Do đó

$$t' = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{v_2}{v_1} \Leftrightarrow \alpha = \arccos\frac{v_2}{v_1}.$$

Xét $v_2 - v_1\cos\alpha > 0 \Leftrightarrow \cos\alpha < \dfrac{v_2}{v_1}$. Vì $\cos x$ nghịch biến trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ nên

$$\cos\alpha < \frac{v_2}{v_1} \Leftrightarrow \alpha > \arccos\frac{v_2}{v_1}.$$

Bảng biến thiên

α	0		$\arccos\dfrac{v_2}{v_1}$		$\dfrac{\pi}{2}$
t'		$-$	0	$+$	
t		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy để thời gian chuyển hàng nhanh nhất thì $\cos\alpha = \dfrac{v_2}{v_1}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với $(ABCD)$, $ABCD$ là hình thang vuông có đáy lớn AD gấp đôi đáy nhỏ BC, đồng thời đường cao $AB = BC = a$. Biết $SA = a\sqrt{3}$, khi đó khoảng cách từ đỉnh B đến đường thẳng SC là

(A) $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. **(B)** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **(C)** $a\sqrt{10}$. **(D)** $2a$.

Lời giải.

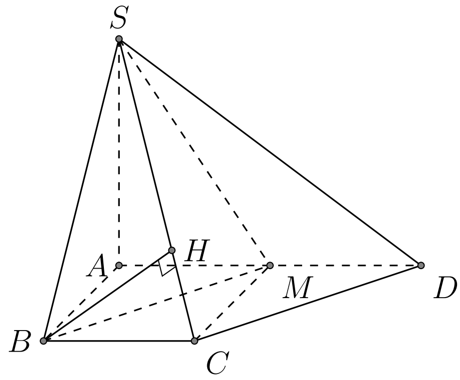
Kẻ $BH \perp SC$ $(H \in SC)$ thì $\mathrm{d}(B, SC) = BH$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$. Suy ra

$\triangle SBC$ vuông tại B. Xét tam giác SBC, ta có

$\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{1}{SA^2 + AB^2} + \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{5}{4a^2}$.

$\Rightarrow BH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.



Chọn đáp án B □

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ. Cho $B(a; 0; 0)$, $D(0; a; 0)$, $A'(0; 0; b)$ với $a > 0, b > 0$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Xác định tỉ số $\dfrac{a}{b}$ để mặt phẳng $(A'BD)$ vuông góc với mặt phẳng (BDM).

A $\dfrac{a}{b} = 1$. **B** $\dfrac{a}{b} = 2$. **C** $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{2}$. **D** $\dfrac{a}{b} = -1$.

Lời giải.

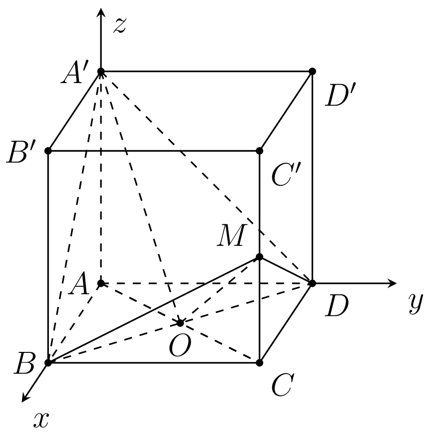
Gọi O là giao điểm của AC và BD. Dễ thấy $A(0; 0; 0)$, $M\left(a; a; \dfrac{b}{2}\right)$, $O\left(\dfrac{a}{2}; \dfrac{a}{2}; 0\right)$.

Ta có $(A'BD) \cap (MBD) = BD$ và

$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp A'A \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AA'C'C) \Rightarrow \begin{cases} BD \perp A'O \\ BD \perp OM. \end{cases}$

$\Rightarrow ((A'BD), (MBD)) = (A'O, MO) = 90^\circ$.

Ta có $\overrightarrow{OA'} = \left(-\dfrac{a}{2}; -\dfrac{a}{2}; b\right)$, $\overrightarrow{OM} = \left(\dfrac{a}{2}; \dfrac{a}{2}; \dfrac{b}{2}\right)$



$\overrightarrow{OA'} \perp \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{OM} = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{b^2}{2} = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ tại bốn điểm phân biệt.

A $m > -1$. **B** $-1 < m < 1$. **C** $m < -4$. **D** $-4 < m < -3$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$. Ta có $y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra với $-4 < m < -3$ thì hai đồ thị đã cho cắt nhau tại 4 điểm phân biệt.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Số hạng không chứa x trong khai triển của $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^{12}$ là

(A) 924. (B) 792. (C) 495. (D) 220.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển là $\mathrm{C}_{12}^k x^{24-3k}$.

Số hạng không chứa x ứng với $24 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 8$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $\mathrm{C}_{12}^8 = 495$.

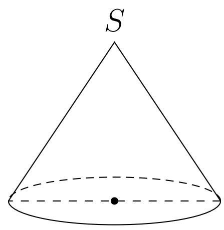
Chọn đáp án (C) □

Câu 41. Một hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

(A) $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$. (B) $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}$. (C) $\pi a^2\sqrt{2}$. (D) $2\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân tại đỉnh hình nón nên bán kính mặt đáy $r = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Suy ra



$$S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{2}a^2\pi}{2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là $a > 0$. Khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB' và BC' là

(A) $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

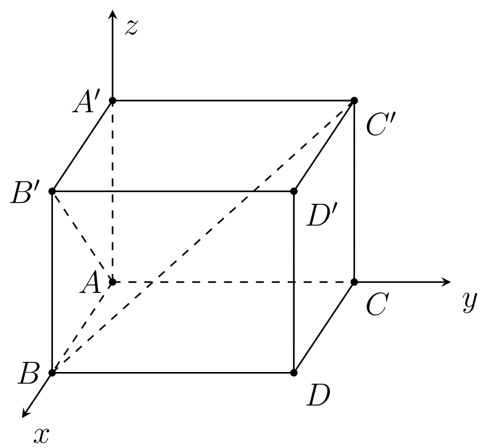
Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho A trùng với gốc tọa độ và B, D, A' lần lượt thuộc tia Ox, Oy, Oz.

Ta có $A(0;0;0)$, $B'(a;0;a)$, $B(a;0;0)$, $C'(a;a;a)$.

$\overrightarrow{AB'} = (a;0;a)$, $\overrightarrow{BC'} = (0;a;a)$ và $\overrightarrow{AB} = (a;0;0)$.

$$\mathrm{d}(AB', BC') = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}\right] \cdot \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}\right]\right|} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Chọn đáp án (C) □

Câu 43. Một trường cấp ba của tỉnh Đồng tháp có 8 giáo viên Toán gồm có 3 nữ và 5 nam, giáo viên Vật lý thì có 4 giáo viên nam. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một đoàn thanh tra công tác ôn thi THPTQG gồm 3 người có đủ 2 môn Toán và Vật lý và phải có giáo viên nam và giáo viên nữ trong đoàn?

(A) 120 cách. (B) 60 cách. (C) 12960 cách. (D) 90 cách.

Lời giải.

TH1: Đoàn công tác gồm 2 giáo viên Toán và 1 giáo viên Vật lý.

Trường hợp này có $\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_5^1 + \mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^2 = 72$.

TH2: Đoàn công tác gồm 2 giáo viên Vật lý và 1 giáo viên Toán. Trường hợp này có $\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_3^1 = 18$.

Vậy có $72 + 18 = 90$ cách chọn một đoàn công tác thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Một người đem 100000000 (đồng) đi gửi tiết kiệm với lãi suất 7%/tháng, sau mỗi tháng số tiền lãi được nhập vào vốn. Hỏi sau khi hết kì hạn 6 tháng, người đó được lĩnh về bao nhiêu tiền?

(A) $10^8 \cdot (1{,}07)^6$ (đồng). (B) $10^8 \cdot (1{,}07)^7$ (đồng).
(C) $10^8 \cdot (0{,}07)^6$ (đồng). (D) $10^8 \cdot (1{,}07)^5$ (đồng).

Lời giải.

Số tiền người này nhận được sau 6 tháng là

$$100000000 \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right)^6 = 10^8 \cdot (1{,}07)^6 \text{ đồng.}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Khoảng nghịch biến của hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 4$ là

(A) $(-\infty; 0)$. (B) $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.
(C) $(2; +\infty)$. (D) $(-2; 0)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số nghịch biến trên $(-2; 0)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 46. Hàm số $y = \log_5(4x - x^2)$ có tập xác định là

(A) $\mathscr{D} = (0; +\infty)$. (B) $\mathscr{D} = (0; 4)$.
(C) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. (D) $\mathscr{D} = (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $4x - x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4$.

Vậy tập xác định $\mathscr{D} = (0; 4)$.

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 47. Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-3;1)$ và đi qua điểm $A(5;-2;1)$ có phương trình là

(A) $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=25$. **B** $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=5$.

(C) $(x-5)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=\sqrt{5}$. (D) $(x-5)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=5$.

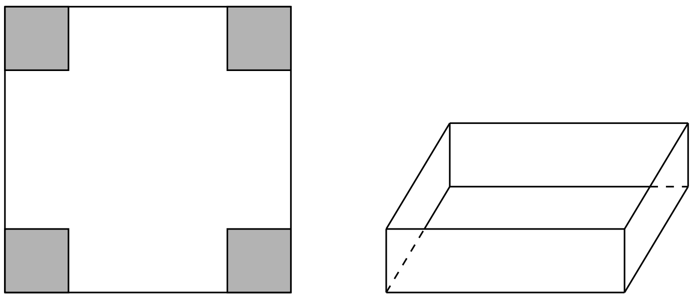
Lời giải.

Bán kính $R=IA=\sqrt{2^2+1^2+0^2}=\sqrt{5}$. Phương trình mặt cầu (S) là

$$(x-3)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=5.$$

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 48. Với một tấm bìa hình vuông, người ta cắt bỏ ở mỗi góc tấm bìa một hình vuông cạnh 12 cm rồi gấp lại thành một hình hộp chữ nhật không có nắp (hình vẽ). Giả sử thể tích của cái hộp đó là 4800 cm^3 thì cạnh của tấm bìa ban đầu có độ dài là bao nhiêu?



A 44 cm. (B) 42 cm. (C) 36 cm. (D) 38 cm.

Lời giải.

Gọi x (cm) $(x>24)$ là độ dài cạnh hình vuông ban đầu.

Do đó

$$\begin{aligned} & V=12\cdot(x-24)\cdot(x-24)\\ \Leftrightarrow\ & 4800=12(x-24)^2\\ \Leftrightarrow\ & x^2-48x+176=0\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=44\\ x=4\ (\text{loại}). \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $x=44$ cm.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 49. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\dfrac{4x+6}{x}\le 0$ là

A $S=\left[-2;-\dfrac{3}{2}\right)$. (B) $S=[-2;0)$. (C) $S=(-\infty;2]$. (D) $S=\mathbb{R}\setminus\left[-\dfrac{3}{2};0\right]$.

Lời giải.

Điều kiện: $\dfrac{4x+6}{x}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x<-\dfrac{3}{2}\\ x>0. \end{array}\right.$

$$\log_3\frac{4x+6}{x}\le 0\Leftrightarrow\frac{4x+6}{x}\le 1\Leftrightarrow\frac{3x+6}{x}\le 0\Leftrightarrow -2\le x<0.$$

Kết hợp với điều kiện ta có $S = \left[-2; -\frac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án A $\square$

Câu 50. Tổng $\mathrm{C}_{2016}^{1} + \mathrm{C}_{2016}^{2} + \mathrm{C}_{2016}^{3} + \cdots + \mathrm{C}_{2016}^{2016}$ bằng

A 2^{2016}. **B** 4^{2016}. **C** $2^{2016} + 1$. **D** $2^{2016} - 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & (1+1)^{2016} = \mathrm{C}_{2016}^{0} + \mathrm{C}_{2016}^{1} + \mathrm{C}_{2016}^{2} + \cdots + \mathrm{C}_{2016}^{2016} \\ \Leftrightarrow\ & 2^{2016} = 1 + \mathrm{C}_{2016}^{1} + \mathrm{C}_{2016}^{2} + \cdots + \mathrm{C}_{2016}^{2016} \\ \Leftrightarrow\ & 2^{2016} - 1 = \mathrm{C}_{2016}^{1} + \mathrm{C}_{2016}^{2} + \cdots + \mathrm{C}_{2016}^{2016}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D $\square$

——— HẾT ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. C	3. C	4. A	5. C	6. D	7. A	8. B	9. B	10. D
11. D	12. D	13. A	14. A	15. C	16. C	17. C	18. C	19. B	20. D
21. A	22. C	23. D	24. A	25. D	26. B	27. A	28. C	29. A	30. B
31. B	32. D	33. D	34. B	35. C	36. D	37. B	38. A	39. D	40. C
41. A	42. C	43. D	44. A	45. D	46. B	47. B	48. A	49. A	50. D

77 ĐỀ THI THỬ THPTQG 2018, SỞ GD&ĐT CAO BẰNG

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

A. $(-\infty; 0)$.
B. $(0; 2)$.
C. $(0; 4)$.
D. $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2x^2 + 1}$ bằng

A. 1.
B. $+\infty$.
C. 0.
D. $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2x^2 + 1} = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \cos x$ là

A. $x^2 - \sin x + C$.
B. $x^2 + \sin x + C$.
C. $2 + \sin x + C$.
D. $2 - \sin x + C$.

Lời giải.

$\displaystyle\int (2x + \cos x)\,\mathrm{d}x = x^2 + \sin x + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Đường thẳng nào sau đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$?

A. $y = 2$.
B. $y = -1$.
C. $x = 1$.
D. $x = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 2.$$

Vậy $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Thể tích khối hộp có 3 kích thước bằng a, b, c là

A. $2abc$.
B. $\dfrac{1}{6}abc$.
C. abc.
D. $\dfrac{1}{3}abc$.

Lời giải.

Thể tích khối hộp có 3 kích thước bằng a, b, c là abc.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho số phức $z = 6 + 17i$. Điểm biểu diễn cho số phức z trên mặt phẳng tọa độ Oxy là

(A) $M(-6;-17)$. (B) $M(-17;-6)$. (C) $M(17;6)$. (D) $M(6;17)$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn cho số phức z trên mặt phẳng tọa độ Oxy là $M(6;17)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Tập xác định của hàm số $y=\log_3 x$ là

(A) $(3;+\infty)$. (B) $(0;+\infty)$. (C) $\mathbb{R}$. (D) $[3;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $y=\log_3 x$ là $(0;+\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=-x^3+3x^2-2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ là

(A) $S=\dfrac{5}{2}$. (B) $S=\dfrac{3}{2}$. (C) $S=\dfrac{7}{2}$. (D) $S=4$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành $-x^3+3x^2-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1\pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$

Diện tích cần tính là

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_0^2 |-x^3+3x^2-2|\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^1 |-x^3+3x^2-2|\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 |-x^3+3x^2-2|\,\mathrm{d}x \\ &= \left|\left(-\frac{1}{4}x^4+x^3-2x\right)\Big|_0^1\right| + \left|\left(-\frac{1}{4}x^4+x^3-2x\right)\Big|_1^2\right| \\ &= \left|-\frac{5}{4}\right| + \left|\frac{5}{4}\right| = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Từ các số 1, 2, 3 lập được bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau?

(A) 6. (B) 9. (C) 3. (D) 27.

Lời giải.

Số các số có 3 chữ số khác nhau lập từ các chữ số 1, 2, 3 là $3!=6$ số.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Cho hàm số có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

(A) $x = 1$. (B) $x = -3$. (C) $x = -1$. **D** $x = 0$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biên thiên, hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{u}$ sao cho $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{u}$ là

(A) $(-2; 1; 2)$. (B) $(1; 2; -2)$. **C** $(2; 1 - 2)$. (D) $(2; 1; 2)$.

Lời giải.

Tọa độ của véc-tơ $\vec{u} = (2; 1 - 2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

(A) $\vec{u}_4 = (-2; 1; 3)$. (B) $\vec{u}_3 = (2; 1; 3)$. (C) $\vec{u}_2 = (1; 3; 2)$. **D** $\vec{u}_1 = (1; -3; 2)$.

Lời giải.

đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; -3; 2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Có 3 bó hoa. Bó thứ nhất có 8 bông hoa hồng, bó thứ hai có 7 bông hoa ly, bó thứ ba có 6 bông hoa huệ. Chọn ngẫu nhiên 7 bông từ ba bó hoa trên để cắm vào lọ. Xác suất để 7 bông hoa được chọn có số hoa hồng bằng số hoa ly là

(A) $\dfrac{36}{71}$. (B) $\dfrac{3851}{4845}$. **C** $\dfrac{994}{4845}$. (D) $\dfrac{1}{71}$.

Lời giải.

Số cách chọn 7 bông hoa tùy ý từ 21 bông là $\mathrm{C}_{21}^7 = 116280$.

Biến cố A: "7 bông hoa được chọn có số hoa hồng bằng số hoa ly"

- TH1: 1 hoa ly, 1 hoa hồng, 5 hoa huệ
- TH2: 2 hoa ly, 2 hoa hồng, 3 hoa huệ
- TH3: 3 hoa ly, 3 hoa hồng, 1 hoa huệ.

Vậy $n(A) = 8 \cdot 7 \cdot \mathrm{C}_6^5 + \mathrm{C}_7^2 \cdot \mathrm{C}_8^2 \cdot \mathrm{C}_6^3 + \mathrm{C}_7^3 \cdot \mathrm{C}_8^3 \cdot 6 = 23856$.

Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{23856}{116280} = \dfrac{994}{4845}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Một khối trụ có bán kính đáy bằng 5 và khoảng cách giữa hai đáy bằng 7. Thể tích khối trụ bằng

(A) 35π. (B) 125π. **C** 175π. (D) 70π.

Lời giải.

$r = 5, h = 7 \Rightarrow V = \pi \cdot h \cdot r^2 = 175\pi$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Tính tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x$

Ⓐ $I = \dfrac{\pi}{2}$. **B** $I = \dfrac{\pi}{2} - 1$. Ⓒ $I = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{1}{2}$. Ⓓ $I = \dfrac{\pi}{3}$.

Lời giải.

$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}(\sin x) = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{2} - 1.$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 16. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $16^x - 2(m-3)4^x + 3m + 1 = 0$ có nghiệm là

Ⓐ $\left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right] \cup [8; +\infty)$. **B** $\left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right) \cup [8; +\infty)$.

Ⓒ $(-\infty; 1] \cup [8; +\infty)$. Ⓓ $\left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right) \cup (8; +\infty)$.

Lời giải.

Đặt $4^x = t$. Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 2(m-3)t + 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 + 6t + 1}{2t - 3}. \quad (*)$$

Xét hàm số $g(t) = \dfrac{t^2 + 6t + 1}{2t - 3}$, với $t > 0$ có $g'(t) = \dfrac{2t^2 - 6t - 20}{(2t-3)^2}$.

Cho $g'(t) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 5\,(\text{nhận}) \\ t = -2\,(\text{loại}). \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$g(t)$	$-\frac{1}{3}$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình đã cho có nghiệm khi phương trình $(*)$ có ít nhất 1 nghiệm $t > 0$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có điều kiện của m để phương trình $(*)$ có ít nhất 1 nghiệm $t > 0$ là $m \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right) \cup [8; +\infty)$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 17. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{3x+1}{x-2}$ trên $[-1; 1]$. Khi đó, giá trị của m là

A $m = -4$. Ⓑ $m = \dfrac{2}{3}$. Ⓒ $m = 4$. Ⓓ $m = -\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Vì $y' = \dfrac{-7}{(x-2)^2} < 0$, $\forall x \in [-1;1]$ nên $m = y(1) = -4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\ln(5-x)}$ là

(A) $\mathbb{R} \setminus \{4\}$. (B) $[-1;5) \setminus \{4\}$. (C) $(-1;5)$. (D) $[-1;5]$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 5-x > 0 \\ \ln(5-x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x < 5 \\ 5-x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 5 \\ x \neq 4. \end{cases}$

Vậy tập xác định là $\mathscr{D} = [-1;5) \setminus \{4\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = AC = a$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a$. Góc giữa cạnh SC và mặt phẳng (ABC) là

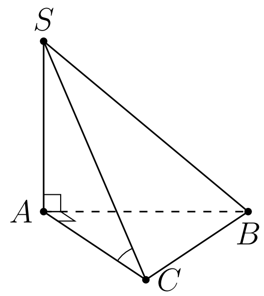
(A) 45°. (B) 90°. (C) 60°. (D) 30°.

Lời giải.

Do $SA \perp (ABC)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC trên (ABC).

Vậy $\widehat{SCA}$ là góc giữa SC và (ABC).

Do $\triangle SAC$ vuông cân tại A, nên $\widehat{SCA} = 45^\circ$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Có bao nhiêu cách chọn ra 2 người trong đó có ít nhất 1 người là nữ từ 10 người gồm 6 nam và 4 nữ?

(A) 10. (B) 40. (C) 5. (D) 30.

Lời giải.

Số cách chọn ra 2 người trong đó có ít nhất 1 người là nữ từ 10 người gồm 6 nam và 4 nữ là $\mathrm{C}_{10}^2 - \mathrm{C}_6^2 = 30$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - 2 = 0$. Tính tọa độ tâm I và bán kính R của (S).

(A) Tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R = 4$.
(B) Tâm $I(-1;2;3)$ và bán kính $R = 4$.
(C) Tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R = 16$.
(D) Tâm $I(-1;2;-3)$ và bán kính $R = 4$.

Lời giải.

Tâm $I(-1;2;-3)$ và bán kính $R = \sqrt{1+4+9+2} = 4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Điểm biểu diễn của số phức $z = \dfrac{1}{2-3i}$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy có tọa độ là

(A) $(3;-3)$. **B** $\left(\dfrac{2}{13};\dfrac{3}{13}\right)$. (C) $(3;-2)$. (D) $(2;-3)$.

Lời giải.

$z=\dfrac{1}{2-3i}=\dfrac{2}{13}+\dfrac{3}{13}i$.

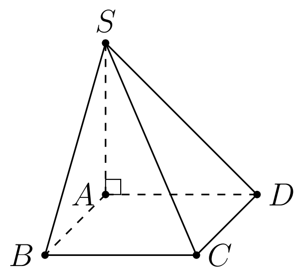
Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Cạnh SA vuông góc với đáy. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $AB\perp(SAD)$. (B) $AC\perp(SAD)$. (C) $SC\perp SA$. (D) $SD\perp AD$.

Lời giải.

$\begin{cases}AB\perp AD\\ AB\perp SA\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SAD)$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2}x^4-3x^2+2$ là

(A) $\left(\sqrt{3};-\dfrac{5}{2}\right)$. (B) $\left(-\sqrt{3};-\dfrac{5}{2}\right)$. **C** $(0;2)$. (D) $(2;0)$.

Lời giải.

$y'=2x^3-6x$. Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{3}.\end{array}\right.$

$y''=6x^2-6$.

• Với $x=\pm\sqrt{3}\Rightarrow y''(\pm\sqrt{3})=12>0\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$ là điểm cực tiểu của hàm số.

• Với $x=0\Rightarrow y''(0)=-6<0\Rightarrow x=0$ là điểm cực đại của hàm số. Vậy $(0;2)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

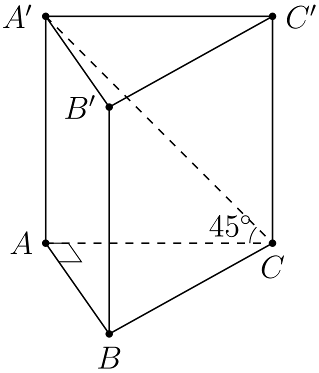
Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, cạnh AB bằng $a\sqrt{3}$, góc giữa $A'C$ và (ABC) bằng $45°$. Khi đó đường cao của hình lăng trụ bằng

(A) $a\sqrt{2}$. (B) a. **C** $a\sqrt{3}$. (D) $3a$.

Lời giải.

Do $ABC.A'B'C$ là lăng trụ đứng nên $AA'\perp(ABC)$, suy ra góc giữa $A'C$ và (ABC) là góc $\widehat{A'CA}=45°$. Tam giác $AA'C$ vuông cân tại A nên $AA'=AC=a\sqrt{3}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;1;-2)$, $B(5;9;3)$. Phương trình của mặt phẳng trung trực đoạn thẳng AB là

(A) $2x+6y-5z+40=0$.
(B) $x+8y-5z-41=0$.
(C) $x-8y-5z-35=0$.
D $x+8y+5z-47=0$.

Lời giải.

Có $I\left(\dfrac{9}{2};5;\dfrac{1}{2}\right)$ là trung điểm đoạn AB. Véc-tơ $\overrightarrow{AB}=(1;8;5)$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng trung trực đoạn AB. Phương trình mặt phẳng có dạng

$$\left(x-\frac{9}{2}\right)+8(y-5)+5\left(z-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow x+8y+5z-47=0.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Bất phương trình $\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)$ có tập nghiệm là

(A) $(0;+\infty)$.
(B) $\left(\dfrac{1}{2};3\right)$.
(C) $(-3;1)$.
D $\left(1;\dfrac{6}{5}\right)$.

Lời giải.

$$\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2>6-5x\\6-5x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x<\dfrac{6}{5}\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<\frac{6}{5}.$$

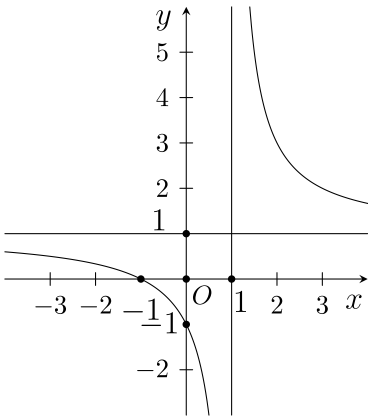
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(1;\dfrac{6}{5}\right)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28.

Đồ thị sau đây là của hàm số nào?

A $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.
(B) $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$.
(C) $y=\dfrac{x+2}{1-x}$.
(D) $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.



Lời giải.

Đồ thị có tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận ngang $y=1$, vậy đồ thị là của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Cho $A(1;-2;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$. Phương trình mặt cầu tâm A tiếp xúc với d là

(A) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$.
(B) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=25$.
C $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=50$.
(D) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=50$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua $M(-1;2-3)$ có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}=(2;1;-1)$.
Véc-tơ $\overrightarrow{MA}=(2;-4;6)$, suy ra $[\overrightarrow{MA},\overrightarrow{u}]=(-2;14;10)$.
Bán kính mặt cầu là $R=\dfrac{|[\overrightarrow{MA},\overrightarrow{u}]|}{|\overrightarrow{u}|}=\dfrac{\sqrt{(-2)^2+14^2+10^2}}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{300}}{\sqrt{6}}=5\sqrt{2}$.
Phương trình mặt cầu là $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=50$.
Chọn đáp án C □

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm a để đồ thị hàm số $y=x^3+(a+10)x^2-x+1$ cắt trục hoành tại đúng một điểm?

A 10. B 8. C 9. D 11.

Lời giải.
Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành

$$x^3+(a+10)x^2-x+1=0\Leftrightarrow a+10=\frac{-x^3+x-1}{x^2}=-x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}.\quad (*)$$

Xét hàm số $g(x)=-x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$ có $g'(x)=-1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{-x^3-x+2}{x^3}$. Cho $g'(x)=0\Rightarrow x=1$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘		$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại đúng một điểm khi phương trình $(*)$ có đúng một nghiệm.
Dựa vào bảng biến thiên, điều kiện là $a+10>-1\Leftrightarrow a>-11$.
Vậy có 10 giá trị nguyên âm a thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án A □

Câu 31. Xét các số thực x,y thỏa mãn điều kiện $x^2-xy+y^2=2$. Giá trị nhỏ nhất của $P=x^2+xy+y^2$ bằng

A $\dfrac{1}{3}$. B 2. C $\dfrac{2}{3}$. D $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.
$x^2-xy+y^2=2\Leftrightarrow(x+y)^2=2+3xy\geq 0\Rightarrow xy\geq-\dfrac{2}{3}$.
$P=x^2+xy+y^2=x^2-xy+y^2+2xy=2+2xy\geq 2+2\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{3}$.
Dấu "$=$" xảy ra khi $\begin{cases}xy=-\dfrac{2}{3}\\x+y=0\end{cases}$. Hệ có nghiệm $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}};-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}};\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của $P=x^2+xy+y^2$ bằng $\dfrac{2}{3}$.
Chọn đáp án C □

Câu 32.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Khi đó tất cả các giá trị của m để phương trình $f(x) = m - 1$ có ba nghiệm thực phân biệt là

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

(A) $m \in [4; 6]$.
(B) $m \in (3; 5)$.
(C) $m \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$.
D $m \in (4; 6)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, phương trình $f(x) = m - 1$ có ba nghiệm thực phân biệt khi

$$3 < m - 1 < 5 \Leftrightarrow 4 < m < 6.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{9^x}{9^x + 3}$. Tính $P = f(\sin^2 10°) + f(\sin^2 20°) + \cdots + f(\sin^2 80°)$.

(A) $P = 3$. (B) $P = 9$. (C) $P = 8$. **D** $P = 4$.

Lời giải.

Nhận xét

• Nếu $\alpha + \beta = 90°$ thì $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$.

• Nếu $a+b = 1$ thì $\dfrac{9^a}{9^a+3} + \dfrac{9^b}{9^b+3} = \dfrac{9^a}{9^a+3} + \dfrac{9^{1-a}}{9^{1-a}+3} = \dfrac{9^a}{9^a+3} + \dfrac{9}{9+3\cdot 9^a} = \dfrac{9^a}{9^a+3} + \dfrac{3}{3+9^a} = 1$.

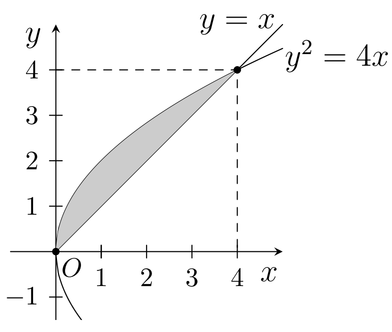
Vậy $P = f(\sin^2 10°) + f(\sin^2 80°) + f(\sin^2 20°) + f(\sin^2 70°) + f(\sin^2 30°) + f(\sin^2 60°) + f(\sin^2 40°) + f(\sin^2 50°) = 4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 34.

Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y^2 = 4x$ và $y = x$ (với $0 \le x \le 4$) được minh họa bằng hình vẽ bên (phần tô đậm). Cho (H) quay quanh trục Ox. Thể tích khối tròn xoay tạo thành bằng

(A) 11π. **B** $\dfrac{32}{3}\pi$. (C) $\dfrac{15}{7}\pi$. (D) 10π.



Lời giải.

$y^2 = 4x \Rightarrow y = 2\sqrt{x}$ (xét $y \ge 0$).

Thể tích khối tròn xoay cần tính là

$$V = \pi \int_0^4 (2\sqrt{x})^2 \, \mathrm{d}x - \pi \int_0^4 x^2 \, \mathrm{d}x = 2\pi x^2 \Big|_0^4 - \frac{\pi}{3} x^3 \Big|_0^4 = \frac{32}{3}\pi.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục và $a>0$. Giả sử rằng với mọi $x\in[0;a]$, ta có $f(x)>0$ và $f(x)\cdot f(a-x)=1$. Tính $\displaystyle\int\limits_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$ được kết quả bằng

A $\dfrac{a}{3}$. **B** $2a$. **C** $a\ln(a+1)$. **D** $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải.

$f(x)\cdot f(a-x)=1\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{f(a-x)}$.

$$\begin{aligned} I=\int\limits_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)} &= \int\limits_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+\dfrac{1}{f(a-x)}}=\int\limits_0^a\frac{f(a-x)}{1+f(a-x)}\,\mathrm{d}x\\ &= -\int\limits_0^a\frac{f(a-x)}{1+f(a-x)}\,\mathrm{d}(a-x)=-\int\limits_a^0\frac{f(t)}{1+f(t)}\,\mathrm{d}t\\ &= \int\limits_0^a\frac{f(t)}{1+f(t)}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^a\frac{f(x)}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

$2I=\displaystyle\int\limits_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}+\int\limits_0^a\frac{f(x)}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^a\mathrm{d}x=a$. Vậy $I=\dfrac{a}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $[-6;6]$. Biết rằng $\displaystyle\int\limits_{-1}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x=8$ và $\displaystyle\int\limits_1^3 f(-2x)\,\mathrm{d}x=3$. Tính $I=\displaystyle\int\limits_{-1}^{6}f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I=2$. **B** $I=11$. **C** $I=5$. **D** $I=14$.

Lời giải.

$\displaystyle\int\limits_1^3 f(-2x)\,\mathrm{d}x=3\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\int\limits_1^3 f(-2x)\,\mathrm{d}(-2x)=3\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{-6}f(t)\,\mathrm{d}t=3\Leftrightarrow\int\limits_{-6}^{-2}f(t)\,\mathrm{d}t=6.$

$I=\displaystyle\int\limits_{-1}^{6}f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x=8+\int\limits_{-2}^{-6}f(-t)\,\mathrm{d}(-t)=8+\int\limits_{-6}^{-2}f(t)\,\mathrm{d}t=14.$

Chọn đáp án D □

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$. Cho $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$. Biết mặt phẳng (ABC) qua điểm $I(1;3;3)$ và thể tích tứ diện $O.ABC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó phương trình (ABC) là

A $x+3y+3z-21=0$. **B** $3x+y+z-9=0$.

C $3x+y+z+9=0$. **D** $3x+3y+z-15=0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (ABC): $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.
$I(1;3;3)\in(ABC)\Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{3}{b}+\dfrac{3}{c}=1$.
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si

$$1=\frac{1}{a}+\frac{3}{b}+\frac{3}{c}\geq\sqrt[3]{\frac{3^2}{abc}}\Rightarrow abc\geq 9.$$

Thể tích tứ diện $O.ABC$ là $V=\dfrac{1}{6}abc\geq\dfrac{3}{2}$.
Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{1}{a}=\dfrac{3}{b}=\dfrac{3}{c}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=c=9.\end{cases}$
Phương trình mặt phẳng (ABC) là

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{9}+\frac{z}{9}=1\Leftrightarrow 3x+y+z-9=0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 38. Một điện thoại đang nạp pin, dung lượng nạp được tính bằng công thức $Q(t)=Q_0\left(1-\mathrm{e}^{\frac{-3t}{2}}\right)$ với t là khoảng thời gian tính bằng giờ (h) và (Q_0) là dung lượng nạp tối đa (pin đầy). Nếu điện thoại nạp pin từ lúc cạn pin (tức là dung lượng pin lúc bắt đầu nạp là 0%) thì sau bao lâu sẽ nạp được 90% (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $t\approx 1{,}21$ h. B. $t\approx 1{,}34$ h. C. $t\approx 1{,}22$ h. D. $t\approx 1{,}54$ h.

Lời giải.
Thời gian t nạp để dung lượng được 90% thỏa mãn phương trình

$$\frac{Q(t)}{Q_0}=\frac{9}{10}\Leftrightarrow 1-\mathrm{e}^{-\frac{3t}{2}}=\frac{9}{10}\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{3t}{2}}=\frac{1}{10}\Leftrightarrow t=\frac{2}{3}\ln 10\approx 1{,}54\,\mathrm{h}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x-2}$ có đồ thị (C), M là điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai đường tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B thỏa mãn $AB=2\sqrt{5}$. Gọi S là tổng các hoành độ của tất cả các điểm M thỏa mãn bài toán. Giá trị của S bằng

A. 8. B. 5. C. 7. D. 6.

Lời giải.
Tập xác định của hàm số $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Có $y'=\dfrac{-2}{(x-2)^2}$.
$x=2$ là tiệm cận đứng, $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị.
Gọi $M\left(a;\dfrac{2a-2}{a-2}\right)$ $(a\neq 2)$ là điểm thuộc đồ thị. Phương trình tiếp tuyến tại M là

$$y=-\frac{2}{(a-2)^2}(x-a)+\frac{2a-2}{a-2}.$$

Tiếp tuyến cắt tiệm cận đứng tại điểm $A\left(2;\dfrac{2a}{a-2}\right)$.
Tiếp tuyến cắt tiệm cận ngang tại điểm $B(2a-2;2)$.

$\overrightarrow{AB} = \left(2a-4; \dfrac{-4}{a-2}\right)$.

$$AB = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow (2a-4)^2 + \frac{16}{(a-2)^2} = 20 \Leftrightarrow (a-2)^4 - 5(a-2)^2 + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&(a-2)^2 = 1\\&(a-2)^2 = 4\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&a=3\\&a=1\\&a=4\\&a=0.\end{aligned}\right.$$

Vậy $S = 8$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2mx-2my+4mz-12m-10=0$. Bán kính nhỏ nhất của (S) là

Ⓐ $R = 6$. **B** $R = 2$. Ⓒ $R = 5$. Ⓓ $R = 4$.

Lời giải.

$P(m) = m^2 + m^2 + 4m^2 + 12m + 10 = 6m^2 + 12m + 10 = 6(m+1)^2 + 4 \geq 4\,\forall m \in \mathbb{R}$.

Vậy bán kính nhỏ nhất của mặt cầu (S) bằng 2 khi $m = -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Trong khai triển của $\left(x\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^4}\right)^n$ với $x > 0$, biết rằng $\mathrm{C}_n^2 - \mathrm{C}_n^1 = 44$. Số hạng không chứa x là

A 165. Ⓑ 485. Ⓒ 525. Ⓓ 238.

Lời giải.

Điều kiện $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_n^2 - \mathrm{C}_n^1 = 44 &\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!2!} - \frac{n!}{(n-1)!} = 44\\ &\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 44\\ &\Leftrightarrow n^2 - 3n - 88 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&n = 11\,(\text{nhận})\\&n = -8\,(\text{loại})\end{aligned}\right. .\text{Vậy } n = 11.\end{aligned}$$

Xét số hạng thứ $k+1$ trong khai triển nhị thức

$$T_{k+1} = \mathrm{C}_{11}^k (x\sqrt{x})^{11-k} \cdot (x^{-4})^k = \mathrm{C}_{11}^k x^{\frac{33-11k}{2}}.$$

Số hạng không chứa x ứng với k thỏa mãn phương trình $\dfrac{33-11k}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 3$.

Vậy số hạng không chứa x là $\mathrm{C}_{11}^3 = 165$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Trong các số phức z thỏa mãn $|z-1+i| = |\overline{z}+1-2i|$, số phức z có mô-đun nhỏ nhất là

Ⓐ $\dfrac{-3}{5} + \dfrac{3}{10}i$. Ⓑ $\dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{10}i$. **C** $\dfrac{-3}{5} - \dfrac{3}{10}i$. Ⓓ $\dfrac{3}{5} - \dfrac{3}{10}i$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} |z-1+i| = |\overline{z}+1-2i| &\Leftrightarrow |x+yi-1+i| = |x-yi+1-2i| \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2 = (x+1)^2+(y+2)^2 \\ &\Leftrightarrow -2x+1+2y+1 = 2x+1+4y+4 \\ &\Leftrightarrow 4x+2y=-3 \Rightarrow (4x+2y)^2 = 9 \\ &\Rightarrow 9 \le (4^2+2^2)(x^2+y^2) \Rightarrow |z| \ge \frac{3}{2\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} 2x+y=-3 \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{5} \\ y = -\dfrac{3}{10} \end{cases}$. Vậy $z = -\dfrac{3}{5} - \dfrac{3}{10}i$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 43. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ có đồ thị là (C_m). Tìm m sao cho (C_m) có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 5$.

(A) $m = \sqrt[3]{2}$. (B) $m = -\dfrac{3}{2}$. **(C)** $m = \dfrac{3}{2}$. (D) $m = -\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 6x + m$. Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $3x^2 - 6x + m = 0$. Theo hệ thức Vi-ét có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = \dfrac{m}{3} \end{cases}$.

$x_1^3 + x_2^3 = 5 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2) = 5 \Leftrightarrow 8 - 2m = 5 \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và tổng của 100 số hạng đầu tiên là 24850. Tính giá trị của biểu thức $S = \dfrac{1}{u_1u_2} + \dfrac{1}{u_2u_3} + \cdots + \dfrac{1}{u_{48}u_{49}} + \dfrac{1}{u_{49}u_{50}}$.

(A) $S = \dfrac{9}{246}$. (B) $S = 123$. (C) $S = \dfrac{4}{23}$. **(D)** $S = \dfrac{49}{246}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $S_n = \dfrac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]$.

$24850 = 50(2 + 99d) \Rightarrow d = 5$. Có $u_{50} = u_1 + 49d = 1 + 49 \cdot 5 = 246$.

Nhận xét. $\dfrac{1}{u_k \cdot u_{k+1}} = \dfrac{1}{u_k \cdot (u_k + d)} = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{u_k} - \dfrac{1}{u_k + d}\right) = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{u_k} - \dfrac{1}{u_{k+1}}\right)$.

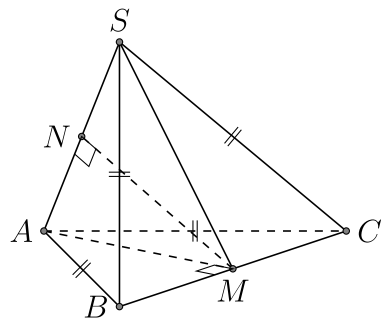
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{u_1u_2} + \frac{1}{u_2u_3} + \cdots + \frac{1}{u_{48}u_{49}} + \frac{1}{u_{49}u_{50}} \\ &= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} + \cdots + \frac{1}{u_{49}} - \frac{1}{u_{50}}\right) \\ &= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{50}}\right) = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{246}\right) = \frac{49}{246}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = x$, $BC = y$, $AB = AC = SB = SC = 1$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất khi tổng $x + y$ bằng

(A) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. (B) $\sqrt{3}$. (C) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. (D) $4\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và SA.

Từ giả thiết suy ra $BC \perp (SAM)$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V = 2V_{B.SAM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{y}{2} \cdot \frac{1}{2} MN \cdot SA = \frac{1}{6} xy \cdot MN.$$

Tam giác NMS vuông tại N nên

$$MN^2 = SM^2 - SN^2 = SC^2 - MC^2 - \frac{x^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}.$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{4} \cdot \frac{y^2}{4} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}\right)} \leq \frac{2}{3}.$$

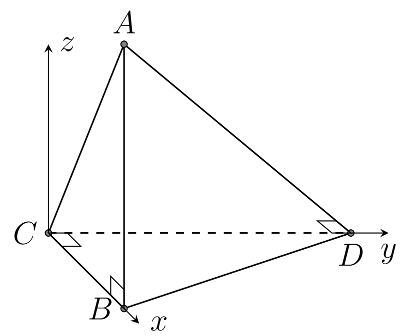
Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{x^2}{4} = \dfrac{y^2}{4} = 1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} \Rightarrow x = y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Vậy $x + y = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Cho khối tứ diện $ABCD$ có $BC = 3$, $CD = 4$, $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = 90^\circ$. Góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng 60°, cô-sin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{43}}{86}$. (B) $\dfrac{4\sqrt{43}}{43}$. (C) $\dfrac{\sqrt{43}}{43}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{43}}{43}$.

Lời giải.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$C(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 4; 0)$. Gọi $A(x; y; z)$,$(x, y, z > 0)$.

$\overrightarrow{BA} = (x - 3; y; z)$, $\overrightarrow{DA} = (x; y - 4; z)$.

Do $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \\ \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x - 3) = 0 \\ 4(y - 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4. \end{cases}$

Vậy $A(3; 4; z)$, suy ra $\overrightarrow{DA} = (3; 0; z), \overrightarrow{CB} = (3; 0; 0)$.

Vì góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng 60° nên

$$\cos 60^\circ = \frac{|\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{DA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{|9|}{3\sqrt{9 + z^2}} \Rightarrow 9 + z^2 = 36 \Rightarrow z = 3\sqrt{3} \Rightarrow A(3; 4; 3\sqrt{3}).$$

Suy ra $\overrightarrow{CB} = (3; 0; 0)$, $\overrightarrow{CA} = (3; 4; 3\sqrt{3})$, $\overrightarrow{CD} = (0; 4; 0)$.

$[\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}] = (0; -9\sqrt{3}; 12) \Rightarrow \vec{n}_1 = (0; -3\sqrt{3}; 4)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

$[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}] = (-12\sqrt{3}; 0; 12) \Rightarrow \vec{n}_2 = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ACD).

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD)

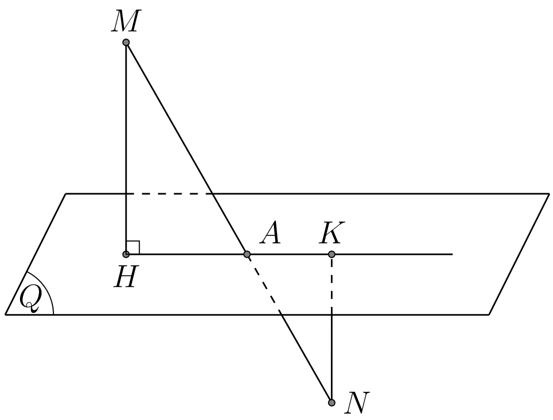
$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n}_1 \cdot \overrightarrow{n}_2|}{|\overrightarrow{n}_1| \cdot |\overrightarrow{n}_2|} = \frac{4}{\sqrt{27+16} \cdot \sqrt{3+1}} = \frac{2\sqrt{43}}{43}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(2;1;0)$, song song với mặt phẳng $(P)\colon x-y-z=0$ và có tổng khoảng cách từ các điểm $M(0;2;0)$ và $N(4;0;0)$ tới đường thẳng đó đạt giá trị nhỏ nhất. Véc-tơ chỉ phương của Δ là

A $\overrightarrow{u_\Delta}=(0;1;-1)$. **B** $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;0;1)$. **C** $\overrightarrow{u_\Delta}=(3;2;1)$. **D** $\overrightarrow{u_\Delta}=(2;1;1)$.

Lời giải.



Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và song song với (P).

Phương trình mặt phẳng (Q) có dạng $x-y-z+D=0$, $(D\neq 0)$.

Vì $A\in(Q)\Rightarrow 2-1+D=0\Rightarrow D=-1$. Vậy $(Q)\colon x-y-z-1=0$.

Thay tọa độ các điểm M,N lần lượt vào vế trái phương trình (Q), $VT(M)=-3<0$, $VT(N)=3>0$. Suy ra M và N nằm khác phía đối với mặt phẳng (Q).

Nhận xét. $\overrightarrow{MA}=(-2;1;0)$, $\overrightarrow{MN}=(4;-2;0)\Rightarrow\overrightarrow{MN}=-2\overrightarrow{MA}\Rightarrow A$ là giao điểm của MN với (Q).

Gọi H,K là hình chiếu vuông góc của M và N trên (Q).Tổng khoảng cách từ các điểm $M(0;2;0)$ và $N(4;0;0)$ tới đường thẳng Δ đạt giá trị nhỏ nhất khi Δ đi qua H. Khi đó $\overrightarrow{HA}$ là một véc-tơ chỉ phương của Δ.

Phương trình đường thẳng d đi qua M và vuông góc với (Q) có dạng $d\colon\begin{cases}x=t\\y=2-t\\z=-t\end{cases}$. Suy ra $H(t;2-t;-t)$. $H\in(Q)\Rightarrow t-2+t-1=0\Rightarrow t=1\Rightarrow H(1;1;-1)\Rightarrow\overrightarrow{HA}=(1;0;1)$.

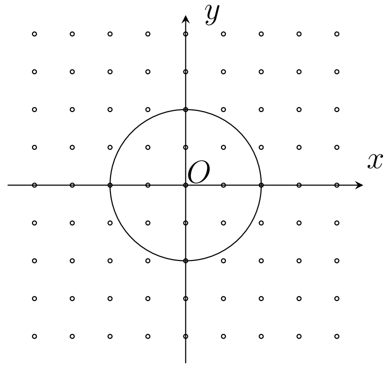
Chọn đáp án B □

Câu 48. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, chọn ngẫu nhiên một điểm mà tọa độ là số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn hoặc bằng 4, các điểm đều có xác suất chọn được là như nhau. Xác suất để chọn được một điểm mà khoảng cách từ điểm được chọn đến gốc tọa độ nhỏ hơn hoặc bằng 2 là

A $\frac{15}{81}$. **B** $\frac{11}{16}$. **C** $\frac{13}{81}$. **D** $\frac{13}{32}$.

Lời giải.

Gọi A là biến cố "điểm chọn được có khoảng cách đến gốc tọa độ nhỏ hơn bằng 2".



Số phần tử của không gian mẫu là số điểm $M(x;y)$ sao cho

$$\{-4 \leq x, y \leq 4,\ x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Vậy $n(\Omega) = 9 \times 9 = 81$.

Số phần tử của A là số điểm M nằm phía trong hoặc nằm trên đường tròn tâm O bán kính bằng 2. Dựa vào hình vẽ có $n(A) = 13$.

Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{13}{81}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - 2 + 2i|$ bằng

(A) $\sqrt{5}$. **B** 1. (C) $\dfrac{3}{2}$. (D) $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
& |z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)| \\
\Leftrightarrow\ & |(z - 1 - 2i)(z - 1 + 2i)| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)| \\
\Leftrightarrow\ & |z - (1 + 2i)| \cdot |z - (1 - 2i)| = |z - (1 - 2i)| \cdot |z + (-1 + 3i)| \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} |z - (1 - 2i)| = 0 \\ |z - (1 + 2i)| = |z + (-1 + 3i)|. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

• Nếu $|z - (1 - 2i)| = 0 \Rightarrow z = 1 - 2i \Rightarrow |z - 2 + 2i| = |-1| = 1$.

• Nếu $|z - (1 + 2i)| = |z + (-1 + 3i)| \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - 2 + 2i|$ bằng $\dfrac{3}{2}$.

Nhận xét: Không cần xét trường hợp sau, vì trong các đáp án 1 là giá trị nhỏ nhất.

Chọn đáp án (B) □

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018}$ với mọi $x \in [0;1]$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\dfrac{1}{2019 \times 2021}$. (B) $\dfrac{1}{2018 \times 2021}$. (C) $\dfrac{1}{2018 \times 2019}$. (D) $\dfrac{1}{2021 \times 2022}$.

Lời giải.

Đặt $I = \displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Vì $x \in [0;1] \Rightarrow x^2 - 1 \leq 0$ nên

$$\begin{aligned}
& 3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018} \\
\Leftrightarrow\ & 3(x^2 - 1)f(x) + x(x^2 - 1)f'(x) \leq (x^2 - 1)x^{2018} \\
\Leftrightarrow\ & 3x^2 f(x) + x^3 f'(x) - [3f(x) + xf'(x)] \leq x^{2020} - x^{2018}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ 3\int\limits_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 x^3\,\mathrm{d}f(x)-\left[3I+\int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}f(x)\right]\le\int\limits_0^1 x^{2020}\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 x^{2018}\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\ 3\int\limits_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x+x^3 f(x)\Big|_0^1-3\int\limits_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x-\left[3I+xf(x)\Big|_0^1-I\right]\le\frac{1}{2021}-\frac{1}{2019}$$

$$\Rightarrow\ f(1)-[2I+f(1)]\le\frac{-2}{2019\cdot 2021}$$

$$\Rightarrow\ I\ge\frac{1}{2019\cdot 2021}.$$

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. C	3. B	4. A	5. C	6. D	7. B	8. A	9. A	10. D
11. C	12. D	13. C	14. C	15. B	16. B	17. A	18. B	19. A	20. D
21. D	22. B	23. A	24. C	25. C	26. D	27. D	28. A	29. C	30. A
31. C	32. D	33. D	34. B	35. D	36. D	37. B	38. D	39. A	40. B
41. A	42. C	43. C	44. D	45. C	46. D	47. B	48. C	49. B	50. A

78 ĐỀ THI THỬ LẦN 2, CỤM CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC BỘ

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1) = 0$; $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^2-1}{4}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$. B. $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$. C. $\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$. D. $2-\mathrm{e}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = (x+1)\mathrm{e}^x \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = x\mathrm{e}^x \end{cases}$.

Khi đó $\dfrac{e^2-1}{4} = x.e^x f(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 x.e^x f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_0^1 x.e^x f'(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{e^2-1}{4}$.

Xét $\int\limits_0^1 [f'(x) + x\mathrm{e}^x]^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_0^1 x\cdot\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = 0$.

$\Rightarrow f'(x) = -x\mathrm{e}^x \Rightarrow f(x) = -\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (1-x)\mathrm{e}^x + C$.

Mà $f(1) = 0$ nên $C = 0$.

Do đó $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (1-x)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (2-x)\mathrm{e}^x\Big|_0^1 = 2-\mathrm{e}$.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(1-x)(x+3)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-3;-1)$ và $(1;+\infty)$.
B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(1;+\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;1)$.

Lời giải.

Lập BBT của hàm số. Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;1)$; nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(1;+\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Cho phương trình $m\cdot 3^{x^2-4x+3} + 3^{1-x^2} = 3\cdot 3^{3-4x} + m$. Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

A. $1 \le m \le 3$. B. $-1 < m < 0$. C. $0 < m < 1$. D. $\begin{cases} 0 < m < 3, \\ m \ne 1; m \ne \dfrac{1}{3^8} \end{cases}$.

Lời giải.

Viết phương trình về dạng
$m\cdot 3^{x^2-4x+3}+3^{1-x^2}=3\cdot 3^{3-4x}+m$
$\Leftrightarrow m3^{x^2-4x+3}+3^{1-x^2}=3^{(x^2-4x+3)+(1-x^2)}+m$
$\Leftrightarrow (3^{x^2-4x+3}-1)(m-3^{1-x^2})=0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-4x+3=0\\ m=3^{1-x^2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3\\ m=3^{1-x^2}(*)\end{array}\right.$.
Để phương trình ban đầu có 4 nghiệm phân biệt thì (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 1 và 3.
$(*)\Leftrightarrow \begin{cases}m>0\\ 1-x^2=\log_3 m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>0\\ x^2=1-\log_3 m\end{cases}$
Điều kiện là $\begin{cases}m>0\\ 1-\log_3 m>0\\ 1-\log_3 m\neq 1\\ 1-\log_3 m\neq 9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>0\\ m<3\\ m\neq 1\\ m\neq \dfrac{1}{3^8}\end{cases}$.
Chọn đáp án D □

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $M(-1;2;0)$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-3z-5=0$. Viết phương trình đường thẳng qua M và vuông góc với mặt phẳng (α)?

A. $\begin{cases}x=1+2t\\ y=-2\\ z=-3t\end{cases}$. B. $\begin{cases}x=-1-2t\\ y=2\\ z=3t\end{cases}$. C. $\begin{cases}x=-1+2t\\ y=2-3t\\ z=-5t\end{cases}$. D. $\begin{cases}x=2-t\\ y=-3+2t\\ z=-5\end{cases}$.

Lời giải.
Phương trình đường thẳng d đi qua $M(-1;2;0)$ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(-2;0;3)$ là $\begin{cases}x=-1-2t\\ y=2\\ z=3t.\end{cases}$
Chọn đáp án B □

Câu 5. Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3+y(y-3)+xy$. Tìm giá trị $P_{\max}$ của biểu thức $P=\dfrac{5x+4y+4}{x+y+3}$.

A. $P_{\max}=0$. B. $P_{\max}=1$. C. $P_{\max}=2$. D. $P_{\max}=3$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}&\log_{\sqrt{3}}\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy\quad(1)\\ \Leftrightarrow\ &\log_{\sqrt{3}}(x+y)-\log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2+xy+2)=x^2-3x+y^2-3y+xy\\ \Leftrightarrow\ &\log_{\sqrt{3}}(x+y)+3x+3y=\log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2+xy+2)+x^2+y^2+xy\\ \Leftrightarrow\ &\log_{\sqrt{3}}(x+y)+2+3x+3y=\log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2+xy+2)+x^2+y^2+xy+2\\ \Leftrightarrow\ &\log_{\sqrt{3}}(3x+3y)+3x+3y=\log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2+xy+2)+x^2+y^2+xy+2.\quad(2)\end{aligned}$$

Đặt $f(t) = \log_{\sqrt{3}} t + t, t > 0 \Rightarrow f'(t) = \dfrac{1}{t \ln \sqrt{3}} + 1 > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\begin{aligned}(2) \Leftrightarrow & f(3x+3y) = f(x^2+y^2+xy+2)\\ \Leftrightarrow & 3x+3y = x^2+y^2+xy+2\\ \Leftrightarrow & 4x^2+4y^2+4xy-12x-12y+8=0\\ \Leftrightarrow & (2x+y)^2 - 6(2x+y)+5 = -3(y-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le 2x+y \le 5.\end{aligned}$$

Khi đó, $P = \dfrac{5x+4y+4}{x+y+3} = 3 + \dfrac{2x+y-5}{x+y+3} \le 3$, vì $\begin{cases} 2x+y-5 \le 0 \\ x+y+3 > 0 \end{cases}$.

Vậy $P_{\max} = 3$ khi và chỉ khi $\begin{cases} 2x+y-5=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 6. Một du khách vào trường đua ngựa đặt cược, lần đầu đặt 20.000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi số tiền lần đặt trước. Người đó thua 10 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 11. Hỏi du khách trên thắng hay thua bao nhiêu tiền?

(A) Hòa vốn. (B) Thua 20.000đ. (C) Thắng 20.000đ. (D) Thua 40.000đ.

Lời giải.

Số tiền du khách đặt trong mỗi lần (kể từ lần đầu) là một cấp số nhân có $u_1 = 20.000$ và công bội $q = 2$.

Du khách thua trong 10 lần liên tiếp đầu tiên nên tổng số tiền thua là

$$S_{10} = \frac{u_1(1-q^{10})}{1-q} = \frac{20000(1-2^{10})}{1-2} = 20000(2^{10}-1)(\text{đồng}).$$

Số tiền du khách thắng trong lần thứ 11 là $u_{11} = u_1 q^{10}$ (đồng).

Ta có $u_{11} - S_{10} = 20000 > 0$. Vậy du khách thắng 20000 đồng.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Phát biểu nào sau đây đúng?

(A) Nếu $f''(x_0) > 0$ và $f'(x_0) = 0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0.

(B) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 khi và chỉ khi $f'(x_0) = 0$.

(C) Nếu $f''(x_0) = 0$ và $f'(x_0) = 0$ thì x_0 không phải là cực trị của hàm số.

(D) Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 và $f(x)$ liên tục tại x_0 thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0.

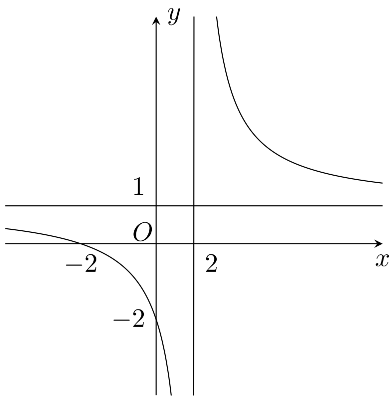
Lời giải.

- "Nếu $f''(x_0) > 0$ và $f'(x_0) = 0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0" sai, vì nếu $f''(x_0) > 0$ và $f'(x_0) = 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0.
- "Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 khi và chỉ khi $f'(x_0) = 0$" sai, ví dụ $f(x) = |x|$ có cực tiểu tại $x = 0$ nhưng không có đạo hàm tại $x = 0$.
- " Nếu $f''(x_0) = 0$ và $f'(x_0) = 0$ thì x_0 không phải là cực trị của hàm số" sai, ví dụ hàm $y = x^4$ có $f''(0) = 0$ và $f'(0) = 0$ nhưng $x = 0$ là điểm cực trị của hàm số.

- " Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 và $f(x)$ liên tục tại x_0 thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0", đúng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8.
Tìm giá trị của a, b để hàm số $y = \dfrac{ax+2}{x-b}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



(A) $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$. (B) $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$. **C** $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$. (D) $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$.

Lời giải.
Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1 \Rightarrow b = 1$.
Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1 \Rightarrow a = 1$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Một ô tô đang chuyển động đều với vận tốc $15\,\mathrm{m/s}$ thì phía trước xuất hiện chướng ngại vật nên người lái xe đạp phanh gấp. Kể từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $-a\,(\mathrm{m/s^2}), (a > 0)$. Biết ô tô chuyển động được 20m nữa thì dừng hẳn. Hỏi a thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $(3; 4)$. (B) $(4; 5)$. **C** $(5; 6)$. (D) $(6; 7)$.

Lời giải.
Chọn gốc thời gian $t = 0$ tại lúc ôtô bắt đầu đạp phanh.

Vận tốc $v(t) - v(0) = \displaystyle\int_0^t -a\,\mathrm{d}t \Rightarrow v(t) = -at + 15$.

Quãng đường $s(t) = \displaystyle\int_0^t (-at + 15)\,\mathrm{d}t = \dfrac{-at^2}{2} + 15t$.

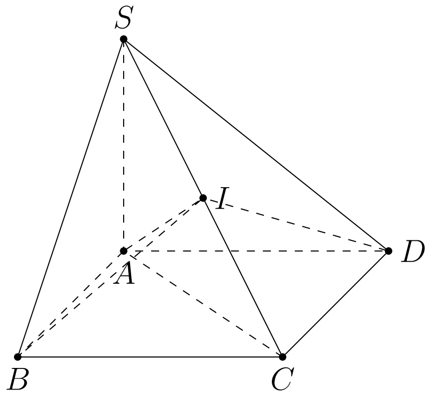
Ta có $\begin{cases} v(t) = 0 \\ s(t) = 20 \end{cases}. \Rightarrow \begin{cases} -at + 15 = 0 \\ \dfrac{-at^2}{2} + 15t = 20 \end{cases} \Rightarrow t = \dfrac{8}{3} \Rightarrow a = \dfrac{15.3}{8} = \dfrac{45}{8} \in (5; 6)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính theo a diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

A $8\pi a^2$. (B) $a^2\sqrt{2}$. (C) $2\pi a^2$. (D) $2a^2$.

Lời giải.



Gọi $AC \cap BD = O$ và I là trung điểm SC.
Ta có $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp SB$.
Chứng minh tương tự ta có $CD \perp SD$.
Ba tam giác $\Delta SAC, \Delta SBC, \Delta SDC$ là ba tam giác vuông có chung cạnh huyền SC nên ta có $AI = BI = DI = \dfrac{1}{2}SC = SI = CI$.
Do đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ và $R = IS = IA = IB = IC = ID = \dfrac{SC}{2} = a\sqrt{2}$.
Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là $S = 4\pi R^2 = 8\pi a^2$.
Chọn đáp án A □

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-2;4;2)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm $M_1; M_2; M_3$ lần lượt là hình chiếu của M trên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz.

A. $(P)\colon \dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{2} = 0$.
B. $(P)\colon \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-4} + \dfrac{z}{-2} = 1$.
C. $(P)\colon \dfrac{x}{-1} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{1} = 1$.
D. $(P)\colon \dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{2} = 1$.

Lời giải.
Ta có $M_1(-2;0;0)$, $M_2(0;4;0)$, $M_3(0;0;2) \Rightarrow (P) : \dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{2} = 1$.
Chọn đáp án D □

Câu 12. Tìm số phức z thỏa mãn $|z-3| = |z-1|$ và $(z+2)(\overline{z} - i)$ là số thực.

A. $z = 2$.
B. $z = -2 + 2i$.
C. $z = 2 - 2i$.
D. Không có z.

Lời giải.
Giả sử $z = a + bi$, khi đó ta có

$$\begin{aligned}
\begin{cases} |z-3| = |z-1| \\ \mathrm{Im}[(z+2)(\overline{z}-i)] = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} |z-3|^2 = |z-1|^2 \\ \mathrm{Im}[(z+2)(\overline{z}-i)] = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} |(a+bi)-3|^2 = |a+bi-1|^2 \\ \mathrm{Im}[(a+bi+2)(\overline{a+bi}-i)] = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} |(a+bi)-3|^2 = |a-1+bi|^2 \\ \mathrm{Im}[(a+2+bi)(a-(b+1)i)] = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)^2 + b^2 = (a-1)^2 + b^2 \\ \mathrm{Im}[((a+2)a + b(b+1)) - i((a+2)(b+1) - ab)] = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 6a + 9 = a^2 - 2a + 1 \\ a + 2b + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $z = a + bi = 2 - 2i$.
Chọn đáp án C □

Câu 13. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 1 - m$. Có bao nhiêu giá trị thực của m để đồ thị tiếp xúc với Ox?

Ⓐ 3. **B** 1. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 1 - m$ tiếp xúc với Ox khi hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 1 - m$ có hai điểm cực trị, trong đó có 1 điểm cực trị nằm trên trục hoành.

$y' = 3x^2 - 6x + 3m$, $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + m = 0$. (1)

Ta có $\Delta' = 1 - m$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Khi đó (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Hàm số có điểm cực trị thuộc trục Ox khi và chỉ khi $y(x_1) \cdot y(x_2) = 0$.

Ta có $y = y' \cdot \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) + 2x(m-1) + 1$.

Do $y'(x_1) = y'(x_2) = 0$ nên

$$\begin{aligned} y(x_1) \cdot y(x_2) = 0 &\Leftrightarrow (2(m-1)x_1 + 1)(2(m-1)x_2 + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4(m-1)^2 x_1 \cdot x_2 + 2(m-1)(x_1 + x_2) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4m^3 - 8m^2 + 8m - 3 = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 14. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, chọn ngẫu nhiên một điểm thuộc tập $S = \{(a;b) | a, b \in \mathbb{Z}; |a| \leqslant 4; |b| \leqslant 4\}$. Nếu các điểm đều có cùng xác suất được chọn như nhau, hãy tính xác suất để chọn được một điểm mà khoảng cách đến gốc tọa độ không vượt quá 2.

Ⓐ $\frac{15}{81}$. **B** $\frac{13}{81}$. Ⓒ $\frac{11}{16}$. Ⓓ $\frac{13}{32}$.

Lời giải.

+ Tính số phần tử không gian mẫu $n(\Omega)$.

Gọi $M(x;y)$ là điểm sao cho $x, y \in \mathbb{Z}$ và $\begin{cases} |x| \le 4 \\ |y| \le 4 \end{cases}$, khi đó $\begin{cases} x \in \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4\} \\ y \in \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4\} \end{cases}$

Vậy số điểm $M(x;y)$ là: $n(\Omega) = 9.9 = 81$.

+ Tính số phần tử biến cố A. Gọi $M(x;y)$ thỏa mãn $x, y \in \mathbb{Z}$ và $OM \le 2 \Leftrightarrow x, y \in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{x^2 + y^2} \le 2 \Leftrightarrow x, y \in \mathbb{Z}$ và $x^2 + y^2 \le 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ x \in \{0; \pm 1; \pm 2\} \\ y^2 \leqslant 4 - x^2 \end{cases}$.

- Nếu $x = 0$ thì $y^2 \le 4 \Rightarrow y \in \{0; \pm 1; \pm 2\}$. Có 5 cách chọn.
- Nếu $x = \pm 1$ thì $y^2 \le 3 \Rightarrow y \in \{0; \pm 1\}$. Có 2. 3= 6 cách chọn.
- Nếu $x = \pm 2$ thì $y^2 \le 0 \Rightarrow y = 0$. Có 2 cách chọn.

Vậy có tất cả $5 + 6 + 2 = 13$ cách chọn điểm M. Tức $n(A) = 13$. Vậy $P(A) = \frac{13}{81}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 15. Gọi $M(a;b)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2}$ và có khoảng cách từ M đến đường thẳng $d\colon y = 3x + 6$ nhỏ nhất. Tìm giá trị của biểu thức $T = 3a^2 + b^2$.

A $T = 4$. **B** $T = 3$. **C** $T = 9$. **D** $T = 10$.

Lời giải.

Gọi $M\left(m; \dfrac{2m+1}{m+2}\right) \Rightarrow \mathrm{d}(M; d) = \dfrac{|3m^2 + 10m + 11|}{\sqrt{10}|m+2|}$.

Khảo sát hàm số $g(m) = \dfrac{3m^2 + 10m + 11}{m+2}$.

Ta có $g'(m) = \dfrac{3m^2 + 12m + 9}{(m+2)^2 = 0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = -3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm $g(m)$

m	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	-8	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó ta có bảng biến thiên hàm $|g(m)|$

m	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$\lvert g\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm $|g(m)|$ đạt GTNN tại $m = -1 \Rightarrow a = -1, b = -1 \Rightarrow 3a^2 + b^2 = 4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = xe^x$, trục hoành, hai đường thẳng $x = -2; x = 3$ có công thức tính là

A $S = \displaystyle\int_{-2}^{3} xe^x \, dx$. **B** $S = \displaystyle\int_{-2}^{3} |xe^x| \, dx$. **C** $S = \left|\displaystyle\int_{-2}^{3} xe^x \, dx\right|$. **D** $S = \pi \displaystyle\int_{-2}^{3} xe^x \, dx$.

Lời giải.

Theo công thức tính diện tích hình phẳng ta có $S = \displaystyle\int_{-2}^{3} |xe^x| \, dx$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 1]$ và $f(-x) + 2018f(x) = e^x \; \forall x \in [-1; 1]$. Tính $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x) \, dx$.

A $\dfrac{e^2 - 1}{2018e}$. **B** $\dfrac{e^2 - 1}{e}$. **C** $\dfrac{e^2 - 1}{2019e}$. **D** 0.

Lời giải.

Ta có $f(-x) + 2018f(x) = \mathrm{e}^x$

$\Rightarrow \int\limits_{-1}^{1} [f(-x) + 2018f(x)]dx = \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{e}^x dx$

$\Rightarrow \int\limits_{-1}^{1} f(-x)dx + 2018 \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{e}^x dx.$

Đặt $t = -x \Rightarrow \int\limits_{-1}^{1} f(-x)dx = \int\limits_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx.$

Do đó ta có $2019 \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = \mathrm{e} - \dfrac{1}{\mathrm{e}} \Rightarrow \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = \dfrac{e^2 - 1}{2019 \cdot \mathrm{e}}.$

Chọn đáp án C □

Câu 18. Trong tất cả các cặp $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(2x - 4y + 6) \geq 1$. Tìm m để tồn tại duy nhất cặp $(x; y)$ sao cho $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0$.

A $\sqrt{13} - 3$ và $\sqrt{13} + 3$.
B $\sqrt{13} - 3$.
C $(\sqrt{13} - 3)^2$.
D $(\sqrt{13} - 3)^2$ và $(\sqrt{13} + 3)^2$.

Lời giải.

Ta có $\log_{x^2+y^2+2}(2x - 4y + 6) \geq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 9$ (1)

Giả sử $M(x; y)$ thỏa mãn phương trình (1), khi đó tập hợp điểm M là hình tròn (C_1) tâm $I(1; -2)$ bán kính $R_1 = 3$.

Ta có $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = m.$ (2)

Với $m > 0$ thì (2) là phương trình đường tròn tâm $J(-1; 1)$, bán kính $R_2 = \sqrt{m}$.

Để tồn tại duy nhất cặp $(x; y)$ thỏa mãn khi và chỉ khi (C_1) và (C_2) tiếp xúc với nhau

$\Leftrightarrow IJ = R_1 + R_2 \Leftrightarrow \sqrt{13} = \sqrt{m} + 3 \Leftrightarrow m = \left(\sqrt{13} - 3\right)^2$

hoặc $JI = |R_1 - R_2| \Leftrightarrow \sqrt{13} = |\sqrt{m} - 3| \Leftrightarrow m = \left(\sqrt{13} + 3\right)^2$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Hàm số $y = 2x^4 + x - 2018$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right)$.
B $\left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.
C $(0; +\infty)$.
D $(1; +\infty)$.

Lời giải.

$y' = 8x^3 + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{2}$.

Từ đó suy ra hàm số đồng biến trên $\left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho số phức z thỏa mãn $z(1 + i) + 12i = 3$. Tìm phần ảo của số $\overline{z}$.

A $-\dfrac{9}{2}$.
B $-\dfrac{15}{2}$.
C $\dfrac{15}{2}i$.
D $\dfrac{15}{2}$.

Lời giải.

$z = \dfrac{3 - 12i}{1 + i} = -\dfrac{9}{2} - \dfrac{15}{2}i \Rightarrow \overline{z} = -\dfrac{9}{2} + \dfrac{15}{2}i$. Phần ảo của $\overline{z}$ là $\dfrac{15}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(Q)\colon x-2y+z-5=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+y^2+(z+2)^2=10$. Mặt phẳng (P) song song mặt phẳng (Q) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi 4π đi qua điểm nào sao đây?

A. $(-2;2;-1)$. B. $(1;-2;0)$. C. $(2;-2;1)$. D. $(0;-1;-5)$.

Lời giải.

$(P): x-2y+z+m=0, m\neq -5$. Đường tròn giao tuyến có bán kính $r=3$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$, bán kính $R=\sqrt{15}$.

$\mathrm{d}(I;(P))=\sqrt{15-9}=\sqrt{6}\Leftrightarrow \dfrac{|1-2+m|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\Leftrightarrow \begin{cases} m=-5 \text{ (loại)} \\ m=7 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}.$

Chọn đáp án C □

Câu 22. Trong tập các số phức, cho phương trình $z^2-4z+(m-2)^2=0, m\in\mathbb{R}$ (1). Gọi m_0 là một giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|$. Hỏi trong đoạn $[0;2018]$ có bao nhiêu giá trị nguyên của m_0?

A. 2019. B. 2015. C. 2014. D. 2018.

Lời giải.

$\Delta'=4-(m-2)^2=4m-m^2$.

Nếu $\Delta'>0\Leftrightarrow 0<m<4$ thì phương trình (1) luôn có 2 nghiệm thực phân biệt z_1,z_2.

Khi đó $|z_1|=|z_2|\Leftrightarrow \begin{cases} z_1=z_2 \\ z_1=-z_2\Leftrightarrow z_1+z_2=0. \end{cases}$ (Điều này không xảy ra).

Nếu $\Delta'<0\Leftrightarrow \begin{cases} m>4 \\ m<0 \end{cases}$ thì phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phức phân biệt z_1,z_2.

$z_1=2+\sqrt{m^2-4m}.i$ và $z_2=2-\sqrt{m^2-4m}.i$

$\Rightarrow |z_1|=|z_2|=\sqrt{4+m^2-4m}=|m-2|$.

Vậy $\begin{cases} m>4 \\ m<0 \end{cases}$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn điều kiên bài toán.

Kết hợp điều kiện suy ra $4<m\leq 2018$, suy ra có 2014 số m_0 nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A\left(2;5;-3\right),B\left(-2;1;1\right),C\left(2;0;1\right)$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x+4y+5z+1=0$. Gọi $D(a;b;c)$ (với $c>0$) thuộc (α) sao cho có vô số mặt phẳng (P) chứa C,D và khoảng cách từ A đến (P) gấp 3 lần khoảng cách từ B đến (P). Tính giá trị biểu thức $S=a^2+b^2+c^2$.

A. $S=18$. B. $S=32$. C. $S=20$. D. $S=26$.

Lời giải.

Vì $\mathrm{d}\left(A,(P)\right)=3\mathrm{d}\left(B,(P)\right)$ nên AB cắt (P) tại điểm $I\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{BI} \\ \overrightarrow{AI}=-3\overrightarrow{BI} \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} I(-4;-1;3) \\ I(-1;2;0) \end{cases}.$

Vì có vô số mặt phẳng (P) chứa C,D và khoảng cách từ A đến (P) gấp 3 lần khoảng cách từ B đến (P) nên I,C,D thẳng hàng hay $D=IC\cap(\alpha)$.

- Nếu $I(-4;-1;3) \Rightarrow (IC): \begin{cases} x = 2+6t \\ y = t \\ z = 1-2t \end{cases} \Rightarrow D(-4;-1;3)$ (thỏa mãn $c > 0$).
- Nếu $I(-1;2;0) \Rightarrow (IC): \begin{cases} x = 2+3t \\ y = -2t \\ z = 1+t \end{cases} \Rightarrow D(-4;4;-1)$ (loại).

Vậy $D(-4;-1;3) \Rightarrow S = 16+1+9 = 26$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Hàm số sau có mấy cực trị $y = 4x^4 + 3x^2 - 5$

A 2. B 1. C 3. D 0.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó suy ra hàm số có đúng 1 điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho với mỗi $m \in S$ có đúng một số phức thỏa mãn $|z-m| = 4$ và $\dfrac{z}{z-6}$ là số thuần ảo. Tính tổng của các phần tử của tập S.

A 0 . B 12 . C 6 . D 14.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi\,(a, b \in \mathbb{R})\,, z \neq 6$. $M(a;b)$ là điểm biểu diễn z. Khi đó ta có

$$\frac{z}{z-6} = \frac{a+bi}{(a+bi)-6} = \frac{(a+bi)(a-6-bi)}{(a-6+bi)(a-6-bi)} = \frac{a(a-6)+b^2+i(b(a-6)-ab)}{(a-6)^2+b^2}.$$

Để $\dfrac{z}{z-6}$ là số thuần ảo thì ta phải có $\begin{cases} a\,(a-6)+b^2 = 0 \quad (1) \\ (a-6)^2 + b^2 \neq 0 \end{cases}$.

Suy ra điểm M thuộc đường tròn tâm $I\,(3;0)$, bán kính $R = 3$.

Từ $|z-m| = 4 \Leftrightarrow |(a+bi)-m| = 4 \Leftrightarrow (a-m)^2 + b^2 = 16 \quad (2)$ suy ra điểm M thuộc đường tròn tâm $I'\,(m;0)$, bán kính $R' = 4$.

Để có đúng 1 điểm M thỏa mãn thì 2 đường tròn $(I;R)$ và $(I';R')$ phải có 1 điểm chung duy nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} II' = R + R' \\ II' = |R - R'| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-3| = 7 \\ |m-3| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} m &= 10 \\ m &= -4 \\ m &= 4 \\ m &= 2 \end{aligned}\right..$$

Khi $m = 10, m = 2$ thì hai đường tròn tiếp xúc tại điểm$(6; 0)$, do vậy các trường hợp này bị loại. Vậy tổng các phần tử của S là $4 - 4 = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$ có đồ thị (C), tiếp tuyến của (C) có hệ số góc đạt giá trị bé nhất khi nào?

(A) $a < 0$ và hoành độ tiếp điểm bằng $\dfrac{b}{3a}$.

(B) $a < 0$ và hoành độ tiếp điểm bằng $-\dfrac{b}{3a}$.

C $a > 0$ và hoành độ tiếp điểm bằng $-\dfrac{b}{3a}$.

(D) $a > 0$ và hoành độ tiếp điểm bằng $\dfrac{b}{3a}$.

Lời giải.

$y' = 3ax^2 + 2bx + 2; y'' = 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{3a}$, y' đạt GTNN khi $a > 0, y'' = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Tìm họ nguyên $F(x)$ của hàm số $y = f(x) = \sin 2x + 2x$.

(A) $F(x) = \dfrac{\cos 2x}{2} + x^2 + C$.

B $F(x) = -\dfrac{\cos 2x}{2} + x^2 + C$.

(C) $F(x) = \cos 2x + 2 + C$.

(D) $F(x) = -\cos 2x + x^2 + C$.

Lời giải.

$\displaystyle\int (\sin 2x + 2x)\,\mathrm{d}x = \int \sin 2x\,\mathrm{d}x + \int 2x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\cos 2x}{2} + x^2 + C.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Thể tích của khối tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = 2a, OB = 3a, OC = 4a$ là

A $4a^3$.

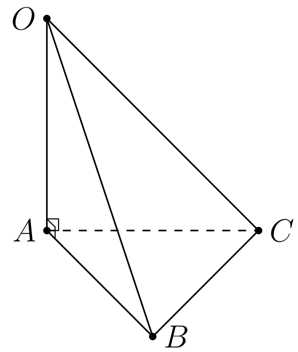
(B) $12a^3$.

(C) $24a^3$.

(D) $2a^3$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} V_{O.ABC} &= \frac{1}{3} \cdot OA.S_{OBC} \\ &= \frac{1}{3} \cdot OA \cdot \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC \\ &= \frac{1}{6} \cdot OA \cdot OB \cdot OC \\ &= 4a^3. \end{aligned}$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Cho hàm số $y = \dfrac{\ln x}{x+1}$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $2y' + (x+1)y'' + \dfrac{1}{x^2} = 0$.

(B) $y' + (x+1)y'' + \dfrac{1}{x^2} = 0$.

(C) $y' + (x+1)y'' - \dfrac{1}{x^2} = 0$.

(D) $2y' + (x+1)y'' - \dfrac{1}{x^2} = 0$.

Lời giải.

Ta có $y = \dfrac{\ln x}{x+1} \Rightarrow y(x+1) = \ln x$.

Lấy đạo hàm hai vế ta được $y'(x+1) + y = \dfrac{1}{x}$

$\Rightarrow y''(x+1) + 2y' = -\dfrac{1}{x^2}$ suy ra $2y' + (x+1)y'' + \dfrac{1}{x^2} = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dưới đây.

x	$+\infty$	-1	0		2	3	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-2 ↗	2	↘	-2 ↗	2 ↗	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = f(m)$ có ba nghiệm phân biệt.

A $m \in (-1;3) \setminus \{0;2\}$.
(B) $m \in [-1;3] \setminus \{0;2\}$.
(C) $m \in (-1;3)$.
(D) $m \in (-2;2)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(x) = f(m)$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-2 < f(m) < 2$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta nhận thấy $-2 < f(x) < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 3 \\ x \neq 0; x \neq 2 \end{cases}$.

Vậy phương trình $f(x) = f(m)$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in (-1;3) \setminus \{0;2\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x - 3y + z - 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và vuông góc với (P).

A $d: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-3}{1}$.
(B) $d: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z+3}{1}$.
(C) $d: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{3}$.
(D) $d: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-3}{3}$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $A(2;-1;3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (2;-3;1)$ nên có phương trình $d\colon \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-3}{1}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Cho $\displaystyle\int_0^2 x\ln(x+1)^{2017}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{b}\ln 3$, ($\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản, $b > 0$). Tính $S = a - b$.

A 6049.
(B) 6053.
(C) 1.
(D) 5.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^2 x\ln(x+1)^{2017}\,\mathrm{d}x = 2017\int_0^2 x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x = 2017 \cdot I$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x+1}dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$.

Khi đó

$$\begin{aligned}I &= \frac{x^2}{2}\ln(x+1)\Big|_0^2 - \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^2}{2}\ln(x+1)\Big|_0^2 - \frac{1}{2}\int\limits_0^2 (x-1+\frac{1}{x+1})\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right)\right]\Big|_0^2\\ &= \frac{3}{2}\ln 3.\end{aligned}$$

Do đó $\int\limits_0^2 x\ln(x+1)^{2017}\,\mathrm{d}x = 2017\cdot\frac{3}{2}\ln 3 = \frac{6051}{2}\ln 3 \Rightarrow a = 6051; b = 2; a - b = 6049.$

Chọn đáp án A □

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;1)$, đường thẳng $\Delta\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 2z - 1 = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa Δ và khoảng cách từ A đến (Q) lớn nhất. Tính thể tích khối tứ diện tạo bởi (Q) và các trục tọa độ Ox, Oy, Oz.

A $\frac{1}{36}$. **B** $\frac{1}{6}$. **C** $\frac{1}{18}$. **D** $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2;1;-1)$. Gọi H là hình chiếu của A trên $\Delta \Rightarrow H(1+2t;t;-1-t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (2t;t+1;-2-t)$.

Ta có $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u} = 0 \Rightarrow 4t + t + 1 + t + 2 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \left(-1;\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

Mặt khác ta có $\mathrm{d}_{(A;(Q))} \le AH$ nên $\mathrm{d}_{(A;(Q))}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $AH \Leftrightarrow (Q) \perp AH$.

Khi đó (Q) đi qua $M(1;0;-1) \in \Delta$ và có véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AH} = \left(-1;\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow (Q)\colon 2x - y + 3z + 1 = 0$.

$\Rightarrow (Q)$ cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz. lần lượt tại $A\left(-\frac{1}{2};0;0\right); B(0;1;0); C\left(0;0;-\frac{1}{3}\right)$.

$\Rightarrow V_{OABC} = \frac{1}{6}\cdot OA\cdot OB\cdot OC = \frac{1}{6}\cdot\left|-\frac{1}{2}\right|\cdot|1|\cdot\left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{36}$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị thực của m để phương trình $(\sin x - 1)(2\cos^2 x - (2m+1)\cos x + m) = 0$ có đúng bốn nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[0;2\pi]$.

A 3. **B** 1. **C** 2. **D** 4.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $(\sin x - 1)(2\cos x - 1)(\cos x - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 1\\ \cos x = \frac{1}{2}\\ \cos x = m\end{array}\right.$.

Với $x \in [0;2\pi]$ thì $x \in \left\{\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right\}$ và $\cos x = m$. Điều kiện cần để phương trình $\cos x = m$ có

ngiệm là $-1 \leq m \leq 1$.
+) $m = -1$. Ta có $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi \in [0; 2\pi]$ (thỏa mãn).
+) $m = 1$. Ta có: $\cos x = 1 \Rightarrow x \in \{0; 2\pi\}$ (loại).
+) $-1 < m < 1$. Khi đó trên đoạn $[0; 2\pi]$, phương trình $\cos x = m$ có hai nghiệm.
Do đó, để phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc $[0; 2\pi]$ thì phương trình $\cos x = m$ phải có một nghiệm thuộc tập $\left\{\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$ và một nghiệm không thuộc tập này.

- Với $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow m = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$ (thỏa mãn).
- Với $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow m = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$ (loại).
- Với $x = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow m = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x \in \left\{\frac{5\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right\}$ (loại).

Vậy có hai giá trị của m ($m = 0$ và $m = -1$) thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 35. Đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{2x-1}{2x+3}$ có mấy đường tiệm cận?

A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Lời giải.
Hàm số có một tiệm cận ngang là $y = 1$; một tiệm cận đứng là $x = \dfrac{-3}{2}$.
Chọn đáp án B □

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0; 1; -1)$, $B(-2; 3; 1)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y = 0$. Đường thẳng AB và mặt cầu (S) có bao nhiêu điểm chung?

A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Lời giải.
Mặt cầu có tâm $I(-1; 2; 0)$ và phương trình đường thẳng AB: $\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$.
Ta thấy I thuộc AB, suy ra đường thẳng AB và mặt cầu (S) có 2 điểm chung.
Chọn đáp án C □

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 120^\circ$, $SA \perp (ABCD)$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng 60°. Tính SA.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. C. $a\sqrt{6}$. D. $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

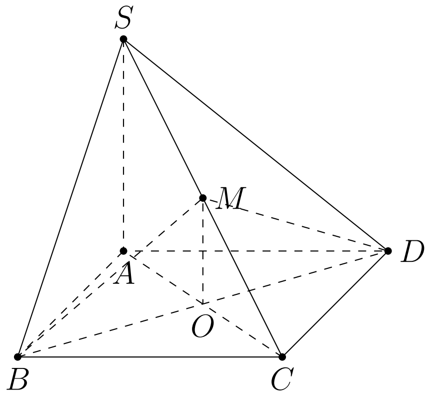
Lời giải.

Ta có $BD \perp SC$, kẻ $OM \perp SC \Rightarrow (BDM) \perp SC$ do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là $\widehat{BMD} = 120^\circ$ hoặc $\widehat{BMD} = 60^\circ$.

Trường hợp 1: $\widehat{BMD} = 120^\circ$ mà tam giác BMD cân tại M nên $\widehat{BMO} = 60^\circ$. Khi đó $MO = BO \cdot \cot 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Do $\Delta OCM \backsim \Delta SCA$ nên $OM = \dfrac{SA \cdot CD}{SC} \Rightarrow SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Trường hợp 2: $\widehat{BMD} = 60^\circ$ tính ra thì vô lý.



Chọn đáp án D □

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon (m^2+1)x - (2m^2-2m+1)y + (4m+2)z - m^2 + 2m = 0$ luôn chứa một đường thẳng Δ cố định khi m thay đổi. Đường thẳng d đi qua $M(1;-1;1)$ vuông góc (Δ) và cách O một khoảng lớn nhất có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (-1;b;c)$. Tính $b^2 - c$?

(A) 2. (B) 23. (C) 19. (D) -1.

Lời giải.

Cho $m=0$ có mặt phẳng $(P_0)\colon x - y + 2z = 0$, suy ra $\vec{n} = (1;-1;2)$.

Cho $m=1$ có mặt phẳng $(P_1)\colon 2x - y + 6z + 1 = 0$ suy ra $\vec{n'} = (2;-1;6)$.

Suy ra Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u_1} = \left[\vec{n};\vec{n'}\right] = (-4;-2;1)$.

Gọi H là hình chiếu của O trên d thì OH là khoảng cách từ O đến d.

Ta có $OH \le OM$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với $d \perp OM$.

Vậy d có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = \left[\vec{u_1};\overrightarrow{OM}\right] = (-1;5;6) \Rightarrow b^2 - c = 25 - 6 = 19$.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Trên kệ sách có 15 cuốn sách khác nhau gồm 10 cuốn sách Toán và 5 cuốn sách Văn. Lần lượt lấy 3 cuốn mà không để lại vào kệ. Tìm xác suất để lấy được hai cuốn đầu là sách Toán và cuốn thứ ba là sách Văn.

(A) $\dfrac{45}{91}$. (B) $\dfrac{15}{91}$. (C) $\dfrac{90}{91}$. (D) $\dfrac{15}{182}$.

Lời giải.

Lần lượt lấy ra 3 cuốn mà không để lại trên kệ có $n(\Omega) = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$ cách.

Số cách lấy được hai cuốn đầu là sách Toán và cuốn thứ ba là sách Văn là $n(A) = A_{10}^2.C_5^1 = 450$ (cách).

Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \dfrac{450}{2730} = \dfrac{15}{91}$.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Từ tập hợp $\{4;5;6;7;8;9\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 2 chữ số khác nhau?

(A) 15. (B) 30. (C) 36. (D) 25.

Lời giải.

Số các số tự nhiên có 2 chữ số khác nhau lập được là $A_6^2 = 30$.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Tìm các giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{x - m^2}{x - 3m + 2}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$?

(A) $m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.
(B) $m \in (-\infty; 1)$.
(C) $m \in (1; 2)$.
D $m \in (2; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{x - m^2}{x - 3m + 2}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ khi

$$\begin{cases} y' > 0 \\ 3m - 2 \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ m \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $5^n \mathrm{C}_n^0 - 5^{n-1}\mathrm{C}_n^1 + 5^{n-2}\mathrm{C}_n^2 - \cdots + (-1)^n \mathrm{C}_n^n = 1024$. Tìm hệ số của x^3 trong khai triển $(3 - x)^n$.

(A) 270.
B -90.
(C) 90.
(D) -270.

Lời giải.

Ta có $5^n \mathrm{C}_n^0 - 5^{n-1}\mathrm{C}_n^1 + 5^{n-2}\mathrm{C}_n^2 - \cdots + (-1)^n \mathrm{C}_n^n = (5-1)^n = 4^n$.

Do đó $4^n = 2^2n = 1024 \Rightarrow 2n = 10 \Leftrightarrow n = 5$.

Hệ số của x^k trong khai triển $(3 - x)^5$ là: $\mathrm{C}_5^k \cdot 3^{5-k} \cdot (-1)^k$.

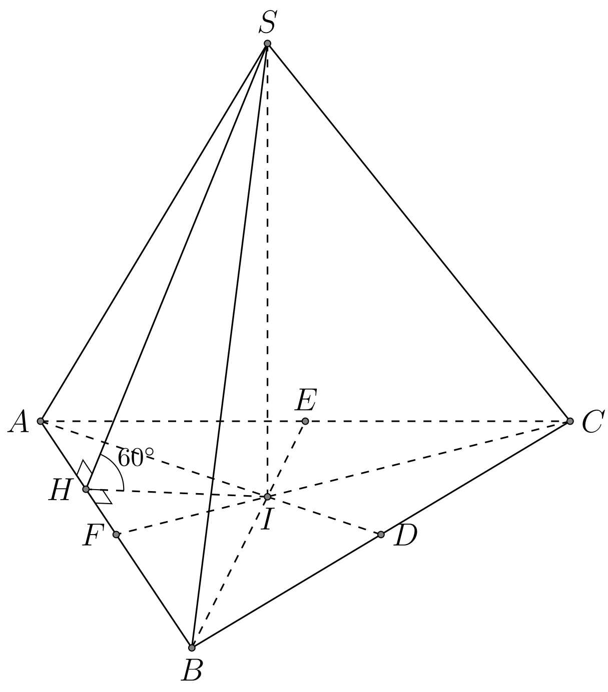
Vậy hệ số của x^3 trong khai triển $(3 - x)^5$ là: $-\mathrm{C}_5^3 \cdot 3^2 = -90$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 5\,\mathrm{cm}, BC = 6\,\mathrm{cm}, CA = 7\,\mathrm{cm}$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC) nằm bên trong tam giác ABC. Các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCA)$ đều tạo với đáy một góc 60°. Gọi AD, BE, CF là các đường phân giác của tam giác ABC với $D \in BC, E \in AC, F \in AB$. Thể tích khối chóp $S.DEF$ gần nhất với số nào sau đây?

(A) $2,9\,\mathrm{cm}^3$.
(B) $4,1\,\mathrm{cm}^3$.
(C) $3,7\,\mathrm{cm}^3$.
D $3,4\,\mathrm{cm}^3$.

Lời giải.



Vì các mặt phẳng $(SAB),(SBC),(SCA)$ đều tạo với đáy một góc 60° và hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC) nằm bên trong tam giác ABC nên ta có hình chiếu của S xuống mặt phẳng (ABC) là tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC.

Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC thì $p=\dfrac{5+6+7}{2}=9$.

Ta có $S_{ABC}=\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}=6\sqrt{6}$ và $r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{6\sqrt{6}}{9}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Chiều cao của hình chóp là: $h=r\cdot\tan 60^\circ=2\sqrt{2}$.

Kí hiệu $BC=a, AC=b, AB=c$, vì BE là phân giác của góc B nên ta có $\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{BA}{BC}$.

Tương tự $\dfrac{FA}{FB}=\dfrac{CA}{CB},\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$.

Khi đó $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\dfrac{AE}{AC}\cdot\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{AB}{AB+BC}\cdot\dfrac{AC}{AC+BC}$.

Tương tự ta có $\dfrac{S_{CED}}{S_{ABC}}=\dfrac{CA}{CA+AB}\cdot\dfrac{CB}{CB+AB}$, $\dfrac{S_{BFD}}{S_{ABC}}=\dfrac{BC}{BC+CA}\cdot\dfrac{BA}{BA+CA}$.

Do đó

$$\begin{aligned}S_{DEF}&=S_{ABC}\cdot\left(1-\frac{ab}{(a+c)(b+c)}-\frac{bc}{(b+a)(c+a)}-\frac{ac}{(a+b)(c+b)}\right)\\&=\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\cdot S_{ABC}\\&=\frac{210\sqrt{6}}{143}.\end{aligned}$$

Suy ra $V_{S.DEF}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{210\sqrt{6}}{143\cdot 2\sqrt{2}}=\dfrac{280\sqrt{3}}{143}\left(\text{cm}^3\right)\approx 3,4\left(\text{cm}^3\right)$.

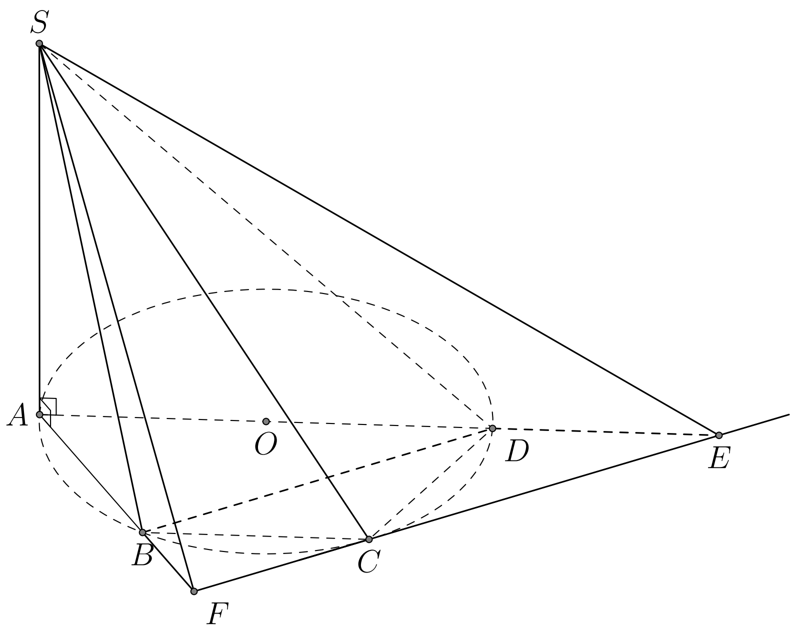
Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AD=2a$, $SA\perp(ABCD)\,, SA=\dfrac{3a}{2}$. Tính khoảng cách giữa BD và SC.

A $\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **C** $\dfrac{5a\sqrt{2}}{12}$. **D** $\dfrac{5a\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

Kẻ đường thẳng CE song song với BD ($E \in AD$); $CE \cap AB = F$. Khi đó $\mathrm{d}(BD, SC) = \mathrm{d}(BD, (SCE)) = \mathrm{d}(D, (SCE)) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}(A; (SCE))$.
Ta có tam giác AFE vuông tại F và $AF = \dfrac{3a}{2}$.
Hạ $AH \perp SF$ tại H $\Rightarrow AH \perp (SCE)$.
$\Rightarrow \mathrm{d}(A; (SCE)) = AH = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.
Từ đó có $\mathrm{d}(BD, SC) = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Cho dãy số (u_n) có $\lim u_n = 2$. Tính giới hạn $\lim \dfrac{3u_n - 1}{2u_n + 5}$.

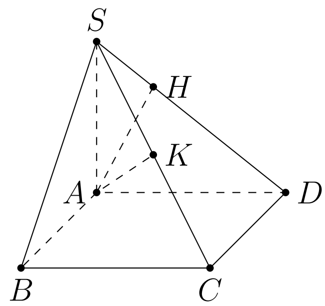
(A) $\dfrac{-1}{5}$. (B) $\dfrac{3}{2}$. **(C)** $\dfrac{5}{9}$. (D) $+\infty$.

Lời giải.
Ta có $\lim \dfrac{3u_n - 1}{2u_n + 5} = \dfrac{3 \cdot 2 - 1}{2 \cdot 2 + 5} = \dfrac{5}{9}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy. H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SD, SC. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) AK vuông góc với (SCD). (B) BC vuông góc với (SAC).
(C) AH vuông góc với (SCD). (D) BD vuông góc với (SAC).

Lời giải.
Ta có $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$ và $AH \perp SD \Rightarrow AH \perp (SCD)$.

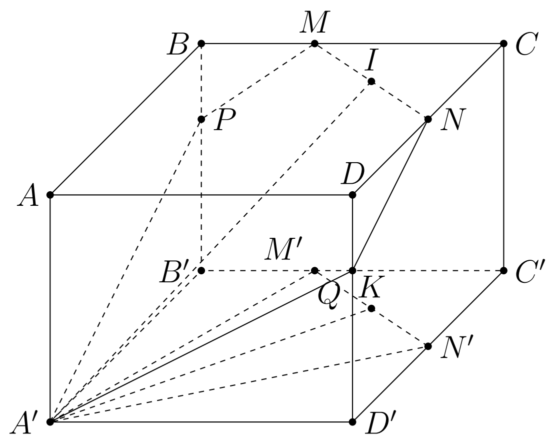


Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là 2. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Tính diện tích thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi mặt phẳng $(A'MN)$.

(A) $\dfrac{7\sqrt{17}}{6}$. (B) $\dfrac{5\sqrt{17}}{6}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{35}}{7}$. (D) $\dfrac{3\sqrt{35}}{7}$.

Lời giải.



Thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi mặt phẳng $(A'MN)$ là ngũ giác $A'PMNQ$.
Hình chiếu của ngũ giác $A'PMNQ$ lên mặt phẳng $A'B'C'D'$ là ngũ giác $A'B'M'N'D'$.
Áp dụng công thức $S' = S\cdot\cos\varphi \Rightarrow S'_{A'B'M'N'D'} = S_{A'PMNQ}\cdot\cos\varphi$.
Ta có $S'_{A'B'M'N'D'} = S_{A'B'C'D'} - S_{M'C'N'} = 2\cdot 2 - \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \dfrac{7}{2}$.
Gọi I, K lần lượt là trung điểm của MN và $M'N'$ $\Rightarrow A'I \perp MN$ và $A'K \perp M'N' \Rightarrow \varphi = \widehat{IA'K}$.

Ta có $A'M = \sqrt{A'B^2 + BM^2} = \sqrt{8+1} = 3 \Rightarrow A'I = \sqrt{A'M^2 - MI^2} = \sqrt{9 - \dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$.

$A'M'^2 = A'B'^2 + B'M'^2 = 5 \Rightarrow A'K = \sqrt{A'M'^2 - M'K^2} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Xét tam giác $A'IK$ vuông tại K, ta có $\cos\varphi = \dfrac{A'K}{A'I} = \dfrac{3}{\sqrt{17}}$.

Suy ra $S_{A'PMNQ} = \dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{17}}{3} = \dfrac{7\sqrt{17}}{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Cho $\displaystyle\int_1^3 \frac{(x+6)^{2017}}{x^{2019}}\,\mathrm{d}x = \frac{a^{2018} - 3^{2018}}{6\cdot 2018}$. Tính a.

A 7. **B** 9. **C** 6. **D** 8.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_1^3 \frac{(x+6)^{2017}}{x^{2019}}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{(x+6)^{2017}}{x^{2017}}\cdot\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \left(1+\frac{6}{x}\right)^{2017}\cdot\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 1 + \dfrac{6}{x} \Rightarrow$ nếu $x = 1$ thì $t = 7$; nếu $x = 3$ thì $t = 3$; $\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{6x^2}\,\mathrm{d}x$.

Khi đó $I = \dfrac{1}{6}\displaystyle\int_3^7 t^{2017}\,\mathrm{d}t = \frac{7^{2018} - 3^{2018}}{6\cdot 2018} \Rightarrow a = 7$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^4 - 3x^2 - 4)^{\sqrt{2}}$.

A $D = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. **B** $D = (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.
C $D = (-\infty; +\infty)$. **D** $D = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải.

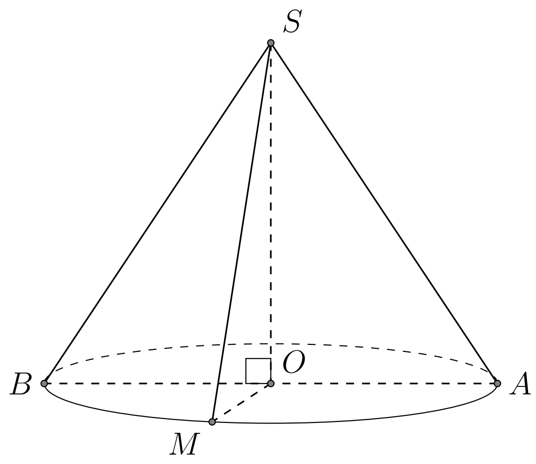
Hàm số xác định khi và chỉ khi $x^4 - 3x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 4 \\ x^2 < -1 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -2 \end{cases}$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Một hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng $2a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là 120°. Thiết diện qua đỉnh của hình nón là một tam giác. Diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của thiết diện đó là bao nhiêu?

A $S_{\max} = 8a^2$. **B** $S_{\max} = 4a^2\sqrt{2}$. **C** $S_{\max} = 4a^2$. **D** $S_{\max} = 16a^2$.

Lời giải.



Giả sử O là tâm đáy và AB là một đường kính của đường tròn đáy hình nón.

Thiết diện qua đỉnh của hình nón là tam giác cân SAM.

Theo giả thiết hình nón có bán kính đáy $R = OA = 2a\sqrt{3}$, $\widehat{ASB} = 120^\circ$ nên $\widehat{ASO} = 60^\circ$.

Xét tam giác SOA vuông tại O, ta có $\sin 60^\circ = \dfrac{OA}{SA} \Rightarrow SA = \dfrac{OA}{\sin 60^\circ} = 4a$.

Diện tích thiết diện là $S_{SAM} = \dfrac{1}{2} SA \cdot SM \cdot \sin \widehat{ASM} = \dfrac{1}{2} \cdot 4a \cdot 4a \cdot \sin \widehat{ASM} = 8a^2 \cdot \sin \widehat{ASM}$.

Do $0 < \sin \widehat{ASM} \leqslant 1$ nên S_{SAM} lớn nhất khi và chỉ khi $\sin \widehat{ASM} = 1$ hay khi tam giác ASM vuông cân tại đỉnh S (vì $\widehat{ASB} = 120^\circ > 90^\circ$ nên tồn tại tam giác ASM thoả mãn).

Vậy diện tích thiết diện lớn nhất là $S_{\max} = 8a^2$ (đvdt).

Chọn đáp án A □

——— **HẾT** ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. D	3. D	4. B	5. D	6. C	7. D	8. C	9. C	10. A
11. D	12. C	13. B	14. B	15. A	16. B	17. C	18. D	19. B	20. D
21. C	22. C	23. D	24. B	25. A	26. C	27. B	28. A	29. A	30. A
31. A	32. A	33. A	34. C	35. B	36. C	37. D	38. C	39. B	40. B
41. D	42. B	43. D	44. B	45. C	46. C	47. A	48. A	49. A	50. A

79 ĐỀ THI THỬ TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH - PHÚ YÊN, NĂM 2017-2018 LẦN 2

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

(A) $\left[\begin{array}{l} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \geq 0 \end{array}\right.$.

(B) $\left[\begin{array}{l} a = b = 0, c > 0 \\ a < 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{array}\right.$.

(C) $\left[\begin{array}{l} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{array}\right.$.

(D) $a > 0; b^2 - 3ac \leq 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

- Khi $a = 0, b = 0, c > 0$ thì $y' = c > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Khi $a \neq 0$, yêu cầu bài toán tương đương với $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0. \end{cases}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Cho số thực $a > 1$, $b \neq 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\log_a b^2 = -2\log_a |b|$.

(B) $\log_a b^2 = 2\log_a b$.

(C) $\log_a b^2 = 2\log_a |b|$.

(D) $\log_a b^2 = -2\log_a b$.

Lời giải.

Ta có $b \neq 0 \Leftrightarrow |b| > 0$. Khi đó ta có $\log_a b^2 = \log_a |b|^2 = 2\log_a |b|$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{mx^2+1}+x^2}{x(x-1)}$ có hai tiệm cận ngang.

(A) Không tồn tại m.

(B) $m < 0$.

(C) $m \geq 0$.

(D) $m > 0$.

Lời giải.

Ta xét hai trường hợp

- Nếu $m \geq 0$, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{mx^2+1}+x^2}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{\dfrac{m}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}+1}{1-\dfrac{1}{x}} = 1$.

  Và $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{mx^2+1}+x^2}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{\dfrac{m}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}+1}{1-\dfrac{1}{x}} = 1$.

  Do đó hàm số luôn có một tiệm cận nang là $y = 1$ khi $m \geq 0$.
- Nếu $m < 0$ khi đó hàm số có tập xác định là $\mathscr{D} = \left[-\dfrac{1}{\sqrt{m}}; \dfrac{1}{\sqrt{m}}\right] \setminus \{0; 1\}$ nên hàm số không có tiệm cận ngang.

Vậy không có giá trị m nào thỏa bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x^2 - 1)^{-2}$.

(A) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
(B) $\mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
(C) $\mathscr{D} = (-1; 1)$.
(D) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Lời giải.

Hàm số $y = (x^2 - 1)^{-2}$ là hàm số lũy thừa có số mũ -2 là số nguyên âm nên hàm số xác định khi $x^2 - 1 \neq 0$.

Vậy $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ là tập xác định của hàm số đã cho.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Hàm số $y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x - 3)^2} + 2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 1.
(B) 3.
(C) 2.
(D) 0.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2x - 2}{\sqrt[3]{x^2 - 2x - 3}}$, $\forall x \neq -1, x \neq 3$.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\sqrt[3]{16} + 2$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đã cho có ba điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $2\log_4(x-3) + \log_4(x-6)^2 = 1$ là

(A) 9.
(B) $\dfrac{27 + \sqrt{17}}{2}$.
(C) 18.
(D) $\dfrac{18 + \sqrt{17}}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $3 < x \neq 6$.

$$\begin{aligned}
& 2\log_4(x-3) + \log_4(x-6)^2 = 1 \\
\Leftrightarrow\ & (x-3)^2(x-6)^2 = 4 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} &(x-3)(x-6) = 2 \\ &(x-3)(x-6) = -2 \end{aligned}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} &x^2 - 9x + 16 \\ &x^2 - 9x + 20 \end{aligned}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} &x = 4 \\ &x = 5 \\ &x = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{2}. \end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện suy ra nghiệm của phương trình là $x = 4$; $x = 5$; $x = \dfrac{9+\sqrt{17}}{2}$.

Vậy tổng các nghiệm là $\dfrac{27+\sqrt{17}}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Cho hai hàm số $f(x) = \log_{0,5} x$ và $g(x) = 2^{-x}$. Xét các mệnh đề sau:

(I) Đồ thị hai hàm số đối xứng nhau qua đường thẳng $y = -x$.

(II) Tập xác định của hai hàm số trên là $\mathbb{R}$.

(III) Đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại đúng một điểm.

(IV) Hai hàm số đều nghịch biến trên tập xác định của nó.

Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên?

A 3. B 2. C 1. D 4.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x, \quad g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

* Đồ thị hai hàm số đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x \Rightarrow$ (I) sai.

* Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $(0; +\infty) \Rightarrow$ (II) sai.

* Đồ thị của 2 hàm số cắt nhau tại đúng 1 điểm thuộc đường thẳng $y = x \Rightarrow$ (III) đúng.

* Do $\dfrac{1}{2} < 1$ nên hai hàm số đều nghịch biến trên tập xác định của nó $\Rightarrow$ (IV) đúng.

Vậy có hai mệnh đề đúng.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Cho $\left(\sqrt{5}-2\right)^a > \left(\sqrt{5}-2\right)^b$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A $a > b$. B $a < b$. C $a \leq b$. D $a \geq b$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{5} - 2 < 1$, do đó nếu $\left(\sqrt{5}-2\right)^a > \left(\sqrt{5}-2\right)^b$ thì ta suy ra $a < b$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Cho phần vật thể $(\Im)$ giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x = 0$ và $x = 2$. Cắt phần vật thể $(\Im)$ bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \leq x \leq 2)$, ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích V của phần vật thể $(\Im)$.

A $V = \dfrac{4}{3}$. B $V = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. C $V = 4\sqrt{3}$. D $V = \sqrt{3}$.

Lời giải.

Diện tích thiết diện: $S_\triangle = \dfrac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}$.

$$V_\Im = \int\limits_0^2 \dfrac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}\,dx = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\int\limits_0^2 x^2(2-x)\,dx = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 10. Cho số phức z, biết rằng các điểm biểu diễn hình học của các số phức $z; iz$ và $z + iz$ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 18. Tính mô-đun của số phức z.

A $2\sqrt{3}$. B $3\sqrt{2}$. C 6. D 9.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$, với a, b là số thực. Gọi M, N, P lần lượt là điểm biểu diễn số phức z, iz và $z + iz$.
Khi đó $M(a; b); N(-b; a); P(a - b; a + b)$.
Suy ra $MN = \sqrt{2\left(a^2 + b^2\right)}; NP = PM = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Suy ra tam giác MNP vuông cân tại P.
Ta có $S_{\Delta MNP} = 18 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \cdot NP \cdot PM = 18 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 36 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 6$.
Chọn đáp án C □

Câu 11. Cho số phức $z = a + bi$ (với a, b là số nguyên) thỏa mãn $(1 - 3i)z$ là số thực và $|\overline{z} - 2 + 5i| = 1$. Khi đó $a + b$ bằng

A 9. B 8. C 7. D 6.

Lời giải.

Ta có $(1 - 3i)z = (a + 3b) + (b - 3a)i$, $\overline{z} - 2 + 5i = (a - 2) + (5 - b)i$.
Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} b - 3a = 0 \\ (a-2)^2 + (5-b)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a \\ 5a^2 - 17a + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a \\ \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{7}{5} \text{ (loại)} \\ a = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 6. \end{cases}$$

Vậy $a + b = 8$.
Chọn đáp án B □

Câu 12. Cho a là một số dương lớn hơn 1. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ với $x, y > 0$.
B $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.
C $\log_a x$ có nghĩa khi và chỉ khi $x > 0$.
D $\log_a \dfrac{x}{y} = \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$ với $x, y > 0$.

Lời giải.

Các công thức đúng theo sách giáo khoa Toán 12, chỉ có công thức sau sai: $\log_a \dfrac{x}{y} = \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$ với $x, y > 0$. Công thức đúng là $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ với $x, y > 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Cho bốn mệnh đề sau

I. $\displaystyle\int \cos^2 x \, dx = \frac{\cos^3 x}{3} + C$.
II. $\displaystyle\int 3^x \, dx = 3^x \cdot \ln 3 + C$.
III. $\displaystyle\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C$ với $\alpha \in \mathbb{R}$.
IV. Nếu $F(x), G(x)$ là các nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(x) = G(x)$.

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề **sai**?

A 3. B 1. C 4. D 2.

Lời giải.

Ta lần lượt xét 4 mệnh đề đã cho

- Mệnh đề (I) sai vì $\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{\sin 2x}{2}\right) + C$.
- Mệnh đề (II) sai vì $\int 3^x \,\mathrm{d}x = \dfrac{3^x}{\ln 3} + C$.
- Mệnh đề (III) sai vì thiếu điều kiện $\alpha \neq -1$.
- Mệnh đề (IV) sai vì nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là có một họ nguyên hàm, chúng sai khác nhau một hằng số.

Vậy có 4 mệnh đề SAI.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$. Xét các mệnh đề:

I. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.f(\sin x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$.

II. $\int\limits_0^1 \dfrac{f(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\mathrm{e}} \dfrac{f(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Mệnh đề đúng là

(A) Chỉ I đúng. **(B) Cả I, II đúng.** (C) Cả I, II sai. (D) Chỉ II đúng.

Lời giải.

Xét mệnh đề I. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\cos x.f(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$. Từ đó:

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.f(\sin x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$. Vậy I đúng.

Xét mệnh đề II. $\int\limits_0^1 \dfrac{f(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \mathrm{e}^x \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = \mathrm{e}$. Từ đó:

$\int\limits_0^1 \dfrac{f(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\mathrm{e}} \dfrac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int\limits_1^{\mathrm{e}} \dfrac{f(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$. Vậy II đúng.

Do đó cả I, II đều đúng.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Cho các số phức z thỏa mãn $|z-1| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = \left(1+\sqrt{3}i\right)z + 2$ là một đường tròn. Tính bán kính R của đường tròn đó.

(A) $R = 4$. (B) $R = 16$. (C) $R = 8$. (D) $R = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$w - 2 = (1+\sqrt{3}i)z$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \frac{w-2}{1+\sqrt{3}i}=z\\&\Leftrightarrow \frac{w-2}{1+\sqrt{3}i}-1=z-1\\&\Rightarrow \left|\frac{w-3-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\right|=|z-1|\\&\Leftrightarrow |w-3-\sqrt{3}i|=|z-1|\cdot|1+\sqrt{3}i|=4.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra bán kính $R=4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;1)$. Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm O, A, B, C.

(A) $x^2+y^2+z^2-2x-3y+z=0$.
(B) $x^2+y^2+z^2+2x-3y-z=0$.
(C) $x^2+y^2+z^2-2x-3y-z=0$.
(D) $x^2+y^2+z^2-2x+3y-z=0$.

Lời giải.

Phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm O, A, B, C có dạng:

$$(S)\colon x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0.$$

(S) đi qua bốn điểm O, A, B, C nên ta thu được

$$\begin{cases}d=0\\4-4a+d=0\\9-6b+d=0\\1-2c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=\dfrac{3}{2}\\c=\dfrac{1}{2}\\d=0.\end{cases}$$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $x^2+y^2+z^2-2x-3y-z=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$, $d_2\colon \begin{cases}x=2+t\\y=1+t\\z=2-t.\end{cases}$ Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) d_1 và d_2 vuông góc nhau.
(B) d_1 và d_2 song song nhau.
(C) d_1 và d_2 cắt nhau.
(D) d_1 và d_2 trùng nhau.

Lời giải.

Từ giả thiết thì d_1 đi qua điểm $M(1;-1;2)$ và có vec-tơ chỉ phương $\vec{v}_1=(2;1;3)$.

d_2 đi qua điểm $N(2;1;2)$ và có vec-tơ chỉ phương $\vec{v}_2=(1;1;-1)$.

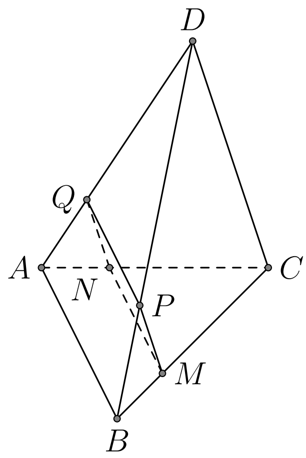
Ta có $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=2+1-3=0 \Leftrightarrow \vec{v}_1\perp\vec{v}_2$ hay hai đường thẳng d_1 và d_2 vuông góc với nhau.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M ở trên cạnh BC (khác B và C). Mp(α) qua M song song với AB và CD. Thiết diện của (α) với tứ diện là

A Hình bình hành. **B** Hình thang. **C** Hình chữ nhật. **D** Hình thoi.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases}(\alpha) \mathbin{/\!/} AB \\ M \in (\alpha) \cap (ABC)\end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = MN \mathbin{/\!/} AB$ với $N \in AC$.

$\begin{cases}(\alpha) \mathbin{/\!/} CD \\ M \in (\alpha) \cap (DBC)\end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (DBC) = MP \mathbin{/\!/} CD$ với $P \in AC$.

$\begin{cases}(\alpha) \mathbin{/\!/} AB \\ P \in (\alpha) \cap (ABD)\end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABD) = PQ \mathbin{/\!/} AB$ với $\in AC$.

Khi đó $(\alpha) \cap (ACD) = QN$. Mà $(\alpha) \mathbin{/\!/} CD$ nên $QN \mathbin{/\!/} CD$.

Do đó $MN \mathbin{/\!/} PQ, QN \mathbin{/\!/} MP$ hay $MNPQ$ là hình bình hành.

Ta có $\widehat{(AB, CD)} = \widehat{(MN, MP)}$ nên $MNPQ$ không thể là hình chữ nhật.

Vì M bất kỳ trên BC nên $MN \neq MP$ hay $MNQP$ cũng không là hình thoi.

Vậy $MN \mathbin{/\!/} PQ, QN \mathbin{/\!/} MP$ hay $MNPQ$ là hình bình hành.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Tính giới hạn sau $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{\sqrt[3]{8x^6 - 4x^3}}$.

A $\dfrac{3}{2}$. **B** 0. **C** 1. **D** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{\sqrt[3]{8x^6 - 4x^3}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2\left(3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{8 - \frac{4}{x^3}}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{8 - \frac{4}{x^3}}} = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x + \dfrac{1}{x^3}\right)^{20}$ là

A 15504 . **B** 1140. **C** 4845. **D** 38760.

Lời giải.

Ta có

$$\left(x + \frac{1}{x^3}\right)^{20} = \sum_{k=0}^{20} \mathrm{C}_{20}^{k} \cdot x^k \cdot \left(\frac{1}{x^3}\right)^{20-k} = \sum_{k=0}^{20} \mathrm{C}_{20}^{k} \cdot x^{4k-60}.$$

Số hạng tổng quát trong khai triển trên là $\mathrm{C}_{20}^{k} \cdot x^{4k-20}$ là số hạng không chứa x thì

$$4k - 60 = 0 \Rightarrow k = 15.$$

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển trên là $\mathrm{C}_{20}^{15} = 15504$.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Cho tổng $S = 2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + ... + \dfrac{1}{2^n} + ...$ Tổng S bằng

A ∞ . **B** 2. **C** 3. **D** 4.

Lời giải.

Ta có

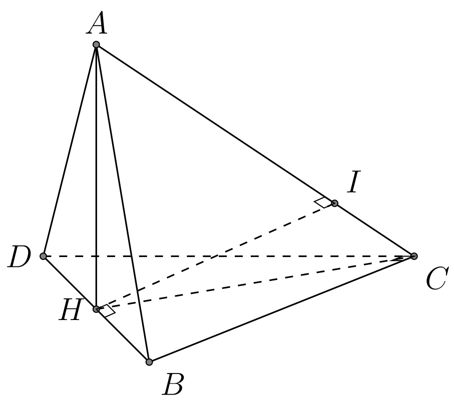
$$\begin{aligned} S &= 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots \\ &= 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right) \\ &= 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho tứ diện $ABCD$ có ΔBCD vuông cân tại C và ABD là tam giác đều cạnh a nằm trong mặt phẳng vuông góc với mp(BCD). Tính khoảng cách giữa AC với BD.

A $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C** $\dfrac{a}{2}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm BD nên từ giả thiết suy ra $AH \perp BD$ và $CH \perp BD$.
Khi đó $BD \perp (AHC)$.
Trong mặt phẳng (AHC), kẻ $HI \perp AC$.
Hơn nữa, từ $BD \perp (AHC)$ ta suy ra $HI \perp BD$.
Vậy HI là đoạn vuông góc chung của AC với BD.
Tam giác AHC vuông tai H có đường cao HI nên

$$\frac{1}{HI^2}=\frac{1}{AH^2}+\frac{1}{HC^2}=\frac{1}{\frac{3a^2}{4}}+\frac{1}{\frac{a^2}{4}}=\frac{16}{3a^2}.$$

Vậy khoảng cách giữa AC và BD là $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành, M và N lần lượt là trung điểm BC và CD. Biết thể tích của $S.ABCD$ là V khi đó thể tích của tứ diện $SCMN$ bằng

A $\dfrac{V}{8}$. **B** $\dfrac{V}{4}$. **C** $\dfrac{3V}{8}$. **D** $\dfrac{V}{6}$.

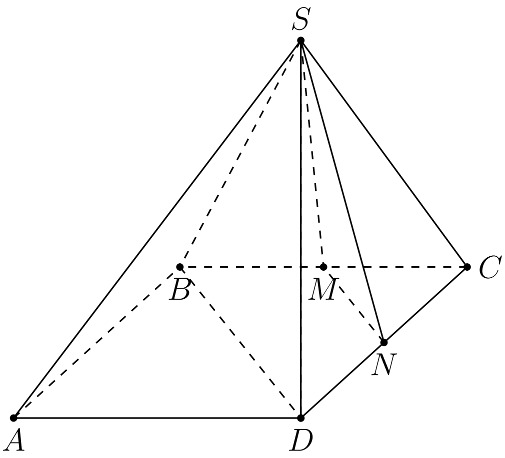
Lời giải.

Ta có $\dfrac{S_{\Delta CMN}}{S_{\Delta BCD}} = \dfrac{CN}{CD} \cdot \dfrac{CM}{CB} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

mà $\dfrac{S_{\Delta BCD}}{S_{ABCD}} = \dfrac{1}{2}$.

Do đó $\dfrac{S_{\Delta CMN}}{S_{ABCD}} = \dfrac{1}{8}$.

Khi đó



$$\begin{aligned}\frac{V_{S.CMN}}{V_{A.ABCD}} &= \frac{\frac{1}{3}\mathrm{d}(S,(ABCD)) \cdot S_{\Delta CMN}}{\frac{1}{3}\mathrm{d}(S,(ABCD)) \cdot S_{ABCD}} \\ &= \frac{S_{\Delta CMN}}{S_{ABCD}} \\ &= \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Vậy $V_{S.CMN} = \dfrac{V}{8}$.

Chọn đáp án A $\square$

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng (d): $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = -1 \end{cases}$ và mặt phẳng (P): $2x + y - 2z - 1 = 0$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên (d), bán kính bằng 3 và tiếp xúc (P) là

- **A** $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ hoặc $(x+3)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 9$.
- **B** $(x+3)^2 + (y+4)^2 + (z+1)^2 = 9$ hoặc $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$.
- **C** $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ hoặc $(x+3)^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2 = 9$.
- **D** $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ hoặc $(x+3)^2 + (y+4)^2 + (z+1)^2 = 9$.

Lời giải.

Gọi tâm mặt cầu có cần tìm có dạng $I(1+2t; 2t; -1)$.

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) nên

$$\begin{aligned} & \mathrm{d}(I,(P)) = R \\ \Leftrightarrow\ & \frac{|2(1+2t) + 2t + 2 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1 + 2^2}} = 3 \\ \Leftrightarrow\ & |6t + 3| = 9 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 6t + 3 = 9 \\ 6t + 3 = -9 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Khi đó có hai điểm $I(3; 2; -1)$ và $I(-3; -4; -1)$.

Vậy có hai mặt cầu thỏa mãn bài toán

$(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ hoặc $(x+3)^2 + (y+4)^2 + (z+1)^2 = 9$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-2)$, $B(-1;-1;3)$ và mp(P) : $2x-y+2z+1=0$. Phương trình mặt phẳng (Q) qua hai điểm A, B và vuông góc mp(P).

(A) $\begin{cases} x=1+3t \\ y=14t \\ z=-2+14t \end{cases}$.

(B) $2x-y+2z+2=0$.

(C) $3x+14y+4z+5=0$.

(D) $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-t \\ z=-2+2t \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-1;5)$, $\vec{n}_{(P)}=(2;-1;2)$.

$\left[\overrightarrow{AB};\vec{n}_{(P)}\right]=(3;14;4)$.

Phương trình mặt phẳng (Q) qua hai điểm A, B và vuông góc mp(P) nên có vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(2;-1;2)$. Khi đó có phương trình:

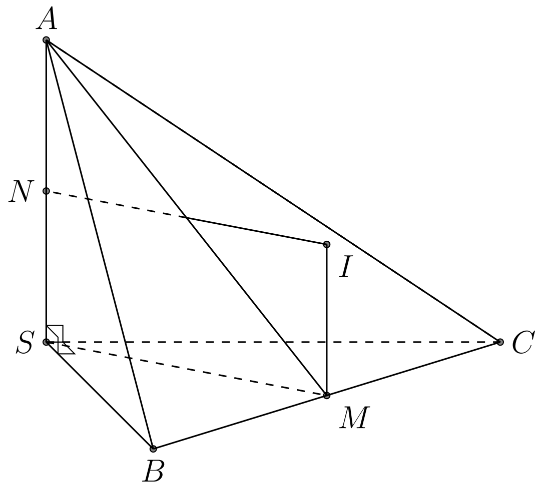
$$3(x-1)+14(y-0)+4(z+2)=0 \Leftrightarrow 3x+14y+4z+5=0.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=a, SB=b, SC=c$ và đôi một vuông góc. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

(A) $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$.
(B) $\pi(a^2+b^2+c^2)$.
(C) $\dfrac{\pi\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$.
(D) $\dfrac{\pi\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, SA.

Ta có M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSBC.

Dựng đường thẳng qua N và song song với SM cắt trục đường tròn tam giác ΔSBC tại I nên I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có bán kính $R=SI$.

Ta có $SM=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{SB^2+SC^2}=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{2}$ và $IM=\dfrac{SA}{2}=\dfrac{a}{2}$.

$R=SI=\sqrt{IM^2+SM^2}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $\pi(a^2+b^2+c^2)$.

Chọn đáp án (B) □

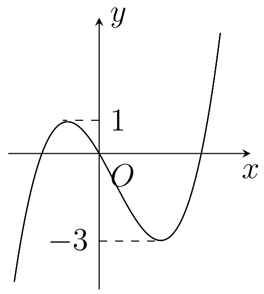
Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-9)(x-4)^2$. Trong các khoảng dưới đây, hàm số $y=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào?

(A) $(-2;2)$.
(B) $(3;+\infty)$.
(C) $(-\infty;-3)$.
(D) $(-\infty;-3)\cup(0;3)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2x \cdot f'(x^2) = 2x^5(x^2-9)\cdot(x^2-4)^2$.
$y' > 0 \Leftrightarrow x^5 \cdot (x^2-9) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3;0) \cup (3;+\infty)$.
Chọn đáp án B □

Câu 28.
Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |f(x)+m|$ có ba cực trị.



A $m \le -1$ hoặc $m \ge 3$. **B** $m = -1$ hoặc $m = 3$.
C $m \le -3$ hoặc $m \ge 1$. **D** $1 \le m \le 3$.

Lời giải.
Đồ thị hàm số $y = f(x)+m$ là đồ thị hàm số $y = f(x)$ tịnh tiến trên trục Oy m đơn vị.
Để đồ thị hàm số $y = |f(x)+m|$ có ba điểm cực trị khi đồ thị hàm số $y = f(x)+m$ xảy ra hai trường hợp sau:
Hai điểm cực trị nằm phía trên trục hoành hoặc điểm cực tiểu thuộc trục Ox và cực đại dương.
Hai điểm cực trị nằm phía dưới trục hoành hoặc điểm cực đại thuộc trục Ox và cực tiểu âm.
Khi đó $m \le -1$ hoặc $m \ge 3$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đối với hàm số $g(x) = f(2-x) - 2$?

I. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4;-2)$.
II. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.
III. Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm -2.
IV. Hàm số $g(x)$ có giá trị cực đại bằng -3.

A 2. **B** 3. **C** 1. **D** 4.

Lời giải.
Ta có $g'(x) = -f'(2-x)$.
Dựa vào bảng biên ở đề bài ta có

- $g'(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2-x<0\\2-x>2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>2\\x<0\end{array}\right.$
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

Ta có bảng biến thiên như hình bên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-4	↗	-3	↘	$-\infty$

Chọn đáp án (C) □

Từ đó ta kết luận:

I. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4; -2)$, là **SAI**.

II. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$, là **SAI**.

III. Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm -2, là **SAI**.

IV. Hàm số $g(x)$ có giá trị cực đại bằng -3, là **ĐÚNG**.

Vậy có duy nhất một mệnh đề đúng.

Câu 30. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\log_2 \dfrac{y}{2\sqrt{1+x}} = 3(y - \sqrt{1+x}) - y^2 + x$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K = x - y$.

(A) $\min K = -\dfrac{3}{4}$. **(B)** $\min K = -\dfrac{5}{4}$. (C) $\min K = -2$. (D) $\min K = -1$.

Lời giải.

Với $y > 0$, ta có:

$$\begin{aligned}
& \log_2 \frac{y}{2\sqrt{1+x}} = 3(y - \sqrt{1+x}) - y^2 + x \\
\Leftrightarrow\ & \log_2 y - 1 - \log_2 \sqrt{1+x} = 3y - 3\sqrt{1-x} - y^2 + x \\
\Leftrightarrow\ & y^2 - 3y + \log_2 y = 1 + x - 3\sqrt{1+x} + \log_2 \sqrt{1+x} \\
\Leftrightarrow\ & f(y) = f(\sqrt{1+x}).
\end{aligned}$$

Với $f(x) = x^2 - 3x + \log_2 x$ xác định trên $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(x) = 2x - 3 + \dfrac{1}{x\ln 2} = \dfrac{(2\ln 2)x^2 - (3\ln 2)x + 1}{x\ln 2} > 0$ với mọi $x \in (0; +\infty)$.

Suy ra f là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$, nên từ $f(y) = f(\sqrt{1+x})$ ta suy ra $y = \sqrt{1+x}$.

Khi đó K trở thành $K = x - \sqrt{1+x} = \left(\sqrt{1+x} - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4} \geq -\dfrac{5}{4}$.

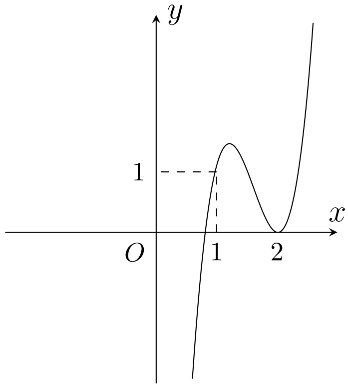
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = -\dfrac{3}{4}$ và $y = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

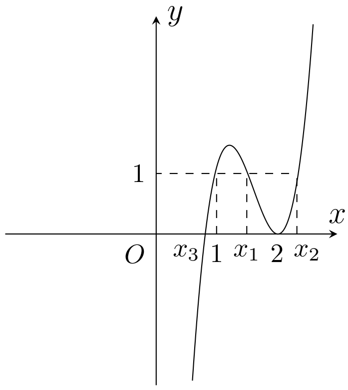
Câu 31.

Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{(x^2 - 3x + 2) \cdot \sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x) - f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

(A) 5. **(B)** 3. (C) 2. (D) 4.



Lời giải.



Dựa vào đồ thị ta có

- $f(x) = 0$ khi $x = 2$ (nghiệm kép), $x = x_3$ (với $0 < x_3 < 1$) (nghiệm đơn);
- $f(x) = 1$ khi $x = 1, x = x_1, x = x_2$ (đều là nghiệm đơn).

Ta có $g(x) = \dfrac{(x^2 - 3x + 2) \cdot \sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x) - f(x)\right]} = \dfrac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x) - f(x)\right]}$.

Điều kiện:

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ f^2(x) - f(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ f(x) \neq 0 \\ f(x) \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 2 \\ x \neq 1 \\ x \neq x_1 \text{ (với } 1 < x_1 < 2) \\ x \neq x_2 \text{ (với } 2 < x_2). \end{cases}$$

Do đó $\mathscr{D} = (1; +\infty) \backslash \{x_1, 2, x_2\}$.

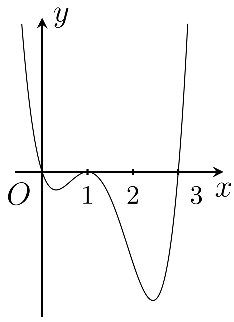
Nhận xét:

- $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) \neq \infty$ (do $x = 1$ là nghiệm đơn của $f(x)$)
  $\Rightarrow x = 1$ không là tiệm cận đứng.
- $\lim\limits_{x \to x_1} g(x) = \infty$ nên $x = x_1$ là tiệm cận đứng.
- $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \infty$ nên $x = 2$ là tiệm cận đứng (vì $x = 2$ là nghiệm đơn của tử, đồng thời là nghiệm kép của mẫu).
- $\lim\limits_{x \to x_2} g(x) = \infty$ nên $x = x_2$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án B □

Câu 32.



Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Đồ thị hàm số $y = (f(x))^2$ có bao nhiêu điểm cực đại, điểm cực tiểu?

A. 1 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

B. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

C. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

D. 2 điểm cực tiểu, 3 điểm cực đại.

Lời giải.

Với $y = (f(x))^2$ ta có $y' = 2 \cdot f'(x) \cdot f(x)$.

Ta thấy $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0. \end{array}\right.$

Với $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1\in(0;1) \\ x=1 \\ x=x_2\in(1;3). \end{array}\right.$

Với $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \text{ (bội chẵn)} \\ x=3. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		x_1		1		x_2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Theo bảng biến thiên, ta thấy hàm số $y=(f(x))^2$ có 2 điểm cực đại và 3 điểm cực tiểu.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $[-6;6]$. Biết rằng $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x=8$ và $\int\limits_{1}^{3} f(-2x)\,\mathrm{d}x=3$. Tính $\int\limits_{-1}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I=11$. **B** $I=5$. **C** $I=2$. **D** $I=14$.

Lời giải.

Hàm số $y=f(x)$ chẵn trên $[-6;6]$ nên $f(-2x)=f(2x)$, do đó $\int\limits_{1}^{3} f(2x)\,\mathrm{d}x=3$.

Đặt $u=2x \Rightarrow du=2dx$, đổi cận: $x=1\Rightarrow u=2, x=2\Rightarrow u=6$; lúc này được

$$\int\limits_{1}^{3} f(2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{2}^{6} f(u)\,\mathrm{d}u=3.$$

Vậy $\int\limits_{-1}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x=14.$

Chọn đáp án D □

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$. Gọi d_1, d_2 lần lượt là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x) = xf(2x-1)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$. Biết rằng hai đường thẳng d_1, d_2 vuông góc với nhau, khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\sqrt{2} < |f(1)| < 2$. (B) $|f(1)| \leq \sqrt{2}$. **(C)** $|f(1)| \geq 2\sqrt{2}$. (D) $2 \leq |f(1)| \leq 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = f(2x-1) + 2xf'(2x-1) \Rightarrow g'(1) = f(1) + 2f'(1)$.

Do d_1 và d_2 lần lượt có hệ số góc lần lượt là $f'(1), g'(1) = f(1) + 2f'(1)$ nên

$$\begin{aligned} d_1 \perp d_2 &\Leftrightarrow f'(1).g'(1) = -1 \\ &\Leftrightarrow f'(1).[f(1) + 2f'(1)] = -1 \\ &\Leftrightarrow 2[f'(1)]^2 + f(1).f'(1) + 1 = 0. \end{aligned}$$

Ta có thể xem phương trình trên là phương trình bậc hai, ẩn là $f'(1)$. Khi đó, để phương trình trên luôn có nghiệm thì

$$\Delta = (f(1))^2 - 8 \geq 0 \Leftrightarrow |f(1)| \geq 2\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$ và có bảng biến thiên như như sau

x	$-\infty$		1		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
y	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1

Phương trình $f(2^{\sin x}) = 3$ có bao nhiêu nghiệm trên đoạn $\left[0; \dfrac{5\pi}{6}\right]$?

(A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 5.

Lời giải.

Trên đoạn $\left[0; \dfrac{5\pi}{6}\right]$ ta xét phương trình $\sin x = m$ (1).

- Phương trình (1) có nghiệm khi $0 \leq m \leq 1$.
- $0 \leq m < \dfrac{1}{2}$ hoặc $m = 1$: phương trình (1) có 1 nghiệm.
- $\dfrac{1}{2} \leq m < 1$: phương trình (1) có 2 nghiệm.

Với mọi $x \in \left[0; \dfrac{5\pi}{6}\right] \Rightarrow 0 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2^{\sin x} \leq 2$.

Đặt $t = 2^{\sin x}$, $t \in [1; 2]$. Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(t) = 3$ có hai nghiệm thỏa mãn:

- $1 < t < \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 < 2^{\sin x} < \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 < \sin x < \dfrac{1}{2} \Rightarrow f(2^{\sin x}) = 3$ có 1 nghiệm.
- $\sqrt{2} < t < 2 \Leftrightarrow \sqrt{2} < 2^{\sin x} < 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < \sin x < 1 \Rightarrow f(2^{\sin x}) = 3$ có 2 nghiệm.

Vậy phương trình $f(2^{\sin x}) = 3$ có 3 nghiệm trên đoạn $\left[0; \dfrac{5\pi}{6}\right]$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm không âm trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $(f(x))^4 \cdot (f'(x))^2 \cdot (x^2+1) = 1 + (f(x))^3$ và $f(x) > 0$, $\forall x \in [0;1]$. Biết $f(0) = 2$, hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây.

A $2 < f(1) < \frac{5}{2}$. **B** $\frac{5}{2} < f(1) < 3$. **C** $\frac{3}{2} < f(1) < 2$. **D** $3 < f(1) < \frac{7}{2}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
& (f(x))^4 \cdot (f'(x))^2 \cdot (x^2+1) = 1 + (f(x))^3 \\
\Leftrightarrow\ & (f(x))^2 \cdot f'(x) \cdot \sqrt{x^2+1} = \sqrt{1+(f(x))^3} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(f(x))^2 \cdot f'(x)}{\sqrt{1+(f(x))^3}} \\
\Leftrightarrow\ & \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\left(1+(f(x))^3\right)}{2\sqrt{1+(f(x))^3}} \\
\Leftrightarrow\ & \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} \times \left(\sqrt{1+(f(x))^3}\right)\Big|_0^1 \\
\Leftrightarrow\ & \ln\left(1+\sqrt{2}\right) = \frac{2}{3} \times \left(\sqrt{1+(f(1))^3} - 3\right) \\
\Leftrightarrow\ & f(1) \approx 2{,}605.
\end{aligned}$$

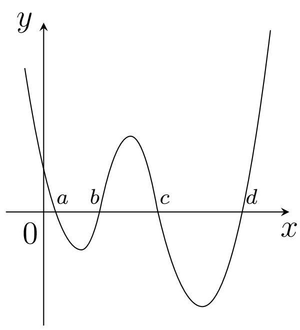
Chọn đáp án B □

Câu 37.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm a, b, c, d (hình bên). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A $f(c) > f(a) > f(b) > f(d)$. **B** $f(a) > f(c) > f(d) > f(b)$.

C $f(a) > f(b) > f(c) > f(d)$. **D** $f(c) > f(a) > f(d) > f(b)$.



Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có dấu của $f'(x)$ và bảng biến thiên như hình sau.

x	$-\infty$		a		b		c		d		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗	$f(a)$	↘	$f(b)$	↗	$f(c)$	↘	$f(d)$	↗	

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra $f(a)$ và $f(c)$ cùng lớn hơn $f(b)$ và $f(d)$.

Gọi S_1 là diện tích giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$.

S_2 là diện tích giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x), y = 0, x = b, x = c$.

S_3 là diện tích giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x), y = 0, x = c, x = d$.

Từ đồ thị ta thấy

- $S_1 < S_2 \Rightarrow \int\limits_b^a f'(x)\,\mathrm{d}x < \int\limits_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow f(a) - f(b) < f(c) - f(b) \Rightarrow f(a) < f(c)$.
- $S_2 < S_3 \Rightarrow \int\limits_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x < \int\limits_d^c f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow f(c) - f(b) < f(c) - f(d) \Rightarrow f(b) > f(d)$.

Vậy ta có $f(c) > f(a) > f(b) > f(d)$.

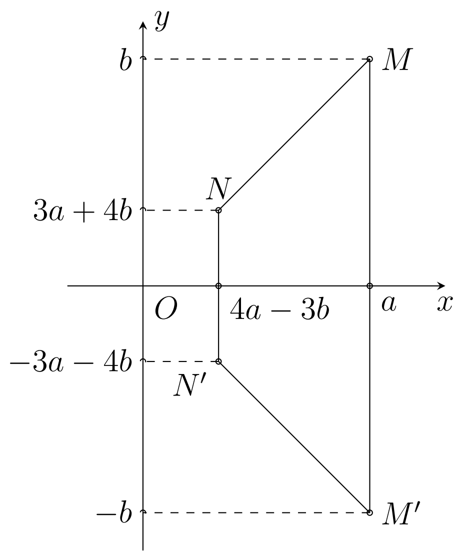
Chọn đáp án A □

Câu 38. Trong mặt phẳng phức, xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M, M'; số phức $z(4+3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là N, N'. Biết rằng M, M', N, N' là bốn đỉnh của hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z+4i-5|$.

A $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **C** $\dfrac{5}{\sqrt{34}}$. **D** $\dfrac{4}{\sqrt{13}}$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$. Khi đó $z(4+3i) = 4a - 3b + (3a+4b)i$ và $M(a;b)$; $M'(a;-b)$, $N(4a-3b; 3a+4b)$, $N'(4a-3b; -3a-4b)$.
$\overrightarrow{MN} = (3a-3b; 3a+3b)$.
Theo tính chất đối xứng thì $MNN'M'$ là hình thang cân.
Do đó để $MNN'M'$ là hình chữ nhật thì $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với trục Ox hay $3a+3b=0 \Leftrightarrow b=-a$.
Ta có



$$\begin{aligned} |z+4i-5| &= \sqrt{(a-5)^2+(b+4)^2} \\ &= \sqrt{(a-5)^2+(-a+4)^2} = \sqrt{2a^2-18a+41} \\ &= \sqrt{2\left(a-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = \dfrac{9}{2}$ hay $z = \dfrac{9}{2} - \dfrac{9}{2}i$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z+4i-5|$ bằng $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ khi và chỉ khi $z = \dfrac{9}{2} - \dfrac{9}{2}i$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho số phức z và w thỏa mãn $z + w = 3 + 4i$ và $|z - w| = 9$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z| + |w|$.

A $\max T = \sqrt{176}$. **B** $\max T = 14$. **C** $\max T = 4$. **D** $\max T = \sqrt{106}$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$; $w = c + di$ $(c, d \in \mathbb{R})$.
Ta có

$$\begin{aligned} & |z+w| = |3+4i| = 5 \\ \Leftrightarrow\ & |(a+bi)+(c+di)| = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad |(a+c)+(b+d)i| = 5\\
&\Leftrightarrow \quad (a+c)^2+(b+d)^2 = 25.
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
&\quad\ \ |z-w| = 9\\
&\Leftrightarrow \quad |(a+bi)-(c+di)| = 9\\
&\Leftrightarrow \quad |(a-c)+(b-d)i| = 9\\
&\Leftrightarrow \quad (a-c)^2+(b-d)^2 = 81.
\end{aligned}$$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{aligned}
&\begin{cases}(a+c)^2+(b+d)^2=25\\(a-c)^2+(b-d)^2=81\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2=25\\a^2-2ac+c^2+b^2-2bd+d^2=81\end{cases}\\
\Rightarrow\ & a^2+b^2+c^2+d^2=53.
\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức B.C.S ta có

$$||z|+|w|| = \left|1\cdot\sqrt{a^2+b^2}+1\cdot\sqrt{c^2+d^2}\right| \le \sqrt{(1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2+d^2)} = \sqrt{106}.$$

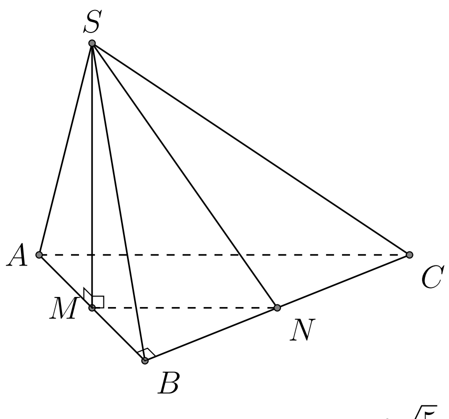
Với $z=-\dfrac{21}{10}+\dfrac{47}{10}i$, $w=\dfrac{51}{10}-\dfrac{7}{10}i$ luôn thỏa mãn giả thiết và $|z|+|w|=\sqrt{106}$.
Vậy $\max(|z|+|w|)=\sqrt{106}$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B có $BC=a$; tam giác SAB đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). M và N lần lượt là trung điểm của AB và BC. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SBMN$ bằng

A. $\dfrac{5\pi a^3}{4}$. B. $\dfrac{5\pi a^2}{4}$. C. $\dfrac{5\sqrt{5}\pi a^3}{48}$. D. $\dfrac{5\pi a^2}{12}$.

Lời giải.



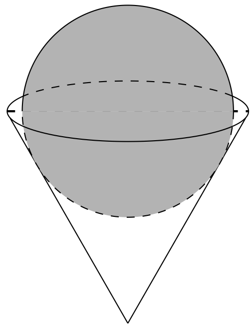
Tam giác SAB đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên $SM\perp(ABC)$.
Suy ra $MN\perp SM$ hay $\widehat{SMN}=90^\circ$. Hơn nữa $BN\perp MB$, suy ra $MB\perp SB$ hay $\widehat{SBN}=90^\circ$.
Vậy tứ diện $SBMN$ có mặt cầu ngoại tiếp là mặt cầu đường kính SN.
Vì tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B có $BC=a$ nên $AC=a\sqrt{2}$ hay $MN=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAB đều có cạnh $AB=a$ nên $SM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Khi đó $SN=\sqrt{SM^2+MN^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SBMN$ là $S=SM^2\cdot\pi=\dfrac{5\pi a^2}{4}$.

Chọn đáp án B □

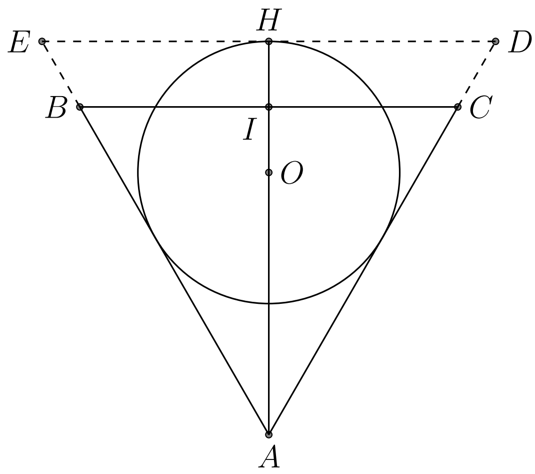
Câu 41.

Một chiếc ly đựng nước giải khát có hình dạng (không kể chân ly) là hình nón như hình vẽ (hình vẽ chỉ mang tính chất minh họa). Biết rằng bán kính miệng ly bằng 5 cm, thiết diện qua trục là tam giác đều. Ban đầu chiếc ly chứa đầy nước, sau đó người ta bỏ vào ly một viên đá hình cầu có đường kính bằng $4\sqrt{3}$ cm . Gọi V cm^3 là lượng nước tràn ra ngoài. Chọn khẳng định đúng.



(A) $50 < V < 75$. (B) $75 < V < 100$.
(C) $100 < V < 150$. (D) $V > 150$.

Lời giải.



Xét một thiết diện qua trục như hình vẽ. Vì đường tròn (O) có bán kính lớn hơn bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC $\left(R_{ABC} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3} < 4\sqrt{3}\right)$ nên sau khi bỏ viên đá vào ly, nước trong ly không ngập hết viên đá. Ta tính được tam giác ADE ngoại tiếp đường tròn (O) có cạnh bằng 12 nên phần ngập nước có kích thước như hình vẽ.

Lượng nước tràn ra ngoài bằng thể tích phần viên đá ngập nước.

Ta có $IH = AH - AI = \dfrac{12\sqrt{3}}{2} - \dfrac{10\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Thể tích phần mặt cầu nằm ngoài ly là (công thức tính thể tích chỏm cầu)

$$\pi \cdot IH^2 \cdot \left(R_{\text{viên đá}} - \frac{IH}{3}\right) = 5\pi\sqrt{3}.$$

Vậy thể tích nước tràn ra ngoài là

$$V_{\text{viên đá}} - V_{\text{chỏm cầu}} = \frac{4}{3}\pi\cdot\left(2\sqrt{3}\right)^3 - 5\pi\sqrt{3} = 32\pi\sqrt{3} - 5\pi\sqrt{3} = 27\pi\sqrt{3} \approx 146{,}91774 \in (100; 150).$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3; 2; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và cách gốc tọa độ một đoạn lớn nhất.

(A) $x + y + 2z - 12 = 0$. (B) $2x + y + 3z - 19 = 0$.
(C) $3x + 2y + 3z - 22 = 0$. (D) $3x - 2y + 3z - 14 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}(O, (P)) \le OA$.

Do đó $\mathrm{d}(O, (P))$ lớn nhất bằng OA. Khi đó $OA \perp (P)$ hay $\vec{n}_{(P)} = \overrightarrow{OA} = (3; 2; 3)$.

Vậy mặt phẳng (P) là

$$3(x-3) + 2(y-2) + 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y + 3z - 22 = 0.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-3=0$. Gọi M là giao điểm của d và (P). Mặt cầu có tâm nằm trên d và đi qua hai điểm M và $N(1;1;1)$. Tâm mặt cầu có tọa độ là

(A) $(-1;1;2)$. (B) $\left(\dfrac{1}{2};4;-2\right)$. (C) $\left(-\dfrac{19}{18};\dfrac{8}{9};\dfrac{31}{18}\right)$. **D** $\left(-\dfrac{19}{18};\dfrac{8}{9};\dfrac{37}{18}\right)$.

Lời giải.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-1}\\ 2x-y+2z-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=-1\\ z=3.\end{cases}$$

Vì tâm mặt cầu cần tìm có nằm trên đường thẳng d nên có tâm dạng $I\left(-2+t;-1+2t;3-t\right)$.
Vì mặt cầu đi qua 2 điểm $M(-2;-1;3)$ và $N(1;1;1)$ nên

$$\begin{aligned}&IM=IN\\ \Leftrightarrow\ & t^2+4t^2+t^2=(t-3)^2+(2-2t)^2+(2-t)^2\\ \Leftrightarrow\ & t=\frac{17}{18}.\end{aligned}$$

Khi đó, tâm mặt cầu cần tìm là $I\left(-\dfrac{19}{18};\dfrac{8}{9};\dfrac{37}{18}\right)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Cho phương trình $\dfrac{m\sin x+\cos x}{2+\sin x+\cos x}=1$. Tìm tất cả giá trị tham số m để phương trình có nghiệm.

A $m\le -1\vee m\ge 3$. (B) $m<-1\vee m>3$.
(C) $-1\le m\le 3$. (D) $-1\le m\vee m>1$.

Lời giải.

Tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
Ta có

$$\begin{aligned}&\frac{m\sin x+\cos x}{2+\sin x+\cos x}=1\\ \Leftrightarrow\ & m\sin x+\cos x=2+\sin x+\cos x\\ \Leftrightarrow\ & (m-1)\sin x=2.\qquad (1)\end{aligned}$$

- Nếu $m=1$ thì (1) vô nghiệm.
- Nếu $m\ne 1$ thì (1) viết lại $\sin x=\dfrac{2}{m-1}$. (2)

Khi đó để phương trình ở đề bài có nghiệm thì (2) có nghiệm, khi đó

$$\left|\frac{2}{m-1}\right|\le 1\Leftrightarrow m\le -1\vee m\ge 3.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Một chiếc tàu lửa dừng tại một sân ga có 3 toa nhận khách, có 4 hành khách lên 3 toa một cách ngẫu nhiên. Tính xác suất sao cho mỗi toa đều nhận ít nhất một khách vừa lên tàu.

Ⓐ $\frac{8}{9}$. Ⓑ $\frac{4}{9}$. Ⓒ $\frac{8}{27}$. Ⓓ $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Số cách lên toa của mỗi hành khách là 3, nên không gian mẫu là $|\Omega| = 3^4 = 81$.

Gọi A là biến cố: "mỗi toa đều nhận ít nhất một khách vừa lên tàu".

Ta có ba trường hợp sau:

- 2 người lên toa 1, 1 người lên toa 2, 1 người lên toa 3: Có số cách chọn là $\mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_2^1 \cdot \mathrm{C}_2^1 = 12$.
- 1 người lên toa 1, 2 người lên toa 2, 1 người lên toa 3: Có số cách chọn là $\mathrm{C}_2^1 \cdot \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_2^1 = 12$.
- 1 người lên toa 1, 1 người lên toa 2, 2 người lên toa 3: Có số cách chọn là $\mathrm{C}_2^1 \cdot \mathrm{C}_2^1 \cdot \mathrm{C}_4^2 = 12$.

Khi đó số cách chọn để mỗi toa đều nhận ít nhất một khách vừa lên tàu $|A| = 3 \cdot 12 = 36$.

Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{9}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 46. Một thùng có 48 hộp sữa, trong đó có 6 hộp kém chất lượng. Chia ngẫu nhiên thùng này thành 3 phần đều nhau, tính xác suất để mỗi phần đều có số hộp sữa kém chất lượng bằng nhau (sai số không quá 0,001).

Ⓐ 0,141 . Ⓑ 0,101 . Ⓒ 0,201. Ⓓ 0,212.

Lời giải.

- Số cách chọn hộp sữa cho phần 1 là C_{48}^{16}.
- Số cách chọn hộp sữa cho phần 2 là C_{32}^{16}.
- Số cách chọn hộp sữa cho phần 3 là C_{16}^{16}.

Số cách chia hộp sữa thành ba phần đều nhau là $|\Omega| = \mathrm{C}_{48}^{16} \cdot \mathrm{C}_{32}^{16} \cdot \mathrm{C}_{16}^{16}$.

Gọi A là biến cố: "chia 48 hộp sữa thành ba phần sao cho mỗi phần đều có số hộp sữa kém chất lượng bằng nhau". Ta đếm theo:

- Số cách chọn hộp sữa cho phần 1, gồm 14 hộp sữa tốt và 2 hộp sữa kém chất lượng là $\mathrm{C}_{42}^{14} \cdot \mathrm{C}_6^2$.
- Số cách chọn hộp sữa cho phần 2, gồm 14 hộp sữa tốt và 2 hộp sữa kém chất lượng là $\mathrm{C}_{28}^{14} \cdot \mathrm{C}_4^2$.
- Số cách chọn hộp sữa cho phần 3, gồm 14 hộp sữa tốt và 2 hộp sữa kém chất lượng là $\mathrm{C}_{14}^{14} \cdot \mathrm{C}_2^2$.

Khi đó $|A| = \mathrm{C}_{42}^{14} \cdot \mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{C}_{28}^{14} \cdot \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_{14}^{14} \cdot \mathrm{C}_2^2$.

Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \approx 0{,}141$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 47. Cho $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$; góc giữa SC với $(ABCD)$ bằng 45°. Khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác SBC đến mặt phẳng (SAC) bằng

Ⓐ $\frac{a\sqrt{55}}{33}$. Ⓑ $\frac{a\sqrt{55}}{22}$. Ⓒ $\frac{2a\sqrt{55}}{33}$. Ⓓ $\frac{a\sqrt{21}}{21}$.

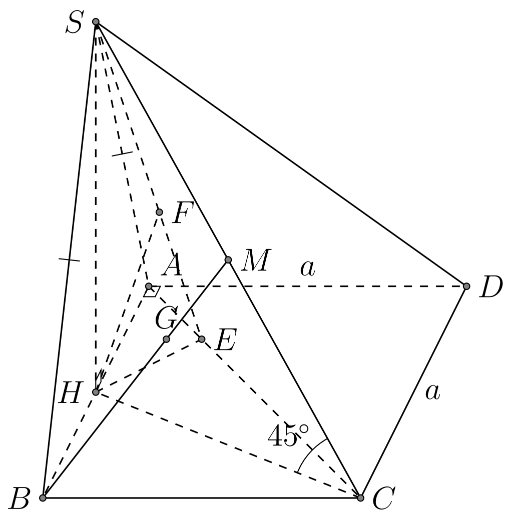
Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB.

Vì tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Khi đó góc giữa SC với $(ABCD)$ là $\widehat{SCH} = 45^\circ$. Suy ra tam giác SCH vuông cân tại H nên

$$SH = CH = \sqrt{BC^2 + BH^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$



Ta có $\dfrac{\mathrm{d}(G,(SAC))}{\mathrm{d}(B,(SAC))} = \dfrac{GM}{BM} = \dfrac{1}{3}$ (với M là trung điểm SC).

Hơn nữa $\dfrac{\mathrm{d}(B,(SAC))}{\mathrm{d}(H,(SAC))} = \dfrac{BA}{HA} = 2$.

Khi đó $\mathrm{d}(G,(SAC)) = \dfrac{2}{3}\mathrm{d}(H,(SAC))$.

Kẻ $HE \perp AC$ (trong mặt phẳng $(ABCD)$). Khi đó $AC \perp (SHE)$.

Kẻ $HF \perp SE$ (trong mặt phẳng (SHE)). Khi đó $HF \perp (SAC)$ hay $HF = \mathrm{d}(H,(SAC))$.

Ta có tam giác AHE vuông cân tại E và $AH = \dfrac{a}{2}$ nên $HE = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}$.

Hơn nữa, vì tam giác SHE vuông tại H và có đường cao HF nên

$$\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{4}{5a^2} + \frac{8}{a^2} \Leftrightarrow HF = \frac{\sqrt{55}a}{22}.$$

Vậy khoảng cách cần tìm là $\mathrm{d}(G,(SAC)) = \dfrac{2}{3}\mathrm{d}(H,(SAC)) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{55}a}{22} = \dfrac{2\sqrt{55}a}{33}$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 25$, $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z - 14 = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A (S_1) và (S_2) không cắt nhau .

B (S_1) và (S_2) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r = 1$.

C (S_1) và (S_2) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r = \sqrt{\dfrac{76}{10}}$.

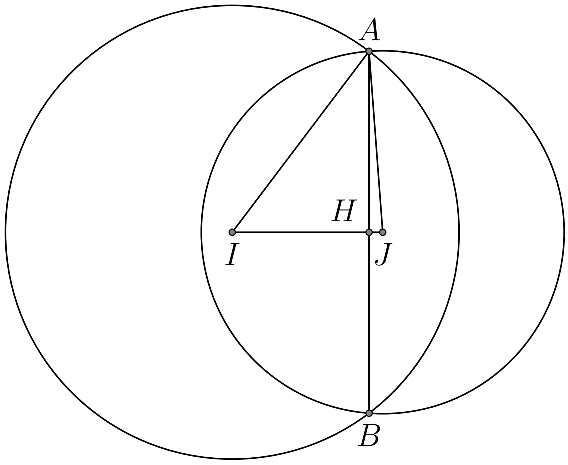
D (S_1) và (S_2) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r = \dfrac{5\sqrt{77}}{11}$.

Lời giải.

Từ giả thiết: (S_1) có tâm $I = (1;-2;2)$ và bán kính $R_1 = 5$.

(S_2) có tâm $J = (0;1;1)$ và bán kính $R_2 = 4$.

Khi đó $R_1 - R_2 = 1 < IJ = \sqrt{11} < R_1 + R_2 = 9$ nên hai mặt cầu cắt nhau theo một giao tuyến là đường tròn có tâm H và bán kính $r = \dfrac{AB}{2}$ và H nằm giữa IJ.



Khi đó $IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{25 - r^2}$ và $JH = \sqrt{JA^2 - AH^2} = \sqrt{16 - r^2}$.

Do đó

$$\begin{aligned}
& IH + JH = IJ \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{25-r^2}+\sqrt{16-r^2}=\sqrt{11} \\
\Rightarrow\ & \sqrt{25-r^2}=\sqrt{11}-\sqrt{16-r^2} \\
\Rightarrow\ & 25-r^2=11+16-r^2-2\sqrt{11\left(16-r^2\right)} \\
\Rightarrow\ & \sqrt{11\left(16-r^2\right)}=1 \\
\Rightarrow\ & r=\frac{5\sqrt{77}}{11}.
\end{aligned}$$

Vậy (S_1) và (S_2) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r=\dfrac{5\sqrt{77}}{11}$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng: $d_1\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$; $d_2\colon \begin{cases} x=t \\ y=1-2t \\ z=1+3t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng d cắt d_1 và d_2 đồng thời song song với đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-7}{4}=\dfrac{z-3}{-2}$.

A $\begin{cases} x=2+t \\ y=3+4t \\ z=2+2t \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x=2+t \\ y=3+4t \\ z=2-2t \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x=-2+t \\ y=3+4t \\ z=2-2t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x=2+t \\ y=3+t \\ z=2-2t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi $d\cap d_1=A$ và $d\cap d_2=B$, nên tọa độ A,B có dạng $A(k;-1+2k;k)$ và $B(t;1-2t;1+3t)$.
Ta có $\overrightarrow{AB}=(t-k;2-2t-2k;1+3t-k)$.
Vì $d\parallel\Delta$ nên $\overrightarrow{AB}\parallel\vec{v}_\Delta=(1;4;-2)$ tương đương với

$$\Leftrightarrow \frac{t-k}{1}=\frac{2-2t-2k}{4}=\frac{1+3t-k}{-2}\Leftrightarrow\begin{cases}6t-2k=2\\5t-3k=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\k=2.\end{cases}$$

Vậy $A(2;3;2),\overrightarrow{AB}=(1;4;-2)$ hay phương trình đường thẳng cần tìm là $\begin{cases}x=2+t\\y=3+4t\\z=2-2t.\end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$, với $a,b,c>0$. Biết rằng (S) cắt 3 mặt phẳng tọa độ theo các giao tuyến là các đường tròn có bán kính $r=5$ và mặt cầu (S) đi qua điểm $M(0;1;2)$. Tính tổng $a+b+c+d$.

A 25 . **B** 75 . **C** 40. **D** 10.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$.
Vì mặt cầu (S) cắt 3 mặt phẳng tọa độ theo các giao tuyến là các đường tròn có bán kính $r=5$

nên khoảng cách từ tâm $I(a;b;c)$ đến các mặt phẳng tọa độ bằng nhau, hay $a=b=c>0$.
Theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} & IM^2 = \mathrm{d}(I,(P))^2 + r^2 \\ \Leftrightarrow\ & a^2 + (a-1)^2 + (a-2)^2 = a^2 + 25 \\ \Leftrightarrow\ & a^2 - 3a - 10 \\ \Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{l} a = 5 \\ a = -2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $a=b=c=5$ và $d=25$, suy ra $a+b+c+d=40$.
Chọn đáp án C □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. C	3. A	4. D	5. B	6. B	7. B	8. B	9. B	10. C
11. B	12. D	13. C	14. B	15. A	16. C	17. A	18. A	19. A	20. A
21. C	22. B	23. A	24. D	25. C	26. B	27. B	28. A	29. C	30. B
31. B	32. B	33. D	34. C	35. A	36. B	37. A	38. A	39. D	40. B
41. C	42. C	43. D	44. A	45. B	46. A	47. A	48. D	49. B	50. C

80 ĐỀ THI THỬ LẦN 1, 2017 - 2018 TRƯỜNG THPT TX QUẢNG TRỊ.

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Giá trị cực đại của hàm số là

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(A) $x = -1$. (B) $x = 2$.
(C) $y = 4$. (D) $y = 0$.

Lời giải.
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có giá trị cực đại $y = 4$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

(A) $\vec{u} = (2; 1; -1)$. (B) $\vec{u} = (3; 0; 1)$. (C) $\vec{u} = (2; 0; -1)$. (D) $\vec{u} = (3; 1; -1)$.

Lời giải.
Đường thẳng d: $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; 1; -1)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài các cạnh $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

(A) $\dfrac{abc}{6}$. **(B)** abc. (C) $\dfrac{abc}{3}$. (D) $\dfrac{abc}{4}$.

Lời giải.
Áp dụng công thức thể tích khối hộp chữ nhật ta có thể tích của khối hộp đã cho bằng abc.
Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Cho hình (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$. Diện tích hình phẳng (H) được tính theo công thức nào dưới đây?

(A) $S = \pi \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x$. (B) $S = \pi \int\limits_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right|\, \mathrm{d}x$.

(C) $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x$. (D) $S = \int\limits_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right|\, \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ là

A $y = 2$. (B) $x = -\dfrac{1}{2}$. (C) $x = 1$. (D) $y = -1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} y = 2$.

Vậy tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Cho số phức z có điểm biểu diễn trong mặt phẳng toạ độ là điểm $M(2;-1)$. Mô-đun của số phức z bằng

(A) 3. (B) $\sqrt{3}$. **C** $\sqrt{5}$. (D) 5.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $z = 2 - i$, $|z| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Phương trình $\cos x = 1$ có tập nghiệm là

(A) $S = \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. (B) $S = \left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C $S = \{k2\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. (D) $S = \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Ta có $\cos x = 1 \Leftrightarrow S = \{k2\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Có bao nhiêu cách xếp 3 bạn A, B, C vào dãy ghế hàng ngang có 4 chỗ ngồi?

(A) 4 cách. **B** 24 cách. (C) 6 cách. (D) 64 cách.

Lời giải.

Số cách xếp 3 người vào một bàn dài có 4 chỗ ngồi là $\mathrm{A}_4^3 = 24$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Phương trình $\log_4(x+1) = 3$ có nghiệm là

(A) $x = 66$. **B** $x = 63$. (C) $x = 68$. (D) $x = 65$.

Lời giải.

Ta có $\log_4(x+1) = 3 \Leftrightarrow x + 1 = 64 \Leftrightarrow x = 63$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x - 2y - 2z + 3 = 0$. Tính khoảng cách d từ điểm $M(2;1;0)$ đến mặt phẳng (P).

(A) $\mathrm{d} = \dfrac{1}{3}$. (B) $\mathrm{d} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (C) $\mathrm{d} = 3$. **D** $\mathrm{d} = 1$.

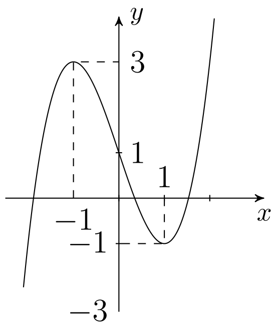
Lời giải.

Ta có $\mathrm{d} = \dfrac{|2 - 2 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11.

Hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm sau?



A $y = x^3 - 3x + 1$. **B** $y = x^3 + 3x + 1$.

C $y = x^3 - 3x^2 + 1$. **D** $y = x^3 + 3x^2 + 1$.

Lời giải.

Đồ thị đi qua các điểm $(-1; 3)$ và $(1; -1)$ nên chọn hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho hình nón (N) có chiều cao $h = 4$, bán kính đường tròn đáy $r = 3$. Diện tích xung quanh của hình nón (N) bằng

A 12π. **B** 20π. **C** 15π. **D** 30π.

Lời giải.

Độ dài đường sinh $l = \sqrt{r^2 + h^2} = 5$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng $\pi \cdot r \cdot l = 15\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -2)$ và $B(0; -2; 3)$. Mặt phẳng (P) đi qua gốc toạ độ và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm A, B có phương trình là

A $x - 2y + z = 0$. **B** $x - y + z = 0$. **C** $x + y - 3z = 0$. **D** $x + 3y - 5z = 0$.

Lời giải.

(P) đi qua $O(0; 0)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{BA} = (1; 3; -5)$ nên có phương trình $x + 3y - 5z = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Tính đạo hàm của hàm số $y = 7^{x^2+x-2}$.

A $y' = 7^{x^2+x-2}(2x + 1)\ln 7$. **B** $y' = 7^{x^2+x-2}(2x + 1)$.

C $y' = 7^{x^2+x-2}\dfrac{(2x + 1)}{\ln 7}$. **D** $y' = 7^{x^2+x-2}\ln 7$.

Lời giải.

$y' = 7^{x^2+x-2}(2x + 1)\ln 7$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-3; 5; 1)$. Gọi $D(a; b; c)$ là đỉnh của hình bình hành $ABCD$. Tính tổng $T = a + b + c$.

A $T = 1$. **B** $T = 5$. **C** $T = 3$. **D** $T = -1$.

Lời giải.

Với $D(a; b; c)$ ta có $\overrightarrow{AD} = (a - 1; b - 2; c + 1)$, $\overrightarrow{BC} = (-5; 6; -2)$.

$ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 = -5 \\ b - 2 = 6 \\ b + 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 8 \\ c = -3 \end{cases}$.

Vậy $T = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2$ có đồ thị (C) và điểm $M(1; 1)$ thuộc (C). Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại M. Đường thẳng Δ đi qua điểm nào dưới đây?

(A) $P(0; -2)$. (B) $Q(3; 0)$. (C) $R(-3; 0)$. **D** $S(0; 2)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 4x$, $y'(1) = -1$ nên tiếp tuyến Δ tại M có phương trình $y = -x + 2$. Từ đó suy ra Δ đi qua $S(0; 2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Cho các số thực a, b đồng thời thoả mãn $3^{-a}2^b = 1152$ và $\log_{\sqrt{5}}(a+b) = 2$. Tính giá trị của biểu thức $P = a - b$.

A $P = -9$. (B) $P = -3$. (C) $P = 8$. (D) $P = -6$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có hệ $\begin{cases} 3^{-a}2^b = 1152 \\ \log_{\sqrt{5}}(a+b) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{b-5}2^b = 1152 \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 7 \end{cases}$.

Vậy ta có $P = a - b = -9$.

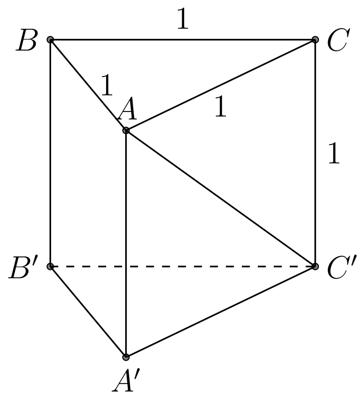
Chọn đáp án (A) □

Câu 18.

Cho hình trụ đều $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng 1 (tham khảo hình vẽ). Gọi φ là góc hợp bởi đường thẳng AC' với mặt phẳng $(BCC'B')$. Tính $\sin\varphi$.

(A) $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$. **B** $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

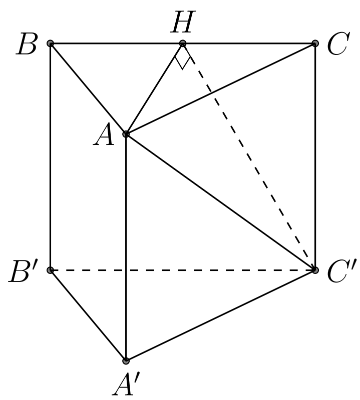
(C) $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. (D) $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$.



Lời giải.

Gọi H là trung điểm của BC ta có $\varphi = \widehat{AC'H}$.

Ta có $AC' = \sqrt{2}, AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $\sin\varphi = \dfrac{AH}{AC'} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x + 3$ có đúng hai điểm cực trị.

(A) $m \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$. (B) $m \in (-1; 2)$.

C $m \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$. **D** $m \in (-2; 1)$.

Lời giải.

Hàm số có đạo hàm $y' = x^2 - 2mx + m + 2$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Kí hiệu z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 3z + 7 = 0$. Tính giá trị của $S = z_1 + z_2 - z_1 z_2$.

A $S = 2$. **B** $S = -2$. **C** $S = 5$. **D** $S = -5$.

Lời giải.

Theo định lý Vi-ét ta có $S = \dfrac{3}{2} - \dfrac{7}{2} = -2$.

Chọn đáp án B □

Câu 21. Để kiểm tra chất lượng sản phẩm của một công ty sữa, người ta gửi đến bộ phận kiểm nghiệm 5 hộp sữa cam, 4 hộp sữa dâu và 3 hộp sữa nho. Bộ phận kiểm nghiệm chọn ngẫu nhiên 3 hộp sữa để đem đi phân tích mẫu. Xác suất để 3 hộp sữa được chọn có đủ cả 3 loại sữa bằng

A $\dfrac{3}{11}$. **B** $\dfrac{8}{11}$. **C** $\dfrac{1}{11}$. **D** $\dfrac{6}{11}$.

Lời giải.

Gọi A là biến cố 3 hộp sữa được chọn có đủ 3 loại sữa. Ta có 5 cách chọn 1 hộp sữa cam, 4 cách chọn hộp sữa dâu và 3 cách chọn hộp sữa nho nên theo quy tắc nhân ta có $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ cách chọn ra 3 hộp sữa đủ loại, nghĩa là $n(A) = 60$.

Số cách chọn 3 hộp sữa từ 12 hộp sữa bằng $\mathrm{C}_{12}^3 = 220$.

Vậy xác suất để chọn được 3 hộp đủ loại bằng $\dfrac{60}{220} = \dfrac{3}{11}$.

Chọn đáp án A □

Câu 22.

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Phương trình $f(x) = 1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

A 4. **B** 3. **C** 1. **D** 2.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x) = 1$ có 2 nghiệm.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x$.

A $I = 1$. **B** $I = 2\ln 2 - \dfrac{1}{2}$. **C** $I = 2\ln 2 + \dfrac{1}{2}$. **D** $I = 2\mathrm{e} - \dfrac{1}{2}$.

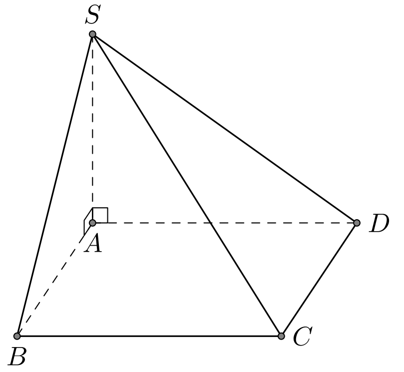
Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x = \left(2\ln|x| + \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$ (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách từ đường thẳng AB đến mặt phẳng (SCD) bằng

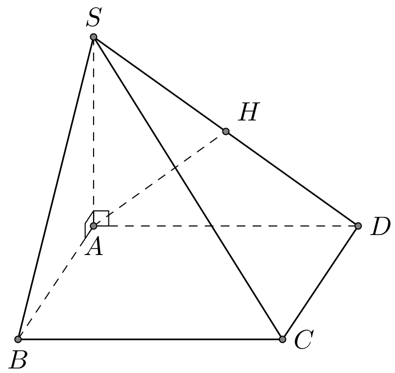


A $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. (C) a. (D) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của SD thì H chính là hình chiếu của A lên (SCD).

Do $AB \parallel (SCD)$ nên $d(AB, (SCD)) = AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức New-tơn của $\left(x - \dfrac{8}{x^2}\right)^9$.

(A) 43008. **B** -43008. (C) 32086. (D) -32086.

Lời giải.

Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển $\left(x - \dfrac{8}{x^2}\right)^9$ là $\mathrm{C}_9^k x^k(-8)^{9-k}\dfrac{1}{x^{2(9-k)}}$ với $k = 0, \cdots, 9$.

Số hạng không chứa x khi $k - 2(9-k) = 0 \Leftrightarrow k = 6$. Số hạng ứng với $k = 6$ là $\mathrm{C}_9^6(-8)^3 = -43008$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Có bao nhiêu số nguyên của tham số m để phương trình $x - \dfrac{m}{4} + \dfrac{4}{x+1} = 0$ có nghiệm $x \in [0; 4]$?

(A) 7. (B) 6. (C) 4. **D** 8.

Lời giải.

Ta có $x - \dfrac{m}{4} + \dfrac{4}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x + \dfrac{4}{x+1} = \dfrac{m}{4}$.

Đặt $y = f(x) = x + \dfrac{4}{x+1}$ ta có $y' = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ như sau:

x	0		1		4
y'		$-$	0	$+$	
y	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	$\dfrac{24}{5}$

Từ đó ta thấy phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow 3 \leq \dfrac{m}{4} \leq \dfrac{24}{5} \Leftrightarrow 12 \leq m \leq 19,2$.

Vậy ta có 8 số nguyên m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 2z + 1 = 0$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

A $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$. **B** $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2$.

C $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 4$. **D** $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 2$.

Lời giải.

Khoảng cách từ tâm I tới mặt phẳng (P) bằng 2. Vậy mặt cầu có tâm $I(2;1;1)$ và có bán kính $R = 2$ nên có phương trình $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$. Gọi d là đường thẳng nằm trong (P), đi qua giao điểm của Δ và (P), đồng thời vuông góc với Δ. Giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng toạ độ (Oxy) là

A $M(2;2;0)$. **B** $M(-3;2;0)$. **C** $M(-1;4;0)$. **D** $M(-3;4;0)$.

Lời giải.

Giao điểm của Δ và (P) là điểm $I(1;1;1)$.

Đường thẳng Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2;1;-1)$ và mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;1;1)$.

Đường thẳng d đi qua $I(1;1;1)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{v} = [\vec{u}, \vec{n}] = (2;-3;1)$.

Phương trình tham số của d là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

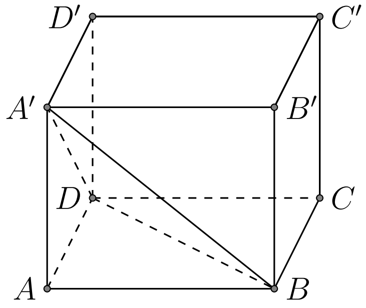
Từ đó tìm được giao của d và (Oxy) là điểm $M(-1;4;0)$.

Chọn đáp án C □

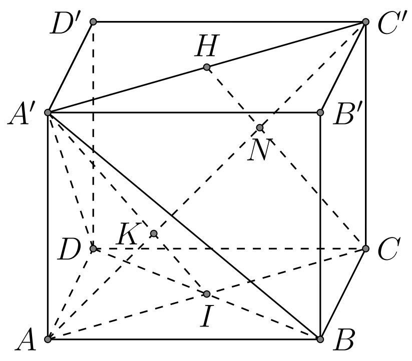
Câu 29.

Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có mặt đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, cạnh bên $AA' = a$ (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng

A $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **B** $\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **D** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.



Lời giải.



Xét khối chóp $A'.ABD$ có chiều cao $AA' = a$, đáy là tam giác đều ABD có diện tích bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ nên có thể tích là $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.
Ta thấy tam giác $A'BD$ cân đỉnh A', $BD = a$, $A'D = A'B = a\sqrt{2}$ nên có diện tích là $S = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{4}$.

Suy ra khoảng cách từ A đến $(A'BD)$ bằng $\dfrac{3V}{S} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Gọi H, I lần lượt là trung điểm của $A'C'$ và AC. Đường thẳng AC' cắt $A'I$ và HC lần lượt tại K và N.

Vì $A'I \mathbin{/\!/} HC$ nên $AK = KN = NC'$ nên $AK = \dfrac{1}{2}KC'$.

Từ đó ta suy ra $\mathrm{d}\left(C', (A'BD)\right) = 2\mathrm{d}\left(A, (A'BD)\right) = \dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Bất phương trình $\log_{0,4}(4x + 11) < \log_{0,4}(x^2 + 6x + 8)$ có tập nghiệm là

A. $S = (-3; 1)$.
B. $S = \left(-\dfrac{11}{4}; 1\right)$.
C. $S = (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.
D. $S = (-2; 1)$.

Lời giải.

Ta có $\log_{0,4}(4x + 11) < \log_{0,4}(x^2 + 6x + 8) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 11 > x^2 + 6x + 8 \\ x^2 + 6x + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Biết $\displaystyle\int \dfrac{2x+2}{(2x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{mx+n} + p\ln|2x+1| + C$ với m, n, p là các số hữu tỉ. Tổng $m + n + p$ bằng

A. $-\dfrac{11}{2}$.
B. $\dfrac{11}{2}$.
C. $\dfrac{13}{2}$.
D. $-\dfrac{13}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \dfrac{2x+2}{(2x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\dfrac{1}{2x+1} + \dfrac{1}{(2x+1)^2}\right)\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{4x+2} + \dfrac{1}{2}\ln|2x+1| + C$.

Vậy suy ra $m = -4, m = -2, p = \dfrac{1}{2}$ nên $m + n + p = -\dfrac{11}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $(\cos x + 1)(\cos 2x - m\cos x) = m\sin^2 x$ có đúng hai nghiệm $x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$.

A. $0 \le m < 1$.
B. $-1 < m \le -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
C. $-1 < m \le -\dfrac{1}{2}$.
D. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \le m < 1$.

Lời giải.

Ta có $(\cos x + 1)(\cos 2x - m\cos x) = m\sin^2 x \Leftrightarrow (1 + \cos x)(2\cos^2 x - 1 - m) = 0$.

Vì $x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$ nên $1 + \cos x \ne 0$. Đặt $t = \cos x$ ta có $t \in \left[-\dfrac{1}{2}; 1\right]$.

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để phương trình $2t^2 - 1 = m$ có hai nghiệm trong $\left[-\dfrac{1}{2}; 1\right]$.

Đặt $f(t) = 2t^2 - 1$ ta có bảng biến thiên sau:

t	$-\frac{1}{2}$		0		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

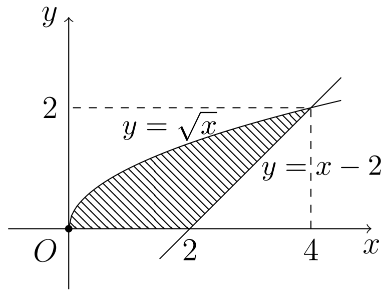
Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(t) = m$ có hai nghiệm phân biệt trong $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ khi và chỉ khi $-1 < m \leq -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 33.

Diện tích hình phẳng được tô đậm ở hình bên bằng

(A) $\frac{8}{3}$. (B) $\frac{11}{3}$. (C) $\frac{7}{3}$. **D** $\frac{10}{3}$.



Lời giải.

Ta có diện tích phần tô đậm bằng $\int\limits_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x - \int\limits_2^4 (x-2)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^4 - 2 = \frac{10}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 34. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ $SA = 1$, $SB = 2$, $SC = 2$ đồng thời các đường thẳng SA, SB, SC đôi một vuông góc. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A $\frac{9\pi}{2}$. (B) 9π. (C) $\frac{27\pi}{2}$. (D) 27π.

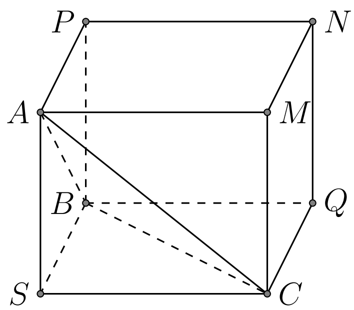
Lời giải.

Ta dựng hình hộp chữ nhật $AMNP.SCQB$.

Khối cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $AMNP.SCQB$ chính là khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Mà khối cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $AMNP.SCQB$ có bán kính $R = \frac{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}{2} = \frac{3}{2}$.

Thể tích của khối cầu đó bằng $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{9\pi}{2}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Cho bất phương trình $\log 5 + \log\left(x^2+1\right) \geq \log\left(mx^2+4x+m\right)$, m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

(A) 3. (B) 2. (C) 0. **D** 1.

Lời giải.

Ta có $\log 5 + \log\left(x^2+1\right) \geq \log\left(mx^2+4x+m\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+5 \geq mx^2+4x+m \\ mx^2+4x+m > 0 \end{cases}$.

Vậy bất phương trình nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 5x^2+5 \geq mx^2+4x+m, \forall x \in \mathbb{R} \\ mx^2+4x+m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} (5-m)x^2-4x+(5-m) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ mx^2+4x+m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 5-m > 0 \\ 4-(5-m)^2 < 0 \\ m > 0 \\ 2-m^2 < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & 0 < m < \sqrt{2} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra chỉ có một giá trị nguyên $m = 1$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

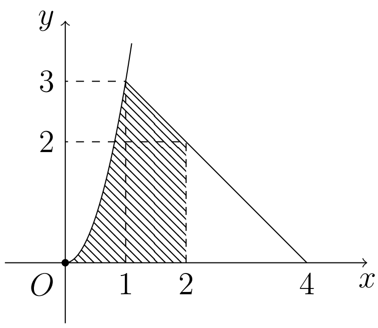
Câu 36. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{với } x \leq 1 \\ 4-x & \text{với } x > 1 \end{cases}$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 2$ quanh trục hoành bằng

(A) $\dfrac{29}{4}$. (B) $\dfrac{29\pi}{4}$. (C) $\dfrac{122}{15}$. **(D)** $\dfrac{122\pi}{15}$.

Lời giải.

Hình phẳng chính là phần tô đậm trong hình bên. Từ đó suy ra thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V = \pi \int_0^1 9x^4 \, \mathrm{d}x + \pi \int_1^2 (4-x)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{122\pi}{15}$$

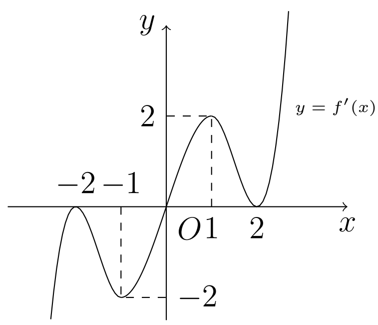


Chọn đáp án D □

Câu 37.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f\left(2x^2+x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 4. (B) 5. **(C)** 3. (D) 1.



Lời giải.

Ta có $[f(2x^2+x)]' = (4x+1)f'(2x^2+x)$.

$$[f(2x^2+x)]' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x+1=0 \\ f'(2x^2+x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{4} \\ 2x^2+x=-2 \\ 2x^2+x=0 \\ 2x^2+x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4} \\ x=-\dfrac{1}{2} \\ x=-\dfrac{1}{4} \\ x=0 \\ x=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}. \end{array}\right.$$

Từ đó ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{4}$		0		$\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$		∞
$[f(2x^2+x)]'$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Vậy đạo hàm của hàm số $f(x^2+2x)$ chỉ đổi dấu khi qua các điểm $x=-\dfrac{1}{4}, x=-\dfrac{1}{2}$ và $x=0$ nên hàm số $f(2x^2+x)$ có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Có bao nhiêu số phức z thoả mãn $|z-2i|=\sqrt{5}$ có điểm biểu diễn trong mặt phẳng toạ độ thuộc đường thẳng $\Delta: 3x-y+1=0$?

A 2. **B** 1. **C** 0. **D** Vô số.

Lời giải.

Tập hợp biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(0;2)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$. Khoảng cách từ I đến Δ là $d=\dfrac{1}{\sqrt{10}}<R$ nên đường thẳng Δ cắt đường tròn tại 2 điểm phân biệt. Từ đó suy ra có 2 số phức thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m$ có ba điểm cực trị A,B,C sao cho $OA=BC$; trong đó O là gốc toạ độ, A là điểm cực trị trên trục tung và B,C là hai điểm cực trị còn lại. Tích của tất cả các phần tử trong tập S bằng

A 8. **B** -8. **C** 4. **D** -4.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $m+1>0 \Leftrightarrow m>-1$.

Khi đó ta có $A(0;m)$, $BC=2\sqrt{m+1}$.

Vậy $OA=BC \Leftrightarrow |m|=2\sqrt{m+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2+2\sqrt{2} \\ m=2-2\sqrt{2} \end{array}\right.$ (thoả mãn $m>-1$).

Suy ra $S=\left\{2-2\sqrt{2}; 2+2\sqrt{2}\right\}$ và tích các phần tử trong S bằng -4.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-2}$ và điểm $A(2;1;0)$, $B(-2;3;2)$. Gọi S là mặt cầu đi qua hai điểm A,B và có tâm thuộc đường thẳng d. Diện tích của mặt cầu (S) bằng

A 20π. **B** 25π. **C** $\dfrac{20\pi}{3}$. **D** $\dfrac{25\pi}{3}$.

Lời giải.

Giả sử I là tâm mặt cầu (S) ta có $I \in (d)$ nên $I(1+2t;t;-2t)$ và $IA = IB$ nên ta có

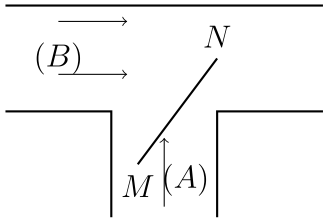
$$\sqrt{(1-2t)^2+(1-t)^2+(2t)^2} = \sqrt{(-3-2t)^2+(3-t)^2+(2+2t)^2} \Leftrightarrow t=-1.$$

Suy ra $I(3;1;-2)$, bán kính mặt cầu (S) là $R = IA = \sqrt{5}$ nên diện tích mặt cầu bằng 20π.

Chọn đáp án A □

Câu 41.

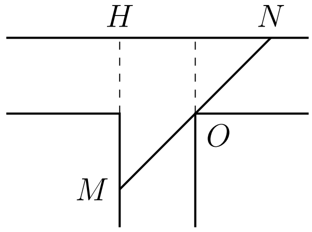
Có hai mương nước (A) và (B) thông nhau, bờ của mương nước (A) vuông góc với mương nước (B), chiều rộng của hai mương nước bằng nhau và bằng 8 mét (tham khảo hình vẽ). Một khúc gỗ MN có bề dày không đáng kể trôi từ mương nước (A) sang mương nước (B) theo dòng chảy. Độ dài lớn nhất của khúc gỗ bằng bao nhiêu để nó có thể trôi lọt? (tính gần đúng đến chữ số hàng trăm).



A $22,63$ mét. **B** $22,61$ mét. **C** $23,26$ mét. **D** $23,62$ mét.

Lời giải.

Thanh gỗ MN trôi được khi thanh gỗ chạm điểm O thì $OM \le ON$.
Vậy MN_{min} khi $OM = ON$. Khi đó tam giác HMN vuông cân tại H và $MN = \sqrt{16^2+16^2} = 16\sqrt{2} \approx 22,63$ mét.



Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho dãy số (u_n) thoả mãn $u_1 = \dfrac{2}{3}$ và $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2(2n+1)u_n+1}$, $(n \ge 1)$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất thoả mãn $\log_{\frac{1}{2}} u_n > 12,3$.

A $n = 50$. **B** $n = 60$. **C** $n = 51$. **D** $n = 61$.

Lời giải.

Ta chứng minh số hạng tổng quát của dãy số là $u_n = \dfrac{2}{4n^2-1}$.

Thật vậy $u_1 = \dfrac{2}{3}$ và với mọi $n \ge 1$ ta có

$$\frac{u_n}{2(2n+1)u_n+1} = \frac{2}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{2}{4(n+1)^2-1} = u_{n+1}.$$

Do đó $\log_{\frac{1}{2}} u_n > 12,3 \Leftrightarrow \dfrac{2}{4n^2-1} < \dfrac{1}{2^{12,3}} \Leftrightarrow n > \sqrt{\dfrac{2^{13,3}+1}{4}} \approx 50,22$.
Vậy số n nguyên dương nhỏ nhất thoả mãn yêu cầu là 51.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;1;2)$, $B(1;-1;0)$, $C(0;2;1)$ và $D(1;0;-1)$. Có bao nhiêu mặt cầu đi qua cả bốn điểm A, B, C, D?

A 3. **B** 1. **C** 0. **D** Vô số.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -2; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (0; 1; -1)$, $\overrightarrow{AD} = (1; -1; -3)$. Dễ thấy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ nên $ABCD$ là hình vuông. Vậy có vô số mặt cầu đi qua 4 điểm A, B, C, D.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho phương trình $4\log_9^2 x + m\log_{\frac{1}{3}} x - m - \frac{2}{9} = 0$, m là tham số. Biết phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1x_2 = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $1 < m < 2$. **B** $3 < m < 4$. **C** $0 < m < \frac{3}{2}$. **D** $2 < m < 3$.

Lời giải.

Ta có $4\log_9^2 x + m\log_{\frac{1}{3}} x - m - \frac{2}{9} = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - m\log_3 x - m - \frac{2}{9} = 0$.

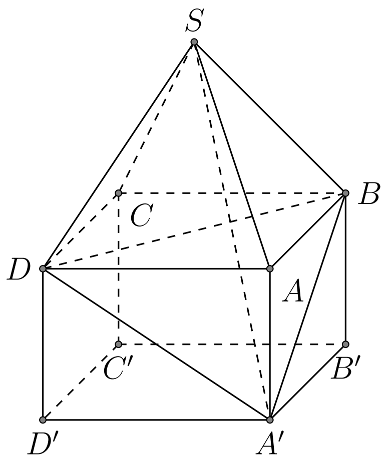
Từ giả thiết x_1, x_2 thoả mãn $x_1x_2 = 3 \Rightarrow \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = 1 \Rightarrow m = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 45.

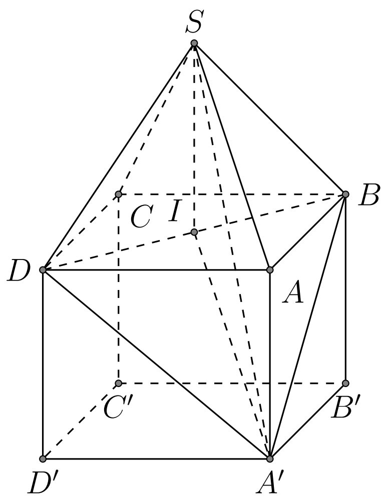
Cho hình đa diện như hình vẽ bên, trong đó $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật với $AB = 2a$, $AA' = a$; $S.ABCD$ là hình chóp có các cạnh bên bằng nhau và bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích của khối tứ diện $S.A'BD$ bằng

A $2a^3$. **B** $\frac{2a^3}{3}$. **C** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.



Lời giải.

Gọi I là trung điểm của DB ta có $SI = a = AA'$ và $SI \mathbin{/\!/} AA'$ nên tứ giác $SIA'A$ là hình bình hành và có$SA \mathbin{/\!/} IA'$. Từ đó ta có SA song song với (DBA') nên $\mathrm{d}(S, (DBA')) = \mathrm{d}(A, (BDA'))$. Vậy thể tích khối chóp $S.A'BD$ bằng thể tích khối chóp $A.A'BD$ và bằng $\frac{2a^3}{3}$.

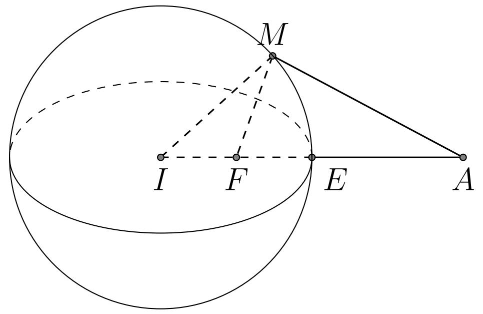


Chọn đáp án B □

Câu 46. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8$ và các điểm $A(3; 0; 0)$, $B(4; 2; 1)$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S). Giá trị nhỏ nhất của $MA + 2MB$ bằng

A $2\sqrt{2}$. **B** $6\sqrt{2}$. **C** $2\sqrt{3}$. **D** $6\sqrt{3}$.

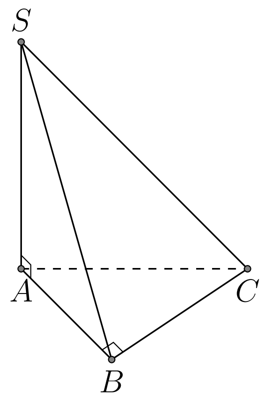
Lời giải.



Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;4;0)$ và có bán kính $R = 2\sqrt{2}$. Ta có $IA = 4\sqrt{2} = 2R$.
Gọi E là giao điểm của IA với (S) ta có E là trung điểm của IA, $E(1;2;0)$.
Gọi F là trung điểm của IE, $F(0;3;0)$. Với $M \in (S)$, vì $\triangle IFM$ và $\triangle IMA$ có $\widehat{AIM}$ chung và có $\dfrac{IF}{IM} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{IM}{IA}$ nên $\triangle AIM \backsim \triangle MIF$.

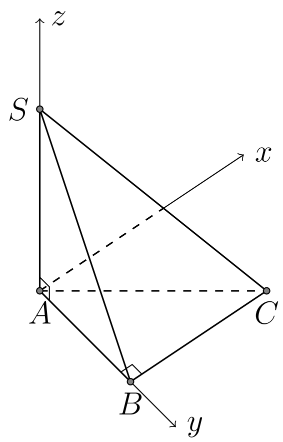
Từ đó ta có $MA = 2MF$, $MA + 2MB = 2(MF + MB) \geq 2FB = 6\sqrt{2}$. (Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của FB và (S) do F nằm trong (S) còn B nằm ngoài (S).)
Vậy $MA + 2MB$ có giá trị nhỏ nhất bằng $6\sqrt{2}$.
Chọn đáp án B □

Câu 47.
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = 2a$, cạnh SA vuông góc với mặt đáy (ABC) và $SA = 3a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC). Tính $\sin\alpha$.



A $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$.
B $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{4138}}{120}$.
C $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{13}}{7}$.
D $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{5}$.

Lời giải.
Dựng hệ trục toạ độ $Oxyz$ với O trùng A, tia Ox cùng hướng với tia BC, tia Oy trùng tia AB, tia Oz trùng với tia AS.
Ta có $A(0;0;0)$, $B(0;a;0)$, $C(2a;a;0)$, $S(0;0;3a)$ khi đó ta tính được (SAC) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (0;-2;0)$, (SBC) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{m} = (0;3;1)$.
Từ đó tính được $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}|\,|\vec{m}|} = \dfrac{3\sqrt{2}}{5}$. Suy ra $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{5}$.



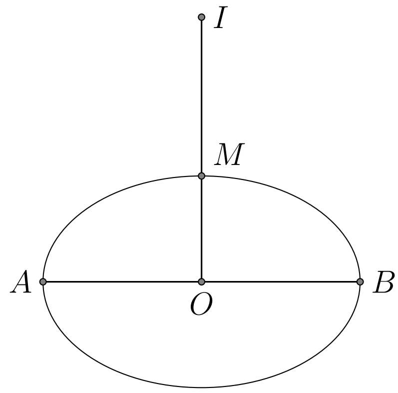
Chọn đáp án D □

Câu 48. Xét số phức z thoả mãn $|z+1-i| + |z-3+i| = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+1+4i|$.

A 3. **B** $2+\sqrt{2}$. **C** 5. **D** $5-\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta nhận thấy tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thoả mãn $|z+1-i|+|z-3+i|=6$ chính là đường elíp (E) có độ dài trục lớn bằng $2a=6$, trục nhỏ bằng $2b=4$ với $A(-1;1)$ và $B(3;-1)$ là hai đỉnh trên trục lớn.
Xét điểm $I(-1;4)$ nằm ngoài elíp (E) và I nằm trên đường trung trực của đoạn AB.
Ta có $P=|z+1+4i|=MI$ với mọi điểm $M\in(E)$. Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng $\mathrm{d}(I,AB)-b=5-2=3$.



Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thoả mãn $\cot x\cdot f'(x)+f(x)=2cos^3x$ với mọi $x\neq k\pi$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{9\sqrt{2}}{4}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $f\left(\frac{\pi}{3}\right)\in(1;4)$. **B** $f\left(\frac{\pi}{3}\right)\in(6;10)$. **C** $f\left(\frac{\pi}{3}\right)\in(3;5)$. **D** $f\left(\frac{\pi}{3}\right)\in(4;8)$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned}
&\cos x\cdot f'(x)+\sin x\cdot f(x)=2\cos^3 x\cdot\sin x\\
\Rightarrow\ &\frac{\cos x\cdot f'(x)+\sin x\cdot f(x)}{\cos^2 x}=2\sin x\cdot\cos x\\
\Rightarrow\ &\left(\frac{f(x)}{\cos x}\right)'=\sin 2x\\
\Rightarrow\ &\frac{f(x)}{\cos x}=\int\sin 2x\,\mathrm{d}x\\
\Rightarrow\ &f(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x\cdot\cos x+C\cdot\cos x.
\end{aligned}$$

Do $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{9\sqrt{2}}{4}$ nên ta có $C=\frac{9}{2}$ và $f(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x\cdot\cos x+\frac{9}{2}\cdot\cos x$.
Từ đó ta có $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{19}{8}=2,375\in(1;4)$.
Chọn đáp án A □

Câu 50. Chọn ngẫu nhiên ba số a,b,c trong tập hợp $S=\{1;2;3;\cdots;20\}$. Biết xác suất để ba số tìm được thoả mãn $a^2+b^2+c^2$ chia hết cho 3 bằng $\frac{m}{n}$, với m,n là các số nguyên dương và phân số $\frac{m}{n}$ tối giản. Biểu thức $S=m+n$ bằng

A 85. **B** 239. **C** 58. **D** 127.

Lời giải.

Vì số chính phương chia 3 dư 1 hoặc 0 nên $a^2+b^2+c^2$ chia hết cho 3 chỉ có 2 khả năng xảy ra như sau:
Trường hợp 1: Cả 3 số a,b,c cùng chia hết cho 3.
Trường hợp 2: cả 3 số a,b,c cùng không chia hết cho 3.
Trong tập S gồm có 6 số chia hết cho 3 và 14 số không chia hết cho 3.
Xác suất để tìm được 3 số thoả mãn yêu cầu bài toán bằng $\frac{\mathrm{C}_6^3+\mathrm{C}_{14}^3}{C_{20}^3}=\frac{32}{95}$.
Từ đó ta có $S=m+n=32+95=127$.

Chọn đáp án D □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. A	3. B	4. C	5. A	6. C	7. C	8. B	9. B	10. D
11. A	12. C	13. D	14. A	15. A	16. D	17. A	18. B	19. C	20. B
21. A	22. D	23. B	24. A	25. B	26. D	27. A	28. C	29. B	30. D
31. A	32. C	33. D	34. A	35. D	36. D	37. C	38. A	39. D	40. A
41. A	42. C	43. D	44. C	45. B	46. B	47. D	48. A	49. A	50. D

81 ĐỀ THI THỬ TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI, NĂM 2018, LẦN 3

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x^2+2x-1\le 0 \\ x^3-3x+1>0 \end{cases}$ là

(A) $[-1;0)$. (B) $\left[-1;\dfrac{1}{3}\right]$. (C) $\left[0;\dfrac{1}{3}\right]$. (D) $\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

Ta có: $3x^2+2x-1\le 0 \Leftrightarrow -1\le x\le \dfrac{1}{3}$.

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x+1$, ta có $f'(x)=3x^2-3$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[-1;\dfrac{1}{3}\right]$ như sau:

x	-1	$\dfrac{1}{3}$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	5 ↘	$\dfrac{1}{27}$

Vậy $f(x)>0, \forall x\in\left[-1;\dfrac{1}{3}\right]$, nên hệ bất phương trình có nghiệm $x\in\left[-1;\dfrac{1}{3}\right]$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Cho số phức $z=\cos 2\alpha+(\sin\alpha-\cos\alpha)i$ với $\alpha\in\mathbb{R}$. Giá trị lớn nhất của $|z|$ là

(A) $\dfrac{4}{3}$. (B) $\dfrac{3}{2}$. (C) $\sqrt{2}$. (D) 2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}|z| &= \sqrt{\cos^2 2\alpha+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}\\ &= \sqrt{1-\sin^2 2\alpha+1-2\sin\alpha\cos\alpha}\\ &= \sqrt{2-\sin^2 2\alpha-\sin 2\alpha}\\ &= \sqrt{\dfrac{9}{4}-\left(\sin 2\alpha+\dfrac{1}{2}\right)^2}\le\dfrac{3}{2}.\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sin 2\alpha=-\dfrac{1}{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của $|z|$ là $\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Trong 100 vé số có 1 vé trúng 10000 đồng, 5 vé trúng 5000 đồng, 10 vé trúng 1000 đồng, số vé còn lại không có giải thưởng. Một người mua ngẫu nhiên 3 vé trong 100 vé. Tính xác suất để người đó trúng giải ít nhất 1000 đồng.

A $\dfrac{2372}{5775}$. **B** $\dfrac{3403}{5775}$. **C** $\dfrac{2304}{5775}$. **D** $\dfrac{2004}{5775}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{100}^3$.

Gọi A là biến cố "người đó trúng ít nhất 1000 đồng". Vì có đúng 84 vé không trúng giải nên ta có $n\left(\overline{A}\right) = \mathrm{C}_{84}^3$.

Dẫn tới $\mathrm{P}(A) = 1 - \dfrac{n\left(\overline{A}\right)}{n(\Omega)} = 1 - \dfrac{\mathrm{C}_{84}^3}{\mathrm{C}_{100}^3} = \dfrac{2372}{5775}$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{3x-2} < 4$ là

A $[1;2)$. **B** $[1;+\infty)$. **C** $[2;3]$. **D** $\left[1;\dfrac{3}{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 1$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{3x-2}$, ta có $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-2}} + \dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}} > 0, \forall x > 1$.

Vậy $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $f(x) < f(2) \Leftrightarrow x < 2$. Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm $x \in [1;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Nghiệm của phương trình $\log_{2018} x + \log_{\sqrt{2018}} x + \log_{\sqrt[3]{2018}} x + \cdots + \log_{\sqrt[2018]{2018}} x = \dfrac{2019}{2}$ là

A $\sqrt[2019]{2018}$. **B** 1. **C** 2018. **D** $\sqrt[2018]{2018}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& \log_{2018} x + 2\log_{2018} x + 3\log_{2018} x + \cdots + 2018\log_{2018} x = \frac{2019}{2} \\
\Leftrightarrow\ & (1+2+3+\cdots+2018)\log_{2018} x = \frac{2019}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2018 \cdot 2019}{2}\log_{2018} x = \frac{2019}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \log_{2018} x = \frac{1}{2018} \Leftrightarrow x = \sqrt[2018]{2018}.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \sqrt[2018]{2018}$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Số các số tự nhiên gồm 3 chữ số được tạo thành từ 4 chữ số $0, 1, 2, 3$ là

A 56. **B** 96. **C** 52. **D** 48.

Lời giải.

Có 3 cách chọn chữ số hàng trăm, 4 cách chọn chữ số hàng chục, 4 cách chọn chữ số hàng đơn vị, nên số các số thoả mãn là $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Cắt một hình trụ bởi một mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $3a$. Tính diện tích toàn phần của hình trụ đã cho.

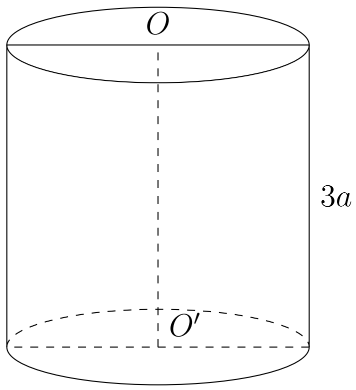
A $\dfrac{27\pi a^2}{2}$. **B** $9\pi a^2$. **C** $\dfrac{45\pi a^2}{4}$. **D** $\dfrac{9\pi a^2}{2}$.

Lời giải.

Bán kính đáy của hình trụ là $R = \dfrac{3a}{2}$, chiều cao của hình trụ là $h = 3a$.

Diện tích toàn phần của hình trụ là

$$S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi \cdot \frac{3a}{2} \cdot 3a + 2\pi \cdot \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{27\pi a^2}{2}.$$



Chọn đáp án A □

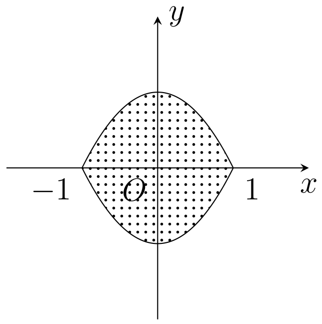
Câu 8. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $|y| = 1 - x^2$ là

A $\dfrac{4}{3}$. **B** 2. **C** $\dfrac{8}{3}$. **D** 1.

Lời giải.

Hình phẳng đã cho được giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y = 1 - x^2 & \text{, với } -1 \le x \le 1 \\ y = -1 + x^2 & \text{, với } -1 \le x \le 1 \end{cases}$ nên có diện tích là

$$S = \int\limits_{-1}^{1} 2(1 - x^2)\,\mathrm{d}x = \left(2x - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}.$$



Chọn đáp án C □

Câu 9. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x - 2y + z - 3 = 0$ và điểm $A(1;2;0)$. Viết phương trình đường thẳng qua A và vuông góc với (P).

A $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z}{1}$. **B** $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z}{2}$.

C $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{1}$. **D** $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{1}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;-2;1)$ nên đường thẳng cần tìm có véc-tơ chỉ phương là $\vec{n} = (1;-2;1)$.

Vậy phương trình đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) là $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z}{1}$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận là

A $m = -1$. **B** $m = 1$ hoặc $m = 2$.

C $m = 1$. **D** mọi giá trị thực của m.

Lời giải.

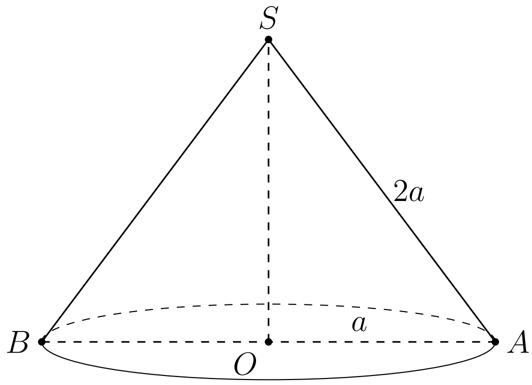
Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.
Để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận đứng nên $x = m$ là một nghiệm của phương trình $x^2 - 3x - 2 = 0$ suy ra $m = 1$ hoặc $m = 2$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Cho hình nón có bán kính đáy bằng a, độ dài đường sinh bằng $2a$. Góc ở đỉnh của hình nón bằng

(A) 30°. (B) 90°. (C) 120°. **D** 60°.

Lời giải.

Kí hiệu các điểm của hình nón như hình vẽ.
Ta có $AS = BS = AB = 2a$ nên tam giác SAB đều, suy ra góc ở đỉnh của hình nón là $\widehat{ASB} = 60^\circ$.

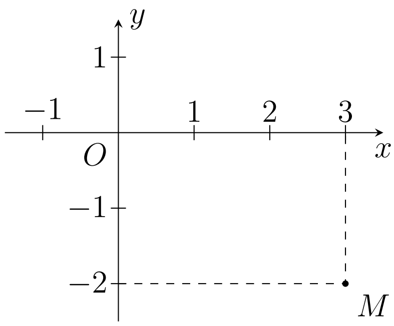


Chọn đáp án (D) □

Câu 12.

Cho số phức z có biểu diễn hình học là điểm M ở hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $z = 3 + 2i$. (B) $z = -2 - 3i$.
C $z = 3 - 2i$. (D) $z = -2 + 3i$.



Lời giải.

Điểm $M(3; -2)$ biểu diễn số phức $z = 3 - 2i$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **đúng**?

(A) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
(B) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
(C) Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.
D Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Lời giải.

Mệnh đề đúng là: "Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau".
Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, SD tạo với đáy một góc 60°. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

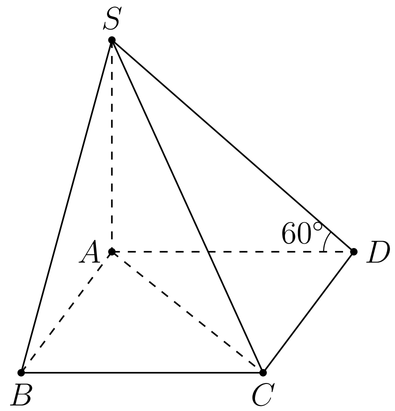
A $\sqrt{3}a^3$. **B** $\dfrac{a^3}{3}$. **C** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **D** $\dfrac{a^3}{3\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $(SD,(ABCD)) = (SD, DA) = \widehat{SDA}$.

Suy ra $SA = AD\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Dẫn tới $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}\cdot a^2 \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$.



Chọn đáp án C □

Câu 15. Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{1-\log_{\frac{1}{2}} x}{\sqrt{2-6x}} < 0$ là

A $\left(0;\dfrac{1}{6}\right)$. **B** $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)$. **C** $\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$. **D** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: $0 < x < \dfrac{1}{3}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $1-\log_{\frac{1}{2}} x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{1}{2}$.

Kết hợp điều kiện, suy ra bất phương trình có nghiệm $0 < x < \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Đặt $I = \displaystyle\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\,\mathrm{d}x$. Khi đó

A $I = \dfrac{1}{2}$. **B** $I = 1$. **C** $I = 0$. **D** $I = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} \sin x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x \\ &= \cos x\Big|_{\frac{-\pi}{2}}^{0} - \cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 17. Đặt $a = 2^{\log_2\sqrt{9^{x-1}+7}}, b = 2^{\frac{-1}{5}\log_2\left(3^{x-1}+1\right)}$. Giả sử $S = (a+b)^7 = \displaystyle\sum_{i=0}^{7} \mathrm{C}_7^i a^{7-i} b^i$. Tập hợp tất cả các giá trị của x để số hạng thứ 6 trong khai triển bằng 84 là

A $x = 1$ hoặc $x = 2$. **B** $x = 1$. **C** $x = 2$ hoặc $x = 4$. **D** $x = 4$.

Lời giải.

Ta có $a = 2^{\log_2 \sqrt{9^{x-1}+7}} = \sqrt{9^{x-1}+7}$, $b = 2^{\frac{-1}{5}\log_2\left(3^{x-1}+1\right)} = \left(3^{x-1}+1\right)^{\frac{-1}{5}}$.

Số hạng thứ 6 trong khai triển trên là $\mathrm{C}_7^5 a^2 b^5 = \dfrac{21\left(9^{x-1}+7\right)}{3^{x-1}+1}$. Khi đó ta có

$$\frac{9^{x-1}+7}{3^{x-1}+1} = 4 \Leftrightarrow 9^{x-1} - 4\cdot 3^{x-1} + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x-1} = 1 \\ 3^{x-1} = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = a$ và vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SB. Góc giữa hai đường thẳng AM và BD bằng

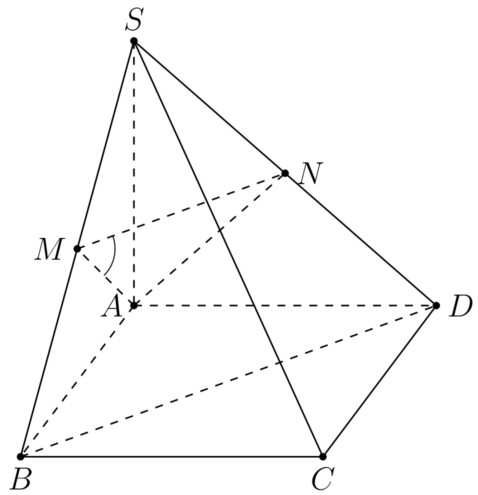
A $30°$. **B** $60°$. **C** $45°$. **D** $90°$.

Lời giải.

Lấy N là trung điểm SD, suy ra $MN \parallel BD$, dẫn tới $(AM, BD) = (AM, MN) = \widehat{AMN}$.

Vì $SA \perp AB \Rightarrow AM = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tương tự $AN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lại có MN là đường trung bình của $\triangle SBD$ nên ta có $MN = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $\triangle AMN$ là tam giác đều, nên $\widehat{AMN} = 60°$.



Chọn đáp án B □

Câu 19. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4\cos^3 2x - 6\cos^2 x = m - 4$ có nghiệm là

A $m \in [0; 1]$. **B** $m \in [-1; 0]$. **C** $m \in [0; 2]$. **D** $m \in [-1; 1]$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $m = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x + 1 \Leftrightarrow m = \cos 6x + 1$.

Vì $\cos 6x$ nhận mọi giá trị trong đoạn $[-1; 1]$ nên phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $0 \le m \le 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\sqrt[4]{3}} x + \log_{\sqrt[6]{3}} x + \cdots + \log_{\sqrt[16]{3}} x < 36$ là

A $\left(0; \sqrt[4]{3}\right)$. **B** $\left(0; \sqrt{3}\right)$. **C** $(0; 1)$. **D** $\left(1; \sqrt{3}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \log_{\sqrt{3}} x + 2\log_{\sqrt{3}} x + 3\log_{\sqrt{3}} x + \cdots + 8\log_{\sqrt{3}} x < 36 \\ \Leftrightarrow\ & (1+2+3+\cdots+8)\log_{\sqrt{3}} x < 36 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad 36\log_{\sqrt{3}} x < 36$$
$$\Leftrightarrow \quad \log_{\sqrt{3}} x < 1 \Leftrightarrow x < \sqrt{3}.$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \in \left(0; \sqrt{3}\right)$.

Chọn đáp án B □

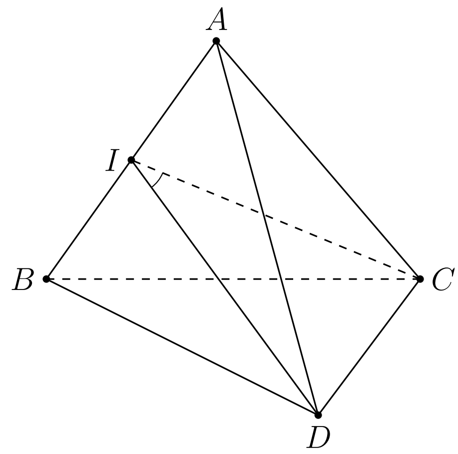
Câu 21. Cho tứ diện đều $ABCD$. Cô-sin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) bằng

A $\frac{2}{3}$. **B** $\frac{1}{4}$. **C** $\frac{1}{5}$. **D** $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AB. Khi đó $CI \perp AB$ và $DI \perp AB$, nên $((ABC),(ABD)) = (CI, DI) = \widehat{CID}$.

Giả sử độ dài mỗi cạnh tứ diện $ABCD$ bằng 1, khi đó ta có $CI = DI = \frac{\sqrt{3}}{2}$, nên $\cos\widehat{CID} = \frac{CI^2 + DI^2 - CD^2}{2 \cdot CI \cdot DI} = \frac{1}{3}$.



Chọn đáp án D □

Câu 22. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z - 20 = 0$ và mặt phẳng $(P)\colon x + y - z - m = 0$. Tìm m để (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính lớn nhất.

A $m = 0$. **B** $m = -4$. **C** $m = 7$. **D** $m = 4$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 1; -2)$. Mặt phẳng (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính lớn nhất khi và chỉ khi mp(P) đi qua I. Khi đó $1 + 1 - (-2) - m = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ là

A $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. **B** $\frac{\pi}{2}$. **C** $\frac{3}{\pi}$. **D** $\frac{2}{\pi}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.

Xét hàm số $g(x) = x\cos x - \sin x$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Ta có $g'(x) = -x\sin x < 0, \forall x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Suy ra $g(x)$ nghịch biến trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow g(x) \le g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{3}} - \frac{1}{2} < 0$.

Từ đó suy ra $f'(x) < 0, \forall x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$. Dẫn tới $\max\limits_{x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{\pi}$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Cho hình chóp $O.ABC$ có $OA = OB = OC = a$, $\widehat{AOB} = 60^\circ$, $\widehat{BOC} = 90^\circ$, $\widehat{COA} = 120^\circ$. Gọi S là trung điểm của OB. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A $\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. **C** $\dfrac{a}{4}$. **D** $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải.

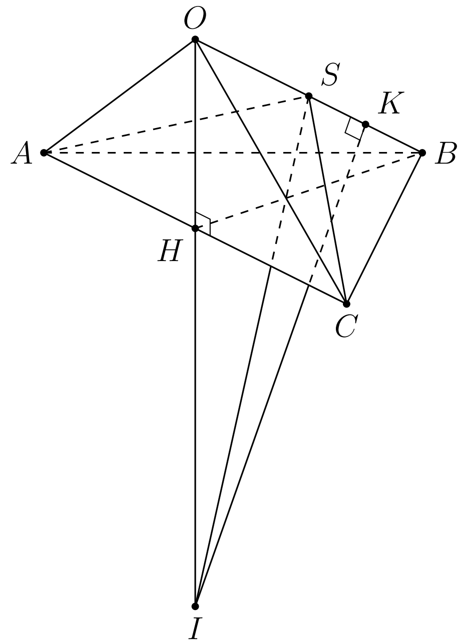
Ta có $AB = a, BC = a\sqrt{2}, CA = a\sqrt{3}$ nên tam giác ABC vuông tại B. Gọi H là trung điểm AC thì $HA = HB = HC$, mà $OA = OB = OC$ nên $OH \perp (ABC)$.

Ta có $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \dfrac{a}{2}$.

Trong mặt phẳng (OHB), gọi K là trung điểm SB và trung trực SB cắt đường thẳng OH tại I. Khi đó ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$.

Vì $\triangle OIK \backsim \triangle OBH \Rightarrow OI = \dfrac{OK \cdot OB}{OH} = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow IH = a$.

Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $IA = \sqrt{AH^2 + HI^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.



Chọn đáp án B □

Câu 25. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, M là trung điểm của SA. Biết mặt phẳng (MCD) vuông góc với mặt phẳng (SAB). Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

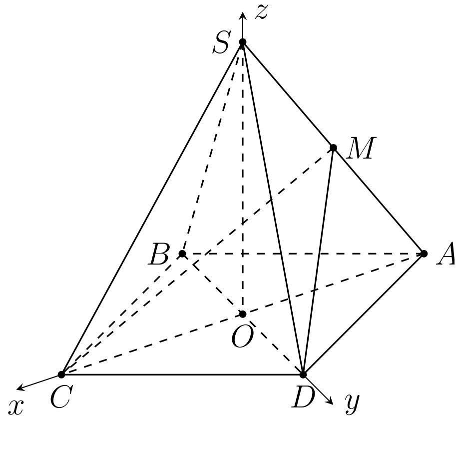
A $\dfrac{\sqrt{5}a^3}{2}$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **C** $\dfrac{a^3}{\sqrt{3}}$. **D** $\dfrac{\sqrt{5}a^3}{6}$.

Lời giải.

Đặt $SO = x > 0$ và gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Dựng hệ trục toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ, khi đó toạ độ các điểm là $S(0,0,x)$, $A\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)$, $B\left(0, -\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $C\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)$, $D\left(0, \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $M\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{4}, 0, \dfrac{x}{2}\right)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{CD}\right] = \left(\dfrac{ax\sqrt{2}}{4}, \dfrac{ax\sqrt{2}}{4}, \dfrac{3a^2}{4}\right) = \dfrac{a}{4}\left(x\sqrt{2}, x\sqrt{2}, 3a\right)$ nên mp(MCD) có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = \left(x\sqrt{2}, x\sqrt{2}, 3a\right)$.

Và $\left[\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AB}\right] = \left(\dfrac{ax\sqrt{2}}{2}, \dfrac{ax\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-a^2}{2}\right) = \dfrac{a}{2}\left(x\sqrt{2}, x\sqrt{2}, -a\right)$ nên mp(SAB) có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2} = \left(x\sqrt{2}, x\sqrt{2}, -a\right)$.



Để mặt phẳng (MCD) vuông góc với mặt phẳng (SAB) thì

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 3a^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad (\text{vì } x > 0).$$

Suy ra thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$ và hai mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 3z - 4 = 0$, $(Q)\colon x + y + z - 9 = 0$. Mặt phẳng (R) đi qua A và vuông góc với hai mặt phẳng $(P), (Q)$ có phương trình là

(A) $4x + y - 3z - 7 = 0$.
(B) $4x - y - 3z - 5 = 0$.
(C) $4x + y - 3z - 5 = 0$.
(D) $4x - y - 3z + 1 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (2;-1;3)$ và mặt phẳng (Q) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_Q = (1;1;1)$ nên mặt phẳng (R) vuông góc với hai mặt phẳng $(P), (Q)$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{n}_Q; \vec{n}_P] = (4;-1;-3)$.

Khi đó, mặt phẳng (R) đi qua $A(1;2;-1)$ có phương trình là $4(x-1) - (y-2) - 3(z+1) = 0$ hay $4x - y - 3z - 5 = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;4;3)$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (Oyz) là

(A) 2. (B) 4. (C) 3. (D) 5.

Lời giải.

Hình chiếu của điểm A xuống mặt phẳng (Oyz) là $H(0;4;3)$ nên khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (Oyz) là $AH = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Gọi D là phần mặt phẳng giới hạn bởi các đường $x = -1, y = 0, y = x^3$. Thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay D quanh trục Ox bằng

(A) $\frac{2\pi}{7}$. (B) $\frac{\pi}{8}$. (C) $\frac{\pi}{7}$. (D) $\frac{\pi}{6}$.

Lời giải.

Ta có $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, nên thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V = \pi \int\limits_{-1}^{0} x^6 \, \mathrm{d}x = \left.\frac{\pi x^7}{7}\right|_{-1}^{0} = \frac{\pi}{7}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Giả sử $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$. Tìm tất cả các giá trị của a, b thoả mãn đẳng thức $f(a) + f(b) = f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.

(A) $-1 < a < 1$ và $-1 < b < 1$.
(B) $-1 < a \leq 0$ và $-1 < b \leq 0$.
(C) $a = b = 0$.
(D) $0 \leq a < 1$ và $0 \leq b < 1$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $\mathscr{D} = (-1;1)$ nên ta phải có $a, b \in (-1;1)$. Ta có

$$f(a) + f(b) \;=\; \ln \frac{1-a}{1+a} + \ln \frac{1-b}{1+b} = \ln \frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}$$

$$= \ln \frac{1 - \dfrac{a+b}{1+ab}}{1 + \dfrac{a+b}{1+ab}} = f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right).$$

Vậy với mọi $a, b \in (-1; 1)$ ta đều có $f(a) + f(b) = f\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ 3x^2 - mx\sqrt{x} + 16 = 0 \end{cases}$ có nghiệm là

(A) $[8; 16]$. (B) $[0; 19]$. (C) $[0; 1]$. **(D)** $[8; 19]$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Bất phương trình thứ nhất tương đương với $(x-1)(x-4) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$.

Phương trình thứ hai tương đương với $m = \dfrac{3x^2 + 16}{x\sqrt{x}}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{3x^2+16}{x\sqrt{x}}$ trên đoạn $[1; 4]$ ta có $f'(x) = \dfrac{3(x^2 - 16)}{2x^2\sqrt{x}} \leq 0, \forall x \in [1; 4]$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	1		4
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	19		
			8

Vậy hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \in [8; 19]$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Tính $I = \displaystyle\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = \dfrac{\pi}{4}$. (B) $I = \dfrac{1}{2}$. **(C)** $I = 0$. (D) $I = 1$.

Lời giải.

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$. Khi $x = -\dfrac{\pi}{2}$ thì $t = \dfrac{\pi}{2}$ và khi $x = \dfrac{\pi}{2}$ thì $t = -\dfrac{\pi}{2}$.

Suy ra $I = -\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{-\pi}{2}} \frac{-\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -I$, dẫn tới $I = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Người ta lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 viên bi từ một hộp chứa 3 viên bi trắng và 5 viên bi đen. Tính xác suất để lấy được 2 viên bi trắng và 1 viên bi đen.

A $\dfrac{17}{52}$. **B** $\dfrac{17}{56}$. **C** $\dfrac{15}{42}$. **D** $\dfrac{15}{56}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_8^3 = 56$.

Gọi A là biến cố: "Lấy được 2 viên bi trắng và 1 viên bi đen".

Khi đó $n(A) = \mathrm{C}_3^2 \cdot \mathrm{C}_5^1 = 15$. Dẫn tới $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{15}{56}$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;3), B(2;3;-4)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm A và bán kính bằng AB. Phương trình mặt cầu (S) là

A $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 75$. **B** $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 11$.

C $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 75$. **D** $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 75$.

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{AB} = (1;5;-7)$ nên bán kính của mặt cầu (S) là $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{75}$. Suy ra phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 75$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m2^x + 2^{-x} = 5$ có nghiệm duy nhất là

A $m \leq 0$ hoặc $m = \dfrac{25}{4}$. **B** $0 < m \leq \dfrac{25}{4}$.

C $m = \dfrac{25}{4}$. **D** $m \leq 0$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $m = \dfrac{5 - 2^{-x}}{2^x} = \dfrac{5 \cdot 2^x - 1}{4^x}$. (*)

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{5 \cdot 2^x - 1}{4^x}$ trên $\mathbb{R}$ ta có $f'(x) = \dfrac{(2 - 5 \cdot 2^x)\ln 2}{4^x}$.

Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2^x = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow x = \log_2 \dfrac{5}{2}$, mà $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ nên bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$\log_2 \dfrac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{25}{4}$	$\searrow$	0

Từ đó suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m \leq 0$ hoặc $m = \dfrac{25}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x(x-1)(x+1)(x+2) = m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$ là

A $m \in [-1; 0]$. **B** $m \in [-1; 1]$. **C** $m \in [0; 1]$. **D** $m \in [0; 2]$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x(x-1)(x+1)(x+2) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$ trên đoạn $[0; 1]$.

Ta có $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2x - 2$, khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 1]$ như sau:

x	0		$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $[0; 1]$ khi $m \in [-1; 0]$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Biết $\cot\alpha = 3$, khi đó giá trị của $\sin\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$ là

A $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$. **B** $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$. **C** $\dfrac{-\sqrt{2}}{10}$. **D** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\cot\alpha = 3 \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{1}{3}$, nên $\sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{3}{5}$; $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{4}{5}$.

Suy ra $\sin\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\alpha - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos 2\alpha = \dfrac{-\sqrt{2}}{10}$.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Giả sử $\dfrac{1}{(1-i)^9} = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó

A $a = \dfrac{1}{32}; b = \dfrac{-1}{32}$. **B** $a = 0; b = \dfrac{1}{32}$. **C** $a = \dfrac{1}{32}; b = 0$. **D** $a = b = \dfrac{1}{32}$.

Lời giải.

Ta có $(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i \Rightarrow (1-i)^4 = 4 \Rightarrow (1-i)^8 = 16$.

Khi đó

$$\frac{1}{(1-i)^9} = \frac{1}{16(1-i)} = \frac{1+i}{32}.$$

Vậy $a = b = \dfrac{1}{32}$.

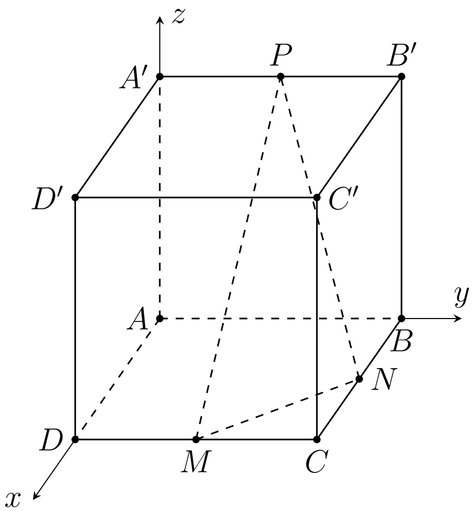
Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $CD, CB, A'B'$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (MNP) bằng

A $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $a\sqrt{2}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Dựng hệ trục toạ độ $Oxyz$ với $O \equiv A$ như hình vẽ. Khi đó toạ độ các điểm là $A(0,0,0)$, $B(0,a,0)$, $C(a,a,0)$, $D(a,0,0)$, $A'(0,0,a)$, $B'(0,a,a)$, $M\left(a,\frac{a}{2},0\right)$, $N\left(\frac{a}{2},a,0\right)$, $P\left(0,\frac{a}{2},a\right)$. Ta có $\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$, $\overrightarrow{MP} = (-a,0,a)$ nên $\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right] = \left(\frac{a^2}{2},\frac{a^2}{2},\frac{a^2}{2}\right) = \frac{a^2}{2}(1,1,1)$. Suy ra mặt phẳng (MNP) có phương trình $x+y+z-\frac{3a}{2}=0$. Dẫn tới $\mathrm{d}\left[A,(MNP)\right] = \frac{\left|-\frac{3a}{2}\right|}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$; $a,b,c \in \mathbb{R}$ thoả mãn $a<c<b$. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

(A) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ là $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

(B) Thể tích vật thể tròn xoay tạo nên khi quay phần mặt phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ quanh trục Ox là $V=\int\limits_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}(\pi x)$.

(C) $\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

(D) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Chọn $f(x)=2x, a=-1, b=1$ thì ta có

$$\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^1 |2x|\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{-1}^0 2x\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 2x\,\mathrm{d}x = -x^2\Big|_{-1}^0 + x^2\Big|_0^1 = 2$$

$$\text{và} \quad \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^1 2x\,\mathrm{d}x = x^2\Big|_{-1}^1 = 0 \Rightarrow \left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = 0.$$

Khi đó $\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \neq \left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

Chọn đáp án (C) □

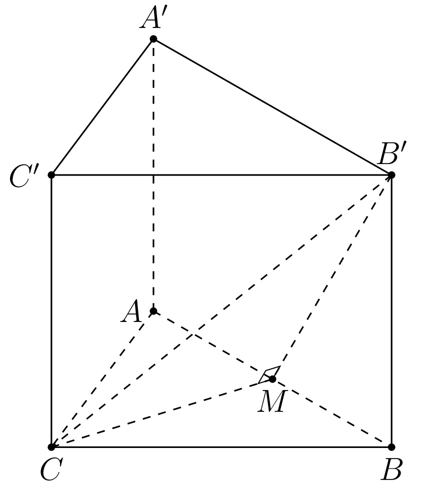
Câu 40. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính tan của góc giữa đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$.

(A) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. (B) 1. (C) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. (D) $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Lời giải.

Lấy M là trung điểm AB, khi đó $CM \perp AB$. Mà $CM \perp AA'$ nên $CM \perp (ABB'A') \Rightarrow (B'C, (ABB'A')) = \widehat{CB'M}$.

Ta có $B'M = \sqrt{B'B^2 + BM^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên suy ra $\tan \widehat{CB'M} = \dfrac{CM}{B'M} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của SD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và SC là

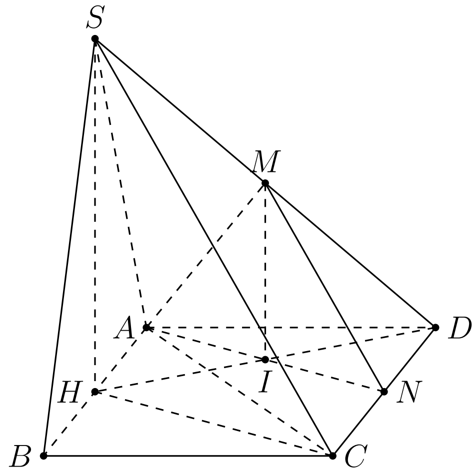
(A) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. (C) a. (D) $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải.

Gọi N là trung điểm CD. Ta có $MN \parallel SC \Rightarrow SC \parallel (AMN)$

$\Rightarrow \mathrm{d}(AM, SC) = \mathrm{d}\left[(AMN), SC\right] = \mathrm{d}\left[C, (AMN)\right]$.

Kẻ $SH \perp AB$, ta có $SH \perp (ABCD), SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. Khi đó



$$\begin{aligned} V_{ACNM} &= \frac{1}{3} \cdot \mathrm{d}\left[M, (ACN)\right] \cdot S_{ACN} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\mathrm{d}\left[S, (ACN)\right] \cdot \frac{1}{4} S_{ABCD} \\ &= \frac{1}{8} V_{S.ABCD} = \frac{\sqrt{3}a^3}{48}. \end{aligned}$$

Ta có $AN = HD = HC = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Lại có $SD^2 = SH^2 + HD^2 = SH^2 + HA^2 + AD^2 = SA^2 + AD^2 = 2a^2$

$\Rightarrow SD = a\sqrt{2}$ và $\triangle SAD$ vuông tại A nên $AM = \dfrac{SD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vì $HC = HD$ nên $SC = SD = a\sqrt{2} \Rightarrow MN = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lấy I là trung điểm của AN thì $MI \perp AN$ nên $MI = \sqrt{AM^2 - AI^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{5a^2}{16}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra $S_{AMN} = \dfrac{AN \cdot MI}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{16} \Rightarrow \mathrm{d}\left[C, (AMN)\right] = \dfrac{3V_{ACNM}}{S_{AMN}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án (B) □

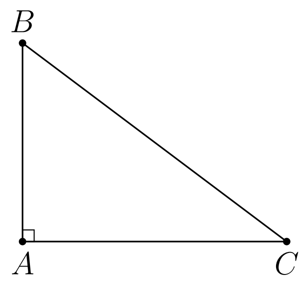
Câu 42. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 6, AC = 8$. Gọi V_1 là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB và V_2 là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC. Khi đó tỷ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A $\dfrac{9}{16}$. **B** $\dfrac{3}{4}$. **C** $\dfrac{4}{3}$. **D** $\dfrac{16}{9}$.

Lời giải.

Ta có $V_1 = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot AC^2 \cdot AB, V_2 = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot AB^2 \cdot AC$

$\Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{4}{3}$.



Chọn đáp án C □

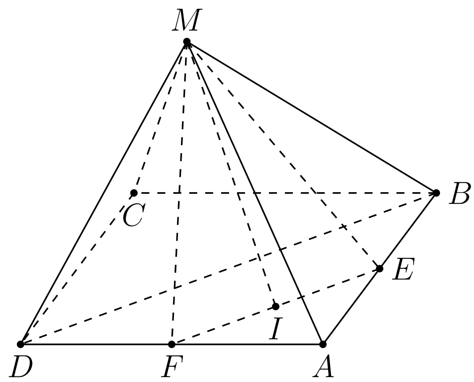
Câu 43. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Điểm M thay đổi trong không gian sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{AMD} = 90°$. Biết rằng luôn tồn tại một đường tròn cố định đi qua M. Bán kính của đường tròn đó là

A $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **C** a. **D** $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải.

Gọi E, F, I lần lượt là trung điểm AB, AD, EF. Vì $\triangle AMB$, $\triangle AMD$ vuông tại M nên $ME = MF = \dfrac{a}{2}$.

Mà $EF = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên $MI^2 = \dfrac{1}{2}(ME^2 + MF^2) - \dfrac{1}{4}EF^2 = \dfrac{a^2}{8} \Rightarrow MI = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. Mà $MI \perp EF$ nên M nằm trên giao tuyến của mặt cầu tâm I, bán kính $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$ và mặt phẳng đi qua I vuông góc với EF, giao tuyến này là một đường tròn cố định với tâm I, bán kính $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.



Chọn đáp án B □

Câu 44. Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{1-4x}$.

A $y = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{1-4x}$. **B** $y = -4\mathrm{e}^{1-4x}$. **C** $y = \mathrm{e}^{1-4x}$. **D** $y = -\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{1-4x}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \mathrm{e}^{1-4x}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{1-4x} + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-1)$ và $B(1;0;2)$. Đường thẳng AB có phương trình chính tắc là

A $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{1}$. **B** $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$.

C $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-1}{3}$. **D** $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+1}{3}$.

Lời giải.

Đường thẳng AB có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 3)$ và đi qua $A(0; 1; -1)$ có phương trình là $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+1}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 46. Số phức z có phần ảo lớn nhất thoả mãn $|z - 1 - i| = 1$ là

(A) $z = 2 + 2i$. **B** $z = 1 + 2i$. (C) $z = 2i$. (D) $z = -1 + 3i$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$, theo bài ra ta có

$$|(x-1) + (y-1)i| = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1.$$

Mà $(x-1)^2 \geq 0$ nên $(y-1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq y - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 2$.

Vậy phần ảo của z có giá trị lớn nhất bằng 2.

Dấu bằng xảy ra khi $x = 1; y = 2$, hay $z = 1 + 2i$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Giới hạn $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ bằng

(A) $-\infty$. (B) 0. (C) 1. **D** -1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 + \dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}} = -1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$. Chu vi của tam giác ABC là

(A) $2 - \sqrt{2}$. (B) $1 + \sqrt{2}$. (C) 2. **D** $2 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$, khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	1	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			0				0		

Suy ra các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(-1; 0), B(0; 1), C(1; 0)$, khi đó $AB = BC = \sqrt{2}$, $AC = 2$. Vậy chu vi tam giác ABC là $2 + 2\sqrt{2}$.

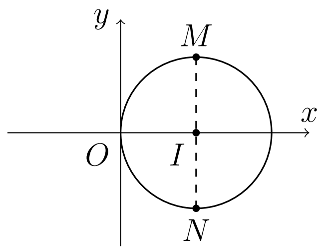
Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Gọi (C) là tập hợp các điểm trên mặt phẳng biểu diễn số phức $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ thoả mãn $|z - 1| = 1$ và N là điểm biểu diễn số phức $z_0 = 1 - i$. Tìm điểm M thuộc (C) sao cho MN có độ dài lớn nhất

A $M(1;1)$. **B** $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **C** $M(1;0)$. **D** $M(0;0)$.

Lời giải.

Ta có $|z-1| = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$ nên tập hợp điểm (C) biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $R = 1$.
Điểm N có toạ độ là $N(1;-1)$ cũng thuộc (C) nên MN có độ dài lớn nhất khi MN là đường kính của đường tròn (C) hay I là trung điểm của MN nên toạ độ M là $M(1;1)$.



Chọn đáp án A ☐

Câu 50. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x - z + 6 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A $\overrightarrow{n_2} = (3;0;-1)$. **B** $\overrightarrow{n_1} = (3;-1;2)$. **C** $\overrightarrow{n_3} = (3;-1;0)$. **D** $\overrightarrow{n_4} = (-1;0;-1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon 3x - z + 6 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2} = (3;0;-1)$.
Chọn đáp án A ☐

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. B	3. A	4. A	5. D	6. D	7. A	8. C	9. A	10. B
11. D	12. C	13. D	14. C	15. C	16. D	17. A	18. B	19. C	20. B
21. D	22. D	23. C	24. B	25. B	26. B	27. A	28. C	29. A	30. D
31. C	32. D	33. A	34. A	35. A	36. C	37. D	38. B	39. C	40. C
41. B	42. C	43. B	44. D	45. D	46. B	47. D	48. D	49. A	50. A

82 ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG TOÁN 12 NĂM HỌC 2017-2018, SỞ GD&ĐT HÀ NAM

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Tìm tọa độ điểm M là điểm biểu diễn của số phức $z = 3 - 4i$.

Ⓐ $M(3;4)$. Ⓑ $M(-3;-4)$. **C** $M(3;-4)$. Ⓓ $M(-3;4)$.

Lời giải.

Ta có số phức $z = 3 - 4i$ có điểm biểu diễn là $M(3;-4)$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x-1)^3$.

Ⓐ $3(x-1) + C$. **B** $\frac{1}{4}(x-1)^4 + C$. Ⓒ $4(x-1)^4 + C$. Ⓓ $\frac{1}{4}(x-1)^3 + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (x-1)^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(x-1)^4 + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$. Diện tích của D được tính theo công thức nào dưới đây?

Ⓐ $S = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$. **B** $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Ⓒ $S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $S = \int\limits_b^a |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích của D được tính theo công thức

$$S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án B □

Câu 4. Một chiếc hộp chứa 9 quả cầu gồm 4 quả màu xanh, 3 quả màu đỏ và 2 quả màu vàng. Lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu từ hộp đó. Xác suất để trong 3 quả cầu lấy được có ít nhất 1 quả màu đỏ bằng bao nhiêu?

Ⓐ $\frac{1}{3}$. Ⓑ $\frac{17}{42}$. **C** $\frac{16}{21}$. Ⓓ $\frac{19}{28}$.

Lời giải.

Gọi biến cố A: "3 quả cầu lấy được không có quả màu đỏ".

Suy ra biến cố $\overline{A}$: "3 quả cầu lấy được có ít nhất 1 quả màu đỏ".

Ta có $n(A) = \mathrm{C}_6^3 = 20$ và $n(\Omega) = \mathrm{C}_9^3 = 84$.

Do đó $\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{20}{84} = \frac{5}{21}$.

Vậy
$$\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A) = 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;2)$ và $B(3;0;-1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa điểm B và vuông góc với đường thẳng AB. Viết phương trình mặt phẳng (P).

A $(P)\colon 4x - 2y - 3z - 9 = 0$.
B $(P)\colon 4x - 2y - 3z - 15 = 0$.
C $(P)\colon 4x + 2y - 3z - 15 = 0$.
D $(P)\colon 4x - 2y + 3z - 9 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (4;-2;-3)$.

Mặt phẳng (P) qua điểm $B(3;0;-1)$ có phương trình
$$\begin{aligned} &(P)\colon 4(x-3) - 2(y-0) - 3(z+1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 4x - 2y - 3z - 15 = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số bằng bao nhiêu?

A $y_{\text{CĐ}} = 2$. **B** $y_{\text{CĐ}} = 0$. **C** $y_{\text{CĐ}} = 5$. **D** $y_{\text{CĐ}} = -1$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy giá trị cực đại của hàm số là $y_{\text{CĐ}} = 5$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Phương trình $f(2-x) - 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A 0. **B** 2. **C** 1. **D** 3.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta thực hiện các bước sau

- Đối xứng đồ thị $y = f(x)$ qua trục Oy ta thu được đồ thị $y = f(-x)$.

• Tịnh tiến đồ thị $y = f(-x)$ sang phải 2 đơn vị ta thu được đồ thị $y = f(-x+2)$.

Hàm số $y = f(-x+2)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

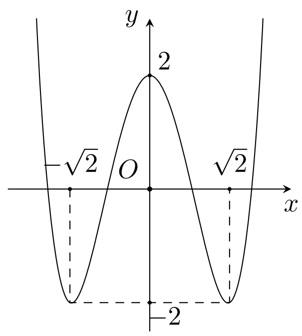
Số nghiệm của phương trình $f(2-x) - 1 = 0$ (1) bằng số giao điểm hai đồ thị $y = f(2-x)$ và $y = 1$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình (1) có 3 nghiệm.

Chọn đáp án D □

Câu 8.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A $(0; \sqrt{2})$. **B** $(-2; 2)$.

C $(-\infty; 0)$. **D** $(\sqrt{2}; +\infty)$.

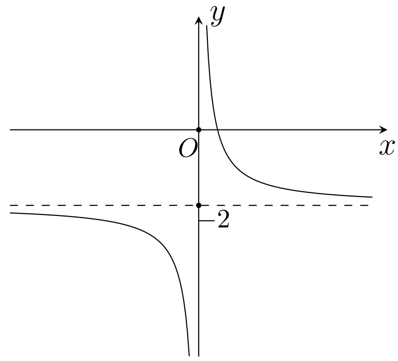
Lời giải.

Dựa vào đồ thị, ta thấy trên khoảng $(0; \sqrt{2})$ đồ thị đi xuống nên hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng đó.

Chọn đáp án A □

Câu 9.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A $y = \dfrac{2x}{x+1}$. **B** $y = \dfrac{-2x+1}{x}$.

C $y = \dfrac{2x+1}{x}$. **D** $y = \dfrac{-x+1}{2x}$.

Lời giải.

Đồ thị trong hình vẽ có đường tiệm cận ngang $y = -2$ nên chỉ có hàm số $y = \dfrac{-2x+1}{x}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có hai đường tiệm cận đứng?

A $y = \dfrac{2x-1}{3x^2-3x+2}$. **B** $y = \dfrac{x-1}{3x^2-10x+3}$.

C $y = \dfrac{x+1}{x^2+x}$. **D** $y = \dfrac{5x^2-3x-2}{x^2-4x+3}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \dfrac{x-1}{3x^2-10x+3}$. Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{3}; 3\right\}$.

Ta có

$$\lim_{x\to \frac{1}{3}^+} y = +\infty \text{ và } \lim_{x\to 3^+} y = +\infty.$$

Do đó hàm số $y = \dfrac{x-1}{3x^2-10x+3}$ có hai đường tiệm cận đứng.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Tính chiều cao h của hình trụ đã cho.

A $h = 3a$. B $h = 2a$. C $h = \dfrac{3}{2}a$. D $h = \dfrac{2}{3}a$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & S_{\text{xq}} = 2\pi r l \\ \Leftrightarrow\ & 3\pi a^2 = 2\pi a l \\ \Leftrightarrow\ & l = \frac{3}{2}a. \end{aligned}$$

Vậy $h = l = \dfrac{3}{2}a$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1;-3;2)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y-3z-4=0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P).

A $d\colon \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+2}{3}$. B $d\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+2}{-3}$.

C $d\colon \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+3}{-3}$. D $d\colon \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-2}{-3}$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = \vec{n}_P = (1;-2;-3)$.

Đường thẳng d qua $A(-1;-3;2)$ có phương trình

$$d\colon \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-3}.$$

Chọn đáp án D □

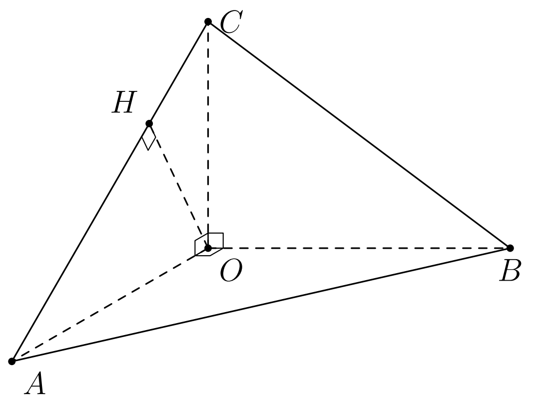
Câu 13. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OB = \dfrac{a}{2}$, $OA = 2OB$, $OC = 2OA$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OB và AC bằng bao nhiêu?

A $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. B $\dfrac{3a}{2\sqrt{5}}$. C $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. D $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên cạnh AC. (1)
Ta có $OB \perp (OAC)$ nên $OB \perp OH$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra OH là đoạn vuông góc chung của OB và AC.
Do đó

$$d(OB, AC) = OH = \frac{OA \cdot OC}{AC} = \frac{a \cdot 2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$



Chọn đáp án C □

Câu 14. Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng theo thể thức lãi kép, với lãi suất 1,85%/quý. Sau tối thiểu bao nhiêu quý, người đó nhận được ít nhất 72 triệu đồng (cả vốn ban đầu và lãi), nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

A 20 quý. B 19 quý. C 14 quý. D 15 quý.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned} & A_n \geq 72 \\ \Leftrightarrow\ & A(1+r)^n \geq 72 \\ \Leftrightarrow\ & 50\left(1 + \frac{1{,}85}{100}\right)^n \geq 72 \\ \Leftrightarrow\ & n \geq \log_{1{,}0185} 1{,}44 \approx 19{,}89. \end{aligned}$$

Vậy sau 20 quý thì người gửi nhận được ít nhất 72 triệu đồng.
Chọn đáp án A □

Câu 15. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|\frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30\right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 30. Tổng giá trị các phần tử của tập hợp S bằng bao nhiêu?

A 108. B 136. C 120. D 210.

Lời giải.
Xét hàm số $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x$ trên đoạn $[0; 2]$.
Ta có $g'(x) = x^3 - 28x + 48$.
Xét phương trình

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 28x + 48 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \text{ (nhận)} \\ x = 4 \text{ (loại)} \\ x = -6. \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Ta có

$$g(0) = 0;\ \ g(2) = 44.$$

Do đó

$$0 \le \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x \le 44$$

$$\Leftrightarrow m - 30 \le \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \le m + 14.$$

Khi đó $\max\limits_{x\in[0;2]} y = \max\{|m-30|; |m+14|\}$.

Xét các trường hợp sau

- $|m-30| \ge |m+14| \Leftrightarrow m \le 8. \qquad (1)$

  Khi đó $\max\limits_{x\in[0;2]} y = |m-30|$, theo đề bài

  $$|m-30| \le 30 \Leftrightarrow 0 \le m \le 60. \qquad (2)$$

  Từ (1) và (2) ta được $m \in [0;8]$.

- $|m-30| < |m+14| \Leftrightarrow m > 8. \qquad (3)$

  Khi đó $\max\limits_{x\in[0;2]} y = |m+14|$, theo đề bài

  $$|m+14| \le 30 \Leftrightarrow -44 \le m \le 16. \qquad (4)$$

  Từ (3) và (4) ta được $m \in (8;16]$.

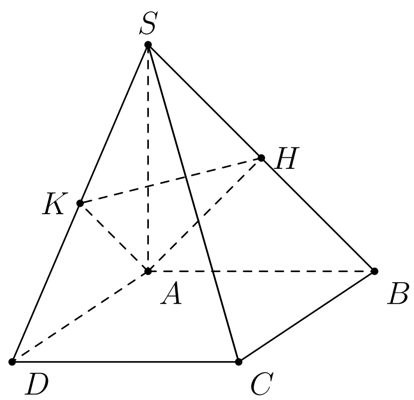
Vậy $m \in [0;16]$ và m nguyên nên $m \in \{0;1;2;3;\ldots;15;16\}$.

Khi đó $0+1+2+\cdots+15+16 = 136$.

Chọn đáp án B □

Câu 16.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD (hình vẽ bên). Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt phẳng (AHK), tính $\tan\alpha$.



A $\tan\alpha = \sqrt{3}$. **B** $\tan\alpha = \sqrt{2}$.

C $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D** $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi L là giao điểm của SC và (AHK).

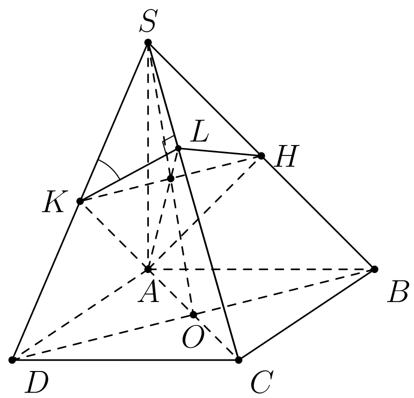
Ta có $AK \perp (SCD)$ và $AH \perp (SBC)$ nên $SC \perp (AKLH)$.

Do đó

$$(SD, (AHK)) = (SK, KL) = \widehat{SKL} = \alpha.$$

Xét $\triangle SAC$ ta có

$$SA^2 = SL \cdot SC \Leftrightarrow SL = \frac{SA^2}{SC} = \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$



Mặt khác $\triangle SLK \sim \triangle SDC$ nên

$$\frac{LK}{DC}=\frac{SK}{SC}\Leftrightarrow LK=\frac{SK\cdot DC}{SC}=\frac{\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot a}{a\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Xét $\triangle SLK$ ta có

$$\tan\alpha=\frac{SL}{KL}=\frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{\frac{a}{\sqrt{6}}}=\sqrt{2}.$$

Vậy $\tan\alpha=\sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Cho số tự nhiên n thỏa mãn $\mathrm{A}_n^2+2\mathrm{C}_n^n=22$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển của biểu thức $(3x-4)^n$.

A 1080. B -4320. C 4320. D -1440.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&\mathrm{A}_n^2+2\mathrm{C}_n^n=22\\ \Leftrightarrow\ &\frac{n!}{(n-2)!}+2=22\\ \Leftrightarrow\ &n(n-1)=20\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=5\ (\text{nhận})\\ n=-4.\ (\text{loại})\end{array}\right.\end{aligned}$$

Số hạng tổng quát của khai triển $(3x-4)^5$ là $\mathrm{C}_5^{5-k}(3x)^{5-k}(-4)^k$. Theo đề bài ta có

$$x^{5-k}=x^3\Leftrightarrow k=2.$$

Vậy hệ số của số hạng chứa x^3 là $\mathrm{C}_5^3(3)^3(-4)^2=4320$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Trong mặt phẳng cho 15 điểm phân biệt trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Số tam giác có các đỉnh là 3 trong số 15 điểm đã cho bằng bao nhiêu?

A A_{15}^3. B $15!$. C C_{15}^3. D 15^3.

Lời giải.

Số tam giác có các đỉnh là 3 trong số 15 điểm đã cho là C_{15}^3.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Cho a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $\log\sqrt[3]{a}=\log\frac{1}{3}\cdot\log a$. B $\log\sqrt[3]{a}=\frac{1}{3}\log a$.

C $\log\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{\log a}$. D $\log\sqrt[3]{a}=a\log\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\log\sqrt[3]{a}=\frac{1}{3}\log a$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{e}{3}} 2x < \log_{\frac{e}{3}}(9-x)$.

(A) $S=(3;+\infty)$. (B) $S=(-\infty;3)$. (C) $S=(3;9)$. (D) $S=(0;3)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_{\frac{e}{3}} 2x < \log_{\frac{e}{3}}(9-x) \\ \Leftrightarrow\ & 0 < 9-x < 2x \\ \Leftrightarrow\ & 3 < x < 9. \end{aligned}$$

Vậy $S=(3;9)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^4-6x^2-1$ trên đoạn $[-1;3]$.

(A) $m=-11$. (B) $m=-1$. (C) $m=-10$. (D) $m=-26$.

Lời giải.

Ta có $y'=4x^3-12x$.

Phương trình

$$y'=0 \Leftrightarrow 4x^3-12x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \text{ (nhận)} \\ x=\sqrt{3} \text{ (nhận)} \\ x=-\sqrt{3} \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Khi đó

$$y(0)=-1;\ y\left(\sqrt{3}\right)=-10;\ y(-1)=-6;\ y(3)=26.$$

Vậy $m=\min\limits_{x\in[-1;3]} y=-10$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+2}{2x-4}$.

(A) $L=-\dfrac{1}{2}$. (B) $L=-\dfrac{3}{4}$. (C) $L=1$. (D) $L=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+2}{2x-4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+\dfrac{2}{x}}{2-\dfrac{4}{x}}=\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Tính thể tích V của khối chóp có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng $3B$.

(A) $V=3Bh$. (B) $V=\dfrac{1}{3}Bh$. (C) $V=\dfrac{1}{6}Bh$. (D) $V=Bh$.

Lời giải.

Ta có $V=\dfrac{1}{3}\cdot 3B\cdot h=Bh$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Phương trình $\log\sqrt{x-1}+\log\sqrt{4x-15}-\sqrt{3}=0$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x-1>0 \\ 4x-15>0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{15}{4}$.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log\sqrt{x-1} + \log\sqrt{4x-15} - \sqrt{3} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \log\sqrt{4x^2-19x+15} = \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow\ & 4x^2-19x+15 = 10^{2\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x \approx 29{,}39 \text{ (nhận)} \\ x \approx -24{,}64 \text{ (loại).} \end{array}\right. \end{aligned}$$

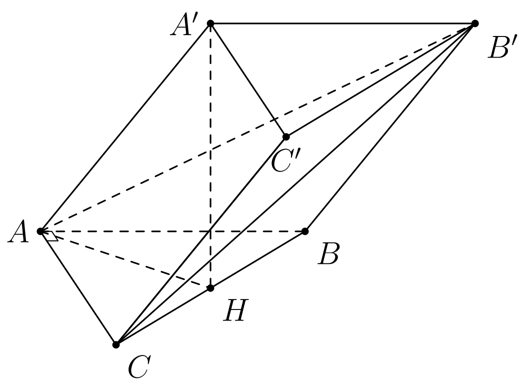
Khi đó phương trình đã cho chỉ có 1 nghiệm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $a\sqrt{7}$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Biết hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AA', $B'C'$.

(A) $d = a\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. (B) $d = \dfrac{3a}{\sqrt{2}}$. (C) $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **(D)** $d = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Lời giải.



Vì $AA' \parallel BB'$ nên $AA' \parallel (BB'C'B)$.

Do đó khoảng cách giữa hai đường thẳng AA', $B'C'$ bằng $\mathrm{d}(A, (BB'C))$.

Ta có $AH = \dfrac{1}{2}BC = a$ và $A'H = \sqrt{7a^2 - a^2} = a\sqrt{6}$.

Khi đó

$$V_{B'.ABC} = \frac{1}{3}A'H \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{6} \cdot a^2\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$

Xét $\triangle A'B'H$

$$B'H = \sqrt{A'H^2 + A'B'^2} = \sqrt{6a^2 + a^2} = a\sqrt{7}.$$

Ta có $\triangle BB'C$ có $B'H = a\sqrt{7}$, $BB' = a\sqrt{7}$, $HB = a$.

Dùng công thức Hê-rông ta tính được $S_{BB'H} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra $S_{BB'C} = 2 \cdot S_{BB'H} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

Ta có

$$V_{A.BB'C} = \frac{1}{3}\mathrm{d}(A, (BB'C)) \cdot S_{BB'C} \Leftrightarrow \mathrm{d}(A, (BB'C)) = \frac{3V_{A.BB'C}}{S_{BB'C}} = \frac{\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + (6m+5)x - 1$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

(A) 1. **B** 0. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 6m + 5$ và $\Delta_{y'} = 9m^2 - 6$.

Để y đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ thì $y' \geq 0$ với mọi $x \in (2; +\infty)$.

Xét hai trường hợp

- $\Delta_{y'} \leq 0 \Leftrightarrow 9m^2 - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{6}}{3} \leq m \leq \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. (1)
- Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa $x_1 < x_2 \leq 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ ay'(2) \geq 0 \\ \dfrac{S}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\dfrac{\sqrt{6}}{3} \text{ hoặc } m > \dfrac{\sqrt{6}}{3} \\ -6m + 5 \geq 0 \\ 6(m+1) < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\dfrac{\sqrt{6}}{3} \text{ hoặc } m > \dfrac{\sqrt{6}}{3} \\ m \leq \dfrac{5}{6} \\ m < 0. \end{cases} \quad (2)$$

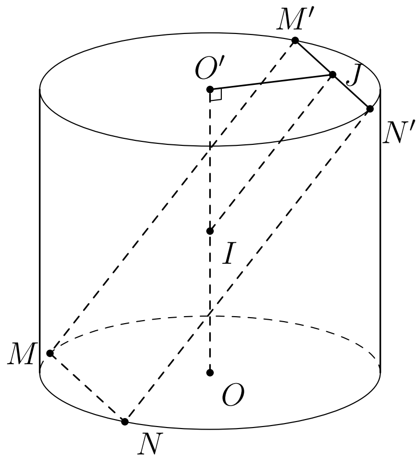
Do m là số nguyên dương và kết hợp (1), (2) ta suy ra không có giá trị m nào thỏa đề bài.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 4, một mặt phẳng không vuông góc với đáy và cắt hai đáy của hình trụ theo hai dây cung song song $MN,\ M'N'$ thỏa mãn $MN = M'N' = 6$. Biết rằng tứ giác $MNN'M'$ có diện tích bằng 60. Tính chiều cao h của hình trụ.

(A) $h = 4\sqrt{5}$. (B) $h = 6\sqrt{5}$. (C) $h = 4\sqrt{2}$. **D** $h = 6\sqrt{2}$.

Lời giải.



Gọi $I,\ J$ lần lượt là trung điểm OO' và $M'N'$.

Khi đó $M'N' \perp (O'IJ)$ suy ra $IJ \perp M'N'$ (1).

Mà I là tâm của hình bình hành $MNN'M'$ nên từ (1) suy ra $MNN'M'$ là hình chữ nhật.

Ta có $S_{MNN'M'} = 60 \Rightarrow MM' = 10$.

Xét $\triangle O'IJ$

$$O'I = \sqrt{IJ^2 - O'J^2} = \sqrt{5^2 - (4^2 - 3^2)} = 3\sqrt{2}.$$

Suy ra $OO' = h = 2 \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = \dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$. (B) $I = 1 - \sqrt{2}$. **C** $I = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$. (D) $I = \sqrt{2} - 1$.

Lời giải.

Ta có

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\, \mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\, \mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;3)$. Tìm tọa độ điểm B đối xứng với A qua mặt phẳng (Oyz).

A $B(1;2;3)$. **B** $B(-1;-2;-3)$. **C** $B(1;-2;3)$. **D** $B(1;2;-3)$.

Lời giải.

Ta có điểm $A(-1;2;3)$ đối xứng qua mặt phẳng (Oyz) ta được điểm $B(1;2;3)$ (giữ nguyên y_A, z_A, đổi dấu x_A).

Chọn đáp án A □

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;0;2)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I, tiếp xúc với đường thẳng d. Tính bán kính R của mặt cầu (S).

A $R = \dfrac{5}{3}$. **B** $R = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. **C** $R = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. **D** $R = \dfrac{\sqrt{30}}{3}$.

Lời giải.

Đường thẳng d qua $M(1;0;0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2;-1;1)$.

Do mặt cầu (S) tiếp xúc với đường thẳng d nên

$$R = \mathrm{d}(I,d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{IM}, \vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}. \qquad (1)$$

Ta có $\overrightarrow{IM} = (0;0;-2)$; $\left[\overrightarrow{IM}, \vec{u}\right] = (-2;-4;0)$.

Từ (1) suy ra

$$R = \frac{\sqrt{4+16}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 31. Cho số phức $z = a + bi$ $(a,\ b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z| = 5$ và $z(2+i)(1-2i)$ là một số thực. Tính $P = |a| + |b|$.

A $P = 8$. **B** $P = 4$. **C** $P = 5$. **D** $P = 7$.

Lời giải.

Ta có

$$z(2+i)(1-2i) = (a+bi)(4-3i) = 4a + 3b + (-3a+4b)i. \qquad (1)$$

Do $z(2+i)(1-2i)$ là một số thực nên từ (1) suy ra $-3a + 4b = 0 \Leftrightarrow b = \dfrac{3}{4}a$. (2)

Mặt khác $|z| = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 25$. (3)

Thế (2) vào (3) ta được phương trình

$$a^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2 = 25 \Leftrightarrow a^2 = 16 \Leftrightarrow a = \pm 4.$$

Với $a = 4 \Rightarrow b = 3$ và $a = -4 \Rightarrow b = -3$.

Vậy $P = |a| + |b| = 3 + 4 = 7$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 32. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $2\left(m+1-\sin^2 x\right) - (4m+1)\cos x = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

(A) $(0; +\infty)$. (B) $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right)$. (C) $\left(-\dfrac{1}{2}; 0\right]$. **D** $\left[-\dfrac{1}{2}; 0\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 2\left(m+1-\sin^2 x\right) - (4m+1)\cos x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2\left(m+\cos^2 x\right) - (4m+1)\cos x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2\cos^2 x - (4m+1)\cos x + 2m = 0. \qquad (1) \end{aligned}$$

Đặt $t = \cos x$, $\forall x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow -1 \le t < 0$.

Khi đó phương trình (1) trở thành

$$2t^2 - (4m+1)t + 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \text{ (loại)} \\ t = 2m. \end{array}\right.$$

Do đó, để phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ thì

$$-1 \le 2m < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le m < 0.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{-1}$; $d_2\colon \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{2}$; $d_3\colon \dfrac{x+3}{-3} = \dfrac{y-2}{-4} = \dfrac{z+5}{8}$. Viết phương trình đường thẳng song song với d_3, cắt d_1 và d_2.

A $\dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z+1}{8}$. (B) $\dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z-1}{8}$.

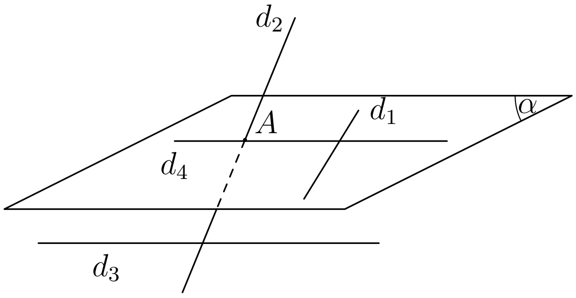
(C) $\dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z}{8}$. (D) $\dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z}{8}$.

Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_1 và song song d_3.

Đường thẳng d_1 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (2; 3; -1)$ và đi qua $M(1; 0; -1)$.

Đường thẳng d_3 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_3 = (-3; -4; 8)$. Suy ra véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là



$$\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_1, \vec{u}_3] = (20; -13; 1).$$

Mặt phẳng (α) qua $M(1; 0; -1)$ có phương trình

$$(\alpha)\colon 20(x-1) - 13(y-0) + 1(z+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 20x - 13y + z - 19 = 0.$$

Gọi A là giao điểm của đường thẳng d_2 và mặt phẳng (α).
Ta có $A(-2+t; 1-2t; 2t)$ thuộc (α) nên ta có phương trình

$$20(-2+t) - 13(1-2t) + 2t - 19 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2}.$$

Khi đó $A(-\frac{1}{2}; -2; 3)$ và tọa độ điểm A thỏa mãn phương trình $\dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z+1}{8}$.
Chọn đáp án A □

Câu 34. Biết $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x+1}{3x^2 + x\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln\left(a + \frac{\ln b}{c}\right)$ với a, b, c là các số nguyên dương và $c \leq 4$. Tính tổng $T = a+b+c$.

A. $T = 7$. B. $T = 6$. C. $T = 8$. D. $T = 9$.

Lời giải.

Đặt $u = \ln x \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \\ x = \mathrm{e}^u. \end{cases}$

Với $x = 1 \Rightarrow u = 0$ và $x = 2 \Rightarrow u = \ln 2$.
Ta có

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{3x+1}{3x^2 + x\ln x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\ln 2} \frac{3\mathrm{e}^u + 1}{3\mathrm{e}^u + u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{d}\left(3\mathrm{e}^u + u\right)}{3\mathrm{e}^u + u} = \ln x\Big|_3^{6+\ln 2} \\ &= \ln\left(6 + \ln 2\right) - \ln 3 = \ln\left(2 + \frac{\ln 2}{3}\right).\end{aligned}$$

Khi đó $a = 2$; $b = 2$; $c = 3$. Vậy $T = a+b+c = 7$.
Chọn đáp án A □

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $(m-5)9^x + (2m-2)6^x + (1-m)4^x = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & (m-5)9^x + (2m-2)6^x + (1-m)4^x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (m-5)\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 2(m-1)\left(\frac{3}{2}\right)^x + 1 - m = 0. \qquad (1)\end{aligned}$$

Đặt $t = \left(\dfrac{3}{2}\right)^x$, $t > 0$. Khi đó phương trình (1) trở thành

$$(m-5)t^2 + 2(m-1)t + 1 - m = 0. \qquad (2)$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\begin{cases}\Delta' > 0\\ S > 0\\ P > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2m^2 - 8m + 6 > 0\\ -\dfrac{2(m-1)}{m-5} > 0\\ \dfrac{1-m}{m-5} > 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \text{ hoặc } m > 3\\ 1 < m < 5\end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 5.$$

Vì m là số nguyên nên $m = 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{-2}$. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng d?

A $M(-1;-2;0)$. B $M(-1;1;2)$. C $M(2;1;-2)$. D $M(3;3;2)$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{-1-1}{2} = \dfrac{1-2}{1} = \dfrac{2}{-2} = -1$ nên $M(-1;1;2)$ thuộc đường thẳng d.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho hàm số $y = -x^3 + 4x^2 + 1$ có đồ thị là (C) và điểm $M(m;1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m để qua M kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị (C). Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng bao nhiêu?

A 5. B $\dfrac{40}{9}$. C $\dfrac{16}{9}$. D $\dfrac{20}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = f'(x) = -3x^2 + 8x$.

Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M_0(x_0;y_0) \in (C)$ có dạng $\Delta\colon y - y_0 = (-3x_0^2 + 8x_0)(x - x_0)$.

Ta có

$$\begin{aligned} & M(m;1) \in \Delta\\ \Leftrightarrow\ & 1 + x_0^3 - 4x_0^2 - 1 = (-3x_0^2 + 8x_0)(m - x_0)\\ \Leftrightarrow\ & 2x_0^3 - (3m+4)x_0^2 + 8mx_0 = 0\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x_0 = 0\\ 2x_0^2 - (3m+4)x_0 + 8m = 0. \qquad (1)\end{array}\right.\end{aligned}$$

Qua M kẻ được đúng 2 tiếp tuyến khi phương trình (1) có đúng một nghiệm khác 0

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0\\ \Delta = 0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0\\ 9m^2 - 40m + 16 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0\\ m = 4\\ m = \dfrac{4}{9}.\end{array}\right.$$

Khi đó $S=\left\{0;4;\dfrac{4}{9}\right\}$.

Vậy tổng giá trị các phần tử của S bằng $0+4+\dfrac{4}{9}=\dfrac{40}{9}$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$. Biết $f(3)+f(-3)=4$ và $f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=2$. Tính giá trị của biểu thức $T=f(-5)+f(0)+f(2)$.

A $T=5-\dfrac{1}{2}\ln 2$. **B** $T=6-\dfrac{1}{2}\ln 2$. **C** $T=5+\dfrac{1}{2}\ln 2$. **D** $T=6+\dfrac{1}{2}\ln 2$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \dfrac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C.$

Do hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$, $(1;+\infty)$ nên

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_1 & \text{khi } x\in(1;+\infty),\\ \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_2 & \text{khi } x\in(-\infty;-1),\\ \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_3 & \text{khi } x\in(-1;1).\end{cases}$$

Theo đề bài ta có

$$f(-3)=\dfrac{1}{2}\ln 2+C_2,$$
$$f(3)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2}+C_1.$$

Mà

$$f(3)+f(-3)=4\Leftrightarrow C_1+C_2=4.\qquad (1)$$

Tương tự

$$f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=2\Leftrightarrow 2C_3=2\Leftrightarrow C_3=1.$$

Ta có $\begin{cases}f(-5)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}+C_2\\ f(0)=1\\ f(2)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{3}+C_1\end{cases}\Rightarrow f(-5)+f(0)+f(2)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2}+1+C_1+C_2.$

Từ (1) suy ra $f(-5)+f(0)+f(2)=-\dfrac{1}{2}\ln 2+1+C_1+C_2=-\dfrac{1}{2}\ln 2+5$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-6z+11=0$. Tính giá trị của biểu thức $H=|3z_1|-|z_2|$.

A $H=22$. **B** $H=11$. **C** $H=2\sqrt{11}$. **D** $H=\sqrt{11}$.

Lời giải.

Ta có

$$z^2 - 6z + 11 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = 3 + \sqrt{2}i \\ z_2 = 3 - \sqrt{2}i. \end{array}\right.$$

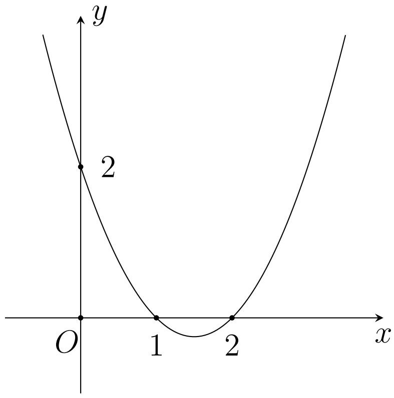
Mà $|z_1| = |z_2|$ nên $H = |3z_1| - |z_2| = 3|z_1| - |z_1| = 2|z_1| = 2\left|3 + \sqrt{2}i\right| = 2\sqrt{11}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 40.

Cho hàm số $y = f(x)$, biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(2x - 3x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$. (B) $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. (C) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$. (D) $\left(-2; \frac{1}{2}\right)$.



Lời giải.

Đặt $u(x) = 2x - 3x^2 = \frac{1}{3} - 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{1}{3}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, suy ra $f'(u) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f(2x - 3x^2) = f\left(u(x)\right)$ suy ra

$$f'(u(x)) = f'(u) \cdot u'(x) = (2 - 6x) \cdot f'(u).$$

Khi đó hàm số $y = f(2x - 3x^2)$ đồng biến khi

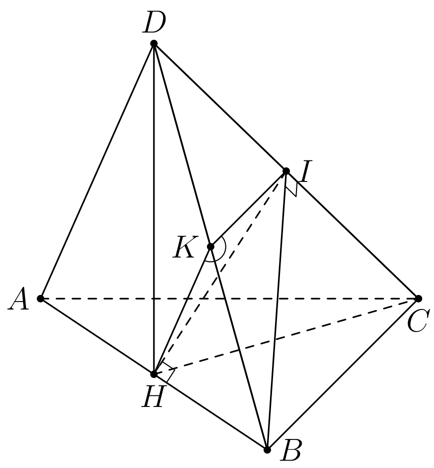
$$y' > 0 \Leftrightarrow f'(u(x)) > 0 \Leftrightarrow 2 - 6x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài các cạnh $AB = AC = AD = BC = BD = a$ và $CD = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AD và BC.

(A) $90°$. (B) $45°$. (C) $30°$. **D** $60°$.

Lời giải.



Gọi I, K, H lần lượt là trung điểm các cạnh DC, DB, AB.
Suy ra $KH \parallel AD$ và $KI \parallel BC$, khi đó

$$(AD, BC) = (KH, KI) = \widehat{IKH}.$$

Xét $\triangle BIC$, $BI = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp DH \\ AB \perp HC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (DHC) \Rightarrow AB \perp HI.$

Xét $\triangle BIH$, $HI = \sqrt{IB^2 - HB^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a}{2}$. (1)

Xét $\triangle IHK$, ta có

$$\begin{cases} IK = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2} \\ HK = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow IK = HK = \dfrac{a}{2}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle IHK$ là tam giác đều. Do đó $\widehat{IKH} = 60^\circ$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Cho dãy số (u_n) có số hạng đầu $u_1 \neq 1$ và thỏa mãn $\log_2^2(5u_1)+\log_2^2(7u_1) = \log_2^2 5+\log_2^2 7$. Biết $u_{n+1} = 7u_n$ với mọi $n \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 1\,111\,111$.

(A) 11. (B) 8. (C) 9. **D** 10.

Lời giải.

Điều kiện $u_1 > 0$.

Ta có

$$\begin{aligned}
& \log_2^2(5u_1) + \log_2^2(7u_1) = \log_2^2 5 + \log_2^2 7 \\
\Leftrightarrow\ & \log_2^2 u_1 + 2\log_2 5 \log_2 u_1 + \log_2^2 u_1 + 2\log_2 7 \log_2 u_1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \log_2 u_1 \left(\log_2 u_1 + \log_2 35\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \log_2 u_1 = 0 \\ \log_2 u_1 + \log_2 35 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u_1 = 1 \text{ (loại)} \\ u_1 = \dfrac{1}{35} \text{ (nhận)}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Dãy số (u_n) là cấp số nhân có $u_1 = \dfrac{1}{35}$ và $q = 7$ nên $u_n = \dfrac{1}{35} \cdot 7^{n-1}$.

Theo đề bài

$$u_n > 1\,111\,111 \Leftrightarrow \frac{1}{35} \cdot 7^{n-1} > 1\,111\,111 \Leftrightarrow 7^{n-1} > 38\,888\,885 \Leftrightarrow n \gtrsim 9{,}98.$$

Vậy $n = 10$.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(2;1;0)$, $B(0;4;0)$ và $C(0;2;-1)$. Biết đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (ABC) và cắt đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{3}$ tại điểm $D(a;b;c)$ thỏa mãn $a > 0$ và tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng $\dfrac{17}{6}$. Tính tổng $T = a + b + c$.

A $T = 5$. **B** $T = 4$. **C** $T = 7$. **D** $T = 6$.

Lời giải.

Gọi $D(1 + 2t; -1 + t; 2 + 3t) \in \Delta$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2; 3; 0) \\ \overrightarrow{AC} = (-2; 1; -1) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-3; -2; 4)$ và $\overrightarrow{AD} = (-1 + 2t; -2 + t; 2 + 3t)$.

Khi đó $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \cdot \overrightarrow{AD} = 4t + 15$.

Theo đề bài

$$\begin{aligned} & V_{ABCD} = \frac{17}{6} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \cdot \overrightarrow{AD}\right| = \frac{17}{6} \\ \Leftrightarrow\ & |4t + 15| = 17 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \\ t = -8. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Do $a > 0$ nên $D\left(2; -\dfrac{1}{2}; \dfrac{7}{2}\right)$.

Khi đó $T = a + b + c = 2 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{2} = 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m trong khoảng $(-3; 5)$ để đồ thị hàm số $y = x^4 + (m - 5)x^2 - mx + 4 - 2m$ tiếp xúc với trục hoành?

A 2. **B** 3. **C** 1. **D** 4.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\begin{aligned} & x^4 + (m - 5)x^2 - mx + 4 - 2m = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x + 1)(x - 2)(x^2 + x + m - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \\ x^2 + x + m - 2 = 0. \qquad (1) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Để đồ thị hàm số $y = x^4 + (m - 5)x^2 - mx + 4 - 2m$ tiếp xúc với trục hoành thì phương trình (1) phải có nghiệm $x = -1$ hoặc $x = 2$ hoặc có nghiệm kép khác -1 và -2

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - 1 + m - 2 = 0 \\ 4 + 2 + m - 2 = 0 \\ 1 - 4(m - 2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -4 \text{ (loại)} \\ m = \dfrac{9}{4}. \end{array}\right.$$

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn đề.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $f(0) = 0$. Biết $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}$ và $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\cos\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4}$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I=\dfrac{1}{\pi}$. (B) $I=\dfrac{4}{\pi}$. (C) $I=\dfrac{6}{\pi}$. (D) $I=\dfrac{2}{\pi}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u=\cos\dfrac{\pi x}{2} \\ \mathrm{d}v=f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x \\ v=f(x). \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^1 f'(x)\cos\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4}\\ \Leftrightarrow\ & f(x)\cos\frac{\pi x}{2}\Big|_0^1+\int\limits_0^1\frac{\pi}{2}\cdot f(x)\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4}\\ \Leftrightarrow\ &\int\limits_0^1 f(x)\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\int\limits_0^1\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\frac{1-\cos\pi x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x-2\int\limits_0^1 f(x)\cdot 3\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x+9\int\limits_0^1\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=0\\ \Leftrightarrow\ &\int\limits_0^1\left(f(x)-3\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=0\\ \Leftrightarrow\ & f(x)=3\sin\frac{\pi x}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 3\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x=-\frac{6}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\Big|_0^1=\frac{6}{\pi}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Cho số phức $z=a+bi$, $(a,\ b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $4(z-\bar{z})-15i=i(z+\bar{z}-1)^2$. Tính $P=-a+4b$ khi $\left|z-\dfrac{1}{2}+3i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(A) $P=7$. (B) $P=6$. (C) $P=5$. (D) $P=4$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 4(z-\bar{z})-15i=i(z+\bar{z}-1)^2\\ \Leftrightarrow\ & 4(2bi)-15i=i(2a-1)^2\\ \Leftrightarrow\ & 8b-15=(2a-1)^2\\ \Leftrightarrow\ & \left(a-\frac{1}{2}\right)^2=2b-\frac{15}{4}. \qquad (1) \end{aligned}$$

Từ (1) suy ra $2b - \dfrac{15}{4} \geq 0 \Leftrightarrow b \geq \dfrac{15}{8}$.

Ta có

$$\left|z - \frac{1}{2} + 3i\right|^2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + (b+3)^2 = b^2 + 8b + \frac{21}{4}.$$

Xét hàm số $f(b) = b^2 + 8b + \dfrac{21}{4}$ trên $\left[\dfrac{15}{8}; +\infty\right)$ ta có bảng biến thiên

b	$\dfrac{15}{8}$		$+\infty$
$f'(b)$		$+$	
$f(b)$	$f\left(\dfrac{15}{8}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên suy ra $\left|z - \dfrac{1}{2} + 3i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $b = \dfrac{15}{8}$, khi đó $a = \dfrac{1}{2}$.

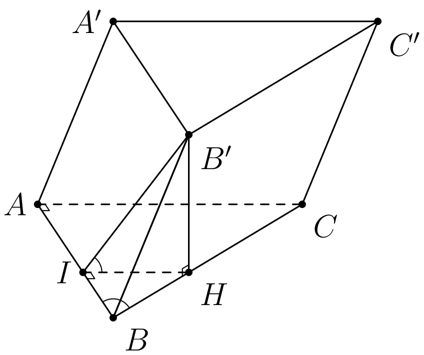
Vậy $P = -a + 4b = -\dfrac{1}{2} + 4 \cdot \dfrac{15}{8} = 7$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $BC = 2a$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có $\widehat{B'BC}$ nhọn. Mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc (ABC) và $(ABB'A')$ tạo với (ABC) một góc 45°. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $V = \dfrac{a^3}{\sqrt{7}}$. **B** $V = \dfrac{3a^3}{\sqrt{7}}$. **C** $V = \dfrac{6a^3}{\sqrt{7}}$. **D** $V = \dfrac{a^3}{3\sqrt{7}}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của B' lên cạnh BC (do $\widehat{B'BC}$ nhọn nên H thuộc đoạn BC) suy ra $B'H \perp (ABC)$.

Xét $\triangle ABC$, ta có

$$\cos 60^\circ = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = 2a \cdot \cos 60^\circ = a.$$

Khi đó $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot 2a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Gọi I là hình chiếu vuông góc H lên cạnh $AB \Rightarrow HI \parallel AC \Rightarrow AB \perp (B'IH) \Rightarrow AB \perp B'I$.

Khi đó

$$((ABB'A'), (ABC)) = (IH, IB') = \widehat{B'IH} = 45^\circ.$$

Đặt $B'H = h$, suy ra $B'H = IH = h$. Xét $\triangle BIH$

$$\sin 60^\circ = \frac{IH}{BH} \Rightarrow BH = \frac{2h}{\sqrt{3}}.$$

Xét $\triangle BB'H$, ta có

$$BB'^2 = BH^2 + B'H^2$$

$$\Leftrightarrow\ (2a)^2=\left(\frac{2h}{\sqrt{3}}\right)^2+h^2$$
$$\Leftrightarrow\ h^2=\frac{12a^2}{7}\Leftrightarrow h=\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

Vậy $V=S_{ABC}\cdot B'H=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{3a^3}{\sqrt{7}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y+z+1=0$ và $(Q)\colon 2x-y+2z+4=0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (Q) nằm trên trục hoành. Tìm tung độ của điểm M.

A 4. B 2. C -3. D -5.

Lời giải.

Gọi N là điểm đối xứng của điểm M qua mặt phẳng (Q), suy ra $N(n;0;0)$.

Gọi I thuộc (Q) là trung điểm của đoạn MN suy ra (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn MN.

Khi đó MN có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=\vec{n}_Q=(2;-1;2)$.

Phương trình đường thẳng MN là

$$MN\colon\begin{cases}x=n+2t\\ y=-t\\ z=2t\end{cases}\Rightarrow I(n+2t;-t;2t).$$

Vì I thuộc (Q) nên tọa độ điểm I thỏa mãn phương trình

$$2n+4t+t+4t+4=0\Leftrightarrow t=-\frac{2n+4}{9}.$$

Khi đó $I\left(\dfrac{5n-8}{9};\dfrac{2n+4}{9};-\dfrac{4n+8}{9}\right)$ suy ra $M\left(\dfrac{n-16}{9};\dfrac{4n+8}{9};-\dfrac{8n+16}{9}\right)$.

Do M thuộc (P) nên tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình

$$\frac{n-16}{9}+2\cdot\frac{4n+8}{9}-\frac{8n+16}{9}+1=0\Leftrightarrow n=7.$$

Vậy tung độ của điểm M bằng $\dfrac{4n+8}{9}=\dfrac{4\cdot7+8}{9}=4$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Xếp ngẫu nhiên 3 quả cầu màu đỏ khác nhau và 3 quả cầu màu xanh giống nhau vào một giá chứa đồ nằm ngang có 7 ô trống, mỗi quả cầu xếp vào một ô. Tính xác suất để 3 quả cầu màu đỏ xếp cạnh nhau và 3 quả cầu màu xanh xếp cạnh nhau.

A $\dfrac{3}{70}$. B $\dfrac{3}{140}$. C $\dfrac{3}{80}$. D $\dfrac{3}{160}$.

Lời giải.

Chọn 6 ô trong 7 ô có C_7^6 cách.

Trong 6 ô được chọn có C_6^3 cách chọn 3 ô để xếp 3 quả cầu xanh và có $3!$ cách xếp 3 quả cầu đỏ vào 3 ô trống còn lại.

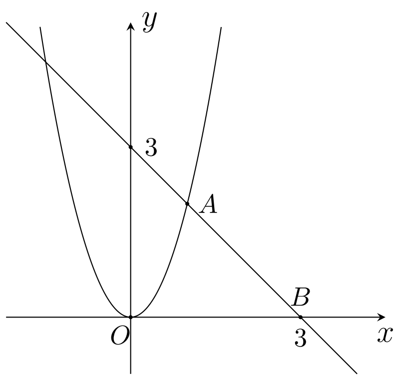
Do đó số phần tử của không gian mẫu bằng $n(\Omega)=C_7^6\cdot C_6^3\cdot 3!=840$.

Gọi biến cố A: "xếp 3 quả cầu màu đỏ cạnh nhau và 3 quả cầu màu xanh cạnh nhau".
Đầu tiên xếp 3 quả cầu đỏ cạnh nhau có 3! cách.

- Xếp 3 quả cầu đỏ vào 3 ô liên tiếp đầu hàng có 2 cách xếp và xếp 3 quả cầu xanh vào 3 ô cạnh nhau có 2 cách xếp.
- Xếp 3 quả cầu đỏ vào 3 ô liên tiếp nhau ở giữa hàng có 2 cách xếp và xếp 3 quả cầu xanh vào 3 ô cạnh nhau có 1 cách xếp.

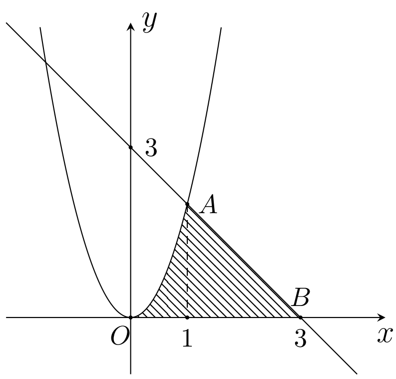
Khi đó $n(A) = 3!(2 \cdot 2 + 2 \cdot 1) = 36$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{36}{840} = \dfrac{3}{70}$.
Chọn đáp án A □

Câu 50.
Gọi tam giác cong (OAB) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = 2x^2$, $y = 3 - x$, $y = 0$ (hình vẽ bên). Tính diện tích S của (OAB).



A $S = \dfrac{8}{3}$. **B** $S = \dfrac{4}{3}$. **C** $S = \dfrac{5}{3}$. **D** $S = \dfrac{10}{3}$.

Lời giải.
Xét phương trình hoành độ giao điểm



$$2x^2 = 3 - x \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Ta có $S_{OAB} = \displaystyle\int_0^1 2x^2 \, \mathrm{d}x + \int_1^3 (3 - x) \, \mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}x^3 \Big|_0^1 + \left(3x - \dfrac{x^2}{2}\right) \Big|_1^3 = \dfrac{8}{3}$.

Chọn đáp án A □

——— **HẾT** ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. B	3. B	4. C	5. B	6. C	7. D	8. A	9. B	10. B
11. C	12. D	13. C	14. A	15. B	16. B	17. C	18. C	19. B	20. C
21. C	22. D	23. D	24. A	25. D	26. B	27. D	28. C	29. A	30. D
31. D	32. D	33. A	34. A	35. D	36. B	37. B	38. A	39. C	40. A
41. D	42. D	43. A	44. A	45. C	46. A	47. B	48. A	49. A	50. A

83 ĐỀ THI THỬ THPTQG 2018 TRƯỜNG THPT LÊ QUÝ ĐÔN, HÀ NỘI, LẦN 2

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Bất phương trình $\left(\sqrt{2}\right)^{x^2-2x} \le \left(\sqrt{2}\right)^3$ có tập nghiệm là

(A) $(-2;1)$. (B) $(-1;3)$. (C) $[-2;1]$. **(D)** $[-1;3]$.

Lời giải.

• Ta có $\left(\sqrt{2}\right)^{x^2-2x} \le \left(\sqrt{2}\right)^3 \Leftrightarrow x^2-2x \le 3 \Leftrightarrow x^2-2x-3 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2-2z+5=0$. Tính $P = z_1^4 + z_2^4$.

(A) -14. (B) $-14i$. (C) 14. (D) $14i$.

Lời giải.

• Ta có $z^2-2z+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1+2i \\ z=1-2i. \end{array}\right.$

• Do đó $P = z_1^4 + z_2^4 = (1+2i)^4 + (1-2i)^4 = -14$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Thu nhập bình quân đầu người của quốc gia X hiện tại là 2000 USD/1 người/1 năm. Biết mức tăng trưởng GDP (tổng thu nhập quốc dân) của quốc gia đó là 6% một năm và mức gia tăng dân số của quốc gia đó là 1% một năm. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm nữa thì mức thu nhập bình quân đầu người của quốc gia X lớn hơn 10000 USD/1 người/1 năm?

(A) 36 năm. (B) 32 năm. **(C)** 34 năm. (D) 40 năm.

Lời giải.

• Mức tăng trưởng GDP bình quân của nước X là $\dfrac{1+0.06}{1+0.01} = \dfrac{106}{101}$.

• Thu nhập bình quân đầu người sau n năm là $2000 \cdot \left(\dfrac{106}{101}\right)^n$ (USD/1 người/1 năm) .

• Ta có $2000 \cdot \left(\dfrac{106}{101}\right)^n > 10000 \Leftrightarrow \left(\dfrac{106}{101}\right)^n > 5 \Leftrightarrow n > \log_{\frac{106}{101}} 5 \approx 33{,}31$. Do đó sau ít nhất 34 năm thì mức thu nhập bình quân đầu người của quốc gia X lớn hơn 10000 USD/1 người/1 năm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	2	↗	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm nào?

(A) $x=0$. (B) $x=1$.

(C) $x=4$. (D) Hàm số không có điểm cực đại.

Lời giải.

• y' đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi x qua điểm 0 nên $x = 0$ là điểm cực đại của hàm số.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	1	↘	-4	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x) + 3 = 0$ là

A 1. B 2. C 3. D 4.

Lời giải.

• Số nghiệm của phương trình $f(x) + 3 = 0$ là số giao điểm của đường thẳng $y = -3$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$.

• Từ bảng biến thiên, ta có phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x - 3y + z - 10 = 0$. Trong các điểm sau, điểm nào nằm trên mặt phẳng (P)?

A $(1; 2; 0)$. B $(2; 2; 0)$. C $(2; -2; 0)$. D $(2; 1; 2)$.

Lời giải.

• Thay tọa độ các điểm đã cho vào phương trình mặt phẳng (P) ta có điểm $(2; -2; 0)$ thuộc mặt phẳng (P).

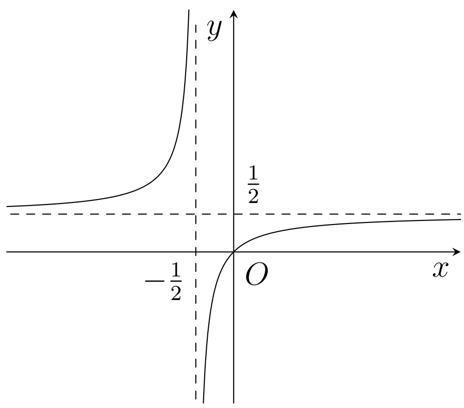
Chọn đáp án C □

Câu 7.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào?

A $y = \dfrac{x}{2x+1}$. B $y = \dfrac{x+1}{2x+1}$.

C $y = \dfrac{x-1}{2x-1}$. D $y = \dfrac{x}{2x-1}$.



Lời giải.

• Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\dfrac{1}{2}$ nên loại phương án $y = \dfrac{x-1}{2x-1}$ và $y = \dfrac{x}{2x-1}$.

• Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ nên loại phương án $y = \dfrac{x+1}{2x+1}$. Vậy hàm số đã cho là $y = \dfrac{x}{2x+1}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(1;1;1)$ và $B(1;3;-5)$. Viết phương tình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

(A) $y-2z+2=0$. (B) $y-3z+4=0$. (C) $y-3z-8=0$. (D) $y-2z-6=0$.

Lời giải.

• Xét điểm $M(x;y;z)$ cách đều A, B. Ta có

$$MA = MB \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = (x-1)^2+(y-3)^2+(z+5)^2 \Leftrightarrow y-3z-8=0.$$

• Vậy phương trình mặt phẳng trung trực của AB là $(P)\colon y-3z-8=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Có 12 bóng đèn, trong đó có 7 bóng tốt. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng cùng lúc. Tính xác suất để lấy được ít nhất 2 bóng tốt.

(A) $\dfrac{13}{110}$. (B) $\dfrac{7}{11}$. (C) $\dfrac{23}{44}$. (D) $\dfrac{27}{110}$.

Lời giải.

• Số cách lấy 3 bóng đèn là C_{12}^3.

• Số cách lấy 3 bóng đèn, trong đó có ít nhất 2 bóng tốt là $\mathrm{C}_7^3 + \mathrm{C}_7^2\mathrm{C}_5^1$.

• Xác suất để trong 3 bóng có ít nhất 2 bóng tốt là $\dfrac{\mathrm{C}_7^3 + \mathrm{C}_7^2\mathrm{C}_5^1}{\mathrm{C}_{12}^3} = \dfrac{7}{11}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) là $a\sqrt{6}$. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD).

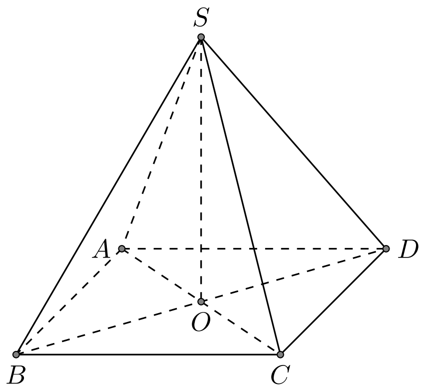
(A) $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. (C) $2\sqrt{6}a$. (D) $a\sqrt{6}$.

Lời giải.

• Gọi O là giao điểm của 2 đường chéo AC, BD. Khi đó, O là giao điểm của AC và mặt phẳng (SBD).

• Ta có $\dfrac{\mathrm{d}(C,(SBD))}{\mathrm{d}(A,(SBD))} = \dfrac{OC}{OA} = 1$

nên $\mathrm{d}(C,(SBD)) = \mathrm{d}(A,(SBD)) = a\sqrt{6}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right)$.

(A) $\dfrac{7}{2}$. (B) $-\dfrac{7}{2}$. (C) $-\dfrac{3}{2}$. (D) $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+3x+2}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3+\dfrac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3+\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+1\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(3+\dfrac{2}{x}\right)}{\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+1\right)}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 12. Tìm M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+35$ trên đoạn $[-4;4]$.

A. $M=15, m=-41$.
B. $M=40, m=-41$.
C. $M=40, m=-15$.
D. $M=40, m=-8$.

Lời giải.

- $y'=3x^2-6x-9$. Ta có $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-1.\end{array}\right.$
- Lại có $y(-4)=-41$, $y(-1)=40$, $y(3)=8$, $y(4)=15$. Vậy $M=40, m=-41$.

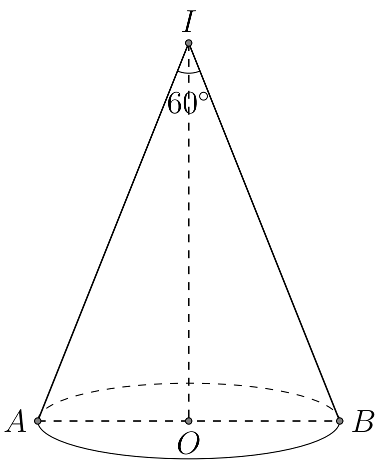
Chọn đáp án B □

Câu 13. Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy $R=a\sqrt{2}$, góc ở đỉnh bằng 60°. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

A. πa^2.
B. $2\pi a^2$.
C. $3\pi a^2$.
D. $4\pi a^2$.

Lời giải.

- Góc ở đỉnh bằng 60° nên $\widehat{AIO}=30^\circ$.
- Ta có $l=IA=\dfrac{OA}{\sin 30^\circ}=\dfrac{R}{\sin 30^\circ}=2R=2\sqrt{2}a$.
- $S_{xq}=\pi Rl=4\pi a^2$.



Chọn đáp án D □

Câu 14. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công thức

(A) $S = \int\limits_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x$.

(B) $S = \int\limits_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x$.

(C) $S = \int\limits_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\,\mathrm{d}x$.

(D) $S = \left|\int\limits_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Theo lý thuyết.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B. Biết $AB = a, BC' = a\sqrt{2}$. Tính góc hợp bởi đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ACC'A')$.

(A) $90°$. (B) $45°$. (C) $60°$. (D) $30°$.

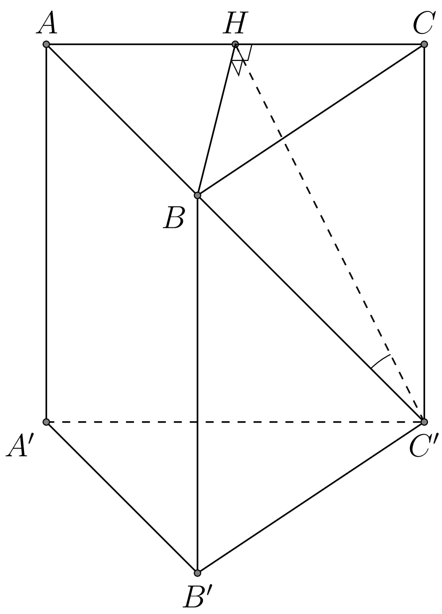
Lời giải.

• Gọi H là trung điểm của AC. Do tam giác ABC vuông cân tại B nên $BH \perp AC$. Mặt khác $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $CC' \perp BH$. Do đó $BH \perp (ACC'A')$. Suy ra góc giữa BC' với mặt phẳng $(ACC'A')$ là góc $\widehat{BC'H}$.

• Ta có $BC = AB = a$ nên $AC = a\sqrt{2}$.

Do đó $HB = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

• $\sin\widehat{BC'H} = \dfrac{HB}{BC'} = \dfrac{1}{2}$ nên $\widehat{BC'H} = 30°$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và song song với trục Oy có phương trình tham số là

(A) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3. \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t. \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = 3. \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 + t. \end{cases}$

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng cần tìm. Ta có $d \parallel Oy$ nên d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (0; 1; 0)$.

Do đó d: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = 3. \end{cases}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Cho a, b, x, y là các số thực dương, $a \neq 1, b \neq 1$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A $\log_b a \log_a x = \log_b x$.

B $\log_a \dfrac{x}{y} = \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$.

C $\log_a \dfrac{1}{x} = \log_a x$.

D $\log_a(x + y) = \log_a x + \log_a y$.

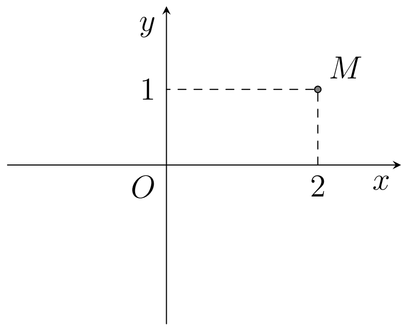
Lời giải.

Theo công thức đổi cơ số, ta có $\log_b a \log_a x = \log_b x$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Điểm M trong hình vẽ bên biểu diễn số phức có phần thực là

A 1. **B** 2. **C** $\sqrt{5}$. **D** 3.



Lời giải.

Điểm M biểu diễn số phức $z = 2 + i$. Do đó, phần thực của z là 2.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + \sin x$ là

A $\sin x - \cos x + C$.

B $\sin x + \cos x + C$.

C $-\sin x + \cos x + C$.

D $-\sin x - \cos x + C$.

Lời giải.

$$\int (\cos x + \sin x)\,\mathrm{d}x = \sin x - \cos x + C.$$

Chọn đáp án A □

Câu 20. Tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\ln 3$. **B** $1 - \ln 2$. **C** $\ln 2$. **D** $1 - \ln 3$.

Lời giải.

$$I = \int_0^1 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = x\Big|_0^1 - \ln|x+1|\Big|_0^1 = 1 - \ln 2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trong khoảng nào sau đây?

(A) $(0;+\infty)$. (B) $(-1;1)$. (C) $(0;4)$. **D** $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Theo lý thuyết.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Thể tích của khối lăng trụ đứng có diện tích đáy là S và cạnh bên bằng h là

(A) $\frac{1}{3}Sh$. **B** Sh. (C) $\frac{1}{4}Sh$. (D) $\frac{1}{2}Sh$.

Lời giải.

Khối lăng trụ đứng có độ dài cạnh bên đồng thời là chiều cao nên $V = Sh$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

(A) 1 đường. (B) 3 đường. (C) 4 đường. **D** 2 đường.

Lời giải.

• $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$

• $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-2}{x^2-3x+2} = +\infty$ nên đường thẳng $\Delta_1 : x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

• $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-3x+2} = 1$ nên đường thẳng $\Delta_2 : x = 2$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

• $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-2}{x^2-3x+2} = 0$ và $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x-2}{x^2-3x+2} = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Số cách xếp 4 học sinh ngồi vào một dãy 4 ghế là

(A) 8. **B** 24. (C) 16. (D) 4.

Lời giải.

• Số cách xếp 4 học sinh vào 4 ghế là $\mathrm{P}_4 = 24$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm $M(3;0;-1)$ và vuông góc với 2 mặt phẳng $x + 2y - z + 1 = 0$ và $2x - y + z - 2 = 0$ là

(A) $x - 3y + 5z + 2 = 0$. **B** $x - 3y - 5z - 8 = 0$.

(C) $x + 3y - 5z - 8 = 0$. (D) $x + 3y + 5z + 2 = 0$.

Lời giải.

• Hai mặt phẳng đã cho có các véc-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (1;2;-1)$ và $\vec{n_2} = (2;-1;1)$.

• Mặt phẳng (P) cần tìm có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (1;-3;-5)$.

• Ta có $(P)\colon (x-3) - 3y - 5(z+1) = 0$. Suy ra $(P)\colon x - 3y - 5z - 8 = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $M(1;2;3)$, $A(7;2;3)$, $B(1;5;3)$, $C(1;2;9)$. Mặt cầu (S) thay đổi đi qua 3 điểm A, B, C cắt các đường thẳng MA, MB, MC lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Gọi H là trực tâm tam giác $A_1B_1C_1$. Đường thẳng MH luôn thuộc mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

A $x + y - 2z + 3 = 0$. **B** $x + 2y + 3z - 14 = 0$.
C $2x + y - 3z + 5 = 0$. **D** $2x - 2y - z + 5 = 0$.

Lời giải.

• Ta có $\overrightarrow{MA} = (6;0;0)$, $\overrightarrow{MB} = (0;3;0)$, $\overrightarrow{MC} = (0;0;6)$ nên MA, MB, MC đôi một vuông góc. Do đó, MA_1, MB_1, MC_1 đôi một vuông góc. Điểm H là trực tâm tam giác $A_1B_1C_1$ nên $MH \perp (A_1B_1C_1)$ (tính chất của tam diện vuông).

• A_1, B_1, C_1 lần lượt là giao điểm của MA, MB, MC với mặt cầu nên

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MB_1} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MC_1} = 6k \text{ với } k \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $\begin{cases} \overrightarrow{MA_1} = (k;0;0) \\ \overrightarrow{MB_1} = (0;2k;0) \\ \overrightarrow{MC_1} = (0;0;k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{A_1B_1} = (-k;2k;0) \\ \overrightarrow{A_1C_1} = (-k;0;k). \end{cases}$

Do đó A_1B_1, A_1C_1 có véc-tơ chỉ phương lần lượt là $\overrightarrow{u_1} = (1;-2;0)$ và $\overrightarrow{u_2} = (1;0;-1)$

$\Rightarrow$ Mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ có vec-tơ pháp tuyến và $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = (2;1;2)$.

• $MH \perp (A_1B_1C_1)$ nên MH có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u} = (2;1;2)$.

• Trong các mặt phẳng đã cho có duy nhất mặt phẳng (P): $2x - 2y - z + 5 = 0$ chứa điểm $M(1;2;3)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}$ vuông góc với $\overrightarrow{u} = (2;1;2)$. Do đó, có duy nhất mặt phẳng (P) đi qua MH.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}} + \sqrt[3]{m + \dfrac{1}{2}\cos 2x} = 3$ có nghiệm thực?

A 6. **B** 7. **C** 5. **D** 4.

Lời giải.

• Đặt $u = \sqrt{1+\sin^2 x}$ và $v = \sqrt[3]{m + \dfrac{1}{2}\cos 2x} = \sqrt[3]{m + \dfrac{1}{2} - \sin^2 x}$ với $u \in \left[1; \sqrt{2}\right]$.

• Ta có $\begin{cases} u^2 + v^3 = \dfrac{3}{2} + m \\ \dfrac{1}{u} + v = 3 \end{cases}$ nên $u^2 + \left(3 - \dfrac{1}{u}\right)^3 - \dfrac{3}{2} = m \quad (1)$.

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình trình (1) có nghiệm thuộc $\left[1; \sqrt{2}\right]$.

• Đặt $f(u) = u^2 + \left(3 - \dfrac{1}{u}\right)^3 - \dfrac{3}{2}$ trên $\left[1; \sqrt{2}\right]$.

Ta có $f'(u) = 2u + 3\left(3 - \dfrac{1}{u}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{u^2} > 0$ với mọi $u \in \left[1; \sqrt{2}\right]$.

Do đó $\min\limits_{u \in \left[1;\sqrt{2}\right]} f(u) = \dfrac{15}{2}$ và $\max\limits_{u \in \left[1;\sqrt{2}\right]} f(u) = \dfrac{128 - 55\sqrt{2}}{4}$.

Suy ra phương trình (1) có nghiệm trên $\left[1;\sqrt{2}\right] \Leftrightarrow \dfrac{15}{2} \leq m \leq \dfrac{128-55\sqrt{2}}{4}$.

• Vậy có 5 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 3 chữ số được lập ra từ tập $X=\{0;1;2;3;4;5;6;7\}$. Rút ngẫu nhiên một số thuộc tập S. Tính xác suất để rút được số mà trong số đó, chữ số đằng sau luôn lớn hơn hoặc bằng chữ số đứng trước.

(A) $\dfrac{3}{32}$. (B) $\dfrac{2}{7}$. **C** $\dfrac{3}{16}$. (D) $\dfrac{125}{3}$.

Lời giải.

• Số các số tự nhiên có 3 chữ số được lập ra từ tập X là $7\cdot 8\cdot 8=448$.

• Xét số tự nhiên $\overline{abc}$ với $a,b,c\in X$ và $1\leq a\leq b\leq c$.

Cách 1: Số cách chọn bộ số a,b,c sao cho cả 3 số bằng nhau là 7 (cách).

Số cách chọn bộ số a,b,c sao cho có đúng 2 số bằng nhau là $2C_7^2=42$ (cách).

Số cách chọn bộ số a,b,c sao cho cả 3 số đều khác nhau là $\mathrm{C}_7^3=35$ (cách).

Số cách chọn a,b,c thỏa mãn yêu cầu bài toán là $7+42+35=84$ (cách).

• Xác suất để chọn số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\dfrac{84}{448}=\dfrac{3}{16}$.

Cách 2: Đặt $a'=a-1$, $c'=c+1$, ta có $0\leq a'<b<c'<8$. Mỗi cách chọn bộ 3 số thuộc tập hợp $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$ cho ta một bộ số a,b,c thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do đó số các số $\overline{abc}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\mathrm{C}_9^3=84$.

• Xác suất để chọn số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\dfrac{84}{448}=\dfrac{3}{16}$.

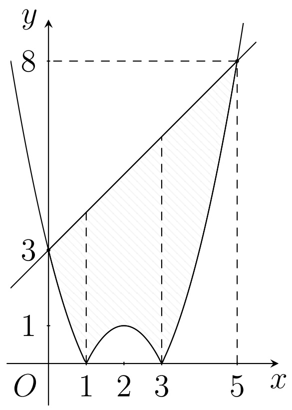
Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $(P)\colon y=|x^2-4x+3|$, $d\colon y=x+3$.

(A) $\dfrac{109}{3}$. **B** $\dfrac{109}{6}$. (C) $\dfrac{125}{6}$. (D) $\dfrac{125}{3}$.

Lời giải.

• $|x^2-4x+3|=x+3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=5.\end{array}\right.$



• Từ đồ thị ta có $S=S_1+S_2+S_3$ trong đó

$$S_1=\int_0^1\left((x+3)-(x^2-4x+3)\right)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(-x^2+5x\right)\,\mathrm{d}x=\frac{13}{6}.$$

$$S_2=\int_1^3\left((x+3)+(x^2-4x+3)\right)\,\mathrm{d}x=\int_1^3\left(x^2-3x+6\right)\,\mathrm{d}x=\frac{26}{3}.$$

$$S_3=\int_3^5\left((x+3)-(x^2-4x+3)\right)\,\mathrm{d}x=\int_3^5\left(-x^2+5x\right)\,\mathrm{d}x=\frac{22}{3}.$$

• Vậy $S=\dfrac{109}{6}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $f(2)=2$, $\int\limits_0^2 \left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x = \frac{512}{9}$ và $\int\limits_0^{16} f(\sqrt[4]{x})\,\mathrm{d}x = -\frac{224}{9}$. Tính tích phân $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I=-\frac{20}{3}$. **B** $I=\frac{32}{9}$. **C** $I=-\frac{32}{15}$. **D** $I=\frac{108}{5}$.

Lời giải.

• Đặt $t=\sqrt[4]{x} \Rightarrow x=t^4 \Rightarrow \mathrm{d}x = 4t^3\,\mathrm{d}x$.

• Ta có

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^{16} f\left(\sqrt[4]{x}\right)\,\mathrm{d}x &&= -\frac{224}{9}\\ \Rightarrow\ &\int\limits_0^{2} f(t)\,4t^3\,\mathrm{d}t &&= -\frac{224}{9}\\ \Rightarrow\ & t^4 f(t)\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 t^4 f'(t)\,\mathrm{d}t &&= -\frac{224}{9}\\ \Rightarrow\ & 16f(2) - \int\limits_0^2 t^4 f'(t)\,\mathrm{d}t &&= -\frac{224}{9}\\ \Rightarrow\ & \int\limits_0^2 t^4 f'(t)\,\mathrm{d}t &&= \frac{512}{9}. \end{aligned}$$

• Suy ra $\int\limits_0^2 \left[f'(t)-t^4\right]^2\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^2 \left[f'(t)\right]^2\,\mathrm{d}t - 2\int\limits_0^2 t^4 f'(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_0^2 t^8\,\mathrm{d}t = \frac{512}{9} - 2\cdot\frac{512}{9} + \frac{512}{9} = 0$.

Mặt khác $\left[f'(t)-t^4\right]^2 \geq 0$ với mọi x nên $f'(t)=t^4 \Rightarrow f(t)=\frac{1}{5}t^5+C$. Do $f(2)=2$ nên $C=-\frac{22}{5}$.

• Vậy $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left(\frac{1}{5}t^5 - \frac{22}{5}\right)\,\mathrm{d}x = -\frac{20}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $\left(7-3\sqrt{5}\right)^x + m\left(7+3\sqrt{5}\right)^x = 2^{x-1}$ có đúng 1 nghiệm dương.

A $0 \leq m < \frac{1}{16}$ hoặc $m=-\frac{1}{2}$. **B** $m<\frac{1}{16}$.

C $-\frac{1}{2} < m \leq \frac{1}{16}$. **D** $-\frac{1}{2} < m \leq 0$ hoặc $m=\frac{1}{16}$.

Lời giải.

•

$$\begin{aligned} \left(7-3\sqrt{5}\right)^x + m\left(7+3\sqrt{5}\right)^x = 2^{x-1} &\Leftrightarrow \left(\frac{4}{7+3\sqrt{5}}\right)^x + m\left(7+3\sqrt{5}\right)^x = 2^{x-1}\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2}{7+3\sqrt{5}}\right)^x + m\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^x = \frac{1}{2} \quad (1) \end{aligned}$$

Đặt $t=\left(\dfrac{2}{7+3\sqrt{5}}\right)^x$, ta có $t+\dfrac{m}{t}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2t^2-t+2m=0\Leftrightarrow 2t^2-t=-2m\quad(2)$.

• Phương trình (1) có đúng một nghiệm x dương $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có đúng 1 nghiệm t thuộc khoảng $(0;1)$.

• Xét hàm $f(t)=2t^2-t$ trên $(0;1)$, ta có $f'(t)=4t-1$. Suy ra bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{4}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{8}$	$\nearrow$	1

• Từ bảng biến thiên, ta có phương trình $f(t)=-2m$ có đúng 1 nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2m=-\dfrac{1}{8}\\0\le -2m<1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{1}{16}\\-\dfrac{1}{2}<m\le 0.\end{array}\right.$

Chọn đáp án D □

Câu 32. Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=3x^3-4x^2+2(m-10)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng -5.

(A) $m=-8$. (B) $m=\dfrac{15}{2}$. (C) $m=8$. (D) $m=-15$.

Lời giải.

• $f'(x)=9x^2-8x$. Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{8}{9}.\end{array}\right.$

• Ta có bảng biến thiên

x	1		3
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$2m-21$	$\nearrow$	$2m+25$

• Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng $-5\Leftrightarrow 2m-21=-5\Leftrightarrow m=8$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1\colon\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{2}$, $d_2\colon\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$. Đường thẳng d đi qua $A(5;-3;5)$ cắt hai đường thẳng d_1,d_2 tại B,C. Tính độ dài của đoạn thẳng BC.

(A) $\sqrt{17}$. (B) $2\sqrt{5}$. (C) $3\sqrt{2}$. (D) $\sqrt{19}$.

Lời giải.

- $B \in d_1$ nên $B(1+b;-1-b;2b)$. $C \in d_2$ nên $C(c;1+2c;c)$.
- $\overrightarrow{AB}=(b-4;2-b;2b-5)$ và $\overrightarrow{AC}=(c-5;2c+4;c-5)$.
-

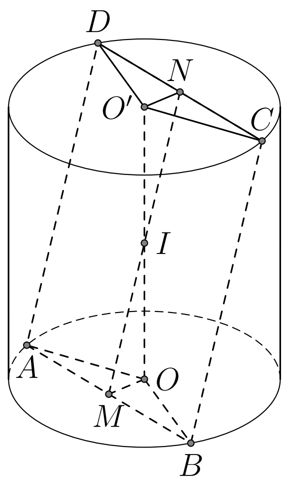
$$\begin{aligned}
A,B,C \text{ thẳng hàng } &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \,/\!/\, \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}(2-b)(c-5)-(2b-5)(2c+4)=0\\(2b-5)(c-5)-(b-4)(c-5)=0\\(b-4)(2c+4)-(2-b)(c-5)=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}-5bc-3b+12c+10=0\\bc-5b-c+5=0\\3bc-b-10c-6\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}-5bc-3b+12c+10=0\\-28b+7c+35=0\\14b-7c-21=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}b=1\\c=-1.\end{cases}
\end{aligned}$$

- Ta có $B(2;-2;2)$ và $C(-1;-1;-1)$ nên $BC=\sqrt{19}$.

Chọn đáp án D □

Câu 34.

Cho một hình trụ tròn xoay và hình vuông $ABCD$ cạnh a có 2 đỉnh liên tiếp A,B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy của hình trụ góc $45°$. Tính thể tích khối trụ.



(A) $\dfrac{3\pi a^3}{16}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{16}$. (C) $\dfrac{\pi a^3}{16}$. (D) $\dfrac{3\sqrt{2}\pi a^3}{16}$.

Lời giải.

- Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và CD, O và O' lần lượt là tâm hai mặt đáy. Gọi I là giao điểm của MN và OO'.
- Góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt đáy là góc $(MN,OM)=\widehat{IMO}$. Do đó $\widehat{IMO}=45°$. Suy ra $\triangle IMO$ vuông cân tại O.
- Ta có $MN=BC=a$ nên $IM=\dfrac{a}{2}$ và $AM=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{a}{2}$. Suy ra $OM=OI=\dfrac{a}{2\sqrt{2}} \Rightarrow OO'=2OI=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

$\triangle OMA$ vuông tại M nên $OA^2 = OM^2 + AM^2 = \dfrac{a^2}{8} + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{8}$. Suy ra $R = OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

• Ta có $V_{\text{trụ}} = \pi R^2 h = \pi \cdot \dfrac{3a^2}{8} \cdot \dfrac{a}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}\pi a^3}{16}$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $y = (m+4)x + \sin x + \dfrac{1}{4}\sin 2x + \dfrac{1}{9}\sin 3x$ đồng biến trên tập xác định.

A 4. B 1. C 2. D 3.

Lời giải.

• $y' = (m+4) + \cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{3}\cos 3x = \dfrac{4}{3}\cos^3 x + \cos^2 x + \dfrac{7}{2} + m$.

•

$$\begin{aligned} \text{Hàm số đồng biến trên } \mathbb{R} &\Rightarrow y' \geq 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \frac{4}{3}\cos^3 x + \cos^2 x + \frac{7}{2} \geq -m \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \quad (1) \end{aligned}$$

• Đặt $t = \cos x$ ($t \in [-1; 1]$) và $f(t) = \dfrac{4}{3}t^3 + t^2 + \dfrac{7}{2}$. Ta có (1) $\Leftrightarrow f(t) \geq -m$ với mọi $t \in [-1; 1]$.

• $f'(t) = 4t^2 + 2t$ nên $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0		1
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$\frac{19}{6}$	$\nearrow$	$\frac{43}{12}$	$\searrow$	$\frac{7}{2}$	$\nearrow$	$\frac{35}{6}$

• Từ bảng biến thiên ta có $f(t) \geq -m$ với mọi $t \in [-1; 1] \Leftrightarrow \dfrac{19}{6} \geq -m \Leftrightarrow m > -\dfrac{19}{6}$. Vậy số giá trị nguyên âm của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 3.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Số nghiệm của phương trình $\dfrac{1}{3}\log_2(5-x) + 2\log_8\sqrt{3-x} = 1$ là

A 3. B 1. C 2. D 0.

Lời giải.

• Điều kiện $3 < x < 5$.

•

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}\log_2(5-x) + 2\log_8\sqrt{3-x} = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \log_2(5-x) + \log_2(3-x) = 3 \\ \Leftrightarrow\ & \log_2(5-x)(3-x) = 3 \\ \Leftrightarrow\ & (5-x)(3-x) = 8 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 7 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = 7 \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

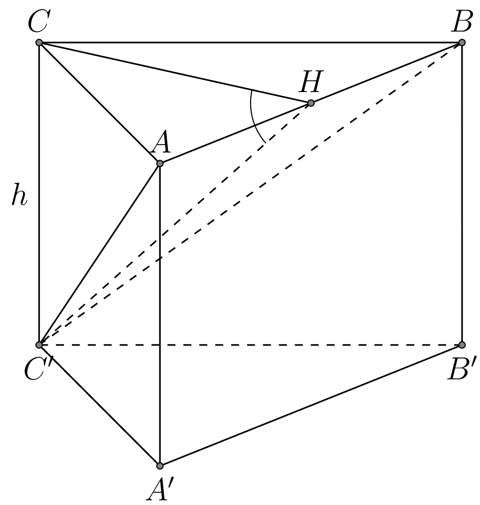
• Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Tam giác ABC' có diện tích là $\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng tạo với đáy một góc α. Tìm α để thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đạt giá trị lớn nhất.

A $\alpha = \arctan \dfrac{1}{\sqrt{6}}$. **B** $\alpha = \arctan \sqrt{6}$. **C** $\alpha = \arctan \sqrt{2}$. **D** $\alpha = \arctan \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.



• Gọi H là trung điểm AB. Ta có $\triangle ABC$ đều nên $CH \perp AB$. Mặt khác $\triangle C'AB$ là tam giác cân nên $C'H \perp AB$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng $(C'AB)$ và (ABC) là góc $\widehat{CHC'}$. Suy ra góc $\widehat{CHC'} = \alpha$.

• $S_{\text{đáy}} = S_{C'AB} \cos\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha$.

Đặt $x = AB$. Ta có $S_{\text{đáy}} = \dfrac{1}{2}x^2 \sin 60^\circ$

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{2S_{\text{đáy}}}{\sin 60^\circ} = 4\cos\alpha \Rightarrow x = 2\sqrt{\cos\alpha}$.

Ta có $CH = AB\sin 60^\circ = \sqrt{3}\sqrt{\cos\alpha}$.

Do đó $h = CC' = CH\tan\alpha = \sqrt{3\cos\alpha}\tan\alpha$.

• Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = hS_{\text{đáy}} = \sqrt{3\cos\alpha}\tan\alpha\sqrt{3}\cos\alpha = 3\sin\alpha\sqrt{\cos\alpha} = 3\sqrt{\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)}$.

Đặt $t = \cos\alpha$ với $0 < t < 1$ và $f(t) = t(1-t^2)$.

$f'(t) = 1 - 3t^2$. Do đó $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \text{ (loại).} \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên như sau

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
$f(t)'$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

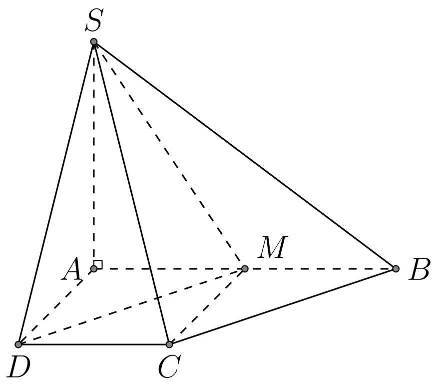
Từ bảng biến thiên suy ra thể tích khối lăng trụ đạt giá trị lớn nhất khi $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ hay $\tan\alpha = \sqrt{2}$. Vậy $\alpha = \arctan\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và S, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính cô-sin góc giữa 2 đường thẳng SD và BC biết $AD = DC = a$,$AB = 2a$, $SA = \dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$.

Ⓐ $\dfrac{1}{\sqrt{42}}$. Ⓑ $\dfrac{2}{\sqrt{42}}$. **C** $\dfrac{3}{\sqrt{42}}$. Ⓓ $\dfrac{4}{\sqrt{42}}$.

Lời giải.



• Gọi M là trung điểm AB, ta có $DM \parallel BC$. Do đó $(BC, SD) = (DM, SD)$.

• Ta có $SD^2 = SA^2 + AD^2 = \dfrac{4a^2}{3} + a^2 = \dfrac{7a^2}{3} \Rightarrow SD = \dfrac{a\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.

$SM^2 = SA^2 + AM^2 = \dfrac{4a^2}{3} + a^2 = \dfrac{7a^2}{3} \Rightarrow SM = \dfrac{a\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.

$DM^2 = AM^2 + AD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow DM = a\sqrt{2}$.

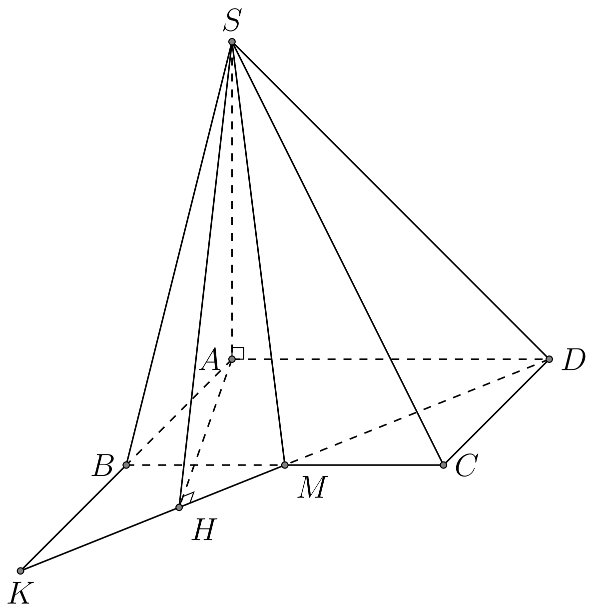
• Ta có $\cos\widehat{SDM} = \dfrac{DS^2 + DM^2 - SM^2}{2 \cdot DS \cdot DM} = \dfrac{\dfrac{7a^2}{3} + 2a^2 - \dfrac{7a^2}{3}}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{7}a}{3} \cdot a\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{14}} = \dfrac{3}{\sqrt{42}}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = AB = a$, $AD = 3a$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính cô-sin góc tạo bởi 2 mặt phẳng $(ABCD)$ và (SDM).

A $\dfrac{6}{7}$. Ⓑ $\dfrac{5}{7}$. Ⓒ $\dfrac{3}{7}$. Ⓓ $\dfrac{1}{7}$.

Lời giải.



• Gọi H là hình chiếu của A trên DM, ta có $DM \perp (SAH)$ nên $DM \perp SH$.
Suy ra $((SDM), (ABCD) = (SH, AH) = \widehat{SHA}$.
• Gọi K là giao điểm của DM và AB, ta có B là trung điểm AK nên $AK = 2AB = 2a$.
$\triangle ABK$ vuông tại A và có AH là đường cao. Ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{9a^2} = \frac{13}{36a^2}.$$

nên $AH = \dfrac{6a}{\sqrt{13}}$.

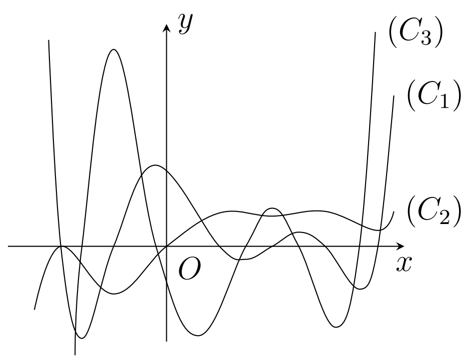
Lại có $SH^2 = SA^2 + AH^2 = a^2 + \dfrac{36a^2}{13} = \dfrac{49a^2}{13}$ nên $SH = \dfrac{7a}{\sqrt{13}}$.

• $\cos \widehat{SHA} = \dfrac{AH}{SH} = \dfrac{6}{7}$.

Chọn đáp án A □

Câu 40.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ lần lượt là các đường nào trong hình vẽ sau?



A $(C_1), (C_3), (C_2)$.
B $(C_3), (C_2), (C_1)$.
C $(C_2), (C_3), (C_1)$.
D $(C_2), (C_1), (C_3)$.

Lời giải.

Nhận xét: Sử dụng tính chất

• Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi x qua x_0 thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.

• Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi x qua x_0 thì $f(x)$ đạt cực đại tại x_0.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = \mathrm{e}^{-f(x)}(2x+3)$, $f(0) = \ln 2$. Tính $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $6\ln 2 + 2$. (B) $6\ln 2 - 2$. (C) $6\ln 2 - 3$. (D) $6\ln 2 + 3$.

Lời giải.

- Ta có $f'(x)\mathrm{e}^{f(x)} = 2x+3 \Rightarrow \int \mathrm{e}^{f(x)} f'(x)\,\mathrm{d}x = \int (2x+3)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{e}^{f(x)} = x^2 + 3x + C$.
- Do $f(0) = \ln 2$ nên $\mathrm{e}^{\ln 2} = 0^2 + 3\cdot 0 + C \Rightarrow C = 2$. Suy ra $f(x) = \ln(x^2+3x+2)$.
-

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \ln(x^2+3x+2)\,\mathrm{d}x \\
&= x\ln(x^2+3x+2)\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \frac{x(2x+3)}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x \\
&= x\ln(x^2+3x+2)\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \left(2 - \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= x\ln(x^2+3x+2)\Big|_1^2 - 2x\Big|_1^2 + 2\ln|x+2|\Big|_1^2 + \ln|x+1|\Big|_1^2 \\
&= 6\ln 2 - 2.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x + 2y - z + 4 = 0$ và các điểm $A(2;1;2)$, $B(3;-2;2)$. Điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho các đường thẳng MA, MB luôn tạo với mặt phẳng (P) các góc bằng nhau. Biết rằng điểm M thuộc một đường tròn (C) cố định. Tìm tọa độ tâm của đường tròn (C).

(A) $\left(\frac{10}{3}; -3; \frac{14}{3}\right)$. (B) $\left(\frac{17}{21}; -\frac{71}{21}; \frac{17}{21}\right)$. (C) $\left(\frac{74}{27}; -\frac{97}{27}; \frac{62}{27}\right)$. (D) $\left(\frac{32}{9}; -\frac{49}{9}; \frac{2}{9}\right)$.

Lời giải.

- Xét điểm $M(a;b;c)$ thuộc $(P)\colon 2x+2y-z+4=0$. Ta có $2a+2b-c+4=0 \quad (1)$.
- $\overrightarrow{AM} = (a-2; b-1; c-2)$ và $\overrightarrow{BM} = (a-3; b+3; c-2)$.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2;2;-1)$.

$$\begin{aligned}
& MA, MB \text{ tạo với mặt phẳng } (P) \text{ các góc bằng nhau} \\
\Leftrightarrow\ & \left|\cos\left(\overrightarrow{AM}, \vec{n}\right)\right| = \left|\cos\left(\overrightarrow{BM}, \vec{n}\right)\right| \\
\Leftrightarrow\ & \frac{|2(a-2)+2(b-1)-(c-2)|}{3\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2+(c-2)^2}} = \frac{|2(a-3)+2(b+2)-(c-2)|}{3\sqrt{(a-3)^2+(b+2)^2+(c-2)^2}} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{|2a+2b-c-4|}{3\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2+(c-2)^2}} = \frac{|2a+2b-c|}{3\sqrt{(a-3)^2+(b+2)^2+(c-2)^2}} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{8}{3\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2+(c-2)^2}} = \frac{4}{3\sqrt{(a-3)^2+(b+2)^2+(c-2)^2}} \\
\Leftrightarrow\ & 4\left((a-3)^2+(b+2)^2+(c-2)^2\right) = (a-2)^2+(b-1)^2+(c-2)^2
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\quad a^2+b^2+c^2-\frac{20}{3}a+6b-4c+\frac{59}{3}=0.$$

Do đó, điểm M thuộc mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-\dfrac{20}{3}z+6y-4z+\dfrac{59}{3}=0$ tâm $I\left(\dfrac{10}{3};-3;2\right)$.

• Đường tròn (C) là giao mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) nên tâm của (C) là hình chiếu H của I trên mặt phẳng (P).

• Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (P). Ta có $\Delta\colon\begin{cases}x=\dfrac{10}{3}+2t\\ y=-2+2t\\ z=2-t.\end{cases}$

Suy ra $H\left(\dfrac{10}{3}+2t;-2+2t;2-t\right)$. Mặt khác $H\in(P)\Leftrightarrow\dfrac{8}{3}+9t=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{8}{27}$.

• Vậy $H\left(\dfrac{74}{27};-\dfrac{97}{27};\dfrac{62}{27}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Giả sử đồ thị của hàm số có 2 điểm cực trị là A,B và đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=abc+2ab+18c+12$.

A -24. **B** -36. **C** -12. **D** -2.

Lời giải.

• $f'(x)=3x^2+2ax+b$.

Đồ thị hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow\Delta'>0\Leftrightarrow a^2-3b>0$.

• Ta có $f(x)=f'(x)\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{a}{9}\right)+\dfrac{2(3b-a^2)}{9}x+c-\dfrac{ab}{9}$.

Suy ra đường thẳng $AB\colon y=\dfrac{2(3b-a^2)}{9}x+c-\dfrac{ab}{9}$.

Do AB đi qua gốc tọa độ nên $ab=9c$.

• $P=abc+2ab+18c+12=9c^2+36c+12\ge 9(c+2)^2-24\ge -24$.

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn tại $c=-2;a=3;b=-6$.

Vậy $\min P=-24$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|=1$ và $\left|\dfrac{z}{\overline{z}}+\dfrac{\overline{z}}{z}\right|=1$?

A 6. **B** 4. **C** 10. **D** 8.

Lời giải.

• Giả sử $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$. Ta có $|z|=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1$.

• $\left|\dfrac{z}{\overline{z}}+\dfrac{\overline{z}}{z}\right|=1\Leftrightarrow\dfrac{|z^2+\overline{z}^2|}{|z|\cdot|\overline{z}|}=1\Leftrightarrow|z^2+\overline{z}^2|=1\Leftrightarrow|2(x^2-y^2)|=1\Leftrightarrow x^2-y^2=\pm\dfrac{1}{2}$.

• Ta có $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2-y^2=\pm\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=\dfrac{3}{4}, y^2=\dfrac{1}{2} \\ x^2=\dfrac{1}{4}, y^2=\dfrac{3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, y=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, y=-\dfrac{1}{2} \\ x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, y=\dfrac{1}{2} \\ x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, y=-\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{1}{2}, y=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x=\dfrac{1}{2}, y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x=-\dfrac{1}{2}, y=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x=-\dfrac{1}{2}, y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$

• Vậy có 8 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y+z+2=0$. Mặt phẳng (Q) chứa Δ và tạo với (P) một góc nhỏ nhất có phương trình dạng $ax+by+cz+34=0$. Tính tích abc.

A -220. **B** -240. **C** 240. **D** 220.

Lời giải.

• Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;2;0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;2)$, mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P}=(2;-2;1)$, mặt phẳng (Q) có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_Q}=(a;b;c)$ trong đó $a^2+b^2+c^2>0$.

(Q) đi qua Δ nên $\overrightarrow{n_Q}\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow 2a+b+2c=0$.

• $\cos((P),(Q))=|\cos(\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q})|=\dfrac{|2a-2b+c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|6a+5c|}{3\sqrt{5a^2+8ac+5c^2}}$.

Nếu $a=0$ thì $\cos((P),(Q))=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Nếu $a\neq 0$ thì $\cos((P),(Q))=\dfrac{\left|6+5\dfrac{c}{a}\right|}{3\sqrt{5+8\dfrac{c}{a}+5\dfrac{c^2}{a^2}}}=\dfrac{|6+5t|}{3\sqrt{5+8t+5t^2}}$ với $t=\dfrac{c}{a}$.

Đặt $f(t)=\dfrac{(6+5t)^2}{5t^2+8t+5}$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{-100t^2-110+12}{(5t^2+8t+5)^2}$ nên $f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{10} \\ t=-\dfrac{6}{5}. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$		$-\dfrac{6}{5}$		$\dfrac{1}{10}$		$+\infty$
$f(t)'$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{65}{9}$	$\searrow$	5

Từ bảng biến thiên, ta có $\max\cos((P),(Q)) = \dfrac{\sqrt{65}}{9}$.

$((P),(Q))$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \cos((P),(Q))$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow t = \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow a = 10c$.

Suy ra $b = -22c$. Mặt khác $M(1;2;0) \in (Q)$ nên $a + 2b + 34 = 0 \Leftrightarrow -34c + 34 = 0 \Leftrightarrow c = 1$.

Suy ra $a = 10, b = -22$.

• Vậy $abc = -220$.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Biết $I = \displaystyle\int_0^1 x\ln(2+x^2)\,\mathrm{d}x = \dfrac{a}{2}\ln 3 + b\ln 2 + \dfrac{c}{2}$ với a, b, c là các số nguyên. Tính tổng $a + b + c$.

A 3. **B** 0. **C** 1. **D** 2.

Lời giải.

• Đặt $\begin{cases} u = \ln(x^2+2) \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{2x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$

• Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x\ln(2+x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}\ln(x^2+2)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}\ln(x^2+2)\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(x - \frac{2x}{x^2+2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}\ln(x^2+2)\Big|_0^1 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \ln(x^2+2)\Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{2}\ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

• Suy ra $a = 3, b = -1, c = -1$. Vậy $a + b + c = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Trên đường thẳng $\Delta\colon y = 9x - 7$ có bao nhiêu điểm có hoành độ nguyên thuộc đoạn $[0;10]$ mà từ đó kẻ được đúng 3 tiếp tuyến đến đồ thị $y = x^3 + 3x^2 - 2$.

(A) 6. (B) 9. (C) 8. (D) 7.

Lời giải.

• Xét điểm $M(m; 9m-7) \in \Delta$. Đường thẳng d đi qua điểm M và có hệ số góc k có phương trình $y = k(x-m) + 9m - 7$.

$$\begin{aligned}
& d \text{ là tiếp tuyến của } (C) \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x^3 + 3x^2 - 2 = k(x-m) + 9m - 7 \\ k = 3x^2 + 6x \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & (x-1)\left[2x^2 + (5-3m)x - 9m + 5\right] = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 2x^2 + (5-3m)x - 9m + 5 = 0. \quad (1) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Qua M kẻ được 3 tiếp tuyến $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 12 - 12m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -5 \\ m > \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \\ m \neq 1. \end{cases}$$

• Kết hợp với điều kiện m nguyên thuộc $[0; 10]$, ta có 9 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Xác định hệ số của x^4 trong khai triển của biểu thức $(3x^2 + 2x + 1)^{10}$.

(A) 8085. (B) 11312. (C) 1303. (D) 8089.

Lời giải.

• Ta có

$$(1 + 2x + 3x^2)^{10} = \sum_{p=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^{p}(2x + 3x^2)^p \cdot 1^{10-p} = \sum_{p=0}^{10}\sum_{q=0}^{p} \mathrm{C}_{10}^{p}\mathrm{C}_{p}^{q} 2^{p-q} 3^q x^{p+q}$$

với $0 \le q \le p \le 10$ và p, q nguyên.

Ta có $p + q = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p = 4, q = 0 \\ p = 3, q = 1 \\ p = 2, q = 2. \end{array}\right.$

Vậy hệ số của x^4 là $2^4\mathrm{C}_{10}^4\mathrm{C}_4^0 + 2^2 \cdot 3\mathrm{C}_{10}^3\mathrm{C}_3^1 + 3^2\mathrm{C}_{10}^2\mathrm{C}_2^2 = 8085$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Có bao nhiêu số thực m sao cho phương trình bậc hai $2z^2 + 2(m-1)z + 2m + 1 = 0$ có 2 nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 đều không phải là số thực và thỏa mãn $|z_1| + |z_2| = \sqrt{10}$.

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Do z_1, z_2 không phải số thực nên z_1, z_2 là các số phức liên hợp. Suy ra $z_1 z_2 = |z_1|^2 = |z_2|^2$.

$$\begin{aligned}
& |z_1| + |z_2| = \sqrt{10} \\
\Leftrightarrow\ & |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = 10
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 2z_1z_2 + 2|z_1z_2| = 10\\
&\Leftrightarrow \quad 2\frac{2m+1}{2} + 2\left|\frac{2m+1}{2}\right| = 10\\
&\Leftrightarrow \quad |2m+1| = 9 - 2m\\
&\Leftrightarrow \quad m = 2.
\end{aligned}$$

Với $m = 2$, phương trình có 2 nghiệm $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ và $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho cấp số nhân (u_n) có các số hạng đều dương và $\begin{cases} u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 2017 \\ \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \cdots + \dfrac{1}{u_n} = 2018. \end{cases}$

Tính tích $u_1 \cdot u_2 \cdots u_n$.

A $\sqrt{\left(\frac{2017}{2018}\right)^n}$. (B) $\left(\frac{2017}{2018}\right)^n$. (C) $\sqrt{\left(\frac{2018}{2017}\right)^n}$. (D) $\left(\frac{2018}{2017}\right)^n$.

Lời giải.

• Gọi q là công bội của (u_n). Do dãy (u_n) có tất cả các số hạng đều dương nên $q > 0$. Khi đó, dãy $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ là cấp số nhân có công bội q^{-1}.

• Ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 2017 \\ \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \cdots + \dfrac{1}{u_n} = 2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} = 2017 \\ u_1^{-1} \cdot \dfrac{1-q^{-n}}{1-q^{-1}} = 2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} = 2017 \\ u_1^{-1} \cdot \dfrac{1-q^n}{(1-q)q^{n-1}} = 2018. \end{cases}$$

$\Rightarrow u_1^2 \cdot q^{n-1} = \frac{2017}{2018}$ Ta có $P = u_1u_2\cdots u_n = u_1^n \cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}} = \sqrt{\left(\frac{2017}{2018}\right)^n}$.

Chọn đáp án A □

— HẾT —

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. A	3. C	4. A	5. B	6. C	7. A	8. C	9. B	10. D
11. D	12. B	13. D	14. C	15. D	16. C	17. A	18. B	19. A	20. B
21. D	22. B	23. D	24. B	25. B	26. D	27. C	28. C	29. B	30. A
31. D	32. C	33. D	34. D	35. D	36. B	37. C	38. C	39. A	40. D
41. B	42. C	43. A	44. D	45. A	46. C	47. B	48. A	49. A	50. A

84 ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC TOÁN 12, 2017 - 2018 TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN, HÀ NỘI

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_5 = 2$ và $u_9 = 6$. Tìm giá trị của u_{21}.

A. 18. B. 54. C. 162. D. 486.

Lời giải.

Giả sử q là công bội và u_1 là số hạng đầu tiên của cấp số nhân thỏa mãn bài toán. Ta có $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}\ \forall n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}$. Do giả thiết ta có

$$\begin{cases} u_5 = 2 \\ u_9 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^4 = 2 \\ u_1 \cdot q^8 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^4 = 2 \\ 2q^4 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^4 = 2 \\ q^4 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{2}{3} \\ q^2 = \sqrt{3} \end{cases}$$

Mà $u_{21} = u_1 \cdot q^{20} = \dfrac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{10} = 2 \cdot 3^4 = 162$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Giới hạn $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+5}}{x-3}$ bằng

A. 0. B. $\dfrac{1}{2}$. C. $\dfrac{1}{3}$. D. $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+5}$, khi đó $f(3) = 0$. Dễ thấy hàm số có đạo hàm trên $[-1; +\infty)$ nên tồn tại $f'(3)$. Do đó

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+5}}{x-3}$$

Mà $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+5)^2}}$ suy ra $f'(3) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{6}$

Chọn đáp án D □

Câu 3. Một hình chóp có tất cả 2018 mặt. Hỏi hình chóp đó có bao nhiêu đỉnh?

A. 1009. B. 2018. C. 2017. D. 1008.

Lời giải.

Do hình chóp có số mặt bằng số đỉnh nên số đỉnh của hình chóp là 2018.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Nếu tăng bán kính đáy của hình nón lên 4 lần và giảm chiều cao của hình nón đi 8 lần, thì thể tích khối nón tăng hay giảm bao nhiêu lần?

A. Tăng 2 lần. B. Tăng 16 lần. C. Giảm 16 lần. D. Giảm 2 lần.

Lời giải.

Gọi V là thể tích của hình nón, h là chiều cao và R là bán kính đường tròn đáy. Khi đó $V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi R^2 h$.

Gọi V_1 là thể tích hình nón khi thay đổi theo yêu cầu bài toán.

Suy ra $V_1 = \dfrac{1}{3} \cdot \pi (4R)^2 \dfrac{h}{8} = \dfrac{2}{3} \cdot \pi R^2 h = 2V$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Phương trình $4\sin^2 2x - 3\sin 2x\cos 2x - \cos^2 2x = 0$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0;\pi)$?

(A) 1. (B) 2. (C) 3. **D** 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&4\sin^2 2x - 3\sin 2x\cos 2x - \cos^2 2x = 0\\ \Leftrightarrow &4\sin^2 2x - 4\sin 2x\cos 2x + \sin 2x\cos 2x - \cos^2 2x = 0\\ \Leftrightarrow &4\sin 2x\left(\sin 2x - \cos 2x\right) + \cos 2x\left(\sin 2x - \cos 2x\right) = 0\\ \Leftrightarrow &\left(\sin 2x - \cos 2x\right)\left(4\sin 2x + \cos 2x\right) = 0\\ \Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l}\sin 2x - \cos 2x = 0\\ 4\sin 2x + \cos 2x = 0\end{array}\right.\end{aligned}$$

- Khi $\sin 2x - \cos 2x = 0$, dễ thấy $\cos 2x = 0$ không là nghiệm nên

$$\sin 2x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \cos 2x \Leftrightarrow \tan 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Do $x \in (0;\pi)$ suy ra $k = 0$; $k = 1$.

- Khi $4\sin 2x + \cos 2x = 0$, dễ thấy $\cos 2x = 0$ không là nghiệm nên

$$\begin{aligned}&4\sin 2x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 4\sin 2x = -\cos 2x\\ \Leftrightarrow &\tan 2x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2x = \arctan\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi\\ \Leftrightarrow &x = \frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{1}{4}\right) + k\frac{\pi}{2}\ \ (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Do $x \in (0;\pi)$ suy ra $k = 0$; $k = 1$.

Vậy phương trình có 4 nghiệm thuộc $(0;\pi)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Đồ thị hàm số nào dưới đây có tâm đối xứng là điểm $I\,(1;-2)$?

(A) $y = \dfrac{2x-3}{2x+4}$. **B** $y = 2x^3 - 6x^2 + x + 1$.

(C) $y = -2x^3 + 6x^2 + x - 1$. (D) $y = \dfrac{2-2x}{1-x}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = 2x^3 - 6x^2 + x + 1$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 6x^2 - 12x$ và $y'' = 12x - 12$. Nên $y'' = 0 \Leftrightarrow 12x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Khi $x = 1$ suy ra $y = -2$. Do đó đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 6x^2 + x + 1$ nhận điểm $(1;-2)$ là điểm uốn. Nên điểm I là tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 6x^2 + x + 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Cho hai số phức $z_1 = 3 - i$ và $z_2 = 4 - i$. Tính mô-đun của số phức $z_1^2 + \overline{z}_2$.

(A) 12. (B) 10. **C** 13. (D) 15.

Lời giải.

Ta có số phức $w = z_1^2 + \overline{z}_2 = (3-i)^2 + (4+i) = 9 - 6i + i^2 + 4 + i = 12 - 5i$.

Nên $|w| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-4;-5)$. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz) là

A. $(1;-4;5)$. B. $(-1;4;5)$. C. $(1;4;5)$. **D.** $(1;4;-5)$.

Lời giải.

Dễ thấy phương trình mặt phẳng $(Oxz): y = 0$ nên suy ra điểm đối xứng với $A(1;-4;-5)$ qua (Oxz) là điểm $A'(1;4;-5)$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$. Tính $f'''(1)$.

A. 3. B. -3. C. $\frac{3}{2}$. D. 0.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ta có $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$; $f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{(2x-1)^3}}$ và $f'''(x) = \frac{3}{(2x-1)\sqrt{(2x-1)^3}}$ nên $f'''(1) = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Cho hai số thực dương a và b, với $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\log_{\sqrt{a}}(ab) = \log_a \sqrt{ab}$.

B. $\log_{\sqrt{a}}(ab) = \log_a (ab)$.

C. $\log_{\sqrt{a}}(ab) = 2 + 2\log_a b$.

D. $\log_{\sqrt{a}}(ab) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b$.

Lời giải.

Do $\log_{\sqrt{a}}(ab) = \log_{a^{\frac{1}{2}}}(ab) = 2\log_a(ab) = 2(\log_a a + \log_a b) = 2 + 2\log_a b$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Một hình trụ có diện tích toàn phần là $10\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Chiều cao của hình trụ đó là

A. $3a$. **B.** $4a$. C. $2a$. D. $6a$.

Lời giải.

Gọi h là chiều cao của hình trụ, R là bán kính đáy hình trụ, S_{tp} là diện tích toàn phần của hình trụ. Khi đó $S_{\text{tp}} = 2\pi R \cdot h + 2\pi R^2 = 2\pi a \cdot h + 2\pi a^2$. Do giả thiết suy ra

$$2\pi a \cdot h + 2\pi a^2 = 10\pi a^2 \Leftrightarrow 2\pi a \cdot h = 8\pi a^2 \Leftrightarrow h = 4a.$$

Chọn đáp án B □

Câu 12. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{4-\sqrt{3}}(9x-5) < \log_{4-\sqrt{3}}(3x+1)$ là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $\left(\frac{5}{9};1\right)$. C. $\left(-\frac{1}{3};1\right)$. D. $\left(\frac{1}{3};\frac{5}{9}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_{4-\sqrt{3}}(9x-5) < \log_{4-\sqrt{3}}(3x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 9x-5>0 \\ 9x-5<3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{5}{9} \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{5}{9} < x < 1.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x + \cos x$ là

(A) $-\cos 2x + \sin x + C$. (B) $\cos^2 x - \sin x + C$.

C $\sin^2 x + \sin x + C$. (D) $\cos 2x - \sin x + C$.

Lời giải.

Do $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (\sin 2x + \cos x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\cos 2x + \sin x + C = \sin^2 x + \sin x + C - \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - y - 3z = 4$. Gọi A, B, C lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (α) với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz. Thể tích tứ diện $OABC$ bằng

(A) 1. (B) 2. (C) $\dfrac{32}{9}$. **D** $\dfrac{16}{9}$.

Lời giải.

Do giả thiết suy ra tọa độ điểm $A(2;0;0)$, $B(0;-4;0)$ và $C\left(0;0;-\dfrac{4}{3}\right)$ nên $OA = 2$; $OB = 4$ và $OC = \dfrac{4}{3}$. Gọi V là thể tích tứ diện $OABC$ ta có $V = \dfrac{1}{6} \cdot OA \cdot OB \cdot OC = \dfrac{1}{6} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \dfrac{4}{3} = \dfrac{16}{9}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Một hộp chứa 30 thẻ được đánh số từ 1 đến 30. Người ta lấy ngẫu nhiên một thẻ từ hộp đó. Tính xác suất để thẻ lấy được mang số lẻ và không chia hết cho 3.

(A) $\dfrac{2}{5}$. (B) $\dfrac{3}{10}$. **C** $\dfrac{1}{3}$. (D) $\dfrac{4}{15}$.

Lời giải.

Gọi A là biến cố chọn được thẻ mang số lẻ và không chia hết cho 3. Do giả thiết hộp sẽ chứa 15 thẻ mang số lẻ cụ thể là $1, 3, 5, \ldots, 29$. Dễ thấy số thẻ mang số lẻ chia hết cho 3 là $3, 9, 15, 21, 27$. Nên số thẻ không chia hết cho 3 gồm 10 thẻ. Vậy $P(A) = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \dfrac{9}{x-1}$ trên đoạn $[-4;-1]$ bằng

A -5. (B) $-\dfrac{11}{2}$. (C) $-\dfrac{29}{5}$. (D) -9.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x + \dfrac{9}{x-1}$ trên đoạn $[-4;-1]$.

Ta có $y' = 1 - \dfrac{9}{(x-1)^2}$.

Xét $y' = 0$ suy ra $(x-1)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=3 \\ x-1=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-2. \end{array}\right.$

Khi đó $\max\limits_{x\in[-4;-1]} y = \max\left\{y(-4), y(-2), y(-1)\right\} = \max\left\{-\dfrac{29}{5} - 5, -\dfrac{11}{2}\right\} = -5.$

Chọn đáp án A □

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;2;-1)$ và $B(-5;4;1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là

A. $4x - y + z + 7 = 0$.
B. $4x + y - z + 1 = 0$.
C. $4x - y - z + 7 = 0$.
D. $4x + y + z - 1 = 0$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB suy ra tọa độ $I(-1;3;0)$ và $\overrightarrow{AB} = (8;-2;-2)$. Gọi $\vec{n}$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng trung trực của đoạn AB ta chọn $\vec{n}(4;-1;-1)$. Khi đó phương trình mặt phẳng trung trực là

$$4\cdot(x+1) + (-1)\cdot(y-3) + (-1)\cdot(z-0) = 0 \Leftrightarrow 4x - y - z + 7 = 0$$

Chọn đáp án C □

Câu 18. Biết rằng hai đường cong $y = x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 20x + 5$ và $y = x^3 - 2x^2 - 3x - 1$ tiếp xúc nhau tại một điểm duy nhất. Tọa độ điểm đó là

A. $(2;-7)$.
B. $(1;-5)$.
C. $(3;-1)$.
D. $(0;5)$.

Lời giải.

Xét hệ phương trình

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 20x + 5 = x^3 - 2x^2 - 3x - 1 \\ 4x^3 - 18x^2 + 30x - 20 = 3x^2 - 4x - 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = 0 \\ 4x^3 - 21x^2 + 34x - 17 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (x-1)\left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right) = 0 \\ (x-1)\left(4x^2 - 17x + 17\right) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra nghiệm của hệ $x = 1$ nên tọa độ điểm tiếp xúc là $(1;-5)$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$ là

A. 4.
B. 2.
C. 1.
D. 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty;-3) \cup (3;+\infty)$.

Khi đó ta có $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{\sqrt{x^2-9}} = \lim\limits_{x\to 3^+} \sqrt{\dfrac{x-3}{x+3}} = 0.$

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1 - \dfrac{3}{x}}{-\sqrt{1 - \dfrac{9}{x^2}}} = -1$ và $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1 - \dfrac{3}{x}}{\sqrt{1 - \dfrac{9}{x^2}}} =$

1.
Vậy đồ thị hàm số có phương trình tiệm cận đứng là $x = -3$ và hai tiệm cận ngang là $y = 1$, $y = -1$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}$ và $F(0) = 2$. Hãy tính $F(-1)$.

(A) $6 - \dfrac{15}{\mathrm{e}}$.   (B) $4 - \dfrac{10}{\mathrm{e}}$.   **(C)** $\dfrac{15}{\mathrm{e}} - 4$.   (D) $\dfrac{10}{\mathrm{e}}$.

Lời giải.
Xét $I = \displaystyle\int f(x)\, \mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\, \mathrm{d}x$.
Đặt $t = \sqrt[3]{x}$ suy ra $t^3 = x$ nên $3t^2\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$ khi đó $I = \displaystyle\int 3t^2\mathrm{e}^t\, \mathrm{d}t$.
Theo công thức tích phân từng phần

$$I = 3t^2\mathrm{e}^t - 3\int 2t\mathrm{e}^t\, \mathrm{d}t = 3t^2\mathrm{e}^t - 3\left(2t\mathrm{e}^t - \int 2\mathrm{e}^t\, \mathrm{d}t\right) = 3t^2\mathrm{e}^t - 3\left(2t\mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^t\right) + C$$

Suy ra $I = \displaystyle\int f(x)\, \mathrm{d}x = 3\sqrt[3]{x^2}\cdot \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}} - 3\left(2\sqrt[3]{x}\cdot \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}} - 2\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\right) + C$
hay $F(x) = 3\sqrt[3]{x^2}\cdot \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}} - 3\left(2\sqrt[3]{x}\cdot \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}} - 2\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\right) + C$.
Do $F(0) = 2$ suy ra $6 + C = 2 \Leftrightarrow C = -4$. Khi đó $F(-1) = \dfrac{3}{\mathrm{e}} - 3\left(-\dfrac{2}{\mathrm{e}} - \dfrac{2}{\mathrm{e}}\right) - 4 = \dfrac{15}{\mathrm{e}} - 4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Số $20172018^{20162017}$ có bao nhiêu chữ số.

(A) 147278481.   (B) 147278480.   (C) 147347190.   (D) 147347191.

Lời giải.
Số tự nhiên N có k chữ số khi $10^{k-1} \le N \le 10^k$. Đặt $N = 20172018^{20162017}$ suy ra

$$\log N = \log\left(20172018^{20162017}\right) \Leftrightarrow N = 10^{\log\left(20172018^{20162017}\right)}$$
$$\Leftrightarrow N = 10^{[20162017\cdot\log 20172018]} \simeq 10^{1147278480{,}5} < 10^{147278481}.$$

Suy ra số các chữ số là 147278481.
Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Bảng biến thiên ở hình dưới là của hàm số nào dưới đây.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

(A) $y = \dfrac{1}{2}x^4 - x^2 - 3$.   (B) $y = 2x^4 - 4x^2 - 3$.
(C) $y = 2|x|^3 - 3|x| - 3$.   **(D)** $y = 2\left|x^3\right| - 3x^2 - 3$.

Lời giải.
Xét hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 3$ ta có $y' = 6x^2 - 6x$.
Khi đó $y' = 0$ suy ra $6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$. Dễ dàng suy ra hàm số có các điểm cực trị $(0; -3)$ và $(1; -4)$.
Mà $y = 2\left|x^3\right| - 3x^2 - 3 \Leftrightarrow y = 2\left|x\right|^3 - 3\left|x\right|^2 - 3$. Nên dựa vào phép biến đổi đồ thị suy ra hàm số $y = 2\left|x^3\right| - 3x^2 - 3$ có bảng biến thiên như hình vẽ.
Chọn đáp án D □

Câu 23. Cho số phức z thỏa mãn $|2z - 3 - 4i| = 10$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Khi đó $M - m$ bằng

A 5. B 15. C 10. D 20.

Lời giải.
Giả sử số phức $z = x + iy$ với $x, y \in \mathbb{R}$ và điểm $M\left(x; y\right)$ là điểm biểu diễn số phức z.
Khi đó

$$|2z - 3 - 4i| = 10 \Leftrightarrow |2\left(x + yi\right) - 3 - 4i| = 10 \Leftrightarrow |(2x - 3) + (2y - 4)\, i| = 10$$

suy ra

$$\left(2x - 3\right)^2 + \left(2y - 4\right)^2 = 100 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - 2\right)^2 = 25.$$

Do đó tập hợp điểm M thuộc đường tròn (C) có tâm $I\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ và bán kính $R = 5$.
Mà $|z| = OM$, ở đó O là gốc tọa độ. Do $OI = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \frac{5}{2}$ suy ra O nằm trong đường tròn (C). Do đó $\max|z| = OI + IM = \frac{5}{2} + 5 = \frac{15}{2}$ và $\min|z| = IM - OI = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$.
Vậy $M - m = \frac{15}{2} - \frac{5}{2} = 5$.
Chọn đáp án A □

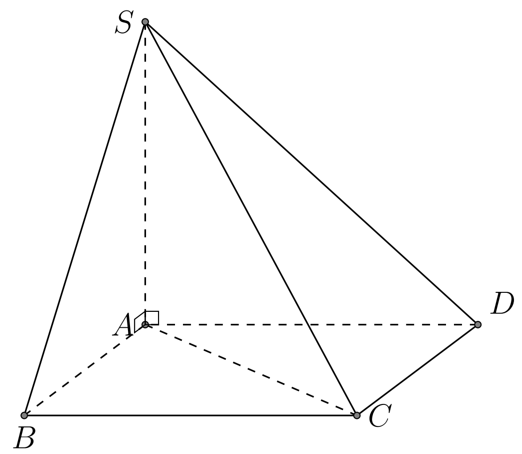
Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Biết $AB = a$, $BC = 2a$ và $SC = 3a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A $2a^3$. B a^3. C $\frac{4}{3}a^3$. D $\frac{2\sqrt{5}}{3}a^3$.

Lời giải.

Gọi V là thể tích của hình chóp $S.ABCD$, vì $SA \perp (ABCD)$ suy ra $SA \perp AC$.
Trong tam giác vuông SAC ta có

$$SA = \sqrt{SC^2 - AC^2}$$
$$\Leftrightarrow SA = \sqrt{SC^2 - AB^2 - BC^2}$$
$$\Leftrightarrow SA = \sqrt{9a^2 - 4a^2 - a^2} = 2a$$



Mà $ABCD$ là hình chữ nhật nên
$V = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot AB \cdot AD = \dfrac{1}{3} \cdot 2a \cdot a \cdot 2a = \dfrac{4a^3}{3}$.

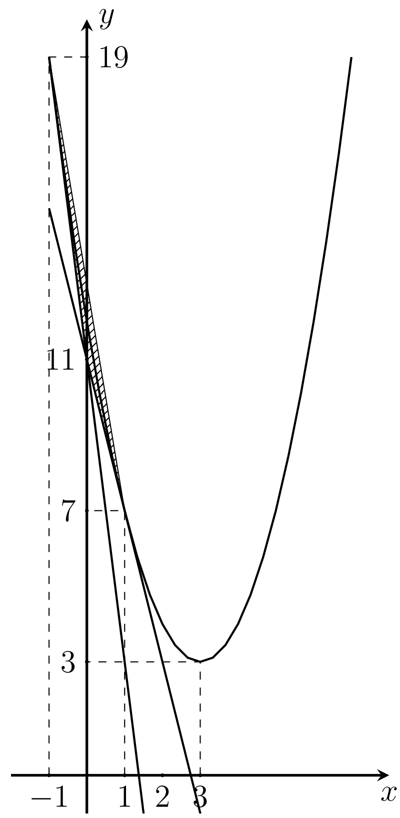
Chọn đáp án C □

Câu 25. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 6x + 12$ và các tiếp tuyến tại các điểm $A(1; 7)$ và $B(-1; 19)$.

A $\dfrac{1}{3}$. B $\dfrac{2}{3}$. C $\dfrac{4}{3}$. D 2.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^2 - 6x + 12$ trên $\mathbb{R}$.
Ta có $y' = 2x - 6$.
Khi đó phương trình tiếp tuyến tại điểm A là $y - 7 = y'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = -4x + 11$.
Tương tự phương trình tiếp tuyến tại điểm B là $y - 19 = y'(-1)(x + 1) \Leftrightarrow y = -8x + 11$.
Hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị là phần gạch chéo hình bên. Do đó diện tích là



$$S = \int\limits_{-1}^{0} \left(x^2 - 6x + 12 + 8x - 11\right) \mathrm{d}x + $$
$$+ \int\limits_{0}^{1} \left(x^2 - 6x + 12 + 4x - 11\right) \mathrm{d}x$$
$$= \int\limits_{-1}^{0} \left(x^2 + 2x + 1\right) \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} \left(x^2 - 2x + 1\right) \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3}(x+1)^3 \Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{3}(x-1)^3 \Big|_{0}^{1} = \frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 26. Gọi M và m là nghiệm nguyên lớn nhất và nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình $\dfrac{(|2x+1| - x - 2)(1 - \log_3(x+4))}{5^{x^2} - 5^{|x|}} \geq 0$. Khi đó tích giá trị $M \cdot m$ bằng

A 6. B -24. C 3. D -12.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} 5^{x^2} - 5^{|x|} \neq 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases}$ $(*)$.

Với điều kiện $(*)$, ta xét phương trình

$$\begin{aligned} |2x+1| - x - 2 = 0 &\Leftrightarrow |2x+1| = x + 2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ \left[\begin{aligned} &2x + 1 = x + 2 \\ &2x + 1 = -x - 2 \end{aligned}\right. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \left[\begin{aligned} &x = 1 \\ &x = -1 \end{aligned}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 1 \\ &x = -1. \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

Tương tự xét phương trình

$$1 - \log_3(x+4) = 0 \Leftrightarrow \log_3(x+4) = 1 \Leftrightarrow x + 4 = 3 \Leftrightarrow x = -1.$$

và

$$\begin{aligned} 5^{x^2} - 5^{|x|} = 0 &\Leftrightarrow 5^{x^2} = 5^{|x|} \Leftrightarrow x^2 = |x| \\ &\Leftrightarrow x^4 = x^2 \Leftrightarrow x^2\left(x^2 - 1\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x^2 = 0 \\ &x^2 - 1 = 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 0 \\ &x = 1 \\ &x = -1. \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

Ta có bảng xét dấu

x	-4		-1		0		1		$+\infty$
$\lvert 2x+1\rvert - x - 2$		$+$	0	$-$		$-$		$+$	
$1 - \log_3(x+4)$		$+$		$-$	0	$-$		$-$	
$5^{x^2} - 5^{\lvert x\rvert}$		$+$	$\lVert$	$-$	$\lVert$	$-$	$\lVert$	$+$	
VT		$+$	$\lVert$	$-$	$\lVert$	$-$	$\lVert$	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu suy ra nghiệm của bất phương trình là $-4 < x < -1$. Do đó nghiệm nguyên lớn nhất là -2 và bé nhất là -3. Do đó $M \cdot m = (-2) \cdot (-3) = 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Trên một chiếc đài Radio FM có vạch chia để người dùng có thể dò sóng cần tìm. Vạch ngoài cùng bên trái và vạch ngoài cùng bên phải trương ứng là 88 Mhz và 108 Mhz. Hai vạch này cách nhau 10 cm. Biết vị trí của vạch ngoài cùng bên trái d (cm) có tần số bằng $k \cdot a^d$ (Mhz) với k và a là hai hằng số. Tìm vị trí tốt nhất của sóng VOV_1 với tần số 102,7 MHz.

(A) Cách vạch ngoài cùng bên phải 1,98 cm.
(B) Cách vạch ngoài cùng bên phải 2,46 cm.
(C) Cách vạch ngoài cùng bên trái 7,35 cm.
(D) Cách vạch ngoài cùng bên trái 8,23 cm.

Lời giải.

Tại vị trí ngoài cùng bên trái $d = 0$ sauy ra $k = 88$.

Tại vị trí ngoài cùng bên phải $d = 10$ suy ra $108 = k \cdot a^{10} \Leftrightarrow a = \sqrt[10]{\dfrac{108}{88}}$.

Để thỏa mãn bài toán suy ra $102,7 = 88 \cdot \left(\sqrt[10]{\dfrac{108}{88}}\right)^d \Leftrightarrow d \simeq 7{,}54$.

Suy ra cách vạch ngoài cùng bên phải là $10 - 7{,}54 = 2{,}46$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của BC. Cho SA hợp với đáy một góc 30°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

(A) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
(B) $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.
(C) $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.
(D) $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC. Do tam giác ABC đều nên $AM \perp BC$. Khi đó $\begin{cases} SM \perp BC \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AMS)$.

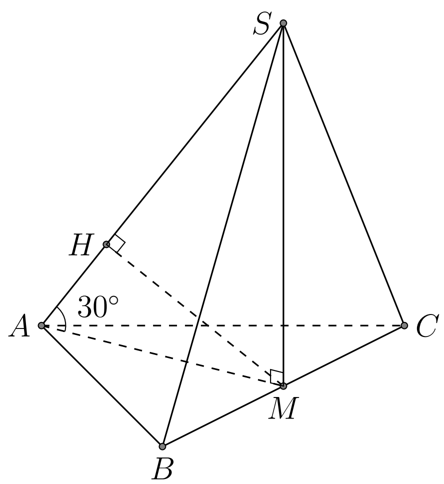
Trong mặt phẳng (SAM) kẻ $MH \perp SA$. Theo chứng minh trên ta có $BC \perp MH$. Do đó $\mathrm{d}\,(SA, BC) = HM$.

Vì $SM \perp (ABC)$ nên $\widehat{(SA, (ABC))} = \widehat{(SA, AM)} = \widehat{SAM}$.

Do giả thiết suy ra $\widehat{SAM} = 30^\circ$.

Xét tam giác vuông AMH ta có

$MH = AM \cdot \sin \widehat{HAM} = AM \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 \colon \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$ và $d_2 \colon \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{1}$. Phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 là

(A) $2y - 2z + 1 = 0$.
(B) $2y - 2z - 1 = 0$.
(C) $2x - 2z + 1 = 0$.
(D) $2x - 2z - 1 = 0$.

Lời giải.

Giả sử phương trình mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$. Gọi $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ lần lượt là véc-tơ chỉ phương của d_1, d_2, ta chọn $\vec{v}_1\,(-1;1;1)$ và $\vec{v}_2\,(-2;1;1)$.

Ta có $[\vec{v}_1, \vec{v}_2] = (0;-1;1)$ khi đó ta chọn $\vec{n}\,(0;-1;1)$

Trên d_1, d_2 lần lượt chọn các điểm $A\,(2;0;0)$ và $B\,(0;1;2)$, gọi I là trung điểm của AB ta có

$I\left(1;\dfrac{1}{2};1\right)$.
Do giả thiết suy ra mặt phẳng (P) đi qua I với véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$, ta có phương trình
$(-1)\cdot\left(y-\dfrac{1}{2}\right)+(z-1)=0 \Leftrightarrow -y+z+\dfrac{1}{2}=0 \Leftrightarrow 2y-2z+1=0.$
Chọn đáp án A □

Câu 30. Giả sử số tự nhiên $n\geq 2$ thỏa mãn $\mathrm{C}_{2n}^{0}+\dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{2}}{3}+\dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{4}}{5}+\dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{6}}{7}+\cdots+\dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}}{2n-1}+\dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{2n}}{2n+1}=\dfrac{8192}{15}$. Khẳng định nào sau đây là đúng

A $6<n<9$. B $9<n<12$. C $n<6$. D Không tồn tại n.

Lời giải.
Ta có $(1+x)^{2n}=\mathrm{C}_{2n}^{0}+\mathrm{C}_{2n}^{1}x+\mathrm{C}_{2n}^{2}x^2+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+\mathrm{C}_{2n}^{2n}x^{2n}\quad(1)$
và
$(1-x)^{2n}=\mathrm{C}_{2n}^{0}-\mathrm{C}_{2n}^{1}x+\mathrm{C}_{2n}^{2}x^2-\cdots-\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+\mathrm{C}_{2n}^{2n}x^{2n}\quad(2)$
Từ (1) và (2) suy ra

$$2\left(\mathrm{C}_{2n}^{0}+\mathrm{C}_{2n}^{2}x^2+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}x^{2n-2}+\mathrm{C}_{2n}^{2n}x^{2n}\right)=(1+x)^{2n}+(1-x)^{2n}\quad(*)$$

Lấy tích phân hai vế của $(*)$ ta có

$$2\int\limits_0^1\left(\mathrm{C}_{2n}^{0}+\mathrm{C}_{2n}^{2}x^2+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}x^{2n-2}+\mathrm{C}_{2n}^{2n}x^{2n}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left[(1+x)^{2n}+(1-x)^{2n}\right]\mathrm{d}x\quad(**)$$

Mà

$$\begin{aligned}&2\int\limits_0^1\left(\mathrm{C}_{2n}^{0}+\mathrm{C}_{2n}^{2}x^2+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}x^{2n-2}+\mathrm{C}_{2n}^{2n}x^{2n}\right)\mathrm{d}x\\ =&2\left(\mathrm{C}_{2n}^{0}x+\mathrm{C}_{2n}^{2}\frac{x^3}{3}+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\mathrm{C}_{2n}^{2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\Bigg|_0^1\\ =&2\left(\mathrm{C}_{2n}^{0}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{2}}{3}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{4}}{5}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{6}}{7}+\cdots+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}}{2n-1}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n}}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\int\limits_0^1\left[(1+x)^{2n}+(1-x)^{2n}\right]\mathrm{d}x=\left[\frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1}-\frac{(1-x)^{2n+1}}{2n+1}\right]\Bigg|_0^1=\frac{2^{2n+1}}{2n+1}.$$

Từ $(**)$ ta suy ra

$$\begin{aligned}&2\left(\mathrm{C}_{2n}^{0}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{2}}{3}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{4}}{5}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{6}}{7}+\cdots+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}}{2n-1}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n}}{2n+1}\right)=\frac{2^{2n+1}}{2n+1}\\ \Leftrightarrow&\mathrm{C}_{2n}^{0}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{2}}{3}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{4}}{5}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{6}}{7}+\cdots+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}}{2n-1}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n}}{2n+1}=\frac{2^{2n}}{2n+1}.\end{aligned}$$

Do đó $\dfrac{2^{2n}}{2n+1}=\dfrac{8192}{15}\Leftrightarrow\dfrac{2^{2n}}{2n+1}=\dfrac{2^{13}}{15}\Leftrightarrow 15\cdot 2^{2n-13}=2n+1.$
- Nếu $n\geq 7$ suy ra $15\cdot 2^{2n-13}$ là một số chẵn và $2n+1$ là một số lẻ. Do đó không có giá trị thỏa

mãn.
- Nếu $n \leq 6$ suy ra $15 \cdot 2^{2n-13}$ là một số hữu tỉ dạng $\dfrac{p}{q}$ với $(p, q) = 1$ và $2n + 1$ là một số lẻ. Do đó không có giá trị nào thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $3f(-x) - 2f(x) = \tan^2 x$. Tính $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $1 - \dfrac{\pi}{2}$. (B) $\dfrac{\pi}{2} - 1$. (C) $1 + \dfrac{\pi}{4}$. (D) $2 - \dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.
Đặt $x = -t$ suy ra $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Khi $x = \dfrac{\pi}{4}$ suy ra $t = -\dfrac{\pi}{4}$; khi $x = -\dfrac{\pi}{4}$ suy ra $t = \dfrac{\pi}{4}$.

Đặt $I = \displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$ suy ra $I = -\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} f(-t)\,\mathrm{d}t = \displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(-t)\,\mathrm{d}t$.

Do giá trị tích phân không phụ thuộc vào biến lấy tích phân nên $I = \displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(-x)\,\mathrm{d}x$.

Do giả thiết ta có

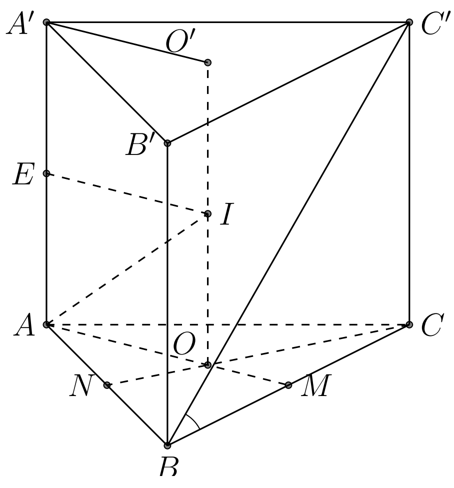
$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [3f(-x) - 2f(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = (\tan x - x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2 - \frac{\pi}{2}$$

Từ chứng minh trên suy ra $3I - 2I = 2 - \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow I = 2 - \dfrac{\pi}{2}$.
Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a. Góc giữa đường chéo của mặt bên và đáy của lăng trụ là 60°. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đó.

(A) $\dfrac{13}{3}\pi a^2$. (B) $\dfrac{5}{3}\pi a^2$. (C) $\dfrac{13}{9}\pi a^2$. (D) $\dfrac{5}{9}\pi a^2$.

Lời giải.



Giả sử khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Do giả thiết $CC' \perp (ABC)$ và $\widehat{(C'B, (ABC))} = \widehat{(C'B, BC)} = \widehat{C'BC}$.
Do giả thiết suy ra $\widehat{C'BC} = 60^\circ$.
Gọi O, O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $A'B'C'$. Gọi E là trung điểm của AA', trong mặt phẳng $(AA'O'O)$ dựng đường thẳng Δ qua E và vuông góc với AA'. Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ suy ra $\{I\} = OO' \cap \Delta$. Gọi R là tâm mặt cầu lăng trụ suy ra $R = IA$. Khi đó $R = \sqrt{OA^2 + IO^2}$.
Mà $OA = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

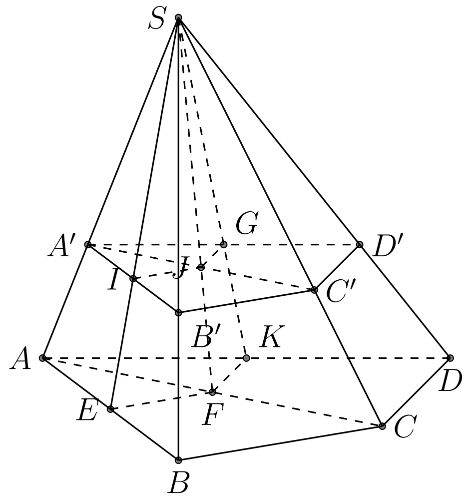
Trong tam giác vuông BCC' ta có $CC' = BC \tan \widehat{C'BC} = a \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$. Do đó $IO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Do đó $R = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a\sqrt{\dfrac{13}{12}}$. Gọi S là diện tích mặt cầu nên $S = 4\pi R^2 = \dfrac{13a^2}{3}\pi$.
Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$. Mặt phẳng đi qua trọng tâm các tam giác SAB, SAC, SAD chia khối chóp này thành hai phần có thể tích là V_1 và V_2 $(V_1 < V_2)$. Tính tỉ lệ $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{8}{27}$. B. $\dfrac{16}{81}$. C. $\dfrac{8}{19}$. D. $\dfrac{16}{75}$.

Lời giải.

Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của AB, AC và AD. Gọi I, J, G lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SAC, SAD.
Do giả thiết ta có $\dfrac{SI}{SE} = \dfrac{SJ}{SF} = \dfrac{SG}{SK} = \dfrac{2}{3}$. Suy ra $\begin{cases} IJ \parallel EF \\ JG \parallel FK \end{cases} \Rightarrow (IJG) \parallel (EFG)$ hay $(IJG) \parallel (ABCD)$. Do đó (IJG) cắt mặt phẳng (SAB) theo giao tuyến d đi qua I và song song với AB.
Gọi $\{A'\} = d \cap SA$, $\{B'\} = d \cap SB$, $\{C'\} = A'J \cap SC$, $\{D'\} = A'G \cap SD$. Thiết diện của mặt phẳng (IJG) với hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $A'B'C'D'$.



Do $A'B' \parallel AB$, theo định lý Ta-lét ta có $\dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SI}{SE} = \dfrac{2}{3}$.
Chứng minh tương tự ta có $\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{2}{3}$.
Ta có $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{8}{27}$ suy ra $V_{S.A'B'C'} = \dfrac{8}{27} V_{S.ABC}$.
Mà $V_{S.ABC} = V_{S.A'B'C'} + V_{A'B'C'.ABC}$ suy ra $V_{A'B'C'.ABC} = V_{S.ABC} - \dfrac{8}{27} V_{S.ABC} = \dfrac{19}{27} V_{S.ABC}$.
Do đó $V_{S.A'B'C'} = \dfrac{8}{19} V_{A'B'C'.ABC}$ (1).
Chứng minh tương tự $V_{S.A'C'D'} = \dfrac{8}{19} V_{A'C'D'.ACD}$ (2).
Từ (1) và (2) ta suy ra

$$V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'C'D'} = \frac{8}{19} V_{A'B'C'.ABC} + \frac{8}{19} V_{A'C'D'.ACD}$$
$$\Leftrightarrow V_{S.A'B'C'D'} = \frac{8}{19} V_{A'B'C'D'.ABCD}$$

Do giả thiết suy ra V_1 là thể tích khối chóp $S.A'B'C'D'$ và V_2 là thể tích khối đa diện $A'B'C'D'.ABCD$.
Do đó $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{8}{19}$.
Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho hàm số $f(x) = x^2(x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)(x^2 - 16)$. Hỏi phương trình $f'(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A 9. **B** 8. **C** 7. **D** 6.

Lời giải.

Xét $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)(x^2-16) = 0 \quad (*)$.

Suy ra phương trình $(*)$ có tập nghiệm là $S = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

Xét dấu $f(x)$ ta có

x	$-\infty$		-4		-3		-2		-1		0		1		2		3		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu suy ra hàm số có 9 cực trị. Do đó phương trình $f'(x) = 0$ có 9 nghiệm.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cách cạnh SB và SC. Biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính diện tích tam giác AMN theo a.

A $\dfrac{a^2\sqrt{10}}{24}$. **B** $\dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$. **C** $\dfrac{a^2\sqrt{5}}{8}$. **D** $\dfrac{a^2\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải.

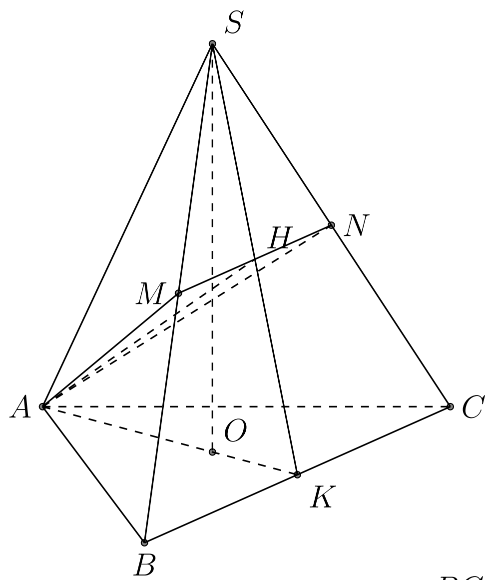
Gọi K là trung điểm của BC và H là giao điểm của SK và MN. Giả sử O là trọng tâm của tam giác ABC do giả thiết suy ra $SO \perp (ABC)$.

Ta có $MN \parallel BC$ và $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SH}{SK} = \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{2}$.

Vì $KB = KC$ nên ta chứng minh được $HM = HN$.

Mặt khác ta dễ chứng minh được $AM = AN$ nên tam giác AMN cân đỉnh A. Vì $(MAN) \cap (SBC) = MN$, $(MAN) \perp (SBC)$, $AH \perp MN$ nên $AH \perp (SBC)$ suy ra $AH \perp SK$.

Theo chứng minh trên ta có $SH = HK$ nên tam giác SAK cân đỉnh A suy ra $SA = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Trong tam giác vuông SBK ta có $SK^2 = SB^2 - BK^2$. Mà $SA = SB$ và $BK = \dfrac{BC}{2}$. Nên $SK^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{2a^2}{4} \Leftrightarrow SK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $SH = HK = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Tương tự $AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.

Mà $S_{\Delta MAN} = \dfrac{1}{2}AH \cdot MN = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{10}}{4} \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là một hình thoi cạnh a, góc $\widehat{ABC} = 120°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và BB'.

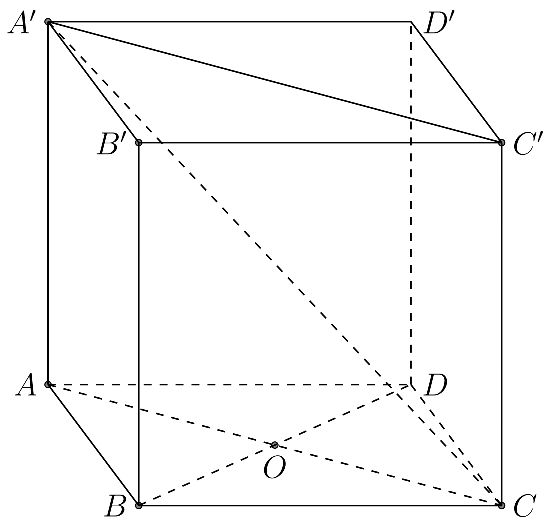
(A) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (B) $a\sqrt{3}$. (C) $\dfrac{a}{2}$. (D) $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Do giả thiết suy ra $BB' \parallel (AA'C'C)$.

Do đó

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(BB', A'C\right) &= \mathrm{d}\left(BB', \left(AA'C'C\right)\right) \\ &= \mathrm{d}\left(B, \left(AA'C'C\right)\right) \end{aligned}$$



Vì $AA' \perp (ABCD)$ nên $AA' \perp BD$. Do $ABCD$ là hình thoi, ta suy ra $BD \perp AC$. Khi đó $BD \perp (AA'C'C)$. Giả sử $\{O\} = AC \cap BD$ suy ra $\mathrm{d}\left(B, \left(AA'C'C\right)\right) = OB$.

Vì $\widehat{ABC} = 120^\circ$ suy ra $\widehat{BAD} = 60^\circ$ do đó tam giác ABD là tam giác đều. Ta có $BD = a$ nên $OB = \dfrac{a}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Với giá trị nào của tham số m, phương trình $f(|x| + m) = 0$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

(A) 4. (B) 5. (C) 6. (D) 3.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(|x|)$ như hình vẽ bên.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

- Nếu $m > 0$ thì từ đồ thị $y = f(|x|)$ tịnh tiến sang trái m đơn vị được đồ thị $y = f(|x| + m)$.
- Nếu $m < 0$ thì từ đồ thị $y = f(|x|)$ tịnh tiến sang phải $|m|$ đơn vị được đồ thị $y = f(|x| + m)$.

Do đó phương trình $f(|x| + m) = 0$ có nhiều nhất 4 nghiệm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z - i| + |z + i| = 6$. Gọi S là đường cong tạo bởi tất cả các điểm biểu diễn số phức $(z - i)(i + 1)$ khi z thay đổi. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong S.

(A) 12π. (B) $12\sqrt{2}\pi$. (C) $9\sqrt{2}\pi$. (D) 9π.

Lời giải.

Giả sử điểm $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $w=(z-i)(i+1)$.
Khi đó $(z-i)(i+1)=x+yi$ nên

$$\begin{cases} z-i=\dfrac{x+yi}{1+i} \\ z+i=\dfrac{x+yi}{1+i}+2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z-i=\dfrac{(x+yi)(1-i)}{2} \\ z+i=\dfrac{(x-2)+(y+2)i}{1+i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z-i=\dfrac{(x+yi)(1-i)}{2} \\ z+i=\dfrac{[(x-2)+(y+2)i](1-i)}{2} \end{cases}.$$

Ta suy ra $|z-i|=|x+yi|\cdot\left|\dfrac{1-i}{2}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+y^2}$.

Tương tự $|z+i|=|(x-2)+(y+2)i|\cdot\left|\dfrac{1-i}{2}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}$.

Do giả thiết $|z-i|+|z+i|=6$ suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+y^2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}=6\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}=6\sqrt{2}.$$

Giả sử $F_2(0;0)$ và $F_1(2;-2)$, khi đó $MF_1+MF_2=6\sqrt{2}$. Do đó tập hợp điểm M chuyển động trên elip nhận F_1, F_2 là tiêu điểm và có độ dài trục lớn là $6\sqrt{2}$.

Ta có $a=3\sqrt{2}$ và $c=\dfrac{F_1F_2}{2}=\sqrt{2}$ nên $b=\sqrt{a^2-c^2}=4$. Khi đó $S=\pi ab=12\sqrt{2}\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x+10y-2z-6=0$. Cho m là số thực thỏa mãn giao tuyến của hai mặt phẳng $y=m$ và $x+z-3=0$ tiếp xúc với mặt cầu (S). Tích tất cả các giá trị của m có thể nhận được bằng

A -11. **B** -10. **C** -5. **D** -8.

Lời giải.

Ta có phương trình mặt cầu $(S):\ (x-2)^2+(y+5)^2+(z-1)^2=36$.

Gọi I, R là tâm và bán kính mặt cầu ta có $I(2;-5;1)$ và $R=6$.

Gọi Δ là đường thẳng là giao của hai mặt phẳng $y=m$ và $x+z-3=0$.

Mà $x+z-3=0\Leftrightarrow z=3-x$. Đặt $x=t$ ta suy ra phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x=t \\ y=m \\ z=3-t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Gọi $\vec{u}$ là véc-tơ chỉ phương của Δ, ta chọn $\vec{u}(1;0;-1)$ và điểm $M_0(0;m;3)$ thuộc Δ.

Để Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) khi $\mathrm{d}(I,\Delta)=R$. Mà $\mathrm{d}(I,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\vec{u};\overrightarrow{IM_0}\right]\right|}{|\vec{u}|}$.

Ta có $\overrightarrow{IM_0}(-2;m+5;2)$ nên $\left[\vec{u};\overrightarrow{IM_0}\right]=(m+5;0;m+5)$ suy ra $\left|\left[\vec{u};\overrightarrow{IM_0}\right]\right|=\sqrt{2(m+5)^2}$.

Do đó $\mathrm{d}(I,\Delta)=\dfrac{\sqrt{2(m+5)^2}}{\sqrt{2}}=|m+5|$. Để thỏa mãn bài toán thì

$$|m+5|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m+5=6 \\ m+5=-6 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-11. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)\cdot[f(x)]^{2018}=x\cdot\mathrm{e}^x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=1$. Hỏi phương trình $f(x)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ có bao nhiêu nghiệm

A 0. **B** 1. **C** 3. **D** 2.

Lời giải.

Do giả thiết ta có $\int f'(x)\cdot[f(x)]^{2018}\,\mathrm{d}x=\int x\cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\quad(*)$.

Theo công thức tích phân từng phần

$\int x\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=x\cdot\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=x\cdot\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C$.

Từ $(*)$ ta suy ra $\frac{1}{2019}[f(x)]^{2019}=x\cdot\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C$. Do $f(1)=1$ suy ra $C=\frac{1}{2019}$.

Khi đó

$$\begin{aligned}\frac{1}{2019}[f(x)]^{2019}&=x\cdot\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+\frac{1}{2019}\\ &\Leftrightarrow [f(x)]^{2019}=2019\left(x\cdot\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\right)+1\\ &\Leftrightarrow f(x)=\sqrt[2019]{2019\left(x\cdot\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\right)+1}\end{aligned}$$

Xét phương trình

$$\begin{aligned}f(x)=-\frac{1}{\mathrm{e}}&\Leftrightarrow \sqrt[2019]{2019\left(x\cdot\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\right)+1}=-\frac{1}{\mathrm{e}}\\ &\Leftrightarrow 2019\left(x\cdot\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\right)+1=\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{2019}\\ &\Leftrightarrow 2019\left(x\cdot\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\right)+1+\frac{1}{\mathrm{e}^{2019}}=0\quad(**)\end{aligned}$$

Xét hàm số $g(x)=2019\left(x\cdot\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\right)+1+\frac{1}{\mathrm{e}^{2019}}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=2019\left(x\cdot\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\right)=2019x\cdot\mathrm{e}^x$

Xét $g'(x)=0$ suy ra $2019x\cdot\mathrm{e}^x=0\Leftrightarrow x=0$.

Mà $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=1+\frac{1}{\mathrm{e}^{2019}}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$1+\frac{1}{\mathrm{e}^{2019}}$	$\searrow$	$-2018+\frac{1}{\mathrm{e}^{2019}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $(**)$ có hai nghiệm.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Có bao nhiêu số nguyên dương m trong đoạn $[-2018;2018]$ sao cho bất phương trình sau đúng với mọi $x\in(1;100)$: $(10x)^{m+\frac{\log x}{10}}\geq 10^{\frac{11}{10}\log x}$?

A 2018. **B** 4026. **C** 2013. **D** 4036.

Lời giải.

Xét với $x \in (1;100)$, ta có

$$(10x)^{m+\frac{\log x}{10}} \geq 10^{\frac{11}{10}\log x} \Leftrightarrow \log (10x)^{m+\frac{\log x}{10}} \geq \log 10^{\frac{11}{10}\log x}$$
$$\Leftrightarrow \left(m+\frac{\log x}{10}\right)(1+\log x) \geq \frac{11}{10}\log x \quad (1)$$

Đặt $t = \log x$, để $1 < x < 100 \Leftrightarrow 0 < \log x < 2$ suy ra điều kiện $0 < t < 2$. Khi đó (1) trở thành

$$\left(m+\frac{t}{10}\right)(1+t) \geq \frac{11}{10}t \quad (2)$$

Để (1) đúng với mọi $x \in (1;100)$ khi (2) đúng với mọi $t \in (0,2)$.
Xét $t \in (0,2)$ suy ra $t+1>0$, khi đó

$$(2) \Leftrightarrow (10m+t)(1+t) \geq 11t \Leftrightarrow 10m+t \geq \frac{11t}{1+t} \Leftrightarrow m \geq \frac{10t-t^2}{10(t+1)}$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{10t-t^2}{10(t+1)}$ trên khoảng $(0,2)$.
Ta có $f'(t) = \dfrac{10-2t-t^2}{10(t+1)^2} = \dfrac{11-(1+t)^2}{10(t+1)^2}$
Dễ thấy $f'(t) > 0\ \forall t \in (0,2)$ suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0,2)$ mà $f(0)=0$; $f(2) = \dfrac{8}{15}$.
Để thỏa mãn bài toán khi $m \geq f(2) \Leftrightarrow m \geq \dfrac{8}{15}$. Do đó số giá trị nguyên của m trong đoạn $[-2018;2018]$ là 2018.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$. Điểm M thay đổi trên mặt phẳng (ABC) và N là điểm trên tia OM sao cho $OM \cdot ON = 12$. Biết rằng khi M thay đổi, điểm N luôn thuộc một mặt cầu cố định. Tính bán kính mặt cầu đó.

A $\frac{7}{2}$. B $3\sqrt{2}$. C $2\sqrt{3}$. D $\frac{5}{2}$.

Lời giải.
Do giả thiết phương trình mặt phẳng (ABC) là $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow 6x+3y+2z-12=0$.
Giả sử điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và $N(x_1;y_1;z_1)$ thỏa mãn bài toán.
Mà $OM \cdot ON = 12 \Leftrightarrow OM = \dfrac{12}{ON} \Leftrightarrow OM = \dfrac{12}{ON^2} \cdot ON$.
Vì N thuộc tia OM nên hai véc-tơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON}$ cùng chiều suy ra $\overrightarrow{OM} = \dfrac{12}{ON^2}\overrightarrow{ON} \quad (*)$.
Mà $\overrightarrow{OM}(x_0;y_0;z_0)$; $\overrightarrow{ON}(x_1;y_1;z_1)$ và $ON^2 = x_1^2+y_1^2+z_1^2$.

Từ $(*)$ suy ra $\begin{cases} x_0 = \dfrac{12x_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \\ y_0 = \dfrac{12y_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \\ z_0 = \dfrac{12z_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \end{cases}$. Vì M thuộc phương trình mặt phẳng (ABC) nên

$$6x_0+3y_0+2z_0-12=0 \Leftrightarrow 6\frac{12x_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+3\frac{12y_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+2\frac{12z_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2}-12=0$$

$$\Leftrightarrow 6x_1 + 3y_1 + 2z_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$
$$\Leftrightarrow (x_1 - 3)^2 + \left(y_1 - \frac{3}{2}\right)^2 + (z_1 - 1)^2 = \frac{49}{4}$$

Do đó tập hợp điểm N thuộc mặt cầu $(S):\ (x-3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{49}{4}$.

Gọi R là bán kính mặt cầu ta có $R = \frac{7}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Một người viết ngẫu nhiên một số có bốn chữ số. Tính xác suất để các chữ số của số đó được viết ra có thứ tự tăng dần hoặc giảm dần (nghĩa là nếu số được viết dưới dạng $\overline{abcd}$ thì $a < b < c < d$ hoặc $a > b > c > d$).

A $\frac{7}{125}$. **B** $\frac{7}{375}$. **C** $\frac{7}{250}$. **D** $\frac{14}{375}$.

Lời giải.

Giả sử số có dạng $\overline{abcd}$. Gọi A là biến cố thỏa mãn bài toán. Do giả thiết suy ra a, b, c, d khác nhau và mỗi tập con gồm 4 chữ số khác nhau thì có một cách sắp xếp thỏa mãn bài toán.

- Nếu $a < b < c < d$ suy ra $a \neq 0$ nên số cách chọn số thỏa mãn là C_9^4.

- Nếu $a > b > c > d$ số cách chọn số thỏa mãn là C_{10}^4.

Mặt khác số các số gồm 4 chữ số là $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$. Do đó $P(A) = \dfrac{\mathrm{C}_9^4 + \mathrm{C}_{10}^4}{9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \dfrac{14}{375}$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{nếu} \quad \cos x \geq 0 \\ 1 + \cos x & \text{nếu} \quad \cos x < 0 \end{cases}$. Hỏi hàm số f có bao nhiêu điểm gián đoạn trên khoảng $(0; 2018)$?

A 2018. **B** 1009. **C** 542. **D** 321.

Lời giải.

Do các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π.

Ta xét hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{nếu} \quad x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \\ 1 + \cos x & \text{nếu} \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$

Ta xét $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (1 + \cos x) = 1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Tương tự $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sin x = 1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Do đó hàm số liên tục tại $x = \frac{\pi}{2}$.

Mặt khác, ta xét $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}^+} \sin x = -1 = f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Tương tự $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} (1 + \cos x) = 1 \neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$. Do đó hàm số gián đoạn tại $x = \frac{3\pi}{2}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to 2\pi^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2\pi^-} \sin x = 0 = f(2\pi)$.

Vậy điểm gián đoạn của hàm số có dạng $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$.

Để $x \in (0;2018)$ suy ra $0 < \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi < 2018 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{4} < k < \dfrac{1}{2\pi}\left(2018 - \dfrac{3\pi}{2}\right)$, vì $k \in \mathbb{Z}$ suy ra $k \in \{0,1,2,\ldots,320\}$.

Chọn đáp án (D) $\square$

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;1)$, $M(5;3;1)$, $N(4;1;2)$ và mặt phẳng $(P): y + z = 27$. Biết rằng tồn tại điểm B trên tia AM, điểm C trên (P) và điểm D trên tia AN sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thoi. Tọa độ điểm C là

(A) $(-15;21;6)$. $\boxed{\text{B}}$ $(21;21;6)$. (C) $(-15;7;20)$. (D) $(21;19;8)$.

Lời giải.

Do giả thiết suy ra C là giao điểm của đường phân giác trong góc $\widehat{BAD}$ và mặt phẳng (P).

Đặt $\vec{e}_1 = \dfrac{\overrightarrow{AM}}{\left|\overrightarrow{AM}\right|}$ và $\vec{e}_2 = \dfrac{\overrightarrow{AN}}{\left|\overrightarrow{AN}\right|}$. Mà $\overrightarrow{AM} = (3;4;0)$ suy ra $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$.

Tương tự ta có $\overrightarrow{AN} = (2;2;1)$ suy ra $\left|\overrightarrow{AN}\right| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3$.

Khi đó tọa độ $\vec{e}_1\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5};0\right)$ và $\vec{e}_2\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$ suy ra $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \left(\dfrac{19}{15};\dfrac{22}{15};\dfrac{1}{3}\right)$. Gọi $\vec{u}$ là véc-tơ chỉ phương của đường thân giác góc $\widehat{BAD}$, dễ thấy $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, ta chọn $\vec{u}\,(19;22;5)$.

Khi đó phương trình tham số của đường phân giác trong góc $\widehat{BAD}$ là $\begin{cases} x = 2 + 19t \\ y = -1 + 22t \\ z = 1 + 5t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

Do giả thiết tọa độ điểm C tương ứng với giá trị t là nghiệm của phương trình
$-1 + 22t + 1 + 5t = 27 \Leftrightarrow t = 1$. Ta suy ra tọa độ điểm $C(21;21;6)$.

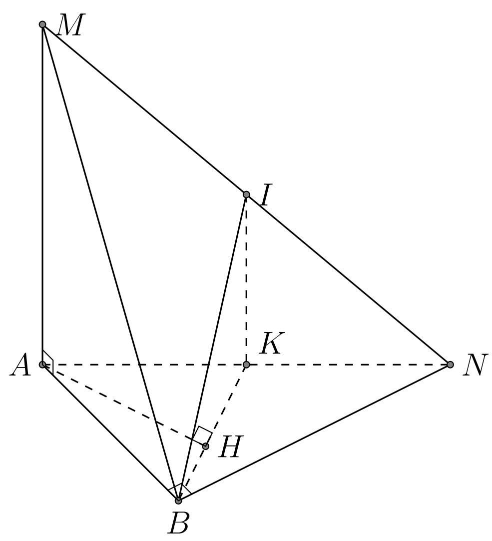
Chọn đáp án (B) $\square$

Câu 46. Trong không gian cho hai đường thẳng chéo nhau d và Δ, vuông góc với nhau và nhận $AB = a$ làm đoạn vuông góc chung $A \in d$, $B \in \Delta$. Trên d lấy điểm M, trên Δ lấy điểm N sao cho $AM = 2a$, $BN = 4a$. Gọi I là tâm mặt cầu ngoài tiếp tứ diện $ABMN$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và BI là

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{4a}{\sqrt{17}}$. (B) a. (C) $\dfrac{4a}{5}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$.

Lời giải.

Do giả thiết ta có
$\begin{cases} BN \perp AB \\ BN \perp AM \end{cases} \Rightarrow BN \perp (MAB).$
Suy ra $BN \perp BM$. Chứng minh tương tự ta có $MA \perp (MAB)$ suy ra $AN \perp AM$.
Do đó hai điểm A, B nhìn MN dưới góc 90° nên A, B, M, N cùng thuộc mặt cầu đường kính MN.
Trong mặt phẳng (MAB) ta kẻ $IK \parallel MA$.
Trong mặt phẳng (NAB) ta kẻ $AH \perp BK$.
Theo chứng minh trên suy ra $IK \perp (ABN)$ nên $IK \perp AH$.



Khi đó $\begin{cases} AH \perp BK \\ AH \perp IK \end{cases} \Rightarrow AH \perp (IKB).$
Do đó

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\,(AM, IB) &= \mathrm{d}\,(AM, (IKB)) \\ &= \mathrm{d}\,(A, (IKB)) = AH \end{aligned}$$

Xét tam giác vuông ABN ta có $AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{a^2 + (4a)^2} = \sqrt{17}a$.
Do cách dựng ta có $KA = KN$ nên $BK = \dfrac{AN}{2} = \dfrac{\sqrt{17}a}{2}$.
Ta có $\sin \widehat{BAN} = \dfrac{BN}{AN} = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$.
Mà $S_{\Delta ABK} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AK \cdot \sin \widehat{BAK} = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot \dfrac{\sqrt{17}a}{2} \cdot \dfrac{4}{\sqrt{17}}$.
Mặt khác $S_{\Delta ABK} = \dfrac{1}{2} \cdot AH \cdot BK = \dfrac{1}{2} \cdot AH \cdot \dfrac{\sqrt{17}a}{2}$. Suy ra $AH = \dfrac{4a}{\sqrt{17}}$.
Vậy khoảng cách giữa AM và BI bằng $\dfrac{4a}{\sqrt{17}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 1 = 0$, $(Q): x - 2y + 2z - 8 = 0$, $(R): x - 2y + 2z + 4 = 0$. Một đường thẳng Δ thay đổi cắt ba mặt phẳng (P), (Q), (R) lần lượt tại các điểm A, B, C. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $AB + \dfrac{96}{AC^2}$ là

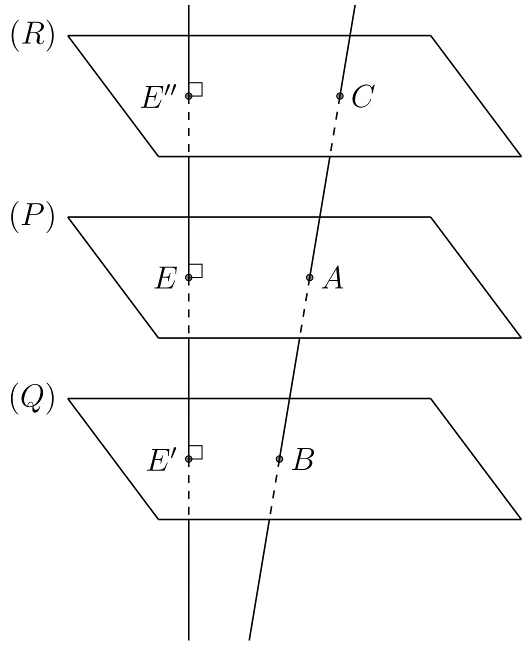
(A) $\dfrac{41}{3}$. (B) 99. (C) 18. (D) 24.

Lời giải.

Dễ thấy các mặt phẳng (P), (Q) và (R) song song với nhau. Do giả thiết suy ra $\mathrm{d}\left((R),(P)\right) = EE'' = 1$ và $\mathrm{d}\left((P),(Q)\right) = EE' = 3$.

Theo định lý Ta-lét trong không gian ta có $\dfrac{E''E}{EE'} = \dfrac{AC}{AB}$ suy ra $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow AB = 3AC$.

Đặt $S = AB + \dfrac{96}{AC^2}$ suy ra $S = 3AC + \dfrac{96}{AC^2}$.



Khi đó áp dụng bất đẳng thức AM -GM

$$S = \frac{3AC}{2} + \frac{3AC}{2} + \frac{96}{AC^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{3AC}{2}\cdot\frac{3AC}{2}\cdot\frac{96}{AC^2}} \Leftrightarrow S \geq 18.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{3AC}{2} = \dfrac{96}{AC^2} \Leftrightarrow AC^3 = 64 \Leftrightarrow AC = 4$.

Vậy $\min S = 18$ khi $AC = 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Cho hàm số $y = \dfrac{1-3x}{3-x}$ có đồ thị (C). Điểm M nằm trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng gấp hai lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang của (C). Khoảng cách từ M đến tâm đối xứng của (C) bằng

A $3\sqrt{2}$. **B** $2\sqrt{5}$. **C** 4. **D** 5.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Vì $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1-3x}{3-x} = +\infty$ suy ra $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C).

Vì $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1-3x}{3-x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x} - 3}{\frac{3}{x} - 1} = 3$ suy ra $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị (C).

Giả sử $M\left(x_0; y_0\right)$ thuộc đồ thị (C) thỏa mãn bài toán. Suy ra $M\left(x_0; \dfrac{1-3x_0}{3-x_0}\right)$.

Gọi d_1 khoảng cách từ M đến đường thẳng $x = 3$, ta có $d_1 = |x_0 - 3|$.

Tương tự gọi d_2 khoảng cách từ M đến đường thẳng $y = 3$, ta có

$d_2 = |y_0 - 3| = \left|\dfrac{1-3x_0}{3-x_0} - 3\right| = \left|\dfrac{8}{3-x_0}\right|$.

Do giả thiết ta có

$$|x_0 - 3| = 2\left|\frac{8}{3-x_0}\right| \Leftrightarrow \left(x_0-3\right)^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 - 3 = 4 \\ x_0 - 3 = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 7 \\ x_0 = -1 \end{array}\right.$$

- Khi $x_0 = 7$ suy ra $y_0 = 5$.
- Khi $x_0 = -1$ suy ra $y_0 = 1$.

Gọi I là giao điểm hai tiệm cận ta có $I\,(3;3)$.
- Khi $M\,(7;5)$ ta có $IM = \sqrt{(7-3)^2 + (5-3)^2} = 2\sqrt{5}$.
- Khi $M\,(-1;1)$ ta có $IM = \sqrt{(-1-3)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{5}$.

Vậy khoảng cách từ M đến giao điểm hai tiệm cận bằng$2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị của tham số m trong khoảng $(0;6\pi)$ thỏa mãn $\int\limits_0^m \dfrac{\sin x}{5+4\cos x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}$?

A 6. **B** 12. **C** 8. **D** 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_0^m \frac{\sin x}{5+4\cos x}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{4}\int\limits_0^m \frac{5+4\cos x}{5+4\cos x}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{4}\ln|5+4\cos x|\Big|_0^m = -\frac{1}{4}\left(\ln|5+4\cos m| - \ln 9\right)\\ &= -\frac{1}{4}\ln\frac{|5+4\cos m|}{9}\end{aligned}$$

Vì $-1 \le \cos m \le 1$,$\forall m$ nên $-4 \le 4\cos m \le 4$, $\forall m$ suy ra $5+4\cos m > 0$, $\forall m$ do đó

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}\ln\frac{|5+4\cos m|}{9} = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{5+4\cos m}{9}\right) = -2\\ &\Leftrightarrow \frac{5+4\cos m}{9} = \mathrm{e}^{-2} \Leftrightarrow \cos m = \frac{9}{\mathrm{e}^2} - 5 \simeq -0{,}945\end{aligned}$$

Dễ thấy trong một chu kì 2π có 2 giá trị m thỏa mãn $\cos m = \dfrac{9}{\mathrm{e}^2} - 5$. Do đó trong khoảng $(0;6\pi)$ sẽ có 6 nghiệm thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 4x + 12z + 11$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 4x + 2y + 3z$.

A $6 + 2\sqrt{15}$. **B** 20. **C** $8 + 4\sqrt{3}$. **D** 16.

Lời giải.

Ta có

$$4x^2 + y^2 + 9z^2 = 4x + 12z + 11 \Leftrightarrow (2x-1)^2 + y^2 + (3z-2)^2 = 16$$

Mà $P = 2\,(2x-1) + 2y + (3z-2) + 4$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có

$$\begin{aligned}&[2\,(2x-1) + 2y + (3z-2)]^2 \le \left(2^2 + 2^2 + 1^1\right)\cdot\left[(2x-1)^2 + y^2 + (3z-2)^2\right]\\ \Leftrightarrow\ &[2\,(2x-1) + 2y + (3z-2)]^2 \le 144\\ \Leftrightarrow\ &-12 \le 4x + 2y + 3z - 4 \le 12\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -8 \leq 4x + 2y + 3z \leq 16$$

Suy ra $\max P = 16$ khi $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{3z-2}{1} \\ 4x + 2y + 3z = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11}{6} \\ y = \dfrac{8}{3} \\ z = \dfrac{10}{9} \end{cases}$

Chọn đáp án D □

——— HẾT ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. D	3. B	4. A	5. D	6. B	7. C	8. D	9. A	10. C
11. B	12. B	13. C	14. D	15. C	16. A	17. C	18. B	19. D	20. C
21. A	22. D	23. A	24. C	25. B	26. A	27. B	28. D	29. A	30. D
31. D	32. A	33. C	34. A	35. B	36. C	37. A	38. B	39. A	40. D
41. A	42. A	43. D	44. D	45. B	46. A	47. C	48. B	49. A	50. D

85 ĐỀ THI THỬ, TRƯỜNG THPT NAM TIỀN HẢI, THÁI BÌNH, LẦN 2, 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho $I = \int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 10$. Kết quả $J = \int\limits_5^2 [2 - 4f(x)]\,\mathrm{d}x$ là

A 34. **B** 36. **C** 40. **D** 32.

Lời giải.

Xét $J = \int\limits_5^2 [2 - 4f(x)]\,\mathrm{d}x = 2x\Big|_5^2 - 4\int\limits_5^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -6 + 40 = 34$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Khối chóp $S.ABCD$ có A, B, C, D cố định và S chạy trên đường thẳng song song với AC. Khi đó thể tích khối chóp $S.ABCD$ sẽ.

A Giảm phân nửa. **B** Giữ nguyên. **C** Tăng gấp đôi. **D** Tăng gấp bốn.

Lời giải.

Ta có S nằm trên đường thẳng d song song với $AC \Rightarrow d \parallel (ABCD)$

Khoảng cách từ mọi điểm nằm trên d đến mặt đáy đều bằng nhau do đó thể tích khối chóp không thay đổi.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông với $AB = BC = 2a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$, gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính tan góc giữa đường thẳng $A'M$ và mặt phẳng (ABC).

A $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. **B** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **C** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D** $\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$.

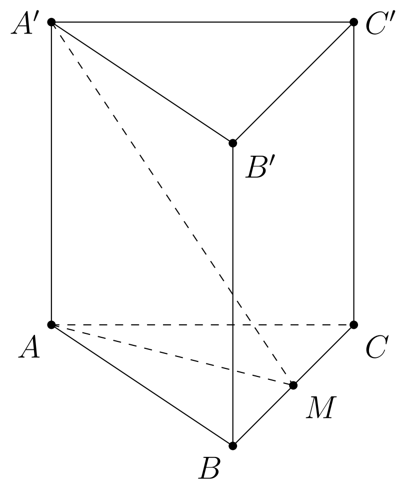
Lời giải.

Tam giác ABC vuông cân tại $B \Rightarrow AM = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$.

Ta có AM là hình chiếu của $A'M$ lên mặt đáy (ABC)

$\Rightarrow (A'M, (ABC)) = (A'M, AM) = \widehat{AMA'}$.

Xét $\Delta A'AM$ vuông tại A có $\tan\widehat{AMA'} = \dfrac{AA'}{AM} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.



Chọn đáp án A □

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $K(2; 4; 6)$, gọi K' là hình chiếu vuông góc của điểm K lên trục Oz, khi đó trung điểm OK' có tọa độ là

A $(0;0;3)$. **B** $(1;0;0)$. **C** $(1;2;3)$. **D** $(0;2;0)$.

Lời giải.

Tọa độ hình chiếu $K'(0;0;6) \Rightarrow$ trung điểm của đoạn OK' có tọa độ là $(0;0;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(3;-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-3}{1}$?

A $3x - 2y + z + 12 = 0$. **B** $3x - 2y + z - 12 = 0$.

C $3x + 2y + z - 8 = 0$. **D** $x - 2y + 3z + 3 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng vuông góc với Δ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3;-2;1)$, khi đó phương trình mặt phẳng là: $3x - 2y + z - 12 = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$. Gọi $\mathscr{D}$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức:

A $V = \pi \displaystyle\int_1^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **B** $V = 2\pi \displaystyle\int_1^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

C $V = \pi^2 \displaystyle\int_1^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **D** $V = \pi^2 \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành là $V = \pi \displaystyle\int_1^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 4π và có thiết diện qua trục là hình vuông. Diện tích toàn phần của hình trụ bằng

A 6π. **B** 10π. **C** 8π. **D** 12π.

Lời giải.

Thiết diện qua trục hình trụ là hình vuông $\Rightarrow l = 2r$. Ta có $S_{\text{xq}} = 2\pi \cdot r \cdot l = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \Leftrightarrow r = 1$.
Khi đó diện tích toàn phần hình trụ là $S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + 2\pi r^2 = 6\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Tính $I = \displaystyle\int_1^2 2x\,\mathrm{d}x$.

A $I = 2$. **B** $I = 3$. **C** $I = 1$. **D** $I = 4$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_1^2 2x\,\mathrm{d}x = x^2\Big|_1^2 = 4 - 1 = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

A Hàm số có ba điểm cực trị.
B Hàm số có hai điểm cực tiểu.
C Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.
D Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có giá trị cực đại bằng 3.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Cho hàm số $y = 2x^3 + 6x + 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
B Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
C Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
D Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = 2x^3 + 6x + 2$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Có $y' = 6x^2 + 6 > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số đã cho đồng biến trên tập xác định.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 5x$.

A $\displaystyle\int \cos 5x \, \mathrm{d}x = \frac{\sin 5x}{5} + C$.
B $\displaystyle\int \cos 5x \, \mathrm{d}x = -\frac{\sin 5x}{5} + C$.
C $\displaystyle\int \cos 5x \, \mathrm{d}x = 5\sin 5x + C$.
D $\displaystyle\int \cos 5x \, \mathrm{d}x = \sin 5x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \cos 5x \, \mathrm{d}x = \frac{\sin 5x}{5} + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Số phức nào sau đây là số thuần ảo?

A $z = \sqrt{3} + 2i$.
B $z = -2 + 3i$.
C $z = 2i$.
D $z = -2$.

Lời giải.

Số phức thuần ảo là số phức có phần thực bằng $0 \Rightarrow z = 2i$ là số thuần ảo.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Tìm số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$.

A 2.
B 3.
C 0.
D 1.

Lời giải.

Xét hàm số $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$
Khi đó $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}=\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{x+1}{x+3}$ và $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x+1}{x+3}=\infty\Rightarrow$ đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là $x=-3$.
Chọn đáp án D □

Câu 14. Tập nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{5}}|x+1|=2$ là
A $S=\{3\}$. B $S=\{-10;2\}$. C $S=\{-4;2\}$. D $S=\{-3;2\}$.

Lời giải.
Ta có $\log_{\sqrt{5}}|x+1|=2\Leftrightarrow|x+1|=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\\x=2\end{array}\right.$.
Chọn đáp án C □

Câu 15. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $2z^2-6z+5=0$. Tìm iz_0?
A $i\cdot z_0=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$. B $i\cdot z_0=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$. C $i\cdot z_0=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$. D $i\cdot z_0=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$.

Lời giải.
Xét phương trình $2z^2-6z+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i\\z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i\end{array}\right.\Rightarrow z_0=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i\Rightarrow i\cdot z_0=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$.
Chọn đáp án B □

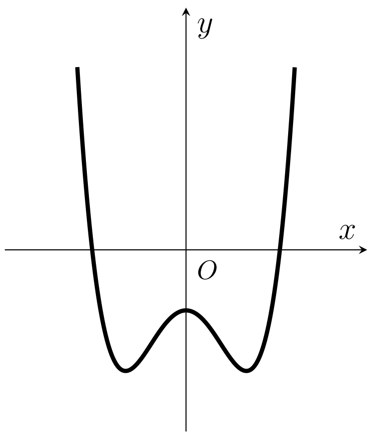
Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x-2y+z-5=0$. Điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (P)?
A $N(3;-2;-5)$. B $P(0;0;-5)$. C $Q(3;-2;1)$. D $M(1;1;4)$.

Lời giải.
Ta có $3\cdot1-2\cdot1+4-5=0\Rightarrow$ điểm M thuộc mặt phẳng (P).
Chọn đáp án D □

Câu 17. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-5}{x-3}$?
A $x=2$. B $x=-3$. C $x=3$. D $y=3$.

Lời giải.
Ta có $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x-5}{x-3}=\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=3$.
Chọn đáp án C □

Câu 18.
Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?
A $y=x^3-x^2-1$. B $y=-3x^3+x^2-1$.
C $y=2x^4-x^2-1$. D $y=-x^4+x^2-1$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị của hàm số ta nhận xét đây là đồ thị của hàm trùng phương có hệ số $a > 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Tìm giá trị m nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0; 2]$.

A $m = -2$. B $m = 11$. C $m = 0$. D $m = 3$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 14x + 11 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 14x + 11 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{11}{3} \end{array}\right.$.

Khi đó $y(0) = -2, y(1) = 3$ và $y(2) = 0 \Rightarrow \min\limits_{x \in [0;2]} y = y(0) = -2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Cho phương trình $9^x + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$. Khi đặt $3^x = t$ ta được phương trình nào dưới đây?

A $t^2 + 2t - 3 = 0$. B $12^{2x+1} = 0$. C $2t^2 - 3 = 0$. D $t^2 + t - 3 = 0$.

Lời giải.

Xét phương trình $9^x + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$. Đặt $3^x = t > 0$, ta được phương trình $t^2 + 2t - 3 = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Tập xác định của hàm số $y = \log_3(2x + 1)$ là

A $\mathscr{D} = \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$. B $\mathscr{D} = (0; +\infty)$. C $\mathscr{D} = \left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$. D $\mathscr{D} = \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \mathscr{D} = \left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \geq 2$.

A $(-\infty; -1]$. B $[1; +\infty)$. C $(-\infty; -1)$. D $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

Xét bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \geq 2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \geq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow x \leq -1 \Rightarrow$ tập nghiệm $S = (-\infty; -1]$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^2 + 2$ và $y = 3x$.

A $S = \dfrac{1}{6}$. B $S = 2$. C $S = 3$. D $S = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 + 2 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Khi đó $S = \displaystyle\int_1^2 \left|x^2 + 2 - 3x\right| \mathrm{d}x = \left|\int_1^2 \left(x^2 - 3x + 2\right) \mathrm{d}x\right| = \dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Cho số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|\, i = 0$. Tính $S = a + 3b$.

A $S = -5$. **B** $S = \dfrac{7}{3}$. **C** $S = -\dfrac{7}{3}$. **D** $S = 5$.

Lời giải.

Ta có $z = a + bi \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Khi đó

$$z + 1 + 3i - |z|\, i = 0 \Leftrightarrow a + bi + 1 + 3i - \sqrt{a^2 + b^2} i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 = 0 \\ b + 3 - \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ \sqrt{b^2 + 1} = b + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -\dfrac{4}{3} \end{cases}.$$

$\Rightarrow S = a + 3b = -1 - 4 = -5$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có chiều rộng $2a$ và chiều dài $3a$. Chiều cao của khối chóp là $4a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ tính theo a là

A $V = 24a^3$. **B** $V = 9a^3$. **C** $V = 40a^3$. **D** $V = 8a^3$.

Lời giải.

Ta có $V = \dfrac{1}{3} \cdot 3a \cdot 2a \cdot 3a = 8a^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Cho hàm số $y = (x - 2)(x^2 + 4)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A (C) cắt trục hoành tại hai điểm. **B** (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

C (C) cắt trục hoành tại một điểm. **D** (C) không cắt trục hoành.

Lời giải.

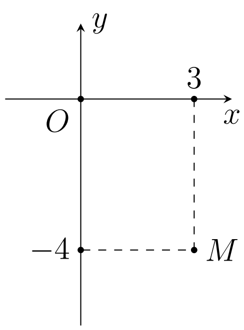
Xét phương trình $(x - 2)(x^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow (C)$ cắt trục hoành tại một điểm.

Chọn đáp án C □

Câu 27.

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z. Tìm z.

A $z = -4 + 3i$. **B** $z = -3 + 4i$. **C** $z = 3 - 4i$. **D** $z = 3 + 4i$.



Lời giải.

Điểm M có tọa độ là $M(3; -4) \Rightarrow$ điểm M biểu diễn số phức $z = 3 - 4i$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$. Mặt cầu (Z) có tâm là

(A) $I(1;2;0)$. (B) $I(1;-2;0)$. (C) $I(-1;2;0)$. (D) $I(-1;-2;0)$.

Lời giải.

Xét mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$ có tâm $I(1;-2;0)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Tính bán kính R mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng $2a$.

(A) $R=a$. (B) $R=2a\sqrt{3}$. (C) $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. (D) $R=a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương có tâm là tâm của khối lập phương và đường kính là đường chéo của hình lập phương.

Ta có độ dài đường chéo hình lập phương là $d=\sqrt{4a^2+4a^2+4a^2}=2a\sqrt{3}\Rightarrow R=a\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của Oz?

(A) $\vec{j}=(0;1;0)$. (B) $\vec{i}=(1;0;0)$. (C) $\vec{m}=(1;1;1)$. (D) $\vec{k}=(0;0;1)$.

Lời giải.

Trục Oz có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Thầy giáo Cường đựng trong túi 4 bi xanh và 6 bi đỏ. Thầy giáo lần lượt rút 2 viên bi. Tính xác suất để rút được một bi xanh và một bi đỏ?

(A) $\dfrac{6}{25}$. (B) $\dfrac{2}{15}$. (C) $\dfrac{4}{15}$. (D) $\dfrac{8}{25}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là rút lần lượt 2 viên bi trong 10 viên bi $\Rightarrow n(\Omega)=10.9=90$.

Gọi A là biến cố rút được một viên màu đỏ và một viên màu xanh $\Rightarrow n(A)=4.6=24$.

Khi đó xác suất xảy ra biến cố A là $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{24}{90}=\dfrac{4}{15}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sin x=m$ có nghiệm?

(A) $m\le 1$. (B) $m\ge 1$. (C) $m\le -1$. (D) $-1\le m\le 1$.

Lời giải.

Phương trình $\sin x=m$ có nghiệm $\Leftrightarrow -1\le m\le 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng đi qua $G(1;2;3)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho G là trọng tâm của tam giác ABC. Khi đó phương trình mặt phẳng (α) là.

(A) $2x+y+3z-9=0$. (B) $6x+3y+2z+9=0$.

(C) $3x+6y+2z+18=0$. (D) $6x+3y+2z-18=0$.

Lời giải.

Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ và $C(0;0;c) \Rightarrow$ tọa độ trọng tâm tam giác ABC là $G\left(\frac{a}{3};\frac{b}{3};\frac{c}{3}\right)$.
Theo giả thiết $\Rightarrow$ điểm $G(1;2;3) \Rightarrow a=3; b=6; c=9$.
Khi đó phương trình mặt phẳng $(\alpha): \frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1 \Rightarrow (\alpha): 6x+3y+2z-18=0$.
Chọn đáp án D □

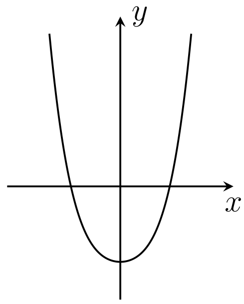
Câu 34. Số hạng tổng quát của khai triển $(a+b)^n$ là

A $\mathrm{C}_n^{k+1}a^{n+1}b^{n-k+1}$. B $\mathrm{C}_n^k a^{n-k}b^k$. C $\mathrm{C}_n^{k+1}a^{n-k+1}b^{k+1}$. D $\mathrm{C}_n^k a^{n-k}b^{n-k}$.

Lời giải.
Số hạng tổng quát của khai triển $(a+b)^n$ là $\mathrm{C}_n^k a^{n-k}b^k$.
Chọn đáp án B □

Câu 35.
Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ với $a\neq 0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng

A $a<0, b<0, c<0$. B $a>0, b\geq 0, c>0$.
C $a>0, b\geq 0, c<0$. D $a>0, b<0, c\leq 0$.



Lời giải.
Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có một điểm cực trị nên a và b cùng dấu.
Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow c<0$.
Đồ thị hàm số đi từ trên đi xuống nên hệ số $a>0$.
Chọn đáp án C □

Câu 36. Thầy giáo Dương có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu khó, 10 câu trung bình và 15 câu dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi và số câu dễ không ít hơn 2.

A 56875. B 42802. C 41811. D 32023.

Lời giải.
Ta có các trường hợp:
- Trường hợp 1. Một đề có 2 câu dễ, 1 câu khó và 2 câu trung bình $\Rightarrow$ số đề tạo được là: $\mathrm{C}_2^{15}\cdot\mathrm{C}_1^5\cdot\mathrm{C}_2^{10}=23625$.
- Trường hợp 2. Một đề có 2 câu dễ, 2 câu khó và 1 câu trung bình $\Rightarrow$ số đề tạo được là: $\mathrm{C}_2^{15}\cdot\mathrm{C}_2^5\cdot\mathrm{C}_1^{10}=10500$.
- Trường hợp 3. Một đề có 3 câu dễ, 1 câu khó và 1 câu trung bình $\Rightarrow$ số đề tạo được là: $\mathrm{C}_3^{15}\cdot\mathrm{C}_1^5\cdot\mathrm{C}_1^{10}=22750$.

$\Rightarrow$ số đề có thể tạo được là: $23625+10500+22750=56875$.
Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có các cạnh đều bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích của khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$.

A $V=\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{6}$. B $V=\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{2}$. C $V=\frac{\pi a^3}{2}$. D $V=\frac{\pi a^3}{6}$.

Lời giải.

Chiều cao của hình nón là chiều cao của tam giác đều, bán kính đáy là bán kính đường tròn nội tiếp $ABCD$.

Ta có $h = \sqrt{2a^2 - a^2} = a$ và $r = a \Rightarrow V = \dfrac{1}{3}\pi r^3 h = \dfrac{\pi a^3}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Một đa giác đều có số đường chéo gấp đôi số cạnh. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu cạnh?

A 7. B 6. C 8. **D** 5.

Lời giải.

Gọi n là số đỉnh của đa giác đều, khi đó số cạnh là n và số đường chéo là $\dfrac{n(n-3)}{2}$ với $n \in \mathbb{Z}^+$.

Theo giả thiết ta có $n = \dfrac{n(n-3)}{2} \Leftrightarrow n^2 - 5n = 0 \Leftrightarrow n = 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z}{2}$, mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 3 = 0$ và điểm $A(1;2;-1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A cắt d và song song với mặt phẳng (α).

A $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{1}$.

B $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$.

C $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{-1}$.

D $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$.

Lời giải.

Giả sử $d \cap \Delta = B \Rightarrow B(3+t; 3+3t; 2t)$, ta có $\Delta \parallel (\alpha) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{n_\alpha}$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (t+2; 3t+1; 2t+1) \\ \overrightarrow{n_\alpha} = (1;1;-1) \end{cases} \Rightarrow t + 2 + 3t + 1 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1;-2;-1)$.

Khi đó phương trình đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{-1}$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Một người gửi số tiền M triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,7%/ tháng. Biết rằng nếu người đó không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Sau ba năm, người đó muốn lãnh được số tiền là 5 triệu đồng, nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và số lãi suất không đổi, thì người đó cần gửi số tiền M là

A 3 triệu 900 nghìn đồng.

B 3 triệu 800 nghìn đồng.

C 3 triệu 700 nghìn đồng.

D 3 triệu 600 nghìn đồng.

Lời giải.

Ta có 3 nằm $= 36$ tháng, 3 số tiền người đó thu được cả gốc lẫn lãi là $T = M\left(1 + \dfrac{0{,}7}{100}\right)^{36} = 1{,}28M$.

Theo giả thiết ta có $T = 5 \Rightarrow 1{,}28M = 5 \Leftrightarrow M = 3$ triệu 900 nghìn đồng.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m > 0$, để giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $D = [m+1; m+2]$ luôn bé hơn 3.

A $(0;2)$. **B** $(0;1)$. C $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. D $(-\infty;1)$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có $y' = 3x^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

Với $m > 0$ ta có $[m+1; m+2] \subset (1; +\infty) \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $[m+1; m+2]$.

Khi đó $\min\limits_{[m+1;m+2]} y = y(m+1) = m^3 + 3m^2 - 1 < 3 \Leftrightarrow m^3 + 3m^2 - 4 < 0$

$\Leftrightarrow (m-1)(m^2 + m + 4) < 0 \Leftrightarrow m < 1 \Rightarrow m \in (0; 1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Cho $x, y \in [0; +\infty)$ và $x + y = 1$. Biết $m \in [a; b]$ thì phương trình $(5x^2 + 4y)(5y^2 + 4x) + 40xy = m$ có nghiệm thực. Tính giá trị biểu thức $T = 25a + 16b$.

A $T = 829$. B $T = 825$. C $T = 816$. D $T = 820$.

Lời giải.

Xét phương trình $(5x^2 + 4y)(5y^2 + 4x) + 40xy = m \Leftrightarrow 25(xy)^2 + 20(x^3 + y^3) + 56xy = m$

$\Leftrightarrow 25(xy)^2 + 20(x+y)^3 - 60xy(x+y) + 56xy = m$, với $x + y = 1$ ta được $25(xy)^2 - 4xy + 20 = m$.

Theo giả thiết $\begin{cases} x, y \in [0; +\infty) \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \le xy \le \dfrac{1}{4}$. Đặt $xy = t \in \left[0; \dfrac{1}{4}\right]$, ta được $25t^2 - 4t + 20 = m$.

Xét hàm số $y = 25t^2 - 4t + 20$, với $t \in \left[0; \dfrac{1}{4}\right]$, ta có $y' = 50t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{2}{25}$, ta được BBT

t	0		$\frac{2}{25}$		$\frac{1}{4}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	20	$\searrow$	$\frac{496}{25}$	$\nearrow$	$\frac{329}{16}$

Dựa vào BBT ta thấy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \in \left[\dfrac{496}{25}; \dfrac{329}{16}\right] \Rightarrow S = 25a + 16b = 825$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 2]$ và thỏa mãn $f(2) = 16$, $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^2 x \cdot f'(2x)\,\mathrm{d}x$.

A $I = 12$. B $I = 7$. C $I = 13$. D $I = 20$.

Lời giải.

• Đặt $t = 2x$. Ta có

$$I = \frac{1}{4}\int_0^2 tf'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left(tf(t)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{4}(32 - 4) = 7.$$

Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho số phức z thỏa mãn $|(z+2)i + 1| + |(\overline{z} - 2)i - 1| = 10$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính tổng $S = M + m$.

A $S = 9$. B $S = 8$. C $S = 2\sqrt{21}$. D $S = -2\sqrt{21}$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ với $x; y \in \mathbb{R}$, khi đó $\overline{z} = a - bi$

Xét $|(z+2)i+1| + |(\overline{z}-2)i-1| = 10 \Leftrightarrow |z+2-i| + |\overline{z}-2+i| = 10$.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi $M(z)$, $N(\overline{z})$, $A(-2;1)$, $B(2;-1)$, $C(2;1)$, khi đó $MC = NB$.

Khi đó ta được $MA + MC = 10$, quỹ tích điểm M là Elip với $\begin{cases} AC = 4 \\ 2a = 10 \end{cases} \Rightarrow (E): \dfrac{X^2}{25} + \dfrac{Y^2}{21} = 1$.

(phương trình Elip với hệ trục tọa độ IXY với $I(0;1)$ là trung điểm của đoạn AC)

Áp dụng công thức đổi trục tọa độ $\begin{cases} X = x \\ Y = y - 1 \end{cases}$ ta được $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{(y-1)^2}{21} = 1$.

Đặt $\begin{cases} a = 5\sin t \\ b = 1 + \sqrt{21}\cos t \end{cases}$ với $t \in [0; 2\pi]$, ta được $|z|^2 = OM^2 = a^2 + b^2$

$\Rightarrow |z|^2 = 25\sin^2 t + \left(1 + \sqrt{21}\cos t\right)^2 = -4\cos^2 t + 2\sqrt{21}\cos t + 26 = f(t)$.

Xét hàm số $f(t) = -4\cos^2 t + 2\sqrt{21}\cos t + 26$, đặt $\cos t = a \in [-1; 1]$,

Ta được hàm $f(a) = -4a^2 + 2\sqrt{21}a + 26$, $f'(a) = -8a + 2\sqrt{21} > 0 \Leftrightarrow a < \dfrac{2\sqrt{21}}{8}$

$\Rightarrow f(a)$ đồng biến trên $[-1; 1] \Rightarrow \begin{cases} \max f(a) = 1 + \sqrt{21} \quad \text{khi} \quad a = \cos t = 1 \\ \min f(a) = -1 + \sqrt{21} \quad \text{khi} \quad a = \cos t = -1 \end{cases}$.

Vậy $M + m = 2\sqrt{21}$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^4 - m$ có ba điểm cực trị đều thuộc các trục tọa độ.

A $m = 2$. B $m = 3$. C $m = 1$. D $m = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Xét hàm số có $y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m. \end{array}\right.$

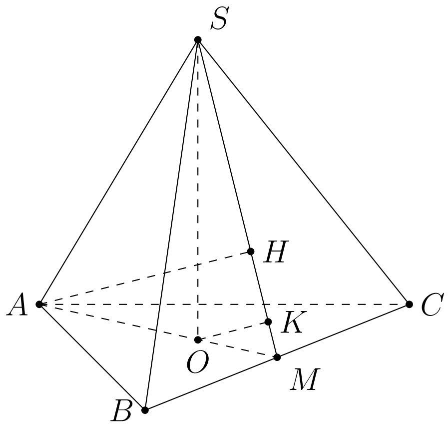
Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$, khi đó tọa độ ba điểm cực trị là $A(0; 2m^4 - m)$, $B(\sqrt{m}; 2m^4 - m^2 - m)$ và $C(-\sqrt{m}; 2m^4 - m^2 - m)$.

Yêu cầu bài toán thỏa mãn $\Leftrightarrow 2m^4 - m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right. \Rightarrow m = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 46.

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Gọi O là tâm của đáy ABC, d_1 là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) và d_2 là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC). Tính $\mathrm{d} = \mathrm{d}_1 + \mathrm{d}_2$. (tham khảo hình vẽ bên)



A $\mathrm{d} = \dfrac{4a\sqrt{22}}{33}$. B $\mathrm{d} = \dfrac{8a\sqrt{22}}{33}$.

C $\mathrm{d} = \dfrac{2a\sqrt{22}}{33}$. D $\mathrm{d} = \dfrac{4a\sqrt{2}}{33}$.

Lời giải.

O là tâm của đáy $ABC \Rightarrow \mathrm{d}_1 = 3\,\mathrm{d}_2 \Rightarrow \mathrm{d} = 4\,\mathrm{d}_2 = 4OK$.

Xét tam giác ABC đều cạnh a có tâm $O \Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $OM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Xét tam giác SAO vuông tại $O \Rightarrow SO^2 = SA^2 - AO^2 = 3a^2 - \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{8a^2}{3} \Rightarrow SO = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Xét ΔSOM vuông tại $O \Rightarrow \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{8}{99a^2} \Rightarrow OK = \dfrac{2a\sqrt{22}}{33} \Rightarrow \mathrm{d} = \dfrac{8a\sqrt{22}}{33}$.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Một người thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tằng bằng nửa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp (có diện tích là 12288 m^2). Tính diện tích của mặt trên cùng.

A 8 m^2. **B** 6 m^2. **C** 12 m^2. **D** 10 m^2.

Lời giải.

Diện tích bề mặt của mỗi tầng lập thành cấp số nhân với $u_1 = 12288$ và công bội $q = \dfrac{1}{2}$.

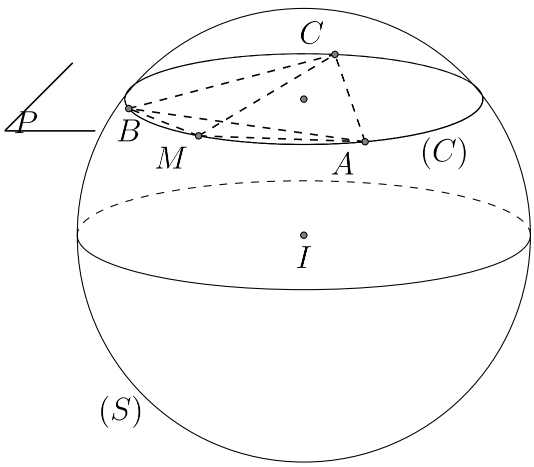
Khi đó diện tích của mặt trên cùng là $u_{12} = u_1.q^{11} = 6\ \mathrm{m}^2$.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A\,(3;-1;2)$, $B\,(1;1;2)$, $C\,(1;-1;4)$ và đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6z + 10 = 0$. Có bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho $T = MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất.

A 3. **B** 2. **C** 4. **D** 1.

Lời giải.



Dễ dàng tính được $AB = AC = BC = 2\sqrt{2} \Rightarrow \Delta ABC$ đều, đồng thời các điểm $A, B, C \in (P)$ và $(S) \Rightarrow \Delta ABC$ nội tiếp đường tròn (C).

Không mất tính tổng quát gọi điểm M thuộc cung nhỏ AB, khi đó $MA + MB + MC = 2MC$.

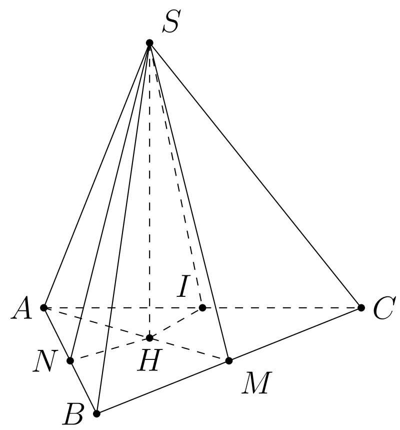
Suy ra $MA + MB + MC$ lớn nhất khi MC lớn nhất khi MC là đường kính $\Rightarrow$ có một điểm M thỏa mãn.

Do vai trò của A, B, C như nhau nên bài toán có 3 điểm M thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 49.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác ABC là tam giác đều cạnh a. Các mặt (SAB), (SAC), (SBC) lần lượt tạo với đáy các góc lần lượt là $30°$, $45°$, $60°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$, biết rằng hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC.



A $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8\left(4+\sqrt{3}\right)}$. **B** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}$.

C $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4\left(4+\sqrt{3}\right)}$. **D** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu từ S xuống đáy, hạ $HM \perp BC, HN \perp AB$ và $HI \perp AC$.

Đặt các đoạn $SH = h > 0$, ta có tam giác ABC đều cạnh $a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ta có $\begin{cases} HM \perp BC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow SM \perp BC \Rightarrow ((SBC),(ABC)) = \widehat{SMH} = 60°$.

Xét ΔSHM vuông tại H, ta có $\tan\widehat{SMH} = \dfrac{SH}{HM} \Rightarrow HM = \dfrac{h}{\sqrt{3}} \Rightarrow S_{\Delta BHC} = \dfrac{ah\sqrt{3}}{6}$.

Một cách tương tự ta có $S_{\Delta AHB} = \dfrac{ah\sqrt{3}}{2}$ và $S_{\Delta AHC} = \dfrac{ah}{2}$,

Khi đó $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AHB} + S_{\Delta AHC} + S_{\Delta BHC} \Rightarrow \dfrac{ah\sqrt{3}}{6} + \dfrac{ah\sqrt{3}}{2} + \dfrac{ah}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow h = \dfrac{3a}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}$.

Khi đó $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}h \cdot S_{ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8\left(4+\sqrt{3}\right)}$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn $f'(0) = 9$ và $9f''(x) + [f'(x) - x]^2 = 9$. Tính $T = f(1) - f(0)$.

A $T = 2 + 9\ln 2$. **B** $T = 9$. **C** $T = \dfrac{1}{2} + 9\ln 2$. **D** $T = 2 - 9\ln 2$.

Lời giải.

Ta có $9f''(x) + [f'(x) - x]^2 = 9 \Leftrightarrow [f'(x) - x]^2 = -9[f''(x) - 1] \Leftrightarrow \dfrac{f''(x) - 1}{[f'(x) - x]^2} = -\dfrac{1}{9}$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được $-\dfrac{1}{f'(x) - x} = -\dfrac{x}{9} + c$,

Do $f'(0) = 9 \Rightarrow -\dfrac{1}{9} = c \Rightarrow -\dfrac{1}{f'(x) - x} = -\dfrac{x}{9} - \dfrac{1}{9}$

$\Rightarrow f'(x) - x = \dfrac{9}{x+1} \Rightarrow f'(x) = x + \dfrac{9}{x+1}$, lấy tích phân 2 vế ta được

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x + \frac{9}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} + 9\ln|x+1|\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + 9\ln 2.$$

Chọn đáp án C □

— HẾT —

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. B	3. A	4. A	5. B	6. A	7. A	8. B	9. D	10. C
11. A	12. C	13. D	14. C	15. B	16. D	17. C	18. C	19. A	20. A
21. C	22. A	23. A	24. A	25. D	26. C	27. C	28. B	29. D	30. D
31. C	32. D	33. D	34. B	35. C	36. A	37. D	38. D	39. C	40. A
41. B	42. B	43. B	44. C	45. C	46. B	47. B	48. A	49. A	50. C

86 ĐỀ THI THỬ, SỞ ĐÀ NẴNG - MĐ 203 - 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{x-4}{2x+3}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right)$.
(B) Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty; \dfrac{3}{2}\right)$.
(C) Hàm số đồng biến trên $\left(-\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$.
(D) Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Có $y' = \dfrac{11}{(2x+3)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.

Vậy hàm số đồng biến trên từng khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{3}{2}\right)$ và $\left(-\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tọa độ điểm M biểu diễn cho số phức $z = 3 + 5i$.

(A) $M(3; -5)$.
(B) $M(-3; -5)$.
(C) $M(3; 5)$.
(D) $M(5; 3)$.

Lời giải.

Số phức $z = a + bi$ có điểm biểu diễn là $M(a; b)$. Vậy suy ra điểm M có tọa độ là $(3; 5)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y = 3\mathrm{e}^{-x} + x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = \ln 2$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho (H) quay quanh trục hoành được tính bằng công thức nào sau đây?

(A) $\pi^2 \displaystyle\int_0^{\ln 2} \left(3\mathrm{e}^{-x} + x\right)^2 \mathrm{d}x$.
(B) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \left|3e^{-x} + x\right| \mathrm{d}x$.
(C) $\pi \displaystyle\int_0^{\ln 2} \left(3\mathrm{e}^{-x} + x\right)^2 \mathrm{d}x$.
(D) $\pi \displaystyle\int_0^{\ln 2} \left|3e^{-x} + x\right| \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo lý thuyết, thể tích khối tròn xoay sinh ra là $V = \pi \displaystyle\int_0^{\ln 2} \left(3\mathrm{e}^{-x} + x\right)^2 \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - \dfrac{1}{x^2}$ là

(A) $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{1}{x} + C$.
(B) $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{1}{x} + C$.
(C) $\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{1}{x} + C$.
(D) $\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{1}{x} + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{1}{x} + C$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Cho hàm số $y = \dfrac{2}{x-5}$. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

(A) $y = -\dfrac{2}{5}$.
(B) $y = 2$.
(C) $y = 0$.
(D) $x = 5$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x-5} = 0$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x-5} = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Phương trình $\tan x = \tan \varphi$ (hằng số $\varphi \in \mathbb{R}$) có nghiệm là

A. $x = \varphi + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.
B. $x = \varphi + k2\pi$; $x = \pi - \varphi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
C. $x = \varphi + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
D. $x = \varphi + k2\pi$; $x = -\varphi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có $\tan x = \tan \varphi \Leftrightarrow x = \varphi + k\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Cho a, b là các số thực dương, $a \neq 1$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $\log_{a^\alpha} b = \log_a b^\alpha$.
B. $\log_{a^\alpha} b = \sqrt[\alpha]{\log_a b}$.
C. $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha} \log_a b$.
D. $\log_{a^\alpha} b = \log_a^\alpha b$.

Lời giải.

Ta có "$\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha} \log_a b$" là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Tích phân $I = \displaystyle\int_0^2 (x+2)^3 \, dx$ bằng

A. $I = 56$.
B. $I = 60$.
C. $I = 240$.
D. $I = 120$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_0^2 (x+2)^3 \, dx = \left.\dfrac{(x+2)^4}{4}\right|_0^2 = \dfrac{4^4 - 2^4}{4} = 60$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Cho hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$ có đồ thị (C). Điểm nào sau đây thuộc đồ thị (C)?

A. $A(1;0)$.
B. $D(2;13)$.
C. $C(-1;3)$.
D. $B(-2;-13)$.

Lời giải.

Lần lượt thay tọa độ các điểm vào biểu thức $y = x^4 - x^2 + 1$, ta nhận điểm $D(2;13)$.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(6;-3;-1)$ và $B(2;-1;7)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 42$.
B. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 21$.
C. $(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 21$.
D. $(x-8)^2 + (y+4)^2 + (z-6)^2 = 42$.

Lời giải.

Gọi I là tâm mặt cầu, suy ra I là trung điểm của AB, vậy tọa độ I là $(4;-2;3)$.

Mặt cầu nhận AB làm đường kính nên có bán kính là $R = \dfrac{AB}{2} = \sqrt{21}$.

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 21$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng $3a$ và cạnh bên bằng a là

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (B) $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. (C) $V = \dfrac{9a^3\sqrt{3}}{2}$. **(D)** $V = \dfrac{9a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Diện tích đáy của lăng trụ là $S = \dfrac{(3a)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{9a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích của khối lăng trụ là $V = h \cdot S = a \cdot \dfrac{9a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{9a^3\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Cho các số thực m, n và a là số thực dương. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

(A) $a^{m+n} = (a^m)^n$. (B) $a^{m+n} = \dfrac{a^m}{a^n}$. **(C)** $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$. (D) $a^{m+n} = a^m + n$.

Lời giải.

Ta có $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho hàm số $y = -\dfrac{4}{3}x^3 + 8x^2 + 1$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

(A) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $C(0;1)$.

(B) Điểm cực tiểu của hàm số là $B\left(4;\dfrac{131}{3}\right)$.

(C) Điểm cực đại của hàm số là $B\left(4;\dfrac{131}{3}\right)$.

(D) Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $C(0;1)$.

Lời giải.

Có $y' = -4x^2 + 16x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow -4x^2 + 16x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 4 \Rightarrow y = \dfrac{131}{3}. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên như hình vẽ bên.

Vậy $C(0;1)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\dfrac{131}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $d: \dfrac{x+2}{-5} = \dfrac{y+5}{8} = \dfrac{z-8}{-2}$.

(A) $\vec{u}_1 = (-5;-2;8)$. **(B)** $\vec{u}_2 = (5;-8;2)$. (C) $\vec{u}_3 = (8;-2;-5)$. (D) $\vec{u}_4 = (-2;-5;8)$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{v} = (-5;8;-2) = -(5;-8;2)$, nên đáp án là $\vec{u}_2 = (5;-8;2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (2;4;-2)$ và $\vec{b} = (3;-1;6)$. Tính giá trị của $P = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

(A) $P = -10$. (B) $P = -40$. (C) $P = 16$. (D) $P = -34$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 3 + 4 \times (-1) + (-2) \times 6 = -10$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Biết $\lim \dfrac{2an^3 - 6n^2 + 2}{n^3 + n} = 4$ với a là tham số thực. Khi đó, hãy tính giá trị của $M = a^4 - a$.

(A) $M = 10$. (B) $M = 6$. (C) $M = 12$. **(D)** $M = 14$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{2an^3 - 6n^2 + 2}{n^3 + n} = \lim \dfrac{n^3\left(2a - \frac{6}{n} + \frac{2}{n^3}\right)}{n^3\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim \dfrac{2a - \frac{6}{n} + \frac{2}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 2a$, suy ra $2a = 4 \Leftrightarrow a = 2$.

Vậy ta có $M = a^2 - a = 2^4 - 2 = 14$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(0; -1; 2)$, $B(-2; 0; 3)$ và $C(1; 2; 0)$ là

(A) $7x - 5y - 3z + 1 = 0$. (B) $7x - 5y - 3z + 11 = 0$.

(C) $5x + 3y + 7z - 17 = 0$. **(D)** $5x + 3y + 7z - 11 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; 1; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 3; -2)$.

Mặt phẳng (ABC) đi qua $A(0; -1; 2)$ và nhận véc-tơ $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-5; -3; -7)$ làm véc-tơ pháp tuyến, suy ra phương trình mặt phẳng (ABC) là

$$-5(x - 0) - 3(y + 1) - 7(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 5x + 3y + 7z - 11 = 0.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$, tìm giá trị lớn nhất M của hàm số trên khoảng $\left(-\dfrac{23}{10}; \dfrac{5}{4}\right)$.

(A) $M = -\dfrac{9801}{250}$. **(B)** $M = 1$. (C) $M = \dfrac{7}{32}$. (D) $M = 0$.

Lời giải.

Có $y' = 6x^2 - 6x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên như hình vẽ bên.

Vậy suy ra $M = 1$.

x	$-\frac{23}{10}$		0		1		$\frac{5}{4}$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\frac{9801}{250}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{7}{32}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Bất phương trình $2\log_9(x + 2) - \log_3(1 - x) \geq 1$ có tập nghiệm $S = [a; b)$. Tính $P = (4a + 1)^2 + b^3$.

(A) $P = -1$. **(B)** $P = 5$. (C) $P = 4$. (D) $P = 1$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x + 2 > 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < 1$. Với điều kiện trên, ta có

$$2\log_9(x + 2) - \log_3(1 - x) \geq 1 \Leftrightarrow \log_3(x + 2) - \log_3(1 - x) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_3 \frac{x+2}{1-x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x+2}{1-x} \geq 3 \Leftrightarrow x+2 \geq 3(1-x) \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}.$$

So với điều kiện,tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\frac{1}{4}; 1\right)$.

Vậy $a = \frac{1}{4}$, $b = 1$, suy ra $P = (4a+1)^2 + b^3 = 4 + 1 = 5$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Phương trình $27 \cdot 4^x - 30 \cdot 6^x + 8 \cdot 9^x = 0$ tương đương với phương trình nào sau đây?

A $x^2 + 3x + 2 = 0$. B $x^2 - 3x + 2 = 0$.
C $27x^2 - 30x + 8 = 0$. D $8x^2 - 30x + 27 = 0$.

Lời giải.

Ta có: $27 \cdot 4^x - 30 \cdot 6^x + 8 \cdot 9^x = 0 \Leftrightarrow 27 - 30 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 8 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{9}{4} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Mặt khác, phương trình "$x^2 - 3x + 2 = 0$" có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = 2$, nên tương đương với phương trình đã cho.

Chọn đáp án B □

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $AB = BC = 6$ cm và SB vuông góc với mặt phẳng (ABC). Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC là

A 6 cm. B $3\sqrt{2}$ cm. C $6\sqrt{2}$ cm. D 3 cm.

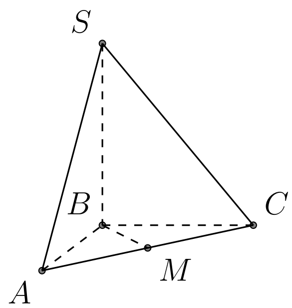
Lời giải.

Gọi M là trung điểm của AC.

Tam giác ABC vuông cân tại B nên $BM \perp AC$.

Mặt khác $BM \perp SB$ nên BM là đoạn vuông góc chung của SB và AC.

Suy ra $\mathrm{d}(AC, SB) = BM = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ cm.



Chọn đáp án B □

Câu 22. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy một góc $30°$. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{9}$. B $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$. C $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. D $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

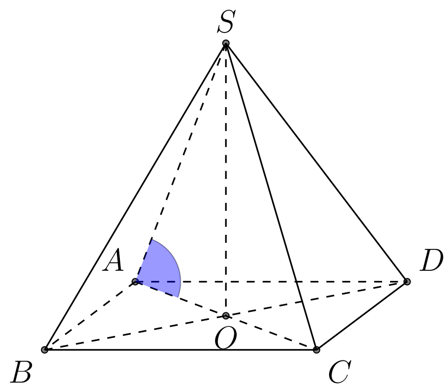
Gọi O là tâm của đáy, suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Vậy AO là hình chiếu của SA lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Suy ra góc giữa cạnh bên SA với đáy là góc $\widehat{SAO} = 30°$.

Có $AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, suy ra $SO = AO \tan 30° = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Vậy thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 3x - y - 3z + 2 = 0$ và $(Q)\colon -4x + y + 2z + 1 = 0$. Phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và song song với hai mặt phẳng (P), (Q) là

(A) $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{6}$. (B) $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-6} = \dfrac{z}{-1}$. (C) $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{6}$. **D** $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{6} = \dfrac{z}{-1}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_P = (3; -1; -3)$.

Mặt phẳng (Q) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q = (-4; 1; 2)$.

Đường thẳng d song song với cả (P) và (Q) nên có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (1; 6; -1)$.

Do d đi qua gốc tọa độ O nên phương trình của d là $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{6} = \dfrac{z}{-1}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_{\ln 2}^{1+\ln 2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2018$. Tính $I = \displaystyle\int\limits_{1}^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} f(\ln 2x)\,\mathrm{d}x$.

A $I = 2018$. (B) $I = 4036$. (C) $I = \dfrac{1009}{2}$. (D) $I = 1009$.

Lời giải.

Đặt $t = \ln 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$, với $x = 1 \Rightarrow t = \ln 2$, $x = \mathrm{e} \Rightarrow t = 1 + \ln 2$.

Ta có $I = \displaystyle\int\limits_{\ln 2}^{1+\ln 2} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\ln 2}^{1+\ln 2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2018$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Có bao nhiêu kết quả xảy ra khi bỏ phiếu bầu một bí thư, hai phó bí thư và một ủy viên từ 30 đoàn viên thanh niên của một lớp học?

(A) 164430. **B** 328860. (C) 657720. (D) 142506.

Lời giải.

- Có 30 cách chọn ra một bí thư.
- Có C_{29}^2 cách chọn ra hai phó bí thư.
- Có 27 cách chọn ra một ủy viên.

Vậy có $S = 30 \times \mathrm{C}_{29}^2 \times 27 = 328860$ kết quả xảy ra.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = 2x^2$, tiếp tuyến của (P) tại $M(1; 2)$ và trục Oy là

(A) $S = 1$. **B** $S = \dfrac{2}{3}$. (C) $S = \dfrac{1}{3}$. (D) $S = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Có $y' = 4x$, suy ra $y'(1) = 4$.

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại M là $y = y'(1)(x - 1) + 2 = 4(x - 1) + 2 = 4x - 2$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int\limits_0^1 \left|2x^2-4x+2\right|\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 2(x-1)^2\,\mathrm{d}x=\left.\frac{2(x-1)^3}{3}\right|_0^1=\frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 27. Cho hàm số $y=\frac{4}{3}x^3-2x^2+1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=-m$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

A. $\left[\frac{1}{3};1\right]$. B. $\left[-1;-\frac{1}{3}\right]$. C. $\left(\frac{1}{3};1\right)$. **D.** $\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

Ta có $y'=4x^2-4x$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $y=\frac{4}{3}x^3-2x^2+1$ là

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	$\frac{1}{3}$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt thì $\frac{1}{3}<-m<1 \Leftrightarrow -1<m<-\frac{1}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 28. Phương trình $z^2+z+3=0$ có hai nghiệm z_1, z_2 trên tập hợp số phức. Tính giá trị của biểu thức $P=z_1^2+z_2^2$.

A. $P=-5$. B. $P=-\frac{21}{2}$. C. $P=6$. D. $P=7$.

Lời giải.

Có $z^2+z+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{11}}{2}\\z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{11}}{2}.\end{array}\right.$

Vậy $P=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2=-5$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h=37$ cm, nếu cắt hình nón bởi mặt phẳng qua trục ta được một tam giác đều. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

A. $S_{xq}=761{,}807\ \mathrm{cm}^2$. **B.** $S_{xq}=2867{,}227\ \mathrm{cm}^2$.

C. $S_{xq}=1433{,}613\ \mathrm{cm}^2$. D. $S_{xq}=1612{,}815\ \mathrm{cm}^2$.

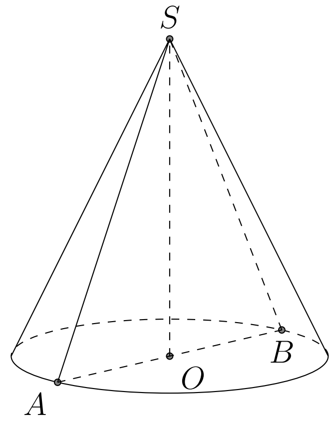
Lời giải.

Do thiết diện qua trục hình nón là một tam giác đều nên ta có

$$SO = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow h = \frac{2R\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow R = \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{37\sqrt{3}}{3}.$$

Độ dài đường sinh của hình nón là $\ell = \sqrt{h^2 + R^2} = \dfrac{74\sqrt{3}}{3}$.
Vậy diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_{xq} = \pi R\ell = \pi \cdot \frac{37\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{74\sqrt{3}}{3} \approx 2867{,}227 \text{ cm}^2.$$



Chọn đáp án B □

Câu 30. Cho hàm số $y = -x^3 + 2x^2 + 2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = x + 2$.

A. $y = x + \dfrac{68}{27}$. B. $y = x + 2$. C. $y = x + \dfrac{50}{27}$. D. $y = x - \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Tiếp tuyến Δ song song với đường thẳng $d\colon y = x + 2$ nên Δ có dạng $y = x + m$, $m \neq 2$.

Điều kiện tiếp xúc của Δ và (C) là $\begin{cases} -x^3 + 2x^2 + 2 = x + m & (1) \\ -3x^2 + 4x = 1. & (2) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$

- Với $x = 1$, $(1) \Leftrightarrow m = -x^3 + 2x^2 - x + 2 = 2$ (loại).
- Với $x = \dfrac{1}{3}$, $(1) \Leftrightarrow m = -x^3 + 2x^2 - x + 2 = \dfrac{50}{27}$ (nhận).

Vậy tiếp tuyến cần tìm là $y = x + \dfrac{50}{27}$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1 : \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+2}{-4}$, $d_2\colon \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P) : x + 2y + 3z - 7 = 0$. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P), cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x+7}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-6}{3}$. B. $\dfrac{x+5}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{3}$.

C. $\dfrac{x+4}{1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z+1}{3}$. D. $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+2}{3}$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm.

Gọi A là giao điểm của Δ với d_1, suy ra $A(2t_1 - 3; -t_1 - 2; -4t_1 - 2)$.

Gọi B là giao điểm của Δ với d_2, suy ra $B(3t_2 - 1; 2t_2 - 1; 3t_2 + 2)$.

Có $\overrightarrow{AB} = (3t_2 - 2t_1 + 2; 2t_2 + t_1 + 1; 3t_2 + 4t_1 + 4)$ và mặt phẳng (P) nhận $\vec{n} = (1; 2; 3)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Do Δ vuông góc với (P) nên $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\vec{n}$.

$$\Leftrightarrow \frac{3t_2 - 2t_1 + 2}{1} = \frac{2t_2 + t_1 + 1}{2} = \frac{3t_2 + 4t_1 + 4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t_1 - 4t_2 = 3 \\ 5t_1 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = -2. \end{cases}$$

Vậy ta suy ra $A(-5;-1;2)$ và $B(-7;-5;-4)$, và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$

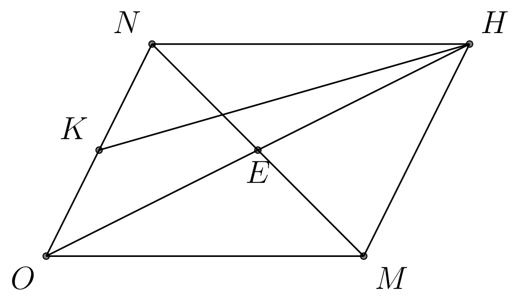
Chọn đáp án B □

Câu 32. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa $|z_1|=|z_2|=\sqrt{17}$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết $MN=3\sqrt{2}$, gọi H là đỉnh thứ tư của hình bình hành $OMHN$ và K là trung điểm của ON. Tính độ dài ℓ của đoạn thẳng KH.

A $\ell=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$. B $\ell=5\sqrt{2}$. C $\ell=\dfrac{3\sqrt{13}}{2}$. D $\ell=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi E là giao điểm của OH và MN.



$$\begin{aligned} OE^2 &= \frac{OM^2+ON^2}{2}-\frac{MN^2}{4}\\ &= 17-\frac{9}{2}=\frac{25}{2}\Rightarrow OH^2=4OE^2=50\\ HK^2 &= \frac{HN^2+HO^2}{2}-\frac{ON^2}{4}=\frac{OM^2+OH^2}{2}-\frac{ON^2}{4}\\ &= \frac{17+50}{2}-\frac{17}{4}=\frac{117}{4}\Rightarrow \ell=HK=\frac{3\sqrt{13}}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 33. Bốn số tạo thành một cấp số cộng có tổng bằng 32 và tổng các bình phương của chúng bằng 336. Tích của bốn số đó là

A 5760. B 15120. C 1920. D 1680.

Lời giải.

Gọi bốn số cần tìm là a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$. Từ giả thiết ta suy ra

$$\begin{cases} a+a+d+a+2d+a+3d=32\\ a^2+(a+d)^2+(a+2d)^2+(a+3d)^2=336 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2a=16-3d\\ 4a^2+12ad+14d^2=336 \end{cases}$$

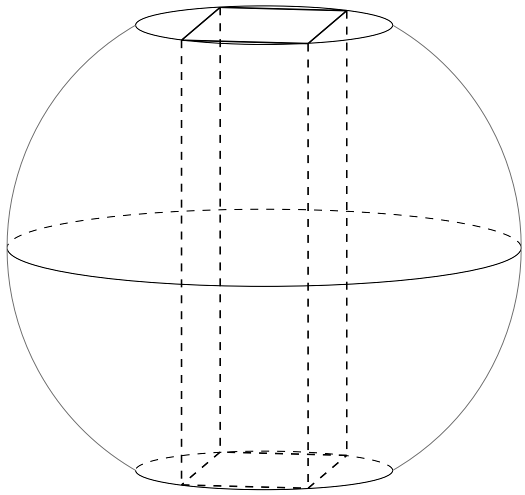
$$\Leftrightarrow\begin{cases} 2a=16-3d\\ (16-3d)^2+6d(16-3d)+14d^2=336 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l} d=4\\ d=-4\end{array}\right.\\ 2a=16-3d\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases} d=4\\ a=2\end{cases}\\ \begin{cases} d=-4\\ a=14\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy suy ra bốn số đó là 2, 6, 10, 14, nên tích của chúng là $P=1680$.

Chọn đáp án D □

Câu 34.

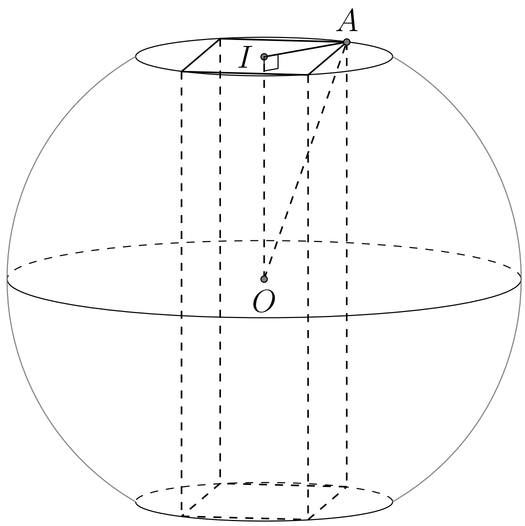
Có một khối cầu bằng gỗ bán kính $R = 10$ cm. Sau khi cưa bằng hai chỏm cầu có bán kính đáy bằng $\frac{R}{2}$ đối xứng nhau qua tâm khối cầu. Một người thợ mộc đục xuyên tâm khối cầu gỗ. Người thợ mộc đã đục bỏ đi phần hình hộp chữ nhật có trục của nó trùng với trục hình cầu và có hai mặt lần lượt nằm trên hai mặt phẳng chứa hai đáy của hai chỏm cầu; hai mặt này là hai hình vuông có đường chéo bằng R (tham khảo hình vẽ bên). Tính thể tích V của phần còn lại của khối cầu (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).



A $V = 3215{,}023$ cm^3. **B** $V = 3322{,}765$ cm^3.
C $V = 3268{,}894$ cm^3. **D** $V = 3161{,}152$ cm^3.

Lời giải.

Gọi O là tâm của khối cầu ban đầu, I là tâm của mặt đáy khối hộp.



Ta có chiều cao khối hộp là

$$h = 2OI = 2\sqrt{OA^2 - IA^2} = 10\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Thể tích của khối hộp chữ nhật là

$$V_{\text{hộp}} = h \cdot S_{\text{đáy}} = 10\sqrt{3} \cdot \frac{10 \cdot 10}{2} = 500\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

Thể tích của khối cầu ban đầu là

$$V_{\text{cầu}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 10^3 = \frac{4000\pi}{3} \text{ cm}^3.$$

Xét chỏm cầu trên được cắt ra, ta thấy đó là khối tròn xoay sinh ra khi xoay cung tròn $x^2 + y^2 = 100$, với $0 \le x \le 5$, $5\sqrt{3} \le y \le 10$, quanh trục Oy, nên ta suy ra thể tích của chỏm cầu trên là $V_{\text{chỏm cầu}} = \pi \int\limits_{5\sqrt{3}}^{10} \left(100 - y^2\right) \,\mathrm{d}y \approx 53{,}871$ cm^3. Vậy thể tích cần tìm là $V = V_{\text{cầu}} - V_{\text{hộp}} - 2V_{\text{chỏm cầu}} \approx 3215{,}023$ cm^3.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[4; 8]$ và $f(x) \neq 0$, $\forall x \in [4; 8]$. Biết rằng $\int\limits_4^8 \frac{[f'(x)]^2}{[f(x)]^4} \,\mathrm{d}x = 1$ và $f(4) = \frac{1}{4}$, $f(8) = \frac{1}{2}$. Tính giá trị của $f(6)$.

A $f(6) = \frac{5}{8}$. **B** $f(6) = \frac{2}{3}$. **C** $f(6) = \frac{3}{8}$. **D** $f(6) = \frac{1}{3}$.

Lời giải.

Xét $A=\int\limits_4^8 \dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}\,\mathrm{d}x$, đặt $t=f(x)\Rightarrow \mathrm{d}t=f'(x)\,\mathrm{d}x$, suy ra

$$A=\int\limits_{f(4)}^{f(8)}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=-\frac{1}{t}\Big|_{f(4)}^{f(8)}=-\frac{1}{f(8)}+\frac{1}{f(4)}=2.$$

Ta có $\int\limits_4^8\left[\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}-\dfrac{1}{2}\right]^2\mathrm{d}x=\int\limits_4^8\dfrac{[f'(x)]^2}{[f(x)]^4}\mathrm{d}x-\int\limits_4^8\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}\mathrm{d}x+\int\limits_4^8\dfrac{1}{4}\mathrm{d}x=1-2+1=0.$

Mặt khác, do $\left[\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}-\dfrac{1}{2}\right]^2\geq 0$ nên suy ra $\left[\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}-\dfrac{1}{2}\right]^2=0\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \int\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x\Leftrightarrow -\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{x}{2}+C.$

Do $f(4)=\dfrac{1}{4}\Rightarrow C=-6$. Vậy $f(x)=-\dfrac{1}{\frac{x}{2}-6}=\dfrac{2}{12-x}$, suy ra $f(6)=\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=60^\circ$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, SA, SD và P là giao điểm của (HMN) với CD. Khoảng cách từ trung điểm K của đoạn thẳng SP đến mặt phẳng (HMN) bằng

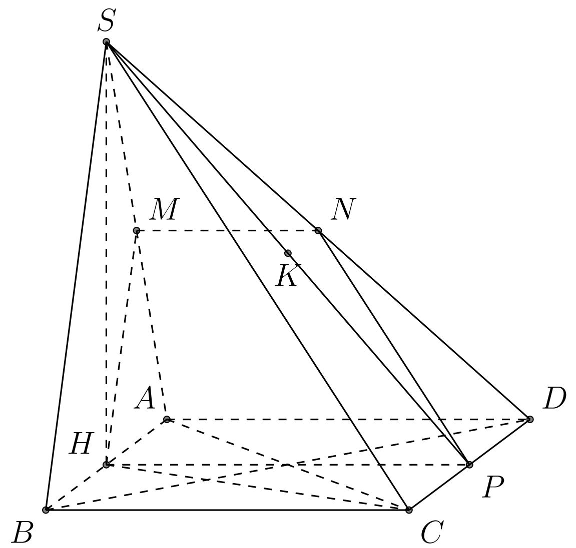
A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{30}$. B. $\dfrac{a\sqrt{15}}{20}$. C. $\dfrac{a\sqrt{15}}{15}$. D. $\dfrac{a\sqrt{15}}{10}$.

Lời giải.

Xét hình chóp $S.ABCD$ trong hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó ta có

$H(0;0;0)$, $A\left(-\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $B\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$,

$S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $D\left(-a;\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$.



Có $MN \parallel AD$ nên suy ra P là trung điểm của CD.

Theo công thức trung điểm, ta suy ra

$M\left(-\dfrac{a}{4};0;\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$, $N\left(-\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$,

$P\left(-\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $K\left(-\dfrac{a}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$

Ta có $\overrightarrow{MN}=\left(-\dfrac{a}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{4};0\right)$, $\overrightarrow{HM}=\left(-\dfrac{a}{4};0;\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (HMN) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{HM}\right]=\left(\dfrac{3a^2}{16};\dfrac{a^2\sqrt{3}}{16};\dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (HMN) là

$$\frac{3a^2}{16}(x-0)+\frac{a^2\sqrt{3}}{16}(y-0)+\frac{a^2\sqrt{3}}{16}(z-0)=0\Leftrightarrow\sqrt{3}x+y+z=0.$$

Vậy khoảng cách cần tìm là $\mathrm{d}\left[K,(HMN)\right]=\dfrac{\left|-\dfrac{a\sqrt{3}}{4}+\dfrac{a\sqrt{3}}{4}+\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right|}{\sqrt{3+1+1}}=\dfrac{a\sqrt{15}}{20}$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho tích phân $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos 2x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x=a\pi+b$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $P=1-a^3-b^2$.

A $P=9$. B $P=-29$. C $P=-7$. D $P=-27$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos 2x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{2\cos^2 x-1}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(-2\cos x-2+\frac{1}{1-\cos x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(-2\cos x-2+\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right)\mathrm{d}x\\ &= \left(-2x-2\sin x-\cot\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=3-\pi.\end{aligned}$$

Vậy ta có $a=-1$, $b=3$, nên suy ra $P=1-a^3-b^2=1+1-9=-7$.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{1-x^2}+2\sqrt[3]{(1-x^2)^2}$. Hỏi điểm $A(M;m)$ thuộc đường tròn nào sau đây?

A $x^2+(y-1)^2=4$. B $(x-3)^2+(y+1)^2=5$.
C $(x-4)^2+(y-1)^2=4$. D $(x-3)^2+(y-2)^2=4$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt[6]{1-x^2}$, với $-1\le x\le 1\Rightarrow 0\le t\le 1$.

Có $y=f(t)=t^3+2t^4$, $f'(t)=3t^2+8t^3\ge 0$, $\forall t\in[0;1]$ nên $f(t)$ đồng biến trên $[0;1]$.

Vậy $\max y=\max\limits_{t\in[0;1]}f(t)=f(1)=3$ và $\min y=\min\limits_{t\in[0;1]}f(t)=f(0)=0$.

Vậy $A(3;0)$, thay tọa độ A vào từng đáp án, ta nhận đường tròn $(x-3)^2+(y-2)^2=4$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Giá trị của $A=\dfrac{1}{1!2018!}+\dfrac{1}{2!2017!}+\dfrac{1}{3!2016!}+\cdots+\dfrac{1}{1008!1011!}+\dfrac{1}{1009!1010!}$ bằng

A $\dfrac{2^{2017}-1}{2018!}$. B $\dfrac{2^{2017}}{2018!}$. C $\dfrac{2^{2018}}{2019!}$. D $\dfrac{2^{2018}-1}{2019!}$.

Lời giải.

Nhân hai vế của biểu thức với 2019!, ta được

$$\begin{aligned}A\cdot 2019! &= \frac{2019!}{1!2018!}+\frac{2019!}{2!2017!}+\frac{2019!}{3!2016!}+\cdots+\frac{2019!}{1008!1011!}+\frac{2019!}{1009!1010!}\\ &= \frac{2019!}{1!(2019-1)!}+\frac{2019!}{2!(2019-2)!}+\cdots+\frac{2019!}{1008!(2019-1008)!}+\frac{2019!}{1009!(2019-1009)!}\\ &= \mathrm{C}_{2019}^{1}+\mathrm{C}_{2019}^{2}+\mathrm{C}_{2019}^{3}+\cdots+\mathrm{C}_{2019}^{1009}=\mathrm{C}_{2019}^{2018}+\mathrm{C}_{2019}^{2017}+\mathrm{C}_{2019}^{2016}+\cdots+\mathrm{C}_{2019}^{1010}\end{aligned}$$

Xét $2^{2019} = \mathrm{C}_{2019}^0 + \mathrm{C}_{2019}^1 + \mathrm{C}_{2019}^2 + \mathrm{C}_{2019}^3 + \cdots + \mathrm{C}_{2019}^{2018} + \mathrm{C}_{2019}^{2019}$

$$= \mathrm{C}_{2019}^0 + 2A \cdot 2019! + \mathrm{C}_{2019}^{2019} = 2 + 2A \cdot 2019! \Rightarrow A = \frac{2^{2018}-1}{2019!}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;-2;3)$, $B(-4;0;-1)$ và $C(1;1;-3)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, trọng tâm G của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) là

A $5x + y - 2z + 3 = 0$. **B** $2y + z - 7 = 0$.

C $5x + y - 2z - 1 = 0$. **D** $2y + z + 1 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-5;2;-4)$, $\overrightarrow{AC} = (0;3;-6)$ và G là trọng tâm của tam giác ABC nên $G\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

Có $\overrightarrow{AG} = \left(-\frac{5}{3};\frac{5}{3};-\frac{10}{3}\right)$ và véc-tơ pháp tuyến của (ABC) là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = (0;-30;-15)$.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_P = \left[\overrightarrow{AG},\vec{n}_P\right] = (-125;-25;50)$ nên phương trình mặt phẳng (P) là $-125(x-1) - 25(y+2) + 50(z-3) = 0 \Leftrightarrow 5x + y - 2z + 3 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 1\right|$ trên $\left(-\frac{8}{9};3\right)$. Biết $M = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$. Tính $S = a + b^3$.

A $S = 32$. **B** $S = 128$. **C** $S = 3$. **D** $S = 2$.

Lời giải.

Xét $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 1$, $f'(x) = 2x^2 - 4x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như hình vẽ

x	$-\frac{8}{9}$		0		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{2293}{2187}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{5}{3}$	$\nearrow$	1

Từ bảng biến thiên, trên $\left(-\frac{8}{9};3\right)$ ta có $\min f(x) = -\frac{5}{3}$ và $\max f(x) = 1$.

Nên $M = \max\left\{\left|-\frac{5}{3}\right|, |1|\right\} = \frac{5}{3}$, vậy $a = 5$, $b = 3$, suy ra $S = 5 + 3^3 = 32$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Từ 15 học sinh gồm 6 học sinh giỏi, 5 học sinh khá, 4 học sinh trung bình, giáo viên muốn thành lập 5 nhóm làm 5 bài tập lớn khác nhau, mỗi nhóm 3 học sinh. Tính xác suất để nhóm nào cũng có học sinh giỏi và học sinh khá.

A $\frac{108}{7007}$. **B** $\frac{216}{7007}$. **C** $\frac{216}{35035}$. **D** $\frac{72}{7007}$.

Lời giải.

Số cách lập 5 nhóm để làm 5 bài tập lớn là $|\Omega| = \mathrm{C}_{15}^3 \cdot \mathrm{C}_{12}^3 \cdot \mathrm{C}_9^3 \cdot \mathrm{C}_6^3 \cdot \mathrm{C}_3^3$.
Do mỗi nhóm đều có học sinh khá và giỏi nên có một nhóm có hai học sinh giỏi và một học sinh khá, còn các nhóm còn lại thì mỗi nhóm có một học sinh khá, một học sinh giỏi và một học sinh trung bình.

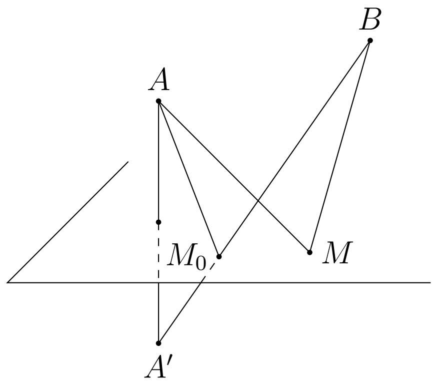
- Có C_6^2 cách chọn hai học sinh giỏi vào nhóm khá-giỏi.
- Có C_5^1 cách chọn một học sinh khá vào nhóm khá-giỏi.
- Bốn học sinh giỏi còn lại chia đều vào bốn nhóm còn lại nên có 4! cách.
- Bốn học sinh khá còn lại chia đều vào bốn nhóm còn lại nên có 4! cách.
- Bốn học sinh trung bình chia đều vào bốn nhóm còn lại nên có 4! cách.

Vậy có $\mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{C}_5^1 \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4!$ cách chia thỏa bài toán.
Xác suất để bài toán thỏa mãn là $\mathrm{P} = \dfrac{\mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{C}_5^1 \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4!}{\mathrm{C}_{15}^3 \cdot \mathrm{C}_{12}^3 \cdot \mathrm{C}_9^3 \cdot \mathrm{C}_6^3 \cdot \mathrm{C}_3^3} = \dfrac{216}{35035}$.
Chọn đáp án C □

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;7;6)$ và $B(2;4;3)$. Trên mặt phẳng (Oxy), lấy điểm $M(a;b;c)$ sao cho $MA + MB$ bé nhất. Tính $P = a^2 + b^3 - c^4$.

A $P = 134$. B $P = -122$. C $P = -204$. D $P = 52$.

Lời giải.



Dễ thấy A và B nằm cùng phía với mặt phẳng (Oxy).
Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (Oxy).
Ta có: $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$, dấu bằng xảy ra khi $M \equiv M_0$ là giao điểm của $A'B$ với (Oxy).
Có $A(5;7;6)$, suy ra $A'(5;7;-6)$ và $\overrightarrow{A'B} = (3;3;-9)$ nên phương trình đường thẳng $A'B$: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-3}{-9}$.

Điểm $M_0 = A'B \cap (Oxy)$ nên là nghiệm của hệ $\begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-3}{-9} \end{cases} \Rightarrow M \equiv M_0(3;5;0)$.

Từ đó suy ra $P = 3^2 + 5^3 - 0^4 = 134$.
Chọn đáp án A □

Câu 44. Phương trình $\cos x - \cos 2x - \cos 3x + 1 = 0$ có mấy nghiệm thuộc nửa khoảng $[-\pi; 0)$?

A 3. B 1. C 4. D 2.

Lời giải.

Ta có: $\cos x - \cos 2x - \cos 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 2\sin 2x \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\left(\sin x + \sin 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin 2x = \sin(-x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = k\dfrac{2\pi}{3} \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Xét trên nửa khoảng $[-\pi; 0)$, phương trình có nghiệm là $x = -\pi$, $x = -\dfrac{2\pi}{3}$.
Chọn đáp án D □

Câu 45. Cho a, b, $c \in \mathbb{R}$ sao cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực trị tại $x = 3$ đồng thời có $y(0) = 3$ và $y(3) = 3$. Hỏi trong không gian $Oxyz$, điểm $M(a; b; c)$ nằm trong mặt cầu nào sau đây?

A. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+5)^2 = 130$.
B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 40$.
C. $x^2 + y^2 + (z+5)^2 = 90$.
D. $(x+5)^2 + (y-7)^2 + (z+3)^2 = 42$.

Lời giải.

Có $y' = 3x^2 + 2ax + b$. Do hàm số đạt cực trị tại $x = 3$ nên $y'(3) = 0 \Leftrightarrow 27 + 6a + b = 0$.

Mặt khác ta có $\begin{cases} y(0) = 3 \\ y(3) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ 27 + 9a + 2b + c = 3 \end{cases}$.

Vậy ta có $\begin{cases} 6a + b = -27 \\ 9a + 3b = -27 \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 9 \\ c = 3. \end{cases}$

Ta suy ra $M(-6; 9; 3)$. Lần lượt tính khoảng cách từ M đến tâm các mặt cầu, ta nhận đáp án $(x+5)^2 + (y-7)^2 + (z+3)^2 = 42$.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Giải phương trình $\log_3\left(x^4 - x^3 + 50x^2 - 60x + 20\right) = 3\log_{27}\left(13x^3 - 11x^2 + 22x - 2\right)$ ta được bốn nghiệm a, b, c, d với $a < b < c < d$. Tính $P = a^2 + c^2$.

A. $P = 32$.
B. $P = 42$.
C. $P = 22$.
D. $P = 72$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x^4 - x^3 + 50x^2 - 60x + 20 > 0 \\ 13x^3 - 11x^2 + 22x - 2 > 0. \end{cases}$ $(*)$

Với điều kiện trên, ta có

$$\begin{aligned} & \log_3\left(x^4 - x^3 + 50x^2 - 60x + 20\right) = 3\log_{27}\left(13x^3 - 11x^2 + 22x - 2\right) \\ \Leftrightarrow\ & \log_3\left(x^4 - x^3 + 50x^2 - 60x + 20\right) = \log_3\left(13x^3 - 11x^2 + 22x - 2\right) \\ \Leftrightarrow\ & x^4 - x^3 + 50x^2 - 60x + 20 = 13x^3 - 11x^2 + 22x - 2 \\ \Leftrightarrow\ & x^4 - 14x^3 + 61x^2 - 82x + 22 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 6x + 2\right)\left(x^2 - 8x + 11\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & x^2 - 6x + 2 = 0 \\ & x^2 - 8x + 11 = 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & x = 3 + \sqrt{7} \\ & x = 3 - \sqrt{7} \\ & x = 4 + \sqrt{5} \\ & x = 4 - \sqrt{5}. \end{aligned}\right.$$

So với điều kiện $(*)$, ta nhận cả bốn nghiệm trên, và suy ra $\begin{cases} a = 3 - \sqrt{7} \\ c = 3 + \sqrt{7}. \end{cases}$

Vậy ta có $P = \left(3 + \sqrt{7}\right)^2 + \left(3 - \sqrt{7}\right)^2 = 32$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{5}$. Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{21}}{21}$.
B. $\dfrac{\sqrt{21}}{12}$.
C. $\dfrac{\sqrt{21}}{6}$.
D. $\dfrac{\sqrt{21}}{21}$.

Lời giải.

Xét hình chóp $S.ABCD$ trong hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó ta có

$A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;2a;0)$,

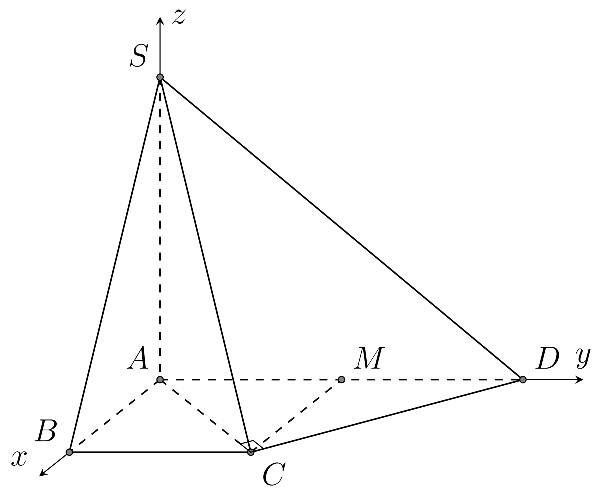
$S\left(0;0;a\sqrt{5}\right)$, $M(0;a;0)$, $C(a;a;0)$

Ta có $\overrightarrow{BC}=(0;a;0)$, $\overrightarrow{SB}=\left(a;0;-a\sqrt{5}\right)$

$\Rightarrow \vec{n}_{(SBC)}=\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{SB}\right]=\left(-a^2\sqrt{5};0;-a^2\right)$.

Ta có $\overrightarrow{CD}=(-a;a;0)$, $\overrightarrow{SC}=\left(a;a;-a\sqrt{5}\right)$

$\Rightarrow \vec{n}_{(SCD)}=\left[\overrightarrow{CD},\overrightarrow{SC}\right]=\left(-a^2\sqrt{5};-a^2\sqrt{5};-2a^2\right)$.



$$\text{Ta có } \cos\left[(SBC),(SCD)\right]=\frac{\left|\vec{n}_{(SBC)}\cdot\vec{n}_{(SCD)}\right|}{\left|\vec{n}_{(SBC)}\right|\cdot\left|\vec{n}_{(SCD)}\right|}=\frac{\left|5a^4+2a^4\right|}{a^2\sqrt{6}\cdot a^2\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{21}}{6}.$$

Chọn đáp án C ☐

Câu 48. Gọi $S=\left(-\infty;\dfrac{a}{b}\right]$, với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}^*$, là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{2x^2+mx+1}=x+3$ có hai nghiệm phân biệt. Tính $B=a^2-b^3$.

A $B=334$. **B** $B=-440$. **C** $B=1018$. **D** $B=8$.

Lời giải.

$$\text{Có } \sqrt{2x^2+mx+1}=x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -3\\ 2x^2+mx+1=x^2+6x+9\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -3\\ m=\dfrac{-x^2+6x+8}{x}.\end{cases} \text{(vì } x=0 \text{ không là nghiệm)}$$

Xét $f(x)=\dfrac{-x^2+6x+8}{x}$, $f'(x)=\dfrac{-x^2-8}{x^2}<0$, $\forall x\geq -3$.

Ta có bảng biến thiên như hình vẽ bên.

x	-3		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$\frac{19}{3}$ ↘	$-\infty$	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $m\leq\dfrac{19}{3}$.

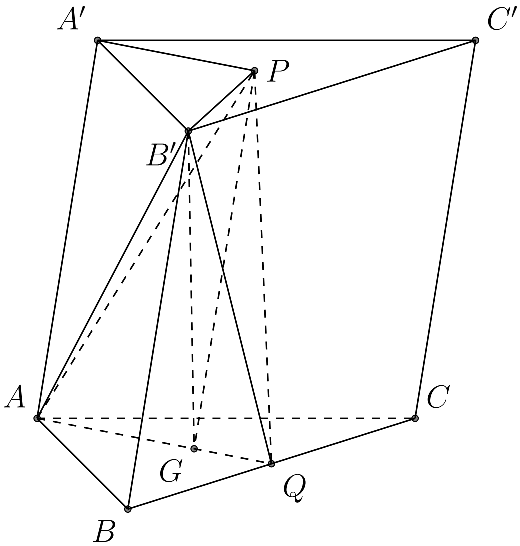
Vậy $a=19$ và $b=3$, nên suy ra $B=a^2-b^3=334$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 49. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi P là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$ và Q là trung điểm BC. Tính tỉ số thể tích giữa hai khối tứ diện $B'PAQ$ và $A'ABC$.

A $\dfrac{1}{2}$. **B** $\dfrac{2}{3}$. **C** $\dfrac{3}{4}$. **D** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.
Gọi h là chiều cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

$$\begin{aligned} V_{A'.ABC} &= \frac{1}{3}\cdot \mathrm{d}(A',(ABC))\cdot S_{ABC} \\ &= \frac{1}{3}\cdot h\cdot S_{ABC} = \frac{1}{3}V_{\text{lăng trụ}}. \\ V_{AB'PQ} &= \frac{3}{2}V_{AB'PG} = \frac{3}{2}V_{A.A'B'P} \\ &= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot \mathrm{d}(A,(A'B'P))\cdot S_{A'B'P} \\ &= \frac{1}{2}\cdot h\cdot \frac{1}{3}S_{A'B'C'} = \frac{1}{6}V_{\text{lăng trụ}}. \end{aligned}$$

Vậy ta suy ra $\dfrac{V_{B'PAQ}}{V_{A'ABC}} = \dfrac{\frac{1}{6}V_{\text{lăng trụ}}}{\frac{1}{3}V_{\text{lăng trụ}}} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Trên tập hợp số phức, cho phương trình $z^2+bz+c=0$ với $b, c\in\mathbb{R}$. Biết rằng hai nghiệm của phương trình có dạng $w+3$ và $3w-8i+13$ với w là một số phức. Tính $S=b^2-c^3$.

A $S=-496$. **B** $S=0$. **C** $S=-26$. **D** $S=8$.

Lời giải.

Gọi $z_1 = w+3 = m+ni$ và $z_2 = 3w-8i+13 = m-ni$, với m, $n\in\mathbb{R}$ là hai nghiệm phức của phương trình.

Vậy ta có $w = m-3+ni = \dfrac{m-13}{3}+\dfrac{8-n}{3}i \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{m-13}{3} = m-3 \\ \dfrac{8-n}{3} = n\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ n=2.\end{cases}$

Mặt khác ta có $\begin{cases} z_1+z_2 = -b = 2m \\ z_1z_2 = c = m^2+n^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4 \\ c=8\end{cases}$, vậy ta suy ra $S=b^2-c^3=-496$.

Chọn đáp án A □

——— HẾT ———

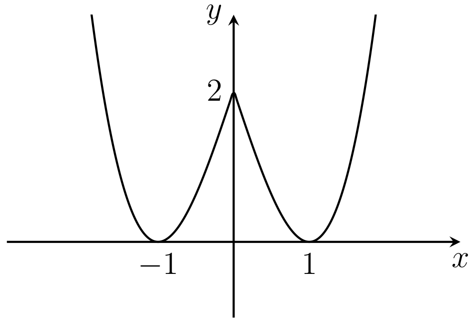
ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. C	3. C	4. B	5. C	6. C	7. C	8. B	9. B	10. C
11. D	12. C	13. A	14. B	15. A	16. D	17. D	18. B	19. B	20. B
21. B	22. B	23. D	24. A	25. B	26. B	27. D	28. A	29. B	30. C
31. B	32. C	33. D	34. A	35. D	36. B	37. C	38. D	39. D	40. A
41. A	42. C	43. A	44. D	45. D	46. A	47. C	48. A	49. A	50. A

87 ĐỀ THI THỬ TOÁN HỌC TUỔI TRẺ LẦN 8, 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Đồ thị hình dưới là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



(A) $y = x^4 - 2x^2 + 2$.
(B) $y = 2(x^2 - 1)^2$.
(C) $y = |x^3| - 3|x| + 2$.
(D) $y = x^2 - 2|x|^2 + 2$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy đây là đồ thị của hàm số $y = |x^3| - 3|x| + 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Cho hai mặt phẳng phân biệt α và β và đường thẳng a. Xét các mệnh đề sau đây

I) $\begin{cases} \alpha \perp a \\ \beta \perp a \end{cases} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$;

III) $\begin{cases} a \perp \beta \\ \alpha \perp \beta \end{cases} \Rightarrow a \parallel \alpha$;

II) $\begin{cases} \alpha \parallel a \\ \beta \parallel a \end{cases} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$;

IV) $\begin{cases} \alpha \parallel \beta \\ \alpha \perp a \end{cases} \Rightarrow a \perp \beta$.

Hỏi trong bốn mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề **đúng**?

(A) 1.
(B) 2.
(C) 3.
(D) 4.

Lời giải.

Mệnh đề I đúng.

Mệnh đề II sai vì α và β có thể cắt nhau.

Mệnh đề III sai a có thể thuộc α.

Mệnh đề IV đúng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Cho hai số thực a, b khác 0 và hàm số $y = \ln(2018 + ax) + \ln(2018 + bx)$. Tính $P = ab$, biết $y'(1) = 1$.

(A) $P = 1$.
(B) $P = 2018$.
(C) $P = \dfrac{1}{2018}$.
(D) $P = 2018^2$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{a}{2018 + ax} + \dfrac{b}{2018 + bx} \Rightarrow y'(1) = \dfrac{a}{2018 + a} + \dfrac{b}{2018 + b} = 1 \Rightarrow ab = 2018^2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Mặt phẳng (xOy) cắt mặt cầu (S) theo một thiết diện là đường tròn có phương trình nào sau đây?

(A) $(x-1)^2+(y-2)^2=16$.

(B) $\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=16\\ z=0\end{cases}$.

(C) $\begin{cases}x^2+y^2-2x-4y=11\\ z=0\end{cases}$.

(D) $\begin{cases}x^2+y^2-2x-4y=16\\ z=0\end{cases}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (xOy) là mặt phẳng $z=0$ cho nên phương trình của đường tròn là

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=16\\ z=0\end{cases}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $y=4\cos^4 x-3\cos^2 x$. $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

(A) $F(x)=\dfrac{\cos 4x}{8}+\dfrac{\cos 2x}{4}+C$.

(B) $F(x)=\sin^3 x\cos x+C$.

(C) $F(x)=-\sin x\cos^3 x+C$.

(D) $F(x)=\dfrac{\sin 4x}{8}+\dfrac{\sin 2x}{4}+C$.

Lời giải.

Ta có $4\cos^4 x-3\cos^2 x=\dfrac{\cos 4x}{2}+2\cos 2x+\dfrac{3}{2}-\dfrac{3(\cos 2x+1)}{2}=\dfrac{\cos 4x}{2}+\dfrac{\cos 2x}{2}$.

$F(x)=\displaystyle\int\left(\dfrac{\cos 4x}{2}+\dfrac{\cos 2x}{2}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{\sin 4x}{8}+\dfrac{\sin 2x}{4}+C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Tính số phức $z=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2018}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2018}$ có kết quả là

(A) 2. **(B)** -2. (C) $2i$. (D) $1+i$.

Lời giải.

$z=i^{2018}+(-i)^{2018}=-2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một thì ba giao tuyến của chúng sẽ có bao nhiêu vị trí tương đối?

(A) 1. **(B)** 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một thì ba giao tuyến song song hoặc đồng quy.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Cho $S_1=\left(2+\sqrt{3}\right)^{2^2+4^2+\cdot+2018^2}$ và $S_2=\left(2-\sqrt{3}\right)^{1^2+3^2+\cdot+2017^2}$. Kết quả của $\log_{26+15\sqrt{3}}(S_1S_2)$ bằng

(A) 679057. (B) 579067. (C) 679067. (D) 470071.

Lời giải.

Ta có $(2k)^2-(2k-1)^2=4k-1$ suy ra

$$S_1S_2=\left(2+\sqrt{3}\right)^{2^2-1^2+4^2-3^2+\cdot+2018^2-2017^2}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{4\cdot 1-1+4\cdot 2-1+\cdots+4\cdot 1009-1}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{2037171}$$

Vậy $\log_{26+15\sqrt{3}}\left(S_1S_2\right)=\dfrac{1}{3}\log_{2+\sqrt{3}}\left(2+\sqrt{3}\right)^{2037171}=679057.$

Chọn đáp án A □

Câu 9. Cho hình nón có đường sinh gấp 3 lần bán kính của đáy thì tỉ số k giữa đường cao và đường sinh của nó là

A $k=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **B** $k=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C** $k=\dfrac{1}{3}$. **D** $k=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{8r^2}=2\sqrt{2}r$, suy ra $k=\dfrac{h}{l}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Xét các giới hạn sau

I. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|}=1$; III. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|}=-1$;

II. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|}=-1$; IV. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|}=1$;

Kết quả nào sau đây đúng?

A I và III. **B** II và III. **C** II và IV. **D** I và IV.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)(x-2)}{1-x}=1.$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}=-1.$

Chọn đáp án A □

Câu 11. Cho $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $I\in(-1;3)$. **B** $I\in(-2;0)$. **C** $I\in(-7;-5)$. **D** $I\in[3;8]$.

Lời giải.

$I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{dx}{2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{1}{2}\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{2}.$

Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $z_1,z_2\neq 0$ và $z_2^2-2z_1z_2+2z_1^2=0$. Tính $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|$.

A $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|=\sqrt{3}$. **B** $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|=2\sqrt{2}$. **C** $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. **D** $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|=\sqrt{2}$.

Lời giải.

$z_2^2-2z_1z_2+2z_1^2=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^2-2\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)+2=0\Leftrightarrow\dfrac{z_2}{z_1}=1\pm i\Rightarrow\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|=\sqrt{2}.$

Chọn đáp án D □

Câu 13. Để giải phương trình $2^x(3x^2-2)=2x$ bạn Việt tiến hành giải bốn bước sau:
Bước 1. Ta nhận thấy phương trình không có nghiệm $x=0$ nên phương trình tương đương $\dfrac{3x^2-2}{2x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.
Bước 2. Ta nhận thấy phương trình có nghiệm $x=1$.
Bước 3. Ta có vế phải $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ (vì cơ số $\dfrac{1}{2}<1$); vế trái $y=\dfrac{3x^2-2}{2x}$ có $y'=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{x^2}>0, \forall x\neq 0$, nên vế trái là hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.
Bước 4. Do đó phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.
Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Bạn Việt giải hoàn toàn đúng.
B. Bạn Việt giải sai từ bước 2.
C. Bạn Việt giải sai từ bước 3.
D. Bạn Việt giải sai từ bước 4.

Lời giải.
Bạn Việt giải sai từ bước 4 vì hàm số $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=\dfrac{3x^2-2}{2x}$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$ không khẳng định được phương trình $\dfrac{3x^2-2}{2x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ có nghiệm duy nhất.
Chọn đáp án D □

Câu 14. Có bao nhiêu số thực a để $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{a+x^2}\,\mathrm{d}x=1$?

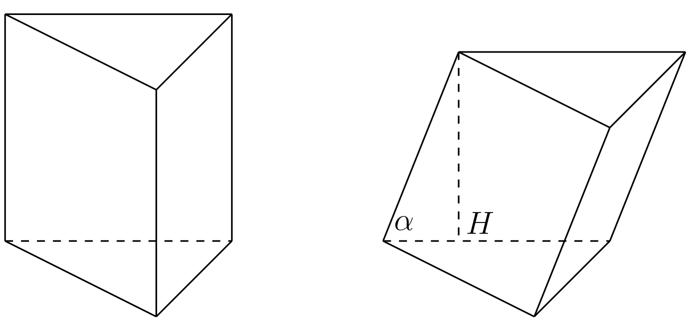
A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.

Lời giải.
$a+x^2\neq 0$ với mọi $x\in[0;1] \Rightarrow a>0$ hoặc $a<-1$.

$$\int_0^1 \frac{x}{a+x^2}\,\mathrm{d}x=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|a+x^2\right|\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{a+1}{a}\right|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2-1} \\ a=-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2+1}\ \text{(loại)}\end{array}\right.$$

Chọn đáp án B □

Câu 15. Cho một hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều. Người ta ấn (đẩy) lăng trụ đó trở thành một lăng trụ xiên (*vẫn giữ nguyên đáy và cạnh bên như hình vẽ*) để thể tích giảm đi một nửa lúc ban đầu. Hỏi cạnh bên của lăng trụ xiên lúc này tạo với đáy góc α bằng bao nhiêu?



(A) 60°. **B** 30°. (C) 45°. (D) 40°.

Lời giải.

Gọi cạnh bên của khối lăng trụ đứng là h, thể tích của khối lăng trụ xiên bằng một nửa thể tích khối lăng trụ đứng cho nên chiều cao của nó bằng $\frac{h}{2}$. Khối lăng trụ xiên có cạnh bên bằng h, suy ra $\sin\alpha = \frac{\frac{h}{2}}{h} = \frac{1}{2}$ cho nên $\alpha = 30^\circ$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 5 điểm $M(1;2;3)$, $N(-1;2;0)$, $P(-1;4;3)$, $Q(0;0;6)$, $R(0;2;4)$. Hỏi điểm nào sau đây không thuộc mặt phẳng của tứ giác tạo bởi bốn điểm còn lại?

(A) M. **B** N. (C) P. (D) R.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MP} = (-2;2;0)$, $\overrightarrow{MQ} = (-1;-2;3)$, $\overrightarrow{MR} = (-1;0;1)$, $\left(\overrightarrow{MP} \wedge \overrightarrow{MQ}\right) \cdot \overrightarrow{MR} = 0$, suy ra bốn điểm M, P, Q, R đồng phẳng. Phương trình mặt phẳng chứa bốn điểm M, P, Q, R là $(\alpha)\colon x + y + z - 6 = 0$, dễ thấy N không thuộc (α).

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Hỏi trong khoảng $(0;3\pi)$ có bao nhiêu điểm để hàm số $y = \cos x + \sin x$ đạt cực đại?

(A) 1. **B** 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

$y' = \cos x - \sin x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}; x = \frac{5\pi}{4}; x = \frac{9\pi}{4}$.

$y'' = -\sin x - \cos x$, $y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$, $y''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, $y''\left(\frac{9\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$.

Vậy hàm số có 2 điểm cực đại trên khoảng $(0;3\pi)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Số nghiệm của phương trình $\log_{2018}|x| + x^2 = 2017$ là

(A) 1. **B** 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Đặt $t = |x|$, $t > 0$, ta có phương trình $\log_{2018} t + t^2 - 2017 = 0$. Hàm số $f(t) = \log_{2018} t + t^2 - 2017$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và $f(1)\cdot f(50) < 0$ cho nên phương trình $\log_{2018} t + t^2 - 2017 = 0$ có đúng một nghiệm $t_0 > 0$. Suy ra phương trình $\log_{2018}|x| + x^2 = 2017$ có 2 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Cho số thực a và hàm số $y = \sqrt{ax^2 + 2018x + 2019} - \sqrt{ax^2 + 2017x + 2018}$. Số tiệm cận nhiều nhất nếu có của đồ thị hàm số trên là

(A) 0. (B) 1. **C** 2. (D) 3.

Lời giải.

Dễ thấy nếu $a < 0$ đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Với $a = 0$, $y = \frac{x+1}{\sqrt{2018x + 2019} + \sqrt{2017x + 2018}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} (y - \alpha x) = +\infty$ hoặc $-\infty$ khi $\alpha \neq 0$ cho nên đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Với $a > 0$, $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{ax^2+2018x+2019}+\sqrt{ax^2+2017x+2018}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ suy ra đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(3;4;1)$, $B(-3;-2;-2)$. Đường thẳng qua A và B cắt mặt phẳng (Oxy) tại M. Tính tỉ số $k = \dfrac{MA}{MB}$.

(A) $k = -\dfrac{1}{2}$. (B) $k = 2$. (C) $k = -2$. **D** $k = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$M \in (Oxy) \Rightarrow M(a;b;0)$. Điểm M thuộc đường thẳng đi qua AB cho nên

$$\frac{a-3}{6} = \frac{b-4}{6} = \frac{0-1}{3} \Rightarrow a = 1; b = 2$$

Ta có $\overrightarrow{AM} = (-2;-2;-1)$, $\overrightarrow{AB} = (-6;-6;-3)$, $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, suy ra $k = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho góc tù x thỏa mãn $14\cos^2 x + \sin 2x = 2$. Khi đó $\cos x$ bằng

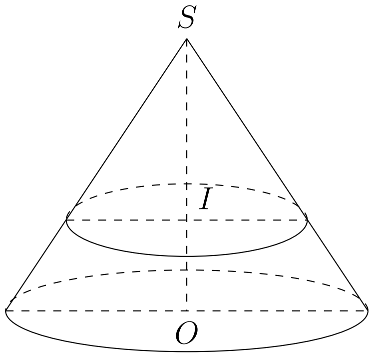
A $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. (B) $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (C) $\cos x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. (D) $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

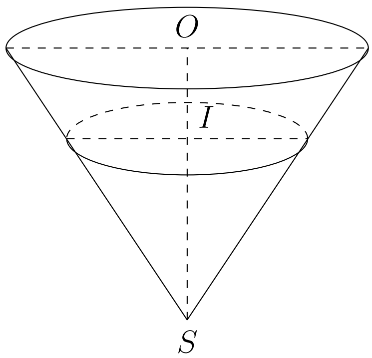
Lời giải.

$14\cos^2 x + \sin 2x = 2 \Leftrightarrow 14 + 2\tan x = 2\left(1+\tan^2 x\right) \Leftrightarrow \tan^2 x - \tan x - 6 = 0$, góc $x > 90^\circ$ cho nên $\tan x = -2$, suy ra $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Cho cái phễu đựng nước hình nón có trục SO như hình vẽ. Cho trục SO thẳng đứng, từ nắp đỉnh S ta đổ một lượng nước vào phễu để nước dâng lên vị trí I trên thuộc trục SO và giả sử rằng khi ta lật ngược phễu lại nhưng vẫn giữ nguyên trục SO thẳng đứng thì mực nước vẫn ở vị trí ban đầu I của nó. Tính tỉ số $k = \dfrac{SI}{SO}$.





(A) $k = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B** $k = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. (C) $k = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (D) $k = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi V là thể tích của khối nón chiều cao SO, V' là thể tích của khối nón chiều cao SI. Thể tích của nước không đổi nên

$$\frac{V'}{V} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Cho $f(x)$ là một hàm số chẵn liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = 2018$, $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2017$.

Giá trị của $I = \int\limits_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $I = 2$. (B) $I = 1$. (C) $I = 0$. **D** $I = -1$.

Lời giải.

Vì $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trên $\mathbb{R}$ nên

$$\int\limits_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2018 \Rightarrow \int\limits_{2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -2018$$

Khi đó, $I = \int\limits_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = 2017 - 2018 = -1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Cho 3 số thực a, b, c lớn hơn 1 thỏa mãn $\log_a b \cdot \log_a c < \log_a \left(\dfrac{b}{c}\right)$. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_a x + \log_b x > \log_c x$ là

(A) $x < 1$. (B) $x > 0$. (C) $\left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 1 \end{array}\right.$. **D** $0 < x < 1$.

Lời giải.

Theo giả thiết $\log_a b \cdot \log_a c < \log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) \Leftrightarrow \log_a b \cdot \log_a c + \log_a c - \log_a b < 0$. Ta có

$$\begin{aligned} \log_a x + \log_b x > \log_c x &\Leftrightarrow \log_a x + \frac{\log_a x}{\log_a b} > \frac{\log_a x}{\log_a c} \\ &\Leftrightarrow \log_a x \left(\log_a b \cdot \log_a c + \log_a c - \log_a b\right) > 0 \\ &\Leftrightarrow \log_a x < 0 \\ &\Leftrightarrow 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Tập hợp nào dưới đây chứa số thực a để $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{x}{\cos^2(ax)}\,\mathrm{d}x = \dfrac{4}{\pi} - \dfrac{8}{\pi^2}\ln 2$?

(A) $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. (B) $\left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$. (C) $(-1; 0)$. **D** $(0; 1)$.

Lời giải.

Đặt $u = x$, $\mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2(ax)}$, ta có

$$\begin{aligned} \int\limits_{0}^{1} \frac{x}{\cos^2(ax)}\,\mathrm{d}x &= \left.\frac{x\tan(ax)}{a}\right|_0^1 - \int\limits_{0}^{1} \frac{\tan(ax)}{a}\,\mathrm{d}x \\ &= \left.\frac{x\tan(ax)}{a}\right|_0^1 + \left.\frac{\ln|\cos(ax)|}{a^2}\right|_0^1 \end{aligned}$$

$$= \frac{\tan a}{a} + \frac{\ln|\cos a|}{a^2}$$

Suy ra $a = \frac{\pi}{4} \in (0;1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Lấy ngẫu nhiên một số có 4 chữ số đôi một phân biệt. Tính xác suất p để số được lấy không lớn hơn 2018.

A $p = \frac{85}{756}$. B $p = \frac{510}{1134}$. C $p = \frac{509}{4536}$. D $p = \frac{84}{756}$.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = 9\mathrm{A}_9^3$. Gọi $\overline{abcd}$ là số có 4 chữ số đôi một phân biệt và $\overline{abcd} \leqslant 2018$.

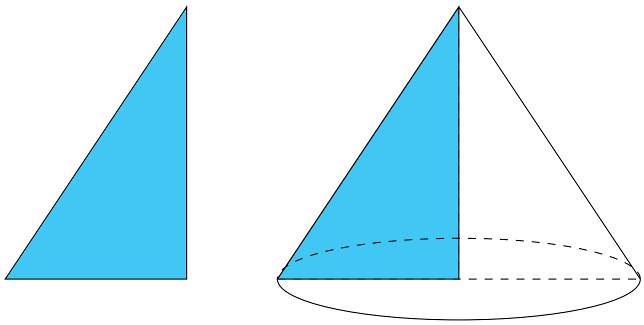
Với $a = 2$, ta có $b = 0$, $c = 1$, $d = 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Với $a = 1$, có A_9^3 cách chọn các chữ số b, c, d.

Vậy $p = \frac{6 + \mathrm{A}_9^3}{9\mathrm{A}_9^3} = \frac{85}{756}$

Chọn đáp án A □

Câu 27. Gọi T là tập hợp các tầm bìa có hình dạng tam giác vuông có cạnh huyền không đổi bằng a. Lấy một tấm bìa tùy ý trong T chọn một cạnh bên làm trục rồi quay chung quanh tấm bìa đó với trục đã chọn tạo thành một hình nón (như hình vẽ bên dưới). Thể tích lớn nhất $V_{\max}$ theo a của hình nón tạo thành bằng



A $\frac{2\pi\sqrt{3}a^3}{27}$. B $\frac{2\pi\sqrt{3}a^3}{9}$. C $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{27}$. D $\frac{2\pi a^3}{9}$.

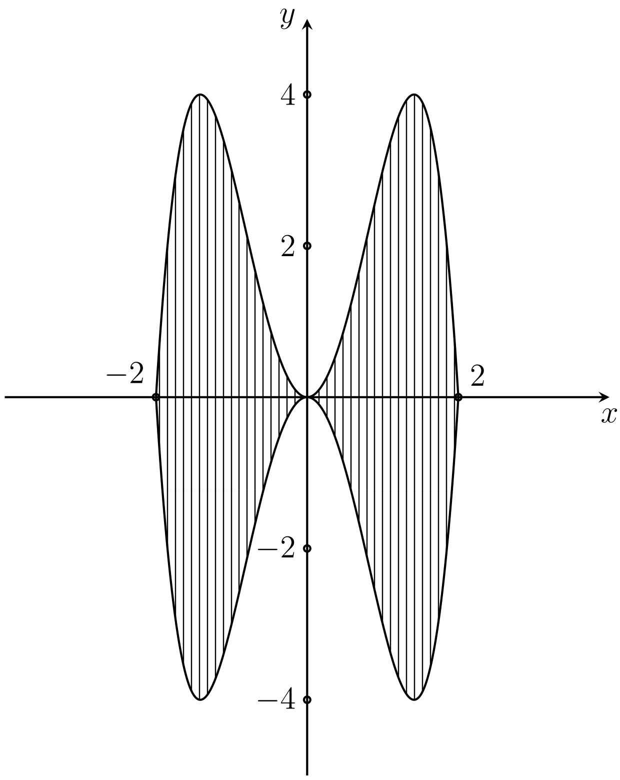
Lời giải.

Gọi chiều cao và bán kính của khối nón là h và r. Ta có $a^2 = h^2 + r^2$ và $V = \frac{1}{3}\pi h r^2 = \frac{1}{3}\pi h(a^2 - h^2)$.

$V'(h) = \frac{\pi}{3}(a^2 - 3h^2)$, $V'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow V_{\max} = \frac{\pi a\sqrt{3}}{3}\left(a^2 - \frac{a^2}{3}\right) = \frac{2\pi\sqrt{3}a^3}{9}$.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Ông Rich muốn gắn những viên kim cương nhỏ vào một mô hình như cánh bướm theo hình vẽ bên dưới. Để tính diện tích đó ông đưa vào một hệ trục tọa độ như hình vẽ thì nhận thấy rằng diện tích mô hình đó là phần giao (tô) giữa hai hàm số trùng phương $y = f(x)$, $y = g(x)$ đối xứng nhau qua trục hoành. Hỏi ông Rich đã gắn bao nhiêu viên kim cương trên mô hình đó biết rằng mỗi đơn vị vuông trên mô hình đó mất 15 viên kim cương?



A 256. **B** 128. **C** 64. **D** 265.

Lời giải.

Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại $(2; 0)$, $(-2; 0)$ có giá trị cực đại bằng 4, giá trị cực tiểu bằng 0, dễ thấy $a = -1, b = 4, c = 0$, $f(x) = -x^4 + 4x^2$, $g(x) = x^4 - 4x^2$. Ta có

$$S = \int\limits_{-2}^{2} \left(-x^4 + 4x^2 - (x^4 - 4x^2)\right) \mathrm{d}x = \frac{256}{15}$$

Vậy ông Rich đã gắn $15 \cdot \dfrac{256}{15} = 256$ viên kim cương.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{2abx + a + b}{(1 + ax)(1 + bx)} \mathrm{d}x = 0$. Giá trị của $S = ab + a + b$ bằng

A $S = 0, S = 1$. **B** $S = -2, S = 0$. **C** $S = 1, S = -2$. **D** $S = -2, S = 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_0^1 \frac{2abx + a + b}{(1 + ax)(1 + bx)} \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\frac{a}{ax + 1} + \frac{b}{bx + 1}\right) \mathrm{d}x = \ln|ax+1|\Big|_0^1 + \ln|bx+1|\Big|_0^1 = \ln|(a+1)(b+1)| = 0.$$

Suy ra $|ab + a + b + 1| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ab + a + b = 0 \\ ab + a + b = -2. \end{array}\right.$

Chọn đáp án B □

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = \log_{2017}\left(\frac{x}{1-x}\right)$. Tổng $S = f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + \cdots + f\left(\frac{2018}{2019}\right)$ bằng

Ⓐ $S = 1008$. Ⓑ $S = 1$. **C** $S = 0$. Ⓓ $S = 1009$.

Lời giải.

Nếu $a + b = 1$ thì $f(a) + f(b) = \log_{2017}\frac{a}{1-a} + \log_{2017}\frac{b}{1-b} = \log_{2017} 1 = 0$. Suy ra

$$S = f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2018}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + f\left(\frac{2017}{2019}\right) + \cdots + f\left(\frac{1009}{2019}\right) + f\left(\frac{1010}{2019}\right) = 0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 31. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện $x_1 = 1, x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Số hạng x_{2018} bằng

Ⓐ $x_{2018} = \frac{4036}{2018}$. **B** $x_{2018} = \frac{4035}{2018}$. Ⓒ $x_{2018} = \frac{4037}{2018}$. Ⓓ $x_{2018} = \frac{4034}{2018}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &\Leftrightarrow x_n - x_1 = 1 - \frac{1}{n} \\ &\Leftrightarrow x_n = \frac{2n-1}{n}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(0;1;0)$, $C(1;0;-2)$. Tìm trên mặt phẳng $(P)\colon x + y + z + 2 = 0$ điểm M sao cho tổng $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ có giá trị nhỏ nhất.

Ⓐ $M\left(-\frac{5}{18}; -\frac{13}{9}; -\frac{5}{18}\right)$. **B** $M\left(-\frac{5}{18}; -\frac{5}{18}; -\frac{13}{9}\right)$.

Ⓒ $M\left(-\frac{13}{9}; -\frac{5}{18}; -\frac{5}{18}\right)$. Ⓓ $M\left(-\frac{1}{9}; -\frac{1}{9}; -\frac{16}{9}\right)$.

Lời giải.

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, dễ thấy $I\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right)$. Khi đó

$$S = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 = 6MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2.$$

Ta thấy I là điểm cố định nên S nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

$MI \perp (P) \Rightarrow M\left(\frac{2}{3} + t; \frac{2}{3} + t; -\frac{1}{2} + t\right)$, $M \in (P) \Leftrightarrow \frac{2}{3} + t + \frac{2}{3} + t - \frac{1}{2} + t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{17}{18}$.

Vậy $M\left(-\frac{5}{18}; -\frac{5}{18}; -\frac{13}{9}\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Tập hợp nào dưới đây có chứa số thực m để diện tích giới hạn bởi đường cong $(C)\colon y = x^3 - 3x$ và đường thẳng $(d)\colon y = mx$ có diện tích bằng 8(đvdt)?

(A) $(-8;0)$. **B** $(-8;3)$. (C) $(1;7)$. (D) $(-3;0)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3-3x=mx \Leftrightarrow x(x^2-m-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\sqrt{m+3}\end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số $y=x^3-3x$ có tâm đối xứng là gốc tọa độ và đường thẳng $y=mx$ cũng đi qua gốc tọa độ nên diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C) và đường thẳng (d) là

$$S=2\int\limits_0^{\sqrt{m+3}}\left|x^3-(m+3)x\right|\,\mathrm{d}x=2\int\limits_0^{\sqrt{m+3}}\left[(m+3)x-x^3\right]\,\mathrm{d}x=8$$

$$\Leftrightarrow (m+3)^2=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-7 \text{ (loại)}\end{array}\right.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Số nghiệm của phương trình $\cos^4 x-\cos 2x+2018\sin^2\dfrac{x}{3}=0$ trong đoạn $[0;16]$ là

(A) 0. (B) 1. **C** 2. (D) 3.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\cos^4 x-\cos 2x+2018\sin^2\frac{x}{3}=0 &\Leftrightarrow \frac{1}{4}(1+\cos 2x)^2-\cos 2x+2018\sin^2\frac{x}{3}=0\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2+2018\sin^2\frac{x}{3}=0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x=1\\ \sin\dfrac{x}{3}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=m\pi\\ \dfrac{x}{3}=n\pi\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}m=3n\\ x=m\pi\end{cases}\end{aligned}$$

Theo giả thiết $0\leqslant m\pi\leqslant 16 \Rightarrow m=0, m=3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Với mọi tham số thực k thuộc tập nào dưới đây để phương trình

$$\log_2^2\left(\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)-4\log_2(\cos x+\sin x)-2-4k=0$$

có nghiệm?

A $\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. (B) $(-\infty;-1)$. (C) $(-2;0)$. (D) $(0;2018)$.

Lời giải.

Đặt $t=\log_2(\cos x+\sin x)$, $\cos x+\sin x\leqslant\sqrt{2}$ cho nên $t\leqslant\dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương

$$(2t-1)^2-4t=4k+2 \Leftrightarrow 4t^2-8t=4k+1 \text{ (1)}$$

Dễ thấy hàm số $f(t) = 4t^2 - 8t$ nghịch biến trên nửa khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$ suy ra phương trình (1) có nghiệm khi $4k + 1 \geqslant f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow k \geqslant -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án A $\square$

Câu 36. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5}$. Khi đó số phức $w = z + 1 + i$ có môđun lớn nhất $|w|_{\max}$ bằng

A. $|w|_{\max} = 20$. B. $|w|_{\max} = 2\sqrt{5}$. C. $|w|_{\max} = \sqrt{5}$. D. $|w|_{\max} = 5\sqrt{2}$.

Lời giải.

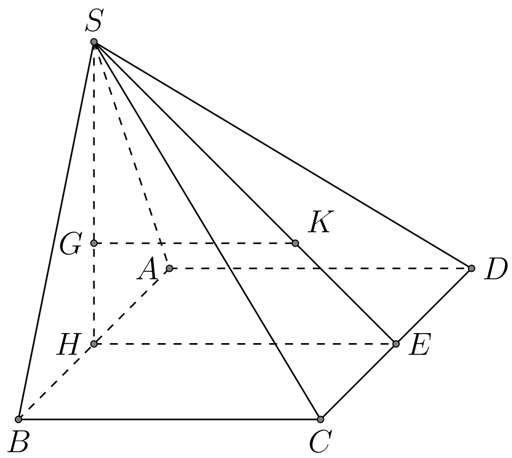
Ta có $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |w - 2 + i| = \sqrt{5} \geqslant |w| - |2 - i| = |w| - \sqrt{5} \Rightarrow |w| \leqslant 2\sqrt{5}$, dấu " = " xảy ra khi $w = 4 - 2i$. Vậy $|w|_{\max} = 2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án B $\square$

Câu 37. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính thể tích khối nón có đường tròn đáy ngoại tiếp tam giác SAB và đỉnh của khối nón nằm trên mặt phẳng (SDC).

A. $V = \dfrac{2\pi a^3}{21}$. B. $V = \dfrac{2\pi a^3}{27}$. C. $V = \dfrac{\pi a^3}{21}$. D. $V = \dfrac{2\pi a^3}{9}$.

Lời giải.



Dễ thấy tâm G của khối nón và đỉnh K của khối nón là trọng tâm các tam giác SAB, SCD và $GK = \dfrac{2a}{3}$. Thể tích của khối nón $V = \dfrac{1}{3}\pi SG^2 \cdot GK = \dfrac{\pi}{3} \cdot \dfrac{a^2}{3} \cdot \dfrac{2a}{3} = \dfrac{2\pi a^3}{9}$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 38. Trong khoảng $(0; 2018)$ phương trình $\tan x = 2018^{\cos 2x}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 322. B. 642. C. 323. D. 643.

Lời giải.

Dễ thấy $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ không là nghiệm của phương trình. Nếu x_0 là một nghiệm của phương trình thì $\tan(x_0 \pm \pi) = \tan x_0 = 2018^{\cos 2x_0} = 2018^{\cos 2(x_0 \pm \pi)}$, suy ra $x_0 \pm \pi$ cũng là nghiệm của phương trình. Cho nên số nghiệm của phương trình khoảng $(0; 2018)$ là số nghiệm của phương trình trên khoảng $(0; \pi)$ nhân với 642 cộng với số nghiệm của phương trình trên khoảng $(642\pi; 2018)$.

Xét hàm số $f(x) = \tan x - 2018^{\cos 2x}$ với $x \in (0; \pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$,

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 2\sin 2x \cdot 2018^{\cos 2x} \ln 2018 > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Ta lại có $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2017$; $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - 2018^{-\frac{1}{2}} > 0$ và $f(x) < 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, suy ra phương trình $f(x) = 0$ có đúng một nghiệm x_0 thuộc $(0; \pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ và $x_0 \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right)$, vậy phương trình $f(x) = 0$ có 642 nghiệm thuộc khoảng $(0; 642\pi)$.
Mặt khác $\left(642\pi + \frac{\pi}{4}; 642\pi + \frac{\pi}{3}\right) \subset (0; 2018)$ cho nên $x_0 + 642\pi$ là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Vậy phương trình có tất cả 643 nghiệm.
Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + 2$ có đồ thị (C). Hỏi trên đường thẳng $x = 1$ tồn tại bao nhiêu điểm để từ đó kẻ được đúng hai tiếp tuyến phân biệt?

A 0. B 1. C 2. D Vô số.

Lời giải.
Gọi $M(1; a)$ là điểm thuộc $x = 1$ để từ đó kẻ được đúng hai tiếp tuyến, $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến qua M. Ta có

$$a = f'(x_0)(1 - x_0) + x_0^3 - x_0^2 + 2 = -2x_0^3 + 4x_0^2 - 2x_0 + 2 \ (1)$$

Từ M kẻ được đúng 2 tiếp tuyến khi (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt. Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đường thẳng $y = a$ và đồ thị hàm số $g(x) = -2x^3 + 4x^2 - 2x + 2$.
Hàm số $g(x) = -2x^3 + 4x^2 - 2x + 2$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{46}{27}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra tồn tại hai điểm thuộc đường thẳng $x = 1$ để từ đó kẻ được hai tiếp tuyến.
Chọn đáp án C □

Câu 40. Một đề trắc nghiệm môn toán có 50 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án chọn, trong đó có 1 phương án đúng, chọn phương án đúng thì câu đó được 0,2 điểm. Trong thời gian cho phép 90 phút bạn Lân đã làm bài chắc chắn đúng 40 câu, 10 còn lại bạn trả lời ngẫu nhiên. Tính xác suất p để bạn Lân được đúng 9 điểm.

A $p = \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \mathrm{C}_{10}^5$. B $p = \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5$.

C $p = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \mathrm{C}_{10}^5$. D $p = \frac{1}{4} \cdot \mathrm{C}_{10}^5$.

Lời giải.
Để được đúng 9 điểm Lân phải trả lời đúng 45 câu, trong đó có 5 câu trả lời ngẫu nhiên, xác suất để trả lời đúng một câu là 0,25. Xác suất để Lân trả lời đúng 5 câu trong 10 câu khi trả lời ngẫu nhiên là $p = \mathrm{C}_{10}^5 0{,}25^5 \cdot 0{,}75^5$.
Chọn đáp án A □

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, lập phương trình mặt phẳng (α) qua hai điểm $M(1;-1;1)$, $N(0;-1;0)$ và cắt hình cầu $(S)\colon (x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=5$ theo thiết diện là hình tròn có diện tích $S=\pi$.

(A) $2x+y-2z+1=0$, $3x+y-3z+1=0$. (B) $3x-y-3z-1=0$, $2x-y-2z-1=0$.
(C) $2x+y-2z+1=0$, $2x-y-2z-1=0$. (D) $3x+y-2z+1=0$, $3x-y-3z-1=0$.

Lời giải.

Mặt cầu có tâm $I(-2;-1;1)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$, $S=\pi \Rightarrow r=1$, ta có

$$R^2=r^2+\mathrm{d}^2(I,(\alpha)) \Rightarrow \mathrm{d}(I,(\alpha))=\sqrt{5-1}=2.$$

Phương trình đường thẳng MN là $\begin{cases} x=t \\ y=-1 \\ z=t \end{cases}$, dễ thấy MN là giao tuyến của hai mặt phẳng $x-z=0$ và $y+1=0$, khi đó $(\alpha)\colon a(x-z)+b(y+1)=0, (a^2+b^2\neq 0)$

$$\mathrm{d}(I,(\alpha))=2 \Leftrightarrow \frac{|-3a|}{\sqrt{2a^2+b^2}}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} \frac{a}{b}&=2 \\ \frac{a}{b}&=-2 \end{aligned}\right.$$

Với $\frac{a}{b}=2$, chọn $a=2$, $b=1$, phương trình $(\alpha)\colon 2x+y-2z+1=0$.
Với $\frac{a}{b}=-2$, chọn $a=2$, $b=-1$, phương trình $(\alpha)\colon 2x-y-2z-1=0$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=u_n+2(n+1) \quad \text{với } n=1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\cdots+\frac{1}{u_n}\right)$ bằng

(A) 0. (B) $+\infty$. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $u_n=u_{n-1}+2n=u_{n-2}+2(n-1)+2n=\cdots=u_1+2\cdot2+2\cdot3+\cdots+2n=n(n+1)$, suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\cdots+\frac{1}{u_n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1.$
Chọn đáp án (D) □

Câu 43. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau

$$(d_1)\colon \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3} \text{ và } (d_2)\colon \frac{x}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}.$$

Lập phương trình mặt phẳng (P) song song với (d_1) và (d_2) sao cho khoảng cách từ (d_1) đến (P) gấp hai lần khoảng cách từ (d_2) đến (P).

(A) $x-2y+z+4=0$, $x-2y+z-\frac{4}{3}=0$. (B) $x+2y+z+4=0$, $x+2y+z+\frac{4}{3}=0$.
(C) $x-2y+z+4=0$, $x-2y+z+\frac{4}{3}=0$. (D) $x+2y+z+4=0$, $x-2y+z+\frac{4}{3}=0$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_{(P)} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = (-4; 8; -4)$. Lấy điểm $M(1; 2; 3) \in (d_1)$, $N(0; 1; 0) \in (d_2)$, gọi K là điểm thuộc đường thẳng MN sao cho $MK = 2NK$, khi đó mặt phẳng đi qua K và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}$ là mặt phẳng cần tìm.

Trường hợp 1: $\overrightarrow{MK} = 2\overrightarrow{NK}$, ta tìm được $K(-1; 0; -3)$ và $(P)\colon x - 2y + z + 4 = 0$.

Trường hợp 2: $\overrightarrow{MK} = -2\overrightarrow{NK}$, ta tìm được $K\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; 1\right)$ và $(P)\colon x - 2y + z + \frac{4}{3} = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 - (m-1)x + m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số và hai trục Ox, Oy có diện tích không lớn hơn 1 (đvdt)?

A 3. **B** 2. **C** 1. **D** 0.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 4x - (m-1)$, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $3x^2 - 4x - (m-1) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leqslant -\frac{1}{3}$.

$y = x^3 - 2x^2 - (m-1)x + m = (x-1)(x^2 - x - m)$ cho nên hàm số cắt trục hoành tại điểm $x = 1$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và các trục tọa độ là

$$S = \int\limits_0^1 \left|x^3 - 2x^2 - (m-1)x + m\right| \,\mathrm{d}x = -\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{(m-1)x^2}{2} + mx\right)\Big|_0^1 = -\frac{6m+1}{12}$$

Theo giả thiết $S \leqslant 1 \Leftrightarrow -\frac{13}{6} \leqslant m \Rightarrow m = -1, m = -2$.

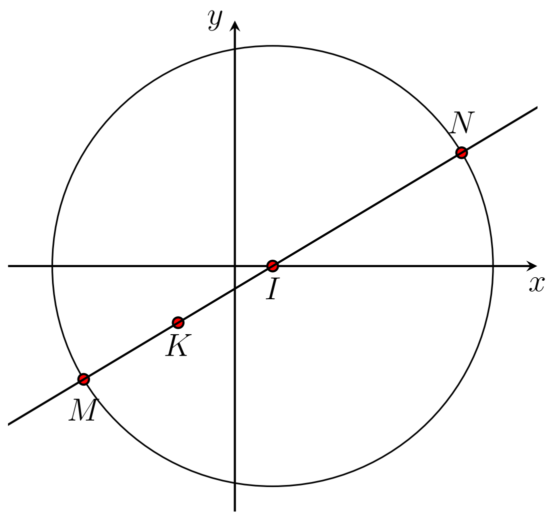
Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho hai số phức z_1, z_2 đồng thời thỏa mãn hai điều kiện $|z-1| = \sqrt{34}$ và $|z + 1 + mi| = |z + m + 2i|$ trong đó $m \in \mathbb{R}$, sao cho $|z_1 - z_2|$ lớn nhất. Khi đó giá trị của $|z_1 + z_2|$ bằng

A $\sqrt{2}$. **B** $\sqrt{130}$. **C** 2. **D** 10.

Lời giải.

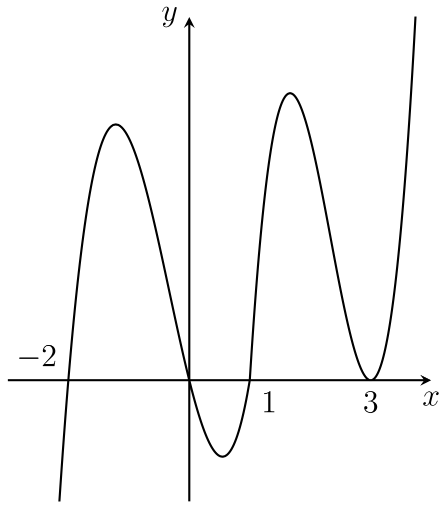
Đặt $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$. $|z-1| = \sqrt{34}$ suy ra biểu diễn của z thuộc đường tron tâm $I(1; 0)$, bán kính $\sqrt{34}$, $|z + 1 + mi| = |z + m + 2i| \Leftrightarrow (2m-2)x + (4-2m)y + 3 = 0$ (d) nên biểu diễn của z thuộc đường thẳng d, dễ thấy d luôn đi điểm $K\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ cố định.



Biểu diễn của z_1, z_2 là giao điểm của đường tròn tâm I và đường thẳng d, dễ thấy $|z_1 - z_2|$ lớn nhất khi d đi qua I, khi đó $z_1 = -4 - 3i$, $z_2 = 6 + 3i$ và $|z_1 + z_2| = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Số nghiệm nhiều nhất của phương trình $f(x^2) = m$ (với m là số thực) là



(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

Lời giải.

Đặt $g(x) = f(x^2)$. Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2)$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \end{array}\right.$. Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$	α ↘				$g(-1)$	↗	$g(0)$	↘	$g(1)$	↗			β

Trong đó $\alpha = \lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ và $\beta = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x^2) = m$ có nhiều nhất 4 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho số thực $x > 0$. Tìm hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Newton của biểu thức $\left(2x + \dfrac{1}{x}\right)^n$ biết rằng $\mathrm{C}_n^{k-2} + 2\mathrm{C}_n^{k-1} + \mathrm{C}_n^k = \dfrac{2018\mathrm{C}_{n+1}^{k-1}}{k}$ với k, n là các số nguyên dương thỏa mãn $2 \leqslant k \leqslant n$.

(A) C_{2016}^{1008}. (B) $\mathrm{C}_{2016}^{1008} \cdot 2^{1009}$. (C) $\mathrm{C}_{2016}^{1008} \cdot 2^{1008}$. (D) $\mathrm{C}_{2014}^{1007} \cdot 2^{1007}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \mathrm{C}_n^{k-2}+2\mathrm{C}_n^{k-1}+\mathrm{C}_n^k=\frac{2018\mathrm{C}_{n+1}^{k-1}}{k} \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{C}_{n+1}^{k-1}+\mathrm{C}_{n+1}^k=\frac{2018\mathrm{C}_{n+1}^{k-1}}{k} \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{C}_{n+2}^k=\frac{2018\mathrm{C}_{n+1}^{k-1}}{k} \\ \Leftrightarrow\ & n=2016 \end{aligned}$$

$\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^{2016}=\displaystyle\sum_{k=0}^{2016}\mathrm{C}_{2016}^k 2^{2016-k}x^{2016-2k}$, suy ra hệ số của số hạng không chứa x là $\mathrm{C}_{2016}^{1008}\cdot 2^{1008}$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Mồng 3 Mậu Tuất vừa rồi ông Đại Gia đến chúc tết và lì xì cho 3 anh em trai tôi. Trong ví của ông Đại Gia chỉ có 4 tờ mệnh giá 200000 đồng và 5 tờ mệnh giá 100000 đồng được sắp xếp một cách lộn xộn trong ví. Ông gọi 3 anh em tôi đứng xếp hàng có thứ tự, anh Cả đứng trước lì xì trước, anh Hai đứng sau lì xì sau và tôi thằng Út đứng sau cùng nên lì xì sau cùng. Hỏi xác suất p bằng bao nhiêu để tôi nhận tiền lì xì có mệnh giá lớn nhất, biết rằng ông Đại Gia lì xì bằng cách rút ngẫu nhiên cho anh em tôi mỗi người chỉ một tờ giấy tiền trong túi của ông?

A. $\dfrac{4}{9}$. B. $\dfrac{25}{63}$. C. $\dfrac{1}{9}$. D. $\dfrac{1}{21}$.

Lời giải.

Khi Út nhận tờ tiền có mệnh giá lớn nhất có các trường hợp sau xảy ra.

Trường hợp 1: anh Cả và anh hai nhận mỗi người 100000 đồng, Út nhận 200000 đồng, xác suất của trường hợp này là $\dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{4}{8}\cdot\dfrac{4}{7}=\dfrac{10}{63}$.

Trường hợp 2: anh Cả nhận 100000 đồng và anh hai nhận 200000 đồng, Út nhận 200000 đồng, xác suất của trường hợp này là $\dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{4}{8}\cdot\dfrac{3}{7}=\dfrac{5}{42}$.

Trường hợp 3: anh Cả nhận 200000 đồng và anh hai nhận 100000 đồng, Út nhận 200000 đồng, xác suất của trường hợp này là $\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{3}{7}=\dfrac{5}{42}$.

Trường hợp 4: cả ba người đều nhận 200000 đồng, xác suất của trường hợp này là $\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{2}{7}=\dfrac{5}{21}$.

Vậy xác suất để Út nhận tờ tiền có mệnh giá lớn nhất là $\dfrac{10}{63}+\dfrac{5}{42}+\dfrac{5}{42}+\dfrac{5}{21}=\dfrac{4}{9}$.

Chú ý: Ta có công thức $P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$, trong đó $P(B|A)$ là xác suất của biến cố B khi A đã xảy ra, $P(C|AB)$ là xác suất của biến cố C khi A và B đã xảy ra.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho hai số thực dương thay đổi a, b và thỏa mãn điều kiện $\ln a\cdot(1-\ln b)=\ln b\cdot\sqrt{4-\ln^2 a}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $\log_b a$. Giá trị của $M+m$ bằng

A. $2(\sqrt{2}-1)$. B. $2(\sqrt{2}+1)$. C. $2(1-\sqrt{2})$. D. $\sqrt{2}-1$.

Lời giải.

Đặt $x=\ln a, y=\ln b$, ta có $\log_b a=\dfrac{x}{y}$ và

$$\ln a\cdot(1-\ln b)=\ln b\cdot\sqrt{4-\ln^2 a}\Leftrightarrow x(1-y)=y\sqrt{4-x^2}\Leftrightarrow\frac{x}{y}=x+\sqrt{4-x^2}$$

Xét hàm số $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$, $f'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$. Ta có $f(2) = 2$, $f(-2) = -2$, $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, suy ra $M = 2\sqrt{2}$, $m = -2$ và $M + m = 2(\sqrt{2} - 1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Cho họ đường cong (C_m): $y = (m+1)x^3 - (3m-1)x^2 - x + 3m$, với mọi tham số m tùy ý, ta xét các khẳng định sau đây

I. (C_m) luôn không đi qua điểm cố định nào.

II. (C_m) luôn đi qua 1 điểm cố định nằm trên Parabol $y = 4x^2 - x - 3$.

III. (C_m) luôn đi qua 2 điểm cố định nằm trên đường cong $y = 2x^3 - 2x^2 - x - 3$.

IV. (C_m) luôn đi qua 3 điểm cố định là ba đỉnh của tam giác nhận $G(1;8)$ làm trọng tâm.

Hỏi trong bốn khẳng định trên có bao nhiêu khẳng định đúng?

(A) 4. **B** 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

$y = (m+1)x^3 - (3m-1)x^2 - x + 3m \Leftrightarrow m(x^3 - 3x^2 + 3) + x^3 + x^2 - x - y = 0$. Tọa độ điểm cố định của họ đường cong là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3 = 0 \\ x^3 + x^2 - x - y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Hệ có ba nghiệm $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ cho nên có 3 điểm cố định.

Dễ thấy nếu $(x;y)$ là nghiệm của hệ (1) thì $y = 4x^2 - x - 3$ và $y = 2x^3 - 2x^2 - x - 3$, suy ra 3 điểm A, B, C thuộc parabol $y = 4x^2 - x - 3$ và thuộc đường cong $y = 2x^3 - 2x^2 - x - 3$.

Theo định lí vi-et $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0$, $x_1x_2x_3 = -3$

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3) - 9 \\ &= 4(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 8(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - (x_1 + x_2 + x_3) - 9 \\ &= 36 - 3 - 9 = 24 \end{aligned}$$

Suy ra trọng tâm của tam giác ABC là $G(1;8)$.

Chọn đáp án (B) □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. B	3. D	4. B	5. D	6. B	7. B	8. A	9. A	10. A
11. A	12. D	13. D	14. B	15. B	16. B	17. B	18. B	19. C	20. D
21. A	22. B	23. D	24. D	25. D	26. A	27. B	28. A	29. B	30. C
31. B	32. B	33. B	34. C	35. A	36. B	37. D	38. D	39. C	40. A
41. C	42. D	43. C	44. B	45. C	46. C	47. C	48. A	49. A	50. B

88 ĐỀ THI THỬ, SỞ GD & ĐT BÌNH THUẬN, LẦN 1, 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
(B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
(C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.
(D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = x^3 - 4x,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

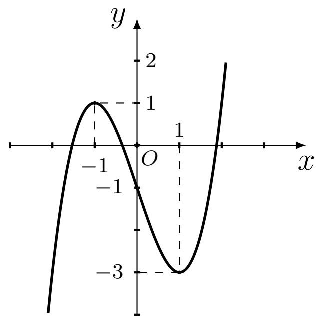
Vậy Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

(A) $x = 1$. (B) $M(1; -3)$.
(C) $M(-1; 1)$. (D) $x = -1$.



Lời giải.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ (với $x > 0$) bằng

(A) 4. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

• Cách 1: Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $y = x^2 + \frac{2}{x} = x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geqslant 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} = 3$. Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 3 khi $x = 1$.

- Cách 2: Xét trên $(0; +\infty)$, ta có $y' = 2x - \dfrac{2}{x^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 2x - \dfrac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Ta có bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng 3.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}$ có bao nhiêu tiệm cận ngang?

A 3. B 1. **C 2.** D 0.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -1 \Rightarrow y = -1$ là tiệm cận ngang.

Vậy, đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Khối cầu bán kính $R = 2a$ có thể tích là

A $\dfrac{8\pi a^3}{3}$. B $16\pi a^2$. **C $\dfrac{32\pi a^3}{3}$.** D $6\pi a^3$.

Lời giải.

$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi(2a)^3 = \dfrac{32\pi a^3}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Số phức $z = 15 - 3i$ có phần ảo bằng

A 15. B 3. **C -3.** D $3i$.

Lời giải.

Phần ảo là -3.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Trong không gian, khẳng định nào sau đây **sai**?

A Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường phẳng thì song song với nhau.

B Nếu ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

C Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

Lời giải.

Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau hoặc chéo nhau.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Nếu một khối chóp có thể tích và diện tích mặt đáy lần lượt bằng a^3 và a^2 thì chiều cao của nó bằng

A $\frac{a}{3}$. B $3a$. C a. D $2a$.

Lời giải.

Ta có $V = \frac{1}{3}S \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{3V}{S} = 3a$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Phương trình $\log_3(2x+1) = 3$ có nghiệm duy nhất bằng

A 12. B 13. C 4. D 0.

Lời giải.

Ta có $\log_3(2x+1) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ 2x+1 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow x = 13$.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Xét a, b là các số thực thỏa mãn $ab > 0$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A $\sqrt[5]{ab} = (ab)^{\frac{1}{5}}$. B $\sqrt[8]{(ab)^8} = ab$. C $\sqrt[6]{ab} = \sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[6]{b}$. D $\sqrt[3]{\sqrt{ab}} = \sqrt[6]{ab}$.

Lời giải.

Ta có $ab > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases} \end{array}\right.$. Vậy $\sqrt[6]{ab} = \sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[6]{b}$ sai khi $a < 0$ và $b < 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + \cos x$ là

A $\frac{\mathrm{e}^x + 1}{x+1} + \sin x + C$. B $\mathrm{e}^x - \sin x + C$.

C $\mathrm{e}^x + \sin x + C$. D $\frac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+1} - \sin x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int (\mathrm{e}^x + \cos x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + \sin x + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Cắt một vật thể ϑ bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại các điểm $x = a$ và $x = b$ $(a < b)$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại điểm x $(a \le x \le b)$ cắt ϑ theo thiết diện có diện tích là $S(x)$. Giả sử $S(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó phần vật thể ϑ giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) có thể tích bằng

A $V = \pi \int\limits_a^b S(x)\mathrm{d}x$. B $V = \int\limits_a^b S(x)\mathrm{d}x$. C $V = \pi \int\limits_a^b S^2(x)\mathrm{d}x$. D $V = \int\limits_a^b S^2(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo định nghĩa SGK.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathscr{K}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathscr{K}$ nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in \mathscr{K}$.

(B) Nếu $f(x)$ liên tục trên $\mathscr{K}$ thì nó có nguyên hàm trên $\mathscr{K}$.

(C) Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathscr{K}$ thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathscr{K}$.

D Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathscr{K}$ thì hàm số $F(-x)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathscr{K}$.

Lời giải.

Khẳng định "Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathscr{K}$ thì hàm số $F(-x)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathscr{K}$" là khẳng định **sai**.

Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(-2;1;2)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MA}$.

(A) $M(4;3;1)$. (B) $M(-1;3;5)$. (C) $M\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. D $M(4;3;4)$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y;z)$ là điểm thỏa điều kiện $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MA}$.

$\overrightarrow{MB} = (-2-x;1-y;2-z)$, $\overrightarrow{MA} = (1-x;2-y;3-z)$.

Ta có $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \begin{cases} -2-x = 2(1-x) \\ 1-y = 2(2-y) \\ 2-z = 2(3-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases}$. Vậy $M(4;3;4)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(2;4;-1)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A, B là

(A) $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z+1}{4}$.

(B) $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+3}{4}$.

C $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{-4}$.

(D) $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-1}{-4}$.

Lời giải.

Ta có đường thẳng d đi qua $A(1;2;3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (1;2;-4)$. Vậy phương trình chính tắc đường thẳng d là $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{-4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;3)$, $B(4;0;1)$ và $C(-10;5;3)$. Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là

A $\vec{n} = (1;2;2)$. (B) $\vec{n} = (1;-2;2)$. (C) $\vec{n} = (1;8;2)$. (D) $\vec{n} = (1;2;0)$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2;\ 1;\ -2)$, $\overrightarrow{AC} = (-12;6;0)$. $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (12;24;24)$. Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n} = (1;2;2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu lần lượt là y_1 và y_2. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng ?

A $3y_1 - y_2 = 1$. **B** $3y_1 - y_2 = 5$. **C** $3y_1 - y_2 = -1$. **D** $3y_1 - y_2 = -5$.

Lời giải.

Ta có: $y' = -4x^3 + 4x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \Rightarrow y = 1 \\ x = \pm 1 & \Rightarrow y = 2. \end{array}\right.$$

Ta có Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	2	↘	$-\infty$

Từ đó ta có giá trị cực đại, cực tiểu của hàm số đã cho lần lượt là $2, 1 \Rightarrow y_1 = 2; y_2 = 1$.

Do đó, ta có: $3y_1 - y_2 = 5$.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x + m^2}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng 14.

A $m = \pm 5$. **B** $m = \pm 2\sqrt{3}$. **C** $m = 5$. **D** $m = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{1\}$. $y' = \dfrac{-1 - m^2}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$.

Do đó hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$ nên hàm số nghịch biến trên $[2; 3]$.

Suy ra $y(3)$ là giá trị nhỏ nhất.

Theo đề bài $y(3) = 14 \Leftrightarrow \dfrac{3 + m^2}{2} = 14 \Leftrightarrow m = \pm 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \backslash \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

x	$-\infty$		0			1		$+\infty$
y'		$-$	‖		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ 2		↘	-2	↗	$+\infty$

A $m \in [-2; 2)$. **B** $m \in (-2; 2)$. **C** $m \in (-2; 2]$. **D** $m \in [2; +\infty)$.

Lời giải.

Từ BBT suy ra $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $m \in (-2; 2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{khi } x > 4 \\ mx + 1 & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(A) $m = -8$ hoặc $m = \dfrac{7}{4}$.

(B) $m = 8$ hoặc $m = -\dfrac{7}{4}$.

(C) $m = -\dfrac{7}{4}$.

D $m = \dfrac{7}{4}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty; 4)$, $(4; +\infty)$. Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi liên tục tại điểm $x = 4$.

Hàm số liên tục tại điểm $x = 4$ khi $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = f(4) \Leftrightarrow 8 = 4m + 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{7}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + x + 1$ có đồ thị (C). Trong tất cả các tiếp tuyến của (C), tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất có phương trình là

A $y = -11x + 9$. (B) $y = 37x + 87$. (C) $y = -8x + 5$. (D) $y = 16x - 19$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + 1 = 3(x - 2)^2 - 11 \geq -11, \forall x \in \mathbb{R}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 2 \Rightarrow y = -13$.

Nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -11(x - 2) - 13 \Leftrightarrow y = -11x + 9$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Cho $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $\mathrm{C}_n^5 = 2002$. Tính A_n^5.

A 240240. (B) 10010. (C) 2007. (D) 40040.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{C}_n^5 = 2002 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-5)! \cdot 5!} = 120 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-5)!} = 2002 \cdot 5! = 240240 \Leftrightarrow \mathrm{A}_n^7 = 240240$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin^2 x + \cos x - 1$ là

(A) $\dfrac{5}{4}$. (B) $\dfrac{1}{2}$. **C** $\dfrac{1}{4}$. (D) $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y &= \sin^2 x + \cos x - 1 \\ &= -\cos^2 x + \cos x \\ &= -\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Cho hai số phức $z = 3 - 5i$ và $w = -1 + 2i$. Điểm biểu diễn số phức $z' = \overline{z} - w \cdot z$ trong mặt phẳng Oxy có tọa độ là

A $(-4; -6)$. **B** $(4; 6)$. **C** $(4; -6)$. **D** $(-6; -4)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} z' &= \overline{z} - w \cdot z \\ &= 3 + 5i - (-1 + 2i) \cdot (3 - 5i) \\ &= 3 + 5i - (7 + 11i) \\ &= -4 - 6i. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Xét các số thực dương a, b sao cho $-25, 2a, 3b$ là cấp số cộng và 2, $a + 2$, $b - 3$ là cấp số nhân. Khi đó $a^2 + b^2 - 3ab$ bằng

A 89. **B** 31. **C** 76. **D** 59.

Lời giải.

-25, $2a$, $3b$ là cấp số cộng $\Leftrightarrow 2.2a = -25 + 3b \Leftrightarrow b = \dfrac{1}{3}(4a + 25)$.

$$\begin{aligned} 2, a+2, b-3 \text{ là cấp số nhân } &\Leftrightarrow (a+2)^2 = 2(b-3) \\ &\Leftrightarrow (a+2)^2 = 2\left(\frac{1}{3}(4a+25) - 3\right) \\ &\Leftrightarrow 3a^2 + 4a - 20 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = -\dfrac{10}{3} \text{(loại)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Suy ra $b = 11 \Rightarrow a^2 + b^2 - 3ab = 59$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm tam giác ABD. Trên đoạn BC, lấy điểm M sao cho $MB = 2MC$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

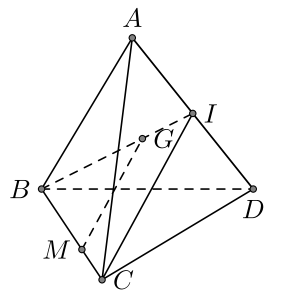
A MG song song (BCD). **B** MG song song (ACB).

C MG song song (ABD). **D** MG song song (ACD).

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AD.

Ta có $MG \parallel CI$ và $CI \subset (ACD)$ nên suy ra $MG \parallel (ACD)$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Xét hình trụ (T) có bán kính R, chiều cao h thỏa $R = 2h\sqrt{3}$; (N) là hình nón có bán kính đáy R và chiều cao gấp đôi chiều cao của (T). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích xung quanh của (T) và (N). Khi đó $\dfrac{S_1}{S_2}$ bằng

A $\dfrac{1}{2}$. **B** $\dfrac{2}{3}$. **C** $\dfrac{3}{4}$. **D** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của (T): $S_1 = 2\pi Rh = 4\pi h^2\sqrt{3}$.

Diện tích xung quanh của (N): $S_2 = \pi rl = \pi \cdot 2h\sqrt{3} \cdot \sqrt{(2h\sqrt{3})^2 + 4h^2} = 8\pi h^2\sqrt{3}$.

Suy ra $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Bất phương trình $\log^2 x - 2019\log x + 2018 \le 0$ có tập nghiệm là

A $S = [1; 2018]$. **B** $S = \left[10; 10^{2018}\right)$. **C** $S = \left(10; 10^{2018}\right)$. **D** $S = \left[10; 10^{2018}\right]$.

Lời giải.

Ta có $\log^2 x - 2019\log x + 2018 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le \log x \le 2018 \Leftrightarrow 10 \le x \le 10^{2018}$.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \cos x$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x = \pi$ bằng

A 2. **B** 3. **C** 1. **D** 4.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \cos x$ và trục hoành là nghiệm phương trình $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Xét trên $[0; \pi]$ suy ra $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Diện tích hình phẳng cần tính là $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt cầu có tâm $I(1; 2; -1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P)\colon x - 2y - 2z - 8 = 0$ là

A $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$. **B** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$.

C $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$. **D** $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$.

Lời giải.

Ta có $R = \mathrm{d}(I, (P)) = \dfrac{|-9|}{3} = 3$. Vậy phương trình mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Một túi có 14 viên bi gồm 5 viên màu trắng được đánh số từ 1 đến 5; 4 viên màu đỏ được đánh số từ 1 đến 4; 3 viên màu xanh được đánh số từ 1 đến 3 và 2 viên màu vàng được đánh số từ 1 đến 2. Có bao nhiêu cách chọn 3 viên bi từng đôi khác số ?

A 184. **B** 190. **C** 243. **D** 120.

Lời giải.

Số viên bi được đánh số $1, 2, 3, 4, 5$ lần lượt là $4, 4, 3, 2, 1$.
Vì ba viên bi từng đôi khác số nên khi chọn, ta có thể có những trường hợp sau:

$$(1,2,3); (1,2,4); (1,2,5); (1,3,4); (1,3,5); (1,4,5); (2,3,4); (2,3,5); (2,4,5); (3,4,5).$$

Trường hợp $(1, 2, 3)$: Vì số viên bi được đánh số $1, 2, 3$ lần lượt là $4, 4, 3$ nên số cách chọn ba viên bi trong trường hợp này là 48 cách.
Tương tượng, những trường hợp còn lại lần lượt có số cách chọn là: $48, 32, 16, 24, 12, 8, 24, 12, 8, 6$.
Vậy có tổng cộng: $48 + 32 + 16 + 24 + 12 + 8 + 24 + 12 + 8 + 6 = 190$ cách.
Chọn đáp án B □

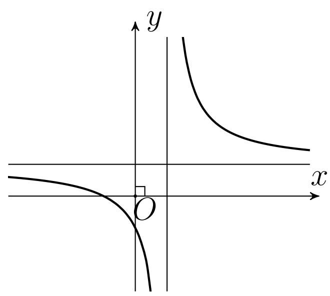
Câu 32. Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 7 chữ số đôi một khác nhau được tạo ra từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Từ A chọn ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để số được chọn có chữ số 1 và chữ số 2 đứng cạnh nhau.

A $\frac{5}{21}$. B $\frac{2}{7}$. C $\frac{5}{18}$. D $\frac{1}{3}$.

Lời giải.
$n(\Omega) = 6 \cdot 6! = 4320$.
Gọi A là biến cố số được chọn có chữ số 1 và chữ số 2 đứng cạnh nhau.
Trường hợp 1: Số 1, 2 nằm tại hai vị trí đầu. Có $2 \cdot 5! = 240$ số.
Trường hợp 2: Số 1, 2 không nằm tại hai vị trí đầu. Có $4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4! = 960$ số.
$\mathrm{P}(B) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1200}{4320} = \dfrac{5}{18}$.
Chọn đáp án C □

Câu 33.
Cho hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ có đồ thị như hình bên.
Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

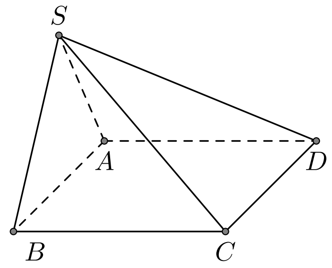
A $ac > 0, bd > 0$. B $bd < 0, ad > 0$.
C $bc > 0, ad < 0$. D $ab < 0, cd < 0$.



Lời giải.
Theo hình vẽ, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c} > 0 \Rightarrow d$ và c trái dấu (1).
Theo hình vẽ, đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c} > 0 \Rightarrow a$ và c trái dấu (2).
Ta có $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{b}{d} < 0 \Rightarrow b$ và d trái dấu (3).
Từ (1), (2) và (3) suy ra a, c, b cùng dấu và b, d trái dấu.
Vậy $bc > 0, ad < 0$.
Chọn đáp án C □

Câu 34.

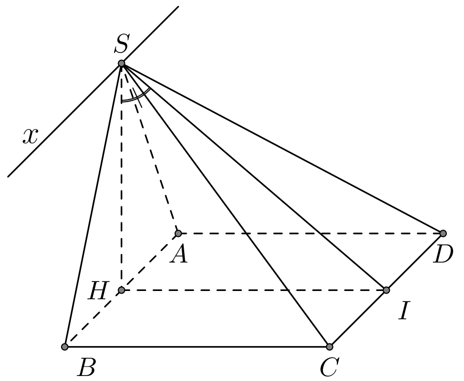
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật thỏa $AD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).



A $60°$. **B** $30°$. **C** $90°$. **D** $45°$.

Lời giải.

$(SAB) \cap (SCD) = Sx \parallel AB \parallel CD$. Gọi H, I lần lượt là trung điểm của AB, $CD \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp CD$.
Đồng thời, $HI \perp CD$ suy ra $CD \perp (SHI) \Rightarrow CD \perp SI$.
Do $Sx \parallel CD \Rightarrow SH \perp Sx$, $SH \perp SI$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là góc $\widehat{HSI}$. Có $SH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2}$, $HI = AD = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan \widehat{HSI} = \dfrac{HI}{SH} = 1 \Rightarrow \widehat{HSI} = 45°$.
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng $45°$.



Chọn đáp án D □

Câu 35. Sự tăng dân số được tính theo công thức $P_n = P_0 e^{n.r}$, trong đó P_0 là dân số của năm lấy làm mốc tính, P_n là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Biết rằng năm 2016, dân số Việt Nam đạt khoảng 92695100 người và tỉ lệ tăng dân số là $1,07\ \%$ (theo Tổng cục thống kê). Nếu tỉ lệ tăng dân số không thay đổi thì đến năm nào dân số nước ta đạt khoảng 103163500 người ?

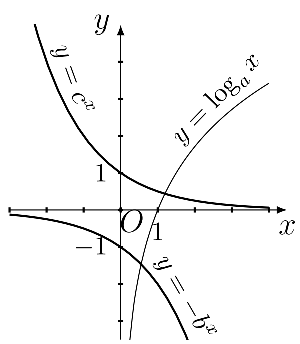
A 2026. **B** 2028. **C** 2024 . **D** 2036.

Lời giải.

Có $\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_0 \cdot \mathrm{e}^{n.r} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{nr} = \dfrac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{P}_0} \Leftrightarrow n = \dfrac{1}{r} \ln \dfrac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{P}_0}$.
Thay số ta có $n = \dfrac{1}{1,07\%} . \ln \dfrac{103163500}{92695100} \approx 10$ (năm). Vậy đến năm $2016 + 10 = 2026$ thì dân số nước ta đạt khoảng 103163500 người.
Chọn đáp án A □

Câu 36.

Xét các hàm số $y = \log_a x$, $y = -b^x$, $y = c^x$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó a, b, c là các số thực dương khác 1. Khẳng định nào sau đây đúng?



A $\log_a \dfrac{b}{c} > 0$. **B** $\log_{ab} c > 0$.
C $\log_b \dfrac{a}{c} < 0$. **D** $\log_c (a + b) > 1 + \log_c 2$.

Lời giải.

Từ hình vẽ ta có: $a > 1$, $b > 1$, $0 < c < 1$.

Do đó $\left.\begin{array}{l}\dfrac{b}{c} > 1\\ a > 1\end{array}\right\} \Rightarrow \log_a \dfrac{b}{c} > \log_a 1 = 0 \Rightarrow \log_a \dfrac{b}{c} > 0.$

Chọn đáp án A □

Câu 37. Tính $I = \displaystyle\int\limits_0^{2018} \dfrac{\ln(1+2^x)}{(1+2^{-x})\log_4 e}\,\mathrm{d}x$.

A $I = \ln^2(1+2^{2018}) - \ln^2 2$.

B $I = \ln^2(1+2^{2018}) - \ln 4$.

C $I = \ln(1+2^{2018}) - \ln 2$.

D $I = \ln^2(1+2^{-2018}) - \ln^2 2$.

Lời giải.

Đặt $t = \ln(1+2^x)$, ta có $\mathrm{d}t = \dfrac{2^x \ln 2}{1+2^x} = \dfrac{\ln 2}{1+2^{-x}}\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = \ln 2$; $x = 2018 \Rightarrow t = \ln(1+2^{2018})$.

Khi đó $I = \displaystyle\int\limits_{\ln 2}^{\ln(1+2^{2018})} \dfrac{t}{\ln 2.\log_4 e}\,\mathrm{d}t = \left(\dfrac{1}{\log_4 2}\cdot\dfrac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{\ln 2}^{\ln(1+2^{2018})} = \ln^2(1+2^{2018}) - \ln^2 2.$

Chọn đáp án A □

Câu 38. Xét (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = a\sin x + b\cos x$ (với a, b là các hằng số thực dương), trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = \pi$. Nếu vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox có thể tích bằng $\dfrac{5\pi^2}{2}$ và $f'(0) = 2$ thì $2a + 5b$ bằng

A 8. **B** 9. **C** 10. **D** 11.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = a\cos x - b\sin x$; $f'(0) = 2 \Rightarrow a = 2$.

$f(x) = a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$ với $\alpha = \arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int\limits_0^{\pi}(a^2+b^2)\sin^2(x+\alpha)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{\pi(a^2+b^2)}{2}\int\limits_0^{\pi}[1-\cos(2x+2\alpha)]\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{\pi(a^2+b^2)}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin(2x+2\alpha)\right]\Bigg|_0^{\pi}\\
&= \frac{\pi(a^2+b^2)}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin(2x+2\alpha)\right]\Bigg|_0^{\pi}\\
&= \frac{\pi^2(a^2+b^2)}{2}\\
&= \frac{\pi^2(4+b^2)}{2}.
\end{aligned}$$

Lại có: $V = \dfrac{5\pi^2}{2} \Rightarrow 4 + b^2 = 5 \Rightarrow b = 1$ (vì $b > 0$) Vậy $2a + 5b = 9$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Xét các số phức $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = 2 + mi$, $(m \in \mathbb{R})$. Giá trị nhỏ nhất của mô-đun số phức $\dfrac{z_2}{z_1}$ bằng

A $\dfrac{2}{5}$. (B) $\dfrac{1}{5}$. (C) $\dfrac{3}{5}$. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = \dfrac{|z_2|}{|z_1|} = \dfrac{\sqrt{4+m^2}}{5} \geqslant \dfrac{2}{5}$, $\forall m \in \mathbb{R}$. Dấu dẳng thức xảy ra khi $m = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của mô đun số phức $\dfrac{z_2}{z_1}$ bằng $\dfrac{2}{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{-1}$.

(A) $2x - 2z + 1 = 0$. **B** $2y - 2z + 1 = 0$. (C) $2x - 2y + 1 = 0$. (D) $2y - 2z - 1 = 0$.

Lời giải.

d_1 có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (-1; 1; 1)$ và đi qua điểm $A(2; 0; 0)$. Đường thẳng d_2 có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (2; -1; -1)$ và đi qua điểm $B(0; 1; 2)$. $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = (0; 1; -1)$, trung điểm của AB là $I\left(1; \dfrac{1}{2}; 1\right)$.

Mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 suy ra (P) đi qua I và có véc-tơ pháp tuyến là $(0; 1; -1)$.

Do đó phương trình của mặt phẳng (P) là $y - \dfrac{1}{2} - (z - 1) = 0 \Leftrightarrow 2y - 2z + 1 = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x - 2y + z - 12 = 0$. Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α).

A $H(3; -2; 5)$. (B) $H(2; 0; 4)$. (C) $H(5; -6; 7)$. (D) $H(-1; 6; 1)$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng qua M và vuông góc với mặt phẳng (α). Phương trình tham số của Δ là
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}.$$

Ta có $H = \Delta \cap (\alpha)$. Xét phương trình $1 + t - 2(2 - 2t) + (3 + t) - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow H(3; -2; 5)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P)\colon x + 2y - 2z + 3 = 0$. Gọi M là điểm thuộc đường thẳng d sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng 2. Nếu M có hoành độ âm thì tung độ của M bằng

(A) -1. **B** -3. (C) -21. (D) -5.

Lời giải.

Do M thuộc d nên M có tọa độ dạng $M(t;-1+2t;-2+3t)$.

Theo giả thiết, ta có $d(M,P)=2 \Leftrightarrow \dfrac{|t-2+4t+4-6t+3|}{3}=2 \Leftrightarrow |5-t|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=11 \end{array}\right.$. M có hoành độ âm nên $t=-1 \Rightarrow$ tung độ của M là -3.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-6}{-3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-2}{2}$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(4;3;4)$, song song với đường thẳng Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S) là

(A) $2x+y-2z-10=0$. (B) $2x+2y+z-18=0$.
(C) $x-2y+2z-1=0$. (D) $2x+y+2z-19=0$.

Lời giải.

Gọi véc-tơ của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(a;b;c)$, $(a^2+b^2+c^2>0)$. Phương trình mặt phẳng $(P)\colon a(x-4)+b(y-3)+c(z-4)=0$.

Vì $(P) \parallel \Delta$ nên $-3a+2b+2c=0 \Rightarrow 3a=2(b+c)$.

Vì (P) tiếp xúc với (S) nên $\dfrac{|-3a-b-c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=3 \Leftrightarrow 9(a^2+b^2+c^2)=(3a+b+c)^2\,(*)$. Thay $3a=2(a+b)$ vào (*) được $4(b+c)^2+9(b^2+c^2)=9(b+c)^2 \Leftrightarrow 2b^2-5bc+2c^2=0 \Leftrightarrow (2b-c)(b-2c)=0$.

• Trường hợp 1: $2b-c=0$, chọn $b=1 \Rightarrow c=2; a=2$ $(P)\colon 2x+y+2z-19=0$ (P) không chứa điểm $M(6;2;2)$, $M\in\Delta$ nên $(P) \parallel \Delta$. Vậy chọn $2x+y+2z-19=0$.

• Trường hợp 2: $b-2c=0$, chọn $c=1, b=2 \Rightarrow a=2$. $(P)\colon 2x+2y+z-18=0$, (P) chứa điểm $M(6;2;2)$ nên loại.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Phương trình $\sin 5x-\sin x=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2018\pi;2018\pi]$?

(A) 16145. (B) 20181. (C) 16144. (D) 20179.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\sin 5x-\sin x=0 &\Leftrightarrow \sin 5x=\sin x \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x=x+k2\pi \\ 5x=\pi-x+k2\pi \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\dfrac{\pi}{2} \\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=k\dfrac{\pi}{2} & (k\in\mathbb{Z}) \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+m\pi & (m\in\mathbb{Z}) \\ x=\dfrac{\pi}{6}+n\pi & (n\in\mathbb{Z})\,. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vì $x \in [-2018\pi; 2018\pi]$ nên $\begin{cases} -2018\pi \le k\dfrac{\pi}{2} \le 2018\pi \\ -2018\pi \le \dfrac{5\pi}{6} + m\pi \le 2018\pi \\ -2018\pi \le \dfrac{\pi}{6} + n\pi \le 2018\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4036 \le k \le 4036 \\ -\dfrac{12113}{6} \le m \le \dfrac{12103}{6} \\ -\dfrac{12109}{6} \le n \le \dfrac{12107}{6} \end{cases}$. Do đó có 8073 giá trị k, 4036 giá trị m, 4036 giá trị n, suy ra số nghiêm cần tìm là 16145 nghiệm.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Hệ số của x^5 trong khai triển $f(x) = (1 + x + 3x^3)^{10}$ thành đa thức là

A 1836. B 1380. C 3480. D 1332.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^k (x + 3x^3)^k = \sum\limits_{k=0}^{10} \left(\sum\limits_{i=0}^{k} \mathrm{C}_{10}^k \mathrm{C}_k^i \cdot 3^i \cdot x^{k+2i} \right)$.

Theo giả thiết $\begin{cases} k + 2i = 5 \\ 0 \le i \le k \le 10 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} i = 0, k = 5 \\ i = 1, k = 3. \end{array}\right.$

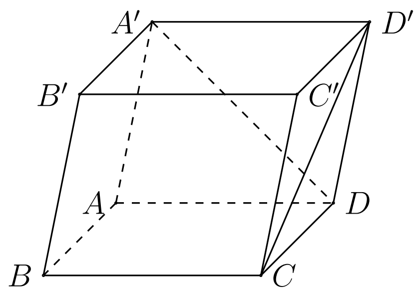
Vậy hệ số của x^5 là

$\mathrm{C}_{10}^5 \mathrm{C}_5^0 + \mathrm{C}_{10}^3 \mathrm{C}_3^1 \cdot 3^1 = 1332$.

Chọn đáp án D □

Câu 46.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng a, $\widehat{BCD} = \widehat{A'D'D} = \widehat{BB'A'} = 60^\circ$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'D$ và CD' bằng



A $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

B $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

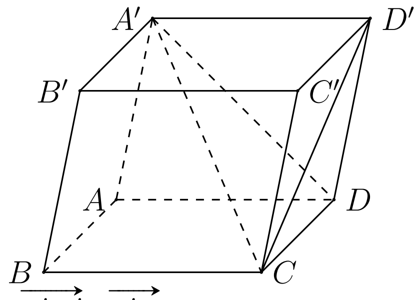
C $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

D $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Từ dữ kiện đề bài, ta suy ra $CD' = a$; $A'D = a$, $\widehat{B'AA'} = 120^\circ$, $\widehat{AA'D'} = 120^\circ$.

Ta có



$$\begin{aligned} A'C^2 &= \overrightarrow{A'C}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{A'A}\right)^2 \\ &= A'B'^2 + A'D'^2 + A'A^2 + 2\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'D'} + 2\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'A} + 2\overrightarrow{A'D'} \cdot \overrightarrow{A'A} \\ &= a^2 + a^2 + a^2 + 2A'B' \cdot A'D' \cos\widehat{B'A'D'} + 2A'B' \cdot A'A \cos\widehat{B'A'A} + 2A'D' \cdot A'A \cos\widehat{D'A'A} \\ &= 3a^2 + 2 \cdot a \cdot a \cos 60^\circ + 2 \cdot a \cdot a \cos 120^\circ + 2 \cdot a \cdot a \cos 120^\circ \\ &= 2a^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow A'C = a\sqrt{2}$. Suy ra $\Delta A'DC$, $\Delta D'AC$ vuông cân lần lượt tại D và D'.

Gọi H là trung điểm của $A'C \Rightarrow DH \perp (A'D'C)$. Đặt $\mathrm{d}(A'D, CD') = h$.

Dựng hình chữ nhật $A'D'CE$ sao cho

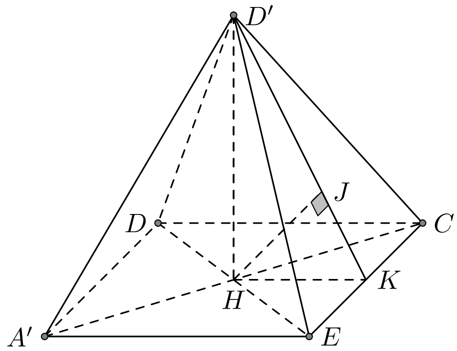
$$\begin{aligned} h &= \mathrm{d}(A'D,(D'CE)) \\ &= \mathrm{d}(A',(D'CE)) \\ &= 2\cdot \mathrm{d}(H,(D'CF)) \\ &= 2HJ. \end{aligned}$$

Gọi K là trung điểm CE: $HK = \dfrac{1}{2}DC = \dfrac{a}{2}$.

$D'H = \dfrac{1}{2}A'C = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (Do $\Delta D'A'C$ vuông cân tại D').

Suy ra $\dfrac{1}{HJ^2} = \dfrac{1}{HK^2} + \dfrac{1}{D'H^2} = \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{2}{a^2} \Rightarrow HJ = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

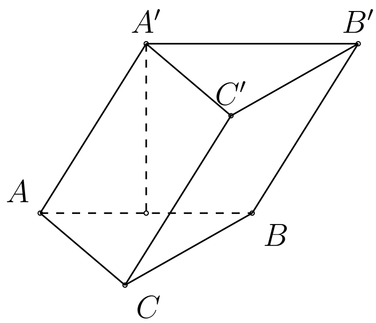
Vậy $\mathrm{d}(A'D, CD') = 2HJ = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.



Chọn đáp án (B) □

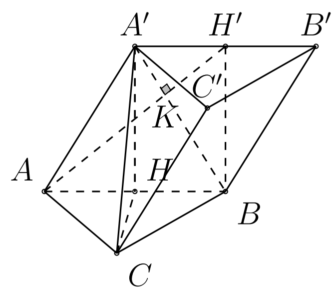
Câu 47.

Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AB. Nếu AC' và $A'B$ vuông góc với nhau thì khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích là



A $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{2}$. **B** $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{4}$. **C** $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{8}$. **D** $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{24}$.

Lời giải.



Diện tích đáy là $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Gọi H, H' lần lượt là trung điểm của AB, $A'B'$ và $K = AH' \cap A'B$.

Ta có $CH \perp AB, CH \perp A'H \Rightarrow CH \perp (AA'B'B) \Rightarrow C'H' \perp (AA'B'B) \Rightarrow C'H' \perp A'B$.

Lại có $A'B \perp C'H', A'B \perp AC' \Rightarrow A'B \perp (AC'H) \Rightarrow A'B \perp AH'$ (tại K).

Đặt $A'H = x \Rightarrow H'B = x$.

Ta có $AB = 2A'H' \Rightarrow KB = \dfrac{2}{3}A'B = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^2 + \dfrac{a^2}{4}}, KA = \dfrac{2}{3}AH' = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^2+a^2}$.

$\triangle KAB$ vuông tại K nên

$$\begin{aligned} KB^2 + KA^2 = a^2 &\Leftrightarrow \frac{4}{9}\left(2x^2 + \frac{5a^2}{4}\right) = a^2 \\ &\Leftrightarrow 8x^2 + 5a^2 = 9a^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $V = S_{ABC} \cdot A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Tính $I = \displaystyle\int_1^2 \left(2019\log_2 x + \frac{1}{\ln 2}\right) x^{2018}\,\mathrm{d}x$.

A $I = 2^{2018}$. B $I = 2^{2017}$. C $I = 2^{2020}$. D $I = 2^{2019}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = 2019\log_2 x + \dfrac{1}{\ln 2} \\ \mathrm{d}v = x^{2018}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{2019}{x\ln 2}dx \\ v = \dfrac{x^{2019}}{2019} \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \left(2019\log_2 x + \frac{1}{\ln 2}\right)\frac{x^{2019}}{2019}\Bigg|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^{2018}}{\ln 2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2^{2019} + \frac{2^{2019}}{2019\ln 2} - \frac{1}{2019\ln 2} - \frac{x^{2019}}{2019\ln 2}\Bigg|_1^2 \\ &= 2^{2019} + \frac{2^{2019}}{2019\ln 2} - \frac{1}{2019\ln 2} - \frac{2^{2019}}{2019\ln 2} + \frac{1}{2019\ln 2} \\ &= 2^{2019}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 49. Trong mặt phẳng phức, cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + i| \le \sqrt{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $|z + 1| \le \sqrt{2}$. B $|z + i| \le \sqrt{2}$.

C $|2z + 1 - i| \le 2$. D $|2z - 1 + i| \le 3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa $|z - 1 + i| \le \sqrt{2}$ là hình tròn (1) tâm $I(1; -2)$ bán kính $r = \sqrt{2}$.

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa $|2z - 1 + i| \le 3\sqrt{2}$ là hình tròn (2) có tâm $I_1\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$, $r_1 = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Nhận thấy hình tròn (1) nằm trong hình tròn (2).

Chọn đáp án D □

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(2; 2; -3)$, $N(-4; 2; 1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M, nhận $\vec{u} = (a; b; c)$ làm véc-tơ chỉ phương và song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x + y + z = 0$ sao cho khoảng cách từ N đến Δ đạt giá trị nhỏ nhất. Biết $|a|$, $|b|$ là hai số nguyên tố cùng nhau, khi đó $|a| + |b| + |c|$ bằng

A 13 . B 14. C 15. D 16.

Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với $(P) \Rightarrow (\alpha): 2x + y + z - 3 = 0$.
Gọi H là hình chiếu của N lên $(\alpha) \Rightarrow H(-8, 10, 9)$.
Để khoảng cách từ N đến Δ là nhỏ nhất thì Δ phải đi qua H.
Khi đó vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{MH} = (-10; 8; 12)$. Vậy $a = -5, b = 4, c = 6$.
Chọn đáp án C □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. B	3. D	4. C	5. C	6. C	7. C	8. B	9. B	10. C
11. C	12. B	13. D	14. D	15. C	16. A	17. B	18. A	19. B	20. D
21. A	22. A	23. C	24. A	25. D	26. D	27. A	28. D	29. A	30. C
31. B	32. C	33. C	34. D	35. A	36. A	37. A	38. B	39. A	40. B
41. A	42. B	43. D	44. A	45. D	46. B	47. C	48. D	49. D	50. C

89 ĐỀ THI THỬ THPTQG, LẦN 2, TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH, ĐỒNG NAI

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$, $\int\limits_{-1}^{7} f(t)\,\mathrm{d}t = 9$. Giá trị của $\int\limits_{2}^{7} f(z)\,\mathrm{d}z$ là

A. 7. B. 3. C. 11. D. 5.

Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_{2}^{7} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{2}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int\limits_{-1}^{7} f(t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 9 - 2 = 7.$$

Chọn đáp án A □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - z - 1 = 0$. Một véc-tơ pháp tuyến của (P) có toạ độ là

A. $(1;1;-1)$. B. $(1;-1;0)$. C. $(1;0;-1)$. D. $(1;-1;-1)$.

Lời giải.

Dựa vào phương trình mặt phẳng (P), ta có một véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1;0;-1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Phần ảo của số phức $\dfrac{1}{1+i}$ là

A. $\dfrac{1}{2}$. B. $-\dfrac{1}{2}$. C. $-\dfrac{1}{2}i$. D. -1.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ nên phần ảo của số phức $\dfrac{1}{1+i}$ là $-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Điểm $M(2;-2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số nào?

A. $y = -2x^3 + 6x^2 - 10$. B. $y = x^4 - 16x^2$.
C. $y = -x^2 + 4x - 6$. D. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Ta có $y' = 3x^2 - 6x$; $y'' = 6x - 6$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

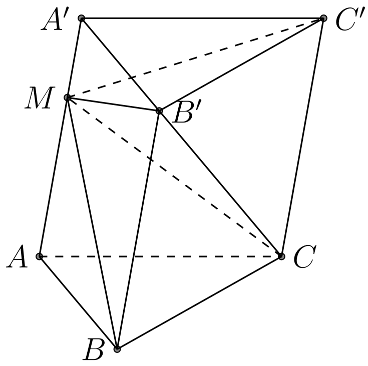
Do $y''(2) = 6 > 0$ nên điểm $M(2;-2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V. Gọi M là điểm tuỳ ý trên cạnh AA'. Thể tích của khối đa diện $M.BCC'B'$ tính theo V là

Ⓐ $\dfrac{V}{2}$. Ⓑ $\dfrac{V}{6}$. Ⓒ $\dfrac{V}{3}$. **D** $\dfrac{2V}{3}$.

Lời giải.



Ta có $\dfrac{V_{MABC}}{V_{A'ABC}} = \dfrac{MA}{AA'}$ và $\dfrac{V_{A'ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \dfrac{1}{3}$

nên suy ra $\dfrac{V_{MABC}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \dfrac{MA}{3AA'}$.

Chứng minh tương tự ta có $\dfrac{V_{MA'B'C'}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \dfrac{MA'}{3AA'}$.

Suy ra $\dfrac{V_{MABC}}{V_{ABC.A'B'C'}} + \dfrac{V_{MA'B'C'}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \dfrac{MA}{3AA'} + \dfrac{MA'}{3AA'} = \dfrac{1}{3}$.

Do đó $V_{MABC} + V_{MA'B'C'} = \dfrac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'}$, từ đó suy ra

$V_{M.BCC'B'} = V_{ABC.A'B'C'} - (V_{MABC} + V_{MA'B'C'}) = \dfrac{2V}{3}$.

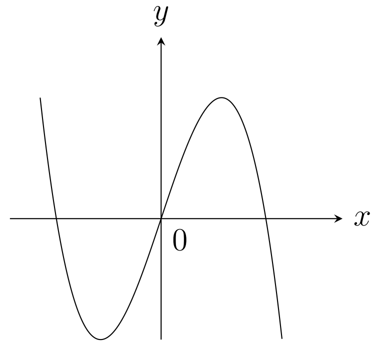
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 6.

Biết đồ thị của một trong bốn phương án **A**, **B**, **C**, **D** như hình vẽ. Đó là hàm số nào?

A $y = -x^3 + 3x$. Ⓑ $y = x^3 - 3x$.

Ⓒ $y = x^4 - 2x^2$. Ⓓ $y = -x^4 - 3x$.



Lời giải.

Dựa vào hình dạng của đồ thị, ta có thể thấy đây là đồ thị của hàm số bậc 3 có hệ số $a < 0$.

Trong các đáp án đề bài cho, ta thấy chỉ có đáp án $y = -x^3 + 3x$ là phù hợp.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 7. Cho $0 < a \neq 1$ và x, y là các số thực âm. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\log_a(-x^2y) = -2\log_a x + \log_a y$. Ⓑ $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{\log_a(-x)}{\log_a(-y)}$.

Ⓒ $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$. **D** $\log_a\left(x^4y^2\right) = 2\left(\log_a x^2 + \log_a |y|\right)$.

Lời giải.

Với các điều kiện đề bài cho, ta có

$\log_a\left(x^4y^2\right) = \log_a x^4 + \log_a y^2 = 2\log_a x^2 + 2\log_a |y| = 2\left(\log_a x^2 + \log_a |y|\right)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 8. Hàm số nào trong các hàm số sau ***không*** liên tục trên khoảng $(-1; 1)$?

Ⓐ $y = \cos x$. Ⓑ $y = \sin x$.

Ⓒ $y = \tan x$. **D** $y = \begin{cases} \sin x, & \text{nếu } x \geq 0, \\ \cos x, & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \begin{cases} \sin x, & \text{nếu } x \geq 0, \\ \cos x, & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ với $x \in (-1; 1)$.

Ta có $\lim\limits_{x \to 0^+} y = \lim\limits_{x \to 0^+} \sin x = 0$ và $\lim\limits_{x \to 0^-} y = \lim\limits_{x \to 0^-} \cos x = 1$ nên $\lim\limits_{x \to 0} y$ không tồn tại nên hàm số không liên tục tại điểm $x = 0$.

Suy ra hàm số không liên tục trên khoảng $(-1; 1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ là

A $\sin x - \cos x + C$. **B** $\sin x + \cot x + C$. **C** $\cos x - \sin x + C$. **D** $\sin x + \cos x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int (\sin x + \cos x)\, \mathrm{d}x = -\cos x + \sin x + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Số tập hợp con gồm ba phần tử của tập hợp có mười phần tử là

A C_{10}^3. **B** 10^3. **C** A_{10}^3. **D** 3^{10}.

Lời giải.

Số tập hợp con gồm ba phần tử của tập hợp có mười phần tử là C_{10}^3.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(\mathcal{S})$ có phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0.$$

Toạ độ tâm T của $(\mathcal{S})$ là

A $T(1; 2; 3)$. **B** $T(2; 4; 6)$. **C** $T(-2; -4; -6)$. **D** $T(-1; -2; -3)$.

(2H3Y1-3)

Lời giải.

Toạ độ tâm T của $(\mathcal{S})$ là $T(1; 2; 3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Gieo ba con súc sắc cân đối và đồng chất. Xác suất để số chấm xuất hiện trên ba mặt lập thành một cấp số cộng với công sai bằng 1 là

A $\frac{1}{6}$. **B** $\frac{1}{36}$. **C** $\frac{1}{9}$. **D** $\frac{1}{27}$.

Lời giải.

- Số phần tử không gian mẫu là $6^3 = 216$.
- Các bộ ba số lập thành một cấp số cộng với công sai bằng 1 là $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(3, 4, 5)$, $(4, 5, 6)$. Bốn trường hợp trên với các hoán vị sẽ có $4 \cdot 6 = 24$ khả năng thuận lợi cho biến cố.
- Xác suất cần tìm là $\frac{24}{216} = \frac{1}{9}$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $(\mathcal{S})\colon (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 81$ tại điểm $P(-5; -4; 6)$ là

A $7x + 8y + 67 = 0$. **B** $4x + 2y - 9z + 82 = 0$.

C $x - 4z + 29 = 0$. **D** $2x + 2y - z + 24 = 0$.

Lời giải.

Mặt cầu $(\mathcal{S})$ có tâm $I(1; 2; 3)$.

Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm. Do (α) tiếp xúc với $(\mathcal{S})$ tại P nên mặt phẳng (α) đi qua P và có

véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{IP} = (-6; -6; 3)$.
Phương trình mặt phẳng (α) là $-6(x+5) - 6(y+4) + 3(z-6) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y - z + 24 = 0$.
Chọn đáp án D □

Câu 14. Tìm hàm số $f(x)$, biết rằng $f'(x) = 4\sqrt{x} - x$ và $f(4) = 0$.

A. $f(x) = \dfrac{8x\sqrt{x}}{3} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{40}{3}$.
B. $f(x) = \dfrac{8x\sqrt{x}}{3} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{88}{3}$.
C. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{x^2}{2} + 1$.
D. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 1$.

Lời giải.
Ta có $f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int (4\sqrt{x} - x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{8x\sqrt{x}}{3} - \dfrac{x^2}{2} + C$.
Do $f(4) = 0$ nên ta có $\dfrac{64}{3} - 8 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\dfrac{40}{3}$. Vậy $f(x) = \dfrac{8x\sqrt{x}}{3} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{40}{3}$.
Chọn đáp án A □

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(8; 9; 2)$, $B(3; 5; 1)$, $C(11; 10; 4)$. Số đo góc A của tam giác ABC là

A. 150°.
B. 60°.
C. 120°.
D. 30°.

Lời giải.
Ta có $\widehat{BAC} = \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$, $\overrightarrow{AB} = (-5; -4; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (3; 1; 2)$. Ta có

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \dfrac{-21}{\sqrt{42} \cdot \sqrt{14}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = 150^\circ.$$

Chọn đáp án A □

Câu 16. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 6t + 12t^2$ (m/s^2). Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là

A. $\dfrac{4300}{3}$ m.
B. 4300 m.
C. $\dfrac{98}{3}$ m.
D. 11100 m .

Lời giải.
Ta có công thức chuyển động của vật theo thời gian kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là

$$v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}x = \int (6t + 12t^2)\,\mathrm{d}x = 4t^3 + 3t^2 + C.$$

Do $v(0) = 10$ nên ta có $C = 10$. Suy ra $v(t) = 4t^3 + 3t^2 + 10$. Từ đó ta có quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là

$$s = \int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}x = \int_0^{10} (4t^3 + 3t^2 + 10)\,\mathrm{d}x = 11100.$$

Chọn đáp án D □

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị của tham số m thoả mãn đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+3}{x^2 - x - m}$ có đúng hai đường tiệm cận?

A. Bốn.
B. Hai.
C. Một.
D. Ba.

Lời giải.

- Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x+3}{x^2-x-m} = 0$, nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 0$.
- Điều kiện cần đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận là phương trình $x^2 - x - m = 0$ có đúng một nghiệm $x = -3$ hay có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm là -3. Tức $3^2 + 3 - m = 0$ hoặc $\Delta = 0$. Từ đây suy ra $m = 12$ hoặc $m = -\dfrac{1}{4}$
- Với $m = 12$, hàm số thành $y = \dfrac{x+3}{x^2-x-12} = \dfrac{x+3}{(x+3)(x-4)}$. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận là $y = 0$ và $x = 4$.
- Với $m = -\dfrac{1}{4}$, hàm số thành $y = \dfrac{x+3}{\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2}$. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận là $y = 0$ và $x = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Cho hai khối nón $(\mathcal{N}_1)$, $(\mathcal{N}_2)$. Chiều cao khối nón $(\mathcal{N}_2)$ bằng hai lần chiều cao khối nón $(\mathcal{N}_1)$ và đường sinh khối nón $(\mathcal{N}_2)$ bằng hai lần đường sinh khối nón $(\mathcal{N}_1)$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích hai khối nón $(\mathcal{N}_1)$, $(\mathcal{N}_2)$. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A $\dfrac{1}{16}$. **B** $\dfrac{1}{8}$. **C** $\dfrac{1}{6}$. **D** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Gọi $r_1, h_1, l_1, r_2, h_2, l_2$ lần lượt là bán kính đường tròn đáy, đường cao và đường sinh của hai khối nón $(\mathcal{N}_1)$, $(\mathcal{N}_2)$.

Theo đề ta có $h_2 = 2h_1$ và $l_2 = 2l_1$, suy ra $r_2 = 2r_1$. Từ đó suy ra

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \cdot \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{8}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 19. Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ song song với trục hoành là

A một. **B** ba. **C** hai. **D** không.

Lời giải.

Gọi $M(x_0, y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến song song với trục hoành. Suy ra

$$y'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 4x_0^3 - 4x_0 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 1 \\ x_0 = -1. \end{array}\right.$$

- Nếu $x_0 = 0$ thì $y_0 = -3$, suy ra phương trình tiếp tuyến là $y = -3$ (nhận).
- Nếu $x_0 = 1$ thì $y_0 = -4$, suy ra phương trình tiếp tuyến là $y = -4$ (nhận).
- Nếu $x_0 = -1$ thì $y_0 = -4$, suy ra phương trình tiếp tuyến là $y = -4$ (nhận).

Vậy có hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ song song với trục hoành.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Đạo hàm của hàm số $y = \log_2(1+\sqrt{x})$ là

A $y' = \dfrac{\ln 2}{2\sqrt{x}\cdot(1+\sqrt{x})}$.
B $y' = \dfrac{1}{(1+\sqrt{x})\cdot \ln 2}$.
C $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+\sqrt{x})\cdot \ln 2}$.
D $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+\sqrt{x})\cdot \ln 4}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{1}{\ln 2\cdot(1+\sqrt{x})}\cdot(1+\sqrt{x})' = \dfrac{1}{\ln 2\cdot(1+\sqrt{x})}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+\sqrt{x})\cdot\ln 4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ có cạnh đáy bằng 2, độ dài đường chéo của các mặt bên bằng $\sqrt{5}$. Số đo góc giữa hai mặt phẳng (A_1BC) và (ABC) là

A 45°. **B** 90°. **C** 60°. **D** 30°.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm cạnh BC, thì góc cần tìm là $\widehat{A_1MA}$.

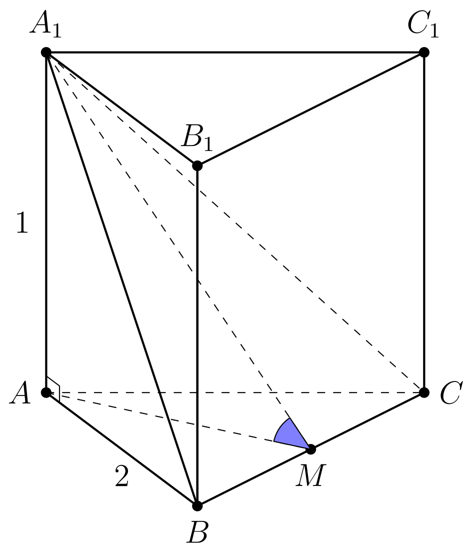
Trong tam giác A_1AC, ta có

$$A_1A = \sqrt{A_1C^2 - AC^2} = \sqrt{5-4} = 1.$$

Trong tam giác A_1AM, ta có

$$tan\widehat{A_1MA} = \frac{A_1A}{AM} = \frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Suy ra góc cần tìm bằng 30°.



Chọn đáp án D □

Câu 22. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^2(m-x) - m$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$?

A Hai. **B** Một. **C** Không. **D** Vô số.

Lời giải.

Ta có $y = -x^3 + mx^2 - m$, $y' = -3x^2 + 2mx = x(-3x+2m)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{2m}{3}. \end{array}\right.$

- Nếu $\dfrac{2m}{3} < 0$ thì ta có hàm số đồng biến trên $\left(\dfrac{2m}{3};0\right)$ nên không thể đồng biến trên khoảng $(1;2)$.
- Nếu $\dfrac{2m}{3} = 0$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- Nếu $\dfrac{2m}{3} > 0$ thì ta có hàm số đồng biến trên $\left(0;\dfrac{2m}{3}\right)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$ khi và chỉ khi $(1;2) \subset \left(0;\dfrac{2m}{3}\right) \Leftrightarrow 0 < 1 < 2 \leqslant \dfrac{2m}{3} \Leftrightarrow m \geqslant 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d\colon y = x - m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt là

(A) $m < -1$.
(B) $m > -5$.
(C) $m < -5$ hoặc $m > -1$.
(D) $-5 < m < -1$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x - m = \frac{2x+1}{x+1} \Leftrightarrow (x-m)(x+1) = (2x+1) \Leftrightarrow x^2 - (m+1)x - m - 1 = 0. \quad (1)$$

Dễ thấy phương trình (1) không có nghiệm $x = -1$ nên đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m-1) > 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 5 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -5 \\ m > 1. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Cho số phức z thoả $z - |z| = -2 - 4i$. Mô-đun của z là

(A) 3.
(B) 25.
(C) 5.
(D) 4.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Theo đề bài ta có

$$a + bi - \sqrt{a^2 + b^2} = -2 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} a - \sqrt{a^2+b^2} = -2 \\ b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -4. \end{cases}$$

Vậy mô-đun của z là $\sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Tập nghiệm của phương trình $9^{x+1} = 27^{2x+1}$ là

(A) $\varnothing$.
(B) $\left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$.
(C) $\{0\}$.
(D) $\left\{-\dfrac{1}{4}; 0\right\}$.

Lời giải.

Ta có $9^{x+1} = 27^{2x+1} \Leftrightarrow 9 \cdot 9^x = 27 \cdot 729^x \Leftrightarrow 81^x = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng qua ba điểm $A(-3;0;0)$, $B(0;-2;0)$, $C(0;0;1)$ được viết dưới dạng $ax + by - 6z + c = 0$. Giá trị của $T = a + b - c$ là

(A) -11.
(B) -7.
(C) -1.
(D) 11.

Lời giải.

Sử dụng phương trình đoạn chắn, ta có phương trình mặt phẳng (ABC) là

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow 2x + 3y - 6z + 6 = 0.$$

Vậy $T = a + b - c = 2 + 3 - 6 = -1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thoả mãn $\log_a b = \dfrac{3}{2}$, $\log_c d = \dfrac{5}{4}$. Nếu $a - c = 9$, thì $b - d$ nhận giá trị nào?

(A) 85. (B) 71. (C) 76. **(D) 93.**

Lời giải.

- Ta có $b = a^{\frac{3}{2}}$, $d = c^{\frac{5}{4}}$. Do b, d là các số nguyên dương nên $a = x^2$, $c = y^4$, với x, y là các số nguyên dương.
- Ta có $a - c = x^2 - y^4 = (x - y^2)\cdot(x + y^2) = 9$. Suy ra $(x - y^2; x + y^2) = (1; 9)$. Dễ dàng suy ra $x = 5$, $y = 2$.
- Do đó, $b - d = x^3 - y^5 = 93$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Có bao nhiêu số phức z thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau: $|z - 10 + 2i| = |z + 2 - 14i|$ và $|z - 1 - 10i| = 5$?

(A) Vô số. **(B) Một.** (C) Không. (D) Hai.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z. Từ điều kiện ban đầu ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{(x-10)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-14)^2} \\ \sqrt{(x-1)^2 + (y-10)^2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 12 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-10)^2 = 25. \end{cases}$$

Để ý đường thẳng $3x - 4y + 12 = 0$ tiếp xúc với đường tròn $(x-1)^2 + (y-10)^2 = 25$, nên hệ trên chỉ có một cặp nghiệm $(x; y)$, suy ra chỉ có một số phức thỏa yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Giả sử $(1 - x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2n}x^{2n}$. Đặt $s = a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}$, khi đó, s bằng

(A) $\dfrac{3^n + 1}{2}$. (B) $\dfrac{3^n - 1}{2}$. (C) $\dfrac{3^n}{2}$. (D) $2^n + 1$.

Lời giải.

- Thay $x = 1$ vào giải thiết đã cho, ta được
$$a_0 + a_1 + a_1 + \cdots + a_{2n} = 1. \tag{4}$$
- Thay $x = -1$ vào giải thiết đã cho, ta được
$$a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{2n} = 3^n. \tag{5}$$
- Cộng (4) và (9), ta có $3^n + 1 = 2\left(a_0 + +a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}\right)$ hay $s = \dfrac{3^n + 1}{2}$

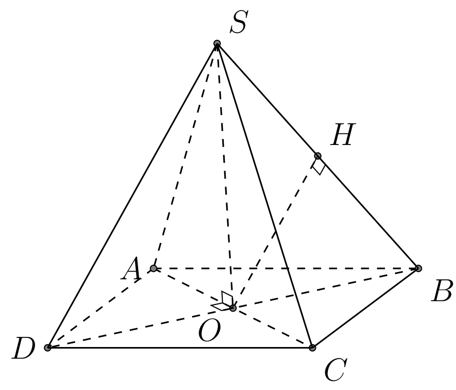
Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB là

(A) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (B) a. **(C) $\dfrac{a}{2}$.** (D) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có AC vuông góc với mặt phẳng (SBD) tại O. Kẻ OH vuông góc SB, thì OH là khoảng cách cần tìm. Tam giác SOB vuông cân tại O, nên $OH = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{a}{2}$.



Chọn đáp án C ☐

Câu 31. Tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 9x - 5$ có phương trình là

A. $y = 9x - 7$. B. $y = -2x + 4$. C. $y = 6x - 4$. D. $y = 2x$.

Lời giải.

Ta có hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$ là

$$y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 + 9 = 3(x_0 - 1)^2 + 6 \geq 6,\ \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x_0 = 1$. Vậy tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất là 6 khi $x_0 = 1$. Từ đó ta có phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 6x - 4$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 32. Nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geqslant 2$ là

A. $3 \leqslant x \leqslant \dfrac{13}{4}$. B. $3 < x \leqslant \dfrac{13}{4}$. C. $x \leqslant \dfrac{13}{4}$. D. $x \geqslant \dfrac{13}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geqslant 2 \Leftrightarrow 0 < x - 3 \leq \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 3 < x \leq \dfrac{13}{4}$.

Chọn đáp án B ☐

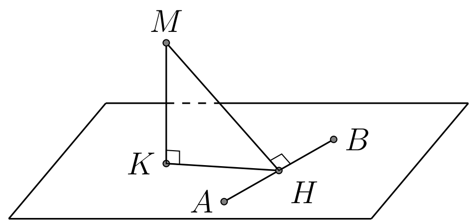
Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1;-7;-8)$, $B(2;-5;-9)$ sao cho khoảng cách từ điểm $M(7;-1;-2)$ đến (P) lớn nhất có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a;b;4)$. Giá trị của tổng $a + b$ là

A. 2. B. -1. C. 6. D. 3.

Lời giải.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng AB và mặt phẳng (P).

Do M, A, B cố định nên H cố định. Ta có $MK \leq MH$ nên khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất khi và chỉ khi K trùng với H. Vậy (P) là mặt phẳng chứa A, B và vuông góc với MH.



Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;2;-1)$. $H \in AB \Rightarrow H(1+t; -7+2t; -8-t)$, $(t \in \mathbb{R})$. Khi đó $\overrightarrow{MH} = (t-6; 2t-6; -t-6)$. Ta có

$$MH \perp AB \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow t - 6 + 4t - 12 + t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Với $t = 2$ thì (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{MH} = (-4; -2; -8) = (-2) \cdot (2; 1; 4)$ nên suy ra $\vec{n} = (2; 1; 4)$ là một véc-tơ pháp tuyến khác của (P). Suy ra $a + b = 2 + 1 = 3$.
Chọn đáp án D □

Câu 34. Với n là số nguyên dương, đặt

$$S_n = \frac{1}{1\sqrt{2} + 2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}.$$

Khi đó, $\lim S_n$ bằng

A 1. B $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. C $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$. D $\dfrac{1}{\sqrt{2}+2}$.

Lời giải.

Chú ý với mọi số nguyên dương k, ta có

$$\frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

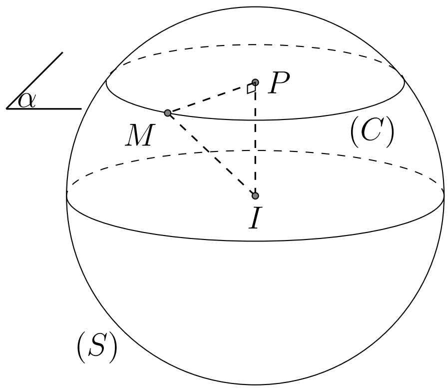
Lần lượt thay $k = 1, 2, \ldots, n$, cộng lại ta được $S_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. Do đó, $\lim S_n = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+6y+8z-599 = 0$. Biết rằng mặt phẳng $(\alpha)\colon 6x - 2y + 3z + 49 = 0$ cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có tâm là điểm $P(a; b; c)$ và bán kính đường tròn (C) là r. Giá trị của tổng $S = a + b + c + r$ là

A $S = -13$. B $S = 37$. C $S = 11$. D $S = 13$.

Lời giải.



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; -4)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-4)^2 - (-599)} = 25$.
Tâm P của đường tròn (C) chính là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (α).
Do $IP \perp (\alpha)$ nên IP nhận véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (6; -2; 3)$ của (α) làm véc-tơ chỉ phương. Suy ra $P(1+6t; -3-2t; -4+3t)$ $(t \in \mathbb{R})$.

Do $P \in (\alpha)$ nên ta có $6(1+6t) - 2(-3-2t) + 3(-4+3t) + 49 = 0 \Leftrightarrow t = -1$.
Vậy $P(-5; -1; -7)$.
Lấy một điểm M bất kỳ trên đường tròn (C), ta có $r = MP = \sqrt{IM^2 - IP^2} = 24$.
Vậy $S = a + b + c + r = -5 - 1 - 7 + 24 = 11$.
Chọn đáp án C □

Câu 36. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc đoạn $[0; 2018]$ sao cho tồn tại số thực x để cho ba số

$$5^{x+1} + 5^{1-x}, \quad \frac{a}{2}, \quad 25^x + 25^{-x},$$

theo thứ tự đó, lập thành một cấp số cộng?

A 2007. B 2018. C 2006. D 2008.

Lời giải.

Ba số đã cho lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $25^x + 25^{-x} + 5^{x+1} + 5^{1-x} = a$. (1)

Đặt $t = 5^x + 5^{-x}$, $t \geqslant 2$, (1) trở thành $t^2 + 5t - 2 = a$. (2)

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 5t - 2$, $t \in [2; +\infty)$. Ta có bảng biến thiên

t	2	$+\infty$
$f(t)$	12 ↗	$-\infty$

Căn cứ vào bảng biến thiên, phương trình (2) có nghiệm $t \in [2; +\infty)$ khi và chỉ khi $a \geq 12$. Vậy trong đoạn $[0; 2018]$ có 2007 số nguyên a thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 4$, $BC = 6$; chiều cao của lăng trụ bằng 10. Gọi K, M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BB_1, A_1B_1, BC. Thể tích khối tứ diện C_1KMN là

A 15. **B** 5. **C** 45. **D** 10.

Lời giải.

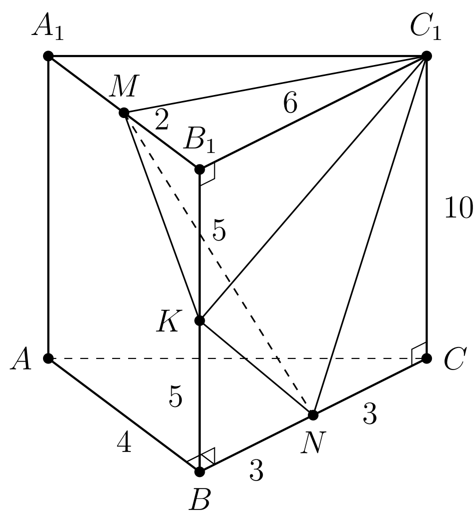
Ta có $V_{C_1KMN} = V_{M.C_1KN}$.

MB_1 vuông góc (BCC_1B_1), nên

$$V_{MC_1KN} = \frac{1}{3} \cdot MB_1 \cdot S_{C_1KN}.$$

$$\begin{aligned} S_{C_1KN} &= S_{BCC_1B_1} - S_{KB_1C_1} - S_{NCC_1} - S_{KBN} \\ &= 60 - 15 - 15 - \frac{15}{2} = \frac{45}{2}. \end{aligned}$$

$$V_{MC_1KN} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{45}{2} = 15.$$

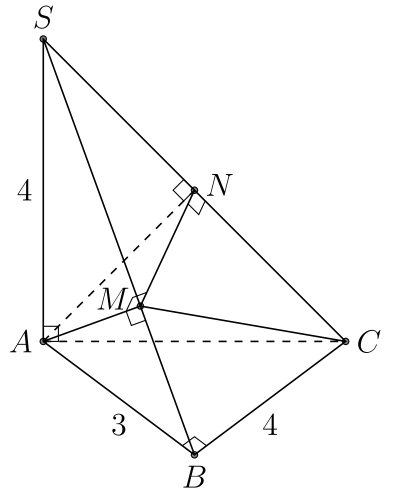


Chọn đáp án A □

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 3$, $BC = 4$, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 4$. Gọi AM, AN lần lượt là chiều cao các tam giác SAB và SAC. Thể tích khối tứ diện $AMNC$ là

A $\frac{128}{41}$. **B** $\frac{256}{41}$. **C** $\frac{768}{41}$. **D** $\frac{384}{41}$.

Lời giải.



- Ta có $AM \perp (SBC)$, nên $V_{AMNC} = \dfrac{1}{3} \cdot AM \cdot S_{MNC}$.
- Ta có $AM = \dfrac{12}{5}$, $AN = \dfrac{20\sqrt{41}}{41}$, $AC = 5$.
- $SC \perp (AMN)$, nên tam giác MNC vuông tại N. Do đó

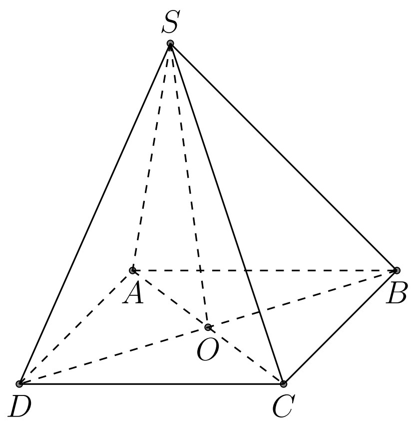
$$\begin{aligned} V_{AMNC} &= \frac{1}{6} \cdot AM \cdot MN \cdot NC \\ &= \frac{1}{6} \cdot AM \cdot \sqrt{AN^2 - AM^2} \cdot \sqrt{AC^2 - AN^2} \\ &= \frac{128}{41}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA = 2$, $SB = 6$, $SC = 9$. Độ dài cạnh SD là

A 7. **B** 11. **C** 5. **D** 8.

Lời giải.



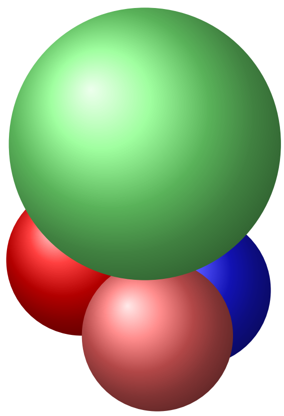
Gọi O là tâm của đáy. Theo hệ thức lượng trong tam giác, ta có $SA^2 + SC^2 = 2 \cdot SO^2 + \dfrac{AC^2}{2}$ và $SB^2 + SD^2 = 2 \cdot SO^2 + \dfrac{BD^2}{2}$.

Do $ABCD$ là hình chữ nhật, nên $AC = BD$. Từ những điều trên, ta có $SA^2 + SC^2 = SB^2 + SD^2$.

Từ đó suy ra $SD = \sqrt{SA^2 + SC^2 - SB^2} = 7$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40.



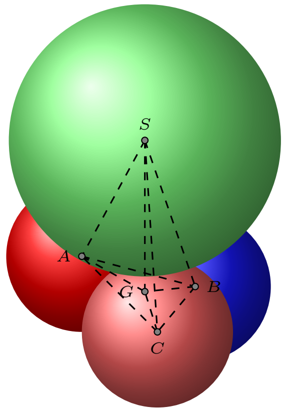
Ba quả bóng dạng hình cầu có bán kính bằng 1 đôi một tiếp xúc nhau và cùng tiếp xúc với mặt phẳng (P). Mặt cầu $(\mathcal{S})$ bán kính bằng 2 tiếp xúc với ba quả bóng trên. Gọi M là điểm bất kì trên $(\mathcal{S})$, MH là khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P). Giá trị lớn nhất của MH là

A $3 + \dfrac{\sqrt{30}}{2}$. **B** $3 + \dfrac{\sqrt{123}}{4}$. **C** $3 + \dfrac{\sqrt{69}}{3}$. **D** $\dfrac{52}{9}$.

Lời giải.

Gọi A, B, C là tâm của các mặt cầu bán kính bằng 1 và S là tâm của mặt cầu bán kính bằng 2. Ta có

$$AB = BC = CA = 2, \quad SA = SB = SC = 1 + 2 = 3.$$



Do đó, hình chóp $S.ABC$ là hình chóp đều. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, thì $SG \perp (ABC)$. Ta có

$$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{69}}{3}.$$

Khoảng cách lớn nhất là $\dfrac{\sqrt{69}}{3} + 2 + 1 = \dfrac{\sqrt{69}}{3} + 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác OAB với $O(0;0;0)$, $A(-1;8;1)$, $B(7;-8;5)$. Phương trình đường cao OH của tam giác OAB là

A $\begin{cases} x = 8t \\ y = -16t \\ z = 4t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

B $\begin{cases} x = 6t \\ y = 4t \\ z = 5t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

C $\begin{cases} x = 5t \\ y = -4t \\ z = 6t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

D $\begin{cases} x = 5t \\ y = 4t \\ z = 6t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Cách 1:

- Ta có $\overrightarrow{AB} = (8;-16;4) = 4 \cdot (2;-4;1)$ nên đường thẳng AB có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_{AB} = (2;-4;1)$. Suy ra phương trình đường thẳng AB là $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 8 - 4t \\ z = 1 + t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.
- $H \in AB \Rightarrow H(-1+2t; 8-4t; 1+t)$, $(t \in \mathbb{R})$.
- Khi đó $\overrightarrow{OH} = (-1+2t; 8-4t; 1+t)$. Ta có

$$OH \perp AB \Leftrightarrow \overrightarrow{OH} \cdot \vec{u}_{AB} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{11}{7}.$$

- Khi đó $\overrightarrow{OH} = \left(\frac{15}{7}; \frac{12}{7}; \frac{18}{7}\right) = \frac{3}{7} \cdot (5;4;6)$ nên đường thẳng OH có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_{OH} = (5;4;6)$.
- Phương trình đường thẳng OH là $\begin{cases} x = 5t \\ y = 4t \\ z = 6t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

Cách 2:

- Ta có $\begin{cases} OH \subset (OAB) \\ OH \perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_{OH} \cdot \vec{n}_{OAB} = 0 \\ \vec{u}_{OH} \cdot \vec{u}_{AB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_{OH}$ cùng phương với $\left[\vec{n}_{OAB}, \vec{u}_{AB}\right]$.

- $\overrightarrow{AB} = (8; -16; 4) = 4 \cdot (2; -4; 1)$ nên đường thẳng AB có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_{AB} = (2; -4; 1)$.
- $\overrightarrow{OA} = (-1; 8; 1)$, $\left[\vec{u}_{AB}, \overrightarrow{OA}\right] = (-12; -3; 12) = (-3) \cdot (4; 1; -4)$ nên mặt phẳng (OAB) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{OAB} = (4; 1; -4)$.
- $[\vec{n}_{OAB}, \vec{u}_{AB}] = (-15; -12; -18) = (-3) \cdot (5; 4; 6)$ nên OH có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_{OH} = (5; 4; 6)$.
- Từ đó suy ra phương trình đường thẳng OH là $\begin{cases} x = 5t \\ y = 4t \\ z = 6t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Cho tứ diện $ABCD$ biết $AB = BC = CA = 4$, $AD = 5$, $CD = 6$, $BD = 7$. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. 60°. B. 120°. C. 30°. D. 150°.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{AB \cdot CD} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right)}{AB \cdot CD} \\ &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot CD} \\ &= \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2 - (AB^2 + AC^2 - BC^2)}{2 \cdot AB \cdot CD} \\ &= \frac{AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2}{2 \cdot AB \cdot CD} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Vậy góc cần tìm bằng 60°.

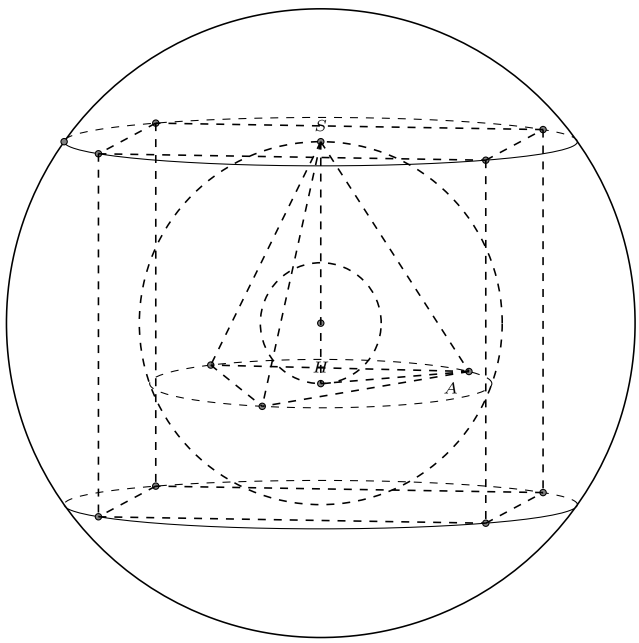
Chọn đáp án A □

Câu 43. Cho tứ diện đều $ABCD$ có mặt cầu nội tiếp là $(\mathcal{S}_1)$ và mặt cầu ngoại tiếp là $(\mathcal{S}_2)$. Một hình lập phương ngoại tiếp $(\mathcal{S}_2)$ và nội tiếp trong mặt cầu $(\mathcal{S}_3)$. Gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính các mặt cầu $(\mathcal{S}_1)$, $(\mathcal{S}_2)$, $(\mathcal{S}_3)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{3}$ và $\frac{r_2}{r_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. B. $\frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{3}$ và $\frac{r_2}{r_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

C. $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{3}$ và $\frac{r_2}{r_3} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$. D. $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{3}$ và $\frac{r_2}{r_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.



- Gọi a là cạnh của tứ diện đều. Khi đó, chiều cao h của tứ diện đều bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.
- Bán kính mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện là $r_2 = \dfrac{SA^2}{2h} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.
- Bán kính mặt cầu nội tiếp của tứ diện là $r_1 = h - r_2 = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$.
- Do đó, $r_1 : r_2 = 1 : 3$.
- Gọi b là cạnh của hình lập phương, thì $r_2 = \dfrac{b}{2}$ và $r_3 = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$. Do đó, $r_2 \colon r_3 = 1 \colon \sqrt{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Từ các chữ số thuộc tập hợp $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có chín chữ số khác nhau sao cho chữ số 1 đứng trước chữ số 2, chữ số 3 đứng trước chữ số 4 và chữ số 5 đứng trước chữ số 6?

A. 22680. B. 45360. C. 36288. D. 72576.

Lời giải.

- Số các số có chín chữ số khác nhau là 9!. Trong 9! số này, số các số mà chữ số 1 đứng trước chữ số 2 hoặc chữ số 1 đứng sau chữ số 2 là bằng nhau. Do đó, số các số mà chữ số 1 đứng trước chữ số 2 là $\dfrac{9!}{2}$.
- Tương tự, số các số mà chữ số 1 đứng trước chữ số 2 và chữ số 3 đứng trước chữ số 4 là $\dfrac{9!}{4}$.
- Số các số cần tìm là $\dfrac{9!}{8} = 45360$.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Khẳng định nào sau đây là đúng về phương trình

$$\sin\left(\frac{x}{x^2+6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{80}{x^2+32x+332}\right) = 0?$$

A. Số nghiệm của phương trình là 8.
B. Tổng các nghiệm của phương trình là 48.
C. Phương trình có vô số nghiệm thuộc $\mathbb{R}$.
D. Tổng các nghiệm của phương trình là 8.

Lời giải.

- Phương trình đã cho tương đương với
$$\sin\left(\frac{x}{x^2+6}\right)=\sin\left(\frac{80}{x^2+32x+332}\right). \tag{6}$$
- Ta biết rằng hàm số $y=\sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Ta chỉ ra rằng các hàm số $f(x)=\dfrac{x}{x^2+6}$ và $g(x)=\dfrac{60}{x^2+32x+332}$ nhận giá trị trong khoảng này.
Thật vậy
$$\left|\frac{x}{x^2+6}\right|\leqslant\left|\frac{x}{2\sqrt{6x^2}}\right|=\frac{1}{2\sqrt{6}}.$$
Mặt khác
$$0<\frac{80}{x^2+32x+332}=\frac{80}{(x+16)^2+76}\leqslant\frac{80}{76}<\frac{\pi}{2}.$$
- Từ những đánh giá trên, (6) xảy ra khi và chỉ khi
$$\frac{x}{x^2+6}=\frac{60}{x^2+32x+332}\Leftrightarrow x^3-48x^2+332x-480=0\Leftrightarrow x=2\vee x=6\vee x=40.$$
Tổng các nghiệm của phương trình đã cho là $2+6+40=48$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\forall x\in[0;\,2018]$, ta có $f(x)>0$ và $f(x)\cdot f(2018-x)=1$. Giá trị của tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^{2018}\frac{1}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x$ là

A. 2018. B. 4016. C. 0. D. 1009.

Lời giải.

Đặt $t=2018-x$, $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Khi đó
$$I=-\int\limits_{2018}^{0}\frac{\mathrm{d}t}{1+f(2018-t)}=\int\limits_0^{2018}\frac{\mathrm{d}t}{1+\dfrac{1}{f(t)}}=\int\limits_0^{2018}\frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{1+f(t)}=\int\limits_0^{2018}\frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{1+f(x)}.$$
Do đó
$$2I=I+I=\int\limits_0^{2018}\frac{1}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^{2018}\frac{f(x)}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{2018}1\,\mathrm{d}x=2018.$$
Vậy $I=1019$.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Cho x, y là các số thực thoả mãn $(x-3)^2+(y-1)^2=5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{3y^2+4xy+7x+4y-1}{x+2y+1}$ là

A. $2\sqrt{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\dfrac{114}{11}$. D. 3.

Lời giải.

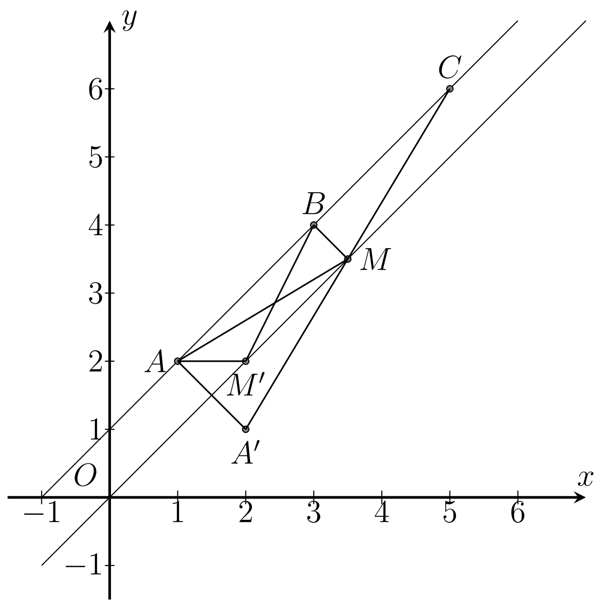
- Từ giả thiết ta có $6x + 2y = x^2 + y^2 + 5$. Do đó,
$$P = \frac{x^2 + 4xy + 4y^2 + x + 2y + 4}{x + 2y + 1} = x + 2y + \frac{4}{x + 2y + 1}.$$
- Đặt $t = x + 2y$, $P = t + \frac{4}{t+1}$. Theo bất đẳng thức B.C.S, ta có
$$[(x-3) + 2(y-1)]^2 \leqslant 5\left[(x-3)^2 + (y-1)^2\right] = 25.$$
Suy ra $-5 \leqslant (x-3) + 2(y-1) \leqslant 5 \Rightarrow 0 \leqslant t \leqslant 10$.
- Theo bất đẳng thức Cauchy $t + 1 + \frac{4}{t+1} \geqslant 4 \Rightarrow P \geqslant 3$.
- Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t + 1 = \frac{4}{t+1} \Leftrightarrow t = 1$. Khi đó
$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow (x = 1 \wedge y = 0) \vee \left(x = \frac{17}{5} \wedge y = -\frac{6}{5}\right).$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Cho số phức z thoả điều kiện $|z+2| = |z+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P = |z - 1 - 2i| + |z - 3 - 4i| + |z - 5 - 6i|$$
được viết dưới dạng $\left(a + b\sqrt{17}\right)/\sqrt{2}$ với a, b là các hữu tỉ. Giá trị của $a + b$ là

A 3. **B** 2. **C** 7. **D** 4.

Lời giải.



Cách 1

- Đặt $E(-2;0)$, $F(0;-2)$, $A(1,2)$, $B(3,4)$, $C(5,6)$, $M(x,y)$ biểu diễn cho số phức z.
- Từ giả thiết, ta có M thuộc đường trung trực $\Delta : y = x$ của đoạn EF và $P = AM + BM + CM$.

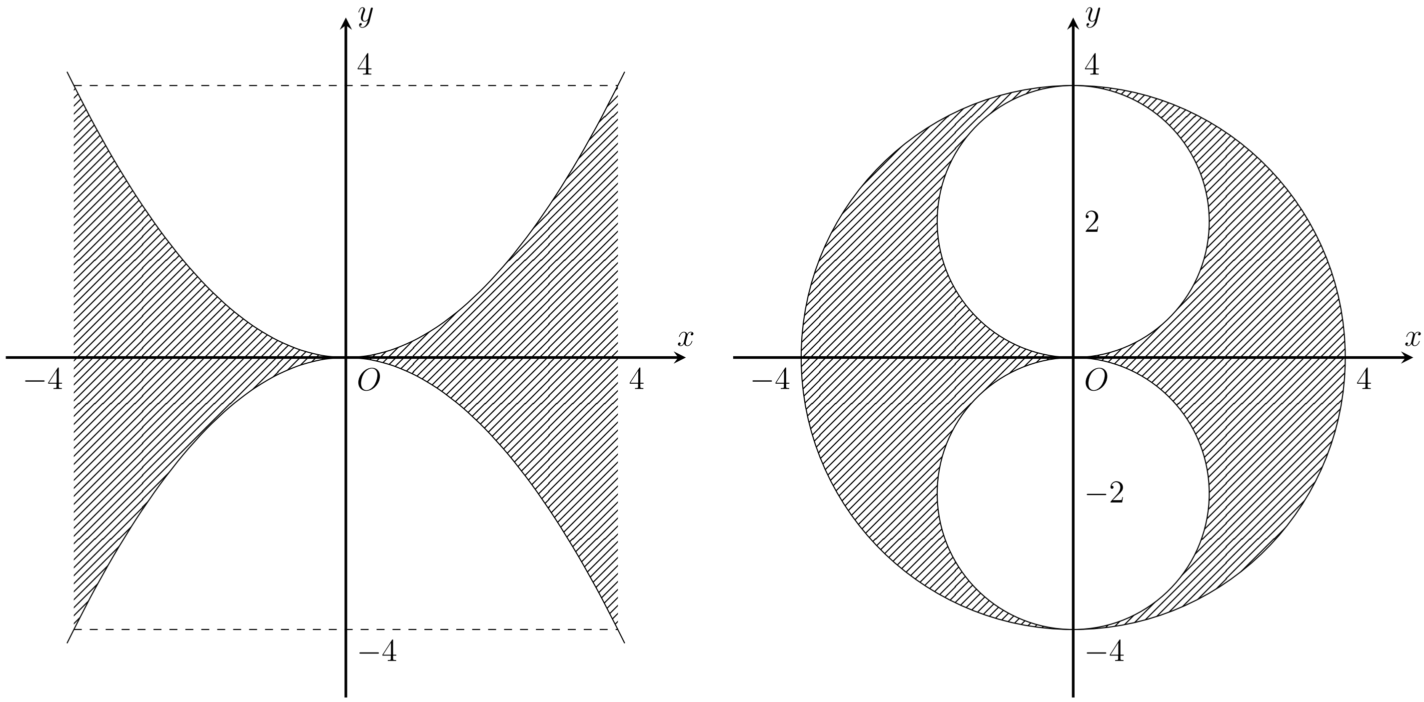
- Ta chứng minh điểm M chính là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng Δ.
  - ⊞ Với M' tuỳ ý thuộc Δ, M' khác M. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua Δ. Nhận thấy rằng ba điểm A', M, C thẳng hàng.
  - ⊞ Ta có $AM'+BM'+CM' = A'M'+BM'+CM'$. Mà $A'M'+CM' > A'C = A'M+CM = AM+CM$. Lại có $BM' > BM$. Do đó $AM'+BM'+CM' > AM+BM+CM$.

Cách 2.

- Gọi $z = x+yi$, $(x,\, y \in \mathbb{R})$. Từ giả thiết $|z+2| = |z+2i|$, dẫn đến $y = x$. Khi đó $z = x + xi$.
- $P = \sqrt{(x-1)^2+(x-2)^2} + \sqrt{(x-3)^2+(x-4)^2} + \sqrt{(x-5)^2+(x-6)^2}$.
- Sử dụng bất đẳng thức
$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \geqslant \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}.$$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$. Ta có
$$\begin{aligned}\sqrt{(x-1)^2+(x-2)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(x-6)^2} &= \sqrt{(x-1)^2+(x-2)^2}+\sqrt{(5-x)^2+(6-x)^2}\\ &\geqslant \sqrt{(x-1+6-x)^2+(x-2+5-x)^2}\\ &\geqslant \sqrt{34}.\end{aligned}$$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x-1}{6-x} = \dfrac{x-2}{5-x} \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{2}$.
- Mặt khác
$$\sqrt{(x-3)^2+(x-4)^2} = \sqrt{2x^2-14x+25} = \sqrt{2}\sqrt{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \dfrac{7}{2}$.
- Từ hai trường hợp trên, ta thấy, giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{1+2\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$. Khi đó $a+b=3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, gọi $(\mathcal{H}_1)$ là hình phẳng giới hạn bởi các đường:
$$y = \frac{x^2}{4}, \quad y = \frac{-x^2}{4}, \quad x = -4, \quad x = 4$$
và $(\mathcal{H}_2)$ là hình gồm tất cả các điểm $(x;y)$ thoả:
$$x^2+y^2 \leqslant 16, \quad x^2+(y-2)^2 \geqslant 4, \quad x^2+(y+2)^2 \geqslant 4.$$



Cho $(\mathcal{H}_1)$ và $(\mathcal{H}_2)$ quay quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A $V_1 = \dfrac{1}{2}V_2$. **B** $V_1 = \dfrac{2}{3}V_2$. **C** $V_1 = V_2$. **D** $V_1 = 2V_2$.

Lời giải.

- V_1 bằng thể tích khối trụ có bán kính đáy bằng 4 và chiều cao bằng 8 trừ bốn lần thể tích của vật tròn xoay tạo thành khi vật thể giới hạn bởi các đường $x = 2\sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$ quay quanh trục Oy.

$$V_1 = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 - 4\pi \int\limits_0^4 2y\,\mathrm{d}y = 64\pi.$$

- Thể tích $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi\left(4^3 - 2^3 - 2^3\right) = 64\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho hàm số $y = \dfrac{x - m^2}{x + 1}$ (với m là tham số khác 0) có đồ thị là $(\mathcal{C})$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(\mathcal{C})$ và hai trục toạ độ. Có bao nhiêu giá trị thực của m thoả mãn $S = 1$?

A Không. **B** Một. **C** Hai. **D** Ba.

Lời giải.

- Ta có $y' = \dfrac{m^2 + 1}{(x + 1)^2} > 0, \forall x \neq 1$, nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định với mọi m.
- $(\mathcal{C})$ cắt trục hoành tại $A(m^2; 0)$ và cắt trục tung $B(0; -m^2)$.
- $S = -\int\limits_0^{m^2} \dfrac{x - m^2}{x + 1}\,\mathrm{d}x = \left(m^2 + 1\right)\ln\left(m^2 + 1\right) - m^2$.
- $S = 1 \Leftrightarrow (m^2 + 1) \cdot [\ln(m^2 + 1) - 1] = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{\mathrm{e} - 1}$.

Chọn đáp án (C) □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. C	3. B	4. D	5. D	6. A	7. D	8. D	9. A	10. A
11. A	12. C	13. D	14. A	15. A	16. D	17. B	18. B	19. C	20. D
21. D	22. D	23. C	24. C	25. B	26. C	27. D	28. B	29. A	30. C
31. C	32. B	33. D	34. A	35. C	36. A	37. A	38. A	39. A	40. C
41. D	42. A	43. D	44. B	45. B	46. D	47. D	48. A	49. C	50. C

90 ĐỀ KSCL HỌC SINH 12 NĂM 2018 MÔN TOÁN SỞ GD VÀ ĐT CẦN THƠ

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{2x-2}$ có đường tiệm cận ngang là

A. $x = -1$. B. $y = -1$. C. $y = 1$. D. $x = 1$.

Lời giải.

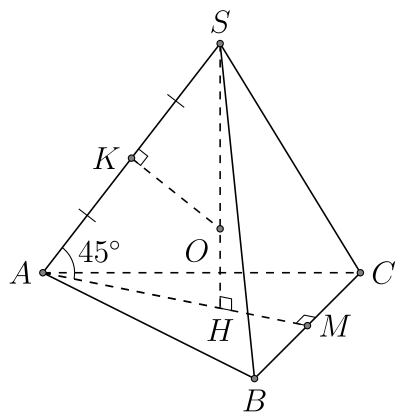
Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{2x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+1}{2x-2} = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 45°. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{4\pi a^3\sqrt{2}}{3}$. B. $4\pi a^3\sqrt{2}$. C. $\dfrac{4\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $4\pi a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi H là trọng tâm của $\triangle ABC \Rightarrow AH = \dfrac{2}{3}AM = a\sqrt{3}$.

Vì $\widehat{SAH} = 45^\circ \Rightarrow \triangle SHA$ vuông cân tại H nên $SH = AH = a\sqrt{3}$.

Trong mặt phẳng (SAH), dựng đường trung trực Δ của đoạn SA tại K, đường thẳng Δ cắt SH tại $O \Rightarrow SO = SA$, (1).

Mà $OA = OB = OC$, (2).

Từ (1) và (2) suy ra $OA = OB = OC = OS = R$.

Vì $\triangle SHA \sim \triangle SKO$ nên $\dfrac{SH}{SK} = \dfrac{SA}{SO}$

$\Rightarrow SO = \dfrac{SA \cdot SK}{SH} = \dfrac{SA^2}{2SH} = a\sqrt{3}$.

Vậy $V = \dfrac{4\pi}{3} \cdot R^3 = 4\pi a^3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $4x + 3y - 3z + 1 = 0$ có phương trình là

A. $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = -2 + 3t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm và mặt phẳng (P) là mặt phẳng cho trước.

Vì $\Delta \perp (P) \Rightarrow$ véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u} = (4;3;-3)$.

Phương trình tham số Δ là $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - 3t. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 4. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+4x}$ bằng

A 1. **B** -1. **C** $\dfrac{5}{4}$. **D** $-\dfrac{5}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+4x}=\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{5}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho a là số thực thỏa mãn $|a|<2$ và $\displaystyle\int\limits_a^2(2x+1)\,\mathrm{d}x=4$. Giá trị biểu thức $1+a^3$ bằng

A 0. **B** 2. **C** 1. **D** 3.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_a^2(2x+1)\,\mathrm{d}x=\left.(x^2+x)\right|_a^2=6-a^2-a$.

Theo giả thiết $6-a^2-a=4\Leftrightarrow a^2+a-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=-2.\end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện $|a|<2\Rightarrow a=1$. Vậy $1+a^3=2$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án B □

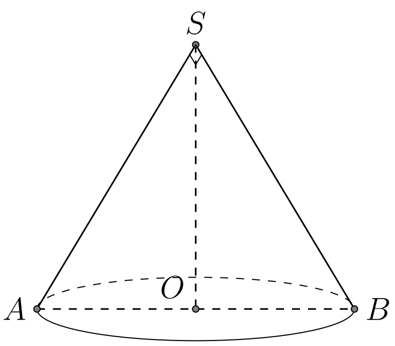
Câu 6. Một khối nón có thiết diện qua trục là tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích khối nón bằng

A $\dfrac{\pi a^3}{3}$. **B** $\dfrac{\pi a^3}{2}$. **C** πa^3. **D** $\dfrac{\pi a^3}{6}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}l=SA=SB=a\sqrt{2}\\h=SO=\dfrac{AB}{2}=a\\r=\dfrac{AB}{2}=a.\end{cases}$

Do đó thể tích khối nón $V=\dfrac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h=\dfrac{\pi a^3}{3}$.



Chọn đáp án A □

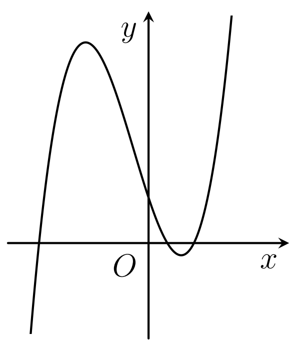
Câu 7. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A $a>0,\ b<0,\ c>0,\ d>0$.

B $a>0,\ b>0,\ c<0,\ d>0$.

C $a<0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$.

D $a>0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$.



Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow a > 0$.

Vì đồ thị cắt trục Oy tại điểm nằm phía trên trục hoành nên $d > 0$.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu nên $c < 0$.

Ta có $f''(x) = 6ax + 2b$; $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{3a}$.

Dựa vào đồ thị thấy hoành độ điểm uốn âm nên $-\dfrac{b}{3a} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{b}{3a} > 0 \Rightarrow b > 0$ (do $a > 0$).

Chọn đáp án B □

Câu 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$.

B. $(AA'D'D) \parallel (BCC'B')$.

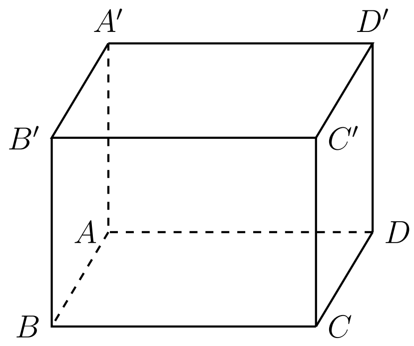
C. $(BDD'B') \parallel (ACC'A')$.

D. $(ABB'A') \parallel (CDD'C')$.

Lời giải.

Ta thấy $\begin{cases} (ABCD) \parallel (A'B'C'D') \\ (AA'D'D) \parallel (BCC'B') \\ (ABB'A') \parallel (CDD'C') \end{cases}$ luôn đúng.

và hai mặt phẳng $(BDD'B')$, $(ACC'A')$ là cắt nhau.



Chọn đáp án C □

Câu 9. Số nghiệm của phương trình $20x^3(1-x)^3 = \dfrac{4}{25}$ trên khoảng $(0;1)$ là

A. 6.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 20x^3(1-x)^3 = \frac{4}{25} \\ \Leftrightarrow\ & \left(5x - 5x^2\right)^3 = 1 \\ \Leftrightarrow\ & -5x^2 + 5x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10} \in (0;1) \\ x = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10} \in (0;1). \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Nghiệm của phương trình $\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0$ là

A. $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 1\\ \sin x = 3.\end{array}\right.$

- Với $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Với $\sin x = 3$ phương trình vô nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Xét bất phương trình $5^{2x} - 3\cdot 5^{x+2} + 32 < 0$. Nếu đặt $t = 5^x$ thì bất phương trình trở thành bất phương trình nào sau đây?

A $t^2 - 3t + 32 < 0$. B $t^2 - 16t + 32 < 0$. C $t^2 - 6t + 32 < 0$. **D** $t^2 - 75t + 32 < 0$.

Lời giải.

Ta có $5^{2x} - 3\cdot 5^{x+2} + 32 < 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 3\cdot 5^x\cdot 25 + 32 < 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 75\cdot 5^x + 32 < 0$.

Nếu đặt $t = 5^x > 0$ thì bất phương trình $5^{2x} - 3\cdot 5^{x+2} + 32 < 0$ trở thành bất phương trình $t^2 - 75t + 32 < 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ vuông góc với đường thẳng $y = x + 2$ có phương trình là

A $x + y + 1 = 0$. B $x - y + 1 = 0$. C $4x - 4y + 1 = 0$. **D** $4x + 4y + 1 = 0$.

Lời giải.

Vì tiếp tuyến của (P) vuông góc với đường thẳng $y = x + 2$ nên nó có dạng $\Delta\colon y = -x + c$.

Δ tiếp xúc với (P) khi phương trình $x^2 + x - c = 0$ có nghiệm kép nếu $1 + 4c = 0 \Leftrightarrow c = -\dfrac{1}{4}$.

Khi đó $\Delta\colon y = -x - \dfrac{1}{4}$ hay $\Delta\colon 4x + 4y + 1 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $A(2;1;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $2x - y + 2z + 1 = 0$ có phương trình là

A $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 16$. B $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$.

C $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$. D $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3$.

Lời giải.

Vì mặt cầu tâm A tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 1 = 0$ nên $R = \mathrm{d}(A,(P)) = 2$.

Suy ra $(S):\ (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-2; 2)$. **B** $(0; 2)$. **C** $(3; +\infty)$. **D** $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

Hàm số xác định trên khoảng $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ và có đạo hàm $y' > 0$ với $x \in (-2; 0) \cup (0; 2)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

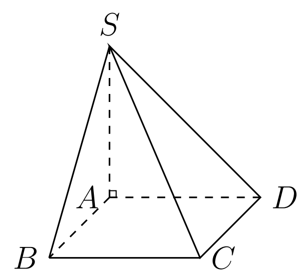
Chọn đáp án B □

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = 3a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A a^3. **B** $\frac{a^3}{9}$. **C** $\frac{a^3}{3}$. **D** $3a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 3a = a^3$.



Chọn đáp án A □

Câu 16. Hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x - 2$ nghịch biến trên khoảng

A $(2; 3)$. **B** $(1; 6)$. **C** $(-\infty; 1)$. **D** $(5; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm $y' = x^2 - 6x + 5$.

Ta có $y' < 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 5$.

Suy ra hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1; 5)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$.

Chọn đáp án A □

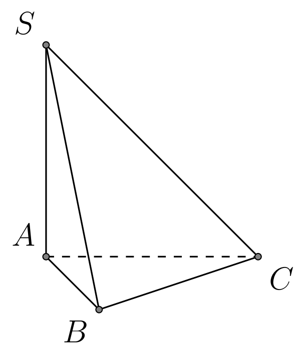
Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $SA = AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A $\frac{a^3}{3}$. **B** $\frac{3a^3}{2}$. **C** $\frac{a^3}{2}$. **D** $\frac{a^3}{6}$.

Lời giải.

Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot a = \frac{a^3}{6}$.



Chọn đáp án D □

Câu 18. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$ có công sai là

A $d = -3$. **B** $d = 3$. **C** $d = 5$. **D** $d = 6$.

Lời giải.

Gọi d là công sai của cấp số cộng. Ta có:

$$\begin{cases} u_4 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 8d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$$

Vậy công sai $d = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Với $\log_{27} 5 = a$, $\log_3 7 = b$ và $\log_2 3 = c$, giá trị của $\log_6 35$ bằng

A $\dfrac{(3a+b)c}{1+b}$. **B** $\dfrac{(3a+b)c}{1+c}$. **C** $\dfrac{(3a+b)c}{1+a}$. **D** $\dfrac{(3b+a)c}{1+c}$.

Lời giải.

Ta có: $\log_{27} 5 = a \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \log_3 5 = a \Leftrightarrow \log_3 5 = 3a$. Khi đó

$$\log_6 35 = \frac{\log_3 35}{\log_3 6} = \frac{\log_3 5 + \log_3 7}{\log_3 2 + 1} = \frac{3a+b}{\dfrac{1}{c} + 1} = \frac{(3a+b)c}{1+c}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{v} = (1;2)$ biến điểm $M(4;5)$ thành điểm nào sau đây?

A $P(1;6)$. **B** $Q(3;1)$. **C** $N(5;7)$. **D** $R(4;7)$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 4 + 1 \\ y' = 5 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 5 \\ y' = 7. \end{cases}$$

Vậy phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{v} = (1;2)$ biến điểm $M(4;5)$ thành điểm $N(5;7)$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x} \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = \mathrm{e}$ bằng

A $\dfrac{1}{2}$. **B** 1. **C** $\dfrac{1}{4}$. **D** 2.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là $\dfrac{1}{x} \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Diện tích của hình phẳng là

$$\int_1^{\mathrm{e}} \left| \frac{1}{x} \ln x \right| \mathrm{d}x = \left| \int_1^{\mathrm{e}} \ln x \, \mathrm{d}(\ln x) \right| = \left| \left. \frac{\ln^2 x}{2} \right|_1^{\mathrm{e}} \right| = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 22. Nếu $\int\limits_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 12$ thì $\int\limits_0^2 f(3x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 6. (B) 36. (C) 2. **(D) 4.**

Lời giải.

Đặt $t = 3x \Rightarrow \mathrm{d}t = 3\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 2 \Rightarrow t = 6$.

Khi đó $\int\limits_0^2 f(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\limits_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\cdot 12 = 4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Gọi z_1, z_2, z_3 là ba nghiệm phức của phương trình $z^3+8=0$. Giá trị của $|z_1|+|z_2|+|z_3|$ bằng

(A) $2+2\sqrt{3}$. (B) 3. (C) $2+\sqrt{3}$. **(D) 6.**

Lời giải.

Ta có $z^3+8=0 \Leftrightarrow (z+2)\left(z^2-2z+4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-2 \\ z^2-2z+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-2 \\ z=1-\sqrt{3}i \\ z=1+\sqrt{3}i \end{array}\right.$.

Do đó $|z_1|+|z_2|+|z_3|=6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=\tan x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích bằng

(A) $1-\frac{\pi}{4}$. (B) π^2. **(C) $\pi-\frac{\pi^2}{4}$.** (D) $\frac{\pi^2}{4}+\pi$.

Lời giải.

Thể tích của (H) là

$$V=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\tan x-x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\pi-\frac{\pi^2}{4}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Chọn ngẫu nhiên 4 viên bi từ một hộp có chứa 5 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. Xác suất để 4 viên bi được chọn có số bi xanh bằng số bi đỏ là

(A) $\frac{5}{792}$. **(B) $\frac{5}{11}$.** (C) $\frac{4}{11}$. (D) $\frac{5}{66}$.

Lời giải.

Chọn ngẫu nhiên 4 viên bi từ một hộp chứa 11 viên bi nên số cách chọn là $\mathrm{C}_{11}^4=330$ khi đó số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega)=330$.

Gọi biến cố A: "4 viên bi được chọn có số bi xanh bằng số bi đỏ ". Khi đó $n(A)=\mathrm{C}_5^2\cdot\mathrm{C}_6^2=150$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{150}{330}=\frac{5}{11}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{-x^2+2x}$ bằng

A. 1. B. 0. C. $\sqrt{3}$. D. 2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [0; 2]$.

Ta có $y' = \dfrac{-x+1}{\sqrt{-x^2+2x}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow -x+1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in \mathscr{D}$.

Mặt khác $y(1) = 1$, $y(0) = 0$, $y(2) = 0$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 1.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Cho số phức z thỏa mãn $(1+z)(1+i) - 5 + i = 0$. Số phức $w = 1 + z$ bằng

A. $-1+3i$. B. $1-3i$. C. $-2+3i$. D. $2-3i$.

Lời giải.

Ta có $(1+z)(1+i) - 5 + i = 0 \Leftrightarrow 1 + z = \dfrac{5-i}{1+i} \Leftrightarrow 1 + z = 2 - 3i \Leftrightarrow z = 1 - 3i$.

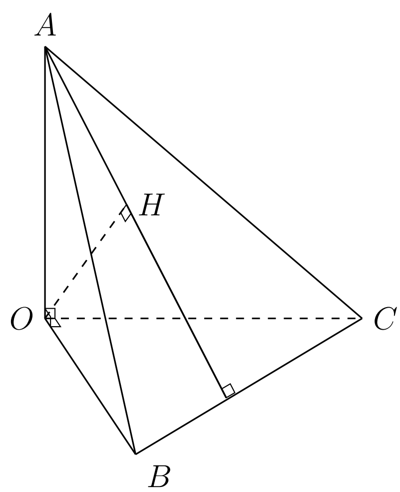
Chọn đáp án D □

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua $H\,(2; 1; 1)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác $\triangle ABC$. Phương trình của (P) là

A. $2x + y + z - 6 = 0$. B. $x + 2y + z - 6 = 0$.

C. $x + 2y + 2z - 6 = 0$. D. $2x + y + z + 6 = 0$.

Lời giải.



Ta có $AH \perp BC$, $OA \perp BC \Rightarrow OH \perp BC$.

Tương tự: $OH \perp AC$ suy ra $OH \perp (ABC)$ nên $\overrightarrow{OH} = (2; 1; 1)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) và đi qua $H\,(2; 1; 1)$ do đó mặt phẳng (ABC) có phương trình là $2x + y + z - 6 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

A. $1; 2; 3; 4; 5$. B. $1; 2; 4; 8; 16$. C. $1; -1; 1; -1; 1$. D. $1; -2; 4; -8; 16$.

Lời giải.

Dãy $1; 2; 3; 4; 5$ là cấp số cộng với công sai $d = 1$.

Dãy $1; 2; 4; 8; 16$ là cấp số nhân với công bội $q = 2$.

Dãy $1; -1; 1; -1; 1$ là cấp số nhân với công sai $q = -1$.

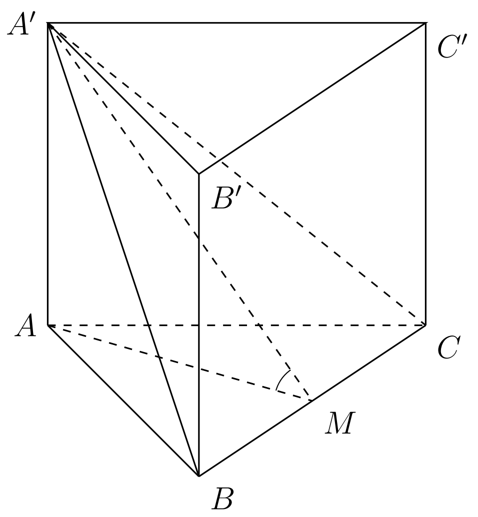
Dãy $1; -2; 4; -8; 16$ là cấp số nhân với công sai $q = -2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng (ABC) bằng 45°. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (B) $\dfrac{3a^3}{8}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow AM \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (AMA')$

$\Rightarrow BC \perp MA'$

Ta có $(ABC) \cap (A'BC) = BC$, $AM \perp BC$, $BC \perp MA'$

$\Rightarrow \left(\widehat{(ABC),(A'BC)}\right) = (\widehat{AM, A'M}) = \widehat{AMA'} = 45^\circ$

$\Rightarrow AM = AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ: $V = AA' \cdot S_{ABC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3}{8}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Biết rằng $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}} = 2\ln\left(\frac{2+\sqrt{a}}{1+\sqrt{b}}\right)$ với a, b là các số nguyên dương. Giá trị của $a+b$ bằng

(A) 3. (B) 5. (C) 9. (D) 7.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}$.

Đặt $t = \sqrt{x+3} + \sqrt{x+1} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+3}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right) dx$

$\Leftrightarrow dt = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}\right) \Leftrightarrow dt = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{t}{\sqrt{(x+1)(x+3)}} dx \Leftrightarrow \dfrac{2\,dt}{t} = \dfrac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}$.

Khi $x=0$ thì $t = 1+\sqrt{3}$; khi $x=1$ thì $t = 2+\sqrt{2}$.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}} = 2\int_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}} \frac{dt}{t} = 2\ln|t|\Big|_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}} = 2\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow a+b=5.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Giá trị của biểu thức $C_{100}^0 - C_{100}^2 + C_{100}^4 - C_{100}^6 + \cdots - C_{100}^{98} + C_{100}^{100}$ bằng

(A) -2^{100}. (B) -2^{50}. (C) 2^{100}. (D) 2^{50}.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(1+i)^{100} &= C_{100}^0 + iC_{100}^1 + i^2C_{100}^2 + \cdots + i^{100}C_{100}^{100} \\ &= (C_{100}^0 - C_{100}^2 + C_{100}^4 - \cdots + C_{100}^{100}) + (C_{100}^1 - C_{100}^3 + C_{100}^5 - C_{100}^{99})i\end{aligned}$$

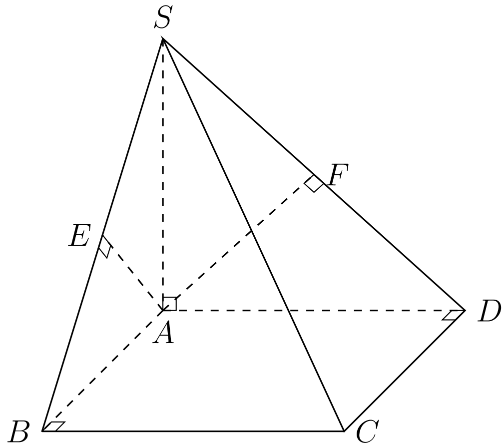
Mặt khác $(1+i)^{100} = \left[(1+i)^2\right]^{50} = (2i)^{50} = -2^{50}$.
Vậy $\mathrm{C}_{100}^0 - \mathrm{C}_{100}^2 + \mathrm{C}_{100}^4 - \mathrm{C}_{100}^6 + \cdots - \mathrm{C}_{100}^{98} + \mathrm{C}_{100}^{100} = -2^{50}$.
Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi AE, AF lần lượt là các đường cao của tam giác SAB và SAD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $SC \perp (AED)$. **B** $SC \perp (ACE)$. **C** $SC \perp (AFB)$. **D** $SC \perp (AEF)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE$ (1).
Mặt khác ta có $AE \perp SB$ (2).
Từ (1) và (2) ta có $AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$ (*).
Chứng minh tương tự ta cũng có $AF \perp (SDC)$
$\Rightarrow AF \perp SC$ (**).
Từ (*) và (**) ta có $SC \perp (AEF)$.



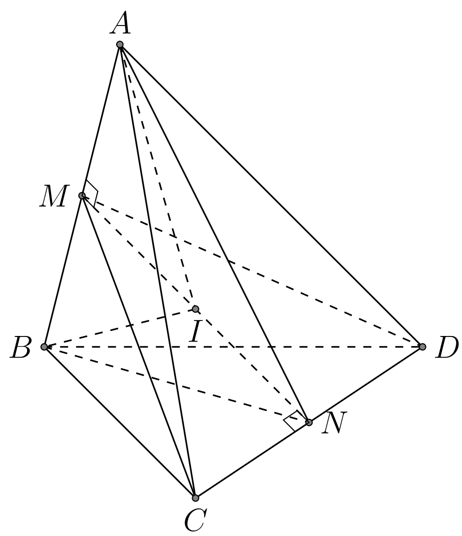
Chọn đáp án D □

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(m;0;0)$, $B(0;m-1;0)$, $C(0;0;m+4)$ thỏa mãn $BC = AD$, $CA = BD$ và $AB = CD$. Giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

A $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. **B** $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$. **C** $\sqrt{7}$. **D** $\sqrt{14}$.

Lời giải.

Đặt $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.
Theo giả thiết ta có tam giác $\triangle ABC = \triangle CDA$ theo trường hợp (c-c-c), suy ra $CM = DM$ hay tam giác CMD cân tại M, dẫn đến $MN \perp CD$.
Chứng minh tương tự ta cũng có $MN \perp AB$. Gọi I là trung điểm của MN thì $IA = IB$ và $IC = ID$.
Mặt khác ta lại có $AB = CD$ nên $\triangle BMI = \triangle CNI \Rightarrow IB = IC$ hay I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.



Ta có $IA^2 = IM^2 + AM^2 = \dfrac{MN^2}{4} + \dfrac{AB^2}{4} = \dfrac{MN^2 + c^2}{4}$.

Mặt khác CM là đường trung tuyến của tam giác ABC nên $CM^2 = \dfrac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$.

$\Rightarrow MN^2 = CM^2 - CN^2 = \dfrac{2a^2+2b^2-c^2}{4} - \dfrac{c^2}{4} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$.

Vậy $IA^2 = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{8}$.
Với $a^2+b^2+c^2 = 2m^2 + 2(m-1)^2 + 2(m+4)^2 = 6(m+1)^2 + 28$.
Vậy $IA^2 = \dfrac{6(m+1)^2+28}{8} \geqslant \dfrac{7}{2}$. Suy ra $\min IA = \sqrt{\dfrac{7}{2}} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.
Chọn đáp án B □

Câu 35. Giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - (3m+2)x + 2$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 4 là

A $m = \dfrac{1}{3}$. **B** $m = \dfrac{1}{2}$. **C** $m = 4$. **D** $m = 1$.

Lời giải.
Ta có $y' = x^2 - 2x - (3m+2)$.
Để hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 4 thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ |x_1 - x_2| = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 3m + 2 > 0 \\ (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 = 16 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ 2^2 + 4(3m+2) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ 12m = 4 \end{cases} \Rightarrow m = \dfrac{1}{3}$.
Vậy $m = \dfrac{1}{3}$.
Chọn đáp án A □

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta_1 \colon \dfrac{x-8}{2} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-3}{m-1}$ và $\Delta_2 \colon \begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$.
Giá trị của m để Δ_1 và Δ_2 cắt nhau là

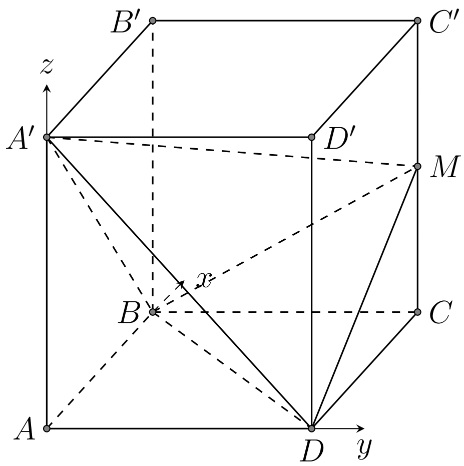
A $m = -\dfrac{25}{8}$. **B** $m = \dfrac{25}{8}$. **C** $m = 3$. **D** $m = -3$.

Lời giải.
Δ_1 qua $M_1(8; -2; 3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (2; 4; m-1)$; Δ_2 qua $M_2(4; 3; 2)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (4; -1; 2)$.
Ta có $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (m+7; 4m-8; -18) \neq \vec{0}$ nên hai véc-tơ $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ không cùng phương.
Mà $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 16m - 50$.
Δ_1 và Δ_2 cắt nhau khi $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0 \Leftrightarrow 16m - 50 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{25}{8}$.
Chọn đáp án B □

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O. Biết rằng $B(m; 0; 0)$, $D(0; m; 0)$, $A'(0; 0; n)$ với m, n là các số dương và $m + n = 4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $BDA'M$ bằng

A $\dfrac{245}{108}$. **B** $\dfrac{9}{4}$. **C** $\dfrac{64}{27}$. **D** $\dfrac{75}{32}$.

Lời giải.



Ta có $A(0;0;0)$, $B(m;0;0)$, $D(0;m;0)$, $A'(0;0;n)$ suy ra $C(m;m;0)$, $B'(m;0;n)$, $C'(m;m;n)$, $D'(0;m;n)$, $M\left(m;m;\dfrac{n}{2}\right)$.

Từ đó ta tính $\overrightarrow{BD}=(-m;m;0)$, $\overrightarrow{BA'}=(-m;0;n)$, $\overrightarrow{BM}=\left(0;m;\dfrac{n}{2}\right)$.

$V_{BDA'M}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA'}\right]\cdot\overrightarrow{BM}\right|=\dfrac{1}{4}\left|m^2\cdot n\right|$

$=\dfrac{1}{4}\left|m^2\cdot(4-m)\right|=\dfrac{1}{8}\left|m\cdot m\cdot(8-2m)\right|\leqslant\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{m+m+8-2m}{3}\right)^3=\dfrac{64}{27}$.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin^2 2x\cdot\cos^3 2x$ thỏa $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ là

A. $F(x)=\dfrac{1}{6}\sin^3 2x-\dfrac{1}{10}\sin^5 2x+\dfrac{1}{15}$.

B. $F(x)=\dfrac{1}{6}\sin^3 2x+\dfrac{1}{10}\sin^5 2x-\dfrac{1}{15}$.

C. $F(x)=\dfrac{1}{6}\sin^3 2x-\dfrac{1}{10}\sin^5 2x-\dfrac{1}{15}$.

D. $F(x)=\dfrac{1}{6}\sin^3 2x+\dfrac{1}{10}\sin^5 2x-\dfrac{4}{15}$.

Lời giải.

Đặt $t=\sin 2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\cos 2x\,\mathrm{d}x\Rightarrow\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t=\cos 2x\,\mathrm{d}x$.

Ta có $F(x)=\displaystyle\int\sin^2 2x\cdot\cos^3 2x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\cdot\int t^2\cdot\left(1-t^2\right)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\cdot\int\left(t^2-t^4\right)\,\mathrm{d}t$

$=\dfrac{1}{6}t^3-\dfrac{1}{10}t^5+C=\dfrac{1}{6}\sin^3 2x-\dfrac{1}{10}\sin^5 2x+C$.

Mà từ giả thiết ta được $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{6}\sin^3\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{10}\sin^5\dfrac{\pi}{2}+C=0\Leftrightarrow C=-\dfrac{1}{15}$.

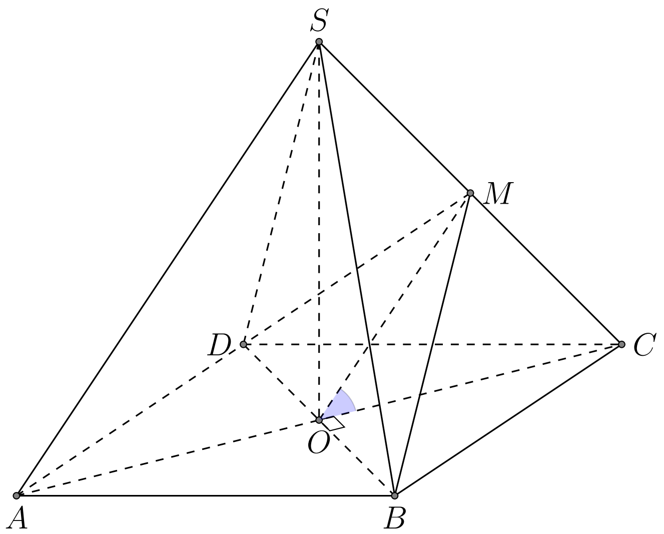
Vậy $F(x)=\dfrac{1}{6}\sin^3 2x-\dfrac{1}{10}\sin^5 2x-\dfrac{1}{15}$.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên bằng cạnh đáy và bằng a. Gọi M là trung điểm của SC. Góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$ bằng

A. 90°. B. 30°. C. 45°. D. 60°.

Lời giải.



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Ta có:

- $\begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SOC) \Rightarrow BD \perp OM.$
- $\begin{cases} (MBD) \cap (ABCD) = BD \\ BD \perp OM \\ BD \perp OC \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(MBD),(ABCD)}\right) = \left(\widehat{OM, OC}\right) = \widehat{MOC}.$
- $OM = MC = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{a}{2} \Rightarrow \triangle MOC$ cân tại M; $OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
- $\cos \widehat{MOC} = \cos \widehat{MCO} = \dfrac{OC}{SC} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{MOC} = 45°.$

Vậy $\left(\widehat{(MBD),(ABCD)}\right) = 45°$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho $\displaystyle\int 2x(3x-2)^6\,\mathrm{d}x = A(3x-2)^8 + B(3x-2)^7 + C$ với $A, B \in \mathbb{Q}$ và $C \in \mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $12A + 7B$ bằng

A. $\dfrac{23}{252}$. B. $\dfrac{241}{252}$. C. $\dfrac{52}{9}$. **D.** $\dfrac{7}{9}$.

Lời giải.

Đặt $t = 3x - 2 \Rightarrow x = \dfrac{t+2}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{3}\,\mathrm{d}t = \,\mathrm{d}x$.

Ta có $\displaystyle\int 2x(3x-2)^6\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \frac{t+2}{3}\cdot t^6\,\mathrm{d}t = \frac{2}{9}\int \left(t^7 + 2t^6\right)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{9}\cdot\frac{t^8}{8} + \frac{4}{9}\cdot\frac{t^7}{7} + C$
$= \dfrac{1}{36}\cdot(3x-2)^8 + \dfrac{4}{63}\cdot(3x-2)^7 + C.$

Suy ra $A = \dfrac{1}{36}$, $B = \dfrac{4}{63}$.

Giá trị của biểu thức $12A + 7B = 12\cdot\dfrac{1}{36} + 7\cdot\dfrac{4}{63} = \dfrac{7}{9}$.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Ông An muốn xây một bể nước dạng hình hộp chữ nhật có nắp với dung tích 3000 lít. Đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây hồ là

500000 đồng cho mỗi mét vuông. Hỏi chi phí thấp nhất ông An cần bỏ ra để xây bể nước là bao nhiêu?

A 6490123 đồng. **B** 7500000 đồng. **C** 5151214 đồng. **D** 6500000 đồng.

Lời giải.

Gọi x là chiều rộng bể, chiều dài bể là $2x$, diện tích đáy là $2x^2$. Do thể tích bể là $V = 3000$ lít $= 3$ m^3 nên chiều cao bể là $\dfrac{3}{2x^2}$. Diện tích xây dựng là diện tích toàn phần của bể là

$$S = 2\left(2x^2 + x\cdot\frac{3}{2x^2} + 2x\cdot\frac{3}{2x^2}\right) = 2\left(2x^2 + \frac{9}{2x}\right) = 4x^2 + \frac{9}{2x} + \frac{9}{2x} \geq 3\sqrt[3]{81}.$$

Vậy diện tích xây dựng ít nhất là $S = 9\sqrt[3]{3}$ khi và chỉ khi $4x^2 = \dfrac{9}{2x} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt[3]{9}}{2}$.

Chi phí xây dựng ít nhất là $9\sqrt[3]{3}\cdot 500000 \approx 6490123$ đồng.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Tất cả giá trị thực của tham số m sao cho phương trình

$$(m-2)2^{2(x^2+1)} - (m+1)2^{x^2+2} + 2m = 6$$

có nghiệm là

A $m \leq 9$. **B** $2 \leq m \leq 9$. **C** $2 < m \leq 9$. **D** $2 \leq m < 11$.

Lời giải.

Đặt $t = 2^{x^2+1}$, do $x^2+1 \geq 1$ nên $t \geq 2$. Ta có phương trình

$$(m-2)t^2 - 2(m+1)t + 2m - 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{2t^2+2t+6}{t^2-2t+2} = m.$$

Để phương trình có nghiệm thì đường thẳng $y = m$ phải cắt đồ thị hàm số $f(t) = \dfrac{2t^2+2t+6}{t^2-2t+2}$ với $t \geq 2$. Ta có

$$f'(t) = \frac{-6t^2-4t+16}{(t^2-2t+2)^2};\ f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{4}{3} \\ t = -2. \end{array}\right.$$

Nên hàm số $f(t)$ nghịch biến trên nửa khoảng $[2; +\infty)$, ta lại có $f(2) = 9$; $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 2$. Từ đó, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $2 < m \leq 9$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Biết đường thẳng $d: y = 2x + m$ (m là tham số thực) cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M và N . Giá trị của m sao cho độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất là

A $m = -1$. **B** $m = 1$. **C** $m = 2$. **D** $m = 3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Xét phương trình

$$2x + m = \frac{x+3}{x+1} \Leftrightarrow 2x^2 + (m+1)x + m - 3 = 0 \quad (1).$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta = (m+1)^2 - 8(m-3) > 0 \\ 2 - m - 1 + m - 3 = -2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m.$$

Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của (1) thì $M(x_1; 2x_1 + m), N(x_2; 2x_2 + m)$. Khi đó

$$MN^2 = (x_1 - x_2)^2 + 4(x_1 - x_2)^2 = \frac{5}{4}\left[(m-3)^2 + 16\right] \geq 20.$$

Vậy MN nhỏ nhất bằng $2\sqrt{5}$ khi $m = 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) \cdot f(x) = 2x\sqrt{[f(x)]^2 + 1}$ và $f(0) = 0$. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ lần lượt là

(A) $M = 20; m = 2$. (B) $M = 4\sqrt{11}; m = \sqrt{3}$.

(C) $M = 20; m = \sqrt{2}$. **D** $M = 3\sqrt{11}; m = \sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$f'(x) \cdot f(x) = 2x\sqrt{[f(x)]^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2 + 1}} = 2x \quad (1).$$

Lấy nguyên hàm hai vế (1) ta có $\sqrt{[f(x)]^2 + 1} = x^2 + C$, do $f(0) = 0$ nên $C = 1$.

Vậy $f(x) = \sqrt{x^4 + 2x^2}$ trên đoạn $[1; 3]$. Ta có

$$f'(x) = \sqrt{x^2 + 2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} > 0$$

với mọi $x \in [1; 3]$ nên $f(x)$ đồng biến trên $[1; 3]$. Vậy $M = f(3) = 3\sqrt{11}$; $m = f(1) = \sqrt{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 1| + |z^2 - z + 1|$. Giá trị của $M \cdot m$ bằng

A $\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$. (B) $\dfrac{13\sqrt{3}}{8}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải.

Đặt $t = |z + 1| \leq |z| + 1 = 2$ nên $t \in [0; 2]$. Vì $|z| = 1$ nên $z \cdot \bar{z} = 1$, suy ra

$$P = |z + 1| + |z^2 - z + z \cdot \bar{z}| = |z + 1| + |z + \bar{z} - 1|.$$

Ta lại có

$$t^2 = |z + 1|^2 = (z + 1)(\bar{z} + 1) = 2 + (z + \bar{z})$$

nên $z + \bar{z} = t^2 - 2$. Vậy $P = f(t) = t + |t^2 - 3|$, với $t \in [0; 2]$. Ta viết lại hàm số $f(t)$ như sau:

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + t - 3 & \text{khi } \sqrt{3} \leq t \leq 2 \\ -t^2 + t + 3 & \text{khi } 0 \leq t < \sqrt{3} \end{cases}.$$

Ta có

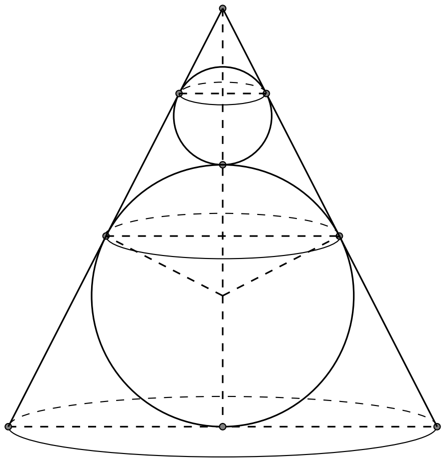
$$f'(t) = \begin{cases} 2t + 1 & \text{khi } \sqrt{3} \leq t < 2 \\ -2t + 1 & \text{khi } 0 < t < \sqrt{3} \end{cases}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Khi đó, $f(0) = 3$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{13}{4}$; $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$; $f(2) = 3$.

Vậy $M = \dfrac{13}{4}$; $m = \sqrt{3}$ nên $M \cdot m = \dfrac{13\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

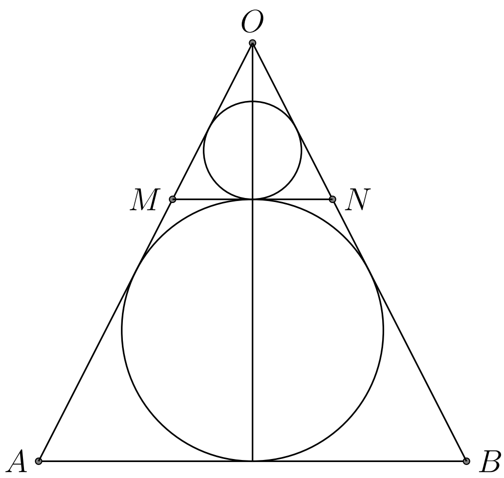
Câu 46.
Người ta chế tạo ra một món đồ chơi cho trẻ em theo các công đoạn như sau: Trước tiên, chế tạo ra một hình nón tròn xoay có góc ở đỉnh là $2\alpha = 60^\circ$ bằng thủy tinh trong suốt. Sau đó đặt hai quả cầu nhỏ bằng thủy tinh có bán kính lớn, nhỏ khác nhau sao cho hai mặt cầu tiếp xúc với nhau và đều tiếp xúc với mặt nón, quả cầu lớn tiếp xúc với cả mặt đáy của hình nón (hình vẽ). Biết rằng chiều cao của hình nón bằng . Bỏ qua bề dày của các lớp vỏ thủy tinh, tổng thể tích của hai khối cầu bằng



A $\dfrac{112\pi}{3}$ cm^3. **B** $\dfrac{40\pi}{3}$ cm^3. **C** $\dfrac{38\pi}{3}$ cm^3. **D** $\dfrac{100\pi}{3}$ cm^3.

Lời giải.
Gọi AB là đường kính mặt nón, O là đỉnh, M, N lần lượt là giao điểm của tiếp tuyến chung của hai mặt cầu và OA, OB (hình vẽ). Ta có tam giác OAB đều nên bán kính đường tròn nội tiếp bằng $r = \dfrac{1}{3}h = 3$. Tương tự, tam giác OMN đều, có chiều cao $h = 9 - 2r = 3$ nên có bán kính đường tròn nội tiếp $r' = \dfrac{1}{3} \cdot 3 = 1$. Thể tích hai khối cầu bằng

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 + \frac{4}{3}\pi \cdot r'^3 = \frac{112\pi}{3}.$$



Chọn đáp án A □

Câu 47. Giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3$ là

A $m = 1$. **B** $m = \dfrac{3}{2}$. **C** $m = 3$. **D** $m = -\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.
Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x + m$. Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 khi và chỉ khi

$$\Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3 \quad (1).$$

Khi đó,

$$x_1^2 + x_2^2 = 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3 \Leftrightarrow 2^2 - 2 \cdot \frac{m}{3} = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}.$$

So với điều kiện (1) ta được $m = \dfrac{3}{2}$ thỏa đề bài.
Chọn đáp án B □

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $M(1;2;-1)$ đến mặt phẳng (P) bằng

A. $\dfrac{11\sqrt{2}}{6}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $\dfrac{\sqrt{11}}{8}$. D. $\dfrac{7\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải.

Gọi K, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên d và (P) . Khi đó

$$\mathrm{d}[A,(P)] = AH \leq AK.$$

Do đó khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất bằng $AK = \mathrm{d}(A,d)$. Giả sử $K(1+2t;t;2+2t)$, ta có $\overrightarrow{AK} = (2t-1;t-5;2t-1)$. Vì $AK \perp d$ nên

$$2(2t-1)+t-5+2(2t-1) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Suy ra $\overrightarrow{AK} = (-1;-4;1)$. Phương trình mặt phẳng $(P)\colon x-4y+z-3=0$. Khoảng cách

$$\mathrm{d}[M,(P)] = \frac{11\sqrt{2}}{6}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 49. Điểm cực tiểu của hàm số $y = x\sqrt{4-x^2}$.

A. $x = -2\sqrt{3}$. B. $x = 2$. C. $x = -\sqrt{2}$. D. $x = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [-2;2]$. Ta có

$$y' = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

x	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2
y'	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	‖
y	0	↘	-2	↗	2	↘	0

Từ bảng biến thiên ta thấy điểm cực tiểu của hàm số là $x = -\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với kì hạn 3 tháng (1 quý), lãi suất 6% một quý theo hình thức lãi kép. Sau đúng 6 tháng, người đó lại gửi thêm 100 triệu đồng với hình thức và lãi suất như trên. Hỏi sau 1 năm tính từ lần gửi đầu tiên người đó nhận được số tiền gần với kết quả nào nhất?

A. 238,6 triệu đồng. B. 224,7 triệu đồng. C. 243,5 triệu đồng. D. 236,6 triệu đồng.

Lời giải.

Đặt $r = 6\%$, $A = 100$. Sau 6 tháng (2 kì), số tiền người đó có được là $A_1 = A(1+r)^2$. Sau 1 năm, số tiền người đó có được là $T = (A_1+100)(1+r)^2 \approx 238{,}6$ triệu đồng.

Chọn đáp án A □

——— **HẾT** ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. D	3. D	4. C	5. B	6. A	7. B	8. C	9. C	10. C
11. D	12. D	13. C	14. B	15. A	16. A	17. D	18. B	19. B	20. C
21. A	22. D	23. D	24. C	25. B	26. A	27. D	28. A	29. A	30. B
31. B	32. B	33. D	34. B	35. A	36. B	37. C	38. C	39. C	40. D
41. A	42. C	43. D	44. D	45. A	46. A	47. B	48. A	49. C	50. A

91 ĐỀ KSCL, SỞ GD CẦN THƠ - MÃ ĐỀ 323 - 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x-1}$ bằng

(A) -1. (B) 1. **(C) 2.** (D) -2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=2.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép tính tiến theo véc-tơ $\vec{v}$ biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ sao cho $x'=x-2$ và $y'=y+4$. Tọa độ của $\vec{v}$ là

(A) $\vec{v}=(-2;4)$. (B) $\vec{v}=(4;-2)$. (C) $\vec{v}=(-2;-4)$. (D) $\vec{v}=(2;4)$.

Lời giải.

Gọi $\vec{v}=(a;b)$. Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$ là $\begin{cases}x'=x+a\\ y'=y+b\end{cases}$

Theo đề bài ta có $a=-2$; $b=4$, suy ra $\vec{v}=(-2;4)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x-2}$ là

(A) $x=2$. (B) $y=-2$. (C) $y=2$. (D) $x=-2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2+x-2}{x-2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2+x-2}{x-2}=-\infty$.

Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Cho số phức z có số phức liên hợp $\overline{z}=3-2i$. Tổng phần thực và phần ảo của số phức z bằng

(A) 1. (B) -5. **(C) 5.** (D) -1.

Lời giải.

Ta có $z=3+2i$. Vậy tổng phần thực và phần ảo của số phức z là $3+2=5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Tất cả các nghiệm của phương trình $2\cos 2x+9\sin x-7=0$ là

(A) $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. (B) $x=-\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

(C) $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **(D) $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.**

Lời giải.

Ta có $2\cos 2x+9\sin x-7=0\Leftrightarrow -4\sin^2 x+9\sin x-5=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{5}{4}\ \text{(vô nghiệm)}\\ \sin x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 6. Một đoàn đại biểu gồm 5 người được chọn ra từ một tổ gồm 8 nam và 7 nữ để tham dự hội nghị. Xác suất để chọn được đoàn đại biểu có đúng 2 người nữ là

A $\frac{56}{143}$. **B** $\frac{140}{429}$. **C** $\frac{1}{143}$. **D** $\frac{28}{715}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^5$.

Gọi biến cố A: "Chọn được đoàn đại biểu có đúng 2 người nữ".

$\Rightarrow n(A) = \mathrm{C}_7^2 \cdot \mathrm{C}_8^3$.

Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{56}{143}$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Biết bốn số 5; x; 15; y theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Giá trị của biểu thức $3x+2y$ bằng

A 50. **B** 70. **C** 30. **D** 80.

Lời giải.

Do 5; x; 15; y theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng nên $x = \dfrac{5+15}{2} = 10$.

Ngoài ra $x + y = 2 \cdot 15$ nên $y = 30 - x = 30 - 10 = 20$.

Vậy $3x + 2y = 70$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 5$ và công bội $q = -2$. Số hạng thứ sáu của (u_n) là

A $u_6 = 160$. **B** $u_6 = -320$. **C** $u_6 = -160$. **D** $u_6 = 320$.

Lời giải.

Ta có $u_6 = u_1q^5 = 5 \cdot (-2)^5 = -160$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{nếu } x > 1 \\ ax - \dfrac{1}{2} & \text{nếu } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 1$ là

A $\frac{1}{2}$. **B** -1. **C** 1. **D** $-\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $f(1) = a - \dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(ax - \dfrac{1}{2}\right) = a - \dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2}$.

Hàm số liên tục tại $x = 1$ khi $f(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \Leftrightarrow a - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Gọi M là giao điểm của trục tung với đồ thị (C) của hàm số $y = \sqrt{x^2+x+1}$. Tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình là

A $y = \dfrac{1}{2}x + 1$. **B** $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$. **C** $y = -x + 1$. **D** $y = x + 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$.

Với $x_0 = 0$ ta có $\begin{cases} y'(0) = \dfrac{1}{2} \\ y_0 = y(0) = 1. \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(0;1)$ là

$y = \dfrac{1}{2}(x-0) + 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}x + 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

A $(BA'C') \parallel (ACD')$. **B** $(ADD'A') \parallel (BCC'B')$.
C $(BA'D) \parallel (CB'D')$. **D** $(ABA') \parallel (CB'D')$.

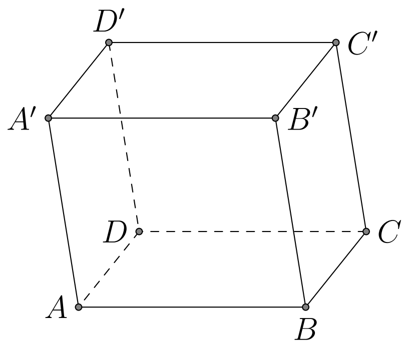
Lời giải.

Ta có

$\begin{cases} BA' \parallel CD' \\ A'C' \parallel AC \end{cases} \Rightarrow (BA'C') \parallel (ACD')$.

$\begin{cases} AD \parallel BC \\ AA' \parallel BB' \end{cases} \Rightarrow (ADD'A') \parallel (BCC'B')$.

$\begin{cases} BD \parallel B'D' \\ A'D \parallel B'C \end{cases} \Rightarrow (BA'D) \parallel (CB'D')$.



Mặt khác $B' \in (ABA') \cap (CB'D') \Rightarrow (ABA') \parallel (CB'D')$ là mệnh đề sai.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 9x + 1$ đồng biến trên khoảng

A $(-3;1)$. **B** $(1;+\infty)$. **C** $(-\infty;-3)$. **D** $(-1;3)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = -3x^2 - 6x + 9$.

Xét $y' > 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 6x + 9 > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 13.

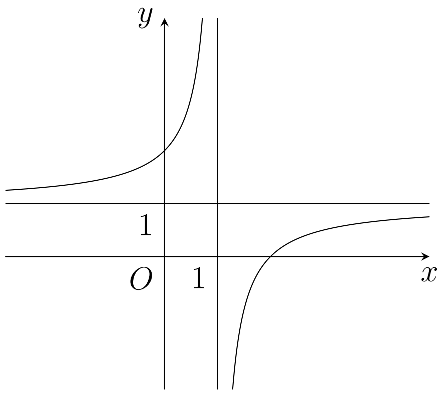
Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên đây. Xét các mệnh đề sau:

(1). Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

(2). Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

(3). Hàm số đồng biến trên tập xác định.

Số các mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên là



A 2. **B** 1. **C** 0. **D** 3.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị chỉ có (1) là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 + 2x^2 + x + 3$ bằng

A -1. **B** $-\dfrac{1}{3}$. **C** 3. **D** $\dfrac{77}{27}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

$y'' = 6x + 4$.

Ta có $y''(-1) = -2 < 0$ và $y''\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 2 > 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Giá trị cực đại của hàm số là $y_{\text{CĐ}} = y(-1) = 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Với $\log 2 = a$, giá trị của $\log \sqrt[3]{\dfrac{8}{5}}$ bằng

A $4a + 1$. **B** $4a - 1$. **C** $\dfrac{2a-1}{3}$. **D** $\dfrac{4a-1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\log \sqrt[3]{\dfrac{8}{5}} = \dfrac{1}{3} \log \dfrac{16}{10} = \dfrac{1}{3}(4\log 2 - 1) = \dfrac{4a-1}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \le \left(\sqrt{5}-2\right)^{x-1}$ là

A $S = (-\infty; 1]$. **B** $S = [1; +\infty)$. **C** $S = (-\infty; 1)$. **D** $S = (1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \le \left(\sqrt{5}-2\right)^{x-1} \Leftrightarrow \left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \le \left(\sqrt{5}+2\right)^{-x+1} \Leftrightarrow x - 1 \le -x + 1 \Leftrightarrow x \le 1$.

Vậy $S = (-\infty; 1]$.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} + m - 1$ thỏa mãn $F(0) = 0$ và $F(3) = 7$. Khi đó, giá trị của tham số m bằng

A -2. **B** 3. **C** -3. **D** 2.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \displaystyle\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + m - 1\right) \mathrm{d}x = \sqrt{x+1} + (m-1)x + C$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} F(0) = 0 \\ F(3) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C + 1 = 0 \\ C + 3m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -1 \\ m = 3. \end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 18. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4^x + \sin^2 x$ là

A) $\dfrac{4^x}{\ln 4} - \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$.
B) $4^x \ln x + \dfrac{\sin^3 x}{3} + C$.
C) $4^x \ln x - \dfrac{\sin^3 x}{3} + C$.
D) $\dfrac{4^x}{\ln 4} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (4^x + \sin^2 x)\,\mathrm{d}x = \int \left(4^x + \frac{1 - \cos 2x}{2}\right) \mathrm{d}x$

$$= \int \left(4^x + \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Chọn đáp án D □

Câu 19. Cho M, N là các số thực, xét hàm số $f(x) = M \sin \pi x + N \cos \pi x$ thỏa mãn $f(1) = 3$ và $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}$. Giá trị của $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$ bằng

A) $\dfrac{5\pi\sqrt{2}}{2}$.
B) $-\dfrac{5\pi\sqrt{2}}{2}$.
C) $-\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$.
D) $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $f(1) = 3 \Leftrightarrow M \sin \pi + N \cos \pi = 3 \Leftrightarrow N = -3$.

Mặt khác $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} (M \sin \pi x - 3 \cos \pi x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}$

$\Leftrightarrow \left(-\dfrac{M}{\pi}\cos \pi x - \dfrac{3}{\pi}\sin \pi x\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{\pi} \Leftrightarrow -\dfrac{3}{\pi} + \dfrac{M}{\pi} = -\dfrac{1}{\pi} \Leftrightarrow M = 2$.

Vậy $f(x) = 2\sin \pi x - 3\cos \pi x$ nên $f'(x) = 2\pi \cos \pi x + 3\pi \sin \pi x \Rightarrow f'\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{5\pi\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x = a$, $(a \in \mathbb{R})$. Tích phân $I = \displaystyle\int_1^2 f(2x+1)\,\mathrm{d}x$ có giá trị là

A) $I = \dfrac{1}{2}a + 1$.
B) $I = 2a + 1$.
C) $I = 2a$.
D) $I = \dfrac{1}{2}a$.

Lời giải.

Đặt $t = 2x + 1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 3$; $x = 2 \Rightarrow t = 5$.

$\Rightarrow I = \displaystyle\int_3^5 \frac{1}{2} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}a$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 + x - 2$ và trục hoành bằng

(A) 9. (B) $\dfrac{13}{6}$. **(C)** $\dfrac{9}{2}$. (D) $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 + x - 2$ và trục hoành là nghiệm của phương trình $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \displaystyle\int_{-2}^{1} \left|x^2 + x - 2\right| \mathrm{d}x = -\int_{-2}^{1} (x^2 + x - 2)\,\mathrm{d}x = \dfrac{9}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Goi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \mathrm{e}^x$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là

(A) $\dfrac{\pi}{2}(\mathrm{e}^2 - 1)$. (B) $\pi(\mathrm{e}^2 + 1)$. (C) $\dfrac{\pi}{2}(\mathrm{e}^2 + 1)$. (D) $\pi(\mathrm{e}^2 - 1)$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay $V = \pi \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1 = \dfrac{\pi}{2}(\mathrm{e}^2 - 1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + 2i)z = (1 + 2i) - (-2 + i)$. Mô-đun của z bằng

(A) 2. (B) 1. **(C)** $\sqrt{2}$. (D) $\sqrt{10}$.

Lời giải.

Ta có $(1 + 2i)z = (1 + 2i) - (-2 + i) \Leftrightarrow (1 + 2i)z = 3 + i \Leftrightarrow z = \dfrac{3 + i}{1 + 2i} = 1 - i$.

Vậy $|z| = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB = AD = a$, $SA = CD = 3a$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng.

(A) $6a^3$. (B) $\dfrac{1}{6}a^3$. (C) $\dfrac{1}{3}a^3$. **(D)** $2a^3$.

Lời giải.

Mặt đáy $ABCD$ là hình thang có cạnh đáy AB và CD, đường cao AD nên có diện tích $S_{ABCD} = \dfrac{(AB + DC) \cdot AD}{2} = \dfrac{(a + 3a)a}{2} = 2a^2$.

Ngoài ra do SA là đường cao của $S.ABCD$ nên $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}3a \cdot 2a^2 = 2a^3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC đều cạnh bằng a và chu vi của mặt bên $ABB'A'$ bằng $6a$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (B) $a^3\sqrt{3}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

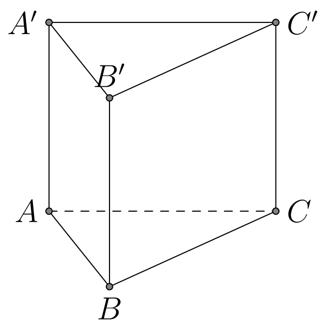
Lời giải.

Chu vi của hình chữ nhật $ABB'A'$:

$2(AB + AA') = 6a \Rightarrow AA' = 2a$.

Thể tích của khối lăng trụ:

$V = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

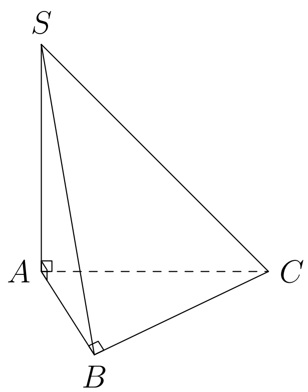


Chọn đáp án A □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = 2a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = 3a$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A a^3. **B** $\frac{1}{3}a^3$. **C** $3a^3$. **D** $\frac{1}{6}a^3$.

Lời giải.



Thể tích $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}BA \cdot BC \cdot SA = \dfrac{1}{6}a \cdot 2a \cdot 3a = a^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a với O và O' lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Gọi (T) là hình trụ tròn xoay tại thành khi quay hình chữ nhật $AA'C'C$ quanh trục OO'. Thể tích của khối trụ (T) bằng

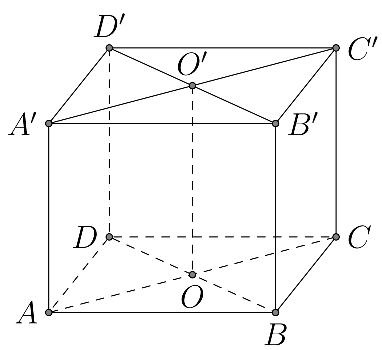
A $\frac{1}{3}\pi a^3$. **B** $\frac{1}{2}\pi a^3$. **C** $\frac{1}{6}\pi a^3$. **D** $2\pi a^3$.

Lời giải.

Bán kính hình trụ $r = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chiều cao hình trụ $h = OO' = a$

Thể tích khối trụ là $V\pi r^2 h = \pi\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 a = \dfrac{\pi a^3}{2}$.



Chọn đáp án B □

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; 2; 3)$ và $N(-1; 2; -1)$. Mặt cầu đường kính MN có phương trình là

(A) $x^2+(y-2)^2+(z-1)^2=20$.
(B) $x^2+(y-2)^2+(z-1)^2=\sqrt{5}$.
(C) $x^2+(y-2)^2+(z-1)^2=5$.
(D) $x^2+(y-2)^2+(z-1)^2=\sqrt{20}$.

Lời giải.

Mặt cầu đường kính MN có tâm $I(0;2;1)$ là trung điểm MN và bán kính $R=IM=\sqrt{5}$.

Do đó mặt cầu này có phương trình $x^2+(y-2)^2+(z-1)^2=5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;3)$ và song song với mặt phẳng $x-2y+3z-1=0$ có phương trình là

(A) $x-2y+3z+6=0$.
(B) $x-2y+3z-6=0$.
(C) $x+2y-3z-6=0$.
(D) $x+2y-3z+6=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng cần tìm có dạng $x-2y+3z+C=0,\ C\neq -1$.

Vì mặt phẳng cần tìm đi qua $M(1;2;3)$ nên $1-4+9+C=0\Leftrightarrow C=-6\neq -1$

Vậy mặt phẳng cần tìm có phương trình $x-2y+3z-6=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(1;1;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon x-2y+3z+4=0$ có phương trình là

(A) $\begin{cases}x=1+t\\ y=1-2t.\\ z=2-3t\end{cases}$
(B) $\begin{cases}x=1+t\\ y=-2+t.\\ z=3+2t\end{cases}$
(C) $\begin{cases}x=1-t\\ y=1-2t.\\ z=2+3t\end{cases}$
(D) $\begin{cases}x=1+t\\ y=1-2t.\\ z=2+3t\end{cases}$

Lời giải.

Đường thẳng d vuông góc với $(P)\Rightarrow \vec{u}_d=\vec{n}_P=(1;-2;3)$ là một véc-tơ chỉ phương của d.

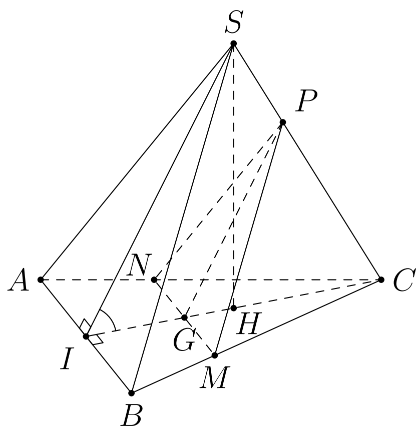
Phương trình tham số của đường thẳng d: $\begin{cases}x=1+t\\ y=1-2t\\ z=2+3t.\end{cases}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=CA=CB=AB=a$, $SC=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, G là trọng tâm tam giác ABC, (α) là mặt phẳng đi qua G, song song với các đường thẳng AB và SB. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của (α) và các đường thẳng BC, AC, SC. Góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và (ABC) bằng

(A) 90°.
(B) 45°.
(C) 30°.
(D) 60°.

Lời giải.

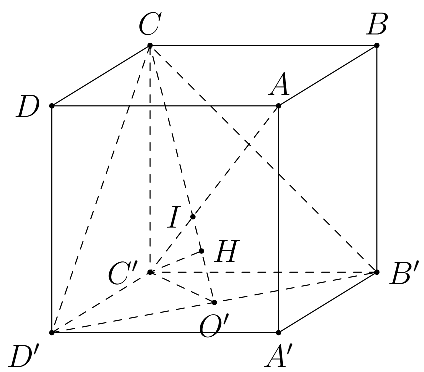


Gọi I là trung điểm của AB, H là hình chiếu của S lên IC, ta có
$AB \perp (SIC)$ và $SH \perp (ABC)$.
Theo giả thiết, $SI = SC = CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên
$\triangle SIC$ đều và H là trung điểm của IC.
Do $\begin{cases} SA \,/\!/\, (\alpha) \\ AB \,/\!/\, (\alpha) \end{cases}$ nên $(SAB) \,/\!/\, (\alpha)$ hay $(SAB) \,/\!/\, (MNP)$.
Suy ra $((MNP);(ABCD)) = ((SAB);(ABCD)) = \widehat{SIC} = 60^\circ$.
Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(CB'D')$ bằng

(A) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Gọi $I = AC' \cap CO'$ ta có $I = AC' \cap (CB'D')$.
Gọi H là hình chiếu của C' lên CO'.
Khi đó $\mathrm{d}(C';(CB'D')) = C'H = \dfrac{CC' \cdot C'O'}{\sqrt{CC'^2 + C'O'^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Mặt khác, ta có $AI = 2C'I$ nên
$\mathrm{d}(A;(CB'D')) = 2\mathrm{d}(C';(CB'D')) = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Lưu ý:
Nếu sử dụng công thức tính độ dài đường cao của tứ diện đều thì bài toán sẽ được giải rất nhanh gọn. Cụ thể như sau:
$\mathrm{d}(A,(CB'D'))$ chính là độ dài đường cao của tứ diện đều $ACB'D'$ (cạnh bằng $a\sqrt{2}$).
Khoảng cách đó bằng $a\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{3} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.
Chọn đáp án D □

Câu 33. Tập hợp tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx-1}{m-4x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)$ là

(A) $(-2;2)$. **B** $[1;2)$. (C) $(-2;+\infty)$. (D) $(-\infty;2)$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{mx-1}{m-4x}$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{m}{4}\right\}$ và $y' = \dfrac{m^2-4}{(m-4x)^2}$.
Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in \left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ \dfrac{m}{4} \geq \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m < 2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 34. Tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + 6x^2 + 3(m+2)x - m - 1$ đạt cực trị tại các điểm x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2$ là

A $(-\infty; 1)$. **B** $(1; +\infty)$. **C** $(1; 2)$. **D** $(-\infty; 2)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 12x + 3(m+2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + m + 2 = 0 \quad (*)$.

Hàm số có hai điểm cực trị x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 \Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn $(x_1+1)(x_2+1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - (m+2) > 0 \\ x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1.$

Chọn đáp án A □

Câu 35. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ bằng

A 0. **B** -2. **C** -1. **D** $-\sqrt{2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{x(x-1)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	-1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	1

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{\mathbb{R}} y = -\sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Biết đường thẳng $y = m - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x|$ tại 6 điểm phân biệt. Tất cả giá trị của tham số m là

A $4 < m < 5$. **B** $5 < m < 6$.

C $3 < m < 4$. **D** $m > 6$ hoặc $m < 5$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ xác định trên $\mathscr{D} = \mathbb{R}$, có $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$.

Hàm số $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x|$ là hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục tung Oy làm trục đối xứng.

Bởi vậy, đồ thị $(C_1)\colon y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x|$ được suy ra từ $(C)\colon f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ như sau:

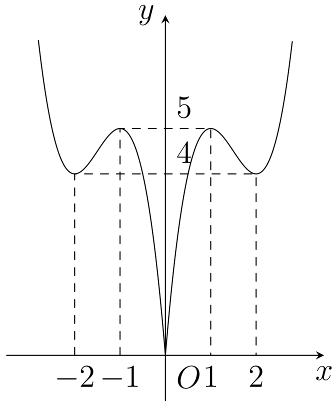
+ Một phần của đồ thị (C_1) ứng với $x \geq 0$ là phần đồ thị (C) bên phải trục tung.

+ Lấy đối xứng với phần nêu trên qua trục tung ta được đồ thị (C_1) ứng với $x < 0$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ như sau:

x	0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Như vậy đồ thị (C_1) có dạng:



Từ đồ thị (C_1) hàm số $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x|$, suy ra đường thẳng $y = m - 1$ cắt đồ thị (C_1) tại 6 điểm phân biệt khi và chỉ khi $4 < m - 1 < 5 \Leftrightarrow 5 < m < 6$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho phương trình $\mathrm{e}^{3x} - 2 \cdot \mathrm{e}^{2x+\ln 3} + \mathrm{e}^{x+\ln 9} + m = 0$, với m là tham số thực. Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm duy nhất là

A. $m < 0$ hoặc $m = 4$.

B. $m = 0$ hoặc $m < -4$.

C. $-4 \leq m < 0$.

D. $m > 0$ hoặc $m = -4$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{e}^{3x} - 2 \cdot \mathrm{e}^{2x+\ln 3} + \mathrm{e}^{x+\ln 9} + m = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x} - 6 \cdot \mathrm{e}^{2x} + 9 \cdot \mathrm{e}^{x} + m = 0$.

Đặt $t = \mathrm{e}^x$ $(t > 0)$, phương trình tương đương với $m = -t^3 + 6t^2 - 9t$.

Xét $f(t) = -t^3 + 6t^2 - 9t$ trên $(0; +\infty)$.

$f'(t) = -3t^2 + 12t - 9$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

t	0		1		3		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên: với $m = 0$ hoặc $m < -4$ thì phương trình có nghiệm duy nhất.

Chú ý:

Ta không lấy giá trị $x = 0$ nên tại $m = 0$ đường thẳng $y = m$ vẫn cắt đồ thị tại duy nhất một điểm (điểm tiếp xúc tại $x = 3$).
Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Cho $\int\limits_2^3 \dfrac{x+2}{2x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 3 + 3\ln 2$ $(a, b \in \mathbb{Q})$. Tính $P = 2a - b$.

(A) $P = 1$. (B) $P = 7$. **(C)** $P = -\dfrac{15}{2}$. (D) $P = \dfrac{15}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_2^3 \dfrac{x+2}{2x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_2^3 \dfrac{x+2}{(x-1)(2x-1)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_2^3 \left(\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{5}{2x-1}\right)\mathrm{d}x$

$$= \left(3\ln|x-1| - \frac{5}{2}\ln|2x-1|\right)\Bigg|_2^3 = -\frac{5}{2}\ln 5 + \frac{5}{2}\ln 3 + 3\ln 2.$$

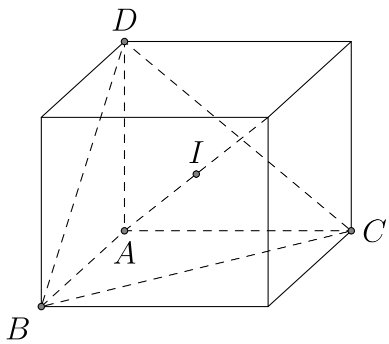
Suy ra $a = -\dfrac{5}{2}$ và $b = \dfrac{5}{2}$. Từ đó $P = 2a - b = -\dfrac{15}{2}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông cân tại A, $AD = 2a$, $AB = a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

(A) $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **(B)** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Dựng hình hộp chữ nhật (H) nhận AB, AC, AD làm 3 cạnh.
Khi đó mặt cầu ngoại tiếp của (H) cũng là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.
Chính vì vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là
$R = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AC^2 + AD^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2 + (2a)^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.



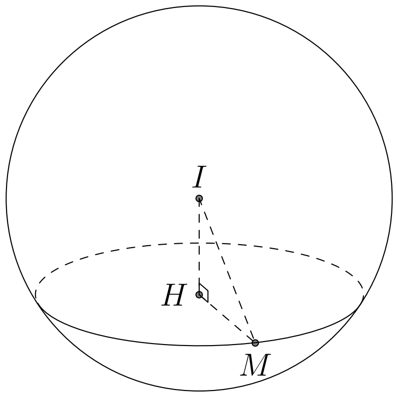
Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 12$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x + 2y - z - 3 = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng song song với (P) và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm của mặt cầu và đáy là hình tròn giới hạn bởi (C) có thể tích lớn nhất. Phương trình của mặt phẳng (Q) là

(A) $2x + 2y - z - 4 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 17 = 0$.
(B) $2x + 2y - z + 2 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 8 = 0$.
(C) $2x + 2y - z - 1 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 11 = 0$.
(D) $2x + 2y - z - 6 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 3 = 0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3)$ và bán kính $R = 2\sqrt{3}$.



Gọi r là bán kính đường tròn (C) và H là hình chiếu của I lên (Q).
Đặt $IH = x$ ta có $r = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{12 - x^2}$.
Vậy thể tích khối nón tạo được là
$V = \dfrac{1}{3} \cdot IH \cdot S_{((C))} = \dfrac{1}{3} \cdot x \cdot \pi \left(\sqrt{12 - x^2}\right)^2 = \dfrac{1}{3}\pi(12x - x^3)$.
Gọi $f(x) = 12x - x^3$ với $x \in \left(0; 2\sqrt{3}\right)$.
Thể tích nón lớn nhất khi $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất.
Ta có $f'(x) = 12 - 3x^2$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Chỉ có $x = 2 \in \left(0; 2\sqrt{3}\right)$.
Bảng biến thiên:

x	0		2		$2\sqrt{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	16	$\searrow$	0

Vậy $V_{\max} = \dfrac{1}{3}\pi 16 = \dfrac{16\pi}{3}$ khi $x = IH = 2$.
Mặt phẳng $(Q) \parallel (P)$ nên $(Q)\colon 2x + 2y - z + a = 0$ $(a \neq -3)$
Và $\mathrm{d}(I, (Q)) = IH \Leftrightarrow \dfrac{|2 + 2(-2) - 3 + a|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 2 \Leftrightarrow |a - 5| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 11 \\ a = -1. \end{array}\right.$
Vậy mặt phẳng (Q) có phương trình $2x + 2y - z - 1 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 11 = 0$.
Chọn đáp án C □

Câu 41. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(1; 2; 2)$, song song với mặt phẳng $(P)\colon x - y + z + 3 = 0$ đồng thời cắt đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{1}$ có phương trình là

A $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 2 \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - t \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases}$.

Lời giải.
Gọi đường thẳng cần tìm là Δ. Gọi $I = \Delta \cap d \Rightarrow I \in d \Rightarrow I(1 + t; 2 + t; 3 + t)$.
$\overrightarrow{MI} = (t; t; 1 + t)$.
Do $MI \parallel (P)$ nên $\overrightarrow{MI}.\vec{n}_{(P)} = 0 \Leftrightarrow t - t + (1 + t) = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow \overrightarrow{MI} = (-1; -1; 0)$.
Đường thẳng Δ đi qua $M(1; 2; 2)$ và I có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{MI} = (-1; -1; 0)$ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 2. \end{cases}$
Chọn đáp án A □

Câu 42. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P)\colon z - 1 = 0$ và $(Q)\colon x + y + z - 3 = 0$. Gọi d là đường thẳng nằm trong mặt phẳng

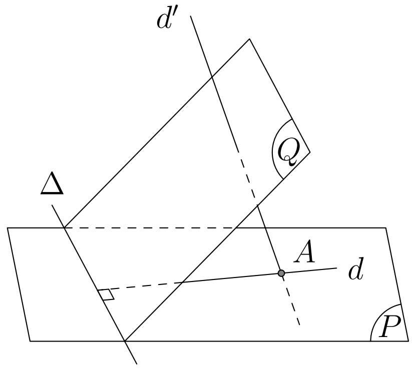
(P), cắt đường thẳng $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{-1}$ và vuông góc với đường thẳng Δ. Phương trình của đường thẳng d là

A $\begin{cases}x=3+t\\y=t\\z=1+t\end{cases}$. **B** $\begin{cases}x=3-t\\y=t\\z=1\end{cases}$. **C** $\begin{cases}x=3+t\\y=t\\z=1\end{cases}$. **D** $\begin{cases}x=3+t\\y=-t\\z=1+t\end{cases}$.

Lời giải.

Đặt $\vec{n}_P=(0;0;1)$ và $\vec{n}_Q=(1;1;1)$ lần lượt là véc-tơ pháp tuyến của (P) và (Q).

Do $\Delta=(P)\cap(Q)$ nên Δ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta=[\vec{n}_P,\vec{n}_Q]=(-1;1;0)$.



Đường thẳng d nằm trong (P) và $d\perp\Delta$ nên d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_d=[\vec{n}_P,u'_\Delta]=(-1;-1;0)$.

Gọi $d'\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{-1}$ và $A=d'\cap d\Rightarrow A=d'\cap(P)$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases}z-1=0\\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=1\\y=0\\x=3.\end{cases}$

Như vậy $A(3;0;1)$, do đó phương trình đường thẳng d: $\begin{cases}x=3+t\\y=t\\z=1.\end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, gọi (S) là mặt cầu có tâm I thuộc đường thẳng $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{4}$ và đi qua điểm $M(0;3;9)$. Biết điểm I có hoành độ là số nguyên và cách đều hai mặt phẳng $x-2y+2z+2=0$, $3x-2=0$. Phương trình của (S) là

A $(x-6)^2+(y-9)^2+(z-13)^2=\sqrt{88}$. **B** $(x-4)^2+(y-6)^2+(z-9)^2=5$.

C $(x-6)^2+(y-9)^2+(z-13)^2=88$. **D** $x^2+y^2+(z-1)^2=73$.

Lời giải.

Vì tâm I thuộc đường thẳng $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{4}$ nên $I=(2t;3t;1+4t)$.

Vì I cách đều hai mặt phẳng $x-2y+2z+2=0$ và $3x-2=0$ nên:

$\dfrac{|(2t)-2(3t)+2(1+4t)+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{|3(2t)-2|}{\sqrt{3^2}}$

$\Leftrightarrow |2t+2|=|3t-1|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\Rightarrow I(6;9;13)\\ t=-\dfrac{1}{5}\Rightarrow I\left(-\dfrac{2}{5};-\dfrac{3}{5};\dfrac{1}{5}\right)\end{array}\right.$.

Vì điểm I có hoành độ là số nguyên, do đó $I(6;9;13)$.

$\Rightarrow IM=\sqrt{(-6)^2+(3-9)^2+(9-13)^2}=\sqrt{88}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-6)^2+(y-9)^2+(z-13)^2=88$.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;0;0)$, mặt phẳng $(P)\colon x-2y-2z+1=0$ và đường thẳng d: $\begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Gọi d' là đường thẳng đi qua điểm I và vuông góc với mặt phẳng (P), M là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P), N là điểm thuộc đường thẳng d sao cho diện tích tam giác IMN nhỏ nhất. Tọa độ điểm N là

A $N\left(2; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. **B** $N\left(2; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$. **C** $N\left(2; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$. **D** $N\left(2; -\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng d' là: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = -2t. \end{cases}$

Tọa độ điểm M ứng với t là nghiệm phương trình:

$(1 + t) - 2(-2t) - 2(-2t) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{9} \Rightarrow M\left(\frac{7}{9}; \frac{4}{9}; \frac{4}{9}\right)$.

Như vậy $IM = \frac{2}{3}$.

Gọi H là hình chiếu của N trên d thì $S_{\triangle IMN} = \frac{1}{2}IM.NH = \frac{1}{3}NH$.

Do đó, diện tích tam giác IMN nhỏ nhất khi và chỉ khi độ dài NH nhỏ nhất.

N là điểm thuộc đường thẳng d nên $N(2; n; 1 + n) \Rightarrow \overrightarrow{IN}(1; n; 1 + n)$.

Đường thẳng d' có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u'} = (1; -2; -2)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{u'}\right] = (2; n + 3; -n - 2)$ nên

$$NH = \mathrm{d}(N; d') = \frac{\left|\left[\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{u'}\right]\right|}{|\overrightarrow{u'}|} = \frac{\sqrt{2^2 + (n + 3)^2 + (-n - 2)^2}}{3} = \frac{\sqrt{2\left(n + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}}}{3} \geq \frac{1}{2}.$$

Như vậy, NH nhỏ nhất là bằng $\frac{1}{2}$ khi và chỉ khi $n = -\frac{5}{2} \Rightarrow N\left(2; -\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Biết $2^n\left(\mathrm{C}_n^0 + i\mathrm{C}_n^1 - \mathrm{C}_n^2 - i\mathrm{C}_n^3 + \cdots + i^k\mathrm{C}_n^k + \cdots + i^n\mathrm{C}_n^n\right) = 32768i$, với C_n^k là các số tổ hợp chập k của n và $i^2 = -1$. Đặt $T_{k+1} = i^k\mathrm{C}_n^k$, giá trị của T_8 bằng

A $-330i$. **B** $-8i$. **C** $-36i$. **D** $-120i$.

Lời giải.

Ta có $2^n\left(\mathrm{C}_n^0 + i\mathrm{C}_n^1 - \mathrm{C}_n^2 - i\mathrm{C}_n^3 + \cdots + i^k\mathrm{C}_n^k + \cdots + i^n\mathrm{C}_n^n\right) = 32768i$

$\Leftrightarrow 2^n\left(\mathrm{C}_n^0 + i\mathrm{C}_n^1 + i^2\mathrm{C}_n^2 + i^3\mathrm{C}_n^3 + \cdots + i^k\mathrm{C}_n^k + \cdots + i^n\mathrm{C}_n^n\right) = 32768i$

$\Leftrightarrow 2^n(1 + i)^n = 2^{15}i \Leftrightarrow (1 + i)^n = 2^{15-n}i$: là số thuần ảo $\quad (*)$

Nếu $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$ thì $(1 + i)^n = (1 + i)^{2m+1} = 2^m i^m(1 + i)$: không thuần ảo, sai so với (*).

Như vậy $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Khi đó (*) $\Leftrightarrow (1 + i)^{2m} = 2^{15-2m}i \Leftrightarrow 2^m i^m = 2^{15-2m}i \Leftrightarrow m = 5$.

Vậy $n = 10$, từ đó ta có $T_8 = i^7\mathrm{C}_8^7 = -8i$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho số phức z thoả mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Mô-đun của số phức z bằng

A 10. **B** $5\sqrt{2}$. **C** 13. **D** $\sqrt{10}$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ và gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của z trên Oxy, ta có

$|z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$.

Và $P = |z+2|^2 - |z-i|^2 = (x+2)^2 + y^2 - x^2 - (y-1)^2 = 4x + 2y + 3$.

$\Rightarrow P = 4x + 2y + 3 = [4(x-3) + 2(y-4)] + 23 \leq \sqrt{4^2+2^2} \cdot \sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2} + 23 = 33$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-4}{2} = t \\ 4(x-3) + 2(y-4) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \\ t = 0{,}5. \end{cases}$

Vậy P đạt giá trị lớn nhất khi $z = 5 + 5i \Rightarrow |z| = 5\sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB đều, góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng $60°$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Biết rằng hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ nằm trong hình vuông $ABCD$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC là

A $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. B $\dfrac{a\sqrt{5}}{10}$. C $\dfrac{3a\sqrt{5}}{10}$. D $\dfrac{5a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm cạnh CD, khi đó $\begin{cases} AB \perp SM \\ AB \perp MI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SMI)$.

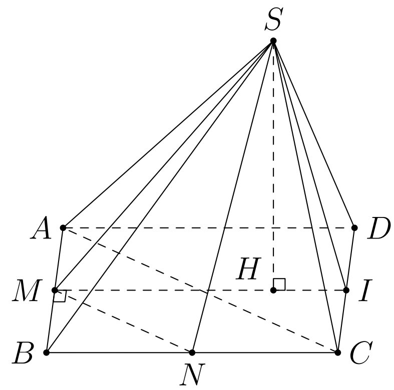
Do $CD \parallel AB$ nên $CD \perp (SMI) \Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = \widehat{SIM}$.

Vẽ $SH \perp MI$ tại $H \in MI$ thì $SH \perp (ABCD)$.

$\triangle SMI$ có $SM^2 = MI^2 + SI^2 - 2MI \cdot SI \cos \widehat{SIM}$

$\Leftrightarrow 3a^2 = 4a^2 + SI^2 - 2aSI$

$\Leftrightarrow SI^2 - 2aSI + a^2 = 0 \Leftrightarrow SI = a$.



__Cách 1__:

Theo định lý Pythagore đảo thì $\triangle SMI$ vuông tại $S \Rightarrow SH = \dfrac{SM \cdot SI}{MI} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi N là trung điểm cạnh BC ta có $AC \parallel MN$

$\Rightarrow \mathrm{d}(AC, SM) = \mathrm{d}(AC, (SMN)) = \mathrm{d}(C, (SMN)) = \dfrac{3V_{SMNC}}{S_{\Delta SMN}}$.

Ta có $V_{SMNC} = V_{S.MNB} = \dfrac{1}{3}SH \cdot \dfrac{1}{2}BM \cdot BN = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Tam giác SIC có $SC = \sqrt{SI^2 + IC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Tam giác SBC có $SN^2 = \dfrac{SB^2 + SC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} = 2a^2 \Rightarrow SN = a\sqrt{2}$.

Tam giác SMN có nửa chu vi $p = \dfrac{SM + SN + MN}{2} = \dfrac{a\sqrt{3} + a\sqrt{2} + a\sqrt{2}}{2}$.

Và diện tích $\triangle SMN$ là $S_{\triangle SMN} = \sqrt{p(p - SM)(p - SN)(p - BC)} = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{4}$.

Vậy $\mathrm{d}(AC, SM) = \dfrac{3V_{SMNC}}{S_{\Delta SMN}} = \dfrac{3 \cdot \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}}{\dfrac{a^2\sqrt{15}}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Cách 2:

Ta thấy $SM^2 + SI^2 = MI^2$ nên $\triangle SMI$ vuông tại S. Suy ra $SH = \dfrac{SM \cdot SI}{MI} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $HM = \dfrac{3a}{2}$.

Gọi $O = AC \cap BD$; N là trung điểm cạnh BC ta có $AC \parallel (SMN)$.

Do đó, $\mathrm{d}(AC, SM) = \mathrm{d}(AC, (SMN)) = \mathrm{d}(O, (SMN)) = \dfrac{2}{3} d\,(H, (SMN))$.

Gọi K là hình chiếu của H lên MN, ta có $\triangle HKM$ vuông cân tại K nên $HK = \dfrac{HM}{\sqrt{2}} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Vậy $\mathrm{d}(AC, SM) = \dfrac{2}{3} \dfrac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được tính theo công thức $c(t) = \dfrac{t}{t^2 + 1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

A 4 giờ. B 1 giờ. C 3 giờ. D 2 giờ.

Lời giải.

Với $c(t) = \dfrac{t}{t^2 + 1}$, $t > 0$ ta có $c'(t) = \dfrac{-t^2 + 1}{(t^2 + 1)^2}$.

Cho $c'(t) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-t^2 + 1}{(t^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$c'(t)$		$+$	0	$-$	
$c(t)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	

Vậy $\max\limits_{(0;+\infty)} c(t) = \dfrac{1}{2}$ khi $t = 1$.

Cách 2:

Với $t > 0$, ta có $t^2 + 1 \geq 2t$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t = 1$.

Do đó, $c(t) = \dfrac{t}{t^2 + 1} \leq \dfrac{t}{2t} = \dfrac{1}{2}$. Vậy $\max\limits_{(0;+\infty)} c(t) = \dfrac{1}{2}$ khi $t = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Ông Bình mua một chiếc xe máy với giá 60 triệu đồng tại một cửa hàng theo hình thức trả góp với lãi suất 8% một năm. Biết rằng lãi suất được chia đều cho 12 tháng và không thay đổi trong suốt thời gian ông Bình trả nợ. Theo quy định của cửa hàng, mỗi tháng ông Bình phải trả một số tiền cố định là 2 triệu đồng (bao gồm tiền nợ gốc và tiền lãi). Hỏi ông Bình trả hết nợ ít nhất là trong bao nhiêu tháng?

A 35. B 34. C 33. D 32.

Lời giải.

Do lãi suất theo năm là 8% nên lãi suất tính theo tháng là $n = \dfrac{8\%}{12} = \dfrac{2}{300}$.

Cuối tháng 1, sau khi trả nợ 2 triệu, ông Bình còn nợ: $S_1 = 60(1 + n) - 2$ triệu đồng.

Cuối tháng 2, sau khi trả nợ 2 triệu, ông Bình còn nợ:

$S_2 = [60(1+n) - 2](1+n) - 2 = 60(1+n)^2 - 2[(1+n)+1]$ triệu đồng.

Cuối tháng 3, sau khi trả nợ 2 triệu, ông Bình còn nợ

$S_3 = \{60(1+n)^2 - 2[(1+n)+1]\}(1+n) - 2 = 60(1+n)^3 - 2[(1+n)^2 + (1+n) + 1]$.

...

Cuối tháng m, sau khi trả nợ 2 triệu, ông Bình còn nợ 0 đồng, nghĩa là

$0 = 60(1+n)^m - 2[(n+1)^{m-1} + (n+1)^{m-2} + \cdots + (n+1) + 1]$

Ta có $(n+1)^{m-1} + (n+1)^{m-2} + \cdots + (n+1) + 1$ là tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân có $u_1 = 1$ và công bội $q = n+1$ gồm m số hạng

$(n+1)^{m-1} + (n+1)^{m-2} + \cdots + (n+1) + 1 = 1 \cdot \dfrac{(n+1)^m - 1}{n+1-1} = \dfrac{(n+1)^m - 1}{n}$

$\Leftrightarrow 0 = 60(1+n)^m - 2\dfrac{(1+n)^m - 1}{n} \Leftrightarrow 2 = \dfrac{60(1+n)^m \cdot n}{(1+n)^m - 1}$

Ta có $2 = \dfrac{60\left(1+\dfrac{2}{300}\right)^m \cdot \dfrac{2}{300}}{\left(1+\dfrac{2}{300}\right)^m - 1} \Leftrightarrow m \approx 33{,}58$.

Vậy ông Bình trả hết nợ sau 34 tháng.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Một vật chuyển động có phương trình $v(t) = t^3 - 3t + 1$ m/s. Quãng đường vật đi được kể từ khi bắt đầu chuyển động đến khi gia tốc bằng 24 m/s^2 là

A. $\dfrac{15}{4}$ m. B. 20 m. C. 19 m. D. $\dfrac{39}{4}$ m.

Lời giải.

Gia tốc của chuyển động là $a(t) = v'(t) = 3t^2 - 3$.

Tại thời điểm vật có gia tốc 24 m/s^2 thì $24 = 3t^2 - 3 \Leftrightarrow t = 3$.

Quãng đường vật đi được kể từ khi bắt đầu chuyển động đến khi gia tốc bằng 24 m/s^2 là quãng đường vật đi từ vị trí $t = 0$ đến vị trí $t = 3$.

Vậy $S(3) = \displaystyle\int_0^3 (t^3 - 3t + 1)\,\mathrm{d}t = \dfrac{39}{4}$ m.

Chọn đáp án D □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. A	3. A	4. C	5. D	6. A	7. B	8. C	9. C	10. A
11. D	12. A	13. B	14. C	15. D	16. A	17. B	18. D	19. A	20. D
21. C	22. A	23. C	24. D	25. A	26. A	27. B	28. C	29. B	30. D
31. D	32. D	33. B	34. A	35. D	36. B	37. B	38. C	39. B	40. C
41. A	42. C	43. C	44. D	45. B	46. B	47. A	48. B	49. B	50. D

92 ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG, THÀNH PHỐ CẦN THƠ - MÃ ĐỀ 324 - 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -3$ và công bội $q = \dfrac{2}{3}$. Số hạng thứ năm của (u_n) là

(A) $\dfrac{27}{16}$. (B) $\dfrac{16}{27}$. (C) $-\dfrac{27}{16}$. **(D)** $-\dfrac{16}{27}$.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow u_5 = -3 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = -\dfrac{16}{27}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, $AB = 2a$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB bằng

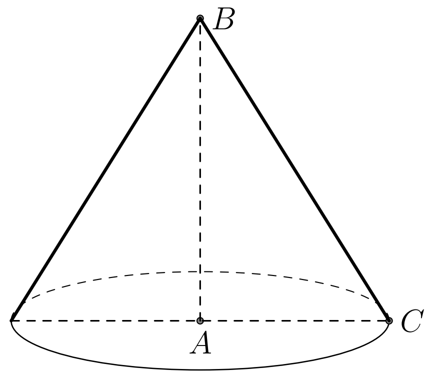
(A) $\dfrac{\pi a^3}{3}$. **(B)** $\dfrac{8\pi a^3}{3}$. (C) $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. (D) $\dfrac{8\pi a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB ta được một hình nón có bán kính đáy $r = 2a$ và chiều cao là $h = 2a$.

Áp dụng công thức tính thể tích khối nón ta có

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(2a)^2 2a = \frac{8\pi a^3}{3}.$$



Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(-2;4;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $2x - 3y + 6z + 19 = 0$ có phương trình là

(A) $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-4}{-3} = \dfrac{z-3}{6}$. (B) $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z-6}{3}$.

(C) $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+4}{-3} = \dfrac{z+3}{6}$. (D) $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z+6}{3}$.

Lời giải.

Ta có một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $2x - 3y + 6z + 19 = 0$ là $\vec{n} = (2;-3;6)$.

Đường thẳng đi qua điểm $A(-2;4;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $2x - 3y + 6z + 19 = 0$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = \vec{n} = (2;-3;6)$ nên có phương trình là $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-4}{-3} = \dfrac{z-3}{6}$.

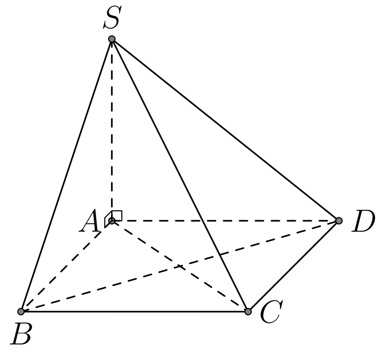
Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = 3a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

(A) $2a^3$. (B) $3a^3$. (C) $6a^3$. (D) a^3.

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 2a^2$.
Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot 2a \cdot 3a = 2a^3$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là

A $y = -x - 3$. (B) $y = x - 1$. (C) $y = -x + 2$. (D) $y = -x - 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = -\dfrac{4}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(-1) = -1$.
Theo giả thiết ta có $x_0 = 1$ nên $y_0 = -2 \Rightarrow$ tiếp điểm $M(-1; -2)$.
Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(-1; -2)$ là $y = -1(x+1) - 2$
$\Leftrightarrow y = -x - 3$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 1; 0)$, $B(2; -1; 2)$. Phương trình của mặt cầu có đường kính AB là

(A) $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 24$. (B) $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = \sqrt{6}$.
C $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 6$. (D) $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = \sqrt{24}$.

Lời giải.

Mặt cầu đường kính AB có tâm là $I(0; 0; 1)$ (trung điểm của AB).
Bán kính của mặt cầu là $R = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2}}{2} = \sqrt{6}$.
Vậy phương trình mặt cầu là $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 6$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

(A) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

(B) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

C $\displaystyle\int_a^b k\,\mathrm{d}x = k(a-b), \forall k \in \mathbb{R}$.

(D) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x, \forall c \in (a; b)$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_a^b k\,\mathrm{d}x = kx\Big|_a^b = kb - ka = k(b-a)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Số cách sắp xếp 6 học sinh vào một bàn dài có 10 chỗ ngồi là

(A) $6 \cdot \mathrm{A}_{10}^{6}$. (B) C_{10}^{6}. (C) A_{10}^{6}. (D) $10\mathrm{P}_6$.

Lời giải.

Số cách sắp xếp 6 học sinh vào một bàn dài có 10 chỗ ngồi là số chỉnh hợp chập 6 của 10 phần tử. Vậy số cách sắp xếp là A_{10}^{6}.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ xác định trên K. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

(A) $\left(x\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f'(x)$. (B) $\left(\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$.

(C) $\left(\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = F'(x)$. (D) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$.

Lời giải.

Ta có: $F'(x) = f(x)$.

Suy ra $\left(\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x) = F'(x)$ và $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10.

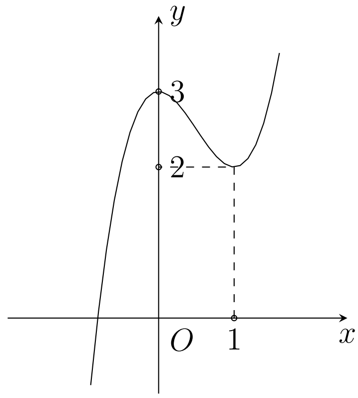
Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

(B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

(D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$, hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Giá trị của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{khi } x > 0 \\ 2m - \dfrac{5}{4}x & \text{khi } x \leqslant 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$ là

(A) 3. (B) $\dfrac{4}{3}$. (C) $\dfrac{1}{8}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \dfrac{1}{4}$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(2m - \dfrac{5}{4}x\right) = 2m$ và $f(0) = 2m$.

Hàm số liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow 2m = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{8}$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\tan x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$ quanh trục hoành là

A. $V = \dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$. B. $V = \dfrac{\pi \ln 2}{2}$. C. $V = \dfrac{\pi^2}{4}$. D. $V = \dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = \pi \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\pi \ln|\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi \ln 2}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Khoảng đồng biến của hàm số $y = x^4 + 4x - 6$ là

A. $(-1; +\infty)$. B. $(-\infty; -9)$. C. $(-9; +\infty)$. D. $(-\infty; -1)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 4$, $y' > 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

Vậy khoảng đồng biến của hàm số là $(-1; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép quay tâm O góc quay 90° biến điểm $M(-1; 2)$ thành điểm M'. Tọa độ điểm M' là

A. $M'(2; 1)$. B. $M'(2; -1)$. C. $M'(-2; -1)$. D. $M'(-2; 1)$.

Lời giải.

Ta có biểu thức tọa độ của phép quay $Q_{(O;90^\circ)}$ là $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$. Vậy chọn $M'(-2; -1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x-2)^2 - 1$ và trục hoành bằng

A. $\dfrac{25}{4}$. B. $\dfrac{3}{4}$. C. $\dfrac{4}{3}$. D. $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Xét phương trình $(x-2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng $S = \displaystyle\int_1^3 \left|(x-2)^2 - 1\right| \, dx = \left|\int_1^3 (x^2 - 4x + 3) \, dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\Big|_1^3\right| = \frac{4}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua tâm của mặt cầu $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=12$ và song song với mặt phẳng (Oxz) có phương trình là

A $y+1=0$. **B** $y-2=0$. **C** $y+2=0$. **D** $x+z-1=0$.

Lời giải.

Mặt cầu có tâm $I(1;-2;0)$.

Mặt phẳng song song mặt phẳng (Oxz) nên có dạng $y+D=0$, qua $I(1;-2;0)$ nên $D=2$.

Vậy mặt phẳng cần tìm là $y+2=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB=a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng 30°. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

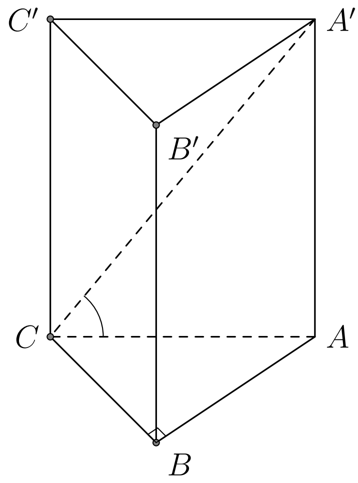
A $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{18}$. **B** $\dfrac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{(A'C,(ABC))}=\widehat{A'CA}=30^\circ$

$\Rightarrow A'A=AC\cdot\tan 30^\circ=a\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}=a\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta ABC}\cdot A'A=\dfrac{1}{2}a^2\cdot a\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.



Chọn đáp án D □

Câu 18.

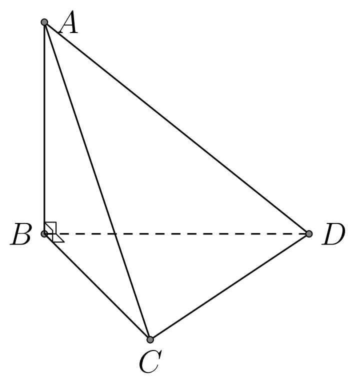
Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh BA, BC, BD vuông góc với nhau từng đôi một (như hình vẽ bên). Khẳng định nào sau đây **sai**?

A Góc giữa AD và (ABC) là góc $\widehat{ADB}$.

B Góc giữa CD và (ABD) là góc $\widehat{CDB}$.

C Góc giữa AC và (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.

D Góc giữa AC và (ABD) là góc $\widehat{CAB}$.



Lời giải.

Ta có $CB\perp(ABD)$ nên góc giữa CD và (ABD) là góc $\widehat{CDB}$, góc giữa AC và (ABD) là góc $\widehat{CAB}$.

Ta lại có $AB\perp(BCD)$ nên góc giữa AC và (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.

Góc giữa AD và (ABC) chính là góc $\widehat{DAB}$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Gọi (T) là một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 4π và có chiều cao bằng đường kính đáy. Thể tích khối trụ (T) bằng

Ⓐ π. Ⓑ 3π. Ⓒ 4π. **D** 2π.

Lời giải.

Ta có $S_{\text{xq}} = 2\pi rh \Leftrightarrow 4\pi = 2\pi r \cdot 2r \Leftrightarrow r = 1$.

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 \cdot 1 = 2\pi$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;2)$ và $B(3;0;2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

Ⓐ $x + y - z - 1 = 0$. Ⓑ $x + y - 3 = 0$. Ⓒ $x - y - z + 1 = 0$. **D** $x - y - 1 = 0$.

Lời giải.

Ta có mặt phẳng trung trực của đoạn AB qua trung điểm $I(2;1;2)$ của AB và nhận $\overrightarrow{AB} = (2;-2;0)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên có dạng $2x - 2y - 2 = 0$ hay $x - y - 1 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số là

A 4. Ⓑ -4. Ⓒ -2. Ⓓ 2.

Lời giải.

Dựa vào BBT, giá trị cực tiểu của hàm số là $y = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Với $a = \log_2 5$ và $b = \log_3 5$, giá trị của $\log_6 5$ bằng

A $\dfrac{ab}{a+b}$. Ⓑ $\dfrac{a+b}{ab}$. Ⓒ $\dfrac{1}{a+b}$. Ⓓ $a + b$.

Lời giải.

Ta có $\log_6 5 = \dfrac{1}{\log_5 6} = \dfrac{1}{\log_5 2 + \log_5 3} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} = \dfrac{ab}{a+b}$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Cho biết $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 - 7x + 12}}{a|x| - 17} = \dfrac{2}{3}$. Giá trị của a bằng

Ⓐ -3. **B** 3. Ⓒ 6. Ⓓ -6.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-7x+12}}{a|x|-17}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{4-\dfrac{7}{x}+\dfrac{12}{x^2}}}{-x\left(a+\dfrac{17}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4-\dfrac{7}{x}+\dfrac{12}{x^2}}}{a+\dfrac{17}{x}}=\dfrac{2}{a}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow a=3.$

Chọn đáp án B □

Câu 24. Biết giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}+2x^2+3x-4$ trên $[-4;0]$ lần lượt là M và m. Giá trị của $M+m$ bằng

A $\dfrac{4}{3}$. B $-\dfrac{28}{3}$. C -4. D $-\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}+2x^2+3x-4$ xác định và liên tục trên $[-4;0]$.

$y'=x^2+4x+3$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\in[-4;0]\\x=-3\in[-4;0]\end{array}\right.$.

Có $f(0)=-4$, $f(-1)=-\dfrac{16}{3}$, $f(-3)=-4$, $f(-4)=-\dfrac{16}{3}$.

Vậy $M=-4$, $m=-\dfrac{16}{3}$ nên $M+m=-\dfrac{28}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Tập nghiệm của phương trình $\sin 2x=\sin x$ là

A $S=\left\{k2\pi;\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\,|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B $S=\left\{k2\pi;\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k2\pi}{3}\,|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C $S=\left\{k2\pi;-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\,|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D $S=\{k2\pi;\pi+k2\pi\,|k\in\mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

Ta có $\sin 2x=\sin x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=x+k2\pi\\2x=\pi-x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k2\pi}{3}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $2z^2-6z+5=0$. Số phức iz_0 bằng

A $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$. B $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$. C $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$. D $\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$.

Lời giải.

Ta có $2z^2-6z+5=0\Leftrightarrow z=\dfrac{3\pm i}{2}$.

Do đó $z_0=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i\Rightarrow iz_0=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;-1;3)$, song song với hai đường thẳng $d\colon\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{-2}$, $d'\colon\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$ có phương trình là

A $2x-3y-6z+15=0$.

B $2x-3y-6z-15=0$.

C $2x-3y-5z-10=0$.

D $2x-3y-5z+10=0$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}\vec{u}_d=(1;4;-2)\\\vec{u}_{d'}=(1;-1;1)\end{cases}\Rightarrow[\vec{u}_d,\vec{u}_{d'}]=(2;-3;-5)$.

Mặt phẳng (P) đi qua $A(1;-1;3)$ và nhận $[\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}] = (2;-3;-5)$ là một véc-tơ pháp tuyến.
$\Rightarrow (P)\colon 2(x-1) - 3(y+1) - 5(z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y - 5z + 10 = 0.$
Chọn đáp án D □

Câu 28. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2(3 \cdot 2^x - 1) = 2x + 1$ bằng

A $\frac{3}{2}$. B $\frac{1}{2}$. C -1. D 0.

Lời giải.

Điều kiện: $3 \cdot 2^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2^x > \frac{1}{3} \Leftrightarrow x > \log_2\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x > -\log_2 3$.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_2(3 \cdot 2^x - 1) = 2x + 1 \\ \Leftrightarrow\ & 3 \cdot 2^x - 1 = 2^{2x+1} \\ \Leftrightarrow\ & 3 \cdot 2^x - 1 = 2 \cdot (2^x)^2 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy tổng của các nghiệm bằng $S = -1$.
Chọn đáp án C □

Câu 29. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+2}{(x-2)(x^2+1)}$ là

A $x = -2$. B $x = 0$. C $x = 2$. D $x = -1$.

Lời giải.

Ta có ngay đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+2}{(x-2)(x^2+1)}$ là $x = 2$.
Chọn đáp án C □

Câu 30. Cho các số phức $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 4 + 5i$. Số phức liên hợp của số phức $w = 2(z_1 + z_2)$ là

A $\overline{w} = 8 + 10i$. B $\overline{w} = 12 - 16i$. C $\overline{w} = 12 + 8i$. D $\overline{w} = 28i$.

Lời giải.

Ta có $w = 2(6 + 8i) = 12 + 16i \Rightarrow \overline{w} = 12 - 16i$.
Chọn đáp án B □

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Một đường thẳng đi qua điểm M và cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B. Diện tích lớn nhất của tam giác OAB bằng

A 4. B $2\sqrt{7}$. C $2\sqrt{2}$. D $\sqrt{7}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R = 2\sqrt{2}$.
Ta có: $\overrightarrow{OM} = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right) \Rightarrow OM = 1 < R \Rightarrow$ điểm M nằm trong mặt cầu (S).
Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow OH \leqslant OM$.

Đặt $OH = x \Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1$.
Đặt $\widehat{AOH} = \alpha \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{AH}{OA} = \dfrac{\sqrt{OA^2 - OH^2}}{OA} = \dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2\sqrt{2}}$; $\cos\alpha = \dfrac{OH}{OA} = \dfrac{x}{2\sqrt{2}}$.
Suy ra $\sin\widehat{AOB} = 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{x\sqrt{8-x^2}}{4}$.
Ta có: $S_{\triangle OAB} = \dfrac{1}{2}OA.OB.\sin\widehat{AOB} = x\sqrt{8-x^2}$ với $0 \leqslant x \leqslant 1$.
Xét hàm số $f(x) = x\sqrt{8-x^2}$ trên đoạn $[0;1]$.
$f'(x) = \sqrt{8-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{8-x^2}} = \dfrac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}} > 0, \forall x \in [0;1] \Rightarrow \max\limits_{[0;1]} f(x) = f(1) = \sqrt{7}$.
Vậy diện tích lớn nhất của tam giác OAB bằng $\sqrt{7}$.
Chọn đáp án D □

Câu 32. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x-3)^2$ thỏa mãn $F(0) = \dfrac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $\log_2[3F(1) - 2F(2)]$ bằng

A. 10. B. -4. C. 4. **D. 2.**

Lời giải.
Ta có:

$$3F(1) - 2F(2) = 3[F(1) - F(2)] + F(2) - F(0) + F(0) = 3\int\limits_2^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{3} = 4.$$

$\Rightarrow \log_2[3F(1) - 2F(2)] = \log_2 4 = 2$.
Chọn đáp án D □

Câu 33. Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log(mx) = 2\log(x+1)$ có nghiệm là

A. $m \geqslant 4$. B. $m > 4$.
C. $m < 0$ hoặc $m \geqslant 4$. D. $m < 0$.

Lời giải.
Ta có $x = 0$ không là nghiệm của phương trình
Với $x \neq 0$: $\log(mx) = 2\log(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ mx = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ m = x + 2 + \dfrac{1}{x}. \end{cases}$
Xét hàm số $f(x) = x + 2 + \dfrac{1}{x}$ với $x \in (-1;+\infty) \setminus \{0\}$.
$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (do $x \in (-1;+\infty) \setminus \{0\}$).
Bảng biến thiên:

x	-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$0 \searrow$		$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m < 0$ hoặc $m \geqslant 4$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Một chiếc ô tô đang chuyển động với vận tốc $v(t) = 2 + \dfrac{t^2-4}{t+4}$ (m/s). Quãng đường ô tô đi được từ thời điểm $t = 5\,\mathrm{s}$ đến thời điểm $t = 10\,\mathrm{s}$ là

(A) 12,23 m. **(B) 32,8 m.** (C) 45,03 m. (D) 10,24 m.

Lời giải.

Quãng đường ô tô đi được là $s = \displaystyle\int_5^{10} \left(2 + \dfrac{t^2-4}{t+4}\right) \mathrm{d}t = 32{,}8\,\mathrm{m}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Ông An mua một chiếc điện thoại di động tại một cửa hàng với giá 18 500 000 đồng và đã trả trước 5 000 000 đồng ngay khi nhận điện thoại. Mỗi tháng, ông An phải trả góp cho cửa hàng trên số tiền không đổi là m đồng. Biết rằng lãi suất tính trên số tiền nợ còn lại là 3,4% /tháng và ông An trả đúng 12 tháng thì hết nợ. Số tiền m là

(A) 1 350 203 đồng. (B) 1 903 203 đồng. **(C) 1 388 824 đồng.** (D) 1 680 347 đồng.

Lời giải.

Đặt $r = 3{,}4\%$ là lãi suất hàng tháng và $a = 1 + r$.

Số tiền vay là $A = 13\,500\,000$.

Số tiền ông An còn nợ sau tháng thứ 1: $T_1 = A + Ar - m = A(1+r) - m = Aa - m$.

Số tiền ông An còn nợ sau tháng thứ 2: $T_2 = T_1 + T_1r - m = T_1a - m = Aa^2 - m(a+1)$.

Số tiền ông An còn nợ sau tháng thứ 3: $T_3 = T_2 + T_2r - m = T_2a - m = Aa^3 - m(a^2+a+1)$.

...

Số tiền ông An còn nợ sau tháng thứ 12: $T_{12} = T_{11} + T_{11}r - m = T_{11}a - m = Aa^{12} - m\left(a^{11} + a^{10} + \cdots + a + 1\right) = Aa^{12} - m\dfrac{a^{12}-1}{a-1}$.

Ông An trả đúng 12 tháng thì hết nợ nên: $T_{12} = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{Aa^{12}(a-1)}{a^{12}-1} = 1\,388\,824$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Nhà xe khoán cho hai tài xế An và Bình mỗi người lần lượt nhận 32 lít và 72 lít xăng trong một tháng. Biết rằng, trong một ngày tổng số xăng cả hai người sử dụng là 10 lít. Tổng số ngày ít nhất để hai tài xế sử dụng hết số xăng được khoán là

(A) 4 ngày. (B) 10 ngày. **(C) 20 ngày.** (D) 15 ngày.

Lời giải.

Gọi x (lít) $(0 < x < 10)$ là số xăng An sử dụng trong 1 ngày.

Khi đó: $10 - x$ (lít) là số xăng Bình sử dụng trong 1 ngày.

Suy ra $f(x) = \dfrac{32}{x} + \dfrac{72}{10-x}, x \in (0;10)$ là tổng số ngày An và Bình sử dụng hết số xăng được khoán.

Ta có: $f(x) = \dfrac{32}{x} + \dfrac{72}{10-x} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{32}{x^2} + \dfrac{72}{(10-x)^2}$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{32}{x^2} + \dfrac{72}{(10-x)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \in (0;10) \\ x = -20 \notin (0;10) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x) = \dfrac{32}{x} + \dfrac{72}{10-x}, x \in (0;10)$

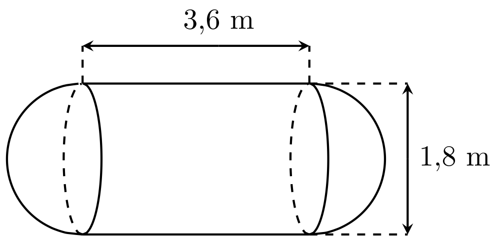
x	0		4		10
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	20	$\nearrow$	$+\infty$

Theo BBT thì ít nhất 20 ngày thì An và Bình sử dụng hết lượng xăng được khoán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37.

Một bồn chứa xăng gồm hai nửa hình cầu có đường kính 1,8 m và một hình trụ có chiều cao bằng 3,6 m (như hình vẽ minh hoạ). Thể tích của bồn chứa gần nhất với kết quả nào sau đây?



A $12{,}21\,\mathrm{m}^3$. (B) $3{,}05\,\mathrm{m}^3$. (C) $24{,}43\,\mathrm{m}^3$. (D) $9{,}16\,\mathrm{m}^3$.

Lời giải.

Thể tích bồn chứa bằng thể tích khối cầu có bán kính $R = 0{,}9\,\mathrm{m}$ và khối trụ có $R = 0{,}9\,\mathrm{m}$, chiều cao $h = 3,6\,\mathrm{m}$.

Hay $V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 + \pi \cdot R^2 \cdot h = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0{,}9)^3 + \pi \cdot (0{,}9)^2 \cdot 3,6 \approx 12{,}21\,\mathrm{m}^3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2 = 4$. Gọi $N(x_0; y_0; z_0)$ là điểm thuộc (S) sao cho khoảng cách từ điểm N đến mặt phẳng (Oxz) lớn nhất. Giá trị của biểu thức $P = x_0 + y_0 + z_0$ bằng

(A) 6. **B** 8. (C) 5. (D) 4.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng đi qua tâm $I(1;3;2)$ của mặt cầu (S) và vuông góc với (Oxz).

Phương trình tham số của d: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 + t \\ z = 2 \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d và (S) suy ra $A(1;5;2)$, $B(1;1;2)$.

Ta có: $d\,(A;(Oxz)) > d\,(B;(Oxz))$.

Theo đề bài thì $N \equiv A \Rightarrow N(1;5;2) \Rightarrow x_0 + y_0 + z_0 = 8$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Cho số phức z thoả mãn đồng thời hai điều kiện $|z-3-4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $M = |z+2|^2 - |z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Môđun của số phức $z-2-i$ bằng

(A) $\sqrt{5}$. (B) 9. (C) 25. **D** 5.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi, (\forall x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow |z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5 \quad (1)$.
Ta có:

$$\begin{aligned} M &= |z+2|^2 - |z-i|^2 \\ &= (x+2)^2 + y^2 - x^2 - (y-1)^2 = 4x + 2y + 3 \\ &= 4(x-3) + 2(y-4) + 23 \\ &\leqslant \sqrt{20}\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} + 23 = 33. \end{aligned}$$

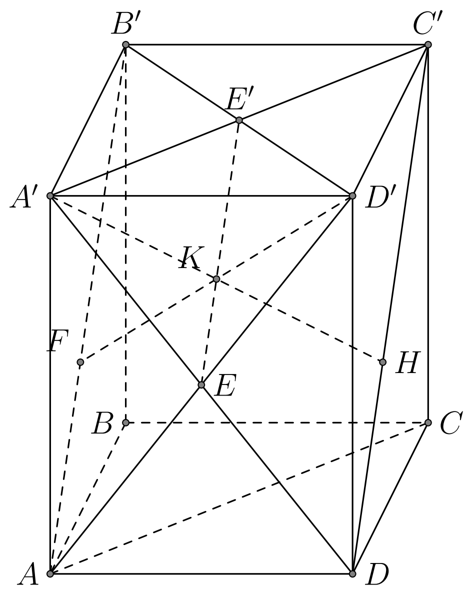
Dấu $'' ='' $ xảy ra khi chỉ khi $\dfrac{x-3}{y-4} = \dfrac{4}{2}$ kết hợp với (1) suy ra $\left[\begin{array}{l} x = y = 5 \Rightarrow z = 5 + 5i \\ x = 1, y = 3 \Rightarrow z = 1 + 3i. \end{array}\right.$

Thử lại ta có $M_{\max} = 33 \Leftrightarrow z = 5 + 5i \Rightarrow |z - 2 - i| = 5$.
Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2a$, $AD = 3a$, $AA' = 4a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$. Giá trị của $\cos\alpha$ bằng

A. $\dfrac{29}{61}$. B. $\dfrac{27}{34}$. C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\dfrac{137}{169}$.

Lời giải.



Gọi E, E' lần lượt là tâm của hình chữ nhật $ADD'A'$, $A'B'C'D'$.
Khi đó: $EE' = (DA'C') \cap (AB'D')$.
Dựng $A'H$, $D'F$ lần lượt là đường cao của hai tam giác $DA'C'$, $AB'D'$.
Dễ thấy: $A'H$, $D'F$, EE' đồng qui tại K và $\begin{cases} A'K \perp EE' \\ D'K \perp EE'. \end{cases}$
Khi đó ta có góc giữa $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ chính là góc giữa hai đường thẳng $A'H$ và $D'F$.
Hình chữ nhật $DD'C'C$ có: $DC' = \sqrt{DD'^2 + D'C'^2} = 2\sqrt{5}a$.
Hình chữ nhật $ADD'A'$ có: $A'D = \sqrt{AD^2 + AA'^2} = 5a$.
Hình chữ nhật $A'B'C'D'$ có: $A'C' = \sqrt{A'B'^2 + B'C'^2} = \sqrt{13}a$.
Suy ra: $S_{\Delta DA'C'} = \sqrt{61}a^2 \Rightarrow A'H = \dfrac{2S_{\Delta DA'C'}}{DC'} = \dfrac{\sqrt{305}}{5}a \Rightarrow A'K = \dfrac{\sqrt{305}}{10}a$.
Hoàn toàn tương tự ta có: $D'K = \dfrac{\sqrt{305}}{10}a$.
Trong tam giác $A'D'K$ có: $\cos\widehat{A'KD'} = \dfrac{A'K^2 + D'K^2 - A'D'^2}{2.A'K.D'K} = -\dfrac{29}{61}$.
$\Rightarrow \cos\alpha = \left|\cos\widehat{A'KD'}\right| = \dfrac{29}{61}$.
Chọn đáp án A □

Câu 41.

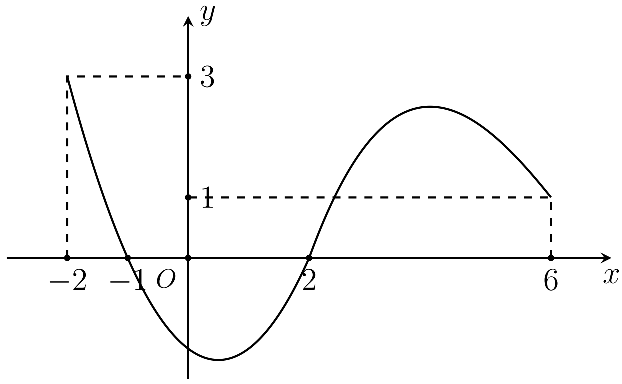
Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình bên dưới. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A $f(-2) < f(-1) < f(2) < f(6)$.

B $f(2) < f(-2) < f(-1) < f(6)$.

C $f(-2) < f(2) < f(-1) < f(6)$.

D $f(6) < f(2) < f(-2) < f(-1)$.



Lời giải.

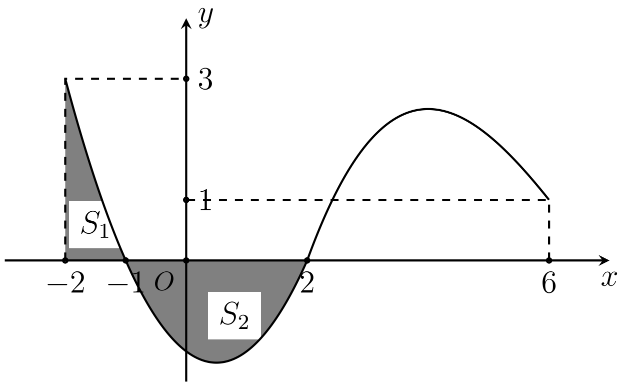
Dựa vào đồ thị của hàm $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như sau:

x	-2		-1		2		6
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-2)$	↗	$f(-1)$	↘	$f(2)$	↗	$f(6)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\begin{cases} f(-2) < f(-1) \\ f(2) < f(-1) \\ f(2) < f(6). \end{cases}$

Chỉ cần so sánh $f(-2)$ và $f(2)$ nữa là xong.

Gọi S_1, S_2 là diện tích hình phẳng được tô đậm như trên hình vẽ.



Ta có:

$$S_1 = \int\limits_{-2}^{-1} |f'(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{-1} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(-1) - f(-2).$$

$$S_2 = \int\limits_{-1}^{2} |f'(x)|\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{-1}^{2} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(-1) - f(2).$$

Dựa vào đồ thị ta thấy $S_1 < S_2$ nên $f(-1) - f(-2) < f(-1) - f(2) \Leftrightarrow f(-2) > f(2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Người ta trồng 3003 cây theo dạng một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây, ..., cứ tiếp tục trồng như thế cho đến khi hết số cây. Số hàng cây được trồng là

A 77. **B** 79. **C** 76. **D** 78.

Lời giải.

Gọi số cây ở hàng thứ n là u_n.

Ta có: $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, ... và $S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = 3003$.

Nhận xét dãy số (u_n) là cấp số cộng có $u_1 = 1$, công sai $d = 1$.

Khi đó $S = \dfrac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2} = 3003$.

Suy ra $\dfrac{n\left[2\cdot 1 + (n-1)1\right]}{2} = 3003 \Leftrightarrow n(n+1) = 6006 \Leftrightarrow n^2+n-6006 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 77 \\ n = -78 \end{array}\right. \Leftrightarrow n = 77$ (vì $n \in \mathbb{N}$).

Vậy số hàng cây được trồng là 77.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Số điểm cực trị của hàm số $y = (x+2)^3(x-4)^4$ là

A 2. **B** 3. **C** 4. **D** 1.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = [(x+2)^3]'(x-4)^4 + (x+2)^3[(x-4)^4]' = 3(x+2)^2(x-4)^4 + (x+2)^3 \cdot 4(x-4)^3$

$y' = (x+2)^2(x-4)^3\left[3(x-4) + 4(x+2)\right] = (x+2)^2(x-4)^3(7x-4)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 4 \\ x = \dfrac{4}{7}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		$\frac{4}{7}$		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗		↗	CĐ	↘	CT	↗	$+\infty$

Vậy hàm số có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Biết $\displaystyle\int (\sin 2x - \cos 2x)^2\,\mathrm{d}x = x + \frac{a}{b}\cos 4x + C$, với a, b là các số nguyên dương, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $C \in \mathbb{R}$. Giá trị của $a+b$ bằng

A 5. **B** 4. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Ta có $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 \, \mathrm{d}x = \int (1 - 2\sin 2x \cos 2x) \, \mathrm{d}x = \int (1 - \sin 4x) \, \mathrm{d}x = x + \dfrac{1}{4}\cos 4x + C.$

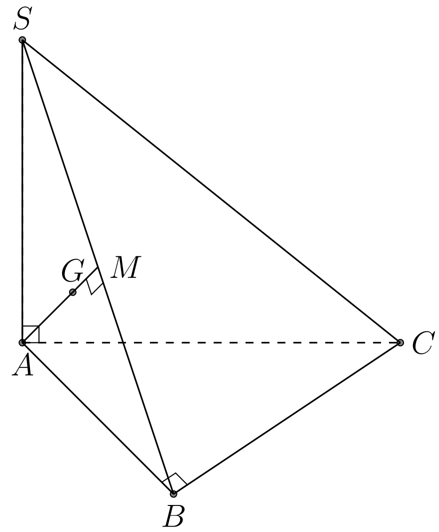
Mà $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 \, \mathrm{d}x = x + \dfrac{a}{b}\cos 4x + C$ nên $\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b = 5.$

Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = AB = \sqrt{3}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) bằng

A $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B** $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **C** $\sqrt{3}$. **D** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của $SB \Rightarrow AM \perp SB$ (vì tam giác SAB cân).

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM.$

Và $\begin{cases} AM \perp SB \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow GM \perp (SBC)$ tại M.

Do đó $d\left(G, (SBC)\right) = GM$.

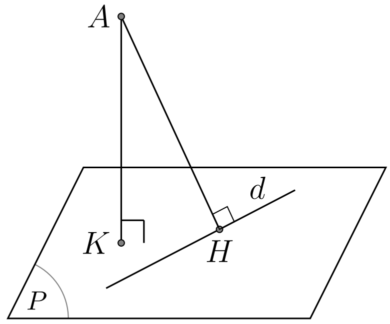
$$SB = AB\sqrt{2} = \sqrt{6}, AM = \frac{SB}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow GM = \frac{AM}{3} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - t \end{cases}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất có phương trình là

A $x + 2y + 4z + 7 = 0$. **B** $4x - 7y + z - 2 = 0$.
C $4x - 5y + 3z + 2 = 0$. **D** $x + y + 3z + 5 = 0$.

Lời giải.



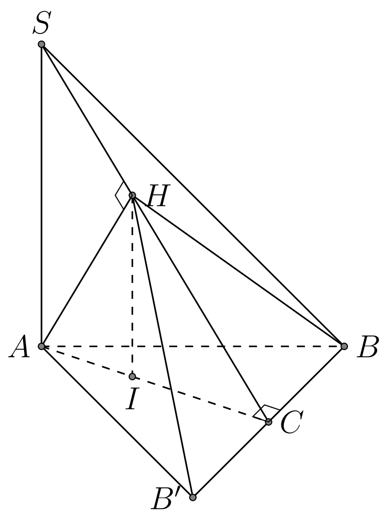
Gọi H là hình chiếu của A trên d; K là hình chiếu của A trên (P).
Ta có $d\left(A;\ (P)\right) = AK \leqslant AH$ (không đổi)
$\Rightarrow d\left(A;\ (P)\right)$ lớn nhất khi $K \equiv H$.
Vì $H \in d$ nên $H(1+2t; t; -2-t)$.
Ta có $\overrightarrow{AH} = (2t-1; t-1; -3-t)$.
Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (2; 1; -1)$.

Vì H là hình chiếu của A trên d nên $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow 2(2t-1) + 1(t-1) + (3+t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.
Vậy $H = (1; 0; -2) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (-1; -1; -3)$.
Mặt phẳng (P) qua H và vuông góc với AH nên (P) có phương trình $x + y + 3z + 5 = 0$.
Chọn đáp án D □

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại C, $AB = 2a$, $\widehat{CAB} = 30°$. Gọi H là hình chiếu của A trên SC, B' là điểm đối xứng của B qua mặt phẳng (SAC). Thể tích của khối chóp $H.AB'B$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{7}$. B. $\dfrac{6a^3\sqrt{3}}{7}$. C. $\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{7}$. D. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải.



Kẻ $HI \parallel SA$, với $I \in AC$ khi đó ta được $HI \perp (AB'B)$.
Xét tam giác ABC ta có $\cos\widehat{CAB} = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$.
Do đó $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = a$.
Xét tam giác vuông SAC ta có $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{7}$
và $HC \cdot SC = AC^2$.
Do đó $HC = \dfrac{AC^2}{SC} = \dfrac{3\sqrt{7}a}{7}$.
Ta dễ thấy $\Delta CIH \sim \Delta CAS$ do đó $\dfrac{HI}{SA} = \dfrac{HC}{SC}$.
Do đó $HI = \dfrac{SA.HC}{SC} = \dfrac{6a}{7}$.
Vậy $V_{H.AB'B} = \dfrac{1}{3}HI \cdot S_{\Delta AB'B} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{6a}{7} \cdot \dfrac{1}{2}AC \cdot BB'$
$= \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{6a}{7} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot 2a = \dfrac{2\sqrt{3}}{7}a^3$.
Chọn đáp án D □

Câu 48. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{C}_n^2 - \mathrm{C}_n^1 = 44$. Số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức $\left(x\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^4}\right)^n$, với $x > 0$ bằng

A. 165. B. 485. C. 238. D. 525.

Lời giải.

$$\mathrm{C}_n^2 - \mathrm{C}_n^1 = 44 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 44 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 88 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n = 11 & \text{(nhận)} \\ n = -8 & \text{(loại)}. \end{array}\right.$$

Do đó

$$\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^{11} = \sum_{k=0}^{11} \mathrm{C}_{11}^k \left(x\sqrt{x}\right)^k \left(\frac{1}{x^4}\right)^{11-k} = \sum_{k=0}^{11} \mathrm{C}_{11}^k (x)^{\frac{3k}{2}+4(k-11)} = \sum_{k=0}^{11} \mathrm{C}_{11}^k (x)^{\frac{11k-88}{2}}.$$

Số hạng không chứa x khi $11k - 88 = 0 \Leftrightarrow k = 8$.

Do vậy số hạng cần tìm là $\mathrm{C}_{11}^{8} = 165$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Tất cả giá trị của m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 - 8m^2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 64 là

(A) $m = \sqrt[3]{2}$; $m = -\sqrt[3]{2}$.

(B) $m = \sqrt{2}$; $m = -\sqrt{2}$.

(C) $m = 2$; $m = -2$.

D $m = \sqrt[5]{2}$; $m = -\sqrt[5]{2}$.

Lời giải.

Ta có đạo hàm $y' = 4x^3 - 16m^2x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2m. \end{array}\right.$

Do đó với điều kiện $m \neq 0$ hàm số có 3 cực trị tạo thành tam giác cân ABC với $A(0;1)$, $B(2m; -16m^4 + 1)$ và $C(-2m; -16m^4 + 1)$.

Ta có $BC = |4m|$ và chiều cao $AH = |-16m^4|$.

Theo đề bài thì $S_{\triangle ABC} = 64 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}|4m|\left|16m^4\right| = 64 \Leftrightarrow |m|^5 = 2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt[5]{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 50.

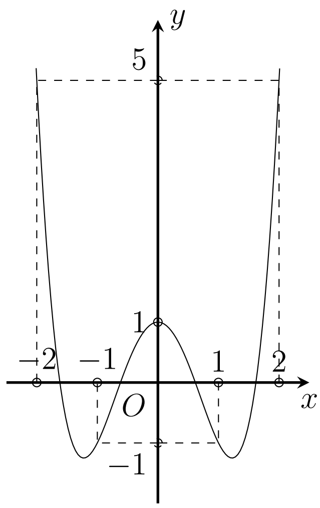
Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình bên. Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) + 2m = 0$ có bốn nghiệm phân biệt là

(A) $-\dfrac{1}{2} < m < \dfrac{1}{2}$.

(B) $-\dfrac{5}{8} < m < \dfrac{1}{2}$.

(C) $-\dfrac{5}{4} < m < 1$.

D $-\dfrac{1}{2} < m < \dfrac{5}{8}$.



Lời giải.

Theo đồ thị trên hình vẽ, ta thấy đồ thị đi qua các điểm $A(0;1)$, $B(1;-1)$ và $C(2;5)$. Do đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = -1 \\ 16a + 4b + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a = 1 \\ b = -2. \end{cases}$

Ta có $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$. Do đó $f'(x) = 4x^3 - 6x$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\dfrac{3}{2}}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{5}{4}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\dfrac{5}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó phương trình $f(x) + 2m = 0$ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-\dfrac{5}{4} < -2m < 1$.
Vậy $-\dfrac{1}{2} < m < \dfrac{5}{8}$.
Chọn đáp án D □

——— **HẾT** ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. B	3. A	4. A	5. A	6. C	7. C	8. C	9. A	10. B
11. C	12. B	13. A	14. C	15. C	16. C	17. D	18. A	19. D	20. D
21. A	22. A	23. B	24. B	25. B	26. B	27. D	28. C	29. C	30. B
31. D	32. D	33. C	34. B	35. C	36. C	37. A	38. B	39. D	40. A
41. B	42. A	43. A	44. A	45. B	46. D	47. D	48. A	49. D	50. D

93 ĐỀ THI THỬ TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN - THANH HÓA NĂM 2017-2018 LẦN 3

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển của $\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^9$ với $x \neq 0$.

A 4608. **B** 128. **C** 164. **D** 36.

Lời giải.

Số hạng tổng quát trong khai triển là $T = \mathrm{C}_9^k(2x)^{9-x} \cdot \dfrac{1}{x^{2k}} = \mathrm{C}_9^k 2^{9-x} \cdot x^{9-3k}$. Số hạng chứa x^3 khi và chỉ khi $9-3k=3 \Leftrightarrow k=2$. Vậy hệ số của số hạng chứa x^3 là $C_9^2 \cdot 2^7 = 4608$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Số nghiệm thực của phương trình $2^{\sqrt{x}} = 2^{2-x}$ là

A 3. **B** 1. **C** 2. **D** 0.

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+\sqrt{x}-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}=1 \vee \sqrt{x}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy phương trình có đúng 1 nghiệm thực.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Cho khối trụ có độ dài đường sinh bằng a và bán kính đáy bằng R. Tính thể tích của khối trụ.

A $\pi a R^2$. **B** $2\pi a R^2$. **C** $\dfrac{1}{3}\pi a R^2$. **D** aR^2.

Lời giải.

Thể tích khối trụ là $V = \pi a R^2$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{2x^2+2x+3}{x^2+x+3}$.

A $2 - \dfrac{3}{x^2+x+3}$. **B** $\dfrac{6x+3}{(x^2+x+3)^2}$. **C** $\dfrac{3}{(x^2+x+3)^2}$. **D** $\dfrac{x+3}{x^2+x+3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{(4x+2)(x^2+x+3)-(2x+1)(2x^2+2x+3)}{(x^2+x+3)^2} = \dfrac{6x+3}{(x^2+x+3)^2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin 2x$, biết $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$.

A $F(x) = -\dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{\pi}{6}$. **B** $F(x) = \cos^2 x - \dfrac{1}{4}$.

C $F(x) = \sin^2 x - \dfrac{1}{4}$. **D** $F(x) = -\dfrac{1}{2}\cos 2x$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \int \sin 2x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$. Từ $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$, suy ra $-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3} + C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{1}{4}$.

Khi đó $F(x) = -\frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 x) + \frac{1}{4} = \sin^2 x - \frac{1}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{2x-4}{x-3}$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**.

A) (C) có đúng 1 tiệm cận ngang.
B) (C) có đúng 1 tâm đối xứng.
C) (C) có đúng 1 trục đối xứng.
D) (C) có đúng 1 tiệm cận đứng.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 3^+} = +\infty$ nên (C) có đúng 1 tiệm cận đứng là $x = 3$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-4}{x-3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-4}{x-3} = 2$ nên (C) có đúng 1 tiệm cận ngang là $y = 2$.

Gọi $I(2;3)$ là giao điểm của hai tiệm cận, khi đó đồ thị (C) đối xứng qua tâm I.

Đồ thị (C) có 2 trục đối xứng là các đường phân giác của góc tạo bởi 2 đường tiệm cận.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Cho số phức $z = 3 + i$. Tính $|\overline{z}|$.

A) $|\overline{z}| = 2\sqrt{2}$.
B) $|\overline{z}| = 2$.
C) $|\overline{z}| = 4$.
D) $|\overline{z}| = \sqrt{10}$.

Lời giải.

Ta có $|\overline{z}| = |z| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Cho hình phẳng $(\mathscr{D})$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, hai đường thẳng $x = 1, x = 2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay $(\mathscr{D})$ quanh trục hoành.

A) $\frac{3\pi}{2}$.
B) 3π.
C) $\frac{3}{2}$.
D) $\frac{2\pi}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành là $V = \pi \int\limits_1^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}x^2\Big|_1^2 = \frac{3\pi}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$; $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A) $I = 8$.
B) $I = 12$.
C) $I = 36$.
D) $I = 4$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 + 6 = 8$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-2;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+2z-5=0$. Đường thẳng nào sau đây đi qua A và song song với mặt phẳng (P)?

(A) $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$.
(B) $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$.
(C) $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$.
D $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Lời giải.

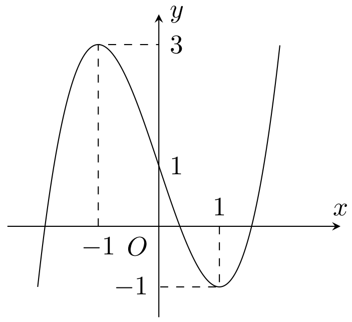
Đường thẳng cần tìm có một VTCP vuông góc với VTPT $\vec{n}=(1;1;2)$ của mặt phẳng (P), đồng thời đường thẳng này chứa điểm $A(3;-2;1)$. Ta thấy chỉ có đường thẳng $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$ thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11.

Hàm số nào dưới đây có đồ thị như hình vẽ?

A $y=x^3-3x^2+1$.
(B) $y=x^3+3x+1$.
(C) $y=-x^3+3x+1$.
(D) $y=-x^3-3x+1$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị suy ra hệ số của x^3 lớn hơn 0. Đồ thị đi qua điểm $A(1;-1)$ nên chỉ có hàm số $y=x^3-3x^2+1$ thỏa.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

(A) Tập giá trị của hàm số $y=\ln(x^2+1)$ là $[0;+\infty)$.
(B) Hàm số $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
(C) $\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
D Hàm số $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ không phải là hàm chẵn, cũng không phải là hàm lẻ.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{x^2+1}>|x|\geq -x, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{x^2+1}+x>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Từ đó, hàm số $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Đặt $y=f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có

$$f(-x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=-f(x).$$

Vậy hàm số $y=f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ là hàm số lẻ.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z+5=0$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là

(A) $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$.
(B) $3\sqrt{2}$.
(C) $\sqrt{3}$.
D 3.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}(M,(P)) = \dfrac{|2+0+2+5|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \dfrac{9}{3} = 3.$

Chọn đáp án D □

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2 = 9$. Tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu (S) là

(A) $I(-1;3;2), R = 9$.
(B) $I(1;-3;-2), R = 9$.
(C) $I(-1;3;2), R = 3$.
(D) $I(1;3;2), R = 9$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tọa độ tâm $I(-1;3;2)$ và bán kính $R = 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Biết phương trình $\log_3(3^x-1)\cdot[1+\log_3(3^x-1)] = 6$ có hai nghiệm là $x_1 < x_2$ và tỉ số $\dfrac{x_1}{x_2} = \log\dfrac{a}{b}$, trong đó $a, b \in \mathbb{N}^*$ và a, b có ước chung lớn nhất bằng 1. Tính $a+b$.

(A) $a+b = 38$.
(B) $a+b = 37$.
(C) $a+b = 56$.
(D) $a+b = 55$.

Lời giải.

Điều kiện $3^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Phương trình tương đương với

$$\log_3^2(3^x-1) + \log_3(3^x-1) - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3(3^x-1) = 2\\ \log_3(3^x-1) = -3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x = 10\\ 3^x = \dfrac{28}{27}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \log_3 10\\ x = \log_3\dfrac{28}{27}.\end{array}\right.$$

Vì $x_1 < x_2$ nên $x_1 = \log_3\dfrac{28}{27}, x_2 = \log_3 10$.

Ta có $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{\log_3\frac{28}{27}}{\log_3 10} = \log\dfrac{28}{27}$. Suy ra $a = 28; b = 27$. Tính được $a+b = 55$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Có tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số và 3 chữ số đó đôi một khác nhau?

(A) $\mathrm{A}_{10}^3 + \mathrm{A}_9^3$.
(B) A_9^3.
(C) A_{10}^3.
(D) $9\times 9\times 8$.

Lời giải.

Gọi $\overline{abc}, (a, b, c \in \{0, 1, 2, \cdots 9\}, a \neq 0)$ là số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn $a \neq 0$ có 9 cách.

Chọn $b \neq a$ có 9 cách.

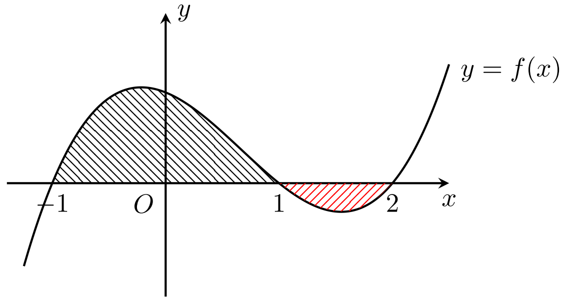
Chọn $c \neq a, b$ có 8 cách.

Theo quy tắc nhân, có tất cả $9\times 9\times 8$ số thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án D □

Câu 17.

Gọi S là diện tích hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên. Công thức tính S là



(A) $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(B) $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(C) $S = \int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(D) $S = -\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dựa vào hình vẽ suy ra $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$ lần lượt là M, m. Tình $S = M + m$.

(A) $S = 6$. (B) $S = 4$. (C) $S = 7$. (D) $S = 3$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x - 2 + \dfrac{4}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$.

Ta có $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{(x - 1)^2}$.

Ta có $f'(x) = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \in [2; 4] \\ x = -1 \notin [2; 4] \end{array}\right. \Rightarrow x = 3$.

Tính được $f(2) = 4; f(3) = 3; f(4) = \dfrac{10}{3}$.

Suy ra $M = \max\limits_{x \in [2;4]} f(x) = 4; m = \min\limits_{x \in [2;4]} f(x) = 3$. Suy ra $S = 4 + 3 = 7$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = 4x^3 + 2x + 1$. Tìm $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 12x^4 + 2x^2 + x + C$. (B) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 12x^2 + 2$.

(C) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^4 + x^2 + x + C$. (D) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 12x^2 + 2 + C$.

Lời giải.

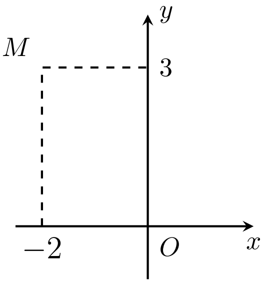
$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (4x^3 + 2x + 1)\,\mathrm{d}x = x^4 + x^2 + x + C$. Ta có

Chọn đáp án (C) □

Câu 20.

Điểm M trong hình vẽ dưới đây biểu thị cho số phức

(A) $3-2i$. **(B)** $-2+3i$. (C) $2-3i$. (D) $3+2i$.



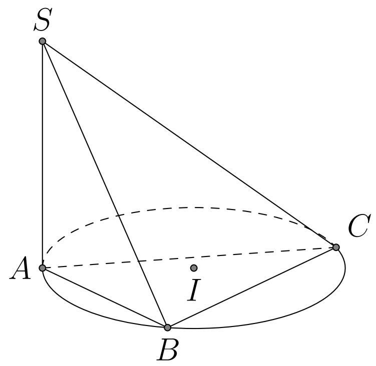
Lời giải.

Dựa vào hình vẽ, số phức có phần thực là -2 và phần ảo là 3. Suy ra số phức cần tìm là $-2+3i$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21.

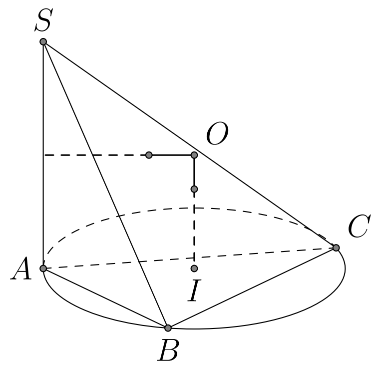
Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA=a$. Tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm I có bán kính bằng $2a$ (tham khảo hình vẽ). Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.



(A) $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **(B)** $\dfrac{a\sqrt{17}}{2}$. (C) $a\sqrt{5}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

Dựng đường thẳng d đi qua I và vuông góc với mp(ABC). Suy ra $d \parallel SA$. Trong mp(d, SA), dựng Δ là đường thẳng trung trực của SA và Δ cắt d tại O. Suy ra $OS=OA=OB=OC$ hay O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.



Bán kính mặt cầu là

$$R=OA=\sqrt{OI^2+IA^2}=\sqrt{(2a)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{17}}{2}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Cho z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2+1=0$, trong đó số phức z_1 có phần ảo âm. Tính z_1+3z_2.

(A) $z_1+3z_2=\sqrt{2}i$. (B) $z_1+3z_2=-\sqrt{2}$. (C) $z_1+3z_2=-\sqrt{2}i$. (D) $z_1+3z_2=\sqrt{2}$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với $z^2=-\dfrac{1}{2}=\dfrac{i^2}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i \\ z_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}i \end{array}\right.$.

Từ giả thiết ta có $z_1=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$, $z_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$.

Suy ra $z_1+3z_2=\sqrt{2}i$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Cho a là số thực dương. Viết biểu thức $P = \sqrt[3]{a^5} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{a^3}}$ dưới dạng lũy thừa cơ số a ta được kết quả

A $P = a^{\frac{1}{6}}$. **B** $P = a^{\frac{5}{6}}$. **C** $P = a^{\frac{7}{6}}$. **D** $P = a^{\frac{19}{6}}$.

Lời giải.

Ta có $P = a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{-\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{6}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Tính tổng vô hạn sau $S = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} + \cdots$

A $2^n - 1$. **B** $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\frac{1}{2^n} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$. **C** 4. **D** 2.

Lời giải.

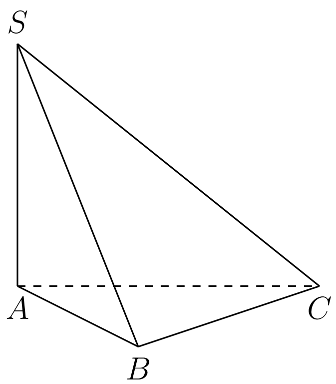
S là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = \dfrac{1}{2}$, suy ra $S = \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 25.

Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông với mặt phẳng (ABC), $SA = a$ và $AB = a\sqrt{3}$ (tham khảo hình vẽ). Tìm số đo góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC).

A 30°. **B** 45°. **C** 90°. **D** 60°.



Lời giải.

Do $SA \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu của SB lên mp(ABC). Suy ra góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{SBA}$. Xét tam giác SBA vuông tại A, ta có $\tan SBA = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SBA} = 30^\circ$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Cho đường cong (C) có phương trình $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. Gọi M là giao điểm của (C) với trục tung. Tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình là

A $y = -2x - 1$. **B** $y = 2x + 1$. **C** $y = 2x - 1$. **D** $y = x - 2$.

Lời giải.

Giao điểm của (C) với trục tung là $M(0; 1)$.

Xét hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ xác định trên $\mathbb{R} \backslash \{-1\}$ ta có $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow y'(0) = 2$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là $y = 2(x - 0) + 1 \Leftrightarrow y = 2x + 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm nào?

A $x = 4$. **B** $x = 0$. **C** $x = 2$. **D** $x = 1$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Tìm $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x - 1}{x + 2}$.

A 1. **B** $-\dfrac{1}{2}$. **C** 2. **D** $-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x - 1}{x + 2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2 - \dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{2}{x}} = \dfrac{2}{1} = 2.$

Chọn đáp án C □

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm số nghiệm của phương trình $2|f(x)| - 1 = 0$.

A 3. **B** 6. **C** 4. **D** 0.

Lời giải.

Phương trình $2|f(x)| - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x) = \dfrac{1}{2} & (1) \\ f(x) = -\dfrac{1}{2} & (2) \end{array}\right.$. Dễ thấy, nghiệm của phương trình (1) và phương trình (2) (nếu có) thì không trùng nhau.

Xét hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) và hai đường thẳng $(d_1)\colon y = \dfrac{1}{2}; (d_2)\colon y = -\dfrac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên, đường thẳng (d_1) và (d_2) đều cắt (C) tại 3 điểm phân biệt. Suy ra phương trình (1) và (2) đều có 3 nghiệm phân biệt. Vậy phương trình $2|f(x)|-1=0$ có 6 nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các mặt phẳng $(Oyz), (Ozx), (Oxy)$. Phương trình mặt phẳng $(A_1A_2A_3)$ là

A. $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=0$. B. $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1$. C. $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$. D. $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1$.

Lời giải.

Ta có $A_1(0;2;3), A_2(1;0;3), A_3(1;2;0)$.

Tính được $\overrightarrow{A_1A_2}=(1;-2;0), \overrightarrow{A_1A_3}=(1;0;-3), \vec{n}=\left[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\right]=(6;3;2)$.

Mặt phẳng $(A_1A_2A_3)$ đi qua A_1 nhận $\vec{n}$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình là

$$6(x-0)+3(y-2)+2(z-3)=0 \Leftrightarrow 6x+3y+2z=12 \Leftrightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1.$$

Chọn đáp án D □

Câu 31. Cho a là số thực dương thỏa mãn $a \neq 10$, mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $\log(10a)=1+\log a$. B. $-\log\left(\frac{10}{a}\right)=\log a-1$.

C. $\log(10^a)=a$. D. $\log(a^{10})=a$.

Lời giải.

Ta có $\log(a^{10}) \neq a, \forall a \neq 10$.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng nào sau đây chứa trục Ox?

A. $2y+z=0$. B. $x+2y=0$. C. $x+2y-z=0$. D. $x-2z=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng $ax+by+cz+d=0$ $(a^2+b^2+c^2 \neq 0)$ chứa trục $Ox \Leftrightarrow a=d=0$.

Hoặc: Đường thẳng Ox có một VTCP là $\vec{u}=(1;0;0)$. Mặt phẳng chứa trục Ox có VTPT $\vec{n}$ vuông góc với $\vec{u}$. Trong các mặt phẳng trên, chỉ có mặt phẳng $2y+1=0$ thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho hình nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và chu vi đáy bằng $2\pi a$. Tính diện tích xung quanh S của hình nón.

A. $S=2\pi a^2$. B. $S=\pi a^2$. C. $S=\pi a$. D. $S=\frac{\pi a^2}{3}$.

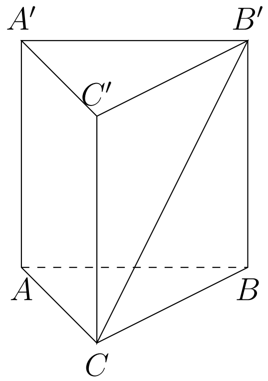
Lời giải.

Ta có bán kính đáy là $r=a$, đường sinh $l=2a$ Sử dụng công thức diện tích xung quanh nón ta có: $S=\pi rl=2\pi a^2$.

Chọn đáp án A □

Câu 34.

Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ). Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C$.



A $\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$. **B** $a\sqrt{2}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D** a.

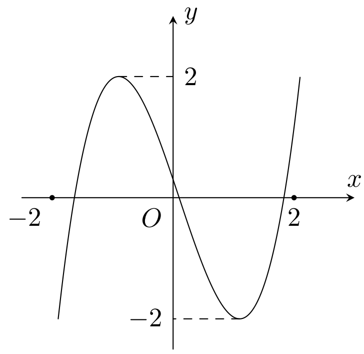
Lời giải.

$\mathrm{d}(AA';CB') = \mathrm{d}(AA';(CBB'C')) = \mathrm{d}(A;(CBB'C')) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 35.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx = d$ $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(f(x)) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?



A 5. **B** 9. **C** 3. **D** 7.

Lời giải.

Đặt $t = f(x)$, phương trình $f(f(x)) = 0$ trở thành $f(t) = 0$. Nhìn vào đồ thị thấy phương trình này có 3 nghiệm t thuộc khoảng $(-2;2)$, với mỗi giá trị t như vậy phương trình $f(x) = t$ có 3 nghiệm phân biệt. Vậy phương trình $f(f(x)) = 0$ có 9 nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Biết $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + x\cos x - \sin^3 x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{a} - \frac{b}{c}$. Trong đó a, b, c là các số nguyên dương, phân số $\dfrac{b}{c}$ tối giản. Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

A $T = 16$. **B** $T = 59$. **C** $T = 69$. **D** $T = 50$.

Lời giải.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + x\cos x - \sin^3 x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\mathrm{d}x.$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x)\sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $I = \dfrac{\pi^2}{8} - \dfrac{1}{2}$. Vậy $T = a^2 + b^2 + c^2 = 69$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Gọi S là tập các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = x^2 + \ln(x + m + 2)$ đồng biến trên tập xác định của nó. Biết $S = \left(-\infty; a + \sqrt{b}\right]$. Tính tổng $K = a + b$ là

(A) $K = -5$. (B) $K = 5$. **(C) $K = 0$.** (D) $K = 2$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x > -m - 2$.

Ta có: $y' = 2x + \dfrac{1}{x + m + 2} = \dfrac{2x^2 + 2(m+2)x + 1}{x + m + 2}$.

Để hàm số đồng biến trên $(m + 2; +\infty)$ thì $g(x) = 2x^2 + 2(m + 2)x + 1 \geq 0, \forall x > -m - 2$.

Nhận thấy: $g(-m-2) = 1 > 0, g\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = g\left(\dfrac{-m-2}{2}\right) = 1 - \dfrac{(m+2)^2}{2}$.

- Xét $-m - 2 \geq \dfrac{-m-2}{2} \Leftrightarrow m \leq -2 \Rightarrow g(x) > g(-m-2) = 1 > 0$ luôn thỏa mãn với mọi $x > -m - 2$.
- Xét $-m - 2 < \dfrac{-m-2}{2} \Leftrightarrow m > -2 \Rightarrow \min\limits_{x \in (-m-2; +\infty)} g(x) = g(-m-2) = 1 - \dfrac{(m+2)^2}{2} \geq 0$ $\Rightarrow -2 < m \leq -2 + \sqrt{2}$.

Kết hợp hai trường hợp ta được: $S = \left(-\infty; -2 + \sqrt{2}\right] \Rightarrow a = -2, b = 2 \Rightarrow a + b = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Có bao nhiêu số thức thỏa mãn $z + |z|^2 i - 1 - \dfrac{3}{4}i = 0$?

(A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Thay vào biểu thức của bài toán ta có:

$$(a-1) + \left(a^2 + b^2 + b - \frac{3}{4}\right)i = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b^2 + b + \dfrac{1}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Vậy chỉ có đúng một số phức thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 6)$. Biết rằng có hai điểm M, N phân biệt thuộc trục Ox sao cho các đường thẳng AM, AN cùng tạo với đường thẳng chứa trục Ox một góc 45°. Tổng các hoành độ hai điểm M, N tìm được là

(A) 4. **(B) 2.** (C) 1. (D) 5.

Lời giải.

Đặt $M(t; 0; 0) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (t - 1; 0; -6), \vec{u}_{Ox} = (1; 0; 0)$.

Áp dụng công thức góc giữa hai đường thẳng ta có:

$$\cos 45^\circ = \frac{|t-1|}{\sqrt{(t-1)^2 + 36}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (t-1)^2 = 36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 7 \\ t = -5. \end{array}\right.$$

Hai điểm $M(7; 0; 0), N(-5; 0; 0)$, tổng hoành độ là: $7 + (-5) = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Tổng tất cả nghiệm của phương trình $3\cos x - 1 = 0$ trên đoạn $[0; 4\pi]$ là

(A) $\frac{15\pi}{2}$. (B) 6π. (C) $\frac{17\pi}{2}$. (D) 8π.

Lời giải.

Ta có $3\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$, với $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ và $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Vì $x \in [0; 4\pi]$ nên ta nhận các nghiệm $x = \alpha, x = 2\pi + \alpha, x = 2\pi - \alpha, x = 4\pi - \alpha$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình đã cho trên đoạn $[0; 4\pi]$ là 8π.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Hai chiếc ly đựng chất lỏng giống hệt nhau, mỗi chiếc có phần chứa chất lỏng là một khối nón có chiều cao 2 dm (mô tả như hình vẽ). Ban đầu chiếc ly thứ nhất chứa đầy chất lỏng, chiếc ly thứ hai để rỗng. Người ta chuyển chất lỏng từ ly thứ nhất sang ly thứ hai sao cho độ cao của cột chất lỏng trong ly thứ nhất còn 1 dm. Tính chiều cao h của cột chất lỏng trong ly thứ hai sau khi chuyển (độ cao của cột chất lỏng tính từ đỉnh của khối nón đến mặt chất lỏng - lượng chất lỏng coi như không hao hụt khi chuyển. Tính gần đúng h với sai số không quá 0,01 dm).

(A) $h \approx 1{,}73$ dm. (B) $h \approx 1{,}89$ dm. (C) $h \approx 1{,}91$ dm. (D) $h \approx 1{,}41$ dm.

Lời giải.

Tỉ số giữa thể tích giữa lượng chất lỏng ban đầu và lượng chất lỏng còn lại trong ly thứ nhất là: $\left(\frac{2}{1}\right)^3 = 8$.

Vậy tỉ số giữa thể tích giữa lượng chất lỏng chuyển và lượng chất lỏng còn lại trong ly thứ nhất là: $8 - 1 = 7$.

Tỉ số này cũng chính là: $\left(\frac{h}{1}\right)^3 = 7 \Rightarrow h = \sqrt[3]{7} \approx 1{,}91$ dm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Có tất cả bao nhiêu bộ số nguyên dương (n, k) biết $n < 20$ và các số $\mathrm{C}_n^{k-1}, \mathrm{C}_n^k, \mathrm{C}_n^{k+1}$ theo thứ tự đó là số hạng thứ nhất, thứ ba, thứ năm của một cấp số cộng.

(A) 4. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{C}_n^{k-1}, \mathrm{C}_n^k, \mathrm{C}_n^{k+1}$ theo thứ tự đó là số hạng thứ nhất, thứ ba, thứ năm của một cấp số cộng khi và chỉ khi $\Leftrightarrow \mathrm{C}_n^{k-1} + \mathrm{C}_n^{k+1} = 2\mathrm{C}_n^k \quad (1)$.

Vì $n \geq k + 1 \Rightarrow n \geq 2$.

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow \frac{1}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{1}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{2}{k!(n-k)!} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{(n-k)(n-k+1)} + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{2}{n(n-k)} \\ &\Leftrightarrow k(k+1) + (n-k)(n-k+1) = 2(k+1)(n-k+1) \\ &\Leftrightarrow (2k-n)^2 = n+2.\end{aligned}$$

Suy ra $n+2$ là số chính phương, mà $n<20 \Rightarrow n \in \{2,7,14\}$.
Với $n=2 \Rightarrow (k-1)^2=1 \Leftrightarrow k=2$ (loại).
Với $n=7 \Rightarrow (2k-7)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=5 \\ k=2 \end{array}\right.$.
Với $n=14 \Rightarrow (2k-14)^2=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=5 \\ k=9 \end{array}\right.$.
Vậy có 4 cặp nghiệm (n,k).
Chọn đáp án A □

Câu 43. Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3mx^2+9x-m$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2| \leq 2$. Biết $S=(a;b]$. Tính $T=b-a$.

A $T=2+\sqrt{3}$. **B** $T=1+\sqrt{3}$. **C** $T=2-\sqrt{3}$. **D** $T=3-\sqrt{3}$.

Lời giải.
Hàm số $y=x^3-3mx^2+9x-m$ xác định trên $\mathbb{R}$. Ta có $y'=3(x^2-2mx+3)$.
Điều kiện hàm số có cực trị: $m^2-3>0$. Lúc này theo Viet: $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=3 \end{cases}$.
Theo giả thiết $|x_1-x_2| =\leq 2 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2 \leq 4 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2 \leq 4$.
Mà m dương nên $3<m^2 \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{3}<m \leq 2$.
Vậy $a=\sqrt{3}, b=2 \Rightarrow b-a=2-\sqrt{3}$.
Chọn đáp án C □

Câu 44. Trò chơi quay bánh xe số trong chương trình truyền hình "Hãy chọn giá đúng" của kênh VTV3 Đài truyền hình Việt Nam, bánh xe số có 20 nấc điểm: $5, 10, 15, ..., 100$ với vạch chia đều nhau và giả sử rằng khả năng chuyển từ nấc điểm đã có tới các nấc điểm còn lại là như nhau.

Trong mỗi lượt chơi có 2 người tham gia, mỗi người được quyền chọn quay 1 hoặc 2 lần, và điểm số của người chơi được tính như sau:

+ Nếu người chơi chọn quay 1 lần thì điểm của người chơi là điểm quay được.

+ Nếu người chơi chọn quay 2 lần và tổng điểm quay được không lớn hơn 100 thì điểm của người chơi là tổng điểm quay được.

+ Nếu người chơi chọn quay 2 lần và tổng điểm quay được lớn hơn 100 thì điểm của người chơi là tổng điểm quay được trừ đi 100.

Luật chơi quy định, trong mỗi lượt chơi người nào có điểm số cao hơn sẽ thắng cuộc, hòa nhau sẽ chơi lại lượt khác.

An và Bình cùng tham gia một lượt chơi, An chơi trước và có điểm số là 75. Tính xác suất để Bình thắng cuộc ngay ở lượt chơi này.

A $P=\dfrac{1}{4}$. **B** $P=\dfrac{7}{16}$. **C** $P=\dfrac{19}{40}$. **D** $P=\dfrac{3}{16}$.

Lời giải.
Bình có 2 khả năng thắng cuộc:
+) Thắng cuộc sau lần quay thứ nhất. Nếu Bình quay vào một trong 5 nấc: $80, 85, 90, 95, 100$ thì sẽ thắng nên xác suất thắng cuộc của Bình trường hợp này là $P_1=\dfrac{5}{20}=\dfrac{1}{4}$.
+) Thắng cuộc sau 2 lần quay. Nếu Bình quay lần 1 vào một trong 15 nấc: $5, 10, ..., 75$ thì sẽ phải

quay thêm lần thứ 2. Ứng với mỗi nấc quay trong lần thứ nhất, Bình cũng có 5 nấc để thắng cuộc trong lần quay thứ 2, vì thế xác suất thắng cuộc của Bình trường hợp này là $P_2 = \dfrac{15 \times 5}{20 \times 20} = \dfrac{3}{16}$.
Từ đó, xác suất thắng cuộc của Bình là $P = P_1 + P_2 = \dfrac{7}{16}$.
Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho phương trình: $3^x = \sqrt{a \cdot 3^x \cos(\pi x) - 9}$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số a thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình đã cho có đúng một nghiệm thực?

A 1. **B** 2018. **C** 0. **D** 2.

Lời giải.
Ta có $3^x = \sqrt{a \cdot 3^x \cos(\pi x) - 9} \Leftrightarrow 9^x + 9 = a \cdot 3^x \cdot \cos(\pi x) \Leftrightarrow 3^x + 3^{2-x} = a \cdot \cos(\pi x) \quad (1)$.
Điều kiện cần: Nhận thấy nếu x_0 là một nghiệm của phương trình đã cho thì $2 - x_0$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho. Do đó, để phương trình có đúng một nghiệm thực thì $x_0 = 2 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1$. Thay vào (1) ta tìm được $a = -6 \in [-2018; 2018]$.
Điều kiện đủ: Với $a = -6$, phương trình (1) trở thành: $3^x + 3^{2-x} = -6\cos(\pi x)$.
Sử dụng Cauchy ta có: $3^x + 3^{2-x} \geq 2\sqrt{3^x \cdot 3^{2-x}} = 6 \geq -6\cos(\pi x)$.
Dấu bằng xảy ra khi $\left[\begin{array}{l} x = 2 - x \\ \cos(\pi x) = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1$.
Vậy có đúng một giá trị của tham số thực $a \in [-2018; 2018]$ để phương trình đã cho có đúng một nghiệm thực.
Chọn đáp án A □

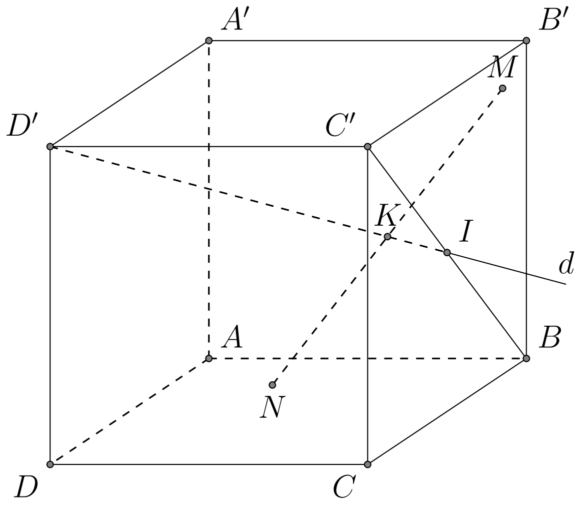
Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ thỏa mãn $f(1) = -2$ và $x^2 f^2(x) + (2x - 1)f(x) = xf'(x) - 1,\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Tính $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A $-\dfrac{\ln 2}{2} - 1$. **B** $-\ln 2 - \dfrac{1}{2}$. **C** $-\ln 2 - \dfrac{3}{2}$. **D** $-\dfrac{\ln 2}{2} - \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.
Từ giả thiết ta có $(xf(x) + 1)^2 = f(x) + xf'(x)$.
Đặt $u = xf(x) + 1 \Rightarrow u^2 = u' \Rightarrow \dfrac{u'}{u^2} = 1 \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{u'}{u^2}\mathrm{d}x = x + C \Rightarrow \dfrac{-1}{u} = x + C$.
Do đó $xf(x) = \dfrac{-1}{x + C} - 1$, mà $f(1) = -2 \Rightarrow C = 0$.
Vậy $f(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} \Rightarrow \displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = -\ln 2 - \dfrac{1}{2}$.
Chọn đáp án B □

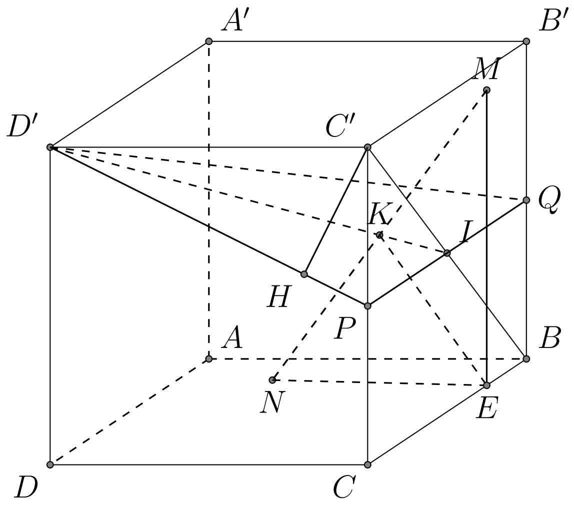
Câu 47.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Một đường thẳng d đi qua đỉnh D' và tâm I của mặt bên $BCC'B'$. Hai điểm M, N thay đổi lần lượt thuộc các mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(ABCD)$ sao cho trung điểm K của MN thuộc đường thẳng d (tham khảo hình vẽ). Giá trị bé nhất của độ dài đoạn thẳng MN là



A $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **B** $\dfrac{3\sqrt{5}a}{10}$. **C** $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. **D** $\dfrac{2\sqrt{3}a}{5}$.

Lời giải.



Kẻ ME vuông góc với CB, tam giác MEN vuông tại E nên $MN = 2EK$.

Vậy MN bé nhất khi và chỉ khi EK bé nhất. Lúc này EK là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng d và đường thẳng CB.

Qua I kẻ PQ song song với BC (như hình vẽ).

Vậy $\mathrm{d}(BC, d) = \mathrm{d}(BC, (D'PQ)) = \mathrm{d}(C, (D'PQ)) = \mathrm{d}(C', (D'PQ)) = C'H$ (trong đó $C'H$ vuông góc với $D'P$).

Ta có $\dfrac{1}{C'H^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{5}{a^2}$

$\Rightarrow C'H = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \mathrm{d}(BC, d) = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Cho số phức $z = 1 + i$. Biết rằng tồn tại các số phức $z_1 = a + 5i, z_2 = b$ (trong đó $a, b \in \mathbb{R}, b > 1$) thỏa mãn $\sqrt{3}|z - z_1| = \sqrt{3}|z - z_2| = |z_1 - z_2|$. Tính $b - a$.

A $b - a = 5\sqrt{3}$. **B** $b - a = 2\sqrt{3}$. **C** $b - a = 4\sqrt{3}$. **D** $b - a = 3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Đặt $M(1; 1), N(a; 5), P(b; 0)(b > 1)$ lần lượt là các điểm biểu thị cho các số phức z, z_1, z_2.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (a - 1; 4)$, $\overrightarrow{MP} = (b - 1; -1)$ nên

$$\begin{cases} |\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{MP}| \\ \cos 120^\circ = \dfrac{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{MP}|} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + 16 = (b-1)^2 + 1 \\ -\dfrac{1}{2} = \dfrac{(a-1)(b-1) - 4}{(a-1)^2 + 16} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a-1)^2 - (b-1)^2 = -15 \\ (a-1)^2 + 2(a-1)(b-1) = -8 \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $x = a - 1, y = b - 1 (y > 0)$ thì $\begin{cases} x^2 + y^2 = -15 \\ x^2 + 2xy = -8 \end{cases} \Rightarrow 7x^2 + 30xy + 8y^2 = 0$ (nhân chéo vế với vế của hai phương trình).

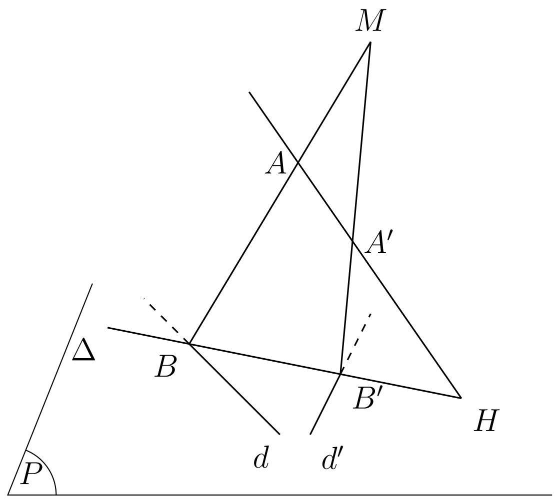
Tìm được $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{2}{7}y \\ x=-4y \end{array}\right.$. Thay vào $(*)$ thì thấy chỉ có $x=\dfrac{-2}{7}y$ thỏa mãn.

Lúc này $y^2=\dfrac{49}{3}$. Do $y>0 \Rightarrow y=\dfrac{7}{\sqrt{3}}x=\dfrac{-2}{\sqrt{3}}$. Vậy $b-a=y-x=3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 49.

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z-2}{1}$, $d': \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$ và hai điểm $A(a;0;0)$, $A'(0;0;b)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và d'; H là giao điểm của đường thẳng AA' và mặt phẳng (P). Một đường thẳng Δ thay đổi trên (P) nhưng luôn đi qua H đồng thời Δ cắt d và d' lần lượt tại B và B'. Hai đường thẳng $AB, A'B'$ cắt nhau tại điểm M. Biết điểm M luôn thuộc một đường thẳng cố định có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}(15;-10;-1)$ (tham khảo hình vẽ). Tính $T=a+b$.



A $T=8$. B $T=9$.

C $T=-9$. D $T=6$.

Lời giải.

Ta có d đi qua $N(2;5;2)$, có VTCP $\vec{u}_d=(1;2;1)$, d' đi qua $N'(2;1;2)$, có VTCP $\vec{u}_{d'}=(1;-2;1)$.

Gọi (R) là mặt phẳng chứa A và d, gọi (Q) là mặt phẳng chứa A' và d'.

Từ giả thiết ta nhận thấy điểm M nằm trong các mặt phẳng $(R),(Q)$ nên đường thẳng cố định chứa M chính là giao tuyến của các mặt phẳng $(R),(Q)$.

Vậy (R) đi qua $N(2;5;2)$ có cặp chỉ phương là $\vec{u}_d=(1;2;1)$, $\vec{u}=(15;-10;-1)$

$\Rightarrow \vec{n}_P=(1;2;-5) \Rightarrow (R): x+2y-5z-2=0$.

(R) đi qua $A(a;0;0) \Rightarrow a=2$.

Tương tự (Q) đi qua $N'(2;1;2)$ có cặp chỉ phương $\vec{u}_{d'}=(1;-2;1)$, $\vec{u}=(15;-10;-1)$

$\Rightarrow (Q): 3x+4y+5z-20=0$.

(Q) đi qua $A'(0;0;b) \Rightarrow b=4$.

Vậy $a+b=6$.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đều có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f^3(2-x)-2f^2(2+3x)+x^2g(x)+36x=0, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Tính $A=3f(2)+4f'(2)$.

A 11. B 13. C 14. D 10.

Lời giải.

Ta có $f^3(2-x)-2f^2(2+3x)+x^2.g(x)+36x=0, \forall x\in\mathbb{R}$ (1).

(1) đúng $\forall x \in \mathbb{R}$ nên cũng đúng với $x = 0 \Rightarrow f^3(2) - 2f^2(2) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(2) = 0 \\ f(2) = 2 \end{array}\right.$.

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta có :

$3f^2(2-x).f'(2-x) - 12f(2+3x).f'(2+3x) + 2x.g(x) + x^2.g'(x) + 36 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Cho $x = 0 \Rightarrow 3f^2(2-x).f'(2) - 12f(2).f'(2) + 36 = 0$.

Ta thấy $f(2) = 0$ không thỏa mãn nên $f(2) = 2$, khi đó $f'(2) = 1 \Rightarrow 3f(2) + 4f'(2) = 10$.

(Chú ý: hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là tồn tại, chẳng hạn $f(x) = x$ và $g(x) = x + 12$. Nếu đoán được kết quả này thì sẽ được kết quả của bài toán luôn).

Chọn đáp án D □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. B	3. A	4. B	5. C	6. C	7. D	8. A	9. A	10. D
11. A	12. D	13. D	14. C	15. D	16. D	17. B	18. C	19. C	20. B
21. B	22. A	23. A	24. D	25. A	26. B	27. B	28. C	29. B	30. D
31. D	32. A	33. A	34. C	35. B	36. C	37. C	38. A	39. B	40. D
41. C	42. A	43. C	44. B	45. A	46. B	47. C	48. D	49. D	50. D

94 ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA LẦN 3, 2017-2018, TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH, NGHỆ AN

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho số phức $z = a + bi$, với a, b là các số thực bất kỳ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $z - \overline{z}$ không phải là số thực.
(B) Phần ảo của z là bi.
(C) Mô-đun của z^2 bằng $a^2 + b^2$.
(D) Số z và $\overline{z}$ có mô-đun khác nhau.

Lời giải.

Ta có: $|z^2| = (|z|)^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2 + b^2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3x+1}$ trên khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $F(x) = \ln(-3x-1) + C$.
(B) $F(x) = \dfrac{1}{3}\ln(3x+1) + C$.
(C) $F(x) = \dfrac{1}{3}\ln(-3x-1) + C$.
(D) $F(x) = \ln|3x+1| + C$.

Lời giải.

Vì $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right)$ nên ta có

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + C = \frac{1}{3}\ln(-3x-1) + C.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = a$, $OB = 2a$, $OC = 3a$. Thể tích của khối tứ diện $OABC$ bằng

(A) $V = 2a^3$.
(B) $V = \dfrac{a^3}{3}$.
(C) $V = \dfrac{2a^3}{3}$.
(D) $V = a^3$.

Lời giải.

Vì OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau nên ta có: $V_{OABC} = \dfrac{1}{3}OA \cdot \dfrac{OB \cdot OC}{2} = a^3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^3$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-1; 0)$.
(B) $(1; 3)$.
(C) $(0; 1)$.
(D) $(-2; 0)$.

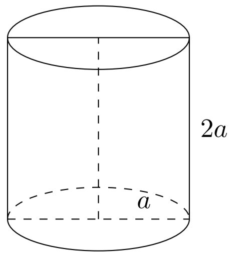
Lời giải.

Ta có $f'(x) = x(x-2)^3 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$ nên hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$ suy ra hàm số cũng nghịch biến trên $(0; 1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5.

Cắt một hình trụ bằng một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh $2a$. Diện tích xung quanh của hình trụ bằng



(A) $16\pi a^2$. (B) $4\pi a^2$. (C) $8\pi a^2$. (D) $2\pi a^2$.

Lời giải.

Ta có cạnh của hình vuông thiết diện là $2a$ nên chiều cao hình trụ là $h = 2a$ và bán kính đáy của hình trụ là $R = \dfrac{2a}{2} = a$.

Suy ra diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi \cdot 2a \cdot a = 4\pi a^2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 3z + 1 = 0$. Đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình

(A) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+2}{3}$. (B) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$.

(C) $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+3}{2}$. (D) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{2}$.

Lời giải.

Đường thẳng (d) qua điểm $M(1;1;2)$ và vuông góc (P) nên có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_d = \vec{n}_P = (2;-1;3)$.

Vậy d có phương trình: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Một nhóm học sinh có 10 người. Cần chọn 3 học sinh trong nhóm để làm 3 công việc là tưới cây, lau bàn và nhặt rác, mỗi người làm một công việc. Số cách chọn là

(A) C_{10}^3. (B) 10^3. (C) 3×10. (D) A_{10}^3.

Lời giải.

Số cách chọn 3 học sinh trong 10 học sinh: C_{10}^3 cách.

Số cách xếp công việc cho 3 học sinh: $3!$ cách.

$\Rightarrow$ Số cách chọn là: $\mathrm{C}_{10}^3 \cdot 3! = \mathrm{A}_{10}^3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Cho $\log_a c = x > 0$ và $\log_b c = y > 0$. Khi đó giá trị của $\log_{ab} c$ là

(A) $\dfrac{1}{xy}$. (B) $\dfrac{xy}{x+y}$. (C) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$. (D) $x + y$.

Lời giải.

Ta có: $\log_a c > 0 \Rightarrow c > 0$ và $c \neq 1$. Suy ra

$$\log_{ab} c = \frac{1}{\log_c ab} = \frac{1}{\log_c a + \log_c b} = \frac{1}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}} = \frac{xy}{x+y}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Giá trị của $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ bằng

(A) 0. (B) -2. (C) $-\infty$. (D) 2.

Lời giải.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\frac{1}{x}}=-2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 3. (B) 1. (C) 2. **D** 4.

Lời giải.

Ta thấy hàm số xác định tại các điểm $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=2$, $x_4=4$ và đạo hàm đổi dấu khi x qua các điểm này. Do đó, hàm số có 4 điểm cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=-2018$ tại bao nhiêu điểm?

(A) 1. **B** 2. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Vì $-2018<-1$ nên từ bảng biến thiên suy ra đường thẳng $y=-2018$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại đúng 2 điểm.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y+3z+1=0$ là

A $\vec{n}=(1;-2;3)$. (B) $\vec{m}=(1;2;-3)$. (C) $\vec{v}=(1;-2;-3)$. (D) $\vec{u}=(3;-2;1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y+3z+1=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-2;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(-1;1;0)$ và $N(3;3;6)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MN có phương trình là

A $2x+y+3z-13=0$. (B) $2x+y+3z+13=0$.

(C) $2x+y+3z-30=0$. (D) $x+2y+3z-1=0$.

Lời giải.

Trung điểm của MN là $I(1;2;3)$.

Mặt phẳng trung trực của MN đi qua I và nhận $\overrightarrow{MN}=(4;2;6)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên có phương trình là:

$$4(x-1)+2(y-2)+6(z-3)=0 \Leftrightarrow 2x+y+3z-13=0.$$

Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 14. Phương trình $\ln\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\ln\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\ln\left(x+\dfrac{1}{4}\right)\cdot\ln\left(x+\dfrac{1}{8}\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 4. **B** 3. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Điều kiện: $x>\dfrac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\dfrac{1}{2}=1\\ x+\dfrac{1}{2}=1\\ x+\dfrac{1}{4}=1\\ x+\dfrac{1}{8}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2}\\ x=\dfrac{1}{2}\\ x=\dfrac{3}{4}\\ x=\dfrac{7}{8}\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện, ta suy ra tập nghiệm của phương trình là $\left\{\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{4},\dfrac{7}{8}\right\}$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Chọn đáp án (B) $\square$

Câu 15. Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x=0, x=\pi, y=0$ và $y=-\sin x$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức

(A) $V=\pi\displaystyle\int\limits_0^\pi |\sin x|\,\mathrm{d}x$.

B $V=\pi\displaystyle\int\limits_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

(C) $V=\displaystyle\int\limits_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

(D) $V=\pi\left|\displaystyle\int\limits_0^\pi (-\sin x)\,\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

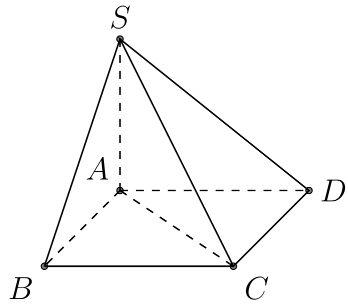
Ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là $V=\pi\displaystyle\int\limits_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (B) $\square$

Câu 16.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh $AB = a, AD = \sqrt{3}a$. Cạnh bên $SA = \sqrt{2}a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa SB và mặt phẳng (SAC) bằng

A 30°. **B** 60°. **C** 45°. **D** 75°.



Lời giải.

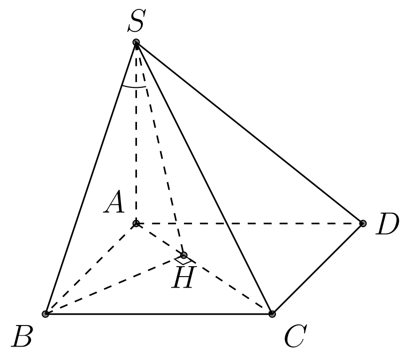
Vẽ $BH \perp AC \Rightarrow BH \perp (SAC)$

Suy ra góc giữa SB và mặt phẳng (SAC) là $\widehat{BSH}$

$BH = \dfrac{BA.BC}{AC} = \dfrac{a \cdot a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$

$\sin \widehat{BSH} = \dfrac{BH}{SB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BSH} = 30^\circ$.



Chọn đáp án A □

Câu 17. Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}}$ là

A $y' = \dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$. **B** $y' = \dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{x^2+x+1}}$.

C $\dfrac{1}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{2}{3}}$. **D** $\dfrac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải.

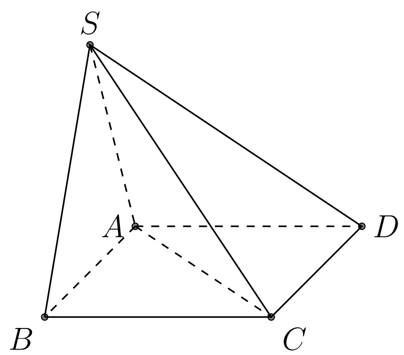
$$y' = \frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (x^2+x+1)' = \frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x+1) = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 18.

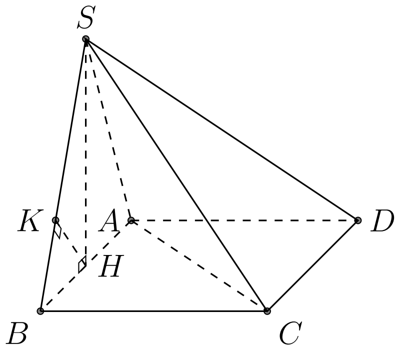
Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên $SA = a\sqrt{5}$, mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S và thuộc mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC bằng

A $\dfrac{4\sqrt{5}a}{5}$. **B** $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. **C** $\dfrac{2\sqrt{15}a}{5}$. **D** $\dfrac{\sqrt{15}a}{5}$.



Lời giải.

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$. Hạ $HK \perp SB$.
$\mathrm{d}\,(AD, SC) = \mathrm{d}\,(AD, (SBC)) = \mathrm{d}\,(A, (SBC)) = 2\mathrm{d}\,(H, (SBC)) = 2HK$.
$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 2a$.
$\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{BH^2} + \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{5}{4a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.
Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC bằng $\dfrac{4\sqrt{5}a}{5}$.



Chọn đáp án A □

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1; 1; 6)$ và đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2t \end{cases}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng Δ là

A. $K(2; 1; 0)$. B. $N(1; 3; -2)$. C. $H(11; -17; 18)$. D. $M(3; -1; 2)$.

Lời giải.
Gọi B là hình chiếu vuông góc của A trên Δ, suy ra $B(2 + t; 1 - 2t; 2t)$ và $\overrightarrow{AB}(3 + t; -2t; 2t - 6)$. Ta có

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 3 + t + 4t + 4t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Vậy hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng Δ là $B(3; -1; 2)$.
Chọn đáp án D □

Câu 20. Cho các số phức $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 3 - 2i$. Phương trình bậc hai có hai nghiệm z_1 và z_2 là

A. $z^2 + 6z - 13 = 0$. B. $z^2 + 6z + 13 = 0$. C. $z^2 - 6z + 13 = 0$. D. $z^2 - 6z - 13 = 0$.

Lời giải.
Ta có: $z_1 + z_2 = 6$, $z_1 \cdot z_2 = 13$
Suy ra phương trình bậc hai có hai nghiệm z_1 và z_2 là $z^2 - 6z + 13 = 0$.
Chọn đáp án C □

Câu 21. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Lời giải.
Tập xác định của hàm số là: $\mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. Ta có

- $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng.
- $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x \to -1^-} \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} = 0 \Rightarrow x = -1$ không là tiệm cận đứng.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = -1 \Rightarrow y = -1$ là tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 3 đường tiệm cận.
Chọn đáp án A □

Câu 22. Gieo đồng thời hai con xúc sắc cân đối và đồng chất. Xác suất để tổng số chấm trên hai mặt xuất hiện của hai con xúc sắc không vượt quá 5 bằng

Ⓐ $\frac{1}{4}$. Ⓑ $\frac{2}{9}$. Ⓒ $\frac{5}{18}$. Ⓓ $\frac{5}{12}$.

Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = 36$.

Biến cố A: "Tổng số chấm trên hai mặt xuất hiện của hai con xúc sắc không vượt quá 5".

$A = \{(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(2;1),(2;2),(2;3),(3;1),(3;2),(4;1)\} \Rightarrow n(A) = 10$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 23. Ký hiệu a, A lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2+x+4}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$. Giá trị của $a + A$ bằng

Ⓐ 18. Ⓑ 7. Ⓒ 12. Ⓓ 0.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ nên hàm số xác định và liên tục trên $[0;2]$.

$y' = \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \;\; \notin [0;2] \end{array}\right.$.

$y(0) = 4,\ y(1) = 3,\ y(2) = \dfrac{10}{3}$.

Suy ra $A = 4, a = 3 \Rightarrow A + a = 7$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 24. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 3^{2x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $\frac{27}{\ln 9}$. Ⓑ $\frac{9}{\ln 9}$. Ⓒ $\frac{4}{\ln 3}$. Ⓓ $\frac{12}{\ln 3}$.

Lời giải.

$$\int_0^1 3^{2x+1}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{3^{2x+1}}{2\ln 3}\right|_0^1 = \frac{12}{\ln 3}.$$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 25. Hàm số $y = (x^2 - x)^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. Ⓒ $(-2;0)$. Ⓓ $(1;2)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 2(2x-1)(x^2-x)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy hàm số $y = (x^2 - x)^2$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^x + 2^x + 4 = 3^m(2^x + 1)$ có 2 nghiệm phân biệt.

A $\log_4 3 \leqslant m < 1$. **B** $\log_4 3 < m < 1$. **C** $1 < m \leqslant \log_3 4$. **D** $1 < m < \log_3 4$.

Lời giải.

Đặt $2^x = t, (t > 0)$. Phương trình trở thành:

$$t^2 + t + 4 = 3^m(t + 1) \Leftrightarrow \frac{t^2 + t + 4}{t + 1} = 3^m.$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2 + t + 4}{t + 1}$ trên $(0; +\infty)$.

$f'(t) = \dfrac{t^2 + 2t - 3}{(t + 1)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \notin (0; +\infty). \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 3 < 3^m < 4 \Leftrightarrow 1 < m < \log_3 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Tìm hệ số của x^3 sau khi khai triển và rút gọn các đơn thức đồng dạng của $\left(\dfrac{1}{x} - x + 2x^2\right)^9, x \neq 0$.

A 3210. **B** -3210. **C** -2940. **D** 2940.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x} - x + 2x^2\right)^9 &= \sum_{k=0}^{9} \mathrm{C}_9^k \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{9-k} \cdot (2x^2 - x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{9} \mathrm{C}_9^k \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{9-k} \cdot \sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_k^i (2x^2)^{k-i} \cdot (-x)^i \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{9}\sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_9^k \mathrm{C}_k^i 2^{k-i}(-1)^i x^{3k-i-9}.$$

Số hạng chứa x^3 ứng với (k,i) thỏa mãn $\begin{cases} 3k-i-9=3 \\ 0 \leqslant i \leqslant k \leqslant 9 \\ i,k \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow (k,i) \in \{(4,0),(5,3),(6,6)\}$.

Suy ra hệ số của x^3 là: $\mathrm{C}_9^4\mathrm{C}_4^0 2^4(-1)^0 + \mathrm{C}_9^5\mathrm{C}_5^3 2^2(-1)^3 + \mathrm{C}_9^6\mathrm{C}_6^6 2^0(-1)^6 = -2940$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Giá trị của $\int\limits_{-2}^{2} \dfrac{f(x)}{3^x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A 3. **B** 1. **C** 4. **D** 6.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_{-2}^{2} \dfrac{f(x)}{3^x+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{0} \dfrac{f(x)}{3^x+1}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{2} \dfrac{f(x)}{3^x+1}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x = -t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$; $x = -2 \Rightarrow t = 2$; $x = 0 \Rightarrow t = 0$

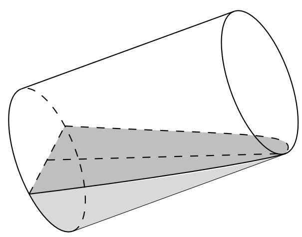
$\Rightarrow \int\limits_{-2}^{0} \dfrac{f(x)}{3^x+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{2}^{0} \dfrac{f(-t)}{3^{-t}+1}(-\mathrm{d}t) = \int\limits_{0}^{2} \dfrac{3^t f(-t)}{3^t+1}\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{2} \dfrac{3^t f(t)}{3^t+1}\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{2} \dfrac{3^x f(x)}{3^x+1}\,\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow I = \int\limits_{0}^{2} \dfrac{3^x f(x)}{3^x+1}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{2} \dfrac{f(x)}{3^x+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 29.

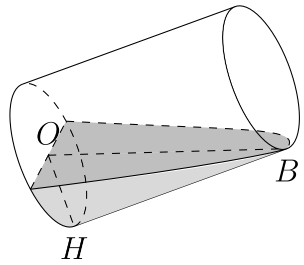
Một chiếc cốc hình trụ có đường kính đáy 6 cm, chiều cao 15 cm chứa đầy nước. Nghiêng cốc cho nước chảy từ từ ra ngoài cho đến khi mép nước ngang với đường kính của đáy. Khi đó diện tích của bề mặt nước trong cốc bằng



A $9\sqrt{26}\pi$ cm^2. **B** $\dfrac{9\sqrt{26}\pi}{2}$ cm^2.

C $\dfrac{9\sqrt{26}\pi}{5}$ cm^2. **D** $\dfrac{9\sqrt{26}\pi}{10}$ cm^2.

Lời giải.



Cách 1:
Ta có $OH = 3$, $OB = \sqrt{OH^2 + HB^2} = 3\sqrt{26}$,
$\cos\widehat{HOB} = \dfrac{OH}{OB} = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$.
Hình chiếu vuông góc của mặt nước trong cốc lên mặt đáy cốc là nửa hình tròn có đường kính bằng 6 cm. Do đó:

$$\frac{1}{2}\pi\cdot 3^2 = S\cdot\cos\widehat{HOB} \Rightarrow S = \frac{\frac{1}{2}\pi\cdot 3^2}{\frac{1}{\sqrt{26}}} = \frac{9\pi\sqrt{26}}{2}.$$

Vậy diện tích của bề mặt nước trong cốc bằng $\dfrac{9\pi\sqrt{26}}{2}$ cm^2.
Cách 2:
Ta có: diện tích S của bề mặt nước trong cốc bằng một nửa diện tích elip có hai trục là $2b = 6$ cm và $2a = 2\sqrt{15^2 + 3^2} = 6\sqrt{26}$ cm.
Suy ra $S = \dfrac{1}{2}\pi ab = \dfrac{1}{2}\pi\cdot 3\cdot 3\sqrt{26} = \dfrac{9\pi\sqrt{26}}{2}$ cm^2.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Cho số phức z. Gọi A, B lần lượt là các điểm trong mặt phẳng Oxy biểu diễn các số phức z và $(1+i)z$. Tính $|z|$ biết diện tích tam giác OAB bằng 8.

A $|z| = 4$. **B** $|z| = 2\sqrt{2}$. **C** $|z| = 4\sqrt{2}$. **D** $|z| = 2$.

Lời giải.
Đặt $z = a + bi$ với $z \neq 0$.
$(1+i)z = (1+i)(a+bi) = a - b + (a+b)i$.
Suy ra $A(a;b)$, $B(a-b;a+b)$, $\overrightarrow{AB} = (-b;a)$, $AB = \sqrt{a^2+b^2}$
Đường thẳng $AB: a(x-a) + b(y-b) = 0 \Leftrightarrow ax + by - a^2 - b^2 = 0$.
Chiều cao hạ từ O của tam giác OAB là $h = \mathrm{d}(O, AB) = \dfrac{|-a^2-b^2|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{a^2+b^2}$.
Diện tích tam giác OAB bằng 8 nên

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = 8 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 4 \Leftrightarrow |z| = 4.$$

Chọn đáp án A □

Câu 31. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{\ln(x+3)}{x^2}$ sao cho $F(-2) + F(1) = 0$. Giá trị của $F(-1) + F(2)$ bằng

A $\dfrac{7}{3}\ln 2$. **B** $\dfrac{2}{3}\ln 2 + \dfrac{3}{6}\ln 5$. **C** $\dfrac{10}{3}\ln 2 - \dfrac{5}{6}\ln 5$. **D** 0.

Lời giải.
$F(x) = \displaystyle\int \frac{\ln(x+3)}{x^2}\,\mathrm{d}x$, $(x > -3)$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+3) \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$.

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{1}{x}\ln(x+3) + \int \frac{1}{x(x+3)}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{x}\ln(x+3) + \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{x}\ln(x+3) + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right| + C. \end{aligned}$$

Suy ra

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x}\ln(x+3) + \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x}{x+3} + C_1 \text{ khi } x > 0 \\ -\dfrac{1}{x}\ln(x+3) + \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{-x}{x+3} + C_2 \text{ khi } -3 < x < 0. \end{cases}$$

Khi đó

$F(-2) = \dfrac{1}{3}\ln 2 + C_2$.

$F(1) = -\ln 4 + \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{4} + C_1$.

$F(-2) + F(1) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = \dfrac{7}{3}\ln 2$.

$F(-1) = \ln 2 + \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{2} + C_2$.

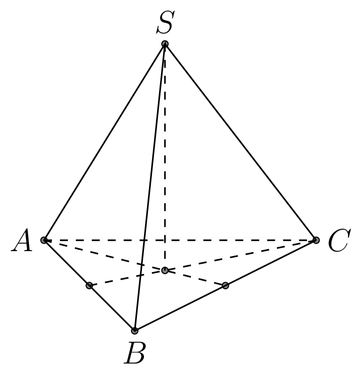
$F(2) = -\dfrac{1}{2}\ln 5 + \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{2}{5} + C_1$.

$\Rightarrow F(-1) + F(2) = \ln 2 + \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\ln 5 + \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{2}{5} + C_1 + C_2 = \dfrac{10}{3}\ln 2 - \dfrac{5}{6}\ln 5$.

Chọn đáp án C □

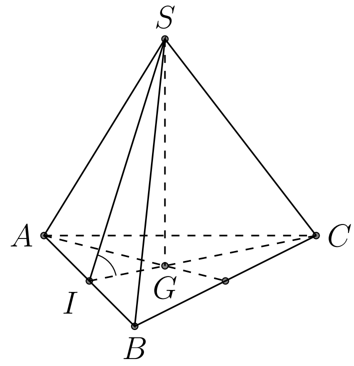
Câu 32.

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh AB bằng a, góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 60°. Diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và có đường tròn đáy ngoại tiếp tam giác ABC bằng



A $\dfrac{\sqrt{7}\pi a^2}{6}$. **B** $\dfrac{\sqrt{7}\pi a^2}{3}$. **C** $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^2}{2}$. **D** $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^2}{6}$.

Lời giải.



Ta có: $(SAB) \cap (ABC) = AB$.

Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow \begin{cases} GI \perp AB \\ SI \perp AB \end{cases}$

$\Rightarrow ((SAB),(ABC)) = (GI, SI) = \widehat{SIG} = 60^\circ$.

$\tan \widehat{SIG} = \dfrac{SG}{IG} \Rightarrow SG = \tan 60^\circ \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a}{2}$.

$SA = \sqrt{SG^2 + AG^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.

Diện tích xung quanh hình nón là:

$$S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot AG \cdot SA = \pi \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{6} = \frac{\sqrt{7}\pi a^2}{6}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x + y + 2z + 1 = 0$. Điểm B thuộc mặt phẳng (P) thỏa mãn đường thẳng AB vuông góc và cắt đường thẳng d. Tọa độ điểm B là

A $(6;-7;0)$. **B** $(3;-2;-1)$. **C** $(-3;8;-3)$. **D** $(0;3;-2)$.

Lời giải.

Gọi $M = d \cap AB \Rightarrow M(1+2t; -1+t; 2-t)$.

$\vec{u}_d = (2;1;-1)$, $\overrightarrow{AM} = (2t; t-3; -t+3)$. Ta có:

$$\overrightarrow{AM} \perp \vec{u_d} \Leftrightarrow 2 \cdot 2t + t - 3 - (-t+3) = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Đường thẳng AB có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AM} = (2;-2;2) = 2(1;-1;1)$ nên có phương trình là

$AB\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

Điểm B thuộc đường thẳng AB nên $\Rightarrow B(1+b; 2-b; -1+b)$.

$B \in (P) \Leftrightarrow (1+b) + (2-b) + 2(-1+b) + 1 = 0 \Leftrightarrow b = -1$.

$\Rightarrow B(0;3;-2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Cho các hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên mỗi khoảng xác định của chúng và có bảng biến thiên được cho như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	‖	$-$
$g(x)$	0 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 0

Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A Phương trình $f(x) = g(x)$ không có nghiệm thuộc khoảng $(-\infty; 0)$.

B Phương trình $f(x) + g(x) = m$ có nghiệm với mọi m.

(C) Phương trình $f(x) + g(x) = m$ có 2 nghiệm với mọi $m > 0$.

D Phương trình $f(x) = g(x) - 1$ không có nghiệm.

Lời giải.

- Trên khoảng $(-\infty; 0)$ ta có: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ nên phương trình $f(x) = g(x)$ không có nghiệm thuộc $(-\infty; 0)$.
- Xét hàm số $y = f(x) + g(x)$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	||	$-$
y	$+\infty \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 0$

Từ bảng biến thiên suy ra:

⊞ Phương trình $f(x) + g(x) = m$ có nghiệm với mọi m.

⊞ Phương trình $f(x) + g(x) = m$ có 2 nghiệm với mọi $m > 0$.

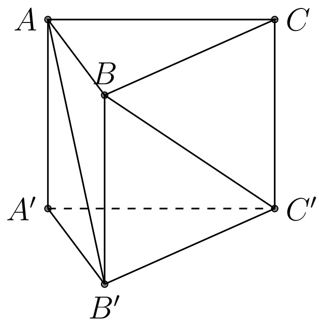
Vậy mệnh đề "Phương trình $f(x) = g(x) - 1$ không có nghiệm" là mệnh đề **sai**.

Chọn đáp án (D) □

Câu 35.

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

(A) $30°$. (B) $90°$. (C) $45°$. **D** $60°$.



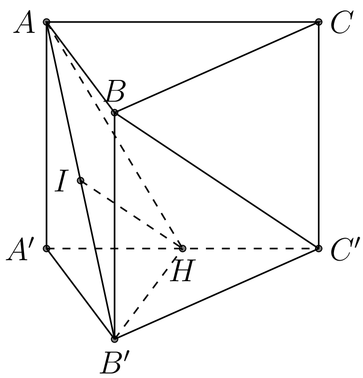
Lời giải.

Gọi I, H lần lượt là trung điểm của AB' và $A'C'$. Khi đó IH là đường trung bình của $\triangle A'BC'$ nên $IH \parallel BC' \Rightarrow (AB', BC') = (AB', IH)$.

Ta có $AB' = a\sqrt{3}$, $B'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AH = \dfrac{3a}{2}$ nên $B'H^2 + HA^2 = AB'^2$, hay $\triangle HAB'$ vuông tại H.

$IH = \dfrac{AB'}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta B'IH$ đều, suy ra

$(AB', BC') = (AB', IH) = \widehat{B'IH} = 60°$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Trong không gian Oxy, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$, tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P)\colon x + y + 2z + 5 = 0$, $(Q)\colon 2x - y + z - 5 = 0$ lần lượt tại các tiếp điểm A, B. Độ dài đoạn thẳng AB là

(A) $2\sqrt{3}$. (B) $\sqrt{3}$. (C) $2\sqrt{6}$. **D** $3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$ và bán kính $R=3$. Từ giả thiết suy ra A, B lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P) và (Q).
Gọi d là đường thẳng đi qua I và $d \perp (P)$, khi đó d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_d=(1;1;2)$ nên d có phương trình $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=-1+2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.
$A\in d \Rightarrow A(1+t;2+t;-1+2t)$.
$A\in(P) \Leftrightarrow 1+t+2+t+2(-1+2t)+5=0 \Leftrightarrow 6t+6=0 \Leftrightarrow t=-1$, nên $A(0;1;-3)$.
Gọi d' là đường thẳng đi qua I và $d' \perp (Q)$, khi đó d' có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}'_d=(2;-1;1)$ nên d' có phương trình $d'\colon \begin{cases} x=1+2t' \\ y=2-t' \\ z=-1+t' \end{cases}, t'\in\mathbb{R}$.
$B\in d' \Rightarrow B\left(1+2t';2-t';-1+t'\right)$.
$B\in(Q) \Leftrightarrow 2\left(1+2t'\right)-\left(2-t'\right)+\left(-1+t'\right)-5=0 \Leftrightarrow 6t'-6=0 \Leftrightarrow t'=1$, nên $B(3;1;0)$.
Vậy $AB=\sqrt{3^2+0^2+3^2}=3\sqrt{2}$.
Chọn đáp án D ☐

Câu 37. Trong không gian Oxy, cho hai đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=t \end{cases}$, $d'\colon \begin{cases} x=2t' \\ y=1+t' \\ z=2+t' \end{cases}$. Đường thẳng Δ cắt d, d' lần lượt tại các điểm A, B thỏa mãn độ dài đoạn thẳng AB nhỏ nhất. Phương trình đường thẳng Δ là

A. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{-3}$.
B. $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{3}$.
C. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{3}$.
D. $\dfrac{x-4}{-2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$.

Lời giải.
Đường thẳng d qua điểm $M(1;2;0)$, có véc tơ chỉ phương $\vec{u}(1;-1;1)$.
Đường thẳng d' qua điểm $N(0;1;2)$, có véc tơ chỉ phương $\vec{v}(2;1;1)$.
Ta có $[\vec{u},\vec{v}]\cdot\overrightarrow{MN}=7\neq 0$ nên d và d' là hai đường thẳng chéo nhau.
Đường thẳng Δ cắt d, d' lần lượt tại các điểm A, B thỏa mãn độ dài đoạn thẳng AB nhỏ nhất nên AB chính là đoạn vuông góc chung của d và d'.
$A\in d \Rightarrow A(1+t;2-t;t)$, $B\in d' \Rightarrow B\left(2t';1+t';2+t'\right)$, $\overrightarrow{AB}\left(2t'-t-1;t'+t-1;t'-t+2\right)$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}\perp d \\ \overrightarrow{AB}\perp d' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t'-t-1-(t'+t-1)+t'-t+2=0 \\ 2\left(2t'-t-1\right)+t'+t-1+t'-t+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t'-3t=-2 \\ 6t'-2t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t'=\dfrac{1}{2} \\ t=1. \end{cases}$$

Suy ra $A(2;1;1)$, $\overrightarrow{AB}=\left(-1;\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.
Đường thẳng Δ đi qua A và có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta=2\overrightarrow{AB}=(-2;1;3)$, nên có phương trình là $\Delta\colon \dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{3}$.
Chọn đáp án B ☐

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-m}{2}$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$. Tìm m để đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt E, F sao cho độ dài đoạn thẳng EF lớn nhất

(A) $m=1$. (B) $m=-\dfrac{1}{3}$. (C) $m=0$. (D) $m=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;2)$ và bán kính $R=3$.

Gọi $h=\mathrm{d}\,(I,d)$ là khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng d. Khi đó $EF=2\sqrt{R^2-h^2}=2\sqrt{9-h^2}$.

Suy ra EF lớn nhất khi và chỉ khi h nhỏ nhất.

Đường thẳng d đi qua $A\,(1;-1;m)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;2)$.

Ta có: $\overrightarrow{AI}=(0;2;2-m)$, $\left[\overrightarrow{AI},\vec{u}\right]=(2+m;2-m;-2)$.

Suy ra $h=\mathrm{d}\,(I,d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AI},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{2m^2+12}}{\sqrt{6}}\geqslant\sqrt{2}$.

Do đó h nhỏ nhất bằng $\sqrt{2}$ khi $m=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=mx+\dfrac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ bằng 20. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $4<m\leqslant 8$. (B) $0<m\leqslant 2$. (C) $2<m\leqslant 4$. (D) $m>8$.

Lời giải.

Ta có $y'=m-\dfrac{36}{(x+1)^2}$.

- Với $m\le 0$, hàm số nghịch biến trên $[0;3]$ nên $\min\limits_{x\in[0;3]} y=y(3)=3m+9$.

  Suy ra $3m+9=20\Leftrightarrow m=\dfrac{11}{3}$ (không thỏa mãn).
- Với $m>0$, ta có: $y'=\dfrac{m(x+1)^2-36}{(x+1)^2}$.

$$y'=0\Leftrightarrow x+1=\pm\frac{6}{\sqrt{m}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1+\dfrac{6}{\sqrt{m}} \\ x=-1-\dfrac{6}{\sqrt{m}}\ \text{(loại)}\end{array}\right..$$

⊞ Khi $0\le -1+\dfrac{6}{\sqrt{m}}\le 3\Leftrightarrow\dfrac{9}{4}\le m\le 36$, ta có bảng biến thiên của hàm số:

x	0		$-1+\dfrac{6}{\sqrt{m}}$		3
y'		$-$	0	$+$	
y	36	$\searrow$	$-m+12\sqrt{m}$	$\nearrow$	$3m+9$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra

$$\min_{x\in[0;3]} y = y\left(-1+\frac{6}{\sqrt{m}}\right) = -m+12\sqrt{m} = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=100 \text{ (loại)} \end{array}\right. .$$

⊞ Khi $-1+\dfrac{6}{\sqrt{m}} > 3 \Leftrightarrow m < \dfrac{9}{4}$, ta có bảng biến thiên của hàm số:

x	0	3
y'	$-$	
y	36 ↘	$3m+9$

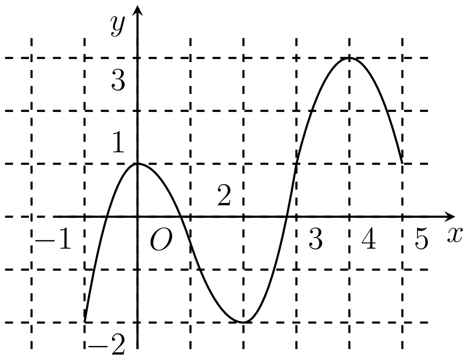
Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $\min\limits_{x\in[0;3]} y = y(3) = 3m+9 = 20 \Leftrightarrow m = \dfrac{11}{9}$ (loại).

Vậy giá trị nhỏ nhất bằng 20 khi $m=4$.

Chọn đáp án C □

Câu 40.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình bên. Hàm số $y=-2f(2-x)+x^2$ nghịch biến trên khoảng



A $(-1;0)$. **B** $(0;2)$.

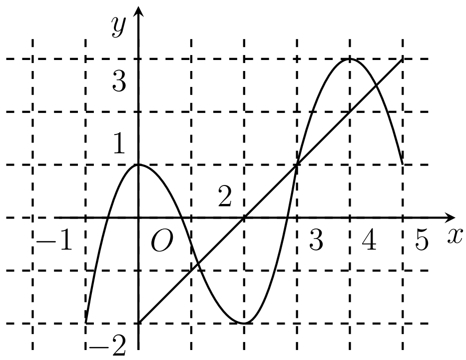
C $(-2;-1)$. **D** $(-3;-2)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2f'(2-x)+2x = 0 \Leftrightarrow f'(2-x) = -x$.

Đặt $t = 2-x \Rightarrow x = 2-t$.

Khi đó phương trình $y'=0$ trở thành $f'(t) = t-2$, nghiệm của phương trình này là hoành độ giao điểm của đồ thị $f'(t)$ với đường thẳng $y=t-2$.



Dựa vào đồ thị ta suy ra:

$$f'(t) = t-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=\alpha\in(4;5) \\ t=\beta\in(1;2) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2-\alpha\in(-3;-2) \\ x=2-\beta\in(0;1). \end{array}\right.$$

Từ đồ thị ta suy ra $y' < 0$ khi

$$\left[\begin{array}{l}\beta < t < 3\\ \alpha < t < 5\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}-1 < x < 2-\beta\\ -3 < x < 2-\alpha.\end{array}\right.$$

Suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1; 2-\beta)$ và $(-3; 2-\alpha)$. Vì $(-3; 2-\alpha) \subset (-3; -2)$ và $(-1; 0) \subset ((-1; 2-\beta))$ nên suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^3 - 2x^2)(x^3 - 2x)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = |f(1 - 2018x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A 9. B 2022. C 11. D 2018.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^3 - 2x^2 = 0\\ x^3 - 2x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 0\\ x = 2\\ x = \pm\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ là

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Suy ra hàm số $y = f(x)$ có 4 điểm cực trị.

Đặt $g(x) = f(1 - 2018x)$ suy ra $g'(x) = -2018f'(1 - 2018x)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(1 - 2018x) = 0$, phương trình này cũng có 4 nghiệm phân biệt và $g'(x)$ đổi dấu khi x qua các nghiệm này. Do đó hàm số $y = g(x)$ có 4 điểm cực trị.

Vì hàm số $y = g(x)$ có 4 điểm cực trị nên phương trình $g(x) = 0$ có tối đa 5 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $y = |g(x)| = |f(1 - 2018x)|$ có nhiều nhất 9 điểm cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho đồ thị $(C): y = \dfrac{x-1}{2x}$ và d_1, d_2 là hai tiếp tuyến của song song với nhau. Khoảng cách lớn nhất giữa d_1 và d_2 là

A 3. B $2\sqrt{3}$. C 2. D $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{1}{2x^2}$. Giả sử tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ x_1 song song với tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ x_2, suy ra

$$y'(x_1) = y'(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{2x_1^2} = \frac{1}{2x_2^2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x_1 = x_2 \text{ (loại)}\\ x_1 = -x_2.\end{array}\right.$$

Gọi 2 tiếp điểm của hai tiếp tuyến song song là $M\left(a;\dfrac{a-1}{2a}\right)$ và $M'\left(-a;\dfrac{a+1}{2a}\right)$.
Khi đó ta có 2 tiếp tuyến d_1, d_2 là $d_1\colon x-2a^2y+a^2-2a=0$ và $d_2\colon x-2a^2y+a^2+2a=0$.
Nhận thấy khoảng cách giữa d_1 và d_2 bằng 2 lần khoảng cách từ trung điểm $I\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ của MM' đến d_1, nên ta có:

$$\mathrm{d}(d_1,d_2)=2\mathrm{d}(I,d_1)=\frac{2\cdot|2a|}{\sqrt{1+4a^4}}\leqslant\frac{|4a|}{\sqrt{2\cdot 2a^2}}=2.$$

Dấu bằng xảy ra khi $1=4a^4\Leftrightarrow a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Vậy khoảng cách lớn nhất giữa d_1 và d_2 bằng 2.
Chọn đáp án C □

Câu 43.
Cho hàm số $u(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}=mu(x)$ có nghiệm trên đoạn $[0;5]$.

x	0		1		2		3		5
$u(x)$	4	↘	1	↗	3	↘	1	↗	3

A 5. **B** 6. **C** 3. **D** 4.

Lời giải.
Xét hàm số $v(x)=\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}$ liên tục trên $[0;5]$.
Ta có $v'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x}}-\dfrac{1}{\sqrt{10-2x}}$; $v'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<5\\2\sqrt{3x}=3\sqrt{10-2x}\end{cases}\Leftrightarrow x=3$.

$v(0)=\sqrt{10}$; $v(3)=5$; $v(5)=\sqrt{15}\Rightarrow\begin{cases}\min\limits_{[0;5]}v(x)=\sqrt{10}\Leftrightarrow x=0\\\max\limits_{[0;5]}v(x)=5\Leftrightarrow x=3\end{cases}$ (1).

Từ bảng biến thiên của hàm số $u(x)$ trên đoạn $[0;5]$, ta có $\begin{cases}\min\limits_{[0;5]}u(x)=1\Leftrightarrow x=1 \text{ hoặc } x=3\\\max\limits_{[0;5]}v(x)=4\Leftrightarrow x=0\end{cases}$ (2).

Từ (1) và (2), ta có $\begin{cases}\min\limits_{[0;5]}\dfrac{v(x)}{u(x)}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}\Leftrightarrow x=0\\\max\limits_{[0;5]}\dfrac{v(x)}{u(x)}=5\Leftrightarrow x=3\end{cases}$

Phương trình $\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}=mu(x)\Leftrightarrow\dfrac{v(x)}{u(x)}=m$ (*).

Do đó, phương trình (*) có nghiệm trên đoạn $[0;5]$ khi và chỉ khi $\dfrac{\sqrt{10}}{4}\leqslant m\leqslant 5$.
Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên suy ra $m\in\{1,2,3,4,5\}$.
Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án A □

Câu 44. Gọi a là giá trị nhỏ nhất của $f(n)=\dfrac{(\log_3 2)(\log_3 3)(\log_3 4)\cdots(\log_3 n)}{9^n}$, với $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$. Có bao nhiêu số n để $f(n)=a$?

A 2. **B** 4. **C** 1. **D** Vô số.

Lời giải.

Ta thấy $f(n)$ bé nhất khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} f(n) \leqslant f(n+1) \\ f(n) \leqslant f(n-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(\log_3 2)(\log_3 3)(\log_3 4)\cdots(\log_3 n)}{9^n} \leqslant \dfrac{(\log_3 2)(\log_3 3)(\log_3 4)\cdots(\log_3 (n+1))}{9^{n+1}} \\ \dfrac{(\log_3 2)(\log_3 3)(\log_3 4)\cdots(\log_3 n)}{9^n} \leqslant \dfrac{(\log_3 2)(\log_3 3)(\log_3 4)\cdots(\log_3 (n-1))}{9^{n-1}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 \leqslant \log_3(n+1) \\ \log_3 n \leqslant 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geqslant 3^9 - 1 \\ n \leqslant 3^9 \end{cases} \Leftrightarrow n \in \{3^9 - 1, 3^9\}.$$

Vậy có hai giá trị của n thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Chia ngẫu nhiên 9 viên bi gồm 4 viên màu đỏ và 5 viên màu xanh có cùng kích thước thành ba phần, mỗi phần 3 viên. Xác xuất để không có phần nào gồm 3 viên cùng màu bằng

A $\dfrac{9}{14}$. **B** $\dfrac{2}{7}$. **C** $\dfrac{3}{7}$. **D** $\dfrac{5}{14}$.

Lời giải.

Ta có nhận xét: Xác suất không thay đổi khi ta coi ba phần này có xếp thứ tự 1, 2, 3.

Chia ngẫu nhiên 9 viên bi gồm 4 viên màu đỏ và 5 viên màu xanh có cùng kích thước thành ba phần, mỗi phần 3 viên như sau:

- Chọn 3 viên cho phần 1: có C_9^3 cách.
- Chọn 3 viên cho phần 2: có C_6^3 cách.
- Chọn 3 viên lại cho phần 3: có 1 cách.

Do đó số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = \mathrm{C}_9^3 \cdot \mathrm{C}_6^3 = 1680$.

Gọi A là biến cố không có phần nào gồm 3 viên cùng màu, khi đó ta chia các viên bi thành 3 bộ như sau:

- Bộ 1: 2 đỏ - 1 xanh: có $\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_5^1$ cách chọn.
- Bộ 2: 1 đỏ - 2 xanh: có $\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_4^2$ cách chọn.
- Bộ 3: gồm các viên bi còn lại (1 đỏ - 2 xanh).

Vì bộ 2 và 3 có các viên bi giống nhau để không phân biệt hai bộ này nên có $\dfrac{3!}{2!}$ sắp xếp 3 bộ vào 3 phần trên.

Do đó $n(A) = \dfrac{3!}{2!}\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_4^2 = 1080$.

Vậy xác xuất để không có phần nào gồm 3 viên cùng màu là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1080}{1680} = \dfrac{9}{14}$.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$ và $f(x) + f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.\cos x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A $-\dfrac{\pi}{4}$. **B** $\dfrac{1}{4}$. **C** $\dfrac{\pi}{4}$. **D** $-\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có
$$f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\cdot\cos x\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$
Suy ra
$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,\mathrm{d}x\,(*)\,.$$
Đặt $t=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$; $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0$.
Khi đó
$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Từ $(*)$ ta có: $2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$.

Do đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}xf'(x)\,\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Cho các số phức w, z thỏa mãn $|w+i|=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w=(2+i)(z-4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-1-2i|+|z-5-2i|$ bằng

A $4\sqrt{13}$. **B** $4+2\sqrt{13}$. **C** $2\sqrt{53}$. **D** $6\sqrt{7}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có:
$$|5w+5i|=3\sqrt{5}\Leftrightarrow|(2+i)(z-4)+5i|=3\sqrt{5}\Leftrightarrow\left|z-4+\frac{5i}{2+i}\right|=\frac{3\sqrt{5}}{|2+i|}\Leftrightarrow|z-3+2i|=3.$$
Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức z, suy ra M thuộc đường tròn (T) tâm $I(3;-2)$ bán kính $R=3$.

Gọi $A(1;2),B(5;2)$ và $E(3;2)$ là trung điểm của AB. Ta có $P=MA+MB$.

Khi đó $P^2=(MA+MB)^2\leqslant 2(MA^2+MB^2)=4ME^2+AB^2$.

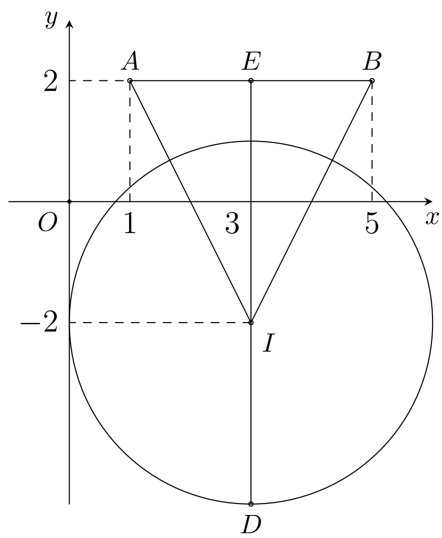
Nhận thấy E nằm ngoài đường tròn (T), gọi D là giao điểm của tia đối của tia IE và đường tròn (T) suy ra $ME\leqslant ED$, với mọi M thuộc (T).

Mặt khác ta có: $\overrightarrow{AB}=(4;0)$, $\overrightarrow{IE}=(0;4)\Rightarrow AB\perp IE\Rightarrow DE=R+IE=3+4=7$.

$\Rightarrow P^2\leqslant 4ME^2+AB^2\leqslant 4DE^2+AB^2=4\cdot 49+16=212$.

$\Rightarrow P\leqslant 2\sqrt{53}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $M\equiv D$.

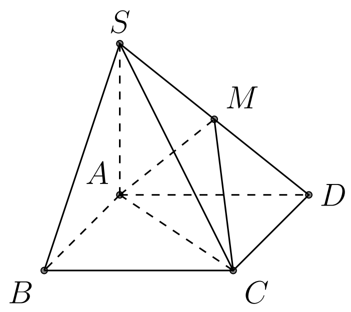
Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là $P_{\max}=2\sqrt{53}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 48.

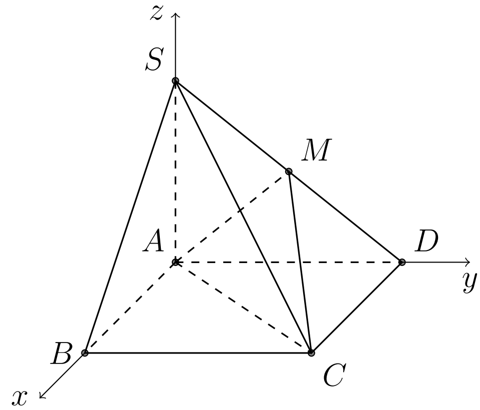
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD. Tang của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) bằng



(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv A$, tia Ox trùng với tia AB, tia Oy trùng với tia AD, tia Oz trùng với tia AS.



Khi đó ta có: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;a;0)$, $S(0;0;2a)$, $M\left(0;\dfrac{a}{2};a\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \left(0;\dfrac{a}{2};a\right)$, $\overrightarrow{AC} = (a;a;0)$,

$\overrightarrow{SB} = (a;0;-2a)$, $\overrightarrow{SC} = (a;a;-2a)$.

Suy ra:

- Mặt phẳng (AMC) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = \dfrac{2}{a^2} \cdot \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}\right] = (-2;2;-1)$.
- Mặt phẳng (SBC) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = \dfrac{1}{a^2} \cdot \left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}\right] = (2;0;1)$.

Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC), ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Do đó $\tan\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Biết rằng a là số thực dương sao cho bất đẳng thức $3^x + a^x \geqslant 6^x + 9^x$ đúng với mọi số thực x. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $a \in (10;12]$. **B** $a \in (16;18]$. (C) $a \in (14;16]$. (D) $a \in (12;14]$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 3^x + a^x \geqslant 6^x + 9^x &\Leftrightarrow a^x - 18^x \geqslant 6^x + 9^x - 3^x - 18^x \\ &\Leftrightarrow a^x - 18^x \geqslant 3^x\left(2^x - 1\right) - 9^x\left(2^x - 1\right) \\ &\Leftrightarrow a^x - 18^x \geqslant -3^x\left(2^x - 1\right)\left(3^x - 1\right) \quad (*) \end{aligned}$$

Ta thấy

- Nếu $x \geqslant 0$ thì $\begin{cases} 2^x \geqslant 1 \\ 3^x \geqslant 1 \end{cases} \Rightarrow (2^x - 1)(3^x - 1) \geqslant 0 \Rightarrow -3^x(2^x - 1)(3^x - 1) \leq 0.$
- Nếu $x < 0$ thì $\begin{cases} 2^x < 1 \\ 3^x < 1 \end{cases} \Rightarrow (2^x - 1)(3^x - 1) > 0 \Rightarrow -3^x(2^x - 1)(3^x - 1) < 0.$

Suy ra $-3^x(2^x - 1)(3^x - 1) \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó, $(*)$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

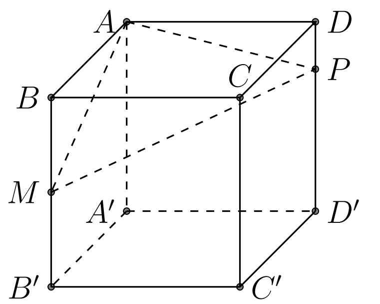
$$a^x - 18^x \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{18}\right)^x \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = 18.$$

Vậy $a = 18 \in (16; 18]$.

Chọn đáp án B □

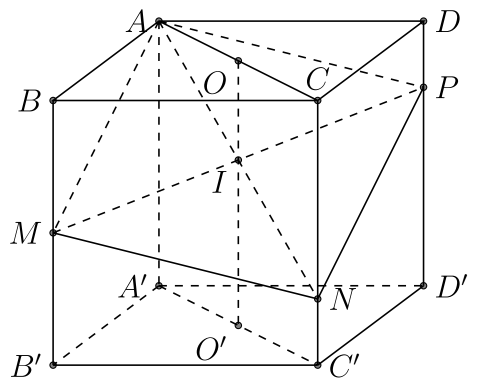
Câu 50.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $2a$. Gọi M là trung điểm của BB' và P thuộc cạnh DD' sao cho $DP = \frac{1}{4}DD'$. Mặt phẳng (AMP) cắt CC' tại N. Thể tích khối đa diện $AMNPBCD$ bằng



A $V = 2a^3$. **B** $V = 3a^3$. **C** $V = \dfrac{11a^3}{3}$. **D** $V = \dfrac{9a^3}{4}$.

Lời giải.



Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của $AC, A'C'$ và I là giao điểm của OO' với MP. Khi đó N là giao điểm của CC' với AI. Ta dễ dàng chứng minh được tứ giác $AMNP$ là hình bình hành và $CN = \frac{3}{4}CC'$.

Từ đó suy ra $BM = a$, $CN = \frac{3a}{2}$, $DP = \frac{a}{2}$.

Ta có: $V_{AMNPBCD} = V_{A.BMNC} + V_{A.CNPD}$.

$$V_{A.BMNC} = \frac{1}{3}AB \cdot S_{BMNC} = \frac{1}{3}AB \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot (MB + NC) = \frac{1}{6} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \left(a + \frac{3a}{2}\right) = \frac{5a^3}{3}.$$

$$V_{A.CNPD} = \frac{1}{3}AD \cdot S_{CNPD} = \frac{1}{3}AD \cdot \frac{1}{2} \cdot CD \cdot (CN + PD) = \frac{1}{6} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{3a}{2}\right) = \frac{4a^3}{3}.$$

Vậy $V_{AMNPBCD} = \dfrac{5a^3}{3} + \dfrac{4a^3}{3} = 3a^3$.

Chọn đáp án B □

——— **HẾT** ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. C	3. D	4. C	5. B	6. B	7. D	8. B	9. B	10. D
11. B	12. A	13. A	14. B	15. B	16. A	17. A	18. A	19. D	20. C
21. A	22. C	23. B	24. D	25. C	26. D	27. C	28. A	29. B	30. A
31. C	32. A	33. D	34. D	35. D	36. D	37. B	38. C	39. C	40. A
41. A	42. C	43. A	44. A	45. A	46. D	47. C	48. D	49. B	50. B

95 ĐỀ THI THỬ TRƯỜNG THPT QUẾ VÕ SỐ 3 - BẮC NINH NĂM 2017-2018 LẦN 4

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hình trụ có bán kính đáy 3 cm, chiều cao 4 cm. Khi đó diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ là

A $S_{\text{tp}} = 42\pi$ cm^2. **B** $S_{\text{tp}} = 33\pi$ cm^2. **C** $S_{\text{tp}} = 418\pi$ cm^2. **D** $S_{\text{tp}} = 24\pi$ cm^2.

Lời giải.

Theo đề bài ta có $r = 3$ cm và $h = 4$ cm.

Khi đó $S_{\text{tp}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 42\pi$ cm^2.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Kết quả đúng của $\lim \dfrac{2 - 5^{n+2}}{3^n + 2 \cdot 5^n}$ là

A 1. **B** $-\dfrac{5}{2}$. **C** $\dfrac{5}{2}$. **D** $-\dfrac{25}{2}$.

Lời giải.

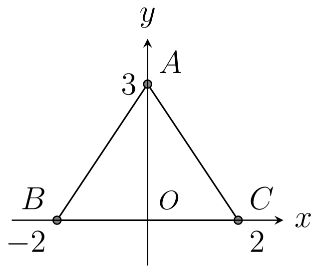
$$\lim \frac{2 - 5^{n+2}}{3^n + 2 \cdot 5^n} = \lim \frac{\dfrac{2}{5^n} - 5^2}{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n + 2} = -\frac{25}{2}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 3.

Cho tam giác ABC như hình vẽ. Biết trọng tâm G của tam giác ABC là điểm biểu diễn của số phức z. Tìm phần ảo của số phức $\overline{z}$.

A 1. **B** -1. **C** $-i$. **D** i.



Lời giải.

Theo giả thiết, ta có $A(0;3)$, $B(-2;0)$, $C(2;0)$.

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G(0;1)$ nên $z = i \Rightarrow \overline{z} = -i$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^3 - \dfrac{2}{x}\right)^n$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^{n-2} = 78$.

A 112640. **B** -112640. **C** 112643. **D** -112643.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^{n-2} = 78 \Leftrightarrow n + \dfrac{n(n-1)}{2} = 78 \Leftrightarrow n^2 + n - 156 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 12 \\ n = -13. \end{array}\right.$

Do n là số nguyên dương nên $n = 12$.

Số hạng tổng quát của khai triển $\left(x^3 - \dfrac{2}{x}\right)^n$ là $\mathrm{C}_{12}^k x^{36-4k}(-2)^k$.

Suy ra $36 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 9$.
Vậy số hạng không chứa x là $\mathrm{C}_{12}^{9}(-2)^9 = -112640$.
Chọn đáp án B □

Câu 5. Giá trị của tích phân $I = \int\limits_0^1 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ là

A $I = 2 + \ln 2$. B $I = 1 - \ln 2$. C $I = 2 - \ln 2$. D $I = 1 + \ln 2$.

Lời giải.

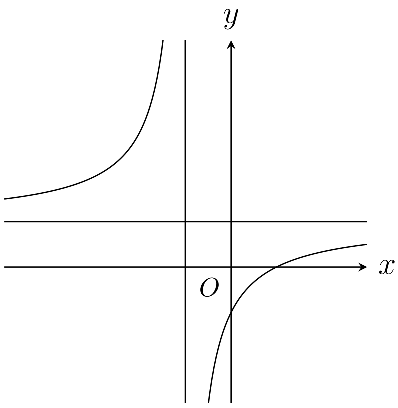
$$I = \int\limits_0^1 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = (x - \ln|x+1|)\Big|_0^1 = 1 - \ln 2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 6.

Đường cong ở hình bên là đồ thị hàm số nào sau đây?

A $y = \dfrac{x+3}{x-2}$. B $y = -2x + 3x^4$.
C $y = \dfrac{x-1}{x-2}$. D $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.



Lời giải.

Đồ thị có tiệm cận đứng $x = a$, với $a < 0$ nên chọn đáp án $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{2x+1}$.

A $(2x+1)3^{2x} + C$. B $\dfrac{3^{2x+1}}{\ln 3} + C$. C $3^{2x+1}\ln 3 + C$. D $\dfrac{3^{2x+1}}{\ln 9} + C$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\int a^{bx+c}\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^{bx+c}}{b\ln a} + C$ ta được $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{3^{2x+1}}{2\ln 3} + C = \dfrac{3^{2x+1}}{\ln 9} + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = a$, cạnh SA vuông góc với mặt đáy (ABC). Góc tạo bởi SC và mặt đáy (ABC) bằng 60°. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. B $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

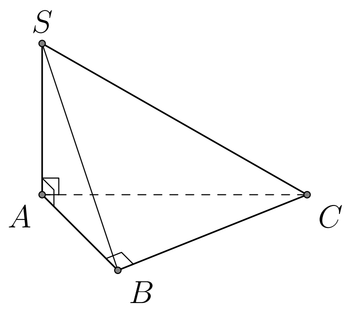
Lời giải.

Ta có AC là hình chiếu của SC lên mặt (ABC) nên $(SC,(ABC)) = (SC, AC) = \widehat{SCA} = 60°$.

Tam giác ABC vuông cân tại B nên $AC = a\sqrt{2}$ và $S_{ABC} = \dfrac{a^2}{2}$.

Tam giác SAC vuông tại A nên $SA = AC\tan 60° = a\sqrt{6}$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

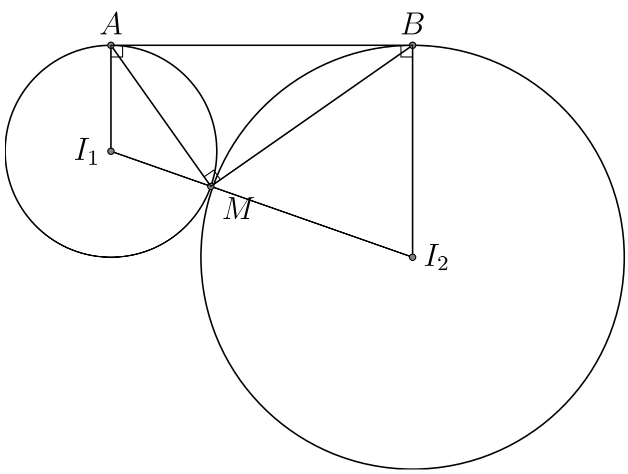


Chọn đáp án D □

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(2;3;3)$, $B(-2;-1;1)$. Gọi (S) và (S') là hai mặt cầu thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với đường thẳng AB lần lượt tại các tiếp điểm A, B đồng thời tiếp xúc ngoài với nhau tại $M(a;b;c)$. Tính giá trị của $a+b+c$ biết rằng khoảng cách từ M tới mặt phẳng $(P): x+2y-2z+2018=0$ đạt giá trị lớn nhất.

A $a+b+c=4$. B $a+b+c=5$. C $a+b+c=3$. D $a+b+c=2$.

Lời giải.



Ta có $\widehat{ABM} = \dfrac{\widehat{BI_2M}}{2}$; $\widehat{BAM} = \dfrac{\widehat{AI_1M}}{2}$.

$\Rightarrow \widehat{ABM} + \widehat{BAM} = \dfrac{\widehat{BI_2M} + \widehat{AI_1M}}{2} = 90°$.

$\Rightarrow \widehat{AMB} = 90° \Rightarrow \triangle ABM$ vuông tại M.

$\Rightarrow M$ thuộc mặt cầu (S_1) đường kính AB.

Mặt cầu (S_1) có tâm $I(0;1;2)$ và bán kính $R = \dfrac{AB}{2} = 3$ nên có phương trình

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9.$$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $I(0;1;2)$ và vuông góc với mặt phẳng (P), ta có $M \in \Delta$.

Phương trình đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = t \\ y = 1+2t \\ z = 2-2t. \end{cases}$

Ta có $M \in \Delta \Rightarrow M(t;1+2t;2-2t)$.

$M \in (S_1) \Rightarrow t^2 + 4t^2 + 4t^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \Rightarrow M_1(1;3;0) \\ t_2 = -1 \Rightarrow M_2(-1;-1;4). \end{array}\right.$

Ta có $\mathrm{d}\left(M_1,(P)\right) = 675$ và $\mathrm{d}\left(M_2,(P)\right) = 669$.

$\Rightarrow M(1;3;0) \Rightarrow a+b+c=4$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(-2;-1;3)$. Tìm phương trình mặt phẳng đi qua các điểm lần lượt là hình chiếu của M lên các trục tọa độ.

A $\dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{-1} + \dfrac{z}{3} = 0$. B $\dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{-1} + \dfrac{z}{3} = 1$.

C $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{1} + \dfrac{z}{-3} = 0$. D $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{1} + \dfrac{z}{-3} = 1$.

Lời giải.

Hình chiếu của M lên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt là $(-2;0;0)$, $(0;-1;0)$, $(0;0;3)$.
Phương trình mặt phẳng cần tìm là $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{3}=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 5 nam và 5 nữ thành một hàng dọc. Xác suất để **không** có bất kỳ hai học sinh cùng giới đứng cạnh nhau là

(A) $\dfrac{1}{21}$. **B** $\dfrac{1}{126}$. (C) $\dfrac{1}{42}$. (D) $\dfrac{1}{252}$.

Lời giải.

$n(\Omega)=10!$.

Gọi A là biến cố "Không có bất kỳ hai học sinh cùng giới đứng cạnh nhau."

$\Rightarrow n(A)=2\cdot 5!\cdot 5!$.

Suy ra $\mathrm{P}(A)=\dfrac{2\cdot 5!\cdot 5!}{10!}=\dfrac{1}{126}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$. Đường thẳng d song song với Δ có một véc-tơ chỉ phương là

(A) $\overrightarrow{u_1}=(0;2;-1)$. (B) $\overrightarrow{u_2}=(3;2;1)$. (C) $\overrightarrow{u_3}=(0;-1;1)$. **D** $\overrightarrow{u_4}=(3;2;-1)$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;2;-1)$ nên đường thẳng song song với Δ nhận $\vec{u}$ làm véc-tơ chỉ phương.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Đồ thị nào sau đây không có tiệm cận ngang?

(A) $y=\dfrac{x+2}{x^2-1}$. **B** $y=\dfrac{x^2}{x-1}$. (C) $y=x+\sqrt{x^2-1}$. (D) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}y=-\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Một nhóm có 10 người. Cần chọn ra ban đại diện gồm 3 người. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

(A) A_9^2. (B) A_{10}^3. (C) C_9^2. **D** C_{10}^3.

Lời giải.

Chọn 3 người trong 10 người nên có C_{10}^3 cách chọn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Nghiệm của phương trình $\sin^2 x+\sin x\cos x=1$ là

(A) $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.

(B) $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.

C $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.

(D) $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải.

$\sin^2 x + \sin x \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x - \cos x \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin x - \cos x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

Chọn đáp án C □

Câu 16. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \begin{cases} x = t\\ y = -1 + 2t\\ z = 2 - 3t\end{cases}$ và $\Delta_2\colon \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+3}{2}$. Khẳng đinh nào sau đây đúng?

A. Δ_1 cắt và không vuông góc với Δ_2.

B. Δ_1 song song Δ_2.

C. Δ_1 và Δ_2 chéo nhau và vuông góc với nhau.

D. Δ_1 cắt và vuông góc với Δ_2.

Lời giải.

Δ_1 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (1; 2; -3)$ và Δ_2 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (4; 1; 2)$.

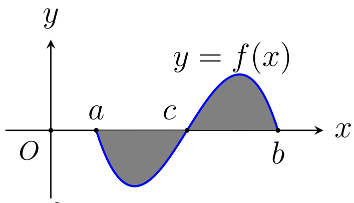
Ta có $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \Rightarrow \Delta_1 \perp \Delta_2$.

Hệ $\begin{cases} 4t - 3 = t'\\ t = -1 + 2t'\\ 2t - 3 = 2 - 3t'\end{cases}$ có nghiệm $\begin{cases} t = 1\\ t' = 1\end{cases}$ nên Δ_1 cắt Δ_2.

Chọn đáp án D □

Câu 17.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, $x = a$, $x = b$. Khi đó S được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $S = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S = \displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S = -\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S = \left|\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Phần đồ thị của $f(x)$ khi $a < x < c$ nằm phía dưới trục hoành nên ta có $S = -\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-\infty; 0)$. **B** $(-\infty; -2)$. **C** $(0; +\infty)$. **D** $(-1; 0)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ nên nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = x^3 \ln^2 x$. Giá trị của $f'(\mathrm{e}) + f''(\mathrm{e})$ là

A $15\mathrm{e}$. **B** $5\mathrm{e}^2 + 18\mathrm{e}$. **C** $5\mathrm{e}^2$. **D** $6\mathrm{e} + 6$.

Lời giải.

Ta có

- $f'(x) = 3x^2 \ln^2(x) + 2x^2 \ln(x)$
- $f''(x) = 6x \ln^2(x) + 10x \ln(x) + 2x$

Vậy $f'(\mathrm{e}) + f''(\mathrm{e}) = 3\mathrm{e}^2 \ln^2(\mathrm{e}) + 2\mathrm{e}^2 \ln \mathrm{e} + 6\mathrm{e} \ln^2 \mathrm{e} + 10\mathrm{e} \ln \mathrm{e} + 2\mathrm{e} = 5\mathrm{e}^2 + 18\mathrm{e}$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; 4)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (Oxy). Tọa độ điểm H là

A $H(0; -1; 0)$. **B** $H(0; -1; 4)$. **C** $H(2; -1; 0)$. **D** $H(2; 0; 4)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của $M(2; -1; 4)$ lên mặt phẳng (Oxy) là điểm $H(2; -1; 0)$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2 [\log_3 (\log_4 x^{18})] = 1$ bằng

A 2. **B** 0. **C** -2. **D** 4.

Lời giải.

$\log_2 [\log_3 (\log_4 x^{18})] = 1 \Leftrightarrow \log_3 (\log_4 (x^{18})) = 2 \Leftrightarrow \log_4 (x^{18}) = 9 \Leftrightarrow \log_4 \left((x^2)^9\right) = 9$

$\Leftrightarrow 9 \log_4 (x^2) = 9 \Leftrightarrow \log_4 (x^2) = 1 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Vậy tổng giá trị các nghiệm của phương trình là $-2 + 2 = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-1 \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình $f(x)=m$, với $m\in(-1;2)$ có số nghiệm là

A 3. **B** 1. **C** 0. **D** 2.

Lời giải.

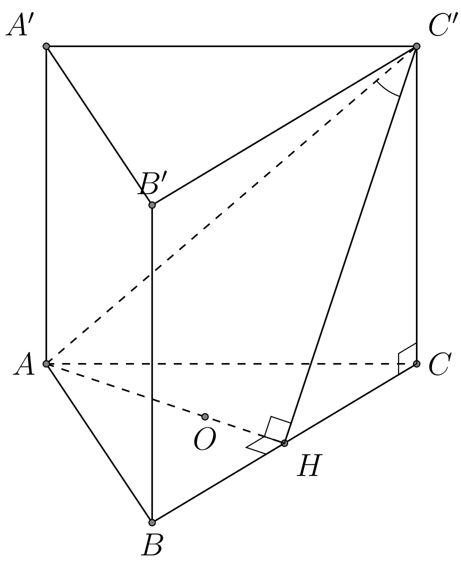
Dựa vào bảng biến thiên, ta có với $m\in(-1;2)$, phương trình $f(x)=m$ có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$, góc giữa AC' và $(BCC'B')$ bằng 30°. Tính thể tích V của khối trụ nội tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{36}$. **B** $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}$. **C** $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{72}$. **D** $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{108}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases}AH\perp BC\\AH\perp BB'\end{cases}$ $\Rightarrow AH\perp(BCC'B')\Rightarrow HC'$ là hình chiếu của của AC' trên mặt phẳng $(BCC'B')$.

$\Rightarrow \widehat{AC'H}=(AC',HC')=(AC',(BCC'B'))=30^\circ$.

Tam giác AHC' vuông tại H có $\widehat{AC'H}=30^\circ$ nên $HC'=\dfrac{AH}{\tan 30^\circ}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}=\dfrac{3a}{2}$.

Tam giác HCC' vuông tại C nên $C'C^2=C'H^2-HC^2=\dfrac{9a^2}{4}-\dfrac{a^2}{4}=2a^2\Rightarrow CC'=a\sqrt{2}$.

Gọi O là tâm của tam giác đều, ta có $OH=\dfrac{1}{3}AH=\dfrac{a\sqrt{2}}{6}$.

Vậy thể tích V của khối trụ nội tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V=\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2\cdot a\sqrt{2}=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-2018;2018]$ để hàm số $y=x^3+3x^2-mx+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A 2018. **B** 2016. **C** 2019. **D** 2017.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2+6x-m$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \Delta'=9+3m\leq 0\Leftrightarrow m\leq -3$.

Do $m\in[-2018;2018]$ nên $m=\{-2018,-2017,\ldots,-3\}$. Vậy có 2016 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Cho số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $z - 2\overline{z} = -2 + 9i$. Khi đó giá trị $a + 3b$ bằng

(A) -1. (B) -7. **C** 11. (D) 5.

Lời giải.

Ta có $z - 2\overline{z} = -2 + 9i \Leftrightarrow -a + 3bi = -2 + 9i \Rightarrow a = 2; b = 3 \Rightarrow a + 3b = 11$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2ab$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\log_2(a + b) = 2 + \log_2 a + \log_2 b$. (B) $\log(a + b) = 2 + \dfrac{1}{2}(\log a + \log b)$.

C $\log_2(a + b) = \dfrac{1}{2}(2 + \log_2 a + \log_2 b)$. (D) $\log_2(a + b) = \dfrac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$.

Lời giải.

Với mọi số thực dương a và b, ta có $a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow (a + b)^2 = 4ab$. Do đó, ta có

$\log_2(a+b)^2 = \log_2(4ab) \Leftrightarrow 2\log_2(a+b) = \log_2 4 + \log_2 a + \log_2 b \Leftrightarrow \log_2(a+b) = \dfrac{1}{2}(2 + \log_2 a + \log_2 b)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Biết $I = \displaystyle\int\limits_1^2 (3x^2 + \ln x)\,\mathrm{d}x = a + b\ln 2$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a + b$.

(A) $S = 4$. (B) $S = 6$. (C) $S = 2$. **D** $S = 8$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int\limits_1^2 (3x^2 + \ln x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 3x^2\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$.

- $\displaystyle\int\limits_1^2 3x^2\,\mathrm{d}x = x^3\Big|_1^2 = 7$.
- $\displaystyle\int\limits_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1$.

Suy ra $I = 7 + 2\ln 2 - 1 = 6 + 2\ln 2$.

Vậy $S = a + b = 6 + 2 = 8$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $z + 1 + 2i - (1 + i)|z| = 0$ và $|z| > 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.

(A) $P = -1$. (B) $P = 3$. (C) $P = -5$. **D** $P = 7$.

Lời giải.

Ta có $z + 1 + 2i - (1 + i)|z| = 0 \Leftrightarrow a + 1 - \sqrt{a^2 + b^2} + \left(b + 2 - \sqrt{a^2 + b^2}\right)i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 - \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \\ b + 2 - \sqrt{a^2 + b^2} = 0. \end{cases}$$

Suy ra $a + 1 = b + 2 \Leftrightarrow a = b + 1$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được:

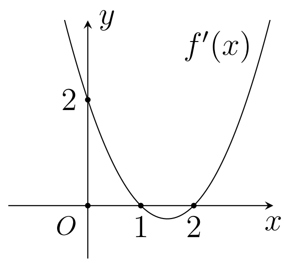
$$b+2-\sqrt{2b^2+2b+1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} b+2\geq 0 \\ 2b^2+2b+1=b^2+4b+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\geq -2 \\ \left[\begin{array}{l} b=-1 \\ b=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-1\Rightarrow a=0 \\ b=3\Rightarrow a=4. \end{array}\right.$$

- Với $a=0$, $b=-1$ ta có $|z|=1$ (không thỏa mãn).
- Với $a=4$, $b=3$ ta có $|z|=5$ (thỏa mãn).

Vậy $P=a+b=3+4=7$.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(1-2x)$ đồng biến trên khoảng



A $(2;+\infty)$. **B** $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$. **C** $(1;2)$. **D** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có $y'=[f(1-2x)]'=-2f'(1-2x)$.

Từ đồ thị, ta có $[f(1-2x)]'>0 \Leftrightarrow f'(1-2x)<0 \Leftrightarrow 1<1-2x<2 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<x<0$.

Vậy hàm số $y=f(1-2x)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Thể tích của khối lăng trụ có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B là

A $V=\dfrac{1}{2}Bh$. **B** $V=\dfrac{1}{3}Bh$. **C** $V=\dfrac{1}{6}Bh$. **D** $V=Bh$.

Lời giải.

Áp dụng công thức thể tích của khối lăng trụ.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Biết $\displaystyle\int\limits_1^3 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=a\sqrt{3}+b\sqrt{2}+c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính $P=a+b+c$.

A $P=\dfrac{13}{2}$. **B** $P=\dfrac{16}{3}$. **C** $P=5$. **D** $P=\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_1^3 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\int\limits_1^3\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\left[\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3+\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3\right]\Bigg|_1^3$.

$$=\dfrac{16}{3}+2\sqrt{3}-\dfrac{4}{3}\sqrt{2}-\dfrac{2}{3}=2\sqrt{3}-\dfrac{4}{3}\sqrt{2}+\dfrac{14}{3}.$$

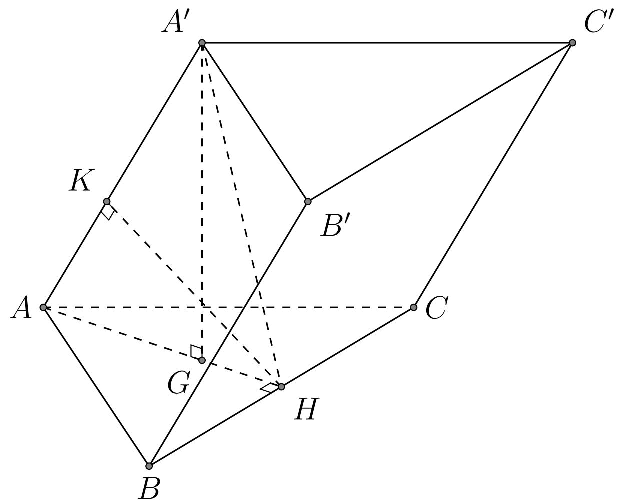
Vậy $P=a+b+c=2-\dfrac{4}{3}+\dfrac{14}{3}=\dfrac{16}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính $A'G$.

A $A'G = \dfrac{a}{3}$. **B** $A'G = \dfrac{2a}{3}$. **C** $A'G = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D** $A'G = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp A'G \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'AH)$.

Trong mặt phẳng $(A'AH)$, kẻ $HK \perp A'A$ tại K, ta có HK là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AA' và BC. Do đó $HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác AHK vuông tại K nên $AK^2 = AH^2 - HK^2 = \dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{3a^2}{16} = \dfrac{9a^2}{16} \Rightarrow AK = \dfrac{3a}{4}$.

Hai tam giác AKH vuông tại K và AGA' vuông tại G có $\widehat{A'AH}$ chung nên $\triangle AKH \backsim \triangle AGA'$.

$$\Rightarrow \frac{A'G}{HK} = \frac{AG}{AK} \Rightarrow A'G = \frac{HK \cdot AG}{AK} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{3a}{4}} = \frac{a}{3}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 33. Một người gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất không thay đổi là 8%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Người đó định gửi tiền trong vòng 3 năm, sau đó rút tiền ra để mua ô tô trị giá 500 triệu đồng. Hỏi số tiền ít nhất người đó phải gửi vào ngân hàng để có đủ tiền mua ô tô (kết quả làm tròn đến hàng triệu) là bao nhiêu?

A 395 triệu đồng. **B** 394 triệu đồng. **C** 397 triệu đồng. **D** 396 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi T (triệu đồng) là số tiền người đó cần gởi vào ngân hàng. Khi đó, ta có

$$T(1+8\%)^3 = 500 \Rightarrow T = \frac{500}{(1+8\%)^3} \approx 397.$$

Chọn đáp án C □

Câu 34. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$ trên đoạn $[0;4]$ là

A -1. **B** $\dfrac{11}{5}$. **C** 3. **D** $\dfrac{12}{5}$.

Lời giải.

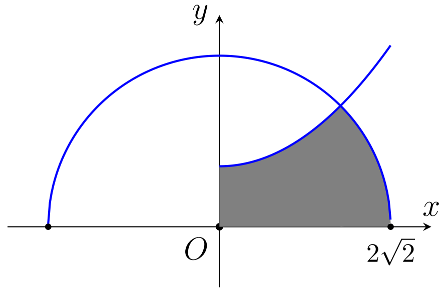
Hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[0;4]$.

Ta có $y' = -\dfrac{1}{(x+1)^2} < 0$, $\forall x \in [0;4]$. Suy ra hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn $[0;4]$.

Vậy $\max\limits_{[0;4]} y = y(0) = 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 35.
Cho $(\mathscr{H})$ là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \dfrac{1}{4}x^2 + 1$ (với $0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$), nửa đường tròn $y = \sqrt{8 - x^2}$ và trục hoành, trục tung (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của hình $(\mathscr{H})$ bằng



(A) $\dfrac{3\pi + 4}{6}$. (B) $\dfrac{2\pi + 2}{3}$. (C) $\dfrac{3\pi + 2}{3}$. (D) $\dfrac{3\pi + 14}{6}$.

Lời giải.
Phương trình hoành độ giao điểm của parapol $y = \dfrac{1}{4}x^2 + 1$ và nửa đường tròn $y = \sqrt{8 - x^2}$ là

$$\sqrt{8 - x^2} = \frac{1}{4}x^2 + 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

Từ đồ thị, ta có diện tích hình phẳng $(\mathscr{H})$ là

$$S = \int\limits_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right) \mathrm{d}x + \int\limits_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8 - x^2}\, \mathrm{d}x.$$

- $S_1 = \displaystyle\int\limits_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{12} + x\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3}$.
- $S_2 = \displaystyle\int\limits_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8 - x^2}\, \mathrm{d}x$.

  Đặt $x = 2\sqrt{2}\sin t$ $\left(t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]\right) \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\sqrt{2}\cos t\, \mathrm{d}t$.

  Đổi cận $x = 2 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4}$; $x = 2\sqrt{2} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}$.

  Suy ra $S_2 = 2\sqrt{2} \displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{8 - 8\sin^2 t} \cos t\, \mathrm{d}t = 8 \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, \mathrm{d}t = 4 \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\, \mathrm{d}t$

  $$= 4\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2.$$

Vậy $S = S_1 + S_2 = \dfrac{8}{3} + \pi - 2 = \dfrac{3\pi + 2}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Cho các số phức z_1 và z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1 - i| = |z_1 - 1 + i|$ và $|z_2 - 1| = |z_2 + 2i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 - z_2| + |z_1 - 3| + |z_2 - 3|$?

(A) $P_{\min} = \dfrac{4\sqrt{3}}{2}$. (B) $P_{\min} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. (C) $P_{\min} = 4\sqrt{3}$. (D) $P_{\min} = 4\sqrt{2}$.

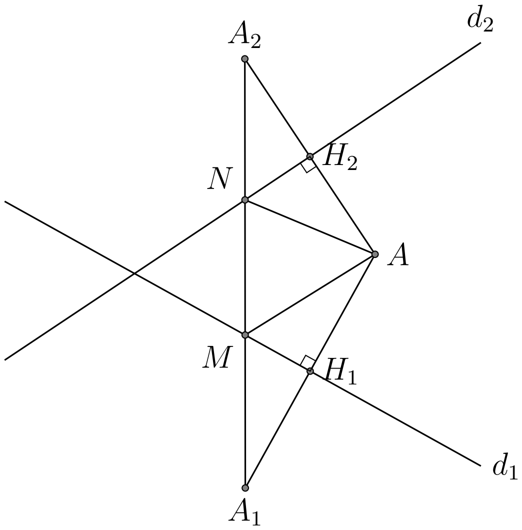
Lời giải.
Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$. Ta có

- $|z_1 - i| = |z_1 - 1 + i| \Leftrightarrow a^2 + (b - 1)^2 = (a - 1)^2 + (b + 1)^2 \Leftrightarrow 2a - 4b - 1 = 0$.

  $\Rightarrow M$ di động trên đường thẳng $d_1\colon 2x - 4y - 1 = 0$.

- $|z_2 - 1| = |z_2 + 2i| \Leftrightarrow (c-1)^2 + d^2 = c^2 + (d+2)^2 \Leftrightarrow 2c + 4d + 3 = 0$.
  $\Rightarrow N$ di động trên đường thẳng $d_2\colon 2x + 4y + 3 = 0$.

Ta có $P = |z_1 - z_2| + |z_1 - 3| + |z_2 - 3| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} + \sqrt{(a-3)^2 + b^2} + \sqrt{(c-3)^2 + d^2} = MN + MA + NA$ với $A(3;0)$.



Gọi A_1 đối xứng với A qua đường thẳng d_1; A_2 đối xứng với A qua đường thẳng d_2, ta có

$$MN + MA + NA = MN + MA_1 + NA_2 \geq A_1A_2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi bốn điểm M, N, A_1, A_2 thẳng hàng.

Gọi Δ_1 là đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với d_1, ta có phương trình đường thẳng Δ_1 là $2x + y - 6 = 0$.

Gọi $H_1 = \Delta_1 \cap d_1 \Rightarrow$ tọa độ điểm H_1 là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 4y - 1 = 0 \\ 2x + y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow H_1\left(\dfrac{5}{2}; 1\right) \Rightarrow A_1(2;2)$.

Gọi Δ_2 là đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với d_2, ta có phương trình đường thẳng Δ_2 là $2x - y - 6 = 0$.

Gọi $H_2 = \Delta_2 \cap d_2 \Rightarrow$ tọa độ điểm H_2 là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 4y + 3 = 0 \\ 2x - y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{21}{10} \\ y = -\dfrac{9}{5} \end{cases}$

$\Rightarrow H_2\left(\dfrac{21}{10}; -\dfrac{9}{5}\right) \Rightarrow A_2\left(\dfrac{6}{5}; -\dfrac{18}{5}\right)$.

Vậy $P_{\min} = A_1A_2 = \sqrt{\left(\dfrac{6}{5} - 2\right)^2 + \left(-\dfrac{18}{5} - 2\right)^2} = 4\sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $2^{f(x)} + f(x) = x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết rằng tích phân $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{\ln 2}$ với a, $b \in \mathbb{Q}$. Tính $P = a + b$.

A $P = 4$. **B** $P = 1$. **C** $P = 2$. **D** $P = 3$.

Lời giải.

Thay $x = 0$, $x = 2$ vào biểu thức $2^{f(x)} + f(x) = x + 1$, ta được

- $2^{f(0)} + f(0) = 1 \Leftrightarrow f(0) = 0$.
- $2^{f(2)} + f(2) = 3 \Leftrightarrow f(2) = 1$.

Đặt $t = f(x)$, ta có $2^t + t = x + 1 \Rightarrow \mathrm{d}x = (2^t \ln 2 + 1)\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 2 \Rightarrow t = 1$.

Vậy $I = \int\limits_0^1 t(2^t \ln 2 + 1)\,\mathrm{d}t = \left(t \cdot 2^t - \dfrac{1}{\ln 2}2^t + \dfrac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{\ln 2}$.

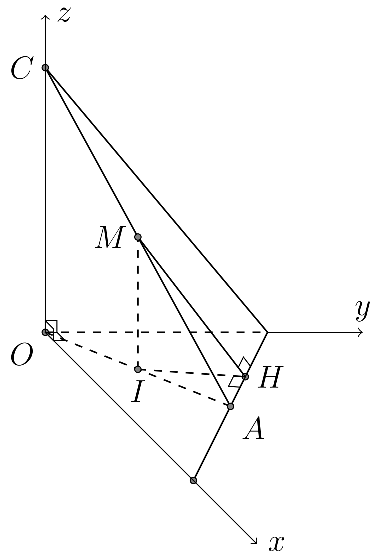
Vậy $P = a + b = 5 - 1 = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;0)$. Giả sử B và C là các điểm thay đổi nằm trên các trục Ox và Oz. Gọi M là trung điểm của AC. Biết rằng khi B và C thay đổi nhưng nằm trên các trục Ox và Oz thì hình chiếu vuông góc H của M trên đường thẳng AB luôn nằm trên một đường tròn cố định. Tính bán kính của đường tròn đó.

A. $R = \dfrac{1}{4}$. B. $R = \dfrac{1}{2}$. C. $R = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. D. $R = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của OA, ta có $IM \parallel OC \Rightarrow IM \perp (Oxy)$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp MH \\ AB \perp IM \end{cases} \Rightarrow AB \perp (IMH) \Rightarrow AB \perp IH$.

$\Rightarrow$ H thuộc đường tròn (C) cố định có đường kính IA và nằm trong mặt phẳng (Oxy).

Vậy bán kính của đường tròn (C) là $R = \dfrac{OA}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) + 2f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3x$. Tính tích phân $I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{3}{2}$. B. $I = \dfrac{1}{2}$. C. $I = \dfrac{5}{2}$. D. $I = \dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t = \dfrac{1}{x}$, thay vào biểu thức $f(x) + 2f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3x$, ta được $f\left(\dfrac{1}{t}\right) + 2f(t) = \dfrac{3}{t}$ hay $f\left(\dfrac{1}{x}\right) + 2f(x) = \dfrac{3}{x}$.

Suy ra $f(x) = \dfrac{2}{x} - x$.

Vậy $I = \displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \dfrac{f(x)}{x} \mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\dfrac{2}{x^2} - 1\right) \mathrm{d}x = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho khai triển $(1+2x+3x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2n}x^{2n}$. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển trên biết rằng $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = 30233600$.

A 37102. B 33264. C 32951. D 34704.

Lời giải.

Thay $x = 1$ và $x = -1$ vào biểu thức $(1+2x+3x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2n}x^{2n}$, ta được

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n} = 6^n \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{2n-1} + a_{2n} = 2^n. \end{cases}$$

Suy ra $2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}) = 6^n + 2^n \Leftrightarrow 60467200 = 6^n + 2^n \Leftrightarrow n = 10$.

Ta có $(1+2x+3x^2)^{10} = [(1+2x)+3x^2]^{10}$

$= \mathrm{C}_{10}^{0}(1+2x)^{10} + \mathrm{C}_{10}^{1}(1+2x)^9 \cdot 3x^2 + \mathrm{C}_{10}^{2}(1+2x)^8 \cdot 9x^4 + \mathrm{C}_{10}^{3}(1+2x)^7 \cdot 27x^6 + \cdots + \mathrm{C}_{10}^{10}\left(3x^2\right)^{10}$.

Suy ra hệ số của x^5 trong khai triển $(1+2x+3x^2)^{10}$ là $\mathrm{C}_{10}^{0}\mathrm{C}_{10}^{5}2^5 + 3\mathrm{C}_{10}^{1}\mathrm{C}_{9}^{3}2^3 + 9\mathrm{C}_{10}^{2}\mathrm{C}_{8}^{1}2 = 34704$.

Chọn đáp án D □

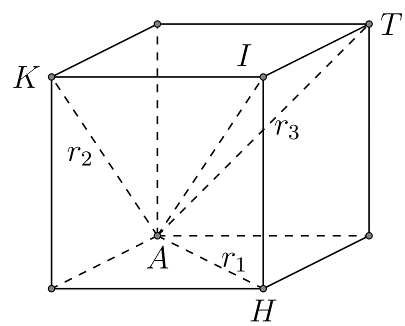
Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2 = 16$ và điểm $A(1;2;3)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua A và đôi một vuông góc với nhau, cắt mặt cầu theo ba đường tròn. Tính tổng diện tích của ba đường tròn tương ứng đó.

A 33π. B 10π. C 38π. D 36π.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$ và bán kính $R = 4$.

Gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính ba đường tròn và H, K, T là hình chiếu của tâm I của mặt cầu (S) lên ba mặt phẳng tương ứng.



Khi đó, tổng diện tích của ba đường tròn tương ứng là

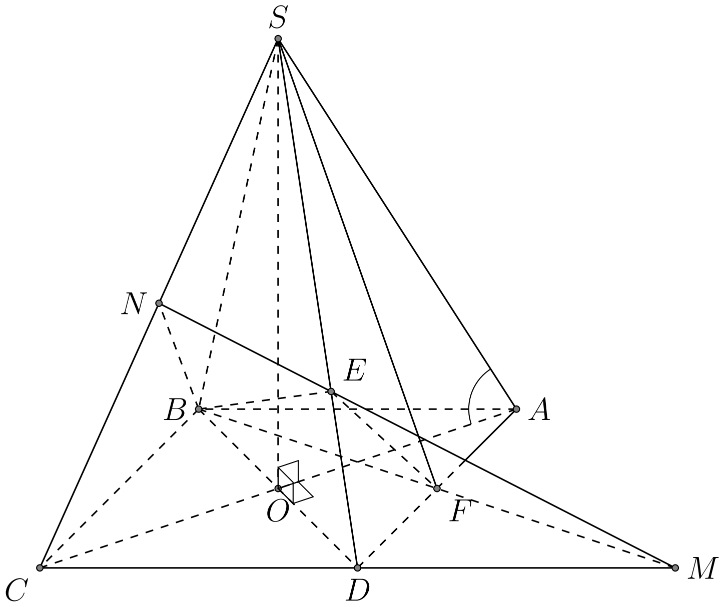
$$S = \pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) = \pi\left[(R^2 - IH^2) + (R^2 - IK^2) + (R^2 - IT^2)\right]$$
$$= \pi\left[3R^2 - (IH^2 + IK^2 + IT^2)\right] = \pi(3R^2 - IA^2) = 38\pi.$$

Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60°. Gọi M là điểm đối xứng với C qua D, và N là trung điểm của cạnh SC. Mặt phẳng(BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện $(\mathscr{H}_1)$ và $(\mathscr{H}_2)$, trong đó $(\mathscr{H}_1)$ chứa điểm C. Thể tích khối $(\mathscr{H}_1)$ là

A $\dfrac{7\sqrt{6}a^3}{36}$. B $\dfrac{7\sqrt{6}a^3}{72}$. C $\dfrac{5\sqrt{6}a^3}{36}$. D $\dfrac{5\sqrt{6}a^3}{72}$.

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có $SO \perp (ABCD)$ và $\widehat{SAO} = 60^\circ$.

Tam giác SOA vuông tại O có $\widehat{SAO} = 60^\circ$ nên $SO = OA \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

$\Rightarrow V = V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Gọi E là giao điểm của MN và SD; F là giao điểm của BM và AD.

Ta có $V_{(\mathscr{H}_2)} = V_{SABF} + V_{SBEF} + V_{SBNE}$ và $V_{(\mathscr{H}_1)} = V - V_{(\mathscr{H}_2)}$.

- $V_{SABF} = \dfrac{1}{4} V$.
- $\dfrac{V_{SBEF}}{V_{SBDF}} = \dfrac{SE}{SD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow V_{SBEF} = \dfrac{2}{3} V_{SBDF} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{4} V = \dfrac{1}{6} V$.
- $\dfrac{V_{SBNE}}{V_{SBCD}} = \dfrac{SN}{SC} \cdot \dfrac{SE}{SD} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{SBNE} = \dfrac{1}{3} V_{SBCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} V = \dfrac{1}{6} V$.

Suy ra $V_{(\mathscr{H}_2)} = \dfrac{1}{4} V + \dfrac{1}{6} V + \dfrac{1}{6} V = \dfrac{7}{12} V$.

Vậy $V_{(\mathscr{H}_1)} = V - V_{(\mathscr{H}_2)} = V - \dfrac{7}{12} V = \dfrac{5}{12} V = \dfrac{5\sqrt{6}a^3}{72}$.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Tìm số nghiệm của phương trình $2^x + 3^x + 4^x + \cdots + 2017^x + 2018^x = 2017 - x$.

A 1. **B** 0. **C** 2016. **D** 2017.

Lời giải.

Ta có $2^x + 3^x + 4^x + \cdots + 2017^x + 2018^x = 2017 - x \Leftrightarrow x + 2^x + 3^x + 4^x + \cdots + 2017^x + 2018^x = 2017$.

Xét hàm số $f(x) = x + 2^x + 3^x + 4^x + \cdots + 2017^x + 2018^x$. Ta có hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lại có $f(0) = 2017 \Rightarrow$ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Cho hàm số $y = \dfrac{mx - m^2 - 2}{-x + 1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\max\limits_{[-4;-2]} y = -\dfrac{1}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $1 \leq m < 3$. **B** $m > 4$. **C** $-\dfrac{1}{2} < m < 0$. **D** $-3 < m < -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[-4; -2]$.

Ta có $y' = \dfrac{-m^2 + m - 2}{(1-x)^2} < 0$, $\forall x \in [-4; -2]$. Suy ra hàm số nghịch biến trên đoạn $[-4; -2]$.

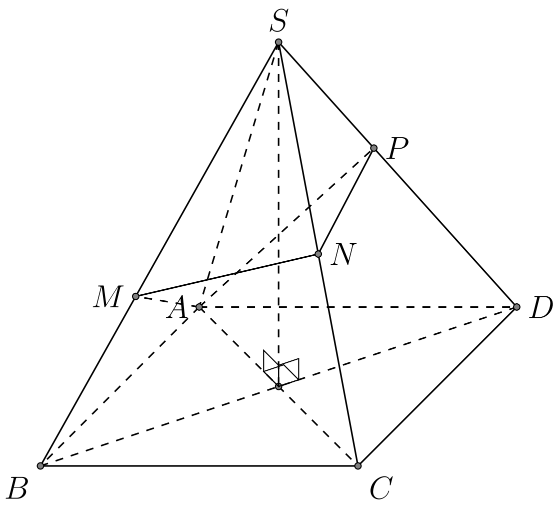
Do đó $\max\limits_{[-4;-2]} y = -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow y(-4) = -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{-m^2 - 4m - 2}{5} = -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3m^2 + 12m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{-6 \pm \sqrt{33}}{3}$.

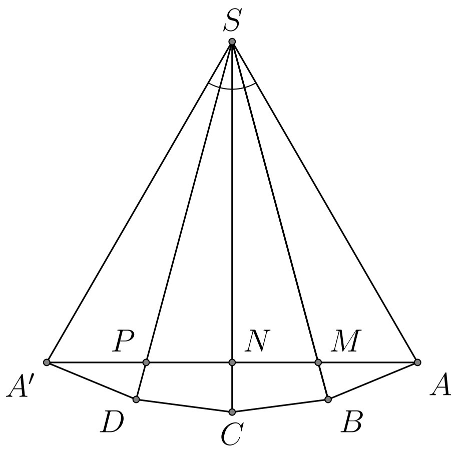
Chọn đáp án C □

Câu 45. Người ta cần trang trí một cây thông Noel có dạng hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với cạnh bên $SA = a$, $\widehat{SAB} = \dfrac{11\pi}{24}$. Quấn một vòng dây đèn trang trí (tùy ý) xuất phát từ A vòng quanh cây thông rồi trở về A. Độ dài nhỏ nhất của dây quấn nằm trong khoảng/ đoạn nào?

A $\left(2a; \dfrac{5a}{2}\right)$. **B** $\left(\dfrac{3a}{2}; 2a\right)$. **C** $[3a; 4a]$. **D** $\left[a; \dfrac{3a}{2}\right]$.

Lời giải.





Trải các mặt bên của hình chóp trên một mặt phẳng. Khi đó độ dài ngắn nhất của dây quấn là AA' (hình vẽ).

Ta có $\widehat{SAB} = \dfrac{11\pi}{24} \Rightarrow \widehat{ASB} = \dfrac{\pi}{12} \Rightarrow \widehat{ASA'} = \dfrac{\pi}{3}$.

Tam giác SAA' cân tại S có $\widehat{ASA'} = \dfrac{\pi}{3}$ nên tam giác SAA' đều cạnh a.

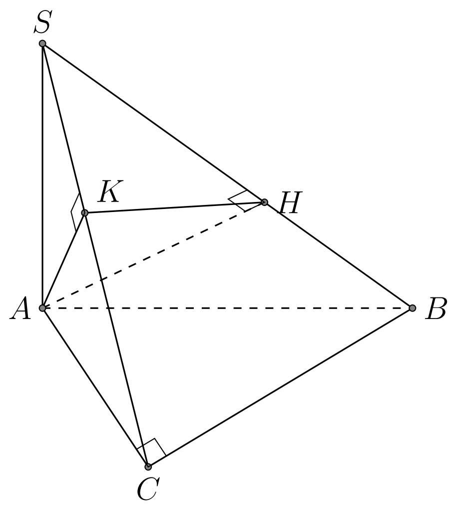
Suy ra $AA' = a \in \left[a; \dfrac{3a}{2}\right]$.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (T) đường kính $AB = 2r$, C là một điểm di động trên đường tròn (T). Trên đường thẳng d vuông góc với (P) tại A lấy điểm S sao cho $SA = r$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC. Tính thể tích lớn nhất của tứ diện $SAHK$ khi điểm C chạy trên đường tròn.

A $\dfrac{r^3}{3}$. **B** $\dfrac{r^3\sqrt{5}}{25}$. **C** $\dfrac{r^3\sqrt{5}}{75}$. **D** $\dfrac{r^3\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.



Tam giác SAB vuông tại A có AH là đường cao nên

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2}.$$

Tam giác SAC vuông tại A có AK là đường cao nên

$$\frac{SK}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2}.$$

Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (T) đường kính $AB = 2r$ nên tam giác ABC vuông tại C.

Đặt $AC = x$, ta có $BC = \sqrt{4r^2 - x^2}$.

Ta có $\dfrac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SH}{SB} \cdot \dfrac{SK}{SC} = \dfrac{SA^4}{SB^2 \cdot SC^2}$.

$\Rightarrow V_{SAHK} = \dfrac{SA^4}{SB^2 \cdot SC^2} \cdot V_{S.ABC} = \dfrac{r^4}{5r^2 \cdot (r^2 + x^2)} \cdot \dfrac{1}{3}r \cdot \dfrac{1}{2}x\sqrt{4r^2 - x^2} = \dfrac{1}{30}r^3 \cdot \dfrac{x\sqrt{4r^2 - x^2}}{r^2 + x^2}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2(4r^2 - x^2)}{(r^2 + x^2)^2} = \dfrac{t(4r^2 - t)}{(t + r^2)^2} = g(t)$ $(t > 0)$.

Ta có $g'(t) = \dfrac{-6r^2t^2 - 2r^4t + 4r^6}{(t + r^2)^4}$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow -6r^2t^2 - 2r^4t + 4r^6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -r^2 \\ t = \dfrac{2r^2}{3}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{2r^2}{3}$		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		$\nearrow$	$\frac{4}{5}$	$\searrow$	

Vậy thể tích lớn nhất của tứ diện $SAHK$ khi điểm C chạy trên đường tròn là

$$\max V_{SAHK} = \frac{1}{30}r^3 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{75}r^3.$$

Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho phương trình $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin 3x$. Gọi x_1 và x_2 lần lượt là nghiệm lớn nhất và nhỏ nhất của phương trình đã cho trong đoạn $[0; 2018\pi]$. Tính tổng $x_1 + x_2$.

A $x_1 + x_2 = \dfrac{12109\pi}{6}$.

B $x_1 + x_2 = \dfrac{12111\pi}{6}$.

C $x_1 + x_2 = \dfrac{12107\pi}{6}$.

D $x_1 + x_2 = \dfrac{12103\pi}{6}$.

Lời giải.

Ta có $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin 3x \Leftrightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin 3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + l\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$ $(k, l \in \mathbb{Z})$.

- Với $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$, ta có $0 \leq -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \leq 2018\pi \Leftrightarrow \dfrac{1}{6} \leq k \leq \dfrac{12109}{6}$.
  Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 2018\}$.
- Với $x = \dfrac{\pi}{3} + l\dfrac{\pi}{2}$, ta có $0 \leq \dfrac{\pi}{3} + l\dfrac{\pi}{2} \leq 2018\pi \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3} \leq l \leq \dfrac{12106}{3}$.
  Vì $l \in \mathbb{Z}$ nên $l \in \{0, 1, 2, \ldots, 4035\}$.

Suy ra $x_1 = \dfrac{\pi}{3}$, $x_2 = \dfrac{12107\pi}{6}$.

Vậy $x_1 + x_2 = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{12107\pi}{6} = \dfrac{12109\pi}{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Giả sử x_1, x_2, x_3 là ba hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với trục hoành. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |f'(x_1)| + |f'(x_2)| + |f'(x_3)| - (x_1 - x_2)^4 - (x_2 - x_3)^4 - (x_3 - x_1)^4$.

A $P_{\max} = \dfrac{15}{32}$. B $P_{\max} = \dfrac{32}{75}$. C $P_{\max} = \dfrac{25}{72}$. D $P_{\max} = \dfrac{8}{25}$.

Lời giải.

Đặt $x_1 = m$, $x_2 = n$, $x_3 = p$. Khi đó, ta có $\begin{cases} f'(m) = (m-n)(m-p) \\ f'(n) = (n-p)(n-m) \\ f'(p) = (p-m)(p-n). \end{cases}$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $m < n < p$. Khi đó, ta có

$P = (n-m)(p-m) + (n-m)(p-n) + (p-m)(p-n) - (m-n)^4 - (n-p)^4 - (p-m)^4$.

$\Rightarrow P \leq (p-m)\left[(p-n) + (n-m)\right] + \left(\dfrac{p-n+n-m}{2}\right)^2 - \left[(m-n)^4 + (n-p)^4\right] - (p-m)^4$.

$\Rightarrow P \leq \dfrac{5}{4}(p-m)^2 - \dfrac{1}{8}(p-n+n-m)^4 - (p-m)^4$.

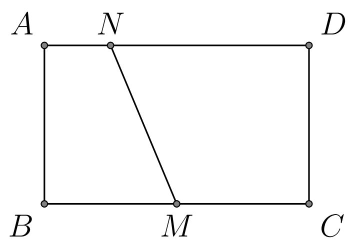
Khi đó $P \leq \dfrac{5}{4}(p-m)^2 - \dfrac{9}{8}(p-m)^4 \leq \dfrac{25}{72}$.

Đẳng thức xảy ra khi $p - m = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Chọn đáp án C □

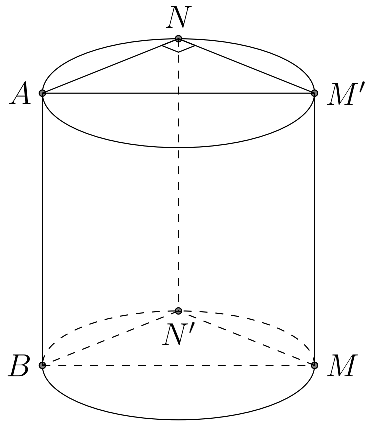
Câu 49.

Có một mảnh bìa hình chữ nhật $ABCD$ có đường chéo $AC = 1$. Người ta đánh dấu M là trung điểm của BC, N là điểm thuộc cạnh AD với $AD = 4AN$. Sau đó người ta cuốn mảnh bìa lại sao cho cạnh AB trùng với cạnh CD tạo thành một hình trụ. Tìm độ dài cạnh BC sao cho thể tích của tứ diện $ABMN$ đạt giá trị lớn nhất với các đỉnh A, B, M, N nằm trên hình trụ vừa tạo thành.



A $BC = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. B $BC = \dfrac{1}{3}$. C $BC = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. D $BC = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Giả sử hình trụ như hình vẽ. Kẻ các đường sinh MM', NN'. Khi đó N là điểm chính giữa cung AM' $\Rightarrow$ tam giác ANM' vuông cân tại N.

Đặt $BC = x \Rightarrow AB = \sqrt{1-x^2}$.

Gọi R là bán kính đường tròn đáy, ta có $AD = 2\pi R = x \Rightarrow R = \dfrac{x}{2\pi} \Rightarrow AN = \dfrac{x}{\sqrt{2}\pi}$.

Ta có $V_{ABMN} = \dfrac{1}{3}V_{AM'N.BMN'} = \dfrac{1}{3}AB\cdot\dfrac{1}{2}AN^2$

$= \dfrac{1}{12\pi^2}x^2\sqrt{1-x^2} = \dfrac{1}{12\pi^2}\sqrt{x^4(1-x^2)}$.

Ta có $x^4(1-x^2) = \dfrac{1}{2}x^2\cdot x^2(2-2x^2) \le \dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{x^2+x^2+2-2x^2}{3}\right)^3 = \dfrac{4}{27}$.

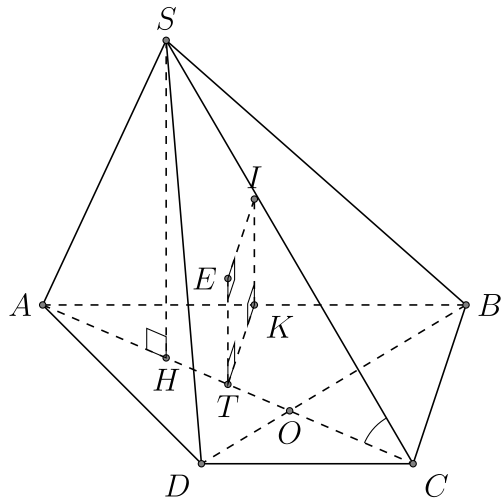
Đẳng thức xảy ra khi $x^2 = 2-2x^2 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{2}{3} \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AD = DC = CB = a$; $AB = 2a$. Chân đường cao là trung điểm OA, đường thẳng AC cắt BD tại O, góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$ bằng 60°. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A $V = \dfrac{61\pi\sqrt{61}}{162}a^3$. **B** $V = \dfrac{31\pi\sqrt{61}}{81}a^3$. **C** $V = \dfrac{31\pi\sqrt{51}}{162}a^3$. **D** $V = \dfrac{17\pi\sqrt{59}}{54}a^3$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của OA, ta có $SH \perp (ABCD) \Rightarrow (SAC) \perp (ABCD)$.

Gọi K là trung điểm của AB, ta có K là tâm của đường tròn ngoại tiếp hình thang $ABCD$.

Gọi T là trung điểm của AC; E là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác SAC; I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$, ta có $IETK$ là hình chữ nhật.

Tam giác ABC vuông tại C nên $AC^2 = AB^2 - BC^2 = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$.

$ABCD$ là hình thang có hai đáy AB, CD thỏa $AB = 2CD$ nên $OA = 2OC$.

$\Rightarrow CH = \dfrac{2}{3}AC = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ và $AH = \dfrac{1}{3}AC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ta có $SH \perp (ABCD) \Rightarrow HC$ là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$.

$\Rightarrow \widehat{SCH} = 60^\circ \Rightarrow SH = HC\cdot\tan 60^\circ = 2a$.

$\Rightarrow SA^2 = SH^2 + AH^2 = 4a^2 + \dfrac{3a^2}{9} = \dfrac{39a^2}{9} \Rightarrow SA = \dfrac{a\sqrt{39}}{3}$.

Áp dụng định lí sin trong tam giác SAC, ta có $AE = \dfrac{SA}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{a\sqrt{13}}{3}$.

Tam giác ATE vuông tại T nên $ET^2 = AE^2 - AT^2 = \dfrac{13a^2}{9} - \dfrac{3a^2}{4} = \dfrac{25a^2}{36}$.

Tam giác IAK vuông tại K nên $IA^2 = AK^2 + IK^2 = a^2 + \dfrac{25a^2}{36} = \dfrac{61a^2}{36}$.

$\Rightarrow$ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $R = IA = \dfrac{a\sqrt{61}}{6}$.
Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{a\sqrt{61}}{6}\right)^3 = \frac{61\pi\sqrt{61}}{162}a^3.$$

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. D	3. B	4. B	5. B	6. D	7. D	8. D	9. A	10. B
11. B	12. D	13. B	14. D	15. C	16. D	17. C	18. B	19. B	20. C
21. B	22. A	23. B	24. B	25. C	26. C	27. D	28. D	29. B	30. D
31. B	32. A	33. C	34. C	35. C	36. D	37. A	38. D	39. A	40. D
41. C	42. D	43. A	44. C	45. D	46. C	47. A	48. C	49. A	50. A

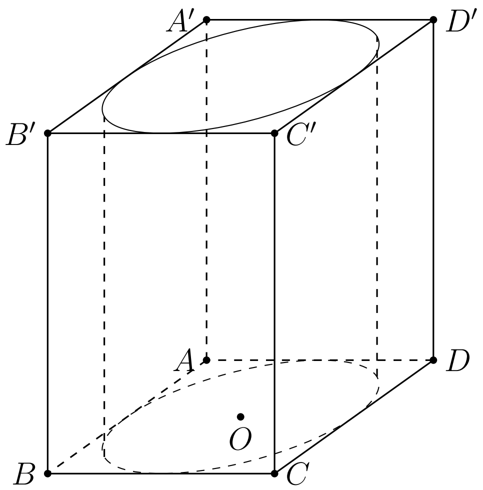
96 ĐỀ KHẢO SÁT KIẾN THỨC TOÁN 12 THPT - SGD VĨNH PHÚC-NĂM 2017-2018 LẦN 2

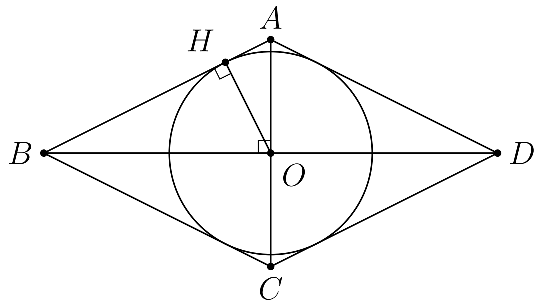
NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh bằng a, $\widehat{BAD} = 120°$, chiều cao lăng trụ bằng $2a$. Gọi (T) là hình trụ có hai đáy là hai đường tròn nội tiếp hai đáy của hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$. Tính thể tích khối trụ (T).

Ⓐ $\dfrac{3\pi a^3}{2}$. Ⓑ $\dfrac{\pi a^3}{2}$. Ⓒ $\dfrac{\pi a^3}{8}$. **D** $\dfrac{3\pi a^3}{8}$.

Lời giải.





Gọi $O = AC \cap BD$, kẻ $OH \perp AB, H \in AB$.

Xét $\triangle OAB$ vuông tại O có $OA = \dfrac{a}{2}, OB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, AB = a$.

Suy ra $OH = \dfrac{OA \cdot OB}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Khối trụ (T) có bán kính đáy $R = OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$, chiều cao $h = 2a$ nên có thể tích

$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 \cdot 2a = \frac{3\pi a^3}{8}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 2. Tìm tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - (m-2)x^2 + (m-2)x + \dfrac{1}{3}m^2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung.

Ⓐ $m > 2$. Ⓑ $m \leq 2$.

Ⓒ Không có giá trị m thỏa mãn. **D** $m < 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 2(m-2)x + m - 2$.

Để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu. Điều này tương đương với $x_1x_2 < 0 \Leftrightarrow m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2017^x$.

A $y' = 2017^x \cdot \ln 2017$. **B** $y' = 2017^x$.

C $y' = \dfrac{2017^x}{\ln 2017}$. **D** $y' = x \cdot 2017^{x-1}$.

Lời giải.

$$y' = (2017^x)' = 2017^x \cdot \ln 2017.$$

Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = 2017^x$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2017^x}{\ln 2018} + C$. **B** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2017^x}{\ln 2017} + C$.

C $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2017^x \ln 2017 + C$. **D** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2017^x}{2017} + C$.

Lời giải.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2017^x}{\ln 2017} + C.$$

Chọn đáp án B □

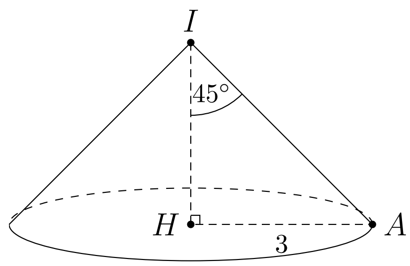
Câu 5. Tính thể tích V của khối nón (N) có bán kính đáy $R = 3$ và góc ở đỉnh bằng 90°.

A $V = 27\pi$. **B** $V = 3\pi$. **C** $V = 36\pi$. **D** $V = 9\pi$.

Lời giải.

Khối nón (N) có bán kính $R = AH = 3$, chiều cao $h = IH = 3$, nên thể tích

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 9\pi.$$



Chọn đáp án D □

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-2 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow -2$

Khẳng định nào sau đây **sai**?

A Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

B Hàm số $y = f(x)$ không có cực trị.

C Hàm số $y = |f(x)|$ có một điểm cực trị.

D Hàm số $y = f(|x|)$ không có cực trị.

Lời giải.

- Hàm số $y = |f(x)|$ luôn nhận giá trị không âm. Do đó, từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ như sau:

x	$-\infty$			1		$+\infty$
$\lvert f(x)\rvert$	-2	$\searrow$ 0	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2

  Từ bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$, suy ra hàm số $y = |f(x)|$ có một điểm cực trị.
- Hàm số $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn và với $x \geq 0$ thì $f(|x|) = f(x)$. Do đó, từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(|x|)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(\lvert x\rvert)$	-2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-2

  Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(|x|)$, suy ra hàm số $y = f(|x|)$ có một cực trị.

Vậy mệnh đề "Hàm số $y = f(|x|)$ không có cực trị" sai.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A $y = -x^3 + 2x^2 - 4x + 2$. **B** $y = \dfrac{2x+2}{x-1}$.

C $y = -x^4 + 3$. **D** $y = -x^3 - 2x^2 + 5$.

Lời giải.

- $y = \dfrac{2x+2}{x-1}$ có tập xác định $\mathscr{D} \neq \mathbb{R}$. (loại)
- $y = -x^4 + 3$ là hàm bậc bốn trùng phương nên không bao giờ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. (loại)
- $y = -x^3 + 2x^2 - 4x + 2, y' = -3x^2 + 4x - 4 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. (chọn)
- $y = -x^3 - 2x^2 + 5, y' = -3x^3 - 4x$ đổi dấu 2 lần trên $\mathbb{R}$. (loại)

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho số phức z được biểu diễn bởi điểm $M(2; -3)$. Tìm tọa độ điểm M' biểu diễn cho số phức iz.

A $M'(-3; 2)$. **B** $M'(-3; -2)$. **C** $M'(3; -2)$. **D** $M'(3; 2)$.

Lời giải.

Ta có $z = 2 - 3i \Leftrightarrow iz = 3 + 2i$.

Vậy điểm biểu diễn cho số phức iz là điểm $M'(3; 2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+3}{-1-2x}$ có phương trình là

A $y = -\dfrac{3}{2}$. **B** $y = -1$. **C** $y = -\dfrac{1}{2}$. **D** $x = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = -\dfrac{1}{2}$ nên tiệm cận ngang của đồ thị hàm số có phương trình là $y = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(1;2)$, $B(-3;4)$. Phép tịnh tiến biến điểm A thành điểm B có véc-tơ tịnh tiến là

A $\vec{v} = (-4;-2)$. **B** $\vec{v} = (4;2)$. **C** $\vec{v} = (4;-2)$. **D** $\vec{v} = (-4;2)$.

Lời giải.

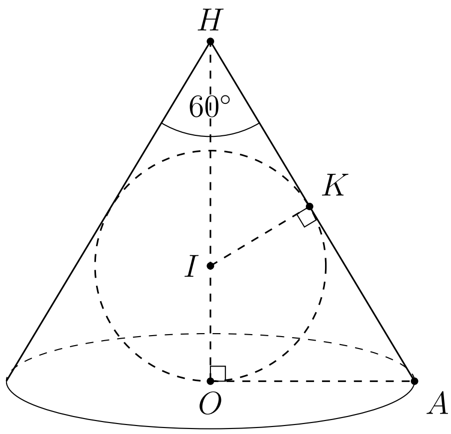
Phép tịnh tiến biến điểm A thành điểm B có véc-tơ tịnh tiến là $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-4;2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Cho hình nón (N) có đỉnh H, đáy là đường tròn tâm O có bán kính bằng R, góc ở đỉnh bằng $60°$. Một mặt cầu (S) tâm I thuộc đoạn HO, tiếp xúc với mặt xung quanh và mặt đáy của hình nón (N). Tính diện tích mặt cầu (S).

A πR^2. **B** $\dfrac{2\pi R^2}{3}$. **C** $\dfrac{4\pi R^2}{3}$. **D** $4\pi R^2$.

Lời giải.



Với A là điểm bất kì trên đường tròn đáy, kẻ $IK \perp HA, K \in HA$.

Ta có $AO = R, HO = R\sqrt{3}, KH = AH - KA = 2R - R = R$.

Xét $\triangle HKI \backsim \triangle HOA$ (g-g)

Suy ra $\dfrac{IK}{AO} = \dfrac{KH}{HO} \Leftrightarrow IK = \dfrac{AO \cdot KH}{HO} = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$.

Mặt cầu (S) tâm I, bán kính $r = IK = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$ có diện tích là

$$S = 4\pi r^2 = \frac{4\pi R^2}{3}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (2;1;0)$, $\vec{b} = (-1;0;2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

A $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{2}{25}$. **B** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\dfrac{2}{25}$. **C** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\dfrac{2}{5}$. **D** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{2}{5}$.

Lời giải.

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2}} = -\frac{2}{5}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ và $f(0) - f(2) = 2$. Tính $\int\limits_0^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) 2. **B** -2. (C) $\frac{1}{2}$. (D) 4.

Lời giải.

$$\int\limits_0^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(2) - f(0) = -2.$$

Chọn đáp án (B) □

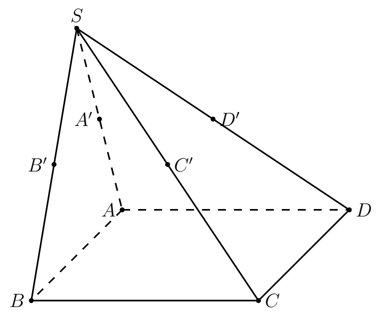
Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

(A) $A'B' \parallel (SBD)$. (B) $A'B' \parallel (SAD)$.

C $(A'C'D') \parallel (ABC)$. (D) $A'C' \parallel BD$.

Lời giải.

Ta có $A'C' \parallel AC \Rightarrow (A'C'D') \parallel (ABC)$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Kí hiệu a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $z = -4 - 3i$. Tìm a, b.

(A) $a = -4, b = 3$. (B) $a = -4, b = -3i$. **C** $a = -4, b = -3$. (D) $a = 4, b = 3$.

Lời giải.

Số phức $z = -4 - 3i$ có phần thực là $a = -4$, phần ảo là $b = -3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Cho (u_n) là cấp số cộng có công sai d, (S_n) là tổng của n số hạng đầu tiên. Tìm số khẳng định đúng trong các khẳng định sau

i) $u_n = u_{n-1} + d \quad \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

ii) $u_n = u_1 + nd \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

iii) $u_n = \dfrac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2} \quad \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

iv) $S_n = \dfrac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(A) 1. **B** 3. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

Với (u_n) là cấp số cộng có công sai d, (S_n) là tổng của n số hạng đầu tiên. Ta có

a) $u_n = u_{n-1} + d \quad \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Suy ra i đúng.

b) $u_n = u_1 + (n-1)d \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra ii sai.

c) $u_n = \dfrac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2} \quad \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Suy ra iii đúng.

d) $S_n = \dfrac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra iv đúng.

Vậy có 3 khẳng định đúng.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Tính thể tích khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và đường chéo $A'C = 2a$.

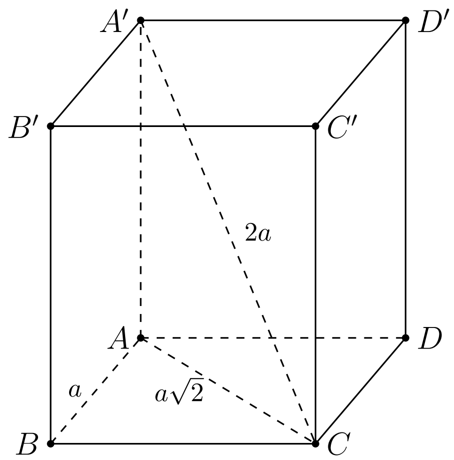
A. a^3. B. $a^3\sqrt{3}$. C. $a^3\sqrt{2}$. D. $2a^3$.

Lời giải.

Ta có $AC = a\sqrt{2}, AA' = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}$.

Khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, chiều cao $AA' = a\sqrt{2}$ nên thể tích

$$V = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = a^2 \cdot a\sqrt{2} = a^3\sqrt{2}.$$



Chọn đáp án C □

Câu 18. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{(4+2\sqrt{3})^{2016} \cdot (1-\sqrt{3})^{2014}}{(1+\sqrt{3})^{2018}}$.

A. -2^{2015}. B. -2^{2017}. C. 2^{2014}. D. 2^{2016}.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{(4+2\sqrt{3})^{2016} \cdot (1-\sqrt{3})^{2014}}{(1+\sqrt{3})^{2018}} \\ &= \frac{(1+\sqrt{3})^{4032} \cdot (1-\sqrt{3})^{2014}}{(1+\sqrt{3})^{2018}} \\ &= (1+\sqrt{3})^{2014} \cdot (1-\sqrt{3})^{2014} \\ &= (-2)^{2014} \\ &= 2^{2014}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 19. Tính $\lim \dfrac{2n+1}{n-1}$.

A. $+\infty$. B. 2. C. $\dfrac{1}{2}$. D. -1.

Lời giải.

$$\lim \frac{2n+1}{n-1} = \lim \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = 2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\int f(2x)\,\mathrm{d}x = 2F(2x) + C$.
B $\int f(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}F(2x) + C$.
(C) $\int f(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}F(x) + C$.
(D) $\int f(2x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$.

Lời giải.

$$\int f(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int f(2x)\,\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}F(2x) + C.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;3)$, $B(2;0;5)$, $C(0;-3;-1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC?

(A) $x - y + 2z - 9 = 0$.
(B) $2x + 3y - 6z - 19 = 0$.
C $2x + 3y + 6z - 19 = 0$.
(D) $x - y + 2z + 9 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng cần tìm đi qua $A(2;-1;3)$ và nhận $\overrightarrow{BC} = (-2;-3;-6)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên có phương trình

$$-2(x-2) - 3(y+1) - 6(z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y + 6z - 19 = 0.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x+1}{4^x}$.

A $y' = \dfrac{1 - 2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.
(B) $y' = \dfrac{1 + 2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$.
(C) $y' = \dfrac{1 - 2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$.
(D) $y' = \dfrac{1 + 2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

Lời giải.

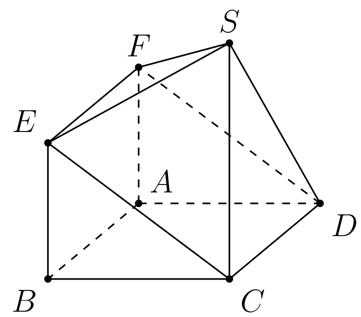
$$y' = \left(\frac{x+1}{4^x}\right)' = \frac{1\cdot 4^x - 4^x(x+1)\ln 4}{4^{2x}} = \frac{1 - (x+1)\ln 4}{4^x} = \frac{1 - 2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 23.

Khối đa diện lồi như hình vẽ bên có bao nhiêu mặt?

A 8.
(B) 5.
(C) 6.
(D) 9.



Lời giải.

Khối đa diện lồi đã cho có 4 mặt nhìn thấy và 4 mặt che khuất. Vậy nó có tất cả 8 mặt.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{x}} < \left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{3}{x}+5}$.

(A) $S = (0;+\infty)$.
(B) $S = \left(-\infty;-\frac{2}{5}\right)$.

C $S=\left(-\infty;-\dfrac{2}{5}\right)\cup(0;+\infty)$. **D** $S=\left(-\dfrac{2}{5};+\infty\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{x}}<\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{3}{x}+5}\Leftrightarrow\frac{1}{x}<\frac{3}{x}+5\Leftrightarrow\frac{-2}{x}-5<0\Leftrightarrow\frac{-2-5x}{x}<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-\dfrac{2}{5}\\ x>0.\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm $S=\left(-\infty;-\dfrac{2}{5}\right)\cup(0;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Nghiệm của phương trình $\sin x=\dfrac{1}{2}$ là

A $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ và $x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$. **B** $x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$ và $x=\dfrac{5\pi}{6}+k\pi$.

C $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ và $x=-\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$. **D** $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$.

Lời giải.

$$\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin x=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi.\end{array}\right.$$

Chọn đáp án A □

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\cos 3x-\cos 2x+m\cos x-1=0$ có đúng 8 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};2\pi\right)$.

A $1\le m\le 3$. **B** $1<m<3$. **C** $3<m<\dfrac{13}{4}$. **D** $3\le m<\dfrac{13}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&\cos 3x-\cos 2x+m\cos x-1=0\\ \Leftrightarrow\ &4\cos^3 x-3\cos x-(2\cos^2 x-1)+m\cos x-1=0\\ \Leftrightarrow\ &4\cos^3 x-2\cos^2 x-3\cos x+m\cos x=0\\ \Leftrightarrow\ &\cos x(4\cos^2 x-2\cos x-3+m)=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ 4\cos^2 x-2\cos x-3+m=0.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Nếu $\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$. Phương trình này có 2 nghiệm thuộc $\left(-\dfrac{\pi}{2};2\pi\right)$.

Nếu $4\cos^2 x-2\cos x-3+m=0\Leftrightarrow m=-4\cos^2 x+2\cos x+3=f(x)$.

Để phương trình đã cho có 8 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};2\pi\right)$ thì phương trình $m=f(x)$ phải có 6 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};2\pi\right)$.

Ta có $f'(x)=-\sin x(-8\cos x+2)$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\pm\arccos\dfrac{1}{4}+k2\pi=\pm\alpha+k2\pi.\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\alpha$		0		α		π		$2\pi-\alpha$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	3	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	1

Phương trình $m = f(x)$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$ khi $3 < m < \frac{13}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Cho khai triển $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{14})^{15} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{210}x^{210}$. Tính giá trị của $S = \mathrm{C}_{15}^0a_0 - \mathrm{C}_{15}^1a_1 + \mathrm{C}_{15}^2a_2 - \cdots - \mathrm{C}_{15}^{15}a_{15}$.

A $S = 2^{15}$. **B** $S = 1$. **C** $S = 0$. **D** $S = 15$.

Lời giải.

Ta có $(x-1)^{15} = \mathrm{C}_{15}^0x^{15} - \mathrm{C}_{15}^1x^{14} + \mathrm{C}_{15}^2x^{13} - \cdots - \mathrm{C}_{15}^{15}$.

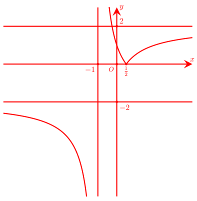
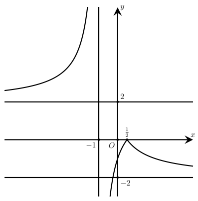
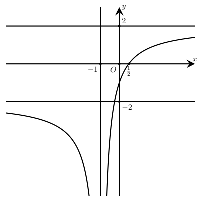
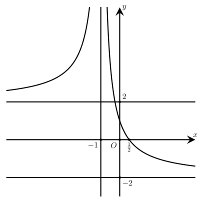
Do đó S là hệ số của x^{15} trong khai triển $(x-1)^{15} \cdot (1 + x + x^2 + \cdots + x^{14})^{15} = (x^{15}-1)^{15}$.

Ta lại có hệ số của x^{15} trong khai triển $(x^{15}-1)^{15}$ là $\mathrm{C}_{15}^{14} = 15$.

Do đó $S = \mathrm{C}_{15}^1 = 15$.

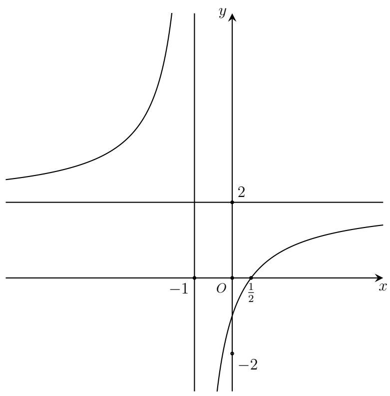
Chọn đáp án D □

Câu 28. Hàm số $y = \dfrac{|2x-1|}{x+1}$ có đồ thị là hình vẽ nào trong bốn phương án dưới đây?

A  . **B**  . **C**  . **D**  .

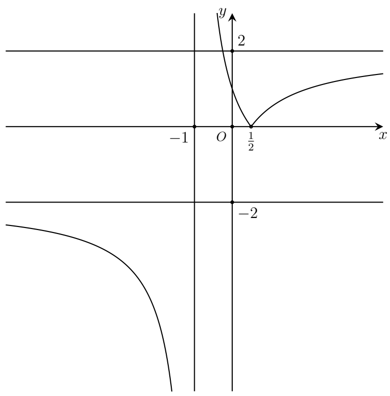
Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$



Ta có $y = \dfrac{|2x-1|}{x+1} = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x+1}, & \text{nếu } x \geq \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{2x-1}{x+1}, & \text{nếu } x < \dfrac{1}{2}, x \neq -1. \end{cases}$

Do đó từ đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$, đồ thị hàm số $y = \dfrac{|2x-1|}{x+1}$ thu được bằng cách giữ nguyên phần đồ thị ứng với $x \geq \dfrac{1}{2}$ và lấy đối xứng qua trục Ox phần đồ thị ứng với $x < \dfrac{1}{2}, x \neq -1$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x$ có hai điểm cực trị là A, B; tiếp tuyến của (C) tại $M(a; b)$ cắt (C) tại điểm thứ hai là N (N khác M) và tam giác NAB có diện tích bằng 60. Tính $|a + b|$.

(A) 2. (B) 0. **C** 4. (D) 56.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$. Suy ra tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(-1; 2)$, $B(1; -2)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y = (3a^2 - 3)(x - a) + a^3 - 3a$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và tiếp tuyến là

$$(3a^2 - 3)(x - a) + a^3 - 3a = x^3 - 3x \Leftrightarrow (x - a)^2(x + 2a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = -2a. \end{array}\right.$$

Do đó $x_N = -2a \Rightarrow y_N = -8a^3 + 6a \Rightarrow N(-2a; -8a^3 + 6a)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (2; -4)$ và $\overrightarrow{AN} = (1 - 2a; -8a^3 + 6a - 2)$.

Vậy ta có $60 = S_{ABN} = \dfrac{1}{2}\left|2(-8a^3 + 6a - 2) - (-4)(1 - 2a)\right| = \left|2a - 8a^3\right| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = -2. \end{array}\right.$

Nếu $a = 2$ thì $b = 2$. Suy ra $|a + b| = 4$.

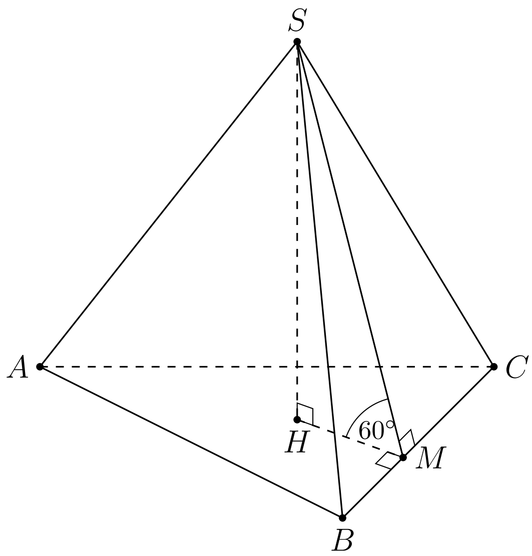
Nếu $a = -2$ thì $b = -2$. Suy ra $|a + b| = 4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 8a$, $BC = 5a$, $CA = 7a$; các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCA) cùng tạo với mặt đáy (ABC) một góc 60° và hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng đáy thuộc miền trong của tam giác ABC. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

(A) $a\sqrt{6}$. **B** $6a$. (C) $2a\sqrt{3}$. (D) $a\sqrt{3}$.

Lời giải.



Các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCA) cùng tạo với mặt đáy (ABC) một góc 60° nên hình chiếu của đỉnh S trên mặt phẳng đáy trùng với tâm đường tròn nội tiếp H của tam giác ABC. Vẽ $HM \perp BC, M \in BC$. Ta có MH là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC và $\widehat{AMH} = 60^\circ$. Ta có nửa chu vi tam giác ABC là

$$p = \frac{AB + BC + CA}{2} = \frac{8a + 5a + 7a}{2} = 10a.$$

Áp dụng công thức Hê-rông, ta có

$$S_{\triangle ABC} = 10a^2\sqrt{3}.$$

Mặt khác

$$S_{\triangle ABC} = p \cdot HM \Rightarrow HM = \frac{S_{\triangle ABC}}{p} = a\sqrt{3}.$$

Suy ra

$$SM = \frac{HM}{\cos 60^\circ} = 2a\sqrt{3}, SH = HM \cdot \tan 60^\circ = 3a.$$

Thể tích hình chóp $S.ABC$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\triangle ABC} = 10a^3\sqrt{3}.$$

Diện tích tam giác SBC

$$S_{\triangle SBC} = \frac{1}{2} \cdot SM \cdot BC = 5a^2\sqrt{3}.$$

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC)

$$\mathrm{d}(A, (SBC)) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\triangle SBC}} = \frac{3 \cdot 10a^3\sqrt{3}}{5a^2\sqrt{3}} = 6a.$$

Chọn đáp án B $\square$

Câu 31. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau thuộc tập hợp A. Chọn ngẫu nhiên một số trong S. Tính xác suất để số được chọn là số tự nhiên chẵn, có mặt ba chữ số 0, 1, 2 và chúng đứng liền nhau.

A $\dfrac{26}{735}$. **B** $\dfrac{23}{735}$. **C** $\dfrac{11}{147}$. **D** $\dfrac{4}{105}$.

Lời giải.

Số phần tử của S là $\mathrm{A}_8^6 - \mathrm{A}_7^5 = 17640$.

Số cần chọn có dạng $\overline{abcdef}$.

f là số chẵn nên có 4 cách chọn $0, 2, 4, 6$. Ta chia thành hai trường hợp.

+ TH1: f là 4 hoặc 6. Chọn 5 chữ số còn lại và bắt buộc có $0, 1, 2$ có $\mathrm{C}_4^2 = 6$ cách. Hoán vị 5 chữ số đó sao cho $0, 1, 2$ đứng cạnh nhau có $3! \cdot 3! = 36$ cách.

Xét TH số 0 đứng đầu, khi hoán vị sẽ có $2! \cdot 2! = 4$ cách.

Tóm lại TH này có $2 \times 6 \times (36 - 4) = 384$ cách.

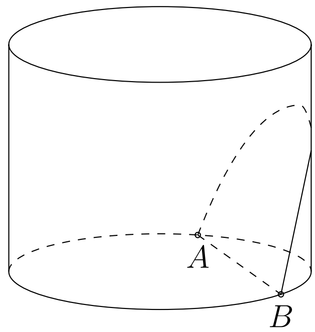
+ TH2: f là 0 hoặc 2. Chọn 5 chữ số còn lại và bắt buộc có $0, 1, 2$ có $\mathrm{C}_5^3 = 10$. Hoán vị 5 chữ số đó sao cho $0, 1, 2$ đứng cạnh nhau có $2! \cdot 3! = 12$ cách. TH này có $2 \times 10 \times 12 = 240$ cách.

Xác suất cần tìm là $\dfrac{240 + 384}{17640} = \dfrac{26}{735}$.

Chọn đáp án A □

Câu 32.

Cho khối trụ có bán kính đáy bằng 4 cm và chiều cao bằng 5 cm. Gọi AB là một dây cung của đáy dưới sao cho $AB = 4\sqrt{3}$ cm. Người ta dựng mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B và tạo với mặt phẳng đáy của hình trụ một góc $60°$ như hình vẽ. Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (P).



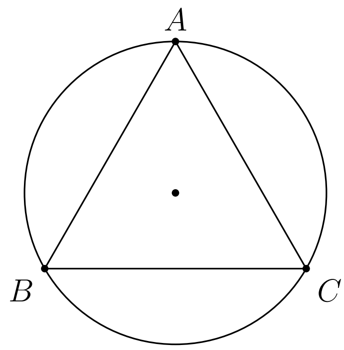
A $\dfrac{4(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}$. **B** $\dfrac{8(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}$.

C $\dfrac{8(4\pi - \sqrt{3})}{3}$. **D** $\dfrac{4(4\pi - \sqrt{3})}{3}$.

Lời giải.

Diện tích viên phân nhỏ (dây cung AB) là

$$S_1 = \frac{S_{(O)} - S_{ABC}}{3} = \frac{\pi R^2 - \dfrac{(R\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}}{3} = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) R^2.$$



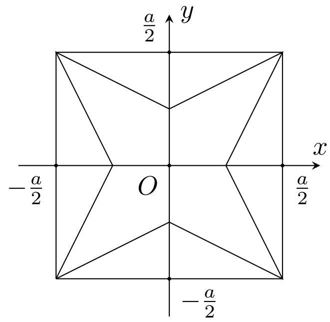
Diện tích hình cần tìm là

$$S = \frac{S_1}{\cos 60°} = \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) R^2 = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6} \cdot 4^2 = \frac{8(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}.$$

Chọn đáp án B □

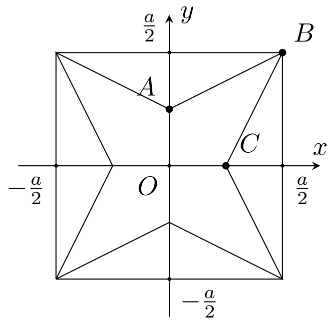
Câu 33.

Bên trong hình vuông cạnh a, dựng hình sao bốn cánh đều như hình vẽ (các kích thước cần thiết cho như ở trong hình). Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình sao đó quanh trục Ox.



A $V=\dfrac{5\pi a^3}{24}$. **B** $V=\dfrac{5\pi a^3}{48}$. **C** $V=\dfrac{5\pi a^3}{96}$. **D** $V=\dfrac{7\pi a^3}{24}$.

Lời giải.



Ta có $AB\colon y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{a}{4}$, $\quad BC\colon y=2x-\dfrac{a}{2}$.

Thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình sao quanh trục Ox là

$$\begin{aligned}V&=2\left[\pi\int\limits_0^{\frac{a}{2}}\left(\frac{1}{2}x+\frac{a}{4}\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int\limits_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}}\left(2x-\frac{a}{2}\right)^2\mathrm{d}x\right]\\&=2\pi\left(\frac{7a^3}{96}-\frac{19a^3}{48}\right)=\frac{5\pi a^3}{48}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

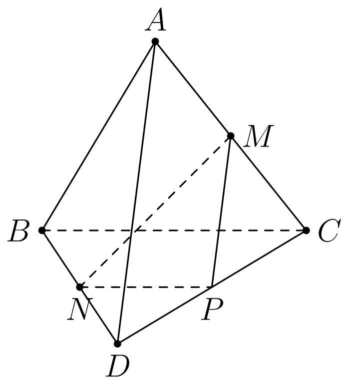
Câu 34. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD=14$, $BC=6$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BD. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng BC và MN. Biết $MN=8$, tính $\sin\alpha$.

A $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{1}{2}$. **D** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Gọi P là trung điểm CD ta có $MP=7$, $NP=3$ và $\alpha=\widehat{MNP}$.

Do đó $\cos\alpha=\dfrac{NP^2+NM^2-MP^2}{2MN\cdot NP}=\dfrac{1}{2}$ nên $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án B □

Câu 35. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-2z-i=0$. Tính giá trị của biểu thức $P=|z_1+z_2-2i|$.

A $\sqrt{5}$. **B** 9. **C** $2\sqrt{2}$. **D** 4.

Lời giải.

Theo định lý Vi-ét ta có $z_1+z_2=2$ nên $P=|2-2i|=2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm $I(2;1;0)$, bán kính bằng 3 và mặt cầu (S_2) có tâm $J(0;1;0)$, bán kính bằng 2. Đường thẳng Δ thay đổi tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1), (S_2). Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ điểm $A(1;1;1)$ đến đường thẳng Δ. Tính $M+m$.

A 5. **B** $5\sqrt{2}$. **C** 6. **D** $6\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $IJ=2$ nên hai mặt cầu trên cắt nhau. Do đó mọi đường thẳng tiếp xúc với hai mặt cầu đều đi qua điểm M thỏa mãn điều kiện sau đây $2\overrightarrow{MI}-3\overrightarrow{MJ}=\overrightarrow{0}\Rightarrow\begin{cases}x_M=\dfrac{2x_I-3x_J}{2-3}=-4\\ y_M=\dfrac{2y_I-3y_J}{2-3}=1\\ z_M=\dfrac{2z_I-3z_J}{2-3}=0\end{cases}$.

Gọi véc-tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=(a;b;c)$.

Do Δ tiếp xúc với mặt cầu tâm I nên ta có

$3=\mathrm{d}(I,(\Delta))=\dfrac{|[\overrightarrow{IM},\vec{u}]|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{36b^2+36c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\Leftrightarrow 36b^2+36c^2=9(a^2+b^2+c^2)\Leftrightarrow a^2=3(b^2+c^2)$.

Ta thấy $a\neq 0$ vì nếu $a=0$ thì $b=c=0$.

Do đó đặt $x=\dfrac{b}{a}$ và $y=\dfrac{c}{a}$. Ta có $x^2+y^2=\dfrac{1}{3}$ và $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\le y\le\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Khoảng cách từ A đến Δ là $\mathrm{d}=\dfrac{|[\overrightarrow{AM},\vec{u}]|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{26b^2+(a-5c)^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Suy ra $\mathrm{d}^2=\dfrac{26b^2+(a-5c)^2}{4(b^2+c^2)}=\dfrac{26x^2+(1-5y)^2}{4(x^2+y^2)}=\dfrac{\dfrac{26}{3}-26y^2+(1-10y+25y^2)}{4\cdot\dfrac{1}{3}}=f(y)$.

Ta thấy $f'(y)=0\Leftrightarrow y=-\dfrac{5}{2}<-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Do đó $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\le f(y)\le f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\Rightarrow\dfrac{25-10\sqrt{3}}{4}\le\mathrm{d}^2\le\dfrac{25+10\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $M+m=\sqrt{\dfrac{25+10\sqrt{3}}{4}}+\sqrt{\dfrac{25-10\sqrt{3}}{4}}=5$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho ba số dương x,y,z theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{x^2+8yz}+3}{\sqrt{(2y+z)^2+6}}$.

A $\dfrac{5}{2\sqrt{2}}$. **B** $\dfrac{5}{\sqrt{10}}$. **C** $\dfrac{6}{\sqrt{10}}$. **D** $\dfrac{6}{\sqrt{15}}$.

Lời giải.

x,y,z theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên ta có $x+z=2y$. Do đó

$$\begin{aligned}P&=\frac{\sqrt{x^2+4(x+z)z}+3}{\sqrt{(x+2z)^2+6}}\\&=\frac{\sqrt{x^2+4xz+4z^2}+3}{\sqrt{(x+2z)^2+6}}\\&=\frac{|x+2z|+3}{\sqrt{(x+2z)^2+6}}\\&=\frac{t+3}{\sqrt{t^2+6}}.\quad(\text{với } t=|x+2z|,\text{ĐK: } t\ge 0)\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t+3}{\sqrt{t^2+6}}$, $\quad t\in[0;+\infty)$

Ta có

$$f'(t)=\dfrac{\sqrt{t^2+6}-\dfrac{t(t+3)}{\sqrt{t^2+6}}}{t^2+6}=\dfrac{t^2+6-t^2-3t}{(\sqrt{t^2+6})^3}=\dfrac{6-3t}{(\sqrt{t^2+6})^3}.$$

Bảng biến thiên

x	0		2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\dfrac{5}{\sqrt{10}}$	$\searrow$	

Vậy $\max P=\max\limits_{[0;+\infty)} f(t)=f(2)=\dfrac{5}{\sqrt{10}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3(1-x^2)+\log_{\frac{1}{3}}(x+m-4)=0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A $5<m<\dfrac{21}{4}$. **B** $-\dfrac{1}{4}\le m\le 2$. **C** $5\le m\le\dfrac{21}{4}$. **D** $-\dfrac{1}{4}<m<0$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}-1<x<1\\ x>-m+4.\end{cases}\quad(*)$

Với điều kiện (*)

$$\begin{aligned}&\log_3(1-x^2)+\log_{\frac{1}{3}}(x+m-4)=0\\ \Leftrightarrow\ &\dfrac{1-x^2}{x+m-4}=1\\ \Leftrightarrow\ &1-x^2=x+m-4\\ \Leftrightarrow\ &-x^2-x+5=m.\quad(2)\end{aligned}$$

Bảng xét dấu

x	-1		$-\dfrac{1}{2}$		1
$VT(2)$	5	$\nearrow$	$\dfrac{21}{4}$	$\searrow$	3

Phương trình (1) có 2 nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm thực phân biệt thỏa điều kiện (*)

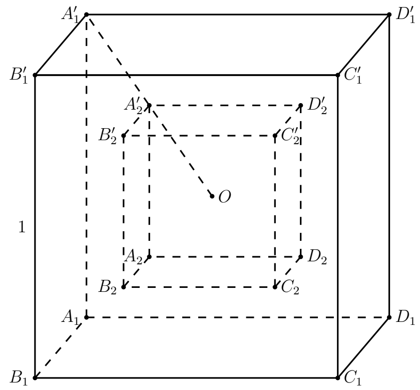
$$\Leftrightarrow\begin{cases}5<m<\dfrac{21}{4}\\ -m+4<-1\end{cases}\Leftrightarrow 5<m<\dfrac{21}{4}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Cho hình lập phương $A_1B_1C_1D_1.A'_1B'_1C'_1D'_1$ tâm O có cạnh bằng 1. Gọi A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}, D_{i+1}; A'_{i+1}, B'_{i+1}, C'_{i+1}, D'_{i+1} lần lượt là trung điểm của OA_i, OB_i, OC_i, OD_i; OA'_i, OB'_i, OC'_i, OD'_i với $i \in \mathbb{N}^*$. Gọi V_i, S_i lần lượt là thể tích và diện tích toàn phần của khối lập phương $A_iB_iC_iD_i.A'_iB'_iC'_iD'_i$. Tìm $\dfrac{S_{2018}}{V_{2018}}$.

(A) 6. **B** $3\cdot 2^{2018}$. (C) $\dfrac{3}{2^{2016}}$. (D) $6\cdot 2^{2018}$.

Lời giải.



Ta có

$$A_iA'_i = \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \Rightarrow A_{2018}A'_{2018} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2017}.$$

Vậy

$$\frac{S_{2018}}{V_{2018}} = \frac{6\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}\right]^2}{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}\right]^3} = 6\cdot 2^{2017} = 3\cdot 2^{2018}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Bạn An đỗ vào đại học nhưng không có tiền nộp học phí nên bạn An vay ngân hàng mỗi năm 10 triệu đồng để nộp học phí theo lãi suất kép 3%/năm (vay vào cuối mỗi năm học). Sau 4 năm học tập, bạn ra trường và thỏa thuận với ngân hàng sẽ bắt đầu trả nợ theo hình thức trả góp (mỗi tháng phải trả một số tiền như nhau) với lãi suất kép 0,25%/tháng trong thời gian 5 năm. Hỏi mỗi tháng An phải trả bao nhiêu tiền (làm tròn đến nghìn đồng)?

(A) 750000 đồng. (B) 751000 đồng. (C) 749000 đồng. **D** 752000 đồng.

Lời giải.

Tổng số tiền bạn An nợ sau 4 năm là $A = 10(1+3\%)^3 + 10(1+3\%)^2 + 10(1+3\%)^1 + 10(1+3\%)^0$ (triệu đồng).

Gọi B là số tiền phải trả hàng tháng của An. Sau 60 tháng, số tiền còn nợ của An là $T = A(1+0{,}25\%)^{60} - B\dfrac{(1+0{,}25\%)^{60}-1}{0{,}25\%}$ (triệu đồng).

Để An trả hết nợ thì $T \le 0 \Leftrightarrow B \ge 0{,}751743$. Vậy An phải trả mỗi tháng 752000 đồng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Cho biết hai đồ thị của hai hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ và $y = mx^4 + nx^2 - 1$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Tính tổng $1015m + 3n$.

(A) 2018. (B) 2017. (C) -2017. **D** -2018.

Lời giải.

Đặt

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 2, f'(x) = 4x^3 - 4x, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow f(0) = 2 \\ x = \pm 1 \Rightarrow f(\pm 1) = 1. \end{array}\right.$$

$$g(x) = mx^4 + nx^2 - 1, g'(x) = 4mx^3 + 2nx.$$

Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có một điểm cực trị là $(0; -1)$ khác $(0; 2)$ nên để đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có chung ít nhất một điểm cực trị thì chúng phải có chung hai điểm cực trị là $(-1; 1)$ và $(1; 1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(1) = 1 \\ g'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + n - 1 = 1 \\ 4m + 2n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = 4. \end{cases}$$

Vậy $1015m + 3n = -2018$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Cho x, y, z là các số thực dương tùy ý khác 1 và $xyz \neq 1$. Đặt $a = \log_x y$ và $b = \log_z y$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $\log_{xyz}(y^3z^2) = \dfrac{3ab + 2a}{a + b + 1}$.

B $\log_{xyz}(y^3z^2) = \dfrac{3ab + 2b}{ab + a + b}$.

C $\log_{xyz}(y^3z^2) = \dfrac{3ab + 2b}{a + b + 1}$.

D $\log_{xyz}(y^3z^2) = \dfrac{3ab + 2a}{ab + a + b}$.

Lời giải.

$$\log_{xyz}(y^3z^2) = \frac{3 + 2\log_y z}{\log_y x + 1 + \log_y z} = \frac{3 + \dfrac{2}{b}}{\dfrac{1}{a} + 1 + \dfrac{1}{b}} = \frac{(3b + 2)ab}{b(b + ab + a)} = \frac{3ab + 2a}{ab + a + b}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 43. Biết tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(\sqrt{x^2 + x + 2} + 1) + 3\log_5(x^2 + x + 3) < 4$ là $(a; b)$. Khi đó tổng $2a + b$ bằng

A -3. **B** 2. **C** 3. **D** 0.

Lời giải.

$\log_3(\sqrt{x^2 + x + 2} + 1) + 3\log_5(x^2 + x + 3) < 4$. (1)

Đặt $t = \sqrt{x^2 + x + 2}, (t > 0)$. Bất phương trình (1) trở thành

$$\log_3(t + 1) + 3\log_5(t^2 + 1) < 4 \Leftrightarrow \log_3(t + 1) + 3\log_5(t^2 + 1) - 4 < 0.$$

Đặt $f(t) = \log_3(t + 1) + 3\log_5(t^2 + 1) - 4$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{1}{(t + 1)\ln 3} + \dfrac{2t}{(t^2 + 1)\ln 5} > 0, \forall t > 0$.

Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Ta có $f(2) = 0$. Do đó

$$\begin{aligned} f(t) < 0 &\Leftrightarrow t < 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 2} < 2 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 < 4 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1. \end{aligned}$$

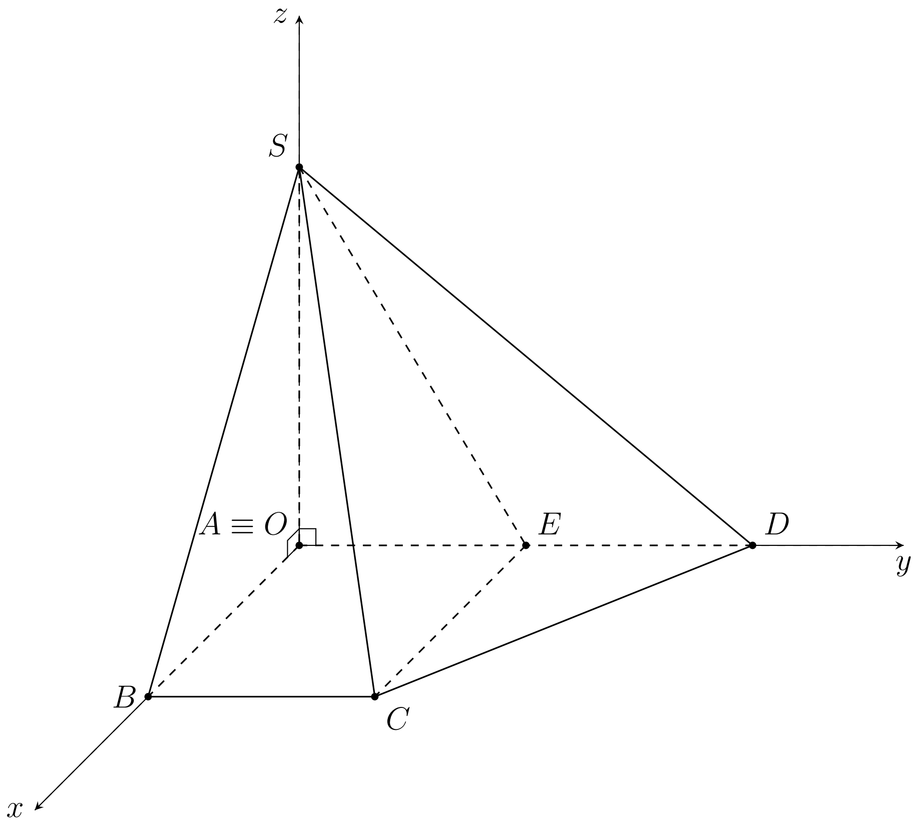
Suy ra (1) có tập nghiệm $S = (-2; 1)$. Vậy $2a + b = -3$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a, AD = 2a$, cạnh bên $SA = a$ và SA vuông góc với đáy. Gọi E là trung điểm của AD. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$.

A $S = 12\pi a^2$. **B** $S = 8\pi a^2$. **C** $S = 9\pi a^2$. **D** $S = 11\pi a^2$.

Lời giải.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, với

$$A \equiv O(0;0;0), B(a;0;0), D(0;2a;0), S(0;0;a), C(a;a;0), E(0;a;0).$$

Phương trình mặt cầu cần tìm có dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2ny - 2pz + d = 0.$$

Ta có mặt cầu đi qua các điểm S, C, E, D nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2 - 2ap + d = 0 \\ 2a^2 - 2am - 2an + d = 0 \\ a^2 - 2an + d = 0 \\ 4a^2 - 4an + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{a}{2} \\ n = \dfrac{3a}{2} \\ p = \dfrac{3a}{2} \\ d = 2a^2. \end{cases}$$

Bán kính của mặt cầu

$$R = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2 - d} = \frac{a\sqrt{11}}{2}.$$

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$

$$S = 4\pi R^2 = 11\pi a^2.$$

Chọn đáp án D □

Câu 45. Biết rằng $b > 0$, $a + b = 5$ và $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{ax+1} - \sqrt{1-bx}}{x} = 2$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A $a^2 + b^2 > 10$. **B** $a - b \geq 0$. **C** $1 \leq a \leq 3$. **D** $a^2 - b^2 > 6$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 2 &= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{ax+1} - \sqrt{1-bx}}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{ax+1} - 1}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-bx} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{a}{\sqrt[3]{ax+1}^2 + \sqrt[3]{ax+1} + 1} - \lim_{x \to 0} \frac{-b}{\sqrt{1-bx} + 1} \\ &= \frac{a}{3} + \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

Ngoài ra $a + b = 5$ nên $a = 3$ và $b = 2$.

Khi đó $a^2 - b^2 = 5 < 6$.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, có $f(2) = 1$ và $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Khi đó $\displaystyle\int_0^1 xf'(2x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A 1. **B** $\dfrac{1}{4}$. **C** $-\dfrac{1}{4}$. **D** $\dfrac{5}{4}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = f'(2x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{1}{2}f(2x). \end{cases}$

Do đó $\displaystyle\int_0^1 xf'(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}f(2x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - i| = 2\sqrt{2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $H = |z + 3 - 2i| + |z - 3 + 4i|$. Tính $M + m$.

A $2\sqrt{26} + 6\sqrt{2}$. **B** $16\sqrt{2}$. **C** $11\sqrt{2}$. **D** $2\sqrt{26} + 8\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $H = |z + 3 - 2i| + |-z + 3 - 4i| \geq |z + 3 - 2i - z + 3 - 4i| = |6 - 6i| = 6\sqrt{2}$.

Đặt $w = z - 2 - i \Rightarrow |w| = 2\sqrt{2}$.

Đặt $w = a + bi$ ta có $a^2 + b^2 = 8 \Rightarrow (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) = 16 \Rightarrow a + b \leq 4$.

Ta có $H = |w + 5 - i| + |w - 1 + 5i| = \sqrt{(a+5)^2 + (b-1)^2} + \sqrt{(a-1)^2 + (b+5)^2}$.

$\Rightarrow H^2 \leq (1+1)[(a+5)^2 + (b-1)^2 + (a-1)^2 + (b+5)^2]$

$\Rightarrow H \leq 2(2a^2 + 2b^2 + 8(a+b) + 52) \leq 2(2 \cdot 8 + 8 \cdot 4 + 52) = 200$.

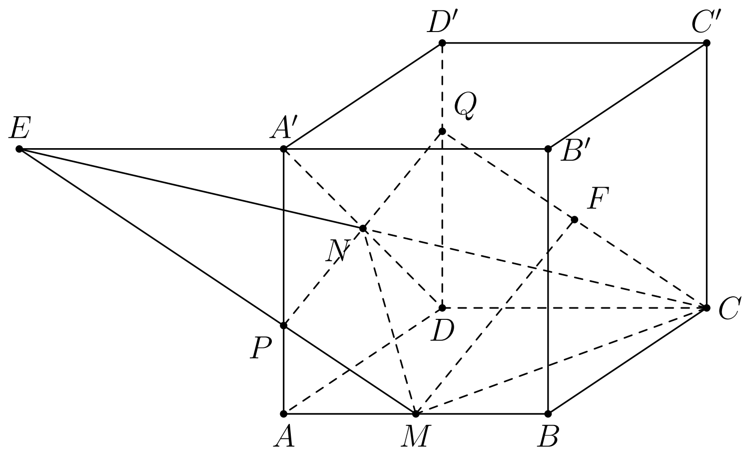
Do đó $H \leq 10\sqrt{2}$. Vậy $M + m = 16\sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M là trung điểm của AB, N là tâm hình vuông $AA'D'D$. Tính diện tích thiết diện của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ tạo bởi mặt phẳng (CMN).

A $\dfrac{a^2\sqrt{14}}{4}$. **B** $\dfrac{3a^2\sqrt{14}}{2}$. **C** $\dfrac{3a^2}{4}$. **D** $\dfrac{a^2\sqrt{14}}{2}$.

Lời giải.



Thiết diện như hình vẽ. Tứ giác $CQPM$ là hình thang có
$CM = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $PM = \dfrac{a\sqrt{13}}{6}$, $PQ = \dfrac{a\sqrt{10}}{3}$, $CQ = \dfrac{a\sqrt{13}}{3}$.
Suy ra $MF = PQ = \dfrac{a\sqrt{10}}{3}$, $CF = PM = \dfrac{a\sqrt{13}}{6}$
Ta có $S_{CMPQ} = 3S_{CMF}$.
$S_{CMF} = \sqrt{p(p-CM)(p-CF)(p-MF)}$ với $p = \dfrac{CM+MF+FC}{2}$. Thay giá trị các cạnh ta có
$S_{CMF} = \sqrt{\dfrac{7}{72}}a^2 \Rightarrow S_{CMPQ} = \dfrac{a^2\sqrt{14}}{4}$.
Chọn đáp án A □

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ di động trên các tia Ox, Oy, Oz luôn thỏa mãn $a+b+c=2$. Biết rằng quỹ tích tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ nằm trong mặt phẳng (P) cố định. Tính khoảng cách từ điểm $M(4;0;0)$ đến mặt phẳng (P).

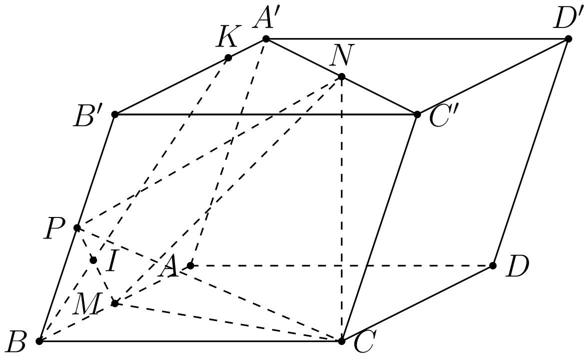
A $\sqrt{3}$. **B** 3. **C** 2. **D** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

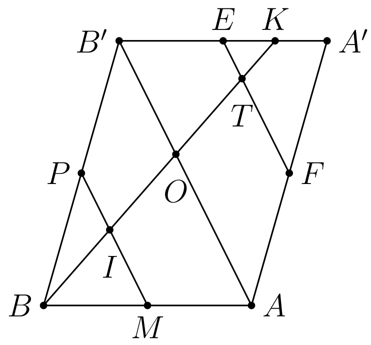
Lời giải.
Vì OA, OB, OC đôi một vuông góc nên tọa độ tâm mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện là $I\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2};\dfrac{c}{2}\right)$.
Do $a+b+c=2$ nên $I \in (P)\colon x+y+z-1=0$.
Khoảng cách từ M đến (P) là $\mathrm{d} = \dfrac{|4-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \sqrt{3}$.
Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, $A'C'$, BB'. Tính thể tích khối tứ diện $CMNP$.

A $\dfrac{5}{48}V$. **B** $\dfrac{1}{8}V$. **C** $\dfrac{7}{48}V$. **D** $\dfrac{1}{6}V$.

Lời giải.





Dựng $NK \parallel CM, K \in A'B'$ suy ra $NK \parallel (CMP)$. Gọi $I = BK \cap PM$.

Ta có
$$\frac{V_{CMNP}}{V_{BPMC}} = \frac{\mathrm{d}(N,(PMC))}{\mathrm{d}(B,(PMC))} = \frac{\mathrm{d}(K,(PMC))}{\mathrm{d}(B,(PMC))} = \frac{KI}{BI}.$$

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của $A'B', A'A$, $T = BK \cap EF$, $O = BK \cap AB'$.

Ta có $BI = IO = OT = 2KT$. Suy ra $\dfrac{KI}{BI} = \dfrac{5KT}{2KT} = \dfrac{5}{2}$.

Do đó $V_{CMNP} = \dfrac{5}{2}V_{BPMC} = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4} \cdot V = \dfrac{5}{48}V$.

Chọn đáp án A □

——— **HẾT** ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. D	3. A	4. B	5. D	6. D	7. A	8. D	9. C	10. D
11. C	12. C	13. B	14. C	15. C	16. B	17. C	18. C	19. B	20. B
21. C	22. A	23. A	24. C	25. A	26. C	27. D	28. A	29. C	30. B
31. A	32. B	33. B	34. B	35. C	36. A	37. B	38. A	39. B	40. D
41. D	42. D	43. A	44. D	45. D	46. C	47. B	48. A	49. A	50. A

97 ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA 2018 MÔN TOÁN TRƯỜNG THPT ĐOÀN THƯỢNG – HẢI DƯƠNG LẦN 2

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Tính $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$.

(A) $-\infty$. **(B)** $\dfrac{1}{4}$. (C) $+\infty$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{4}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có

$\lim\limits_{x\to 1^-} y=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} y=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} y=1$.

Vậy đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ nhận đường thẳng $x=1$ làm tiệm cận đứng và đường thẳng $y=1$ làm tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y=\log_3(x+1)$. (B) $y=\ln\left(x^2+1\right)$. **(C)** $y=5^x$. (D) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=5^x$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$ và $y'=5^x\ln 5>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $y=5^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

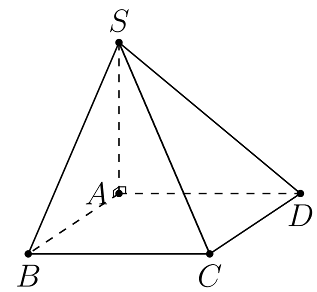
Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA=a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

(A) $V=4a^3\sqrt{3}$. (B) $V=\dfrac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. **(C)** $V=\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $V=\dfrac{4a^3}{3}$.

Lời giải.

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot (2a)^2 = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án C □

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 8z + 4 = 0$. Xác định tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

A. $I(2;-3;-4)$, $R = 25$.
B. $I(-2;3;4)$, $R = 5$.
C. $I(2;-3;-4)$, $R = 5$.
D. $I(2;-3;-4)$, $R = \sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 8z + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 25.$$

Vậy mặt cầu (S) có tâm $I(2;-3;-4)$ và bán kính $R = 5$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho hình chóp có n đỉnh (với $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$). Số cạnh của hình chóp là

A. $2n - 2$.
B. $2n$.
C. $n + 1$.
D. $2n + 1$.

Lời giải.

Với hình chóp có n đỉnh (với $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$) thì mặt đáy là đa giác có $(n-1)$ cạnh, suy ra số cạnh bên cũng là $(n-1)$ cạnh.

Vì vậy số cạnh của hình chóp có n đỉnh (với $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$) là $2n - 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm thực của phương trình $16^x - 5 \cdot 4^x + 4 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $T = x_1^2 + x_2^2$.

A. $T = 4$.
B. $T = 0$.
C. $T = 1$.
D. $T = 17$.

Lời giải.

Ta có

$$16^x - 5 \cdot 4^x + 4 = 0 \Leftrightarrow (4^x)^2 - 5 \cdot 4^x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &4^x = 1 \\ &4^x = 4 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 0 \\ &x = 1. \end{aligned}\right.$$

Vậy $T = 0^2 + 1^2 = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, biết $f(1) = 2017$ và $\displaystyle\int\limits_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = 1$, giá trị của $f(2)$ bằng

A. 2017.
B. 2019.
C. 2018.
D. 2016.

Lời giải.

Ta có

$$\int_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow f(x)\Big|_1^2 = 1 \Leftrightarrow f(2) - f(1) = 1 \Leftrightarrow f(2) = 1 + f(1) \Leftrightarrow f(2) = 2018.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 9.

Bảng biến thiên ở hình bên là của hàm số nào sau đây?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

(A) $y = -x^4 + 2x^2 - 3$.

(B) $y = x^4 + 2x^2 - 3$.

(C) $y = -\dfrac{1}{4}x^4 + 3x^2 - 3$.

(D) $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 4x^3 - 4x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = 3^{x^2}4^x$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

(A) $f(x) > 9 \Leftrightarrow x^2\ln 3 + x\ln 4 > 2\ln 3$.

(B) $f(x) > 9 \Leftrightarrow x^2 + 2x\log_3 2 > 2$.

(C) $f(x) > 9 \Leftrightarrow 2x\log 3 + x\log 4 > \log 9$.

(D) $f(x) > 9 \Leftrightarrow x^2\log_2 3 + 2x > 2\log_2 3$.

Lời giải.

Ta có

$f(x) > 9 \Leftrightarrow 3^{x^2}4^x > 9 \Leftrightarrow \ln\left(3^{x^2}4^x\right) > \ln 9 \Leftrightarrow \ln 3^{x^2} + \ln 4^x > \ln 9 \Leftrightarrow x^2\ln 3 + x\ln 4 > 2\ln 3$.

$f(x) > 9 \Leftrightarrow 3^{x^2}4^x > 9 \Leftrightarrow \log_3\left(3^{x^2}4^x\right) > \log_3 9 \Leftrightarrow \log_3 3^{x^2} + \log_3 4^x > \log_3 9 \Leftrightarrow x^2 + 2x\log_3 2 > 2$.

$f(x) > 9 \Leftrightarrow 3^{x^2}4^x > 9 \Leftrightarrow \log_2\left(3^{x^2}4^x\right) > \log_2 9 \Leftrightarrow \log_2 3^{x^2} + \log_2 4^x > \log_2 9$

$\Leftrightarrow x^2\log_2 3 + 2x > 2\log_2 3$.

$f(x) > 9 \Leftrightarrow 3^{x^2}4^x > 9 \Leftrightarrow \log\left(3^{x^2}4^x\right) > \log 9 \Leftrightarrow \log 3^{x^2} + \log 4^x > \log 9 \Leftrightarrow x^2\log 3 + x\log 4 > \log 9$.

Chọn đáp án (C) □

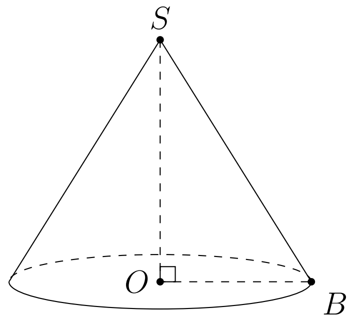
Câu 11. Cho hình nón có bán kính đáy là $4a$, chiều cao là $3a$. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

(A) $24\pi a^2$. (B) $12\pi a^2$. (C) $40\pi a^2$. **D** $20\pi a^2$.

Lời giải.

Gọi l độ dài đường sinh của hình nón. Khi đó $l = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a$.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S = \pi \cdot 4a \cdot 5a = 20\pi a^2$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Cho số phức $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$, thỏa mãn $(1+i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i$. Tính $S = a + b$.

(A) $S = \frac{1}{2}$. **B** $S = -1$. (C) $S = 1$. (D) $S = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& (1+i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i \\
\Leftrightarrow\ & (1+i)(a+bi) + 2(a-bi) = 3 + 2i \\
\Leftrightarrow\ & (3a-b) + (a-b)i = 3 + 2i \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} 3a - b = 3 \\ a - b = 2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Do đó $S = a + b = -1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \cos 2x + 4 \sin x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là

(A) 2. **B** 3. (C) 5. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $y = -2\sin^2 x + 4 \sin x + 1$.

Đặt $a = \sin x$, với $a \in [0; 1]$.

Khi đó $y = f(a) = -2a^2 + 4a + 1 \le f\left(-\frac{4}{2 \cdot (-2)}\right) = f(1) = 3$.

Vậy $\max\limits_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln\left(x^2 - 3x + 2\right)$ trên tập xác định của nó.

(A) $y' = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2}$. (B) $y' = \frac{2x + 3}{x^2 - 3x + 2}$. (C) $y' = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$. **D** $y' = \frac{2x - 3}{x^2 + 3x + 2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = [\ln(x^2-3x+2)]' = \dfrac{(x^2-3x+2)'}{x^2-3x+2} = \dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(2;2;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y-z+5=0$. Mặt phẳng (Q) đi qua điểm I, song song với (P). Mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P). Xét các mệnh đề sau

(1) Mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M(1;3;0)$.

(2) Mặt phẳng (Q) song song với đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=0. \end{cases}$

(3) Bán kính mặt cầu (S) là $R=3\sqrt{6}$.

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề **sai**?

A 2. B 3. C 0. D 1.

Lời giải.

Vì (Q) song song với (P) nên (Q) có dạng $x+2y-z+d=0$. Hơn nữa, do $I(2;2;-1)$ thuộc (Q) nên $2+2\cdot 2-(-1)+d=0$ hay $d=-7$. Vậy $(Q)\colon x+2y-z-7=0$.

- Vì $1+2\cdot 3-0-7=0$ nên (Q) đi qua $M(1;3;0)$.
- Vì hệ phương trình $\begin{cases} x+2y-z-7=0 \\ x=1+2t \\ y=2-t \\ z=0 \end{cases}$ vô nghiệm nên (Q) và d song song với nhau.
- Bán kính mặt cầu (S) là $R=\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|2+2\cdot 2-(-1)+5|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{6}\neq 3\sqrt{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$ và đi qua điểm $A(1;0;4)$. Phương trình của mặt cầu (S) là

A $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=53$.
B $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=53$.
C $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=53$.
D $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=53$.

Lời giải.

Bán kính mặt cầu là $R=IA=\sqrt{(1-1)^2+(0-2)^2+(4+3)^2}=\sqrt{53}$.

Phương trình mặt cầu là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=53$.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Trong mặt phẳng Oxy, cho số phức z thỏa mãn $|z-1|=|(1+i)z|$. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z là

A đường tròn có tâm $I(1;0)$, bán kính $r=\sqrt{2}$.
B đường tròn có tâm $I(0;1)$, bán kính $r=\sqrt{2}$.
C đường tròn có tâm $I(-1;0)$, bán kính $r=\sqrt{2}$.
D đường tròn có tâm $I(0;-1)$, bán kính $r=\sqrt{2}$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$, trong đó x, y là các số thực.
$|z-1| = |(1+i)z| \Leftrightarrow |(x-1)+yi| = |1+i||x+yi| \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 = 2(x^2+y^2) \Leftrightarrow x^2+y^2+2x-1 = 0.$
Do đó, tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa yêu cầu bài toán là đường tròn tâm $I(-1;0)$, bán kính $r = \sqrt{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 2$. Gọi A là điểm cực đại của đồ thị hàm số. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến A.

A 2. B $2\sqrt{10}$. C 4. D $2\sqrt{5}$.

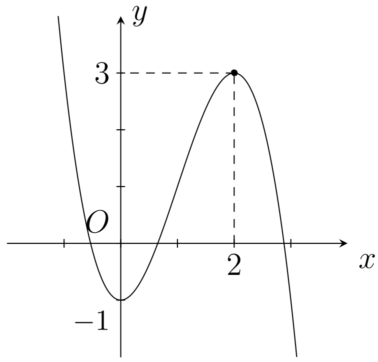
Lời giải.
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Ta có $y' = 3x^2 - 6x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Ta lại có $y'' = 6x - 6$, và $y''(0) = -6 < 0$ nên $A(0;-2)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số.
Do đó, $OA = \left|\overrightarrow{OA}\right| = 2$.
Chọn đáp án A □

Câu 19.
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $f(x) = m + 1$ có ba nghiệm phân biệt.

A $-1 < m < 3$. B $-2 < m < 2$.
C $-2 \leq m \leq 2$. D $-1 \leq m \leq 3$.



Lời giải.
Dựa vào đồ thị ta thấy để phương trình có ba nghiệm phân biệt khi

$$-1 < m + 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

Vậy $-2 < m < 2$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 20. Tính $\displaystyle\int \cos 2x \, \mathrm{d}x$.

A $\displaystyle\int \cos 2x \, \mathrm{d}x = -\sin 2x + C$. B $\displaystyle\int \cos 2x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.
C $\displaystyle\int \cos 2x \, \mathrm{d}x = \sin 2x + C$. D $\displaystyle\int \cos 2x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Lời giải.
Ta có

$$\int \cos 2x \, \mathrm{d}x = \int \cos 2x \frac{\mathrm{d}(2x)}{2} = \frac{1}{2}\int \cos 2x \, \mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}\sin 2x + C.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_3(4x - x^2) \leq 1$.

(A) Vô số. (B) 4. (C) 3. **D** 2.

Lời giải.

Điều kiện xác định $4x - x^2 > 0$ hay $0 < x < 4$.

Ta có

$$4x - x^2 \leq 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ x \geq 3. \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện xác định ta được $0 < x \leq 1$ hoặc $3 \leq x < 4$.

Theo giả thiết x nguyên nên $x \in \{1; 3\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Biết rằng $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \sin 2x}{1 + \sin x}\,\mathrm{d}x = a + \frac{\pi}{b}$, với a, b là các số hữu tỉ. Giá trị của $a + b$ bằng

A 0. (B) 4. (C) -4. (D) 2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \sin 2x}{1 + \sin x}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos^2 x \sin x}{1 + \sin x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(1 - \sin^2 x)\sin x}{1 + \sin x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2(1 - \sin x)\sin x\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= -2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left(\frac{1}{2}\sin 2x - x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 + \frac{\pi}{-2}. \end{aligned}$$

Suy ra $a = 2$, $b = -2$. Vậy $a + b = 0$.

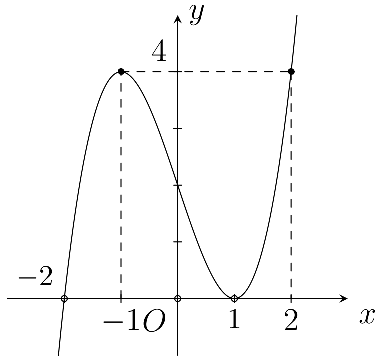
Chọn đáp án (A) □

Câu 23.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, và đồ thị của $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

(A) $(-\infty; +\infty)$. (B) $(-\infty; -1)$.

C $(-2; +\infty)$. (D) $(-\infty; 1)$.



Lời giải.

Từ đồ thị của $y = f'(x)$ ta thấy $f'(x) \geq 0$ khi $x \geq -2$. Vậy hàm số đã cho luôn đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;-2;3)$, $I(1;0;4)$. Tìm tọa độ điểm N sao cho điểm I là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Ⓐ $N(5;-4;2)$. Ⓑ $N(0;1;2)$. Ⓒ $N\left(2;-1;\frac{7}{2}\right)$. **D** $N(-1;2;5)$.

Lời giải.

Vì I là trung điểm của đoạn thẳng MN nên

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_M + x_N}{2} \\ y_I = \dfrac{y_M + y_N}{2} \\ z_I = \dfrac{z_M + z_N}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 2x_I - x_M \\ y_N = 2y_I - y_M \\ z_N = 2z_I - z_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 2\cdot 1 - 3 \\ y_N = 2\cdot 0 + 2 \\ z_N = 2\cdot 4 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = -1 \\ y_N = 2 \\ z_N = 5. \end{cases}$$

Vậy $N(-1;2;5)$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + z + 3 = 0$ và điểm $A(1;-2;1)$. Đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với (P) có phương trình là

Ⓐ $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 4t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm.

Vì $\Delta \perp (P)$ nên Δ nhận $\vec{u} = (2;-1;1)$ là một véc-tơ chỉ phương.

Phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$ với $t \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \dfrac{\tan x}{2\cos x - 1}$.

Ⓐ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ⓒ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓓ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi; \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định khi

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ (với $a < b$). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ có công thức là

A $\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

B $\left|\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x\right|$.

C $\int\limits_b^a |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

D $\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ (với $a<b$) là $\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

A $(P)\colon 2x-2z+1=0$.

B $(P)\colon 2y-2z+1=0$.

C $(P)\colon 2x-2y+1=0$.

D $(P)\colon 2y-2z-1=0$.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 và d_2 có véc-tơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1=(-1;1;1)$ và $\vec{u}_2=(2;-1;-1)$.

Suy ra mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=[\vec{u}_1;\vec{u}_2]=(0;1;-1)$, do đó $(P)\colon y-z+D=0$.

Lấy $M(2;0;0)\in d_1$ và $N(0;1;2)\in d_2$, mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 khi

$$\mathrm{d}(M;(P))=\mathrm{d}(N;(P))\Leftrightarrow \frac{|2+D|}{\sqrt{2}}=\frac{|1-2+D|}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow D=-\frac{1}{2}.$$

Vậy phương trình của mặt phẳng (P) là $y-z-\dfrac{1}{2}=0$ hay $2y-2z-1=0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Biết $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$ với a, b là các số hữu tỉ. Hỏi $a+b$ bằng bao nhiêu?

A 2.

B 3.

C 1.

D 4.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$.

Khi đó

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\left(\ln|x+1|-\ln|x+2|\right)\Big|_0^1=\ln 2-\ln 3+\ln 2\\ &= 2\ln 2-\ln 3.\end{aligned}$$

Vậy $a=2$, $b=-1$. Do đó $a+b=1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Tìm giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-mx+1}$ có đúng ba đường tiệm cận.

(A) $m \in \left\{-2; 2; \dfrac{5}{2}\right\}$.

(B) $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

(C) $m \in (-2; 2)$.

(D) $m \in (-\infty; -2) \cup \left(2; \dfrac{5}{2}\right) \cup \left(\dfrac{5}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x^2 - mx + 1 \neq 0$.

Vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x-2}{x^2 - mx + 1} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{1 - \dfrac{m}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là một đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho.

Đồ thị hàm số đã cho có đúng ba tiệm cận khi $x^2 - mx + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2, tức là

$$\begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ 4 - 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Vậy $m \in (-\infty; -2) \cup \left(2; \dfrac{5}{2}\right) \cup \left(\dfrac{5}{2}; +\infty\right)$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 7x - 6}{x - 3} & \text{khi } x > 3 \\ x^2 + 5mx + 2 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ liên tục với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

(A) $m = 7$.

(B) $m = 3$.

(C) $m = 2$.

(D) $m = 0$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Với $x > 3$ thì $f(x)$ là hàm số phân thức hữu tỉ nên nó liên tục trên khoảng $(3; +\infty)$.

Với $x < 3$ thì $f(x)$ là hàm số đa thức nên nó liên tục trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Ta có

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = f(3) = 3^2 + 15m + 2 = 15m + 11.$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{3x^2 - 7x - 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{(3x+2)(x-3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} (3x + 2) = 11.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ khi hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 3$, tức là

$$f(3) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) \Leftrightarrow 15m + 11 = 11 \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ khi $m = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 32. Một cửa hàng cà phê sắp khai trương đang nghiên cứu thị trường để định giá bán cho mỗi cốc cà phê. Sau khi nghiên cứu, người quản lý thấy rằng nếu bán với giá 20 000 đồng một cốc thì mỗi tháng trung bình sẽ bán được 2 000 cốc, còn từ mức giá 20 000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1 000 đồng thì sẽ bán ít đi 100 cốc. Biết chi phí nguyên vật liệu để pha một cốc cà phê không thay đổi là 18 000 đồng. Hỏi cửa hàng phải bán mỗi cốc cà phê với giá bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất?

A 29 000 đồng. **B** 31 000 đồng. **C** 25 000 đồng. **D** 22 000 đồng.

Lời giải.

Gọi x là giá bán mỗi cốc cà phê.

Khi đó, số lượng cốc bán được là $2000 - \dfrac{x-20000}{1000} \cdot 100$.

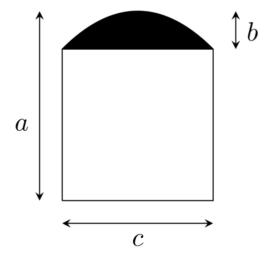
Lợi nhuận

$$f(x) = \left[2000 - \frac{x-20000}{1000} \cdot 100\right](x-18000) = -\frac{1}{10}x^2 + 5800x - 72000000 \geq f\left(-\frac{5800}{2 \cdot \frac{-1}{10}}\right) = f(29000)$$

Chọn đáp án A □

Câu 33.

Nhà bạn Minh cần làm một cái cửa có dạng như hình vẽ, nửa dưới là hình vuông, phần phía trên (phần tô đen) là một Parabol. Biết các kích thước $a = 2{,}5$ m, $b = 0{,}5$ m, $c = 2$ m. Biết số tiền để làm 1 m^2 cửa là 1 triệu đồng. Số tiền để làm cửa là

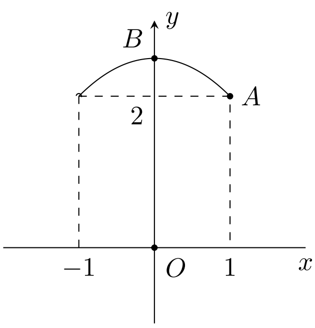


A $\dfrac{14}{3}$ triệu đồng. **B** $\dfrac{13}{3}$ triệu đồng.

C $\dfrac{63}{17}$ triệu đồng. **D** $\dfrac{17}{3}$ triệu đồng.

Lời giải.

Gọi $(P)\colon y = ax^2 + bx + c$ là Parabol đi qua $A(1;2)$ và có đỉnh là $B(0;2{,}5)$.



Khi đó ta có $\begin{cases} a+b+c=2 \\ -\dfrac{b}{2a} = 0 \\ c = 2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -0{,}5 \\ b = 0 \\ c = 2{,}5. \end{cases}$

Vậy $(P)\colon y = -0{,}5x^2 + 2{,}5$.

Diện tích cái cửa là $\displaystyle\int_{-1}^{1} (-0{,}5x^2 + 2{,}5)\,\mathrm{d}x = \frac{14}{3}$ m^2.

Do đó, số tiền để làm cửa là $\dfrac{14}{3}$ triệu đồng.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho khai triển biểu thức $\left(3 - \dfrac{x}{2}\right)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, với n là số tự nhiên khác 0, biết rằng $a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \cdots + 2^na_n = 1024$. Tìm hệ số của x^6 trong khai triển trên.

A $-\dfrac{8505}{32}x^6$. **B** $\dfrac{8505}{32}x^6$. **C** $-\dfrac{8505}{32}$. **D** $\dfrac{8505}{32}$.

Lời giải.

Ta có $\left(3 - \dfrac{x}{2}\right)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left(-\frac{x}{2}\right)^k 3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^k 3^{n-k} \frac{1}{2^k} x^k$.

Mặt khác

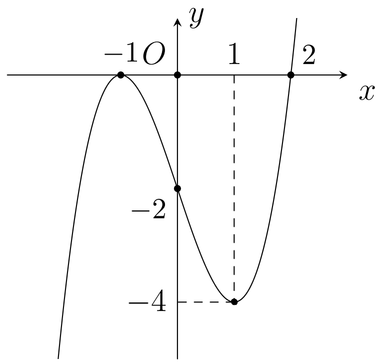
$$a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \cdots + 2^na_n = 1024 \Leftrightarrow \left(3 - \frac{2}{2}\right)^n = 1024 \Leftrightarrow 2^n = 1024 \Leftrightarrow n = 10.$$

Do đó, $a_6 = \mathrm{C}_{10}^6(-1)^6 3^{10-6}\dfrac{1}{2^6} = \dfrac{8505}{32}$.

Chọn đáp án D □

Câu 35.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y = f'(x)$. Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?



A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = (x^2 - 2)' \cdot f'(x^2 - 2) = 2x \cdot f'(x^2 - 2)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot f'(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(x^2 - 2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2 = -1 \\ x^2 - 2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2. \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x^2-2)$		$+$	0	$-$	0	$-$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu suy ra $g(x)$ đồng biến trên $(-1; 0)$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Biết phương trình $\log_5 \dfrac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ có nghiệm duy nhất $x = a + b\sqrt{2}$ trong đó a, b là các số nguyên. Tính $T = a + b$.

A. $T = 5$. B. $T = -1$. C. $T = 1$. D. $T = 2$.

Lời giải.

Ta có: $\log_5 \dfrac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) \Leftrightarrow \log_5 \dfrac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3\left(\dfrac{x-1}{2\sqrt{x}}\right)$.

Điều kiện $x > 1$.

Xét $f(x) = \log_5 \dfrac{2\sqrt{x}+1}{x}$ trên $(1; +\infty)$.

Vì $f'(x) = \dfrac{\dfrac{-\sqrt{x}-1}{x^2}}{\dfrac{2\sqrt{x}+1}{x}\ln 5} < 0$, $\forall x \in (1; +\infty)$ nên $f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Xét hàm số $g(x) = 2\log_3\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ trên $(1; +\infty)$.

Vì $g'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}}{\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\ln 3} > 0$, $\forall x \in (1; +\infty)$ nên $g(x)$ là hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Do đó, phương trình đã cho có tối đa một nghiệm.

Mặt khác, từ hệ $\begin{cases} \log_5 \dfrac{2\sqrt{x}+1}{x} = 0 \\ 2\log_3\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 0 \end{cases}$ ta giải được nghiệm $x = 3 + 2\sqrt{2}$.

Vậy $x = 3 + 2\sqrt{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Khi đó, $a = 3$, $b = 2$. Vậy $a + b = 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2+3} - x\ln x$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1; 2]$. Khi đó tích Mm bằng

A. $2\sqrt{7} + 4\ln 2$. B. $2\sqrt{7} + 4\ln 5$. C. $2\sqrt{7} - 4\ln 5$. **D.** $2\sqrt{7} - 4\ln 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} - (\ln x + 1) < \dfrac{x}{\sqrt{x^2}} - (\ln x + 1) < -\ln x < 0$, $\forall x \in [1; 2]$.

Do đó, hàm số $y = \sqrt{x^2+3} - x\ln x$ nghịch biến trên $[1; 2]$.

Vậy $Mm = y(1) \cdot y(2) = 2\left(\sqrt{7} - 2\ln 2\right) = 2\sqrt{7} - 4\ln 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 2$. Mô-đun lớn nhất của z bằng

A. 7. B. 8. C. 5. D. 3.

Lời giải.

Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z thỏa $|z - 3 + 4i| = 2$ là đường tròn có tâm $I(3; -4)$ và bán kính bằng $R = 2$. Suy ra $\max|z| = IO + R = 7$.

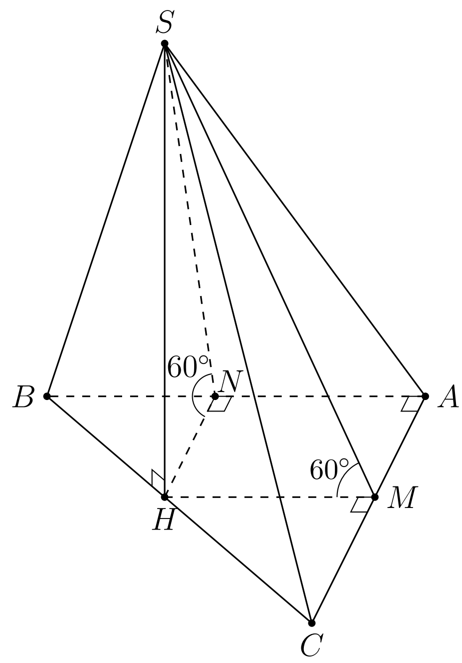
Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AC = \dfrac{a}{2}$, $BC = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng tạo với mặt đáy (ABC) góc $60°$, mặt phẳng (SBC) vuông góc với đáy (ABC). Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \dfrac{\left(3-\sqrt{3}\right)a^3}{32}$. B. $V = \dfrac{\left(3-\sqrt{3}\right)a^3}{16}$. C. $V = \dfrac{\left(3+\sqrt{3}\right)a^3}{32}$. D. $V = \dfrac{\left(3+\sqrt{3}\right)a^3}{16}$.

Lời giải.

Kẻ $SH \perp BC$ tại H. Vì $(SBC) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$.



Trong tam giác vuông ABC ta có $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Khi đó $\tan\widehat{ACB} = \dfrac{AB}{AC} = \sqrt{3}$, suy ra $\widehat{ACB} = 60°$.

Diện tích tam giác ABC là $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

Kẻ $HM \perp AC$ tại M và $HN \perp AB$ tại N. Khi đó dễ dàng chứng minh được góc giữa (SAB) và (ABC) là $\widehat{SNH} = 60°$; góc giữa (SAC) và (ABC) là $\widehat{SMH} = 60°$.

Trong tam giác vuông SHN ta có $SH = HN\tan 60°$.

Trong tam giác vuông SHM ta có $SH = HM\tan 60°$.

Suy ra $HM = HN = x$.

Trong tam giác vuông MCH ta có $CH = \dfrac{x}{\sin 60°} = \dfrac{2x}{\sqrt{3}}$.

Trong tam giác vuông NBH ta có $BH = \dfrac{x}{\sin 30°} = 2x$.

Mà $BH + CH = BC$ nên

$$2x + \frac{2x}{\sqrt{3}} = a \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+2}.$$

Như vậy $SH = x\tan 60° = \dfrac{3a}{2\sqrt{3}+2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{3a}{2\sqrt{3}+2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)a^3}{32}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Cho phương trình $m\sin x - \sqrt{3}\cos x = m+1$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có nghiệm.

(A) $m \geq 1$. (B) $m < 1$. (C) $m > 1$. **D** $m \leq 1$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có nghiệm khi

$$m^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 \geq (m+1)^2 \Leftrightarrow m^2 + 3 \geq m^2 + 2m + 1 \Leftrightarrow 2m \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 1.$$

Chọn đáp án (D) □

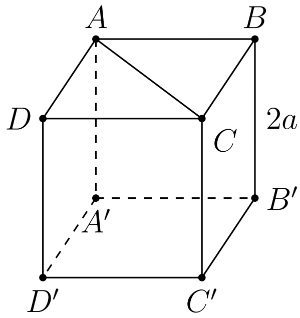
Câu 41. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và $A'B'$.

(A) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B** $2a$. (C) $a\sqrt{2}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Vì $A'B' \parallel AB$ nên $A'B' \parallel ((ABCD))$.
Vì vậy

$$\mathrm{d}(A'B', AC) = \mathrm{d}(A'B', (ABCD)) = \mathrm{d}(A', (ABCD)) = AA' = 2a.$$



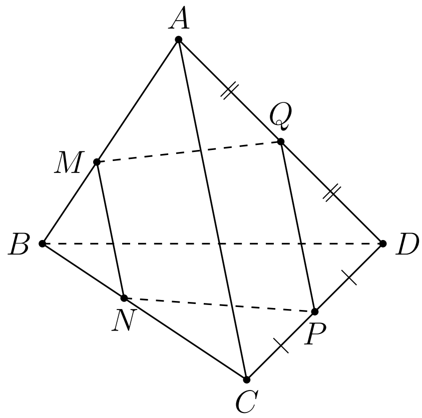
Chọn đáp án B □

Câu 42. Cho tứ diện $ABCD$, các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, điểm P là trung điểm của CD, điểm Q thỏa mãn $\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AD}$. Tìm k để ba véc-tơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$ đồng phẳng.

A $k = 2$. B $k = -2$. **C** $k = \frac{1}{2}$. D $k = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\frac{BM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{3}$, nên $MN \parallel AC$.
Ta có $(MNP) \cap (ABC) = MN$, $(MNP) \cap (ACD) = PQ$, $(ABC) \cap (ACD) = AC$.
Mà $MN \parallel AC$ nên $PQ \parallel AC$.
Lại có P là trung điểm CD nên Q là trung điểm của AD.
Vậy $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Do đó $k = \frac{1}{2}$.



Chọn đáp án C □

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;3;5)$, $B(2;6;-1)$, $C(-4;-12;5)$ và mặt phẳng $(P)\colon x + 2y - 2z - 5 = 0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức $T = \left|\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB}\right| + \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Biết rằng $M(x_0; y_0; z_0)$, vậy x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A $(0;2)$. B $(2;4)$. C $(-4;-1)$. D $(-5;-4)$.

Lời giải.

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} - 4\overrightarrow{IB} = \vec{0}$, suy ra $I(3;7;-3)$.
Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, suy ra $G(-1;-1;3)$.
Khi đó

$$\begin{aligned} T &= \left|\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB}\right| + \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| \\ &= \left|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} - 4\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)\right| + \left|3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right| \\ &= 3\left|\overrightarrow{MI}\right| + 3\left|\overrightarrow{MG}\right| = 3\left(\left|\overrightarrow{MI}\right| + \left|\overrightarrow{MG}\right|\right). \end{aligned}$$

Rõ ràng I và G nằm khác phía so với mặt phẳng (P) nên T nhỏ nhất khi ba điểm I, G, M thẳng hàng hay M là giao điểm của IG và mặt phẳng (P).

Lại có phương trình tham số của IG là $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 7 + 4t \\ z = -3 - 3t. \end{cases}$

Khi đó ta tìm được $M\left(\dfrac{3}{4}; \dfrac{5}{2}; \dfrac{3}{8}\right)$. Do đó hoành độ của điểm M thuộc khoảng $(0; 2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Cho hàm số $y = x^3 - 2018x$ có đồ thị là (C). Gọi M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x_1 = 1$, tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1, tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác M_2,..., tiếp tuyến của (C) tại M_{n-1} cắt (C) tại điểm M_n khác M_{n-1} (với $n \geq 4$). Gọi $(x_n; y_n)$ là tọa độ của điểm M_n. Tìm n để $2018x_n + y_n + 2^{2019} = 0$.

A $n = 676$. B $n = 674$. C $n = 675$. D $n = 673$.

Lời giải.

Gọi phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M_k(x_k; y_k)$ (với $k \in \mathbb{N}^*$) là $y = ax + b$.

Ta có

$$\begin{aligned} & x^3 - 2018x - ax - b = (x - x_k)^2(x - x_{k+1}) \\ \Leftrightarrow\ & x^3 - 2018x - ax - b = x^3 - (x_{k+1} + 2x_k)x^2 + (2x_k x_{k+1} + x_k^2)x - x_k^2 x_{k+1}. \end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số ta được $x_{k+1} + 2x_k = 0$ hay $x_{k+1} = -2x_k$. Suy ra dãy số $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ là một cấp số nhân có $x_1 = 1$ và $x_n = (-2)^{n-1}$.

Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} 2018x_n + y_n + 2^{2019} = 0 &\Leftrightarrow 2018 \cdot (-2)^{n-1} + \left[(-2)^{n-1}\right]^3 - 2018 \cdot (-2)^{n-1} + 2^{2019} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[(-2)^{n-1}\right]^3 + 2^{2019} = 0 \\ &\Leftrightarrow (-2)^{3n-3} = (-2)^{2019} \\ &\Leftrightarrow 3n - 3 = 2019 \\ &\Leftrightarrow n = 674. \end{aligned}$$

Vậy $n = 674$.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Lớp 12M của trường THPT X có 40 học sinh gồm 24 học sinh nam và 16 học sinh nữ. Nhân dịp kỉ niệm 87 năm ngày thành lập Đoàn, giáo viên chủ nhiệm cần chọn 15 học sinh để tham gia biểu diễn một tiết mục văn nghệ. Tính xác suất để 15 học sinh được chọn có cả nam và nữ.

A $1 - \dfrac{C_{24}^{15} + C_{16}^{15}}{C_{40}^{15}}$. B $1 - \dfrac{C_{24}^{15}}{C_{40}^{15}}$. C $1 - \dfrac{C_{16}^{15}}{C_{40}^{15}}$. D $\dfrac{C_{24}^{15} + C_{16}^{15}}{C_{40}^{15}}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là C_{40}^{15}.

Gọi A là biến cố "số học sinh được chọn có cả nam và nữ".

Gọi $\overline{A}$ là biến cố "số học sinh được chọn không có đủ cả nam và nữ".

Số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là $C_{24}^{15} + C_{16}^{15}$.

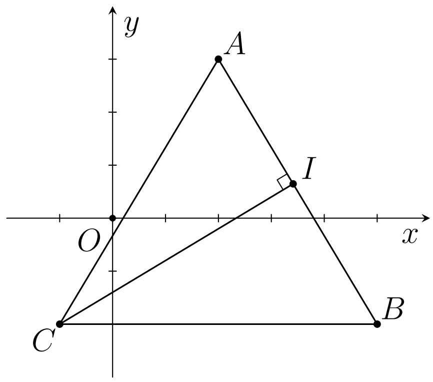
Xác suất của biến cố A là $1 - \dfrac{C_{24}^{15} + C_{16}^{15}}{C_{40}^{15}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i|+|z-5+2i|=\sqrt{34}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z+1+2i|$. Khi đó tổng $M+m$ bằng

(A) $\dfrac{30}{\sqrt{34}}+\sqrt{34}$. (B) $\dfrac{30}{\sqrt{34}}+5$. (C) $\sqrt{34}+6$. **D** $\dfrac{30}{\sqrt{34}}+6$.

Lời giải.



Đặt $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

Gọi $I(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Ta có $A(2;3)$, $B(5;-2)$, $C(-1;-2)$ lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $z_1=2+3i$, $z_2=5-2i$, $z_3=-1-2i$. Khi đó $AB=\sqrt{34}$ và $|z+1+2i|=CI$.

Theo đề bài thì $AI+BI=\sqrt{34}=AB$ nên I thuộc đoạn thẳng AB.

Phương trình của đường thẳng AB là $5x+3y-19=0$.

CI đạt giá trị nhỏ nhất khi $CI\perp AB$ hay $CI=\mathrm{d}(C,AB)=\dfrac{|5\cdot(-1)+3\cdot(-2)-19|}{\sqrt{5^2+3^2}}=\dfrac{30}{\sqrt{34}}$.

CI đạt giá trị lớn nhất nhất khi I trùng với điểm đầu mút của đoạn thẳng AB.

Mặt khác $CA=\sqrt{34}$ và $CB=6$.

Vậy giá trị lớn nhất của CI là 6.

Do đó $M=6$, $m=\dfrac{30}{\sqrt{34}}$.

Vì vậy $M+m=\dfrac{30}{\sqrt{34}}+6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ có đồ thị (C), tiếp tuyến tại giao điểm của (C) với trục hoành có phương trình là

(A) $y=-2x+1$. **B** $y=-x+1$. (C) $y=-x-1$. (D) $y=-x+2$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm là

$$\frac{x-1}{x-2}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=0\\x-2\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\x\neq2\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Như vậy tiếp điểm là $M(1;0)$.

Ta có $y'=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$, nên hệ số góc của tiếp tuyến tại M là $y'(1)=-1$.

Phương trình tiếp tuyến là $y=-x+1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $\Delta\colon x-y+2=0$. Hãy viết phương trình đường thẳng d là ảnh của đường thẳng Δ qua phép quay tâm O, góc quay 90°.

(A) $x+y-2=0$. **B** $x+y+2=0$. (C) $x+y=0$. (D) $x+y-4=0$.

Lời giải.

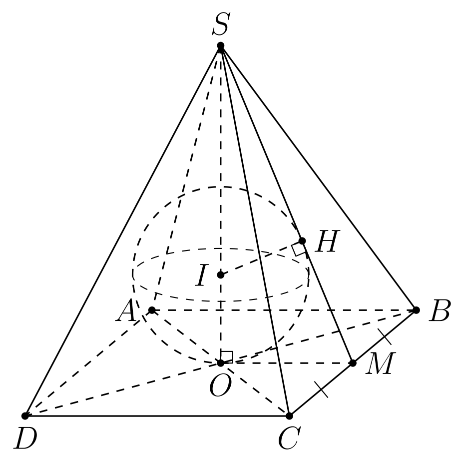
Ta có $A(0;2)$ là điểm thuộc đường thẳng Δ, suy ra $A'(-2;0)$ là ảnh của A qua phép quay tâm O góc quay 90°.
Gọi Δ' là ảnh của Δ qua phép quay tâm O góc quay 90°, suy ra $\Delta \perp \Delta'$. Khi đó phương trình của Δ' có dạng $x+y+c=0$.
Lại có Δ' đi qua A' nên $-2+0+c=0$ hay $c=2$.
Vậy phương trình của Δ' là $x+y+2=0$.
Chọn đáp án B □

Câu 49. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy và cạnh bên cùng bằng $2a$. Bán kính của mặt cầu nội tiếp hình chóp này bằng

A $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}a$. B $\dfrac{\sqrt{2}}{4\left(1+\sqrt{3}\right)}a$. C $\dfrac{\sqrt{3}}{2\left(1+\sqrt{3}\right)}a$. D $\dfrac{\sqrt{3}}{4\left(1+\sqrt{3}\right)}a$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, I là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$, M là trung điểm của BC, H là hình chiếu vuông góc của I xuống SM. Suy ra bán kính mặt cầu nội tiếp là $r=IH=IO$.
Ta có $SM=\sqrt{SB^2-BM^2}=a\sqrt{3}$.
Khi đó $SO=\sqrt{SM^2-OM^2}=a\sqrt{2}$.
Xét hai tam giác SHI và SOM có $\widehat{SHI}=\widehat{SOM}=90^\circ$ và $\widehat{ISH}=\widehat{OSM}$ nên $\triangle SHI \backsim \triangle SOM$.



Suy ra

$$\frac{IH}{OM}=\frac{SI}{SM} \Leftrightarrow \frac{r}{a}=\frac{a\sqrt{2}-r}{a\sqrt{3}} \Leftrightarrow r=\frac{a\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn các điều kiện sau

$$f(1)=0 \text{ và } \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x=\int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}.$$

Tính giá trị của $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I=\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$. B $I=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$. C $I=\mathrm{e}-2$. D $I=\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}=\int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x=\left[x\mathrm{e}^x f(x)\right]\Big|_0^1-\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\Rightarrow 2\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{e}^2-1}{2}.$$

Ta lại có $\int\limits_0^1 x^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^2-1}{4}$ và $\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^2-1}{4}$.

Khi đó

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = 0\\ \Leftrightarrow &\int\limits_0^1 \left[f'(x)+x\mathrm{e}^x\right]^2\,\mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

Vì $\left[f'(x)+x\mathrm{e}^x\right]^2 \geq 0, \forall x \in [0;1]$ và $f'(x)$ liên tục trên $[0;1]$ nên $\int\limits_0^1 \left[f'(x)+x\mathrm{e}^x\right]^2\,\mathrm{d}x \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi

$$f'(x)+x\mathrm{e}^x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x\mathrm{e}^x \Leftrightarrow f(x) = (1-x)\mathrm{e}^x + C.$$

Lại có $f(1)=0$ nên $C=0$.

Vậy $f(x) = (1-x)\mathrm{e}^x$.

Do đó

$$\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (2-x)\mathrm{e}^x\Big|_0^1 = \mathrm{e}-2.$$

Chọn đáp án C □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. A	3. C	4. C	5. C	6. A	7. C	8. C	9. D	10. C
11. D	12. B	13. B	14. D	15. D	16. B	17. C	18. A	19. B	20. B
21. D	22. A	23. C	24. D	25. D	26. B	27. A	28. D	29. C	30. D
31. D	32. A	33. A	34. D	35. C	36. A	37. D	38. A	39. A	40. D
41. B	42. C	43. A	44. B	45. A	46. D	47. B	48. B	49. A	50. C

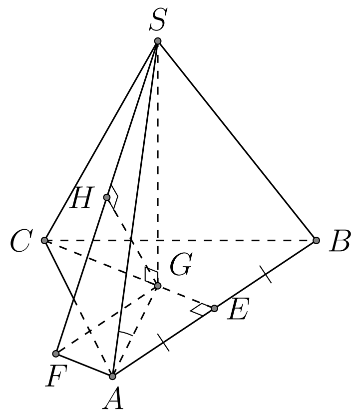
98 ĐỀ THI THỬ TOÁN THPT QUỐC GIA 2018 SỞ GD VÀ ĐT TIỀN GIANG, 2017-2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa đường thẳng SA với mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng GC và SA.

(A) $\dfrac{a\sqrt{5}}{10}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{2}}{5}$. (D) $\dfrac{a}{5}$.

Lời giải.



Do $S.ABC$ là chóp tam giác đều, G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên SG là đường cao của chóp $S.ABC$. Dựng hình chữ nhật $AEGF$, H là hình chiếu vuông góc của G lên $SF \Rightarrow GH \perp (SAF)$.

Ta có $GE \,/\!/\, AF$ nên $GE \,/\!/\, (SAF)$ suy ra

$\mathrm{d}(CG, SA) = \mathrm{d}(CG, (SAF)) = \mathrm{d}(G, (SAF)) = GH$

Góc giữa SA và (ABC) là $\widehat{SAG} = 60^\circ$.

$\triangle ABC$ đều cạnh a nên $AG = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong $\triangle SGA$ có $SG = \tan 60^\circ \cdot AG = a$; $GF = AE = \dfrac{a}{2}$.

Do GH là đường cao trong $\triangle SGF$ vuông tại G nên

$$\frac{1}{GH^2} = \frac{1}{GF^2} + \frac{1}{SG^2} \Rightarrow GH = \sqrt{\frac{SG^2 \cdot GF^2}{SG^2 + GF^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |-x^3 + 3x^2 + m + 2|$ có 5 điểm cực trị?

(A) 3. (B) 6. (C) 4. (D) 5.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = -x^3 + 3x^2 + m + 2$,

$g'(x) = -3x^2 + 6x$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m+2$	$\nearrow$	$m+6$	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $y = |g(x)|$ có 5 cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 < 0 \\ m + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -6 < m < -2$

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{3x + m}{x + m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -4)$?

(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) Vô số.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$; $y' = \dfrac{2m}{(x + m)^2}$.

Hàm số $y=\dfrac{3x+m}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-4) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m>0 \\ -m \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m \leq 4.$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài ra.

Chọn đáp án B $\square$

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)>0$, $\forall x \geq 0$, thỏa mãn $\begin{cases} f''(x)\cdot f(x)-2[f'(x)]^2+xf^3(x)=0, \\ f'(0)=0; f(0)=1. \end{cases}$

Tính $f(1)$.

(A) $\dfrac{2}{3}$. (B) $\dfrac{3}{2}$. (C) $\dfrac{6}{7}$. (D) $\dfrac{7}{6}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & f''(x)\cdot f(x)-2[f'(x)]^2+xf^3(x)=0 \Leftrightarrow f''(x)\cdot f^2(x)-2[f'(x)]^2 f(x)=-xf^4(x) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{f''(x)\cdot f^2(x)-2[f'(x)]^2\cdot f(x)}{f^4(x)}=-x \Leftrightarrow \left[\frac{f'(x)}{f^2(x)}\right]'=-x \\ \Leftrightarrow\ & \int \left[\frac{f'(x)}{f^2(x)}\right]' \mathrm{d}x=\int(-x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)}=-\frac{x^2}{2}+C. \end{aligned}$$

Với $f'(0)=0$; $f(0)=1$ suy ra $C=0$ và

$$\int_0^1 \frac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{\mathrm{d}(f(x))}{f^2(x)}=-\frac{x^3}{6}\Big|_0^1 \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}\Big|_0^1=-\frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{f(0)}-\frac{1}{f(1)}=-\frac{1}{6}$$

Suy ra $1-\dfrac{1}{f(1)}=-\dfrac{1}{6} \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(1)}=\dfrac{7}{6} \Leftrightarrow f(1)=\dfrac{6}{7}$.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 5. Cho $a>0$, $a \neq 1$, giá trị của $\log_{a^3} a$ bằng

(A) -3. (B) $-\dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{1}{3}$. (D) 3.

Lời giải.

$\log_{a^3} a=\dfrac{1}{3}\log_a a=\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 6. Cho số phức $z=11+i$. Điểm biểu diễn số phức liên hợp của z là điểm nào dưới đây?

(A) $Q(-11;0)$. (B) $M(11;1)$. (C) $P(11;0)$. (D) $N(11;-1)$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của z là $\overline{z}=11-i$ nên có điểm biểu diễn là $N(11;-1)$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1: $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=2 \end{cases}$ và Δ_2: $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$.

Đường vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2 đi qua điểm nào sau đây?

(A) $Q\left(-2;\dfrac{32}{11};-\dfrac{7}{11}\right)$. (B) $N\left(-2;\dfrac{32}{11};\dfrac{7}{11}\right)$. (C) $P\left(2;\dfrac{32}{11};\dfrac{7}{11}\right)$. (D) $M\left(2;-\dfrac{32}{11};\dfrac{7}{11}\right)$.

Lời giải.

Phương trình tham số của Δ_2: $\begin{cases} x = 3 - t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = t' \end{cases}$.

Gọi d là đường vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2. Gọi $A = d \cap \Delta_1$ nên $A(a; a; 2)$, $B = d \cap \Delta_2$ nên $B(3 - b; 1 + 2b; b)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (3 - a - b; 1 + 2b - a; b - 2)$.

Do d là đường vuông góc chung nên $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = -4 \\ -a + 6b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{27}{11} \\ b = \dfrac{10}{11} \end{cases}$.

Suy ra $A\left(\dfrac{27}{11}; \dfrac{27}{11}; 2\right)$ và $\overrightarrow{AB} = \left(-\dfrac{4}{11}; \dfrac{4}{11}; -\dfrac{12}{11}\right) = \dfrac{4}{11} \cdot (-1; 1; -3)$

Phương trình đường thẳng d đi qua A và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (-1; 1; 3)$ là $\begin{cases} x = \dfrac{27}{11} - t \\ y = \dfrac{27}{11} + t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$.

Thay tọa độ các điểm Q, N, P, M ta thấy chỉ có tọa độ điểm P thỏa mãn phương trình d nên đường vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2 đi qua điểm P.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Một thanh sắt chiều dài $AB = 100$ m được cắt thành hai phần AC và CB với $AC = x$ m. Đoạn AC được uốn thành một hình vuông có chu vi bằng AC và đoạn CB uốn thành tam giác đều có chu vi bằng CB. Khi tổng diện tích của hình vuông và tam giác nhỏ nhất, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $x \in (52; 58)$. **B** $x \in (40; 48)$. **C** $x \in (48; 52)$. **D** $x \in (30; 40)$.

Lời giải.

Theo đề các cạnh của hình vuông có độ dài là $\dfrac{a}{4}$, các cạnh của tam giác đều có độ dài là $\dfrac{100 - x}{3}$.

Ta có $S = \left(\dfrac{x}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{100 - x}{3}\right)^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\left(9 + 4\sqrt{3}\right)}{144} x^2 - \dfrac{800\sqrt{3}}{144} x + \dfrac{40000\sqrt{3}}{144}$.

Đây là hàm bậc hai có hệ số $a > 0$ nên hàm đạt giá trị nhỏ nhất khi

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{800\sqrt{3}}{144} \cdot \frac{144}{2 \cdot (9 + 4\sqrt{3})} \approx 43.5 \text{ m}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 9. Tổng $C_{2018}^1 - 2 \cdot 5C_{2018}^2 + 3 \cdot 5^2 C_{2018}^3 - \cdots - 2018 \cdot 5^{2017} C_{2018}^{2018}$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A $-1009 \cdot 2^{4034}$. **B** $-1009 \cdot 2^{4035}$. **C** $1009 \cdot 2^{4035}$. **D** $1009 \cdot 2^{4034}$.

Lời giải.

Xét khai triển $(1 - x)^{2018} = C_{2018}^0 - xC_{2018}^1 + x^2 C_{2018}^2 + \cdots + x^{2018} C_{2018}^{2018}$.

Lấy đạo hàm hai vế ta được

$$-2018(1 - x)^{2017} = -C_{2018}^1 + 2xC_{2018}^2 - \cdots + 2018x^{2017} C_{2018}^{2018}$$

Suy ra $2018(1 - x)^{2017} = C_{2018}^1 - 2xC_{2018}^2 + \cdots - 2018x^{2017} C_{2018}^{2018}$.

Cho $x = 5$ suy ra giá trị của tổng là $2018(-4)^{2017} = -1009 \cdot 2^{4035}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10.
Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình bên

(A) $y = -x^3 + 3x$.
(B) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
(C) $y = x^3 - 3x$.
(D) $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải.
Hàm số $y = x^3 - 3x$ có $y' = 3x^2 - 3$,

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Từ bảng biến thiên như hình bên suy ra hàm số cần tìm là $y = x^3 - 3x$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(0; -3; 2)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\overrightarrow{OM} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$.
(B) $\overrightarrow{OM} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.
(C) $\overrightarrow{OM} = -3\vec{j} + 2\vec{k}$.
(D) $\overrightarrow{OM} = -3\vec{i} + 2\vec{k}$.

Lời giải.
Theo định nghĩa véc-tơ trong không gian $Oxyz$, điểm $M(0; -3; 2)$ nên $\overrightarrow{OM} = -3\vec{j} + 2\vec{k}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

(A) $2\sqrt{3} - \dfrac{2}{3}$.
(B) $\dfrac{3\sqrt{3} - 1}{3}$.
(C) $2\sqrt{3} - \dfrac{3}{2}$.
(D) $3\sqrt{3} - \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\int_0^1 \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}(2x+1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(3\sqrt{3} - 1\right) = \frac{3\sqrt{3} - 1}{3}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Một người gửi M triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 8,4%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì người đó có được nhiều hơn gấp đôi số tiền mang đi gửi?

(A) 10 năm.
(B) 7 năm.
(C) 8 năm.
(D) 9 năm.

Lời giải.

Theo công thức lãi kép $P_n = P_0(1+r)^n \geq 2P_0 \Rightarrow n \geq \log_{1+r} 2 = \log_{1,084} 2 \approx 9$ năm.
Chọn đáp án D □

Câu 14. Phương trình $\log_2(x-1) = 1$ có nghiệm là

A $x = \dfrac{1}{2}$. B $x = \dfrac{1}{3}$. C $x = 3$. D $x = 2$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 1$.

Phương trình tương đương $x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;2;3)$, $N(3;4;5)$ và mặt phẳng $(P)\colon x + 2y + 3z - 14 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng thay đổi nằm trong mặt phẳng (P), các điểm H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N lên Δ. Biết rằng khi $MH = NK$ thì trung điểm của HK luôn thuộc một đường thẳng d cố định, phương trình của d là

A $\begin{cases} x = 1 \\ y = 13 - 2t \\ z = -4 + t \end{cases}$. B $\begin{cases} x = t \\ y = 13 - 2t \\ z = -4 + t \end{cases}$. C $\begin{cases} x = t \\ y = 13 + 2t \\ z = -4 + t \end{cases}$. D $\begin{cases} x = t \\ y = 13 - 2t \\ z = -4 - t \end{cases}$.

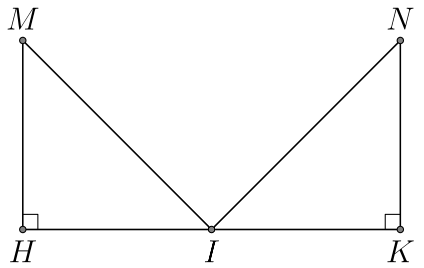
Lời giải.

Gọi I là trung điểm của HK.

Ta có $\triangle MHI = \triangle NKI \Rightarrow IM = IN$.

$\Rightarrow I$ thuộc mặt phẳng (Q) là mặt phẳng trung trực của MN.

Do I thuộc (P) nên I thuộc d là giao tuyến của (P) và (Q).



Mặt phẳng (Q) đi qua trung điểm $E(2;3;4)$ của MN, có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{MN} = (2;2;2)$ là

$$2(x-2) + 2(y-3) + 2(z-4) = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 9 = 0.$$

Tọa độ của I là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + 2y + 3z - 14 = 0 \\ x + y + z - 9 = 0. \end{cases}$

Cho $x = 0$ và giải hệ ta được $y = 13$, $z = -4$ suy ra $I(0;13;-4)$. Đường thẳng d đi qua $I(0;13;-4)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = [\vec{n_P};\vec{n_Q}] = (1;-2;1)$ có phương trình là $\begin{cases} x = t \\ y = 13 - 2t \\ z = -4 + t. \end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 16. Có bao nhiêu cách lấy ra 3 phần tử tùy ý từ một tập hợp có 12 phần tử?

A 3^{12}. B 12^3. C A_{12}^3. D C_{12}^3.

Lời giải.

Mỗi cách lấy ra 3 phần tử tùy ý từ một tập hợp có 12 phần tử là một tổ hợp chập 3 của 12.

Vậy số cách lấy là C_{12}^3 cách.

Chọn đáp án D □

Câu 17.
Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho bằng

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			2				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-2		

(A) -2. (B) 1. **C** 2. (D) -1.

Lời giải.
Hàm số có đạo hàm đổi dấu khi đi qua $x = -1$ và $x = 1$ nên hàm số có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Cho $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ và $\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -2$. Giá trị của $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

(A) 1. (B) -3. **C** -1. (D) 3.

Lời giải.
$\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 1 + (-2) = -1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Cho x, y là các số thực dương thoả mãn $\log_2\left(\dfrac{x+4y}{x+y}\right) = 2x - 4y + 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{2x^4 - 2x^2y^2 + 6x^2}{(x+y)^3}$ bằng

(A) 4. (B) $\dfrac{9}{4}$. **C** $\dfrac{16}{9}$. (D) $\dfrac{25}{9}$.

Lời giải.
$\log_2\left(\dfrac{x+4y}{x+y}\right) = 2x - 4y + 1 \Leftrightarrow \log_2(x+4y) + 2(x+4y) = \log_2(2x+2y) + 2(2x+2y) \quad (*)$
Hàm $f(t) = \log_2 t + 2t$ $(t > 0)$ có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 2} + 2 > 0$, $\forall t > 0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.
Khi đó $(*) \Leftrightarrow x + 4y = 2x + 2y \Leftrightarrow x = 2y$. Suy ra

$$P = \frac{2x^4 - 2x^2y^2 + 6x^2}{(x+y)^3} = \frac{32y^4 - 8y^4 + 24y^2}{27y^3} = \frac{8}{9}\left(y + \frac{1}{y}\right) \geq \frac{16}{9}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Khối lăng trụ có chiều cao h và diện tích đáy S thì thể tích bằng bao nhiêu?

A Sh. (B) $\dfrac{1}{6}Sh$. (C) $\dfrac{1}{3}Sh$. (D) $\dfrac{1}{2}Sh$.

Lời giải.
Theo công thức tính thể tích khối lăng trụ.
Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Biết $\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\left(\dfrac{1}{\ln^2 x}-\dfrac{1}{\ln x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{a\cdot \mathrm{e}^2+b\cdot \mathrm{e}+c}{2}$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a^2+b^2+c^2$ bằng bao nhiêu?

A 5.   **B** 3.   **C** 4.   **D** 9.

Lời giải.

$$\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x=\left.\frac{x}{\ln x}\right|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}+\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{1}{\ln^2 x}\,\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{1}{\ln^2 x}\,\mathrm{d}x-\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x=-\left.\frac{x}{\ln x}\right|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}=\frac{-\mathrm{e}^2+2\mathrm{e}}{2}.$$

Suy ra $a=-1$, $b=2$, $c=0$ nên $a^2+b^2+c^2=5$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA=a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa cạnh bên SC với đáy bằng bao nhiêu?

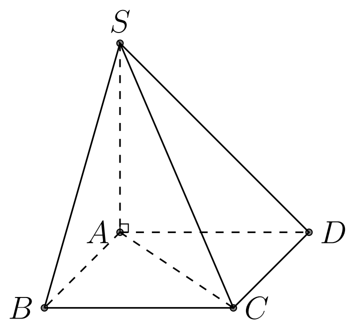
A 60°.   **B** 30°.   **C** 45°.   **D** 90°.

Lời giải.

Do $SA\perp(ABCD)$ nên góc giữa SC và đáy là $\widehat{SCA}$.

Ta có $AC=AB\sqrt{2}=a\sqrt{2}$.

$$\tan\widehat{SCA}=\frac{SA}{AC}=\frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}=1\Rightarrow\widehat{SCA}=45^\circ.$$



Chọn đáp án C □

Câu 23. Xét đồ thị (C) của hàm số $y=x^3+3ax+b$ với a, b là các số thực. Gọi M, N là hai điểm phân biệt thuộc (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại hai điểm đó có hệ số góc bằng 3. Biết khoảng cách từ gốc tọa độ tới đường thẳng MN bằng 1, giá trị nhỏ nhất của a^2+b^2 bằng bao nhiêu?

A $\dfrac{3}{2}$.   **B** $\dfrac{4}{3}$.   **C** $\dfrac{6}{5}$.   **D** $\dfrac{7}{6}$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2+3a=3\Rightarrow x^2=1-a$. Suy ra $y=x(1-a)+3ax+b=(2a+1)x+b$.

Phương trình đường thẳng MN là $y=(2a+1)x+b\Leftrightarrow(2a+1)x-y+b=0$.

$\mathrm{d}(O,MN)=1\Leftrightarrow\dfrac{|b|}{\sqrt{(1+2a)^2+1}}=1\Leftrightarrow a^2+b^2=5a^2+4a+2\geq\dfrac{6}{5}$.

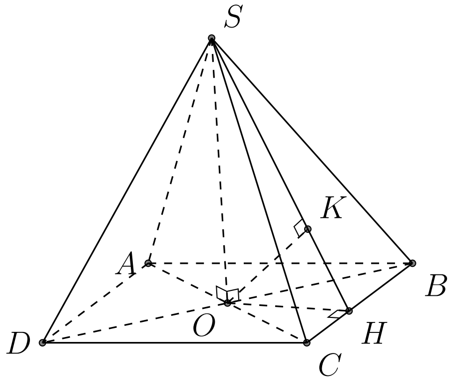
Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=-\dfrac{2}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, cạnh đáy bằng $2a$. Biết SO vuông góc với đáy, góc $\widehat{ABC}=60^\circ$ và khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a}{2}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng bao nhiêu?

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. (B) $2a^3$. (C) $\dfrac{2a^3}{3}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên BC, K là hình chiếu vuông góc của O trên SH. $\mathrm{d}(O,(SBC)) = OK = \dfrac{a}{2}$.

$\triangle OBC$ vuông tại O có

$$OC = BC \cdot \sin\widehat{OBC} = BC \cdot \sin 30^\circ = a \Rightarrow AC = 2a.$$

và $OB = BC \cdot \cos\widehat{OBC} = BC \cdot \cos 30^\circ = a\sqrt{3} \Rightarrow BD = 2a\sqrt{3}$.

$\triangle OBH$ vuông tại H có

$$OH = OB \cdot \sin\widehat{OBH} = OB \cdot \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$\triangle SOH$ vuông tại O đường cao OK nên ta có

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OH^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow SO = \sqrt{\frac{OH^2 \cdot OK^2}{OH^2 - OK^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Khi đó $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = 2a^2\sqrt{3}$ và $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho đa giác đều (P) có 20 đỉnh. Lấy tùy ý 3 đỉnh của (P), tính xác suất để 3 đỉnh lấy được tạo thành tam giác vuông không có cạnh nào là cạnh của (P).

(A) $\dfrac{5}{114}$. (B) $\dfrac{3}{38}$. (C) $\dfrac{7}{114}$. (D) $\dfrac{7}{57}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = \mathrm{C}_{20}^3$.

Gọi biến cố A: " 3 đỉnh lấy được tạo thành tam giác vuông không có cạnh nào là cạnh của (P)".

Trong 20 đỉnh có 10 đường kính, chọn 1 có 10 cách.

Chọn một đỉnh trong 14 đỉnh còn lại (trừ hai đỉnh thuộc đường kính, và 4 đỉnh kề với hai đỉnh đó) có 14 cách. Khi đó $n(A) = 10 \cdot 14 = 140$.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{140}{\mathrm{C}_{20}^3} = \frac{7}{57}.$$

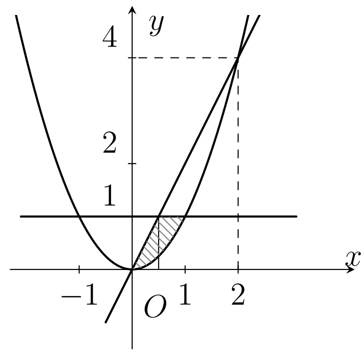
Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x$, $y = x^2$, $y = 1$ trên miền $x \geq 0$, $y \leq 1$ bằng

(A) $\dfrac{1}{3}$. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{5}{12}$. (D) $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

$$S=\int\limits_0^{\frac12}(2x-x^2)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac12}^{1}(1-x^2)\,\mathrm{d}x$$
$$=\left(x^2-\frac13x^3\right)\Bigg|_0^{\frac12}+\left(x-x^2\right)\Bigg|_{\frac12}^{1}$$
$$=\frac{5}{24}+\frac{5}{24}=\frac{5}{12}.$$



Chọn đáp án C □

Câu 27. Cho $\int\limits_1^3\dfrac{x+3}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x=m\ln2+n\ln3+p\ln5$, với m, n, p là các số hữu tỉ. Tính $S=m^2+n+p^2$.

A $S=6$. **B** $S=4$. **C** $S=3$. **D** $S=5$.

Lời giải.

$\int\limits_1^3\dfrac{x+3}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^3\dfrac{x+3}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^3\left(\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=2\ln2+\ln3-\ln5.$

Suy ra $m=2$, $n=1$, $p=-1$ nên $S=m^2+n+p^2=6$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy là hình chữ nhật có $AB=a$, $BC=a\sqrt2$, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt3$. Gọi M là trung điểm của SD và (P) là mặt phẳng đi qua B, M sao cho (P) cắt mặt phẳng (SAC) theo một đường thẳng vuông góc với BM. Khoảng cách từ điểm S đến (P) bằng

A $\dfrac{2a\sqrt2}{3}$. **B** $\dfrac{a\sqrt2}{9}$. **C** $\dfrac{a\sqrt2}{3}$. **D** $\dfrac{4a\sqrt2}{9}$.

Lời giải.

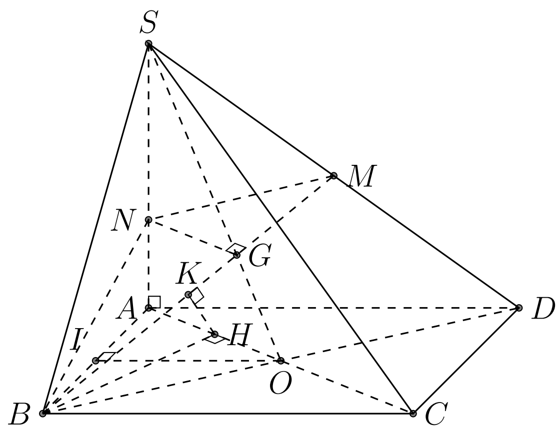
Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$. G là giao điểm của SO và BM.

Suy ra G là trọng tâm của tam giác SAC và SBD.

Gọi N là giao điểm của (P) và SA. H là hình chiếu vuông góc của B lên AC. K là hình chiếu vuông góc của H lên BG.

Ta có $OA=\dfrac12AC=\dfrac12\sqrt{AB^2+BC^2}=\dfrac{a\sqrt3}{2}$.

Gọi I là trung điểm $AB\Rightarrow OI=\dfrac12\cdot BC=\dfrac{a\sqrt2}{2}$.



$$S_{ABO}=\frac12\cdot OI\cdot AB=\frac12\cdot BH\cdot OA\Rightarrow BH=\frac{OI\cdot AB}{AO}=\frac{a\sqrt6}{3}.$$

$\triangle ABH$ vuông tại H có $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{3}AC \Rightarrow \dfrac{OH}{AH} = \dfrac{OG}{OS} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow GH \parallel SA$

Ta có $BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp NG$

Khi đó $\begin{cases} NG \perp BM \\ BH \perp NG \end{cases} \Rightarrow NG \perp GH \Rightarrow NG \parallel AC \Rightarrow (P) \parallel AC$ và $SN = 2AN$.

$\mathrm{d}(S,(P)) = 2\mathrm{d}(A,(P)) = 2\mathrm{d}(H,(P)) = 2HK$.

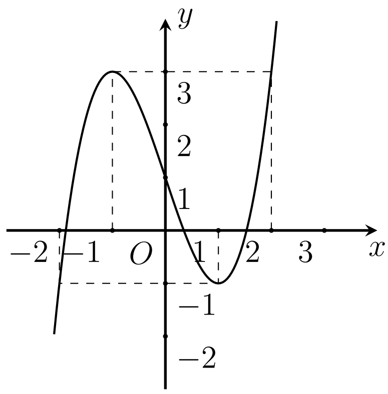
$\triangle OSA$ có $GH = \dfrac{1}{3}SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $\triangle AHB$ vuông tại H có $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

$\triangle GHB$ vuông tại H có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HG^2} + \dfrac{1}{HB^2} \Rightarrow HK = \sqrt{\dfrac{HG^2 \cdot HB^2}{HG^2 + HB^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 29.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng



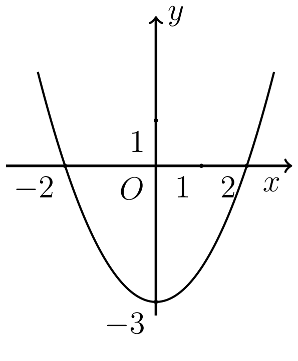
A $(-1; +\infty)$.
B $(-1; 1)$.
C $(-\infty; 1)$.
D $(-\infty; -1)$.

Lời giải.

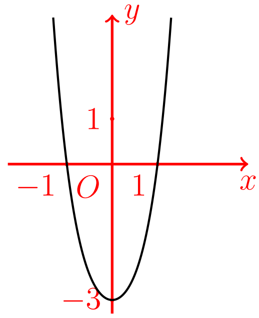
Trên khoảng $(-\infty; -1)$ đồ thị hàm số "đi lên" từ trái sang phải nên hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$.

Chọn đáp án D □

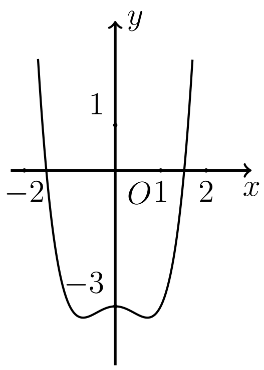
Câu 30. Đồ thị nào trong hình dưới đây là đồ thị của hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 3$?

A 

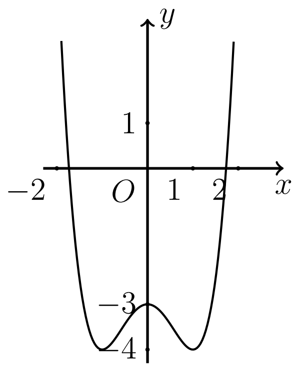
.

B 

.

(C) 

.

(D) 

.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 4x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số có 1 cực tiểu.

Cho $y = 0$ ta có $x^4 + 2x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Suy ra đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1; 0)$ và $(1; 0)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Hàm số $y = \ln x + \dfrac{1}{x}$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

(A) $y = \ln x + 1$. (B) $y = \dfrac{1}{2}\ln^2 x - \dfrac{1}{x^2}$. (C) $y = \dfrac{1}{2}\ln^2 x - \dfrac{1}{x}$. (D) $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$.

Lời giải.

$y' = \left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)' = (\ln x)' + \left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 32. Cho số phức z thoả mãn $(2+3i)z = z - 1$. Môđun của z bằng

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. (B) $\dfrac{1}{10}$. (C) 1. (D) $\sqrt{10}$.

Lời giải.

$(2+3i)z = z - 1 \Leftrightarrow (1+3i)z = -1 \Leftrightarrow |1+3i| \cdot |z| = 1 \Rightarrow |z| = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị dương của tham số thực m để bất phương trình $\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} \geq m^2 \left(\log_4 x^2 - 3\right)$ có nghiệm duy nhất thuộc $[32; +\infty)$?

(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 0.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} \geq m^2 \left(\log_4 x^2 - 3\right) \Leftrightarrow \sqrt{\log_2^2 x + \log_2 x - 3} \geq m^2 \left(\log_2 x - 3\right)$

hay $m^2 \leq \dfrac{\sqrt{\log_2^2 x + \log_2 x - 3}}{\log_2 x - 3}$ (do $x \geq 32$).

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{\sqrt{t^2 - t - 3}}{t - 3}$ với mọi $t \geq 5$. $f'(t) = \dfrac{-2t + 6}{(t-3)\sqrt{t^2 - t - 3}} < 0$ với mọi $t \geq 5$.

Suy ra hàm $f(t)$ nghịch biến trên $(5; +\infty)$ và $f(t) \leq f(5) = \sqrt{3}$.

Theo bài ra ta phải có $m^2 = \sqrt{3} \Leftrightarrow m = \sqrt[4]{3}$ (do $m > 0$).

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Hàm số $y = (x^2 - 1)(3x - 2)^3$ có bao nhiêu điểm cực đại?

(A) 0. (B) 2. (C) 3. **D** 1.

Lời giải.

$y' = (3x - 2)^2(15x^2 - 4x - 9)$,

$y' = 0$ có ba nghiệm $x = \dfrac{2}{3}$, $x = \dfrac{2+\sqrt{139}}{15}$ và $x = \dfrac{2-\sqrt{139}}{15}$.

x	$-\infty$		$\dfrac{2-\sqrt{139}}{15}$		$\dfrac{2}{3}$		$\dfrac{2+\sqrt{139}}{15}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số có 1 điểm cực đại.

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{z-2i}{z+3-i}\right| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z + 3 - 2i|$ bằng

A $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$. (B) $2\sqrt{10}$. (C) $\sqrt{10}$. (D) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ với x, $y \in \mathbb{R}$.

$\left|\dfrac{z-2i}{z+3-i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z - 2i| = |z + 3 - i| \Leftrightarrow |x + (y-2)i| = |(x+3) + (y-1)i| \Leftrightarrow 3x + y + 3 = 0.$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $d\colon 3x + y + 3 = 0$.

Ta có $|z + 3 - 2i| = |z - (-3 + 2i)|$, với $M_0(-3; 2)$.

$|z + 3 - 2i|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\mathrm{d}(M_0, d) = \dfrac{|-9+2+3|}{\sqrt{9+1}} = \dfrac{4}{\sqrt{10}} = \dfrac{2\sqrt{10}}{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Cho số phức $z = \left(\sqrt{3} + \sqrt{5}i\right)^{2018}$. Biết phần ảo của z có dạng $z = a + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} + d\sqrt{15}$, trong các số a, b, c, d có đúng bao nhiêu số bằng 0?

(A) 2. (B) 1. (C) 4. **D** 3.

Lời giải.

$z = \left(\sqrt{3} + \sqrt{5}i\right)^{2018} = \left(-2 + 2\sqrt{15}i\right)^{1009} = 2^{1009} \sum\limits_{k=0}^{1009} \mathbf{C}_{1009}^{k} (-1)^{1009-k} \sqrt{15^k} i^k.$

Phần ảo của z ứng với giá trị k là số lẻ nên $a = b = c = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t, \\ z = -t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. Mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

(A) $3x - 2y - 4z - 8 = 0$. **B** $y + z + 1 = 0$.

(C) $x - 2y - 3 = 0$. (D) $x + 3y + 5z + 2 = 0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;1;0)$ và bán kính $R = 2$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên d.

Suy ra $t_H = -\dfrac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{IM_0}}{\vec{u}^2} = 1 \Rightarrow H(3;0;-1)$. Ta có $r_{\min} = \mathrm{d}\left(I,(P)\right) = IH$.

Suy ra (P) đi qua H và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{IH} = (0;-1;-1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $y + z + 1 = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Biết bất phương trình $\log_5(5^x - 1) \cdot \log_{25}(5^{x+1} - 5) \leq 1$ có tập nghiệm là đoạn $[a;b]$. Giá trị của $a + b$ bằng

A $-2 + \log_5 156$. (B) $2 + \log_5 156$. (C) $-2 + \log_5 26$. (D) $-1 + \log_5 156$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & \log_5(5^x - 1) \cdot \log_{25}(5^{x+1} - 5) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_5(5^x - 1)\left[1 + \log_{25}(5^x - 1)\right] \leq 1 \\ \Leftrightarrow\ & \log_5^2(5^x - 1) + \log_5(5^x - 1) - 2 \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \log_5(5^x - 1) \leq 1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{25} \leq 5^x - 1 \leq 5 \Leftrightarrow \log_5 \frac{26}{25} \leq x \leq \log_5 6. \end{aligned}$$

Suy ra $a + b = \log_5 \dfrac{26}{25} + \log_5 6 = \log_5 156 - \log_5 25 = \log_5 156 - 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

A $z = 0$. (B) $x + y + z = 0$. (C) $y = 0$. (D) $x = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oxy) đi qua O, véc-tơ pháp tuyến $\vec{k} = (0;0;1)$ có phương trình

$$1(z - 0) = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Từ một đội văn nghệ gồm 5 nam và 8 nữ cần lập một nhóm gồm 4 người hát tốp ca. Tính xác suất để trong 4 người được chọn đều là nam.

A $\dfrac{\mathrm{C}_5^4}{\mathrm{C}_{13}^4}$. (B) $\dfrac{\mathrm{C}_5^4}{\mathrm{C}_8^4}$. (C) $\dfrac{\mathrm{A}_5^4}{\mathrm{A}_{13}^4}$. (D) $\dfrac{\mathrm{A}_5^4}{\mathrm{A}_8^4}$.

Lời giải.

Chọn 4 người trong 13 người có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{13}^4$ cách.

Gọi biến cố A: "4 người được chọn đều là nam" $\Rightarrow n(A) = \mathrm{C}_5^4$ cách.

Suy ra $P(A) = \dfrac{\mathrm{C}_5^4}{\mathrm{C}_{13}^4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{3\sqrt{x} - 5}{2x^2 - 5x - 7}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

(A) 2. **B** 1. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 - 5x - 7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq \dfrac{7}{2}. \end{cases}$

$$\lim_{x \to \frac{7}{2}^+} \frac{3\sqrt{x} - 5}{2x^2 - 5x - 7} = +\infty, \lim_{x \to \frac{7}{2}^-} \frac{3\sqrt{x} - 5}{2x^2 - 5x - 7} = -\infty.$$

Vậy đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x = \dfrac{7}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m^2 + 1)x^2 + m^4$ có đồ thị là (C). Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của (C), S_1 và S_2 lần lượt là phần diện tích của tam giác ABC phía trên và phía dưới trục hoành. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m sao cho $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{1}{3}$?

A 1. B 2. C 4. D 3.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4\left(m^2 + 1\right)x$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4\left(m^2 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m^2 + 1 \end{array}\right.$.

Khi đó tọa độ 3 điểm cực trị là $A(0; m^3)$, $B\left(-\sqrt{m^2 + 1}; -2m^2 - 1\right)$, $C\left(\sqrt{m^2 + 1}; -2m^2 - 1\right)$.

Gọi M, N là giao điểm của Ox với AB, AC, H là trung điểm của BC.

Ta có $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{S_1}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{1}{2}$ (do $MN \parallel BC$).

Suy ra MN là đường trung bình của tam giác ABC.

Suy ra O là trung điểm của AH. Suy ra $y_A = |y_B| = |y_C| \Leftrightarrow m^4 = 2m^2 + 1 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{1 + \sqrt{2}}$.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Mặt cầu có bán kính bằng 1 thì diện tích bằng

A 4π. B 16π. C $\dfrac{4}{3}\pi$. D 2π.

Lời giải.

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 1^2 = 4\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = 4 + 8t \\ y = -6 + 11t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$.

Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của d?

A $\vec{u}_1 = (4; -6; 3)$. B $\vec{u}_4 = (8; -6; 3)$. C $\vec{u}_2 = (8; 11; 2)$. D $\vec{u}_3 = (4; -6; 2)$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}_2 = (8; 11; 2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi N, P, Q là hình chiếu vuông góc của M trên các trục tọa độ. Mặt phẳng (NPQ) có phương trình là

A $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$. **B** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{3}=0$.

C $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=0$. **D** $6x+2y+2z+6=0$.

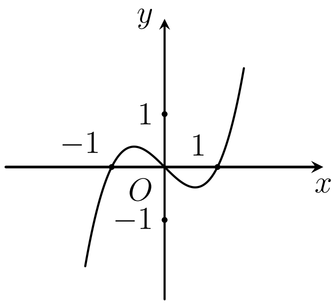
Lời giải.

Không mát tổng quát ta giả sử N, P, Q là hình chiếu vuông góc của M trên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz. Khi đó $N(1;0;0)$, $P(0;1;0)$, $Q(0;0;3)$. Phương trình (NPQ) là phương trình mặt chắn có dạng $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$.

Chọn đáp án A □

Câu 46.

Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(x^2-1)$ đồng biến trên khoảng



A $(-\infty;-\sqrt{2})$. **B** $(-1;1)$.

C $(1;\sqrt{2})$. **D** $(0;1)$.

Lời giải.

Hàm số $y=f\left(x^2-1\right)$ có $y'=2xf'(x^2-1)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'\left(x^2-1\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-1=0 \\ x^2-1=-1 \\ x^2-1=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $(0;1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y+z-3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (P) sao cho $MA=MB=MC$, giá trị của $a^2+b^2+c^2$ bằng

A 39. **B** 63. **C** 62. **D** 38.

Lời giải.

Gọi $M(a;b;c)$, do $M \in (P)$ nên $2a+2b+c-3=0$. (1)
Theo đề ta có

$$\begin{cases} MA^2 = MB^2 \\ MA^2 = MC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+(b-1)^2+(c-2)^2 = (a-2)^2+(b+2)^2+(c-1)^2 \\ a^2+(b-1)^2+(c-2)^2 = (a+2)^2+b^2+(c-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a-6b-2c=4 \\ -4a-2b-2c=0. \end{cases}$$

Kết hợp với (1) và giải hệ ta được $a=2$, $b=3$, $c=-7$ nên $a^2+b^2+c^2=49$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Tính giá trị của $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n-1}$.

(A) 1. **(B) 2.** (C) -1. (D) -2.

Lời giải.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = 2.$$

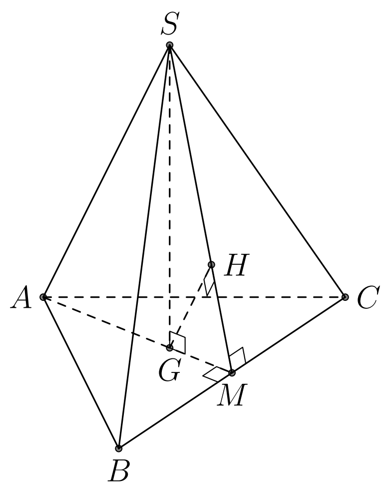
Chọn đáp án B □

Câu 49. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Góc giữa mặt bên với mặt đáy bằng 60°. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

(A) $\dfrac{a}{2}$. (B) $\dfrac{a}{4}$. (C) $\dfrac{3a}{2}$. **(D) $\dfrac{3a}{4}$.**

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, M là trung điểm của BC, H là hình chiếu vuông góc của G lên SM.
Theo đề góc giữa (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SMA} = 60^\circ$.
Do G là trọng tâm tam giác ABC ta có $AM = 3GM$,
suy ra $\mathrm{d}(A,(SBC)) = 3\mathrm{d}(G,(SBC)) = 3GH$
Trong $\triangle GHM$ vuông tại H có
$GH = GM \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a}{4}$.
Suy ra $\mathrm{d}(A,(SBC)) = 3GH = \dfrac{3a}{4}$.



Chọn đáp án D □

Câu 50. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{4}{x} + x$ trên đoạn $[1;3]$. Giá trị của $M+m$ bằng

(A) $\dfrac{25}{3}$. (B) 4. (C) 5. **(D) 9.**

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $f'(x) = -\dfrac{4}{x^2} + 1$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \in [1;3] \\ x = -2 \notin [1;3] \end{array}\right.$

$f(1) = 5$, $f(2) = 4$, $f(3) = \dfrac{13}{3}$.
Suy ra $M = \max\limits_{[1;3]} y = 5$, $m = \min\limits_{[1;3]} y = 4$ nên $M+m = 9$.

Chọn đáp án D □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

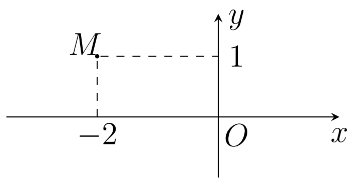
1. B	2. A	3. B	4. C	5. C	6. D	7. C	8. B	9. B	10. C
11. C	12. B	13. D	14. C	15. B	16. D	17. C	18. C	19. C	20. A
21. A	22. C	23. C	24. D	25. D	26. C	27. A	28. C	29. D	30. B
31. D	32. A	33. B	34. D	35. A	36. D	37. B	38. A	39. A	40. A
41. B	42. B	43. A	44. C	45. A	46. D	47. C	48. B	49. D	50. D

99 ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA NĂM 2018, SỞ GD-ĐT QUẢNG BÌNH

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.

Trong mặt phẳng Oxy, điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức z. Số phức $\bar{z}$ là



(A) $-2+i$. (B) $1-2i$. (C) $-2-i$. (D) $1+2i$.

Lời giải.

Ta có $M(-2;1)$ nên điểm M là điểm biểu diễn số phức $z=-2+i$. Do đó $\bar{z}=-2-i$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x+2}{2018x-1}$.

(A) $\dfrac{5}{2018}$. (B) -2. (C) -5. (D) $-\infty$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x+2}{2018x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5+\dfrac{2}{x}}{2018-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{5}{2018}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Từ tập $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau?

(A) $5!$. (B) C_7^2. (C) A_7^2. (D) 7^5.

Lời giải.

Mỗi số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau lập từ các chữ số của tập A là một chỉnh hợp chập 5 của tập A. Do đó, từ tập A ta lập được A_7^2 số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Thể tích khối nón có chiều cao h, đường sinh l là

(A) $\dfrac{1}{3}\pi l^2h$. (B) $\dfrac{1}{3}\pi(l^2-h^2)h$. (C) $\pi l\sqrt{l^2-h^2}$. (D) $\pi(l^2-h^2)h$.

Lời giải.

Bán kính hình tròn đáy của khối nón là: $r=\sqrt{l^2-h^2}$.

Thể tích khối nón có chiều cao h, đường sinh l là: $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi(l^2-h^2)h$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên tập $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

(B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 4)$.

(C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 4)$.

(D) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

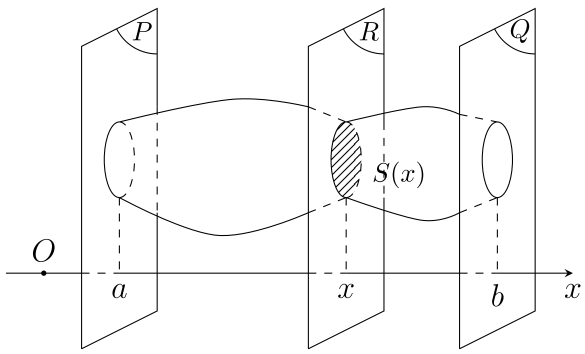
Lời giải.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ suy ra hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6.

Trong không gian $Oxyz$, cho vật thể được giới hạn bởi hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x = a$, $x = b$ $(a < b)$. Một mặt phẳng (R) tùy ý vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ x, $(a \leq x \leq b)$ cắt vật thể theo thiết diện có diện tích là $S(x)$, với $y = S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$. Thể tích V của vật thể đó được tính theo công thức



(A) $V = \int\limits_a^b S^2(x)\,\mathrm{d}x$. (B) $V = \pi \int\limits_a^b S^2(x)\,\mathrm{d}x$.

(C) $V = \pi \int\limits_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$. (D) $V = \int\limits_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.

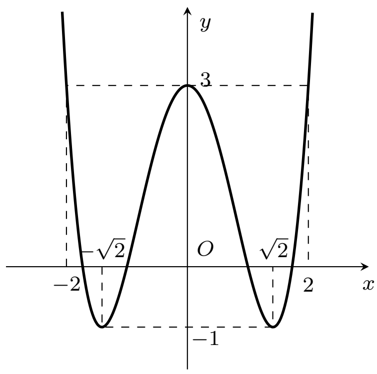
Lời giải.

Theo định nghĩa tích phân, thể tích V của vật thể đó được tính theo công thức $V = \int\limits_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm



(A) $x = \pm\sqrt{2}$. (B) $x = \pm 2$. (C) $x = -1$. (D) $x = 3$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra $x = \pm\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho $0 < a, b \neq 1$; $n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\log_a b = \dfrac{\log a}{\log b}$. (B) $\log_{\sqrt[n]{a}} b = n \log_a b$.

(C) $\log_{\sqrt[n]{a}} b = \dfrac{1}{n}\log_a b$.
(D) $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n}\log_b a$.

Lời giải.

- Vì $\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a}$ nên mệnh đề "$\log_a b = \dfrac{\log a}{\log b}$" sai.
- Ta có $\log_{\sqrt[n]{a}} b = \log_{a^{\frac{1}{n}}} b = n\log_a b$ nên mệnh đề "$\log_{\sqrt[n]{a}} b = n\log_a b$" đúng và mệnh đề "$\log_{\sqrt[n]{a}} b = \dfrac{1}{n}\log_a b$" sai.
- Vì $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n}\log_a b$ nên mệnh đề "$\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n}\log_b a$" sai.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3\sqrt{x} + x^{2018}$ là

(A) $\sqrt{x} + \dfrac{x^{2019}}{673} + C$.
(B) $2\sqrt{x^3} + \dfrac{x^{2019}}{2019} + C$.
(C) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{x^{2019}}{673} + C$.
(D) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 6054x^{2017} + C$.

Lời giải.

Ta có

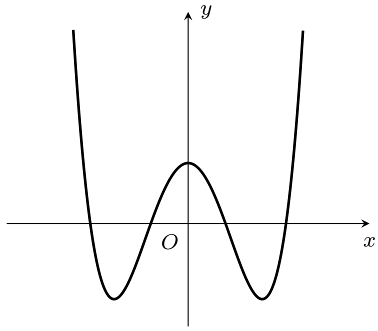
$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \left(3\sqrt{x} + x^{2018}\right)\mathrm{d}x\\ &= 3\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x + \int x^{2018}\,\mathrm{d}x\\ &= 3\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{2019}}{2019} + C\\ &= 2\sqrt{x^3} + \frac{x^{2019}}{2019} + C.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 10.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong các hàm số sau, hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = x^4 + 3x^2 + 1$.
(B) $y = x^4 - 3x^2 + 1$.
(C) $y = -x^4 + 3x^2 + 1$.
(D) $y = x^3 - 3x^2 + 1$.



Lời giải.

Từ đồ thị đã cho suy ra hàm số có 3 điểm cực trị, trong đó có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại. Trong các hàm số đã cho, hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, điểm N đối xứng với điểm $M(3;-1;2)$ qua trục Oy là

(A) $N(-3;1;-2)$.
(B) $N(3;1;-2)$.
(C) $N(-3;-1;-2)$.
(D) $N(3;-1;-2)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;-1;2)$ trên trục Oy là $H(0;-1;0)$. Tọa độ điểm N đối xứng với điểm $M(3;-1;2)$ qua trục Oy là

$$\begin{cases} x_N = 2x_H - x_M = 2\cdot 0 - 3 = -3 \\ y_N = 2y_H - y_M = 2\cdot(-1) - (-1) = -1 \\ z_N = 2z_H - z_M = 2\cdot 0 - 2 = -2 \end{cases} \Rightarrow N(-3;-1;-2).$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua $A(1;2;-1)$ và song song với đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z}{2}$ có phương trình là

A $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-2}{-6} = \dfrac{z+1}{-4}$.

B $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-1}{2}$.

C $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+1}{-2}$.

D $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{1}$.

Lời giải.

Đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z}{2}$ đi qua điểm $M(3;3;0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;3;2)$.
Đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-2}{-6} = \dfrac{z+1}{-4}$ đi qua $A(1;2;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{v} = (-2;-6;-4)$, mặt khác véc-tơ $\vec{v}$ cùng phương với véc-tơ $\vec{u}$, điểm A không thuộc d nên đường thẳng Δ song song với đường thẳng d.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(2-\sqrt{3}\right)^x > \left(7-4\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^{x+1}$ là

A $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$. **B** $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **C** $\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$. **D** $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

Lời giải.

Ta có $\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right) = 1 \Rightarrow \left(2-\sqrt{3}\right) = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$. Do đó

$$\begin{aligned} & \left(2-\sqrt{3}\right)^x > \left(7-4\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^{x+1} \\ \Leftrightarrow\ & \left(2+\sqrt{3}\right)^{-x} > \left(2-\sqrt{3}\right)^2\left(2+\sqrt{3}\right)^{x+1} \\ \Leftrightarrow\ & \left(2+\sqrt{3}\right)^{-x} > \left(2+\sqrt{3}\right)^{-2}\left(2+\sqrt{3}\right)^{x+1} \\ \Leftrightarrow\ & \left(2+\sqrt{3}\right)^{-x} > \left(2+\sqrt{3}\right)^{x-1} \\ \Leftrightarrow\ & -x > x-1 \\ \Leftrightarrow\ & x < \dfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

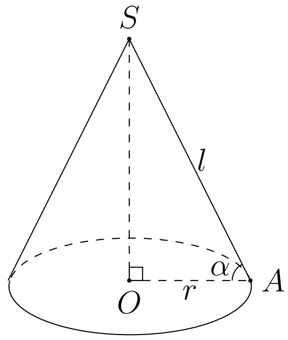
Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Cho hình nón có đường sinh là a, góc giữa đường sinh và mặt đáy là α, diện tích xung quanh của hình nón là

A $\pi a^2 \sin\alpha$. **B** $2\pi a\cos\alpha$. **C** $\pi a^2\cos\alpha$. **D** $2\pi a\sin\alpha$.

Lời giải.

Ta có $l = a$, $r = l \cdot \cos\alpha = a\cos\alpha$.
Diện tích xung quanh của hình nón là
$S = \pi r l = \pi \cdot a\cos\alpha \cdot a = \pi a^2 \cos\alpha$.



Chọn đáp án C □

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng $d\colon \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$ và song song với đường thẳng $d'\colon \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z}{2}$ là

A $x - y + 2z - 2 = 0$.
B $2x - z - 6 = 0$.
C $\dfrac{x}{-1} + \dfrac{y}{1} + \dfrac{z}{-2} = 1$.
D $2x - z + 7 = 0$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(-3;2;1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (1;-1;2)$. Đường thẳng d' có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u'} = (1;3;2)$.
Ta có $\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right] = (-8;0;4)$, suy ra mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và song song với d' có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (2;0;-1)$.Phương trình mặt phẳng (P) là

$$2 \cdot (x+3) + 0 \cdot (y-2) + (-1) \cdot (z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x - z + 7 = 0.$$

Chọn đáp án D □

Câu 16. Đồ thị hàm số nào dưới đây có 3 tiệm cận?

A $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.
B $y = \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$.
C $y = \dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$.
D $y = \dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2+5x+6}$.

Lời giải.

- Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ có đường tiệm cận ngang $y = 1$ và đường tiệm cận đứng $x = -1$.
- Hàm số $y = \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
  Với $x \neq 2$ thì $y = \dfrac{x^2-5x+6}{x-2} = \dfrac{(x-2)(x-3)}{x-2} = x - 3$ nên suy ra đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.
- Hàm số $y = \dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2;3\}$.
  $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x-2}{x^2-5x+6} = 0$.
  $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{(x-2)(x-3)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-3} = -1$.
  $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x-2}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x-2}{(x-2)(x-3)} = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$.
  Do đó, đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$ có tiệm cận ngang $y = 0$ và đường tiệm cận đứng $x = 3$.
- Hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2+5x+6}$ có tập xác định $\mathscr{D} = (-3;-2) \cup (-2;+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2+5x+6}=0.$

$\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2+5x+6}=\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{\sqrt{x+3}}{(x+2)(x+3)}=\lim\limits_{x\to-3^-}\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x+3}}=+\infty.$

$\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2+5x+6}=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{\sqrt{x+3}}{(x+2)(x+3)}=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x+3}}=-\infty.$

$\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2+5x+6}=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{\sqrt{x+3}}{(x+2)(x+3)}=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x+3}}=-\infty.$

Do đó, đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2+5x+6}$ có 3 đường tiệm cận, trong đó có đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$, hai đường tiệm cận đứng là các đường thẳng $x=-3$ và $x=-2$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(|x|)=2018$ là

A 0. B 1. C 3. D 4.

Lời giải.

Hàm số $y=f(|x|)$ là hàm số chẵn và với $x\ge 0$ thì $f(|x|)=f(x)$. Do đó, từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=f(|x|)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\vert$	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(|x|)$, suy ra phương trình $f(|x|)=2018$ vô nghiệm.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\cos^3 x+9\cos x+6\sin^2 x-1$ là

A -2. B -1. C 1. D 2.

Lời giải.

Ta có $y=\cos^3 x+9\cos x+6\left(1-\cos^2 x\right)-1=\cos^3 x-6\cos^2 x+9\cos x+5$.

Đặt $t=\cos x$, ta xét hàm số $f(t)=t^3-6t^2+9t+5$, với $t\in[-1;1]$.

Ta có $f'(t)=3t^2-12t+9$, $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\notin(-1;1)\\ t=3\notin(-1;1).\end{array}\right.$

$f(-1) = -11$, $f(1) = 9$.
Suy ra $\max\limits_{[-1;1]} f(t) = 9$, $\min\limits_{[-1;1]} f(t) = -11$.
Do đó $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 9$, $\min\limits_{\mathbb{R}} y = -11$.
Từ đó $\min\limits_{\mathbb{R}} y + \max\limits_{\mathbb{R}} y = -11 + 9 = -2$.
Chọn đáp án A □

Câu 19. Tích phân $\int\limits_{-1}^{0} \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}\,\mathrm{d}x$ là

(A) $1-\sqrt{3}$. (B) $\sqrt{3}-1$. (C) $\sqrt{3}+1$. (D) $-\sqrt{3}-1$.

Lời giải.
Xét tích phân $I = \int\limits_{-1}^{0} \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}\,\mathrm{d}x$.
Đặt $u = \sqrt{1-2x} \Rightarrow u^2 = 1-2x \Rightarrow \mathrm{d}x = -u\,\mathrm{d}u$.
Đổi cận: $x = -1 \Rightarrow u = \sqrt{3}$; $x = 0 \Rightarrow u = 1$.
Do đó: $I = -\int\limits_{\sqrt{3}}^{1} \dfrac{1}{u}\cdot u\,\mathrm{d}u = \int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \mathrm{d}u = u\big|_1^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1$.
Chọn đáp án B □

Câu 20. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+5=0$. Giá trị của $(z_1-1)^{2018} + (z_2-1)^{2018}$ bằng

(A) $-2^{1010}i$. (B) $2^{1009}i$. (C) 0. (D) 2^{2018}.

Lời giải.
Phương trình $z^2-4z+5=0$ có hai nghiệm là $z_1 = 2-i$ và $z_2 = 2+i$.
Ta có

$$\begin{aligned}(z_1-1)^{2018} + (z_2-1)^{2018} &= (1-i)^{2018} + (1+i)^{2018}\\ &= \left[(1-i)^2\right]^{1009} + \left[(1+i)^2\right]^{1009}\\ &= (-2i)^{1009} + (2i)^{1009}\\ &= -(2i)^{1009} + (2i)^{1009} = 0.\end{aligned}$$

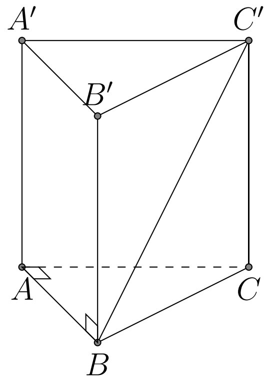
Chọn đáp án C □

Câu 21. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BB' là

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$. (B) a. (C) $\sqrt{2}a$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

Lời giải.

Từ giả thiết $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng có đáy ABC là tam giác vuông tại A ta có AB cắt và vuông góc với cả hai đường thẳng AC và BB' nên AB là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AC và BB'.
Bởi vậy, khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BB' là $AB = a$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Bạn Châu nhận học bổng Vallet 7 triệu đồng, mẹ cho bạn gửi tiết kiệm theo thể thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất 6,8% một năm. Hỏi sau bao nhiêu năm thì bạn Châu nhận được cả vốn lẫn lãi gần nhất với 10 triệu đồng? (Giả thiết rằng, lãi suất không thay đổi trong suốt thời gian bạn Châu gửi.)

A 5. (B) 6. (C) 7. (D) 8.

Lời giải.
Số tiền bạn Châu nhận được sau n năm là: $T_n = 7 \cdot (1{,}068)^n$ (triệu đồng).
Xét phương trình:

$$7 \cdot (1{,}068)^n = 10 \Leftrightarrow (1{,}068)^n = \frac{10}{7} \Leftrightarrow n = \log_{1{,}068} \frac{10}{7} \approx 5{,}42.$$

Sau 5 năm bạn Châu nhận được cả vốn lẫn lãi là : $T_5 = 7 \cdot (1{,}068)^5 \approx 9{,}726$ (triệu đồng).
Sau 6 năm bạn Châu nhận được cả vốn lẫn lãi là : $T_6 = 7 \cdot (1{,}068)^6 \approx 10{,}388$ (triệu đồng).
Như vậy, sau 5 năm thì bạn Châu nhận được cả vốn lẫn lãi gần nhất với 10 triệu đồng.
Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Lớp 11L có 32 học sinh chia đều thành 4 tổ. Đoàn trường chọn ngẫu nhiên 5 học sinh đi cổ vũ cho bạn Kiến Giang, lớp 11L, dự thi đường lên đỉnh Olympia. Xác suất để 5 bạn được chọn cùng một tổ là

(A) $\frac{5}{32}$. (B) $\frac{5}{31}$. (C) $\frac{32}{24273}$. **D** $\frac{1}{899}$.

Lời giải.
Gọi A là biến cố "5 bạn được chọn cùng một tổ đi cổ vũ cho bạn Kiến Giang". Số cách chọn 5 học sinh bất kì trong lớp $11L$ đi cổ vũ cho bạn Kiến Giang là: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{31}^5$.
32 học sinh chia đều thành 4 tổ nên mỗi tổ có 8 học sinh. Số cách chọn 5 học sinh cùng một tổ đi cổ vũ cho bạn Kiến Giang là: $n(A) = 3 \cdot \mathrm{C}_8^5 + \mathrm{C}_7^5$.
Xác suất để 5 bạn được chọn cùng một tổ là: $\mathrm{P} = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3 \cdot \mathrm{C}_8^5 + \mathrm{C}_7^5}{\mathrm{C}_{31}^5} = \dfrac{1}{899}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(1;2;3)$, $B(-3;-2;-1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là

(A) $x - y - z = 0$. (B) $x + y + z + 6 = 0$. (C) $x + y + z - 6 = 0$. **D** $x + y + z = 0$.

Lời giải.

Trung điểm M của đoạn thẳng AB có tọa độ $M = (-1; 0; 1)$.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4; -4; -4)$, nên suy ra mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; 1)$.
Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là

$$1 \cdot (x+1) + 1 \cdot (y-0) + 1 \cdot (z-1) = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0.$$

Chọn đáp án D □

Câu 25. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_2(\log_4 x) \cdot \log_4(\log_2 x) = 3$. Giá trị $\log_2 x_1 \cdot \log_2 x_2$ bằng

A -6. **B** 2. **C** 1. **D** $\sqrt[4]{2^{33}}$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}
& \log_2(\log_4 x) \cdot \log_4(\log_2 x) = 3 \\
\Leftrightarrow\ & \log_2(\log_{2^2} x) \cdot \log_{2^2}(\log_2 x) = 3 \\
\Leftrightarrow\ & \log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right) \cdot \left[\frac{1}{2}\log_2(\log_2 x)\right] = 3 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\log_2 \frac{1}{2} + \log_2(\log_2 x)\right] \cdot \left[\frac{1}{2}\log_2(\log_2 x)\right] = 3 \\
\Leftrightarrow\ & [-1 + \log_2(\log_2 x)] \cdot (\log_2(\log_2 x)) = 6.
\end{aligned}$$

Đặt $t = \log_2(\log_2 x)$, ta có phương trình

$$(-1+t)t = 6 \Leftrightarrow t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & t = 3 \\ & t = -2. \end{aligned}\right.$$

- Với $t = 3$, ta có: $\log_2(\log_2 x) = 3 \Leftrightarrow \log_2 x = 8$.
- Với $t = -2$, ta có: $\log_2(\log_2 x) = -2 \Leftrightarrow \log_2 x = \dfrac{1}{4}$.

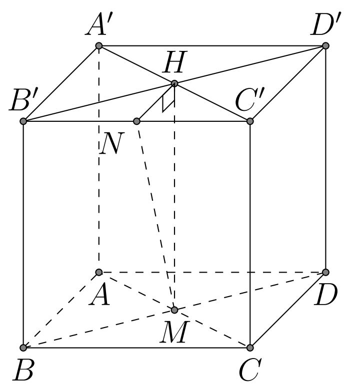
Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho thì $\log_2 x_1 \cdot \log_2 x_2 = 8 \cdot \dfrac{1}{4} = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và $B'C'$, α là góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(A'B'C'D')$. Giá trị $\sin\alpha$ bằng

A $\dfrac{1}{2}$. **B** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.



Gọi H là tâm hình vuông $A'B'C'D'$, ta có $MH \perp (A'B'C'D')$. Do đó

$$(MN, (A'B'C'D')) = (MN, NH) = \widehat{MNH}.$$

Ta có $MH = a$, $NH = \dfrac{a}{2}$ nên $MN = \sqrt{MH^2 + NH^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Do đó $\sin\widehat{MNH} = \dfrac{MH}{MN} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Cho tổng các hệ số của khai triển nhị thức $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ bằng 64. Số hạng không chứa x trong khai triển đó là

(A) 20. (B) 10. (C) 15. (D) 25.

Lời giải.

Tổng các hệ số của khai triển nhị thức $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ bằng 64, nên

$$\left(1+\frac{1}{1^2}\right)^n = 64 \Leftrightarrow 2^n = 64 \Leftrightarrow n = 6.$$

Số hạng tổng quát của khai triển $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^6$ là: $T_{k+1} = \mathrm{C}_6^k x^{6-k}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^k = \mathrm{C}_6^k x^{6-3k}$.

Số hạng không chứa x của khai triển ứng với $6-3k=0 \Leftrightarrow k=2$.

Vậy, số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức đã cho là $\mathrm{C}_6^2 = 15$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $\triangle ABC$ vuông tại A. Góc giữa 2 đường thẳng AB và SC bằng

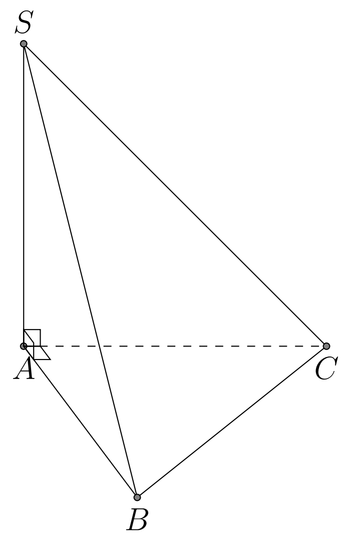
(A) $\dfrac{\pi}{4}$. (B) $\dfrac{3\pi}{4}$. (C) $\dfrac{\pi}{3}$. (D) $\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Từ $SA \perp (ABC)$ suy ra $SA \perp AB$.

Từ $AB \perp SA$ và $AB \perp AC$ suy ra $AB \perp SC$.

Như vậy, góc giữa 2 đường thẳng AB và SC bằng $\dfrac{\pi}{2}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha)\colon x+2y-z+4=0$ và cắt hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z}{2}$, $d'\colon \begin{cases} x = 3+t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$. Trong các điểm sau, điểm nào thuộc đường thẳng Δ?

(A) $M(6;5;-4)$. (B) $N(4;5;6)$. (C) $P(5;6;5)$. (D) $Q(4;4;5)$.

Lời giải.

Gọi A và B lần lượt là giao điểm của đường thẳng Δ với đường thẳng d và d'. Khi đó $A = (-3+s; 2-s; 2s)$, $B = (3+t; 3t; 2t)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (t-s+6; 3t+s-2; 2t-2s)$.
Mặt phẳng (α) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; -1)$.
Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) nên $\vec{n}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương, do đó

$$\begin{aligned} & \frac{t-s+6}{1} = \frac{3t+s-2}{2} = \frac{2t-2s}{-1} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \dfrac{t-s+6}{1} = \dfrac{3t+s-2}{2} \\ \dfrac{t-s+6}{1} = \dfrac{2t-2s}{-1} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} t+3s = 14 \\ t-s = -2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} t = 2 \\ s = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đó $A = (1; -2; 8)$, $B = (5; 6; 4) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (4; 8; -4)$. Do đó, đường thẳng Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; -1)$. Phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+2t \\ y = 8-t \end{cases}$.
Thay tọa độ các điểm M, N, P, Q vào phương trình đường thẳng Δ, chỉ có điểm Q thuộc đường thẳng Δ.
Chọn đáp án D □

Câu 30. Giá trị nguyên lớn nhất của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x^{2019}}{2019} - \dfrac{1}{2017x^{2017}} - mx + 2018$ luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó là

A 2018. **B** 0. **C** 2. **D** 1.

Lời giải.
Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Ta có $y' = x^{2018} + \dfrac{1}{x^{2018}} - m$.
Để hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó điều kiện cần và đủ là

$$\begin{aligned} & y' \geq 0, \forall x \neq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^{2018} + \frac{1}{x^{2018}} - m \geq, 0 \, \forall x \neq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & m \leq x^{2018} + \frac{1}{x^{2018}}, \forall x \neq 0 \quad (1). \end{aligned}$$

Ta lại có:

$$x^{2018} + \frac{1}{x^{2018}} \geq 2\sqrt{x^{2018} \cdot \frac{1}{x^{2018}}} = 2.$$

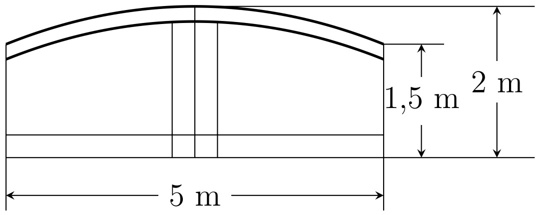
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \pm 1$.
Bởi vậy: $(1) \Leftrightarrow m \leq 2$.

Do đó, giá trị nguyên lớn nhất của tham số m để hàm số đã cho luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó là $m = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 31.

Ba Tí muốn làm cửa sắt được thiết kế như hình bên. Vòm cổng có hình dạng một parabol. Giá 1m^2 cửa sắt là 660000 đồng. Cửa sắt có giá (nghìn đồng) là

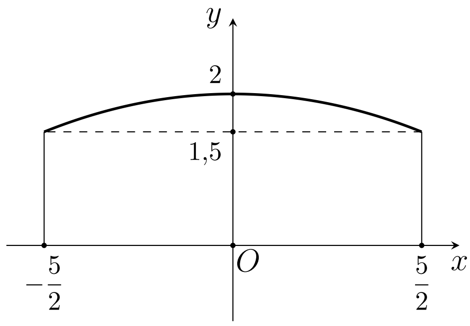


A 6500. **B** $\frac{55}{6} \cdot 10^3$.

C 5600. **D** 6050.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Khi đó, vòm cửa là một parabol có phương trình dạng $y = ax^2 + 2$.



Ta có $1{,}5 = a \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{25}$.

Như vậy $y = -\frac{2}{25}x^2 + 2$.

Diện tích của cửa sắt là

$$S = \int\limits_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} \left(-\frac{2}{25}x^2 + 2\right) \mathrm{d}x = \frac{55}{6} \ \left(\text{m}^2\right).$$

Vậy, giá tiền cửa sắt là

$$\frac{55}{6} \cdot 660000 = 6050000 \ (\text{đồng}) = 6050 \ (\text{nghìn đồng}).$$

Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 12$, $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(2\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x$ bằng

A -12. **B** 12. **C** 6. **D** -6.

Lời giải.

Xét tích phân $I = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(2\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 2\cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = -2\sin x\,\mathrm{d}x$ hay $\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = 1$, $x = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t = -1$.

Từ đó:

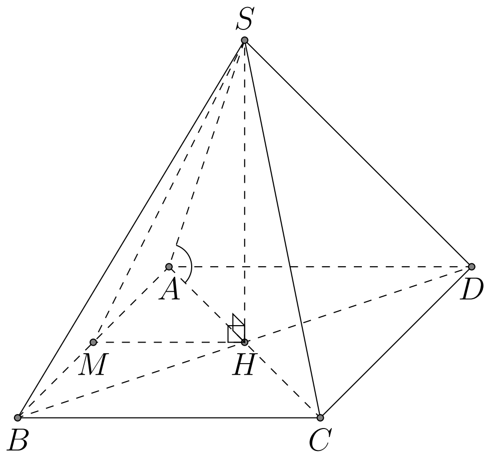
$$I = -\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6.$$

Chọn đáp án C □

Câu 33. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy góc 60°. Hình nón có đỉnh S, đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$ có diện tích xung quanh là

A $S=\dfrac{3}{2}\pi a^2$. **B** $S=\pi a^2$. **C** $S=\dfrac{\pi a^2(\sqrt{7}+1)}{4}$. **D** $S=\dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{4}$.

Lời giải.



Gọi H là tâm hình vuông $ABCD$, khi đó $SH\perp(ABCD)$. Từ đó ta có góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy $(ABCD)$ bằng góc $\widehat{SAH}\Rightarrow\widehat{SAH}=60^\circ$.

Ta có $AH=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $SH=AH\tan SAH=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\tan 60^\circ=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Gọi M là trung điểm AB thì $SM=\sqrt{SH^2+HM^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Hình nón có đỉnh S, đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$ có:

- Bán kính đáy $r=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a}{2}$.
- Độ dài đường sinh $l=SM=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Vậy, diện tích xung quanh của hình nón đó là $S=\pi rl=\pi\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{7}}{2}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2017^{\sin^2 x}+2018^{\cos^2 x}=m\cdot 2019^{\cos^2 x}$ có nghiệm?

A 2016. **B** 2017. **C** 2018. **D** 2019.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&2017^{\sin^2 x}+2018^{\cos^2 x}=m\cdot 2019^{\cos^2 x}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{2017^{\sin^2 x}}{2019^{\cos^2 x}}+\frac{2018^{\cos^2 x}}{2019^{\cos^2 x}}=m\\
\Leftrightarrow\ &2017\cdot\left(\frac{1}{2017\cdot 2019}\right)^{\cos^2 x}+\left(\frac{2018}{2019}\right)^{\cos^2 x}=m\quad(*)
\end{aligned}$$

Vì $0<\dfrac{1}{2017\cdot 2019}<1$, $0<\dfrac{2018}{2019}<1$ và $0<\cos^2 x\le 1$ nên

- $2017 \cdot \left(\dfrac{1}{2017 \cdot 2019}\right)^1 \leq 2017 \cdot \left(\dfrac{1}{2017 \cdot 2019}\right)^{\cos^2 x} \leq 2017 \cdot \left(\dfrac{1}{2017 \cdot 2019}\right)^0$.

  Hay $\dfrac{1}{2019} \leq 2017 \cdot \left(\dfrac{1}{2017 \cdot 2019}\right)^{\cos^2 x} \leq 2017 \quad (1)$.
- $\left(\dfrac{2018}{2019}\right)^1 \leq \left(\dfrac{2018}{2019}\right)^{\cos^2 x} \leq \left(\dfrac{2018}{2019}\right)^0$.

  Hay $\dfrac{2018}{2019} \leq \left(\dfrac{2018}{2019}\right)^{\cos^2 x} \leq 1 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) ta có

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2019} + \frac{2018}{2019} \leq 2017 \cdot \left(\frac{1}{2017 \cdot 2019}\right)^{\cos^2 x} + \left(\frac{2018}{2019}\right)^{\cos^2 x} \leq 2017 + 1 \\ \Leftrightarrow\ & 1 \leq 2017 \cdot \left(\frac{1}{2017 \cdot 2019}\right)^{\cos^2 x} + \left(\frac{2018}{2019}\right)^{\cos^2 x} \leq 2018. \end{aligned}$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm. Từ đánh giá trên ta có điều kiện để phương trình có nghiệm là $1 \leq m \leq 2018$.

Vậy có 2018 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Giá trị lớn nhất của m để phương trình $\cos x + \sin^{2018} 5x + m = 0$ có nghiệm là

A -1. B 0. C 1. D $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\cos x + \sin^{2018} 5x + m = 0 \Leftrightarrow \cos x + \sin^{2018} 5x = -m \quad (1)$.

Từ $\cos x \geq -1$, $\sin^{2018} 5x \geq 0$, suy ra $\cos x + \sin^{2018} 5x \geq -1$.

$\cos x + \sin^{2018} 5x = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$, với $k \in \mathbb{R}$.

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $-m \geq -1 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Vậy, giá trị lớn nhất của m để phương trình đã cho có nghiệm là $m = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; \pi] \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \tan x$, $\forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4}\right) \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$, $f(0) = 0$, $f(\pi) = 1$. Tỉ số giữa $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ và $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ bằng

A $2\left(\log_2 \mathrm{e} + 1\right)$. B 2. C $\dfrac{2(1 + \ln 2)}{2 + \ln 2}$. D $2\left(1 - \log_2 \mathrm{e}\right)$.

Lời giải.

- Trên nửa khoảng $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, ta có:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(0) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

$$= -\left(\ln\cos\frac{\pi}{4} - \ln\cos 0\right)$$
$$= -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Suy ra $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\ln 2 + f(0) = \frac{1}{2}\ln 2 \quad (1)$.

- Trên nửa khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$, ta có:

$$\begin{aligned} f(\pi) - f\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \tan x\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \\ &= -\left(\ln|\cos\pi| - \ln\left|\cos\frac{2\pi}{3}\right|\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2. \end{aligned}$$

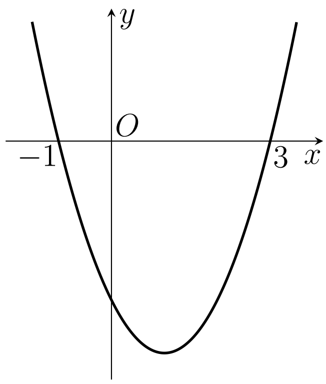
Suy ra $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = f(\pi) + \ln 2 = 1 + \ln 2 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) ta có $\dfrac{f\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{f\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{1+\ln 2}{\frac{1}{2}\ln 2} = 2\left(\dfrac{1}{\ln 2} + 1\right) = 2\left(\log_2 \mathrm{e} + 1\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 37.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên tập $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(1-x^2)$ đạt cực đại tại các điểm



A $x = -1$. **B** $x = 3$. **C** $x = 0$. **D** $x = \pm\sqrt{2}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(1-x^2)$. Ta có $y' = -2xf'(1-x^2)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 1-x^2 = -1 \\ 1-x^2 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2}. \end{array}\right.$ Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta suy ra

- $f'(1-x^2) < 0 \Leftrightarrow -1 < 1-x^2 < 3 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.
- $f'(1-x^2) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x^2 < -1 \\ 1-x^2 > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \sqrt{2} \\ x < -\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(1-x^2)$ là

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$-2x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
$f'(1-x^2)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = f(1-x^2)$ đạt cực đại tại hai điểm $x = \pm\sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị của m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |-x^4 + 8x^2 + m|$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng 2018?

(A) 0. (B) 2. (C) 4. (D) 6.

Lời giải.

Ta có $y = |-x^4 + 8x^2 + m| = \left|(x^2-4)^2 - m - 16\right|$.

Đặt $(x^2-4)^2 = t$. Khi $x \in [-1; 3]$ thì $t \in [0; 25]$.

Khi đó ta có $y = f(t) = |t - m - 16|$. Ta có $\max\limits_{[-1;3]} y = \max\limits_{[0;25]} f(t) = \max\{|m+16|, |9-m|\}$.

- **Trường hợp 1**: $\begin{cases} |m+16| > |9-m| \\ |m+16| = 2018 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2002.$
- **Trường hợp 2**: $\begin{cases} |m+16| < |9-m| \\ |9-m| = 2018 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2009.$
- **Trường hợp 3**: $\begin{cases} |m+16| = |9-m| \\ |m+16| = 2018 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing.$

Vậy, có hai giá trị của m thỏa mãn đề bài là $m = -2009$ và $m = 2002$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z| = \sqrt{5}$, $w = (4-3i)z + 1 - 2i$. Giá trị nhỏ nhất của $|w|$ là

(A) $3\sqrt{5}$. (B) $4\sqrt{5}$. (C) $5\sqrt{5}$. (D) $6\sqrt{5}$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $w = (4-3i)z + 1 - 2i \Rightarrow z = \dfrac{w-1+2i}{4-3i}$.

Nên $|z| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left|\dfrac{w-1+2i}{4-3i}\right| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |w-1+2i| = 5\sqrt{5}$.

Vậy, tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn $I(1; -2)$ và bán kính $R = 5\sqrt{5}$.

Ta có $OI = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} < R$.

Do đó $\min|w| = R - OI = 5\sqrt{5} - \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Trong mặt phẳng Oxy, có bao nhiêu điểm mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x + 1$ sao cho hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau?

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** vô số.

Lời giải.

Ta có $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x + 1 \Rightarrow y' = x^2 - x + 1$.

Gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x + 1$.

Để hai tiếp tuyến tại A và B của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x + 1$ vuông góc với nhau thì $y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1$.

Do

$$\begin{aligned} y'(x_1) \cdot y'(x_2) &= \left(x_1^2 - x_1 + 1\right) \cdot \left(x_2^2 - x_2 + 1\right) \\ &= \left[\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] \cdot \left[\left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] > 0 \end{aligned}$$

nên không tồn tại hai điểm A, B trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x + 1$ để hai tiếp tuyến tại A và B vuông góc với nhau.

Vậy, trong mặt phẳng Oxy, không có điểm nào mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x + 1$ sao cho hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(2;-2;2)$, $A'(3;0;-1)$, điểm M thuộc cạnh DC. Giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách $AM + MC'$ là

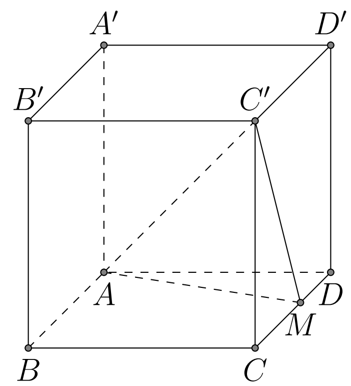
A $\sqrt{17}$. **B** $\sqrt{17 + 4\sqrt{6}}$. **C** $\sqrt{17 + 8\sqrt{3}}$. **D** $\sqrt{17 + 6\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AA'} = (2;0;-2)$, $\overrightarrow{AB} = (1;1;1)$. $\overrightarrow{AD} = (1;-2;1)$.

Theo quy tắc hình hộp ta có

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC'} \Rightarrow C'(5;-1;1).$$



Đường thẳng DC đi qua điểm D và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (1;1;1)$ có phương trình: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 + t \\ z = 2 + t. \end{cases}$

Gọi $M(2+t; -2+t; 2+t) \in DC$. Ta có $AM = \sqrt{3t^2 + 6}$, $C'M = \sqrt{3t^2 - 6t + 11} = \sqrt{3(1-t)^2 + 8}$.

Ta có

$$\begin{aligned} AM + C'M &= \sqrt{3t^2 + 6} + \sqrt{3(1-t)^2 + 8} \\ &\geq \sqrt{(\sqrt{3}t + \sqrt{3} - \sqrt{3}t)^2 + (\sqrt{6} + \sqrt{8})^2} \\ &= \sqrt{17 + 8\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Dấu "=" khi và chỉ khi $\dfrac{\sqrt{3}t}{\sqrt{3}(1-t)} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}} \Leftrightarrow t = 2\sqrt{3} - 3$.

Khi đó $M(2\sqrt{3}-1;2\sqrt{3}-5;2\sqrt{3}-1)$.
Vậy, giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách $AM+MC'$ là $\sqrt{17+8\sqrt{3}}$.
Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho dãy (u_n): $u_1=\mathrm{e}^3, u_{n+1}=u_n^2$, $k\in\mathbb{N}^*$ thỏa mãn $u_1\cdot u_2\cdots u_k=\mathrm{e}^{765}$. Giá trị của k là

(A) 6. (B) 7. (C) 8. (D) 9.

Lời giải.
Đặt $v_n=3\cdot 2^{n-1}$ thì $u_n=\mathrm{e}^{v_n}$, với $n\in\mathbb{N}^*$.
Ta có $v_1+v_2+\cdots+v_k=3\cdot\dfrac{1-2^k}{1-k}$.
Bởi vậy

$$\begin{aligned}
& u_1\cdot u_2\cdots u_k=\mathrm{e}^{765}\\
\Leftrightarrow\ & 3\cdot\frac{1-2^k}{1-2}=765\\
\Leftrightarrow\ & 2^k-1=255\\
\Leftrightarrow\ & 2^k=256\\
\Leftrightarrow\ & k=8.
\end{aligned}$$

Vậy $k=8$.
Chọn đáp án C □

Câu 43. Số nguyên bé nhất của tham số m sao cho hàm số $y=|x|^3-2mx^2+5|x|-3$ có 5 điểm cực trị là

(A) -2. (B) 2. (C) 5. (D) 0.

Lời giải.
Hàm số $y=|x|^3-2mx^2+5|x|-3$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=f(x)=x^3-2mx^2+5x-3$ có 2 điểm cực trị dương.
Ta có $f'(x)=3x^2-4mx+5$. Hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị dương

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ P>0\\ S>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m^2-15>0\\ \dfrac{5}{3}>0\\ \dfrac{4m}{3n}>0\end{cases}\Leftrightarrow m>\frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Do đó, số nguyên bé nhất của tham số m sao cho hàm số $y=|x|^3-2mx^2+5|x|-3$ có 5 điểm cực trị là 2.
Chọn đáp án B □

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;1)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất là

(A) $2x-y+z+6=0$. (B) $2x-y+z-6=0$.
(C) $2x+y+z-6=0$. (D) $2x+y-z-6=0$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (P). Khi đó, khoảng cách từ O đến mặt phẳng (P) bằng OH. Do đó, mặt phẳng (P) đi qua A và cách O một khoảng lớn nhất khi $H \equiv A$, hay $OA \perp (P)$.
Mặt phẳng (P) đi qua $A(2;-1;1)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{OA} = (2;-1;1)$. Phương trình mặt phẳng (P) là

$$2 \cdot (x-2) + (-1) \cdot (y+1) + 1 \cdot (z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + z - 6 = 0.$$

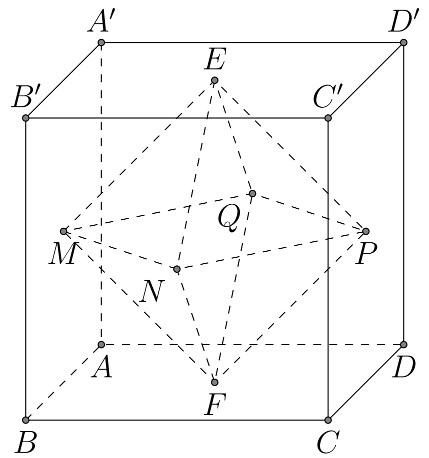
Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho hình hộp chữ nhật có độ dài các cạnh là 3, 4, 5. Nối tâm 6 mặt của hình hộp chữ nhật ta được khối 8 mặt. Thể tích của khối 8 mặt đó là

A 10. **B** $10\sqrt{2}$. **C** 12. **D** $\dfrac{75}{12}$.

Lời giải.

Gọi $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật có $AB = 3$, $AD = 4$, $AA' = 5$. Nối tâm 6 mặt của hình hộp chữ nhật ta được khối 8 mặt là $MNPQEF$.
Ta có $MP \perp NQ$, $EF \perp (MNPQ)$, $MP = AD = 4$, $NQ = AB = 3$ và $EF = AA' = 5$.
Thể tích khối 8 mặt $MNPQEF$ là



$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot S_{MNPQ} \cdot EF \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot MP \cdot NQ \cdot EF \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \\ &= 10. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 46. Cho số phức z_0 có $|z_0| = 2018$. Diện tích của đa giác có các đỉnh là các điểm biểu diễn của z_0 và các nghiệm của phương trình $\dfrac{1}{z+z_0} = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z_0}$ được viết dạng $n\sqrt{3}$, $n \in \mathbb{N}$. Chữ số hàng đơn vị của n là

A 9. **B** 8. **C** 3. **D** 2.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} z \neq 0 \\ z + z_0 \neq 0. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+z_0} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z_0} &\Leftrightarrow zz_0 = (z+z_0)z + (z+z_0)z_0 \\ &\Leftrightarrow z^2 + z_0 z + z_0^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_0 \\ z = \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_0. \end{array}\right.$$

Như vậy, phương trình $\dfrac{1}{z+z_0} = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z_0}$ có hai nghiệm là $z_1 = \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_0$ và $z_2 = \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_0$.

Gọi M_0, M_1, M_2 lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức z_0, z_1, z_2.

$M_0M_1 = |z_1 - z_0| = \left|\left(-\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_0\right| = \left|-\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right| \cdot |z_0| = 2018\sqrt{3}$.

$M_0M_2 = |z_2 - z_0| = \left|\left(-\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_0\right| = \left|-\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right| \cdot |z_0| = 2018\sqrt{3}$.

$M_1M_2 = |z_2 - z_1| = \left|\left(\sqrt{3}i\right) z_0\right| = 2018\sqrt{3}$.

Như vậy, tam giác $M_0M_1M_2$ là tam giác đều cạnh bằng $2018\sqrt{3}$. Diện tích của tam giác $M_0M_1M_2$ là

$$S = \frac{\left(2018\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 3054243\sqrt{3}.$$

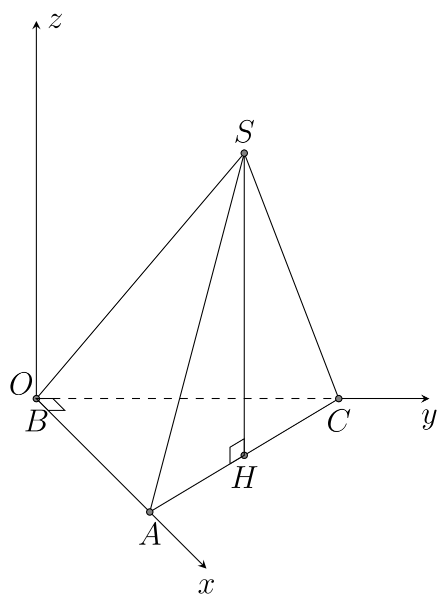
Do đó $n = 3054243$, chữ số hàng đơn vị của n là 3.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\triangle ABC$ vuông tại B, $AB = 1$, $BC = \sqrt{3}$, $\triangle SAC$ đều, mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi α là số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC). Giá trị $\cos\alpha$ bằng

A $\dfrac{2\sqrt{65}}{65}$. B $\dfrac{\sqrt{65}}{20}$. C $\dfrac{\sqrt{65}}{10}$. D $\dfrac{\sqrt{65}}{65}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AC, khi đó $SH \perp AC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2$, suy ra $SH = \dfrac{AC\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, ta có $B(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $C(0;\sqrt{3};0)$, $H\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và $S\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{3}\right)$.

- $\overrightarrow{BA}=(1;0;0)$, $\overrightarrow{BS}=\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{3}\right)$,
  $\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BS}\right]=\left(0;-\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
  Suy ra, mặt phẳng (SAB) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(0;-2;1)$.
- $\overrightarrow{BC}=(0;\sqrt{3};0)$, $\overrightarrow{BS}=\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{3}\right)$,
  $\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BS}\right]=\left(3;0;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
  Suy ra, mặt phẳng (SAC) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2=(2\sqrt{3};0;-1)$.

Do đó

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_2|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{\left|0\cdot(2\sqrt{3})+(-2)\cdot 0+1\cdot(-1)\right|}{\sqrt{0^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{(2\sqrt{3})^2+0^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{65}}{65}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(3;4;0)$ và đường thẳng $\Delta\colon \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-4}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt Δ tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác IAB bằng 12 là

A $(x+3)^2+(y+4)^2+z^2=25$.
B $(x-3)^2+(y-4)^2+z^2=5$.
C $(x-3)^2+(y+4)^2+z^2=5$.
D $(x-3)^2+(y-4)^2+z^2=25$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;2;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}(1;1;-4)$.
Ta có $\overrightarrow{IM}=(-2;-2;-1)\Rightarrow\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]=(9;-9;0)\Rightarrow\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|=9\sqrt{2}$.
Khoảng cách từ I đến đường thẳng Δ là

$$\mathrm{d}(I,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{18}}=3.$$

Diện tích tam giác IAB bằng 12 nên

$$AB=\frac{2S_{IAB}}{\mathrm{d}(I,\Delta)}=\frac{2\cdot 12}{3}=8.$$

Bán kính mặt cầu (S) là

$$R=\sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2+[\mathrm{d}(I,\Delta)]^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5.$$

Phương trình mặt cầu (S) là

$$(x-3)^2+(y-4)^2+z^2=25.$$

Chọn đáp án D □

Câu 49. Có 8 bạn cùng ngồi xung quanh một cái bàn tròn, mỗi bạn cầm một đồng xu như nhau. Tất cả 8 bạn cùng tung đồng xu của mình, bạn có đồng xu ngửa thì đứng, bạn có đồng xu sấp thì ngồi. Xác suất để không có hai bạn liền kề cùng đứng là

A $\frac{47}{256}$. **B** $\frac{49}{256}$. **C** $\frac{51}{256}$. **D** $\frac{3}{16}$.

Lời giải.

Gọi A là biến cố "không có hai người liền kề cùng đứng".

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 2^8 = 256$.

Rõ ràng nếu nhiều hơn 4 đồng xu ngửa thì biến cố A không xảy ra.

Để biến cố A xảy ra ta có các trường hợp sau:

- **Trường hợp 1:** Có nhiều nhất 1 đồng xu ngửa. Kết quả của trường hợp này là $1 + 8 = 9$.
- **Trường hợp 2:** Có 2 đồng xu ngửa.
  2 đồng xu ngửa kề nhau, có 8 khả năng.
  Suy ra, số kết quả của trường hợp này là $\mathrm{C}_8^2 - 8 = 20$.
- **Trường hợp 3:** Có 3 đồng xu ngửa.
  Cả 3 đồng xu ngửa kề nhau, có 8 khả năng.
  Trong 3 đồng xu ngửa có đúng 2 đồng xu ngửa kề nhau, có $8 \cdot 4 = 32$ kết quả. Suy ra, số kết quả của trường hợp này là $\mathrm{C}_8^3 - 8 - 32 = 16$.
- **Trường hợp 4:** Có 4 đồng xu ngửa.
  Trường hợp này có 2 kết quả thỏa mãn biến cố A xảy ra.

Như vậy: $n(A) = 9 + 20 + 16 + 2 = 47$.

Xác suất để không có hai bạn liền kề cùng đứng là : $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{47}{256}$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f'(x) = \tan x \cdot f(x)$, $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $f(0) = 1$. Khi đó $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\frac{1+\pi}{4}$. **B** $\frac{\pi}{4}$. **C** $\ln\frac{1+\pi}{4}$. **D** 0.

Lời giải.

Từ $f'(x) = \tan x \cdot f(x)$, $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ và $y = f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, nên trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, ta có

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)} = \tan x \quad &\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \tan x\,\mathrm{d}x\\ &\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x\\ &\Rightarrow \ln f(x) = -\ln(\cos x) + C.\end{aligned}$$

Mặt khác $f(0) = 1$ nên $\ln f(0) = -\ln(\cos 0) + C \Rightarrow C = 0$.

Như vậy $\ln f(x) = -\ln(\cos x) \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Từ đó $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

Chọn đáp án B □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. A	3. C	4. B	5. D	6. D	7. A	8. B	9. B	10. B
11. C	12. A	13. A	14. C	15. D	16. D	17. A	18. A	19. B	20. C
21. B	22. A	23. D	24. D	25. B	26. B	27. C	28. D	29. D	30. C
31. D	32. C	33. D	34. C	35. C	36. A	37. D	38. B	39. B	40. A
41. C	42. C	43. B	44. B	45. A	46. C	47. D	48. D	49. A	50. B

100 ĐỀ THI THỬ THPTQG LẦN 2 - CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG - NAM ĐỊNH - 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$ $\searrow$		$f(-1)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x) - 2 - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt?

(A) 5. (B) 4. **(C) 3.** (D) 2.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $f(x) = m + 2$. Từ bảng biến thiên, phương trình này có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-1 < m + 2 < 3 \Leftrightarrow -3 < m < 1$. Do đó, có ba số nguyên m thỏa mãn là $-2, -1, 0$.

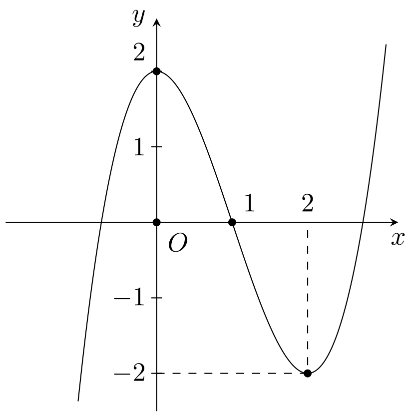
Chọn đáp án (C) □

Câu 2.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A) $y = x^3 - 3x^2 + 2$. (B) $y = x^3 + 3x^2 + 2$.

(C) $y = -x^3 + 3x^2 + 2$. (D) $y = x^3 - 3x^2 + 1$.



Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ta có $a > 0$. Đồ thị cắt trục Oy tại $(0; 2)$ nên $d = 2$. Hàm số có hai điểm cực trị là $x = 0$ và $x = 2$.

Vậy hàm số có đồ thị như hình trên là $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3; 3; 0)$, $B(3; 0; 3)$ và $C(0; 3; 3)$. Tìm tọa độ điểm I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

(A) $I(2; 3; 2)$. (B) $I(2; 2; 0)$. **(C) $I(2; 2; 2)$.** (D) $I(0; 2; 2)$.

Lời giải.

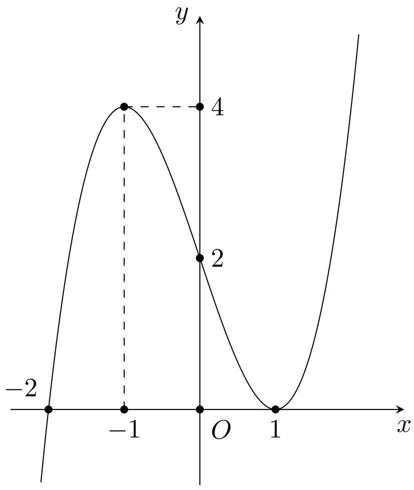
Vì $AB = BC = AC = 3\sqrt{2}$ nên tam giác ABC đều. Do đó, tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cũng là trọng tâm tam giác ABC. Suy ra $I(2;2;2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x) - 4x$ là

(A) 2. (B) 3. **(C) 1.** (D) 4.



Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = x_0 \end{array}\right.$ $(x_0 > 1)$. Trong đó, hàm $g'(x)$ chỉ đổi dấu khi qua giá trị $x = x_0$. Do vậy, hàm số $g(x)$ có đúng một điểm cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x + 1}$ bằng

(A) 0. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $+\infty$. (D) $-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x + 1} = \dfrac{\sqrt{1} - 1}{1 + 1} = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Hình tứ diện đều có bao nhiêu tâm đối xứng?

(A) 1. (B) 4. (C) 2. **(D) 0.**

Lời giải.

Tứ diện đều không có tâm đối xứng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Tìm phần thực, phần ảo của số phức $z = \dfrac{3 - i}{1 + i} + \dfrac{2 + i}{i}$.

(A) Phần thực là 2, phần ảo là -4. (B) Phần thực là 2, phần ảo là $4i$.

(C) Phần thực là 2, phần ảo là 4. (D) Phần thực là 2, phần ảo là $-4i$.

Lời giải.

Ta có $z = \dfrac{(3 - i)(1 - i)}{2} + \dfrac{(2 + i)(-i)}{1} = 2 - 4i$. Vậy số phức z có phần thực là 2, phần ảo là -4.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4	$\searrow$	-5

Phát biểu nào sau đây đúng?

A $f(x)$ có đúng 3 cực trị.

B $f(x)$ có đúng một cực tiểu.

C $f(x)$ có đúng một cực đại và không có cực tiểu.

D $f(x)$ có đúng hai điểm cực trị.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy rằng hàm số $f'(x)$ chỉ đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm $x = 1$ và $f(1) = 3$. Do đó, hàm số $f(x)$ có đúng một cực đại và không có cực tiểu.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): \ x^2+y^2+z^2+2x+4y+2z-5=0$. Tính bán kính r của mặt cầu trên.

A $r = \sqrt{3}$. **B** $r = 1$. **C** $r = \sqrt{11}$. **D** $r = 3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Bán kính mặt cầu (S) là $r = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2 + 5} = \sqrt{11}$.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Một người vay vốn ngân hàng với số tiền 100000000 đồng. Người đó dự định sau 5 năm thì trả hết nợ. Để trả hết nợ ngân hàng trong đúng 5 năm thì người đó phải trả đều đặn hàng tháng với số tiền là a đồng. Biết lãi suất hàng tháng là 1,2%. Hỏi giá trị của a gần nhất với số nào trong các số sau?

A 2150600 đồng. **B** 2120600 đồng. **C** 2347600 đồng. **D** 2435600 đồng.

Lời giải.

- Sau tháng thứ nhất, số tiền còn nợ sau khi trả a đồng là $100000000(1 + 0{,}012) - a$ đồng.
- Sau tháng thứ hai, số tiền còn nợ sau khi trả thêm a đồng là

$$100000000(1 + 0{,}012)^2 - a(1 + 0{,}012) - a.$$

- ...
- Sau đúng 5 năm (60 tháng), số tiền còn nợ sau khi trả thêm a đồng là

$$100000000(1 + 0{,}012)^{60} - \frac{a\left((1{,}012)^{59} - 1\right)}{0{,}012}.$$

Phương trình $100000000(1 + 0{,}012)^{60} - \dfrac{a\left((1{,}012)^{59} - 1\right)}{0{,}012} = 0 \Leftrightarrow a \approx 2403367{,}299$.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Cho các mệnh đề:

(I) Số phức $z = 2i$ là số thuần ảo.

(II) Nếu số phức z có phần thực là a, số phức z' có phần thực là a' thì số phức $z \cdot z'$ có phần thực là $a \cdot a'$.

(III) Tích của hai số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ và $z' = a' + b'i$ $(a, b \in \mathbb{R})$ là số phức có phần ảo là $ab' + a'b$.

Số mệnh đề đúng trong ba mệnh đề trên là

A 0. **B** 3. **C** 2. **D** 1.

Lời giải.

Ta có $z \cdot z' = (a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$. Do đó, chỉ có hai mệnh đề đúng là (I) và (III).

Chọn đáp án **C** □

Câu 12. Biết $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\sin x - 2\cos x}{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)(\cos 2x + 1)}\,\mathrm{d}x = a + b\ln 2$, với a, b là các số nguyên. Tính $S = a \cdot b$.

A $S = 10$. **B** $S = -6$. **C** $S = 6$. **D** $S = 4$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{4\sin x - 2\cos x}{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)(\cos 2x + 1)} &= \frac{2\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)\cos^2 x} \\ &= \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3}{(\sin x + \cos x)\cos x} \\ &= \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3}{\cos^2 x(\tan x + 1)}.\end{aligned}$$

Suy ra $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\sin x - 2\cos x}{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)(\cos 2x + 1)}\,\mathrm{d}x = (2\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 3\ln|\tan x + 1|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 - 3\ln 2.$

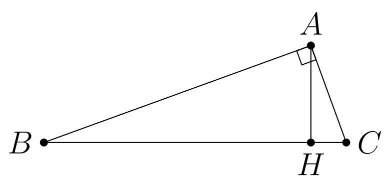
Vậy $S = a \cdot b = 2 \cdot (-3) = -6$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 13. Cho tam giác ABC vuông tại A, AH vuông góc với BC tại H, $HB = 3{,}6$ cm, $HC = 6{,}4$ cm. Quay miền tam giác ABC quanh đường thẳng AH ta thu được khối nón có thể tích V bằng bao nhiêu?

A $V = 205{,}89\text{ cm}^3$. **B** $V = 65{,}54\text{ cm}^3$. **C** $V = 617{,}66\text{ cm}^3$. **D** $V = 65{,}14\text{ cm}^3$.

Lời giải.



Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC ta có $AH^2 = BH \cdot CH = 23{,}04$. Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AH ta được khối nón có bnas kính đáy là $HC = 6,4$ cm và chiều cao $AH = \sqrt{23{,}04}$.

D0 đó $V = \dfrac{1}{3}\pi HC^2 \cdot AH \approx 205{,}89\text{ cm}^3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức thỏa mãn $\begin{cases}|\overline{z}-2+5i|=2\\|z-5-i|=3\end{cases}$. Hỏi tập S có bao nhiêu phần tử?

(A) 0. (B) 2. (C) Vô số. **D** 1.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}(a-2)^2+(5-b)^2=4\\(a-5)^2+(b-1)^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{16}{5}\\b=\dfrac{17}{5}\end{cases}.$$

Như vậy tập S chỉ có một phần tử là $z=\dfrac{16}{5}+\dfrac{17}{5}i$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^x$ là

(A) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=3^x+C$. (B) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=3^x\ln 3+C$.

(C) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3^{x+1}}{x+1}+C$. **D** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3^x}{\ln 3}+C$.

Lời giải.

Theo công thức nguyên hàm thì $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3^x}{\ln 3}+C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2}>\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-5}$.

(A) $(-\infty;-3)$. **B** $(3;+\infty)$. (C) $(-3;+\infty)$. (D) $(-\infty;3)$.

Lời giải.

Ta có $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2}>\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-5}\Leftrightarrow x-2<2x-5\Leftrightarrow x>3$.

Do đó tập nghiệm của bất phương trình là $(3;+\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang.

(B) Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang.

(C) Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng và 1 đường tiệm cận ngang.

D Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng và 1 đường tiệm cận ngang.

Lời giải.

Với điều kiện $x\neq\pm1$, ta có $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=1$ nên $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\displaystyle\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=0$ và $\displaystyle\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=0$; $\displaystyle\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=+\infty$.

Vậy đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng và 1 đường tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Cho $a > 0$, $a \neq 1$, x, y là các số thực dương. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A $\log_a \dfrac{x}{y^2} = \dfrac{\log_a x}{2\log_a y}$.

B $\log_a \dfrac{x}{y^2} = \log_a x - \dfrac{1}{2}\log_a y$.

C $\log_a \dfrac{x}{y^2} = \dfrac{1}{2}(\log_a x - \log_a y)$.

D $\log_a \dfrac{x}{y^2} = \log_a x - 2\log_a y$.

Lời giải.

Ta có $\log_a \dfrac{x}{y^2} = \log_a x - 2\log_a y$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng 1, biết $SO = \sqrt{2}$ và vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB.

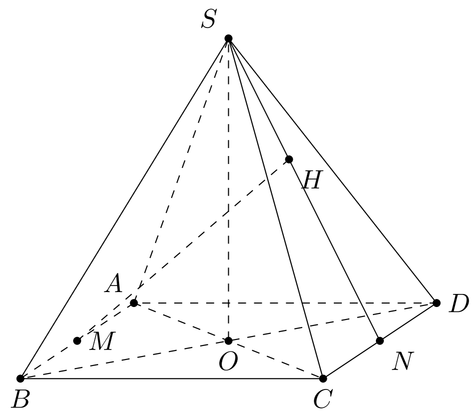
A $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **B** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C** $\sqrt{2}$. **D** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Vì $AB \parallel (SCD)$ nên $d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(M, (SCD))$, trong đó M là trung điểm của AB.

Gọi N là trung điểm của CD và H là hình chiếu vuông góc của M trên (SCD) thì $H \in SN$. Tính được $SN = \sqrt{SO^2 + \dfrac{BC^2}{4}} = \dfrac{3}{2}$ và $S_{\triangle SMN} = \dfrac{1}{2}SO \cdot MN = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Do đó $d(AB, SC) = d(M, (SCD)) = MH = \dfrac{2S_{\triangle SMN}}{SN} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.



Chọn đáp án D □

Câu 20. Viết công thức tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \ln 4$, biết khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ x $(0 \leq x \leq \ln 4)$, ta được thiết diện là một hình vuông có độ dài cạnh là $\sqrt{xe^x}$.

A $V = \displaystyle\int_0^{\ln 4} xe^x \,dx$.

B $V = \pi \displaystyle\int_0^{\ln 4} xe^x \,dx$.

C $V = \pi \displaystyle\int_0^{\ln 4} (xe^x)^2 \,dx$.

D $V = \displaystyle\int_0^{\ln 4} \sqrt{xe^x} \,dx$.

Lời giải.

Theo định nghĩa ta có $V = \displaystyle\int_0^{\ln 4} xe^x \,dx$.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm A(0; 1; 2) và hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t, \\ z = 2 + t \end{cases}$ $d_2 : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và song song với hai đường thẳng d_1, d_2.

Ⓐ $(\alpha): x+3y-5z-13=0$.
Ⓑ $(\alpha): 3x+y+z+13=0$.
Ⓒ $(\alpha): x+2y+z-13=0$.
D $(\alpha): x+3y+5z-13=0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (α) song song với hai đường thẳng d_1, d_2
suy ra $\vec{n}_{(\alpha)} = [\vec{n}_{d_1}, \vec{n}_{d_2}] = (1;3;5)$.
Vậy $(\alpha): 1(x-0)+3(y-1)+5(z-2)=0 \Leftrightarrow x+3y+5z-13=0$.
Chọn đáp án D □

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+3}{-1}$. Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là

Ⓐ $\vec{u} = (2;3;1)$.
Ⓑ $\vec{u} = (-2;-1;3)$.
C $\vec{u} = (2;1;-1)$.
Ⓓ $\vec{u} = (-2;1;-3)$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng có dạng $\dfrac{x-x_o}{a} = \dfrac{y-y_o}{b} = \dfrac{z-z_o}{c}$ với $(a;b;c)$ là một véc-tơ chỉ phương.
Vậy $\vec{u} = (2;1;-1)$.
Chọn đáp án C □

Câu 23. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^1 8^x\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ $I = 8$.
Ⓑ $I = \dfrac{8}{3\ln 2}$.
C $I = \dfrac{7}{3\ln 2}$.
Ⓓ $I = 7$.

Lời giải.

$\displaystyle\int_0^1 8^x\,\mathrm{d}x = \left.\dfrac{8^x}{\ln 8}\right|_0^1 = \dfrac{7}{3\ln 2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 24. Cho đa giác đều $2n$ đỉnh, lấy ngẫu nhiên một đường chéo của đa giác này thì xác suất để đường chéo được chọn có độ dài lớn nhất bằng $\dfrac{1}{9}$. Tìm n.

Ⓐ $n = 4$.
B $n = 6$.
Ⓒ $n = 10$.
Ⓓ $n = 5$.

Lời giải.

Ta có đường chéo có độ dài lớn nhất của đa giác là đường chéo đi qua tâm $\Rightarrow$ đa giác có $2n$ đỉnh thì có n đường chéo lớn nhất.
Xác suất để đường chéo được chọn có độ dài lớn nhất: $\dfrac{n}{\mathrm{C}_{2n}^2 - 2n} = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow n = 6$.
Chọn đáp án B □

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;1;0), B(-2;3;2)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-2}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng d và đi qua hai điểm $A; B$. Tìm tọa độ tâm I của mặt cầu (S).

Ⓐ $I(1;1;2)$.
B $I(-1;-1;2)$.
Ⓒ $I(2;1;-1)$.
Ⓓ $I(0;2;1)$.

Lời giải.

Gọi $I(2t+1;t;-2t)$ là tâm của mặt cầu (S).
Ta có $IA = IB \Leftrightarrow \sqrt{(1-2t)^2+(1-t)^2+4t^2} = \sqrt{(-3-2t)^2+(3-t)^2+(2+2t)^2} \Leftrightarrow t = -1$.

Vậy $I(-1;-1;2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Tìm tập xác định của hàm số $y = \dfrac{\cot x}{1-\sin^2 x} + \sin 3x$.

A $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{k\pi}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}$.
B $\mathbb{R}\backslash\{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$.
C $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$.
D $\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

TXĐ: $\begin{cases}\sin x \neq 0\\ 1-\sin^2 x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Hồng muốn qua nhà Hoa để cùng Hoa đến chơi nhà Bình. Từ nhà Hồng đến nhà Hoa có 3 con đường đi, từ nhà Hoa tới nhà Bình có 2 con đường đi. Hỏi Hồng có bao nhiêu cách chọn đường đi đến nhà Bình?

A 5. B 6. C 2. D 4.

Lời giải.

Số cách chọn để Hồng đi đến nhà Bình là $\mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_2^1 = 6$.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin^2 x$.

A $\sin 2x$. B $2\sin x$. C $-\sin 2x$. D $\cos 2x$.

Lời giải.

$y' = (\sin^2 x)' = 2\sin x \cos x = 2\sin 2x$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-4;-2;4)$ và đường thẳng $d: \begin{cases}x=-3+2t\\ y=1-t\\ z=-1+4t\end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A cắt và vuông góc với đường thẳng d.

A $\Delta: \begin{cases}x=-4+3t\\ y=-2+2t\\ z=4-t\end{cases}$.
B $\Delta: \begin{cases}x=-4+3t\\ y=-2-t\\ z=4-t\end{cases}$.
C $\Delta: \begin{cases}x=-4-3t\\ y=-2+2t\\ z=4-t\end{cases}$.
D $\Delta: \begin{cases}x=-4+t\\ y=-2+t\\ z=4+t\end{cases}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d. Ta có $H(-3+2t;1-t;-1+4t)$.

Suy ra $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

$\overrightarrow{AH} = (3;2;-1)$. Vậy ptdt là $\Delta: \begin{cases}x=-4+3t\\ y=-2+2t\\ z=4-t\end{cases}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Hình lăng trụ có 2018 đỉnh. Hỏi lăng trụ đó có bao nhiêu mặt bên?

(A) 2019. (B) 2018. (C) 1009. (D) 2020.

Lời giải.

Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành. Suy ra số mặt bên là 1009.

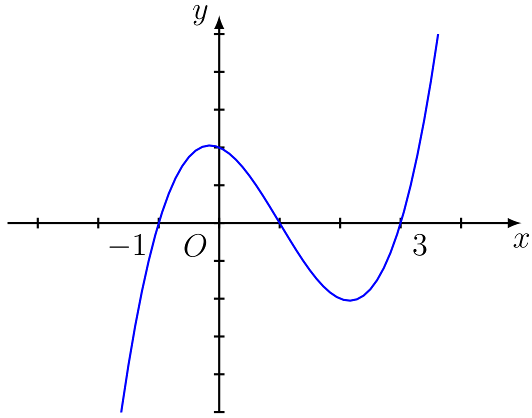
Chọn đáp án (C) □

Câu 31.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(x^2 - 1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(1; +\infty)$. (B) $(1; 2)$.

(C) $(0; 1)$. (D) $(-2; -1)$.



Lời giải.

Ta có $[f(x^2-1)]' = f'(x^2-1)(2x)$. Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có

$$[f(x^2-1)]' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x^2-1) = 0 \\ x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1 = 1 \\ x^2-1 = 3 \\ x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm 2 \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Từ đó, ta có bảng xét dấu của $[f(x^2-1)]'$

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x^2-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$[f(x^2-1)]'$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x) = f(x^2 - 1)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z - 11 = 0$ và mặt phẳng cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 8 = 0$ tiếp xúc với nhau tại điểm $H(x_o; y_o; z_o)$. Tính tổng $T = x_o + y_o + z_o$.

(A) $T = 2$. (B) $T = 0$. (C) $T = 6$. (D) $T = 4$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua tâm $I(1;-2;1)$ và nhận véc-tơ $\vec{u}=(2;3;1)$ làm vtcp.

$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+3t \\ z=1+t \end{cases}$ $\Rightarrow$ giao điểm của đường thẳng Δ với mặt phẳng (P) là $H(3;1;2)$.

Suy ra $T=x_o+y_o+z_o=6$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A 3. B 1. C 0. D 2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}=+\infty$.

Do đó đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y=x^3+3x^2+1$ tại điểm $A(1;5)$ và B là giao điểm thứ hai của d và (C). Khi đó diện tích S của tam giác OAB bằng

A $S=15$. B $S=12$. C $S=24$. D $S=6$.

Lời giải.

$y=x^3+3x^2+1\Rightarrow y'=3x^2+6x$.

d là tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y=x^3+3x^2+1$ tại điểm $A(1;5)$ là $y=9(x-1)+5\Leftrightarrow y=9x-4$.

Ta có pthđgđ: $x^3+3x^2+1=9x-4$. Vậy giao điểm thứ 2 là $B(-5;-49)$.

$S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot\mathrm{d}(O;d)=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{6^2+54^2}\cdot\dfrac{|-4|}{\sqrt{1+9^2}}=12.$

Chọn đáp án B □

Câu 35. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh AB,BC. Tính côsin góc tạo bởi mặt phẳng (SMN) và mặt phẳng (ABC).

A $\dfrac{1}{3}$. B $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$. C $\dfrac{12}{\sqrt{147}}$. D $\dfrac{1}{7}$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{(SMN),(ABC)}=\widehat{SIO}$.

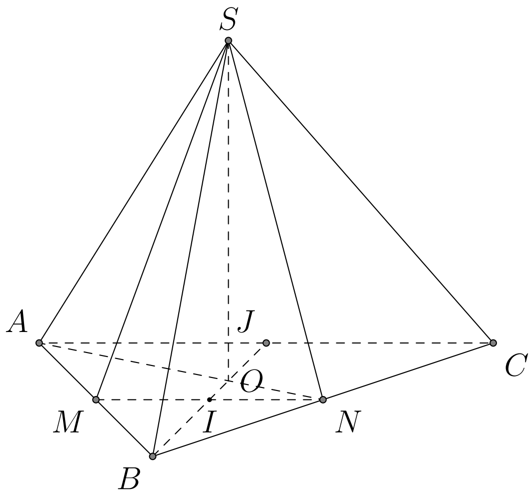
$AN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AO=\dfrac{2}{3}AN=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác SOA: $SO=AO\cdot\tan 60^\circ=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}=a$.

$IO=\dfrac{1}{6}\cdot BJ=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$SI=\sqrt{SO^2+IO^2}=\dfrac{7a\sqrt{3}}{12}$.

Suy ra $\widehat{SIO}=\dfrac{IO}{IS}=\dfrac{1}{7}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Cho hai số thực $a; b$ lớn hơn 1 thay đổi và thỏa mãn $a+b=10$. Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình $(\log_a x)\cdot(\log_b x) - 2\log_a x - 3\log_b x - 1 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = x_1 \cdot x_2$.

(A) $\dfrac{400}{27}$. (B) 3456. (C) $\dfrac{16875}{16}$. (D) 15625.

Lời giải.

$(\log_a x)\cdot(\log_b x) - 2\log_a x - 3\log_b x - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_b a\,(\log_a x)^2 - (2+3\log_a b)\log_a x - 1 = 0$.

Do $\log_a b > 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Áp dụng định lí Viet $\log_a x_1 + \log_a x_2 = \dfrac{2+3\log_b a}{\log_b a} = 2\log_a b + 3$.

$\Rightarrow x_1 \cdot x_2 = a^{2\log_a b + 3} = b^2 \cdot a^3$.

$\Rightarrow S = \left(\dfrac{1}{2}b \cdot \dfrac{1}{2}b \cdot \dfrac{1}{3}a \cdot \dfrac{1}{3}a \cdot \dfrac{1}{3}a\right) \cdot 2^2 \cdot 3^3$.

$\Rightarrow S \leq \left(\dfrac{10}{5}\right)^5 \cdot 2^2 \cdot 3^3 = 3456$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Một đa giác đều có 24 đỉnh, tất cả các cạnh của đa giác sơn màu xanh và tất cả các đường chéo của đa giác đó sơn màu đỏ. Gọi X là tập hợp tất cả các tam giác có ba đỉnh là các đỉnh của đa giác đều trên. Người ta chọn ngẫu nhiên từ X một tam giác, tính xác suất để chọn được tam giác có ba cạnh cùng màu.

(A) $\dfrac{27}{1290}$. (B) $\dfrac{1}{24}$. (C) $\dfrac{190}{253}$. (D) $\dfrac{24}{115}$.

Lời giải.

$|\Omega| = \mathrm{C}_{24}^3$.

Tam giác có ba cạnh cùng màu chính là tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác.

$|\Omega_A| = \mathrm{C}_{24}^3 - 24 - \mathrm{C}_{24}^1 \cdot \mathrm{C}_{20}^1$.

Vậy $P = \dfrac{\mathrm{C}_{24}^3 - 24 - \mathrm{C}_{24}^1 \cdot \mathrm{C}_{20}^1}{\mathrm{C}_{24}^3} = \dfrac{190}{253}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $\left(x^3 + \dfrac{1}{x} + 2\right)^6$.

(A) 356. (B) 210. (C) 735. (D) 480.

Lời giải.

$\left(x^3 + \dfrac{1}{x} + 2\right)^6 = \sum\limits_{k=1}^{6} \mathrm{C}_6^k \left(x^3 + \dfrac{1}{x}\right)^k 2^{6-k} = \sum\limits_{k=1}^{6} \mathrm{C}_6^k \cdot 2^{6-k} \cdot \sum\limits_{l=1}^{k} x^{3k-4l}$

Số hạng chứa x^5 trong khai triển suy ra $k=3; l=1$.

Vậy hệ số là $\mathrm{C}_3^6 \cdot 2^3 \cdot \mathrm{C}_3^1 = 480$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|\dfrac{x^2 - mx + 2m}{x-2}\right|$ trên $[-1;1]$ bằng 3. Tính tổng tất cả các phần tử trong tập S.

(A) 5 . (B) $-\dfrac{8}{3}$. (C) -1. (D) $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \dfrac{x^2 - mx + 2m}{x-2}$ trên $[-1;1] \Rightarrow y' = \dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

x	-1		0		1
y'	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$
y	$-m-\dfrac{1}{3}$	$\nearrow$	$-m$	$\searrow$	$-m-1$

Chú ý:

$-m > -m - \dfrac{1}{3} > -m-1$ và khoảng cách giữa chúng < 1.

$\Rightarrow \max y = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m = 3 \\ -m-1 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

Vậy $S = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;4)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua trực tâm H của ΔABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

A. $\Delta : \dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$.

B. $\Delta : \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-1}$.

C. $\Delta : \dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$.

D. $\Delta : \dfrac{x}{4} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua trực tâm H của ΔABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) là đường thẳng đi qua tâm O.

$\vec{n}_{ABC} = (4;2;1)$.

Vậy ta chọn đáp án $\Delta : \dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của phần thực số phức $w = z^3 + \dfrac{1}{z^3}$, trong đó z là số phức có $|z| = 1$. Tính $P = M^2 + m^2$.

A. $P = 8$. B. $P = 5$. C. $P = 29$. D. $P = 10$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi \Rightarrow z + \dfrac{1}{z} = 2a$ $w = z^3 + \dfrac{1}{z^3} \Leftrightarrow w = \left(z + \dfrac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = 8a^3 - 6a$.

Do $a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow -1 \le a \le 1$.

Xét hàm số $f(a) = 8a^3 - 6a$ với $a \in [-1;1]$ có $\max f(a) = 2$ và $\min f(a) = -2$.

Vậy $P = M^2 + m^2 = 8$

Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = |f(|x|) + m|$ có 11 điểm cực trị.

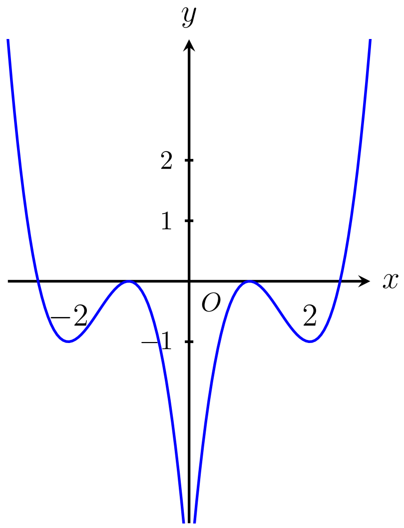
A $m \geq 0$. **B** $m \leq 0$. **C** $0 \leq m \leq 1$. **D** $0 < m < 1$.

Lời giải.

Số cực trị của hàm $f(|x|) + m$ là 5.

tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = |f(|x|) + m|$ có 11 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ tại 6 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow -1 < m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.



Chọn đáp án D □

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = -2x^3 - mx + \dfrac{1}{3x^3}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$?

A 3. **B** 6. **C** 4. **D** 5.

Lời giải.

Ta có $y' = -6x^2 - m - \dfrac{1}{x^4}$.

Ta tìm m nguyên âm sao cho

$y \leq 0,\ \forall x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow m \geq -6x^2 - \dfrac{1}{x^4}$.

Xét hàm số $g(x) = -6x^2 - \dfrac{1}{x^4}$ trên $(-\infty; 0)$.

$$g'(x) = \frac{-12x^6 + 4}{x^5} \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt[6]{\dfrac{1}{3}} \\ x = \sqrt[6]{\dfrac{1}{3}} \end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên

Vậy $m \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1\}$.

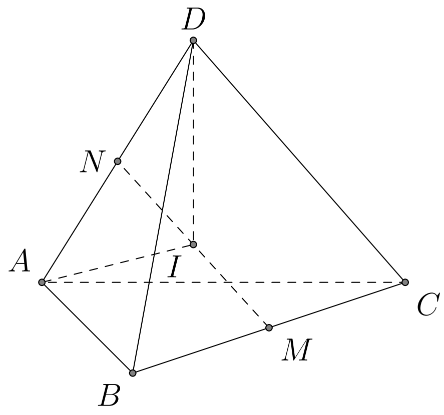
x	$-\infty$		$-\sqrt[6]{\frac{1}{3}}$		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\nearrow$	-6.24	$\searrow$	$+\infty$

Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho tứ diện $ABCD$ thỏa mãn $AB = CD = \sqrt{34}$, $BC = AD = \sqrt{41}$, $AC = BD = 5$. Tính bán kính r của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A $r = 5\sqrt{2}$. **B** $r = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. **C** $r = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **D** $r = \sqrt{10}$.

Lời giải.



Gọi I là trọng tâm của tứ diện

$AM = \sqrt{\dfrac{AB^2 + AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{77}}{2}$

$MN = \sqrt{\dfrac{AM^2 + MD^2}{2} - \dfrac{AD^2}{4}} = 3.$

Với I là trung điểm của đoạn $MN \Rightarrow IN = \dfrac{3}{2}$.

Xét ΔIAN vuông tại N có

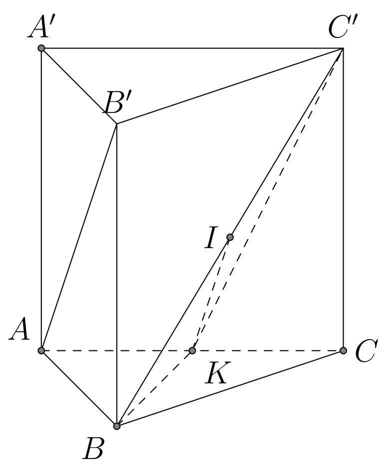
$IA = \sqrt{AN^2 + IN^2} = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{41}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}.$

Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân, $AB = AC = a$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC'

A $\dfrac{2a}{\sqrt{21}}$. **B** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **C** $\dfrac{a}{\sqrt{21}}$. **D** $\dfrac{2a}{\sqrt{17}}$.

Lời giải.



Gọi I, K lần lượt là trung điểm BC' và AC.

$\Rightarrow AB' \parallel IK \Rightarrow AB' \parallel (BKC')$.

$\Rightarrow d(AB'; BC') = d(AB'; (BKC')) = d(C; (BKC'))$.

Mặt khác $V_{C'.BKC} = \dfrac{1}{6} V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{a^3}{6}$.

$$\begin{cases} BK = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \\ KC' = \dfrac{a\sqrt{17}}{2} \\ BC' = a\sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow S_{\Delta BKC'} = \dfrac{a^2\sqrt{21}}{4}.$$

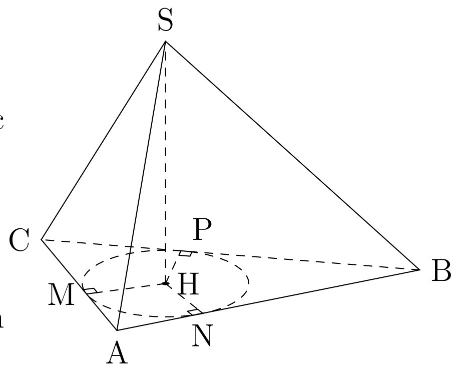
Suy ra $d(AB'; BC') = d(C; (BKC')) = \dfrac{3V_{C'.BKC}}{S_{\Delta BKC'}} = \dfrac{2a}{\sqrt{21}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC = 5a$, $BC = 6a$ và các mặt bên cùng tạo với đáy góc 60°. Biết hình chiếu của S lên đáy là H và thuộc miền trong tam giác ABC. Tính thể tích V của khối chóp đã cho theo a.

A $V = 8a^3$. **B** $V = 6a^3\sqrt{3}$. **C** $V = a^3\sqrt{3}$. **D** $V = \dfrac{2a^3}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.



Kẻ HM, HN, HP lần lượt vuông góc với AC, AB, BC.

Khi đó $\begin{cases} AC \perp SM \\ AB \perp SN \\ BC \perp SP \end{cases}$, suy ra $\widehat{SMH}$, $\widehat{SNH}$, $\widehat{SPH}$ lần lượt là các góc tạo bởi các mặt bên (SAC), (SAB), (SBC) với mặt đáy.

Suy ra $\widehat{SMH} = \widehat{SNH} = \widehat{SPH} = 60^\circ$.

Do đó $HM = HN = HP$ nên H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Suy ra $S_{\triangle ABC} = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)} = \sqrt{8a\cdot(8a-5a)\cdot(8a-5a)\cdot(8a-6a)} = 12a^2$.

$\Rightarrow r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow SH = r\cdot\tan 60^\circ = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $V = \dfrac{1}{3}\cdot SH\cdot S_{\triangle ABC} = 6a^3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) tạo với hai đường tiện cận một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp tiếp lớn nhất. Khi đó, khoảng cách từ $I(-1;1)$ đến Δ bằng?

A $\sqrt{3}$. **B** $\sqrt{6}$. **C** $2\sqrt{3}$. **D** $2\sqrt{6}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{3}{(x+1)^2}$

Đồ thị (C) có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = 1$.

Gọi $M \in (C):\ M(m-1;\dfrac{m-3}{3}),\ m \neq 0$

Phương trình tiếp tuyến (Δ) tại M là $y = \dfrac{3}{m^2}(x-m+1) + \dfrac{m-3}{m}$

$\Leftrightarrow 3x - m^2y + m^2 - 6m + 3 = 0$

Gọi A là giao điểm của (Δ) và tiệm cận ngang: $A(2m-1;1) \Rightarrow IA = 2|m|$.

B là giao điểm của (Δ) và tiệm cận đứng: $B\left(-1;\dfrac{m-6}{m}\right) \Rightarrow IB = \dfrac{6}{|m|}$.

Suy ra $IA\cdot IB = 12$. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

$r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{\frac{1}{2}IA\cdot IB}{\frac{IA+IB+AB}{2}} = \dfrac{AI\cdot IB}{IA+IB+\sqrt{AI^2+IB^2}} \leq \dfrac{IA\cdot IB}{2\sqrt{IA\cdot IB}+\sqrt{2\cdot IA\cdot IB}} = \dfrac{12}{2\sqrt{12}+\sqrt{24}} = 2\sqrt{3}-\sqrt{6}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow IA = IB \Leftrightarrow 2|m| = \dfrac{6}{|m|} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}$.

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác IAB đạt giá tị lớn nhất là $2\sqrt{3}-\sqrt{6} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}$.

Do đó $(\Delta):\ 3x - 3y + 6 \pm 6\sqrt{3} = 0$.

Vậy $d(I;\Delta)=\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1=3$ và $u_{n+1}=u_n^2-3u_n+4$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Biết dãy số (u_n) tăng và không bị chặn trên. Đặt $v_n=\dfrac{1}{u_1-1}+\dfrac{1}{u_2-1}+\dfrac{1}{u_3-1}+\cdots+\dfrac{1}{u_n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$.

(A) $-\infty$. (B) $+\infty$. **C** 1. (D) 0.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1}=u_n^2-3u_n+4\Rightarrow u_{n+1}-2=u_n^2-3u_n+2=(u_n-1)\cdot(u_n-2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{u_{n+1}-2}=\dfrac{1}{(u_n-1)\cdot(u_n-2)}\Leftrightarrow \dfrac{1}{u_{n+1}-2}=\dfrac{1}{n_n-2}-\dfrac{1}{u_n-1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{u_n-1}=\dfrac{1}{n_n-2}-\dfrac{1}{u_{n+1}-2}$.

Suy ra $v_n=\dfrac{1}{u_1-2}-\dfrac{1}{u_2-2}+\dfrac{1}{u_2-2}-\dfrac{1}{u_3-2}+\cdots+\dfrac{1}{u_n-2}-\dfrac{1}{u_{n+1}-2}=\dfrac{1}{u_1-2}-\dfrac{1}{u_{n+1}-2}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u_1-2}-\dfrac{1}{u_{n+1}-2}\right)=\dfrac{1}{u_1-2}=1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Cho các số thực x,y,z không âm thỏa mãn $0<(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\le 2$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P=4^x+4^y+4^z+\ln(x^4+y^4+z^4)-\dfrac{3}{4}(x+y+z)^4$ là $\dfrac{a}{b}$, với a,b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính $S=2a+3b$.

(A) $S=42$. (B) $S=13$. (C) $S=71$. **D** $S=54$.

Lời giải.

Ta chứng minh bất đẳng thức phụ sau: $4^t\le 3t+1,\ \forall t\in[0;1]$.

Thật vậy, xét hàm số $f(t)=4^t-3t-1,\ \forall t\in[0;1]$. Ta có $f'(t)=4^t\cdot\ln 4-3$

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=\log_4\left(\dfrac{3}{\ln 4}\right)\in(0;1)$.

Bảng biến thiên

t	0		$\log_4\left(\dfrac{3}{\ln 4}\right)$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\searrow$	$f\left(\log_4\left(\dfrac{3}{\ln 4}\right)\right)$	$\nearrow$	0

Suy ra $4^t\le 3t+1,\ \forall t\in[0;1]$.

Ta có $0<(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\le 2$

$\Leftrightarrow 0 < x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \leq 1$.

Suy ra $x, y, z \in [0; 1]$. Dấu bằng xảy ra khi $(x; y; z) = (1; 0; 0)$ hoặc các hoán vị.

Và $2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \leq 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + 2(xy + yz + zx) \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Do $4^t \leq 3t + 1,\ \forall t \in [0; 1]$ nên $4^x + 4^y + 4^z \leq 3(x + y + z) + 3$

Mặt khác $x^4 + y^4 + z^4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \ln\left(x^4 + y^4 + z^4\right) \leq \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \leq 0$

Do đó $P \leq 3(x + y + z) + 3 - \dfrac{3}{4}(x + y + z)^4 \leq \dfrac{21}{4}$

Đẳng thức xảy ra khi $(x; y; z) = (1, 0, 0)$ hoặc các hoán vị.

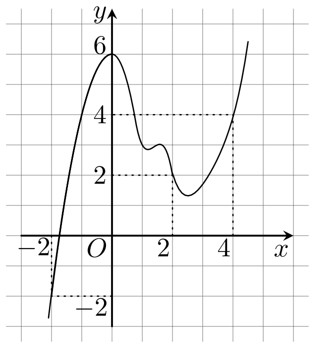
Suy ra $P_{\max} = \dfrac{21}{4}$.

Vậy $S = 2a + 3b = 54$.

Chọn đáp án D □

Câu 50.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Khi đó giá trị của biểu thức $\displaystyle\int_0^4 f'(x-2)dx + \int_0^2 f'(x+2)dx$ bằng bao nhiêu?



A 6. **B** 2. **C** -2. **D** 10.

Lời giải.

Xét tích phân $A = \displaystyle\int_0^4 f'(x-2)dx$.

Đặt $t = x - 2 \Rightarrow dt = dx$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = -2 \\ x = 4 \rightarrow t = 2 \end{cases}$

Do đó $A = \displaystyle\int_{-2}^2 f'(t)dt = \int_{-2}^2 f'(x)dx = f(2) - f(-2) = 4$.

Tương tự $B = \displaystyle\int_2^4 f'(t)dt = \int_2^4 f'(x)dx = f(4) - f(2) = 2$.

Vậy $I = A + B = 6$.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. A	3. C	4. C	5. A	6. D	7. A	8. C	9. C	10. D
11. C	12. B	13. A	14. D	15. D	16. B	17. D	18. D	19. D	20. A
21. D	22. C	23. C	24. B	25. B	26. A	27. B	28. A	29. A	30. C
31. C	32. C	33. B	34. B	35. D	36. B	37. C	38. D	39. C	40. C
41. A	42. D	43. B	44. B	45. A	46. B	47. B	48. C	49. D	50. A

101 ĐỀ THI THỬ TRƯỜNG THPT VÕ THÀNH TRINH - AN GIANG NĂM 2017-2018 LẦN 2

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân?

A $3;\ -9;\ 27;\ -81;\ldots$. **B** $3;\ -9;\ -27;\ -81;\ldots$.

C $1;\ 4;\ 7;\ 10;\ 13;\ldots$. **D** $18;\ 6;\ 3;\ 1;\ldots$.

Lời giải.

- Dãy số $3;\ -9;\ 27;\ -81;\ldots$ là cấp số nhân có công bội $q=-3$.
- Dãy số $3;\ -9;\ 27;\ -81;\ldots$ không là cấp số nhân vì $-9=3\cdot(-3)$ và $-9\cdot(-3)=27\neq -27$.
- Dãy số $1;\ 4;\ 7;\ 10;\ 13;\ldots$ là cấp số cộng có công sai $d=3$.
- Dãy số $18;\ 6;\ 3;\ 1;\ldots$ không là cấp số nhân vì $18\cdot\dfrac{1}{3}=6$ và $6\cdot\dfrac{1}{3}=2\neq 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 2.

Bảng biến thiên hình bên là của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

A $y=x^4+2x^2-3$.

B $y=-x^4+2x^2-3$.

C $y=x^4-2x^2+3$.

D $y=x^4+2x^2+3$.

Lời giải.

Các hàm số đã cho đều có dạng $y=ax^4+bx^2+c$.

Từ bảng biến thiên, ta suy ra $a>0$ và $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Hàm số $y=-x^4+2x^2-3$ không thỏa mãn vì $a=-1<0$.

Các hàm số $y=x^4+2x^2-3$ và $y=x^4+2x^2+3$ không thỏa mãn vì $y'=0$ chỉ có đúng 1 nghiệm.

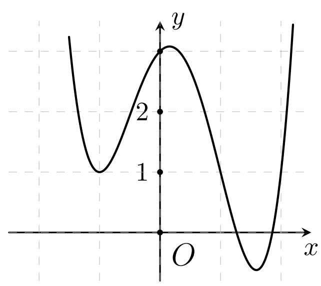
Hàm số $y=x^4-2x^2-3$ có $a=1>0$ và $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $x=-1; x=0; x=1$ và thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 3.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như đường cong hình bên. Phương trình $f(x)=2$ có bao nhiêu nghiệm?

A 2. **B** 4. **C** 1. **D** 3.



Lời giải.

Số nghiệm phương trình $f(x)=2$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=2$.

Dựa vào đồ thị suy ra phương trình $f(x)=2$ có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Có bao nhiêu cách lấy 3 viên bi từ một hộp đựng bi gồm 5 bi màu xanh và 6 bi màu đỏ sao cho có đúng 1 bi màu xanh?

A 5. **B** 20. **C** 15. **D** 75.

Lời giải.

Để lấy được 3 bi **có đúng** 1 bi xanh ta thực hiện như sau:

- Lấy 1 bi màu xanh, số cách lấy là $C_5^1 = 5$.
- Lấy tiếp thêm 2 bi màu đỏ, số cách lấy là $C_6^2 = 15$.

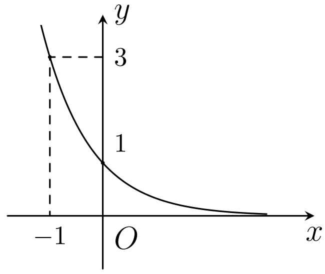
Vậy số cách lấy 1 bi màu xanh và 2 bi màu đỏ là $5 \cdot 15 = 75$.

Chọn đáp án D □

Câu 5.

Đồ thị có trong hình vẽ kề bên là của hàm số nào dưới đây?

A $y = (\sqrt{3})^x$. **B** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. **C** $y = (\sqrt{2})^x$. **D** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số trong hình chỉ có thể là của hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $y = (\sqrt{3})^x$ và $y = (\sqrt{2})^x$ bị loại.

Ngoài ra do đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1;3)$ nên chỉ còn hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ thoả mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Với mọi $a > b > 1$, khẳng định nào dưới đây **sai**?

A $a^b > b^a$. **B** $\log_a b < \log_b a$. **C** $a^{a-b} > b^{b-a}$. **D** $\log_a \frac{a+b}{2} < 1$.

Lời giải.

Với $a = 4, b = 2$, $4^2 = 2^4$.

Chọn đáp án A □

Câu 7.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

A Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.

B Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

C Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.

D Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải.

Dựa vào BBT ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Chọn đáp án B □

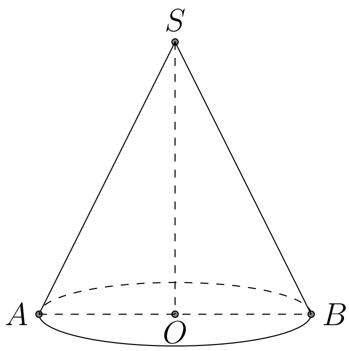
Câu 8. Cho hình nón đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O và thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$. Chiều cao h của khối nón là

A $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B** $h = a$. **C** $h = \dfrac{a}{2}$. **D** $h = \dfrac{3a}{2}$.

Lời giải.

Giả sử thiết diện qua trục SO của hình nón là tam giác đều SAB cạnh bằng $a\sqrt{3}$.

Chiều cao của hình nón là $h = SO = \dfrac{3a}{2}\cdot$



Chọn đáp án **D** □

Câu 9. Tất cả các nghiệm của phương trình $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ là

A $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **B** $x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi,\ x = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

C $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi,\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **D** $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ x = \dfrac{5\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

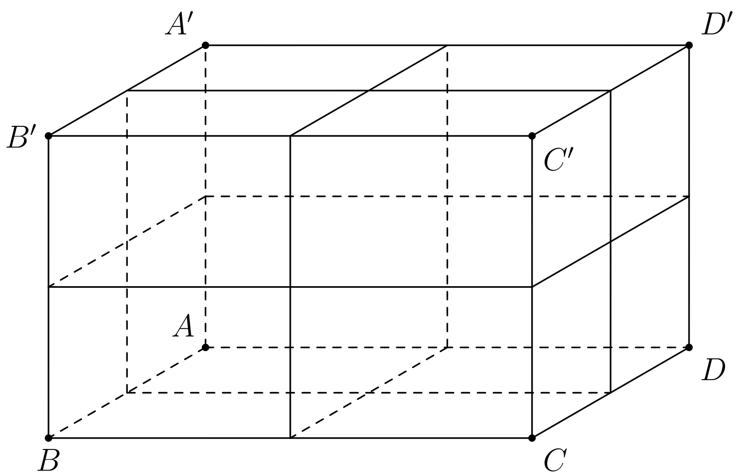
$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi, \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 10. Hình hộp chữ nhật có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A 5. **B** 4. **C** 6. **D** 3.

Lời giải.



Chọn đáp án **D** □

Câu 11. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A $y = \sin 3x$. **B** $y = \cos x \tan 2x$. **C** $y = x\cos x$. **D** $y = \dfrac{\tan x}{\sin x}$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\tan x}{\sin x}$, $f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi; l\pi\right\}\ k, l \in \mathbb{Z}$.

- $\forall x \in \mathscr{D} \Rightarrow -x \in \mathscr{D}$.
- $f(-x) = \dfrac{\tan(-x)}{\sin(-x)} = \dfrac{\tan x}{\sin x} = f(x)$.

Vậy $f(x) = \dfrac{\tan x}{\sin x}$ là hàm số chẵn.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;-2)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $OABC$ là

A $\dfrac{7}{2}$. **B** $\dfrac{1}{2}$. **C** $\dfrac{3}{2}$. **D** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $OABC$. Khi đó

$$\begin{cases} OI^2 = AI^2 \\ OI^2 = BI^2 \\ OI^2 = CI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2 = (a-1)^2+b^2+c^2 \\ a^2+b^2+c^2 = a^2+(b-2)^2+c^2 \\ a^2+b^2+c^2 = a^2+b^2+(c+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = -1. \end{cases}$$

Suy ra bán kính $R = OI = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{2x-\frac{3}{2}} < 5^{1-2x}$.

A $S = (-\infty;1)$. **B** $S = (-1;+\infty)$. **C** $S = (-\infty;-1)$. **D** $S = (1;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{2x-\frac{3}{2}} < 5^{1-2x} \Leftrightarrow 5^{-4x+3} < 5^{1-2x} \Leftrightarrow -4x+3 < 1-2x \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1;+\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Biết $\lim \dfrac{\sqrt{2\cdot 4^n+1}-2^n}{\sqrt{2\cdot 4^n+1}+2^n} = a+b\sqrt{2}$, với $a,b \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $T = a^3+b^3$.

A $T = 19$. **B** $T = 35$. **C** $T = 1$. **D** $T = 17$.

Lời giải.

$\lim \dfrac{\sqrt{2\cdot 4^n+1}-2^n}{\sqrt{2\cdot 4^n+1}+2^n} = \lim \dfrac{\sqrt{2+\dfrac{1}{4^n}}-1}{\sqrt{2+\dfrac{1}{4^n}}+1} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3-2\sqrt{2}$. Suy ra $a = 3$ và $b = -2$.

Khi đó: $T = a^3+b^3 = 3^3+(-2)^3 = 19$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x+y+3z=0$, $(R): 2x-y+z=0$ là

A $4x+5y-3z+22=0$. **B** $4x-5y-3z-12=0$.
C $2x+y-3z-14=0$. **D** $4x+5y-3z-22=0$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_1 = (1; 1; 3)$, $\vec{n}_2 = (2; -1; 1)$ lần lượt là véc-tơ pháp tuyến của các mặt phẳng $(Q), (R)$.
Do mặt phẳng (P) vuông góc với hai mặt phẳng $(Q), (R)$ nên $[\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (4; 5; -3)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P).
Từ đó suy ra mặt phẳng (P) có phương trình $4x + 5y - 3z - 22 = 0$.
Chọn đáp án D □

Câu 16. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A 1. B 2. C 3. D 4.

Lời giải.
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}$.
Với điều kiện trên ta có $y = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{x-1}{x+2}$.
Ta có

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x-1}{x+2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 1$.
- $\lim\limits_{x \to -2^+} y = \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x-1}{x+2} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -1} y = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x-1}{x+2} = -2$.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 2 đường tiệm cận.
Chọn đáp án B □

Câu 17. Cho $I = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = a\mathrm{e}^2 + b$ (a, b là các số hữu tỷ). Khi đó tổng $a + b$ là

A 0. B $\dfrac{1}{4}$. C 1. D $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.
Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x \end{cases}$ ta có $\begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}. \end{cases}$

Vậy $I = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1 - \dfrac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^2 + \dfrac{1}{4}$.

Suy ra $\begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow a + b = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 4; 1)$, $B(-1; 1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 5 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

A $2y + 3z - 11 = 0$. B $2y + 3z - 1 = 0$. C $2y + 3z - 12 = 0$. D $2x + 3z - 11 = 0$.

Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; -3; 2)$ và VTPT của (P) là $\vec{n}_P = (1; -3; 2)$.
Suy ra VTPT của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}_Q = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_P] = (0; 8; 12)$.
Khi đó phương trình mặt phẳng (Q) là $8(y - 4) + 12(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 2y + 3z - 11 = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Lớp 11B có 25 đoàn viên trong đó có 10 nam và 15 nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 đoàn viên trong lớp để tham dự hội trại ngày 26 tháng 3. Tính xác suất để trong 3 đoàn viên được chọn có 2 nam và 1 nữ.

(A) $\dfrac{3}{115}$. (B) $\dfrac{7}{920}$. (C) $\dfrac{27}{92}$. (D) $\dfrac{9}{92}$.

Lời giải.

Chọn 3 đoàn viên trong 25 đoàn viên có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{25}^3$ cách.

Gọi A: "trong 3 đoàn viên được chọn có 2 nam và 1 nữ"

Khi đó $n(A) = \mathrm{C}_{10}^2 \cdot \mathrm{C}_{15}^1 \Rightarrow \mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{27}{92}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Cho $I = \displaystyle\int_1^4 \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. Thực hiện phép đổi biến, đặt $t = \sqrt{x}$, ta được

(A) $I = \displaystyle\int_1^4 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$. (B) $I = 2\displaystyle\int_1^4 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$. (C) $I = 2\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$. (D) $I = \displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\,\mathrm{d}t$.

Với $x = 4$ thì $t = 2$, với $x = 1$ thì $t = 1$.

Vậy $I = 2\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;-1)$. Gọi A, B lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm M lên trục Oy, Oz. Tính diện tích tam giác OAB.

(A) $\dfrac{3}{2}$. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

- Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;2;-1)$ lên trục Oy là điểm $A(0;2;0)$.
- Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;2;-1)$ lên trục Oz là điểm $B(0;0;-1)$.

Vậy diện tích tam giác vuông OAB là $S = \dfrac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 13$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

(A) $m = 13$. (B) $m = 12$. (C) $m = 1$. (D) $m = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (nhận)} \\ x = 0 \text{ (loại)} \\ x = -1 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(0;+\infty)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	13	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $m = 12$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Tính thể tích hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AB = 3a$, $AC = 5a$, $AA' = 2a$.

A $12a^3$. **B** $30a^3$. **C** $8a^3$. **D** $24a^3$.

Lời giải.

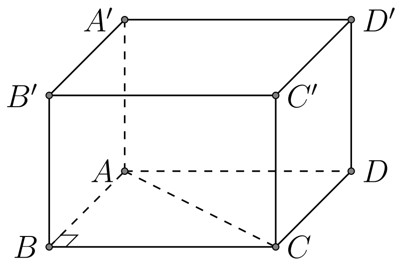
Áp dụng định lí Pythago vào tam giác ABC vuông tại B, có

$AC^2 = AB^2 + AD^2$

$\Rightarrow AD = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{(5a)^2 - (3a)^2} = 4a.$

Thể tích của hình hộp là

$V = AB \cdot AD \cdot AA' = 3a \cdot 4a \cdot 2a = 24a^3.$



Chọn đáp án D □

Câu 24. Thiết diện qua trục của một hình nón (N) là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a. Thể tích khối nón (N) bằng

A $\dfrac{\pi a^3}{6}$. **B** $\dfrac{\pi\sqrt{2}a^3}{6}$. **C** $\dfrac{\pi\sqrt{2}a^3}{12}$. **D** $\dfrac{\pi\sqrt{3}a^3}{12}$.

Lời giải.

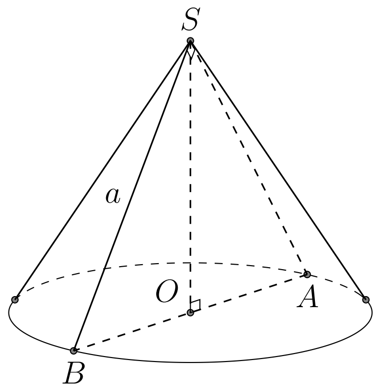
Giả sử SAB là thiết diện qua trục của hình nón (như hình vẽ).

Tam giác SAB vuông tại S và là tam giác cân nên $SA = SB = a$.

Do đó, $AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = a\sqrt{2}$

và $r = SO = OA = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích khối nón: $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot r^3 = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \dfrac{a^3}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\pi a^3}{6\sqrt{2}}$.



Chọn đáp án C □

Câu 25. Cho số phức z thỏa mãn $(1 - i)\,z + 2i\bar{z} = 5 + 3i$. Tính tổng phần thực và phần ảo của số phức $w = z + 2\bar{z}$.

A 3. **B** 4. **C** 6. **D** 5.

Lời giải.

Cách 1: Đặt $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

Thay vào biểu thức trên ta được $(x + 3y) + (x + y)i = 5 + 3i$, suy ra $z = 2 + i$.

Vậy $w = 6 - i$.

Từ đó suy ra $\mathrm{Re}(w)+\mathrm{Im}(w)=6+(-1)=5$.

Cách 2: Sử dụng máy tính bỏ túi Casio

Đặt $z=X+Yi \Rightarrow \bar{z}=X-Yi$.

Nhập vào máy tính: $\boxed{(1-i)(X+Yi)+2i(X-Yi)-(5+3i)}$.

Gán $X=1000$, $Y=100$. Ta được kết quả là $1259+1097i$.

Phân tích số liệu: $1295=X+3Y-5$ và $1097=X+Y-3$.

Do đó ta giải hệ phương trình: $\begin{cases} X+3Y-5=0 \\ X+Y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X+3Y=5 \\ X+Y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=2 \\ Y=1. \end{cases}$

Do đó ta có $z=2+i$. Từ đó suy ra $w=6-i$.

Vậy $\mathrm{Im}(w)+\mathrm{Re}(w)=5$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Họ nguyên hàm của hàm số $y=x^2+\mathrm{e}^x-\cos 3x$ là

A $\frac{1}{3}\left(x^3+3\mathrm{e}^x-\sin 3x\right)+C$. **B** $\frac{1}{3}\left(x^3+\mathrm{e}^x-\sin 3x\right)+C$.

C $\frac{1}{3}\left(x^3+3\mathrm{e}^x+\sin 3x\right)+C$. **D** $\frac{1}{3}\left(x^3+\mathrm{e}^x+\sin 3x\right)+C$.

Lời giải.

$$\int\left(x^2+\mathrm{e}^x-\cos 3x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+\mathrm{e}^x-\frac{1}{3}\sin 3x+C=\frac{1}{3}\left(x^3+3\mathrm{e}^x-\sin 3x\right)+C.$$

Chọn đáp án A □

Câu 27. Tìm phần ảo của số phức $z=\dfrac{2-9i}{1+6i}$.

A $-\frac{52}{37}$. **B** $\frac{52}{37}$. **C** $-\frac{21}{37}$. **D** $\frac{21}{37}$.

Lời giải.

$$z=\frac{2-9i}{1+6i}=\frac{(2-9i)(1-6i)}{(1+6i)(1-6i)}=-\frac{52}{37}-\frac{21}{37}i.$$

Chọn đáp án C □

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z=0$. Đường thẳng Δ' là hình chiếu của đường thẳng Δ lên mặt phẳng (P). Một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ' là

A $\vec{u}=(1;1;-2)$. **B** $\vec{u}=(1;-1;0)$. **C** $\vec{u}=(1;0;-1)$. **D** $\vec{u}=(1;-2;1)$.

Lời giải.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với (P). Suy ra, véc-tơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_Q=[\vec{u}_\Delta,\vec{n}_P]=(-1;1;0)$.

Gọi $\vec{u}$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ'. Ta có $\begin{cases} \vec{u}\perp\vec{n}_P \\ \vec{u}\perp\vec{n}_Q \end{cases} \Rightarrow \vec{u}=[\vec{n}_P,\vec{n}_Q]=(1;1;-2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+2z+10=0$. Tính giá trị của biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2$.

A $A=2\sqrt{10}$. **B** $A=20$. **C** $A=10$. **D** $A=\sqrt{10}$.

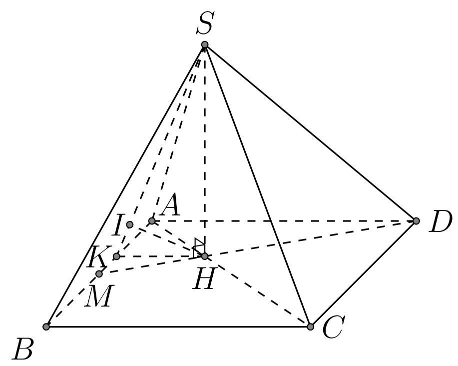
Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm là $z_1 = -1 - 3i$, $z_2 = -1 + 3i$.
Suy ra $A = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 20$.
Chọn đáp án B □

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Đường thẳng SD tạo với đáy $ABCD$ một góc $60°$. Gọi M là trung điểm AB. Biết $MD = \dfrac{3a\sqrt{5}}{2}$, mặt phẳng (SDM) và mặt phẳng (SAC) cùng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SM theo a.

A $\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$. B $\dfrac{3a\sqrt{5}}{4}$. C $\dfrac{a\sqrt{15}}{4}$. D $\dfrac{3a\sqrt{15}}{4}$.

Lời giải.



Giả sử $AD = x$, khi đó ta có
$DM^2 = AD^2 + AM^2 = x^2 + \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{5x^2}{4} \Rightarrow DM = \dfrac{x\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = 3a$
Gọi $H = DM \cap AC$, khi đó $SH \perp (ABCD)$ và $\Delta HAM \backsim \Delta HDC$.
Từ đó ta có $HD = 2HM$ hay $MD = 3MH$.
Ta có $SM \subset (SAB)$ và do $AB \parallel CD$ nên $CD \parallel (SAB)$
$\Rightarrow \mathrm{d}(CD, SM) = \mathrm{d}(CD, (SAB)) = \mathrm{d}(D, (SAB)) = 3\mathrm{d}(H, (SAB))$.
Kẻ $HK \perp AB$, $K \in AB$ và $HI \perp SK, I \in SK$ ta có $HI \perp (SAB) \Rightarrow \mathrm{d}(H, (SAB)) = HI$.
$\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{HS^2} + \dfrac{1}{HK^2}$.
$DH = \dfrac{2}{3}DM = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3a\sqrt{5}}{2} = a\sqrt{5} \Rightarrow HS = HD \cdot \tan 60° = a\sqrt{15}$.
$HK = \dfrac{1}{3}AD = a \Rightarrow \dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{15a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{16}{15a^2} \Rightarrow HI = \dfrac{a\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \mathrm{d}(CD, SM) = \dfrac{3a\sqrt{15}}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Với giá trị nào của tham số m thì đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m^4 - 3m^2 + 2017$ có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 32?

A $m = 5$. B $m = 3$. C $m = 4$. D $m = 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4(m-1)x$.
Để hàm số có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 32 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m - 1 > 0 \\ |y_{\text{cd}} - y_{\text{ct}}| \cdot |x_{ct}| = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ |(m-1)^2| \cdot |\sqrt{m-1}| = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ \sqrt{m-1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$$

Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + m & \text{khi } x \geq 2 \\ 3x - 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ (m là tham số). Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 2$.

(A) $m = 2$. **B** $m = 1$. (C) $m = 0$. (D) $m = 3$.

Lời giải.

$f(2) = 4 + m$;

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x^2 + m) = 4 + m$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (3x - 1) = 5$.

Hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 2$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 4 + m = 5 \Leftrightarrow m = 1.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3x + 1$ có đồ thị (C). Có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $y = 3x + 2018$?

A 2. (B) 3. (C) 1. (D) 4.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

$y' = 4x^3 - 4x + 3$.

Vì tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $y = 3x + 2018$ nên $y'(x_0) = 3$

$\Leftrightarrow 4x_0^3 - 4x_0 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 3 \\ x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -3 \\ x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1. \end{array}\right.$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(1; 3)$ là $y = 3x$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(-1; -3)$ là $y = 3x$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(0; 1)$ là $y = 3x + 1$.

Vậy có 2 tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $y = 3x + 2018$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Cho tích phân $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^3 + x^2}\,dx = a\ln 3 + b\ln 2 + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tính $S = a + b + c$.

(A) $S = -\dfrac{2}{3}$. (B) $S = -\dfrac{7}{6}$. (C) $S = \dfrac{2}{3}$. **D** $S = \dfrac{7}{6}$.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{1}{x^3 + x^2} = \dfrac{1}{x^2(x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x+1} = \dfrac{(A+C)x^2 + (A+B)x + B}{x^2(x+1)}$.

Đồng nhất 2 vế, ta được $\begin{cases} A + C = 0 \\ A + B = 0 \\ B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases}$.

Khi đó $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^3 + x^2}\,dx = \int_2^3 \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}\right) dx = \left.\left(\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x}\right)\right|_2^3 = -2\ln 3 + 3\ln 2 + \frac{1}{6}$.

Suy ra $a = -2$, $b = 3$ và $c = \dfrac{1}{6}$. Vậy $S = -2 + 3 + \dfrac{1}{6} = \dfrac{7}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Đầu mỗi tháng anh A gửi vào ngân hàng 3 triệu đồng với lãi suất kép là 0,6% mỗi tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng (khi ngân hàng đã tính lãi) thì anh A có được số tiền cả lãi và gốc nhiều hơn 100 triệu biết lãi suất không đổi trong quá trình gửi?

A 31 tháng. **B** 35 tháng. **C** 30 tháng. **D** 40 tháng.

Lời giải.

Ta có $P = 3$ triệu đồng, $r = 0{,}006$.

Sau tháng thứ nhất anh A có tổng số tiền là: $P_1 = P(1+r)$.

Sau tháng thứ hai anh A có tổng số tiền là:

$P_2 = [P + P(1+r)](1+r) = P[1 + (1+r)](1+r)$

$P_2 = P\left[(1+r) + (1+r)^2\right]$.

Sau tháng thứ ba anh A có tổng số tiền là:

$P_3 = \left[P + P\left[(1+r)+(1+r)^2\right]\right](1+r) = P\left[1 + \left[(1+r)+(1+r)^2\right]\right](1+r)$

$P_3 = P\left[(1+r)+(1+r)^2+(1+r)^3\right]$.

Sau tháng thứ tư anh A có tổng số tiền là:

$P_4 = \left[P + P\left[(1+r)+(1+r)^2+(1+r)^3\right]\right](1+r) = P\left[1 + \left[(1+r)+(1+r)^2+(1+r)^3\right]\right](1+r)$

$P_4 = P\left[(1+r)+(1+r)^2+(1+r)^3+(1+r)^4\right]$.

...

Sau tháng thứ n anh A có tổng số tiền là:

$P_n = P\left[(1+r)+(1+r)^2+(1+r)^3+\cdots+(1+r)^n\right]$.

Để có được số tiền cả lãi và gốc nhiều hơn 100 triệu thì

$P_n > 100 \Leftrightarrow P\left[(1+r)+(1+r)^2+(1+r)^3+\cdots+(1+r)^n\right] > 100$.

Với $P = 3$ triệu đồng, $r = 0{,}006$ ta có

$(1+r)+(1+r)^2+(1+r)^3+\cdots+(1+r)^n > \dfrac{100}{3}\ (*)$.

Xem vế trái là cấp số nhân với $U_1 = 1+r, q = 1+r$ khi đó

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]}{(1+r)-1} > \dfrac{100}{3} \Leftrightarrow (1{,}006)^n > \dfrac{603}{503} \Leftrightarrow n > \log_{1{,}006}\dfrac{603}{503} \approx 30{,}31$.

Vì n nguyên dương nên ta chọn $n = 31$.

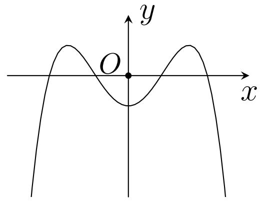
Chọn đáp án A □

Câu 36.

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Xét dấu của a, b, c.

A $a<0, b<0, c<0$. **B** $a>0, b<0, c<0$.

C $a<0, b>0, c<0$. **D** $a<0, b<0, c>0$.



Lời giải.

Khi $x \to +\infty$ thì $y \to -\infty$ suy ra $a < 0$.

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow ab < 0 \Rightarrow b > 0$.

Lại có $y(0) = c < 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Cho bất phương trình $m3^{x+1} + (3m+2)\left(4-\sqrt{7}\right)^x + \left(4+\sqrt{7}\right)^x > 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi

$x \in (-\infty; 0]$.

A $m > \dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **B** $m > \dfrac{2+2\sqrt{3}}{3}$. **C** $m \geqslant \dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **D** $m \geqslant -\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Xét bất phương trình: $m \cdot 3^{x+1} + (3m+2) \cdot \left(4-\sqrt{7}\right)^x + \left(4+\sqrt{7}\right)^x > 0$

$\Leftrightarrow 3m + (3m+2) \cdot \left(\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^x + \left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x > 0$ (1)

Đặt $t = \left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x$, $(t>0) \Rightarrow \left(\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^x = \dfrac{1}{t}$ và $0 < t \leqslant 1$ (do $x \leqslant 0$).

Bất phương trình (1) trở thành: $t + \dfrac{3m+2}{t} + 3m > 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{-t^2-2}{3t+3}$.

Xét hàm số $g(t) = \dfrac{-t^2-2}{3t+3}$, với $0 < t \leqslant 1$.

Ta có $g'(t) = \dfrac{-3t^2-6t+6}{(3t+3)^2}$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow -3t^2-6t+6 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \pm \sqrt{3}$.

Bảng biến thiên:

t	0		$-1+\sqrt{3}$		1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		$\nearrow$	$\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	

Như vậy (1) đúng với mọi $x \in (-\infty; 0] \Leftrightarrow m > g(t)$ đúng với mọi $t \in (0; 1] \Leftrightarrow m > \dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Đội học sinh giỏi trường THPT X gồm có 8 học sinh khối 12; 6 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Chọn ngẫu nhiên 8 học sinh. Xác suất để trong 8 học sinh được chọn có đủ 3 khối là

A $\dfrac{71128}{75582}$. **B** $\dfrac{35582}{3791}$. **C** $\dfrac{71131}{75582}$. **D** $\dfrac{143}{153}$.

Lời giải.

Gọi A là biến cố "Trong 8 học sinh được chọn có đủ 3 khối".

Suy ra $\overline{A}$ là biến cố "Trong 8 học sinh được chọn chỉ có đúng 1 khối hoặc 2 khối".

$n(\Omega) = \mathrm{C}_{19}^8 = 75582$.

Số cách chọn chỉ có đúng 1 khối: C_8^8.

Số cách chọn gồm cả hai khối 10 và 11: C_{11}^8.

Số cách chọn gồm cả hai khối 11 và 12: $\mathrm{C}_{14}^8 - \mathrm{C}_8^8$.

Số cách chọn gồm cả hai khối 10 và 12: $\mathrm{C}_{13}^8 - \mathrm{C}_8^8$.

$\Rightarrow n(\overline{A}) = \mathrm{C}_8^8 + [\mathrm{C}_{11}^8 + (\mathrm{C}_{14}^8 - \mathrm{C}_8^8) + (\mathrm{C}_{13}^8 - \mathrm{C}_8^8)] = 4454$.

$\Rightarrow \mathrm{P}(\overline{A}) = \dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{4454}{75582}$

$\Rightarrow \mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = \dfrac{71128}{75582}$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Tính giá trị của biểu thức $M = 2^{2016}C_{2017}^1 + 2^{2014}C_{2017}^3 + 2^{2012}C_{2017}^5 + \cdots + 2^0C_{2017}^{2017}$.

A $\frac{1}{2}(3^{2017} - 1)$. **B** $\frac{1}{2}(3^{2017} + 1)$. **C** $\frac{1}{2}(2^{2017} - 1)$. **D** $\frac{1}{2}(2^{2017} + 1)$.

Lời giải.

Ta có $(2+1)^{2017} = 2^{2017}C_{2017}^0 + 2^{2016}C_{2017}^1 + 2^{2015}C_{2017}^2 + \cdots + 2^1C_{2017}^{2016} + C_{2017}^{2017}$. (1)

$(2-1)^{2017} = 2^{2017}C_{2017}^0 - 2^{2016}C_{2017}^1 + 2^{2015}C_{2017}^2 - \cdots + 2^1C_{2017}^{2016} - C_{2017}^{2017}$. (2)

Lấy (1) trừ (2) ta được $2M = 3^{2017} - 1$. Suy ra $M = \frac{1}{2}(3^{2017} - 1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2e^{-x}$ trên đoạn $[-1;1]$. Tính tổng $M + m$.

A $M + m = 3e$. **B** $M + m = e$. **C** $M + m = 2e - 1$. **D** $M + m = 2e + 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = e^{-x} \cdot (2x - x^2)$.

Trên khoảng $(-1;1)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (nhận)} \\ x = 2 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0$. Ta có $\begin{cases} y(-1) = e \\ y(0) = 0 \\ y(1) = \frac{1}{e}. \end{cases}$

Vì hàm số liên tục trên đoạn $[-1;1]$ nên $M = e$ và $m = 0$. Do đó $M + m = e$.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;-1;6)$, $B(-1;2;4)$ và $I(-1;-3;2)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B sao cho khoảng cách từ điểm I đến (P) là nhỏ nhất.

A $(P): 16x + 6y - 15z + 64 = 0$. **B** $(P): 7x + 59y + 78z - 423 = 0$.

C $(P): 16x + 6y - 15z - 64 = 0$. **D** $(P): 7x + 59y + 78z + 423 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{IA} = (3;2;4)$, $\overrightarrow{IB} = (0;5;2)$.

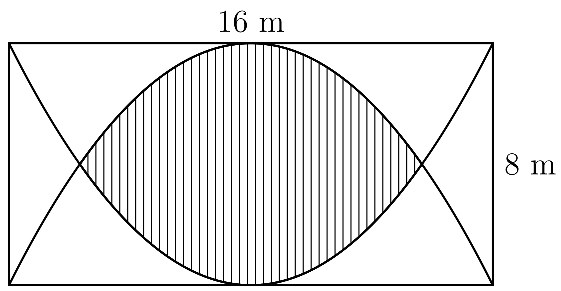
Khoảng cách từ I đến (P) nhỏ nhất khi $I \in (P)$.

Gọi $\vec{n}$ là một VTPT của (P), suy ra $\vec{n} = \left[\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}\right] = (-16;-6;15)$.

Phương trình (P): $16(x-2) + 6(y+1) - 15(z-6) = 0 \Leftrightarrow 16x + 6y - 15z + 64 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Một mảnh vườn toán học có dạng hình chữ nhật, chiều dài là 16 m và chiều rộng là 8 m. Các nhà toán học dùng hai đường parabol có đỉnh là trung điểm của một cạnh dài và đi qua 2 điểm đầu của cạnh đối diện, phần mảnh vườn nằm ở miền trong của cả hai parabol (phần gạch sọc như hình vẽ minh họa) được trồng hoa hồng. Biết chi phí để trồng hoa hồng là 45000 đồng/m². Hỏi các nhà toán học phải chi bao nhiêu tiền để trồng hoa trên phần mảnh vườn đó (số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)?



A 3322000 đồng. **B** 3476000 đồng. **C** 2715000 đồng. **D** 2159000 đồng.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ có gốc là tâm hình chữ nhật, các trục tọa độ song song với các cạnh của hình chữ nhật khi đó các phương trình của parabol là $y = -\dfrac{x^2}{8} + 4$ và $y = \dfrac{x^2}{8} - 4$. Diện tích phần trồng hoa là $S = \displaystyle\int_{-4\sqrt{2}}^{4\sqrt{2}} \left(-\dfrac{x^2}{8} + 4 - \dfrac{x^2}{8} + 4\right) \mathrm{d}x \approx 60,34 \text{ m}^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Gọi a là phần thực của số phức z thỏa mãn $(z-1)(\overline{z}+2i)$ là số thực và $|z|$ là nhỏ nhất. Tìm a.

A. $a = \dfrac{8}{5}$. B. $a = \dfrac{2}{5}$. C. $a = \dfrac{3}{5}$. **D.** $a = \dfrac{4}{5}$.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$. Theo giả thiết, ta có:

$(z-1)(\overline{z}+2i) = [(a-1)+bi][a-(b-2)i] = a(a-1) + b(b-2) + [ab - (a-1)(b-2)]\, i$.

$(z-1)(\overline{z}+2i)$ là số thực $\Leftrightarrow ab - (a-1)(b-2) = 0 \Leftrightarrow 2a + b - 2 = 0 \Leftrightarrow b = 2 - 2a$.

Khi đó $z = a + (2-2a)\, i$. Suy ra $|z| = \sqrt{a^2 + (2-2a)^2} = \sqrt{5a^2 - 8a + 4} = \sqrt{5\left(a - \dfrac{4}{5}\right)^2 + \dfrac{4}{5}} \geq \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. Từ đây, ta được $\min |z| = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ khi $a = \dfrac{4}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có 4 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3 < \dfrac{1}{2} < x_4$.

A. $0 < m < 1$. **B.** $\dfrac{1}{2} < m < 1$. C. $0 < m \leq 1$. D. $\dfrac{1}{2} \leq m \leq 1$.

Lời giải.

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Dựa vào bảng biến thiên ta có hệ điều kiện

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ d = 1 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases}$$

. Giải hệ ta được $a = 2, b = -3, c = 0, d = 1$.

Suy ra $y = 2x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có dạng

x	$-\infty$		α		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

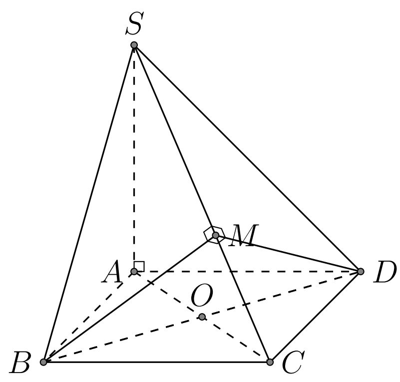
Vậy phương trình $|f(x)| = m$ có 4 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3 < \dfrac{1}{2} < x_4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < m < 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $BD = a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

A 60°. **B** 120°. **C** 45°. **D** 90°.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (SBC) dựng $BM \perp SC$ $(M \in SC)$.

$BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC \Rightarrow SC \perp (BDM) \Rightarrow SC \perp DM$.

Vậy $\widehat{(SBC),(SCD)} = \widehat{BMD}$.

Trong tam giác SAB : $SB^2 = SA^2 + AB^2 \Rightarrow SB = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

Trong tam giác SAC : $SC^2 = SA^2 + AC^2 \Rightarrow SC = \dfrac{3a}{\sqrt{2}}$.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác SBC, ta có:

$\cos\widehat{BCS} = \dfrac{SC^2 + BC^2 - SB^2}{2SC \cdot BC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{BCS} = 45^\circ$ hay $\triangle BMC$ vuông cân tại M. Suy ra $DM = BM = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Trong tam giác BMD, ta có : $BM^2 + DM^2 = BD^2 \Rightarrow \triangle BMD$ vuông cân tại M hay $\widehat{BMD} = 90^\circ$.

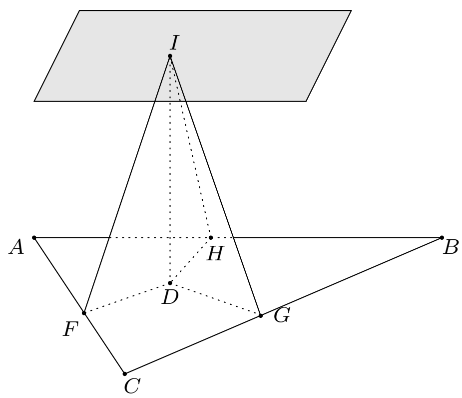
Vậy $\widehat{(SBC),(SCD)} = \widehat{BMD} = 90^\circ$.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1) : x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + z = 0$, $(S_2) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - z = 0$ cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn $(\mathcal{C})$ và ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa đường tròn $(\mathcal{C})$ và tiếp xúc với ba đường thẳng AB, AC, BC.

A Một mặt cầu. **B** Hai mặt cầu. **C** Bốn mặt cầu. **D** Vô số mặt cầu.

Lời giải.



Gọi I là tâm của mặt cầu, H là hình chiếu của I lên (ABC), và F, G, H lần lượt là hình chiếu của I lên AC, CB, BA. Khi đó, $DF \perp AC$, $DG \perp BC$, $DH \perp AB$ và $DF = DG = DH$.

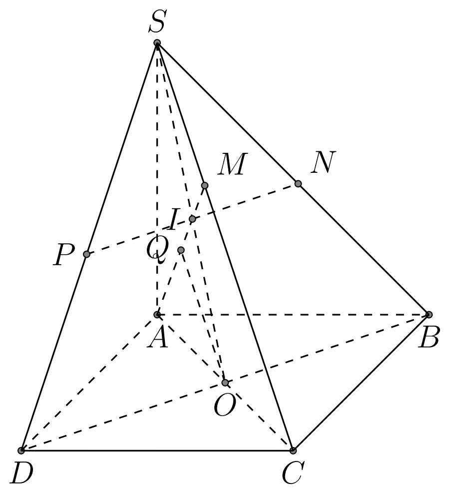
Vậy D là tâm đường tròn nội tiếp hoặc bàng tiếp của ΔABC. Có tất cả bốn vị trí của D.

Ngược lại, với mỗi vị trí của D, ta có các vị trí phân biệt của I là giao của đường thẳng đi qua D, vuông góc với (ABC) và mặt phẳng chứa đường tròn $(\mathcal{C})$.
Vậy có tất cả bốn mặt cầu tương ứng với bốn vị trí của I xác định như trên.
Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích V. Gọi M là điểm trên cạnh SC sao cho $MC = 2MS$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng AM và song song với đường thẳng BD, (α) cắt hai cạnh SB, SD lần lượt tại hai điểm N, P. Tính theo V thể tích khối chóp $S.APMN$.

A $\dfrac{V}{6}$. **B** $\dfrac{V}{27}$. **C** $\dfrac{V}{9}$. **D** $\dfrac{V}{12}$.

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của AC và BD,
I là giao điểm của SO với AM.
Khi đó, đường thẳng qua I song song với BD cắt SB, SD tại N và P.
Gọi Q là điểm thuộc AM sao cho OQ song song với SC.
Đặt $k = \dfrac{MC}{MS} = 2$.
Ta có $\dfrac{IO}{IS} = \dfrac{OQ}{SM} = \dfrac{OQ}{MC \cdot \dfrac{MS}{MC}} = \dfrac{OA}{AC \cdot \dfrac{MS}{MC}} = \dfrac{k}{2}$.
Suy ra: $\dfrac{DP}{PS} = \dfrac{BN}{NS} = \dfrac{IO}{IS} = \dfrac{k}{2}$.
Do đó, $\dfrac{SP}{SD} = \dfrac{2}{k+2}$.
Ta cũng có: $\dfrac{SM}{SC} = \dfrac{1}{k+1}$.

$V_{S.APMN} = 2.V_{S.APM} = 2 \cdot \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SP}{SD} \cdot \dfrac{SM}{SC} \cdot V_{S.ADC} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SP}{SD} \cdot \dfrac{SM}{SC} \cdot V_{S.ABCD}$
$= \dfrac{2}{(k+2)(k+1)} \cdot V_{S.ABCD} = \dfrac{V}{6}$.
Chọn đáp án A □

Câu 48. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2017; 2017]$ để phương trình $\log_3 m + \log_3 x = 2\log_3(x+1)$ luôn có hai nghiệm phân biệt?

A 4015. **B** 2010. **C** 2018. **D** 2013.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x+1>0 \\ x>0. \end{cases}$

$\log_3 m + \log_3 x = 2\log_3(x+1) \Leftrightarrow \log_3(mx) = \log_3(x+1)^2 \Leftrightarrow mx = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 + (2-m)x + 1 = 0$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\begin{cases} m>0 \\ \Delta>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m^2-4m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>4$.

Vậy có 2013 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án D □

Câu 49. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(1;5;0)$, $B(3;3;6)$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm trên đường thẳng Δ sao cho chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $T=a+b+c$.

A. $T=2$. B. $T=3$. C. $T=4$. D. $T=5$.

Lời giải.

Chu vi tam giác ABM đạt giá trị nhỏ nhất khi tổng $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Do $M\in\Delta\colon \begin{cases}x=-1+2t\\ y=1-t\\ z=2t\end{cases}$ nên $M(-1+2t;1-t;2t)$.

Ta có $MA=\sqrt{(2t-2)^2+(t+4)^2+4t^2}=\sqrt{9t^2+20}$;

$MB=\sqrt{(2t-4)^2+(t+2)^2+(2t-6)^2}=\sqrt{9t^2-36t+56}$.

Như vậy $MA+MB=\sqrt{9t^2+20}+\sqrt{9t^2-36t+56}$.

Cách 1: phương pháp hàm số

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{9t^2+20}+\sqrt{9t^2-36t+56}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{9t}{\sqrt{9t^2+20}}+\dfrac{9t-18}{\sqrt{9t^2-36t+56}}=\dfrac{9t}{\sqrt{9t^2+20}}+\dfrac{9(t-2)}{\sqrt{9(t-2)^2+20}}$.

$f'(t)=0\Leftrightarrow \dfrac{t}{\sqrt{9t^2+20}}=-\dfrac{t-2}{\sqrt{9(t-2)^2+20}}$ (1).

Xét hàm số $g(t)=\dfrac{t}{\sqrt{9t^2+20}}$ có $g'(t)=\dfrac{20}{\left(\sqrt{9t^2+20}\right)^3}>0$.

Do đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất $t=1$.

Bảng biến thiên của $f(t)$ là

t	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	↘	$2\sqrt{29}$	↗	$+\infty$

Theo bảng biến thiên, $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $t=1$.

Cách 2: phương pháp véc-tơ

Ta có $MA+MB=\sqrt{(3t)^2+\left(\sqrt{20}\right)^2}+\sqrt{(6-3t)^2+\left(\sqrt{20}\right)^2}$.

Xét $\begin{cases}\vec{u}=\left(3t;\sqrt{20}\right)\\ \vec{v}=\left(6-3t;\sqrt{20}\right)\end{cases}$. Do $|\vec{u}|+|\vec{v}|\ge|\vec{u}+\vec{v}|$ nên ta có

$\sqrt{(3t)^2+\left(\sqrt{20}\right)^2}+\sqrt{(6-3t)^2+\left(\sqrt{20}\right)^2}\ge\sqrt{6^2+\left(2\sqrt{20}\right)^2}=2\sqrt{29}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}=k\vec{v}$ $(k\ge 0)\Leftrightarrow t=1$.

Vậy $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $t=1\Rightarrow M(1;0;2)\Rightarrow T=3$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Có 2 học sinh lớp A, 3 học sinh lớp B và 4 học sinh lớp C xếp thành một hàng ngang sao cho giữa hai học sinh lớp A không có học sinh lớp B. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng như vậy?

A 145152. **B** 108864. **C** 217728. **D** 80640.

Lời giải.

Có các trường hợp xảy ra như sau:

- Hai học sinh lớp A luôn đứng cạnh nhau, các học sinh lớp còn lại xếp tùy ý: $2!8!$.
- Có đúng một học sinh lớp C đứng giữa hai học sinh lớp A: $\mathrm{A}_4^1 2!7!$.
- Có đúng hai học sinh lớp C đứng giữa hai học sinh lớp A: $\mathrm{A}_4^2 2!6!$.
- Có đúng ba học sinh lớp C đứng giữa hai học sinh lớp A: $\mathrm{A}_4^3 2!5!$.
- Có đúng bốn học sinh lớp C đứng giữa hai học sinh lớp A: $\mathrm{A}_4^4 2!4!$.

Vậy có $2!8! + \mathrm{A}_4^1 2!7! + \mathrm{A}_4^2 2!6! + \mathrm{A}_4^3 2!5! + \mathrm{A}_4^4 2!4! = 145152$ cách xếp hàng thỏa đề bài.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. C	3. B	4. D	5. D	6. A	7. B	8. D	9. B	10. D
11. D	12. C	13. D	14. A	15. D	16. B	17. D	18. A	19. C	20. C
21. C	22. B	23. D	24. C	25. D	26. A	27. C	28. A	29. B	30. D
31. A	32. B	33. A	34. D	35. A	36. C	37. A	38. A	39. A	40. B
41. A	42. C	43. D	44. B	45. D	46. C	47. A	48. D	49. B	50. A

102 ĐỀ THI THỬ LẦN 3, THÁNG 5, 2017 - 2018 TRƯỜNG THPT CẨM BÌNH, HÀ TĨNH

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Tính giới hạn $A = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x^3}{x - 1}$.

(A) $A = 3$. (B) $A = -3$. (C) $A = +\infty$. (D) $A = -\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} -\left(x^2+x+1\right) = -3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.
(B) Hàm số đã cho không có giá trị cực đại.
(C) Hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị.
(D) Hàm số đã cho không có giá trị cực tiểu.

Lời giải.

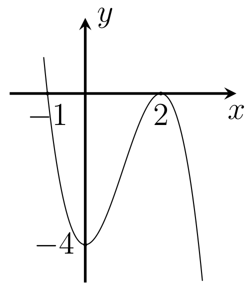
Theo định nghĩa về cực trị của hàm số, ta suy ra hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số nào dưới đây?

(A) $y = -x^3 - 4$.
(B) $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.
(C) $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.
(D) $y = x^3 - 3x^2 - 4$.



Lời giải.

Nhận xét: Dựa vào đồ thị ta suy ra hàm số đã cho là hàm đa thức bậc ba.

- Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại $(-1; 0)$ và tiếp xúc với trục Ox tại $(2; 0)$ nên suy ra hàm số $y = f(x)$ có dạng $y = a(x+1)(x-2)^2$.
- Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại $(0; -4)$ nên $-4 = a(0+1)(0-2)^2 \Leftrightarrow a = -1$.

Suy ra, hàm số cần tìm có dạng $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(4x+1)$ là

(A) $y' = \dfrac{\ln 3}{4x+1}$. **(B)** $y' = \dfrac{4}{(4x+1)\ln 3}$. (C) $y' = \dfrac{4\ln 3}{4x+1}$. (D) $y' = \dfrac{1}{(4x+1)\ln 3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{(4x+1)'}{(4x+1)\ln 3} = \dfrac{4}{(4x+1)\ln 3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

(A) 3. (B) 2. **(C)** 0. (D) 1.

Lời giải.

Xét $\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\left(1+\sqrt{1-x}\right)} = \dfrac{1}{2} \neq \infty$. Suy ra, đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

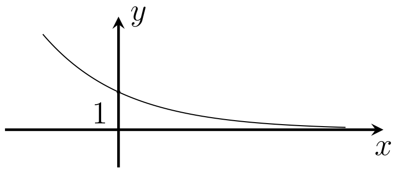
Chọn đáp án (C) □

Câu 6.

Hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau đây?

(A) $y = \log_2 x$. (B) $y = \log_{\frac{\pi}{5}} x$.

(C) $y = \left(\dfrac{\pi}{5}\right)^x$. (D) $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$.



Lời giải.

Đồ thị của hàm số đi qua điểm $(0;1)$ và có tiệm cận ngang $y=0$. Trong các đáp án chỉ có hàm số $y = \left(\dfrac{\pi}{5}\right)^x$ là thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Gọi S_1 là diện tích của mặt cầu tâm (O_1) có bán kính R_1, S_2 là diện tích của mặt cầu tâm (O_2) có bán kính $R_2 = 2R_1$. Tính tỷ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.

(A) 2. (B) 4. (C) $\dfrac{1}{2}$. **(D)** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có $S_1 = 4\pi R_1^2$, $S_2 = 4\pi R_2^2 = 16\pi R_1^2$. Suy ra, tỷ số $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8.

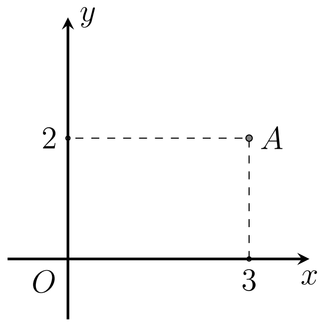
Điểm A trong hình vẽ bên là biểu diễn của số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$.

(A) Phần thực là 3 và phần ảo là -2.

(B) Phần thực là -3 và phần ảo là 2.

(C) Phần thực là 3 và phần ảo là $-2i$.

(D) Phần thực là -3 và phần ảo là $2i$.



Lời giải.

Ta có $z = 3+2i$. Do đó $\overline{z} = 3-2i$.

Suy ra, $\overline{z}$ có phần thực là 3 và phần ảo là -2.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(4;-3;2)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên trục Ox là điểm nào dưới đây?

(A) $M(4;-3;0)$. **B** $M(4;0;0)$. (C) $M(0;0;2)$. (D) $M(0;-3;0)$.

Lời giải.

Hình chiếu của điểm có tọa độ $(a;b;c)$ lên trục Ox là điểm có tọa độ $(a;0;0)$. Suy ra, hình chiếu lên trục Ox của điểm A là $M(4;0;0)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+5}$ trên đoạn $[-1;3]$ là

(A) $\dfrac{5}{3}$. (B) $-\dfrac{3}{4}$. (C) $-\dfrac{1}{5}$. **D** $\dfrac{5}{8}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{11}{(x+5)^2}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-5\}$.

Xét trên đoạn $[-1;3]$ thì $\max\limits_{x\in[-1;3]} y=y(3)=\dfrac{5}{8}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon -3x+2z-1=0$. Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là

(A) $\vec{n}=(3;0;2)$. **B** $\vec{n}=(-3;0;2)$. (C) $\vec{n}=(-3;2;-1)$. (D) $\vec{n}=(3;2;-1)$.

Lời giải.

Dễ có $\vec{n}_P=(-3;0;2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Đồ thị hàm số $y=-x^3+3x$ có bao nhiêu tiếp tuyến song song với trục hoành?

A 2. (B) 0. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Tiếp tuyến của hàm số $y=-x^3+3x$ song song với trục hoành nên có hệ số góc $k=f'(x_0)=0$.

Xét $y'=-3x^2+3=0\Leftrightarrow x=\pm1$.

Suy ra, có hai giá trị của x để $y'=0$, tức là ta viết được hai tiếp tuyến song song với trục Ox.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=-1+t\\ y=2t\\ z=5\end{cases}$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

A $\vec{u}=(1;2;0)$. (B) $\vec{u}=(-1;2;5)$. (C) $\vec{u}=(1;2;5)$. (D) $\vec{u}=(-1;0;5)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}_d=(1;2;0)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

B Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;2)$.

C Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

D Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Lời giải.

Theo bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Thể tích khối nón có chiều cao bằng h và có bán kính đáy bằng R là

A $V=\frac{1}{3}2\pi Rh$. **B** $V=\pi R^2h$. **C** $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$. **D** $V=\frac{1}{3}\pi Rh$.

Lời giải.

$V_{\text{nón}}=\frac{1}{3}S_{\text{đáy}}\cdot h=\frac{1}{3}\pi R^2h$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Một mô-đun của số phức $z=(1-2i)^2$ là

A 3. **B** $\sqrt{5}$. **C** 4. **D** 5.

Lời giải.

Ta có $z=(1-2i)^2=-3-4i$. Do đó, $|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Biết rằng $\int\limits_1^5 \frac{3}{x^2+3x}\,\mathrm{d}x=a\ln 5+b\ln 2$ $(a,b\in\mathbb{Z})$. Tính $P=a^2+b^2$.

A $P=1$. **B** $P=2$. **C** $P=0$. **D** $P=-1$.

Lời giải.

$$I=\int\limits_1^5\frac{3}{x(x+3)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^5\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^5\frac{\mathrm{d}x}{x}-\int\limits_1^5\frac{\mathrm{d}(x+3)}{x+3}=\ln x\Big|_1^5-\ln(x+3)\Big|_1^5=\ln 5-\ln 2.$$

$\Rightarrow a=1$, $b=-1$. Suy ra, $P=a^2+b^2=2$.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;3)$, $B(3;4;4)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+mz-1=0$ bằng độ dài đoạn thẳng AB.

A $m=2$. **B** $m=-2$. **C** $m=-3$. **D** $m=\pm 2$.

Lời giải.

Dễ có $AB = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{9} = 3$.

Theo giả thiết, ta có

$$\mathrm{d}\left(A, (P)\right) = \frac{|2+2+3m-1|}{\sqrt{2^2+1^2+m^2}} = 3 \Leftrightarrow |3m+3| = 3\sqrt{5+m^2}$$

$\Leftrightarrow (m+1)^2 = 5 + m^2 \Leftrightarrow 2m = 4 \Leftrightarrow m = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Biết $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 12$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^2 x\left(2 + f(x^2+1)\right)\,\mathrm{d}x$.

A $I = 16$. **B** $I = 4$. **C** $I = 10$. **D** $I = 7$.

Lời giải.

$$I = \int\limits_0^2 \left[2x + xf(x^2+1)\right]\,\mathrm{d}x = x^2\Big|_0^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(x^2+1)\,\mathrm{d}(x^2+1)$$

$$= 4 + \frac{1}{2}\int\limits_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t \ (\text{ta đặt } x^2+1=t) \ = 4 + \frac{1}{2}\cdot 12 = 10.$$

Chọn đáp án C □

Câu 20. Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường cong $y = \mathrm{e}^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A $V = \dfrac{\pi\left(\mathrm{e}^2+1\right)}{2}$. **B** $V = \dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2}$. **C** $V = \dfrac{\pi\mathrm{e}^2}{2}$. **D** $V = \dfrac{\pi\left(\mathrm{e}^2-1\right)}{2}$.

Lời giải.

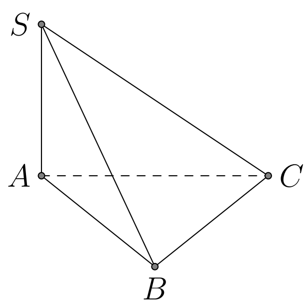
Ta có $V = \pi\int\limits_0^1 \left(\mathrm{e}^x\right)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi\mathrm{e}^{2x}}{2}\Big|_0^1 = \dfrac{\pi(\mathrm{e}^2-1)}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 21.

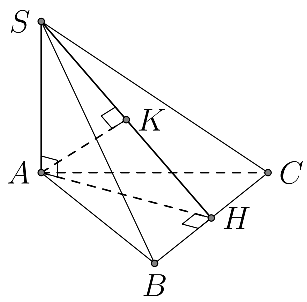
Cho khối chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC đều cạnh a và thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ (*tham khảo hình vẽ bên*). Tính khoảng cách h từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

A $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{7}$. **B** $h = \dfrac{2a}{\sqrt{7}}$. **C** $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D** $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.



Lời giải.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên BC và SH.
Ta có $\mathrm{d}\left(A,(SBC)\right) = AK$.



• $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA \Rightarrow SA = \dfrac{3V_{S.ABC}}{S_{ABC}} = \dfrac{\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}} = a.$

• Xét tam giác SAH vuông tại A có

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{7}{3a^2} \Leftrightarrow a = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-1}{3}$. Đường thẳng Δ là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (Oyz). Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là

(A) $\vec{u}(0;2;0)$. **B** $\vec{u}(0;2;3)$. (C) $\vec{u}(1;0;2)$. (D) $\vec{u}(1;2;0)$.

Lời giải.

Lấy các điểm $A(2;-3;1) \in d$, $B(3;-1;4) \in d$.
Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của A, B lên mặt phẳng (Oyz).
$\Rightarrow M(0;-3;1)\; N(0;-1;4) \Rightarrow \vec{u}_{\Delta} = \overrightarrow{MN} = (0;2;3)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Một phòng có 12 người. Cần lập một tổ đi công tác 3 người, một người làm tổ trưởng, một người làm tổ phó và một người là thành viên. Hỏi có bao nhiêu cách lập?

(A) 220. (B) 1728. (C) 1230. **D** 1320.

Lời giải.

- Có 12 cách chọn một người làm tổ trưởng.
- Có 11 cách chọn một người làm tổ phó.
- Có 10 cách chọn một người làm thành viên.

Suy ra, số cách lập một tổ đi công tác 3 người bằng $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Cho a là số thực dương khác 1. Giá trị của biểu thức $\log_a \left(\dfrac{a^2\sqrt[3]{a^2}\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[15]{a^7}}\right)$ bằng

(A) $\dfrac{12}{5}$. (B) $\dfrac{9}{5}$. (C) 2. **D** 3.

Lời giải.

Ta có $\log_a \left(\dfrac{a^2\sqrt[3]{a^2}\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[15]{a^7}}\right) = \log_a \left(\dfrac{a^2 a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{7}{15}}}\right) = \log_a \dfrac{a^{\frac{52}{15}}}{a^{\frac{7}{15}}} = \log_a a^{\frac{52}{15}-\frac{7}{15}} = \log_a a^3 = 3.$
Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho khai triển $(1-3x+2x^2)^{2018} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{4036}x^{4036}$. Tìm a_2.

(A) 18132544. (B) 18136578. **C** 18320413. (D) 18369122.

Lời giải.

Ta có

$$(1-3x+2x^2)^{2018} = (x-1)^{2018}(2x-1)^{2018} = \sum_{i=0}^{2018} \mathrm{C}_{2018}^i x^i (-1)^{2018} \sum_{j=0}^{2018} \mathrm{C}_{2018}^j (2x)^j (-1)^{2018-j}$$
$$= \sum_{i=0}^{2018}\sum_{j=0}^{2018} \mathrm{C}_{2018}^i \mathrm{C}_{2018}^j (-1)^{4036-i-j} 2^j x^{i+j}.$$

Theo đề bài, hệ số của a_2 ứng với x^2. Do đó ta xét các trường hợp sau:

- TH1: $i=2, j=0$. Khi đó hệ số a_2 là $\mathrm{C}_{2018}^2 \cdot \mathrm{C}_{2018}^0 \cdot 2^0$.
- TH2: $i=1, j=1$. Khi đó hệ số a_2 là $\mathrm{C}_{2018}^1 \cdot \mathrm{C}_{2018}^1 \cdot 2^1$.
- TH3: $i=0, j=2$. Khi đó hệ số a_2 là $\mathrm{C}_{2018}^0 \cdot \mathrm{C}_{2018}^2 \cdot 2^2$.

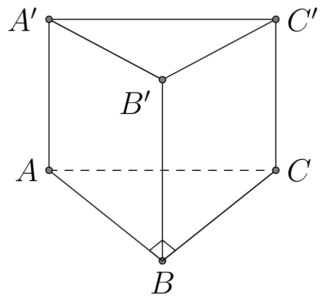
Suy ra, tổng hệ số của a_2 trong khai triển là

$$a_2 = \mathrm{C}_{2018}^2 \cdot \mathrm{C}_{2018}^0 \cdot 2^0 + \mathrm{C}_{2018}^1 \cdot \mathrm{C}_{2018}^1 \cdot 2^1 + \mathrm{C}_{2018}^0 \cdot \mathrm{C}_{2018}^2 \cdot 2^2 = 18320413.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 26.

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BB' = a$ (*tham khảo hình vẽ bên*). Tính thể tích V của khối lăng trụ.



(A) $V = \dfrac{a^3}{3}$. (B) $V = a^3$. (C) $V = \dfrac{a^3}{2}$. (D) $V = \dfrac{a^3}{6}$.

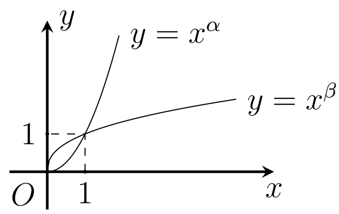
Lời giải.

Ta có $V = S_{ABC} \cdot BB' = \dfrac{1}{2} AB \cdot BC \cdot BB' = \dfrac{1}{2}a^3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 27.

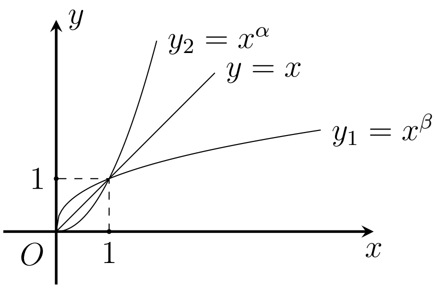
Cho α, β là các số thực. Đồ thị các hàm số $y = x^\alpha, y = x^\beta$ trên khoảng $(0; +\infty)$ được cho trong hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng?



(A) $0 < \alpha < 1 < \beta$. (B) $\alpha < 0 < 1 < \beta$.
(C) $0 < \beta < 1 < \alpha$. (D) $\beta < 0 < 1 < \alpha$.

Lời giải.

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ đường thẳng $y = x$. Để thuận tiện cho chứng minh ta gọi $y_1 = x^\beta, y_2 = x^\alpha$.



- Với $x \in [0; 1]$ thì $y_1 > y$ và $y_2 < y$.
- Với $x \in (1; +\infty)$ thì $y_1 < y$ và $y_2 > y$.

Suy ra, $0 < \beta < 1 < \alpha$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Cho $\{x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ thỏa mãn $(1-2i)x + (1+2y)i = 1 + i$. Khi đó $P = x + y$ bằng

(A) $P = -1$. (B) $P = 2$. (C) $P = 0$. (D) $P = -2$.

Lời giải.

Ta có $(1-2i)x + (1+y)i = 1 + i \Leftrightarrow \quad (x-1) + (2y-2x)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

Suy ra, $P = x + y = 1 + 1 = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 2z + 1 = 0$. Phương trình mặt cầu tâm A tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

(A) $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3$. (B) $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$.

(C) $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$. (D) $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}\left(A, (P)\right) = \dfrac{|4-1+2+1|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \dfrac{6}{3} = 2$.

Suy ra, phương trình mặt cầu tâm A cần tìm có dạng $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Giả sử cứ sau một năm diện tích đất nông nghiệp của nước ta giảm a phần trăm diện tích hiện có. Hỏi sau 10 năm nữa diện tích đất nông nghiệp của nước ta bằng bao nhiêu phần trăm diện tích hiện nay?

(A) $\left(1 - \dfrac{a}{100}\right)^{10}$. (B) $1 - \dfrac{a}{100}$. (C) $1 - \left(\dfrac{a}{100}\right)^{10}$. (D) $(1-a)^{10}$.

Lời giải.

– Giả sử diện tích đất nông nghiệp hiện nay của nước ta là S.

– Sau 10 năm nữa, diện tích còn lại sẽ là $S\left(1 - \dfrac{a}{100}\right)^{10}$.

– Suy ra, tỷ lệ cần tìm bằng $\dfrac{S\left(1 - \dfrac{a}{100}\right)^{10}}{S} = \left(1 - \dfrac{a}{100}\right)^{10}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(2^{x^2-4} - 1\right) \cdot \ln x^2 < 0$ là

(A) $(-2;-1) \cup (1;2)$. (B) $(1;2)$. (C) $(-2;-1)$. (D) $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta xét hai trường hợp sau:

- TH1: $\begin{cases} 2^{x^2-4} - 1 > 0 \\ \ln x^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ 0 < x^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 4 \\ 0 < x^2 < 1 \end{cases}$ (loại).
- TH2: $\begin{cases} 2^{x^2-4} - 1 < 0 \\ \ln x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ x^2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < x < -1 \\ 1 < x < 2 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\mathscr{D} = (-2;-1) \cup (1;2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+2y-z-4=0$. Tam giác ABC có $A(-1;2;1)$, các đỉnh B,C nằm trên (α) và trọng tâm G nằm trên đường thẳng d. Tọa độ trung điểm M của BC là

A $M(2;1;2)$. B $M(0;1;-2)$. C $M(1;-1;-4)$. D $M(2;-1;-2)$.

Lời giải.

Giả sử $G(2+t;2+2t;-2-t)\in d$ là trọng tâm của tam giác ABC.

Khi đó điểm M có tọa độ $\begin{cases} x_M=\dfrac{3x_G-x_A}{2}=\dfrac{3}{2}t+\dfrac{7}{2}\\ y_M=\dfrac{3y_G-y_A}{2}=3t+2\\ z_M=\dfrac{3z_G-z_A}{2}=-\dfrac{3}{2}t-\dfrac{7}{2}\end{cases}$.

Do điểm $M\left(\dfrac{3}{2}t+\dfrac{7}{2};3t+2;-\dfrac{3}{2}t-\dfrac{7}{2}\right)\in(\alpha)$ nên thay tọa độ M vào (α) ta được

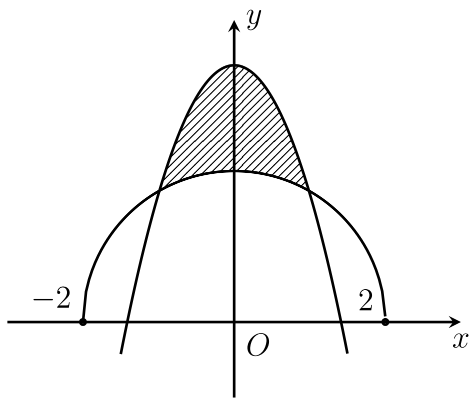
$$2\left(\frac{3}{2}t+\frac{7}{2}\right)+2\left(3t+2\right)-\left(-\frac{3}{2}t-\frac{7}{2}\right)-4=0\Leftrightarrow t=-1.$$

Suy ra, tọa độ M là $M(2;-1;-2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 33.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=-\sqrt{3}\left(x^2-2\right)$, và nửa đường tròn có phương trình $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $-2\le x\le 2$) (*phần tô đậm như hình vẽ*). Diện tích của hình (H) bằng

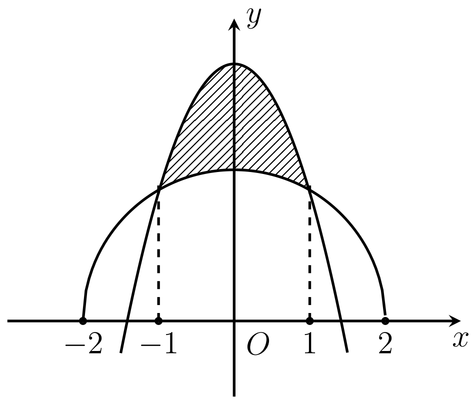


A $\dfrac{5\sqrt{3}-2\pi}{6}$. B $\dfrac{7\sqrt{3}-2\pi}{6}$.

C $\dfrac{7\sqrt{3}-2\pi}{3}$. D $\dfrac{5\sqrt{3}-2\pi}{3}$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm



$$-\sqrt{3}\left(x^2-2\right)=\sqrt{4-x^2}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2\le 0\\ 3(x^4-4x^2+4)=4-x^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x^2\le 2\\ x^2=1\end{cases}\Leftrightarrow x=\pm1.$$

Suy ra, diện tích của hình H là

$$S=\int\limits_{-1}^{1}\left|-\sqrt{3}\left(x^2-2\right)-\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}-\sqrt{3}\left(x^2-2\right)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

- Xét tích phân $I_1=\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}-\sqrt{3}\left(x^2-2\right)\,\mathrm{d}x=\frac{10}{\sqrt{3}}$.

- Xét tích phân $I_2 = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$. Đặt $x = 2\sin t$ ta được

$$\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}} 2\cos t\sqrt{4\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}} 4\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$
$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}} 2\left(\cos 2t + 1\right)\,\mathrm{d}t = \left(\sin 2t + 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}.$$

Từ đây ta tính được $S = I_1 - I_2 = \dfrac{10}{\sqrt{3}} - \left(\sqrt{3} + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{7\sqrt{3} - 2\pi}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 - 3x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

A $-1 \le m \le 0$. **B** $-1 < m < 0$. **C** $-1 \le m < 0$. **D** $-1 < m \le 0$.

Lời giải.

- Với $m = 0$ thì $y' = -3 < 0$. Do đó hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ tại $m = 0$.
- Với $m \ne 0$, ta có $y' = 3mx^2 - 6mx - 3$. Để $y' \le 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ thì

$$\begin{cases} m < 0 \\ \Delta' = 9(m^2 + m) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m(m+1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le m < 0.$$

Vậy với $-1 \le m \le 0$ thì hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 - 3x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8)$ có hai nghiệm thực phân biệt là

A 3. **B** 4. **C** 5. **D** 2.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x > 1 \\ mx - 8 > 0 \end{cases}$. Khi đó ta có

$\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8) \Leftrightarrow \log_2(x-1)^2 = \log_2(mx-8)$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = mx - 8 \Leftrightarrow x^2 - x(m+2) + 9 = 0$.

Để phương trình $x^2 - x(m+2) + 9 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt thì điều kiện cần là

$$\Delta = (m+2)^2 - 36 > 0 \Leftrightarrow (m-4)(m+8) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 4 \\ m < -8 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Theo điều kiện đề bài thì $x > 1$. Đặt $t = m + 2 > 6$, khi đó gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho thì

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{t + \sqrt{t^2 - 36}}{2} > 1 \\ x_2 = \dfrac{t - \sqrt{t^2 - 36}}{2} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{t^2 - 36} > 2 - t \text{ (luôn đúng)} \\ \sqrt{t^2 - 36} < t - 2 \end{cases} \Leftrightarrow t^2 - 36 < t^2 - 4t + 4 \Leftrightarrow t < 10.$$

Suy ra, $6 < t < 10$ hay $4 < m < 8$. Do đó, có 3 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt là $m = \{7; 8; 9\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Cho phương trình $(\cos x + 1)(\cos 2x - m\cos x) = m\sin^2 x$. Phương trình có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$ khi

A $-1 < m \leq -\dfrac{1}{2}$. **B** $m \geq -1$. **C** $-1 \leq m \leq 1$. **D** $m > -1$.

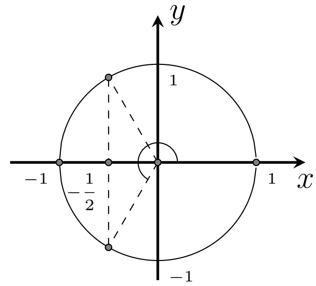
Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$$(\cos +1)(\cos 2x - m\cos x) = m(1-\cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\cos x + 1)(\cos 2x - m\cos x + m\cos x - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\cos x + 1)(\cos 2x - m) = 0$$



Trên đoạn $\left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$ thì $\cos x + 1 > 0$.

Nên ta xét phương trình $\cos 2x - m = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = m$.

Do $x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$ nên $2x \in \left[0; \dfrac{4\pi}{3}\right]$. Suy ra, quan sát đường tròn lượng giác ta thấy rằng để $\cos 2x = m$ có hai nghiệm $m \in \left(-1; -\dfrac{1}{2}\right]$.

Chọn đáp án A □

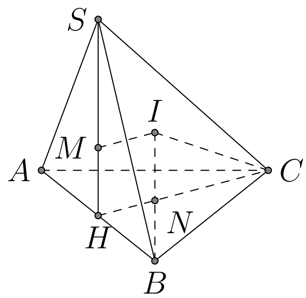
Câu 37. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A $V = \dfrac{5a^3\sqrt{15}\pi}{18}$. **B** $V = \dfrac{4a^3\sqrt{3}\pi}{27}$. **C** $V = \dfrac{5a^3\pi}{3}$. **D** $V = \dfrac{5a^3\sqrt{15}\pi}{54}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của cạnh AB. Gọi M, N lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác đều SAB và ABC.

Từ M ta dựng đường thẳng vuông góc với (SAB), từ N dựng đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng ta vừa dựng. Suy ra, I là tâm của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Ta có

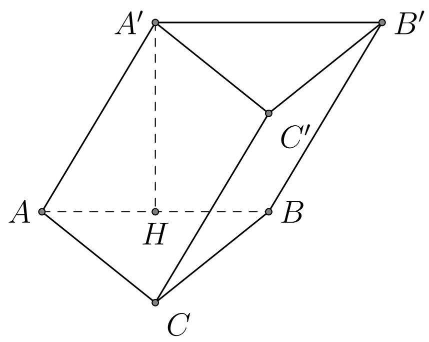


- $CH = SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $IN = MH = \dfrac{SH}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $CN = \dfrac{2}{3}CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
  $\Rightarrow IC = \sqrt{IN^2 + NC^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{9} + \dfrac{3a^2}{36}} = a\sqrt{\dfrac{5}{12}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$.
- Thể tích khối cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{4}{3}\pi IC^3 = \dfrac{4\pi}{3} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{15}}{6}\right)^3 = \dfrac{5\sqrt{15}\pi a^3}{54}$.

Chọn đáp án D □

Câu 38.

Cho hình trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB. Biết góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60° (*tham khảo hình vẽ bên*). Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và (ABC). Khi đó $\cos\varphi$ bằng

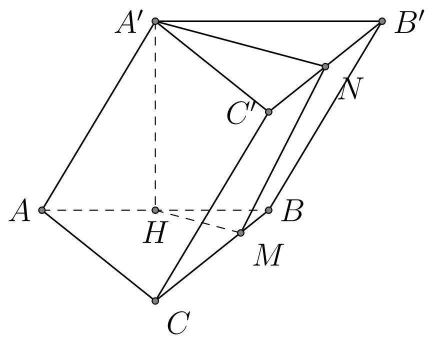


(A) $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B** $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

(C) $\cos\varphi = \sqrt{\dfrac{16}{17}}$. (D) $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$.

Lời giải.

Gọi M là hình chiếu của H lên cạnh BC, N là hình chiếu của A' lên $B'C'$. Ta có góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và (ABC) chính là góc $A'NM$.



• Ta có, góc giữa AA' với (ABC) là góc $A'AH$.

Theo giả thiết, $\widehat{A'AH} = 60^\circ \Rightarrow A'H = AH \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

• Ta tính được

$HM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$, $A'N = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $MN = \sqrt{A'H^2 + HM^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{4}$.

• Xét hình thang vuông $A'HMN$ có $\cos\varphi = \cos\widehat{A'NM} = \dfrac{HM}{MN} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{a\sqrt{15}}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ có các đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $xf'(x) - x^2\mathrm{e}^x = f(x)$ và $f(1) = \mathrm{e}$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = \mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}$. (B) $I = \mathrm{e}$. **C** $I = \mathrm{e}^2$. (D) $I = 3\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}$.

Lời giải.

• Với $x = 0$ thì $f(0) = 0$. Với $x \neq 0$ ta có

$$xf'(x) - f(x) = x^2\mathrm{e}^x \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2} = \mathrm{e}^x \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{f(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C_1. \quad (1)$$

• Xét biểu thức nguyên hàm $J = \displaystyle\int \frac{f'(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u = \dfrac{1}{x}$, $\mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x$ thì $\mathrm{d}u = \dfrac{-1}{x^2}\,\mathrm{d}x$, $v = f(x)$. Suy ra, $J = \dfrac{f(x)}{x} + \displaystyle\int \frac{f(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x + C_2$. (2)

• Thế (2) vào (1) ta thu được $\dfrac{f(x)}{x} = \mathrm{e}^x + C$. Lại có $f(1) = \mathrm{e}$ nên $C = 0$.

Suy ra, $f(x) = x\mathrm{e}^x$ (thỏa $f(0) = 0$) $\Rightarrow I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x\Big|_1^2 - \mathrm{e}^x\Big|_1^2 = \mathrm{e}^2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = 1$ và $(2 - x)f(x) - f'(x) = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

(A) $m < \mathrm{e}^2$. **B** $0 < m < \mathrm{e}^2$. (C) $0 < m \leq \mathrm{e}^2$. (D) $m > \mathrm{e}^2$.

Lời giải.

Xét phương trình

$$(2-x)f(x) - f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2-x)\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}-2x}f(x) - \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}-2x}f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x)\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}-2x}\right)' = 0 \Leftrightarrow f(x)\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}-2x} = C. \qquad (1)$$

Do $f(0) = 1$ nên thay vào (1) ta được $C = 1$.

Suy ra, $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}+2x} \Rightarrow f'(x) = (-x+2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}+2x}$. Dễ thấy hàm $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 2]$

Ta có bảng biến thiên của hàm $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		2
$f'(x)$		$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^2

- Do $-\dfrac{x^2}{2} + 2x \leq 2$ nên $0 < f(x) \leq \mathrm{e}^2$. Phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $-\dfrac{x^2}{2} + 2x = \ln m$ có hai nghiệm thực phân biệt. Khi đó, $\ln m \in (-\infty; 2)$.
- Đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = m$ luôn cắt nhau tại một điểm với mọi $m \in (0; \mathrm{e}^2]$.

Suy ra, để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt thì $0 < m < \mathrm{e}^2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Hàm số $y = \log_2(4^x - 2^x + m)$ có tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty; +\infty)$ khi

(A) $m > 0$. (B) $m \geq \dfrac{1}{4}$. (C) $m < \dfrac{1}{4}$. **D** $m > \dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $4^x - 2^x + m > 0 \Leftrightarrow m > -4^x + 2^x$.

Xét hàm số $f(x) = -4^x + 2^x$ có $f'(x) = -4^x \cdot 2\ln 2 + 2^x \ln 2 = 2^x \ln 2 \cdot (-2^{x+1} + 1)$.

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2^{x+1} + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Ta có bảng biến thiên của hàm $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

Suy ra, hàm số $f(x) = -(2^x)^2 + 2^x$ đạt cực đại tại $x = -1$.

Suy ra, để $m > -4^x + 2^x$ đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $m > \max f(x) = -4^{-1} + 2^{-1} = \dfrac{1}{4}$.

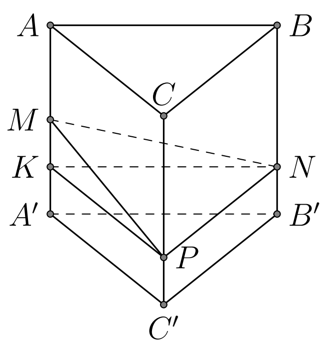
Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Gọi M là trung điểm của AA' và hai điểm N, P lần lượt thuộc các cạnh BB', CC' sao cho $\dfrac{BN}{BB'} = \dfrac{CP}{CC'} = \dfrac{2}{3}$. Thể tích của khối đa diện $ABC.MNP$ bằng

(A) $\dfrac{20}{27}V$. (B) $\dfrac{2}{3}V$. (C) $\dfrac{11}{18}V$. (D) $\dfrac{9}{16}V$.

Lời giải.

Gọi K là điểm thuộc cạnh AA' thỏa mãn $\dfrac{AK}{AA'} = \dfrac{2}{3}$. Ta có

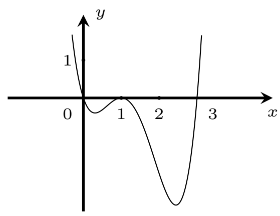


- Thể tích của khối $V_{NPK.A'B'C'} = V_1 = \dfrac{V}{3}$.
- $V_{M.NPK} = V_2 = \dfrac{1}{3}S_{NPK} \cdot MK = \dfrac{1}{3}S_{ABC} \cdot \dfrac{AA'}{6} = \dfrac{V}{18}$.
- $V_{ABC.MNP} = V - V_1 - V_2 = V - \dfrac{V}{3} - \dfrac{V}{18} = \dfrac{11}{18}V$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 43.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm m để hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 3 điểm cực trị.



(A) $m \in [0; 3]$. (B) $m \in [0; 3)$.
(C) $m \in (3; +\infty)$. (D) $m \in (-\infty; 0)$.

Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số ta suy ra $f'(x)$ có dạng $f'(x) = g(x)x(x-1)^2(x-3)$, trong đó $g(x) \neq 0$.

Ta có $\left(f(x^2+m)\right)' = 2xf'(x^2+m) = 2x\left[g(x^2+m)\right](x^2+m)(x^2+m-1)^2(x^2+m-3)$.

Nhận xét: Do số mũ của $x^2 + m - 1$ trong biểu thức $f'(x)$ là chẵn nên $f'(x)$ sẽ không đổi dấu khi đi qua nghiệm của phương trình $x^2 + m - 1 = 0$. Do đó hàm số không đạt cực trị tại nghiệm của phương trình $x^2 + m - 1 = 0$.

Suy ra, để hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 3 điểm cực trị thì $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + m = 0 \\ x^2 + m - 3 = 0 \end{cases}$ (I).

Ta xét các trường hợp sau:

- Với $m = 3$ thì hệ (I) có duy nhất một nghiệm $x = 0$.
- Với $m \in (3; +\infty)$ thì hệ (I) có nghiệm duy nhất $x = 0$.
- Với $m \in (-\infty; 0)$ thì hệ (I) có 5 nghiệm đơn phân biệt.
- Với $m \in [0; 3)$ thì hệ (I) có 3 nghiệm trong đó không có nghiệm nào là nghiệm bội có số mũ chẵn. Do đó hàm số có 3 điểm cực trị.

Suy ra, với $m \in [0; 3)$ thì để hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; -2; 1)$, $B(1; 2; -3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z}{-1}$. Tìm một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với đường thẳng d sao cho khoảng cách từ B đến đường thẳng Δ ngắn nhất.

(A) $\vec{u} = (3; 4; -4)$. **B** $\vec{u} = (1; 0; 2)$. (C) $\vec{u} = (1; 7; -1)$. (D) $\vec{u} = (2; 2; -1)$.

Lời giải.

- Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, vuông góc với d có dạng $2(x+2)+2(y+2)-(z-1) = 0$ hay $(P)\colon 2x + 2y - z + 9 = 0$.
- Phương trình đường thẳng d' qua B và vuông góc với (P) có dạng $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}$.
- Giao điểm của d' và (P) là điểm $M(-3; -2; -1)$. Ta có $\overrightarrow{MA} = (1; 0; 2)$.

Suy ra, đường thẳng Δ cần tìm chính là đường thẳng MA có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 0; 2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Có 20 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Chọn đúng ngẫu nhiên 8 tấm thẻ, tính xác suất để chọn được 5 tấm mang số lẻ, 3 tấm mang số chẵn trong đó có đúng 3 tấm thẻ mang số chia hết cho 3. Kết quả đúng là

(A) $\dfrac{308}{1105}$. **B** $\dfrac{84}{1105}$. (C) $\dfrac{308}{969}$. (D) $\dfrac{126}{20995}$.

Lời giải.

Số cách chọn 8 tấm thẻ trong 20 tấm thẻ là $|\Omega| = \mathrm{C}_{20}^{8} = 125970$ (cách).

Gọi A là biến cố "5 tấm thẻ mang số lẻ, 3 tấm thẻ mang số chẵn trong đó có đúng 3 tấm thẻ mang số chia hết cho 3".

Nhận xét: Trong 20 tấm thẻ có 10 tấm thẻ mang số chẵn, 10 tấm thẻ mang số lẻ và 6 tấm mang số chia hết cho 3. Để tìm số phần tử của A ta xét bốn trường hợp sau:

- TH1: Có 5 tấm thẻ mang số lẻ không chia hết cho 3 và 3 tấm thẻ chẵn chia hết cho 3. Số cách chọn là $\mathrm{C}_7^5\mathrm{C}_3^3 = 21$ (cách chọn).
- TH2: Có 4 tấm thẻ mang số lẻ không chia hết cho 3, 1 tấm thẻ lẻ chia hết cho ba, 1 tấm thẻ chẵn không chia hết cho 3 và 2 tấm thẻ chẵn chia hết cho 3. Số cách chọn là $\mathrm{C}_7^4\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_7^1\mathrm{C}_3^2 = 2205$ (cách chọn).
- TH3: Có 3 tấm thẻ mang số lẻ không chia hết cho 3, 2 tấm thẻ mang số lẻ chia hết cho 3, 2 tấm thẻ chẵn không chia hết cho 3 và 1 tấm thẻ chẵn chia hết cho 3. Số cách chọn là $\mathrm{C}_7^3\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_7^2\mathrm{C}_3^1 = 6615$ (cách chọn).
- TH4: Có 2 tấm thẻ lẻ không chia hết cho 3, 3 tấm thẻ lẻ chia hết cho 3, 3 tấm thẻ chẵn không chia hết cho 3. Số cách chọn là $\mathrm{C}_7^2\mathrm{C}_3^3\mathrm{C}_7^3 = 735$ (cách chọn).

Suy ra, số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 21 + 2205 + 6615 + 735 = 9576$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{9576}{125970} = \dfrac{84}{1105}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log(u_1^2+u_2^2+10)-\log(2u_1+6u_2) = 0$ và $u_{n+2}+u_n = 2u_{n+1}+1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 5050$ là

A 101. (B) 102. (C) 100. (D) 99.

Lời giải.

Ta có

$\log(u_1^2+u_2^2+10)-\log(2u_1+6u_2)=0 \Leftrightarrow \log\dfrac{u_1^2+u_2^2+10}{2u_1+6u_2}=0$

$\Leftrightarrow u_1^2+u_2^2+10=2u_1+6u_2 \Leftrightarrow (u_1-1)^2+(u_2-3)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=1\\ u_2=3. \end{cases}$

Theo giả thiết, ta có $u_{n+2}+u_n=2u_{n+1}+1 \Leftrightarrow u_{n+2}-u_{n+1}=u_{n+1}-u_n+1=\cdots=u_2-u_1+n=n+2$.

Do đó $u_n=u_{n-1}+n=\cdots=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Xét bất phương trình $\dfrac{n(n+1)}{2}>5050 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n>100\\ n<-101 \text{ (loại)} \end{array}\right.$.

Suy ra, giá trị nhỏ nhất của n để $u_n>5050$ là $n=101$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Xét số phức z thỏa mãn $|iz-2i-2|-|z+1-3i|=\sqrt{34}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|(1+i)z+2i|$.

A $P_{\min}=\dfrac{9}{\sqrt{17}}$.
B $P_{\min}=3\sqrt{2}$.
C $P_{\min}=4\sqrt{2}$.
D $P_{\min}=\sqrt{26}$.

Lời giải.

Giả sử số phức z có dạng $z=a+bi$, z có biểu diễn hình học là điểm $M(a;b)$. Khi đó

$|iz-2i-2|-|z+1-3i|=\sqrt{34} \Leftrightarrow \sqrt{(b+2)^2+(a-2)^2}-\sqrt{(a+1)^2+(b-3)^2}=\sqrt{34}$. (1)

Gọi điểm $A(2;-2)$, $B(-1;3)$ khi đó ta có $AB=\sqrt{34}$. Kết hợp với (1) ta suy ra $MA-MB=AB$.

$\Rightarrow$ Điểm M trùng với điểm B hoặc B là trung điểm của MA. Ta xét hai trường hợp sau:

- TH1: M trùng $B \Rightarrow M(-1;3)$. Suy ra

$$P=\sqrt{(a-b)^2+(a+b+2)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}.$$

- TH2: B là trung điểm của $MA \Rightarrow M(-4;8)$. Suy ra

$$P=\sqrt{(a-b)^2+(a+b+2)^2}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}.$$

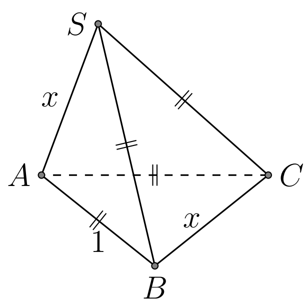
Suy ra, $\min P=4\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

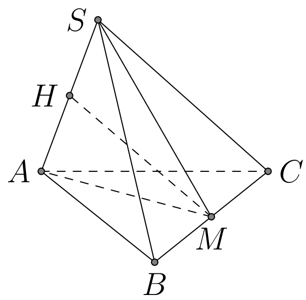
Câu 48.

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=BC=x$, $AB=AC=SB=SC=1$ (*tham khảo hình vẽ bên*). Thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất khi giá trị của x bằng

A $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.
B $\sqrt{3}$.
C $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.
D $4\sqrt{3}$.



Lời giải.



Dễ thấy hai tam giác SBC và ABC bằng nhau. Gọi M là trung điểm của BC, ta có $AM \perp BC, SM \perp BC$ nên $BC \perp (ASM)$.

- Gọi H là trung điểm của SA. Ta có $AM = SM = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}, MH = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}, 0 < x \leq \sqrt{2}$.
  Do đó, diện tích tam giác ASM là $S_{ASM} = \frac{1}{2}x\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}$.
- $V_{S.ABC} = 2V_{B.ASM} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{ASM} \cdot BM = 2 \cdot \frac{1}{3}\frac{x^2}{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} = \frac{1}{3}x^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}$.
- Hàm số $f(x) = x^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}$ có $f'(x) = 2x\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}} = x\left(2\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} - \frac{x^2}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}}\right)$.
  $\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} - \frac{x^2}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
- Với $0 < x < \sqrt{2}$ ta có $f(0) = 0, f(\sqrt{2}) = 0, f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}$.

Suy ra, khối chóp $S.ABC$ có thể tích lớn nhất khi và chỉ khi $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) + \frac{f(x)}{x} = 4x^2 + 3x$ và $f(1) = 2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là

A $y = 16x + 20$. **B** $y = -16x + 20$. **C** $y = -16x - 20$. **D** $y = 16x - 20$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{array}{rrcl} & f'(x) + \frac{f(x)}{x} & = & 4x^2 + 3x \\ \Leftrightarrow & xf'(x) + f(x) & = & 4x^3 + 3x^2 \\ \Leftrightarrow & \int xf'(x)\,dx + \int f(x)\,dx & = & \int \left(4x^3 + 3x^2\right)\,dx \\ \Leftrightarrow & xf(x) - \int f(x)\,dx + \int f(x)\,dx & = & x^4 + x^3 + C \\ \Leftrightarrow & xf(x) & = & x^4 + x^3 + C. \end{array}$$

Theo giả thiết $f(1) = 2$, nên thay $x = 1$ vào (1) ta có $1 \cdot f(1) = 1 + 1 + C \Rightarrow C = 0$.

Suy ra, $y = f(x) = x^3 + x^2$.

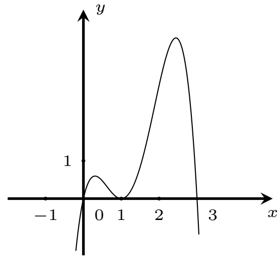
Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ là

$y - y(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - 12 = 16(x - 2) \Leftrightarrow y = 16x - 20$.

Chọn đáp án D □

Câu 50.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = (f(x))^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A 5. **B** 3. **C** 4. **D** 2.

Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số ta có nhận xét như sau:

• Hàm số $y = f(x)$ có dạng $f(x) = g(x)x(x-1)^2(x-3)$ $(g(x) \neq 0)$.

• Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị nên phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm trong đó có một nghiệm $x = 1$. Do đó $f'(x) = k(x)(x-1)(x-a)(x-b)$, $(a \in (0;1), b \in (2;3), k(x) \neq 0)$.

Suy ra, hàm số $\left[(f(x))^2\right]' = 2f'(x)f(x) = 2g(x)k(x)x(x-a)(x-b)(x-3)(x-1)^3$.

$\Rightarrow$ Phương trình $y' = 0$ có 5 nghiệm, trong đó $x = 1$ là một nghiệm bội ba. Suy ra, hàm số $y = (f(x))^2$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. A	3. C	4. B	5. C	6. C	7. D	8. A	9. B	10. D
11. B	12. A	13. A	14. A	15. C	16. D	17. B	18. A	19. C	20. D
21. D	22. B	23. D	24. D	25. C	26. C	27. C	28. B	29. B	30. A
31. A	32. D	33. C	34. A	35. A	36. A	37. D	38. B	39. C	40. B
41. D	42. C	43. B	44. B	45. B	46. A	47. C	48. A	49. D	50. A

103 ĐỀ THI THỬ LẦN 4, 2017 - 2018 TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU, NGHỆ AN

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\cos x}{\sin x}$.

(A) 2. **(B) 1.** (C) -1. (D) 0.

Lời giải.

Ta có $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}+\dfrac{1-\cos x}{x}}{\dfrac{\sin x}{x}}$.

Sử dụng các giới hạn đặc biệt của hàm số mũ và hàm số lượng giác ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}&=1.\\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\right]=0\cdot 1=0.\\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}&=1.\end{aligned}$$

Do đó $A=\dfrac{1+0}{1}=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

(A) Tồn tại duy nhất một đường thẳng qua một điểm và song song với một đường thẳng.

(B) Tồn tại duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng.

(C) Hai đường thẳng song song thì đồng phẳng.

(D) Hai đường thẳng không đồng phẳng thì không có điểm chung.

Lời giải.

Mệnh đề "Tồn tại duy nhất một đường thẳng qua một điểm và song song với một đường thẳng" sai vì nếu điểm đó thuộc đường thẳng đã cho thì không tồn tại đường thẳng nào đi qua điểm đó và song song với đường thẳng cho trước.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_2(2\sin x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(\cos 2x+m)=0$ có nghiệm.

(A) $\left[-\dfrac{5}{2};+\infty\right)$. (B) $\left[-\dfrac{1}{2};2\right]$. (C) $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **(D) $\left(-\dfrac{1}{2};2\right]$.**

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases}2\sin x-1>0\\ \cos 2x+m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x>\dfrac{1}{2}\\ \cos 2x>-m.\end{cases}$.

Mặt khác $\sin x\le 1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên ta có $1\ge\sin x>\dfrac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}\log_2(2\sin x - 1) - \log_2(\cos 2x + m) = 0 &\Leftrightarrow \log_2(2\sin x - 1) = \log_2(\cos 2x + m)\\ &\Leftrightarrow 2\sin x - 1 = \cos 2x + m\\ &\Leftrightarrow 2\sin x - 1 - \cos 2x = m\\ &\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 2\sin x - 2 = m. \quad (1)\end{aligned}$$

Đặt $\sin x = t \left(1 \geq t > \dfrac{1}{2}\right)$. Khi đó, $m = 2t^2 + 2t - 2$. (2)

Xét hàm số $f(t) = 2t^2 + 2t - 2$ trên $\left(\dfrac{1}{2}; 1\right]$.

Ta có $f'(t) = 4t + 2$, $f'(t) > 0$ với mọi $t \in \left(\dfrac{1}{2}; 1\right]$.

Bảng biến thiên của hàm số

x	$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	2

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm thuộc $\left(\dfrac{1}{2}; 1\right] \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} < m \leq 2$.

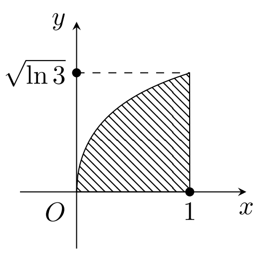
Do đó, để phương trình ban đầu có nghiệm thì $m \in \left(-\dfrac{1}{2}; 2\right]$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{\ln(2x+1)}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox.

A $\dfrac{3}{2}\ln 3 - 1$. B $\dfrac{\pi}{2}\ln 3 - \pi$. C $\left(\pi + \dfrac{1}{2}\right)\ln 3 - 1$. D $\dfrac{3\pi}{2}\ln 3 - \pi$.

Lời giải.



Thể tích của khối tròn xoay là $V = \displaystyle\int_0^1 \pi \ln(2x+1)\,\mathrm{d}x$.

Đổi biến $2x + 1 = t$ thì $\mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x$. Khi $x = 0$ thì $t = 1$, $x = 1$ thì $t = 3$.

Do đó ta có $V = \displaystyle\int_1^3 \frac{\pi}{2}\ln t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_1^3 \ln t\,\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases}\ln t = u\\ \mathrm{d}t = dv\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}\\ v = t.\end{cases}$

Sử dụng tích phân từng phần ta có

$$\int_1^3 \ln t\,\mathrm{d}t = t\ln t\Big|_1^3 - \int_1^3 \mathrm{d}t = (t\ln t - t)\Big|_1^3 = 3\ln 3 - 2.$$

Vậy $V = \dfrac{(3\ln 3 - 2)\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2}\ln 3 - \pi$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Tìm tập nghiệm của phương trình $2\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} = 0$.

A $\left\{-\dfrac{7\pi}{36} + k\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{13\pi}{36} + k\dfrac{2\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B $\left\{\pm\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C $\left\{\dfrac{7\pi}{36} + k\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{13\pi}{36} + k\dfrac{2\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D $\left\{\dfrac{7\pi}{36} + k2\pi, -\dfrac{13\pi}{36} + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 3x + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7\pi}{36} + \dfrac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{13\pi}{36} + \dfrac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án C □

Câu 6. Một đa giác lồi có 10 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên ba đỉnh của đa giác và nối chúng lại với nhau ta được một tam giác. Tính xác suất để tam giác thu được có ba cạnh là ba đường chéo của đa giác đã cho.

A $\dfrac{11}{12}$. B $\dfrac{1}{4}$. C $\dfrac{3}{8}$. D $\dfrac{5}{12}$.

Lời giải.

Gọi S là tập hợp các tam giác có ba đỉnh là các đỉnh của đa giác lồi.

Khi đó $|S| = \mathrm{C}_{10}^3 = 120$.

Xét một tam giác thuộc S và có đúng một cạnh là cạnh của đa giác lồi. Đầu tiên, ta chọn một cạnh của đa giác làm cạnh của tam giác. Sau đó, ta chọn đỉnh còn lại của tam giác. Vì tam giác chỉ có đúng một cạnh là cạnh của đa giác nên ta có 6 cách chọn đỉnh còn lại. Do đó, số lượng tam giác có đúng một cạnh là cạnh của đa giác bằng $10 \cdot 6 = 60$.

Xét một tam giác thuộc S và có cả ba cạnh là cạnh của đa giác lồi. Để có tam giác như vậy, ta chọn một đỉnh bất kì của đa giác rồi nối với hai đỉnh kề với nó. Do đó, số lượng tam giác có cả ba cạnh là cạnh của đa giác bằng 10.

Vậy số tam giác có 3 cạnh là 3 đường chéo của đa giác là $120 - 60 - 10 = 50$.

Xác suất cần tính là $\dfrac{50}{120} = \dfrac{5}{12}$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Tọa độ tâm I và bán kính mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ là

A $I(1;-2), R = 5$. B $I(1;2;0), R = 5$. C $I(-1;2;0), R = 5$. D $I(1;-2;0), R = 5$.

Lời giải.

Phương trình mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 25$.

Khi đó mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R = 5$.

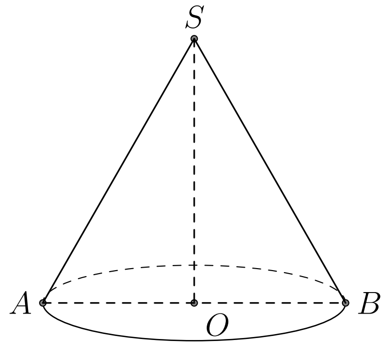
Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Xác định thể tích khối nón có thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh m.

(A) $\dfrac{\pi m^3\sqrt{3}}{48}$. **(B)** $\dfrac{\pi m^3\sqrt{3}}{24}$. (C) $\dfrac{\pi m^3\sqrt{3}}{8}$. (D) $\dfrac{\pi m^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.

Gọi S là đỉnh của khối nón, O là tâm mặt đáy, AB là đường kính mặt đáy.



Vì thiết diện là tam giác đều cạnh m nên ta có

$$AB = m; SO = \frac{m\sqrt{3}}{2}; AO = \frac{m}{2}.$$

Do đó $V = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{m\sqrt{3}}{2}\cdot\pi\cdot\dfrac{m^2}{4} = \dfrac{\pi m^3\sqrt{3}}{24}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Biết z là một nghiệm của phương trình $z+\dfrac{1}{z}=1$. Tính giá trị biểu thức $P=z^3+\dfrac{1}{z^3}$.

(A) $P=-2$. (B) $P=0$. (C) $P=4$. (D) $P=\dfrac{7}{4}$.

Lời giải.

Ta có $z^3+\dfrac{1}{z^3}=\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^3-3z\cdot\dfrac{1}{z}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)=1-3=-2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Cho a, x, y dương, $a\neq 1$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

(A) $\log x=\dfrac{\log_a x}{\log_a 10}$. (B) $\log x=\dfrac{\log_a x}{\log_a \mathrm{e}}$. (C) $\log x=\dfrac{\log_a x}{\ln 10}$. (D) $\log x=\dfrac{\log_a x}{\log a}$.

Lời giải.

Ta có $\log x=\dfrac{\log_a x}{\log_a 10}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Một người lần đầu gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý theo hình thức lãi kép. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được một năm sau khi gửi thêm tiền gần nhất với kết quả nào sau đây?

(A) 212 triệu. (B) 216 triệu. **(C)** 220 triệu. (D) 210 triệu.

Lời giải.

Ta sử dụng công thức lãi kép $C=A(1+r)^N$.

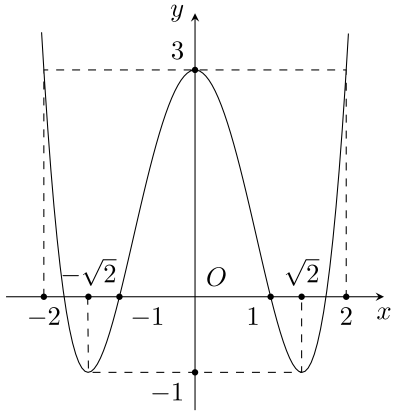
Sau hai quý đầu, số tiền trong ngân hàng của người đó là $100\left(1+0,02\right)^2$ triệu.

Sau khi gửi thêm 100 triệu đồng, số tiền trong ngân hàng là $100\left(1,02^2+1\right)$ triệu.

Sau một năm tiếp đó, số tiền trong ngân hàng là $100\left(1,02^2+1\right)\left(1+0,02\right)^4\approx 220,86$ triệu.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ $(a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Hàm số $y = f(x)$ là hàm số nào trong bốn hàm số sau

A. $y = (x^2 - 2)^2 + 1$.
B. $y = (x^2 - 2)^2 - 1$.
C. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.
D. $y = -x^4 + 4x^2 + 3$.

Lời giải.

Vì đồ thị hàm số đi qua điểm $(-\sqrt{2}; -1)$ và $(0; 3)$ nên ta có:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = -1 \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -4 \\ c = 3. \end{cases} \quad (1)$$

Theo hình vẽ, ta thấy hàm số đạt cực trị tại $x = \pm\sqrt{2}$ và $x = 0$.

Do đó phương trình $f'(x) = 4ax^3 + 2bx = 0$ có nghiệm $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ và 0.

Vì vậy $f'(\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}a + 2\sqrt{2}b = 0 \Leftrightarrow 4a + b = 0. \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $a = 1; b = -4$.

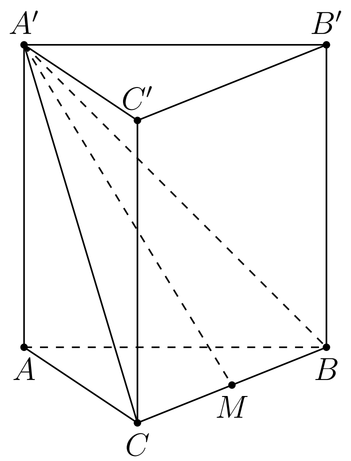
Vậy hàm số cần tìm là $y = x^4 - 4x^2 + 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh a và có thể tích bằng $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. Tính diện tích tam giác $A'BC$.

A. $a^2\sqrt{3}$.
B. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
C. a^2.
D. $\dfrac{a^2}{2}$.

Lời giải.



Diện tích tam giác đều ABC là $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Do đó $AA' = \text{fracV}_{ABCA'B'C'}S_{ABC} = \dfrac{\frac{a^3\sqrt{3}}{8}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{a}{2}$.

Ta có $A'C = A'B = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Gọi M là trung điểm của BC. Vì $\triangle A'BC$ cân tại A' nên $A'M \perp BC$.

Ta có $A'M = \sqrt{A'C^2 - \dfrac{BC^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{5a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = a$.

Vậy $S_{A'BC} = \dfrac{1}{2}A'M \cdot BC = \dfrac{a^2}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{8}$, $y = \dfrac{27}{x}$.

(A) $\dfrac{63}{8}$. (B) $27\ln 2 - \dfrac{63}{8}$. (C) $27\ln 2$. (D) $27\ln 2 - \dfrac{63}{4}$.

Lời giải.

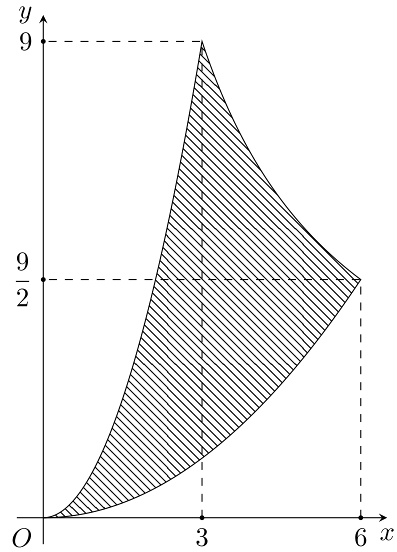
Giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2$ và $y = \dfrac{x^2}{8}$ là $(0; 0)$.

Giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2$ và $y = \dfrac{27}{x}$ là $(3; 9)$.

Giao điểm của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2}{8}$ và $y = \dfrac{27}{x}$ là $(6; \dfrac{9}{2})$.

Thể tích hình phẳng được tính bởi

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \left(x^2 - \frac{x^2}{8}\right) \mathrm{d}x + \int_3^6 \left(\frac{27}{x} - \frac{x^2}{8}\right) \mathrm{d}x \\ &= \left.\frac{7x^3}{24}\right|_0^3 + \left.\left(27\ln x - \frac{x^3}{24}\right)\right|_3^6 \\ &= 27\ln 2. \end{aligned}$$



Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Khối đa diện có tất cả các mặt là hình vuông có bao nhiêu đỉnh?

(A) 8. (B) 4. (C) 16. (D) 20.

Lời giải.

Khối đa diện có tất cả các mặt là hình vuông là hình lập phương, có 8 đỉnh.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Một đội văn nghệ có 20 người, trong đó có 10 nam và 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 người sao cho có ít nhất 2 nam và ít nhất 1 nữ trong 5 người đó?

(A) 12900. (B) 13125. (C) 550. (D) 15504.

Lời giải.

Ta xét các trường hợp sau:

TH1: Chọn ra 4 nam, 1 nữ. Khi đó, số cách chọn là $\mathrm{C}_{10}^4 \cdot \mathrm{C}_{10}^1$.

TH2: Chọn ra 3 nam, 2 nữ. Khi đó, số cách chọn là $\mathrm{C}_{10}^3 \cdot \mathrm{C}_{10}^2$.

TH1: Chọn ra 2 nam, 3 nữ. Khi đó, số cách chọn là $\mathrm{C}_{10}^2 \cdot \mathrm{C}_{10}^3$.

Vậy số cách chọn ra 5 bạn sao cho có ít nhất 2 nam và ít nhất 1 nữ là

$$\mathrm{C}_{10}^4 \cdot \mathrm{C}_{10}^1 + \mathrm{C}_{10}^3 \cdot \mathrm{C}_{10}^2 + \mathrm{C}_{10}^2 \cdot \mathrm{C}_{10}^3 = 12900.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{z}{z-i}\right| = 3$ là đường nào?

(A) Một đường thẳng. (B) Một đường parabol.
(C) Một đường tròn. (D) Một đường elip.

Lời giải.

Cách 1: Giả sử $z = a + bi$ trong đó $(a, b \in \mathbb{R}, z \neq i)$.
Từ giả thiết ta có:

$$|z| = 3|z - i| \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 9a^2 + 9(b-1)^2 \Leftrightarrow 8a^2 + 8b^2 - 18b + 9 = 0 \Leftrightarrow a^2 + \left(b - \frac{9}{8}\right) = \frac{9}{64}.$$

Do đó tập hợp biểu diễn điểm z là một đường tròn.
Cách 2: Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của z, i trong mặt phẳng phức.
Khi đó $AO = |z|$ và $AB = |z - i|$.
Từ đề bài ta có $\dfrac{AO}{AB} = 3$.
Như vậy, tập hợp điểm A là đường tròn Apollonius của đoạn thẳng OB với tỉ số 3.
Chọn đáp án C □

Câu 18. Có bao nhiêu số có 3 chữ số đôi một khác nhau có thể lập được từ các chữ số 0, 2, 4, 6, 8?

$\boxed{\text{A}}$ 48. (B) 60. (C) 10. (D) 24.

Lời giải.
Gọi số có ba chữ số khác nhau lập được từ $0, 2, 4, 6, 8$ là $\overline{abc}$.
Số cách chọn a là 4 (do $a \neq 0$).
Với a đã chọn, số cách chọn $\overline{bc}$ là $\mathrm{A}_4^2 = 12$.
Vậy có tất cả 48 số có ba chữ số thỏa mãn đề bài.
Chọn đáp án A □

Câu 19. Công thức tích thể tích khối trụ có chiều cao h và bán kính đáy R là

(A) $\frac{1}{3}hR^2$. $\boxed{\text{B}}$ πhR^2. (C) hR^2. (D) $\frac{1}{3}\pi hR^2$.

Lời giải.
Theo công thức tính thể tích khối trụ.
Chọn đáp án B □

Câu 20. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = 7x - \sqrt{2x^2 - x - 1}$. (B) $y = \sqrt[3]{2 - 3x + x^2}$.
$\boxed{\text{C}}$ $y = 4x - \sqrt{x^2 - x + 1}$. (D) $y = \sqrt[3]{-2x + 5}$.

Lời giải.
Để hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
Hàm số $y = 7x - \sqrt{2x^2 - x - 1}$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ nên hàm số không đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Hàm số $y = \sqrt[3]{2 - 3x + x^2}$ có đạo hàm $y' = \dfrac{2x - 3}{3\sqrt[3]{(2 - 3x + x^2)^2}}$. Đạo hàm đổi dấu khi x đi qua $\dfrac{3}{2}$.
Hàm số $y = \sqrt[3]{-2x + 5}$ có đạo hàm $y' = \dfrac{-2}{3\sqrt[3]{(-2x + 5)^2}} < 0 \quad \forall x \neq \dfrac{5}{2}$.
Hàm số $y = 4x - \sqrt{x^2 - x + 1}$ có đạo hàm $y' = 4 - \dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} = \dfrac{4\sqrt{(2x-1)^2 + 3} - (2x - 1)}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$.
Ta có $4\sqrt{(2x-1)^2 + 3} - (2x - 1) = 3\sqrt{(2x-1)^2 + 3} + \left(\sqrt{(2x-1)^2 + 3} - (2x - 1)\right) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Do đó, hàm số $y = 4x - \sqrt{x^2 - x + 1}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Chọn đáp án C □

Câu 21. Số nghiệm của phương trình $e^x = 2 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^{2018}}{2018!}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là

(A) Vô hạn. (B) 2018. (C) 0. **D** 1.

Lời giải.

Ta chứng minh bằng quy nạp được $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$ trên $(0; +\infty)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Xét hàm số $f(x) = e^x - 2 - x - \dfrac{x^2}{2!} - \ldots - \dfrac{x^{2018}}{2018!}$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $f'(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2!} - \ldots - \dfrac{x^{2017}}{2017!} > 0$ $\forall x > 0$ (do mệnh đề quy nạp).

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có tối đa một nghiệm trên $(0; +\infty)$.

Mà ta có $f(0) = -1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Do $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ nên tồn tại $c > 0$ sao cho $f(c) = 0$.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất trên $(0; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số có giá trị cực đại bằng -2.

(B) Hàm số có GTLN bằng 4 và GTNN bằng 0.

(C) Hàm số có đúng một cực trị.

D Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có, hàm số có giá trị cực đại bằng 4 và không có GTNN, GTLN.

Theo định nghĩa cực đại, cực tiểu ta có hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Tính tích phân $\displaystyle\int\limits_0^2 \sqrt{4x+1}\,\mathrm{d}x$.

(A) 13. **B** $\dfrac{13}{3}$. (C) 4. (D) $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^2 \sqrt{4x+1}\,\mathrm{d}x = \left.\dfrac{\sqrt{(4x+1)^3}}{6}\right|_0^2 = \dfrac{13}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 4$, $AC = BD = 5$, $AD = BC = 6$. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng (BCD)

Ⓐ $\dfrac{3\sqrt{6}}{7}$. Ⓑ $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$. **C** $\dfrac{3\sqrt{42}}{7}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Lời giải.

Dựng $\triangle A'B'C'$ sao cho A, B, C lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.

$\Rightarrow B'C' = 12; A'B' = 10; A'C' = 8$.

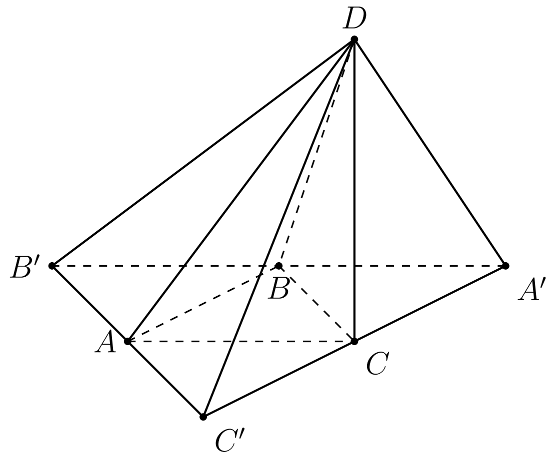
Ta có: $B'A = C'A = BC = AD$.

$\Rightarrow \triangle DB'C'$ vuông tại D.

$\Rightarrow DB' \perp DC'$.

Tương tự ta có: $DC' \perp DA'; DA' \perp DB'$.

$\Rightarrow V_{DA'B'C'} = \dfrac{1}{6} DA' \cdot DB' \cdot DC'$.



Ta có: $\begin{cases} DB'^2 + DC'^2 = B'C'^2 = 144 \\ DC'^2 + DA'^2 = A'C'^2 = 64 \\ DA'^2 + DB'^2 = A'B'^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} DA' = \sqrt{10} \\ DB' = 3\sqrt{10} \\ DC' = 3\sqrt{6}. \end{cases}$

Suy ra $V_{DA'B'C'} = 15\sqrt{6}$.

Ta có $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{4} S_{\triangle A'B'C'} \Rightarrow V_{DABC} = \dfrac{1}{4} V_{DA'B'C'} \Rightarrow V_{DABC} = \dfrac{15\sqrt{6}}{4}$.

Sử dụng công thức Heron ta có $S_{\triangle BCD} = \dfrac{15\sqrt{7}}{3}$.

Mà $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \mathrm{d}(A, (BCD)) \cdot S_{\triangle BCD} \Rightarrow \mathrm{d}(A, (BCD)) = \dfrac{3V_{ABCD}}{S_{\triangle BCD}} = \dfrac{3\sqrt{42}}{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Tìm GTLN của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[0; 4]$.

Ⓐ 2. Ⓑ 20. **C** 18. Ⓓ -2.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$, $y' = 0$ khi $x = 0$ hoặc $x = 2$.

Ta có $y(0) = 2$; $y(4) = 18$; $y(2) = -2$.

Vậy GTLN của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 4]$ là 18.

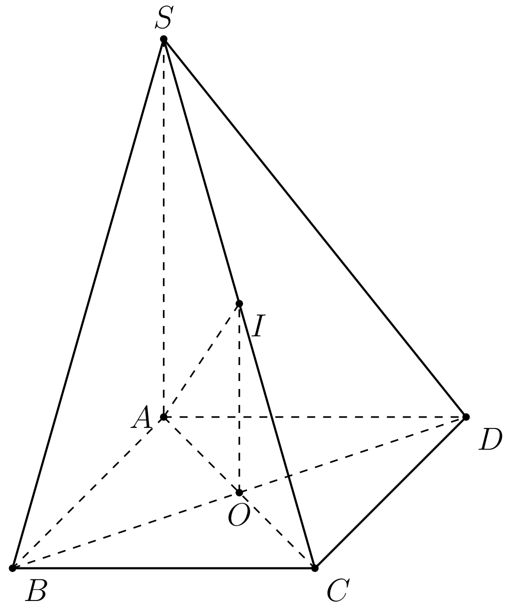
Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA = 12a$, $SA \perp (ABCD)$ và $AB = 3a$, $AD = 4a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A $R = 6.5a$. Ⓑ $R = 13a$. Ⓒ $R = 12a$. Ⓓ $R = 6a$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC, BD và I là trung điểm của SC.
$\Rightarrow OI$ là đường trung bình của $\triangle SAC$.
$\Rightarrow OI \parallel SA \Rightarrow OI \perp (ABCD)$.
Ta có $OA = OB = OC = OD$ (vì $ABCD$ là hình chữ nhật).
Mà $OI \perp (ABCD)$ nên $IA = IB = IC = ID$.
Do $IC = IS$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.
$\Rightarrow R = SI = \dfrac{1}{2}SC = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{SA^2 + AB^2 + AC^2} = \dfrac{13}{2}a$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Tổng tất cả các hệ số của khai triển $\left(\dfrac{1}{x} + x^3\right)^n$ bằng 1024. Tìm hệ số của số hạng chứa x^6 trong khai triển của biểu thức trên.

(A) 120. (B) 210. (C) 330. (D) 126.

Lời giải.

Tổng các hệ số trong khai triển của $\left(\dfrac{1}{x} + x^3\right)^n$ bằng 1024.

Do đó ta có $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k = 1024 \Leftrightarrow 2^n = 1024 \Leftrightarrow n = 10$.

Ta có $\left(\dfrac{1}{x} + x^3\right)^{10} = \sum\limits_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^k \left(\dfrac{1}{x}\right)^{10-k} (x^3)^k = \sum\limits_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^k x^{4k-10}$.

Ta có $4k - 10 = 6 \Leftrightarrow k = 4$.

Do đó hệ số của số hạng chứa x^6 trong khai triển của biểu thức là $\mathrm{C}_{10}^4 = 210$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Tìm m để tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{(m-1)x + 2}{3x + 4}$ cắt đường thẳng $2x - 3y + 5 = 0$ tại điểm có hoành độ bằng 2.

(A) $m = 10$. (B) $m = 7$. (C) $m = 2$. (D) $m = 1$.

Lời giải.

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là $y = \dfrac{m-1}{3}$.

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cắt đường thẳng $2x - 3y + 5 = 0$ tại điểm có hoành độ bằng 2. Giao điểm của hai đường thẳng đó là điểm $A(2;3)$.

Vì $A(2;3)$ thuộc $y = \dfrac{m-1}{3}$ nên $\dfrac{m-1}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 10$

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;2;-1)$, $B(3;1;-2)$, $C(2;3;-3)$ và G là trọng tâm tam giác ABC. Xác định véc-tơ chỉ phương của đường thẳng OG.

(A) $\vec{u}(1;2;-2)$. (B) $\vec{u}(1;2;-1)$. (C) $\vec{u}(2;1;-2)$. (D) $\vec{u}(2;2;-2)$.

Lời giải.

G là trọng tâm $\triangle ABC$ tọa độ của G là $(2;2;-2)$.

Ta có $\overrightarrow{OG}=(2;2;-2)$. Do đó $\vec{u}(2;2;-2)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng OG.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Trong không gian cho các véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng thỏa mãn $(x-y)\vec{a}+(y-z)\vec{b}=(x+z-2)\vec{c}$. Tính $T=x+y+z$.

(A) 2. (B) $\dfrac{3}{2}$. **(C) 3.** (D) 1.

Lời giải.

Ta có $(x-y)\vec{a}+(y-z)\vec{b}-(x+z-2)\vec{c}=\vec{0}$. Do $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng nên mỗi véc-tơ được phân tích duy nhất qua ba véc-tơ nói trên.

Suy ra $\begin{cases}x-y=0\\ y-z=0\\ x+z-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Vậy $T=3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 31. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+1}>3^{x+2}$.

(A) $\left(-\infty;\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{9}{2}\right)$. **(B) $\left(-\infty;\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{9}{2}\right)$.** (C) $\left(-\infty;\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{9}{2}\right]$. (D) $\left(\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{9}{2};+\infty\right)$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x>\frac{9}{2}\Leftrightarrow x<\log_{\frac{2}{3}}\frac{9}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\infty;\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{9}{2}\right)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1=2$, $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$ với mọi n nguyên dương. Tính $\lim u_n$.

(A) 2. (B) 4. (C) $\sqrt{2}$. (D) -1.

Lời giải.

Ta chứng minh quy nạp rằng $u_n=2$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

- Với $n=1$, ta có $u_1=2$.
- Giả sử $u_n=2$ với mọi $n\le k$. Ta có $u_{k+1}=\sqrt{2+u_k}=\sqrt{2+2}=2$.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có $u_n=2$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. Do đó $\lim u_n=2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Hàm số nào sau đây **không phải** là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$?

(A) $F(x)=\ln|2x+1|+1$. (B) $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln|2x+1|+2$.

(C) $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln|4x+2|+3$. (D) $F(x)=\dfrac{1}{4}\ln(4x^2+4x+1)+3$.

Lời giải.

Ta có $\int \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C$.

Mặt khác $\frac{1}{2}\ln|4x+2| + 3 = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + \frac{\ln 2}{2} + 3$ và $\frac{1}{2}\ln(4x^2+4x+1) + 3 = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Đồ thị hàm số $y = |x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 6\sqrt{2}|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 5. **B** 3. **C** 7. **D** 9.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 6\sqrt{2}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$, $f'(x) = 0$ khi $x \in \{1; 2; 3\}$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-9+6\sqrt{2}$	$\nearrow$	$-8+6\sqrt{2}$	$\searrow$	$-9+6\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.

Từ bảng biến thiên, ta thấy $f(1) = f(3) < 0$ và $f(2) > 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

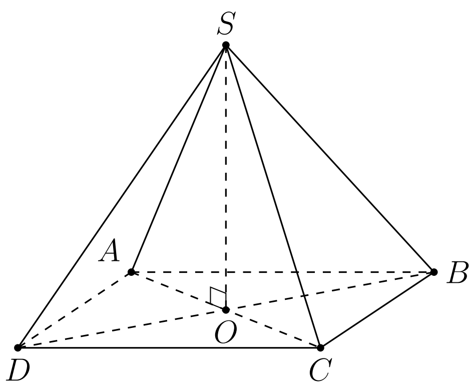
Do đó đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Thể tích khối bát diện đều cạnh a bằng

A $\frac{2a^3}{3}$. **B** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C** $a^3\sqrt{2}$. **D** $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



Để tính thể tích khối bát diện đều cạnh a, ta tính thể tích hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh bằng a.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Khi đó $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Vậy $V_{SABCD} = \frac{1}{3}SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot a^2 = \frac{a^3}{3\sqrt{2}}$.

Do đó thể tích khối bát diện đều cạnh a là $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Tính tổng $S = 2 \cdot 2^{2017}\mathrm{C}_{2018}^{1} + 3 \cdot 2^{2016}\mathrm{C}_{2018}^{2} + 4 \cdot 2^{2015}\mathrm{C}_{2018}^{3} + \ldots + 2019\mathrm{C}_{2018}^{2018}$.

A $S = 2021 \cdot 3^{2017} - 2^{2018}$. **B** $S = 2021 \cdot 3^{2017}$.

(C) $S = 2021 \cdot 3^{2018} - 2^{2017}$. (D) $S = 2021 \cdot 3^{2017} + 2^{2018}$.

Lời giải.

Xét khai triển nhị thức Niu-tơn $(x+2)^{2018} = \sum\limits_{k=0}^{2018} \mathrm{C}_{2018}^{k} 2^{2018-k} x^k$.

Nhân cả hai vế với x ta có $x\,(x+2)^{2018} = \sum\limits_{k=0}^{2018} \mathrm{C}_{2018}^{k} 2^{2018-k} x^{k+1}$.

Lấy đạo hàm hai vế ta có $2018x(x+2)^{2017} + (x+2)^{2018} = \sum\limits_{k=0}^{2018} \mathrm{C}_{2018}^{k}(k+1) 2^{2018-k} x^k$.

Cho $x=1$ ta có $\sum\limits_{k=0}^{2018} \mathrm{C}_{2018}^{k}(k+1) 2^{2018-k} = 2018 \cdot 3^{2017} + 3^{2018} = 2021 \cdot 3^{2017}$.

Từ đó $S = \sum\limits_{k=1}^{2018} \mathrm{C}_{2018}^{k}(k+1) 2^{2018-k} - 2^{2018} = 2021 \cdot 3^{2017} - 2^{2018}$.

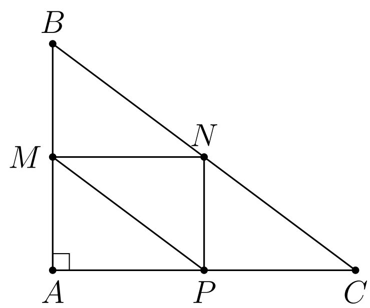
Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;2;0)$, $B(5;4;4)$, $C\left(\frac{11}{3};\frac{22}{3};-\frac{16}{3}\right)$. Gọi (S_1), (S_2), (S_3) là ba mặt cầu có tâm lần lượt là A, B, C và có cùng bán kính là $\frac{13}{5}$. Xác định số tiếp diện chung của ba mặt cầu trên.

(A) 6. (B) 7. (C) 8. (D) 9.

Lời giải.

Ta có



$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(5-1)^2+(4-2)^2+(4-0)^2} = 6.\\ BC &= \sqrt{\left(\frac{11}{3}-5\right)^2+\left(\frac{22}{3}-4\right)^2+\left(-\frac{16}{3}-4\right)^2} = 10.\\ CA &= \sqrt{\left(1-\frac{11}{3}\right)^2+\left(2-\frac{22}{3}\right)^2+\left(0+\frac{16}{3}\right)^2} = 8. \end{aligned}$$

Sử dụng định lý Pi-ta-go, ta có $\triangle ABC$ vuông tại A.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, MN) &= \mathrm{d}(C, MN) = \mathrm{d}(B, MN) = \frac{1}{2}AB = 3.\\ \mathrm{d}(A, NP) &= \mathrm{d}(C, NP) = \mathrm{d}(B, NP) = \frac{1}{2}AC = 4.\\ \mathrm{d}(A, MP) &= \mathrm{d}(C, MP) = \mathrm{d}(B, MP) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(A, BC) = \frac{AB \cdot AC}{2BC} = \frac{6 \cdot 8}{20} = 2,4. \end{aligned}$$

Một mặt phẳng chia không gian thành hai phần. Do đó, ta có các trường hợp sau:

TH1: Cả ba mặt cầu nằm về cùng một phía so với tiếp diện chung. Mặt khác, ba mặt cầu có bán kính bằng nhau nên khi đó tiếp diện là mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) và cách (ABC) một khoảng bằng bán kính. Do đó, ta nhận được hai tiếp diện trong trường hợp này.

TH2: Nếu (S_1) nằm khác phía (S_2), (S_3) so với tiếp diện (T).
Vì $\mathrm{d}(B,(T)) = \mathrm{d}(A,(T))$ và A, B nằm khác phía so với (T) nên (T) đi qua trung điểm M của AB. Tương tự (T) cũng đi qua trung điểm P của AC.

Tuy nhiên, $2,4 = \mathrm{d}(A, MP) \geq \mathrm{d}(A, (T)) = \dfrac{13}{5}$ (vô lí). Do đó trường hợp này không xảy ra.

TH3: Nếu (S_2) nằm khác phía (S_1), (S_3) so với tiếp diện (T).

Lập luận như trên, (T) chứa đường thẳng MN. Ta có $\mathrm{d}(A, MN) = \mathrm{d}(C, MN) = \mathrm{d}(B, MN) = 3 > \dfrac{13}{5}$ nên trong trường hợp này có hai tiếp diện.

TH4: Nếu (S_3) nằm khác phía (S_1), (S_2) so với tiếp diện (T). Tương tự TH3, ta có hai tiếp diện trong trường hợp này.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $||x|^3 - 3|x| + 1| = m - 1$ có 8 nghiệm là một khoảng có dạng $(a; b)$. Tính tổng $S = a^2 + b^2$.

A 1. **B** 65. **C** 25. **D** 10.

Lời giải.

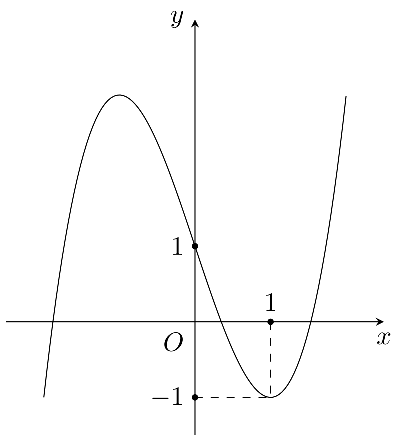
Xét hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f'(x) = 0$ khi $x = 1$ hoặc $x = -1$.

Bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta suy ra đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có dạng như bên.

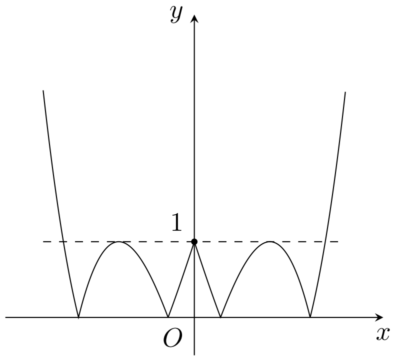


Ta chú ý $||x|^3 - 3|x| + 1| = |f(|x|)|$.

Do đó đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$ nhận được bằng cách

- Đầu tiên, ta giữ nguyên phần đồ thị (C^P) của $f(x)$ nằm bên trái trục Oy và thay phần đồ thị (C^T) của $f(x)$ nằm bên trái trục Oy bằng ảnh của (C^P) qua phép đối xứng trục Oy.
- Với đồ thị vừa nhận được, ta giữ nguyên phần đồ thị (C^t) nằm bên trên trục Ox và thay phần đồ thị (C^d) nằm bên dưới trục Ox bằng ảnh của (C^d) qua phép đối xứng trục Oy.

Khi đó, đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$ có dạng như bên.
Từ đồ thị hàm số, ta thấy rằng phương trình $|f(|x|)| = m - 1$ có 8 nghiệm khi và chỉ khi $0 < m - 1 < 1 \Leftrightarrow 1 < m < 2$.
Do đó, $a = 1$ và $b = 2$ nên $a^2 + b^2 = 5$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Cho số hữu tỷ dương m thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2m}} x\cos mx\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi - 2}{2}$. Hỏi m thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

(A) $\left(\dfrac{7}{4}; 2\right)$. (B) $\left(0; \dfrac{1}{4}\right)$. (C) $\left(1; \dfrac{6}{5}\right)$. **D** $\left(\dfrac{5}{6}; \dfrac{8}{7}\right)$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos mx\,\mathrm{d}x \end{cases}$. Khi đó ta có thể chọn $\begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{\sin mx}{m}. \end{cases}$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có

$$\begin{aligned} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2m}} x\cos mx\,\mathrm{d}x &= \left.\frac{x\sin mx}{m}\right|_0^{\frac{\pi}{2m}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2m}} \frac{\sin mx}{m}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2m^2} - \left(-\left.\frac{\cos mx}{m^2}\right|_0^{\frac{\pi}{2m}}\right) \\ &= \frac{\pi}{2m^2} - \frac{1}{m^2}. \end{aligned}$$

Do đó ta có $\dfrac{\pi}{2m^2} - \dfrac{1}{m^2} = \dfrac{\pi - 2}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\pi - 2}{2m^2} = \dfrac{\pi - 2}{2} \Leftrightarrow m^2 = 1$.
Vì m là số hữu tỷ dương nên $m = 1$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^x - 2m \cdot 2^x + m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

(A) $\varnothing$. (B) $(-2; 2)$. (C) $(-\infty; 2)$. **D** $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Đặt $t = 2^x$ $(t > 0)$. Khi đó phương trình ban đầu có dạng $t^2 - 2mt + m + 2 = 0 \quad (1)$.
Để phương trình ban đầu có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm dương phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - (m+2) > 0 \\ 2m > 0 \\ m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ m > 0 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right. \\ m > 0 \\ m > -2. \end{cases}$$

Kết hợp các điều kiện trên ta có $m > 2$.

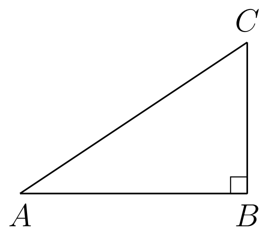
Chọn đáp án D □

Câu 41. Để chào mừng 20 năm thành lập thành phố A, Ban tổ chức quyết định trang trí cho cổng chào có hai cột hình trụ. Các kĩ thuật viên đưa ra phương án quấn xoắn từ chân cột lên đỉnh cột đúng 20 vòng đèn Led cho mỗi cột. Biết bán kính trụ cổng là 30cm và chiều cao cổng là 5π(m). Tính chiều dài dây đèn Led tối thiểu để trang trí hai cột trụ cổng.

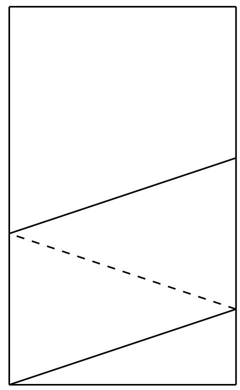
(A) 24π(m). (B) 20π(m). (C) 30π(m). **D** 26π(m).

Lời giải.

Để tính độ dài sợi dây, ta tính độ dài của một vòng dây quanh trụ. Khi trải vòng dây ra, độ dài vòng dây chính là độ dài cạnh huyền của tam giác vuông ABC như hình bên.



Trong đó độ dài AB bằng chu vi mặt đáy của cột, độ dài BC bằng $\dfrac{1}{20}$ chiều cao của cột.



Ta có $AB = 2\pi \cdot 0,3 = 0,6\pi$(m) và $BC = \dfrac{5\pi}{20} = \dfrac{\pi}{4}$(m).

Do đó $AC = \sqrt{(0,6\pi)^2 + \left(\dfrac{\pi}{4}\right)^2} = \dfrac{13\pi}{20}$(m).

Vậy độ dài sợi dây dùng để trang hai cột trụ cổng là $2 \cdot 20 \cdot \dfrac{13\pi}{20} = 26\pi$(m).

Chọn đáp án D □

Câu 42. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - z_2| = |z_1| = |z_2| > 0$. Tính $A = \left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^4 + \left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^4$.

(A) 1. (B) $1 - i$. **C** -1. (D) $1 + i$.

Lời giải.

Cách 1: Do $|z_1| = |z_2| > 0$ nên $z_2, z_1 \neq 0$.

Từ đẳng thức $|z_1 - z_2| = |z_1| = |z_2|$, ta có $\left|\dfrac{z_1}{z_2} - 1\right| = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = 1$.

Đặt $w = \dfrac{z_1}{z_2}$. Bài toán trở thành: Cho số phức w thỏa mãn $|w - 1| = |w| = 1$. Tính $A = w^4 + \dfrac{1}{w^4}$.

Trong mặt phẳng phức, ta gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của số phức w, 1.

Khi đó $|w| = OA, 1 = OB, |w - 1| = AB$. Suy ra $\triangle OAB$ là tam giác đều.

Do đó, w chỉ có thể là $\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ hoặc $\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó, ta luôn có $w\overline{w} = 1$, $w + \overline{w} = 1$ và $(w - \overline{w})^2 = -3$.

Ta có

$$A = \left(w^2 - \dfrac{1}{w^2}\right)^2 + 2 = \left(w^2 - \overline{w}^2\right)^2 + 2 = (w - \overline{w})^2 (w + \overline{w})^2 + 2 = 1^2 \cdot (-3) + 2 = -1.$$

Cách 2: Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2 trong mặt phẳng phức.

Khi đó $|z_1| = OA$, $|z_2| = OB$ và $|z_1 - z_2| = AB$. Suy ra $\triangle OAB$ là tam giác đều.

Không mất tổng quát ta có thể giả sử $z_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ và $z_2 = r(\cos\psi + i\sin\psi)$ trong đó $r > 0$ và $\varphi - \psi = \dfrac{\pi}{3}$.
Ta có

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi) = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}.\\ \frac{z_2}{z_1} &= \cos(\psi-\varphi) + i\sin(\psi-\varphi) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

Vậy $A = \left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^4 + \left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^4 = \left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right) + \left(\cos\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right)\right) = -1.$
Chọn đáp án C □

Câu 43. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x + m$ cắt trục hoành tại đúng 3 điểm phân biệt.

A $m \in (2; +\infty)$. **B** $m \in (-2; 2)$. **C** $m \in \mathbb{R}$. **D** $m \in (-\infty; -2)$.

Lời giải.
Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên $\mathbb{R}$.
Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$
Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

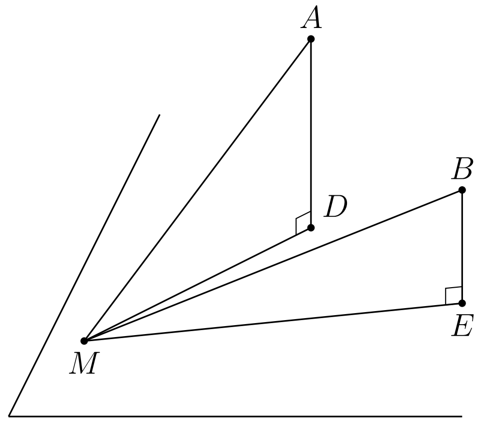
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + m$ cắt trục hoành tại đúng 3 điểm phân biệt thì đường thẳng $y = -m$ phải cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ tại đúng ba điểm phân biệt.
Từ bảng biến thiên ta suy ra $-2 < -m < 2 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.
Chọn đáp án B □

Câu 44. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;3;10)$, $B(4;6;5)$ và M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (Oxy) sao cho MA, MB cùng tạo với mặt phẳng (Oxy) các góc bằng nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của AM.

A $6\sqrt{3}$. **B** 10. **C** $\sqrt{10}$. **D** $8\sqrt{2}$.

Lời giải.



Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên mặt phẳng (Oxy).
Khi đó $(MA,(Oxy)) = \widehat{AMD}$ và $(MB,(Oxy)) = \widehat{BME}$.
Do đó MA, MB cùng tạo với mặt phẳng (Oxy) các góc bằng nhau khi và chỉ khi $\triangle AMD \backsim \triangle BME$.
Khi đó $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{AD}{BE}$.
Ta có $AD = \mathrm{d}(A,(Oxy)) = 10$ và $BE = \mathrm{d}(B,(Oxy)) = 5$.
Do đó $\dfrac{AM}{BM} = 2$. (1)
Gọi tọa độ của M là $(x, y, 0)$. Ta có

$$AM^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2 + 100 \text{ và } MB^2 = (x-4)^2 + (y-6)^2 + 25.$$

Từ (1) suy ra

$$AM^2 = 4BM^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4(x-4)^2 + 4(y-6)^2.$$

Đặt $x - 1 = a$ và $y - 3 = b$. Ta có

$$a^2 + b^2 = 4(a-3)^2 + 4(b-3)^2 \Leftrightarrow 3(a^2+b^2) - 24(a+b) + 72 = 0.$$

Sử dụng bất đẳng thức $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ ta có

$$\frac{3}{2}(a+b)^2 - 24(a+b) + 72 \le 0 \Leftrightarrow 4 \le a+b \le 12.$$

Do đó $a^2 + b^2 \ge \dfrac{(a+b)^2}{2} \ge \dfrac{4^2}{2} = 8$. Vậy $AM^2 = a^2 + b^2 + 100 \ge 108 \Leftrightarrow AM \ge 6\sqrt{3}$.
Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = 2 \Leftrightarrow x = 3; y = 5$. Khi đó điểm M có tọa độ $(3;5;0)$.
Chọn đáp án A □

Câu 45. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = x^x$ tại điểm có hoành độ bằng 2.

A $y = 4x - 4$.
B $y = 4\ln 2x - 8\ln 2 + 4$.
C $y = 4(1+\ln 2)x - 8\ln 2 - 4$.
D $y = 2x$.

Lời giải.
Ta có $f(x) = x^x = e^{x\ln x}$.
Do đó $f'(x) = \left(e^{x\ln x}\right)' = (1+\ln x)\, e^{x\ln x} = (1+\ln x)x^x$. Suy ra $f'(2) = (1+\ln 2)2^2 = 4 + 4\ln 2$.
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^x$ tại điểm có hoành độ bằng 2 là

$$\begin{aligned} y &= f'(2)(x-2) + f(2) \\ &= (4+4\ln 2)(x-2) + 4 \\ &= 4(1+\ln 2)x - 8\ln 2 - 4. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 46. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;2;-1)$, $B(3;1;-2)$, $C(2;3;-3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-3=0$. $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức $MA^2+MB^2+MC^2$ có giá trị nhỏ nhất. Xác định $a+b+c$.

Ⓐ -3. Ⓑ -2. Ⓒ 2. **D** 3.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Khi đó, G có tọa độ $(2;2;-2)$.

Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Do đó

$$\begin{aligned} 9MG^2 &= \left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)^2 \\ &= MA^2+MB^2+MC^2+2\left(\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}\right) \quad (1). \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có $2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MA^2+MB^2-\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)^2=MA^2+MB^2-AB^2$.

Do đó $2\left(\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}\right)=2\left(MA^2+MB^2+MC^2\right)-\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)$.

Thay vào (1) ta có

$$\begin{aligned} & 9MG^2=3\left(MA^2+MB^2+MC^2\right)-\left(AB^2+BC^2+CA^2\right) \\ \Leftrightarrow\ & MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+\frac{AB^2+BC^2+CA^2}{3}. \end{aligned}$$

Biểu thức $MA^2+MB^2+MC^2$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất. Khi đó, M là hình chiếu vuông góc của G trên mặt phẳng (P).

Mặt phẳng (P) có một VTPT là $\vec{n}=(1;-2;2)$. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua G và vuông góc với (P) là $\begin{cases} x=2+t \\ y=2-2t \\ z=-2+2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

Tọa độ của điểm M cần tìm là nghiệm nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-2y+2z-3=0 \\ x=2+t \\ y=2-2t \\ z=-2+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \\ z=0 \\ t=1 \end{cases}$$

Khi đó $a=3; b=0; c=0$ nên $a+b+c=3$.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;1;-1)$, $B(2;3;1)$, $C(5;5;1)$. Đường phân giác trong góc A của $\triangle ABC$ cắt mặt phẳng (Oxy) tại $M(a;b;0)$. Tính $3b-a$.

Ⓐ 6. **B** 5. Ⓒ 3. Ⓓ 0.

Lời giải.

Ta có $AB=\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2+(1+1)^2}=3$, $AC=\sqrt{(5-1)^2+(5-1)^2+(1+1)^2}=6$.

Gọi D là chân đường phân giác trong góc A của $\triangle ABC$. Ta có $\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{1}{2}$.

Gọi tọa độ của D là (x,y,z). Khi đó $\overrightarrow{DB}=(2-x;3-y;1-z)$ và $\overrightarrow{DC}=(5-x;5-y;1-z)$.
Vì D nằm giữa B và C nên ta có

$$\overrightarrow{DC}=-2\overrightarrow{DB}\Leftrightarrow\begin{cases}5-x=-2(2-x)\\5-y=-2(3-y)\\1-z=-2(1-z)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=\dfrac{11}{3}\\z=1.\end{cases}$$

Ta có $\overrightarrow{AD}=\left(2;\frac{8}{3};2\right)$ và $\overrightarrow{AM}=(a-1;b-1;1)$.
Điểm M thuộc vào đường thẳng AD khi và chỉ khi $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\overrightarrow{AD}$. Điều này tương đương với

$$\frac{a-1}{2}=\frac{b-1}{\frac{8}{3}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=\dfrac{7}{3}.\end{cases}$$

Vậy $3b-a=7-2=5$.
Chọn đáp án B □

Câu 48. Cho số phức $z=1-\frac{1}{3}i$. Tính số phức $w=i\overline{z}+3z$.

A $w=\frac{8}{3}$. **B** $w=\frac{8}{3}+i$. **C** $w=\frac{10}{3}+i$. **D** $w=\frac{10}{3}$.

Lời giải.
Ta có $w=i\left(1+\frac{1}{3}i\right)+3\left(1-\frac{1}{3}i\right)=\left(3-\frac{1}{3}\right)+i\left(1-1\right)=\frac{8}{3}$.
Chọn đáp án A □

Câu 49. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, xác định phương trình mặt cầu có tâm $I(3;-1;2)$ và tiếp xúc mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z=0$.

A $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=2$. **B** $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=1$.
C $(x+3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=1$. **D** $(x+3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4$.

Lời giải.
Ta có $\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|3+2\cdot(-1)-2\cdot 2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=1$.
Phương trình mặt cầu có tâm I và tiếp xúc mặt phẳng (P) là $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=1$.
Chọn đáp án B □

Câu 50. Phương trình $\log_3(x^2-6)=\log_3(x-2)+1$ có bao nhiêu nghiệm?

A 3. **B** 2. **C** 1. **D** 0.

Lời giải.
Điều kiện: $\begin{cases}x^2-6\ge 0\\x-2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge\sqrt{6}\\x\le-\sqrt{6}\end{array}\right.\\x\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\sqrt{6}.$
Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_3(x^2-6)=\log_3 3(x-2)\Leftrightarrow x^2-6=3(x-2)\Leftrightarrow x^2-3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ (\text{loại})\\x=3\ (\text{nhận}).\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm.

Chọn đáp án C □

——— HẾT ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. A	3. D	4. D	5. C	6. D	7. D	8. B	9. A	10. A
11. C	12. B	13. D	14. C	15. A	16. A	17. C	18. A	19. B	20. C
21. D	22. D	23. B	24. C	25. C	26. A	27. B	28. A	29. D	30. C
31. B	32. A	33. A	34. C	35. B	36. A	37. A	38. B	39. D	40. D
41. D	42. C	43. B	44. A	45. C	46. D	47. B	48. A	49. B	50. C

104 ĐỀ THI THỬ TOÁN THPT QG SỞ GD - ĐT BẮC GIANG LẦN 2

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ là

Ⓐ $\mathrm{e}^{x} + C$. Ⓑ $\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{2} + C$. Ⓒ $\mathrm{e}^{2x} + C$. **D** $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + C$.

Lời giải.

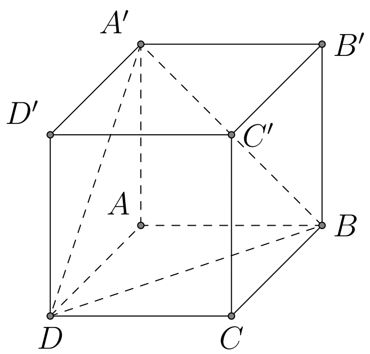
Ta có $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 2.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ). Giá trị sin của góc giữa hai mặt phẳng (BDA') và $(ABCD)$ là

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.



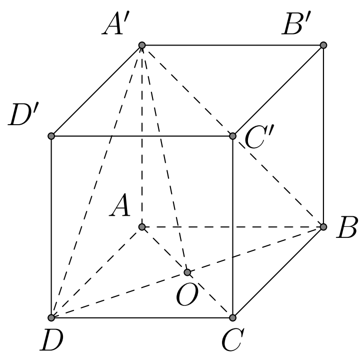
Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow \widehat{A'OA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (BDA') và mặt phẳng $(ABCD)$.

Ta có $AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét $\triangle AA'O$ vuông tại A có $A'O = \sqrt{AA'^2 + AO^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Khi đó $\sin\widehat{A'OA} = \dfrac{AA'}{A'O} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.



Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx + 25}{x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$?

Ⓐ 11. **B** 4. Ⓒ 5. Ⓓ 9.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -m$.

Ta có $y' = \dfrac{m^2 - 25}{(x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2 - 25 < 0 \\ -m \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 < m < 5 \\ m \leq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad -5 < m \leq -1.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4$; $u_2 = 1$. Giá trị của u_{10} bằng

(A) $u_{10} = 31$. (B) $u_{10} = -23$. (C) $u_{10} = -20$. (D) $u_{10} = 15$..

Lời giải.

Công sai của cấp số cộng là $d = u_2 - u_1 = 1 - 4 = -3$.

Số hạng tổng quát của cấp số cộng là $u_n = u_1 + (n-1)d = -3n + 7$.

Khi đó $u_{10} = -3 \cdot 10 + 7 = -23$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(3;-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-3}{1}$ có phương trình là

(A) $3x - 2y + z - 12 = 0$. (B) $3x - 2y + z - 8 = 0$.

(C) $3x + 2y + z - 12 = 0$. (D) $x - 2y + 3z - 8 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng vuông góc với Δ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = \vec{u}_\Delta = (3;-2;1)$.

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(3;-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng Δ là

$$3(x-3) - 2(y+1) + 1(z-1) = 0 \quad \text{hay} \quad 3x - 2y + z - 12 = 0.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0$ bằng

(A) 2. (B) -3. (C) $\dfrac{17}{2}$. (D) $\dfrac{9}{8}$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (\log_2 x - 3)(\log_2 x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 3 \\ \log_2 x = -1 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Do đó tổng hai nghiệm là $8 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{17}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Khi đó $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$ bằng

Ⓐ $\frac{3}{2}i$. Ⓑ $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$. Ⓒ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D** $-\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Theo định lí vi-ét ta có $\begin{cases} z_1+z_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ z_1z_2=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Ta có

$$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_1^2+z_2^2}{z_1z_2}=\frac{(z_1+z_2)^2-2z_1z_2}{z_1z_2}=\frac{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\cdot\dfrac{3}{2}}{\dfrac{3}{2}}=-\frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 8. Đồ thị của hàm số nào sau đây có tiệm cận ngang?

A $y=\frac{x}{x^2+1}$. Ⓑ $y=\frac{x^2}{x+1}$. Ⓒ $y=\frac{x^2-3x+2}{x-1}$. Ⓓ $y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{1+x}$.

Lời giải.

- Hàm số $y=\frac{x}{x^2+1}$ có $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}=0\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang.
- Hàm số $y=\frac{x^2}{x+1}$ và $y=\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ đều có bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu do đó không có tiệm cận ngang.
- Hàm số $y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{1+x}$ có điều kiện là $-2\le x\le 2$ do đó không có tiệm cận ngang.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Mô đun của số phức $z=(1+2i)(2-i)$ là

A $|z|=5$. Ⓑ $|z|=\sqrt{5}$. Ⓒ $|z|=10$. Ⓓ $|z|=6$.

Lời giải.

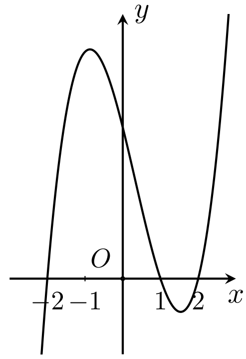
Ta có $z=(1+2i)(2-i)=4+3i\Rightarrow |z|=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

Chọn đáp án A □

Câu 10.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị ở hình bên. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(0;1)$. Ⓑ $(-\infty;0)$. Ⓒ $(1;2)$. Ⓓ $(2;+\infty)$.



Lời giải.

Nhìn đồ thị ta thấy hàm số đi xuống trên khoảng $(-1;1)$ do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 8,4%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau đúng 6 năm, người đó lĩnh được số tiền (cả vốn và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong thời gian đó người này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

(A) 166.846.000 đồng. (B) 164.246.000 đồng. (C) 160.246.000 đồng. (D) 162.246.000 đồng.

Lời giải.

Số tiền thu được sau n năm theo hình thức lãi kép là $A_n = A_0(1+r)^n$.

Sau 6 năm số tiền thu được là $A_6 = 100(1+8{,}4\%)^6 = 162{,}246$ triệu đồng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và thỏa mãn $f(-1) = 4$; $f(3) = 7$. Giá trị của $I = \int\limits_{-1}^{3} 5f'(t)\,\mathrm{d}t$ bằng

(A) $I = 20$. (B) $I = 3$. (C) $I = 10$. (D) $I = 15$.

Lời giải.

Ta có $I = 5\int\limits_{-1}^{3} f'(t)\,\mathrm{d}t = 5f(t)\Big|_{-1}^{3} = 5(f(3) - f(-1)) = 15$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}\,(2;1;-3)$, $\vec{b}\,(2;5;1)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 4$. (B) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 12$. (C) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 6$. (D) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 9$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 2 + 1\cdot 5 + (-3)\cdot 1 = 6$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$ trên đoạn $\left[-2;\dfrac{1}{2}\right]$ là

(A) $-\dfrac{13}{3}$. (B) 1. (C) -3. (D) $-\dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $\left[-2;\dfrac{1}{2}\right]$ Ta có $y' = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$, suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Khi đó $y(-2) = -\dfrac{13}{3}$; $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{7}{2}$; $y(0) = -3 \Rightarrow \max\limits_{\left[-2;\frac{1}{2}\right]} y = -3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

(A) $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{b}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(B) $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{a}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{c}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x,\ \forall c \in \mathbb{R}$.

(C) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

(D) $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Lời giải.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ ta có các mệnh đề sau

- $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
- $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\forall c \in (a;b)$.
- $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $f(x) = m$ có đúng một nghiệm là

(A) $(-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$.
(B) $(-\infty;-2] \cup [2;+\infty)$.
(C) $(-2;2)$.
(D) $[-2;2]$.

Lời giải.

Để phương trình $f(x) = m$ có đúng một nghiệm thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = m$ tại đúng một điểm.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right.$ thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = m$ tại đúng một điểm.

Do đó $m \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 1$. Mặt cầu S có tâm I là

(A) $I(1;-2;3)$. (B) $I(1;2;-3)$. (C) $I(-1;2;-3)$. (D) $I(-1;2;3)$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;-3)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Phương trình $\log_3(2x+1)=2$ có nghiệm là

(A) $x=5$. (B) $x=-3$. (C) $x=1$. (D) $x=4$.

Lời giải.

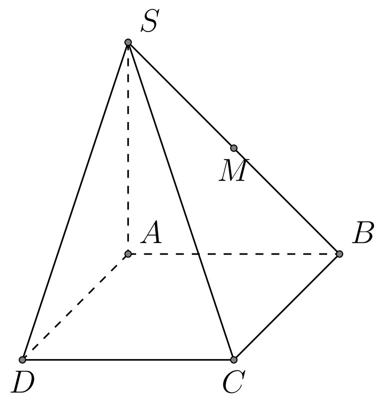
Ta có $\log_3(2x+1)=2 \Leftrightarrow 2x+1=3^2 \Leftrightarrow x=4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19.

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB=a$, $AD=a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°. Gọi M là trung điểm của cạnh SB (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ điểm M tới mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

(A) $\dfrac{a}{2}$. (B) $\dfrac{3a}{2}$. (C) $2a\sqrt{3}$. (D) $a\sqrt{3}$.



Lời giải.

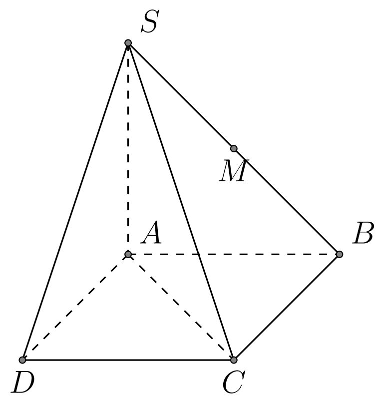
Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{SCA}$ là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

Ta có $AC=a\sqrt{3}$.

Xét tam $\triangle SAC$ có $\mathrm{d}(S,(ABCD))=SA=AC\cdot\tan\widehat{SCA}=3a$.

Vì M là trung điểm của SB nên

$$\mathrm{d}(M,(ABCD))=\frac{1}{2}\mathrm{d}(S,(ABCD))=\frac{3a}{2}.$$



Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Cho A là tập hợp gồm 20 điểm phân biệt. Số đoạn thẳng có hai đầu mút phân biệt thuộc tập A là

(A) 170. (B) 160. (C) 190. (D) 360.

Lời giải.

Số các đoạn thẳng có hai đầu mút phân biệt thuộc tập A là số các tổ hợp chập 2 của 20 phần tử là $\mathrm{C}_{20}^2=190$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A\,(2;1)$ và vectơ $\vec{a}\,(1;3)$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{a}$ biến điểm A thành điểm A'. Tọa độ điểm A' là

(A) $A'\,(-1;-2)$. (B) $A'\,(1;2)$. (C) $A'\,(4;3)$. (D) $A'\,(3;4)$.

Lời giải.

Gọi $A'(x';y')$ khi đó $\begin{cases} x' = 2+1 = 3 \\ y' = 1+3 = 4 \end{cases} \Rightarrow A'(3;4)$.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau được chọn từ các chữ số: $1;2;3;4;5;6$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập A. Xác suất để số chọn được là số chia hết cho 5 là

A $\dfrac{2}{3}$. **B** $\dfrac{1}{6}$. **C** $\dfrac{1}{30}$. **D** $\dfrac{5}{6}$.

Lời giải.

Số các phần tử của A là $n(A) = \mathrm{A}_6^4$.

Gọi số tự nhiên lập được là $x = \overline{abcd}$.

Để x chia hết cho 5 thì $d = 5 \Rightarrow d$ có một cách chọn.

Chọn a, b, c có $\mathrm{A}_5^3 \Rightarrow$ có A_5^3 số tự nhiên lập được chia hết cho 5.

Do đó xác suất để số được chọn chia hết cho 5 là $\mathrm{P} = \dfrac{\mathrm{A}_5^3}{\mathrm{A}_6^4} = \dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Hệ số góc k của tiếp tuyến đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$ tại điểm $M(1;2)$ là

A $k = 12$. **B** $k = 3$. **C** $k = 5$. **D** $k = 4$.

Lời giải.

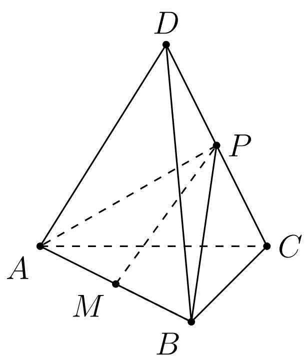
Ta có $y' = 3x^2 \Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm M là $k = y'(1) = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A $\dfrac{3a}{2}$. **B** a. **C** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Gọi M, P lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Vì $\triangle ADC = \triangle DBC \Rightarrow AP = BP \Rightarrow \triangle APB$ cân tại $P \Rightarrow PM \perp AB$.

Chứng minh tương tự ta có $MP \perp DC$.

Do đó đoạn vuông góc chung của AB và CD là MP.

Ta có $AP = BP = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét $\triangle ABP$ có $PM = \sqrt{AP^2 - AM^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\mathrm{d}(AB, CD) = MP = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Tập nghiệm S của bất phương trình $3^{x-1} > 27$ là

A $S = [4;+\infty)$. **B** $S = (4;+\infty)$. **C** $S = (0;4)$. **D** $S = (-\infty;4)$.

Lời giải.

Ta có $3^{x-1} > 27 \Leftrightarrow x - 1 > 3 \Leftrightarrow x > 4 \Rightarrow S = (4;+\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Cho $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 12$ giá trị của $\int\limits_2^6 f\left(\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 24. B. 10. C. 6. D. 14.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_2^6 f\left(\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int\limits_2^6 f\left(\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 2\int\limits_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t = 2\cdot 12 = 24. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Điểm cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ là

A. $x = 3$. B. $x = 1$. C. $x = 0$. D. $x = -1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Mà $y'' = 6x \Rightarrow \begin{cases} y''(1) = 6 > 0 \\ y''(-1) = -6 < 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1$ là điểm cực đại của hàm số.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;1)$ và hai đường thẳng $\Delta\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$, $\Delta'\colon \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}$. Phương trình đường thẳng đi qua điểm A và cắt cả hai đường thẳng Δ, Δ' là

A. $\frac{x-1}{-6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{7}$.

B. $\frac{x+1}{-6} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{7}$.

C. $\frac{x-1}{-6} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{7}$.

D. $\frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{7}$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua $M(1;0;-3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = (2;1;-1)$.

Đường thẳng Δ' đi qua $N(0;-1;2)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_{\Delta'} = (1;-2;1)$.

Gọi đường thẳng cần tìm là d và gọi M, N lần lượt là giao điểm của d với Δ, Δ'.

Khi đó $\begin{cases} M(1+2m;m;3-m) \\ N(n;-1-2n;2+n) \end{cases}$

Ba điểm A, M, N cùng thuộc đường thẳng d nên thẳng hàng do đó $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\overrightarrow{AN}$.

Mà $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (2m;m+1;2-m) \\ \overrightarrow{AN} = (n-1;-2n;1+n) \end{cases}$

Do đó $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\overrightarrow{AN}$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & \frac{2m}{n-1}=\frac{m+1}{-2n}=\frac{2-m}{1+n} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \dfrac{2m}{n-1}=\dfrac{m+1}{-2n} \\ \dfrac{2m}{n-1}=\dfrac{2-m}{1+n} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -5mn=-m+n-1 \\ 3mn=-m+2n-2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -10mn=-2m+2n-2 \\ 3mn=-m+2n-2 \end{cases} \\ \Rightarrow & -13mn=-m \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\dfrac{1}{13}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

TH1. Nếu $m=0 \Rightarrow \overrightarrow{AM}=(0;1;2)$ do đó d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(0;1;2)$.

TH2. Nếu $n=\dfrac{1}{13} \Rightarrow \overrightarrow{AN}=\left(-\dfrac{12}{13};-\dfrac{2}{13};\dfrac{14}{13}\right)$.

Do đó véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(-6;-1;7)$.

Khi đó phương trình đường thẳng d là $\dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Phần thực của số phức $z=1-2i$ là

A -2. B -1. C 1. D 3.

Lời giải.

Số phức $z=1-2i$ có phần thực là 1.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{C}_n^0+2\mathrm{C}_n^1+2^2\mathrm{C}_n^2+\cdots+2^n\mathrm{C}_n^n=14348907$. Hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển của biểu thức $\left(x^2-\dfrac{1}{x^3}\right)^n$, $(x\neq 0)$ bằng

A -1365. B 32760. C 1365. D -32760.

Lời giải.

Xét khai triển $(1+x)^n=\mathrm{C}_n^0+x\mathrm{C}_n^1+x^2\mathrm{C}_n^2+\cdots+x^n\mathrm{C}_n^n$.

Thay $x=2$ ta được $3^n=\mathrm{C}_n^0+2\mathrm{C}_n^1+2^2\mathrm{C}_n^2+\cdots+2^n\mathrm{C}_n^n$.

Vì $\mathrm{C}_n^0+2\mathrm{C}_n^1+2^2\mathrm{C}_n^2+\cdots+2^n\mathrm{C}_n^n=14348907 \Rightarrow 3^n=14348907 \Leftrightarrow n=\log_3(14348907)=15$.

Khi đó $\left(x^2-\dfrac{1}{x^3}\right)^{15}=\displaystyle\sum_{k=0}^{15}\mathrm{C}_{15}^k x^{30-5k}(-1)^k$.

Hệ số x^{10} ứng với $30-5k=10 \Leftrightarrow k=4$.

Do đó hệ số chứa x^{10} là $\mathrm{C}_{15}^4\cdot(-1)^4=1365$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $(a\neq 0)$ thỏa mãn $(f(0)-f(2))\cdot(f(3)-f(2))>0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A Hàm số $f(x)$ có hai cực trị.

B Phương trình $f(x) = 0$ luôn có ba nghiệm phân biệt.

C Hàm số $f(x)$ không có cực trị.

D Phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm duy nhất.

Lời giải.

Từ $(f(0) - f(2)) \cdot (f(3) - f(2)) > 0$ ta xét hai trường hợp

TH1.

$$\begin{cases} f(0) - f(2) > 0 \\ f(3) - f(2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) > f(2) \\ f(3) > f(2). \end{cases}$$

Nhìn bảng bên ta thấy hàm số có một cực trị.

x	0		2		3
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(3)$

TH2.

$$\begin{cases} f(0) - f(2) < 0 \\ f(3) - f(2) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) < f(2) \\ f(3) < f(2). \end{cases}$$

Nhìn bảng bên ta thấy hàm số có một cực trị.

x	0		2		3
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$f(3)$

Suy ra hàm số $y = f(x)$ chắc chắn có hai cực trị, mặt khác hàm $y = f(x)$ là hàm bậc 3 nên $y = f(x)$ chỉ có nhiều nhất hai cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$ và $d'\colon \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{1}$. Phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với đường thẳng d' một góc lớn nhất là

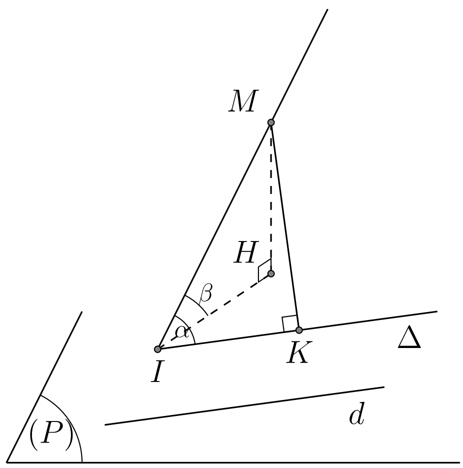
A $x - z + 1 = 0$.

B $x - 4y + z - 7 = 0$.

C $3x - 2y - 2z - 1 = 0$.

D $-x + 4y - z - 7 = 0$.

Lời giải.



Ta có d và d' là hai đường thẳng chéo nhau. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với đường thẳng d' một góc lớn nhất.

Kẻ đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) thỏa mãn Δ song song với d và Δ cắt d'. Khi đó $(d', d) = (d', \Delta) = \alpha$.

Lấy điểm $M \in d'$ và kẻ $MH \perp (P)$ tại H, suy ra $(d', (P)) = \widehat{MIH} = \beta$.

Ta có $\begin{cases} \sin\beta = \dfrac{MH}{MI} \\ \sin\alpha = \dfrac{MK}{MI} \end{cases}$ mà $MH \leq MK$.

Suy ra $\sin\beta \leq \sin\alpha \Rightarrow \beta \leq \alpha$.

Vậy góc giữa d' và (P) đạt giá trị lớn nhất bằng góc $\alpha = (d, d')$.

Ta có $\cos(d, d') = \dfrac{\vec{u}_d \cdot \vec{u}_{d'}}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{u}_{d'}|} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Suy ra $\cos(d', (P)) = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \sin(d', (P)) = \sqrt{1 - \cos^2(d', (P))} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
Vậy mặt phẳng (P) cần thỏa mãn

- (P) chứa $d \Rightarrow (P)$ chứa $N(1; -1; 2)$.
- (P) chứa $d \Rightarrow \vec{n}_{(P)} \cdot \vec{u}_d = 0$.
- $\sin(d', (P)) = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \dfrac{\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{u}_{d'}}{|\vec{n}_{(P)}| \cdot |\vec{u}_{d'}|} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Dễ thấy chỉ mặt phẳng $x - 4y + z - 7 = 0$ thỏa mãn cả ba điều kiện trên.
Chọn đáp án B □

Câu 33. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $(P)\colon y = x^2 - 4x + 3$ và các tiếp tuyến kẻ từ điểm $A\left(\dfrac{3}{2}; -3\right)$ đến đồ thị (P). Giá trị của S bằng

A 9. **B** $\dfrac{9}{8}$. **C** $\dfrac{9}{4}$. **D** $\dfrac{9}{2}$.

Lời giải.
Gọi $M(x_0; y_0) \in (P) \Rightarrow y_0 = x_0^2 - 4x_0 + 3$.
Phương trình tiếp tuyến của (P) tại điểm M là: $d\colon y = (2x_0 - 4)(x - x_0) + x_0^2 - 4x_0 + 3$.
Vì tiếp tuyến đi qua điểm A nên thay tọa độ điểm A vào d ta được

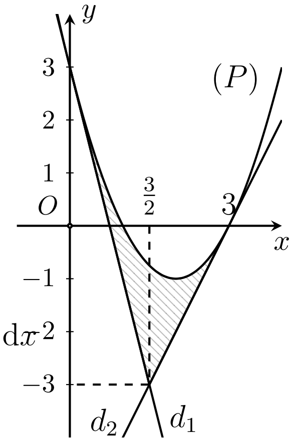
$$-3 = (2x_0 - 4)(\frac{3}{2} - x_0) + x_0^2 - 4x_0 + 3$$
$$\Leftrightarrow \quad x_0^2 - 3x_0 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x + 0 = 3. \end{array}\right.$$

- Với $x_0 = 0 \Rightarrow$ tiếp tuyến $d_1\colon y = -4x + 3$.
- Với $x_0 = 3 \Rightarrow$ tiếp tuyến $d_2\colon y = 2x - 6$.

Hoành độ giao điểm của hai đường thẳng d_1, d_2 là nghiệm phương trình

$$-4x + 3 = 2x - 6 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Vẽ đồ thị (P) và hai đường thẳng d_1; d_2 trên cùng một mặt phẳng tọa độ như hình vẽ.
Khi đó diện tích cần tính là phần được bôi đen bên hình được xác định bởi



$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ &= \int_0^{\frac{3}{2}} \left[(x^2 - 4x + 3) - (-4x + 3)\right] \mathrm{d}x + \int_{\frac{3}{2}}^{3} \left[(x^2 - 4x + 3) - (2x - 6)\right] \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{3}{2}} x^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{3}{2}}^{3} (x^2 - 6x + 9)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right)\Big|_{\frac{3}{2}}^{3} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;2)$, mặt phẳng $(\alpha)\colon x-y+z-4=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A, vuông góc với (α) và đồng thời (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tọa độ giao điểm M của (P) và trục $x'Ox$ là

A $M\left(-\dfrac{1}{2};0;0\right)$. **B** $M\left(-\dfrac{1}{3};0;0\right)$. **C** $M\,(1;0;0)$. **D** $M\left(\dfrac{1}{3};0;0\right)$.

Lời giải.

Gọi (C) là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) và (C) có tâm H, bán kính r.

Bán kính r của đường tròn là nhỏ nhất khi và chỉ khi IH lớn nhất khi và chỉ khi $\mathrm{d}(I,(P))$ lớn nhất.

Vì $M\in x'Ox$ nên gọi $M(m;0;0)$. Suy ra mặt phẳng (P) chứa AM và $(P)\perp(\alpha)$.

Khi đó $\vec{n}_{(P)}=\left[\overrightarrow{MA},\vec{n}_{(\alpha)}\right]=(3;2+m;m-1)$.

Mà mặt phẳng (P) đi qua A nên phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$3(x-0)+(2+m)(y-2)+(m-1)(z-2)=0 \quad\text{hay}\quad 3x+(2+m)y+(m-1)z-3m=0.$$

Ta có $\mathrm{d}(I;(P))=\dfrac{9}{\sqrt{2m^2+2m+14}}$ lớn nhất khi và chỉ khi $2m^2+2m+14$ nhỏ nhất.

Mà $2m^2+2m+14=2\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{27}{2}\geq\dfrac{27}{2}$.

Do đó $2m^2+2m+14$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $m=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $M\left(-\dfrac{1}{2};0;0\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O. Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác có một góc bằng 120°, thiết diện qua đỉnh S cắt mặt phẳng đáy theo dây cung $AB=4a$ và là một tam giác vuông. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

A $\pi\sqrt{3}a^2$. **B** $\pi 8\sqrt{3}a^2$. **C** $\pi 2\sqrt{3}a^2$. **D** $\pi 4\sqrt{3}a^2$.

Lời giải.

Tam giác SAB vuông cân tại S có $AB=4a$

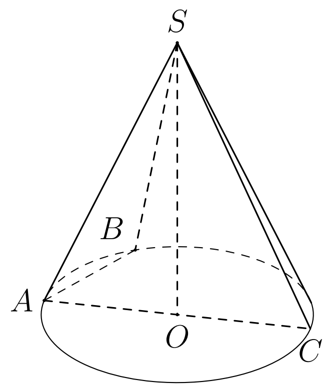
Suy ra $SA=SB=2a\sqrt{2}$.

Tam giác SAC cân tại S có $\widehat{ASC}=120^\circ$

$\Rightarrow \widehat{SAC}=\widehat{SCA}=30^\circ$.

$\Rightarrow AO=SA\cdot\cos\widehat{SAO}=a\sqrt{6}$.

Suy ra $S_{xq}=\pi Rl=4\pi a^2\sqrt{3}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+1}$ có đồ thị là (C) và I là giao của hai tiệm cận của (C). Điểm M di chuyển trên (C). Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn IM bằng

(A) 1. **B** $\sqrt{2}$. (C) $2\sqrt{2}$. (D) $\sqrt{6}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$ và tiệm cận ngang $y=1$ nên $I(-1;1)$.

Điểm $M \in (C) \Rightarrow M\left(m;\dfrac{m+2}{m+1}\right)$.

Khi đó

$$\begin{aligned} & IM=\sqrt{(m+1)^2+\frac{1}{(m+1)^2}} \geq \sqrt{2|m+1|\cdot\frac{1}{|m+1|}}=\sqrt{2} \\ \Rightarrow\quad & IM \geq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

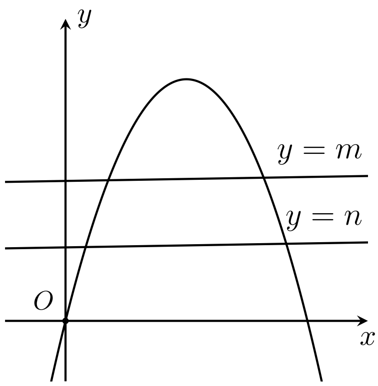
Vậy giá trị nhỏ nhất của IM là $\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

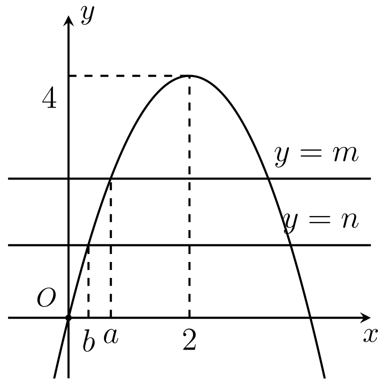
Câu 37.

Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4x$ và trục hoành. Hai đường thẳng $y=m$ và $y=n$ chia (H) thành ba phần có diện tích bằng nhau (tham khảo hình vẽ). Giá trị của biểu thức $T=(4-m)^3+(4-n)^3$ bằng

A $T=\dfrac{320}{9}$. (B) $T=\dfrac{75}{2}$. (C) $T=\dfrac{512}{15}$. (D) $T=405$.



Lời giải.



Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x$ và trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

Khi đó $S = \displaystyle\int_0^2 (-x^2 + 4x)\,\mathrm{d}x = \frac{16}{3}$.

Đường thẳng $y = m$ và $y = n$ chia S thành ba phần bằng nhau có diện tích theo thứ tự từ trên xuống là S_1; S_2; S_3.

Gọi hoành độ các giao điểm của parabol với hai đường thẳng như hình bên.

Ta có

$$\begin{aligned} & S_1 = 2\int_a^2 (-x^2 + 4x - m)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}S \\ \Leftrightarrow\ & \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - mx\right)\Big|_a^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{16}{3} \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{16}{3} - 2m\right) - \left(-\frac{a^3}{3} + 2a^2 - ma\right) = \frac{16}{9} \quad (1). \end{aligned}$$

Mà $x = a$ là nghiệm của phương trình $-x^2 + 4x = m$ nên ta có $-a^2 + 4a = m \quad (2)$.

Thay (2) vào (1) ta được $-\dfrac{2a^3}{3} + 4a^2 - 8a + \dfrac{32}{9} = 0 \Leftrightarrow a \approx 0{,}613277$.

Suy ra $m = -a^2 + 4a \approx 2{,}077$.

Tương tự ta có

$$\begin{aligned} & S_1 + S_2 = \frac{2}{3}S \\ \Rightarrow\ & 2\int_b^2 (-x^2 + 4x - n)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\cdot 2\cdot\int_0^2 (-x^2 + 4x)\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{2}{3}b^3 + 4b^2 - 8b + \frac{16}{9} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & b \approx 0{,}252839 \Rightarrow n = -b^2 + 4b = 0{,}947428. \end{aligned}$$

Khi đó $T = (4 - m)^3 + (4 - n)^3 = \dfrac{320}{9}$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\displaystyle\int \frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5} + C$. Nguyên hàm của hàm số $f(2x)$ trên tập $\mathbb{R}^+$ là

A $\dfrac{x+3}{2(x^2+4)} + C$. **B** $\dfrac{x+3}{x^2+4} + C$. **C** $\dfrac{2x+3}{4(x^2+1)} + C$. **D** $\dfrac{2x+3}{8(x^2+1)} + C$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}} = 2\,\mathrm{d}t$.

Khi đó $\displaystyle\int \frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int 2f(t)\,\mathrm{d}t$.

Mà $\displaystyle\int \frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5} + C$ nên $\displaystyle\int 2f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2(t+3)}{t^2+4} + C$.
Khi đó

$$\begin{aligned}
&\int f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{t+3}{t^2+4} + C\\
\Leftrightarrow\ &\int f(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{2t+3}{4t^2+4} + C\\
\Leftrightarrow\ &\int f(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{2x+3}{4\left(x^2+1\right)} + C.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 39. Biết rằng $\displaystyle\int\limits_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}$, ở đó a, b là các số nguyên dương và $4 < a+\sqrt{b} < 5$. Tổng $a+b$ bằng

A 5. **B** 7. **C** 4. **D** 6.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int\limits_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{4-(x-3)^2}}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x-3 = 2\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\cos t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận

- $x = a+\sqrt{b} \Rightarrow \sin t = \dfrac{a+\sqrt{b}-3}{2} \Rightarrow t = \arcsin\left(\dfrac{b+\sqrt{b}-3}{2}\right)$.
- $x = 4 \Rightarrow \sin t = \dfrac{1}{2} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{6}$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin\left(\frac{b+\sqrt{b}-3}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t\\
&= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin\left(\frac{b+\sqrt{b}-3}{2}\right)} 1\,\mathrm{d}t\\
&= t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin\left(\frac{b+\sqrt{b}-3}{2}\right)}\\
&= \arcsin\left(\frac{a+\sqrt{b}-3}{2}\right) - \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Vì $I = \dfrac{\pi}{6}$ nên

$$\begin{aligned}
&\arcsin\left(\frac{b+\sqrt{b}-3}{2}\right) = \frac{\pi}{6}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{a+\sqrt{b}-3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ a+\sqrt{b}=3+\sqrt{3}\\&\Rightarrow\ \begin{cases}a=3\\b=3\end{cases}\Rightarrow a+b=6.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Cho số phức z thỏa mãn $|z+\overline{z}|\leq 2$ và $|z-\overline{z}|\leq 2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $T=|z-2i|$. Tổng $M+m$ bằng

A $1+\sqrt{10}$. (B) $\sqrt{2}+\sqrt{10}$. (C) 4. (D) 1.

Lời giải.

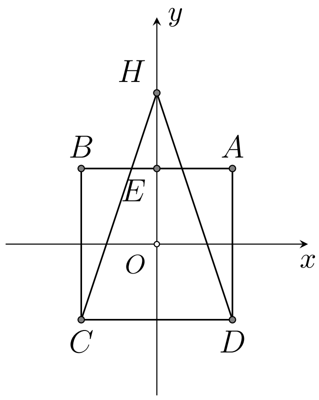
Đặt $z=x+yi$ với x, $y\in\mathbb{R}$.

Khi đó $\begin{cases}|z+\overline{z}|\leq 2\\|z-\overline{z}|\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|\leq 1\\|y|\leq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in[-1;1]\\y\in[-1;1]\end{cases}$.

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là điểm $E(x;y)$ nằm trong hình vuông $ABCD$ với $A(1;1)$, $B(-1;1)$, $C(-1;-1)$ và $D(1;-1)$ như hình vẽ.

Khi đó $T=|z-2i|=EH$ với $H(0;2)$.

Dễ thấy EH đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $E(0;1)$ khi đó $m=\min EH=1$.



Tương tự EH đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}E(-1;-1)\\E(1;-1)\end{array}\right.$.

Khi đó $M=\max EH=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.

Vậy $M+m=1+\sqrt{10}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_5-2\log u_2=2\left(1+\sqrt{\log u_5-2\log u_2+1}\right)$ và $u_n=3u_{n-1}$, $\forall n\geq 2$. Giá trị lớn nhất của n để $u_n<7^{100}$ là

(A) 191. **B** 192. (C) 176. (D) 177.

Lời giải.

Vì $u_n=3u_{n-1}\Rightarrow(u_n)$ là cấp số nhân có công bội $q=3$.

Suy ra số hạng tổng quát là $u_n=u_1\cdot q^{n-1}$ hay $u_n=u_1\cdot 3^{n-1}$.

Từ $\log u_5-2\log u_2=2\left(1+\sqrt{\log u_5-2\log u_2+1}\right)$ đặt $\left(1+\sqrt{\log u_5-2\log u_2+1}\right)=t$ ta được

$$\begin{aligned}&t^2-1=2(1+t)\\\Leftrightarrow\ &t^2-2t-3=0\\\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}t=-1\quad(\text{loại})\\t=3\end{array}\right.\Rightarrow t=3\\\Rightarrow\ &\log u_5-2\log u_2+1=9\\\Leftrightarrow\ &\log(u_1\cdot 3^4)-2\log(u_1\cdot 3)=8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad -\log u_1 = 8 - 2\log 3\\&\Leftrightarrow\quad \log u_1 = \log\frac{9}{10^8}\\&\Leftrightarrow\quad u_1 = \frac{9}{10^8}\\&\Leftrightarrow\quad u_n = \frac{9}{10^8}\cdot 3^{n-1}.\end{aligned}$$

Khi đó

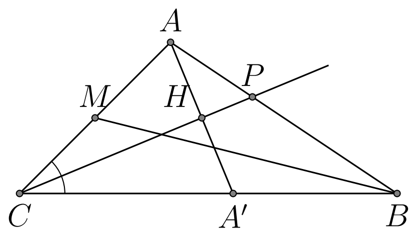
$$\begin{aligned}&\quad u_n < 7^{100}\\&\Leftrightarrow\quad 3^{n-1} < \frac{10^8\cdot 7^{100}}{9}\\&\Leftrightarrow\quad n < 192{,}89\\&\Rightarrow\quad n = 192.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;3;3)$, phương trình đường trung tuyến kẻ từ B là $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong của góc C là $\frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng BC có một véc-tơ chỉ phương là

A $\vec{u}=(2;1;-1)$. **B** $\vec{u}=(1;1;0)$. **C** $\vec{u}=(1;-1;0)$. **D** $\vec{u}=(1;2;1)$.

Lời giải.



Gọi P là chân đường phân giác trong của góc C.
Vì C thuộc đường thẳng CP nên tọa độ C có dạng $C(2+2t;4-t;2-t)$.
Gọi M là trung điểm của AC khi đó $M\left(t+2;\frac{7-t}{2};\frac{5-t}{2}\right)$.
Thay tọa độ của điểm M vào phương trình BM ta được

$$\frac{t+2-3}{-1}=\frac{\frac{7-t}{2}-3}{2}=\frac{\frac{5-t}{2}-2}{-1}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}4t-4=t-1\\2t-2=1-t\end{cases}\Leftrightarrow t=1$$
$$\Rightarrow\begin{cases}C(4;3;1)\\M(3;3;2)\end{cases}.$$

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A vuông góc với đường thẳng CP có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=\vec{u}_{CP}=(2;-1;-1)$.
Khi đó $(P)\colon 2x-y-z+2=0$.

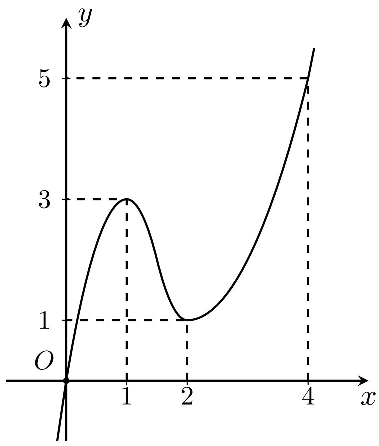
Phương trình tham số của đường phân giác CP là $\begin{cases}x=2+2t\\y=4-t\\z=2-t.\end{cases}$

Gọi $H(2+2t;4-t;2-t) \in CP$ khi đó thay vào phương trình mặt phẳng (P) ta được

$$2(2+2t)-(4-t)-(2-t)+2=0 \Leftrightarrow t=0$$

Suy ra $H(2;4;2)$ là hình chiếu của A lên đường thẳng CP.
Gọi A' là điểm đối xứng với A qua CP khi đó $A'(2;5;1)$, vì CP là đường phân giác nên $A' \in BC$.
Khi đó véc-tơ chỉ phương của CB là $\vec{u}_{CB} = \overrightarrow{CA'} = (-2;2;0)$ hay $\vec{u}_{CB} = (-1;1;0)$.
Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Đặt $M = \max\limits_{\mathbb{R}} f\left(2(\sin^4 x + \cos^4 x)\right)$, $m = \min\limits_{\mathbb{R}} f\left(2(\sin^4 x + \cos^4 x)\right)$. Tổng $M+m$ bằng

A 6. B 4. C 5. D 3.

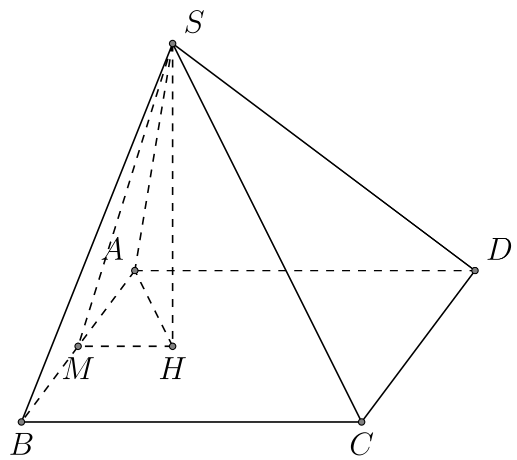
Lời giải.

Xét hàm $y = f\left(2(\sin^4 x + \cos^4 x)\right)$, đặt $t = 2(\sin^4 x + \cos^4 x)$.
Khi đó $t = 2(\sin^4 x + \cos^4 x) = 2 - 4\sin^2\cos^2 x = 2 - \sin^2 2x$.
Vì $\sin^2 2x \in [0;1]$ nên $t = 2 - \sin^2 2x \in [1;2]$.
Xét hàm $y = f(t)$ với $t \in [1;2]$ dựa vào đồ thị ta có $\begin{cases} M = \max f(t) = 3 \\ m = \min f(t) = 1 \end{cases}$.
Vậy $M + m = 3 + 1 = 4$.
Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAB cân tại S. Góc giữa mặt bên (SAB) và mặt đáy bằng $60°$, góc giữa SA và mặt đáy bằng $45°$. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. Chiều cao của hình chóp $S.ABCD$ bằng

A $a\sqrt{3}$. B $a\sqrt{6}$. C $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. D $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



Giả sử $SH \perp (ABCD)$ tại H.
Khi đó $(SA, (ABCD)) = \widehat{SAH} = 45^\circ$.
Gọi M là trung điểm của AB.
Vì $\triangle SAB$ cân nên $SM \perp AB$ mà $SH \perp AB$
Suy ra $AB \perp (SMH) \Rightarrow ((SAB), (ABCD)) = \widehat{SMH}$.
Khi đó $\widehat{SMH} = 60^\circ$.
Đặt $\begin{cases} SH = x \\ AB = y \end{cases} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}y^2x = \dfrac{8a^3\sqrt{3}}{3}$.
Suy ra $xy^2 = 8a^3\sqrt{3}$ (1).

Xét $\triangle SAH$ có $\sin\widehat{SAH} = \dfrac{SH}{SA} \Rightarrow SA = x\sqrt{2}$.
Xét $\triangle SHM$ có $\sin\widehat{SMH} = \dfrac{SH}{SM} \Rightarrow SM = \dfrac{2x}{\sqrt{3}}$.
Xét $\triangle SAM$ vuông tại M ta có $SA^2 = SM^2 + MA^2 \Rightarrow y^2 = \dfrac{8x^2}{3}$.
Thế vào (1) ta được $x^3 = 3a^3\sqrt{3} \Rightarrow x = a\sqrt{3} \Rightarrow SH = a\sqrt{3}$.
Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn $|z+1| + |z-3-4i| = 10$. Giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = |\overline{z} - 1 + 2i|$ bằng

A $P_{\min} = \sqrt{17}$. **B** $P_{\min} = \sqrt{34}$. **C** $P_{\min} = 2\sqrt{10}$. **D** $P_{\min} = \dfrac{\sqrt{34}}{2}$.

Lời giải.
Đặt $z = x + yi$, điểm biểu diễn của z là $M(x; y)$.
Khi đó $|z+1| + |z-3-4i| = 10 \Leftrightarrow MA + MB = 10$ với $A(-1; 0)$ và $B(3; 4)$.
Suy ra M thuộc elip có độ dài trục lớn là $10 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$ và hai tiêu điểm là A, B.
Mà $\overrightarrow{AB} = (4; 4) \Rightarrow AB = 4\sqrt{2} \Rightarrow 2c = 4\sqrt{2} \Rightarrow c = 2\sqrt{2}$.
Ta có

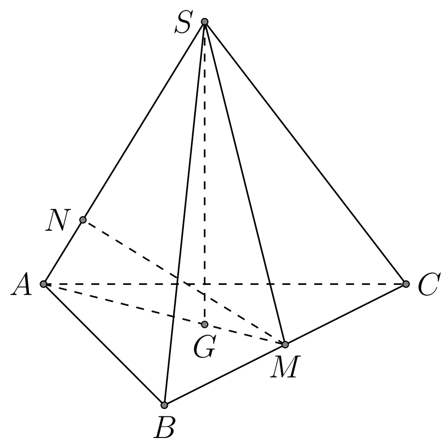
$$\begin{aligned} P &= |\overline{z} - 1 + 2i| \\ &= \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = MH \end{aligned}$$

Với $H(1; 2)$. Dễ thấy A, B, H thẳng hàng nên H thuộc đoạn AB.
Do đó $P_{\min} \Leftrightarrow MH$ ngắn nhất khi và chỉ khi M thuộc trục nhỏ của elip.
Khi đó độ dài MH bằng một nửa trục nhỏ hay $MH = b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{17}$.
Chọn đáp án A □

Câu 46. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy (ABC) bằng 60°, khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\dfrac{6\sqrt{7}}{7}$. Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ bằng

A $V = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. **B** $V = \dfrac{5\sqrt{7}}{3}$. **C** $V = \dfrac{10\sqrt{7}}{3}$. **D** $V = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Đặt $AB = BC = CA = x$.
Gọi M là trung điểm BC và N là chân đường vuông góc hạ từ M đến SA.

Ta có $\begin{cases}(SAB) \cap (ABC) = BC \\ (SAM) \perp BC \\ (SAM) \perp (SBC) = SM \\ (SAM) \perp (ABC) = AM\end{cases}$.

Suy ra $((SBC), (ABC)) = (SM, AM) = \widehat{SMA} = 60^\circ$.

Tam giác ABC đều nên

$$AM = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow GM = \frac{1}{3}AM = \frac{x\sqrt{3}}{6}.$$

Tam giác SGM vuông tại G nên $\tan\widehat{SMG} = \dfrac{SG}{GM} \Rightarrow SG = \dfrac{x}{2}$.
Vì $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp MN$ do đó MN là đoạn vuông góc chung của SA, BC.
Khi đó $MN = \dfrac{6\sqrt{7}}{7}$.
Tam giác SAG có $SA = \sqrt{SG^2 + AG^2} = \dfrac{x\sqrt{7}}{\sqrt{12}}$.
Diện tích tam giác SAM là $S_{SAM} = \dfrac{1}{2}SG \cdot AM = \dfrac{1}{2}MN \cdot SA \Rightarrow x = 4$.
Khi đó $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{x}{2} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.
Chọn đáp án A □

Câu 47. Phương trình $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = m$ có nghiệm khi và chỉ khi

A $1 \le m \le \sqrt{2}$. **B** $\sqrt{2} \le m \le 2\sqrt{2}$. **C** $2\sqrt{2} \le m \le 3$. **D** $3 \le m \le 4$.

Lời giải.

Ta có

$$2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = m \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x} + \frac{2}{2^{\sin^2 x}} = m.$$

Đặt $t = 2^{\sin^2 x}$ ta có $0 \le \sin^2 x \le 1 \Rightarrow 1 \le 2^{\sin^2 x} \le 2$ hay $t \in [1; 2]$.
Xét hàm $f(t) = t + \dfrac{2}{t}$ với $t \in [1; 2]$.
Có $f'(t) = 1 - \dfrac{2}{t^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2}\end{array}\right.$.
Bảng biến thiên

t	1		$\sqrt{2}$		2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	3	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	3

Mà phương trình trên tương đương với $f(t) = m$.

Do đó để phương trình có nghiệm thì $m \in [2\sqrt{2}; 3]$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Một hộp đựng 26 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 26. Bạn Hải rút ngẫu nghiên cùng một lúc ba tấm thẻ. Hỏi có bao nhiêu cách rút sao cho bất kỳ hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị?

A. 1768. B. 1771. C. 1350. **D. 2024.**

Lời giải.

Để rút được bất kỳ hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị thì 3 thẻ rút được phải không có hai thẻ nào là hai số tự nhiên liên tiếp.

Số cách rút 3 thẻ bất kì là C_{26}^3.

Số cách rút ra 3 thẻ có đúng hai số tự nhiên liên tiếp được xác định như sau:

Chọn 2 số tự nhiên liên tiếp: $\{1, 2\}$; $\{2, 3\}$;...; $\{25, 26\}$.

TH1. Chọn hai thẻ liên tiếp là $\{1, 2\}$ hoặc $\{25, 26\}$ có hai cách, thẻ còn lại không được chọn là thẻ số 3 hoặc 24 do đó có 23 cách.

Vậy có $2 \cdot 23 = 46$ cách.

TH2. Chọn hai thẻ là một trong các cặp $\{2, 3\}$; $\{3, 4\}$; ...; $\{24, 25\}$ có 23 cách, chọn thẻ còn lại chỉ có $26 - 4 = 22$ cách.

Vậy có $23 \cdot 22 = 506$ cách.

Số cách chọn 3 thẻ trong đó 3 thẻ được đánh số tự nhiên liên tiếp là $\{1, 2, 3\}$; $\{2, 3, 4\}$; ...; $\{24, 25, 26\}$ có 24 cách.

Vậy có $\mathrm{C}_{26}^3 - 46 - 506 - 24 = 2024$ cách chọn bất kỳ hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Số giá trị nguyên của $m \in (-10; 10)$ để phương trình $(\sqrt{10}+1)^{x^2}+m(\sqrt{10}-1)^{x^2} = 2\cdot 3^{x^2+1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt là

A. 14. **B. 15.** C. 13. D. 16.

Lời giải.

Nhận xét $(\sqrt{10} + 1)(\sqrt{10} - 1) = 9 \Rightarrow (\sqrt{10} + 1)^{\frac{1}{2}}(\sqrt{10} - 1)^{\frac{1}{2}} = 3$.

Khi đó phương trình tương đương với

$$m = \frac{6 \cdot 3^{x^2} - (\sqrt{10} + 1)^{x^2}}{(\sqrt{10} - 1)^{x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad m = \frac{6((\sqrt{10}+1)^{\frac{x^2}{2}}(\sqrt{10}-1)^{\frac{x^2}{2}}}{(\sqrt{10}-1)^{x^2}} - \left(\frac{\sqrt{10}+1}{\sqrt{10}-1}\right)^{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad m = 6 \cdot \left(\frac{\sqrt{10}+1}{\sqrt{10}-1}\right)^{\frac{x^2}{2}} - \left(\frac{\sqrt{10}+1}{\sqrt{10}-1}\right)^{x^2}.$$

Đặt $\left(\frac{\sqrt{10}+1}{\sqrt{10}-1}\right)^{\frac{x^2}{2}} = t$ vì $\frac{x^2}{2} \geq 0 \Rightarrow t \geq 1$.

Ta có phương trình $m = 6t - t^2 \quad (1)$ với $t \geq 1$.

Xét hàm số $f(t) = 6t - t^2 \Rightarrow f'(t) = 6 - 2t \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

Bảng biến thiên

t	1		3		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	5	$\nearrow$	9	$\searrow$	$-\infty$

Để phương trình có đúng hai nghiệm x thì phương trình (1) phải có một nghiệm $t > 1$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có đúng một nghiệm khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m = 9 \\ m < 5. \end{array}\right.$

Suy ra có 15 giá trị của m nguyên thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0; 2]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên a thuộc $[-4; 4]$ sao cho $M \leq 2m$?

A 7. B 5. C 6. D 4.

Lời giải.

Xét hàm $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a \Rightarrow g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	a	$\nearrow$	$1+a$	$\searrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$

Xét hàm $f(x) = |g(x)|$

TH1. Đồ thị hàm số $g(x)$ nằm hoàn toàn phía trên trục Ox khi $a \geq 0$.

Khi đó đồ thị hàm $y = f(x)$ giống đồ thị hàm $g(x)$.

Suy ra $\begin{cases} \max\limits_{[0;2]} f(x) = f(1) = 1 + a = M \\ \min\limits_{[0;2]} f(x) = f(2) = f(0) = a = m. \end{cases}$

Theo đề bài $M \leq 2m \Leftrightarrow 1 + a \leq 2a \Leftrightarrow a \geq 1$.

Kết hợp điều kiện $a \geq 1$.

TH2. Đồ thị hàm $f(x)$ nằm hoàn toàn phía dưới trục hoành khi $1 + a \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -1$. Khi đó đồ thị hàm $f(x)$ thu được bằng cách đối xứng đồ thị của hàm $g(x)$ qua trục hoành.

Suy ra $\begin{cases} M = -a \\ m = -a - 1 \end{cases}$. Theo đề bài $M \leq 2m \Leftrightarrow -a \leq -2a - 2 \Leftrightarrow a \leq -2$.

Kết hợp với điều kiện $a \leq -2$.

TH3. Nếu $\dfrac{a + (1 + a)}{2} \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -\dfrac{1}{2}$. Khi đó $\begin{cases} M = 1 + a \\ m = 0. \end{cases}$

Theo đề bài $M \leq 2m \Leftrightarrow a \leq -1$.

Kết hợp với điều kiện suy ra không có giá trị a thỏa mãn.

TH4. Nếu $\dfrac{a + (1 + a)}{2} \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -\dfrac{1}{2}$. Khi đó $\begin{cases} M = -a \\ m = 0. \end{cases}$

Theo đề bài $M \leq 2m \Leftrightarrow a \geq 0$.

Kết hợp với điều kiện suy ra không có giá trị a thỏa mãn.

Từ 4 trường hợp trên ta được $\left[\begin{array}{l} a \geq 1 \\ a \leq -2 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ có 7 giá trị nguyên của a thuộc $[-4; 4]$ thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

—— **HẾT** ——

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. C	3. B	4. B	5. A	6. C	7. D	8. A	9. A	10. A
11. D	12. D	13. C	14. C	15. B	16. A	17. C	18. D	19. B	20. C
21. D	22. B	23. B	24. D	25. B	26. A	27. D	28. C	29. C	30. C
31. A	32. B	33. C	34. A	35. D	36. B	37. A	38. C	39. D	40. A
41. B	42. C	43. B	44. A	45. A	46. A	47. C	48. D	49. B	50. A

105 ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG, 2017 - 2018 TRƯỜNG THPT SỐ 2 AN NHƠN, BÌNH ĐỊNH

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho khối lăng trụ có thể tích bằng V. Biết diện tích đáy của lăng trụ là B, tính chiều cao h của khối lăng trụ đã cho.

(A) $h = \dfrac{V}{3B}$. (B) $h = \dfrac{2V}{B}$. (C) $h = \dfrac{3V}{B}$. **(D)** $h = \dfrac{V}{B}$.

Lời giải.

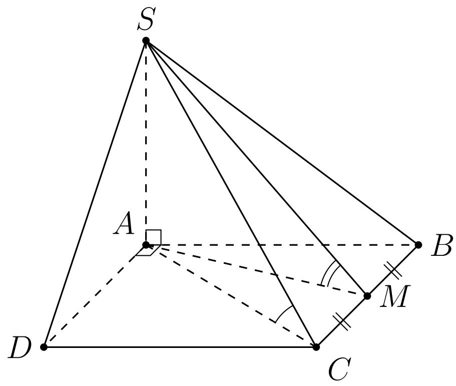
Ta có $V = B \cdot h \Leftrightarrow h = \dfrac{V}{B}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $BC = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và M là trung điểm của BC, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 60°. Góc giữa SM và mặt phẳng đáy có giá trị gần với giá trị nào nhất sau đây?

(A) 60°. (B) 70°. (C) 90°. (D) 80°.

Lời giải.



Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCA} = 60^\circ$, góc giữa SM và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SMA}$.

Tính:

- $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$;
- $SA = AC \cdot \tan \widehat{SCA} = a\sqrt{15}$;
- $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{4a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$;
- $\tan \widehat{SMA} = \dfrac{SA}{AM} = \dfrac{a\sqrt{15}}{\dfrac{a\sqrt{17}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{15}}{\sqrt{17}}$.

Suy ra $\widehat{SMA} \simeq 62^\circ$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Gọi S là tập hợp các số nguyên m để hàm số $y = \dfrac{x + 2m - 3}{x - 3m + 2}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -14)$. Tính tổng T của các phần tử trong S.

(A) $T = -5$. (B) $T = -6$. (C) $T = -9$. **(D)** $T = -10$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{3m - 2\}$.

$y' = \dfrac{-5m + 5}{(x - 3m + 2)^2}$.

Hàm số $y = \dfrac{x + 2m - 3}{x - 3m + 2}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -14)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y' > 0, \forall x \in \mathscr{D} \\ 3m - 2 \notin (-\infty; -14) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5m+5>0 \\ 3m-2 \geq -14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ m \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{-4;-3;-2;-1;0\}.$$

Vậy $T=-4-3-2-1=-10$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Giới hạn $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+1}{(x+2)^2}$ bằng

A. 0. B. $-\infty$. C. $\dfrac{3}{16}$. D. $+\infty$.

Lời giải.

Ta có

- $\lim\limits_{x \to -2}(x+1)=-1<0$.
- $\lim\limits_{x \to -2}(x+2)^2=0$.
- $(x+2)^2>0$, $\forall x \neq -2$.

Vậy $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+1}{(x+2)^2}=-\infty$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-1;2)$, $B(4;-1;-1)$, $C(2;0;2)$. Mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C có phương trình

A. $3x+3y+z-8=0$. B. $3x-3y+z-14=0$.

C. $3x-2y+z-8=0$. D. $2x+3y-z+8=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;0;-3)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;1;0)$ nên $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(3;3;1)$.

Mặt phẳng (ABC) đi qua $C(2;0;2)$ và nhận $\vec{n}=(3;3;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình $3(x-2)+3y+(z-2)=0 \Leftrightarrow 3x+3y+z-8=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2(\log_3(\log_4 x^{18}))=1$ bằng

A. 0. B. 1. C. 4. D. 2.

Lời giải.

Ta có $\log_2(\log_3(\log_4 x^{18}))=1 \Leftrightarrow \log_3(\log_4 x^{18})=2 \Leftrightarrow \log_4 x^{18}=9 \Leftrightarrow x^{18}=4^9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2. \end{array}\right.$

Chọn đáp án A □

Câu 7. Cho phương trình $z^2-6z+10=0$. Một nghiệm phức của phương trình đã cho là

A. $z=2+3i$. B. $z=5-4i$. C. $z=1+i$. D. $z=3-i$.

Lời giải.

$z^2-6z+10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=3+i \\ z=3-i. \end{array}\right.$

Chọn đáp án D □

Câu 8. Tìm phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-3}{3x-2}$.

(A) $x = \dfrac{1}{3}$. (B) $x = \dfrac{2}{3}$. (C) $y = \dfrac{2}{3}$. (D) $y = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \dfrac{1}{3}$ nên phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Hình nón có thể tích bằng 16π và chiều cao bằng 3. Tính diện tích xung quanh của hình nón đã cho.

(A) 20π. (B) 24π. (C) 12π. (D) 10π.

Lời giải.

Ta có thể tích $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$. Suy ra đường sinh $l = \sqrt{h^2 + r^2} = 5$.

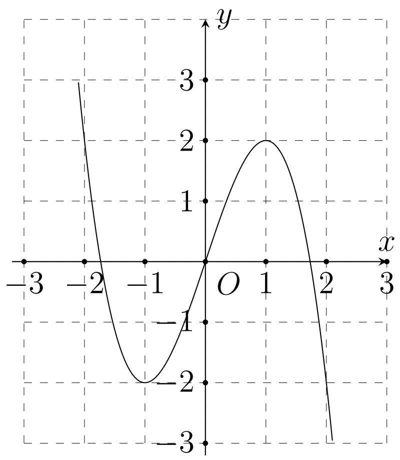
Vậy diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi r l = 20\pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A) $y = x^3 - 3x$. (B) $y = -x^3 + 3x$.

(C) $y = -x^3 - 3x^2$. (D) $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.



Lời giải.

Nhìn hình ta thấy đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(1;2)$ nên trong 4 hàm số trên chỉ có hàm số $y = -x^3 + 3x$ thỏa đề.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Một người muốn gửi tiền vào ngân hàng để đến ngày 19/5/2020 rút được khoản tiền là 100.000.000 đồng (cả vốn lẫn lãi). Lãi suất ngân hàng là 0,75%/tháng, tính theo thể thức lãi kép. Hỏi vào ngày 19/5/2018 người đó phải gửi ngân hàng số tiền là bao nhiêu để đáp ứng nhu cầu trên, nếu lãi suất không thay đổi trong thời gian người đó gửi tiền (giá trị gần đúng làm tròn đến hàng nghìn)?

(A) 84.573.000 đồng. (B) 84.533.000 đồng. (C) 83.533.000 đồng. (D) 83.583.000 đồng.

Lời giải.

Gọi A là số tiền cần gửi ngân hàng, $r = 0{,}75\%$ là lãi suất 1 tháng.

Theo giả thiết, ta có $100.000.000 = A(1+r)^{24}$.

Suy ra $A = \dfrac{100.000.000}{(1+r)^{24}} \simeq 83.583.000$ (đồng).

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Cho điểm $H(-3;-4;6)$ và mặt phẳng (Oxz). Hỏi khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (Oxz) bằng bao nhiêu?

A $\mathrm{d}(H;(Oxz)) = 4$. **B** $\mathrm{d}(H;(Oxz)) = 3$. **C** $\mathrm{d}(H;(Oxz)) = 6$. **D** $\mathrm{d}(H;(Oxz)) = 8$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(Oxz)\colon y = 0$.

Khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (Oxz) là $\mathrm{d}(H;(Oxz)) = |y_H| = 4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(-1;0;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(-3;1;2)$. Mặt phẳng (P) đi qua trọng tâm của tam giác ABC và vuông góc với đường thẳng AB là

A $(P)\colon 2x+2y-3z+1=0$. **B** $(P)\colon 2x+2y+3z-3=0$.

C $(P)\colon 2x+2y-3z+3=0$. **D** $(P)\colon x+y-z-3=0$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, suy ra $G(-1;1;1)$.

Mặt phẳng (P) đi qua G và vuông góc với đường thẳng AB nên nhận véc-tơ $\overrightarrow{AB} = (2;2;-3)$ làm véc-tơ pháp tuyến, có phương trình là $2(x+1)+2(y-1)-3(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x+2y-3z+3=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x^3+3x^2-1$ trên đoạn $\left[-2;-\dfrac{1}{2}\right]$. Tính $P = M - m$.

A $P = 4$. **B** $P = -5$. **C** $P = 5$. **D** $P = 1$.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-2;-\dfrac{1}{2}\right]$.

Ta có $f'(x) = 6x^2+6x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \text{(loại)} \\ x = -1 & \text{(nhận)}. \end{array}\right.$

Tính: $f(-2) = -5$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$, $f(-1) = 0$.

Khi đó $\max\limits_{\left[-2;-\frac{1}{2}\right]} f(x) = 0 = M$ tại $x = -1$; $\min\limits_{\left[-2;-\frac{1}{2}\right]} f(x) = -5 = m$ tại $x = -2$.

Vậy $P = M - m = 5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Cho $P = \log_{a^4} b^2$ với $0 < a \neq 1$ và $b < 0$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A $P = -\dfrac{1}{2}\log_a(-b)$. **B** $P = \dfrac{1}{2}\log_a(-b)$. **C** $P = 2\log_a(-b)$. **D** $P = -2\log_a(-b)$.

Lời giải.

$P = \log_{a^4} b^2 = \dfrac{2}{4}\log_{|a|}|b| = \dfrac{1}{2}\log_a(-b)$ (vì $0 < a \neq 1$ và $b < 0$).

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm phương trình $f(x)+2=0$ là

A 2. **B** 0. **C** 1. **D** 3.

Lời giải.

Ta có $f(x)+2=0 \Leftrightarrow f(x)=-2$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x)=-2$ có hai nghiệm phân biệt. Một nghiệm là $x=3$ và một nghiệm là $x=x_0<-1$.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{3}{1-2x}$.

A $-6\ln|1-2x|+C$. **B** $3\ln|1-2x|+C$.

C $-\dfrac{3}{2}\ln|1-2x|+C$. **D** $\dfrac{3}{2}\ln|1-2x|+C$.

Lời giải.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \frac{3}{1-2x}\,\mathrm{d}x=-\frac{3}{2}\ln|1-2x|+C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 18. Tập nghiệm của bất phương trình $\log(x+1)<0$ là

A $(-1;0)$. **B** $(-\infty;9)$. **C** $(-1;9)$. **D** $(-\infty;-1)$.

Lời giải.

Ta có $\log(x+1)<0 \Leftrightarrow 0<x+1<1 \Leftrightarrow -1<x<0$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-1;0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 10. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC=10\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD. Tính khoảng cách d giữa BD và MN.

A $\mathrm{d}=3\sqrt{5}$. **B** $\mathrm{d}=\sqrt{5}$. **C** $\mathrm{d}=5$. **D** $\mathrm{d}=10$.

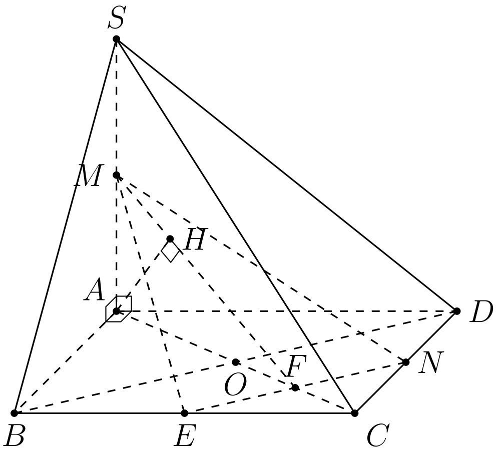
Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Gọi E là trung điểm BC, suy ra $NE \parallel BD$.

NE cắt AC tại F.

Kẻ $AH \perp MF$ tại H. Ta có



- $\begin{cases} NE \perp AC \\ NE \perp SA \end{cases} \Rightarrow NE \perp (SAC) \Rightarrow NE \perp AH.$
- $\begin{cases} AH \perp MF \\ AH \perp NE \end{cases} \Rightarrow AH \perp (MNE).$

Khi đó $\mathrm{d}(BD, MN) = \mathrm{d}(BD, (MNE)) = \mathrm{d}(O, (MNE)) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}(A, (MNE)) = \dfrac{1}{3}AH.$

Tính:

- $AC = AB\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$, $AF = \dfrac{3}{4}AC = \dfrac{15\sqrt{2}}{2}$.
- $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = 10\sqrt{3} \Rightarrow AM = \dfrac{1}{2}SA = 5\sqrt{3}$.
- $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AF^2} = \dfrac{1}{75} + \dfrac{2}{225} = \dfrac{1}{45} \Rightarrow AH = 3\sqrt{5}$.

Vậy $\mathrm{d}(BD, MN) = \dfrac{1}{3}AH = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Có bao nhiêu cách xếp ba bạn A, B, C vào một dãy ghế hàng ngang có 5 chỗ ngồi?

A 10. B 6. C 60. D 120.

Lời giải.

Số cách xếp ba bạn A, B, C vào một dãy ghế hàng ngang có 5 chỗ ngồi là $\mathrm{A}_5^3 = 60$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = f(x) + 2018$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-2; 0)$. B $(3; +\infty)$. C $(0; 2)$. D $(2018; 2020)$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = f(x) + 2018$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ lên trên 2018 đơn vị nên không làm thay đổi các khoảng đồng biến.

Vậy hàm số $y = f(x) + 2018$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Một đội xây dựng gồm 3 kỹ sư, 7 công nhân lập một tổ công tác gồm 5 người. Hỏi có bao nhiêu cách lập tổ công tác gồm 1 kỹ sư làm tổ trưởng, 1 công nhân làm tổ phó và 3 công nhân tổ viên?

A 420. **B** 360. **C** 120. **D** 240.

Lời giải.

Số cách lập tổ công tác gồm 1 kỹ sư làm tổ trưởng, 1 công nhân làm tổ phó và 3 công nhân tổ viên là $3 \cdot 7 \cdot \mathrm{C}_6^3 = 420$ cách.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	19	$\searrow$	-13	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm

A $x = -13$. **B** $x = 2$. **C** $x = -2$. **D** $x = 19$.

Lời giải.

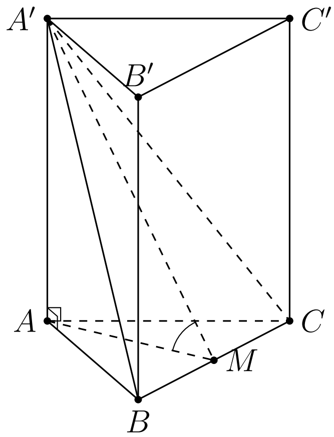
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a, tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$.

A $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B** 1. **C** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D** $\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm BC.

Ta có

- $\begin{cases} A'M \perp BC \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow$ Góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là góc $\widehat{A'MA}$.
- $AM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
- $\tan \widehat{A'MA} = \dfrac{AA'}{AM} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$. Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của d?

(A) $x-2=y=z+3$.

B $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$.

(C) $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$.

(D) $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $A(2;1;0)$ và nhận $\vec{u}=(-1;1;1)$ làm véc-tơ chỉ phương, có phương trình chính tắc $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 4. **B** $\dfrac{3}{2}$. (C) 3. (D) $\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1)$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^{2x}\Big|_0^{\ln 2}=\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Cho hai hàm số $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường cong $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ và các đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ được xác định bởi công thức nào sau đây?

(A) $S=\displaystyle\int\limits_a^b |f_1(x)+f_2(x)|\,\mathrm{d}x$.

(B) $S=\displaystyle\int\limits_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\,\mathrm{d}x$.

(C) $S=\left|\displaystyle\int\limits_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\,\mathrm{d}x\right|$.

D $S=\displaystyle\int\limits_a^b |f_1(x)-f_2(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường cong $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ và các đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ được xác định bởi công thức $S=\displaystyle\int\limits_a^b |f_1(x)-f_2(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$; $d_2\colon \dfrac{x-5}{-3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và $\Delta\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$. Đường thẳng song song với Δ, cắt d_1 và d_2 có phương trình là

(A) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$.

(B) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$.

(C) $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+2}{3}$.

D $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$.

Lời giải.

Đường thẳng d cắt d_1 tại $M(3-t;3-2t;-2+t)$.

Đường thẳng d cắt d_2 tại $N(5-3s;-1+2s;2+s)$.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{MN}=(2-3s+t;-4+2s+2t;4+s-t)$.

Vì d song song Δ nên d cũng có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;2;3)$.

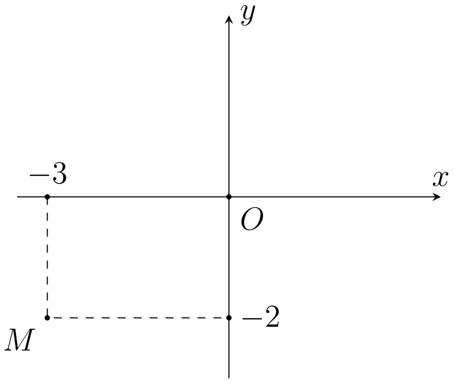
Khi đó $\overrightarrow{MN}$ cùng phương $\overrightarrow{u}$, suy ra

$$\frac{2-3s+t}{1}=\frac{-4+2s+2t}{2}=\frac{4+s-t}{3}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}4-6s+2t=-4+2s+2t\\ -12+6s+6t=8+2s-2t\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}s=1\\ t=2.\end{cases}$$

Do đó đường thẳng d qua $M(1;-1;0)$ và nhận $\overrightarrow{u}=(1;2;3)$ làm véc-tơ chỉ phương.
Vậy phương trình chính tắc của d là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$.
Chọn đáp án D □

Câu 29. Điểm M trong hình vẽ bên dưới là điểm biểu diễn của số phức

A $z=-3+2i$. **B** $z=3+2i$.
C $z=-3-2i$. **D** $z=3-2i$.



Lời giải.
Điểm M trong hình vẽ là điểm biểu diễn của số phức $z=-3-2i$.
Chọn đáp án C □

Câu 30. Gọi a là hệ số của $x^{\frac{5}{3}}$ trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{2}{x}\right)^{3n}$, $x>0$. Tìm a biết rằng

$$2^{n-4}\left(\mathrm{C}_n^{n-2}-\mathrm{C}_{n-2}^1-n\right)=\mathrm{C}_{n-1}^{n-2}.$$

A $a=96096$. **B** $a=96906$. **C** $a=96960$. **D** $a=96069$.

Lời giải.
Điều kiện: $n\geq 3$, $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
&2^{n-4}\left(\mathrm{C}_n^{n-2}-\mathrm{C}_{n-2}^1-n\right)=\mathrm{C}_{n-1}^{n-2}\\
\Leftrightarrow\ &2^{n-4}\left(\frac{n!}{(n-2)!2!}-\frac{(n-2)!}{1!(n-3)!}-n\right)=\frac{(n-1)!}{(n-3)!1!}\\
\Leftrightarrow\ &2^{n-4}\left(\frac{1}{2}n(n-1)-(n-2)-n\right)=n-1\\
\Leftrightarrow\ &2^{n-4}\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{5}{2}n+2\right)=n-1\\
\Leftrightarrow\ &2^{n-5}\left(n^2-5n+4\right)=n-1\\
\Leftrightarrow\ &2^{n-5}(n-1)(n-4)=n-1\\
\Leftrightarrow\ &2^{n-5}(n-4)=1\Leftrightarrow n=5.
\end{aligned}$$

Số hạng tổng quát của khai triển $\left(\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{2}{x}\right)^{3n}$ là

$$\mathrm{C}_{15}^{k}\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{15-k}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^{k}=\mathrm{C}_{15}^{k}\cdot 2^k\cdot x^{\frac{30-2k}{3}-k}=\mathrm{C}_{15}^{k}\cdot 2^k\cdot x^{\frac{30-5k}{3}}(k\in\mathbb{N},k\leq 15).$$

Hệ số của $x^{\frac{5}{3}}$ có k thỏa mãn $\dfrac{30-5k}{3}=\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow 30-5k=5\Leftrightarrow k=5$.
Vậy hệ số cần tìm là $a=\mathrm{C}_{15}^{5}2^5=96096$.
Chọn đáp án A □

Câu 31. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;\sqrt{3};0)$, $B(1;\sqrt{3};0)$, $C(0;0;\sqrt{3})$ và điểm M thuộc trục Oz sao cho hai mặt phẳng (MAB) và (ABC) vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (OAB).

A. 30°. B. 60°. C. 45°. D. 15°.

Lời giải.

$M(0;0;m)$ thuộc trục Oz.
Ta có $\overrightarrow{AM}=(1;-\sqrt{3};m)$, $\overrightarrow{AB}=(2;0;0)$, $\overrightarrow{AC}=(1;-\sqrt{3};\sqrt{3})$.
$\Rightarrow\vec{n}_1=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(0;-2\sqrt{3};-2\sqrt{3})$, $\vec{n}_2=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right]=(0;-2m;-2\sqrt{3})$.
Mặt phẳng (ABC) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1$, mặt phẳng (MAB) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2$.
Hai mặt phẳng (MAB) và (ABC) vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$\vec{n}_1\perp\vec{n}_2\Leftrightarrow 0\cdot 0+(-2\sqrt{3})\cdot(-2m)+(-2\sqrt{3})\cdot(-2\sqrt{3})=0\Leftrightarrow m=-\sqrt{3}.$$

Mặt phẳng (OAB) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_3=\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(0;0;-2\sqrt{3})$.
Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (OAB). Khi đó

$$\cos\varphi=\left|\cos\left(\vec{n}_2,\vec{n}_3\right)\right|=\frac{|\vec{n}_2\cdot\vec{n}_3|}{|\vec{n}_2|\cdot|\vec{n}_3|}=\frac{12}{2\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (OAB) là 45°.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn phương trình $\dfrac{(|z|-1)(1+iz)}{z-\dfrac{1}{\overline{z}}}=i$. Tính $P=a+b$.

A. $P=1-\sqrt{2}$. B. $P=1$. C. $P=1+\sqrt{2}$. D. $P=0$.

Lời giải.

$$\frac{(|z|-1)(1+iz)}{z-\dfrac{1}{\overline{z}}}=i\Leftrightarrow\frac{(|z|-1)(1+iz)\overline{z}}{z\overline{z}-1}=i\quad(|z|\neq 1)$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{(|z|-1)(1+iz)\overline{z}}{|z|^2-1}=i\Leftrightarrow\frac{(1+iz)\overline{z}}{|z|+1}=i$$

$$\Leftrightarrow\ \overline{z}+i|z|^2=i(|z|+1)\Leftrightarrow a-bi+(a^2+b^2)i=i(\sqrt{a^2+b^2}+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad a+(-b+a^2+b^2)i = i(\sqrt{a^2+b^2}+1) \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b^2-b=|b|+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b<0 \\ b=\pm 1 \end{cases} \quad (\text{loại}) \\ \begin{cases} b>0 \\ b^2-2b-1=0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ \left[\begin{array}{ll} b=1+\sqrt{2} & (\text{nhận}) \\ b=1-\sqrt{2} & (\text{loại}). \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy $P=a+b=1+\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Gọi A là tập hợp gồm các số tự nhiên chẵn có 4 chữ số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập A. Tính xác suất để số lấy được có chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng trước nó.

A $P=\dfrac{69}{574}$. **B** $P=\dfrac{23}{1120}$. **C** $P=\dfrac{271}{2296}$. **D** $P=\dfrac{23}{1148}$.

Lời giải.

Gọi số tự nhiên chẵn có 4 chữ số khác nhau là $\overline{abcd}$ với $a,b,c \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, $a \neq 0$, $d \in \{0;2;4;6;8\}$.

- Trường hợp 1: $d=0$ có $\mathrm{A}_9^3=504$ số.
- Trường hợp 2: $d \in \{2;4;6;8\}$ có $4 \cdot 8 \cdot \mathrm{A}_8^2 = 1792$ số.

Khi đó không gian mẫu A có $504+1792=2296$ phần tử. Ta tìm số lượng số lấy từ tập A sao cho chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng trước nó như sau:

- $d=4$ có 1 số.
- $d=6$ có $\mathrm{C}_5^3=10$ số.
- $d=8$ có $\mathrm{C}_7^3=35$ số.

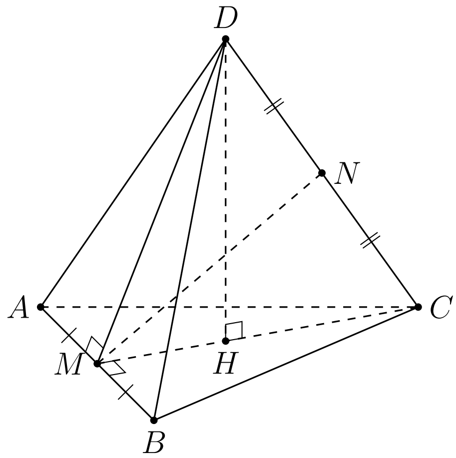
Khi đó xác suất cần tìm là $\dfrac{1+10+35}{2296}=\dfrac{23}{1148}$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=x$, tất cả các cạnh còn lại có độ dài bằng 2. Gọi S là diện tích tam giác ABC, h là khoảng cách từ D đến mặt phẳng (ABC). Với giá trị nào của x thì biểu thức $V=\dfrac{1}{3}\cdot S\cdot h$ đạt giá trị lớn nhất?

A $x=\sqrt{6}$. **B** $x=1$. **C** $x=2\sqrt{6}$. **D** $x=2$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm AB, N là trung điểm CD.
Kẻ $DH \perp CM$ tại H.
Ta có

- $\begin{cases} AB \perp DM \\ AB \perp CM \end{cases} \Rightarrow AB \perp (DCM) \Rightarrow AB \perp DH.$
- $\begin{cases} DH \perp AB \\ DH \perp CM \end{cases} \Rightarrow DH \perp (ABC) \Rightarrow DH = h.$

Tính:

- $CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{4 - \dfrac{x^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{16 - x^2}}{2}$.
- $MN = \sqrt{CM^2 - NC^2} = \sqrt{4 - \dfrac{x^2}{4} - 1} = \dfrac{\sqrt{12 - x^2}}{2}$.
- $MN \cdot CD = DH \cdot CM \Rightarrow h = DH = \dfrac{MN \cdot CD}{CM} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{12 - x^2}}{2} \cdot 2}{\dfrac{\sqrt{16 - x^2}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{12 - x^2}}{\sqrt{16 - x^2}}$.
- $S = S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot CM = \dfrac{1}{2} \cdot x \cdot \dfrac{\sqrt{16 - x^2}}{2} = \dfrac{x \cdot \sqrt{16 - x^2}}{4}$.
- $V = \dfrac{1}{3} \cdot S \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{x \cdot \sqrt{16 - x^2}}{4} \cdot \dfrac{2\sqrt{12 - x^2}}{\sqrt{16 - x^2}} = \dfrac{1}{6} \cdot x \cdot \sqrt{12 - x^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ cho hai số dương x^2 và $12 - x^2$, ta có

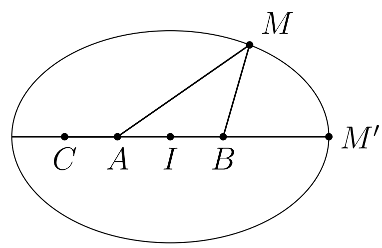
$$x^2 + (12 - x^2) \geq 2 \cdot \sqrt{x^2(12 - x^2)} \Leftrightarrow 12 \geq 2x \cdot \sqrt{12 - x^2} \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{6}x \cdot \sqrt{12 - x^2} \Leftrightarrow V \leq 1.$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi $x^2 = 12 - x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{6}$. Vậy V đạt giá trị lớn nhất khi $x = \sqrt{6}$.
Chọn đáp án A □

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 - i| + |z + 1 + 3i| = 6\sqrt{5}$. Giá trị lớn nhất của $|z - 2 - 3i|$ là

A $5\sqrt{5}$. **B** $2\sqrt{5}$. **C** $6\sqrt{5}$. **D** $4\sqrt{5}$.

Lời giải.



Ta có $|z - 1 - i| + |z + 1 + 3i| = 6\sqrt{5} \Leftrightarrow MA + MB = 6\sqrt{5}$ với $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$, $A(1; 1)$ biểu diễn số phức $1 + i$, $B(-1; -3)$ biểu diễn số phức $-1 - 3i$.
Khi đó điểm M nằm trên elip tâm I có độ dài trục lớn $6\sqrt{5}$ và A, B là hai tiêu điểm.

- $|z - 2 - 3i| = MC$ với $C(2; 3)$ biểu diễn số phức $2 + 3i$.
- $\overrightarrow{AB} = (-2; -4) \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}$.
- $\overrightarrow{AC} = (1; 2) \Rightarrow AC = \sqrt{5}$.
- Vì $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$ nên $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng và $AB = 2AC$.

Gọi M' là điểm nằm trên elip sao cho A, B, M' thẳng hàng và M' khác phía A so với B.

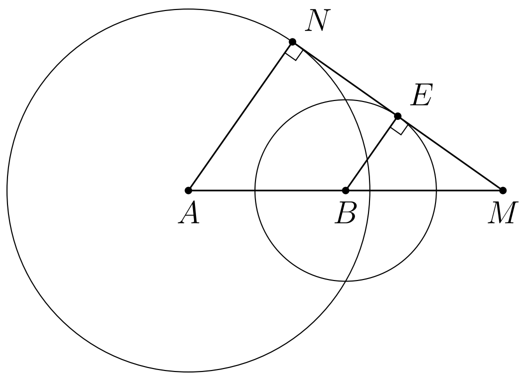
Ta có $BM' = \dfrac{6\sqrt{5} - AB}{2} = 2\sqrt{5}$.

Ta thấy $MC \leq M'C$ với mọi điểm M nằm trên elip.
Do đó MC lớn nhất khi và chỉ khi $M \equiv M'$.
Khi đó $MC = M'C = CA + AB + BM' = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$.
Chọn đáp án A □

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;-3)$, $B\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $C(1;1;4)$, $D(5;3;0)$. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A bán kính bằng 3, (S_2) là mặt cầu tâm B bán kính bằng $\frac{3}{2}$. Có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với 2 mặt cầu (S_1), (S_2) đồng thời song song với đường thẳng đi qua 2 điểm C, D?

A Vô số. **B** 2. **C** 4. **D** 1.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right) \Rightarrow AB = \frac{3\sqrt{3}}{2} < 3$ nên B nằm bên trong mặt cầu (S_1). Một mặt phẳng qua A và B cắt hai mặt cầu theo hai đường tròn giao tuyến như hình bên.
Kẻ tiếp tuyến chung của hai đường tròn, tiếp tuyến này sẽ cắt đường thẳng AB tại M. Gọi N, E lần lượt là tiếp điểm với hai đường tròn như hình vẽ.
Tam giác ANM đồng dạng tam giác BEM nên $\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{BE} = 2$. Suy ra $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow M(2;1;2)$.
Gọi (P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1) và (S_2). Khi đó (P) sẽ luôn đi qua M.
Gọi $\vec{n} = (m;n;p)$ với $m^2+n^2+p^2 \neq 0$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).
Phương trình $(P)\colon m(x-2)+n(y-1)+p(z-2)=0$.
Ta có:

- $\overrightarrow{CD} = (4;2;-4)$.
- $CD \parallel (P) \Rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow 4m+2n-4p=0 \Rightarrow n = 2p-2m$.
- $\mathrm{d}(A,(P)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|-m+n-5p|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} = 3 \Leftrightarrow |-3m-3p| = 3\sqrt{m^2+(2p-2m)^2+p^2}$

  $\Leftrightarrow 4m^2 - 10mp + 4p^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{m}{p} = \frac{1}{2}\\ \frac{m}{p} = 2.\end{array}\right.$
- Trường hợp $\frac{m}{p} = \frac{1}{2}$: chọn $m=1$, $p=2 \Rightarrow n=2$.

  Khi đó $(P)\colon x+2y+2z-8=0$ (nhận).
- Trường hợp $\frac{m}{p} = 2$: chọn $m=2$, $p=1 \Rightarrow n=-2$.

  Khi đó $(P)\colon 2x-2y+z-4=0$ (loại vì chứa C, D).

Chọn đáp án D □

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm không âm trên $[0;1]$ thỏa mãn $\frac{[f(x)]^2[f'(x)]^2}{e^{2x}} = 1+[f(x)]^2$ và $f(x) > 0$ với $\forall x \in [0;1]$, biết $f(0)=1$. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A $\dfrac{5}{2} < f(1) < 3$. **B** $3 < f(1) < \dfrac{7}{2}$. **C** $2 < f(1) < \dfrac{5}{2}$. **D** $\dfrac{3}{2} < f(1) < 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{[f(x)]^2[f'(x)]^2}{\mathrm{e}^{2x}} = 1 + [f(x)]^2 \\ \Rightarrow\ & \frac{f(x)f'(x)}{\mathrm{e}^{x}} = \sqrt{1+[f(x)]^2} \\ \Rightarrow\ & \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}} = \mathrm{e}^x \\ \Rightarrow\ & I = \int\limits_0^1 \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{1+[f(x)]^2} \Rightarrow t^2 = 1 + [f(x)]^2 \Rightarrow t\,\mathrm{d}t = f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{2} = t_1$; $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{1+[f(1)]^2} = t_2$.

Khi đó $I = \displaystyle\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{t\,\mathrm{d}t}{t} = t\Big|_{t_1}^{t_2} = \sqrt{1+[f(1)]^2} - \sqrt{2}$.

Do đó $\sqrt{1+[f(1)]^2} - \sqrt{2} = \mathrm{e} - 1 \Leftrightarrow f(1) = \sqrt{(e-1+\sqrt{2})^2 - 1} \simeq 2{,}96$.

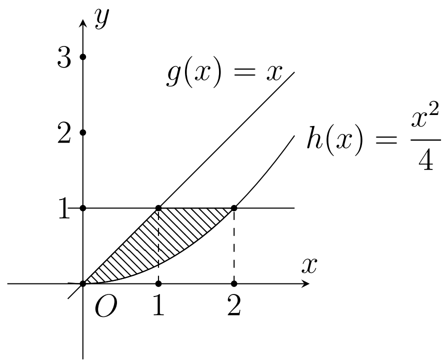
Vậy $\dfrac{5}{2} < f(1) < 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 38.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = 1$, $y = x$ và đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2}{4}$ trong miền $x \geq 0$, $y \leq 1$ là $\dfrac{a}{b}$ (phân số tối giản). Khi đó $b - a$ bằng

A 2. **B** 4. **C** 3. **D** 1.



Lời giải.

Diện tích hình phẳng cần tính là

$$S = \int\limits_0^1 \left(x - \frac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_0^1 + \left(x - \frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{5}{6}.$$

Khi đó $a = 5$, $b = 6$. Vậy $b - a = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Với giá trị nào của tham số m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m + 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 4$?

A $m = \dfrac{5}{2}$. **B** $m = \dfrac{13}{2}$. **C** $m = 8$. **D** $m = 2$.

Lời giải.

Đặt $t = 2^x$, $(t > 0)$. Phương trình trở thành $t^2 - 2mt + 2m + 3 = 0 \quad (*)$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 3 \geq 0 \\ 2m + 3 > 0 \\ 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{array}\right. \\ m > -\dfrac{3}{2} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 3.$$

Khi đó $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = t_1 \\ t = t_2. \end{array}\right.$

Và $t_1 = 2^{x_1} \Leftrightarrow x_1 = \log_2 t_1$; $t_2 = 2^{x_2} \Leftrightarrow x_2 = \log_2 t_2$.

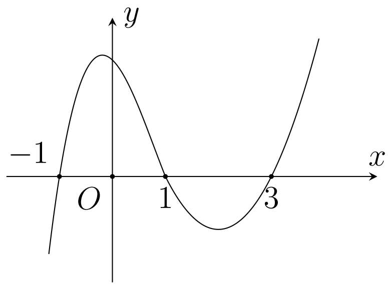
Ta có

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 = 4 \Leftrightarrow \log_2 t_1 + \log_2 t_2 = 4 \\ \Leftrightarrow \; & \log_2(t_1 \cdot t_2) = 4 \Leftrightarrow t_1 \cdot t_2 = 16 \\ \Leftrightarrow \; & 2m + 3 = 16 \Leftrightarrow m = \frac{13}{2} \quad \text{(nhận)}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 40.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị là đường cong (C). Biết đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ bên. Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt đồ thị (C) tại hai điểm A, B phân biệt lần lượt có hoành độ a, b. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.



A $4 \geq a - b \geq -4$. **B** $a, b < 3$.

C $a^2 + b^2 > 10$. **D** $a - b \geq 0$.

Lời giải.

Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại $x = 1$, suy ra d có hệ số góc là $f'(1) = 0$ (dựa vào đồ thị của $f'(x)$).

Khi đó d có phương trình $y = f'(1)(x - 1) + f(1) \Leftrightarrow y = f(1)$.

Dựa vào đồ thị của $f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-1)$	↗	$f(1)$	↘	$f(3)$	↗	$+\infty$

Khi đó d cắt (C) tại hai điểm $A(a; f(1))$, $B(b; f(1))$ với $a < -1 < 3 < b$.

Suy ra $a + 1 < 0 < b - 3$ nên $\begin{cases} a - b < -4 \\ b - a > 4. \end{cases}$

Đồng thời $a < -1 < 3 < b \Rightarrow \begin{cases} a^2 > 1 \\ b^2 > 9 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 > 10.$

Chọn đáp án C □

Câu 41. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} + 4u_n = 4 - 5n \end{cases}$ $(n \geq 1)$. Tính tổng $S = u_{2018} - 2u_{2017}$.

A $S = 2015 - 3 \cdot 4^{2017}$.
B $S = 2016 - 3 \cdot 4^{2018}$.
C $S = 2016 + 3 \cdot 4^{2018}$.
D $S = 2015 + 3 \cdot 4^{2017}$.

Lời giải.

Dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} + 4u_n = 4 - 5n \quad (*) \end{cases}$ $(n \geq 1)$.

Đặt $u_{n+1} = v_{n+1} - n \Rightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 = 2 \\ u_n = v_n - (n-1). \end{cases}$

Thay vào $(*)$ ta được

$$v_{n+1} - n + 4v_n - 4(n-1) = 4 - 5n \Rightarrow v_{n+1} + 4v_n = 0 \Rightarrow v_{n+1} = -4v_n.$$

Ta có

$$\begin{aligned} v_1 &= 2 \\ v_2 &= (-4) \cdot v_1 = (-4) \cdot 2 \\ v_3 &= (-4) \cdot v_2 = (-4)^2 \cdot 2 \\ &\ldots \\ v_{n+1} &= (-4)^n \cdot 2. \end{aligned}$$

Suy ra $u_{n+1} = v_{n+1} - n = (-4)^n \cdot 2 - n$.

Khi đó $\begin{cases} u_{2018} = (-4)^{2017} \cdot 2 - 2017 \\ u_{2017} = (-4)^{2016} \cdot 2 - 2016 \end{cases}$.

Vậy

$$\begin{aligned} u_{2018} - 2u_{2017} &= -8 \cdot (-4)^{2016} - 2017 - 4 \cdot (-4)^{2016} + 2 \cdot 2016 \\ &= 2015 - 12 \cdot (-4)^{2016} \\ &= 2015 - 3 \cdot 4^{2017}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 42. Biết tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = a\pi + \ln b$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a + b$.

A $S = \frac{5}{4}$. **B** $S = \frac{11}{4}$. **C** $S = \frac{3}{4}$. **D** $S = 2$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3(\sin x + \cos x) + 2(\sin x - \cos x)}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(3 + \frac{2(\sin x - \cos x)}{\sin x + \cos x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 3\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-2(\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{3\pi}{4} + J. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sin x + \cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = (\cos x - \sin x)\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \sqrt{2}$.

Khi đó $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-2(\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{-2\,\mathrm{d}t}{t} = -2\ln|t|\Big|_1^{\sqrt{2}} = -\ln 2 = \ln\frac{1}{2}$.

Suy ra $I = \frac{3\pi}{4} - \ln 2$. Mà $I = a\pi + \ln b$ nên $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{2}$.

Vậy $S = a + b = \frac{5}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có đường chéo $A'C = 3$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ và chiều cao bằng chiều cao của hình lập phương.

A $S_{xq} = 5\sqrt{2}\pi$. **B** $S_{xq} = 2\sqrt{3}\pi$. **C** $S_{xq} = 3\sqrt{2}\pi$. **D** $S_{xq} = \sqrt{3}\pi$.

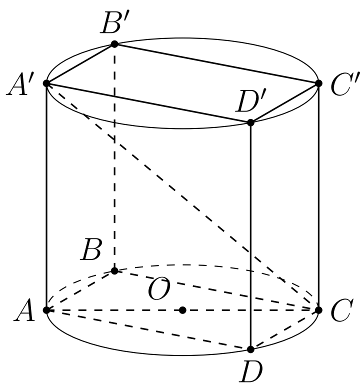
Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có $A'C = \sqrt{AA'^2 + AB^2 + AD^2} = AB\sqrt{3} \Rightarrow 3 = AB\sqrt{3}$ $\Rightarrow AB = \sqrt{3}$.

Hình trụ có độ dài đường sinh là $l = AA' = AB = \sqrt{3}$, bán kính đáy là $r = OA = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi rl = 3\sqrt{2}\pi$.



Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho hàm số $f(x) = \frac{2\sqrt{x} + m}{\sqrt{x+1}}$ với m là tham số thực, $m > 1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của m để hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; 4]$ nhỏ hơn 3. Số phần tử của tập S là

A 1. B 3. C 0. D 2.

Lời giải.

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[0;4]$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x+1}\right) - (2\sqrt{x}+m)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} \\ &= \frac{2(x+1)-(2\sqrt{x}+m)\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{x}(x+1)} \\ &= \frac{2-2m\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{x}(x+1)}. \end{aligned}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=\dfrac{1}{m} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{m^2}$.

Vì $m>1$ nên $\dfrac{1}{m^2}<1<4$.

x	0		$\frac{1}{m^2}$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{m^2}\right)$	$\searrow$	$f(4)$

Khi đó

$$\begin{aligned} &\max_{[0;4]} f(x) = f\left(\frac{1}{m^2}\right) < 3 \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{m}+m}{\sqrt{\frac{1}{m^2}+1}} < 3 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{2}{m}+m < 3\sqrt{\frac{1}{m^2}+1} \Leftrightarrow \frac{4}{m^2}+m^2+4 < 9\left(\frac{1}{m^2}+1\right) \\ \Leftrightarrow\ & m^4-5m^2-5<0 \Leftrightarrow \frac{5-3\sqrt{5}}{2} < m^2 < \frac{5+3\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Mà m là số nguyên dương lớn hơn 1 nên $m=2$.

Vậy tập S chỉ có 1 phần tử.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Biết $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{x}{y}$ ($x,y\in\mathbb{N}$, phân số tối giản), tính giá trị $x+y$.

A 2. B 4. C 1. D 3.

Lời giải.

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $a+c=2b$.

Ta có

$$\begin{aligned}
a+c=2b &\Leftrightarrow 2R\sin A+2R\sin C=4R\sin B\Leftrightarrow \sin A+\sin C=2\sin B\\
&\Leftrightarrow 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\Leftrightarrow \cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2}\\
&\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=2\cos\frac{A+C}{2}\\
&\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\\
&\Leftrightarrow 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\\
&\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

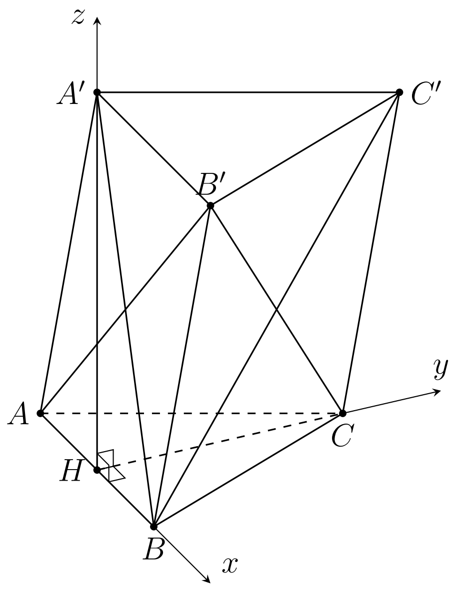
Vậy $x+y=4$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2a$, $AA'=a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BA. Tính sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C)$ và $(BA'C')$.

(A) $\dfrac{3\sqrt{31}}{31}$. (B) $\dfrac{2\sqrt{31}}{31}$. (C) $\dfrac{8\sqrt{3}}{\sqrt{217}}$. (D) $\dfrac{4\sqrt{31}}{31}$.

Lời giải.



$A'H=\sqrt{AA'^2-AH^2}=a$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ bên.

Không mất tính tổng quát có thể giả sử $a=1$.

Ta có $H(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;\sqrt{3};0)$, $A(-1;0;0)$, $A'(0;0;1)$, $B'(2;0;1)$, $C'(1;\sqrt{3};1)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C)$ và $(BA'C')$.

- $\overrightarrow{AB'}=(3;0;1)$, $\overrightarrow{AC}=(1;\sqrt{3};0)$
  $\Rightarrow \vec{n}_1=\left[\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AC}\right]=(-\sqrt{3};1;3\sqrt{3})$.
- $\overrightarrow{A'B}=(1;0;-1)$, $\overrightarrow{A'C'}=(1;\sqrt{3};0)$
  $\Rightarrow \vec{n}_2=\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'C'}\right]=(\sqrt{3};-1;\sqrt{3})$.
- $\cos\varphi=|\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)|=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\dfrac{5}{\sqrt{31}\cdot\sqrt{7}}$.
  $\Rightarrow \sin\varphi=\dfrac{8\sqrt{3}}{\sqrt{217}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $M(4;1;1)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho biểu thức $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Mặt phẳng (P) đi qua điểm nào dưới đây?

(A) $(2;0;2)$. (B) $(2;2;0)$. (C) $(2;1;1)$. (D) $(0;2;2)$.

Lời giải.

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$.

Mặt phẳng $(P)\colon \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Điểm $M(4;1;1) \in (P)$ nên $\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$.
Ta có $OA+OB+OC=a+b+c$.
Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-xcốp-ki, ta được

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}+\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{b}}\cdot\sqrt{b}+\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{c}}\cdot\sqrt{c}\right)^2 &\le \left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)\\ \Leftrightarrow 16 &\le a+b+c.\end{aligned}$$

Dấu “ = ” xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{\sqrt{4}}{a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8\\ b=4\\ c=4.\end{cases}$

Khi đó $(P)\colon \dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{4}=1$.

- Thay tọa độ $(2;0;2)$ vào phương trình (P) ta được $\dfrac{2}{8}+\dfrac{0}{4}+\dfrac{2}{4}\neq 1$.
- Thay tọa độ $(2;2;0)$ vào phương trình (P) ta được $\dfrac{2}{8}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{0}{4}\neq 1$.
- Thay tọa độ $(2;1;1)$ vào phương trình (P) ta được $\dfrac{2}{8}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\neq 1$.
- Thay tọa độ $(0;2;2)$ vào phương trình (P) ta được $\dfrac{0}{8}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{2}{4}= 1$.

Vậy mặt phẳng (P) đi qua điểm có tọa độ $(0;2;2)$.
Chọn đáp án D □

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ và thỏa mãn $\displaystyle\int_0^2 x(f'(x)-1)\,\mathrm{d}x = 2f(2)$.

Tính giá trị của $I=\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A 1. **B** 2. **C** -1. **D** -2.

Lời giải.

Ta có $J=\displaystyle\int_0^2 x(f'(x)-1)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 x(f'(x))\,\mathrm{d}x-\int_0^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^2 x(f'(x))\,\mathrm{d}x-\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2=K-2$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f(x).\end{cases}$

Khi đó $K=\displaystyle\int_0^2 x(f'(x))\,\mathrm{d}x = xf(x)|_0^2-\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2f(2)-I$.

Suy ra $I=2f(2)-K=2f(2)-(J+2)=2f(2)-2f(2)-2=-2$.
Chọn đáp án D □

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-5;5]$ để hàm số $y=\left|x^4+x^3-\dfrac{1}{2}x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị?

A 5. **B** 6. **C** 4. **D** 7.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + m$ có đồ thị (C).

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 + 3x^2 - x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{1}{4} \\ x = -1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2} + m$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$-\frac{3}{256} + m$	$\nearrow$	$+\infty$

- Trường hợp $0 < m \leq 5$, m nguyên: Đồ thị (C) nằm phía trên trục Ox nên số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \left|x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + m\right|$ bằng số điểm cực trị của (C) tức là 3 điểm cực trị (loại).
- Trường hợp $m = 0$: Đồ thị (C) cắt trục Ox tại 3 điểm và đồ thị (C) có 2 điểm cực trị nằm phía dưới trục Ox, không có điểm cực trị nào nằm phía trên trục Ox nên số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \left|x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + m\right|$ là $3 + 2 = 5$ (nhận).
- Trường hợp $-5 \leq m < 0$, m nguyên: Đồ thị (C) cắt trục Ox tại 2 điểm và đồ thị (C) có 3 điểm cực trị nằm phía dưới trục Ox, không có điểm cực trị nào nằm phía trên trục Ox nên số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \left|x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + m\right|$ là $2 + 3 = 5$ (nhận).

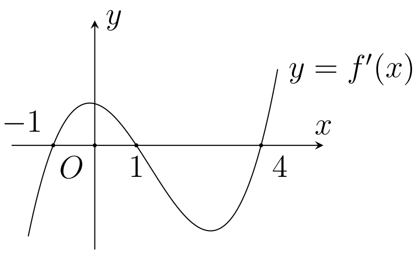
Do đó $m \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0\}$.

Vậy có 6 giá trị của m thỏa đề.

Chọn đáp án B □

Câu 50.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y = f(x^2 + x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?



A 3. **B** 2. **C** 1. **D** 0.

Lời giải.

Ta có

- $y = f(x^2 + x)$.
- $y' = (x^2 + x)'f'(x^2 + x) = (2x + 1)f'(x^2 + x)$.

- $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \\ x^2 + x = -1 \quad \text{(vô nghiệm)} \\ x^2 + x = 1 \\ x^2 + x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow y' = 0 \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \\ x^2 + x - 1 = 0 \\ x^2 + x - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ x = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}. \end{array}\right.$

Nhận xét: Phương trình $y' = 0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt, ta có thể ký hiệu theo thứ tự tăng dần là x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Khi đó bảng biến thiên của hàm số $y = f(x^2 + x)$ như sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		x_4		x_5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	CT	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	CT	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	CT	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $y = f(x^2 + x)$ có 2 điểm cực đại.

Chọn đáp án B □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. A	3. D	4. B	5. A	6. A	7. D	8. D	9. A	10. B
11. D	12. A	13. C	14. C	15. B	16. A	17. C	18. A	19. B	20. C
21. C	22. A	23. B	24. C	25. B	26. B	27. D	28. D	29. C	30. A
31. C	32. C	33. D	34. A	35. A	36. D	37. A	38. D	39. B	40. C
41. A	42. A	43. C	44. A	45. B	46. C	47. D	48. D	49. B	50. B

106 ĐỀ THI THỬ, TRƯỜNG THPT QUỲNH LƯU 2, NGHỆ AN, LẦN 1, 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Hàm số $y = x^2 - 2x + 3$ đạt cực tiểu tại

A. $x = -1$. B. $x = 1$. C. $x = 2$. D. $x = -2$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 2x - 2$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Mà $y'' = 2 > 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(1; 2; 3)$ nhận véc-tơ $\vec{n} = (1; -1; 2)$ làm véc-tơ pháp tuyến là

A. $x + y + 2z - 5 = 0$. B. $x - y + 2z - 9 = 0$.

C. $x - y + 2z = 0$. D. $x - y + 2z - 5 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có phương trình là: $1(x - 1) - 1(y - 2) + 2(z - 3) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z - 5 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A có $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a^3$. B. $V = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a^3$. C. $V = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a^3$. D. $V = a^3\sqrt{3}$.

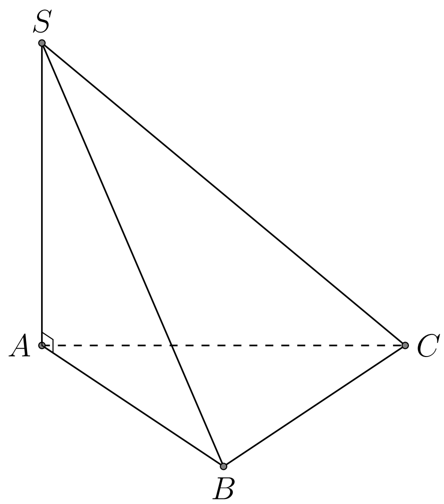
Lời giải.

$\triangle ABC$ vuông cân tại A, cạnh $AB = a$ nên

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Do đó

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$



Chọn đáp án A □

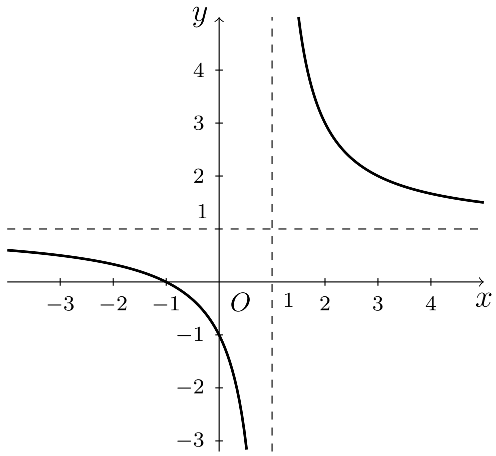
Câu 4. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A $y = \dfrac{-x}{1-x}$.

B $y = \dfrac{2x+1}{2x-2}$.

C $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

D $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$ nên loại hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $(0; -1)$, thay vào các hàm số còn lại ta thấy chỉ có đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ đi qua điểm đó.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Môđun của số phức $z_1 + z_2$ bằng

A $\sqrt{5}$. **B** 1. **C** 5. **D** $\sqrt{13}$.

Lời giải.

Ta có $z_1 + z_2 = (1 + i) + (2 - 3i) = 3 - 2i \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Với các chữ số $2, 3, 4, 5, 6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau trong đó hai chữ số $2, 3$ không đứng cạnh nhau?

A 120. **B** 96. **C** 48. **D** 72.

Lời giải.

Lập số có 5 chữ số khác nhau từ tập $\{2; 3; 4; 5; 6\}$ có $5!$ số.

Ta lập số có 5 chữ số khác nhau sao cho 2 và 3 đứng cạnh nhau.

- Chọn 2 vị trí cạnh nhau để xếp hai số 2 và 3 vào có $4 \cdot 2!$ cách.
- Xếp 3 chữ số còn lại vào 3 vị trí còn trống có $3!$ cách.

$\Rightarrow$ số các số có 5 chữ số khác nhau mà 2 và 3 đứng cạnh nhau là $4 \cdot 2! \cdot 3!$.

Vậy số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $5! - 4 \cdot 2! \cdot 3! = 72$ số.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{5}}(3x - 5) > \log_{\frac{1}{5}}(x + 1)$ là

A $S = (2; +\infty)$. **B** $S = \left(\dfrac{5}{3}; 3\right)$. **C** $S = (-\infty; 3)$. **D** $S = \left(\dfrac{3}{5}; 3\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $3x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{5}{3}$. Khi đó

$$\log_{\frac{1}{5}}(3x - 5) > \log_{\frac{1}{5}}(x + 1) \Leftrightarrow 3x - 5 < x + 1 \Leftrightarrow x < 3.$$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(\frac{5}{3};3\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Công thức tính thể tích khối trụ tròn xoay có bán kính đáy r và chiều cao h là

A. $V=2\pi rh$. B. $V=\pi rh$. C. $V=\pi r^2h$. D. $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$.

Lời giải.

Công thức tính thể tích khối trụ $V=S_{\text{đáy}}\cdot h=\pi r^2h$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Cho hình phẳng S giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=0$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo bởi S khi quay quanh trục Ox. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $V=\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)\,\mathrm{d}x$. B. $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)\,\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. D. $V=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Cho $y=0$ suy ra $x=\pm1$. Theo công thức tính thể tích khối tròn xoay bằng tích phân ta có

$$V=\pi\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án B □

Câu 10. Nghiệm thực của phương trình $2^{x-3}=8$ là

A. $x=0$. B. $x=-6$. C. $x=3$. D. $x=6$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với $2^{x-3}=2^3\Leftrightarrow x-3=3\Leftrightarrow x=6$.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Biết $\int\limits_{1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{3x+1}=a\ln 7+b\ln 2\,(a,b\in\mathbb{Q})$. Khi đó tổng $a+b$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. B. 1. C. $-\frac{1}{3}$. D. -1.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\int\frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$.

Ta có $\int\limits_{1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{3x+1}=\frac{1}{3}\ln|3x+1|\Big|_1^2=\frac{1}{3}\ln 7-\frac{2}{3}\ln 2$. Do đó $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{2}{3}\Rightarrow a+b=-\frac{1}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-x$ và $y=x$ bằng

A. $\frac{4}{3}$. B. $-\frac{4}{3}$. C. $\frac{1}{4}$. D. 4.

Lời giải.

Phương trình $x^2 - x = x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng là $S = \int\limits_0^2 |x^2 - 2x|\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left(2x - x^2\right)\,\mathrm{d}x = \left(x^2 - \dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ đồng biến trên khoảng?

(A) $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.
(B) $(-\infty; -1)$ và $(1; 3)$.
(C) $(-1; 3)$ và $(3; +\infty)$.
D $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9$, $y' > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 3. \end{array}\right.$

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$.

A Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2.
(B) Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng $-2i$.
(C) Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $2i$.
(D) Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng -2.

Lời giải.

Ta có $z = 3 - 2i \Rightarrow \overline{z} = 3 + 2i$ nên số phức $\overline{z}$ có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng xác định của nó?

(A) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-x}$.
(B) $y = 3^x$.
C $y = \left(\dfrac{\mathrm{e}}{2}\right)^{-x}$.
(D) $y = \left(\dfrac{5}{\mathrm{e}}\right)^{x}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \left(\dfrac{\mathrm{e}}{2}\right)^{-x}$ có $y' = -\left(\dfrac{\mathrm{e}}{2}\right)^{-x} \ln\dfrac{\mathrm{e}}{2} < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $y = \left(\dfrac{\mathrm{e}}{2}\right)^{-x}$ nghịch biến trên khoảng xác định.

Chọn đáp án (C) □

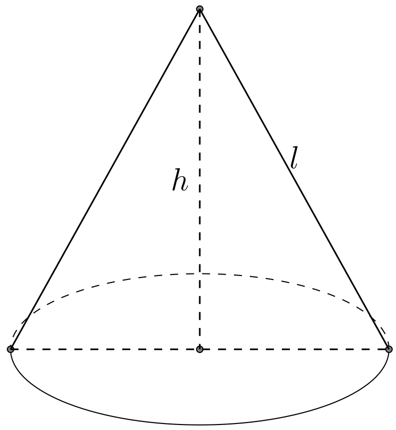
Câu 16. Khối nón tròn xoay có chiều cao bằng 8 cm và độ dài đường sinh bằng 10 cm có thể tích bằng

(A) 128π cm^3.
B 96π cm^3.
(C) 124π cm^3.
(D) 140π cm^3.

Lời giải.

Bán kính đáy $r = \sqrt{l^2 - h^2} = 6$ cm.

Thể tích khối nón $V = \dfrac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi \text{cm}^3$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x^2 - 3x - 4)^{-3}$ là

(A) $\mathscr{D} = [-1; 4]$. (B) $\mathscr{D} = (-1; 4)$.

C $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 4\}$. (D) $\mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm lũy thừa với số mũ nguyên âm nên cơ số khác 0.

Do đó $x^2 - 3x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 4 \end{cases}$. Suy ra $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 4\}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với đáy. Hỏi khẳng định nào sau đây **sai**?

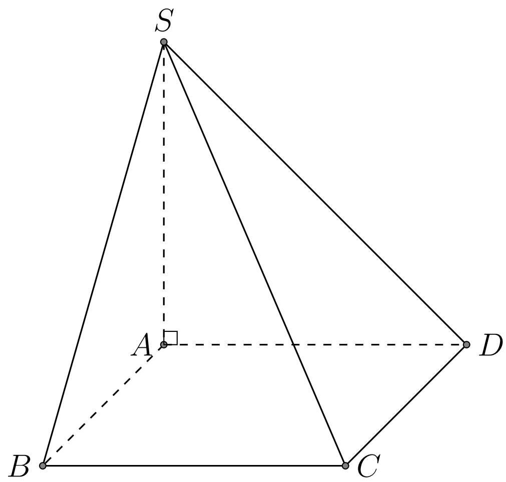
A $SC \perp BC$. (B) $SA \perp BC$. (C) $SB \perp BC$. (D) $SA \perp AB$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \; (SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

$\Rightarrow BC \perp SB$ nên $\triangle SBC$ vuông tại B.

Do đó SC không thể vuông góc với BC.



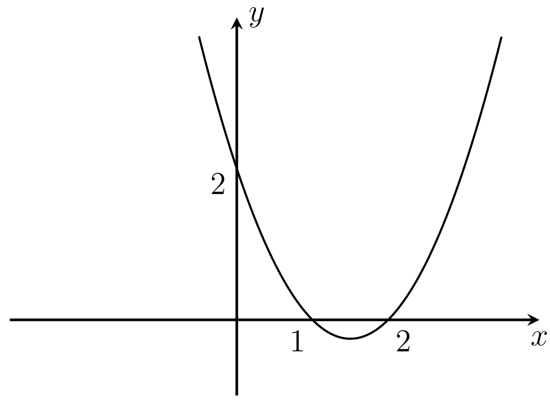
Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d?

(A) $\vec{u}_1 = (1; 4; 3)$. (B) $\vec{u}_2 = (1; 0; 2)$. (C) $\vec{u}_3 = (1; 4; -2)$. **D** $\vec{u}_4 = (1; 0; -2)$.

Lời giải.
Dễ thấy một véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}_4 = (1; 0; -2)$.
Chọn đáp án D □

Câu 20.
Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số $y = f(x + x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?
A 4. B 5. C 1. D 2.



Lời giải.
Ta có $y' = (x + x^2)' f'(x + x^2) = (2x + 1) f'(x + x^2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 1 = 0 \\ x + x^2 = 1 \\ x + x^2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x = 1 \vee x = -2. \end{array}\right.$$

Suy ra hàm số $y = f(x + x^2)$ có 5 điểm cực trị.
Chọn đáp án B □

Câu 21. Bạn Nam là sinh viên của một trường Đại học, muốn vay tiền ngân hàng với lãi suất ưu đãi trang trãi học phí học tập hàng năm. Đầu mỗi năm học, bạn ấy vay ngân hàng với số tiền 10 triệu đồng với lãi suất 4% một năm. Tính số tiền mà Nam nợ ngân hàng sau 4 năm học, biết rằng trong 4 năm đó, ngân hàng không thay đổi lãi suất (kết quả làm tròn đến nghìn đồng).
A 41600000 đồng. B 44163000 đồng. C 42465000 đồng. D 46794000 đồng.

Lời giải.
Đặt $a = 10$ (triệu đồng), lãi suất $r = 4\%$.
Khi đó số tiền Nam nợ sau n năm được xác định bởi công thức

$$T = a(1 + r) + a(1 + r)^2 + ... + a(1 + r)^n = a \cdot \frac{(1 + r)\left[(1 + r)^n - 1\right]}{r + 1 - 1} = a \cdot \frac{(1 + r)\left[(1 + r)^n - 1\right]}{r}.$$

Áp dụng với $n = 4$ ta có số tiền Nam nợ sau 4 năm là

$$T = 10 \cdot \frac{1,04\left(1,04^4 - 1\right)}{0,04} = 44,163 \text{ (triệu đồng)} = 44163000 \text{ (đồng)}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 22. Trong các đa diện sau đây, đa diện nào **không** luôn luôn nội tiếp được trong một mặt cầu?
A Hình chóp tam giác (tứ diện). B Hình chóp tứ giác.

Ⓒ Hình chóp đều ngũ giác. Ⓓ Hình hộp chữ nhật.

Lời giải.

Hình chóp tứ giác chỉ nội tiếp được trong một mặt cầu khi đáy là một tứ giác nội tiếp.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$ có bao nhiêu tiếp tuyến song song với trục hoành?

Ⓐ 3. Ⓑ 0. **C** 1. Ⓓ 2.

Lời giải.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$ song song với trục hoành khi và chỉ khi

$$y' = -3x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{4}{3}. \end{array}\right.$$

Với $x = 0$, tiếp tuyến của đồ thị hàm số trùng với Ox. Do đó, chỉ có 1 tiếp tuyến.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2}{x^2 - x}$. Đồ thị hàm số trên có bao nhiêu đường tiệm cận?

A 2. Ⓑ 1. Ⓒ 3. Ⓓ 0.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x \to 0} y = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x - 1} = 0$ nên $x = 0$ **không** là tiệm cận đứng.
- $\lim\limits_{x \to 1^+} y = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{x - 1} = +\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

Ⓐ 2. **B** 1. Ⓒ 5. Ⓓ 3.

Lời giải.

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1; 2]$.

Ta có $y' = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \notin [-1; 2]. \end{array}\right.$$

Và $y(-1) = 2$; $y(0) = 5$; $y\left(\sqrt{2}\right) = 1$; $y(2) = 5 \Rightarrow \min\limits_{[-1;2]} y = 1$ khi $x = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2z + 2 = 0$. Tìm tâm I và bán kính R của mặt cầu.

Ⓐ $I(1; -2; 1)$ và $R = 2$. Ⓑ $I(-1; 2; -1)$ và $R = 4$.

Ⓒ $I(1; -2; 1)$ và $R = 4$. **D** $I(-1; 2; -1)$ và $R = 2$.

Lời giải.

Mặt cầu có tâm $I(-1;2;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2-2}=2$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ bằng

A $1-\mathrm{e}^2$. B $\dfrac{1}{2}(1-\mathrm{e}^2)$. C $\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1)$. D e^2-1.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\left.\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right|_0^1=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2-1\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

B Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

C Hàm số có đúng một cực trị.

D Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, dễ dàng nhận thấy, hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y+3z=1$. Gọi A,B,C lần lượt là giao điểm của (P) với các trục tọa độ Ox,Oy,Oz. Khi đó thể tích khối chóp $O.ABC$ bằng

A $\dfrac{1}{18}$. B $\dfrac{1}{12}$. C $\dfrac{1}{36}$. D 1.

Lời giải.

Tọa độ các giao điểm của (P) với các trục tọa độ lần lượt là $A(1;0;0)$, $B\left(0;\frac{1}{2};0\right)$, $C\left(0;0;\frac{1}{3}\right)$.

Do đó, thể tích khối chóp $O.ABC$ là

$$V=\frac{1}{6}OA\cdot OB\cdot OC=\frac{1}{36}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 30. Nguyên hàm của hàm số $\int (\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $-\sin x + \cos x + C$. Ⓑ $\sin x + \cos x + C$.

Ⓒ $-\sin x - \cos x + C$. **D** $\sin x - \cos x + C$.

Lời giải.

Kết hợp các công thức nguyên hàm cơ bản, ta được

$$\int (\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x = \sin x - \cos x + C.$$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 31. Cho hai số thực dương a và b, với $a \neq 1$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định **đúng**?

Ⓐ $\log_{a^2}(ab) = \dfrac{1}{2}\log_a b$. Ⓑ $\log_{a^2}(ab) = 2 + 2\log_a b$.

C $\log_{a^2}(ab) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\log_a b$. Ⓓ $\log_{a^2}(ab) = \dfrac{1}{4}\log_a b$.

Lời giải.

Ta biến đổi như sau

$$\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2}\log_a(ab) = \frac{1}{2}(1 + \log_a b) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b.$$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x - 2y + z - 3 = 0$ và điểm $A(1;2;0)$. Viết phương trình đường thẳng qua A và vuông góc với (P).

A $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z}{1}$. Ⓑ $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{1}$.

Ⓒ $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z}{2}$. Ⓓ $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{1}$.

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (1;-2;1)$. Đường thẳng cần tìm vuông góc với (P) nên nhận $\vec{n}$ làm véc-tơ pháp tuyến, do đó có phương trình

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{1}.$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 33. Trong khai triển nhị thức $\left(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3}\right)^{200}$ có bao nhiêu số hạng hữu tỷ?

Ⓐ 50. **B** 51. Ⓒ 52. Ⓓ 0.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển là

$$T_{k+1} = \mathrm{C}_{200}^{k}\left(\sqrt{2}\right)^{200-k}\left(\sqrt[4]{3}\right)^{k} = \mathrm{C}_{200}^{k} \cdot 2^{100} \cdot 4^{-\frac{k}{4}} \cdot 3^{\frac{k}{4}} = \mathrm{C}_{200}^{k} \cdot 2^{100} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k}{4}}.$$

Số hạng trên là hữu tỷ khi và chỉ khi $k = 4t$ với $t \in \mathbb{N}$. Do $0 \leq k \leq 200$ nên $0 \leq t \leq 50$. Có tất cả 51 giá trị của t, tức cũng có 51 số hạng hữu tỷ của khai triển.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 34. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ bằng

A $-\dfrac{1}{2}$. B $\dfrac{1}{2}$. C 0. D $+\infty$.

Lời giải.

Nhận thấy giới hạn trên là dạng vô định, ta xử lí như sau

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1-x}+1}=-\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 35. Một bình chứa 16 viên bi, với 7 viên bi trắng, 6 viên bi đen, 3 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất lấy được 1 viên bi trắng, 1 viên bi đen, 1 viên bi đỏ.

A $\dfrac{1}{10}$. B $\dfrac{1}{16}$. C $\dfrac{9}{40}$. D $\dfrac{1}{35}$.

Lời giải.

Chọn 3 viên bất kì có C_{16}^3 cách $\Rightarrow |\Omega|=\mathrm{C}_{16}^3$.

Gọi A là biến cố: "Lấy được 1 viên bi trắng, 1 viên bi đen, 1 viên bi đỏ "$\Rightarrow |A|=\mathrm{C}_7^1\cdot\mathrm{C}_6^1\cdot\mathrm{C}_3^1$.

Suy ra $P(A)=\dfrac{\mathrm{C}_7^1\cdot\mathrm{C}_6^1\cdot\mathrm{C}_3^1}{\mathrm{C}_{16}^3}=\dfrac{9}{40}$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Gọi A và B là hai điểm trong mặt phẳng biểu diễn hai nghiệm phức phân biệt của phương trình $z^2+6z+12=0$. Tính độ dài của đoạn thẳng AB.

A $AB=2\sqrt{3}$. B $AB=\sqrt{3}$. C $AB=3$. D $AB=12$.

Lời giải.

Ta có $z^2+6z+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=-3-\sqrt{3}i\\ z_2=-3+\sqrt{3}i\end{array}\right.$. Do đó, $A\left(-3;-\sqrt{3}\right)$ và $B\left(-3;\sqrt{3}\right)$.

Ta tính được $AB=2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$. Số phức z có môđun nhỏ nhất là

A $z=-2+2i$. B $z=2+2i$. C $z=2-2i$. D $z=-2-2i$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó

$$\begin{aligned}|z-2-4i|=|z-2i| &\Leftrightarrow |x-2+(y-4)i|=|x+(y-2)i|\\ &\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-4)^2=x^2+(y-2)^2\\ &\Leftrightarrow x+y-4=0\Leftrightarrow x=4-y.\end{aligned}$$

Ta có $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(y-4)^2+y^2}=\sqrt{2y^2-8y+16}=\sqrt{2(y-2)^2+8}\geq 2\sqrt{2}$.

$|z|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $y=2\Rightarrow x=2$. Do đó $z=2+2i$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho một vật thể (T), gọi B là phần của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=\frac{\pi}{2}$. Cắt vật thể B bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x (với $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$) thiết diện thu được là một nửa hình tròn có bán kính bằng $\sin x$. Tính thể tích V của vật thể B.

A $V=\frac{\pi^2}{8}$. **B** $V=\frac{\pi}{8}$. **C** $V=\frac{\pi}{4}$. **D** $V=\frac{\pi^2}{4}$.

Lời giải.

Tại điểm có hoành độ x, diện tích thiết diện là $S=\frac{1}{2}\pi\sin^2 x$.

Thể tích vật thể B theo công thức tích phân là

$$V=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} S\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\pi\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(x)+f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $\frac{5}{4}$. **B** $\frac{4}{5}$. **C** $-\frac{5}{4}$. **D** $-\frac{4}{5}$.

Lời giải.

Từ giả thiết

$$f^3(x)+f(x)=x.$$

Cho $x=0$, suy ra

$$f^3(0)+f(0)=0\Rightarrow f(0)=0.$$

Cho $x=2$, suy ra

$$f^3(2)+f(2)=2\Rightarrow f(2)=1.$$

Ta có

$$\int\limits_0^2\left[\left(f^3(x)+f(x)\right)f'(x)\right]\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 xf'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{f^4(x)}{4}+\frac{f^3(x)}{3}\right)\Bigg|_0^2=xf(x)|_0^2-\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

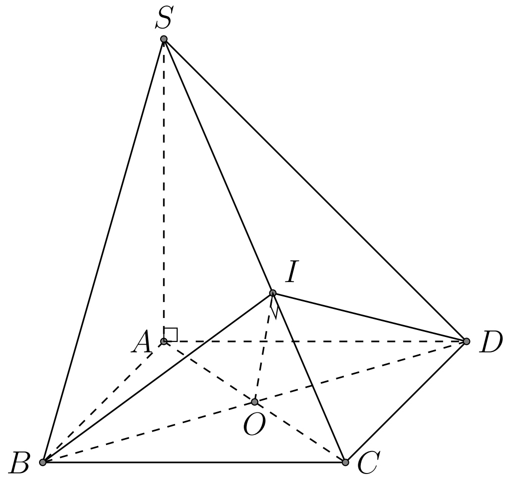
Từ đây, dễ dàng có được $I=\frac{5}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy. Tính độ dài cạnh SA để góc tạo bởi (SBC) và (SCD) bằng $60°$.

A $a\sqrt{2}$. **B** a. **C** $a\sqrt{3}$. **D** $2a$.

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Trong (SAC), kẻ $OI \perp SC\,(I \in SC)$ (1).

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA\,(SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Do đó $BD \perp SC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $SC \perp (IBD)$. Từ đó suy ra

$$[(SBC),(SCD)] = (IB, ID).$$

Để góc tạo bởi (SBC) và (SCD) là 60° thì $\widehat{BID} = 60^\circ$ hoặc $\widehat{BID} = 120^\circ$.

TH1. $\widehat{BID} = 60^\circ$. Khi đó $\widehat{BIO} = 30^\circ$.

Xét tam giác $\triangle BOI$ vuông tại O. Ta có $BI = \dfrac{BO}{\sin 30^\circ} = a\sqrt{2}$.

$\triangle BIC$ vuông tại I có cạnh huyền $BC = a < BI = a\sqrt{2}$ (Vô lí).

TH2. $\widehat{BIC} = 120^\circ$. Suy ra $\widehat{BIO} = 60^\circ$.

Xét $\triangle BIO$ vuông tại O. Ta có $IO = BO\cot 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Ta có $\triangle SAC \backsim \triangle OIC$ (g-g), suy ra

$$\frac{SA}{OI} = \frac{SC}{OC} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{OC}. \qquad (3)$$

.

Với $OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $AC = a\sqrt{2}$. Đặt $SA = x > 0$ thì (3) trở thành

$$\frac{x}{\frac{a\sqrt{6}}{6}} = \frac{\sqrt{x^2 + 2a^2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{6}x = \sqrt{2}\sqrt{x^2 + 2a^2} \Leftrightarrow x = a.$$

Chọn đáp án B □

Câu 41. Cho hàm số $y = mx^3 + x^2 + (1-4m)x - 6\,(C_m)$. Giao điểm của đồ thị (C_m) với các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt là A, B. Gọi C là điểm thuộc (C_m) sao cho diện tích tam giác ABC không đổi với mọi giá trị $m \in \mathbb{R}$. Khi đó diện tích tam giác ABC bằng

A 10. **B** 8. **C** 9. **D** 7.

Lời giải.

(C_m) cắt trục Oy tại điểm $B(0;-6)$.

Ta có

$$y = mx^3 + x^2 + (1-4m)x - 6 = (x-2)\left[mx^2 + (2m+1)x - 3\right].$$

Do đó (C_m) cắt trục Ox tại điểm $A(2;0)$.

Phương trình $AB: 3x - y - 6 = 0$.

Gọi $C\left(x_0; mx_0^3 + x_0^2 + (1-4m)x_0 - 6\right) \in (C_m)$.

Do AB không đổi nên để diện tích tam giác ABC không đổi với $\forall m \in \mathbb{R}$ thì $\mathrm{d}(C, AB)$ không đổi $\forall m \in R$.

Ta có
$$\mathrm{d}(C, AB) = \frac{|3x_0 - mx_0^3 - x_0^2 - (1-4m)x_0 + 6|}{\sqrt{10}}.$$
$\mathrm{d}(C, AB)$ không đổi khi và chỉ khi $3x_0 - mx_0^3 - x_0^2 - (1-4m)x_0 + 6 = m(-x_0^3 + 4x_0) - x_0^2 + 2x_0 + 6$ không đổi $\forall m \in \mathbb{R}$.

Suy ra $-x_0^3 + 4x_0 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \text{ (loại)} \\ x_0 = 2 \text{ (loại)} \\ x_0 = -2 \text{ (nhận)}. \end{array}\right.$

Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -4 \Rightarrow C(-2; 4)$.

Khi đó $\mathrm{d}(C, AB) = \dfrac{8}{\sqrt{10}}$, $AB = \sqrt{40}$.
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{d}(C, AB) \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{\sqrt{10}} \cdot \sqrt{40} = 8.$$

Chọn đáp án B □

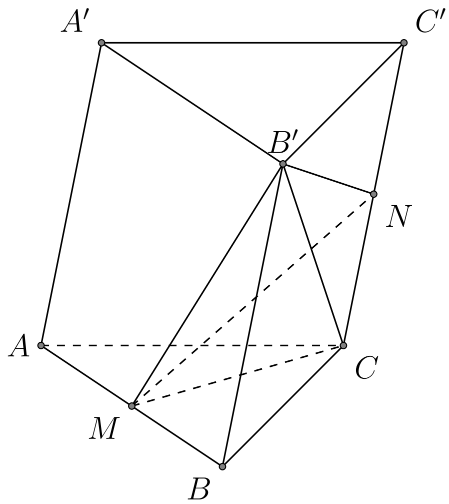
Câu 42. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích là $V = 6$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CC'. Thể tích khối tứ diện $B'MCN$ là

A. 3. B. $\dfrac{2}{3}$. C. 2. D. $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $V_{AB'CC'} = \dfrac{1}{3}V = 2$.

Do $S_{\triangle B'CN} = \dfrac{1}{2}S_{\triangle B'CC'}$ nên
$$V_{AB'CN} = \frac{1}{2}V_{AB'CC'} = 1.$$
Mặt khác, $\mathrm{d}\left[A, (B'CN)\right] = 2\mathrm{d}\left[M, (B'CN)\right]$ nên
$$V_{MB'CN} = \frac{1}{2}V_{AB'CN} = \frac{1}{2}.$$



Chọn đáp án D □

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn đường thẳng
$$d_1 \colon \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}, d_2 \colon \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{-4}, d_3 \colon \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}, d_4 \colon \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$
Gọi Δ là đường thẳng cắt cả bốn đường thẳng đã cho. Véc-tơ nào sau đây là véc-tơ chỉ phương của Δ?

A. $\vec{u}_3 = (2; 0; -1)$. B. $\vec{u}_2 = (2; 1; -1)$. C. $\vec{u}_1 = (2; 1; 1)$. D. $\vec{u}_4 = (1; 2; -2)$.

Lời giải.

Nhận thấy $d_1 \parallel d_2$ nên ta giải như sau:

Lấy $A(1; 2; 0) \in d_1$ và $B(2; 2; 0) \in d_2$ suy ra $\overrightarrow{AB} = (1; 0; 0)$.

Véc-tơ chỉ phương của d_1 là $\overrightarrow{u_1} = (1; 2; -2)$.
Gọi (P) là mặt phẳng chứa d_1 và d_2. Véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_1}\right] = (0; 2; 2)$.
Phương trình mặt phẳng (P) là

$$(P)\colon 1(y-1) + 1(z-2) = 0 \Leftrightarrow y + z - 3 = 0.$$

Phương trình tham số của d_3 là $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R}) \Rightarrow M(2t; t; 1+t) \in d_3$.

Phương trình tham số của d_4 là $\begin{cases} x = 2 + 2t' \\ y = 2t' \\ z = 1 - t' \end{cases}$ $(t' \in \mathbb{R}) \Rightarrow N(2+2t'; 2t'; 1-t') \in d_4$.

Thay vào phương trình của (P) ta được tọa độ giao điểm của d_3 và d_4 với (P) lần lượt là $M\left(1; \dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$, $N(4; 2; 0)$. Suy ra véc-tơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{u}_\Delta = \overrightarrow{MN} = \left(3; \dfrac{3}{2}; -\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{2}(2; 1; -1)$.
Chọn đáp án B □

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x - y + z + 1 = 0$, $A(1; 1; 1)$, $B(0; 1; 2)$, $C(-2; 0; 1)$ và điểm $M(a, b, c) \in (P)$ sao cho $S = 2MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T = 3a + 2b + c$ bằng

A $\dfrac{7}{4}$. B $\dfrac{25}{2}$. C $-\dfrac{25}{4}$. D $-\dfrac{25}{2}$.

Lời giải.
Gọi I là trung điểm của BC. Ta có $I\left(-1; \dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$ và $BC^2 = 6$.
Xét tam giác MBC, MI là đường trung tuyến, ta có:

$$MI^2 = \frac{MB^2 + MC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \Leftrightarrow MB^2 + MC^2 = 2MI^2 + \frac{BC^2}{2} = 2MI^2 + 3.$$

Khi đó, $S = 2MA^2 + 2MI^2 + 3 = 2(MA^2 + MI^2) + 3$.
Gọi J là trung điểm của AI. Ta có $J\left(0; \dfrac{3}{4}; \dfrac{5}{4}\right)$ và $AI^2 = \dfrac{9}{2}$.
Xét tam giác MAI, MJ là đường trung tuyến, ta có:

$$MJ^2 = \frac{MA^2 + MI^2}{2} - \frac{AI^2}{4} \Leftrightarrow MA^2 + MI^2 = 2MJ^2 + \frac{AI^2}{2} = 2MJ^2 + \frac{9}{4}.$$

Suy ra $S = 2\left(2MJ^2 + \dfrac{9}{4}\right) + 3 = 4MJ^2 + \dfrac{15}{2}$. S nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của J trên mặt phẳng (P).

Đường thẳng qua J và vuông góc với (P) có phương trình $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{3}{4} - t \\ z = \dfrac{5}{4} + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R}) \Rightarrow M\left(t; \dfrac{3}{4} - t; \dfrac{5}{4} + t\right)$.

Thay vào (P) ta được $t = -\dfrac{1}{2}$.
Suy ra $M\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{4}; \dfrac{3}{4}\right)$, từ đó $T = \dfrac{7}{4}$.
Chọn đáp án A □

Câu 45. Phương trình $(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; 2018\pi]$?

A 3029. **B** 3028. **C** 3026. **D** 3027.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} 2\sin x - 1 = 0 \\ \sin x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. .$$

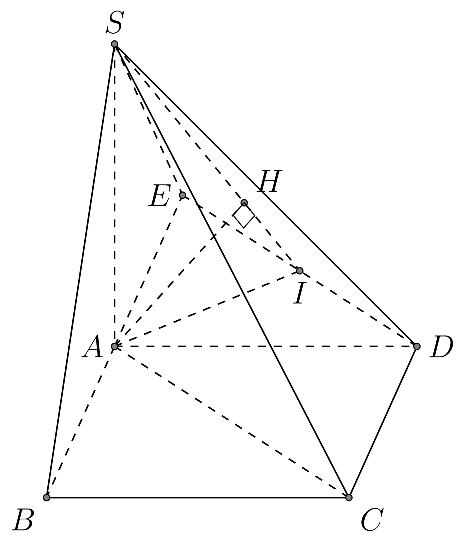
Dễ thấy trên mỗi chu kỳ sẽ có 3 nghiệm. Vậy trên đoạn $[0; 2018\pi]$ có tất cả $\dfrac{2018}{2} \times 3 = 3027$ nghiệm.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi E là điểm đối xứng của B qua A. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SE.

A a. **B** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **D** $\dfrac{2a}{5}$.

Lời giải.



Tứ giác $ACDE$ là hình bình hành nên $AC \parallel ED$, suy ra $AC \parallel (SDE)$. Do đó

$$\mathrm{d}(AC, SE) = \mathrm{d}\left[AC, (SDE)\right] = \mathrm{d}\left[A, (SDE)\right].$$

Gọi I là trung điểm của DE, do $\triangle ADE$ vuông cân tại A nên $AI \perp DE$ và $AI = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong mặt phẳng (SAI), kẻ $AH \perp SI$, dễ dàng chứng minh được $AH \perp (SDE)$. Do đó

$$\mathrm{d}\left[A, (SDE)\right] = AH.$$

Xét $\triangle SAI$ vuông tại A, đường cao AH, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy $\mathrm{d}(AC, SE) = \mathrm{d}\left[A, (SDE)\right] = AH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) + 2xf(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$ và $f(0) = 1$. Tính $f(1)$.

A e. **B** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **C** $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$. **D** $-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Từ giả thiết $f'(x)+2xf(x)=2x\mathrm{e}^{-x^2}$, ta suy ra

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{x^2}f'(x)+2x\mathrm{e}^{x^2}f(x)=2x &\Leftrightarrow \left[\mathrm{e}^{x^2}f(x)\right]'=2x\\
&\Leftrightarrow \int\limits_0^1 \left[\mathrm{e}^{x^2}f(x)\right]'\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 2x\,\mathrm{d}x\\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2}f(x)\Big|_0^1 = x^2\Big|_0^1\\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}f(1)-f(0)=1\Rightarrow f(1)=\frac{2}{\mathrm{e}}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $|f(x-2018)+2|=m$ có bốn nghiệm thực phân biệt.

A. $-3<m<1$.

B. $0<m<1$.

C. Không có giá trị m.

D. $1<m<3$.

Lời giải.

Đặt $g(x)=f(x-2018)+2$. Ta có

$$g'(x)=f'(x-2018)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2018=0\\ x-2018=2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2018\\ x=2020.\end{array}\right.$$

$$g(2018)=f(0)+2=3;\ g(2020)=f(2)+2=-1.$$

Bảng biến thiên của $g(x)$ như sau

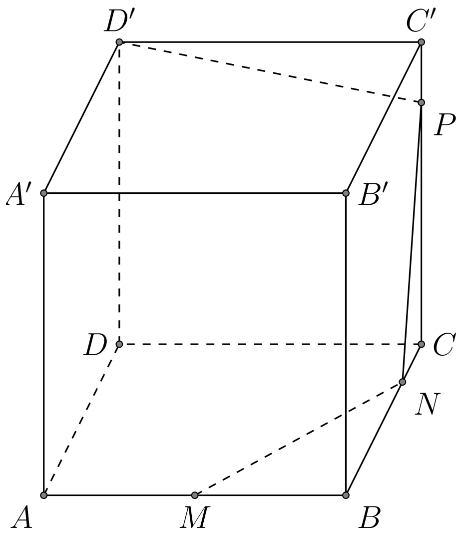
x	$-\infty$		2018		2020		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Đặt $h(x) = |g(x)|$.
Đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $x_1 < 2018 < x_2 < 2020 < x_3$.
Do đó, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		2018		x_1		2020		x_3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$h(x_1)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$h(x_2)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$h(x_3)$	$\nearrow$	$+\infty$

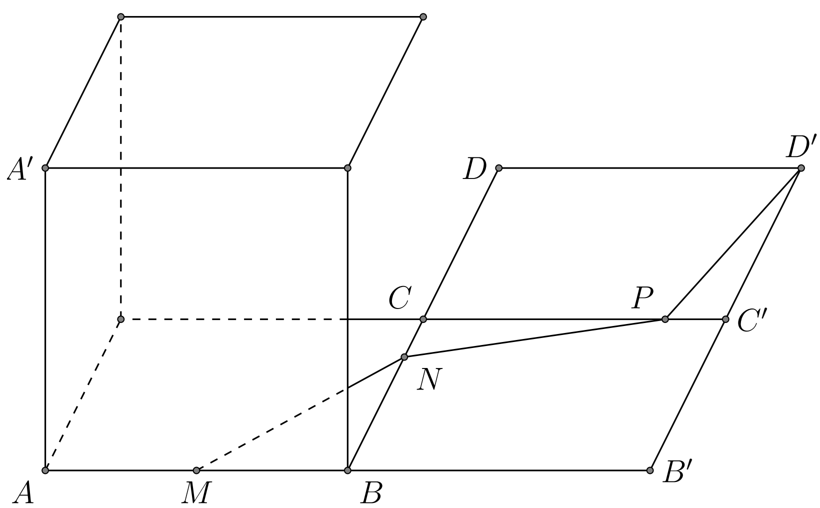
Dựa vào bảng biên thiên, dễ thấy phương trình có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $1 < m < 3$.
Chọn đáp án D □

Câu 49.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1, M là trung điểm cạnh AB. Một con kiến đi từ điểm M thẳng tới điểm N thuộc cạnh BC, từ điểm N đi thẳng tới điểm P thuộc cạnh CC', từ điểm P đi thẳng tới điểm D' (*điểm N, P thay đổi tùy theo hướng đi của con kiến*). Quãng đường ngắn nhất để con kiến đi từ M đến D' là



A $\dfrac{5}{2}$. **B** $\sqrt{2}+1$. **C** $\dfrac{7}{2}$. **D** $\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$.

Lời giải.



Dựa vào hình vẽ, ta có thể thấy đường đi của con kiến là ngắn nhất khi M, N, P, D' thẳng hàng.

Do đó, khoảng cách ngắn nhất là

$$MD' = \sqrt{MB'^2 + B'D'^2} = \sqrt{(1{,}5)^2 + 2^2} = \frac{5}{2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Cho phương trình $\log_{\sqrt{2}}(mx - 6x^3) + 2\log_{\frac{1}{2}}(14x^2 + 29x - 2) = 0$. Gọi S là tập các giá trị của tham số m để phương trình trên có 3 nghiệm phân biệt. Số các giá trị nguyên của S là

(A) 20. (B) 30. **(C) 0.** (D) Vô số.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} mx - 6x^3 > 0 \\ 14x^2 + 29x - 2 > 0 \\ mx - 6x^3 = 14x^2 + 29x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx > 6x^3 \\ 14x^2 + 29x - 2 > 0 \\ 6x^3 + 14x^2 9x - 2 = mx \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14x^2 + 29x - 2 > 0 \qquad (*) \\ f(x) = 6x^2 + 14x + 29 - \dfrac{2}{x} = m \end{cases}$$

Ta có $(*) \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \dfrac{-29 - \sqrt{953}}{28}\right) \cup \left(\dfrac{-29 + \sqrt{953}}{28}; +\infty\right)$.

Xét hàm số $f(x) = 6x^2 + 14x + 29 - \dfrac{2}{x}$ trên $\mathscr{D} = \left(-\infty; \dfrac{-29 - \sqrt{953}}{28}\right) \cup \left(\dfrac{-29 + \sqrt{953}}{28}; +\infty\right)$.

$$f'(x) = 12x + 14 + \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 6x^3 + 7x^2 + 1 = 0.$$

Phương trình $6x^3 + 7x^2 + 1 = 0$ có một nghiệm $x = x_0 \notin \mathscr{D}$.

Ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		$\frac{-29-\sqrt{953}}{28}$		$\frac{-29+\sqrt{953}}{28}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$				$+$	
$f(x)$		↗				↗	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f(x) = m$ có tối đa hai nghiệm. Do đó, không tồn tại giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (C) □

——— **HẾT** ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. D	3. A	4. C	5. D	6. D	7. B	8. C	9. B	10. D
11. C	12. A	13. D	14. A	15. C	16. B	17. C	18. A	19. D	20. B
21. B	22. B	23. C	24. A	25. B	26. D	27. C	28. A	29. C	30. D
31. C	32. A	33. B	34. A	35. C	36. A	37. B	38. A	39. A	40. B
41. B	42. D	43. B	44. A	45. D	46. C	47. C	48. D	49. A	50. C

107 ĐỀ THI THỬ, TRƯỜNG THPT QUỲ HỢP 2, NGHỆ AN, 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho số phức z thỏa mãn $\dfrac{\overline{z}+i}{z-1}=2-i$. Tìm số phức $w=1+z+z^2$.

(A) $w=5+2i$. (B) $w=5-2i$. (C) $w=\dfrac{9}{2}+2i$. (D) $w=\dfrac{9}{2}-2i$.

Lời giải.

Điều kiện $z\neq 1$.

Ta có $\dfrac{\overline{z}+i}{z-1}=2-i\Leftrightarrow \overline{z}+i=(2-i)(z-1)$. (1)

Gọi $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow a-bi+i=(2-i)(a+bi-1)\\&\Leftrightarrow a-bi+i=2a+2bi-2-ai-bi^2+i\\&\Leftrightarrow 2-a-b+(a-3b)i=0\\&\Leftrightarrow \begin{cases}2-a-b=0\\a-3b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\b=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i.\end{aligned}$$

Suy ra $w=1+z+z^2=1+\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)+\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)^2=\dfrac{9}{2}+2i$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Trên cạnh BC, ta lấy điểm A_1 sao cho $CA_1=x$. Gọi B_1 là hình chiếu của A_1 lên CA, C_1 là hình chiếu của B_1 lên AB, A_2 là hình chiếu của C_1 lên BC, B_2 là hình chiếu của A_2 lên $CA,\ldots$ và cứ tiếp tục như thế. Hãy tìm giá trị của x theo a sao cho $A_{2018}\equiv A_1$.

(A) $x=\dfrac{a}{3}$. (B) $x=\dfrac{3a}{4}$. (C) $x=\dfrac{a}{2}$. (D) $x=\dfrac{2a}{3}$.

Lời giải.

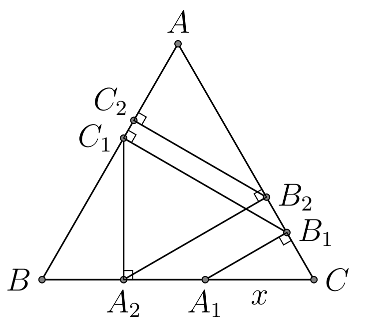
Ta có

$CA_1=x$.

$CA_2=a-\dfrac{1}{2}\cdot\left\{a-\left[\dfrac{1}{2}\left(a-\dfrac{1}{2}x\right)\right]\right\}$.

...

$CA_n=\dfrac{2a}{3}\cdot\left[1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{3n-3}\right]+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{3n-3}\cdot x$.



Khi đó, với $n=2018$, $A_1\equiv A_n\Leftrightarrow\dfrac{2a}{3}\cdot\left[1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{3n-3}\right]=x\cdot\left[1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{3n-3}\right]\Leftrightarrow x=\dfrac{2a}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

Khi đó, đồ thị hàm số $y = g(x) = \dfrac{1}{f^2(x) - 1}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 0.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{1}{f^2(x) - 1}$.

Xét phương trình $f^2(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 1 \\ f(x) = -1. \end{array}\right.$

Từ bảng biến thiên, suy ra mỗi phương trình $f(x) = 1$, $f(x) = -1$ có đúng một nghiệm.

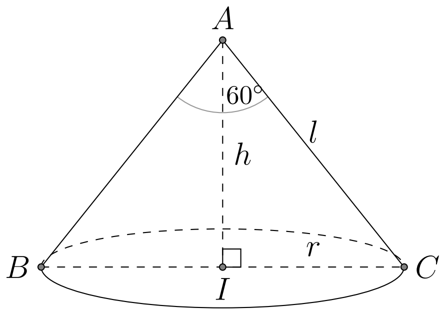
Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 2 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 60°, diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

(A) $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. (B) $V = \pi a^3$. (C) $V = \dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. (D) $V = 3\pi a^3$.

Lời giải.



Xét hình nón như hình vẽ bên.

Diện tích xung quanh $S_{\text{xq}} = \pi r l = 6\pi a^2 \Leftrightarrow rl = 6a^2$. (1)

Xét tam giác AIC vuông tại I nên

$r = IC = AC \sin 30^\circ = l \cdot \dfrac{1}{2} \Rightarrow l = 2r$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2r^2 = 6a^2 \Leftrightarrow r^2 = 3a^2 \Leftrightarrow r = a\sqrt{3}$.

Mặt khác $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3} = 3a$.

Thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3a^2 \cdot 3a = 3\pi a^3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ của tham số m để hàm số $f(x) = (x+1)\ln x + (2-m)x$ đồng biến trên khoảng $(0; \mathrm{e}^2)$.

(A) 2022. (B) 2014. (C) 2023. (D) 2016.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = (x+1)\ln x + (2-m)x$ trên khoảng $(0; \mathrm{e}^2)$.

Ta có $f'(x) = \ln x + \dfrac{x+1}{x} + 2 - m$.

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; \mathrm{e}^2) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; \mathrm{e}^2)$. (1)

Ta có (1) $\Leftrightarrow m \leq \ln x + \dfrac{x+1}{x} + 2, \forall x \in (0; \mathrm{e}^2)$.

Đặt $g(x) = \ln x + \dfrac{x+1}{x} + 2 = \ln x + \dfrac{1}{x} + 3$ với $x \in (0; \mathrm{e}^2)$

$\Rightarrow g'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2}$.

Phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in (0; \mathrm{e}^2)$. Bảng biên thiên hàm số $g(x)$ như hình dưới

x	0		1		e^2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$5 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$

Từ bảng biến thiên suy ra $m \leq g(x), \forall x \in (0; \mathrm{e}^2) \Leftrightarrow m \leq 4$.

Vì m là số nguyên thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ nên $m \in \{-2018; -2017; \ldots; 3; 4\}$

$\Rightarrow$ có 2023 giá trị m thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Một vật chuyển động theo quy luật $S = -\dfrac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và S (m) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A 243 (m/s). B 144 (m/s). C 27 (m/s). **D** 36 (m/s).

Lời giải.

Vận tốc chuyển động của vật là $v(t) = S'(t) = -t^2 + 12t$. Xét $v(t) = -t^2 + 12t$ với $t \in [0; 9]$.

Ta có $v(t) = -(t-6)^2 + 36 \leq 36$.

Suy ra vận tốc lớn nhất của vật trong khoảng 9 giây đầu tiên bằng 36 (m/s) khi $t = 6$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b\,(a < b)$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức nào sau đây?

A $V = 2\pi \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **B** $V = \pi \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

C $V = \pi^2 \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. D $V = \pi^2 \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành là $V = \pi \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn $x(x+1)f'(x) + f(x) = x^2 + x$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ và $f(1) = -2\ln 2$ biết $f(2) = a + b\ln 3$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $a^2 + b^2$.

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{9}{2}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{13}{4}$.

Lời giải.

Từ giả thiết $\frac{x}{x+1}f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2}f(x) = \frac{x}{x+1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$.

$\Rightarrow \left[\frac{x}{x+1} \cdot f(x)\right]' = \frac{x}{x+1}$.

Lấy nguyên hàm hai vế, ta có

$$\frac{x}{x+1} \cdot f(x) = \int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = x - \ln|x+1| + C.$$

Mà $f(1) = -2\ln 2$ nên $C = -1 \Rightarrow f(x) \cdot \frac{x}{x+1} = x - \ln|x+1| - 1$.

Cho $x = 2 \Rightarrow f(2) \cdot \frac{2}{3} = 2 - \ln 3 - 1 \Rightarrow f(2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\ln 3$.

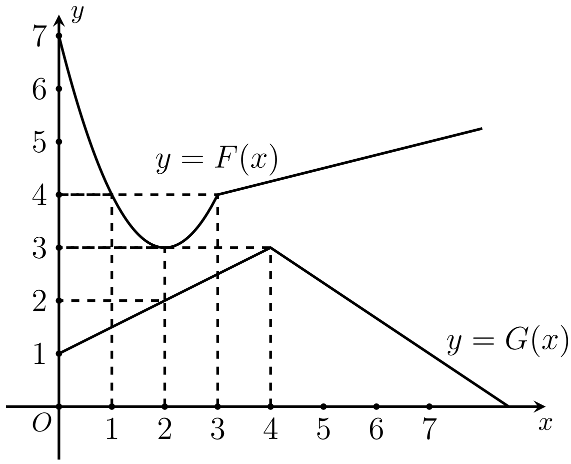
Vậy $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{3}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{9}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Nếu $y = F(x)$ và $y = G(x)$ là những hàm số có đồ thị cho trong hình bên. Đặt $P(x) = F(x) \cdot G(x)$. Tính $P'(2)$.

A. $\frac{3}{2}$. B. 4.

C. 6. D. $\frac{5}{2}$.



Lời giải.

Ta có $P'(x) = F'(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot G'(x) \Rightarrow P'(2) = F'(2) \cdot G(2) + F(2) \cdot G'(2)$.

Xét $x \in [0; 4] \Rightarrow G(x) = ax + b$.

Từ đồ thị hàm số $y = G(x)$, suy ra $G(0) = 1; G(2) = 2$.

Khi đó, ta có $\begin{cases} b = 1 \\ 2a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow G(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

Ta có $G'(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow G'(2) = \frac{1}{2}$.

Xét $x \in [0; 3] \Rightarrow F(x) = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$.

Từ đồ thị hàm số $y = F(x) \Rightarrow F(1) = 4, F(2) = 3$ và $F(3) = 4$.

Khi đó, ta có $\begin{cases} a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 7 \end{cases} \Rightarrow F(x) = x^2 - 4x + 7 \Rightarrow F'(x) = 2x - 4 \Rightarrow F'(2) = 0$.

Vậy $P'(2) = 0 \cdot 2 + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = 25$ và $M(4;6;3)$. Qua M kẻ các tia Mx, My, Mz đôi một vuông góc với nhau và cắt mặt cầu tại điểm thứ hai tương ứng là A, B, C. Biết mặt phẳng (ABC) luôn đi qua một điểm cố định $H(a;b;c)$. Tính $a+3b+c$.

(A) 21. (B) 14. (C) 20. **D** 15.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$.

Gọi D, E lần lượt là trung điểm của BC, AM.

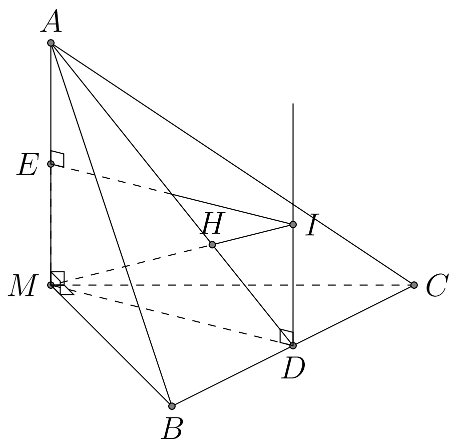
Qua D dựng đường thẳng song song với AM, cắt mặt phẳng trung trực của AM tại I.

Khi đó I là tâm mặt cầu (S) ngoại tiếp $MABC$.

Gọi H là giao điểm của AD và MI.

Ta có $\dfrac{MH}{HI} = \dfrac{AM}{ID} = 2$ (vì $AM \parallel DI$).

Suy ra $MH = 2HI \Rightarrow \overrightarrow{MH} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{MI}$. (1)



Vì M, I cố định nên H là điểm cố định mà mặt phẳng (ABC) luôn đi qua.

Ta có $H(a;b;c) \Rightarrow \overrightarrow{MH} = (a-4; b-6; c-3)$, $\overrightarrow{MI} = (-3;-4;0)$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a-4=-2 \\ b-6=-\dfrac{8}{3} \\ c-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=\dfrac{10}{3} \\ c=3 \end{cases}.$$

Vậy $a+3b+c = 2+10+3 = 15$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng xác định của chính nó?

(A) $y = x^3+x^2-x-1$. **B** $y = x^3-x^2+2x-1$.

(C) $y = x^4-2x^2+3$. (D) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^3-x^2+2x-1$.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2-2x+2 = 3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{5}{3} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số đồng biến trên tập xác định $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
B Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
C Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
D Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.

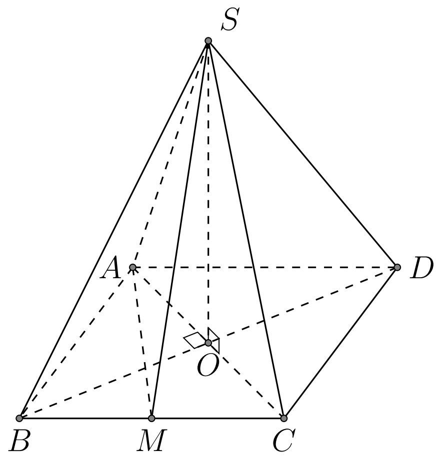
Lời giải.

Từ bảng xét dấu đạo hàm suy ra $y' < 0, \forall x \in (0; 2) \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 13.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, α là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAM). Tính giá trị $\sin\alpha$.



A $\dfrac{\sqrt{21}}{11}$.
B $\dfrac{\sqrt{22}}{11}$.
C $\dfrac{\sqrt{12}}{11}$.
D $\dfrac{2\sqrt{22}}{11}$.

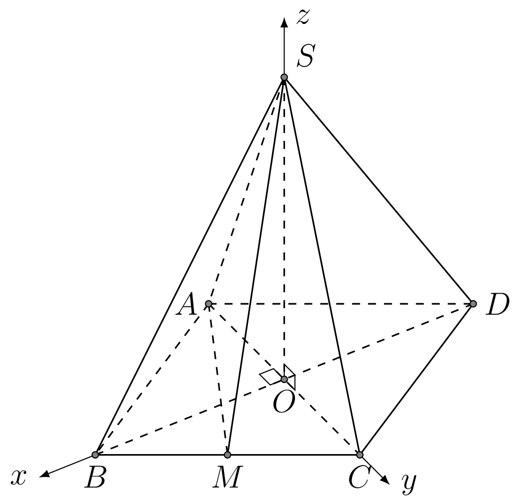
Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$. Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Mặt khác $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $OA = OC = OB = OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác SOA vuông tại O

$\Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Khi đó, tọa độ các điểm là $B\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $C\left(0; \dfrac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $S\left(0; 0; \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $A\left(0; -\dfrac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $D\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$ và $M\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}; \dfrac{a\sqrt{2}}{4}; 0\right)$.

Ta có $\overrightarrow{SD} = \left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}; 0; -\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \vec{u} = (1; 0; 1)$ là véc-tơ chỉ phương của SD.

Mặt khác $\overrightarrow{SA} = \left(0; -\dfrac{a\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{AM} = \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}; \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}; 0\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AM}\right] = \left(\dfrac{3a^2}{4}; -\dfrac{a^2}{4}; \dfrac{a^2}{4}\right)$

$\Rightarrow \vec{n} = (3; -1; 1)$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAM).

Khi đó $\sin\alpha = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \left|\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}\right| = \left|\dfrac{3+0+1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{11}}\right| = \dfrac{2\sqrt{22}}{11}$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau. Trên d_1 lấy 5 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 7 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó được lấy từ các điểm trên hai đường thẳng d_1 và d_2.

A. 220. B. 175. C. 1320. D. 7350.

Lời giải.

Để lấy được 3 điểm tạo thành một tam giác từ 12 điểm bài cho thì xảy ra 2 trường hợp sau.

- Trường hợp 1: Lấy 1 điểm thuộc d_1 và 2 điểm thuộc $d_2 \Rightarrow$ có $\mathrm{C}_5^1\cdot\mathrm{C}_7^2 = 105$.
- Trường hợp 1: Lấy 2 điểm thuộc d_1 và 1 điểm thuộc $d_2 \Rightarrow$ có $\mathrm{C}_5^2\cdot\mathrm{C}_7^1 = 70$.

Vậy có $105 + 70 = 175$ tam giác thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 8$. Tính $I = \displaystyle\int_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 4$. B. $I = \dfrac{3}{2}$. C. $I = 8$. D. $I = 12$.

Lời giải.

Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$ và $x = 2 \Rightarrow t = 4$.

Ta có $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Số giá trị nguyên của m để phương trình $(\cos x + 1)(4\cos 2x - m\cos x) = m\sin^2 x$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$ là

A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Lời giải.

Xét phương trình $(\cos x + 1)(4\cos 2x - m\cos x) = m\sin^2 x$. (1)

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow (\cos x + 1)(4\cos 2x - m\cos x) = m(1 - \cos^2 x)\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos x = -1 & (2)\\ 4\cos 2x - m\cos x = m(1 - \cos x). & (3)\end{array}\right.\end{aligned}$$

Ta có (2) $\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Rightarrow$ (2) không có nghiệm thuộc $\left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$.

(3) $\Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{m}{4}$.

Vì $x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$ nên $2x \in \left[0; \dfrac{4\pi}{3}\right]$.

Phương trình (1) có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow$ (3) có đúng hai nghiệm thuộc đoạn

$\left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow -1 < \dfrac{m}{4} \leq -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -4 < m \leq -2$. Do m là số nguyên nên $m \in \{-3; -2\}$.
Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.
Chọn đáp án B □

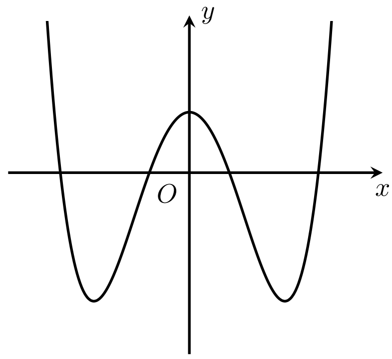
Câu 17. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 3t \\ z = 5 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.
Véc-tơ nào sau đây là véc-tơ chỉ phương của d?

Ⓐ $\vec{u}_4 = (1; 2; 5)$. Ⓑ $\vec{u}_3 = (1; -3; -1)$. **C** $\vec{u}_1 = (0; 3; -1)$. Ⓓ $\vec{u}_2 = (1; 3; -1)$.

Lời giải.
Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_1 = (0; 3; -1)$.
Chọn đáp án C □

Câu 18. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây.
Hàm số đó là hàm số nào?

Ⓐ $y = -x^4 + 5x^2 + 2$. Ⓑ $y = x^4 + 5x^2 + 2$.
Ⓒ $y = x^3 - 3x^2 + 2$. **D** $y = x^4 - 5x^2 + 2$.

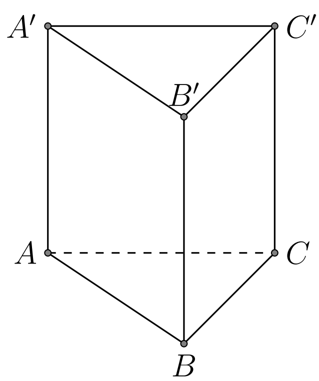


Lời giải.
Đồ thị hàm số trong hình vẽ là đồ thị của hàm số bậc 4 trùng phương, có 3 điểm cực trị và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$ nên hàm số đó là $y = x^4 - 5x^2 + 2$.
Chọn đáp án D □

Câu 19. Thể tích của khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$?

Ⓐ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Ⓒ $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. Ⓓ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

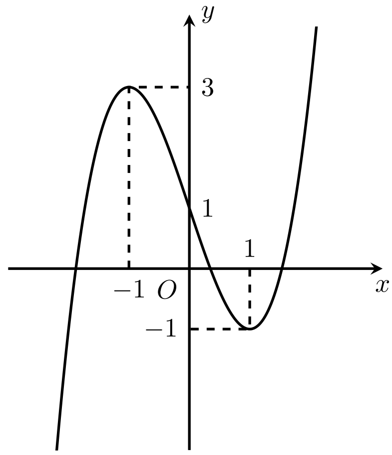
Lời giải.
Thể tích khối lăng trụ $V = \dfrac{1}{3} \cdot S \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.



Chọn đáp án B □

Câu 20.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) + m - 2018 = 0$ có duy nhất một nghiệm.



Ⓐ $\left[\begin{array}{l} m = 2015 \\ m = 2019 \end{array}\right.$. **B** $\left[\begin{array}{l} m < 2015 \\ m > 2019 \end{array}\right.$.

Ⓒ $\begin{cases} m > 2015 \\ m < 2019 \end{cases}$. Ⓓ $\left[\begin{array}{l} m \leq 2015 \\ m \geq 2019 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Phương trình $f(x) + m - 2018 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2018 - m$. (1)

Từ đồ thị suy ra (1) có duy nhất một nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2018 - m < -1 \\ 2018 - m > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2019 \\ m < 2015 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 21. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^x \ln x$ với $x > 0$.

A $y' = 2^x \left(\ln 2 \cdot \ln x + \dfrac{1}{x}\right)$. Ⓑ $y' = 2^x \cdot \dfrac{1}{x} \cdot \ln 2$.

Ⓒ $y' = 2^x \left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$. Ⓓ $y' = 2^x \left(\ln 2 + \dfrac{1}{x}\right)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2^x \ln 2 \cdot \ln x + 2^x \cdot \dfrac{1}{x} = 2^x \left(\ln 2 \cdot \ln x + \dfrac{1}{x}\right)$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 22. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ biết hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f^2(1 + 2x) = x - f^3(1 - x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$.

Ⓐ $x + 7y - 6 = 0$. Ⓑ $x - 7y + 6 = 0$. Ⓒ $x - 7y - 6 = 0$. **D** $x + 7y + 6 = 0$.

Lời giải.

Từ giả thiết, cho $x = 0 \Rightarrow f^2(1) = -f^3(1) \Leftrightarrow f^2(1) \cdot [1 + f(1)] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(1) = -1. \end{array}\right.$

Từ giả thiết, đạo hàm hai vế $\Rightarrow 2f(1 + 2x) \cdot f'(1 + 2x) \cdot 2 = 1 - 3f^2(1 - x) \cdot f'(1 - x) \cdot (-1)$.

Cho $x = 0 \Rightarrow 4f(1) \cdot f'(1) = 1 + 3f^2(1) \cdot f'(1)$ $(*)$.

- Với $f(1) = 0$. Thay vào $(*) \Rightarrow 0 = 1$ (vô lý).
- Với $f(1) = -1 \Rightarrow -4f'(1) = 1 + 3f'(1) \Leftrightarrow f'(1) = -\dfrac{1}{7}$.
  Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x = 1$ là
  $y = f'(1)(x - 1) + f(1) \Rightarrow y = -\dfrac{1}{7} \cdot (x - 1) - 1 \Rightarrow x + 7y + 6 = 0$.

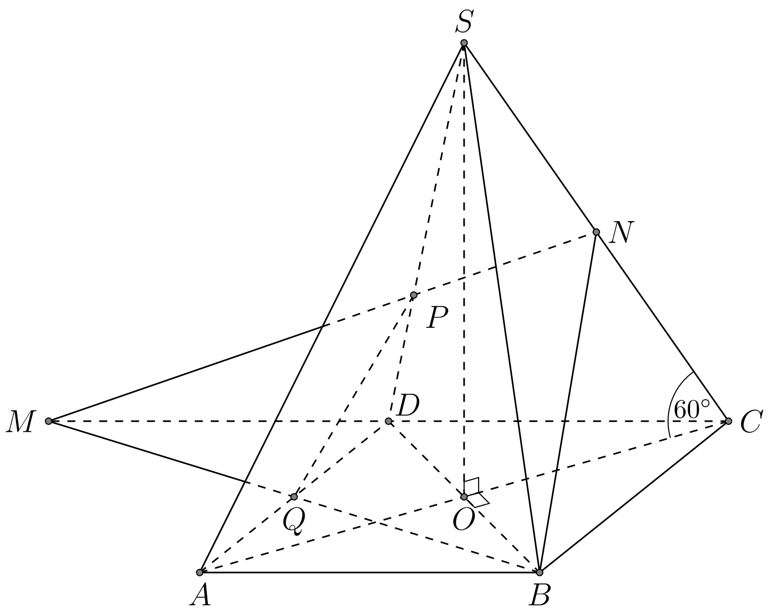
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 23. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy góc 60°. Gọi M là điểm đối xứng của C qua D, N là trung điểm của SC. Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích là V_1, V_2 trong đó V_1 là phần thể tích chứa đỉnh

A. Tính tỉ số $\dfrac{V_2}{V_1}$.

A $\dfrac{5}{7}$. **B** $\dfrac{7}{5}$. **C** $\dfrac{12}{5}$. **D** $\dfrac{5}{12}$.

Lời giải.



Gọi $MN \cap SD = P$ và $MB \cap AD = Q$. Khi đó, mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện $SABNPQ$ và $BCNPQD$

Gọi V là thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Theo giả thiết V_2 là thể tích khối đa diện $BCNPQD$.

Xét tam giác SCM có N, D là trung điểm SC, $MC \Rightarrow P$ là trọng tâm tam giác $SCM \Rightarrow \dfrac{MP}{MN} = \dfrac{2}{3}$.

Vì M đối xứng với C qua D nên $\begin{cases} MD = AB \\ MD \parallel AB \end{cases}$

$\Rightarrow ABDM$ là hình bình hành $\Rightarrow \dfrac{MQ}{MB} = \dfrac{1}{2}$.

Theo công thức tỉ số thể tích $\dfrac{V_{M.DPQ}}{V_{M.CNB}} = \dfrac{MD}{MC} \cdot \dfrac{MP}{MN} \cdot \dfrac{MQ}{MB} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$.

Suy ra $V_2 = \dfrac{5}{6} V_{M.CNB}$. (1)

Ta có $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\triangle BCD} = S_{\triangle BCM}$ và $\mathrm{d}(N,(ABCD)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(S,(ABCD))$ (vì N là trung điểm SC).

Mặt khác $V_{M.CNB} = V_{N.BCM} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle BCM} \cdot \mathrm{d}(M,(ABCD)) = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(S,(ABCD)) = \dfrac{1}{2}V$.(2)

Từ (1) và (2) suy ra $V_2 = \dfrac{5}{12}V \Rightarrow V_1 = \dfrac{7}{12}V \Rightarrow \dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{5}{7}$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \dfrac{2x+1}{1-x}$.

A $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. **B** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. **C** $\mathscr{D} = (1; +\infty)$. **D** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

Lời giải.

Điều kiện $1 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Trong tập hợp số phức, phương trình $\dfrac{4}{z+1} = 1 - i$ có nghiệm là

(A) $z = 2 - i$. (B) $z = 5 - 3i$. **C** $z = 1 + 2i$. (D) $z = 3 + 2i$.

Lời giải.

Điều kiện $z \neq -1$.

Phương trình $\dfrac{4}{z+1} = 1 - i \Leftrightarrow z + 1 = \dfrac{4}{1-i} \Leftrightarrow z = \dfrac{4}{1-i} - 1 = 1 + 2i$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Tìm hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển $\left(x^4 - \dfrac{2}{x}\right)^n$ biết n là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 = 36$.

(A) 1792. (B) 1972. (C) -1297. **D** -1792.

Lời giải.

Điều kiện $n \geq 2$.

Theo giả thiết $\mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 = 36 \Leftrightarrow n + \dfrac{n(n-1)}{2} = 36 \Leftrightarrow n^2 + n - 72 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 8 \text{ (thỏa mãn)} \\ n = -9 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

Với $n = 8 \Rightarrow \left(x^4 - \dfrac{2}{x}\right)^8 = \sum\limits_{k=0}^{8} \mathrm{C}_8^k \cdot \left(x^4\right)^{8-k} \cdot \left(-\dfrac{2}{x}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{8} \mathrm{C}_8^k \cdot (-2)^k \cdot x^{32-5k}$.

Hệ số của số hạng chứa x^7 ứng với k thỏa mãn $32 - 5k = 7 \Leftrightarrow k = 5$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^7 bằng $\mathrm{C}_8^5 \cdot (-2)^5 = -1792$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Cho số phức $\overline{z} = 3 - 5i$. Khi đó phần ảo của số phức z là

(A) -5. **B** 5. (C) -3. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $z = 3 + 5i \Rightarrow$ phần ảo của số phức z là 5.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho số phức z thỏa mãn $(3 - 7i)|z| = \dfrac{176 - 82i}{\overline{z}} + 7 + 3i$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|(1 + i)z + 2 - i|$.

A $5\sqrt{2} - \sqrt{5}$. (B) $6\sqrt{2} - \sqrt{5}$. (C) $3\sqrt{2} - \sqrt{5}$. (D) $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Điều kiện $\overline{z} \neq 0$.

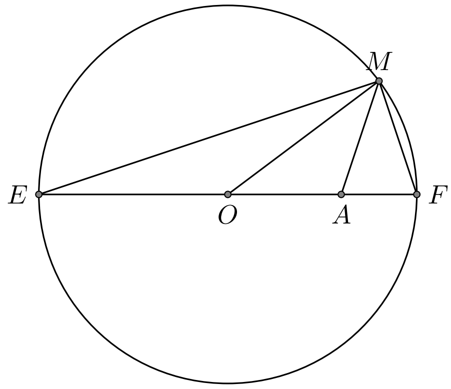
Ta có

$$
\begin{aligned}
& (3 - 7i)|z| = \frac{176 - 82i}{\overline{z}} + 7 + 3i \\
\Leftrightarrow\ & |z| = \frac{19 + 17i}{(3 - 7i) \cdot \overline{z}} + \frac{7 + 3i}{3 - 7i} \Leftrightarrow |z| = \frac{19 + 17i}{\overline{z}} - i \\
\Leftrightarrow\ & |z| + i = \frac{19 + 17i}{\overline{z}} \Leftrightarrow (|z| + i)\overline{z} = 19 + 17i \\
\Rightarrow\ & |(|z| + i)\overline{z}| = |19 + 17i| \text{ (Lấy mô-đun hai vế)} \\
\Leftrightarrow\ & ||z| + i| \cdot |\overline{z}| = 5\sqrt{26} \Leftrightarrow \sqrt{|z|^2 + 1}.|z| = 5\sqrt{26}. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Đặt $t = |z| > 0$, khi đó

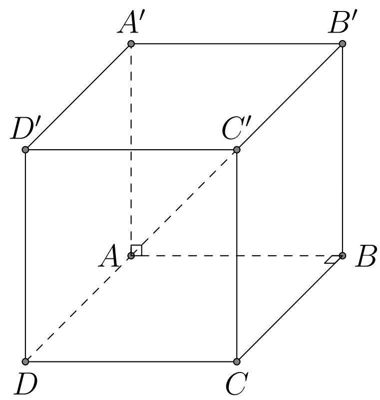
$$(2) \Rightarrow \sqrt{t^2 + 1} \cdot t = 5\sqrt{26} \Leftrightarrow (t^2 + 1) \cdot t^2 = 650 \Leftrightarrow t^4 + t^2 - 650 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 = 25 \\ t^2 = -26 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Với $t^2 = 25 \Rightarrow t = 5 \Rightarrow |z| = 5$.
Đặt $P = |(1+i)z + 2 - i| = \left|(1+i)\left(z + \dfrac{2-i}{1+i}\right)\right| = \sqrt{2}\left|z - \dfrac{-2+i}{1+i}\right| = \sqrt{2}\left|z - \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i\right)\right|$.
Gọi $M(x;y)$, $A\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ lần lượt là điểm biểu diễn số phức z và $w = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$.



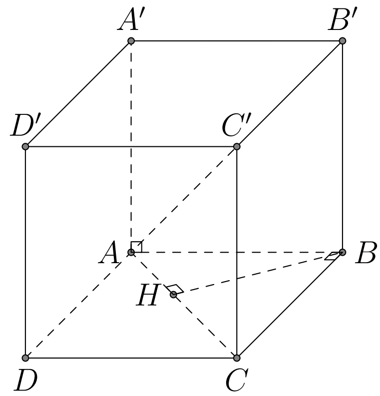
Khi đó $P = \sqrt{2}MA$ và M thuộc đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R = 5$.
Ta có $OA = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} < R = 5 \Rightarrow A$ nằm trong đường tròn (C).
Gọi E, F là giao điểm của OA với đường tròn (C) với $AF < AE$. Ta có $AF \le MA \le AE$.
Vậy P nhỏ nhất khi và chỉ khi MA nhỏ nhất
$\Leftrightarrow MA = MO - OA = 5 - \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$
$\Rightarrow P = 5\sqrt{2} - \sqrt{5}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 29.
Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC'.



(A) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. (B) $a\sqrt{3}$.
(C) $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.
Vì $BB' \parallel AA'$ nên $BB' \parallel (ACC'A')$.
Suy ra $\mathrm{d}(BB', CC') = \mathrm{d}(BB', (ACC'A')) = \mathrm{d}(B, (ACC'A'))$.
Kẻ $BH \perp AC$ tại H, mặt khác $BH \perp AA'$ nên $BH \perp (ACC'A')$
$\Rightarrow \mathrm{d}(B, (ACC'A')) = BH$.
Xét $\triangle ABC$ có BH là đường cao,
suy ra $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 4 = 0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{3}$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d.

(A) $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$. **B** $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{-3}$.

Ⓒ $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-3}$. Ⓓ $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1+2t\\y=t\\z=-2+3t.\end{cases}$

Gọi I là giao điểm của d và (P). Vì $I\in d$ nên $I(-1+2t;t;-2+3t)$.

Mặt khác $I\in(P)$ nên $-1+2t+2t-2+3t-4=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow I(1;1;1)$.

Theo giả thiết (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}=(1;2;1)$ và d có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}=(2;1;3)$.

Ta có $[\overrightarrow{n};\overrightarrow{u}]=(5;-1;-3)$.

Vì đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d nên Δ đi qua điểm $I(1;1;1)$ và nhận $\overrightarrow{u}_\Delta=(5;-1;-3)$ là véc-tơ chỉ phương.

Phương trình đường thẳng Δ là $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Tọa độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-1}{2x+1}$ là

Ⓐ $\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$. Ⓑ $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. Ⓒ $\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$. **D** $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-\dfrac{1}{2}$ và tiệm cận ngang là $y=\dfrac{3}{2}$.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho a là số thực dương khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng với mọi số thực dương x,y?

Ⓐ $\log_a\dfrac{x}{y}=\log_a(x-y)$. **B** $\log_a\dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$.

Ⓒ $\log_a\dfrac{x}{y}=\log_a x+\log_a y$. Ⓓ $\log_a\dfrac{x}{y}=\dfrac{\log_a x}{\log_a y}$.

Lời giải.

Theo công thức $\log_a\dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Giải bóng đá của học sinh trường THPT Quỳ Hợp 2 gồm 9 đội tham dự, trong đó có 3 đội khối 10, 3 đội khối 11 và 3 đội khối 12. Ban tổ chức bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành 3 bảng A, B, C và mỗi bảng có 3 đội. Tính xác suất để 3 đội bóng của khối 12 ở 3 bảng khác nhau.

A $\dfrac{9}{28}$. Ⓑ $\dfrac{9}{56}$. Ⓒ $\dfrac{3}{56}$. Ⓓ $\dfrac{1}{336}$.

Lời giải.

Mỗi bảng gồm 3 đội nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=\mathrm{C}_9^3\cdot\mathrm{C}_6^3\cdot\mathrm{C}_3^3=1680$.

Gọi X là biến cố "3 đội bóng của khối 12 ở 3 bảng khác nhau".

- Bảng A.

  + Chọn 1 trong 3 đội khối 12 $\Rightarrow$ có $\mathrm{C}_3^1=3$ cách.

+ Chọn 2 trong 6 đội khối 10 và khối 11 $\Rightarrow$ có $C_6^2 = 15$ cách.

- Bảng B.

  + Chọn 1 trong 2 đội còn lại của khối 12 $\Rightarrow$ có $C_2^1 = 2$ cách.

  + Chọn 2 trong 4 đội còn lại khối 10 và khối 11 $\Rightarrow$ có $C_4^2 = 6$ cách.

- Bảng C là 3 đội còn lại.

  Vậy $n = (X) = 3 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 6 = 540$.

Xác suất của biến cố X là $P(X) = \dfrac{n(X)}{n(\Omega)} = \dfrac{540}{1680} = \dfrac{9}{28}$.

Chọn đáp án (A) □

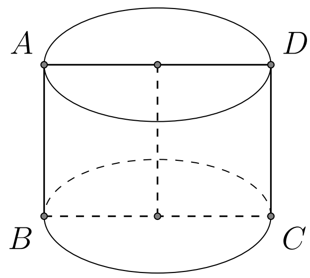
Câu 34. Cho hình trụ có diện tích toàn phần là 4π và có thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là hình vuông. Tính thể tích V của khối trụ.

(A) $V = \dfrac{\pi\sqrt{6}}{12}$. (B) $V = \dfrac{4\pi}{9}$. (C) $V = \dfrac{4\pi\sqrt{6}}{9}$. (D) $V = \dfrac{\pi\sqrt{6}}{9}$.

Lời giải.

Vì thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng qua trục là hình vuông nên $l = 2r$ Diện tích toàn phần hình trụ là $S_{tp} = 2\pi r^2 + 2\pi rl = 4\pi \Leftrightarrow$ $2r^2 + 4r^2 = 4 \Rightarrow r^2 = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow r = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow l = \dfrac{2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow h = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2\sqrt{6}}{3} = \dfrac{4\pi\sqrt{6}}{9}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \sqrt{\log_2(x+1) - 1}$.

(A) $\mathscr{D} = [1; +\infty)$. (B) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. (C) $\mathscr{D} = (3; +\infty)$. (D) $\mathscr{D} = (-\infty; 1]$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ \log_2(x+1) - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ \log_2(x+1) \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x + 1 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$.

Tập xác định là $\mathscr{D} = [1; +\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Gọi $N(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì ta có công thức $N(t) = 100 \cdot (0{,}5)^{\frac{t}{A}}$ (%) với A là hằng số. Biết rằng một mẫu gỗ có tuổi khoảng 3574 năm thì lượng cacbon 14 còn lại là 65%. Phân tích mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ đó là 63%. Hãy xác định tuổi của mẫu gỗ được lấy từ công trình đó.

(A) 3834. (B) 3843. (C) 3833. (D) 3874.

Lời giải.

Theo giả thiết với $t = 3574 \Rightarrow N(3574) = 65 \Rightarrow 100 \cdot (0{,}5)^{\frac{3574}{A}} = 65 \Leftrightarrow (0{,}5)^{\frac{3574}{A}} = 0{,}65$

$\Leftrightarrow A = \dfrac{3574}{\log_{0{,}5} 0{,}65}$.

Gọi t là tuổi của mẫu gỗ cổ. Theo giả thiết

$$N(t) = 63 \Leftrightarrow 100 \cdot (0{,}5)^{\frac{t}{A}} = 63 \Leftrightarrow \frac{t}{A} = \log_{0{,}5} 0{,}63$$

$$\Leftrightarrow t = A \cdot \log_{0,5} 0{,}63 = \frac{3574}{\log_{0,5} 0{,}65} \cdot \log_{0,5} 0{,}63 \approx 3833.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Có bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5$?

(A) A_5^1. **B** A_5^4. (C) P_4. (D) C_5^4.

Lời giải.

Mỗi số có 4 chữ số được tạo thành từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5$ là một chỉnh hợp chập 4 của 5 phần tử.

Vậy có A_5^4 số thỏa mãn đề bài.

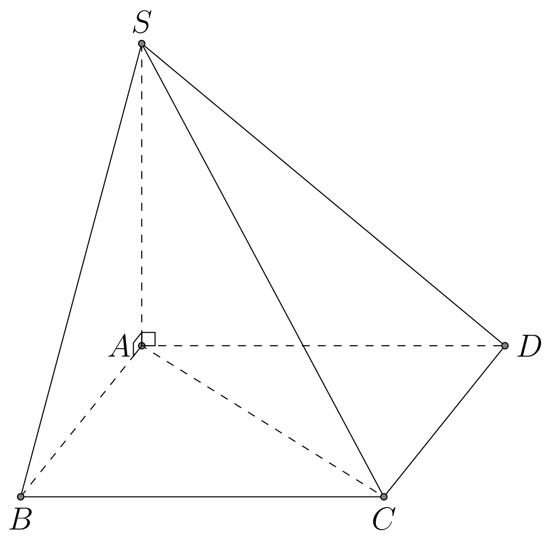
Chọn đáp án (B) □

Câu 38.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

A $45°$. (B) $90°$.

(C) $60°$. (D) $30°$.



Lời giải.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa SC và AC.

Góc giữa SC và AC bằng $\widehat{SCA}$. Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A có $SA = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \widehat{SCA} = 45°$.

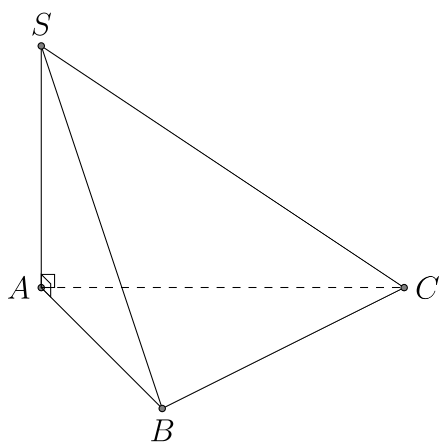
Chọn đáp án (A) □

Câu 39.

Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), biết $AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC)?

(A) $120°$. (B) $150°$.

C $60°$. (D) $30°$.



Lời giải.

Ta có $\begin{cases} (SAB) \cap (SAC) = SA \\ (ABC) \perp SA \\ (ABC) \cap (SAB) = AB \\ (ABC) \cap (SAC) = AC \end{cases}$.

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng góc giữa hai đường thẳng AB và AC.

Xét tam giác $ABC \Rightarrow \cos BAC = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \dfrac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2 \cdot a \cdot a} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 120°$.

Khi đó, góc gữa hai đường thẳng AB và AC bằng $60°$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng $60°$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 5}{x + 3}$.

A $\dfrac{2}{3}$. B $-\dfrac{5}{3}$. C -5. **D** 2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 5}{x + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 - \dfrac{5}{x}}{1 + \dfrac{3}{x}} = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.

A $\displaystyle\int 7^x \, \mathrm{d}x = \dfrac{7^x}{\ln 7} + C$. B $\displaystyle\int 7^x \, \mathrm{d}x = 7^x \ln 7 + C$.

C $\displaystyle\int 7^x \, \mathrm{d}x = \dfrac{7^{x+1}}{x + 1} + C$. D $\displaystyle\int 7^x \, \mathrm{d}x = 7^{x+1} + C$.

Lời giải.

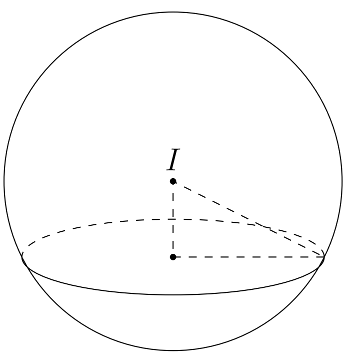
Theo công thức nguyên hàm $\displaystyle\int 7^x \, \mathrm{d}x = \dfrac{7^x}{\ln 7} + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 11 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 3 = 0$. Biết mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (α) theo giao tuyến là đường tròn $(\mathscr{T})$. Tính chu vi của đường tròn $(\mathscr{T})$.

A 2π. **B** 4π. C π. D 6π.

Lời giải.



Ta có $(S): (x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 16$

$\Rightarrow (S)$ có tâm $I(1; 0; -2)$ và bán kính $R = 4$.

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (α) là

$d = \mathrm{d}(I, (\alpha)) = \dfrac{|1 + 0 + 2 + 3|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

Gọi r là bán kính của đường tròn $(\mathscr{T})$

$\Rightarrow r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{16 - 12} = 2$.

Chu vi đường tròn $(\mathscr{T})$ là $2\pi r = 4\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (2; -3; 1)$ và $\vec{b} = (-1; 0; 4)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{u} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$.

A $\vec{u} = (-7; 6; 10)$. **B** $\vec{u} = (-7; 6; -10)$. **C** $\vec{u} = (-7; -6; 10)$. **D** $\vec{u} = (7; 6; 10)$.

Lời giải.

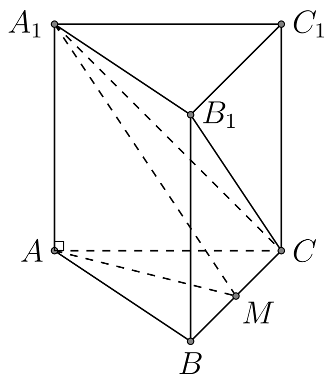
Ta có $-2\vec{a} = (-4; 6; -2)$ và $3\vec{b} = (-3; 0; 12) \Rightarrow \vec{u} = -2\vec{a} + 3\vec{b} = (-7; 6; 10)$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ có $A_1\left(\sqrt{3}; -1; 1\right)$, hai đỉnh B, C thuộc trục Oz và $AA_1 = 1$, (C không trùng với O). Biết $\vec{u} = (a; b; 2)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng A_1C. Tính $T = a^2 + b^2$.

A 4. **B** 9. **C** 16. **D** 5.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC. Vì B, C thuộc trục Oz nên $M(0; 0; m)$ và $\vec{k} = (0; 0; 1)$ là véc-tơ chỉ phương của BC.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp A_1A \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A_1AM) \Rightarrow BC \perp A_1M.$

Mặt khác $\overrightarrow{A_1M} = (-\sqrt{3}; 1; m-1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{A_1M} \cdot \vec{k} = 0 \Rightarrow m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

$\Rightarrow M(0; 0; 1)$. Gọi $C(0; 0; z)$ và $AB = x > 0$. Vì ABC là tam giác đều cạnh bằng x nên $AM = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\overrightarrow{A_1M} = (-\sqrt{3}; 1; 0) \Rightarrow A_1M = 2$.

Xét tam giác A_1AM vuông tại $A \Rightarrow A_1M^2 = A_1A^2 + AM^2 \Leftrightarrow 2^2 = 1^2 + \dfrac{3x^2}{4} \Leftrightarrow x = 2$.

Ta có $\overrightarrow{A_1C} = (-\sqrt{3}; 1; z-1) \Rightarrow A_1C^2 = 4 + (z-1)^2$.

Xét tam giác A_1AC vuông tại A

$\Rightarrow A_1C^2 = A_1A^2 + AC^2 \Leftrightarrow 4 + (z-1)^2 = 1 + 4 \Leftrightarrow (z-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2 \\ z = 0. \end{array}\right.$

Với $z = 0 \Rightarrow C(0; 0; 0) \equiv O \Rightarrow C(0; 0; 0)$ (loại).

Với $z = 2 \Rightarrow C(0; 0; 2)$ (thỏa mãn).

Suy ra $\overrightarrow{A_1C} = (-\sqrt{3}; 1; 1)$.

Vì $\vec{u} = (a; b; 2)$ là một véc-tơ chỉ phương của A_1C nên $\dfrac{a}{-\sqrt{3}} = \dfrac{b}{1} = \dfrac{2}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2\sqrt{3} \\ b = 2. \end{cases}$

Vậy $T = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 = 16$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 1; 4)$, $B(4; 3; -2)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

A $3x + y + 3z - 8 = 0$. **B** $3x + y - 3z - 8 = 0$.

C $3x + y - 3z - 1 = 0$. **D** $3x + y - 3z - 2 = 0$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow M(1;2;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng trung trực của AB.
Khi đó, (P) đi qua $M(1;2;1)$ và nhận $\overrightarrow{AM} = (3;1;-3)$ là véc-tơ pháp tuyến.
Phương trình mặt phẳng (P) là $3\cdot(x-1)+1\cdot(y-2)-3\cdot(z-1)=0 \Rightarrow (P): 3x+y-3z-2=0$.
Chọn đáp án D □

Câu 46. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A $\int \sin x\,\mathrm{d}x = \cos x + C$.
B $\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C$.
C $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.
D $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$.

Lời giải.

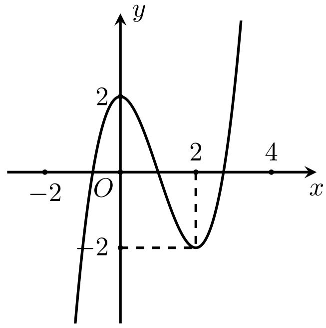
Theo công thức nguyên hàm $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 47.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$.

A 3.
B 5.
C 2.
D 4.



Lời giải.

Từ đồ thị suy ra hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=2$.

Suy ra $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2. \end{array}\right.$

Đặt $g(x)=f(x^2-2x) \Rightarrow g'(x)=f'(x^2-2x)\cdot(2x-2)$.

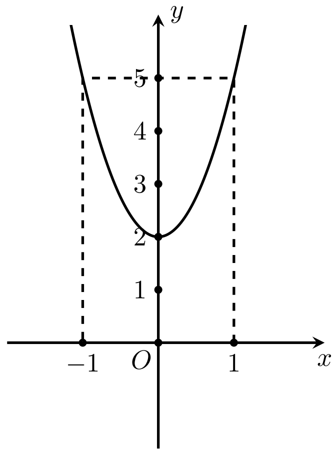
Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x^2-2x)=0 \\ 2x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x=0 \\ x^2-2x=2 \\ 2x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=1\pm\sqrt{3} \\ x=1. \end{array}\right.$

Suy ra $g'(x)=0$ có 5 nghiệm phân biệt.
Vậy hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 48.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(C)$ với a, b,$c \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$. Biết đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính giá trị $f(3) - f(1)$.



A 26.
B 24.
C 30.
D 28.

Lời giải.

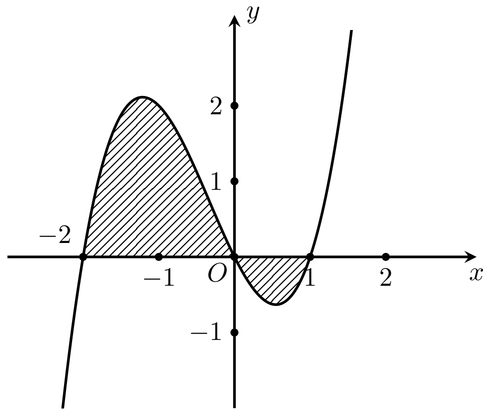
Vì đồ thị (C) đi qua $O(0;0)$ nên $d = 0$.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Từ đồ thị suy ra $\begin{cases} f'(0) = 2 \\ f'(1) = 5 \\ f'(-1) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ 3a + 2b + c = 5 \\ 3a - 2b + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 2. \end{cases}$

Suy ra $f(x) = x^3 + 2x$. Ta có $f(3) = 33, f(1) = 3 \Rightarrow f(3) - f(1) = 30$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ, diện tích hình phẳng phần tô đậm được tính theo công thức



A $S = \displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$.

B $S = \displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx$.

C $S = \displaystyle\int_{0}^{-2} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx$.

D $S = \displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,dx - \int_{0}^{1} f(x)\,dx$.

Lời giải.

Ta có $S = \displaystyle\int_{-2}^{0} |f(x)|\,dx + \int_{0}^{1} |f(x)|\,dx$.

Từ đồ thị hàm số suy ra $f(x) \geq 0, \forall x \in [-2;0]$ và $f(x) \leq 0, \forall x \in [0;1]$.

Suy ra $S = \displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,dx - \int_{0}^{1} f(x)\,dx$.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $\Delta : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z-1}{-5}$ và $d : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+1}{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và d.

(A) 3. (B) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. (C) $\sqrt{5}$. (D) $\dfrac{45}{\sqrt{14}}$.

Lời giải.

Theo giả thiết Δ đi qua điểm $M(2;3;1)$, có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (2;-4;-5)$ và d đi qua điểm $N(1;0;-1)$, có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (1;-2;2)$.

Ta có $[\vec{u}_1;\vec{u}_2] = (-18;-9;0)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và song song với Δ.

Suy ra (P) đi qua N và nhận $\vec{n} = -\dfrac{1}{9}[\vec{u}_1;\vec{u}_2] = (2;1;0)$ là véc-tơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P) là $2\cdot(x-1)+1\cdot(y-0)+0\cdot(z+1) = 0 \Rightarrow (P): 2x+y-2 = 0$.

Khoảng cách giữa Δ và d bằng khoảng cách từ M đến (P).

Ta có $\mathrm{d}(M,(P)) = \dfrac{|4+3-2|}{\sqrt{2^2+1^2+0^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án (C) □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. D	3. B	4. D	5. C	6. D	7. B	8. B	9. A	10. D
11. B	12. C	13. D	14. B	15. A	16. B	17. C	18. D	19. B	20. B
21. A	22. D	23. A	24. B	25. C	26. D	27. B	28. A	29. D	30. B
31. D	32. B	33. A	34. C	35. A	36. C	37. B	38. A	39. C	40. D
41. A	42. B	43. A	44. C	45. D	46. A	47. B	48. C	49. D	50. C

108 ĐỀ THI THỬ, TRƯỜNG THPT LƯƠNG THẾ VINH, HÀ NỘI, LẦN 2, 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Tổng phần thực và phần ảo của số phức $z = (1+i)^2 - (3+3i)$ là

(A) $\sqrt{10}$. **(B) -4.** (C) 4. (D) $-3-i$.

Lời giải.

Ta có $z = 2i - 3 - 3i = -3 - i$ nên tổng phần thực và phần ảo bằng -4.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x^2-5x+2}{x-2}$ bằng

(A) 2. (B) 1. **(C) 3.** (D) $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x^2-5x+2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(2x-1) = 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Đa giác lồi 10 cạnh có bao nhiêu đường chéo?

(A) 35. (B) 45. (C) 10. (D) 20.

Lời giải.

Số đường chéo là

$$\mathrm{C}_{10}^2 - 10 = 35.$$

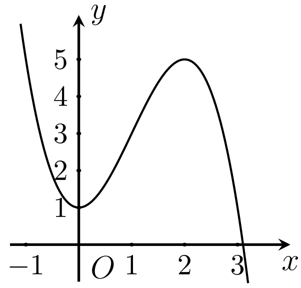
Chọn đáp án (A) □

Câu 4.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

(A) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. (B) $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

(C) $y = -x^3 - 3x^2 + 1$. (D) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$.



Lời giải.

Hình dáng đồ thị suy ra hệ số của x^3 âm, lại có một điểm cực trị có hoành độ dương, một điểm cực trị nằm trên trục tung, từ đó có hệ số của x^2 dương.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên SA bằng $2a$ và vuông góc với đáy. Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **(D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.**

Lời giải.

Ta có $V = \dfrac{1}{3} \cdot 2a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a;\ x = b$ được tính theo công thức

A $S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

B $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

C $S = \pi\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

D $S = \pi\int\limits_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo giáo khoa, ta có $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây:

x	$-\infty$		-4		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

B Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

C Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

D Hàm số đồng biến trên khoảng $(-4; -1)$.

Lời giải.

Theo bảng biến thiên ta thấy, hàm số đồng biến trên khoảng $(-4; -1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây đồng biến trên các khoảng xác định của nó?

A $y = (\ln 2)^x$.

B $y = \left(\dfrac{2}{5}\right)^x$.

C $y = \left(\dfrac{3}{2 + \sin 2018}\right)^x$.

D $y = (\sin 2018)^x$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{3}{2 + \sin 2018} > 1$ nên $\left(\dfrac{3}{2 + \sin 2018}\right)^x$ đồng biến.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Họ nguyên hàm của hàm số $y = \sin 2x$ là

A $y = -\dfrac{1}{2}\cos 2x + C$.

B $y = -\dfrac{1}{2}\cos 2x$.

C $y = \dfrac{1}{2}\cos 2x + C$.

D $y = -\cos 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int \sin 2x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\cos 2x + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-3)$ và $B(3;-2;-1)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là điểm

(A) $I(1;-2;1)$. (B) $I(1;0;-2)$. (C) $I(4;0;-4)$. (D) $I(2;0;-2)$.

Lời giải.

Ta có $I\left(\dfrac{1+3}{2};\dfrac{2-2}{2};\dfrac{-3-1}{2}\right)=(2;0;-2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1$. Độ dài đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là

(A) 8. (B) $2\sqrt{5}$. (C) 5. (D) 6.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-6x, y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Với $x=0\Rightarrow y=1$, $x=2\Rightarrow y=-3$.

Vậy $A(0;1), B(2;-3)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Ta có $AB=2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-y+2z-3=0$. Đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là

(A) $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. (B) $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.

(C) $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{2-y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. (D) $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua A và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_d=\vec{n}_{(P)}=(1;-1;2)$ có phương trình là

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}.$$

Đối chiếu đáp án ta có đáp án **A** thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}(x-3)\geq -1$ là

(A) $(-\infty;5)$. (B) $[5;+\infty)$. (C) $(3;5]$. (D) $(3;5)$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương

$$0<x-3\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\Leftrightarrow 3<x\leq 5.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Cho hình trụ có tỉ số diện tích xung quanh và diện tích toàn phần bằng $\dfrac{1}{3}$. Biết thể tích khối trụ bằng 4π. Bán kính đáy của hình trụ là

(A) 2. (B) 3. (C) $\sqrt{3}$. (D) $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{S_{\text{xq}}}{S_{\text{tp}}} = \dfrac{2\pi Rh}{2\pi R(h+R)} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow R = 2h$.
Mà $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 4h^2 = 4\pi \Leftrightarrow h = 1 \Rightarrow R = 2$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;-3;0)$ và $C(0;0;6)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $OABC$ là

(A) $\sqrt{11}$. **B** $\dfrac{7}{2}$. (C) $\dfrac{7}{3}$. (D) 11 .

Lời giải.

Giả sử phương trình mặt cầu là $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$. Từ giả thiết ta có hệ sau

$$\begin{cases} 2^2 + 4a + d = 0 \\ (-3)^2 - 6b + d = 0 \\ 6^2 + 12c + d = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \dfrac{3}{2} \\ c = -3 \\ d = 0 \end{cases}$$

Vậy $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \dfrac{7}{2}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+3}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 trục tọa độ và 2 đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho là

(A) 3. (B) 5. (C) $\sqrt{13}$. **D** 6.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận là $x = -3$ và $y = 2$.
Hình phẳng giới hạn bởi hai trục tọa độ và hai tiệm cận là hình chữ nhật.
Diện tích của nó bằng $3 \cdot 2 = 6$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 17.

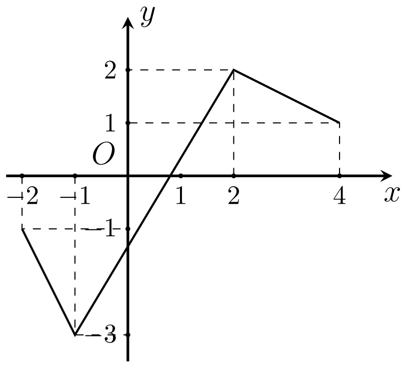
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2;4]$ như hình vẽ bên. Mệnh đề nào trong bốn mệnh đề sau đây là đúng?

A $f'\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot f'(3) > 0$.

(B) $\min\limits_{x\in[-2;4]} f(x) = -2$.

(C) $\max\limits_{x\in[-2;4]} f(x) = 4$.

(D) Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt trên $[-2;4]$.



Lời giải.

a) $\min\limits_{x\in[-2;4]} f(x) = -2$. Mệnh đề này sai, vì giá trị nhỏ nhất bằng -3.

b) $\max\limits_{x\in[-2;4]} f(x) = 4$. Mệnh đề này sai, vì giá trị lớn nhất bằng 2.

c) Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt trên $[-2;4]$. Mệnh đề này sai, vì chỉ có 1 nghiệm.

d) $f'\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot f'(3) > 0$. Mệnh đề này đúng. Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(2;4)$ nên $f'\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot f'(3) > 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = (2x-3)\cdot \mathrm{e}^x$ trên $[0;3]$ là

A. $\max\limits_{x\in[0;3]} f(x) = \mathrm{e}^3$. B. $\max\limits_{x\in[0;3]} f(x) = 4\mathrm{e}^3$. C. $\max\limits_{x\in[0;3]} f(x) = 3\mathrm{e}^3$. D. $\max\limits_{x\in[0;3]} f(x) = 5\mathrm{e}^3$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 2\mathrm{e}^x + (2x-3)\cdot\mathrm{e}^x = (2x-1)\cdot\mathrm{e}^x$, $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Ta có $f(0) = -3, f(3) = 3\mathrm{e}^3, f\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\mathrm{e}}$.

Vậy $\max\limits_{x\in[0;3]} f(x) = 3\mathrm{e}^3 = f(3) = 3\mathrm{e}^3$.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\cos x}\cdot \sin x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $1-\mathrm{e}$. B. $\mathrm{e}+1$. C. $\mathrm{e}-1$. D. e.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\cos x}\cdot \sin x\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\cos x}\,\mathrm{d}\left(\cos x\right) = -\mathrm{e}^{\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}-1$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Cho số phức $z = 3-5i$. Gọi $w = x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$ là một căn bậc hai của z. Giá trị của biểu thức $T = x^4+y^4$ là

A. $T = \frac{43}{2}$. B. $T = 34$. C. $T = 706$. D. $T = \frac{17}{2}$.

Lời giải.

Ta có $w^2 = z \Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi = 3-5i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = 3 \\ 2xy = -5. \end{cases}$

Mà ta có $T = x^4+y^4 = (x^2-y^2)^2 + 2\cdot x^2y^2 = 3^2 + 2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{43}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh $3a$. Khoảng cách giữa hai cạnh AB, CD là

A. $\frac{3a}{2}$. B. $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$. C. a. D. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

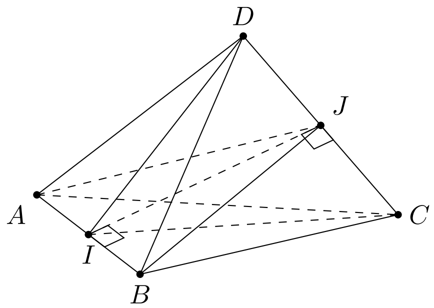
Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Ta có tam giác AJB cân tại J nên $IJ\perp AB$.

Tương tự cũng có $IJ\perp DC$ nên $\mathrm{d}(AB,CD) = IJ$.

Ta có $AJ = AD\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $IJ = \sqrt{AJ^2-AI^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Một người gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi là lãi kép). Để người đó lãnh được số tiền 250 triệu thì người đó cần gửi trong khoảng thời gian ít nhất bao nhiêu năm? (nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi)

(A) 13 năm. (B) 12 năm. **C** 14 năm. (D) 15 năm.

Lời giải.

Đặt $r = 0{,}07$. Số tiền người đó rút ra sau năm thứ n gửi là $A = A_0 \cdot (1+r)^n$. Từ đó ta có

$$n = \log_{1+r} \frac{250}{100} \approx 13{,}54.$$

Vậy sau ít nhất 14 năm người đó lãnh được số tiền 250 triệu đồng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Trong các số nguyên từ 100 đến 999, số các số mà chữ số của nó tăng dần hoặc giảm dần (kể từ trái qua phải) bằng

A 204. (B) 120. (C) 168. (D) 240.

Lời giải.

Chọn 3 chữ số khác nhau trong 10 chữ số. Tồn tại 2 cách sắp xếp sao cho chữ số tăng dần hoặc giảm dần từ trái qua phải, có $2 \cdot \mathrm{C}_{10}^3$ cách.

Xét trường hợp tăng dần mà chữ số 0 đứng đầu, có C_9^2 cách chọn hai chữ số còn lại.

Vậy số các số thỏa mãn là $2 \cdot \mathrm{C}_{10}^3 - \mathrm{C}_9^2 = 204$ số.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(3; -4; 3)$. Tổng khoảng cách từ A đến ba trục tọa độ bằng

(A) 10. **B** $10 + 3\sqrt{2}$. (C) $\dfrac{\sqrt{34}}{2}$. (D) $\sqrt{34}$.

Lời giải.

$\mathrm{d}(A; Ox) = \sqrt{y_A^2 + z_A^2} = 5$.

$\mathrm{d}(A; Oy) = \sqrt{x_A^2 + z_A^2} = 3\sqrt{2}$.

$\mathrm{d}(A; Oz) = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = 5$.

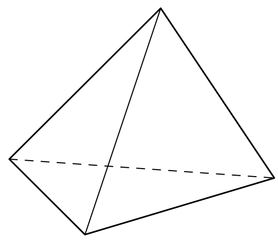
Vậy tổng khoảng cách là $10 + 3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

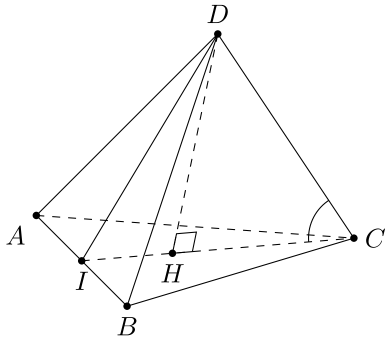
Câu 25.

Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° (tham khảo hình vẽ bên). Côsin của góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp là

A $\frac{1}{\sqrt{13}}$. (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. (C) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$. (D) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$.



Lời giải.



Gọi I là trung điểm của AB. Góc $\widehat{DCH} = 60^\circ$ là góc giữa cạnh bên và đáy, góc $\widehat{DIH}$ là góc giữa mặt bên và mặt đáy.

Ta có $DH = CH \cdot \tan 60^\circ = a$. Vậy $DI = \sqrt{IH^2 + DH^2} = \dfrac{a\sqrt{39}}{6}$.

Vậy $\cos \widehat{DIH} = \dfrac{IH}{DH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} : \dfrac{a\sqrt{39}}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Biết đồ thị hàm số $y = a^x$ và đồ thị hàm số $y = \log_b x$ cắt nhau tại điểm $A\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$. Giá trị của biểu thức $T = a^2 + 2b^2$ bằng

A. $T = 15$. B. $T = 9$. **C.** $T = 17$. D. $T = \dfrac{33}{2}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $a^{\frac{1}{2}} = 2 \Leftrightarrow a = 4,\ \log_b \dfrac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy $a^2 + 2b^2 = 4^2 + 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 17$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Biết khoảng nghịch biến của hàm số $y = \log_{\frac{2}{e}}(-x^2 + 6x - 5)$ là khoảng $(a; b)$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $T = 4a - b$ bằng

A. 1. B. -1. C. 0. D. 2.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = (1; 5)$. Ta có $y' = \dfrac{-2x + 6}{(-x^2 + 6x - 5) \cdot \ln \frac{2}{e}}$.

Vì $\ln \frac{2}{e} < 0$ nên ta cho $-2x + 6 > 0 \Leftrightarrow x < 3$.

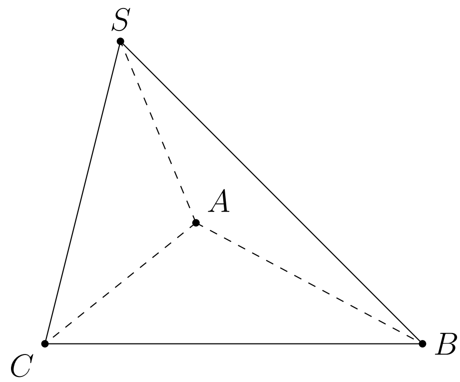
Vậy $(1; 3)$ là khoảng nghịch biến của hàm số. Tóm lại $4a - b = 1$.

Chọn đáp án A □

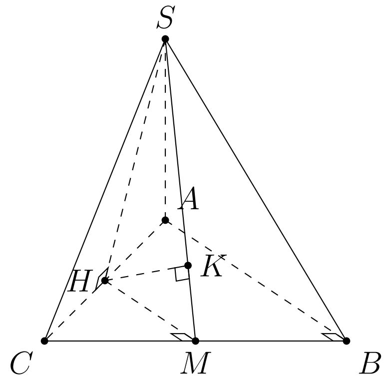
Câu 28.

Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân tại B có $AB = BC = a$, tam giác SAC đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. B. $2a$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{42}}{7}$. D. $\dfrac{a\sqrt{42}}{14}$.



Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AC thì $SH \perp (ABC)$. Ta có

$$\frac{\mathrm{d}(A;(SBC))}{\mathrm{d}(H;(SBC))} = \frac{AC}{HC} = 2$$

Từ H kẻ HM vuông góc với BC (M là trung điểm của BC và $HK \perp SM$ (K thuộc SM). Khi đó HK là khoảng cách từ H đến (SBC).

Ta có $AC = a\sqrt{2}, SH = \dfrac{a\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}, HM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Vậy $HK = \dfrac{SH \cdot HM}{\sqrt{SH^2 + HM^2}} = \dfrac{a\sqrt{42}}{14}$. Từ đó suy ra $\mathrm{d}(A;(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{42}}{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-6x-4y-12z=0$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-z-2=0$. Tính diện tích thiết diện của mặt cầu (S) cắt bởi mặt phẳng (P).

A $S = 49\pi$. **B** 25π. **C** 50π. **D** 36π.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;6)$ và bán kính $R = \sqrt{3^2+2^2+6^2} = 7$. Vì I thuộc (P) nên (P) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn có bán kính bằng 7. Diện tích thiết diện bằng 49π.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (m+1)\sin x - 3\cos x - 5x$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A 9. **B** 8. **C** 10. **D** Vô số.

Lời giải.

Ta có $y' = (m+1)\cos x + 3\sin x - 5$. Điều kiện đề bài tương đương $(m+1)\cos x + 3\sin x \le 5$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ hay

$$\max_{x\in\mathbb{R}} \left[(m+1)\cos x + 3\sin x\right] \le 5$$

Áp dụng bất đẳng thức B-C-S ta có

$$(m+1)\cos x + 3\sin x \le \sqrt{\left((m+1)^2+3^2\right)\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)} = \sqrt{m^2+2m+10}.$$

Từ đó ta có $\sqrt{m^2+2m+10} \le 5 \Leftrightarrow -5 \le m \le 3$. Vậy có 9 giá trị nguyên thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương k thỏa mãn $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x < \frac{2018\cdot\mathrm{e}^k - 2018}{k}$.

Số phần tử của tập hợp S bằng

A 6. **B** 7. **C** 8. **D** Vô số.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{\mathrm{e}^{kx}}{k}\right|_1^2 = \frac{\mathrm{e}^{2k}-\mathrm{e}^k}{k}$.

Khi đó bất phương trình tương đương

$$\mathrm{e}^{2k} - 2019\cdot e^k + 2018 < 0 \Leftrightarrow 1 < \mathrm{e}^k < 2018 \Leftrightarrow 0 < k < \ln 2018.$$

Vì k nguyên dương nên $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = mt \\ y = m^2t \\ z = mt \end{cases}$ với m là tham số. Tìm tất cả giá trị của tham số m để đường thẳng d tiếp xúc với mặt cầu (S).

A $m = -2$. (B) $\left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 0 \end{array}\right.$. (C) $m = 0$. (D) $m = 1$.

Lời giải.

Xét phương trình

$$m^2t^2 + m^4t^2 + m^2t^2 - 2mt - 2m^2t - 2mt = 0 \qquad (1)$$

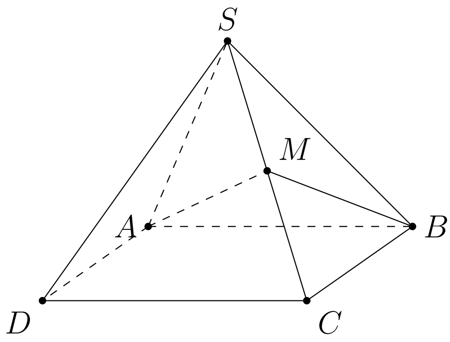
Để d là đường thẳng thì $m \neq 0$. Đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu khi và chỉ khi (1) có nghiệm duy nhất, hay $-4m - 2m^2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$. Mặt phẳng qua AB và trung điểm M của SC cắt hình chóp theo thiết diện có chu vi bằng $7a$ (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích của khối nón có đỉnh là S và đường tròn đáy ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ bằng

(A) $\dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{3}$. **B** $\dfrac{2\pi a^3\sqrt{6}}{3}$. (C) $\dfrac{2\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{2\pi a^3\sqrt{6}}{9}$.

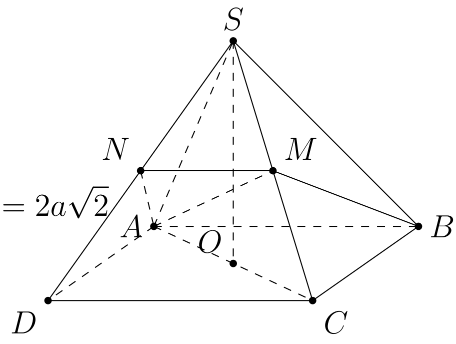


Lời giải.

Gọi N là trung điểm SD. Khi đó thiết diện là hình thang cân $ABMN$, mà $AB = 2a, MN = a$. Từ đó suy ra $MB = 2a$.

Theo công thức trung tuyến ta có

$$MB^2 = \frac{2(SB^2 + BC^2) - SC^2}{4} \Leftrightarrow 4a^2 = \frac{SC^2 + 2 \cdot 4a^2}{4} \Leftrightarrow SC = 2a\sqrt{2}$$



Vậy $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{8a^2 - 2a^2} = a\sqrt{6}$.

Hình nón có chiều cao $SO = a\sqrt{6}$ và bán kính đáy bằng $a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot a\sqrt{6} \cdot 2a^2 = \dfrac{2\pi a^3\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Cho phương trình $4^x - (m+1) \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$. Biết phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 6$. Khẳng định đúng trong bốn khẳng định dưới đây là

(A) $m < 2$. (B) $m > 3$. **C** $1 < m < 3$. (D) Không có m.

Lời giải.

Đặt $2^x = t > 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 2(m+1)t + 8 = 0.$$

Khi $m > -1$. Phương trình đã cho có hai nghiệm $t_1, t_2 > 0$. Từ giả thiết ta có

$$(x_1+1)(x_2+1) = 6 \Leftrightarrow (\log_2 t_1 + 1)(\log_2 t_2 + 1) = 6. \qquad (1)$$

Mà $\log_2 t_1 + \log_2 t_2 = \log_2(t_1 \cdot t_2) = \log_2 8 = 3$. Thay vào (1) ta có

$$\log_2 t_1 \cdot \log_2 t_2 = 2 \Rightarrow (x_1; x_2) = (1; 2) \text{ hoặc } (2; 1).$$

Thay vào lại phương trình ban đầu ta tìm được $m = 2$ thỏa mãn điều kiện.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Biết đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D sao cho $AB = BC = CD$. Tổng các giá trị của tham số m bằng

A. 4. B. $\dfrac{44}{9}$. C. 5. **D.** $\dfrac{32}{9}$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 2m - 1) = 0.$$

Điều kiện để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt

$$0 < 2m + 1 \neq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m \neq 0.$$

TH 1. Giả sử $2m + 1 > 1$. Khi đó hoành độ 4 giao điểm xếp theo thứ tự từ bé đến lớn là

$$-\sqrt{2m+1};\ -1;\ 1;\ \sqrt{2m+1}.$$

Từ giả thiết ta có

$$1 - \sqrt{2m+1} = -2 \Leftrightarrow m = 4.$$

TH 2. Giả sử $2m + 1 < 1$. Khi đó hoành độ 4 giao điểm xếp theo thứ tự từ bé đến lớn là

$$-1;\ -\sqrt{2m+1};\ \sqrt{2m+1};\ 1.$$

Từ giả thiết ta có

$$-1 + \sqrt{2m+1} = -2\sqrt{2m+1} \Leftrightarrow m = -\frac{4}{9}.$$

Vậy tổng các giá trị bằng $\dfrac{32}{9}$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Cho hàm số $y = \dfrac{2x - m}{x + 2}$ với m là tham số, $m \neq -4$. Biết $\min\limits_{x \in [0;2]} f(x) + \max\limits_{x \in [0;2]} f(x) = -8$. Giá trị của tham số m bằng

A. 10. B. 8. **C.** 12. D. 9.

Lời giải.

Ta có $\min\limits_{x \in [0;2]} f(x) + \max\limits_{x \in [0;2]} f(x) = f(0) + f(2) = -\dfrac{m}{2} + \dfrac{4 - m}{4} = -8 \Leftrightarrow m = 12$.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(2-x) = 2x^2 - 4x + 10$. Tích phân $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\frac{26}{3}$. B $\frac{52}{3}$. C $\frac{13}{3}$. D $\frac{14}{3}$.

Lời giải.

Chú ý $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(2-x)\,\mathrm{d}x$.

Ta có $2\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 (f(x) + f(2-x))\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 (2x^2 - 4x + 10)\,\mathrm{d}x = \frac{52}{3}$.

Vậy $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{26}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Cho số phức z thỏa mãn $(z - 2 + i)(\overline{z} - 2 - i) = 25$. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $w = 2\overline{z} - 2 + 3i$ là đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính c. Giá trị của $a + b + c$ bằng

A 18. B 10. C 20. D 17.

Lời giải.

Ta có $(z - 2 + i)(\overline{z} - 2 - i) = \overline{\overline{z} - 2 - i} \cdot (\overline{z} - 2 - i) = |\overline{z} - 2 - i|^2 = 25 \Rightarrow |\overline{z} - 2 - i| = 5$.

Ta có $w - 2 - 5i = 2(\overline{z} - 2 - i) \Rightarrow |w - 2 - 5i| = 2|\overline{z} - 2 - i| = 10$.

Tập hợp điểm biểu diễn w là đường tròn tâm $I(2;5)$ và bán kính $R = 10$.

Vậy $a + b + c = 17$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho khai triển $T = (1 + x - x^{2017})^{2018} + (1 - x + x^{2018})^{2017}$. Hệ số của số hạng chứa x trong khai triển bằng

A 0. B 2017. C 1. D 4035.

Lời giải.

Trước hết ta xét hệ số của số hạng chứa x trong khai triển $(1 + x - x^{2017})^{2018}$. Ta có

$$\begin{aligned}(1 + x - x^{2017})^{2018} &= \sum_{k=0}^{2018} \mathrm{C}_{2018}^k (x - x^{2017})^k \\ &= \sum_{k=0}^{2018} \mathrm{C}_{2018}^k x^k (1 - x^{2016})^k \\ &= \sum_{k=0}^{2018} \cdot \sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_{2018}^k \cdot \mathrm{C}_k^i \cdot (-1)^{2016i} \cdot x^{k+2016i}.\end{aligned}$$

Cặp số $(k;i)$ cần tìm thỏa mãn hệ $\begin{cases} 0 \le i \le k \le 2018 \\ k + 2016i = 1 \end{cases} \Rightarrow k = 1, i = 0$.

Vậy hệ số là $\mathrm{C}_{2018}^1 \cdot \mathrm{C}_1^0$.

Tiếp tục ta xét hệ số của số hạng chứa x trong khai triển $(1-x+x^{2018})^{2017}$, ta có

$$\begin{aligned}(1-x+x^{2018})^{2017} &= \sum_{k=0}^{2017} \mathrm{C}_{2018}^{k}(x^{2018}-x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{2017} \mathrm{C}_{2017}^{k} x^k (x^{2017}-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{2017} \cdot \sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_{2017}^{k} \cdot \mathrm{C}_{k}^{i} \cdot (-1)^{k-i} \cdot x^{k+2017i}.\end{aligned}$$

Cặp số $(k;i)$ cần tìm thỏa mãn hệ $\begin{cases} 0 \le i \le k \le 2017 \\ k + 2017i = 1 \end{cases} \Rightarrow k = 1, i = 0.$

Vậy hệ số là $\mathrm{C}_{2017}^{1} \cdot \mathrm{C}_{1}^{0} \cdot (-1)$.

Tóm lại hệ số của x là $2018 - 2017 = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1 || $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{f^2(x)} - 2}$ là bao nhiêu?

A 2. **B** 0. **C** 1. **D** 3.

Lời giải.

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là số nghiệm của phương trình

$$\mathrm{e}^{f^2(x)} - 2 \Leftrightarrow f(x) = \pm \ln 2.$$

Vì $\ln 2 < 1$ nên theo bảng biến thiên, ta có phương trình $f(x) = \pm \ln 2$ có hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1;7;0)$ và $B(3;0;3)$. Phương trình đường phân giác trong của góc $\widehat{AOB}$ là

A $d\colon \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{7} = \dfrac{z}{4}$. **B** $d\colon \dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{3}$. **C** $d\colon \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{7}$. **D** $d\colon \dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{7} = \dfrac{z}{5}$.

Lời giải.

Ta có $OA = 5\sqrt{2}, OB = 3\sqrt{2}$. Lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{OA}$.

Khi đó tọa độ điểm M là $\left(\dfrac{3}{5}; \dfrac{21}{5}; 0\right)$.

Gọi N là trung điểm của MB thì $N\left(\dfrac{9}{5}; \dfrac{21}{10}; \dfrac{3}{2}\right)$.

Đường phân giác trong chính là đường thẳng qua hai điểm O, N.
Ta có $\overrightarrow{ON} = \left(\frac{9}{5}; \frac{21}{10}; \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{10} \times (6; 7; 5)$.
Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $d\colon \frac{x}{6} = \frac{y}{7} = \frac{z}{5}$.
Chọn đáp án D □

Câu 42. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{với } x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{với } x < 2 \end{cases}$. Biết hàm số có đạo hàm tại $x = 2$. Giá trị của $a^2 + b^2$ bằng

A. 18. **B. 20.** C. 25. D. 17.

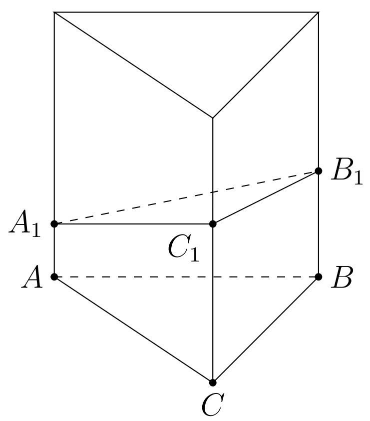
Lời giải.
Ta có $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^3 - x^2 - 8x + 10) = -2$.
Ta có $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = 4 + 2a + b$.
Để hàm số có liên tục tại $x = 2$ thì $4 + 2a + b = -2$.
Xét $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{(x^3 - x^2 - 8x + 10) - (4 + 2a + b)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x - 2} = 0$.
Và $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{(x^2 + ax + b) - (4 + 2a + b)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} (x + 2 + a) = 4 + a$.
Từ đó suy ra $4 + a = 0 \Leftrightarrow a = -4 \Rightarrow b = 2$.
Vậy $a^2 + b^2 = 20$.
Chọn đáp án B □

Câu 43. Cho $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - 10}{x - 1} = 5$. Giới hạn $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - 10}{(\sqrt{x} - 1)\left(\sqrt{4f(x) + 9} + 3\right)}$ bằng

A. 10. B. 2. C. $\frac{5}{3}$. **D. 1.**

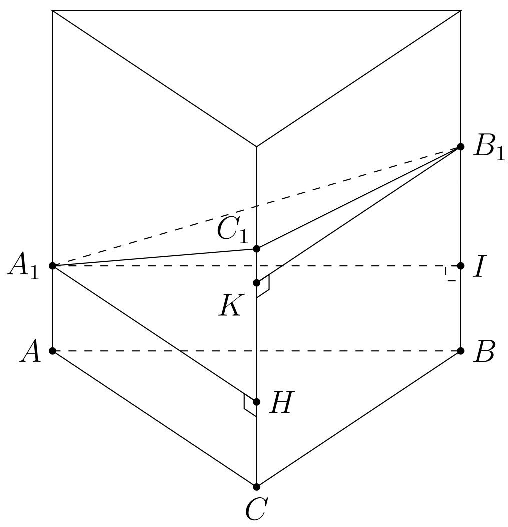
Lời giải.
Từ giả thiết ta có $f(1) = 10$.
Vậy
$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 10}{(\sqrt{x} - 1)\left(\sqrt{4f(x) + 9} + 3\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{(f(x) - 10) \cdot (\sqrt{x} + 1)}{(x - 1) \cdot \left(\sqrt{4f(x) + 9} + 3\right)} = \frac{5 \cdot (\sqrt{1} + 1)}{\sqrt{4f(1) + 9} + 3} = 1.$$
Chọn đáp án D □

Câu 44.
Đáy của một lăng trụ tam giác đều là tam giác ABC có cạnh bằng a. Trên các cạnh bên lấy các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt cách đáy một khoảng bằng $\frac{a}{2}, a, \frac{3a}{2}$ (tham khảo hình vẽ bên). Côsin góc giữa $(A_1B_1C_1)$ và (ABC) bằng



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{13}}{4}$.

Lời giải.



Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ và (ABC).
Theo công thức hình chiếu ta có $\cos\alpha = \dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}$.
Ta có $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu của A_1, B_1 lên các cạnh bên (xem hình vẽ).

Khi đó, ta có $\begin{cases} A_1C_1 = \sqrt{A_1H^2 + HC_1^2} = a\sqrt{2} \\ A_1B_1 = B_1C_1 = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \end{cases}$.

Ta được tam giác $A_1B_1C_1$ cân tại $B_1 \Rightarrow S_{A_1B_1C_1} = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{4}$.

Vậy $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

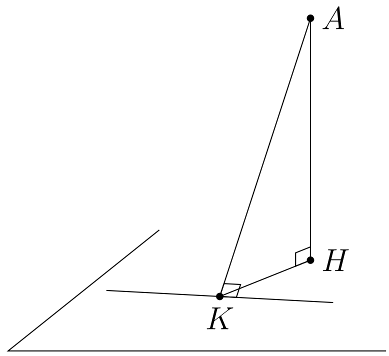
Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P)\colon (m-1)x+y+mz-1=0$ với m là tham số. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Khẳng định đúng trong bốn khẳng định dưới đây là

(A) $-6 < m < -2$. (B) $-2 < m < 2$. (C) $2 < m < 6$. (D) Không có m.

Lời giải.

Ta thấy $(P)\colon m(x+z) - x + y - 1 = 0$. Với mọi m, (P) luôn chứa một đường thẳng cố định $\Delta\colon \begin{cases} x = t \\ y = 1+t \\ z = -t \end{cases}$.



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A xuống (P) và Δ.
Ta luôn có $AH \leq AK$ không đổi.
Do vậy, $\mathrm{d}(A,(P))$ lớn nhất khi $H \equiv K$.
Phương trình mặt phẳng (Q) qua A và vuông góc với $\Delta\colon x+y-z=0$.

Tọa độ điểm K thỏa mãn hệ $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x=t \\ y=1+t \\ z=-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \\ z = \dfrac{1}{3} \\ t = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow K\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$.

Mặt phẳng (P) đi qua K và vuông góc với AK có phương trình là $4x+y+5z-1=0$.
Vậy $m=5$. □

Câu 46. Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $|z-1+2i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 8$. Tìm mô-đun của số phức $w = z_1 + z_2 - 2 + 4i$.

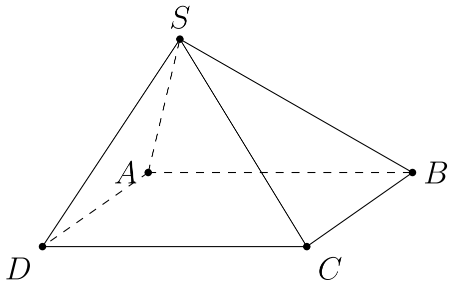
(A) $|w| = 13$. (B) $|w| = 10$. (C) $|w| = 16$. (D) $|w| = 6$.

Lời giải.

Gọi $I(1;-2)$ là điểm biểu diễn số phức $1-2i$ và A, B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2.

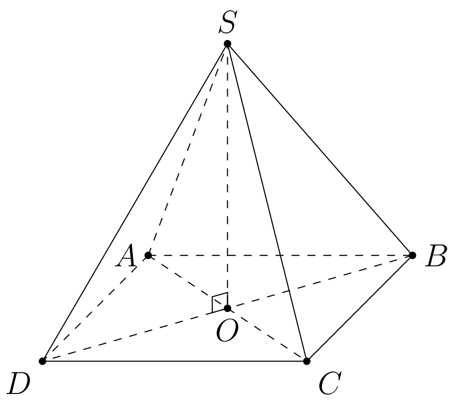
Vì $|z-1+2i|=5$ nên A, B thuộc $(I;5)$ và $|z_1-z_2|=8$ nên $AB=8$.
Ta có $|w|=|\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}|=2IH$ với H là trung điểm AB.
Mà $IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.
Vậy $|w|=6$.
Chọn đáp án D □

Câu 47.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành có $AB=a$, $SA=SB=SC=SD=\frac{a\sqrt{5}}{2}$ (tham khảo hình vẽ bên). Giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng



A $\dfrac{a^3}{3}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **C** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **D** $\dfrac{2a^3\sqrt{6}}{9}$.

Lời giải.
Gọi O là hình chiếu của S xuống mặt đáy.
Vì các cạnh bên bằng nhau nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp $ABCD$.
Vì vậy $ABCD$ là hình chữ nhật. Đặt $AD=x$. Khi đó



$$SO=\sqrt{SC^2-OC^2}=\sqrt{\frac{5a^2}{4}-\frac{a^2+x^2}{4}}=\sqrt{a^2-\frac{x^2}{4}}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}V_{S.ABCD}&=\frac{1}{3}\cdot a\cdot x\cdot\sqrt{a^2-\frac{x^2}{4}}\\&=\frac{1}{6}\cdot a\cdot\sqrt{x^2(4a^2-x^2)}\\&\le\frac{1}{6}\cdot a\cdot\left(\frac{x^2+4a^2-x^2}{2}\right)\\&\le\frac{a^3}{3}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 48. Từ 2 chữ số 1 và 8 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 8 chữ số sao cho không có 2 chữ số 1 nào đứng cạnh nhau?

A 110. **B** 54. **C** 55. **D** 108.

Lời giải.
TH 1: có 8 chữ số 8. Có 1 số.
TH 2: có 7 chữ số 8 và 1 chữ số 1. Có $C_8^7=8$ số.
TH 3: có 6 chữ số 8 và 2 chữ số 1.
Ta chọn 2 trong 7 vị trí giữa các chữ số 8 để đặt chữ số 1. Có $C_7^2=21$ số.
TH 4: có 5 chữ số 8 và 3 chữ số 1. Tương tự ta có C_6^3 số.

TH 5: có 4 chữ số 8 và 4 chữ số 1. Có C_4^4 số.
Tóm lại có tất cả 55 số.
Chọn đáp án C □

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $[1; +\infty)$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và $f'(x) \geq 3x^2+2x-5$ trên $[1; +\infty)$. Tìm số nguyên dương lớn nhất m sao cho $\min\limits_{x\in[3;10]} f(x) \geq m$ với mọi hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

A $m = 20$. **B** $m = 25$. **C** $m = 30$. **D** $m = 15$.

Lời giải.
Xét hàm số $g(x) = 3x^2 + 2x - 5$ trên $[1; +\infty)$. Ta có $g'(x) = 6x + 2 > 0 \forall x \in [1; +\infty)$.
Vì vậy $g(x) \geq g(1) = 0$. Như vậy $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [1; +\infty)$. Từ đó suy ra $\min\limits_{x\in[3;10]} f(x) = f(3)$.
Ta có

$$\begin{aligned}
& f'(x) - 3x^2 - 2x + 5 \geq 0 \\
\Rightarrow & \int\limits_1^3 \left(f'(x) - 3x^2 - 2x + 5\right) \mathrm{d}x \geq 0 \\
\Leftrightarrow & \left[f(x) - x^3 - x^2 + 5x\right]\Big|_1^3 \geq 0 \\
\Leftrightarrow & f(3) \geq 25.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x) \cdot \mathrm{e}^{f^3(x)-x^2-1} - \dfrac{2x}{f^2(x)} = 0$ và $f(0) = 1$. Tích phân $\int\limits_0^{\sqrt{7}} xf(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$. **B** $\dfrac{5\sqrt{7}}{4}$. **C** $\dfrac{13}{4}$. **D** $\dfrac{45}{8}$.

Lời giải.
Từ giả thiết ta có $3 \cdot f^2(x) \cdot f'(x) \cdot \mathrm{e}^{f^3(x)} = 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2+1}$.
Lấy nguyên hàm hai vế ta thu được $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1} + C$. Vì $f(0) = 1 \Rightarrow C = 0$.
Vậy $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$. Từ đó ta có

$$\int\limits_0^{\sqrt{7}} xf(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\sqrt{7}} x\sqrt[3]{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{45}{8}.$$

Chú ý tích phân trên tính bằng phép đổi biến $t = \sqrt[3]{x^2+1}$.
Chọn đáp án D □

HẾT

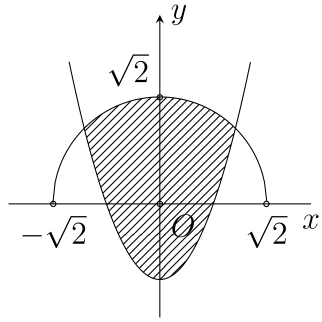
ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. C	3. A	4. A	5. D	6. B	7. D	8. C	9. A	10. D
11. B	12. C	13. C	14. A	15. B	16. D	17. A	18. C	19. C	20. A
21. D	22. C	23. A	24. B	25. A	26. C	27. A	28. C	29. A	30. A
31. B	32. A	33. B	34. C	35. D	36. C	37. A	38. D	39. C	40. A
41. D	42. B	43. D	44. A	45. C	46. D	47. A	48. C	49. B	50. D

109 ĐỀ THI THỬ TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA NĂM 2018 LẦN 1, TRƯỜNG THPT HOÀNG MAI, NGHỆ AN

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.
Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = 2x^2 - 1$ và nửa đường tròn có phương trình $y = \sqrt{2 - x^2}$ với $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ (phần gạch chéo trong hình vẽ). Diện tích của hình (H) bằng



Ⓐ $\dfrac{3\pi - 2}{6}$. Ⓑ $\dfrac{3\pi + 10}{3}$. Ⓒ $\dfrac{3\pi + 2}{6}$. **D** $\dfrac{3\pi + 10}{6}$.

Lời giải.
Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số là

$$\begin{aligned}
&2x^2 - 1 = \sqrt{2 - x^2}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} (2x^2 - 1)^2 = 2 - x^2 \\ 2x^2 - 1 \geq 0 \\ 2 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4 - 3x^2 - 1 = 0 \\ \dfrac{1}{2} \leq x^2 \leq x^2 \end{cases}\\
\Leftrightarrow &x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.
\end{aligned}$$

Khi đó diện tích của hình (H) là

$$\begin{aligned}
S_H &= \int\limits_{-1}^{1} |2x^2 - 1 - \sqrt{2 - x^2}|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} (-(2x^2 - 1) + \sqrt{2 - x^2})\,\mathrm{d}x\\
&= -\int\limits_{-1}^{1} (2x^2 - 1)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{2 - x^2}\,\mathrm{d}x\\
&= -\left(\frac{2}{3}x^3 - x\right)\Bigg|_{-1}^{1} + \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2\cos t \cdot \cos t\,\mathrm{d}t \quad (\text{Đổi biến } x = \sqrt{2}\sin t)\\
&= \frac{2}{3} + \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos(2t) + 1)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{2}\sin(2t) + t\right)\Bigg|_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi + 10}{6}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 2. Biết $\displaystyle\int\limits_{1}^{2} \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = a\sqrt{5} + b\sqrt{2} + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $P = a + b + c$ là

(A) $-\dfrac{5}{2}$. (B) $\dfrac{7}{2}$. (C) $\dfrac{5}{2}$. (D) 2.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } a\sqrt{5}+b\sqrt{2}+c &= \int_1^2 \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}-1}\\ &= \int_1^2 \frac{x^3(\sqrt{x^2}+1)\,\mathrm{d}x}{x^2+1-1}\\ &= \int_1^2 x(\sqrt{x^2+1}+1)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_1^2 (\sqrt{x^2+1})^2\,\mathrm{d}(\sqrt{x^2+1}) + \int_1^2 x\,\mathrm{d}x\\ &= \left.\frac{(\sqrt{x^2+1})^3}{3}\right|_1^2 + \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2\\ &= \frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{3}+\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Do đó $a=\dfrac{5}{3}$, $b=-\dfrac{2}{3}$ và $c=\dfrac{3}{2}$ hay $P=\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng d đi qua hai điểm $A(3;0;1)$ và $B(-1;2;3)$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

(A) $\vec{u}=(2;-1;-1)$. (B) $\vec{u}=(2;1;0)$. (C) $\vec{u}=(-1;2;0)$. (D) $\vec{u}=(-1;2;1)$.

Lời giải.

Do đường thẳng d đi qua hai điểm A, B nên nếu $\vec{u}$ là véc-tơ chỉ phương của d thì $\vec{u}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}=(-4;2;2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-(m+1)\dfrac{x^2}{2}+(m+1)x-3$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

(A) 5. (B) 4. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Ta có: $y'=x^2-(m+1)x+(m+1)$.

Do tam thức bậc 2 luôn có hữu hạn nghiệm nên để hàm số đồng biến trên đoạn $(1;+\infty)$ thì

$$\begin{aligned}&y'\ge 0\ \forall x\in(1;+\infty)\\ \Leftrightarrow\ &x^2-(m+1)x+(m+1)\ge 0\ \forall x\in(1;+\infty)\\ \Leftrightarrow\ &x^2\ge (m+1)(x-1)\ \forall x\in(1;+\infty)\\ \Leftrightarrow\ &x+\frac{1}{x-1}\ge m\ \forall x\in(1;+\infty).\end{aligned}$$

Xét hàm số $g(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$ trên $(1; +\infty)$, ta có:
$g'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2}$.
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x = 2$.
Bảng biến thiên:

x	1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $m \leq 3$ hay có 3 giá trị nguyên dương của m.
Chọn đáp án C □

Câu 5. Phương trình $(1 + \cos 4x)\sin 2x = 3\cos^2 2x$ có tổng số nghiệm trong đoạn $[0; \pi]$ là

A $\dfrac{\pi}{3}$. B $\dfrac{3\pi}{2}$. C π. D $\dfrac{2\pi}{3}$.

Lời giải.
Ta có:

$$(1 + \cos 4x)\sin 2x = 3\cos^2 2x \Leftrightarrow 2\cos^2 2x \sin 2x = 3\cos^2 2x$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z}) \\ \sin 2x = \dfrac{3}{2}\ \text{(Loại)}. \end{array}\right.$$

Do $x \in [0; \pi]$ nên $x \in \left\{\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right\}$ nên tổng các nghiệm là π.
Chọn đáp án C □

Câu 6. Một tổ có 10 học sinh. Số cách chọn một nhóm trực nhật gồm 2 học sinh từ tổ đó là

A 10^2. B A_{10}^8. C C_{10}^2. D A_{10}^2.

Lời giải.
Nhóm học sinh trực nhật gồm 2 em nên ta không cần quan tâm thứ tự.
Do đó số cách chọn nhóm trực nhật gồm hai em học sinh là tổ hợp chập 2 của 10 hay có C_{10}^2 cách.
Chọn đáp án C □

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$ mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 2; 3)$ và song song với mặt phẳng $(Q)\colon 2x + 3y - 4z - 5 = 0$ có phương trình là

A $2x + 3y + 4z - 14 = 0$. B $2x - 3y - 4z + 6 = 0$.
C $2x + 3y - 4z - 4 = 0$. D $2x + 3y - 4z + 4 = 0$.

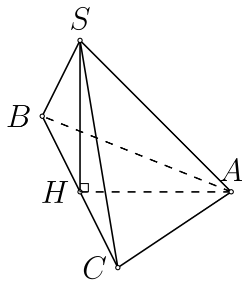
Lời giải.
Mặt phẳng song song với mặt phẳng $(Q)\colon 2x + 3y - 4z - 5 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{u} = (2; 3; -4)$.

Mà mặt phẳng đó qua $A(1;2;3)$ nên nó có phương trình là
$2(x-1)+3(y-2)-4(z-3)=0 \Leftrightarrow 2x+3y-4z+4=0$.
Chọn đáp án D □

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC. Biết tam giác SBC đều, góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) là

A $45°$. **B** $90°$. **C** $60°$. **D** $30°$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm BC, khi đó H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC).
$\Rightarrow$ góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{SAH}$.
Hai tam giác đều ABC và SBC chung cạnh BC có hai trung tuyến ứng với cạnh BC lần lượt là AH, SH nên $SH=AH$ hay tam giác SAH vuông cân tại H.
Vậy $\widehat{SAH}=45°$.
Chọn đáp án A □

Câu 9. Trên đồ thị (C): $y=\dfrac{x-1}{x-2}$, số điểm M mà tiếp tuyến với (C) song song với đường thẳng d: $x+y=1$ là

A 2. **B** 4. **C** 1. **D** 0.

Lời giải.

Ta có: $y'=\dfrac{-1}{(x-2)^2}$
Giả sử $M(x_0,y_0)$ thuộc đồ thị (C), khi đó thì phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là

$$y=\frac{-1}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+y_0.$$

Để tiếp tuyến song song với đường thẳng d: $x+y=1$ thì $\dfrac{-1}{(x_0-2)^2}=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3. \end{array}\right.$
Khi $x=1$ thì tiếp tuyến đó là đường thẳng d nên loại. Vậy có một điểm M thỏa mãn.
Chọn đáp án C □

Câu 10. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA=b$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A $\dfrac{a^2b}{3}$. **B** $\dfrac{a^2b}{12}$. **C** $\dfrac{a^2b}{4}$. **D** $\dfrac{ab^2}{12}$.

Lời giải.

Thể tích hình chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SA\cdot \mathrm{S}_{ABCD}=\dfrac{1}{3}b\cdot a^2=\dfrac{a^2b}{3}$.
Chọn đáp án A □

Câu 11. Giá trị tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x+4}{x+3}\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\ln\dfrac{5}{3}$. **B** $1+\ln\dfrac{4}{3}$. **C** $\ln\dfrac{3}{5}$. **D** $1-\ln\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

Ta có: $\int\limits_0^1 \frac{x+4}{x+3}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(1+\frac{1}{x+3}\right)\,\mathrm{d}x = (x+\ln|x+3|)\Big|_0^1 = 1+\ln\frac{4}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(-3;-1;-1)$. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm $A'(a;b;c)$. Khi đó giá trị của $2a+b+c$ là

A -5. B -4. C -2. D -3.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oyz) có phương trình $x=0$ nên hình chiếu của điểm $A(-3;-1;-1)$ lên mặt phẳng (Oyz) là điểm $A'(0;-1;-1)$. Khi đó $2a+b+c=-2$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x+m$ có đồ thị là (C). Giả sử (C) cắt trục hoành tại ba điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 với $x_1<x_2<x_3$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A $0<x_1<1<x_2<3<x_3<4$. B $1<x_1<x_2<3<x_3<4$.

C $x_1<0<1<x_2<3<x_3<4$. D $1<x_1<3<x_2<4<x_3$.

Lời giải.

Ta có: $y'=3x^2-12x+9$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3. \end{array}\right.$

Để hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt thì $y_{\text{CĐ}}\cdot y_{CT}<0$, tức là

$$y(1)\cdot y(3)<0 \Leftrightarrow (m+4)m<0 \Leftrightarrow -4<m<0.$$

Khi đó với mỗi $i=1,2,3$ thì

$$-4<m=-x_i^3+6x_i^2-9x_i<0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_i^3-6x_i^2+9x_i>0 \\ x_i^3-6x_i^2+9x_i-4<0. \end{cases}$$

- $x_i^3-6x_i^2+9x_i>0 \Leftrightarrow x_i(x_i-3)^2>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_i>0 \\ x_i\neq 3. \end{cases}$
- $x_i^3-6x_i^2+9x_i-4<0 \Leftrightarrow (x_i-4)(x_i-1)^2<0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_i<4 \\ x_i\neq 1. \end{cases}$

$\Rightarrow 0<x_i<4\ \forall i=1,2,3$.

Hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ $x_1<x_2<x_3$; có hai điểm cực trị là 1 và 3 nên $x_1<1<x_2<3<x_3$.

Vậy $0<x_1<1<x_2<3<x_3<4$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x}+2x$ là

A $2\ln|x|+x^2+\text{C}$. B $\ln|x|+2x^2+\text{C}$. C $\ln|x|+x^2+\text{C}$. D $\ln|x^2|+2x+\text{C}$.

Lời giải.

$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{x}+2x\right)\mathrm{d}x = \int\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int 2x\,\mathrm{d}x = \ln|x|+x^2+\mathrm{C}.$

Chọn đáp án C □

Câu 15. Một người gửi 200 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được lập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau ba năm người đó được lĩnh số tiền (cả gốc lẫn lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

A 238.810.000 đồng. B 238.811.000 đồng. C 238.203.000 đồng. D 238.204.000 đồng.

Lời giải.

Do nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được lập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo nên sau 1 năm người đó gửi x triệu đồng thì số tiền để tính lãi năm sau là $x+x\cdot 6\% = x(1+6\%)$.

$\Rightarrow$ Số tiền người đó nhận được sau 3 năm là: $200000000\cdot(1+6\%)^3 = 238203200$ đồng.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Để $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+1}+4}{mx-2}=\frac{1}{2}$ thì giá trị m thuộc tập hợp nào?

A $[3;6]$. B $[-3;0]$. C $[-6;-3]$. D $[1;3]$.

Lời giải.

Do $x\to-\infty$ nên coi $x<0$. Khi đó:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+1}+4}{mx-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x}+\dfrac{4}{x}}{m-\dfrac{2}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{4}{x}}{m-\dfrac{2}{x}}=\frac{-2}{m}.$$

Vậy $m=-4$.

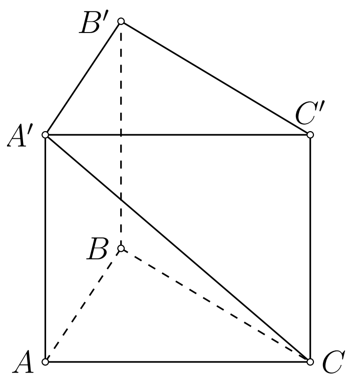
Chọn đáp án C □

Câu 17.

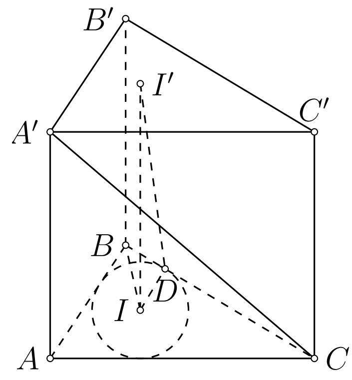
Cho một lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Góc giữa $A'C$ và mặt phẳng đáy bằng 60°. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón có đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC và đỉnh là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.

A $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{333}}{36}$. B $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{333}}{6}$.

C $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{111}}{6}$. D $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{111}}{36}$.



Lời giải.



Gọi I, I' lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và $A'B'C'$.
Do tam giác $A'B'C'$ đều nên I' cũng là trọng tâm tam giác $A'B'C'$.
Gọi D là hình chiếu vuông góc của I lên BC. Khi đó:
Hình nón cần tìm S_{xq} có đỉnh là I', đường cao là $h = II'$, bán kính đáy $r = ID$ và đường sinh $l = I'D$.
Do tam giác ABC đều nên $BD = \dfrac{a}{2}$ và $\widehat{IBD} = 30°$,
do đó $r = BD \tan IBD = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ta có: $A'A \perp (ABC)$ nên góc giữa $A'C$ và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{A'CA}$ hay $\widehat{A'CA} = 60°$
$\Rightarrow h = II' = AA' = AC \tan 60 = a\sqrt{3} \Rightarrow l = \sqrt{r^2 + h^2} = \dfrac{a\sqrt{111}}{6}$.
Khi đó: $S_{xq} = \pi r l = \dfrac{\pi a^2 \sqrt{37}}{12} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{333}}{36}$.
Chọn đáp án A □

Câu 18. Hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^3 - \dfrac{2}{x}\right)^n$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^{n-2} = 78$ là

A. 112640. B. 112643. **C. −112640.** D. −112643.

Lời giải.

Ta có: $\mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^{n-2} = 78 \Leftrightarrow n + \dfrac{n(n-1)}{2} = 78 \Leftrightarrow n^2 + n - 156 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 12 \text{ (thỏa mãn)} \\ n = -13 \text{ (loại)}.\end{array}\right.$

Khi đó: $\left(x^3 - \dfrac{2}{x}\right)^n = \left(x^3 - \dfrac{2}{x}\right)^{12} = \sum\limits_{k=0}^{12} \mathrm{C}_{12}^k (x^3)^{12-k} \cdot (-2 \cdot x^{-1})^k = \sum\limits_{k=0}^{12} \mathrm{C}_{12}^k (-2)^k \cdot x^{36-4k}$.
Do số hạng không chứa x tức là chứa x mũ 0 nên $36 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 9$.
Khi đó: số hạng không chứa x trong khai triển trên là $\mathrm{C}_{12}^9 \cdot (-2)^9 = -112640$.
Chọn đáp án C □

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$. Giá trị $f'(0)$ là

A. 0. B. Không tồn tại. **C. $\dfrac{1}{2}$.** D. 1.

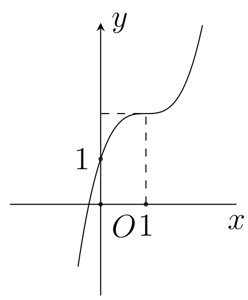
Lời giải.

$f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x^2} \overset{\text{nhân liên hợp}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} + 1} = \dfrac{1}{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 20.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A. $y = x^4 - 3x^2 + 1$. **B. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.**
C. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. D. $y = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$.



Lời giải.

Ta thấy hàm số đồng biến nên tính trực tiếp y' ta loại trừ các phương án A, C, D cụ thể:

a) Hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 1$ có $y' = 4x^3 - 6x^2$ loại do $y'(1) < 0$.

b) Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ có $y' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$ nhận.

c) Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ có $y' = -3x^2 + 6x$ loại do $y'(3) < 0$.

d) Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ có $y' = 3x^2 - 6x - 3$ loại do $y'(0) < 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 21. Tích phân $\displaystyle\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x + 2)}$ bằng

A) $\ln 2$. B) $\ln \dfrac{3}{2}$. C) 0. D) $\ln 3$.

Lời giải.

Đặt $t = \ln x + 2 \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

Đổi cận $x = 1$ thì $t = 2$ và $x = \mathrm{e}$ thì $t = 3$.

$$\Rightarrow \int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x + 2)} = \int\limits_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t|\Big|_2^3 = \ln\frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$.

B) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$.

C) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$.

D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

a) Sai vì khoảng $(-1; 3)$ không nằm trong tập xác định.

b) Sai vì trong khoảng $(2; +\infty)$ thì khoảng $(2; 3)$ hàm nghịch biến.

c) Đúng.

d) Sai vì trong khoảng $(-1; 0)$ hàm nghịch biến.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

A $(0;5)$. **B** $(5;0)$. **C** $(1;4)$. **D** $(-1;4)$.

Lời giải.

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại điểm $(0;5)$ và đạt cực tiểu tại các điểm $(1;4)$, $(-1;4)$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4

Giá trị của m để phương trình $f(x) - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt là

A $-3 \geq m \geq 2$. **B** $-3 < m < 2$. **C** $-4 \geq m \geq 2$. **D** $-4 < m < 2$.

Lời giải.

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $-3 < m < 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Cho a, b là các số thực dương khác 1. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A $\log_a b \log_b a = 1$. **B** $\log_{a^2} b^3 = \dfrac{2}{3}\log_a b$.

C $\log_a a^2 b = 2 + \log_a b$. **D** $\log_a \dfrac{b}{a} = \log_a b - 1$.

Lời giải.

Đáp án **B** sai vì $\log_{a^2} b^3 = \dfrac{3}{2}\log_a b$.

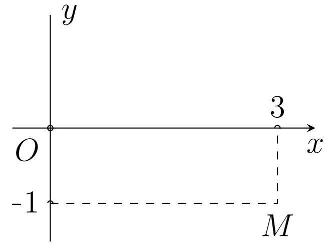
Chọn đáp án B □

Câu 26.

Điểm M trong hình là điểm biểu diễn số phức nào?

A $z = (1+2i)(1-i)$. **B** $2z - 6 = (1-i)^2$.

C $z = \dfrac{1+i}{1-i}$. **D** $z = (1+i)(2-3i)$.



Lời giải.

Điểm M là điểm biểu diễn số phức $z = 3 - i$, do đó:

a) $z = (1+2i)(1-i) = 3+i$ loại.

b) $2z - 6 = (1-i)^2 = -2i \Rightarrow z = 3 - i$ thỏa mãn.

c) $z = \dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{2} = i$ loại.

d) $z = (1+i)(2-3i) = 5 - i$ loại.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Giá trị $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+x}{x^2-1}$ là

A -2. B -1. C 2. D 1.

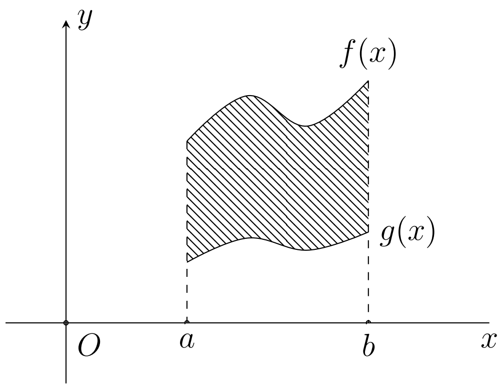
Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}} = 2.$

Chọn đáp án C □

Câu 28.

Công thức nào sau đây để tính diện tích hình phẳng S (phần tô đậm trong hình vẽ)



A $S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

B $S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

C $S = \left|\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right| - \left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

D $S = \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có: $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Trong đoạn $[a;b]$ thì $f(x) > g(x)$ nên $f(x) - g(x) > 0\ \forall x \in [a;b]$, do đó

$$S = \int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án A □

Câu 29. Tích của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \dfrac{4}{x}$ trên đoạn $[1;3]$ là

A 6. B $\dfrac{65}{3}$. C $\dfrac{52}{3}$. D 20.

Lời giải.

$y' = 1 - \dfrac{4}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 2$ vì $x \in [1;3]$.

Ta có bảng biến thiên:

x	1		2		3
y'		$-$	0	$+$	
y	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	$\frac{13}{3}$

Vậy giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số lần lượt là 4 và 5.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A $x-2y-4z+6=0$. **B** $x+2y-4z+1=0$.
C $x+y+2z-5=0$. **D** $x+2y-4z+6=0$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;-3;-1)$ và $\overrightarrow{AC}=(-2;-1;-1)$ nên $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(2;4;-8)$.

Véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng (ABC) cùng vuông góc với $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ nên $\vec{n}$ cùng phương với $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]$.

Chọn $\vec{n}=(1;2;-4)$ nên phương trình mặt phẳng (ABC) là

$$(x-2)+2(y+2)-4(z-1)=0 \Leftrightarrow x+2y-4z+6=0.$$

Chọn đáp án A □

Câu 31. Đồ thị của hàm số nào dưới đây không có tiệm cận đứng?

A $y=\dfrac{x^3+2x^2-1}{x}$. **B** $y=\dfrac{2}{x-2}$. **C** $y=\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$. **D** $y=\dfrac{x^3-1}{x+1}$.

Lời giải.

a) Hàm số $y=\dfrac{x^3+2x^2-1}{x}$ có tiệm cận đứng $x=0$.

b) Hàm số $y=\dfrac{2}{x-2}$ có tiệm cận đứng $x=2$.

c) Hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$ không có tiệm cận đứng.

d) Hàm số $y=\dfrac{x^3-1}{x+1}$ có tiệm cận đứng $x=-1$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Tìm m để phương trình $4^x-2^{x+3}+3=m$ có đúng hai nghiệm $x\in(1;3)$?

A $-9<m<3$. **B** $3<m<9$. **C** $-13<m<-9$. **D** $-13<m<3$.

Lời giải.

Đặt $t=2^x$ ta có phương trình $t^2-8t+3=m$ với $t\in(2;8)$.

Xét hàm số $f(t)=t^2-8t+3$ trên $(2;8)$, ta có:

$f'(t)=2t-8$; $f'(t)=0\Leftrightarrow 2t-8=0\Leftrightarrow t=4$.

Ta có bảng biến thiên:

t	2		4		8
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-9	$\searrow$	-13	$\nearrow$	3

Nhìn vào bảng biến thiên thì phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $-13 < m < -9$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Cho hình nón có chiều cao $h = a\sqrt{3}$ và bán kính đáy bằng a. Diện tích toàn phần của hình nón đã cho là

A. $3\pi a^2$. B. $\pi a^2\sqrt{3}$. C. $\pi(1+\sqrt{2})a^2$. D. πa^2.

Lời giải.

Độ dài đường xiên của hình nón là $l = \sqrt{h^2+r^2} = \sqrt{3a^2+a^2} = 2a$.

Khi đó, diện tích toàn phần của hình nón là $S_{\text{toàn phần}} = \pi rl + \pi r^2 = 3\pi a^2$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Tập nghiệm của phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-4} < 8$ là

A. $S = (-1; +\infty)$. B. $S = (-\infty; -1)$. C. $S = (-\infty; 1)$. D. $S = (1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-4} < 8 \Leftrightarrow 2^{x-4} > \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow x-4 > \log_2 \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow x-4 > -3 \Leftrightarrow x > 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z+2| + 2|z-2|$

A. $\max T = 5\sqrt{2}$. B. $\max T = 2\sqrt{10}$. C. $\max T = 3\sqrt{5}$. D. $\max T = 2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Khi đó, do $|z| = 1$ nên $a^2 + b^2 = 1$.

Ta có: $T = \sqrt{(a+2)^2+b^2} + 2\sqrt{(a-2)^2+b^2}$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski ta có:

$$\left[\sqrt{(a+2)^2+b^2} + 2\sqrt{(a-2)^2+b^2}\right]^2 \leq (1^2+2^2)\left[(a+2)^2+b^2+(a-2)^2+b^2\right] = 5\left[2(a^2+b^2)+8\right] = 50.$$

Vậy $\max T = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log^2 u_1 + \log u_1 - 6 = 0$ và $u_{n+1} = u_n + 5$ $\forall n \geq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của n để $u_n < 500$.

A. 80. B. 100. C. 99. D. 82.

Lời giải.

Theo công thức về cấp số cộng thì $u_n = u_1 + 5(n-1)$ $\forall n \geq 2$.

$$\log^2 u_1 + \log u_1 - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log u_1 = 2\\ \log u_1 = -3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u_1 = 100\\ u_1 = \dfrac{1}{1000}\end{array}\right..$$

Để n lớn nhất thỏa mãn $u_n < 500$ thì u_1 phải nhỏ nhất hay $u_1 = \dfrac{1}{1000}$.

Khi đó: $u_n < 500 \Leftrightarrow \dfrac{1}{1000} + 5(n-1) < 500 \Leftrightarrow n < 101 - \dfrac{1}{5000}$.

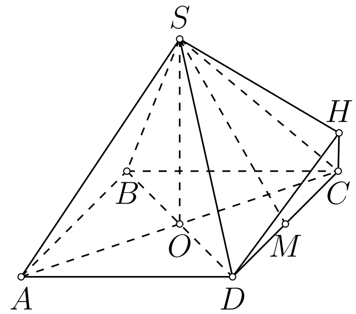
Vậy n lớn nhất là 100.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a tâm O và cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm CD, H là điểm đối xứng với O qua SM. Thể tích khối đa diện $ABCDSH$ bằng

A $\dfrac{5a^3\sqrt{10}}{24}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{10}}{18}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{10}}{24}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{10}}{12}$.

Lời giải.



Do H,O đối xứng với nhau qua SM nên

$$V_{SHCD} = V_{SOCD} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD}.$$

Khi đó: $V_{ABCDSH} = V_{S.ABCD} + V_{SHCD} = \dfrac{5}{4}V_{S.ABCD}$.

Mà $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $OA = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$\Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{10}}{6}.$$

Vậy $V_{ABCDSH} = \dfrac{5}{4}V_{S.ABCD} = \dfrac{5a^3\sqrt{10}}{24}$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$ và $SA = SB = SD$ với D là trung điểm BC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\dfrac{3a}{4}$. Tính cos góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

A $\dfrac{2\sqrt{5}}{11}$. **B** 3. **C** $\dfrac{\sqrt{65}}{13}$. **D** $\dfrac{\sqrt{5}}{33}$.

Lời giải.

Do tam giác ABC vuông tại A có D là trung điểm BC và $\widehat{ACB} = 60^\circ$ nên tam giác ABD đều cạnh a và $BC = 2a$, $CA = a\sqrt{3}$.

Dựng $SH \perp (ABC)$ với $H \in (ABC)$.

$\Rightarrow H$ là tâm tam giác đều BAD do $SA = SB = SD$.

Gọi hình chiếu của H lên AB, AC thứ tự là E, F.

Gọi M là trung điểm đoạn BD.

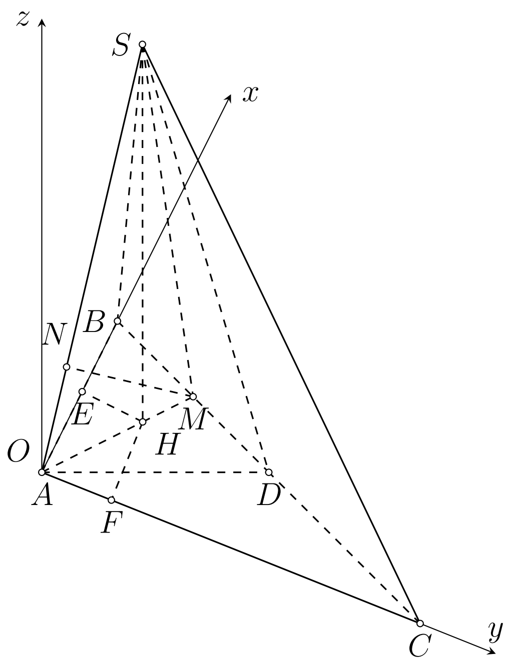
$\Rightarrow AM = \sqrt{BA^2 - BM^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow AH = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $HE = HM = \dfrac{AM}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ta có: $SH \perp BC$, $AM \perp BC$ nên $BC \perp (SAM)$.

Kẻ $MN \perp SA$ $(N \in SA)$ thì MN là đường vuông góc chung của SA và BC hay $MN = \dfrac{3a}{4}$.

$\Rightarrow NA = \sqrt{MA^2 - MN^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.



Trong tam giác SAM có MN, SH là hai đường cao nên $AH \cdot AM = AN \cdot AS$.

$\Rightarrow AS = \dfrac{AH \cdot AM}{AN} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a$.

Chọn hệ trục tọa độ với gốc tại A và các trục tọa độ như hình vẽ với tia Ox trùng với tia AB, tia Oy trùng với tia AC và tia Oz vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có hướng theo $\overrightarrow{HS}$. Các đơn vị trên các trục bằng nhau và bằng a.

Khi đó: $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;\sqrt{3};0)$.

Do $HF = AE = \dfrac{a}{2}$, $HE = HM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ và $SH = a$ nên $S\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{6};1\right)$.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAC) là

$$\overrightarrow{n_1} = [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}] = \left(\sqrt{3};0;\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right).$$

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBC) là

$$\overrightarrow{n_2} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{SC}] = \left(-\sqrt{3};-1;\dfrac{-\sqrt{3}}{3}\right).$$

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC), ta có:

$$\cos\alpha = |\cos(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2})| = \dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|} = \dfrac{\sqrt{65}}{13}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 39. Giá trị m để phương trình $\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0$ có nghiệm $x \in \left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$ là

A. $0 \le m < 1$. B. $-1 < m < 0$. C. $0 < m \le 1$. D. $-1 \le m < 0$.

Lời giải.

$$\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - (2m+1)\cos x + m = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - m)(2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow m = \cos x \text{ vì } \cos x < 0\ \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right).$$

Xét hàm số $y = \cos x$ trên $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, ta có:
$y' = -\sin x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi$.
Ta có bảng biến thiên:

x	$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
y'		$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Nhìn vào bảng biến thiên ta được $-1 \leq m < 0$.
Chọn đáp án D □

Câu 40. Có 10 học sinh lớp A, 8 học sinh lớp B được xếp ngẫu nhiên vào một bản tròn (hai cách xếp được coi là giống nhau nếu cách xếp này là kết quả của cách xếp kia khi ta thực hiện phép quay bàn ở tâm một góc nào đó). Tính xác suất để không có hai học sinh bất kì nào của lớp B đứng cạnh nhau.

A. $\frac{10!}{18!}$. B. $\frac{9!\mathrm{A}_{10}^8}{17!}$. C. $\frac{7!}{17!}$. D. $\frac{10!\mathrm{A}_{11}^8}{18!}$.

Lời giải.
Để tránh đi các khả năng bị trùng khi ta thực hiện đếm thì ta thực hiện thao tác cố định một học sinh xác đinh ở lớp A tại 1 vị trí. Bây giờ ta chuyển về bài toán: *Xếp 9 học sinh lớp A và 8 học sinh lớp B thành một hàng dọc với bạn đứng đầu là một bạn C khác 17 bạn trên. Tính xác suất để không có hai học sinh bất kì nào của lớp B đứng cạnh nhau.*
Không gian mẫu là $|\Omega| = 17!$.
Ta cần đếm số cách xếp để không có hai học sinh bất kì nào của lớp B đứng cạnh nhau, tức là giữa hai học sinh lớp B luôn có ít nhất một học sinh lớp A. Do đó ta thực hiện thuật toán để tính số cách xếp như sau:

- Chọn 8 vị trí bất kì trong 10 vị trí để xếp các học sinh lớp B và đánh số từ trái qua phải là $x_1, x_2, \cdots, x_8$. Có C_{10}^8 cách chọn.
- Thêm vào ngay bên trái các vị trí x_i $i = 2, 3, \cdots, 8$ một vị trí để cho một học sinh của lớp A xếp vào. Có 1 cách thêm.
- Xếp 8 học sinh lớp B vào 8 vị trí $x_1, x_2, \cdots, x_8$. Có 8! cách xếp.
- Xếp 9 học sinh lớp A vào 9 vị trí còn lại. Có 9! cách xếp.

Vậy có $9! \cdot 8! \cdot \mathrm{C}_{10}^8 = 9!\mathrm{A}_{10}^8$ cách xếp thỏa mãn hay xác suất cần tìm là $\frac{9!\mathrm{A}_{10}^8}{17!}$.
Chọn đáp án B □

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $T = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất là

A $x+2y+3z-14=0$.
B $3x+2y+z-10=0$.
C $6x+3y+2z-18=0$.
D $6x-3y+2z-6=0$.

Lời giải.

Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ do OA, OB, OC khác 0.

Khi đó phương trình mặt phẳng (P) qua A, B, C có phương trình là $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Mà $M\in(P)$ nên $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=1$, do đó theo bất đẳng thức Bunhiacopski ta có:

$$T=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{14}(1^2+2^2+3^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq\frac{1}{14}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)^2=\frac{1}{14}.$$

T đạt giá trị nhỏ nhất nên ta có dấu bằng xảy ra, tức là

$$\begin{cases}x=2y=3z\\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=14\\ b=\dfrac{14}{2}\\ c=\dfrac{14}{3}.\end{cases}$$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $x+2y+3z-14=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Một hộp đựng 20 quả cầu trong đó có 6 quả cầu màu trắng, 4 quả cầu màu xanh và 10 quả cầu màu đỏ. Lấy ngẫu nhiên lần lượt 3 quả cầu từ hộp đó. Xác suất để trong 3 quả cầu được chọn có đủ 3 màu là

A $\dfrac{3}{20}$.
B $\dfrac{24}{19}$.
C $\dfrac{2}{57}$.
D $\dfrac{4}{19}$.

Lời giải.

Có $3!=6$ cách sắp thứ tự lấy 3 quả cầu khác màu mà với mỗi thứ tự thì xác suất để chọn được 3 quả cầu khác màu luôn không đổi và bằng $\dfrac{4}{20}\cdot\dfrac{6}{19}\cdot\dfrac{10}{18}$ nên xác suất cần tìm là

$$6\cdot\frac{4}{20}\cdot\frac{6}{19}\cdot\frac{10}{18}=\frac{4}{19}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 43. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x+y-2=0$. Hỏi phép dời hình có được bằng cách thực hiện phép đối xứng tâm O và phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}=(3;2)$ biến đường thẳng d thành đường thẳng nào trong các đường thẳng sau?

A $x+y+2=0$.
B $x-y+2=0$.
C $3x+3y-2=0$.
D $x+y-3=0$.

Lời giải.

Gọi đường thẳng thu được là d'.

Xét điểm $A(1;1)\in d$.

Gọi B là ảnh của A qua phép đối xứng tâm O và C là ảnh của B qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}=(3;2)$. Ta có:

- O là trung điểm AB nên $2x_O=x_A+x_B$ và $2y_O=y_A+y_B$ hay $B(-1;-1)$.
- $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$ nên $x_C-x_B=3$ và $y_C-y_B=2$ hay $C(2;1)$.

Suy ra $C(2;1)$ thuộc d', mà ảnh của đường thẳng qua phép đối xứng tâm và tịnh tiến là các đường thẳng song song nên $d' \parallel d$ hay d' có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;1)$.
Vậy phương trình d' là $x + y - 3 = 0$.
Chọn đáp án D □

Câu 44. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt[3]{4\sin x + m} + \sin x = \sqrt[3]{\sin^3 x + 4\sin x + m - 8} + 2$ có nghiệm thực?

A 18. B 20. C 21. D 22.

Lời giải.
Đặt $a = \sqrt[3]{4\sin x + m}$ và $b = \sqrt[3]{\sin^3 x + 4\sin x + m - 8}$.
Khi đó: $a^3 + \sin^3 x = b^3 + 8$ và

$$\begin{aligned} & a + \sin x = b + 2 \Leftrightarrow (a+\sin x)^3 = (b+2)^3 \\ \Leftrightarrow & a^3 + \sin^3 x + 3a\sin x(a + \sin x) = b^3 + 8 + 3\cdot b\cdot 2(b+2) \\ \Leftrightarrow & (a+\sin x)(a\sin x - 2b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + \sin x = 0 \\ a\sin x - 2b = 0. \end{array}\right. \end{aligned}$$

TH 1. $a + \sin x = 0 \Leftrightarrow m = -\sin^3 x - 4\sin x$.
Do $\sin x \in [-1;1]$ nên $-\sin^3 x - 4\sin x \in [-5;5]$ hay phương trình có nghiệm khi $m \in [-5;5]$.
TH 2. $a\sin x - 2b = 0 \Leftrightarrow \sin^3 x(4\sin x + m) = 8(\sin^3 x + 4\sin x + m - 8)$
$\Leftrightarrow \left(8 - \sin^3 x\right) m = 4\sin^4 x - 8\sin^3 x - 32\sin x + 64 \Leftrightarrow \left(8 - \sin^3 x\right) m = 4(\sin x - 2)\left(\sin^3 - 8\right)$
$\Leftrightarrow m = 8 - 4\sin x$.
Do $\sin x \in [-1;1]$ nên $(8 - 4\sin x) \in [4;12]$ hay phương trình có nghiệm khi $m \in [4;12]$.
Từ hai trường hợp ta thu được $m \in [-5;12]$ hay có 18 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.
Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1;4\}$ có $f'(x) = \dfrac{2x-5}{x^2 - 5x + 4}$ thỏa mãn $f(0) = 1$. Giá trị $f(2)$ bằng

A $1 - \ln 2$. B 2. C $1 + 3\ln 2$. D $-1 + 3\ln 2$.

Lời giải.
Ta có: $f(x) = \displaystyle\int \frac{2x-5}{x^2-5x+4}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4}\right)\mathrm{d}x = \ln|x-1| + \ln|x-4| + \mathrm{C}$ với $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.
Do $f(0) = 1$ nên $\mathrm{C} = 1 - 2\ln 2$ hay $f(x) = \ln|x-1| + \ln|x-4| + 1 - 2\ln 2$.
Khi đó: $f(2) = 1 - \ln 2$.
Chọn đáp án A □

Câu 46. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Độ dài đoạn $A'G$ là

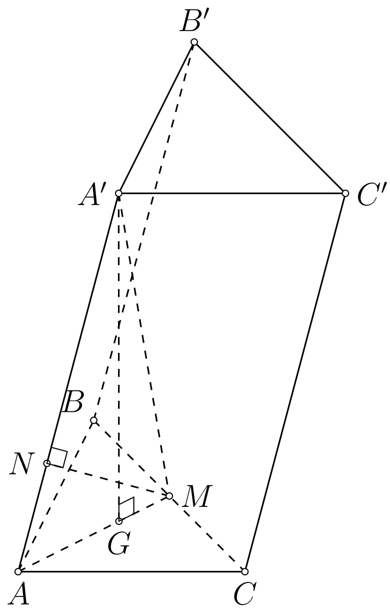
A $\dfrac{2a}{3}$. B $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. C $\dfrac{a}{3}$. D $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Do tam giác ABC đều nên G là tâm tam giác ABC.
Gọi M là trung điểm BC. Khi đó:

$$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

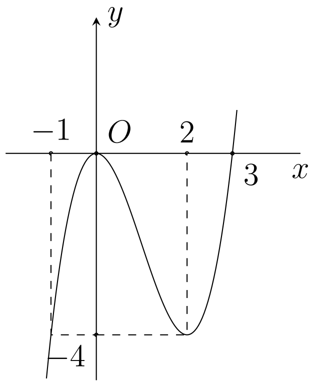
$\Rightarrow AG = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
Do $BC \perp AM$ và $BC \perp A'M$ nên $BC \perp (A'AM)$.
Kẻ $MN \perp A'C$, khi đó MN là đường vuông góc chung của $A'A$ và BC.
$\Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow AN = \sqrt{AM^2 - MN^2} = \frac{3a}{4}$.
Trong tam giác $AA'M$ có hai đường cao $A'G$ và MN nên $AN.\cdot$
$AA' = AG \cdot AM$ hay $AA' = \frac{AG \cdot AM}{AN} = \frac{2a}{3}$.
$\Rightarrow A'G = \sqrt{A'A^2 - AG^2} = \frac{a}{3}$.



Chọn đáp án C □

Câu 47.
Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.
Hàm số $y = f(2 + e^x)$ nghịch biến trên khoảng

A $(0; +\infty)$. **B** $(-\infty; 0)$. **C** $(-1; 3)$. **D** $(-2; 1)$.



Lời giải.
$y' = f'(2 + e^x) = e^x.f'(t)$ với $t = 2 + e^x$.
Do $e^x > 0 \quad \forall x$ nên y' và $f'(t)$ cùng dấu. Vậy để y nghịch biến thì $f(t)$ nghịch biến trên khoảng tương ứng.
Nhìn vào đồ thị ta thấy $f'(t) \leq 0\ \forall t \geq 3$.
Do $2 + e^x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 0$ nên hàm số $y = f(2 + e^x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.
Chọn đáp án B □

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2\cos 2x}$. Giá trị $I = \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ là

A $I = 1$. **B** $I = -1$. **C** $I = 2$. **D** $I = -2$.

Lời giải.

Ta có: $I = \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{-x=t}{=} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{-\pi}{2}} f(-t)(-\,\mathrm{d}t) = \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)\,\mathrm{d}x$. Do đó:

$I = \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{2+2\cos 2x}}{2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{4\cos^2 x}}{2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x\Big|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$
hay $I = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 4x + 3| + 4mx$ lớn hơn 2. Số phần tử của S là

A 2. B 5. C 1. D 3.

Lời giải.

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất lớn hơn 2 thì

$$y > 2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 + 4mx > 2 & \forall x \in \mathbb{R} \setminus (1;3) \\ -x^2 + 4x - 3 + 4mx > 2 & \forall x \in [1;3]. \end{cases}$$

TH 1. Với $x \in \mathbb{R} \setminus (1;3)$ thì $y > 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 + 4mx > 2 \Leftrightarrow x^2 + 4(m-1)x + 1 > 0$ (1).
Xét parabol $y = x^2 + 4(m-1)x + 1$ với bề lõm hướng lên trên và đỉnh là $x_1 = -2(m-1)$.
Do m nguyên dương nên $-2(m-1) \leq 0$ hay $x_1 \in \mathbb{R} \setminus (1;3)$, khi đó để (1) xảy ra thì

$$y(x_1) > 0 \Leftrightarrow 1 - 4(m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} < m - 1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < \frac{3}{2}.$$

Mà m nguyên dương nên $m = 1$.

TH 2. Với $x \in [1;3]$ thì $y > 2 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 + 4mx > 2 \Leftrightarrow x^2 - 4(m+1)x + 5 < 0$ (2).
Xét parabol $y = x^2 - 4(m+1)x + 5$ có bề lõm hướng lên trên và đỉnh là $x_1 = 2(m+1)$.
Do m nguyên dương nên $2(m+1) \geq 4$ hay $x_2 \notin [1;3]$, khi đó để (2) xảy ra thì

$$\max\{y(1); y(3)\} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y(1) < 0 \\ y(3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 4(m+1) < 0 \\ 9 - 12(m+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{-1}{4}.$$

Mà m nguyên dương nên với mọi m luôn thỏa mãn.

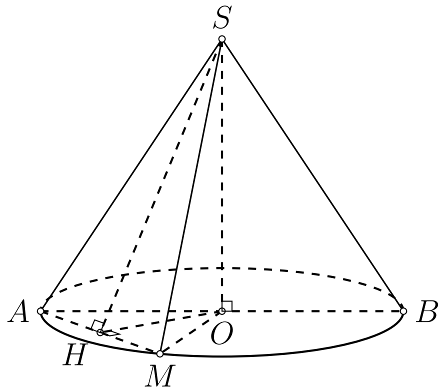
Từ hai trường hợp ta chỉ có duy nhất một giá trị $m = 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O, góc ở đỉnh bằng 120°. Trên đường tròn đáy, lấy điểm A cố định và điểm M di chuyển. Có bao nhiêu vị trí của điểm M để diện tích tam giác SAM đạt giá trị lớn nhất?

A 3. B vô số. C 1. D 2.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AM. Khi đó: $OM \perp AM$.
Mà $SO \perp AM$ nên $SH \perp AM$. Do đó: $S_{SAM} = \dfrac{SH \cdot AM}{2}$.
Kẻ đường kính AB của đường tròn đáy. Đặt $AB = 2a$.
Do góc ở đỉnh của hình nón là $120°$ nên $\widehat{ASB} = 120°$.
Tam giác SAB cân ở S có $SO \perp AB$ nên $\widehat{ASO} = \dfrac{\widehat{ASB}}{2} = 60°$
Nên $SO = \dfrac{OA}{\tan 60} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.
Đặt $OH = x$ với $x \geq 0$. Khi đó:

$$S_{SAM} = \frac{SH \cdot AB}{2} = SH \cdot AH = \sqrt{SO^2 + OH^2} \cdot \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{3} + x^2\right)(a^2 - x^2)}.$$

Do $(\dfrac{a^2}{3} + x^2)(a^2 - x^2) = -x^4 + \dfrac{2a^2x^2}{3} + \dfrac{a^4}{3} \leq -\left(x^2 - \dfrac{a^2}{3}\right)^2 + \dfrac{2a^4}{9} \leq \dfrac{2a^4}{9}$ nên tam giác SAM có diện tích lớn nhất khi $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.
Khi đó có hai vị trí M thỏa mãn.
Chọn đáp án D □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. C	3. A	4. C	5. C	6. C	7. D	8. A	9. C	10. A
11. B	12. C	13. A	14. C	15. C	16. C	17. A	18. C	19. C	20. B
21. B	22. C	23. A	24. B	25. B	26. B	27. C	28. A	29. D	30. A
31. C	32. C	33. A	34. D	35. A	36. B	37. A	38. C	39. D	40. B
41. A	42. D	43. D	44. A	45. A	46. C	47. B	48. C	49. C	50. D

110 ĐỀ THI THỬ, TRƯỜNG THPT CHUYÊN VÕ NGUYÊN GIÁP, QUẢNG BÌNH, LẦN 1, 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Mô-đun của số phức $z = \sqrt{7} - 3i$ là

A $|z| = 5$. B $|z| = 10$. C $|z| = 16$. D $|z| = 4$.

Lời giải.

Ta có $z = \sqrt{7} - 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{(\sqrt{7})^2 + (-3)^2} = 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 2. $\lim \dfrac{3n-2}{n+3}$ bằng

A $-\dfrac{2}{3}$. B 1. C 3. D -2.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{3n-2}{n+3} = \dfrac{3 - \dfrac{2}{n}}{1 + \dfrac{3}{n}}$.

Ta có $\begin{cases} \lim \left(3 - \dfrac{2}{2}\right) = 3 \\ \lim \left(1 + \dfrac{3}{n}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim \dfrac{3n-2}{n+3} = 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1$ là

A $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$. B $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$. C $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$. D $x = \dfrac{k\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Thể tích V của khối lăng trụ có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B là

A $V = \dfrac{1}{2}Bh$. B $V = \dfrac{1}{6}Bh$. C $V = \dfrac{1}{3}Bh$. D $V = Bh$.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ $V = B \cdot h$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	$-$	‖	$-$
y	$2 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 2$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

(B) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2); (2; +\infty)$.

C Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2); (2; +\infty)$.

(D) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Theo bảng biến thiên, ta thấy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$. Diện tích S của hình D được tính theo công thức

A $S = \displaystyle\int_a^b \left|f(x)\right| \mathrm{d}x$. (B) $S = \displaystyle\int_a^b f|x| \mathrm{d}x$. (C) $S = \left|\displaystyle\int_a^b f(x) \mathrm{d}x\right|$. (D) $S = \displaystyle\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích $S = \displaystyle\int_a^b \left|f(x)\right| \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hàm số có đúng một cực trị.

(B) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng 1.

(C) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 3.

D Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Lời giải.

Theo bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Với các số thực x, y dương bất kì, $y \neq 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\log_2\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 y}$. B $\log_2(xy) = \log_2 x + \log_2 y$.

(C) $\log_2(x^2 - y) = 2\log_2 x - \log_2 y$. (D) $\log_2(xy) = \log_2 x \log_2 y$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(xy) = \log_2 x + \log_2 y$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$ là

(A) $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = 2\sin 2x + C$.

(B) $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sin 2x + C$.

(C) $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \sin 2x + C$.

D $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;-1;2)$. Điểm N đối xứng với M qua mặt phẳng (Oyz) là

(A) $N(0;-1;2)$. (B) $N(3;1;-2)$. **C** $N(-3;-1;2)$. (D) $N(0;1;-2)$.

Lời giải.

Toạ độ hình chiếu của $M(3;-1;2)$ lên mặt phẳng (Oyz) là $H(0;-1;2)$.

Toạ độ điểm đối xứng của $M(3;-1;2)$ qua mặt phẳng (Oyz) là $N(-3;-1;2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11.

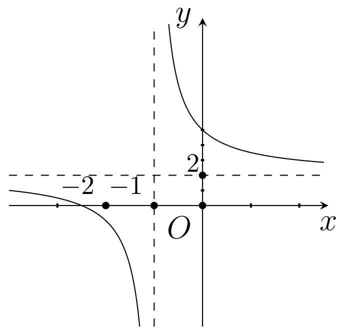
Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A) $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

(B) $y = \frac{-2x+5}{-x-1}$.

(C) $y = \frac{2x+3}{x+1}$.

D $y = \frac{2x+5}{x+1}$.



Lời giải.

Ta thấy $\begin{cases} \text{đồ thị hàm số cắt } Ox \text{ tại điểm có hoành độ âm.} \\ \text{đồ thị hàm số cắt } Oy \text{ tại điểm có tung độ dương.} \\ \text{đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận là } x=-1 \text{ và } y=2. \end{cases}$ (1)

Từ (1) ta thấy hàm số $y = \frac{2x+5}{x+1}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, mặt phẳng $(\alpha)\colon x - 2y + 3z + 2018 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$ là

(A) $\vec{n} = (-1;-2;3)$. **B** $\vec{n} = (1;-2;3)$. (C) $\vec{n} = (1;2;3)$. (D) $\vec{n} = (-1;2;3)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;-2;3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2} < 2^{6-x}$ là

(A) $(2;+\infty)$. (B) $(-\infty;-3)$. **C** $(-3;2)$. (D) $(-2;3)$.

Lời giải.

Ta có $2^{x^2} < 2^{6-x} \Leftrightarrow x^2 < 6 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 6 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho hình lập phương có cạnh bằng 2. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương đó bằng

A 6π. B $4\sqrt{3}\pi$. C 8π. D 12π.

Lời giải.

Xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

Gọi I là trung điểm đoạn AC'.

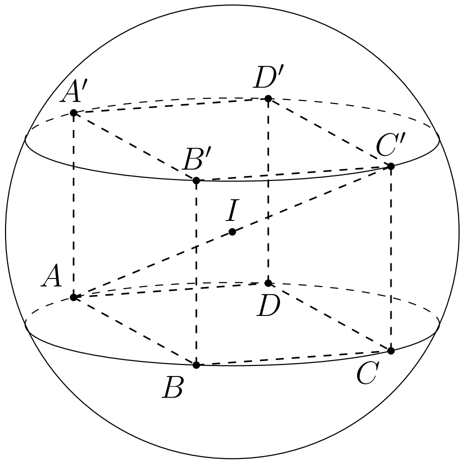
$\Rightarrow \begin{cases} I \text{ là tâm hình chữ nhật } AA'C'C \\ I \text{ là tâm hình chữ nhật } BB'D'D. \end{cases}$

Ta được $IA = IB = IC = ID = IA' = IB' = IC' = ID'$.

$\Rightarrow$ I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

Ta có $AC'^2 = AB^2 + AD^2 + AA'^2 = 12 \Rightarrow IA = \sqrt{3}$.

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi IA^2 = 12\pi$.



Chọn đáp án D □

Câu 15. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -1; 2)$. Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua các hình chiếu của điểm A trên các trục toạ độ là

A $(Q)\colon x - y + 2z - 2 = 0$.

B $(Q)\colon 2x - 2y + z - 2 = 0$.

C $(Q)\colon \dfrac{x}{-1} + \dfrac{y}{1} + \dfrac{z}{-2} = 1$.

D $(Q)\colon x - y + 2z6 = 0$.

Lời giải.

Gọi I, J, K lần lượt là hình chiếu của $A(1; -1; 2)$ lên Ox, Oy, Oz.

Ta được $I(1; 0; 0), J(0; -1; 0), K(0; 0; 2)$.

Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng $(Q)\colon \dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{-1} + \dfrac{z}{2} = 1 \Rightarrow (Q)\colon 2x - 2y + z - 2 = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{|x| - 2}$ là

A 1. B 0. C 2. D 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = (-2; +\infty) \setminus \{2\}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to -2^+} y = -\infty \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{|x| - 2}$ có đường tiệm cận đứng $x = -2$.

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^+} y = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^-} y = -\infty \end{cases} \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{|x| - 2}$ có đường tiệm cận đứng $x = 2$.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{|x| - 2}$ có đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương $\left|f(x)\right| = 2$ là

Ⓐ 4. Ⓑ 2. **C** 6. Ⓓ 8.

Lời giải.

Ta có đồ thị hàm số $\left|f(x)\right|$ gồm

$$\begin{cases} \text{phần } 1: & \text{giữ nguyên phần đồ thị của hàm số } f(x) \text{ nằm phía trên } Ox. \\ \text{phần } 2: & \text{lấy đối xứng qua } Ox \text{ phần đồ thị của hàm số } f(x) \text{ nằm phía dưới trục } Ox. \end{cases}$$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = x_1 \in (-\infty; -1) \\ x = x_2 \in (1; +\infty). \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $\left|f(x)\right|$

x	$-\infty$		x_1		-1		0		1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên của hàm số $\left|f(x)\right|$, ta thấy phương trình $\left|f(x)\right| = 2$ có 6 nghiệm.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 18. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$. Giá trị lớn nhất là M và giá trị nhỏ nhất là m của hàm số trên đoạn $[0; 4]$ là

Ⓐ $M = 28; m = -4$. Ⓑ $M = 77; m = 1$. **C** $M = 77; m = -4$. Ⓓ $M = 28; m = 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x - 9$.

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \notin [0; 3] \\ x = 1 \in [0; 3]. \end{array}\right.$

Ta có $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = -4 \\ y(3) = 77 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = 77 \\ m = -4. \end{cases}$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 19. Cho $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{-1}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \int\limits_{-1}^{2} [x + 2f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A $I = \frac{11}{2}$. **B** $I = \frac{7}{2}$. **C** $I = \frac{17}{2}$. **D** $I = \frac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta thấy $I = \int\limits_{-1}^{2} x\,\mathrm{d}x + 2\cdot\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + 3\cdot\int\limits_{-1}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$, trong đó z_1 có phần ảo dương. Số phức liên hợp của số phức $z_1 + 2z_2$ là

A $-3 + 2i$. **B** $3 - 2i$. **C** $2 + i$. **D** $2 - i$.

Lời giải.

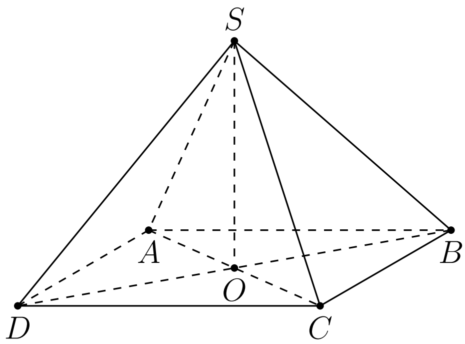
Ta có $z^2 + 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1 - 2i \\ z = -1 + 2i \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -1 + 2i \\ z_2 = -1 - 2i \end{cases} \Rightarrow \overline{z_1 + 2z_2} = -3 + 2i$.

Chọn đáp án A □

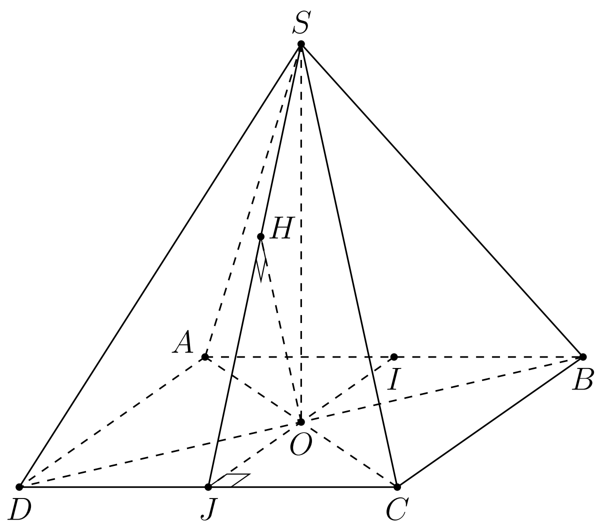
Câu 21.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O có cạnh $AB = a$, đường cao SO vuông góc với mặt đáy và $SO = a$ (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa SC và AB là

A $\frac{2a\sqrt{5}}{7}$. **B** $\frac{a\sqrt{5}}{7}$. **C** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **D** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.



Lời giải.



Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB, CD.

Gọi H là hình chiếu của O lên SJ.

Ta có $AB \parallel DC \Rightarrow AB \parallel (SCD)$.

Ta được $\mathrm{d}(AB, SC) = \mathrm{d}(AB, (SCD))$.

Do vậy, $\mathrm{d}(AB, SC) = \mathrm{d}(I, (SCD)) = 2\cdot\mathrm{d}(O, (SCD))$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp IJ \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SIJ) \Rightarrow CD \perp OH$.

Ta được $\mathrm{d}(O, (SCD)) = OH$.

Ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OJ^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $\mathrm{d}(AB, SC) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Ông An gửi vào ngân hàng 60 triệu đồng theo hình thức lãi kép. Lãi suất ngân hàng là 8% trên năm. Sau 5 năm ông An tiếp tục gửi thêm 60 triệu đồng nữa. Hỏi sau 10 năm kể từ lần đầu gửi tiền ông An đến rút toàn bộ tiền cả gốc và lãi thì được số tiền gần nhất với số nào dưới đây?

A 217.695.000 (đồng). **B** 231.815.000 (đồng).
C 197.201.000 (đồng). **D** 190.271.000 (đồng).

Lời giải.

Gọi T_1 là số tiền gồm cả tiền gốc và tiền lãi khi gửi 60 triệu với thời hạn 10 năm.

Ta có $T_1 = 60 \cdot (1 + 8\%)^{10} = 129.535.000$ (đồng).

Gọi T_2 là số tiền gồm cả tiền gốc và tiền lãi khi gửi 60 triệu với thời hạn 5 năm.

Ta có $T_2 = 60 \cdot (1 + 8\%)^5 = 88.160.000$ (đồng).

Vậy tổng số tiền ông An rút được sau 10 năm là $T = T_1 + T_2 = 217.695.000$ (đồng).

Chọn đáp án A □

Câu 23. Trong một lớp học gồm có 18 học sinh nam và 17 học sinh nữ. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Xác suất để 4 được gọi có cả nam và nữ bằng

A $\dfrac{65}{71}$. **B** $\dfrac{69}{77}$. **C** $\dfrac{443}{506}$. **D** $\dfrac{68}{75}$.

Lời giải.

Số cách chọn 4 học sinh lên bảng là $\mathrm{C}_{35}^4 = 52360$.

Số cách chọn 4 học sinh lên bảng hoặc là nam hoặc là nữ là $\mathrm{C}_{18}^4 + \mathrm{C}_{17}^4 = 5440$.

Ta có không gian mẫu $n(\Omega) = 52360$.

Gọi biến cố A: " 4 học sinh được gọi lên bảng có cả nam và nữ ".

Ta được $n(A) = 46920$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{69}{77}$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d)\colon \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và vuông góc với (d) có phương trình là

A $(P)\colon x - y - 2z = 0$. **B** $(P)\colon 2x - z = 0$.
C $(P)\colon x - y + 2z + 2 = 0$. **D** $(P)\colon x - y + 2z = 0$.

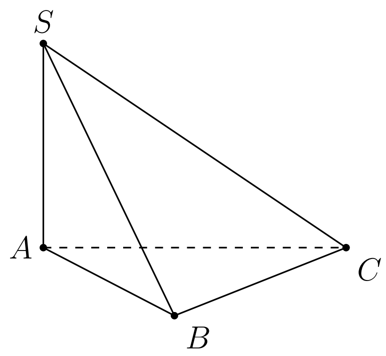
Lời giải.

Mặt phẳng (P) đi qua $M(2;0;-1)$ có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;-1;2)$ có dạng $(P)\colon x - y + 2z = 0$.

Chọn đáp án D □

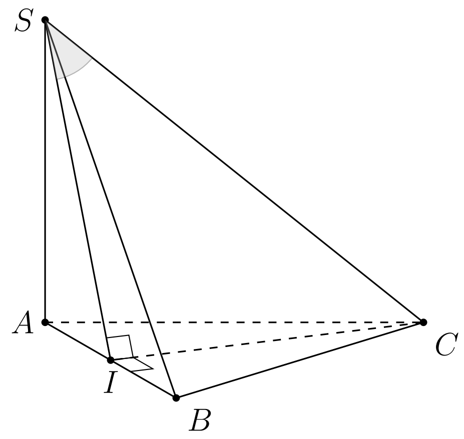
Câu 25.

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC đều cạnh a và $SA = a$ (tham khảo hình vẽ bên). Giá trị tang của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng



A $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. **C** 1. **D** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm cạnh AB.

Ta có $\begin{cases} CI \perp AB \\ CI \perp SA \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SAB)$.

Ta được $(SC, (SAB)) = \widehat{CSI} \Rightarrow \tan \widehat{CSI} = \dfrac{CI}{SI}$.

Ta có $\begin{cases} CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \\ SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$

Vậy $\tan(SC, (SAB)) = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Biết n là số nguyên dương thoả mãn $A_n^3 + 2A_n^2 = 100$. Hệ số của x^5 trong khai triển $(1 - 3x)^{2n}$ bằng

A $-3^5\mathrm{C}_{10}^5$. **B** $-3^5\mathrm{C}_{12}^5$. **C** $3^5\mathrm{C}_{10}^5$. **D** $6^5\mathrm{C}_{10}^5$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \mathrm{A}_n^3 + 2 \cdot \mathrm{A}_n^2 = 100 \\ \Leftrightarrow \ & \frac{n!}{(n-3)!} + 2 \cdot \frac{n!}{(n-2)!} = 100 \\ \Leftrightarrow \ & n^3 - n^2 = 100 \\ \Leftrightarrow \ & n = 5. \end{aligned}$$

Khi đó, ta thấy $(1 - 3x)^{10} = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^k \cdot (-3)^k \cdot x^k$.

Vậy hệ số của x^5 bằng $-3^5 \cdot \mathrm{C}_{10}^5$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2\log_2(2x - 2) + \log_2(x - 3)^2 = 2$ trên $\mathbb{R}$. Tổng các phần tử của S bằng

A 6. **B** $4 + \sqrt{2}$. **C** $2 + \sqrt{2}$. **D** $8 + \sqrt{2}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \neq 3 \\ x > 2. \end{cases}$ $(*)$

Với điều kiện $(*)$, ta có

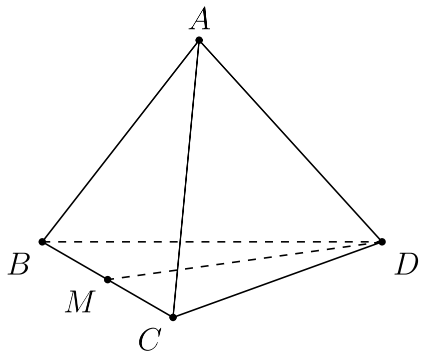
$$\begin{aligned} & 2\log_2(2x-2) + \log_2(x-3)^2 = 2 \\ \Leftrightarrow\ & [2(x-1)]^2 \cdot (x-3)^2 = 4 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 2 = 0 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 2 - \sqrt{2} \quad (\text{loại}) \\ x = 2 + \sqrt{2} \\ x = 2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy tổng các phần tử của tập S bằng $4 + \sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 28.

Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M là trung điểm cạnh BC (tham khảo hình vẽ bên). Giá trị cô-sin của góc giữa hai đường thẳng AB và DM bằng



A $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

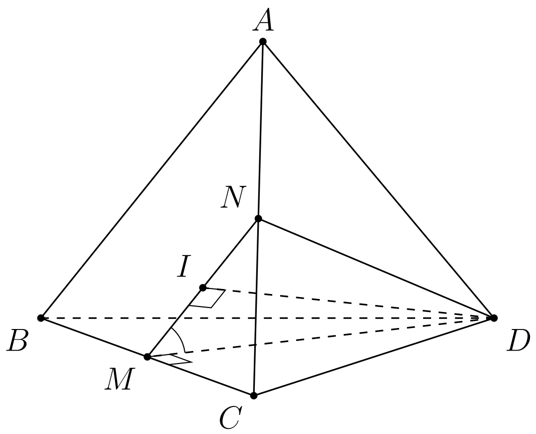
Gọi N là trung điểm AC.

Gọi I là trung điểm MN.

Ta có $\begin{cases} MN \parallel AB \\ DI \perp MN \end{cases} \Rightarrow (AB, DM) = (MN, DM)$.

Do vậy, $\cos(AB, DM) = \cos(MN, DM) = \cos\widehat{IMD}$.

Ta có $\begin{cases} DM = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ MI = \dfrac{a}{4} \end{cases} \Rightarrow \cos\widehat{IMD} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.



Chọn đáp án A □

Câu 29. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x + 2y + z - 4 = 0$ và đường thẳng $(d)\colon \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{3}$. Đường thẳng (Δ) nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng (d) có phương trình là

A $(\Delta)\colon \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-1}{-3}$. **B** $(\Delta)\colon \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{3}$.

C $(\Delta)\colon \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{-3}$. **D** $(\Delta)\colon \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$.

Lời giải.

Gọi A là giao điểm của (d) và (P). Toạ độ điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+2y+z-4=0 \\ x=-1+2t \\ y=t \\ z=-2+3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow A(1;1;1).$$

Ta có $\begin{cases} \vec{n}_{(P)}=(1;2;1) \\ \vec{u}_{(d)}=(2;1;3) \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_{(\Delta)}=[\vec{n}_{(P)},\vec{u}_{(d)}]=(5;-1;-3).$

Vậy phương trình đường thẳng $(\Delta)\colon \dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\dfrac{3}{4}x^4-(m-1)x^2-\dfrac{1}{4x^4}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A 1. B 2. C 3. D 4.

Lời giải.

Ta thấy

$$\begin{aligned} & \text{Hàm số } y \text{ đồng biến trên } (0;+\infty) \\ \Leftrightarrow\ & 3x^3-2(m-1)x+\frac{1}{x^5}\geq 0, \forall x\in(0;+\infty) \\ \Leftrightarrow\ & 3x^2+\frac{1}{x^6}\geq 2(m-1), \forall x\in(0;+\infty) \\ \Leftrightarrow\ & 2(m-1)\leq \min_{(0;+\infty)}\left(3x^2+\frac{1}{x^6}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Ta có

$$\begin{aligned} 3x^2+\frac{1}{x^6} &= x^2+x^2+x^2+\frac{1}{x^6} \\ &\geq 4\cdot\sqrt[4]{x^2\cdot x^2\cdot x^2\cdot\frac{1}{x^6}} \\ &\geq 4 \end{aligned} \quad (8)$$

Từ (2) ta được $\min\limits_{(0;+\infty)}\left(3x^2+\dfrac{1}{x^6}\right)=4$.

Từ (1) ta được $2(m-1)\leq 4\Leftrightarrow m\leq 3$.

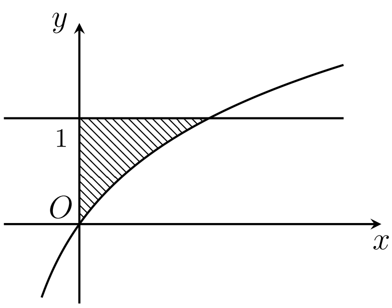
Vậy $m\in\{1;2;3\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 31.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\ln(x+1)$, đường thẳng $y=1$ và trục tung (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích (H) bằng

A $\mathrm{e}-2$. B $\mathrm{e}-1$. C 1. D $\ln 2$.



Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $\ln(x+1) = 1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e} - 1$.

Diện tích (H) được tính theo công thức $S = \int\limits_0^{\mathrm{e}-1} [1 - \ln(x+1)]\, \mathrm{d}x$.

Ta thấy $\int \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = (x+1)\ln(x+1) - x + C$.

Do vậy, $S = [2x - (x+1)\ln(x+1)]\Big|_0^{\mathrm{e}-1} = \mathrm{e} - 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Biết $\int\limits_1^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+2} + (x+2)\sqrt{x}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} - c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$. Tính $P = a + b + c$.

A. $P = 2$. B. $P = 8$. C. $P = 46$. D. $P = 22$.

Lời giải.

Ta thấy $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x+2} + (x+2)\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x}\right)} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$.

Ta được $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}\right)\mathrm{d}x = \left(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2 = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 3$.

Vậy $P = 8$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 1$ cm, $AB = 2$ cm, M là trung điểm của cạnh AB. Quay tam giác BMC quanh trục AB ta được khối tròn xoay. Gọi V và S lần lượt là thể tích và diện tích của khối tròn xoay đó. Chọn mệnh đề đúng.

A. $V = \dfrac{1}{3}\pi; S = \pi\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)$.

B. $V = \pi; S = \pi\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)$.

C. $V = \dfrac{1}{3}\pi; S = \pi\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)$.

D. $V = \pi; S = \pi\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)$.

Lời giải.

Gọi (T) là khối tròn xoay khi quay tam giác BMC quanh trục AB.

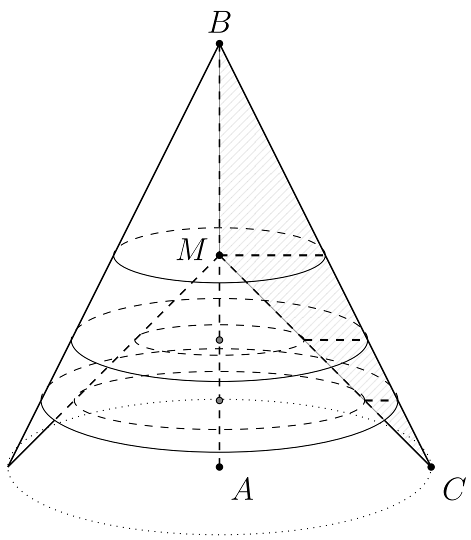
Gọi $(N_1), (N_2)$ là khối nón bán kính đáy là AC và đỉnh lần lượt là B, M.

Ta thấy

$$V(T) = V_{(N_1)} - V_{(N_2)} = \frac{\pi}{3} \cdot AC^2 \cdot (AB - AM) = \frac{\pi}{3}.$$

Ta thấy

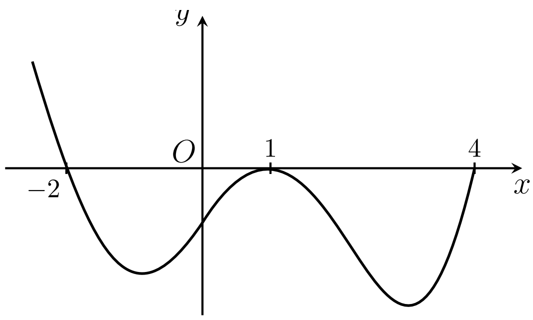
$$S_{(T)} = S_{(N_1)} + S_{(N_2)} = \pi \cdot AC \cdot (BC + MC) = \pi \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{2}).$$



Chọn đáp án C □

Câu 34.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2; 1]$ và $[1; 4]$ lần lượt bằng 9 và 12. Cho $f(1) = 3$. Giá trị của biểu thức $f(-2) + f(4)$ bằng



(A) 21. (B) 9. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_{-2}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x = -9 \Rightarrow f(1) - f(-2) = -9.$ (1)

Ta có $\displaystyle\int_{1}^{4} f'(x)\,\mathrm{d}x = -12 \Rightarrow f(4) - f(1) = -12.$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $f(-2) + f(4) = 9 - 12 + 2f(1) = 3.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Cho số thực a, b thoả mãn $a > b > 1$ và $\dfrac{1}{\log_a b} + \dfrac{1}{\log_b a} = \sqrt{2018}$. Giá trị của biểu thức $P = \dfrac{1}{\log_{ab} b} - \dfrac{1}{\log_{ab} a}$ bằng

(A) $P = \sqrt{2014}$. (B) $P = \sqrt{2016}$. (C) $P = \sqrt{2018}$. (D) $P = \sqrt{2020}$.

Lời giải.

Vì $a > b > 1$ nên ta có $\begin{cases} \log_a b < 1 \\ \log_b a > 1 \end{cases} \Rightarrow \log_b a - \log_a b > 0.$ (1)

Ta thấy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_b a} = \sqrt{2018} \\ \Leftrightarrow\ & \log_b a + \frac{1}{\log_b a} = \sqrt{2018} \\ \Leftrightarrow\ & \log_b^2 a + \frac{1}{\log_b^2 a} = 2016. \qquad (2) \end{aligned}$$

Ta thấy

$$\begin{aligned} & P = \frac{1}{\log_{ab} b} - \frac{1}{\log_{ab} b} \\ \Leftrightarrow\ & P = \log_b(ab) - \log_a(ab) \\ \Leftrightarrow\ & P = \log_b a - \log_a b \qquad (3) \\ \Leftrightarrow\ & P = \log_b a - \frac{1}{\log_b a} \\ \Leftrightarrow\ & P^2 = \log_b^2 a + \frac{1}{\log_b^2 a} - 2 \qquad (4) \end{aligned}$$

Từ (2) và (4) ta được $P^2 = 2014.$ (5)

Từ $(1), (3)$ và (5) ta được $P = \sqrt{2014}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Biết hàm số $f(x) - f(2x)$ có đạo hàm bằng 5 tại $x = 1$ và đạo hàm bằng 7 tại $x = 2$. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) - f(4x)$ tại $x = 1$.

A 8. **B** 12. **C** 16. **D** 19.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} f'(1) - 2f'(2) = 5 \\ f'(2) - 2f'(4) = 7 \end{cases} \Rightarrow f'(1) - 4f'(4) = 19.$

Vậy đạo hàm của hàm số $f(x) - f(4x)$ tại $x = 1$ bằng 19.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ với O là tâm của đáy. Khoảng cách từ O đến mặt bên bằng 1 và góc giữa mặt bên với đáy bằng 45°. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A $V = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. **B** $V = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$. **C** $V = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **D** $V = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm cạnh BC.

Gọi H là hình chiếu của O lên SI.

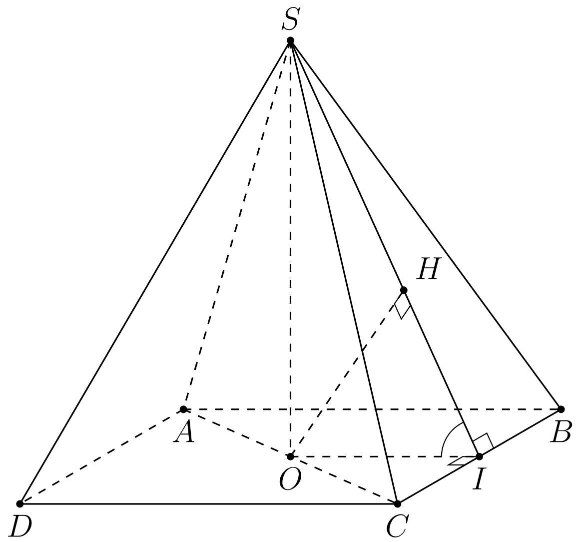
Ta có $\begin{cases} BC \perp SO \\ BC \perp OI \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SOI) \Rightarrow ((ABCD), (SBC)) = \widehat{SIO} = 45°$.

Ta được $\begin{cases} OH \perp SI \\ OH \perp BC \end{cases}$

$\Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(O, (SBC)) = OH = 1.$

Do vậy ta được $\begin{cases} SO = \sqrt{2} \\ AB = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow V = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}.$



Chọn đáp án B □

Câu 38. Giá trị nguyên dương nhỏ nhất của tham số m để bất phương trình $4^x - 2018m2^{x-1} + 3 - 1009m \leq 0$ có nghiệm là

A $m = 1$. **B** $m = 2$. **C** $m = 3$. **D** $m = 4$.

Lời giải.

Ta thấy

$$\begin{aligned} & 4^x - 2018m2^{x-1} + 3 - 1009m \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & 4^x + 3 - (2^x + 1) \cdot 1009m \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & 1009m \geq \frac{4^x + 3}{2^x + 1} \\ \Leftrightarrow\ & 1009m \geq 2^x + 1 + \frac{4}{2^x + 1} - 2 \quad (1) \\ \Leftrightarrow\ & 1009m \geq 2. \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) ta thấy $2^x + 1 + \dfrac{4}{2^x + 1} - 2 = 2 \Leftrightarrow x = 0$.

Từ (2) ta suy ra $m = 1$ thoả mãn đề bài.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(2x) = 3f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Tích phân $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A 5. (B) 3. (C) 8. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 3 \cdot \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 6 \Rightarrow \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 6 \Rightarrow$ $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Cho số phức z thoả mãn $\big|z - |z|\big| = \sqrt{2}$. Biết rằng phần thực của z bằng a. Tính $|z|$ theo a.

(A) $|z| = \dfrac{1}{a-1}$.

(B) $|z| = \dfrac{a - \sqrt{a^2+1}}{2}$.

(C) $|z| = \dfrac{a + \sqrt{a^2+1}}{2}$.

D $|z| = \dfrac{a + \sqrt{a^2+4}}{2}$.

Lời giải.

Ta thấy

$$\begin{aligned}
& \big|z - |z|\big| = \sqrt{2} \\
\Leftrightarrow\ & \big|z - |z|\big|^2 = 2 \\
\Leftrightarrow\ & (z - |z|) \cdot \left(\overline{z - |z|}\right) = 2 \\
\Leftrightarrow\ & (z - |z|) \cdot (\overline{z} - |z|) = 2 \\
\Leftrightarrow\ & |z|^2 - a \cdot |z| - 1 = 0 \\
\Rightarrow\ & |z| = \frac{a + \sqrt{a^2+4}}{2}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) và điểm $A(a; 2)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để có đúng ba tiếp tuyến của (C) đi qua A. Tập hợp S bằng

(A) $S = (-\infty; -1)$.

(B) $S = \varnothing$.

C $S = \left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right) \cup (2; +\infty) \setminus \{-1\}$.

(D) $S = \left[-\dfrac{2}{3}; 2\right]$.

Lời giải.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0; x_0^3 - 3x_0)$ của đồ thị (C) có dạng

$$(\Delta)\colon y = 3(x_0^2 - 1)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0.$$

Vì $A(a;2) \in (\Delta)$ ta được

$$\begin{aligned} & 2 = 3 \cdot (x_0^2 - 1) \cdot (a - x_0) + x_0^3 - 3x_0 \\ \Leftrightarrow\ & (x_0 + 1) \cdot \left[2x_0^2 - (3a+2) \cdot x_0 + (3a+2)\right] = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ 2x_0^2 - (3a+2) \cdot x_0 + (3a+2) = 0. \qquad (1) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Khi đó, ta thấy

$$\begin{aligned} & \text{Yêu cầu bài toán} \\ \Leftrightarrow\ & \text{Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt } x_0 \neq -1 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} a \neq -1 \\ a < -\dfrac{2}{3} \vee a > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Cho tứ diện $SABC$ và hai điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh SA, SB sao cho $\dfrac{SM}{AM} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{SN}{BN} = 2$. Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm M, N và song song với cạnh SC cắt AC, BC lần lượt tại L, K. Tính tỉ số thể tích $\dfrac{V_{SCMNKL}}{V_{SABC}}$.

A $\dfrac{V_{SCMNKL}}{V_{SABC}} = \dfrac{4}{9}$. (B) $\dfrac{V_{SCMNKL}}{V_{SABC}} = \dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{V_{SCMNKL}}{V_{SABC}} = \dfrac{2}{3}$. (D) $\dfrac{V_{SCMNKL}}{V_{SABC}} = \dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

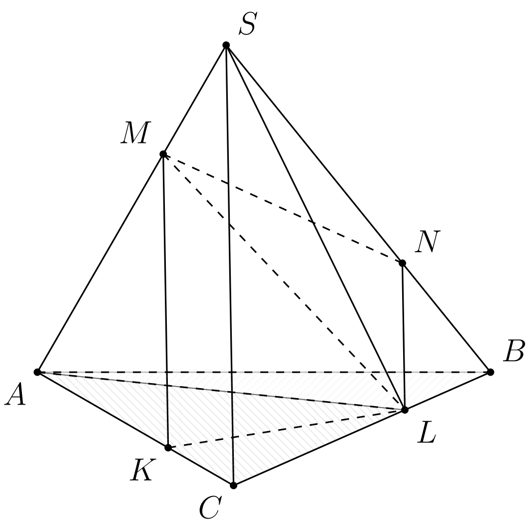
Đặt $V_{S.ABC} = V$.

Ta được $\begin{cases} V_{S.ABL} = \dfrac{V}{3} \\ V_{S.ACL} = \dfrac{2V}{3}. \end{cases}$

Ta có $\dfrac{V_{S.MNL}}{V_{S.ABL}} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} \Rightarrow V_{S.MNL} = \dfrac{2V}{27}$.

Ta có $\dfrac{V_{A.MKL}}{V_{A.SCL}} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} \Rightarrow V_{A.MKL} = \dfrac{8V}{27}$.

Ta được $V_{SCMNLK} = \left(\dfrac{2}{27} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{8}{27}\right) \cdot V = \dfrac{4V}{9}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;2;1)$, $B(4;4;2)$, $C(-2;4;-3)$. Đường phân giác trong AD của tam giác ABC có một véc-tơ chỉ phương là

(A) $(-2;4;-3)$. (B) $(6;0;5)$. **C** $\left(0;1;-\dfrac{1}{3}\right)$. (D) $\left(-\dfrac{4}{3};-\dfrac{1}{3};-1\right)$.

Lời giải.

Gọi $\overrightarrow{u_1}$ là véc-tơ cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ và có mô-đun bằng 1.

Gọi $\overrightarrow{u_2}$ là véc-tơ cùng hướng với $\overrightarrow{AC}$ và có mô-đun bằng 1.

Theo tính chất hình thoi, véc-tơ chỉ phương của đường phân giác trong AD của tam giác ABC cùng phương với véc-tơ $\vec{u} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2;2;1) \\ \overrightarrow{AC} = (-4;2;-4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u_1} = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right) \\ \vec{u_2} = \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{-2}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \left(0; 1; -\frac{1}{3}\right)$.

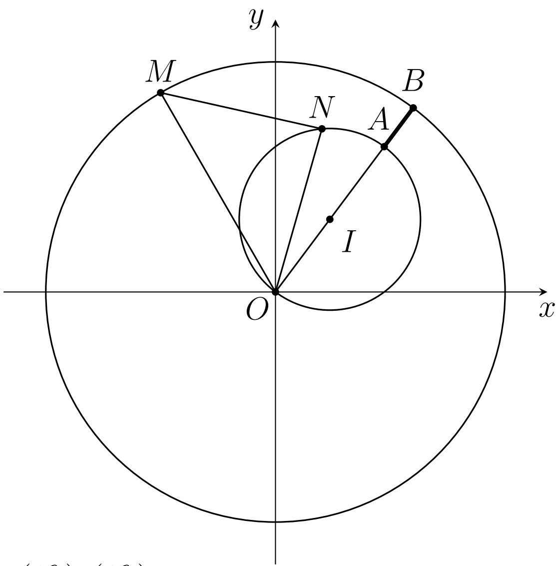
Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Cho hai số phức z_1, z_2 thoả mãn $|z_1| = 12$ và $|z_2 - 3 - 4i| = 5$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ là

(A) 0. **B** 2. (C) 7. (D) 17.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2.



Ta thấy $|z_1| = 12$.

$\Rightarrow M \in (\mathscr{C}_1)$ có tâm O và bán kính $R_1 = 12$.

Ta thấy $|z_2 - 3 - 4i| = 5$.

$\Rightarrow N \in (\mathscr{C}_2)$ có tâm $I(3;4)$ và bán kính $R_2 = 5$.

Ta thấy $\overrightarrow{OI} = (3;4) \Rightarrow OI = 5 \Rightarrow O \in (\mathscr{C}_2)$.

Ta có $|z_1 - z_2| = MN \geq OM - ON$.

Vì $OM = 12$ nên

$$\min(MN) = 12 - \max(ON) = 12 - 10 = 2.$$

Khi đó, $\begin{cases} M \equiv B \\ N \equiv A \end{cases}$ với A, B là giao điểm của tia OI với $(\mathscr{C}_1), (\mathscr{C}_2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Cho các số thực a, b, c thoả mãn $c^2 + a = 18$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{ax^2 + bx} - cx\right) = -2$. Tính giá trị biểu thức $P = a + b + 5c$.

(A) $P = 18$. **B** $P = 12$. (C) $P = 9$. (D) $P = 5$.

Lời giải.

Ta thấy

$$\begin{aligned} & \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{ax^2 + bx} - cx\right) = -2 \\ \Leftrightarrow & \lim_{x \to +\infty} \frac{(a - c^2) \cdot x^2 + bx}{\sqrt{ax^2 + bx} + cx} = -2 \qquad (1) \end{aligned}$$

Từ (1), ta thấy a, b, c thỏa mãn hệ sau

$$\begin{cases} a > 0 \text{ (vì } a \leq 0 \text{ trái giả thiết)} \\ a + c^2 = 18 \\ a - c^2 = 0 \\ \dfrac{b}{\sqrt{a} + c} = -2 \end{cases} \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ c = -12 \\ c = 3 \text{ (loại } c = -3 \text{ vì (2)).} \end{cases}$$

Vậy $P = 12$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho dãy số (a_n) thoả mãn $a_1 = 1$ và $a_n = 10a_{n-1} - 1, \forall n \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $\log a_n > 100$.

A 100. **B** 101. **C** 102. **D** 103.

Lời giải.

Ta thấy $a_n = 10 \cdot a_{n-1} - 1 \Rightarrow a_n - \dfrac{1}{9} = 10 \cdot \left(a_{n-1} - \dfrac{1}{9}\right)$.

Đặt $b_n = a_n - \dfrac{1}{9}$ ta được $\begin{cases} b_1 = \dfrac{8}{9} \\ b_n = 10 \cdot b_{n-1} \end{cases} \Rightarrow b_n = \dfrac{8}{9} \cdot 10^{n-1} \Rightarrow a_n = \dfrac{8}{9} \cdot 10^{n-1} + \dfrac{1}{9}, \forall n \geq 1$.

Ta thấy $\dfrac{8 \cdot 10^{n-1} + 1}{9} > 10^{n-2} \Leftrightarrow 9 \cdot 10^{n-2} \cdot \left(\dfrac{80}{9} - 1\right) + 1 > 0$ (đúng với $n \geq 1$). (1)

Ta thấy

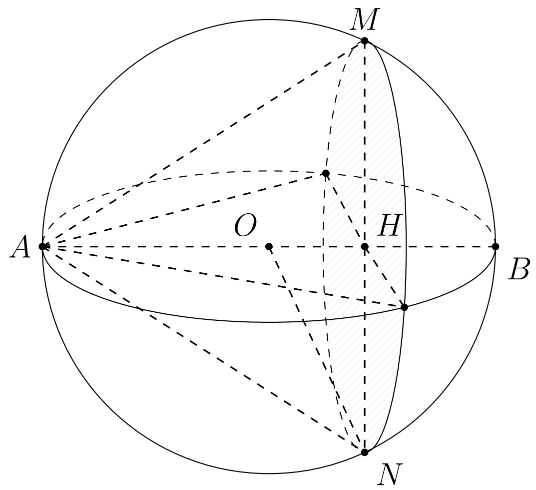
$$\begin{aligned} & \log a_n > 100 \\ \Leftrightarrow\ & a_n > 10^{100} \\ \Rightarrow\ & \frac{8 \cdot 10^{n-1} + 1}{9} > 10^{100} \\ \Rightarrow\ & 10^{n-2} \geq 10^{100} \text{ (do (1))} \\ \Leftrightarrow\ & n \geq 102. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 47. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$, $B(6;5;5)$. Gọi (S) là mặt cầu đường kính AB. Mặt phẳng (P) vuông góc với đoạn AB tại H sao cho khối nón đỉnh A và đáy là đường tròn tâm H (giao của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P)) có thể tích lớn nhất, biết rằng $(P)\colon 2x + by + cz + d = 0$ với $b, c, d \in \mathbb{Z}$. Tính $S = b + c + d$.

A $S = -18$. **B** $S = -11$. **C** $S = -24$. **D** $S = -14$.

Lời giải.



Gọi O là tâm mặt cầu (S).

Gọi MN là đường kính của đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S).

Vì khối nón có thể tích lớn nhất nên ta suy ra H thuộc đoạn OB. Đặt $OH = x, (0 < x < 3)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4;4;2) \Rightarrow AB = 6$.

Ta có $\begin{cases} ON = 3 \\ OH = x \end{cases} \Rightarrow HN^2 = 9 - x^2$.

Thể tích khối nón $V = \dfrac{\pi}{3} \cdot (x+3) \cdot (9-x^2), (0 < x < 3)$.

Xét hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 27, (0 < x < 3)$.

Ta có $f'(x) = -3(x^2 + 2x - 3)$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \max\limits_{(0;3)} f(x) = f(1)$.

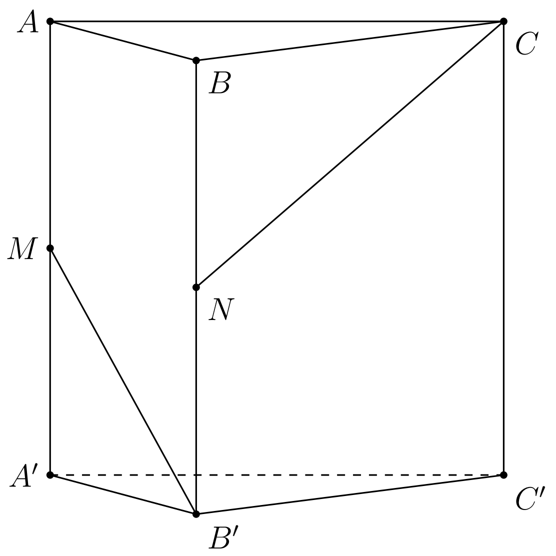
Khi đó ta được $\overrightarrow{AH} = \dfrac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} x_H = \dfrac{14}{3} \\ y_H = \dfrac{11}{3} \\ z_H = \dfrac{13}{3} \end{cases} \Rightarrow (P)\colon 2x + 2y + z - 21 = 0$.

Vậy ta được $\begin{cases} b = 2 \\ c = 1 \\ d = -21 \end{cases} \Rightarrow S = -18$.

Chọn đáp án A □

Câu 48.

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AA' = b$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', BB' (tham khảo hình vẽ bên). Tính khoảng cách của hai đường thẳng $B'M$ và CN.



A $\mathrm{d}(B'M, CN) = \dfrac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{12a^2 + 4b^2}}$.

B $\mathrm{d}(B'M, CN) = \dfrac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{4a^2 + 12b^2}}$.

C $\mathrm{d}(B'M, CN) = \dfrac{a}{2}$.

D $\mathrm{d}(B'M, CN) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi P, I lần lượt là trung điểm của CC', MP.

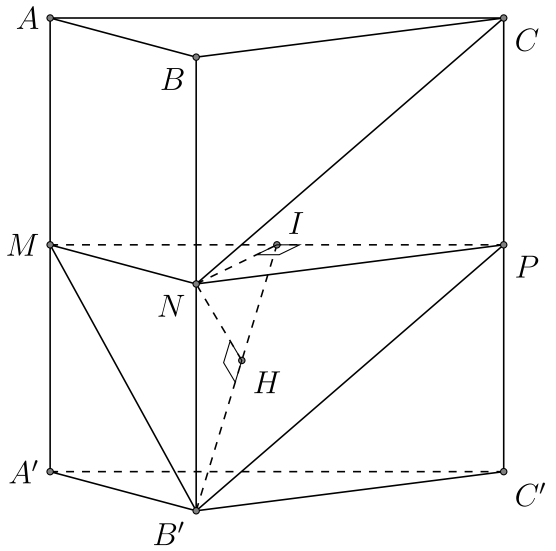
Gọi H là hình chiếu của N lên $B'I$.

Ta có $\begin{cases} MP \perp NI \\ MP \perp B'N \end{cases} \Rightarrow MP \perp (B'NI)$.

Ta có $\begin{cases} NH \perp B'I \\ NH \perp MP \end{cases} \Rightarrow NH \perp (MPB')$.

Vì $CN \parallel B'P$ nên

$$\begin{aligned} & \mathrm{d}(B'M, CN) = \mathrm{d}(CN, (MPB')) \\ \Rightarrow\ & \mathrm{d}(B'M, CN) = \mathrm{d}(N, (MPB')) \\ \Rightarrow\ & \mathrm{d}(B'M, CN) = NH. \end{aligned}$$



Ta có $\dfrac{1}{NH^2} = \dfrac{1}{B'N^2} + \dfrac{1}{NI^2} = \dfrac{4}{b^2} + \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow NH = \dfrac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{12a^2 + 4b^2}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Trong lễ tổng kết năm học $2017 - 2018$, lớp 12T nhận được 20 cuốn sách gồm 5 cuốn sách Toán, 7 cuốn sách Vật lí, 8 cuốn sách Hoá học, các sách cùng môn học là giống nhau. Số sách này được chia đều cho 10 học sinh trong lớp, mỗi học sinh chỉ nhận được hai cuốn sách khác môn học. Bình và Bảo là 2 trong số 10 học sinh đó. Tính xác suất để 2 cuốn sách mà Bình nhận được giống 2 cuốn sách của Bảo.

(A) $\frac{1}{5}$. (B) $\frac{17}{90}$. (C) $\frac{14}{45}$. (D) $\frac{12}{45}$.

Lời giải.

Vì mỗi học sinh chỉ nhận được hai cuốn sách khác môn học nên từ 20 quyển sách ta chia ra 10 phần quà.

Trong đó mỗi phần quà đó hoặc là gồm 1 cuốn sách Toán và 1 cuốn sách Vật lí (loại 1), hoặc là gồm 1 cuốn sách Toán và 1 cuốn sách Hoá (loại 2), hoặc là gồm 1 cuốn sách Vật lí và 1 cuốn sách Hoá (loại 3).

Gọi x, y, z lần lượt là số phần quà loại 1, loại 2 và loại 3.

Ta có $\begin{cases} x+y=5 \\ x+z=7 \\ y+z=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=5. \end{cases}$

Số cách chia phần quà cho Bình và Bảo:

- Cùng nhận loại 1: có $\mathrm{C}_2^2 = 1$ cách.
- Cùng nhận loại 2: có $\mathrm{C}_3^2 = 3$ cách.
- Cùng nhận loại 3: có $\mathrm{C}_5^2 = 10$ cách.

Gọi biến cố A: " 2 cuốn sách mà Bình và Bảo nhận được giống nhau ".

Ta có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^2 = 45$.

Ta có $n(A) = 14$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{14}{45}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(x) + f'(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của $f(1)$.

(A) $\frac{2\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$. (B) $\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$. (C) $\mathrm{e}-1$. (D) $2\mathrm{e}-1$.

Lời giải.

Ta thấy

$$\begin{aligned} & f(x) + f'(x) \leq 1 \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^x \cdot [f(x) + f'(x)] \leq \mathrm{e}^x \\ \Leftrightarrow\ & [\mathrm{e}^x \cdot f(x)]' \leq \mathrm{e}^x \\ \Leftrightarrow\ & \int_0^1 [\mathrm{e}^x \cdot f(x)]' \,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ \Rightarrow\ & \mathrm{e} \cdot f(1) \leq \mathrm{e} - 1 \\ \Leftrightarrow\ & f(1) \leq \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. C	3. B	4. D	5. C	6. A	7. D	8. B	9. D	10. C
11. D	12. B	13. C	14. D	15. B	16. D	17. C	18. C	19. D	20. A
21. D	22. A	23. B	24. D	25. A	26. A	27. B	28. A	29. C	30. C
31. A	32. B	33. C	34. C	35. A	36. D	37. B	38. A	39. A	40. D
41. C	42. A	43. C	44. B	45. B	46. C	47. A	48. A	49. C	50. B

111 ĐỀ THI THỬ, TRƯỜNG THPT CHUYÊN THÁI BÌNH, LẦN 5, 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho số phức z thỏa mãn $z(1-2i)+i\bar{z}=15+i$. Tìm mô-đun của số phức z.

A $|z|=5$. **B** $|z|=4$. **C** $|z|=2\sqrt{5}$. **D** $|z|=2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Giả sử $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó ta có

$$z(1-2i)+i\bar{z}=15+i \Leftrightarrow (x+3y)+(y-x)i=15+i \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\ y=4.\end{cases}$$

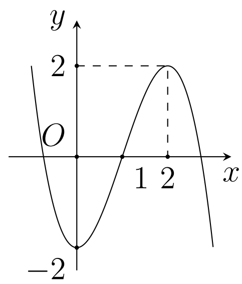
Vậy $|z|=5$.

Chọn đáp án A □

Câu 2.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-2;2)$. **B** $(-\infty;0)$. **C** $(0;2)$. **D** $(2;+\infty)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số, hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(2x-1)^{\pi}$.

A $\mathscr{D}=\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **C** $\mathscr{D}=\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định khi $2x-1>0$ hay $x>\frac{1}{2}$. Vậy tập xác định của hàm số $y=(2x-1)^{\pi}$ là $\mathscr{D}=\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^4+4x^2$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A 1. **B** 4. **C** 5. **D** 3.

Lời giải.

Trên đoạn $[-1;2]$ ta có

$$y'=0 \Leftrightarrow -4x^3+8x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Do đó $\max\limits_{[-1;2]} y=\max\left\{y(-1),y\left(\sqrt{2}\right),y(2)\right\}=y\left(\sqrt{2}\right)=4$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn số phức $\dfrac{7-4i}{z_1}$ trong mặt phẳng phức.

A $P(3;2)$. **B** $N(1;-2)$. **C** $Q(3;-2)$. **D** $M(1;2)$.

Lời giải.

Ta có

$$z^2 - 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \pm 2i.$$

Do đó $z_1 = 1 - 2i$. Suy ra $\dfrac{7-4i}{z_1} = 3 + 2i$. Vậy điểm cần tìm là $P(3;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 5$ và tổng 50 số hạng đầu bằng 5150. Tìm công thức của số hạng tổng quát u_n.

A $u_n = 1 + 4n$. **B** $u_n = 5n$. **C** $u_n = 3 + 2n$. **D** $u_n = 2 + 3n$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có

$$50u_1 + \frac{50(50-1)}{2}d = 50 \Rightarrow d = 4.$$

Vậy cấp số cộng đã cho có số hạng tổng quát là $u_n = u_1 + (n-1)d = 1 + 4n$, với mọi $n \geq 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(Q_1)\colon 3x - y + 4z + 2 = 0$ và $(Q_2)\colon 3x - y + 4z + 8 = 0$. Phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai mặt phẳng (Q_1) và (Q_2) là

A $(P)\colon 3x - y + 4z + 10 = 0$. **B** $(P)\colon 3x - y + 4z + 5 = 0$.

C $(P)\colon 3x - y + 4z - 10 = 0$. **D** $(P)\colon 3x - y + 4z - 5 = 0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $3x - y + 4z + c = 0$. Vì (P) cách đều hai mặt phẳng $(Q_1)\colon 3x - y + 4z + 2 = 0$ và $(Q_2)\colon 3x - y + 4z + 8 = 0$ nên

$$\begin{aligned}
& d\left((P),(Q_1)\right) = d\left((P),(Q_2)\right) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{|c-2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{|c-8|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 4^2}} \\
\Leftrightarrow\ & c = 5.
\end{aligned}$$

Vậy mặt phẳng (P) có phương trình $3x - y + 4z + 5 = 0$.

Chọn đáp án B □

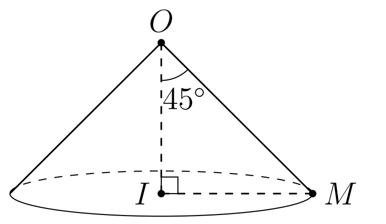
Câu 8. Trong không gian cho tam giác OIM vuông tại I, góc $\widehat{IOM} = 45^\circ$ và cạnh $IM = a$. Khi quay tam giác OIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình nón tròn xoay. Khi đó, diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay đó bằng

A $\pi a^2\sqrt{3}$. **B** πa^2. **C** $\pi a^2\sqrt{2}$. **D** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Dễ thấy hình nón tạo thành có đường sinh là OM và bán kính đáy là IM. Do đó diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay đó là

$$S = \pi \cdot IM \cdot OM = \pi a^2\sqrt{2}.$$



Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{x-1} < 5^{x+3}$ là

(A) $(-\infty; -5)$. (B) $(-\infty; 0)$. (C) $(-5; +\infty)$. (D) $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương

$$5^{\frac{x-1}{3}} < 5^{x+3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3} < x+3 \Leftrightarrow x > -5.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-5; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 1 + \dfrac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Tìm m.

(A) $m = 2$. (B) $m = 5$. (C) $m = 3$. (D) $m = 4$.

Lời giải.

Với $x > 1$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$y = x - 1 + \frac{4}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{4}{x-1}} = 4.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x - 1 = \dfrac{4}{x-1}$ hay $x = 2$. Vậy $m = \min\limits_{(1;+\infty)} y = 4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-12}{x+4} & \text{khi } x \neq -4 \\ mx + 1 & \text{khi } x = -4 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = -4$.

(A) $m = 4$. (B) $m = 3$. (C) $m = 2$. (D) $m = 5$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \to -4} f(x) = \lim_{x \to -4} \frac{x^2+x-12}{x+4} = \lim_{x \to -4} \frac{(x-3)(x+4)}{x+4} = -7.$$

Hàm số đã cho liên tục khi và chỉ khi

$$\lim_{x \to -4} f(x) = f(-4) \Leftrightarrow -4m + 1 = -7 \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

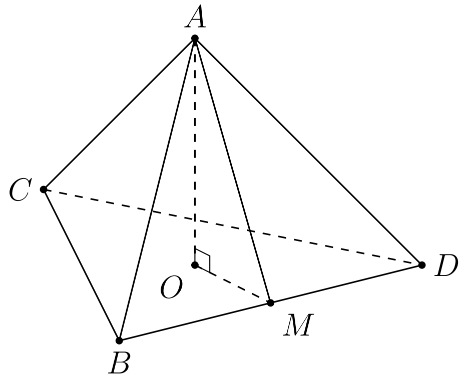
Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Thể tích của khối tứ diện đều cạnh a là

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{12}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **C** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{12}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{24}$.

Lời giải.

Giả sử $ABCD$ là tứ diện đều cạnh a. Gọi O là tâm của tam giác đều BCD, M là trung điểm cạnh CD. Khi đó, $AO \perp (BCD)$, suy ra $AO \perp OM$. Suy ra



$$AO = \sqrt{AM^2 - OM^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot AO \cdot S_{BCD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển thành đa thức của biểu thức $A = (1-x)^{10}$ là

Ⓐ 30. **B** -120. Ⓒ 120. Ⓓ -30.

Lời giải.

Ta có $A = (1-x)^{10} = \sum\limits_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^k (-1)^k x^k$. Vậy hệ số của x^3 trong khai triển là $-\mathrm{C}_{10}^3 = -120$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Cho các véc-tơ $\vec{a}(1;2;3)$, $\vec{b}(-2;4;1)$, $\vec{c}(-1;3;4)$. Véc-tơ $\vec{v} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$ có tọa độ là

Ⓐ $\vec{v} = (7;3;23)$. Ⓑ $\vec{v} = (23;7;3)$. Ⓒ $\vec{v} = (7;23;3)$. **D** $\vec{v} = (3;7;23)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{v} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} = (3;7;23)$.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Hàm số $y = x^2 \ln x$ đạt cực trị tại điểm

Ⓐ $x = \sqrt{\mathrm{e}}$. Ⓑ $x = 0$, $x = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$. Ⓒ $x = 0$. **D** $x = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathscr{D} = (0;+\infty)$. Do đó

$$y' = 0 \Leftrightarrow x(1 + 2\ln x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

Mặt khác y' đổi dấu khi x đi qua $x = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ nên $x = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ là điểm cực trị của hàm số đã cho.

Chọn đáp án D □

Câu 16.

Cho bảng biến thiên như hình vẽ. Hỏi đây là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số sau?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	1 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

(A) $y=\dfrac{-x+2}{x-1}$. (B) $y=\dfrac{x+2}{x-1}$.

(C) $y=\dfrac{x+2}{x+1}$. (D) $y=\dfrac{x-3}{x-1}$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số đã cho nhận đường thẳng các $x=1$, $y=1$ lần lượt tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Mặt khác, hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng xác định. Vậy hàm số cần tìm là $y=\dfrac{x+2}{x-1}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{-3x+2}$ là

(A) $x=\dfrac{2}{3}$. (B) $y=\dfrac{2}{3}$. (C) $x=-\dfrac{1}{3}$. (D) $y=-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-1}{-3x+2}=-\dfrac{1}{3}$. Vậy tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là $y=-\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18.

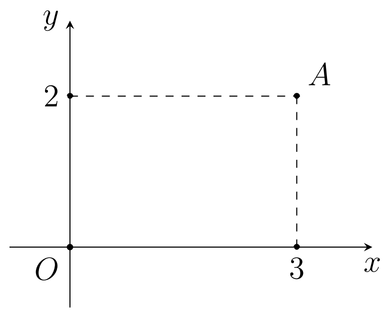
Điểm A trong hình vẽ biểu diễn cho số phức z. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) Phần thực là 3, phần ảo là 2.

(B) Phần thực là 3, phần ảo là $2i$.

(C) Phần thực là -3, phần ảo là $2i$.

(D) Phần thực là -3, phần ảo là 2.



Lời giải.

Điểm A biểu diễn số phức $z=3+2i$, có phần thực là 3, phần ảo là 2.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x+\cos x$.

(A) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+\sin x+C$. (B) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=1-\sin x+C$.

(C) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C$. (D) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-\sin x+C$.

Lời giải.

$$\int(x+\cos x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+\sin x+C.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Phương trình $\log_2 x+\log_2(x-3)=2$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 2. (B) 0. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

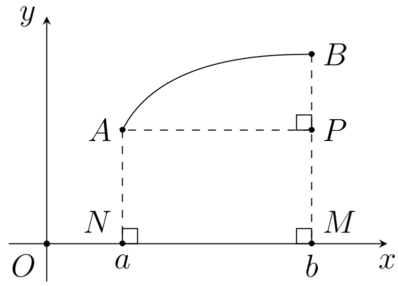
$$\begin{cases} x > 3 \\ \log_2 [x(x-3)] = \log_2 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x^2 - 3x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy phương trình đã cho có đúng một nghiệm.

Chọn đáp án D □

Câu 21.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$, có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A $\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$ là diện tích hình thang cong $ABMN$.

B $\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$ là độ dài đoạn BP.

C $\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$ là độ dài đoạn NM.

D $\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$ là độ dài đoạn cong AB.

Lời giải.

Theo ý nghĩa hình học của tích phân thì $\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$ là diện tích hình thang cong $ABMN$.

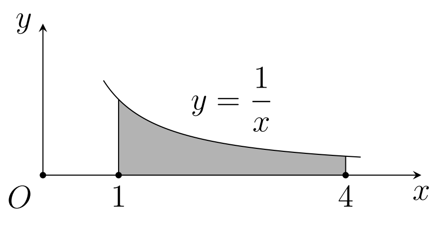
Chọn đáp án A □

Câu 22. Cho hình phẳng $(\mathcal{H})$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x}$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng $(\mathcal{H})$ quay xung quanh trục Ox.

A $2\pi \ln 2$. **B** $\dfrac{3\pi}{4}$. **C** $\dfrac{3}{4}$. **D** $2 \ln 2$.

Lời giải.

Hình phẳng $(\mathcal{H})$ là phần tô đậm trong hình vẽ bên. Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay $(\mathcal{H})$ quanh trục Ox là



$$V = \pi \int\limits_1^4 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\Big|_1^4 = \frac{3\pi}{4}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 23. Một tổ học sinh có 6 nam và 4 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người. Tính xác suất sao cho 2 người được chọn đều là nữ.

A $\dfrac{2}{15}$. **B** $\dfrac{7}{15}$. **C** $\dfrac{8}{15}$. **D** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Số cách chọn 2 học sinh bất kì là C_{10}^2. Số cách chọn 2 học sinh nữ là C_4^2. Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{C}_{10}^2} = \dfrac{2}{15}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P)\colon x - 2y - 2z - 2 = 0$ có phương trình là

(A) $(S)\colon (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 3$.
(B) $(S)\colon (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$.
(C) $(S)\colon (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$.
D $(S)\colon (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$.

Lời giải.

Bán kính của mặt cầu (S) là

$$r = d(I,(P)) = \frac{|-1-2\cdot 2-2\cdot 1-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}} = 3.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(S)\colon (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \le x \le 1 \\ 4 - x & \text{khi } 1 \le x \le 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $\dfrac{7}{2}$.
(B) 1.
(C) $\dfrac{5}{2}$.
(D) $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 3x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (4-x)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{2}.$$

Chọn đáp án (A) □

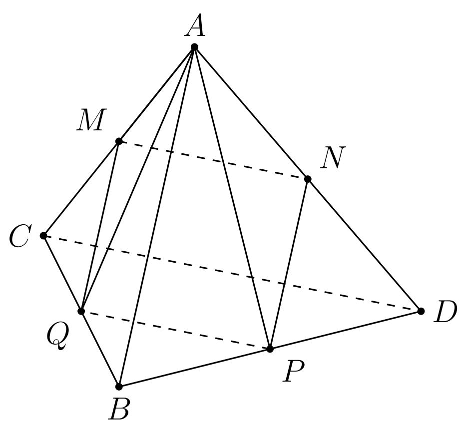
Câu 26. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có thể tích V. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AC, AD, BD, BC. Thể tích khối chóp $AMNPQ$ là

(A) $\dfrac{V}{6}$.
(B) $\dfrac{V}{3}$.
C $\dfrac{V}{4}$.
(D) $\dfrac{\sqrt{2}V}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} V_{ABMNPQ} &= V_{A.MNPQ} + V_{A.BPQ} \\ &= V_{C.MNPQ} + V_{C.DNP} \\ &= V_{CDMNPQ} \end{aligned}$$



nên $V_{ABMNPQ} = \dfrac{1}{2}V$. Mà $S_{BQP} = \dfrac{1}{4}S_{BCD}$ nên $V_{A.BQP} = \dfrac{1}{4}V$. Suy ra $V_{A.MNPQ} = \dfrac{V}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;5)$. Số mặt phẳng (α) đi qua M và cắt các trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho $OA = OB = OC$ (A, B, C không trùng với gốc tọa độ O) là

A 8. **B** 3. **C** 4. **D** 1.

Lời giải.

Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ $(a,b,c \neq 0)$. Khi đó phương trình mặt phẳng (ABC) là

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Do $M(1;2;5) \in (ABC)$ và $OA = OB = OC$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} |a| = |b| = |c| \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{5}{c} = 1. \end{cases}$$

- Nếu $a = b = c$ thì $a = b = c = 8$.
- Nếu $a = b = -c$ thì $a = b = -2$, $c = 2$.
- Nếu $a = -b = c$ thì $a = c = 4$, $b = -4$.
- Nếu $-a = b = c$ thì $a = -6$, $b = c = 6$.

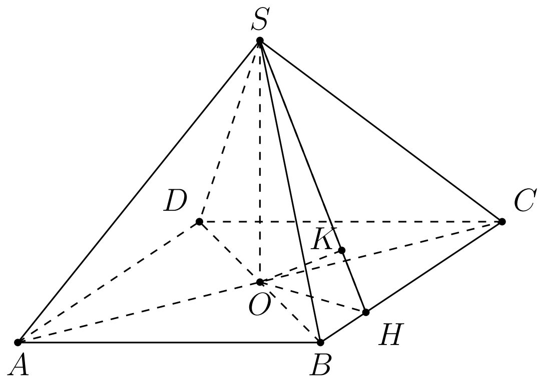
Vậy có tất cả bốn mặt phẳng thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60°$, có SO vuông góc với mặt đáy và $SO = a$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) là

A $\dfrac{a\sqrt{57}}{19}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{57}}{18}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{45}}{7}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{52}}{16}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của O trên BC, K là hình chiếu của O trên SH. Khi đó ta có $OK \perp (SBC)$ hay $d(O,(SBC)) = OK$. Ta có

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

Do $\widehat{BAD} = 60°$ nên $\widehat{OBC} = 60°$, suy ra $OB = \dfrac{a}{2}$, $OC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Thay vào đẳng thức trên ta được $OK = \dfrac{a\sqrt{57}}{19}$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + m$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho B là trung điểm của AC. Phát biểu nào dưới đây đúng?

A $m \in (0;+\infty)$. **B** $m \in (-\infty;-4)$. **C** $m \in (-4;0)$. **D** $m \in (-4;-2)$.

Lời giải.

Ta có

$$y''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

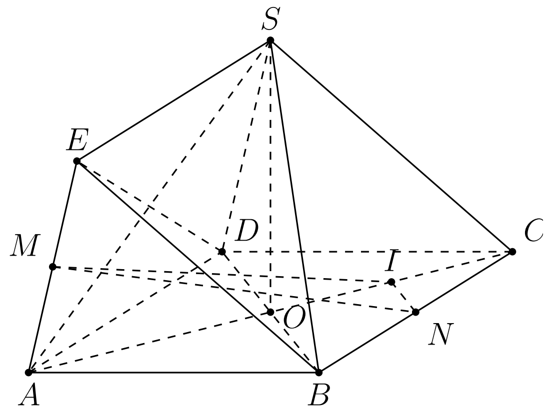
Điểm uốn của đồ thị (C) có tọa độ $(-1; m+2)$. Đồ thị (C) cắt trục hoành tại ba điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán thì điểm uốn của đồ thị hàm số thuộc trục hoành hay $m=-2$. Thử lại, ta thấy $m=-2$ thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông, E là điểm đối xứng với D qua trung điểm SA. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE và BC. Góc giữa hai đường thẳng MN và BD bằng

A 90°. B 60°. C 45°. D 75°.

Lời giải.



Do D đối xứng với E qua trung điểm của SA nên $SDAE$ là hình bình hành, suy ra $EA \parallel SD$. Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EC}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}}{2}\\ &= \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{DC}}{2}\\ &= \frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{SC}}{2}.\end{aligned}$$

Mà $BD \perp AC$ và $BD \perp SC$ (do $BD \perp (SAC)$) nên

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BD} \cdot \frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{SC}}{2} = 0.$$

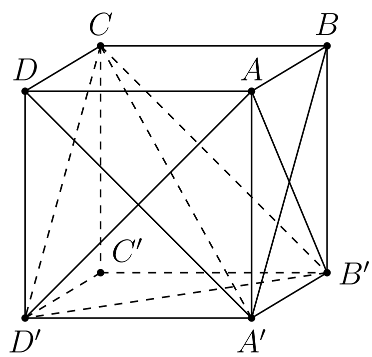
Vậy $(MN, BD) = 90^\circ$.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Số đo của góc giữa $(BA'C)$ và $(DA'C)$ là

A 90°. B 60°. C 30°. D 45°.

Lời giải.



Ta có $A'D' \perp (ABB'A')$ nên $A'D' \perp AB'$ mà $AB' \perp A'B'$ nên $AB' \perp (BA'D'C)$. Tương tự $AD' \perp (DA'B'C)$. Do đó $((BA'D'C), (DA'B'C)) = (AB', AD')$. Mặt khác ta có $AD' = AB' = B'D' = a\sqrt{2}$ nên tam giác $AB'D'$ là tam giác đều. Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$ bằng 60°.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Cho $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{a\mathrm{e}^2+b}{c}$, với $a, b, c \in \mathbb{N}$ và phân số $\frac{a}{c}$ là tối giản. Tính $T = a+b+c$.

(A) $T = 5$. (B) $T = 3$. (C) $T = 4$. **D** $T = 6$.

Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_1^{\mathrm{e}} x \ln x \, \mathrm{d}x = \left.\frac{x^2 \ln x}{2}\right|_1^{\mathrm{e}} - \int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1}{2} \int\limits_1^{\mathrm{e}} x \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2 + 1}{4}.$$

Suy ra $a = b = 1$, $c = 4$. Vậy $T = a + b + c = 6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1 m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16 m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bằng công thức $v_{\mathrm{A}}(t) = 16 - 4t$ (m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để hai ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn thì khi dừng lại ô tô A phải hãm phanh cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

A 33 m. (B) 12 m. (C) 31 m. (D) 32 m.

Lời giải.

Dễ thấy ô tô A dừng lại sau 4 giây. Quãng đường mà ô tô A di chuyển từ lúc bắt đầu hãm phanh đến lúc dừng lại là

$$\int\limits_0^4 (16 - 4t) \, \mathrm{d}t = \left.\left(16t - 2t^2\right)\right|_0^4 = 32 \text{ (m)}.$$

Vậy ô tô A phải bắt đầu hãm phanh cách ô tô B một khoảng ít nhất $32 + 1 = 33$ m.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 1)$, $C(-1; 4; 2)$. Độ dài đường cao từ đỉnh A của tam giác ABC là

(A) $\sqrt{6}$. **B** $\sqrt{2}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{CB} = (1; -1; -1)$, $\overrightarrow{BA} = (2; -3; -1)$, suy ra $\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}\right] = (2; 1; 1)$. Độ dài đường cao từ đỉnh A của tam giác ABC là

$$d\left(A, BC\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2018]$ để hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1} - mx - 1$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$?

(A) 2017. (B) 2019. (C) 2020. **D** 2018.

Lời giải.

Đạo hàm của hàm số đã cho có hữu hạn nghiệm nên nó đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi đạo hàm của nó không âm trên $\mathbb{R}$ hay

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq m, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

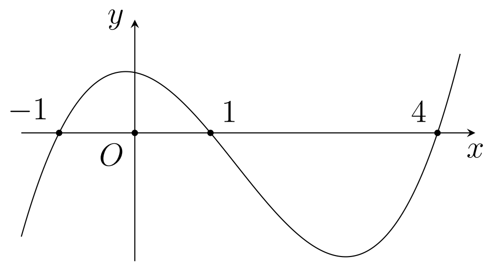
Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mặt khác, ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ nên $f(x) \geq m$, $\forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m \leq -1$. Vậy có 2018 số nguyên m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 36.

Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = \mathrm{e}^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}$.

A 1. B 2. C 4. D 3.



Lời giải.

Ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow f'(x)\left(2\mathrm{e}^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}\ln 5\right) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = 4 \end{array}\right. .$$

Mặt khác do $2\mathrm{e}^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}\ln 5 > 0$ nên y' đổi dấu khi x đi qua các điểm $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$. Vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

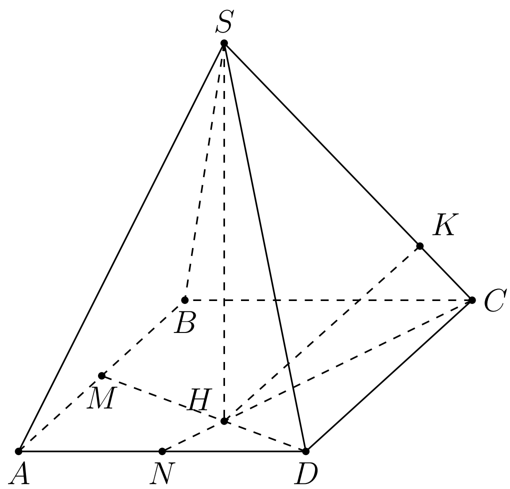
Chọn đáp án D □

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD, H là giao điểm của CN và DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

A $\dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$. B $\dfrac{2\sqrt{3}a}{19}$. C $\dfrac{\sqrt{3}a}{19}$. D $\dfrac{3\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$.

Lời giải.

Do $ABCD$ là hình vuông nên $CN \perp DM$ mà $DM \perp SH$ nên $DM \perp (SHC)$. Gọi K là hình chiếu của H trên SC, khi đó, $HK \perp DM$ và $HK \perp SC$. Ta có



$$CN = \sqrt{DN^2 + DC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2},$$
$$HC = \frac{DC^2}{CN} = \frac{2a\sqrt{5}}{5},$$
$$HK = \frac{SH \cdot HC}{SC} = \frac{SH \cdot HC}{\sqrt{SH^2 + HC^2}} = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}.$$

Vậy $d(DM, SC) = HK = \dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + m - 3 = 0$. Tìm số thực m để $(\beta)\colon 2x - y + 2z - 8 = 0$ cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π.

A $m = -3$. B $m = -4$. C $m = -1$. D $m = -2$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;3)$, bán kính $R=\sqrt{17-m}$ $(m<17)$. Bán kính của đường tròn giao tuyến là $\dfrac{8\pi}{2\pi}=4$. Do đó khoảng cách từ I đến mặt phẳng (β) thỏa mãn

$$[d(I,(\beta))]^2=R^2-4^2 \Leftrightarrow \frac{[2\cdot(-1)-2+2\cdot 3-8]^2}{2^2+(-1)^2+2^2}=17-m-16 \Leftrightarrow m=-3.$$

Vậy giá trị cần tìm là $m=-3$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho đa giác đều có n cạnh $(n\geq 4)$. Tìm n để da giác có số đường chéo bằng số cạnh.

A $n=5$. **B** $n=16$. **C** $n=6$. **D** $n=8$.

Lời giải.

Số đường chéo của đa giác n cạnh là $\dfrac{n(n-3)}{2}$, do đó ta có

$$\frac{n(n-3)}{2}=n \Rightarrow n=5.$$

Vậy ngũ giác là đa giác có số đường chéo bằng số cạnh.

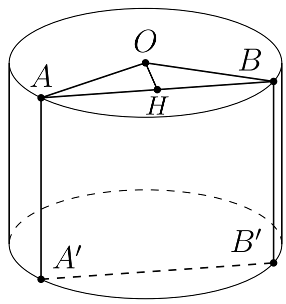
Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R và chiều cao bằng $\dfrac{3R}{2}$. Mặt phẳng (α) song song với trục của hình trụ và cách trục một khoảng bằng $\dfrac{R}{2}$. Diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (α) là

A $\dfrac{2R^2\sqrt{3}}{3}$. **B** $\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{3R^2\sqrt{2}}{2}$. **D** $\dfrac{2R^2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Giả sử mặt phẳng (α) cắt hình trụ theo giao tuyến là hình chữ nhật $ABB'A'$ (xem hình vẽ). Gọi O là tâm của hình tròn đáy chứa dây cung AB, H là trung điểm của AB. Theo giả thiết ta có $OH=\dfrac{R}{2}$. Suy ra $AB=R\sqrt{3}$. Vậy diện tích thiết diện là $S=AB\cdot AA'=\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án B □

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x-3y-2z-12=0$. Gọi $M(a;b;c)$ thuộc (P) sao cho $MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a+b+c$.

A $a+b+c=3$. **B** $a+b+c=2$. **C** $a+b+c=-2$. **D** $a+b+c=-3$.

Lời giải.

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}$, hay $\overrightarrow{OI}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}}{5}$, suy ra $I(2;1;1)$. Khi đó, ta có

$$MA^2+MB^2+3MC^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$$

$$\begin{aligned}&= 5MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}\right) + IA^2 + IB^2 + 3IC^2\\&= 5MI^2 + IA^2 + IB^2 + 3IC^2.\end{aligned}$$

Do đó $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất hay M là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P). Đường thẳng đi qua I vuông góc với (P) có phương trình $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-1}{-2}$, do đó tọa độ của M cần tìm thỏa mãn

$$\begin{cases}\dfrac{a-2}{3} = \dfrac{b-1}{-3} = \dfrac{c-1}{-2}\\ 3a - 3b - 2c - 12 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{7}{2}\\ b = -\dfrac{1}{2}\\ c = 0.\end{cases}$$

Vậy $a + b + c = \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2} + 0 = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho phương trình $(1+\cos x)(\cos 4x - m\cos x) = m\sin^2 x$. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$.

A $m \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$.

B $m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

C $m \in (-1; 1)$.

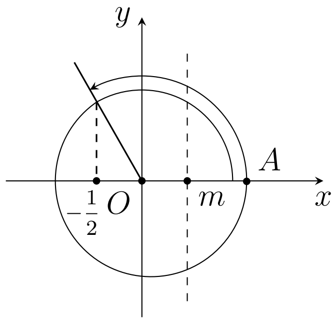
D $m \in \left[-\dfrac{1}{2}; 1\right)$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}&(1+\cos x)(\cos 4x - m\cos x) = m(1-\cos x)(1+\cos x)\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}1 + \cos x = 0\\ \cos 4x - m\cos x = m - m\cos x\end{array}\right.\\ \Leftrightarrow\ &\cos 4x = m \quad \left(\text{do } 1 + \cos x > 0, \forall x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]\right)\end{aligned}$$

Do $x \in \left[o; \dfrac{2\pi}{3}\right]$ nên $4x \in \left[0; \dfrac{8\pi}{3}\right]$. Hình vẽ bên biểu diễn cung lượng giác có số đo $\dfrac{8\pi}{3}$. Phương trình đã cho có hai nghiệm khi và chỉ khi đường thẳng $x = m$ cắt cung lượng giác đó tại 3 điểm. Vậy $-\dfrac{1}{2} \le m < 1$.



Chọn đáp án D □

Câu 43. Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z + 2| + |(1+i)z - 2| = 4\sqrt{2}$. Gọi $m = \max|z|$, $n = \min|z|$ và số phức $w = m + ni$. Tính $|w|^{2018}$.

A 4^{1009}. **B** 5^{1009}. **C** 6^{1009}. **D** 2^{1009}.

Lời giải.

- Chia cả hai vế đẳng thức trong giả thiết cho $|1+i|$, ta được

$$\begin{aligned}4 &= |z-1+i|+|z+1-i|\\ &\geq |z-1+i+z+1-i|\\ &= 2|z|,\end{aligned}$$

hay $|z| \leq 2$, đẳng thức xảy ra khi $z=\sqrt{2}(1-i)$. Do đó $m=2$.

- Giả sử $z=x+yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$. Suy ra

$$\begin{aligned}16 &= [|z+1-i|+|z-1+i|]^2\\ &= \left[\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}\right]^2\\ &\leq 2\left[(x-1)^2+(y+1)^2+(x+1)^2+(y-1)^2\right]\\ &= 2\left(2x^2+2y^2+4\right),\end{aligned}$$

suy ra $x^2+y^2 \geq 2$, hay $|z| \geq \sqrt{2}$, dấu bằng xảy ra khi $z=1+i$. Do đó $n=\sqrt{2}$.

Vậy $w=2\sqrt{2}i$, suy ra $|w|=6^{1009}$.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-5=0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A, song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất.

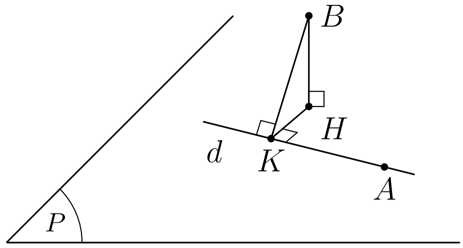
A $d\colon \dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$.

B $d\colon \dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{-11}=\dfrac{z-1}{2}$.

C $d\colon \dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{2}$.

D $d\colon \dfrac{x+3}{-26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$.

Lời giải.



Gọi (Q) là mặt phẳng chứa A và song song với mặt phẳng (P), mặt phẳng (Q) có phương trình là $x-2y+2z+1=0$. Khi đó, đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (Q). Gọi K là hình chiếu của B trên d, H là hình chiếu của B trên (Q). Suy ra

$$d\left(B,d\right)=BK \geq BH = d(B,(Q)).$$

Do đó, điểm khoảng cách đến B nhỏ nhất khi d đi qua hình chiếu H của B trên mặt phẳng (Q). Phương trình đường thẳng qua B vuông góc với mặt phẳng (Q) là

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{2}.$$

Tọa độ của điểm H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-3}{2} \\ x - 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow H\left(-\dfrac{1}{9}; \dfrac{11}{9}; \dfrac{7}{9}\right).$$

Suy ra đường thẳng d nhận véc-tơ $\vec{u} = 9\overrightarrow{AH} = (26; 11; -2)$. Vậy phương trình đường thẳng d là $\dfrac{x+3}{26} = \dfrac{y}{11} = \dfrac{z-1}{-2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $3\,|f(2x-1)| - 10 = 0$ là

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

A 2. B 1. **C 4.** D 3.

Lời giải.

Đặt $g(x) = f(2x-1)$, suy ra $g'(x) = 2f(2x-1)$. Ta có bảng biến thiên của g

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
g'		$-$	||	$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

Từ đó ta có bảng biến thiên của $|g(x)| = |f(2x-1)|$

x	$-\infty$				$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$\|g\|$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

Suy ra đường thẳng $y = \dfrac{10}{3}$ cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại 4 điểm phân biệt. Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$, $h(x) = \dfrac{f(x)}{3-g(x)}$. Hệ số góc của các tiếp tuyến của các đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x_0 = 2018$ bằng nhau và khác 0. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $f(2018) \geq -\dfrac{1}{4}$. **B** $f(2018) \leq -\dfrac{1}{4}$. **C** $f(2018) \geq \dfrac{1}{4}$. **D** $g(2018) \leq \dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có $h'(x) = \dfrac{f'(x)\left[3-g(x)\right] + f(x)g'(x)}{\left[3-g(x)\right]^2}$, suy ra

$$\begin{aligned} f'(x_0) = g'(x_0) &= \frac{f'(x_0)\left[3-g(x_0)\right] + f(x_0)g'(x_0)}{\left[3-g(x_0)\right]^2} \\ \Rightarrow \quad \frac{\left[3-g(x_0)+f(x_0)\right]}{\left[3-g(x_0)\right]^2} &= 1. \end{aligned}$$

Đặt $t = 3 - g(x_0)$ ta có $t^2 - t - f(x_0) = 0$. Phương trình này có nghiệm nên $1 + 4f(x_0) \geq 0$ hay $f(x_0) \geq -\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho hái số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3\left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ là

A $P_{\min} = \dfrac{11}{2}$. **B** $P_{\min} = \dfrac{27}{5}$. **C** $P_{\min} = -5 + 6\sqrt{3}$. **D** $P_{\min} = -3 + 6\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} &\log_3\left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1) = 9 + 2(y+1) - (x+1)(y+1) \\ \Rightarrow\ &\left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1} = \frac{3^{9+2(y+1)}}{3^{(x+1)(y+1)}} \\ \Rightarrow\ &3^{(x+1)(y+1)}\left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1} = 3^9 \cdot 9^{(y+1)}. \qquad (1) \end{aligned}$$

Với mỗi $y > 0$, đặt $f(t) = 3^t t^{y+1}$, $t > 0$. Dễ thấy $f'(t) = 3^t t^{y+1}\ln 3 + (y+1)3^t t^y > 0$, với mọi $t > 0$. Do đó $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$, kết hợp (1), ta được

$$(x+1)(y+1) = 9.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} P = x + 2y &= (x+1) + 2(y+1) - 3 \\ &\geq 2\sqrt{2(x+1)(y+1)} - 3 = -3 + 6\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 3\sqrt{2} - 1$, $y = \dfrac{3\sqrt{2}-2}{2}$. Vậy $P_{\min} = -3 + 6\sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Cho A là tập các số tự nhiên có 7 chữ số. Lấy một số bất kì của tập hợp A. Tính xác suất để lấy được số lẻ và chia hết cho 9.

A $\dfrac{625}{1701}$. **B** $\dfrac{1}{9}$. **C** $\dfrac{1}{18}$. **D** $\dfrac{1250}{1701}$.

Lời giải.

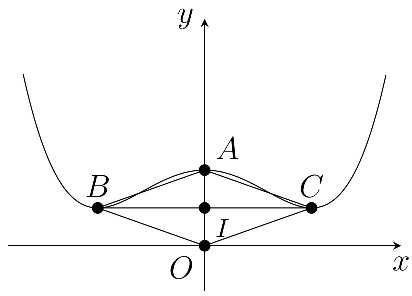
Xét số có dạng $a = \overline{a_1a_2a_3\ldots a_7}$ với $a_1 \neq 0$, $a_1, a_2, \ldots, a_7 \in \{0;1;2;\ldots;9\}$. Ta sẽ đếm số các số dạng này thỏa mãn a lẻ và chia hết cho 9. Trước hết a_7 có 5 cách chọn. Ta chọn các số a_2, a_3, $\ldots$, a_6 một cách bất kì, sẽ có 10^5 cách chọn. Chú ý rằng a chia hết cho 9 khi và chỉ khi $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_7$ chia hết cho 9. Mặt khác tổng số dư của tổng $a_2 + a_3 + \cdots + a_7$ khi chia cho 9 thuộc vào tập $\{0;1;2;\ldots;8\}$, với mỗi trường hợp đó ta đều có duy nhất một cách chọn $a_1 \in \{1;2;3;\ldots;9\}$ sao cho tổng S chia hết cho 9. Do đó số cách số a lẻ chia hết cho 9 là $5 \cdot 10^5$. Mà có $9 \cdot 10^6$ số tự nhiên có 7 chữ số nên xác suất cần tìm là $\dfrac{5 \cdot 10^5}{9 \cdot 10^6} = \dfrac{1}{18}$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^2$ có đồ thị (C). Để đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho bốn điểm A, B, C, O là bốn đỉnh của hình thoi (O là gốc tọa độ) thì giá trị của tham số m là

A. $m = -\sqrt{2}$. B. $m = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. C. $m = \pm\sqrt{2}$. D. $m = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4m^2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm m \end{array}\right..$$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị khi khi và chi khi $m \neq 0$. Khi đó, ta có thể giả sử $A\left(0;m^2\right)$, $B\left(-m;m^2-m^4\right)$, $C\left(m;m^2-m^4\right)$. Bốn điểm A, B, O, C là bốn đỉnh của hình thoi khi và chỉ khi O đối xứng với A qua trung điểm $I\left(0;m^2-m^4\right)$ của BC. Điều này tương đương

$$m^2 + 0 = 2\left(m^2 - m^4\right) \Leftrightarrow m^2 - 2m^4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (do } m \neq 0\text{)}.$$

Vậy các giá trị cần tìm của m là $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Giả sử hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, $y = f(x)$ có đạo hàm, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(3) = \dfrac{2}{3}$ và $\left[f'(x)\right]^2 = (x+1)f(x)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $2613 < f^2(8) < 2614$. B. $2614 < f^2(8) < 2615$.
C. $2618 < f^2(8) < 2619$. D. $2616 < f^2(8) < 2617$.

Lời giải.

Do $f(x)$ đồng biến nên $f'(x) \geq 0$, với $x > 0$. Từ giả thiết ta có

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{x+1} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}f}{2\sqrt{f}} = \frac{\sqrt{x+1}}{2}\,\mathrm{d}x$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được

$$\sqrt{f(x)} = \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$$

Do $f(3) = \frac{2}{3}$ nên $C = \frac{-8+\sqrt{6}}{3}$. Suy ra

$$f^2(x) = \left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{-8+\sqrt{6}}{3}\right]^4.$$

Do đó $f^2(8) \approx 2613{,}26$. Vậy $2613 < f^2(8) < 2614$.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. A	3. C	4. B	5. A	6. A	7. B	8. C	9. C	10. D
11. C	12. C	13. B	14. D	15. D	16. B	17. D	18. A	19. A	20. D
21. A	22. B	23. A	24. D	25. A	26. C	27. C	28. A	29. C	30. A
31. B	32. D	33. A	34. B	35. D	36. D	37. A	38. A	39. A	40. B
41. A	42. D	43. C	44. A	45. C	46. A	47. D	48. C	49. B	50. A

112 ĐỀ THI THỬ, TRƯỜNG CHUYÊN LÀO CAI, 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Có 3 kiểu mặt đồng hồ đeo tay (vuông, tròn, elip) và 4 kiểu dây (kim loại, da, vải và nhựa). Hỏi có bao nhiêu cách chọn một chiếc đồng hồ gồm một mặt và một dây?

A. 7. B. 16. C. 4. D. 12.

Lời giải.

Số cách chọn một mặt đồng hồ : C_3^1.

Số cách chọn một dây đồng hồ: C_4^1.

Vậy có tất cả $C_3^1 \cdot C_4^1 = 12$ cách chọn một chiếc đồng hồ gồm một mặt và một dây.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Cho số phức $z = 3 + 2i$. Khi đó số phức $w = z + (i + 1)\overline{z}$ có mô-đun là

A. $|w| = \sqrt{37}$. B. $|w| = \sqrt{72}$. C. $|w| = \sqrt{73}$. D. $|w| = \sqrt{27}$.

Lời giải.

Ta có $z = 3 + 2i \Rightarrow \overline{z} = 3 - 2i$. Khi đó $w = 3 + 2i + (i + 1)(3 - 2i) = 8 + 3i$.

Do đó $|w| = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Tìm giao điểm của đường thẳng $d: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P):\ 2x - y - z - 7 = 0$.

A. $M(3; -1; 0)$. B. $M(0; 2; -4)$. C. $M(6; -4; 3)$. D. $M(1; 4; -2)$.

Lời giải.

Dễ thấy điểm $M(3; -1; 0)$ thỏa mãn phương trình đường thẳng d và mặt phẳng (P) nên giao điểm của d và (P) là $M(3; -1; 0)$.

Chọn đáp án A □

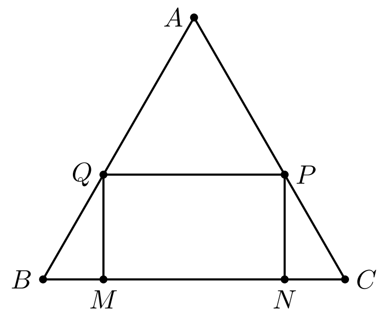
Câu 4. Cho tam giác $\triangle ABC$ đều. Người ta dựng một hình chữ nhật $MNPQ$ có cạnh MN nằm trên cạnh BC, hai đỉnh P, Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC, AB của tam giác ABC. Gọi $S_1 = S_{\triangle ABC}$, S_2 là diện tích lớn nhất mà hình chữ nhật $MNPQ$ có thể nhận được. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\dfrac{S_1}{S_2} = \sqrt{3}$. B. $\dfrac{S_1}{S_2} = \sqrt{2}$. C. $\dfrac{S_1}{S_2} = 2$. D. $\dfrac{S_1}{S_2} = 3$.

Lời giải.

Giả sử ABC là tam giác đều có độ dài cạnh a và $MN = x$ $(0 < x < a)$. Khi đó $S_1 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Xét $\triangle ABC$ có $PQ \parallel BC$ nên $\dfrac{AQ}{AB} = \dfrac{PQ}{BC} \Rightarrow AQ = x \Rightarrow BQ = a - x$ và $BM = \dfrac{a-x}{2}$ nên $MQ = \dfrac{(a-x)\sqrt{3}}{2}$. Suy ra



$$S_2 = \frac{x \cdot (a-x)\sqrt{3}}{2} \le \left(\frac{x + a - x}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \dfrac{a}{2}$. Do đó $\max S_2 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$. Vậy $\dfrac{S_1}{S_2} = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho hình nón có chiều cao là h, bán kính đáy là r, đường sinh là l. Khi đó đẳng thức nào sau đây đúng?

A $\dfrac{1}{r^2} = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{1}{l^2}$. B $h^2 = r^2 + l^2$. C $r^2 = h^2 + l^2$. D $l^2 = h^2 + r^2$.

Lời giải.

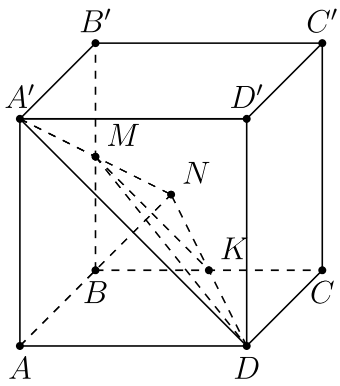
Ta có $l^2 = h^2 + r^2$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của cạnh BB'. Mặt phẳng $(A'MD)$ chia hình lập phương thành hai khối đa diện. Tính tỉ số thể tích của hai khối đa diện trên.

A $\dfrac{7}{17}$. B $\dfrac{8}{17}$. C $\dfrac{9}{17}$. D $\dfrac{10}{17}$.

Lời giải.



Giả sử $AB = a$. Gọi N là giao điểm của $A'M$ và AB, K là giao điểm của DN và BC.

Mặt phẳng $(A'MD)$ chia hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối đa diện $A'MKDAB$ và khối đa diện $A'B'C'D'MKCD$.

Do $A'B' \parallel BN$ nên $\dfrac{A'B'}{BN} = \dfrac{MB'}{MB} = 1 \Rightarrow BN = A'B' = a$.

Do $BN \parallel CD$ nên $\dfrac{BK}{CK} = \dfrac{BN}{CD} = \dfrac{AB}{CD} = 1 \Rightarrow BK = CK = \dfrac{a}{2}$.

$V_{B.MNK} = \dfrac{1}{6}BM \cdot BN \cdot BK = \dfrac{a^3}{24}$ và $V_{A.A'ND} = \dfrac{1}{6}AA' \cdot AN \cdot AD = \dfrac{a^3}{3}$.

Do đó $V_{A'MKDAB} = V_{A.A'ND} - V_{B.MNK} = \dfrac{a^3}{3} - \dfrac{a^3}{24} = \dfrac{7a^3}{24}$.

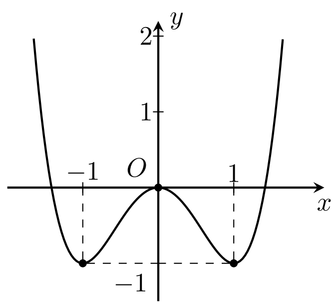
Thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ bằng a^3.

Từ

$$\begin{aligned} & V_{ABCD.A'B'C'D'} = V_{A'MKDAB} + V_{A'B'C'D'MKCD} \\ \Rightarrow & V_{A'B'C'D'MKCD} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_{A'MKDAB} = \frac{17a^3}{24} \\ \Rightarrow & \frac{V_{A'MKDAB}}{V_{A'B'C'D'MKCD}} = \frac{7}{17}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 7.



Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

A $y = -x^4 + 2x^2$. B $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

C $y = x^4 - 2x^2$. D $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu; đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ nên nó là đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 3}$ có đồ thị (C). Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. (C) có hai đường tiệm cận đứng là $x = -1$, $x = 3$.

B. (C) có ba đường tiệm cận.

C. (C) có tiệm cận ngang là $y = \dfrac{1}{2}$.

D. (C) có đường tiệm cận ngang là $y = 2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 3} = 2$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Bạn Hùng trúng tuyển vào trường đại học A nhưng vì do không đủ nộp học phí nên Hùng quyết định vay ngân hàng trong 4 năm mỗi năm vay 3.000.000 đồng để nộp học phí với lãi suất 3%/năm. Sau khi tốt nghiệp đại học bạn Hùng phải trả góp hàng tháng số tiền T (không đổi) cùng với lãi suất 0,25%/tháng trong vòng 5 năm. Số Tiền T hàng tháng mà bạn Hùng phải trả cho ngân hàng (làm tròn đến kết quả hàng đơn vị) là

A. 232518 đồng. B. 309604 đồng . C. 215456 đồng. D. 232289 đồng.

Lời giải.

Sau 4 năm bạn Hùng nợ ngân hàng số tiền là:

$S = 3000000\left[(1 + 3\%)^4 + (1 + 3\%)^3 + (1 + 3\%)^2 + (1 + 3\%)\right] = 12927407{,}43$ đồng.

Lúc này ta coi như bạn Hùng nợ ngân hàng hoàn tiền ban đầu là 12.927.407,43 đồng, số tiền này bắt đầu tính lãi và được trả góp trong 5 năm.

Ta có công thức $T = \dfrac{N(1+r)^n \cdot r}{(1+r)^n - 1} = \dfrac{12927407{,}4(1 + 0{,}0025)^{60} \cdot 0{,}0025}{(1 + 0{,}0025)^{60} - 1} \approx 232289$ đồng.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Cho hàm số $y = \dfrac{x + 1}{x^2 - 2mx + 4}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

A. $m \in \varnothing$. B. $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right.$. C. $m > 2$. D. $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right. \\ m \neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{\pm\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số luôn có 1 tiệm cận ngang $y = 0$. Do đó, để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận thì phương trình $x^2 - 2mx + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1.

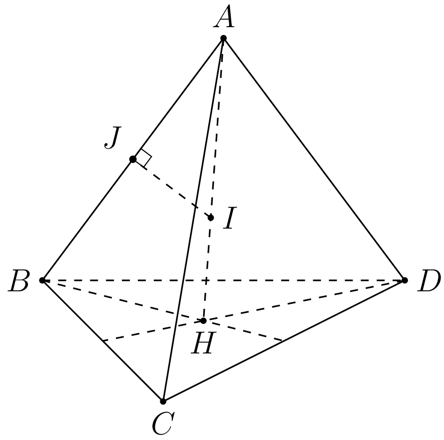
Khi đó $\begin{cases} \Delta > 0 \\ m \neq -\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right. \\ m \neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Tính a biết mặt cầu ngoại tiếp tứ diện có bán kính bằng 1.

A $a = \dfrac{2\sqrt{3}}{7}$. **B** $a = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. **C** $\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$. **D** $a = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.



Gọi H là tâm tam giác đều BCD, J là trung điểm của AB. Khi đó, mặt phẳng trung trực của AB cắt AH tại I. Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Do $\triangle AJI \backsim \triangle AHB$ nên $\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{AJ}{AH} \Rightarrow AI = \dfrac{AB \cdot AJ}{AH} = \dfrac{AB^2}{2AH}$. Mặt khác $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, suy ra $\dfrac{AB^2}{2AH} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

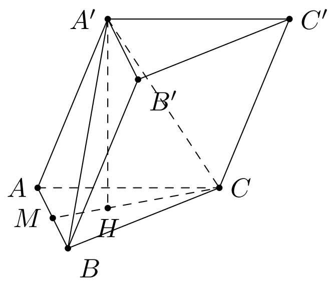
Mặt cầu có bán kính bằng 1 nên $\dfrac{AB^2}{2AH} = 1 \Rightarrow a = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, và $A'A = A'B = A'C = a\sqrt{\dfrac{7}{12}}$. Số đo góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) bằng

A 75°. **B** 30°. **C** 45°. **D** 60°.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm AB, H là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó $A'H \perp (ABC)$ và $(A'HM) \perp AB$. Suy ra $((ABB'A');(ABC)) = \widehat{A'MH}$. Xét $\triangle A'MH$, ta có $\tan \widehat{A'MH} = \dfrac{A'H}{MH} = \sqrt{3}$.

Vậy $((ABB'A');(ABC)) = 60^\circ$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Cho hàm số $y = x^4 - 8x^2 - 4$. Các khoảng đồng biến của hàm số là

A $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$. **B** $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

C $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$. **D** $(-2;0)$ và $(0;2)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 16x$; $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-20	$\nearrow$	-4	$\searrow$	-20	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 2; 0)$, $B(2; 0; -2)$ và mặt phẳng $(P):\ x + 2y - z - 1 = 0$. Gọi $M(a; b; c) \in (P)$ sao cho $MA = MB$ và góc $\widehat{AMB}$ có số đo lớn nhất. Khi đó đẳng thức nào sau đây đúng?

A $11(a + b + c) = 14$. **B** $11(a + b + c) = 15$.
C $11(a + b + c) = 16$. **D** $11(a + b + c) = 17$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} M \in (P) \\ MA = MB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b - c - 1 = 0 \\ (a-2)^2 + (b-2)^2 + c^2 = (a-2)^2 + b^2 + (c+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3c + 1 \\ b = -c \end{cases}$.

Do đó $M(3c + 1; -c; c)$, $\overrightarrow{MA} = (1 - 3c; 2 + c; -c)$ và $\overrightarrow{MB} = (1 - 3c; c; -2 - c)$.

Suy ra

$$\begin{aligned} \cos\widehat{AMB} &= \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}{MA \cdot MB} = \frac{(1-3c)^2 + c(2+c) + c(2+c)}{(1-3c)^2 + c^2 + (2+c)^2} \\ &= \frac{11c^2 - 2c + 1}{11c^2 - 2c + 5} = 1 - \frac{4}{11c^2 - 2c + 5} \\ &= 1 - \frac{4}{11\left(c - \frac{1}{11}\right)^2 + \frac{54}{11}} \geq \frac{5}{27}. \end{aligned}$$

Do đó $\widehat{AMB} \leq \arccos\frac{5}{27}$. Dấu bằng xảy ra tại $c = \frac{1}{11} \Rightarrow M\left(\frac{14}{11}; -\frac{1}{11}; \frac{1}{11}\right)$.

Vậy $11(a + b + c) = 14$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2\pi$ có diện tích là?

A 4. **B** 4π. **C** 2. **D** 2π.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $S = \int\limits_0^{2\pi} |\sin x| dx = 4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Đường thẳng $y = -3x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 1$ tại điểm duy nhất có tọa độ $(x_0; y_0)$. Chọn câu trả lời **sai** trong các câu trả lời sau đây.

A $x_0^3 - 2x_0^2 - 1 - y_0 = 0$. **B** $y_0 + 3x_0 - 1 = 0$.

C $x_0 + y_0 + 2 = 0$. **D** $x_0^3 - 2 = 2x_0^3 - 3x_0$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng và đồ thị hàm số là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = -3x + 1 \\ y = x^3 - 2x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -2. \end{cases}$$

Chọn đáp án C □

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khi đó, thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

A $\dfrac{a^3}{4}$. **B** $\dfrac{a^3}{3}$. **C** a^3. **D** $\dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{a^3}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Hàm số $y = x^3 - 2x$, hệ thức liên hệ giữa giá trị cực đại ($y_{\text{CĐ}}$) và giá trị cực tiểu (y_{CT}) là

A $y_{\text{CT}} + y_{\text{CĐ}} = 0$. **B** $y_{\text{CT}} = 2y_{\text{CĐ}}$. **C** $y_{\text{CT}} - 3y_{\text{CĐ}} = 0$. **D** $y_{\text{CT}} = y_{\text{CĐ}}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 2$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ x = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \end{array}\right.$. Suy ra $y_{\text{CT}} + y_{\text{CĐ}} = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 x \, dx$ ta được kết quả là

A $I = 1$. **B** $I = \dfrac{1}{3}$. **C** $I = \dfrac{1}{4}$. **D** $I = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_0^1 x \, dx = \left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^1 = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon\ 2x + y + 2z + 2 = 0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 3. Viết phương trình của mặt cầu (S).

A $(S)\colon (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$. **B** $(S)\colon (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$.

C $(S)\colon (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. **D** $(S)\colon (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 25$.

Lời giải.

Gọi K là tâm đường tròn giao tuyến, R là bán kính mặt cầu (S). Khi đó

$$IK = d(I,(P)) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 + 2 \cdot 3 + 2|}{3} = 4.$$

Ta có $R^2 = IK^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow R = 5$.
Vậy phương trình mặt cầu $(S) : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$.
Chọn đáp án C □

Câu 21. Trong các số phức z thỏa mãn $|z+1-5i| = |\overline{z}+3-i|$, giả sử số phức có mô-đun nhỏ nhất có dạng $z = a+bi$. Khi đó $S = \dfrac{a}{b}$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{2}{3}$. B. $\dfrac{1}{3}$. C. $\dfrac{1}{4}$. D. $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.
Giả sử $z = a+bi$ $(a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z} = a - bi$.
Khi đó

$$\begin{aligned} &|z+1-5i| = |\overline{z}+3-i| \\ \Leftrightarrow &(a+1)^2 + (b-5)^2 = (a+3)^2 + (b+1)^2 \\ \Leftrightarrow &a+3b-4 = 0 \Leftrightarrow a = 4-3b. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(4-3b)^2+b^2} = \sqrt{10b^2-24b+16} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{10}b - \frac{12}{\sqrt{10}}\right)^2 + \frac{16}{10}} \geq \frac{4}{\sqrt{10}}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $b = \dfrac{6}{5} \Rightarrow a = \dfrac{2}{5}$. Suy ra $\min |z| = \dfrac{4}{\sqrt{10}}$.
Vậy $S = \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{3}$.
Chọn đáp án B □

Câu 22. Tìm số hạng chứa x^7 trong khai triển $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^{13}$.

A. $-\mathrm{C}_{13}^3$. B. $-\mathrm{C}_{13}^3 x^7$. C. $-\mathrm{C}_{13}^4 x^7$. D. $\mathrm{C}_{13}^3 x^7$.

Lời giải.
Ta có $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^{13} = \left(x + \left(-\dfrac{1}{x}\right)\right)^{13} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{C}_{13}^k x^k \left(-\dfrac{1}{x}\right)^{13-k} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{C}_{13}^k (-1)^{13-k} x^{2k-13}$.
Số hạng chứa x^7 có k thỏa mãn $2k - 13 = 7 \Leftrightarrow k = 10$.
Vậy số hạng chứa x^7 trong khai triển là $-\mathrm{C}_{13}^3 x^7$.
Chọn đáp án B □

Câu 23. Biểu diễn nghiệm của phương trình

$$4\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) + \sin 4x\left(\sqrt{3} - 1 - \tan 2x \tan x\right) = 3$$

trên đường tròn lượng giác. Số điểm biểu diễn là

A. 10. B. 8. C. 12. D. 6.

Lời giải.
Ta có

$$4\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) + \sin 4x\left(\sqrt{3} - 1 - \tan 2x \tan x\right) = 3$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 4\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)+2\sin 2x\cos 2x\left(\sqrt{3}-1-\frac{\sin 2x\sin x}{\cos 2x\cos x}\right)=3\\
&\Leftrightarrow \cos 4x+(\sqrt{3}-1)\sin 4x+\sin 4x=2\sin 2x\\
&\Leftrightarrow \cos 4x+\sqrt{3}\sin 4x=2\sin 2x\\
&\Leftrightarrow \sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2x\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{12}+k\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{36}+\dfrac{k\pi}{3}.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Biểu diễn nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác ta thấy có 8 điểm biểu diễn.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Gieo một đồng tiền cân đối và đồng chất bốn lần. Xác suất để cả bốn lần xuất hiện mặt sấp là

A $\dfrac{2}{16}$. B $\dfrac{1}{16}$. C $\dfrac{4}{16}$. D $\dfrac{6}{16}$.

Lời giải.

Xác suất để cả bốn lần xuất hiện mặt sấp là $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{16}$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Hàm số $y=\ln\left(\sqrt{x^2+x-2}-x\right)$ có tập xác định là

A $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. B $(2;+\infty)$.

C $(-\infty;-2]\cup(2;+\infty)$. D $(-2;2)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi

$$\sqrt{x^2+x-2}-x>0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+x-2}>x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\x^2+x-2\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\geq 0\\x^2+x-2>x^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leq -2\\x>2\end{array}\right..$$

Chọn đáp án B □

Câu 26. Phương trình $\log_2(3x-2)=3$ có nghiệm là

A $x=\dfrac{8}{3}$. B $x=\dfrac{10}{3}$. C $x=\dfrac{16}{3}$. D $x=\dfrac{11}{3}$.

Lời giải.

Trong điều kiện $x>\dfrac{2}{3}$, phương trình tương đương với $3x-2=8\Leftrightarrow x=\dfrac{10}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\sqrt{12-3x^2}$.

A $\max y=4$, $\min y=2$. B $\max y=4$, $\min y=-2$.

C $\max y=2$, $\min y=-2$. D $\max y=2$, $\min y=-4$.

Lời giải.

Điều kiện: $-2 \le x \le 2$. Đạo hàm $y' = 1 - \dfrac{3x}{\sqrt{12-3x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{12-3x^2} = 3x \Leftrightarrow x = \pm 1$.
Ta có $y(-2) = -2$, $y(2) = 2$, $y(-1) = 2$, $y(1) = 4$. Suy ra $\max y = 4$, $\min y = -2$.
Chọn đáp án B □

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y-7}{-2} = \dfrac{z}{1}$ và điểm $M(4;1;6)$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) có tâm M, tại hai điểm A, B sao cho $AB = 6$. Viết phương trình của mặt cầu (S).

A. $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 48$.
B. $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 38$.
C. $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 28$.
D. $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 18$.

Lời giải.
Gọi $H(2t-5; 7-2t; t) \in d$ là hình chiếu của điểm M trên d. Ta có $\overrightarrow{MH} = (2t-9; 6-2t; t-6)$, $\vec{u}_d = (2;-2;1)$. Khi đó

$$\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 2(2t-9) - 2(6-2t) + (t-6) = 0 \Leftrightarrow t = 4$$
$$\Rightarrow MH = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3.$$

Từ đó tính được bán kính mặt cầu (S) là $R = \sqrt{MH^2 + \dfrac{AB^2}{4}} = 3\sqrt{2}$.
Vậy $(S):\ (x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 18$.
Chọn đáp án D □

Câu 29. Cho $a > 0$, $a \ne 1$; $x, y > 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.
B. $a^{\log_a (xy)} = xy$.
C. $\log_a x^y = y \log_a x$.
D. $\log_a (x+y) = \log_a x + \log_a y$.

Lời giải.
Mệnh đề $\log_a (x+y) = \log_a x + \log_a y$ sai. Mệnh đề nếu đúng phải là $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$.
Chọn đáp án D □

Câu 30. Giới hạn $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{3x+2}$ bằng

A. 1.
B. $+\infty$.
C. $\dfrac{5}{3}$.
D. 0.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{3x+2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{5}{x}}{3 + \dfrac{2}{x}} = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$ m/s^2. Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là bao nhiêu?

A. $\dfrac{43}{3}$ m.
B. $\dfrac{430}{3}$ m.
C. $\dfrac{4300}{3}$ m.
D. $\dfrac{43000}{3}$ m.

Lời giải.

Vận tốc của vật sau khi tăng tốc có phương trình $v(t) = \displaystyle\int (3t + t^2)\,\mathrm{d}t = \dfrac{3t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} + C$.

Vì $v(0) = 10$ nên $c = 10$. Suy ra $v(t) = \dfrac{3t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} + 10$.

Do đó, trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc vật được quảng đường

$$s = \int_0^{10} \left(\frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10\right)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{12} + 10t\right)\Bigg|_0^{10} = \frac{4300}{3}\ (\mathrm{m}).$$

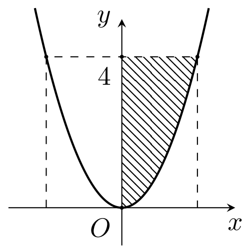
Chọn đáp án C □

Câu 32. Cho hình phẳng $(\mathcal{D})$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $y = 4$. Khi quay $(\mathcal{D})$ quanh trục tung ta được khối tròn xoay có thể tích bằng bao nhiêu?

A 6π. B 10π. C 8π. D 12π.

Lời giải.

Xét phần hình phẳng bên phải trục tung, ta có $x = \sqrt{y}$. Thể tích khối tròn xoay khi quay $(\mathcal{D})$ quanh trục tung có thể tích



$$V = \pi \int_0^4 y\,\mathrm{d}y = \pi \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^4 = 8\pi.$$

Chọn đáp án C □

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 < 2$.

A $0 < m < 2$. B $m > 0$. C $0 < m < 4$. D $m < 9$.

Lời giải.

Đặt $t = 2^x$, $t > 0$. Ta cần tìm điều kiện tham số m để phương trình $t^2 - 6t + m = 0$ có hai nghiệm dương t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 t_2 < 4$. Yêu cầu bài toán tương đương với

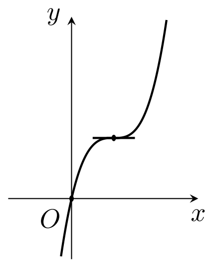
$$\begin{cases} 9 - m > 0 \\ m > 0 \\ m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4.$$

Chọn đáp án C □

Câu 34.

Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + c^2 + b + 1$.

A $\dfrac{1}{5}$. B 1. C $\dfrac{5}{8}$. D $\dfrac{1}{3}$.



Lời giải.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Từ đồ thị suy ra $d = 0$, $b^2 - 3ac = 0 \Rightarrow ac = \dfrac{b^2}{3}$.

Do đó, $P \geq 2ac + b + 1 = \dfrac{2b^2}{3} + b + 1 = \dfrac{2}{3}\left(b + \dfrac{3}{4}\right)^2 + \dfrac{5}{8} \geq \dfrac{5}{8}$.

Vậy $\min P = \dfrac{5}{8}$ tương ứng với $a = c = \dfrac{\sqrt{3}}{4}, b = -\dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Nếu ba kích thước của một khối hộp chữ nhật tăng lên 4 lần thì thể tích của nó tăng lên bao nhiêu lần?

A 64 lần. **B** 16 lần. **C** 192 lần. **D** 4 lần.

Lời giải.

Giả sử khối hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c và thể tích ban đầu $V_1 = abc$. Nếu tăng mỗi kích thước lên 4 lần thì thể tích khối hộp sau khi tăng là $V_2 = 4a \cdot 4b \cdot 4c = 64abc$. Điều đó có nghĩa thể tích khối hộp tăng lên 64 lần.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$, $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \displaystyle\int_{-1}^1 f(|2x-1|)\,\mathrm{d}x$.

A $I = \dfrac{2}{3}$. **B** $I = 4$. **C** $I = \dfrac{3}{2}$. **D** $I = 6$.

Lời giải.

Đặt $t = 2x - 1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x = -1 \Rightarrow t = -3$; $x = 1 \Rightarrow t = 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_{-3}^{1} f(|t|)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-3}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 + 3 = 4. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 37. Xếp 6 chữ số 1, 2, 3, 1, 2 và 4 theo một hàng ngang. Tính xác suất để xảy ra biến cố: "2 chữ số giống nhau thì không xếp cạnh nhau."

A $\dfrac{7}{15}$. **B** $\dfrac{4}{15}$. **C** $\dfrac{8}{15}$. **D** $\dfrac{11}{15}$.

Lời giải.

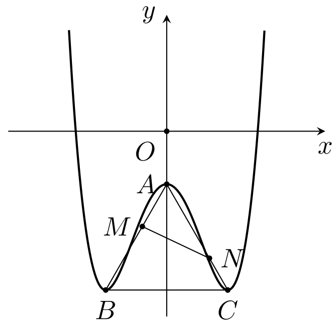
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \dfrac{6!}{2!2!} = 180$. Gọi A là biến cố: "2 chữ số giống nhau thì không xếp cạnh nhau." Khi đó, $n(\overline{A}) = \dfrac{5!}{2!} + \dfrac{5!}{2!} - 4! = 96$.

Vậy, xác suất của biến cố A là $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{96}{180} = \dfrac{7}{15}$.

Chọn đáp án A □

Câu 38.

Cho đồ thị hàm số $y = \frac{9}{8}x^4 - 3x^2 - 1$ có ba điểm cực trị A, B, C như hình vẽ. Biết M, N lần lượt thuộc AB, AC sao cho đoạn thẳng MN chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn MN.



A $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. **B** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **C** $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **D** $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{9}{2}x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$.

Suy ra $A(0; -1)$, $B\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -3\right)$ và $C\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; -3\right)$. Diện tích tam giác ABC bằng $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Mặt khác,

$$\begin{aligned} S_{AMN} &= \frac{1}{2}AM \cdot AN \cdot \widehat{MAN} = \frac{1}{2}AM \cdot AN \cdot \sin 60^\circ = \frac{AM \cdot AN\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AM \cdot AN &= \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Trong tam giác AMN ta có $MN = \sqrt{AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cos 60^\circ} \geq \sqrt{AM \cdot AN} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AM = AN = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. Vậy $\min MN = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Đặt $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1$. Xét dãy (u_n): $u_n = \frac{f(1) \cdot f(3) \cdot f(5) \cdots f(2n-1)}{f(2) \cdot f(4) \cdot f(6) \cdots f(2n)}$. Tính $\lim n\sqrt{u_n}$.

A $\lim n\sqrt{u_n} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **B** $\lim n\sqrt{u_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **C** $\lim n\sqrt{u_n} = \sqrt{3}$. **D** $\lim n\sqrt{u_n} = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $f(n) = (n^2+1)^2 + 2n(n^2+1) + (n^2+1) = (n^2+1)[(n+1)^2+1]$. Do đó

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2(2^2+1)(3^2+1)(4^2+1)(5^2+1)(6^2+1)\cdots[(2n-1)^2+1][(2n)^2+1]}{(2^2+1)(3^2+1)(4^2+1)(5^2+1)(6^2+1)(7^2+1)\cdots[(2n)^2+1][(2n+1)^2+1]} \\ &= \frac{2}{(2n+1)^2+1}. \end{aligned}$$

Vậy $\lim n\sqrt{u_n} = \lim \frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{(2n+1)^2+1}} = \lim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $OABC$ với tọa độ các đỉnh như sau: $A(2018; 0; 0)$, $B(0; 2018; 0)$, $C(0; 0; 2018)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu điểm cách đều 4 mặt phẳng chứa 4 mặt của tứ diện $OABC$?

A 1. **B** 8. **C** 3. **D** 9.

Lời giải.

Gọi $I(m;n;p)$ là điểm cách đều bốn mặt phẳng đã cho. Dễ thấy các mặt phẳng (OAB), (OBC), (OCA) lần lượt là các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx). Mặt phẳng (ABC) có phương trình tổng quát là $x+y+z=2018$. Do I cách đều các mặt phẳng này nên ta có

$$|m|=|n|=|p|=\frac{|m+n+p-2018|}{\sqrt{3}}. \quad (1)$$

Ta có các trường hợp

a) *Trường hợp 1.* $m=n=p$.
Khi đó (1) tương đương

$$|m|=\frac{|3m-2018|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow m=\frac{2018}{3\pm\sqrt{3}}.$$

Ta được hai điểm thỏa mãn bài toán.

b) *Trường hợp 2.* Trong ba số m, n, p có hai số bằng nhau và bằng số đối của số còn lại.
Khi đó, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $m=n=-p$ (các trường hợp còn lại tương tự) và (1) tương đương

$$|m|=\frac{|m-2018|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow m=\frac{2018}{1\pm\sqrt{3}}.$$

Ta được hai điểm thỏa mãn bài toán.

Vấy số điểm cách đều bốn mặt phẳng đã cho là $2+2\cdot 3=8$.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P):\ 3x-2y+z+2=0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A $\vec{n}_4=(-1;0;-1)$. **B** $\vec{n}_2=(3;0;-1)$. **C** $\vec{n}_1=(3;-2;1)$. **D** $\vec{n}_3=(3;-1;0)$.

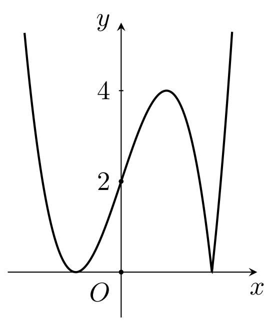
Lời giải.

Mặt phẳng (P) có phương trình $ax+by+cz+d=0$ thì có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b;c)$.

Chọn đáp án C □

Câu 42.

Cho hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có $a>0$ và đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ như hình vẽ ở bên. Tìm tập hợp tất cả các giá trị m để phương trình $f(|x|)=m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt.



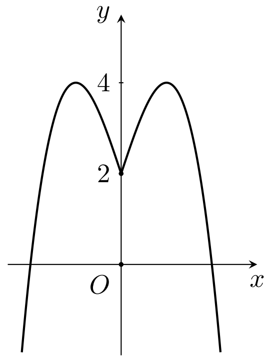
A $m\in(0;2)$. **B** $m\in(-4;-2)$.

C $m\in(2;4)$. **D** $m=4$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ và tiếp tục suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ như hình bên.

Kết luận, $m \in (2; 4)$.



Chọn đáp án (C) $\square$

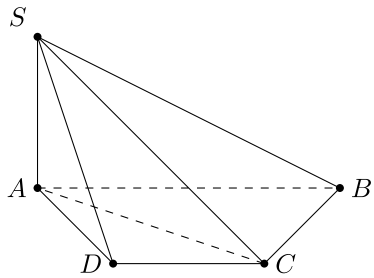
Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, có $AB = 2a$, $AD = DC = a$, $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Tan của góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là

A $\sqrt{3}$. **B** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C** $\sqrt{2}$. **D** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Trong đáy $(ABCD)$ ta có tam giác ADC vuông cân ở D nên suy ra $AC = a\sqrt{2}$. Tương tự tính được $BC = a\sqrt{2}$. Theo định lí đảo của định lí Pi-ta-go ta chứng minh được tam giác ACB vuông cân tại C, suy ra $BC \perp AC$. Do đó $BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC$. Vậy, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCA}$.

Vậy $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{CA} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.



Chọn đáp án (B) $\square$

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$. Biết $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x$, tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

A $1 < m < \mathrm{e}$. **B** $0 < m < \mathrm{e}$. **C** $m > \mathrm{e}$. **D** $0 < m \leq 1$.

Lời giải.

Từ $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x$ lấy nguyên hàm hai vế ta được $\ln f(x) = 2x - x^2 + C$, với C là hằng số. Mà $f(0) = 1 \Rightarrow C = 0$. Suy ra $f(x) = \mathrm{e}^{2x - x^2}$.

Đạo hàm $f'(x) = (2 - 2x) \cdot \mathrm{e}^{2x-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Lập bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên suy ra với $0 < m < \mathrm{e}$ thì phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (B) $\square$

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+\dfrac{5}{2}-i\right|=\left|z+\dfrac{3}{2}+2i\right|$. Biết biểu thức $Q=|z-2-4i|+|z-4-6i|$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$. Tính $P=a-4b$.

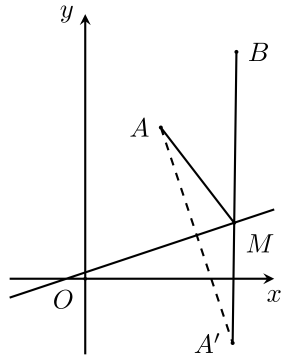
(A) $P=-2$. (B) $P=-\dfrac{911}{460}$. (C) $P=-1$. (D) $P=\dfrac{691}{272}$.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$. Giả thiết có được

$$\sqrt{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+(y-1)^2}=\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2x+1=6y.$$



Biểu thức $Q=\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-6)^2}$.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z, lúc đó M thuộc đường thẳng $d:\ 2x-6y+1=0$. Gọi $A(2;4)$, $B(4;6)$. Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $MA+MB$. Kiểm tra được A, B nằm cùng phía với d nên gọi A' là điểm đối xứng với A qua d. Ta tìm được $A'\left(\dfrac{39}{10};-\dfrac{17}{10}\right)$.

Độ dài $MA+MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $M\equiv d\cap A'B$. Đường thẳng $A'B$ có phương trình là $-77x+y+\dfrac{151}{5}=0$. Từ đó tìm được $M\left(\dfrac{1813}{460};\dfrac{681}{460}\right)$ hay $a=\dfrac{1813}{460}$ và $b=\dfrac{681}{460}$.

Kết luận, $a-4b=-\dfrac{911}{460}$.

Chọn đáp án (B) □

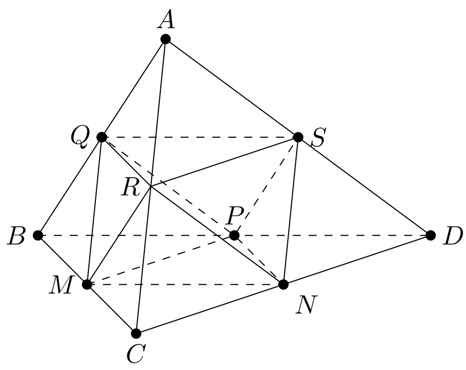
Câu 46. Cho khối tứ diện có thể tích bằng V. Gọi V' là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho. Tỉ số $k=\dfrac{V'}{V}$ là nghiệm của phương trình nào?

(A) $2x^2-3x+1=0$. (B) $3x^2-2x-1=0$. (C) $4x^2-3x-1=0$. (D) $5x^2-4x-1=0$.

Lời giải.

Giả sử khối tứ diện $ABCD$ với các trung điểm của BC, CD, BD, AB,AC,AD lần lượt là M, N, P, Q,R, S và có thể tích V. Theo công thức tỉ số thể tích ta có

$$\frac{V_{B.MPQ}}{V}=\frac{V_{B.MPQ}}{V_{B.CDA}}=\frac{BM}{BC}\cdot\frac{BP}{PD}\cdot\frac{BQ}{BA}=\frac{1}{8}.$$



Tương tự ta cũng có $\dfrac{V_{A.QRS}}{V}=\dfrac{V_{C.MNR}}{V}=\dfrac{V_{D.NPS}}{V}=\dfrac{1}{8}$.

Suy ra $k=\dfrac{V'}{V}=1-4\cdot\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{2}$. Số k chính là nghiệm của phương trình $2x^2-3x+1=0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình dạng $Ax+By+Cz+D=0$, $(A,\,B,\,C,\,D\in\mathbb{Z})$ và có ƯCLN$(|A|,|B|,|C|,|D|)=1$. Để mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(1;2;-1)$ và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất thì đẳng thức nào sau đây đúng?

(A) $A^2+B^2+C^2+D^2=46$.
(B) $A^2+B^2+C^2+D^2=24$.
(C) $A^2+B^2+C^2+D^2=64$.
(D) $A^2+B^2+C^2+D^2=42$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(1;2;-1)$ suy ra $A+2B-C+D=0$ (1). Khi đó

$$d(O,(P))=\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|A+2B-C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\leq\frac{\sqrt{[1^2+2^2+(-1)^2](A^2+B^2+C^2)}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\sqrt{6}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}A+2B-C+D=0\\ \dfrac{A}{1}=\dfrac{B}{2}=\dfrac{C}{-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}D=-3B\\ B=2A=-2C\\ A,B,C\in\mathbb{Z}\end{cases}$. Từ đó tìm được $A=-C=1, B=2, D=-6$ hoặc $A=-C=-1, B=-2, D=6$.

Do vậy $A^2+B^2+C^2+D^2=42$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Giả sử M là một điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn số phức z. Quỹ tích các điểm M thỏa mãn điều kiện $|z-1+i|=2$ là

(A) đường tròn tâm $I(1;1)$ và bán kính $R=2$.
(B) đường tròn tâm $I(-1;1)$ và bán kính $R=2$.
(C) đường tròn tâm $I(-1;-1)$ và bán kính $R=2$.
(D) đường tròn tâm $I(1;-1)$ và bán kính $R=2$.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$. Từ giả thiết ta có $(a-1)^2+(b+1)^2=4$.

Vậy quỹ tích các điểm M là đường tròn tâm $I(1;-1)$ và bán kính $R=2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S):\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (S).

(A) $I(1;2-3)$ và $R=4$.
(B) $I(1;2;-3)$ và $R=16$.
(C) $I(1;2;-3)$ và $R=16$.
(D) $I(1;-2;1)$ và $R=4$.

Lời giải.

Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R thì có phương trình $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Cho biết $\displaystyle\int\limits_0^4\frac{\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x=a+b\ln 2$, $(a,b\in\mathbb{Q})$. Khi đó, đẳng thức nào sau đây đúng?

(A) $a-b=0$.
(B) $a^2-4b-1=0$.
(C) $a^2-4b+1=0$.
(D) $a^2-4b=0$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 4 \Rightarrow t = 3$. Khi đó

$$\begin{aligned}\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_1^3 \frac{t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_1^3 \left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \left.\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)\right|_1^3 = 2+\ln 2.\end{aligned}$$

Vậy, $a = 2$, $b = 1$ và $a^2 - 4b = 0$.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. C	3. A	4. C	5. D	6. A	7. C	8. C	9. D	10. D
11. D	12. D	13. A	14. A	15. A	16. C	17. B	18. A	19. D	20. C
21. B	22. B	23. B	24. B	25. B	26. B	27. B	28. D	29. D	30. D
31. C	32. C	33. C	34. C	35. A	36. B	37. A	38. A	39. B	40. B
41. C	42. C	43. B	44. B	45. B	46. A	47. D	48. D	49. A	50. A

113 ĐỀ THI THỬ, TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH, NGHỆ AN, LẦN 2, 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Với α là số thực bất kỳ, mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) $(10^\alpha)^2 = 100^\alpha$. (B) $\sqrt{10^\alpha} = \left(\sqrt{10}\right)^\alpha$. (C) $\sqrt{10^\alpha} = 10^{\frac{\alpha}{2}}$. (D) $(10^\alpha)^2 = 10^{\alpha^2}$.

Lời giải.

Ta có: $(10^\alpha)^2 = 10^{2\alpha}$ nên mệnh đề $(10^\alpha)^2 = 10^{\alpha^2}$ sai.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Giới hạn $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+1}{(x+2)^2}$ bằng

(A) $-\infty$. (B) $\dfrac{3}{16}$. (C) 0. (D) $+\infty$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -2}(x+1) = -1 < 0 \\ \lim\limits_{x \to -2}(x+2)^2 = 0 \\ (x+2)^2 > 0, x \neq -2 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+1}{(x+2)^2} = -\infty.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 0, x = 1$ xung quanh trục Ox là

(A) $V = \displaystyle\int_0^1 x^2 e^{2x}\,dx$. (B) $V = \pi \displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$. (C) $V = \pi\displaystyle\int_0^1 x^2e^{2x}\,dx$. (D) $V = \pi\displaystyle\int_0^1 x^2e^x\,dx$.

Lời giải.

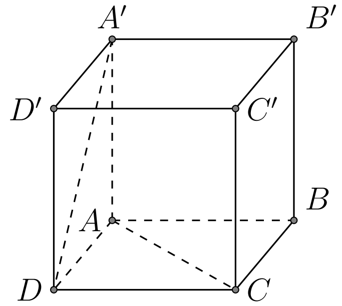
Ta có: $V = \pi \displaystyle\int_0^1 (xe^x)^2\,dx = \pi\int_0^1 x^2e^{2x}\,dx$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng

(A) $45°$. (B) $30°$. (C) $60°$. (D) $90°$.

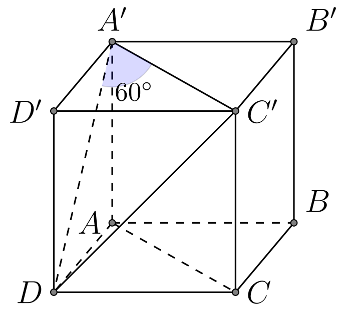


Lời giải.

Ta có: $AC \parallel A'C' \Rightarrow (AC, A'D) = (A'C', A'D)$.

Mặt khác: $A'C' = A'D = DC' = a\sqrt{2}$ nên suy ra $\triangle A'DC'$ đều.

Do đó $(A'C', A'D) = 60°$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Số cách sắp xếp 6 học sinh ngồi vào 6 trong 10 ghế trên một hàng ngang là

(A) 6^{10}. (B) $6!$. **(C)** A_{10}^{6}. (D) C_{10}^{6}.

Lời giải.

Mỗi cách sắp xếp 6 học sinh ngồi vào 6 trong 10 ghế trên một hàng ngang là một chỉnh hợp chập 6 của 10 phần tử. Do đó có A_{10}^{6} cách sắp xếp.

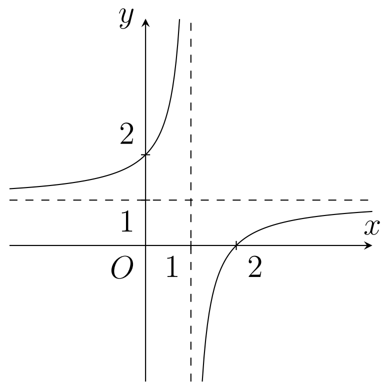
Chọn đáp án (C) □

Câu 6.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là đồ thị của hàm số nào?

(A) $y = \dfrac{x-2}{x+1}$. **(B)** $y = \dfrac{x-2}{x-1}$.

(C) $y = \dfrac{x+2}{x-2}$. (D) $y = \dfrac{x+2}{x-1}$.



Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy

- Tiệm cận ngang là $y = 1$, tiệm cận đứng là $x = 1$ nên các hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-2}$, $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ không thỏa mãn.
- Giao điểm của đồ thị với trục tung là $(0; 2)$ nên hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ không thỏa mãn, hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-1}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗		↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘		↗	$+\infty$

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A $(-1;0)$. **B** $(-1;1)$. **C** $(-\infty;-1)$. **D** $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(0;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-4}{2}$ cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm có tọa độ là

A $(-3;2;0)$. **B** $(3;-2;0)$. **C** $(-1;0;0)$. **D** $(1;0;0)$.

Lời giải.

Ta có tọa độ giao điểm của d và mặt phẳng (Oxy) là nghiệm $(x;y;z)$ của hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-4}{2} \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Vậy giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (Oxy) là điểm $(1;0;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Đồ thị của hàm số nào sau đây có tiệm cận ngang?

A $y = \dfrac{x^2-x+1}{x}$. **B** $y = x + \sqrt{1-x^2}$. **C** $y = x^2+x+1$. **D** $y = x + \sqrt{x^2+1}$.

Lời giải.

Ta có:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-x+1}{x} = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-x+1}{x} = +\infty$ nên đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2-x+1}{x}$ không có tiệm cận ngang.
- Hàm số $y = x + \sqrt{1-x^2}$ có tập xác định là $[-1;1]$ nên đồ thị không có tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+x+1) = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+x+1) = +\infty$ nên đồ thị hàm số $y = x^2+x+1$ không có tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\dfrac{-1}{x}}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = 0$. Do đó đồ thị của hàm số có một tiệm cận ngang là $y = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{\sqrt{x}} < 2$ là

A $[0;1)$. **B** $(-\infty;1)$. **C** $(0;1)$. **D** $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $2^{\sqrt{x}} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \sqrt{x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leqslant x < 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, điểm $M(3;4;-2)$ thuộc mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

A $(R)\colon x+y-7=0$. **B** $(S)\colon x+y+z+5=0$.
C $(Q)\colon x-1=0$. **D** $(P)\colon z-2=0$.

Lời giải.

Ta có: $3+4-7=0 \Rightarrow M \in (R)$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(-3;2;1)$ và điểm $A(4;6;-3)$. Tìm tọa độ điểm B thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$.

A $(7;4;-4)$. **B** $(1;8;-2)$. **C** $(-7;-4;4)$. **D** $(-1;-8;2)$.

Lời giải.

Gọi $B(x;y;z)$, suy ra $\overrightarrow{AB}=(x-4;y-6;z+3)$.

$$\overrightarrow{AB}=\vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=-3 \\ y-6=2 \\ z+3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=8 \\ z=-2. \end{cases}$$

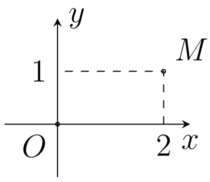
Vậy $B(1;8;-2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 13.

Trong hình vẽ bên, điểm M biểu diễn số phức z. Số phức $\overline{z}$ là

A $2-i$. **B** $1+2i$. **C** $1-2i$. **D** $2+i$.



Lời giải.

Từ hình vẽ suy ra $M(2;1)$ nên $z=2+i$. Vậy $\overline{z}=2-i$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $(-\infty;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		1		2		3		4
y'		+	0	−	‖	+	0	−	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	2	↘	-1

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A 5. **B** 2. **C** 4. **D** 3.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta nhận thấy $f'(x)$ đổi dấu khi x qua các điểm $x=1$, $x=2$ và $x=3$ nên hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2x+3}$ là

(A) $\frac{1}{2}\ln(2x+3)+C$.
B $\frac{1}{2}\ln|2x+3|+C$.
(C) $\ln|2x+3|+C$.
(D) $\frac{1}{\ln 2}\ln|2x+3|+C$.

Lời giải.

Ta có: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+3|+C$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA=a, AB=3a$. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng

(A) $\frac{a\sqrt{7}}{2}$.
B a.
(C) $\frac{a}{2}$.
(D) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

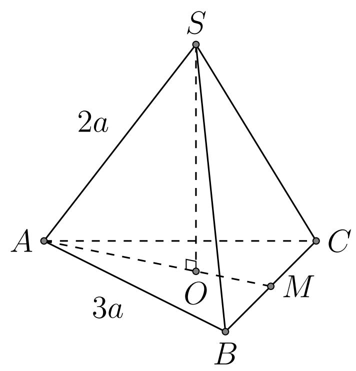
Lời giải.

Gọi O là tâm của tam giác đều ABC

$\Rightarrow SO\perp(ABC)\Rightarrow \mathrm{d}(S,(ABC))=SO$.

Ta có $AO=\frac{AB\sqrt{3}}{3}=a\sqrt{3}\Rightarrow SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=a$.

Vậy $\mathrm{d}(S,(ABC))=SO=a$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Tích phân $\int\limits_0^1 x(x^2+3)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 2.
(B) 1.
(C) $\frac{4}{7}$.
D $\frac{7}{4}$.

Lời giải.

Đặt $t=x^2+3\Rightarrow\ \mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=3$, $x=1\Rightarrow t=4$.

Khi đó

$$\int\limits_0^1 x(x^2+3)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_3^4 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}t^2\Big|_3^4=\frac{7}{4}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon 2x+6y+z-3=0$ cắt trục Oz và đường thẳng $d\colon \frac{x-5}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-6}{-1}$ lần lượt tại A và B. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

(A) $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=36$.
B $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=9$.
(C) $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=9$.
(D) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=36$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $A(0;0;3)$ và $B(5+t;2t;6-t)$.

Mặt khác $B\in(P)$ nên ta có: $2(5+t)+6\cdot 2t+(6-t)-3=0\Leftrightarrow t=-1$.

Suy ra $B(4;-2;7)$.

Khi đó mặt cầu có tâm $I(2;-1;5)$, $R = AI = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (5-3)^2} = 3$.
Vậy phương trình mặt cầu: $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Phương trình bậc hai nào sau đây có nghiệm là $1 + 2i$?

(A) $z^2 - 2z + 3 = 0$. (B) $z^2 + 2z + 5 = 0$. (C) $z^2 - 2z + 5 = 0$. (D) $z^2 + 2z + 3 = 0$.

Lời giải.

$$z^2 - 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 + 2i \\ z = 1 - 2i. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án (C) □

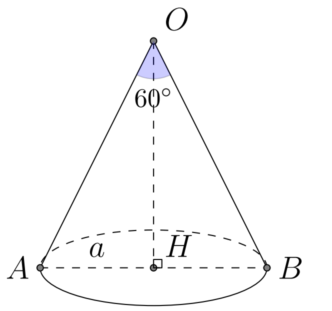
Câu 20. Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 60°, bán kính đáy bằng a. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

(A) $2\pi a^2$. (B) πa^2. (C) $\pi a^2\sqrt{3}$. (D) $4\pi a^2$.

Lời giải.

Hình nón có bán kính đáy $r = a$ và góc ở đỉnh bằng 60° nên có độ dài đường sinh $l = \dfrac{a}{\sin 30^\circ} = 2a$.
Từ đó suy ra

$$S_{\text{xq}} = \pi r l = \pi \cdot a \cdot 2a = 2\pi a^2.$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Cho biết $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x - \dfrac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{(x^2+a)^2}{x^2}$. Tìm nguyên hàm của $g(x) = x\cos ax$.

(A) $x\sin x - \cos x + C$. (B) $\dfrac{1}{2}x\sin 2x - \dfrac{1}{4}\cos 2x + C$.

(C) $x\sin x + \cos x + C$. (D) $\dfrac{1}{2}x\sin 2x + \dfrac{1}{4}\cos 2x + C$.

Lời giải.

Ta có:

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow F'(x) = f(x) \Rightarrow \frac{(x^2+1)^2}{x^2} = \frac{(x^2+a)^2}{x^2} \Rightarrow a = 1.$$

Do đó: $g(x) = \displaystyle\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \sin x. \end{cases}$

$$\Rightarrow g(x) = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C.$$

Chọn đáp án (C) □

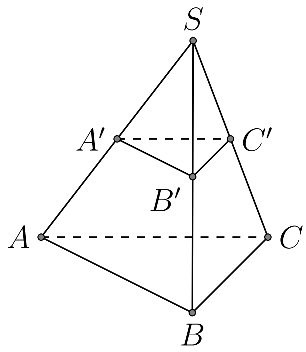
Câu 22. Cho khối chóp $S.ABC$ có thể tích V. Các điểm A', B', C' tương ứng là trung điểm các cạnh SA, SB, SC. Thể tích khối chóp $S.A'B'C'$ bằng

A $\frac{V}{8}$. **B** $\frac{V}{4}$. **C** $\frac{V}{2}$. **D** $\frac{V}{16}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{V}{8}.$$



Chọn đáp án A □

Câu 23. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = xe^x$ trên đoạn $[-2; 0]$ bằng

A 0. **B** $-\frac{2}{e^2}$. **C** $-e$. **D** $-\frac{1}{e}$.

Lời giải.

Ta có $y = xe^x \Rightarrow y' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow (x+1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

$y(-2) = -2e^{-2} = -\frac{2}{e^2}$, $y(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$, $y(0) = 0$.

Vậy $\min\limits_{[-2;0]} y = -\frac{1}{e}$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt[3]{\log_2(1-x)}$ là

A $(0; 1)$. **B** $\left[\frac{1}{2}; 1\right)$. **C** $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **D** $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 - x > 0 \\ 1 + \log_2 x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \\ x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leqslant x < 1.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\left[\frac{1}{2}; 1\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $|f(x-1)| = 2$ là

A 5. **B** 4. **C** 3. **D** 2.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt là x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < -2 < x_2 < 3 < x_3$. Khi đó phương trình $f(x-1) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt là $x_1 + 1, x_2 + 1, x_3 + 1$.

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x-1)|$ như sau

x	$-\infty$		x_1+1		-1		x_2+1		4		x_3+1		$+\infty$
y'		$-$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	0	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $|f(x-1)| = 2$ có 5 nghiệm.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $(1+i)z + (2-i)\overline{z} = 13 + 2i$?

A 4. **B** 3. **C** 2. **D** 1.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi\,(a, b \in \mathbb{R})$, ta có:

$$\begin{aligned}
& (1+i)z + (2-i)\overline{z} = 13 + 2i \\
\Leftrightarrow\ & (1+i)(a+bi) + (2-i)(a-bi) = 13 + 2i \\
\Leftrightarrow\ & 3a - 2b - bi = 13 + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 13 \\ -b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2. \end{cases}
\end{aligned}$$

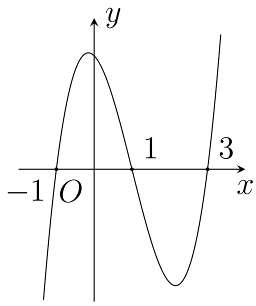
Vậy $z = 3 - 2i$ nên có 1 số phức z thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 27.

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số $y = f\left(\sqrt{x^2 + 2x + 2}\right)$ là

A 1. **B** 2. **C** 4. **D** 3.



Lời giải.

Ta có $y' = \left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)' f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ \sqrt{x^2+2x+2} = -1 \text{ (vô nghiệm)} \\ \sqrt{x^2+2x+2} = 1 \\ \sqrt{x^2+2x+2} = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -1 + 2\sqrt{2} \\ x = -1 - 2\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

($x=-1$ là nghiệm bội lẻ)
Vì $\sqrt{x^2+2x+2}\geqslant 1$ nên dấu của y' là dấu của $(x+1)f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$.
Từ đồ thị của $f'(x)$ ta có:

$$f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)>0 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{x^2+2x+2}>3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>-1+2\sqrt{2} \\ x<-1-2\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

$$f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)<0 \quad\Leftrightarrow\quad 1<\sqrt{x^2+2x+2}<3 \Leftrightarrow \begin{cases} -1-2\sqrt{2}<x<-1+2\sqrt{2} \\ x\neq -1. \end{cases}$$

Bảng xét dấu y'

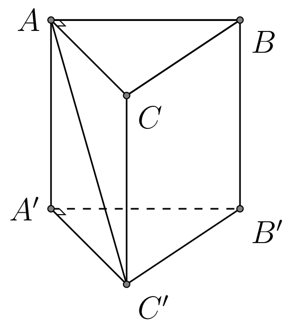
x	$-\infty$		$-1-2\sqrt{2}$		-1		$-1+2\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số chỉ đạt cực đại tại điểm $x=-1$, do đó hàm số có 1 điểm cực đại.

Chọn đáp án A □

Câu 28.

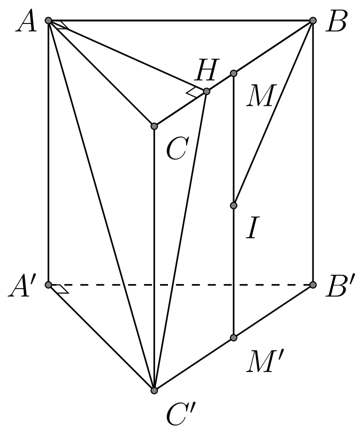
Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a\sqrt{3}$, $BC=2a$, đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30° (tham khảo hình vẽ bên). Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho bằng



A) $24\pi a^2$. **B) $6\pi a^2$.** C) $4\pi a^2$. D) $3\pi a^2$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A lên $BC \Rightarrow AH\perp BC$, ta chứng minh được $AH\perp(BCC'B')$.
Suy ra góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$ là góc $\widehat{AC'H}=30^\circ$.
Xét $\triangle ABC$ có $AC=a$, $AH=\dfrac{AB\cdot AC}{BC}=\dfrac{a\sqrt{3}\cdot a}{2a}=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.
Xét $\Delta AC'H$ có $AC'=\dfrac{AH}{\sin 30^\circ}=a\sqrt{3}$.
Suy ra $CC'=a\sqrt{2}\Rightarrow BC'=a\sqrt{6}$.

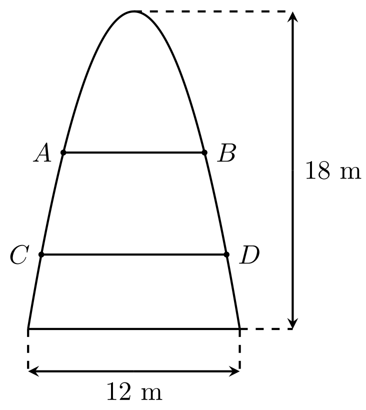


Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của $BC, B'C'$. Gọi I là trung điểm của MM'.
Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho và bán kính $R=IB=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.
Vậy diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho là $S_{\text{mc}}=4\pi R^2=4\pi\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2=6\pi a^2$.

Chọn đáp án B □

Câu 29.

Một cổng chào có dạng hình parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên).

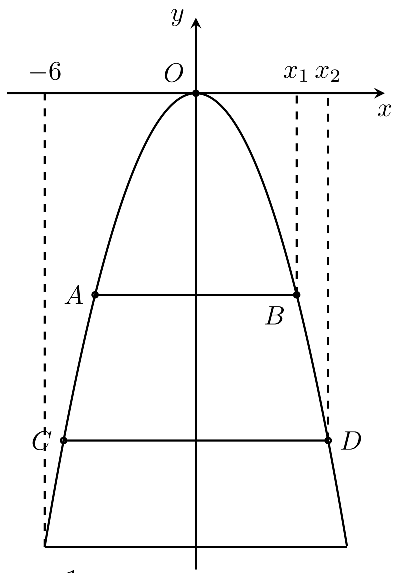


Tỉ số $\dfrac{AB}{CD}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ⓑ $\dfrac{4}{5}$. Ⓒ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Ⓓ $\dfrac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Phương trình parabol (P) có dạng $y = ax^2$.

Parabol (P) đi qua điểm $(-6; -18)$ nên suy ra

$$a \cdot (-6)^2 = -18 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Suy ra $(P): y = -\dfrac{1}{2}x^2$.

Từ hình vẽ ta có: $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{x_1}{x_2}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) với đường thẳng AB: $y = -\dfrac{1}{2}x_1^2$ là

$$S_1 = 2\int\limits_0^{x_1}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x_1^2\right)\mathrm{d}x = 2\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x_1^2x\right)\Big|_0^{x_1} = \frac{2}{3}x_1^3.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) với đường thẳng CD: $y = -\dfrac{1}{2}x_2^2$ là

$$S_2 = 2\int\limits_0^{x_2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x_2^2\right)\mathrm{d}x = 2\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x_2^2x\right)\Big|_0^{x_2} = \frac{2}{3}x_2^3.$$

Từ giả thiết ta có

$$S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow x_2^3 = 2x_1^3 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Vậy $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 30. Số giá trị nguyên của $m < 10$ để hàm số $y = \ln(x^2 + mx + 1)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ là

Ⓐ 10. Ⓑ 11. Ⓒ 8. Ⓓ 9.

Lời giải.

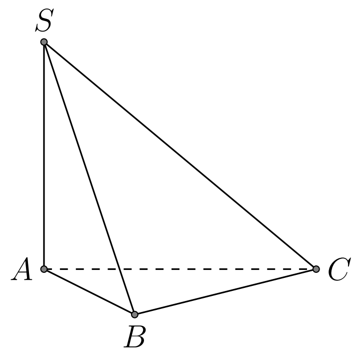
Hàm số xác định khi $x^2+mx+1>0$.
$y'=\dfrac{2x+m}{x^2+mx+1}$.
Điều kiện để hàm số $y=\ln(x^2+mx+1)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ là

$$\begin{cases}x^2+mx+1>0\\ y'\geqslant 0\end{cases}(\forall x>0)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+mx+1>0\\ 2x+m\geqslant 0\end{cases}(\forall x>0)\qquad(*)\,.$$

- Trường hợp 1: Xét $m\geqslant 0$
  Khi đó: $(*)$ luôn đúng. Do đó khi $m\geqslant 0$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $(0;+\infty)$.
- Trường hợp 2: Xét $m<0$
  Khi đó $2x+m\geqslant 0\Leftrightarrow x\geqslant -\dfrac{m}{2}>0$ nên $(*)$ không thỏa mãn.

Suy ra các giá trị nguyên $m<10$ thỏa mãn là: $m\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
Vậy có 10 giá trị nguyên m thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án A □

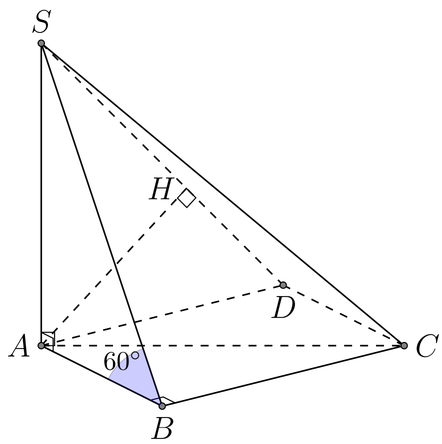
Câu 31.
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $B, AB=a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng 60° (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng



A a. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.
Góc giữa (SBC) và đáy là góc $\widehat{SBA}=60^\circ\Rightarrow SA=a\sqrt{3}$.
Dựng hình vuông $ABCD$, ta có $\mathrm{d}(AB,SC)=\mathrm{d}(AB,(SCD))=\mathrm{d}(A,(SCD))=AH$, với H là hình chiếu của A lên SD.
Xét tam giác SAD vuông tại A, ta có

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{4}{3a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+cx+d, a\neq 0$ có $\min\limits_{(-\infty;0)} f(x)=f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm $y=f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

A $8a+d$. **B** $d-16a$. **C** $d-11a$. **D** $2a+d$.

Lời giải.
Ta có $y'=3ax^2+c$.
Với $a>0$ ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. Suy ra không tồn tại $\min\limits_{(-\infty;0)} f(x)$.

Với $a < 0$ ta có $\min\limits_{(-\infty;0)} f(x) = f(-2)$ nên $f'(-2) = 0 \Leftrightarrow 3a(-2)^2 + c = 0 \Leftrightarrow 12a + c = 0$.
Khi đó $f(x) = ax^3 - 12ax + d$ xét trên đoạn $[1;3]$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3a\left(x^2 - 4\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \text{ (loại)} \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Suy ra

$$\max\limits_{[1;3]} f(x) = \max\left\{f(1), f(2), f(3)\right\} = \max\left\{d - 11a, d - 16a, d - 9a\right\} = d - 16a.$$

Chọn đáp án B □

Câu 33. Đầu tiết học, cô giáo kiểm tra bài cũ bằng cách gọi lần lượt từng người từ đầu danh sách lớp lên bảng trả lời câu hỏi. Biết rằng các học sinh đầu tiên trong danh sách lớp là An, Bình, Cường với xác suất thuộc bài lần lượt là 0,9, 0,7 và 0,8. Cô giáo sẽ dừng kiểm tra sau khi có hai học sinh thuộc bài. Tính xác suất cô giáo chỉ kiểm tra bài cũ đúng ba bạn trên.

(A) 0,504. (B) 0,216. (C) 0,056. **D** 0,272.

Lời giải.
Cô giáo chỉ kiểm tra bài cũ đúng ba bạn trên khi xảy ra hai trường hợp sau:

- An thuộc bài, Bình không thuộc bài, Cường thuộc bài. Xác suất của trường hợp này là: $0{,}9 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}216$.
- An không thuộc bài, Bình thuộc bài, Cường thuộc bài. Xác suất của trường hợp này là: $0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}056$.

Vậy xác suất cần tìm là $0{,}216 + 0{,}056 = 0{,}272$.
Chọn đáp án D □

Câu 34. Sau 1 tháng thi công thì công trình Nhà học thể dục của trường X đã thực hiện được một khối lượng công việc. Nếu tiếp tục với tiến độ như vậy thì dự kiến sau đúng 23 tháng nữa thì công trình sẽ hoàn thành. Để sớm hoành thành công trình và kịp thời đưa vào sử dụng, công ty xây dựng quyết định từ tháng thứ 2, mỗi tháng tăng 4% công việc so với tháng kề trước. Hỏi công trình sẽ hoàn thành ở tháng tứ mấy sau khi khởi công.

(A) 19. **B** 18. (C) 17. (D) 20.

Lời giải.
Giả sử mỗi tháng hoàn thành được khối lượng công việc là X.
Sau 23 tháng nữa thì công trình sẽ hoàn thành nên khối lượng công việc cần hoàn thành là $24X$.
Sau khi tăng năng suất thì khối lượng công việc hoàn thành ở tháng thứ hai là $X(1 + 0{,}04)$.
Khối lượng công việc hoàn thành ở tháng thứ ba là $X(1 + 0{,}04)^2$.
...
Khối lượng công việc hoàn thành ở tháng thứ n là $X(1 + 0{,}04)^{n-1}$.
Tổng khối lượng công việc cần phải hoàn thành là

$$X + X(1+0{,}04) + X(1+0{,}04)^2 + \cdots + X(1+0{,}04)^{n-1} = X \cdot \frac{1 - (1 + 0{,}04)^n}{1 - (1 + 0{,}04)} = X \cdot \frac{(1 + 0{,}04)^n - 1}{0{,}04}$$

Từ đó ta có phương trình

$$X \cdot \frac{(1+0{,}04)^n - 1}{0{,}04} = 24X \Leftrightarrow 1{,}04^n = 1{,}96 \Leftrightarrow n = \log_{1{,}04} 1{,}96 \approx 17{,}15.$$

Vậy công trình hoành thành sau 18 tháng khởi công.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$. Tính $f(2)$.

A 5. **B** 20. **C** 10. **D** 15.

Lời giải.

Với $x \in [1;2]$ ta có

$$\begin{aligned} f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2 &\Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 2x + 3 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 2x + 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = x^2 + 3x + C. \end{aligned}$$

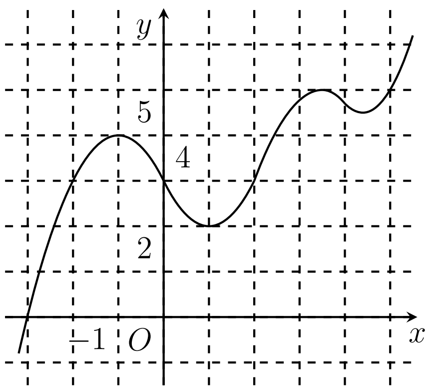
Do $f(1) = 4$ nên $C = 0 \Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2$.

Vậy $f(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 = 20$.

Chọn đáp án B □

Câu 36.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số giá trị nguyên của m để phương trình $f(x^2 - 2x) = m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$.



A 1. **B** 4. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Đặt $t = x^2 - 2x$, với $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$

Bảng biến thiên của hàm số $t = x^2 - 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$ là:

x	$-\frac{3}{2}$		1		$\frac{7}{2}$
t'		$-$	0	$+$	
t	$\frac{21}{4}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{21}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow t \in \left[-1; \dfrac{21}{4}\right]$.

Khi đó phương trình $f(x^2-2x)=m$ (1) trở thành $f(t)=m$ (2).

Ta thấy, với mỗi giá trị $t \in \left(-1; \dfrac{21}{4}\right]$ ta tìm được hai giá trị của $x \in \left[-\dfrac{3}{2}; \dfrac{7}{2}\right]$.

Do đó, phương trình (1) có 4 nghiệm thực phân biệt thuộc $\left[-\dfrac{3}{2}; \dfrac{7}{2}\right]$ khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm thực phân biệt thuộc $\left(-1; \dfrac{21}{4}\right]$

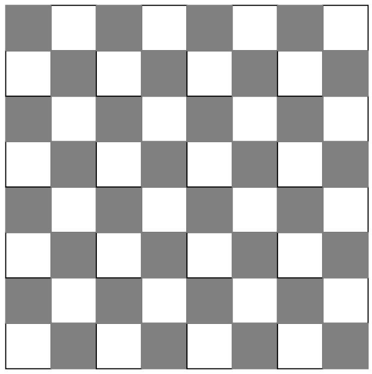
$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(t)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ thuộc $\left(-1; \dfrac{21}{4}\right]$.

Dựa vào đồ thị ta thấy chỉ có hai giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu là $m=3$ và $m=5$.

Chọn đáp án C □

Câu 37.

Một quân vua được đặt trên một ô giữa bàn cờ. Mỗi bước di chuyển, quân vua được chuyển sang một ô khác chung cạnh hoặc đỉnh với ô đang đứng (xem hình minh họa). Bạn An di chuyển quân vua ngẫu nhiên 3 bước. Tính xác suất sau cho 3 bước quân vua trở về ô xuất phát.



A. $\dfrac{1}{16}$. B. $\dfrac{1}{32}$. C. $\dfrac{3}{32}$. D. $\dfrac{3}{64}$.

Lời giải.

Bước di chuyển đầu tiên của quân vua có 8 cách, bước di chuyển thứ hai của quân vua có 8 cách và bước di chuyển thứ ba của quân vua có 8 cách. Vậy số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=8^3$.

Gọi A là biến cố: "Sau ba bước quân vua trở về ô xuất phát"

Xét hai trường hợp sau:

- Trường hợp 1. Trước tiên di chuyển quân vua sang ô đen liền kề có 4 cách, tiếp theo di chuyển quân vua sang ô trắng có chung cạnh hoặc ô đen có chung đỉnh cạnh ô xuất phát của quân vua có 4 cách, cuối cùng di chuyển quân vua về vị trí cũ có 1 cách. Do đó có $4 \cdot 4 \cdot 1 = 16$ cách.
- Trường hợp 2. Trước tiên di chuyển quân vua sang ô trắng được đánh có chung đỉnhvới cạnh ô quân vua đang đứng có 4 cách, tiếp theo di chuyển quân vua sang ô đen cạnh ô quân vua xuất phát có 2 cách, cuối cùng di chuyển quân vua về vị trí cũ có 1 cách. Do đó có $4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$ cách.

Suy ra số các kết quả thuận lợi của biến cố A là $n(A)=16+8=24$ cách.

Vậy xác xuất cần tính là $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{24}{8^3}=\dfrac{3}{64}$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho hàm số $f(x)=\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$. Biết rằng $f(2)+f(3)+\cdots+f(2018)=\ln a-\ln b+\ln c-\ln d$ với a,b,c,d là các số nguyên, trong đó a,b,d là các số nguyên tố và $a<b<c<d$. Tính $P=a+b+c+d$.

(A) 1986. (B) 1698. (C) 1689. (D) 1968.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f(2)+f(3)+\cdots+f(2018) &= \ln\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\ln\left(1-\frac{1}{2018^2}\right)\\ &= \ln\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2018^2}\right)\right]\\ &= \ln\frac{(2^2-1)(3^2-1)\cdots(2018^2-1)}{(2\cdot3\cdots2018)^2}\\ &= \ln\frac{1\cdot3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot5\cdots2017\cdot2018}{(2\cdot3\cdots2018)^2}\\ &= \ln\frac{(1\cdot2\cdot3\cdots2017)(3\cdot4\cdot5\cdots2019)}{(2\cdot3\cdots2018)^2}=\ln\frac{2017!\cdot\dfrac{2019!}{1\cdot2}}{(2018!)^2}\\ &= \ln\frac{2019}{2018\cdot2}=\ln\frac{3\cdot763}{2^2\cdot1009}=\ln3-\ln4+\ln673-\ln1009. \end{aligned}$$

Vậy $a+b+c+d=3+4+673+1009=1689$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;3;-2)$, $B(-3;7;-18)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+z+1=0$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (P) sao cho mặt phẳng $(ABM)\perp(P)$ và $MA^2+MB^2=246$. Tính $S=a+b+c$.

(A) 0. (B) -1. (C) 10. (D) 13.

Lời giải.

Từ giả thiết $(ABM)\perp(P)$ suy ra M thuộc d là hình chiếu của đường thẳng AB trên (P).

Véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}=\left[\vec{n}_P,\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_P\right]\right]=(36;0;-72)=36(1;0;-2)$.

Đường thẳng qua A vuông góc với (P): $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$, cắt (P) tại $A'(1;2;-1)$.

Suy ra phương trình d: $\begin{cases} x=1+t\\ y=2\\ z=-1-2t.\end{cases}$

Gọi $M(1+t;2;-1-2t)$, theo bài ra ta có $MA^2+MB^2=246$ nên

$$(1+t+1)^2+(2-3)^2+(-1-2t+2)^2+(1+t+3)^2+(2-7)^2+(-1-2t+18)^2=246\Leftrightarrow t=3.$$

Khi đó $M(4;2;-7)$, vậy $a+b+c=-1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Cho hàm số $y=-x^3+mx^2+mx+1$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu giá trị m để tiếp tuyến của (C) có hệ số góc lớn nhất đi qua gốc toạ độ O.

(A) Vô số. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Ta có

$$y'=-3x^2+2mx+m=-3\left(x-\frac{m}{3}\right)^2+\frac{m^2}{3}+m\le\frac{m^2}{3}+m.$$

Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến lớn nhất khi $x = \dfrac{m}{3}$. Khi đó tiếp tuyến với hệ số góc lớn nhất có phương trình

$$y = y'\left(\frac{m}{3}\right)\left(x - \frac{m}{3}\right) + y\left(\frac{m}{3}\right) \Leftrightarrow y = \left(\frac{m^2}{3} + m\right)\left(x - \frac{m}{3}\right) + \frac{2m^3}{27} + \frac{m^2}{3} + 1.$$

Tiếp tuyến đi qua gốc toạ độ O nên ta có

$$\left(\frac{m^2}{3} + m\right)\left(-\frac{m}{3}\right) + \frac{2m^3}{27} + \frac{m^2}{3} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{-m^3}{27} + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 3.$$

Vậy chỉ có duy nhất 1 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Cho phương trình $\log_2\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) \cdot \log_5\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = \log_m\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương khác 1 của m sao cho phương trình đã cho có nghiệm x lớn hơn 2?

A Vô số. **B** 3. **C** 2. **D** 1.

Lời giải.

Ta có: $\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = x^2 - x^2 + 1 = 1 \Rightarrow \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = -\ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$.

Do đó

$$\begin{aligned}
&\log_2\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) \cdot \log_5\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = \log_m\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\\
\Leftrightarrow\ & \frac{\ln^2\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)}{\ln 2 \cdot \ln 5} + \frac{\ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)}{\ln m} = 0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = 0 \\ \dfrac{\ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)}{\ln 2 \cdot \ln 5} + \dfrac{1}{\ln m} = 0. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

- $\ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (không thỏa mãn).
- $\dfrac{\ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)}{\ln 2 \cdot \ln 5} + \dfrac{1}{\ln m} = 0 \Leftrightarrow \ln m = \dfrac{\ln 2 \cdot \ln 5}{\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)} \quad (*)$.

  Xét hàm số $g(x) = x + \sqrt{x^2-1}$ trên khoảng $(2; +\infty)$ ta có:

  $$g'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 0, \forall x > 2.$$

  Suy ra $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

  $$\Rightarrow \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) > \ln\left(2 + \sqrt{3}\right) \Rightarrow \frac{\ln 2 \cdot \ln 5}{\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)} < \frac{\ln 2 \cdot \ln 5}{\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)}.$$

  Phương trình $(*)$ có nghiệm trên khoảng $(2; +\infty)$ khi

  $$\ln m < \frac{\ln 2 \cdot \ln 5}{\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)} \Leftrightarrow m < \mathrm{e}^{\frac{\ln 2 \cdot \ln 5}{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}} \approx 2{,}33.$$

Kết hợp với yêu cầu của bài toán ta suy ra $m = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Trong các số phức z có phần ảo dương thỏa mãn $|z^2+1| = 2|z|$, gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có mô-đun nhỏ nhất và lớn nhất. Khi đó mô-đun của số phức $w = z_1 + z_2$ là

A $|w| = 2\sqrt{2}$. **B** $|w| = 2$. **C** $|w| = \sqrt{2}$. **D** $|w| = 1+\sqrt{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
& \left|z^2+1\right| = 2|z| \Leftrightarrow \left|z^2+1\right|^2 = 4|z|^2\\
\Leftrightarrow\ & 4|z|^2 = \left(z^2+1\right)\left(\overline{z^2+1}\right)\\
\Leftrightarrow\ & \left(z^2+1\right)\left(\overline{z}^2+1\right) = 4z\cdot\overline{z}\\
\Leftrightarrow\ & (z\cdot\overline{z})^2 + z^2 + \overline{z}^2 + 1 - 4z\cdot\overline{z} = 0\\
\Leftrightarrow\ & (z+\overline{z})^2 + (z\cdot\overline{z})^2 - 6(z\cdot\overline{z}) + 1 = 0\\
\Leftrightarrow\ & (z+\overline{z})^2 + |z|^4 - 6|z|^2 + 1 = 0\\
\Leftrightarrow\ & |z|^4 - 6|z|^2 + 1 = -(z+\overline{z})^2 \le 0\\
\Rightarrow\ & 3-2\sqrt{2} \le |z|^2 \le 3+2\sqrt{2}\\
\Rightarrow\ & \sqrt{2}-1 \le |z| \le \sqrt{2}+1.
\end{aligned}$$

Do đó $\begin{cases} |z_1| = \sqrt{2}-1\\ |z_2| = \sqrt{2}+1 \end{cases}$. Dấu "=" xảy ra khi

$$\begin{cases} |z_1| = \sqrt{2}-1\\ |z_2| = \sqrt{2}+1\\ z+\overline{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} z_1 = \left(\sqrt{2}-1\right)i\\ z_1 = \left(1-\sqrt{2}\right)i \text{ (loại)} \end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} z_2 = \left(\sqrt{2}+1\right)i\\ z_2 = -\left(1+\sqrt{2}\right)i \text{ (loại)} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow |w| = |z_1+z_2| = 2\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 43. Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, n \geqslant 1$. Tìm số các giá trị nguyên của n với $n \leqslant 2018$ sao cho tồn tại số nguyên $k\,(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ thỏa mãn $a_k = a_{k+1}$.

A 2018. **B** 673. **C** 672. **D** 2017.

Lời giải.

Ta có $(1+2x)^n = \sum\limits_0^n \mathrm{C}_n^k \cdot 1^{n-k}\cdot(2x)^k = \sum\limits_0^n \mathrm{C}_n^k\cdot 2^k\cdot x^k$

Suy ra

$$\begin{aligned}
a_k = a_{k+1} \ &\Leftrightarrow\ \mathrm{C}_n^k\cdot 2^k = \mathrm{C}_n^{k+1}\cdot 2^{k+1}\\
&\Leftrightarrow\ \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \frac{n!}{(n-k-1)!\cdot(k+1)!}\cdot 2\\
&\Leftrightarrow\ \frac{n!}{(n-k-1)!\cdot(n-k)\cdot k!} = \frac{n!}{(n-k-1)!\cdot k!\cdot(k+1)}\cdot 2\\
&\Leftrightarrow\ \frac{1}{n-k} = \frac{2}{k+1} \Leftrightarrow k+1 = 2(n-k) \Leftrightarrow k = \frac{2n-1}{3}.
\end{aligned}$$

Từ đó ta có:

$$\begin{cases} n,k \in \mathbb{N} \\ 0 \le k \le n-1 \\ n \le 2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ k = \dfrac{2n-1}{3} \in \mathbb{N} \\ 2 \le n \le 2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3t+2 \\ k = 2t+1 \\ t \in \mathbb{N} \\ 2 \le n \le 2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le t \le 672 \\ t \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Suy ra có 673 số tự nhiên t thỏa mãn.

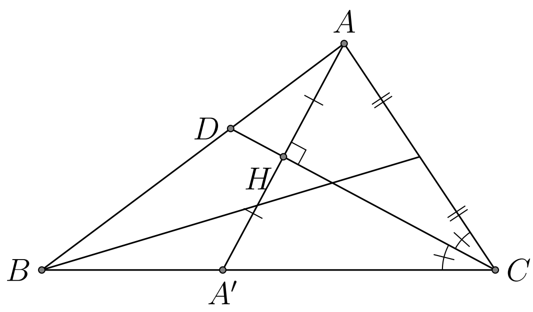
Vậy có 673 số tự nhiên n thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;3;3)$, phương trình đường trung tuyến kẻ từ B là $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong của góc C là $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z-2}{-1}$. Đường thẳng AB có một véc-tơ chỉ phương là

A $\vec{u}_3 = (2;1;-1)$. **B** $\vec{u}_2 = (1;-1;0)$. **C** $\vec{u}_4 = (0;1;-1)$. **D** $\vec{u}_1 = (1;2;1)$.

Lời giải.



Điểm C thuộc đường phân giác trong góc C nên có tọa độ $C(2+2t;4-t;2-t)$

Suy ra trung điểm của đoạn thẳng AC là $M\left(2+t;\dfrac{7-t}{2};\dfrac{5-t}{2}\right)$.

Vì M thuộc đường trung tuyến BM nên suy ra $t=1$.

Vậy $C(4;3;1)$ và $M(3;3;2)$.

Ta gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên đường phân giác trong CD, suy ra H là giao điểm của CD với mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với CD (phương trình $(P)\colon 2x-y-z+2=0$).

Từ đó tìm được $H(2;4;2)$.

Gọi A' là đối xứng của A qua CD suy ra A' đối xứng A qua H, từ đó tìm được $A'(2;5;1)$.

Theo tính chất đường phân giác ta có: A' thuộc BC. Vậy BC qua A' và C nên có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{A'C} = (2;-2;0)$.

$\Rightarrow BC$ có phương trình là $\begin{cases} x = 2+k \\ y = 5-k \\ z = 1. \end{cases}$

Khi đó B là giao điểm của $A'C$ và BM nên có tọa độ là nghiệm $(x;y;z)$ của hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{-1} \\ x = 2+k \\ y = 5-k \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \\ z = 1. \end{cases}$$

Với $B(2;5;1)$ ta có: $\overrightarrow{AB} = (0;2;-2) = 2(0;1;-1)$ nên $\vec{u} = (0;1;-1)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+1=0$. Đường thẳng Δ đi qua $E(-2;1;-2)$ song song với (P) đồng thời tạo với d góc bé nhất. Biết rằng Δ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(m;n;1)$. Tính $T=m^2-n^2$.

(A) $T=-5$. (B) $T=4$. (C) $T=3$. (D) $T=-4$.

Lời giải.

Ta có: $\Delta \parallel (P)$ nên $\vec{u}_\Delta \perp \vec{n}_{(P)} \Leftrightarrow \vec{u}_\Delta \cdot \vec{n}_{(P)}=0 \Leftrightarrow n=2m+2 \Rightarrow \vec{u}_\Delta=(m;2m+2;1)$

Do đó, gọi α góc giữa hai đường thẳng Δ và d, ta có

$$\cos\alpha=\frac{\left|\vec{u}_\Delta\cdot\vec{u}_{(d)}\right|}{\left|\vec{u}_\Delta\right|\cdot\left|\vec{u}_{(d)}\right|}=\frac{|4m+5|}{\sqrt{41(5m^2+8m+5)}}=\frac{1}{\sqrt{41}}\cdot\sqrt{\frac{16m^2+40m+25}{5m^2+8m+5}}.$$

Góc α nhỏ nhất khi và chỉ khi $\cos\alpha$ đạt giá trị lớn nhất.

Xét hàm số $f(m)=\dfrac{16m^2+40m+25}{5m^2+8m+5}$ trên $\mathbb{R}$, ta có:

$$f'(m)=\frac{-72m^2-90m}{(5m^2+8m+5)^2}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\\ m=-\dfrac{5}{4}.\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

m	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		0		$+\infty$
$f'(m)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(m)$	$\frac{16}{5}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	$\frac{16}{5}$

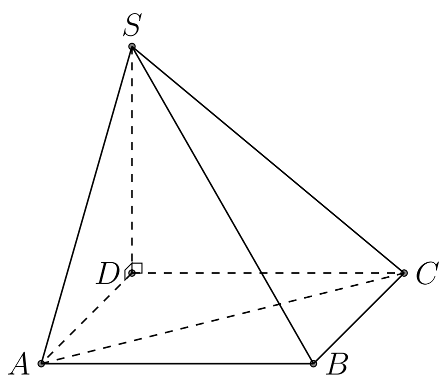
Suy ra $\max\limits_{m\in\mathbb{R}} f(m)=f(0)=5$. Với $m=0$ suy ra $n=2$. Do đó $T=0-2^2=-4$.

Chọn đáp án D □

Câu 46.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB=2a, BC=a, \widehat{ABC}=120^\circ$. Cạnh bên $SD=a\sqrt{3}$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy (tham khảo hình vẽ). Tính sin của góc tạo bởi SB và mặt phẳng (SAC).

(A) $\dfrac{3}{4}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. (C) $\dfrac{1}{4}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{7}$.



Lời giải.

Ta có: $BD=\sqrt{AD^2+AB^2-2AB\cdot AD\cos 60^\circ}=\sqrt{a^2+4a^2-2\cdot 2a\cdot a\cdot\dfrac{1}{2}}=a\sqrt{3}$.

$SB=\sqrt{SD^2+BD^2}=a\sqrt{6}$.

Ta có: $\dfrac{1}{\mathrm{d}^2\left(D,(SAC)\right)}=\dfrac{1}{SD^2}+\dfrac{1}{\mathrm{d}^2(D,AC)}=\dfrac{1}{3a^2}+\dfrac{AC^2}{4S^2_{DAC}}=\dfrac{1}{3a^2}+\dfrac{7a^2}{4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot 2a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{8}{3a^2}$

$\Rightarrow \mathrm{d}\left(D,(SAC)\right)=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}=\mathrm{d}\left(B,(SAC)\right)$.

Do đó $\sin\left(SB,(SAC)\right)=\dfrac{\mathrm{d}\left(B,(SAC)\right)}{SB}=\dfrac{\mathrm{d}\left(D,(SAC)\right)}{SB}=\dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{4}}{a\sqrt{6}}=\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm A,B,C (không trùng O) lần lượt thay đổi trên các trục Ox,Oy,Oz và luôn thỏa mãn điều kiện: tỉ số diện tích của tam giác ABC và thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng $\dfrac{3}{2}$. Biết rằng mặt phẳng (ABC) luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định, bán kính của mặt cầu đó bằng

(A) 3. **(B) 2.** (C) 4. (D) 1.

Lời giải.

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$.

Diện tích tam giác ABC là:

$$S_{ABC}=\frac{S_{OBC}}{\cos\left((OBC),(ABC)\right)}=\frac{OA}{\mathrm{d}\left(O,(ABC)\right)}\cdot S_{OBC}=\frac{|abc|}{2\mathrm{d}\left(O,(ABC)\right)}.$$

Thể tích tứ diện $OABC$ là: $V=\dfrac{|abc|}{6}$

Theo bài ra, ta có:

$$\frac{|abc|}{2\mathrm{d}\left(O,(ABC)\right)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{|abc|}{6}\Rightarrow \mathrm{d}\left(O,(ABC)\right)=2.$$

Vậy mặt phẳng (ABC) luôn tiếp xúc với mặt cầu tâm O bán kính bằng 2.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=0$ và $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=1$. Tích phân $I=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

(A) $\left(-\infty;-\dfrac{5}{4}\right)$. (B) $\left(\dfrac{3}{2};\mathrm{e}-1\right)$. **(C) $\left(-\dfrac{5}{4};\dfrac{3}{2}\right)$.** (D) $(\mathrm{e}-1;+\infty)$.

Lời giải.

Với mọi $a\in[0;1]$, ta có $0=\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=a\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 axf(x)\,\mathrm{d}x$.

Kí hiệu $I(a)=\displaystyle\int_0^1\left(\mathrm{e}^x-ax\right)\mathrm{d}x$, khi đó với mọi $a\in[0;1]$, ta có:

$$\left|\int_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 axf(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^1\left(\mathrm{e}^x-ax\right)f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1\left|\mathrm{e}^x-ax\right|\cdot|f(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 |\mathrm{e}^x - ax| \cdot \max_{x\in[0;1]} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 |\mathrm{e}^x - ax|\,\mathrm{d}x = I(a).$$

Suy ra $\left|\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \min\limits_{a\in[0;1]} I(a)$.

Mặt khác với mọi $x, a \in [0;1]$ ta có: $\mathrm{e}^x - ax \geqslant 0$.

Do đó $I(a) = \int\limits_0^1 |\mathrm{e}^x - ax|\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (\mathrm{e}^x - ax)\,\mathrm{d}x = \left(\mathrm{e}^x - \dfrac{a}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = \mathrm{e} - \dfrac{a}{2} - 1$.

Suy ra $\min\limits_{a\in[0;1]} I(a) = \mathrm{e} - \dfrac{3}{2} \Rightarrow \left|\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \mathrm{e} - \dfrac{3}{2} \approx 1{,}22$.

Vậy $I \in \left(-\dfrac{5}{4}; \dfrac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;2]$. Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn $[-3;3]$ sao cho $M \leqslant 2m$?

A 3. B 7. C 6. D 5.

Lời giải.

Đặt $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a$.

$$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Khi đó:

$\max\limits_{[0;2]} g(x) = \max\{g(0), g(1), g(2)\} = \max\{a, a+1, a\} = a+1$.

$\min\limits_{[0;2]} g(x) = \min\{g(0), g(1), g(2)\} = \min\{a, a+1, a\} = a$.

Nếu $a \geqslant 0 \Rightarrow m = a, M = a+1 \Rightarrow 2a \geqslant a+1 \Leftrightarrow a \geqslant 1 \Rightarrow a \in \{1;2;3\}$.

Nếu $a \leqslant -1 \Rightarrow m = -(a+1), M = -a \Rightarrow -2(a+1) \geqslant -a \Leftrightarrow a \leqslant -2 \Rightarrow a \in \{-3;-2\}$.

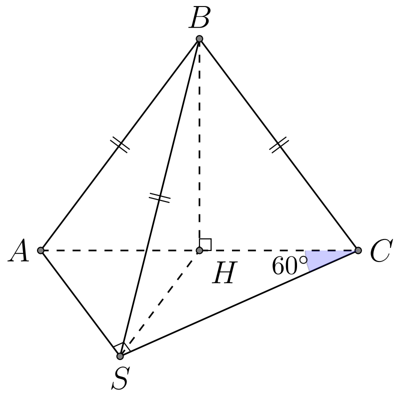
Vậy có 5 số nguyên a thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC), SAB là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$, $BC = a\sqrt{3}$, đường thẳng SC tạo với mặt phẳng (ABC) góc $60°$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. C $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. D $2a^3\sqrt{6}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên AC, suy ra $BH \perp (SAC)$.
Vì $BA = BC = BS = a\sqrt{3}$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAC.
Mà H là trung điểm của AC nên tam giác SAC vuông tại S.
Ta có $(SC, (ACB)) = \widehat{SCA} = 60°$, suy ra $SC = a$, $AC = 2a$.
Suy ra $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = a\sqrt{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} BH \cdot S_{SAC} = \dfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.
Chọn đáp án C □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. A	3. C	4. C	5. C	6. B	7. A	8. D	9. D	10. A
11. A	12. B	13. A	14. D	15. B	16. B	17. D	18. B	19. C	20. A
21. C	22. A	23. D	24. B	25. A	26. D	27. A	28. B	29. C	30. A
31. D	32. B	33. D	34. B	35. B	36. C	37. D	38. C	39. B	40. D
41. C	42. A	43. B	44. C	45. D	46. C	47. B	48. C	49. D	50. C

114 ĐỀ THI THỬ LẦN 2 NĂM 2018, TRƯỜNG THPT NGUYỄN QUANG DIÊU, ĐỒNG THÁP

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị thực của a để có $\int\limits_0^a (2x+5)\,\mathrm{d}x = a-4$.

A. 1. B. 0. C. 2. D. Vô số.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^a (2x+5)\,\mathrm{d}x = \left(x^2+5x\right)\Big|_0^a = a^2+5a$.

Nên: $\int\limits_0^a (2x+5)\,\mathrm{d}x = a-4 \Leftrightarrow a^2+5a = a-4 \Leftrightarrow a^2+4a+4 \Leftrightarrow a=-2$.

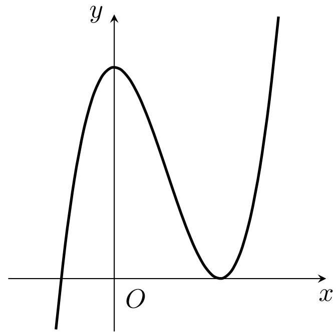
Vậy, có một giá trị thực của a thỏa mãn là $a=-2$.

Chọn đáp án A □

Câu 2.

Đường cong như hình bên là dạng đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
B. $y = -(x+1)(x-2)^2$.
C. $y = x^3 - 3x^2 + 4$.
D. $y = (x-2)^3$.



Lời giải.

Từ dáng điệu đồ thị hàm số đã cho suy ra nó là đồ thị hàm số bậc ba có hệ số $a>0$ và có hai điểm cực trị. Trong các hàm số đã cho, chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1;2]$ là một số thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(2;14)$. B. $(3;8)$. C. $(12;20)$. D. $(-7;8)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 6x^2 + 6x - 12$.

Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in (-1;2) \\ x = -2 \notin (-1;2) \end{array}\right.$.

$y(-1) = 15$, $y(1) = -5$, $y(2) = 6$.

Vậy nên: $\max\limits_{[-1;2]} y = 15 \in (12;20)$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Đồ thị hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

(A) $y = 2^x$. **B** $y = \log_2 x$. (C) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$. (D) $y = \dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$.

Lời giải.

- Hai hàm số $y = 2^x$ và $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên đồ thị của chúng không có tiệm cận đứng.
- Hàm số $y = \dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
  Ta có:
  $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-4x+3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} (x+3) = 4$;
  $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-4x+3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} (x+3) = 4$.
  Do đó, đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$ không có tiệm cận đứng.
- Đồ thị hàm số $y = \log_2 x$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác vuông có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đó.

(A) $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **B** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$. (C) $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{6}$. (D) $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}$.

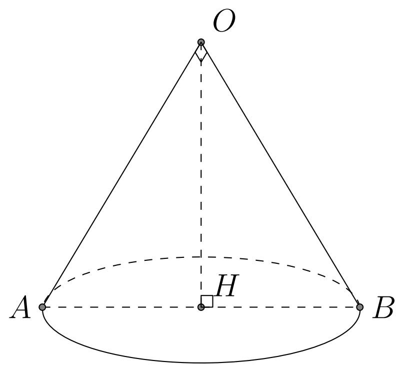
Lời giải.

Gọi thiết diện của hình nón cắt bởi mặt phẳng qua trục của nó là tam giác OAB vuông cân tại O và cạnh huyền $AB = a\sqrt{2}$.

Độ dài đường sinh của hình nón là $l = OA = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = a$.

Bán kính đáy của hình nón: $r = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.



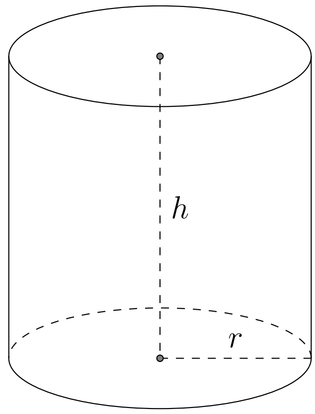
Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Từ một khối đất sét hình trụ có chiều cao 20 cm, đường tròn đáy có bán kính 8 cm. Bạn Na muốn chế tạo khối đất đó thành nhiều khối cầu và chúng có cùng bán kính 4 cm. Hỏi bạn Na có thể làm ra được tối đa bao nhiêu khối cầu?

(A) 45 khối. (B) 30 khối. (C) 20 khối. **D** 15 khối.

Lời giải.

Thể tích khối đất sét: $V_1 = \pi r^2 h = \pi \cdot 8^2 \cdot 20 = 1280\pi$ cm^3.
Thể tích khối cầu: $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4^3 = \dfrac{256\pi}{3}$ cm^3.
Ta có $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1280\pi}{\dfrac{256\pi}{3}} = 15$.
Do đó bạn Na có thể làm ra tối đa 15 khối cầu.

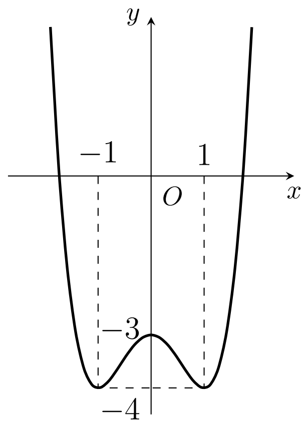


Chọn đáp án D □

Câu 7.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như đường cong trong hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(x)| + 1 = m$ có 6 nghiệm phân biệt.

A $-4 < m < -3$.
B $4 < m < 5$.
C $m > 5$.
D $0 < m < 4$.



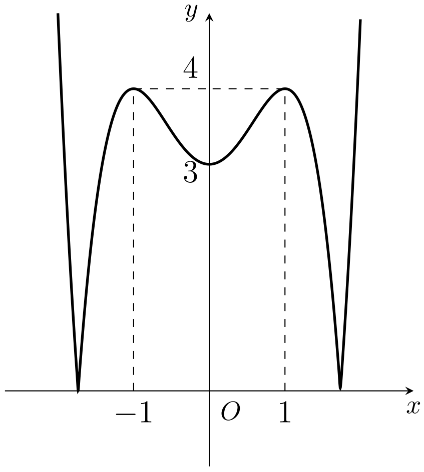
Lời giải.

Ta có: $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \ge 0 \\ -f(x) & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$.

Từ đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ ta suy ra đồ thị (C_1) của hàm số $y = |f(x)|$ như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị (C) ở phía trên trục hoành (bao gồm cả các điểm thuộc trục hoành).
- Lấy đối xứng phần nằm phía dưới trục hoành của đồ thị (C) qua trục hoành.

Từ đó, ta có đồ thị (C_1) của hàm số $y = |f(x)|$ như hình vẽ dưới:



Ta có $|f(x)| + 1 = m \Leftrightarrow |f(x)| = m - 1 \quad (*)$.

Số nghiệm phương trình $(*)$ bằng số giao điểm của đồ thị (C_1) của hàm số $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = m-1$. Do đó, từ đồ thị (C_1) của hàm số $y = |f(x)|$ suy ra phương trình $(*)$ có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $3 < m - 1 < 4 \Leftrightarrow 4 < m < 5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Số phức liên hợp của số phức $z = i(1-2i)$ có điểm biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ là điểm nào dưới đây?

A $E(2;-1)$. **(B)** $B(-1;2)$. **(C)** $A(1;2)$. **(D)** $F(-2;1)$.

Lời giải.

Ta có $z = i(1-2i) = i - 2i^2 = 2 + i \Rightarrow \bar{z} = 2 - i$. Do đó $\bar{z}$ có điểm biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ là điểm $E(2;-1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;-2)$ và $B(2;2;2)$. Véc-tơ $\vec{a}$ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB?

(A) $\vec{a} = (2;1;0)$. **B** $\vec{a} = (2;3;4)$. **(C)** $\vec{a} = (-2;1;0)$. **(D)** $\vec{a} = (2;3;0)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;3;4)$. Suy ra véc-tơ $\vec{a} = (2;3;4)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Tính giới hạn $K = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x+1}$.

(A) $K = 0$. **(B)** $K = 1$. **C** $K = -2$. **(D)** $K = 4$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} K &= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{x+1} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}} \\ &= \frac{-\sqrt{4}}{1} = -2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

(A) Đồ thị hàm số không có điểm chung với trục hoành.

(B) Hàm số có hai cực trị.

(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

(D) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng.

Lời giải.

Hàm số đã cho không xác định tại điểm $-1 \in (-2;0)$, do đó khẳng định "Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$" là khẳng định sai.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Gọi R, S, V lần lượt là bán kính, diện tích và thể tích của khối cầu. Công thức nào sau đây là **sai**?

(A) $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. (B) $S = \pi R^2$. (C) $3V = S \cdot R$. (D) $S = 4\pi R^2$.

Lời giải.

Công thức diện tích khối cầu là: $S = 4\pi R^2$.

Công thức thể tích khối cầu là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Nên công thức $S = \pi R^2$ là công thức **sai**.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Cho hai số thực dương a, b và $a \neq 1$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

(A) $\log_{\sqrt{a}} ab = \frac{1}{2} + \log_{\sqrt{a}} \sqrt{b}$. (B) $2018 \log_a ab = 1 + \log_a b^{2018}$.

(C) $\log_a a^{2018} b = 2018 + \log_a b$. (D) $\log_a a^{2018} b = 2018\left(1 + \log_a b\right)$.

Lời giải.

Với hai số thực dương a, b và $a \neq 1$, ta có

$$\log_a a^{2018} b = \log_a a^{2018} + \log_a b = 2018 + \log_a b.$$

Do đó, khẳng định $\log_a a^{2018} b = 2018 + \log_a b$ là khẳng định đúng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng K và a, b, c là ba số bất kì thuộc K. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

(B) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

(C) $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ c \in (a;b)$.

(D) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Lời giải.

Hàm số f liên tục trên khoảng K và a số bất kì thuộc K, ta có $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Như vậy, khẳng định $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ là khẳng định **sai**.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	2	$\searrow$	$-\dfrac{1}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

(A) Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.

(B) Hàm số có hai điểm cực trị.

(C) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1, giá trị nhỏ nhất bằng $-\dfrac{1}{3}$.

(D) Đồ thị hàm số không cắt trục hoành.

Lời giải.

Vì hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ nên từ bảng biến thiên của hàm số suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x_{\text{CT}} = 1$ và hàm số đạt cực đại tại $x_{\text{CĐ}} = 3$.

Vậy, mệnh đề "Hàm số có hai điểm cực trị" là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Biết trên đồ thị $(C)\colon y = \dfrac{x-1}{x+2}$ có hai điểm mà tiếp tuyến tại các điểm đó đều song song với đường thẳng $(d)\colon 3x - y + 15 = 0$. Tìm tổng S các tung độ của các tiếp điểm.

(A) $S = 3$. (B) $S = 6$. (C) $S = -4$. (D) $S = 2$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ta có $y = \dfrac{x-1}{x+2} \Rightarrow y' = \dfrac{3}{(x+2)^2}$.

Phương trình đường thẳng d viết lại là $(d)\colon y = 3x + 15$, đường thẳng d có hệ số góc $k = 3$.

Hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với d là nghiệm phương trình

$$\begin{aligned} y' = k \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{3}{(x+2)^2} = 3 \\ &\Leftrightarrow \quad (x+2)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -3. \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Với $x = -1$ thì $y = -2$. Phương trình tiếp tuyến của (C) là: $y = 3(x+1) + (-2)$ hay $y = 3x + 1$ (song song với d).

- Với $x=-3$ thì $y=4$. Phương trình tiếp tuyến của (C) là: $y=3(x+3)+4$ hay $y=3x+13$ (song song với d).

Như vậy, trên (C) có hai điểm $(-1;-2)$ và $(-3;4)$ mà tiếp tuyến tại các điểm đó đều song song với đường thẳng (d).

Ta có $S=(-2)+4=2$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x)+1=0$ là

(A) 3. (B) 0. (C) 1. **(D) 2.**

Lời giải.

Ta có $f(x)+1=0 \Leftrightarrow f(x)=-1$.

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;4)$, $B(8;-5;6)$. Hình chiếu vuông góc của trung điểm I của đoạn thẳng AB trên mặt phẳng (Oyz) là điểm nào dưới đây?

(A) $M(0;-1;5)$. (B) $Q(0;0;5)$. (C) $P(3;0;0)$. (D) $N(3;-1;5)$.

Lời giải.

Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là $I=(3;-1;5)$. Do đó, hình chiếu của I trên mặt phẳng (Oyz) là điểm $M(0;-1;5)$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-x})$.

(A) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+1+C$. **(B) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+x+C$.**

(C) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^x+x+C$. (D) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x=\int(\mathrm{e}^x+1)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+x+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Tìm tập nghiệm D của bất phương trình $9^x<3^{x+4}$.

(A) $D=(0;6)$. **(B) $D=(-\infty;4)$.** (C) $D=(0;4)$. (D) $D=(4;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $9^x<3^{x+4} \Leftrightarrow 3^{2x}<3^{x+4} \Leftrightarrow 2x<x+4 \Leftrightarrow x<4$.

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $D=(-\infty;4)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Cho phương trình $\log_{\sqrt{2}}^2 x + \log_2\left(x\sqrt{8}\right) - 3 = 0$. Khi đặt $t = \log_2 x$, phương trình đã cho trở thành phương trình nào dưới đây?

(A) $8t^2 + 2t - 6 = 0$. (B) $4t^2 + t = 0$. (C) $4t^2 + t - 3 = 0$. **D** $8t^2 + 2t - 3 = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_{\sqrt{2}}^2 x + \log_2\left(x\sqrt{8}\right) - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(\log_{\sqrt{2}} x\right)^2 + \log_2 x + \log_2 \sqrt{8} - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(2\log_2 x\right)^2 + \log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 2^3 - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 4\left(\log_2 x\right)^2 + \log_2 x + \frac{3}{2} - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 8\left(\log_2 x\right)^2 + 2\log_2 x - 3 = 0. \end{aligned}$$

Khi đặt $t = \log_2 x$ ta có phương trình $8t^2 + 2t - 3 = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-3;1;4)$ và gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu của M trên các trục Ox, Oy, Oz. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC)?

(A) $4x - 12y - 3z + 12 = 0$. (B) $3x + 12y - 4z + 12 = 0$.

(C) $3x + 12y - 4z - 12 = 0$. **D** $4x - 12y - 3z - 12 = 0$.

Lời giải.

Ta có $A(-3;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;4)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là:

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x - 12y - 3z + 12 = 0.$$

Do đó, trong các mặt phẳng đã cho, chỉ có mặt phẳng có phương trình $4x - 12y - 3z - 12 = 0$ là song song với mặt phẳng (ABC).

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-2;1;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 10 = 0$. Tính bán kính r của mặt cầu (S), biết rằng (S) có tâm I và nó cắt (P) theo một đường tròn (T) có chu vi bằng 10π.

(A) $r = 5$. **B** $r = \sqrt{34}$. (C) $r = \sqrt{5}$. (D) $r = 34$.

Lời giải.

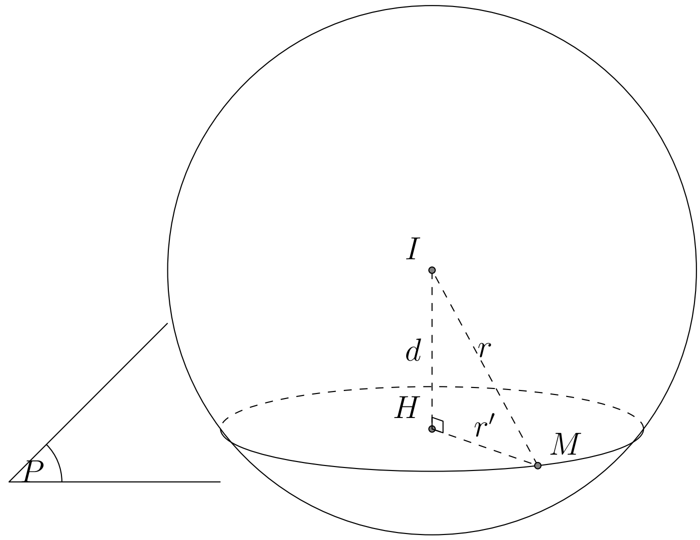
Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (P) là:

$$\mathrm{d} = \mathrm{d}(I,(P)) = \frac{|2\cdot(-2) - (1) + 2\cdot 3 - 10|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3.$$

Gọi r' là bán kính đường tròn (T), ta có:

$$2\pi r' = 10\pi \Rightarrow r' = 5.$$

Từ đó ta có:
$$r^2 = r'^2 + \mathrm{d}^2 = 5^2 + 3^2 = 34 \Rightarrow r = \sqrt{34}.$$
Như vậy mặt cầu (S) có bán kính $r = \sqrt{34}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Kết quả $(b; c)$ của việc gieo một con súc sắc cân đối hai lần liên tiếp, trong đó b là số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất, c là số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai được thay vào phương trình bậc hai $x^2 + bx + c = 0$. Tính xác suất để phương trình bậc hai đó vô nghiệm?

(A) $\dfrac{5}{36}$. (B) $\dfrac{7}{12}$. (C) $\dfrac{23}{36}$. **D** $\dfrac{17}{36}$.

Lời giải.

Xét phương trình $x^2 + bx + c = 0 \quad (1)$ với $b, c \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
Có $6 \cdot 6 = 36$ bộ số $(b; c)$. Phương trình (1) vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta = b^2 - 4c < 0 \Leftrightarrow b^2 < 4c \quad (2)$.
Có 17 cặp số $(b; c)$ thỏa mãn (2) là: $(1; 1)$, $(1; 2)$, $(1; 3)$, $(1; 4)$, $(1; 5)$, $(1; 6)$, $(2; 2)$, $(2; 3)$, $(2; 4)$, $(2; 5)$, $(2; 6)$, $(3; 3)$, $(3; 4)$, $(3; 5)$, $(3; 6)$, $(4; 5)$, $(4; 6)$.
Xác suất để phương trình (1) vô nghiệm là $\mathrm{P} = \dfrac{17}{36}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD. Tính khoảng cách d giữa hai mặt phẳng (AIA') và (CJC').

(A) $\mathrm{d} = 2a\sqrt{\dfrac{5}{2}}$. (B) $\mathrm{d} = 2a\sqrt{5}$. **C** $\mathrm{d} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. (D) $\mathrm{d} = \dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

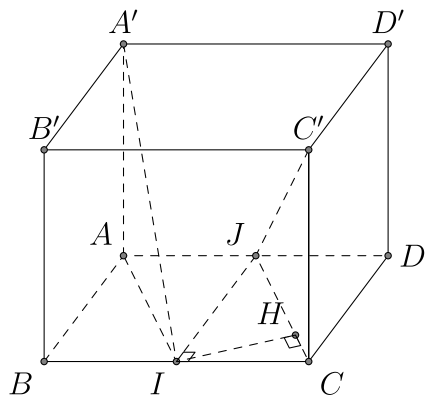
Từ $\begin{cases} AI \parallel CJ \\ AA' \parallel CC' \end{cases} \Rightarrow (AIA') \parallel (CJC')$.

Kẻ $IH \perp CJ \Rightarrow IH \perp (CJC')$.

Do đó $\mathrm{d}\left((AIA'), (CJC')\right) = \mathrm{d}\left(I, (CJC')\right) = IH$.

Ta có $IH = \dfrac{IJ \cdot IC}{\sqrt{IJ^2 + IC^2}} = \dfrac{a \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $\mathrm{d}\left((AIA'), (CJC')\right) = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.



Chọn đáp án C □

Câu 26. Trong mặt phẳng (Oxy), tìm phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn $(C)\colon x^2 + y^2 = 1$ qua phép đối xứng tâm $I(1; 0)$.

A. $x^2 + (y-2)^2 = 1$. B. $(x+2)^2 + y^2 = 1$. C. $(x-2)^2 + y^2 = 1$. D. $x^2 + (y+2)^2 = 1$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = 1$.

Gọi A là điểm đối xứng với O qua điểm $I(1; 0)$, ta có $A(2; 0)$.

Đường tròn (C') có tâm A, bán kính $R' = R = 1$.

Phương trình đường tròn (C') là $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm của phương trình $z^4 + z^2 - 6 = 0$. Tính $S = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$.

A. $S = 2\sqrt{3}$. B. $S = 2\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$. C. $S = 2\sqrt{2}$. D. $S = 2\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$.

Lời giải.

Ta có $z^4 + z^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = -3 \\ z^2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm i\sqrt{3} \\ z = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Do đó $S = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = \left|-i\sqrt{3}\right| + \left|i\sqrt{3}\right| + \left|-\sqrt{2}\right| + \left|\sqrt{2}\right| = 2\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 28. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(2; -1; -2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P), số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q)\colon x - y - 11 = 0$ bằng bao nhiêu?

A. 45°. B. 30°. C. 90°. D. 60°.

Lời giải.

Vì $H(2; -1; -2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P = \overrightarrow{OH} = (2; -1; -2)$.

Mặt phẳng (Q) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_Q = (1; -1; 0)$.

Gọi φ là số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q), ta có

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|} = \frac{|2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot 0|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

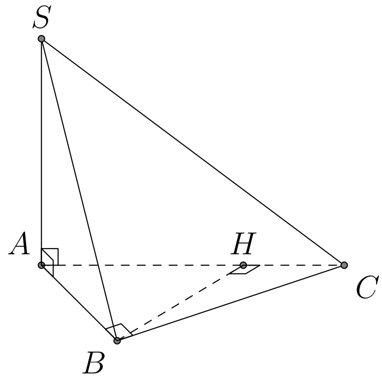
Suy ra $\varphi = 45°$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B, SA vuông góc với đáy và $2AB = BC = 2a$. Gọi d_1 là khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) và d_2 là khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC). Tính $\mathrm{d} = \mathrm{d}_1 + \mathrm{d}_2$.

(A) $\mathrm{d} = 2\left(5+\sqrt{2}\right)a$. **(B)** $\mathrm{d} = 2\left(\sqrt{5}+2\right)a$. **C** $\mathrm{d} = \dfrac{2\left(5+\sqrt{5}\right)a}{5}$. **(D)** $\mathrm{d} = \dfrac{2\left(5+\sqrt{2}\right)a}{5}$.

Lời giải.



Từ giả thiết SA vuông góc với đáy và ABC vuông tại B suy ra

$$\begin{cases} CB \perp SA \\ CB \perp AB \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB).$$

Do đó $\mathrm{d}_1 = \mathrm{d}\left(C, (SAB)\right) = BC = 2a$.

Kẻ $BH \perp AC$ với $H \in AC$, suy ra $BH \perp (SAC)$.

Vì tam giác ABC vuông tại B nên:

$$BH = \frac{AB \cdot BC}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \frac{a \cdot 2a}{\sqrt{a^2 + (2a)^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Do đó $\mathrm{d}_2 = \mathrm{d}\left(B, (SAC)\right) = BH$.

Vậy $\mathrm{d} = \mathrm{d}_1 + \mathrm{d}_2 = 2a + \dfrac{2a\sqrt{5}}{5} = \dfrac{2\left(5+\sqrt{5}\right)a}{5}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Mặt tiền của một ngôi biệt thự có 8 cây cột hình trụ, tất cả đều có chiều cao bằng 4,2 m. Trong số các cây đó có 2 cây cột trước đại sảnh đường kính bằng 40 cm, 6 cây cột còn lại phân bố đều hai bên đại sảnh và chúng đều có đường kính bằng 26 cm. Chủ nhà thuê công nhân để sơn các cây cột bằng loại sơn giả đá, biết giá thuê là 380.000 đồng/m^2 (kể cả vật liệu sơn và phần thi công). Hỏi người chủ phải trả chi phí ít nhất bao nhiêu tiền để sơn hết các cây cột nhà đó (đơn vị đồng)?

(A) $\approx 12.521.000$. **(B)** $\approx 15.642.000$. **(C)** $\approx 10.400.000$. **D** $\approx 11.833.000$.

Lời giải.

Công thức tính diện tích xung quanh hình trụ: $S_{xq} = 2\pi rh$. Ta có:

- 2 cây cột trước đại sảnh đường kính bằng 40 cm nên có bán kính bằng 20 cm = 0,2 m.
- 6 cây ở hai bên đại sảnh có đường kính bằng 26 cm nên có bán kính bằng 13 cm = 0,13 m.

Tổng diện tích xung quanh của 8 cây cột hình trụ này là

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot (2\pi \cdot 0{,}2 \cdot 4{,}2) + 6 \cdot (2\pi \cdot 0{,}13 \cdot 4{,}2) \\ &= 9{,}912\pi\,(\mathrm{m}^2). \end{aligned}$$

Chi phí ít nhất để sơn hết các cây cột nhà đó là

$$9{,}912\pi \cdot 380000 \approx 11.833.000\,(\text{đồng}).$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Tính giá trị $M = \mathrm{A}_{n-15}^2 + 3\mathrm{A}_{n-14}^3$, biết rằng $\mathrm{C}_n^4 = 20\mathrm{C}_n^2$ (với n là số nguyên dương, A_n^k là số chỉnh hợp chập k của n phần tử và C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

A $M = 78$. **B** $M = 18$. **C** $M = 96$. **D** $M = 84$.

Lời giải.

Điều kiện: $n \in \mathbb{Z}$ và $n \geq 4$.

Ta có:

$$\begin{aligned} & \mathrm{C}_n^4 = 20\mathrm{C}_n^2 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{n!}{4!(n-4)!} = 20 \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{n!}{4!(n-4)!} = 20 \cdot \frac{n!}{2!(n-4)!(n-3)(n-2)} \\ \Leftrightarrow\ & (n-3)(n-2) = 20 \cdot 3 \cdot 4 \\ \Leftrightarrow\ & n^2 - 5n - 234 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} n = 18 \\ n = -13 \end{array}\right. \Rightarrow n = 18. \end{aligned}$$

Do đó: $M = \mathrm{A}_3^2 + 3\mathrm{A}_4^3 = 78$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đường $y = \sqrt{x} - 1$, trục hoành và đường thẳng $x = 4$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A $V = \dfrac{7}{6}$. **B** $V = \dfrac{7\pi^2}{6}$. **C** $V = \dfrac{7\pi}{6}$. **D** $V = \dfrac{7\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) giới hạn bởi đường $y = \sqrt{x} - 1$, trục hoành và đường thẳng $x = 4$ quanh trục hoành là

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^4 \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \pi \int_1^4 \left(x - 2\sqrt{x} + 1\right) \mathrm{d}x \\ &= \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + x\right)\Bigg|_1^4 = \frac{7\pi}{6}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 33. Tìm giá trị nguyên lớn nhất của a để phương trình $a\sin^2 x + 2\sin 2x + 3a\cos^2 x = 2$ có nghiệm.

A $a = 3$. **B** $a = 2$. **C** $a = 1$. **D** $a = -1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&a\sin^2 x+2\sin 2x+3a\cos^2 x=2\\ \Leftrightarrow\ & a\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}x+2\sin 2x+3a\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}=2\\ \Leftrightarrow\ & 2\sin 2x+a\cos 2x=2-2a\quad(1).\end{aligned}$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}2^2+a^2\geq(2-2a)^2 &\Leftrightarrow\ 3a^2-8a\leq 0\\ &\Leftrightarrow\ 0\leq a\leq\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

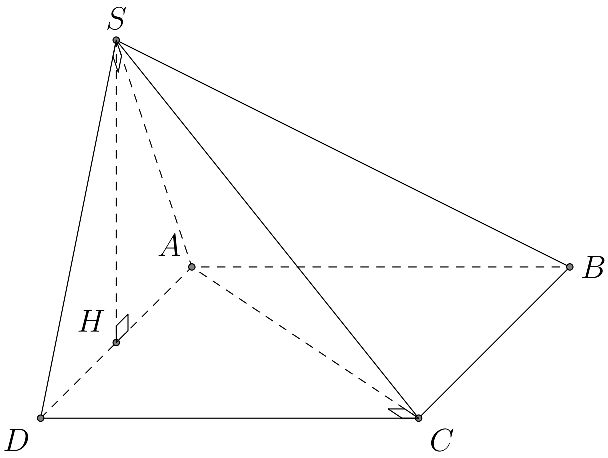
Do đó, giá trị nguyên lớn nhất của a để phương trình $a\sin^2 x+2\sin 2x+3a\cos^2 x=2$ có nghiệm là $a=2$.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành và $AB=2AC=2a$, $BC=a\sqrt{3}$. Tam giác SAD vuông cân tại S, hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ vuông góc với nhau. Tính tỉ số $\dfrac{V}{a^3}$ biết V là thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

(A) $\dfrac{1}{4}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (C) 2. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AD, do tam giác SAD vuông cân tại S nên $SH\perp AD$ và $SH=\dfrac{AD}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mặt khác hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ vuông góc với nhau nên suy ra $SH\perp(ABCD)$.

Từ giả thiết đã cho, ta có $AB=2a$, $AC=a$, $BC=a\sqrt{3}$ nên $AB^2=AC^2+BC^2\Rightarrow\triangle ABC$ vuông tại C.

Từ đó, ta có

$$S_{ABCD}=2S_{\triangle ABC}=AC\cdot BC=a\cdot a\sqrt{3}=a^2\sqrt{3}.$$

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

$$V=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot SH=\frac{1}{3}\cdot a^2\sqrt{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3}{2}.$$

Vậy: $\dfrac{V}{a^3}=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1)$, $B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-3y+2z-5=0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng là $ax+by+cz-11=0$. Tính $a+b+c$.

(A) $a+b+c=10$. (B) $a+b+c=3$. (C) $a+b+c=5$. (D) $a+b+c=-7$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; -3; 2)$ và véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_P = (1; -3; 2)$.

Mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có một véc-tơ chỉ phương là

$$\vec{n}_Q = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{n}_P\right] = (0; 8; 12) = 4\,(0; 2; 3)\,.$$

Phương trình mặt phẳng (Q) là

$$0 \cdot (x-2) + 2 \cdot (y-4) + 3 \cdot (z-1) = 0.$$

Hay $(Q)\colon 2y + 3z - 11 = 0$. Từ đó suy ra $a = 0$, $b = 2$, $c = 3$. Do đó $a + b + c = 0 + 2 + 3 = 5$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2(m^2+1)x^2 + 2$ có 3 điểm cực trị sao cho giá trị cực tiểu đạt giá trị lớn nhất.

A $m = 0$. B $m = -1$. C $m = 2$. D $m = -2$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4(m^2+1)x = 4x\left[x^2 - (m^2+1)\right]$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m^2 + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m^2+1}. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{m^2+1}$		0		$\sqrt{m^2+1}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-(m^2+1)^2+2$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-(m^2+1)^2+2$	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có: $y_{\text{CT}} = -(m^2+1)^2 + 2 = 1 - m^4 - 2m^2 \le 1$.

Nên y_{CT} đạt giá trị lớn nhất là bằng 1 khi và chỉ khi $m = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho cấp số nhân (u_n), biết $\begin{cases} u_1 = 12 \\ \dfrac{u_3}{u_8} = 243 \end{cases}$. Tìm u_9.

A $u_9 = \dfrac{2}{2187}$. B $u_9 = \dfrac{4}{6563}$. C $u_9 = 78732$. D $u_9 = \dfrac{4}{2187}$.

Lời giải.

Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n), từ giả thiết đã cho suy ra $q \ne 0$. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{u_3}{u_8} = 243 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{u_1 q^2}{u_1 q^7} = 243 \\ &\Leftrightarrow \quad q^5 = \frac{1}{243} \\ &\Leftrightarrow \quad q^5 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Do đó: $u_9 = u_1 q^8 = 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 = \frac{4}{2187}$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$. Tính $S = [f(3) - 2018] \cdot [f(-1) - 2017]$.

A $S = 1$. **B** $S = 1 + \ln^2 2$. **C** $S = 2\ln 2$. **D** $S = \ln^2 2$.

Lời giải.

Ta có

- $f(3) - 2018 = f(3) - f(2) = \int\limits_2^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_2^3 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \ln(x-1)\big|_2^3 = \ln 2$.
- $2017 - f(-1) = f(0) - f(-1) = \int\limits_{-1}^0 f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^0 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \ln|x-1|\big|_{-1}^0 = -\ln 2$.

  Do đó $f(-1) - 2017 = \ln 2$.

Vậy $S = [f(3) - 2018] \cdot [f(-1) - 2017] = (\ln 2) \cdot (\ln 2) = \ln^2 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (m-1)x^2 - 4mx$ đồng biến trên đoạn $[1;4]$.

A $m \leq \frac{1}{2}$. **B** $\forall m \in \mathbb{R}$. **C** $\frac{1}{2} < m < 2$. **D** $m \leq 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 2(m-1)x - 4m$.

Điều kiện cần và đủ để hàm số đã cho đồng biến trên đoạn $[1;4]$ là

$$\begin{aligned}
& y' = x^2 - 2(m-1)x - 4m \geq 0, \forall x \in [1;4] \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + 2x \geq 2m(x+2), \forall x \in [1;4] \\
\Leftrightarrow\ & 2m \leq x, \forall x \in [1;4] \\
\Leftrightarrow\ & 2m \leq 1 \\
\Leftrightarrow\ & m \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Vậy, với $m \leq \frac{1}{2}$ thì hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (m-1)x^2 - 4mx$ đồng biến trên đoạn $[1;4]$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Biết số phức z có phần ảo khác 0 và thỏa mãn $|z - (2+i)| = \sqrt{10}$ và $z \cdot \bar{z} = 25$. Điểm nào sau đây biểu diễn số phức z trên?

A $P(4;-3)$. **B** $N(3;-4)$. **C** $M(3;4)$. **D** $Q(4;3)$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$ và $y \neq 0$.

Ta có

$$\begin{cases} |z - (2+i)| = \sqrt{10} \\ z \cdot \bar{z} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{10} \\ (x+yi)(x-yi) = 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4x-2y-5=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-10=0 \quad (1) \\ x^2+y^2=25 \quad (2). \end{cases}$$

Từ (1) ta có $y=10-2x$, thay vào (2) ta được

$$x^2+(10-2x)^2=25 \Leftrightarrow 5x^2-40x+75=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \Rightarrow y=0 \\ x=3 \Rightarrow y=4. \end{array}\right.$$

Như vậy $z=3+4i$, nên điểm biểu diễn số phức z là điểm $M(3;4)$.
Chọn đáp án C □

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $x+1=3m\sqrt{2x^2+1}$ có hai nghiệm phân biệt.

A $\dfrac{\sqrt{2}}{6}<m<\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **B** $-\dfrac{\sqrt{2}}{6}<m<\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **C** $m<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D** $m>\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.
Ta có: $x+1=3m\sqrt{2x^2+1} \Leftrightarrow 3m=\dfrac{x+1}{\sqrt{2x^2+1}} \quad (*)$.
Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{2x^2+1}}$ trên $\mathbb{R}$.
Ta có $f'(x)=\dfrac{1-2x}{\left(\sqrt{2x^2+1}\right)^3}$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{2x^2+1}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{2x^2+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

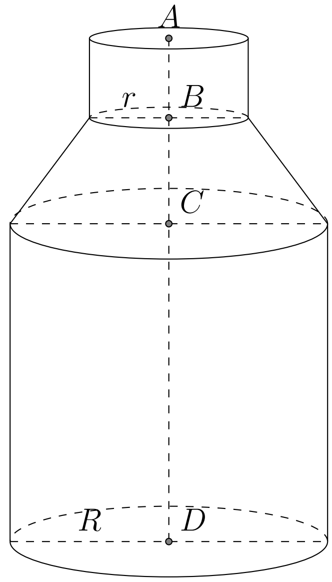
Từ bảng biến thiên suy ra điều kiện để phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt là

$$\frac{\sqrt{2}}{2}<3m<\frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{6}<m<\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 42.

Ông An đặt hàng cho một cơ sở sản xuất chai lọ thủy tinh chất lượng cao X để làm loại chai nước có kích thước phần không gian bên trong của chai như hình bên, có bán kính đáy $R = 5$ cm, bán kính cổ chai $r = 2$ cm, $AB = 3$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 16$ cm. Tính thể tích V phần không gian bên trong chai nước.



A $V = 490\pi$ cm^3. **B** $V = 412\pi$ cm^3.
C $V = 464\pi$ cm^3. **D** $V = 494\pi$ cm^3.

Lời giải.

Thể tích khối trụ có hai hình tròn đáy là hai hình tròn tâm (C) và (D) là:

$$V_1 = \pi R^2 \cdot CD = \pi 5^2 \cdot 16 = 400\pi\ (\text{cm}^3).$$

Thể tích khối trụ có hai hình tròn đáy là hai hình tròn tâm (A) và (B) là:

$$V_2 = \pi r^2 \cdot AB = \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 12\pi\ (\text{cm}^3).$$

Thể tích khối nón cụt có hai hình tròn đáy là hai hình tròn tâm (B) và (C) là

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{h}{3}\left(B + \sqrt{BB'} + B'\right) \\ &= \frac{BC}{3}\left(\pi R^2 + \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2} + \pi r^2\right) \\ &= \frac{6}{3}\left(\pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 5 \cdot 2 + \pi \cdot 2^2\right) = 78\pi\ (\text{cm}^3). \end{aligned}$$

Thể tích V phần không gian bên trong chai nước là:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 400\pi + 12\pi + 78\pi = 490\pi\ (\text{cm}^3).$$

Chọn đáp án A □

Câu 43. Biết $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{\sqrt{3+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{a - b\sqrt{c}}{3}$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $c < 4$. Tính giá trị $S = a + b + c$.

A $S = 13$. **B** $S = 28$. **C** $S = 25$. **D** $S = 16$.

Lời giải.

Xét tích phân: $I = \int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{\sqrt{3+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u = \sqrt{3+\ln x} \Rightarrow u^2 = 3 + \ln x \Rightarrow 2u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$;

Khi $x = 1$ thì $u = \sqrt{3}$;

Khi $x = \mathrm{e}$ thì $u = 2$;

Ta có: $I = \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} u \cdot 2u \, \mathrm{d}u = 2\int\limits_{\sqrt{3}}^{2} u^2 \, \mathrm{d}u = \left.\frac{2}{3}u^3\right|_{\sqrt{3}}^{2} = \frac{16 - 6\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $a = 16$, $b = 6$, $c = 3$. Do đó $S = a + b + c = 16 + 6 + 3 = 25$.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x - 8 \cdot 3^x + 3 = m$ có đúng 2 nghiệm thuộc khoảng $(\log_3 2; \log_3 8)$.

A $-13 < m < -9$. B $-9 < m < 3$. C $3 < m < 9$. D $-13 < m < 3$.

Lời giải.

Đặt $3^x = t$, ta có phương trình: $t^2 - 8t + 3 = m \quad (*)$.

Khi $x \in (\log_3 2; \log_3 8)$ thì $t \in (2; 8)$. Rõ ràng, với mỗi $t \in (2; 8)$ có duy nhất một $x \in (\log_3 2; \log_3 8)$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 8t + 3$ với $t \in (2; 8)$.

Ta có $f'(t) = 2t - 8$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$.

Ta có bảng biến thiên:

x	2		4		8
y'		$-$	0	$+$	
y	-9	$\searrow$	-13	$\nearrow$	3

Phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm $x \in (\log_3 2; \log_3 8)$ khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có đúng 2 nghiệm $t \in (2; 8)$. Từ bảng biến thiên ta suy ra tất cả các giá trị của m cần tìm là $-13 < m < -9$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x + y - z + 9 = 0$, đường thẳng $d\colon \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$ và điểm $A(1; 2; -1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A cắt d và song song với mặt phẳng (P).

A $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$. B $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

C $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$. **D** $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (1; 1; -1)$.

Gọi B là giao điểm của đường thẳng Δ với đường thẳng d, khi đó $B = (3 + t; 3 + 3t; 2t)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2 + t; 1 + 3t; 2t + 1)$.

Đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) nên:

$\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}_P \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_P = 0 \Leftrightarrow (2 + t) \cdot 1 + (1 + 3t) \cdot 1 + (2t + 1) \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow t = -1$

Do đó $B = (2; 0; -2) \Rightarrow \overrightarrow{BA} = (-1; 2; 1)$.

Vậy, phương trình đường thẳng Δ là: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(0; 2018)$ để có $\lim \sqrt{\dfrac{9^n + 3^{n+1}}{5^n + 9^{n+a}}} \le \dfrac{1}{2187}$?

A 2011. **B** 2016. **C** 2019. **D** 2009.

Lời giải.

Ta có

$$\lim \sqrt{\frac{9^n + 3^{n+1}}{5^n + 9^{n+a}}} = \lim \sqrt{\frac{1 + 3.\left(\frac{3}{9}\right)^n}{\left(\frac{5}{9}\right)^n + 9^a}} = \frac{1}{3^a}.$$

Nên:

$$\begin{aligned}\lim \sqrt{\frac{9^n + 3^{n+1}}{5^n + 9^{n+a}}} \le \frac{1}{2187} &\Leftrightarrow \frac{1}{3^a} \le \frac{1}{2187}\\ &\Leftrightarrow 3^a \ge 2187\\ &\Leftrightarrow 3^a \ge 3^7\\ &\Leftrightarrow a \ge 7.\end{aligned}$$

Do đó, trên khoảng $(0; 2018)$ có 2011 giá trị nguyên của tham số a thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho A, B là hai điểm biểu diễn hình học số phức theo thứ tự z_0, z_1 khác 0 và thỏa mãn đẳng thức $z_0^2 + z_1^2 = z_0 z_1$. Hỏi ba điểm O, A, B tạo thành tam giác gì (O là gốc tọa độ)? Chọn phương án đúng và đầy đủ nhất.

A Đều. **B** Cân tại O. **C** Vuông tại O. **D** Vuông cân tại O.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}z_0^2 + z_1^2 = z_0 z_1 &\Leftrightarrow \left(\frac{z_0}{z_1}\right)^2 - \frac{z_0}{z_1} + 1 = 0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{z_0}{z_1} = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{z_0}{z_1} = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z_0 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2} z_1\\ z_0 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} z_1.\end{array}\right.\end{aligned}$$

- Xét trường hợp $z_0 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2} z_1$.

  $OA = |z_0| = \left|\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2} z_1\right| = \left|\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right| \cdot |z_1| = |z_1| = OB.$

$AB = \left|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right| = |z_1 - z_0| = \left|z_1 - \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}z_1\right| = \left|\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_1\right| = |z_1| = OB.$

Như vậy: $OA = OB = AB \Rightarrow \triangle OAB$ là tam giác đều.

- Xét trường hợp $z_0 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_1$.

  $OA = |z_0| = \left|\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_1\right| = \left|\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right| \cdot |z_1| = |z_1| = OB.$

  $AB = \left|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right| = |z_1 - z_0| = \left|z_1 - \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_1\right| = \left|\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}z_1\right| = |z_1| = OB.$

  Như vậy: $OA = OB = AB \Rightarrow \triangle OAB$ là tam giác đều.

Tóm lại, ba điểm O, A, B tạo thành tam giác đều (O là gốc tọa độ).

Chọn đáp án A □

Câu 48. Cho hàm số $y = \dfrac{\ln x - 6}{\ln x - 2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; \mathrm{e})$. Tìm số phần tử của S.

A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \dfrac{\ln x - 6}{\ln x - 2m}$ trên khoảng $(1; \mathrm{e})$.

Ta có $y' = \dfrac{6-2m}{(\ln x - 2m)^2} \cdot \dfrac{1}{x}$.

Do đó điều kiện cần và đủ để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; \mathrm{e})$ là

$$\begin{aligned} y' > 0, \forall x \in (1; \mathrm{e}) &\Leftrightarrow \dfrac{6-2m}{(\ln x - 2m)^2} \cdot \dfrac{1}{x} > 0, \forall x \in (1; \mathrm{e}) \\ &\Leftrightarrow 6 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < 3. \end{aligned}$$

Vậy, có 2 giá trị nguyên dương của m là $\{1; 2\}$ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; \mathrm{e})$.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = \left|\dfrac{z+i}{z}\right|$, với z là số phức khác 0 và thỏa mãn $|z| \geq 2$. Tính tỉ số $\dfrac{M}{m}$.

A. $\dfrac{M}{m} = 5$. B. $\dfrac{M}{m} = 3$. C. $\dfrac{M}{m} = \dfrac{3}{4}$. D. $\dfrac{M}{m} = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Với z là số phức khác 0 và thỏa mãn $|z| \geq 2$, ta có

- $P = \left|\dfrac{z+i}{z}\right| = \dfrac{|z+i|}{|z|} \leq \dfrac{|z|+|i|}{|z|} = 1 + \dfrac{1}{|z|} \leq 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

  Rõ ràng khi $z = 2i$ thì $P = \dfrac{3}{2}$. Do đó $M = \dfrac{3}{2}$.

- $P = \left|\dfrac{z+i}{z}\right| = \dfrac{|z+i|}{|z|} \geq \dfrac{||z|-|i||}{|z|} = 1 - \dfrac{1}{|z|} \geq 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

  Rõ ràng khi $z = -2i$ thì $P = \dfrac{1}{2}$. Do đó $m = \dfrac{1}{2}$.

Như vậy: $\dfrac{M}{m} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\,\mathrm{d}x = 4$, $\int\limits_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A $(5;9)$. **B** $(3;6)$. **C** $(\sqrt{2};5)$. **D** $(1;4)$.

Lời giải.

Xét tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\,\mathrm{d}x$:

Đặt $t = \tan x \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}t = (1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x$.
Khi $x = 0$ thì $t = 0$. Khi $x = \frac{\pi}{4}$ thì $t = 1$.
Từ đó ta có:

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan x)}{1+\tan^2 x}\left(1+\tan^2 x\right)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Do đó $\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 4$.

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned} & \int\limits_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 4+2 \\ \Leftrightarrow & \int\limits_0^1 \frac{(x^2+1)f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 6 \\ \Leftrightarrow & \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 6. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

——— **HẾT** ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. C	3. C	4. B	5. B	6. D	7. B	8. A	9. B	10. C
11. C	12. B	13. C	14. A	15. B	16. D	17. D	18. A	19. B	20. B
21. D	22. D	23. B	24. D	25. C	26. C	27. D	28. A	29. C	30. D
31. A	32. C	33. B	34. D	35. C	36. A	37. D	38. D	39. A	40. C
41. A	42. A	43. C	44. A	45. D	46. A	47. A	48. B	49. B	50. A

115 ĐỀ THI THỬ, LIÊN TRƯỜNG THPT NGHỆ AN, LẦN 2, 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho tập hợp M có 30 phần tử. Số tập hợp con gồm 5 phần tử của M là

A. C_{30}^5.   B. A_{30}^5.   C. 30^5.   D. A_{30}^4.

Lời giải.

Số tập hợp con gồm 5 phần tử của M chính là số tổ hợp chập 5 của 30 phần tử.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $\mathscr{K}$ và $a, b \in \mathscr{K}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_a^b [f(x)g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $\displaystyle\int_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dựa vào tính chất của tích phân.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Biết $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$. Khi đó giá trị của $\displaystyle\int_1^4 f(3x-3)\,\mathrm{d}x$ là

A. 27.   B. 3.   C. 0.   D. 24.

Lời giải.

Đặt $t = 3x - 3 \Rightarrow \mathrm{d}t = 3\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 0$; $x = 4 \Rightarrow t = 9$.

Suy ra $\displaystyle\int_1^4 f(3x-3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^9 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\cdot 9 = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon -x+y+3z-2=0$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(2;-1;1)$ và song song với mặt phẳng (P) là

A. $x-y+3z+2=0$.   B. $-x+y-3z=0$.

C. $-x+y+3z=0$.   D. $-x-y+3z=0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng $(P)\colon -x+y+3z-2=0$ có dạng $-x+y+3z+m=0$ $(m \neq -2)$.
Vì mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(2;-1;1)$ nên ta có $-2-1+3+m=0 \Leftrightarrow m=0$.
Vậy phương trình mặt phẳng (α) là $-x+y+3z=0$.
Chọn đáp án C □

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=2+3t \\ y=5-4t \\ z=-6+7t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ và điểm $A(1;2;3)$. Đường thẳng Δ đi qua A và song song song với đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

A $\vec{u}=(3;-4;7)$. **B** $\vec{u}=(3;-4;-7)$. **C** $\vec{u}=(-3;-4;-7)$. **D** $\vec{u}=(-3;-4;7)$.

Lời giải.
Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{v}=(3;-4;7)$.
Vì đường thẳng Δ song song song với đường thẳng d nên đường thẳng Δ nhận $\vec{v}=(3;-4;7)$ làm một véc-tơ chỉ phương.
Chọn đáp án A □

Câu 6. Số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x^2-4}$ là

A 3. **B** 1. **C** 2. **D** 4.

Lời giải.
Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$.
Ta có

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x+1}{x^2-4}=0 \Rightarrow y=0$ là đường tiệm ngang của đồ thị hàm số.
- $\lim\limits_{x\to\pm-2^-}\dfrac{3x+1}{x^2-4}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\pm-2^+}\dfrac{3x+1}{x^2-4}=+\infty \Rightarrow x=-2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- $\lim\limits_{x\to\pm2^-}\dfrac{3x+1}{x^2-4}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\pm2^+}\dfrac{3x+1}{x^2-4}=+\infty \Rightarrow x=2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x^2-4}$ có hai đường tiệm cận đứng và một đường tiệm cận ngang.
Chọn đáp án A □

Câu 7. Cắt hình nón đỉnh S bởi một mặt phẳng đi qua trục, ta được một tam giác vuông cân, cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích V của khối nón bằng

A $V=\dfrac{\pi a\sqrt{2}}{4}$. **B** $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{6}$. **C** $V=\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{12}$. **D** $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}$.

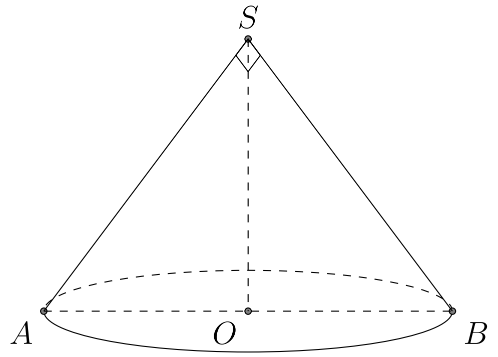
Lời giải.

Giả sử thiết diện là tam giác vuông cân SAB. Khi đó, khối nón có

- Chiều cao $h = SO = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Bán kính đáy $r = OA = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy thể tích khối nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}.$$



Chọn đáp án D □

Câu 8. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng đáy bằng 60°. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là

A $V = \dfrac{2a^3}{\sqrt{3}}$. **B** $V = 4a^3\sqrt{3}$. **C** $V = \dfrac{a^3}{3}$. **D** $V = \dfrac{4a^3}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

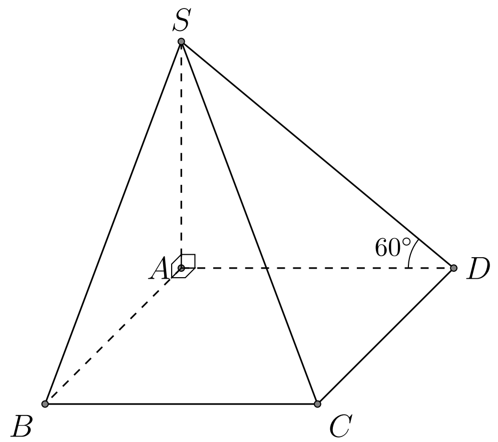
Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow AD$ là hình chiếu vuông góc của đường thẳng SD trên mặt phẳng $(ABCD)$.

$\Rightarrow \widehat{SDA} = (SD, (ABCD)) = 60^\circ$.

Tam giác SAD vuông tại A có $\widehat{SDA} = 60^\circ$ nên $SA = AD \cdot \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V = \frac{1}{3}SA{\cdot}S_{ABCD} = \frac{1}{3}SA{\cdot}AB{\cdot}AD = \frac{1}{3}{\cdot}2a\sqrt{a}{\cdot}a{\cdot}2a = \frac{4a^3}{\sqrt{3}}.$$



Chọn đáp án D □

Câu 9. Phương trình $\left(\sqrt{2}-1\right)^x + \left(\sqrt{2}+1\right)^x - 2\sqrt{2} = 0$ có tích các nghiệm là

A -1. **B** 2. **C** 1. **D** 0.

Lời giải.

Đặt $t = \left(\sqrt{2}-1\right)^x$ $(t > 0)$, ta được phương trình

$$t + \frac{1}{t} - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1+\sqrt{2} \\ t = 1+\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Với $t = -1+\sqrt{2}$, ta có: $\left(\sqrt{2}-1\right)^x = -1+\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 1$.

Với $t = 1+\sqrt{2}$, ta có: $\left(\sqrt{2}-1\right)^x = 1+\sqrt{2} \Leftrightarrow x = -1$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{2x+3}$ là

A $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2x+3} + C$. **B** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2x+3} + C$.

C $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+3} + C$.

D $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{2x+3} + C$.

Lời giải.

Áp dụng công thức nguyên hàm mở rộng, ta được $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{2x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+3} + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ có phương trình là

A $y = 3x - \frac{29}{3}$.

B $y = 3x - \frac{29}{3}$; $y = 3x + 1$.

C $y = 3x + \frac{29}{3}$.

D $y = 3x - 1$.

Lời giải.

Gọi $(\mathscr{C})$ là đồ thị của hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.

Vì tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ nên tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ có hệ số góc $k = 3$.

Gọi $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, ta có $y'(x_0) = k \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 3 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1 \\ x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = \frac{7}{3}. \end{array}\right.$

- Phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại điểm $(0; 1)$ là $y = 3(x - 0) + 1 = 3x + 1$.
- Phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại điểm $\left(4; \frac{7}{3}\right)$ là $y = 3(x - 4) + \frac{7}{3} = 3x - \frac{29}{3}$.

Vậy có một tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ là đường thẳng $y = 3x - \frac{29}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho các số thực dương a, b, c với $c \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A $\log_c(ab) = \log_c b + \log_c a$.

B $\log_c \frac{a}{b} = \frac{\log_c a}{\log_c b}$.

C $\log_c \sqrt{b} = \frac{1}{2}\log_c b$.

D $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$.

Lời giải.

Dựa vào tính chất của lôgarit.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$ trên đoạn $[-4; -2]$ là

A $\min\limits_{[-4;-2]} y = -7$.

B $\min\limits_{[-4;-2]} y = -\frac{19}{3}$.

C $\min\limits_{[-4;-2]} y = -8$.

D $\min\limits_{[-4;-2]} y = -6$.

Lời giải.

Hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[-4; -2]$.

Ta có $y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \notin (-4; -2) \\ x = -3 \in (-4; -2). \end{array}\right.$

Ta có $y(-4) = -\frac{19}{3}$; $y(-3) = -6$; $y(-2) = -7$. Suy ra $\min\limits_{[-4;-2]} y = -7$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Gọi r là bán kính đường tròn đáy và l là độ dài đường sinh của hình trụ. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ là

(A) $S_{\text{xq}} = 2\pi r^2 l$. (B) $S_{\text{xq}} = \pi r l$. (C) $S_{\text{xq}} = 2\pi l r$. (D) $S_{\text{xq}} = \frac{1}{3}\pi r l$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$ $\searrow$		-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -2 và giá trị cực đại bằng 2.

(B) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -2.

(C) Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

(D) Hàm số có đúng một cực trị.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$, $y_{\text{CT}} = -2$ và đạt cực đại tại $x = 1$, $y_{\text{CĐ}} = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Hai số phức $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 + i$. Giá trị của biểu thức $|z_1 + 3z_2|$ là

(A) $\sqrt{55}$. (B) 5. (C) 6. (D) $\sqrt{61}$.

Lời giải.

Ta có $z_1 + 3z_2 = 2 + 3i + 3(1 + i) = 5 + 6i$.

Do đó $|z_1 + 3z_2| = |5 + 6i| = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính iz_0.

(A) $iz_0 = 3 - i$. (B) $iz_0 = -3i + 1$. (C) $iz_0 = -3 - i$. (D) $iz_0 = 3i - 1$.

Lời giải.

Ta có $z^2 + 2z + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1 + 3i \\ z = -1 - 3i. \end{array}\right.$

Suy ra $z_0 = -1 + 3i$. Do đó $iz_0 = i(-1 + 3i) = -3 - i$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Các khoảng đồng biến của hàm số $y = x^4 - 8x^2 - 4$ là

(A) $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$. (B) $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.

(C) $(-2; 0)$ và $(0; 2)$. (D) $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x-2)(x+2)$; $y' > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < x < 0 \\ x > 2. \end{array}\right.$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 3)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (Oxy) là điểm M có tọa độ

A $M(1; -2; 0)$. **B** $M(0; -2; 3)$. **C** $M(1; 0; 3)$. **D** $M(2; -1; 0)$.

Lời giải.

Gọi $M(a; b; 0)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy). Ta có $\overrightarrow{AM} = (a-1; b+2; -3)$.

Mặt phẳng (Oxy) có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{k} = (0; 0; 1)$.

Vì M là hình chiếu của A lên mặt phẳng (Oxy) nên hai véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{k}$ cùng phương. Do đó, ta có $\begin{cases} a - 1 = 0 \\ b + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2. \end{cases}$

Vậy $M(1; -2; 0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = |z - 2 + 3i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là

A Đường tròn tâm $I(1; 2)$, bán kính $R = 1$.

B Đường thẳng có phương trình $2x - 6y + 12 = 0$.

C Đường thẳng có phương trình $x - 3y - 6 = 0$.

D Đường thẳng có phương trình $x - 5y - 6 = 0$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Ta có

$|z - 1| = |z - 2 + 3i| \Leftrightarrow |x - 1 + yi| = |x - 2 + (y+3)i| \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = (x-2)^2 + (y+3)^2 \Leftrightarrow$ $x - 3y - 6 = 0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng có phương trình $x - 3y - 6 = 0$.

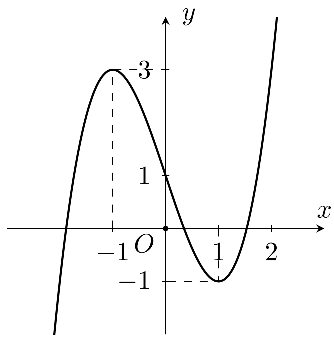
Chọn đáp án C □

Câu 21.

Đồ thị ở hình bên là của hàm số nào?

A $y = x^3 - 3x + 1$. **B** $y = x^3 + 3x + 1$.

C $y = -x^3 - 3x + 1$. **D** $y = -x^3 + 3x + 1$.



Lời giải.

Từ đồ thị suy ra hàm số có hệ số $a > 0$ và hàm số có hai điểm cực trị trái dấu, tức là $ac < 0$.

Các hàm số $y = x^3 + 3x + 1$, $y = -x^3 - 3x + 1$, $y = -x^3 + 3x + 1$ không thỏa mãn các tính chất

trên.
Hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ thỏa mãn các tính chất trên.
Chọn đáp án A □

Câu 22. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2\right) = -\dfrac{3}{2}$.

B $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{3x+2}{x+1} = -\infty$.

C $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2\right) = +\infty$.

D $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{3x+2}{x+1} = -\infty$.

Lời giải.
Ta có $\lim\limits_{x \to -1^-} (3x+2) = -1 < 0$; $\lim\limits_{x \to -1^-} (x+1) = 0$ và $x + 1 < 0$ khi $x \to -1^-$.
Vậy $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{3x+2}{x+1} = +\infty$.
Chọn đáp án B □

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + 4t \\ z = -2 + 6t \end{cases}$ và $d_2\colon \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 3t' \end{cases}$.
Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $d_1 \perp d_2$.

B $d_1 \equiv d_2$.

C d_1 và d_2 chéo nhau.

D $d_1 \parallel d_2$.

Lời giải.
Hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (-2; 4; 6)$ và $\vec{u}_2 = (-1; 2; 3)$.
Suy ra hai véc-tơ $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ cùng phương.
Lại có điểm $M(1; 3; -2) \in d_1$ nhưng không thuộc d_2.
Vậy hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau.
Chọn đáp án D □

Câu 24. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x+2} \geq \dfrac{1}{9}$ là

A $[0; +\infty)$.

B $(-\infty; 4)$.

C $(-\infty; 0)$.

D $[-4; +\infty)$.

Lời giải.
Ta có $3^{x+2} \geq \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{x+2} \geq 3^{-2} \Leftrightarrow x + 2 \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -4$.
Chọn đáp án D □

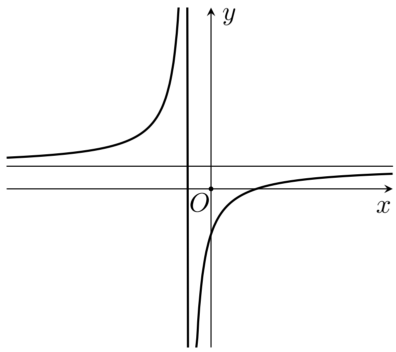
Câu 25.
Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A $ad < 0$, $ab < 0$.

B $ad > 0$, $ab < 0$.

C $bd < 0$, $ab > 0$.

D $bd > 0$, $ad > 0$.



Lời giải.

Ta có $y(0) < 0 \Rightarrow \dfrac{b}{d} < 0 \Rightarrow bd < 0$. Do đó b, d trái dấu. (1)

Lại có $y\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$ nên từ đồ thị ta thấy hàm số có một nghiệm duy nhất $\Rightarrow -\dfrac{b}{a} > 0 \Rightarrow ab < 0$.

Do đó a, b trái dấu. (2)

Từ (1) và (2) suy ra a và d cùng dấu nên $ad > 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Tích phân $I = \displaystyle\int_{-1}^{2} 3x \cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ nhận giá trị nào sau đây?

A $I = \dfrac{3\mathrm{e}^3 + 6}{\mathrm{e}^{-1}}$. **B** $I = \dfrac{3\mathrm{e}^3 - 6}{\mathrm{e}^{-1}}$. **C** $I = \dfrac{3\mathrm{e}^3 + 6}{\mathrm{e}}$. **D** $I = \dfrac{3\mathrm{e}^3 + 6}{-\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = 3x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 3\,\mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x. \end{cases}$

$\Rightarrow I = 3x\mathrm{e}^x\Big|_{-1}^{2} - 3\displaystyle\int_{-1}^{2} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = 6\mathrm{e}^2 + 3\mathrm{e}^{-1} - 3\left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-1}\right) = 3\mathrm{e}^2 + \dfrac{6}{\mathrm{e}} = \dfrac{3\mathrm{e}^3 + 6}{\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;1)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho độ dài OA, OB, OC theo thứ tự lập thành một cấp số nhân có công bội bằng 2. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (α).

A $\dfrac{4}{\sqrt{21}}$. **B** $\dfrac{\sqrt{21}}{21}$. **C** $\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$. **D** $9\sqrt{21}$.

Lời giải.

Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, $c > 0$.

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

Ta có (α) đi qua điểm $M(1;2;1)$ nên ta có $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$. $(*)$

Vì OA, OB, OC theo thứ tự lập thành một cấp số nhân có công bội bằng 2 nên $c = 2b = 4a$.

Thay vào $(*)$, ta được

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{2a} + \frac{1}{4a} = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{4a} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{9}{4}.$$

Suy ra phương trình mặt phẳng (α) là $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{4} = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow 4x + 2y + z - 9 = 0$.

Vậy $d\left(O, (\alpha)\right) = \dfrac{|-9|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2}} = \dfrac{3\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 - u_1 = 26 \end{cases}$. Tổng 8 số hạng đầu của cấp số nhân (u_n) là

A $S_8 = 1093$. **B** $S_8 = 3820$. **C** $S_8 = 9841$. **D** $S_8 = 3280$.

Lời giải.

Giả sử công bội của cấp số nhân là q, ta có

$$\begin{cases} u_1+u_2+u_3=13 \\ u_4-u_1=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1q+u_1q^2=13 \\ u_1q^3-u_1=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2)=13 \\ u_1(q-1)(q^2+q+1)=26. \end{cases}$$

$\Rightarrow 13(q-1)=26 \Leftrightarrow q=3 \Rightarrow u_1=1.$

Vậy $S_8=\dfrac{u_1(1-q^8)}{1-q}=\dfrac{1-3^8}{1-3}=3280.$

Chọn đáp án D □

Câu 29. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;-3)$, $B(2;0;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x-8y+7z-1=0$ Điểm $C(a;b;c)$ là điểm nằm trên mặt phẳng (P), có hoành độ dương để tam giác ABC đều. Tính $a-b+3c$.

(A) -7. (B) -9. (C) -5. (D) -3.

Lời giải.

Gọi (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB, ta có (Q) đi qua điểm $I(1;0;-2)$ là trung điểm của AB và nhận $\overrightarrow{IB}=(1;0;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên (Q) có phương trình là

$$1(x-1)+0(y-0)+1(z+2)=0 \Leftrightarrow x+z+1=0.$$

Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q). Khi đó d đi qua điểm $M(0;-1;-1)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=\left[\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}\right]=(2;-1;-2)$ nên d có phương trình là $\begin{cases} x=2t \\ y=-1-t \\ z=-1-2t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

Ta có $C\in d \Rightarrow C(2t;-1-t;-1-2t)$.

Tam giác ABC đều khi và chỉ khi $AB=AC$

$\Leftrightarrow \sqrt{(2t)^2+(-1-t)^2+(2-2t)^2}=2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 9t^2-6t-3=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow C(2;-2;-3).$

Vậy $a-b+3c=-5$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Cho $f(x)=a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+b\sin x+6$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Biết $f(\log(\log \mathrm{e}))=2$. Tính giá trị của biểu thức $f(\log(\ln 10))$.

(A) 4. (B) 10. (C) 8. (D) 2.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

Đặt $g(x)=f(x)-6$ (*), hàm số $g(x)$ cũng có tập xác định $\mathbb{R}$.

Dễ thấy $\forall x\in\mathbb{R}$ thì $-x\in\mathbb{R}$, và ta có

$$\begin{aligned} g(-x)=f(-x)-6&=a\ln\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)+b\sin(-x)=a\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)-b\sin x \\ &=a\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)-b\sin x=-a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-b\sin x=-g(x) \end{aligned}$$

Suy ra hàm số $g(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

Ta thấy: $\log(\ln 10) = \log\left(\dfrac{1}{\log \mathrm{e}}\right) = -\log(\log \mathrm{e})$, nên nếu đặt $t = \log(\ln 10)$ thì $\log(\log \mathrm{e}) = -t$.

Theo giả thiết có $f(-t) = 2$, từ (*) ta có $g(-t) = f(-t) - 6 = 2 - 6 = -4$. Cần tính $f(t)$.

Từ (*) và kết hợp hàm g là hàm số lẻ ta có: $f(t) = g(t) + 6 = -g(-t) + 6 = 4 + 6 = 10$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2; 4]$ để hàm số $y = \dfrac{1}{3}(m^2 - 1)x^3 + (m+1)x^2 + 3x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A 3. **B** 5. C 0. D 2.

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = (m^2 - 1)x^2 + 2(m+1)x + 3$.

TH1: Với $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Khi $m = -1$ thì $y' = 3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi $m = 1$ thì $y' = 4x + 3 > 0 \forall x > \dfrac{-3}{4}$, suy ra hàm số không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

TH2: Với $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Hàm số $y = \dfrac{1}{3}(m^2 - 1)x^3 + (m+1)x^2 + 3x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 > 0 \\ (m+1)^2 - 3(m^2 - 1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m < -1. \end{array}\right.$$

Từ hai trường hợp trên, suy ra $m \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

Vì m nguyên và m thuộc $[-2; 4]$ nên $m \in \{-2; -1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 5 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Cho x, $y > 0$ thỏa mãn $\begin{cases} x^2 - xy + 3 = 0 \\ 2x + 3y - 14 \leq 0 \end{cases}$. Tính tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x^2y - xy^2 - 2x^3 + 2x$.

A 4. B 8. C 12. **D** 0.

Lời giải.

Ta có $x^2 - xy + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{x^2 + 3}{x}$.

Khi đó $2x + 3y - 14 \leq 0 \Leftrightarrow 2x + \dfrac{3x^2 + 9}{x} - 14 \leq 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 14x + 9 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[1; \dfrac{9}{5}\right]$.

Cũng có $P = 3x^2 \cdot \dfrac{x^2 + 3}{x} - x \cdot \left(\dfrac{x^2 + 3}{x}\right)^2 - 2x^3 + 2x = 5x - \dfrac{9}{x} = f(x)$.

Mà $f'(x) = 5 + \dfrac{9}{x^2} > 0$, $\forall x \in \left[1; \dfrac{9}{5}\right]$.

Do đó GTLN của P là $f\left(\dfrac{9}{5}\right) = 4$ và GTNN của P là $f(1) = -4$.

Vậy tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức P bằng 0.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Gọi m_0 là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - 1$ có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A $m_0 \in (-1; 1]$. **B** $m_0 \in (-2; -1]$. **C** $m_0 \in (-\infty; -2]$. **D** $m_0 \in (-1; 0)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 4mx = 4x(x^2 + m)$.

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < 0$.

Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0; -1)$, $B\left(-\sqrt{-m}; -m^2 - 1\right)$, $B\left(\sqrt{-m}; -m^2 - 1\right)$.

Gọi H là trung điểm của BC, ta có $H(0; -m^2 - 1)$.

Ta có $BC = \sqrt{\left(2\sqrt{-m}\right)^2} = 2\sqrt{-m}$, $AH = \sqrt{(-m^2)^2} = m^2$.

Tam giác ABC cân tại A nên $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC \cdot AH = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{-m} \cdot m^2 = \sqrt{-m} \cdot m^2$.

Theo giả thiết, ta có $S_{ABC} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{-m} \cdot m^2 = 4\sqrt{2} \Rightarrow m = -2$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho $X = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 15\}$. Chọn ngẫu nhiên 3 số trong tập hợp X. Tính xác suất để trong ba số được chọn không có hai số liên tiếp.

A $\dfrac{13}{35}$. **B** $\dfrac{7}{20}$. **C** $\dfrac{20}{35}$. **D** $\dfrac{13}{20}$.

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu. Ta có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{16}^3 = 560$.

Có 14 cách chọn ba số liên tiếp nhau.

Có 15 cách chọn hai số liên tiếp nhau.

+Nếu hai số đó là $\{0, 1\}$ hoặc $\{14, 15\}$ thì có 13 cách chọn số thứ ba sao cho trong ba số chỉ có hai số liên tiếp.

+Nếu hai số đó không phải là $\{0, 1\}$ hoặc $\{14, 15\}$ thì có 12 cách chọn số thứ ba sao cho trong ba số chỉ có hai số liên tiếp.

Vậy có $14 + 2 \times 13 + 13 \times 12 = 196$ cách chọn ba số sao cho ba số đó là liên tiếp hoặc chỉ có hai trong ba số là liên tiếp.

Vậy có $560 - 196 = 364$ cách chọn ba số sao cho trong ba số được chọn không có hai số liên tiếp.

Do đó xác suất cần tính là $\mathrm{P} = \dfrac{364}{560} = \dfrac{13}{20}$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Tổng các nghiệm của phương trình $2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 3$ trên $\left(0; \dfrac{5\pi}{2}\right]$ là

A $\dfrac{7\pi}{6}$. **B** $\dfrac{7\pi}{3}$. **C** $\dfrac{7\pi}{2}$. **D** 2π.

Lời giải.

$2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 3 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2$

$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow 2x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Vì $x \in \left(0; \dfrac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow 0 < \dfrac{\pi}{6} + k\pi \leq \dfrac{5\pi}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{6} < k \leq \dfrac{7}{3}$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2\}$.

Khi đó các nghiệm của phương trình trên $\left(0; \dfrac{5\pi}{2}\right]$ là $x = \dfrac{\pi}{6}, x = \dfrac{7\pi}{6}, x = \dfrac{13\pi}{6}$.

Vậy tổng các nghiệm trên $\left(0; \dfrac{5\pi}{2}\right]$ bằng $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{7\pi}{6} + \dfrac{13\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-z-3=0$ và hai điểm $A\,(1;1;1)$, $B\,(-3;-3;-3)$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C. Biết rằng C luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính của đường tròn đó.

Ⓐ $R=4$. $\boxed{\text{B}}$ $R=6$. Ⓒ $R=\dfrac{2\sqrt{33}}{3}$. Ⓓ $R=\dfrac{2\sqrt{11}}{3}$.

Lời giải.

Gọi I là tâm của mặt cầu (S).

Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow M\,(-1;-1;-1)$.

Gọi $K=AB\cap(P)$.

Ta có đường thẳng AB đi qua điểm A và nhận $\overrightarrow{AB}=(-4;-4;-4)=-4\,(1;1;1)$ làm véc-tơ chỉ phương nên phương trình đường thẳng AB là $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$.

Vì $K\in AB$ nên $K\,(1+t;1+t;1+t)$. Mặt khác $K\in(P)\Rightarrow 1+t+(1+t)-(1+t)-3=0$ $\Leftrightarrow t=2$.

Suy ra $K\,(3;3;3)\Rightarrow KM=4\sqrt{3}$. Ta cũng có $AB=4\sqrt{3}$.

Xét $\triangle KIC$ vuông tại C ta có $KI^2=KC^2+IC^2$. (1)

Xét $\triangle KIM$ vuông tại M ta có $KI^2=KM^2+IM^2=KM^2+\left(IA^2-\dfrac{AB^2}{4}\right)=IA^2+36.$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $KC^2=36\Rightarrow KC=6$.

Từ đó suy ra C thuộc đường tròn tâm K bán kính bằng 6 vẽ trong mặt phẳng (P).

Chọn đáp án B □

Câu 37. Gọi Slà tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x-m\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^x+2m+1=0$ có nghiệm. Tập $\mathbb{R}\backslash S$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

Ⓐ 4. $\boxed{\text{B}}$ 9. Ⓒ 0. Ⓓ 3.

Lời giải.

Đặt $t=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, $t>0$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $t^2-mt+2m+1=0\Leftrightarrow m.\,(t-2)=t^2+1\,(*)$.

Nếu $t=2$, từ $(*)$ ta có $0=5$ (vô lý).

Với $0<t\neq 2$ ta có $(*)\Leftrightarrow m=\dfrac{t^2+1}{t-2}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+1}{t-2}$, $0<t\neq 2$. Ta có $f'(t)=\dfrac{t^2-4t-1}{(t-2)^2}=0\Leftrightarrow t=2+\sqrt{5}$.

Bảng biến thiên:

t	0		2		$2+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$-\dfrac{1}{2}$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$4+2\sqrt{5}$	↗	$+\infty$

Phương trình đã cho có nghiệm x khi phương trình $(*)$ có nghiệm t với $0<t\neq 2$.

Từ bảng biến thiên suy ra $m \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left[4 + 2\sqrt{5}; +\infty\right)$.

Khi đó tập $\mathbb{R} \backslash S = \left[-\dfrac{1}{2}; 4 + 2\sqrt{5}\right)$ có 9 giá trị nguyên.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \backslash \{0; -1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = -2\ln 2$ và $x(x+1) f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Giá trị $f(2) = a + b\ln 3$ $(a, b \in \mathbb{Q})$. Tính $a^2 + b^2$.

(A) $\dfrac{25}{4}$. (B) $\dfrac{9}{2}$. (C) $\dfrac{5}{2}$. (D) $\dfrac{13}{4}$.

Lời giải.

Ta có $x(x+1) f'(x) + f(x) = x^2 + x \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1} f'(x) + \dfrac{1}{(x+1)^2} f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{x}{x+1} f(x)\right]' = \dfrac{x}{x+1}$.

Lấy tích phân từ 1 đến 2 hai vế ta được

$\displaystyle\int_1^2 \left[\dfrac{x}{x+1} f(x)\right]' \mathrm{d}x = \int_1^2 \dfrac{x}{x+1} \mathrm{d}x \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1} f(x)\Big|_1^2 = (x - \ln|x+1|)\Big|_1^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{3} f(2) - \dfrac{1}{2} f(1) = (2 - \ln 3) - (1 - \ln 2) \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} f(2) + \ln 2 = 1 - \ln 3 + \ln 2 \Leftrightarrow f(2) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}\ln 3$.

Suy ra $a = \dfrac{3}{2}$ và $b = -\dfrac{3}{2}$.

Vậy $a^2 + b^2 = \dfrac{9}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3 - 4i| = 1$ và $|z_2 - 3 - 4i| = \dfrac{1}{2}$. Số phức z có phần thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $3a - 2b = 12$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z - z_1| + |z - 2z_2| + 2$ bằng

(A) $P_{\min} = \dfrac{\sqrt{9945}}{11}$. (B) $P_{\min} = 5 - 2\sqrt{3}$. (C) $P_{\min} = \dfrac{\sqrt{9945}}{13}$. (D) $P_{\min} = 5 + 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Đặt $z_3 = 2z_2$ thì $|z_3 - 6 - 8i| = 1$ và $P = |z - z_1| + |z - z_3| + 2$.

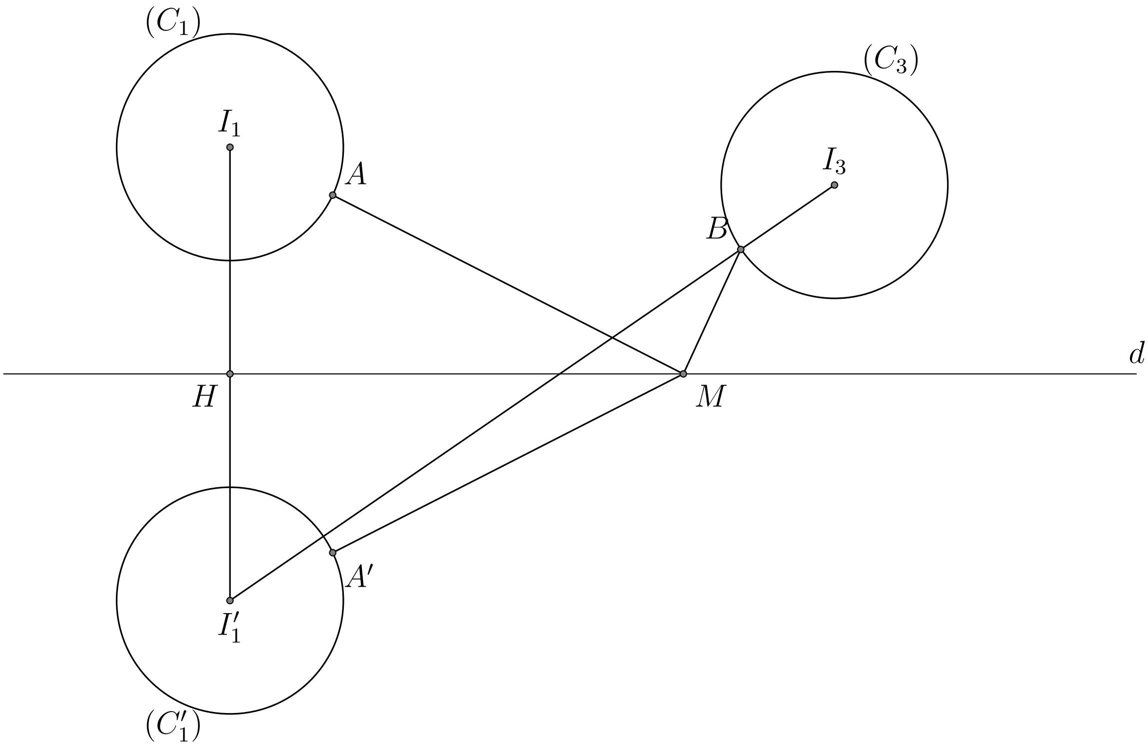
Gọi M, A, B lần lượt là các điểm biểu diễn cho z, z_1 và z_3. Khi đó:

Điểm A nằm trên đường tròn (C_1) có tâm $I_1(3; 4)$, bán kính $R_1 = 1$;

Điểm B nằm trên đường tròn (C_3) có tâm $I_3(6; 8)$, bán kính $R_3 = 1$

Và điểm M nằm trên đường thẳng $d: 3x - 2y - 12 = 0$.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $P = MA + MB + 2$.



Ta kiểm tra thấy (C_1) và (C_3) nằm cùng phía và không cắt đường thẳng $d\colon 3x - 2y - 12 = 0$.
Gọi đường tròn (C'_1) có tâm I'_1 và bán kính $R'_1 = 1$ đối xứng với (C_1) qua d.
Điểm A' đối xứng với A qua d thì A' thuộc (C'_1).
Ta có $I_1I'_1\colon 2x + 3y - 18 = 0$. Gọi $H = I_1I'_1 \cap d \Rightarrow H\left(\dfrac{72}{13}; \dfrac{30}{13}\right)$ suy ra $I'_1\left(\dfrac{105}{13}; \dfrac{8}{13}\right)$.
Ta có $P = MA + MB + 2 = MA' + MB + 2 = (MA' + R'_1) + (MB + R_3) \geq I'_1M + I_3M \geq I'_1I_3$.
Từ đó $P_{\min}$ khi các điểm I'_1, I_3, A', B và M thẳng hàng và $P_{\min} = I'_1I_3 = \dfrac{\sqrt{9945}}{13}$.
Chọn đáp án C ☐

Câu 40. Cho hình thang cong $(\mathscr{H})$ giới hạn bởi các đường $y = \ln(x+1)$, trục hoành và đường thẳng $x = \mathrm{e} - 1$. Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình $(\mathscr{H})$ quanh trục Ox.

A $\mathrm{e} - 2$. **B** 2π. **C** $\pi\mathrm{e}$. **D** $\pi(\mathrm{e} - 2)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y = \ln(x+1)$ và trục hoành là

$$\ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình $(\mathscr{H})$ quanh trục Ox là

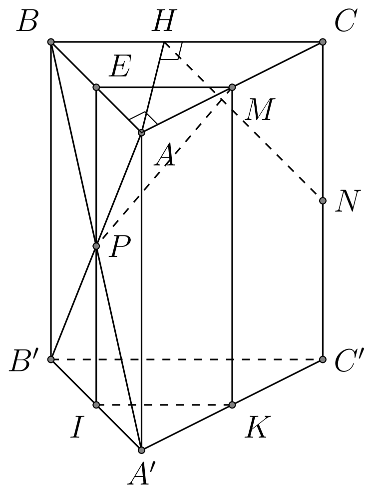
$V = \displaystyle\int\limits_0^{\mathrm{e}-1} [\ln(x+1)]^2 \,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\mathrm{e}} (\ln t)^2 \,\mathrm{d}t = \pi(\mathrm{e} - 2)$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 41. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $BC = 2a$. Gọi M, N, P lầ lượt là trung điểm của AC, CC', $A'B$ và H là hình chiếu của A lên BC. Tính khoảng cách giữa MP và NH.

A $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B** $a\sqrt{6}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D** a.

Lời giải.



Gọi E, I, K lần lượt là trung điểm của AB, $A'B'$, $A'C'$, ta có $(BCC'B') \parallel (EMKI)$.

Mà $NH \subset (BCC'B')$; $MP \subset (EMKI)$.

$\Rightarrow d(MP, NH) = d((BCC'B'), (EMKI)) = \dfrac{1}{2}AH$.

Do $AH = \dfrac{AB.AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow d(MP, NH) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm AB và AC, E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là

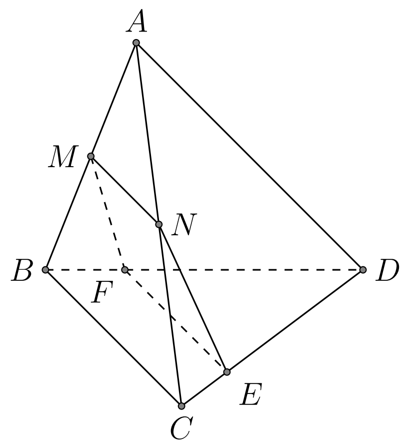
A Tam giác MNE.

B Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD.

C Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$.

D Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$.

Lời giải.



M và N lần lượt là trung điểm AB và AC nên $MN \parallel BC$ và $MN = \dfrac{1}{2}BC$.

Qua E kẻ đường thẳng song song với BC, cắt BD tại F thì $EF \parallel MN$.

Ta có $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{DE}{DC} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow EF = \dfrac{3}{4}BC > MN$.

Vậy thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là là hình thang $MNEF$.

Chọn đáp án D □

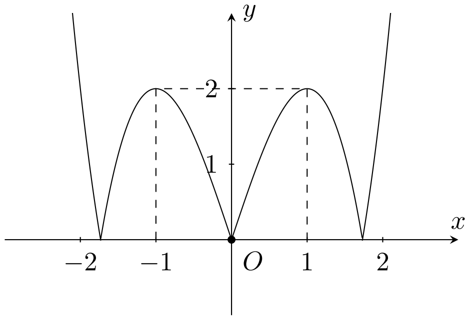
Câu 43. Phương trình $|x^3 - 3x| = m^2 + m$ có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

A $m > 0$. **B** $m < -2$hoặc $m > 1$.

C $-1 < m < 0$. **D** $-2 < m < -1$ hoặc $0 < m < 1$.

Lời giải.

Đồ thị của hàm số $y = |x^3 - 3x|$.



Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |x^3 - 3x|$ và đường thẳng $y = m^2 + m$.

Suy ra phương trình có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m^2 + m < 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < m < 1 \\ -2 < m < -1. \end{array}\right.$

Chọn đáp án D □

Câu 44. Một vật chuyển động với vận tốc $v = 20$ m/s thì thay đổi vận tốc với gia tốc được tính theo thời gian t là $a(t) = -4 + 2t$ m/s^2. Tính quãng đường vật đi được để từ thời điểm thay đổi gia tốc đến lúc vật đạt vận tốc bé nhất.

A $\dfrac{104}{3}$ m. **B** 104 m. **C** 208 m. **D** $\dfrac{104}{6}$ m.

Lời giải.

Ta có $v = \displaystyle\int (-4 + 2t)\,\mathrm{d}t = -4t + t^2 + C$. Tại thời điểm $t = 0$, $v = 20 \Rightarrow C = 20$.

Do đó $v = t^2 - 4t + 20 = (t-2)^2 + 16 \geq 16$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t = 2$.

Vậy $s = \displaystyle\int_0^2 (t^2 - 4t + 20)\,\mathrm{d}t = \dfrac{104}{3}$ m.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x + 2y + z - 4 = 0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{3}$. Phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d là

A $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{-3}$. **B** $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$.

C $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$. **D** $\dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{3}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; 1)$; đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_d = (2; 1; 3)$.

Đường thẳng Δ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = [\vec{n}, \vec{u}_d] = (-5; 1; 3)$.

Gọi M là giao điểm của d và mặt phẳng (P), khi đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y + z - 4 = 0 \\ \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1. \end{cases}$$

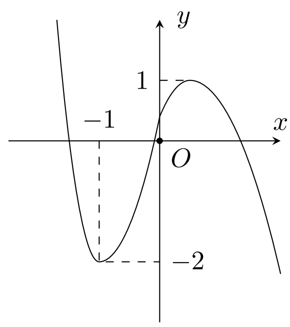
$\Rightarrow M(1; 1; 1)$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1; 1; 1)$ và nhận $\vec{u} = (-5; 1; 3)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình là

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 46.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) + 2x$ là



(A) 4. **(B)** 1. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.
Xét hàm số $g(x) = f(x) + 2x$. Ta có $g'(x) = f'(x) + 2$;
Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \alpha \ \ (\alpha > 0) \end{array}\right.$.
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x < \alpha \\ x \neq -1. \end{cases}$
- $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < -2 \Leftrightarrow x > \alpha$.

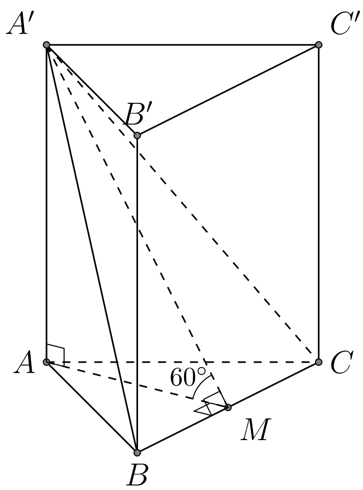
Từ đó suy ra hàm số $y = f(x) + 2x$ liên tục và có đạo hàm chỉ đổi dấu khi qua giá trị $x = \alpha$.
Vậy hàm số đã cho có đúng một cực trị.
Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $60°$, cạnh $AB = a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

(A) $V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3$. (B) $V = \frac{3}{4}a^3$. **(C)** $V = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^3$. (D) $V = \sqrt{3}a^3$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases} (A'BC) \cap (ABC) = BC \\ A'A \perp (ABC) \\ AM \perp BC \end{cases}$



$\Rightarrow A'M \perp BC$.
$\Rightarrow \widehat{A'MA}$ là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC). Do đó $\widehat{A'MA} = 60°$.
$\Rightarrow A'A = AM \cdot \tan 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2}$.
Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V = S_{ABC} \cdot A'A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 48. Biết rằng hệ số của x^{n-2} trong khai triển $\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^n$ bằng 31. Tìm n.

A $n=32$. **B** $n=30$. **C** $n=31$. **D** $n=33$.

Lời giải.

Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển nhị thức $\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^n$ là $T_{k+1}=(-1)^k\mathrm{C}_n^k x^{n-k}\left(\dfrac{1}{4}\right)^k$.

Suy ra hệ số của x^{n-2} ứng với $k=2$ là $\dfrac{1}{16}\mathrm{C}_n^2$.

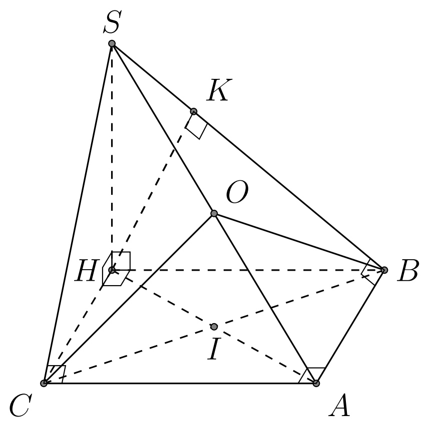
Theo giả thiết, ta có $\dfrac{1}{16}\mathrm{C}_n^2=31\Leftrightarrow\dfrac{n(n-1)}{32}=31\Rightarrow n=32$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABC$. Tam giác ABC vuông tại A, $AB=1$ cm, $AC=\sqrt{3}$ cm. Tam giác SAB, SAC lần lượt vuông góc tại B và C. Khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $\dfrac{5\sqrt{5}\pi}{6}$ cm^3. Tính khoảng cách từ C tới mặt phẳng (SAB).

A $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ cm. **B** $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ cm. **C** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm. **D** 1 cm.

Lời giải.



Gọi O là trung điểm của SA. Ta có các tam giác SAB, SAC lần lượt vuông góc tại B và C nên $OS=OA=OB=OC=\dfrac{SA}{2}$.

Suy ra O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Bán kính mặt cầu tương ứng là $R=\dfrac{SA}{2}$.

Theo giả thiết, ta có $\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{5\sqrt{5}\pi}{6}\Rightarrow R=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\Rightarrow SA=\sqrt{5}$.

Gọi I là trung điểm của BC và H là điểm đối xứng của A qua I, ta có $ABHC$ là hình chữ nhật.

Ta có $\begin{cases}AB\perp SB\\AB\perp BH\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SBH)\Rightarrow AB\perp SH.$ (1)

Lại có $\begin{cases}AC\perp SC\\AC\perp CH\end{cases}\Rightarrow AC\perp(SCH)\Rightarrow AC\perp SH.$ (2)

Từ (1) & (2) suy ra $SH\perp(ABHC)$.

Ta có $AB\parallel HC\Rightarrow d\left(C,(SAB)\right)=d\left(H,(SAB)\right)$.

Lại có $AB\perp(SBH)\Rightarrow(SAB)\perp(SBH)$ theo giao tuyến SB.

Trong mặt phẳng (SBH), kẻ $HK\perp SB$ tại K, ta có $HK\perp(SAB)\Rightarrow HK=d\left(H,(SAB)\right)$.

Tam giác ABC vuông tại A nên $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=2\Rightarrow AH=BC=2$.

Tam giác SAH vuông tại H nên $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=1$.

Tam giác SHB vuông tại H có HK là đường cao nên ta có:

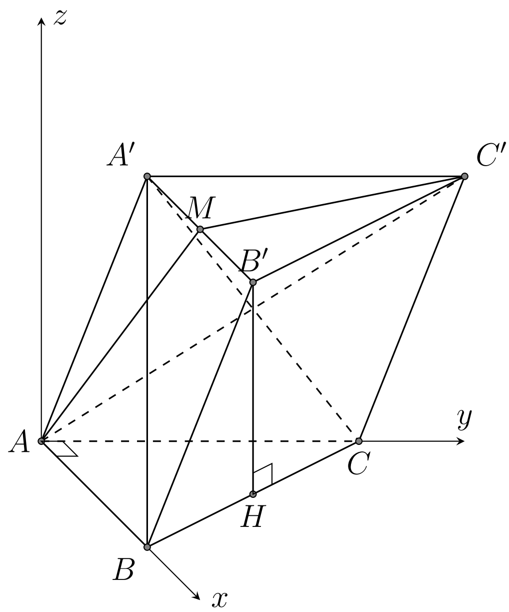
$\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HB^2}=1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}\Rightarrow HK=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A, $AB=3$, $AC=4$, $AA'=\dfrac{\sqrt{61}}{2}$. Hình chiếu của B' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC, M là trung điểm cạnh$A'B'$. Cosin của góc tạo bởi mặt phẳng (AMC') và mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A $\dfrac{11}{\sqrt{3157}}$. **B** $\dfrac{\sqrt{13}}{65}$. **C** $\dfrac{33}{\sqrt{3517}}$. **D** $\dfrac{33}{\sqrt{3157}}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểmBC, theo giả thiết ta có $B'H \perp (ABC)$.

Mặt khác ta lại có tam giác ABC vuông tại A, $AB = 3$, $AC = 4$ nên $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 5$.

Xét tam giác vuông $B'BH$ ta có

$$B'H^2 = \sqrt{BB'^2 - B'H^2} = 3.$$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có A trùng với O như hình vẽ

Với$A\,(0;0;0)$, $B\,(4;0;0)$, $C\,(0;3;0)$, khi đó trung điểm H của BC là $H\left(\dfrac{3}{2};2;0\right)$.

Mặt khác theo giả thiết ta có $AA' = BB' = \dfrac{\sqrt{61}}{2}$ nên $B'\left(\dfrac{3}{2};2;3\right)$.

Do $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$ nên $A'\left(-\dfrac{3}{2};2;3\right)$; $C'\left(-\dfrac{3}{2};6;3\right) \Rightarrow M\,(0;2;3)$.

$\overrightarrow{AM} = (0;2;3)$; $\overrightarrow{AC'} = \left(-\dfrac{3}{2};6;3\right)$ nên vectơ pháp tuyến của (MAC') là $\vec{n}_1 = \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC'}\right] = \left(-12;-\dfrac{9}{2};3\right)$.

$\overrightarrow{A'B} = \left(\dfrac{9}{2};-2;-3\right)$; $\overrightarrow{A'C} = \left(\dfrac{3}{2};2;-3\right)$ nên vectơ pháp tuyến của $(A'BC)$ là $\vec{n}_2 = \left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}\right] = (12;9;12)$.

Gọi φ là góc tạo bởi mặt phẳng (AMC') và mặt phẳng$(A'BC)$, ta có

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\left|12 \cdot (-12) + 9 \cdot \left(-\dfrac{9}{2}\right) + 12 \cdot 3\right|}{\sqrt{(-12)^2 + \left(-\dfrac{9}{2}\right)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{9^2 + 12^2 + 12^2}} = \frac{33}{\sqrt{3157}}.$$

Chọn đáp án D □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. C	3. B	4. C	5. A	6. A	7. D	8. D	9. A	10. C
11. A	12. B	13. A	14. C	15. A	16. D	17. C	18. B	19. A	20. C
21. A	22. B	23. D	24. D	25. B	26. C	27. C	28. D	29. C	30. B
31. B	32. D	33. C	34. D	35. C	36. B	37. B	38. B	39. C	40. D
41. A	42. D	43. D	44. A	45. A	46. B	47. C	48. A	49. C	50. D

116 ĐỀ THI THỬ, TRƯỜNG THPT THƯỜNG XUÂN 2 , THANH HÓA, LẦN 2, 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Tính thể tích khối cầu (S), biết rằng mặt cầu (S) có diện tích bằng 20π.

A. $\dfrac{4\pi\sqrt{5}}{3}$. B. $\dfrac{20\pi\sqrt{5}}{3}$. C. $\dfrac{20\pi}{3}$. D. $20\pi\sqrt{5}$.

Lời giải.

Theo bài ra ta có $4\pi R^2 = 20\pi \Rightarrow R = \sqrt{5}$.

Từ đó suy ra thể tích khối cầu $V = \dfrac{4\pi R^3}{3} = \dfrac{20\pi\sqrt{5}}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và công sai $d = -2$. Xác định số hạng u_{10}.

A. $u_{10} = -17$. B. $u_{10} = 21$. C. $u_{10} = -15$. D. $u_{10} = 23$.

Lời giải.

Ta có $u_{10} = u_1 + 9d = 3 + 9(-2) = -15$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Cần chọn 3 người đi công tác từ một tổ có 30 người, khi đó số cách chọn là

A. 3^{30}. B. 10. C. A_{30}^3. D. C_{30}^3.

Lời giải.

Số cách chọn 3 người trong 30 đi công tác là C_{30}^3.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Cho số phức $z = 5 - 4i$. Tính mô-đun của số phức $\overline{z}$.

A. 3. B. 1. C. 9. D. $\sqrt{41}$.

Lời giải.

Ta có $\overline{z} = 5 + 4i$, suy ra $|\overline{z}| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Họ nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1$ là

A. $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Thầy giáo có 10 câu hỏi trắc nghiệm, trong đó có 6 câu hỏi đại số và 4 câu hỏi hình học. Thầy giáo gọi bạn Nam lên bảng trả bài bằng cách chọn lấy ngẫu nhiên 3 trong 10 câu hỏi trên để trả lời. Hỏi xác suất bạn Nam chọn ít nhất có một câu hình học là bao nhiêu?

A. $\dfrac{1}{30}$. B. $\dfrac{1}{6}$. C. $\dfrac{5}{6}$. D. $\dfrac{29}{30}$.

Lời giải.

Số kết quả không gian mẫu $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^3 = 120$.

Gọi A là biến cố Nam chọn có ít nhất một câu hình, suy ra $\overline{A}$ là biến cố Nam chọn không có một câu hình nào. Từ đó ta có

$$n(\overline{A}) = \mathrm{C}_6^3 = 20 \Rightarrow \mathrm{P}(\overline{A}) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \Rightarrow \mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = \frac{5}{6}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;1)$ và $B(2;1;0)$. Viết phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng AB.

- **A** $x + 3y + z - 5 = 0$.
- **B** $3x - y - z + 6 = 0$.
- **C** $x + 3y + z - 6 = 0$.
- **D** $3x - y - z - 6 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng đi qua A, B và vuông góc với AB nhận $\overrightarrow{AB} = (3;-1;-1)$ là véc-tơ pháp tuyến, suy ra phương trình mặt phẳng cần tìm

$$3(x+1) - (y-2) - (z-1) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - z + 6 = 0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 8. Chiều cao của khối chóp có diện tích đáy bằng B và thể tích bằng V là

- **A** $h = \dfrac{2V}{B}$.
- **B** $h = \dfrac{V}{B}$.
- **C** $h = \dfrac{6V}{B}$.
- **D** $h = \dfrac{3V}{B}$.

Lời giải.

Ta có $V = \dfrac{1}{3}hB \Rightarrow h = \dfrac{3V}{B}$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Cho hàm số có bảng biến thiên như hình dưới

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- **A** $(0;+\infty)$.
- **B** $(2;+\infty)$.
- **C** $(0;2)$.
- **D** $(-\infty;5)$.

Lời giải.

Trong khoảng $(2;+\infty)$, hàm số đồng biến.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \dfrac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

- **A** $F(x) = \mathrm{e}^x + x^2 + \dfrac{1}{2}$.
- **B** $F(x) = \mathrm{e}^x + x^2 + \dfrac{5}{2}$.
- **C** $F(x) = \mathrm{e}^x + x^2 + \dfrac{3}{2}$.
- **D** $F(x) = 2\mathrm{e}^x + x^2 - \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (e^x + 2x)\,\mathrm{d}x = e^x + x^2 + C$.

Do $F(0) = \dfrac{3}{2} \Rightarrow 1 + C = \dfrac{3}{2} \Rightarrow C = \dfrac{1}{2}$.

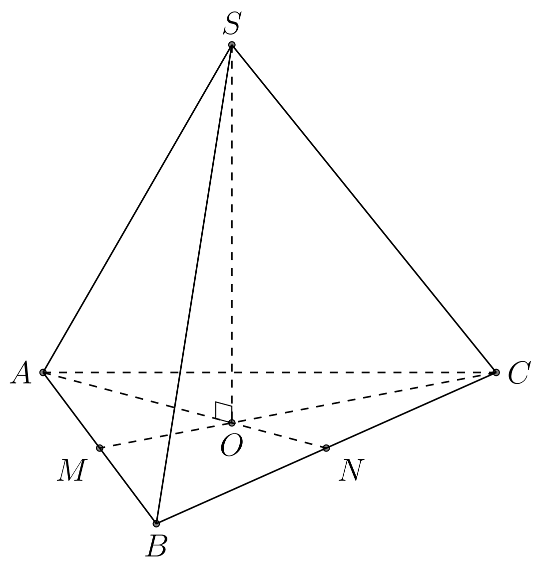
Từ đó ta có $F(x) = e^x + x^2 + \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

(A) $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$. (B) $V = \dfrac{\sqrt{35}a^3}{24}$. (C) $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. (D) $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Lời giải.



Do tam giác ABC đều, suy ra

$$AN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO = \frac{2}{3} \cdot AN = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Xét tam giác vuông SOA, có

$$SO^2 = SA^2 - AO^2 = 3a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{8a^2}{3} \Rightarrow SO = \frac{2a\sqrt{6}}{3}.$$

Từ đó ta có, thể tích khối chóp

$$V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Tìm số điểm phân biệt biểu diễn các nghiệm của phương trình $\sin^2 2x - \cos 2x + 1 = 0$ trên đường tròn lượng giác.

(A) 2. (B) 1. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

Ta có

$$\sin^2 2x - \cos 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 2x - \cos 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\cos^2 2x - \cos 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 1 \\ \cos 2x = -2\,(\text{loại})\end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Từ đó suy ra có 2 điểm phân biệt biểu diễn các nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Thể tích V của khối nón tròn xoay có bán kính đường tròn đáy bằng r và chiều cao bằng h là

(A) $V = \dfrac{1}{6}\pi r^2 h$. (B) $V = \pi r^2 h$. (C) $V = \dfrac{1}{2}\pi r^2 h$. (D) $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Lời giải.

Thể tích của khối nón tròn xoay $V = \dfrac{1}{3}h\pi r^2$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 14. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2 2x > \log_2(9-x)$.

A $S = (-\infty; 3)$. **B** $S = (9; +\infty)$. **C** $S = (3; +\infty)$. **D** $S = (3; 9)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x > 0 \\ 9 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 9$.

Ta có

$$\log_2 2x > \log_2(9-x) \Leftrightarrow 2x > 9 - x \Leftrightarrow 3x > 9 \Leftrightarrow x > 3.$$

Kết hợp với điều kiện ta có $3 < x < 9$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(1;3;5)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

A $y - 2z - 6 = 0$. **B** $y - 3z + 4 = 0$. **C** $y + 2z - 8 = 0$. **D** $y - 2z + 2 = 0$.

Lời giải.

Ta có $I(1;2;3)$ là trung điểm của đoạn AB.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua I và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB} = (0;2;4) = 2(0;1;2)$, suy ra phương trình mặt phẳng trung trực cần tìm là

$$0(x-1) + 1(y-2) + 2(z-3) = 0 \Leftrightarrow y + 2z - 8 = 0.$$

Chọn đáp án C $\square$

Câu 16. Cho số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathrm{R})$ thỏa mãn $z - (2+3i)\overline{z} = -1 - 3i$. Tính giá trị của biểu thức $S = ab + 1$.

A $S = 1$. **B** $S = -1$. **C** $S = -2$. **D** $S = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& z - (2+3i)\overline{z} = -1 - 3i \\
\Leftrightarrow\ & (a+bi) - (2+3i)(a-bi) = -1 - 3i \\
\Leftrightarrow\ & a + bi - 2a + 2bi - 3ai - 3b = -1 - 3i \\
\Leftrightarrow\ & (-a - 3b) + (3b - 3a) = -1 - 3i \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = 1 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $S = ab + 1 = 1$.

Chọn đáp án A $\square$

Câu 17. Chọn khẳng định **sai**. Trong một khối đa diện,

A mỗi mặt có ít nhất 3 cạnh.

B hai mặt bất kì luôn có ít nhất một điểm chung.
C mỗi cạnh của khối đa diện là cạnh chung của đúng 2 mặt.
D mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất 3 mặt.

Lời giải.

Trong hình hộp chữ nhật, hai mặt đối diện không có điểm chung. Cho nên, hai mặt bất kì trong khối đa diện chưa chắc đã có điểm chung.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Hãy xác định bán kính R của mặt cầu đã cho.

A $R=\sqrt{6}$. **B** $R=\sqrt{3}$. **C** $R=9$. **D** $R=3$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-1)$, suy ra bán kính $R=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2-(-3)}=3$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x^2+1}$.

A 0. **B** 1. **C** 3. **D** 2.

Lời giải.

Nhận thấy hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x^2+1}$ xác định trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-1}{x^2+1}=0$, nên đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Số cạnh của một tứ diện là

A 5 cạnh. **B** 8 cạnh. **C** 4 cạnh. **D** 6 cạnh.

Lời giải.

Hình tứ diện có 6 cạnh.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Tính đạo hàm của hàm số $y=2^{x+1}$.

A $y'=\dfrac{2^{x+1}}{\ln 2}$. **B** $y'=(x+1)2^x\ln 2$. **C** $y'=2^{x+1}\log 2$. **D** $y'=2^{x+1}\ln 2$.

Lời giải.

Ta có $y'=2^{x+1}\ln 2(x+1)'=2^{x+1}\ln 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Với tham số thực k thuộc tập S nào dưới đây để phương trình $\log_2(x+3)+\log_2 x^2=k$ có một nghiệm duy nhất?

A $S=(-\infty;0)$. **B** $S=(2;+\infty)$. **C** $S=(0;+\infty)$. **D** $S=(4;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x+3>0 \\ x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow -3<x\neq 0$.

Ta có phương trình $\log_2[(x+3)x^2]=k \Leftrightarrow x^3+3x^2=2^k$. (*)

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2$ trên các khoảng $(-3; 0)$ và $(0; +\infty)$, ta có

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên

x	-3		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	
$f(x)$	|| 0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0 || 0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, để phương trình (*) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $2^k > 4 \Leftrightarrow k > 2$.
Vậy $S = (2; +\infty)$.
Chọn đáp án B □

Câu 23. Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V, thể tích của khối đa diện có đỉnh là trung điểm các cạnh của tứ diện $ABCD$ bằng V'. Tính tỉ số $\dfrac{V'}{V}$.

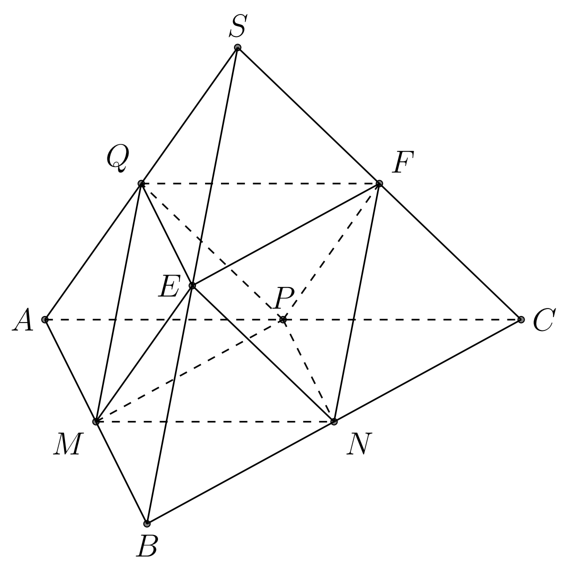
A $\dfrac{1}{2}$. **B** $\dfrac{1}{4}$. **C** $\dfrac{3}{4}$. **D** $\dfrac{1}{8}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{V_{S.QEF}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SQ \cdot SE \cdot SF}{SA \cdot SB \cdot SC} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow V_{S.QEF} = \dfrac{V}{8}$.

Tương tự ta có $V_{A.MPQ} = V_{B.MNE} = V_{C.NPF} = \dfrac{V}{8}$.

Từ đó ta có $V_{MNPQEF} = \dfrac{1}{2}$.

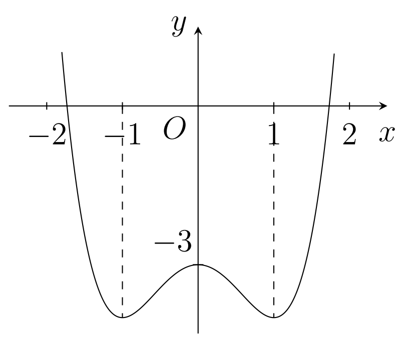


Chọn đáp án A □

Câu 24.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây.

A $y = x^4 - x^2 - 3$. **B** $y = x^4 - 2x^2 - 3$.
C $y = -x^4 - 2x^2 - 3$. **D** $y = x^4 + 2x^2 - 3$.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số suy ra $a > 0$, nên ta loại hàm số $y = -x^4 - 2x^2 - 3$.

Nhận thấy đồ thị hàm số có ba cực trị suy ra $ab < 0$, nên ta loại hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 3$.

Xét hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ có $y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Từ đó suy ra hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng

A $\dfrac{6}{7}$. **B** $\dfrac{5}{6}$. **C** $\dfrac{4}{5}$. **D** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2} > 0\,\forall x \neq 2$.

Do $f(1) = \dfrac{2}{3}$ và $f(3) = \dfrac{4}{5}$, suy ra giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1; 3]$ là $\dfrac{4}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho x là số thực dương. Trong khai triển nhị thức Niu-tơn của biểu thức $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^{12}$ có hệ số của một số hạng chứa x^m bằng 495. Tìm tất cả các giá trị của m?

A $m = 8$. **B** $m = 4$, $m = 8$. **C** $m = 0$, $m = 12$. **D** $m = 0$.

Lời giải.

Ta có số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là $T_{k+1} = \mathrm{C}_{12}^k (x^2)^{12-k} \dfrac{1}{x^k} = \mathrm{C}_{12}^k x^{24-3k}$.

Thử các giá trị ta được $\mathrm{C}_{12}^4 = \mathrm{C}_{12}^8 = 495$, từ đó suy ra $m = 12$ và $m = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{x^2 - x - 2}\,\mathrm{d}x$.

A $I = -2\ln 2$. **B** $I = \dfrac{2\ln 2}{3}$. **C** $I = -\dfrac{2\ln 2}{3}$. **D** $I = 2\ln 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x-2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(\int_0^1 \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\ln 2 = -\frac{2\ln 2}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho phương trình $\cos 2x + \sin x - 1 = 0\,(*)$. Bằng cách đặt $t = \sin x$ $(-1 \leq t \leq 1)$ thì phương trình $(*)$ trở thành phương trình nào dưới đây?

A $-2t^2 + t - 2 = 0$. **B** $t^2 + t - 2 = 0$. **C** $-2t^2 + t = 0$. **D** $-t^2 + t = 0$.

Lời giải.

Do $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2t^2$, nên ta có phương trình $1 - 2t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow -2t^2 + t = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Giá trị tham số thực k nào sau đây để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3kx^2 + 4$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt?

(A) $k \geq 1$. (B) $k < 1$. (C) $-1 < k < 1$. **(D)** $k > 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6kx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2k. \end{array}\right.$

Để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi hàm số có hai điểm cực trị và $y_{\text{CD}} \cdot y_{\text{CT}} < 0$, điều này tương đương với

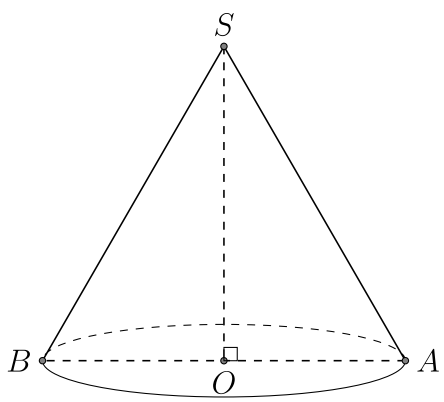
$$\begin{cases} 2k \neq 0 \\ f(0)f(2k) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ 4 - 4k^3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow k > 1.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều và có thể tích $V = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. Tính diện tích xung quanh S của hình nón đó.

(A) $S = 4\pi a^2$. **(B)** $S = 2\pi a^2$. (C) $S = \pi a^2$. (D) $S = \dfrac{1}{2}\pi a^2$.

Lời giải.



Giả sử R là bán kính đường tròn đáy, kết hợp với thiết diện qua trục là tam giác đều, suy ra chiều cao của nón là

$$h = \frac{2R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}.$$

Theo bài ra ta có $V = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3} = \dfrac{1}{3}h\pi R^2 = \dfrac{\sqrt{3}\pi R^3}{3} \Rightarrow R = a$.

Từ đó suy ra diện tích xung quanh

$$S = \pi Rl = \pi R\sqrt{R^2 + h^2} = \pi a\sqrt{a^2 + 3a^2} = 2\pi a^2.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{1-3x} \geq \dfrac{25}{4}$.

(A) $[1; +\infty)$. (B) $\left[\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$. (C) $\left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right)$. (D) $(-\infty; 1]$.

Lời giải.

Ta có bất phương trình

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{1-3x} \geq \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \Leftrightarrow 1 - 3x \leq -2 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Biết rằng hàm số $y = \dfrac{2}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m^2+4m+3)x + \dfrac{1}{2}$ đạt cực trị tại x_1, x_2. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x_1x_2 - 2(x_1+x_2)$.

(A) $P_{\min} = -9$. (B) $P_{\min} = 2$. (C) $P_{\min} = \dfrac{3}{2}$. (D) $P_{\min} = -\dfrac{9}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2x^2 + 2(m+1)x + (m^2+4m+3)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị khi chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt, tương đương với

$$\Delta' = (m+1)^2 - 2(m^2+4m+3) > 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 5 < 0 \Leftrightarrow -5 < m < -1.$$

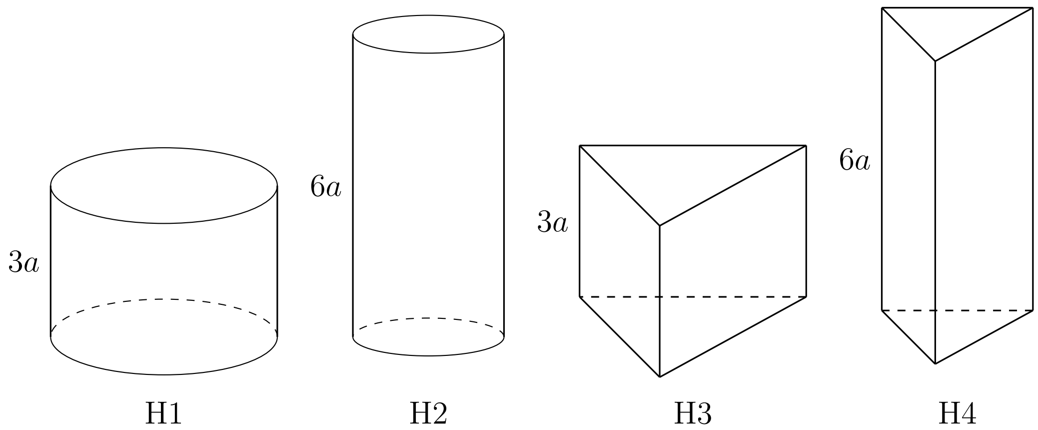
Trên cơ sở đó ta có

$$P(x) = x_1x_2 - 2(x_1+x_2) = \frac{m^2+4m+3}{2} + 2(m+1) = \frac{(m+4)^2}{2} - \frac{9}{2} \geq -\frac{9}{2}.$$

Vậy $P_{\min} = -\dfrac{9}{2}$, dấu bằng xảy ra khi $m = -4$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Cho một tấm bìa hình chữ nhật có kích thước $3a$, $6a$. Người ta muốn tạo tấm bìa đó thành 4 hình không đáy như hình vẽ, trong đó có hai hình trụ lần lượt có chiều cao $3a$, $6a$ và hai hình lăng trụ tam giác đều có chiều cao lần lượt $3a$, $6a$ (tham khảo hình vẽ bên dưới).



Trong 4 hình H1, H2, H3, H4, lần lượt theo thứ tự có thể tích lớn nhất và nhỏ nhất là

(A) H1, H4. (B) H1, H3. (C) H2, H3. (D) H2, H4.

Lời giải.

- (H1): Chu vi đáy $2\pi R = 6a \Rightarrow R = \dfrac{3a}{\pi}$, suy ra thể tích trụ $V_{H_1} = 3a \cdot \pi \cdot \left(\dfrac{3a}{\pi}\right)^2 = \dfrac{27a^3}{\pi}$.
- (H2): Chu vi đáy $2\pi R = 3a \Rightarrow R = \dfrac{3a}{2\pi}$, suy ra thể tích trụ $V_{H_2} = 6a \cdot \pi \cdot \left(\dfrac{3a}{2\pi}\right)^2 = \dfrac{27a^3}{2\pi}$.
- (H3): Chu vi đáy $3x = 6a \Rightarrow x = 2a$, suy ra thể tích lăng trụ $V_{H_3} = 3a \cdot \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = 3a^3\sqrt{3}$.
- (H4): Chu vi đáy $3x = 3a \Rightarrow x = a$, suy ra thể tích lăng trụ $V_{H_4} = 6a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Từ đó suy ra H1, H4 theo thứ tự có thể tích lớn nhất, nhỏ nhất.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Tìm hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển $(1-3x+2x^3)^{10}$ thành đa thức.

A. -62640. B. -58321. C. -4320. D. -262440.

Lời giải.

Ta có khai triển

$$((1-3x)+2x^3)^{10} = \mathrm{C}_{10}^0(1-3x)^{10}+\mathrm{C}_{10}^1(1-3x)^9(2x^3)+\mathrm{C}_{10}^2(1-3x)^8(2x^3)^2+\mathrm{C}_{10}^3(1-3x)^7(2x^3)^3+\cdots$$

Từ đó ta có số hạng chứa x^7 là

$$T = \mathrm{C}_{10}^0\cdot(-1)^7\mathrm{C}_{10}^7(3x)^7+\mathrm{C}_{10}^1\cdot(-1)^4\mathrm{C}_9^4(3x)^4(2x^3)+\mathrm{C}_{10}^2\cdot(-1)^1\mathrm{C}_8^1(3x)^1(2x^3)^2,$$

suy ra hệ số của x^7 là

$$-\mathrm{C}_{10}^0\cdot\mathrm{C}_{10}^7\cdot 3^7+\mathrm{C}_{10}^1\cdot\mathrm{C}_9^4\cdot 3^4\cdot 2-\mathrm{C}_{10}^2\cdot\mathrm{C}_8^1\cdot 3\cdot 2^2 = -62640.$$

Vậy hệ số của x^7 trong khai triển là -62640.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Bất phương trình $(2+\sqrt{3})^x+(7+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^x \le 4(2+\sqrt{3})$ có tập nghiệm là đoạn $[a;b]$. Khi đó $b-a$ bằng

A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải.

Đặt $t=(2+\sqrt{3})^x$ $(t>0)$ suy ra $(2-\sqrt{3})^2=\dfrac{1}{t}$.

Từ đó ta có phương trình

$$t+(7+4\sqrt{3})\cdot\frac{1}{t}\le 4(2+\sqrt{3})$$
$$\Leftrightarrow t^2-4(2+\sqrt{3})t+(2+\sqrt{3})^2\le 0$$
$$\Leftrightarrow 1\le t\le (2+\sqrt{3})^2$$

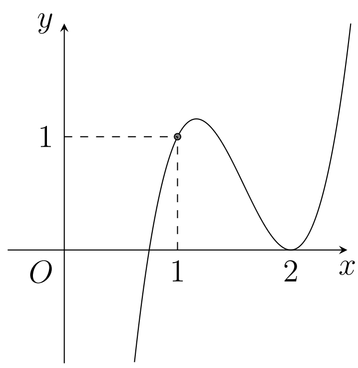
Từ đó suy ra $0\le x\le 2$, khi đó $b-a=2$.

Chọn đáp án D □

Câu 36.

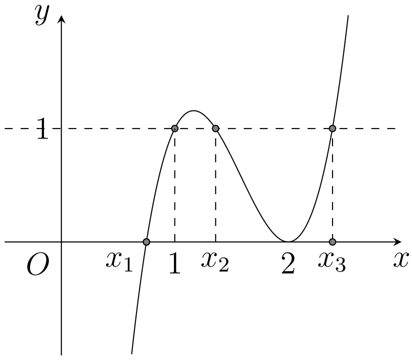
Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 6. B. 5. C. 4. D. 3.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=2. \end{array}\right.$ (1)



Từ đó suy ra $f(x)=a(x-x_1)(x-2)^2$.

Từ đồ thị hàm số ta có $f(x)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=x_2 \\ x=x_3. \end{array}\right.$ (2)

Từ đó suy ra $f(x)-1=a(x-1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Kết hợp (1) và (2), suy ra hàm số $g(x)$ xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x-1\geq 0 \\ x\neq 0 \\ f(x)(f(x)-1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x\neq x_2 \\ x\neq 2 \\ x\neq x_3. \end{cases}$$

Mặt khác, ta có

$$g(x)=\frac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{a^2x(x-x_1)(x-2)^2(x-1)(x-x_2)(x-x_3)}=\frac{\sqrt{x-1}}{a^2x(x-x_1)(x-2)(x-x_2)(x-x_3)},$$

suy ra $x=2$, $x=x_2$, $x=x_3$ là các đường tiệm cận đứng của hàm số $g(x)$.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$ cho các mặt phẳng $(P)\colon x-y+2z+1=0$, $(Q)\colon 2x+y+z-1=0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc trục hoành, đồng thời (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2 và (S) cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng r. Xác định r sao cho chỉ có đúng một mặt cầu (S) thỏa mãn yêu cầu.

A $r=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B** $r=\sqrt{2}$. **C** $r=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. **D** $r=\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi R, $I(m;0;0)$ lần lượt là bán kính, tâm của mặt cầu; d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P), (Q).

Từ đó ta có $R^2=d_1^2+4=d_2^2+r^2$, suy ra

$$\frac{(m+1)^2}{1^2+(-1)^2+2^2}+4=\frac{(2m-1)^2}{2^2+1^2+1^2}+r^2$$

$$\Leftrightarrow m^2+2m+1+16=4m^2-4m+1+6r^2$$

$$\Leftrightarrow 3m^2-6m+(6r^2-16)=0$$

$$\Leftrightarrow m^2-2m+(2r^2-8)=0 \qquad (*)$$

Để tồn tại đúng một mặt cầu tương đương phương trình $(*)$ có đúng một nghiệm m hay

$$\Delta'=1^2-(2r^2-8)=0\Leftrightarrow r^2=\frac{9}{2}\Rightarrow r=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

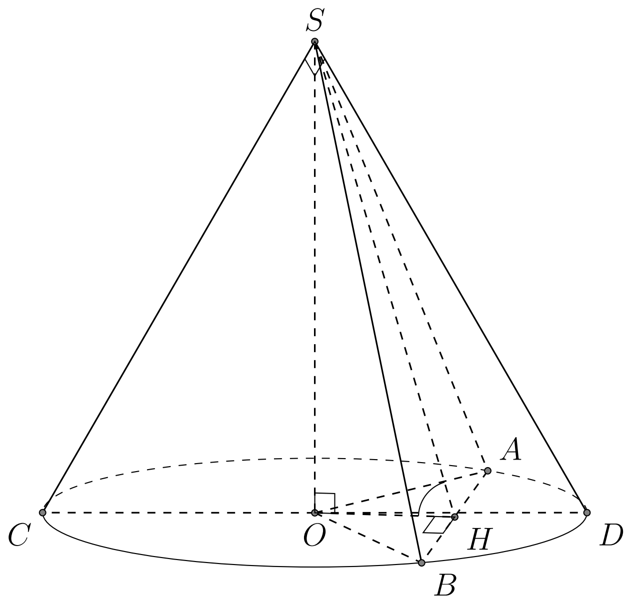
Vậy ta có $r = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Một khối nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân và đường sinh có độ dài bằng $3\sqrt{2}$ cm. Một mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với đáy một góc 60° chia khối nón thành hai phần. Tính thể tích phần nhỏ hơn (tính gần đúng đến hàng phần trăm).

A $4,36\ \text{cm}^3$. (B) $4,53\ \text{cm}^3$. (C) $5,37\ \text{cm}^3$. (D) $5,61\ \text{cm}^3$.

Lời giải.



Theo bài ra ta có tam giác SCD vuông cân ở S, $SC = SD = 3\sqrt{2}$, suy ra $SO = OC = OD = 3$.

Giả sử mặt phẳng (P) cắt đường tròn đáy theo dây cung AB. Gọi H là trung điểm của AB suy ra $OH \perp AB$, kết hợp với SO vuông góc với đáy suy ra $AB \perp (SOH)$, từ đó suy ra $\widehat{SHO} = 60^\circ$.

Trong tam giác vuông SOH có

$$OH = SO \tan 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

Trong tam giác vuông OHB có

$$BH^2 = OB^2 - OH^2 = 3^2 - \sqrt{3}^2 = 6 \Rightarrow BH = \sqrt{6} \Rightarrow AB = 2\sqrt{6}.$$

Từ đó ta có $S_{\triangle OAB} = \dfrac{OH \cdot AB}{2} = OH \cdot BH = 3\sqrt{2}$.

Trong tam giác OAB có $\sin \widehat{AOB} = \dfrac{2S_{\triangle OAB}}{OA \cdot OB} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \widehat{AOB} \approx 1,911$.

Suy ra diện tích quạt $OADB$ là $S_Q = \dfrac{R^2 \cdot \widehat{AOB}}{2} \approx 8,5995$.

Từ đó diện tích hình bán nguyệt ADB là $S = S_Q - S_{\triangle OAB} \approx 4,36$.

Suy ra thể tích phần nhỏ $V = \dfrac{1}{3} \cdot h \cdot S = \dfrac{3 \cdot 4,36}{3} \approx 4,36\ (\text{cm}^3)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{(m+3)x+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

(A) $m \in [-4; 1]$. (B) $m \in (-4; -1)$. **C** $m \in (-4; -1]$. (D) $m \in (-4; 1)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có $y' = \dfrac{m^2 + 3m - 4}{(x+m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} -m \geq 1 \\ y' = \dfrac{m^2 + 3m - 4}{(x+m)^2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ -4 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m \leq -1.$$

Chọn đáp án C □

Câu 40. Ông Phúc gửi 27 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép, kỳ hạn là một quý, với lãi xuất $1,85\%$ một quý. Hỏi thời gian nhanh nhất là bao lâu để ông Phúc có được ít nhất 36 triệu đồng tính cả vốn lẫn lãi?

A 15 quý. B 4 năm. C 5 năm. D 19 quý.

Lời giải.

Giả sử ông Phúc gửi trong n quý thì được ít nhất 36 triệu đồng tính cả vốn lẫn lãi.

Từ đó ta có $36 = 27(1 + 0,0185)^n \Leftrightarrow n \approx 15,69$.

Từ đó, suy ra sau 4 năm thì ông Phúc có ít nhất 36 triệu.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Một phiếu điều tra về vấn đề tự học của học sinh gồm 10 câu hỏi trắc nghiệm, mỗi câu hỏi có 4 lựa chọn để trả lời. Khi tiến hành điều tra, phiếu thu lại được coi là hợp lệ nếu người được hỏi trả lời đủ 10 câu hỏi, mỗi câu chỉ chọn một phương án. Hỏi cần tối thiểu bao nhiêu phiếu hợp lệ để trong số đó luôn có ít nhất hai phiếu trả lời giống hệt nhau cả 10 câu hỏi?

A 1048576. B 2097152. C 1048577. D 10001.

Lời giải.

Ta có

- Câu 1. Có 4 cách chọn đáp án đúng.
- Câu 2. Có 4 cách chọn đáp án đúng.
- Câu 3. Có 4 cách chọn đáp án đúng.
- Câu 4. Có 4 cách chọn đáp án đúng.
- Câu 5. Có 4 cách chọn đáp án đúng.
- Câu 6. Có 4 cách chọn đáp án đúng.
- Câu 7. Có 4 cách chọn đáp án đúng.
- Câu 8. Có 4 cách chọn đáp án đúng.
- Câu 9. Có 4 cách chọn đáp án đúng.
- Câu 10. Có 4 cách chọn đáp án đúng.

Vậy có $4^{10} = 1048576$ cách tô một phiếu điều tra, suy ra số phiếu hợp lệ tối thiểu để trong số đó luôn có ít nhất hai phiếu trả lời giống hệt nhau là 1048577 phiếu.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$?

A $m = 2$. B $m = 4$. C $m = 1$. D $m = 3$.

Lời giải.

Đặt $t = 2^x$ $(t > 0)$, ta có phương trình $t^2 - 2mt + 2m = 0$. (1)

Để phương trình ban đầu có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ khi chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm dương thỏa mãn $t_1 t_2 = 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = 2^{x_1+x_2} = 8$.

Điều đó tương đương với

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - 2m > 0 \\ t_1 + t_2 = 2m > 0 \\ t_1 t_2 = 2m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$$

Chọn đáp án B □

Câu 43. Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x-2}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho $AB = \sqrt{2}OA > 0$.

A $y = -x + 8$. **B** $y = -x$. **C** $y = -x - 8$. **D** $y = -x + 4$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-4}{(x-2)^2}$.

Giả sử đường thẳng Δ tiếp xúc với đồ thị hàm số (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$, suy ra

$$\Delta \colon y = \frac{-4}{(x_0-2)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0}{x_0 - 2}.$$

Giả sử Δ giao các trục Ox, Oy tại lần lượt A, B thỏa mãn $AB = \sqrt{2}OA$. Do tam giác OAB vuông tại O nên $\widehat{BAO} = 45^\circ$, suy ra Δ có hệ số góc $k = \pm 1$.

- Với $k = 1$, suy ra $\dfrac{-4}{(x_0-2)^2} = 1$ (vô lí).

- Với $k = -1$, suy ra $\dfrac{-4}{(x_0-2)^2} = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 4. \end{array}\right.$

Khi $x_0 = 0$, suy ra $\Delta \colon y = -x$, suy ra $A \equiv B \equiv O$ (loại).

Khi $x_0 = 4$, suy ra $\Delta \colon y = -x + 8$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $81^{2x - \sqrt{x}} = m$ có nghiệm.

A $m \geq 1$. **B** $m \geq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C** $m \geq -\dfrac{1}{8}$. **D** $m \geq 0$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 0$.

Đặt $t = \sqrt{x}$, $(t \geq 0)$. Ta có phương trình

$$\begin{aligned} & 81^{2t^2 - t} = m \\ \Leftrightarrow\ & 2t^2 - t = \log_{81} m \\ \Leftrightarrow\ & (\sqrt{2}t)^2 - 2(\sqrt{2}t) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{8} = \log_{81} m + \frac{1}{8} \\ \Leftrightarrow\ & \left(\sqrt{2}t - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \log_{81} m + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

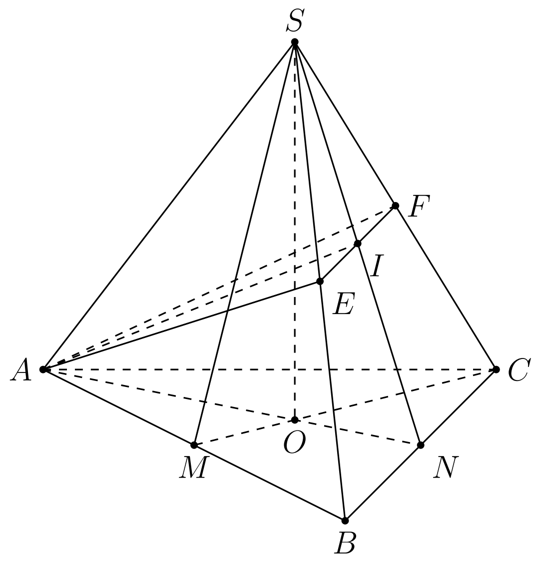
Từ đó suy ra, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\log_{81} m + \dfrac{1}{8} \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, cạnh đáy bằng a. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC. Biết mặt phẳng (AEF) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A $V = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{24}$. **B** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **C** $V = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{8}$. **D** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC.

Từ đó suy ra $AN \perp BC$ và $SN \perp BC$, suy ra $BC \perp (SAN)$. (1)

Theo bài ra ta có $(AEF) \perp (SBC)$, mặt khác $(AEF) \cap (SBC)$ tại EF và do EF là đường trung bình của tam giác SBC nên $EF \parallel BC$, kết hợp với (1) suy $(SAN) \perp EF$, từ đó suy ra $((AEF),(SBC)) = \widehat{AIN} = 90^\circ$.

Do EF là đường trùng của tam giác SBC nên suy ra I là trung điểm của SN, từ đó suy ra tam giác ASN cân tại A, suy ra $SA = AN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác vuông SOA có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{3a^2}{9}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$.

Từ đó suy ra thể tích khối chóp $V = \dfrac{1}{3}hS = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{15}}{6} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{24}$.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1)$, $B(0;2;3)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

A $M\left(-\dfrac{4}{3}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{4}{3}\right)$. **B** $M\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{5}{3}; \dfrac{7}{3}\right)$. **C** $M(2;3;4)$. **D** $M\left(1; \dfrac{3}{2}; 1\right)$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y)$, theo bài ra ta có

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}\\
\Leftrightarrow\ &3(x-2; y-1; z-1) = 2(-2;1;2)\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} 3x - 6 = -4 \\ 3y - 3 = 2 \\ 3z - 3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{5}{3} \\ z = \dfrac{7}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 47. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $f(0) = \ln 2$, $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x =$

$\dfrac{3}{2} - \ln 2$ và $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{f(x)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - \dfrac{3}{2}$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I = \dfrac{1-\ln 2}{2}$. **B** $I = \dfrac{3-\ln 2}{2}$. **C** $I = 1 - \ln 2$. **D** $I = \dfrac{3-4\ln 2}{2}$.

Lời giải.

Ta có $2\ln 2 - \dfrac{3}{2} = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{f(x)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left.\dfrac{-f(x)}{x+1}\right|_0^1 + \displaystyle\int_0^1 \dfrac{f'(x)}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln 2 + \displaystyle\int_0^1 \dfrac{f'(x)}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{f'(x)}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln 2 - \dfrac{3}{2}$.

Kết hợp với giả thiết ta có

$$\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{f'(x)}{x+1}\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x)\left[f'(x) + \frac{1}{x+1}\right]\mathrm{d}x.$$

Từ đó suy ra $f'(x) = -\dfrac{1}{x+1} \Rightarrow f(x) = -\ln(x+1) + C$.

Kết hợp với giả thiết ta có $\begin{cases} f(1) = -\ln 2 + C = 0 \\ f(0) = -\ln 1 + C = \ln 2 \end{cases} \Rightarrow C = \ln 2$, suy ra $f(x) = \ln \dfrac{2}{x+1}$.

Từ đó ta tính được $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \ln 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lại đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ m/s, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A 10 m. **B** 5 m. **C** 20 m. **D** 8 m.

Lời giải.

Thời điểm ô tô dừng hẳn $v(t) = -5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ (s).

Quãng đường từ lúc đạp phanh tới khi ô tô dừng hẳn $s = \displaystyle\int_0^2 (-5t+10)\,\mathrm{d}t = 10$ (m).

Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 3i| + |z + 2 + i| = 2\sqrt{5}$. Tính giá trị lớn nhất của $P = |z - 4 + 4i|$.

A $P_{\max} = \dfrac{169}{5}$. **B** $P_{\max} = 50$. **C** $P_{\max} = 34$. **D** $P_{\max} = 3\sqrt{5}$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$, $M(x; y)$, $A(2; -3)$, $B(-2; -1)$, $I(4; -4)$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & |z - 2 + 3i| + |z + 2 + i| = 2\sqrt{5} \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} = 2\sqrt{5} \qquad (9) \\ \Leftrightarrow\ & AM + BM = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Mặt khác, $AM + BM \geq AB = 2\sqrt{5}$, kết hợp với (1) suy ra dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M nằm trong đoạn AB. (2)

Kiểm tra ta thấy $\overrightarrow{IA} = (-2;1)$ và $\overrightarrow{IB} = (-6;3)$ cùng phương, suy ra A, B, I thẳng hàng.

Từ đó suy ra $P = IM$ đạt giá trị lớn nhất khi M trùng A hoặc B.

Ta có $IA = \sqrt{5}$ và $IB = 3\sqrt{5}$, suy ra $P_{\max} = 3\sqrt{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Giải bất phương trình $\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x)$ được tập nghiệm là khoảng $(a;b)$. Hãy tính tổng $S = a+b$.

A $S = \dfrac{8}{5}$. **B** $S = \dfrac{26}{5}$. **C** $S = \dfrac{28}{15}$. **D** $S = \dfrac{11}{5}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 3x-2>0 \\ 6-5x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} < x < \dfrac{6}{5}$.

Bất phương trình tương đương với $3x-2 > 6-5x \Leftrightarrow 8x > 8 \Leftrightarrow x > 1$.

Kết hợp với điều kiện ta có $1 < x < \dfrac{6}{5}$.

Vậy $S = a+b = \dfrac{11}{5}$.

Chọn đáp án D □

HẾT

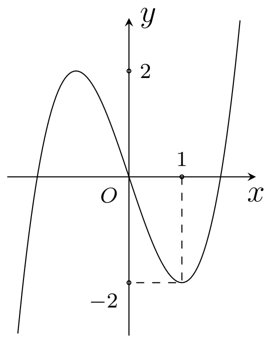
ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. C	3. D	4. D	5. C	6. C	7. B	8. D	9. B	10. A
11. D	12. A	13. D	14. D	15. C	16. A	17. B	18. D	19. B	20. D
21. D	22. B	23. A	24. B	25. C	26. C	27. C	28. C	29. D	30. B
31. A	32. D	33. A	34. A	35. D	36. D	37. A	38. A	39. C	40. B
41. C	42. B	43. A	44. B	45. A	46. B	47. C	48. A	49. D	50. D

117 ĐỀ THI THỬ, TRƯỜNG THPT ĐỒNG LỘC, HÀ TĨNH, LẦN 2, 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.
Đồ thị như hình vẽ là của hàm số nào?



A $y = x^3 - 3x$.
B $y = 3x^3 + 3x$.
C $y = -x^3 + 3x + 1$.
D $y = x^3 - 3x + 1$.

Lời giải.
Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có ba điểm cực trị với hệ số $a > 0$, đồ thị đi qua gốc tọa độ O. Vậy, hàm số cần tìm là $y = x^3 - 3x$.
Chọn đáp án A □

Câu 2. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?
A $y = \log_3 x$. **B** $y = \log_5 \left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. **C** $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$. **D** $y = 2018^x$.

Lời giải.
Xét hàm số $y = 2018^x$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ và cơ số $a = 2018 > 1$. Do đó, hàm số $y = 2018^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Chọn đáp án D □

Câu 3. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{u} = (3; 0; 6)$, $\vec{v} = (-2; -1; 0)$. Tính tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
A $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. **B** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$. **C** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$. **D** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$.

Lời giải.
Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot (-2) + 0 \cdot (-1) + 6 \cdot 0 = -6$.
Chọn đáp án B □

Câu 4. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$.
A $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3\cos 3x + C$.
B $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -3\cos 3x + C$.
C $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$.
D $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cos 3x + C$.

Lời giải.
Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sin 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \sin 3x\,\mathrm{d}(3x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$.
Chọn đáp án C □

Câu 5. Tìm phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2017x + 2018}{x + 2}$.
A $x = 2017$. **B** $x = -2$. **C** $y = 2017$. **D** $y = -2$.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2017x+2018}{x+2}=2017$ nên đồ thị hàm số có phương trình đường tiệm cận ngang là $y=2017$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon -2x+y+z-5=0$. Điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (P)?

(A) $(1;7;5)$. **B** $(-2;1;0)$. (C) $(-2;0;0)$. (D) $(-2;2;-5)$.

Lời giải.

Xét điểm $(-2;1;0)$ có $-2\cdot(-2)+1+0-5=0$ nên điểm có tọa độ $(-2;1;0)$ thuộc mặt phẳng (P).

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Cho hàm số $y=\log x$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

(A) Hàm số có tập giá trị là $(-\infty;+\infty)$.
B Hàm số có tập giá trị là $(0;+\infty)$.
(C) Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(1;0)$.
(D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Lời giải.

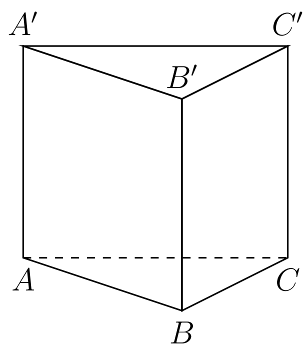
Theo tính chất: Hàm số lôgarit $y=\log_a x$ với $a>0$, $a\neq 1$ có tập giá trị là $\mathbb{R}=(-\infty;+\infty)$ với $\forall x\in(0;+\infty)$. Vậy khẳng định sai là "Hàm số có tập giá trị là $(0;+\infty)$".

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $4a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ.

(A) $V=2a^3\sqrt{3}$. (B) $V=a^3\sqrt{3}$. (C) $V=2a^3$. **D** $V=3a^3$.

Lời giải.



Tam giác ABC đều cạnh a nên diện tích đáy lăng trụ là

$$B=a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Do đó, thể tích khối lăng trụ là

$$V=B\cdot h=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot 4a\sqrt{3}=3a^3.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

(A) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2}{x}=+\infty$. **B** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2}{x}=-\infty$. (C) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$. (D) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^3}=+\infty$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=\dfrac{2}{x}$, ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}2=2>0$ và $\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$, $x\to 0^+$ suy ra $x>0$. Do đó, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2}{x}=+\infty$.

Vậy, mệnh đề sai là $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2}{x}=-\infty$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên, chọn mệnh đề **sai**?

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
y'		$-$				$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1		$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3

A Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 2$.

B Hàm số có đúng 1 điểm cực trị.

C Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 2 tại $x = 4$.

D Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; 4)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số, ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$ nên khẳng định "Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 2 tại $x = 4$" là khẳng định sai.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và số thực dương a. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào luôn đúng?

A $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = f(a)$. **B** $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. **C** $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = -1$. **D** $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Lời giải.

Theo tính chất cơ bản của tích phân thì $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Tích phân $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x$ có giá trị bằng

A -1. **B** 0. **C** 1. **D** 2.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x = x\big|_0^1 = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Tính thể tích của khối nón có bán kính đáy R, chiều cao h.

A $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$. **B** $V = \dfrac{1}{3}\pi R h^2$. **C** $V = \pi^2 R h$. **D** $V = \pi R h$.

Lời giải.

Theo công thức tính thể tích khối nón ta có $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau?

A 30. **B** 60. **C** 120. **D** 24.

Lời giải.

Mỗi cách lập một số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau mà các chữ số lấy từ tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ là một chỉnh hợp chập 3 của 6 phần tử. Vậy, số các số tự nhiên cần tìm là $A_6^3 = 120$.
Chọn đáp án C □

Câu 15. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu tâm $I(1; -2; 0)$ và bán kính bằng 2?

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 2$.
B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$.
C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 4$.
D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 2$.

Lời giải.

Phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2+(y-(-2))^2+(z-0)^2 = 2^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+z^2 = 4$.
Chọn đáp án C □

Câu 16. Tìm tất cả các điểm cực đại của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

A. $x = \pm 1$.
B. $x = -1$.
C. $x = 1$.
D. $x = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$

Mặt khác $y'' = 12x^2 - 4$, suy ra $\begin{cases} y''(-1) = 20 > 0 \\ y''(0) = -4 < 0 \\ y''(1) = 4 > 0. \end{cases}$

Vậy có một điểm cực đại $x = 0$.
Chọn đáp án D □

Câu 17. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$; $z_2 = 2 - 3i$. Xác định phần thực và phần ảo của số phức $2z_1 + z_2$.

A. Phần thực là 4, phần ảo là -6.
B. Phần thực là 4, phần ảo là -1.
C. Phần thực là -1, phần ảo là 4.
D. Phần thực là 4, phần ảo là 5.

Lời giải.

ta có: $2z_1 + z_2 = 4 - i$.
Suy ra phần thực là 4, phần ảo là -1.
Chọn đáp án B □

Câu 18. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x - 4$ trên đoạn $[1; 3]$ là

A. -6.
B. 32.
C. 4.
D. 14.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \notin [1; 3] \\ x = 1 \in [1; 3]. \end{array}\right.$

Mặt khác $\begin{cases} y(1) = -6 \\ y(3) = 14. \end{cases}$

Vậy GTLN là 14.
Chọn đáp án D □

Câu 19. Công thức nguyên hàm nào sau đây là **sai**?

A $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x + C.$

B $\displaystyle\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$

C $\displaystyle\int a^{x}\,\mathrm{d}x = \frac{a^{x}}{\ln a} + C\ (< \alpha \neq -1).$

D $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C.$

Lời giải.

Dựa vào công thức nguyên hàm cơ bản. (Đúng là $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$).

Chọn đáp án A □

Câu 20.
Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Xét các mệnh đề:
(I). Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
(II). Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
(III). Hàm số không có cực trị.
Số các mệnh đề đúng là

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thi ta thấy cả 3 mệnh đề trên đều đúng. Chú ý ở mệnh đề 3: $y'(2) = 0$ nhưng y' không đổi dấu nên hàm số không có cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Cho hàm số $y = \dfrac{2-x}{x+4}$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A (C) có đúng hai đường tiệm cận.

B (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -4$.

C (C) có đường tiệm cận ngang là $y = -1$.

D (C) có đường tiệm cận ngang là $x = -1$.

Lời giải.

Đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = b$ với b là hằng số. Nên (C) có đường tiệm cận ngang là $x = -1$ là **sai**.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Cho a là số thực khác 0, mệnh đề nào sau đây là đúng?

A $\log_2^2 a^2 = \log_2^2 a.$

B $\log_2^2 a^2 = 4\log_2^2 |a|.$

C $\log_2^2 a^2 = 4\log_2^2 a.$

D $\log_2^2 a^2 = \dfrac{1}{4}\log_2^2 |a|.$

Lời giải.

$\log_2^2 a^2 = 4\log_2^2 |a|$. Vì điều kiện a phải dương.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Tìm các số thực b, c để phương trình $z^2 + bz + c = 0$ nhận $z = 1 + i$ làm một nghiệm.

A $b = 2, c = -2.$ **B** $b = 2, c = 2.$ **C** $b = -2, c = 2.$ **D** $b = -2, c = -2.$

Lời giải.

Ta có phương trình $z^2 + bz + c = 0$ nhận $z = 1 + i$ làm một nghiệm.

$$\Rightarrow (1+i)^2 + b(1+i) + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 2. \end{cases}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Thể tích của khối trụ có diện tích xung quanh bằng 4 và diện tích đáy bằng 4π là

A $V = 4$. (B) $V = 6$. (C) $V = 8$. (D) $V = 4\pi$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} S_{xq} = 4 \\ S_{\text{đáy}} = 4\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ h = \dfrac{1}{\pi} \end{cases} \Rightarrow V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 4.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Phương trình mặt cầu tâm $I\,(1;3;-2)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P) : 2x - y - 2z + 3 = 0$ là

A $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z + 10 = 0$. (B) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z + 14 = 0$.

(C) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6y - 4z + 10 = 0$. (D) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z + 12 = 0$.

Lời giải.

Mặt cầu tâm $I\,(1;3;-2)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P) : 2x - y - 2z + 3 = 0$

Suy ra $R = d\,(I;(P)) = \dfrac{|2 \cdot 1 - (-2) - 2 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = 2.$

Phương trình mặt cầu là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z + 10 = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(1;-3;2)$ và $B(3;1;4)$. Khi đó, mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

(A) $x - 2y + z - 7 = 0$. (B) $2x - y + 3z - 4 = 0$.

(C) $2x + 4y + 2z - 3 = 0$. **D** $x + 2y + z - 3 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} M(2;-1;3) \text{ là trung điểm cả đoạn thẳng} AB \\ \overrightarrow{AB} = (2;4;2). \end{cases}$

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là $x + 2y + z - 3 = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Đoàn trường cần chọn ra 3 chi đoàn trong tổng số 27 chi đoàn (gồm 13 chi đoàn khối 10 và 14 chi đoàn khối 11) đi giúp xã Đồng Lộc xây dựng nông thôn mới. Tính xác suất để trong 3 chi đoàn được chọn có ít nhất hai chi đoàn thuộc khối 10.

(A) $\dfrac{28}{75}$. (B) $\dfrac{119}{225}$. (C) $\dfrac{197}{225}$. **D** $\dfrac{106}{225}$.

Lời giải.

TH1. Có 2 chi đoàn khối 10 và 1 chi đoàn khối 11: $\mathrm{C}_2^{13} \cdot \mathrm{C}_1^{14}$.

TH2. Có 3 chi đoàn khối 10 và 0 chi đoàn khối 11: $\mathrm{C}_3^{13} \cdot \mathrm{C}_0^{14}$.

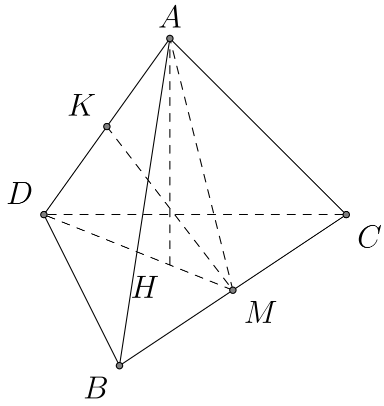
Vậy xác suất để trong 3 chi đoàn được chọn có ít nhất hai chi đoàn thuộc khối 10 là $\dfrac{\mathrm{C}_2^{13} \cdot \mathrm{C}_1^{14} \cdot \mathrm{C}_3^{13} \cdot \mathrm{C}_0^{14}}{\mathrm{C}_3^{2}7} = \dfrac{106}{225}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và BC bằng

A a. **B** $\frac{a}{2}$. **C** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D** $2a$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm BC.

Ta có $\begin{cases} DM \perp BC \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADM)$.

Từ M kẻ $MK \perp AD$ với K là trung điểm AD.

Suy ra $\mathrm{d}(AD; BC) = MK$.

$S_{\Delta ADM} = \sqrt{P(P-AD)(P-AM)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2$.

Mặt khác $S_{ADM} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot MK \Rightarrow MK = a$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Anh Nam gửi vào ngân hàng 10 triệu đồng với lãi kép 5%/năm. Tính số tiền cả gốc lẫn lãi anh Nam nhận được sau khi gửi ngân hàng 10 năm (tính gần đúng).

A 16.2889. **B** 19.9763. **C** 17.34236. **D** 25.3141.

Lời giải.

Sau 1 năm thì số tiền là $10 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)$.

Sau 2 năm: $10 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^2$.

Số tiền cả gốc lẫn lãi anh Nam nhận được sau khi gửi ngân hàng 10 năm là

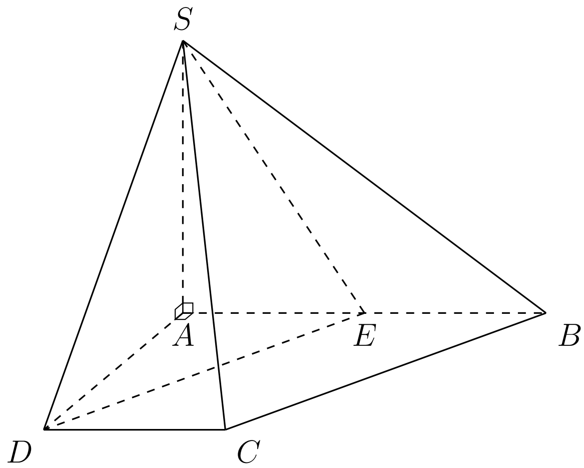
$10 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{10} = 16.2889$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, cạnh $AB = 2a$, $AD = DC = a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Góc giữa hai đường thẳng SD và BC bằng

A 30°. **B** 45°. **C** 60°. **D** 120°.

Lời giải.



Trong hình thang vuông $ABCD$ ta kẻ $DE \parallel BC$ với E là trung điểm AB.

Suy ra $\widehat{SD; BC} = \widehat{SD; DE} = \widehat{SDE}$.

$\begin{cases} DE = CD = a\sqrt{2} \\ SE = SD = a\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \Delta SDE$đều $\Rightarrow \widehat{SDE} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng SD và BC bằng 60°.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 6 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc tia Ox sao cho khoảng cách từ M đến (P) bằng 3.

(A) $M(0;0;21)$.
B $M(3;0;0)$.
(C) $M(0;0;-15)$.
(D) $M(0;0;3)$, $M(0;0;-15)$.

Lời giải.

Gọi $M(a;0;0) \in Ox$. Ta có $\mathrm{d}(M;(P)) = 3 \Leftrightarrow \dfrac{|a+6|}{3} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -15. \end{array}\right.$

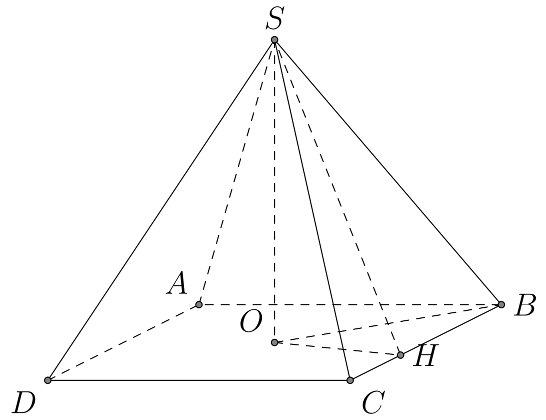
Vậy có điểm $M(3;0;0)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh bằng a, $OB = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{9}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABDC)$ bằng

A 30°.
(B) 45°.
(C) 60°.
(D) 90°.

Lời giải.



Kẻ $OH \perp BC$ với $H \in BC$.

$\begin{cases} OH \perp BC \\ SO \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOH)$.

Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABDC)$ bằng $\widehat{SHO}$.

Ta có $\begin{cases} S_{OBC} = \dfrac{1}{2} \cdot S_{BCD} = \dfrac{\sqrt{2}}{6} a^2 \\ S_{OBC} = \dfrac{1}{2} \cdot OH \cdot BC \end{cases} \Rightarrow OH = \dfrac{\sqrt{2}}{3} a$.

Vậy $\widehat{SHO} = \tan^{-1} \dfrac{SO}{OH} = 30^\circ$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Tính thể tích V của vật thể nằm giữa 2 mặt phẳng $x = 0, x = 3$, biết thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ $x\,(0 \le x \le 3)$ là một hình chữ nhật có hai kích thước là x và $2\sqrt{1-x^2}$.

(A) $V = 16$.
(B) $V = 17$.
C $V = 18$.
(D) $V = 19$.

Lời giải.

Diện tích hình chữ nhật có hai kích thước là x và $2\sqrt{1-x^2}$ là $S(x) = x \cdot 2\sqrt{1-x^2}$.

Vậy thể tích là $V = \displaystyle\int_0^1 x \cdot 2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = 18$

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Cho giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{ax^2+x+1} - \sqrt{x^2+bx-2}\right) = 1$. Tính $P = a \cdot b$.

A 3.
(B) -3.
(C) 5.
(D) -5.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{ax^2+x+1}-\sqrt{x^2+bx-2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(ax^2+x+1)-(x^2+bx-2)}{\sqrt{ax^2+x+1}+\sqrt{x^2+bx-2}}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(a-1)x^2+(1-b)\,x+3}{\sqrt{ax^2+x+1}+\sqrt{x^2+bx-2}}.$$

Vì theo giả thiết dãy số có giới hạn hữu hạn khác 0 nên bậc tử = bậc mẫu. Do đó ta phải khử đi hệ số của bậc hai trên tử $\Leftrightarrow a-1=0\Leftrightarrow a=1$.

Với $a=1$, ta có

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(a-1)x^2+(1-b)x+3}{\sqrt{ax^2+x+1}+\sqrt{x^2+bx-2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-b)\,x+3}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+bx-2}}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{(1-b)+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{b}{x}-\dfrac{2}{x^2}}}\right)=\frac{b-1}{1+1}.$$

Yêu cầu bài toán $\Rightarrow\dfrac{b-1}{1+1}=2\Rightarrow b=3$.

Vậy $\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}\Rightarrow P=ab=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)>0,\forall x>\dfrac{1}{2^{2018}}$. Biết $f(1)=3$, khi đó mệnh đề nào có thể xảy ra?

A. $f(2018\cdot2020)>f(2019^2)$.
B. $f(3)+f(4)=6$.
C. $f(2)=\sqrt{10}-1$.
D. $f\left(-\dfrac{1}{2018}\right)=2$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)>0,\forall x>\dfrac{1}{2^{2018}}$ suy ra hàm số đồng biến trên $\left(\dfrac{1}{2^{2018}};+\infty\right)$.

- $\begin{cases}f(3)>f(1)\\f(4)>f(1)\end{cases}\Rightarrow f(3)+f(4)>6$ nên loại đáp án $f(3)+f(4)=6$.
- $f(2)>f(1)$ nên loại đáp án $f(2)=\sqrt{10}-1$.
- $2018\cdot2020<2019^2\Rightarrow f(2018\cdot2020)<f(2019^2)$ nên loại đáp án $f(2018\cdot2020)>f(2019^2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Cho hai cấp số cộng $(x_n):4,7,10,13,\ldots$ và $(y_n):1,6,11,16,\ldots$ Hỏi trong 2018 số hạng đầu tiên của mỗi cấp số có bao nhiêu số hạng chung?

A. 404.
B. 673.
C. 403.
D. 672.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}x_n=4+(n-1)\cdot3 \text{ với } 1\le n\le 2018\\ y_m=1+(m-1)\cdot5 \text{ với } 1\le m\le 2018.\end{cases}$

Để một số là số hạng chung, ta phải có $3n+1=5m-4\Leftrightarrow 3n=5(m-1)\Rightarrow n$ chia hết 5, tức $n=5k$ và $m=3k+1$.

Vì $1\le n\le 2018$ nên $1\le k\le 403$.

Ứng với 403 giá trị của k, ta tìm được 403 số hạng chung.

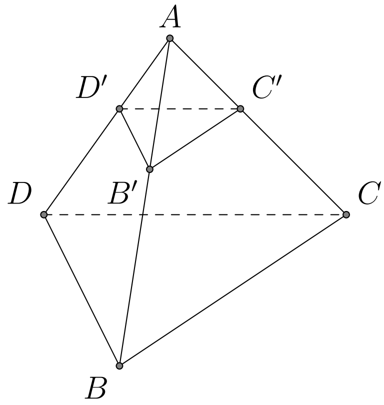
Chọn đáp án C □

Câu 37. Trong không gian với hệ trục toạ độ Oxyz ,cho tứ diện ABCD có điểm $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$, $C(-1;-1;0)$, $D(0;3;4)$. Trên các cạnh AB, AC, AD lần lượt lấy các điểm B', C', D' thỏa: $\dfrac{AB}{AB'}+\dfrac{AC}{AC'}+\dfrac{AD}{AD'}=4$. Viết phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ biết tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất?

A $16x+40y-44z+39=0$.
B $16x+40y+44z-39=0$.
C $16x-40y-44z+39=0$.
D $16x-40y-44z-39=0$.

Lời giải.

$$\frac{V_{ABCD}}{V_{AB'C'D'}}=\frac{AB}{AB'}\cdot\frac{AC}{AC'}\cdot\frac{AD}{AD'}\le\left(\frac{\dfrac{AB}{AB'}+\dfrac{AC}{AC'}+\dfrac{AD}{AD'}}{3}\right)^3=\frac{64}{27}.$$



$\Rightarrow V_{AB'C'D'}\ge\dfrac{27}{64}V_{ABCD}$.

Dấu = xảy ra khi: $\dfrac{AB}{AB'}=\dfrac{AC}{AC'}=\dfrac{AD}{AD'}=\dfrac{4}{3}$.

Suy ra $\begin{cases}(B'C'D')\parallel(BCD)\\ \overrightarrow{AB'}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}.\end{cases}$

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{BC}=(-3;-1;-2)\\ \overrightarrow{BD}=(-2;3;2)\end{cases}\Rightarrow\vec{n}_{(B'C'D')}=(4;10;-11)$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB'}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{3}{4};-\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{4}\right)\Rightarrow B'\left(\dfrac{7}{4};\dfrac{1}{4};\dfrac{7}{4}\right)$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ là $16x+40y-44z+39=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Cho hàm số $f(x)=e^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}$. Tính $\ln(f(1))+\ln(f(2))\cdots\ln(f(2018))$.

A $\dfrac{2017\cdot2018}{2019}$.
B $\dfrac{2018\cdot2019}{2020}$.
C $\dfrac{2018\cdot2020}{2019}$.
D $\dfrac{2018^2}{2019}$.

Lời giải.

Ta có $\ln f(x)=\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}}=\dfrac{\sqrt{(x^2+x+1)^2}}{x^2(x+1)^2}=\dfrac{x^2+x+1}{x(x+1)}=1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$.

Vậy

$\ln(f(1))+\ln(f(2))\cdots\ln(f(2018))=2018+1-\dfrac{1}{2019}=\dfrac{2018\cdot2020}{2019}$.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$. Biết đồ thị hàm số $y=g(x)=|ax^4+bx^2+c|$ có 5 điểm cực trị, trong đó có 3 điểm cực trị có tung độ dương. Tìm mệnh đề đúng?

A $\begin{cases}a<0\\b>0\\c<0\end{cases}$.
B $\begin{cases}a>0\\b<0\\c<0\end{cases}$.
C $\begin{cases}a>0\\b>0\\c<0\end{cases}$.
D $\begin{cases}a>0\\b<0\\c>0\end{cases}$.

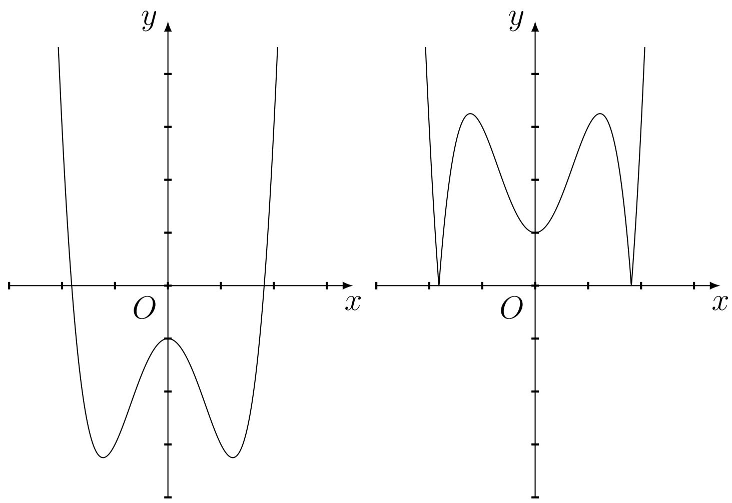
Lời giải.

Vì $y=g(x)$ có 5 cực trị nên $y=f(x)$ phải có 3 cực trị hay $ab<0$.

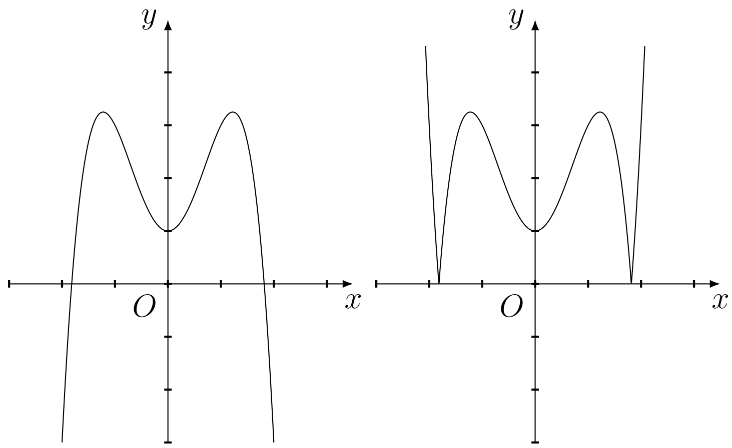
Vì $y=g(x)$ có 5 cực trị, trong đó có 3 cực trị dương nên đồ thị $f=g(x)$ phải cắt Ox và có 3 cực

trị nằm cùng một phía so với Oy.
Nếu $a > 0$ thì $b < 0$ và $c < 0$.
Nếu $a < 0$ thì $b > 0$ và $c > 0$.

TH1: $a > 0$, $b < 0$ và $c < 0$ Ta có đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có dạng như sau:



TH2: $a < 0$, $b > 0$ và $c > 0$ Ta có đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có dạng như sau:



Chọn đáp án (B) □

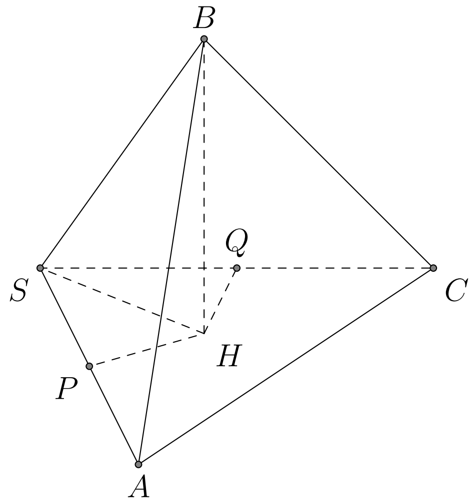
Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{CSB} = 60^\circ$, $\widehat{ASC} = 90^\circ$, $SA = SB = a, SC = 3a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **(B)** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{18}$.

Lời giải.

Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của B lên $SA; SC$.
Kẻ $BH \perp (ABC)$.
Ta có

- $\begin{cases} SA \perp BP \\ SA \perp BH \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BHP) \Rightarrow \widehat{SPH} = 90^\circ$ (1).
- $\begin{cases} SC \perp BQ \\ SC \perp BH \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BHQ) \Rightarrow \widehat{SQH} = 90^\circ$ (2).
- $\widehat{ASC} = 90^\circ$.
- $SP = SQ = \dfrac{a}{2}$.



Suy ra tứ giác $SPHQ$ là hình vuông $\Rightarrow SH = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

Trong ΔSHB vuông tại H: $BH = \sqrt{SB^2 - SH^2} = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

Vậy $V = \dfrac{1}{2} \cdot BH \cdot S_{\Delta ASC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{3a^2}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$

Chọn đáp án B □

Câu 41. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d\colon y = -2x + m$. Biết đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi a, b lần lượt là hệ số góc của (C) tại A, B. Tìm giá trị của tham số m để $a^{2017} + b^{2017} = 2^{2018}$.

A $m = -2$. **B** $m = 2$. **C** $m = 2018$. **D** $m = 1$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d như sau

$$\frac{2x+3}{x+2} = -2x + m \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2x^2 + (6-m)x + 3 - 2m = 0(1) \\ x \neq -2 \end{cases}$$

Từ yêu cầu bài toán, phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác -2. Hay $m^2+4m+12 > 0$ và $f(-2) \neq 0$. Điều này đúng với mọi m.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1), suy ra $x_1 + x_2 = \dfrac{m-6}{2}$, $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{3-2m}{2}$, $[y'(x_1)]^{2017} = a^{2017}$, $[y'(x_2)]^{2017} = b^{2017}$. Khi đó, ta có

$$\left[\frac{1}{(x_1+2)^2}\right]^{2017} + \left[\frac{1}{(x_2+2)^2}\right]^{2017} = 2^{2018}.$$

Ta có $(x_1+2)(x_2+2) = x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4 = \dfrac{3-2m}{2} + 2\dfrac{m-6}{2} + 4 = -\dfrac{1}{2}$. Từ đó, suy ra

$$a^{2017} + b^{2017} = \left[\frac{1}{(x_1+2)^2}\right]^{2017} + \left[\frac{1}{(x_2+2)^2}\right]^{2017} \geq \frac{2}{[x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4]^{2017}} = 2^{2018}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ hay $(x_1+2)^2 = (x_2+2)^2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -4$.

Do đó $\dfrac{m-6}{2} = -4 \Leftrightarrow m = -2$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho tam giác ABC không vuông, trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ với hai mặt phẳng có phương trình $(P)\colon x\cdot\cos A+y\cdot\cos B+z\cdot\cos C-1=0$, $(Q)\colon x\cdot\tan A-y\cdot\sin C-z\cdot\sin B-1=0$. Tìm mệnh đề đúng?

- **A** $(P)\,/\!/\,(Q)$.
- **B** $(P)\equiv(Q)$.
- **C** $(P)\perp(Q)$.
- **D** $M(\cos A;\cos B;\cos C)\in(P)\cap(Q)$.

Lời giải.

Xét $\vec{n}_P=(\cos A;\cos B;\cos C)$ và $\vec{n}_Q=(\tan A;-\sin C;-\sin B)$. Khi đó

$$\vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q=\cos A\cdot\tan A+\cos B\cdot(-\sin C)+\cos C\cdot(-\sin B)=\sin A-\sin(B+C)=\sin A-\sin A=0.$$

Vậy, $(P)\perp(Q)$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)=\sin 2x$. Hỏi trong khoảng $(0;2018)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- **A** 1285.
- **B** 2017.
- **C** 643.
- **D** 642.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=2\cos 2x$; $f''(x)=-4\sin 2x$ và $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$ với $k\in\mathbb{Z}$.

- Nếu $k=2l, l\in\mathbb{Z}$ suy ra $x=\dfrac{\pi}{4}+l\pi$ và $f''\left(\dfrac{\pi}{4}+l\pi\right)=-4\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+l\cdot 2\pi\right)=-4<0$. Trường hợp này loại.
- Nếu $k=2l+1, l\in\mathbb{Z}$ suy ra $x=\dfrac{3\pi}{4}+l\pi$ và $f''\left(\dfrac{3\pi}{4}+l\pi\right)=-4\cdot\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+l2\pi\right)=4>0$. Trường hợp này nhận. Theo giả thiết, ta phải có

$$\begin{cases}0<\dfrac{3\pi}{4}+l\pi<2018\\ l\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{3}{4}<l<\dfrac{\dfrac{8072}{\pi}-3}{4}\\ l\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow l\in\{0,1,2,\ldots,641\}.$$

Như vậy có 642 điểm cực tiểu trong khoảng $(0;2018)$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|2z-i|=|iz+2|$, biết $|z_1-z_2|=\sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A=|z_1-2z_2|$.

- **A** $A=\sqrt{5}$.
- **B** $A=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
- **C** $A=\sqrt{3}$.
- **D** $A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi $z_1=x_1+y_1i$, $z_2=x_2+y_2i$ với $x_1,y_1,x_2,y_2\in\mathbb{R}$. Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases}|2x_1+(2y_1-1)i|=|2-y_1+x_1i|\\ |2x_2+(2y_2-1)i|=|2-y_2+x_2i|\\ (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1^2+y_1^2=1\\ x_2^2+y_2^2=1\\ x_1x_2+y_1y_2=0\end{cases}$$

Do đó, $A^2=|z_1-2z_2|^2=(x_1-2x_2)^2+(y_1-2y_2)^2=(x_1^2+y_1^2)+4(x_2^2+y_2^2)-4(x_1x_2+y_1y_2)=5$.

Khi đó $A=\sqrt{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho phương trình $2\sqrt{m+x}-\sqrt{m-x}=\sqrt{m-x+\sqrt{x(m+x)}}$ có nghiệm và tổng các nghiệm bằng 64. Khi đó, giá trị m thuộc khoảng nào?

(A) $(0;500)$. (B) $(500;1000)$. **(C) $(1000;1500)$.** (D) $(1500;2000)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình là

$$\begin{cases} m+x\ge 0\\ m-x\ge 0\\ x(m+x)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m\le x\le m\\ x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow 0\le x\le m.$$

Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$4\left[(m+x)-\sqrt{m^2-x^2}\right]=\sqrt{x(m+x)}\Leftrightarrow \frac{8x(m+x)}{m+x+\sqrt{m^2-x^2}}=\sqrt{x(m+x)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ 8\sqrt{x(m+x)}=m+x+\sqrt{m^2-x^2}\end{array}\right. \quad (*)$$

$(*)\Leftrightarrow 8\sqrt{x}=\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}$ $(**)$

Với $x=m$, $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình $(**)$.

Xét hàm số $f(x)=8\sqrt{x}-\sqrt{m+x}-\sqrt{m-x}$ trên khoảng $(0;m)$, ta có

$$f'(x)=\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{m-x}}-\frac{1}{2\sqrt{m+x}}=\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{m+x}-\sqrt{m-x}}{x\sqrt{m^2-x^2}}>0,\forall x\in(0;m).$$

Vậy phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất và nghiệm duy nhất đó $x=64$.

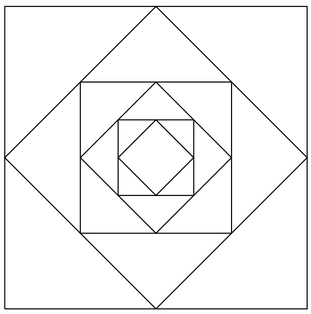
Với $m=64$ suy ra $8\sqrt{64}=\sqrt{m+64}+\sqrt{m-64}\Leftrightarrow 32-m=\sqrt{m^2-64}\Leftrightarrow m=1025$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 46.

Cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 1. Gọi $A_{k+1},B_{k+1},C_{k+1},D_{k+1}$ thứ tự là trung điểm các cạnh A_kB_k; B_kC_k;C_kD_k;D_kA_k (với $k=1,2,\ldots$). Chu vi của hình vuông $A_{2018}B_{2018}C_{2018}D_{2018}$ là

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2^{1006}}$. **(B) $\frac{\sqrt{2}}{2^{1007}}$.** (C) $\frac{\sqrt{2}}{2^{2018}}$. (D) $\frac{\sqrt{2}}{2^{2017}}$.



Lời giải.

Hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ có cạnh bằng $\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2^{\frac{2}{2}}}$.

Hình vuông $A_3B_3C_3D_3$ có cạnh bằng $\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2^{\frac{3}{2}}}$.

Hình vuông $A_4B_4C_4D_4$ có cạnh bằng $\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2^{\frac{4}{2}}}$.

Bằng quy nạp, suy ra hình vuông $A_{2018}B_{2018}C_{2018}D_{2018}$ có cạnh bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{2^{\frac{2018}{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2^{1009}}$.

Từ đó, chu vi hình vuông $A_{2018}B_{2018}C_{2018}D_{2018}$ là $4\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2^{1009}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2^{1007}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2$. Số điểm cực trị của hàm số $f(f(x))$ là

A. 2. B. 3. C. 5. D. 4.

Lời giải.

Ta có $f[f(x)]=[f(x)]^3-3[f(x)]^2=[f(x)]^2\,(f(x)-3)$, suy ra

$$[f(f(x))]'=3f(x)f'(x)\,[f(x)-2]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f'(x)=0\\f(x)-2=0.\end{array}\right.$$

Phương trình $f(x)=0\Leftrightarrow x=0;x=3$.

Phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0;x=2$.

Xét hàm số $y=x^3-3x^2-2$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0		$+$		
y	$-\infty$	↗	-2	↘	-4	↗	-2	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra phương trình $f(x)-2=0\Leftrightarrow x^3-3x^2-2=0$ có duy nhất nghiệm $x_0>3$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $f[f(x)]$ như sau

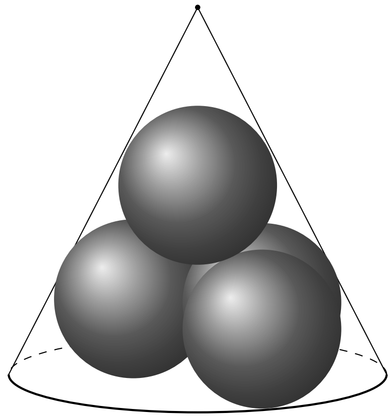
x	$-\infty$		0		1		2		3		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-2$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$[f(f(x))]'$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f[f(x)]$	$-\infty$	↗		↘		↘		↗		↘		↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra hàm số $f[f(x)]$ có 4 điểm cực trị.

Chọn đáp án D □

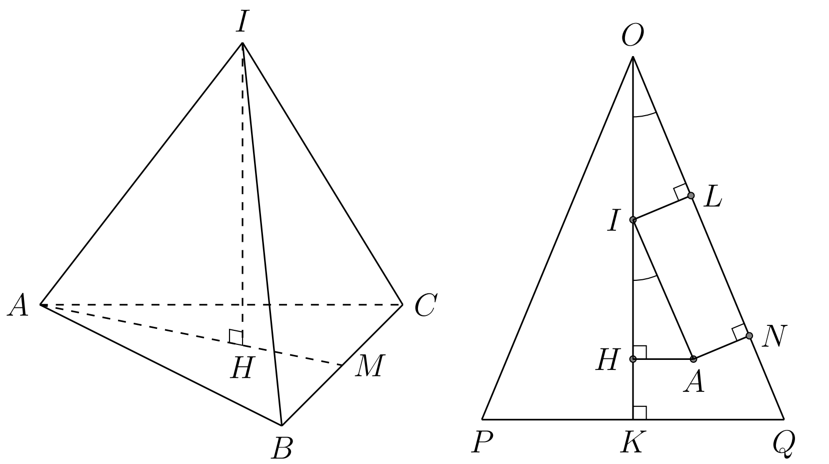
Câu 48.

Có hình nón có tính chất sau: Có bốn quả cầu bán kính r, trong đó có ba quả cầu tiếp xúc với nhau, tiếp xúc với mặt đáy đồng thời tiếp xúc với mặt xung quanh hình nón. Quả cầu thứ tư tiếp xúc với ba quả cầu kia và tiếp xúc với mặt xung quanh hình nón. Tìm chiều cao của hình nón theo r?



A $\frac{r}{3}\left(3\sqrt{3}+3+2\sqrt{6}\right)$.
B $\frac{r}{3}\left(\sqrt{3}+3+\sqrt{6}\right)$.
C $\frac{r}{3}\left(3\sqrt{3}-3+2\sqrt{6}\right)$.
D $\frac{r}{3}\left(3\sqrt{3}+3+\sqrt{6}\right)$.

Lời giải.



Giả sử $r=1$.

- Gọi I, A, B, C lần lượt là tâm bốn quả cầu. Khi đó, $IABC$ là tứ diện đều cạnh bằng 2. Suy ra $IA=2$, $AH=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $IH=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ với H là chân đường cao của tứ diện đều $ABCD$ hạ từ đỉnh I.
- Gọi O là đỉnh của hình nón, PQ là đường kính của đường tròn đáy hình nón, K là trung điểm PQ. Gọi h là độ dài đường cao của hình nón. Khi đó, ta có $h=OI+IH+HK$.
- Xét tam giác OLI và tam giác IHA có $\widehat{ILO}=\widehat{AHI}=90^\circ$ và $\widehat{IOL}=\widehat{AIH}$ nên hai tam giác này đồng dạng. Suy ra $\dfrac{OI}{IA}=\dfrac{LI}{HA}\Rightarrow OI=IA\cdot\dfrac{LI}{HA}=2\cdot\dfrac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}$.

  Vậy $h=\sqrt{3}+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}+1=\dfrac{3\sqrt{3}+3+2\sqrt{6}}{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Tìm giá trị nhỏ nhất của A sao cho với mỗi tam thức bậc hai $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $|f(x)|\le 1, \forall x\in[0;1]$ nghiệm đúng bất đẳng thức $f'(0)\le A$.

A 1.
B 2.
C 8.
D 4.

Lời giải.

Giả sử tồn tại tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$ với $a\ne 0$, $a,b,c\in\mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Đặt $M=\max\limits_{[0;1]}|f(x)|$. Theo giả thiết, suy ra $M\le 1$.

Khi đó, ta có $f(1)=a+b+c$, $f(0)=c$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{2}+c$ và

$$8\geq 8M\geq |f(1)|+4\left|f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|+3|f(0)|\geq \left|f(1)-4f\left(\dfrac{1}{2}\right)+3f(0)\right|=|b|.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}|f(1)|=\left|f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|=|f(0)|=1\\ f(1);-f\left(\dfrac{1}{2}\right);f(0)\text{ từng đôi một có tích không âm}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(1)=-f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f(0)=1(1)\\ f(1)=-f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f(0)=-1(2)\end{array}\right.$$

Xét (1), ta có $\begin{cases}a+b+c=1\\ -\dfrac{a}{4}-\dfrac{b}{2}-c=1\\ c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=8\\ b=-8\\ c=1.\end{cases}$

Vậy, $f(x)=8x^2-8x+1$ thỏa mãn $|f(x)|\leq 1,\forall x\in[0;1]$. Do đó, $A\geq f'(0)=-8$.

Xét (2), ta có $\begin{cases}a+b+c=-1\\ -\dfrac{a}{4}-\dfrac{b}{2}-c=-1\\ c=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-8\\ b=8\\ c=-1.\end{cases}$

Vậy, $f(x)=-8x^2+8x-1$ thỏa mãn $|f(x)|\leq 1,\forall x\in[0;1]$. Do đó, $A\geq f'(0)=8$.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Có hai hộp đựng bi, mỗi viên bi chỉ mang một màu đen hoặc trắng. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp đúng 1 viên bi. Biết tổng số bi trong hai hộp là 20 và xác suất lấy được 2 viên bi đen là $\dfrac{55}{84}$. Tính xác suất để lấy được 2 viên bi trắng?

A $\dfrac{1}{28}$. **B** $\dfrac{23}{84}$. **C** $\dfrac{3}{28}$. **D** $\dfrac{13}{84}$.

Lời giải.

Gọi hộp 1 có a viên bi trắng, b viên bi đen; hộp 2 có c viên bi trắng, d viên bi đen với a,b,c,d là các số nguyên dương.

Theo giả thiết, ta có $(a+b)+(c+d)=20$ và $\dfrac{bd}{(a+b)\cdot(c+d)}=\dfrac{55}{84}$.

Ta có $100=\left[\dfrac{(a+b)+(c+d)}{2}\right]^2\geq(a+b)(c+d)\Rightarrow(a+b)(c+d)=84$.

Khi đó, ta có

$$\begin{cases}(a+b)+(c+d)=20\\ (a+b)(c+d)=84\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=14\\ c+d=6\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}a+b=6\\ c+d=14.\end{cases}$$

Không giảm tổng quát, xét $a+b=14$, $c+d=6$.

Lại có $bd=55=5\cdot 11$, chọn $b=11;d=5\Rightarrow a=3;c=1$.

Xác suất để lấy được hai viên bi trắng là $\mathrm{P}=\dfrac{ac}{(a+b)(c+d)}=\dfrac{3}{84}=\dfrac{1}{28}$.

Chọn đáp án A □

—— HẾT ——

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. D	3. B	4. C	5. C	6. B	7. B	8. D	9. B	10. C
11. D	12. C	13. A	14. C	15. C	16. D	17. B	18. D	19. A	20. D
21. D	22. B	23. C	24. A	25. A	26. D	27. D	28. A	29. A	30. C
31. B	32. A	33. C	34. A	35. D	36. C	37. A	38. C	39. B	40. B
41. A	42. C	43. D	44. A	45. C	46. B	47. D	48. A	49. C	50. A

118 ĐỀ THI THỬ SỞ GD & ĐT HƯNG YÊN 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Số các mặt của hình chóp $S.ABC$ là tam giác vuông là

(A) 3. **(B) 4.** (C) 1. (D) 2.

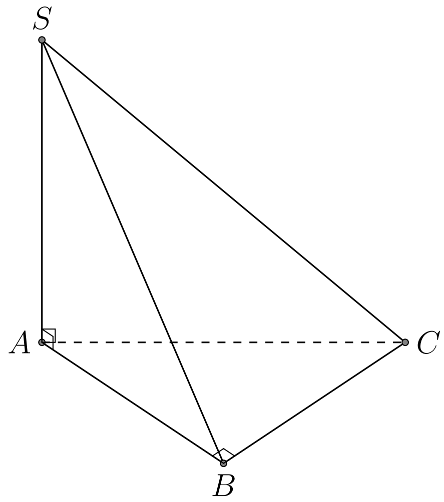
Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AC \\ SA \perp AB \end{cases} \Rightarrow \triangle SAC$ và $\triangle SAB$ vuông tại A.

Mặt khác $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \triangle SBC$ vuông tại B.

Theo giả thiết $\triangle ABC$ là tam giác vuông tại B.

Vậy hình chóp $S.ABC$ có 4 mặt là tam giác vuông.



Chọn đáp án (B) □

Câu 2.

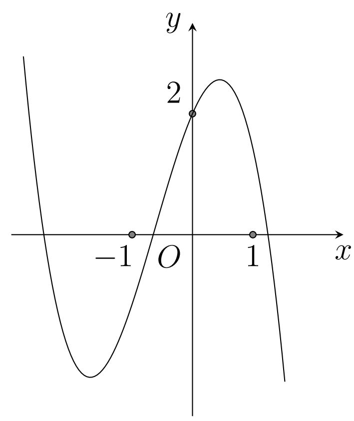
Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.

(B) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

(C) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị.

(D) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có điểm cực trị.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm và đổi dấu 3 lần.

Do đó đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;10]$ thỏa mãn $\int\limits_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 7$, $\int\limits_2^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $P = \int\limits_0^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $P = 4$. (B) $P = 5$. (C) $P = 7$. (D) $P = -4$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^{6} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $\displaystyle\int_0^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_2^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = 4$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 4. Giới hạn $\lim \dfrac{5\sqrt{3n^2+n}}{2(3n+2)} = \dfrac{a\sqrt{3}}{b}$ (với a, b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $T = a + b$.

A $T = 7$. **B** $T = 21$. **C** $T = 9$. **D** $T = 11$.

Lời giải.

$$\lim \frac{5\sqrt{3n^2+n}}{2(3n+2)} = \lim \frac{n\left(5\sqrt{3+\dfrac{1}{n}}\right)}{n\left(6+\dfrac{4}{n}\right)} = \frac{5\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 6. \end{cases}$$

Vậy $T = a + b = 11$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$. Tọa độ vectơ $\vec{x}$ thỏa mãn $2\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ là

A $(-4; 2; 3)$. **B** $(-4; 2; -7)$. **C** $(-4; 12; -3)$. **D** $(-4; 12; -7)$.

Lời giải.

Ta có $2\vec{a} = (4; -10; 6) \Rightarrow \vec{x} = \vec{b} - 2\vec{a} = (-4; 12; -7)$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng

A $\dfrac{a}{2}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$. **D** $\dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$.

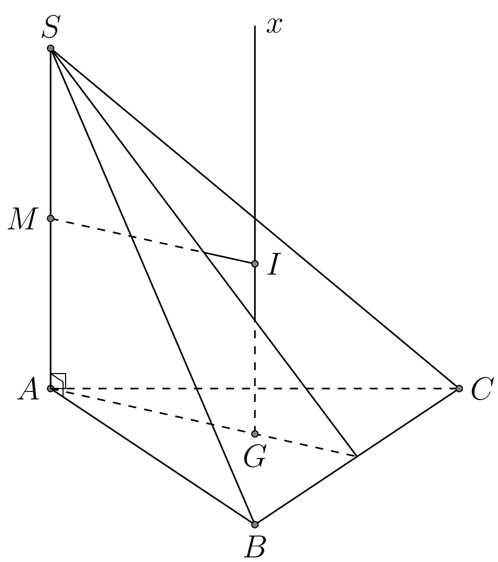
Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC, dựng trục Gx của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, khi đó $Gx \parallel SA$. Trong mặt phẳng (SAG) dựng đường trung trực cạnh SA, cắt Gx tại I.

Ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và bán kính là $R = \sqrt{SM^2 + MI^2}$.

Mà $MI = AG = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $SM = \dfrac{1}{2}SA = \dfrac{a}{2}$.

Nên $R = \sqrt{\dfrac{3a^2}{9} + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.



Chọn đáp án C ☐

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A\left(2;-1;1\right)$, $B\left(1;0;4\right)$, $C\left(0;-2;-1\right)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình là

(A) $2x+y+5z-8=0$.
(B) $x+2y+5z+5=0$.
(C) $2x-y+5z-5=0$.
(D) $x+2y+5z-5=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với đường thẳng BC nhận $\overrightarrow{CB}=(1;2;5)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Do đó (α) có phương trình là $x-2+2\left(y+1\right)+5\left(z-1\right)=0 \Leftrightarrow x+2y+5z-5=0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **đúng**?

(A) Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
(B) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với nhau thì chúng cắt nhau.
(C) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.
(D) Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng thứ ba vuông góc với đường thẳng thứ nhất thì cũng vuông góc với đường thẳng thứ hai.

Lời giải.

Mệnh đề " Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng thứ ba vuông góc với đường thẳng thứ nhất thì cũng vuông góc với đường thẳng thứ hai " là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Cho hàm số $y=x^3+3x+2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

(A) Đồ thị hàm số có đúng 1 đường tiệm cận.
(B) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(2;0)$.
(C) Hàm số có hai điểm cực trị.
(D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2+3>0\ \forall x\in\mathbb{R}$, nên hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Phương trình $9^x-3\cdot 3^x+2=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1<x_2$. Giá trị $A=2x_1+3x_2$ là

(A) 8.
(B) $2\log_3 2$.
(C) $2\log_2 3$.
(D) $3\log_3 2$.

Lời giải.

Ta có $9^x-3\cdot 3^x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x=1\\3^x=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=\log_3 2\end{array}\right. \Rightarrow x_1=0, x_2=\log_3 2$.

Vậy $A=2x_1+3x_2=3\log_3 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	0	↘	$-\infty$

Phát biểu nào sao đây là **sai**?

(A) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập $\mathbb{R}$ là 0.

(B) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

(C) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có đường tiệm cận .

D Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập $\mathbb{R}$ là -1.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

- Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 0.
- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.
- Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.
- Hàm số có giá trị cực tiểu $y_{CT} = -1$.
- Hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Cho số phức z thoả mãn $\overline{z} = \dfrac{(1-\sqrt{3}i)^3}{1-i}$. Tìm môđun của $w = z - i\overline{z}$.

A $8\sqrt{2}$. (B) 8. (C) $4\sqrt{2}$. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $\overline{z} = \dfrac{(1-\sqrt{3}i)^3}{1-i} = -4 - 4i$.

Suy ra $z = -4 + 4i$; do đó $w = z - i\overline{z} = -8 + 8i$.

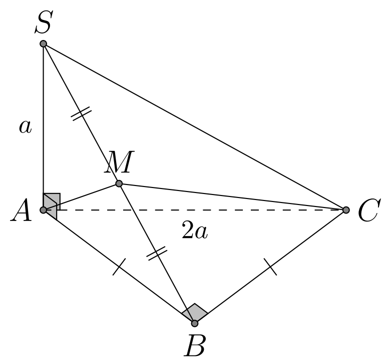
Vậy $|w| = |z - i\overline{z}| = \sqrt{(-8)^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $\triangle ABC$ vuông cân tại B, $AC = 2a$ và $SA = a$. Gọi M là trung điểm cạnh SB. Tính thể tích khối chóp $S.AMC$.

(A) $\dfrac{a^3}{9}$. (B) $\dfrac{a^3}{3}$. **C** $\dfrac{a^3}{6}$. (D) $\dfrac{a^3}{12}$.

Lời giải.



Đặt $BA = BC = x > 0$. Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông BAC ta có

$$x^2 + x^2 = 4a^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 4a^2 \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}.$$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a = \frac{a^3}{3} \text{ (đvtt)}.$$

Ta có $\dfrac{V_{S.AMC}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow V_{S.AMC} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a^3}{3} = \dfrac{a^3}{6}$ (đvtt).

Chọn đáp án C □

Câu 14. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A $\displaystyle\int \ln|x|\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{x} + C$.

B $\displaystyle\int (x+1)^{-3}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}(x+1)^{-2} + C$.

C $\displaystyle\int (x+1)^3\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}(x+1)^4 + C$.

D $\displaystyle\int \dfrac{\mathrm{d}x}{2x+1} = \ln|2x+1| + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int (x+1)^3\,\mathrm{d}x = \int (x+1)^3\,\mathrm{d}(x+1) = \dfrac{1}{4}(x+1)^4 + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Bất phương trình $3^{x+2} > 9^{x-1008}$ có nghiệm là

A $x \geq 2018$. B $x > 2018$. C $x < 2018$. D $x > 1010$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned} 3^{x+2} > 9^{x-1008} &\Leftrightarrow 3^{x+2} > 3^{2x-2016} \\ &\Leftrightarrow x+2 > 2x-2016 \\ &\Leftrightarrow x < 2018. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 16. Nghiệm của phương trình $2\sin\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$ là

A $x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi;\ x = \dfrac{7\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B $x = k\pi;\ x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C $x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2};\ x = \dfrac{7\pi}{24} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

D $x = \dfrac{\pi}{8} + k2\pi;\ x = \dfrac{7\pi}{24} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 2\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right) = 1 &\Leftrightarrow \sin\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6} \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 4x - \dfrac{\pi}{3} = \pi - \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{7\pi}{24} + k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 17. Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = (x-2)^2, y = 0, x = 0, x = 2$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A $V = \dfrac{32}{5}$. B $V = 32\pi$. C $V = \dfrac{32\pi}{5}$. D $V = \dfrac{32}{5\pi}$.

Lời giải.

Ta có thể tích V được tính bởi

$V = \pi \int\limits_0^2 (x-2)^4 \,\mathrm{d}x = \pi \cdot \dfrac{(x-2)^5}{5}\Big|_0^2 = \pi \left[\dfrac{(2-2)^5}{5} - \dfrac{(0-2)^5}{5}\right] = \dfrac{32\pi}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 6 = 0$ có phương trình là

A $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. B $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. C $x^2 + y^2 + z^2 = 6$. D $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Lời giải.

Ta có $R = \mathrm{d}(O,(P)) = \dfrac{|-6|}{\sqrt{1+2^2+2^2}} = 2$.

Do đó phương trình mặt cầu là $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$ trên đoạn $[-2; 0]$. Giá trị biểu thức $5M + m$ bằng

A -4. B 0. C $-\dfrac{24}{5}$. D $\dfrac{24}{5}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-3}{(2x-1)^2} < 0, \forall x \neq \dfrac{1}{2}$ nên $M = y(-2) = \dfrac{1}{5}$ và $m = y(0) = -1$.

Do đó $5M + m = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho tích phân $I = \int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$. Nếu đổi biến số $x = 2\sin t, t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ thì

A $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{d}t$. B $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} t\,\mathrm{d}t$. C $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$. D $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}t$.

Lời giải.

Ta có $x = 2\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\cos t\,\mathrm{d}t$.

Với $x = 0 \Rightarrow t = 0, x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{6}$.

Do đó $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\cos t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\cos t\,\mathrm{d}t}{2\sqrt{\cos^2 t}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\cos t\,\mathrm{d}t}{2\cos t} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{d}t$.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{mx+3}{\sqrt{mx^2-5}}$ có hai đường tiệm cận ngang.

A $m \geq 0$. B $m > \sqrt{5}$. C $m < 0$. D $m > 0$.

Lời giải.

Ta có: đồ thị có hai tiệm cận ngang nếu hai giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y$ cùng tồn tại.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{mx+3}{\sqrt{mx^2+5}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{mx+3}{|x|\sqrt{m-\dfrac{1}{x^2}}} = \sqrt{m}$ tồn tại nếu $m > 0$.

Tương tự, $\lim\limits_{x\to -\infty} y = -\sqrt{m}$ tồn tại nếu $m > 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-3		-1		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$-$		
y	$+\infty$	↘	-5	↗	0	↘	-2	↗	3	↘	$-\infty$

Tìm m để hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = m$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt, đồng thời hai điểm này ở hai nửa mặt phẳng có bờ là trục tung.

(A) $m = -2$ và $m = 0$. (B) $m = -5$ và $m = 0$.

(C) $m = 3$ và $m = -2$. **D** $m = -5$ và $m = 3$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $m = -5$ hoặc $m = 3$ thì đồ thị cắt đường thẳng $y = m$ tại hai điểm nằm ở hai nửa mặt phẳng có bờ là trục Oy.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Số tập con có 3 phần tử khác nhau của một tập hợp có 7 phần tử khác nhau là

A C_7^3. (B) A_7^3. (C) 7. (D) $\dfrac{7!}{3!}$.

Lời giải.

Số tập con có 3 phần tử khác nhau của một tập hợp có 7 phần tử khác nhau là C_7^3.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Hình bát diện đều có số cạnh là

(A) 20. (B) 6. (C) 8. **D** 12.

Lời giải.

Hình bát diện đều có 12 cạnh.

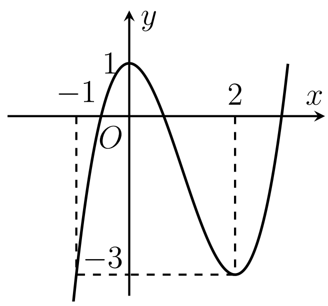
Chọn đáp án (D) □

Câu 25.

Đường cong như hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

(A) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. (B) $y = x^4 - x^2 + 1$.

(C) $y = -x^3 + 3x^2 - 1$. **D** $y = x^3 - 3x^2 + 1$.



Lời giải.

Nhận thấy đây là đồ thị của hàm bậc ba có hệ số $a > 0$ nên đồ thị đã cho là của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 + 1$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ bằng

(A) $y' = x^2 + x$. **B** $y' = x^2$. (C) $y' = \dfrac{1}{3}x^2$. (D) $y' = \dfrac{1}{12}x^4 + x$.

Lời giải.

Ta có: $y = \dfrac{1}{3}x^3 + 1 \Rightarrow y' = \dfrac{1}{3} \cdot 3x^2 + 0 = x^2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 \end{cases}$. Một véc-tơ chỉ phương của d là

A $\vec{u} = (1; -2; 0)$. (B) $\vec{u} = (3; 1; 2)$. (C) $\vec{u} = (1; -2; 2)$. (D) $\vec{u} = (-1; 2; 2)$.

Lời giải.

Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u} = (1; -2; 0)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Cho số phức $\overline{z} = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của z.

A Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2. (B) Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng -2.

(C) Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng -2. (D) Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $-2i$.

Lời giải.

Ta có $\overline{z} = 3 - 2i \Rightarrow z = 3 + 2i$.

Từ đó suy ra phần thực của z bằng 3, phần ảo của z bằng 2.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $0 < a < b < 1$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

(A) $\log_a b > 1$. (B) $\log_b a < 0$. (C) $\log_a b > \log_b a$. **D** $\log_b a > \log_a b$.

Lời giải.

Với $a, b \in (0; 1)$, ta có $\log_a b < \log_a a = 1$; $\log_b a > \log_b b = 1$.

Do đó ta có $\log_a b < \log_b a$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 23ab$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) $\log_5(a + b) = 1 + \log_{25} a + \log_{25} b$. (B) $\ln \dfrac{a + b}{5} = \dfrac{\ln a + \ln b}{2}$.

(C) $2 \log \dfrac{a + b}{5} = \log a + \log b$. **D** $2 \log_5(a + b) = 1 + \log_5 a + \log_5 b$.

Lời giải.

Ta có $a^2 + b^2 = 23ab \Leftrightarrow (a + b)^2 = 25ab \Leftrightarrow \left(\dfrac{a + b}{5}\right)^2 = ab$ (*)

- Lấy lôgarit thập phân hai vế của (*), ta có
  $2 \log \dfrac{a + b}{5} = \log a + \log b$.
- Lấy lôgarit tự nhiên hai vế của (*), ta được
  $2 \ln \dfrac{a + b}{5} = \ln(ab) = \ln a + \ln b \Rightarrow \ln \dfrac{a + b}{5} = \dfrac{\ln a + \ln b}{2}$.

- Lấy lôgarit cơ số 5 hai vế của (*) ta được
$2\left[\log_5(a+b)-\log_5 5\right]=\log_5(ab) \Leftrightarrow 2\left[\log_5(a+b)-1\right]=\log_5 a+\log_5 b$
$\Leftrightarrow \log_5(a+b)=\dfrac{1}{2}\left(\log_5 a+\log_5 b\right)+1=1+\log_{25} a+\log_{25} b.$
- Lấy lôgarit cơ số 5 hai vế của (*), ta được
$2\left[\log_5(a+b)-\log_5 5\right]=\log_5(ab) \Leftrightarrow 2\log_5(a+b)=2+\log_5 a+\log_5 b.$

Chọn đáp án D □

Câu 31. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $[-1;0]$, $F(-1)=-1$, $F(0)=0$ và $\displaystyle\int_{-1}^{0} 2^{3x}F(x)\,\mathrm{d}x=-1$. Tính $I=\displaystyle\int_{-1}^{0} 2^{3x}f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I=\dfrac{1}{8}-3\ln 2$. **B** $I=\dfrac{1}{8}+\ln 2$. **C** $I=\dfrac{1}{8}+3\ln 2$. **D** $I=\dfrac{1}{8}+3\ln 2$.

Lời giải.

$$I=\int_{-1}^{0} 2^{3x}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0} 2^{3x}\,\mathrm{d}\left(F(x)\right)=2^{3x}F(x)\Big|_{-1}^{0}-3\ln 2\int_{-1}^{0} 2^{3x}F(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8}+3\ln 2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 32. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $M(1;8;0)$, $C(0;0;3)$ cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho OG nhỏ nhất, với G là trọng tâm tam giác ABC. Biết $G(a;b;c)$, hãy tính $T=a+b+c$.

A $T=7$. **B** $T=3$. **C** $T=12$. **D** $T=6$.

Lời giải.

Gọi $A(m;0;0)$, $B(0;n;0)$ với m, $n>0$.

Khi đó phương trình của (ABC): $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}+\dfrac{z}{3}=1$.

Vì $M\in(ABC)$ nên $\dfrac{1}{m}+\dfrac{8}{n}=1$. Kết hợp với điều kiện $m>0$, $n>0$ suy ra $m>1$ và $n>8$.

Cũng từ trên ta có $m=\dfrac{n}{n-8}$.

Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ $\left(\dfrac{m}{3};\dfrac{n}{3};1\right)$.

$$OG^2=\left|\overrightarrow{OG}\right|^2=\left(\frac{m}{3}\right)^2+\left(\frac{n}{3}\right)^2+1^2=\frac{1}{9}\left[\left(\frac{n}{n-8}\right)^2+n^2\right]+1.$$

Xét hàm số $f(n)=\left(\dfrac{n}{n-8}\right)^2+n^2$ với $n>8$.

Ta có $f'(n)=2\cdot\dfrac{n}{n-8}\cdot\dfrac{-8}{(n-8)^2}+2n=2n\left[\dfrac{-8}{(n-8)^3}+1\right]$.

$$f'(n)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}n=0\\ n=10\end{array}\right.\Leftrightarrow n=10.$$

Bảng biến thiên

n	8		10		$+\infty$
$f'(n)$		$-$	0	$+$	
$f(n)$	$+\infty$	$\searrow$	125	$\nearrow$	$+\infty$

OG đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $f(n)$ đạt giá trị nhỏ nhất. Điều này xảy ra khi $n = 10$; lúc đó $m = 5$ và $G\left(\frac{5}{3}; \frac{10}{3}; 1\right)$.

Vậy $T = a + b + c = 6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x+3}$ có đồ thị là đường cong $(\mathscr{C})$. Đường thẳng có phương trình $y = ax + b$ là tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ cắt trục hoành tại A, cắt trục tung tại B sao cho tam giác OAB là tam giác vuông cân tại O, với O là gốc tọa độ. Khi đó $S = a + b$ bằng bao nhiêu?

(A) $S = -2$. (B) $S = -1$. (C) $S = 0$. **D** $S = -3$.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, $x_0 \neq -\frac{3}{2}$.

$y'(x) = \dfrac{-1}{(2x+3)^2} < 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

Kết hợp với giả thiết tam giác OAB vuông cân, ta được $y'(x_0) = -1$.

Điều này tương đương với $\dfrac{-1}{(2x_0+3)^2} = -1$. Từ đó ta giải được $\left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = -2. \end{array}\right.$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1$, ta có phương trình tiếp tuyến là $y = -1(x+1) + 1 \Leftrightarrow y = -x$ (loại vì tiếp tuyến này đi qua gốc tọa độ).

Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0$, ta có phương trình tiếp tuyến là $y = -1(x+2) + 0 \Leftrightarrow y = -x - 2$.

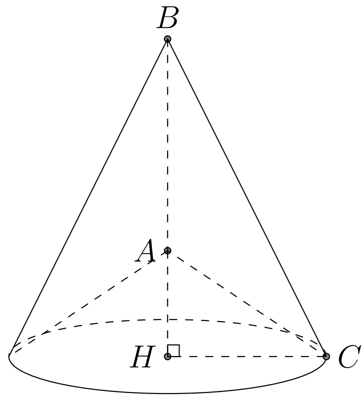
Vậy $S = -3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 34. Cho tam giác ABC cân tại A có $BC = 10$ cm, $AB = 6$ cm. Quay tam giác ABC quanh AB ta được một khối tròn xoay có thể tích bằng

(A) $V = \dfrac{4216\pi}{27}$ cm^3. (B) $V = \dfrac{325\pi}{2}$ cm^3. **C** $V = \dfrac{550\pi}{9}$ cm^3. (D) $V = 200\pi$ cm^3.

Lời giải.



Gọi H là chân đường cao kẻ từ C.
Áp dụng công thức Hê-rông ta tính được $S_{\triangle ABC} = 5\sqrt{11}$.
Suy ra $HC = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{AB} = \dfrac{5\sqrt{11}}{3}$; $AH = \sqrt{AC^2 - HC^2} = \dfrac{7}{3}$;
$HB = AB + AH = \dfrac{25}{3}$.
Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích hai khối nón có các đường cao là BH, AH và chung đáy có tâm là H, bán kính HC.
Ta có

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}BH\cdot\pi HC^2 - \frac{1}{3}AH\cdot\pi HC^2 = \frac{1}{3}AB\cdot HC^2 = \frac{550}{9}\pi \text{ cm}^3.$$

Chọn đáp án C □

Câu 35. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;1)$, $B(3;0;-1)$, $C(0;21;-19)$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho biểu thức $T = 3MA^2 + 2MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $S = a + b + c$.

(A) $S = 0$. **B** $S = \dfrac{14}{5}$. (C) $S = 12$. (D) $S = \dfrac{12}{5}$.

Lời giải.
Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
Ta có $3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = (-6x + 6; -6y + 24; -6z - 18)$.

$$3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow I(1;4;-3).$$

Gọi K là tâm của mặt cầu (S). Suy ra $K(1;1;1)$.

IK là đường thẳng qua K và nhận $\overrightarrow{IK}$ làm véc-tơ chỉ phương, IK có phương trình $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$.

Gọi P, Q là giao điểm của IK và (S). Từ hệ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - 4t \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases}$ ta tìm được

$P\left(1; \dfrac{8}{5}; \dfrac{1}{5}\right)$ và $Q\left(1; \dfrac{2}{5}; \dfrac{9}{5}\right)$. Suy ra $IP = \left|\overrightarrow{IP}\right| = 4$, $IQ = \left|\overrightarrow{IQ}\right| = 6$.

Ta có
$$\begin{aligned} T &= 3MA^2 + 2MB^2 + MC^2 \\ &= 3\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2 \\ &= 6MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\cdot\left(3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right) + 3IA^2 + 2IB^2 + IC^2 \\ &= 6MI^2 + 3IA^2 + 2IB^2 + IC^2. \end{aligned}$$

Do đó, T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất, lúc đó $MI = \min\{IP; IQ\} = IP$.
Tức $M \equiv P$. Vậy $S = 1 + \dfrac{8}{5} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{14}{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Từ phương trình $(1+\sqrt{5})(\sin x-\cos x)+\sin 2x-1-\sqrt{5}=0$ ta tìm được $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ có giá trị bằng

(A) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $(1+\sqrt{5})(\sin x-\cos x)+\sin 2x-1-\sqrt{5}=0$

$$\Leftrightarrow -(\sin x-\cos x)^2+(1+\sqrt{5})(\sin x-\cos x)-\sqrt{5}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x-\cos x=1\\ \sin x-\cos x=\sqrt{5}\,(\text{vô nghiệm vì }\sqrt{5}>\sqrt{2})\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin x-\cos x=1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Một người gởi vào ngân hàng 200 triệu với lãi suất ban đầu 4%/năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Cứ sau một năm lãi suất tăng thêm 0,3%. Hỏi sau 4 năm tổng số tiền người đó nhận được gần nhất với giá trị nào sau đây?

(A) 239,5 triệu. (B) 238 triệu. (C) 238,5 triệu. (D) 239 triệu.

Lời giải.

Đặt $a=200$, $b=1+\dfrac{4}{100}$, $m=\dfrac{0{,}3}{100}$. Số tiền người đó nhận được

- sau năm thứ nhất: $a+a\dfrac{4}{100}=ab$.
- sau năm thứ hai: $ab+ab\left(\dfrac{4}{100}+\dfrac{0{,}3}{100}\right)=ab(b+m)$. Lập luận tương tự, số tiền nhận được
- sau năm thứ ba: $ab(b+m)(b+2m)$.
- sau năm thứ tư: $ab(b+m)(b+2m)(b+3m)\approx 238{,}04$ triệu.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Cho các số phức z thỏa mãn $|z-i|=5$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=iz+1-i$ là đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

(A) $r=20$. (B) $r=5$. (C) $r=22$. (D) $r=4$.

Lời giải.

Ta có $w=iz+1-i\Leftrightarrow w+i=i(z-i)$. Suy ra $|w+i|=|i||z-i|=5$.

Vậy tập hợp những điểm biểu diễn cho số phức w là đường tròn tâm $I(0;-1)$, bán kính $r=5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và thỏa mãn $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$ với $x\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$. Tính $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

(A) $I=\dfrac{3}{2}$. (B) $I=-\dfrac{3}{2}$. (C) $I=\dfrac{9}{2}$. (D) $I=-\dfrac{9}{2}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) + 2f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3x$ và $f\left(\dfrac{1}{x}\right) + 2f(x) = 3 \cdot \dfrac{1}{x}$. Suy ra $f(x) = \dfrac{2}{x} - x$.

$I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \dfrac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\dfrac{2}{x^2} - 1\right)\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Tìm số giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2018; 2018)$ để hàm số $y = (2m-1)x - (3m+2)\cos x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A 4. **B** 4014. **C** 218. **D** 3.

Lời giải.

Ta có $y' = (2m-1) + (3m+2)\sin x$.

Vì m nguyên nên $3m + 2 \neq 0$. Ta xét hai trường hợp sau:

- TH1: $3m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{2}{3}$.
  Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
  Điều này tương đương với $\sin x \leq \dfrac{1-2m}{3m+2}, \forall x \in \mathbb{R}$. Hay $\dfrac{1-2m}{3m+2} \geq 1 \Leftrightarrow m \leq -\dfrac{1}{5}$.
  Trong trường hợp này không có giá trị nguyên nào của m thỏa yêu cầu bài toán.
- TH2: $3m + 2 < 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{2}{3}$.
  Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
  Điều này tương đương với $\sin x \geq \dfrac{1-2m}{3m+2}, \forall x \in \mathbb{R}$. Hay $\dfrac{1-2m}{3m+2} \leq -1 \Leftrightarrow m \geq -3$.
  Vậy trong trường hợp này có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m = -3$, $m = -2$, $m = -1$.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Một đoàn tình nguyện đến một trường tiểu học miền núi để trao tặng 20 suất quà cho 10 em học sinh nghèo học giỏi. Trong 20 suất quà đó gồm 7 chiếc áo mùa đông, 9 thùng sữa tươi và 4 chiếc cặp sách. Tất cả các suất quà đều có giá trị tương đương nhau. Biết rằng mỗi em được phát 2 suất quà khác loại (ví dụ: 1 chiếc áo và 1 thùng sữa). Trong số các em nhận quà có hai em Việt và Nam. Tính xác suất để hai em Việt và Nam đó nhận được suất quà giống nhau.

A $\dfrac{1}{3}$. **B** $\dfrac{1}{15}$. **C** $\dfrac{2}{5}$. **D** $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

Từ đề bài, mỗi em học sinh được nhận quà có thể nhận được một trong ba trường hợp sau:

- Loại I: 1 chiếc áo, 1 thùng sữa.
- Loại II: 1 chiếc áo, 1 cặp sách.
- Loại III: 1 thùng sữa, 1 cặp sách.

Gọi x, y, z lần lượt là số lượng của từng phần quà loại I, loại II, loại III.

Khi đó, ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + z = 9 \\ y + z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \\ z = 3. \end{cases}$

Số cách chọn 2 phần quà trong 10 phần quà $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^2$.

Gọi A là biến cố hai em Việt và Nam nhận được quà giống nhau.

Số cách chọn 2 phần quà giống nhau trong 10 phần quà là $\mathrm{C}_6^2 + \mathrm{C}_3^2 = n(A)$.
Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{5}$.
Chọn đáp án C □

Câu 42. Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M, M'. Số phức $z(4+3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là N, N'. Biết rằng M, M', N, N' là bốn đỉnh của hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z+4i-5|$.

A $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C** $\dfrac{5}{\sqrt{34}}$. **D** $\dfrac{4}{\sqrt{13}}$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$. Khi đó, các điểm M, M', N, N' lần lượt có tọa độ $M(a, b), M'(a, -b), N(4a - 3b, 3a + 4b), N'(4a - 3b, -3a - 4b)$. Vì M, M', N, N' lần lượt là 4 đỉnh của một hình chữ nhật nên có 2 trường hợp xảy ra.

- Trường hợp 1: Tứ giác $MM'N'N$ là hình chữ nhật.
- Trường hợp 2: Tứ giác $MM'NN'$ là hình chữ nhật.

Ta có $P = |z + 4i - 5| = |z - (5 - 4i)|$. Đặt $K(5; -4)$. Khi đó $P = |MK|$.
Gọi I là giao điểm của hai đường chéo của hình chữ nhật.
Vì M đối xứng với M' qua trục Ox, N đối xứng với N' qua trục Ox nên I thuộc trục Ox hay điểm I có tung độ bằng 0.
Trường hợp 1: Tứ giác $MM'N'N$ là hình chữ nhật.
Tung độ của điểm I bằng 0 nên $-3a - 3b = 0 \Leftrightarrow a + b = 0$.
Do đó điểm M thuộc đường thẳng $d_1\colon x + y = 0$.
Đoạn MK ngắn nhất có độ dài bằng khoảng cách từ điểm K đến đường thẳng d_1 và bằng

$$\frac{|5 \cdot 1 - 4 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

.
Trường hợp 2: Tứ giác $MM'NN'$ là hình chữ nhật.
Tương tự trường hợp 1, ta được điểm M thuộc đường thẳng $d_2\colon 3x + 5y = 0$. Đoạn thẳng MK ngắn nhất có độ dài là $\dfrac{|3 \cdot 5 + 5 \cdot (-4)|}{\sqrt{3^2 + 5^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{34}}$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z + 4i - 5| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Chọn đáp án B □

Câu 43. Cho hàm số $y = \dfrac{x}{1-x}$ có đồ thị (C) và điểm $A(-1; 1)$. Tìm m để đường thẳng $d : y = mx - m - 1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $AM^2 + AN^2$ nhỏ nhất.

A $m = -2$. **B** $m = -1$. **C** $m = 1$. **D** $m = -3$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa (C) và d là

$$\frac{x}{1-x} = mx - m - 1 \Leftrightarrow mx^2 - 2mx + m + 1 = 0. \qquad (*)$$

Để (C) cắt đường thẳng d tại 2 điểm phân biệt thì $(*)$ có hai nghiệm phân biệt.
$\Delta' = -m$. Để $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt thì $m < 0$.

Gọi x_1, x_2 lần lượt là 2 nghiệm của phương trình $(*)$. Khi đó $x_1 + x_2 = 2; x_1 \cdot x_2 = 1 + \dfrac{1}{m}$.
Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ lần lượt là giao điểm của (C) và d. Ta có $\overrightarrow{AM} = (x_1 + 1; y_1 - 1), \overrightarrow{AN} = (x_2 + 1; y_2 - 1)$.

$$\begin{aligned} P = AM^2 + AN^2 &= (x_1+1)^2 + (y_1-1)^2 + (x_2+1)^2 + (y_2-1)^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2) + 2(x_1 + x_2) + 2 + (y_1^2 + y_2^2) - 2(y_1 - y_2) + 2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2^2) + +2(x_1 + x_2) - 2(y_1 - y_2) + 2 - 2(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) \\ &= (x_1 + x_2 + 1)^2 + (y_1 + y_2 - 1)^2 + 2 - 2(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2). \end{aligned}$$

Thay

$$x_1 + x_2 = 2; y_1 + y_2 = -2; x_1 \cdot x_2 = 1 + \frac{1}{m}; y_1 \cdot y_2 = \frac{x_1 \cdot x_2}{(1 - x_1)(1 - x_2)}.$$

Ta được

$$\begin{aligned} P &= (2+1)^2 + (-2-1)^2 - 2x_1x_2\left(1 + \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)}\right) \\ &= 20 - 2\left(1 + \frac{1}{m}\right)\left(1 + \frac{1}{1 - 2 + 1 + \dfrac{1}{m}}\right) \\ &= 20 - 2\left(1 + \frac{1}{m}\right)(1 + m) \\ &= 20 - 2\left(m + \frac{1}{m} + 2\right) = 16 - 2\left(m + \frac{1}{m}\right). \end{aligned}$$

Đặt

$$f(m) = 16 - 2 \cdot \left(m + \frac{1}{m}\right) \Rightarrow f'(m) = -2 + \frac{2}{m^2}; f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Xét $f(m)$ trên $(-\infty; 0)$.
Bảng biến thiên:

m	$-\infty$		-1		0
$f'(m)$		$-$	0	$+$	
$f(m)$	$+\infty$		16		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, $f(m)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $m = -1$.
Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho hai số thực a, b thỏa mãn các điều kiện $a^2 + b^2 > 1$ và $\log_{a^2+b^2}(a + b) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2a + 4b - 3$ là

A $\sqrt{10}$. **B** $2\sqrt{10}$. **C** $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **D** $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Lời giải.

Do $a^2+b^2>1$ nên

$$\log_{a^2+b^2}(a+b)\geq 1 \Leftrightarrow a+b\geq a^2+b^2 \Leftrightarrow \left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\leq\frac{1}{2}.$$

Gọi

$$(C)\colon\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Ta có

$$P=2a+4b-3\Leftrightarrow 2a+4b-3-P=0.$$

Đặt $\Delta_P\colon 2x+4y-3-P=0$. Để P đạt giá trị lớn nhất thì Δ_P tiếp xúc với (C).
Ta có

$$d(I,\Delta_P)=\frac{|2x_0+4y_0-3-P|}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow|-P|=\sqrt{10}.$$

Vậy P lớn nhất bằng $\sqrt{10}$.
Chọn đáp án A □

Câu 45. Một xưởng in có 8 máy in, mỗi máy in được 4000 bản in khổ giấy $A4$ trong một giờ. Chi phí để bảo trì, vận hành một máy in trong mỗi lần in là 50 nghìn đồng. Chi phí in ấn của n máy chạy trong một giờ là $20(3n+5)$ nghìn đồng. Hỏi nếu in 50000 bản in khổ $A4$ thì phải sử dụng bao nhiêu máy để thu được lãi nhiều nhất?

A 7 máy. B 6 máy. C 5 máy. D 4 máy.

Lời giải.
Gọi n là số máy mà xưởng sử dụng với $1\leq n\leq 8$. Chi phí bảo trì, vận hành n máy là $50n$ (nghìn đồng).
Số giờ mà n máy phải chạy để in được 50000 bản là $\dfrac{50000}{4000n}$.
Chi phí in ấn của n máy để in hết 50000 bản là $20\cdot(3n+5)\cdot\dfrac{50000}{4000n}$ (nghìn đồng).
Tổng chi phí mà xưởng sử dụng để in hết 50000 bản là

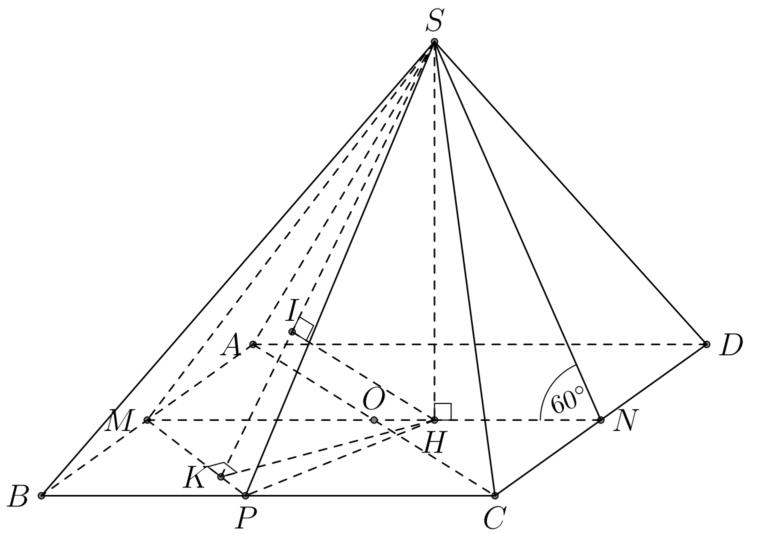
$$f(n)=50n+20\cdot(3n+5)\cdot\frac{50000}{4000n}=50n+750+\frac{1250}{n}.$$

Ta có $f'(n)=50-\dfrac{1250}{n^2}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow n=\pm 5$.
Ta có $f(1)=2050$; $f(5)=1250$; $f(8)=1306,25$.
Vậy chi phí nhỏ nhất để in 50000 khổ $A4$ là khi xưởng sử dụng 5 máy.
Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB đều, góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng $60°$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ nằm trong hình vuông $ABCD$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC.

A $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. B $\dfrac{5a\sqrt{3}}{3}$. C $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. D $\dfrac{2a\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của S lên $(ABCD)$, vì $SA = SB$ nên $HA = HB$. Do đó H nằm trên đường trung trực của AB, mà M là trung điểm AB suy ra MH là trung trực của AB. Gọi $N = MH \cap CD$ suy ra N là trung điểm của CD.

Xét ΔSMN ta có $SM = a\sqrt{3}, MN = 2a, \widehat{SNM} = 60^\circ$. Áp dụng định lí sin ta được

$$\frac{MN}{\sin(\widehat{MSN})} = \frac{SM}{\sin(\widehat{SNM})} \Rightarrow \sin(\widehat{MSN}) = 1 \Rightarrow \widehat{MSN} = 90^\circ.$$

Vậy ΔSMH vuông tại S và SH là đường cao. Suy ra

$$MH \cdot MN = MS^2 \Rightarrow MH = \frac{MS^2}{MN} = \frac{\left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2a} = \frac{3}{4} \cdot 2a \Rightarrow MH = \frac{3}{4} \cdot MN. \quad (1)$$

Gọi P là trung điểm của BC, suy ra $MP \perp BD$. (2)

Gọi K là điểm thuộc MP sao cho $MK = \dfrac{3}{4} \cdot MP$. (3)

Từ (1) và (3), áp dụng định lí Talet cho tam giác MNP, suy ra $HK \parallel PN \parallel BD$. (4)

Từ (2) và (4), suy ra $HK \perp MP$.

Gọi I là hình chiếu của H lên SK, suy ra $IH \perp (SMP)$. Ta lại có

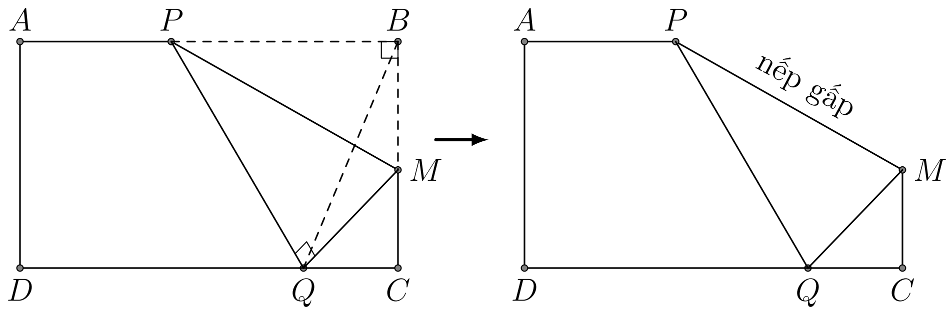
$$SH = HN \tan 60^\circ = \frac{1}{4} MN \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ và } HK = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} BD = \frac{3a}{2\sqrt{5}}.$$

Vì $AC \parallel MP \Rightarrow AC \parallel (SMP)$ nên

$$d(AC, SM) = d(AC, (SMP)) = d(O, (SMP)) = \frac{2}{3} d(H, (SMP)) = \frac{2}{3} IH = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho một tờ giấy hình chữ nhật $ABCD$ với chiều dài $AB = 9$(cm) và chiều rộng $BC = 6$(cm). Gấp tờ giấy một lần sao cho khi gấp ta được đỉnh B nằm trên cạnh CD (xem hình sau).



Để độ dài nếp gấp PM là nhỏ nhất thì giá trị nhỏ nhất đó bằng bao nhiêu?

A $PM = \dfrac{9}{2}$(cm).

B $PM = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$(cm).

C $PM = \dfrac{9(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{2}$(cm).

D $PM = \dfrac{27-9\sqrt{5}}{2}$(cm).

Lời giải.

Đặt $PB = x, BM = MQ = y$ với $0 < x < 9$ và $0 < y < 6$. Suy ra

$$MC = 6 - y, QC = \sqrt{12y - 36}, QB = \sqrt{12y}.$$

Ta chứng minh được $PM \perp BQ$ nên suy ra

$$PM = \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \cdot \frac{xy}{\sqrt{12y}} = \frac{xy}{\sqrt{3y}} \Rightarrow x^2 = \frac{3y^2}{y-3}.$$

Khi đó

$$PM = \sqrt{\frac{3y^2}{y-3} + y^2} = \sqrt{\frac{y^3}{y-3}} = \sqrt{f(y)}.$$

Xét hàm số $f(y) = \dfrac{y^3}{y-3}$ với $3 < y < 6$. Ta có

$$f'(y) = \frac{y^2(2y-9)}{(y-3)^2} \Rightarrow f'(y) = 0 \Rightarrow y = \frac{9}{2} \in (3; 6).$$

Bảng biến thiên

y	3		$\frac{9}{2}$		6
$f'(y)$		$-$	0	$+$	
$f(y)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{243}{4}$	$\nearrow$	72

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(y)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{243}{4}$ khi $y = \dfrac{9}{2}$.

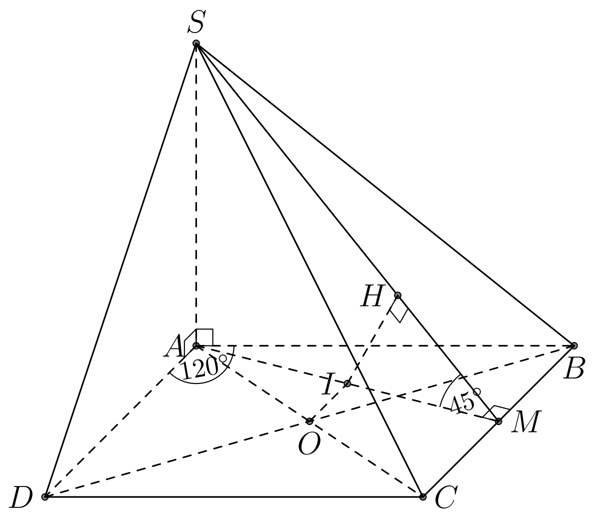
Do đó PM đạt giá trị nhỏ nhất $\sqrt{\dfrac{243}{4}} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh $AB = 2a\sqrt{3}$, góc $\widehat{BAD}$ bằng $120°$. Hai mặt phẳng SAB và SAD cùng vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng $45°$. Tính khoảng cách h từ O đến mặt phẳng (SBC).

(A) $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (B) $h=\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$. (C) $h=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. (D) $h=3a$.

Lời giải.



Vì $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAD)\perp(ABCD)\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABCD)$. Từ giả thiết ta suy ra ΔABC đều và ΔSBC cân tại S. Gọi M là trung điểm của BC. Ta có $AM\perp BC$ và $SM\perp BC$ do đó $((SBC),(ABCD))=\widehat{SMA}=45^\circ$.

Gọi I là trung điểm của AM suy ra $OI\parallel BC\Rightarrow OI\parallel(SBC)$. Do đó $d\left(O,(SBC)\right)=d\left(I,(SBC)\right)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên SM, ta có $d\left(I,(SBC)\right)=IH$.

Vì ΔABC đều và ΔSAM vuông cân nên $AM=SA=\dfrac{2a\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}=3a\Rightarrow SM=3a\sqrt{2}$.

Vì $\Delta HIM\sim\Delta SAM$ nên $IH=\dfrac{IM\cdot SA}{SM}=\dfrac{\frac{1}{2}3a\cdot 3a}{3a\sqrt{2}}=\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $f(0)=0$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}$ và $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}$. Tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 1. (B) $\dfrac{\pi}{4}$. (C) 2. (D) $\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Xét $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}$, đặt $\begin{cases}u=f(x)\\\mathrm{d}v=\sin x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\,\mathrm{d}x\\v=-\cos x\end{cases}$.

Ta có $I=-f(x)\cdot\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}$.

Suy ra $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}-2\cos x\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x=-\dfrac{\pi}{2}$, theo giả thiết $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}$, mặt khác $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}$.

Do đó $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}[f'(x)-\cos x]^2\,\mathrm{d}x=0\Rightarrow f'(x)=\cos x\Rightarrow f(x)=\sin x+C$ vì $f(0)=0\Rightarrow f(x)=\sin x$.

Vậy $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua điểm $M(1;6;4)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C (khác gốc tọa độ) sao cho $OA = OB = OC$.

(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và cắt các trục tọa độ tại $A(a;0;0), B(0;b;0)$ và $C(0;0;c)$ với $a^2+b^2+c^2 \neq 0$. Khi đó phương trình $(\alpha)\colon \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Vì $OA = OB = OC$ nên $|a| = |b| = |c| \Leftrightarrow \begin{cases} |a| = |b| \\ |b| = |c| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -b \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} b = c \\ b = -c \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = c \\ a = b = -c \\ a = -b = -c \\ a = -b = c \end{array}\right.$.

- Với $a = b = c$ ta có $(\alpha)\colon \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}+\dfrac{z}{a}=1 \Leftrightarrow x+y+z-a=0$. Vì (α) đi qua $M(1;6;4)$ nên $1+6+4-a=0 \Rightarrow a=11$.
  Vậy $(\alpha)\colon x+y+z-11=0$.
  Tương tự ba trường hợp còn lại.
- Với $a = b = -c$ ta có $(\alpha)\colon x+y-z-3=0$
- Với $a = -b = -c$ ta có $(\alpha)\colon x-y-z+9=0$
- Với $a = -b = c$ ta có $(\alpha)\colon x-y+z+1=0$
  Vậy có 4 mặt phẳng thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (D) □

——— HẾT ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. A	3. A	4. D	5. D	6. C	7. D	8. D	9. D	10. D
11. D	12. A	13. C	14. C	15. C	16. C	17. C	18. D	19. B	20. A
21. D	22. D	23. A	24. D	25. D	26. B	27. A	28. A	29. D	30. D
31. C	32. D	33. D	34. C	35. B	36. C	37. B	38. B	39. A	40. D
41. C	42. B	43. B	44. A	45. C	46. A	47. B	48. B	49. A	50. D

119 ĐỀ THI THỬ SỞ GIÁO DỤC BÀ RỊA VŨNG TÀU - LẦN 2 - 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng

(A) $y = -1$. **(B)** $y = 2$. (C) $y = \dfrac{1}{2}$. (D) $y = 1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x-1}{x+1} = 2$, suy ra $y = 2$ là tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+4}$ là

(A) $(0; 4)$. **(B)** $(-\infty; 4)$. (C) $(0; 16)$. (D) $(4; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $2^{2x} < 2^{x+4} \Leftrightarrow 2x < x + 4 \Leftrightarrow x < 4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Cho a là số thực dương khác 1. Tính $I = \log_a \sqrt[3]{a}$.

(A) $I = \dfrac{1}{3}$. (B) $I = 3$. (C) $I = 0$. (D) $I = -3$.

Lời giải.

Ta có $I = \log_a \sqrt[3]{a} = \log_a a^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm $M(3; -2)$ là điểm biểu diễn cho số phức nào sau đây?

(A) $z = 2 - 3i$. (B) $z = 2 + 3i$. **(C)** $z = 3 - 2i$. (D) $z = -3 + 2i$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm $M(3; -2)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z = 3 - 2i$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ là

(A) $(0; 1)$. (B) $(2; -3)$. (C) $(1; -1)$. (D) $(3; 1)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ là $(0; 1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(5; 3; -1)$ và $B(1; -1; 9)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn AB là

A $I(3; 1; 4)$. **B** $I(2; 2; -5)$. **C** $I(2; 6; -10)$. **D** $I(-1; -3; -5)$.

Lời giải.

Tọa độ trung điểm I của đoạn AB là $\begin{cases} x_I = \dfrac{5+1}{2} = 3 \\ y_I = \dfrac{3-1}{2} = 1 \\ z_I = \dfrac{-1+9}{2} = 4. \end{cases}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{u} = (1; 3; 1)$, đường thẳng nào dưới đây nhận $\vec{u}$ là véc-tơ chỉ phương?

A $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 3t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 2 - 4t \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 3t \\ z = -4 + t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 5t \\ z = -4 - 3t \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 3t \\ z = -4 + t \end{cases}$ nhận $\vec{u}$ làm véc-tơ chỉ phương.

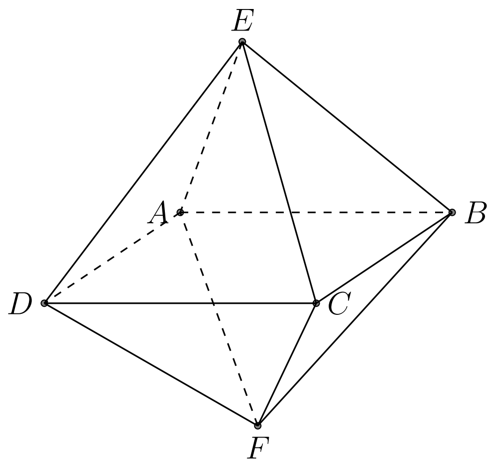
Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Hình bát diện đều có bao nhiêu cạnh?

A 8. **B** 9. **C** 11. **D** 12.

Lời giải.

Hình bát diện đều có 12 cạnh.



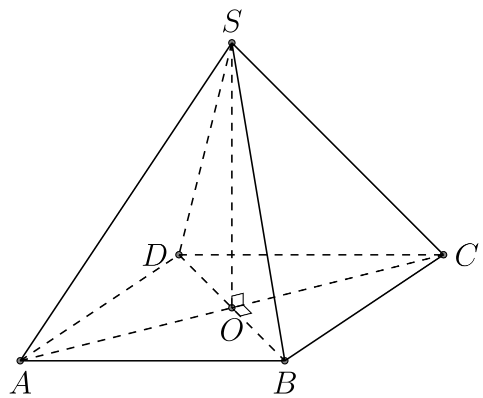
Chọn đáp án D ☐

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA = SC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.
B. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.
C. Mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.
D. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$.
Tứ giác $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$ (1).
Mặt khác tam giác SAC cân tại S nên $SO \perp AC$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $AC \perp (SBD)$ nên $(SBD) \perp (ABCD)$.



Chọn đáp án A ☐

Câu 10. Một hình trụ có bán kính đường tròn đáy $r = 50$ cm và có chiều cao $h = 50$ cm. Diện tích xung quanh của hình trụ bằng

A. 2500π cm^2. B. $5000\pi\pi$ cm^2. C. 2500π cm^2. D. 5000π cm^2.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ bằng $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi \cdot 50 \cdot 50 = 5000\pi\pi$ cm^2.

Chọn đáp án B ☐

Câu 11. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

A. $u_n = 3^n$. B. $u_n = 3^{n+1}$. C. $u_n = 3^{n-1}$. D. $u_n = n^{n+1}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 3$.
Do đó dãy số (u_n) là một cấp số nhân với công bội $q = 3$.
Vậy số hạng tổng quát của cấp số nhân là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$.
Chọn đáp án A □

Câu 12. Hàm số $F(x) = x^2 + \sin x$ là một nguyên hàm của hàm số

A $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \cos x$. **B** $f(x) = 2x + \cos x$.
C $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \cos x$. D $f(x) = 2x - \cos x$.

Lời giải.
$F(x)$ là nguyên hàm của $f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$.
Ta có $F'(x) = 2x + \cos x$.
Vậy hàm số $F(x) = x^2 + \sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \cos x$.
Chọn đáp án B □

Câu 13. Tích phân $I = \displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + 2\right) \mathrm{d}x$ bằng

A $I = \ln 2 + 2$. B $I = \ln 2 + 1$. C $I = \ln 2 - 1$. D $I = \ln 2 + 3$.

Lời giải.
Ta có $I = \displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + 2\right) \mathrm{d}x = \left(\ln|x| + 2x\right)\Big|_1^2 = \ln 2 + 4 - 2 = \ln 2 + 2$.
Chọn đáp án A □

Câu 14. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(3;4;2)$, $B(5;-1;0)$ và $C(2;5;1)$. Mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C có phương trình

A $7x + 4y - 3z - 31 = 0$. B $x + y + z - 9 = 0$.
C $7x + 4y - 3z + 31 = 0$. D $x + y + z - 8 = 0$.

Lời giải.
Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2;-5;-2)$; $\overrightarrow{AC} = (-1;1;-1)$.
Mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C nhận véc-tơ $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (7;4;-3)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên có phương trình $7x + 4y - 3z - 31 = 0$.
Chọn đáp án A □

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x + 2y - 3z - 12 = 0$ và đường thẳng d có phương trình $d\colon \dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y+10}{4} = \dfrac{z-4}{-2}$. Toạ độ giao điểm M của đường thẳng d với mặt phẳng (P) là

A $M(2;2;-2)$. B $M(-7;-10;4)$. C $M(1;2;-3)$. D $M(2;-1;-3)$.

Lời giải.
Toạ của d và (P) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x=-7+3t & (1)\\ y=-10+4t & (2)\\ z=4-2t & (3)\\ x+2y-3z-12=0 & (4)\end{cases}$$
Thay (1), (2), (3) vào (4) ta được $t=3$.

Vậy $M(2;2;-2)$ là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P).

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Thiết diện qua trục của một hình trụ là hình vuông có cạnh là $2a$. Thể tích khối trụ được tạo nên bởi hình trụ này là

A $2\pi a^3$. (B) $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. (C) $8\pi a^3$. (D) $\dfrac{8\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Ta có $R=a$, $h=2a$ nên thể tích khối trụ được tạo nên bởi hình trụ này là

$V=\pi R^2 h=\pi\cdot a^2\cdot 2a=2\pi a^3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Số nghiệm của phương trình $2^{2x^2-5x+3}=1$ là

(A) 3. B 2. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $2^{2x^2-5x+3}=1=2^0\Leftrightarrow 2x^2-5x+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x=1\\&x=\dfrac{3}{2}.\end{aligned}\right.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Đạo hàm của hàm số $y=\mathrm{e}^{x^2-x}$ là

A $(2x-1)\mathrm{e}^{x^2-x}$. (B) $(x^2-x)\mathrm{e}^{2x-1}$. (C) $(2x-1)\mathrm{e}^{2x-1}$. (D) $(2x-1)\mathrm{e}^{x}$.

Lời giải.

Ta có $\left(\mathrm{e}^{x^2-x}\right)'=(x^2-x)'\cdot\mathrm{e}^{x^2-x}=(2x-1)\mathrm{e}^{x^2-x}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ là nghiệm của phương trình $(1+2i)z-8-i=0$. Tính $S=a+b$.

A $S=-1$. (B) $S=1$. (C) $S=-5$. (D) $S=5$.

Lời giải.

Vì $(1+2i)z-8-i=0\Leftrightarrow z=\dfrac{8+i}{1+2i}=\dfrac{(8+i)(1-2i)}{1+4}=\dfrac{10-15i}{5}=2-3i$ nên $\begin{cases}a=2\\b=-3.\end{cases}$.

Vậy $S=a+b=-1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Cho hình (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$, $x=2$. Quay hình (H) quanh trục hoành ta được vật thể có thể tích bằng

(A) $\dfrac{9\pi}{2}$. (B) $\dfrac{7\pi}{3}$. (C) $\dfrac{5\pi}{31}$. D $\dfrac{31\pi}{5}$.

Lời giải.

Ta có thể tích cần tính là $V = \pi \int\limits_1^2 (x^2)^2 \, dx = \pi \int\limits_1^2 x^4 \, dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} \right) \Big|_1^2 = \frac{\pi}{5}(32-1) = \frac{31\pi}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{4x}{x+1} - x$ trên đoạn $[0;4]$ là

A 0. B 1. C 2. D $\frac{4}{5}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \frac{4}{(x+1)^2} - 1$; $\frac{4}{(x+1)^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=2 \\ x+1=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \in [0;4] \\ x=-3 \notin [0;4]. \end{array}\right.$.

$f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(4) = -\frac{4}{5}$. Vậy $\max\limits_{[0;4]} f(x) = f(1) = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Tập hợp tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + (m+6)x - m$ có điểm cực trị là

A $(-\infty; -3) \cup (6; +\infty)$. B $(-\infty; -6) \cup (3; +\infty)$.

C $(-\infty; -3] \cup [6; +\infty)$. D $(-\infty; -6] \cup [3; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 2mx + m + 6 = 0$.

Hàm số $y = x^3 - mx^2 + (m+6)x - m$ có điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 3(m+6) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 18 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 6. \end{array}\right.$

Chọn đáp án A □

Câu 23. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}$ là

A 1. B 2. C 3. D 4.

Lời giải.

Điều kiện $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$. Do vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Xét $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x+1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}} = +\infty$. Nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.

Xét $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{x \to (-1)^+} \frac{x+1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \lim\limits_{x \to (-1)^+} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}} = 0$. Suy ra đường thẳng $x = -1$ không là tiệm cận của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Phương trình $x^4 - 4x^2 + m - 3 = 0$ (m là tham số) có đúng bốn nghiệm khi và chỉ khi

A $m < 7$. B $m \leqslant 7$. C $m < 3$. D $3 < m < 7$.

Lời giải.

Ta có $x^4 - 4x^2 + m - 3 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - 3 = -m$.

Số nghiệm của phương trình $x^4 - 4x^2 - 3 = -m$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 3$ và đường thẳng $y = -m$.

Xét hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 3$ có $y' = 4x^3 - 8x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-7	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-7	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình có 4 nghiệm thì $-7 < -m < -3 \Leftrightarrow 3 < m < 7$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $(2 - 3x)^{15}$.

A. $-\mathrm{C}_{15}^{8} \cdot 2^8 \cdot 3^7 \cdot x^7$. B. $\mathrm{C}_{15}^{7} \cdot 2^8 \cdot 3^7$. C. $-\mathrm{C}_{15}^{7} \cdot 2^8 \cdot 3^7$. D. $-\mathrm{C}_{15}^{8} \cdot 2^8 \cdot 3$.

Lời giải.

Ta có $(2-3x)^{15} = \sum\limits_{k=0}^{15} \mathrm{C}_{15}^{k} \cdot 2^{15-k} \cdot (-3x)^k = \sum\limits_{k=0}^{15} \mathrm{C}_{15}^{k} \cdot 2^{15-k} \cdot (-3)^k \cdot x^k$.

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi $k = 7$ nên hệ số cần tìm là $-\mathrm{C}_{15}^{7} \cdot 2^8 \cdot 3^7$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có 9 chữ số đôi một khác nhau được lập từ X. Chọn ngẫu nhiên 1 số từ tập hợp A. Xác suất để số lấy được có 2 chữ số 1 và 2 và đồng thời 1; 2 đứng cạnh nhau là

A. $\dfrac{1}{72}$. B. $\dfrac{1}{36}$. C. $\dfrac{2}{9}$. D. $\dfrac{1}{9}$.

Lời giải.

Số các số tự nhiên có 9 chữ số đôi một khác nhau được lập từ X là $9! \Rightarrow$ số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 9!$.

Gọi B : "Số lấy được có 2 chữ số 1 và 2 và đồng thời 1; 2 đứng cạnh nhau".

Ta ghép hai số 1 và 2 thành một cặp, do vai trò của hai số như nhau nên ta có 2 cách ghép là 12 và 21.

Số các số tự nhiên có có 9 chữ số đôi một khác nhau mà hai số 1 và 2 đứng cạnh nhau là $2 \cdot 8! \Rightarrow n(B) = 2 \cdot 8!$.

Vậy xác suất của biến cố B là $\mathrm{P}(B) = \dfrac{2 \cdot 8!}{9!} = \dfrac{2}{9}$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1\colon \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-6}{-2} = \dfrac{z+2}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+2}{-2}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và (P) song song với đường thẳng d_2 là

A. $(P)\colon x + 5y + 8z - 16 = 0$. B. $(P)\colon x + 5y + 8z + 16 = 0$.

C $(P)\colon x+4y+6z-12=0$. **D** $(P)\colon 2x+y-6=0$.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 đi qua $A(2;6;-2)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(2;-2;1)$.

Đường thẳng d_2 có một véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(1;3;-2)$.

Gọi $\overrightarrow{n}$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P). Do mặt phẳng (P) chứa d_1 và (P) song song với đường thẳng d_2 nên $\overrightarrow{n}=[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]=(1;5;8)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(2;6;-2)$ và có một véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}=(1;5;8)$ là $x+5y+8z-16=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y+z-12=0$ và hai điểm $A(5;10;21)$, $B(1;3;16)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm A đồng thời vuông góc với mặt phẳng (P). Khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng Δ bằng

A 3. **B** 4. **C** 13. **D** 9.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}=(2;2;1)$.

Vì đường thẳng Δ là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) nên Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}=(2;2;1)\Rightarrow$ phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases}x=5+2t\\ y=10+2t\ (t\in\mathbb{R}).\\ z=21+t.\end{cases}$

Khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng Δ là $\mathrm{d}\left(B,\Delta\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|}$,với $\overrightarrow{AB}=(-4;-7;-5)$, $\overrightarrow{u}=(2;2;1)$.

Vậy $\mathrm{d}\left(B,\Delta\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|}=3$.

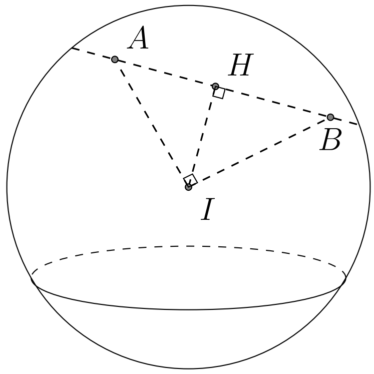
Chọn đáp án A □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z-1}{2}$ và điểm $I(1;-2;5)$. Lập phương trình mặt cầu (S) tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I.

A $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(x-5)^2=40$. **B** $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(x-5)^2=49$.

C $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(x-5)^2=69$. **D** $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(x-5)^2=64$.

Lời giải.



Đường thẳng d đi qua $M(2;0;1)$ và có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;6;2)$.

Gọi H là hình chiếu của I trên đường thẳng d ta có $IH=\mathrm{d}(I,d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$, với $\overrightarrow{IM}=(1;2;-4)$, $\vec{u}=(3;6;2)$.

Suy ra $IH=\mathrm{d}(I,d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\sqrt{20}$.

Theo đề bài ta có tam giác IAB vuông cân tại I nên $IA=IH\sqrt{2}=\sqrt{40}$.

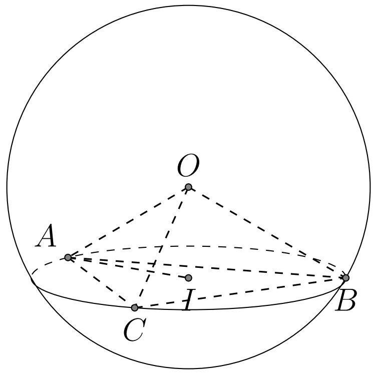
Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2+(y+2)^2+(x-5)^2=40$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Cho mặt cầu (S) tâm O và các điểm A, B, C nằm trên mặt cầu (S) sao cho $AB=AC=6$, $BC=8$. Khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (ABC) bằng 2. Diện tích mặt cầu (S) bằng

(A) $\dfrac{404\pi\sqrt{505}}{75}$. (B) $\dfrac{2196\pi}{75}$. (C) $\dfrac{404\pi}{5}$. (D) $\dfrac{324\pi}{5}$.

Lời giải.



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, do A, B, C nằm trên mặt cầu (S) nên $OI\perp(ABC)$. Theo đề bài ta có khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (ABC) bằng 2 hay $OI=2$.

Gọi M là trung điểm của BC, do tam giác ABC cân tại A nên $AM\perp BC\Rightarrow AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=\sqrt{20}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AM\cdot BC=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{20}\cdot 8=8\sqrt{5}$.

Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta có $r=\dfrac{AB\cdot BC\cdot CA}{4S_{\triangle ABC}}=\dfrac{6\cdot 6\cdot 8}{4\cdot 8\sqrt{5}}=\dfrac{9}{\sqrt{5}}$.

Xét tam giác vuông OIA ta có $OA^2=OI^2+IA^2=4+\dfrac{81}{5}=\dfrac{101}{5}$.

Vậy diện tích mặt cầu (S) là $S=4\pi R^2=4\pi\cdot OA^2=4\pi\cdot\dfrac{101}{5}=\dfrac{404\pi}{5}$.

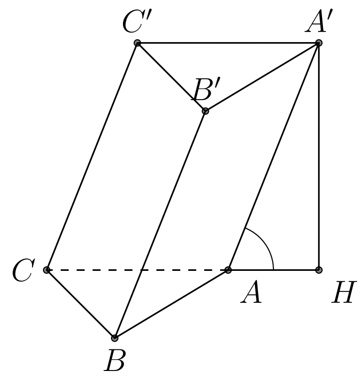
Chọn đáp án (C) □

Câu 31. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB=a\sqrt{5}$, $BC=3a$. Cạnh bên $AA'=a\sqrt{3}$ và tạo với mặt phẳng đáy một góc 60°. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

(A) $\dfrac{3a^3\sqrt{10}}{2}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. (C) $\dfrac{3a^3\sqrt{5}}{2}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Kẻ $A'H \perp (ABC)$ tại $H \Rightarrow \widehat{(A'A;(ABC))} = \widehat{A'AH} = 60^\circ$
$\Rightarrow \sin 60^\circ = \dfrac{A'H}{A'A} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'H = \dfrac{\sqrt{3}}{2}A'A = \dfrac{3a}{2}$.
Cạnh $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 2a \Rightarrow V = A'H \cdot S_{ABC} = A'H.\dfrac{1}{2}AB \cdot AC = \dfrac{3a}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a\sqrt{5} \cdot 2a = \dfrac{3a^3\sqrt{5}}{2}$.



Chọn đáp án C □

Câu 32. Gọi S là tập hợp tất cả các nghiệm thuộc khoảng $(0;2023)$ của phương trình lượng giác $\sqrt{3}(1-\cos 2x) + \sin 2x - 4\cos x + 8 = 4\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x$. Tổng tất cả các phần tử của S là

A $\dfrac{310408}{3}\pi$. B 102827π. C $\dfrac{312341}{3}\pi$. D 104760π.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{3}(1-\cos 2x) + \sin 2x - 4\cos x + 8 = 4\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x$
$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 4\cos x + 8 = 4\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x$
$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x(\sin x - 2) + 2\cos x(\sin x - 2) = 4(\sin x - 2)$
$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x + 2\cos x = 4$ (vì $\sin x \leqslant 1 < 2$)
$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x + \cos x = 2 \Leftrightarrow \sin x\cos\dfrac{\pi}{6} + \cos x\sin\dfrac{\pi}{6} = 1$
$\Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.
Theo đề bài $x \in (0;2023) \Rightarrow \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \in (0;2023) \Rightarrow 2k + \dfrac{1}{3} \in \left(0;\dfrac{2023}{\pi}\right) \Rightarrow k \in \{0;1;\ldots;321\}$.
Tổng tất cả các phần tử của S là
$322 \cdot \dfrac{\pi}{3} + (0+1+2+\cdots+321)2\pi = 322 \cdot \dfrac{\pi}{3} + 51681 \cdot 2\pi = \dfrac{310408}{3}\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2(x+2) + \log_4(x-5)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0$ bằng

A 6. B 3. C 9. D 12.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x > -2 \\ x \neq 5 \end{cases}$ $(*)$.

Ta có $\log_2(x+2) + \log_2|x-5| - \log_2 8 = 0 \Leftrightarrow \log_2\left[(x+2)|x-5|\right] = \log_2 8$

$$\Leftrightarrow (x+2)|x-5| = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 5 \\ (x+2)(x-5) = 8 \end{cases} \\ \begin{cases} -2 < x < 5 \\ (x+2)(5-x) = 8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \end{array}\right. \text{ thỏa mãn } (*).$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là $6 + \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} + \dfrac{3-\sqrt{17}}{2} = 9$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 3m - 5 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+3)(x_2+3) = 72$ thuộc khoảng nào sau đây?

(A) $\left(-\dfrac{5}{3};0\right)$. (B) $\left(0;\dfrac{5}{3}\right)$. **(C)** $\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{10}{3}\right)$. (D) $\left(\dfrac{10}{3};5\right)$.

Lời giải.

Ta có $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 3m - 5 = 0 \Rightarrow \left(\log_3 x - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{29}{4} - 3m$

$$\Rightarrow \left[\begin{aligned} &\log_3 x - \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{29}{4} - 3m} \\ &\log_3 x - \frac{3}{2} = -\sqrt{\frac{29}{4} - 3m} \end{aligned}\right. \left(\frac{29}{4} - 3m \geqslant 0\right) \Rightarrow \left[\begin{aligned} &x = 3^{\frac{3+\sqrt{29-12m}}{2}} \\ &x = 3^{\frac{3-\sqrt{29-12m}}{2}} \end{aligned}\right..$$

Theo đề bài $(x_1+3)(x_2+3) = 72 \Rightarrow \left(3^{\frac{3+\sqrt{29-12m}}{2}} + 3\right)\left(3^{\frac{3-\sqrt{29-12m}}{2}} + 3\right) = 72$

$\Rightarrow 3^3 + 3\left(3^{\frac{3+\sqrt{29-12m}}{2}} + 3^{\frac{3-\sqrt{29-12m}}{2}}\right) + 9 = 72 \Rightarrow 3^{\frac{3+\sqrt{29-12m}}{2}} + 3^{\frac{3-\sqrt{29-12m}}{2}} = 12.$

Đặt $t = \dfrac{3+\sqrt{29-12m}}{2} \geqslant \dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{3-\sqrt{29-12m}}{2} = 3 - t$

$\Rightarrow 3^t + 3^{3-t} = 12 \Rightarrow (3^t)^2 + 3^3 = 12\cdot 3^t \Rightarrow \left[\begin{aligned} &3^t = 9 \\ &3^t = 3 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} &t = 2 \\ &t = 1 \end{aligned}\right. \Rightarrow t = 2$ vì $t \geqslant \dfrac{3}{2}$.

Với $t = 2 \Rightarrow \dfrac{3+\sqrt{29-12m}}{2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{29-12m} = 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{7}{3}$.

Thử lại ta thấy thỏa mãn, do đó $m = \dfrac{7}{3} \in \left(\dfrac{5}{3};\dfrac{10}{3}\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Cho số phức $z = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $z + 2 - i - |z|(1-i) = 0$. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm M là điểm biểu diễn của số phức z. Hỏi M thuộc đường thẳng nào sau đây?

(A) $x - y + 5 = 0$. (B) $x - y + 2 = 0$. (C) $x + y - 2 = 0$. **(D)** $x + y + 1 = 0$.

Lời giải.

Ta có $z + 2 - i - |z|(1-i) = 0 \Leftrightarrow x + yi + 2 - i - (1-i)\sqrt{x^2+y^2} = 0$

$\Leftrightarrow x + 2 - \sqrt{x^2+y^2} + \left(y - 1 + \sqrt{x^2+y^2}\right)i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 - \sqrt{x^2+y^2} = 0 \\ y - 1 + \sqrt{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow x + 2 - \sqrt{x^2+y^2} + y - 1 + \sqrt{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x + y + 1 = 0.$

Do đó M thuộc đường thẳng $x + y + 1 = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 3i| = \sqrt{5}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $P = |z+i|^2 - |z-2|^2$. Tính $A = m + M$.

(A) $A = -3$. **(B)** $A = -2$. (C) $A = 5$. (D) $A = 10$.

Lời giải.

Đặt $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thì $|z - 2 + 3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |x + iy - 2 + 3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$.

$P = |z+i|^2 - |z-2|^2 = |x + iy + i|^2 - |x + iy - 2|^2 = x^2 + (y+1)^2 - (x-2)^2 - y^2 = 4x + 2y - 3$.

Đặt $x = 2 + \sqrt{5}\sin t$, $y = -3 + \sqrt{5}\cos t$, $t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow P = 4\left(2 + \sqrt{5}\sin t\right) + 2\left(-3 + \sqrt{5}\cos t\right) - 3 = 4\sqrt{5}\sin t + 2\sqrt{5}\cos t - 1$.

$(P+1)^2 = \left(4\sqrt{5}\sin t + 2\sqrt{5}\cos t\right)^2 \leqslant (80 + 20).1 \Rightarrow -10 \leqslant P + 1 \leqslant 10 \Rightarrow -11 \leqslant P \leqslant 9$.

Vậy $A = -11 + 9 = -2$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho biết $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 2$, $\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = -3$. Giá trị của $M = \int\limits_a^b [5f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $M = 6$. B. $M = 1$. C. $M = 5$. D. $M = 9$.

Lời giải.

$M = \int\limits_a^b [5f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x = 5\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Gọi (H) là hình giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$ và trục hoành. Diện tích của hình (H) bằng

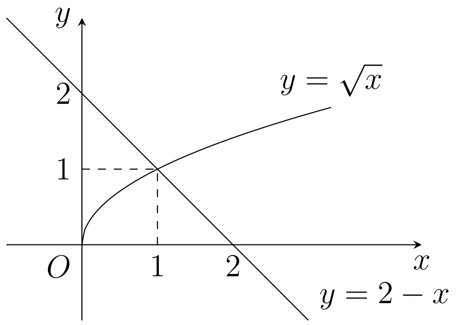
A. $\frac{7}{6}$. B. $\frac{9}{2}$. C. $2 - \frac{4\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{5}{6}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$\sqrt{x} = 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ x = 4 - 4x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy $S = \int\limits_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 (2 - x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$.



Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và thỏa $\int\limits_0^1 (2x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x = 10$, $3f(1) - f(0) = 12$. Tính $I = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 2$. B. $I = 1$. C. $I = -1$. D. $I = -2$.

Lời giải.

Đặt $u = 2x + 1 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = f(x)$.

Ta có $10 = \int\limits_0^1 (2x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x = [(2x+1)f(x)]\Big|_0^1 - 2\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3f(1) - f(0) - 2\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow I = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{12 - 10}{2} = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 10$. Tính $I = \int\limits_{-2}^2 \frac{f(x)}{2^x + 1}\,\mathrm{d}x$.

A $I = 10$. **B** $I = \dfrac{10}{3}$. **C** $I = 20$. **D** $I = 5$.

Lời giải.

Đặt $t = -x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x$. Đổi cận $x = -2 \Rightarrow t = 2$, $x = 2 \Rightarrow t = -2$.

$$I = \int\limits_{-2}^{2} \frac{f(t)}{2^{-t}+1}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-2}^{2} \frac{2^t}{2^t+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-2}^{2} \frac{2^x}{2^x+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow 2I = \int\limits_{-2}^{2} \frac{f(x)}{2^x+1}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-2}^{2} \frac{2^x}{2^x+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + 10$$

Mặt khác do $f(x)$ là hàm số chẵn nên $f(-x) = f(x)$.

Xét $J = \displaystyle\int\limits_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$, đặt $t = -x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow J = \int\limits_{0}^{2} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{2} f(-x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 10 \Rightarrow 2I = 20 \Rightarrow I = 10.$$

Chọn đáp án A □

Câu 41. Cho 100 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 100, chọn ngẫu nhiên 3 tấm thẻ. Xác suất để chọn được 3 tấm thẻ có tổng các số ghi trên thẻ là số chia hết cho 2 là

A $\mathrm{P} = \dfrac{5}{6}$. **B** $\mathrm{P} = \dfrac{1}{2}$. **C** $\mathrm{P} = \dfrac{5}{7}$. **D** $\mathrm{P} = \dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Chọn ngẫu nhiên 3 tấm thẻ từ 100 tấm thẻ có C_{100}^3 (cách chọn).

Để chọn được 3 tấm thẻ có tổng các số ghi trên thẻ là số chia hết cho 2 thì có thể xảy ra các trường hợp sau:

TH1: Cả 3 tấm thẻ được chọn đều ghi số chẵn, có C_{50}^3 (cách chọn).

TH2: Chọn được 2 tấm thẻ ghi số lẻ và 1 tấm thẻ ghi số chẵn, có $\mathrm{C}_{50}^2 \cdot \mathrm{C}_{50}^1$ (cách chọn).

Do đó có tất cả $\mathrm{C}_{50}^3 + \mathrm{C}_{50}^2 \cdot \mathrm{C}_{50}^1$ cách chọn thỏa yêu cầu đề bài.

Xác suất cần tìm là $\mathrm{P} = \dfrac{\mathrm{C}_{50}^3 + \mathrm{C}_{50}^2 \cdot \mathrm{C}_{50}^1}{\mathrm{C}_{100}^3} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Gọi S là tập hợp giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $x^9 + 3x^3 - 9x = m + 3\sqrt[3]{9x+m}$ có đúng hai nghiệm thực. Tích tất cả phần tử của tập S là

A -1. **B** -64. **C** -81. **D** -121.

Lời giải.

Ta có $x^9 + 3x^3 - 9x = m + 3\sqrt[3]{9x+m} \Leftrightarrow (x^3)^3 + 3x^3 = \left(\sqrt[3]{9x+m}\right)^3 + 3\sqrt[3]{9x+m}$ (1).

Hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ nên nó đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác, theo (1) ta có $f(x^3) = f\left(\sqrt[3]{9x+m}\right) \Leftrightarrow x^3 = \sqrt[3]{9x+m}$ hay $m = x^9 - 9x\,(*)$.

Đặt $g(x) = x^9 - 9x$, ta có $g'(x) = 9x^8 - 9$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thực $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có đúng hai nghiệm thực $\Leftrightarrow m = -8$ hoặc $m = 8$. Do đó $S = \{-8; 8\}$. Tích các phần tử của S bằng -64.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị nhận hai điểm $A(1; 3)$ và $B(3; -1)$ làm hai điểm cực trị. Khi đó số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \left|ax^2|x| + bx^2 + c|x| + d\right|$ là

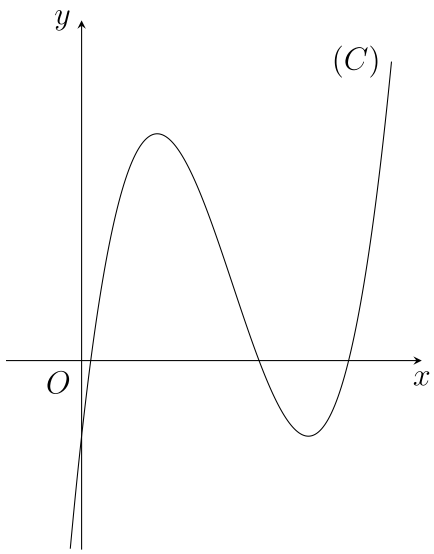
A 5. **B** 7. **C** 9. **D** 11.

Lời giải.

Xét hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Theo giả thiết, ta có hệ phương trình $\begin{cases} y(1) = 3 \\ y'(1) = 0 \\ y(3) = -1 \\ y'(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + d = 3 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 27a + 9b + 3c + d = -1 \\ 27a + 6b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 9 \\ d = -1. \end{cases}$.

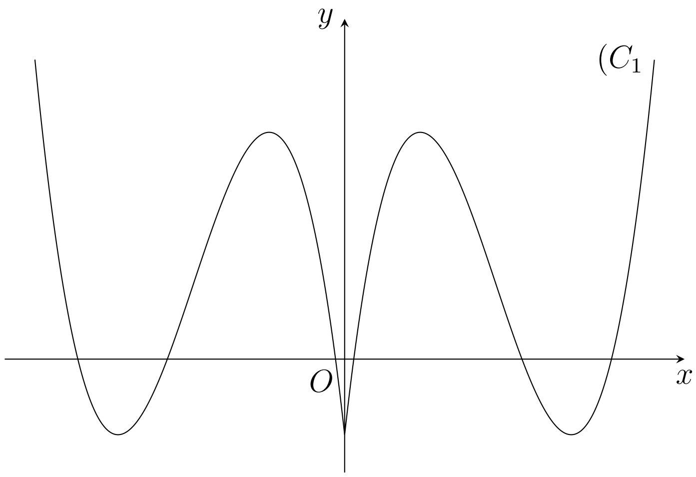
Vậy hàm số đã cho là $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ có đồ thị (C) như sau:



Từ đồ thị (C), ta suy ra đồ thị (C_1) của hàm số $y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x| - 1$ gồm có hai phần:

+ Phần 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C) bên phải trục tung.

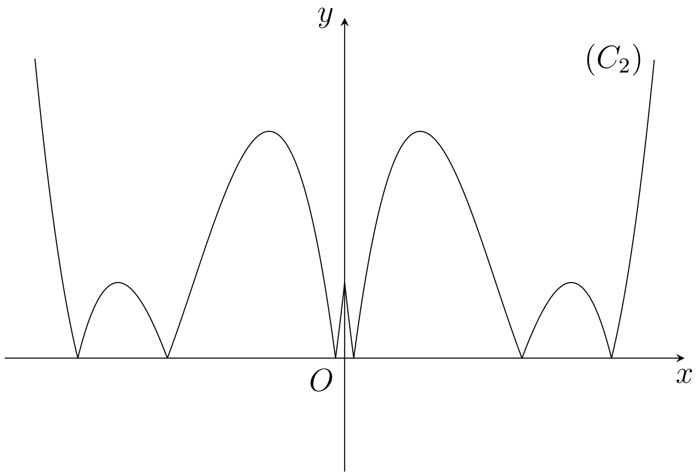
+ Phần 2: Lấy đối xứng của phần 1 qua trục tung



Từ đó suy ra đồ thị (C_2) của hàm số $y = \left||x|^3 - 6x^2 + 9|x| - 1\right|$ gồm có hai phần:

+ Phần 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C_1) phía trên trục hoành.

+ Phần 2: Lấy đối xứng của phần đồ thị (C_1) phía dưới trục hoành qua trục hoành.



Do đó, đồ thị (C_2) có 11 điểm cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, G là trọng tâm tam giác ABC. Góc giữa mặt bên với đáy bằng 60°. Khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SBC) bằng

A $\dfrac{a}{2}$. **B** $\dfrac{a}{4}$. **C** $\dfrac{3a}{4}$. **D** $\dfrac{3a}{2}$.

Lời giải.

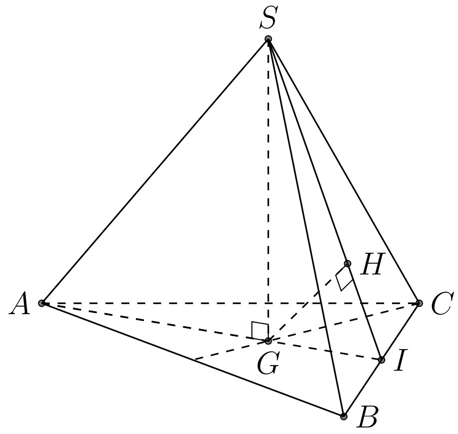
Gọi I là trung điểm BC.

Trong mặt phẳng (SAI), kẻ $GH \perp SI$ (1)

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp GH$ (2).

Từ (1), (2) $\Rightarrow GH \perp (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(G; (SBC)) = GH$.

Có: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SI \perp BC \\ AI \perp BC \end{cases} \Rightarrow ((SBC); (ABC)) = (SI; AI) = \widehat{SIA} = \widehat{SIG} = 60^\circ$.



Ta có $GI = \dfrac{1}{3}AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow GH = GI \sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh $AB = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh AB. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AC và BB'. Tính $\cos\varphi$.

A $\cos\varphi = \dfrac{1}{4}$. **B** $\cos\varphi = \dfrac{1}{3}$. **C** $\cos\varphi = \dfrac{2}{5}$. **D** $\cos\varphi = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

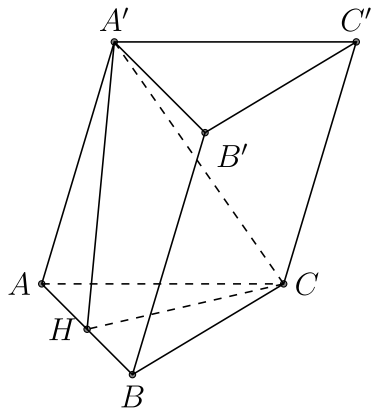
Ta có $A'H \perp (ABC) \Rightarrow AH$ là hình chiếu của AA' lên mặt phẳng (ABC).

$\Rightarrow (AA'; (ABC)) = (AA'; AH) = \widehat{A'AH} = 60^\circ$.

Ta có: $AA' \parallel BB' \Rightarrow (AC; BB') = (AC; AA') = \widehat{A'AC} = \varphi$.

Có $AH = a \Rightarrow A'H = AH \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$; $AA' = \sqrt{AH^2 + A'H^2} = 2a$; $CH = a\sqrt{3} \Rightarrow A'C = a\sqrt{6}$.

Xét $\Delta A'AC$, ta có: $\cos\widehat{A'AC} = \dfrac{AA'^2 + AC^2 - A'C^2}{2AA' \cdot AC} = \dfrac{4a^2 + 4a^2 - 6a^2}{2 \cdot 2a \cdot 2a} = \dfrac{1}{4}$.



Chọn đáp án A □

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$ cho 3 điểm $A(3; 7; 1)$, $B(8; 3; 8)$ và $C(-2; 5; 6)$. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A bán kính bằng 3 và (S_2) là mặt cầu tâm B bán kính bằng 6. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đi qua C và tiếp xúc đồng thời cả hai mặt cầu (S_1), (S_2)?

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 4.

Lời giải.

Ta có $AB = 3\sqrt{10}$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua $C(-2; 5; 6) \Rightarrow (P)\colon A(x+2) + B(y-5) + C(z-6) = 0$ $(A^2 + B^2 + C^2 > 0)$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với hai mặt cầu (S_1), (S_2) nên ta có hệ

$$\begin{cases}\mathrm{d}\left(A,(P)\right)=3\\ \mathrm{d}\left(B,(P)\right)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\left|5A+2B-5C\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=3\\ \dfrac{\left|10A-2B+2C\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|5A+2B-5C\right|=3\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ (1)\\ \left|10A-2B+2C\right|=6\sqrt{A^2+B^2+C^2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left|5A+2B-5C\right|=\left|5A-B+C\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5A+2B-5C=5A-B+C\\ 5A+2B-5C=-5A+B-C\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}B=2C\\ B=-10A+4C.\end{array}\right.$$

Với $B=2C$, thay vào (1): $\left|5A-C\right|=3\sqrt{A^2+5C^2}\Leftrightarrow 16A^2-10AC-44C^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A=2C\\ A=-\dfrac{11}{8}C\end{array}\right.$

• Với $A=2C$, chọn $C=1$, $A=B=2\Rightarrow(P):2x+2y+z-12=0$.

• Với $A=-\dfrac{11}{8}C$, chọn $C=-8$, $A=11$, $B=-16\Rightarrow(P):11x-16y-8z+150=0$.

Với $B=-10A+4C$, thay vào (1) ta được

$$\left|-5A+C\right|=\sqrt{101A^2-80AC+17C^2}\Leftrightarrow -76A^2+70AC-16C^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A=\dfrac{1}{2}C\\ A=\dfrac{8}{19}C.\end{array}\right.$$

• Với $A=\dfrac{1}{2}C$, chọn $C=2$, $A=1$, $B=-2\Rightarrow(P):x-2y+2z=0$.

• Với $A=\dfrac{8}{19}C$, chọn $C=19$, $A=8$, $B=-4\Rightarrow(P):8x-4y+19z-78=0$.

Vậy có 4 mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $(m+1)16^x-2(2m-3)4^x+6m+5=0$ có hai nghiệm trái dấu là khoảng $(a;b)$. Tính $S=a+b$.

A $S=-5$. **B** $S=-\dfrac{29}{6}$. **C** $S=-\dfrac{11}{6}$. **D** $S=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t=4^x(t>0)$. Khi đó

$(m+1)16^x-2(2m-3)4^x+6m+5=0\Leftrightarrow(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5=0$.

Để phương trình $(m+1)16^x-2(2m-3)4^x+6m+5=0$ có hai nghiệm trái dấu thì phương trình $(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5=0$ có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa $0<t_1<1<t_2$.

Ta có $(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5=0\Leftrightarrow m=-\dfrac{t^2+6t+5}{t^2-4t+6}$.

Xét hàm số $f(t)=-\dfrac{t^2+6t+5}{t^2-4t+6}$ trên khoảng $(0;+\infty)$, ta có

$f'(t)=\dfrac{10t^2-2t-56}{(t^2-4t+6)^2}$

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1+\sqrt{561}}{10}>1$.

Ta có bảng biến thiên

t	0		1		$\dfrac{1+\sqrt{561}}{10}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\dfrac{5}{6}$	$\searrow$	-1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-1

Từ đó ta chọn $-4 < m < -1$. Suy ra $\begin{cases} a = -4 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow a + b = -5$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C), điểm M thay đổi thuộc đường thẳng $d : y = 1 - 2x$ sao cho qua M có hai tiếp tuyến của (C) với hai tiếp điểm tương ứng là A, B. Biết rằng đường thẳng AB luôn đi qua điểm cố định là K. Độ dài đoạn thẳng OK là

A. $\sqrt{34}$. B. $\sqrt{10}$. C. $\sqrt{29}$. D. $\sqrt{58}$.

Lời giải.

Vì $M \in d$ nên $M(m; 1 - 2m)$.

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến Δ. Tiếp tuyến Δ đi qua M có dạng $y = k(x - m) + 1 - 2m$.

Vì Δ tiếp xúc với (C) nên hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{x-1} = k(x-m) + 1 - 2m & (1) \\ \dfrac{-4}{(x-1)^2} = k & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Thay (2) vào (1) ta được

$\dfrac{x+3}{x-1} = \dfrac{-4}{(x-1)^2}(x-m) + 1 - 2m \Leftrightarrow \dfrac{x+3}{x-1} = \dfrac{-4}{(x-1)^2}(x - 1 + 1 - m) + 1 - 2m$.

$\Leftrightarrow x + 3 = -4 + (m-1) \cdot \dfrac{4}{x-1} + (1-2m)(x-1)(3)$.

Mặt khác $y = \dfrac{x+3}{x-1} \Leftrightarrow \dfrac{4}{x-1} = y - 1$, thay vào (3) ta được $x + 3 = -4 + (m-1)(y-1) + (1 - 2m)(x-1) \Leftrightarrow 2mx - (m-1)y - m + 7 = 0$.

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $2mx - (m-1)y - m + 7 = 0$.

Gọi $K(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng AB đi qua.

Ta có $2mx_0 - (m-1)y_0 - m + 7 = 0$

$\Leftrightarrow (2x_0 - y_0 - 1)m + y_0 + 7 = 0$.

Vì đẳng thức luôn đúng với mọi m nên ta có $\begin{cases} 2x_0 - y_0 - 1 = 0 \\ y_0 + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = -7 \end{cases} \Rightarrow K(-3; -7)$.

Vậy $OK = \sqrt{58}$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $u_1 = 1$; $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{2}{3}u_n^2 + a}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Biết rằng $\lim(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 - 2n) = b$. Giá trị của biểu thức $T = ab$ là

A. -2. B. -1. C. 1. D. 2.

Lời giải.

Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{2}{3}u_n^2 + a} \Rightarrow u_{n+1}^2 - 3a = \dfrac{2}{3}(u_n^2 - 3a)$.
Đặt $v_n = u_n^2 - 3a$ thì (v_n) là cấp số nhân với $v_1 = 1 - 3a$ và công bội $q = \dfrac{2}{3}$.
Do đó $v_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}(1-3a) \Rightarrow u_n^2 = v_n + 3a = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}(1-3a) + 3a$.
Suy ra $u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 - 2n = (1-3a)\dfrac{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1-\dfrac{2}{3}} - 2n + 3na = 3(1-3a)\left[1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right] - n(3a-2)$.
Vì $\lim(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 - 2n) = b$ nên
$\lim\left[3(1-3a)\left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right) - n(3a-2)\right] = b \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2=0 \\ b = 3(1-3a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{3} \\ b = -3. \end{cases}$
Suy ra $T = ab = -2$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Xét ba số thực a, b, c thay đổi thuộc đoạn $[0;3]$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 4\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right| + (ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2)$ là

(A) 0. (B) $-\dfrac{3}{2}$. **(C)** $\dfrac{81}{4}$. (D) $\dfrac{41}{2}$.

Lời giải.
Đặt $x = a-b$, $y = b-c$, $z = c-a$, không mất tổng quát giả sử $a \geqslant b \geqslant c$.
Do $a, b, c \in [0;3]$ nên $x + y = a - c \leqslant 3$.
Ta có

$$\begin{aligned} T &= -4xyz - \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) \\ &= -4xy(-x-y) - \frac{1}{2}\left[x^2+y^2+(x+y)^2\right] \\ &= 4xy(x+y) - x^2 - y^2 - xy \leqslant 11xy - x^2 - y^2 \leqslant 9xy \leqslant 9\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leqslant \frac{81}{4}. \end{aligned}$$

Khi $\begin{cases} a = 3 \\ b = \dfrac{3}{2} \\ c = 0 \end{cases}$ thì $T = \dfrac{81}{4}$ nên giá trị lớn nhất của T bằng $\dfrac{81}{4}$.
Chọn đáp án (C) □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. B	3. A	4. C	5. A	6. A	7. C	8. D	9. A	10. B
11. A	12. B	13. A	14. A	15. A	16. A	17. B	18. A	19. A	20. D
21. B	22. A	23. A	24. D	25. C	26. C	27. A	28. A	29. A	30. C
31. C	32. A	33. C	34. C	35. D	36. B	37. B	38. A	39. B	40. A
41. B	42. B	43. D	44. B	45. A	46. D	47. A	48. D	49. A	50. C

120 ĐỀ THI THỬ THPT TRẦN ĐẠI NGHĨA - ĐẮK LẮK - 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{2x-5}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$.

(A) $\max\limits_{x\in[0;2]} y = 3$. (B) $\max\limits_{x\in[0;2]} y = 2$. **(C)** $\max\limits_{x\in[0;2]} y = \dfrac{5}{3}$. (D) $\max\limits_{x\in[0;2]} y = 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-1}{(x-3)^2} \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $[0;2] \Rightarrow \max\limits_{x\in[0;2]} y = y(0) = \dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Nghiệm của phương trình $\log_4(x+1) = 3$ là

(A) $x = 66$. **(B)** $x = 63$. (C) $x = 68$. (D) $x = 65$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > -1$, với điều kiện, phương trình $\Leftrightarrow x + 1 = 4^3 = 64 \Leftrightarrow x = 63$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

(A) $\overrightarrow{u_1} = (1;0;4)$. (B) $\overrightarrow{u_4} = (1;-1;4)$. (C) $\overrightarrow{u_3} = (1;-1;5)$. **(D)** $\overrightarrow{u_2} = (2;-1;5)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;-1;5)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 4$ có bao nhiêu cực trị?

(A) 1. (B) 3. (C) 0. **(D)** 2.

Lời giải.

Có $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow$ hàm số có hai cực trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Một hình nón có góc ở đỉnh bằng 60°, đường sinh bằng $2a$, diện tích xung quanh của hình nón là

(A) $S_{\text{xq}} = 2\pi a^2$. (B) $S_{\text{xq}} = \pi a^2$. (C) $S_{\text{xq}} = 3\pi a^2$. (D) $S_{\text{xq}} = 4\pi a^2$.

Lời giải.

Ta có $r = l \cdot \sin 30^\circ = a \Rightarrow S_{\text{xq}} = \pi r \cdot l = 2\pi a^2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$, trong đó z_1 có phần ảo dương. Tìm số phức liên hợp của số phức $z_1 + 2z_2$.

(A) $-3 + 2i$. (B) $3 - 2i$. (C) $2 + i$. (D) $2 - i$.

Lời giải.

Xét phương trình $z^2+2z+5=0 \Leftrightarrow (z+1)^2=-4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=-1+2i \\ z_2=-1-2i \end{array}\right.$

Khi đó $w=z_1+2z_2=-3-2i \Rightarrow$ số phức liên hợp là $\overline{w}=-3+2i$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Cho hàm số $y=\dfrac{4}{3}x^3+2x^2+x-3$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(B) Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$.

(C) Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

(D) Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải.

Xét hàm số ta có $y'=4x^2+4x+1=(2x+1)^2\geq 0 \Rightarrow$ hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Với các số thực x,y dương bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\log_2\left(\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 y}$.

(B) $\log_2\left(x^2-y\right)=2\log_2 x-\log_2 y$.

(C) $\log_2(xy)=\log_2 x\cdot\log_2 y$.

D $\log_2(xy)=\log_2 x+\log_2 y$.

Lời giải.

Ta có công thức $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$ (với điều kiện có nghĩa).

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Cho hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều cạnh a, độ dài cạnh bên là $a\sqrt{2}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là

(A) $a^3\sqrt{2}$.

(B) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

C $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

(D) $a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $V=h\cdot S_{\text{đáy}}=a\sqrt{2}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Tính nguyên hàm $\displaystyle\int\cos 3x\,\mathrm{d}x$.

(A) $-3\sin 3x+c$.

B $\dfrac{1}{3}\sin 3x+c$.

(C) $3\sin 3x+c$.

(D) $-\dfrac{1}{3}\sin 3x+c$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\cos 3x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\sin 3x+c$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Tích phân $I=\displaystyle\int_0^1(x+1)^2\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $\dfrac{8}{3}$.

(B) 4.

C $\dfrac{7}{3}$.

(D) 2.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_0^1 (x+1)^2\, dx = \left.\dfrac{(x+1)^3}{3}\right|_0^1 = \dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;1)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với trục Ox là

A $x+1=0$. **B** $z-1=0$. **C** $x+y+z-3=0$. **D** $y-2=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng vuông góc với trục Ox có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{i} = (1;0;0) \Rightarrow$ phương trình mặt phẳng là $x+1=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Tập xác định của hàm số $y = \log_2(x-1) + \log_2(x-3)$ là

A $\mathscr{D} = (1;3)$. **B** $\mathscr{D} = (-\infty;1)$.

C $\mathscr{D} = (3;+\infty)$. **D** $\mathscr{D} = (-\infty;1) \cup (3;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-1>0 \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>3 \Rightarrow \mathscr{D} = (3;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Trong các hàm số sau, hàm số nào không đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $y = x^3 + x$. **B** $y = 3x^3 - x^2 + 2x - 7$.

C $y = 4x - \dfrac{3}{x}$. **D** $y = 4x - 3\sin x + \cos x$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = 4x - \dfrac{3}{x}$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow$ hàm số không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Cho khối nón tròn xoay có chiều cao bằng 3 cm và độ dài đường sinh bằng 5 cm. Thể tích của khối nón là

A 2π cm^3. **B** 16π cm^3. **C** 12π cm^3. **D** 48π cm^3.

Lời giải.

Bán kính đáy $r = \sqrt{l^2 - h^2} = 4$ cm $\Rightarrow$ thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = 16\pi$ cm^3.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, tìm phương trình mặt phẳng (α) cắt ba trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm $A(-3;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;-2)$.

A $4x+3y-6z+12=0$. **B** $4x+3y+6z+12=0$.

C $4x-3y+6z+12=0$. **D** $4x-3y+6z-12=0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng $(\alpha): \dfrac{x}{-3} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{-2} = 1 \Rightarrow (\alpha): 4x-3y+6z+12=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Cho số phức $z = 3+5i$. Tìm môđun của số phức $w = iz + \bar{z}$.

(A) $|w| = 2$. (B) $|w| = 2 + \sqrt{2}$. (C) $|w| = 3\sqrt{2}$. **D** $|w| = 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $w = iz + \overline{z} = i\left(3 + 5i\right) + 3 - 5i = -2 - 2i \Rightarrow |w| = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Thiết diện qua trục của hình trụ là một hình vuông có cạnh bằng $2a$. Khi đó thể tích của khối trụ là

A $2\pi a^3$. (B) $4\pi a^3$. (C) $8\pi a^3$. (D) πa^3.

Lời giải.

Chiều cao hình trụ là $2a$, bán kính đáy hình trụ là $a \Rightarrow$ thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = 2\pi a^3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình: $18 \cdot 4^x + 12 \cdot 9^x = 35 \cdot 6^x$. Giá trị biểu thức $A = x_1^3 + x_2^3$ bằng

(A) $A = 9$. (B) $A = 5$. **C** $A = 7$. (D) $A = -7$.

Lời giải.

Xét phương trình $18 \cdot 4^x + 12 \cdot 9^x = 35 \cdot 6^x \Leftrightarrow 18 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^x + 12 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^x - 35 = 0$.

Đặt $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = t > 0$ ta được phương trình $18t + \dfrac{12}{t} - 35 = 0 \Leftrightarrow 18t^2 - 35t + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3}{2} \\ t = \dfrac{4}{9} \end{array}\right.$

Khi đó ta có $\left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{3}{2} \\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{4}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{array}\right. \Rightarrow A = x_1^3 + x_2^3 = 7$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

(A) $y = -3x - 3$. **B** $y = -3x + 3$. (C) $y = 3x + 3$. (D) $y = 3x - 3$.

Lời giải.

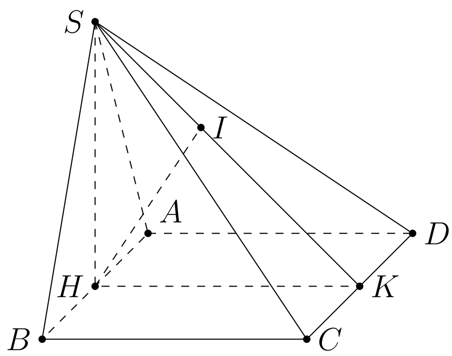
Ta có $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 0$ và $k = y'\left(1\right) = -3 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y = -3\left(x - 1\right) = -3x + 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ A đến (SCD).

(A) 1. **B** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. (D) $\sqrt{2}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
Gọi K là trung điểm của $CD \Rightarrow HK \perp CD \Rightarrow CD \perp (SHK)$.
Trong mặt phẳng (SHK) dựng $HI \perp SK \Rightarrow HI \perp (SCD)$.
Ta có $AH \parallel (SCD) \Rightarrow d(A,(SCD)) = d(H, SCD) = HI$.
Tam giác SAB đều $\Rightarrow SH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $HK = 1$.
Xét ΔSHK có $\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HK^2} \Rightarrow HI = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Cho hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 + 2m^2 - m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có 3 điểm cực trị A, B, C và $ABDC$ là hình thoi, trong đó $D(0;3)$, A thuộc trục tung. Khi đó m thuộc khoảng nào?

A $m \in \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{9}{5}\right)$. **B** $m \in \left(-1; \dfrac{1}{2}\right)$. **C** $m \in (2;3)$. **D** $m \in \left(\dfrac{9}{5}; 2\right)$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 + 2m^2 - m^4$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ và $y' = -4x^3 + 4mx$.

$y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 4mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$, đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó $A(0; 2m^2 - m^4)$, $B(\sqrt{m}; 3m^2 - m^4)$ và $C(-\sqrt{m}; 3m^2 - m^4)$.

$ABDC$ là hình thoi $\Leftrightarrow AB = BD \Leftrightarrow m + m^4 = m + (3m^2 - m^4 - 3)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \sqrt{3} \end{array}\right.$ (do $m > 0$).

Chọn đáp án A □

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu của d lên mặt phẳng (Oxy).

A $d'\colon \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$. **B** $d'\colon \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$. **C** $d'\colon \begin{cases} x = -3 + t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$. **D** $d'\colon \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 + t \\ z = 0 \end{cases}$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng $(Oxy) : z = 0 \Rightarrow d \cap (Oxy) = A(-3; 0; 0)$.
Đường thẳng d đi qua điểm $M(-2; 1; 2) \Rightarrow$ hình chiếu của M lên (Oxy) là $B(-2; 1; 0)$.

Khi đó d' đi qua $A, B \Rightarrow d'$ có một véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 0) \Rightarrow d'\colon \begin{cases} x = -3 + t \\ y = t \\ z = 0. \end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 24. Tổng 2 nghiệm dương liên tiếp nhỏ nhất của phương trình $\cos 4x + \dfrac{1}{2} = 0$ là

A $\dfrac{5\pi}{6}$. **B** $\dfrac{\pi}{6}$. **C** $\dfrac{7\pi}{6}$. **D** $\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Xét $\cos 4x + \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó 2 nghiệm dương liên tiếp nhỏ nhất của phương trình là $\frac{\pi}{6}$ và $\frac{\pi}{3} \Rightarrow S = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Nếu $f(1) = 12$, $f'(x)$ liên tục và $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = 17$. Giá trị của $f(4)$ bằng

(A) 19. (B) 5. **(C) 29.** (D) 9.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\Big|_1^4 = f(4) - f(1) = 17 \Leftrightarrow f(4) = 29$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.

(A) $m = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$. **(B) $m = \sqrt[3]{3}$.** (C) $m = \sqrt{3}$. (D) $m = 0$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m$ có $y' = 4x^3 - 4mx$, khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m. \end{array}\right.$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.
Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $A(0; 2m)$, $B\left(\sqrt{m}; 2m - m^2\right)$, $C\left(-\sqrt{m}; 2m - m^2\right)$.
Tam giác ABC cân tại A, vậy ΔABC đều khi và chỉ khi $AB = BC \Leftrightarrow m + m^4 = 4m \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{3}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $2\log_3(4x-3) \leq \log_3(18x+27)$.

(A) $S = \left(\frac{3}{4}; 3\right]$. (B) $S = [3; +\infty)$. (C) $S = \left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$. (D) $S = \left[-\frac{3}{8}; 3\right]$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > \frac{3}{4}$, với điều kiện trên, bất phương trình
$\Leftrightarrow \log_3(4x-3)^2 \leq \log_3(18x+27) \Leftrightarrow 16x^2 - 24x + 9 \leq 18x + 27 \Leftrightarrow 16x^2 - 42x - 19 \leq 0$
$\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3}{8}; 3\right]$. Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(\frac{3}{4}; 3\right]$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Cho $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Khi đó $\int\limits_0^2 [4f(x) - 3]\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 6. **(B) 14.** (C) 8. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^2 [4f(x) - 3]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 4f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^2 3\,\mathrm{d}x = 4 \cdot 5 - 3x\Big|_0^2 = 14$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại B ta lấy điểm M sao cho $MB = 2a$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Tính tan của góc giữa đường thẳng IM và mặt phẳng (ABC).

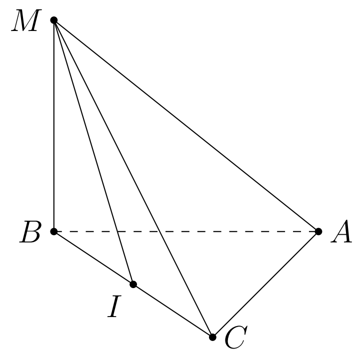
A 4. **B** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C** $\dfrac{1}{4}$. **D** $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có BI là hình chiếu vuông góc của IM lên (ABC)

Khi đó $(IM,(ABC)) = (IM, BM) = \widehat{MIB}$.

Xét ΔIBM vuông tại B có $\tan\widehat{MIB} = \dfrac{MB}{BI} = 4$.



Chọn đáp án A □

Câu 30. Đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + 2x - 3$ cắt đồ thị hàm số $y = 5x^2 - 3x - 1$ tại hai điểm phân biệt A, B. Khi đó độ dài AB là bao nhiêu?

A $AB = 2$. **B** $AB = 2\sqrt{2}$. **C** $AB = 3$. **D** $AB = \sqrt{145}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^3 + x^2 + 2x - 3 = 5x^2 - 3x - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Khi đó $A(2;13)$ và $B(1;1) \Rightarrow AB = \sqrt{145}$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Cho tích phân $H = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \cdot \ln x \,\mathrm{d}x = \dfrac{a\mathrm{e}^3 + c}{b}$. Tính $N = \dfrac{2a - \sqrt{c} - 4}{3\sqrt{b}}$.

A $N = -\dfrac{1}{9}$. **B** $N = 1$. **C** $N = 3$. **D** $N = \dfrac{7}{9}$.

Lời giải.

Xét $H = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \cdot \ln x \,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}\left(x^3\right) = \dfrac{1}{3}x^3 \cdot \ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \dfrac{1}{3}\int_1^{\mathrm{e}} x^3 \,\mathrm{d}(\ln x) = \dfrac{\mathrm{e}^3}{3} - \dfrac{1}{3}\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \,\mathrm{d}x$

Khi đó $H = \dfrac{2\mathrm{e}^3 + 1}{9} \Rightarrow a = 2, b = 9, c = 1 \Rightarrow N = \dfrac{2 \cdot 2 - 1 - 4}{3\sqrt{9}} = -\dfrac{1}{9}$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Một hộp có 5 bi đen, 4 bi trắng. Chọn ngẫu nhiên 2 bi. Xác suất 2 bi được chọn đều cùng màu là

A $\dfrac{40}{9}$. **B** $\dfrac{4}{9}$. **C** $\dfrac{1}{9}$. **D** $\dfrac{5}{9}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là chọn 2 bi trong 9 bi $\Rightarrow n(\Omega) = \mathrm{C}_9^2 = 36$.

Gọi A là biến cố lấy được 2 viên bi cùng màu

- Trường hợp 1: Lấy được 2 viên màu đen $\Rightarrow$ số khả năng là $\mathrm{C}_5^2 = 10$.
- Trường hợp 2: Lấy được 2 viên màu trắng $\Rightarrow$ số khả năng là $\mathrm{C}_4^2 = 6$.

Khi đó $n(A) = 16 \Rightarrow$ xác suất xảy ra biến cố A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{4}{9}$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kỳ hạn một quý với lãi suất 1,65% một quý. Hỏi sau bao nhiêu quý thì người đó có được ít nhất 20 triệu?

(A) 17. **B** 18. (C) 15. (D) 16.

Lời giải.

Số tiền có được sau n kỳ hạn là $T = M(1+r)^n$.

Áp dụng vào bài toán ta có $20 = 15(1+1{,}65\%)^n \Leftrightarrow n = 17{,}57 \Rightarrow$ sau 18 quý người này sẽ có ít nhất 20 triệu.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+4}{1} = \dfrac{z-3}{-1}$ và $d_1\colon \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-4}{-5}$. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oxz) và cắt d_1, d_2 có phương trình là

(A) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1+t \\ z = -1 \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x = \dfrac{3}{7} \\ y = -\dfrac{25}{7}+t \\ z = \dfrac{18}{7} \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3+t \\ z = 4 \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = t \\ y = -4+t \\ z = 3+t \end{cases}$.

Lời giải.

Giả sử $\Delta \cap d_1 = A \Rightarrow A(a; a-4; -a+3)$ và $\Delta \cap d_2 = B \Rightarrow B(1-2b; -3+b; 4-5b)$.

Ta có $\Delta \perp (Oxz) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \vec{n}$ với $\vec{n} = (0;1;0)$ là véc-tơ pháp tuyến của (Oxz)

$$\Rightarrow \frac{a-1+2b}{0} = \frac{a-b-1}{1} = \frac{-a+5b-1}{0} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b-1 = 0 \\ -a+5b-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{7} \\ b = \dfrac{2}{7}. \end{cases}$$

Khi đó $A\left(\dfrac{3}{7}; -\dfrac{25}{7}; \dfrac{18}{7}\right)$ và $B\left(\dfrac{3}{7}; -\dfrac{19}{7}; \dfrac{18}{7}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(0; \dfrac{6}{7}; 0\right) \Rightarrow \Delta\colon \begin{cases} x = \dfrac{3}{7} \\ y = -\dfrac{25}{7}+t \\ z = \dfrac{18}{7} \end{cases}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với đáy. $AB = a$, $AC = 2a$, $SA = a$. Tính góc giữa SD và BC.

A 30°. (B) 90°. (C) 60°. (D) 45°.

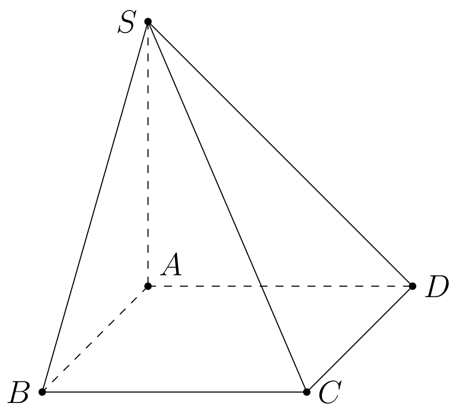
Lời giải.

Ta có $AD \parallel BC \Rightarrow (SD, BC) = (SD, AD) = \widehat{SDA}$.

Xét ΔSDA vuông tại A có $AD = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan \widehat{SDA} = \dfrac{SA}{AD} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \widehat{SDA} = 30°$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Trong các số phức z thỏa mãn $|z-2+i| = |\overline{z}+1-4i|$. Tìm phần thực của số phức có mô-đun nhỏ nhất.

A -1. (B) -2. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$ với $x; y \in \mathbb{R}$, khi đó ta có $|z-2+i| = |\overline{z}+1-4i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y+4)^2} \Leftrightarrow x = -2-y$.

Ta có $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(2+y)^2+y^2} = \sqrt{2y^2+4y+4} = \sqrt{2(y+1)^2+2} \geq \sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $y = -1 \Rightarrow x = -1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Tính tổng $S = 1 \cdot \mathrm{C}_{2018}^1 + 2 \cdot \mathrm{C}_{2018}^2 + 3 \cdot \mathrm{C}_{2018}^3 + \ldots + 2018 \cdot \mathrm{C}_{2018}^{2018}$

(A) $2017 \cdot 2^{2017}$. (B) $2017 \cdot 2^{2018}$. **C** $2018 \cdot 2^{2017}$. (D) $2018 \cdot 2^{2018}$.

Lời giải.

Xét khai triển $(1+x)^{2018} = \mathrm{C}_{2018}^0 + x \cdot \mathrm{C}_{2018}^1 + x^2 \cdot \mathrm{C}_{2018}^2 + \ldots + x^{2018} \cdot \mathrm{C}_{2018}^{2018}$

Lấy đạo hàm hai vế ta có

$2018 \cdot (1+x)^{2017} = 1 \cdot \mathrm{C}_{2018}^1 + 2x \cdot \mathrm{C}_{2018}^2 + 3x^2 \cdot \mathrm{C}_{2018}^3 + \ldots + 2018x^{2017} \cdot \mathrm{C}_{2018}^{2018}$.

Chọn $x = 1$ ta được $S = 1 \cdot \mathrm{C}_{2018}^1 + 2 \cdot \mathrm{C}_{2018}^2 + 3 \cdot \mathrm{C}_{2018}^3 + \ldots + 2018 \cdot \mathrm{C}_{2018}^{2018} = 2018 \cdot 2^{2017}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$ (m/s^2). Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc bằng bao nhiêu?

(A) $\dfrac{2200}{3}$ m. (B) $\dfrac{4000}{4}$ m. (C) $\dfrac{1900}{3}$ m. **D** $\dfrac{4300}{3}$ m.

Lời giải.

Ta có $a(t) = v'(t) \Rightarrow v(t) = \displaystyle\int \left(3t+t^2\right) \mathrm{d}x = \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{3t^2}{2} + c$, khi $t = 0$ thì $v = 10 \Rightarrow c = 10$.

Mặt khác $v(t) = s'(t) \Rightarrow s = \displaystyle\int_0^{10} \left(\dfrac{t^3}{3} + \dfrac{3t^2}{2} + 10\right) \mathrm{d}x = \dfrac{4300}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Từ các chữ số 1,2,3 có thể lập được tất cả bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau?

A 6. (B) 8. (C) 3. (D) 9.

Lời giải.

Số các chữ số có thể lập được là $3! = 6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Cho hàm số $y = \dfrac{1-3x}{x-3}$ có đồ thị là (C). Tìm điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận đứng bằng hai lần khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận ngang.

(A) $M_1(1;-1)$, $M_2(7;5)$. (B) $M_1(1;1)$, $M_2(-7;5)$.

C $M_1(-1;-1)$, $M_2(7;-5)$. (D) $M_1(1;1)$, $M_2(7;-5)$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \dfrac{1-3x}{x-3}$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ và hai tiệm cận $x = 3$ và $y = -3$.

Lấy điểm $M\left(x_0; \dfrac{1-3x_0}{x_0-3}\right)$, yêu cầu bài toán thỏa mãn khi

$|x_0 - 3| = 2\left|\dfrac{1-3x_0}{x_0-3} + 3\right| \Leftrightarrow (x_0-3)^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = 7 \end{array}\right. \Rightarrow M_1(-1;-1),\ M_2(7;-5).$

Chọn đáp án C □

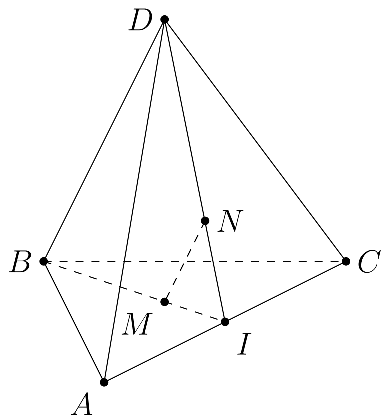
Câu 41. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là trọng tâm của hai tam giác ABC và ACD. Khi đó ta có

A MN cắt BC. **B** $MN \parallel BD$. **C** MN cắt AD. **D** $MN \parallel CD$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của đoạn $AC \Rightarrow \dfrac{DN}{DI} = \dfrac{BM}{BI} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow MN \parallel BD$.



Chọn đáp án B □

Câu 42. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{1-x^2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A 4. **B** 3. **C** 2. **D** 1.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{1-x^2}$ có tập xác định $\mathscr{D} = (-1; +\infty) \setminus \{1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\sqrt{x+1}}{1-x^2} = +\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{\sqrt{x+1}}{1-x^2} = +\infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{1-x^2} = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(2;1;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 4 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 8z + 18 = 0$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua M và nằm trong mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo một đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất là.

A $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$. **B** $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{1}$.

C $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-1}{-1}$. **D** $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$.

Lời giải.

Xét mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-6x-6y-8z+18=0$ có tâm $I(3;3;4)$ và bán kính $R=4$.
Ta có $IM=\sqrt{14}<R \Rightarrow$ điểm M nằm trong mặt cầu hay mặt phẳng (α) cắt mặt cầu theo giao tuyến là một đường tròn (C), gọi H là tâm đường tròn đó.
Để dây cung cắt là nhỏ nhất thì $\Delta \perp MH$, khi đó $\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{MH},\overrightarrow{n_\alpha}\right]$.
Đường thẳng IH đi qua tâm I và vuông góc với $(\alpha) \Rightarrow IH\colon \begin{cases} x=3+t \\ y=3+t \\ z=4+t. \end{cases}$
H là giao điểm của IH và $(\alpha) \Rightarrow H(1;1;2) \Rightarrow \overrightarrow{MH}=(-1;0;1) \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta}=(-1;2;-1)$.
Khi đó Δ đi qua M và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;-2;1) \Rightarrow \Delta\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$.
Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. S là điểm đối xứng với O qua CD'. Tính thể tích của khối đa diện $ABCD.SA'B'C'D'$ bằng

A. $\dfrac{2a^3}{3}$. B. $\dfrac{a^3}{6}$. C. a^3. D. $\dfrac{7a^3}{6}$.

Lời giải.
Gọi V là thể tích khối đa diện $ABCD.SA'B'C'D'$ và V_1 là thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, khi đó ta có $V=V_1+V_{S.CDD'C'}$.
Ta có $V_{S.CDD'C'}=\dfrac{1}{3}\,\mathrm{d}\left(S,(CDD'C')\right)\cdot S_{CDD'C'}=\dfrac{1}{3}\,\mathrm{d}\left(O,(CDD'C')\right)\cdot S_{CDD'C'}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a}{2}\cdot a^2=\dfrac{a^3}{6}$.
Khi đó $V=a^3+\dfrac{a^3}{6}=\dfrac{7a^3}{6}$.
Chọn đáp án D □

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2$. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 f'\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. B. -2. C. 1. D. 4.

Lời giải.
Xét $I=\displaystyle\int_0^1 f'\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$, đặt $\sqrt{x}=t \to \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$, đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1 \Rightarrow t=1 \end{cases}$
Khi đó $I=\displaystyle\int_0^1 f'(t)\cdot 2t\,\mathrm{d}t=2\int_0^1 x\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\,\mathrm{d}\left(f(x)\right)=2\cdot x\cdot f(x)\Big|_0^1-2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=-2$.
Chọn đáp án B □

Câu 46. Tìm m để phương trình $9^{x^2}-2\cdot 3^{x^2+1}+3m-1=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

A. $m=2$. B. $2<m<\dfrac{10}{3}$. C. $m<2$. D. $m>2$.

Lời giải.
Đặt $3^{x^2}=t\geq 1$, ta được phương trình $t^2-6t+3m-1=0$.
Mỗi nghiệm $t\geq 1$ ta được 2 nghiệm phân biệt của x, khi đó phương trình ban đầu có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình ẩn t có một nghiệm bằng 1 và một nghiệm lớn hơn 1.

Phương trình có một nghiệm $t = 1$ khi $1 - 6 + 3m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 2$, với $m = 2$ phương trình trở thành
$t^2 - 6t + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 5 \end{array}\right.$ thỏa mãn. Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $C(0; 0; 3)$ và $M(-1; 3; 2)$. Mặt phẳng (P) qua C, M đồng thời chắn trên các nửa trục dương Ox, Oy các đoạn thẳng bằng nhau. Mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $x + y + 2z - 1 = 0$.
B. $x + y + z - 6 = 0$.
C. $x + y + z - 3 = 0$.
D. $x + y + 2z - 6 = 0$.

Lời giải.
Giả sử (P) chắn trên nửa trục dương Ox, Oy các điểm $A(a; 0; 0)$ và $B(0; b; 0)$ với $a, b > 0$.
Ta có $OA = OB \Rightarrow a = b$. Khi đó phương trình mặt phẳng P đi qua A, B, C là $(P): \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{a} + \dfrac{z}{3} = 1$.
Điểm $M \in (P) \Rightarrow \dfrac{-1}{a} + \dfrac{3}{a} + \dfrac{2}{3} = 1 \Leftrightarrow a = 6 \Rightarrow (P): x + y + 2z - 6 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d = -3$ và $u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng S_{100} của 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

A. $S_{100} = -14400$.
B. $S_{100} = -15450$.
C. $S_{100} = -14250$.
D. $S_{100} = -14650$.

Lời giải.
Xét $A = u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = (u_1 - 3)^2 + (u_1 - 6)^2 + (u_1 - 9)^2 = 3u_1^2 - 36u_1 + 126 \geq 18$.
Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow u_1 = 6$, khi đó $S_{100} = \dfrac{100(2u_1 + 99d)}{2} = -14250$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Cho dãy số (x_n) có $x_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $x_{n+1} = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2n+1}$.
B. $x_{n+1} = \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.
C. $x_{n+1} = \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{2n+3}$.
D. $x_{n+1} = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2n+5}$.

Lời giải.
Ta có $x_{n+1} = \left(\dfrac{n+1-1}{n+1+1}\right)^{2(n+1)+3} = \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Tìm phần ảo của số phức z biết z thỏa mãn $|z - 2i| = |\overline{z} + 2 + 4i|$ và $\dfrac{z - i}{\overline{z} + i}$ là số thuần ảo.

A. $\dfrac{5}{12}$.
B. $\dfrac{5}{2}$.
C. $-\dfrac{3}{17}$.
D. $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.
Giả sử $z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.
Ta có $|z - 2i| = |\overline{z} + 2 + 4i| \Leftrightarrow a^2 + (b-2)^2 = (a+2)^2 + (4-b)^2 \Leftrightarrow b - a = 4 \Leftrightarrow b = a + 4$.

Đồng thời $\dfrac{z-i}{\overline{z}+i}=\dfrac{a+(b-1)i}{a+(1-b)i}=\dfrac{[a+(b-1)i]^2}{a^2+(b-1)^2}=\dfrac{a^2-(b-1)^2+2a(b-1)^2}{a^2+(b-1)^2i}$

Khi đó số phức $\dfrac{z-i}{\overline{z}+i}$ là số thuần ảo khi $a^2-(b-1)^2=0$, thay $b=a+4$ vào ta được $a^2-(a+3)^2=0 \Leftrightarrow a=-\dfrac{3}{2} \Rightarrow b=\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án B □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. B	3. D	4. D	5. A	6. A	7. A	8. D	9. C	10. B
11. C	12. A	13. C	14. C	15. B	16. C	17. D	18. A	19. C	20. B
21. B	22. A	23. C	24. D	25. C	26. B	27. A	28. B	29. A	30. D
31. A	32. B	33. B	34. B	35. A	36. A	37. C	38. D	39. A	40. C
41. B	42. B	43. D	44. D	45. B	46. A	47. D	48. C	49. B	50. B

121 ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG TOÁN 12, 2017 - 2018 SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG NAM

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-3; 4)$. (B) $(-\infty; -1)$. (C) $(2; +\infty)$. **(D) $(-1; 2)$.**

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số tăng trên khoảng $(-1; 2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x - 4y + 3z - 2 = 0$. Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

(A) $\vec{n}_1 = (0; -4; 3)$. (B) $\vec{n}_2 = (1; 4; 3)$. **(C) $\vec{n}_3 = (-1; 4; -3)$.** (D) $\vec{n}_4 = (-4; 3; -2)$.

Lời giải.

Ta có một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_3 = (-1; 4; -3)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = 3 + 2i$.

(A) $\overline{z} = 3 - 2i$. (B) $\overline{z} = -3 - 2i$. (C) $\overline{z} = 2 - 3i$. (D) $\overline{z} = -2 - 3i$.

Lời giải.

Ta có số phức liên hợp của số phức $z = 3 + 2i$ là $\overline{z} = 3 - 2i$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Tìm $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

(A) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x} + C$. **(B) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C$.**

(C) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2x} + C$. (D) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \ln x^2 + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Số cách chọn 3 học sinh từ 5 học sinh là

(A) C_5^3. (B) A_5^3. (C) $3!$. (D) 15.

Lời giải.

Số cách chọn 3 học sinh từ 5 học sinh là C_5^3.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (2; -1; 4)$ và $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{k}$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

(A) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -11$. (B) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -13$. (C) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$. **D** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -10$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} = (2; -1; 4)$ và $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{k}$ nên $\vec{b} = (1; 0; -3)$. Suy ra $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 4 \cdot (-3) = -10$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và nhận giá trị bất kỳ. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức

(A) $S = \int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\, \mathrm{d}x$. (B) $S = \int\limits_a^b [g(x) - f(x)]\, \mathrm{d}x$.

C $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x$. (D) $\left|S = \int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\, \mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Ta có: diện tích hình phẳng theo yêu cầu bài toán được tính theo công thức $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 0. (B) 1. **C** 2. (D) 3.

Lời giải.

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 2 lần nên có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Tính thể tích V của khối hộp chữ nhật có đáy là hình vuông cạnh bằng 6 và chiều cao bằng 5.

(A) $V = 60$. **B** $V = 180$. (C) $V = 50$. (D) $V = 150$.

Lời giải.

Thể tích cần tìm là $V = 6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Cho a là số thực dương tùy ý. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $\log_3 \dfrac{3}{a^2} = 3 - \dfrac{1}{2}\log_3 a$.
B $\log_3 \dfrac{3}{a^2} = 3 - 2\log_3 a$.
C $\log_3 \dfrac{3}{a^2} = 1 - 2\log_3 a$.
D $\log_3 \dfrac{3}{a^2} = 1 + 2\log_3 a$.

Lời giải.
$\log_3 \dfrac{3}{a^2} = \log_3 3 - \log_3 a^2 = 1 - 2\log_3 a$.
Chọn đáp án C □

Câu 11. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-1}{3-x}$ bằng

A -2. **B** $\dfrac{2}{3}$. **C** 1. **D** 2.

Lời giải.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{3-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{\frac{3}{x}-1} = -2.$$

Chọn đáp án A □

Câu 12. Tính thể tích V của khối nón có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 6.

A $V = 108\pi$. **B** $V = 54\pi$. **C** $V = 36\pi$. **D** $V = 18\pi$.

Lời giải.
$V = \dfrac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot h = \dfrac{1}{3}\cdot 3^2\cdot\pi\cdot 6 = 18\pi$.
Chọn đáp án D □

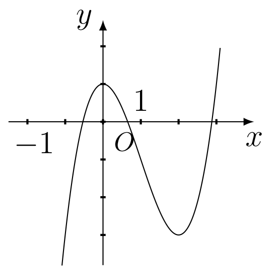
Câu 13. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right) = 1$.

A $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.
B $x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.
C $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.
D $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.
$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.
Chọn đáp án C □

Câu 14. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
B $y = -x^3 - 3x^2 + 1$.
C $y = x^3 + 3x^2 + 1$.
D $y = x^3 - 3x^2 + 1$.



Lời giải.
Dựa vào đồ thị ta có hệ số $a > 0$ và đồ thị đi qua các điểm $(0;1)$ và $(1;-1)$ nên chọn $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
Chọn đáp án D □

Câu 15. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$.

A $S = (3;7]$. **B** $S = [3;7]$. **C** $= (-\infty;7]$. **D** $S = [7;+\infty)$.

Lời giải.

$\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3>0 \\ x-3 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x \leq 7.$

Chọn đáp án A □

Câu 16. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(3;-1;2)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(4;5;-7)$ là

A $\begin{cases} x=4+3t \\ y=5-t \\ z=-7+2t \end{cases}$. B $\begin{cases} x=-4+3t \\ y=-5-t \\ z=7+2t \end{cases}$. C $\begin{cases} x=3+4t \\ y=-1+5t \\ z=2-7t \end{cases}$. D $\begin{cases} x=-3+4t \\ y=1+5t \\ z=-2-7t \end{cases}$.

Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(3;-1;2)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(4;5;-7)$ là $\begin{cases} x=3+4t \\ y=-1+5t \\ z=2-7t \end{cases}$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{2x+1}$ là đường thẳng

A $x=\dfrac{3}{2}$. B $x=-\dfrac{1}{2}$. C $y=1$. D $y=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{2x-3}{2x+1}=+\infty$ nên $x=-\dfrac{1}{2}$ là đường tiệm cận đứng.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Parabol $(P)\colon y=x^2$ và đường cong $(C)\colon y=x^4-3x^2-2$ có bao nhiêu giao điểm?

A 0. B 1. C 2. D 4.

Lời giải.

$x^4-3x^2-2=x^2 \Leftrightarrow x^4-4x^2-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=2+\sqrt{6}>0 \\ x^2=2-\sqrt{6}<0 \end{array}\right. \Rightarrow x=\pm\sqrt{2+\sqrt{6}}$. Vậy hai đồ thị có 2 giao điểm.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x\, \mathrm{d}x$ bằng

A $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. B $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. C $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. D $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

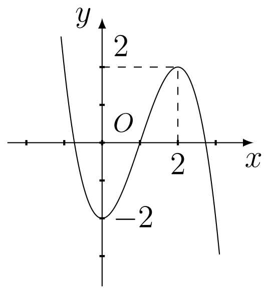
Lời giải.

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x\, \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án D □

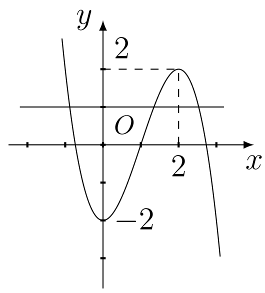
Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f(x)=1$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt nhỏ hơn 2?

(A) 0. (B) 1. **C** 2. (D) 3.



Lời giải.

Ta thấy đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt và có đúng hai giao điểm có hoành độ nhỏ hơn 2.



Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Tổng các nghiệm của phương trình $2^{x^2+2x} = 8^{2-x}$ bằng

(A) 5. **B** -5. (C) 6. (D) -6.

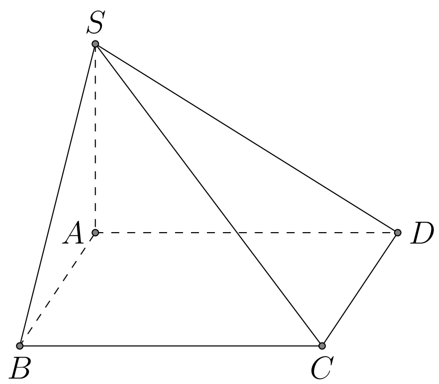
Lời giải.

$2^{x^2+2x} = 8^{2-x} \Leftrightarrow x^2 + 2x = 3(2-x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -6 \end{array}\right.$. Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng -5.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt đáy (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng

A $\widehat{SDA}$. (B) $\widehat{SCA}$. (C) $\widehat{SCB}$. (D) $\widehat{ASD}$.



Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases}$ nên $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$ nên góc của (SCD) và $(ABCD)$ bằng $\widehat{SDA}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Cho số phức z thỏa mãn $|z+3-4i|=5$. Biết rằng tập hợp điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn đó.

A $I(3;-4)$, $R=\sqrt{5}$. **B** $I(-3;4)$, $R=\sqrt{5}$. **C** $I(3;-4)$, $R=5$. **D** $I(-3;4)$, $R=5$.

Lời giải.

Gọi $z=x+iy, (x,y\in\mathbb{R})$ thì $|z+3-4i|=5 \Leftrightarrow (x+3)^2+(y-4)^2=25$. Vậy tâm $I(-3;4)$ và bán kính $R=5$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x-3\ln x$ trên đoạn $[1;\mathrm{e}]$ bằng

A 1. **B** $3-3\ln 3$. **C** e. **D** $\mathrm{e}-3$.

Lời giải.

Ta có $y'=1-\dfrac{3}{x}=\dfrac{x-3}{x}<0$, $\forall x\in[1;\mathrm{e}]$. Suy ra hàm số đã cho giảm trên $[1;\mathrm{e}]$. Vậy $\min\limits_{[1;\mathrm{e}]} y = y(\mathrm{e})=\mathrm{e}-3$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Tổng phần thực và phần ảo của số phức z thỏa mãn $iz+(1-i)\overline{z}=-2i$ bằng

A 2. **B** -2. **C** 6. **D** -6.

Lời giải.

Gọi $z=x+iy$, $(x,y\in\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
iz+(1-i)\overline{z}=-2i &\Leftrightarrow i(x+iy)+(1-i)(x-iy)=-2i\\
&\Leftrightarrow (x-2y)+(2-y)i=0\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x-2y=0\\2-y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $x+y=6$.

Cách 2: Cách trắc nghiệm

Nhập máy tính $iz+(1-i)\overline{z}$

CALC $z=1$ ta được $1+0i$; CALC $z=i$ ta được $-2-i$.

Giải hệ $\begin{cases}1x-2y=0\\0x-1y=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$.

Vậy $x+y=6$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+3)^2+y^2+(z-1)^2=10$. Mặt phẳng nào trong các mặt phẳng dưới đây cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 3?

A $(P_1)\colon x+2y-2z+8=0$. **B** $(P_2)\colon x+2y-2z-8=0$.

C $(P_3)\colon x+2y-2z-2=0$. **D** $(P_4)\colon x+2y-2z-4=0$.

Lời giải.

(S) có tâm $I(-3;0;1)$, bán kính $R=\sqrt{10}$. Ta có (P) là mặt phẳng cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r=3 \Leftrightarrow \mathrm{d}(I,(P))=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{10-9}=1$. Mà $\mathrm{d}(I,(P_1))=\dfrac{|-3+2\cdot 0-2\cdot 1+8|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=1$. Suy ra (P_1) thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $5\mathrm{C}_n^1-\mathrm{C}_n^2=5$. Tìm hệ số a của x^4 trong khai triển của biểu thức $\left(2x+\dfrac{1}{x^2}\right)^n$.

A $a=11520$. (B) $a=256$. (C) $a=45$. (D) $a=3360$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} n\geq 2 \\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$. Ta có

$$\begin{aligned} 5\mathrm{C}_n^1-\mathrm{C}_n^2=5 &\Leftrightarrow 5n-\frac{n!}{2!(n-2)!}=5 \\ &\Leftrightarrow 5n-\frac{n(n-1)}{2}=5 \\ &\Leftrightarrow n^2-11n+10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=10 \quad \text{(Nhận)} \\ n=1 \quad \text{(Loại)}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Khi đó khai triển $\left(2x+\dfrac{1}{x^2}\right)^{10}$ có số hạng tổng quát là

$$\mathrm{C}_{10}^k(2x)^{10-k}\left(\frac{1}{x^2}\right)^k=\mathrm{C}_{10}^k 2^{10-k}x^{10-k}x^{-2k}=\mathrm{C}_{10}^k 2^{10-k}x^{10-3k}.$$

Ta có $10-3k=4\Leftrightarrow k=2$. Suy ra $a=\mathrm{C}_{10}^2 2^8=11520$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Một tổ có 9 học sinh gồm 4 học sinh nữ và 5 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên từ tổ đó ra 3 học sinh. Xác xuất để trong 3 học sinh chọn ra có số học sinh nam nhiều hơn số học sinh nữ bằng

(A) $\dfrac{17}{42}$. (B) $\dfrac{5}{42}$. **C** $\dfrac{25}{42}$. (D) $\dfrac{10}{21}$.

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu. Ta có $n(\Omega)=\mathrm{C}_9^3=84$. Gọi A là biến cố "Số học sinh nam nhiều hơn số học sinh nữ". Ta có:

Chọn 3 nam, 0 nữ có C_5^3 cách.

Chọn 2 nam, 1 nữ có $\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_4^1$ cách.

Suy ra $n(A)=\mathrm{C}_5^3+\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_4^1=50$. Khi đó $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{25}{42}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Một người muốn gửi tiền vào ngân hàng để đến ngày 15/3/2020 rút được khoản tiền là 50000000 đồng (cả vốn ban đầu và lãi). Lãi suất ngân hàng là 0,55%/tháng, tính theo thể thức lãi kép. Hỏi vào ngày 15/4/2018 người đó phải gửi ngân hàng số tiền là bao nhiêu để đáp ứng nhu cầu trên, nếu lãi suất không thay đổi trong thời gian người đó gửi tiền (giá trị gần đúng làm tròn đến hàng nghìn)?

(A) 43593000 đồng. (B) 43833000 đồng. (C) 44074000 đồng. (D) 44316000 đồng.

Lời giải.

Gọi A là số tiền phải gửi vào ngân hàng. Thời gian gửi là $N = 23$ tháng. Số tiền (cả vốn lẫn lãi) nhận được sau 23 tháng là $A(1+0{,}55\%)^{23}$. Ta cần

$$A(1+0{,}55\%)^{23} = 50000000 \Leftrightarrow A = \frac{50000000}{(1+0{,}55\%)^{23}} \approx 44074000.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Biết $\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x = ax\sin 2x + b\cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab.

(A) $ab = \frac{1}{8}$. (B) $ab = \frac{1}{4}$. (C) $ab = -\frac{1}{8}$. (D) $ab = -\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{\sin 2x}{2} \end{cases}$. Khi đó

$$\begin{aligned}\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.\end{aligned}$$

Suy ra $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4} \Rightarrow ab = \frac{1}{8}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua $A(1;-1;2)$ và chứa trục Ox. Điểm nào trong các điểm sau đây thuộc mặt phẳng (α)?

(A) $M(0;4;-2)$. (B) $N(2;2;-4)$. (C) $P(-2;2;4)$. (D) $Q(0;4;2)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) chứa trục $Ox \Rightarrow (\alpha)\colon by + cz = 0 \quad (b^2 + c^2 \neq 0)$. Mà $A(1;-1;2) \in (\alpha)$ nên $-b + 2c = 0$. Chọn $c = 1 \Rightarrow b = 2$. Khi đó $(\alpha)\colon 2y + z = 0$. Ta có $2 \cdot 2 - 4 = 0 \Rightarrow N(2;2;-4) \in (\alpha)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) xung quanh trục hoành.

(A) $V = \frac{64\pi}{15}$. (B) $V = \frac{16\pi}{15}$. (C) $V = \frac{20\pi}{3}$. (D) $V = \frac{4\pi}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$. Ta có $x^2 \cdot 2x \geq 0$, $\forall x \in [0;2]$. Khi đó

$$V = \pi\int_0^2 |x^4 - 4x^2|\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^2 (-x^4 + 4x^2)\,\mathrm{d}x = \pi\left(-\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{64\pi}{15}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}(2m+3)x^2 + (m^2 + 3m - 4)x$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

(A) $m = 2$.
(B) $m = -3$.
(C) $m = -3$ hoặc $m = 2$.
(D) $m = -2$ hoặc $m = 3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = x^2 - (2m+3)x + m^2 + 3m - 4$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$

$$\Rightarrow y'(1) = 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -3. \end{array}\right.$$

• Với $m = 2$, hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ nên $m = 2$ không thỏa mãn.

• Với $m = -3$, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ nên $m = -3$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x - 2(m+1)3^x + 6m - 3 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

(A) $m < 1$.
(B) $m < \dfrac{1}{2}$.
(C) $m > \dfrac{1}{2}$.
(D) $\dfrac{1}{2} < m < 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 9^x - 2(m+1)3^x + 6m - 3 = 0 &\Leftrightarrow (3^x + 1 - 2m)(3^x - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 3 \\ 3^x = 2m - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 3^x = 2m - 1 \quad (*). \end{array}\right. \end{aligned}$$

Phương trình ban đầu có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $(*)$ có nghiệm âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 > 0 \\ x = \log_3(2m-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{2} \\ 2m - 1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < m < 1.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C). Một tiếp tuyến của (C) cắt hai tiệm cận của (C) lần lượt tại hai điểm A, B và $AB = 2\sqrt{2}$. Hệ số góc của tiếp tuyến đó bằng

(A) $-\sqrt{2}$.
(B) -2.
(C) $-\dfrac{1}{2}$.
(D) -1.

Lời giải.

Ta có $y = \dfrac{2x-3}{x-2} = 2 + \dfrac{1}{x-2}$, $y' = -\dfrac{1}{(x-2)^2}$. Đồ thị (C) có tiệm cận đứng $x = 2$, tiệm cận ngang $y = 2$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm, $x_0 \neq 2$. Khi đó tiếp tuyến Δ của (C) tại M có phương trình

$$y = -\frac{1}{(x_0-2)^2}(x - x_0) + 2 + \frac{1}{x_0 - 2}.$$

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của Δ với tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của (C). Khi đó $A\left(2; \dfrac{2}{x_0-2}+2\right)$, $B(2x_0-2; 2)$. Ta có

$$\begin{aligned} AB = 2\sqrt{2} &\Leftrightarrow \sqrt{(2x_0-4)^2+\frac{4}{(x_0-2)^2}} = 2\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow (x_0-2)^4 - 2(x_0-2)^2 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_0-2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 3 \\ x_0 = 1. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Ta có $y'(3) = -1 = y'(1)$. Suy ra hệ số góc của Δ bằng -1.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 0)$, $B(0; -1; 2)$. Biết rằng có hai mặt phẳng cùng đi qua hai điểm O, A và cùng cách B một khoảng bằng $\sqrt{3}$. Véc-tơ nào trong các véc-tơ dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của một trong hai mặt phẳng đó?

A $\vec{n}_1 = (1; -1; -1)$. **B** $\vec{n}_2 = (1; -1; -3)$. **C** $\vec{n}_3 = (1; -1; 5)$. **D** $\vec{n}_4 = (1; -1; -5)$.

Lời giải.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa AO, $\mathrm{d}(B; (P)) = \sqrt{3}$. Giả sử (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b; c)$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Vì $O \in (P)$ nên $(P)\colon ax + by + cz = 0$. Ta có

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \Leftrightarrow a + b = 0 \Leftrightarrow a = -b.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(B; (P)) = \sqrt{3} &\Leftrightarrow \frac{|-b+2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow (-b+2c)^2 = 3(a^2+b^2+c^2) \\ &\Rightarrow b^2 - 4bc + 4c^2 = 3(b^2+b^2+c^2) \\ &\Leftrightarrow 5b^2 + 4bc - c^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -c \\ b = \dfrac{1}{5}c. \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Trường hợp $b = -c$, chọn $c = 1 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \vec{n} = (1; -1; 1)$.
- Trường hợp $b = \dfrac{1}{5}c$, chọn $c = -5 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \vec{n} = (1; -1; -5)$.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+2)x^2 + 3(m^2 + 4m)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$?

A 1. **B** 4. **C** 3. **D** 2.

Lời giải.

Hàm số nghịch biến trên $(0; 1)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} y' \leq 0, \quad \forall x \in (0;1) &\Leftrightarrow 3x^2 - 6(m+2)x + 3(m^2+4m) \leq 0, \quad \forall x \in (0;1) \\ &\Leftrightarrow (x-m)(3x-3m-12) \leq 0, \quad \forall x \in (0;1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad m\le x\le m+4,\quad \forall x\in(0;1)\\&\Leftrightarrow\quad \begin{cases}m\le 0\\1\le m+4\end{cases}\Leftrightarrow -3\le m\le 0.\end{aligned}$$

Suy ra có 4 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho hình nón (N) có đỉnh S, tâm đường tròn đáy là O, góc ở đỉnh bằng $120°$. Một mặt phẳng qua S cắt hình nón (N) theo thiết diện là tam giác vuông SAB. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng 3, tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N).

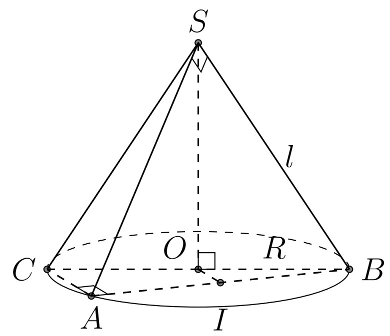
A $S_{xq}=36\sqrt{3}\pi$. **B** $S_{xq}=27\sqrt{3}\pi$. **C** $S_{xq}=18\sqrt{3}\pi$. **D** $S_{xq}=9\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

Góc ở đỉnh là $\widehat{BSC}=120°$.

Vì $\triangle SAB$ cân tại S nên vuông tại S.

Gọi R là bán kính đáy, l là đường sinh, ta có $S_{xq}=\pi Rl$.



Gọi I là trung điểm của AB. Ta có $\begin{cases}OI\perp AB\\OI\perp SO\end{cases}$ nên $\mathrm{d}(SO;AB)=OI=3\Rightarrow CA=6$. Xét $\triangle SCB$ có $CB^2=SC^2+SB^2-2SC\cdot SB\cos 120°\Leftrightarrow 4R^2=3l^2\Leftrightarrow R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}l$. Xét $\triangle ABC$ có

$$\begin{aligned}BC^2=AC^2+AB^2\quad&\Leftrightarrow\quad 4R^2=36+2l^2\Leftrightarrow 3l^2=36+2l^2\\&\Leftrightarrow\quad l=6\Rightarrow R=3\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Vậy $S_{xq}=18\sqrt{3}\pi$.

Chọn đáp án C □

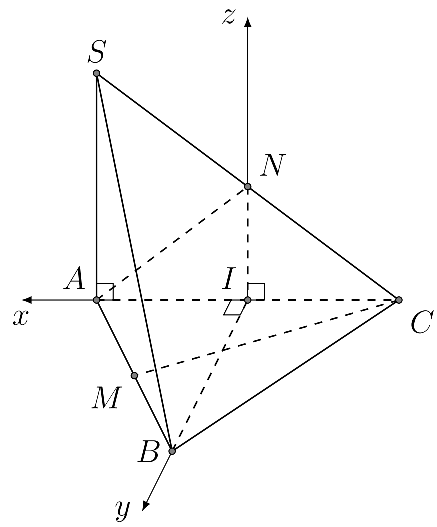
Câu 39. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy và $SA=3a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, SC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và AN bằng

A $\dfrac{3a}{\sqrt{37}}$. **B** $\dfrac{a}{2}$. **C** $\dfrac{3a\sqrt{37}}{74}$. **D** $\dfrac{a}{4}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AC. Ta có $IA = IC = \dfrac{a}{2}$, $BI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $NI = \dfrac{3a}{2}$. Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv I$, tia Ox trùng tia IA, tia Oy trùng tia IB, tia Oz trùng tia IN. Khi đó $A\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $C\left(-\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$ và $N\left(0;0;\dfrac{3a}{2}\right)$. Vì M là trung điểm AB nên $M\left(\dfrac{a}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{4};0\right)$.

Ta có $\mathrm{d}(CM, AN) = \dfrac{|[\vec{u}_{CM};\vec{u}_{AN}]\cdot\overrightarrow{CA}|}{|[\vec{u}_{CM};\vec{u}_{AN}]|}$.



Tính $\overrightarrow{CM} = \left(\dfrac{3a}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{4};0\right) \Rightarrow \vec{u}_{CM} = (3;\sqrt{3};0)$; $\overrightarrow{AN} = \left(-\dfrac{a}{2};0;\dfrac{3a}{2}\right) \Rightarrow \vec{u}_{AN} = (-1;0;3)$.

Suy ra $[\vec{u}_{CM};\vec{u}_{AN}] = (3\sqrt{3};-9;\sqrt{3})$. Ta có $\overrightarrow{CA} = (a;0;0)$.

Vậy $\mathrm{d}(CM, AN) = \dfrac{|3\sqrt{3}a|}{\sqrt{27+81+3}} = \dfrac{3a}{\sqrt{37}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho hàm số chẵn $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int_{-1}^{1} \dfrac{f(2x)}{1+2^x}\,\mathrm{d}x = 8$. Tính $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A 2. **B** 4. **C** 8. **D** 16.

Lời giải.

• Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$. Với $x = -1 \Rightarrow t = -2$, $x = 1 \Rightarrow t = 2$. Suy ra

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(2x)}{1+2^x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \frac{f(t)}{1+\sqrt{2}^t}\,\mathrm{d}t = 8 \Rightarrow \int_{-2}^{2} \frac{f(x)}{1+\sqrt{2}^x}\,\mathrm{d}x = 16.$$

• Xét $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{f(-x)}{1+(\sqrt{2})^{-x}}\,\mathrm{d}x$. Đặt $u = -x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$. Với $x = -2 \Rightarrow u = 2$, $x = 2 \Rightarrow u = -2$. Suy ra

$$\int_{-2}^{2} \frac{f(-x)}{1+(\sqrt{2})^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} \frac{f(u)}{1+\sqrt{2}^u}\,\mathrm{d}u = 16.$$

• Ta có $y = f(x)$ là hàm chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(-x) = f(x)\ \forall x \in [-2;2]$.

Suy ra $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Khi đó

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} \frac{f(-x)}{1+(\sqrt{2})^{-x}}\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{2} \frac{f(x)\cdot\sqrt{2}^x}{1+\sqrt{2}^x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^{2} \frac{f(x)}{1+\sqrt{2}^x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^{2} \frac{f(x)}{1+\sqrt{2}^x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Suy ra $16 = 2\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - 16 \Rightarrow \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 16$.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2y - z + 3 = 0$ và điểm $A(2;0;0)$. Mặt phẳng (α) đi qua A, vuông góc với (P), cách gốc tọa độ O một khoảng bằng $\frac{4}{3}$ và cắt các tia Oy, Oz lần lượt tại các điểm B, C khác O. Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng

A 8. **B** 16. **C** $\frac{8}{3}$. **D** $\frac{16}{3}$.

Lời giải.

Gọi $B(0;b;0), C(0;0;c)$ là giao điểm của (α) với các tia Oy, Oz, trong đó $b, c > 0$.

Khi đó ta có $(\alpha)\colon \frac{x}{2} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$. Mà $(\alpha) \perp (P) \Rightarrow \vec{n}_{(\alpha)} \cdot \vec{n}_{(P)} = 0 \Rightarrow \frac{2}{b} - \frac{1}{c} = 0 \Leftrightarrow b = 2c$.

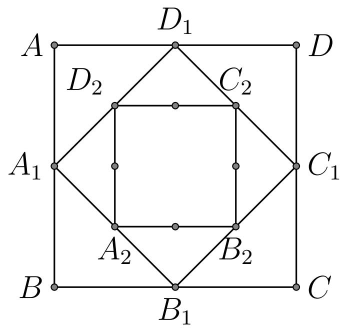
Mặt khác

$$\mathrm{d}(O;(\alpha)) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 16\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = 9$$
$$\Rightarrow 16\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4c^2} + \frac{1}{c^2}\right) = 9 \Leftrightarrow c = 2 \Rightarrow b = 4.$$

Khi đó $V_{OABC} = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = \frac{8}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho hình vuông $ABCD$ có các cạnh bằng a, và có diện tích S_1. Nối bốn trung điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự của bốn cạnh AB, BC, CD, DA ta được hình vuông thứ hai có diện tích S_2. Tiếp tục làm quá trình trên ta được hình vuông thứ ba là $A_2B_2C_2D_2$ có diện tích S_3,... và cứ tiếp tục làm như thế ta được các hình vuông lần lượt có diện tích $S_4, S_5, \ldots, S_{100}$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_{100}$.



A $S = \frac{a^2(2^{200} - 1)}{2^{100}}$. **B** $S = \frac{a^2(2^{200} - 1)}{2^{99}}$. **C** $S = \frac{a^2}{2^{200}}$. **D** $S = \frac{a^2(2^{99} - 1)}{2^{98}}$.

Lời giải.

Giả sử hình vuông thứ k là $A_{k-1}B_{k-1}C_{k-1}D_{k-1}$ ($k \geq 1$, $A_0B_0C_0D_0 \equiv ABCD$) có cạnh là x, suy ra diện tích $S_k = x^2$. Khi đó hình vuông thứ $k+1$ có độ dài là $\frac{x}{\sqrt{2}}$, suy ra $S_{k+1} = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} S_k$. Như vậy $S_1, S_2, \ldots, S_{100}$ lập thành một cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{2}$, số hạng đầu $S_1 = a^2$. Khi đó

$$S = S_1 + S_2 + \cdots + S_{100} = S_1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{100}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{a^2(2^{200} - 1)}{2^{99}}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ bằng 4.

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 4.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 2x + m - 4$ trên $[-2; 1]$. Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Mà $f(-2) = m - 4, f(-1) = m - 5, f(1) = m - 1$. Suy ra GTLN, GTNN của $f(x)$ trên $[-2; 1]$ lần lượt là $m - 1, m - 5$. Suy ra GTLN của $y = |x^2 + 2x + m - 4|$ là $\max\{|m - 1|, |m - 5|\}$. Xét hai trường hợp sau:

TH1: $|m - 1| = 4$, suy ra $m \in \{5; -3\}$. Thử lại ta có $m = 5$ thỏa mãn.

TH2: $|m - 5| = 4$ suy ra $m \in \{9; 1\}$. Thử lại ta có $m = 1$ thỏa mãn.

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-9; 9)$ của tham số m để bất phương trình $3\log x \le 2\log\left(m\sqrt{x - x^2} - (1 - x)\sqrt{1 - x}\right)$ có nghiệm thực?

A 6. **B** 7. **C** 10. **D** 11.

Lời giải.

Điều kiện: $0 < x < 1$. Khi đó

$$3\log x \le 2\log\left(m\sqrt{x - x^2} - (1 - x)\sqrt{1 - x}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x^3} \le m\sqrt{x - x^2} - (1 - x)\sqrt{1 - x}$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^3} + \sqrt{(1 - x)^3} \le m\sqrt{x - x^2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{(1 - x)^3}}{\sqrt{x}\sqrt{1 - x}} \le m.$$

Đặt $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3} + \sqrt{(1 - x)^3}}{\sqrt{x}\sqrt{1 - x}}$ với $0 < x < 1$. Bất phương trình có nghiệm thực $\Leftrightarrow m \ge \min\limits_{(0;1)} f(x)$.

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{(1 - x)^3}}{\sqrt{x}\sqrt{1 - x}} &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{1 - x})(x - \sqrt{x}\sqrt{1 - x} + 1 - x)}{\sqrt{x}\sqrt{1 - x}}\\ &\ge \frac{2\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{1 - x}}}{\sqrt{x}\sqrt{1 - x}}(1 - \sqrt{x}\sqrt{1 - x}) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{1 - x}}} - \sqrt{\sqrt{x}\sqrt{1 - x}}\right)\\ &\ge 2\left(\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x + 1 - x}{2}}} - \sqrt{\frac{x + 1 - x}{2}}\right) = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

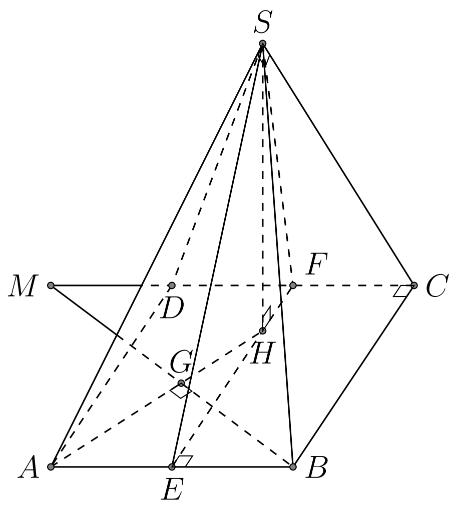
Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x} = \sqrt{1 - x}\\ x = 1 - x\end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$. Vậy $\min\limits_{(0;1)} f(x) = \sqrt{2}$. Suy ra $m \ge \sqrt{2}$. Vậy có 7 có giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều, mặt bên SCD là tam giác vuông cân tại S. Gọi M là điểm thuộc CD sao cho $BM \perp SA$. Tính thể tích V của $S.BDM$.

A $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **B** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **C** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{32}$. **D** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$.

Lời giải.



Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD.
Khi đó $SF \perp CD$, $SE \perp AB$ nên $SE \perp CD$
$\Rightarrow CD \perp (SEF) \Rightarrow (SEF) \perp (ABCD)$.
Kẻ $SH \perp EF \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
Do $BM \perp SA$ nên $BM \perp (SAH)$. Suy ra $BM \perp AH$.
Đặt $G = BM \cap AH$. Ta có $SE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SF = \dfrac{DC}{2} = \dfrac{a}{2}$,
$EF = a \Rightarrow \Delta SEF$ vuông tại S. Ta có
$\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SE^2} + \dfrac{1}{SF^2}$, $EH \cdot EF = SE^2$
$\Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}, EH = \dfrac{3a}{4}$. Mà $\triangle AEH \sim \triangle BCM$ (g.g).
Suy ra $\dfrac{AE}{BC} = \dfrac{EH}{CM} \Rightarrow CM = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow MD = \dfrac{a}{2}$.
Vậy $V = \dfrac{1}{3} SH \cdot S_{BDM} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f(x), f'(x)$ đều nhận giá trị dương trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0) = 2$, $\displaystyle\int_0^1 [f'(x) \cdot [f(x)]^2 + 1]\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \sqrt{f'(x)} \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$.

Tính $\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^3\,\mathrm{d}x$.

A $\dfrac{15}{4}$. **B** $\dfrac{15}{2}$. **C** $\dfrac{17}{2}$. **D** $\dfrac{19}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^1 [f'(x) \cdot [f(x)]^2 + 1]\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \sqrt{f'(x)} \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 \left(\sqrt{f'(x)} \cdot f(x) - 1\right)^2 \mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow \sqrt{f'(x)} \cdot f(x) = 1 \Rightarrow f'(x) \cdot [f(x)]^2 = 1$. Lấy nguyên hàm hai vế ta được $\dfrac{[f(x)]^3}{3} = x + C$.

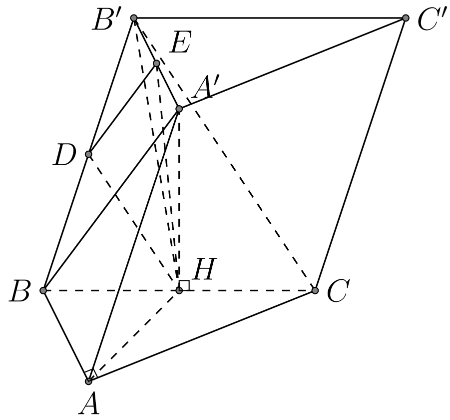
Mà $f(0) = 2 \Rightarrow C = \dfrac{8}{3} \Rightarrow [f(x)]^3 = 3\left(x + \dfrac{8}{3}\right)$. Suy ra $\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^3\,\mathrm{d}x = \dfrac{19}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, $A'H = a\sqrt{3}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$. Tính $\cos\varphi$.

A $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$. **B** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{8}$. **C** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **D** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Gọi D, E lần lượt là trung điểm của $BB', A'B'$.
Ta có $DH \parallel B'C, DE \parallel A'B \Rightarrow \varphi = (DH, DE)$.
Xét $\triangle A'BH$ vuông tại H có $A'B = 2a \Rightarrow DE = a$.
Xét $\triangle HA'E$ vuông tại A' có $HE = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.
Xét $\triangle A'AH$ vuông tại H có $AA' = 2a = BB'$.
Xét $\triangle B'BC$ có $B'H^2 = \dfrac{BB'^2 + B'C^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4}$
$\Rightarrow B'C = a\sqrt{6} \Rightarrow DH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Suy ra
$\cos\varphi = |\cos(HDE)| = \left|\dfrac{DE^2 + DH^2 - EH^2}{2DE \cdot DH}\right| = \dfrac{\sqrt{6}}{8}$.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P)\colon x + y - 4z = 0$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$ và điểm $A(1;3;1)$ thuộc (P). Gọi Δ là đường thẳng qua A, nằm trong (P) và cách d một khoảng lớn nhất. Gọi $\vec{u} = (a;b;1)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ. Tính $a + 2b$.

A $a + 2b = -3$. **B** $a + 2b = 0$. **C** $a + 2b = 4$. **D** $a + 2b = 7$.

Lời giải.

Ta có $\Delta \subset (P) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n}_{(P)} = 0 \Leftrightarrow a + b - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 4 - b$.
Ta có Δ đi qua $A(1;3;1), \vec{u} = (4-b;b;1)$; d đi qua $M(1;-1;3), \vec{u_d} = (2;-1;1)$.
Khi đó: $[\vec{u};\vec{u}_d] = (b+1; b-2; -b-4)$, $\overrightarrow{AM} = (0;-4;2)$ và

$$\mathrm{d}(d;\Delta) = \dfrac{\left|[\vec{u};\vec{u_d}] \cdot \overrightarrow{AM}\right|}{|[\vec{u};\vec{u_d}]|} = \dfrac{|6b|}{\sqrt{3b^2 + 6b + 21}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\dfrac{b^2}{b^2 + 2b + 7}}.$$

Mà $\dfrac{b^2}{b^2+2b+7} = \dfrac{7}{6} - \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{(b+7)^2}{b^2+2b+7} \le \dfrac{7}{6}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow b = -7$.
Vậy $\mathrm{d}(d;\Delta)$ lớn nhất khi $b = -7 \Rightarrow a = 11 \Rightarrow a + 2b = -3$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Hai bạn Bình và Lan cùng dự thi trong Kì thi THPT Quốc gia và ở hai phòng thi khác nhau. Mỗi phòng thi có 24 thí sinh, mỗi môn thi có 24 mã đề khác nhau. Đề thi được sắp xếp và phát cho thí sinh một cách ngẫu nhiên. Xác suất để trong hai môn thi Toán và Tiếng Anh, Bình và Lan có chung đúng một mã đề thi bằng

A $\dfrac{32}{235}$. **B** $\dfrac{46}{2209}$. **C** $\dfrac{23}{288}$. **D** $\dfrac{23}{576}$.

Lời giải.

Số cách phát đề môn Tiếng Anh, Toán cho thí sinh hai phòng là: $n(\Omega) = 24! \cdot 24! \cdot 24! \cdot 24! = (24!)^4$.
Gọi biến cố A: "Bình và Lan có chung đúng một mã đề thi".
Có hai khả năng xảy ra là Bình và Lan chung đề Toán hoặc Bình và Lan chung đề Tiếng Anh.
Suy ra $n(A) = 2 \cdot 24! \cdot 1 \cdot 23! \cdot 24! \cdot 23 \cdot 23! = 2 \cdot 23 \cdot (23!)^2(24!)^2$. Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{23}{288}$.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho số phức z thỏa mãn $|z| \leq 2$. Giá trị nhỏ nhất của $P = 2|z+1|+2|z-1|+|z-\overline{z}-4i|$ bằng

A $4+2\sqrt{3}$. **B** $2+\sqrt{3}$. **C** $4+\dfrac{14}{\sqrt{15}}$. **D** $2+\dfrac{7}{\sqrt{15}}$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có $|z| \leq 2 \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 4$. Suy ra $x, y \in [-2;2]$.

Khi đó

$$P = 2\sqrt{(x+1)^2+y^2}+2\sqrt{(x-1)^2+y^2}+2|y-2| = 2\left(\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}\right)+2|y-2|.$$

Bằng phép biến đổi tương đương với chú ý $|x| \geq x$, ta có: Với mọi số thực a, b, c, d,

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2};$$

dấu "=" xảy ra khi $ad = bc \geq 0$. Áp dụng bất đẳng thức này với $a = x+1$, $c = 1-x$, $b = d = y$ và tính chất của giá trị tuyệt đối ta có

$$P \geq 2\sqrt{(x+1+1-x)^2+(y+y)^2}+2(2-y) = 4\sqrt{1+y^2}-2y+4.$$

Xét hàm số $f(y) = 4\sqrt{1+y^2}-2y+4$ liên tục trên $[-2;2]$. Ta có $f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \in [-2;2]$.
Ta có $f(2) = 4\sqrt{5}$, $f(-2) = 4\sqrt{5}+8$, $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = 4+2\sqrt{3}$, $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = 4+\dfrac{10}{\sqrt{3}}$. Suy ra $\min\limits_{[-2;2]} f(y) = 4+2\sqrt{3} = f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Khi đó $P \geq f(y) \geq 4+2\sqrt{3}$, $\forall y \in [-2;2]$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)y = y(1-x) \geq 0\\ 2-y \geq 0\\ y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases}x = 0\\ y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $4+2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. C	3. A	4. B	5. A	6. D	7. C	8. C	9. B	10. C
11. A	12. D	13. C	14. D	15. A	16. C	17. B	18. C	19. D	20. C
21. B	22. A	23. D	24. D	25. C	26. A	27. A	28. C	29. B	30. A
31. B	32. A	33. B	34. D	35. D	36. D	37. B	38. C	39. A	40. D
41. C	42. B	43. B	44. B	45. D	46. D	47. B	48. A	49. C	50. A

122 ĐỀ THI KSCL LỚP 12 NĂM 2018 TRƯỜNG THPT PHẢ LẠI - HẢI DƯƠNG

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Trong mặt phẳng Oxy, số phức $z = 2i - 1$ được biểu diễn bởi điểm M có tọa độ là

A $(1; -2)$. B $(2; 1)$. C $(2; -1)$. D $(-1; 2)$.

Lời giải.

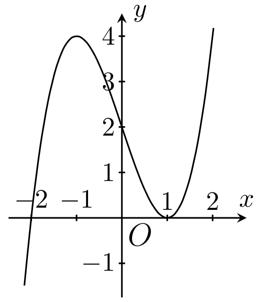
Số phức $z = -1 + 2i$ có điểm biểu diễn $M(-1; 2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 2.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f(x) + 1 = 0$ là

A 2. B 0. C 1. D 3.

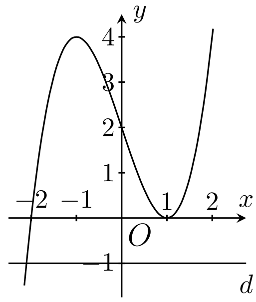


Lời giải.

Ta có $f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -1$. Từ đó suy ra số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $d\colon y = -1$.

Nhìn vào đồ thị ta suy ra đường thẳng d cắt đồ thị tại đúng 1 điểm.

Vậy phương trình $f(x) + 1 = 0$ có đúng 1 nghiệm.



Chọn đáp án C □

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(0; -3; 1)$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng d có phương trình

A $3x - 2y + z - 5 = 0$. B $3x - 2y + z - 10 = 0$.

C $3x - 2y + z + 5 = 0$. D $3x - 2y + z - 7 = 0$.

Lời giải.

d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (3; -2; 1)$.

Mặt phẳng (P) qua điểm $M(0; -3; 1)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = \vec{u}$ nên có phương trình:

$3(x - 0) - 2(y + 3) + 1(z - 1) = 0$ hay $3x - 2y + z - 7 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 7z + 51i^{2008} = 0$. Tính giá trị biểu thức $P = 2z_1 - z_1z_2 + 2z_2$.

A $P=-37$. **B** $P=58$. **C** $P=-65$. **D** $P=-44$.

Lời giải.

Ta có $z^2-7z+51i^{2008}=0 \Leftrightarrow z^2-7z+51=0$.

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} z_1+z_2=7 \\ z_1\cdot z_2=51. \end{cases}$

Từ đó suy ra $P=2z_1-z_1z_2+2z_2=2(z_1+z_2)-z_1z_2=14-51=-37$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x-1$ là

A $\cos x-x+C$. **B** $-\cos x+C$. **C** $-\cos x-x+C$. **D** $\cos x-x+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)dx=\int(\sin x-1)\,dx=-\cos x-x+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho $a>0, a\neq 1$. Tính $A=\log^2_{a^2}a^4$.

A $A=16$. **B** $A=6$. **C** $A=2$. **D** $A=4$.

Lời giải.

Ta có $A=\log^2_{a^2}a^4=\left(\log_{a^2}a^4\right)^2=\left(4\cdot\dfrac{1}{2}\log_a a\right)^2=4$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Thể tích của khối lăng trụ có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B là

A $V=\dfrac{1}{3}Bh$. **B** $V=Bh$. **C** $V=\dfrac{1}{6}Bh$. **D** $V=\dfrac{1}{4}Bh$.

Lời giải.

Thể tích của khối lăng trụ có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B là $V=Bh$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Một hình trụ có chiều cao bằng a và chu vi của đường tròn đáy bằng $4\pi a$. Thể tích của khối trụ này bằng

A $4\pi a^3$. **B** $16\pi a^3$. **C** $\dfrac{4}{3}\pi a^3$. **D** $2\pi a^3$.

Lời giải.

Gọi R là bán kính của đáy hình trụ, khi đó $2\pi R=4\pi a \Rightarrow R=2a$.

Vậy thể tích hình trụ là $V=\pi R^2h=\pi(2a)^2a=4\pi a^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Cho số phức $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $|z|(2+i)=z-1+i(2z+3)$. Tính $S=3a+5b$.

A $S=-11$. **B** $S=-5$. **C** $S=-1$. **D** $S=1$.

Lời giải.

ta có

$$\begin{aligned}|z|(2+i)=z-1+i(2z+3) &\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}(2+i)=a+bi-1+(2a+2bi+3)i\\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b^2}i=a-2b-1+(2a+b+3)i.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\begin{cases} a-2b-1=2\sqrt{a^2+b^2} \\ 2a+b+3=\sqrt{a^2+b^2}. \end{cases}$

Giải hệ ta được $a=3$ và $b=-4$, từ đó suy ra $S=3a+5b=-11$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ với $a<b$. Diện tích của D được tính theo công thức

A $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B** $S=\pi\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C** $S=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **D** $S=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích của D được tính theo công thức $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ trên đoạn $[-1;2]$.

A -2. **B** 2 . **C** $\dfrac{2}{3}$. **D** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ xác định và đồng biến trên $[-1;2]$. Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ trên đoạn $[-1;2]$ là $y(-1)=-2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Tính giới hạn $I=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

A $I=1$. **B** $I=0$. **C** $I=2$. **D** $I=+\infty$.

Lời giải.

$I=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$.

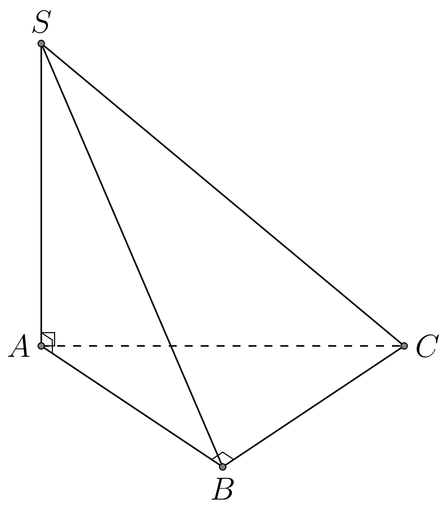
Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $AB=a, BC=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

A $2a$. **B** $a\sqrt{3}$. **C** a. **D** $a\sqrt{5}$.

Lời giải.

Dễ thấy AB là đường vuông góc chung của SA và BC, từ đó suy ra $\mathrm{d}(SA, BC) = AB = a$.



Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $2a$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và đáy là hình tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$.

A $\dfrac{\pi a^2\sqrt{15}}{4}$. **B** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{6}$. **C** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{4}$. **D** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{8}$.

Lời giải.

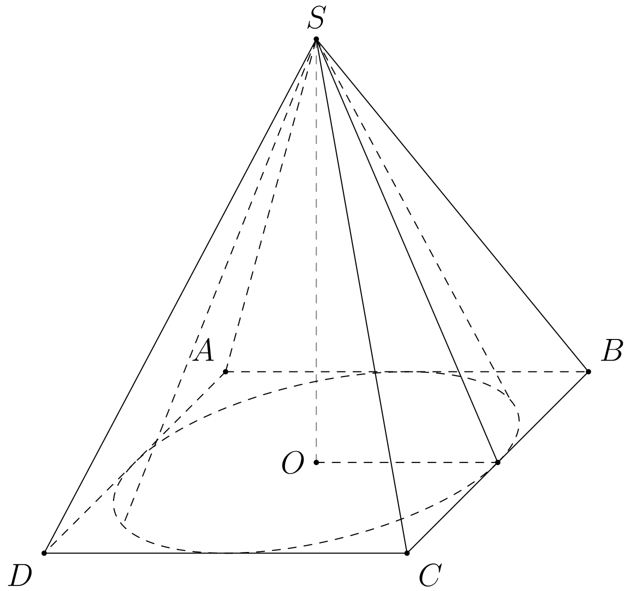
Ta có bán kính đáy của hình nón là $R = \dfrac{a}{2}$.

Chiều cao hình nón bằng chiều cao hình chóp $h = SO = 2a$.

Độ dài đường sinh là $l = \sqrt{h^2 + R^2} = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$.

Suy ra diện tích xung của hình nón là

$$S_{\text{xq}} = \pi Rl = \frac{\pi a^2\sqrt{17}}{4}.$$



Chọn đáp án C □

Câu 15. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(0; 2)$. **B** $(0; +\infty)$. **C** $(-2; +\infty)$. **D** $(2; +\infty)$.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 6x, y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến $(2, +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt{2}\right)^{x^2-2x} \leq \left(\sqrt{2}\right)^3$ là

(A) $[-2; 1]$. **B** $[-1; 3]$. (C) $(2; 5)$. (D) $(-1; 3)$.

Lời giải.

$$\left(\sqrt{2}\right)^{x^2-2x} \leq \left(\sqrt{2}\right)^3 \Leftrightarrow x^2 - 2x \leq 3$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Tính tích phân $I = \int\limits_2^4 \frac{x}{x-1}\,dx$.

(A) $2 - \ln 3$. (B) $1 + \ln 3$. (C) $\frac{2}{5}$. **D** $2 + \ln 3$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_2^4 \frac{x}{x-1}\,dx = \int\limits_2^4 \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)dx = \left(x + \ln|x-1|\right)\Big|_2^4 = 2 + \ln 3$.

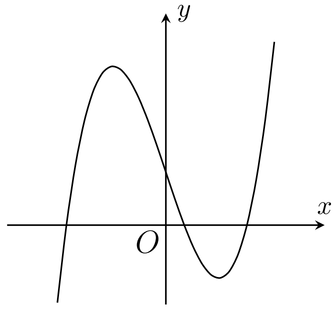
Chọn đáp án (D) □

Câu 18.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A) $y = -x^2 + x - 1$. (B) $y = -x^3 + 3x + 1$.

C $y = x^3 - 3x + 1$. (D) $y = x^4 - x^2 + 1$.



Lời giải.

Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số bậc 3 có hệ số $a > 0$. Trong bốn hàm số đã cho chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy đường cong trong hình là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				-3				$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			-4				-4		

Hàm số đạt cực đại tại điểm

(A) $x=-1$. (B) $x=1$. **C** $x=0$. (D) $x=-3$.

Lời giải.

Nhìn vào bảng biến thiên, ta thấy dấu của $f'(x)$ đổi từ dương sang âm khi đi qua $x=0$ nên hàm số đạt cực đại tại điểm $x=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $0,4\%$/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi người đó phải gửi trong bao nhiêu tháng để lĩnh về được 70 triệu đồng, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền và lãi suất không thay đổi?

A 85 tháng. (B) 83 tháng. (C) 86 tháng. (D) 84 tháng.

Lời giải.

Giả sử sau n tháng thì người gửi lĩnh về được 70 triệu đồng. Khi đó, ta có

$$50(1+0,4\%)^n=70 \Rightarrow n=\log_{1,004}\frac{7}{5}$$

Từ đó suy ra số tháng người đó phải gửi là 85.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-4;0)$ và $B(-5;2;4)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

(A) $-3x-3y+2z-7=0$. **B** $3x-3y-2z+7=0$.

(C) $3x-3y-2z+5=0$. (D) $-3x+3y+2z+7=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB nhận $\overrightarrow{AB}=(-6;6;4)$ là véc-tơ pháp tuyến và đi qua trung điểm $I(-2;-1;2)$ của AB nên có phương trình $-6(x+2)+6(y+1)+4(z-2)=0 \Leftrightarrow 3x-3y-2z+7=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Phương trình $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=22$ có nghiệm là một số có tổng các chữ số bằng

(A) 17. (B) 16. (C) 19. **D** 18.

Lời giải.

$$\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=22 \Leftrightarrow \log_3 x+\frac{1}{2}\log_3 x+\frac{1}{3}\log_3 x=22$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{6}\log_3 x = 22$$
$$\Leftrightarrow x = 3^{12} = 531441$$

Từ đó suy ra phương trình đã cho có nghiệm là một số có tổng các chữ số bằng 18.
Chọn đáp án D □

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = 5 \end{cases}$. Đường thẳng d có một vec-tơ chỉ phương là

A $\vec{u} = (-1; 2; 5)$. B $\vec{u} = (1; 2; 0)$. C $\vec{u} = (1; 2; 5)$. D $\vec{u} = (-1; 0; 5)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một vec-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 2; 0)$.
Chọn đáp án B □

Câu 24. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $H(2; 1; 1)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC.

A $2x + y + z - 6 = 0$. B $3x + y + 3z - 10 = 0$.
C $x - y + z - 2 = 0$. D $3x - y + 3z - 8 = 0$.

Lời giải.

Nếu OA, OB, OC đôi một vuông góc thì ta dễ dàng nhận thấy H là trực tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $OH \perp (ABC)$.
Từ đó suy ra (P) đi qua điểm H và nhận véc-tơ $\overrightarrow{OH} = (2; 1; 1)$ làm một véc-tơ pháp tuyến.
Suy ra mặt phẳng (P) có phương trình $2(x-2)+1(y-1)+1(z-1) = 0$ hay $(P)\colon 2x+y+z-6 = 0$.
Chọn đáp án A □

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4; -3; 2)$. Hình chiếu vuông góc của A trên trục Ox là điểm

A $M(0; -3; 0)$. B $M(0; 0; 2)$. C $M(4; 0; 0)$. D $M(4; -3; 0)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của A trên trục Ox là điểm $M(4; 0; 0)$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Một lớp có 40 học sinh. Có bao nhiêu cách chọn ra ba học sinh để một bạn làm lớp trưởng, một bạn làm lớp phó và một bạn làm bí thư?

A $3!$. B C_{40}^3. C A_{40}^3. D C_{37}^3.

Lời giải.

Mỗi cách chọn ra ba học sinh để một bạn làm lớp trưởng, một bạn làm lớp phó và một bạn làm bí thư tương ứng với một chỉnh hợp chập 3 của 40 phần tử.
Vậy có A_{40}^3 cách chọn ra ba bạn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Đồ thị hàm số nào sau đây không có tiệm cận đứng?

(A) $y = \dfrac{2x-1}{(x+1)^2}$. (B) $y = \dfrac{x-2}{x^2-x+1}$. (C) $y = \dfrac{x-1}{2x+1}$. (D) $y = \dfrac{x+3}{x^2-x-3}$.

Lời giải.

Dễ thấy hàm số $y = \dfrac{2x-1}{(x+1)^2}$ có tiệm cận đứng $x = -1$, hàm số $y = \dfrac{x-1}{2x+1}$ có tiệm cận đứng $x = -\dfrac{1}{2}$, hàm số $y = \dfrac{x+3}{x^2-x-3}$ có hai tiệm cận đứng và hàm số $y = \dfrac{x-2}{x^2-x+1}$ không có tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Có 10 người xếp thành một hàng dọc (vị trí của mỗi người trong hàng là cố định). Chọn ngẫu nhiên 3 người trong hàng. Tính xác suất để trong 3 người được chọn không có hai người nào đứng cạnh nhau.

(A) $P = \dfrac{7}{24}$. (B) $P = \dfrac{7}{90}$. (C) $P = \dfrac{7}{15}$. (D) $P = \dfrac{7}{10}$.

Lời giải.

Cách 1: Ta có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^3$.

Sau khi chọn ra 3 người thì còn lại 7 người, có 8 vách ngăn được tạo thành; 3 vị trí được rút người ra chính là 3 trong 8 vách ngăn, do đó số cách chọn người chính bằng số cách chọn 3 trong 8 vách ngăn. Vậy có $\mathrm{C}_8^3 = 56$ cách chọn ra 3 người thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Suy ra xác suất cần tính là $P = \dfrac{56}{\mathrm{C}_{10}^3} = \dfrac{7}{15}$.

Cách 2: Ta có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^3$.

Ta tính số cách chọn ra 3 người trong số 10 người đã cho sao cho không có hai người nào đứng cạnh nhau theo các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Người thứ nhất và người thứ hai đứng cách nhau đúng 1 người. Lần lượt xét người thứ nhất được chọn đứng ở vị trí thứ nhất cho đến thứ 6 ta thấy ở trường hợp 1 có tất cả $6+5+4+3+2+1 = 21$ cách chọn.

Trường hợp 2: Người thứ nhất và người thứ hai đứng cách nhau đúng 2 người. Lần lượt xét người thứ nhất được chọn đứng ở vị trí thứ nhất cho đến thứ 5 ta thấy ở trường hợp 2 có tất cả $5+4+3+2+1 = 15$ cách chọn.

Trường hợp 3: Người thứ nhất và người thứ hai đứng cách nhau đúng 3 người. Lần lượt xét người thứ nhất được chọn đứng ở vị trí thứ nhất cho đến thứ 4 ta thấy ở trường hợp 3 có tất cả $4+3+2+1 = 10$ cách chọn.

Trường hợp 4: Người thứ nhất và người thứ hai đứng cách nhau đúng 4 người. Lần lượt xét người thứ nhất được chọn đứng ở vị trí thứ nhất cho đến thứ 3 ta thấy ở trường hợp 4 có tất cả $3+2+1 = 6$ cách chọn.

Trường hợp 5: Người thứ nhất và người thứ hai đứng cách nhau đúng 5 người. Lần lượt xét người thứ nhất được chọn đứng ở vị trí thứ nhất cho đến thứ 2 ta thấy ở trường hợp 5 có tất cả $2+1 = 3$ cách chọn.

Trường hợp 6: Người thứ nhất và người thứ hai đứng cách nhau đúng 6 người, ở trường hợp 6 chỉ có 1 cách chọn bao gồm người thứ nhất, người thứ 8 và người thứ 10.

Vậy có tất cả $1+3+6+10+15+21 = 56$ cách chọn ra 3 người thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do đó xác suất cần tính là $P = \dfrac{56}{\mathrm{C}_{10}^3} = \dfrac{7}{15}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos 2x = m\sqrt{1+\tan x}\cdot\cos^2 x$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$?

A 3. (B) 4. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Đặt $t = \tan x \Rightarrow t \in [0; \sqrt{3}]$.

Khi đó $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$ và $\cos 2x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Với $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$, ta có $\cos 2x = m\sqrt{1+\tan x}\cdot\cos^2 x \Leftrightarrow m = \dfrac{\cos 2x}{\sqrt{1+\tan x}\cdot\cos^2 x} = \dfrac{1-t^2}{\sqrt{1+t}}$.

Đặt $g(t) = \dfrac{1-t^2}{\sqrt{1+t}} = (1-t)\sqrt{1+t} \Rightarrow g'(t) = \dfrac{-3t-1}{2\sqrt{1+t}} < 0, \forall t \in [0; \sqrt{3}]$

Ta có bảng biến thiên

t	0	$\sqrt{3}$
$g'(t)$	$-$	
$g(t)$	1 ↘	$\sqrt{1+\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})$

Vậy $\sqrt{1+\sqrt{3}}(1-\sqrt{3}) \leq m \leq 1$, suy ra có đúng 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 > 1, u_{n+1} = \mathrm{e}\cdot u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\ln^2 u_6 - 4\ln u_9 = \ln u_{13} + 5$. Tính u_{10}.

(A) e^{15}. **B** e^{12}. (C) e. (D) e^{10}.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_1.\mathrm{e}^{n-1}$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
\ln^2 u_6 - 4\ln u_9 = \ln u_{13} + 5 &\Leftrightarrow \left[\ln\left(u_1\cdot\mathrm{e}^5\right)\right]^2 - 4\ln\left(u_1\cdot\mathrm{e}^8\right) = \ln\left(u_1\cdot e^{12}\right) + 5\\
&\Leftrightarrow \ln^2 u_1 + 5\ln u_1 - 24 = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\ln u_1 = -8\\ \ln u_1 = 3\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u_1 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^8}\\ u_1 = \mathrm{e}^3.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vì $u_1 > 1$ nên $u_1 = \mathrm{e}^3$, suy ra $u_{10} = \mathrm{e}^3\cdot\mathrm{e}^9 = \mathrm{e}^{12}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Cho hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} + (m-2)\,x^2 + (2m+3)\,x + 1$. Giá trị nguyên lớn nhất của m để hàm số đã cho nghịch biến trên $(0;3)$ là

A -1. **B** 0 . **C** 1 . **D** -2.

Lời giải.

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 + 2(m-2)x + 2m + 3$, hàm số nghịch biến trên $(0;3)$ khi và chỉ khi

$$y' \le 0,\ \forall x \in (0;3) \Leftrightarrow 2m \le \frac{-x^2+4x-3}{x+1},\ \forall x \in (0;3)$$
$$\Leftrightarrow 2m \le g(x) = \frac{-x^2+4x-3}{x+1},\ \forall x \in (0;3).$$

$g'(x) = \dfrac{-x^2-2x+7}{(x+1)^2}, g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1-\sqrt{8} \\ x = -1+\sqrt{8} \end{array}\right.$.

x	0		$-1+\sqrt{8}$		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	$6-2\sqrt{8}$	$\searrow$	0

Từ đó suy ra $m \le -\dfrac{3}{2}$. Vậy m nguyên lớn nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m = -2$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{6}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A $30°$. **B** $60°$. **C** $90°$. **D** $45°$.

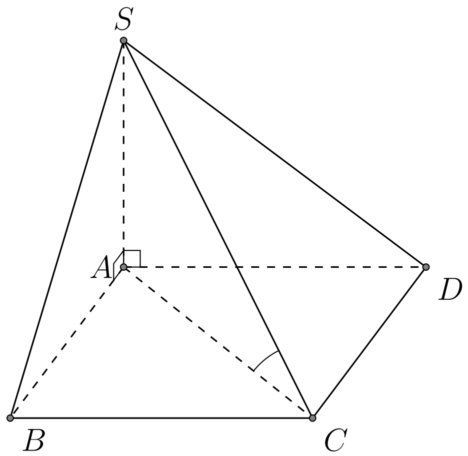
Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow AC$ là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$.

Suy ra $(SC,(ABCD)) = \widehat{SCA}$.

$\tan SCA = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{SA}{\sqrt{AB^2+AD^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \widehat{CSA} = 60°$.



Chọn đáp án B $\square$

Câu 33. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ với $a > 0$, $c > 2018$ và $a + b + c < 2018$. Số cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2018|$ là

A 4. **B** 6. **C** 7. **D** 3.

Lời giải.

Vì $a > 0$ và $c > 2018$ nên $a + c > 2018$. Mặt khác $a + b + c < 2018$ nên $b < 0$, do đó $ab < 0$.

Đặt $g(x) = f(x) - 2018$.

Suy ra, đồ thị hàm số $y = g(x)$ thu được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ theo véc-tơ $\vec{v} = (0; -2018)$.

Vì $ab < 0$ nên $y = g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Ta có $g(0) \cdot g(1) = (c - 2018) \cdot (a + b + c - 2018) < 0 \Rightarrow g(x)$ có nghiệm trên $(0; 1)$ và vì $g(0) = c - 2018 > 0$ nên $g(x)$ cắt Ox tại 4 điểm phân biệt $\Rightarrow g_{\text{CT}} < 0$.

Do đó hàm số $y = |f(x) - 2018| = |g(x)|$ có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + (4-3m)x + 1$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để trên (C) có duy nhất một điểm có hoành độ âm mà tiếp tuyến của (C) tại điểm đó vuông góc với đường thẳng có phương trình $x + 2y = 0$.

A. $m \leq 0$ hoặc $m \geq \frac{2}{3}$.
B. $m > \frac{2}{3}$.
C. $m < 0$ hoặc $m > \frac{2}{3}$.
D. $m \leq 0$ hoặc $m > \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = mx^2 + 2(m-1)x + 4 - 3m$.

Xét phương trình $mx^2 + 2(m-1)x + 4 - 3m = 2 \Leftrightarrow mx^2 + 2(m-1)x + 2 - 3m = 0$.

Như vậy yêu cầu bài toán tương đương với phương trình trên có hai nghiệm trái dấu. Do đó $m(2 - 3m) < 0$, suy ra $m < 0$ hoặc $m > \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 0; 1), B(-1; 2; 1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB).

A. $\Delta: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$.
B. $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$.
C. $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$.
D. $\Delta: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Lời giải.

$\overrightarrow{OA} = (1; 0; 1), \overrightarrow{OB} = (-1; 2; 1) \Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (-2; -2; 2)$.

Ta thấy tam giác OAB vuông tại O nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là trung điểm I của AB.

Ta có $I(0; 1; 1)$, suy ra đường thẳng Δ đi qua $I(0; 1; 1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; -1)$.

Vậy Δ có phương trình $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z - 1 + i|$. Khi đó $P = M^2 + m^2$ bằng

A. $\frac{171}{2}$.
B. $\frac{171}{4}$.
C. $\frac{167}{4}$.
D. $\frac{167}{2}$.

Lời giải.

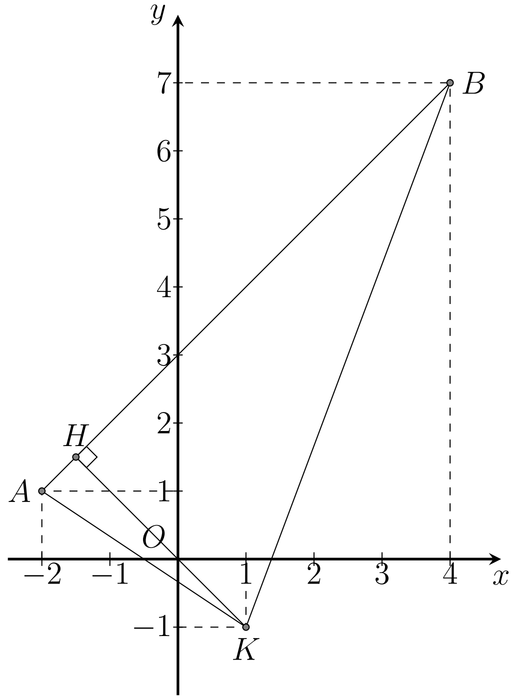
Giả sử $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Gọi P, A, B lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $z, -2+i, 4+7i$. Khi đó $P(x; y), A(-2; 1), B(4; 7)$ và $\begin{cases} PA = |z+2-i| \\ PB = |z-4-7i| \\ AB = 6\sqrt{2}. \end{cases}$

Từ đó suy ra $|z+2-i| + |z-4-7i| = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow PA + PB = AB$ hay tập hợp các điểm P biểu diễn cho số phức z là đoạn thẳng AB.

Gọi K là điểm biểu diễn số phức $1 - i \Rightarrow K(1; -1)$, khi đó $KA = \sqrt{13}, KB = \sqrt{73}$ và $|z - 1 + i| = PK$.

Ta có $M = \max\{KA, KB\} = \sqrt{73}$.

Dễ thấy tam giác KAB là tam giác có ba góc nhọn, do đó hình chiếu vuông góc H của điểm K trên đường thẳng AB nằm trong đoạn AB, do đó $m = KH = \mathrm{d}(K, AB)$.



Đường thẳng AB có phương trình $\dfrac{x+2}{4+2} = \dfrac{y-1}{7-1}$ hay $x - y + 3 = 0$.

Do đó $\mathrm{d}(K, AB) = \dfrac{|1-(-1)+3|}{\sqrt{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow m = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$.

Vậy $M^2 + m^2 = 73 + \dfrac{25}{2} = \dfrac{171}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Biết $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{b}$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P = 5a - b$.

A $P = 6$. **B** $P = 1$. **C** $P = 5$. **D** $P = 8$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 \frac{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}{[(2+x)-(2-x)]}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 \frac{1}{2}\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left.\frac{\sqrt{(2+x)^3}+\sqrt{(2-x)^3}}{3}\right|_0^2 \\ &= \frac{8-\sqrt{32}}{3}.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $a = 8, b = 32$ nên $P = 5 \cdot 8 - 32 = 8$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Một tổ có 6 học sinh nữ và 4 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh trong tổ. Tính xác suất để trong 5 học sinh được chọn có không quá 3 học sinh nữ.

(A) $\frac{46}{63}$. (B) $\frac{5}{63}$. (C) $\frac{31}{42}$. (D) $\frac{5}{7}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $C_{10}^5 = 252$.

Số cách chọn 5 học sinh mà không có quá ba học sinh nữ là $C_6^1 \cdot C_4^4 + C_6^2 \cdot C_4^3 + C_6^3 \cdot C_4^2 = 186$.

Vậy xác suất cần tìm là $\frac{186}{252} = \frac{31}{42}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+m^2}{x-1}$ trên $[-1;0]$ bằng -1?

(A) 0. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{-m^2-1}{(x-1)^2} < 0, \forall m$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;0]$ là $y(-1) = \frac{m^2-1}{-2}$.

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+m^2}{x-1}$ trên $[-1;0]$ bằng $-1 \Leftrightarrow \frac{m^2-1}{-2} = -1 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}$.

Vậy có 2 giá trị thực của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C, $AC = 3$, $BC = 1$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 4$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. H là điểm đối xứng với C qua M. Tính cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SHB) và (SBC).

(A) $\frac{3\sqrt{10}}{85}$. (B) $\frac{3\sqrt{17}}{80}$. (C) $\frac{3\sqrt{17}}{85}$. (D) $\frac{3\sqrt{10}}{80}$.

Lời giải.

Chọn hệ tọa độ $Cxyz$ như hình vẽ, khi đó ta có $C(0;0;0), A(3;0;0), B(0;1;0), S(3;0;4), H(3;1;0)$.

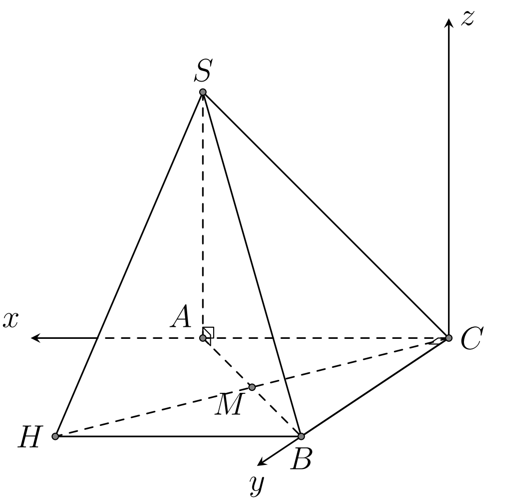
$\overrightarrow{CB} = (0;1;0), \overrightarrow{CS} = (3;0;4) \Rightarrow [\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CS}] = (4;0;-3)$

$\overrightarrow{BS} = (3;0;0), \overrightarrow{BH} = (3;-1;4) \Rightarrow [\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BH}] = (0;12;3)$

Từ đó suy ra các mặt phẳng (SBC) và (SHB) lần lượt có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1} = (4;0;-3)$ và $\overrightarrow{n_2} = (0;4;1)$.

Gọi α là góc giữa các mặt phẳng (SBC) và (SHB), khi đó

$$\cos\alpha = |\cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})| = \frac{3}{5\sqrt{17}} = \frac{3\sqrt{17}}{85}.$$



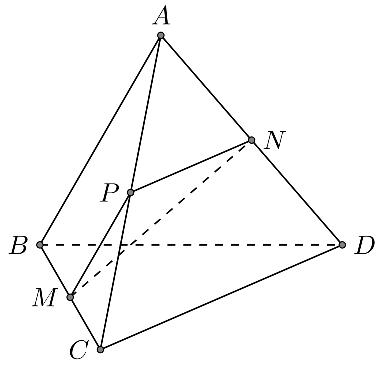
Chọn đáp án (C) □

Câu 41. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AD. Biết $AB = CD = 2a, MN = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

(A) $45°$. (B) $90°$. (C) $60°$. (D) $30°$.

Lời giải.

Gọi P là trung điểm $AC \Rightarrow MP \parallel AB, MP = \dfrac{1}{2}AB = a$ và $NP \parallel CD, NP = \dfrac{1}{2}CD = a$.
$(AB, CD) = (PM, PN)$.
Ta có $\cos\widehat{MPN} = \dfrac{PM^2 + PN^2 - MN^2}{2PM \cdot PN} = \dfrac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\dfrac{1}{2}$.
Từ đó suy ra $\widehat{MPN} = 120^\circ \Rightarrow (AB, CD) = 60^\circ$.



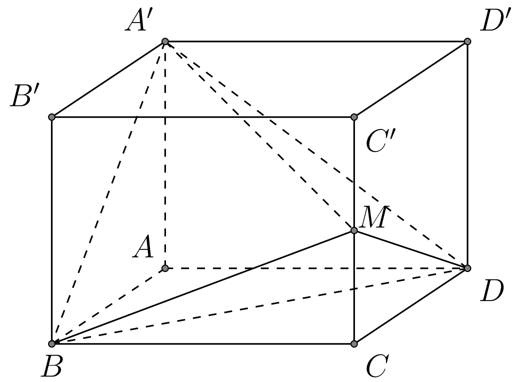
Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a, chiều cao $AA' = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của CC'. Tính thể tích của khối tứ diện $BDA'M$.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{15}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.

Ta có $V_{ABDM} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_{A'.ABD} - V_{A'B'BMC'} - V_{A'D'DMC'} - V_{MBCD}$
$V_{ABCD.A'B'C'D'} = a\sqrt{3} \cdot a^2 = a^3\sqrt{3}$.
$V_{A'.ACD} = \dfrac{1}{3}AA' \cdot S_{\Delta ABD} = \dfrac{1}{6}a^3\sqrt{3}$.
$V_{M.BCD} = \dfrac{1}{3}MC \cdot S_{\Delta BCD} = \dfrac{1}{12}a^3\sqrt{3}$.
$V_{A'.B'BMC'} = \dfrac{1}{3}A'B' \cdot S_{B'BMC'} = \dfrac{1}{4}a^3\sqrt{3}$.
$V_{A'.D'DMC'} = \dfrac{1}{3}A'D' \cdot S_{D'DMC'} = \dfrac{1}{4}a^3\sqrt{3}$.
Từ đó suy ra $V_{ABDM} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x + 3y - z - 1 = 0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{4}$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P), đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là

(A) $\dfrac{x+3}{13} = \dfrac{y+2}{-6} = \dfrac{z+10}{5}$. (B) $\dfrac{x+3}{13} = \dfrac{y+2}{-6} = \dfrac{z+10}{-5}$.

(C) $\dfrac{x-3}{13} = \dfrac{y-2}{-6} = \dfrac{z-10}{-5}$. (D) $\dfrac{x-3}{13} = \dfrac{y+2}{-6} = \dfrac{z+10}{-5}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) cơ véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 3; -1)$.
Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; 4)$.
Gọi Δ là đường thẳng cần lập phương trình. Theo giả thiết, ta có $[\vec{n}, \vec{u}] = (13; -2; -5)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ. Gọi A là giao điểm của d với mặt phẳng (P), khi đó $A(-3; -2; -10)$ và Δ đi qua A.
Vậy Δ có phương trình $\dfrac{x+3}{13} = \dfrac{y+2}{-6} = \dfrac{z+10}{-5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Có bao nhiêu số thực $x\in(0;2018\pi)$ để $F(x)=1$.

A 2018. **B** 1009. **C** 2017. **D** 2016.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}-\sin x$, suy ra $F(x)=-\cot x+\cos x+C$.

Do $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ nên $C=1$, khi đó $F(x)=-\cot x+\cos x+1$.

Vậy $F(x)=1\Leftrightarrow \cot x-\cos x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Do $x\in(0;2018\pi)\Rightarrow 0<\dfrac{\pi}{2}+k\pi<2018\pi\Rightarrow 0<\dfrac{1}{2}+k$, từ đó suy ra có 2018 số thực thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-x^2+5x-6,\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=-5f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(2;3)$. **B** $(-\infty;3)$.

C $(-\infty;2)$ và $(3;+\infty)$. **D** $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y'=-5f'(x)=-5(-x^2+5x-6)=5(x^2-5x+6)=5(x-2)(x-3)$.

Suy ra $y'<0\Leftrightarrow x\in(2;3)$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trong $(2;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Tổng các hệ số trong khai triển $\left(\dfrac{1}{x}+x^4\right)^n$ là 1024. Hệ số chứa x^{10} là

A 10. **B** 252. **C** 120. **D** 210.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\cdots+\mathrm{C}_n^n=1024$.

Mặt khác $\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\cdots\mathrm{C}_n^n=(1+1)^n=2^n\Rightarrow 2^n=1024\Rightarrow n=10$. Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(\dfrac{1}{x}+x^4\right)^{10}$ là $T_k=\mathrm{C}_{10}^k\left(\dfrac{1}{x}\right)^k(x^4)^{10-k}=\mathrm{C}_{10}^k x^{40-5k}$.

Ta có $40-5k=10\Leftrightarrow k=6$. Vậy hệ số của số hạng chứa x^{10} là $\mathrm{C}_{10}^6=210$.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$, $f(0)=1$, $f'(x)=(2-2x)\cdot f(x)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A $m\in(0;\mathrm{e}^2)$. **B** $m\in(0;\mathrm{e})$. **C** $m\in(1;\mathrm{e})$. **D** $m\in(0;1)$.

Lời giải.

Từ giả thiết $f'(x)=(2-2x)\cdot f(x)$ ta suy ra $\displaystyle\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int(2-2x)\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $\ln|f(x)|=2x-x^2+C\Rightarrow|f(x)|=\mathrm{e}^{2x-x^2+C}\Rightarrow f(x)=\mathrm{e}^{2x-x^2+C}$ (vì $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$).

Do $f(0) = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \mathrm{e}^{2x-x^2}$.
Ta có $f'(x) = (2-2x)\cdot \mathrm{e}^{2x-x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Ta có bảng biến thiên:

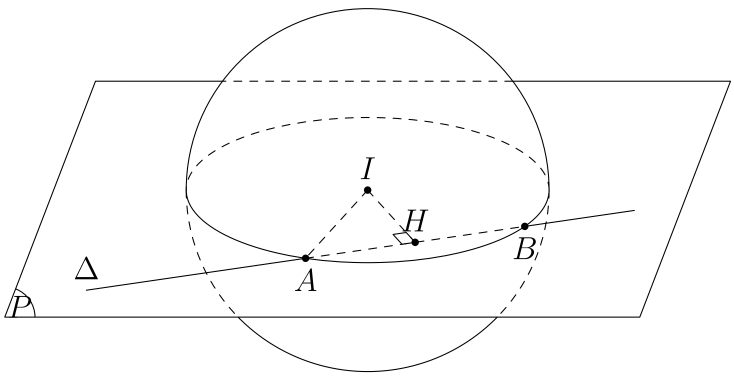
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

Từ đó suy ra phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $m \in (0; \mathrm{e})$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(2;3;-1)$ và đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-11}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+15}{-2}$.
Phương trình mặt cầu tâm I, cắt Δ tại hai điểm A, B sao cho $AB = 16$ có phương trình là

(A) $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = \dfrac{725}{9}$.
(B) $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = \dfrac{725}{9}$.
(C) $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = \dfrac{1301}{9}$.
(D) $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = \dfrac{1301}{9}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AB, khi đó $HA = HB = 8$ và $IH \perp AB$.
Dễ thấy $R^2 = IA^2 = IH^2 + HA^2 = 64 + \mathrm{d}^2(I, \Delta)$.
Đường thẳng Δ đi qua điểm $K(11;0;-15)$. Ta có $\overrightarrow{IK} = (9;-3;-14)$ và $\vec{u}(2;1;-2)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ.
Ta có $\left[\overrightarrow{IK}, \vec{u}\right] = (20;-10;15)$.
$\mathrm{d}(I,\Delta) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IK}, \vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|} = \dfrac{\sqrt{725}}{3}$, suy ra $R^2 = 64 + \dfrac{725}{9} = \dfrac{1301}{9}$.
Vậy mặt cầu cần lập có phương trình $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = \dfrac{1301}{9}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_2(4^x - m - 1) = x + 2$ có đúng hai nghiệm phân biệt?

(A) 4. **(B)** 2. **(C)** 1. **(D)** 3.

Lời giải.

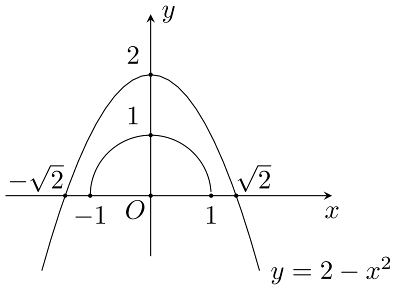
Phương trình đã cho tương đương với:
$4^x - m - 1 = 2^{x+2} \Leftrightarrow (2^x)^2 - 4.2^x - m - 1 = 0$
Đặt $t = 2^x$ với $t > 0$ ta được phương trình $t^2 - 4t - m - 1 = 0$. (1)
Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm dương phân biệt t_1, t_2.
$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 + m + 1 > 0 \\ t_1 + t_2 = 4 > 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -5 \\ m < -1. \end{cases}$
Từ đó suy ra có đúng 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án D □

Câu 50. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{1 - x^2}, y = 2 - x^2$ và trục hoành bằng

A $\dfrac{8\sqrt{2}}{3} - \dfrac{\pi}{2}$. **B** $\dfrac{8\sqrt{2}}{3} - \pi$. **C** $\dfrac{4\sqrt{2}}{3} - \dfrac{\pi}{2}$. **D** $\dfrac{8\sqrt{2}}{3} + \dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$, $2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{array}\right.$.



Gọi S là diện tích hình phẳng cần tính, S_1 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi Parabol $y = 2 - x^2$ và trục Ox, S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{1 - x^2}$ và trục Ox. Khi đó $S = S_1 - S_2$.

Ta có $S_1 = \displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2)\,dx = \left(2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$.

S_2 chính là diện tích của nửa hình tròn bán kính 1, do đó $S_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

Vậy $S = \dfrac{8\sqrt{2}}{3} - \dfrac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án A □

—— **HẾT** ——

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. C	3. D	4. A	5. C	6. D	7. B	8. A	9. A	10. A
11. A	12. C	13. C	14. C	15. D	16. B	17. D	18. C	19. C	20. A
21. B	22. D	23. B	24. A	25. C	26. C	27. B	28. C	29. A	30. B
31. D	32. B	33. C	34. C	35. B	36. A	37. D	38. C	39. D	40. C
41. C	42. B	43. B	44. A	45. A	46. D	47. B	48. C	49. D	50. A

123 ĐỀ KSCL, THPT QUỲNH LƯU 1 - NGHỆ AN - LẦN 2 - 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Số các số tự nhiên có 4 chữ số phân biệt lấy từ tập hợp $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ là

(A) $4!$. (B) A_9^4. (C) 4^9. (D) C_9^4.

Lời giải.

Mỗi cách sắp thứ tự 4 phần tử của M cho ta một số thoả mãn yêu cầu bài toán.

Do đó số các số thoả mãn yêu cầu bài toán là số chỉnh hợp chập 4 của 9 phần tử.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(0; 3)$. (B) $(0; +\infty)$. (C) $(-\infty; -2)$. (D) $(-2; 0)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Từ một hộp đựng 10 thẻ được đánh số thứ tự từ 1 đến 10, người ta rút ngẫu nhiên ra k thẻ. Gọi P là xác suất xuất hiện ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4 khi được rút ra. Tìm giá trị nhỏ nhất của k để $P > \dfrac{13}{15}$.

(A) 9. (B) 8. (C) 7. (D) 6.

Lời giải.

Số cách rút k thẻ từ 10 thẻ là C_{10}^k $(0 < k \leq 10, k \in \mathbb{N})$.

Số cách rút k thẻ mà không có thẻ nào ghi số chia hết cho 4 là C_8^k.

Xác suất "có ít nhất 1 thẻ ghi số chia hết cho 4" là $P = 1 - \dfrac{\mathrm{C}_8^k}{\mathrm{C}_{10}^k} = 1 - \dfrac{(10-k)(9-k)}{90}$.

Theo bài ra ta có $P = 1 - \dfrac{(10-k)(9-k)}{90} > \dfrac{13}{15} \Leftrightarrow 6 < k \leq 10$ (do $k \leq 10$).

Như vậy giá trị nhỏ nhất của k là $\min k = 7$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(3; -4; 5)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oxz) là điểm

(A) $M(3; 0; 5)$. (B) $M(3; 0; 0)$. (C) $M(0; -4; 5)$. (D) $M(0; 0; 5)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; -4; 5)$ trên mặt phẳng (Oxz) là điểm $M(3; 0; 5)$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn hai nghiệm phức của phương trình $z^2+2z+5=0$ trên mặt phẳng phức. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A 6. B 2. C 4. D 12.

Lời giải.

Ta có $z^2+2z+5=0 \Leftrightarrow (z+1)^2=4i^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1+2i \\ z=-1-2i \end{array}\right.$.

Đặt $A(-1;2), B(-1;-2)$, suy ra $\overrightarrow{AB}=(0;-4) \Rightarrow AB=4$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Biết $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\,\mathrm{d}x = a+\frac{\pi^2}{b}+\frac{\sqrt{3}\pi}{c}$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $M=a-b+c$.

A $M=35$. B $M=41$. C $M=-37$. D $M=-35$.

Lời giải.

Đặt $x=-t \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=-\frac{\pi}{6} \Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$ và $x=\frac{\pi}{6} \Rightarrow t=-\frac{\pi}{6}$.

Từ đó, $I=\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}} \frac{-t\cos(-t)}{\sqrt{1+t^2}-t}\,\mathrm{d}t = -\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}-x}\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $2I=\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}-x}\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 2x^2\cos x\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $I=-\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} x^2\cos x\,\mathrm{d}x$.

u	v'
x^2	$\cos x$
$2x$	$\sin x$
2	$-\cos x$
0	$-\sin x$

$$=-\left(x^2\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} + 2x\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} - 2\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\right) = 2-\frac{\pi^2}{36}-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $a=2$, $b=-36$, $c=-3$ do đó $M=a-b+c=35$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 3 điểm $M(3;0;0)$, $N(0;-2;0)$, $P(0;0;1)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình

A $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{1}=-1$. B $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$.

C $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{1}=1$. **D** $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{-1}=1$.

Lời giải.

Ta có M, N, P lần lượt là giao điểm của (MNP) với 3 trục tọa độ

$\Rightarrow (MNP)\colon \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{1}=1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(-2;3;2)$ và $B(2;1;0)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình

A $2x+y+z-3=0$. **B** $2x-y-z+3=0$.

C $4x-2y-2z+3=0$. **D** $4x-2y+2z-6=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có 1 véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}=(4;-2;-2)$ và đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB với $I(0;2;1)$.

Mặt phẳng trung trực của AB có phương trình $2x-y-z+3=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có đường tiệm cận đứng?

A $y=\dfrac{x-1}{x}$. **B** $y=\mathrm{e}^x$. **C** $y=\sqrt{x^2+x-2}$. **D** $y=\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-1}{x}=+\infty \Rightarrow x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x}$.

$y=\mathrm{e}^x$ chỉ có tiệm cận ngang, không có tiệm cận đứng.

$y=\sqrt{x^2+x-2}$ không có tiệm cận nào.

Còn với $y=\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$ thì $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-2)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}(x-2)=-3\neq\pm\infty$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Tập nghiệm của bất phương trình $4^x>2^{x+8}$ là

A $[8;+\infty)$. **B** $(-\infty;8)$. **C** $(0;8)$. **D** $(8;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $4^x>2^{x+8}\Leftrightarrow 2^{2x}>2^{x+8}\Leftrightarrow 2x>x+8\Leftrightarrow x>8$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng $2\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Độ dài đường sinh của hình trụ đó bằng

A $2a$. **B** $\dfrac{a}{2}$. **C** a. **D** $\sqrt{2}a$.

Lời giải.

Với hình trụ, ta có $S_{xq}=2\pi rl\Leftrightarrow 2\pi al=2\pi a^2\Leftrightarrow l=a$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$.

A $\min\limits_{[0;3]}y=-3$. **B** $\min\limits_{[0;3]}y=\dfrac{1}{2}$. **C** $\min\limits_{[0;3]}y=-1$. **D** $\min\limits_{[0;3]}y=1$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ đơn điệu trên đoạn $[0;3]$ và $y(0) = -1$, $y(3) = \dfrac{1}{2}$ nên $\min\limits_{[0;3]} y = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định bởi công thức

A $S = \pi \displaystyle\int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| \mathrm{d}x$.

B $S = \displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\, \mathrm{d}x$.

C $S = \displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\, \mathrm{d}x$.

D $S = \displaystyle\int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích cần tìm được tính theo công thức $S = \displaystyle\int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Với a là một số thực dương bất kì, mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A $\ln 3a = \ln 3 + \ln a$.

B $\ln(3 + a) = \ln 3 + \ln a$.

C $\ln \dfrac{a}{3} = \dfrac{1}{3} \ln a$.

D $\ln a^5 = \dfrac{1}{5} \ln a$.

Lời giải.

Theo công thức lôgarit của một tích ta có $\ln 3a = \ln 3 + \ln a$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^2 + x + 1$ là

A $\dfrac{2x^3}{3} + x^2 + x + C$.

B $4x + 1$.

C $\dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x$.

D $\dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + C$.

Lời giải.

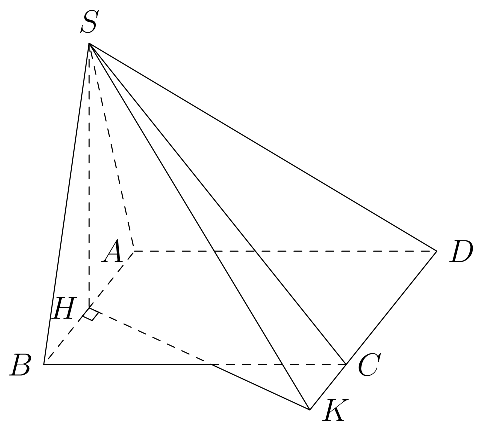
Ta có $\displaystyle\int (2x^2 + x + 1)\, \mathrm{d}x = \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $\sqrt{3}a^3$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều cạnh a nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Biết đáy $ABCD$ là một hình bình hành, tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD.

A $2a\sqrt{3}$. **B** a. **C** $6a$. **D** $a\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm cạnh $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt CD tại K
$\Rightarrow KH \perp (SAB)$.
Ta có $AB \,/\!/\, CD$ do đó
$\mathrm{d}(CD, SA) = \mathrm{d}\left(CD, (SAB)\right) = \mathrm{d}\left(K, (SAB)\right) = KH$.
Theo đề bài
$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot KH \cdot AB \cdot SH \Rightarrow KH = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{a \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = 6a$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x - z + 1 = 0$. Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là

A $\vec{n}_3 = (2; 0; -1)$. **B** $\vec{n}_4 = (2; 1; 0)$. **C** $\vec{n}_1 = (2; -1; 1)$. **D** $\vec{n}_2 = (2; -1; 0)$.

Lời giải.
$(P)\colon 2x - z + 1 = 0$ có 1 véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (2; 0; -1)$.
Chọn đáp án A □

Câu 18. Tìm số giá trị nguyên trên đoạn $[-2; 2018]$ của tham số m để hàm số $y = \mathrm{e}^{x^3 - x^2 + mx}$ đồng biến trên đoạn $[1; 2]$.

A 2018. **B** 2019. **C** 2020. **D** 2017.

Lời giải.
Với $y = \mathrm{e}^{x^3 - x^2 + mx}$ ta có $y' = (3x^2 - 2x + m)\mathrm{e}^{x^3 - x^2 + mx}$.
Hàm số đồng biến trên đoạn $[1; 2] \Leftrightarrow y' \geqslant 0, \forall x \in [1; 2] \Leftrightarrow m \geqslant -3x^2 + 2x, \forall x \in [1; 2]$
Đặt $g(x) = -3x^2 + 2x$ thì $g'(x) = -6x + 2$. Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$.
Dễ thấy $g'(x) < 0, \forall x \in [1; 2]$ nên $g(x)$ nghịch biến trên đoạn $[1; 2]$.
Từ đó $\max\limits_{[1;2]} g(x) = g(1) = -1$.
Vậy $m \geqslant g(x), \forall x \in [1; 2] \Leftrightarrow m \geqslant \max\limits_{[1;2]} g(x) \Leftrightarrow m \geqslant -1$.
Do đó có 2020 giá trị nguyên của tham số m thoả mãn yêu cầu của bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $\dfrac{1}{f(3-x) - 2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A 2. **B** 3. **C** 1. **D** 0.

Lời giải.

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f(3-x)-2}$ bằng với số nghiệm phân biệt của phương trình $f(3-x) = 2$.
Dựa trên bảng biến thiên của hàm số ta thấy phương trình $f(x) = 2$ có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình $f(3-x) = 2$ cũng có 3 nghiệm phân biệt.
Vậy số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f(3-x)-2}$ là 3 đường.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho số phức $z = -2 + i$. Điểm nào sau đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ?

A $P(-2; 1)$. **B** $N(2; 1)$. **C** $Q(1; 2)$. **D** $M(-1; -2)$.

Lời giải.

Có $w = zi = i(-2+i) = -1 - 2i$ nên điểm biểu diễn của w là điểm $M(-1; -2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Thầy Châu vay ngân hàng 300 triệu đồng theo phương thức trả góp để mua xe. Nếu cuối mỗi tháng, bắt đầu từ tháng thứ nhất thầy Châu trả 5 triệu đồng và chịu lãi số tiền chưa trả là 0,65% mỗi tháng (biết lãi suất không thay đổi) thì sau bao lâu thầy Châu trả hết số tiền đã vay?

A 78 tháng. **B** 76 tháng. **C** 75 tháng. **D** 77 tháng.

Lời giải.

Đặt $T = 300$ triệu đồng, $A = 5$ triệu đồng, $r = 0{,}65\%$.
Gọi P_n là số tiền còn nợ ngân hàng sau lần trả tiền thứ n. Khi đó ta có
$P_1 = T(1+r) - A$.
$P_2 = P_1(1+r) - A = T(1+r)^2 - A\dfrac{(1+r)^2-1}{r}$.
$P_3 = P_2(1+r) - A = T(1+r)^3 - A\dfrac{(1+r)^3-1}{r}$.
$\ldots$
$P_n = T(1+r)^n - A\dfrac{(1+r)^n-1}{r}$.
Thầy Châu trả hết số tiền trên thì $T(1+r)^n - A\dfrac{(1+r)^n-1}{r} = 0$.
$\Rightarrow 300(1{,}0065)^n - 5 \times \dfrac{(1{,}0065)^n - 1}{0{,}0065} = 0 \Rightarrow n \approx 76{,}29$.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x - \sqrt{x^2+x}}{x+1}$.

A -2. **B** 2. **C** 0. **D** $-\infty$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+x}}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - |x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x + x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{1+\frac{1}{x}} = 2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $g(x) = 2f(x) + 1$ đạt cực tiểu tại điểm

A $x = 2$. **B** $x = 0$. **C** $x = 1$. **D** $x = 5$.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có $g'(x) = 2f'(x)$. Do đó dấu của $g'(x)$ cũng chính là dấu của $f'(x)$ (với mọi x).

Vậy $g(x)$ cũng đạt cực tiểu tại $x_{\text{CT}} = 0$ và đạt cực đại tại $x_{\text{CĐ}} = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Thể tích của khối nón có chiều cao bằng h và bán kính đáy bằng R là

A $V = \pi R^2 h$. **B** $V = \dfrac{1}{3}\pi R h$. **C** $V = \dfrac{1}{3}2\pi R h$. **D** $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$.

Lời giải.

Thể tích của khối nón: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của biểu thức $(2-3x)^{2n}$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{C}_{2n+1}^0 + \mathrm{C}_{2n+1}^2 + \mathrm{C}_{2n+1}^4 + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n} = 1024$.

A 2099529. **B** -2099520. **C** -1959552. **D** 1959552.

Lời giải.

Ta có $(1+x)^{2n+1} = \mathrm{C}_{2n+1}^0 + \mathrm{C}_{2n+1}^1 x + \mathrm{C}_{2n+1}^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n} x^{2n} + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1}$

Cho $x = 1$, ta được: $2^{2n+1} = \mathrm{C}_{2n+1}^0 + \mathrm{C}_{2n+1}^1 + \mathrm{C}_{2n+1}^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n} + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}$

Cho $x = -1$, ta được: $0 = \mathrm{C}_{2n+1}^0 - \mathrm{C}_{2n+1}^1 + \mathrm{C}_{2n+1}^2 - \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n} - \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}$

Từ đó $\mathrm{C}_{2n+1}^0 + \mathrm{C}_{2n+1}^2 + \mathrm{C}_{2n+1}^4 + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n} = 2^{2n} = 1024 \Leftrightarrow n = 5$.

Với $n = 5$ ta có $(2-3x)^{2n} = (2-3x)^{10}$ (*)

Vậy hệ số chứa x^5 trong khai triển của (*) là $T_6 = -\mathrm{C}_{10}^5 2^5 3^5 = -1959552$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Số nghiệm của phương trình $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$ là

A 0. **B** 2. **C** 3. **D** 1.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x > 0 \ (*) \\ \log_4 x > 0 \end{cases}$

$\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log_2(\log_2 x) + \log_2\left(\dfrac{1}{2}\log_2 x\right) = 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log_2(\log_2 x) + \log_2\dfrac{1}{2} + \log_2(\log_2 x) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\log_2(\log_2 x) = 3$

$\Leftrightarrow \log_2(\log_2 x) = 2 \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 16$ (thoả mãn điều kiện (*)).

Chọn đáp án D □

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $f(x) - 2m = 0$ có 3 nghiệm khi và chỉ khi

A. $-1 \leqslant m \leqslant 2$. B. $-1 < m < 2$. C. $-1 < m \leqslant 2$. D. $-2 < m < 4$.

Lời giải.

Ta có $f(x) - 2m = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2m$ (1).

Số nghiệm phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 2m$.

Dựa vào bảng biến thiên: phương trình có 3 nghiệm khi và chỉ khi $-2 < 2m < 4 \Leftrightarrow -1 < m < 2$.

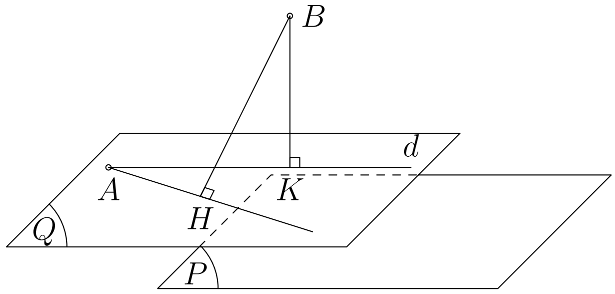
Chọn đáp án B □

Câu 28. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x - 2y + 2z - 5 = 0$ và hai điểm $A(-3;0;1), B(1;-1;3)$. Trong các đường thẳng đi qua A và song song với (P), đường thẳng nào cách B một khoảng cách nhỏ nhất?

A. $\dfrac{x+3}{26} = \dfrac{y}{11} = \dfrac{z-1}{-2}$. B. $\dfrac{x+3}{26} = \dfrac{y}{-11} = \dfrac{z-1}{-2}$.

C. $\dfrac{x-3}{26} = \dfrac{y}{11} = \dfrac{z+1}{-2}$. D. $\dfrac{x+2}{26} = \dfrac{y-1}{11} = \dfrac{z+3}{-2}$.

Lời giải.



Gọi d là đường thẳng cần tìm.

Gọi (Q) là mặt phẳng qua $A(-3;0;1)$ và song song với $(P)\colon x - 2y + 2z - 5 = 0$.

$\Rightarrow (Q)\colon x - 2y + 2z + 1 = 0$ và $d \subset (Q)$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B lên d và (Q) thì $BH \geqslant BK$.

Do đó $\mathrm{d}(B;d)$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $H \equiv K$.

Đường thẳng BK đi qua $B(1;-1;3)$ và vuông góc với $(Q) \Rightarrow BK\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \ (t \in \mathbb{R}). \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

Ta có $K = BK \cap (Q) \Rightarrow K\left(-\dfrac{1}{9}; \dfrac{11}{9}; \dfrac{7}{9}\right)$.

Đường thẳng d qua A và nhận $\overrightarrow{AK} = \left(\dfrac{26}{9}; \dfrac{11}{9}; -\dfrac{2}{9}\right)$ làm véc-tơ chỉ phương

nên $d\colon \dfrac{x+3}{26} = \dfrac{y}{11} = \dfrac{z-1}{-2}$.

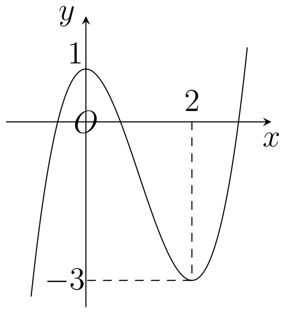
Chọn đáp án A □

Câu 29.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A $y = x^3 - 3x^2 + 1$. **B** $y = x^3 - 2x^2 + 1$.

C $y = x^3 - 3x^2 + 2$. **D** $y = -x^3 - 3x^2 + 1$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$ nên loại $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Điểm cực tiểu của hàm số là $x = 2$, điểm cực đại là $x = 0$. Do đó $x = 0$, $x = 2$ là nghiệm của phương trình $y' = 0$. Nên ta loại $y = x^3 - 2x^2 + 1$ và $y = -x^3 - 3x^2 + 1$.

Vậy đó là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và chiều cao bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Giá trị tang của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A 1. **B** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C** $\sqrt{3}$. **D** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$, với O là tâm của hình vuông $ABCD$.

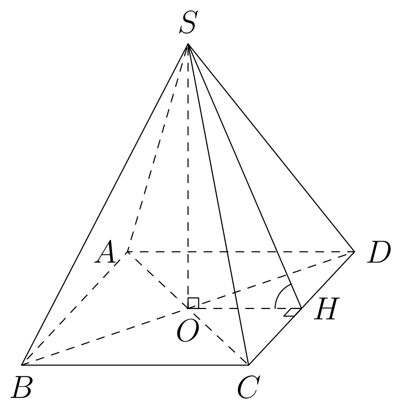
Gọi H là trung điểm của CD.

Tam giác SCD cân tại S nên $SH \perp CD$.

Tam giác OCD cân tại O nên $OH \perp CD$.

Vậy góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ là $\widehat{SHO}$.

Ta có $OH = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên $\tan \widehat{SHO} = \dfrac{SO}{OH} = 1$.



Chọn đáp án A □

Câu 31. Tích phân $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+3}$ bằng

A $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{7}{3}$. **B** $\ln\dfrac{7}{3}$. **C** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{7}{3}$. **D** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{7}$.

Lời giải.

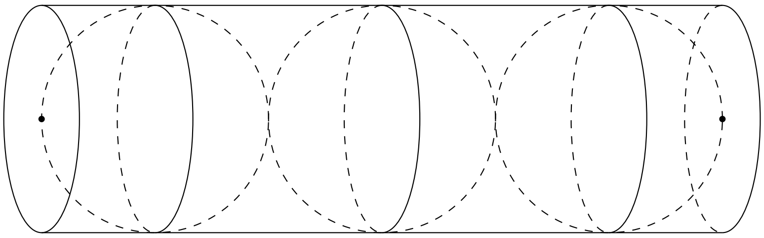
Ta có $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+3} = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{\mathrm{d}(x^2+3)}{x^2+3} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+3\right|\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{7}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Trong một chiếc hộp hình trụ người ta bỏ vào đó ba quả bóng tennis, biết rằng đáy của hình trụ bằng hình tròn lớn trên quả bóng và chiều cao hình trụ bằng 3 lần đường kính quả bóng. Gọi S_1 là tổng diện tích ba quả bóng và S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Giá trị biểu thức $2018^{\frac{S_1}{S_2}}$ bằng

A 2018. **B** 1. **C** 2018^{π}. **D** $2018^{\sqrt{2}}$.

Lời giải.



Gọi r_1 là bán kính của quả bóng.
Gọi h, r_2 tương ứng là chiều cao và bán kính đáy của hình trụ.
Theo đề bài ta có: $h = 3 \cdot (2r_1) = 6r_1$ và $r_1 = r_2$.
Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_2 = 2\pi r_2 h = 2\pi r_1 \cdot 6r_1 = 12\pi r_1^2$.
Tổng diện tích của ba quả bóng là: $S_1 = 3 \cdot 4\pi r_1^2 = 12\pi r_1^2$.
Khi đó $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{12\pi r_1^2}{12\pi r_1^2} = 1$. Từ đó $2018^{\frac{S_1}{S_2}} = 2018$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Cho phương trình $\left(\sqrt{5}-1\right)^{x^2} + m\left(\sqrt{5}+1\right)^{x^2} = 2^{x^2-2}$ (1). Khoảng $(a;b)$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có đúng bốn nghiệm phân biệt. Tính $b-a$.

(A) $\dfrac{1}{16}$. (B) $\dfrac{49}{64}$. (C) $\dfrac{1}{64}$. (D) $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Phương trình $\left(\sqrt{5}-1\right)^{x^2} + m\left(\sqrt{5}+1\right)^{x^2} = 2^{x^2-2}$ (1) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{x^2} + m\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{x^2} = \dfrac{1}{4}$.

Đặt $t = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{x^2}$; $0 < t \leqslant 1$

Phương trình (1) trở thành $t + \dfrac{m}{t} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow -t^2 + \dfrac{1}{4}t = m$ (2)

Xét $g(t) = -t^2 + \dfrac{1}{4}t$ trên $(0;1]$

$g'(t) = -2t + \dfrac{1}{4}$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{8}$.

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{8}$		1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0		$\frac{1}{64}$		$-\frac{3}{4}$

Để phương trình (1) có đúng 4 nghiệm thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt thuộc $(0;1)$.
Từ bảng biến thiên $\to m \in \left(0;\dfrac{1}{64}\right)$.

Vậy $a = 0; b = \dfrac{1}{64} \Rightarrow b - a = \dfrac{1}{64}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ, CD) bằng

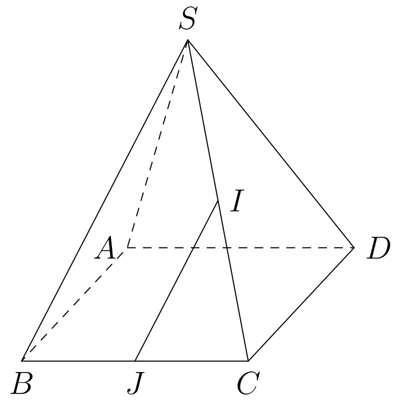
(A) 30°. **(B) 60°.** (C) 45°. (D) 90°.

Lời giải.

$\triangle SBC$ có IJ là đường trung bình $\Rightarrow IJ \parallel SB$

Ta có $AB \parallel CD$

Suy ra $(IJ; CD) = (SB; AB) = \widehat{SBA} = 60^\circ$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Thể tích V của khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường tròn $(C)\colon x^2 + (y-3)^2 = 1$ xung quanh trục hoành là

(A) $V = 6\pi$. (B) $V = 6\pi^3$. (C) $V = 3\pi^2$. **(D) $V = 6\pi^2$.**

Lời giải.

Phương trình đường tròn $(C)\colon x^2 + (y-3)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3 + \sqrt{1-x^2} \\ y = 3 - \sqrt{1-x^2} \end{array}\right.$.

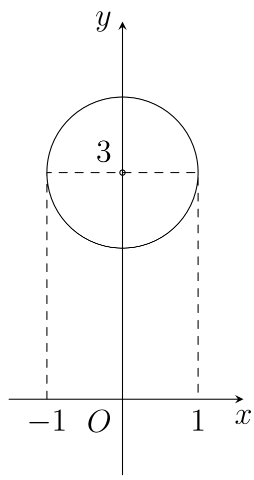
Khi đó hình xuyến cái phao được tạo thành khi quay đường tròn tâm $I(0;3)$ và có bán kính $r = 1$ xung quanh trục Ox.

$\Rightarrow V = \pi \displaystyle\int_{-1}^{1} \left[\left(3+\sqrt{1-x^2}\right)^2 - \left(3-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right] \mathrm{d}x = 12\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $x = \sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$.

Khi đó

$V = 12\pi \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 6\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = 6\pi \left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 6\pi^2.$



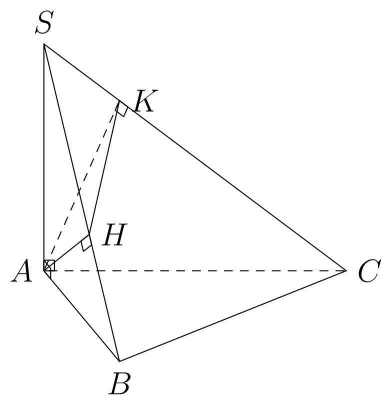
Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$, $SA = 2a$ và $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Tính thể tích tứ diện $S.AHK$.

(A) $\dfrac{8a^3}{15}$. **(B) $\dfrac{8a^3}{45}$.** (C) $\dfrac{4a^3}{15}$. (D) $\dfrac{4a^3}{5}$.

Lời giải.

Ta có $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}SA \cdot \dfrac{1}{2}BA \cdot BC = \dfrac{a^3}{3}$.
Tính được:
$SB^2 = AB^2 + SA^2 = 5a^2$.
$SC^2 = AB^2 + BC^2 + SA^2 = 6a^2$.
$\dfrac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SH}{SB} \cdot \dfrac{SK}{SC} = \dfrac{SA^4}{SB^2 \cdot SC^2} = \dfrac{8}{15}$.
$\Rightarrow V_{S.AHK} = \dfrac{8}{15}V_{S.ABC} = \dfrac{8}{45}a^3$.



Chọn đáp án B ☐

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên trên đoạn $[-5; 5]$ của tham số m để số điểm cực trị của $f(|x|)$ bằng 3.

A 5. B 3. C 4. D 2.

Lời giải.
TH1: Nếu $m = -3$ thì $f'(x)$ không đổi dấu nên $f(x)$ không có điểm cực trị. Do đó $f(|x|)$ có một điểm cực trị (loại).
TH2: Nếu $m \leqslant 0, m \neq -3$ thì hàm số $f(x)$ có các điểm cực trị $x_1 = -3$ và $x_2 = m \leqslant 0$. Do đó hàm số $f(|x|)$ có một điểm cực trị là $x = 0$.
TH3: Nếu $m > 0$, suy ra hàm số $f(x)$ có các điểm cực trị $x_1 = -3$ và $x_2 = m > 0$. Do đó $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị là $x = 0$; $x = m$ và $x = -m$.
Vậy các giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-5; 5]$ để số điểm cực trị của $f(|x|)$ bằng 3 là $m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.
Chọn đáp án A ☐

Câu 38. Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $\big|(2+i)|z|z - (1-2i)z\big| = |1+3i|$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Tính $M = |2z_1 + 3z_2|$.

A $M = 19$. B $M = 25$. C $M = 19$. D $M = \sqrt{19}$.

Lời giải.
Ta có $\big|(2+i)|z|z - (1-2i)z\big| = |1+3i| \Leftrightarrow \big|z\left[(2+i)|z| - 1 + 2i\right]\big| = |1+3i|$
$\Leftrightarrow |z|\sqrt{\left(2|z|-1\right)^2 + \left(|z|+2\right)^2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow |z|^2\left(5|z|^2 + 5\right) = 10 \Leftrightarrow |z|^4 + |z|^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow |z| = 1$.
Suy ra $|z_1| = |z_2| = 1$.
Mặt khác $|2z_1 + 3z_2|^2 = (2z_1 + 3z_2)\left(2\overline{z_1} + 3\overline{z_2}\right) = 13 + 6\left(z_1.\overline{z_2} + \overline{z_1}.z_2\right)$
và $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)\left(\overline{z_1} - \overline{z_2}\right) = 2 - \left(z_1.\overline{z_2} + \overline{z_1}.z_2\right)$.
Do đó $M^2 + 6|z_1 - z_2|^2 = 25 \Rightarrow M = \sqrt{19}$.
Chọn đáp án D ☐

Câu 39. Trong tất cả các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+1| = \left|\dfrac{z+\overline{z}}{2} + 3\right|$, gọi số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ là số phức có mô-đun nhỏ nhất. Tính $S = 2a + b$.

A 0. B -4. C 2. D -2.

Lời giải.
Ta có $|z+1| = \left|\dfrac{z+\overline{z}}{2} + 3\right| \Leftrightarrow \sqrt{(a+1)^2 + b^2} = \sqrt{(a+3)^2} \Leftrightarrow b^2 = 4a + 8$.

Lại có $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+4a+8}$ nhỏ nhất khi $a = -2 \Rightarrow b = 0$.
Vậy $S = 2a + b = -4$.
Chọn đáp án B □

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3;3;0)$, $B(3;0;3)$, $C(0;3;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua O, vuông góc với (ABC) sao cho (P) cắt các cạnh AB, AC tại các điểm M và N. Khi $OAMN$ có thể tích nhỏ nhất, hãy viết phương trình mặt phẳng (P).

A $x+y-2z=0$. **B** $x+y+2z=0$. **C** $x-z=0$. **D** $y-z=0$.

Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (0;-3;3), \overrightarrow{AC} = (-3;0;3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-9;-9;-9)$.
Mặt phẳng (ABC) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;1;1)$.
Phương trình của đường thẳng AB: $\begin{cases} x=3 \\ y=3-t \\ z=t \end{cases}$ và của đường thẳng AC: $\begin{cases} x=3-t \\ y=3 \\ z=t. \end{cases}$
(P) cắt các cạnh AB, AC tại các điểm M, N nên $M(3;3-m;m), N(3-n;3;n)$, với $m,n \in [0;3]$
Ta có $\left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right] = (3n-3m-mn; 3m-3n-mn; 3m+3n-mn)$.
Do $(OMN) \perp (ABC)$ nên $\left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right]\vec{n} = 0 \Leftrightarrow 3m+3n-3mn = 0 \Leftrightarrow mn = n+m$.
Suy ra $\left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right] = (2n-4m; 2m-4n; 2m+2n)$.
Do $\overrightarrow{OA} = (3;3;0)$ nên $V_{OAMN} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right].\overrightarrow{OA}\right| = \dfrac{1}{6}|6n-12m+6m-12n| = m+n = V$.
Ta có $m+n \geqslant 2\sqrt{mn} = 2\sqrt{m+n} \Rightarrow \sqrt{m+n} \geqslant 2 \Rightarrow V = m+n \geqslant 4$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = n = 2$.
Vậy mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right] = (-4;-4;8)$ và đi qua O nên có phương trình $x+y-2z=0$.
Chọn đáp án A □

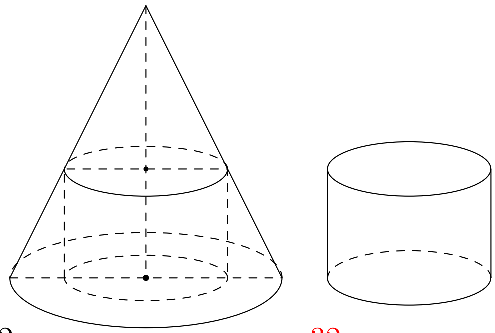
Câu 41. Cho phương trình $\left(8\sin^3 x - m\right)^3 = 162\sin x + 27m$ (1). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình (1) có nghiệm trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)$?

A 2. **B** 3. **C** Vô số. **D** 1.

Lời giải.
Ta có $\left(8\sin^3 x - m\right)^3 = 162\sin x + 27m$ (1) $\Leftrightarrow 8\sin^3 x - m = 3\sqrt[3]{6\sin x + m}$
$\Leftrightarrow 8\sin^3 x + 6\sin x = 6\sin x + m + 3\sqrt[3]{6\sin x + m} \Leftrightarrow 2\sin x = \sqrt[3]{6\sin x + m}$
(do hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên đồng biến trên $\mathbb{R}$)
Như vậy (1) $\Leftrightarrow m = 8\sin^3 x - 6\sin x \Leftrightarrow m = -2\sin 3x$.
Lại có $0 < x < \dfrac{\pi}{3}$ nên $-2 \leqslant -2\sin 3x < 0 \Rightarrow -2 \leqslant m < 0$. Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2;-1\}$.
Chọn đáp án A □

Câu 42.

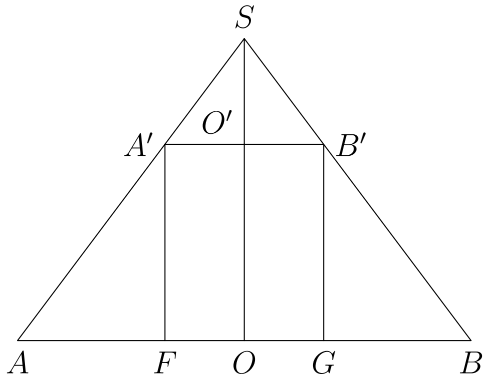
Một khúc gỗ có dạng hình khối nón có bán kính đáy bằng $r = 2$m, chiều cao $h = 6$m. Bác thợ mộc chế tác từ khúc gỗ đó thành một khúc gỗ có dạng hình khối trụ như hình vẽ. Gọi V là thể tích lớn nhất của khúc gỗ hình trụ sau khi chế tác. Tính V.



A $V = \dfrac{32\pi}{9}\text{m}^3$. **B** $V = \dfrac{32}{9}\text{m}^3$. **C** $V = \dfrac{32\pi}{3}\text{m}^3$. **D** $V = \dfrac{32\pi}{9}\text{m}^3$.

Lời giải.

Giả sử cắt nón bởi mặt phẳng đi qua trục nón ta được thiết diện là tam giác như hình vẽ



Đặt $SO' = x$, $(0 < x < 6) \Rightarrow OO' = 6 - x$.

Do $A'B' \parallel AB \Rightarrow \dfrac{A'O'}{AO} = \dfrac{SO'}{SO} \Rightarrow A'O' = \dfrac{SO' \cdot AO}{SO} = \dfrac{x \cdot 2}{6} = \dfrac{x}{3}$.

$V_{\text{trụ}} = \pi \cdot A'O'^2 \cdot OO' = \pi(6 - x)\left(\dfrac{x}{3}\right)^2 = \dfrac{\pi}{18}(12 - 2x) \cdot x \cdot x \leqslant \dfrac{\pi}{18}\left(\dfrac{(12 - 2x) + x + x}{3}\right)^3 = \dfrac{32\pi}{9}$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = 4$m.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và điểm $A(0;0;2)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cắt (S) theo thiết diện là hình tròn (C) diện tích nhỏ nhất là

A $(P)\colon x + 2y + 3z + 6 = 0$. **B** $(P)\colon x + 2y + z - 2 = 0$.

C $(P)\colon x - 2y + z - 6 = 0$. **D** $(P)\colon 3x + 2y + 2z - 4 = 0$.

Lời giải.

Ta có (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = 3$

$AI = \sqrt{1^2 + 2^2 + (3-2)^2} = \sqrt{6} < R \Rightarrow A$ nằm trong mặt cầu (S).

Để (P) đi qua điểm A và cắt (S) theo thiết diện là hình tròn (C) diện tích nhỏ nhất thì đường tròn (C) có bán kính nhỏ nhất, hay $\mathrm{d}(I,(P))$ lớn nhất.

Suy ra (P) đi qua $A(0;0;2)$ và vuông góc với $AI \Rightarrow \overrightarrow{AI} = (1;2;1)$ là véc-tơ pháp tuyến của (P).

Vậy $(P)\colon x + 2y + z - 2 = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Gọi x_1, x_2 lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm số $f(x) = \int\limits_{e^x}^{e^{2x}} t \ln t \, dt$. Tính $S = x_1 + x_2$

A $\ln 2e$. **B** $\ln 2$. **C** $-\ln 2$. **D** 0.

Lời giải.

Đặt $F(t) = \int t \ln t \, dt \Rightarrow F'(t) = t \ln t$.

Khi đó $f(x) = \int\limits_{e^x}^{e^{2x}} t \ln t \, dt = F(e^{2x}) - F(e^x) \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x}F'(e^{2x}) - e^x F'(e^x)$.

Suy ra $f'(x) = 2e^{2x} \cdot e^{2x} \ln(e^{2x}) - e^x \cdot e^x \ln(e^x) = 4xe^{4x} - xe^{2x} = xe^{2x}(4e^{2x} - 1)$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ e^{2x} = \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x = \ln \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\ln 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $x_1 = -\ln 2$ và $x_2 = 0$.

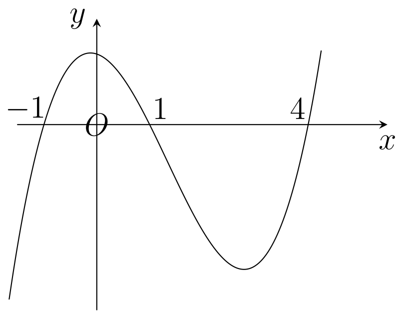
Vậy $S = x_1 + x_2 = -\ln 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 45.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khi đó hàm số $y = f(3 - 2x) + 2018$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng bên dưới?

A $(1; 2)$. **B** $(2; +\infty)$. **C** $(-\infty; 1)$. **D** $(-1; 1)$.



Lời giải.

Đặt $g(x) = f(3 - 2x) + 2018$ ta có $g'(x) = [f(3 - 2x) + 2018]' = -2f'(3 - 2x)$.

Ta có $g'(x) < 0 \Leftrightarrow -2f'(3 - 2x) < 0 \Leftrightarrow f'(3 - 2x) > 0$.

Từ đồ thị $f'(x)$ ta có $\left[\begin{array}{l} -1 < 3 - 2x < 1 \\ 3 - 2x > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x < 2 \\ x < -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $y = f(3 - 2x) + 2018$ nghịch biến trên $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right)$ và $(1; 2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m - 1)x + 2m$ có đồ thị (C_m). Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với đường thẳng $\Delta \colon y = 3x + 2018$.

(A) $m = \dfrac{7}{3}$. (B) $m = 1$. (C) $m = 2$. (D) $m = -\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

$\Delta\colon y = 3x + 2018$ có hệ số góc $k_\Delta = 3$.

$y' = 3x^2 - 4x + m - 1$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến và đồ thị hàm số (C_m).

Hệ số góc của tiếp tuyến tại M là $y'(x_0) = 3x_0^2 - 4x_0 + m - 1 = 3\left(x_0 - \dfrac{2}{3}\right)^2 + m - \dfrac{7}{3} \geqslant m - \dfrac{7}{3}$

Tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất $k_{tt} = m - \dfrac{7}{3}$.

Theo bài ra ta có $k_{tt} \cdot k_\Delta = -1 \Leftrightarrow \left(m - \dfrac{7}{3}\right)3 = -1 \Leftrightarrow m = 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Có bao nhiêu số tự nhiên có 2018 chữ số sao cho trong mỗi số tổng các chữ số bằng 5 ?

(A) $1 + 2\mathrm{A}_{2018}^2 + 2\left(\mathrm{C}_{2017}^2 + \mathrm{A}_{2017}^2\right) + \left(\mathrm{C}_{2017}^3 + \mathrm{A}_{2017}^3\right) + \mathrm{C}_{2017}^4$.

(B) $1 + 2\mathrm{C}_{2018}^2 + 2\mathrm{C}_{2018}^3 + \mathrm{C}_{2018}^4 + \mathrm{C}_{2018}^5$.

(C) $1 + 2\mathrm{A}_{2018}^2 + 2\mathrm{A}_{2018}^3 + \mathrm{A}_{2018}^4 + \mathrm{C}_{2017}^5$.

(D) $1 + 4\mathrm{C}_{2017}^1 + 2\left(\mathrm{C}_{2017}^2 + \mathrm{A}_{2017}^2\right) + \left(\mathrm{C}_{2017}^3 + \mathrm{A}_{2016}^2 + \mathrm{C}_{2016}^2\right) + \mathrm{C}_{2017}^4$.

Lời giải.

Vì $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 2 + 2 + 1 = 3 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ nên ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Số tự nhiên có một chữ số 5 đứng đầu và 2017 số 0 đứng sau: Có 1 số.

Trường hợp 2: Số tự nhiên có một chữ số 4, một chữ số 1 và 2016 số 0.

- Khả năng 1: Nếu số 4 đứng đầu thì số 1 đứng ở một trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^1 số.

- Khả năng 2: Nếu số 1 đứng đầu thì số 4 đứng ở một trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^1 số.

Trường hợp 3: Số tự nhiên có một chữ số 3, một chữ số 2 và 2016 số 0

- Khả năng 1: Nếu số 3 đứng đầu thì số 2 đứng ở một trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^1 số.

- Khả năng 2: Nếu số 2 đứng đầu thì số 3 đứng ở một trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^1 số.

Trường hợp 4: Số tự nhiên có hai chữ số 2, một chữ số 1 và 2015 số 0

- Khả năng 1: Nếu số 2 đứng đầu thì số 1 và số 2 còn lại đứng ở hai trong 2017 vị trí còn lại nên ta có A_{2017}^2 số.

- Khả năng 2: Nếu số 1 đứng đầu thì hai chữ số 2 đứng ở hai trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^2 số.

Trường hợp 5: Số tự nhiên có 2 chữ số 1, một chữ số 3 thì tương tự như trường hợp 4 ta có $\mathrm{A}_{2017}^2 + \mathrm{C}_{2017}^2$ số.

Trường hợp 6: Số tự nhiên có một chữ số 2, ba chữ số 1 và 2014 số 0.

- Khả năng 1: Nếu số 2 đứng đầu thì ba chữ số 1 đứng ở ba trong 2017 vị trí còn lại nên ta có

C^3_{2017} số.

- Khả năng 2: Nếu số 1 đứng đầu và số 2 đứng ở vị trí mà không có số 1 nào khác đứng trước nó thì hai số 1 còn lại đứng ở trong 2016 vị trí còn lại nên ta có C^2_{2016} số.
- Khả năng 3: Nếu số 1 đứng đầu và số 2 đứng ở vị trí mà đứng trước nó có hai số 1 thì hai số 1 và 2 còn lại đứng ở trong 2016 vị trí còn lại nên ta có A^2_{2016} số.

Trường hợp 7: Số tự nhiên có năm chữ số 1 và 2013 số 0, vì chữ số 1 đứng đầu nên bốn chữ số 1 còn lại đứng ở bốn trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C^4_{2017} số.

Áp dụng quy tắc cộng ta có $1+4C^1_{2017}+2\left(C^2_{2017}+A^2_{2017}\right)+\left(C^3_{2017}+A^2_{2016}+C^2_{2016}\right)+C^4_{2017}$ số cần tìm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3)f^2(x)$ và $f(0)=-\dfrac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2017)+f(2018)=\dfrac{a}{b}$ với $(a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}^*)$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\dfrac{a}{b}<-1$. (B) $\dfrac{a}{b}>1$. (C) $a+b=1010$. **(D)** $b-a=3029$.

Lời giải.

Ta có

$f'(x)=(2x+3)f^2(x)\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+3\Rightarrow\displaystyle\int\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int(2x+3)\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow-\dfrac{1}{f(x)}=x^2+3x+C.$

Vì $f(0)=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow C=2$.

Vậy $f(x)=-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+1}$.

Do đó $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2017)+f(2018)=\dfrac{1}{2020}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1009}{2020}$.

Vậy $a=-1009$; $b=2020$. Do đó $b-a=3029$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\ln(u_1^2+u_2^2+10)=\ln(2u_1+6u_2)$ và $u_{n+2}+u_n=2u_{n+1}+1$ với mọi $n\geqslant 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n>5050$ là

(A) 100. (B) 99. **(C)** 101. (D) 102.

Lời giải.

Ta có $\ln(u_1^2+u_2^2+10)=\ln(2u_1+6u_2)$

$\Leftrightarrow u_1^2+u_2^2+10=2u_1+6u_2\Leftrightarrow(u_1-1)^2+(u_2-3)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}u_1-1=0\\u_2-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=1\\u_2=3.\end{cases}$

Mà $u_{n+2}+u_n=2u_{n+1}+1,\forall n\geqslant 1\Leftrightarrow(u_{n+2}-u_{n+1})=(u_{n+1}-u_n)+1,\forall n\geqslant 1$

Suy ra dãy số $(u_{n+1}-u_n)$ là một cấp số cộng với công sai $d=1$ và số hạng đầu $(u_2-u_1)=2$.

Từ đó với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ ta có $u_{n+1}-u_n=2+(n-1)=n+1\Rightarrow u_{n+1}=u_n+(n+1)$.

Vậy $u_n=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Để $u_n>5050$ thì $\dfrac{n(n+1)}{2}>5050\Leftrightarrow n>100$ vì $n\in\mathbb{N}^*$. Kết quả chọn $n=101$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;6)$, $D(1;1;1)$. Có tất cả bao nhiêu mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm O,A,B,C,D ?

A 6. **B** 10. **C** 7. **D** 5.

Lời giải.

Ta thấy 3 điểm A, B, C tạo thành mặt phẳng chắn các trục tọa độ có phương trình:
$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1$
Suy ra $D \in (ABC)$. Như vậy 4 điểm A, B, C, D đồng phẳng.

Mà theo lý thuyết: qua 3 điểm phân biệt không thẳng hàng ta xác định được 1 mặt phẳng.

Vậy nên số mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm O, A, B, C, D là $\mathrm{C}_5^3 - 3 = 7$.

Chọn đáp án C □

——— HẾT ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. C	3. C	4. A	5. C	6. A	7. C	8. B	9. A	10. D
11. C	12. C	13. D	14. A	15. D	16. C	17. A	18. C	19. B	20. D
21. D	22. B	23. B	24. D	25. C	26. D	27. B	28. A	29. A	30. A
31. C	32. A	33. C	34. B	35. D	36. B	37. A	38. D	39. B	40. A
41. A	42. D	43. B	44. C	45. A	46. C	47. D	48. D	49. C	50. C

124 ĐỀ KSCL, THPT QUỲNH LƯU 1 - NGHỆ AN - LẦN 2 - 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Số các số tự nhiên có 4 chữ số phân biệt lấy từ tập hợp $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ là

A $4!$. B A_9^4. C 4^9. D C_9^4.

Lời giải.

Mỗi cách sắp thứ tự 4 phần tử của M cho ta một số thoả mãn yêu cầu bài toán.

Do đó số các số thoả mãn yêu cầu bài toán là số chỉnh hợp chập 4 của 9 phần tử.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(0; 3)$. B $(0; +\infty)$. C $(-\infty; -2)$. D $(-2; 0)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Từ một hộp đựng 10 thẻ được đánh số thứ tự từ 1 đến 10, người ta rút ngẫu nhiên ra k thẻ. Gọi P là xác suất xuất hiện ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4 khi được rút ra. Tìm giá trị nhỏ nhất của k để $P > \dfrac{13}{15}$.

A 9. B 8. C 7. D 6.

Lời giải.

Số cách rút k thẻ từ 10 thẻ là C_{10}^k $(0 < k \leq 10, k \in \mathbb{N})$.

Số cách rút k thẻ mà không có thẻ nào ghi số chia hết cho 4 là C_8^k.

Xác suất "có ít nhất 1 thẻ ghi số chia hết cho 4" là $P = 1 - \dfrac{C_8^k}{C_{10}^k} = 1 - \dfrac{(10-k)(9-k)}{90}$.

Theo bài ra ta có $P = 1 - \dfrac{(10-k)(9-k)}{90} > \dfrac{13}{15} \Leftrightarrow 6 < k \leq 10$ (do $k \leq 10$).

Như vậy giá trị nhỏ nhất của k là $\min k = 7$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(3; -4; 5)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oxz) là điểm

A $M(3; 0; 5)$. B $M(3; 0; 0)$. C $M(0; -4; 5)$. D $M(0; 0; 5)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; -4; 5)$ trên mặt phẳng (Oxz) là điểm $M(3; 0; 5)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$ trên mặt phẳng phức. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

(A) 6. (B) 2. (C) 4. (D) 12.

Lời giải.

Ta có $z^2 + 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^2 = 4i^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1 + 2i \\ z = -1 - 2i \end{array}\right.$.

Đặt $A(-1; 2), B(-1; -2)$, suy ra $\overrightarrow{AB} = (0; -4) \Rightarrow AB = 4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Biết $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\,\mathrm{d}x = a + \frac{\pi^2}{b} + \frac{\sqrt{3}\pi}{c}$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $M = a - b + c$.

(A) $M = 35$. (B) $M = 41$. (C) $M = -37$. (D) $M = -35$.

Lời giải.

Đặt $x = -t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x = -\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{6}$ và $x = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow t = -\dfrac{\pi}{6}$.

Từ đó, $I = \displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}} \frac{-t\cos(-t)}{\sqrt{1+t^2}-t}\,\mathrm{d}t = -\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}-x}\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $2I = \displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}-x}\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 2x^2\cos x\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $I = -\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} x^2\cos x\,\mathrm{d}x$.

u	v'
x^2	$\cos x$
$2x$	$\sin x$
2	$-\cos x$
0	$-\sin x$

$$= -\left(x^2\sin x \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} + 2x\cos x \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} - 2\sin x \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \right) = 2 - \frac{\pi^2}{36} - \frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $a = 2$, $b = -36$, $c = -3$ do đó $M = a - b + c = 35$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 3 điểm $M(3; 0; 0)$, $N(0; -2; 0)$, $P(0; 0; 1)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình

(A) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{-2} + \dfrac{z}{1} = -1$. (B) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{1} = 1$.

C $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{1}=1$.
D $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-1}=1$.

Lời giải.

Ta có M, N, P lần lượt là giao điểm của (MNP) với 3 trục tọa độ
$\Rightarrow (MNP)\colon \frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{1}=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(-2;3;2)$ và $B(2;1;0)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình

A $2x+y+z-3=0$.
B $2x-y-z+3=0$.
C $4x-2y-2z+3=0$.
D $4x-2y+2z-6=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có 1 véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}=(4;-2;-2)$ và đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB với $I(0;2;1)$.

Mặt phẳng trung trực của AB có phương trình $2x-y-z+3=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có đường tiệm cận đứng?

A $y=\frac{x-1}{x}$.
B $y=\mathrm{e}^x$.
C $y=\sqrt{x^2+x-2}$.
D $y=\frac{x^2-x-2}{x+1}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x-1}{x}=+\infty \Rightarrow x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x}$.

$y=\mathrm{e}^x$ chỉ có tiệm cận ngang, không có tiệm cận đứng.

$y=\sqrt{x^2+x-2}$ không có tiệm cận nào.

Còn với $y=\frac{x^2-x-2}{x+1}$ thì $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}(x-2)=-3\neq\pm\infty$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Tập nghiệm của bất phương trình $4^x>2^{x+8}$ là

A $[8;+\infty)$.
B $(-\infty;8)$.
C $(0;8)$.
D $(8;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $4^x>2^{x+8}\Leftrightarrow 2^{2x}>2^{x+8}\Leftrightarrow 2x>x+8\Leftrightarrow x>8$.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng $2\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Độ dài đường sinh của hình trụ đó bằng

A $2a$.
B $\frac{a}{2}$.
C a.
D $\sqrt{2}a$.

Lời giải.

Với hình trụ, ta có $S_{xq}=2\pi rl\Leftrightarrow 2\pi al=2\pi a^2\Leftrightarrow l=a$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$.

A $\min\limits_{[0;3]} y=-3$.
B $\min\limits_{[0;3]} y=\frac{1}{2}$.
C $\min\limits_{[0;3]} y=-1$.
D $\min\limits_{[0;3]} y=1$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ đơn điệu trên đoạn $[0;3]$ và $y(0) = -1$, $y(3) = \dfrac{1}{2}$ nên $\min\limits_{[0;3]} y = -1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định bởi công thức

(A) $S = \pi \displaystyle\int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| \mathrm{d}x$.

(B) $S = \displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\, \mathrm{d}x$.

(C) $S = \displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\, \mathrm{d}x$.

(D) $S = \displaystyle\int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích cần tìm được tính theo công thức $S = \displaystyle\int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Với a là một số thực dương bất kì, mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

(A) $\ln 3a = \ln 3 + \ln a$.

(B) $\ln(3+a) = \ln 3 + \ln a$.

(C) $\ln \dfrac{a}{3} = \dfrac{1}{3} \ln a$.

(D) $\ln a^5 = \dfrac{1}{5} \ln a$.

Lời giải.

Theo công thức lôgarit của một tích ta có $\ln 3a = \ln 3 + \ln a$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^2 + x + 1$ là

(A) $\dfrac{2x^3}{3} + x^2 + x + C$.

(B) $4x + 1$.

(C) $\dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x$.

(D) $\dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int (2x^2 + x + 1)\, \mathrm{d}x = \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $\sqrt{3}a^3$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều cạnh a nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Biết đáy $ABCD$ là một hình bình hành, tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD.

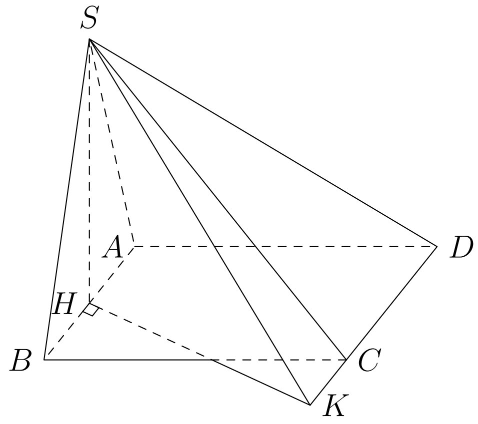
(A) $2a\sqrt{3}$.

(B) a.

(C) $6a$.

(D) $a\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm cạnh $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt CD tại K
$\Rightarrow KH \perp (SAB)$.
Ta có $AB \parallel CD$ do đó
$\mathrm{d}(CD, SA) = \mathrm{d}(CD, (SAB)) = \mathrm{d}(K, (SAB)) = KH$.
Theo đề bài
$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot KH \cdot AB \cdot SH \Rightarrow KH = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{a \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = 6a$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x - z + 1 = 0$. Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là

A $\vec{n}_3 = (2; 0; -1)$. **B** $\vec{n}_4 = (2; 1; 0)$. **C** $\vec{n}_1 = (2; -1; 1)$. **D** $\vec{n}_2 = (2; -1; 0)$.

Lời giải.
$(P)\colon 2x - z + 1 = 0$ có 1 véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (2; 0; -1)$.
Chọn đáp án A □

Câu 18. Tìm số giá trị nguyên trên đoạn $[-2; 2018]$ của tham số m để hàm số $y = \mathrm{e}^{x^3 - x^2 + mx}$ đồng biến trên đoạn $[1; 2]$.

A 2018. **B** 2019. **C** 2020. **D** 2017.

Lời giải.
Với $y = \mathrm{e}^{x^3 - x^2 + mx}$ ta có $y' = (3x^2 - 2x + m)\mathrm{e}^{x^3 - x^2 + mx}$.
Hàm số đồng biến trên đoạn $[1; 2] \Leftrightarrow y' \geqslant 0, \forall x \in [1; 2] \Leftrightarrow m \geqslant -3x^2 + 2x, \forall x \in [1; 2]$
Đặt $g(x) = -3x^2 + 2x$ thì $g'(x) = -6x + 2$. Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$.
Dễ thấy $g'(x) < 0, \forall x \in [1; 2]$ nên $g(x)$ nghịch biến trên đoạn $[1; 2]$.
Từ đó $\max\limits_{[1;2]} g(x) = g(1) = -1$.
Vậy $m \geqslant g(x), \forall x \in [1; 2] \Leftrightarrow m \geqslant \max\limits_{[1;2]} g(x) \Leftrightarrow m \geqslant -1$.
Do đó có 2020 giá trị nguyên của tham số m thoả mãn yêu cầu của bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $\dfrac{1}{f(3-x) - 2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A 2. **B** 3. **C** 1. **D** 0.

Lời giải.

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f(3-x)-2}$ bằng với số nghiệm phân biệt của phương trình $f(3-x) = 2$.
Dựa trên bảng biến thiên của hàm số ta thấy phương trình $f(x) = 2$ có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình $f(3-x) = 2$ cũng có 3 nghiệm phân biệt.
Vậy số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f(3-x)-2}$ là 3 đường.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho số phức $z = -2 + i$. Điểm nào sau đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ?

(A) $P(-2; 1)$. (B) $N(2; 1)$. (C) $Q(1; 2)$. (D) $M(-1; -2)$.

Lời giải.

Có $w = zi = i(-2+i) = -1-2i$ nên điểm biểu diễn của w là điểm $M(-1; -2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Thầy Châu vay ngân hàng 300 triệu đồng theo phương thức trả góp để mua xe. Nếu cuối mỗi tháng, bắt đầu từ tháng thứ nhất thầy Châu trả 5 triệu đồng và chịu lãi số tiền chưa trả là 0,65% mỗi tháng (biết lãi suất không thay đổi) thì sau bao lâu thầy Châu trả hết số tiền đã vay?

(A) 78 tháng. (B) 76 tháng. (C) 75 tháng. (D) 77 tháng.

Lời giải.

Đặt $T = 300$ triệu đồng, $A = 5$ triệu đồng, $r = 0{,}65\%$.
Gọi P_n là số tiền còn nợ ngân hàng sau lần trả tiền thứ n. Khi đó ta có
$P_1 = T(1+r) - A$.
$P_2 = P_1(1+r) - A = T(1+r)^2 - A\dfrac{(1+r)^2-1}{r}$.
$P_3 = P_2(1+r) - A = T(1+r)^3 - A\dfrac{(1+r)^3-1}{r}$.
...
$P_n = T(1+r)^n - A\dfrac{(1+r)^n-1}{r}$.
Thầy Châu trả hết số tiền trên thì $T(1+r)^n - A\dfrac{(1+r)^n-1}{r} = 0$.
$\Rightarrow 300(1{,}0065)^n - 5 \times \dfrac{(1{,}0065)^n - 1}{0{,}0065} = 0 \Rightarrow n \approx 76{,}29$.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x - \sqrt{x^2+x}}{x+1}$.

(A) -2. (B) 2. (C) 0. (D) $-\infty$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+x}}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{1+\frac{1}{x}} = 2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $g(x) = 2f(x) + 1$ đạt cực tiểu tại điểm

A $x = 2$. **B** $x = 0$. **C** $x = 1$. **D** $x = 5$.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có $g'(x) = 2f'(x)$. Do đó dấu của $g'(x)$ cũng chính là dấu của $f'(x)$ (với mọi x).

Vậy $g(x)$ cũng đạt cực tiểu tại $x_{\text{CT}} = 0$ và đạt cực đại tại $x_{\text{CĐ}} = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Thể tích của khối nón có chiều cao bằng h và bán kính đáy bằng R là

A $V = \pi R^2 h$. **B** $V = \frac{1}{3}\pi Rh$. **C** $V = \frac{1}{3}2\pi Rh$. **D** $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

Lời giải.

Thể tích của khối nón: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của biểu thức $(2-3x)^{2n}$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $C^0_{2n+1} + C^2_{2n+1} + C^4_{2n+1} + \cdots + C^{2n}_{2n+1} = 1024$.

A 2099529. **B** -2099520. **C** -1959552. **D** 1959552.

Lời giải.

Ta có $(1+x)^{2n+1} = C^0_{2n+1} + C^1_{2n+1}x + C^2_{2n+1}x^2 + \cdots + C^{2n}_{2n+1}x^{2n} + C^{2n+1}_{2n+1}x^{2n+1}$

Cho $x = 1$, ta được: $2^{2n+1} = C^0_{2n+1} + C^1_{2n+1} + C^2_{2n+1} + \cdots + C^{2n}_{2n+1} + C^{2n+1}_{2n+1}$

Cho $x = -1$, ta được: $0 = C^0_{2n+1} - C^1_{2n+1} + C^2_{2n+1} - \cdots + C^{2n}_{2n+1} - C^{2n+1}_{2n+1}$

Từ đó $C^0_{2n+1} + C^2_{2n+1} + C^4_{2n+1} + \cdots + C^{2n}_{2n+1} = 2^{2n} = 1024 \Leftrightarrow n = 5$.

Với $n = 5$ ta có $(2-3x)^{2n} = (2-3x)^{10}$ (*)

Vậy hệ số chứa x^5 trong khai triển của (*) là $T_6 = -C^5_{10}2^5 3^5 = -1959552$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Số nghiệm của phương trình $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$ là

A 0. **B** 2. **C** 3. **D** 1.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x > 0 \ (*) \\ \log_4 x > 0 \end{cases}$

$\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2(\log_2 x) + \log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right) = 2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2(\log_2 x) + \log_2\frac{1}{2} + \log_2(\log_2 x) = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_2(\log_2 x) = 3$

$\Leftrightarrow \log_2(\log_2 x) = 2 \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 16$ (thoả mãn điều kiện (*)).

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

Phương trình $f(x) - 2m = 0$ có 3 nghiệm khi và chỉ khi

(A) $-1 \leqslant m \leqslant 2$. **B** $-1 < m < 2$. (C) $-1 < m \leqslant 2$. (D) $-2 < m < 4$.

Lời giải.

Ta có $f(x) - 2m = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2m$ (1).

Số nghiệm phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 2m$.

Dựa vào bảng biến thiên: phương trình có 3 nghiệm khi và chỉ khi $-2 < 2m < 4 \Leftrightarrow -1 < m < 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x - 2y + 2z - 5 = 0$ và hai điểm $A(-3;0;1), B(1;-1;3)$. Trong các đường thẳng đi qua A và song song với (P), đường thẳng nào cách B một khoảng cách nhỏ nhất?

A $\dfrac{x+3}{26} = \dfrac{y}{11} = \dfrac{z-1}{-2}$. (B) $\dfrac{x+3}{26} = \dfrac{y}{-11} = \dfrac{z-1}{-2}$.

(C) $\dfrac{x-3}{26} = \dfrac{y}{11} = \dfrac{z+1}{-2}$. (D) $\dfrac{x+2}{26} = \dfrac{y-1}{11} = \dfrac{z+3}{-2}$.

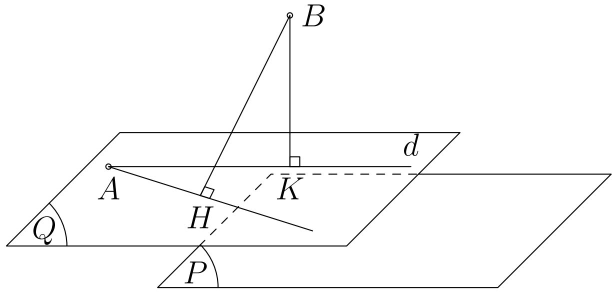
Lời giải.

Gọi d là đường thẳng cần tìm.

Gọi (Q) là mặt phẳng qua $A(-3;0;1)$ và song song với $(P)\colon x - 2y + 2z - 5 = 0$.

$\Rightarrow (Q)\colon x - 2y + 2z + 1 = 0$ và $d \subset (Q)$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B lên d và (Q) thì $BH \geqslant BK$.



Do đó $\mathrm{d}(B;d)$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $H \equiv K$.

Đường thẳng BK đi qua $B(1;-1;3)$ và vuông góc với $(Q) \Rightarrow BK\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Ta có $K = BK \cap (Q) \Rightarrow K\left(-\dfrac{1}{9}; \dfrac{11}{9}; \dfrac{7}{9}\right)$.

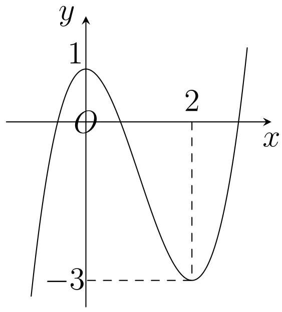
Đường thẳng d qua A và nhận $\overrightarrow{AK} = \left(\dfrac{26}{9}; \dfrac{11}{9}; -\dfrac{2}{9}\right)$ làm véc-tơ chỉ phương

nên $d\colon \dfrac{x+3}{26} = \dfrac{y}{11} = \dfrac{z-1}{-2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A $y = x^3 - 3x^2 + 1$. **B** $y = x^3 - 2x^2 + 1$.
C $y = x^3 - 3x^2 + 2$. **D** $y = -x^3 - 3x^2 + 1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$ nên loại $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Điểm cực tiểu của hàm số là $x = 2$, điểm cực đại là $x = 0$. Do đó $x = 0$, $x = 2$ là nghiệm của phương trình $y' = 0$. Nên ta loại $y = x^3 - 2x^2 + 1$ và $y = -x^3 - 3x^2 + 1$.

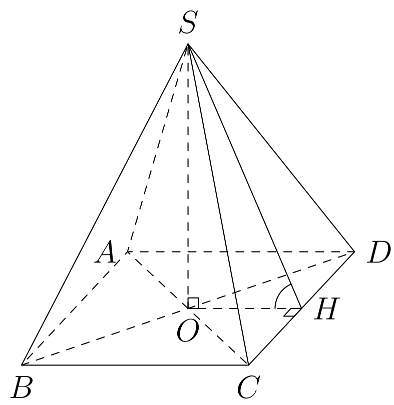
Vậy đó là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và chiều cao bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Giá trị tang của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A 1. **B** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C** $\sqrt{3}$. **D** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.



Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$, với O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Gọi H là trung điểm của CD.

Tam giác SCD cân tại S nên $SH \perp CD$.

Tam giác OCD cân tại O nên $OH \perp CD$.

Vậy góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ là $\widehat{SHO}$.

Ta có $OH = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên $\tan\widehat{SHO} = \dfrac{SO}{OH} = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^2 \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+3}$ bằng

A $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{7}{3}$. **B** $\ln\dfrac{7}{3}$. **C** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{7}{3}$. **D** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{7}$.

Lời giải.

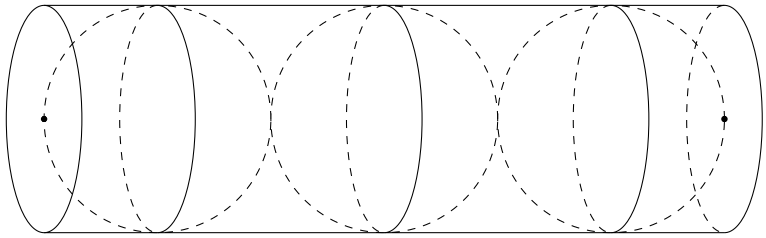
Ta có $\displaystyle\int\limits_0^2 \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+3} = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 \dfrac{\mathrm{d}(x^2+3)}{x^2+3} = \dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+3\right|\Big|_0^2 = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{7}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Trong một chiếc hộp hình trụ người ta bỏ vào đó ba quả bóng tennis, biết rằng đáy của hình trụ bằng hình tròn lớn trên quả bóng và chiều cao hình trụ bằng 3 lần đường kính quả bóng. Gọi S_1 là tổng diện tích ba quả bóng và S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Giá trị biểu thức $2018^{\frac{S_1}{S_2}}$ bằng

A 2018. **B** 1. **C** 2018^{π}. **D** $2018^{\sqrt{2}}$.

Lời giải.



Gọi r_1 là bán kính của quả bóng.

Gọi h, r_2 tương ứng là chiều cao và bán kính đáy của hình trụ.

Theo đề bài ta có: $h = 3 \cdot (2r_1) = 6r_1$ và $r_1 = r_2$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_2 = 2\pi r_2 h = 2\pi r_1 \cdot 6r_1 = 12\pi r_1^2$.

Tổng diện tích của ba quả bóng là: $S_1 = 3 \cdot 4\pi r_1^2 = 12\pi r_1^2$.

Khi đó $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{12\pi r_1^2}{12\pi r_1^2} = 1$. Từ đó $2018^{\frac{S_1}{S_2}} = 2018$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 33. Cho phương trình $\left(\sqrt{5}-1\right)^{x^2} + m\left(\sqrt{5}+1\right)^{x^2} = 2^{x^2-2}$ (1). Khoảng $(a; b)$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có đúng bốn nghiệm phân biệt. Tính $b-a$.

(A) $\dfrac{1}{16}$. (B) $\dfrac{49}{64}$. (C) $\dfrac{1}{64}$. (D) $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Phương trình $\left(\sqrt{5}-1\right)^{x^2} + m\left(\sqrt{5}+1\right)^{x^2} = 2^{x^2-2}$ (1) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{x^2} + m\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{x^2} = \dfrac{1}{4}$.

Đặt $t = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{x^2}$; $0 < t \leqslant 1$

Phương trình (1) trở thành $t + \dfrac{m}{t} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow -t^2 + \dfrac{1}{4}t = m$ (2)

Xét $g(t) = -t^2 + \dfrac{1}{4}t$ trên $(0; 1]$

$g'(t) = -2t + \dfrac{1}{4}; g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{8}$.

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{8}$		1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{64}$	$\searrow$	$-\frac{3}{4}$

Để phương trình (1) có đúng 4 nghiệm thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt thuộc $(0; 1)$.

Từ bảng biến thiên $\to m \in \left(0; \dfrac{1}{64}\right)$.

Vậy $a = 0; b = \dfrac{1}{64} \Rightarrow b - a = \dfrac{1}{64}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ, CD) bằng

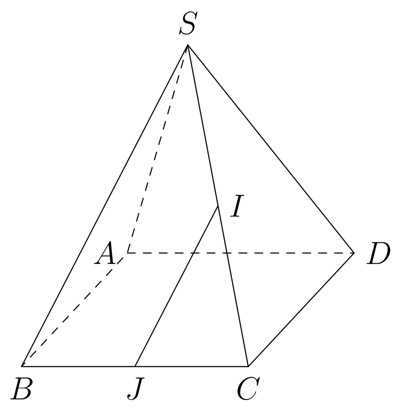
A 30°. **B** 60°. **C** 45°. **D** 90°.

Lời giải.

$\triangle SBC$ có IJ là đường trung bình $\Rightarrow IJ \parallel SB$

Ta có $AB \parallel CD$

Suy ra $(IJ; CD) = (SB; AB) = \widehat{SBA} = 60^\circ$.



Chọn đáp án B ☐

Câu 35. Thể tích V của khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường tròn $(C)\colon x^2 + (y-3)^2 = 1$ xung quanh trục hoành là

A $V = 6\pi$. **B** $V = 6\pi^3$. **C** $V = 3\pi^2$. **D** $V = 6\pi^2$.

Lời giải.

Phương trình đường tròn $(C)\colon x^2 + (y-3)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3 + \sqrt{1-x^2} \\ y = 3 - \sqrt{1-x^2} \end{array}\right.$.

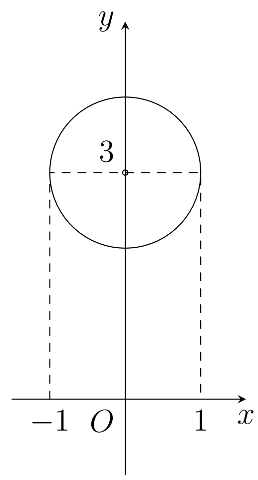
Khi đó hình xuyến cái phao được tạo thành khi quay đường tròn tâm $I(0;3)$ và có bán kính $r = 1$ xung quanh trục Ox.

$\Rightarrow V = \pi \int\limits_{-1}^{1} \left[\left(3+\sqrt{1-x^2}\right)^2 - \left(3-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right] \mathrm{d}x = 12\pi \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $x = \sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$.

Khi đó

$V = 12\pi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 6\pi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = 6\pi\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 6\pi^2.$



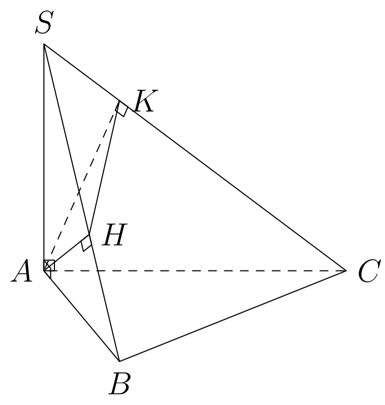
Chọn đáp án D ☐

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$, $SA = 2a$ và $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Tính thể tích tứ diện $S.AHK$.

A $\dfrac{8a^3}{15}$. **B** $\dfrac{8a^3}{45}$. **C** $\dfrac{4a^3}{15}$. **D** $\dfrac{4a^3}{5}$.

Lời giải.

Ta có $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}SA \cdot \dfrac{1}{2}BA \cdot BC = \dfrac{a^3}{3}$.
Tính được:
$SB^2 = AB^2 + SA^2 = 5a^2$.
$SC^2 = AB^2 + BC^2 + SA^2 = 6a^2$.
$\dfrac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SH}{SB} \cdot \dfrac{SK}{SC} = \dfrac{SA^4}{SB^2 \cdot SC^2} = \dfrac{8}{15}$.
$\Rightarrow V_{S.AHK} = \dfrac{8}{15}V_{S.ABC} = \dfrac{8}{45}a^3$.



Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên trên đoạn $[-5; 5]$ của tham số m để số điểm cực trị của $f(|x|)$ bằng 3.

A 5. **B** 3. **C** 4. **D** 2.

Lời giải.
TH1: Nếu $m = -3$ thì $f'(x)$ không đổi dấu nên $f(x)$ không có điểm cực trị. Do đó $f(|x|)$ có một điểm cực trị (loại).
TH2: Nếu $m \leqslant 0, m \neq -3$ thì hàm số $f(x)$ có các điểm cực trị $x_1 = -3$ và $x_2 = m \leqslant 0$. Do đó hàm số $f(|x|)$ có một điểm cực trị là $x = 0$.
TH3: Nếu $m > 0$, suy ra hàm số $f(x)$ có các điểm cực trị $x_1 = -3$ và $x_2 = m > 0$. Do đó $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị là $x = 0$; $x = m$ và $x = -m$.
Vậy các giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-5; 5]$ để số điểm cực trị của $f(|x|)$ bằng 3 là $m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.
Chọn đáp án A □

Câu 38. Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $\left|(2+i)|z|z - (1-2i)z\right| = |1+3i|$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Tính $M = |2z_1 + 3z_2|$.

A $M = 19$. **B** $M = 25$. **C** $M = 19$. **D** $M = \sqrt{19}$.

Lời giải.
Ta có $\left|(2+i)|z|z - (1-2i)z\right| = |1+3i| \Leftrightarrow \left|z\left[(2+i)|z| - 1 + 2i\right]\right| = |1+3i|$
$\Leftrightarrow |z|\sqrt{(2|z|-1)^2 + (|z|+2)^2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow |z|^2\left(5|z|^2 + 5\right) = 10 \Leftrightarrow |z|^4 + |z|^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow |z| = 1$.
Suy ra $|z_1| = |z_2| = 1$.
Mặt khác $|2z_1 + 3z_2|^2 = (2z_1 + 3z_2)(2\overline{z_1} + 3\overline{z_2}) = 13 + 6(z_1.\overline{z_2} + \overline{z_1}.z_2)$
và $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = 2 - (z_1.\overline{z_2} + \overline{z_1}.z_2)$.
Do đó $M^2 + 6|z_1 - z_2|^2 = 25 \Rightarrow M = \sqrt{19}$.
Chọn đáp án D □

Câu 39. Trong tất cả các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+1| = \left|\dfrac{z+\overline{z}}{2} + 3\right|$, gọi số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ là số phức có mô-đun nhỏ nhất. Tính $S = 2a + b$.

A 0. **B** -4. **C** 2. **D** -2.

Lời giải.
Ta có $|z+1| = \left|\dfrac{z+\overline{z}}{2} + 3\right| \Leftrightarrow \sqrt{(a+1)^2 + b^2} = \sqrt{(a+3)^2} \Leftrightarrow b^2 = 4a + 8$.

Lại có $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+4a+8}$ nhỏ nhất khi $a=-2 \Rightarrow b=0$.
Vậy $S = 2a+b = -4$.
Chọn đáp án B □

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3;3;0)$, $B(3;0;3)$, $C(0;3;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua O, vuông góc với (ABC) sao cho (P) cắt các cạnh AB, AC tại các điểm M và N. Khi $OAMN$ có thể tích nhỏ nhất, hãy viết phương trình mặt phẳng (P).

A $x+y-2z=0$. **B** $x+y+2z=0$. **C** $x-z=0$. **D** $y-z=0$.

Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (0;-3;3), \overrightarrow{AC} = (-3;0;3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-9;-9;-9)$.
Mặt phẳng (ABC) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;1;1)$.
Phương trình của đường thẳng AB: $\begin{cases} x=3 \\ y=3-t \\ z=t \end{cases}$ và của đường thẳng AC: $\begin{cases} x=3-t \\ y=3 \\ z=t. \end{cases}$
(P) cắt các cạnh AB, AC tại các điểm M,N nên $M(3;3-m;m), N(3-n;3;n)$, với $m,n \in [0;3]$
Ta có $\left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right] = (3n-3m-mn; 3m-3n-mn; 3m+3n-mn)$.
Do $(OMN) \perp (ABC)$ nên $\left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right]\vec{n} = 0 \Leftrightarrow 3m+3n-3mn = 0 \Leftrightarrow mn = n+m$.
Suy ra $\left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right] = (2n-4m; 2m-4n; 2m+2n)$.
Do $\overrightarrow{OA} = (3;3;0)$ nên $V_{OAMN} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right].\overrightarrow{OA}\right| = \dfrac{1}{6}\left|6n-12m+6m-12n\right| = m+n = V$.
Ta có $m+n \geqslant 2\sqrt{mn} = 2\sqrt{m+n} \Rightarrow \sqrt{m+n} \geqslant 2 \Rightarrow V = m+n \geqslant 4$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=n=2$.
Vậy mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right] = (-4;-4;8)$ và đi qua O nên có phương trình $x+y-2z=0$.
Chọn đáp án A □

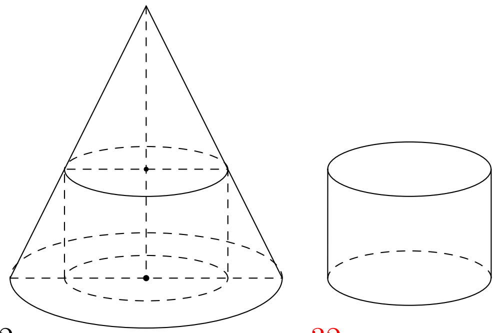
Câu 41. Cho phương trình $\left(8\sin^3 x - m\right)^3 = 162\sin x + 27m$ (1). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình (1) có nghiệm trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)$?

A 2. **B** 3. **C** Vô số. **D** 1.

Lời giải.
Ta có $\left(8\sin^3 x - m\right)^3 = 162\sin x + 27m$ (1) $\Leftrightarrow 8\sin^3 x - m = 3\sqrt[3]{6\sin x + m}$
$\Leftrightarrow 8\sin^3 x + 6\sin x = 6\sin x + m + 3\sqrt[3]{6\sin x + m} \Leftrightarrow 2\sin x = \sqrt[3]{6\sin x + m}$
(do hàm số $f(t) = t^3+3t$ có $f'(t) = 3t^2+3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên đồng biến trên $\mathbb{R}$)
Như vậy (1) $\Leftrightarrow m = 8\sin^3 x - 6\sin x \Leftrightarrow m = -2\sin 3x$.
Lại có $0 < x < \dfrac{\pi}{3}$ nên $-2 \leqslant -2\sin 3x < 0 \Rightarrow -2 \leqslant m < 0$. Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2;-1\}$.
Chọn đáp án A □

Câu 42.

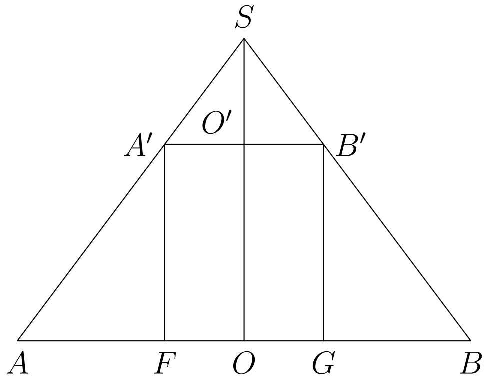
Một khúc gỗ có dạng hình khối nón có bán kính đáy bằng $r = 2$m, chiều cao $h = 6$m. Bác thợ mộc chế tác từ khúc gỗ đó thành một khúc gỗ có dạng hình khối trụ như hình vẽ. Gọi V là thể tích lớn nhất của khúc gỗ hình trụ sau khi chế tác. Tính V.



A $V = \dfrac{32\pi}{9}\text{m}^3$. **B** $V = \dfrac{32}{9}\text{m}^3$. **C** $V = \dfrac{32\pi}{3}\text{m}^3$. **D** $V = \dfrac{32\pi}{9}\text{m}^3$.

Lời giải.

Giả sử cắt nón bởi mặt phẳng đi qua trục nón ta được thiết diện là tam giác như hình vẽ



Đặt $SO' = x$, $(0 < x < 6) \Rightarrow OO' = 6 - x$.

Do $A'B' \parallel AB \Rightarrow \dfrac{A'O'}{AO} = \dfrac{SO'}{SO} \Rightarrow A'O' = \dfrac{SO' \cdot AO}{SO} = \dfrac{x \cdot 2}{6} = \dfrac{x}{3}$.

$V_{\text{trụ}} = \pi \cdot A'O'^2 \cdot OO' = \pi(6-x)\left(\dfrac{x}{3}\right)^2 = \dfrac{\pi}{18}(12-2x)\cdot x \cdot x \leqslant \dfrac{\pi}{18}\left(\dfrac{(12-2x)+x+x}{3}\right)^3 = \dfrac{32\pi}{9}$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = 4$m.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và điểm $A(0;0;2)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cắt (S) theo thiết diện là hình tròn (C) diện tích nhỏ nhất là

A $(P)\colon x + 2y + 3z + 6 = 0$. **B** $(P)\colon x + 2y + z - 2 = 0$.

C $(P)\colon x - 2y + z - 6 = 0$. **D** $(P)\colon 3x + 2y + 2z - 4 = 0$.

Lời giải.

Ta có (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = 3$

$AI = \sqrt{1^2 + 2^2 + (3-2)^2} = \sqrt{6} < R \Rightarrow A$ nằm trong mặt cầu (S).

Để (P) đi qua điểm A và cắt (S) theo thiết diện là hình tròn (C) diện tích nhỏ nhất thì đường tròn (C) có bán kính nhỏ nhất, hay $\mathrm{d}(I,(P))$ lớn nhất.

Suy ra (P) đi qua $A(0;0;2)$ và vuông góc với $AI \Rightarrow \overrightarrow{AI} = (1;2;1)$ là véc-tơ pháp tuyến của (P).

Vậy $(P)\colon x + 2y + z - 2 = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Gọi x_1, x_2 lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm số $f(x) = \int\limits_{e^x}^{e^{2x}} t\ln t\,dt$. Tính $S = x_1 + x_2$

(A) $\ln 2e$. (B) $\ln 2$. **(C)** $-\ln 2$. (D) 0.

Lời giải.

Đặt $F(t) = \int t\ln t\,dt \Rightarrow F'(t) = t\ln t$.

Khi đó $f(x) = \int\limits_{e^x}^{e^{2x}} t\ln t\,dt = F(e^{2x}) - F(e^x) \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x}F'(e^{2x}) - e^xF'(e^x)$.

Suy ra $f'(x) = 2e^{2x}\cdot e^{2x}\ln(e^{2x}) - e^x\cdot e^x\ln(e^x) = 4xe^{4x} - xe^{2x} = xe^{2x}(4e^{2x} - 1)$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ e^{2x} = \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x = \ln\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\ln 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $x_1 = -\ln 2$ và $x_2 = 0$.

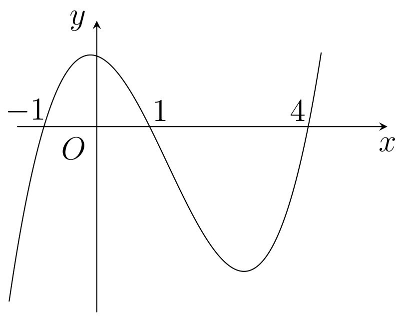
Vậy $S = x_1 + x_2 = -\ln 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 45.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khi đó hàm số $y = f(3-2x) + 2018$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng bên dưới?

(A) $(1; 2)$. (B) $(2; +\infty)$. (C) $(-\infty; 1)$. (D) $(-1; 1)$.



Lời giải.

Đặt $g(x) = f(3-2x) + 2018$ ta có $g'(x) = [f(3-2x) + 2018]' = -2f'(3-2x)$.

Ta có $g'(x) < 0 \Leftrightarrow -2f'(3-2x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) > 0$.

Từ đồ thị $f'(x)$ ta có $\left[\begin{array}{l} -1 < 3 - 2x < 1 \\ 3 - 2x > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x < 2 \\ x < -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $y = f(3-2x) + 2018$ nghịch biến trên $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right)$ và $(1; 2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m$ có đồ thị (C_m). Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với đường thẳng $\Delta\colon y = 3x + 2018$.

(A) $m = \dfrac{7}{3}$. (B) $m = 1$. (C) $m = 2$. (D) $m = -\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

$\Delta\colon y = 3x + 2018$ có hệ số góc $k_\Delta = 3$.

$y' = 3x^2 - 4x + m - 1$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến và đồ thị hàm số (C_m).

Hệ số góc của tiếp tuyến tại M là $y'(x_0) = 3x_0^2 - 4x_0 + m - 1 = 3\left(x_0 - \dfrac{2}{3}\right)^2 + m - \dfrac{7}{3} \geqslant m - \dfrac{7}{3}$

Tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất $k_{tt} = m - \dfrac{7}{3}$.

Theo bài ra ta có $k_{tt} \cdot k_\Delta = -1 \Leftrightarrow \left(m - \dfrac{7}{3}\right)3 = -1 \Leftrightarrow m = 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Có bao nhiêu số tự nhiên có 2018 chữ số sao cho trong mỗi số tổng các chữ số bằng 5?

(A) $1 + 2\mathrm{A}_{2018}^2 + 2\left(\mathrm{C}_{2017}^2 + \mathrm{A}_{2017}^2\right) + \left(\mathrm{C}_{2017}^3 + \mathrm{A}_{2017}^3\right) + \mathrm{C}_{2017}^4$.

(B) $1 + 2\mathrm{C}_{2018}^2 + 2\mathrm{C}_{2018}^3 + \mathrm{C}_{2018}^4 + \mathrm{C}_{2018}^5$.

(C) $1 + 2\mathrm{A}_{2018}^2 + 2\mathrm{A}_{2018}^3 + \mathrm{A}_{2018}^4 + \mathrm{C}_{2017}^5$.

(D) $1 + 4\mathrm{C}_{2017}^1 + 2\left(\mathrm{C}_{2017}^2 + \mathrm{A}_{2017}^2\right) + \left(\mathrm{C}_{2017}^3 + \mathrm{A}_{2016}^2 + \mathrm{C}_{2016}^2\right) + \mathrm{C}_{2017}^4$.

Lời giải.

Vì $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 2 + 2 + 1 = 3 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ nên ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Số tự nhiên có một chữ số 5 đứng đầu và 2017 số 0 đứng sau: Có 1 số.

Trường hợp 2: Số tự nhiên có một chữ số 4, một chữ số 1 và 2016 số 0.

- Khả năng 1: Nếu số 4 đứng đầu thì số 1 đứng ở một trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^1 số.

- Khả năng 2: Nếu số 1 đứng đầu thì số 4 đứng ở một trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^1 số.

Trường hợp 3: Số tự nhiên có một chữ số 3, một chữ số 2 và 2016 số 0

- Khả năng 1: Nếu số 3 đứng đầu thì số 2 đứng ở một trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^1 số.

- Khả năng 2: Nếu số 2 đứng đầu thì số 3 đứng ở một trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^1 số.

Trường hợp 4: Số tự nhiên có hai chữ số 2, một chữ số 1 và 2015 số 0

- Khả năng 1: Nếu số 2 đứng đầu thì số 1 và số 2 còn lại đứng ở hai trong 2017 vị trí còn lại nên ta có A_{2017}^2 số.

- Khả năng 2: Nếu số 1 đứng đầu thì hai chữ số 2 đứng ở hai trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^2 số.

Trường hợp 5: Số tự nhiên có 2 chữ số 1, một chữ số 3 thì tương tự như trường hợp 4 ta có $\mathrm{A}_{2017}^2 + \mathrm{C}_{2017}^2$ số.

Trường hợp 6: Số tự nhiên có một chữ số 2, ba chữ số 1 và 2014 số 0.

- Khả năng 1: Nếu số 2 đứng đầu thì ba chữ số 1 đứng ở ba trong 2017 vị trí còn lại nên ta có

C_{2017}^3 số.

- Khả năng 2: Nếu số 1 đứng đầu và số 2 đứng ở vị trí mà không có số 1 nào khác đứng trước nó thì hai số 1 còn lại đứng ở trong 2016 vị trí còn lại nên ta có C_{2016}^2 số.

- Khả năng 3: Nếu số 1 đứng đầu và số 2 đứng ở vị trí mà đứng trước nó có hai số 1 thì hai số 1 và 2 còn lại đứng ở trong 2016 vị trí còn lại nên ta có A_{2016}^2 số.

Trường hợp 7: Số tự nhiên có năm chữ số 1 và 2013 số 0, vì chữ số 1 đứng đầu nên bốn chữ số 1 còn lại đứng ở bốn trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^4 số.

Áp dụng quy tắc cộng ta có $1+4\mathrm{C}_{2017}^1+2\left(\mathrm{C}_{2017}^2+\mathrm{A}_{2017}^2\right)+\left(\mathrm{C}_{2017}^3+\mathrm{A}_{2016}^2+\mathrm{C}_{2016}^2\right)+\mathrm{C}_{2017}^4$ số cần tìm.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3)f^2(x)$ và $f(0)=-\dfrac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2017)+f(2018)=\dfrac{a}{b}$ với $(a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}^*)$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $\dfrac{a}{b}<-1$. **B** $\dfrac{a}{b}>1$. **C** $a+b=1010$. **D** $b-a=3029$.

Lời giải.

Ta có

$f'(x)=(2x+3)f^2(x)\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+3\Rightarrow\displaystyle\int\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int(2x+3)\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow-\dfrac{1}{f(x)}=x^2+3x+C.$

Vì $f(0)=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow C=2$.

Vậy $f(x)=-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+1}$.

Do đó $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2017)+f(2018)=\dfrac{1}{2020}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1009}{2020}$.

Vậy $a=-1009$; $b=2020$. Do đó $b-a=3029$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\ln(u_1^2+u_2^2+10)=\ln(2u_1+6u_2)$ và $u_{n+2}+u_n=2u_{n+1}+1$ với mọi $n\geqslant 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n>5050$ là

A 100. **B** 99. **C** 101. **D** 102.

Lời giải.

Ta có $\ln(u_1^2+u_2^2+10)=\ln(2u_1+6u_2)$

$\Leftrightarrow u_1^2+u_2^2+10=2u_1+6u_2\Leftrightarrow(u_1-1)^2+(u_2-3)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}u_1-1=0\\u_2-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=1\\u_2=3.\end{cases}$

Mà $u_{n+2}+u_n=2u_{n+1}+1,\forall n\geqslant 1\Leftrightarrow(u_{n+2}-u_{n+1})=(u_{n+1}-u_n)+1,\forall n\geqslant 1$

Suy ra dãy số $(u_{n+1}-u_n)$ là một cấp số cộng với công sai $d=1$ và số hạng đầu $(u_2-u_1)=2$.

Từ đó với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ ta có $u_{n+1}-u_n=2+(n-1)=n+1\Rightarrow u_{n+1}=u_n+(n+1)$.

Vậy $u_n=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Để $u_n>5050$ thì $\dfrac{n(n+1)}{2}>5050\Leftrightarrow n>100$ vì $n\in\mathbb{N}^*$. Kết quả chọn $n=101$.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;6)$, $D(1;1;1)$. Có tất cả bao nhiêu mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm O,A,B,C,D?

A 6. **B** 10. **C** 7. **D** 5.

Lời giải.

Ta thấy 3 điểm A, B, C tạo thành mặt phẳng chắn các trục tọa độ có phương trình:
$\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{6} = 1$
Suy ra $D \in (ABC)$. Như vậy 4 điểm A, B, C, D đồng phẳng.

Mà theo lý thuyết: qua 3 điểm phân biệt không thẳng hàng ta xác định được 1 mặt phẳng.

Vậy nên số mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm O, A, B, C, D là $\mathrm{C}_5^3 - 3 = 7$.

Chọn đáp án C □

——— **HẾT** ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. C	3. C	4. A	5. C	6. A	7. C	8. B	9. A	10. D
11. C	12. C	13. D	14. A	15. D	16. C	17. A	18. C	19. B	20. D
21. D	22. B	23. B	24. D	25. C	26. D	27. B	28. A	29. A	30. A
31. C	32. A	33. C	34. B	35. D	36. B	37. A	38. D	39. B	40. A
41. A	42. D	43. B	44. C	45. A	46. C	47. D	48. D	49. C	50. C

125 ĐỀ KSCL 2017 - 2018 SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO YÊN BÁI

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Hàm số $F(x) = x + \cos(2x - 3) + 10$ là một nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số được cho ở các phương án sau?

(A) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\sin(2x-3) + 10x + C$. (B) $f(x) = 2\sin(2x-3) + 1$.

(C) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\sin(2x-3) + 10x + C$. (D) $f(x) = -2\sin(2x-3) + 1$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = F'(x) = 1 - 2\sin(2x-3)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2-x}{x+2}$ có phương trình là

(A) $y = 2$. (B) $y = -1$. (C) $x = -2$. (D) $x = -1$.

Lời giải.

Ta có đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2-x}{x+2}$ có phương trình là $x = -2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Tính mô-đun của số phức $z = 2 - 3i$.

(A) $|z| = 13$. (B) $|z| = \sqrt{13}$. (C) $|z| = -3$. (D) $|z| = 2$.

Lời giải.

Ta có $|z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Biết $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 10$ và $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = 5$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_a^b [3f(x) - 5g(x)]\,dx$.

(A) $I = 5$. (B) $I = -5$. (C) $I = 15$. (D) $I = 10$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_a^b [3f(x) - 5g(x)]\,dx = 3\int_a^b f(x)\,dx - 5\int_a^b g(x)\,dx = 3 \cdot 10 - 5 \cdot 5 = 5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Cho đường thẳng a, d và mặt phẳng (α), (β) thỏa mãn $\begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ a \subset (\beta) \\ d = (\alpha) \cap (\beta) \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

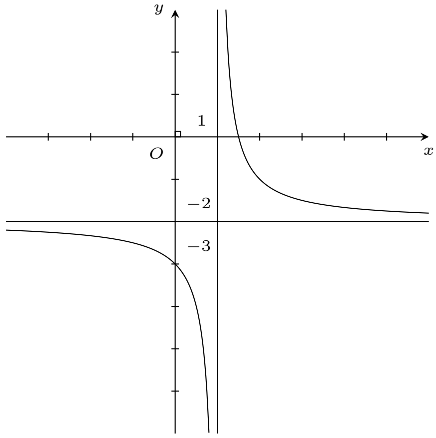
(A) $a \parallel d$. (B) a cắt d. (C) a trùng d. (D) a và d chéo nhau.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ a \subset (\beta) \\ d = (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow a \parallel d$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6.
Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?



(A) $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$.
(B) $y = \dfrac{-2x-5}{x-1}$.
(C) $y = \dfrac{2x-3}{-x-1}$.
(D) $y = \dfrac{-2x+3}{x-1}$.

Lời giải.
Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ và đi qua điểm $(0; -3)$. Suy ra hàm số thỏa mãn là $y = \dfrac{-2x+3}{x-1}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Cho một hình đa diện. Khẳng định nào sau đây **sai**?
(A) Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh.
(B) Mỗi mặt có ít nhất ba cạnh.
(C) Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.
(D) Mỗi cạnh là cạnh chung của ít nhất ba mặt.

Lời giải.
Hình đa diện có tính chất: Mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Mười hai đường thẳng phân biệt có nhiều nhất bao nhiêu giao điểm?
(A) 12. (B) 144. (C) 132. (D) 66.

Lời giải.
Cứ hai đường thẳng phân biệt cắt nhau tạo ra 1 giao điểm. Vậy mười hai đường thẳng phân biệt có nhiều nhất số giao điểm là $\mathrm{C}_{12}^2 = 66$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Cho $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{4}{5}}$, $\log_b \dfrac{1}{2} < \log_b \dfrac{2}{3}$. Khẳng định nào sau đây đúng?
(A) $a > 1$, $0 < b < 1$.
(B) $a > 1$, $b > 1$.
(C) $0 < a < 1$, $0 < b < 1$.
(D) $0 < a < 1$, $b > 1$.

Lời giải.
Ta có $\begin{cases} \dfrac{3}{4} < \dfrac{4}{5} \\ a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{4}{5}} \end{cases} \Rightarrow 0 < a < 1$; $\begin{cases} \dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{3} \\ \log_b \dfrac{1}{2} < \log_b \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow b > 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x - y - 2z - 3 = 0$. Điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (P)?

(A) $M(2;-1;-3)$. (B) $Q(3;-1;2)$. (C) $P(2;-1;-1)$. (D) $N(2;-1;-2)$.

Lời giải.

Ta có $2\cdot 3-(-1)-2\cdot 2-3=0$ nên điểm $Q(3;-1;2)\in(P)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\ln(x-2)^2+\log(x+1)$.

(A) $\mathscr{D}=(-1;+\infty)$. (B) $\mathscr{D}=(2;+\infty)$.
(C) $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$. (D) $\mathscr{D}=(-1;2)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases}(x-2)^2>0\\ x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2\\ x>-1\end{cases}$.

Vậy $\mathscr{D}=(-1;2)\cup(2;+\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Trên tập số phức, biết phương trình $z^2+az+b=0$ $(a,b\in\mathbb{R})$ có một nghiệm là $z=-2+i$. Tính giá trị của $T=a-b$.

(A) $T=4$. (B) $T=-1$. (C) $T=9$. (D) $T=1$.

Lời giải.

$z=-2+i$ là một nghiệm của phương trình khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}(-2+i)^2+a(-2+i)+b=0 &\Leftrightarrow 4-4i-1-2a+ai+b=0\\ &\Leftrightarrow\begin{cases}3-2a+b=0\\ -4+a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\ b=5.\end{cases}\end{aligned}$$

Suy ra $T=a-b=-1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;-1;1)$, $B(-2;1;-1)$ và $C(-1;3;2)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

(A) $D(1;3;4)$. (B) $D(1;1;4)$. (C) $D(-3;1;0)$. (D) $D(-1;-3;-2)$.

Lời giải.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}-2=-1-x_D\\ 2=3-y_D\\ -2=2-z_D\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=1\\ y_D=1\\ z_D=4\end{cases}\Rightarrow D(1;1;4).$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Tìm tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=2x^3-3x^2+5$.

(A) $(1;4)$. (B) $(0;5)$. (C) $(5;0)$. (D) $(4;1)$.

Lời giải.

Hàm bậc ba có $y'=0\Leftrightarrow 6x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(0;5)$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) > \log_{\frac{1}{2}}(x+7)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

(A) 1. (B) 2. **C** 3. (D) 4.

Lời giải.

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) > \log_{\frac{1}{2}}(x+7) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1>0 \\ 3x+1<x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{1}{3} \\ x<3 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} < x < 3.$$

Vậy bất phương trình có 3 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Cho hai số phức: $z_1 = 1-2i$, $z_2 = 2+3i$. Tìm số phức $w = z_1 - 2z_2$.

(A) $w=-3+8i$. (B) $w=-5+i$. **C** $w=-3-8i$. (D) $w=-3+i$.

Lời giải.

Ta có $w = z_1 - 2z_2 = (1-2i) - 2(2+3i) = -3-8i$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Đồ thị của hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ âm?

A $y=\dfrac{3x+4}{x-1}$. (B) $y=\dfrac{2x-3}{3x-1}$. (C) $y=\dfrac{4x+1}{x+2}$. (D) $y=\dfrac{-2x+3}{x+1}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+4}{x-1}$ cắt trục tung tại điểm $(0;-4)$. Điểm này có tung độ âm.

Chọn đáp án A □

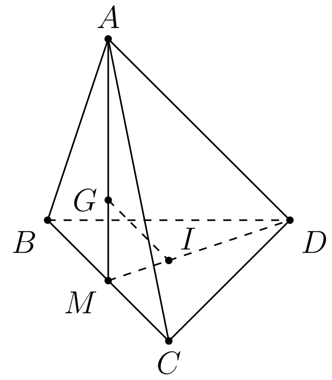
Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Gọi I là hình chiếu song song của G lên mặt phẳng (BCD) theo phương chiếu AD. Chọn khẳng định đúng.

(A) I là điểm bất kì trong tam giác BCD. (B) I là trực tâm tam giác BCD.

C I là trọng tâm tam giác BCD. (D) $IG \perp (BCD)$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC. Xét $\triangle AMD$ có $GI \parallel AD$ nên ta có $\dfrac{MG}{MA} = \dfrac{MI}{MD} = \dfrac{1}{3}$. Suy ra I là trọng tâm tam giác BCD.



Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d?

(A) $\vec{u} = (1; -1; 2)$. (B) $\vec{u} = (2; 1; -2)$. (C) $\vec{u} = (-1; 1; -2)$. **D** $\vec{u} = (2; -1; 1)$.

Lời giải.

$\vec{u} = (2; -1; 1)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = -x^2 + 2x$ và $y = -3x$.

(A) $\dfrac{125}{2}$. (B) $\dfrac{125}{3}$. **C** $\dfrac{125}{6}$. (D) $\dfrac{125}{8}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $-x^2 + 2x = -3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5. \end{array}\right.$

Khi đó diện tích S của hình phẳng được xác định bởi

$$S = \int\limits_0^5 |-x^2 + 2x + 3x|\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^5 |-x^2 + 5x|\,\mathrm{d}x = \left|\int\limits_0^5 (-x^2 + 5x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\right)\Big|_0^5\right| = \frac{125}{6}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. Khẳng định sau đây đúng?

A Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

(B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

(C) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(D) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2} < 0, \quad \forall x \neq 1$.

Từ đó hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ và $B(m; m-1; -4)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để độ dài đoạn $AB = 3$.

(A) $m = 1$. **B** $m = 1$ hoặc $m = 4$.

(C) $m = -1$. (D) $m = 4$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $A(3;1;-2)$. Từ đó $\overrightarrow{AB} = (m-3; m-2; -2)$.

Ta có $AB = 3 \Leftrightarrow AB^2 = 9 \Leftrightarrow (m-3)^2 + (m-2)^2 + (-2)^2 = 9 \Leftrightarrow 2m^2 - 10m + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4. \end{array}\right.$

Vậy $m = 1$ hoặc $m = 4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$ trên đoạn $[-1;1]$.

(A) $\min\limits_{[-1;1]} y = -2$. (B) $\min\limits_{[-1;1]} y = 4$. **C** $\min\limits_{[-1;1]} y = -1$. (D) $\min\limits_{[-1;1]} y = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = 6x^2 + 6x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;1] \\ x = -1 \in [-1;1]. \end{array}\right.$

Ta có: $y(-1) = 0, y(0) = -1, y(1) = 4$ suy ra $\min\limits_{[-1;1]} y = y(0) = -1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Cho mặt cầu (S) có đường kính 10 cm và mặt phẳng (P) cách tâm mặt cầu một khoảng 4 cm. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

(A) (P) cắt (S).

(B) (P) cắt (S) theo một đường tròn có bán kính 3 cm.

C (P) tiếp xúc với (S).

(D) (P) và (S) có vô số điểm chung.

Lời giải.

Bán kính mặt cầu (S) là $R = 5$, khoảng cách từ tâm mặt cầu đến (P) là $\mathrm{d}(I;(P)) = 4$.

Do $R > \mathrm{d}(I;(P)) = 4$ nên (P) không tiếp xúc với (S).

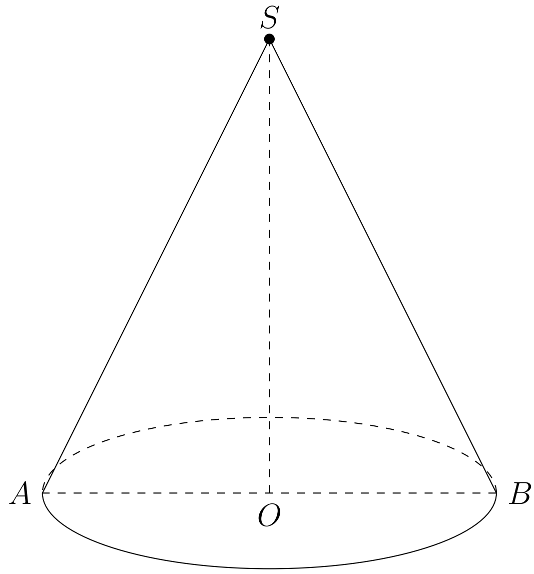
Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Cho hình nón đỉnh S, có trục $SO = a\sqrt{3}$. Thiết diện qua trục của hình nón tạo thành tam giác SAB đều. Gọi S_{xq} là diện tích xung quanh của hình nón và V là thể tích của khối nón tương ứng. Tính tỉ số $\dfrac{S_{\text{xq}}}{V}$ theo a

A $\dfrac{S_{\text{xq}}}{V} = \dfrac{2\sqrt{3}}{a}$. (B) $\dfrac{S_{\text{xq}}}{V} = \dfrac{\sqrt{3}}{a}$. (C) $\dfrac{S_{\text{xq}}}{V} = \dfrac{4\sqrt{3}}{a}$. (D) $\dfrac{S_{\text{xq}}}{V} = \dfrac{3\sqrt{3}}{a}$.

Lời giải.

Trong tam giác SAO vuông tại O, có $l = SA = \dfrac{SO}{\sin 60^\circ} = 2a, r = \cot 60^\circ \cdot SO = a$.
Khi đó $\dfrac{S_{\text{xq}}}{V} = \dfrac{\pi r l}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \dfrac{2\sqrt{3}}{a}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Tìm hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển nhị thức Niu-tơn $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^{13}$, (với $x \neq 0$).

(A) 78. (B) 286. (C) -286. (D) -78.

Lời giải.

Số hạng tổng quát thứ $k+1$ của khai triển là $T_{k+1} = \mathrm{C}_{13}^k x^{13-k} \cdot \left(-\dfrac{1}{x}\right)^k = \mathrm{C}_{13}^k \cdot (-1)^k x^{13-2k}$.
Số hạng chứa x^7 ứng với $13 - 2k = 7 \Leftrightarrow k = 3$.
Vậy hệ số cần tìm là $\mathrm{C}_{13}^3 \cdot (-1)^3 = -286$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Cho biết $1 + \left(-\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{4} + \left(-\dfrac{1}{8}\right) + \cdots + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots = \dfrac{a}{b}$, trong đó $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính tổng $T = a + b$.

(A) $T = 2$. (B) $T = 5$. (C) $T = 4$. (D) $T = 3$.

Lời giải.

Ta có tổng trên là tổng các số hạng của một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = 1$, công bội $q = -\dfrac{1}{2}$.
Do đó $T = \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{2}{3}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + (m+1)x + 1$ có đồ thị (C). Với giá trị nào của m thì tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng -1 đi qua $A(1;3)$?

(A) $m = \dfrac{7}{9}$. (B) $m = -\dfrac{7}{9}$. (C) $m = -\dfrac{1}{2}$. (D) $m = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 6mx + m + 1$, khi đó $y(-1) = 2m - 1, y'(-1) = -5m + 4$.
Khi đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x = -1$ là:

$$y = (-5m+4)(x+1) + 2m - 1.$$

Do $A(1;3)$ nằm trên tiếp tuyến nên ta có phương trình:

$$3=(-5m+4)(1+1)+2m-1 \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}.$$

Vậy $m=\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Tính tổng tất cả T các nghiệm thuộc đoạn $[0;200\pi]$ của phương trình $\cos 2x-3\cos x-4=0$.

A $T=10000\pi$. B $T=5100\pi$. C $T=10100\pi$. D $T=5151\pi$.

Lời giải.

Biến đổi phương trình về:

$2\cos^2 x-3\cos x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos x=-\frac{5}{3}(\text{Loại vì } \cos x\in[-1;1])\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pi+k2\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$

Do $0\le \pi+2k\pi\le 200\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le k\le \frac{199}{2}$, từ đó $k\in\{0,\cdots,99\}$.

Vậy $T=\sum\limits_{k=0}^{99}(\pi+2k\pi)=100\pi+2\pi(0+1+2+\cdots+99)=100\pi+2\cdot\frac{(99+0)\cdot 100}{2}\pi=10000\pi.$

Chọn đáp án A □

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=\frac{\cos x-1}{\cos x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

A $m>1$. B $m<1$. C $m\ge 1$. D $0<m<1$.

Lời giải.

Ta có $y'=-\sin x\cdot\frac{-m+1}{(\cos x-m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ thì $y'>0$ với mọi $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Bởi $-\sin x<0, \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên:

$$\begin{cases}-m+1<0\\ \cos x-m\ne 0, \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>1\\ m\notin(0;1)\end{cases} \Leftrightarrow m>1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$; $d_2\colon \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{2}$ và mặt phẳng $(P)\colon x-y-2z+3=0$. Biết đường thẳng Δ nằm trong (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1,d_2. Viết phương trình đường thẳng Δ.

A $\Delta:\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{1}$.

B $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-1}$.

C $\Delta:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{1}$.

D $\Delta:\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-1}{1}$.

Lời giải.

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của Δ với d_1, d_2.
Khi đó $A(2m-1; -m+1; m+1), B(n+1; n+2; 2n-1)$. Do $A, B \in (P)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2m-1+m-1-2m-2+3=0 \\ n+1-n-2-4n+2+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=1. \end{cases}$$

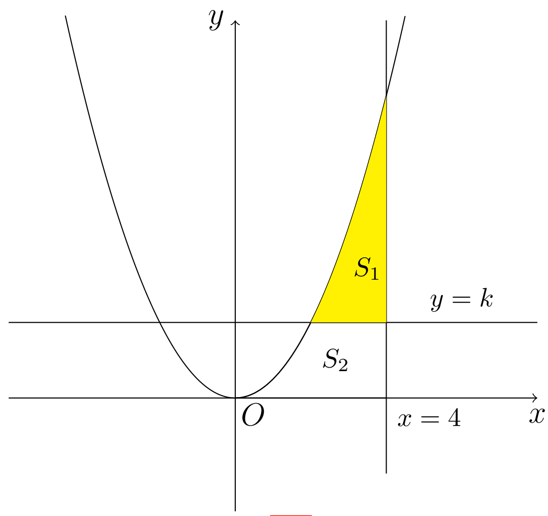
Ta được $A(1;0;-2), B(2;3;1)$. Đường thẳng Δ đi qua $A(1;0;2)$ nhận $\overrightarrow{AB}=(1;3;-1)$ làm véc-tơ chỉ phương, như vậy phương trình Δ là:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-1}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 32.

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2, y=0, x=0, x=4$. Đường thẳng $y=k (0<k<16)$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích S_1, S_2 (hình vẽ). Tìm k để $S_1=S_2$.



A $k=8$. **B** $k=3$. **C** $k=5$. **D** $k=4$.

Lời giải.

Ta có hình (H) giới hạn bởi các đường $x=\sqrt{y}, x=4, y=0, y=16$, khi đó diện tích hình (H) là: $S=\int\limits_0^{16}(4-\sqrt{y})\,\mathrm{d}x=\frac{64}{3}$.

Gọi (H_1) là hình giới hạn bởi các đường $x=\sqrt{y}, x=4, y=0, y=k$, khi đó diện tích hình (H_1) là: $S_1=\int\limits_0^k(4-\sqrt{y})=4k-\frac{2}{3}\sqrt{k^3}$.

$$S_1=S_2=\frac{S}{2}\Leftrightarrow 4k-\frac{2}{3}\sqrt{k^3}=\frac{32}{3}\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\left(\sqrt{k}\right)^3+4\left(\sqrt{k}\right)^2-\frac{32}{3}=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{k}=2+2\sqrt{3}\\ \sqrt{k}=2-2\sqrt{3}\\ \sqrt{k}=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}k=16+8\sqrt{3}\\ k=16-8\sqrt{3}\\ k=4.\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện $0<k<16$ ta được $k=4$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Cho các số thực a, b thỏa mãn $0 < b < a < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = -3\log_{a^4}\dfrac{a}{b} + \log_b^2(ab)$.

A $\min P = 3$. **B** $\min P = 4$. **C** $\min P = \dfrac{5}{2}$. **D** $\min P = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $P = -\dfrac{3}{4}(1 - \log_a b) + \left(\dfrac{1}{\log_a b} + 1\right)^2$.

Đặt $t = \log_a b, (t > 1)$, ta được $P = f(t) = \dfrac{-3}{4}(1-t) + \left(\dfrac{1}{t}+1\right)^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}t + \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{2}{t}$.

Có $f'(t) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{t^3} - \dfrac{2}{t^2} = \dfrac{3t^3 - 8t - 8}{4t^3}$.

Ta có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^3 - 8t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \in (1; +\infty)$.

Ta có bảng biến thiên:

t	1		2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	3	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên thì $f(t)$ trên $(1; +\infty)$ ta được $\min f(t) = 3$ tại $t = 2$.

Vậy $\min P = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a, AD = 2a$; SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến (SCD) bằng $\dfrac{a}{2}$. Tính thể tích khối chóp theo a.

A $\dfrac{2\sqrt{5}}{15}a^3$. **B** $\dfrac{2\sqrt{5}}{45}a^3$. **C** $\dfrac{4\sqrt{15}}{15}a^3$. **D** $\dfrac{4\sqrt{15}}{45}a^3$.

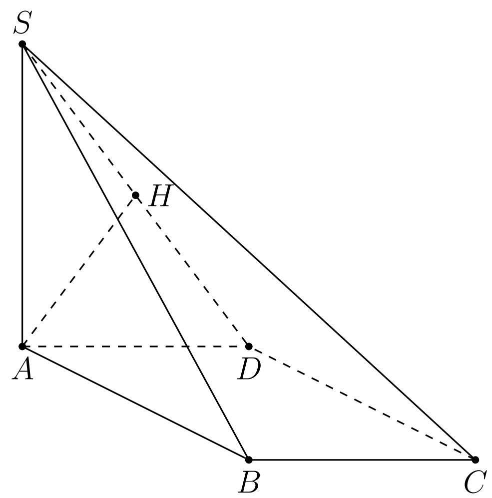
Lời giải.

Kẻ AH vuông góc với SD tại H. Khi đó ta có AH vuông góc với (SCD) suy ra khoảng cách từ A đến (SCD) bằng $AH = \dfrac{a}{2}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta được $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AD^2}$.

Giải ra ta được $SA = \dfrac{2\sqrt{15}}{15}a$, từ đó

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot AB \cdot AD \cdot SA = \dfrac{4\sqrt{15}}{15}a^3$.



Chọn đáp án C □

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-6}{-3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-2}{2}$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(4;3;4)$, song

song với Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S) là

A $2x+y+2z-19=0$.

B $2x+y-2z-10=0$.

C $2x+2y+z-18=0$.

D $x-2y+2z-1=0$.

Lời giải.

Ta có Δ đi qua điểm $A(6;2;2)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta(-3;2;2)$.
Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=3$.
Gọi $\vec{n}_P=(a;b;c)$, $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P).
Do $(P)\parallel(\Delta)\Rightarrow \vec{n}_P.\vec{u}_\Delta=0\Rightarrow a=\dfrac{2}{3}b+\dfrac{2}{3}c$.
Phương trình (P) có dạng

$$a(x-4)+b(y-3)+c(z-4)=0\Leftrightarrow ax+by+cz-4a-3b-4c=0.$$

Do (P) tiếp xúc với (S) nên $\mathrm{d}(I;(P))=R$, hay:

$$\Leftrightarrow\frac{|a+2b+3c-4a-3b-4c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=3\Leftrightarrow|-3a-b-c|=3\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Thay $a=\dfrac{2}{3}b+\dfrac{2}{3}c$ vào phương trình trên ta được:

$$2b^2-5bc-2c^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=\dfrac{c}{2}\\ b=2c.\end{array}\right.$$

- $b=\dfrac{c}{2}$. Chọn $c=2$ suy ra $b=1, a=2$, $\vec{n}_P=(2;1;2)$.
  Vậy $(P)\colon 2x+y+2z-19=0$, do $A\notin(P)$ nên (P) tìm được thỏa mãn.
- $b=2c$. Chọn $c=1\Rightarrow b=2, a=2$ khi đó $(P)\colon 2x+2y+z-18=0$. Mặt phẳng này lại đi qua $A(6;2;2)$ nên không thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Một người gửi 75 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 5,4%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi? Biết rằng suốt trong một thời gian gửi tiền, lãi suất không đổi và người đó khồn rút tiền ra.

A 7 năm. **B** 6 năm. **C** 5 năm. **D** 4 năm.

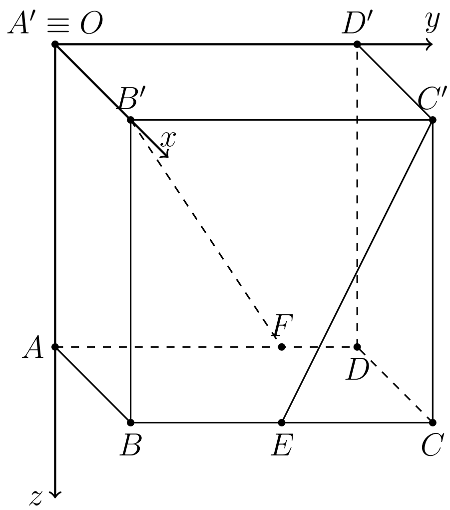
Lời giải.

Số tiền cả gốc lẫn lãi thu được sau n năm là: $A=75(1+5{,}4\%)^n$ (triệu).
Cho $A>100\Leftrightarrow 75(1+5{,}4\%)^n>100\Leftrightarrow n>\log_{(1+5{,}4\%)}\dfrac{4}{3}\approx 5{,}4$.
Số năm ít nhất là 6 năm.
Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, $AB=6$ cm, $BC=BB'=2$ cm. Điểm E là trung điểm của cạnh BC. Gọi F là điểm thuộc đường thẳng AD sao cho $C'E$ vuông góc với $B'F$. Tính khoảng cách DF.

A 1cm. **B** 2cm. **C** 3cm. **D** 6cm.

Lời giải.



Gắn hệ tọa độ $Oxyz$ sao cho
$O \equiv A', Ox \equiv A'B', Oy \equiv A'D', Oz \equiv A'A$.
Ta có $A'(0;0;0), B'(6;0;0), C'(6;2;0), D'(0;2;0)$,
$D(0;2;2), B(6;0;2), C(6;2;2), A(0;0;2)$.
E là trung điểm BC suy ra $E(6;1;2)$, $\overrightarrow{C'E} = (0;-1;2)$.

Phương trình đường thẳng AD: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2m \\ z = 2 \end{cases}, m \in \mathbb{R}$.

$F \in AD \Rightarrow F(0;2m;2)$ suy ra $\overrightarrow{B'F} = (-6;2m;2)$.
Do $C'E \perp B'F$ nên $\overrightarrow{C'E} \cdot \overrightarrow{B'F} = 0 \Leftrightarrow -2m + 4 = 0$.
Từ đó tìm được $m = 2$ suy ra $DF = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) \cdot f(x) = x^4 + x^2$. Biết $f(0) = 2$. Tính $f^2(2)$.

A $f^2(2) = \dfrac{313}{15}$. **B** $f^2(2) = \dfrac{332}{15}$. **C** $f^2(2) = \dfrac{324}{15}$. **D** $f^2(2) = \dfrac{323}{15}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int (f'(x) \cdot f(x))\, \mathrm{d}x = \int (x^4 + x^2)\, \mathrm{d}x$ suy ra $\dfrac{f^2(x)}{2} = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^3}{3} + C$.

Thay $x = 0$ vào ta được $\dfrac{f^2(0)}{2} = 2 = C$ suy ra $f^2(x) = 2\left(\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^3}{3} + 2\right)$.

Vậy $f(2) = \dfrac{332}{15}$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \ln(16x^2 + 1) - (m+1)x + m + 2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A $m \in (-\infty; 3]$. **B** $m \in [-3; 3]$. **C** $m \in [3; +\infty)$. **D** $m \in (-\infty; -3)$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{32x}{16x^2 + 1} - m - 1$.

Để hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$ thì $\dfrac{32x}{16x^2 + 1} - m - 1 \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Hay $f(x) = \dfrac{32x}{16x^2 + 1} - 1 \leq m$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{32(1 - 16x^2)}{(16x^2 + 1)^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{4} \\ x = \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$

Ta xét bảng biến thiên của $f(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$y'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1

Từ bảng biến thiên thì $m \geq 3$. Vậy $m \geq 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Một đoàn tàu chuyển động thẳng khởi hành từ một nhà ga. Quãng đường (theo đơn vị mét (m)) đi được của đoàn tàu là một hàm số của thời gian t (theo đơn vị giây (s)) cho bởi phương trình là $S = 6t^2 - t^3$. Tìm thời điểm t mà tại đó vận tốc v(m/s) của đoàn tàu đạt giá trị lớn nhất?

A $t = 6$ s. **B** $t = 4$ s. **C** $t = 2$ s. **D** $t = 1$ s.

Lời giải.

Ta có: $v(t) = s'(t) = 12t - 3t^2 = 12 - 3(t-2)^2 \leq 12$.

Vậy $v(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = 2$ s.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Cho khối trụ có chiều cao 20. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng được thiết diện là hình elip có độ dài trục lớn bằng 10. Thiết diện chia khối trụ ban đầu thành hai nửa, nửa trên có thể tích V_1, nửa dưới có thể tích V_2. Khoảng cách từ một điểm thuộc thiết diện gần đáy dưới nhất và điểm thuộc thiết diện xa đáy dưới nhất tới đáy dưới lần lượt là 8 và 14. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

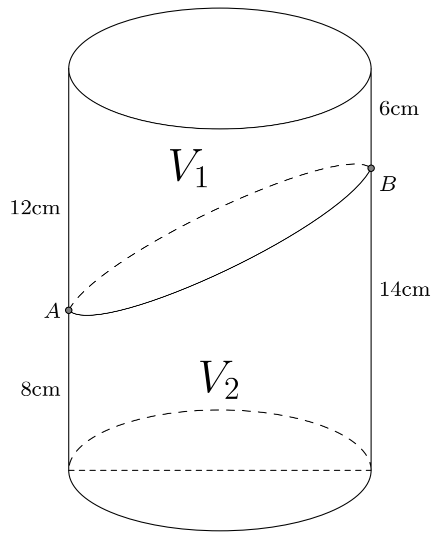
A $\dfrac{11}{20}$. **B** $\dfrac{9}{11}$. **C** $\dfrac{9}{20}$. **D** $\dfrac{6}{11}$.

Lời giải.

Ta có công thức thể tích hình phiến trụ là $V = \pi R^2 \dfrac{h_1 + h_2}{2}$ do đó

$V_1 = \pi R^2 \dfrac{6+12}{2} = \pi R^2 \cdot 9$; $V_2 = \pi R^2 \dfrac{8+14}{2} = \pi R^2 \cdot 11$

$\Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{9}{11}$.



Chọn đáp án B □

Câu 42. Cho số phức $|z - 1 + 2i| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 3 - 2i + (2-i)z$ là một đường tròn. Tính bán kính R của đường tròn đó.

(A) $R = 20$. (B) $R = \sqrt{7}$. **C** $R = 2\sqrt{5}$. (D) $R = 7$.

Lời giải.

Ta gọi $w = x + yi$ khi đó $z = \dfrac{w - 3 + 2i}{2 - i} = \dfrac{2x - y - 8}{5} + \dfrac{x + 2y + 1}{5}i$ từ đó

$$\begin{aligned} & |z - 1 + 2i| = 2 \Rightarrow |2x - y - 13 + (x + 2y + 11)i| = 10 \\ \Rightarrow \quad & (2x - y - 13)^2 + (x + 2y + 11)^2 = 100 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + y^2 - 6x + 14y + 38 = 0. \end{aligned}$$

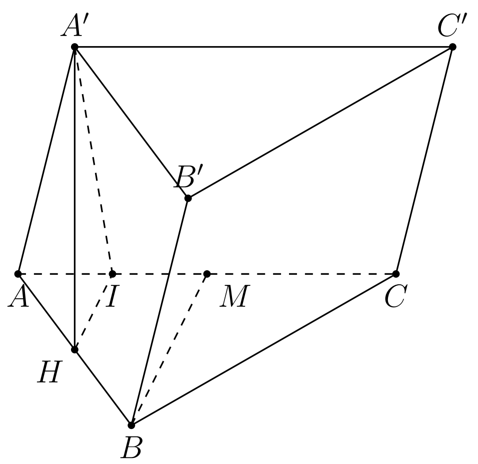
Đây là phương trình đường tròn có $R = \sqrt{3^2 + 7^2 - 38} = 2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 43. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' xuống (ABC) là trung điểm của AB. Mặt bên $(ACC'A')$ tạo với đáy góc $45°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $\dfrac{3a^2}{16}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{a^3}{16}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AB, $HI \perp AC (I \in AC)$ và M là trung điểm của AC.

Ta có $BM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow HI = \dfrac{1}{2}BM = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a$.

Dễ thấy góc tạo bởi mặt phẳng $(ACC'A')$ và (ABC) là góc $\widehat{A'IH} = 45°$.

Vậy $\triangle A'IH$ là tam giác vuông cân ở H

nên $A'H = HI = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a$.

Vậy $V_{ABCD} = HI \cdot S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \dfrac{3}{16}a^3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 44. Một hộp chứa 12 viên bi kích thước như nhau, trong đó có 5 viên bi màu xanh được đánh số từ 1 đến 5; có 4 viên bi màu đỏ được đánh số từ 1 đến 4 và 3 viên bi màu vàng được đánh số từ 1 đến 3. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp. Tính xác suất để 2 viên bi được lấy vừa khác màu, vừa khác số.

(A) $P = \dfrac{8}{33}$. (B) $P = \dfrac{14}{33}$. (C) $P = \dfrac{29}{66}$. **D** $P = \dfrac{37}{66}$.

Lời giải.

Không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^2 = 66$.

Gọi A là biến cố lấy được 2 viên bi khác màu, vừa khác số. Để đếm $n(A)$ ta thực hiện như sau:

- 1 viên xanh, 1 viên đỏ:

  Lấy 1 viên đỏ: 4 cách, sau đó lấy 1 bi vàng: $5 - 1 = 4$ cách $\Rightarrow$ có $4 \cdot 4 = 16$ cách.
- 1 viên xanh, 1 viên vàng: $3 \cdot 4 = 12$ cách.
- 1 viên đỏ, 1 viên vàng: $3 \cdot 3 = 9$ cách.

$\Rightarrow n(A) = 16 + 12 + 9 = 37 \Rightarrow \mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{37}{66}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 8m^2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có diện tích bằng 64.

A $m = -\sqrt[5]{2}$. **B** $m = \sqrt[5]{2}$. **C** $m = \pm\sqrt[5]{2}$. **D** Không tồn tại m.

Lời giải.

Có $y' = 4x^3 - 16m^2x = 4x(x^2 - 4m^2)$.

Hàm số có 3 cực trị khi y' có 3 nghiệm phân biệt xảy ra khi $m \neq 0$ khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \\ x = -2m \end{array}\right.$.

Khi đó 3 điểm cực trị là $A(0;1); B(2m; -16m^4 + 1); C(-2m; -16m^4 + 1)$.

Khi đó $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AH \cdot BC = \dfrac{1}{2}16m^4 \cdot |4m| = 32|m^5|$.

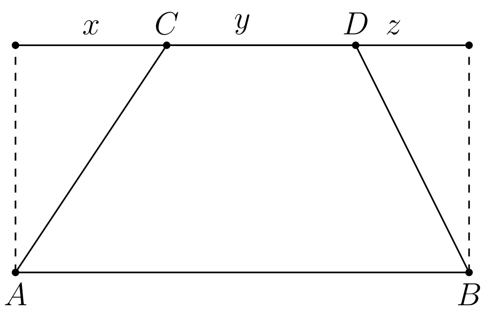
Từ đó $S_{ABC} = 64 \Leftrightarrow |m^5| = 2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt[5]{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Lúc 10 giờ sáng trên sa mạc, một nhà địa chất đang ở tại ví trí A, anh ta muốn đến vị trí B (bằng ô tô) trước 12 giờ trưa, với $AB = 70$ km. Nhưng trong sa mạc thì xe chỉ có thể di chuyển với vận tốc là 30 km/h. Cách vị trí A 10 km có một con đường nhựa chạy song song với đường thẳng nối từ A đến B. Trên đường nhựa thì xe có thể di chuyển với vận tốc 50 km/h. Tìm thời gian ít nhất để nhà địa chất đến vị trí B.

A 1 giờ 52 phút. **B** 1 giờ 54 phút. **C** 1 giờ 56 phút. **D** 1 giờ 58 phút.

Lời giải.



Gọi các giả thiết như trên hình vẽ. Ta có

$AC = \sqrt{x^2 + 100}; DB = \sqrt{z^2 + 100}$.

Từ đó tổng thời gian đi là $P = \dfrac{AC + DB}{30} + \dfrac{y}{50}$.

Sử dụng bất đẳng thức khoảng cách ta có

$AC + BD = \sqrt{x^2 + 100} + \sqrt{z^2 + 100} \geq \sqrt{(x+z)^2 + (10+10)^2} = \sqrt{(70-y)^2 + 400}$.

Từ đó $P \geq \dfrac{\sqrt{(70-y)^2 + 400}}{30} + \dfrac{y}{50} = f(y)$ với $0 \leq y \leq 70$.

Ta có $f'(y) = \dfrac{y - 70}{30\sqrt{(70-y)^2 + 400}} + \dfrac{1}{50}$.

$$\begin{aligned} & f'(y) = 0 \Leftrightarrow 50(70 - y) = 30\sqrt{(70-y)^2 + 400} \\ \Leftrightarrow \ & 25(70-y)^2 = 9\left((70-y)^2 + 400\right) \\ \Leftrightarrow \ & (70-y)^2 = 225 \Leftrightarrow 70 - y = 15 \Leftrightarrow y = 55 \end{aligned}$$

Ta có $f(0)=\dfrac{10\sqrt{53}}{30}; f(70)=\dfrac{31}{15}; f(55)=\dfrac{29}{15}$. Trong đó $f(55)$ là bé nhất nên $\min\limits_{[0;70]} f(y)=f(55)=\dfrac{29}{15}\Rightarrow \min P=1$ giờ 56 phút.

Chọn đáp án C ☐

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-1=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa Δ và tạo với (P) một góc nhỏ nhất. Biết rằng mặt phẳng (Q) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(10;a;b)$. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $a>b$. B. $a+b=6$. C. $a+b=10$. D. $2a+b=1$.

Lời giải.

Ta có véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}_1=(2;1;-1)$.

Vì (Q) chứa Δ nên $\vec{n}\perp\vec{u}_1\Rightarrow 10\cdot 2+1\cdot a+(-1)\cdot b=0\Rightarrow b-a=20$.

Ta có véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_P=(2;-1;2)$.

Gọi α là góc tạo với (P) và (Q) thì ta có

$\cos\alpha=\dfrac{|20-a+2b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{10^2+a^2+b^2}}=\dfrac{|20-a+2b|}{3\sqrt{10^2+a^2+b^2}}$.

Vì $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ nên α bé nhất khi $\cos\alpha$ là lớn nhất.

Ta có $|20-a+2b|=\left|\dfrac{1}{6}(20+a-b)+\dfrac{5}{3}\cdot 10-\dfrac{7}{6}\cdot a+\dfrac{13}{6}\cdot b\right|=\left|\dfrac{5}{3}\cdot 10-\dfrac{7}{6}\cdot a+\dfrac{13}{6}\cdot b\right|$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta có

$\left|\dfrac{5}{3}\cdot 10-\dfrac{7}{6}\cdot a+\dfrac{13}{6}\cdot b\right|^2\le\left(\left(\dfrac{5}{3}\right)^2+\left(\dfrac{-7}{6}\right)^2+\left(\dfrac{13}{6}\right)^2\right)(10^2+a^2+b^2)\Rightarrow\cos\alpha\le\dfrac{\sqrt{318}}{18}$

xảy ra khi $\dfrac{10}{\frac{5}{3}}=\dfrac{a}{\frac{-7}{6}}=\dfrac{b}{\frac{13}{6}}\Leftrightarrow a=-7; b=13$ tức là $a+b=6$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 48. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5-\dfrac{x^2\cos 2x}{x^2+1}\right)$.

A. $\dfrac{1}{4}$. B. 4.

C. 5. D. Không tồn tại giới hạn.

Lời giải.

- Chọn $x_n=n\pi, n\in\mathbb{N}$ thì ta có

$$\lim\left(5-\dfrac{x_n^2\cos 2x_n}{x_n^2+1}\right)=\lim\left(5-\dfrac{(n\pi)^2}{(n\pi)^2+1}\right)=\lim\left(5-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{(n\pi)^2}}\right)=4.$$

- Chọn $x_m=\dfrac{\pi}{4}+m\pi, m\in\mathbb{N}$ thì ta có

$$\lim\left(5-\dfrac{x_m^2\cos 2x_m}{x_m^2+1}\right)=5-0=5.$$

Ta chọn được 2 dãy con $x_n; x_m\to+\infty$ mà $\lim\left(5-\dfrac{x_m^2\cos 2x_m}{x_m^2+1}\right)\neq\lim\left(5-\dfrac{x_n^2\cos 2x_n}{x_n^2+1}\right)$ nên giới hạn ban đầu là không tồn tại.

Chọn đáp án D ☐

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) + 2f(x) = 0$. Tính $f(-1)$, biết rằng $f(1) = 1$.

(A) 3. (B) e^{-2}. (C) e^{4}. (D) e^{3}.

Lời giải.

$f'(x) + 2f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = -2 \Rightarrow (f(x))' = -2$

$\Rightarrow \ln(f(x)) = -2x + C \Rightarrow f(x) = \mathrm{e}^{-2x+C}, C \in \mathbb{R}$.

Có $f(1) = 1 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow f(x) = \mathrm{e}^{-2x+2}$.

Từ đó $f(-1) = \mathrm{e}^4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Ba cầu thủ sút phạt đền 11m, mỗi người sút một lần với xác suất ghi bàn tương ứng là x, y và 0,6 (với $x > y$). Biết xác suất để ít nhất một trong ba cầu thủ ghi bàn là 0,976 và xác suất để cả ba cầu thủ đều ghi bàn là 0,336. Tính xác suất để có đúng hai cầu thủ ghi bàn.

(A) $P = 0{,}452$. (B) $P = 0{,}435$. (C) $P = 0{,}4525$. (D) $P = 0{,}4245$.

Lời giải.

Xác suất để ít nhất một trong ba cầu thủ ghi bàn là 0,976 $\Rightarrow$ xác suất không cầu thủ nào ghi bàn là $(1-x)(1-y)(1-0{,}6) = 1 - 0{,}976 \Rightarrow (1-x)(1-y) = 0{,}06$. (1)

xác suất để cả ba cầu thủ đều ghi bàn là 0,336 $\Rightarrow x \cdot y \cdot 0{,}6 = 0{,}336 \Rightarrow xy = 0{,}56$. (2)

Từ (1),(2) ta có hệ

$$\begin{cases}(1-x)(1-y) = 0{,}06\\ xy = 0{,}56\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y = 1{,}5\\ xy = 0{,}56\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 0{,}8\\ y = 0{,}7\end{cases} \text{(vì } x > y\text{)}.$$

Đúng hai cầu thủ ghi bàn thì có thể xảy ra các trường hợp sau

- TH1: Người 1, 2 ghi bàn, người 3 không ghi bàn: $P_1 = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0,4 = 0{,}224$.
- TH2: Người 1, 3 ghi bàn, người 2 không ghi bàn: $P_1 = 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}144$.
- TH3: Người 2, 3 ghi bàn, người 1 không ghi bàn: $P_1 = 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}084$.

Vậy xác suất đúng hai cầu thủ ghi bàn là: $P = 0{,}224 + 0{,}144 + 0{,}084 = 0{,}452$

Chọn đáp án (A) □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. C	3. B	4. A	5. A	6. D	7. D	8. D	9. D	10. B
11. D	12. B	13. B	14. B	15. C	16. C	17. A	18. C	19. D	20. C
21. A	22. B	23. C	24. C	25. A	26. C	27. B	28. D	29. A	30. A
31. B	32. D	33. A	34. C	35. A	36. B	37. B	38. B	39. C	40. C
41. B	42. C	43. A	44. D	45. C	46. C	47. B	48. D	49. C	50. A

126 KHẢO SÁT LỚP 12 NĂM HỌC 2017-2018, CHU VĂN AN, HÀ NỘI

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+2=0$. Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) có tọa độ là

(A) $(1;-2;1)$. (B) $(1;2;1)$. **(C)** $(1;1;-1)$. (D) $(2;1;1)$.

Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(1;1;-1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Hàm số $y=2x^4+1$ đồng biến trên khoảng

(A) $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$. (B) $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **(C)** $(0;+\infty)$. (D) $(-\infty;0)$.

Lời giải.

Ta có $y'=8x^3$, suy ra

$y'=0\Leftrightarrow 8x^3=0\Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên (như hình bên)

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

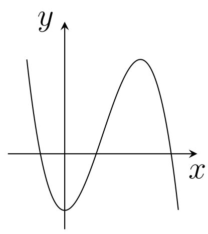
x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên.

Hàm số đã cho có mấy điểm cực trị?

(A) 0. **(B)** 2.
(C) 4. (D) 1.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị suy ra hàm số có 2 cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Nguyên hàm $I=\displaystyle\int\frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $-\dfrac{1}{2}\ln|2x+1|+C$. (B) $-\ln|2x+1|+C$.
(C) $\dfrac{1}{2}\ln|2x+1|+C$. (D) $\ln|2x+1|+C$.

Lời giải.

Sử dụng công thức $\displaystyle\int\frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$, ta được

$$\int\frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Tập xác định của hàm số $y = \log(2x - x^2)$ là

(A) $\mathscr{D} = [0; 2]$.
(B) $\mathscr{D} = (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.
(C) $\mathscr{D} = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.
(D) $\mathscr{D} = (0; 2)$.

Lời giải.

Điều kiện $2x - x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (0; 2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Điểm biểu diễn của số phức z là $M(1; 2)$. Tọa độ của điểm biểu diễn cho số phức $w = z - 2\overline{z}$ là

(A) $(2; -3)$.
(B) $(2; 1)$.
(C) $(-1; 6)$.
(D) $(2; 3)$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $z = 1 + 2i$.

Từ đó $w = z - 2\overline{z} = (1 + 2i) - 2(1 - 2i) = -1 + 6i$.

Vậy tọa độ của điểm biểu diễn số phức w là $(-1; 6)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 0; 2)$. Mệnh nào sau đây đúng?

(A) $M \in (Oxz)$.
(B) $M \in (Oyz)$.
(C) $M \in Oy$.
(D) $M \in (Oxy)$.

Lời giải.

Mọi điểm có thành phần tung độ bằng 0 đều thuộc mặt phẳng (Oxz). Do đó điểm $M(1; 0; 2)$ thuộc mặt phẳng (Oxz).

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Mỗi đỉnh của một đa diện là đỉnh chung của ít nhất bao nhiêu mặt?

(A) Ba mặt.
(B) Hai mặt.
(C) Bốn mặt.
(D) Năm mặt.

Lời giải.

Theo định nghĩa của đa diện, mỗi đỉnh của đa diện là đỉnh chung của ít nhất 3 mặt.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Giới hạn $\lim \dfrac{\sin n + 1}{n}$ bằng

(A) $+\infty$.
(B) 1.
(C) $-\infty$.
(D) 0.

Lời giải.

Với mọi $n > 0$ thì $|\sin n + 1| \leq 2$. Do đó, với mọi $n > 0$, ta có

$$0 \leq \left|\frac{\sin n + 1}{n}\right| \leq \frac{2}{n}.$$

Từ đó

$$0 \leq \lim \left|\frac{\sin n + 1}{n}\right| \leq \lim \frac{2}{n} = 0 \Rightarrow \lim \left|\frac{\sin n + 1}{n}\right| = 0 \Rightarrow \lim \frac{\sin n + 1}{n} = 0.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 2 \end{cases}$, $(t \in \mathbb{R})$. Tọa độ một véc-tơ chỉ phương của d là

A $(-2; 3; 0)$. **B** $(-2; 3; 3)$. **C** $(1; 2; 3)$. **D** $(2; 3; 0)$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (-2; 3; 0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $P(a; b; c)$. Khoảng cách từ điểm P đến trục tọa độ Oy bằng

A $\sqrt{a^2 + c^2}$. **B** b. **C** $|b|$. **D** $a^2 + c^2$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}(P; Oy) = PK$.

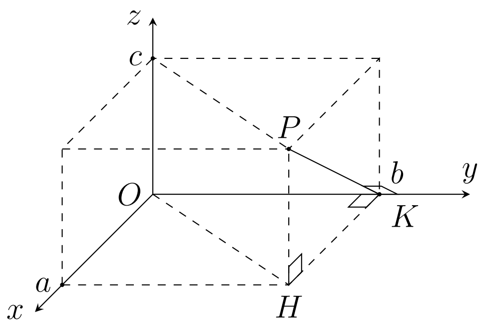
Tam giác PHK vuông tại H, có

$PH = |c|$,

$HK = |a|$

$\Rightarrow PK = \sqrt{PH^2 + HK^2} = \sqrt{c^2 + a^2}$.

Chú ý: Có thể sử dụng ứng dụng của tích có hướng.



Chọn đáp án A □

Câu 12. Gọi z_1 và z_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của biểu thức $P = (z_1 - 2z_2)\,\overline{z}_2 - 4z_1$ bằng

A -10. **B** 10. **C** -5. **D** -15.

Lời giải.

Ta có $P = z_1 \cdot \overline{z}_2 - 2z_2 \cdot \overline{z}_2 - 4z_1 = (z_1)^2 - 2|z_2|^2 - 4z_1 = (z_1)^2 - 2|z_1|^2 - 4z_1$.

Giải phương trình đã cho, thu được hai nghiệm là $2 \pm \mathrm{i}$.

- Nếu $z_1 = 2 - \mathrm{i}$ thì $P = (2-\mathrm{i})^2 - 2(2^2 + 1^2) - 4(2 - \mathrm{i}) = 4 - 4\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 - 10 - 8 + 4\mathrm{i} = -15$.
- Nếu $z_1 = 2 + \mathrm{i}$ thì $P = (2+\mathrm{i})^2 - 2(2^2 + 1^2) - 4(2 + \mathrm{i}) = 4 + 4\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 - 10 - 8 - 4\mathrm{i} = -15$.

Vậy $P = -15$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Đồ thị của hàm số $y = x^4 - x^3 - 2$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

A 2. **B** 1. **C** 0. **D** 4.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3)$. Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{3}{4} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$			$-\frac{539}{256}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Có bao nhiêu cách chia hết 4 đồ vật khác nhau cho 3 người, biết rằng mỗi người nhận được ít nhất một đồ vật?

A 72. B 18. C 12. D 36.

Lời giải.

Cách 1. Một cách chia thỏa mãn là một cách chia sao cho có một người nhận được 2 đồ vật, hai người còn lại, mỗi người nhận được 1 đồ vật.

Nếu chia người thứ nhất 2 đồ vật, hai người còn lại, mỗi người nhận 1 đồ vật, thì số cách chia bằng $\mathrm{C}_4^2 \cdot 2$ (cách). Tương tự, nếu chia người thứ hai (thứ ba) 2 đồ vật, hai người còn lại, mỗi người nhận 1 đồ vật thì số cách chia cũng bằng $\mathrm{C}_4^2 \cdot 2$ (cách).

Vậy số cách chia thỏa mãn bài toán bằng $3 \cdot \mathrm{C}_4^2 \cdot 2 = 36$ (cách).

Cách 2. Để có một cách chia thỏa mãn, đầu tiên ta xếp 4 vật thành hàng ngang, sau đó sử dụng 2 thanh que đặt vào giữa các vật đó, chẳng hạn

$$*|*|**$$

là cách chia cho người thứ nhất và người thứ hai 1 đồ vật, người thứ ba 2 đồ vật; còn

$$*|**|*$$

là cách chia cho người thứ nhất và người thứ ba 1 đồ vật, người thứ hai 2 đồ vật.

Vì có 4! cách xếp các đồ vật khác nhau thành hàng ngang. Ứng với mỗi cách xếp đó, có C_3^2 cách đặt 2 thanh que vào 3 vị trí và, hoán vị hai đồ vật khi chia cho một người không sinh ra cách chia mới, nên số cách chia bằng

$$\frac{1}{2!} \cdot 4! \times \mathrm{C}_3^2 = 36.$$

Chọn đáp án D □

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = 12$, $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = 17$. Khi đó $f(4)$ bằng

A 5. B 29. C 19. D 9.

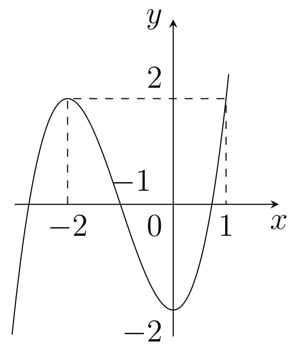
Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(4) - f(1) \Rightarrow f(4) = \int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x + f(1) = 17 + 12 = 29.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, với a, b, c là các số thực và $a \neq 0$, có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây **sai**?



(A) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \end{array}\right.$.

(B) Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = -2$.

(C) $y' < 0,\ \forall x \in (-2; 0)$.

(D) Đồ thị hàm số có đúng hai điểm cực trị.

Lời giải.

Khẳng định **sai** là: "Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = -2$". Lí do: có thể thấy với $x > 1$ thì $f(x) > f(-2)$.

Sửa lại đúng: "Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -2$".

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Cho cấp số cộng (u_n), $n \in \mathbb{N}^*$ có số hạng tổng quát $u_n = 1 - 3n$. Tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng bằng

(A) -59048. (B) -59049. (C) -155. (D) -310.

Lời giải.

Ta có

$$S_{10} = \frac{10(u_1 + u_{10})}{2} = 5\left[(1 - 3 \cdot 1) + (1 - 3 \cdot 10)\right] = -155.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z - 3 = 0$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x - 2y + z = 0$. Mặt phẳng (P) cắt khối cầu (S) theo thiết diện là một hình tròn có diện tích bằng

(A) 5π. (B) 25π. (C) $2\pi\sqrt{5}$. (D) 10π.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 1; -2)$, bán kính $R = 3$.

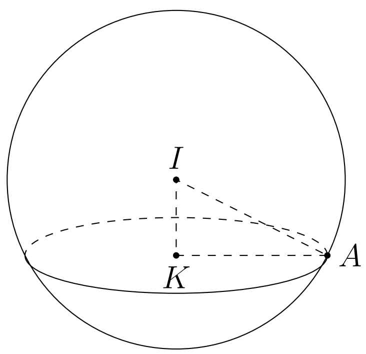
$IK = \mathrm{d}\left(I, (P)\right) = \dfrac{|2(-1) - 2 \cdot 1 + (-2)|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 2.$

Bán kính của đường tròn thiết diện

$r = KA = \sqrt{R^2 - IK^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$.

Vậy diện tích của hình tròn thiết diện bằng

$S = \pi \cdot r^2 = 5\pi$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{2\cos x + 1}{\cos x - 2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $M + 9m = 0$. Ⓑ $9M - m = 0$. **C** $9M + m = 0$. Ⓓ $M + m = 0$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Đặt $t = \cos x$, với $x \in \mathbb{R} \Rightarrow t \in [-1; 1]$. Thu được hàm $f(t) = \dfrac{2t+1}{t-2}$, $t \in [-1; 1]$ và $M = \max\limits_{[-1;1]} f(t)$, $m = \min\limits_{[-1;1]} f(t)$.

Vì $f(t)$ nghịch biến trên $[-1; 1]$, nên $M = f(-1) = \dfrac{1}{3}$, $m = f(1) = -3$.

Vậy mệnh đúng là $9M + m = 0$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 20. Một người thợ thủ công làm mô hình đèn lồng hình bát diện đều, mỗi cạnh của bát diện đó được làm từ các que tre có độ dài 8 cm. Hỏi người đó cần bao nhiêu mét que tre để làm 100 cái đèn (giả sử mối nối giữa các que tre có độ dài không đáng kể)?

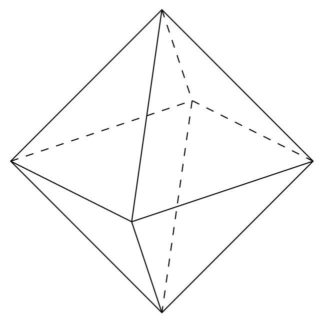
A 96 m. Ⓑ 960 m. Ⓒ 192 m. Ⓓ 128 m.

Lời giải.

Mỗi bát diện đều có 12 cạnh và tất cả các cạnh bằng nhau.

Từ đó suy ra số que tre để người đó làm 100 cái đèn lồng là $100 \cdot 12 = 1200$ (que).

Vì mỗi que tre có độ dài 8 cm $= 0{,}08$ m, nên người đó cần dùng $1200 \times 0{,}08 = 96$ m (que tre).



Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 21. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = t^2 - \dfrac{1}{6}t^3$ (m). Tìm thời điểm t (giây) mà tại đó vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

A $t = 2$. Ⓑ $t = 0{,}5$. Ⓒ $t = 2{,}5$. Ⓓ $t = 1$.

Lời giải.

Ta có $v(t) = s'(t) = 2t - \dfrac{1}{2}t^2$. Suy ra $v'(t) = 2 - t$ và $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Bảng biến thiên

t		2	
$v'(t)$	$+$	0	$-$
$v(t)$	↗	2	↘

Vậy chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm $t = 2$ (giây).

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 22. Cho $a = \log_2 5$, $b = \log_2 9$. Biểu diễn của $P = \log_2 \dfrac{40}{3}$ theo a và b là

(A) $P = 3 + a - 2b$. (B) $P = 3 + a - \dfrac{1}{2}b$. (C) $P = \dfrac{3a}{2b}$. (D) $P = 3 + a - \sqrt{b}$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_2 \frac{40}{3} = \log_2 40 - \log_2 3 = \log_2(5 \cdot 8) - \frac{1}{2}\log_2 9 = \log_2 5 + \log_2 8 - \frac{1}{2}\log_2 9 = a + 3 - \frac{1}{2}b.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ với $a < b$. Kí hiệu S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3f(x)$, $y = 3g(x)$, $x = a$, $x = b$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x) - 2$, $y = g(x) - 2$, $x = a$, $x = b$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $S_1 = 2S_2$. (B) $S_1 = 3S_2$. (C) $S_1 = 2S_2 - 2$. (D) $S_1 = 2S_2 + 2$.

Lời giải.

Từ giả thiết, suy ra

$$S_1 = \int_a^b |3f(x) - 3g(x)|\,\mathrm{d}x = 3\int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$S_2 = \int_a^b |[f(x) - 2] - [g(x) - 2]|\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow S_1 = 3S_2.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ có bao nhiêu tiệm cận?

(A) 3. (B) 1. (C) 0. (D) 2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Ta có

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = -1 \Rightarrow y = -1 \text{ là một tiệm cận ngang.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ là một tiệm cận ngang.}$$

$$\lim_{x \to 1^+} y = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = +\infty \Rightarrow x = 1 \text{ là một tiệm cận đứng.}$$

Vậy đồ thị hàm số có 3 tiệm cận.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Phương trình $3^{|4x-4|} = 81^{m-1}$ vô nghiệm khi và chỉ khi

(A) $m < 0$. (B) $m \leq 0$. (C) $m < 1$. (D) $m \leq 1$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$3^{|4x-4|} = 3^{4(m-1)} \Leftrightarrow 4|x-1| = 4(m-1)$.

Do vế trái không âm nên phương trình trên vô nghiệm khi và chỉ khi

$m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Tích tất cả các giá trị của x thỏa mãn phương trình $(3^x-3)^2-(4^x-4)^2 = (3^x+4^x-7)^2$ bằng

(A) 4. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương $(3^x-3)^2 - (4^x-4)^2 = \left[(3^x-3)+(4^x-4)\right]^2$.

Đặt $a = 3^x - 3,\ b = 4^x - 4$. Thu được

$a^2 - b^2 = (a+b)^2 \Leftrightarrow (a+b)(a-b) - (a+b)^2 = 0 \Leftrightarrow (a+b)(-2b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -a \\ b = 0 \end{array}\right.$.

- Với $b = -a$ thì $4^x - 4 = -3^x + 3 \Leftrightarrow 4^x + 3^x = 7$. Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$ (vế trái là hàm đồng biến, vế phải là hàm hằng).
- Với $b = 0$ thì $4^x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy tích các nghiệm của phương trình bằng 1.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$. Thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi cho hình (H) quay quanh trục hoành bằng

(A) $\dfrac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-2}}{2}$. (B) $\dfrac{\left(\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^{-2}\right)\pi}{2}$. (C) $\dfrac{\mathrm{e}^4\pi}{2}$. (D) $\dfrac{\left(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-2}\right)\pi}{2}$.

Lời giải.

Thể tích của khối tròn xoay cần tìm bằng

$$V = \pi \int\limits_{-1}^{1} \left(\mathrm{e}^x\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-2}\right) = \frac{\left(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-2}\right)\pi}{2}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Số phức $z = (1+\mathrm{i}) + (1+\mathrm{i})^2 + \cdots + (1+\mathrm{i})^{2018}$ có phần ảo bằng

(A) $2^{1009}-1$. (B) $2^{1009}+1$. (C) $1-2^{1009}$. (D) $-2^{1009}-1$.

Lời giải.

Ta có

$$z = (1+i)+(1+i)^2+\cdots+(1+i)^{2018} = (1+i)\frac{(1+i)^{2018}-1}{(1+i)-1} = \frac{(1+i)^{2019}-1-i}{i}.$$

$$(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i \Rightarrow (1+i)^4 = (2i)^2 = -2^2$$

$$\Rightarrow (1+i)^{2019} = (1+i)^{4\cdot 504+3} = (1+i)^{4\cdot 504} \times (1+i)^2 \times (1+i) = 2^{1009}\cdot i \cdot (1+i).$$

$$\Rightarrow z = 2^{1009}(1+i) - \frac{1}{i} - 1 = 2^{1009}(1+i) + i - 1 = \left(2^{1009}-1\right) + \left(2^{1009}+1\right)i.$$

Vậy phần ảo của z bằng $2^{1009}+1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $SA = SB = SD = a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SCD) bằng

(A) 30°. **(B)** 60°. **(C)** 90°. **(D)** 45°.

Lời giải.

Vì $\triangle BAD$ cân và có góc 60° nên là tam giác đều.

Gọi H là hình chiếu của S lên $(ABCD)$.

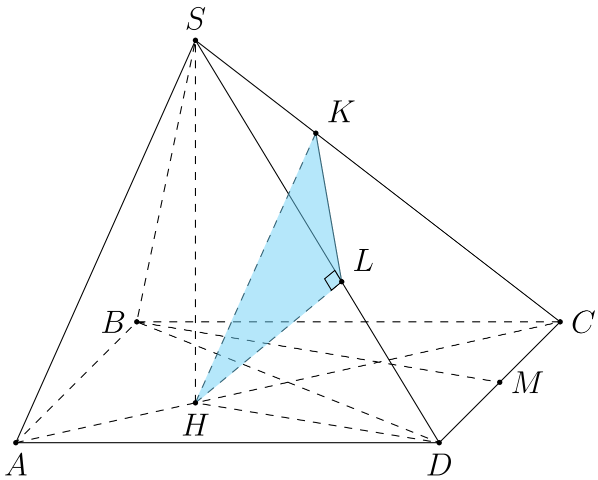
Do $SA = SB = SD$ nên $HA = HB = HD$, suy ra H là tâm của tam giác đều ABD.

Gọi M là trung điểm của CD.

Do $HD \parallel BM$ và $BM \perp CD$ nên $HD \perp CD$.

Từ $CD \perp HD$, $CD \perp SH \Rightarrow CD \perp (SHD)$.

Trong $\triangle SHD$ kẻ $HL \perp SD$ thì $HL \perp (SCD)$.



Trong $\triangle SAC$, kẻ $HK \parallel SA$. Khi đó, góc giữa SA và (SCD) phụ với góc giữa HK và HL.

Ta có

$\dfrac{HK}{SA} = \dfrac{CH}{CA} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow HK = \dfrac{2}{3}SA = \dfrac{2a}{3}$.

$HL = \dfrac{HD \cdot HS}{SD} = \dfrac{HD \cdot \sqrt{SD^2 - HD^2}}{SD} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}}}{a} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Tam giác HKL vuông tại L nên $\cos \widehat{KHL} = \dfrac{HL}{HK} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3} \div \dfrac{2a}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{KHL} = 45^\circ$.

Vậy góc giữa SA và (SCD) bằng $90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(1;1;2)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}$. Biết điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó giá trị $T = a + 2b + 3c$ bằng

(A) 5. **(B)** 3. **(C)** 4. **(D)** 10.

Lời giải.

Vì $S_{\text{MAB}} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot \mathrm{d}(M, AB)$ nên S_{MAB} nhỏ nhất khi $\mathrm{d}(M, AB)$ nhỏ nhất.

Phương trình của AB: $\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 \end{cases}$. Dễ dàng kiểm tra AB và d chéo nhau.

Gọi H là hình chiếu của M lên đường thẳng AB. Khi đó $\mathrm{d}(M, AB) = MH$ nhỏ nhất khi MH là đoạn vuông góc chung của d và AB.

Ta có

$M \in d \Rightarrow M(-1 + s; s; 1 + s)$, $H \in AB \Rightarrow H(t; -1 + 2t; 2)$, $\overrightarrow{MH} = (t - s + 1; 2t - s - 1; 1 - s)$.

Véc-tơ chỉ phương của d và AB theo thứ tự là $\vec{u} = (1;1;1)$, $\vec{v} = (1;2;0)$.

Vì $\begin{cases}\overrightarrow{MH} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{MH} \perp \vec{v}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1(t-s+1)+1(2t-s-1)+1(1-s)=0 \\ 1(t-s+1)+2(2t-s-1)+0(1-s)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=1 \\ s=\dfrac{4}{3}\end{cases}.$

Vậy $M\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3};\frac{7}{3}\right)$. Từ đó $T=\frac{1}{3}+2\cdot\frac{4}{3}+3\cdot\frac{7}{3}=10$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+y-2z+9=0$ và ba điểm $A(2;1;0)$, $B(0;2;1)$, $C(1;3;-1)$. Điểm $M \in (\alpha)$ sao cho $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $x_M+y_M+z_M=1$. **B** $x_M+y_M+z_M=4$.
C $x_M+y_M+z_M=3$. **D** $x_M+y_M+z_M=2$.

Lời giải.

Gọi $G(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}-4\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Ta có
$\overrightarrow{GA}=(2-a;1-b;-c)$, $\overrightarrow{GB}=(-a;2-b;1-c)$, $\overrightarrow{GC}=(1-a;3-b;-1-c)$.

$$\Rightarrow \begin{cases}2(2-a)+3(-a)-4(1-a)=0 \\ 2(1-b)+3(2-b)-4(3-b)=0 \\ 2(-c)+3(1-c)-4(-1-c)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=0 \\ b=-4 \\ c=7\end{cases} \Rightarrow G(0;-4;7).$$

Ta có

$$2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}=2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)+3\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)-4\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)$$
$$=\overrightarrow{MG}+\left(2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}-4\overrightarrow{GC}\right)=\overrightarrow{MG}.$$

Từ đó $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MG}\right|$, đạt giá trị nhỏ nhất khi M là hình chiếu của G lên (α).

Phương trình của đường thẳng d qua G và vuông góc với (α) là $\begin{cases}x=2t \\ y=-4+t \\ z=7-2t\end{cases}.$

Điểm M là giao của d và (α). Giải hệ $\begin{cases}x=2t \\ y=-4+t \\ z=7-2t \\ 2x+y-2z+9=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2 \\ y=-3 \\ z=5\end{cases} \Rightarrow M(2;-3;5).$

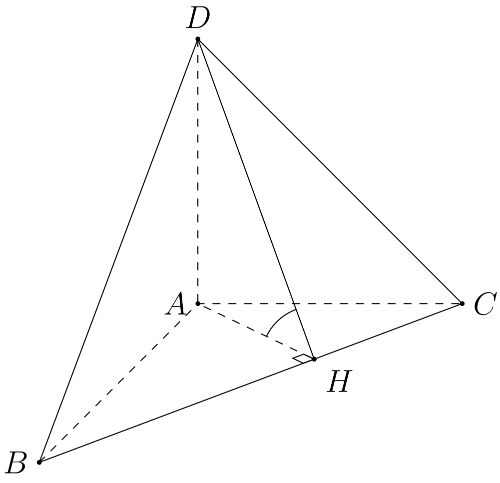
Vậy $x_M+y_M+z_M=4$.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{BAC}=\widehat{CAD}=\widehat{DAB}=90^\circ$, $AB=1$, $AC=2$, $AD=3$. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) bằng

A $\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$. **B** $\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$. **C** $\dfrac{1}{3}$. **D** $\dfrac{2}{7}$.

Lời giải.



Từ giả thiết suy ra $AD \perp (ABC)$.
Trong $\triangle ABC$, kẻ $AH \perp AC$. Khi đó $BC \perp (DAH)$.
Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) bằng góc giữa hai đường thẳng AH và DH và bằng góc $\widehat{DHA}$.
Tam giác DAH vuông tại A

$$AH = \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$DH = \sqrt{AD^2 + AH^2} = \sqrt{3^2 + \frac{4}{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}}.$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{DHA} = \frac{AH}{DH} = \frac{2}{\sqrt{5}} \div \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{2}{7}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị $(C_m)\colon y = \dfrac{mx+3}{1-x}$ có tiệm cận và tâm đối xứng của (C_m) thuộc đường thẳng $d\colon 2x - y + 1 = 0$?

(A) 1. **B** 0. (C) 2. (D) Vô số.

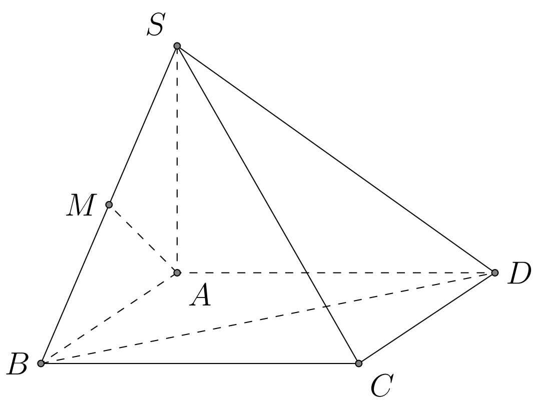
Lời giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận khi $ad - bc \neq 0 \Leftrightarrow m \cdot 1 - 3(-1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -3$.
Khi đó, hai tiệm cận của đồ thị là $x = 1$ và $y = -m$ và tâm đối xứng của đồ thị là $I(1; -m)$.
Điểm I thuộc đường thẳng d khi $2 \cdot 1 - (-m) + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -3$ (không xảy ra).
Vậy đáp án của bài toán là 0.
Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Gọi M là trung điểm của SB. Góc giữa AM và BD bằng

(A) 45°. (B) 30°. (C) 90°. **D** 60°.

Lời giải.



Cách 1. Ta có

$$2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB}\right)\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$$

$$= AB \cdot BD \cdot \cos 135^\circ = -\frac{a \cdot a\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = -a^2.$$

Từ đó

$$\cos\left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BD}\right) = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD}}{AM \cdot BD} = \frac{-\dfrac{a^2}{2}}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BD}\right) = 120^\circ.$$

Vậy góc giữa AM và BD bằng 60°.

Cách 2. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AS. Không mất tính tổng quát, giả sử $a = 1$. Khi đó ta có tọa độ các điểm $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $S(0;0;1)$, $M\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$. Từ đó $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{BD} = (-1; 1; 0)$. Và

$$\cos\left(AM;BD\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BD}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}\right|}{\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|}=\frac{\left|\frac{1}{2}(-1)+0\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 0\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{1+1+0}}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow\ (AM;BD)=60^\circ$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Một nhóm học sinh gồm 5 bạn nam và 5 bạn nữ được xếp theo một hàng dọc. Xác suất để 5 bạn nữ đứng cạnh nhau bằng

A. $\frac{1}{35}$. B. $\frac{1}{252}$. C. $\frac{1}{50}$. D. $\frac{1}{42}$.

Lời giải.

Xếp thành một hàng dọc tùy ý có 10! cách. Suy ra $\mathrm{n}(\Omega)=10!$.

Gọi A là biến cố: "xếp 5 nam và 5 nữ thành hàng dọc sao cho 5 bạn nữ đứng cạnh nhau".

Ghép 5 bạn nữ lại và xem là một người. Xếp 6 bạn, trong đó có 5 bạn nam và 1 bạn nữ (ghép), có 6! cách.

Vì có 5! cách ghép 5 bạn nữ lại với nhau nên số cách xếp 5 bạn nam và 5 bạn nữ thành một hàng dọc sao cho 5 bạn nữ đứng cạnh nhau, bằng $5!\times 6!$ cách. Suy ra $\mathrm{n}(A)=5!\times 6!$.

Vậy $\mathrm{P}(A)=\frac{\mathrm{n}(A)}{\mathrm{n}(\Omega)}=\frac{5!\times 6!}{10!}=\frac{1}{42}$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Khai triển của biểu thức $(x^2+x+1)^{2018}$ được viết thành $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{4036}x^{4036}$. Tổng $S=a_0-a_2+a_4-a_6+\cdots-a_{4034}+a_{4036}$ bằng

A. -2^{1009}. B. 0. C. 2^{1009}. D. -1.

Lời giải.

Ta có $i^2=-1,\ i^4=1\Rightarrow i^{4m+2}=-1,\ i^{4m}=1$ với mọi m nguyên dương.

Theo giả thiết thì $(x^2+x+1)^{2018}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{4036}x^{4036}$.

Cho $x=i$, thu được

$$\left[(i)^2+i+1\right]^{2018}=a_0+a_1i+a_2i^2+a_3i^3+a_4i^4+\cdots+a_{4034}i^{4034}+a_{4035}i^{4035}+a_{4036}i^{4036}$$

$\Leftrightarrow i^{2018}=a_0+a_1i-a_2+a_3i^3+a_4+\cdots-a_{4034}+a_{4035}i^{4035}+a_{4036}$

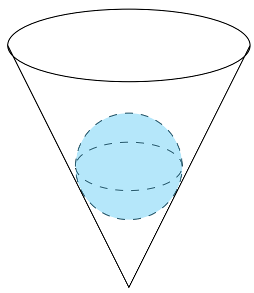
$\Leftrightarrow\ -1=(a_0-a_2+a_4+\cdots-a_{4034}+a_{4036})+\left(a_1i+a_3i^3+\cdots+a_{4035}i^{4035}\right).\quad(1)$

Chú ý rằng với mọi $n=2m+1$ lẻ thì $i^n=i^{2m+1}=i^{2m}i=(-1)^m i$ là số thuần ảo, nên

$(1)\Leftrightarrow -1=a_0-a_2+a_4-\cdots-a_{4034}+a_{4036}$.

Chọn đáp án D □

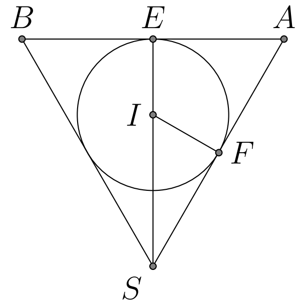
Câu 37. Bạn An có một cốc giấy hình nón có đường kính đáy là 10 cm và độ dài đường sinh là 8 cm. Bạn dự định đựng một viên kẹo hình cầu sao cho toàn bộ viên kẹo nằm trong cốc (không phần nào của viên kẹo cao hơn miệng cốc). Hỏi bạn An có thể đựng được viên kẹo có đường kính lớn nhất bằng bao nhiêu?



A. $\frac{64}{\sqrt{39}}$ cm. B. $\frac{5\sqrt{39}}{13}$ cm. C. $\frac{32}{\sqrt{39}}$ cm. D. $\frac{10\sqrt{39}}{13}$ cm.

Lời giải.

Xét mặt cắt qua trục của hình nón. Khi đó, thiết diện thu được với hình nón là tam giác cân SAB và thiết diện với viên kẹo là hình tròn tâm I bán kính r.



Viên kẹo không cao hơn miệng cốc nếu $SI + r \leq SE$. Do đó, viên kẹo lớn nhất mà vẫn còn đựng được trong cốc khi $SI + r_{\max} = SE$, khi đó đường tròn thiết diện là đường tròn nội tiếp tam giác SAB.

Ta có
$$p_{\text{ABS}} = \frac{2SA + AB}{2} = \frac{2 \cdot 8 + 10}{2} = 13,\ S_{\text{ABS}} = \sqrt{13(13-8)(13-8)(13-10)} = 5\sqrt{39}$$
$\Rightarrow r_{\max} = \dfrac{S_{\text{ABS}}}{p_{\text{ABS}}} = \dfrac{5\sqrt{39}}{13}$.

Vậy đường kính của viên kẹo là $2r_{\max} = \dfrac{10\sqrt{39}}{13}$ cm.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị nhận gốc tọa độ O làm trực tâm thì giá trị của tham số m bằng

A 1. **B** $\dfrac{1}{2}$. **C** $\dfrac{1}{3}$. **D** 2.

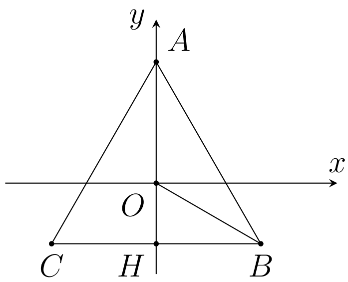
Lời giải.

Hàm số trùng phương có ba điểm cực trị khi

$ab < 0 \Leftrightarrow 1(-2m) < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$.

Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \end{array}\right.$.



Các điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$A(0; m-1)$, $B(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1)$ và $C(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1)$.

Ta có
$$\overrightarrow{OB} = (\sqrt{m}; -m^2 + m - 1),\ \overrightarrow{AC} = (-\sqrt{m}; -m^2),\ \overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{AC}$$
$\Leftrightarrow \sqrt{m}(-\sqrt{m}) + (-m^2 + m - 1)(-m^2) = 0 \Leftrightarrow -m^2 + m^4 - m^3 + m^2 = 0$

$\Leftrightarrow m^3(m-1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$ (do $m > 0$).

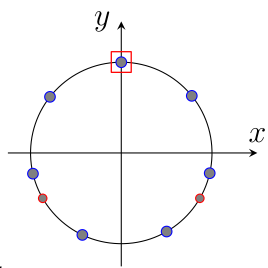
Chọn đáp án A □

Câu 39. Phương trình $\cos 2x \sin 5x + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 2\pi\right]$?

A 2. **B** 1. **C** 4. **D** 3.

Lời giải.

Ta có
$$\cos 2x \sin 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 5x \cos 2x = -1 \Leftrightarrow \sin 3x + \sin 7x = -2$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = -1 \\ \sin 7x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ 7x = -\dfrac{\pi}{2} + l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3} \\ x = -\dfrac{\pi}{14} + l\dfrac{2\pi}{7} \end{cases}$$



Các nghiệm thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ của họ $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3}$ gồm có: $-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}$.

Các nghiệm thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ của họ $x = -\dfrac{\pi}{14} + l\dfrac{2\pi}{7}$ gồm có: $-\dfrac{5\pi}{14}, -\dfrac{\pi}{14}, \dfrac{3\pi}{14}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{11\pi}{14}, \dfrac{15\pi}{14}, \dfrac{19\pi}{14}$,

$\dfrac{23\pi}{14}, \dfrac{27\pi}{14}$.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất thuộc đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ là $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Biết tích phân $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{2x+3}{2-x}\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ (a, b \in \mathbb{Z})$, giá trị của a bằng

A 7. **B** 2. **C** 3. **D** 1.

Lời giải.

Ta có

$$\int_0^1 \dfrac{2x+3}{2-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \dfrac{2(x-2)+7}{-(x-2)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-2 - \dfrac{7}{x-2}\right)\mathrm{d}x = \left(-2x - 7\ln|x-2|\right)\Big|_0^1$$
$$= (-2 - 7\ln 1) - (0 - 7\ln 2) = -2 + 7\ln 2.$$

Vậy $a = 7,\ b = -2$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Tập hợp S tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$$

có đúng ba nghiệm phân biệt là

A $S = \left\{\dfrac{1}{2}; 1; \dfrac{3}{2}\right\}$. **B** $S = \left\{\dfrac{1}{2}; -1; \dfrac{3}{2}\right\}$. **C** $S = \left\{-\dfrac{1}{2}; 1; \dfrac{3}{2}\right\}$. **D** $S = \left\{\dfrac{1}{2}; 1; -\dfrac{3}{2}\right\}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương

$$2^{(x-1)^2} \cdot \log_2[(x-1)^2 + 2] = 2^{2|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2). \qquad (1)$$

Xét hàm $f(t) = 2^t \cdot \log_2(t+2)$ trên $[0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 \cdot \log_2(t+2) + \dfrac{2^t}{(t+2)\ln 2} > 0\ \forall t \in [0; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$. Do đó

$$(1) \Leftrightarrow f\left((x-1)^2\right) = f\left(2|x-m|\right) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m|$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-1)^2 = -2(x-m)\\(x-1)^2 = 2(x-m)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2 = 2m-1\\x^2 - 4x + 2m + 1 = 0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x^2 = 2m-1 & (2)\\(x-2)^2 = 3-2m & (3)\end{array}\right.$$

Có 3 trường hợp sau có thể xảy ra

- **Trường hợp 1:** (2) có hai nghiệm phân biệt và (3) có một nghiệm. Điều kiện cần là

$$\begin{cases}2m - 1 > 0\\3 - 2m = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m > \dfrac{1}{2}\\m = \dfrac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}.$$

Khi đó (2) có hai nghiệm $x = \pm\sqrt{2}$ và (3) có một nghiệm $x = 2$. Vậy $m = \dfrac{3}{2}$ thỏa mãn.

- **Trường hợp 2:** (2) có một nghiệm và (3) có hai nghiệm phân biệt. Điều kiện cần là

$$\begin{cases} 2m-1=0 \\ 3-2m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\dfrac{1}{2} \\ m<\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}.$$

Khi đó (2) có một nghiệm $x=\dfrac{1}{2}$ và (2) có hai nghiệm $x=2\pm\sqrt{2}$. Vậy $m=\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn.

- **Trường hợp 3:** (2) và (3) đều có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm trùng. Điều kiện là

$$\begin{cases} 2m-1>0 \\ 3-2m>0 \\ \left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{2m-1}-2\right)^2=3-2m \\ \left(-\sqrt{2m-1}-2\right)^2=3-2m \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}<m<\dfrac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} (2m-1)+4-4\sqrt{2m-1}=3-2m \\ (2m-1)+4+4\sqrt{2m-1}=3-2m \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}<m<\dfrac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{2m-1}=m \\ \sqrt{2m-1}=-m \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}<m<\dfrac{3}{2} \\ 2m-1=m^2 \end{cases} \Leftrightarrow m=1.$$

Vậy $S=\left\{\dfrac{1}{2};1;\dfrac{3}{2}\right\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $4x\cdot f(x^2)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$. Tích phân $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=\dfrac{\pi}{4}$. B. $I=\dfrac{\pi}{6}$. **C.** $I=\dfrac{\pi}{20}$. D. $I=\dfrac{\pi}{16}$.

Lời giải.

Từ $4xf(x^2)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$, ta có

$$\int_0^1 4xf(x^2)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 3f(1-x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2=\frac{\pi}{4}.\quad (1)$$

Xét tích phân $L=\displaystyle\int_0^1 4xf(x^2)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=x^2\Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$ và $x=0\Rightarrow t=0$, $x=1\Rightarrow t=1$. Suy ra

$$L=\int_0^1 2f(t)\,\mathrm{d}t=2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2I.$$

Xét tích phân $K=\displaystyle\int_0^1 3f(1-x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 1 - x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Khi $x = 0 \Rightarrow t = 1$ và $x = 1 \Rightarrow t = 0$. Suy ra

$$K = \int_1^0 3f(t)(-\mathrm{d}t) = 3\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 3\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3I.$$

Từ (1) suy ra

$$2I + 3I = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{20}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho các số phức $z_1,\ z_2,\ z_3$ thỏa mãn điều kiện $|z_1| = 4$, $|z_2| = 3$, $|z_3| = 2$ và $|4z_1 \cdot z_2 + 16z_2 \cdot z_3 + 9z_1 \cdot z_3| = 48$. Giá trị của biểu thức $P = |z_1 + z_2 + z_3|$ bằng

A. 1. B. 8. **C. 2.** D. 6.

Lời giải.

Đặt $z_1 = 4w_1,\ z_2 = 3w_2,\ z_3 = 2w_3$ với $|w_1| = |w_2| = |w_3| = 1$. Thu được

$$|4 \cdot 4w_1 \cdot 3w_2 + 16 \cdot 3w_2 \cdot 2w_3 + 9 \cdot 4w_1 \cdot 2w_3| = 48 \Leftrightarrow |2w_1w_2 + 4w_2w_3 + 3w_1w_3| = 2. \quad (1)$$

Nhân vào hai vế của (1) với $|\overline{w}_1\overline{w}_2\overline{w}_3|$, với chú ý rằng $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, $|w_i| = 1$, $w_i \cdot \overline{w}_i = |\overline{w}_i|^2 = 1$ $(i = 1, 2, 3)$, $|z| = |\overline{z}|$, ta được

$$|2\overline{w}_3 + 4\overline{w}_1 + 3\overline{w}_2| = 2 \Leftrightarrow |\overline{2w_3 + 4w_1 + 3w_2}| = 2$$
$$\Leftrightarrow |2w_3 + 4w_1 + 3w_2| = 2 \Leftrightarrow |z_1 + z_2 + z_3| = 2.$$

Vậy $P = 2$.

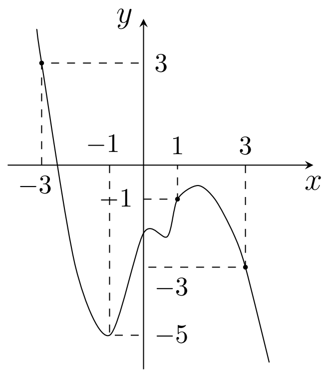
Chọn đáp án C □

Câu 44.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.

Hàm số $y = f(1-x) + \dfrac{x^2}{2} - x$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-3; 1)$. **B. $(-2; 0)$.**
C. $(1; 3)$. D. $\left(-1; \dfrac{3}{2}\right)$.



Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = f(1-x) + \dfrac{x^2}{2} - x$.

Đặt $t = 1 - x \Rightarrow x = 1 - t$. Thu được

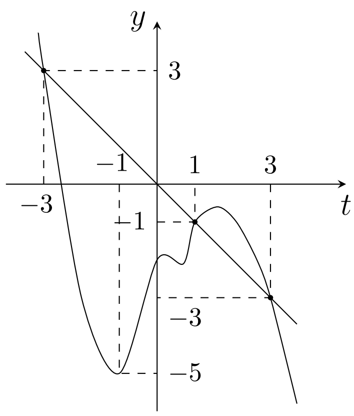
$h(t) = f(t) + \dfrac{(1-t)^2}{2} - (1-t) = f(t) + \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{1}{2}$.

Nhận xét rằng, nếu hàm số $h(t)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ thì hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1-b; 1-a)$.

Ta có $h'(t) = f'(t) + t$. Xét $h'(t) > 0 \Leftrightarrow f'(t) > -t$. $\quad$ (1)

Dựa vào đồ thị ta thấy (1) đúng khi $t \in (1; 3)$ nên hàm số $h(t)$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.

Từ nhận xét trên suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên nhỏ hơn 10^6 được thành lập từ hai chữ số 0 và 1. Lấy ngẫu nhiên hai số trong S. Xác suất để lấy được ít nhất một số chia hết cho 3 bằng

(A) $\dfrac{4473}{8128}$. (B) $\dfrac{2279}{4064}$. (C) $\dfrac{55}{96}$. (D) $\dfrac{53}{96}$.

Lời giải.

Số tự nhiên nhỏ hơn 10^6 có tối đa 6 chữ số.

Số các số tự nhiên nhỏ hơn 10^6, được lập từ hai chữ số 0 và 1 bằng

$2 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 64$ (số). Suy ra $\mathrm{n}(S) = 64$.

Vì số cần lập chia hết cho 3 nên trong cấu tạo số của nó, hoặc không có chữ số 1 nào (là số 0), hoặc có đúng 3 chữ số 1, hoặc có đúng 6 chữ số 1 (là số 111111).

Xét số có 3 chữ số, trong đó có ba chữ số 1 và không có chữ số 0. Có thể lập được 1 số như thế.

Xét số có 4 chữ số, trong đó có ba chữ số 1 và một chữ số 0. Có thể lập được C_3^2 số như thế.

Xét số có 5 chữ số, trong đó có ba chữ số 1 và hai chữ số 0. Có thể lập được C_4^2 số như thế.

Xét số có 6 chữ số, trong đó có ba chữ số 1 và ba chữ số 0. Có thể lập được C_5^2 số như thế.

Vậy có thể lập được $3 + \mathrm{C}_3^2 + \mathrm{C}_4^2 + \mathrm{C}_5^2 = 22$ số chia hết cho 3.

Lấy 2 số từ S, có C_{64}^2 cách. Suy ra $\mathrm{n}(\Omega) = \mathrm{C}_{64}^2 = 2016$.

Gọi A là biến cố: "lấy ngẫu nhiên hai số từ S được ít nhất một số chia hết cho 3". Ta có

$\mathrm{n}(A) = \mathrm{C}_{22}^2 + \mathrm{C}_{22}^1 \cdot \mathrm{C}_{42}^1 = 1155$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mathrm{n}(A)}{\mathrm{n}(\Omega)} = \dfrac{1155}{2016} = \dfrac{55}{96}$.

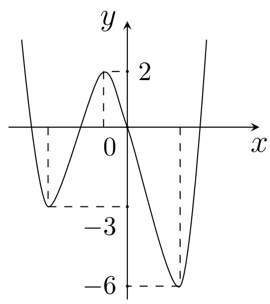
Chọn đáp án (C) □

Câu 46.

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x+1) + m|$ có 5 điểm cực trị?

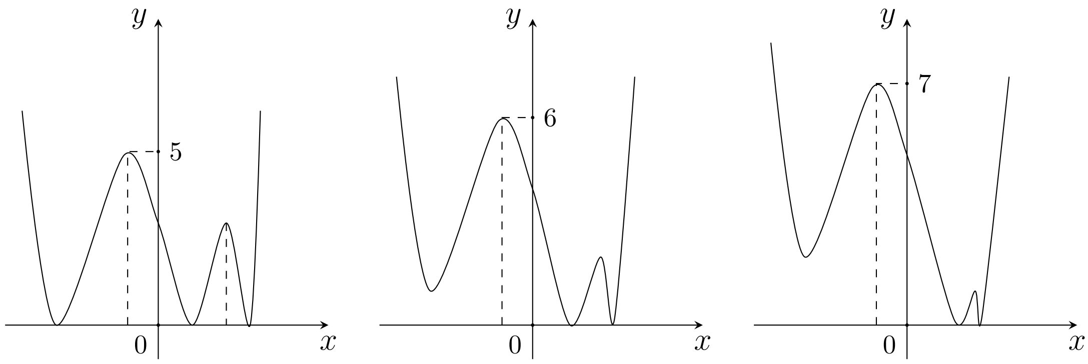
(A) 2. (B) 1.

(C) 3. (D) 0.



Lời giải.

Vì đồ thị của hàm số $f(x+1)$ được suy ra từ đồ thị của hàm số $f(x)$ bằng cách tịnh tiến qua trái 1 đơn vị nên hoành độ các điểm cực trị lần lượt giảm 1 đơn vị còn tung độ các điểm cực trị không thay đổi. Do đó, số điểm cực trị của đồ thị hàm số $|f(x+1)|$ bằng số điểm cực trị của đồ thị hàm số $|f(x)|$. Từ đó suy ra số điểm cực trị của đồ thị hàm số $|f(x+1) + m|$ bằng số điểm cực trị của đồ thị hàm số $|f(x) + m|$.



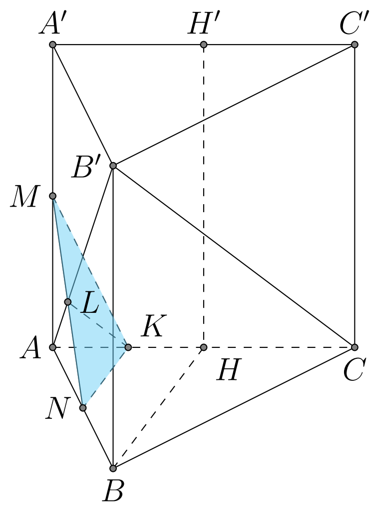
Bằng cách vẽ đồ thị tương ứng với các giá trị của m thuộc tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$, ta thấy có 3 giá trị của m thỏa mãn là $\{3, 4, 5\}$ (quá trình này không phải vô hạn vì có thể loại trừ với $m \geq 6$).

Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a, gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AA' và AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và $B'C$ bằng

A $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$. B $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}a$. C $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}a$. D $\dfrac{2\sqrt{5}}{15}a$.

Lời giải.



Gọi H và H' lần lượt là trung điểm của AC và $A'C'$, K là trung điểm của AH, L là giao của MN với AB'.

Ta có $\dfrac{AK}{AC} = \dfrac{AL}{AB'} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow CB' \parallel AB' \Rightarrow CB' \parallel (MNK)$.

Từ đó $\mathrm{d}(CB'; MN) = \mathrm{d}(C; (MNK))$.

Ta có

$$V_{\mathrm{M.CNK}} = \frac{1}{3} \cdot MA \cdot S_{\mathrm{NCK}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3a}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{64}.$$

$$S_{\mathrm{MNK}} = \frac{1}{2} \cdot NK \cdot KM = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{4} = \frac{a^2\sqrt{15}}{32}.$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}(C; (MNK)) = \frac{3V_{\mathrm{M.CNK}}}{S_{\mathrm{MNK}}} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{64} \div \frac{a^2\sqrt{15}}{32} = \frac{3a\sqrt{5}}{10}.$$

Vậy, $\mathrm{d}(MN, CB') = \dfrac{3a\sqrt{5}}{10}$.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Cho hàm số $y = x^3 + x^2 + 3x + 1$ có đồ thị là (C). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để từ điểm $M(0; m)$ kẻ được ít nhất một tiếp tuyến đến đồ thị (C) mà hoành độ tiếp điểm thuộc đoạn $[1; 3]$?

A 61. B 0. C 60. D Vô số.

Lời giải.

Gọi $A(x_0; x_0^3 + x_0^2 + 3x_0 + 1)$ là một điểm thuộc (C) với $x_0 \in [1; 3]$. Tiếp tuyến d của (C) tại A có phương trình

$$y = (3x_0^2 + 2x_0 + 3)(x - x_0) + x_0^3 + x_0^2 + 3x_0 + 1$$
$$\Leftrightarrow y = (3x_0^2 + 2x_0 + 3)x - 2x_0^3 - x_0^2 + 1.$$

Tiếp tuyến d qua $M(0; m)$ khi và chỉ khi

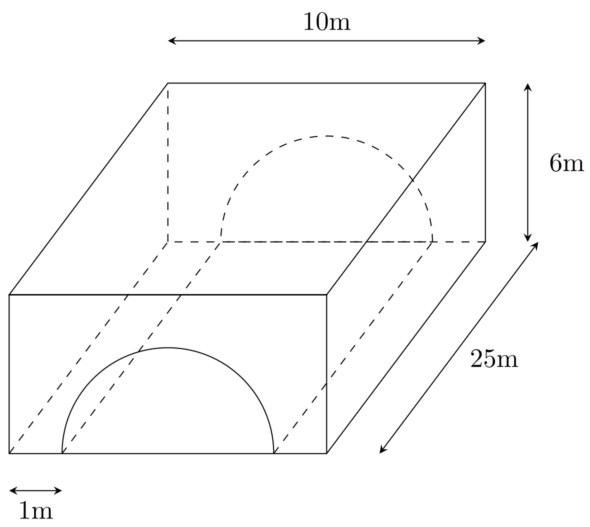
$$m = -2x_0^3 - x_0^2 + 1. \quad (1)$$

Điều kiện bài toán xảy ra khi phương trình (1) ẩn x_0 có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1;3]$.
Xét hàm $f(t) = -2t^3 - t^2 + 1$ trên $[1;3]$.
Ta có $f'(t) = -6t^2 - 2t < 0,\ \forall t \in [1;3]$ nên hàm số nghịch biến trên $[1;3]$. Suy ra

$$f(3) = -62 \leq f(t) \leq f(1) = -2,\ \forall t \in [1;3]. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra phương trình (1) có nghiệm thuộc $[1;3]$ khi $-62 \leq m \leq -2$. Tương ứng có $-2-(-62)+1 = 61$ giá trị nguyên m.
Chọn đáp án A □

Câu 49. Viện Hải dương học dự định làm một bể cá bằng kính phục vụ khách tham quan (như hình vẽ), biết rằng mặt cắt dành cho lối đi là nửa hình tròn.



Tổng diện tích mặt kính của bể cá gần nhất với số nào sau đây?

A $872\ \text{m}^2$. **B** $914\ \text{m}^2$. **C** $984\ \text{m}^2$. **D** $949\ \text{m}^2$.

Lời giải.

Diện tích mặt ngoài

$$S_1 = 2\cdot 25\cdot 6 + 25\cdot 10 + 2\cdot\left(6\cdot 10 - \frac{1}{2}\pi\cdot 4^2\right) = 670 - 16\pi\ (\text{m}^2).$$

Diện tích mái vòm và mặt dưới

$$S_2 = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot\pi\cdot 25 + 2\cdot 1\cdot 25 = 100\pi + 50\ (\text{m}^2).$$

Vậy diện tích mặt kính của bể cá bằng

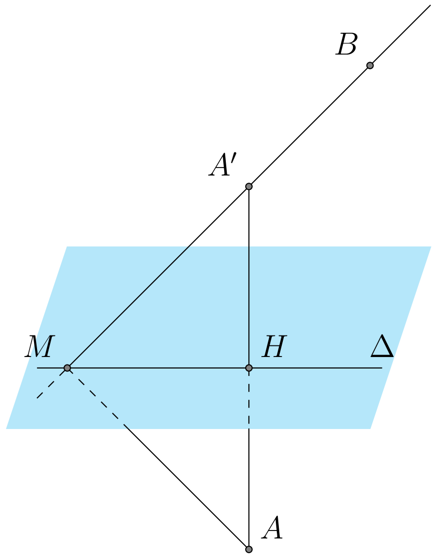
$$S = S_1 + S_2 = 670 - 16\pi + 100\pi + 50 = 720 + 84\pi \simeq 984\ (\text{m}^2).$$

Chọn đáp án C □

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$ và hai điểm $A(1;2;-5)$, $B(-1;0;2)$. Biết điểm M thuộc Δ sao cho biểu thức $T = |MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất là $T_{\max}$. Khi đó, $T_{\max}$ bằng bao nhiêu?

A $T_{\max} = 3$. **B** $T_{\max} = 2\sqrt{6} - 3$. **C** $T_{\max} = \sqrt{57}$. **D** $T_{\max} = 3\sqrt{6}$.

Lời giải.



Đường thẳng Δ qua điểm $K(0;1;0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;1;1)$. Ta có $\overrightarrow{KA} = (1;1;-5)$, $\overrightarrow{KB} = (-1;-1;2)$. Suy ra $\left[\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB}\right] = (-3;3;0)$ và $\left[\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB}\right] \cdot \vec{u} = (-3)\cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0$.

Vậy đường thẳng AB và Δ đồng phẳng.

Gọi H là hình chiếu của A lên Δ

$\Rightarrow H(t; 1+t; t)$, $\overrightarrow{AH} = (t-1; t-1; t+5)$.

Từ $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow 1\cdot(t-1) + 1\cdot(t-1) + 1\cdot(t+5) = 0$

$\Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow H(-1;0;-1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với AH.

Phương trình của (P): $-2(x+1) - 2(y-0) + 4(z+1) = 0 \Leftrightarrow x + y - 2z - 1 = 0$.

Vì $[1 + 2 - 2(-5) - 1][-1 + 0 - 2\cdot 2 - 1] = 12 \cdot (-6) < 0$ nên hai điểm A và B nằm trái phía đối với (P).

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua Δ thì $A'(-3;-2;3)$.

Ta có

$$T = |MA - MB| = |MA' - MB| \leq A'B.$$

Do đó $T_{\max} = A'B = \sqrt{(-1+3)^2 + (0+2)^2 + (2-3)^2} = 3$, xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ và Δ.

Chọn đáp án A $\square$

——— **HẾT** ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. C	3. B	4. C	5. D	6. C	7. A	8. A	9. D	10. A
11. A	12. D	13. A	14. D	15. B	16. B	17. C	18. A	19. C	20. A
21. A	22. B	23. B	24. A	25. C	26. B	27. D	28. B	29. D	30. D
31. B	32. D	33. B	34. D	35. D	36. D	37. D	38. A	39. B	40. A
41. A	42. C	43. C	44. B	45. C	46. C	47. B	48. A	49. C	50. A

127 ĐỀ THI THỬ, TRƯỜNG THPT HẬU LỘC 2, THANH HOÁ, LẦN 2, 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i$ và $z_2 = -4 - 5i$. Tìm số phức $z = z_1 + z_2$.

(A) $z = 2 + 2i$. **(B)** $z = -2 - 2i$. (C) $z = 2 - 2i$. (D) $z = -2 + 2i$.

Lời giải.

Ta có $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (-4 - 5i) = -2 - 2i$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3; -2; 5)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng tọa độ (Oxz) là

(A) $M(3; 0; 5)$. (B) $M(3; -2; 0)$. (C) $M(0; -2; 5)$. (D) $M(0; 2; 5)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oxz): $y = 0 \Rightarrow$ hình chiếu của $A(3; -2; 5)$ trên (Oxz) là $M(3; 0; 5)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Có 10 cái bút khác nhau và 8 quyển sách giáo khoa khác nhau. Một bạn học sinh cần chọn ra 1 cái bút và 1 quyển sách. Hỏi bạn học sinh đó có bao nhiêu cách chọn?

(A) 80. (B) 60. (C) 90. (D) 70.

Lời giải.

Số cách chọn một cái bút và một quyển sách từ 10 cái bút khác nhau và 8 quyển sách giáo khoa khác nhau là: $\mathrm{C}_{10}^1 \times \mathrm{C}_8^1 = 10 \times 8 = 80$.

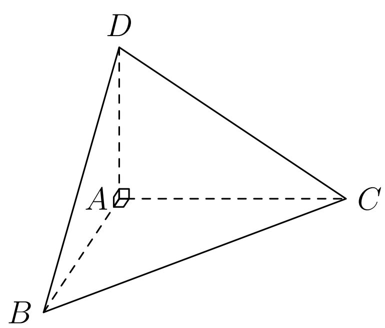
Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Cho khối tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và $AB = AC = 2a$, $AD = 3a$. Thể tích V của khối tứ diện $ABCD$ đó là

(A) $V = a^3$. (B) $V = 3a^3$. **(C)** $V = 2a^3$. (D) $V = 4a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}(2a)^2 \cdot 3a = 2a^3$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(1; -2; 3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; -2)$ có phương trình là

(A) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{-2}$. (B) $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$.

(C) $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-3}{-2}$. (D) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+3}{-2}$.

Lời giải.

Đường thẳng qua $A(1;-2;3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;-2)$ có phương trình $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-(-2)}{-1}=\dfrac{z-3}{-2}\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{-2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x-2)^{-4}+\log_4(x-1)$ là

(A) $\mathscr{D}=(2;+\infty)$.
(B) $\mathscr{D}=(1;2)$.
C $\mathscr{D}=(1;2)\cup(2;+\infty)$.
(D) $\mathscr{D}=(1;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y=(x-2)^{-4}+\log_4(x-1)$ xác định khi và chỉ khi $\begin{cases}x-2\neq 0\\ x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2\\ x>1.\end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(1;2)\cup(2;+\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$, trục hoành và các đường thẳng $x=1$, $x=2$ là

A $S=\dfrac{7}{3}$.
(B) $S=\dfrac{8}{3}$.
(C) $S=7$.
(D) $S=8$.

Lời giải.

Ta có $S=\displaystyle\int_1^2|x^2|\,\mathrm{d}x=\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\Big|_1^2=\frac{7}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau đây:

(A) Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
(B) Phép tịnh tiến biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng.
(C) Phép tịnh tiến biến một đường tròn thành một đường tròn có cùng bán kính.
D Phép tịnh tiến biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song với nó.

Lời giải.

Phép tịnh tiến biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây:

(A) Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
B Trong không gian, hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.
(C) Trong không gian, hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
(D) Trong không gian, hai đường thẳng không có điểm chung thì song song với nhau.

Lời giải.

Trong không gian, hai đường thẳng vuông góc với nhau thì không trùng nhau và cũng không thể song song với nhau, do đó chúng cắt nhau hoặc chéo nhau.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{2-x}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng

A $y = 2$. B $y = -1$. C $y = \dfrac{1}{2}$. D $x = 2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x+1}{2-x} = -1$ nên tiệm cận ngang của đồ thị là đường thẳng $y = -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Cho hình nón có độ dài đường sinh $l = 5$, bán kính đáy $r = 3$. Diện tích toàn phần của hình nón đó là

A $S_{tp} = 15\pi$. B $S_{tp} = 20\pi$. C $S_{tp} = 22\pi$. D $S_{tp} = 24\pi$.

Lời giải.

Diện tích toàn phần của hình nón là $S_{tp} = \pi rl + \pi r^2 = \pi \times 3 \times 5 + \pi \times 3^2 = 24\pi$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Cho hàm số $y = 3^{x+1}$. Đẳng thức nào sau đây là một mệnh đề đúng?

A $y'(1) = \dfrac{9}{\ln 3}$. B $y'(1) = 3\ln 3$. C $y'(1) = 9\ln 3$. D $y'(1) = \dfrac{3}{\ln 3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3^{x+1}\ln 3$. Suy ra $y'(1) = 3^2 \ln 3 = 9\ln 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây:

A Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π.

B Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ π.

C Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

D Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \cot x$ không xác định tại các điểm $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ nên tính chất "nghịch biến trên $\mathbb{R}$" không thể xảy ra.

Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$ mới là đúng.

Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$ mới là đúng.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin(2x+1)$ là

A $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + C$. B $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cos(2x+1) + C$.

C $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(2x+1)$. D $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \cos(2x+1)$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau đây:

A Cắt hình nón tròn xoay bằng một mặt phẳng đi qua trục thu được thiết diện là một tam giác cân.

B Cắt hình trụ tròn xoay bằng một mặt phẳng vuông góc với trục thu được thiết diện là một hình tròn.

(C) Hình cầu có vô số mặt phẳng đối xứng.

(D) Mặt cầu là mặt tròn xoay sinh bởi một đường tròn khi quay quanh một đường kính của nó.

Lời giải.

Cắt hình trụ tròn xoay bằng một mặt phẳng vuông góc với trục thu được thiết diện là đường tròn mới đúng. Chỉ khi nào cắt khối trụ tròn xoay bằng một mặt phẳng vuông góc với trục ta mới thu được thiết diện là một hình tròn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau đây:

A Hàm số $y = \log_2 x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(B) Hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ nghịch biến trên tập xác định của nó.

(C) Hàm số $y = 2^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(D) Hàm số $y = x^{\sqrt{2}}$ có tập xác định là $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y = \log_2 x$ có tập xác định là $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.

Do đó hàm số $y = \log_2 x$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ (chứ không phải trên $\mathbb{R}$).

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Tính giới hạn $K = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x^2-3x}$.

A $K = -\dfrac{2}{3}$. (B) $K = \dfrac{2}{3}$. (C) $K = \dfrac{4}{3}$. (D) $K = 0$.

Lời giải.

Ta có $K = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x^2-3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{x(x-3)\left(\sqrt{4x+1}+1\right)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4}{(x-3)\left(\sqrt{4x+1}+1\right)} = -\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

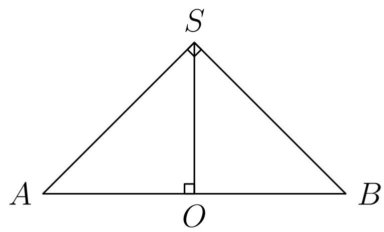
Câu 18. Cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua trục ta được thiết diện là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{6}$. Thể tích V của khối nón đó bằng

A $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$. (B) $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{3}$. (C) $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{6}$. (D) $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

Do thiết diện là một tam giác vuông cân nên ta có $h = r = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

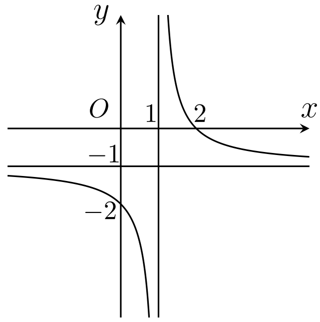
Thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \dfrac{a^3 \cdot 6\sqrt{6}}{8} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 19.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên với a, b, c là các hệ số thực. Tính giá trị của biểu thức $T = a - 3b + 2c$.



(A) $T = 12$. (B) $T = 10$.
(C) $T = -9$. (D) $T = -7$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị nhận hai đường thẳng $x = 1$ và $y = -1$ là tiệm cận nên $c = -1$ và $a = -1$. Đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = -\dfrac{b}{a} = 2$ nên $b = 2$.

Vậy $T = -1 - 6 - 2 = -9$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, đường cao bằng $\dfrac{3a}{2}$. Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

(A) $30°$. (B) $45°$. (C) $60°$. (D) $75°$.

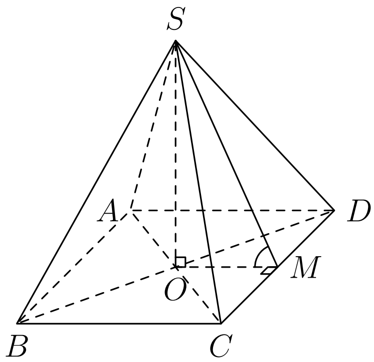
Lời giải.

Gọi M là trung điểm của cạnh CD.

Khi đó góc giữa mặt bên và mặt đáy là góc $\widehat{SMO}$.

Ta có $\tan\widehat{SMO} = \dfrac{SO}{OM} = \dfrac{\frac{3a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$ nên góc $\widehat{SMO} = 60°$.

Vậy góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp $S.ABCD$ bằng $60°$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Xét các khẳng định sau đây

(1). Hàm số $y = \log_3 x$ đồng biến trên tập xác định.

(2). Đồ thị hàm số $y = 2^x$ nhận trục Oy làm tiệm cận đứng.

(3). Đồ thị các hàm số $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$ và $y = \log_{\sqrt{2}} x$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

(4). Hàm số $y = a^x$, $(a > 0, a \neq 1)$ là hàm số chẵn.

(5). Đồ thị các hàm số $y = 3^x$ và $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ đối xứng với nhau qua trục tung Oy.

Có bao nhiêu khẳng định **sai** trong các khẳng định trên?

(A) 1. (B) 4. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Các khẳng định sai là (2) và (4), cụ thể là:

- (C): $y = 2^x$ không có tiệm cận đứng mà chỉ có tiệm cận ngang là trục hoành.
- $y = a^x$ luôn tăng hoặc luôn giảm trên $\mathbb{R}$ nên không thể nhận Oy làm trục đối xứng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là (C). Gọi A, B là các điểm cực trị của (C). Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A $AB = 2\sqrt{5}$. **B** $AB = 5$. **C** $AB = 4$. **D** $AB = 5\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$.

Suy ra hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0; 2), B(2; -2)$ nên $AB = 2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(1; \frac{1}{3}\right)$ là

A $y = 3x - 2$. **B** $y = x - \frac{2}{3}$. **C** $y = -3x + 2$. **D** $y = -x + \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 + 2x - 2 \Rightarrow y'(1) = 1$. Từ đó phương trình tiếp tuyến cần tìm là

$y - \frac{1}{3} = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Cắt tứ diện $ABCD$ bởi mặt phẳng qua M và song song với hai cạnh BC; AD. Thiết diện thu được là hình gì?

A Tam giác đều. **B** Tam giác vuông. **C** Hình bình hành. **D** Ngũ giác.

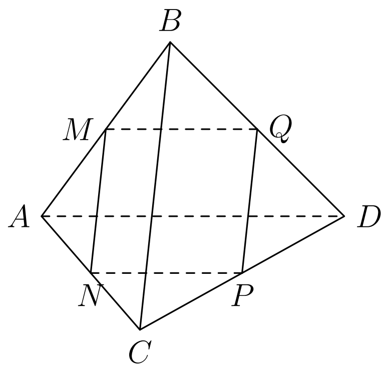
Lời giải.

Gọi N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AC, CD, BD.

Khi đó MN và PQ cùng song song với BC và cùng bằng nửa BC.

Suy ra $MNPQ$ là hình bình hành (đương nhiên lúc đó M, N, P, Q đồng phẳng)

Ngoài ra NP song song với AD nên $(MNPQ)$ là thiết diện qua M và song song với cả BC lẫn AD.



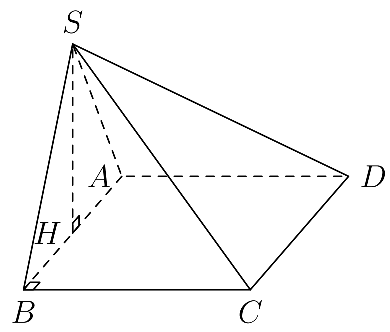
Chọn đáp án C □

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a, AD = a\sqrt{2}$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích V của hình chóp $S.ABCD$.

A $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **B** $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **C** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **D** $V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB. Khi đó,
do $\triangle SAB$ đều và $(SAB) \perp (ABCD)$ nên SH là đường cao của hình chóp và $SH = a\sqrt{3}$.
Vậy $V = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{2a^3\sqrt{6}}{3}$.



Chọn đáp án D □

Câu 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 8 + i$, $z_3 = 1 - 3i$. Khẳng định nào sau đây là một mệnh đề đúng?

A Tam giác MNP cân, không vuông.
B Tam giác MNP đều.
C Tam giác MNP vuông, không cân.
D Tam giác MNP vuông cân.

Lời giải.
Ta có $M(1; 1)$, $N(8; 1)$, $P(1; -3)$.
nên $\overrightarrow{MN} = (7; 0)$; $\overrightarrow{MP} = (0; -4)$; $\overrightarrow{NP} = (-7; -4)$ và $MN = 7$; $MP = 4$; $NP = \sqrt{65}$.
Ngoài ra $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$ nên tam giác MNP vuông tại M nhưng không cân.
Chọn đáp án C □

Câu 27. Nghiệm lớn nhất của phương trình $2\cos 2x - 1 = 0$ trong đoạn $[0; \pi]$ là

A $x = \pi$.
B $x = \dfrac{11\pi}{12}$.
C $x = \dfrac{2\pi}{3}$.
D $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

Lời giải.

Ta có $2\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Vì $x \in [0; \pi]$ nên $x \in \left\{\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.
Chọn đáp án D □

Câu 28. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - 16 = 0$ và mặt phẳng $(P)\colon x + 2y - 2z - 2 = 0$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính là

A $r = \sqrt{6}$.
B $r = 2\sqrt{2}$.
C $r = 4$.
D $r = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.
Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 2)$ và bán kính $R = 5$.
Ta đặt $d = \mathrm{d}(I, (P)) = \dfrac{|1 + 2(-2) - 2 \cdot 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 3$.
Khi đó $r = \sqrt{R^2 - d^2} = 4$.
Chọn đáp án C □

Câu 29. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(x^2 - 1)) \leq -1$ là

A $S = \left[1; \sqrt{5}\right]$.
B $S = \left(-\infty; -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}; +\infty\right)$.
C $S = \left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right]$.
D $S = \left[-\sqrt{5}; -1\right) \cup \left(1; \sqrt{5}\right]$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2(x^2-1)\right) \le -1 \Leftrightarrow \log_2(x^2-1) \ge 2 \Leftrightarrow x^2-1 \ge 4 \Leftrightarrow x^2 \ge 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge \sqrt{5} \\ x \le -\sqrt{5}. \end{array}\right.$

Vậy $S = \left(-\infty; -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}; +\infty\right)$ là tập nghiệm của bất phương trình.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Chọn công thức đúng trong các công thức dưới đây.

A. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = 2\ln x + C.$

B. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = 2\ln^2 x + C.$

C. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \ln^2 x + C.$

D. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + C.$

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x\,d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$

Chọn đáp án D □

Câu 31. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2-(a-2)x-2}{\sqrt{x+3}-2} & \text{nếu } x \ne 1 \\ 8+a^2 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số a để hàm số liên tục tại $x = 1$?

A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(ax+2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\left[(ax+2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)\right] = 4a+8.$

Lại có $f(1) = 8 + a^2$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 4a+8 = 8+a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 4. \end{array}\right.$

Vậy có 2 giá trị của tham số a thoả mãn yêu cầu của bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Biết rằng $\displaystyle\int_0^1 x\cos 2x\,dx = \frac{1}{4}(a\sin 2 + b\cos 2 + c)$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a+b+c = 1.$ B. $a-b+c = 0.$ C. $2a+b+c = -1.$ D. $a+2b+c = 1.$

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$. Khi đó

$I = \dfrac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^1 - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \sin 2x\,dx = \dfrac{1}{2}\sin 2 + \left(\dfrac{1}{4}\cos 2x\right)\Big|_0^1 = \dfrac{1}{4}(2\sin 2 + \cos 2 - 1).$

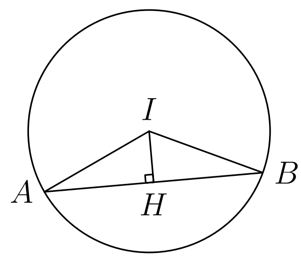
Suy ra $a = 2, b = 1, c = -1 \Rightarrow a - b + c = 0.$

Chọn đáp án B □

Câu 33. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+4x-6y+m = 0$ và đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha)\colon x+2y-2z-4 = 0$ và $(\beta)\colon 2x-2y-z+1 = 0$. Đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $AB = 8$ khi và chỉ khi

A. $m = 12.$ B. $m = -12.$ C. $m = -10.$ D. $m = 5.$

Lời giải.



Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;3;0)$ và bán kính $R=\sqrt{13-m}$.

Do $\Delta=(\alpha)\cap(\beta)\Rightarrow\Delta\colon\begin{cases}x=2t\\y=1+t\\z=-1+2t\end{cases}$

$\Rightarrow\Delta$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta=(2;1;2)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $\Delta\Rightarrow H(2t;1+t;-1+2t)$

$\Rightarrow\overrightarrow{IH}=(2t+2;t-2;2t-1)$.

Mà $IH\perp\Delta$ nên $\overrightarrow{IH}\cdot\vec{u}_\Delta=0\Leftrightarrow t=0$. Suy ra $IH=3$.

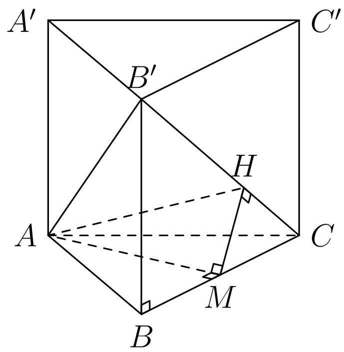
Như vậy $R^2=IH^2+\dfrac{1}{4}AB^2\Rightarrow m=-12$.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC=a\sqrt{6}$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 60°. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

(A) $V=\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. (B) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (C) $V=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **(D)** $V=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC.

Kẻ $MH\perp B'C$ với $H\in B'C$.

Mà $AM\perp B'C$ nên $B'C\perp(AMH)\Rightarrow AH\perp B'C$.

Từ đó $((AB'C);(BCC'B'))=(MH,AH)=\widehat{AHM}\Rightarrow\widehat{AHM}=60^\circ$.

Ta có $AB=AC=a\sqrt{3}$; $AM=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$; $AH=\dfrac{AM}{\sin 60^\circ}=a\sqrt{2}$;

$\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AB'^2}+\dfrac{1}{AC^2}\Rightarrow\dfrac{1}{AB'^2}=\dfrac{1}{AH^2}-\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{6a^2}\Rightarrow AB'=a\sqrt{6}$;

Suy ra $AA'=\sqrt{AB'^2-A'B'^2}=a\sqrt{3}$.

Vậy $V=AA'\cdot S_{\triangle ABC}=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{2\sin x-\cos x+3}$ lần lượt là

(A) -1 và $\dfrac{1}{2}$. (B) -1 và 2. (C) $-\dfrac{1}{2}$ và 1. (D) 1 và 2.

Lời giải.

Ta có $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{2\sin x-\cos x+3}\Leftrightarrow(2y-1)\sin x+(-y-1)\cos x=-3y$ (*).

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow(2y-1)^2+(y+1)^2\geq 9y^2\Leftrightarrow 2y^2+y-1\leq 0\Leftrightarrow -1\leq y\leq\dfrac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số lần lượt là $\min y=-1$ và $\max y=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$, trong đó a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 lấy từ các chữ số $\{0;1;2;3;4;5;6\}$. Tính xác suất để viết được số thỏa mãn điều kiện $a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6$.

(A) $p = \dfrac{4}{85}$. **(B)** $p = \dfrac{4}{135}$. (C) $p = \dfrac{3}{20}$. (D) $p = \dfrac{5}{158}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{A}_7^6 - \mathrm{A}_6^5 = 4320$.

Gọi A là biến cố "Số được viết thỏa mãn $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6$".

- TH1: $a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6 \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \Rightarrow a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = 7$.
  Số cách sắp xếp là: $3! \times 2! \times 2! \times 2! = 48$.
- TH2: $a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6 \in \{1; 2; 3; 4; 5; 0\} \Rightarrow a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = 5$.
  Số cách sắp xếp là: $3! \times 2! \times 2! \times 2! - 2! \times 2! \times 2! = 40$.
- TH3: $a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6 \in \{1; 2; 0; 4; 5; 6\} \Rightarrow a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = 6$.
  Số cách sắp xếp là: $3! \times 2! \times 2! \times 2! - 2! \times 2! \times 2! = 40$.

Như vậy $n(A) = 48 + 40 + 40 = 128 \Rightarrow \mathrm{P}(A) = \dfrac{128}{4320} = \dfrac{4}{135}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Kí hiệu z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $4z^2 - 16z + 17 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w = (1 + 2i)z_1 - \dfrac{3}{2}i$?

(A) $M(-2; 1)$. (B) $M(3; -2)$. **(C)** $M(3; 2)$. (D) $M(2; 1)$.

Lời giải.

Ta có $z_1 = 2 - \dfrac{1}{2}i \Rightarrow w = (1 + 2i)\left(2 - \dfrac{1}{2}i\right) - \dfrac{3}{2}i = 3 + 2i \Rightarrow M(3; 2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Khi xây nhà, anh Tiến cần xây một bể đựng nước mưa có thể tích $V = 6$ m^3 dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài gấp ba lần chiều rộng, đáy và nắp đổ bê tông, cốt thép, xung quanh xây bằng gạch và xi măng. Biết rằng chi phí trung bình là 1.000.000 đồng/m^2 và ở nắp để hở một khoảng hình vuông có diện tích bằng 2/9 diện tích nắp bể. Tính chi phí thấp nhất mà anh Tiến phải trả (làm tròn đến hàng trăm nghìn).

(A) 22.000.000 đồng. (B) 20.970.000 đồng. **(C)** 20.965.000 đồng. (D) 21.000.000 đồng.

Lời giải.

Gọi $3x, x$ (m) lần lượt là chiều dài và chiều rộng của đáy bể ($x > 0$).

Gọi y (m) là chiều cao của bể ($y > 0$).

Thể tích bể nước là $V = x \times 3x \times y = 6 \Rightarrow y = \dfrac{2}{x^2}$ (m^3).

Diện tích toàn phần của bể nước là

$$S_{tp} = 3xy + 3xy + xy + xy + 3x^2 + 3x^2 - \frac{2}{9} \times 3x^2 = 8xy + \frac{16}{3}x^2 = \frac{16}{x} + \frac{16}{3}x^2 \ (\mathrm{m}^2)$$
$$= \frac{8}{x} + \frac{8}{x} + \frac{16}{3}x^2 \Rightarrow S_{tp} \geq 3\sqrt[3]{\frac{8}{x} \times \frac{8}{x} \times \frac{16}{3} \times x^2} = 24\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \ (\mathrm{m}^2).$$

(dấu "=" xảy ra khi $x = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$ (m))

Vậy chi phí thấp nhất để xây bể là $P = 24\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}.1000.000 \approx 20.965.000$ đồng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Cho hình nón (N) có bán kính đáy $r = 20$ cm, chiều cao $h = 60$ cm và một hình trụ (T) nội tiếp hình nón (N) (hình trụ (T) có một đáy thuộc đáy hình nón và một đáy nằm trên mặt xung quanh của hình nón). Tính thể tích V của hình trụ (T) có diện tích xung quanh lớn nhất?

A $V = 3000\pi\ \text{cm}^3$. **B** $V = \dfrac{32000}{9}\pi\ \text{cm}^3$. **C** $V = 3600\pi\ \text{cm}^3$. **D** $V = 4000\pi\ \text{cm}^3$.

Lời giải.

Gọi x là bán kính đáy của khối trụ $(0 < x < 20)$, k là chiều cao khối trụ

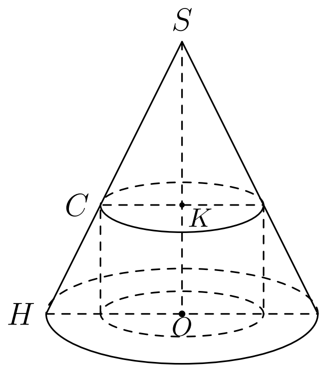
Ta có $\dfrac{CK}{OH} = \dfrac{SK}{SO} \Rightarrow \dfrac{x}{20} = \dfrac{60-k}{60} \Rightarrow 60 - k = 3x \Rightarrow k = 60 - 3x$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là:

$S_{xq} = 2\pi xk = 2\pi x(60-3x) = 6\pi x(20-x) \leq 6\pi\left(\dfrac{x+20-x}{2}\right)^2 = 600\pi$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 10$ cm, suy ra $k = 30$ cm.

Vậy thể tích của hình trụ (T) là $V = \pi x^2 k = 3000\pi\ \text{cm}^3$.



Chọn đáp án A □

Câu 40. Chị Lan có 400 triệu đồng mang đi gửi tiết kiệm ở hai loại kì hạn khác nhau đều theo thể thức lãi kép. Chị gửi 200 triệu đồng theo kì hạn quý với lãi suất 2,1% một quý, 200 triệu đồng còn lại chị gửi theo kì hạn tháng với lãi suất 0,73% một tháng. Sau khi gửi được đúng 1 năm, chị rút ra một nửa số tiền ở loại kì hạn theo quý và gửi vào loại kì hạn theo tháng. Hỏi sau đúng 2 năm kể từ khi gửi tiền lần đầu, chị Lan thu được tất cả bao nhiêu tiền lãi (làm tròn đến hàng nghìn)?

A 79.760.000 đồng. **B** 74.813.000 đồng. **C** 65.393.000 đồng. **D** 70.656.000 đồng.

Lời giải.

Công thức lãi kép $P_n = A(1+r)^n$

Sau 1 năm gửi tiền, tổng số tiền thu tích luỹ được

+ Từ nguồn tiền gửi theo quý là $Q_1 = 200(1+2{,}1\%)^4$ triệu đồng.

+ Từ nguồn tiền gửi theo tháng là $T_1 = 200(1+0{,}73\%)^{12}$

Từ đó vốn gửi cho năm thứ hai được tính như sau

+ Vốn gửi theo quý là $\dfrac{1}{2}Q_1 = 100(1+2{,}1\%)^4$ triệu đồng.

+ Vốn gửi theo tháng là $\dfrac{1}{2}Q_1 + T_1 = 100(1+2{,}1\%)^4 + 200(1+0{,}73\%)^{12}$ triệu đồng.

Sau 1 năm gửi nữa (sau tổng cộng 2 năm), số tiền thu được

+ Từ nguồn tiền gửi theo quý (năm sau) là $Q_2 = 100(1+2{,}1\%)^4(1+2{,}1\%)^4$

+ Từ nguồn tiền gửi theo tháng (năm sau) là

$T_2 = \left[100(1+2{,}1\%)^4 + 200(1+0{,}73\%)^{12}\right](1+0{,}73\%)^{12}$

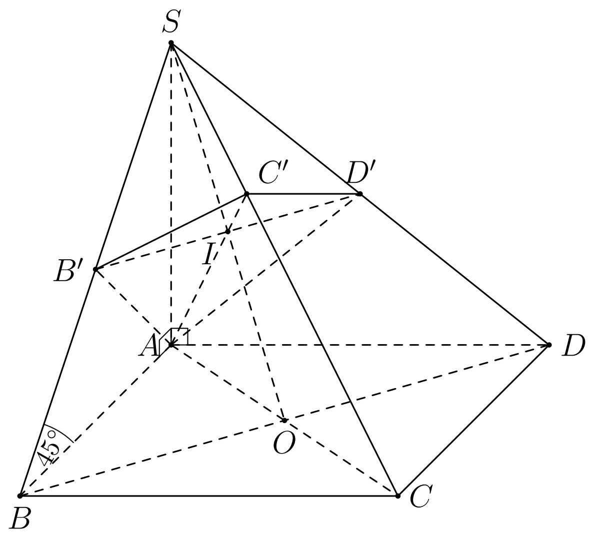
Vậy tổng số tiền lãi thu được sau 2 năm gửi tiền là $L = (T_2 + Q_2 - 400)10^6 \approx 74.813.000$ đồng.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, cạnh bên SB tạo với đáy góc $45°$. Một mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $AB'C'D'$ có diện tích bằng

A $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **B** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$. **D** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và kẻ $AC' \perp SC$ với $C' \in SC$.

Gọi $AC' \cap SO = I$ và qua I vẽ đường thẳng $B'D' \parallel BD$ (với $B' \in SB; D' \in SD$).

Khi đó thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) là tứ giác $AB'C'D'$.

Ta có $BD \perp (SAC) \Rightarrow B'D' \perp (SAC)$ $\Rightarrow B'D' \perp AC'$.

Diện tích thiết diện là $S_{AB'C'D'} = \dfrac{1}{2}AC' \cdot B'D'$.

Góc của SB với đáy là $\widehat{SBA} = 45^\circ \Rightarrow SA = AB = a$.

Trong tam giác vuông SAC có $\dfrac{1}{AC'^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{2a^2} = \dfrac{3}{2a^2} \Rightarrow AC' = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Mặt khác, ta có $\begin{cases} AB' \perp BC \\ AB' \perp SC \end{cases} \Rightarrow AB' \perp SB$.

Do đó B' là trung điểm SB (do tam giác SAB vuông cân tại A).

Tương tự D' là trung điểm SD (do tam giác SAD vuông cân tại A).

Do đó $B'D' = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $S_{AB'C'D'} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho bốn số a, b, c, d theo thứ tự đó tạo thành cấp số nhân với công bội khác 1. Biết tổng của ba số hạng đầu bằng $\dfrac{148}{9}$, đồng thời theo thứ tự đó chúng lần lượt là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng. Tính giá trị biểu thức $T = a - b + c - d$.

A. $T = \dfrac{101}{27}$. B. $T = \dfrac{100}{27}$. C. $T = -\dfrac{100}{27}$. D. $T = -\dfrac{101}{27}$.

Lời giải.

Do a, b, c, d là một cấp số nhân có công bội khác 1 nên chúng khác nhau từng đôi một.

Đặt số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của cấp số cộng (có công sai m) là: u_1, u_4, u_8.

Khi đó $u_1 = a$, $u_4 = b$, $u_8 = c$ và $m \neq 0$ (do $a \neq b$).

Ta có $\begin{cases} ac = b^2 \\ a + b + c = \dfrac{148}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 u_8 = u_4^2 \\ u_1 + u_4 + u_8 = \dfrac{148}{9} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(u_1 + 7m) = (u_1 + 3m)^2 \\ u_1 + u_1 + 3m + u_1 + 7m = \dfrac{148}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 m = 9m^2 \\ 3u_1 + 10m = \dfrac{148}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 9m \\ 3 \cdot 9m + 10m = \dfrac{148}{9} \end{cases}$

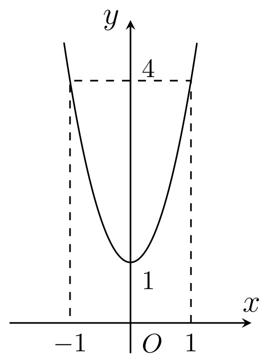
$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ m = \dfrac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow u_4 = \dfrac{16}{3}, u_8 = \dfrac{64}{9}$. Suy ra: $a = 4$, $b = \dfrac{16}{3}$, $c = \dfrac{64}{9}$, $d = \dfrac{256}{27}$.

Vậy $T = a - b + c - d = -\dfrac{100}{27}$.

Chọn đáp án C □

Câu 43.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có đồ thị là (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính giá trị $H = f(4) - f(2)$.



(A) $H = 45$. (B) $H = 64$. (C) $H = 51$. **D** $H = 58$.

Lời giải.

Với $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Do đồ thị (P) của $f'(x)$ có đỉnh $I(0; 1) \in Oy$ và qua $A(1; 4)$ nên $\begin{cases} b = 0 \\ c = 1 \\ 3a + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 1 \\ a = 1 \end{cases}$.

Ngoài ra do $(C)\colon y = f(x)$ đi qua O nên $f(x) = x^3 + x$. Từ đó $H = f(4) - f(2) = 68 - 10 = 58$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(1; 5; 0)$, $B(3; 3; 6)$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm trên đường thẳng Δ sao cho chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $T = a + b + c$.

(A) $T = 2$. **B** $T = 3$. (C) $T = 4$. (D) $T = 5$.

Lời giải.

Chu vi tam giác ABM đạt giá trị nhỏ nhất khi tổng $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Do $M \in \Delta\colon \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ nên $M(-1 + 2t; 1 - t; 2t)$.

Ta có $MA = \sqrt{(2t-2)^2 + (t+4)^2 + 4t^2} = \sqrt{9t^2 + 20}$;

$MB = \sqrt{(2t-4)^2 + (t+2)^2 + (2t-6)^2} = \sqrt{9t^2 - 36t + 56}$.

Như vậy $MA + MB = \sqrt{9t^2 + 20} + \sqrt{9t^2 - 36t + 56}$.

<u>Cách 1</u>: phương pháp hàm số

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{9t^2 + 20} + \sqrt{9t^2 - 36t + 56}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{9t}{\sqrt{9t^2 + 20}} + \dfrac{9t - 18}{\sqrt{9t^2 - 36t + 56}} = \dfrac{9t}{\sqrt{9t^2 + 20}} + \dfrac{9(t-2)}{\sqrt{9(t-2)^2 + 20}}$.

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{t}{\sqrt{9t^2 + 20}} = -\dfrac{t-2}{\sqrt{9(t-2)^2 + 20}}$ (1).

Xét hàm số $g(t) = \dfrac{t}{\sqrt{9t^2 + 20}}$ có $g'(t) = \dfrac{20}{\left(\sqrt{9t^2 + 20}\right)^3} > 0$.

Do đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất $t = 1$.

Bảng biến thiên của $f(t)$ là

t	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{29}$	$\nearrow$	$+\infty$

Theo bảng biến thiên, $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $t = 1$.

<u>Cách 2</u>: phương pháp véc-tơ

Ta có $MA + MB = \sqrt{(3t)^2 + \left(\sqrt{20}\right)^2} + \sqrt{(6-3t)^2 + \left(\sqrt{20}\right)^2}$.

Xét $\begin{cases} \vec{u} = \left(3t; \sqrt{20}\right) \\ \vec{v} = \left(6-3t; \sqrt{20}\right) \end{cases}$. Do $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$ nên ta có

$\sqrt{(3t)^2 + \left(\sqrt{20}\right)^2} + \sqrt{(6-3t)^2 + \left(\sqrt{20}\right)^2} \geq \sqrt{6^2 + \left(2\sqrt{20}\right)^2} = 2\sqrt{29}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u} = k\vec{v}$ $(k \geq 0) \Leftrightarrow t = 1$.

Vậy $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $t = 1 \Rightarrow M(1; 0; 2) \Rightarrow T = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho số thực $a > 0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0; a]$ thỏa mãn $f(x)f(a-x) = 1$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int\limits_0^a \frac{1}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x$.

A $I = \dfrac{2a}{3}$. **B** $I = \dfrac{a}{2}$. **C** $I = \dfrac{a}{3}$. **D** $I = a$.

Lời giải.

Đặt $t = a - x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$.

$\Rightarrow I = \displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+f(a-t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^a \frac{1}{1+\dfrac{1}{f(x)}}\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{f(x)}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow 2I = \displaystyle\int_0^a \mathrm{d}x = a \Rightarrow I = \frac{a}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho bất phương trình $m \cdot 3^{x+1} + (3m+2) \cdot \left(4-\sqrt{7}\right)^x + \left(4+\sqrt{7}\right)^x > 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty; 0]$.

A $m > \dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **B** $m > \dfrac{2+2\sqrt{3}}{3}$. **C** $m \geq \dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **D** $m \geq -\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Xét bất phương trình: $m \cdot 3^{x+1} + (3m+2) \cdot \left(4-\sqrt{7}\right)^x + \left(4+\sqrt{7}\right)^x > 0$

$\Leftrightarrow 3m + (3m+2) \cdot \left(\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^x + \left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x > 0$ (1)

Đặt $t = \left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x$, $(t > 0) \Rightarrow \left(\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^x = \dfrac{1}{t}$ và $0 < t \leq 1$ (do $x \leq 0$).

Bất phương trình (1) trở thành: $t + \dfrac{3m+2}{t} + 3m > 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{-t^2-2}{3t+3}$. (2)

Ta có $g'(t)=\dfrac{-3t^2-6t+6}{(3t+3)^2}$; $g'(t)=0\Leftrightarrow -3t^2-6t+6=0\Leftrightarrow t=-1\pm\sqrt{3}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$-1+\sqrt{3}$		1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		$\nearrow$	$\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	

Như vậy (1) đúng với mọi $x\in(-\infty;0]\Leftrightarrow m>g(t)$ đúng với mọi $t\in(0;1]\Leftrightarrow m>\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 47.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x)=f(x^2-3)$ và các mệnh đề sau:

(1). Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

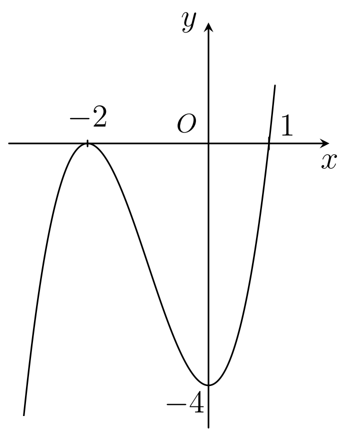
(2). Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

(3). Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x=2$.

(4). Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

(5). Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên?



A 1. B 4. C 3. D 2.

Lời giải.

Dựa trên đồ thị của $f'(x)$ ta có $f'(x^2-3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-3=-2\\x^2-3=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=\pm2.\end{array}\right.$

Ngoài ra $f'(x^2-3)>0\Leftrightarrow x^2-3>1\Leftrightarrow x^2-4>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-2\\x>2.\end{array}\right.$

Với $g(x)=f(x^2-3)$ xác định trên $\mathbb{R}$, ta có $g'(x)=2x\cdot f'(x^2-3)$.

Bảng biến thiên của $g(x)$:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$2x$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(x^2-3)$		$+$	0	$-$	0	$-$	|	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy có 2 mệnh đề đúng trong số 5 mệnh đề được phát biểu, đó là (1) và (4).

Chọn đáp án D □

Câu 48. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 1 - i| = 2$ và $z_2 = iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z_1 - z_2|$.

A $m = \sqrt{2} - 1$. **B** $m = 2\sqrt{2}$. **C** $m = 2$. **D** $m = 2\sqrt{2} - 2$.

Lời giải.

Ta có $|z_1| + |1 - i| \geq |z_1 + 1 - i| = 2 \Rightarrow |z_1| \geq 2 - \sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = k(1 - i), (k \in \mathbb{R}, k \geq 0) \\ |z_1 + 1 - i| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow z_1 = (\sqrt{2} - 1)(1 - i)$.

Lại có $|z_1 - z_2| = |z_1 - iz_1| = |z_1(1 - i)| = |z_1| \cdot |1 - i| = |z_1| \cdot \sqrt{2} \geq 2\sqrt{2} - 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Tam giác mà ba đỉnh của nó lần lượt là trung điểm các cạnh của tam giác ABC được gọi là tam giác trung bình của tam giác ABC.

Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3, \ldots$ sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n + \cdots$.

A $S = \dfrac{15\pi}{4}$. **B** $S = 4\pi$. **C** $S = \dfrac{9\pi}{2}$. **D** $S = 5\pi$.

Lời giải.

Với mọi tam giác đều $A_nB_nC_n$ có cạnh a_n trong dãy tam giác đề cho, ta có

Đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$ có bán kính $R_n = OA_n = \dfrac{a_n\sqrt{3}}{3}$ và diện tích $S_n = \dfrac{\pi a_n^2}{3}$.

Ngoài ra A_{n+1} là trung điểm của cạnh B_nC_n nên $OA_{n+1} = \dfrac{a_n\sqrt{3}}{6}$, từ đó

Đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có

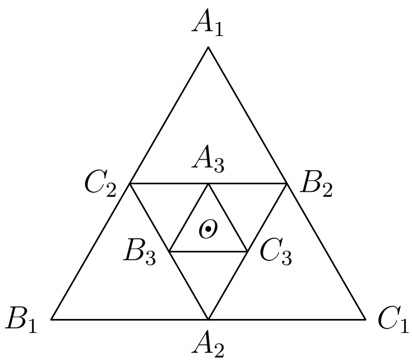
bán kính $R_{n+1} = OA_{n+1} = \dfrac{a_n\sqrt{3}}{6}$ và diện tích $S_{n+1} = \dfrac{\pi a_n^2}{12}$.

Dãy (S_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn có

$S_1 = \dfrac{\pi a_1^2}{3} = 3\pi$ và công bội $q = \dfrac{S_{n+1}}{S_n} = \dfrac{1}{4}$.

Vậy tổng của dãy là

$S = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n + \cdots = \dfrac{S_1}{1 - q} = \dfrac{3\pi}{1 - \dfrac{1}{4}} = 4\pi$.



Chọn đáp án B □

Câu 50. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + \mathrm{d}x + e, (a, b, c, d, e \in \mathbb{R}; a \neq 0, b \neq 0)$ cắt trục hoành Ox tại 4 điểm phân biệt. Khi đó đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành Ox tại bao nhiêu điểm, trong đó $g(x) = (4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d)^2 - 2(6ax^2 + 3bx + c)(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)$?

A 6. **B** 0. **C** 4. **D** 2.

Lời giải.

Giả sử đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + \mathrm{d}x + e, (a, b, c, d, e \in \mathbb{R}; a \neq 0, b \neq 0)$ cắt trục hoành Ox tại 4 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4.

Đặt $A = x - x_1$; $B = x - x_2$; $C = x - x_3$; $D = x - x_4$ ta có

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = aABCD$.

Xét thấy $g(x) = [f'(x)]^2 - f''(x) \cdot f(x)$

TH1: Nếu $x = x_i, i = 1, 2, 3, 4$ thì $g(x_i) = [f'(x_i)]^2 > 0$.
Do đó, $x = x_i, i = 1, 2, 3, 4$ không phải nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.
TH2: Nếu $x \neq x_i, i = 1, 2, 3, 4$ thì ta viết lại
$f'(x) = a[BCD + ACD + ABD + ABC] = f(x)\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D}\right)$.
$f''(x) = f'(x)\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D}\right) - f(x)\left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} + \frac{1}{C^2} + \frac{1}{D^2}\right)$
$= f(x)\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D}\right)^2 - f(x)\left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} + \frac{1}{C^2} + \frac{1}{D^2}\right)$
Suy ra, $f''(x) \cdot f(x) = f^2(x)\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D}\right)^2 - f^2(x)\left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} + \frac{1}{C^2} + \frac{1}{D^2}\right)$
Khi đó $g(x) = [f'(x)]^2 - f''(x) \cdot f(x) = f^2(x)\left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} + \frac{1}{C^2} + \frac{1}{D^2}\right) > 0, \forall x \neq x_i (i = 1, 2, 3, 4)$.
Từ đó suy ra phương trình $g(x) = 0$ vô nghiệm.
Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ không cắt trục hoành.
Chọn đáp án B $\square$

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. A	3. A	4. C	5. A	6. C	7. A	8. D	9. B	10. B
11. D	12. C	13. C	14. A	15. B	16. A	17. A	18. A	19. C	20. C
21. D	22. A	23. B	24. C	25. D	26. C	27. D	28. C	29. B	30. D
31. D	32. B	33. B	34. D	35. A	36. B	37. C	38. C	39. A	40. B
41. C	42. C	43. D	44. B	45. B	46. A	47. D	48. D	49. B	50. B

128 ĐỀ THI THỬ TOÁN THPT QUỐC GIA 2018 TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH - ĐỒNG NAI LẦN 1

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0	$\searrow$	-32	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

(A) $(-1; 2)$. (B) $(-\infty; 0)$. (C) $(0; +\infty)$. (D) $(-1; 0)$.

Lời giải.

Quan sát bảng biến thiên, nhận thấy đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có mũi tên đi lên khi $x \in (-1; 0)$ và $x \in (2; +\infty)$. Suy ra, hàm số đã cho đồng biến trên $(-1; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ đạt cực đại tại điểm

(A) $x = 1$. (B) $x = -1$. (C) $x = 0$. (D) $x = -2$.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$y'' = 6x$. Kiểm tra thấy $y''(-1) = -6 < 0$ nên hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = -1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau đây?

(A) $y = \dfrac{x+3}{x+1}$. (B) $y = \dfrac{x-1}{x^2+1}$. (C) $y = \dfrac{3x+2}{3x-1}$. (D) $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$.

Lời giải.

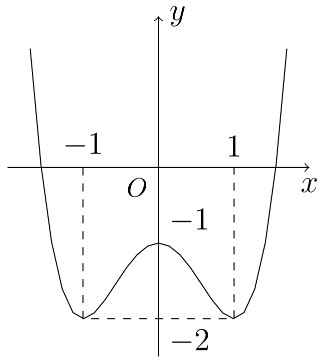
Ta có: $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x-3}{x-1} = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x-3}{x-1} = -\infty$.

Suy ra, đường thẳng $x = 1$ là TCĐ của đồ thị hàm số $\dfrac{2x-3}{x-1}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4.

Biết rằng đồ thị được cho ở hình bên là đồ thị của một trong các hàm số cho ở các đáp án **A**, **B**, **C**, **D** dưới đây. Đó là hàm số nào?



A $y = x^4 - 3x^2$.
B $y = x^4 - 2x^2 - 1$.
C $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.
D $y = 2x^4 - 2x^2 - 1$.

Lời giải.

Đồ thị đã cho có 3 điểm cực trị $(-1; -2)$, $(1; -2)$ và $(0; -1)$. Kiểm tra chỉ có hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho các số thực dương $a,\ x,\ y$ và $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
B $\log_a(xy) = \log_a x \cdot \log_a y$.
C $\log_a(xy) = \log_a x - \log_a y$.
D $\log_a(xy) = y \log_a x$.

Lời giải.

Công thức lôgarit của một tích.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Phương trình $2^{2x-1} = 8$ có nghiệm là

A $x = 4$. **B** $x = 1$. **C** $x = 3$. **D** $x = 2$.

Lời giải.

$2^{2x-1} = 8 \Leftrightarrow 2^{2x-1} = 2^3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$ là

A $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = \ln|1-2x| + C$.
B $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = -2\ln|1-2x| + C$.
C $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = 2\ln|1-2x| + C$.
D $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln|1-2x| + C$.

Lời giải.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-2x} = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1-2x)}{1-2x} = -\frac{1}{2}\ln|1-2x| + C.$$

Chọn đáp án D □

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x = a$ và đường thẳng $x = b$. Khi đó diện tích S của hình phẳng D được tính bởi công thức

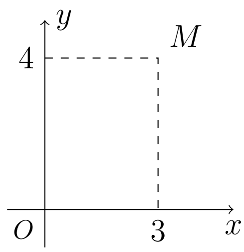
A $S = \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **B** $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$. **C** $S = \left|\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$. **D** $S = \pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Công thức ở bài "§3. Ứng dụng của tích phân trong hình học", SGK Giải tích 12.

Chọn đáp án B □

Câu 9.
Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.



(A) Phần thực là 4 và phần ảo là 3.
(B) Phần thực là 3 và phần ảo là $4i$.
(C) Phần thực là 3 và phần ảo là 4.
(D) Phần thực là 4 và phần ảo là $3i$.

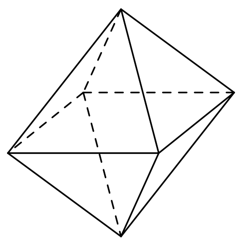
Lời giải.
Điểm $M(3;4)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = 3 + 4i$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Cho số phức z thỏa mãn $z(1+i) = 3 - 5i$. Tính môđun của z.
(A) $|z| = 4$. (B) $|z| = \sqrt{17}$. (C) $|z| = 17$. (D) $|z| = 16$.

Lời giải.
Ta có $z(1+i) = 3 - 5i \Leftrightarrow z = \dfrac{3-5i}{1+i} = \dfrac{(3-5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -1 - 4i$. Suy ra $|z| = \sqrt{17}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Hình bát diện đều có bao nhiêu cạnh?
(A) 10. (B) 8. (C) 12. (D) 20.

Lời giải.



Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Thể tích V của khối cầu có bán kính $R = 4$ bằng
(A) $V = 36\pi$. (B) $V = 64\pi$. (C) $V = 48\pi$. (D) $V = \dfrac{256\pi}{3}$.

Lời giải.
Áp dụng công thức $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Cho hình nón (N) có đường kính đáy bằng $4a$, đường sinh bằng $5a$. Tính diện tích xung quanh S của hình nón (N)
(A) $S = 10\pi a^2$. (B) $S = 20\pi a^2$. (C) $S = 36\pi a^2$. (D) $S = 14\pi a^2$.

Lời giải.
Áp dụng công thức $S_{xq} = \pi rl$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Tìm tọa độ điểm A_1 là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oyz).

A $A_1(1;0;0)$. **B** $A_1(0;2;3)$. **C** $A_1(1;0;3)$. **D** $A_1(1;2;0)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oyz) có phương trình $x=0$. Từ đó suy ra điểm $A_1(0;2;3)$ là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;3)$ lên mặt phẳng (Oyz).

Chọn đáp án B □

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-2y+z+5=0$. Khoảng cách h từ điểm $A(1;1;1)$ đến mặt phẳng (α) bằng

A $h=2$. **B** $h=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$. **C** $h=\dfrac{10}{3}$. **D** $h=6$.

Lời giải.

$h=\mathrm{d}(A,(\alpha))=\dfrac{|2\cdot 1-2\cdot 1+1+5|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-2t\\y=3\\z=5+3t\end{cases}$. Trong các vec-tơ sau, vec-tơ nào là một vec-tơ chỉ phương của đường thẳng d?

A $\vec{a}_1=(1;3;5)$. **B** $\vec{a}_2=(2;3;3)$. **C** $\vec{a}_3=(-2;0;3)$. **D** $\vec{a}_1=(-2;3;3)$.

Lời giải.

Đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$ nhận $\vec{u}=(a;b;c)$ làm một vec-tơ chỉ phương.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Số chỉnh hợp chập 2 của 5 phần tử bằng

A 120. **B** 10. **C** 20. **D** 7.

Lời giải.

$A_5^2=\dfrac{5!}{3!}=4\cdot 5=20$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $y=2x^4+4x+1$. **B** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **C** $y=x^3+3x+\sqrt[3]{4}$. **D** $y=x^3-3x+1$.

Lời giải.

Xét $y=x^3+3x+\sqrt[3]{4}$ có $y'=3x^2+3>0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên y đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^2-\dfrac{16}{x}$ trên đoạn $[-4;-1]$. Tính $T=M+m$.

A $T=32$. **B** $T=16$. **C** $T=37$. **D** $T=25$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
$f'(x) = 2x + \dfrac{16}{x^2}$. Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.
$f(-4) = 20, f(-2) = 12, f(-1) = 17$.
Suy ra $M = 20, m = 12$ nên $T = 32$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{mx + \sqrt{x^2 - 2x + 3}}{2x - 1}$ có một tiệm cận ngang là $y = 2$?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) vô số.

Lời giải.
Ta có
$$\lim_{x \to +\infty} y = \frac{m+1}{2}, \lim_{x \to -\infty} y = \frac{m-1}{2}$$
Do đó, đồ thị hàm số đã cho có TCN $y = 2$ khi và chỉ khi
$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{m+1}{2} = 2 \\ \dfrac{m-1}{2} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow m = 3,\ m = 5.$$
Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Gọi S là tập tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2m + 1$ và trục Ox có đúng hai điểm chung phân biệt. Tính tổng T của các phần tử thuộc tập S.

(A) $T = 12$. (B) $T = 10$. (C) $T = -12$. (D) $T = -10$.

Lời giải.
Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành
$x^3 + 3x^2 - 9x + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 9x + 1 = -2m$
Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ có $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -3 & \Rightarrow f(x) = 28 \\ x = 1 & \Rightarrow f(x) = -4 \end{array}\right.$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	28	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, đồ thị hàm số có 2 điểm chung với trục hoành khi và chỉ khi
$\left[\begin{array}{l} -2m = 28 \\ -2m = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -14 \\ m = 2 \end{array}\right.$. Vậy $T = -14 + 2 = -12$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Đặt $\log_2 5 = a, \log_3 2 = b$. Tính $\log_{15} 20$ theo a và b ta được

Ⓐ $\log_{15} 20 = \dfrac{2b+a}{1+ab}$.
B $\log_{15} 20 = \dfrac{2b+ab}{1+ab}$.
Ⓒ $\log_{15} 20 = \dfrac{2b+1}{1+ab}$.
Ⓓ $\log_{15} 20 = \dfrac{b+ab+1}{1+ab}$.

Lời giải.

Ta có
$$\log_{15} 20 = \frac{\log_2 20}{\log_2 15} = \frac{2+\log_2 5}{\log_2 3 + \log_2 5} = \frac{2+a}{\dfrac{1}{b}+a} = \frac{2b+ab}{1+ab}.$$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x = 8$. Tính $I = \int\limits_0^{\sqrt{2}} xf(x^2)\mathrm{d}x$.

A $I = 8$.
Ⓑ $I = 16$.
Ⓒ $I = 4$.
Ⓓ $I = 32$.

Lời giải.

Ta có
$$8 = \int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow \int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t = 16.$$

Đặt $t = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$. Suy ra
$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t = 8.$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 24. Gọi $F(t)$ là số lượng vi khuẩn phát triển sau t giờ. Biết $F(t)$ thỏa mãn $F'(t) = \dfrac{10000}{1+2t}$ với $t \geq 0$ và ban đầu có 1000 con vi khuẩn. Hỏi sau 2 giờ số lượng vi khuẩn là bao nhiêu?

Ⓐ 17094.
B 9047.
Ⓒ 32118.
Ⓓ 8047.

Lời giải.

$F(t) = \displaystyle\int \frac{10000}{1+2t}\mathrm{d}t = 5000\ln|1+2t| + C$.

$F(0) = 1000 \Leftrightarrow 5000\ln|1+2\cdot 0| + C = 1000 \Leftrightarrow C = 1000$.

Số lượng vi khuẩn sau 2 giờ:

$F(2) = 5000\ln|1+2\cdot 2| + 1000 = 5000\ln(5) + 1000 \approx 9047$.

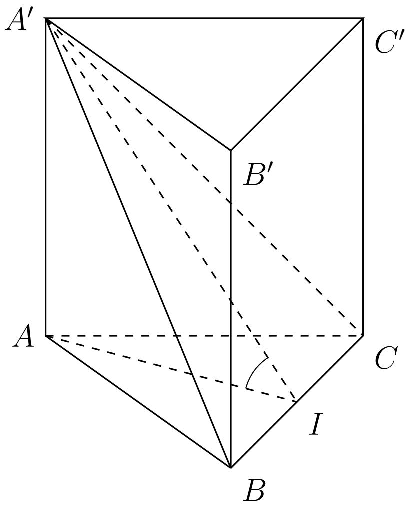
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 25. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Tính thể tích V của khối chóp $A'.BCC'B'$.

Ⓐ $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.
Ⓑ $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$.
Ⓒ $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.
D $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm BC. Khi đó $AI \perp BC$ và $A'I \perp BC$.
Suy ra góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng (ABC) là góc $A'IA \Rightarrow \widehat{A'IA} = 60^\circ$.
Tam giác ABC đều cạnh a nên $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
Tam giác $A'AI$ vuông tại A nên $AA' = AI \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{3a}{2}$.
Thể tích của khối lăng trụ $V = AA' \cdot S_{ABC} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.
Do đó thể tích cần tính là $V_{A'.BCC'B'} = \dfrac{2}{3}V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



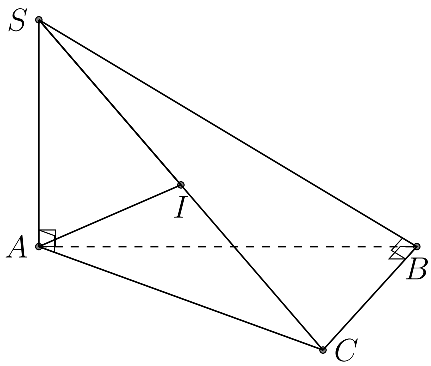
Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có ΔABC vuông tại B, $BA = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

(A) $R = a\sqrt{5}$. (B) $R = 2a\sqrt{5}$. (C) $R = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. (D) $R = \dfrac{a\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải.

$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$
$\Rightarrow \triangle SBC$ vuông tại B.
Gọi I là trung điểm của SC.
Do $\triangle SBC$ vuông ở B nên $IS = IB = IC$.
Do $\triangle SAC$ vuông ở A nên $IS = IA = IC$.
Suy ra $IS = IA = IB = IC$ nên I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Do đó, bán kính mặt cầu là



$$R = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;1)$, $B(3;0;-1)$, $C(2;0;3)$. Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và song song với đường thẳng OC có phương trình là

(A) $3x + y - 2z - 5 = 0$. (B) $x - y + z - 2 = 0$.
(C) $4x + 2y + z - 11 = 0$. (D) $3x + 7y - 2z - 11 = 0$.

Lời giải.

Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (α).
Ta có $\begin{cases} AB \subset (\alpha) \\ OC \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{OC} \end{cases}$ nên $\vec{n}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{OC}$.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;-1;-2)$, $\overrightarrow{OC} = (2;0;3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{OC} = (-3;-7;2) = (-1)\cdot(3;7;-2)$. Ta chọn $\vec{n} = (3;7;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (α) là: $3x + 7y - 2z - 11 = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Tính khoảng cách d từ điểm C đến mặt phẳng (SBD).

A $d = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **B** $d = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$. **C** $d = \dfrac{a\sqrt{57}}{19}$. **D** $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của AC và BD.

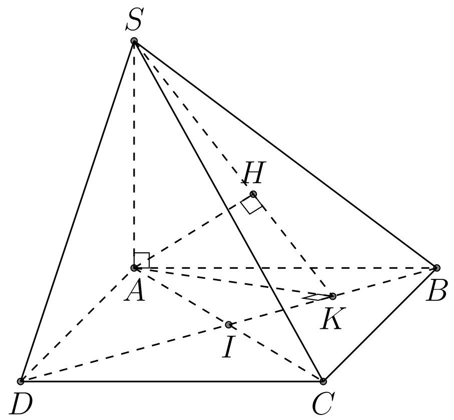
AC cắt (SBD) tại I nên $\dfrac{\mathrm{d}(C,(SBD))}{\mathrm{d}(A,(SBD))} = \dfrac{CI}{AI} = 1$.

Kẻ $AK \perp BD$, $AH \perp SK$, ta có

$\mathrm{d} = \mathrm{d}(C,(SBD)) = \mathrm{d}(A,(SBD)) = AH$.

$AK = \dfrac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

$AH = \dfrac{AK \cdot SA}{\sqrt{AK^2 + SA^2}} = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Số hạng không chứa x trong khai triển $f(x) = \left(x - \dfrac{2}{x^2}\right)^9$, $x \neq 0$ bằng

A 672. **B** 5376. **C** -672. **D** -5376.

Lời giải.

Số hạng tổng quát $T_{k+1} = C_9^k x^{9-k}\left(-\dfrac{2}{x^2}\right)^k = C_9^k(-2)^k x^{9-3k}$.

Số hạng không chứa x ứng với k thỏa $9 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 3$.

Vậy số hạng không chứa x là: $C_9^3(-2)^3 = -672$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích 48. Trên các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt lấy các điểm A', B', C' và D' sao cho $\dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{3}{4}$. Tính thể tích V của khối đa diện $S.A'B'C'D'$.

A $V = 4$. **B** $V = 9$. **C** $V = \dfrac{3}{2}$. **D** $V = 6$.

Lời giải.

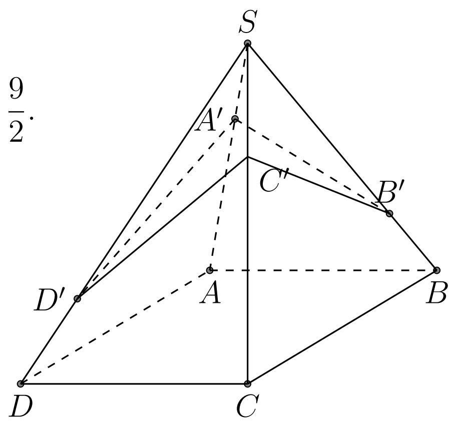
Ta có

$\dfrac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABD}} = \dfrac{SA'}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{3}{16} \Rightarrow V_{S.A'B'D'} = \dfrac{3}{32} V_{S.ABCD} = \dfrac{9}{2}$.

Tương tự $V_{S.B'C'D'} = \dfrac{9}{2}$.

Suy ra thể tích cần tính

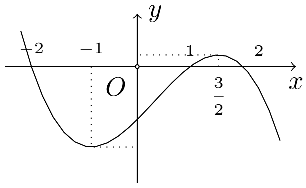
$$V = V_{S.A'B'D'} + V_{S.B'C'D'} = 9.$$



Chọn đáp án (B) □

Câu 31.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(2) = f(-2) = 0$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ có dạng như hình bên. Hàm số $y = (f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau



A $(1; 2)$. B $\left(-1; \dfrac{3}{2}\right)$. C $(-1; 1)$. D $(-2; -1)$.

Lời giải.

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Suy ra $f(x) \le 0$ với mọi x và $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Ta có $y' = 2f'(x).f(x)$. Dấu của y' chính là dấu của $-f'(x)$.

Do đó ta có $y' < 0 \Leftrightarrow x < -2$ hoặc $1 < x < 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Có bao nhiêu mặt cầu (S) có tâm thuộc đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{-2}$, đồng thời tiếp xúc với hai mặt phẳng $(\alpha_1) : 2x + 2y + z - 6 = 0$ và $(\alpha_2) : x - 2y + 2z = 0$.

A 0. B 1. C 2. D Vô số.

Lời giải.

Gọi I là tâm của mặt cầu (S). Do $I \in \Delta$ nên $I(3 + 2t; 1 - t; 1 - 2t)$, ta có

$\mathrm{d}(I, (\alpha_1)) = \mathrm{d}(I, (\alpha_2)) \Leftrightarrow 1 = 1$ (đúng).

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Tính tổng T các nghiệm của phương trình $(\log 10x)^2 - 3\log(100x) = -5$.

A $T = 12$. B $T = 110$. C $T = 11$. D $T = 10$.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình là $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(1 + \log x)^2 - 3(2 + \log x) + 5 = 0 \Leftrightarrow \log^2 x - \log x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log x = 0\\ \log x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1\\ x = 10\end{array}\right. .$$

Do đó $T = 11$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; 1; 0)$, $B(1; -1; 3)$, $C(3; -2; 2)$ và $D(-1; 2; 2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt cầu tiếp xúc với tất cả bốn mặt phẳng (ABC), (BCD), (CDA), (DAB).

A 6. B 7. C 8. D vô số.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;-2;3)$, $\overrightarrow{AC} = (1;-3;2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (5;5;5)$.
Phương trình $(ABC): x+y+z-3=0$. Ta thấy $D \in (ABC)$ nên có vô số mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án D $\square$

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{x} + 2$ với $a,\ b$ là các số hữu tỉ thỏa điều kiện $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2 - 3\ln 2$.

Tính $T = a + b$

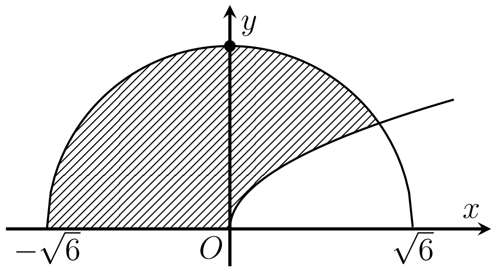
A $T = -2$. B $T = 2$. C $T = -1$. D $T = 0$.

Lời giải.
Ta có

$$2 - 3\ln 2 = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \left(-\frac{a}{x} + b\ln|x| + 2x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = a + b\ln 2 + 1 \Rightarrow \begin{cases} a+1=2 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow a+b=-2.$$

Chọn đáp án A $\square$

Câu 36.
Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{6-x^2}$ $(-\sqrt{6} \le x \le \sqrt{6})$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ bên). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh bởi khi quay hình phẳng D quanh trục Ox



A $V = 4\pi\sqrt{6} + \dfrac{22\pi}{3}$. B $V = 8\pi\sqrt{6} - 2\pi$.
C $V = 8\pi\sqrt{6} - \dfrac{22\pi}{3}$. D $V = 8\pi\sqrt{6} + \dfrac{22\pi}{3}$.

Lời giải.
Gọi $D_1 = \{y = \sqrt{6-x^2},\ Ox,\ x = -\sqrt{6},\ x = 0\}$ và $D_2 = \{y = \sqrt{6-x^2},\ y = \sqrt{x},\ x = 0,\ x = 2\}$.
Khi quay D_1 quanh Ox ta được khối tròn xoay là nửa khối cầu có bán kính $R = \sqrt{6}$ nên có thể tích

$$V_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi\sqrt{6}.$$

Khi quay D_2 quanh trục Ox, khối tròn xoay sinh bởi có thể tích

$$V_2 = \pi \int\limits_0^2 (6 - x^2 - x)\mathrm{d}x = \frac{22\pi}{3}.$$

Vậy thể tích cần tính là $V = V_1 + V_2 = 4\pi\sqrt{6} + \dfrac{22\pi}{3}$.
Chọn đáp án A $\square$

Câu 37. Biết $\displaystyle\int\limits_1^4 \sqrt{\frac{1}{4x} + \frac{\sqrt{x} + e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}}\mathrm{d}x = a + e^b - e^c$ với $a,\ b,\ c$ là các số nguyên. Tính $T = a + b + c$

A $T=-4$. **B** $T=-5$. **C** $T=-3$. **D** $T=3$.

Lời giải.

Ta có

$$\int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}}\mathrm{d}x=\int_1^4 \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+e^{-x}\right)^2}\mathrm{d}x=\int_1^4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+e^{-x}\right)\mathrm{d}x=\left(\sqrt{x}-e^{-x}\right)\Big|_1^4=1-e^{-4}+e^{-1}.$$

Do đó $T=1-1-4=-4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=2a,\ AD=a,\ AA'=a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Tính khoảng cách h từ điểm D đến mặt phẳng $(B'MC)$.

A $h=\dfrac{a}{\sqrt{21}}$. **B** $h=\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **C** $h=\dfrac{3a\sqrt{21}}{7}$. **D** $h=\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải.

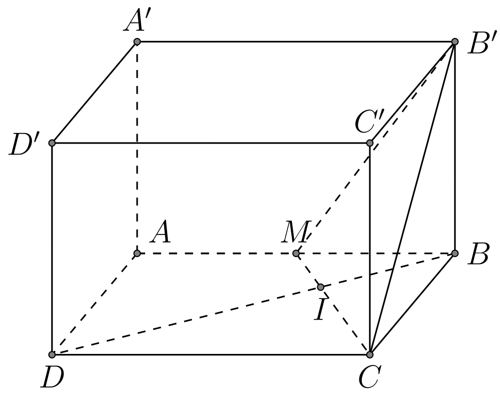
Gọi I là giao điểm của BD với CM, ta có $\dfrac{\mathrm{d}(D,(B'MC))}{\mathrm{d}(B,(B'MC))}=\dfrac{DI}{BI}$.

Ta có $\triangle DIC \backsim \triangle BIM \Rightarrow \dfrac{DI}{BI}=\dfrac{DC}{BM}=2$

$\Rightarrow h=2\,\mathrm{d}(B,(B'MC))$.

Đặt $\mathrm{d}(B,(B'MC))=\mathrm{d}$.

Do tứ diện $BB'MC$ là tứ diện vuông tại B nên



$$\frac{1}{\mathrm{d}^2}=\frac{1}{BB'^2}+\frac{1}{BM^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{7}{3a^2}\Rightarrow \mathrm{d}=\frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Do đó $h=2\mathrm{d}=\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Ba chiếc bình hình trụ cùng chứa 1 lượng nước như nhau, độ cao mực nước trong bình II gấp đôi bình I và trong bình III gấp đôi bình II. Chọn nhận xét đúng về bán kính đáy r_1,r_2,r_3 của ba bình I, II, III.

A r_1,r_2,r_3 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân công bội 2.

B r_1,r_2,r_3 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân công bội $\dfrac{1}{2}$.

C r_1,r_2,r_3 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân công bội $\sqrt{2}$.

D r_1,r_2,r_3 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân công bội $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Gọi h là chiều cao của nước trong bình I, khi đó $2h,\ 4h$ lần lượt là chiều cao của nước trong bình II và III. Theo đề bài ta có

$$\pi hr_1^2=\pi 2hr_2^2=\pi 4hr_3^2\Rightarrow r_1=\sqrt{2}r_2=2r_3.$$

Do đó $r_1,\ r_2,\ r_3$ lập thành CSN có công bội $q=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(-4;-1;3)$, $B(-1;-2;-1)$, $C(3;2;-3)$ và $D(0;-3;-5)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua D và tổng khoảng cách từ A, B, C đến (α) lớn nhất, đồng thời ba điểm A, B, C nằm cùng phía so với (α). Trong các điểm sau, điểm nào thuộc mặt phẳng (α)

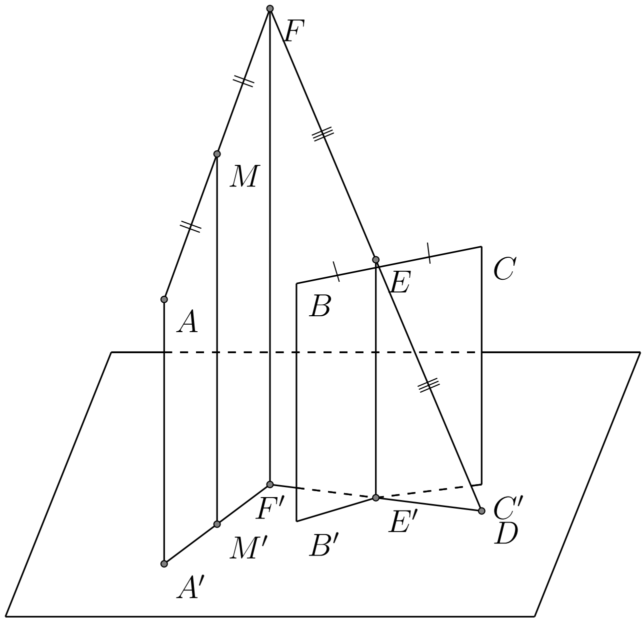
A $E_1(7;-3;-4)$. **B** $E_2(2;0;-7)$. **C** $E_3(-1;-1;-6)$. **D** $E_4(36;1;-1)$.

Lời giải.

Gọi E là trung điểm BC, F là điểm đối xứng với D qua E và M là trung điểm AF. Ta có $E(1;0;-2)$, $F(2;3;1)$ và $M(-1;1;2)$. Gọi A', B', C', E', F', M' tương ứng là hình chiếu của A, B, C, E, F, M lên mặt phẳng (α).

Ta có $\mathrm{d}(A,(\alpha))+\mathrm{d}(B,(\alpha))+\mathrm{d}(C,(\alpha)) = AA'+BB'+CC' = AA'+2EE' = AA'+FF' = 2MM' \leq 2MD$.

Do đó $(\alpha)\perp MD$. Mà $\overrightarrow{MD}=(1;-4;-7)$ nên phương trình $(\alpha): x-4y-7z-47=0$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Cho hàm số $y=|x|^3-3x^2+1$ có đồ thị (C). Hỏi trên trục Oy có bao nhiêu điểm A mà qua A có thể kẻ đến (C) đúng ba tiếp tuyến?

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

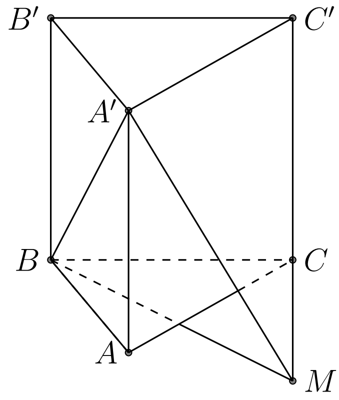
Ta có (C) nhận Oy làm trục đối xứng. Do đó, nếu d là một tiếp tuyến của (C) thì d' đối xứng với d qua Oy cũng là tiếp tuyến của (C). Do đó, để từ A kẻ được đến (C) ba tiếp tuyến thì trong các tiếp tuyến đó, có một tiếp tuyến vuông góc với trục Oy, hay $y'(x_0)=0$. Giải phương trình này ta được $x_0=2$, $x_0=-2$, $x_0=0$. Khi đó $A_1(0;-3)$ và $A_2(0;1)$. Tuy nhiên qua A_1 ta chỉ kẻ đến (C) đúng một tiếp tuyến, còn qua A_2 ta kẻ được đúng 3 tiếp tuyến.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{CM}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$. Cô sin của góc giữa hai mặt phẳng $(A'MB)$ và (ABC) bằng

A $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$. **B** $\dfrac{1}{4}$. **C** $\dfrac{\sqrt{30}}{4}$. **D** $\dfrac{\sqrt{30}}{8}$.

Lời giải.



Đặt φ là góc giữa hai mặt phẳng $(A'MB)$ và (ABC).

Ta có $A'B = a\sqrt{2}$, $BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$,

$A'M = \sqrt{A'C'^2 + C'M^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

Suy ra $A'M^2 = BM^2 + A'B^2$, nên tam giác $A'MB$ vuông tại B.

Do đó $S_{A'MB} = \dfrac{1}{2}BA' \cdot BM = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$, $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vì ΔABC là hình chiếu của $\Delta A'BM$ lên mặt phẳng (ABC) nên cô sin của góc giữa hai mặt phẳng là

$$\cos\varphi = \frac{S_{ABC}}{S_{A'BM}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Biết hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có M và m lần lượt là GTLN, GTNN của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$. Trong các hàm số sau, hàm số nào cũng có GTLN và GTNN tương ứng là M và m?

(A) $y = f\left(x + \sqrt{2 - x^2}\right)$.

B $y = f\left(2\sqrt{(\sin^3 x + \cos^3 x)}\right)$.

(C) $y = f\left(\dfrac{4x}{x^2+1}\right)$.

(D) $y = f\left(\sqrt{2(\sin x + \cos x)}\right)$.

Lời giải.

Ta có

- Xét hàm số $g(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-2;2]$, ta có tập giá trị của hàm $g(x)$ là đoạn $[-2; 2\sqrt{2}]$.
- $0 \le 2\sqrt{\sin^3 x + \cos^3 x} \le 2\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 2$. Suy ra tập giá trị của hàm số $g(x) = 2\sqrt{\sin^3 x + \cos^3 x}$ là đoạn $[0;2]$
- $\dfrac{4|x|}{x^2+1} \le \dfrac{4|x|}{2|x|} = 2$ nên $-2 \le \dfrac{4x}{x^2+1} \le 2$. Suy ra tập giá trị của hàm số $g(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$ là đoạn $[-2;2]$
- $0 \le \sqrt{2(\sin x + \cos x)} \le \sqrt{2 \cdot \sqrt{2(\sin^2 x + \cos^2 x)}} = \sqrt{2\sqrt{2}}$. Suy ra tập giá trị của hàm số $g(x) = \sqrt{2(\sin x + \cos x)}$ là đoạn $[0; \sqrt{2\sqrt{2}}]$.

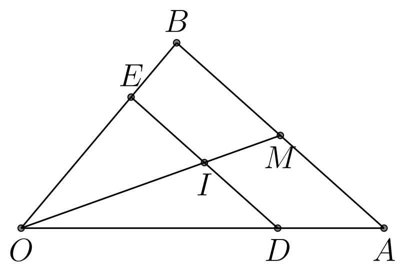
Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;1)$, $B(0;1;-1)$. Hai điểm D, E thay đổi trên các đoạn OA, OB sao cho đường thẳng DE chia tam giác OAB thành hai phần có diện tích bằng nhau. Khi DE ngắn nhất thì trung điểm I của đoạn DE có tọa độ là

A $I\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}; \dfrac{\sqrt{2}}{4}; 0\right)$. (B) $I\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}; \dfrac{\sqrt{2}}{3}; 0\right)$. (C) $I\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}; 0\right)$. (D) $I\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}; 0\right)$.

Lời giải.

Theo đề bài ta có $OA = OB = \sqrt{2}$ và



$$S_{ODE} = \frac{1}{2}S_{OAB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot OD \cdot OE \cdot \sin\widehat{DOE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin\widehat{AOB}$$

$$\Leftrightarrow OD \cdot OE = \frac{1}{2}OA \cdot OB = 1.$$

Mặt khác

$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2OD.OE.\cos\widehat{AOB} \geq 2OD.OE - 2OD.OE.\cos\widehat{AOB} = 2\left(1 - \cos\widehat{AOB}\right)$.

Suy ra DE nhỏ nhất khi $OD = OE = 1$.

Gọi M là trung điểm của AB, ta có $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

Khi đó, $\overrightarrow{OI} = \frac{OI}{OM} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{OD}{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; 0\right)$. Suy ra $I\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; 0\right)$

Chọn đáp án A □

Câu 45. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $y = \frac{1}{3}\cos^3 x - 4\cot x - (m+1)\cos x$ đồng biến trên $(0; \pi)$

A 2. B 3. **C 5.** D vô số.

Lời giải.

Ta có

$$y' = -\sin x.\cos^2 x + \frac{4}{\sin^2 x} + (m+1)\sin x = \sin^3 x + \frac{4}{\sin^2 x} + m\sin x.$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0\ \forall x \in (0; \pi)$, hay

$$\sin^3 x + \frac{4}{\sin^2 x} + m\sin x \geq 0\ \forall x \in (0; \pi) \Leftrightarrow t^2 + \frac{4}{t^3} \geq -m\ \forall t \in (0; 1],$$

với $t = \sin x$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 + \frac{4}{t^3},\ t \in (0; 1]$,ta có

$$f'(t) = 2t - \frac{12}{t^4} = \frac{2(t^5 - 6)}{t^4} < 0\ \forall t \in (0; 1] \Rightarrow \min_{(0;1]} f(t) = f(1) = 5.$$

Do đó ta có $5 \geq -m \Leftrightarrow m \geq -5$. Suy ra $m \in \{-5, -4, -3, -2, -1\}$ nên có 5 giá trị của m.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình

$$\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x + 2 - m$$

có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1

A 4. **B 2.** C 3. D vô số.

Lời giải.

Điều kiện: $3x^2 + 3x + m + 1 > 0$ (do $2x^2 - x + 1 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$).

Đặt $a = 3x^2 + 3x + m + 1,\ b = 4x^2 - 2x + 2$ ta có

$$\log_2 a - \log_2 b = b - a \Leftrightarrow \log_2 a + a = \log_2 b + b \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 - m = 0. \quad (1)$$

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2 > 1$, hay

$$\begin{cases} \Delta = 21 + 4m > 0 \\ x_1 - 1 + x_2 - 1 > 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{21}{4} \\ 1 - m - 5 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{21}{4} < m < -3.$$

Chọn đáp án B □

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) \geq x^4 + \dfrac{2}{x^2} - 2x$, $\forall x > 0$ và $f(1) = -1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) phương trình $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm trên $(0; +\infty)$.

(B) phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(0; 1)$.

C phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(1; 2)$.

(D) phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(2; 5)$.

Lời giải.

Ta có $x^4 + \dfrac{2}{x^2} - 2x \geq 2\sqrt{2x^2} - 2x \geq 0\ \forall x > 0$, nên $f'(x) > 0\ \forall x > 0$, hay hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Suy ra $f(0) < f(1) = -1$ và $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm trên $(0; +\infty)$. Mà

$$f(2) = f(1) + \int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x \geq \int_1^2 \left(x^4 + \frac{2}{x^2} - 2x\right)\mathrm{d}x = \frac{16}{5} > 0.$$

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 48. Biết rằng điều kiện cần và đủ của m để phương trình

$$\log^2_{\frac{1}{2}} (x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x-2} - 8m - 4 = 0$$

có nghiệm thuộc $\left[\dfrac{5}{2}; 4\right]$ là $m \in [a; b]$. Tính $T = a + b$

A $T = -\dfrac{10}{3}$. (B) $T = \dfrac{10}{3}$. (C) $T = 4$. (D) $T = -4$.

Lời giải.

Đặt $t = \log_2(x-2)$ ta có $t \in [-1; 1]$ với mọi $x \in \left[\dfrac{5}{2}; 4\right]$. Khi đó ta có phương trình

$$t^2 + (m-5)t - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 5t - 1}{t - 2} = -m.$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2 - 5t - 1}{t - 2} = t - 3 - \dfrac{7}{t - 2}$, $t \in [-1; 1]$. Ta có

$$f'(t) = 1 + \frac{7}{(t-2)^2} > 0\ \forall t \in [-1; 1].$$

Suy ra với $\forall t \in [-1; 1]$ thì $-\dfrac{5}{3} = f(-1) \leq f(t) \leq f(1) = 5$, nên ta có $-5 \leq m \leq \dfrac{5}{3}$. Do đó $T = -\dfrac{10}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Cho đa giác đều 2018 đỉnh. Hỏi có bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác và có một góc lớn hơn $100°$?

(A) C^3_{1009}. **B** $2018 \cdot \mathrm{C}^2_{896}$. (C) $2018 \cdot \mathrm{C}^3_{897}$. (D) $2018 \cdot \mathrm{C}^3_{895}$.

Lời giải.

Xét đa giác đều $A_1A_2\cdots A_{2018}$ nội tiếp đường tròn (O). Khi đó, các đỉnh của đa giác chia đường tròn (O) thành 2018 cung nhỏ bằng nhau, mỗi cung có số đo bằng $\left(\dfrac{180}{1009}\right)^\circ$.

Xét tam giác $A_iA_1A_j$ với $2 \leq i < j \leq 2018$. Khi đó

$$\widehat{A_iA_1A_j} = \frac{1}{2}(j-i)\cdot\left(\frac{180}{1009}\right)^\circ.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\widehat{A_iA_1A_j} > 100^\circ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(j-i)\cdot\left(\frac{180}{1009}\right)^\circ > 100^\circ \Leftrightarrow j-i > \frac{10\cdot 1009}{9}\\ &\Leftrightarrow j-i > 1121 \Leftrightarrow 2 \leq i < j-1121 \leq 897. \quad (1)\end{aligned}$$

Số tam giác $A_iA_1A_j$ thoản mãn $\widehat{A_iA_1A_j} > 100^\circ$ chính bằng số cách chọn cặp $(i;j)$ thỏa (1) và có C_{896}^2 cách chọn cặp $(i;j)$. Do đó có tất cả $2018\cdot\mathrm{C}_{896}^2$ số tam giác thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = a$ và $u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$ với mọi $n = 1, 2, \cdots$. Có bao nhiêu giá trị của a để $u_{2018} = 0$?

A 3. **B** $2^{2017}+1$. **C** $2^{2016}+1$. **D** $2^{2018}+1$.

Lời giải.

- Nếu $a < 0$ hoặc $a > 1$ thì $u_n < 0\ \forall n \geq 2$, nên $u_{2018} \neq 0$.
- Xét $0 \leq a \leq 1$. Đặt $a = \sin^2\alpha$ với $\alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Khi đó, ta chứng minh được $u_n = \sin^2 2^{n-1}\alpha$.

  Do đó, $u_{2018} = \sin^2 2^{2017}\alpha$. Suy ra $\sin 2^{2017}\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{k\pi}{2^{2017}}$.

  Mà $\alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ nên $0 \leq k \leq 2^{2016}$. Do đó có $2^{2016}+1$ giá trị k và đó cũng chính là số giá trị của a.

Chọn đáp án C □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. B	3. D	4. B	5. A	6. D	7. D	8. B	9. C	10. B
11. C	12. D	13. A	14. B	15. A	16. C	17. C	18. C	19. A	20. C
21. C	22. B	23. A	24. B	25. D	26. C	27. D	28. B	29. C	30. B
31. A	32. D	33. C	34. D	35. A	36. A	37. A	38. D	39. D	40. A
41. B	42. A	43. B	44. A	45. C	46. B	47. C	48. A	49. B	50. C

129 ĐỀ THI THỬ THANH CHƯƠNG 3, NGHỆ AN - LẦN 1, NĂM HỌC 2017-2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Một tổ có 20 học sinh. Số cách chọn ngẫu nhiên 4 học sinh đi lao động là

A C_{20}^{4}. **B** A_{20}^{4}. **C** 4^{20}. **D** 20^{4}.

Lời giải.

Chọn 4 học sinh trong số 20 học sinh có C_{20}^{4} cách chọn.

Chọn đáp án A □

Câu 2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+1}{x-1}$ bằng

A -1. **B** 1. **C** 2. **D** -2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+1}{x-1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-\infty; 0)$. **B** $(0; 1)$. **C** $(-1; 1)$. **D** $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên khoảng nghịch biến là $(0; 1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ trên đoạn $[-2; 2]$.

A $\max\limits_{[-2;2]} f(x) = 14$. **B** $\max\limits_{[-2;2]} f(x) = 13$. **C** $\max\limits_{[-2;2]} f(x) = -4$. **D** $\max\limits_{[-2;2]} f(x) = 23$.

Lời giải.

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 1$.

$y(0) = 5$; $y(-1) = y(1) = 4$; $y(-2) = y(2) = 13$. Vậy $\max\limits_{[-2;2]} f(x) = 13$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Đồ thị hàm số nào trong các hàm số dưới đây có tiệm cận đứng?

A $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. **B** $y = \dfrac{1}{x^4+1}$. **C** $y = \dfrac{1}{x^2+1}$. **D** $y = \dfrac{1}{x^2+x+1}$.

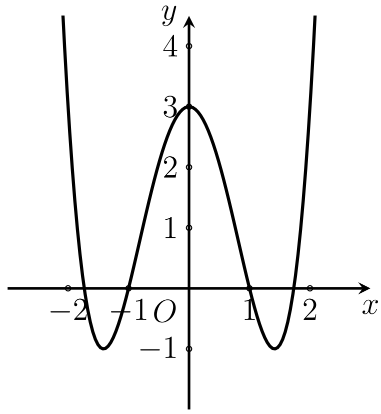
Lời giải.

Do $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Chọn đáp án A □

Câu 6.

Hàm số $y = f(x)$ (có đồ thị như hình vẽ) là hàm số nào trong các hàm số sau



(A) $y = \left(x^2 + 2\right)^2 - 1$.
(B) $y = \left(x^2 - 2\right)^2 - 1$.
(C) $y = -x^4 + 4x^2 + 3$.
(D) $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

Lời giải.

Do đồ thị cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt nên chọn hàm số mà phương trình $y = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình $(x^2 - 2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3)(x^2 - 1) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x - 1)(x^2 - 3x + 2)$ và trục hoành là

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Phương trình $y = 0$ có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Nếu $\log x = \dfrac{2}{3} \log a - \dfrac{1}{5} \log b$ thì x bằng

(A) $a^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{1}{5}}$. (B) $a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{5}}$. (C) $a^{\frac{3}{2}} b^{-\frac{1}{5}}$. (D) $a^{\frac{3}{2}} b^{-5}$.

Lời giải.

Ta có $\log x = \dfrac{2}{3} \log a - \dfrac{1}{5} \log b = \log a^{\frac{3}{2}} b^{-\frac{1}{5}} \Rightarrow x = a^{\frac{3}{2}} b^{-\frac{1}{5}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Một người gửi vào ngân hàng 500 triệu đồng với lãi suất 0,6% một tháng, sau mỗi tháng lãi suất được nhập vào vốn. Hỏi sau một năm người đó rút tiền thì tổng số tiền người đó nhận được là bao nhiêu?

(A) $500 \cdot 1{,}006$ (triệu đồng).
(B) $500 \cdot 1{,}06^{12}$ (triệu đồng).
(C) $500 \cdot (1 + 12 \cdot 0{,}006)^{12}$ (triệu đồng).
(D) $500 \cdot 1{,}006^{12}$ (triệu đồng).

Lời giải.

Công thức lãi suất $A(1 + x\%)^n = 500 \cdot (1 + 0{,}6\%)^{12} = 500 \cdot 1{,}006^{12}$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{3x} \leq 3^{x+2}$ là

(A) $(-\infty; 1)$. (B) $[1; +\infty)$. (C) $(-\infty; 1]$. (D) $(0; 1]$.

Lời giải.

$3^{3x} \leq 3^{x+2} \Leftrightarrow 3x \leq x+2 \Leftrightarrow x \leq 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$.

A $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + C$.

B $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} + C$.

C $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} + C$.

D $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + C$.

Lời giải.

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{-1}\mathrm{e}^{-x} + C = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Tính $I = \int\limits_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

A $I = \dfrac{1}{2}$. **B** $I = 1$. **C** $I = \dfrac{1}{8}$. **D** $I = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

$I = \int\limits_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^{\ln 2} = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và các đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công thức

A $S = \int\limits_a^b \left[|f(x)| - |g(x)|\right]\,\mathrm{d}x$.

B $S = \int\limits_a^b \left[f(x) - g(x)\right]\,\mathrm{d}x$.

C $S = \left|\int\limits_a^b \left[f(x) - g(x)\right]\,\mathrm{d}x\right|$.

D $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Công thức diện tích $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Phần ảo của số phức $z = 2 - 3i$ là

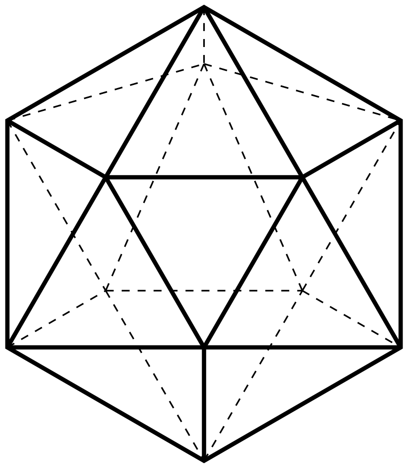
A -3. **B** $-3i$. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Phần ảo là -3.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Khối đa diện bên dưới có bao nhiêu đỉnh?



(A) 9. (B) 3. (C) 11. **D** 12.

Lời giải.

Hình trên có 12 đỉnh.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính r là

(A) $V = \pi r^2 h$. (B) $V = 2\pi r^2 h$. (C) $V = \dfrac{1}{6}\pi r^2 h$. **D** $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Lời giải.

$V = \dfrac{1}{3} S \cdot h = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Gọi l, h, R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình trụ (T). Diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ (T) là

(A) $S_{xq} = \pi Rl$. (B) $S_{xq} = \pi Rh$. **C** $S_{xq} = 2\pi Rl$. (D) $S_{xq} = \pi R^2 h$.

Lời giải.

Công thức $S_{xq} = 2\pi Rl$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ đi qua điểm $A(1;1;2)$ có phương trình là

(A) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 2$. **B** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$.

(C) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{2}$. (D) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Bán kính $R = IA = \sqrt{2}$ nên phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Lập phương trình của mặt phẳng đi qua $A(2;6;-3)$ và song song với mặt phẳng (Oyz).

A $x = 2$. (B) $x + z = 12$. (C) $y = 6$. (D) $z = -3$.

Lời giải.

Mặt phẳng song song với (Oyz) có dạng $x + d = 0\,(d \neq 0)$.

Mặt phẳng đi qua A nên $d = -2 \Rightarrow$ mặt phẳng cần tìm là $x - 2 = 0$ hay $x = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}=(4;-6;2)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

A $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=-6t \\ z=1+2t \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x=4+2t \\ y=-6-3t \\ z=2+t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-3t \\ z=1+t \end{cases}$.

Lời giải.

Do $(2;-2;1)$ cũng là véc-tơ chỉ phương nên phương trình tham số là $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t \end{cases}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Phương trình $\cot 3x=\cot x$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $(0;10\pi]$?

(A) 9. (B) 20. (C) 19. **D** 10.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq m\pi$ và $x\neq m\dfrac{\pi}{3}$, $m\in\mathbb{Z}$.

$\cot 3x=\cot x\Leftrightarrow 3x=x+k\pi\Leftrightarrow x=k\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$	5π	$\frac{11\pi}{2}$	6π	$\frac{13\pi}{2}$	7π	$\frac{15\pi}{2}$	8π	$\frac{17\pi}{2}$	9π	$\frac{19\pi}{2}$	10π
		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1

Như vậy ta có 10 nghiệm thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Số hạng của x^{31} trong khai triển $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^{40}$ là

A $\mathrm{C}_{40}^{37}x^{31}$. (B) $\mathrm{C}_{40}^{31}x^{31}$. (C) $\mathrm{C}_{40}^{2}x^{31}$. (D) $\mathrm{C}_{40}^{4}x^{31}$.

Lời giải.

Ta có $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^{40}=\sum\limits_{k=0}^{40}\mathrm{C}_{40}^{k}x^{40-k}\dfrac{1}{x^{2k}}=\sum\limits_{k=0}^{40}\mathrm{C}_{40}^{k}x^{40-3k}$.

Để tìm hệ số của x^{31} ta chọn $k=3$. Khi đó số hạng cần tìm là $\mathrm{C}_{40}^{3}x^{31}=\mathrm{C}_{40}^{37}x^{31}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Khối 12 có 9 học sinh giỏi, khối 11 có 10 học sinh giỏi, khối 10 có 3 học sinh giỏi. Chọn ngẫu nhiên 2 học sinh trong số đó. Xác suất để 2 học sinh được chọn cùng khối là

(A) $\dfrac{2}{11}$. **B** $\dfrac{4}{11}$. (C) $\dfrac{3}{11}$. (D) $\dfrac{5}{11}$.

Lời giải.

Chọn ngẫu nhiên hai học sinh trong số đó có C_{22}^{2} cách.

Chọn hai học sinh cùng khối trong số đó có $\mathrm{C}_{9}^{2}+\mathrm{C}_{10}^{2}+\mathrm{C}_{3}^{2}$.

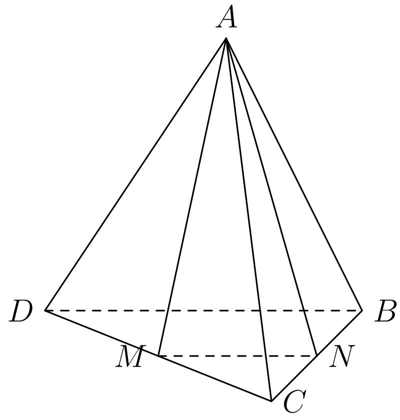
Xác suất cần tìm là $\dfrac{4}{11}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Tứ diện đều $ABCD$ cạnh a, M là trung điểm của cạnh CD. Cô-sin của góc giữa AM và BD là

A $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm của BC. Do $MN \parallel BD$ nên góc giữa AM và BD bằng góc giữa AM và MN. Suy ra góc cần tìm là góc $\widehat{AMN}$. Ta có

$$\cos\widehat{AMN} = \frac{MA^2 + MN^2 - AN^2}{2MA \cdot MN} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Cho số phức $z = a + bi\,(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $(z + 1 + i)(\overline{z} - i) + 3i = 9$ và $|\overline{z}| > 2$. Tính $P = a + b$.

(A) -3. (B) -1. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $(z+1+i)(\overline{z}-i)+3i = 9 \Leftrightarrow z\overline{z}+i(\overline{z}-z)+\overline{z}-i+1+3i = 9 \Leftrightarrow a^2+b^2+2b+a-bi+1+2i = 9$.
Do đó $b = 2$ và $a^2 + a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $a = -1$. Do $|\overline{z}| > 2$ nên ta chọn $a = -1$. Vậy $P = 1$.

Chọn đáp án (C) □

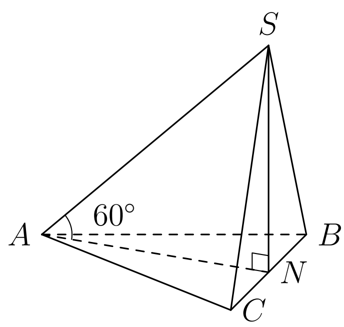
Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc S lên mặt đáy trùng với trung điểm của cạnh BC, góc giữa SA và mặt phẳng đáy bằng 60°. Thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a là

(A) $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. (B) $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. (C) $\frac{a^3}{4}$. (D) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Ta có $AN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SN = AN \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$.

Do đó $V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SN = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.



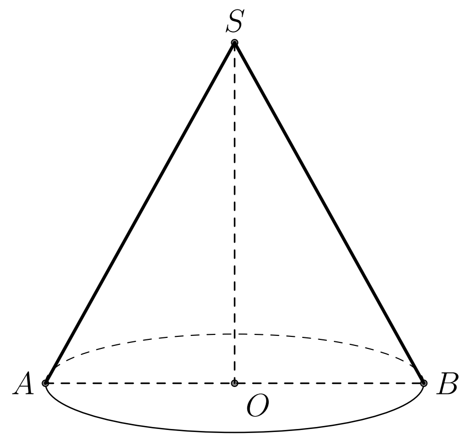
Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Cắt một hình nón bởi một mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là một tam giác đều cạnh bằng a. Tính thể tích của khối nón tương ứng.

(A) $\pi a^3\sqrt{3}$. (B) $\frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{9}$. (C) $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$. (D) $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải.

$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$.



Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy bằng $30°$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có một đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ và chiều cao bằng chiều cao của hình chóp $S.ABCD$.

(A) $S_{xq} = \frac{\pi a^2\sqrt{6}}{12}$. (B) $S_{xq} = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{12}$. (C) $S_{xq} = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{6}$. **D** $S_{xq} = \frac{\pi a^2\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải.

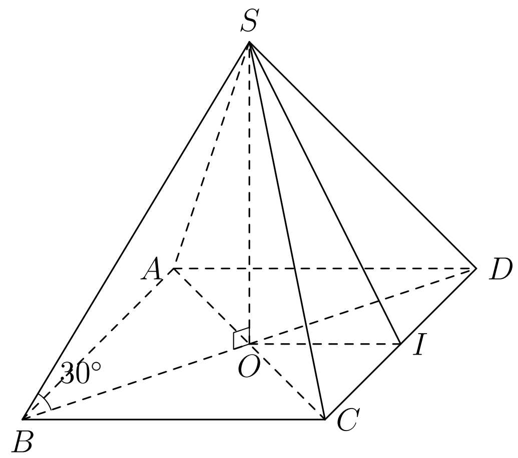
Chiều cao của hình trụ là

$h = SO = OB \cdot \tan 30° = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Đáy hình trụ nội tiếp hình vuông $ABCD$ nên có bán kính

$R = OI = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

$S_{xq} = 2\pi \cdot R \cdot h = 2\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{\pi a^2\sqrt{6}}{6}$.



Chọn đáp án D □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2; 1; 3)$, $B(1; -2; 1)$ và song song với đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$.

(A) $2x + y + 3z + 19 = 0$. **B** $10x - 4y + z - 19 = 0$.

(C) $2x + y + 3z - 19 = 0$. (D) $10x - 4y + z + 19 = 0$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB} = (-1; -3; -2)$ và $\vec{u}_d = (1; 2; -2)$.

Do AB nằm trong (P) và d song song với (P) nên $\vec{n}_{(P)} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}_d\right] = (10; -4; 1)$.

Từ đó $(P)\colon 10(x - 2) - 4(y - 1) + (z - 3) = 0 \Leftrightarrow 10x - 4y + z - 19 = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x + 2y + 2z - 4 = 0$. Phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ là

A $d\colon \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 - 2t \quad (t \in \mathbb{R}). \\ z = 1 - t \end{cases}$

B $d\colon \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + t \quad (t \in \mathbb{R}). \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

C $d\colon \begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = -1 + 3t \;\; (t \in \mathbb{R}). \\ z = 4 - t \end{cases}$

D $d\colon \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 3 - 3t \quad (t \in \mathbb{R}). \\ z = 3 - 2t \end{cases}$

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}, \vec{u}_\Delta] = (-4; 3; -1)$.

d đi qua giao điểm của Δ và (P) là A có tọa độ thỏa mãn phương trình của Δ và (P).

Tọa độ A là $(-2; -1; 4)$. Nên $d\colon \begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = -1 + 3t \;\; (t \in \mathbb{R}). \\ z = 4 - t \end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 31.

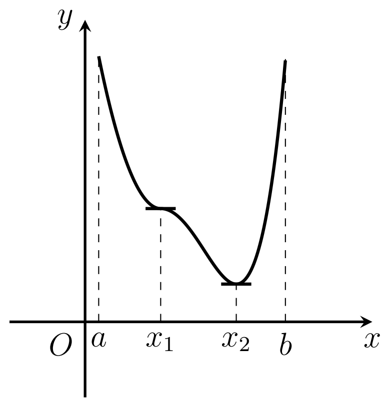
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

A Hàm số nghịch biến trong khoảng $(x_1; x_2)$.

B $f'(x) > 0, \forall x \in (x_2; b)$.

C Hàm số nghịch biến trong khoảng $(a; x_2)$.

D $f'(x) < 0, \forall x \in (a; x_2)$.



Lời giải.

Tại x_1 tiếp tuyến song song với trục hoành nên $f'(x_1) = 0$.

Suy ra khẳng định **sai** là $f'(x) < 0, \forall x \in (a; x_2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^3 - mx + \dfrac{3}{28x^7}$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

A $m \le -\dfrac{15}{4}$. **B** $-\dfrac{15}{4} \le m \le 0$. **C** $m \ge -\dfrac{15}{4}$. **D** $-\dfrac{15}{4} < m \le 0$.

Lời giải.

Ta cần có $y' \le 0,\ \forall x > 0 \Leftrightarrow -3x^2 - \dfrac{3}{4x^8} - m \le 0,\ \forall x > 0 \Leftrightarrow m \ge -3x^2 - \dfrac{3}{4x^8},\ \forall x > 0$

Như vậy $m \ge \max\limits_{x>0} f(x)$ với $f(x) = -3x^2 - \dfrac{3}{4x^8}$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{6}{x^9} - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Nên $\max\limits_{x>0} f(x) = -\dfrac{15}{4}$. Vậy $m \ge -\dfrac{15}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2+2x+m-4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của m là

(A) 5. (B) 4. (C) 1. **(D) 3.**

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 2x + m - 4$ trên đoạn $[-2; 1]$. Ta có $f'(x) = 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.
Ta có $f(-2) = m - 4$, $f(1) = m - 1$ và $f(-1) = m - 5$.
Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho là $\max\{|m-4|, |m-1|, |m-5|\}$.
Ta thấy $m - 5 < m - 4 < m - 1$ nên $|m-4| < \max\{|m-1|, |m-5|\}$. Do đó $\max\{|m-4|, |m-1|, |m-5|\} = \max\{|m-1|, |m-5|\}$.
Đặt $A = m - 1 = (m-3) + 2$ và $m = m - 5 = (m-3) - 2$.

- $m - 3 > 0 \Rightarrow \max\{|A|, |B|\} \geq |A| > 2$.
- $m - 3 < 0 \Rightarrow \max\{|A|, |B|\}|B| > 2$.
- $m - 3 = 0 \Rightarrow \max\{|A|, |B|\} = |A| = |B| = 2$

Vậy để giá trị giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất thì $m = 3$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 34. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$ có đồ thị (C) và điểm $A(0; a)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để có đúng hai tiếp tuyến của (C) đi qua A. Tổng các giá trị các phần tử của S là

(A) 1. (B) -1. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm thuộc đồ thị (C).
Khi đó tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình là $\Delta\colon y = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + (x_0^3 - 3x_0^2)$.
Để có hai đường tiếp tuyến Δ đi qua A thì phương trình ẩn x_0 sau có hai nghiệm phân biệt

$$\begin{aligned} & a = (3x_0^2 - 6x_0)(0 - x_0) + (x_0^3 - 3x_0^2) \\ & \Leftrightarrow a = -3x_0^3 + 6x_0^2 + x_0^3 - 3x_0^2 \\ & \Leftrightarrow a = -2x_0^3 + 3x_0^2 \quad (1) \end{aligned}$$

Để (1) có hai nghiệm thì a bằng giá trị cực tiểu hoặc cực đại của hàm số $f(x) = -2x^3 + 3x^2$.
Như vậy $a = 0$ hoặc $a = 1$. Nên $S = 1$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Cho phương trình $\log_2 x \cdot \log_3 x + x \cdot \log_3 x + 3 = \log_2 x + 3\log_3 x + x$. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình là

(A) 35. (B) 9. **(C) 5.** (D) 10.

Lời giải.

$\log_2 x \cdot \log_3 x + x \cdot \log_3 x + 3 = \log_2 x + 3\log_3 x + x \Leftrightarrow (\log_3 x - 1)(\log_2 x + x - 3) = 0$.
Nếu $\log_3 x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.
Nếu $\log_2 x + x - 3 \Leftrightarrow x = 2$ (do vế trái là hàm đồng biến nên $x = 2$ là nghiệm duy nhất).
Tổng các nghiệm là 5.
Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1 + \sqrt{-2 + \log u_1 - 2\log u_8} = 2\log u_{10}$ và $u_{n+1} = 10u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó u_{2018} bằng

A 10^{2000}. **B** 10^{2008}. **C** 10^{2018}. **D** 10^{2017}.

Lời giải.

Do $u_8 = 10^7 u_1$ và $u_{10} = 10^9 u_1$ nên $\log u_1 + \sqrt{-16 - \log u_1} = 2\log u_1 + 18$.

Đặt $t = \sqrt{-16 - \log u_1} \Rightarrow \log u_1 = -16 - t^2 \Rightarrow -16 - t^2 + t = 2(-16 - t^2) + 18 \Rightarrow t = 1$.

Do đó $\log u_1 = -17 \Rightarrow u_1 = 10^{-17} \Rightarrow u_{2018} = 10^{2017} u_1 = 10^{2000}$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $4^{x^2} - 3 \cdot 2^{x^2+1} + m - 3 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt?

A 4. **B** 12. **C** 9. **D** 3.

Lời giải.

Đặt $t = 2^{x^2}$ $(t \geq 1)$, Ta cần phương trình $t^2 - 6t + m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

Ta có $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 2 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - m > 0 \\ m - 8 > 0 \end{cases}$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m là $9, 10, 11$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{3}{x+1}$; $f(0) = 1$ và $f(1) + f(-2) = 2$. Giá trị $f(-3)$ bằng

A $1 + 2\ln 2$. **B** $1 - \ln 2$. **C** 1. **D** $2 + \ln 2$.

Lời giải.

Trên khoảng $(-\infty; -1)$ nguyên hàm của $f(x)$ là $3\ln|x+1| + C_1$.

Trên khoảng $(-1; +\infty)$ nguyên hàm của $f(x)$ là $3\ln|x+1| + C_2$.

$f(0) = 1$ nên $3\ln 1 + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 1$.

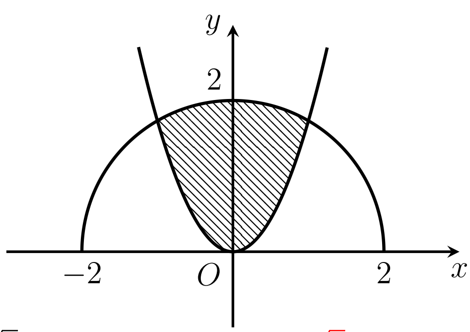
$f(1) + f(-2) = 2$ nên $3\ln 2 + 1 + 3\ln 1 + C_1 = 2 \Rightarrow C_1 = 1 - 3\ln 2$.

$f(-3) = 3\ln 2 + 1 - 3\ln 2 = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 39.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3}x^2$ và nửa đường tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$ với $-2 \leq x \leq 2$ (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A $\dfrac{2\pi + 5\sqrt{3}}{3}$. **B** $\dfrac{4\pi + 5\sqrt{3}}{3}$. **C** $\dfrac{4\pi + \sqrt{3}}{3}$. **D** $\dfrac{2\pi + \sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm có nghiệm là $x = \pm 1$. Do đó diện tích cần tìm là

$S = \int\limits_{-1}^{1} (\sqrt{4-x^2} - \sqrt{3}x^2)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{3}x^2\,\mathrm{d}x = I - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, với $I = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$

Để tính I đặt $x = 2\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\cos t\,\mathrm{d}t$.

Nên $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 4\cos^2 t\,\mathrm{d}t = (2t - \sin 2t)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \dfrac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$.

Do đó $S = \dfrac{2\pi + \sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Cho số phức $u = 3 + 4i$. Nếu $z^2 = u$ thì ta có

(A) $\left[\begin{array}{l} z = 4 + i \\ z = -4 - i \end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l} z = 1 + 2i \\ z = 2 - i \end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l} z = 2 + i \\ z = -2 - i \end{array}\right.$. (D) $\left[\begin{array}{l} z = 1 + i \\ z = 1 - i \end{array}\right.$.

Lời giải.

Với $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ ta có $z^2 = u \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = 3 + 4i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases} \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 41. Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z - 1| = |z + 3 - 2i|$ và $w = z + m + i$ với $m \in \mathbb{R}$ là tham số. Giá trị của m để ta luôn có $|w| \geq 2\sqrt{5}$ là

(A) $\left[\begin{array}{l} m \geq 7 \\ m \leq 3 \end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l} m \geq 7 \\ m \leq -3 \end{array}\right.$. (C) $-3 \leq m < 7$. (D) $3 \leq m \leq 7$.

Lời giải.

Ta có $z = w - m - i$ nên $|w - m - 1 - i| = |w - m + 3 - 3i|$

Gọi $w = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Ta có

$|(a-m-1)+(b-1)i| = |(a-m+3)+(b-3)i| \Leftrightarrow (a-m-1)^2+(b-1)^2 = (a-m+3)^2+(b-3)^2$

Suy ra $b = 2a - 2m + 4$. Ta lại có

$|w|^2 = a^2 + b^2 = a^2 + (2a - 2m + 4)^2 = 5a^2 + 8(2-m)a + 4m^2 - 16m + 16$.

Để $|w| \geq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow 5a^2 + 8(2-m)a + 4m^2 - 16m - 4 \geq 0$ với mọi a.

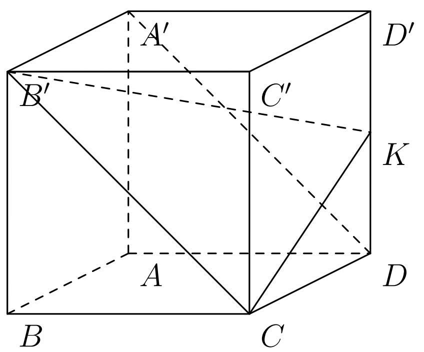
Tương đương với $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow 16(2-m)^2 - 5(4m^2 - 16m - 4) \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 7 \\ m \leq -3 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm của DD'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$

(A) $\dfrac{4a}{3}$. (B) $\dfrac{a}{3}$. (C) $\dfrac{2a}{3}$. (D) $\dfrac{3a}{4}$.

Lời giải.



Mặt phẳng $(B'CK)$ chứa CK và song song với $A'D$ nên khoảng cách cần tìm là khoảng cách từ D đến $(B'CK)$.

Ta có $V_{B'.CDK} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{CDK} \cdot B'C' = \dfrac{a^3}{12}$.

Để tính $S_{B'CK}$ ta tính các cạnh $B'C = a\sqrt{2}$, $CK = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ và $B'K = \dfrac{3a}{2}$. Sử dụng công thức He-rong ta có $S_{B'CK} = \dfrac{3a^2}{4}$.

Từ đây ta có $d(D,(B'CK)) = \dfrac{3V_{B'.CDK}}{S_{B'CK}} = \dfrac{a}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;0;-3)$, $B(2;0;-1)$ và $(P)\colon 3x - 8y + 7z - 1 = 0$. Có bao nhiêu điểm C trên mặt phẳng (P) sao cho $\triangle ABC$ đều?

A Vô số. **B** 1. **C** 3. **D** 2.

Lời giải.

$\triangle ABC$ đều nên $CA = CB = AB$. Suy ra C thuộc đường tròn là giao của mặt cầu tâm A đi qua B và mặt cầu tâm B đi qua A.

Đường tròn này là đường tròn tâm $I(1;0;-2)$ và có bán kính $R = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$.

Cuối cùng vì C thuộc (P) nên C là giao của đường tròn trên và (P).

Ta chỉ cần so sánh $\mathrm{d}(I,(P))$ và R. Ta có $\mathrm{d}(I,(P)) = \dfrac{|3\cdot 1 - 8\cdot 0 + 7\cdot(-2) - 1|}{\sqrt{3^2+8^2+7^2}} = \dfrac{12}{\sqrt{122}} < R$ nên sẽ có 2 điểm C thỏa bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d và mặt cầu (S) lần lượt có phương trình là $d\colon \dfrac{x+3}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{2}$; $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-18=0$. Biết d cắt (S) tại hai điểm M, N thì độ dài đoạn MN là

A $MN = \dfrac{\sqrt{30}}{3}$. **B** $MN = \dfrac{20}{3}$. **C** $MN = \dfrac{16}{3}$. **D** $MN = 8$.

Lời giải.

Bán kính mặt cầu (S) là $R = \sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2-(-18)} = 2\sqrt{6}$ và tâm $I(1;-2;-1)$.

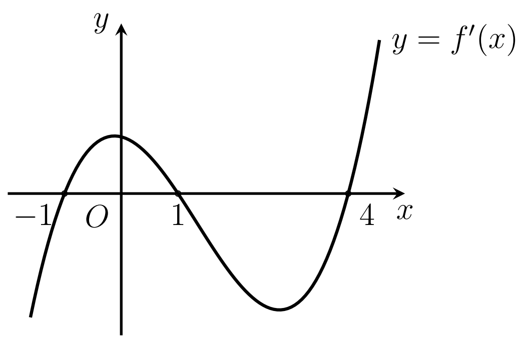
Khoảng cách từ I đến d là $d(I,(d)) = \dfrac{|[\overrightarrow{MI},\vec{u}]|}{|\vec{u}|} = \dfrac{\sqrt{116}}{3}$.

Gọi H là trung điểm của MN, theo định lý pytago ta có $HM^2 = R^2 - IH^2 = \dfrac{10}{3} \Rightarrow MN = \dfrac{20}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 45.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A $(1;4)$. **B** $(-1;0)$. **C** $(-2;-1)$. **D** $(-\infty;-1)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2xf'(x^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{array}\right.$.

Để hàm số nghịch biến thì $y' \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ f'(x^2) \le 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x \le 0 \\ f'(x^2) \ge 0 \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} x \ge 0 \\ f'(x^2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 1 \le x^2 \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le x \le 2.$

và $\begin{cases} x \le 0 \\ f'(x^2) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ 0 \le x^2 \le 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x \le 0 \\ x^2 \ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \le -2$ hoặc $-1 \le x \le 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho $f(x) = (m^4+1)x^4 + (-2^{m+1}m^2 - 4)x^2 + 4^m + 16$, $m \in \mathbb{R}$. Số cực trị của hàm số $y = |f(x) - 1|$ là

A 3. **B** 5. **C** 6. **D** 7.

Lời giải.

$f'(x) = 4(m^4+1)x^3 + 2(-2^{m+1}m^2 - 4)x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm\sqrt{\dfrac{2^m \cdot m^2 + 2}{m^4 + 1}}$.

Giá trị cực tiểu của hàm số là

$y = -\dfrac{(2^m \cdot m^2 + 2)^2}{m^4+1} + 4^m + 16 = \dfrac{16m^4 - 2^{m+2}m^2 + 2^{2m} + 12}{m^4+1} = \dfrac{12m^4 + (2m^2 - 2^m)^2 + 12}{m^4+1} \ge 12$

với mọi m.

Do đó $f(x) - 1 > 0$ và hàm số $y = |f(x) - 1| = f(x) - 1$ cũng có ba điểm cực trị.

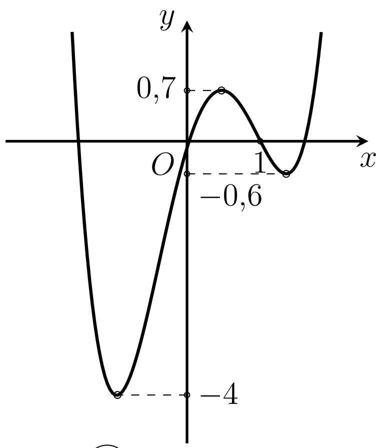
Cách khác: Để chứng minh $y \ge 12$. Ta có

$y = (m^4x^4 - 2^{m+1}m^2x^2 + 4^m) + (x^4 - 4x^2 + 4) + 12 = (m^2x^2 - 2^m)^2 + (x^2 - 2)^2 + 12 \ge 12.$

Chọn đáp án A □

Câu 47.

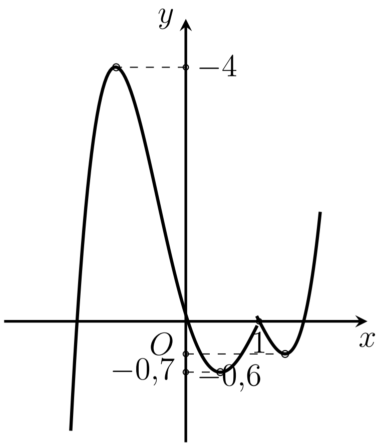
Cho hàm số $y = f(x) \cdot (x-1)$ liên tục và có đồ thị như hình vẽ
Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x)|x-1| = m$ có số nghiệm lớn nhất.



A $(-0{,}6;0)$. **B** $(-0{,}7;-0{,}6)$. **C** $(0;0{,}6)$. **D** $(0{,}6;0{,}7)$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $f(x)|x-1|$ như sau



Để Phương trình $f(x)|x-1| = m$ có số nghiệm lớn nhất thì $m \in (-0{,}6; 0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$, biết $f'(x) + (2x + 3)f^2(x) = 0$, $f(x) > 0$ với mọi $x > 0$ và $f(1) = \dfrac{1}{6}$. Tính giá trị của $P = 1 + f(1) + f(2) + \cdots + f(2017)$

A $\dfrac{6059}{4038}$. **B** $\dfrac{6055}{4038}$. **C** $\dfrac{6053}{4038}$. **D** $\dfrac{6047}{4038}$.

Lời giải.

$f'(x)+(2x+3)f^2(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = -2x-3$. Lấy nguyên hàm hai vế ta có $-\dfrac{1}{f(x)} = -x^2-3x+C$.

Do $f(1) = \dfrac{1}{6}$ nên $C = -2$.

Vậy $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+2} = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$.

Do đó $P = 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2018} - \dfrac{1}{2019} = \dfrac{6055}{4038}$.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Biết $\displaystyle\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \dfrac{1 - x\tan x}{x^2\cos x + x}\,\mathrm{d}x = \ln\dfrac{\pi - a}{\pi - b}$ $(a, b \in \mathbb{Z})$. Tính $P = a + b$.

A $P = 2$. **B** $P = -4$. **C** $P = 4$. **D** $P = -2$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \dfrac{1 - x\tan x}{x^2\cos x + x}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \dfrac{\cos x - x\sin x}{x^2\cos^2 x + x\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = x\cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = (\cos x - x\sin x)\,\mathrm{d}x$

Đổi cận $x = \dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow t = -\dfrac{\pi}{3}$; $x = \pi \Rightarrow t = -\pi$.

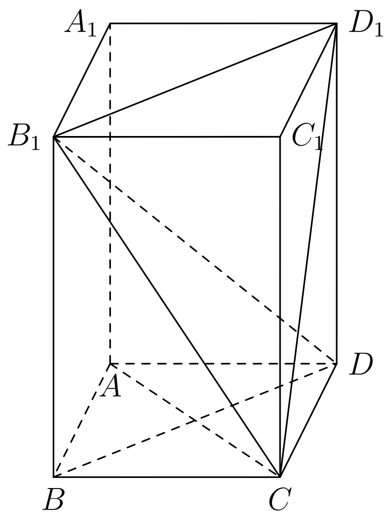
$I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\pi} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^2+t} = \ln\left|\dfrac{t}{t+1}\right|\Bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{-\pi} = \ln\dfrac{\pi-3}{\pi-1} \Rightarrow P = a + b = 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh đáy bằng 1 và chiều cao bằng x. Tìm x để góc tạo bởi đường thẳng B_1D và (B_1D_1C) lớn nhất.

A $x = 1$. **B** $x = 0{,}5$. **C** $x = 2$. **D** $x = \sqrt{2}$.

Lời giải.



Góc tạo bởi đường thẳng B_1D và (B_1D_1C) là α. Ta có

$\sin\alpha = \dfrac{\mathrm{d}(D,(B_1D_1C))}{DB_1} = \dfrac{\mathrm{d}(C_1,(B_1D_1C))}{DB_1}$

Ta có $\dfrac{1}{\mathrm{d}^2(C_1,(B_1D_1C))} = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2x^2+1}{x^2}$

$\Rightarrow \mathrm{d}(C_1,(B_1D_1C)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$

mà $DB_1 = \sqrt{2+x^2}$ nên $\sin\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{(2+x^2)(1+2x^2)}}$.

Để góc α lớn nhất thì $\sin\alpha$ lớn nhất.

Tức là hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{(2+x^2)(1+2x^2)}}$ lớn nhất.

Ta có $(1+1+x^2)(1+x^2+x^2) \geq (3\sqrt[3]{x^2})(3\sqrt[3]{x^4}) = 9x^2 \Rightarrow f(x) \leq \dfrac{1}{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = 1$.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. C	3. B	4. B	5. A	6. B	7. C	8. C	9. D	10. C
11. A	12. D	13. D	14. A	15. D	16. D	17. C	18. B	19. A	20. A
21. D	22. A	23. B	24. A	25. C	26. B	27. C	28. D	29. B	30. C
31. D	32. C	33. D	34. A	35. C	36. A	37. D	38. C	39. D	40. C
41. B	42. B	43. D	44. B	45. B	46. A	47. A	48. B	49. C	50. A

130 131 ĐỀ THI THỬ ĐẠI HỌC (2017-2018), TRƯỜNG THPT HỒNG LĨNH, HÀ TĨNH

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho số phức $z = 1 + i\sqrt{3}$. Số phức liên hợp của z là

A $\overline{z} = 1 - i\sqrt{3}$. **B** $\overline{z} = -\sqrt{3} - i$. **C** $\overline{z} = -1 + i\sqrt{3}$. **D** $\overline{z} = \sqrt{3} + i$.

Lời giải.

$$z = a + ib \Rightarrow \overline{z} = a - bi.$$

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -2$ và công sai $d = 3$. Số hạng u_2 là

A $u_2 = -5$. **B** $u_2 = -6$. **C** $u_2 = 1$. **D** $u_2 = 4$.

Lời giải.

$$u_2 = u_1 + d = -2 + 3 = 1.$$

Chọn đáp án C □

Câu 3. Vectơ $\vec{n} = (1; -2; 1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng nào dưới đây

A $x + 2y + z + 2 = 0$. **B** $x - 2y - z - 2 = 0$.

C $x + y - 2z + 1 = 0$. **D** $x - 2y + z + 1 = 0$.

Lời giải.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $ax + by + cz + d = 0$ chính là hệ số của x, y, z.

Chọn đáp án D □

Câu 4. $\lim \dfrac{n^2 - 3n^3}{2n^3 + 5n - 2}$ bằng

A $\dfrac{1}{2}$. **B** $\dfrac{1}{5}$. **C** $-\dfrac{3}{2}$. **D** 0.

Lời giải.

$$\lim \frac{n^2 - 3n^3}{2n^3 + 5n - 2} = \lim \frac{\frac{1}{n} - 3}{2 + \frac{5}{n^2} - \frac{2}{n^3}} = -\frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 5. Tập hợp tất cả các nghiệm thực của phương trình $\mathrm{A}_x^3 = 20x$ là

A $\{6\}$. **B** $\{-3; 6\}$. **C** $\{-3\}$. **D** $\{4\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 3, x \in \mathbb{N}^*$.

Theo đầu bài:

$$\mathrm{A}_x^3 = 20x \Leftrightarrow \frac{x!}{(x-3)!} = 20x$$
$$\Leftrightarrow x(x-1)(x-2) = 20x \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 20$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -3\,(\text{loại}) \end{array}\right. .$$

Vậy $x = 6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau. Khẳng định nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	-1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1

(A) Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận có phương trình $y = -1$.
(B) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$ tiệm cận ngang $y = 1$.
(C) Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận có phương trình $x = 1$.
D Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$ tiệm cận ngang $y = -1$.

Lời giải.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b (a < b)$ được tính theo công thức.

(A) $\int\limits_b^a |f(x)|\,\mathrm{d}x$. (B) $\pi \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. (C) $\pi \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **D** $\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Cho khối chóp có thể tích $V = 18\,(\text{cm}^3)$ và diện tích mặt đáy $B = 6\,(\text{cm}^2)$. Chiều cao của khối chóp là

(A) $h = 36\,()$. (B) $h = 3\,(\text{cm})$. **C** $h = 9\,(\text{cm})$. (D) $h = 1\,(\text{cm})$.

Lời giải.

$$V = \frac{1}{3}.B.h \Leftrightarrow h = \frac{3V}{B} = \frac{3.18}{6} = 9\,(\text{cm}).$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Với số thực a thỏa mãn $a > 0$ và $a \neq 1$ thì mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $\log_a x^n = n \log_a x (x > 0)$.
(B) $\log_a \sqrt[n]{x} = n \log_a x (x > 0$, n là số nguyên dương lẻ).
(C) $\log_{a^n} x = n \log_a x (x > 0, n$ khác $0)$.

(D) $\log_a x^n = n \log_a x (x \neq 0$, n là số nguyên dương chẵn).

Lời giải.

Theo định lí 3(bài Logarit) thì: Lôgarit của một lũy thừa bằng tích của số mũ với lôgarit của cơ số.

Chọn đáp án (A) □

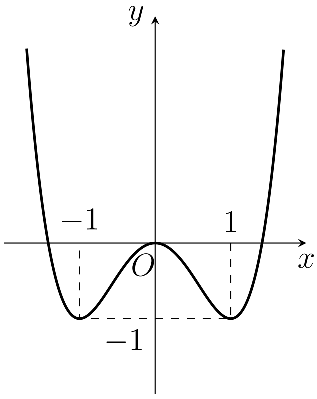
Câu 10. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 - x + x^2$ là

(A) $F(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + C$.
(B) $F(x) = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + C$.
(C) $F(x) = -1 + 2x + C$.
(D) $F(x)x - x^2 + x^3 + C$.

Lời giải.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây



(A) $y = -x^4 + 4x^2$.
(B) $y = -x^4 - 2x^2$.
(C) $y = x^4 + 2x^2$.
(D) $y = x^4 - 2x^2$.

Lời giải.

Nhìn đồ thị ta thấy đây là đồ thị của hàm số bậc 4 với hệ số của x^4 là dương. Ta loại đáp án A, B
Đồ thị đi qua điểm $(1; -1)$. Loại đáp án C.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	3	↗	4	↘	$-\infty$

(A) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 3.
(B) Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.
(C) Hàm số có ba điểm cực trị.
(D) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 0.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy

- Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm 1$. Giá trị cực đại $y = 4$.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$. Giá trị cực tiểu là $y = 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-2) < 3$ là

A $(-\infty; 10)$. B $(2; 6)$. C $(2; 10)$. D $[2; 10)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 2$.

Phương trình tương đương với: $x - 2 < 8 \Leftrightarrow x < 10$.

Kết hợp với điều kiện suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $(2; 10)$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Một hình nón tròn xoay có đường sinh bằng đường kính đáy, diện tích đáy của hình nón bằng 9π. Thể tích của khối nón bằng

A $3\sqrt{3}\pi$. B $\sqrt{3}\pi$. C $\dfrac{3\sqrt{3}\pi}{2}$. D $9\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

Vì diện tích đáy bằng 9π nên : $\pi R^2 = 9\pi \Leftrightarrow R^2 = 9 \Leftrightarrow R = 3$.

Đường sinh bằng đường kính đáy nên: $l = 2R = 6 \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$.

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3} \cdot B \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 9\pi \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}\pi$.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 0; -3)$, $B(4; 0; 0)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A 5. B 1. C 7. D 25.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB} = (4; 0; 3) \Rightarrow AB = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{\sqrt{4x^2+3}}$ là

A 0. B 1. C 3. D 2.

Lời giải.

Phương trình $4x^2 + 3 = 0$ vô nghiệm nên hàm số không có tiệm cận đứng.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-1}{\sqrt{4x^2+3}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2 + \dfrac{1}{x}}{\sqrt{4 + \dfrac{3}{x^2}}} = -1$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{\sqrt{4x^2+3}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 - \dfrac{1}{x}}{\sqrt{4 + \dfrac{3}{x^2}}} = 1$.

Hàm số có hai tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = -1$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Gọi M, N là giao điểm của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+4}{x-1}$ và đường thẳng $d: y = x + 1$. Hoành độ trung điểm I của đoạn MN là

(A) $-\dfrac{5}{2}$. (B) 1. (C) 2. (D) -1.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm khác 1 của phương trình :

$$\begin{aligned}\frac{2x+4}{x-1}=x+1 &\Leftrightarrow 2x+4=(x-1)(x+1)\\ &\Leftrightarrow x^2-2x-5=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1-\sqrt{6}\\ x=1+\sqrt{6}\end{array}\right..\end{aligned}$$

Hoành độ trung điểm I của MN là : $x_I=\dfrac{x_M+x_N}{2}=\dfrac{1-\sqrt{6}+1+\sqrt{6}}{2}=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x^2+3$ trên đoạn $[0;3]$ bằng

(A) 0. (B) -1. (C) -2. (D) 3.

Lời giải.

- TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
- $y'=3x^2-6x$.

  $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$.

  $f(0)=3, f(2)=-1, f(3)=3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;3]$ là -1 khi $x=2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 3e^{3x}\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) e^3-1. (B) e^3+1. (C) e^3. (D) $2e^3$.

Lời giải.

$$\int\limits_0^1 3e^{3x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 e^{3x}\,\mathrm{d}(3x)=e^{3x}\Big|_0^1=e^3-1.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Cho số phức z thỏa mãn: $(3+2i)\,z+(2-i)^2=4+i$. Hiệu phần thực và phần ảo của số phức z bằng

(A) 1. (B) 0. (C) 4. (D) 6.

Lời giải.

$$\begin{aligned}(3+2i)\,z+(2-i)^2=4+i &\Leftrightarrow (3+2i)\,z+(3-4i)=4+i\\ &\Leftrightarrow (3+2i)\,z=1+5i\Leftrightarrow z=\frac{1+5i}{3+2i}\\ &\Leftrightarrow z=\frac{(1+5i)(3-2i)}{3^2+2^2}\Leftrightarrow z=\frac{13+13i}{13}\Leftrightarrow z=1+i.\end{aligned}$$

Hiệu phần thực và phần ảo là: $1 - 1 = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 21. Cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(0;0;-1)$ và song song với giá của hai vectơ $\vec{a} = (1;-2;3)$ và $\vec{b} = (3;0;5)$. Phương trình mặt phẳng (α) là

A. $5x - 2y - 3z - 2 = 0$.
B. $-5x + 2y + 3z + 3 = 0$.
C. $-5x + 2y - 3z - 3 = 0$.
D. $-10x + 4y + 6z + 3 = 0$.

Lời giải.

Cặp vectơ $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ là một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (α) nên: $\vec{n_\alpha} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = (-10;4;6)$.
Phương trình mặt phẳng $(\alpha): -10x + 4y + 6(z+1) = 0 \Leftrightarrow -5x + 2y + 3z + 3 = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Một người gửi số tiền 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $6,4\%$ /năm. Cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho năm tiếp theo. Người đó sẽ lĩnh được số tiền cả vốn lẫn lãi là 60 triệu đồng sau n năm. Hỏi nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi thì n gần nhất với số nào dưới đây

A. 4.
B. 2.
C. 3.
D. 5.

Lời giải.

Số tiền lãi sau n năm là:

$$60 = 50(1+0,064)^n \Leftrightarrow \frac{60}{50} = (1+0,064)^n$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{\ln\frac{6}{5}}{\ln(1,064)} \approx 2,939.$$

Chọn đáp án C □

Câu 23. Một hộp đựng 10 viên bi có kích thước khác nhau, trong đó có 7 viên bi màu đỏ và 3 viên bi màu xanh. Chọn ngẫu nhiên 2 viên bi. Xác suất để 2 viên bi được chọn có đúng một viên bi màu xanh bằng

A. $\frac{1}{15}$.
B. $\frac{2}{15}$.
C. $\frac{7}{15}$.
D. $\frac{8}{15}$.

Lời giải.

Gọi không gian mẫu Ω là tập hợp tất cả các cách lấy ra 2 viên bi từ 10 viên bi:

$$|\Omega| = \mathrm{C}_{10}^2 = 45$$

Gọi biến cố A là tập hợp tất cả các cách lấy ra 2 viên bi trong đó có đúng 1 viên bi xanh.

$$|A| = \mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_7^1 = 21.$$

Xác suất cần tính:

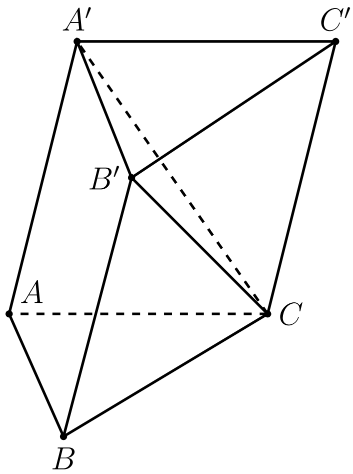
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 24. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, mặt bên $(ABB'A')$ có diện tích bằng 8. Khoảng cách từ đỉnh C đến mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng 6. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) 48. (B) 16. (C) 32. (D) 24.

Lời giải.



Đặt $V_{ABC.A'B'C'} = V$.

$\dfrac{V_{C.A'B'C'}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \dfrac{\frac{1}{3}d\left(C;(A'B'C')\right)\cdot S_{A'B'C'}}{d\left(C;(A'B'C')\right)\cdot S_{A'B'C'}} = \dfrac{1}{3}$.

$\Rightarrow V_{C.A'B'C'} = \dfrac{V}{3}$.

Mặt khác $V_{C.ABB'A'} + V_{C.A'B'C'} = V_{ABC.A'B'C'}$

nên $V_{C.ABB'A'} = V - \dfrac{V}{3} = \dfrac{2V}{3}$. Hay $V = \dfrac{3V_{C.ABB'A'}}{2}$.

$V_{C.ABB'A'} = \dfrac{1}{3}\cdot d(C;(ABB'A'))\cdot S_{ABB'A'} = \dfrac{1}{3}\cdot 6\cdot 8 = 16$.

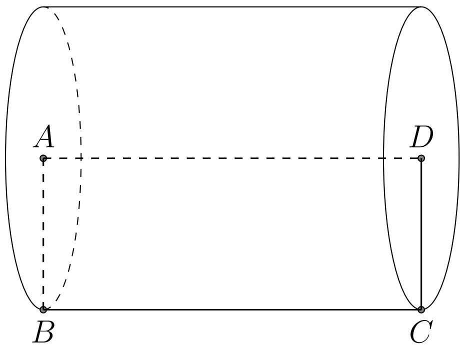
$V = \dfrac{3V_{C.ABB'A'}}{2} = 24$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a, AD = 2a$. Thể tích của khối trụ tạo thành khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh AD bằng

(A) a^3. (B) πa^3. (C) $2a^3$. (D) $2\pi a^3$.

Lời giải.



Khi quay hình chữ nhật quanh cạnh AD ta được hình lăng trụ có đường cao bằng cạnh BC và đáy là đường tròn có bán kính AB.

Thể tích khối trụ $V = Bh = \pi AB^2 AD = 2\pi a^3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Biết n là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^{n-2} = 78$, số hạng chứa x^4 trong khai triển $\left(x^3 - \dfrac{2}{x}\right)^n$ là

(A) $-126720x^4$. (B) 126720. (C) -112640. (D) $126720x^4$.

Lời giải.

Điều kiện : $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

Từ

$$\mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^{n-2} = 78 \Leftrightarrow \frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} = 78$$

$$\Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)}{2} = 78 \Leftrightarrow n^2 + n - 156 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 12 \\ n = -13 \text{ (loại)} \end{array}\right. .$$

Ta có: $\left(x^3-\dfrac{2}{x}\right)^n=\left(x^3-\dfrac{2}{x}\right)^{12}=\sum\limits_{k=0}^{12}\mathrm{C}_{12}^k\left(x^3\right)^{12-k}\left(-\dfrac{2}{x}\right)^k=\sum\limits_{k=0}^{12}\mathrm{C}_{12}^k(-2)^k x^{36-4k}$.

Số hạng chứa x^4 ứng với k thỏa mãn : $36-4k=4\Leftrightarrow k=8$.

Số hạng chứa x^4 là $\mathrm{C}_{12}^8(-2)^8x^4=126730x^4$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Biết x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $25^x-6\cdot 5^x+5=0$. Tổng $5^{x_1}+5^{x_2}$ bằng

A 6. **B** 1. **C** 5. **D** 3.

Lời giải.

Đặt $t=5^x$.

Phương trình trở thành : $t^2-6t+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t_1=1\\ t_2=5\end{array}\right.$.

Nên $5^{x_1}+5^{x_2}=t_1+t_2=6$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho tứ diện $OABC$ (O là gốc toạ độ), $A\in Ox, B\in Oy, C\in Oz$ và mặt phẳng (ABC) có phương trình $6x+3y+2z-6=0$. Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng

A 2. **B** 3. **C** 1. **D** 4.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng $6x+3y+2z-6=0\Leftrightarrow\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$.

Nên $A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3)\Rightarrow OA=1, OB=2, OC=3$.

$V_{OABC}=\dfrac{1}{3}\cdot OA\cdot S_{OBC}=\dfrac{1}{3}\cdot OA\cdot\dfrac{1}{2}\cdot OB\cdot OC=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng $(AD'B')$ bằng

A $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **D** a.

Lời giải.

Gọi O, O' lần lượt là tâm của các mặt $(A'B'C'D')$ và $ADD'A'$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' lên AO.

Do $A'B'C'D'$ là hình vuông nên $A'C'\perp B'D'$ (1)

$AA'\perp(A'B'C'D')\Rightarrow AA'\perp B'D'$ (2)

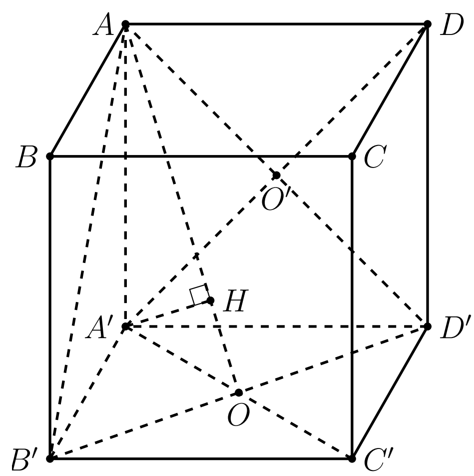
Từ (1) và (2) suy ra $B'D'\perp AA'O$.

Kẻ $A'H\perp AO$ (3)

Vì $B'D'\perp(AA'O)\Rightarrow B'D'\perp AH$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $A'H\perp(AB'D')$

$\Rightarrow A'H=d(A',(AB'D'))$.



$$A'C'=\sqrt{A'D'^2+D'C'^2}=a\sqrt{2}\Rightarrow A'O=\dfrac{A'C'}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Trong tam giác vuông $AA'O$ có $AH = \dfrac{A'A \cdot A'O}{AC} = \dfrac{A'A \cdot A'O}{\sqrt{A'A^2 + A'O^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ta có : $d\left(D, (AB'D')\right) = d\left(A', (AB'D')\right) = A'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d\left(D, (AB'D')\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Cho hàm số $y = (2m-1)x - (3m+2)\cos x$. Gọi X là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị tất cả các phần tử của X bằng

A 6. **B** -6. **C** -3. **D** 0.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = (2m-1) + (3m+2)\sin x$.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì: $y' \leq 0, \forall x \in \mathscr{D} \Leftrightarrow m\left(2 + 3\sin x\right) \leq 1 - 2\sin x$

Đặt $t = \sin x$. Điều kiện $-1 \leq t \leq 1$. Bất phương trình trở thành : $m(2+3t) \leq 1 - 2t$ (1)

Trường hợp 1: $t = -\dfrac{2}{3}$. Bất phương trình (1) luôn đúng.

Trường hợp 2: $t < -\dfrac{2}{3} \Rightarrow m \geq \dfrac{1-2t}{2+3t} = g(t)$

$g'(t) = \dfrac{-7}{(3t+2)^2} < 0, \forall t \in \left[-1; -\dfrac{2}{3}\right)$.

$g(-1) = -3; \lim\limits_{x \to -\left(\frac{2}{3}\right)^-} = -\infty \Rightarrow m \geq -3$ (2)

Trường hợp 3: $t > -\dfrac{2}{3} \Rightarrow m \leq \dfrac{1-2t}{2+3t} = g(t)$

$g'(t) = \dfrac{-7}{(3t+2)^2} < 0, \forall t \in \left[-1; -\dfrac{2}{3}\right)$.

$g(-1) = -3; \lim\limits_{x \to -\left(\frac{2}{3}\right)^+} = +\infty \Rightarrow m \leq -\dfrac{1}{5}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $-3 \leq m \leq -\dfrac{1}{5}$. Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3; -2; -1\}$.

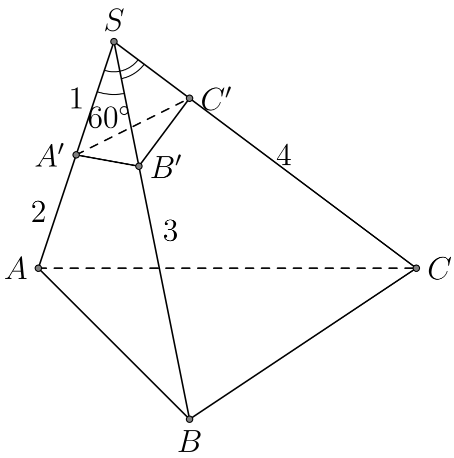
Tổng các giá trị của m là -6.

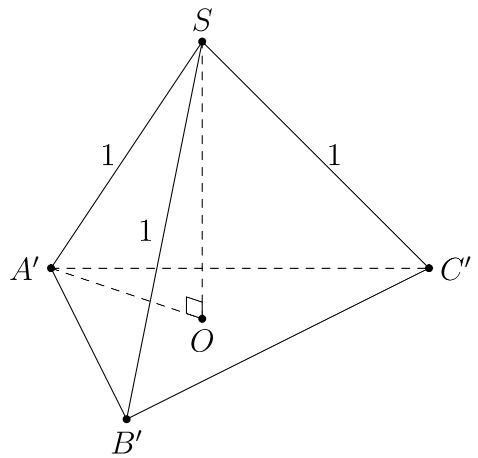
Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có góc $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60^\circ, SA = 2, SB = 3, SC = 4$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A $2\sqrt{2}$. **B** $3\sqrt{2}$. **C** $2\sqrt{3}$. **D** $4\sqrt{3}$.

Lời giải.





Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho $SA' = SB' = SC' = 1$.
Dễ thấy các tam giác $SA'B'C', SB'C', SC'A'$ là các tam giác đều nên $A'B' = B'C' = C'A' = 1$
Kẻ $SO \perp (A'B'C')$.
Vì $S.A'B'C'$ là hình chóp đều nên O là tâm của hình đáy.
Theo định lí hàm số sin thì: $OA' = \dfrac{B'C'}{2\sin \widehat{B'A'C'}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
$\triangle SOA'$ vuông tại O nên theo định lí Pitago ta có: $SO = \sqrt{SA'^2 - A'O^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.
$V_{S.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}SO \cdot S_{\triangle A'B'C'} = \dfrac{1}{3}SO \cdot \dfrac{1}{2}A'B' \cdot A'C' \sin \widehat{B'A'C'} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt{6}}{3}\dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$.
Mặt khác : $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA' \cdot SB' \cdot SC'}{SA \cdot SB \cdot SC} = \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \dfrac{1}{24} \Rightarrow V_{S.A'B'C'} = 2\sqrt{2}$.
Chọn đáp án A □

Câu 32. Tích phân $\displaystyle\int_0^2 max\left\{x^2; 3x - 2\right\} \mathrm{d}x$ bằng

(A) $\dfrac{2}{3}$. (B) $\dfrac{10}{3}$. (C) $\dfrac{11}{6}$. (D) $\dfrac{17}{6}$.

Lời giải.

Xét phương trình $x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		+	0	-	0	+	

Như vậy $max\left\{x^2; 3x - 2\right\} = \begin{cases} x^2 & \text{khi } 0 \le x < 1 \\ 3x - 2 & \text{khi } 1 \le x \le 2 \end{cases}$.

Vậy $\displaystyle\int_0^2 max\left\{x^2; 3x - 2\right\} \mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^2 (3x - 2)\,\mathrm{d}x = \left.\dfrac{x^3}{3}\right|_0^1 - \left.\left(\dfrac{3x^2}{2} - 2x\right)\right|_1^2 = \dfrac{17}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;0;0), B(0;0;2)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$. Số mặt phẳng chứa hai điểm A, B và tiếp xúc với mặt cầu (S) là

(A) 0 mặt phẳng. (B) 2 mặt phẳng. **(C) 1 mặt phẳng.** (D) Vô số mặt phẳng.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;0)$ và bán kính $R=1$ Gọi $(P): Ax+By+Cz+D=0$ là mặt phẳng chứa 2 điểm A, B và tiếp xúc với mặt cầu (S).

Vì $A, B \in (P)$ nên $\begin{cases} A+D=0 \\ 2C+D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D=-2C \\ A=2C \end{cases}$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên :

$$d(I,(P))=R \Leftrightarrow \frac{|A+B+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{|B|}{\sqrt{5C^2+B^2}}=1 \Leftrightarrow C=0.$$

Với $C=0 \Rightarrow A=D=0$. Chọn $B=1 \Rightarrow (P): y=0$.

Như vậy chỉ có một mặt phẳng chứa A,B và tiếp xúc với mặt cầu (S).

Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $\dfrac{iz-(3i+1)\overline{z}}{1+i}=|z|^2$. Số phức $w=\dfrac{26iz}{9}$ có môđun bằng

(A) 9. **(B) $\sqrt{26}$.** (C) $\sqrt{6}$. (D) 5.

Lời giải.

Gọi số phức z có dạng : $z=a+bi (a,b \in \mathbb{R})$.

Do $z \neq 0$ nên $a^2+b^2>0$. Ta có:

$$\frac{iz-(3i+1)\overline{z}}{1+i}=|z|^2$$
$$\Leftrightarrow iz-(3i+1)\overline{z}=(1+i)|z|^2$$
$$\Leftrightarrow i(a+bi)-(3i+1)(a-bi)=(1+i)(a^2+b^2)$$
$$\Leftrightarrow ia-b-3ai-3b-a+bi=a^2+b^2+i(a^2+b^2)$$
$$\Leftrightarrow (-a-4b)+(b-2a)i=a^2+b^2+i(a^2+b^2)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a-4b=a^2+b^2 \\ b-2a=a^2+b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a-4b=b-2a \\ -a-4b=a^2+b^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=5b \\ -9b=26b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5b \\ \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=-\dfrac{9}{26} \end{array}\right. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=0 \text{ (loại)} \\ a=-\dfrac{45}{26}, b=-\dfrac{9}{26} \end{array}\right.$$

Vậy : $w = \dfrac{26}{9}i\left(-\dfrac{45}{26} - \dfrac{9}{26}i\right) = 1 - 5i \Rightarrow |w| = \sqrt{26}$

Chọn đáp án B □

Câu 35. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ và tiếp tuyến với đồ thị tại $M(4;2)$ và trục hoành là

(A) $\dfrac{1}{3}$. (B) $\dfrac{3}{8}$. (C) $\dfrac{8}{3}$. (D) $\dfrac{2}{3}$.

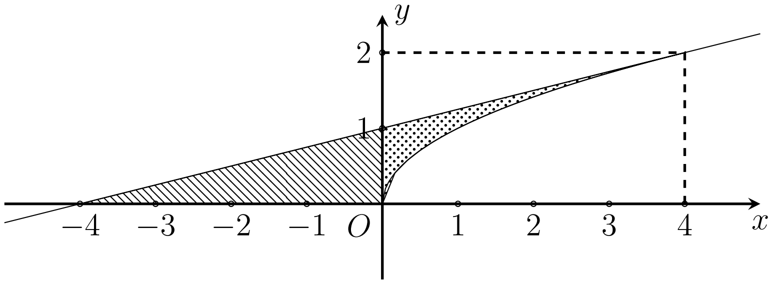
Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = [0; +\infty)$.

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $M(4;2)$ là :

$y = \dfrac{1}{2\sqrt{4}}(x-4) + 2 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{4}x + 1$.



Tiếp tuyến cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là nghiệm: $\dfrac{1}{4}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

Ta chia miền diện tích giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}, Ox$ và tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm $M(4;2)$ thành hai miền S_1(phần gạch chéo) và S_2 (phần chấm) như ở hình vẽ trên.

$S_1 = \displaystyle\int_{-4}^{0} \frac{1}{4}x + 1\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{8} + x\right)\Bigg|_{-4}^{0} = 2.$

$S_2 = \displaystyle\int_{0}^{4} \left(\frac{1}{4}x + 1 - \sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{8} + x - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Bigg|_{0}^{4} = \frac{2}{3}$

Vậy $S = S_1 + S_2 = 2 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho $P = 9\log^3_{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{a} + \log^2_{\frac{1}{3}} a - \log_{\frac{1}{3}} a^3 + 1$ với $a \in \left[\dfrac{1}{9}; 3\right]$ và M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P. Tính $S = 5m + 2M$.

(A) $S = 6$. (B) $S = \dfrac{50}{3}$. (C) $S = \dfrac{59}{9}$. (D) $S = \dfrac{19}{3}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
P =& 9\log^3_{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{a} + \log^2_{\frac{1}{3}} a - \log_{\frac{1}{3}} a^3 + 1\\
=& 9\left[\frac{1}{3}\log_{3^{-1}} a\right]^3 + \left[\log_{3^{-1}} a\right]^2 - 3\log_{3^{-1}} a + 1\\
=& 9\left[-\frac{1}{3}\log_3 a\right]^3 + (\log_3 a)^2 + 3\log_3 a + 1\\
=& -\frac{1}{3}(\log_3 a)^3 + (\log_3 a)^2 + 3\log_3 a + 1
\end{aligned}$$

Đặt $t = \log_3 a$.

Vì $a \in \left[\frac{1}{9}; 3\right] \Rightarrow t \in [-2; 1]$.

$\Rightarrow P = -\dfrac{1}{3}t^3 + t^2 + 3t + 1 = f(t)$.

$f'(t) = -t^2 + 2t + 3 = 0 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 3 \text{ (loại)} \end{array}\right.$.

$f(-2) = \dfrac{5}{3}; f(-1) = -\dfrac{2}{3}; f(1) = \dfrac{14}{3}$.

Vậy $M = \max\limits_{x \in \left[\frac{1}{9};3\right]} P = \dfrac{14}{3}$ và $m = \min\limits_{x \in \left[\frac{1}{9};3\right]} P = -\dfrac{2}{3}$.

$S = 5m + 2M = 5\dfrac{-2}{3} + 2\dfrac{14}{3} = 6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 4$ và $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x = 2$.

Tính tích phân $I = \displaystyle\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = 2$. (B) $I = 6$. (C) $I = 10$. (D) $I = 4$.

Lời giải.

- Tích phân $\displaystyle\int\limits_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 4 \quad (1)$

  Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

  Đổi cận:

x	1	9
t	1	3

  $(1) \Leftrightarrow \displaystyle\int\limits_1^3 f(t)\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = 4 \Leftrightarrow \int\limits_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t = 8 \Leftrightarrow \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 8$.

- Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x = 2 \quad (2)$

  Đặt $t = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$.

  Đổi cận

x	0	$\dfrac{\pi}{2}$
t	0	1

  $(2) \Leftrightarrow \displaystyle\int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 2 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

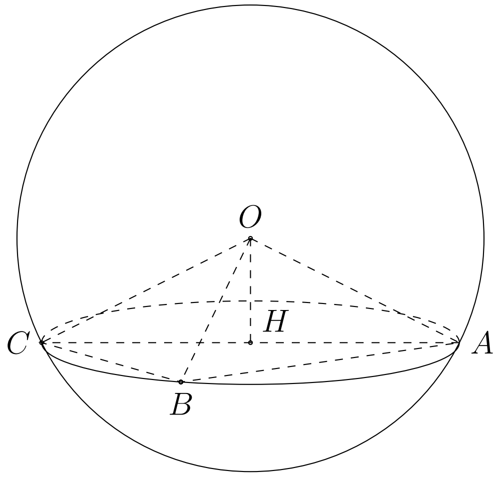
Như vậy ta có: $I = \displaystyle\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 + 8 = 10$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Cho mặt cầu (S) tâm I. Một mặt phẳng (P) cách I một khoảng bằng 5cm cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn đi qua 3 điểm A, B, C. Biết $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, $CA = 10$ cm. Tính diện tích mặt cầu (S).

(A) 100π cm^2. (B) 200π cm^2. (C) $100\sqrt{3}\pi$ cm^2. (D) 300π cm^2.

Lời giải.



Trong tam giác $BC^2 + BA^2 = 6^2 + 8^2 = 100 = 10^2 = AC^2 \Leftrightarrow \triangle BAC$ vuông tại B.
Vì $OA = OB = OC$ nên O nằm trên trục của $\triangle ABC$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy.
Tam giác BAC vuông tại B nên H chính là trung điểm của AC. Ta có $HB = \dfrac{AC}{2} = 5$ cm, $OH = 5$ cm.
$R^2 = OB^2 = OH^2 + HB^2 = 5^2 + 5^2 \Rightarrow R = 5\sqrt{2}$.
$S = 4\pi R^2 = 200\pi$ cm^2.

Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ có đồ thị (C). Từ một điểm bất kì trên đường thẳng nào dưới đây luôn kẻ được đúng một tiếp tuyến đến đồ thị (C)

(A) $x = -1$. (B) $x = 3$. (C) $x = 2$. (D) $x = 1$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
$y' = 3x^2 - 12x + 9$.
Để từ điểm $M(x_0, y_0)$ kẻ được đúng 1 tiếp tuyến đến đồ thị hàm số thì hệ phương trình sau phải có đúng 1 nghiệm.

$$\begin{cases} y = k(x - x_0 + y_0) \\ y' = k \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = k(x - x_0) + y_0 \\ k = 3x^2 - 12x + 9 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = \left(3x^2 - 12x + 9\right)(x - x_0) + y_0 \\ k = 3x^2 - 12x + 9 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1 - \left(3x^2 - 12x + 9\right)(x - x_0) - y_0 = 0 \quad (1) \\ k = 3x^2 - 12x + 9 \end{cases}$$

Nếu hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị thì luôn tồn tại y_0 để phương trình $g(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt.
Như vậy để thỏa mãn bài toán thì $g(x)$ chỉ có 1 cực trị hay $\Delta_{g'} \leq 0$.
Ta có : $g'(x) = -6(x^2 - (2 + x_0) + 2x_0)$.
$\Delta_{g'} = (x_0 - 2)^2$.
$\Delta_{g'} \leq 0 \Leftrightarrow (x_0 - 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị (C). Gọi $A(x_A; y_A), B(x_B, y_B)$ với $x_A > x_B$ là các điểm thuộc (C) sao cho các tiếp tuyến tại A, B song song với nhau và $AB = 6\sqrt{37}$. Tính

$2x_A - 3x_B$.

(A) $S = 90$. (B) $S = -15$. (C) $S = 15$. (D) $S = -9$.

Lời giải.

- TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- $y' = 3x^2 - 3$.
  Tiếp tuyến tại A, B song song với nhau nên:

$$\begin{aligned} y'(x_A) = y'(x_B) &\Leftrightarrow 3x_A^2 - 3 = 3x_B^2 - 3 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = x_B \text{ (loại do } x_A > x_B) \\ x_A = -x_B \end{array}\right. . \end{aligned}$$

Theo đầu bài ta có:

$$\begin{aligned} & AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \\ \Leftrightarrow\ & 6\sqrt{37} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (x_A^3 - x_B^3 - 3x_A + 3x_B)^2} \\ \Leftrightarrow\ & 6\sqrt{37} = \sqrt{(2x_A)^2 + (2x_A^3 - 6x_A)^2} \\ \Leftrightarrow\ & 972 = (x_A)^2 + \left(2x_A^3 - 6x_A\right)^2 \\ \Leftrightarrow\ & x_A^6 - 6x_A^4 + 10x_A^2 - 333 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x_A^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = 3 \Rightarrow x_B = -3 \\ x_A = -3 \Rightarrow x_B = 3 \text{ (loại)} \end{array}\right. . \end{aligned}$$

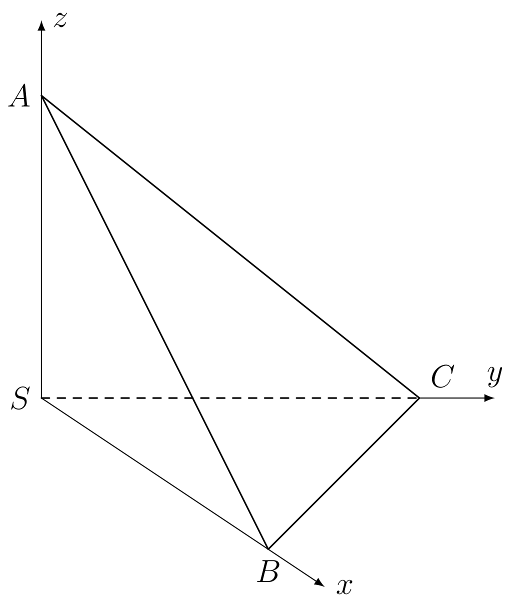
$\Rightarrow 2x_A - 3x_B = 15$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA = SB = SC = 2a$. Cosin của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (B) $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$. (C) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Đặt hệ trục tọa độ $Sxyz$ như hình vẽ.

Chuẩn hóa $a = 1$.

Tọa độ hóa các điểm :

$S(0; 0; 0), B(2; 0; 0), C(0; 2; 0), A(0; 0; 2)$.

$\overrightarrow{SC} = (0; 2; 0), \overrightarrow{AB} = (2; 0; -2), \overrightarrow{AC} = (0; 2; -2)$.

$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (4; 4; 4) \Rightarrow \overrightarrow{n_{ABC}} = (1; 1; 1)$.

Gọi φ là góc giữa SC và (ABC).

$\sin\varphi = \left|\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{n_{ABC}})\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{n_{ABC}}\right|}{\left|\overrightarrow{SC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_{ABC}}\right|} = \dfrac{2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$\cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2\varphi} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Biết $1+2.2+3.2^2+4.2^3+\ldots+2018.2^{2017}=a.2^{2018}+b$, với a,b là các số nguyên dương. Tính $S=a+b$.

Ⓐ $S=2017$. **B** $S=2018$. Ⓒ $S=2019$. Ⓓ $S=2020$.

Lời giải.

Ta có $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{2018}=\dfrac{x^{2019}-1}{x-1}$.

Đạo hàm hai vế ta được

$$1+2x+3x^2+\ldots+2018x^{2017}=\frac{2019x^{2018}(x-1)-\left(x^{2019}-1\right).1}{(x-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1+2x+3x^2+\ldots+2018x^{2017}=\frac{2018x^{2019}-2019x^{2018}+1}{(x-1)^2} \quad (1)$$

Thay $x=2$ vào (1) ta được $1+2.2+3.2^2+4.2^3+\ldots+2018.2^{2017}=2017.2^{2018}+1$.

Vậy $a=2017, b=1 \Rightarrow a+b=2018$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Cho (P) là đường Parabol qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{4}x^4-mx^2+m^2$. Gọi m_0 là giá trị để (P) đi qua $A(2;24)$. Hỏi m_0 thuộc khoảng nào dưới đây

Ⓐ $\left(\sqrt{5};\sqrt{15}\right)$. Ⓑ $(-6;1)$. **C** $\left(\sqrt{3};\sqrt{39}\right)$. Ⓓ $(-8;2)$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$y'=x^3-2mx=x(x^2-2m)$.

Để hàm số có ba cực trị thì phương trình $y'=0$ phải có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$.

Khi đó: $y'=0 \Leftrightarrow x(x^2-2m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt{2m}\\x=-\sqrt{2m}\end{array}\right.$.

Với $x=0 \Rightarrow y=m^2$. Với $x=\pm\sqrt{2m} \Rightarrow y=0$.

Như vậy tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0,m^2), B(-\sqrt{2m};0), C(\sqrt{2m};0)$.

Gọi $(P): y=ax^2+bx+c$ là Parabol đi qua ba điểm cực trị.

$A\in(P) \Rightarrow m^2=c$.

$B\in(P) \Rightarrow 2ma-\sqrt{2m}b+c=0 \quad (1)$

$C\in(P) \Rightarrow 2ma+\sqrt{2m}b+c=0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ:

$$\begin{cases}2ma-\sqrt{2m}b+c=0\\2ma+\sqrt{2m}b+c=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\sqrt{2m}b=0\\2ma-\sqrt{2m}b+c=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}b=0\\a=-\dfrac{c}{2m}=-\dfrac{m}{2}\end{cases}.$$

Suy ra $(P): y = -\dfrac{m}{2}x^2 + m^2$.

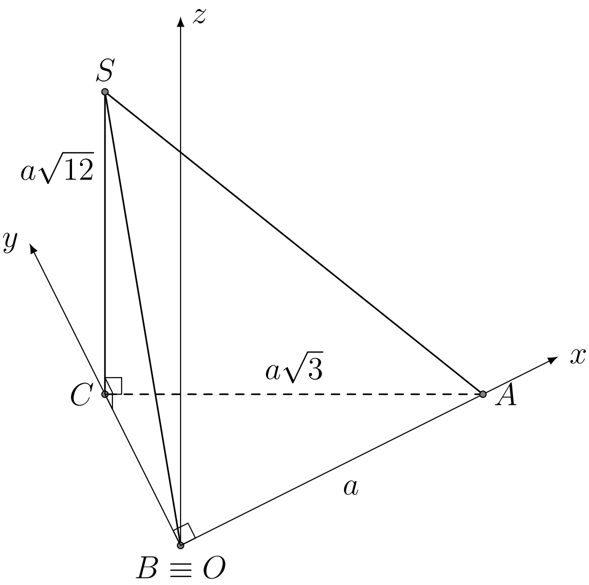
(P) đi qua điểm $A(2;24)$ nên $24 = -2m + m^2 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 6 \\ m = -4(\text{ loại do } m > 0)\end{array}\right.$

Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B. Biết $AB = a, AC = a\sqrt{3}, SC = a\sqrt{12}$. Sin của góc giữa hai mặt phẳng $(SAB),(SAC)$ bằng

A $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. B $\dfrac{5\sqrt{14}}{42}$. C 1. D $\sqrt{\dfrac{5}{7}}$.

Lời giải.



Ta có tam giác ABC vuông tại B nên:

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$.

Ta dựng trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ bên.

Chuẩn hóa $a = 1$.

Tọa độ các điểm như sau:

$B(0;0;0), A(1;0;0), C(0;\sqrt{2};0), S(0;\sqrt{2};\sqrt{12})$.

$\overrightarrow{SA} = (1;-\sqrt{2};-\sqrt{12}); \overrightarrow{SB} = (0;-\sqrt{2};-\sqrt{12})$.

$\overrightarrow{SC} = (0;0;-\sqrt{12})$.

$\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right] = (0;\sqrt{12};-\sqrt{2})$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_{SAB}} = (0;\sqrt{6};-1)$. $\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SC}\right] = (\sqrt{24};\sqrt{12};0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_{SAB}} = (\sqrt{2};1;0)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC).

$\cos\varphi = \cos((SAB),(SAC)) = \cos(\overrightarrow{n_{SAB}},\overrightarrow{n_{SAB}}) = \dfrac{|\overrightarrow{n_{SAB}} \cdot \overrightarrow{n_{SAC}}|}{|\overrightarrow{n_{SAB}}| \cdot |\overrightarrow{n_{SAB}}|} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$.

$\Rightarrow \sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{\dfrac{5}{7}}$.

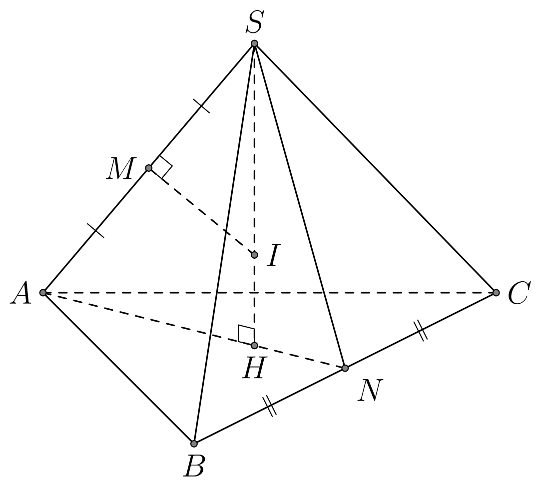
Chọn đáp án D □

Câu 45. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt cầu (T) có tâm $I(1;3;0)$ ngoại tiếp hình chóp đều $S.ABC$,$SA = SB = SC = 2\sqrt{3}$, đỉnh $S(2;1;2)$. Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) bằng

A $2\sqrt{2}$. B $\sqrt{11}$. C 2. D 3.

Lời giải.

$\overrightarrow{SI} = (-1; 2; -2) \Rightarrow SI = |\overrightarrow{SI}| = 3$.
Gọi H là tâm đường tròn đáy.
Gọi M là trung điểm của SA.
Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên SH là trục của đáy.
Trong tam giác SHA, dựng trung trực của SA cắt SH tại I.
Vì $I \in$ trục của đáy nên $IA = IB = IC$ (1)
I nằm trên trung trực của SA nên $IS = IA$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $IS = IA = IB = IC$ nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp của hình chóp.



$\triangle SMI \backsim \triangle SHA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{SM}{SH} = \dfrac{SI}{SA} \Leftrightarrow SH = \dfrac{SM \cdot SA}{SI} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}}{3} = 2$.
Chọn đáp án C □

Câu 46. Số giá trị nguyên của tham số thực m để phương trình $\left(7 - 3\sqrt{5}\right)^{x^2} + m\left(7 + 3\sqrt{5}\right)^{x^2} = 2^{x^2-1}$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt là

A 2. **B** 5. **C** 3. **D** 1.

Lời giải.

Chia cả hai vế của phương trình cho 2^{x^2} ta được: $\left(\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} + m\left(\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} = \dfrac{1}{2}$ (1)

Ta có $\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2} \cdot \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1}{\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}}$.

Đặt $t = \left(\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2}$. Điều kiện $0 < t \leq 1$.

Lúc đó $\Rightarrow \left(\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} = \dfrac{1}{t}$.

Phương trình (1) tương đương với $t + \dfrac{m}{t} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}t - t^2 = f(t)$.

$f'(t) = \dfrac{1}{2} - 2t \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{4}$.

Ta có bảng biến thiên sau:

t	0		$\frac{1}{4}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{16}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

Với mỗi giá trị của $t \neq 1, t > 0$ thì phương trình sẽ có 2 nghiệm của x.

Như vậy để phương trình có đúng 2 nghiệm thực phân biệt thì $\left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1}{16} \\ \begin{cases} m \le 0 \\ m \ge -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$.

Do m nguyên nên $m = 0$.

Thử lại: Khi $m = 0$ thì phương trình có hai nghiệm $x = \pm\sqrt{\dfrac{\ln\dfrac{1}{2}}{\ln\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}}}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Gọi K là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sin 2x + \sqrt{2}\sin(x + \dfrac{\pi}{4}) - 2 = m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $\left(0; \dfrac{3\pi}{4}\right)$. K là tập con của tập hợp nào sau đây?

(A) $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. (B) $\left(1-\sqrt{2}; 2\right)$. **C** $\left(-\sqrt{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. (D) $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)$.

Lời giải.

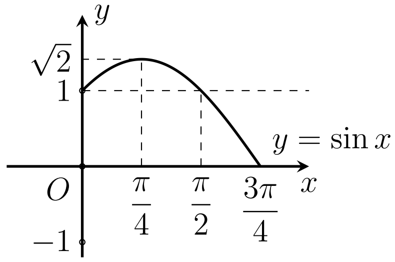
Ta có:

$$\begin{aligned} & \sin 2x + \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) - 2 = m \\ \Leftrightarrow\ & \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x + \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) - 3 = m \\ \Leftrightarrow\ & (\sin x + \cos x)^2 - \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) - 3 = m \\ \Leftrightarrow\ & \left(\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\right)^2 + \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) - 3 = m \quad (1) \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{2}\sin(x + \dfrac{\pi}{4})$.

Điều kiện: Do $x \in \left(0; \dfrac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow \left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \in \left(\dfrac{\pi}{4}; \pi\right)$.

Xét đồ thị hàm số $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ với $x \in \left(0; \dfrac{3\pi}{4}\right)$.



Từ đồ thị ta thấy: Với mỗi giá trị của t mà $1 < t < \sqrt{2}$ thì sẽ có 2 giá trị của $x \in \left(0; \dfrac{3\pi}{4}\right)$ thỏa mãn $t = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. Với mỗi giá trị của t mà $0 < t \le 1$ thì sẽ có một giá trị của $x \in \left(0; \dfrac{3\pi}{4}\right)$ hoặc $t = \sqrt{2}$ thỏa mãn thỏa mãn $t = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Phương trình (1) tương đương với : $f(t) = t^2 + t - 3 = m$.

$f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in \left(0; \sqrt{2}\right]$ Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\left(0; \sqrt{2}\right]$ Ta có bảng biến thiên của hàm $f(t)$ như sau:

t	0	$\sqrt{2}$
$f'(t)$	$+$	
$f(t)$	-3 $\nearrow$	$\sqrt{2}-1$

Phương trình $m = f(t)$ chỉ có 1 nghiệm duy nhất.

Để phương trình có đúng 2 nghiệm thì $t \in \left(1; \sqrt{2}\right) \Leftrightarrow f(1) < m < f(\sqrt{2}) \Leftrightarrow -1 < m < \sqrt{2} - 1$.

Vậy tập hợp của m là tập con của $\left(-\sqrt{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Cho số phức $z = a + bi\,(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $|z^2 + 4| = 2\,|z|$. Đặt $P = 8(b^2 - a^2) - 12$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A $P = (|z| - 2)^2$. **B** $P = \left(|z|^2 - 4\right)^2$. **C** $P = (|z| - 4)^2$. **D** $P = \left(|z|^2 - 2\right)^2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\left|z^2 + 4\right| = 2\,|z| \\
\Leftrightarrow &\left|a^2 - b^2 + 4 - 2abi\right| = 2\left|\sqrt{a^2 + b^2}\right| \\
\Leftrightarrow &\left(a^2 - b^2 + 4\right)^2 + 4a^2b^2 = 4\left(a^2 + b^2\right) \\
\Leftrightarrow &\left(a^2 - b^2\right)^2 + 4a^2b^2 + 8\left(a^2 - b^2\right) + 16 = 4\left(a^2 + b^2\right) \\
\Leftrightarrow &\left(a^2 + b^2\right)^2 + 8\left(a^2 - b^2\right) + 16 - 4\left(a^2 + b^2\right) = 0 \\
\Leftrightarrow &\left(a^2 + b^2\right)^2 - 4\left(a^2 + b^2\right) + 4 = 8\left(b^2 - a^2\right) - 12 \\
\Leftrightarrow &\left(a^2 + b^2 - 2\right)^2 = 8\left(b^2 - a^2\right) - 12 \\
\Leftrightarrow &\left(|z|^2 - 2\right)^2 = 8\left(b^2 - a^2\right) - 12.
\end{aligned}$$

Vậy $P = \left(|z|^2 - 2\right)^2$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Trong không gian cho $2n$ điểm phân biệt $n > 4, n \in \mathbb{N}$, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng và trong $2n$ điểm đó có đúng n điểm cùng nằm trên một mặt phẳng. Tìm tất cả các giá trị của n sao cho từ $2n$ điểm đã cho tạo ra đúng 505 mặt phẳng phân biệt.

A 8. **B** 12. **C** 7. **D** 24.

Lời giải.

Cứ ba điểm bất kì thì tạo thành một mặt phẳng nên số mặt phẳng tạo được từ $2n$ điểm là : C_{2n}^3.

Tuy nhiên do có n điểm đồng phẳng nên số mặt phẳng được tạo ra là: $\mathrm{C}_{2n}^3 - \mathrm{C}_n^3 + 1$.

Có tất cả 505 mặt phẳng nên:

$$505 = \mathrm{C}_{2n}^3 - \mathrm{C}_n^3 + 1$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 504 = \frac{2n!}{(2n-3)!3!} - \frac{n!}{(n-3)!3!}\\
&\Leftrightarrow 504 = \frac{(2n-2)(2n-1)2n}{6} - \frac{(n-2)(n-1)n}{6}\\
&\Leftrightarrow 3024 = (2n-2)(2n-1)2n - (n-2)(n-1)n\\
&\Leftrightarrow 7n^3 - 9n^2 + 2n - 3024 = 0 \Leftrightarrow n = 8.
\end{aligned}$$

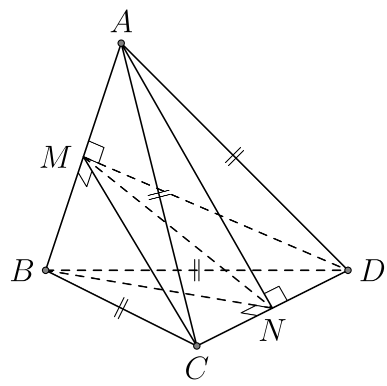
Vậy chỉ có một giá trị của n thỏa mãn là $n = 8$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = BC = AD = BD = 1$. Khi thể tích của khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất thì khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **B** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C** $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **D** $\frac{1}{3}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt la trung điểm của AB và CD.

Dễ thấy $\triangle DAB$ và $\triangle CAB$ lần lượt cân tại D và C

$\Rightarrow DM \perp AB, CM \perp AB \Rightarrow AB \perp (MCD) \Rightarrow MN \perp AB$ (1)

Mặt khác $\triangle CAB = \triangle DAB$(c.c.c) nên $CM = DM$

$\Leftrightarrow \triangle MCD$ cân tại M và $MN \perp CD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD hay $MN = d(AB, CD)$

$CM = DM = \sqrt{BC^2 - BM^2} = \sqrt{1 - \frac{AB^2}{4}}$.

$MN = \sqrt{MC^2 - CN^2} = \sqrt{1 - \frac{AB^2}{4} - \frac{CD^2}{4}}$

Từ $AB \perp (MCD) \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3}AB \cdot S_{\triangle MCD} = \frac{1}{6}AB \cdot MN \cdot CD$.

Mặt khác ta có: $MN^2 + \frac{AB^2}{4} + \frac{CD^2}{4} = 1 - \frac{AB^2}{4} - \frac{CD^2}{4} + \frac{AB^2}{4} + \frac{CD^2}{4} = 1$.

Theo Bất Đẳng Thức Cô-Si cho ba số ta có:

$1 = MN^2 + \frac{AB^2}{4} + \frac{CD^2}{4} \geq 3\sqrt[3]{MN^2 \frac{AB^2}{4} \frac{CD^2}{4}} = 3\sqrt[3]{36V^2} \Rightarrow V \leq \frac{\sqrt{2}}{18}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $MN^2 = \frac{AB^2}{4} = \frac{CD^2}{4} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án B □

—— HẾT ——

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. C	3. D	4. C	5. A	6. D	7. D	8. C	9. A	10. A
11. D	12. D	13. C	14. D	15. A	16. D	17. B	18. B	19. A	20. B
21. B	22. C	23. C	24. D	25. D	26. D	27. A	28. C	29. A	30. B
31. A	32. D	33. C	34. B	35. C	36. A	37. C	38. B	39. C	40. C
41. B	42. B	43. C	44. D	45. C	46. D	47. C	48. D	49. A	50. B

131 ĐỀ THI THỬ LẦN 3, TRƯỜNG THPT QUẢNG XƯƠNG 1, THANH HÓA, 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(B) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

(C) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

D Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$y' = -\dfrac{-1}{(x+2)^2} < 0, \forall x \in \mathscr{D}$.

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y			2				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-3		

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) Hàm số có một cực tiểu và không có cực đại.

(B) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

(C) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.

D Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải.

Dễ dàng nhận thấy:

- Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{\text{CĐ}} = 2$.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{\text{CT}} = -3$.
- Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{2}}$ là

(A) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

(B) $[1; +\infty)$.

C $(1; +\infty)$.

(D) $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

Vì $\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ nên hàm số xác định khi và chỉ khi $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Vậy tập xác định $\mathscr{D} = (1; +\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+1) < \log_2(3-x)$ là

A $S = (-\infty; 1)$. **B** $S = (1; +\infty)$. **C** $S = (1; 3]$. **D** $S = (-1; 1)$.

Lời giải.

$$\log_2(x+1) < \log_2(3-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 < 3-x \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, xác định trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức

A $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x$. **B** $S = \displaystyle\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$. **C** $S = -\displaystyle\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$. **D** $S = \displaystyle\int_b^a |f(x)|\, \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Câu hỏi lý thuyết.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 3 - \dfrac{1}{\sin^2 x}$ là

A $F(x) = 3x - \tan x + C$. **B** $F(x) = 3x + \tan x + C$.

C $F(x) = 3x + \cot x + C$. **D** $F(x) = 3x - \cot x + C$.

Lời giải.

$$F(x) = \int \left(3 - \frac{1}{\sin^2 x}\right) \mathrm{d}x = 3x + \cot x + C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 7. Phần ảo của số phức $z = 5 + 2i$ bằng

A 5. **B** $5i$. **C** 2. **D** $2i$.

Lời giải.

Số phức $z = a + bi$ có phần ảo là b nên số phức $z = 5 + 2i$ có phần ảo là 2.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-1}$. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là

A $y = 1$. **B** $x = 2$. **C** $y = 2$. **D** $x = 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$\lim\limits_{x \to 1^+} y = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-2}{x-1} = -\infty$. Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường $x = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Công thức tính thể tích V của khối cầu có bán kính bằng R là

A $V = 4\pi R^2$. **B** $V = \dfrac{4}{3}\pi R^2$. **C** $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$. **D** $V = \pi R^3$.

Lời giải.

Câu hỏi lý thuyết.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Cho mặt phẳng (α) có phương trình: $2x+4y-3z+1=0$, một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là

A. $\vec{n}=(2;4;3)$. B. $\vec{n}=(2;4;-3)$. C. $\vec{n}=(2;-4;-3)$. D. $\vec{n}=(-3;4;2)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α): $Ax+By+Cz+D=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$.

Vậy (α): $2x+4y-3z+1=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;4;-3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-3}\right)$ bằng

A. 0. B. 2. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Lời giải.

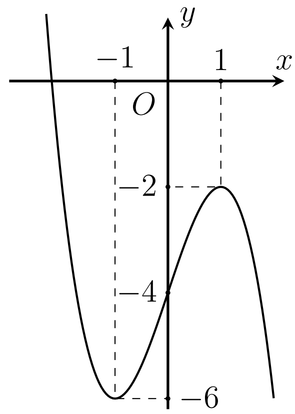
$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1-(x-3)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}\right)}=0.$$

Chọn đáp án A □

Câu 12.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f(x)=-3$ có số nghiệm là

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.



Lời giải.

Số nghiệm của phương trình $f(x)=-3$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-3$. Dựa vào đồ thị của hàm số thì phương trình $f(x)=-3$ có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Điểm nào sau đây thuộc cả 2 mặt phẳng (Oxy) và mặt phẳng (P): $x+y+z-3=0$?

A. $M(1;1;0)$. B. $N(0;2;1)$. C. $P(0;0;3)$. D. $Q(2;1;0)$.

Lời giải.

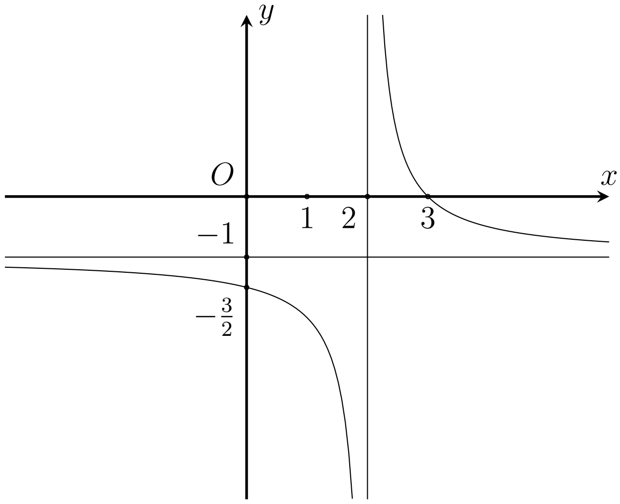
Điểm thuộc mặt phẳng (Oxy): $z=0$ sẽ có cao độ bằng 0. Do đó loại điểm N và P.

Thay tọa độ điểm $M(1;1;0)$ vào phương trình mặt phẳng (P) ta được $1+1+0-3=0$ (sai) nên $M\notin(P)$.

Thay tọa độ điểm $Q(2;1;0)$ vào phương trình mặt phẳng (P) ta được $2+1+0-3=0$ (đúng) nên $Q\in(P)$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Đồ thị dưới đây là của hàm số nào?



A $y = \dfrac{-x+3}{x-2}$. **B** $y = \dfrac{3-x}{x+2}$. **C** $y = \dfrac{-x-3}{x-2}$. **D** $y = \dfrac{x+3}{x-2}$.

Lời giải.

Nhìn đồ thị hàm số ta thấy:

- Đồ thị cắt trục hoành tại điểm $(3;0)$ nên loại hàm $y = \dfrac{-x-3}{x-2}$ và $y = \dfrac{x+3}{x-2}$.
- Tiệm cận đứng: $x = 2$ nên loại tiếp hàm $y = \dfrac{3-x}{x+2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 9$ trên đoạn $[1;3]$ là

A $\max\limits_{[1;3]} f(x) = -6$. **B** $\max\limits_{[1;3]} f(x) = \dfrac{13}{27}$. **C** $\max\limits_{[1;3]} f(x) = 0$. **D** $\max\limits_{[1;3]} f(x) = 5$.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[1;3]$.

$f'(x) = 3x^2 - 16x + 16$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 4 & \text{(loại)} \\ x = \dfrac{4}{3} & \text{(nhận)} \end{array}\right.$.

$f(1) = 0$, $f(3) = -6$, $f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{13}{27}$.

Vậy $\max\limits_{[1;3]} f(x) = \dfrac{13}{27}$.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Biết z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Khi đó, giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ là

A $\dfrac{9}{4}$. **B** $-\dfrac{9}{4}$. **C** 9. **D** 4.

Lời giải.

$2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\sqrt{21}}{4}i & (= z_1) \\ z = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\sqrt{21}}{4}i & (= z_2) \end{array}\right.$. Khi đó $z_1^2 + z_2^2 = -\dfrac{9}{4}$.

Cách khác: $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \dfrac{3}{2} = -\dfrac{9}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Cho tam giác ABC, biết $A(1;-2;4)$, $B(0;2;5)$, $C(5;6;3)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

A $G(2;2;4)$. B $G(4;2;2)$. C $G(3;3;6)$. D $G(6;3;3)$.

Lời giải.

G là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}$. Vậy $G(2;2;4)$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$, $f(1) = 12$ và $\int_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = 17$. Giá trị của $f(4)$ bằng

A 29. B 5. C 19. D 9.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\left|_1^4\right. = f(4) - f(1) \Rightarrow 17 = f(4) - 12 \Leftrightarrow f(4) = 29$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a, diện tích toàn phần bằng $8\pi a^2$. Chiều cao của hình trụ bằng

A $4a$. B $3a$. C $2a$. D $8a$.

Lời giải.

Ta có diện tích đáy $S_{\text{đáy}} = \pi R^2$, diện tích xung quanh là $S_{xq} = 2\pi Rh$.

Diện tích toàn phần là $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}} \Rightarrow 8\pi a^2 = 2\pi Rh + 2\pi R^2 \Rightarrow h = 3a$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Số giao điểm tối đa của 10 đường thẳng phân biệt là

A 50. B 100. C 120. D 45.

Lời giải.

Giả sử hai đường thẳng phân biệt nào cũng cắt nhau. Khi đó số giao điểm tối đa của 10 đường thẳng phân biệt là $\mathrm{C}_{10}^2 = 45$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Cho A, B là hai biến cố xung khắc. Biết $P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(B) = \dfrac{1}{4}$. Tính $P(A \cup B)$.

A $\dfrac{7}{12}$. B $\dfrac{1}{12}$. C $\dfrac{1}{7}$. D $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Vì A và B là hai biến cố xung khắc nên $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \dfrac{7}{12}$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Cho hàm số $y = x^3 - 2x + 1$ có đồ thị (C). Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm $M(-1;2)$ bằng

A 3. B -5. C 25. D 1.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 2$.

Tiếp tuyến với (C) tại điểm $M(-1;2)$ có hệ số góc là $y'(-1) = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Cho hình phẳng (S) giới hạn bởi đường cong có phương trình $y = \sqrt{2-x^2}$ và trục Ox, quay (S) xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành bằng

A $V = \dfrac{8\sqrt{2}\pi}{3}$. **B** $V = \dfrac{4\sqrt{2}\pi}{3}$. **C** $V = \dfrac{4\pi}{3}$. **D** $V = \dfrac{8\pi}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong $y = \sqrt{2-x^2}$ và trục Ox là

$$\sqrt{2-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Thể tích khối tròn xoay là $V = \pi \displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2-x^2)\,\mathrm{d}x = \pi\left(2x - \dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \dfrac{8\sqrt{2}\pi}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Diện tích xung quanh của hình nón được sinh ra khi quay tam giác đều ABC cạnh a xung quanh đường cao AH là

A πa^2. **B** $\dfrac{\pi a^2}{2}$. **C** $2\pi a^2$. **D** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Hình nón có bán kính đáy là $r = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2}$, đường sinh $l = AB = a$. Khi đó diện tích xung quanh hình nón là $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot \dfrac{a}{2} \cdot a = \dfrac{\pi a^2}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(5;4;3)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua các hình chiếu của A lên các trục tọa độ. Phương trình của mặt phẳng (α) là

A $12x + 15y + 20z - 10 = 0$. **B** $12x + 15y + 20z + 60 = 0$.

C $\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{3} = 1$. **D** $\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{3} - 60 = 0$.

Lời giải.

Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của A, B, C lên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz. Suy ra $A'(5;0;0)$, $B'(0;4;0)$, $C'(0;0;3)$.

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua A', B', C' là $\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{3} = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Bà A gửi tiết kiệm 50 triệu đồng theo kỳ hạn 3 tháng. Sau 2 năm, bà ấy nhận được số tiền cả gốc và lãi là 73 triệu đồng. Hỏi lãi suất ngân hàng là bao nhiêu một tháng (làm tròn đến hàng phần nghìn)? Biết rằng trong các tháng của kỳ hạn, chỉ cộng thêm lãi chứ không cộng vốn và lãi tháng trước để tính lãi tháng sau, hết một kỳ hạn lãi sẽ được cộng vào vốn để tính lãi trong đủ một kỳ hạn tiếp theo.

A 0,24. **B** 0,048. **C** 0,008. **D** 0,016.

Lời giải.

Gọi r là lãi suất ngân hàng kỳ hạn 3 tháng Ta có 2 năm là 8 kỳ (kỳ hạn 3 tháng).
Số tiền bà A nhận được sau 8 kỳ là 73 triệu nên $73 = 50(1+r)^8 \Leftrightarrow r = 0{,}048$. Vậy lãi suất ngân hàng 1 tháng là $\dfrac{0{,}048}{3} = 0{,}016$.
Chọn đáp án D □

Câu 27. Phương trình $\log_3(x+2) + \dfrac{1}{2}\log_3(x-5)^2 + \log_{\frac{1}{3}} 8 = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

A 1. B 2. C 3. D 4.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x > -2 \\ x \neq 5 \end{cases}$.

Với điều kiện trên phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
& \log_3(x+2) + \log_3|x-5| - \log_3 8 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x+2)|x-5| = 8 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} &(x+2)(x-5) = 8 \\ &(x+2)(x-5) = -8 \end{aligned}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} &x^2 - 3x - 18 = 0 \\ &x^2 - 3x - 2 = 0 \end{aligned}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} &x = 6 \quad (\text{nhận}) \\ &x = -3 \quad (\text{loại}) \\ &x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \quad (\text{nhận}) \end{aligned}\right. .
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt.
Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho khối chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 4, biết $SA = 3$. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng SB và AD là

A $\dfrac{4}{5}$. B $\dfrac{12}{5}$. C $\dfrac{6}{5}$. D 4.

Lời giải.

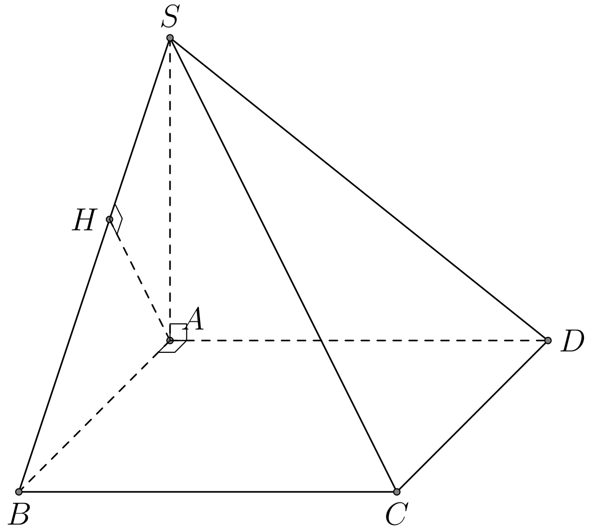
Kẻ $AH \perp SB$ tại H. (1).

Ta có:

- $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$.
- $\begin{cases} AD \perp (SAB) \\ AH \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow AD \perp AH.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\mathrm{d}(AD, SB) = AH$.

Tính $AH = \dfrac{SA \cdot AB}{SB} = \dfrac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{12}{5}$.



Chọn đáp án B □

Câu 29. Hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển $\left(\dfrac{1}{x}+x^3\right)^9$ (với $x\neq 0$) bằng

A. $54x^3$. B. 36. C. 126. D. 84.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển là

$$\mathrm{C}_n^k a^{n-k}b^k=\mathrm{C}_9^k\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{9-k}\cdot x^{3k}=\mathrm{C}_9^k\cdot x^{4k-9}\text{ với } n,k\in\mathbb{N}^*, k\le n.$$

Hệ số của số hạng chứa x^3 có k thỏa $4k-9=3\Leftrightarrow k=3$.

Vậy hệ số cần tìm là $\mathrm{C}_9^3=84$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Số giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^3-6x^2+mx+2}$ luôn đồng biến trên khoảng $(1;3)$ là

A. 8. B. 9. C. 10. D. Vô số.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$y'=(3x^2-12x+m)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^3-6x^2+mx+2}\cdot\ln\dfrac{1}{2}$.

Hàm số y đồng biến trên khoảng $(1;3)\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in(1;3)\Leftrightarrow(3x^2-12x+m)\le 0,\forall x\in(1;3)$
$\Leftrightarrow m\le -3x^2+12x,\forall x\in(1;3)$.

Đặt $g(x)=-3x^2+12x\Rightarrow g'(x)=-6x+12$; $g(x)=0\Rightarrow x=2$.

x	1		2		3
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	9	$\nearrow$	12	$\searrow$	9

Do đó $\Leftrightarrow m\le -3x^2+12x,\forall x\in(1;3)\Leftrightarrow m\le 9$.

Mà $m\in\mathbb{N}^*$ nên $m\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Vậy có 9 giá trị nguyên của m thỏa đề.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-9)(x-4)^2$. Xét hàm số $y=g(x)=f(x^2)$ trên $\mathbb{R}$. Trong các phát biểu sau:

I. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

II. Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$.

III. Hàm số $y=g(x)$ có 5 điểm cực trị.

IV. $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x) = f(9)$.

Số phát biểu đúng là

Ⓐ 1. Ⓑ 2. **C** 3. Ⓓ 4.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2) = 2x^5(x^2-9)(x^2-4)^2$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 9 \\ x^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 3 \\ x = \pm 2. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(9)$	$\nearrow$		$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$		$\searrow$	$f(9)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$, có 3 điểm cực trị và $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x) = f(9)$.

Vậy có 3 phát biểu đúng là I, II và IV.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Cho hai số phức z_1, z_2 có điểm biểu diễn lần lượt là M_1, M_2 cùng thuộc đường tròn có phương trình: $x^2 + y^2 = 1$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị biểu thức $P = |z_1 + z_2|$.

Ⓐ $P = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $P = \sqrt{2}$. Ⓒ $P = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D** $P = \sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có M_1, M_2 thuộc đường tròn tâm $O(0;0)$ và bán kính $R = 1$.

$|z_1 - z_2| = 1 \Leftrightarrow M_1M_2 = 1 \Leftrightarrow \triangle OM_1M_2$ là tam giác đều cạnh bằng 1.

Gọi H là trung điểm $M_1M_2 \Rightarrow OH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó $P = |z_1 + z_2| = \left|\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}\right| = \left|2\overrightarrow{OH}\right| = 2OH = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Cho $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} = a\sqrt{b} - \frac{8}{3}\sqrt{a} + \frac{2}{3}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$. Tính $a + 2b$.

Ⓐ $a + 2b = 7$. **B** $a + 2b = 8$. Ⓒ $a + 2b = -1$. Ⓓ $a + 2b = 5$.

Lời giải.

Ta có

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} = \int_0^1 \frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)}$$

$$\begin{aligned} &= \int\limits_0^1 \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}\left[(x+2)^{\frac{3}{2}}-(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^1 \\ &= 2\sqrt{3}-\frac{8}{3}\sqrt{2}+\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Suy ra $a=2$ và $b=3$. Vậy $a+2b=8$.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Cho phương trình $25^x-(m+2)5^x+2m+1=0$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[0;2018]$ để phương trình có nghiệm?

(A) 2015. (B) 2016. (C) 2018. (D) 2017.

Lời giải.

Đặt $t=5^x$, $(t>0)$.

Phương trình trở thành $t^2-(m+2)t+2m+1=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{t^2-2t+1}{t-2}=f(t)$ ($t=2$ không thỏa phương trình này).

Khi phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $m=f(t)$ có nghiệm $t>0$.

$f'(t)=\dfrac{t^2-4t+3}{(t-2)^2}$.

$f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên hàm $y=f(t)$ trên khoảng $(0;+\infty)$:

t	0		1		2		3		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{1}{2}$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình $m=f(t)$ có nghiệm $t>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge 4 \end{array}\right.$.

Mà m nguyên và $m\in[0;2018]$ nên $m\in\{0;4;5;\ldots;2018\}$. Vậy có 2016 giá trị m thỏa đề.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho $M(2;0;0)$, $N(1;1;1)$. Mặt phẳng (P) thay đổi qua M, N cắt các trục Oy, Oz lần lượt tại $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ $(b>0, c<0)$. Hệ thức nào dưới đây là đúng?

(A) $bc=2(b+c)$. (B) $bc=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$. (C) $b+c=bc$. (D) $bc=b-c$.

Lời giải.

Cách 1. Ta có $\overrightarrow{MN} = (-1;1;1)$, $\overrightarrow{MB} = (-2;b;0)$, $\overrightarrow{MC} = (-2;0;c)$.
Bốn điểm M, N, B, C đều thuộc (P) nên các véc-tơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ đồng phẳng.
Suy ra $\left[\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}\right] \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow -bc + 2c + 2b = 0 \Leftrightarrow bc = 2(b+c)$.

Cách 2. Ta có phương trình mặt phẳng $(P)\colon \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.
Mặt phẳng (P) qua $N(1;1;1)$ nên $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1 \Leftrightarrow bc = 2(b+c)$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;-2)$ và đường thẳng

$$\Delta\colon \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}.$$

Phương trình mặt cầu tâm A, cắt Δ tại hai điểm B và C sao cho $BC = 8$ là

A $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 16$.
B $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$.
C $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16$.
D $(x+2)^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua $M(-2;2;-3)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{a} = (2;3;2)$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = (-2;2;-1)$, $\left[\vec{a}, \overrightarrow{AM}\right] = (-7;-2;10)$, $\mathrm{d}(A,\Delta) = \dfrac{\left|\left[\vec{a}, \overrightarrow{AM}\right]\right|}{|\vec{a}|} = 3$.

Mặt cầu tâm A có bán kính $R = \sqrt{\dfrac{BC^2}{4} + \mathrm{d}^2(A,\Delta)} = 5$.

Vậy phương trình mặt cầu là $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1;0;-1)$, $B(2;3;-1)$, $C(-2;1;1)$. Phương trình đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) là

A $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-5}{5}$.
B $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{5}$.
C $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+1}{2}$.
D $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-5}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;3;0) \Rightarrow AB^2 = 10$,
$\overrightarrow{AC} = (-3;1;2) \Rightarrow AC^2 = 14$,
$\overrightarrow{BC} = (-4;-2;2) \Rightarrow BC^2 = 24$.
$\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A
$\Rightarrow$ Tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm $BC \Rightarrow I(0;2;0)$.
Đường thẳng đi qua tâm I và vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên có véc-tơ chỉ phương là $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (6;-2;10) = 2(3;-1;5)$.
Vậy phương trình $d\colon \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z}{5} \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-5}{5}$

Chọn đáp án A □

Câu 38. Tìm tổng tất cả các nghiệm thuộc đoạn $[0;10\pi]$ của phương trình

$$\sin^2 2x + 3\sin 2x + 2 = 0.$$

A $\dfrac{105}{2}\pi$. **B** $\dfrac{105}{4}\pi$. **C** $\dfrac{297\pi}{4}$. **D** $\dfrac{299\pi}{4}$.

Lời giải.

Ta có: $\sin^2 2x + 3\sin 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = -1\\ \sin 2x = -2 \quad \text{(loại)}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

$x \in [0; 10\pi] \Rightarrow x \in \left\{\dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4} + \pi; \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi; \dfrac{3\pi}{4} + 3\pi; \ldots; \dfrac{3\pi}{4} + 9\pi\right\}$.

Vậy $S = \dfrac{3\pi}{4} + \left(\dfrac{3\pi}{4} + \pi\right) + \left(\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi\right) + \ldots + \left(\dfrac{3\pi}{4} + 9\pi\right) = 10 \cdot \dfrac{3\pi}{4} + (1 + 2 + \ldots + 9)\pi = \dfrac{105}{2}\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng $6a^3$. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\dfrac{AM}{AA'} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{BN}{BB'} = \dfrac{CP}{CC'} = \dfrac{2}{3}$. Tính thể tích V' của khối đa diện $ABC.MNP$.

A $V' = \dfrac{11}{27}a^3$. **B** $V' = \dfrac{9}{16}a^3$. **C** $V' = \dfrac{11}{3}a^3$. **D** $V' = \dfrac{11}{18}a^3$.

Lời giải.

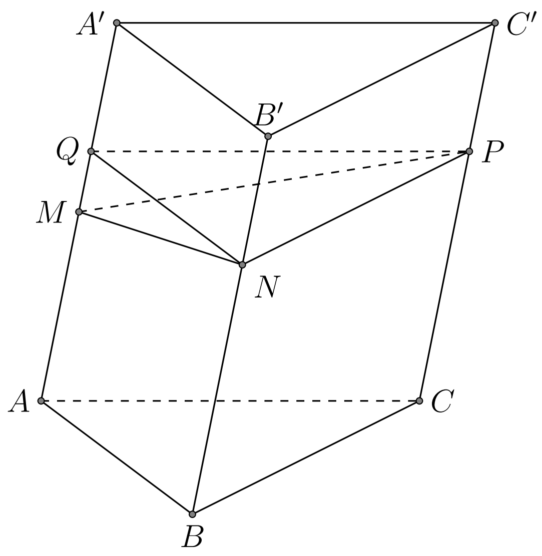
Trên AA' lấy điểm Q sao cho $PQ \parallel AC$.

Khi đó $MQ = A'M - A'Q = \dfrac{1}{6}AA'$.

Gọi V là thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

$V' = V_{ABC.QNP} - V_{M.QNP}$

$\Rightarrow V' = \dfrac{2}{3}V - \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{6}V = \dfrac{11}{18}V = \dfrac{11}{3}a^3$.



Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-2; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$, $f(-3) - f(3) = 0$ và $f(0) = \dfrac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4) + f(-1) - f(4)$ bằng

A $\dfrac{1}{3}\ln 2 + \dfrac{1}{3}$. **B** $\ln 80 + 1$. **C** $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{4}{5} + \ln 2 + 1$. **D** $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{8}{5} + 1$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \displaystyle\int \dfrac{1}{(x+2)(x-1)}\,\mathrm{d}x = \begin{cases}\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right| + C_1, \forall x \in (-\infty; -2)\\ \dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right| + C_2, \forall x \in (-2; 1)\\ \dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right| + C_3, \forall x \in (1; +\infty)\end{cases}$.

- Trên khoảng $(-\infty; -2)$, ta có $f(-3) = \dfrac{1}{3}\ln 4 + C_1$.

- Trên khoảng $(-2;1)$, ta có $f(0) = \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{2} + C_2 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow C_2 = \dfrac{1}{3}(1+\ln 2)$.
  Do đó $f(-1) = \dfrac{2}{3}\ln 2 + \dfrac{1}{3}$.
- Trên khoảng $(1;+\infty)$, ta có $f(3) = \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{2}{5} + C_3$.
  Theo giả thiết $f(-3) - f(3) = 0 \Leftrightarrow C_1 - C_3 = \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{10}$.

Khi đó

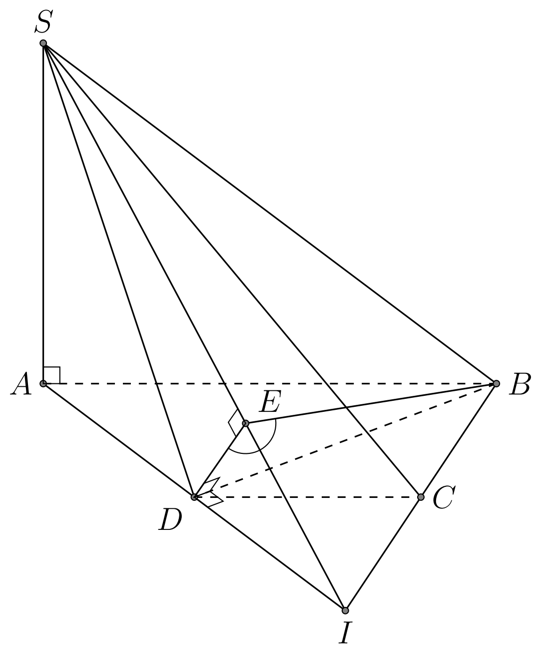
$$\begin{aligned} f(-4)+f(-1)-f(4) &= \frac{1}{3}\ln\frac{5}{2} + C_1 + \frac{2}{3}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\ln\frac{1}{2} - C_3 \\ &= \frac{1}{3}\ln\frac{5}{2} + \frac{2}{3}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\ln\frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a$, $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

A $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **D** $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

Lời giải.



Gọi I là giao điểm của AD và BC.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAD)$.

Mà $SI \subset (SAD)$ nên $BD \perp SI$.

Kẻ $DE \perp SI$ tại E.

Ta có $\begin{cases} SI \perp DE \\ SI \perp BD \end{cases} \Rightarrow SI \perp (BDE) \Rightarrow SI \perp BE$.

Suy ra góc giữa (SAD) và (SBC) là góc giữa DE và BE.

Tính: $BD = a\sqrt{3}$, $\sin\widehat{AIS} = \dfrac{SA}{SI} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$,

$DE = DI \cdot \sin\widehat{AIS} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$,

$BE = \sqrt{BD^2 + DE^2} = \dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$.

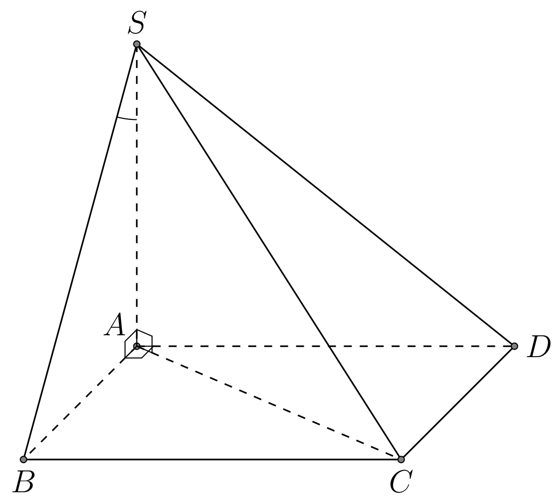
Khi đó $\cos\widehat{BED} = \dfrac{DE}{BE} = \dfrac{a\sqrt{3}}{7} \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{2a\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = 2a$. Tính cosin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD).

A $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C** $\dfrac{1}{2}$. **D** 1.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases}(SAB) \perp (ABCD)\\(SAC) \perp (ABCD)\end{cases}$

$\Rightarrow SA \perp (ABCD)$.

Lại có $\begin{cases}AB \perp AD\\AB \perp SA\end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD)$.

Suy ra góc giữa SB và (SAD) là $\widehat{BSA}$.

$\cos\widehat{BSA} = \dfrac{SA}{SB} = \dfrac{SA}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\ln^2 u_6 - \ln u_8 = \ln u_4 - 1$ và $u_{n+1} = u_n\mathrm{e}$ với mọi $n \geq 1$. Tìm u_1.

A e. **B** e^2. **C** e^{-3}. **D** e^{-4}.

Lời giải.

Vì $u_{n+1} = u_n\mathrm{e}$ với mọi $n \geq 1$ nên dãy (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = \mathrm{e}$.

Ta có

$$\begin{aligned}\ln^2 u_6 - \ln u_8 = \ln u_4 - 1 &\Leftrightarrow \ln^2 u_6 - (\ln u_8 + \ln u_4) + 1 = 0\\&\Leftrightarrow \ln^2 u_6 - \ln(u_8u_4) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln^2 u_6 - \ln u_6^2 + 1 = 0\\&\Leftrightarrow \ln^2 u_6 - 2\ln u_6 + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(u_6 - 1)^2 = 0\\&\Leftrightarrow \ln u_6 = 1 \Leftrightarrow u_6 = \mathrm{e}\\&\Leftrightarrow u_1 \cdot \mathrm{e}^5 = \mathrm{e} \Leftrightarrow u_1 = \mathrm{e}^{-4}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{z-1}{z+3i}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z+i| + 2|\overline{z} - 4 + 7i|$.

A 8. **B** 20. **C** $2\sqrt{5}$. **D** $4\sqrt{5}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}&\left|\dfrac{z-1}{z+3i}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\\Leftrightarrow\ &\sqrt{2}|z-1| = |z+3i|\\\Leftrightarrow\ &2(x-1)^2 + 2y^2 = x^2 + (y+3)^2\\\Leftrightarrow\ &x^2 + y^2 - 4x - 6y - 7 = 0\\\Leftrightarrow\ &(x-2)^2 + (y-3)^2 = 20.\end{aligned}$$

Do đó tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2+(y-3)^2 = 20$ với bán kính $R = 2\sqrt{5}$.

$P = |z+i| + 2|\overline{z} - 4 + 7i| = |z+i| + 2|z - 4 - 7i| = MA + 2MB$ với $A(0;-1)$, $B(4;7)$ lần lượt biểu diễn số phức $z_1 = -i$, $z_2 = 4 + 7i$.
Ta có $A(0;-1)$, $B(4;7) \in (C)$ và $AB = 4\sqrt{5} = 2R$ nên AB là đường kính đường tròn (C).
$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = AB^2 = 80$.
Mặt khác: $P = MA + 2MB \leq \sqrt{5(MA^2 + MB^2)} = 20$.
Dấu bằng xảy ra khi $MB = 2MA$. Vậy giá trị lớn nhất của P là 20.
Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \in (-1;0)$, $x_2 \in (1;2)$. Biết hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1;x_2)$. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.   B $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
C $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.   D $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

Lời giải.
$y' = 3ax^2 + 2bx + c$.
Vì hàm số đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 và hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1;x_2)$ nên $a < 0$.
Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $d < 0$.
Vì $x_1 \in (-1;0)$, $x_2 \in (1;2)$ nên $\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{2b}{3a} > 0 \\ \dfrac{c}{3a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c > 0 \end{cases}$.
Chọn đáp án A □

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = -\mathrm{e}^x \cdot f^2(x), \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = \dfrac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x_0 = \ln 2$ là

A $2x + 9y - 2\ln 2 - 3 = 0$.   B $2x - 9y - 2\ln 2 + 3 = 0$.
C $2x - 9y + 2\ln 2 - 3 = 0$.   D $2x + 9y + 2\ln 2 - 3 = 0$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
& f'(x) = -\mathrm{e}^x \cdot f^2(x) \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \mathrm{e}^x \\
\Leftrightarrow\ & \int_0^{\ln 2} \left[-\frac{f'(x)}{f^2(x)}\right] \mathrm{d}x = \int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{1}{f(x)}\right)\Big|_0^{\ln 2} = \mathrm{e}^x\Big|_0^{\ln 2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{f(\ln 2)} - \frac{1}{f(0)} = 1 \\
\Leftrightarrow\ & f(\ln 2) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

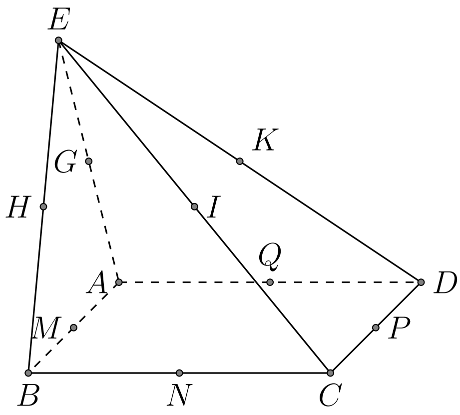
$f'(\ln 2) = -\mathrm{e}^{\ln 2} \cdot f^2(\ln 2) = -2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = -\dfrac{2}{9}$.
Vậy phương trình tiếp tuyến là $y = -\dfrac{2}{9}(x - \ln 2) + \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 2x + 9y - 2\ln 2 - 3 = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(1;2;3)$, $B(2;1;0)$, $C(4;-3;-2)$, $D(3;-2;1)$, $E(1;1;-1)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng cách đều 5 điểm trên?

(A) 1. (B) 4. (C) 5. (D) Không tồn tại.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;-1;-3)$, $\overrightarrow{DC} = (1;-1;-3)$, $\overrightarrow{AD} = (2;-4;-2)$.

Suy ra $ABCD$ là hình bình hành.

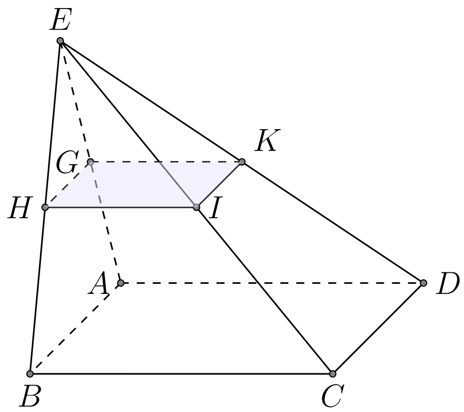
$\overrightarrow{AE} = (0;-1;-4)$, $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right] = (-10;-4;-2)$.

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\cdot\overrightarrow{AE} = 12 \neq 0$ nên $E.ABCD$ là hình chóp đỉnh E có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

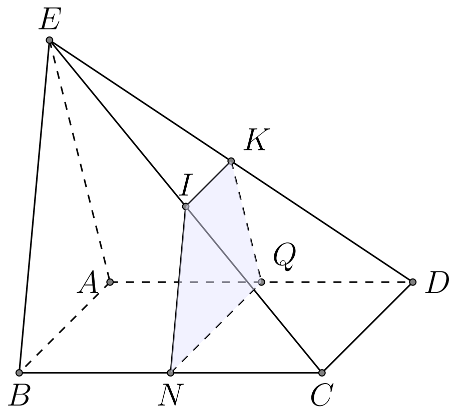
Gọi G, H, I, K, M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh EA, EB, EC, ED, AB, BC, CD, AD.

Do đó có 5 mặt phẳng cách đều 5 điểm là:

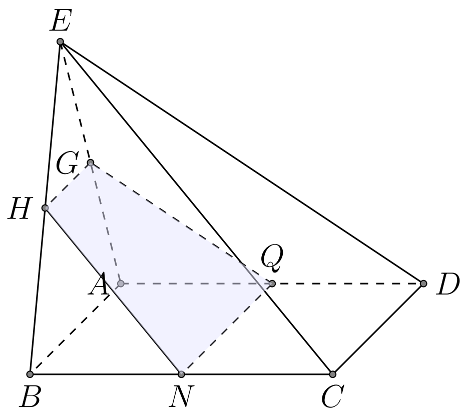
- Mặt phẳng qua 4 trung điểm của 4 cạnh bên: $(GHIK)$.



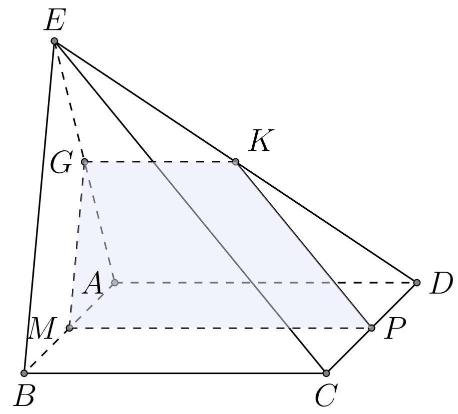
- Mặt phẳng qua 4 trung điểm lần lượt của EC, ED, AD, BC: $(IKQN)$.



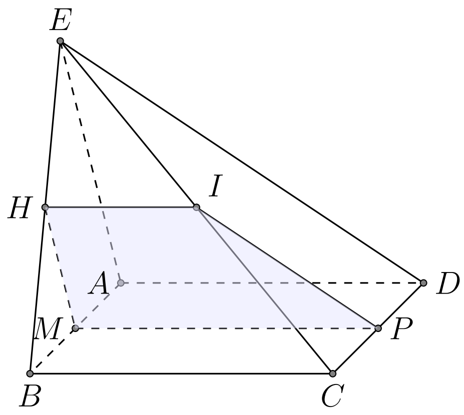
- Mặt phẳng qua 4 trung điểm của EB, EA, AD, BC: $(HGQN)$.



- Mặt phẳng qua 4 trung điểm của EA, ED, CD, AB: $(GKPM)$.



- Mặt phẳng qua 4 trung điểm của EB, EC, CD, AB: $(HIPM)$.



Chọn đáp án C □

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x) > 0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn: $g(x) = 1 + 2018 \int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $g(x) = f^2(x)$. Tính $\int\limits_0^1 \sqrt{g(x)}\,\mathrm{d}x$.

A $\dfrac{1011}{2}$. **B** $\dfrac{1009}{2}$. **C** $\dfrac{2019}{2}$. **D** 505.

Lời giải.

Vì $f(x) > 0$ và $g(x) = f^2(x)$ nên $g(x) > 0$.

$g(x) = 1 + 2018 \int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ nên $g(0) = 1 + 2018 \int\limits_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Ta có

$$\begin{aligned}
& g(x) = 1 + 2018\int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\
\Rightarrow\ & g'(x) = 2018f(x) = 2018\sqrt{g(x)} \\
\Rightarrow\ & \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} = 2018 \\
\Rightarrow\ & \int\limits_0^t \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}\,\mathrm{d}x = 2018\int\limits_0^t \mathrm{d}x \\
\Rightarrow\ & 2\left(\sqrt{g(t)} - 1\right) = 2018t \\
\Rightarrow\ & \sqrt{g(t)} = 1009t + 1 \\
\Rightarrow\ & \int\limits_0^1 \sqrt{g(t)}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 (1009t + 1)\,\mathrm{d}t = \frac{1011}{2}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 49. Có 12 người xếp thành một hàng dọc (vị trí của mỗi người trong hàng là cố định). Chọn ngẫu nhiên 3 người trong hàng. Tính xác suất để 3 người được chọn không có hai người nào đứng cạnh nhau.

A $\frac{21}{55}$. B $\frac{6}{11}$. C $\frac{55}{126}$. D $\frac{7}{110}$.

Lời giải.

Không gian mẫu Ω có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^3 = 220$.

Giả sử chọn 3 người có số thứ tự trong hàng lần lượt là a, b, c.

Theo giả thiết ta có $a < b < c$ và $b - a > 1$, $c - b > 1$ nên $a < b - 1$ và $b < c - 1$.

Suy ra $1 \leq a < b - 1 < c - 2 \leq 10$.

Đặt $a' = a$, $b' = b - 1$, $c' = c - 2$, ta có $1 \leq a' < b' < c' = c - 2 \leq 10$.

Gọi A là biến cố chọn ngẫu nhiên 3 người trong hàng.

Việc chọn ngẫu nhiên 3 người trong hàng tương ứng với việc chọn 3 số a', b', c' bất kỳ trong tập hợp $\{1; 2; 3; \ldots; 10\}$ nên có $n(A) = \mathrm{C}_{10}^3 = 120$.

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{120}{220} = \dfrac{6}{11}$.

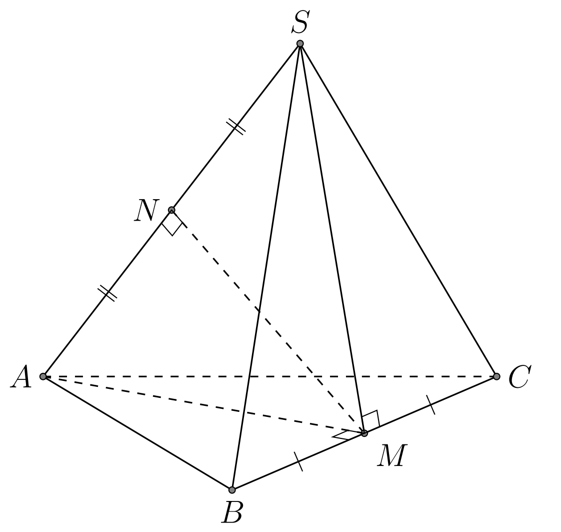
Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho x, y là các số thực dương thay đổi. Xét hình chóp $S.ABC$ có $SA = x$, $BC = y$, các cạnh còn lại đều bằng 1. Khi thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất thì tích $x \cdot y$ bằng

A $\frac{4}{3}$. B $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. C $2\sqrt{3}$. D $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Vì $SB = SC = AB = AC$ nên các tam giác SBC và ABC cân tại S và A.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC, SA.

Ta có $\begin{cases} BC \perp SM \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$.

Ta có $AM = \sqrt{1 - \dfrac{y^2}{4}}$.

Vì $SM = AM$ nên tam giác SAM cân tại M.

Suy ra $MN = \sqrt{AM^2 - AN^2} = \sqrt{1 - \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{4}}$.

$S_{SAM} = \dfrac{1}{2} \cdot SA \cdot MN = \dfrac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{1 - \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{4}}$.

$$\begin{aligned} V_{S.ABC} &= \frac{1}{3} \cdot BC \cdot S_{SAM} \\ &= \frac{1}{3} \cdot y \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4}} \\ &= \frac{1}{12} xy\sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ &= \frac{1}{12}\sqrt{x^2y^2(4 - x^2 - y^2)} \\ &\le \frac{1}{12}\sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 + 4 - x^2 - y^2}{3}\right)^3} = \frac{2\sqrt{3}}{27}. \end{aligned}$$

$V_{\max} = \dfrac{2\sqrt{3}}{27}$ khi $x^2 = y^2 = 4 - 2x^2 \Leftrightarrow x = y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Vậy $xy = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. D	3. C	4. D	5. A	6. C	7. C	8. D	9. C	10. B
11. A	12. D	13. D	14. A	15. B	16. B	17. A	18. A	19. B	20. D
21. A	22. D	23. A	24. B	25. C	26. D	27. C	28. B	29. D	30. B
31. C	32. D	33. B	34. B	35. A	36. B	37. A	38. A	39. C	40. A
41. C	42. B	43. D	44. B	45. A	46. A	47. C	48. A	49. B	50. A

132 ĐỀ THI THỬ ĐẠI HỌC MÔN TOÁN - SỞ BẮC GIANG, NĂM HỌC 2017-2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

A. $(1; -4)$. B. $x = 0$. C. $(0; -3)$. D. $(-1; -4)$.

Lời giải.

Qua $x = 0$ đạo hàm của hàm số đổi dấu từ dương sang âm nên đồ thị hàm số đạt cực đại tại $x = 0 \Rightarrow$ tọa độ điểm cực đại là $(0; -3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 2.

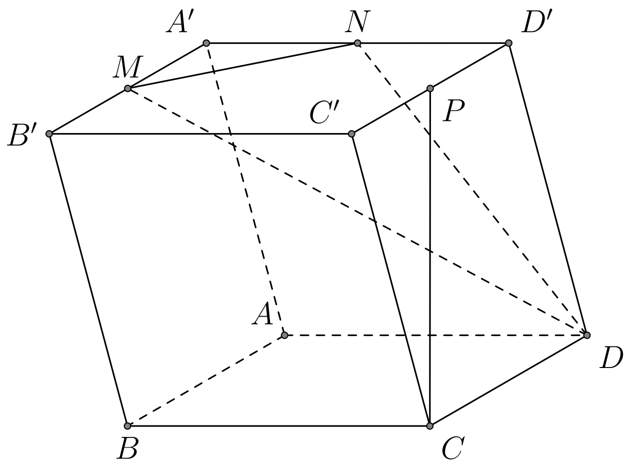
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$, $A'D'$, $C'D'$ (hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng CP và mặt phẳng (DMN) bằng

A. $30°$.

B. $60°$.

C. $45°$.

D. $0°$.



Lời giải.

Phân tích: Để xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, cần xác định được hình chiếu vuông góc của CP lên (DMN), nhưng đề bài lại chỉ cho hình hộp, vì vậy các yếu tố vuông góc là rất khó tìm ra. Mặt khác nhìn hình vẽ, việc hình dung hình chiếu nằm ở đâu là rất khó khăn. Như vậy có thể suy đoán là $CP \parallel (DMN)$ (vì đáp án có $0°$).

Thật vậy, vì P, M lần lượt là trung điểm của $C'D'$ và $A'B'$ nên $CP \parallel BM$, mà $MN \parallel BD$ (do M, N là trung điểm $A'B'$, $A'D'$) nên $(DMN) \equiv (BDNM)$, suy ra $CP \parallel (BDNM)$.

Vậy góc giữa CP và (DMN) bằng $0°$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 3m + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$?

(A) 4. (B) 1. **C** 2. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$.

Xét trường hợp $m > 0$, đồ thị hàm có 3 điểm cực trị và có bảng biến thiên như hình dưới

x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		0		$\sqrt{m}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, để hàm số đồng biến trên $(1; 2)$ thì $0 < \sqrt{m} \leq 1 \Leftrightarrow m = 1$ (do $m \in \mathbb{Z}$).

Xét trường hợp $m = 0$, thì $y' = 4x^3 > 0\ \forall x \in (1; 2)$ suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Vậy với $m = 0 \vee m = 1$ thì yêu cầu bài toán được thỏa mãn.

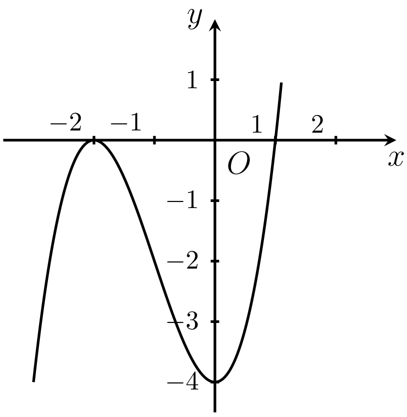
Chọn đáp án (C) □

Câu 4.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(1; +\infty)$. (B) $(-\infty; -2)$.

C $(-1; 0)$. (D) $(-2; 1)$.



Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{2}$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2; 0; -1)$ và vuông góc với d có phương trình là

A $x - y + 2z = 0$. (B) $x - 2y - 2 = 0$. (C) $x + y + 2z = 0$. (D) $x - y - 2z = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến cùng phương với véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d, suy ra $\vec{n}_{(P)} = (1; -1; 2)$. Phương trình mặt phẳng (P) là

$$1(x-2) - 1(y-0) + 2(z+1) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z = 0.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{\log_2 x}{\log_2(xy)+1} = \dfrac{\log_2 y}{\log_2(xy)-1} = \log_2 x + \log_2 y$. Tính $x + y$.

(A) $x + y = 2$. **B** $x + y = 2$ hoặc $x + y = \sqrt[4]{8} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

(C) $x + y = 2 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$. (D) $x + y = \dfrac{1}{2}$ hoặc $x + y = 2$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x > 0, y > 0, xy \neq \frac{1}{2}$ và $xy \neq 2$.

$$\begin{aligned}\frac{\log_2 x}{\log_2(xy)+1} &= \log_2 x + \log_2 y \Leftrightarrow \log_2 x = \log_2^2(xy) + \log_2(xy)\\ \frac{\log_2 y}{\log_2(xy)-1} &= \log_2 x + \log_2 y \Leftrightarrow \log_2 y = \log_2^2(xy) - \log_2(xy)\end{aligned}$$

Cộng hai biểu thức trên vế theo vế ta được

$$\log_2 x + \log_2 y = 2\log_2^2(xy) \Leftrightarrow \log_2(xy) = 2\log_2^2(xy) \Leftrightarrow \log_2(xy) = 0 \vee \log_2(xy) = \frac{1}{2}.$$

Với $\log_2(xy) = 0 \Leftrightarrow xy = 1$, ta có $\log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$.
Với $\log_2(xy) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow xy = \sqrt{2}$, ta có $\log_2 x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{8} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 7. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x\ln x$ tại điểm có hoành độ bằng e là

A $y = 2x + 3\mathrm{e}$. B $y = x + \mathrm{e}$. C $y = \mathrm{e}x - 2\mathrm{e}$. D $y = 2x - \mathrm{e}$.

Lời giải.

Tại điểm có hoành độ bằng e thì tung độ $y = \mathrm{e}$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $(\mathrm{e};\mathrm{e})$ là

$$y = f'(x_0)(x-\mathrm{e}) + \mathrm{e} \Leftrightarrow y = (\ln \mathrm{e} + 1)(x - \mathrm{e}) + \mathrm{e} \Leftrightarrow y = 2x - \mathrm{e}.$$

Chọn đáp án D ☐

Câu 8. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?

A $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. B $y = \frac{x^2+x+1}{x-2}$.

C $y = \frac{3x+1}{x-1}$. D $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 2$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+1}{x-1} = 3$ nên đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-1}$ có tiệm cận ngang $y = 3$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A 5. B 3. C 1. D 2.

Lời giải.

$y' = \frac{4-m^2}{(x+4)^2}$.

Để hàm số đồng biến thì $4 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B ☐

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Tọa độ điểm A là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (Oyz) là

A $A(1;-2;0)$. B $A(0;-2;3)$. C $A(1;-2;3)$. D $A(1;0;3)$.

Lời giải.
Điểm nằm trên mặt phẳng Oyz thì có hoành độ bằng 0.
Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Một người vay ngân hàng 500 triệu đồng với lãi suất $1,2\%$ một tháng để mua xe. Nếu mỗi tháng người đó trả ngân hàng 10 triệu đồng và thời điểm bắt đầu trả cách thời điểm vay là đúng một tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì người đó trả hết nợ ngân hàng? Biết rằng lãi suất không thay đổi.

(A) 70 tháng. (B) 80 tháng. (C) 85 tháng. **(D) 77 tháng.**

Lời giải.
Bài toán thuộc dạng bài toán vay vốn trả góp, có công thức tổng quát tính số tiền còn lại sau n tháng là

$$S = A(1+r)^n - X\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Từ giả thiết ta có

$$500(1+0,012)^n - 10\frac{(1+0,012)^n - 1}{0,012} = 0 \Leftrightarrow n = 77.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{2x+5}$ bằng

(A) $-\dfrac{1}{2}$. **(B) 0.** (C) $-\infty$. (D) $+\infty$.

Lời giải.
Vì khi $x \to -\infty$ thì $2x+5 \to -\infty$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{2x+5} = 0$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x - z + 1 = 0$. Tọa độ một vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

(A) $\vec{n} = (2;-1;1)$. **(B) $\vec{n} = (2;0;-1)$.** (C) $\vec{n} = (2;-1;0)$. (D) $\vec{n} = (2;0;1)$.

Lời giải.
Câu hỏi sử dụng kiến thức cơ bản.
Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[-1;4]$ là

(A) 1. **(B) -1.** (C) 3. (D) -4.

Lời giải.
$y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
Ta có $y(-1) = 3$; $y(1) = -1$; $y(4) = 53$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1 đạt tại $x = 1$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Cho số phức $z = -1 + 2i$. Số phức $\overline{z}$ được biểu diễn bởi điểm nào dưới đây trên mặt phẳng tọa độ?

(A) $P(1;2)$. (B) $M(-1;2)$. (C) $N(1;-2)$. **(D) $Q(-1;-2)$.**

Lời giải.
$\overline{z} = -1 - 2i \Rightarrow \overline{z}$ được biểu diễn bởi điểm $(-1; -2)$.
Chọn đáp án D □

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1

Số nghiệm của phương trình $2\left(f(x)\right)^2 - 3f(x) + 1 = 0$ là
A. 2. B. 3. C. 6. D. 0.

Lời giải.
$$2\left(f(x)\right)^2 - 3f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1 \vee f(x) = \frac{1}{2}$$
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x) = 1$ có đúng 1 nghiệm, $f(x) = \frac{1}{2}$ có đúng 2 nghiệm.
Chọn đáp án B □

Câu 17. Thể tích của khối lăng trụ có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B là
A. $V = Bh$. B. $V = \frac{1}{3}Bh$. C. $V = \frac{1}{6}Bh$. D. $V = \frac{1}{2}Bh$.

Lời giải.
Câu hỏi lý thuyết cơ bản.
Chọn đáp án A □

Câu 18. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{-x^2 - 4}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{3}{2}; 4\right]$ là
A. $-\frac{25}{6}$. B. -2. C. -5. D. -4.

Lời giải.
$$y' = \frac{4}{x^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$
Ta có $f\left(\frac{3}{2}\right) \simeq -4,17$; $f(2) = -4$; $f(4) = -5$. Vậy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất là -4 tại $x = 2$.
Chọn đáp án D □

Câu 19. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BB' bằng
A. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. B. $\frac{\sqrt{5}a}{3}$. C. $\frac{a}{\sqrt{5}}$. D. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Lời giải.
Kẻ $BH \perp AC$ tại H, suy ra BH là đoạn vuông góc chung của AC và BB'. BH là đường cao của tam giác đều nên $BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
Chọn đáp án D □

Câu 20. Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = 2 + \dfrac{3}{1-x}$ là

(A) $y = 3$. (B) $y = -1$. (C) $x = 1$. (D) $y = 2$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(2 + \dfrac{3}{1-x}\right) = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho $P = \log_{a^4} b^2$ với $0 < a \neq 1$ và $b < 0$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

(A) $P = -\dfrac{1}{2}\log_a(-b)$. (B) $P = 2\log_a(-b)$. (C) $P = -2\log_a(-b)$. (D) $P = \dfrac{1}{2}\log_a(-b)$.

Lời giải.

$P = \log_{a^4} b^2 = \dfrac{1}{4} \cdot 2\log_a(-b) = \dfrac{1}{2}\log_a(-b)$ (vì $b < 0$).

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Một lô hàng gồm 30 sản phẩm trong đó có 20 sản phẩm tốt và 10 sản phẩm xấu. Lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm trong lô hàng. Tính xác suất để 3 sản phẩm lấy ra có ít nhất một sản phẩm tốt.

(A) $\dfrac{6}{203}$. (B) $\dfrac{57}{203}$. (C) $\dfrac{197}{203}$. (D) $\dfrac{153}{203}$.

Lời giải.

Không gian mẫu ở đây là: lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm trong lô hàng, số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{30}^3$.

Gọi A là biến cố ba sản phẩm lấy ra đều là sản phẩm xấu, suy ra $\overline{A}$ là biến cố ba sản phẩm lấy ra có ít nhất một sản phẩm tốt.

Xác suất để ba sản phẩm lấy ra đều là sản phẩm xấu là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{\mathrm{C}_{10}^3}{\mathrm{C}_{30}^3} = \dfrac{6}{203}$.

Xác suất để 3 sản phẩm lấy ra có ít nhất một sản phẩm tốt là $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{6}{203} = \dfrac{197}{203}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Cho $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_{-2}^{1} [2f(x) - 1]\,\mathrm{d}x$.

(A) -9. (B) 3. (C) -3. (D) 5.

Lời giải.

$$I = \int_{-2}^{1} [2f(x) - 1]\,\mathrm{d}x = 2\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^{1} \mathrm{d}x = 3.$$

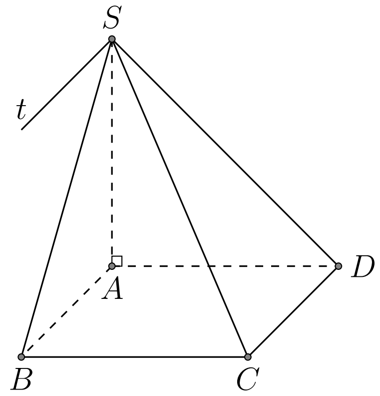
Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng

(A) 30°. (B) 60°. (C) 45°. (D) 90°.

Lời giải.

$(SAB) \cap (SCD) = St$ với St là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với AB và CD.
Vì $CD \perp (SAD)$ và $St \parallel CD$ nên $St \perp (SAD)$. Suy ra $SA \perp St$ và $SD \perp St$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) chính là góc giữa SA và SD.
Từ giả thiết ta suy ra $\triangle SAD$ vuông cân tại A. Vậy $\widehat{ASD} = 45^\circ$.



Chọn đáp án C □

Câu 25. Có bao nhiêu số có hai chữ số khác nhau và đều khác 0?

A 9^2. B A_9^2. C 90. D C_9^2.

Lời giải.

Các số thỏa yêu cầu bài toán có thể được lập thành bằng cách lấy 2 trong 9 phần tử từ 1 đến 9. Vậy số cách chọn là A_9^2.
Chọn đáp án B □

Câu 26. Tích phân $\int\limits_1^2 (x+3)^2 \,\mathrm{d}x$ bằng

A $\dfrac{61}{9}$. B 4. C 61. D $\dfrac{61}{3}$.

Lời giải.

$$\int\limits_1^2 (x+3)^2 \,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 (x^2+6x+9) \,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} + 9x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{61}{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 27. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\cos 2x$ là

A $-\sin 2x + C$. B $-2\sin 2x + C$. C $\sin 2x + C$. D $2\sin 2x + C$.

Lời giải.

$$\int 2\cos 2x \,\mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{1}{2}\sin 2x + C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 28. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;0)$ và đường thẳng Δ: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-1}$. Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm M, cắt và vuông góc với Δ là

A $d: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-4t \\ z = -2t \end{cases}$. B $d: \begin{cases} x = 2-t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases}$. C $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-4t \\ z = 2t \end{cases}$. D $d: \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1+t \\ z = -t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi $A(1+2t;-1+t;-t)$ là điểm thuộc Δ. Ta có $\overrightarrow{MA}=(2t-1;t-2;-t)$; $\vec{u}_\Delta=(2;1;-1)$.

$$MA\perp\Delta\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\cdot\vec{u}_\Delta=0\Leftrightarrow 2(2t-1)+(t-2)-1(-t)=0\Leftrightarrow t=\frac{2}{3}.$$

Suy ra một vec-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}_d=(1;-4;-2)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Bảng biến thiên trong hình bên là của hàm số nào dưới đây?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

(A) $y=x^4-2x^2-3$. **B** $y=-x^3+3x+2$. (C) $y=x^3-3x+4$. (D) $y=\dfrac{x-1}{2x-1}$.

Lời giải.
Nhìn bảng biến thiên ta thấy đây là dáng điệu của một hàm số bậc ba, và $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ nên hệ số $a<0$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Với n là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^3=13n$, hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển của biểu thức $\left(x^2+\dfrac{1}{x^3}\right)^n$ bằng

A 120. (B) 45. (C) 252. (D) 210.

Lời giải.
Điều kiện $n\in\mathbb{N}^*$ và $n\geq 3$.

$$\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^3=13n\Leftrightarrow\frac{n!}{(n-1)!}+\frac{n!}{3!(n-3)!}=13n\Leftrightarrow n+\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)=13n\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=-7\text{ (loại)}\\n=0\text{ (loại)}\\n=10\end{array}\right.$$

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x^2+\dfrac{1}{x^3}\right)^{10}$ là $\mathrm{C}_{10}^k\left(x^2\right)^k\left(x^{-3}\right)^{10-k}$.
Số hạng chứa x^5 ứng với k thỏa mãn $2k-3(10-k)=5\Leftrightarrow k=7$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^5 là $\mathrm{C}_{10}^7=120$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Cho $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\,\mathrm{d}x=a+b\sqrt{2}$, với a,b là các số hữu tỉ. Khi đó giá trị của a là

A $\dfrac{26}{27}$. (B) $-\dfrac{26}{27}$. (C) $-\dfrac{27}{26}$. (D) $-\dfrac{25}{27}$.

Lời giải.

Nhân cả tử và mẫu với lượng liên hợp của $3x+\sqrt{9x^2-1}$ ta được

$$I=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1}x(3x-\sqrt{9x^2-1})\,\mathrm{d}x=3\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1}x^2\,\mathrm{d}x-\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1}x\sqrt{9x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

Đặt $u=9x^2-1\Rightarrow\ \mathrm{d}u=18x\,\mathrm{d}x$ và đổi cận, ta được

$$I=x^3\Big|_{\frac{1}{3}}^{1}-\frac{1}{18}\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1}\sqrt{9x^2-1}\cdot 18x\,\mathrm{d}x=x^3\Big|_{\frac{1}{3}}^{1}-\frac{1}{18}\int\limits_{0}^{8}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u=\frac{26}{27}+\left(-\frac{u^{\frac{3}{2}}}{27}\right)\Bigg|_{0}^{8}=\frac{26}{27}-\frac{16\sqrt{2}}{27}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 32. Tập hợp nào sau đây chứa tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^2-2x+m|$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 5?

A $(-5;-2)\cup(0;3)$. **B** $(0;+\infty)$. **C** $(-6;-3)\cup(0;2)$. **D** $(-4;3)$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=x^2-2x+m$ có $\Delta'=1-m$.

Trường hợp $\Delta'\le 0\Leftrightarrow m\ge 1$ thì $x^2-2x+m\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow|x^2-2x+m|=x^2-2x+m$.

Hàm số $y=x^2-2x+m$ là một parabol có bề lõm hướng lên nên chỉ có thể đạt giá trị lớn nhất tại $x=-1$ hoặc $x=2$.

Ta có $y(-1)=m+3$, $y(2)=m$. Vì $m+3>m$ khi $m\ge 1$ nên giá trị lớn nhất của hàm số $y(-1)=m+3=5\Leftrightarrow m=2$.

Trường hợp $\Delta'>0\Leftrightarrow m<1$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$1-\sqrt{1-m}$		1		$1+\sqrt{1-m}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-m+1$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy khi $m=-4$ thì hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;2]$ bằng 5.

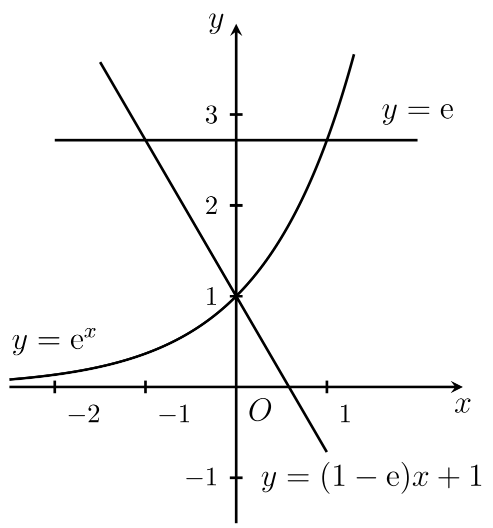
Chọn đáp án A □

Câu 33.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=\mathrm{e}$, $y=\mathrm{e}^x$ và $y=(1-\mathrm{e})x+1$ (tham khảo hình vẽ bên). Diện tích của (H) là

A $S=\dfrac{\mathrm{e}+1}{2}$. **B** $S=\mathrm{e}+\dfrac{1}{2}$.

C $S=\mathrm{e}+\dfrac{3}{2}$. **D** $S=\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$.



Lời giải.

Dựa vào hình vẽ, ta xác định nhanh các hoành độ giao điểm của từng cặp đồ thị hàm số lần lượt là $x=-1$, $x=0$, $x=1$.

$$S=\int\limits_{-1}^{0}(\mathrm{e}-(1-\mathrm{e})x+1)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}(\mathrm{e}-\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}+1}{2}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là -2; -1; 0 và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y=f(x^2-2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 4. (B) 6. **C** 3. (D) 5.

Lời giải.

$$y=f(x^2-2x)\Rightarrow y'=(2x-2)f'(x^2-2x)$$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\ f'(x^2-2x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x=-2\\ x^2-2x=-1\\ x^2-2x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\text{ (nghiệm bội 3)}\\ x=0\\ x=2\end{array}\right..$$

Vậy hàm số $y=f(x^2-2x)$ có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $|z|-2\overline{z}=-7+3i+z$. Tính $|z|$.

(A) 3. **B** 5. (C) $\dfrac{25}{4}$. (D) $\dfrac{13}{4}$.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi\Rightarrow\overline{z}=a-bi$.

Theo giả thiết ta có

$$\sqrt{a^2+b^2}-2(a-bi)=-7+3i+a+bi\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}-3a+7+(b-3)i=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}-3a+7=0\\ b-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a^2+9}=3a-7\\ b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+9=(3a-7)^2\\ 3a-7\geq 0\\ b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{5}{4}\text{ (loại)}\\ a=4\\ b=3\end{cases}$$

Vậy $|z|=5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$, $f(-3)+f(3)=0$. Tính giá trị của biểu thức $f(0)+f(4)$.

(A) $P=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{5}$. **B** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{5}$. (C) $1+\ln\dfrac{3}{5}$. (D) $\ln\dfrac{3}{5}+2$.

Lời giải.

$$f'(x)=\frac{1}{x^2-1}\Rightarrow f(x)=\int\frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+C.$$

Theo giả thiết, ta có

$$f(-3)+f(3)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+2C=0 \Leftrightarrow C=0.$$

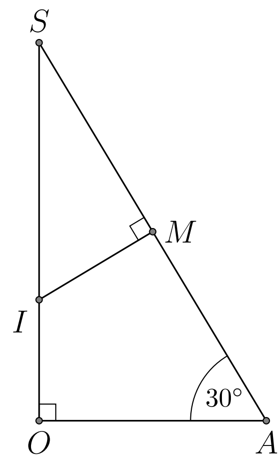
Vậy $f(0)+f(4)=\frac{1}{2}\ln 1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}+2C=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho hình chóp đa giác đều có các cạnh bên bằng a và tạo với đáy của hình chóp một góc 30°. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp

A $\frac{4\pi a^3}{3}$. B $4\pi a^3$. C $4\pi a^3\sqrt{3}$. D $\frac{4\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Xét tam giác SOA vuông tại A có $\widehat{SAO}=30^\circ$. Khi cho tam giác này quay quanh trục SO ta được một hình nón. Đa giác đều thỏa mãn yêu cầu đề bài là đa giác đều bất kì nội tiếp trong hình nón ta vừa dựng được. Hình cầu ngoại tiếp hình nón cũng là hình cầu ngoại tiếp đa giác đều đã cho.

Dựng đường trung trực của SA, cắt SA tại M và cắt SO tại I, suy ra I là tâm hình cầu và bán kính hình cầu là SI.

Do $\triangle SMI \sim \triangle SOA \Rightarrow \frac{SM}{SO}=\frac{SI}{SA} \Rightarrow SI=\frac{SM\cdot SA}{SO}=\frac{a\cdot\frac{a}{2}}{a\sin 30^\circ}=a$.

Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp cần tìm là $\frac{4\pi a^3}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Cho hàm số $y=x(x^2-3)$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị (C) thỏa mãn tiếp tuyến tại M của (C) cắt (C) và trục hoành lần lượt tại hai điểm phân biệt A (khác M) và B sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

A 0. B 1. C 2. D 3.

Lời giải.

Ta có $y=x(x^2-3)=x^3-3x \Rightarrow y'=3x^2-3$.

Vì điểm M và điểm A thuộc (C) nên ta gọi tọa độ hai điểm này lần lượt là $M(x_M;x_M^3-3x_M)$ và $A(x_A;x_A^3-3x_A)$. Điểm B nằm trên trục hoành nên ta gọi điểm B có tọa độ là $B(x_B;0)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là

$$d\colon y=3(x_M^2-1)(x-x_M)+x_M^3-3x_M$$

Nếu $x_M=\pm 1$ thì tại M có hai tiếp tuyến với (C) lần lượt là $y=2$ và $y=-2$ (không thỏa mãn đề bài).

Vì $B\in d$ nên $0=3(x_M^2-1)(x_B-x_M)+x_M^3-3x_M \Rightarrow x_B=x_M+\frac{-x_M^3+3x_M}{3(x_M^2-1)}=\frac{2x_M^3}{3(x_M^2-1)}$.

Vì $A\in d$ nên

$$x_A^3-3x_A=3(x_M^2-1)(x_A-x_M)+x_M^3-3x_M$$
$$\Leftrightarrow x_A^3-3x_A=3(x_M^2-1)x_A-2x_M^3 \Leftrightarrow x_A^3-3x_A=3x_M^2x_A-3x_A-2x_M^3$$

$$\Leftrightarrow x_A^3 - 3x_M^2 x_A + 2x_M^3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x_A}{x_M} = -2 \\ \dfrac{x_A}{x_M} = 1 \end{array}\right..$$

Xét trường hợp $x_A = -2x_M$.

Vì M là trung điểm của AB nên ta có $x_A + x_B = 2x_M \Rightarrow x_B = 4x_M \Leftrightarrow \dfrac{2x_M^2}{3(x_M^2 - 1)} = 4x_M$.

$$\Rightarrow 2x_M^2 = 12x_M(x_M^2 - 1) \Leftrightarrow 2x_M(-6x_M^2 + x_M + 6) = 0$$

Nếu $x_M = 0 \Rightarrow x_A = 0$, suy ra điểm A trùng điểm M nên trường hợp này bị loại.

Phương trình $-6x_M^2 + x_M + 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt nên tồn tại hai điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Xét trường hợp $x_A = x_M$, suy ra điểm A trùng điểm M nên trường hợp này bị loại. Vậy có hai điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để phương trình $\sqrt{m + \sqrt{m + \mathrm{e}^x}} = \mathrm{e}^x$ có nghiệm thực?

A 9. B 10. C 8. D 7.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $m + \sqrt{m + \mathrm{e}^x} > 0$ và $m + \mathrm{e}^x > 0$.

Đặt $u = \mathrm{e}^x > 0$. Phương trình đã cho trở thành $\sqrt{m + \sqrt{m + u}} = u$.

Đặt $v = \sqrt{m + u} > 0$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u = \sqrt{m + v} \\ v = \sqrt{m + u} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = m + v \\ v^2 = m + u \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = v - u \Leftrightarrow (u - v)(u + v + 1) = 0 \Leftrightarrow u = v \text{ (do u,v>0)}$$

Phương trình trở thành $\sqrt{m + u} = u \Leftrightarrow \sqrt{m + \mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^x \Leftrightarrow m = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x = u^2 - u \geq -\dfrac{1}{4}$.

Do m là số nguyên nhỏ hơn 10 nên có 10 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Cho phương trình $\log_{0,5}(m + 6x) + \log_2(3 - 2x - x^2) = 0$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình có nghiệm thực?

A 9. B 10. C 8. D 17.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} -3 < x < 1 \\ x > -\dfrac{m}{6}. \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$-\log_2(m + 6x) + \log_2(3 - 2x - x^2) = 0 \Leftrightarrow \log_2 \frac{3 - 2x - x^2}{m + 6x} = 0 \Leftrightarrow \frac{3 - 2x - x^2}{m + 6x} = 1$$
$$\Leftrightarrow 3 - 2x - x^2 = m + 6x \Leftrightarrow 3 - 8x - x^2 = m.$$

Xét hàm số $f(x) = 3 - 8x - x^2$ là hàm bậc hai nên trên khoảng $(-3; 1)$, $f(x)$ nghịch biến, suy ra $\min\limits_{[-3;1]} f(x) = -6$, $\max\limits_{[-3;1]} f(x) = 18$. Vậy có 17 giá trị nguyên dương của m để phương trình có nghiệm thực.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Cho hàm số $f(x) = (a^2+1)\ln^{2017}(x+\sqrt{1+x^2}) + bx\sin^{2018}x + 2$ với a, b là các số thực và $f(7^{\log 5}) = 6$. Tính $f(-5^{\log 7})$.

A $f(-5^{\log 7}) = 4$. **B** $f(-5^{\log 7}) = -2$. **C** $f(-5^{\log 7}) = 2$. **D** $f(-5^{\log 7}) = 6$.

Lời giải.

Nhận xét: $7^{\log 5} = 5^{\log 7} = -(-5^{\log 7})$.

Xét hàm số $f(-x) = (a^2+1)\ln^{2017}(-x+\sqrt{1+x^2}) - bx\sin^{2018}x + 2$.

Ở biểu thức chứa logarit tự nhiên, ta nhân với lượng liên hợp của $-x+\sqrt{1+x^2}$ và biến đổi, được kết quả là

$$f(-x) = -(a^2+1)\ln^{2017}(x+\sqrt{1+x^2}) - bx\sin^{2018}x + 2.$$

Suy ra $f(-5^{\log 7}) = -\left(f(7^{\log 5}) - 2\right) + 2 = -2$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$ và $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^2-1}{4}$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I = \mathrm{e} - 2$. **B** $I = 2 - \mathrm{e}$. **C** $I = \dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$. **D** $I = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

Lời giải.

Tính $\int\limits_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = (x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = x\mathrm{e}^x \end{cases}$.

$$\int\limits_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}f(1) - \int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x$$

Mà $\int\limits_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^2-1}{4} \Rightarrow \int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1-\mathrm{e}^2}{4}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\left(\frac{1-\mathrm{e}^2}{4}\right)^2 = \left(\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le \left(\int\limits_0^1 (x\mathrm{e}^x)^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1-\mathrm{e}^2}{4}\right)^2 \le \frac{\mathrm{e}^2-1}{4}\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^2-1}{4} \le \int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

Dấu bằng xảy ra khi $f'(x) = ax\mathrm{e}^x$, với $a \in \mathbb{R}$.

Ta có $\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1-\mathrm{e}^2}{4} \Rightarrow \int\limits_0^1 a(x\mathrm{e}^x)^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{1-\mathrm{e}^2}{4} \Leftrightarrow a \cdot \dfrac{\mathrm{e}^2-1}{4} = \dfrac{1-\mathrm{e}^2}{4} \Leftrightarrow a = -1$.

Suy ra $f'(x) = -xe^x \Rightarrow f(x) = -e^x(x-1) + C$, mà $f(1) = 0$ nên $C = 0$.

Vậy $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 -e^x(x-1)\,dx = e - 2$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 43. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác nhọn ABC có $H(2;2;1)$, $K\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$, O lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên các cạnh BC, AC, AB. Đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

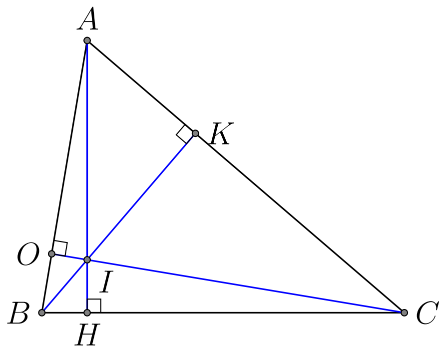
A $d\colon \dfrac{x+\frac{4}{9}}{1} = \dfrac{y-\frac{17}{9}}{-2} = \dfrac{z-\frac{19}{9}}{2}$.

B $d\colon \dfrac{x-\frac{8}{3}}{1} = \dfrac{y-\frac{2}{3}}{-2} = \dfrac{z+\frac{2}{3}}{2}$.

C $d\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-6}{-2} = \dfrac{z-6}{2}$.

D $d: \dfrac{x+4}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-1}{2}$.

Lời giải.



Gọi I là trực tâm của tam giác OHK. Trước tiên ta chứng minh rằng trực tâm I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OHK.

Các tứ giác $BOKC$, $BOIH$, $CKIH$ là các tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{OBI} = \widehat{OHI}; \widehat{OBK} = \widehat{OCK}; \widehat{KCI} = \widehat{KHI} \Rightarrow \widehat{OHI} = \widehat{KHI}$$

Suy ra HI là phân giác của góc OHK. Tương tự KI cũng là phân giác góc HKO.

Vậy I chính là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OHK.

Xét bài toán: Cho tam giác ABC, gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi a, b, c là độ dài các cạnh. Khi đó ta có $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$. (Xem chứng minh ở bài tập số 37 trang 30 sách bài tập hình học 10 nâng cao của NXB Giáo Dục).

Áp dụng bài toán trên cho $\triangle OKH$, ta được $KH \cdot \overrightarrow{IO} + KO \cdot \overrightarrow{IH} + OH \cdot \overrightarrow{IK} = \overrightarrow{0}$ (*).

Ta có $OH = 3$, $OK = 4$, $HK = 5$; Gọi điểm I có tọa độ là (a,b,c).

$\overrightarrow{IO} = (-a;-b;-c)$, $\overrightarrow{IH} = (2-a;2-b;1-c)$, $\overrightarrow{IK} = \left(-\frac{8}{3} - a; \frac{4}{3} - b; \frac{8}{3} - c\right)$.

Từ (*) ta có $\begin{cases} -5a + 4(2-a) + 3\left(-\frac{8}{3} - a\right) = 0 \\ -5b + 4(2-b) + 3\left(\frac{4}{3} - b\right) = 0 \\ -5c + 4(1-c) + 3\left(\frac{8}{3} - c\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$

Do đó $I(0;1;1)$. Mặt khác, ta có $[\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OK}] = (4;-8;8)$. Suy ra vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng ABC là $\vec{n} = (1;-2;2)$.

Phương trình đường thẳng IH là $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$.

Đường thẳng AB có một vec-tơ chỉ phương là $[\overrightarrow{OI}, \vec{n}] = (4;1;-1)$ (do $OI \perp AB$).

Phương trình đường thẳng AB là $\begin{cases} x = 4t' \\ y = t' \\ z = -t' \end{cases}$.

AB cắt IH tại A, suy ra $A(-4;-1;1)$.

Vậy đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

$$d\colon \frac{x+4}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{2}$$

.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x + my + (2m+1)z - (2+m) = 0$, với m là tham số. Gọi điểm $H(a;b;c)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên (P). Tính $a+b$ khi khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất.

A $a+b=2$. B $a+b=-\frac{1}{2}$. C $a+b=0$. D $a+b=\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) là

$$d_{[A;(P)]} = \frac{|2+m+3(2m+1)-(2+m)|}{\sqrt{1+m^2+(2m+1)^2}} = \sqrt{\frac{9(2m+1)^2}{1+m^2+(2m+1)^2}}.$$

Xét hàm số $f(m) = \dfrac{(2m+1)^2}{1+m^2+(2m+1)^2} \Rightarrow f'(m) = -\dfrac{2(m-2)(2m+1)}{(5m^2+4m+2)^2}$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(m)$.

m	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(m)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(m)$	$\frac{4}{5}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{5}{6}$	$\searrow$	$\frac{4}{5}$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $f(m)$ đạt giá trị lớn nhất tại $m=2$.

Khi $m=2$ thì mặt phẳng (P) trở thành $(P)\colon x+2y+5z-4=0$.

Phương trình đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) là $d\colon \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+2t \\ z = 3+5t \end{cases}$.

Giao điểm của d và (P) chính là điểm H. Tọa độ của H thỏa mãn hệ phương trình

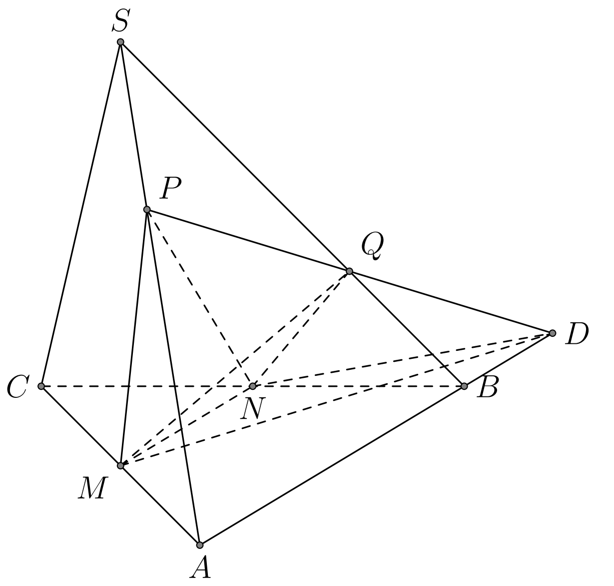
$$\begin{cases} x+2y+5z-4=0 \\ x = 2+t \\ y = 1+2t \\ z = 3+5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+t+2(1+2t)+5(3+5t)-4=0 \\ x = 2+t \\ y = 1+2t \\ z = 3+5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 0 \\ z = \frac{11}{2} \end{cases}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = 3$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên hai cạnh SA, SB lấy các điểm P, Q tương ứng sao cho $SP = 1$, $SQ = 2$. Tính thể tích V của khối tứ diện $MNPQ$.

A $V = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$. **B** $V = \dfrac{\sqrt{34}}{12}$. **C** $V = \dfrac{\sqrt{7}}{18}$. **D** $V = \dfrac{\sqrt{34}}{144}$.

Lời giải.



Do $SA = SB = SC$ nên hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng ABC phải trùng với điểm M (vì $\triangle ABC$ vuông tại $B \Rightarrow MA = MB = MC$.

Theo giả thiết ta tính được $BA = BC = 2$, $MA = MC = \sqrt{2}$.

Gọi $D = PQ \cap AB$.

Ta có $S_{DMN} = S_{AMN} = \dfrac{1}{4} S_{ABC}$.

$$\frac{SP}{SA} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{PA}{AS} = \frac{2}{3} \Rightarrow d_{(S;(ABC))} = \frac{3}{2} d_{(P;(ABC))}.$$

$$\frac{V_{S.ABC}}{V_{P.MND}} = \frac{d_{(S;(ABC))} \cdot S_{ABC}}{d_{(P;(ABC))} \cdot S_{DMN}} = 6.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SM \cdot S_{ABC} = \frac{\sqrt{SA^2 - AM^2}}{3 \cdot 0,5 \cdot AB \cdot BC} = \frac{2\sqrt{7}}{3}.$$

Theo định lý Menelaus ta có $\dfrac{PS}{PA} \cdot \dfrac{DA}{DB} \cdot \dfrac{QB}{QS} = 1 \Rightarrow \dfrac{DA}{DB} = 4$.

$$\frac{BD}{BA} \cdot \frac{SA}{SP} \cdot \frac{QP}{QD} = 1 \Rightarrow \frac{QP}{QD} = 1.$$

$$\frac{V_{P.QMN}}{V_{P.DMN}} = \frac{PQ}{PD} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{P.QMN} = \frac{1}{2} V_{P.DMN} = \frac{1}{12} V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{7}}{18}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 46. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2 = 16$ và điểm $A(1;2;3)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua A và đôi một vuông góc với nhau, cắt mặt cầu theo ba đường tròn. Tính tổng diện tích của ba hình tròn tương ứng đó.

A 10π. **B** 36π. **C** 38π. **D** 33π.

Lời giải.

Vì tổng diện tích của ba hình tròn luôn không đổi, nên ta có thể chọn ba mặt phẳng đặc biệt đi qua A và đôi một vuông góc với nhau đó là mặt phẳng $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Giao điểm của (S) với mặt phẳng $x = 1$ là $(y+1)^2 + (z-2)^2 = 16$.

Giao điểm của (S) với mặt phẳng $y = 2$ là $(x-1)^2 + (z-2)^2 = 16 - 9 = 7$.

Giao điểm của (S) với mặt phẳng $z = 3$ là $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 16 - 1 = 15$.

Vậy tổng diện tích của ba hình tròn là $\pi(16 + 7 + 15) = 38\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; +\infty)$ và $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = x\sin(\pi x)$. Tính $f(4)$.

(A) $f(4) = \dfrac{\pi - 1}{4}$. **B** $f(4) = \dfrac{\pi}{2}$. (C) $f(4) = \dfrac{1}{2}$. (D) $f(4) = \dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x)\Big|_0^{x^2} = F(x^2) - F(0) = x\sin(\pi x)$.

Lấy đạo hàm hai vế, ta được $2xF'(x^2) = \sin \pi x + \pi x \cos \pi x$.

Thay $x = 2$ vào ta được $4F'(4) = 2\pi \Leftrightarrow F'(4) = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(4) = \dfrac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Có 2 học sinh lớp A, 3 học sinh lớp B và 4 học sinh lớp C xếp thành một hàng ngang sao cho giữa hai học sinh lớp A không có học sinh lớp B. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng như vậy?

A 145152. (B) 108864. (C) 217728. (D) 80640.

Lời giải.

Có các trường hợp xảy ra như sau:

- Hai học sinh lớp A luôn đứng cạnh nhau, các học sinh lớp còn lại xếp tùy ý: $2!8!$.
- Có đúng một học sinh lớp C đứng giữa hai học sinh lớp A: $\mathrm{A}_4^1 2!7!$.
- Có đúng hai học sinh lớp C đứng giữa hai học sinh lớp A: $\mathrm{A}_4^2 2!6!$.
- Có đúng ba học sinh lớp C đứng giữa hai học sinh lớp A: $\mathrm{A}_4^3 2!5!$.
- Có đúng bốn học sinh lớp C đứng giữa hai học sinh lớp A: $\mathrm{A}_4^4 2!4!$.

Vậy có $2!8! + \mathrm{A}_4^1 2!7! + \mathrm{A}_4^2 2!6! + \mathrm{A}_4^3 2!5! + \mathrm{A}_4^4 2!4! = 145152$ cách xếp hàng thỏa đề bài.

Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Cho hai số phức z, w thỏa mãn $\begin{cases} |z-3-2i| \le 1 \\ |w+1+2i| \le |w-2-i| \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = |z - w|$.

(A) $P_{\min} = \dfrac{2\sqrt{2}+1}{2}$. (B) $P_{\min} = \dfrac{3\sqrt{2}-2}{2}$. **C** $P_{\min} = \dfrac{5\sqrt{2}-2}{2}$. (D) $P_{\min} = \sqrt{2}+1$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ và $w = a + bi$ với $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} |z-3-2i| \le 1 \\ |w+1+2i| \le |w-2-i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+yi-3-2i| \le 1 \\ |a+bi+1+2i| \le |a+bi-2-i| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} \le 1 \\ \sqrt{(a+1)^2+(b+2)^2} \le \sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2+(y-2)^2 \le 1 \\ a+b \le 0 \end{cases}$$

Vậy điểm biểu diễn hai số phức z và w trên mặt phẳng tọa độ Oxy tương ứng là điểm thuộc hình tròn $(x-3)^2+(y-2)^2 = 1$ và nửa mặt phẳng được giới hạn bởi phương trình $x+y=0$. Bài toán yêu cầu tìm giá trị nhỏ nhất của $P = |z-w| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, nghĩa là tìm khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm biểu diễn của z và w.

Khoảng cách đó là $d_{(I;d)} - R = \dfrac{|3+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} - 1 = \dfrac{5\sqrt{2}-2}{2}$.

Chọn đáp án C □

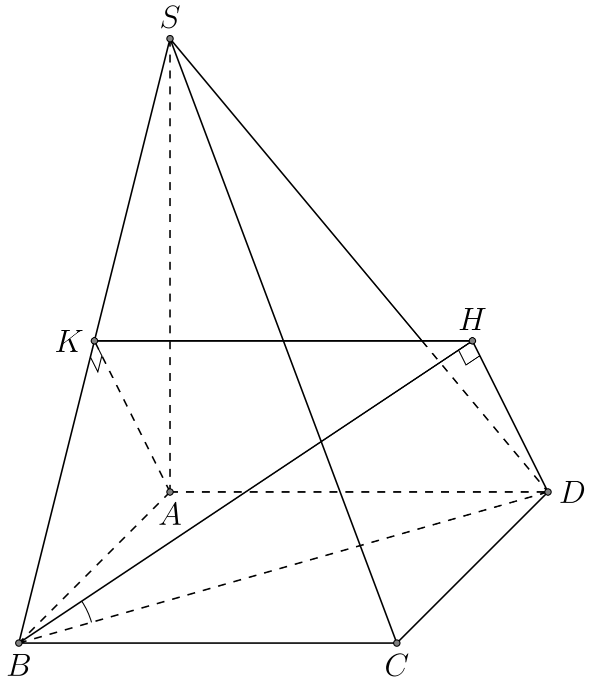
Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Tính $\sin\alpha$, với α là góc tạo bởi đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC).

A $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **C** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{8}$. **D** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Kẻ $AK \perp SB$ tại K, qua K kẻ đường thẳng d song song với BC, sau đó kẻ $DH \perp d$ tại H. Suy ra góc tạo bởi đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC) là góc $\alpha = \widehat{HBD}$.

$$\sin\alpha = \frac{HD}{BD} = \frac{AK}{BD} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$



Chọn đáp án A □

——— **HẾT** ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

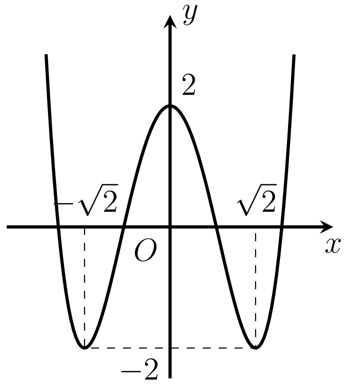
1. C	2. D	3. C	4. C	5. A	6. B	7. D	8. C	9. B	10. B
11. D	12. B	13. B	14. B	15. D	16. B	17. A	18. D	19. D	20. D
21. D	22. C	23. B	24. C	25. B	26. D	27. C	28. A	29. B	30. A
31. A	32. A	33. A	34. C	35. B	36. B	37. A	38. C	39. B	40. D
41. B	42. A	43. D	44. D	45. C	46. C	47. B	48. A	49. C	50. A

133 ĐỀ THI THỬ TOÁN THPT QUỐC GIA 2018 TRƯỜNG THPT THANH CHƯƠNG 1, NGHỆ AN LẦN 1.

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Đồ thị như hình vẽ là của hàm số nào dưới đây?

(A) $y = -x^4 + 4x^2 + 2$. (B) $y = -x^4 - 2x^2 + 2$.
(C) $y = x^4 + 4x^2 + 2$. (D) $y = x^4 - 4x^2 + 2$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số hướng lên và có 3 điểm cực trị nên hệ số $a > 0$ và $b < 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	+	
y	0 ↗		3	↘ $-\infty$	‖	-3 ↗	10

(A) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 10. (B) Giá trị cực đại của hàm số là $y_{\text{CĐ}} = 10$.
(C) Giá trị cực tiểu của hàm số là $y_{\text{CT}} = -3$. (D) Giá trị cực đại của hàm số là $y_{\text{CĐ}} = 3$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số xác định và có đạo hàm đổi dấu từ + sang − tại $x = 0$ nên hàm số đại cực đại tại $x = 0$, $y_{\text{CĐ}} = 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) chứa trục Oy và đi qua điểm $M(1; 1; -1)$ có phương trình là

(A) $x + z = 0$. (B) $x - y = 0$. (C) $x - z = 0$. (D) $y + z = 0$.

Lời giải.

Lấy $A(0; 1; 0) \in Oy$. Ta có $\overrightarrow{OA} = (0; 1; 0)$ và $\overrightarrow{OM} = (1; 1; -1)$.

Vì mặt phẳng (P) chứa trục Oy và đi qua điểm $M(1; 1; -1)$ nên (P) nhận $\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right] = (-1; 0; -1)$ làm véc-tơ pháp tuyến $\Rightarrow (P)\colon x + z = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Với số thực dương a bất kỳ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $\log_2 2a^2 = 1 + 2\log_2 a$. (B) $\log_2 2a^2 = 2 + 2\log_2 a$.

(C) $\log_2 (2a)^2 = 2 + \log_2 a$. (D) $\log_2 (2a)^2 = 1 + 2\log_2 a$.

Lời giải.

- $\log_2 2a^2 = \log_2 2 + \log_2 a^2 = 1 + 2\log_2 a$.
- $\log_2 (2a)^2 = 2\log_2 (2a) = 2(\log_2 2 + \log_2 a) = 2 + 2\log_2 a$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$.

Gọi đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (Oxy). Đường thẳng d' có một véc-tơ chỉ phương là

(A) $\vec{u}_1 = (2;0;1)$. (B) $\vec{u}_3 = (1;1;0)$. (C) $\vec{u}_2 = (-2;1;0)$. **D** $\vec{u}_4 = (2;1;0)$.

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của d và mp(Oxy): $z = 0 \Rightarrow I(5;2;0)$.

Lấy $A(3;1;1) \in d$. Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A trên $(Oxy) \Rightarrow A'(3;1;0)$.

Vì d' là hình chiếu vuông góc của d trên (Oxy) nên d' có 1 VTCP là $\overrightarrow{IA'} = (-2;-1;0)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$ bằng

(A) 0. **B** -4. (C) -3. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)(x-3)}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1} (x - 3) = -4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Cho số phức $z = (1 - 2i)^2$, số phức liên hợp của z là

(A) $\bar{z} = 3 - 4i$. **B** $\bar{z} = -3 + 4i$. (C) $\bar{z} = -3 - 4i$. (D) $\bar{z} = 1 + 2i$.

Lời giải.

Ta có $z = (1 - 2i)^2 = -3 - 4i \Rightarrow \bar{z} = -3 + 4i$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Giải bóng đá **V-league** 2018 có 14 đội tham dự, mỗi đội gặp nhau hai lượt (lượt đi và lượt về). Tổng số trận đấu của giải diễn ra là

(A) 14!. (B) C_{14}^2. (C) $2\mathrm{A}_{14}^2$. **D** A_{14}^2.

Lời giải.

Vì mỗi đội gặp nhau hai lượt (lượt đi và lượt về) nên mỗi trận đấu của giải là một chỉnh hợp chập 2 của 14 đội. Do đó, tổng số trận đấu của giải diễn ra là A_{14}^2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;-2)$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC)?

A $\vec{n}_4 = (2; 2; -1)$. **B** $\vec{n}_3 = (-2; -2; 1)$. **C** $\vec{n}_1 = (2; -2; -1)$. **D** $\vec{n}_2 = (1; 1; -2)$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (ABC) theo đoạn chắn là $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{1} + \dfrac{z}{-2} = 1 \Leftrightarrow 2x + 2y - z - 2 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Hình nón có thể tích bằng 16π và bán kính đáy bằng 4. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A 12π. **B** 24π. **C** 20π. **D** 10π.

Lời giải.

Ta có $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow h = \dfrac{3V}{\pi r^2} = \dfrac{3 \times 16\pi}{16\pi} = 3$. Đường sinh $l = \sqrt{h^2 + r^2} = 5$.

Diện tích xung quanh $S_{xq} = \pi r l = 20\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(x+2) \leq 0$ là

A $S = (-\infty; -1]$. **B** $S = [-1; +\infty)$. **C** $S = (-2; -1]$. **D** $S = (-2; +\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình $\log_2(x+2) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x + 2 \leq 1 \Leftrightarrow -2 < x \leq -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ là

A $S = 8$. **B** $S = 12$. **C** $S = 10$. **D** $S = 9$.

Lời giải.

Ta có $S = \displaystyle\int_0^2 \left|3x^2 + 1\right| \mathrm{d}x = \int_0^2 (3x^2 + 1)\,\mathrm{d}x = (x^3 + x)\Big|_0^2 = 10$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ là

A $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + C$. **B** $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} + C$. **C** $\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x + C$. **D** $2\mathrm{e}^{-x} + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Thể tích tứ diện $OABC$ là

A $V = \dfrac{abc}{12}$. **B** $V = \dfrac{abc}{4}$. **C** $V = \dfrac{abc}{3}$. **D** $V = \dfrac{abc}{6}$.

Lời giải.

Thể tích tứ diện $OABC$ là $V = \dfrac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \dfrac{abc}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Bảng biến thiên như hình vẽ bên là của hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $y = x^3 + 3x - 1$.
B. $y = x^3 - 3x - 1$.
C. $y = -x^3 + 3x + 3$.
D. $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đây là hàm số bậc ba, có hệ số $a > 0$ và có hai điểm cực trị.

Chọn đáp án B $\square$

Câu 16. Cho n là số nguyên dương và a, b là các số thực ($a > 0$). Biết trong khai triển $\left(a - \dfrac{b}{\sqrt{a}}\right)^n$ có số hạng chứa a^9b^4. Số hạng có số mũ của a và b bằng nhau trong khai triển $\left(a - \dfrac{b}{\sqrt{a}}\right)^n$ là

A. $6006a^5b^5$. B. $5005a^8b^8$. C. $3003a^5b^5$. D. $5005a^6b^6$.

Lời giải.

Ta có $\left(a - \dfrac{b}{\sqrt{a}}\right)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^{n-k}\left(-\dfrac{b}{\sqrt{a}}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k(-1)^k a^{n-\frac{3k}{2}} b^k$.

Khai triển trên có số hạng chứa a^9b^4 nên cho $k = 4$ và $n - \dfrac{3k}{2} = 9 \Rightarrow n = 15$.

Số hạng có số mũ của a và b bằng nhau khi $15 - \dfrac{3k}{2} = k \Leftrightarrow k = 6$.

Vậy số hạng cần tìm là $\mathrm{C}_{15}^6(-1)^6a^6b^6 = 5005a^6b^6$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 17. Thầy An có 200 triệu đồng gửi ngân hàng đã được 2 năm với lãi suất không đổi 0,45%/tháng. Biết rằng số tiền lãi sau mỗi tháng được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Nhân dịp đầu xuân một hãng ô tô có chương trình khuyến mãi trả góp 0% trong 12 tháng. Thầy quyết định lấy toàn bộ số tiền đó (cả vốn lẫn lãi) để mua một chiếc ô tô với giá 300 triệu đồng, số tiền còn nợ Thầy sẽ chia đều trả góp trong 12 tháng. Số tiền Thầy An phải trả góp hàng tháng gần với số nào nhất trong các số sau?

A. 6.547.000 đồng. B. 6.345.000 đồng. C. 6.432.000 đồng. D. 6.437.000 đồng.

Lời giải.

Số tiền Thầy An rút ra từ ngân hàng sau 2 năm bao gồm cả vốn lẫn lãi là

$$200 \times (1 + 0,0045)^{24} = 222{,}756 \text{ triệu đồng.}$$

Số tiền Thầy An còn nợ khi mua xe là $300 - 222{,}756 = 77{,}244$ triệu đồng. Số tiền này được trả góp 0% trong 12 tháng nên số tiền Thầy An phải trả góp hàng tháng là $\dfrac{77{,}244}{12} = 6{,}437$ triệu đồng.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 18. Có bao nhiêu số tự nhiên m để hàm số $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{m-1}{2}x^2 + mx - \ln x + 2$ đồng biến trên $(2; +\infty)$?

A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Lời giải.

Hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}
& y' \geq 0, \forall x \in (2;+\infty) \\
\Leftrightarrow\ & x^3 - 2x^2 - (m-1)x + m - \frac{1}{x} \geq 0, \forall x \in (2;+\infty) \\
\Leftrightarrow\ & m \leq \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 1}{x^2 - x}, \forall x \in (2;+\infty) \\
\Leftrightarrow\ & m \leq x^2 - x - \frac{1}{x^2 - x}, \forall x \in (2;+\infty) \qquad (1).
\end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 - x$, ta có $t' = 2x - 1 > 0, \forall x \in (2;+\infty)$. Do đó $x \in (2;+\infty) \Rightarrow t \in (2;+\infty)$.
Xét hàm $f(t) = t - \dfrac{1}{t}$ trên $(2;+\infty)$. Ta có $f'(t) = 1 + \dfrac{1}{t^2} > 0, \forall t \in (2;+\infty)$.
Khi đó (1) tương đương với

$$\begin{aligned}
& m \leq f(t), \forall t \in (2;+\infty) \\
\Leftrightarrow\ & m \leq \lim_{t \to 2^+} f(t) = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Vì $m \in \mathbb{N}$ nên $m = 0$, $m = 1$.
Chọn đáp án C □

Câu 19. Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C)\colon x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$. Ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k = 2$ có phương trình là

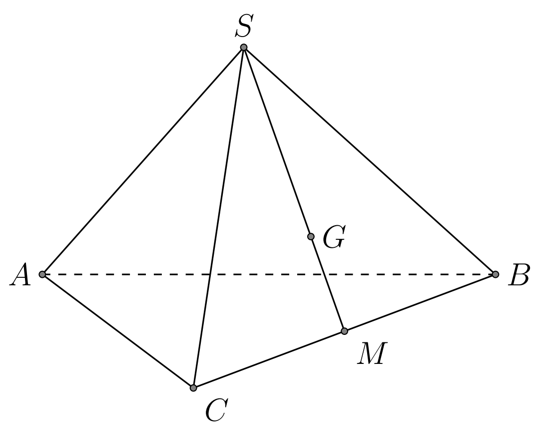
A $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$.
B $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$.
C $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 4 = 0$.
D $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$.

Lời giải.
(C) có tâm $I(-1;2)$ và bán kính $R = 2$. Ta có $\mathrm{V}_{(O,2)}(I) = I' \Leftrightarrow \overrightarrow{OI'} = 2\overrightarrow{OI} \Leftrightarrow I'(-2;4)$.
Gọi (C') là ảnh của (C) qua $\mathrm{V}_{(O,2)} \Rightarrow (C')$ có tâm I' và bán kính $R' = 2R = 4$.
$\Rightarrow (C')\colon (x+2)^2 + (y-4)^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$.
Chọn đáp án A □

Câu 20. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng a, gọi G là trọng tâm tam giác SBC. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng ABC bằng

A $\dfrac{a\sqrt{6}}{9}$.
B $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.
C $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.
D $\dfrac{a\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải.



Tứ diện $SABC$ đều cạnh a nên có thể tích $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.
$\triangle ABC$ đều cạnh a nên có diện tích $S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
Ta có

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(G,(ABC)\right) &= \frac{1}{3} \cdot \mathrm{d}\left(S,(ABC)\right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{3V}{S_{\triangle ABC}} \\
&= \frac{a\sqrt{6}}{9}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên và $f(-2) = 3$. Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) > 3$ là

(A) $S = (-2; 2)$.
B $S = (-\infty; -2)$.
(C) $S = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.
(D) $S = (-2; +\infty)$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên và $f(-2) = 3$, ta có $f(x) > 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có cả tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

(A) $y = x - \sqrt{x^2 + 1}$. **B** $y = \dfrac{1}{2x + 1}$. (C) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$. (D) $y = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$.

Lời giải.

- Hàm số $y = x - \sqrt{x^2 + 1}$ và $y = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$ xác định trên $\mathbb{R}$ nên đồ thị hai hàm số này không có tiệm cận đứng.
- Hàm số $y = \dfrac{1}{2x + 1}$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

  Ta có $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} \dfrac{1}{2x + 1} = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{2x + 1} = 0$

  $\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\dfrac{1}{2}$ và tiệm cận ngang $y = 0$.
- Hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

  Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} = -\infty$

  $\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$, không có tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \cos^2 x + \sin x + 1$ bằng

(A) 2. (B) $\dfrac{11}{4}$. (C) 1. **D** $\dfrac{9}{4}$.

Lời giải.

Ta có $y = -\sin^2 x + \sin x + 2 = -\left(\sin x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{4} \leq \dfrac{9}{4}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $\sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Tích tất cả các nghiệm của phương trình $(1 + \log_2 x) \cdot \log_4 2x = 2$ bằng

(A) $\dfrac{1}{8}$. (B) 4. **C** $\dfrac{1}{4}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương

$(1+\log_2 x)\cdot\dfrac{1}{2}(1+\log_2 x)=2 \Leftrightarrow (1+\log_2 x)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1+\log_2 x=-2\\ 1+\log_2 x=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{8}\\ x=2.\end{array}\right.$

Do đó tích các nghiệm $x_1x_2=\dfrac{1}{8}\cdot 2=\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$; $d_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-6}{3}$ chéo nhau. Đường vuông chung của hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-3}{1}$.
Ⓑ $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-1}{1}$.
C $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-3}{1}$.
Ⓓ $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$.

Lời giải.

- d_1 có 1 VTCP $\vec{u}_1=(1;1;-1)$ và d_2 có 1 VTCP $\vec{u}_2=(1;2;3)$.
- Lấy $A\in d_1 \Rightarrow A(1+s;-2+s;3-s)$ và $B\in d_2\Rightarrow B(t;1+2t;6+3t)$.
  $\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-1-s+t;3-s+2t;3+s+3t)$.
  Ta có AB là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 khi $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}_1=0\\ \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}_2=0\end{cases}$
  $\Leftrightarrow \begin{cases}1(-1-s+t)+1(3-s+2t)-1(3+s+3t)=0\\ 1(-1-s+t)+2(3-s+2t)+3(3+s+3t)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3s=1\\ 14t=-14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}s=-\dfrac{1}{3}\\ t=-1.\end{cases}$
  Đường vuông góc chung của d_1, d_2 nhận $\overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac{5}{3};\dfrac{4}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$ làm VTCP và đi qua điểm $B(-1;-1;3)$ nên có phương trình $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-3}{1}$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $SA=2\sqrt{2}a$, $AB=a$, $BC=2a$. Khoảng cách giữa BD và SC bằng

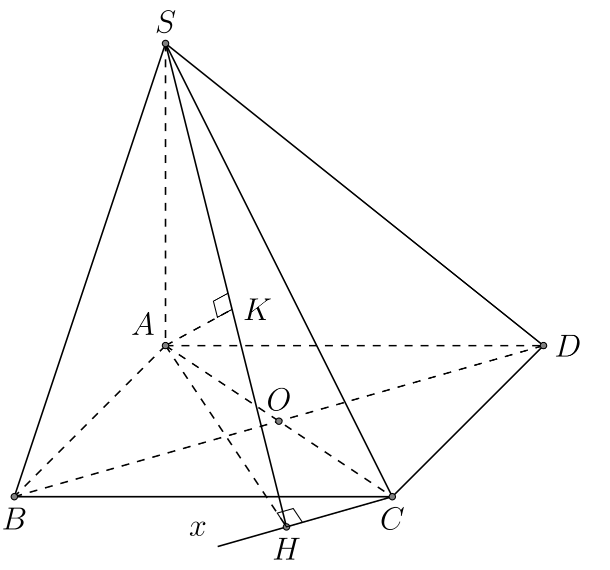
A $\dfrac{2\sqrt{7}a}{7}$.
Ⓑ $\dfrac{\sqrt{7}a}{7}$.
Ⓒ $\sqrt{7}a$.
Ⓓ $\dfrac{\sqrt{6}a}{5}$.

Lời giải.

Kẻ tia $Cx \parallel BD$; kẻ $AH \perp Cx$ tại H.
Suy ra $BD \parallel (SCH)$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathrm{d}(BD, SC) &= \mathrm{d}\left(BD, (SCH)\right)\\ &= \mathrm{d}\left(O, (SCH)\right).\end{aligned}$$

Ta có $\dfrac{\mathrm{d}\left(O, (SCH)\right)}{\mathrm{d}\left(A, (SCH)\right)} = \dfrac{CO}{CA} = \dfrac{1}{2}$.
Kẻ $AK \perp SH$ tại K.
Suy ra $AK \perp (SHC)$.
Do đó $\mathrm{d}\left(A, (SCH)\right) = AK$.
Áp dụng định lý sin trong $\triangle AOB$



$$\frac{AB}{\sin \widehat{AOB}} = \frac{AO}{\sin \widehat{ABO}} \Rightarrow \sin \widehat{AOB} = \frac{AB}{AO} \cdot \frac{AD}{BD} = \frac{4}{5}.$$

Ta có $AH = AC \cdot \sin \widehat{ACH} = AC \cdot \sin \widehat{AOB} = \dfrac{4a\sqrt{5}}{5}$.

$\triangle SAH$ vuông tại A có AK là đường cao $\Rightarrow AK = \dfrac{SA.AH}{\sqrt{SA^2 + AH^2}} = \dfrac{4a\sqrt{7}}{7}$.

Vậy $\mathrm{d}(BD, SC) = \dfrac{1}{2}AK = \dfrac{2a\sqrt{7}}{7}$.

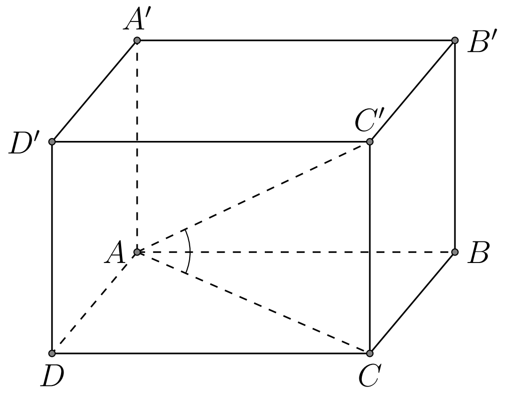
Chọn đáp án A □

Câu 27. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 3a$, $AD = \sqrt{3}a$, $AA' = 2a$. Góc giữa đường thẳng AC' với mặt phẳng (ABC) bằng

A. $60°$. B. $45°$. C. $120°$. **D.** $30°$.

Lời giải.

Ta có $CC' \perp (ABCD) \Rightarrow AC$ là hình chiếu vuông góc của AC' trên mặt phẳng (ABC).
$\Rightarrow \widehat{C'AC}$ là góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng (ABC)
Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2\sqrt{3}a$.
Tam giác $C'AC$ vuông tại C có
$\tan \widehat{C'AC} = \dfrac{CC'}{AC} = \dfrac{2a}{2\sqrt{3}a} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
$\Rightarrow \widehat{C'AC} = 30°$.



Chọn đáp án D □

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 0)$, $B(-5; 1; 2)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là

A. $-3x - 2y + z - 5 = 0$. **B.** $3x - 2y - z + 5 = 0$.
C. $3x + 2y - z + 5 = 0$. D. $-3x + 2y - z + 1 = 0$.

Lời giải.

Gọi (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB. Ta có (P) đi qua trung điểm $I(-2;-1;1)$ của AB và nhận $\overrightarrow{AB}=(-6;4;2)$ làm VTPT

$\Rightarrow (P)\colon -6(x+2)+4(y+1)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow 3x-2y-z+5=0.$

Chọn đáp án B □

Câu 29. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x-1}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\ln 2$. B $-\ln 2$. C $\ln\sqrt{2}$. D $-\ln\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x-1}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}(x^2-2x+2)=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+2\right|\Big|_0^1=-\frac{1}{2}\ln 2.$

Chọn đáp án D □

Câu 30. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $2z^2-2z+5=0$. Mô-đun của số phức $w=4-z_1^2+z_2^2$ bằng

A 3. B 5. C $\sqrt{5}$. D 25.

Lời giải.

Phương trình $2z^2-2z+5=0$ có hai nghiệm phức $z_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}i$. Ta xét 2 trường hợp

- TH1. $z_1=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$, $z_2=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i \Rightarrow w=4-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)^2=4+3i\Rightarrow |w|=5.$
- TH2. $z_1=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$, $z_2=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i \Rightarrow w=4-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)^2=4-3i\Rightarrow |w|=5.$

Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho z là số phức thỏa mãn điều kiện $\left|\frac{z+3}{1-2i}+2\right|=1$ và w là số thuần ảo. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z-w|$ bằng

A $5-\sqrt{5}$. B $\sqrt{5}$. C $2\sqrt{2}$. D $1+\sqrt{3}$.

Lời giải.

- Đặt $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$
  Ta có $\left|\frac{z+3}{1-2i}+2\right|=1\Leftrightarrow |z+5-4i|=|1-2i|\Leftrightarrow (x+5)^2+(y-4)^2=5.$
  Do đó tập hợp điểm $M(x;y)$ biểu diễn z là đường tròn (C) tâm $I(-5;4)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.
- Đặt $w=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$
  Ta có w là số thuần sảo $\Leftrightarrow x=0$.
  Do đó tập hợp điểm $N(x;y)$ biểu diễn w là trục $Oy\colon x=0$.
- Ta có $|z-w|=MN$; $MN_{\min}=d(I,Oy)-R=5-\sqrt{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình

$$4^{1+x}+4^{1-x}=(6-m)\left(2^{2+x}-2^{2-x}\right)$$

có nghiệm thuộc đoạn $[0;2]$?

A 4. B 3. C 1. D 2.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương $4^x + 4^{-x} = (6-m)\left(2^x - 2^{-x}\right)$. (1)

Đặt $t = 2^x - 2^{-x} \Rightarrow t^2 = 4^x + 4^{-x} - 2$. Xét hàm $g(x) = 2^x - 2^{-x}$ trên $[0;2]$.

Ta có $g'(x) = 2^x \ln 2 + 2^{-x} \ln 2 > 0 \Rightarrow g$ là hàm đồng biến trên $[0;2]$. Suy ra $t \in \left[0; \dfrac{15}{4}\right]$.

Phương trình (1) trở thành

$$\begin{aligned} & t^2 + 2 = (6-m)t \\ \Leftrightarrow\ & m = 6 - t - \frac{2}{t} \quad \text{(do } t = 0 \text{ không thỏa)} \end{aligned}$$

Xét hàm $f(t) = 6 - t - \dfrac{2}{t}$ trên $\left(0; \dfrac{15}{4}\right]$. Ta có $f'(t) = -1 + \dfrac{2}{t^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$.

Bảng biến thiên

t	0		$\sqrt{2}$		$\frac{15}{4}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$6-2\sqrt{2}$	$\searrow$	$\frac{103}{60}$

Từ bảng biến thiên, suy ra $\dfrac{103}{60} \le m \le 6 - 2\sqrt{2}$. Vì m là số nguyên dương nên $m = 2, m = 3$.

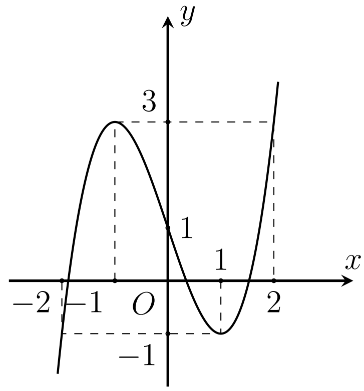
Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Số nghiệm của phương trình $[f(x)]^3 - 3f(x) + 1 = 0$ là

(A) 3. **B** 7. (C) 5. (D) 6.

Lời giải.

Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ như hình vẽ bên.



Quan sát đồ thị, ta thấy phương trình

$$[f(x)]^3 - 3f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = a \text{ với } -2 < a < -1 \\ f(x) = b \text{ với } 0 < b < 1 \\ f(x) = c \text{ với } 1 < c < 2 \end{array}\right..$$

- $-2 < a < -1$, suy ra phương trình $x^3 - 3x + 1 = a$ có đúng 1 nghiệm x_1.
- $0 < b < 1$, suy ra phương trình $x^3 - 3x + 1 = b$ có đúng 3 nghiệm phân biệt x_2, x_3, x_4 không trùng với x_1.
- $1 < c < 2$, suy ra phương trình $x^3 - 3x + 1 = c$ có đúng 3 nghiệm phân biệt x_5, x_6, x_7 không trùng với x_1, x_2, x_3, x_4.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1, n \ge 2 \end{cases}$. Tổng $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$ là

A $2^{20} - 20$. **B** $2^{21} - 22$. **C** 2^{20}. **D** $2^{21} - 20$.

Lời giải.

Dự đoán công thức số hạng tổng quát $u_n = 2^n - 1$ (Chứng minh bằng phương pháp quy nạp TH).

$S = 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{20} - 20 = 2 \cdot \dfrac{1 - 2^{20}}{1 - 2} - 20 = 2^{21} - 22$.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Biết $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{5\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = a\pi + \ln b$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a + b$.

A $S = 2 + \sqrt{2}$. **B** $S = \dfrac{11}{4}$. **C** $S = \dfrac{5}{4}$. **D** $S = \dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Phân tích $5\sin x + \cos x = \alpha(\sin x + \cos x) + \beta(-\sin x + \cos x) \Rightarrow \alpha = 3, \beta = -2$.

Suy ra

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(3 - 2\frac{-\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left(3x - 2\ln|\sin x + \cos x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{4} - 2\ln\sqrt{2} = \frac{3\pi}{4} + \ln\frac{1}{2}$$

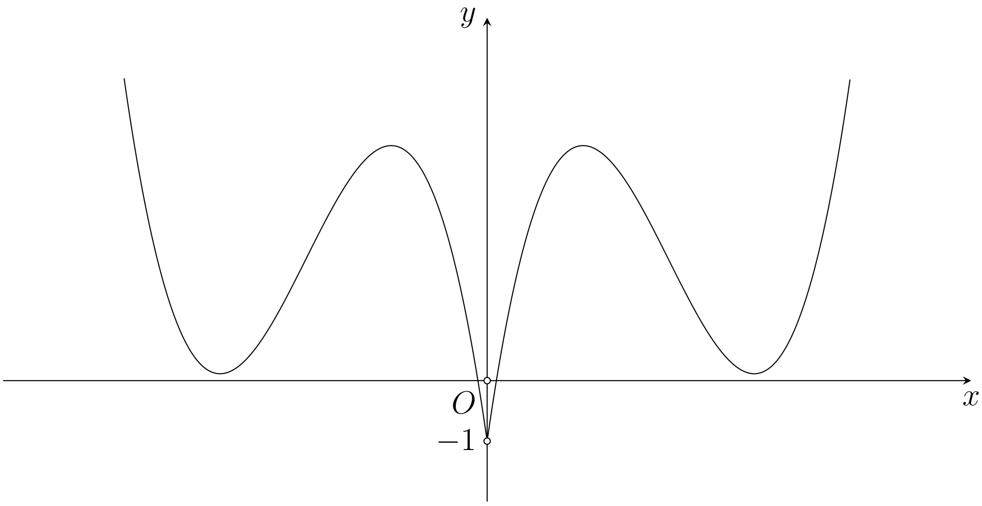
$$\Rightarrow S = a + b = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 36. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}|x^3| - (3 - m)x^2 + (3m + 7)|x| - 1$ có 5 điểm cực trị?

A 3. **B** 5. **C** 2. **D** 4.

Lời giải.



Xét hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - (3 - m)x^2 + (3m + 7)x - 1 \quad (1)$. Ta có $y' = x^2 - 2(3 - m)x + 3m + 7$

Hàm số đã cho có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số (1) có hai điểm cực trị và $x_{\text{CĐ}} > 0$

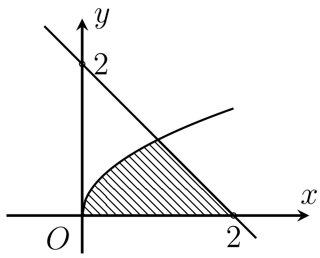
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-m)^2 - 3m - 7 > 0 \\ 2(3-m) > 0 \\ 3m + 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 9m + 2 > 0 \\ -\dfrac{7}{3} < m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{7}{3} < m < \dfrac{9-\sqrt{73}}{2}.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = -2, m = -1, m = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \sqrt{x}$, đường thẳng $y = 2 - x$ và trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng trên khi quay quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{7\pi}{6}$. B. $\dfrac{4\pi}{3}$. C. $\dfrac{5\pi}{6}$. D. $\dfrac{5\pi}{4}$.



Lời giải.

Ta có $\sqrt{x} = -x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2 \geq 0 \\ x = (-x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Thể tích $V = \pi \displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x + \pi \int_1^2 (-x+2)^2 \mathrm{d}x = \pi \left[\left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^1 + \left.\left(\dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right)\right|_1^2 \right] = \dfrac{5\pi}{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Cho phương trình $mx^2 + 4\pi^2 = 4\pi^2 \cos x$. Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. -54. B. 35. C. -35. D. 51.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương $m = 4\pi^2 \cdot \dfrac{\cos x - 1}{x^2} = -2\pi^2 \cdot \dfrac{\sin^2 \dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$.

Xét hàm $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ trên $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$

Ta có $f'(t) = \dfrac{t\cos t - \sin t}{t^2} < 0, \forall t \in \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow f$ là hàm nghịch biến trên $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$

Suy ra

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f\left(\dfrac{x}{2}\right) < f\left(\dfrac{x}{2}\right) < \lim_{x \to 0^+} f\left(\dfrac{x}{2}\right), \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi} < \dfrac{\sin \dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}} < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad -16 > -2\pi^2 \cdot \dfrac{\sin^2 \dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2} > -2\pi^2$$

$$\text{hay} \quad -16 > m > -2\pi^2.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-17; -18; -19\}$. Tổng các giá trị nguyên của m bằng -54.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Cho z_1, z_2 là các số phức thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$ và $|z_1 - 2z_2| = \sqrt{6}$. Tính giá trị của biểu thức $P = |2z_1 + z_2|$.

A. $P = 2$. B. $P = \sqrt{3}$. C. $P = 3$. D. $P = 1$.

Lời giải.

Đặt $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$. Theo đề ta có $\begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = 1 \\ a_2^2 + b_2^2 = 1 \\ (a_1 - 2a_2)^2 + (b_1 - 2b_2)^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = 1 \\ a_2^2 + b_2^2 = 1 \\ 4(a_1a_2 + b_1b_2) = -1 \end{cases}$.

$P = |2z_1 + z_2| = \sqrt{(2a_1 + a_2)^2 + (2b_1 + b_2)^2} = \sqrt{4(a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) + 4(a_1a_2 + b_1b_2)} = 2$

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x + 2y + z - 8 = 0$ và ba điểm $A(0; -1; 0)$, $B(2; 3; 0)$, $C(0; -5; 2)$. Gọi $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA = MB = MC$. Tính $S = x_0 + y_0 + z_0$.

A. -12. B. -5. C. 12. D. 9.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} MA = MB \\ MA = MC \\ M \in (P) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + (y_0 + 1)^2 + z_0^2 = (x_0 - 2)^2 + (y_0 - 3)^2 + z_0^2 \\ x_0^2 + (y_0 + 1)^2 + z_0^2 = x_0^2 + (y_0 + 5)^2 + (z_0 - 2)^2 \\ x_0 + 2y_0 + z_0 - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_0 + 8y_0 = 12 \\ -8y_0 + 4z_0 = 28 \\ x_0 + 2y_0 + z_0 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 5 \\ y_0 = -1 \\ z_0 = 5. \end{cases}$

$\Rightarrow S = 5 - 1 + 5 = 9.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Gọi S là tổng tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x - m + 1$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; 1]$ bằng 9. Giá trị của S bằng

A. $S = 5$. B. $S = -1$. C. $S = -5$. D. $S = 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + (m^2 + 1) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $[0; 1]$.

Do đó $\max\limits_{x \in [0;1]} y = y(1) = m^2 - m + 3$. Suy ra $m^2 - m + 3 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 3 \end{array}\right.$. $\Rightarrow S = -2 + 3 = 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có một đáy là tam giác ABC vuông tại A, $AB = 3a$, $BC = 5a$. Biết khối trụ có hai đáy là hai đường tròn nội tiếp hai tam giác ABC, $A'B'C'$ và có thể tích bằng $2\pi a^3$. Chiều cao AA' của lăng trụ bằng

A. $3a$. B. $\sqrt{3}a$. C. $2a$. D. $\sqrt{2}a$.

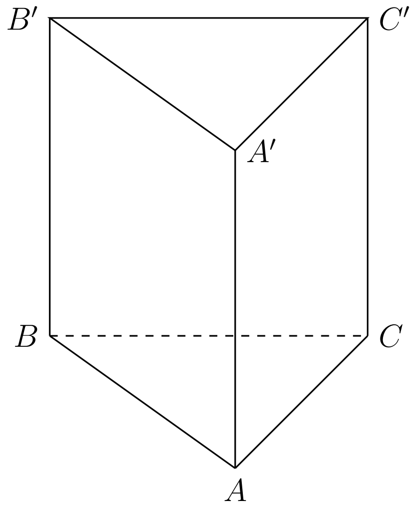
Lời giải.

Ta có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 4a$.

Bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác ABC là

$r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{AB \cdot AC}{AB + BC + CA} = \dfrac{3a \cdot 4a}{3a + 4a + 5a} = a$

Chiều cao của lăng trụ bằng chiều cao của khối trụ và bằng $AA' = \dfrac{V}{S} = \dfrac{2\pi a^3}{\pi r^2} = 2a$.



Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh đáy $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = \sqrt{17}$. Gọi D là trung điểm của BC, các mặt phẳng (SAB), (SBD), (SAD) cùng tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng $60°$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **B** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **C** $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$. **D** $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

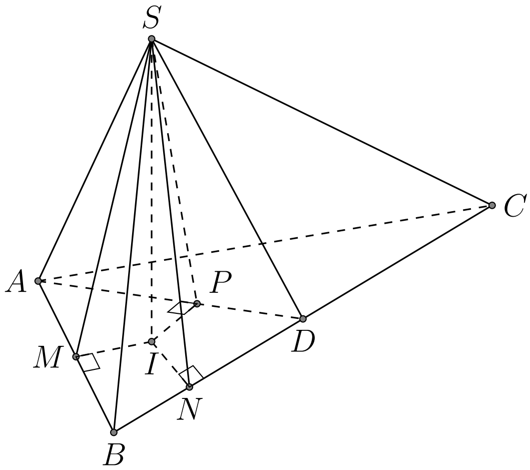
Gọi I là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC). Kẻ IN, IM, IP lần lượt vuông góc với AB, BD, AD tại M, N, P. Khi đó góc giữa các mặt phẳng (SAB), (SBD), (SAD) và mặt phẳng (ABC) lần lượt là $\widehat{SMI}$, $\widehat{SNI}$, $\widehat{SPI}$.

Ta có $\widehat{SMI} = \widehat{SNI} = \widehat{SPI} = 60°$.

$\Rightarrow \triangle SIM = \triangle SIN = \triangle SIP$.

$\Rightarrow IM = IN = IP = r$, với r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABD.

Ta có $AD = \sqrt{\dfrac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}} = 3$.



$\triangle ABD$ có $p = \dfrac{AB + BD + DA}{2} = 4$; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 2\sqrt{2} \Rightarrow r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Đường cao $SI = IM \cdot \tan 60° = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Thể tích $V_{S.ABC} = 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot SI \cdot S_{\triangle ABD} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{3}{x^2 - x - 2}$, $f(-2) = 2\ln 2 + 2$ và $f(-2) - 2f(0) = 4$. Giá trị của biểu thức $f(-3) + f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ bằng

A $2 + \ln 5$. **B** $2 + \ln \dfrac{5}{2}$. **C** $2 - \ln 2$. **D** $1 + \ln \dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{3}{x^2 - x - 2}\,\mathrm{d}x = \int \left(-\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-2}\right)\mathrm{d}x = \ln\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right| + C$.

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln\dfrac{x-2}{x+1}+C_1, & x\in(-\infty;-1)\\ \ln\dfrac{2-x}{x+1}+C_2, & x\in(-1;2)\\ \ln\dfrac{x-2}{x+1}+C_3, & x\in(2;+\infty)\end{cases}$$

Xét điều kiện $\begin{cases}f(-2)=2\ln 2+2\\ f(-2)-2f(0)=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=2\\ C_2=-1\end{cases}$.

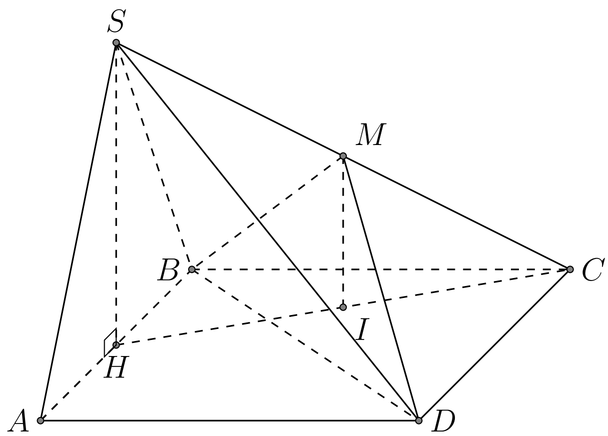
Suy ra $f(-3)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln\dfrac{5}{2}+2+\ln 1-1=1+\ln\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, biết $AB=2$, $AD=3$, $SD=\sqrt{14}$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Gọi M là trung điểm của SC. Cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBD) và (MBD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\dfrac{43}{61}$. C. $\dfrac{5}{7}$. D. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



Gọi α,β,γ lần lượt là góc giữa các mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$, (MBD) và $(ABCD)$, (SBD) và (MBD).

Ta có $SB=\sqrt{5}$, $HC=\sqrt{10}$, $SH=2$, $SC=SD=\sqrt{14}$, $BD=\sqrt{13}$.

Theo công thức Hê-rông $S_{\triangle SBD}=\dfrac{\sqrt{61}}{2}$.

Ta lại có $S_{\triangle HBD}=\dfrac{1}{4}S_{ABCD}=\dfrac{3}{2}$.

Vì $\triangle HBD$ là hình chiếu vuông góc của $\triangle SBD$ trên $(ABCD)$ nên $\cos\alpha=\dfrac{S_{\triangle HBD}}{S_{\triangle SBD}}=\dfrac{3}{\sqrt{61}}$.

Gọi I là trung điểm của $HC\Rightarrow IM\parallel SH\Rightarrow IM\perp(ABCD)$.

Ta có $S_{\triangle IBD}=S_{\triangle BCD}-S_{\triangle BIC}-S_{\triangle CID}=\dfrac{1}{2}S_{ABCD}-\dfrac{1}{8}S_{ABCD}-\dfrac{1}{4}S_{ABCD}=\dfrac{1}{8}S_{ABCD}=\dfrac{3}{4}$.

Ta có DM là đường trung tuyến của $\triangle SCD\Rightarrow DM=\sqrt{\dfrac{2(SD^2+CD^2)-SC^2}{4}}=\dfrac{\sqrt{22}}{2}$.

Theo công thức Hê-rông $S_{\triangle MBD}=\dfrac{\sqrt{61}}{4}$ Vì $\triangle IBD$ là hình chiếu vuông góc của $\triangle MBD$ trên $(ABCD)$ nên $\cos\beta=\dfrac{S_{\triangle IBD}}{S_{\triangle MBD}}=\dfrac{3}{\sqrt{61}}$. $\Rightarrow\alpha=\beta$.

Nhận thấy $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ nên $\cos\gamma=-\cos(\alpha+\beta)=-\cos 2\alpha=1-2\cos^2\alpha=\dfrac{43}{61}$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-z-1=0$ và điểm $A(1;0;0)\in(P)$. Đường thẳng Δ đi qua A nằm trong (P) và tạo với trục Oz một góc nhỏ nhất. Gọi $M(x_0;y_0;z_0)$ là giao điểm của đường thẳng Δ với mặt phẳng $(Q)\colon 2x+y-2z+1=0$. Tổng $S=x_0+y_0+z_0$ bằng

A. -5. B. 12. C. -2. D. 13.

Lời giải.

(P) có 1 VTPT $\vec{n}_P = (1; 1; -1)$; trục Oz có 1 VTCP $\vec{k} = (0; 0; 1)$.
Gọi $\vec{u} = (a; b; c)$ là 1 VTCP của đường thẳng Δ. Điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0 \quad (*)$
$\Delta \in (P) \Rightarrow \vec{n}_P \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow a + b - c = 0 \Leftrightarrow c = a + b$. Suy ra $\vec{u} = (a; b; a + b)$

$$\cos(\Delta, Oz) = \frac{\left|\vec{u} \cdot \vec{k}\right|}{|\vec{u}| \cdot \left|\vec{k}\right|} = \frac{|a + b|}{\sqrt{a^2 + b^2 + (a + b)^2}} \leq \frac{|a + b|}{\sqrt{\dfrac{(a + b)^2}{2} + (a + b)^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Suy ra góc giữa Δ và Oz nhỏ nhất khi $a = b$. Theo $(*)$, chọn $\vec{u} = (1; 1; 2)$. $\Rightarrow \Delta\colon \dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$.

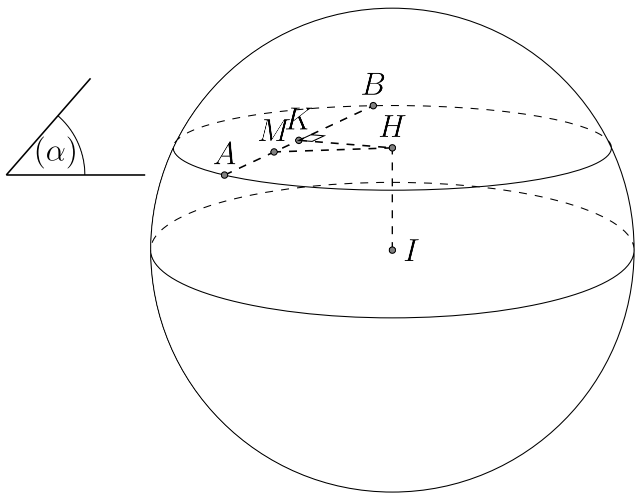
Tọa độ M thỏa hệ $\begin{cases} \dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2} \\ 2x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(4; 3; 6)$. Vậy $S = 4 + 3 + 6 = 13$.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x + y + z - 4 = 0$, mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 6z + 18 = 0$ và điểm $M(1; 1; 2) \in (\alpha)$. Đường thẳng d đi qua M nằm trong (α) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho dây cung AB có độ dài nhỏ nhất. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

A $\vec{u}_1 = (2; -1; -1)$. **B** $\vec{u}_3 = (1; 1; -2)$. **C** $\vec{u}_2 = (1; -2; 1)$. **D** $\vec{u}_4 = (0; 1; -1)$.

Lời giải.



(S) có tâm $I(4; 3; 3)$ và bán kính $R = 4$.
Vì $d(I, (\alpha)) = 2\sqrt{3} < R$ và $IM = \sqrt{14} < 14$ nên mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) và điểm M nằm bên trong hình cầu (S).
Gọi K là trung điểm dây cung AB và H là hình chiếu vuông góc của I trên (α).
Ta có

$$\begin{aligned} AB = 2AK &= 2\sqrt{AH^2 - KH^2} \\ &= 2\sqrt{IA^2 - IH^2 - KH^2} \\ &\geq 2\sqrt{R^2 - IH^2 - MH^2} \end{aligned}$$

Suy ra AB nhỏ nhất khi $AB \perp MH$. Ta tìm tọa độ điểm $H(x; y; z)$.
Mặt phẳng (α) có 1 VTPT $\vec{n}_\alpha = (1; 1; 1)$.

- $\overrightarrow{IH} = t \cdot \vec{n}_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = t \\ y - 3 = t \\ z - 3 = t \end{cases} \Rightarrow H(4 + t; 3 + t; 3 + t)$.
- $H \in (\alpha) \Rightarrow (4 + t) + (3 + t) + (3 + t) - 4 = 0 \Leftrightarrow t = -3 \Rightarrow H(1; 0; 0)$

Đường thẳng d có 1 VTCP là $\left[\overrightarrow{HM}, \vec{n}_\alpha\right] = (-1; 2; -1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Một hộp đựng 15 cái thẻ được đánh số từ 1 đến 15. Rút ngẫu nhiên 3 thẻ, xác suất để tổng ba số ghi trên ba thẻ được rút chia hết cho 3 bằng

A $\dfrac{25}{91}$. **B** $\dfrac{32}{91}$. **C** $\dfrac{31}{91}$. **D** $\dfrac{11}{27}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^3 = 455$.

Gọi A là biến cố "tổng ba số ghi trên ba thẻ được rút chia hết cho 3 ".

Trong 15 thẻ có 5 thẻ mang số chia hết cho 3; 5 thẻ mang số chia cho 3 dư 1 và 5 thẻ mang số chia cho 3 dư 2. Để tổng ba số ghi trên ba thẻ chia hết cho 3 thì ta có các khả năng sau:

- TH1. cả 3 thẻ đều chia hết cho 3 $\Rightarrow$ có C_5^3 cách.
- TH2. cả 3 thẻ đều chia cho 3 dư 1 $\Rightarrow$ có C_5^3 cách.
- TH3. cả 3 thẻ đều chia cho 3 dư 2 $\Rightarrow$ có C_5^3 cách.
- TH4. 1 thẻ chia hết cho 3, 1 thẻ chia cho 3 dư 1, 1 thẻ chia cho 3 dư 2. Theo quy tắc nhân, có $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_5^1$ cách.

  Theo quy tắc cộng, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n(A) = 3\mathrm{C}_5^3 + \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_5^1 = 155$.

  Vậy xác suất của biến cố A là $p(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{31}{91}$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + mx + 1$. Gọi S là tổng tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 1$ tại ba điểm phân biệt $A(0;1), B, C$ sao cho các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại B, C vuông góc với nhau. Giá trị của S bằng

A. $\dfrac{11}{5}$.   B. $\dfrac{9}{2}$.   C. $\dfrac{9}{5}$.   D. $\dfrac{9}{4}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 6x + m$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 1$ là

$x^3 + 3x^2 + mx + 1 = 1 \Leftrightarrow x(x^2 + 3x + m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + 3x + m = 0 \quad (1) \end{array}\right.$.

Điều kiện 1. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 1$ tại ba điểm phân biệt $A(0;1), B, C$

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases} \quad (*)$

Gọi x_1, x_2 là hoành độ của điểm B, C. Khi đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1).

Theo Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 x_2 = m \end{cases}$.

Điều kiện 2. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại B, C vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1 \\ \Leftrightarrow\ & \left(3x_1^2 + 6x_1 + m\right)\left(3x_2^2 + 6x_2 + m\right) = -1 \\ \Leftrightarrow\ & 9(x_1x_2)^2 + 18x_1x_2(x_1 + x_2) + 3m(x_1 + x_2)^2 + (36 - 6m)x_1x_2 + 6m(x_1 + x_2) + m^2 = -1 \\ \Leftrightarrow\ & 4m^2 - 9m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{9 + \sqrt{65}}{8} \\ m = \dfrac{9 - \sqrt{65}}{8} \end{array}\right. \Rightarrow S = \dfrac{9}{4}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên đoạn $[-\pi; \pi]$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x =$

2018. Tính $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x)}{2018^x+1}\,\mathrm{d}x$.

A 2018. **B** 4036. **C** 0. **D** $\dfrac{1}{2018}$.

Lời giải.

Đặt $t=-x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=-\pi \Rightarrow t=\pi$; $x=\pi \Rightarrow t=-\pi$. Khi đó

$$I=\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x)}{2018^x+1}\,\mathrm{d}x=-\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f(-t)}{2018^{-t}+1}(-\,\mathrm{d}t)=\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{2018^t\cdot f(t)}{2018^t+1}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{2018^x\cdot f(x)}{2018^x+1}\,\mathrm{d}x.$$

$$\Rightarrow 2I=\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x)}{2018^x+1}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{2018^x\cdot f(x)}{2018^x+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=2\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=4036 \Rightarrow I=2018.$$

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. D	3. A	4. A	5. D	6. B	7. B	8. D	9. A	10. C
11. C	12. C	13. B	14. D	15. B	16. D	17. D	18. C	19. A	20. A
21. B	22. B	23. D	24. C	25. C	26. A	27. D	28. B	29. D	30. B
31. A	32. D	33. B	34. B	35. C	36. A	37. C	38. A	39. A	40. D
41. D	42. C	43. B	44. D	45. B	46. D	47. C	48. C	49. D	50. A

134 THI THỬ THPT QG, LỚP 12 - LẦN 3 - TRƯỜNG THPT NGUYỄN ĐĂNG ĐẠO - BẮC NINH, 2017-2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số $y = -x^4 + 8x^2$.

(A) $(-\infty; -2) \cup (0; 2)$.
(B) $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.
(C) $(-2; 0) \cup (2; +\infty)$.
(D) $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Lời giải.

$y' = -4x^4 + 16x$. $y' = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 0; 2\}$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗		↘		↗		↘	$-\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trong các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y + 1 = 0$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (S).

(A) $I\left(-\dfrac{1}{2}; 1; 0\right)$ và $R = \dfrac{1}{4}$.
(B) $I\left(\dfrac{1}{2}; 1; 0\right)$ và $R = \dfrac{1}{2}$.
(C) $I\left(\dfrac{1}{2}; -1; 0\right)$ và $R = \dfrac{1}{2}$.
(D) $I\left(-\dfrac{1}{2}; 1; 0\right)$ và $R = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Theo công thức tính tâm và bán kính mặt cầu từ phương trình tổng quát, với $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 0$ và $d = 1$ ta có tâm $I\left(\dfrac{1}{2}; -1; 0\right)$ và $R = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Cho các mệnh đề sau:

a) Hàm số $y = \ln|x|$ có đạo hàm tại mọi $x \neq 0$ và $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{|x|}$.

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_2 x = -\infty$.

c) Đồ thị hai hàm số $y = a^x$ và $y = -\log_a(-x)$ với $a > 0$ và $a \neq 1$ là hai đường cong đối xứng với nhau qua $y = -x$.

d) Hàm số $y = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{Z})$ có tập xác định là $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Hỏi có bao nhiêu mệnh đề đúng?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x} \Rightarrow (\ln|x|)' = \dfrac{1}{|x|}$ sai.

Hàm số $y = x^2$ có tập xác định là $\mathbb{R} \Rightarrow$ "Hàm số $y = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{Z})$ có tập xác định là $\mathbb{R}\backslash\{0\}$" sai.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(-2;1)$. Hỏi điểm M là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây?

(A) $z = 2 - i$. (B) $z = -2 + i$. (C) $z = -1 + 2i$. (D) $z = 1 - 2i$.

Lời giải.

$M(-2;1) \Rightarrow z = -2 + i$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

(A) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$.

(B) $\displaystyle\int_a^b [f(x)\cdot g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

(C) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(D) $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^1 (x\cdot x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$ và $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 \cdot \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$

$\displaystyle\Rightarrow \int_0^1 (x\cdot x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_a^b [f(x)\cdot g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ là mệnh đề sai.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Biết $\displaystyle\int_1^2 \ln(9-x^2)\,\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 2 + c$ với $a,b,c \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a+b+c$.

(A) $S = 0$. (B) $S = -2$. (C) $S = -3$. (D) $S = -1$.

Lời giải.

Ta có

$$\int_1^2 \ln(9-x^2)\,\mathrm{d}x = \ln(9-x^2)\Big|_1^2 - \int_1^2 x\,\mathrm{d}\left(\ln(9-x^2)\right) = \ln 5 - \ln 8 + 2\int_1^2 \frac{x^2}{9-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \ln 5 - 2\ln 2 + \int_1^2 \left(-2 + \frac{3}{x+3} - \frac{3}{x-3}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \ln 5 - 2\ln 2 + \left(-2x + 3\ln|x+3| - 3\ln|x-3|\right)\Big|_1^2$$

$$= 5\ln 5 - 6\ln 2 - 2.$$

Vậy $S = -3$.

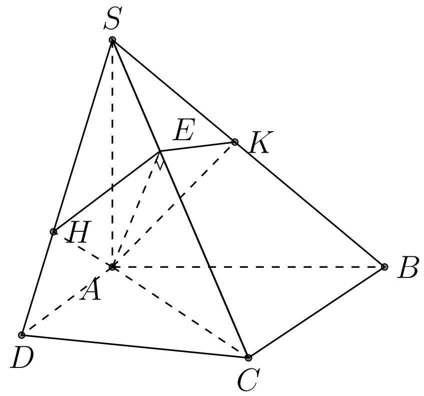
Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC. (α) cắt SC tại E. Xác định góc giữa AC với (α).

A $\widehat{EAC}$. **B** $\widehat{ECA}$. **C** $\widehat{ASE}$. **D** $\widehat{CEA}$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có E là hình chiếu của C lên mặt phẳng (α) và $AC \cap (\alpha) = \{A\}$. Vậy góc giữa AC với (α) là $\widehat{EAC}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \sqrt{\cos x - 1} + 1 - \cos^2 x$ là

A $\mathscr{D} = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. **B** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

C $\mathscr{D} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. **D** $\mathscr{D} = \{0\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định là $\cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$. Vậy $\mathscr{D} = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, chỉ ra một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng $(P): 4x - y - 3z + 2 = 0$.

A $\vec{n} = (4; -1; -3)$. **B** $\vec{n} = (-1; -3; 2)$. **C** $\vec{n} = (4; 0; -3)$. **D** $\vec{n} = (4; -3; 2)$.

Lời giải.

Từ phương trình tổng quát của mặt phẳng $(P): 4x - y - 3z + 2 = 0$ ta có $\vec{n} = (4; -1; -3)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$. **B** $y = x^{\frac{4}{3}}$. **C** $y = \log_2 x$. **D** $y = x^3 + x^2 + 1$.

Lời giải.

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 2^x$. Vậy hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Xét các mệnh đề sau:

a) Nếu mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với mọi đường thẳng trong (Q).

b) Nếu mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) cùng song song với mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) song song với nhau.

c) Nếu mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) thì mọi đường thẳng trong (P) đều song song với mọi đường thẳng trong (Q).

d) Nếu mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) và đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì đường thẳng a song song với mặt phẳng (P).

Số mệnh đề đúng là

A 2. **B** 1. **C** 3. **D** 4.

Lời giải.

a) Theo định nghĩa ta có (P) và (Q) không có điểm chung nên mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (Q) đều không có điểm chung với $(P) \Rightarrow$ Đây là mệnh đề đúng.

b) (P) và (R) có thể trùng nhau $\Rightarrow$ Đây là mệnh đề sai.

c) Một đường thẳng nằm trong (P) và một đường thẳng nằm trong (Q) không có điểm chung nên có thể chéo nhau $\Rightarrow$ Đây là mệnh đề sai.

d) Đường thẳng a có thể nằm trên $(P) \Rightarrow$ Đây là mệnh đề sai.

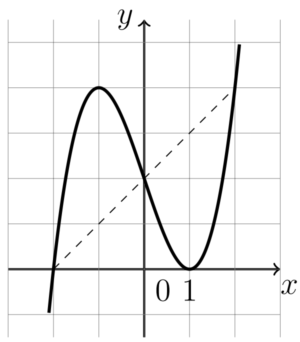
Chọn đáp án B □

Câu 12.

Hình vẽ bên là đồ thị của một trong các hàm số dưới đây. Đó là hàm số nào?

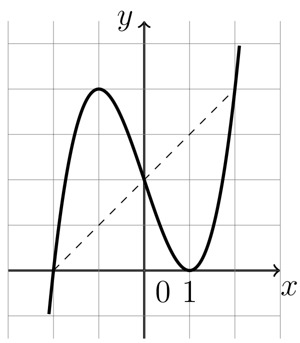
A $y = x^3 - x^2 + 2$. **B** $y = x^3 - 3x + 2$.

C $y = x^3 - 3x^2 + 2$. **D** $y = x^3 - x + 2$.



Lời giải.

Hàm số có tâm đối xứng là $(0; 2)$ và đi qua điểm $(1; 0)$. Xét hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có $y'' = 6x \Rightarrow y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$. Do đó hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị như hình vẽ bên thỏa mãn điều kiện đề bài.



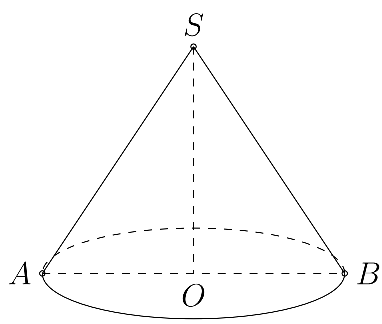
Chọn đáp án B □

Câu 13. Diện tích xung quanh S của hình nón có chiều cao bằng 16 và bán kính đáy bằng 12 là bao nhiêu?

A $S = 120\pi$. **B** $S = 2304\pi$. **C** $S = 240\pi$. **D** $S = 192\pi$.

Lời giải.

Ta có $SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = 20$. Vậy $S = \pi \cdot OB \cdot SB = 240\pi$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Cho $I = \int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x}\, dx$. Đặt $t = \cos 2x$ thì mệnh đề nào đúng?

A $I = \int \frac{-1}{t^2+1}\, dt$. (B) $I = \int \frac{1}{t^2+1}\, dt$. (C) $I = \frac{1}{2}\int \frac{-1}{t^2+1}\, dt$. (D) $I = 2\int \frac{1}{t^2+1}\, dt$.

Lời giải.

Ta có $\frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \frac{\sin 2x}{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin 2x}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x} = \frac{2\sin 2x}{1 + \cos^2 2x}$.

$dt = -2\sin 2x\, dx \Rightarrow 2\sin 2x\, dx = -\, dt \Rightarrow I = \int \frac{-1}{t^2+1}\, dt$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 10 = 0$. Giả sử A, B lần lượt là các điểm biểu diễn z_1, z_2 trên mặt phẳng phức. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A $AB = 6$. (B) $AB = \sqrt{10}$. (C) $AB = 2\sqrt{10}$. (D) $AB = 2$.

Lời giải.

Ta có $z_1 = 1 + 3i$ và $z_2 = 1 - 3i \Rightarrow A(1;3)$ và $B(1;-3) \Rightarrow AB = 6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho 2 đường thẳng $d_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-m} = \frac{z-2}{-3}$, $d_2 : \frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. Tìm tất cả giá trị thực của m để d_1 vuông góc với d_2

A $m = -1$. (B) $m = 1$. (C) $m = -5$. (D) $m = 5$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của d_1, d_2 lần lượt là $\vec{u}_1 = (2; -m; -3)$ và $\vec{u}_2 = (1;1;1)$.

Để $d_1 \perp d_2$ thì $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow 2 - m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;-1)$, $B(-2;1)$. Biết phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$ biến A thành B. Tìm tọa độ $\vec{v}$.

A $\vec{v} = (-3;2)$. (B) $\vec{v} = (3;-2)$. (C) $\vec{v} = (2;-3)$. (D) $\vec{v} = (-2;3)$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-3;2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Phương trình $2\sin^2 2x - 5\sin 2x + 2 = 0$ có hai họ nghiệm dạng $x = \alpha + k\pi$, $x = \beta + k\pi$ $(0 < \alpha, \beta < \pi)$. Tính $T = \alpha \cdot \beta$.

(A) $T = -\frac{5\pi^2}{144}$. **B** $T = \frac{5\pi^2}{36}$. (C) $T = -\frac{5\pi^2}{36}$. (D) $T = \frac{5\pi^2}{144}$.

Lời giải.

PT $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 2 \text{ (loại)} \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right.$.

Do đó $T = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{5\pi}{12} = \frac{5\pi^2}{36}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Tìm m để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{m^2x-4m}{2x-m^2}$ đi qua điểm $A(2;1)$.

A $m=2$.
B $m=2$ và $m=-2$.
C $m=-2$.
D Không tồn tại m..

Lời giải.

Để hàm số có tiệm cận đứng thì

$$\left[\begin{array}{l} m\neq 0 \\ m^2\cdot\dfrac{m^2}{2}-4m\neq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m\neq 0 \\ m(m^3-8)\neq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m\neq 0 \\ m\neq 2\end{array}\right..$$

Khi đó tiệm cận đứng của hàm số là $x=\dfrac{m^2}{2}$. Theo giả thiết ta có $\dfrac{m^2}{2}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=2 \text{ (loại)} \\ m=-2 \text{ (thỏa mãn)}.\end{array}\right.$

Vậy $m=-2$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $M(1;-2;3), N(3;0;-1)$ và điểm I là trung điểm của MN. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A $\overrightarrow{OI}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$.
B $\overrightarrow{OI}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.
C $\overrightarrow{OI}=4\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$.
D $\overrightarrow{OI}=4\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$.

Lời giải.

Ta có $I=(2;-1;1)=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

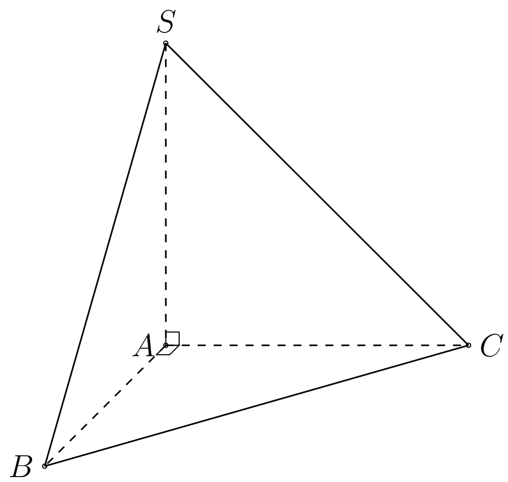
Chọn đáp án B □

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=a$, đường thẳng SA vuông góc mặt phẳng ABC và $SA=a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.
B $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.
C $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.
D $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

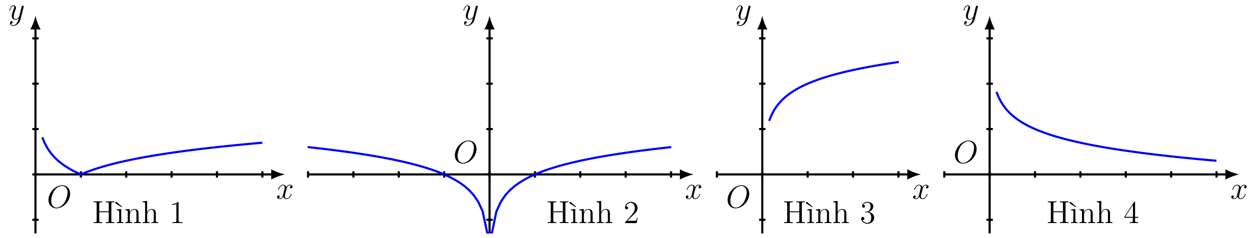
Lời giải.

Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên $S_{ABC}=\dfrac{a^2}{2}$. Vậy $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.



Chọn đáp án B □

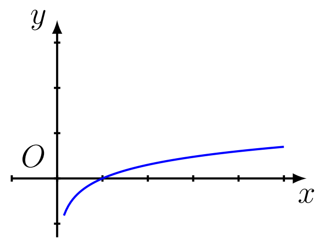
Câu 22. Đồ thị các hàm số $y=\log x+2$, $y=1-\log x$, $y=\log|x|$ và $y=|\log x|$ lần lượt là các hình nào trong các hình sau?



A $3,1,4,2$. **B** $4,3,2,1$. **C** $3,4,2,1$. **D** $3,4,1,2$.

Lời giải.

Ta có đồ thị (C) của hàm số $y = \log x$ như hình vẽ bên



Tịnh tiến (C) lên trên 2 đơn vị ta được đồ thị ở Hình 3. Đây là đồ thị của hàm số $y = \log x + 2$.

Dựng đối xứng đồ thị (C) qua trục Ox sau đó tịnh tiến lên trên 1 đơn vị ta được đồ thị ở Hình 3. Đây là đồ thị của hàm số $y = 1 - \log x$.

Dựng đối xứng đồ thị (C) qua trục Oy cùng với đồ thị (C) ta được đồ thị ở Hình 2. Đây là đồ thị của hàm số $y = \log |x|$.

Dựng đối xứng đồ thị (C) phí dưới trục Ox qua trục Ox, sau đó xóa phần đồ thị (C) phía dưới Ox ta được đồ thị ở Hình 1. Đây là đồ thị của hàm số $y = |\log x|$. Vậy thứ tự đồ thị là lần lượt là các Hình $3,4,2,1$.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A Nếu $f(x) \geq m$ với mọi $x \in [a;b]$ thì m là giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

B Nếu $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(x_0)$ thì $f'(x_0) = 0$.

C Nếu hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a;b]$ tại $x_0 = b$ thì $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a;b]$.

D Nếu m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a;b]$.

Lời giải.

Theo định nghĩa ta có: Nếu m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a;b]$. Vậy đây là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 6x^2 - 7x + 3$. Tính giá trị của biểu thức $T = x_1 + x_2$.

A $T = 12$. **B** $T = 2$. **C** $T = 1$. **D** $T = 4$.

Lời giải.

x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x - 7 = 0$. Theo định lý Vi-ét ta có $T = 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua $(2;3;1)$ và song song với mặt phẳng$(Q): x - y + z - 4 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P).

A $2x + 3y + z - 14 = 0$. **B** $x - y + z = 0$.

C $2x + 3y + z = 0$. **D** $x - y + z - 6 = 0$.

Lời giải.
Vì $(Q) \parallel (P)$, nên một véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1; -1; 1)$
$\Rightarrow$ phương trình của (P) là $1(x-2) - 1(y-3) + 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow x - y + z = 0$.
Chọn đáp án B □

Câu 26. Đạo hàm y' của hàm số $y = \log_2 x$ là

A) $y' = \dfrac{2}{x}$. B) $y' = \dfrac{1}{x}$. C) $y' = \dfrac{1}{x \ln 2}$. D) $y' = \dfrac{2}{x \ln 2}$.

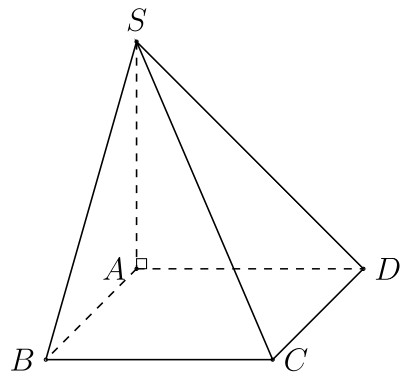
Lời giải.
Ta có $(\log_2 x)' = \dfrac{1}{x \ln 2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, $\widehat{BAD} = 60^0$, SA vuông góc với đáy. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A) Tam giác SAD vuông. B) Tam giác SBC vuông.
C) $BD \perp (SAC)$. D) Tam giác SAB vuông.

Lời giải.

a) $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AD \Rightarrow$ tam giác SAD vuông.
b) $BD \perp AC, SA \Rightarrow BD \perp (SAC)$.
c) $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB \Rightarrow$ tam giác SAB vuông.
d) Nếu $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp AB$ (Vô lý); Nếu $BC \perp SC \Rightarrow BC \perp AC$ (Vô lý); Không có cơ sở để kết luận vuông tại S. Vậy *Tam giác SBC vuông* là mệnh đề sai.



Chọn đáp án B □

Câu 28. Gieo một đồng tiền cân đối, đồng chất liên tiếp hai lần. Tìm số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)$.

A) $n(\Omega) = 4$. B) $n(\Omega) = 2$. C) $n(\Omega) = 8$. D) $n(\Omega) = 1$.

Lời giải.
Lần một có 2 cách và lần hai cách. Vậy $n(\Omega) = 2 \cdot 2 = 4$.
Chọn đáp án A □

Câu 29. Tìm giá trị nhỏ nhất N của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$.

A) $N = 3$. B) $N = 2$. C) $N = 4$. D) $N = -5$.

Lời giải.
$y' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0$ với mọi $x \in [1; 2]$. $y(1) = 3$, $y(2) = 4$. Vậy $N = 3$.
Chọn đáp án A □

Câu 30. Cho hai số phức $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 1 - 3i$. Tính $T = |(1+i)z_1 + 2z_2|$.

A) $T = 18$. B) $T = 3\sqrt{2}$. C) $T = 0$. D) $T = 3$.

Lời giải.
$(1+i)z_1 + 2z_2 = (1+i)(2+i) + 2(1-3i) = 3 - 3i \Rightarrow |(1+i)z_1 + 2z_2| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$.
Chọn đáp án B □

Câu 31. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ quanh trục Ox.

A $V = \pi(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e})$. **B** $V = \pi\mathrm{e}^2$. **C** $V = \pi(\mathrm{e}^2 + \mathrm{e})$. **D** $V = \pi\mathrm{e}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính thể tích vật thể tròn xoay ta có

$$V = \pi\int\limits_1^2 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \pi\int\limits_1^2 x\,\mathrm{d}\mathrm{e}^x$$

$$= \pi x\mathrm{e}^x\Big|_1^2 - \pi\int\limits_1^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \pi\,\left(2\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\Big|_1^2\right) = \pi\mathrm{e}^2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 32. Tìm nguyên hàm I của hàm số $y = \mathrm{e}^x - 3x^2$.

A $I = \mathrm{e}^x - x^3 + C$. **B** $I = \mathrm{e}^x + x^3 + C$. **C** $I = \mathrm{e}^x + 6x + C$. **D** $I = \mathrm{e}^x - 6x + C$.

Lời giải.

$$I = \int(\mathrm{e}^x - 3x^2)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - x^3 + C.$$

Chọn đáp án A □

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x \neq 3 \\ m & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ liên tục tại $x = 3$.

A $m = 4$. **B** $m = -1$. **C** $m = -4$. **D** $m = 1$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to 3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = -\lim_{x\to 3}(\sqrt{x+1}+2) = -4.$$

Để hàm số liên tục tại $x = 3$ thì $f(3) = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} \Rightarrow m = -4$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho hàm số $f(x) = 2018\mathrm{e}^x + x^2 - 2019x - 1$. Hỏi phương trình $|f(x) - 2018| = m$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm thực.

A 2. **B** 3. **C** 4. **D** 6.

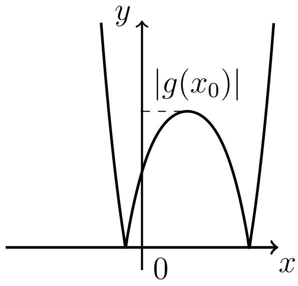
Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - 2018 = 2018\mathrm{e}^x + x^2 - 2019x - 2019$.

Ta có $g'(x) = 2018\mathrm{e}^x + 2x - 2019$ và $g''(x) = 2018\mathrm{e}^x + 2 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow g'(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta có $g'(x) < 0$, $g'(1) > 0$ do đó $g'(x)$ có một nghiệm duy nhất $x_0 \in (0; 1)$. Kết hợp với $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$, suy ra $g(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$g(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Nếu $g(x_0) < 0$ thì đồ thị của hàm số $y = |f(x) - 2018|$ có dạng như hình vẽ



Vậy phương trình nhiều nhất có 4 nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f\left(x^2+1\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

A 0. B 2. C 3. D 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x^2+1) = 2xf'_{(x^2+1)}(x^2+1)$. Vì $2x^2+1 \geq 1 \Rightarrow f'_{(x^2+1)}(x^2+1) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x^2+1)$ như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $y = f\left(x^2+1\right)$ có một cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $4\mathrm{e}^{2u_9} + 2\mathrm{e}^{u_9} - 4\mathrm{e}^{u_1+u_9} = \mathrm{e}^{u_1} - \mathrm{e}^{2u_1} + 3$ và $u_{n+1} = u_n + 3$ với mọi $n \geq 1$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 3$ là

A 11. B 12. C 9. D 10.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)3 \Rightarrow u_9 = u_1 + 24$. Từ giả thiết ta có

$$(2\mathrm{e}^{u_9} - \mathrm{e}^{u_1})^2 + (2\mathrm{e}^{u_9} - \mathrm{e}^{u_1}) - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\mathrm{e}^{u_9} - \mathrm{e}^{u_1} = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2} \\ 2\mathrm{e}^{u_9} - \mathrm{e}^{u_1} = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{e}^{u_1}\left(2\mathrm{e}^{24}-1\right) = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2} \text{ (loại)} \\ \mathrm{e}^{u_1}\left(2\mathrm{e}^{24}-1\right) = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}. \end{array}\right.$$

Do đó $u_1 = \ln \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2\left(2e^{24}-1\right)} \Rightarrow u_n > 3 \Rightarrow \ln \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2\left(2e^{24}-1\right)} + 3(n-1) > 3 \Rightarrow n > 9$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của n là 10.
Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình $m9^{x^2-2x} - (2m+1)6^{x^2-2x} + m4^{x^2-2x} = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 2)$?

A 2012. (B) 2013. (C) 2011. (D) 2010.

Lời giải.

PT $\Leftrightarrow m\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2(x^2-2x)} - (2m+1)\left(\dfrac{3}{2}\right)^{(x^2-2x)} + m = 0$.

Với $x \in (0; 2) \Rightarrow x^2 - 2x \in (-1; 0)$. Đặt $t = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{(x^2-2x)} \in (\dfrac{2}{3}; 1)$.
Phương trình trở thành $mt^2-(2m+1)t+m = 0 \Rightarrow m = \dfrac{t}{(t-1)^2}$.
Xét hàm $g(t) = \dfrac{t}{(t-1)^2}, g'(t) = \dfrac{-t-1}{(t-1)^3}$. Bảng biến thiên của hàm số $g(t)$ với $t \in (\dfrac{2}{3}; 1)$ như hình bên, suy ra $m > 6$.

t	$\dfrac{2}{3}$		1
g'		$+$	
g	6	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy có 2012 giá trị m nguyên thuộc đoạn $[-2018; 2018]$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số

$$y = x^3 - 2mx^2 - (m^2 - 5m + 6)x + m + 1$$

đồng biến trên trên $(-\infty; 0)$.

A 0. (B) 1. (C) Vô số. (D) 3.

Lời giải.

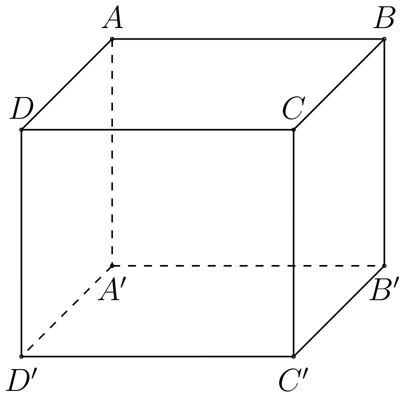
Ta có $y' = 3x^2 - 4mx - (m^2 - 5m + 6)$. $\Delta = 7m^2 - 15m + 18 > 0$ với mọi m Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $y' = 0$. Do đó để hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ thì
$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 5m + 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (2; 3)$.
Vậy không tồn tại m nguyên thỏa mãn đề bài.
Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Một người thợ muốn làm 1 chiếc thùng dạng hình hộp chữ nhật không nắp, đáy là hình vuông có thể tích là 2,16 m^3. Biết giá vật liệu để làm đáy và mặt bên của thùng lần lượt là 90000 đồng/m^2 và 36000 đồng/m^2. Để làm được chiếc thùng với chi phí mua vật liệu thấp nhất người thợ phải chọn các kích thước của chiếc thùng là bao nhiêu?

(A) Cạnh đáy 1,0 m và chiều cao 1,7 m. (B) Cạnh đáy 1,5 m và chiều cao 9,6 m.
C Cạnh đáy 1,2 m và chiều cao 1,5 m. (D) Cạnh đáy 2,0 m và chiều cao 0,54 m.

Lời giải.

Giả sử chiếc thùng hình hộp là $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là $A'B'C'D'$. Đặt $A'B' = x$ và $AA' = y$ $(x, y > 0)$.
Khi đó $V = x^2y = 2{,}16 \Rightarrow y = \dfrac{2{,}16}{x^2}$.
chi phí mua vật liệu đóng thùng là
$A = 4 \cdot 36000xy + 90000x^2 = \dfrac{311040}{x} + 90000x^2$
Xét hàm số $g(x) = \dfrac{311040}{x} + 90000x^2 \Rightarrow g'(x) = \dfrac{-311040 + 180000x^3}{x^2}$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1{,}2$.
Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 1{,}2$ m $\Rightarrow y = 1{,}5$ m.



Chọn đáp án C □

Câu 40. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m nhỏ hơn 2018 để phương trình

$$\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{x+\frac{1}{x}+m}} = \frac{x^3+mx^2+x}{x^4+1}$$

có nghiệm thực dương.

(A) 2014. (B) 2015. (C) 2016. (D) 2017.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x \neq 0$.

PT $\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{x+\frac{1}{x}+m}} = \dfrac{x+\frac{1}{x}+m}{x^2+\frac{1}{x^2}} \Leftrightarrow \left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}} = \left(x+\dfrac{1}{x}+m\right)\mathrm{e}^{\sqrt{x+\frac{1}{x}+m}}$.

Xét hàm số $g(t) = t\mathrm{e}^t$. Ta có $g'(t) = (t+1)\mathrm{e}^t > 0$ với mọi $t > 0 \Rightarrow y = g(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty) \Rightarrow \sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}} = \sqrt{x+\dfrac{1}{x}+m} \Leftrightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2} - \left(x+\dfrac{1}{x}\right) = m \qquad (*)$.

Đặt $u = x + \dfrac{1}{x} \Rightarrow |u| \geq 2$. Phương trình $(*)$ trở thành $u^2 - u - 2 = m$. Bảng biến thiên của Parabol $y = u^2 - u - 2$ với $|u| \geq 2$. Như hình vẽ bên. Suy ra $m \geq 0$. Vậy có 2017 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn điều kiện đề bài.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
y'	$+$			$+$
y	$+\infty$ ↘	4	0	↗ $+\infty$

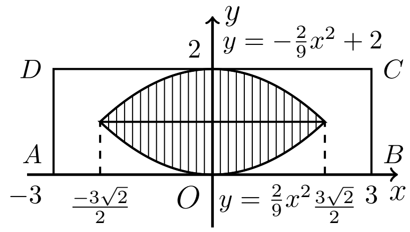
Chọn đáp án D □

Câu 41. Cho một mảnh vườn hình chữ nhật $ABCD$ có chiều rộng là 2 m, chiều dài gấp ba chiều rộng. Người ta chia mảnh vườn bằng cách dùng hai đường parabol, mỗi parabol có đỉnh là trung điểm của một cạnh dài và đi qua hai mút của cạnh dài đối diện. Tính tỉ số k diện tích phần mảnh vườn nằm ở miền trong hai parabol với diện tích phần đất còn lại?

(A) $= \dfrac{1}{3}$. (B) $= \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (C) $= \dfrac{1}{2}$. (D) $= \dfrac{2+3\sqrt{2}}{7}$.

Lời giải.

Giả sử mảnh vườn được gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ bên. Khi đó phương trình hai parabol có đỉnh là trung điểm AB, CD lần lượt là $y = \frac{2}{9}x^2$ và $y = -\frac{2}{9}x^2 + 2$. Xét phương trình $\frac{2}{9}x^2 = -\frac{2}{9}x^2 + 2 \Rightarrow x = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$.



Miền diện tích giới hạn bởi các parabol (như hình vẽ) có diện tích là

$$S = \int_{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \left| -\frac{2}{9}x^2 + 2 - \frac{2}{9}x^2 \right| \mathrm{d}x = \int_{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \left(2 - \frac{4}{9}x^2\right) \mathrm{d}x = 4\sqrt{2}.$$

Ta có $S_{ABCD} = 12 \Leftrightarrow k = \dfrac{4\sqrt{2}}{12 - 4\sqrt{2}} = \dfrac{2 + 3\sqrt{2}}{7}$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Biết tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{\log_2 \frac{3-2x}{1-x}} \le \sqrt{2}$ có dạng $(-\infty; a] \cup [b; +\infty)$. Tính giá trị $T = ab$.

Ⓐ $T = 0$. Ⓑ $T = 2$. Ⓒ $T = 3$. **D** $T = 1$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x \ne 1$ và $\dfrac{3-2x}{1-x} \ge 1$. BPT $\Leftrightarrow \log_2 \dfrac{3-2x}{1-x} \le 2 \Leftrightarrow \dfrac{3-2x}{1-x} \le 4$.

Ta có hệ $\begin{cases} \dfrac{3-2x}{1-x} \ge 1 \\ \dfrac{3-2x}{1-x} \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1) \cup [2; +\infty) \\ \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$. Vậy $T = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ, $Oxyz$ cho đường thẳng $d : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{1}$ và điểm $A(2; 1; 1)$. Gọi Δ là đường thẳng qua A sao cho tổng khoảng cách từ O đến Δ và khoảng cách từ d đến Δ lớn nhất. Biết $\vec{u} = (2; b; c)$ là một véc-tơ chỉ phương của Δ. Tính $b + c$.

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 4. **D** -4.

Lời giải.

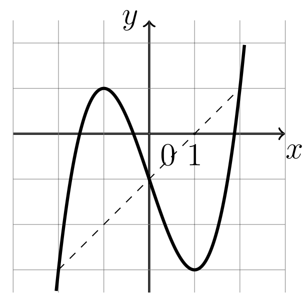
Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d, khi đó $H = (1; 2; 0)$. Khi đó $d(d, \Delta) \le AH$, ngoài ra ta cũng có $d(O, \Delta) \le OA$. Suy ra $d(d, \Delta) + d(O, \Delta) \le AH + OA$. Dấu bằng khi và chỉ khi $AH \perp \Delta$ và $OA \perp \Delta \Rightarrow [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AH}] = (-2; 1; 3)$ là một véc-tơ chỉ phương của $\Delta \Rightarrow (2; -1; -3)$ cũng là một chỉ phương của Δ. Vậy $b + c = -4$.

Chọn đáp án D □

Câu 44.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $f[f(\cos x) - 1] = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$.

A 4. Ⓑ 5. Ⓒ 6. Ⓓ 2.



Lời giải.

Từ đồ thị ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \in (-2; -1) \\ x = x_2 \in (-1; 0) \\ x = x_3 \in (0; 1) \end{array}\right.$. Do đó

$$f[f(\cos x) - 1] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\cos x) - 1 = x_1 \in (-2; -1) \\ f(\cos x) - 1 = x_2 \in (-1; 0) \\ f(\cos x) - 1 = x_3 \in (0; 1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\cos x) = 1 + x_1 \in (-1; 0) \\ f(\cos x) = 1 + x_2 \in (0; 1) \\ f(\cos x) = 1 + x_3 \in (1; 2) \end{array}\right..$$

TH1 $f(\cos x) = 1 + x_1 \in (-1; 0) \Leftrightarrow \cos x = a_1 \in (-1; x_2) \Rightarrow$ có hai nghiệm $\in [0; 2\pi]$.

TH2 $f(\cos x) = 1 + x_2 \in (0; 1) \Leftrightarrow \cos x = a_2 \in (x_2; 0) \Rightarrow$ có hai nghiệm $\in [0; 2\pi]$.

TH3 $f(\cos x) = 1 + x_3 \in (1; 2) \Leftrightarrow \cos x = a_3 > 1 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy có bốn nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$.

Chọn đáp án (A) □

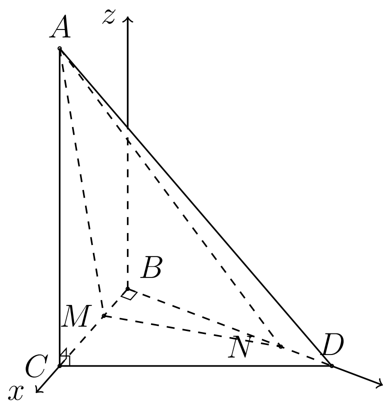
Câu 45. Tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD vuông cân tại B, $BC = 4$, $AC = 4$, $AC \perp (BCD)$. M, N là các điểm lần lượt di động trên các tia BC BD sao cho $\dfrac{BC}{BM} + \dfrac{BD}{BN} = 4$. Đặt d là khoảng cách từ C đến (AMN). Tính giá trị lớn nhất của d.

(A) $\dfrac{2\sqrt{65}}{10}$. (B) $\dfrac{4}{3}$. **(C)** $\dfrac{4\sqrt{65}}{13}$. (D) $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Dựng hệ trục tọa độ $Bxyz$ sao cho $B = (0; 0; 0)$, $C(4; 0; 0)$, $D(0; 4; 0)$, $A(4; 0; 4)$. Giả sử $M(m; 0; 0)$ và $N(0; n; 0)$ $(m, n > 0)$. Theo giả thiết ta có $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = 1 \Rightarrow MN$ luôn đi qua điểm $I(1; 1; 0)$. Do đó $\mathrm{d} \leq \mathrm{d}(C, AI)$. Giá trị lớn nhất của d là $\mathrm{d}(C, AI)$. Ta có $\overrightarrow{AI} = (-3; 1; -4)$, $\overrightarrow{AC} = (-4; 4; -4)$

$\Rightarrow \mathrm{d}(C, AI) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC}\right]\right|}{AI} = \dfrac{4\sqrt{65}}{13}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1 = 0$ và hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z}{2}$, $d_2: \dfrac{x-5}{6} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z+5}{-5}$. Biết hai điểm M_1, M_2 thuộc d_1 và hai điểm N_1, N_2 thuộc d_2 sao cho M_1N_1, M_2N_2 song song với (P) đồng thời cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng 2. Tính $d = M_1N_1 + M_2N_2$.

(A) $d = 6 + 5\sqrt{2}$. (B) $d = 5\sqrt{2}$. (C) $d = 5 + 5\sqrt{2}$. (D) $d = 6\sqrt{2}$.

Lời giải.

Phương trình tham số của d_1, d_2 là $d_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x = 5 + 6t \\ y = 4t \\ z = -5 - 5t \end{cases}$

Giả sử $x - 2y + 2z + D = 0$ là phương trình mặt phẳng cách (P) một khoảng là 2. Ta có

$2 = \mathrm{d}((P),(Q)) = \dfrac{D+1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \dfrac{D+1}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=5 \\ D=-7 \end{array}\right.$.

Vậy có hai mặt phẳng cần tìm là $(Q_1): x-2y+2z+5=0$ và $(Q_2): x-2y+2z-7=0$ Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử M_1, N_1 là giao của d_1, d_2 với (Q_1) và M_2, N_2 là giao của d_1, d_2 với (Q_2). Suy ra $M_1(1;3;0)$, $N_1(5;0;-5)$ và $M_2(3;0;2)$, $N_2(-1;-4;0)$. Vậy $d = 6+5\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và $f(0)=0$, $f'(1)=\dfrac{9}{2}$, $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{39}{4}$, $\displaystyle\int_0^1 (x^2+x)f''(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{5}{2}$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{14}{3}$. B. $I = 14$. C. $I = \dfrac{7}{3}$. D. $I = 7$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{5}{2} = \displaystyle\int_0^1 (x^2+x)f''(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2+x)\,\mathrm{d}f'(x) = (x^2+x)f'(x)\big|_0^1 - \int_0^1 (2x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 (2x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{13}{2} \quad (1).$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \left[4[f'(x)]^2 - 12(2x+1)f'(x) + 9(2x+1)^2\right]\,\mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 [2f'(x) - 3(2x+1)]^2\,\mathrm{d}x = 0$

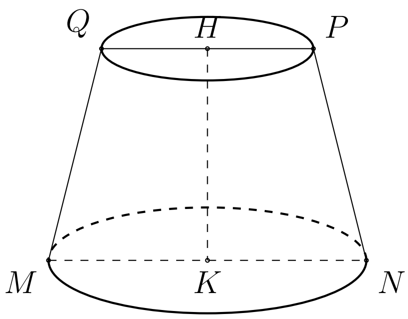
$\Rightarrow 2f'(x) - 3(2x+1) = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{3(x^2+x)}{2} + C$

Từ $f(0)=0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{3(x^2+x)}{2}$. Vậy $I = \displaystyle\int_0^2 \dfrac{3(x^2+x)}{2}\,\mathrm{d}x = 7$.

Chọn đáp án D □

Câu 48.

Có một chiếc cốc làm bằng giấy được úp ngược như hình vẽ bên. Chiều cao của chiếc cốc là $HK = 2\sqrt{143}$ cm, bán kính đáy cốc $HP = 1$ cm, bán kính miệng cốc là $KN = 3$ cm. Một con kiến đang đứng ở điểm M của miệng cốc dự định sẽ bò hai vòng quanh thân cốc để lên đến đáy cốc ở đi ểm P. Tính quãng đường ngắn nhất để con kiến có thể thực hiện được dự định của mình.



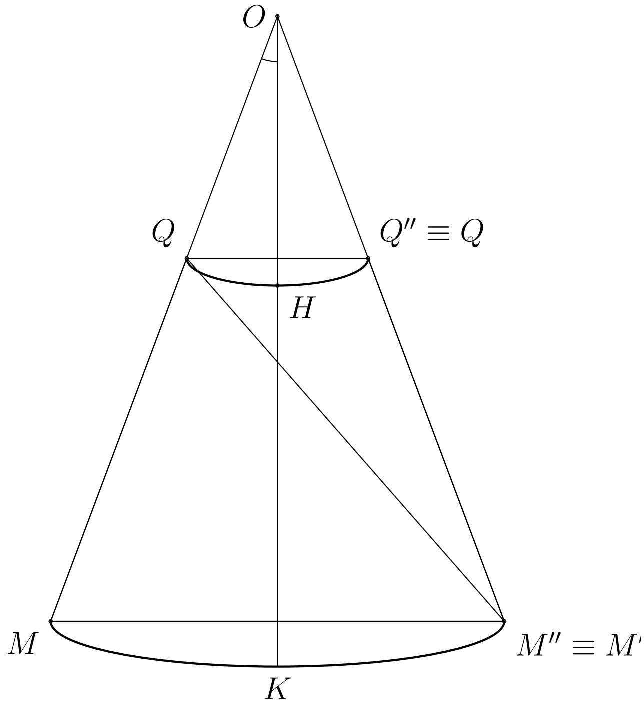
A. $1+\sqrt{579}$ cm. B. $12\sqrt{7}$ cm.
C. $24+6(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ cm. D. $\sqrt{579}$ cm.

Lời giải.

Đặt b, a, h lần lượt là bán kính đáy cốc, miệng cốc và chiều cao của cốc, α là góc kí hiệu như trên hình vẽ bên. Ta "trải" hai lần mặt xung quanh cốc lên mặt phẳng sẽ được một hình quạt của một khuyên với cung nhỏ $QQ' = 4\pi b$ và và cung lớn $MM' = 4\pi a$. Độ dài ngắn nhất của đường đi của con kiến là độ dài đoạn thẳng QM". Áp dụng định lí hàm số cosin ta được

$$l = \sqrt{QO^2 + OM''^2 - 2QO \cdot OM'' \cdot \cos 2\alpha}.$$

Ta có $Q''M'' = MQ = \sqrt{(a-b)^2 + h^2}$.
Gọi l_1, l_2 lần lượt là độ dài cung nhỏ QQ'' và MM'', ta có



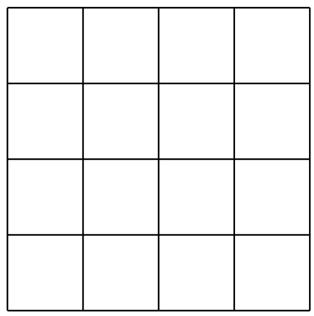
$$\frac{a}{b} = \frac{4\pi a}{4\pi b} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{OM}{OQ} = \frac{OQ + AM}{OQ} = 1 + \frac{MQ\alpha}{2\pi b} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi(a-b)}{MQ} = \frac{2\pi(a-b)}{\sqrt{(a-b)^2 + h^2}} \quad (2)$$

$$\frac{MQ}{OQ} = \frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b} \Rightarrow OQ = \frac{b\sqrt{(a-b)^2 + h^2}}{a-b} \quad (3)$$

$$OM'' = OQ + QM = \frac{b\sqrt{(a-b)^2 + h^2}}{a-b} + \sqrt{(a-b)^2 + h^2} \quad (4).$$

Thay $(2), (3), (4)$ vào (1) ta được $l = 12\sqrt{7}$ cm.
Chọn đáp án B ☐

Câu 49.
Cho một bảng ô vuông 4 (hình vẽ bên). Người ta điền vào mỗi ô vuông của bảng một trong hai số 1 hoặc -1. Tính xác suất P để tổng các số trong mỗi hàng và mỗi cột bằng 0.



A $P = \dfrac{27}{8192}$. **B** $P = \dfrac{45}{32768}$. **C** $P = \dfrac{69}{32768}$. **D** $P = \dfrac{81}{4096}$.

Lời giải.
Ta có $n(\Omega) = 2^16 = 65536$ Xét một hàng (hoặc một cột) bất kì. Giả sử trên hàng đó có x số 1 và y số -1. Ta có tổng các số trên hàng đó là $x - y$. Theo đề bài ta có $x - y = 0 \Rightarrow x = y = 2$, do đó có $C_4^2 = 6$ cách chọn hàng đó. Do các cột có tổng các số bằng không nên khi chọn trước 2 cột thì 2 cột còn lại có duy nhất một cách chọn. Do vậy số cách chọn thỏa mãn là $C_4^2 \cdot C_6^2 = 90$. Vậy $P = \dfrac{45}{32768}$.
Chọn đáp án B ☐

Câu 50. Cho hai số phức $z_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Gọi z là số phức thỏa mãn $|3z - \sqrt{3}i| = \sqrt{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $T = |z| + |z - z_1| + |z - z_2|$. Tính mô-đun của số phức $w = M + mi$.

A $\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$. **B** $\sqrt{13}$. **C** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **D** 4.

Lời giải.

Ta có $x^2+\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{1}{3}\quad(C)$. Gọi K, A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của z, z_1, z_2. Khi đó $T=OK+KA+KB$.

Ta có A, B, O thuộc đường tròn (C) và tam giác ABO đều. Suy ra $m=2OA=2$. Đẳng thức xảy ra khi K trùng với O, A, B

Gọi K thuộc cung AB, ta có $KA\cdot KB=OA\cdot BK+AB\cdot OK\Leftrightarrow KA=KB+OK$ suy ra $T2=KA=\leq\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. Vậy $|w|=\sqrt{\dfrac{16\cdot 3}{9}+4}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$.

Chọn đáp án A $\square$

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. C	3. C	4. B	5. B	6. C	7. A	8. A	9. A	10. A
11. B	12. B	13. C	14. A	15. A	16. A	17. A	18. B	19. C	20. B
21. B	22. C	23. D	24. D	25. B	26. C	27. B	28. A	29. A	30. B
31. B	32. A	33. C	34. C	35. D	36. D	37. A	38. A	39. C	40. D
41. D	42. D	43. D	44. A	45. C	46. A	47. D	48. B	49. B	50. A

135 ĐỀ THI THỬ LẦN 1, TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, LAI CHÂU, 2017 - 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ có hai điểm cực trị, hãy tính tích P của hai giá trị cực trị đó.

A. $P = -207$. B. $P = -82$. C. $P = 25$. D. $P = -302$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Với $x = -1$ suy ra $y = 9$.

Với $x = 3$ suy ra $y = -23$.

Từ đó suy ra $P = y_{\text{CĐ}} \cdot y_{\text{CT}} = -207$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hãy viết phương trình mặt cầu tâm $I(2; -3; 4)$ và đi qua điểm $A(4; -2; 2)$.

A. $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (x-4)^2 = 9$. B. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (x-4)^2 = 9$.

C. $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (x-4)^2 = 3$. D. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (x+4)^2 = 9$.

Lời giải.

Theo bài ra, ta có bán kính mặt cầu $R = IA = \sqrt{(4-2)^2 + (-2+3)^2 + (2-4)^2} = 3$.

Từ đó ta có phương trình mặt cầu tâm I bán kính $R = 3$ là $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 9$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Với $x > 0$, hãy rút gọn biểu thức $T = x^\pi \cdot \sqrt[4]{x^2 : x^{4\pi}}$.

A. $T = x^{\frac{1}{2}}$. B. $T = x$. C. $T = x^2$. D. $T = x^{\frac{5\pi}{2}}$.

Lời giải.

Ta có $T = x^\pi \cdot \sqrt[4]{x^2 : x^{4\pi}} = x^\pi \cdot \sqrt[4]{x^{2-4\pi}} = x^\pi \cdot x^{\frac{1}{2}-\pi} = x^{\frac{1}{2}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 4.

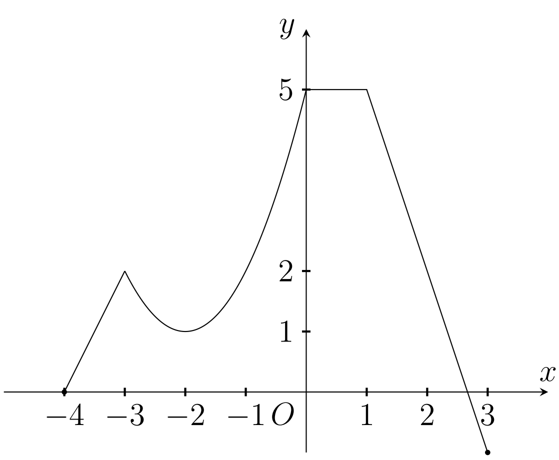
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4; 3]$ và có đồ thị trên đoạn $[-4; 3]$ như hình bên. Hãy xác định số điểm cực đại S của đồ thị hàm số đó.

A. $S = 0$.

B. $S = 2$.

C. $S = 1$.

D. $S = 3$.



Lời giải.

Từ đồ thị bài cho ta thấy y' đổi dấu từ dương sang âm tại $x = -3$ nên hàm số đạt cực đại tại đó. Vậy hàm số có một cực đại.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Cho số phức $z = a + bi$. Phương trình nào dưới đây nhận z và $\overline{z}$ làm nghiệm?

(A) $z^2 - 2az + a^2b^2 = 0$.

(B) $z^2 - 2az + a^2 + b^2 = 0$.

(C) $z^2 - 2az - a^2 - b^2 = 0$.

(D) $z^2 + 2az + a^2 + b^2 = 0$.

Lời giải.

Ta có $z = a + bi$ và $\overline{z} = a - bi$ là nghiệm của phương trình

$$(z - a - bi)(z - a + bi) = 0 \Leftrightarrow (z - a)^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2az + a^2 + b^2 = 0.$$

Vậy z và $\overline{z}$ là nghiệm của phương trình $z^2 - 2az + a^2 + b^2 = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Trong mặt phẳng cho tập hợp S gồm 2018 điểm phân biệt sao cho ba điểm bất kì đều không thẳng hàng. Hỏi có tất cả bao nhiêu véc-tơ khác véc-tơ $\overrightarrow{0}$ có điểm đầu và điểm cuối thuộc S?

(A) 4070360. (B) 2035153. (C) 4167114. (D) 4070306.

Lời giải.

Số véc-tơ khác véc-tơ không có điểm đầu điểm cuối là các điểm thuộc tập S là $\mathrm{A}_{2018}^2 = 4070306$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{nếu } x > 0 \\ \cos x & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$. Tính giá trị biểu thức $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) Đáp án khác. (B) $I = \dfrac{1}{2}$. (C) $I = 1$. (D) $I = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (1 - 2x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + (x - x^2)\Big|_{0}^{1} = 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Cho a, b, c là ba số thực dương khác 1. Mệnh đề nào dưới đây **SAI**?

(A) $\log_b a = \log_b c \cdot \log_c a$.

(B) $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha} \log_a b$.

(C) $\log_a \left(\dfrac{b}{a^3}\right) = \dfrac{\log_a b}{3}$.

(D) $a^{\log_a b} = b$.

Lời giải.

Ta có $\log_a \left(\dfrac{b}{a^3}\right) = \dfrac{\log_a b}{3} = \log_a b - \log_a a^3 = \log_a b - 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-1;2;0)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}(4;0;-5)$.

A $4x-5y+4=0$. **B** $4x-5y-4=0$. **C** $4x-5z+4=0$. **D** $4x-5z-4=0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(-1;2;0)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}(4;0;5)$ là

$$(x+1)+0(y-2)-5(z-0)=0 \Leftrightarrow 4x-5z+4=0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba véc-tơ $\vec{a}=(2;3;-5)$, $\vec{b}=(0;-3;4)$ và $\vec{c}=(1;-2;3)$. Hãy tính tọa độ của véc-tơ $\vec{n}=3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$.

A $\vec{n}=(5;1;-10)$. **B** $\vec{n}=(7;1;-4)$. **C** $\vec{n}=(5;5;-10)$. **D** $\vec{n}=(5;-5;-10)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}=3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}=3(2;3;-5)+2(0;-3;4)-(1;-2;3)=(5;5;-10)$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào không tồn tại?

A $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x}{(x+1)^2}$. **B** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x^2+1}$. **C** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$. **D** $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$.

Lời giải.

Ta có

- $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x}{(x+1)^2}=-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=0$.
- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}=0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ không xác định.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=2^{2x}$.

A $F(x)=2^{2x}\cdot\ln 2$. **B** $F(x)=\dfrac{2^{2x}}{\ln 2}+C$.

C $F(x)=\dfrac{4^x}{\ln 4}+C$. **D** $F(x)=4^x\cdot\ln 4+C$.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int 2^{2x}\,\mathrm{d}x=\int 4^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{4^x}{\ln 4}+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3+2x^2+5x-44$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-\infty;5)$. **B** $(-1;5)$. **C** $(-\infty;-1)$. **D** $(5;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y'=-x^2+4x+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=5\end{array}\right.$.

Suy ra để hàm số đồng biến khi và chỉ khi $y'>0\Leftrightarrow -1<x<5$.

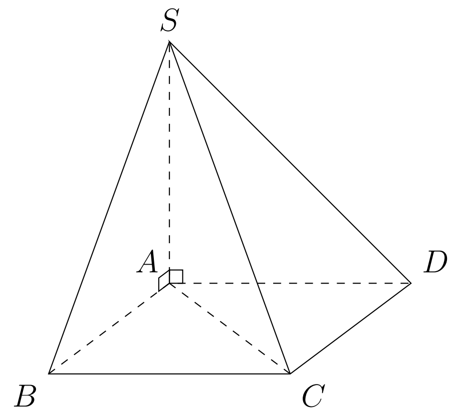
Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với $(ABCD)$. Hình chóp đã cho có mặt phẳng đối xứng nào?

A (SAC). **B** (SAB). **C** Không có. **D** (SAD).

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$. (1)
Mặt khác, $ABCD$ là hình vuông nên suy ra $BD \perp AC$. (2)
Từ (1), (2) suy ra $BD \perp (SAC)$, kết hợp tính chất hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường của hình vuông, ta suy ra B và D đối xứng nhau qua mặt phẳng (SAC). Từ đó suy ra (SAC) là mặt phẳng đối xứng.



Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^2 - 2x$ và $y = -x^2 + 4x$.

A $S = 12$. **B** $S = 9$. **C** $S = \dfrac{11}{3}$. **D** $S = 27$.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2 - 2x = -x^2 + 4x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right..$$

Suy ra diện tích hình giới hạn là

$$S = \int_0^3 \left|x^2 - 2x - (-x^2 + 4x)\right| \mathrm{d}x = \left|\int_0^3 (2x^2 - 6x)\,\mathrm{d}x\right| = 9.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{|z-2|+2}{4|z-2|-1} > 1$. Khi đó $(x; y)$ thỏa mãn hệ thức nào dưới đây?

A $(x+2)^2 + y^2 > 49$. **B** $(x+2)^2 + y^2 < 49$.
C $(x-2)^2 + y^2 < 49$. **D** $(x-2)^2 + y^2 > 49$.

Lời giải.

Điều kiện $4|z-2| - 1 > 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 > \dfrac{1}{16}$.

Ta có

$$\frac{1}{3}\frac{|z-2|+2}{4|z-2|-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{|z-2|+2}{4|z-2|-1} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3|z-2| + 6 < 4|z-2| - 1 \Leftrightarrow |z-2| > 7$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 > 49.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x-3)-1}$.

(A) $\mathscr{D}=\left(-\infty;\dfrac{10}{3}\right]$. **B** $\mathscr{D}=\left(3;\dfrac{10}{3}\right]$. (C) $\mathscr{D}=(3;+\infty)$. (D) $\mathscr{D}=\left[3;\dfrac{10}{3}\right)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases}x-3>0\\ \log_{\frac{1}{3}}(x-3)-1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>3\\ x\leq\dfrac{10}{3}\end{cases}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+(m+1)x^2+(m+1)x+1$ đồng biến trên tập xác định.

A $-1\leq m\leq 0$. (B) $m<0$. (C) $m>-1$. (D) $-1<m<0$.

Lời giải.

Ta có $y'=x^2+2(m+1)x+(m+1)$.

Để hàm số đồng biến trên tập xác định khi và chỉ khi $y'\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1>0\\ \Delta'=(m+1)^2-(m+1)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow -1\leq m\leq 0.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Tìm m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{(m+1)x-5m}{2x-m}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

(A) $m=0$. (B) $m=\dfrac{5}{2}$. **C** $m=1$. (D) $m=2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(m+1)x-5m}{2x-m}=\dfrac{m+1}{2}$, suy ra $y=\dfrac{m+1}{2}$ là tiệm cận ngang.

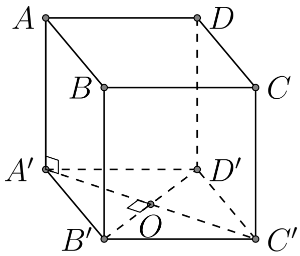
Theo bài ra ta có $y=\dfrac{m+1}{2}=1\Leftrightarrow m=1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a như hình bên. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'D'$.

(A) a. **B** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. (C) $\dfrac{a}{2}$. (D) $a\sqrt{2}$.



Lời giải.

Giả sử $A'C'\cap B'D'$ tại O suy ra $A'O\perp B'D'$ (1)(do $A'B'C'D'$ là hình vuông).

Mặt khác ta có $AA'\perp(A'B'C'D')$ nên $AA'\perp A'O$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A'O$ là đoạn vuông góc chung giữa hai đường thẳng AA' và $B'D'$. Từ đó suy ra $\mathrm{d}(AA',B'D')=A'O=\dfrac{A'C'}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Cho $I=\displaystyle\int_0^1(2x-m^2)\,\mathrm{d}x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để $I+3\geq 0$.

(A) 4. (B) 0. (C) 5. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_0^1 (2x - m^2)\,\mathrm{d}x = \left.(x^2 - m^2x)\right|_0^1 = 1 - m^2$.

Để $I + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 4 - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$.

Từ đó suy ra có 2 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $M(2;0;-3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x - 3y + 5z + 4$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng Δ.

(A) $\Delta : \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-3}{5}$.

(B) $\Delta : \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-3}{5}$.

(C) $\Delta : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+3}{5}$.

(D) $\Delta : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+3}{5}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}(2;-3;5)$.

Đường thẳng Δ qua $M(2;0;-3)$ và vuông góc với mặt phẳng (α) nên Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = \vec{n}(2;-3;5)$.

Từ đó ta có phương trình chính tắc của đường thẳng Δ

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 23.

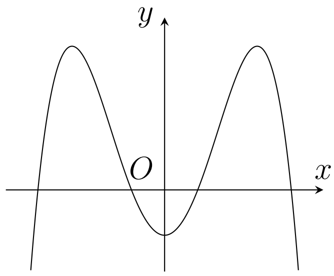
Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(c \neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Nhận xét nào dưới đây là đúng?

(A) $a < 0; b > 0; c > 0$.

(B) $a < 0; b > 0; c < 0$.

(C) $a > 0; b < 0; c < 0$.

(D) $a < 0; b < 0; c < 0$.



Lời giải.

Do đồ thị hàm số quay xuống nên $a < 0$.

Đồ thị hàm số có ba cực trị nên $a \cdot b < 0 \Rightarrow b > 0$.

Do đồ thị cắt trục tung ở dưới trục hoành nên $c < 0$.

Vậy ta có $a < 0; b > 0; c < 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Biết hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x-1)x^2(x+1)^3(x+2)^4$. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)x^2(x+1)^3(x+2)^4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy $f'(x)$ có hai lần đổi dấu, nên hàm số có hai điểm cực trị.

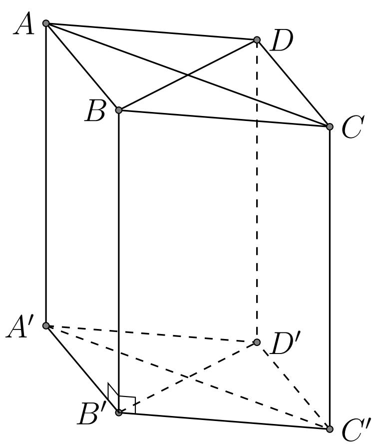
Chọn đáp án B □

Câu 25. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$. Xét tất cả các hình bình hành có đỉnh là đỉnh của hình hộp đó. Hỏi có bao nhiêu hình bình hành mà mặt phẳng chứa nó vuông góc với đáy $(ABCD)$?

(A) 4. **(B) 6.** (C) 8. (D) 10.

Lời giải.

Các mặt phẳng vuông góc với đáy gồm: 4 mặt bên và 2 mặt chéo vuông góc với đáy.



Chọn đáp án B □

Câu 26. Tính tổng bình phương các nghiệm của phương trình $7^{x+1} = \left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}$.

(A) 4. **(B) 5.** (C) 6. (D) 3.

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$7^{x+1} = 7^{-x^2+2x+3} \Leftrightarrow x+1 = -x^2+2x+3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Từ đó suy ra $x_1^2 + x_2^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5$.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số phân biệt được lấy từ các số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S. Tính xác suất P để số được chọn chỉ chứa ba chữ số lẻ.

A $P = \dfrac{23}{42}$. **B** $P = \dfrac{16}{42}$. **C** $P = \dfrac{16}{21}$. **D** $P = \dfrac{10}{21}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = \mathrm{A}_9^6 = 60480$.

Biến cố số được chọn chỉ có ba chữ số lẻ có số phần tử $n(A) = \mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_4^3 \cdot \mathrm{P}_6 = 28800$.

Từ đó suy ra $P(A) = \dfrac{n(\Omega)}{n(A)} = \dfrac{10}{21}$.

Chọn đáp án D □

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -2 + t \\ z = 4 + \sqrt{2}t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$ và mặt phẳng $(P) : x - y + \sqrt{2}z - 7 = 0$. Hãy xác định góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P).

A 90°. **B** 45°. **C** 30°. **D** 60°.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}(1; 1; \sqrt{2})$.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}(1; -1; \sqrt{2})$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, khi đó ta có

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + \sqrt{2}^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + \sqrt{2}^2}} = \frac{1}{2}.$$

Từ đó suy ra $\varphi = 30^\circ$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 2$ có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \le x \le 2)$ là một nửa đường tròn đường kính là $\sqrt{5}x^2$. Tính thể tích V của vật thể đã cho.

A $V = 2\pi$. **B** $V = 5\pi$. **C** $V = 4\pi$. **D** $V = 3\pi$.

Lời giải.

Do thiết diện là nửa đường tròn với đường kính $\sqrt{5}x^2$ nên diện tích của thiết diện là

$$S(x) = \frac{\pi\left(\dfrac{\sqrt{5}x^2}{2}\right)^2}{2} = \frac{5\pi x^4}{8}.$$

Từ đó suy ra thể tích của vật thể là

$$V = \int_0^2 S(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{5\pi x^4}{8}\,\mathrm{d}x = 4\pi.$$

Chọn đáp án C □

Câu 30. Cho hình nón có đường sinh bằng $2a$ và góc ở đỉnh bằng 90°. Cắt hình nón bằng mặt phẳng (P) đi qua đỉnh sao cho góc giữa (P) và mặt đáy hình nón bằng 60°. Tính diện tích S của thiết diện tạo thành.

A $S = \dfrac{4\sqrt{2}a^2}{3}$. **B** $S = \dfrac{\sqrt{2}a^2}{3}$. **C** $S = \dfrac{8\sqrt{2}a^2}{3}$. **D** $S = \dfrac{5\sqrt{2}a^2}{3}$.

Lời giải.

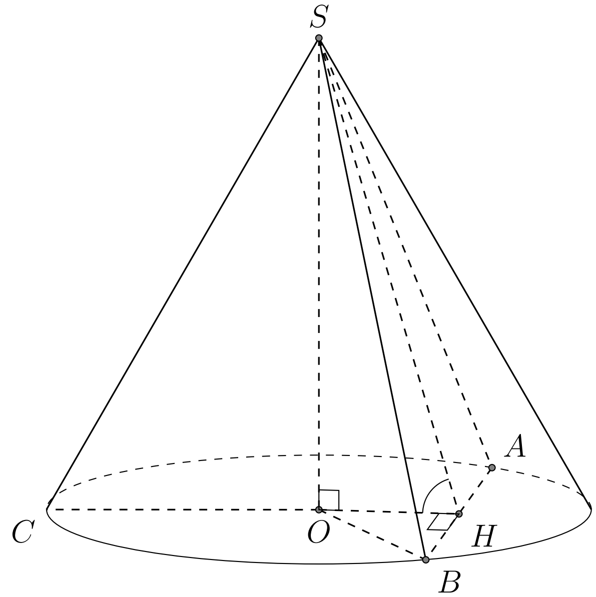
Theo bài ra ta có tam giác SOC vuông cân ở O suy ra $OC = SO = a\sqrt{2}$.

Giả sử mặt phẳng (P) cắt đường tròn đáy theo dây cung AB. Gọi H là trung điểm của AB suy ra $OH \perp AB$, kết hợp với SO vuông góc với đáy suy ra $AB \perp (SOH)$, từ đó suy ra $\widehat{SHO} = 60^\circ$.

Trong tam giác vuông SOH có

$$OH = SO\tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{3},$$

$$SH = \frac{SO}{\sin 60^\circ} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}.$$



Trong tam giác vuông OHB có

$$BH^2 = OB^2 - OH^2 = 2a^2 - \frac{6a^2}{9} = \frac{12a^2}{9} \Rightarrow BH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Từ đó ta có diện tích thiết diện $S_{\triangle SAB} = \dfrac{SH \cdot AB}{2} = SH \cdot BH = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3} \cdot \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{4a^2\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án A □

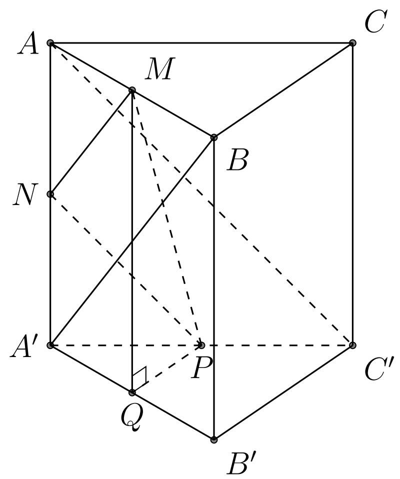
Câu 31. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bằng a, chiều cao bằng b. Biết góc giữa hai đường thẳng AC' và $A'B$ bằng 60°, hãy tính b theo a.

A $b = 2a$. **B** $b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$. **C** $b = \sqrt{2}a$. **D** $b = \dfrac{1}{2}a$.

Lời giải.

Lấy M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AA', $A'C'$, $A'B'$, suy ra MN, NP, PQ và MQ lần lượt là đường trung bình của các tam giác ABA', $AA'C'$, $A'B'C'$ và hình chữ nhật $ABB'A'$. Từ đó suy ra

$$\begin{cases} MN \mathbin{/\!/\!=} \dfrac{1}{2}A'B \\ NP \mathbin{/\!/\!=} \dfrac{1}{2}AC' \\ PQ = \dfrac{1}{2}B'C' = \dfrac{a}{2} \\ MQ \mathbin{/\!/\!=} BB' \end{cases}. \quad (1)$$



Từ (1) suy ra $\begin{cases} MN = NP \\ (AC', A'B) = \widehat{MNP} = 60^\circ \end{cases}$, từ đó suy ra $\triangle MNP$ là tam giác đều, suy ra $MP = MN = \dfrac{A'B}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Kết hợp với $BB' \perp (A'B'C')$, từ (1) suy ra $MQ \perp (A'B'C') \Rightarrow$

$MQ \perp PQ$ suy ra tam giác MPQ vuông ở Q. Từ đó ta có

$$MQ^2 = MP^2 - PQ^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow MQ = \frac{a}{2}.$$

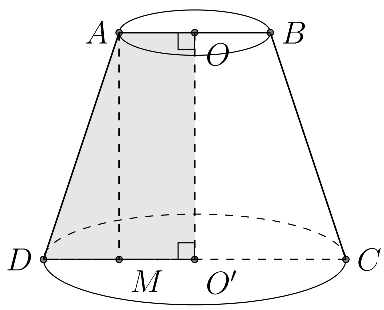
Vậy $b = BB' = MQ = \dfrac{a}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho hình thang cân $ABCD$ có các cạnh đáy $AB = 2a$, $CD = 4a$, cạnh bên $AD = BC = 3a$. Hãy tính thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình thang khi quay quanh trục đối xứng của nó.

A $\dfrac{4\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. B $\dfrac{56\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. C $\dfrac{16\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. D $\dfrac{14\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Lời giải.



Lấy O, O' lần lượt là trung điểm của AB, CD suy ra OO' là trục đối xứng của hình thang cân $ABCD$.

Lấy M là trung điểm của $O'D$, suy ra $O'M = \dfrac{1}{4}CD = a = \dfrac{AB}{2} = AO$ suy ra $AOO'M$ là hình chữ nhật suy ra $AM = OO'$. (1)

Xét tam giác vuông ADM có

$$AM^2 = AD^2 - DM^2 = 9a^2 - a^2 = 8a^2 \Rightarrow AM = 2a\sqrt{2}.$$

Từ đó ta có thể tích nón cụt

$$V = \frac{\pi(R^2 + r^2 + Rr)}{3}h = \frac{\pi((2a)^2 + a^2 + 2a^2)}{3} \cdot 2a\sqrt{2} = \frac{14\pi a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 33. Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ sao cho khoảng cách từ M đến trục tung bằng hai lần khoảng cách từ M đến trục hoành.

A 3. B 0. C 2. D 1.

Lời giải.

Lấy điểm $M\left(x_0; \dfrac{x_0+2}{x_0-1}\right)$ $(x_0 \neq 1)$ thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}$.

Khoảng cách từ M đến trục tung $\mathrm{d}(M, Oy) = |x_0|$.

Khoảng cách từ M đến trục hoành $\mathrm{d}(M, Ox) = \left|\dfrac{x_0+2}{x_0-1}\right|$.

Theo bài ra ta có

$$|x_0| = 2\left|\frac{x_0+2}{x_0-1}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_0 = \dfrac{2(x_0+2)}{x_0-1} & (1) \\ x_0 = \dfrac{2(x_0+2)}{1-x_0} & (2) \end{array}\right.$$

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 = 2x_0 + 4 \Leftrightarrow x_0^2 - 3x_0 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = 4 \end{array}\right..$$

$$(2) \Leftrightarrow x_0 - x_0^2 = 2x_0 + 4 \Leftrightarrow x_0^2 + x_0 + 4 = 0 \,(\text{vô nghiệm})$$

Vậy có 2 điểm M thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$ và $P = 2\sqrt{x^2+1} \cdot y'$. Khi đó nhận định nào dưới đây đúng?

(A) $P = 2y$. (B) $P = y$. (C) $P = \dfrac{y}{2}$. (D) $P = \dfrac{2}{y}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}} = \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x^2+1}}$.

Từ đó suy ra $P = 2\sqrt{x^2+1} \cdot y' = \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}} = y$.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Tìm m để phương trình $|x^4 - 5x^2 + 4| = \log_2 m$ có 8 nghiệm thực phân biệt.

(A) $0 < m < \sqrt[4]{2^9}$. (B) $-\sqrt[4]{2^9} < m < \sqrt[4]{2^9}$.

(C) Không tồn tại m. (D) $1 < m < \sqrt[4]{2^9}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = |x^4 - 5x^2 + 4|$, ta có $y^2 = (x^4 - 5x^2 + 4)^2$, suy ra

$$2yy' = 2(x^4 - 5x^2 + 4)(4x^3 - 10x) \Leftrightarrow y' = \frac{(x^4 - 5x^2 + 4)(4x^3 - 10x)}{|x^4 - 5x^2 + 4|} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \\ x = -\dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		$-\frac{\sqrt{10}}{2}$		-1		0		1		$\frac{\sqrt{10}}{2}$		2		$+\infty$
y'		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{9}{4}$	↘	0	↗	4	↘	0	↗	$\frac{9}{4}$	↘	0	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, để phương trình có 8 nghiệm khi và chỉ khi

$$0 < \log_2 m < \frac{9}{4} \Leftrightarrow 1 < m < \sqrt[4]{2^9}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1 : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-4}{1}$ và $d_2 : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z+3}{4}$. Viết phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2.

(A) $\dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+9}{-1}$. (B) $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$.

C $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

D $\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-9}{-1}$.

Lời giải.

Đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1(1;-1;1)$, $\vec{u}_2(2;-1;4)$.

Gọi Δ là đường vuông góc chung giữa d_1 và d_2, suy ra Δ có véc-tơ chỉ phương

$$\vec{u}_\Delta=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(-3;-2;1).$$

Giả sử Δ giao với d_1, d_2 lần lượt tại $M(3+m;-1-m;4+m)$, $N(2+2n;4-n;-3+4n)$, khi đó ta có $\overrightarrow{MN}=(-m+2n-1;m-n+5;-m+4n-7)$.

Do Δ là đường vuông góc chung, suy ra

$$\begin{cases}\vec{u}_1\cdot\overrightarrow{MN}=0\\ \vec{u}_2\cdot\overrightarrow{MN}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3m+7n-13=0\\ -7m+21n-35=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-2\\ n=1\end{cases}.$$

Từ đó suy ra đường thẳng Δ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta$ và đi qua điểm $M(1;1;2)$.

Vậy ta có phương trình đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;1;-2)$, song song với mặt phẳng $(P): x-y-z-1=0$ và cắt đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{3}$. Hãy viết phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đó.

A $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-2}{-3}$.

B $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z+2}{-3}$.

C $\dfrac{x+5}{-2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z}{-1}$.

D $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-2}{3}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-1;-1)$.

Gọi $N(-1-2n;1+n;1+3n)$ là giao điểm giữa hai đường thẳng Δ và d, suy ra $\overrightarrow{MN}=(-2-2n;n;3+3n)$.

Do $d \mathbin{/\!/} (P)$ nên $\vec{n}\cdot\overrightarrow{MN}=0\Leftrightarrow -2-2n-n-3-3n=0\Leftrightarrow n=-\dfrac{5}{6}$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{MN}=\left(-\dfrac{2}{6};-\dfrac{5}{6};\dfrac{3}{6}\right)=-\dfrac{1}{6}(2;5;-3)$.

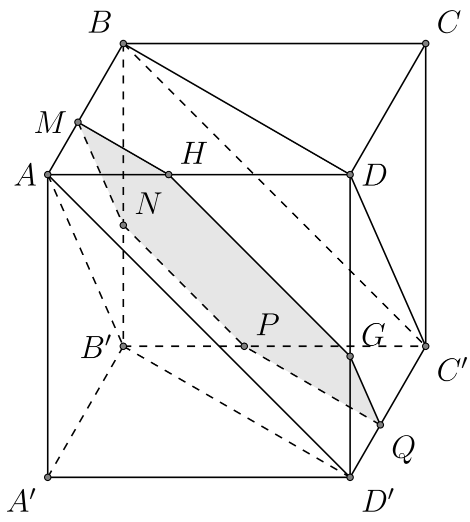
Vậy ta có phương trình đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z+2}{-3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và điểm M nằm giữa hai điểm A và B. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng $(AB'D')$. Mặt phẳng (P) cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

A Hình ngũ giác. **B** Hình lục giác. **C** Hình tam giác. **D** Hình tứ giác.

Lời giải.



Nhận thấy $(BC'D) \parallel (AB'D') \Rightarrow (BC'D) \parallel (AB'D') \parallel (P)$. (1)
Do (1), ta giả sử (P) cắt BB' tại N, suy ra $(P) \cap (ABB'A') \equiv MN$, kết hợp với $(AB'D') \cap (ABB'A') \equiv AB'$ suy ra $MN \parallel AB'$, suy ra N thuộc cạnh BB'.
Tương tự, giả sử $(P) \cap (B'C') \equiv P$ suy ra $(P) \cap (BCC'B') \equiv NP$. Kết hợp với (1) suy ra $NP \parallel BC'$.
Tương tự, $(P) \cap (C'D') \equiv Q$ sao cho $PQ \parallel B'D'$; $(P) \cap DD' \equiv G$ sao cho $QG \parallel C'D$; $(P) \cap AD \equiv H$ sao cho $GH \parallel AD'$.
Từ đó suy ra thiết diện là lục giác $MNPQGH$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2+1)^n(x+2)^n$. Tìm n để $a_{3n-3} = 26n$.

A $n = 7$. **B** $n = 5$. **C** $n = 6$. **D** $n = 4$.

Lời giải.

Khai triển $(x^2+1)^n$ có số hạng thứ $k+1$ là $T_{k+1} = \mathrm{C}_n^k (x^2)^{n-k} = \mathrm{C}_n^k x^{2n-2k}$.
Khai triển $(x+2)^2$ có số hạng thứ $l+1$ là $T_{l+1} = \mathrm{C}_n^l x^{n-l} 2^l = \mathrm{C}_n^l 2^l x^{n-l}$.
Suy ra $T_{k+1}T_{l+1} = \mathrm{C}_n^k \mathrm{C}_n^l 2^l x^{3n-(2k+l)}$.
Để $x^{3n-3} = x^{3n-(2k+l)}$ suy ra $2k+l = 3$, từ đó suy ra các cặp $(k;l)$ là $(0;3)$, $(1;1)$.
Suy ra

$$a_{3n-3} = \mathrm{C}_n^0 \mathrm{C}_n^3 2^3 + \mathrm{C}_n^1 \mathrm{C}_n^1 2^1 = 26n \Leftrightarrow \frac{8(n-2)(n-1)n}{6} + 2n^2 = 26n$$

$$\Leftrightarrow 4n(n^2-3n+2) + 6n^2 - 78n = 0 \Leftrightarrow 2n(2n^2-3n-35) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 0 \text{ (loại)} \\ n = 5 \\ n = -\dfrac{7}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right. .$$

Vậy $n = 5$.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân ở B, $AC = a\sqrt{2}$; $SA = a$ và $SA \perp (ABC)$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle SBC$, mặt phẳng (α) đi qua AG và song song với BC cắt SC, SB lần lượt tại M, N. Tính thể tích V của khối chóp $S.AMN$.

A $V = \dfrac{4a^3}{27}$. **B** $V = \dfrac{2a^3}{9}$. **C** $V = \dfrac{4a^3}{9}$. **D** $V = \dfrac{2a^3}{27}$.

Lời giải.

Tam giác ABC vuông cân ở B nên

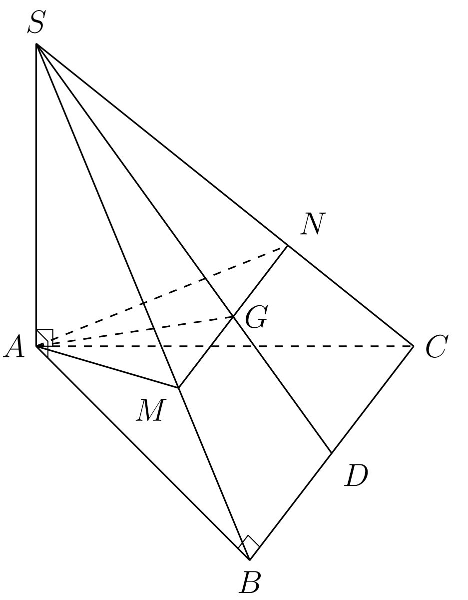
$$AB^2 + BC^2 = 2AB^2 = AC^2 \Rightarrow AB = BC = a.$$

Suy ra thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{6}.$$

Theo bài ra ta có $(\alpha) \cap (SBC) \equiv MN$, kết hợp với $(\alpha) \parallel BC$ suy ra $MN \parallel BC$ suy ra $\frac{SM}{SB} = \frac{SG}{SD} = \frac{SN}{SC} = \frac{2}{3}$.
Từ đó suy ra

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA \cdot SM \cdot SN}{SA \cdot SB \cdot SC} = \frac{4}{9} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{4}{9} \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{2a^3}{27}.$$



Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Cho hai số thực b, c với $c > 0$. Kí hiệu A, B là hai điểm của mặt phẳng phức biểu diễn hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2bz + c = 0$. Tìm điều kiện của b và c sao cho tam giác OAB là tam giác vuông (với O là gốc tọa độ).

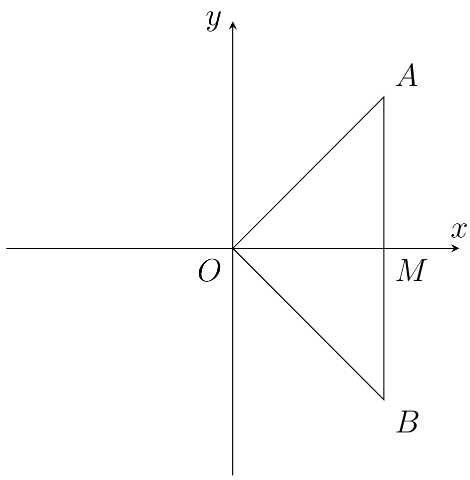
(A) $b = c$. (B) $b^2 = c$. **(C) $2b^2 = c$.** (D) $b^2 = 2c$.

Lời giải.

Theo bài ra ta giả sử A, B là điểm biểu diễn lần lượt của $z_1 = x + yi$, $z_2 = x - yi$, suy ra A và B đối xứng nhau qua trục hoành.
Áp dụng định lý Vi-ét ta có

$$z_1 + z_2 = 2x = -2b \text{ và } z_1 z_2 = x^2 + y^2 = c.$$

Để tam giác OAB vuông khi và chỉ khi $OM = MA = MB \Leftrightarrow |x| = |y| \Leftrightarrow x^2 = y^2 = b^2$.
Từ đó suy ra $2b^2 = c$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Cho a, b là độ dài hai cạnh góc vuông, c là độ dài cạnh huyền của một tam giác vuông. Trong đó, $c - b \neq 1$ và $c + b \neq 1$. Kết luận nào dưới đây đúng?

(A) $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a$. (B) $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a$.
(C) $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = -2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a$. (D) $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = -\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a$.

Lời giải.

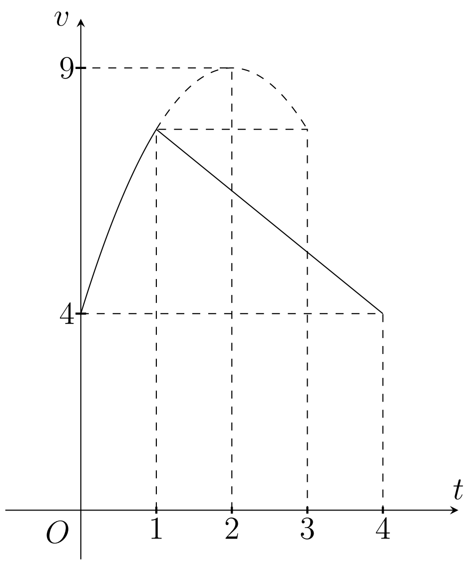
Theo bài ra ta có $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$.
Từ đó suy ra $2 = \log_a a^2 = \log_a((c-b)(c+b)) = \log_a(c-b) + \log_a(c+b) = \frac{1}{\log_{c-b} a} + \frac{1}{\log_{c+b} a}$

$$\Leftrightarrow \log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 43.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình vẽ bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại vật chuyển động chậm dần đều. Tính quãng đường S mà vật đi được trong 4 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A $S = 23,71$ km. (B) $S = 23,58$ km.
(C) $S = 23,56$ km. (D) $S = 23,72$ km.

Lời giải.

Trong 1 giờ đầu, ta gọi phương trình vận tốc của vật là $v = at^2 + bt + c$, suy ra $v' = 2at + b$.
Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} v(0) = 4 \\ v(2) = 9 \\ v'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + 4 = 9 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{4} \\ b = 5 \\ c = 4 \end{cases}.$$

Suy ra $v(t) = -\dfrac{5}{4}t^2 + 5t + 4$, từ đó ta có $v(1) = \dfrac{31}{4}$.
Trong 3 giờ sau, gọi phương trình vận tốc $v(t) = at + b$.
Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} v(1) = a + b = \dfrac{31}{4} \\ v(4) = 4a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{4} \\ b = 9 \end{cases}.$$

Suy ra $v(t) = -\dfrac{5}{4}t + 9$.
Quãng đường vật đi trong 4 giờ là

$$S = \int\limits_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4\right) \mathrm{d}t + \int\limits_1^4 \left(-\frac{5}{4}t + 9\right) \mathrm{d}t = 23,7083.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 44. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C_m) của hàm số $y = x^4 - mx^2 + 2m - 3$ có 4 giao điểm với đường thẳng $y = 1$, có hoành độ nhỏ hơn 3.

A $m \in (2;11) \setminus \{4\}$. (B) $m \in (2;5)$.
(C) $m \in (2;+\infty) \setminus \{4\}$. (D) $m \in (2;11)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^4 - mx^2 + 2m - 3 = 1 \Leftrightarrow x^4 - mx^2 + 2m - 4 = 0.$$

Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$, ta có phương trình

$$t^2 - mt + 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+2-m) = 0^{(*)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 2 & (1) \\ t = m-2. & (2) \end{array}\right.$$

Để hai đồ thị giao nhau tại 4 điểm có hoành độ nhỏ hơn 3 thì phương trình $(*)$ phải có 2 nghiệm dương phân biệt nhỏ hơn 9, điều đó tương đương với

$$\begin{cases} m-2>0 \\ m-2 \neq 2 \\ m-2<9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>2 \\ m \neq 4 \\ m<11 \end{cases}.$$

Vậy $m \in (2;11) \setminus \{4\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn điều kiện $2|\overline{z}_1 + i| = |\overline{z}_1 - z_1 - 2i|$ và $|z_2 - i - 10| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - z_2|$.

A $\sqrt{10}+1$. **B** $3\sqrt{5}-1$. **C** $\sqrt{\sqrt{101}+1}$. **D** $\sqrt{\sqrt{101}-1}$.

Lời giải.

Gọi $z_1 = x + yi$ khi đó ta có $2|\overline{z}_1 + i| = |\overline{z}_1 - z_1 - 2i|$ tương đương với

$$4(x^2 + (1-y)^2) = (2y+2)^2$$

$$4x^2 + 4 - 8y + 4y^2 = 4y^2 + 8y + 4$$

$$x^2 = 4y \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4}\,(P).$$

Gọi $z_2 = a + bi$ khi đó ta có $(a-10)^2 + (b-1)^2 = 1$, từ đó suy ra z_2 nằm trên đường tròn

$$(x-10)^2 + (y-1)^2 = 1\,(C).$$

Nhận thấy đường tròn (C) có tâm $I(10;1)$ và bán kính $R = 1$.

Ta có $|z_1 - z_2| + 1 \geq |z_1 - z_0| \Leftrightarrow |z_1 - z_2| \geq |z_1 - z_0| - 1$ (I là điểm biểu diễn của z_0).

Xét hàm số $f(x) = |z_1 - z_0|^2 = (x-10)^2 + \left(\dfrac{x^2}{4} - 1\right)^2 = \dfrac{x^4}{16} + \dfrac{x^2}{2} - 20x + 101$,

có $f'(x) = \dfrac{x^3}{4} + x - 20 = 0 \Leftrightarrow (x-4)\left(\dfrac{x^2}{4} + x + 5\right) = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

Từ đó suy ra hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 4$, suy ra $f(x) \geq f(4) = 45$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy ta có $|z_1 - z_2| \geq |z_1 - z_0| - 1 \geq \sqrt{45} - 1 = 3\sqrt{5} - 1$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $z_1 = 4 + 4i$ và z_2 là giao điểm giữa IM và đường tròn (C) (M là điểm biểu diễn của z_1).

Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho $\log_7 12 = x$; $\log_{12} 24 = y$ và $\log_{54} 168 = \dfrac{axy+1}{bxy+cx}$ (trong đó a, b, c là các số nguyên). Tính giá trị của biểu thức $S = a + 2b + 3c$.

A $S = 4$. **B** $S = 19$. **C** $S = 10$. **D** $S = 15$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_{12} 24 \log_{24} 54 = \log_{12} 54 = \log_{12} \frac{12^8}{24^5} = 8 - 5\log_{12} 24 \Rightarrow \log_{24} 54 = \frac{8-5y}{y} \Rightarrow \log_{54} 24 = \frac{y}{8-5y}.$$

và

$$\log_7 54 = \log_7 12 \log_{12} 54 = x(8-5y) \Rightarrow \log_{54} 7 = \frac{1}{x(8-5y)}.$$

Từ đó ta có

$$\log_{54} 168 = \log_{54} 7 + \log_{54} 24 = \frac{xy+1}{-5xy+8x}$$

suy ra $a = 1, b = -5, c = 8 \Rightarrow S = 1 + 2(-5) + 3 \cdot 8 = 15$.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình

$$\sin x \cdot \sqrt[2018]{2019 - \cos^2 x} - (\cos x + m) \cdot \sqrt[2018]{2019 - \sin^2 x + m^2 + 2m\cos x} = \cos x - \sin x + m$$

có nghiệm thực.

(A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

Ta có phương trình

$$\sin x \sqrt[2018]{2018 + \sin^2 x} + \sin x = (\cos x + m)\sqrt[2018]{2018 + (\cos x + m)^2} + (\cos x + m).\ (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t\sqrt[2018]{2018 + t^2} + t$ có

$$f'(t) = \sqrt[2018]{2018 + t^2} + \frac{2t^2}{2018\sqrt[2018]{(2018 + t^2)^{2017}}} + 1 > 0,\ \forall t \in \mathrm{R}.$$

Từ đó, kết hợp với $(*)$ ta có

$$f(\sin x) = f(\cos x + m) \Leftrightarrow \sin x - \cos x = m.\ (**)$$

Để $(**)$ có nghiệm khi và chỉ khi

$$1^2 + (-1)^2 \geq m^2 \Leftarrow m \leq 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;4]$ và thỏa mãn hệ thức sau với mọi $x \in [1;4]$

$$\begin{cases} f(1) = 2g(1) = 2 \\ f'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{g(x)} \\ g'(x) = -\dfrac{2}{x\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{f(x)}. \end{cases}$$

Tính $I = \int\limits_1^4 [f(x)g(x)]\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = 4\ln 2$. **B** $I = 4$. (C) $I = 2\ln 2$. (D) $I = 2$.

Lời giải.

Theo bài ra ta có

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{2}{x\sqrt{x}} = -\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f(x)g(x) = -\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

Kết hợp với giả thiết ta có

$$f(1)g(1) = 2 = \frac{2}{\sqrt{1}} + C \Rightarrow C = 0.$$

Từ đó suy ra

$$I = \int\limits_1^4 [f(x)g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 4.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;5;0)$; $B(3;3;6)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Biết rằng, tồn tại một điểm M trên d sao cho chu vi tam giác ABM nhỏ nhất. Khi đó, hãy tìm tọa độ điểm M và tính chu vi của $\triangle ABM$.

(A) $M(1;0;2)$; $P = 2\sqrt{11} + \sqrt{29}$.
(B) $M(1;2;2)$; $P = 2(\sqrt{11} + \sqrt{29})$.
(C) $M(1;2;2)$; $P = \sqrt{11} + \sqrt{29}$.
D $M(1;0;2)$; $P = 2(\sqrt{11} + \sqrt{29})$.

Lời giải.

Ta có $AB = 2\sqrt{11}$.

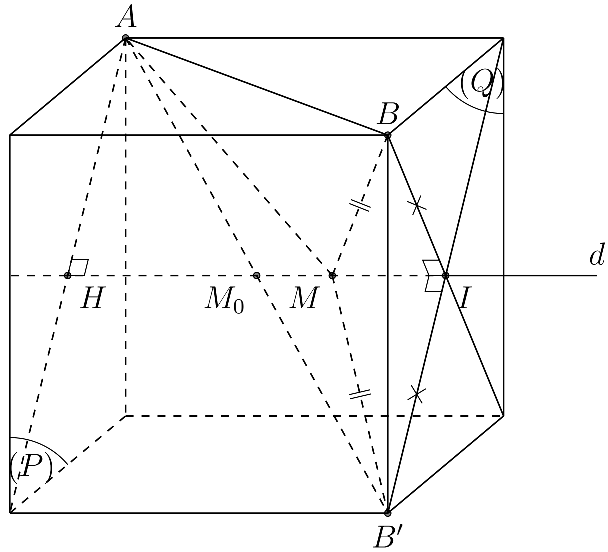
Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2;-1;2)$.

Gọi H, I lần lượt là hình chiếu của A, B lên đường thẳng d.

Mặt phẳng (P) qua A vuông góc với d có phương trình

$$2(x-1) - 1(y-5) + 2(z-0) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - y + 2z + 3 = 0.$$



Suy ra tọa độ của H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - y + 2z + 3 = 0 \\ x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow H(-1; 1; 0).$$

Tương tự ta có mặt phẳng $(Q): 2x - y + 2z - 15 = 0$ qua B vuông góc với d tại $I(3; -1; 4)$. Từ đó ta có $AH = BI = 2\sqrt{5}$. (1)

Trên mặt phẳng $(A; d)$ lấy điểm B' nằm khác phía so với điểm A so với bờ là đường thẳng d sao cho $\begin{cases} B'I = BI \\ B'I \perp d \end{cases}$ và gọi M_0 là giao điểm giữa AB' và d.

Xét hai tam giác vuông MIB và MIB' có chung cạnh MI và $IB = IB'$ (do (1)), suy ra $\triangle MIB = \triangle MIB' \Rightarrow MB = MB'$.

Từ đó ta có

$$AB + MA + MB = AB + MA + MB' \geq AB + AB',$$

suy ra chu vi của tam giác MAB nhỏ nhất bằng $AB + AB'$ khi $M \equiv M_0$.

Xét hai tam giác vuông AHM_0 và $B'IM_0$ có $AH = B'I$, $\widehat{AM_0H} = \widehat{BM_0I}$ suy ra $\triangle AHM_0 = \triangle B'IM_0$ suy ra $AM_0 = B'M_0$ và $HM_0 = IM_0$.

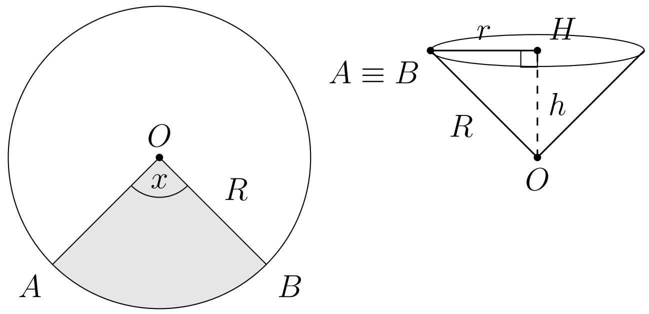
Từ đó suy ra $M_0(1; 0; 2)$ là trung điểm của IH và chu vi nhỏ nhất của tam giác ABM là

$$P_{\min} = AB + AB' = AB + 2AM_0 = 2\sqrt{11} + 2\sqrt{29}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 50.

Bạn An có một tấm bìa hình tròn như hình vẽ, An muốn biến hình tròn đó thành một cái phễu hình nón. Khi đó An phải cắt bỏ hình quạt tròn OAB rồi dán hai bán kính OA và OB lại với nhau. Gọi x là góc ở tâm hình quạt tròn dùng làm phễu. Tìm x để thể tích phễu lớn nhất.



(A) $x = \dfrac{\pi}{4}$. **(B)** $x = \dfrac{2\sqrt{6}\pi}{3}$.

(C) $x = \dfrac{\pi}{3}$. (D) $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Gọi r, h lần lượt là bán kính đáy, chiều cao của phễu.

Xét tam giác vuông OAH có $h = \sqrt{R^2 - r^2}$, từ đó suy ra thể tích của phễu

$$V = \frac{1}{3}h\pi r^2 = \frac{\pi}{3}\sqrt{(R^2 - r^2)r^4}. \ (1)$$

Nhận thấy $(R^2 - r^2)r^4 = 4(R^2 - r^2) \cdot \dfrac{r^2}{2} \cdot \dfrac{r^2}{2} \leq 4\left(\dfrac{R^2 - r^2 + \dfrac{r^2}{2} + \dfrac{r^2}{2}}{3}\right)^3 = \dfrac{4R^6}{27}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra V lớn nhất khi và chỉ khi $\dfrac{r^2}{2} = R^2 - r^2 \Leftrightarrow r = \dfrac{R\sqrt{6}}{3}$.
Theo giả thiết ta có chu vi đáy phễu bằng chiều dài cung $\overset{\frown}{AB}$ hay

$$Rx = 2\pi r \Leftrightarrow x = \frac{2\pi r}{R} = \frac{2\pi \dfrac{R\sqrt{6}}{3}}{R} = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3}.$$

Chọn đáp án B □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. A	3. A	4. C	5. B	6. D	7. C	8. C	9. C	10. C
11. D	12. C	13. B	14. A	15. B	16. D	17. B	18. A	19. C	20. B
21. D	22. D	23. B	24. B	25. B	26. B	27. D	28. C	29. C	30. A
31. D	32. D	33. C	34. B	35. D	36. C	37. B	38. B	39. B	40. D
41. C	42. A	43. A	44. A	45. B	46. D	47. B	48. B	49. D	50. B

136 ĐỀ THI THỬ TRƯỜNG CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI-HÀ NỘI NĂM 2017-2018 LẦN 2

NỘI DUNG ĐỀ

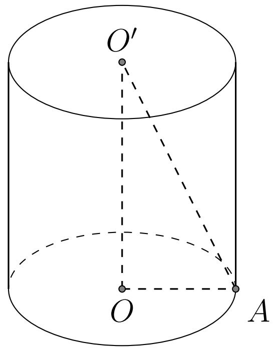
Câu 1. Cho một hình trụ có bán kính đáy bằng a và chiều cao bằng $2a$. Một hình nón có đáy trùng với một đáy của hình trụ và đỉnh trùng với tâm của đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Tính độ dài đường sinh của hình nón.

A. $a\sqrt{5}$. B. a. C. $2a$. D. $3a$.

Lời giải.

Đường sinh của hình nón bằng đoạn $O'A$.

Ta có $O'A = \sqrt{OO'^2 + OA^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$.



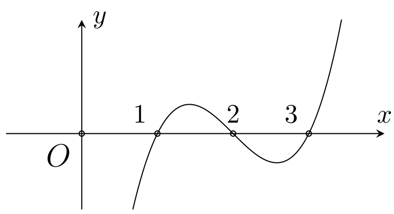
Chọn đáp án A ☐

Câu 2.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f(1{,}5) < 0, f(2{,}5) < 0$. B. $f(1{,}5) > 0 > f(2{,}5)$.

C. $f(1{,}5) > 0, f(2{,}5) > 0$. D. $f(1{,}5) < 0 < f(2{,}5)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x) > 0\ \forall x \in (1;2)$ và $f(x) < 0\ \forall x \in (2;3)$.

Do đó, $f(1{,}5) > 0$, $f(2{,}5) < 0$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp.

A. $\dfrac{a^3}{6}$. B. $\dfrac{a^3}{2}$. C. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

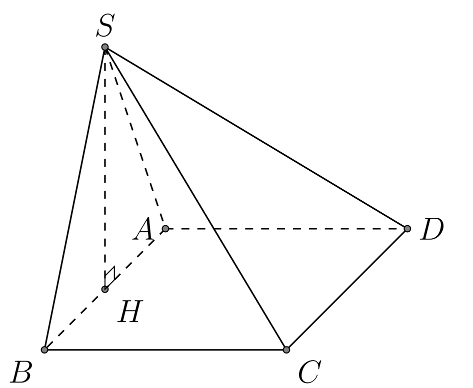
Lời giải.

Gọi H là chân đường cao kẻ từ S của tam giác SAB. Khi đó, $SB \perp (ABCD)$.

Vì SB là đường cao của tam giác đều cạnh a nên có độ dài là $SB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Hình vuông $ABCD$ có diện tích $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SB = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5} x > \log_{0,5} 2$ là

(A) $(1; 2)$. (B) $(-\infty; 2)$. (C) $(2 : +\infty)$. **D** $(0; 2)$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x > 0 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(0; 2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 5% một năm và lãi hằng năm được nhập vào vốn. Sau ít nhất bao nhiêu năm thì người đó nhận được số tiền lớn hơn 150% số tiền gửi ban đầu.

(A) 8 năm. (B) 10 năm. **C** 9 năm. (D) 11 năm.

Lời giải.

Gọi $A > 0$ là số tiền ban đầu người đó gửi. Theo công thức tính lãi kép, số tiền người đó nhận được sau $n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ năm là $T_n = A \cdot 1{,}05^n$. Ta có

$$T_n > A \cdot 1{,}5 \Leftrightarrow 1,05^n > 1{,}5 \Leftrightarrow n > \log_{1{,}05} 1{,}5 \approx 8{,}31.$$

Vậy sau ít nhất 9 năm thì người đó nhận được số tiền lớn hơn 150% số tiền gửi ban đầu.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A 2. (B) 1. (C) 3. (D) 0.

Lời giải.

Do hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Do $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ nên đồ thị có 2 đường tiệm cận ngang là $y = 0$ và $y = 1$.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang là 2.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sin x}{x}$ là

A 0. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Do $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ nên đồ thị của hàm số không có tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Một hình trụ có diện tích đáy bằng 4 cm^2 và chiều cao bằng 6 cm. Tính thể tích của khối trụ.

(A) 8 cm^3. (B) 12 cm^3. **C** 24 cm^3. (D) 72 cm^3.

Lời giải.

$V = S \cdot h = 6 \cdot 4 = 24$ cm^3.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Cho số dương a và hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(-x)=a$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

(A) $2a^2$. **B** a^2. (C) a. (D) $2a$.

Lời giải.

Đặt $x=-t$, suy ra $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Khi đó

$$I=\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=-\int_{a}^{-a} f(-t)\mathrm{d}t=\int_{-a}^{a} f(-t)\mathrm{d}t=\int_{-a}^{a}\left[a-f(t)\right]\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a} a\mathrm{d}x-I$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a} a\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a\cdot(a+a)=a^2.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Cho phương trình $4^{|x|}-(m+1)2^{|x|}+m=0$. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt.

(A) $m\geq 1$. **B** $m>1$. (C) $m>0$ và $m\neq 1$. (D) $m>0$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$4^{|x|}-2^{|x|}-m2^{|x|}+m=0\Leftrightarrow\left(2^{|x|}-1\right)\left(2^{|x|}-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^{|x|}=0\\2^{|x|}-m=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\m=2^{|x|}.\end{array}\right.$$

Phương trình $4^{|x|}-(m+1)2^{|x|}+m=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $m=2^{|x|}$ có đúng 2 nghiệm phân biệt khác 0. Do $|x|>0,\forall x\neq 0$ nên $2^{|x|}>1,\forall x\neq 0$. Từ đó suy ra $m>1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6)=2$. Tính giá trị của biểu thức $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{f(x)-f(6)}{x-6}$.

A 2. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) 12.

Lời giải.

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại $x=6$, suy ra $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{f(x)-f(6)}{x-6}=f'(6)=2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Véc-tơ nào trong các véc-tơ sau đây không là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d?

(A) $\vec{u}_1=(2;-2;2)$. (B) $\vec{u}_2=(-3;3;-3)$. (C) $\vec{u}_3=(4;-4;4)$. **D** $\vec{u}_4=(1;1;1)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;-1;1)$. Ta thấy véc-tơ $\vec{u}_4$ không cùng phương với $\vec{u}$ suy ra $\vec{u}_4$ không là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. Gọi M, N là hai điểm thuộc đồ thị của hàm số sao cho hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M và N song song với nhau. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A Hai điểm M và N đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.

B Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN.

C Hai điểm M và N đối xứng nhau với qua giao điểm của hai đường tiệm cận .

D Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN.

Lời giải.

Ta có $y = 1 + \dfrac{2}{x-1}$. Tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận ngang $y = 1$.

Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Suy ra $I(1;1)$.

Gọi $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2) \quad (x_1, x_2 \neq 1; x_1 \neq x_2)$. Ta có $y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

Do tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M và N song song với nhau nên

$$y'(x_1) = y'(x_2) \Leftrightarrow -\frac{2}{(x_1-1)^2} = -\frac{2}{(x_2-1)^2} \Leftrightarrow (x_1-1)^2 = (x_2-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 \quad \text{(loại)} \\ x_1 - 1 = 1 - x_2 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = 2 = 2x_I \quad (1).$$

Ta có $y_1 + y_2 = 2 + 2\left(\dfrac{1}{x_1-1} + \dfrac{1}{x_2-1}\right) = 2 + 2\dfrac{x_1+x_2-2}{(x_1-1)(x_2-1)} = 2 = 2y_I \quad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra I là trung điểm của MN. Từ đó các khẳng định B, C, D là đúng và A là khẳng định sai.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Cho hai dãy ghế được xếp như sau:

Dãy 1	Ghế số 1	Ghế số 2	Ghế số 3	Ghế số 4
Dãy 2	Ghế số 1	Ghế số 2	Ghế số 3	Ghế số 4

Xếp 4 bạn nam và 4 bạn nữ vào hai dãy ghế trên. Hai người được gọi là ngồi đối diện với nhau nếu ngồi ở hai dãy và có cùng số ghế. Có bao nhiêu cách xếp để mỗi bạn nam ngồi đối diện với một bạn nữ?

A $4!4!2^4$. **B** $4!4!$. **C** $4!2$. **D** $4!4!2$.

Lời giải.

Số cách xếp 4 bạn nam vào 4 ghế có số khác nhau là $4!2^4$ (vì ứng với mỗi số có 2 cách chọn ghế).

Số cách xếp 4 bạn nữ vào 4 ghế trống còn lại là $4!$.

Vậy có tất cả $4!4!2^4$ cách xếp.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Trong các hàm số sau, hàm số nào không phải là nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3$?

A $y = \dfrac{x^4}{4} - 1$. **B** $y = \dfrac{x^4}{4} + 1$. **C** $y = \dfrac{x^4}{4}$. **D** $y = 3x^2$.

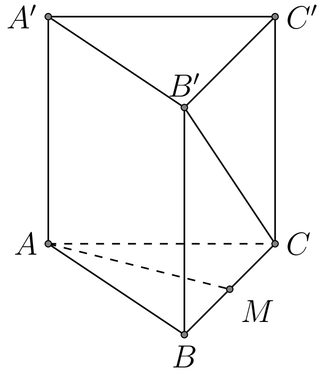
Lời giải.

Ta có

$$\int x^3 \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + C.$$

Suy ra hàm số $y = 3x^2$ không phải là nguyên hàm của $y = x^3$.
Chọn đáp án D □

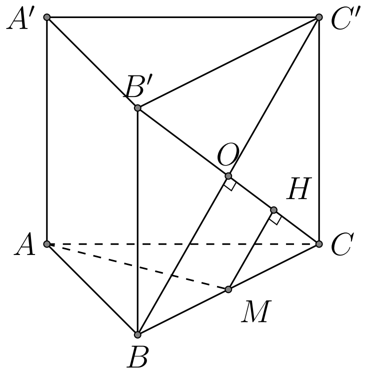
Câu 16.
Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.



A $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **C** a. **D** $a\sqrt{2}$.

Lời giải.
Ta có $AM \perp BC$ và $AM \perp BB'$ nên $AM \perp (BB'C'C)$. Trong $(BB'C'C)$, kẻ $MH \perp B'C$ ($H \in B'C$) thì $AM \perp MH$, suy ra MH là đoạn vuông góc chung của AM và $B'C$. Gọi O là trung điểm của $B'C$ thì $BO \perp B'C$ và $MH = \dfrac{BO}{2}$.

Ta có $BC' = a\sqrt{2}$ nên $BO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, do đó $MH = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.



Chọn đáp án B □

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và hai mặt phẳng $(P)\colon 2x + 3y = 0, (Q)\colon 3x + 4y = 0$. Đường thẳng đi qua A và song song với hai mặt phẳng $(P), (Q)$ có phương trình là

A $\begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 3 + t \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$.

Lời giải.
Gọi Δ là đường thẳng cần tìm. Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (2;3;0)$ và (Q) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (3;4;0)$. Ta có $[\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (0;0;2)$. Khi đó, Δ đi qua điểm A và nhận véc-tơ $\vec{u} = (0;0;1)$ làm véc-tơ chỉ phương. Phương trình đường thẳng Δ là
$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Với $t = -3$ thì điểm $B(1;2;0)$ thuộc Δ. Viết lại phương trình đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$.

Chọn đáp án D □

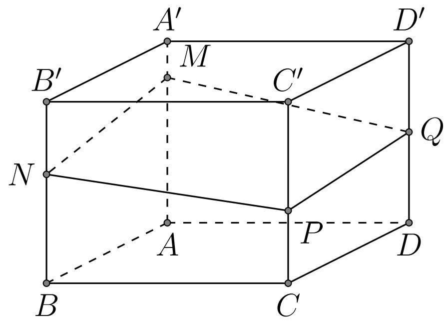
Câu 18. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là một hình vuông cạnh a. Mặt phẳng (α) lần lượt cắt các cạnh bên AA', BB', CC', DD' tại M, N, P, Q. Góc giữa (α) và đáy là $60°$. Tính diện tích tứ giác $MNPQ$.

A $\dfrac{2}{\sqrt{3}a^2}$. **B** $\dfrac{1}{2}a^2$. **C** $2a^2$. **D** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

Lời giải.

Ta có $ABCD$ là hình chiếu vuông góc của $MNPQ$ lên mặt đáy.

$S_{ABCD} = S_{MNPQ}\cos 60° \Rightarrow S_{MNPQ} = \dfrac{S_{ABCD}}{\cos 60°} = \dfrac{a^2}{\frac{1}{2}} = 2a^2.$

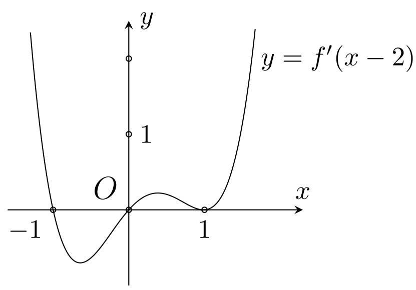


Chọn đáp án C □

Câu 19.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x-2)$ có đồ thị như hình vẽ. Tính số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

A 0. **B** 2. **C** 1. **D** 3.



Lời giải.

Hàm số $y = f'(x-2)$ đổi dấu 2 lần (tại -1 và 0). Mà đồ thị hàm số $y = f'(x-2)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f'(x)$ sang phải 2 đơn vị, do đó hàm số $y = f'(x)$ cũng đổi dấu 2 lần (tại -3 và -2). Vậy hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;2)$ và các số a, b thỏa mãn khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(P)\colon ay + bz = 0$ bằng $2\sqrt{2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $a = -b$. **B** $a = 2b$. **C** $b = 2a$. **D** $a = b$.

Lời giải.

Ta có

$$d_{(A,(P))} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|2a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (a+b)^2 = 2(a^2+b^2) \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b.$$

Chọn đáp án D □

Câu 21. Cho các số thực a, b. Giá trị của biểu thức $A = \log_2 \dfrac{1}{2^a} + \log_2 \dfrac{1}{2^b}$ bằng với giá trị nào trong các biểu thức sau đây?

A $a + b$. **B** ab. **C** $-ab$. **D** $-a - b$.

Lời giải.

Ta có $A = \log_2 \dfrac{1}{2^a} + \log_2 \dfrac{1}{2^b} = \log_2 2^{-a} + \log_2 2^{-b} = -a - b$.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên các khoảng $(-1;0)$, $(0;5)$ và có bảng biến thiên như hình sau:

x	-1		0		$\sqrt{5}$		5
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$4+2\sqrt{5}$	↗	10

Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm duy nhất trên $(-1;0) \cup (0;5)$ khi và chỉ khi m thuộc tập hợp nào sau đây?

A $(4 + 2\sqrt{5}; 10)$.

B $(-\infty; -2) \cup \left\{4 + 2\sqrt{5}\right\} \cup [10; +\infty)$.

C $(-\infty; -2) \cup [4 + 2\sqrt{5}; +\infty)$.

D $(-\infty; -2) \cup [10; +\infty)$.

Lời giải.

Vì $-2 < 4 + 2\sqrt{5}$ nên đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tai duy nhất một điểm khi và chỉ khi $m < -2$ (m không thể bằng -2 vì $x \neq 1$) hoặc $m = 4 + 2\sqrt{5}$ hoặc $m \geq 10$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Cho dãy số (u_n) với 89 số hạng thỏa mãn $u_n = \tan n^\circ, \quad \forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 89$. Gọi P là tích của tất cả 89 số hạng của dãy số. Giá trị của biểu thức $\log P$ là

A 89. B 1. C 0. D 10.

Lời giải.

$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 89$, ta có $\tan(90^\circ - n^\circ) = \cot n^\circ \Rightarrow \tan n^\circ \cdot \tan(90^\circ - n^\circ) = 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} P &= u_1 \cdot u_2 \cdots u_{89} = \tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdots \tan 89^\circ \\ &= (\tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ) \cdot (\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ) \cdots (\tan 44^\circ \cdot \tan 46^\circ) \cdot \tan 45^\circ \\ &= 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1 \Rightarrow \log P = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 2x + y + mz - 2 = 0$ và $(Q)\colon x + ny + 2z + 8 = 0$ song song với nhau. Giá trị của m, n lần lượt là

A 4 và $\dfrac{1}{2}$. B 2 và $\dfrac{1}{2}$. C 2 và $\dfrac{1}{4}$. D 4 và $\dfrac{1}{4}$.

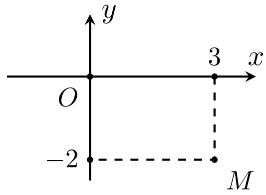
Lời giải.

Ta có $(P) \parallel (Q) \Leftrightarrow \dfrac{2}{1} = \dfrac{1}{n} = \dfrac{m}{2} \neq \dfrac{-2}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \dfrac{1}{2} \\ m = 4 \end{cases}$.

Chọn đáp án A □

Câu 25.

Cho số phức z có biểu diễn hình học là điểm M như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



(A) $z=-3+2i$. (B) $z=3+2i$. (C) $z=-3-2i$. **(D)** $z=3-2i$.

Lời giải.

Ta thấy điểm $M(3;-2)$ do đó $z=3-2i$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Có 5 học sinh không quen biết nhau cùng đến một cửa hàng kem có 6 quầy phục vụ. Xác suất để có 3 học sinh vào cùng một quầy và 2 học sinh còn lại vào cùng một quầy khác là

(A) $\dfrac{C_5^3\cdot C_6^1\cdot 5!}{6^5}$. **(B)** $\dfrac{C_5^3\cdot C_6^1\cdot C_5^1}{6^5}$. (C) $\dfrac{C_5^3\cdot C_6^1\cdot 5!}{5^6}$. (D) $\dfrac{C_5^3\cdot C_6^1\cdot C_5^1}{5^6}$.

Lời giải.

Mỗi học sinh có 6 cách chọn vào 1 quầy, suy ra $n(\Omega)=6^5$.

Gọi A là biến cố: " 3 học sinh vào cùng một quầy và 2 học sinh còn lại vào cùng một quầy khác".

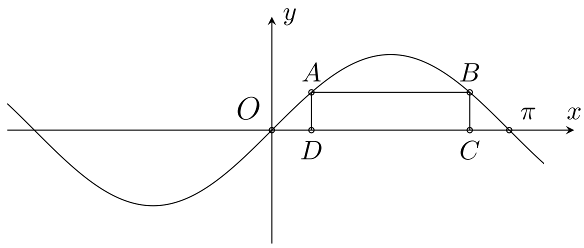
Số cách chọn 3 học sinh từ 5 học sinh để vào cùng một quầy là C_5^3.

Số cách chọn 1 quầy từ 6 quầy để 3 học sinh trên cùng vào là C_6^1.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27.

Cho hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $[0;\pi]$, các điểm C, D thuộc trục Ox thỏa mãn $ABCD$ là hình chữ nhật và $CD=\dfrac{2\pi}{3}$. Tính độ dài đoạn BC.



(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **(B)** $\dfrac{1}{2}$. (C) 1. (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Từ $y_B=y_A$ ta có $\sin x_C=\sin x_D$, suy ra $x_C+x_D=\pi$ (bù nhau).

Mà $x_C-x_D=CD=\dfrac{2\pi}{3}$. Nên ta có $x_C=\dfrac{5\pi}{6}$ và $x_D=\dfrac{\pi}{6}$.

Vậy $BC=y_B=\sin x_C=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho tứ diện đều $ABCD$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

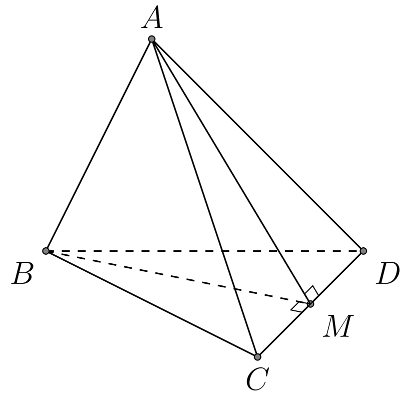
(A) 60°. **(B)** 90°. (C) 45°. (D) 30°.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của CD, ta có

$$\begin{cases} CD \perp AM \\ CD \perp BM \end{cases} \Rightarrow CD \perp AB.$$

Vậy $(AB, CD) = 90^\circ$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm $O(0;0;0)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C khác O thỏa mãn tam giác ABC có trọng tâm là điểm $G(2;4;8)$. Tọa độ tâm mặt cầu (S) là

A $(3;6;12)$. **B** $\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. **C** $(1;2;3)$. **D** $\left(\frac{4}{3};\frac{8}{3};\frac{16}{3}\right)$.

Lời giải.

Gọi $A(x_A;0;0), B(0;y_B;0), C(0;0;z_C)$. Do $G(2;4;8)$ là trọng tâm tam giác ABC nên $x_A = 6, y_B = 12$ và $z_C = 24$. Suy ra $A(6;0;0), B(0;12;0), C(0;0;24)$.

Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0 \quad (a^2+b^2+c^2-d>0)$, trong đó $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu. Do (S) đi qua bốn điểm A, B, C, O nên ta có hệ

$$\begin{cases} d = 0 \\ 36 - 12a + d = 0 \\ 144 - 24b + d = 0 \\ 576 - 48c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = 3 \\ b = 6 \\ c = 12 \end{cases} \Rightarrow I(3;6;12).$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Nghiệm của phương trình $2^{\frac{1}{x}} = 3$ là

A $-\log_3 2$. **B** $-\log_2 3$. **C** $\log_2 3$. **D** $\log_3 2$.

Lời giải.

Phương trình tương đương $\begin{cases} x \neq 0 \\ \dfrac{1}{x} = \log_2 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\log_2 3} = \log_3 2.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = x^2$. Giá trị của biểu thức $F'(4)$ là

A 2. **B** 4. **C** 8. **D** 16.

Lời giải.

Theo định nghĩa nguyên hàm, ta có $F'(x) = x^2$. Suy ra $F'(4) = 16$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 32. Cho số phức $z = 1 + i$. Số phức nghịch đảo của z là

A $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$. **B** $1 - i$. **C** $\dfrac{1-i}{2}$. **D** $\dfrac{-1+i}{2}$.

Lời giải.

Số phức nghịch đảo của z là $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{1-i}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1-i}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Phát biểu nào dưới đây là đúng?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	1

(A) Hàm số có 3 cực trị.
(B) Hàm số đạt cực đại tại $x=1$.
(C) Giá trị cực tiểu của hàm số là -1.
(D) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.

Lời giải.

Dựa vào BBT ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Một quả bóng bàn có mặt ngoài là mặt cầu bán kính 2 cm. Tính diện tích mặt ngoài của quả bóng bàn.

(A) 4 cm^2.   (B) $4\pi\text{ cm}^2$.   (C) $16\pi\text{ cm}^2$.   (D) 16 cm^2.

Lời giải.

$S=4\pi R^2=16\pi\text{ cm}^2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-1)$ và $B(1;0;1)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình tổng quát là

(A) $x-y+2z+1=0$.   (B) $x-y+2z=0$.
(C) $x-y+2z-1=0$.   (D) $x+y+2z=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng trung trực đi qua trung điểm $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2)$ làm véc-tơ pháp tuyến, có phương trình là $1\cdot\left(x-\dfrac{1}{2}\right)-1\cdot\left(y-\dfrac{1}{2}\right)+2\cdot(z-0)=0\Leftrightarrow x-y+2z=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{\cot x-2}{\cot x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(A) $m>2$.   (B) $\left[\begin{array}{l}m\le 0\\1\le m<2\end{array}\right.$.   (C) $1\le m<2$.   (D) $m\le 0$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{m-2}{\sin^2 x(\cot x-m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

$$y'<0\quad\forall x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}m-2<0\\ \cot x-m\ne 0\quad\forall x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<2\\ m\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le 0\\1\le m<2\end{array}\right..$$

Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho i là đơn vị ảo. Gọi S là tập hợp tất cả các số n nguyên dương có hai chữ số thỏa mãn i^n là số nguyên dương. Số phần tử của S là

A 22. **B** 23. **C** 45. **D** 46.

Lời giải.

i^n là số nguyên dương khi và chỉ khi $n = 4k$, với k nguyên dương. Khi đó, tập hợp $S = \{n = 4k | 3 \leq k \leq 24\}$. Vậy số phần tử của tập S là $24 - 3 + 1 = 22$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Cho khai triển nhị thức Niu-tơn $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^{40} = \displaystyle\sum_{k=0}^{40} a_k \cdot x^k$, với $a_k \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $a_{25} = 2^{25}\mathrm{C}_{40}^{25}$. **B** $a_{25} = \dfrac{1}{2^{25}}\mathrm{C}_{40}^{25}$. **C** $a_{25} = \dfrac{1}{2^{15}}\mathrm{C}_{40}^{25}$. **D** $a_{25} = \mathrm{C}_{40}^{25}$.

Lời giải.

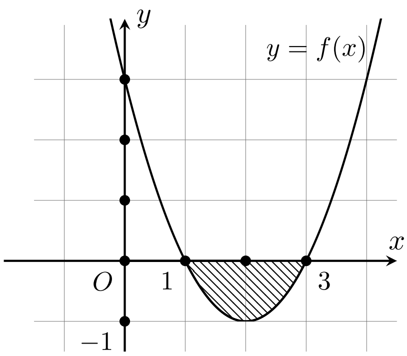
Theo công thức khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có $a_k = \mathrm{C}_{40}^{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{40-k}$.

Suy ra $a_{25} = \mathrm{C}_{40}^{25}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{40-25} = \dfrac{1}{2^{15}}\mathrm{C}_{40}^{25}$.

Chọn đáp án C □

Câu 39.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị đã cho và trục Ox. Quay hình phẳng D quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích V được xác định theo công thức nào dưới đây?



A $V = \pi^2 \displaystyle\int_1^3 (f(x))^2\,\mathrm{d}x$. **B** $V = \displaystyle\int_1^3 (f(x))^2\,\mathrm{d}x$.

C $V = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_1^3 (f(x))^2\,\mathrm{d}x$. **D** $V = \pi\displaystyle\int_1^3 (f(x))^2\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo công thức tính thể tích khối tròn xoay khi quay một hình phẳng xung quanh trục Ox, ta có $V = \pi\displaystyle\int_1^3 (f(x))^2\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

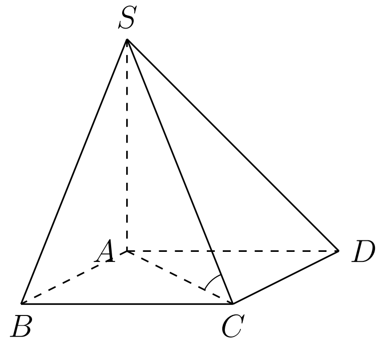
Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a\sqrt{2}$, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính tang của góc giữa đường thẳng SC và đáy.

A $\dfrac{1}{3}$. **B** $\dfrac{1}{2}$. **C** $\sqrt{2}$. **D** 3.

Lời giải.

AC là hình chiếu của SC lên mặt đáy nên góc giữa SC là đáy chính là góc $\widehat{SCA}$.

Ta có $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;3)$. Gọi (S) là mặt cầu chứa A có tâm I thuộc tia Ox và bán kính bằng 7. Phương trình mặt cầu (S) là

(A) $(x-3)^2+y^2+z^2=49$.
(B) $(x+7)^2+y^2+z^2=49$.
C $(x-7)^2+y^2+z^2=49$.
(D) $(x+5)^2+y^2+z^2=49$.

Lời giải.

Do tâm I thuộc tia Ox nên $I(a;0;0)$, với $a>0$. Khi đó

$$IA = R \Leftrightarrow (a-1)^2+2^2+(-3)^2=49 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=7 \\ a=-5 \quad (\text{loại}) \end{array}\right..$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(7;0;0)$ và $R=7$ là $(x-7)^2+y^2+z^2=49$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Một vật rơi tự do với phương trình chuyển động là $S=\dfrac{1}{2}gt^2$, trong đó t tính bằng giây (s), S tính bằng mét (m) và $g=9{,}8$ m/s^2. Vận tốc của vật tại thời điểm $t=4$s là

(A) $v=78{,}4$ m/s. **B** $v=39{,}2$ m/s. (C) $v=9{,}8$ m/s. (D) $v=19{,}6$ m/s.

Lời giải.

Vận tốc của chuyển động tại thời điểm t được tính theo công thức $v(t)=s'(t)=gt$. Suy ra vận tốc tại thời điểm $t=4$ là $v(4)=9{,}8\cdot 4=39{,}2$ m/s.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=x^2-5x+4$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.
(B) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.
C Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.
(D) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;4)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4. \end{array}\right.$ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho số phức $z = -3 + 4i$. Mô-đun của số phức z là

A 4. B 7. C 3. D 5.

Lời giải.

Ta có $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-2;3;4)$. Khoảng cách từ điểm A đến trục Ox là

A 4. B 3. C 5. D 2.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của điểm A lên trục Ox, suy ra $H(-2;0;0)$. Khi đó

$$d_{(A,Ox)} = AH = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = 5.$$

Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho số dương a thỏa mãn hình phẳng giới hạn bởi các đường parabol $y = ax^2 - 2$ và $y = 4 - 2ax^2$ có diện tích bằng 16. Tìm giá trị của a.

A 1. B $\dfrac{1}{2}$. C $\dfrac{1}{4}$. D 2.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $ax^2 - 2 = 4 - 2ax^2 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{2}{a} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}$.

Đặt $m = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} > 0$. Khi đó, diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai parabol là

$$S = \int_{-m}^{m} |3ax^2 - 6|\mathrm{d}x = \int_{-m}^{m} (6 - 3ax^2)\mathrm{d}x = (6x - ax^3)|_{-m \to m} = 12m - 2am^3 = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{a}}.$$

Từ đó suy ra $\dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{a}} = 16 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Tung một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xác suất để kết quả của hai lần tung là hai số tự nhiên liên tiếp bằng

A $\dfrac{5}{36}$. B $\dfrac{5}{18}$. C $\dfrac{5}{72}$. D $\dfrac{5}{6}$.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = 6^2 = 36$. Gọi a, b $(1 \leq a < b \leq 6)$ lần lượt là kết quả của lần tung thứ nhất và lần tung thứ hai. Số trường hợp xảy ra a, b là hai số tự nhiên liên tiếp là 5.

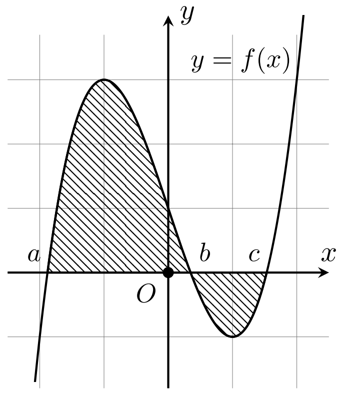
Trường hợp $a > b$ làm tương tự.

Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{5}{36} \cdot 2 = \dfrac{5}{18}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 48.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tính diện tích S của hình phẳng được đánh dấu trong hình.



A $S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

B $S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

C $S = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

D $S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $S = \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x^2 - 1$. Với các số thực dương a, b thỏa mãn $a < b$, tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

A $f(b)$. **B** $f(\sqrt{ab})$. **C** $f(a)$. **D** $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.

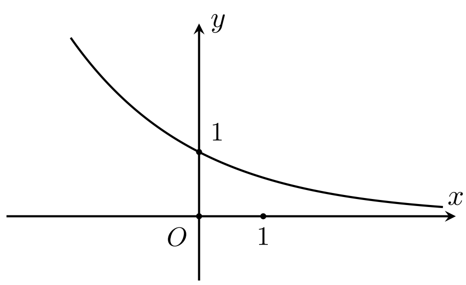
Lời giải.

Vì $f'(x) = -x^2 - 1 < 0\ \forall x \in [a; b]$ nên $f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$. Do đó, $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 50.

Hình bên là đồ thị của hàm nào trong các hàm số dưới đây?



A $y = \log_{0,4} x$. **B** $y = (\sqrt{2})^x$.

C $y = (0{,}8)^x$. **D** $y = \log_2 x$.

Lời giải.

Ta thấy đây đồ thị hàm số mũ với cơ số bé hơn 1.

Chọn đáp án (C) □

——— **HẾT** ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. B	3. C	4. D	5. C	6. A	7. A	8. C	9. B	10. B
11. A	12. D	13. A	14. A	15. D	16. B	17. D	18. C	19. B	20. D
21. D	22. B	23. C	24. A	25. D	26. B	27. B	28. B	29. A	30. D
31. D	32. C	33. B	34. C	35. B	36. B	37. A	38. C	39. D	40. B
41. C	42. B	43. C	44. D	45. C	46. B	47. B	48. A	49. A	50. C

137 ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA 2018 MÔN TOÁN TRƯỜNG THPT KIM LIÊN – HÀ NỘI LẦN 2

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Trận chung kết bóng đá phải phân định bằng loạt đá luân lưu 11 mét. Huấn luyện viên mỗi đội cần trình với trọng tài một danh sách được sắp xếp thứ tự 5 cầu thủ trong cầu thủ 11 để đá luân lưu 5 quả 11 mét. Hỏi huấn luyện viên của mỗi đội có bao nhiêu cách chọn.

(A) 39916800. (B) 462. (C) 554400. (D) 120.

Lời giải.

Số cách chọn của huấn luyện viên mỗi đội là $\mathrm{A}_{11}^5 = 554400$ cách.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Một lớp có 35 đoàn viên trong đó có 15 nam và 20 nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 đoàn viên trong lớp để tham dự hội trại ngày 26 tháng 3. Tính xác suất để trong 3 đoàn viên được chọn có cả nam và nữ.

(A) $\dfrac{6}{119}$. (B) $\dfrac{90}{119}$. (C) $\dfrac{125}{7854}$. (D) $\dfrac{30}{119}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{35}^3 = 6545$.

Gọi A là biến cố trong 3 đoàn viên được chọn có cả nam và nữ. Có hai trường hợp có thể xảy ra như sau:

TH1: Trong 3 đoàn viên được chọn ra có 1 nam và 2 nữ. Có $\mathrm{C}_{15}^1\mathrm{C}_{20}^2 = 2850$ cách chọn.

TH2: Trong 3 đoàn viên được chọn ra có 2 nam và 1 nữ. Có $\mathrm{C}_{15}^2\mathrm{C}_{20}^1 = 2100$ cách chọn.

Khi đó $n(A) = 2850 + 2100 = 4950$.

Vậy xác suất cần tìm là: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{4950}{6545} = \dfrac{90}{119}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Cho n là số tự nhiên thỏa mãn $\mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^{n-2} = 78$. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $(2x-1)^n$.

(A) -101376. (B) 25344. (C) 101376. (D) -25344.

Lời giải.

Điều kiện: $n \geq 2$.

Ta có $\mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^{n-2} = 78 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-1)!} + \dfrac{n!}{(n-2)!2!} = 78 \Leftrightarrow n + \dfrac{n(n-1)}{2} = 78$

$\Leftrightarrow n^2 + n - 156 = 0 \Leftrightarrow n = 12$ hoặc $n = -13$ (loại).

Số hạng tổng quát trong khai triển $(2x-1)^{12}$ là $\mathrm{C}_{12}^k \cdot (2x)^k \cdot (-1)^{12-k} = (-1)^{12-k} \cdot 2^k \cdot \mathrm{C}_{12}^k \cdot x^k$.

Hệ số của x^5 ứng với $k = 5$.

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển $(2x-1)^{12}$ bằng -101376.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số.Chọn ngẫu nhiên ra một số từ tập A. Tính xác suất để số chọn được chia hết cho 11 và chữ số hang đơn vị là số nguyên tố.

A $\dfrac{409}{11250}$. **B** $\dfrac{2045}{13608}$. **C** $\dfrac{409}{90000}$. **D** $\dfrac{409}{3402}$.

Lời giải.

Ta có $n_{(\Omega)} = 9 \cdot 10^4$.

Gọi B là biến cố " số chọn được chia hết cho 11 và chữ số hàng đơn vị là số nguyên tố.

Số tự nhiên có 5 chữ số nhỏ nhất chia hết cho 11 là 10010.

Số tự nhiên có 5 chữ số lớn nhất chia hết cho 11 là 99990.

Ta có $10010 \le 11k \le 99990 \Rightarrow 910 \le k \le 9090$.

Để $\overline{abcde} = 11k$ có tận cùng là $2, 3, 5, 7$. Thì k phải có tận cùng là $2, 3, 5, 7$.

Mỗi bộ số $(910; \ldots; 919)$,$(920; \ldots; 929)$, ..., $(9080; \ldots; 9089)$ có 4 số thỏa mãn yêu cầu bài toán. Mà có 818 bộ.

Số 9090 không thỏa mãn bài toán $\Rightarrow n_B = 4 \cdot 818$.

$\Rightarrow \mathrm{P}(B) = \dfrac{4 \cdot 818}{9 \cdot 10^4} = \dfrac{409}{11250}$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho dãy số (u_n) là một cấp số cộng có $u_1 = 3$ và công sai $d = 4$. Biết tổng n số hạng đầu của dãy số (u_n) là $S_n = 253$. Tìm n.

A $n = 10$. **B** $n = 9$. **C** $n = 12$. **D** $n = 11$.

Lời giải.

Ta có : $S_n = \dfrac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)\,d\right] \Leftrightarrow 253 = \dfrac{n}{2}\left[6 + (n-1)\cdot 4\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 11 \\ n = -\dfrac{23}{2} \quad (\text{loại}) \end{array}\right.$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Tính $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$.

A $L = -5$. **B** $L = 5$. **C** $L = 0$. **D** $L = -3$.

Lời giải.

Ta có $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+4)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1}(x+4) = 5$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x + 1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A\left(1; -\dfrac{1}{2}\right)$.

A $y = \dfrac{1}{4}(x-1) - \dfrac{1}{2}$. **B** $y = \dfrac{1}{2}(x-1) + \dfrac{1}{2}$. **C** $y = \dfrac{1}{2}(x+1) - \dfrac{1}{2}$. **D** $y = \dfrac{1}{4}(x+1) + \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{x^2 + 2x - 2}{(x+1)^2} \Rightarrow y'(1) = \dfrac{1}{4}$.

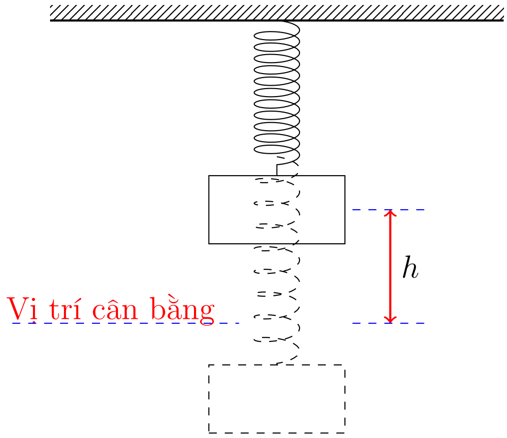
$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A\left(1; -\dfrac{1}{2}\right)$ là:

$y = \dfrac{1}{4}(x-1) - \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 8.

Một vật nặng treo bởi một chiếc lò xo, chuyển động lên xuống quanh vị trí cân bằng (hình vẽ). Khoảng cách h từ vật đến vị trí cân bằng ở thời điểm t giây được tính theo công thức $h = |d|$ trong đó $d = 5\sin 6t - 4\cos 6t$ với d được tính bằng cm. Ta quy ước rằng $d > 0$ khi vật ở trên vị trí cân bằng, $d < 0$ khi vật ở dưới vị trí cân bằng. Hỏi trong giây đầu tiên có bao nhiêu thời điểm vật ở xa vị trí cân bằng nhất.



A 1. **B** 4. **C** 0. **D** 2.

Lời giải.

Con lắc ở xa vị trí cân bằng nhất khi tại vị trí đấy đổi chiều chuyển động và vận tốc triệt tiêu.

Ta có $v(t) = d'(t) = 30\cos 6t + 24\sin 6t$.

Vậy $v(t) = 0 \Leftrightarrow 30\cos 6t + 24\sin 6t = 0. \Leftrightarrow 5\cos 6t + 4\sin 6t = 0 \quad (1)$.

Dễ thấy $\cos 6t = 0$ làm phương trình (1) vô nghiệm.

(1) $\Leftrightarrow \tan 6t = -\dfrac{5}{4}$. Ta cần tìm k sao cho $0 < \dfrac{1}{6}\arctan\left(-\dfrac{5}{4}\right) + \dfrac{k\pi}{6} < 1 \Leftrightarrow 0{,}15 < \dfrac{k\pi}{6} < 1{,}15$ $\Leftrightarrow 0{,}29 < k < 2{,}2$.

Vậy có hai giá trị của t thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$ có $DA = DB = DC = AC = AB = a$, $\widehat{ABC} = 45^\circ$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và DC.

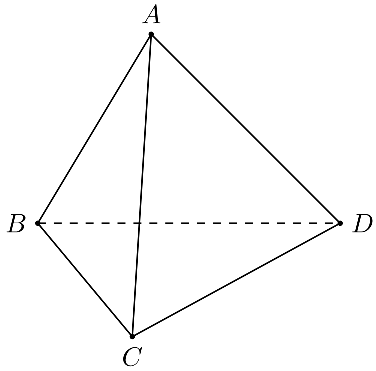
A 120°. **B** 60°. **C** 30°. **D** 90°.

Lời giải.

Do ΔABC cân tại A mà $\widehat{ABC} = 45^\circ$ nên ΔABC vuông cân tại A, $BC = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta BCD$ vuông cân tại D.

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \left(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}\right) \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = -a \cdot a \cdot \cos 60^0 = -\dfrac{1}{2}a^2$.

Do đó: $\cos(AB, DC) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}\right|}{AB \cdot DC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow (AB, DC) = 60^\circ$.



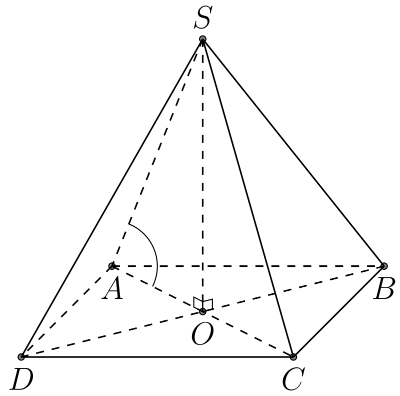
Chọn đáp án B □

Câu 10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60°. Tính khoảng cách từ đỉnh S đến mặt phẳng $(ABCD)$.

A $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B** a. **C** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **D** $a\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $(ABCD)$.
Ta có $S.ABCD$ là hình chóp đều
$\Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow (SA, (ABCD)) = \widehat{SAO} = 60^\circ$.
Lại có tam giác SAC cân tại S.
Suy ra tam giác SAC đều và cạnh $AC = a\sqrt{2}$
$\Rightarrow \mathrm{d}\,(S, (ABCD)) = SO = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.



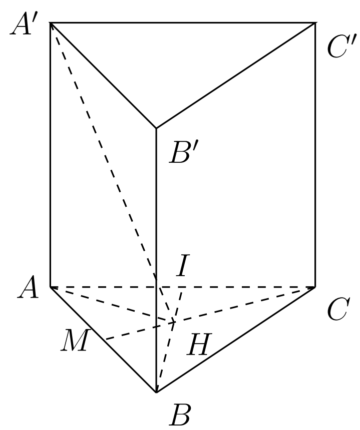
Chọn đáp án C □

Câu 11. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$. M là điểm di động trên AB. Gọi H là hình chiếu của A' trên đường thẳng CM. Tính độ dài đoạn thẳng BH khi tam giác AHC có diện tích lớn nhất.

A $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B** $\dfrac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$. **C** $a\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$. **D** $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} AA' \perp MC \\ A'H \perp MC \end{cases} \Rightarrow MC \perp AH \Rightarrow \Delta AHC$ vuông tại H.
Trong (ABC): ΔAHC nội tiếp trong đường tròn đường kính AC.
$\Rightarrow \Delta AHC$ có diện tích lớn nhất khi nó là tam giác vuông cân.
$\Rightarrow AH = HC \Rightarrow B, H, I$ thẳng hàng và $HI = \dfrac{a}{2}$.
$\Rightarrow BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$.



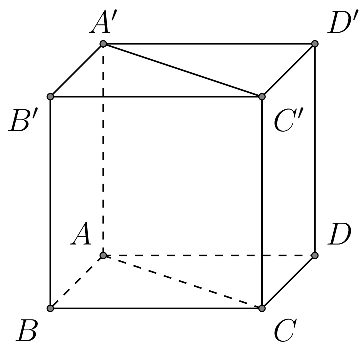
Chọn đáp án B □

Câu 12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt phẳng $(ACC'A')$.

A 30°. **B** 60°. **C** 90°. **D** 45°.

Lời giải.

Vì $\begin{cases} AA' \perp (ABCD) \\ AA' \subset (ACC'A') \end{cases}$ nên $(ACC'A') \perp (ABCD)$.
Vậy góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng 90°.



Chọn đáp án C □

Câu 13. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x(3-2x)^2$ trên $\left[\dfrac{1}{4};1\right]$.

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) 1. (C) 0. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $y = 4x^3 - 12x^2 + 9x$, có $y' = 12x^2 - 24x + 9$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \notin \left[\dfrac{1}{4};1\right] \\ x = \dfrac{1}{2} \in \left[\dfrac{1}{4};1\right] \end{array}\right.$.

Khi đó $y\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{25}{16}$, $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$, $y(1) = 1$.

Vậy GTNN của hàm số trên $\left[\dfrac{1}{4};1\right]$ bằng 1.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	2 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.

(B) Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.

(C) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$ và tiệm cận ngang là $y = 2$.

(D) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $x = 1$ và tiệm cận đứng là $y = 2$.

Lời giải.

Do $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 2$, $\lim\limits_{x\to 1^-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số tiệm cận đứng là $x = 1$ và tiệm cận ngang là $y = 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15.

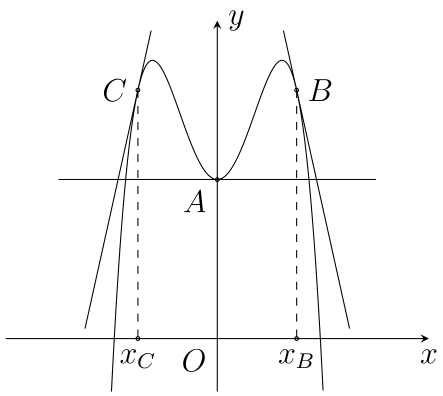
Hình bên là đồ thị của hàm $y = f(x)$. Biết rằng tại các điểm A, B, C đồ thị hàm số có tiếp tuyến được thể hiện như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $f'(x_C) < f'(x_A) < f'(x_B)$.

(B) $f'(x_B) < f'(x_A) < f'(x_C)$.

(C) $f'(x_A) < f'(x_B) < f'(x_C)$.

(D) $f'(x_A) < f'(x_C) < f'(x_B)$.

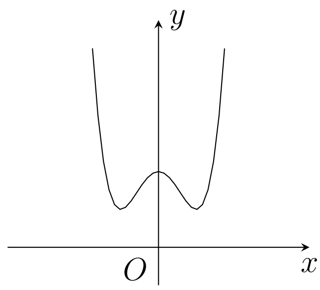


Lời giải.

Ta có $f'(x_A) = 0$, $f'(x_C) > 0$, $f'(x_B) < 0$ nên $f'(x_B) < f'(x_A) < f'(x_C)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16.
Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A $y = x^4 - 2x^2 + 3$. **B** $y = x^4 + 3x^2 + 2$.
C $y = -4x^4 + x^2 + 4$. **D** $y = x^3 - 2x^2 + 1$.

Lời giải.
Đây là đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c\,(a \neq 0)$.
Đồ thị hướng lên nên hệ số $a > 0$.
Đồ thị có 3 cực trị $\Rightarrow ab < 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x^2}{2} - mx + \ln(x-1)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A 2. **B** 4. **C** 3. **D** 1.

Lời giải.
TXĐ: $\mathscr{D} = (1; +\infty)$.
Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$, $\forall x \in (1; +\infty)$.
Ta có $x + \dfrac{1}{x-1} \geq m$, $\forall x \in (1; +\infty)$.
Xét hàm $g(x) = x + \dfrac{1}{x-1}\,(x > 1)$, $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.

x	1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy điều kiện của m là $m \leq 3$.
Chọn đáp án C □

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

A $m \in \varnothing$. **B** $m \in [1; +\infty)$. **C** $m = 1$. **D** $m = 2$.

Lời giải.
Ta có:
$y' = f'(x) = -3x^2 + 4x - m$, $y'' = f''(x) = -6x + 4$.
$f'(1) = 0 \Leftrightarrow -3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

$f''(1) = -6 \cdot 1 + 4 = -2 < 0$.
Vậy không có giá trị nào của m thỏa yêu cầu bài toán nghĩa là $m \in \varnothing$.
Chọn đáp án A □

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên và bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 2. B 0. C 1. D 3.

Lời giải.
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy rằng $f'(-2) = f'(1) = f'(3) = 0$.
Hơn nữa, $f'(x) < 0, \forall x \in (-\infty; -2)$ và $f'(x) > 0, \forall x \in (-2; 1)$ nên $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -2$.
Tương tự, $f'(x) > 0, \forall x \in (1; 3)$ và $f'(x) < 0, \forall x \in (3; +\infty)$ nên $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 3$.
Tuy nhiên dấu của $f'(x)$ không đổi qua điểm $x = 1$ nên hàm số $y = f(x)$ không đạt cực trị tại $x = 1$.
Chọn đáp án A □

Câu 20. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ có đồ thị (C_1) và hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ có đồ thị (C_2). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A (C_1) và (C_2) đối xứng nhau qua Ox.
B (C_1) và (C_2) đối xứng nhau qua gốc tọa độ.
C (C_1) và (C_2) trùng nhau.
D (C_1) và (C_2) đối xứng nhau qua Oy.

Lời giải.
Xét hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ có tập xác định là R và ta có $y(-x) = -x^3 + 3x^2 - 4$.
Do đó (C_1) và (C_2) đối xứng nhau qua Oy.
Chọn đáp án D □

Câu 21. Tìm m để đường thẳng $d : y = mx + 1$ cắt đồ thị $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ (C) tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị.

A $m \in (-\infty; 0)$.
B $m \in \left(-\dfrac{1}{4}; +\infty\right) \setminus \{0\}$.
C $m \in (0; +\infty)$.
D $m = 0$.

Lời giải.
Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{x+1}{x-1} = mx + 1 \, (x \neq 1)$
$\Leftrightarrow x + 1 = (x-1)(mx+1) \Leftrightarrow x + 1 = mx^2 + x - mx - 1 \Leftrightarrow mx^2 - mx - 2 = 0 \quad (1)$
Để đường thẳng d cắt C tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh của đồ thị khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = m \neq 0 \\ \Delta = m^2 + 8m > 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < -8; m > 0 \\ x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -8; m > 0 \\ -\dfrac{2}{m} - 1 + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -8; m > 0 \\ \dfrac{2}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$

Chọn đáp án C □

Câu 22. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-4}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

A 2. B 1. C 4. D 3.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 1$. Có hai đường tiệm cận ngang là $y = -1$ và $y = 1$.

Và $\lim\limits_{x \to -2^-} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} y = +\infty$. Có hai đường tiệm cận đứng là $x = -2$ và $x = 2$.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $3^{-3x} > 3^{-x+2}$.

A $S = (-\infty; 1)$. B $S = (-\infty; -1)$. C $S = (-1; 0)$. D $S = (-1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $3^{-3x} > 3^{-x+2} \Leftrightarrow -3x > -x + 2 \Leftrightarrow 2x < -2 \Leftrightarrow x < -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Cho phương trình $e^{m\cos x - \sin x} - e^{2(1-\sin x)} = 2 - \sin x - m\cos x$ với m là tham số thực. Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm. Khi đó S có dạng $(-\infty; a] \cup [b; +\infty)$. Tính $T = 10a + 20b$.

A $10\sqrt{3}$. B 0. C $3\sqrt{10}$. D 1.

Lời giải.

Ta có:

$\mathrm{e}^{m\cos x - \sin x} - \mathrm{e}^{2(1-\sin x)} = 2 - \sin x - m\cos x \Leftrightarrow \mathrm{e}^{m\cos x - \sin x} + m\cos x - \sin x = \mathrm{e}^{2(1-\sin x)} + 2 - 2\sin x \quad (1)$.

Xét hàm số $y = f(t) = \mathrm{e}^t + t$ có $y' = \mathrm{e}^t + 1$ nên hàm số đồng biến trên R.

$(1) \Leftrightarrow f(m\cos x - \sin x) = f(2 - 2\sin x) \Leftrightarrow m\cos x - \sin x = 2 - 2\sin x \Leftrightarrow m\cos x + \sin x = 2$.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m^2 + 1^2 \geq 2^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq \sqrt{3} \\ m \leq -\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Suy ra $a = -\sqrt{3}$ và $b = \sqrt{3}$.

Vậy $T = 10a + 20b = 10\sqrt{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Biết rằng phương trình $2\ln(x+2) + \ln 4 = \ln x + 4\ln 3$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2\,(x_1 < x_2)$. Tính $P = \dfrac{x_1}{x_2}$.

A 64. B 4. C $\dfrac{1}{64}$. D $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.

$2\ln(x+2) + \ln 4 = \ln x + 4\ln 3 \Leftrightarrow \ln(x+2)^2 - \ln x = \ln\dfrac{3^4}{4} \Leftrightarrow \ln\dfrac{(x+2)^2}{x} = \ln\dfrac{81}{4}$

$\Leftrightarrow 4(x+2)^2 = 81x \Leftrightarrow 4x^2 - 65x + 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 16 \\ x = \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$.

$P = \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{1}{64}$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\mathrm{e}^{u_{18}} + 5\sqrt{\mathrm{e}^{u_{18}} - \mathrm{e}^{4u_1}} = \mathrm{e}^{4u_1}$ và $u_{n+1} = u_n + 3$ với $n \geq 1$. Giá trị lớn nhất của n để $\log_3 u_n < \ln 2018$ bằng

(A) 1420. (B) 1419. (C) 1417. (D) 1418.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1} = u_n + 3 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 3 \Rightarrow$ dãy số (u_n) là cấp số cộng với $d = 3$.

Xét $\mathrm{e}^{u_{18}} + 5\sqrt{\mathrm{e}^{u_{18}} - \mathrm{e}^{4u_1}} = \mathrm{e}^{4u_1} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{u_{18}} - \mathrm{e}^{4u_1} + 5\sqrt{\mathrm{e}^{u_{18}} - \mathrm{e}^{4u_1}} = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\mathrm{e}^{u_{18}} - \mathrm{e}^{4u_1}} = 0 \\ \sqrt{\mathrm{e}^{u_{18}} - \mathrm{e}^{4u_1}} = -5 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow u_{18} = 4u_1 \Leftrightarrow u_1 + 17d = 4u_1 \Rightarrow 3u_1 = 51 \Rightarrow u_1 = 17$.

$\log_3 u_n < \ln 2018 \Leftrightarrow \log_3(u_1 + (n-1)d) < \ln 2018 \Leftrightarrow \log_3(17 + 3(n-1)) < \ln 2018$.

$\Leftrightarrow 3n + 14 < 3^{\ln 2018} \Leftrightarrow n < \dfrac{3^{\ln 2018} - 14}{3} \approx 1419{,}935$.

Vậy giá trị lớn nhất của n là $n = 1419$.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Với a là số thực dương bất kì và $a \neq 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\ln a^5 = \dfrac{1}{5}\ln a$. (B) $\log_{a^5}\mathrm{e} = 5\log_a \mathrm{e}$. (C) $\log_{a^5}\mathrm{e} = \dfrac{1}{5\ln a}$. (D) $\ln a^5 = \dfrac{5}{\ln a}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{a^5}\mathrm{e} = \dfrac{\ln \mathrm{e}}{\ln a^5} = \dfrac{1}{5\ln a}$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^3 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+2}$.

(A) $I = -\dfrac{21}{100}$. (B) $I = \ln\dfrac{5}{2}$. (C) $I = \dfrac{4581}{5000}$. (D) $I = \log\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

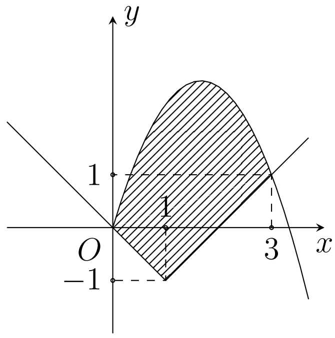
$I = \displaystyle\int_0^3 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+2} = \ln|x+2|\Big|_0^3 = \ln 5 - \ln 2 = \ln\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 29.

Cho H là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y = \dfrac{10}{3}x - x^2$, $y = \begin{cases} -x & \text{khi} \quad x \leq 1 \\ x - 2 & \text{khi} \quad x > 1 \end{cases}$.

Diện tích của H bằng



A $\dfrac{11}{2}$. **B** $\dfrac{13}{2}$. **C** $\dfrac{11}{6}$. **D** $\dfrac{14}{3}$.

Lời giải.

Ta có $S = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{10}{3}x - x^2 + x\right) \mathrm{d}x + \int_1^3 \left(\frac{10}{3}x - x^2 - x + 2\right) \mathrm{d}x = \frac{13}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Cho hàm số $y = \pi^x$ có đồ thị C. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi C, trục hoành và hai đường thẳng $x = 2$, $x = 3$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

A $V = \pi^3 \displaystyle\int_2^3 \pi^x \,\mathrm{d}x$. **B** $V = \pi^2 \displaystyle\int_2^3 \pi^x \,\mathrm{d}x$. **C** $V = \pi \displaystyle\int_3^2 \pi^{2x} \,\mathrm{d}x$. **D** $V = \pi \displaystyle\int_2^3 \pi^{2x} \,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có: $V = \pi \displaystyle\int_2^3 (\pi^x)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_2^3 \pi^{2x} \,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(0; +\infty) \setminus \{\mathrm{e}\}$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x(\ln x - 1)}$, $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) = \ln 6$ và $f\left(\mathrm{e}^2\right) = 3$. Giá trị của biểu thức $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) + f\left(\mathrm{e}^3\right)$ bằng

A $3(\ln 2 + 1)$. **B** $2\ln 2$. **C** $3\ln 2 + 1$. **D** $\ln 2 + 3$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \displaystyle\int f'(x) \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x(\ln x - 1)} \,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\ln x - 1)}{\ln x - 1} = \ln|\ln x - 1| + C$

$= \begin{cases} \ln(\ln x - 1) + C_1 & \text{khi} \quad x > \mathrm{e} \\ \ln(1 - \ln x) + C_2 & \text{khi} \quad 0 < x < \mathrm{e} \end{cases}$.

Vì $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) = \ln 6 \Rightarrow \ln\left(1 - \ln\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) + C_2 = \ln 6 \Rightarrow \ln 3 + C_2 = \ln 6 \Rightarrow C_2 = \ln 6 - \ln 3 = \ln 2$.

Vì $f\left(\mathrm{e}^2\right) = 3 \Rightarrow \ln\left(\ln \mathrm{e}^2 - 1\right) + C_1 = 3 \Rightarrow C_2 = 3$.

Do đó $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) + f\left(\mathrm{e}^3\right) = \ln\left(1 - \ln\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) + \ln 2 + \ln\left(\ln \mathrm{e}^3 - 1\right) + 3 = 2\ln 2 + \ln 2 + 3 = 3(\ln 2 + 1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Biết $\displaystyle\int_0^1 \frac{\pi x^3 + 2^x + \mathrm{e}x^3 \cdot 2^x}{\pi + \mathrm{e} \cdot 2^x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{m} + \frac{1}{\mathrm{e}\ln n} \ln\left(p + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e} + \pi}\right)$ với m, n, p là các số nguyên dương. Tính tổng $S = m + n + p$.

A $S = 7$. **B** $S = 6$. **C** $S = 8$. **D** $S = 5$.

Lời giải.

$\int\limits_0^1 \dfrac{\pi x^3 + 2^x + \mathrm{e}x^3 \cdot 2^x}{\pi + \mathrm{e} \cdot 2^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \dfrac{x^3\left(\pi + \mathrm{e} \cdot 2^x\right) + 2^x}{\pi + \mathrm{e} \cdot 2^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(x^3 + \dfrac{2^x}{\pi + \mathrm{e} \cdot 2^x}\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x^3\,\mathrm{d}x +$ $\int\limits_0^1 \dfrac{2^x}{\pi + \mathrm{e} \cdot 2^x}\,\mathrm{d}x = \left.\dfrac{x^4}{4}\right|_0^1 + \dfrac{1}{\ln 2}\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}\left(2^x\right)}{\pi + \mathrm{e} \cdot 2^x} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{\mathrm{e} \cdot \ln 2} \ln\left|\pi + \mathrm{e} \cdot 2^x\right|\Big|_0^1 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{\mathrm{e} \cdot \ln 2} \ln \dfrac{\pi + 2\mathrm{e}}{\pi + \mathrm{e}}$
$= \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{\mathrm{e} \cdot \ln 2} \ln\left(1 + \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e} + \pi}\right)$.
Suy ra $S = 7$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Họ nguyên hàm của hàm số $\mathrm{e}x^{\mathrm{e}} + 4$ là

(A) $\mathrm{e}x^{\mathrm{e}+1} + 4x + C$. (B) $\mathrm{e}^2x^{\mathrm{e}-1} + C$. **C** $\dfrac{\mathrm{e}x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1} + 4x + C$. (D) $\dfrac{x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1} + 4x + C$.

Lời giải.
Ta có: $\displaystyle\int \left(\mathrm{e}x^{\mathrm{e}} + 4\right)\mathrm{d}x = \mathrm{e}\int x^{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}x + \int 4\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}\dfrac{x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1} + 4x + C$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3\cos x + \dfrac{1}{x^2}$ trên $(0; +\infty)$.

(A) $3\cos x + \ln x + C$. **B** $3\sin x - \dfrac{1}{x} + C$. (C) $-3\sin x + \dfrac{1}{x} + C$. (D) $3\cos x + \dfrac{1}{x} + C$.

Lời giải.
Ta có: $\displaystyle\int (3\cos x + \dfrac{1}{x^2})\,\mathrm{d}x = 3\int \cos x\,\mathrm{d}x + \int \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 3\sin x - \dfrac{1}{x} + C$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 5 - i$. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

(A) $\sqrt{37}$. **B** 5. (C) 25. (D) $\sqrt{5} + \sqrt{26}$.

Lời giải.
Ta có $z_1 = 1 + 2i \Rightarrow A\,(1; 2)$ và $z_2 = 5 - i \Rightarrow B\,(5; -1)$.
Suy ra $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Xét các số phức $z = a + bi$ thỏa mãn $|z - 3 - 2i| = 2$. Tính $a + b$ khi $|z + 1 - 2i| + 2\,|z - 2 - 5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A $4 + \sqrt{3}$. (B) $2 + \sqrt{3}$. (C) $4 - \sqrt{3}$. (D) 3.

Lời giải.
Đặt $z - 3 - 2i = a + bi - 3 - 2i = t = x + yi \Rightarrow |t| = 2$ và $x^2 + y^2 = 4$.
Ta có $|z + 1 - 2i| + 2\,|z - 2 - 5i| = |t + 4| + 2\,|t + 1 - 3i| = \sqrt{x^2 + 8x + 16 + y^2} + 2\,|t + 1 - 3i|$
$= 2\sqrt{\dfrac{4 + 16 + 8x}{4}} + 2\,|t + 1 - 3i| = 2\sqrt{5 + 2x} + 2\,|t + 1 - 3i|$
$= 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x+1)^2 + (3-y)^2} \geq 2\,(|y| + |3 - y|) \geq 6$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y\,(3 - y) \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3 = -1 \\ b - 2 = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 + \sqrt{3} \end{cases}$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho số phức $z = a + bi$ khác 0, $(a, b \in \mathbb{R})$. Tìm phần ảo của số phức z^{-1}.

A $\dfrac{-b}{a^2+b^2}$. B $\dfrac{b}{a^2+b^2}$. C $\dfrac{a}{a^2+b^2}$. D $\dfrac{-bi}{a^2+b^2}$.

Lời giải.

Ta có $z^{-1} = \dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2}i$.

Phần ảo của số phức z^{-1} là $\dfrac{-b}{a^2+b^2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = -i$.

A i. B -1. C 1. D $-i$.

Lời giải.

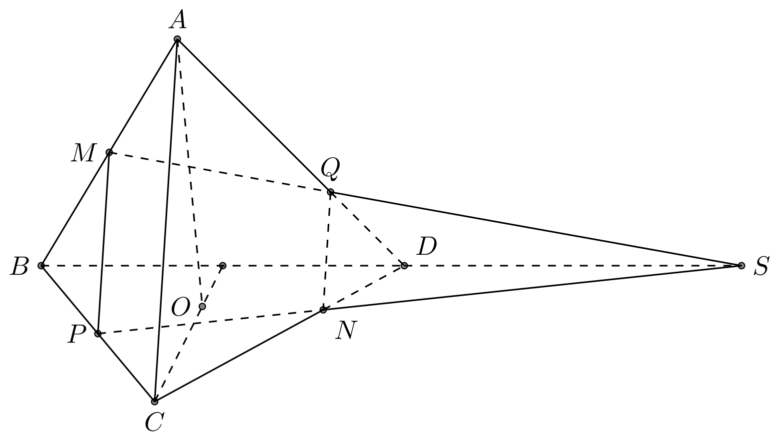
Số phức liên hợp của số phức là số phức có dạng $\bar{z} = a - bi$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Trên các cạnh AB và CD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{NC} = -2\overrightarrow{ND}$. Mặt phẳng (P) chứa MN song song với AC chia khối tứ diện thành hai khối đa diện, trong đó có khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích là V. Tính V.

A $\dfrac{\sqrt{2}}{18}$. B $\dfrac{7\sqrt{2}}{216}$. C $\dfrac{11\sqrt{2}}{216}$. D $\dfrac{\sqrt{2}}{108}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm của tam giác đều ABC; P là trung điểm BC, Q thoả $\overrightarrow{QA} = -\overrightarrow{QD}$, $S = MQ \cap BD$.

Suy ra BD, MQ, PN đồng qui tại S.

$V_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

$V_{S.MPB} = \dfrac{1}{3} \cdot \mathrm{d}\left(S, (ABC)\right) \cdot \dfrac{1}{4} \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{6}\mathrm{d}\left(D, (ABC)\right) \cdot S_{ABC}$

$= \dfrac{1}{2}V_{ABCD} \cdot \dfrac{V_{S.DNQ}}{V_{S.MPB}} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{9} \Rightarrow V_{BPNDQM} = \dfrac{7}{9} \cdot V_{S.MPB} = \dfrac{7}{18} \cdot V_{ABCD}$

$V_{AMPCNQ} = V_{ABCD} - V_{BPNDQM} = V_{ABCD} - \dfrac{7}{18}.V_{ABCD} = \dfrac{11}{18} \cdot V_{ABCD} = \dfrac{11}{18} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{12} = \dfrac{11\sqrt{2}}{216}$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Thể tích V của khối lăng trụ có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B là

A $V = Bh$. **B** $V = \frac{1}{2}Bh$. **C** $V = \frac{1}{6}Bh$. **D** $V = \frac{1}{3}Bh$.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ: $V = Bh$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Cho hình chóp tứ giác đều $S \cdot ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 3. Tính diện tích xung quanh của hình nón có đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ và chiều cao bằng chiều cao của hình chóp.

A $S_{xq} = 9\pi$. **B** $S_{xq} = \frac{9\pi}{2}$. **C** $S_{xq} = \frac{9\sqrt{2}\pi}{4}$. **D** $S_{xq} = \frac{9\sqrt{2}\pi}{2}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC, BD. Khi đó $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $AC = 3\sqrt{2} \Rightarrow OA = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow h = SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Hình nón có đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ nên bán kính đáy là $r = OA = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot 3 = \frac{9\sqrt{2}\pi}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng $16\pi a^2$ và độ dài đường sinh bằng $2a$. Tính bán kính r của đường tròn đáy của hình trụ đã cho.

A $r = 4\pi$. **B** $r = 4a$. **C** $r = 8a$. **D** $r = 6a$.

Lời giải.

Ta có: $S_{xq} = 2\pi rl \Rightarrow r = \frac{S_{xq}}{2\pi l} = \frac{6\pi a^2}{2\pi 2a} = 4a$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M\,(1;2;3)$. Hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (Oxz) là điểm nào sau đây?

A $H\,(1;2;0)$. **B** $F\,(0;2;0)$. **C** $E\,(1;0;3)$. **D** $K\,(0;2;3)$.

Lời giải.

Hình chiếu của điểm $M\,(a,b,c)$ lên mặt phẳng (Oxz) là $M'\,(a,0,c)$.

Do đó, điểm cần tìm là $E\,(1;0;3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\,(1;2;4)\,, B\,(0;0;1)$ và mặt cầu $(S)\colon\ (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$. Mặt phẳng $(P)\colon ax + by + cz + 3 = 0$ đi qua A, B và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$.

A $T = \frac{27}{4}$. **B** $T = \frac{33}{5}$. **C** $T = -\frac{3}{4}$. **D** $T = \frac{31}{5}$.

Lời giải.

Ta có: (S) có tâm $I\,(-1;1;0)$ và bán kính $R = 2$.

Nhận thấy $r = \sqrt{4 - (\mathrm{d}\,(I,P))^2} \Rightarrow r_{\min}$ khi $\mathrm{d}\,(I,(P))_{\max}$

$(P)\colon ax + by + cz + 3 = 0$ đi qua $A, B \Rightarrow P\colon\ (9-2b)\,x + by - 3z + 3 = 0$

$\mathrm{d}\left(I,(P)\right)=\dfrac{3\left|b-2\right|}{\sqrt{5b^2-36b+90}}$.

Xét hàm số $y=\dfrac{3\left|b-2\right|}{\sqrt{5b^2-36b+90}}$.

Với $b<2$ thì hàm số không có GTLN.

Với $b\geq 2\Rightarrow y'=\dfrac{3\left(-8b+54\right)}{\left(5b^2-36b+90\right)\sqrt{5b^2-36b+90}}\Rightarrow \max\limits_{[2;+\infty)} y=y\left(\dfrac{27}{4}\right)$

Vậy $b=\dfrac{27}{4}$, $a=-\dfrac{9}{2}$, $c=-3\Rightarrow T=-\dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M\left(-1;1;2\right)$ và hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{1}$, $d'\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua điểm M, cắt d và vuông góc với d'.

Ⓐ $\begin{cases}x=-1+3t\\y=1+t\\z=2\end{cases}$. **B** $\begin{cases}x=-1+3t\\y=1-t\\z=2\end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases}x=1+3t\\y=1-t\\z=2\end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases}x=-1-7t\\y=1+7t\\z=2+7t\end{cases}$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm M, cắt d và vuông góc với d'.

Giả sử $\Delta\cap d=A\Rightarrow A\left(2+3t;-3+2t;1+t\right)$.

$\overrightarrow{AM}=\left(3+3t;-4+2t;-1+t\right)$.

$\Delta\perp d'\Rightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{u_{d'}}=0\Leftrightarrow 3+3t+3\left(-4+2t\right)-2\left(-1+t\right)=0\Leftrightarrow 7t=7\Leftrightarrow t=1$.

$\Rightarrow A\left(5;-1;2\right),\overrightarrow{AM}=\left(6;-2;0\right)=2\left(3;-1;0\right)$.

Vậy phương trình đường thẳng $\Delta\colon\begin{cases}x=-1+3t\\y=1-t\\z=2\end{cases}$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Tong không gian $Oxyz$ cho điểm $M\left(2;1;1\right)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và cắt ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C khác gốc O sao cho thể tích khối tứ diện $ABCD$ là bé nhất.

Ⓐ $4x-y-z-6=0$. Ⓑ $2x+y+2z-6=0$.

Ⓒ $2x-y-2z-3=0$. **D** $x+2y+2z-6=0$.

Lời giải.

Gọi tọa độ của A, B, C lần lượt là $\left(a;0;0\right),\left(0;b;0\right),\left(0;0;c\right)$, do A, B, C lần lượt thuộc Ox, Oy, Oz nên a,b,c là các số dương. Mặt phẳng (P) có dạng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Vì $M\in(P)$ nên $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$, sử dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương $\dfrac{2}{a},\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{c}$ ta có $1=\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{2}{abc}}\Rightarrow abc\geq 3^3\cdot 2$.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{2}{a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}a=6\\b=3\\c=3\end{cases}$.

Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bé nhất $\Leftrightarrow abc$ bé nhất $\Leftrightarrow a=6,b=3,c=3$.

Phương trình mặt phẳng (P): $x + 2y + 2z - 6 = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;2;1)$, $N\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Viết phương trình mặt cầu có tâm là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OMN và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz).

(A) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$.
(B) $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.
(C) $x^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$.
(D) $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

Lời giải.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OMN.

Ta có: $OM = 3$, $ON = 4$, $MN = 5$.

Áp dụng công thức: $\begin{cases} x_I = \dfrac{ON \cdot x_M + OM \cdot x_N + MN \cdot x_O}{OM + ON + MN} = 0 \\ y_I = \dfrac{ON \cdot y_M + OM \cdot y_N + MN \cdot y_O}{OM + ON + MN} = 1 \\ z_I = \dfrac{ON \cdot z_M + OM \cdot z_N + MN \cdot z_O}{OM + ON + MN} = 1 \end{cases} \Rightarrow I(0;1;1)$.

Và $\mathrm{d}(I,(Oxz)) = 1$.

Vậy, phương trình mặt cầu cần lập : $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$. Đường thẳng d đi qua điểm nào sau đây

(A) $K(1;-1;1)$.
(B) $F(0;1;2)$.
(C) $E(1;1;2)$.
(D) $H(1;2;0)$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua $F(0;1;2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua $M(1;-1;2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta : \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$.

(A) $2x - y + 3z - 9 = 0$.
(B) $2x - y + 3z + 9 = 0$.
(C) $2x - y + 3z - 6 = 0$.
(D) $2x + y + 3z - 9 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng đi qua $M(1;-1;2)$ và vuông góc với đường thẳng Δ nên có VTPT là $\vec{n}(2;-1;3)$.

Phương trình mặt phẳng là: $2(x-1) - (y+1) + 3(z-2) = 0$ hay $2x - y + 3z - 9 = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;2;0)$ và vuông góc với mặt phẳng (P): $2x + y - 3z + 5 = 0$?

(A) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3t \end{cases}$.
(B) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3t \end{cases}$.
(C) $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$.
(D) $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-3z+5=0$ nên Δ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{n_P}=(2;1;-3)$. Phương trình Δ là: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=-3t \end{cases}$ (1).

Kiểm tra được điểm $M\,(3;3;-3)$ thỏa mãn hệ (1).

Vậy phương trình $\begin{cases} x=3+2t \\ y=3+t \\ z=-3-3t \end{cases}$ cũng là phương trình của Δ.

Chọn đáp án C □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. B	3. A	4. A	5. D	6. B	7. A	8. A	9. B	10. C
11. B	12. C	13. B	14. C	15. C	16. A	17. C	18. A	19. A	20. D
21. C	22. C	23. B	24. A	25. C	26. B	27. C	28. B	29. B	30. D
31. A	32. A	33. C	34. B	35. B	36. A	37. A	38. A	39. C	40. A
41. D	42. B	43. C	44. C	45. B	46. D	47. B	48. B	49. A	50. C

138 ĐỀ THI THỬ LẦN 2, THPT CẦU XE - HẢI DƯƠNG, 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Biết $\int\limits_1^2 \frac{(x-1)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}} = a\sqrt{3}+b\sqrt{2}+c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính $P = a+b+c$.

(A) 1. (B) 2. **(C) 0.** (D) 3.

Lời giải.

Ta có $(x-1) = 2x-1-x = \left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}\right)$.

Vậy $\int\limits_1^2 \frac{(x-1)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}} = \int\limits_1^2 \left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3}-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big|_1^2 = \sqrt{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}+\frac{1}{3}$.

Suy ra $a=1, b=\frac{-4}{3}, c=\frac{1}{3}$. Vậy $P=a+b+c=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có diện tích xung quanh bằng $12a^2$, đáy $ABCD$ là hình thoi có chu vi bằng $8a$ và góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'D'$ và BC.

(A) $\frac{\sqrt{21}a}{3}$. **(B) $\frac{\sqrt{21}a}{2}$.** (C) $\frac{2a}{3}$. (D) $3a$.

Lời giải.

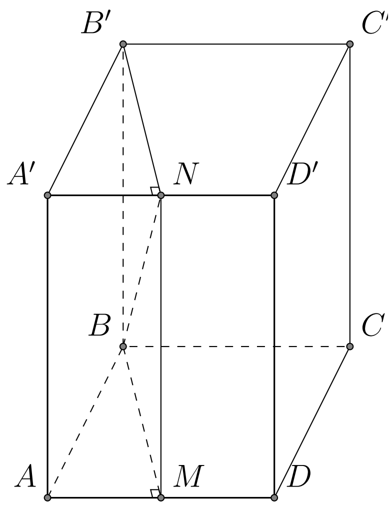
Ta có cạnh hình thoi bằng $2a$ và $\triangle BAD$ đều. Vì diện tích xung quanh là $12a^2$ suy ra chiều cao hình hộp là $\frac{12a^2}{8a} = \frac{3a}{2}$.

Lấy M, N lần lượt là trung điểm của AD và $A'D'$.

Khi đó ta có $\begin{cases} A'D' \perp B'N \\ A'D' \perp BB' \end{cases} \Rightarrow A'D' \perp (BB'NM) \Rightarrow A'D' \perp BN$ mặt khác $BC \perp BN$.

Do đó khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'D'$ và BC là

$$BN = \sqrt{(a\sqrt{3})^2+\left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{2}.$$



Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Anh Nam muốn mua một ngôi nhà trị giá 500 triệu đồng sau 3 năm nữa. Biết rằng lãi suất hàng năm vẫn không đổi là 8% một năm. Vậy ngay từ bây giờ số tiền ít nhất anh Nam phải gửi tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép để có đủ tiền mua nhà (kết quả làm tròn đến hàng triệu) là

(A) 397 triệu đồng. (B) 396 triệu đồng. (C) 395 triệu đồng. (D) 394 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi x là số tiền anh Nam phải giải tiết kiệm, đơn vị triệu đồng. Khi đó sau 3 năm, theo hình thức lãi kép thì số tiền anh Nam nhận được là $x\left(1+\frac{8}{100}\right)^3$. Vậy ta cần tìm x là số nguyên nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện

$$x\left(1+\frac{8}{100}\right)^3 \geq 500 \Leftrightarrow x \geq \frac{500}{\left(1+\frac{8}{100}\right)^3} \approx 396,9.$$

Vậy $x = 397$ triệu đồng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-2;-1;3)$. Tìm phương trình mặt phẳng đi qua các điểm lần lượt là hình chiếu của điểm M lên các trục tọa độ.

(A) $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=0$.
(B) $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-3}=1$.
(C) $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1$.
(D) $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-3}=0$.

Lời giải.

Ta có hình chiếu của M lên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $M_x(-2;0;0)$, $M_y(0;-1;0)$, $M_z(0;0;3)$.
Phương trình mặt phẳng đi qua M_x, M_y, M_z là $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Xét các số phức $z = a+bi$ $(a,b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-3+3i| = \sqrt{2}$. Tính $P = a+b$ khi $|z-1+3i|+|z-3+5i|$ đạt giá trị lớn nhất.

(A) $P=-2$. **(B)** $P=-8$. **(C)** $P=8$. **(D)** $P=2$.

Lời giải.

Ta có $|z-3+3i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow (a-3)^2+(b+3)^2 = 2$.
Tìm giá trị lớn nhất của $|z-1+3i|+|z-3+5i| = \sqrt{(a-1)^2+(b+3)^2}+\sqrt{(a-3)^2+(b+5)^2}$.
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwars ta có

$$\begin{aligned}\left[\sqrt{(a-1)^2+(b+3)^2}+\sqrt{(a-3)^2+(b+5)^2}\right]^2 &\leq 2\left[(a-1)^2+(b+3)^2+(a-3)^2+(b+5)^2\right]\\ &\leq 4(a^2-4a+b^2+8b+22).\end{aligned}$$

Ta đổi biến $a-3=u, b+3=v$. Từ đó điều kiện là $u^2+v^2=2$ và ta cần tìm giá trị lớn nhất của

$$u^2+v^2+2(u+v)+4 \leq 2+2\sqrt{2(u^2+v^2)}+4 = 10.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $u=v=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-2 \end{cases}$. Vậy $P=a+b=2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;3)$, $B(4;2;3)$, $C(0;-2;3)$. Gọi (S_1), (S_2), (S_3) là các mặt cầu có tâm A, B, C và bán kính lần lượt bằng $3, 2, 1$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3)?

(A) 7. **(B)** 1. **(C)** 0. **(D)** 2.

Lời giải.

Ta có $AC = 1 < R_1 - R_3 \Rightarrow (S_3)$ nằm trong (S_1). Vậy không có mặt phẳng nào tiếp xúc với cả ba mặt cầu.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx + 2\ln x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

(A) $m \leq -3$. **B** $m \geq -3$. (C) $m \geq 3$. (D) $m \leq 3$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 + m + \frac{2}{x}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow m \geq -x^2 - \frac{2}{x}, \forall x > 0 \Leftrightarrow m \geq \max\limits_{x>0} \left\{-x^2 - \frac{2}{x}\right\}$.

Mặt khác, với $x > 0$, theo bất đẳng thức Cauchy ta có $x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} = 3$.

Suy ra $\max\limits_{x>0} \left\{-x^2 - \frac{2}{x}\right\} = -3$. Suy ra $m \geq -3$.

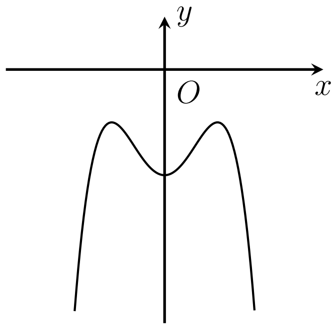
Chọn đáp án (B) □

Câu 8.

Đường cong như hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

(A) $y = -x^4 - 2x^2 + 2$. (B) $y = -x^3 + 3x - 2$.

C $y = -x^4 + 2x^2 - 2$. (D) $y = -x^4 + 2x^2 + 2$.



Lời giải.

Nhận thấy đồ thị là của một hàm trùng phương, có hệ số $a < 0$, có ba điểm cực trị và $f(0) < 0$. Do đó, đây là đồ thị của hàm $y = f(x) = -x^4 + 2x^2 - 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?

A $y = \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x-2}$. (B) $y = x^3 - 3x^2 + 1$. (C) $y = \frac{x^2+1}{x-1}$. (D) $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x-2} = 2$. Vậy đồ thị hàm số này có tiệm cận ngang.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = -\infty$. Vậy đồ thị hàm số này không có tiệm cận ngang.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty$. Vậy đồ thị hàm số này không có tiệm cận ngang.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^4 - 2x^2 + 2) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^4 - 2x^2 + 2) = +\infty$. Vậy đồ thị hàm số này không có tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - \frac{2}{3}$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng

(A) $\frac{5}{3}$. (B) -9. **C** $-\frac{11}{3}$. (D) -2.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = x^2 - 6x + 5$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (nhận)} \\ x = 5 \text{ (loại).} \end{array}\right.$

Có $f(0) = -\dfrac{2}{3}, f(1) = \dfrac{5}{3}, f(3) = -\dfrac{11}{3}$.

Vậy $\min\limits_{x\in[0;3]} f(x) = -\dfrac{11}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			4				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				0		

Số nghiệm của phương trình $f(x) + 7 = 0$ là

A 2. (B) 3. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Ta nhận thấy hàm số nhận giá trị -7 tại đúng một điểm trong mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$ nhưng không nhận giá trị -7 trong $(-1; 1)$. Do đó, phương trình $f(x) + 7 = 0$ có 2 nghiệm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ được tính theo công thức

A $S = \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x$.

(B) $S = \pi \displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\, \mathrm{d}x$.

(C) $S = \displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\, \mathrm{d}x$.

(D) $S = \left|\displaystyle\int_a^b f(x) - g(x)\, \mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Công thức tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ là $S = \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(4; 3; 2)$, $B(-1; -2; 1)$ và $C(-2; 2; -1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là

A $x - 4y + 2z + 4 = 0$.

(B) $x - 4y - 2z + 4 = 0$.

(C) $x - 4y - 2z - 4 = 0$.

(D) $x + 4y - 2z - 4 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng cần tìm vuông góc với BC nên nhận $\overrightarrow{CB} = (1; -4; 2)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Mặt phẳng đi qua A, nhận $(1; -4; 2)$ làm véctơ pháp tuyến có phương trình là $x - 4y + 2z + 4 = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Khi tham số $m \in (a; b)$ thì hàm số $y = |-x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 1 - m|$ có số điểm cực trị là lớn nhất. Giá trị $a + b$ bằng

(A) 3. (B) 0. (C) 2. **D** 1.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 1 - m$.

Ta có $g'(x) = -4x^3 + 12x^2 - 8x$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của $g(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$1-m$	↘	$-m$	↗	$1-m$	↘	$-\infty$

Nhận thấy nếu $1 - m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$ thì $f(x) = |g(x)| = -g(x)$ thì hàm số sẽ có 3 điểm cực trị.

Nếu $-m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$ thì $f(x) = |g(x)|$ sẽ có 5 điểm cực trị.

Nếu $0 < m < 1$ thì $1 - m > 0$ và $-m < 0$ nên $f(x) = |g(x)|$ sẽ có 7 điểm cực trị.

Do đó, $a + b = 0 + 1 = 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Chiều cao của khối chóp có diện tích đáy bằng B và thể tích bằng V là

(A) $h = \dfrac{2V}{B}$. **B** $h = \dfrac{3V}{B}$. (C) $h = \dfrac{V}{B}$. (D) $h = \dfrac{6V}{B}$.

Lời giải.

Thể tích khối chóp là

$$V = \frac{1}{3}Bh \Leftrightarrow h = \frac{3V}{B}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$. Phương trình mặt cầu nào sau đây là phương trình mặt cầu đối xứng với mặt cầu (S) qua trục Oz.

(A) $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$. **B** $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 4$.

C $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$. **D** $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$.

Lời giải.

Toạ độ tâm I của mặt cầu (S) là $I(-1;1;2)$. Suy ra toạ độ tâm I' của mặt cầu đối xứng với mặt cầu (S) qua trục Oz là $I'(1;-1;2)$. Do bán kính mặt cầu đối xứng không thay đổi nên phương trình mặt cầu là

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4.$$

Chọn đáp án B □

Câu 17. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^1 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ là

A $I=2+\ln 2$. **B** $I=1+\ln 2$. **C** $I=1-\ln 2$. **D** $I=2-\ln 2$.

Lời giải.

Ta có

$$I=\int\limits_0^1 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \mathrm{d}x-\int\limits_0^1\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$
$$=x\Big|_0^1-\ln(x+1)\Big|_0^1=1-\ln 2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thoả mãn $f(1)=0$, $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 (x+1)e^x f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{e^2-1}{4}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\frac{e-1}{2}$. **B** $\frac{e^2}{4}$. **C** $\frac{e}{2}$. **D** $e-2$.

Lời giải.

Đặt $I=\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 (x+1)e^x f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{e^2-1}{4}$.

Xét

$$\int\limits_0^1 e^x f(x)\,\mathrm{d}x=xe^x f(x)\big|_0^1-\int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}\left(e^x f(x)\right)=-\int\limits_0^1\left(xe^x f(x)+xe^x f'(x)\right)\mathrm{d}x.$$

Suy ra

$$\int\limits_0^1 xe^x f'(x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_0^1 xe^x f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 e^x f(x)\,\mathrm{d}x=-I=\frac{1-e^2}{4}.$$

Khi đó

$$\int\limits_0^1 f'(x)\left(f'(x)+xe^x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left([f'(x)]^2+xe^x f'(x)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 xe^x f'(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

Do $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, xe^x liên tục trên $[0;1] \subset \mathbb{R}$, $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x \neq 0$, suy ra $f'(x) \neq 0$ với mọi $x \in [0;1]$ nên

$$f'(x) = -xe^x \Rightarrow f(x) = -\int xe^x = -\int x\,\mathrm{d}e^x = -xe^x + \int e^x\,\mathrm{d}x = -xe^x + e^x + C.$$

Từ $f(1) = 0$ suy ra $C = 0$. Vậy $f(x) = -xe^x + e^x$. Do đó

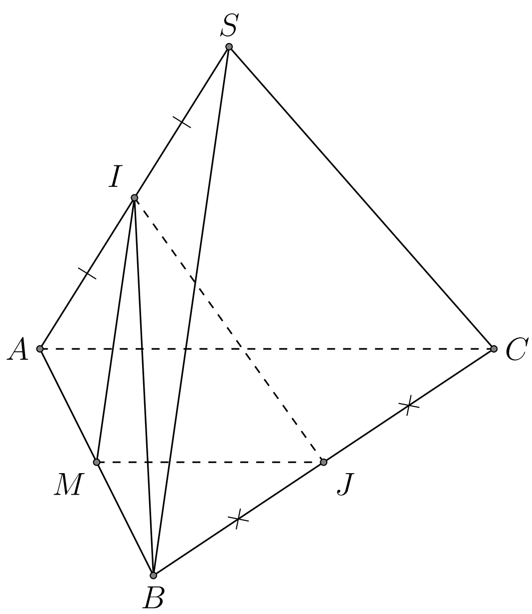
$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (-xe^x + e^x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}e^x + \int\limits_0^1 e^x\,\mathrm{d}x \\ = -xe^x\Big|_0^1 + 2\int\limits_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = -e + 2e^x\Big|_0^1 \\ = -e + 2(e-1) = e - 2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, BC. Tính số đo của góc hợp bởi IJ và SB.

A 45°. **B** 30°. **C** 60°. **D** 90°.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của AB. Khi đó IM là đường trung bình của tam giác SAB nên $IM \parallel SB$ và $IM = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{a}{2}$. Tương tự $MJ = \dfrac{a}{2}$.

Mặt khác, dễ dàng chứng minh tam giác IBJ vuông tại J nên

$$IJ = \sqrt{IB^2 - IB^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Tam giác IMJ có $MI = MJ = \dfrac{a}{2}, IJ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên là tam giác vuông cân tại M. Suy ra

$$(IJ, SB) = (IJ, IM) = \widehat{MIJ} = 45^\circ \text{ (do } IM \parallel SB).$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Tìm m để phương trình $9^{x^2} - 4 \cdot 3^{x^2} + 6 = m$ có đúng hai nghiệm.

(A) $m = 2$.
B $m > 3$ hoặc $m = 2$.
(C) $m \geq 3$ hoặc $m = 2$.
(D) $m > 3$.

Lời giải.

Đặt $t = 3^{x^2} > 0$. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 4t + 6 = m. \tag{10}$$

Nhận xét, phương trình đã cho muốn có đúng hai nghiệm thì phương trình (10) chỉ có một nghiệm $t > 1$ (vì nếu cả hai nghiệm t đều lớn hơn 1, thì từ $t = 3^{x^2}$ ta phải có bốn nghiệm x).

Đặt $f(t) = t^2 - 4t + 6$ với $t > 1$. $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$. Ta có bảng biến thiên

t	1		2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bằng biến thiên ta thấy phương trình $f(t) = m$ chỉ có một nghiệm $t > 1$ khi $m > 3$ hoặc $m = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 5)$. Số mặt phẳng (α) đi qua M và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C mà $OA = OB = OC \neq 0$ là

A 4. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Giả sử $A(a; 0; 0), B(0; b; 0)$ và $C(0; 0; c)$ $(a, b, c \neq 0)$. Khi đó phương trình mặt phẳng (α) là

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Do $M \in (\alpha)$ nên

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{5}{c} = 1.$$

Tuy nhiên, để thoả yêu cầu bài toán thì chỉ có thể xảy ra bốn trường hợp sau $a = b = c$ hay $a = b = -c$ hay $a = -b = c$ hay $a = -b = -c$ với $a \neq 0$. Với cả bốn trường hợp ta đều tìm được giá trị a thoả yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;1;-1), B(1;1;2), C(-1;2;-2)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z+1=0$. Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua A, vuông góc với mặt phẳng (P) cắt đường thẳng BC tại I sao cho $IB=2IC$ biết tọa độ điểm I là số nguyên.

A. $(\alpha): 2x+3y+2z-3=0$.
B. $(\alpha): 4x+3y-2z-9=0$.
C. $(\alpha): 2x-y-2z-3=0$.
D. $(\alpha): 6x+2y-z-9=0$.

Lời giải.

Đường thẳng BC qua $B(1;1;2)$ có VTCP $\vec{a}=(-2;1;-4)$ có phương trình là $\begin{cases}1-2t\\1+t\\2-4t\end{cases}$.

$I\in BC$ nên $I(x=1-2t; y=1+t; z=2-4t)$.
Ta có

$$\begin{aligned}&IB=2IC\\ \Leftrightarrow\ & IB^2=4IC^2\\ \Leftrightarrow\ & (2t)^2+t^2+(4t)^2=4[(2t-2)^2+(1-t)^2)+(4t-4)^2]\\ \Leftrightarrow\ & 3t^2-8t+4=0\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}t=2\\ t=\dfrac{2}{3}\end{array}\right..\end{aligned}$$

Với $t=2$ thì $I(-3;3;-6)$.
Với $t=\dfrac{2}{3}$ thì $I(-\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3};-\dfrac{2}{3})$ (loại vì tọa độ điểm I là số nguyên).
Ta có $\vec{n}_{(P)}=(1;-2;2)$, $\overrightarrow{IA}=(4;-2;5)$.
$[\vec{n}_{(P)},\overrightarrow{IA}]=(-6;3;6)$ là một VTPT của (α).
Vậy mặt phẳng (α) qua A có phương trình là $2x-y-2z-3=0$.
Chọn đáp án C □

Câu 23. Biết rằng phương trình $2\log(x+2)+\log 4=\log x+4\log 3$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 (x_1<x_2)$. Tính $P=\dfrac{x_1}{x_2}$.

A. $P=\dfrac{1}{64}$.
B. $P=\dfrac{1}{4}$.
C. $=4$.
D. $P=64$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $\begin{cases}x+2>0\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow x>0$.

$$\begin{aligned}&2\log(x+2)+\log 4=\log x+4\log 3\\ \Leftrightarrow\ & \log(x+2)^2.4=\log 3^4.x\\ \Leftrightarrow\ & 4(x+2)^2=81x\\ \Leftrightarrow\ & x^2-65x+16=0\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x=16\\ x=\dfrac{1}{4}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy $x_1 = \dfrac{1}{4}, x_2 = 16, P = \dfrac{1}{64}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(0:+\infty)$. (B) $(0;1)$. (C) $(-\infty;0)$. (D) $(-1;1)$.

Lời giải.

Dựa vào BBT ta có hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB = 2, AD = 3, AA' = 4$. Góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ là α. Tính giá trị gần đúng của góc α.

(A) $45,2°$. (B) $38,1°$. (C) $53,4°$. (D) $61,6°$.

Lời giải.

Gắn hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ vào hệ trục tọa độ $Oxyz$. Khi đó $A(0,0,0), B(0;2;0), C(3;2;0), D(3;0;0), A'(0;0;4), B'(0;2;4), C'(3;2;4), D'(3;0;4)$.

$\overrightarrow{AB'} = (0;2;4), \overrightarrow{AD'} = (3;0;4), \overrightarrow{A'C'} = (3;2;0), \overrightarrow{A'D} = (3;0;-4)$.

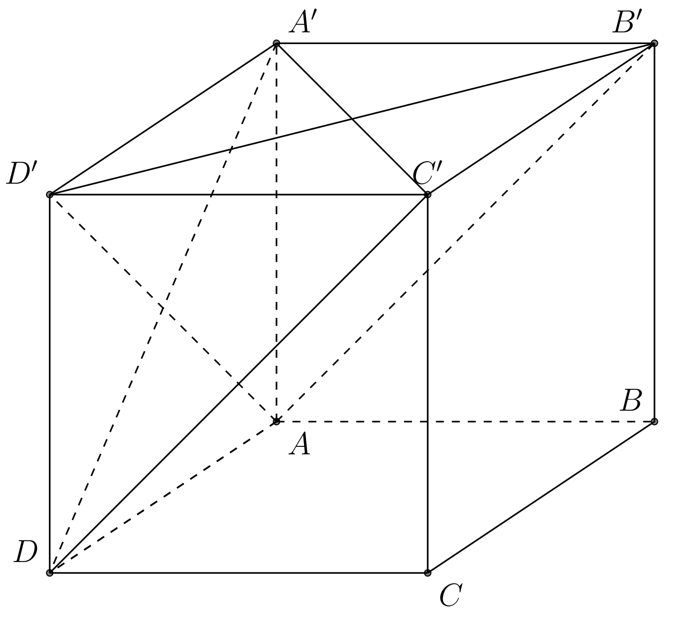
Gọi $\vec{n}_1$ là véc-tơ pháp tuyến của $(AB'D')$. Ta có $\vec{n}_1 = [\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AD'}] = (8;12;-6)$.

Gọi $\vec{n}_2$ là véc-tơ pháp tuyến của $(A'C'D)$. Ta có $\vec{n}_2 = [\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'D}] = (-8;12;-6)$.

α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$, ta có

$\cos\alpha = \left|\dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right| = \dfrac{29}{61}$.

Vậy giá trị gần đúng của góc α là $61,6°$



Chọn đáp án D

Câu 26. Cho hàm số $y = x^3 - 12x + 12$ có đồ thị (C) và điểm $A(m; -4)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m nguyên thuộc khoảng $(2; 5)$ để từ A kẻ được ba tiếp tuyến với đồ thị (C). Tổng tất cả các phần tử nguyên của S bằng

A 7. B 9. C 3. D 4.

Lời giải.

Tiếp tuyến qua $A(m; -4)$ có dạng $y = k(x - m) - 4$.

Điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} k(x-m) - 4 = x^3 - 12x + 12 \\ y' = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k(x-m) - 4 = x^3 - 12x + 12 \\ k = 3x^2 - 12 \end{cases}$

Suy ra:

$$\begin{aligned} & (3x^2 - 12)(x - m) - 4 = x^3 - 12x + 12 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^3 - 3mx^2 + 12m - 16 = 0 \quad (1) \\ \Leftrightarrow\ & (x - 2)[2x^2 + (4 - 3m)x + 8 - 6m] = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ 2x^2 + (4 - 3m)x + 8 - 6m = 0. \quad (2) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Yêu cầu bài toán từ A kẻ được ba tiếp tuyến với đồ thị (C) tại 3 tiếp điểm nghĩa là phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ 8 + 2(4 - 3m) + 8 - 6m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 + 8m - 16 > 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -4 \\ m > \dfrac{4}{3} \end{array}\right. \\ m \neq 2. \end{cases}$$

Kết hợp với m nguyên thuộc khoảng $(2; 5)$ nên m nguyên thuộc khoảng $(2; 5)$.

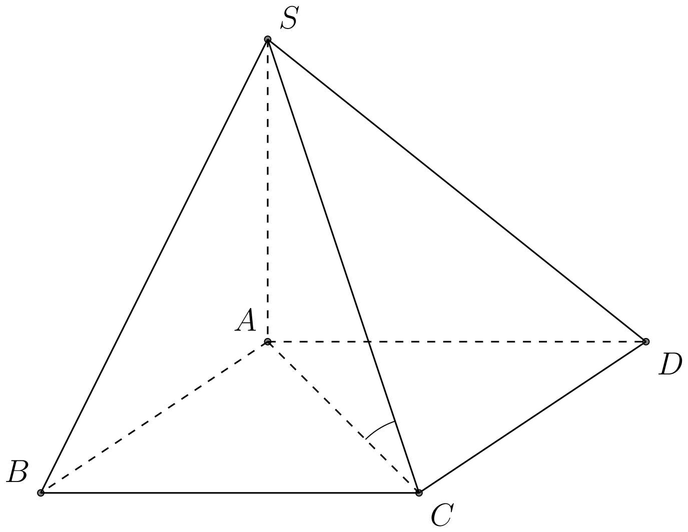
Vậy $S = \{3; 4\}$. Tổng tất cả các phần tử nguyên của S bằng 7.

Chọn đáp án A

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

A 30°. **B** 45°. **C** 60°. **D** 90°.

Lời giải.



Hình chiếu của S trên $(ABCD)$ là A.
Hình chiếu của C trên $(ABCD)$ là C.
Suy ra AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$.
$\widehat{SC,(ABCD)} = \widehat{SC,AC} = \widehat{SCA}$.
$AC = a\sqrt{2}$, $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
Suy ra $\widehat{SCA} = 30^\circ$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$.

A $2\cos 2x + C$. **B** $2\cos 2x + C$. **C** $\dfrac{1}{2}\cos 2x + C$. **D** $-\dfrac{1}{2}\cos 2x + C$.

Lời giải.

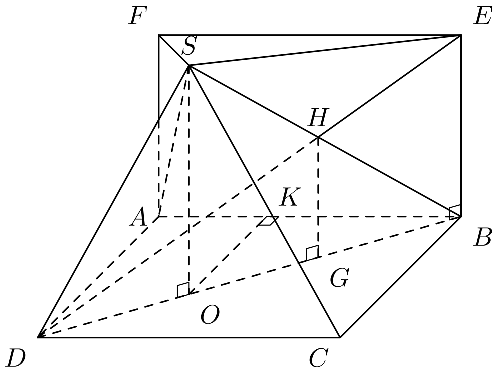
Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$ là $-\dfrac{1}{2}\cos 2x + C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh bằng a , lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Lấy điểm H trên đoạn DE sao cho $HD = 3HE$. Gọi S là điểm đối xứng với B qua H. Thể tích của khối đa diện $ABCDSEF$ bằng

A $\dfrac{5}{6}a^3$. **B** $\dfrac{2}{3}a^3$. **C** $\dfrac{8}{3}a^3$. **D** $\dfrac{9}{8}a^3$.

Lời giải.



$V_{ABCDSEF} = V_{SABCD} + V_{SABEF}$.
Ta dựng thêm hình như hình vẽ.
$V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} SO \cdot a^2$.
Do $SO \parallel (ABEF) \Rightarrow d(S,(ABEF)) = d(O,(ABEF))$.
$V_{SABEF} = \dfrac{1}{3} d(S,(ABCD)) \cdot S_{ABEF} = \dfrac{1}{3} OK \cdot a^2$.
Tính SO
$HG = \dfrac{3}{4} EB = \dfrac{3}{4} a$.
$SO = 2HG = \dfrac{3}{2} a$.
Tính OK
$BG = DB - DG = a\sqrt{2} - \dfrac{3}{4} a\sqrt{2} = \dfrac{1}{4} a\sqrt{2}$.
$OB = 2BG = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
$OK = \dfrac{OB}{BD} \cdot AD = \dfrac{a}{2}$.
Vậy $V_{ABCDSEF} = \dfrac{1}{3}\dfrac{3a}{2} \cdot a^2 + \dfrac{1}{3}\dfrac{a}{2} \cdot a^2 = \dfrac{2}{3} a^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

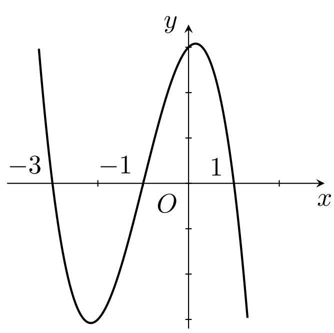
Tìm giá trị cực đại $y_{CĐ}$ và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

A $y_{CĐ} = 3$ và $y_{CT} = 0$.
B $y_{CĐ} = 2$ và $y_{CT} = 0$.
C $y_{CĐ} = -2$ và $y_{CT} = 2$.
D $y_{CĐ} = 3$ và $y_{CT} = -2$.

Lời giải.
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $y_{CĐ} = 3$ và $y_{CT} = 0$.
Chọn đáp án A □

Câu 31.
Cho hàm số $y = f(x)$. Hình bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$. Hàm số $y = f(1 - x)$ nghịch biến trên khoảng

A $(0; 2)$. **B** $(-2; 0)$. **C** $(-\infty; -3)$. **D** $(1; +\infty)$.



Lời giải.

Ta có $(f(1-x))' = (1-x)' \cdot f'(1-x) = -f'(1-x)$.

Hàm số nghịch biến $\Leftrightarrow (f(1-x))' < 0 \Leftrightarrow -f'(1-x) < 0 \Leftrightarrow f'(1-x) > 0$.

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$, suy ra $f'(1-x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x < -3 \\ -1 < 1-x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4 \\ 0 < x < 2 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(0;2)$ và $(4;+\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $2^{2u_1+1} + 2^{3-u_2} = \dfrac{8}{\log_3\left(\dfrac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n > 5^{100}$ bằng

A 230. B 233. **C 234.** D 231.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1} = 2u_n \Rightarrow \begin{cases} u_2 = 2u_1 \\ u_3 = 4u_1 \end{cases}$.

Suy ra

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4 = 4u_1^2 - 4u_1 + 4 = (2u_1-1)^2 + 3 \geq 3 \\
&\Rightarrow \log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right) \geq \log_3 3 \geq 1 \\
&\Rightarrow \frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)} \leq 8. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Mặt khác

$$2^{2u_1+1} + 2^{3-u_2} = 2^{2u_1+1} + 2^{3-2u_1} \geq 2\sqrt{2^{2u_1+1} \cdot 2^{3-2u_1}} = 8. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$2^{2u_1+1} + 2^{3-u_2} = \dfrac{8}{\log_3\left(\dfrac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2u_1+1} = 2^{3-2u_1} \\ (2u_1-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u_1 = \dfrac{1}{2}$.

Do đó $S_n = u_1 \cdot \dfrac{2^n - 1}{2-1} = \dfrac{2^n - 1}{2}$.

$S_n > 5^{100} \Leftrightarrow \dfrac{2^n - 1}{2} > 5^{100} \Leftrightarrow n > \log_2\left(2 \cdot 5^{100} + 1\right) \simeq 233{,}2$.

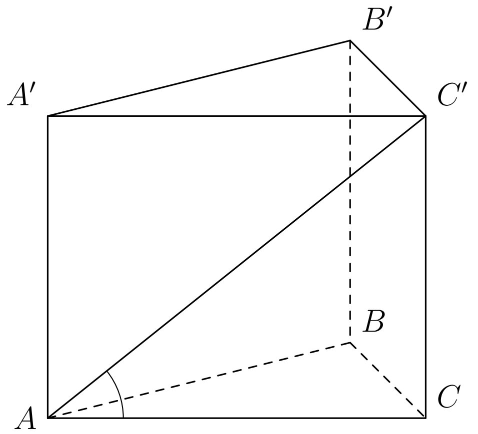
Vậy giá trị nhỏ nhất của n thỏa mãn bài toán là $n = 234$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa AC' và (ABC) bằng 30°. Tính thể tích V của khối trụ nội tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$. B $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{108}$. C $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{72}$. **D $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{36}$.**

Lời giải.



Do $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ tam giác đều nên khối trụ nội tiếp hình lăng trụ đó có hai đáy là hai đường tròn nội tiếp tam giác ABC và $A'B'C'$.

Do ABC là tam giác đều có cạnh $AB = a$ nên bán kính đường tròn nội tiếp của nó có độ dài là

$r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4 \cdot \dfrac{3a}{2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ (hệ thức lượng trong tam giác).

Ta có $\widehat{(AC', (ABC))} = \widehat{C'AC} = 30^\circ$ nên suy ra

$CC' = AC \tan 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $V = \pi r^2 h = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{36}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 34. Cho tập hợp $M = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ có 10 phần tử. Số tập hợp con gầm 2 phần tử của M không chứa phần tử 1 là

(A) 9^2. (B) A_9^1. (C) C_{10}^2. **(D)** C_9^2.

Lời giải.

Số tập con gồm 2 phần tử của M không chứa 1 là số cách lấy 2 phần tử khác 1 từ 10 phần tử của M. Vậy số tập hợp con là C_9^2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt[3]{3m + 27\sqrt[3]{3m + 27 \cdot 2^x}} = 2^x$ có nghiệm thực?

(A) Không tồn tại m. (B) 6. **(C)** Vô số. (D) 4.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có

$$\begin{aligned}
& \sqrt[3]{3m + 27\sqrt[3]{3m + 27 \cdot 2^x}} = 2^x \\
\Leftrightarrow\ & 3m + 27\sqrt[3]{3m + 27 \cdot 2^x} = (2^x)^3 \\
\Leftrightarrow\ & 3m + 27 \cdot 2^x + 27\sqrt[3]{3m + 27 \cdot 2^x} = (2^x)^3 + 27 \cdot 2^x \\
\Leftrightarrow\ & \left(\sqrt[3]{3m + 27 \cdot 2^x}\right)^3 + 27\sqrt[3]{3m + 27 \cdot 2^x} = (2^x)^3 + 27 \cdot 2^x. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 27 \cdot t$, $(t \in \mathbb{R})$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 27 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{3m + 27 \cdot 2^x}\right) = f(2^x) \Leftrightarrow \sqrt[3]{3m + 27 \cdot 2^x} = 2^x \Leftrightarrow 3m + 27 \cdot 2^x = 2^{3x} \Leftrightarrow 2^{3x} - 27 \cdot 2^x = 3m$.

Đặt $y = 2^x$ và xét hàm $g(y) = y^3 - 27y$ với $y > 0$.

Ta có $g'(y) = 3y^2 - 27$. Suy ra $g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \pm 3$.

Bảng biến thiên:

y	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$g'(y)$				$-$	0	$+$	
$g(y)$				$\searrow$	-54	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, suy ra để phương trình có nghiệm thực thì $3m \geq -54 \Leftrightarrow m \geq -18$.
Vậy có vô số giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm thực.
Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Một hình nón có diện tích xung quanh bằng 2π cm^2 và bán kính đáy $r = \dfrac{1}{2}$ cm. Khi đó độ dài đường sinh của hình nón là

(A) 1 cm. (B) 3 cm. (C) 4 cm. (D) 2 cm.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = \pi \cdot r \cdot l \Rightarrow 2\pi = \pi \cdot \dfrac{1}{2} \cdot l \Rightarrow l = 4$ cm.
Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Tìm điểm M biểu diễn số phức $z = i - 2$.

(A) $M = (-2; 1)$. (B) $M = (1; -2)$. (C) $M = (2; 1)$. (D) $M = (2; -1)$.

Lời giải.

Ta có $z = i - 2 = -2 + 1 \cdot i$ nên z được biểu diễn bởi điểm $M(-2, 1)$ trên mặt phẳng phức.
Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Một hộp chứa 11 quả cầu gồm 5 quả cầu màu xanh và 6 quả cầu màu đỏ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ hộp đó. Xác suất để 2 quả cầu chọn ra khác màu bằng:

(A) $\dfrac{8}{11}$. (B) $\dfrac{5}{22}$. (C) $\dfrac{6}{11}$. (D) $\dfrac{5}{11}$.

Lời giải.

- Chọn ngẫu nhiên 2 quả cầu từ hộp chứa 11 quả cầu nên ta có không gian mẫu: $|\Omega| = \mathrm{C}_{11}^2 = 55$.
- Gọi A là biến cố " 2 quả cầu chọn ra khác màu ".
  - ⊞ Chọn 1 quả cầu màu xanh có C_5^1 cách.
  - ⊞ Chọn 1 quả cầu màu đỏ có C_6^1 cách.

  Suy ra số cách chọn của biến cố A là $|\Omega_A| = \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_6^1 = 30$ cách.
- Xác suất để chọn 2 quả cầu khác màu $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{30}{55} = \dfrac{6}{11}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 + 4x - 5}{-x + 12}$ bằng

(A) $-\infty$. (B) $-\dfrac{5}{12}$. (C) $+\infty$. (D) -2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 + 4x - 5}{-x + 12} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 \cdot (2 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2})}{x \cdot (-1 + \frac{12}{x})} = \lim\limits_{x \to -\infty} x \cdot \dfrac{2 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2}}{-1 + \frac{12}{x}}$.

Vì:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2+\dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{x^2}}{-1+\dfrac{12}{x}} = -2$.

nên $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot\dfrac{2+\dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{x^2}}{-1+\dfrac{12}{x}} = +\infty$ hay $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+4x-5}{-x+12} = +\infty$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $5^{1-2x} > \dfrac{1}{125}$.

A $S=(2;+\infty)$. B $S=(-\infty;2)$. C $S=(0;2)$. D $S=(-\infty;1)$.

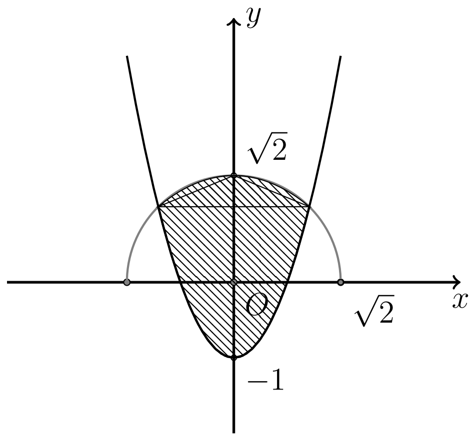
Lời giải.

$5^{1-2x} > \dfrac{1}{125} \Leftrightarrow 5^{1-2x} > 5^{-3} \Leftrightarrow 1-2x > -3 \Leftrightarrow 2x < 4 \Leftrightarrow x < 2$.

Vậy $S=(-\infty;2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=2x^2-1$ và nửa đường tròn có phương trình $y=\sqrt{2-x^2}$ với $(-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2})$ (phần tô đậm trong hình vẽ).



Diện tích của (H) bằng

A $\dfrac{3\pi+2}{6}$. B $\dfrac{3\pi+10}{3}$. C $\dfrac{3\pi+10}{6}$. D $\dfrac{3\pi-2}{6}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y=f(x)=2x^2-1$ và nửa đường tròn $y=g(x)=\sqrt{2-x^2}$ $(-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2})$ là

$2x^2-1=\sqrt{2-x^2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2\ge 1\\ 2-x^2=4x^4-4x^2+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2\ge\dfrac{1}{2}\\ 4x^4-3x^2-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vee x\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x^2=1\\ x^2=-\dfrac{1}{4}\ \text{(vô lý)}\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\le-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vee x\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ x=1\vee x=-1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\end{array}\right..$$

$S=\int\limits_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}|2x^2-1-\sqrt{2-x^2}|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}(\sqrt{2-x^2}-2x^2+1)\,\mathrm{d}x$

$=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x-2\int_{-1}^{1}x^2\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}1\,\mathrm{d}x=A-2B+C$

Trong đó:

- $A=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x$

  Đặt $x=\sqrt{2}\sin t\Rightarrow\ \mathrm{d}x=\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t$ với $t\in[-\pi;\pi]$

  Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$; $x=-1\Rightarrow t=-\frac{\pi}{4}$.

  Khi đó $A=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2-2cos^2t}\cdot\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}2|\cos t|\cdot\cos tdt$

  $=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}2\cdot\left(\frac{\cos 2t+1}{2}\right)\,\mathrm{d}t$

  $=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2t\,\mathrm{d}t+\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}1\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\sin 2t\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}+t\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{\pi}{2}=1+\frac{\pi}{2}$

- $B=\int_{-1}^{1}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$

- $C=\int\limits_{-1}^{1}1\,\mathrm{d}x=2$

Suy ra $S=A-2B+C=1+\frac{\pi}{2}-2\cdot\frac{2}{3}+2=\frac{3\pi+10}{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+1+2i-(1+i)|z|=0$ và $|z|>1$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$.

(A) $P=3$. (B) $P=-5$. (C) $P=-1$. (D) $P=7$.

Lời giải.

$z=a+bi\Rightarrow|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ và $|z|=\sqrt{a^2+b^2}>1$.

Khi đó $z+1+2i-(1+i)|z|=0$

$\Rightarrow a+bi+1+2i-(1+i)\sqrt{a^2+b^2}=0$

$\Leftrightarrow a-\sqrt{a^2+b^2}+1+i\cdot(b-\sqrt{a^2+b^2}+2)=0+0i$

$\Rightarrow\begin{cases}a-\sqrt{a^2+b^2}+1=0\\ b-\sqrt{a^2+b^2}+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=a+1\\ \sqrt{a^2+b^2}=b+2\end{cases}\Rightarrow a+1=b+2\Rightarrow b=a-1.$

Thay $b=a-1$ vào phương trình $a-\sqrt{a^2+b^2}+1=0$ ta được

$a-\sqrt{a^2+(a-1)^2}+1=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{2a^2-2a+1}=a+1$

$\begin{cases} a+1 \geq 0 \\ 2a^2 - 2a + 1 = a^2 + 2a + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -1 \\ a^2 - 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 4 \end{array}\right.$.

Với $a = 0 \Rightarrow b = 0 - 1 = -1$. Khi đó $\sqrt{a^2+b^2} = 1$ không thỏa yêu cầu bài toán.

Với $a = 4 \Rightarrow b = 4 - 1 = 3$. Khi đó $\sqrt{a^2+b^2} = 5 > 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Suy ra $P = a + b = 4 + 3 = 7$.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 1 = 0$. Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là

A $\vec{n} = (1; -2; 1)$. **B** $\vec{n} = (-1; 2; 0)$. **C** $\vec{n} = (2; 1; 1)$. **D** $\vec{n} = (2; 1; 0)$.

Lời giải.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Tìm hệ số không chứa x trong khai triển $(x^3 - \dfrac{2}{x})^n$, biết n là số nguyên dương thỏa $C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 78$.

A -112640. **B** 112643. **C** -112643. **D** 112640.

Lời giải.

Ta có $C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 78 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(1!)(n-1)!} + \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = 78 \Rightarrow n = 12$.

Số hạng tổng quát $C_{12}^k (x^3)^{12-k} \left(-\dfrac{2}{x}\right)^k = C_{12}^k \cdot (-2)^k \cdot x^{36-4k}$.

Theo giả thiết $x^{36-4k} = x^0 \Leftrightarrow k = 9$.

Vậy hệ số cần tìm là $C_{12}^9 (-2)^9 = -112640$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 4z + 7 = 0$. Khi đó $|z_1|^2 + |z_2|^2$ bằng

A 7. **B** 10. **C** 14. **D** 21.

Lời giải.

Ta có$z^2 + 4z + 7 = 0 \Leftrightarrow z = -2 + i\sqrt{3} \vee z = -2 - i\sqrt{3}$ nên $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 14$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; 4)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (Oxy). Tọa độ điểm H là

A $H(2; 0; 4)$. **B** $H(0; -1; 4)$. **C** $H(2; -1; 0)$. **D** $H(0; -1; 0)$.

Lời giải.

Do chiếu xuống (Oxy) nên $z = 0$ và x, y giữ nguyên.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\log \sqrt{a} = 2\log a$.
B. $\log \dfrac{a}{b} = \log a - \log b$.
C. $\log \sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\log a$.
D. $\log \dfrac{b}{a} = \log b - \log a$.

Lời giải.

Áp dụng công thức logarit của một thường và logarit của một lũy thừa suy ra đáp án sai là $\log \sqrt{a} = 2\log a$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{2}{2x-1}$, $f(0) = 1$ và $f(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

A. $2 + \ln 15$.
B. $4 + \ln 15$.
C. $3 + \ln 15$.
D. $\ln 15$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \ln|2x-1| + C = \begin{cases} \ln(2x-1) + C_1 & \text{khi } x \geq \dfrac{1}{2} \\ \ln(1-2x) + C_2 & \text{khi } x < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Do $f(0) = 1$ và $f(1) = 2$ nên ta có $C_1 = 2$ và $C_2 = 1$.

Vậy $f(-1) + f(3) = 3 + \ln 3 + \ln 5 = 3 + \ln 15$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)| = |3x^2 - 6x + 2m - 1|$ trên đoạn $[-2; 3]$ là nhỏ nhất. Giá trị của m là

A. $\dfrac{27}{2}$.
B. 0.
C. $\dfrac{1}{2}$.
D. $-\dfrac{19}{4}$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 6x + 2m - 1$. $f'(x) = 6x - 6 = 0$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ta có bảng biến thiên

x	-2		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$2m+23$	$\searrow$	$2m-4$	$\nearrow$	$2m+8$

Suy ra $2m - 4 \leq f(x) \leq 2m + 23 \Rightarrow \max\limits_{[-2;3]} |f(x)| = \max\{|2m-4|; |2m+23|\}$.

- TH1: Nếu $|2m-4| \geq |2m+23| \Leftrightarrow m \leq -\dfrac{19}{4}$ thì $\max\limits_{[-2;3]} |f(x)| = |2m-4|$

  Do $m \leq -\dfrac{19}{4} \Rightarrow 2m \leq \dfrac{-19}{2} \Leftrightarrow 2m - 4 \leq -\dfrac{19}{2} - 4 = -\dfrac{27}{2} \Leftrightarrow |2m-4| \geq \dfrac{27}{2}$.

- TH2: Nếu $|2m-4| \leq |2m+23| \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{19}{4} \Rightarrow \max\limits_{[-2;3]}|f(x)| = |2m+23|$. Do $m \geq -\dfrac{19}{4} \Rightarrow$ $2m+23 \geq \dfrac{27}{2} \Leftrightarrow |2m+23| \geq \dfrac{27}{2}$.

$\Rightarrow \min\limits_{[-2;3]} = \dfrac{27}{2} \Leftrightarrow m = -\dfrac{19}{4}$

Chọn đáp án D □

Câu 50. Có 5 học sinh lớp A, 5 học sinh lớp B được xếp ngẫu nhiên vào hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy 5 ghế (xếp mỗi học sinh một ghế). Tính xác suất để xếp được 2 học sinh bất kì cạnh nhau và đối diện nhau khác lớp.

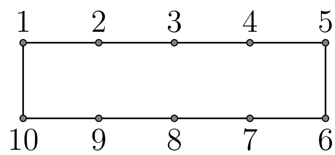
A $\dfrac{2(5!)^2}{10!}$. **B** $\dfrac{2^5(5!)^2}{10!}$. **C** $\dfrac{5!}{10!}$. **D** $\dfrac{(5!)^2}{10!}$.

Lời giải.

Ta đánh số các ghế như hình vẽ bên.

Không gian mẫu là $n(\Omega) = 10!$.

Có hai phương án xếp thỏa yêu cầu bài toán.



- Phương án 1: Ghế lẻ xếp học sinh lớp A, ghế chẵn xếp học sinh lớp B khi đó 2 học sinh ngồi cạnh hoặc đối diện nhau khác lớp có 5!5! cách.
- Phương án 2: Đảo lại ghế lẻ xếp học sinh lớp B, ghế chẵn xếp học sinh lớp A khi đó cũng có 5!5! cách.

Suy ra số tổng số các phương án thỏa mãn là 2(5!5!) cách.

Vậy xác suất là $P = \dfrac{2(5!5!)}{10!} = \dfrac{2(5!)^2}{10!}$.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. B	3. A	4. C	5. D	6. C	7. B	8. C	9. A	10. C
11. A	12. A	13. A	14. D	15. B	16. B	17. C	18. D	19. A	20. B
21. A	22. C	23. A	24. B	25. D	26. A	27. A	28. D	29. B	30. A
31. A	32. C	33. D	34. D	35. C	36. C	37. A	38. C	39. C	40. B
41. C	42. D	43. A	44. A	45. C	46. C	47. A	48. C	49. D	50. A

139 ĐỀ THI THỬ CỤM 5 TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHU VỰC ĐB SÔNG HỒNG 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$2 \searrow -\infty$		||	$+\infty \searrow$	2	$\nearrow +\infty$	

Hàm số nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

(A) $(-\infty; 2)$. **(B)** $(0; 2)$. (C) $(2; +\infty)$. (D) $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Hàm số nào sau đây là đạo hàm của hàm số $y = \log_2(x-1)$?

(A) $y' = \dfrac{1}{2(x-1)}$. **(B)** $y' = \dfrac{1}{(x-1)\ln 2}$. (C) $y' = \dfrac{\ln 2}{x-1}$. (D) $y' = \dfrac{1}{2(x-1)\ln 2}$.

Lời giải.

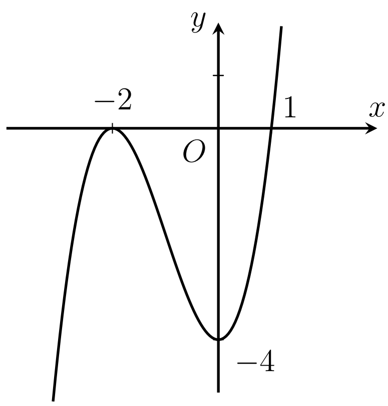
Đạo hàm của hàm số $y = \log_2(x-1)$ là $y' = \dfrac{1}{(x-1)\ln 2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x) = 1$.

(A) 2. **(B)** 1. (C) 0. (D) 3.



Lời giải.

Số nghiệm của phương trình $f(x) = 1$ là số giao điểm của đường thẳng $y = 1$ với đồ thị hàm số $y = f(x)$. Đường thẳng $y = 1$ qua điểm $(0; 1)$ song song với Ox nên cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại đúng 1 điểm. Do đó phương trình $f(x) = 1$ có đúng 1 nghiệm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-4z+1=0$. Đường thẳng (d) qua điểm A, song song với mặt phẳng (P), đồng thời cắt trục Oz. Viết phương trình tham số của đường thẳng (d).

(A) $\begin{cases} x=1+5t \\ y=2-6t \\ z=3+t \end{cases}$. **(B)** $\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=2+t \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+2t \\ z=3+t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+6t \\ z=3+t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi $B=d\cap Oz \Rightarrow B(0;0;b) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-1;-2;b-3)$.

Lại có $d \parallel (P)$ nên $\overrightarrow{AB}\perp \vec{n}_{(P)}=(2;1;-4)$. Do đó

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}_{(P)}=0 \Leftrightarrow -2-2-4b+12=0 \Leftrightarrow b=2.$$

Suy ra $\overrightarrow{AB}=(-1;-2-1)$. Do đó, (d) là đường thẳng qua $B(0;0;2)$ và nhận $\vec{u}=(1;2;1)$ làm véc-tơ chỉ phương. Nên (d) có phương trình $\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=2+t \end{cases}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Điểm nào sau đây không thuộc đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2-1$?

(A) $(-1;2)$. (B) $(2;7)$. (C) $(0;-1)$. (D) $(1;-2)$.

Lời giải.

Điểm $(-1;2)$ không thuộc đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2-1$ vì $y(-1)=-2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Cho hai số phức $z_1=2+3i$, $z_2=-4-5i$. Tính $z=z_1+z_2$.

(A) $z=-2-2i$. (B) $z=-2+2i$. (C) $z=2+2i$. (D) $z=2-2i$.

Lời giải.

$z=z_1+z_2=2+3i-4-5i=-2-2i$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

(A) $\displaystyle\int\frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{(x+1)^3}+C$. **(B)** $\displaystyle\int\frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{-1}{x+1}+C$.

(C) $\displaystyle\int\frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{x+1}+C$. (D) $\displaystyle\int\frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{-2}{(x+1)^3}+C$.

Lời giải.

$\displaystyle\int\frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}(x+1)=\frac{-1}{x+1}+C.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, I là trung điểm cạnh SC. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAD).

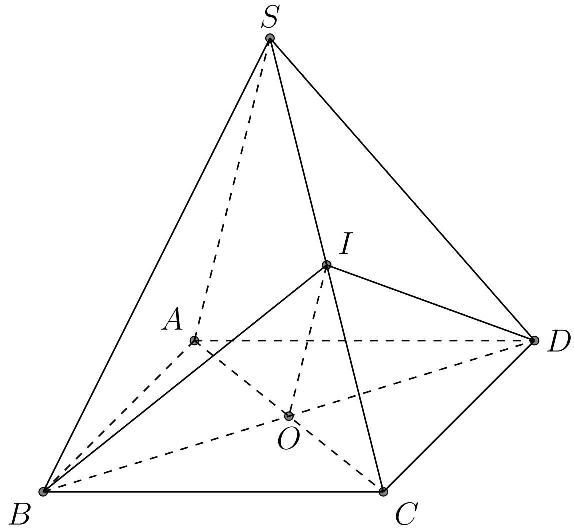
(B) Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo một thiết diện là một tứ giác.

(C) Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAB).

(D) Giao tuyến của hai mặt phẳng (IBD) và (SAC) là IO.

Lời giải.

Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tam giác IBD.



Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Gọi x_1 là điểm cực đại x_2 là điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$. Tính $x_1 + 2x_2$.

(A) 2. (B) 1. **(C) -1.** (D) 0.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 + 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vì y' đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x = -1$ và đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x = 1$ nên $x_2 = -1$ là điểm cực tiểu và $x_1 = 1$ là điểm cực đại của hàm số. Do đó $x_1 + 2x_2 = 1 - 2 = -1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc-tơ $\overrightarrow{u} = (x; 2; 1)$ và véc-tơ $\overrightarrow{v} = (1; -1; 2x)$. Tính tích vô hướng của $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$.

(A) $x + 2$. **(B) $3x - 2$.** (C) $3x + 2$. (D) $-2 - x$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x - 2 + 2x = 3x - 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 3}}{3x + 2}$.

(A) $-\dfrac{1}{3}$. (B) $\dfrac{2}{3}$. (C) $\dfrac{1}{3}$. (D) $-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 3}}{3x + 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{-2 + 1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Cho ba số a, b, c theo thứ tự tạo thành cấp số nhân với công bội khác 1. Biết cũng theo thứ tự đó chúng lần lượt là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng công sai là $s \neq 0$. Tính $\dfrac{a}{s}$.

(A) $\frac{4}{9}$. (B) $\frac{4}{3}$. (C) 3. (D) 9.

Lời giải.

Rõ ràng $a \neq 0$. Vì s là công sai cấp số cộng nên a, $a+3s$, $a+7s$ lập thành cấp số nhân, do đó

$$a(a+7s) = (a+3s)^2 \Leftrightarrow 9s^2 - as = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} s = 0 & \text{(loại)} \\ a = 9s \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{a}{s} = 9.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Tìm các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{9x^2+6x+4}}{x+2}$.

(A) $x = -2$ và $y = 3$. (B) $x = -2$ và $y = -3$.
(C) $x = 2$ và $y = 3$. (D) $x = -2$ và $y = 3$, $y = -3$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \pm 3$ và $\lim\limits_{x\to -2^{\pm}} y = \pm\infty$ nên đồ thị có hai đường tiệm cận ngang $y = \pm 3$ và một đường tiệm cận đứng $x = -2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Tìm hệ số x^7 khi khai triển $P(x) = (1+x)^{20}$.

(A) A_{20}^7. (B) P_7. (C) C_{20}^7. (D) A_{20}^{13}.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển là $\mathrm{C}_{20}^k x^k$. Do đó hệ số của x^7 là C_{20}^7.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$ và $u(x) \in [\alpha;\beta]$, $\forall x \in [a;b]$, hơn nữa $f(u)$ liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\displaystyle\int_a^b f(u(x))\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$.

(B) $\displaystyle\int_{u(a)}^{u(b)} f(u(x))\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$.

(C) $\displaystyle\int_a^b f(u(x))\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$.

(D) $\displaystyle\int_a^b f(u(x))\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}u$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_a^b f(u(x))\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Tìm nghiệm thực của phương trình $2^x = 7$.

(A) $x = \sqrt{7}$. (B) $x = \frac{7}{2}$. (C) $x = \log_2 7$. (D) $x = \log_7 2$.

Lời giải.

Ta có $2^x = 7 \Leftrightarrow x = \log_2 7$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; -1; 1)$. Véc-tơ nào sau đây cũng là véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A $(4; -2; 2)$. **B** $(-4; 2; 3)$. **C** $(4; 2; -2)$. **D** $(-2; 1; 1)$.

Lời giải.

Véc-tơ $2\vec{n} = (4; -2; 2)$ cũng là véc-tơ pháp tuyến của (P).

Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho số tự nhiên n thỏa mãn $\mathrm{C}_n^2 + \mathrm{A}_n^2 = 9n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A n chia hết cho 7. **B** n chia hết cho 5. **C** n chia hết cho 2. **D** n chia hết cho 3.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{C}_n^2 + \mathrm{A}_n^2 = 9n \Leftrightarrow n = 7$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\,\mathrm{d}x$.

A $I = \frac{\pi}{4}$. **B** $I = -1$. **C** $I = 0$. **D** $I = 1$.

Lời giải.

Ta có $I = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$ là $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Tính $a + \sqrt{3}b$.

A -2. **B** 1. **C** 2. **D** -1.

Lời giải.

Ta có phương trình tương đương $\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right.$.

Do phần ảo của z dương nên $a = \frac{1}{2}$ và $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Do đó $a + \sqrt{3}b = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có bao nhiêu mặt phẳng song song với mặt phẳng $(Q)\colon x + y + z + 3 = 0$, cách điểm $M(3; 2; 1)$ một khoảng bằng $3\sqrt{3}$ biết rằng tồn tại một điểm $X(a; b; c)$ trên mặt phẳng đó thỏa mãn $a + b + c < -2$?

A 1. **B** Vô số. **C** 2. **D** 0.

Lời giải.

Mặt phẳng song song với (Q) có dạng $(P)\colon x + y + z + m = 0$ $(m \neq 3)$ mà

$$\mathrm{d}(M, (P)) = \frac{|3 + 2 + 1 + m|}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m = 3 & \text{(loại)} \\ m = -15. & \end{array}\right.$$

Với $m = -15$ thì với mọi $X(a; b; c) \in (P)$ ta có $a + b + c - 15 = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 15 > -2$. Do đó không có mặt phẳng nào thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua trục ta được thiết diện là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{6}$. Tính thể tích V của khối nón đó.

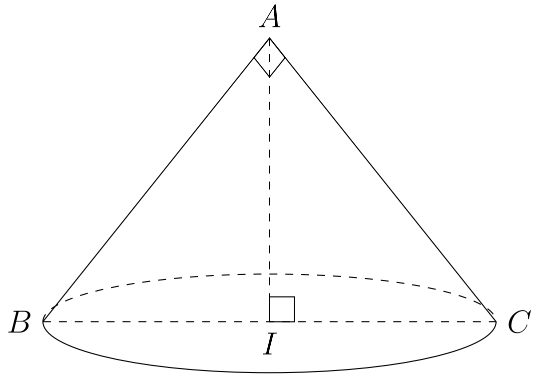
A $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$. **B** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{2}$. **C** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{6}$. **D** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Giả sử thiết diện qua là $\triangle ABC$ vuông cân tại A và $BC = a\sqrt{6}$. Khi đó đường cao AI đồng thời là trung tuyến, do đó $AI = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích đáy hình nón là $S = \pi \cdot IB^2 = \dfrac{3a^2\pi}{2}$.

Vậy thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3} \cdot AI \cdot S = \dfrac{\pi \cdot a^3\sqrt{6}}{4}$.



Chọn đáp án A □

Câu 23. Cho a, b là hai số thực khác 0. Biết $\left(\dfrac{1}{125}\right)^{a^2+4ab} = \left(\sqrt[3]{625}\right)^{3a^2-10ab}$. Tính tỉ số $\dfrac{a}{b}$.

A $\dfrac{76}{21}$. **B** 2. **C** $\dfrac{4}{21}$. **D** $\dfrac{76}{3}$.

Lời giải.

Đẳng thức tương đương với

$$-3\left(a^2+4ab\right) = \frac{4}{3} \cdot \left(3a^2 - 10ab\right) \Leftrightarrow -21a = -4b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{21}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 24. Trong tất cả các loại hình đa diện đều sau đây, hình nào có số mặt nhiều nhất?

A Loại $\{3;4\}$. **B** Loại $\{5;3\}$. **C** Loại $\{4;3\}$. **D** Loại $\{3;5\}$.

Lời giải.

Hình đa diện đều loại $\{3;5\}$ có 20 mặt, là hình đa diện đều có số mặt nhiều nhất.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình chính tắc của mặt cầu có đường kính AB với $A(2;1;0)$, $B(0;1;2)$.

A $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$. **B** $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 2$.

C $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 4$. **D** $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2$.

Lời giải.

Tâm mặt cầu là trung điểm AB là $I(1;1;1)$, bán kính mặt cầu là R, ta có $R^2 = IA^2 = 1+0+1 = 2$.

Do đó phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Cho $f(x) = \dfrac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $x \cdot f'(x)$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Biết $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ và $\tan\alpha = 3$. Tính $F(\alpha) - 10\alpha^2 + 3\alpha$.

A $-\dfrac{1}{2}\ln 10$. **B** $-\dfrac{1}{4}\ln 10$. **C** $\dfrac{1}{2}\ln 10$. **D** $\ln 10$.

Lời giải.

Theo công thức tích phân từng phần ta có

$$\int x\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = x\cdot f(x) - \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cũng theo công thức tích phân từng phần lại có

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int x\cdot(\tan x)'\,\mathrm{d}x = x\cdot\tan x - \int \tan x\,\mathrm{d}x = x\cdot\tan x + \ln|\cos x| + C.$$

Do đó

$$F(x) = \int x\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = x\cdot f(x) - x\cdot\tan x - \ln|\cos x| + C.$$

Mà $F(0)=0$ nên $F(x) = x\cdot f(x) - x\cdot\tan x - \ln|\cos x|$. Lại có $\tan\alpha = 3$ nên $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 10$. Từ đó $F(\alpha) - 10\alpha^2 + 3\alpha = -\ln\dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{1}{2}\ln 10$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Cho $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{-x}}$, $n\in\mathbb{N}$. Đặt $u_n = 1(I_1+I_2) + 2(I_2+I_3) + \cdots + n(I_n+I_{n+1}) - n$. Biết $\lim u_n = L$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A $L\in(-1;0)$. **B** $L\in(-2;-1)$. **C** $L\in(0;1)$. **D** $L\in(1;2)$.

Lời giải.

Ta có

$$I_n + I_{n-1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}+\mathrm{e}^{-(n-1)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-(n-1)x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n-1}\mathrm{e}^{-(n-1)x}\Big|_0^1 = -\frac{1}{n-1}\left(\mathrm{e}^{-(n-1)}-1\right).$$

Do đó $(n-1)(I_{n-1}+I_n) = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{n-1}}$. Suy ra

$$u_n = -\left[\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n + \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n-1} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{e}}\right].$$

Nên $-u_n = \dfrac{\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{\mathrm{e}}-1} - 1$ và $\lim u_n = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}}$. Vậy $L\in(-1;0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{3}$; $d_2\colon \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = m \end{cases}$. Gọi S là tập hợp tất cả các số m sao cho d_1, d_2 chéo nhau và khoảng cách giữa chúng bằng $\dfrac{5}{\sqrt{19}}$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A -11. **B** 12. **C** -12. **D** 11.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của d_1, d_2 là $\overrightarrow{u}_1 = (2;1;3)$, $\overrightarrow{u}_2 = (1;1;0)$. Khi đó $\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2] = (-3;3;1)$.
Gọi (P) là mặt phẳng chứa d_1 song song với d_2. Tức là, (P) qua $A(1;0;0)$ và nhận $\overrightarrow{n}$ làm véc-tơ

pháp tuyến. Ta có phương trình $(P)\colon 3x - 3y - z - 3 = 0$.
Xét điểm $B(1;2;m) \in d_2$. Do d_1, d_2 chéo nhau nên $B \notin (P) \Leftrightarrow m \neq -6$. Lại có

$$\mathrm{d}(d_1, d_2) = \frac{5}{\sqrt{19}} \Leftrightarrow \mathrm{d}(B,(P)) = \frac{5}{\sqrt{19}} \Leftrightarrow \frac{|3-6-m-3|}{\sqrt{19}} = \frac{5}{\sqrt{19}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-11. \end{array}\right.$$

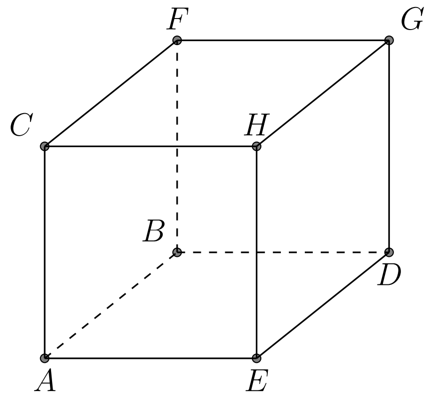
Vậy tổng các phần tử của S là $-1-11=-12$.
Chọn đáp án C □

Câu 29. Cho hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến Δ. Trên đường Δ lấy hai điểm A, B với $AB = a$. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C và trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và $AC = BD = AB$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $a\sqrt{3}$. D. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Dựng hình bình hành $ABDE$, $AEHC$, $ACFB$, $CFGH$ như hình vẽ ta được $ABDE$ và $ACBF$ là hình vuông. Do $(P) \perp (Q)$ nên $ACHE$ là hình vuông. Do đó ta được hình lập phương $ABDE.ACFG$.
Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ chính là bán kinh mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương và bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án B □

Câu 30. Có bao nhiêu số nguyên dương n sao cho

$$S = 2 + \left(\mathrm{C}_1^0 + \mathrm{C}_2^0 + \cdots + \mathrm{C}_n^0\right) + \left(\mathrm{C}_1^1 + \mathrm{C}_2^1 + \cdots + \mathrm{C}_n^1\right) + \cdots + \left(\mathrm{C}_{n-1}^{n-1} + \mathrm{C}_n^{n-1}\right) + \mathrm{C}_n^n$$

là một số có 1000 chữ số?

A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{C}_k^0 + \mathrm{C}_k^1 + \cdots + \mathrm{C}_k^k = (1+1)^k = 2^k$. Do đó

$$S = 1 + \left(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n\right) = 2^{n+1}.$$

S có 1000 chữ số khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} 10^{999} < S < 10^{1000} &\Leftrightarrow 999 \cdot \log_2 10 < n+1 < 1000 \cdot \log_2 10 \\ &\Rightarrow 3319 \leq n+1 \leq 3321 \Leftrightarrow 3318 \leq n \leq 3320. \end{aligned}$$

Vậy có ba số nguyên dương n thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho số thực $a>0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $f(x)\cdot f(a-x)=1$, $\forall x\in[0;a]$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^a \frac{1}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ $I=\dfrac{2a}{3}$. **B** $I=\dfrac{a}{2}$. Ⓒ $I=a$. Ⓓ $I=\dfrac{a}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t=a-x$ thì

$$I=-\int\limits_a^0 \frac{1}{1+f(a-t)}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^a \frac{1}{1+\frac{1}{f(t)}}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^a \frac{f(t)}{1+f(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Từ đó ta có $I+I=\displaystyle\int\limits_0^a \mathrm{d}x=a$. Do đó $I=\dfrac{a}{2}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 32. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+1-i|=2$ và $z_2=iz_1$. Tìm giá trị lớn nhất m của biểu thức $P=|z_1-z_2|$.

A $m=2\sqrt{2}+2$. Ⓑ $m=\sqrt{2}+1$. Ⓒ $m=2\sqrt{2}$. Ⓓ $m=2$.

Lời giải.

Ta có $|z_1-z_2|=|z_1-iz_1|=|1-i|\cdot|z_1|=\sqrt{2}|z_1|$. Do đó P lớn nhất khi và chỉ khi $|z_1|$ lớn nhất. Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z_1. Ta có

$$|z_1+1-i|=2\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2=4.$$

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn tâm $I(-1;1)$, bán kính $R=2$.

z_1 lớn nhất khi OM lớn nhất $\Rightarrow M\in OI\cap(I,R)$.

Đường thẳng OI là $y=-x$. Do đó $OI\cap(I,R)=\{A(\sqrt{2}-1;1-\sqrt{2});B(-\sqrt{2}-1;\sqrt{2}+1)\}$.

Mà $OA=2-\sqrt{2}$, $OB=2+\sqrt{2}$.

Nên $\max OM=OB=2+\sqrt{2}$ khi $M\equiv B\Leftrightarrow z_1=-\sqrt{2}-1+(\sqrt{2}+1)i$. Vậy $\max P=m=2+2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 33. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}\right|$.

Ⓐ $\sqrt{2}-1$. Ⓑ $2\sqrt{2}+1$. Ⓒ $\sqrt{2}+1$. **D** $2\sqrt{2}-1$.

Lời giải.

Đặt $t=\sin x+\cos x$, $t\in[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$ và $\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$. Ta có

$$\begin{aligned} y &= \left|\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\right| \\ &= \left|\frac{(\sin x+\cos x)\sin x\cos x+1+\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}\right| \\ &= \left|t-1+\frac{2}{t-1}+1\right|. \end{aligned}$$

Với $t-1>0$ áp dụng BĐT Cô-si (AM-GM) ta có $y\geq 2\sqrt{2}+1$.

Với $t-1<0$ áp dụng BĐT Cô-si ta có $1-t+\dfrac{2}{1-t}\geq 2\sqrt{2}$ nên $y\leq 1-2\sqrt{2}$.

Từ đó $y \geq 2\sqrt{2} - 1$.

Đẳng thức xảy ra khi $t = 1 - 2\sqrt{2}$, hay $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ nên tồn tại x.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - |m|x + 4}{x - |m|}$. Biết rằng đồ thị hàm số có hai điểm cực trị phân biệt là A, B. Tìm số giá trị của m sao cho ba điểm A, B, $C(4;2)$ phân biệt và thẳng hàng.

A 0. B 2. C 1. D 3.

Lời giải.

Ta có $y' = 1 - \dfrac{4}{(x-|m|)^2}$. Nên đồ thị hàm số luôn có hai điểm cực trị.

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $d\colon y = 2x - |m|$.

Vì A, B, C thẳng hàng nên $2 = 8 - |m| \Leftrightarrow |m| = 6$.

Nhưng khi $|m| = 6$ thì $C(4;2)$ là một trong hai điểm cực trị, do đó không có giá trị nào của m thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = 4\sqrt{x^2 - 2x + 3} + 2x - x^2$. Tính tích các nghiệm của phương trình $f(x) = M$.

A 2. B 0. C -1. D 1.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ thì $t \in \left[\sqrt{2}; +\infty\right)$. Khi đó $f(x) = g(t) = -t^2 + 4t + 3$ và $\max f(x) = \max\limits_{\left[\sqrt{2};+\infty\right)} g(t)$.

Lại có đồ thị hàm số $g(t)$ là một Parabol bề lõm hướng xuống dưới, có đỉnh là $I(2; g(2))$, $2 \in \left[\sqrt{2}; +\infty\right)$ nên $\max_{\left[\sqrt{2};+\infty\right)} g(t) = g(2)$. Do đó

$$f(x) = M \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 3} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0.$$

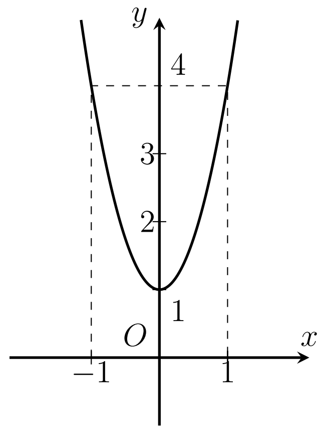
Tích hai nghiệm của phương trình là -1.

Chọn đáp án C □

Câu 36.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có đồ thị là (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính $H = f(4) - f(2)$.

A $H = 58$. B $H = 51$. C $H = 45$. D $H = 64$.



Lời giải.

Vì đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ nên $d = 0$.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ có đồ thị là Parabol (P). Từ đồ thị suy ra $(0;1) \in (P)$ nên $c = 1$,

lại có $(0;1)$ đồng thời là điểm cực trị của (P) nên $b=0$.
Đồ thị (P) đi qua $(1;4)$ nên ta có $3a+1=4 \Leftrightarrow a=1$.
Do đó $f(x)=x^3+x$. Vậy $H=f(4)-f(2)=68-10=58$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Trước kì thi học kì hai lớp 11 tại trường FIVE, giáo viên Toán lớp FIVE A giao cho học sinh đề cương ôn tập gồm có $2n$ bài toán, n là số nguyên dương lớn hơn 1. Đề thi học kì của lớp FIVE A sẽ gồm 3 bài toán được chọn ngẫu nhiên trong số $2n$ bài toán đó. Một học sinh muốn không phải thi lại, sẽ phải làm được ít nhất 2 trong số 3 bài toán đó. Học sinh TWO chỉ giải chính xác được đúng 1 nửa số bài trong đề cương trước khi đi thi, nửa còn lại học sinh đó không thể giải được. Tính xác suất để TWO không phải thi lại.

A $\dfrac{1}{2}$. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{2}{3}$. (D) $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.
Gọi B là biến cố "Học sinh TWO làm đúng 2 trong 3 bài toán thi".
Gọi C là biến cố "Học sinh TWO làm đúng cả 3 bài toán thi".
Gọi A là biến cố " Học sinh TWO không phải thi lại".
Ta có $A=B\cup C$ và B,C là hai biến cố xung khắc.
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=\mathrm{C}_{2n}^3$.

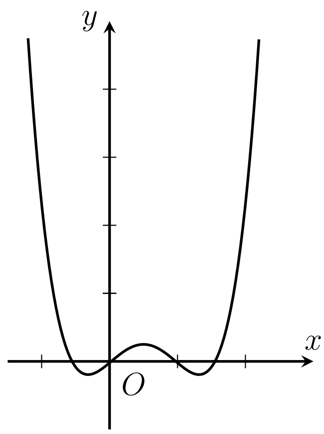
- Xét biến cố B.
  - ⊞ Chọn 2 bài trong n bài học sinh TWO làm được là C_n^2.
  - ⊞ Chọn 1 bài trong n bài học sinh TWO làm được là C_n^1.

  Từ đó suy ra $P(B)=\dfrac{\mathrm{C}_n^2\cdot \mathrm{C}_n^1}{\mathrm{C}_{2n}^3}$.
- Tương tự với biến cố C ta được $P(C)=\dfrac{\mathrm{C}_n^3}{\mathrm{C}_{2n}^3}$.

Vậy $P(A)=P(B)+P(C)=\dfrac{1}{2}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 38.
Biết rằng đồ thị hàm số bậc bốn $y=f(x)$ được cho như hình vẽ bên. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=g(x)=[f'(x)]^2-f(x)\cdot f"(x)$ và trục Ox.

(A) 4. (B) 6. (C) 2. **D** 0.



Lời giải.
Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=g(x)=[f'(x)]^2-f(x)\cdot f''(x)$ và trục Ox chính là số nghiệm của phương trình $[f'(x)]^2-f(x)\cdot f''(x)=0$. $(*)$
Từ hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ x_1,

x_2, x_3, x_4 $(x_1 < x_2 < x_3 < x_4)$. Do đó ta có phân tích $f(x) = a(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)$ $(a > 0)$.

Ta có $f'(x) = \left(\dfrac{1}{x-x_1} + \dfrac{1}{x-x_2} + \dfrac{1}{x-x_3} + \dfrac{1}{x-x_4}\right)\cdot f(x)$, $\forall x \neq x_i$ và $f'(x_i) \neq 0$, $\forall i = \overline{1,4}$.

Khi đó $\forall x \neq x_i$, $i = \overline{1,4}$ ta có

$$\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]' = \frac{f(x)\cdot f"(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)} = -\frac{1}{(x-x_1)^2} - \frac{1}{(x-x_2)^2} - \frac{1}{(x-x_3)^2} - \frac{1}{(x-x_4)^2} < 0.$$

Suy ra $f(x)\cdot f"(x) - [f'(x)]^2 < 0$, $\forall x \neq x_i$, $i = \overline{1,4}$. (1)

Mặt khác $\forall x = x_i$, $x_i = \overline{1,4}$ ta có $f(x) = 0$, $f'(x) \neq 0$ nên $f(x)\cdot f"(x) - [f'(x)]^2 < 0$. (2)

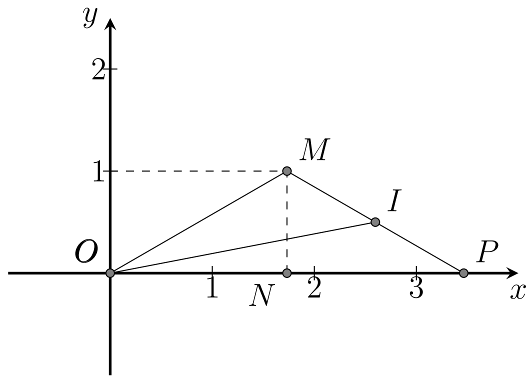
Từ (1) và (2) suy ra phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 2$, $|z_2| = \sqrt{3}$. Gọi M, N là các điểm biểu diễn cho z_1 và iz_2. Biết $\widehat{MON} = 30^\circ$. Tính $S = |z_1^2 + 4z_2^2|$.

A. $5\sqrt{2}$. B. $3\sqrt{3}$. C. $4\sqrt{7}$. D. $\sqrt{5}$.

Lời giải.



Ta có $S = |z_1^2 + 4z_2^2| = |z_1^2 - (2iz_2)^2| = |z_1 - 2iz_2|\cdot|z_1 + 2iz_2|$.

Gọi P là điểm biểu diễn của số phức $2iz_2$. Khi đó ta có

$$|z_1 - 2iz_2|\cdot|z_1 + 2iz_2| = \left|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}\right| = \left|\overrightarrow{PM}\right|\cdot\left|2\overrightarrow{OI}\right| = 2PM\cdot OI.$$

Vì $\widehat{MON} = 30^\circ$ nên áp dụng định lí côsin cho $\triangle OMN$ với $OM = 2$, $ON = \sqrt{3}$ ta có

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2OM\cdot ON\cos\widehat{MON} = 4 + 3 - 4\sqrt{3}\cdot\cos 30^\circ = 1 \Rightarrow MN = 1.$$

Khi đó theo Pitago ta có $\triangle OMN$ vuông tại N. Khi đó $\triangle OMP$ có MN là đường cao đồng thời là trung tuyến, tức là $\triangle OMP$ cân tại $M \Rightarrow PM = OM = 2$.

Áp dụng định lý đường trung tuyến cho $\triangle OMN$ ta có $OI^2 = \dfrac{OM^2 + OP^2}{2} - \dfrac{MP^2}{4} = 7$.

Vậy $S = 2\cdot PM\cdot OI = 4\sqrt{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Từ các chữ số $\{0;1;2;3;4;5;6\}$ viết ngẫu nhiên một số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Tính xác suất để viết được số thỏa mãn điều kiện $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6$.

(A) $P = \dfrac{4}{85}$. (B) $P = \dfrac{4}{135}$. (C) $P = \dfrac{3}{20}$. (D) $P = \dfrac{5}{158}$.

Lời giải.

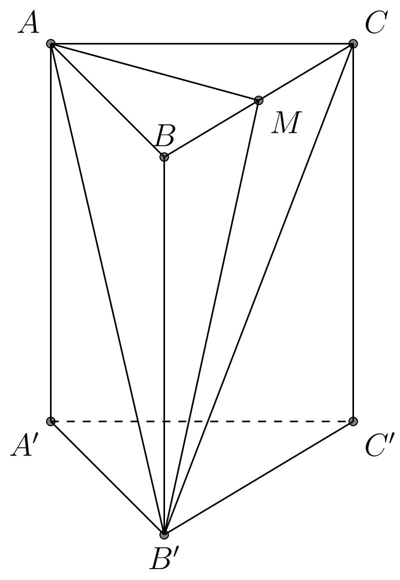
- Số các số gồm 6 chữ số khác nhau từ tập hợp $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:
  Chọn $a_1 \neq 0$ có 6 cách, sắp xếp các số còn lại có A_6^5 cách nên có tổng số $6 \cdot A_6^5 = 4320$ số.
- Số các số thỏa mãn điều kiện $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6$:
  Ta có $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 3(a_1 + a_2)$ là số chia hết cho 3.
  Mà $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ là số chia hết cho 3 nên chữ số không xuất hiện trong số được lập phải là số chia hết cho 3.

Trường hợp 1: Chữ số 0 không có mặt trong số được lập.
Ta có $\{a_1, a_2, \ldots, a_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Khi đó $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = 7$ nên $\{\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}, \{a_5, a_6\}\} = \{\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}$.
Có 3! cách xếp các cặp $\{1, 6\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$ vào các vị trí của các cặp $\{a_1, a_2\}$, $\{a_3, a_4\}$, $\{a_5, a_6\}$, trong mỗi cặp vị trí lại có 2 cách xếp nên có $3! \cdot 2^3 = 48$ số.
Trường hợp 2: Chữ số 3 không có mặt trong số được lập.
Ta có $\{a_1; a_2; \ldots, a_6\} = \{0; 1; 2; 4; 5; 6\}$.
Khi đó $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = 6$ nên $\{\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}, \{a_5, a_6\} = \{\{0, 6\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}\}$.
Tương tự như trên nếu coi chữ số 0 như các chữ số khác, ta có 48 cách.
Nhưng cần loại các số có số 0 đứng đầu, có dạng $\overline{06a_3a_4a_5a_6}$. Lý luận tương tự, có $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ số như thế.
Suy ra trường hợp này, ta có $48 - 8 = 40$ số.
Trường hợp 3: Chữ số 6 không có mặt trong số được lập. Ta có $\{a_1; a_2; \ldots; a_6\} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.
Tương tự như trường hợp 2, ta có $48 - 8 = 40$ số.
Vậy có $48 + 40 + 40 = 128$ số thỏa mãn điều kiện $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6$.
Xác suất cần tìm là $p = \dfrac{128}{4320} = \dfrac{4}{135}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh $BC = a\sqrt{6}$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $60°$. Tính thể tích V của khối đa diện $AB'CA'C'$.

(A) $a^3\sqrt{3}$. (B) $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm BC thì $AM \perp (BCC'B')$ nên $\triangle MB'C$ là hình chiếu của $\triangle AB'C$ trên $(BCC'B')$. Đặt $AA' = x$ ta có

$$S_{MB'C} = \frac{1}{4} \cdot x \cdot BC = \frac{ax\sqrt{6}}{4}.$$

Ta có $AB' = \sqrt{x^2 + 3a^2}$, $AC = a\sqrt{3}$. Mà $AC \perp (ABB'A')$ nên $AC \perp AB'$ nên

$$S_{AB'C} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 + 3a^2}.$$

Lại có $\frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \frac{S_{MB'C}}{S_{AB'C}} = \frac{x\sqrt{2}}{2\sqrt{x^2 + 3a^2}} \Rightarrow x = a\sqrt{3}$.

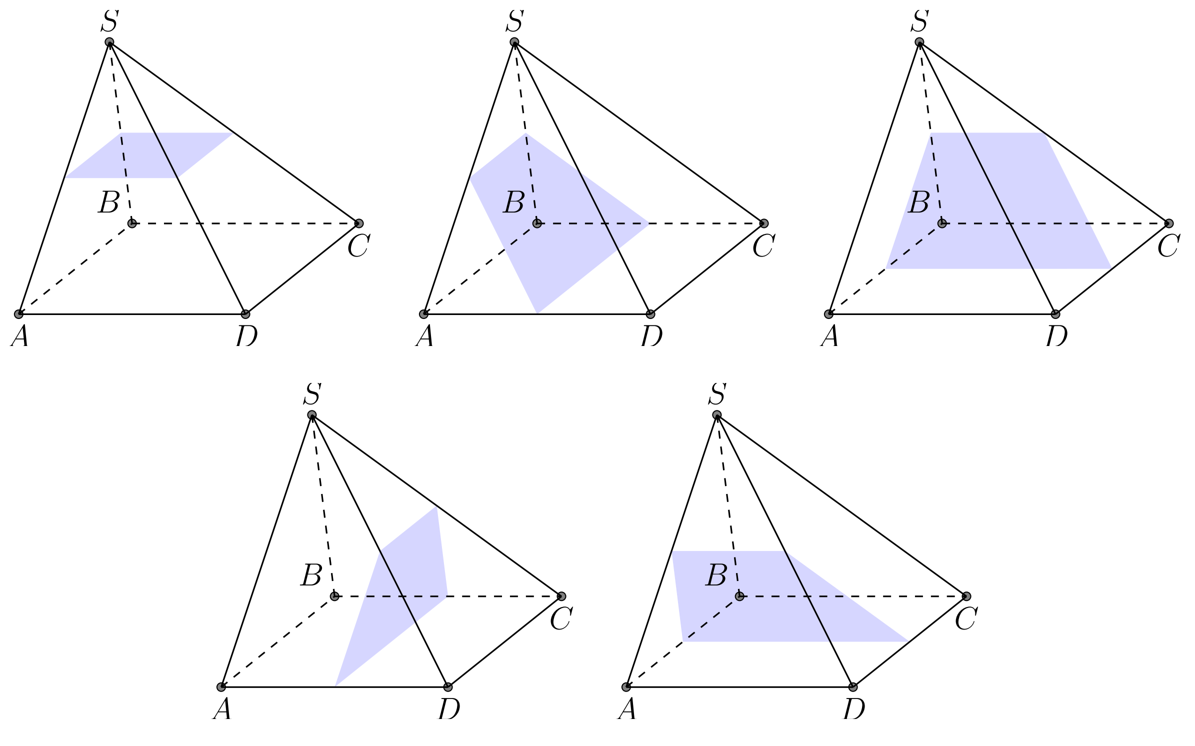
Từ đó thể tích khối lăng trụ đã cho là $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$ nên thể tích đa diện cần tính bằng $\frac{2}{3}V = a^3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Dựng mặt phẳng (P) cách đều năm điểm A, B, C, D và S. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng (P) như vậy?

(A) 4 mặt phẳng. (B) 2 mặt phẳng. (C) 1 mặt phẳng. **(D) 5 mặt phẳng.**

Lời giải.



Chọn đáp án (D) □

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua gốc tọa độ O và điểm $I(0; 1; 1)$. Gọi S là tập hợp các điểm nằm trên mặt phẳng (Oxy), cách đường thẳng Δ một khoảng bằng 6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi S.

(A) 36π. **(B) $36\sqrt{2}\pi$.** (C) $18\sqrt{2}\pi$. (D) 18π.

Lời giải.

Đường thẳng Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (0;1;1)$ và đi qua gốc tọa độ $O(0;0;0)$.

Gọi $M(a;b;0)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy), cách Δ một khoảng bằng 6.

Ta có

$$\mathrm{d}(M,\Delta) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{OM}, \vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{2a^2+b^2}}{\sqrt{2}} = 6 \Leftrightarrow 2a^2+b^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{a^2}{36} + \frac{b^2}{72} = 1.$$

Như vậy tập hợp điểm M là Elíp (E) trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), có phương trình $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{72} = 1$, nên có các trục lần lượt bằng 6 và $6\sqrt{2}$ có diện tích bằng $\pi \cdot 6 \cdot 6\sqrt{2} = 36\sqrt{2}\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho bất phương trình $m \cdot 3^{x+1} + (3m+2) \cdot \left(4-\sqrt{7}\right)^x + \left(4+\sqrt{7}\right)^x > 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty;0)$

A. $m > \frac{2+2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $m > \frac{2-2\sqrt{3}}{3}$. C. $m \geq \frac{2-2\sqrt{3}}{3}$. D. $m \geq -\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$m \cdot 3^{x+1} + (3m+2) \cdot \left(\frac{9}{4+\sqrt{7}}\right)^x + \left(4+\sqrt{7}\right)^x > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x\right]^2 + 3m \cdot \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x + 3m + 2 > 0.$$

Đặt $t = \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x$, $t \in (0;1)$. Ta được

$$t^2 + 3mt + 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow f(t) = \frac{t^2+2}{t+1} > -3m, t \in (0;1). \qquad (2)$$

Ta có $f'(t) = \frac{t^2+2t-2}{(t+1)^2}$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{3}-1$. Bảng biến thiên

t	0		$\sqrt{3}-1$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	2	$\searrow$	$-2+2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

Để thỏa mãn đề bài thì (2) phải đúng với mọi $t \in (0;1)$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $-3m < -2+2\sqrt{3} \Leftrightarrow m > \frac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$, $x=a$, với $a\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{1}{2}\left(-3+4\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$. Hỏi số a thuộc khoảng nào sau đây?

A $\left(\frac{7}{10};1\right)$. **B** $\left(\frac{51}{50};\frac{11}{10}\right)$. **C** $\left(\frac{11}{10};\frac{3}{2}\right)$. **D** $\left(1;\frac{51}{50}\right)$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$, $x=a$ là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a |\sin x-\cos x|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\sin x-\cos x|\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^a |\sin x-\cos x|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{4}}^a (\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\sqrt{2}-1-\cos a-\sin a. \end{aligned}$$

Theo bài ra ta có

$$\left(-3+4\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=-2+4\sqrt{2}-2\cos a-2\sin a \Leftrightarrow \sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\sin\frac{5\pi}{12}.$$

$\Rightarrow a+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}\Leftrightarrow a=\frac{\pi}{3}\approx 1{,}047\Rightarrow a\in\left(\frac{51}{10};\frac{11}{10}\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$. Biết rằng (ABC) đi qua điểm $M\left(\frac{1}{7};\frac{2}{7};\frac{3}{7}\right)$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{72}{7}$. Tính $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

A 14. **B** $\frac{1}{7}$. **C** 7. **D** $\frac{7}{2}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (ABC) có phương trình $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Ta có $M\left(\frac{1}{7};\frac{2}{7};\frac{3}{7}\right)\in(ABC)$ nên $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=7$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{\frac{72}{7}}$. Mà (ABC) tiếp xúc với (S) nên

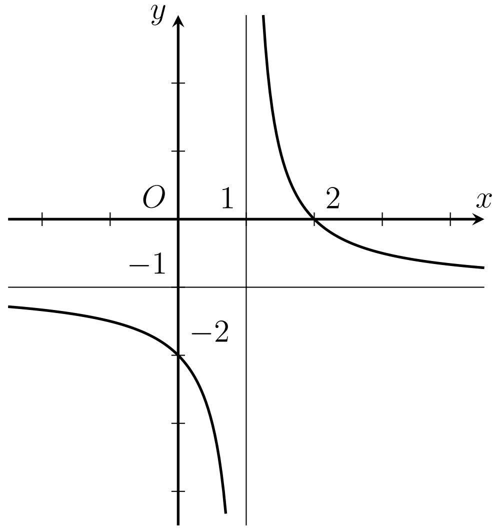
$$\mathrm{d}(I,(ABC))=R\Leftrightarrow \frac{\left|\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\sqrt{\frac{72}{7}}\Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{7}{2}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 47.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ, với a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = a - 3b + 2c$.

(A) $T = 12$. **(B)** $T = -7$. **(C)** $T = 10$. **(D)** $T = -9$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(2; 0)$ nên $2a + b = 0$.

Đồ thị nhận đường thẳng $x = 1$ làm tiệm cận đứng nên $c = -1$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; -2)$ nên $\dfrac{b}{c} = -2$ suy ra $b = 2$, $a = -1$.

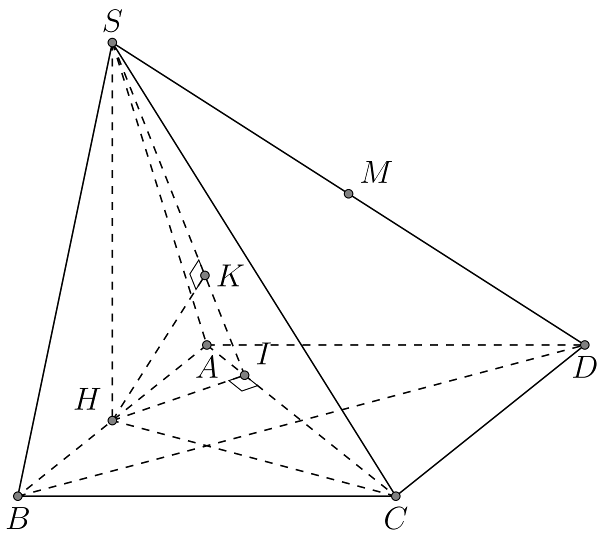
Vậy $a - 3b + 2c = -9$

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. $\triangle SAB$ cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°. Gọi M là trung điểm của SD. Tính theo a khoảng cách d từ điểm M đến mặt phẳng (SAC).

(A) $\mathrm{d} = \dfrac{2a\sqrt{1513}}{89}$. **(B)** $\mathrm{d} = \dfrac{2a\sqrt{1315}}{89}$. **(C)** $\mathrm{d} = \dfrac{a\sqrt{1315}}{89}$. **(D)** $\mathrm{d} = \dfrac{a\sqrt{1513}}{89}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AB. Vì $\triangle SAB$ cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên $SH \perp (ABCD)$.

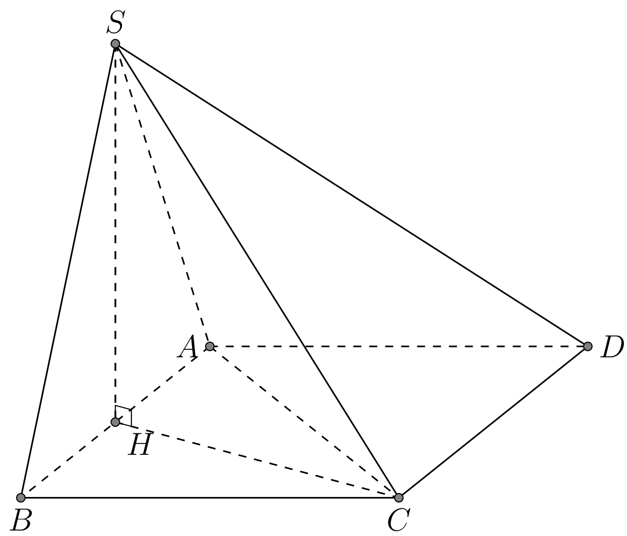
Lại thấy $V_{H.SAC} = V_{M.SAC} = \dfrac{1}{4} V_{S.ABCD}$ nên $\mathrm{d}(M, (SAC)) = \mathrm{d}(H, (SAC))$.

Kẻ $HI \perp AC$, $HK \perp SI$, khi đó $\mathrm{d}(H,(SAC)) = HK$.
Lại có $(SC,(ABCD)) = 45^\circ$ nên $\widehat{SCH} = 45^\circ$ và $\triangle SHC$ vuông cân tại H.
Mà $HC = \sqrt{BC^2 + BH^2} = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$, do đó $SH = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$.
Mặt khác, $HI = \dfrac{1}{2}d(B, AC) = \dfrac{BA \cdot BC}{\sqrt{BA^2 + BC^2}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. Suy ra $HK = \dfrac{HS \cdot HI}{\sqrt{HS^2 + HI^2}} = \dfrac{a\sqrt{1513}}{89}$.
Chọn đáp án D □

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $BC = a$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S lên mặt phẳng đáy là trung điểm của AB, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 60°. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SB và AC.

A $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$. **B** $\dfrac{2}{\sqrt{35}}$. **C** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **D** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$.

Lời giải.



Ta có góc giữa SC và đáy là $\widehat{SCH} = 60^\circ$. Nên
$HC = \sqrt{HB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$,
$SH = HC \cdot \tan \widehat{SCH} = a\sqrt{6}$.
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{5}$,
$SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = a\sqrt{7}$.
Ta có

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HB}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC} = HB \cdot AC \cdot \frac{AB}{AC} = 2a^2. \end{aligned}$$

Mà $SB \cdot AC = a\sqrt{7} \cdot a\sqrt{5} = a^2\sqrt{35}$. Do đó

$$\cos(SB, AC) = \frac{\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC}}{SB \cdot AC} = \frac{2}{\sqrt{35}}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+2}$, gọi d là tiếp tuyến của với đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $m-2$. Biết đường thẳng d cắt tiệm cận đứng của đồ thị hàm số tại điểm $A(x_1; y_1)$ và cắt tiệm cận ngang của đồ thị hàm số tại điểm $B(x_2; y_2)$. Gọi S là tập hợp các số m sao cho $x_2 + y_1 = -5$. Tính tổng bình phương các phần tử của S.

A 0. **B** 4. **C** 10. **D** 9.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{3}{(x+2)^2}$. Với $x = m-2$ thì $y = 1 - \dfrac{3}{m}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x = m-2$ là $d\colon y = \dfrac{3}{m^2}(x - m + 2) + 1 - \dfrac{3}{m}$.
Tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số lần lượt là $y = 1$ và $x = -2$.
Tọa độ A là nghiệm hệ

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{m^2}(x - m + 2) + 1 - \dfrac{3}{m} \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - \dfrac{6}{m} \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow y_1 = 1 - \frac{6}{m}.$$

Tọa độ điểm B là nghiệm hệ

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{m^2}(x-m+2)+1-\dfrac{3}{m} \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2m-2 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 3m-2.$$

Vậy $x_2 + y_1 = 2m - \dfrac{6}{m} - 1 = -5 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1 = 1 \\ m_2 = -3 \end{array}\right. \Rightarrow m_1^2 + m_2^2 = 10.$

Chọn đáp án C □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. B	3. B	4. B	5. A	6. A	7. B	8. B	9. C	10. B
11. A	12. D	13. D	14. C	15. C	16. C	17. A	18. A	19. C	20. C
21. D	22. A	23. C	24. D	25. D	26. C	27. A	28. C	29. B	30. B
31. B	32. A	33. D	34. A	35. C	36. A	37. A	38. D	39. C	40. B
41. A	42. D	43. B	44. B	45. B	46. D	47. D	48. D	49. B	50. C

140 ĐỀ THI THỬ TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ TĨNH-NĂM 2018-LẦN 1

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1-x}{-x+2}$ có phương trình lần lượt là

Ⓐ $x = 1; y = 2$. Ⓑ $x = 2; y = 1$. Ⓒ $x = 2; y = \dfrac{1}{2}$. Ⓓ $x = 2; y = -1$.

Lời giải.

Cần nhớ: Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ nhận $x = -\dfrac{d}{c}$ làm tiệm cận đứng và $y = \dfrac{a}{b}$ làm tiệm cận ngang.

Từ đó suy ra đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1-x}{-x+2}$ lần lượt là $x = 2; y = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Số phức liên hợp của số phức $z = 1 - 2i$ là

Ⓐ $1 + 2i$. Ⓑ $-1 - 2i$. Ⓒ $2 - i$. Ⓓ $-1 + 2i$.

Lời giải.

Ta có $\overline{z} = 1 + 2i$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Phương trình $2^{2x^2+5x+4} = 4$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

Ⓐ 1. Ⓑ -1. Ⓒ $\dfrac{5}{2}$. Ⓓ $-\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với $2x^2 + 5x + 4 = 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0$.

Theo định lí Vi-ét tổng các nghiệm của phương trình là $-\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $\mathrm{e} - 1$. Ⓑ $\dfrac{1}{\mathrm{e}} - 1$. Ⓒ $\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$. Ⓓ $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^1 = \dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (Oyz) là

Ⓐ $y + z = 1$. Ⓑ $z = 0$. Ⓒ $x = 0$. Ⓓ $y = 0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (Oyz) là $x = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Một mặt cầu có diện tích 16π thì bán kính mặt cầu bằng

A 2. **B** $4\sqrt{2}$. **C** $2\sqrt{2}$. **D** 4.

Lời giải.

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 \Leftrightarrow 16\pi = 4\pi R^2 \Leftrightarrow R = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 2$ là

A 2. **B** 3. **C** 0. **D** 1.

Lời giải.

Cần nhớ: Hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có $ab < 0$ thì có ba cực trị và $ab > 0$ thì có một cực trị.

Do đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Cho hình lăng trụ đứng có diện tích đáy là $3a^2$, độ dài cạnh bên bằng $2a$. Thể tích khối lăng trụ này bằng

A $2a^3$. **B** a^3. **C** $3a^3$. **D** $6a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ $V_{LT} = Sh = 3a^2 \cdot 2a = 6a^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-3; 1)$. **B** $(0; +\infty)$. **C** $(-\infty; -2)$. **D** $(-2; 0)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $y' < 0, \forall x \in (-2; 0)$. Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x = 0,\ x = \pi$, đồ thị hàm số $y = \cos x$ và trục Ox là

A $S = \int\limits_0^{\pi} \cos x \, dx$. **B** $S = \int\limits_0^{\pi} \cos^2 x \, dx$.

C $S = \int\limits_0^{\pi} |\cos x| \, dx$. **D** $S = \pi \int\limits_0^{\pi} |\cos x| \, dx$.

Lời giải.

Theo công thức tính diện tích hình phẳng bằng tích phân ta có $S = \int\limits_0^{\pi} |\cos x|\, \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x + y - z + 1 = 0$. Véc-tơ nào sau đây không là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α)?

A $\overrightarrow{n_4} = (4; 2; -2)$. B $\overrightarrow{n_2} = (-2; -1; 1)$. C $\overrightarrow{n_3} = (2; 1; 1)$. D $\overrightarrow{n_1} = (2; 1; -1)$.

Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n} = (2; 1; -1)$. Ta thấy $\overrightarrow{n_3} = (2; 1; 1)$ không cùng phương với $\vec{n}$ nên không là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

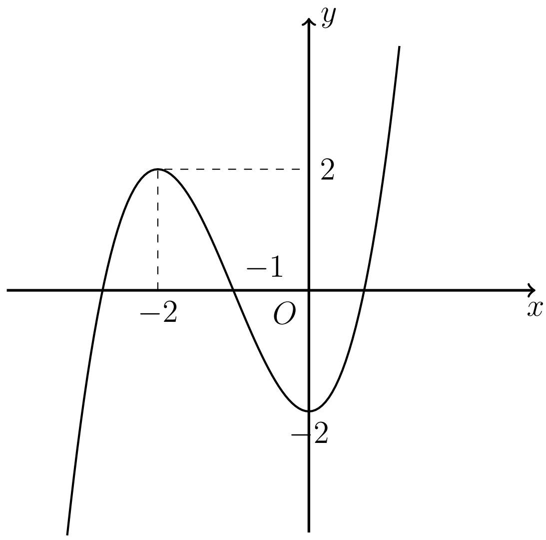
Chọn đáp án C ☐

Câu 12.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A $y = 2x^3 + 6x^2 - 2$. B $y = x^3 + 3x^2 - 2$.

C $y = -x^3 - 3x^2 - 2$. D $y = x^3 - 3x^2 - 2$.



Lời giải.

Dựa vào dạng đồ thị $\Rightarrow a > 0$ nên loại hàm số $y = -x^3 - 3x^2 - 2$.

Hàm số đạt cực trị tại $x = -2$; $x = 0$ và đi qua điểm $(-2; 2)$ nên ta xét:

- $y = 2x^3 + 6x^2 - 2 \Rightarrow y' = 6x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2. \end{array}\right.$
- $y = x^3 + 3x^2 - 2 \Rightarrow y' = 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2. \end{array}\right.$
- $y = x^3 - 3x^2 - 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Và chỉ có đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ đi qua điểm $(-2; 2)$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 13. Họ nguyên hàm của hàm số $y = \cos 3x$ là

A $\dfrac{\sin 3x}{3} + C$. B $-\dfrac{\sin 3x}{3} + C$. C $\sin 3x + C$. D $-\sin 3x + C$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\int \cos(ax + b)\, \mathrm{d}x = \dfrac{\sin(ax + b)}{a} + C$ ta có $\int \cos 3x\, \mathrm{d}x = \dfrac{\sin 3x}{3} + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$ và $B(-3;0;-1)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

(A) $x-y+z-3=0$. **B** $2x+y+1=0$. (C) $x-y+z+3=0$. (D) $2x+y-1=0$.

Lời giải.

Tọa độ trung điểm I của AB là $I(-1;1;-1)$, $\overrightarrow{AB}=(-4;-2;0)=-2(2;1;0)$.

Mặt phẳng trung trực của AB qua điểm I và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm véc-tơ pháp tuyến nên có phương trình là: $2(x+1)+1(y-1)=0 \Leftrightarrow 2x+y+1=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Giới hạn $\lim \dfrac{1-n^2}{2n^2+1}$ bằng

(A) 0. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{1}{3}$. **D** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{1-n^2}{2n^2+1}=\lim \dfrac{\dfrac{1}{n^2}-1}{2+\dfrac{1}{n^2}}=-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Cho A,B là hai biến cố xung khắc. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$. (B) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)$.

(C) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)$. (D) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$.

Lời giải.

Vì A,B là hai biến cố xung khắc nên $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Hàm số $y=\log_3(3-2x)$ có tập xác định là

(A) $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. **B** $\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$. (C) $\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right]$. (D) $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Điều kiện $3-2x>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{3}{2}$ nên hàm số có tập xác định là $\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2+6z+5=0$ trong đó z_2 có phần ảo âm. Phần thực vào phần ảo của số phức z_1+3z_2 lần lượt là

(A) $-6;1$. (B) $-1;-6$. **C** $-6;-1$. (D) $6;1$.

Lời giải.

Ta có $2z^2+6z+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i \\ z_2=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i. \end{array}\right.$

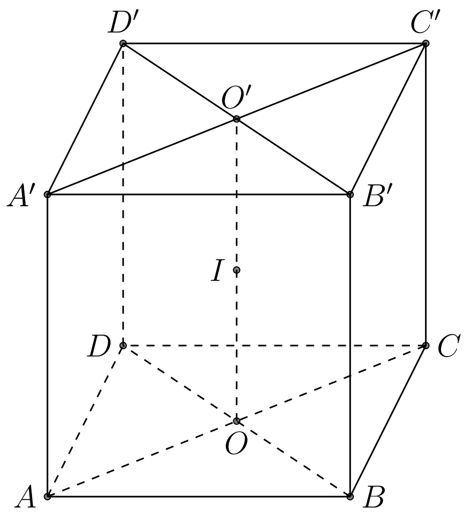
Suy ra $z_1+3z_2=-6-i$, do đó phần thực và phần ảo của số phức z_1+3z_2 lần lượt là $-6;-1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có O và O' lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Gọi V_1 là thể tích của khối nón tròn xoay có đỉnh là trung điểm của OO' và đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông $A'B'C'D'$; V_2 là thể tích khối trụ tròn xoay có hai đáy là hai đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Tỉ số thể tích $\dfrac{V_1}{V_2}$ là

A $\dfrac{1}{2}$. **B** $\dfrac{1}{4}$. **C** $\dfrac{1}{6}$. **D** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.



Giả sử hình lập phương có cạnh a, khi đó:

- Khối nón có chiều cao $h_1 = OI = \dfrac{a}{2}$ và bán kính đáy $r_1 = OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

  $\Rightarrow V_1 = \dfrac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \dfrac{\pi a^3}{12}$.
- Khối trụ có chiều cao $h_2 = OO' = a$ và bán kính đáy $r_2 = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$.

  $\Rightarrow V_2 = \pi r_2^2 h_2 = \dfrac{\pi a^3}{4}$.

Suy ra $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Biết $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{2x^2+3x+3}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x = a - \ln b$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P = a^2 + b^2$.

A $P = 13$. **B** $P = 5$. **C** $P = 4$. **D** $P = 10$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 \dfrac{2x^2+3x+3}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(2 - \dfrac{x-1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(2 - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(2x - \ln|x+1| - \dfrac{2}{x+1}\right)\Bigg|_0^1 = 3 - \ln 2. \end{aligned}$$

Suy ra $P = 13$.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+2}{2}$ và điểm $A(3;2;0)$. Điểm đối xứng với điểm A qua đường thẳng d có tọa độ là

A $(-1;0;4)$. **B** $(7;1;-1)$. **C** $(2;1;-2)$. **D** $(0;2;-5)$.

Lời giải.

Gọi $M(-1+t;-3+2t;-2+2t)\in d \Rightarrow \overrightarrow{AH}=(t-4;2t-5;2t-2)$. Véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(1;2;2)$.

Vì $\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}$ nên $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow 1(t-4)+2(2t-5)+2(2t-2)=0 \Leftrightarrow t=2$.

Suy ra $M(1;1;2)$, gọi $A'(x;y;z)$ là điểm đối xứng của A qua d thì $\begin{cases}x=2\cdot1-3=-1\\ y=2\cdot1-2=0\\ z=2\cdot2-0=4.\end{cases}$

Do đó $A'(-1;0;4)$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng chứa trục Oz và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha)\colon x-y+2z-1=0$ có phương trình là

A $x+y=0$. **B** $x+2y=0$. **C** $x-y=0$. **D** $x+y-1=0$.

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}_{(\alpha)}=(1;-1;2)$, véc-tơ chỉ phương của trục Oz là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Mặt phẳng cần tìm có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\vec{n}_{(\alpha)},\vec{k}\right]=(-1;-1;0)$ và đi qua gốc tọa độ nên có phương trình là $x+y=0$.

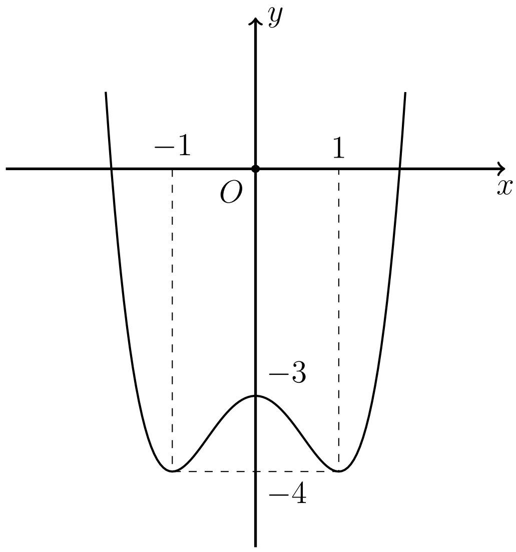
Chọn đáp án A □

Câu 23.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)+m-2018=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A $2021\le m\le 2022$. **B** $2021<m<2022$.

C $\left[\begin{array}{l}m\ge 2022\\ m\le 2021\end{array}\right.$. **D** $\left[\begin{array}{l}m>2022\\ m<2021\end{array}\right.$.



Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$f(x)=2018-m \qquad (1)$$

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $d\colon y=2018-m$. Dựa vào đồ thị ta có $-4<2018-m<-3 \Leftrightarrow 2021<m<2022$ thì phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ trên đoạn $[3;5]$. Khi đó $M - m$ bằng

(A) $\dfrac{7}{2}$. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) 2. (D) $\dfrac{3}{8}$.

Lời giải.

Hàm số xác định và liên tục trên $[3;5]$.

Ta có $y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2} < 0$, $\forall x \in [3;5]$ nên hàm số nghịch biến trên $[3;5]$.

Suy ra $M = f(3) = 2$; $m = f(5) = \dfrac{3}{2} \Rightarrow M - m = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 4x + 6$ tại điểm có hoành độ là ngiệm của phương trình $f''(x) = 0$ có hệ số góc bằng

(A) -4. (B) $\dfrac{47}{12}$. (C) $-\dfrac{13}{4}$. (D) $-\dfrac{17}{4}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = x^2 - x - 4$; $f''(x) = 2x - 1$. Khi đó

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Hệ số góc của tiếp tuyến là $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{17}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng $B'D$ bằng

(A) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Vì $\begin{cases} AD \perp AB \ (ABCD \text{ là h.vuông}) \\ AD \perp AA' \ (ADD'A' \text{ là h.vuông}) \end{cases}$

$\Rightarrow AD \perp (ABB'A') \Rightarrow AD \perp AB'$.

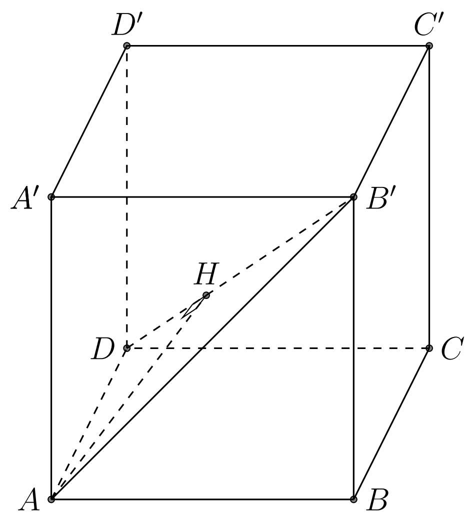
Trong $\triangle ADB'$ vuông tại A ta vẽ đường cao AH.

Vậy $AH = \mathrm{d}\,(A, B'D)$.

Theo hệ thức lượng trong $\triangle ADB'$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AB'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2}$$

Suy ra $AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

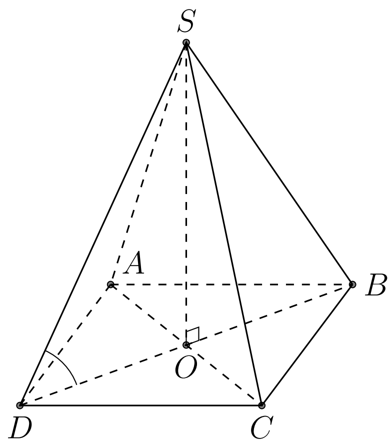


Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ADC} = 60°$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, SO vuông góc với $(ABCD)$ và $SO = a$. Góc giữa đường thẳng SD và $(ABCD)$ bằng

(A) $60°$. (B) $75°$. (C) $30°$. (D) $45°$.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases} O \text{ là hình chiếu của } S \text{ lên } (ABCD) \text{ (do } SO \perp (ABCD)) \\ D \text{ là hình chiếu của } D \text{ lên } (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow OD$ là hình chiếu của SD lên $(ABCD)$.

Vậy $[\widehat{SD,(ABCD)}] = [\widehat{SD,OD}] = \widehat{SDO}$.

$\triangle ADC$ cân tại D có $\widehat{ADC} = 60°$ nên $\triangle ADC$ là tam giác đều cạnh $2a \Rightarrow DO = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Xét $\triangle SOD$ vuông tại O (do $SO \perp (ABCD)$ và $OD \subset (ABCD)$).

$\Rightarrow \tan\widehat{SDO} = \dfrac{SO}{OD} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

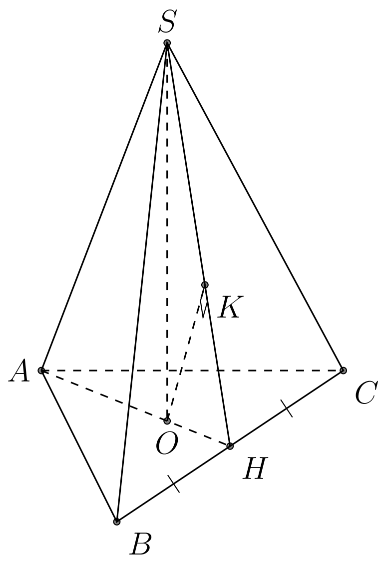
Vậy $\widehat{SDO} = 30°$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

(A) $\dfrac{a\sqrt{165}}{30}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{165}}{45}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{165}}{15}$. (D) $\dfrac{2a\sqrt{165}}{15}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm của tam giác đều ABC và H là trung điểm của BC.

Ta có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{33}}{3}$.

Ta có $SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{33}}{3}\right)^2 + \dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

Cách 1.

Tính $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{33}}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{11}}{12}$.

Vậy $\mathrm{d}[A,(SBC)] = \dfrac{3V_{S.ABC}}{S_{\triangle SBC}} = \dfrac{3 \cdot \dfrac{a^3\sqrt{11}}{12}}{\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{15}}{2} \cdot a} = \dfrac{a\sqrt{165}}{15}$.

Cách 2.

Ta có $\dfrac{\mathrm{d}[A,(SBC)]}{\mathrm{d}[O,(SBC)]} = \dfrac{AH}{OH} = 3$. Trong (SAH) vẽ $OK \perp SH$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp OK$.

Mà $OK \perp SH \Rightarrow OK \perp (SBC)$. Khi đó $OK = \mathrm{d}[O,(SBC)]$.

Vì $\triangle SOH$ vuông tại O có OK là đường cao

$$\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{\frac{11}{3}a^2}+\frac{1}{\frac{a^2}{12}}\Rightarrow OK=\frac{a\sqrt{165}}{45}.$$

Do đó $\mathrm{d}[A,(SBC)]=3\cdot\frac{a\sqrt{165}}{45}=\frac{a\sqrt{165}}{15}$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số $1,2,3,\ldots,9$. Rút ngẫu nhiên đồng thời hai thẻ và nhân hai số ghi trên hai thẻ với nhau. Tính xác suất để tích nhận được là số chẵn.

A $\frac{1}{6}$. B $\frac{5}{18}$. C $\frac{8}{9}$. D $\frac{13}{18}$.

Lời giải.

Chọn 2 thẻ trong 9 thẻ có $\mathrm{C}_9^2=36$ cách. Suy ra $n(\Omega)=36$.

Gọi A là biến cố cả hai thẻ được rút ra đều là số lẻ.

Chọn 2 thẻ số lẻ trong 5 thẻ số lẻ có $\mathrm{C}_5^2=10$. Suy ra $n(A)=10$.

Gọi B là biến cố thỏa yêu cầu bài toán. Khi đó $\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{n(A)}{n(\Omega)}=1-\frac{10}{36}=\frac{13}{18}$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(1;0;-1)$ và $C(2;-1;2)$. Điểm D thuộc tia Oz sao cho độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh D của tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{3\sqrt{30}}{10}$ có tọa độ là

A $(0;0;1)$. B $(0;0;3)$. C $(0;0;2)$. D $(0;0;4)$.

Lời giải.

Ta có D thuộc tia Oz nên $D(0;0;d)$ với $d>0$.

Tính $\overrightarrow{AB}=(0;-2;-4)$ và $\overrightarrow{AC}=(1;-3;-1)$.

Mặt phẳng (ABC): $\begin{cases}\text{có véc-tơ pháp tuyến } \vec{n}_{(ABC)}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-10;-4;2)\\ \text{đi qua điểm } A(1;2;3).\end{cases}$

$\Rightarrow (ABC)\colon -10(x-1)-4(y-2)+2(z-3)=0\Leftrightarrow 5x+2y-y-6=0.$

Ta có $\mathrm{d}\left[D,(ABC)\right]=\frac{3\sqrt{30}}{10}\Leftrightarrow\frac{|d+6|}{\sqrt{30}}=\frac{3\sqrt{30}}{10}\Leftrightarrow|d+6|=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=3\ \text{(nhận)}\\ d=-15\ \text{(loại)}\end{array}\right..$

Vậy $D(0;0;3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho hàm số $y=x-\ln(1+x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A Hàm số đồng biến trên $(-1;0)$. B Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

C Hàm số đồng biến trên $(-1;+\infty)$. D Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Lời giải.

Ta có $y=x-\ln(1+x)$ có tập xác định $\mathscr{D}=(-1;+\infty)$ và $y'=1-\frac{1}{1+x}$.

$y'=0\Leftrightarrow 1-\frac{1}{1+x}=0\Leftrightarrow 1+x=1\Leftrightarrow x=0.$

Bảng biến thiên

x	-1		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $\mathrm{C}_{2n+1}^1 + \mathrm{C}_{2n+1}^3 + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1} = 1024$.

A $n = 10$. **B** $n = 5$. **C** $n = 9$. **D** $n = 11$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} (1+x)^{2n+1} = \mathrm{C}_{2n+1}^0 x^0 + \mathrm{C}_{2n+1}^1 x^1 + \mathrm{C}_{2n+1}^2 x^2 + \mathrm{C}_{2n+1}^3 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n} x^{2n} + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1} \\ (1-x)^{2n+1} = \mathrm{C}_{2n+1}^0 x^0 - \mathrm{C}_{2n+1}^1 x^1 + \mathrm{C}_{2n+1}^2 x^2 - \mathrm{C}_{2n+1}^3 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n} x^{2n} - \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1}. \end{cases}$

Suy ra $(1+x)^{2n+1} - (1-x)^{2n+1} = 2(\mathrm{C}_{2n+1}^1 x^1 + \mathrm{C}_{2n+1}^3 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1})$.

Cho $x = 1$ ta được $2^{2n+1} - 0 = 2(\mathrm{C}_{2n+1}^1 + \mathrm{C}_{2n+1}^3 + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}) \Leftrightarrow 4^n = 4^5 \Leftrightarrow n = 5$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (2m-3)x - (3m+1)\cos x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A 1. **B** 5. **C** 0. **D** 4.

Lời giải.

Xét $y = (2m-3)x - (3m+1)\cos x$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ và $y' = 2m - 3 + (3m+1)\sin x$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}$ (1).

TH 1. $3m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{3}$ (loại do $m \in \mathbb{Z}$).

TH 2. $3m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Leftrightarrow (2m-3) - (3m+1) \leqslant y' \leqslant (2m-3) + (3m+1), \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow -m - 4 \leqslant y' \leqslant 5m - 2, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$y' \leqslant 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} -m - 4 \leqslant 5m - 2 \\ 5m - 2 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geqslant -\dfrac{1}{3} \\ m \leqslant \dfrac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{1}{3} < m \leqslant \dfrac{2}{5}.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 0$.

TH 3. $3m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Leftrightarrow (2m-3) - (3m+1) \geqslant y' \geqslant (2m-3) + (3m+1), \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow -m - 4 \geqslant y' \geqslant 5m - 2, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$y' \leqslant 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} -m-4 \geqslant 5m-2 \\ -m-4 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geqslant -4 \\ m \leqslant -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow -4 \leq m \leqslant -\dfrac{1}{3}.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-4; -3; -2; -1\}$.

Vậy có tất cả 5 giá trị nguyên của tham số m.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Cho $I = \displaystyle\int_0^m (2x-1)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để $I < m$ là khoảng $(a; b)$. Tính $P = a - 3b$.

A $P = -3$. **B** $P = -2$. **C** $P = -4$. **D** $P = -1$.

Lời giải.

Ta có: $I = \displaystyle\int_0^m (2x-1)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$. Đặt $u = 2x - 1 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x$; $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{2x} \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$.

Vậy $I = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}(2x-1)\Big|_0^m - \displaystyle\int_0^m \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2m}(m-1) + 1$.

Ta có $I < m \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2m}(m-1) + 1 < m \Leftrightarrow (m-1)(\mathrm{e}^{2m} - 1) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Vậy $m \in (0; 1)$ theo đó $P = 0 - 3 \cdot 1 = -3$

Chọn đáp án A □

Câu 35. Cho bốn số thực a, b, c, d là bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Biết tổng của chúng bằng 4 và tổng các bình phương của chúng bằng 24. Tính $P = a^3 + b^3 + c^3 + d^3$.

A $P = 64$. **B** $P = 80$. **C** $P = 16$. **D** $P = 79$.

Lời giải.

Đặt $a = x - 3y$, $b = x - y$, $c = x + y$, $d = x + 3y$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $a + b + c + d = 4 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$. Khi đó $a = 1 - 3y$, $b = 1 - y$, $c = 1 + y$, $d = 1 + 3y$.

Mặt khác $\begin{cases} a^2 + d^2 = (1-3y)^2 + (1+3y)^2 = 2 + 18y^2 \\ b^2 + c^2 = (1-y)^2 + (1+y)^2 = 2 + 2y^2. \end{cases}$

$\Rightarrow 24 = 2 + 18y^2 + 2 + 2y^2 \Leftrightarrow 20 = 20y^2 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} a = -2, b = 0, c = 2, d = 4 \\ a = 4, b = 2, c = 0, d = -2 \end{array}\right.$. Khi đó $P = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 4^3 = 64$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Tổng tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là

A $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B** $\dfrac{1}{2}$. **C** 0. **D** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Xét $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ và $y' = 3x^2 - 6mx$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 4m^3 \\ x = 2m \Rightarrow y = 0. \end{array}\right.$

Đồ thị hàm số có điểm cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Gọi $A(0;4m^3) \in Oy$, $B(2m;0) \in Ox$ là hai điểm cực trị.
A, B đối xứng nhau qua $y = x$ của góc phần tư thứ nhất

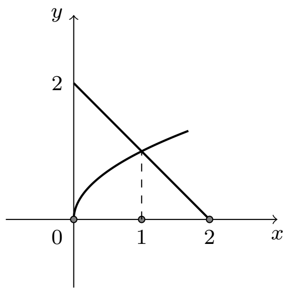
$$\Leftrightarrow y_A = x_B \Leftrightarrow 4m^3 = 2m \Leftrightarrow 2m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 37. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $x + y - 2 = 0$; $y = \sqrt{x}$; $y = 0$ quay quanh trục Ox bằng

A $\frac{5}{6}$. **B** $\frac{6\pi}{5}$. **C** $\frac{2\pi}{3}$. **D** $\frac{5\pi}{6}$.

Lời giải.



Đặt $f(x) = 2 - x$; $g(x) = \sqrt{x}$; $h(x) = 0$.

Xét $2 - x = \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geqslant 0 \\ (2-x)^2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 2 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Ta có $(H_1) : \begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = 0 \\ x = 0, x = 1 \end{cases}$ và $(H_2) : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y = 0 \\ x = 1, x = 2 \end{cases}$.

Cho (H_1), (H_2) quay quanh Ox có thể tích lần lượt là V_1, V_2 và thể tích cần tìm là $V = V_1 + V_2$.

$V_1 = \pi \int\limits_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x = \pi \left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$

$V_2 = \pi \int\limits_1^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_1^2 (2-x)^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 (x-2)^2\,\mathrm{d}(x-2) = \pi \cdot \frac{(x-2)^3}{3}\Bigg|_1^2 = \frac{\pi}{3}.$

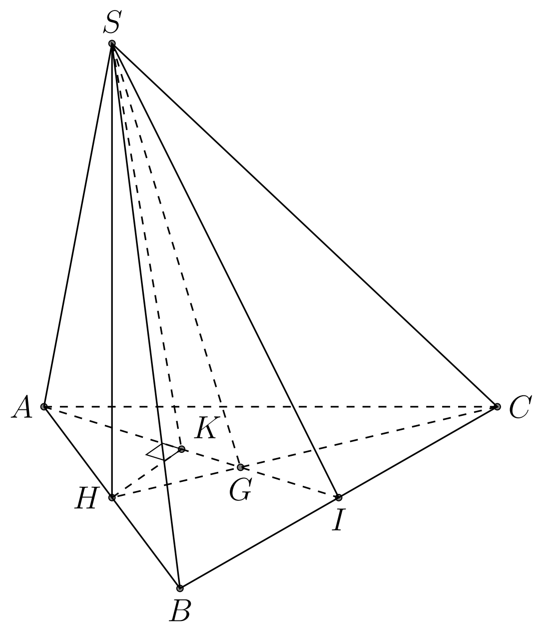
Vậy $V = V_1 + V_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B, $AB = a$; $BC = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, mặt phẳng (SAG) tạo với đáy một góc $60°$. Thể tích khối tứ diện $ACGS$ bằng

A $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}$. **B** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$. **C** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{27}$. **D** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải.



Gọi H, I lần lượt là trung điểm của AB, BC.
Suy ra $SH \perp (ABC)$.
Trong (ABC) vẽ $HK \perp AI$, suy ra $AI \perp (SHK)$ nên $AI \perp SK$.
$\Rightarrow [\widehat{(SAG),(ABC)}] = \widehat{(SK,HK)} = \widehat{SKH} = 60^\circ$.
Ta có $\triangle ABI$ vuông cân tại B (do $BI = BA = a$).
$\Rightarrow \widehat{BAI} = 45^\circ \Rightarrow \triangle AHK$ vuông cân tại K
$\Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow SH = HK \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.
Ta có

$$S_{\triangle ACG} = S_{\triangle AHC} - S_{\triangle AHG} = \frac{1}{2}(BC \cdot AH - HK \cdot AG)$$

$\Rightarrow S_{\triangle ACG} = \dfrac{1}{2}\left(2a \cdot \dfrac{a}{2} - \dfrac{a\sqrt{2}}{4} \cdot \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}\right) = \dfrac{a^2}{3}$.
Vậy $V_{SACG} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\triangle ACG} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{4} \cdot \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{36}$.
Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho bất phương trình $\log_7(x^2+2x+2)+1 > \log_7(x^2+6x+5+m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình trên có tập nghiệm chứa khoảng $(1;3)$?

A 35. **B** 36. **C** 34. **D** 33 .

Lời giải.
ĐKXĐ: $x^2+6x+5+m > 0 \Leftrightarrow m > -x^2-6x-5$.
Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \log_7\left(x^2+2x+2\right)+1 > \log_7\left(x^2+6x+5+m\right) \\ \Leftrightarrow\ & log_7\left(7x^2+14x+14\right) > \log_7\left(x^2+6x+5+m\right) \\ \Leftrightarrow\ & 7x^2+14x+14 > x^2+6x+5+m \\ \Leftrightarrow\ & m < 6x^2+8x+9. \end{aligned}$$

Do đó, nghiệm của bất phương trình đã cho là nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} m > -x^2-6x-5 \\ m < 6x^2+8x+9. \end{cases}$$

Bất phương trình có cho muốn có tập nghiệm chứa $(1;3)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m > -x^2-6x-5 \\ m < 6x^2+8x+9 \end{cases}, \forall m \in (1;3) \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max\limits_{[1;3]}\left(-x^2-6x-5\right) \\ m \leq \min\limits_{[1;3]}\left(6x^2+8x+9\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -12 \\ m \leq 23. \end{cases}$$

Vậy có tất cả 36 giá trị nguyên của m.
Chọn đáp án B □

Câu 40. Ông A đầu tư 150 triệu đồng vào một công ti với lãi 8% một năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau 5 năm số tiền lãi ông A rút về gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này ông A không rút tiền ra và lãi không đổi.

(A) 54.073.000 đồng. (B) 54.074.000 đồng. (C) 70.398.000 đồng. **D** 70.399.000 đồng.

Lời giải.

Số tiền lãi ông A rút về sau 5 năm

$$S = a(1+r)^5 - a = 150.000.000(1+0,08)^5 - 150.000.000 \approx 70.399.211.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Đường thẳng $y = m^2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 - 10$ tại đúng hai điểm A, B sao cho tam giác OAB vuông (O là gốc tọa độ). Mệnh đề nào sao đây đúng?

(A) $m^2 \in (5;7)$. (B) $m^2 \in (3;5)$. **C** $m^2 \in (1;3)$. (D) $m^2 \in (0;1)$.

Lời giải.

Do A, B đối xứng nhau qua trục tung nên ta gọi $A(t;m^2), B(-t;m^2)$ $(t>0)$.

$\triangle OAB$ cân tại O nên theo giả thiết suy ra $\triangle OAB$ vuông cân tại O.

Do đó $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow t^2 = m^4$.

Vì $A(t;m^2)$ thuộc đồ thi hàm số $y = x^4 - x^2 - 10$ nên

$$m^2 = t^4 - t^2 - 10 \Leftrightarrow t^4 - t^2 - t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2 = m^2.$$

Do đó $m^2 \in (1;3)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng tọa độ. Tính $P = a - b + c$.

(A) $P = 6$. (B) $P = -4$. (C) $P = -2$. **D** $P = 9$.

Lời giải.

Goi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu. Do mặt cầu tiếp xúc với ba trụ tọa độ và đi qua $A(1;-1;4)$ nên

$$\begin{cases} a > 0, b < 0, c > 0 \\ |a| = |b| = |c|. \end{cases}$$

Do đó $I(a;-a;a)$. Vì $IA = R$ nên $(a-1)^2 + (-a+1)^2 + (a-4)^2 = a^2 \Leftrightarrow a = 3$. Ta có $a = 3, b = -3, c = 3$ nên $P = a - b + c = 9$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 43. Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R}, a > 0)$ thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 5$ và $z \cdot \overline{z} = 10$. Tính $P = a - b$.

(A) $P = 4$. (B) $P = -4$. **C** $P = -2$. (D) $P = 2$.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$.

$$\begin{cases} |z - 1 - 2i| = 5 \\ z \cdot \overline{z} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (b+2)^2 = 25 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 4b = 10 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases}$$

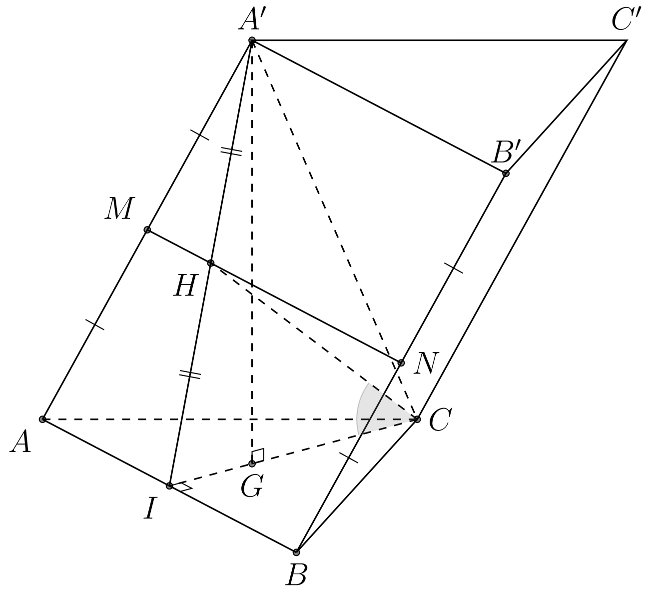
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 5 \\ 5b^2 - 20b + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \text{ (loại)} \\ b = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow P = 1 - 3 = -2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'ABC$ là tứ diện đều cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và BB'. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (CMN).

A $\frac{\sqrt{2}}{5}$. B $\frac{5\sqrt{2}}{4}$. C $\frac{2\sqrt{2}}{5}$. D $\frac{4\sqrt{2}}{15}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của AB, H là giao điểm của MN và $AI \Rightarrow H$ là trung điểm của AI.
Kẻ $Cx \parallel AB \parallel MN$ thì Cx là giao tuyến của (ABC) và (CMN) (1).
Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.
Ta có $\begin{cases} AB \perp CI \\ AB \perp A'G \end{cases} \Rightarrow AB \perp (A'IC)$
Mà $AB \parallel MN$ nên $MN \perp (A'IC) \Rightarrow MN \perp CH \Rightarrow CH \perp Cx$ (2).
Mặt khác $CI \perp AB \Rightarrow CI \perp Cx$ (3).
Từ $(1), (2)$ và (3) suy ra $[(ABC), (CMN)] = (CI, CH) = \widehat{HCI} = \alpha$.
Xét $\triangle A'IC$ có CH là đường trung tuyến.

$$CH^2 = \frac{CA'^2 + CI^2}{2} - \frac{A'I^2}{4} = \frac{a^2 + \frac{3a^2}{4}}{2} - \frac{\frac{3a^2}{4}}{4} = \frac{11a^2}{16} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{11}}{4}.$$

Áp dụng định lý cosin cho $\triangle HIC$, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{CH^2 + CI^2 - HI^2}{2CH \cdot CI} = \frac{\frac{11a^2}{16} + \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{16}}{2 \cdot \frac{a\sqrt{11}}{4} \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5\sqrt{33}}{33}.$$

Từ $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$ suy ra $\tan\alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.
Chọn đáp án C □

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-i|=1$, số phức w thỏa mãn $|\overline{w}-2-3i|=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z-w|$.

A. $\sqrt{13}-3$. B. $\sqrt{17}-3$. C. $\sqrt{17}+3$. D. $\sqrt{13}+3$.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi$, Đặt $w=a+bi$. Khi đó

$$|z-1-i|=1 \Leftrightarrow |x-1+(y-1)i|=1 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=1.$$

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1;1)$, $r=1$.

$$|\overline{w}-2-3i|=2 \Leftrightarrow |a-2-(b+3)i|=2 \Leftrightarrow (a-2)^2+(b+3)^2=4.$$

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn (C_2) có tâm $I_2(2;-3)$, bán kính $R=2$.
$|z-w|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ đây là biểu thức xác định khoảng cách giữa hai điểm biểu diễn cho số phức z và w.
Ta có $I_1I_2=\sqrt{17}>R+r$ nên (C_1) nằm ngoài (C_2).
Khi đó khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm lần lượt nằm trên hai đường tròn là:

$$d=I_1I_2-R-r=\sqrt{17}-3.$$

Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(2x)+f(1-2x)=12x^2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ là 1 là

A. $y=2x+2$. B. $y=4x-6$. C. $y=2x-6$. D. $y=4x-2$.

Lời giải.

Thay $x=0, x=\dfrac{1}{2}$ lần lượt vào $2f(2x)+f(1-2x)=12x^2$ ta được

$$\begin{cases}2f(0)+f(1)=0\\2f(1)+f(0)=3\end{cases} \Rightarrow f(1)=2.$$

Ta có $2f(2x)+f(1-2x)=12x^2 \Rightarrow 4f'(2x)-2f'(1-2x)=24x$ $(*)$.
Thay $x=0, x=\dfrac{1}{2}$ lần lượt vào $(*)$ ta có

$$\begin{cases}4f'(0)-2f'(1)=0\\4f'(1)-2f'(0)=12\end{cases} \Rightarrow f'(1)=4.$$

.
Phương trình tiếp tuyến $y=f'(1)(x-1)+f(1)=4(x-1)+2=4x-2$.
Chọn đáp án D □

Câu 47. Trong một lớp có n hoc sinh gồm 3 bạn Chuyên, Hà, Tĩnh cùng $n-3$ học sinh khác. Khi xếp tùy ý các học sinh này vào dãy ghế được đánh số từ 1 đến n, mỗi học sinh ngồi một ghế thì xác suất để số ghế của Hà bằng trung bình cộng số ghế của Chuyên và số ghế của Tĩnh là $\dfrac{13}{675}$. Khi đó n thỏa mãn

A. $n\in[35;39]$. B. $n\in[40;45]$. C. $n\in[30;34]$. D. $n\in[25;29]$.

Lời giải.
Số cách sắp xếp tùy ý n học sinh vào n chỗ là $n!$(cách xếp).
Giả sử số ghế của 3 bạn Chuyên, Hà, Tĩnh lần lượt là a, b, c.
Khi đó ta có $b = \dfrac{a+c}{2}$ hay $2b = a + c$.
Do đó a, c phải cùng tính chẵn lẻ.
TH 1. Nếu $n = 2m$ (n là số chẵn).
Nếu a, c cùng chẵn hoặc cùng lẻ thì Chuyên và Tĩnh có $\mathrm{A}^2_{\frac{n}{2}}$ cách xếp, Hà có 1 cách xếp và có $(n-3)!$ cách xếp các học sinh còn lại.
Do đó ta có $\dfrac{2(n-3)!\mathrm{A}^2_{\frac{n}{2}}}{n!} = \dfrac{13}{675} \Leftrightarrow m = \dfrac{701}{52}$ (loại).
TH 2. $n = 2m + 1$ (n là số lẻ).

- Nếu a, c chẵn thì Chuyên và Tĩnh có A^2_m cách xếp, Hà có 1 cách xếp và có $(2m-2)!$ cách xếp các học sinh còn lại.
- Nếu a, c lẻ thì Chuyên và Tĩnh có A^2_{m+1} cách xếp, Hà có 1 cách xếp và có $(2m-2)!$ cách xếp các học sinh còn lại.

Khi đó
$$\frac{(2m-2)!\left(\mathrm{A}^2_m + \mathrm{A}^2_{m+1}\right)}{(2m+1)!} = \frac{13}{675} \Leftrightarrow \frac{m(m-1)+m(m+1)}{(2m+1)2m(2m-1)} \Leftrightarrow m = 13 \Leftrightarrow n = 27.$$

Chọn đáp án D □

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-1;0;1)$, $B(3;2;1)$, $C(5;3;7)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $MA = MB$ và $MB + MC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = a + b + c$.
A. $P = 4$. B. $P = 0$. C. $P = 2$. D. $P = 5$.

Lời giải.
Gọi I là trung điểm AB. Suy ra $I(1;1;1)$ và có $\overrightarrow{AB} = (4;2;0) = 2(2;1;0)$.
Phương trình mặt phẳng trung trực của AB là
$$(P)\colon 2(x-1) + 1(y-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 3 = 0.$$
Ta có $(2x_B + y_B - 3)(2x_C + y_C - 3) = 5 \cdot 10 = 50 > 0$ nên B, C cùng phía với (P).
Do đó $MB + MC = MA + MC \geq AC$.
Dấu "="xảy ra khi M là giao điểm của AC với (P).
Ta có $\overrightarrow{AC} = (6;3;6) = 3(2;1;2)$, phương trình $AC\colon \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 + 2t. \end{cases}$
$M \in AC \Rightarrow M(-1+2t; t; 1+2t)$ và $M \in (P)$ nên suy ra $2(-1+2t) + t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
Do đó $M(1;1;3)$ và suy ra $P = a + b + c = 5$.
Chọn đáp án D □

Câu 49. Biết $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^a}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Tính $P = 2a + b$.

A $P = 8$. **B** $P = 10$. **C** $P = 6$. **D** $P = 12$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \dfrac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x}$.

Đặt $t = \pi - x$.

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\pi} xf(x)\,\mathrm{d}x &= -\int\limits_{\pi}^{0} (\pi - t)f(\pi - t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int\limits_0^{\pi} (\pi - t)f(\pi - t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\pi} (\pi - x)f(\pi - x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi} (\pi - x)f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int\limits_0^{\pi} \pi f(x)\,\mathrm{d}t - \int\limits_0^{\pi} xf(x)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Suy ra $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Xét $I_1 = \displaystyle\int\limits_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$. Đặt $t = \dfrac{\pi}{2} - x$.

$$\begin{aligned}I_1 = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{-\pi}{2}} f(\frac{\pi}{2} - t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018} t}{\cos^{2018} t + \sin^{2018} t}\,\mathrm{d}t \quad &= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018} t}{\cos^{2018} t + \sin^{2018} t}\,\mathrm{d}t\\ &= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018} x}{\cos^{2018} x + \sin^{2018} x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Xét $I_2 = \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018} x}{\cos^{2018} x + \sin^{2018} x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \dfrac{\pi}{2} - x$.

$$\begin{aligned}I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\cos^{2018}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \sin^{2018}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}\,\mathrm{d}t \quad &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018} t}{\cos^{2018} t + \sin^{2018} t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018} x}{\cos^{2018} x + \sin^{2018} x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Khi đó $I_1 = 2I_2 = I_2 + I_2 = \displaystyle\int\limits_0^{\pi} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$. Suy ra $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}I_1 = \frac{\pi^2}{4}$.

Suy ra $a = 2; b = 4$. Do đó $2a + b = 8$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho phương trình

$$\sin x(2-\cos 2x)-2(2\cos^3 x+m+1)\sqrt{2\cos^3 x+m+2}=3\sqrt{2\cos^3 x+m+2}.$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có đúng 1 nghiệm $x\in\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right)$?

(A) 2. (B) 1. (C) 4. (D) 3 .

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}&\sin x(1+2\sin^2 x)-2(2\cos^3 x+m+2-1)\sqrt{2\cos^3 x+m+2}=3\sqrt{2\cos^3 x+m+2}\\ \Leftrightarrow\ &2\sin^3 x+\sin x=2\left(\sqrt{2\cos^3 x+m+2}\right)^3+\sqrt{2\cos^3 x+m+2}\qquad(1)\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=2t^3+t$; $f'(t)=6t^2+1>0$, $\forall t\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó

$$\begin{aligned}(1)\ \Leftrightarrow\ &\sin x=\sqrt{2\cos^3 x+m+2}\\ \Leftrightarrow\ &\sin^2 x=2\cos^3 x+m+2\ \left(\text{vì } \sin x\geq 0,\ \forall x\in\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)\\ \Leftrightarrow\ &2\cos^3 x+\cos^2 x+1=-m\quad(2).\end{aligned}$$

Đặt $t=\cos x$, $x\in\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right)\Rightarrow t\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right]$.

Xét hàm số $g(t)=2t^3+t^2+1$ với $t\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right]$. Ta có

$$g'(t)=6t^2+2t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=-\dfrac{1}{3}.\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

t	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	$\frac{28}{27}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	4

Mỗi nghiệm $t_0\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right]$ sẽ cho 1 nghiệm $x_0\in\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Do đó dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình (2) có 1 nghiệm $x\in\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-m=1\\ \dfrac{28}{27}<-m\leq 4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\ -4\leq m<-\dfrac{28}{27}.\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Có 4 giá trị nguyên của m.

Chọn đáp án (C) □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. A	3. D	4. C	5. C	6. A	7. B	8. D	9. D	10. C
11. C	12. B	13. A	14. B	15. D	16. A	17. B	18. C	19. D	20. A
21. A	22. A	23. B	24. B	25. D	26. B	27. C	28. C	29. D	30. B
31. D	32. B	33. B	34. A	35. A	36. C	37. D	38. A	39. B	40. D
41. C	42. D	43. C	44. C	45. B	46. D	47. D	48. D	49. A	50. C

141 ĐỀ THI THỬ THPTQG LẦN 1 - SỞ BÌNH PHƯỚC - 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) Hàm số đồng biến trên $(1; 2)$.
(B) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.
(C) Hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$.
(D) Hàm số nghịch biến trên $(-1; 2)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$ nên khẳng định hàm số nghịch biến trên $(-1; 2)$ là **sai**.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.
(B) Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.
(C) Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.
(D) Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta kết luận được $x = 2$ là điểm cực đại của hàm số.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
(B) Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng có phương trình $x = 1$ và $x = -1$.
(C) Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng có phương trình $y = 1$ và $y = -1$.

D Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

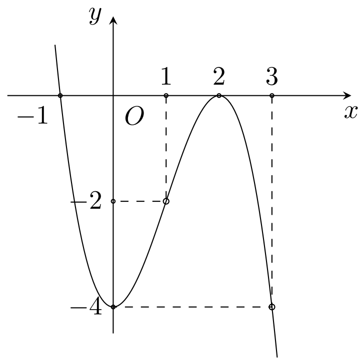
Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$. Nên đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 4.

Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



A $y = x^3 - 3x - 4$.

B $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

C $y = x^3 - 3x + 4$.

D $y = -x^3 - 3x^2 - 4$.

Lời giải.

Từ dáng điệu đồ thị ta có hệ số của x^3 là số âm nên loại các phương án $y = x^3 - 3x - 4$ và $y = x^3 - 3x + 4$.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đạt cực trị tại $x = 0$ và $x = 2$. Do đó phương trình $y' = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt là $x = 0$ và $x = 2$.

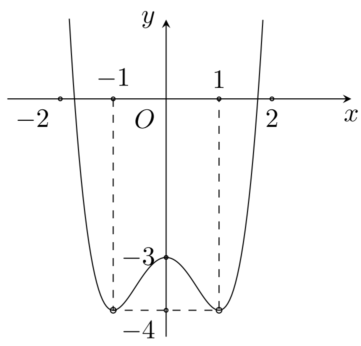
Xét phương án $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ ta có $y' = -3x^2 + 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 0. \end{array}\right.$

Xét phương án $y = -x^3 - 3x^2 - 4$ ta có $y' = -3x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0. \end{array}\right.$

Chọn đáp án B □

Câu 5.

Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ có đồ thị như hình bên. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $x^4 - 2x^2 - 3 = 2m - 4$ có hai nghiệm phân biệt?



A $m \le \dfrac{1}{2}$.

B $\left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

C $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m > \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

D $0 < m < \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Phương trình $x^4 - 2x^2 - 3 = 2m - 4$ có hai nghiệm phân biệt khi đồ thị hàm số $y = 2m - 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ tại hai điểm phân biệt.

Từ đồ thị ta được $\left[\begin{array}{l} 2m - 4 = -4 \\ 2m - 4 > -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m > \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Chọn đáp án C □

Câu 6. Tích giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ trên $[1;4]$ bằng

(A) $\dfrac{52}{3}$. (B) 20. (C) 6. (D) $\dfrac{65}{3}$.

Lời giải.

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[1;4]$. Ta có $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Tính được $f(1) = 5$, $f(2) = 4$, $f(4) = 5$. Do đó $\min\limits_{[1;4]} f(x) = 4$, $\max\limits_{[1;4]} f(x) = 5$.

Vậy $\min\limits_{[1;4]} f(x) \cdot \max\limits_{[1;4]} f(x) = 4 \cdot 5 = 20$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến với (C) tại giao điểm của (C) với trục tung có phương trình là

(A) $y = 3x + 1$. (B) $y = -3x + 1$. (C) $y = -3x - 1$. (D) $y = 3x - 1$.

Lời giải.

Giao điểm của (C) với trục tung là điểm $M(0;1)$. Ta có $y' = 3x^2 - 3$, suy ra $y'(0) = -3$.

Phương trình tiếp tuyến là $y = y'(0)(x-0) + 1 \Leftrightarrow y = -3x + 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Có bao nhiêu số nguyên của tham số m trên đoạn $[-1;5]$ để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

(A) 7. (B) 6. (C) 5. (D) 4.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = x^2 - 2x + m$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0,\ \forall x \in (-\infty;+\infty)$.

Yêu cầu bài toán tương đương $\Delta_{y'} \leq 0 \Leftrightarrow 4 - 4m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$.

Mặt khác, do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-1;5]$ nên suy ra $m \in \{1;2;3;4;5\}$.

Vậy có 5 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Cho hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - ax^2 - 3ax + 4$, với a là tham số. Để hàm số đạt cực trị tại x_1 và x_2 thỏa mãn $\dfrac{x_1^2 + 2ax_2 + 9a}{a^2} + \dfrac{a^2}{x_2^2 + 2ax_1 + 9a} = 2$ thì a thuộc khoảng nào?

(A) $\left(-3;\dfrac{-5}{2}\right)$. (B) $\left(-5;\dfrac{-7}{2}\right)$. (C) $(-2;-1)$. (D) $\left(\dfrac{-7}{2};-3\right)$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 2ax - 3a$. Để hàm số đã cho có hai điểm cực trị x_1, x_2 thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^2 - 2ax - 3 = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta' = a^2 + 3a > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 0 \\ a < -3. \end{array}\right.$

Áp dụng định lí Vi-et ta được $x_1 + x_2 = 2a$ (2).

Vì x_1 là nghiệm của phương trình (1) nên ta được

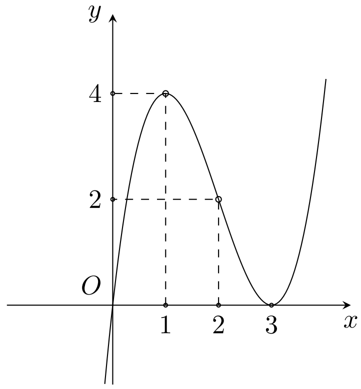
$$x_1^2 - 2ax_1 - 3a = 0 \Rightarrow x_1^2 + 2ax_2 + 9a = \left(x_1^2 - 2ax_1 - 3a\right) + 2a\left(x_1 + x_2\right) + 12a = 4a^2 + 12a.$$

Tương tự ta có $x_2^2 + 2ax_1 + 9a = 4a^2 + 12a$. Khi đó

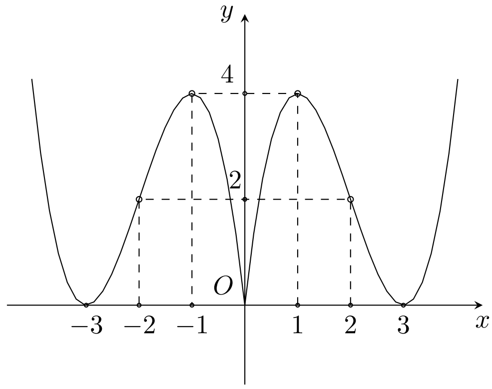
$$\frac{x_1^2 + 2ax_2 + 9a}{a^2} + \frac{a^2}{x_2^2 + 2ax_1 + 9a} = 2 \Leftrightarrow \frac{4a^2 + 12a}{a^2} + \frac{a^2}{4a^2 + 12a} = 2$$
$$\Leftrightarrow \frac{4a + 12}{a} + \frac{a}{4a + 12} = 2$$
$$\Leftrightarrow (4a + 12)^2 + a^2 - 2a(4a + 12) = 0$$
$$\Leftrightarrow (4a + 12 - a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = -4 \in \left(-5; \frac{-7}{2}\right).$$

Chọn đáp án B ☐

Câu 10. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A $y = |x|^3 + 6|x|^2 + 9|x|$.
B $y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$.
C $y = |x^3 - 6x^2 + 9x|$.
D $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$.

Lời giải.

Đồ thị hình 2 đối xứng qua trục tung nên đó là hàm chẵn.

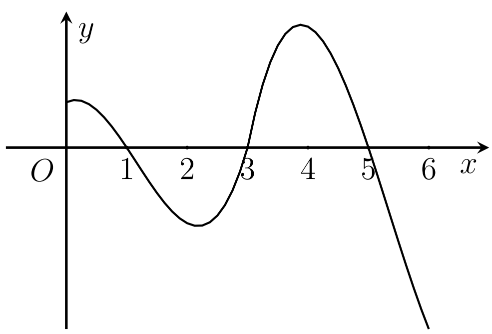
Ta thấy đồ thị hình 2 có phần bên phải trục tung trùng với phần đồ thị bên phải trục tung của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ và phần bên trái trục tung chính là lấy đối xứng phần đồ thị bên phải trục tung qua trục tung. Do đó hình 2 chính là đồ thị của hàm số $y = f(|x|) = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 11.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0; 6]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y = [f(x)]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị trên $[0; 6]$?

A 3. **B** 4. **C** 6. **D** 7.



Lời giải.

Xét hàm số $y = g(x) = [f(x)]^2$ trên $[0; 6]$.

Ta có: $g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta suy ra phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt thuộc $[0; 6]$ và bảng biến thiên sau:

x	0		1		3		5		6
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	
$f(x)$	$f(0)$	↗	$f(1)$	↘	$f(3)$	↗	$f(5)$	↘	f(6)

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $= f(x)$ cắt trục hoành tại tối đa 4 điểm có hoành độ thuộc $[0; 6]$ và không trùng với nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$. Hay phương trình $f(x) = 0$ có tối đa 4 nghiệm thuộc $[0; 6]$ mà không có nghiệm nào trùng với nghiệm của $f'(x) = 0$.

Vậy $g'(x) = 0$ có tối đa 7 nghiệm trên $[0; 6]$. Và do đó, hàm số $y = [f(x)]^2$ có tối đa 7 cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Cho $0 < a < 1$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. Tập xác định của hàm số $y = \log_a x$ là $\mathbb{R}$.

B. Tập xác định của hàm số $y = a^x$ là $(0; +\infty)$.

C. Tập giá trị của hàm số $y = a^x$ là $\mathbb{R}$.

D. Tập giá trị của hàm số $\log_a x$ là $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \log_a x$ có tập xác định là $(0; +\infty)$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = a^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $(0; \infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x > 9$ là

A. $(-\infty; 2)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(-2; +\infty)$. D. $(-\infty; -2)$.

Lời giải.

Ta có: $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x > 9 \Leftrightarrow x < \log_{\frac{1}{3}} 9 \Leftrightarrow x < -2$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Có bao nhiêu số nguyên trên $[0; 10]$ nghiệm đúng bất phương trình $\log_2(3x - 4) > \log_2(x - 1)$?

A. 10. B. 11. C. 9. D. 8.

Lời giải.

Ta có: $\log_2(3x - 4) > \log_2(x - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4 > 0 \\ 3x - 4 > x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{2}$.

Vì x là số nguyên thuộc $[0; 10]$ nên có 9 giá trị của x thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m + 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 4$?

A $m = \dfrac{13}{2}$. **B** $m = \dfrac{5}{2}$. **C** $m = 8$. **D** $m = 2$.

Lời giải.

Ta có: $4^x - m.2^{x+1} + 2m + 3 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2m \cdot 2^x + 2m + 3 = 0$.

Đặt $t = 2^x$, $t > 0$. Khi đó phương trình trở thành $t^2 - 2mt + 2m + 3 = 0$.

Phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 2m + 3 = 0$ có hai nghiệm x_1 , x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 4$ khi và chỉ khi phương trình $t^2 - 2mt + 2m + 3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 \cdot t_2 = 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = 2^{x_1+x_2} = 2^4 = 16$.

Điều này tương đương với $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 3 > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m + 3 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{13}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Với mức tiêu thụ thức ăn của trang trại A không đổi như dự định thì lượng thức ăn dự trữ sẽ đủ dùng cho 100 ngày. Nhưng thực tế, mức tiêu thụ thức ăn tăng thêm 4% mỗi ngày (ngày sau tăng 4% so với ngày trước đó). Hỏi thực tế lượng thức ăn dự trữ đó chỉ đủ dùng cho bao nhiêu ngày?

A 40. **B** 41. **C** 42. **D** 43.

Lời giải.

Gọi lượng thức ăn tiêu thụ theo dự định hàng ngày là x. Lượng thức ăn dự trữ của trang trại A là $100x$.

Ta có $x\left(1 + 1{,}04 + 1{,}04^2 + \ldots + 1{,}04^{n-1}\right) = 100x \Leftrightarrow \dfrac{1{,}04^n - 1}{1{,}04 - 1} = 100 \Rightarrow n = \log_{1{,}04} 5 \approx 41{,}035$.

Do đó lượng thức ăn dự trữ chỉ đủ dùng cho 41 ngày.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{2018x}$.

A $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2018x} + C$.

B $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2018} \cdot \mathrm{e}^{2018x} + C$.

C $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2018 \cdot \mathrm{e}^{2018x} + C$.

D $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2018x} \cdot \ln 2018 + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{2018x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2018}\mathrm{e}^{2018x}\,\mathrm{d}(2018x) = \frac{1}{2018} \cdot \mathrm{e}^{2018x} + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$. Tính $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

A $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{5}{4}$. **B** $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$. **C** $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3}{4}$. **D** $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{6}\right) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Một học sinh làm bài tích phân $I=\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ theo các bước sau.

- Bước 1: Đặt $x=\tan t$, suy ra $\mathrm{d}x=(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t$.
- Bước 2: Đổi cận $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}; x=0\Rightarrow t=0$.
- Bước 3: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 t}{1+\tan^2 t}\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}t=t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=0-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$.

Các bước làm ở trên, bước nào **sai**?

(A) Bước 1. (B) Bước 2. (C) Bước 3. (D) Không bước nào.

Lời giải.

Bước 3 bị sai. Sửa đúng là $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 t}{1+\tan^2 t}\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}t=t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

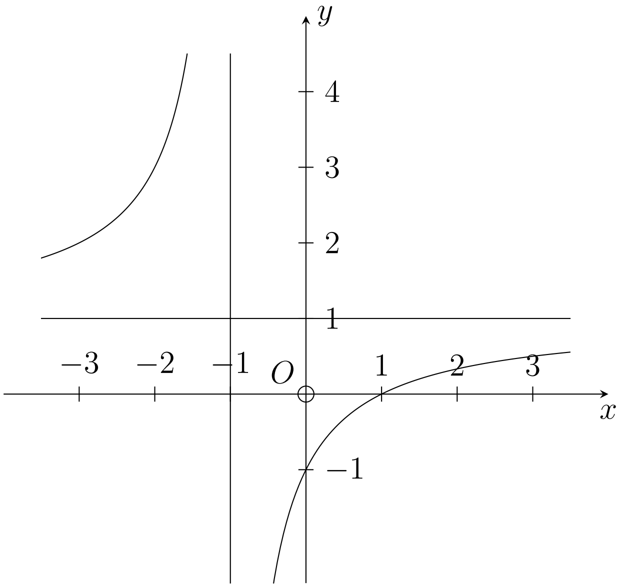
Câu 20. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H): y=\frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

(A) $\ln 2-1$. (B) $2\ln 2-1$. (C) $\ln 2+1$. (D) $\ln 2+1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số H cắt trục tọa độ tại các điểm $(0;-1)$ và $(1;0)$.

Vậy diện tích $S=\int\limits_0^1 \left(-\frac{x-1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=2\ln 2-1$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Tính tích phân $I=\int\limits_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x+1}}$ ta được kết quả $I=a\ln 3+b\ln 5$.

Giá trị $S=a^2+ab+3b^2$ là

(A) 4. (B) 1. (C) 0. (D) 5.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{3x+1}\Rightarrow t^2=3x+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=3\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=2; x=5\Rightarrow t=4$.

$$I=\int\limits_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x+1}}=\frac{2}{3}\int\limits_2^4 \frac{t\mathrm{d}t}{\frac{t^2-1}{3}\cdot t}=2\int\limits_2^4 \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$$
$$=\int\limits_2^4\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^4=2\ln 3-\ln 5.$$

Khi đó $a=2, b=-1\Rightarrow a^2+ab+3b^2=4-2+3=5.$

Chọn đáp án D □

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn $f'(x)\geq x+\frac{1}{x}, \forall x\in\mathbb{R}^+$ và $f(1)=1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $f(2)\geq 5$. B $f(2)\geq 4$. C $f(2)\geq \frac{5}{2}+\ln 2$. D $f(2)\geq \frac{5}{2}+2\ln 2$.

Lời giải.

Lấy tích phân hai vế ta có:

$$\int\limits_1^2 f'(x)\mathrm{d}x\geq \int\limits_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(2)-f(1)\geq\left(\frac{x^2}{2}+\ln x\right)\Bigg|_1^2$$
$$\Leftrightarrow f(2)-1\geq\frac{3}{2}+\ln 2\Leftrightarrow f(2)\geq\frac{5}{2}+\ln 2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 23. Cho số thực $a>0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $f(x)\cdot f(a-x)=1$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^a \frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x$?

A $I=\frac{2a}{3}$. B $I=\frac{a}{2}$. C $I=\frac{a}{3}$. D $I=a$.

Lời giải.

Đặt $t=a-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=a; x=a\Rightarrow t=0$.

Ta có $f(x)\cdot f(a-x)=1\Rightarrow f(x)=\frac{1}{f(a-x)}$.

Vậy $I=\int\limits_a^0\frac{-\mathrm{d}t}{1+\frac{1}{f(t)}}=-\int\limits_a^0\frac{f(t)}{1+f(t)}\mathrm{d}t=-\int\limits_a^0\frac{1+f(t)-1}{1+f(t)}\mathrm{d}t$

$$=\int\limits_0^a\frac{1+f(t)-1}{1+f(t)}\mathrm{d}t=\int\limits_0^a\left(1-\frac{1}{1+f(t)}\right)\mathrm{d}t=\int\limits_0^a\left(1-\frac{1}{1+f(x)}\right)\mathrm{d}x=x|_0^a-I=a-I.$$

Do đó ta có $I=a-I\Leftrightarrow I=\frac{a}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Cho số phức $z=6+7i$. Số phức liên hợp của z trong mặt phẳng (Oxy) có điểm biểu diễn hình học là

A $(6;7)$. B $(6;-7)$. C $(-6;7)$. D $(-6;-7)$.

Lời giải.

Ta có $z=6+7i\Rightarrow \overline{z}=6-7i\Rightarrow$ Điểm biểu diễn hình học của $\overline{z}$ là $M(6;-7)$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 - 6z + 13 = 0$. Tính $|z_0 + 1 - i|$.

(A) $\sqrt{13}$. (B) 13. (C) 5. (D) 25.

Lời giải.

Ta có: $z_0 = 3 - 2i$. Khi đó $|z_0 + 1 - i| = |3 - 2i + 1 - i| = |4 - 3i| = \sqrt{16 + 9} = 5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Nếu $z = i$ là một nghiệm phức của phương trình $z^2 + az + b = 0$ với $(a, b \in \mathbb{R})$ thì $a + b$ bằng

(A) -1. (B) 2. (C) -2. (D) 1.

Lời giải.

$z = i$ là một nghiệm phức của phương trình $z^2 + az + b = 0$ nên ta có:

$i^2 + a.i + b = 0 \Leftrightarrow ai + b = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 1$

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$. Tính $S = M^2 + m^2$.

(A) 1256. (B) 1258. (C) 1233. (D) 1236.

Lời giải.

Cách 1: *Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai.*

Gọi $z = x + yi, (x, y \in R)$.

Ta có $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |x - 3 + (y - 4)i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5\,(*)$.

Ta có $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2 = (x + 2)^2 + y^2 - [x^2 + (y - 1)^2] = 4x + 2y + 3 \Rightarrow y = \dfrac{P - 4x - 3}{2}$

Thế vào $(*)$ và rút gọn ta có: $20x^2 - 8(P - 8)x + P^2 - 22P + 137 = 0$

Phương trình bậc hai này có nghiệm$\Leftrightarrow \Delta' = -4P^2 + 184P - 1716 \geq 0 \Leftrightarrow 13 \leq P \leq 33$.

Từ đó ta có $M = 33; m = 13 \Rightarrow M^2 + m^2 = 1258$.

Cách 2: *Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki.*

Gọi $z = x + yi,\ (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |x - 3 + (y - 4)i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5$.

Ta có $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2 = (x + 2)^2 + y^2 - [x^2 + (y - 1)^2] = 4x + 2y + 3 = 4(x - 3) + 2(y - 4) + 23$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta có:

$|4(x - 3) + 2(y - 4)| \leq \sqrt{(16 + 4)[(x - 3)^2 + (y - 4)^2]} = 10$

$\Leftrightarrow -10 \leq 4(x - 3) + 2(y - 4) \leq 10 \Leftrightarrow 13 \leq 4(x - 3) + 2(y - 4) + 23 \leq 33 \Leftrightarrow 13 \leq P \leq 33$.

Từ đó ta có $M = 33$; $m = 13 \Rightarrow M^2 + m^2 = 1258$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.

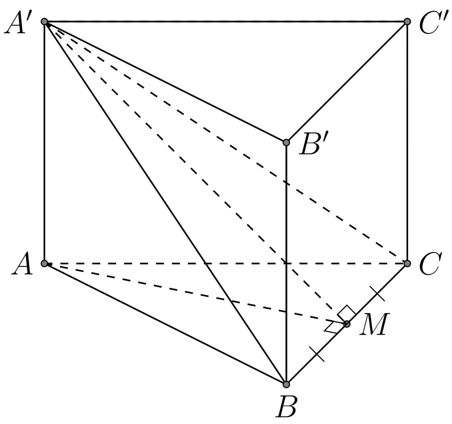
Ta có $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot 2a \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot a \sin 60^\circ = \dfrac{1}{3} \cdot 2a \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot \dfrac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 29. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 2, diện tích tam giác $A'BC$ bằng 3. Tính thể tích của khối lăng trụ.

(A) $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. (B) $2\sqrt{5}$. (C) $\sqrt{2}$. **D** $3\sqrt{2}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC.

Vì $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'M$.

$S_{\triangle A'BC} = 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}A'M \cdot BC = 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}A'M \cdot 2 = 3 \Leftrightarrow A'M = 3$.

$AA' = \sqrt{A'M^2 - AM^2} = \sqrt{3^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{6}$.

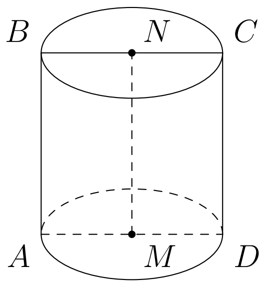
$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot A'A = \dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 30. Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$ và $AD = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN, ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.

(A) $S_{tp} = 10\pi$. **B** $S_{tp} = 4\pi$. (C) $S_{tp} = 2\pi$. (D) $S_{tp} = 6\pi$.

Lời giải.



Bán kính đường tròn đáy: $r = \dfrac{AD}{2} = 1$

Chiều cao hình trụ: $h = AB = 1$

Diện tích toàn phần của hình trụ:

$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 4\pi$ (đvtt).

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 31. Cho mặt cầu (S) có diện tích $4\pi a^2\ \text{cm}^2$. Khi đó, thể tích khối cầu (S) là

(A) $\dfrac{\pi a^3}{3}\ (\text{cm}^3)$. **B** $\dfrac{4\pi a^3}{3}\ (\text{cm}^3)$. (C) $\dfrac{16\pi a^3}{3}\ (\text{cm}^3)$. (D) $\dfrac{64\pi a^3}{3}\ (\text{cm}^3)$.

Lời giải.

Gọi R là bán kính mặt cầu (S).

Áp dụng công thức tính diện tích mặt cầu: $4\pi R^2 = 4\pi a^2 \Rightarrow R = a$ (cm).

Thể tích V_C của khối cầu (S) là:

$V_C = \dfrac{4\pi R^3}{3} = \dfrac{4\pi a^3}{3}\ (\text{cm}^3)$.

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 6 = 0$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu đó.

A $I(-1; 3; 0)$; $R = 4$. (B) $I(1; -3; 0)$; $R = 4$.

(C) $I(-1;3;0)$; $R=16$.
(D) $I(1;-3;0)$; $R=16$.

Lời giải.

Mặt cầu có tâm $I(-1;3;0)$; bán kính $R=\sqrt{1+9-(-6)}=\sqrt{16}=4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng (Δ_1): $\begin{cases} x=-3+2t \\ y=1-t \\ z=-1+4t \end{cases}$ và (Δ_2): $\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-4}{-1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) (Δ_1) và (Δ_2) chéo nhau và vuông góc nhau.
(B) (Δ_1) cắt và không vuông góc với (Δ_2).
C (Δ_1) cắt và vuông góc với (Δ_2).
(D) (Δ_1) và (Δ_2) song song với nhau.

Lời giải.

Phương trình tham số của (Δ_2) : $\begin{cases} x=-4+3t' \\ y=-2+2t' \\ z=4-t' \end{cases}$.

Véc-tơ chỉ phương của (Δ_1) và (Δ_2) lần lượt là $\vec{u_1}=(2;-1;4)$ và $\vec{u_2}=(3;2;-1)$.

Do $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=2\cdot 3+(-1)\cdot 2+4\cdot(-1)=0$ nên $(\Delta_1)\perp(\Delta_2)$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} -3+2t=-4+3t' \\ 1-t=-2+2t' \\ -1+4t=4-t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t-3t'=-1 \\ t+2t'=3 \\ 4t+t'=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t'=1 \end{cases}$.

Vậy (Δ_1) cắt và vuông góc với (Δ_2).

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho phương trình: $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my-2mz+5m^2+9=0$. Tìm m để phương trình trên là phương trình của một mặt cầu

(A) $-5<m<1$.
B $m<-5$ hoặc $m>1$.
(C) $m<-5$.
(D) $m>1$.

Lời giải.

Để phương trình $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my-2mz+5m^2+9=0$ là phương trình của một mặt cầu thì: $(m+2)^2+(2m)^2+m^2-5m^2-9>0 \Leftrightarrow m^2+4m-5>0 \Leftrightarrow m<-5$ hoặc $m>1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;1;1)$, $C(0;1;2)$. Gọi $H(x;y;z)$ là trực tâm của tam giác ABC. Giá trị của $S=x+y+z$ là

A 4.
(B) 5.
(C) 7.
(D) 6.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}=(1;-1;2)$, $\overrightarrow{BC}=(-2;0;1)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;-1;3)$.

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}=(-1;-5;-2)$

$\Rightarrow \vec{n}_{(ABC)}=(-1;-5;-2)$.

$\Rightarrow (ABC)\colon -1(x-1)-5(y-2)-2(z+1)=0$
$\Leftrightarrow -x-5y-2z+9=0 \Leftrightarrow x+5y+2z-9=0.$

Gọi $H(x;y;z)$ là trực tâm ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \\ H\in(ABC) \end{cases}$

Mà $\overrightarrow{AH}=(x-1;y-2;z+1)$, $\overrightarrow{BH}=(x-2;y-1;z-1)$.

$\Rightarrow \begin{cases} -2x+z=-3 \\ -x-y+3z=0 \\ x+5y+2z=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow H(2;1;1) \Rightarrow x+y+z=4.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q)\colon x+y+3z=0$ và $(R)\colon 2x-y+z=0$ là

(A) $4x+5y-3z+22=0$.
(B) $4x-5y-3z-12=0$.
(C) $2x+y-3z-14=0$.
D $4x+5y-3z-22=0$.

Lời giải.

Từ $(Q)\colon x+y+3z=0$, suy ra véc-tơ pháp tuyến của (Q) là $\overrightarrow{n}_{(Q)}=(1;1;3)$.
Từ $(R)\colon 2x-y+z=0$, suy ra véc-tơ pháp tuyến của (R) là $\overrightarrow{n}_{(R)}=(2;-1;1)$.
Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}_{(P)}=\overrightarrow{n}_{(Q)}\wedge\overrightarrow{n}_{(R)}=(4;5;-3)$.
Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $4(x-2)+5(y-1)-3(z+3)=0 \Leftrightarrow 4x+5y-3z-22=0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y+z-4=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{3}$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d.

A $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$.
(B) $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-3}$.
(C) $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.
(D) $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$.

Lời giải.

Ta có mặt phẳng $(P)\colon x+2y+z-4=0$ có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}=(1;2;1)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{3}$ có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}=(2;1;3)$.
Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại điểm $I(1;1;1)$.
Vì đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d nên đường thẳng Δ đi qua giao điểm $I(1;1;1)$ của đường thẳng d với mặt phẳng (P) và nhận $\overrightarrow{n}=[\overrightarrow{n},\overrightarrow{u}]=(5;-1;-3)$ làm véc-tơ chỉ phương.
Vậy đường thẳng Δ có phương trình $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình $d_1\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{3}$, $d_2\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{4}$. Phương trình mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 là

A $14x-4y-8z+3=0$.
(B) $14x-4y-8z-1=0$.

(C) $14x - 4y - 8z + 1 = 0$. (D) $14x - 4y - 8z - 3 = 0$.

Lời giải.

Ta có d_1 đi qua $A(2;2;3)$, có VTCP $\vec{u}_1 = (2;1;3)$, d_2 đi qua $B(1;2;1)$ và có $\vec{u}_2 = (2;-1;4)$.

Do (P) cách đều d_1, d_2 nên (P) song song với d_1, d_2

$\Rightarrow \vec{n}_P = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (7;-2;-4)$

PT mặt phẳng (P) có dạng: $7x - 2y - 4z + D = 0$

Do (P) cách đều d_1, d_2 suy ra $\mathrm{d}(A,(P)) = \mathrm{d}(B,(P))$

$\Leftrightarrow \dfrac{|7\cdot 2 - 2\cdot 2 - 4\cdot 3 + d|}{\sqrt{69}} = \dfrac{|7\cdot 1 - 2\cdot 2 - 4\cdot 1 + d|}{\sqrt{69}} \Leftrightarrow |D-2| = |D-1| \Leftrightarrow D = \dfrac{3}{2}$

Phương trình mặt phẳng P: $14x - 4y - 8z + 3 = 0$

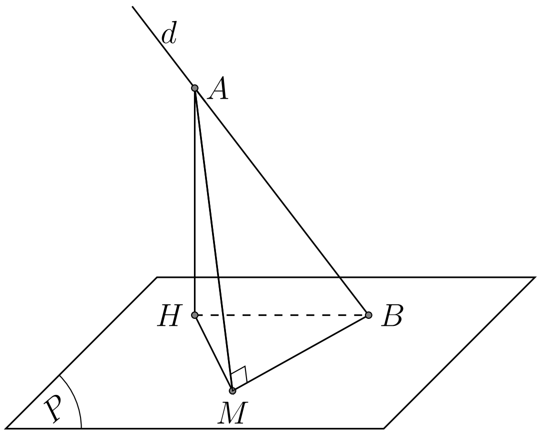
Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng (P): $2x + 2y - z + 9 = 0$. Đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3;4;-4)$ cắt P tại điểm B. Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90°. Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?

(A) $H(-2;-1;3)$. **(B)** $I(-1;-2;3)$. (C) $K(3;0;15)$. (D) $J(-3;2;7)$.

Lời giải.

Phương trình d: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 4t, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = -3 - 4t \end{cases}$



Đường thẳng d cắt P tại $B(-2;-2;1)$.

Gọi H là hình chiếu của A lên (P).

Ta có: $H(-3;-2;-1)$.

Vì $MB \perp MA; MB \perp AH$ nên $MB \perp MH$ suy ra $MB \leq BH$.

Do đó: MB lớn nhất bằng BH khi $M \equiv H$.

Vậy MB đi qua B, nhận $\overrightarrow{BH}$ là vectơ chỉ phương.

Phương trình MB: $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ do đó MB đi qua điểm $I(-1;-2;3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \dfrac{\sin x}{\tan x - 1}$.

(A) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + m\pi; \dfrac{\pi}{4} + n\pi; m, n \in \mathbb{Z}\right\}$. (B) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{m\pi; \dfrac{\pi}{4} + n\pi; m, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

(C) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$. (D) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Biểu thức $\dfrac{\sin x}{\tan x - 1}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + m\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + n\pi \end{cases}; m, n \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau.

A 648. **B** 1000. **C** 729. **D** 720.

Lời giải.

Gọi số cần tìm có dạng: $\overline{abc}$ $(a \neq 0;\ a; b; c$ đôi một khác nhau$)$

$\Rightarrow$ Có $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ số có ba chữ số.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển biểu thức $\left(3x^3 - \dfrac{2}{x^2}\right)^5$.

A -810. **B** -240. **C** 810. **D** 240.

Lời giải.

Ta có $\left(3x^3 - \dfrac{2}{x^2}\right)^5 = \sum\limits_{k=0}^{5} \mathrm{C}_5^k \cdot (3x^3)^{5-k} \cdot (-2x^{-2})^k = \sum\limits_{k=0}^{5} \mathrm{C}_5^k \cdot 3^{5-k} \cdot (-2)^k \cdot x^{15-5k}$.

Tìm k sao cho $15 - 5k = 10 \Leftrightarrow k = 1$.

Vậy hệ số cần tìm là $\mathrm{C}_5^1 \cdot 3^4 \cdot (-2) = -810$.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Cho tập hợp $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Số các tập con của tập X; có chứa chữ số 0 là

A 512. **B** 1024. **C** 1023. **D** 511.

Lời giải.

Số các tập con của tập X là 2^{10}, trong đó số các tập con của X mà không chứa chữ số 0 là 2^9.

Vậy số các tập con của X có chứa chữ số 0 là $2^{10} - 2^9 = 512$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Sắp xếp 12 học sinh của lớp 12A gồm có 6 học sinh nam và 6 học sinh nữ vào một bàn dài gồm có hai dãy ghế đối diện nhau (mỗi dãy gồm có 6 chiếc ghế) để thảo luận nhóm. Tính xác suất để hai học sinh ngồi đối diện nhau và cạnh nhau luôn khác giới.

A $\dfrac{9}{4158}$. **B** $\dfrac{9}{8316}$. **C** $\dfrac{9}{299760}$. **D** $\dfrac{9}{5987520}$.

Lời giải.

Không gian mẫu: Sắp xếp 12 học sinh vào 12 ghế, ta có: $n(\Omega) = 12!$

Biến cố A sắp 6 học sinh nam vào các ô có đánh dấu $\times$ như hình vẽ và 6 ghế còn lại dành cho 6 học sinh nữ và ngược lại.

Vậy ta có: $n(A) = 2 \cdot 6! \cdot 6!$

$\times$		$\times$		$\times$	
	$\times$		$\times$		$\times$

Vậy xác suất để sắp xếp 12 học sinh vào bàn học sao cho hai học sinh ngồi đối diện nhau và cạnh nhau luôn khác giới là:

$P(A) = \dfrac{2 \cdot 6! \cdot 6!}{12!} = \dfrac{9}{4158}$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Trong các dãy số sau, dãy số nào **không** phải là cấp số cộng?

A $3,\ 1,\ -1,\ -2,\ -4$. **B** $\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{2}, \dfrac{9}{2}$.

(C) $-8,\ -6,\ -4,\ -2,\ 0.$ (D) $1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1.$

Lời giải.

Nếu dãy số $\{u_0, u_1, u_2, \ldots\}$ là cấp số cộng và a, b, c là ba số hạng liên tiếp của dãy số thì ta có $a + c = 2b$.

Xét phương án A ta thấy $1,\ -1,\ -2$ là ba số hạng liên tiếp nhưng $1 - 2 \neq 2 \cdot (-1)$. Vậy dãy trong phương án A không là cấp số cộng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{nếu } x > 0 \\ mx + m + \dfrac{1}{4} & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$ (với m là tham số). Tìm giá trị của tham số m để hàm số có giới hạn tại $x = 0$.

(A) $m = 1$. (B) $m = 0$. (C) $m = \dfrac{1}{2}$. (D) $m = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \dfrac{1}{4}$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(mx + m + \dfrac{1}{4}\right) = m + \dfrac{1}{4}$.

Hàm số có giới hạn tại $x = 0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \Leftrightarrow m + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow m = 0$.

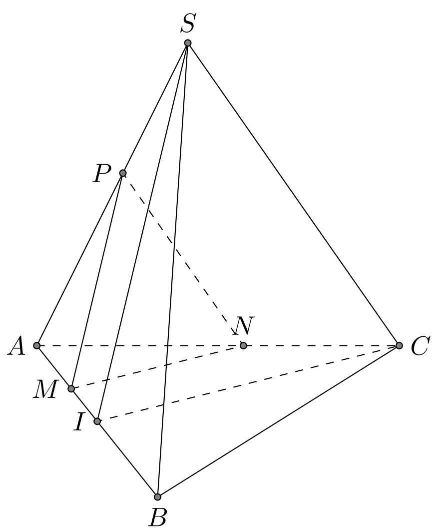
Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Cho tứ diện đều $SABC$. Gọi I là trung điểm của đoạn AB, M là điểm di động trên đoạn AI. Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song với (SIC). Thiết diện tạo bởi (α) với tứ diện $SABC$ là

(A) hình thoi. (B) tam giác cân tại M.

(C) tam giác đều. (D) hình bình hành.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (SAB), qua M kẻ đường thẳng song song với SI cắt SA tại P.

Trong mặt phẳng (ABC), qua M kẻ đường thẳng song song với IC cắt AC tại N.

Thiết diện là tam giác MNP. Ta có

$$\frac{MP}{SI} = \frac{MN}{CI} \Rightarrow MP = MN \quad (\text{vì } SI = CI).$$

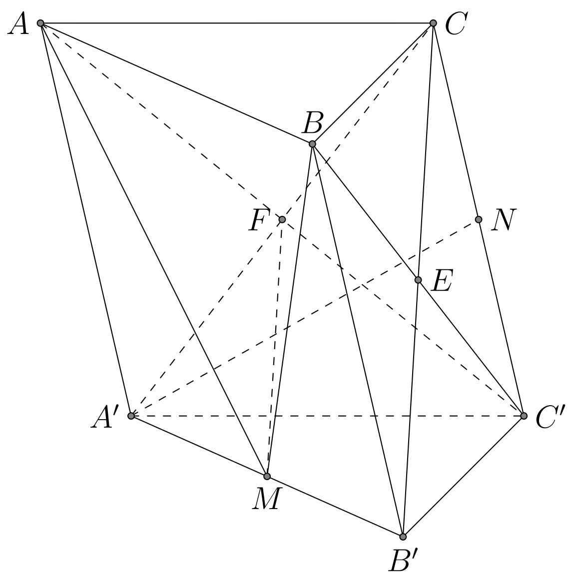
Vậy thiết diện là tam giác MNP cân tại M.

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và CC'. Khi đó CB' song song với

A AM. **B** $(BC'M)$. **C** $A'N$. **D** $(AC'M)$.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases} A, M, B' \in (ABB'A') \\ C \notin (ABB'A') \end{cases}$ nên CB' và AM chéo nhau.

Ta có $CB' \cap BC' = E$ nên CB' cắt $(BC'M)$.

Ta có $\begin{cases} C, B', N \in (BCC'B') \\ A' \notin (BCC'B') \end{cases}$ nên CB' và $A'N$ chéo nhau.

Ta có $AC' \cap A'C = F \Rightarrow F$ là trung điểm của $A'C$.

Trong $\triangle A'B'C$ có MF là đường trung bình nên $MF \parallel CB'$.

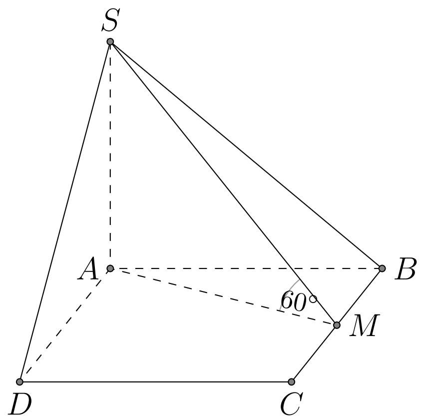
Mà $MF \subset (AC'M)$. Vậy $CB' \parallel (AC'M)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của CD, góc giữa SM và mặt phẳng đáy bằng 60°. Độ dài cạnh SA là

A $a\sqrt{3}$. **B** $a\sqrt{15}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

Lời giải.



Ta có góc giữa SM và mặt phẳng đáy là $\widehat{SMA} = 60°$.

Xét tam giác ABM vuông tại B, ta có $AM^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{4} \Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

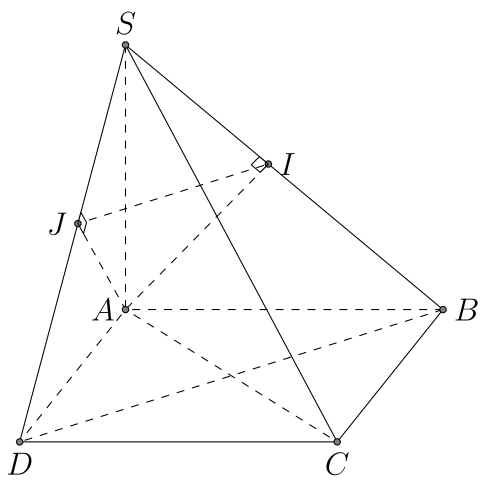
Xét tam giác SAM vuông tại A, ta có $\tan 60° = \dfrac{SA}{AM} \Rightarrow SA = AM \tan 60° = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = x$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) hợp với nhau góc $60°$.

A $x = \dfrac{3a}{2}$. **B** $x = \dfrac{a}{2}$. **C** $x = a$. **D** $x = 2a$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (SAB) dựng $AI \perp SB$, ta được $AI \perp (SBC)$ (1).

Trong mặt phẳng (SAD) dựng $AJ \perp SD$, ta được $AJ \perp (SCD)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra góc $\big((SBC),(SCD)\big) = (AI, AJ) = \widehat{IAJ}$.

Mặt khác, ta có $\dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AB^2}$, $\dfrac{1}{AJ^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AD^2}$.

Suy ra $AI = AJ$. Do đó nếu góc $\widehat{IAJ} = 60°$ thì $\triangle AIJ$ đều $\Rightarrow AI = AJ = IJ$.

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A có AI là đường cao $\Rightarrow AI \cdot SB = SA \cdot AB \Rightarrow AI = \dfrac{SA \cdot AB}{SB}$ (3).

Và có $SA^2 = SI \cdot SB \Rightarrow SI = \dfrac{SA^2}{SB}$ (4); $SA^2 = SJ \cdot SD \Rightarrow SJ = \dfrac{SA^2}{SD}$ (4′).

Suy ra $IJ \parallel BD$ (vì $SB = SD$) $\Rightarrow \dfrac{IJ}{BD} = \dfrac{SI}{SB} \Rightarrow IJ = \dfrac{SI \cdot BD}{SB} = \dfrac{SA^2 \cdot BD}{SB^2}$ (5).

Thế (3) và (5) vào $AI = IJ$ suy ra

$$AB = \frac{SA \cdot BD}{SB} \Leftrightarrow AB \cdot SB = SA \cdot BD \Leftrightarrow a \cdot \sqrt{x^2 + a^2} = x \cdot a \cdot \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + a^2 = 2x^2 \Leftrightarrow x = a.$$

Chọn đáp án C □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. A	3. C	4. B	5. C	6. B	7. B	8. C	9. B	10. B
11. D	12. D	13. D	14. C	15. A	16. B	17. B	18. C	19. C	20. B
21. D	22. C	23. B	24. B	25. C	26. D	27. B	28. A	29. D	30. B
31. B	32. A	33. C	34. B	35. A	36. D	37. A	38. A	39. B	40. A
41. A	42. A	43. A	44. A	45. A	46. B	47. B	48. D	49. D	50. C

142 ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG LẦN 3, 2017 - 2018 TRƯỜNG THPT BẾN TRE, VĨNH PHÚC

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Tổng tất cả các giá trị m nguyên dương để hàm số $y = \left(\frac{\pi}{6}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+2}$ luôn nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ là

(A) 253. (B) 300. (C) 276. (D) 231.

Lời giải.

$y' = (3e^{3x} - (m-1)e^x) \cdot \ln\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+2}$.

Hàm nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ khi và chỉ khi $y' \le 0, \forall x \in (1;3)$.

Do $\begin{cases} \ln\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0 \\ \left(\frac{\pi}{6}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+2} > 0 \end{cases}$ nên $y' \le 0, \forall x \in (1;3) \Leftrightarrow 3e^{3x} - (m-1)e^x \ge 0, \forall x \in (1;3)$
$\Leftrightarrow 3e^{2x} + 1 \ge m, \forall x \in (1;3)$.

Xét hàm số $f(x) = 3e^{2x} + 1$. Ta có $f'(x) = 6e^{2x} > 0, \forall x \in (1;3)$. Xét bảng biến thiên

x	1		3
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(3)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $m \le \min\limits_{x\in(1;3)} f(x) \Leftrightarrow m \le 3e^2 + 1$. Khi đó tổng các giá trị nguyên dương của m là $\dfrac{23(1+23)}{2} = 276$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Điểm $M(3;-4)$ là điểm biểu diễn của số phức z, số phức liên hợp của z là

(A) $\bar{z} = 3 - 4i$. (B) $\bar{z} = -3 + 4i$. (C) $\bar{z} = 3 + 4i$. (D) $\bar{z} = -3 - 4i$.

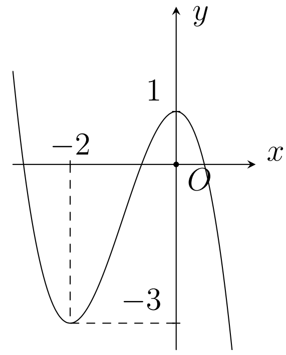
Lời giải.

Ta có $z = 3 - 4i$ suy ra $\bar{z} = 3 + 4i$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3.

Đồ thị hình bên là của hàm số



A $y = -x^3 - 3x^2 + 1$.
B $y = -\dfrac{x^3}{3} + x^2 + 1$.
C $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
D $y = -x^4 + 3x^2 + 1$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị, ta thấy hàm số có hệ số $a < 0$ và có hai cực trị tại $x = 0$ và $x = -2$.

Ta có hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 1$ có $y' = -3x^2 - 6x$.

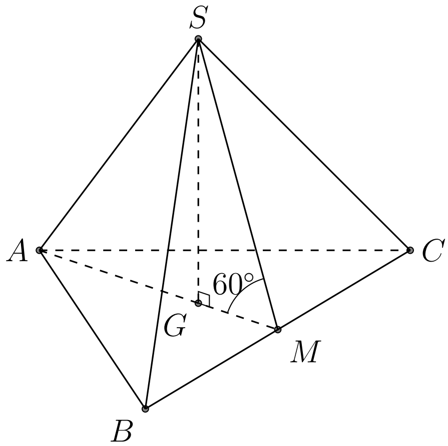
Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2. \end{array}\right.$ là hai cực trị của hàm số.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy là a và mặt bên hợp với đáy một góc 60°. Tính thể tích hình chóp $S.ABC$.

A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm BC. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

Ta có $GM \perp BC$. Mà tam giác SBC cân nên $SM \perp BC$.

Khi đó, góc tạo bởi mặt bên (SBC) và đáy (ABC) là góc $\widehat{SMG}$.

Ta có $SG = GM \tan 60^\circ = \dfrac{1}{3}AM \tan 60^\circ = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{a}{2}$.

Thể tích khối khóp $S.ABC$ là

$$V = \frac{1}{3}SG \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 5. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ là

A $x = -1$. **B** $y = 1$. **C** $x = 1$. **D** $y = -1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x+1}{x-1} = -\infty$. Do đó $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x + 5y - z - 2 = 0$ cắt nhau tại điểm $M(a; b; c)$ khi đó $a + b + c$ có giá trị là

A 5. **B** -2. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của d và (P) thỏa hệ

$$\begin{cases} \dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} \\ \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1} \\ 3x+5y-z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4y=0 \\ y-3z=6 \\ 3x+5y-z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow M(0;0;-2).$$

Khi đó $a+b+c=-2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Xác định m để đồ thị hàm số $(C)\colon y = 5x^4 - 8x^2 + m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành có phần trên và phần dưới bằng nhau.

(A) $\dfrac{9}{16}$. **(B)** $\dfrac{16}{9}$. (C) 9. (D) $\dfrac{25}{16}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và trục hoành là $5x^4 - 8x^2 + m = 0$.

Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$. Ta có $5t^2 - 8t + m = 0$. (1)

Đồ thị (C) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16-5m > 0 \\ \dfrac{m}{5} > 0 \\ \dfrac{8}{5} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \dfrac{16}{5}.$$

Ta có hàm số $y = f(x) = 5x^4 - 8x^2 + m$ là hàm số chẵn nên $S_1 + S_2 = S_3 \Rightarrow S_2 = \dfrac{1}{2}S_3$. Gọi $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ là bốn hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành ta có

$$S_2 = \frac{1}{2}S_3 \Rightarrow \int\limits_{x_3}^{x_4} (-f(x))\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{x_3} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_{x_3}^{x_4} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^{x_3} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^{x_4} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^{x_4} (5x^4 - 8x^2 + m)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^5 - \frac{8}{3}x^3 + mx\right)\Bigg|_0^{x_4} = 0 \Leftrightarrow x_4^5 - \frac{8}{3}x_4^3 + mx_4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_4 = 0 \\ x_4^4 - \dfrac{8}{3}x_4^2 + m = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Với $x_4 = 0 \Rightarrow m = 0$ (loại).

Xét (2) $\Leftrightarrow (5x_4^4 - 8x_4^2 + m) - 4x_4^4 + \dfrac{16}{3}x_4^2 = 0 \Leftrightarrow 4x_4^4 - \dfrac{16}{3}x_4^2 = 0 \Leftrightarrow x_4^2 = \dfrac{4}{3} \Rightarrow m = \dfrac{16}{9}$(nhận).

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Biết $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} (x - \sin 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{b}\pi^2$ trong đó a, b là các số thực và $\dfrac{a}{b}$ (tối giản). Tính $a+b$.

(A) -3. (B) 5. **(C)** 3. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^{\pi}(x-\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\pi} = \dfrac{\pi^2}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi^2}{2}$. Suy ra $a=1$, $b=2$ khi đó $a+b=3$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Cho đồ thị (C): $y=x^3-6x^2+9x-1$. Từ một điểm bất kỳ trên đường thẳng $x=2$ kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến đến (C)?

A 2. B 1. C 0. D 3.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-12x+9$. Gọi đường thẳng đi qua điểm $A(2;b)$ có dạng $y=k(x-2)+b$.
Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Điều kiện để đường thẳng trở thành tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_0^3-6x_0^2+9x_0-1=k(x_0-2)+b & (1)\\ 3x_0^2-12x_0+9=k & (2)\end{cases}$$

có nghiệm.
Thay (2) vào (1) ta được

$$\begin{aligned} & x_0^3-6x_0^2+9x_0-1=(3x_0^2-12x_0+9)(x_0-2)+b\\ \Leftrightarrow\ & x_0^3-6x_0^2+9x_0-1=3x_0^3-18x_0^2+33x_0-18+b\\ \Leftrightarrow\ & 2x_0^3-24x_0^2+24x_0-17=-b.\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x)=2x^3-12x^2+24x-17$, ta có $f'(x)=6x^2-24x+24$. Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$.
Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=-b$ luôn cắt hàm số $f(x)$ tại một điểm duy nhất. Suy ra phương trình có nghiệm duy nhất nên chỉ có một tiếp điểm. Vậy qua A chỉ kẻ được duy nhất một tiếp tuyến đến (C).

Chọn đáp án B □

Câu 10. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn phương trình: $3\mathrm{C}_n^2+2\mathrm{A}_n^2=3n^2+15$. Hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển $\left(2x^3-\dfrac{3}{x^2}\right)^n$ bằng

A -1088640. B 1088640. C -210. D 210.

Lời giải.

$$3\mathrm{C}_n^2+2\mathrm{A}_n^2 = 3n^2+15$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\quad \frac{3\cdot n!}{2!(n-2)!}+\frac{2\cdot n!}{(n-2)!} &= 3n^2+15\\ \Leftrightarrow\quad 3n(n-1)+4n(n-1) &= 6n^2+30\\ \Leftrightarrow\quad n^2-7n-30 &= 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=10(n)\\ n=-3(l)\end{array}\right.\end{aligned}$$

Số hạng tổng quát trong khai triển là

$$\mathrm{C}_{10}^k(2x^3)^k\left(-\frac{3}{x^2}\right)^{10-k}=\mathrm{C}_{10}^k2^k\cdot(-3)^{10-k}\cdot x^{3k-20+2k}=\mathrm{C}_{10}^k2^k\cdot(-3)^{10-k}x^{5k-20}.$$

Số hạng chứa x^{10} trong khai triển ứng với $5k-20=10\Leftrightarrow k=6$.

Ta có hệ số của số hạng chứ x^{10} trong khai triển là $\mathrm{C}_{10}^6 2^6\cdot(-3)^4=1088640$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Số nguyên dương n thỏa mãn hệ thức: $\mathrm{C}_{2n}^0-\mathrm{C}_{2n}^2+\mathrm{C}_{2n}^4-\mathrm{C}_{2n}^6+\mathrm{C}_{2n}^8-\mathrm{C}_{2n}^{10}+\cdots+(-1)^n\mathrm{C}_{2n}^{2n}=2^{1008}$ là

A. 2018. B. 2016. C. 1009. **D. 1008.**

Lời giải.

Xét khai triển

$$(1+x)^{2n}=\mathrm{C}_{2n}^0+\mathrm{C}_{2n}^1x+\mathrm{C}_{2n}^2x^2+\mathrm{C}_{2n}^3x^3+\mathrm{C}_{2n}^4x^4+\mathrm{C}_{2n}^5x^5+\cdots\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+\mathrm{C}_{2n}^{2n}x^{2n}.$$

Cho $x=i$ ta có

$$\begin{aligned}(1+i)^{2n} &= \mathrm{C}_{2n}^0+\mathrm{C}_{2n}^1i+\mathrm{C}_{2n}^2i^2+\mathrm{C}_{2n}^3i^3+\mathrm{C}_{2n}^4i^4+\mathrm{C}_{2n}^5i^5+\mathrm{C}_{2n}^6i^6+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}i^{2n-1}+\mathrm{C}_{2n}^{2n}i^{2n}\\ &= \mathrm{C}_{2n}^0+\mathrm{C}_{2n}^1i-\mathrm{C}_{2n}^2-\mathrm{C}_{2n}^3i+\mathrm{C}_{2n}^4+\mathrm{C}_{2n}^5i-\mathrm{C}_{2n}^6+\cdots-\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}i+(-1)^n\mathrm{C}_{2n}^{2n}\\ &= \mathrm{C}_{2n}^0-\mathrm{C}_{2n}^2+\mathrm{C}_{2n}^4-\mathrm{C}_{2n}^6+\cdots+(-1)^n\mathrm{C}_{2n}^{2n}+i\left(\mathrm{C}_{2n}^1-\mathrm{C}_{2n}^3+\mathrm{C}_{2n}^5-\cdots-\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}\right)\\ &= \mathrm{C}_{2n}^0-\mathrm{C}_{2n}^2+\mathrm{C}_{2n}^4-\mathrm{C}_{2n}^6+\mathrm{C}_{2n}^8-\mathrm{C}_{2n}^{10}+\cdots+(-1)^n\mathrm{C}_{2n}^{2n}.\end{aligned}$$

Khi đó $(1+i)^{2n}=2^{1008}\Leftrightarrow[(1+i)^2]^n=2^{1008}\Leftrightarrow(2i)^n=2^{1008}\Leftrightarrow 2^ni^n=2^{1008}\Leftrightarrow n=1008$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Cho $y=\ln(4x+3)$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $4y'+(4x+3)y''=0$. B. $4y'+3y''=0$.

C. $y+4y'-(4x+3)y''=0$. D. $y'+4y''=0$.

Lời giải.

$y=\ln(4x+3)\Rightarrow y'=\dfrac{4}{4x+3}\Rightarrow y''=\dfrac{-16}{(4x+3)^2}$.

Ta có $4y'+(4x+3)y''=\dfrac{16}{4x+3}-\dfrac{16}{4x+3}=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$. Đẳng thức nào **sai**?

A. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}t$. B. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

(C) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$. (D) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_b^a f(t)\,\mathrm{d}(-t)$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x - 5y + 1 = 0$. Một véc-tơ pháp tuyến của (P) là

(A) $\vec{n}_1 = (2; -5; 1)$. **B** $\vec{n}_2 = (2; -5; 0)$. (C) $\vec{n}_3 = (2; 5; 0)$. (D) $\vec{n}_4 = (-2; 5; 1)$.

Lời giải.

Ta có mặt phẳng $(P)\colon 2x - 5y + 1 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (2; -5; 0)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $\int\limits_0^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = 5$, $\int\limits_2^5 f'(2u)\,\mathrm{d}u = 6$, $f(0) = 3$. Giá trị của $f(10)$ bằng

(A) 4. **B** 20. (C) -4. (D) -20.

Lời giải.

Đặt $x = 2u \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}u$.

Đổi cận $u = 2 \Rightarrow x = 4$, $u = 5 \Rightarrow x = 10$.

Khi đó $\int\limits_2^5 f'(2u)du = \int\limits_2^5 f'(x)\dfrac{\mathrm{d}x}{2} = \dfrac{1}{2}\int\limits_2^5 f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Mà $\int\limits_2^5 f'(2u)du = 6 \Rightarrow \dfrac{1}{2}\int\limits_2^5 f'(x)\,\mathrm{d}x = 6 \Rightarrow \int\limits_2^5 f'(x)\,\mathrm{d}x = 12$.

Ta có $\int\limits_0^{10} f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^4 f'(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_4^{10} f'(x)\,\mathrm{d}x = 5 + 12 = 17$. Mà $\int\limits_0^{10} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(10) - f(0)$ $\Rightarrow f(10) = 20$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x + 2$ trên đoạn $[-2; 0]$ là

(A) $\dfrac{8}{3}$. **B** $\dfrac{4}{3}$. (C) 2. (D) $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 1$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \notin [-2; 0] \\ x = -1 \in [-2; 0] \end{array}\right.$.

$y(0) = 2$, $y(-2) = \dfrac{4}{3}$, $y(-1) = \dfrac{8}{3}$. Suy ra $\max\limits_{x \in [-2;0]} y = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = \cos^2 2x + 2\left(\sin x + \cos x\right)^3 - 3\sin 2x + m$. Số các giá trị m nguyên để $f^2(x) \leq 36$, $\forall x$ là

(A) 2. (B) 3. **(C) 1.** (D) 0.

Lời giải.

Ta có $\cos^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 3\sin 2x + m = 1 - \sin^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 3\sin 2x + m$.

Đặt $t = \sin x + \cos x$, $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \Rightarrow t^2 - 1 = \sin 2x$.

Khi đó, ta được $1 - (t^2-1)^2 + 2t^3 - 3(t^2-1) + m = 1 - (t^2-1)(t^2+2) + 2t^3 + m$.

Xét $h(t) = 1 + 2t^3 - (t^2-1)(t^2+2) = -t^4 + 2t^3 - t^2 + 3$.

Ta có $f^2(x) \leq 36$, $\forall x \Leftrightarrow |h(t) + m| \leq 6 \Leftrightarrow \begin{cases} h(t) + m \leq 6 \\ h(t) + m \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h(t) \leq 6 - m \\ h(t) \geq -6 - m \end{cases}$.

Ta có $h'(t) = -4t^3 + 6t^2 - 2t \Rightarrow h'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

t	$-\sqrt{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$\sqrt{2}$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(t)$	$-3+4\sqrt{2}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{239}{81}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-3+4\sqrt{2}$

Khi đó $\begin{cases} h(t) \leq 6 - m \\ h(t) \geq -6 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max\limits_{t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]} h(t) \leq 6 - m \\ \min\limits_{t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]} h(t) \geq -6 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq 6 - m \\ -3 + 4\sqrt{2} \geq -6 - m \end{cases}$

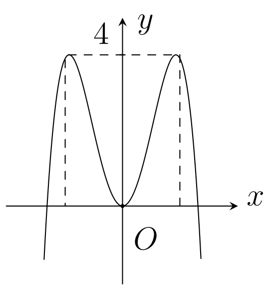
$\Leftrightarrow -9 \leq m \leq -3 - 4\sqrt{2}$. Số giá trị m nguyên là 1.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18.

Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y = -x^4 + 4x^2$. Với giá trị nào của m thì phương trình $x^4 - 4x^2 + m - 2 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt?

(A) $0 \leq m < 4$. (B) $0 < m < 4$. (C) $0 \leq m \leq 6$. **(D) $2 < m < 6$.**



Lời giải.

$x^4 - 4x^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 4x^2 = m - 2$. Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 4x^2$ và đường thẳng $y = m - 2$. Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m - 2 < 4 \Leftrightarrow 2 < m < 6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{3}{3x+1}$ là

A $\ln|3x+1| + C$. **B** $\dfrac{1}{3x+1} + C$. **C** $\dfrac{9}{(3x+1)^2} + C$. **D** $3\ln|3x+1| + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \frac{3}{3x+1}\,dx = \ln|3x+1| + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Giá trị của biểu thức $P = a^{\log_{\sqrt{a}} 3}$, $(0 < a \neq 1)$ bằng

A $\dfrac{3}{2}$. **B** 3. **C** $\sqrt{3}$. **D** 9.

Lời giải.

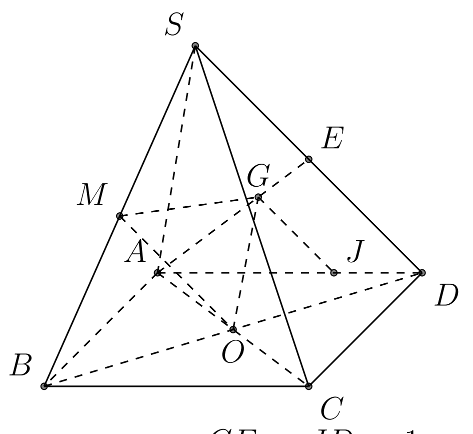
Ta có $P = a^{\log_{\sqrt{a}} 3} = a^{2\log_a 3} = \left(a^{\log_a 3}\right)^2 = 3^2 = 9$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, M là trung điểm đoạn SB, G là trọng tâm tam giác SAD. Gọi J là giao điểm của AD với (OMG) khi đó $\dfrac{JD}{AD}$ bằng

A $\dfrac{2}{5}$. **B** $\dfrac{1}{4}$. **C** $\dfrac{2}{3}$. **D** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.



Ta có MO là đường trung bình của tam giác SBD suy ra $MO \parallel SD$.

Ta có $\begin{cases} MO \parallel SD \\ G \in (OMG) \cap (SAD) \end{cases}$

$\Rightarrow (OMG) \cap (SAD) = Gx \parallel SD \parallel MO$

$\Rightarrow Gx \cap AD = J$.

Ta có $J \in Gx \subset (OMG) \Rightarrow J = AD \cap (OMG)$.

Gọi E là trung điểm SD với G là trọng tâm ta có $\dfrac{AG}{AE} = \dfrac{2}{3}$.

Do $GJ \parallel MO \parallel SD$, áp dụng định lý Tha-lét trong tam giác AED ta có $\dfrac{GE}{AE} = \dfrac{JD}{AD} = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Tập xác định của hàm số $y = \log(x-1)$ là

A $[1; +\infty)$. **B** $\mathbb{R}$. **C** $(1; +\infty)$. **D** $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ hay $x \in (1; +\infty)$.

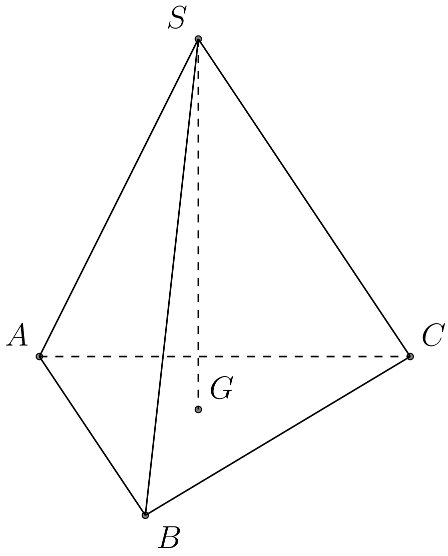
Chọn đáp án C □

Câu 23. Một tứ diện đều cạnh bằng a có một đỉnh trùng với đỉnh của hình nón, ba đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy của hình nón. Khi đó diện tích xung quanh của hình nón là

A $\dfrac{2\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **B** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **C** $\pi a^2\sqrt{3}$. **D** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có tam giác ABC là tam giác đều, gọi G là trọng tâm tam giác suy ra G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Bán kính
$$R = AG = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$
Diện tích xung quanh của hình nón là
$$S_{xq} = \pi \cdot R \cdot SA = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}.$$



Chọn đáp án B □

Câu 24. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2| = 2$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = \frac{1}{2}(1+i)z$ trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) là một đường cong có độ dài bằng

A 4. **B** $2\sqrt{2}$. **C** $2\sqrt{2}\pi$. **D** 4π.

Lời giải.

Ta có $w = \frac{1}{2}(1+i)z \Rightarrow z = \frac{2w}{1+i}$. Ta có $|z-2| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{2w}{1+i} - 2\right| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{2w-2(1+i)}{1+i}\right| = 2 \Leftrightarrow \frac{|2w-2(1+i)|}{|1+i|} = 2 \Leftrightarrow \frac{|2|\cdot|w-(1+i)|}{|1+i|} = 2 \Leftrightarrow |w-1-i| = \sqrt{2}$.

Tập hợp biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$. Chu vi đường tròn $P = 2\pi R = 2\sqrt{2}\pi$.

Cách 2: Ta có
$$\begin{aligned} & w = \frac{1}{2}(1+i)(z-2) + (1+i) \\ \Leftrightarrow \quad & w - 1 - i = \frac{1}{2}(1+i)(z-2) \\ \Rightarrow \quad & |w-1-i| = \frac{1}{2}\cdot|1+i|\cdot|z-2| = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Tập hợp biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$. Chu vi đường tròn $P = 2\pi R = 2\sqrt{2}\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Phương trình $4^{x+1} - 2^{x+2} + m = 0$ có nghiệm khi

A $m \leq 1$. **B** $m > \frac{1}{2}$. **C** $m \leq 0$. **D** $m \geq 1$.

Lời giải.

Ta có $4^{x+1} - 2^{x+2} + m = 0 \Leftrightarrow \left(2^{x+1}\right)^2 - 2\cdot 2^{x+1} + m = 0 \Leftrightarrow \left(2^{x+1}\right)^2 - 2\cdot 2^{x+1} = -m$.

Đặt $t = 2^{x+1}$, $t > 0$. Phương trình trở thành $t^2 - 2t = -m \qquad (1)$.

Xét hàm số $y = f(t) = t^2 - 2t$ có $y' = f'(t) = 2t - 2$. Cho $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Ta có bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(t)$	‖	↘	-1	↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $-m \geq -1 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x\ln x$, $y = 0$, $x = \mathrm{e}$ khi quay quanh trục Ox.

A $\dfrac{5\mathrm{e}^3+2}{27}\pi$. **B** $\dfrac{5\mathrm{e}^3-2}{27}\pi$. **C** $\dfrac{5\mathrm{e}^3+2}{25}\pi$. **D** $\dfrac{5\mathrm{e}^3-2}{25}\pi$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Thể tích khối tròn xoay sinh ra $V = \pi \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \left|x^2\ln^2 x\right| \,\mathrm{d}x = \pi \left|\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln^2 x\,\mathrm{d}x\right|$. Xét $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln^2 x\,\mathrm{d}x$

Đặt $u = \ln^2 x \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{2}{x}\ln x,\ \mathrm{d}v = x^2\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \dfrac{x^3}{3}$. Ta được

$$\begin{aligned}&\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln^2 x\,\mathrm{d}x\\ =\ &\frac{x^3}{3}\ln^2 x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \frac{2}{3}\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Xét $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln x\,\mathrm{d}x$. Đặt $u = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v = x^2\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \dfrac{x^3}{3}$. Ta được

$$\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \frac{1}{3}\int_1^{\mathrm{e}} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \frac{1}{9}x^3\Big|_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \frac{\mathrm{e}^3}{9} + \frac{1}{9}.$$

Khi đó $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{\mathrm{e}^3}{3} - \frac{\mathrm{e}^3}{9} + \frac{1}{9}\right) = \frac{5}{27}\mathrm{e}^3 - \frac{2}{27} = \frac{5\mathrm{e}^3-2}{27}$. Vậy thể tích khối tròn xoay $V = \dfrac{5\mathrm{e}^3-2}{27}\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Hiệu giá trị nguyên âm lớn nhất và nhỏ nhất của m để đồ thị hàm số $y = x^3 + mx + 2$ cắt trục Ox tại đúng 1 điểm là

A 12. **B** 6. **C** 1. **D** 36.

Lời giải.

Số giao điểm của đồ thị với trục hoành là số nghiệm của phương trình $x^3 + mx + 2 = 0$.
Ta có $x = 0$ không là nghiệm của phương trình. Khi đó, $m = -x^2 - \dfrac{2}{x}$ (1).
Đặt $f(x) = -x^2 - \dfrac{2}{x}$. Ta có $f'(x) = -2x + \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{-2(x^3-1)}{x^2}$. Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Xét bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của hàm số $f(x)$ và đường thẳng $y = m$. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $m > -3$ thì phương trình có nghiệm duy nhất. Do đó, giá trị nguyên âm nhỏ nhất đạt được là -2 và giá trị nguyên âm lớn nhất đạt được là -1 nên hiệu giá trị nguyên âm lớn nhất và nhỏ nhất là 1.
Chọn đáp án C □

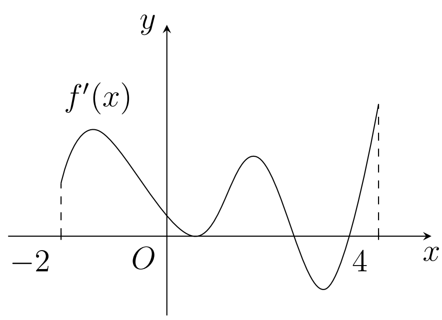
Câu 28. Tính $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$.

A $\dfrac{5}{2}$. **B** $+\infty$. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.
Ta có $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(3x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x+2}{x+1} = \dfrac{5}{2}$.
Chọn đáp án A □

Câu 29.
Tìm số điểm cực tiểu trên đoạn $[-2; 4]$ của hàm số $y = f(x)$ biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

A 1. **B** 0. **C** 2. **D** 3.



Lời giải.
Đồ thị ta thấy $f'(x) = 0$ tại ba điểm theo thứ tự x_1, x_2, x_3. Ta có bảng biến thiên như sau:

x	-2		x_1		x_2		x_3		4
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↗	CĐ	↘	CT	↗	

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y = f(x)$ có một cực tiểu.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Cho số phức z thỏa mãn $z + (1+i)\bar{z} = 5 + 2i$. Mô-đun của z bằng

(A) 3. (B) $\sqrt{6}$. (C) $\sqrt{27}$. **D** $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$. Ta có $z + (1+i)\bar{z} = 5 + 2i \Leftrightarrow (a+bi) + (1+i)(a-bi) = 5 + 2i \Leftrightarrow 2a + b + ai = 5 + 2i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 5 \\ a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 2 + i \Rightarrow |z| = \sqrt{5}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Từ một hộp chứa 17 thẻ được đánh số từ 1 đến 17, chọn ngẫu nhiên 4 thẻ. Tính xác suất để 4 thẻ được chọn đều được đánh số chẵn.

A $\dfrac{1}{34}$. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{9}{170}$. (D) $\dfrac{1}{26}$.

Lời giải.

Không gian mẫu Ω là tập hợp các kết quả có thể xảy ra của phép thử chọn ngẫu nhiên 4 thẻ. Ta có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{17}^4$.

Gọi A là biến cố chọn 4 được thẻ đánh số chẵn. Ta có $n(\mathrm{A}) = \mathrm{C}_8^4$.

Khi đó $P(\mathrm{A}) = \dfrac{n(\mathrm{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{34}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Tổng tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = x^3 + 2(m-1)x^2 + (m^2 - 4m + 1)x - 2(m^2+1)$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2)$ là

(A) 5. **B** 6. (C) 4. (D) 0.

Lời giải.

$f'(x) = 3x^2 + 4(m-1)x + (m^2 - 4m + 1)$.

Để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2)$ thì phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

Hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & \Delta' > 0 \\ \Leftrightarrow\ & [2(m-1)]^2 - 3(m^2 - 4m + 1) > 0 \\ \Leftrightarrow\ & 4m^2 - 8m + 4 - 3m^2 + 12m - 3 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & m^2 + 4m + 1 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & m < -2 - \sqrt{3} \text{ hay } m > -2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Theo Vi-ét ta có $P = \dfrac{c}{a} = \dfrac{m^2 - 4m + 1}{3}$, $S = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-4(m-1)}{3}$.

Xét

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

$$\Leftrightarrow\ 2x_1+2x_2=x_1x_2(x_1+x_2)$$
$$\Leftrightarrow\ (x_1+x_2)(2-x_1x_2)=0$$
$$\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x_1+x_2=0\\2-x_1x_2=0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{-4(m-1)}{3}=0\\\dfrac{m^2-4m+1}{3}=2\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}m-1=0\\m^2-4m-5=0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}m=1\text{ (nhận)}\\m=-1\text{ (loại)}\\m=5\text{ (nhận)}\ .\end{array}\right.$$

Tổng các giá trị của tham số m là $5+1=6$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Gọi l, h, R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình trụ (T). Diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ (T) là

A $S_{tp}=\pi Rh+\pi R^2$.

B $S_{tp}=\pi Rl+\pi R^2$.

C $S_{tp}=\pi Rl+2\pi R^2$.

D $S_{tp}=2\pi Rl+2\pi R^2$.

Lời giải.

Ta có diện tích xung quanh $S_{xq}=2\pi\cdot R\cdot l$, diện tích đáy $S_{\text{đáy}}=2\pi R^2$.

Khi đó $S_{tp}=S_{xq}+S_{\text{đáy}}=2\pi\cdot R\cdot l+2\pi\cdot R^2$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$. Biết góc giữa đường thẳng A_1C và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°. Tính khoảng cách giữa đường thẳng B_1C và C_1D theo a.

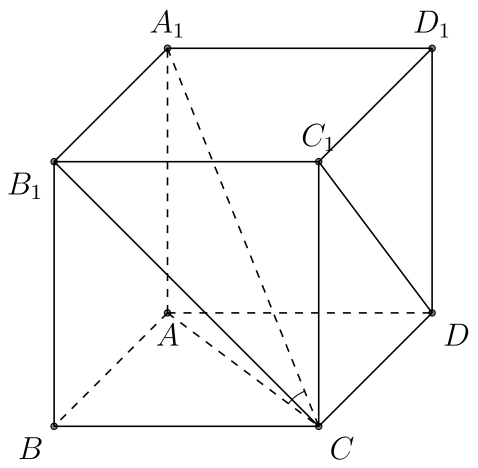
A $\dfrac{4a\sqrt{51}}{17}$.

B $\dfrac{a\sqrt{51}}{17}$.

C $\dfrac{2a\sqrt{51}}{17}$.

D $\dfrac{8a\sqrt{51}}{17}$.

Lời giải.



Ta có $C_1D \parallel B_1A \Rightarrow C_1D \parallel (AB_1C)$
$\Rightarrow$ $\mathrm{d}(C_1D, B_1C) = \mathrm{d}(C_1D, (B_1AC)) = \mathrm{d}(C_1, (AB_1C))$.
$AA_1 \perp (ABCD)$ suy ra AC là hình chiếu của A_1C lên mặt phẳng $(ABCD)$. Do đó góc tạo bởi A_1C và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{A_1CA}$.
Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = 2a$.
Xét tam giác AA_1C có

$$AA_1 = AC \cdot \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}a.$$

Chọn hệ trục với $A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$, $D(0; a\sqrt{3}; 0)$, $C(a; a\sqrt{3}; 0)$, $A_1(0; 0; 2a\sqrt{3})$, $D_1(0; a\sqrt{3}; 2a\sqrt{3})$, $B_1(a; 0; 2a\sqrt{3})$; $C_1(a; a\sqrt{3}; 2a\sqrt{3})$.
Ta có $\overrightarrow{AB_1} = (a; 0; 2a\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AC} = (a; a\sqrt{3}; 0)$, $[\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AC}] = \left(-6a^2; 2\sqrt{3}a^2; \sqrt{3}a^2\right)$. Mặt phẳng (AB_1C) qua ba điểm A, B_1, C.
Khi đó mặt phẳng (AB_1C) có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (-6, 2\sqrt{3}; \sqrt{3})$. Phương trình mặt phẳng $(AB_1C)\colon -6x + 2\sqrt{3}y + \sqrt{3}z = 0$.
Khoảng cách từ C_1 đến (AB_1C) là

$$\mathrm{d}(C_1, (AB_1C)) = \frac{|-6 \cdot a + 2\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot 2a\sqrt{3}|}{\sqrt{(-6)^2 + (2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{2a\sqrt{51}}{17}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 35. Cho số phức $z = a + bi$ (a, b là các số thực) thỏa mãn $|z| = |\bar{z} - 3 + 4i|$ và có mô-đun nhỏ nhất. Giá trị của $P = ab$ là

A $\frac{3}{4}$. **B** 4. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$, ta có

$$\begin{aligned}
& |z| = |\bar{z} - 3 + 4i| \\
\Leftrightarrow\ & |a + bi| = |a - bi - 3 + 4i| \\
\Leftrightarrow\ & |a + bi| = |(a - 3) - (b - 4)i| \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a - 3)^2 + (b - 4)^2} \\
\Leftrightarrow\ & a^2 + b^2 = (a - 3)^2 + (b - 4)^2 \\
\Leftrightarrow\ & -6a + 9 - 8b + 16 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 6a + 8b - 25 = 0.
\end{aligned}$$

Tập hợp điểm của số phức z là đường thẳng $6x + 8y - 25 = 0$. Vậy mô-đun nhỏ nhất của số phức z là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O lên đường thẳng.
Xét đường thẳng qua O và vuông góc với đường thẳng $6x + 8y - 25 = 0$ có phương trình là $8x - 6y = 0$.

Gọi H là hình chiếu của O lên đường thẳng $6x+8y-25=0$. Ta có tọa độ H thỏa hệ $\begin{cases}6x+8y-25=0\\8x-6y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\y=2\end{cases}$.

Suy ra $H\left(\dfrac{3}{2};2\right)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=\dfrac{3}{2}+2i$. Vậy $a=\dfrac{3}{2}$, $b=2$ khi đó $P=3$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Cho hình lập phương $OBCD.O_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a, M là điểm bất kỳ thuộc đoạn OO_1. Tỉ số thể tích hình chóp $MBCC_1B_1$ và hình lăng trụ $OBCO_1B_1C_1$ bằng

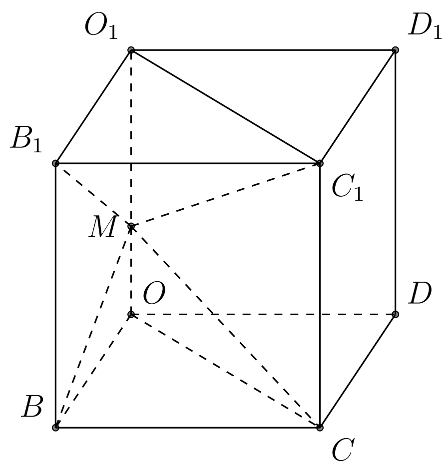
A $\dfrac{2}{3}$. **B** $\dfrac{1}{3}$. **C** $\dfrac{3}{4}$. **D** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Đặt $V_1=V_{MBCC_1B_1}$, $V_2=V_{OBCO_1B_1C_1}$.

Ta có $V_2=\dfrac{1}{2}a^3$, $V_1=\dfrac{1}{3}OB\cdot S_{BCC_1B_1}=\dfrac{1}{3}a\cdot a^2=\dfrac{1}{3}a^3$.

Khi đó $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\dfrac{a^3}{3}}{\dfrac{a^3}{2}}=\dfrac{2}{3}$.



Chọn đáp án A □

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(15;-1;4)$, $B(7;6;3)$, $C(6;-3;6)$, $D(8;14;-1)$ và $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$ khi $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A 9. **B** -5. **C** 16. **D** 2.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$, bán kính $R=5$. Gọi G là điểm thỏa $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Ta có

$$\begin{aligned}&MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2+\overrightarrow{MD}^2\\&\geq(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})^2=(4\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD})^2=(4\overrightarrow{MG})^2.\end{aligned}$$

Vậy $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MG nhỏ nhất. Mà MG nhỏ nhất khi M là giao điểm của MI và mặt cầu (S).

Ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0} \Rightarrow \begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4}\\y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4}\\z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_G=9\\y_G=4\\z_G=3\end{cases} \Rightarrow G(9;4;3)$.

Ta có $\overrightarrow{GI} = (8;6;0) = 2(4;3;0)$. Đường thẳng GI có phương trình là $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 \end{cases}$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng GI và mặt cầu (S) là

$(1+4t)^2+(-2+3t)^2+3^2-2(1+4t)+4(-2+3t)-6\cdot 3-11 = 0 \Leftrightarrow 25t^2-25 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \Rightarrow M(5;1;3) \\ t = -1 \Rightarrow M(-3;5;3). \end{array}\right.$

- Với $M(5;1;3) \Rightarrow IM = 5 = R$ (nhận).
- Với $M(-3;-5;3) \Rightarrow IM = \sqrt{122} > R$ (loại).

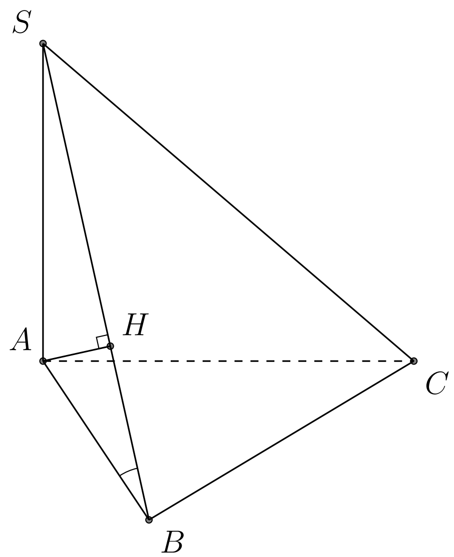
Khi đó $P = 5 + 1 + 3 = 9$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B và $AB = a$, $SA \perp (ABC)$. Góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Khi đó khoảng cách từ A đến (SBC) là

A $a\sqrt{3}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Kẻ đường cao AH trong tam giác SAB.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$ mà $AH \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$. Do $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC)$. Khi đó ta được $\mathrm{d}(A,(SBC)) = AH$.

$SA \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu của SB lên mặt phẳng (ABC). Nên góc giữa SB và (ABC) là góc $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

Xét tam giác SAB vuông tại A có $SA = AB\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2}$

$\Rightarrow AH^2 = \dfrac{SA^2 \cdot AB^2}{SA^2 + AB^2} = \dfrac{(a\sqrt{3})^2 \cdot a^2}{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = \dfrac{3a^2}{4}$.

Suy ra $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm của đáy là O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60°, tính cosin của góc giữa MN và mặt phẳng (SBD).

A $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. **B** $\dfrac{2}{5}$. **C** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

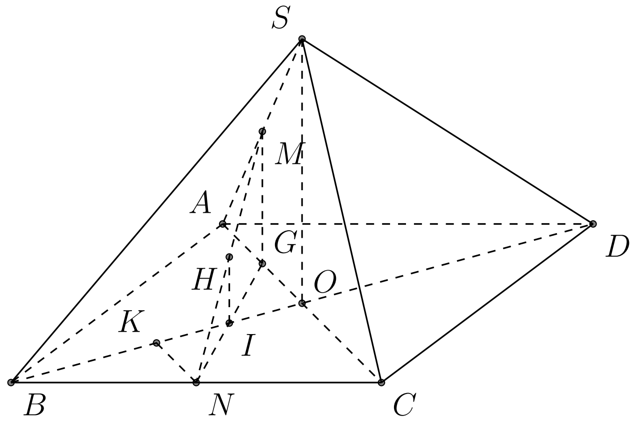
Gọi G là hình chiếu của M lên $(ABCD)$. Ta thấy $G \in AC$. Góc giữa MN và $(ABCD)$ là $\widehat{GNM} = 60^\circ$.

Áp dụng định lý cos cho tam giác CNG, ta có

$$NG^2 = CN^2 + CG^2 - 2NC \cdot CG \cdot \cos\widehat{NCG} = \frac{5a^2}{8}.$$

Suy ra $NG = a\sqrt{\frac{5}{8}}$. Vậy

$$MN = \frac{NG}{\cos 60^\circ} = a\frac{\sqrt{10}}{2}.$$



Gọi I là giao điểm của GN và BO. Từ I kẻ đường thẳng song song với MG, cắt MN tại H. Khi đó H là giao điểm của MN và mặt phẳng (SBD). Gọi K là hình chiếu của N lên BD. Khi đó $\begin{cases} NK \perp BD \\ NK \perp SO \end{cases} \Rightarrow NK \perp (SBD)$ suy ra góc tạo bởi MN và mặt phẳng (SBD) là góc $\widehat{NHK}$.

Ta có tứ giác $GONK$ là hình bình hành nên I là trung điểm GN.

Xét tam giác vuông NKH, ta có $NH = \frac{1}{2}MN = a\sqrt{\frac{5}{8}}$, $NK = \frac{1}{2}CO = a\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Do đó $\sin\widehat{NHK} = \frac{NK}{HN} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh a, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết thể tích của hình chóp $S.ABCD$ là $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là

A 30°. **B** 45°. **C** 60°. **D** 120°.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB, ta có tam giác SAB cân tại S do đó $SH \perp AB$ mà (SAB) vuông góc đáy nên $SH \perp (ABCD)$.

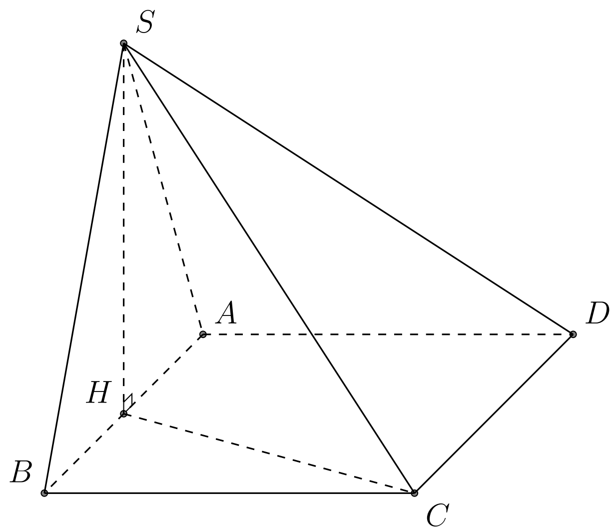
Do đó HC là hình chiều của SC lên mặt đáy $(ABCD)$. Khi đó góc giữa SC và mặt đáy $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCH}$.

Ta có thể tích khối chóp

$$V = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3}SH \cdot a^2.$$

Mà $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{6} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.

Ta có tam giác BHC vuông tại B có $HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.



$$\text{Xét tam giác vuông } SHC \text{ có } \tan\widehat{SCH} = \frac{SH}{HC} = \frac{\frac{a\sqrt{15}}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCH} = 60^\circ.$$

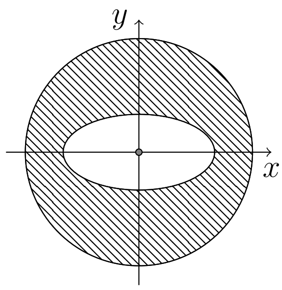
Chọn đáp án C □

Câu 41. Một quả đào có dạng hình cầu đường kính 6 cm. Hạt của nó là khối tròn xoay sinh ra bởi hình Ê-líp khi quay quanh đường thẳng nối hai tiêu điểm F_1, F_2. Biết tâm của Ê-líp trùng với tâm của khối cầu và độ dài trục lớn, trục nhỏ lần lượt là 4 cm và 2 cm. Thể tích phần cùi (phần ăn được) của quả đào bằng $\frac{a}{b}\pi\,(\text{cm}^3)$ với a, b là các số thực và $\frac{a}{b}$ (tối giản), khi đó $a - b$ bằng

A 97. **B** 36. **C** 5. **D** 103.

Lời giải.

Xét Elip có độ dài trục lớn, độ dài trục nhỏ lần lượt là 4 và 2. Ta có $a = 2$, $b = 1$. Phương trình chính tắc của Ê-líp là



$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

Gọi V_1 là thể tích khối cầu. V_2 là thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi hình Ê-líp khi quay quanh trục Ox. Khi đó thể tích V phần cùi (phần ăn được) của quả đào là $V = V_1 - V_2$.

Ta có $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi$.

$$\text{Ta có } V_2 = 2\pi \int_0^2 \left|1 - \frac{x^2}{4}\right| \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \mathrm{d}x = 2\pi \left(x - \frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_0^2 = 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{8\pi}{3}.$$

Khi đó $V = V_1 - V_2 = 36\pi - \frac{8\pi}{3} = \frac{100\pi}{3}$. Khi đó $a = 100$, $b = 3$ suy ra $a - b = 97$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$ cho $M(-1;2;3)$. Hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là điểm có tọa độ?

A $P(-1;0;0)$. **B** $Q(0;2;3)$. **C** $K(0;2;0)$. **D** $E(0;0;3)$.

Lời giải.

Trục Ox có phương trình là $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. Hình chiếu của M lên trục Ox là điểm $P(-1;0;0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Vào đầu mỗi tháng chị Liên gửi tiết kiệm 3 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất không đổi 0,6%/tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng (kể từ tháng đầu tiên) thì chị Liên nhận được số tiền cả gốc lẫn lãi vượt qua 100 triệu đồng?

A 29 tháng. **B** 32 tháng. **C** 30 tháng. **D** 31 tháng.

Lời giải.

Gọi số tiền gửi hàng tháng của chị Liên là $A = 3$ triệu đồng. Lãi suất hàng tháng $r = 0{,}6\%$/tháng.

Tổng số tiền nhận được sau tháng thứ nhất là

$$T_1 = A(1+r).$$

Tổng số tiền nhận được sau tháng thứ hai là

$$T_2 = A(1+r)^2 + A(1+r) = A(1+r)((1+r)+1).$$

Tổng số tiền nhận được sau tháng thứ ba là

$$T_3 = A(1+r)^3 + A(1+r)^2 + A(1+r) = A((1+r)^2 + (1+r) + 1)(1+r).$$

Bằng phương pháp quy nạp, khi đó tổng số tiền chị Liên nhận được sau mỗi tháng là

$$T = \frac{A}{r}\left[(1+r)^n - 1\right](1+r).$$

Yêu cầu bài toán

$$\frac{3}{0,6\%}\left[(1+0,6\%)^n - 1\right](1+0,6\%) > 100 \Leftrightarrow (1,006)^n - 1 > \frac{100}{503} \Leftrightarrow n > \log_{1,006}\frac{603}{503} \approx 30,3.$$

Vậy ít nhất sau 31 tháng thì chị Liên nhận được số tiền cả gốc lẫn lãi vượt qua 100 triệu đồng.
Chọn đáp án D □

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y-z-1=0$. Đường thẳng Δ là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (α) có phương trình là

A. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+5}{2}$.

B. $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$.

D. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-2}$.

Lời giải.

Gọi A là giao điểm của d và (α). Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{1} \\ \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{1} \\ x+y-z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow A(0;0;-1).$$

Đường thẳng d qua điểm $A(3;3;2)$. Gọi d' là đường thẳng qua A và vuông góc (α), d' có phương trình là $\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{-1}$.
Gọi B là giao điểm của d' và (α). Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{1} \\ \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{-1} \\ x+y-z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ -y-z=-5 \\ x+y-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow B(2;2;3).$$

Khi đó, đường thẳng Δ qua A, B chính là hình chiếu vuông góc của d lên (α). Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;2;4)$.
Gọi I là trung điểm AB suy ra $I(1;1;1)$.
Đường thẳng Δ qua I nhận một véc-tơ chỉ phương $\vec{n} = (1;1;2)$ có phương trình là

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-1;-2;5)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q)\colon x+2y-3z+1=0$ và $(R)\colon 2x-3y+z+1=0$ có dạng

A $x+y+z-2=0$. **B** $7x+7y+7z-5=0$.
C $x-y+z-6=0$. **D** $x+y+z+2=0$.

Lời giải.
Mặt phẳng (Q) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)} = (1;2;-3)$.
Mặt phẳng (R) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(R)} = (2;-3;1)$.
Khi đó mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)} = [\vec{n}_{(Q)}, \vec{n}_{(R)}] = (-7;-7;-7)$.
Phương trình mặt phẳng (P) là

$$-7(x+1)-7(y+2)-7(z-5)=0 \Leftrightarrow -7x-7y-7z+14=0 \Leftrightarrow x+y+z-2=0.$$

Chọn đáp án A □

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;1;1)$. Phương trình mặt phẳng (P) cắt trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC?

A $(P)\colon x+y-z+1=0$. **B** $(P)\colon x+y+z-3=0$.
C $(P)\colon x-y-z+1=0$. **D** $(P)\colon x+2y+z-4=0$.

Lời giải.
Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$. Xét tam giác ABC có $AB^2=a^2+b^2$, $AC^2=a^2+c^2$, $BC^2=b^2+c^2$. Khi đó

$$\cos\widehat{A} = \frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AB\cdot AC} = \frac{a^2}{AB\cdot AC} > 0$$

suy ra góc A nhọn. Chứng minh tương tự ta được góc $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ nhọn. Do đó, tam giác ABC có ba góc nhọn.
Phương trình mặt phẳng (P) qua A, B, C có dạng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.
Ta có (P) qua I suy ra $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$. Suy ra a, b, c lớn hơn 1.
Xét tam giác ABC có $IA=IB=IC$ mà a, b, $c>1$. Do đó $a=b=c$ suy ra tam giác ABC đều hay I là trực tâm của tam giác ABC khi đó OI vuông góc (ABC).
Ta có $\overrightarrow{OI}=(1;1;1)$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).
Suy ra mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$.
Chọn đáp án B □

Câu 47. Cho hai điểm $A(1;-2;3)$, $B(-1;0;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z+4=0$. Phương trình mặt cầu (S) có bán kính bằng $\dfrac{AB}{6}$ có tâm thuộc đường thẳng AB và (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

(A) $(x-4)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=\dfrac{1}{3}$.

(B) $\left[\begin{array}{l}(x-4)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=\dfrac{1}{3}\\(x-6)^2+(y+5)^2+(z-4)^2=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$.

(C) $(x+4)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=\dfrac{1}{3}$.

(D) $\left[\begin{array}{l}(x+4)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=\dfrac{1}{3}\\(x+6)^2+(y-5)^2+(z+4)^2=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}=(-2;2;-2)$ suy ra $AB:\begin{cases}x=1-2t\\y=-2+2t\\z=3-2t.\end{cases}$

Ta có bán kính $R=\dfrac{AB}{6}=\dfrac{2\sqrt{3}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Tâm I thuộc AB suy ra $I(1-2t,-2+2t,3-2t)$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc mặt cầu nên

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\left(I,(P)\right)=R\\ \Leftrightarrow&\frac{|(1-2t)+(-2+2t)+(3-2t)+4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \Leftrightarrow&|6-t|=1\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}6-2t=1\Rightarrow 2t=5\Rightarrow I(-4;3;-2)\\6-2t=-1\Rightarrow 2t=7\Rightarrow I(-6;5;-4)\end{array}\right.\end{aligned}$$

Ta có phương trình đường tròn (C) tâm $I(-4;3;-2)$, bán kính $R=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ là

$$(x+4)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=\frac{1}{3}.$$

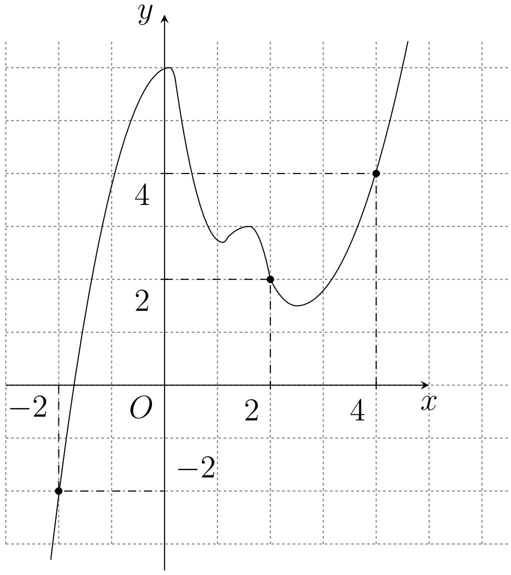
Phương trình đường tròn (C) tâm $I(-6;5;-4)$, bán kính $R=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ là

$$(x+6)^2+(y-5)^2+(z+4)^2=\frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 48.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $h(x) = f(x) - \dfrac{x^2}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) Hàm số $y = h(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 3)$.

(B) Hàm số $y = h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

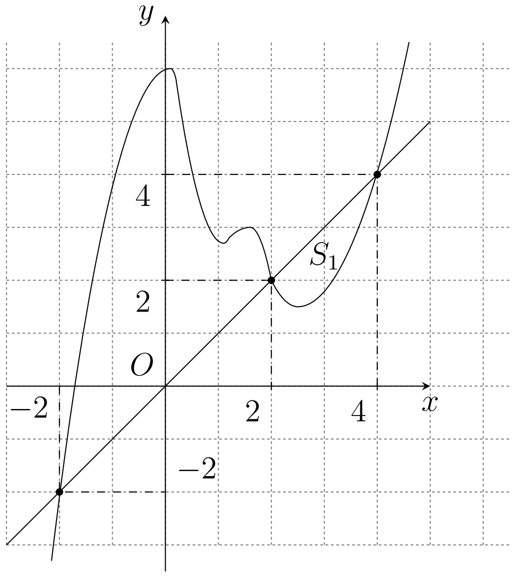
(C) Hàm số $y = h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2; 4)$.

(D) Hàm số $y = h(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$.

Lời giải.

Ta có $h(x) = 2f(x) - x^2$ nên $h'(x) = 2f'(x) - 2x = 2\left(f'(x) - x\right)$.

Vẽ đường thẳng $y = x$ cắt đồ thị tại ba điểm $(-2; -2)$, $(2; 2)$, $(4; 4)$ tạo ra hai miền (H_1), (H_2) có diện tích là S_1 và S_2. Trong đó



$$S_1 = \int\limits_2^4 (x - f'(x))\mathrm{d}x > 0$$

nên $0 < 2\int\limits_2^4 (x - f'(x))\mathrm{d}x = \left(x^2 - 2f(x)\right)\Big|_2^4 = h(2) - h(4)$.

Do đó $h(2) > h(4)$.

Ta có $f(x)$ là hàm liên tục nên $h(x)$ cũng là hàm liên tục, $\forall x \in (2; 4)$, mà $h(2) > h(4)$ nên suy ra hàm số $y = h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2; 4)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.

(B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-3; +\infty)$.

(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-3; +\infty)$.

(D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Ta có $y' = \dfrac{5}{(x+3)^2} > 0$, $\forall x \in \mathscr{D}$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-3; +\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 50. Từ một nhóm học sinh có 5 nam và 4 nữ cần chọn ra một đội văn nghệ có 4 người trong đó có cả nam và nữ. Số cách chọn là

A 120. **B** 126. **C** 3024. **D** 30.

Lời giải.

Số cách chọn 4 người toàn nam hoặc toàn nữ có $C_5^4 + C_4^4 = 6$ cách.

Số cách chọn 4 người tùy ý có $C_9^4 = 126$.

Số cách chọn 4 người trong đó có cả nam và nữ là $126 - 6 = 120$.

Chọn đáp án A □

HẾT

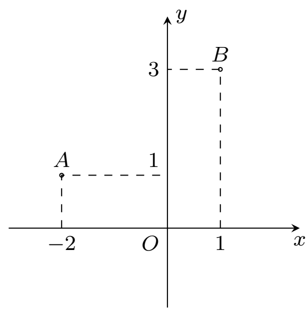
ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. C	3. A	4. D	5. C	6. B	7. B	8. C	9. B	10. B
11. D	12. A	13. A	14. B	15. B	16. B	17. C	18. D	19. A	20. D
21. D	22. C	23. B	24. C	25. A	26. B	27. C	28. A	29. A	30. D
31. A	32. B	33. D	34. C	35. D	36. A	37. A	38. D	39. C	40. C
41. A	42. A	43. D	44. C	45. A	46. B	47. D	48. C	49. B	50. A

143 ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA LẦN 1, 2017 - 2018, TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH, NGHỆ AN

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.
Trong mặt phẳng Oxy, cho các điểm A, B như hình vẽ bên. Trung điểm của đoạn thẳng AB biểu diễn số phức



(A) $-1+2i$. **(B)** $-\dfrac{1}{2}+2i$. (C) $2-i$. (D) $2-\dfrac{1}{2}i$.

Lời giải.
Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là $\left(\dfrac{-1}{2};2\right)$. Khi đó $z=-\dfrac{1}{2}+2i$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos 2x$ là

(A) $\sin 2x+C$. **(B)** $\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$. (C) $-\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$. (D) $2\sin 2x+C$.

Lời giải.
Ta có: $\displaystyle\int \cos 2x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$.

Chọn đáp án (B) □

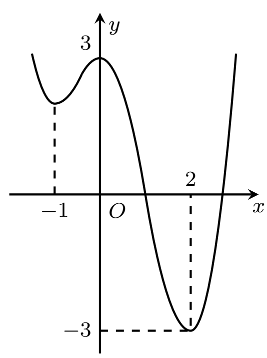
Câu 3. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên $AA'=h$ và diện tích của tam giác ABC bằng S. Thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

(A) $V=\dfrac{1}{3}Sh$. (B) $V=\dfrac{2}{3}Sh$. (C) $V=Sh$. **(D)** $V=2Sh$.

Lời giải.
Vì $S_{ABC}=S$ nên suy ra $S_{ABCD}=2S$.
Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là: $V_{ABCD.A'B'C'D'}=S_{ABCD}\cdot AA'=2Sh$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4.
Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng về hàm số đó?



(A) Nghịch biến trên khoảng $(-3;0)$.
(B) Đồng biến trên khoảng $(0;2)$.
(C) Đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.
(D) Nghịch biến trên khoảng $(0;3)$.

Lời giải.
Theo chiều từ trái sang phải, đồ thị hàm số đồng biến là một đường "đi lên", đồ thị hàm số nghịch biến là một đường "đi xuống". Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R, chiều cao bằng h. Biết rằng hình trụ đó có diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $h = \sqrt{2}R$. **B** $h = 2R$. **C** $h = R$. **D** $R = 2h$.

Lời giải.

Diện tích toàn phần của hình trụ $S_{tp} = 2\left(\pi R^2\right) + 2\pi Rl = 2\pi R\left(R + h\right)$ (vì $l = h$).

Diện tích xung quanh của hình trụ $S_{xq} = 2\pi Rl = 2\pi Rh$.

Vì $S_{tp} = 2S_{xq}$ nên $2\pi R\left(R + h\right) = 2 \cdot \left(2\pi Rh\right)$

$\Leftrightarrow R + h = 2h \Leftrightarrow R = h$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 \end{cases}$ là

A $\vec{m}\left(2; -1; 1\right)$. **B** $\vec{v}\left(2; -1; 0\right)$. **C** $\vec{u}\left(2; 1; 1\right)$. **D** $\vec{n}\left(-2; -1; 0\right)$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}_\Delta = \left(2; 1; 0\right) = -\left(-2; -1; 0\right)$.

Do đó một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{n}\left(-2; -1; 0\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Cho $k, n\ (k < n)$ là các số nguyên dương. Mệnh đề nào sau đây sai?

A $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$. **B** $\mathrm{A}_n^k = n!\mathrm{C}_n^k$. **C** $\mathrm{A}_n^k = k!\mathrm{C}_n^k$. **D** $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \dfrac{n!}{(n-k)!\left[n-(n-k)\right]!}$ và $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Do đó, mệnh đề sai là $\mathrm{A}_n^k = n!\mathrm{C}_n^k$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Giả sử a, b là các số thực dương bất kì. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A $\log(10ab)^2 = 2\left(1 + \log a + \log b\right)$. **B** $\log\left(10ab\right)^2 = 2 + 2\log\left(ab\right)$.

C $\log(10ab)^2 = \left(1 + \log a + \log b\right)^2$. **D** $\log(10ab)^2 = 2 + \log\left(ab\right)^2$.

Lời giải.

- $\log(10ab)^2 = 2\left(\log 10 + \log a + \log b\right) = 2\left(1 + \log a + \log b\right)$ (đúng).
- $\log(10ab)^2 = 2\left(\log 10 + \log ab\right) = 2 + 2\log\left(ab\right)$ (đúng).
- $\log(10ab)^2 = 2\left(1 + \log a + \log b\right) \neq \left(1 + \log a + \log b\right)^2$ (sai).
- $\log(10ab)^2 = 2 + 2\log\left(ab\right) = 2 + \log\left(ab\right)^2$ (đúng).

Chọn đáp án C □

Câu 9. Hàm số nào trong các hàm số dưới đây không liên tục trên $\mathbb{R}$?

A $y = |x|$. **B** $y = \dfrac{x}{x+1}$. **C** $y = \sin x$. **D** $y = \dfrac{x}{|x|+1}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{x}{x+1}$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ nên không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2; 3]$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình dưới đây.

x	-2		0		1		3
$f'(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	

Mệnh đề nào sau đây đúng về hàm số đã cho?

(A) Đạt cực tiểu tại $x = -2$.
(B) Đạt cực tiểu tại $x = 3$.
(C) Đạt cực đại tại $x = 0$.
(D) Đạt cực đại tại $x = 1$.

Lời giải.

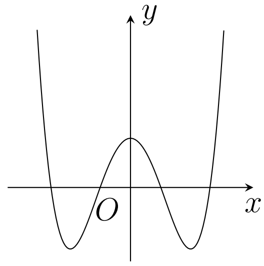
Ta có $f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2; 3]$ và $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x = 0$. Do đó hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

(A) $y = x^4 - 3x^2 + 1$.
(B) $y = x^2 - 3x + 1$.
(C) $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
(D) $y = -x^4 + 3x + 1$.



Lời giải.

Đồ thị đã cho là đồ thị của hàm số bậc bốn trùng phương có hệ số của x^4 dương. Do đó nó là đồ thị của hàm số hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Hình chiếu của M lên trục Oy là điểm

(A) $S(0; 0; 3)$.
(B) $R(1; 0; 0)$.
(C) $Q(0; 2; 0)$.
(D) $P(1; 0; 3)$.

Lời giải.

Hình chiếu của $M(1; 2; 3)$ lên trục Oy là điểm $Q(0; 2; 0)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - z - 1 = 0$ và $(\beta): 2x + 4y - mz - 2 = 0$. Tìm m để hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau.

(A) $m = 1$.
(B) Không tồn tại m.
(C) $m = -2$.
(D) $m = 2$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β) khi và chỉ khi

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{-m}{-1} \neq \frac{-2}{-1} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m \neq 2. \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm nên không có giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Phương trình $\ln(x^2+1)\cdot\ln(x^2-2018)=0$ có bao nhiêu nghiệm?

Ⓐ 1. Ⓑ 4. Ⓒ 3. **D** 2.

Lời giải.

Điều kiện: $x^2-2018>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\sqrt{2018} \\ x<-\sqrt{2018} \end{array}\right.$.

Phương trình $\ln(x^2+1)\cdot\ln(x^2-2018)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln\left(x^2+1\right)=0 \\ \ln\left(x^2-2018\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2019} \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện ta suy ra phương trình có hai nghiệm $x=\pm\sqrt{2019}$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 15. Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x=0, x=1, y=0$ và $y=\sqrt{2x+1}$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức nào dưới đây?

Ⓐ $V=\pi\int\limits_0^1 \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$. **B** $V=\pi\int\limits_0^1 (2x+1)\,\mathrm{d}x$.

Ⓒ $V=\int\limits_0^1 (2x+1)\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $V=\int\limits_0^1 \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

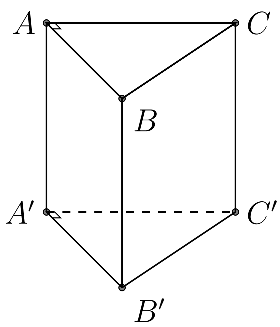
Ta có $V=\pi\int\limits_0^1 \left(\sqrt{2x+1}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1 (2x+1)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 16.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $A, AB=AA'=a$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính tang của góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ABB'A')$.

A $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓑ $\frac{\sqrt{6}}{3}$. Ⓒ $\sqrt{2}$. Ⓓ $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



Lời giải.

$\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $\Rightarrow AB=AC=a$.

$\triangle ABA'$ vuông tại A nên $\Rightarrow A'B=a\sqrt{2}$.

Ta có $\begin{cases} C'A'\perp A'B' \\ C'A'\perp AA' \end{cases} \Rightarrow C'A'\perp(ABB'A')$.

$\Rightarrow BA'$ là hình chiếu của BC' lên mặt phẳng $(ABB'A')$.

$\Rightarrow (BC',(ABB'A'))=(BC',BA')$.

$\triangle A'BC'$ vuông tại $A' \Rightarrow \tan\widehat{A'BC'}=\dfrac{A'C'}{A'B}=\dfrac{a}{a\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = \log_3(2x+1)$. Giá trị của $f'(0)$ bằng

A $\frac{2}{\ln 3}$. **B** 0. **C** $2\ln 3$. **D** 2.

Lời giải.

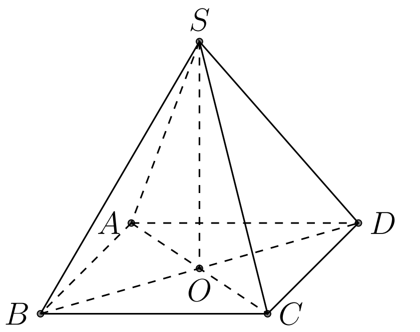
Ta có $f'(x) = \dfrac{(2x+1)'}{(2x+1)\ln 3} = \dfrac{2}{(2x+1)\ln 3} \Rightarrow f'(0) = \dfrac{2}{\ln 3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 18.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tâm $O, SO = a$ (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD) bằng

A $\frac{\sqrt{5}a}{5}$. **B** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **C** $\frac{\sqrt{6}a}{3}$. **D** $\sqrt{3}a$.



Lời giải.

Gọi I là trung điểm CD. Trong mặt phẳng (SOI), kẻ $OH \perp SI$ tại H. Ta có: $\begin{cases} CD \perp OI \\ CD \perp SO \end{cases}$.

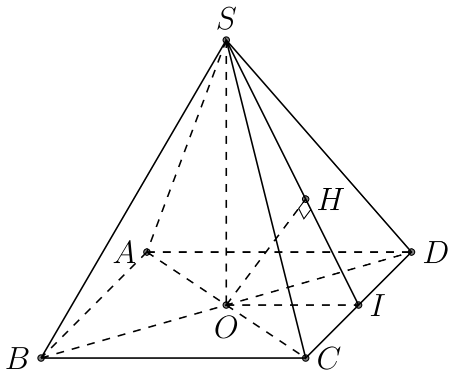
Mà $OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SCD)$.

Suy ra $\mathrm{d}(O,(SCD)) = OH$.

Ta có $OI = \frac{1}{2}BC = a, SO = a \Rightarrow \Delta SOI$ vuông cân tại O

nên $\Rightarrow OH = \frac{1}{2}SI = \frac{\sqrt{2}a}{2}$.

Vậy $\mathrm{d}(O,(SCD)) = \frac{\sqrt{2}a}{2}$.



Chọn đáp án B □

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;-1)$. Mặt phẳng (α) đi qua M và chứa trục Ox có phương trình là

A $y = 0$. **B** $x + z = 0$. **C** $y + z + 1 = 0$. **D** $x + y + z = 0$.

Lời giải.

Do mặt phẳng (α) đi qua M và chứa trục Ox nên (α) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right]$ với $\vec{i} = (1;0;0)$ và $\overrightarrow{OM} = (1;0;-1) \Rightarrow \vec{n} = (0;1;0)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (α) là $y = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 - 8z + 25 = 0$. Giá trị $|z_1 - z_2|$ bằng

A 8. **B** 5. **C** 6. **D** 3.

Lời giải.

Ta có: $z^2 - 8z + 25 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 4+3i \\ z = 4-3i \end{array}\right.$. Do đó phương trình có hai nghiệm là $\left[\begin{array}{l} z_1 = 4+3i \\ z_2 = 4-3i \end{array}\right.$.

$$\Rightarrow |z_1 - z_2| = |(4+3i) - (4-3i)| = |6i| = 6.$$

Chọn đáp án (C) $\square$

Câu 21. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

(A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. Ta có

- $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 + \dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}} = -1$ nên đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \dfrac{1}{x}}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}} = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- $\lim\limits_{x \to (-1)^-} y = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{-\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{(1-x)(-x-1)}} = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{-\sqrt{-x-1}}{\sqrt{1-x}} = 0$ nên đường thẳng $x = -1$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- $\lim\limits_{x \to 1^+} y = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{(x+1)(x+1)}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{(x+1)}}{\sqrt{(x-1)}} = +\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Chọn đáp án (B) $\square$

Câu 22. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất. Giả sử súc sắc xuất hiện mặt b chấm. Xác suất để phương trình $x^2 + bx + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là

(A) $\dfrac{2}{3}$. (B) $\dfrac{5}{6}$. (C) $\dfrac{1}{3}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Không gian mẫu $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$.

Gọi A là biến cố được mặt b chấm để phương trình $x^2 + bx + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Phương trình $x^2 + bx + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow b^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b < -2\sqrt{2} \\ b > 2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Mà $b \in \Omega$ nên $b \in \{3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(A) = 4$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 23. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 1 + x + \dfrac{4}{x}$ trên đoạn $[-3; -1]$ bằng

(A) 5. (B) -4. (C) -6. (D) -5.

Lời giải.

Hàm số y xác định và liên tục trên đoạn $[-3; -1]$. Ta có $y' = 1 - \dfrac{4}{x^2}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \in [-3; -1] \\ x = 2 \notin [-3; -1]\,. \end{array}\right.$$

Khi đó, $y\left(-3\right)=-\dfrac{10}{3}$; $y\left(-2\right)=-3$; $y\left(-1\right)=-4$.

Vậy $\min\limits_{[-3;-1]} y=-4$ tại $x=-1$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}}$ bằng

(A) $\dfrac{4}{3}$. (B) $\dfrac{3}{2}$. (C) $\dfrac{1}{3}$. **D** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{3x+1}\Rightarrow t^2=3x+1\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=3\,\mathrm{d}x\Rightarrow \dfrac{2t}{3}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=2$. Khi đó

$$\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}}=\dfrac{2}{3}\int\limits_0^1 \dfrac{1}{t}\cdot t\,\mathrm{d}t=\dfrac{2}{3}\int\limits_0^1 \mathrm{d}t=\dfrac{2}{3}t\Big|_0^1=\dfrac{2}{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-2x,\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=-2f(x)$ đồng biến trên khoảng

A $(0;2)$. (B) $(2;+\infty)$. (C) $(-\infty;-2)$. (D) $(-2;0)$.

Lời giải.

Ta có: $y'=-2f'(x)=-2x^2+4x>0\Leftrightarrow x\in(0;2)$.

Suy ra hàm số $y=-2f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Cho $(P): y=x^2$ và $A\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$. Gọi M là một điểm bất kì thuộc (P). Khoảng cách MA nhỏ nhất là

(A) $\dfrac{5}{4}$. (B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $M\in(P)\Rightarrow M\left(t;t^2\right),t\in\mathbb{R}$.

$$MA=\sqrt{\left(t+2\right)^2+\left(t^2-\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{t^4+4t+\dfrac{17}{4}}.$$

Đặt: $f(t)=t^4+4t+\dfrac{17}{4}$, ta có:

$$\begin{aligned} f'(t) &= 4t^3+4\\ f'(t) &= 0\Leftrightarrow t=-1. \end{aligned}$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{5}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra: $f(t) \geqslant \dfrac{5}{4} \Rightarrow AM \geqslant \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Vậy khoảng cách MA bé nhất bằng $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ khi $M(-1;1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Cho khai triển $(3-2x+x^2)^9 = a_0x^{18}+a_1x^{17}+a_2x^{16}+\cdots+a_{18}$. Giá trị a_{15} bằng

(A) 218700. (B) 489888. **(C) -804816.** (D) -174960.

Lời giải.

Ta có:

$$\left(3-2x+x^2\right)^9 = \sum_{k=0}^{9} \mathrm{C}_9^k \cdot x^{18-2k} \cdot (3-2x)^k = \sum_{k=0}^{9} \mathrm{C}_9^k \cdot x^{18-2k} \sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_k^i \cdot 3^{k-i}(-2x)^i \, (0 \leqslant i \leqslant k \leqslant 9).$$

Giá trị a_{15} ứng với: $18-2k+i=3 \Rightarrow \begin{cases} i=1 \\ k=8 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} i=3 \\ k=9 \end{cases}$.

Vậy $a_{15} = \mathrm{C}_9^8 \cdot \mathrm{C}_8^1 \cdot 3^7 \cdot (-2)^1 + \mathrm{C}_9^9 \cdot \mathrm{C}_9^3 \cdot 3^6 \cdot (-2)^3 = -804816$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Biết a là số thực dương bất kì để bất phương trình $a^x \geqslant 9x+1$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) $a \in \left(10^3;10^4\right]$. (B) $a \in \left(10^2;10^3\right]$. (C) $a \in \left(0;10^2\right]$. (D) $\left(10^4;+\infty\right)$.

Lời giải.

Bất phương trình $a^x \geqslant 9x+1$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên đúng với $x=1 \Rightarrow a \geqslant 10$.

Do $a>1$ nên hàm số $y=a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=a^x$ có bề lõm quay lên trên.

Hai đồ thị hàm số $y=a^x$ và $y=9x+1$ luôn đi qua điểm $A(0;1)$ nên bất phương trình $a^x \geqslant 9x+1$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi đường thẳng $y=9x+1$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm A.

Phương trình tiếp của đồ thị hàm số $y=a^x$ tại A là $y = x \cdot \ln a + 1$.

Suy ra $\ln a = 9 \Leftrightarrow a = \mathrm{e}^9 \Rightarrow a \in \left(10^3;10^4\right]$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2)=16$, $\displaystyle\int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = 2$. Tích phân $\displaystyle\int_0^2 xf'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 30. **(B) 28.** (C) 36. (D) 16.

Lời giải.

Đặt $t=2x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{2}$, ta có: $x=0 \Rightarrow t=0, x=1 \Rightarrow t=2$.

$$\int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2 \Rightarrow \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 4 \Rightarrow \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4.$$

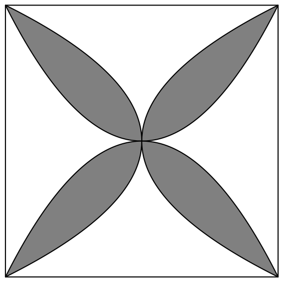
Khi đó

$$\int_0^2 xf'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x\,\mathrm{d}(f(x)) = xf(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2f(2)-4 = 28.$$

Chọn đáp án (B) □

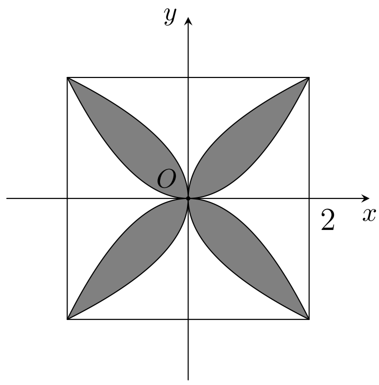
Câu 30.

Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô mầu sẫm như hình vẽ bên). Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng



(A) 800 cm^2. (B) $\dfrac{800}{3}\text{ cm}^2$. **C** $\dfrac{400}{3}\text{ cm}^2$. (D) 250 cm^2.

Lời giải.



Chọn hệ tọa độ như hình vẽ (1 đơn vị trên trục bằng 10 cm = 1 dm), các cánh hoa tạo bởi các đường parabol có phương trình là $y = \dfrac{x^2}{2}$, $y = -\dfrac{x^2}{2}$, $x = -\dfrac{y^2}{2}$, $x = \dfrac{y^2}{2}$.

Diện tích một cánh hoa (nằm trong góc phần tư thứ nhất) bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2}{2}$,$y = \sqrt{2x}$ và hai đường thẳng $x = 0; x = 2$.

Do đó diện tích một cánh hoa bằng

$$\int\limits_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Vậy diện tích một cánh hoa là $\dfrac{4}{3}\text{ dm}^2 = \dfrac{400}{3}\text{ cm}^2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha): x + y - z - 2 = 0$. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng (α), đồng thời vuông góc và cắt đường thẳng d?

(A) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{z-4}{3}$. (B) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{1}$.

C $\dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-5}{1}$. (D) $\dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z+4}{-1}$.

Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

$I \in d \Rightarrow I\,(1 + t; 2 + 2t; 3 + t)$.

$I \in (\alpha) \Rightarrow 1 + t + 2 + 2t - (3 + t) - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I\,(2; 4; 4)$.

Véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (1; 2; 1)$.

Véc-tơ chỉ pháp tuyến của (α) là $\vec{n} = (1; 1; -1)$.

Ta có $[\vec{u}, \vec{n}] = (-3; 2; -1)$.

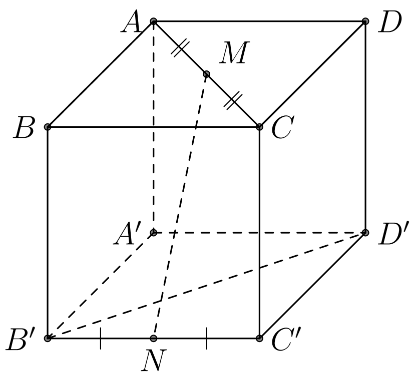
Đường thẳng cần tìm qua điểm $I\,(2; 4; 4)$, có một véc-tơ chỉ phương là $[\vec{u}, \vec{n}] = (-3; 2; -1)$ nên có phương trình $\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z-4}{-1}$.

Đường thẳng này trùng với đường thẳng $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-5}{1}$.

Chọn đáp án C □

Câu 32.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AC và $B'C'$ (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và $B'D'$ bằng



A. $\sqrt{5}a$. B. $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$. C. $3a$. D. $\dfrac{a}{3}$.

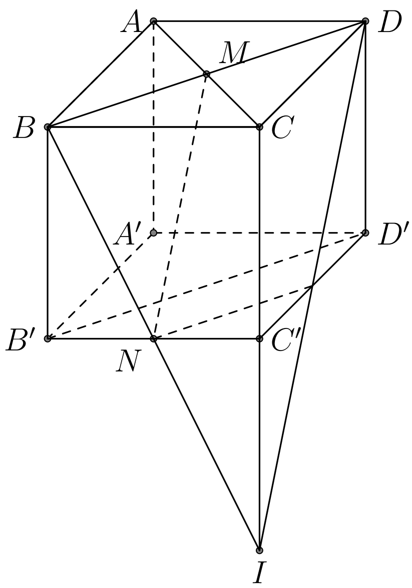
Lời giải.

Ta có $B'D' \parallel BD \Rightarrow B'D' \parallel (NBD)$.

$\Rightarrow$ $\mathrm{d}\left(MN,B'D'\right)=\mathrm{d}\left(B'D',(NDB)\right)=\mathrm{d}\left(B',(NDB)\right)=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(C,(NBD)\right)$.

Gọi h là khoảng cách từ C đến (NBD), $I=CC'\cap BN$. Ta có $\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{CB^2}+\dfrac{1}{CD^2}+\dfrac{1}{CI^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{4a^2}=\dfrac{9}{4a^2}\Rightarrow h=\dfrac{2a}{3}$.

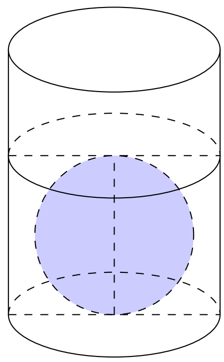
Vậy $\mathrm{d}\left(MN,B'D'\right)=\dfrac{a}{3}$.



Chọn đáp án D □

Câu 33.

Người ta thả một viên billiards snooker có dạng hình cầu với bán kính nhỏ hơn 4,5 cm vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước thì viên billiards đó tiếp xúc với đáy cốc và tiếp xúc với mặt nước sau khi dâng (tham khảo hình vẽ bên). Biết rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng 5,4 cm và chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng 4,5 cm. Bán kính của viên billiards đó bằng



A. 2,7 cm. B. 4,2 cm. C. 3,6 cm. D. 2,6 cm.

Lời giải.

Gọi r là bán kính của viên billiards snooker. Thể tích viên billiards là $V_1=\dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Phần thể tích nước dâng lên sau khi bỏ viên billiards vào là: $V_2=\pi\cdot(5{,}4)^2\cdot(2r-4{,}5)$.

Từ $V_1 = V_2$ ta có
$$\begin{cases}\dfrac{4}{3}\pi r^3 = \pi\cdot(5{,}4)^2\cdot(2r-4,5)\\ 0<r<4{,}5\end{cases} \Leftrightarrow r = 2{,}7.$$

Chọn đáp án A □

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-10;10)$ để hàm số $y = m^2x^4 - 2(4m-1)x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 15. B. 6. C. 7. **D. 16.**

Lời giải.

TH1: $m = 0$, hàm số trở thành $y = 2x^2 + 1$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên hàm số cũng đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$. Do đó $m = 0$ thỏa mãn.

TH2: Với $m \neq 0$, hàm số đã cho là hàm số trùng phương với hệ số $a = m^2 > 0$. Ta có: $y' = 4m^2x^3 - 4(4m-1)x = 4x(m^2x^2 - 4m + 1)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 0\\ x^2 = \dfrac{4m-1}{m^2}.\end{array}\right.$$

- Nếu $4m - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow m \leqslant \dfrac{1}{4}$ thì phương trình $y' = 0$ có đúng 1 nghiệm $x = 0$. Hàm số có bảng biến thiên là

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

  Suy ra $m \leqslant \dfrac{1}{4}$ thỏa mãn.

- Nếu $4m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{4}$ thì phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt là $x = 0$ và $x = \pm\sqrt{\dfrac{4m-1}{m^2}}$. Hàm số có bảng biến thiên là

x	$-\infty$		$-\sqrt{\dfrac{4m-1}{m^2}}$		0		$\sqrt{\dfrac{4m-1}{m^2}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$

  Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ khi $(1;+\infty) \subset \left(\sqrt{\dfrac{4m-1}{m^2}};+\infty\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4m-1>0\\ \sqrt{\dfrac{4m-1}{m^2}} \leqslant 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m > \dfrac{1}{4}\\ -m^2+4m-1 \leqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{4} < m \leqslant 2-\sqrt{3}\\ m \geqslant 2+\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

Suy ra điều kiện để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ là $m \leqslant 2-\sqrt{3}$ hoặc $m \geqslant 2+\sqrt{3}$.

Vì m nguyên, $m \in (-10;10)$ nên $m \in \{-9,-8,\ldots,0,4,5,\ldots,9\}$.

Vậy có 16 giá trị thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $z^2 = |z|^2 + \overline{z}$?

A 1. **B** 4. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi\,(a, b \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned} z^2 = |z|^2 + \overline{z} &\Leftrightarrow (a+bi)^2 = a^2 + b^2 + a - bi \\ &\Leftrightarrow 2abi - b^2 = b^2 + a - bi \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2ab = -b \\ -b^2 = b^2 + a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \text{ hoặc } a = -\dfrac{1}{2} \\ 2b^2 + a = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

- $b = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow z = 0$.
- $a = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow b = \pm\dfrac{1}{2} \Rightarrow z = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}i$.

Vậy có 3 số phức thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây.

x	-1		0		1		2		3
$f'(x)$	3	$\searrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	4

Hàm số $y = f\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) + x$ nghịch biến trên khoảng

A $(2;4)$. **B** $(0;2)$. **C** $(-2;0)$. **D** $(-4;-2)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $f'(x) = 2$ có hai nghiệm phân biệt là $x = 2$ và $x = a$ với $-1 < a < 0$.

Đặt $g(x) = f\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) + x$ thì $g'(x) = -\dfrac{1}{2}f'\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) + 1$.

Ta có $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) > 2$.

- $f'\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) > 2 \Rightarrow 2 < 1 - \dfrac{x}{2} < 3 \Leftrightarrow -4 < x < -2$.
- $f'\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) > 2 \Rightarrow -1 < 1 - \dfrac{x}{2} < a \Leftrightarrow 2 - 2a < x < 4$.

  Vì $-1 < a < 0$ nên $2 < 2 - 2a < 4$. Do đó $(2 - 2a; 4) \subset (2;4)$.

Vậy hàm số $y = f\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) + x$ nghịch biến trên $(-4;-2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x+y-2z-2=0$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+3}{2}$ và điểm $A\left(\dfrac{1}{2};1;1\right)$. Gọi Δ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α), song song với d đồng thời cách d một khoảng bằng 3. Đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm B. Độ dài đoạn thẳng AB bằng.

A $\dfrac{7}{2}$. **B** $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$. **C** $\dfrac{7}{3}$. **D** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $B\in Oxy$ và $B\in(\alpha)$ nên $B\,(a;2-2a;0)$.

$d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+3}{2}$ đi qua $M(-1;-2;-3)$ và có 1 véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;2)$.

Ta có: $\overrightarrow{MB}=(a+1;4-2a;3)$, $\left[\vec{u},\overrightarrow{MB}\right]=(4a-2;2a-1;2-4a)$.

Khi đó

$$\mathrm{d}\,(BM,d)=3\Leftrightarrow\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{MB}\right]\right|}{|\vec{u}|}=3\Leftrightarrow\frac{3\sqrt{(2a-1)^2}}{3}=3\Leftrightarrow(2a-1)^2=9.$$

Vậy $AB=\sqrt{\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+(1-2a)^2+1^2}=\sqrt{\dfrac{9}{4}+9+1}=\dfrac{7}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2+f(x)\cdot f''(x)=15x^4+12x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A $\dfrac{9}{2}$. **B** $\dfrac{5}{2}$. **C** 10. **D** 8.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&(f'(x))^2+f(x)\cdot f''(x)=15x^4+12x\\ \Leftrightarrow\ &[f'(x)\cdot f(x)]'=15x^4+12x\\ \Leftrightarrow\ &f'(x)\cdot f(x)=3x^5+6x^2+C_1.\end{aligned}$$

Do $f(0)=f'(0)=1$ nên ta có $C_1=1$. Do đó:

$$\begin{aligned}&f'(x)\cdot f(x)=3x^5+6x^2+1\\ \Leftrightarrow\ &\left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)'=3x^5+6x^2+1\\ \Leftrightarrow\ &f^2(x)=x^6+4x^3+2x+C_2.\end{aligned}$$

Mà $f(0)=1$ nên ta có $C_2=1$. Vậy $f^2(x)=x^6+4x^3+2x+1$ suy ra $f^2(1)=8$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm a để đồ thị hàm số $y=x^3+(a+10)\,x^2-x+1$ cắt trục hoành tại đúng 1 điểm?

A 9. **B** 10. **C** 11. **D** 8. .

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^3 + (a+10)\,x^2 - x + 1 = 0$.
Vì $x = 0$ không là nghiệm nên ta suy ra

$$x^3 + (a+10)\,x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 - x + 1}{x^2} = -a - 10.$$

Xét hàm số $y = \dfrac{x^3 - x + 1}{x^2}$, ta có $y' = \dfrac{x^3 + x - 2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại đúng 1 điểm thì $-a - 10 < 1 \Leftrightarrow a > -11$.
Vậy có 10 giá trị nguyên âm của a thỏa mãn.
Chọn đáp án B □

Câu 40. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $OMNP$ với $M\,(0;10)$, $N\,(100;10)$, $P\,(100;0)$. Gọi S là tập hợp tất cả các điểm $A\,(x;y)$ với $x, y \in \mathbb{Z}$ nằm bên trong và kể cả trên cạnh của $OMNP$. Lấy ngẫu nhiên 1 điểm $A\,(x;y) \in S$. Tính xác suất để $x + y \leqslant 90$.

A. $\dfrac{169}{200}$. B. $\dfrac{845}{1111}$. C. $\dfrac{86}{101}$. D. $\dfrac{473}{500}$.

Lời giải.
Tập hợp S gồm có $11 \cdot 101 = 1111$ điểm.
Ta xét $S' = \{(x;y) : x + y > 90\}$ với $0 \leqslant x \leqslant 100$ và $0 \leqslant y \leqslant 10$.
Khi $y = 0 \Rightarrow x > 90 \Rightarrow x \in \{91, 92, \ldots, 100\} \Rightarrow$ có 10 giá trị của x.
Khi $y = 1 \Rightarrow x > 89 \Rightarrow x \in \{90, 91, \ldots, 100\} \Rightarrow$ có 11 giá trị của x.
...
Khi $y = 10 \Rightarrow x > 80 \Rightarrow x \in \{81, 82, \ldots, 100\} \Rightarrow$ có 20 giá trị của x.
Suy ra S' có 165 phần tử. Vậy xác suất cần tìm là: $\dfrac{1111 - 165}{1111} = \dfrac{86}{101}$.
Chọn đáp án C □

Câu 41. Giả sử a, b là các số thực sao cho $x^3 + y^3 = a \cdot 10^{3z} + b \cdot 10^{2z}$ đúng với mọi các số thực dương x, y, z thoả mãn $\log(x+y) = z$ và $\log(x^2 + y^2) = z + 1$. Giá trị của $a + b$ bằng

A. $\dfrac{31}{2}$. B. $\dfrac{29}{2}$. C. $-\dfrac{31}{2}$. D. $-\dfrac{25}{2}$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{cases} \log(x+y) = z \\ \log\left(x^2 + y^2\right) = z + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10^z \\ x^2 + y^2 = 10 \cdot 10^z \end{cases} \Rightarrow xy = \frac{10^{2z} - 10 \cdot 10^z}{2}.$$

Khi đó

$$x^3+y^3=(x+y)\left(x^2+y^2-xy\right)=10^z\left(10\cdot 10^z-\frac{10^{2z}-10\cdot 10^z}{2}\right)=15\cdot 10^{2z}-\frac{1}{2}\cdot 10^{3z}.$$

Vậy $a=15, b=-\frac{1}{2}\Rightarrow a+b=\frac{29}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết $\int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$, $\int\limits_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) π. (B) $\frac{1}{\pi}$. (C) $\frac{2}{\pi}$. (D) $\frac{3\pi}{2}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u=\cos(\pi x) \\ \mathrm{d}v=f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \mathrm{d}u=-\pi\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$. Khi đó:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x &= \cos(\pi x)\,f(x)\Big|_0^1+\pi\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x\\ &= -(f(1)+f(0))+\pi\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x\\ &\Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

- *Cách 1:* Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 [f(x)-k\sin(\pi x)]^2\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x-2k\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x+k^2\int\limits_0^1 \sin^2(\pi x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}-k+\frac{k^2}{2}=0\Leftrightarrow k=1.\end{aligned}$$

  Do đó $\int\limits_0^1 [f(x)-\sin(\pi x)]^2\,\mathrm{d}x=0\Rightarrow f(x)=\sin(\pi x)$.

  Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$.

- *Cách 2:* Sử dụng BĐT Holder

$$\left[\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int\limits_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x$$

  Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow f(x)=kg(x),\forall x\in[a;b]$.

  Áp dụng vào bài ta có

$\dfrac{1}{4}=\left[\displaystyle\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\cdot\displaystyle\int_0^1\sin^2(\pi x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}$, suy ra $f(x)=k\sin(\pi x)$.

Mặt khác: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow k\displaystyle\int_0^1\sin^2(\pi x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow k=1\Rightarrow f(x)=\sin(\pi x)$.

Vậy $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\displaystyle\int_0^1\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Gọi a là số thực lớn nhất để bất phương trình $x^2-x+2+a\ln\left(x^2-x+1\right)\geqslant 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $a\in(2;3]$. **B** $a\in(8;+\infty)$. **C** $a\in(6;7]$. **D** $a\in(-6;-5]$.

Lời giải.

Đặt $t=x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ suy ra $t\geqslant\dfrac{3}{4}$.

Bất phương trình đã cho trở thành

$$x^2-x+2+a\ln\left(x^2-x+1\right)\geqslant 0\Leftrightarrow t+a\ln t+1\geqslant 0\Leftrightarrow a\ln t\geqslant -t-1.$$

- Trường hợp 1: $t=1$ khi đó $a\ln 1\geqslant -1-1$ luôn đúng với mọi a.
- Trường hợp 2: $\dfrac{3}{4}\leqslant t<1$.

  Ta có $a\ln t\geqslant -t-1,\forall t\in\left[\dfrac{3}{4};1\right)\Leftrightarrow a\leqslant\dfrac{-t-1}{\ln t},\forall t\in\left[\dfrac{3}{4};1\right)$.

  Xét hàm số $f(t)=\dfrac{-t-1}{\ln t}\Rightarrow f'(t)=-\dfrac{\ln t-1-\dfrac{1}{t}}{\ln^2 t}\geqslant 0,\forall t\in\left[\dfrac{3}{4};1\right)$.

  Do đó $a\leqslant\dfrac{-t-1}{\ln t},\forall t\in\left[\dfrac{3}{4};1\right)\Leftrightarrow a\leqslant\dfrac{-7}{4\ln\frac{3}{4}}$.
- Trường hợp 3: $t>1$.

  Ta có $a\ln t\geqslant -t-1,\forall t\in(1;+\infty)\Leftrightarrow a\geqslant\dfrac{-t-1}{\ln t},\forall t\in(1;+\infty)$.

  Xét hàm số $f(t)=\dfrac{-t-1}{\ln t}\Rightarrow f'(t)=-\dfrac{\ln t-1-\dfrac{1}{t}}{\ln^2 t},\forall t\in(1;+\infty)$.

  Xét hàm số $g(t)=\ln t-1-\dfrac{1}{t}\Leftrightarrow g'(t)=\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t^2}>0$ nên hàm số đồng biến.

  Suy ra phương trình $g(t)=0$ có tối đa một nghiệm.

  Vì $g(1)=-2;\ \lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=+\infty$ nên $g(t)=0$ có duy nhất một nghiệm trên $(1;+\infty)$.

  Do đó $f'(t)=0$ có duy nhất một nghiệm là t_0. Khi đó $\ln t_0=\dfrac{t_0+1}{t_0}$ suy ra $f(t_0)=-t_0$.

  Bảng biến thiên

t	1		t_0		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-t_0$	$\searrow$	$-\infty$

Suy ra $a \geqslant \dfrac{-t-1}{\ln t}, \forall t \in (1;+\infty) \Leftrightarrow a \geqslant -t_0$.

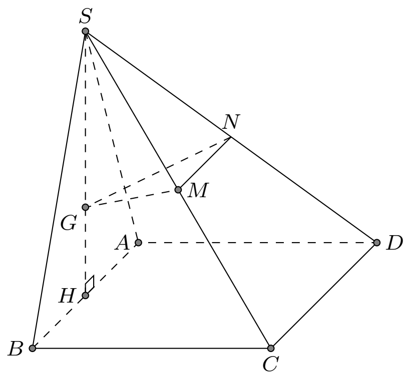
Do đó $-t_0 \leqslant a \leqslant \dfrac{-7}{4\ln\frac{3}{4}} \approx 6{,}08$.

Vậy số thực a thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $a \in (6;7]$.

Chọn đáp án C □

Câu 44.

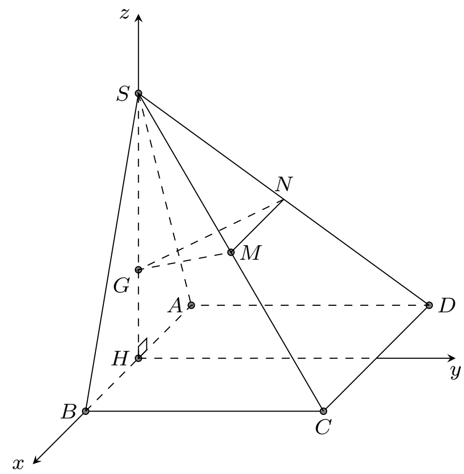
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD (tham khảo hình vẽ bên). Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (GMN) và $(ABCD)$.



A $\dfrac{2\sqrt{39}}{39}$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **C** $\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$. **D** $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó



$S\left(0;0;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A\left(\dfrac{-a}{2};0;0\right)$, $B\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $C\left(\dfrac{a}{2};a;0\right)$, $D\left(\dfrac{-a}{2};a;0\right)$.

Suy ra $G\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)$; $M\left(\dfrac{a}{4};\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$, $N\left(-\dfrac{a}{4};\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.

Ta có mặt phẳng $(ABCD)$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$, mặt phẳng (GMN) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{GM},\overrightarrow{GN}\right]=\left(0;-\dfrac{a\sqrt{3}}{24};\dfrac{a}{4}\right)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (GMN) và $(ABCD)$, ta có

$$\cos\alpha=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\vec{k}\right|}{|\vec{n}|\cdot\left|\vec{k}\right|}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{39}}{24}}=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-2x\right)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(x^2-8x+m\right)$ có 5 điểm cực trị?

A 15. B 17. C 16. D 18.

Lời giải.

Đặt $g(x)=f\left(x^2-8x+m\right)$.

$$f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-2x\right)$$
$$\Rightarrow\ g'(x)=(2x-8)\left(x^2-8x+m-1\right)^2\left(x^2-8x+m\right)\left(x^2-8x+m-2\right).$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=4 & \\ x^2-8x+m-1=0 & (1)\\ x^2-8x+m=0 & (2)\\ x^2-8x+m-2=0. & (3)\end{array}\right.$$

Các phương trình (1), (2), (3) không có nghiệm chung từng đôi một và $\left(x^2-8x+m-1\right)^2\geqslant 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi (2) và (3) có hai nghiệm phân biệt khác 4

$$\Leftrightarrow\begin{cases}16-m>0\\ 16-m+2>0\\ 16-32+m\neq 0\\ 16-32+m-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<16\\ m<18\\ m\neq 16\\ m\neq 18.\end{cases}$$

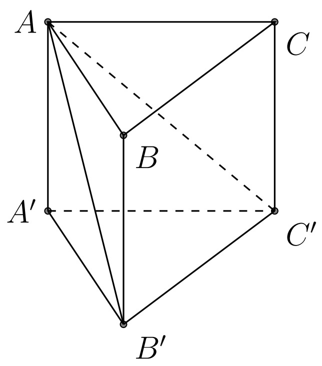
Vì m là số nguyên dương và $m<16$ nên có 15 giá trị m cần tìm.

Chọn đáp án A □

Câu 46.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB=BC=a$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng (ACC') và $(AB'C')$ bằng 60° (tham khảo hình vẽ bên). Tính thể tích khối chóp $B'.ACC'A'$.

A $\dfrac{a^3}{3}$. B $\dfrac{a^3}{6}$. C $\dfrac{a^3}{2}$. D $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.



Lời giải.

Gọi M là trung điểm của $A'C'$. Do tam giác $A'B'C'$ vuông cân tại B' nên $B'M\perp A'C'$.

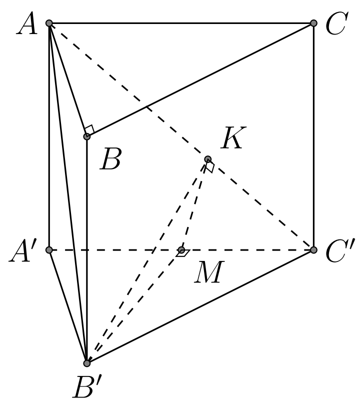
$\Rightarrow MB'\perp(AA'C'C)$.

Thể tích khối chóp $B'.ACC'A'$ là $V_{B'.AA'C'C}=\dfrac{1}{3}B'M\cdot AA'\cdot AC$.

Ta có $B'M=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $AC=a\sqrt{2}$.

Do $MB'\perp(AA'C'C)\Rightarrow MB'\perp AC'$. Kẻ $MK\perp AC'\Rightarrow B'K\perp AC'$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ACC') và $(AB'C')$ là $\widehat{MKB'}\Rightarrow\widehat{MKB'}=60^\circ$.



Trong tam giác vuông MKB' ta có $\tan 60^\circ = \dfrac{MB'}{MK} \Rightarrow MK = \dfrac{MB'}{\tan 60^\circ} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Trong tam giác vuông MKC' ta có $\tan \widehat{MC'K} = \dfrac{MK}{KC'} = \dfrac{MK}{\sqrt{MC'^2 - MK^2}} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{6}}{6}}{\sqrt{\dfrac{2a^2}{4} - \dfrac{6a^2}{36}}}$.

Mặt khác trong tam giác vuông $AA'C$ ta có $AA' = A'C' \cdot \tan \widehat{MC'K} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} a\sqrt{2} = a$.

Vậy $V_{B'.AA'C'C} = \dfrac{1}{3} B'M \cdot AA' \cdot AC = \dfrac{1}{3} a \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{a^3}{3}$.

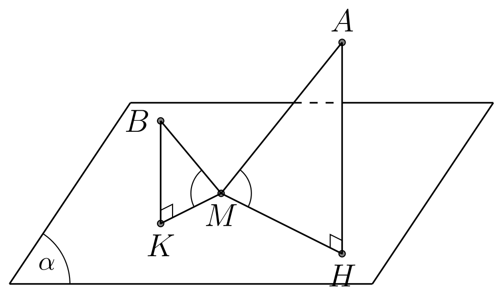
Chọn đáp án A □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(10; 6; -2)$, $B(5; 10; -9)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + 2y + z - 12 = 0$. Điểm M di động trên (α) sao cho MA, MB luôn tạo với (α) các góc bằng nhau. Biết rằng M luôn thuộc một đường tròn (ω) cố định. Hoành độ của tâm đường tròn (ω) bằng

A. -4. B. $\dfrac{9}{2}$. **C.** 2. D. 10.

Lời giải.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên mặt phẳng (α), khi đó:



$$\begin{aligned} AH &= \mathrm{d}(A; (\alpha)) = \frac{|2 \cdot 10 + 2 \cdot 6 + (-2) - 12|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 6 \\ BK &= \mathrm{d}(B; (\alpha)) = \frac{|2 \cdot 5 + 2 \cdot 10 + (-9) - 12|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 3. \end{aligned}$$

Vì MA, MB tạo với với (α) các góc bằng nhau nên $\widehat{AMH} = \widehat{BMK}$. Từ $AH = 2BK$ suy ra $MA = 2MB$.

Gọi $M(x; y; z)$, ta có:

$$\begin{aligned} MA = 2MB &\Leftrightarrow MA^2 = 4MB^2 \\ &\Leftrightarrow (x-10)^2 + (y-6)^2 + (z+2)^2 = 4\left[(x-5)^2 + (y-10)^2 + (z+9)^2\right] \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - \frac{20}{3}x - \frac{68}{3}y + \frac{68}{3}z + 228 = 0. \end{aligned}$$

Như vậy, điểm M nằm trên mặt cầu (S) có tâm $I\left(\dfrac{10}{3}; \dfrac{34}{3}; -\dfrac{34}{3}\right)$ và bán kính $R = 2\sqrt{10}$.

Do đó, đường tròn (ω) là giao của mặt cầu (S) và mặt phẳng (α), nên tâm J của đường tròn (ω) là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (α).

Phương trình đường thẳng d đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (α) là: $\begin{cases} x = \dfrac{10}{3} + 2t \\ y = \dfrac{34}{3} + 2t \\ z = -\dfrac{34}{3} + t \end{cases}$.

Tọa độ điểm J là nghiệm $(x;y;z)$ của hệ phương trình: $\begin{cases} x=\dfrac{10}{3}+2t \\ y=\dfrac{34}{3}+2t \\ z=-\dfrac{34}{3}+t \\ 2x+2y+z-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=10 \\ z=-\dfrac{38}{3} \\ t=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$.

Vậy $J=\left(2;10;-\dfrac{38}{3}\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 48. Cho đồ thị $(C): y=x^3-3x^2$. Có bao nhiêu số nguyên $b\in(-10;10)$ để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $B(0;b)$?

(A) 2. (B) 9. **(C) 17.** (D) 16.

Lời giải.

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm, phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) là:

$$y=\left(3x_0^2-6x_0\right)(x-x_0)+x_0^3-3x_0^2.$$

Tiếp tuyến đi qua điểm $B(0;b)$ khi và chỉ khi:

$$b=\left(3x_0^2-6x_0\right)(0-x_0)+x_0^3-3x_0^2 \Leftrightarrow -2x_0^3+3x_0^2=b\,(*)\,.$$

Xét hàm số $f(x_0)=-2x_0^3+3x_0^2$. Ta có $f'(x_0)=-6x_0^2+6x_0$, $f'(x_0)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

x_0	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x_0)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x_0)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Điều kiện để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $B(0;b)$ là phương trình $(*)$ có đúng một nghiệm x_0. Từ bảng biến thiên, ta suy ra $b\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$.

Vì b là số nguyên nên $b\in\{-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Vậy có 17 số nguyên b thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha): x-z-3=0$ và điểm $M(1;1;1)$. Gọi A là điểm thuộc tia Oz, gọi B là hình chiếu của A lên (α). Biết rằng tam giác MAB cân tại M. Diện tích của tam giác MAB bằng

(A) $6\sqrt{3}$. **(B) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.** (C) $\dfrac{3\sqrt{123}}{2}$. (D) $3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi $A(0;0;a)$. Đường thẳng AB qua A và vuông góc với (α) nên có phương trình $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = a - t \end{cases}$.

B là hình chiếu của A lên (α) nên tọa độ B thỏa mãn hệ $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = a - t \\ x - z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a+3}{2} \\ y = 0 \\ z = \dfrac{a-3}{2} \end{cases}$.

Suy ra $B\left(\dfrac{a+3}{2}; 0; \dfrac{a-3}{2}\right)$.

Tam giác MAB cân tại M nên

$$MA = MB \Leftrightarrow 1 + 1 + (1-a)^2 = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 + 1 + \left(\frac{a-5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = -3. \end{array}\right.$$

- Nếu $a = 3$ thì tọa độ $A(0;0;3)$, $B(3;0;0)$. Diện tích tam giác MAB là

$$S = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right]\right| = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

- Nếu $a = -3$ thì tọa độ $A(0;0;-3)$ và $B(0;0;-3)$ trùng nhau nên không thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Giả sử z_1, z_2 là hai trong số các số phức z thỏa mãn $\left|iz + \sqrt{2} - i\right| = 1$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng

A 4. **B** $2\sqrt{3}$. **C** $3\sqrt{2}$. **D** 3.

Lời giải.

Ta có $\left|iz + \sqrt{2} - i\right| = 1 \Leftrightarrow \left|z - \left(1 + i\sqrt{2}\right)\right| = 1$.

Gọi $z_0 = 1 + i\sqrt{2}$ có điểm biểu diễn là $I\left(1; \sqrt{2}\right)$.

Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2. Vì $|z_1 - z_2| = 2$ nên I là trung điểm của AB.

Ta có

$$|z_1| + |z_2| = OA + OB \leqslant \sqrt{2\left(OA^2 + OB^2\right)} = \sqrt{4OI^2 + AB^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Dấu bằng xảy ra khi $OA = OB$.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. B	3. D	4. C	5. C	6. D	7. B	8. C	9. B	10. C
11. A	12. C	13. B	14. D	15. B	16. A	17. A	18. B	19. A	20. C
21. B	22. A	23. B	24. D	25. A	26. D	27. C	28. A	29. B	30. C
31. C	32. D	33. A	34. D	35. D	36. D	37. A	38. D	39. B	40. C
41. B	42. C	43. C	44. C	45. A	46. A	47. C	48. C	49. B	50. A

144 ĐỀ THI THỬ MÔN TOÁN 2018 TRƯỜNG THPT TÂY THỤY ANH – THÁI BÌNH LẦN 2

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Họ nguyên hàm $\int x\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{x^2+1}+C$. (B) $\frac{3}{8}\sqrt[3]{x^2+1}+C$. (C) $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+1)^4}+C$. (D) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(x^2+1)^4}+C$.

Lời giải.

Ta có $\int x\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}(x^2+1) = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+1)^4}+C$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó?

(A) $y=\frac{x-1}{x+1}$. (B) $y=\frac{2x+1}{x-3}$. (C) $y=\frac{x-2}{2x-1}$. (D) $y=\frac{x+5}{-x-1}$.

Lời giải.

- Với $y=\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow y'=\frac{2}{(x+1)}>0$.
- Với $y=\frac{2x+1}{x-3} \Rightarrow y'=\frac{-7}{(x-3)^2}<0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\cos^2 x = m-1$ có nghiệm.

(A) $m \le 2$. (B) $1<m<2$. (C) $m \ge 1$. (D) $1 \le m \le 2$.

Lời giải.

Ta có $\cos^2 x = m-1 \Leftrightarrow \frac{1+\cos 2x}{2} = m-1 \Leftrightarrow \cos 2x = 2m-3$.

Vì $-1 \le \cos 2x \le 1 \Rightarrow -1 \le 2m-3 \le 1 \Leftrightarrow 1 \le m \le 2$.

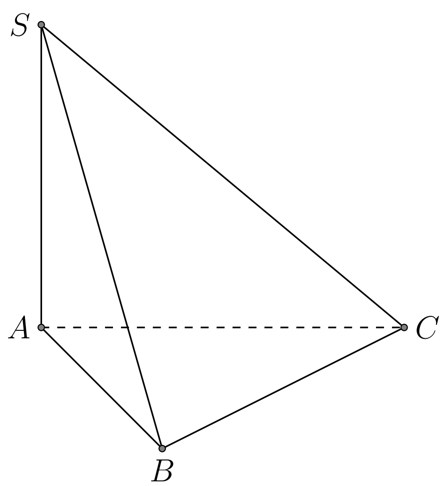
Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

(A) $V_{S.ABC}=a^3$. (B) $V_{S.ABC}=\frac{a^3}{2}$. (C) $V_{S.ABC}=3a^3$. (D) $V_{S.ABC}=a^2$.

Lời giải.

Ta có $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot SA = \frac{1}{3}\cdot\frac{4a^2\sqrt{3}}{4}\cdot a\sqrt{3} = a^3$



Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Cho đa thức $P(x) = (1+x)^8 + (1+x)^9 + (1+x)^{10} + (1+x)^{11} + (1+x)^{12}$. Khai triển và rút gọn ta được đa thức $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{12}x^{12}$. Tìm hệ số a_8.

(A) 720. (B) 715. (C) 700. (D) 730.

Lời giải.

Ta có $(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + x\mathrm{C}_n^1 + x^2\mathrm{C}_n^2 + \cdots + x^n\mathrm{C}_n^n$.

$\Rightarrow$ hệ số của x^k là C_n^k.

Do đó hệ số của x^8 trong khai triển $P(x)$ là $\mathrm{C}_8^8 + \mathrm{C}_9^8 + \mathrm{C}_{10}^8 + \mathrm{C}_{11}^8 + \mathrm{C}_{12}^8 = 715$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x + y + z - 1 = 0$. Trong các mặt phẳng sau tìm mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (α).

(A) $2x - y - z + 1 = 0$.
(B) $2x + 2y + 2z - 1 = 0$.
(C) $x - y - z + 1 = 0$.
(D) $2x - y + z + 1 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có $\vec{n}_{(\alpha)} = (1;1;1)$.

Mặt phẳng $2x - y - z + 1 = 0$ có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (2;-1;-1) \Rightarrow \vec{n}_{(\alpha)} \cdot \vec{n}_1 = 0$ nên mặt phẳng (α) vuông góc với mặt phẳng $2x - y - z + 1 = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Lớp 11B có 25 đoàn viên trong đó có 10 nam và 15 nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 đoàn viên trong lớp để tham dự hội trại ngày 26 tháng 3. Tính xác suất để trong 3 đoàn viên được chọn có 2 nam và 1 nữ.

(A) $\dfrac{3}{115}$. (B) $\dfrac{7}{920}$. (C) $\dfrac{27}{92}$. (D) $\dfrac{9}{92}$.

Lời giải.

Chọn 3 đoàn viên trong 25 đoàn viên có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{25}^3$ cách.

Gọi A: "trong 3 đoàn viên được chọn có 2 nam và 1 nữ"

Khi đó $n(A) = \mathrm{C}_{10}^2 \cdot \mathrm{C}_{15}^1 \Rightarrow \mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{27}{92}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Cho hàm số $y = x + \dfrac{1}{x+2}$. Giá trị nhỏ nhất m của hàm số trên $[-1;2]$ là

(A) $m = 0$. (B) $m = 2$. (C) $m = \dfrac{9}{4}$. (D) $m = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Có $y' = 1 - \dfrac{1}{(x+2)^2} = \dfrac{(x+2)^2 - 1}{(x+2)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x &= -1 \\ x &= -3 \end{aligned}\right.$.

$\Rightarrow y(-1) = 0$; $y(2) = \dfrac{9}{4} \Rightarrow \min\limits_{[-1;2]} y = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Họ nguyên hàm $\displaystyle\int \sin x \,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $\cos x + C$. (B) $-\sin x + C$. (C) $-\cos x + C$. (D) $\sin x + C$.

Lời giải.

Có $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Số phức z nào sau đây thỏa mãn $|z| = \sqrt{5}$ và z là số thuần ảo?

(A) $z = \sqrt{5}$. (B) $z = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$. (C) $z = 5i$. **D** $z = -\sqrt{5}i$.

Lời giải.

Vì z là số thuần ảo nên ta đặt $z = bi \Rightarrow |z| = |b| = \sqrt{5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = \sqrt{5} \\ b = -\sqrt{5} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = \sqrt{5}i \\ z = -\sqrt{5}i \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy số giảm?

(A) $u_n = n^2$. (B) $u_n = 2n$. (C) $u_n = n^3 - 1$. **D** $u_n = \dfrac{2n+1}{n-1}$.

Lời giải.

Xét dãy $u_n = \dfrac{2n+1}{n-1} = 2 + \dfrac{3}{n-1}$.

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \dfrac{3}{n} - \dfrac{3}{n-1} = \dfrac{-3}{n(n-1)} < 0, \forall x \in \mathbb{N}^*$.

Do đó dãy $u_n = \dfrac{2n+1}{n-1}$ là dãy số giảm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Tìm a để diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $(P)\colon y = \dfrac{x^2 - 2x}{x-1}$, đường thẳng $d\colon y = x - 1$ và $x = a$, $x = 2a$ $(a > 1)$ bằng $\ln 3$.

(A) $a = 1$. (B) $a = 4$. (C) $a = 3$. **D** $a = 2$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{x^2 - 2x}{x-1} = x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow$ vô nghiệm.

$\Rightarrow S = \displaystyle\int_a^{2a} \left|\dfrac{x^2 - 2x}{x-1} - (x-1)\right| dx = \int_a^{2a} \left|\dfrac{-1}{x-1}\right| dx = \int_a^{2a} \dfrac{1}{x-1} dx = \ln(x-1)\Big|_a^{2a} = \ln \dfrac{2a-1}{a-1} = \ln 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{2a-1}{a-1} = 3 \Leftrightarrow a = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ cắt

(A) đường thẳng $y = 3$ tại hai điểm.

B đường thẳng $y = \dfrac{5}{3}$ tại ba điểm.

(C) đường thẳng $y = -4$ tại hai điểm.

(D) trục hoành tại một điểm.

Lời giải.

Dễ thấy phương trình $x^3 - 3x = \dfrac{5}{3}$ có ba nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ cắt đường thẳng $y = \dfrac{5}{3}$ tại ba điểm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; -1; 1)$; $B(0; 1; 2)$ và $C(1; 0; 1)$. Trong các mệnh đề sau, hãy chọn mệnh đề đúng.

(A) Tam giác ABC vuông tại A. (B) Ba điểm A, B, C thẳng hàng.

C Ba điểm A, B, C không thẳng hàng. **D** B là trung điểm của AC.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(-1;2;1) \\ \overrightarrow{AC}=(0;1;0) \end{cases} \Rightarrow \nexists k \in \mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ do đó ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\sin^2 x-\cos x+1$. Tính $M\cdot m$.

A $\dfrac{25}{4}$. **B** 0. **C** $\dfrac{25}{8}$. **D** 2.

Lời giải.

Ta có $y=2\sin^2 x-\cos x+1=-2\cos^2 x-\cos x+3$. Đặt $t=\cos x$ với $-1\le t\le 1$.

Khi đó $y=-2t^2-t+3 \Rightarrow y'=-4t-1=0 \Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{4}\cdot$

$\Rightarrow y(-1)=2$; $y(1)=0$; $y\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{25}{8} \Rightarrow \begin{cases} M=\max y=\dfrac{25}{8} \\ m=\min y=0 \end{cases} \Rightarrow M\cdot m=0.$

Chọn đáp án B □

Câu 16. Tính tổng bình phương các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x=\log_2\dfrac{x}{4}+4$.

A $\dfrac{17}{4}$. **B** 0. **C** 4. **D** $\dfrac{65}{4}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x>0$.

Phương trình

$$\begin{aligned} & \log_2^2 x=\log_2\frac{x}{4}+4 \\ \Leftrightarrow\ & \log_2^2 x=\log_2 x-\log_2 4+4 \\ \Leftrightarrow\ & \log_2^2 x-\log_2 x-2=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \log_2 x=-1 \\ \log_2 x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=4 \end{array}\right. \\ \Rightarrow\ & \left(\frac{1}{2}\right)^2+4^2=\frac{65}{4}\cdot \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 17. Để thực hiện kế hoạch kinh doanh, ông A cần chuẩn bị một số vốn ngay từ bây giờ. Ông có số tiền là 500 triệu đồng gửi tiết kiệm với lãi suất 0,4%/tháng theo hình thức lãi kép. Sau gần 10 tháng, ông A gửi thêm vào 300 triệu nhưng lãi suất các tháng sau có thay đổi là 0,5%/tháng. Hỏi sau 2 năm kể từ lúc gửi số tiền ban đầu, số tiền ông A nhận được cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu? (không tính phần thập phân).

A 8796936000. **B** 880438640. **C** 879693510. **D** 901727821.

Lời giải.

Sau 10 tháng ông A có số tiền $A_{10}=500(1+0{,}4\%)^{10}+300=820363867$.

Sau 2 năm kể từ lúc gửi số tiền ban đầu hay sau 14 tháng kể từ lúc ông A gửi thêm số tiền 300 triệu, số tiền ông A nhận được cả gốc lẫn lãi là $A=A_{10}(1+0{,}5\%)^{14}=879693510$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Cho $a = \log_2 3$ và $b = \log_2 5$. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào đúng?

(A) $\log_2 \sqrt[6]{360} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b$.

(B) $\log_2 \sqrt[6]{360} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}a + \frac{1}{6}b$.

(C) $\log_2 \sqrt[6]{360} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}b$.

(D) $\log_2 \sqrt[6]{360} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}a + \frac{1}{3}b$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\log_2 \sqrt[6]{360} &= \frac{1}{6}\log_2(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) = \frac{1}{6}(3\log_2 2 + 2\log_2 3 + \log_2 5)\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\log_2 3 + \frac{1}{6}\log_2 5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}b.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + \frac{3}{4}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 3)$.

(B) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.

(C) Hàm số đồng biến trên $(-2; +\infty)$.

(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 3)$.

Lời giải.

Có $y' = x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Nhìn vào bảng xét dấu ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 3)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Tính thể tích của phần vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị hàm số (P): $y = 2x - x^2$ và trục Ox.

(A) $V = \frac{19\pi}{15}$.

(B) $V = \frac{13\pi}{15}$.

(C) $V = \frac{17\pi}{15}$.

(D) $V = \frac{16\pi}{15}$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của đồ thị với trục Ox là nghiệm của phương trình $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Khi đó thể tích khi quay hình phẳng D là

$$\begin{aligned}V &= \pi\int_0^2 (2x - x^2)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)\,\mathrm{d}x\\ &= \pi\left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2 = \frac{16\pi}{15}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc mặt phẳng đáy. Biết $SD = 2a\sqrt{3}$ và góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $30°$. Tính khoảng cách h từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).

A $h = \dfrac{a\sqrt{13}}{3}$. **B** $h = \dfrac{2a\sqrt{66}}{11}$. **C** $h = \dfrac{2a\sqrt{13}}{3}$. **D** $h = \dfrac{4a\sqrt{66}}{11}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB và đặt $SH = x$ với $x > 0$. Vì SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên $SH \perp (ABCD)$.

Khi đó $(\widehat{SC,(ABCD)}) = \widehat{SCH} = 30°$.

Trong $(ABCD)$ kẻ $HE \perp AC$ tại E.

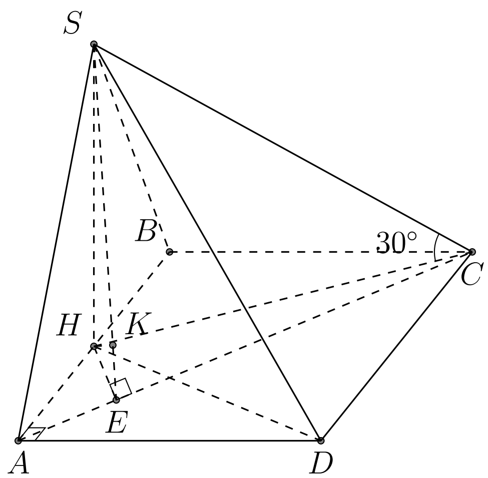
Khi đó $AC \perp (SHE)$.

Trong (SHE) kẻ $HK \perp SE$ tại K.

$\Rightarrow HK \perp (SAC)$. Xét $\triangle SHC$ vuông tại H có $HC = \dfrac{SH}{\tan\widehat{SCH}} = x\sqrt{3}$.

Dễ thấy tam giác HDC cân tại H.

$\Rightarrow HD = HC = x\sqrt{3}$.



Xét $\triangle SHD$ vuông tại H có $SD^2 = SH^2 + HD^2 \Leftrightarrow 12a^2 = 4x^2 \Leftrightarrow x = SH = a\sqrt{3}$.

$\Rightarrow HD = HC = 3a$. Do $\triangle SAB$ đều $\Rightarrow AB = 2a \Rightarrow BC = \sqrt{HC^2 - HB^2} = 2a\sqrt{2}$.

Khi đó $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác HBC là $S_{HBC} = \dfrac{1}{2}HB \cdot BC = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}AB \cdot BC = \dfrac{1}{2}S_{ABC} = a^2\sqrt{2}$.

$\Rightarrow S_{HAC} = S_{HBC} = a^2\sqrt{2} = \dfrac{1}{2}HE \cdot AC \Rightarrow HE = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Xét $\triangle SHE \Rightarrow HK = \dfrac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{a\sqrt{66}}{11}$.

Vì H là trung điểm AB nên $h = \mathrm{d}(B;(SAC)) = 2\mathrm{d}(H;(SAC)) = \dfrac{2a\sqrt{66}}{11}$.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Cho $\displaystyle\int_1^2 [3f(x) + 2g(x)]\,\mathrm{d}x = 1$ và $\displaystyle\int_1^2 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = -3$. Khi đó $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\dfrac{11}{7}$. **B** $-\dfrac{5}{7}$. **C** $\dfrac{6}{7}$. **D** $\dfrac{16}{7}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \displaystyle\int_1^2 [3f(x) + 2g(x)]\,\mathrm{d}x = 1 \\ \displaystyle\int_1^2 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + 2\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 1 \\ 2\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{5}{7} \\ \displaystyle\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{11}{7} \end{cases}$.

Chọn đáp án B □

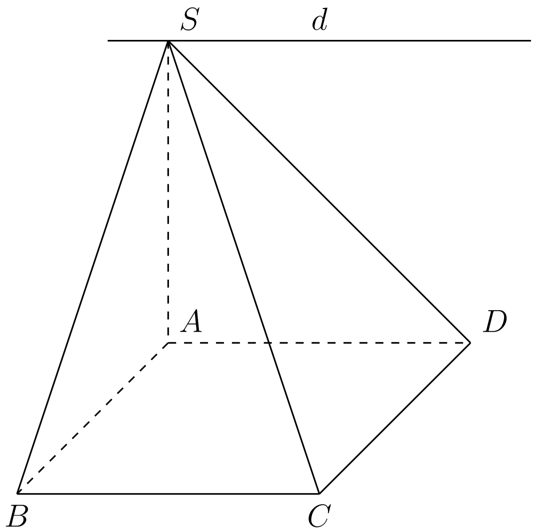
Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC). Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) d qua S và song song với AB.
(B) d qua S và song song với BC.
(C) d qua S và song song với DC.
(D) d qua S và song song với BD.

Lời giải.

Có $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases}$

$\Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = d \parallel AD \parallel BC$ và d đi qua S.

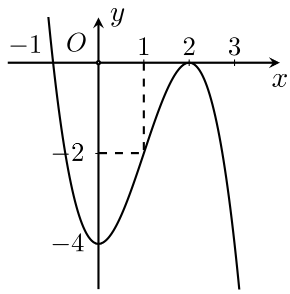


Chọn đáp án (B) □

Câu 24.

Đồ thị hình bên là của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

(A) $y = -x^3 - 3x^2 - 4$.
(B) $y = x^3 - 3x + 4$.
(C) $y = x^3 - 3x - 4$.
(D) $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.



Lời giải.

Đồ thị hàm bậc ba có hệ số $a < 0 \Rightarrow$ loại $y = x^3 - 3x + 4$ và $y = x^3 - 3x - 4$.

Dễ thấy đồ thị đi qua điểm $(1; -2) \Rightarrow$ loại $y = -x^3 - 3x^2 - 4$.

Vậy đồ thị là của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Tính $I = \int 8 \sin 3x \cos x \, dx = a \cos 4x + b \cos 2x + C$. Khi đó $a - b$ bằng

(A) 3.
(B) −1.
(C) 1.
(D) 2.

Lời giải.

Ta có $I = 4 \int (\sin 4x + \sin 2x) \, dx = -\cos 4x - 2 \cos 2x + C \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow a - b = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C). Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(3; 20)$ và có hệ số góc là m. Với giá trị nào của m thì d cắt (C) tại ba điểm phân biệt?

(A) $\begin{cases} m < \dfrac{15}{4} \\ m \neq 4 \end{cases}$.
(B) $\begin{cases} m < \dfrac{1}{5} \\ m \neq 0 \end{cases}$.
(C) $\begin{cases} m > \dfrac{15}{4} \\ m \neq 24 \end{cases}$.
(D) $\begin{cases} m > \dfrac{1}{5} \\ m \neq 1 \end{cases}$.

Lời giải.
Đường thẳng $d \cdot y = m(x-3)+20$ hay $d\colon y = mx - 3m + 20$.
Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm phương trình

$$\begin{aligned} & x^3 - 3x + 2 = mx - 3m + 20 \\ \Leftrightarrow\ & x^3 - (3+m)x + 3m - 18 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-3)(x^2+3x+6-m) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x^2 + 3x + 6 - m \quad (1) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Đường thẳng d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 4m - 15 > 0 \\ 3^2 + 3 \cdot 3 + 6 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{15}{4} \\ m \neq 24 \end{cases}.$

Chọn đáp án C □

Câu 27. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} \geq \dfrac{1}{4}$.

A. $S = \{x \in \mathbb{R} | x > 3\}$.
B. $S = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \leq 3\}$.
C. $S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 3\}$.
D. $S = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\}$.

Lời giải.
Ta có $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} \geq \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x - 1 \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 3$.
Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho số phức $z = mi$ với $m \neq 0$ là tham số thực. Tìm phần ảo của số phức $\dfrac{1}{z}$.

A. $-\dfrac{1}{m}$.
B. $\dfrac{1}{m}$.
C. $-\dfrac{1}{m}i$.
D. $\dfrac{1}{m}$.

Lời giải.
Ta có $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{mi} = -\dfrac{i}{m} \Rightarrow$ phần ảo của $\dfrac{1}{z}$ là $-\dfrac{1}{m}$.
Chọn đáp án A □

Câu 29. Hàm số $y = \log_7(3x+1)$ có tập xác định là

A. $\left(-\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$.
B. $\left[-\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$.
C. $\left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right)$.
D. $(0; +\infty)$.

Lời giải.
Điều kiện $3x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{3}$
$\Rightarrow$ Tập xác định của hàm số là $\left(-\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$.
Chọn đáp án A □

Câu 30. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2.
B. 0.
C. 3.
D. 1.

Lời giải.
Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận $x = -1$ và $y = -1$.
Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho hai số phức $z = (a-2b)-(a-b)i$ và $w = 1-2i$, biết $z = wi$. Tính $S = a+b$.

A. $S=-7$. B. $S=-4$. C. $S=-3$. D. $S=7$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& z = \omega i \\
\Leftrightarrow\ & (a-2b)-(a-b)i = (1-2i)i \\
\Leftrightarrow\ & (a-2b)-(a-b)i = 2+i \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a-2b=2 \\ -a+b=1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a=-4 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow S = a+b = -7.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 32. Phương trình $4\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2x} + 25\cdot 2^x = 100 + 100^{\frac{x}{2}}$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 3. B. 1. C. 2. D. Vô nghiệm.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
& 4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2x} + 25\cdot 2^x = 100 + 100^{\frac{x}{2}} \\
\Leftrightarrow\ & 4\cdot 5^x + 25\cdot 2^x = 100 + 10^x \\
\Leftrightarrow\ & 5^x(4-2^x) - 25(4-2^x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (4-2^x)(5^x-25) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 4-2^x=0 \\ 5^x-25=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 2.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$; $AD = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{2a^3}{3}\cdot$ Tính số đo góc giữa đường thẳng SB với mặt phẳng $(ABCD)$.

A. 30°. B. 60°. C. 45°. D. 75°.

Lời giải.

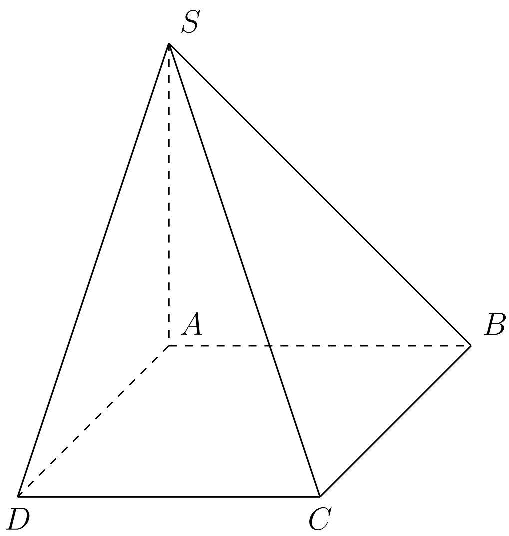
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \dfrac{2a^2}{3} \cdot SA = \dfrac{2a^3}{3} \Rightarrow SA = a$

$\Rightarrow SA = AB \Rightarrow \triangle SAB$ vuông cân tại A.

Có $SA \perp (ABCD)$

$\Rightarrow \widehat{(SB,(ABCD))} = \widehat{(SB,AB)} = \widehat{SBA} = 45^\circ$.



Chọn đáp án C □

Câu 34. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

(A) Tồn tại một mặt trụ tròn xoay chứa tất cả các cạnh bên của một hình lập phương.

(B) Tồn tại một mặt trụ tròn xoay chứa tất cả các cạnh bên của hình hộp.

(C) Tồn tại một mặt nón tròn xoay chứa tất cả các cạnh bên của một hình chóp tứ giác đều.

(D) Tồn tại một mặt cầu chứa tất cả các đỉnh của một tứ diện đều.

Lời giải.

Vì hình hộp không phải là hình lăng trụ đứng nên không tồn tại mặt trụ tròn xoay chứa tất cả các cạnh bên của hình hộp.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$

(A) Có hệ số góc dương.

(B) Song song với trục hoành.

(C) Có hệ số góc bằng -1.

(D) Song song với đường thẳng $x = 1$.

Lời giải.

Giả sử x_0 là hoành độ điểm cực tiểu của đồ thị khi đó $y'(x_0) = 0 \Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm cực tiểu là $k = y'(x_0) = 0$ do đó tiếp tuyến tại điểm cực tiểu song song với trục hoành.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và tam giác ABC vuông tại C. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC). Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) H là trung điểm của cạnh AB.

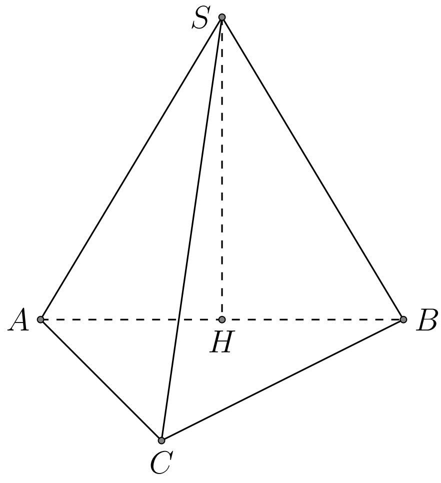
(B) H là trọng tâm tam giác ABC.

(C) H là trực tâm tam giác ABC.

(D) H là trung điểm cạnh AC.

Lời giải.

Vì $SA = SB = SC$ nên hình chiếu của H trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Mặt khác $\triangle ABC$ vuông tại C nên tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm cạnh AB.
Do đó H là trung điểm AB.



Chọn đáp án A □

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x = 1 + at \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ và $d_1\colon \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 3 - t' \end{cases}$ với t, $t' \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả giá trị thực của a để hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau.

A $a = 0$. **B** $a = 1$. **C** $a = -1$. **D** $a = 2$.

Lời giải.

Xét hệ $\begin{cases} 1 + at = 1 - t' \\ t = 2 + 2t' \\ -1 + 2t = 3 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} at + t' = 0 \\ t = 2 \\ t' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ t = 2 \\ t' = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0$ thì d cắt d'.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Diện tích xung quanh của hình nón có đường sinh l và bán kính đường tròn đáy r là

A $S_{xq} = \pi rl$. **B** $S_{xq} = 2\pi rl$. **C** $S_{xq} = \pi r^2 h$. **D** $S_{xq} = 2\pi r^2 l$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình nón có đường sinh l và bán kính đường tròn đáy r là $S_{xq} = \pi rl$

Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho khối cầu tâm I bán kính R không đổi. Một khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r nội tiếp khối cầu. Tính chiều cao h theo bán kính R sao cho khối nón có thể tích lớn nhất.

A $h = \dfrac{R}{4}$. **B** $h = \dfrac{3R}{4}$. **C** $h = 4R$. **D** $h = \dfrac{4R}{3}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của đường tròn đáy của hình nón, khi đó $IO = h - R$.

Bán kính của hình nón là

$r = \sqrt{R^2 - (h-R)^2} = \sqrt{2Rh - h^2}$.

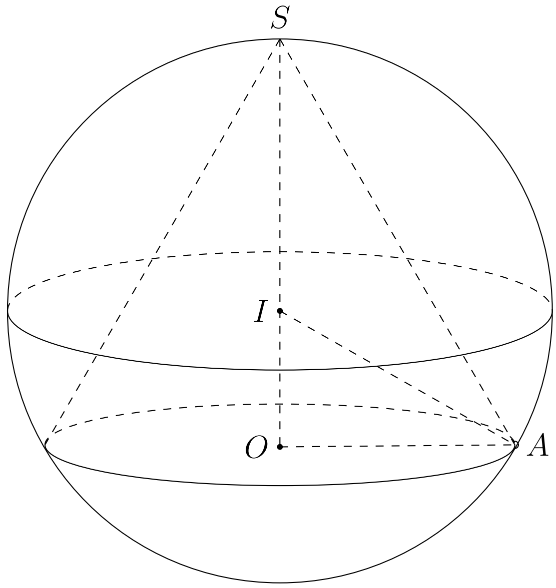
Thể tích khối nón

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(2Rh - h^2\right)\cdot h = \frac{1}{3}\pi(2Rh^2 - h^3)\cdot$$

Xét hàm $f(x) = 2Rx^2 - x^3$.

$\Rightarrow f'(x) = 4Rx - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{4R}{3} \end{array}\right.$

Do đó để thể tích khối nón lớn nhất thì $h = x = \dfrac{4R}{3}\cdot$



Chọn đáp án D □

Câu 40. Trong các dãy số sau, dãy số nào bị chặn?

A $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$. **B** $u_n = 2n + \sin n$. **C** $u_n = n^2$. **D** $u_n = n^3 - 1$.

Lời giải.

Ta xét $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1} = 2 - \dfrac{1}{n+1} < 2\ \forall n$ mặt khác $u_n = 2 - \dfrac{1}{n+1} > 2 - 1 = 1$.

Do đó $1 < u_n < 2$ nên dãy $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$ bị chặn.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Người ta cần xây một hồ chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\dfrac{500}{3}$ m^3. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây hồ là 500.000 đồng/m^2. Khi đó kích thước của hồ nước sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất là

A Chiều dài 20 m chiều rộng 10 m và chiều cao $\dfrac{5}{6}$ m.

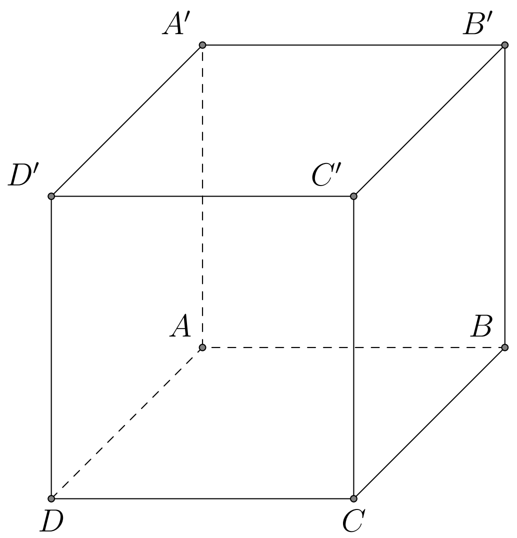
B Chiều dài 10 m chiều rộng 5 m và chiều cao $\dfrac{10}{3}$ m .

C Chiều dài 30 m chiều rộng 15 m và chiều cao $\dfrac{10}{27}$ m.

D Một đáp số khác.

Lời giải.

Giả sử chiều dài, rộng, chiều cao của hình lăng trụ lần lượt là x, y, z. Vì chiều dài gấp đôi chiều rộng nên $x = 2y$.
Khi đó thể tích khối hộp chữ nhật là



$$V = xyz = 2y^2z = \frac{500}{3} \Rightarrow z = \frac{250}{3y^2}.$$

Diện tích xung quanh và diện tích một mặt đáy của khối hộp là $S_{xq} = xy + 2yz + 2zx = 2y^2 + \frac{500}{y}$.
Xét hàm số $f(y) = 2y^2 + \frac{500}{y} \Rightarrow f'(y) = 4y - \frac{500}{y^2}$.
$\Rightarrow f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 5$.
Vậy để chi phí thấp nhất thì chiều dài 10 m chiều rộng 5 m và chiều cao $\frac{10}{3}$ m.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(-2;3;1)$ và $B(2;1;3)$. Điểm nào dưới đây là trung điểm của đoạn AB?

A $M(0;2;2)$. **B** $N(2;2;2)$. **C** $P(0;2;0)$. **D** $Q(2;2;0)$.

Lời giải.
Trung điểm AB là $M(0;2;2)$.
Chọn đáp án A □

Câu 43. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)$ (m/s) có gia tốc là $v'(t) = \frac{3}{t+1}$ (m/s^2). Vận tốc ban đầu của vật là 6 m/s. Tính vận tốc của vật sau 10 giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

A 11 m/s. **B** 12 m/s. **C** 13 m/s. **D** 14 m/s.

Lời giải.
Vận tốc $v = \int v'(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{3}{t+1}\,\mathrm{d}t = 3\ln|t+1| + C$.
Vì $v(0) = 6 \Rightarrow C = 6 \Rightarrow v(t) = 3\ln|t+1| + 6 \Rightarrow v(10) = 3\ln 11 + 6 = 13$ m/s.
Chọn đáp án C □

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$ cho $(\alpha)\colon y + 2z = 0$ và hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}$; $d_2\colon \begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 4 + 2t' \\ z = 4 \end{cases}$. Đường thẳng Δ nằm trong (α) và cắt hai đường thẳng d_1; d_2 có phương trình là

A $\frac{x-1}{7} = \frac{y}{-8} = \frac{z}{-4}$. **B** $\frac{x+1}{7} = \frac{y}{-8} = \frac{z}{4}$.

C $\frac{x-1}{7} = \frac{y}{-8} = \frac{z}{4}$. **D** $\frac{x-1}{7} = \frac{y}{8} = \frac{z}{4}$.

Lời giải.

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đường thẳng d_1, d_2 và mặt phẳng (α).

Khi đó $A(1-t;t;4t)$ và $B(2-t';4+2t';4)$ thay vào phương trình (α) ta được $\begin{cases} t=0 \\ t'=-6 \end{cases}$.

$\Rightarrow A(1;0;0)$ và $B(8;-8;4) \Rightarrow$ phương trình đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y}{-8}=\dfrac{z}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$. Trong các mặt phẳng dưới đây mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng d?

A $4x-2y+2z+4=0$. B $4x+2y+2z+4=0$.

C $2x-2y+2z+4=0$. D $4x-2y-2z-4=0$.

Lời giải.

Đường thẳng d có vec-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;1)$.

Xét mặt phẳng $4x-2y+2z+4=0$ có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;-2;2) \Rightarrow \vec{n}=2\vec{v}$.

$\Rightarrow d$ vuông góc với mặt phẳng có phương trình $4x-2y+2z+4=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(4;-3;7)$ và $B(2;1;3)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

A $x+2y+2z+15=0$. B $x-2y+2z+15=0$.

C $x+2y+2z-15=0$. **D** $x-2y+2z-15=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-2;4;-4)$ trung điểm AB là $M(3;-1;5)$.

Mặt phẳng trung trực của AB là $-2(x-3)+4(y+1)-4(z-5)=0 \Leftrightarrow x-2y+2z-15=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Trong các phương trình sau, phương trình nào không phải là phương trình mặt cầu?

A $x^2+y^2+z^2+2x+4y-4z-21=0$. B $2x^2+2y^2+2z^2+4x+4y-8z-11=0$.

C $x^2+y^2+z^2=1$. **D** $x^2+y^2+z^2+2x+2y-4z+11=0$.

Lời giải.

Phương trình $x^2+y^2+z^2+2x+2y-4z+11=0$ có $(-1)^2+(-1)^2+(2)^2-11=-5<0$ không phải là phương trình của mặt cầu.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Giải bất phương trình $2\log_3(4x-3)+\log_{\frac{1}{9}}(2x+3)^2 \le 2$.

A $\left(\dfrac{3}{4};+\infty\right)$. **B** $\left(\dfrac{3}{4};3\right]$. C vô nghiệm. D $\left[-\dfrac{3}{8};3\right]$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge \dfrac{3}{4}$.

Với điều kiện trên bất phương trình

$$\begin{aligned} & 2\log_3(4x-3)+\log_{\frac{1}{9}}(2x+3)^2 \le 2 \\ \Leftrightarrow\ & \log_3(4x-3)^2-\log_3(2x+3) \le 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \log_3 \frac{(4x-3)^2}{2x+3} \leq 2\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{16x^2-24x+9}{2x+3} \leq 9\\
&\Leftrightarrow \quad 16x^2-24x+9 \leq 18x+27\\
&\Leftrightarrow \quad 16x^2-42x-18 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{8} \leq x \leq 3.
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghệm của bất phương trình là $\left(\frac{3}{4};3\right]$.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Hai xạ thủ cùng bắn mỗi người bắn một viên đạn vào bia một cách độc lập với nhau. Xác suất bắn trúng bia của hai xạ thủ lần lượt là $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{3}$. Tính xác suất của biến cố có ít nhất một xạ thủ không bắn trúng bia.

A $\frac{1}{2}$. B $\frac{1}{3}$. C $\frac{2}{3}$. D $\frac{5}{6}$.

Lời giải.

Gọi A: "Xạ thủ thứ nhất bắn trúng bia".

B: "Xạ thủ thứ hai bắn trúng bia".

Xác suất để cả hai xạ thủ đều bắn trúng bia là $\mathrm{P}(AB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Xác suất để ít nhất một xạ thủ không bắn trúng bia là $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho số phức $(1-i)z = 4+2i$. Tìm mô-đun của số phức $w = z+3$.

A 5. B $\sqrt{10}$. C 25. D $\sqrt{7}$.

Lời giải.

Đặt $z = a+bi$ với a, $b \in \mathbb{R}$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
& \quad (1-i)z = 4+2i \Leftrightarrow (1-i)(a+bi) = 4+2i\\
&\Leftrightarrow \quad a+b+(b-a)i = 4+2i\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+b=4\\ -a+b=2 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=1\\ b=3 \end{cases} \Rightarrow z = 1+3i \Rightarrow \omega = 4+3i\\
&\Rightarrow \quad |\omega| = 5.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

—— **HẾT** ——

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. B	3. D	4. A	5. B	6. A	7. C	8. A	9. C	10. D
11. D	12. D	13. B	14. C	15. B	16. D	17. C	18. C	19. D	20. D
21. B	22. B	23. B	24. D	25. C	26. C	27. C	28. A	29. A	30. A
31. A	32. B	33. C	34. B	35. B	36. A	37. A	38. A	39. D	40. A
41. B	42. A	43. C	44. C	45. A	46. D	47. D	48. B	49. D	50. A

145 KỲ KIỂM TRA KHẢO SÁT LỚP 12 SỞ GD & ĐT HÀ NỘI, NĂM 2017 - 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, các chữ số khác 0 và đôi một khác nhau?

(A) $5!$. (B) C_9^5. (C) A_9^5. (D) 9^5.

Lời giải.

Lấy một số tự nhiên số có 5 chữ số đôi một khác nhau và các chữ số khác 0 là một chỉnh hợp chập 5 từ 9 phần tử. Nên chọn A_9^5.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Tìm họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2\sqrt{4+x^3}$.

(A) $2\sqrt{4+x^3}+C$. (B) $\dfrac{2}{9}\sqrt{(4+x^3)^3}+C$. (C) $2\sqrt{(4+x^3)^3}+C$. (D) $\dfrac{1}{9}\sqrt{(4+x^3)^3}+C$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{4+x^3} \Rightarrow t^2 = 4+x^3 \Rightarrow 2t\mathrm{d}t = 3x^2\mathrm{d}x \Rightarrow x^2\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}t\mathrm{d}t$.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{2}{3}t^2\mathrm{d}t = \frac{2}{9}t^3 + C = \frac{2}{9}\sqrt{(4+x^3)^3}+C$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Trong không gian Oxy, cho hai điểm $A(1;2;-3)$ và $B(2;0;-1)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hai điểm A và B nằm khác phía so với mặt phẳng $x+2y+mz+1=0$.

(A) $m\in[2;3]$. (B) $m\in(2;3)$.

(C) $m\in(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$. (D) $m\in(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$.

Lời giải.

Thay tọa độ điểm A và phương trình mặt phẳng ta được biểu thức $-3m+6$.

Thay tọa độ điểm B vào phương trình mặt phẳng ta được biểu thức $-m+3$.

Để A và B nằm khác phía so với mặt phẳng thì tích của hai biểu thức trên phải bé hơn 0.

Ta được $(-3m+6)(-m+3)<0 \Leftrightarrow 2<m<3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Hệ số của x^3 trong khai triển $(x-2)^8$ bằng

(A) $\mathrm{C}_8^3\cdot 2^3$. (B) $-\mathrm{C}_8^3\cdot 2^3$. (C) $-\mathrm{C}_8^5\cdot 2^5$. (D) $\mathrm{C}_8^5\cdot 2^5$.

Lời giải.

Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển $(x-2)^8$ là $\mathrm{T}_{k+1} = \mathrm{C}_8^k x^{8-k}(-2)^k$. Hệ số của x^3 ứng với $3=8-k\Rightarrow k=5$. Thay $k=5$ vào số hạng thứ T_{k+1} ta được hệ số của x^3 là $-\mathrm{C}_8^5\cdot 2^5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

(A) $\ln x>0\Leftrightarrow x>1$. (B) $\log a>\log b\Leftrightarrow a>b>0$.

(C) $\log a<\log b\Leftrightarrow 0<a<b$. (D) $\ln x<1\Leftrightarrow 0<x<1$.

Lời giải.

Mệnh đề $\ln x<1\Leftrightarrow 0<x<1$ sai vì cơ số e là cơ số lớn hơn 1 nên $\ln x<1\Leftrightarrow x<\mathrm{e}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z-3=0$ có bán kính bằng

(A) 9. (B) 3. (C) $\sqrt{3}$. (D) $3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $a=-1$, $b=2$, $c=1$, $d=-3$ nên bán kính là $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Tính tích phân $\displaystyle\int\limits_0^{100} x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

(A) $\dfrac{1}{4}\left(199\mathrm{e}^{200}+1\right)$. (B) $\dfrac{1}{4}\left(199\mathrm{e}^{200}-1\right)$. (C) $\dfrac{1}{2}\left(199\mathrm{e}^{200}+1\right)$. (D) $\dfrac{1}{2}\left(199\mathrm{e}^{200}-1\right)$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\end{cases}$

$$\Rightarrow I = x\cdot\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\Big|_0^{100} - \int\limits_0^{100}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = 50\mathrm{e}^{200}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{200}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\left(199\mathrm{e}^{200}+1\right).$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Đồ thị hàm số $y=15x^4-3x^2-2018$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

(A) 1 điểm. (B) 3 điểm. (C) 4 điểm. (D) 2 điểm.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $15x^4-3x^2-2018=0$ (1).

Đặt $t=x^2\geq 0$ phương trình trở thành $15t^2-3t-2018=0$ (2).

Ta có $P=-\dfrac{2018}{15}<0$ suy ra phương trình (2) có hai nghiệm trái dấu nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Vậy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang?

(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 0.

Lời giải.

Ta có tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(-\infty;0)\cup(0;1]$.

Xét $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\dfrac{1}{2}$. Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Xét $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}=0$. Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=0$. Vậy đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$.

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) 1. (C) $\dfrac{1}{4}$. (D) $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Phương trình $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=1$ có nghiệm là

A $x=\dfrac{x}{3}+k\pi$. B $x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$. C $x=\dfrac{5\pi}{6}+k\pi$. D $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$.

Lời giải.

$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=1\Leftrightarrow x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2\log_2(2x-2)+\log_2(x-3)^2=2$ trên $\mathbb{R}$. Tổng các phần tử của S bằng

A 8. B $4+\sqrt{2}$. C $8+\sqrt{2}$. D $6+\sqrt{2}$.

Lời giải.

TXĐ: $\begin{cases}x>1\\x\neq3\end{cases}$.

Phương trình đã cho tương đương:

$\log_2 2+\log_2(x-1)+\log_2|x-3|=1\Leftrightarrow\log_2(x-1)+\log_2|x-3|=0\Leftrightarrow\log_2[(x-1)\cdot|x-3|]=0\Leftrightarrow(x-1)\cdot|x-3|=1(1)$.

Với $x>3$ phương trình (1) trở thành $(x-1)\cdot(x-3)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2+\sqrt{2}\\x=2-\sqrt{2}\text{ (loại)}\end{array}\right.$.

Với $1<x<3$ phương trình (1) trở thành $(x-1)\cdot(3-x)=1\Leftrightarrow x=2$.

Vậy $S=4+\sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Cho các số a,b,c,d thỏa mãn $0<a<b<1<c<d$. Số lớn nhất trong $\log_a b,\log_b c,\log_c d,\log_d a$ là

A $\log_c d$. B $\log_d a$. C $\log_a b$. D $\log_b c$.

Lời giải.

Ta có: $0<a<b<1<c<d$ nên $\log_d a<0,\log_b c<0$ và $0<\log_a b<1<\log_c d$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Cho khối trụ có bán kính hình tròn đáy bằng r và chiều cao bằng h. Hỏi nếu tăng chiều cao lên 2 lần và tăng bán kính đáy lên 3 lần thì thể tích của khối trụ sẽ tăng lên bao nhiêu lần?

A 18 lần. B 12 lần. C 6 lần. D 36 lần.

Lời giải.

Ta có $V_{\text{trụ}}=B\cdot h=\pi\cdot r^2\cdot h$.

Nếu tăng chiều cao lên 2 lần và tăng bán kính đáy lên 3 lần thì thể tích của khối trụ mới $V'_{\text{trụ}}=B'\cdot h'=\pi\cdot(3r)^2\cdot(2h)=18\cdot B\cdot h$.

Vậy $\dfrac{V'_{\text{trụ}}}{V_{\text{trụ}}}=18$.

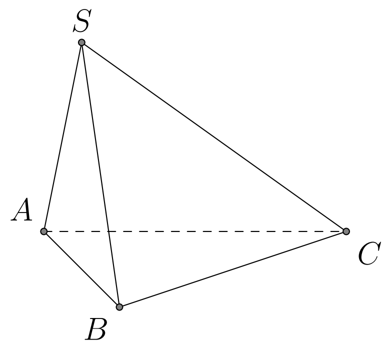
Chọn đáp án A □

Câu 15. Hình tứ diện có bao nhiêu cạnh?

(A) 5 cạnh. (B) 3 cạnh. (C) 4 cạnh. (D) 6 cạnh.

Lời giải.

Hình minh họa

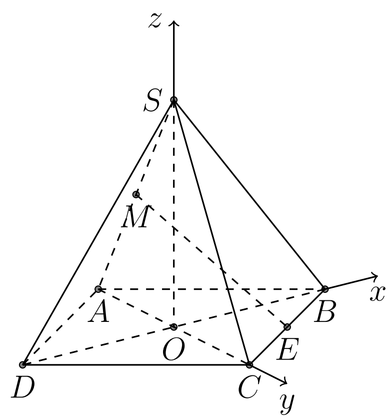


Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi E, M lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và SA, α là góc tạo bởi đường thẳng EM và mặt phẳng (SBD). Tính $\tan\alpha$.

(A) 1. (B) 2. (C) $\sqrt{2}$. (D) $\sqrt{3}$.

Lời giải.



Không mất tính tổng quát, giả sử các cạnh của hình chóp bằng $2\sqrt{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Khi đó: $E(1;1;0)$, $M(0;-1;1)$, $\overrightarrow{ME} = (1;2;-1)$ và $\overrightarrow{OC} = (0;2;0)$ là véc-tơ pháp tuyến của (SBD).

Do đó,

$$\sin\alpha = \sin\left(EM,(SBD)\right) = \left|\cos\left(\overrightarrow{EM},\overrightarrow{OC}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{OC}\right|}{\left|\overrightarrow{EM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OC}\right|} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Vậy $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Cho hàm số $y = \log_5 x$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) Đồ thị hàm số nằm bên phải trục tung.

(B) Tập xác định của hàm số là $(0;+\infty)$.

(C) Hàm số nghịch biến trên tập xác định.

(D) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là trục tung.

Lời giải.

Vì hàm số $y = \log_5 x$ có cơ số $a = 5 > 1$ nên nó đồng biến trên tập xác định.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \dfrac{x}{4}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$ quay quanh trục Ox bằng

(A) $\dfrac{21}{16}$. (B) $\dfrac{21\pi}{16}$. (C) $\dfrac{15}{16}$. (D) $\dfrac{15\pi}{8}$.

Lời giải.

Thể tích cần tính bằng $V = \pi \int\limits_1^4 \left(\frac{x}{4}\right)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{21\pi}{16}$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}(x^3 - 4x)$. Hàm số $F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Lời giải.

Ta có $F'(x) = f(x) = \mathrm{e}^{x^2}(x^3 - 4x)$.

Khi đó, $F'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$	$+\infty$	↘	CT	↗	CĐ	↘	CT	↗	$+\infty$

Suy ra hàm số $F(x)$ có 3 điểm cực trị.

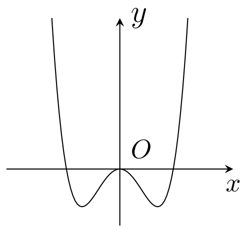
Chọn đáp án C □

Câu 20.

Biết hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số được cho dưới đây, hỏi đó là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = x^4 - 2x^2$. B. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

C. $y = -x^4 + 2x^2$. D. $y = x^4 + 2x^2$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy: đồ thị đi qua gốc tọa độ, có 3 điểm cực trị, đồng thời có hệ số a dương. Chỉ có hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị thỏa mãn những ràng buộc này.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 + mx^2$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

A. $m \geq 0$. B. $m > 0$. C. $m = 0$. D. $m \leq 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 2mx$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 2mx = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x^2 + m = 0. \end{array}\right.$$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ khi và chỉ khi $y'=0$ có nghiệm duy nhất $x=0 \Leftrightarrow$ phương trình $2x^2+m=0$ có nghiệm duy nhất $x=0$ hoặc phương trình $2x^2+m=0$ vô nghiệm. Ta xét 2 trường hợp:

Phương trình $2x^2+m=0$ có nghiệm duy nhất $x=0 \Leftrightarrow m=0$.

Phương trình $2x^2+m=0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow m>0$.

Vậy $m \geq 0$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Thể tích V của khối chóp có diện tích đáy bằng S và chiều cao bằng h là

A $V=\dfrac{1}{3}Sh$. B $V=3Sh$. C $V=Sh$. D $V=\dfrac{1}{2}Sh$.

Lời giải.

Theo lý thuyết thể tích của khối chóp có diện tích đáy bằng S và chiều cao bằng h là $V=\dfrac{1}{3}Sh$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Một lớp có 40 học sinh, trong đó có 4 học sinh tên Anh. Trong một lần kiểm tra bài cũ, thầy giáo gọi ngẫu nhiên hai học sinh trong lớp lên bảng. Xác suất để hai học sinh tên Anh lên bảng bằng

A $\dfrac{1}{20}$. B $\dfrac{1}{10}$. C $\dfrac{1}{130}$. D $\dfrac{1}{75}$.

Lời giải.

Số cách chọn 2 học sinh trong 4 học sinh tên Anh là $\mathrm{C}_4^2=6$.

Số cách chọn 2 học sinh trong 40 học sinh của lớp là $\mathrm{C}_{40}^2=780$.

Xác suất để hai học sinh tên Anh lên bảng là $\dfrac{6}{780}=\dfrac{1}{130}$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Số nghiệm chung của hai phương trình $4\cos^2 x-3=0$ và $2\sin x+1=0$ trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$ bằng

A 4. B 2. C 3. D 1.

Lời giải.

$4\cos^2 x-3=0 \Leftrightarrow \cos 2x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi (k\in\mathbb{Z})$. Do $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$ nên phương trình có bốn nghiệm $x=-\dfrac{\pi}{6}, x=\dfrac{\pi}{6}, x=\dfrac{5\pi}{6}, x=\dfrac{7\pi}{6}$ (1).

$2\sin x+1=0 \Leftrightarrow \sin x=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$. Do $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$ nên phương trình có hai nghiệm $x=-\dfrac{\pi}{6}, x=\dfrac{7\pi}{6}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$ phương trình $4\cos^2 x-3=0$ và $2\sin x+1=0$ có hai nghiệm chung là $x=-\dfrac{\pi}{6}, x=\dfrac{7\pi}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1;2;-1)$ và cắt mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-1=0$ theo một đường tròn bán kính bằng $\sqrt{8}$ có phương trình

(A) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$.
(B) $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$.
(C) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.
(D) $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$.

Lời giải.

Ta có $d(I,(P))=\dfrac{|2\cdot 1-2+2\cdot(-1)-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=1$. Bán kính mặt cầu $R=\sqrt{1^2+(\sqrt{8})^2}=3$. Do đó, phương trình mặt cầu tâm $I(1;2-1)$, bán kính $R=3$ là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Đạo hàm của hàm số $y=\ln\left(1-x^2\right)$ là

(A) $\dfrac{1}{x^2-1}$.
(B) $\dfrac{x}{1-x^2}$.
(C) $\dfrac{-2x}{x^2-1}$.
(D) $\dfrac{2x}{x^2-1}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{1}{1-x^2}\cdot\left(1-x^2\right)'=\dfrac{-2x}{x^2-1}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Với mọi số thực dương a, b, x, y và a, b khác 1, mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$.
(B) $\log_b a\cdot\log_a x=\log_b x$.
(C) $\log_a\dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$.
(D) $\log_a\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\log_a x}$.

Lời giải.

Ta có $\log_a\dfrac{1}{x}=\log_a x^{-1}=-\log_a x\neq\dfrac{1}{\log_a x}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-5x+7\right)>0$ là

(A) $(2;3)$.
(B) $(3;+\infty)$.
(C) $(-\infty;2)$.
(D) $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với $\begin{cases}x^2-5x+7>0 & \text{(luôn đúng)}\\ x^2-5x+7<1\end{cases}\Leftrightarrow x\in(2;3)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;-2;1)$, $B(1;-1;3)$. Tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là

(A) $(-1;1;2)$.
(B) $(-3;3;-4)$.
(C) $(3;-3;4)$.
(D) $(1;-1;-2)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right)$ nên $\overrightarrow{AB}=(-1;1;2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Cho tứ diện đều $ABCD$ có M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

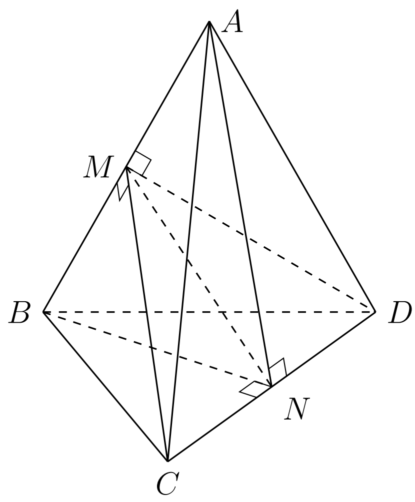
(A) $AB\perp CD$.
(B) $MN\perp AB$.
(C) $MN\perp BD$.
(D) $MN\perp CD$.

Lời giải.

Ta có $\triangle ACD$ và $\triangle BCD$ đều nên $CD \perp AN$, $CD \perp BN$. Suy ra $CD \perp (ABN)$, từ đó ta được $CD \perp AB$ và $CD \perp MN$.

Tương tự cũng có $AB \perp (MCD)$ nên $AB \perp MN$.

Giả sử $MN \perp BD$ mà đã có $MN \perp CD$ và $MN \perp AB$, nên $MN \perp (BCD)$ và $MN \perp (ABD)$. Suy ra $(BCD) \parallel (ABD)$ hoặc $(BCD) \equiv (ABD)$ (vô lý).



Chọn đáp án C □

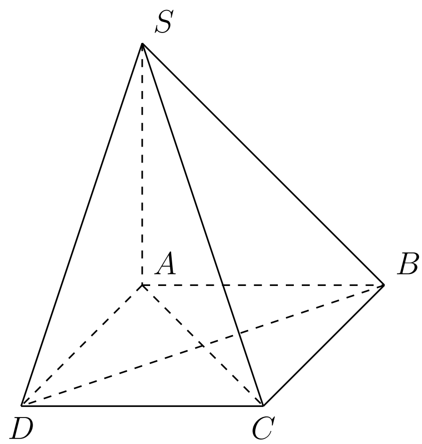
Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với đáy. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A $CD \perp (SAD)$. **B** $AC \perp (SBD)$. **C** $BD \perp (SAC)$. **D** $BC \perp (SAB)$.

Lời giải.

- $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.
- $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.
- $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Do đó $AC \perp (SBD)$ là sai.



Chọn đáp án B □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$. Mặt phẳng (P) qua M và song song với hai đường thẳng SC, BD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A (P) không cắt hình chóp.

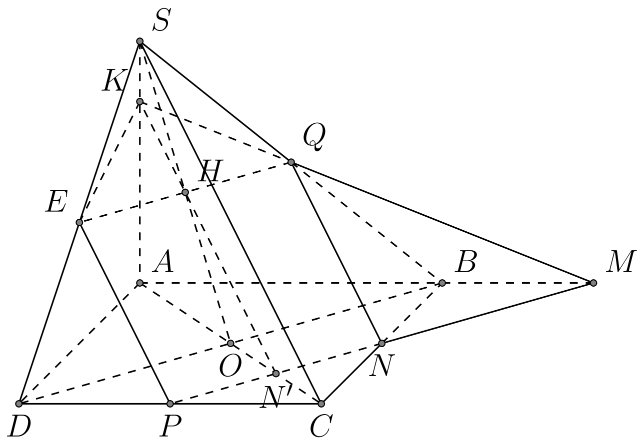
B (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tứ giác.

C (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tam giác.

D (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một ngũ giác.

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB} \Rightarrow M$ nằm ngoài đoạn AB sao cho $MA = 3MB$.
Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kẻ $MP \parallel BD$ cắt DC tại P. Gọi $N = BC \cap MP$.
Trong mặt phẳng (SCD) kẻ $PE \parallel SC$ cắt SD tại E.
Trong mặt phẳng (SBC) kẻ $NQ \parallel SC$ cắt SB tại Q.
Gọi $N' = PN \cap OC$; $O = AC \cap BD$; và $H = SO \cap EQ$; $K = SA \cap N'H$. Khi đó mặt phẳng (P) cắt $S.ABCD$ theo thiết diện là ngũ giác $PNQKE$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = \log(x^3)$. (B) $y = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-x}$. (C) $y = \log_3 x^2$. **D** $y = \left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}\right)^x$.

Lời giải.

- $y = \log(x^3)$ đồng biến vì cơ số $a = 10 > 1$.
- $y = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-x} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^x$ đồng biến vì cơ số $a = \dfrac{5}{2} > 1$.
- $y = \log_3 x^2$ đồng biến vì cơ số $a = 3 > 1$.
- $y = \left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}\right)^x$ nghịch biến vì cơ số $a = \dfrac{\mathrm{e}}{4} < 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 34. Cho (u_n) là cấp số cộng biết $u_3 + u_{13} = 80$. Tổng 15 số hạng đầu của cấp số cộng đó bằng

(A) 800. (B) 630. (C) 570. **D** 600.

Lời giải.

Vì $3 + 13 = 16 = 1 + 15 \Rightarrow u_3 + u_{13} = u_1 + u_{15} = 80 \Rightarrow S_{15} = \dfrac{15(u_1 + u_{15})}{2} = 600$.

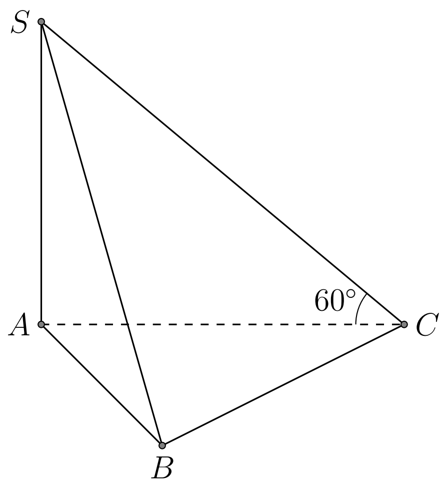
Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, đường thẳng SC tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) $\dfrac{a^3}{8}$. (B) $\dfrac{3a^3}{4}$. (C) $\dfrac{a^3}{2}$. **D** $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.

Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow$ góc giữa SC và mặt phẳng đáy là góc giữa SC và đường thẳng AC bằng góc $\widehat{SCA} = 60^\circ$.
Xét $\triangle SAC$ có $SA = AC \cdot \tan \widehat{SCA} = a \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.
$\Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{a^3}{4}$.



Chọn đáp án D □

Câu 36. Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = x^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên $(0; +\infty)$.
B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
D. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Vì $y \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$ nên $y = f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

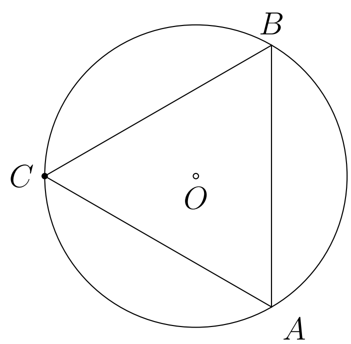
Câu 37. Cho khối trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$, $OO' = 4R$. Trên đường tròn (O) lấy hai điểm A, B sao cho $AB = R\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua A, B cắt đoạn OO' và tạo với đáy góc 60°. (P) cắt khối trụ theo thiết diện là một phần của Elip. Diện tích thiết diện đó bằng

A. $\left(\dfrac{4\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) R^2$. B. $\left(\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) R^2$. C. $\left(\dfrac{4\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) R^2$. D. $\left(\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) R^2$.

Lời giải.

Diện tích viên phân nhỏ (dây cung AB) là

$$S_1 = \frac{S_{(O)} - S_{ABC}}{3} = \frac{\pi R^2 - \dfrac{(R\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}}{3} = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) R^2.$$



Diện tích viên phân lớn (dây cung AB) là

$$S_2 = S_{(O)} - S_1 = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) R^2.$$

Do viên phân lớn là hình chiếu của hình cần tìm nên
Diện tích hình cần tìm là

$$S = \frac{S_2}{\cos 60^\circ} = \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) R^2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4;4]$ biết $\int\limits_{-2}^{0} f(-x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{1}^{2} f(-2x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int\limits_{0}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$

A $I = 10$. **B** $I = -6$. **C** $I = 6$. **D** $I = -10$.

Lời giải.

Với giả thiết $\int\limits_{-2}^{0} f(-x)\,\mathrm{d}x = 2$, ta đặt $t = -x$. Khi đó $2 = \int\limits_{-2}^{0} f(-x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{2}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Mặt khác $\int\limits_{1}^{2} f(-2x)\,\mathrm{d}x = 4$, ta đặt $t = 2x$. Khi đó cùng với giả thiết $f(x)$ là hàm số lẻ ta có

$$4 = \int\limits_{1}^{2} f(-2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{2}^{4} f(-t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int\limits_{2}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int\limits_{2}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t = -8.$$

Vậy $\int\limits_{0}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = 2 + (-8) = -6$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $(1 + x + x^2 + x^3)^{10}$

A 252. **B** 582. **C** 1902. **D** 7752.

Lời giải.

Ta có $(1 + x + x^2 + x^3)^{10} = [(1 + x) + x^2(1 + x)]^{10} = (1 + x)^{10}(1 + x^2)^{10}$.

Khai triển

$(1 + x)^{10} = \mathrm{C}_{10}^0 + \mathrm{C}_{10}^1 x + \mathrm{C}_{10}^2 x^2 + \mathrm{C}_{10}^3 x^3 + \mathrm{C}_{10}^4 x^4 + \mathrm{C}_{10}^5 x^5 + \cdots + \mathrm{C}_{10}^{10} x^{10}$.

$(1 + x^2)^{10} = \mathrm{C}_{10}^0 + \mathrm{C}_{10}^1 x^2 + \mathrm{C}_{10}^2 x^4 + \mathrm{C}_{10}^3 x^6 + \cdots + \mathrm{C}_{10}^{10} x^{20}$.

Vậy hệ số của hạng tử có chứa x^5 là $\mathrm{C}_{10}^0\mathrm{C}_{10}^5 + \mathrm{C}_{10}^1\mathrm{C}_{10}^3 + \mathrm{C}_{10}^2\mathrm{C}_{10}^1 = 1902$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C). Hỏi có bao nhiêu điểm trên đường thẳng $d\colon y = 9x - 14$ sao cho từ đó kẻ được hai tiếp tuyến đến (C)?

A 4 điểm. **B** 2 điểm. **C** 3 điểm. **D** 1 điểm.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm thuộc đồ thị (C).

Khi đó tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình là $\Delta\colon y = (3x_0^2 - 3)(x - x_0) + (x_0^3 - 3x_0 + 2)$.

Lấy điểm $A(a; 9a - 14) \in (d)$.

Để có hai đường tiếp tuyến Δ đi qua A thì phương trình ẩn x_0 sau có hai nghiệm phân biệt

$$9a - 14 = (3x_0^2 - 3)(a - x_0) + (x_0^3 - 3x_0 + 2)\ (1)$$

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow 9a - 14 = 3ax_0^2 - 3a - 3x_0^3 + 3x_0 + x_0^3 - 3x_0 + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^3 - 16 = 3ax_0^2 - 12a$$
$$\Leftrightarrow 9a - 14 = 3ax_0^2 - 3a - 3x_0^3 + 3x_0 + x_0^3 - 3x_0 + 2$$
$$\Leftrightarrow 2x_0^3 - 16 = 3ax_0^2 - 12a$$
$$\Leftrightarrow 2(x_0 - 2)(x_0^2 + 2x_0 + 4) = 3a(x_0 - 2)(x_0 + 2)$$
$$\Leftrightarrow (x_0 - 2)(2x_0^2 + 4x_0 - 3ax_0 + 8 - 6a) = 0\,(2)$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ 2x_0^2 + 4x_0 - 3ax_0 + 8 - 6a = 0\,(3) \end{array}\right..$$

Để (2) có hai nghiệm thì (3) có đúng một nghiệm khác 2 hoặc hai nghiệm phân biệt với một nghiệm là 2.
Trường hợp (3) có một nghiệm là 2 thì ta có $8 + 8 - 6a + 8 - 6a = 0 \Leftrightarrow a = 2$.
Để (3) có đúng một nghiệm thì $\Delta_3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -4 \\ a = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$.
Vậy có 3 giá trị của a. Nghĩa là có ba điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C □

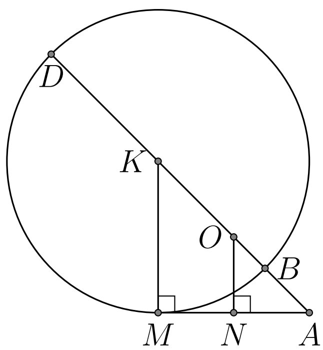
Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm $I(2;1;1)$ bán kính bằng 4 và mặt cầu (S_2) có tâm $J(2;1;5)$ bán kính 2. (P) là mặt phẳng thay đổi tiếp xúc với hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$. Đặt M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ điểm O đến (P). Giá trị $M + m$ bằng

A. $8\sqrt{3}$. B. 9. C. 8. D. $\sqrt{15}$.

Lời giải.
Mặt phẳng (P) cắt đường thẳng IJ tại điểm S và J là trung điểm của SI suy ra $S(2;1;9)$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với hai mặt cầu tại E, F, dễ thấy góc giữa EF và IJ bằng $30°$. Gọi M là giao điểm của EF và mặt phẳng (Oxy), (P) cắt mặt phẳng (Oxy) theo giao tuyến Δ. Khi (P) thay đổi, điểm M tạo nên đường tròn (C) tâm $K(2;1;0)$, bán kính $R = 9\tan 30° = 3\sqrt{3}$ và Δ là tiếp tuyến của (C).
Gọi N là hình chiếu vuông góc của O trên Δ. Ta có

$$d(O,(P)) = \frac{ON}{R} \cdot d(K,(P)) = \frac{ON\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra $d(O,(P))$ lớn nhất, nhỏ nhất khi ON lớn nhất, nhỏ nhất tương ứng.



Dễ thấy ON lớn nhất bằng OD, ON nhỏ nhất bằng OB. Vậy $M+m=\dfrac{2R\sqrt{3}}{2}=9$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Có bao nhiêu số tự nhiên có tám chữ số trong đó có ba chữ số 0, không có hai số 0 nào đứng cạnh nhau và các chữ số khác nhau chỉ xuất hiện nhiều nhất một lần?

A 151200. **B** 84600. **C** 786240. **D** 907200.

Lời giải.

Có C_5^3 cách sắp xếp ba chữ số 0. Sau khi sắp xếp ba chữ số 0, có A_9^5 cách chọn các chữ số còn lại. Vậy có $\mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{A}_9^5 = 151200$ số.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2018 của tham số m để phương trình $\log_6(2018x+m) = \log_4(1009x)$ có nghiệm là

A 2019. **B** 2018. **C** 2017. **D** 2020.

Lời giải.

Đặt $z=\log_6(2018x+m)=\log_4(1009x)$, ta có $f(z)=6^z-2\cdot 4^z=m$. $f'(z)=6^z\ln 6-2\cdot 4^z\cdot\ln 4$, $f'(z)=0 \Leftrightarrow z=\log_{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{\ln 16}{\ln 6}\right)=z_0$, $f(z_0)\approx -2,01$.

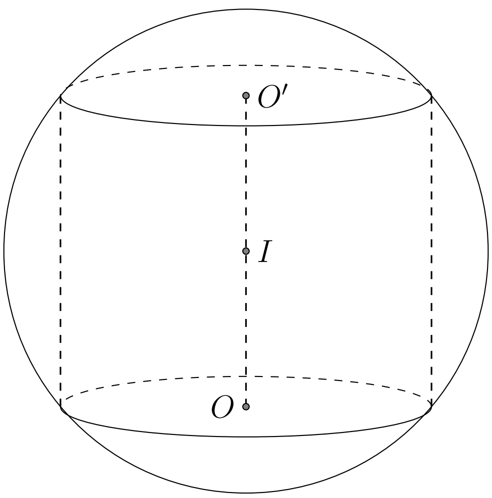
Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(z)$

z	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(z)$		$-$	0	$+$	
$f(z)$	0	↘	$f(z_0)$	↗	$+\infty$

Phương trình có nghiệm khi $m\geq f(z_0)$ suy ra $m\in\{-2;-1;0;\cdots;2017\}$

Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho khối cầu (S) tâm I, bán kính R không đổi. Một khối trụ thay đổi có chiều cao h và bán kính đáy r nội tiếp khối cầu. Tính chiều cao h theo R sao cho thể tích của khối trụ lớn nhất.



Ⓐ $h = R\sqrt{2}$. Ⓑ $h = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. Ⓒ $h = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. **D** $h = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Thể tích V của khối trụ là $V = \pi h r^2 = \pi h\left(R^2 - \dfrac{h^2}{4}\right)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(h) = -\dfrac{h^3}{4} + hR^2$ $(0 < h < 2R)$.

h	0		$\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$		$2R$
$f'(h)$		$+$	0	$-$	
$f(h)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{4R^3}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $h = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 45. $\lim\limits_{x\to 2^{2018}} \dfrac{x^2 - 4^{2018}}{x - 2^{2018}}$ bằng

A 2^{2019}. Ⓑ $+\infty$. Ⓒ 2. Ⓓ 2^{2018}.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 2^{2018}} \dfrac{x^2 - 4^{2018}}{x - 2^{2018}} = \lim\limits_{x\to 2^{2018}} \left(x + 2^{2018}\right) = 2^{2019}$.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Giá trị của tổng $4 + 44 + 444 + \cdots + 44\ldots4$ (tổng có 2018 số hạng) bằng

Ⓐ $\dfrac{40}{9}\left(10^{2018} - 1\right) + 2018$. Ⓑ $\dfrac{4}{9}\left(10^{2018} - 1\right)$.

Ⓒ $\dfrac{4}{9}\left(\dfrac{10^{2019} - 10}{9} + 2018\right)$. **D** $\dfrac{4}{9}\left(\dfrac{10^{2019} - 10}{9} - 2018\right)$.

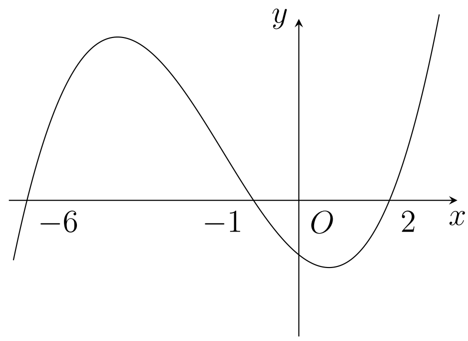
Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
4 + 44 + 444 + \cdots + 44\ldots4 &= \frac{4}{9}\left(9 + 99 + \cdots + \underbrace{99\ldots9}_{\text{2018 chữ số 9}}\right)\\
&= \frac{4}{9}\left[(10 - 1) + \left(10^2 - 1\right) + \cdots + \left(10^{2018} - 1\right)\right]\\
&= \frac{4}{9}\left(10 \cdot \frac{10^{2018} - 1}{9} - 2018\right)\\
&= \frac{4}{9}\left(\frac{10^{2019} - 10}{9} - 2018\right).
\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y = f\left(3 - x^2\right)$ đồng biến trên khoảng



A $(2;3)$. **B** $(-2;-1)$. **C** $(0;1)$. **D** $(-1;0)$.

Lời giải.

Ta có $\left[f\left(3-x^2\right)\right]' = f'\left(3-x^2\right)(-2x)$. Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có

$$\left[f\left(3-x^2\right)\right]' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left(3-x^2\right)=0 \\ x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-x^2=-6 \\ 3-x^2=-1 \\ 3-x^2=2 \\ x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 3 \\ x=\pm 2 \\ x=\pm 1 \\ x=0. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số $y=3-x^2$

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$3-x^2$	$-\infty$	-6	-1	2	3	2	-1	-6	$-\infty$

Từ đó, ta có bảng xét dấu của $\left[f\left(3-x^2\right)\right]'$

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		2		3		$+\infty$
$-2x$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	
$f'\left(3-x^2\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$\left[f\left(3-x^2\right)\right]'$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu, ta có hàm số $y=f\left(3-x^2\right)$ đồng biến trên $(-1;0)$.

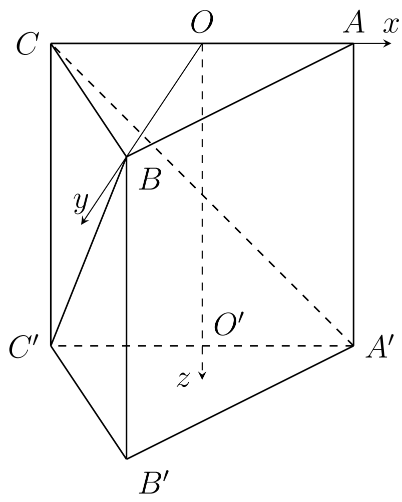
Chọn đáp án D □

Câu 48. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng cạnh đáy. Đường thẳng MN $(M \in A'C, N \in BC')$ là đường vuông góc chung của $A'C$ và BC'. Tỉ số $\dfrac{NB}{NC'}$ bằng

A $\dfrac{3}{2}$. **B** $\dfrac{2}{23}$. **C** 1. **D** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Cách 1.



Gọi O, O' lần lượt là trung điểm AC, $A'C'$. Ta chọn hệ trục tọa độ sao cho $O(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $B\left(0;\sqrt{3};0\right)$, $O'(0;0;2)$. Khi đó $C(-1;0;0)$, $A'(1;0;2)$, $C'(-1;0;2)$. Suy ra phương trình của hai đường thẳng $A'C$ và BC' lần lượt là

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 2+t \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = -1+t' \\ y = \sqrt{3}t' \\ z = 2-2t'. \end{cases}$$

Do đó ta có thể coi $M\,(t+1;0;t+2)$ và $N\left(t'-1;\sqrt{3}t';-2t'+2\right)$. Suy ra $\overrightarrow{NM}\left(t-t'+2;-\sqrt{3}t';t+2t'\right)$. Do MN là đường vuông góc chung của $A'C$ và BC' nên

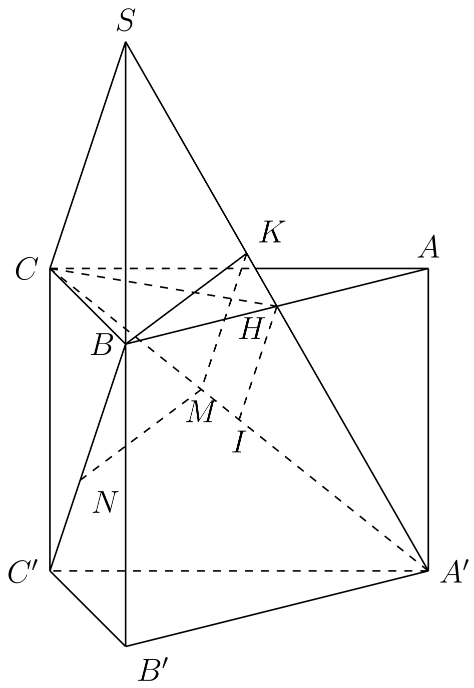
$$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{C'B} = 0.$$

hay ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2t+t'+2 = 0 \\ t+8t'-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{6}{5} \\ t' = \dfrac{2}{5}. \end{cases}$$

Suy ra $N\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{2\sqrt{3}}{5};\dfrac{6}{5}\right)$, do đó $NB = \dfrac{6\sqrt{2}}{5}$, $NC' = \dfrac{4\sqrt{2}}{5}$. Vậy $\dfrac{NB}{NC'} = \dfrac{3}{2}$.

Cách 2.



Gọi H, I lần lượt là trung điểm của AB, AC'. Suy ra $HI \parallel BC'$. Trong mặt phẳng $(ABB'A')$, tia $A'H$ cắt tia $B'B$ tại S, gọi K là hình chiếu của B trên SH. Dễ thấy $BK \perp (SCH)$. Gọi M là hình chiếu của K trên $A'C$, chú ý rằng $CH = HA'$ nên $HI \perp A'C$, do đó $KM \parallel HI \parallel BC'$. Trong mặt phẳng $(BC'MK)$ lấy điểm N trên BC' sao cho $BKMN$ là hình bình hành. Khi đó MN là đoạn vuông góc chung cần tìm. Ta có

$$\frac{NB}{BC'} = \frac{MK}{2HI} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{HK}{A'H}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{HK}{HS}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{HB^2}{HS^2}\right).$$

Do $2HB = SB$ nên

$$\frac{NB}{BC'} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{HB^2}{HB^2 + SB^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{HB^2}{HB^2 + 4HB^2}\right) = \frac{3}{5}.$$

Vậy $\dfrac{NB}{NC'} = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$, $B(2;-1;3)$. Tìm điểm M trên mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2 - 2MB^2$ lớn nhất.

A $M(3;-4;0)$. **B** $M\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};0\right)$. **C** $M(0;0;5)$. **D** $M\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2};0\right)$.

Lời giải.

Điểm $I(3;-4;5)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$. Suy ra

$$\begin{aligned} MA^2 - 2MB^2 &= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 - 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 \\ &= MI^2 - 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA} + IA^2 - 2MI^2 - 4\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} - 2IB^2 \\ &= -MI^2 + IA^2 - 2IB^2. \end{aligned}$$

Do đó $MA^2 - 2MB^2$ lớn nhất khi MI nhỏ nhất hay M là hình chiếu của I trên mặt phẳng Oxy.

Vậy $M(3;-4;0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Phương trình $\sqrt{x-512}+\sqrt{1024-x}=16+4\sqrt[8]{(x-512)(1024-x)}$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 2 nghiệm. (B) 8 nghiệm. (C) 4 nghiệm. (D) 3 nghiệm.

Lời giải.

Điều kiện $512 \leq x \leq 1024$. Đặt $u=\sqrt[8]{x-512} \geq 0$, $v=\sqrt[8]{1024-x} \geq 0$. Suy ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u^4+v^4=16+4uv & (1) \\ u^8+v^8=512 & (2) \end{cases}.$$

Từ phương trình (1) ta có $16+4uv=u^4+v^4 \geq 2u^2v^2$, suy ra $0 \leq uv \leq 4$. Do hai vế của phương trình (1) không âm nên bình phương hai vế của (1) ta được phương trình tương đương

$$u^8+2u^4v^4+v^8=16u^2v^2+128uv+256. \qquad (3)$$

Thay (2) vào (3) ta được

$$\begin{aligned} &(uv)^4-8(uv)^2-64uv+128=0 \\ \Leftrightarrow &(uv-4)\left[(uv)^3+4(uv)^2+8uv-32\right]=0. \end{aligned}$$

Với $uv=4$ ta suy ra $x=768$. Xét $uv<4$. Chú ý rằng hàm $f(t)=t^3+4t^2+8t-32$, $t \in [0;4]$ có $f'(t)=3t^2+4t+8>0$, $\forall t \in [0;4]$ và $f(0)f(4)<0$ nên tồn tại duy nhất $P \in (0;4)$ để $f(P)=0$. Do đó $uv=P$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u^8+v^8=512 \\ u^8v^8=P^8. \end{cases}$$

Ta có $512^2-4P^8=4^9-4P^8>0$, do đó theo định lí Viète đảo, tồn tại hai bộ số $(u_1;v_1)$ và $(u_2;v_2)$ $(u_1,v_1,u_2,v_2>0)$ là nghiệm của hệ. Mỗi bộ số đó sinh ra một nghiệm của phương trình đã cho. Vậy phương trình ban đầu có 3 nghiệm.

Chọn đáp án (D) □

——— **HẾT** ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. B	3. B	4. C	5. D	6. B	7. A	8. D	9. B	10. C
11. B	12. B	13. A	14. A	15. D	16. C	17. C	18. B	19. C	20. A
21. A	22. A	23. C	24. B	25. C	26. C	27. D	28. A	29. A	30. C
31. B	32. D	33. D	34. D	35. D	36. B	37. C	38. B	39. C	40. C
41. B	42. A	43. D	44. D	45. A	46. D	47. D	48. A	49. A	50. D

146 ĐỀ THI THỬ LẦN 1, TRƯỜNG THPT ĐÔNG THỤY ANH, THÁI BÌNH, 2017-2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Một ô tô đang chạy với vận tốc 200 m/s thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 200 + at$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh và a $\left(\mathrm{m/s^2}\right)$ là gia tốc. Biết rằng khi đi được 1500 m thì xe dừng hẳn, hỏi gia tốc của xe bằng bao nhiêu?

(A) $a = -\dfrac{200}{13}$ m/s^2. (B) $a = -\dfrac{100}{13}$ m/s^2. (C) $a = \dfrac{40}{3}$ m/s^2. **(D)** $a = -\dfrac{40}{3}$ m/s^2.

Lời giải.

Thời điểm xe dừng hẳn là $200 + at = 0 \Rightarrow t = -\dfrac{200}{a}$.

Khi đó ta có

$$\int\limits_0^{-\frac{200}{a}} (200 + at)\,\mathrm{d}t = 1500 \Leftrightarrow -\frac{200^2}{2a} = 1500 \Leftrightarrow a = -\frac{40}{3}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x - 2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

(A) $(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$. (B) $(-\infty; 1)$.

(C) $(5; +\infty)$. **(D)** $(1; 5)$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5. \end{array}\right.$

Từ đó suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 5)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Cho $\log_2 5 = a$, $\log_3 5 = b$. Khi đó $\log_6 5$ tính theo a và b là

(A) $a^2 + b^2$. (B) $\dfrac{1}{a+b}$. **(C)** $\dfrac{ab}{a+b}$. (D) $a + b$.

Lời giải.

Ta có $\log_5 6 = \log_5 2 + \log_5 3 = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{a+b}{ab}$, suy ra $\log_6 5 = \dfrac{ab}{a+b}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Cho đường thẳng $\Delta : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ và hai điểm $A(1; 0; 1)$, $B(-1; 1; 2)$. Biết điểm $M(a; b; c)$ thuộc Δ sao cho $\left|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, tổng $a + 2b + 4c$ bằng bao nhiêu?

(A) 0. (B) -1. (C) 1. **(D)** 2.

Lời giải.

Lấy $M(2m; -1+m; 1-m) \in \Delta$, ta có $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = (4+4m; -5+2m; -3-2m) \Rightarrow \left|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{24m^2 + 24m + 50}$.

Khi đó $\left|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất khi $m = -\dfrac{1}{2}$, từ đó suy ra $M(-1; -\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2})$.
Vậy $a + 2b + 4c = 2$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Phương trình $\log_3(3x-2) = 3$ có nghiệm là

[A] $x = \dfrac{29}{3}$. (B) $x = \dfrac{25}{3}$. (C) $x = \dfrac{11}{3}$. (D) $x = 87$.

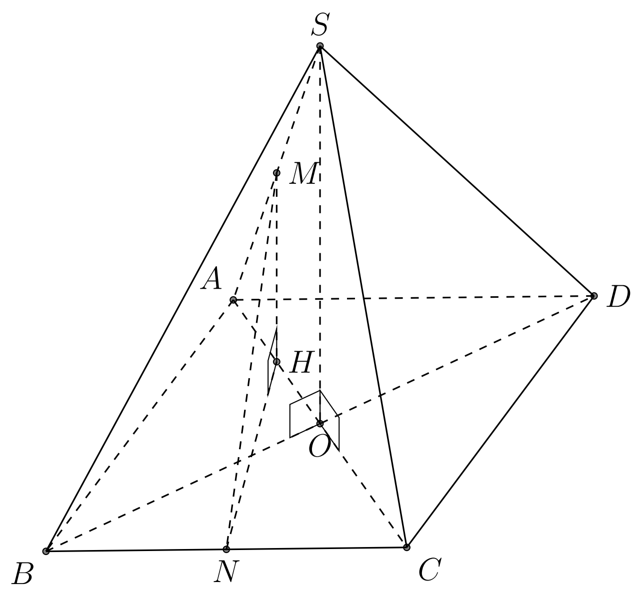
Lời giải.

Phương trình tương đương với $3x - 2 = 27 \Leftrightarrow x = \dfrac{29}{3}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a, SO vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA và BC. Tính góc giữa đường thẳng MN với mặt phẳng $(ABCD)$, biết $MN = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

(A) 30°. (B) 45°. [C] 60°. (D) 90°.

Lời giải.



Lấy H là trung điểm của đoạn AO, suy ra MH là đường trung bình của tam giác SAO, suy ra $MH \parallel SO$. Mặt khác $SO \perp (ABCD)$ nên $MH \perp (ABCD)$, từ đó suy ra góc giữa MN và $(ABCD)$ là $\widehat{MNH}$.
Xét tam giác NCH có

$$NH^2 = CN^2 + CH^2 - 2CN \cdot CH \cdot \cos\widehat{NCH}$$
$$\Rightarrow NH^2 = \left(\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \dfrac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \cos 45^\circ$$
$$\Leftrightarrow NH^2 = \dfrac{9a^2}{8} + \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{3a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{8} \Rightarrow NH = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}.$$

Từ đó suy ra $\cos\widehat{MNH} = \dfrac{NH}{MH} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MNH} = 60^\circ$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=4(x^2+y^2)+15xy$.

(A) $P_{\min}=-63$. (B) $P_{\min}=-83$. (C) $P_{\min}=-80$. (D) $P_{\min}=-91$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq 3, y\geq -3$, từ đó ta có

$$(x+3)(y+3)\geq 0 \Leftrightarrow xy\geq -3(x+y)-9.$$

Xét trường hợp $x=-y=3$ suy ra $P=-63$.

Trường hợp $x+y>0$, từ giả thiết suy ra

$$(x+y)^2=4(x+y)+8\sqrt{(x-3)(y+3)}\geq 4(x+y)$$

$$\Leftrightarrow x+y\geq 4\,(\text{do } x+y>0).$$

Đánh giá P ta được

$$P=4(x^2+y^2)+15xy=4(x+y)^2+7xy\geq 4(x+y)^2-21(x+y)-63.$$

Do hàm số $f(t)=4t^2-21t-63$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{21}{8};+\infty\right)$ suy ra $P=f(x+y)\geq f(4)=-83$.

Vậy $P_{\min}=-83$ khi $x=7, y=-3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^3+2x^2$ song song với đường thẳng $y=x$?

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=-3x^2+4x$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm giữa tiếp tuyến và đồ thị hàm số, suy ra hệ số góc của tiếp tuyến là $f'(x_0)=-3x_0^2+4x_0$.

Để tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=x$ thì $-3x_0^2+4x_0=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$

Vậy có hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y=x$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Cho $\displaystyle\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x=16$. Tính $I=\displaystyle\int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I=32$. (B) $I=8$. (C) $I=16$. (D) $I=4$.

Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(u)\,\mathrm{d}(u)=8$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên trục Oy là điểm

(A) $N(-1;2;0)$. **B** $M(0;2;0)$. (C) $Q(0;0;1)$. (D) $P(-1;0;1)$.

Lời giải.

Hình chiếu của $A(-1;2;1)$ lên trục Oy là $M(0;2;0)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;-1)$, $B(1;-1;3)$ và mặt phẳng $(P): 3x+2y-z+5=0$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm A, B và vuông góc với (P), phương trình của mặt phẳng (α) là

A $(\alpha): -7x+11y+z+15=0$. (B) $(\alpha): 7x-11y-z+1=0$.

(C) $(\alpha): 7x-11y+z-1=0$. (D) $(\alpha): -7x+11y+z-3=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-1;4)$.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_p=(3;2;-1)$.

Theo bài ra, mặt phẳng (α) có cặp véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{n}_p$, từ đó suy ra (α) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_\alpha=[\overrightarrow{AB},\vec{n}_p]=(-7;11;1)$.

Phương trình mặt phẳng (α): $-7x+11y+z+15=0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=1$ và $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2-2x$, hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm thực phân biệt?

(A) 1. **B** 2. (C) 3. (D) 5.

Lời giải.

Theo bài ra ta có $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int(2-2x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \ln|f(x)|=2x-x^2+C.$ (1)

Thay $x=0$ vào (1) ta được $C=0$, từ đó suy ra $\ln|f(x)|=2x-x^2\Leftrightarrow f(x)=\mathrm{e}^{2x-x^2}$.

Phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm phân biệt khi chỉ khi phương trình $m=\mathrm{e}^{2x-x^2}$ có hai nghiệm phân biệt tương đương với $-x^2+2x-\ln m=0$ có hai nghiệm phân biệt tương đương với $\Delta'=1-\ln m>0\Leftrightarrow 0<m<\mathrm{e}$, từ đó suy ra $m=1$ hoặc $m=2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Đường thẳng nào dưới đây là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-1}{-x-1}$?

(A) $x=3$. (B) $x=-1$. **C** $y=-3$. (D) $y=1$.

Lời giải.

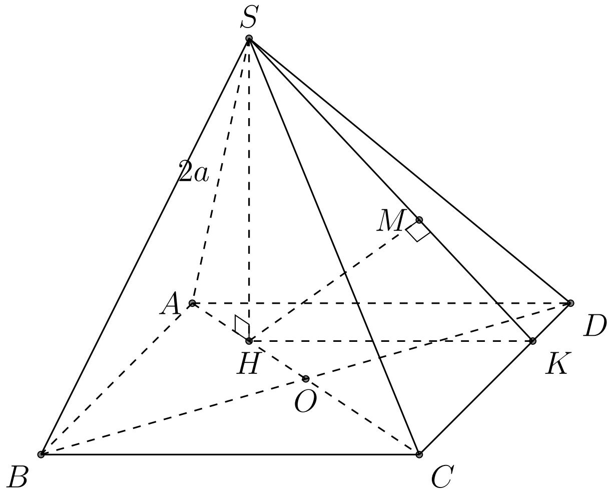
Tiệm cận ngang $y=-3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA=2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của H của đoạn thẳng AO. Tính khoảng cách d giữa các đường thẳng SD và AB.

A $d=\dfrac{4a\sqrt{22}}{11}$. (B) $d=\dfrac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$. (C) $d=2a$. (D) $d=4a$.

Lời giải.



Do $AB \parallel CD$ suy ra $AB \parallel (SCD)$ suy ra

$$d(AB, SD) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = \frac{4}{3}d(H, (SCD)).$$

Trên cạnh CD lấy điểm K sao cho $\dfrac{CK}{CD} = \dfrac{3}{4}$, suy ra $HK \parallel AD$ suy ra $CD \perp HK$. (1)
Mặt khác $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp CD$. (2)
Trong mặt phẳng (SHK) kẻ $HM \perp SK$ tại M. (3)
Từ $(1), (2)$ suy ra $CD \perp (SHK)$ suy ra $CD \perp HM$. (4)
Từ $(3), (4)$ suy ra $HM \perp (SCD)$ suy ra $d(H, (SCD)) = HM$.
Theo bài ra ta có $AC = 4a\sqrt{2} \Rightarrow AH = a\sqrt{2}$.
Xét tam giác vuông SHA ta có $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a\sqrt{2}$.
Ta lại có $HK = \dfrac{3}{4}AD = 3a$. Xét tam giác vuông SHK ta có $HM^2 = \dfrac{SH^2 \cdot HK^2}{SH^2 + HK^2} \Rightarrow HM = \dfrac{3a\sqrt{22}}{11} \Rightarrow d(A, (SCD)) = \dfrac{4a\sqrt{22}}{11}$.
Chọn đáp án A □

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 4x^3 + mx^2 - 3x$ đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $x_1 = -4x_2$.

A $m = -\dfrac{9}{2}$ hoặc $m = \dfrac{9}{2}$. **B** $m = -1$ hoặc $m = 1$.
C $m = -\dfrac{2}{9}$ hoặc $m = \dfrac{2}{9}$. **D** $m = -2$ hoặc $m = 2$.

Lời giải.
Do $y' = 12x^2 + 2mx - 3 = 0$ có $ac = -36 < 0$ nên hàm số luôn có hai cực trị. Từ đó suy ra $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{m}{6} \\ x_1x_2 = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$.
Kết hợp với điều kiện $x_1 = -4x_2$ ta có $-4x_2 + x_2 = -3x_2 = -\dfrac{m}{6} \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{m}{18} \Rightarrow x_1 = -\dfrac{4m}{18}$, từ đó suy ra $x_1x_2 = -\dfrac{4m^2}{18^2} = -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{9}{2}$.
Chọn đáp án A □

Câu 16. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình: $1 + \log_5(x^2+1) \geq \log_5(mx^2+4x+m)$ đúng với mọi x. Tổng giá trị các phần tử trong tập S bằng

(A) 2. **(B) 3.** (C) 5. (D) 4.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với

$$\log_5 5(x^2+1) \geq \log_5(mx^2+4x+m)$$

$$\Leftrightarrow 5x^2+5 \geq mx^2+4x+m$$

$$\Leftrightarrow (m-5)x^2+4x+m-5 \leq 0.\ (*)$$

Để $(*)$ nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m > 0 \\ \Delta_1' = 4 - m^2 < 0 \\ (m-5) < 0 \\ \Delta_2' = 4 - (m-5)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 3.$$

Vậy $S = \{3\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$. Nếu $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ thì tích phân $\int\limits_0^3 [x - 2f(x)]\,\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

(A) $\dfrac{5}{2}$. **(B) $\dfrac{1}{2}$.** (C) 7. (D) 5.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^3 [x-2f(x)]\,\mathrm{d}x = \left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^3 - 2\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{9}{2} - 4 = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m (với $m < 6$) thì phương trình: $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = m$ có hai nghiệm thực phân biệt?

(A) 5. (B) 0. **(C) 3.** (D) 2.

Lời giải.

Đặt $t = (2+\sqrt{3})^x$ với $t > 0$ suy ra $(2-\sqrt{3})^x = \dfrac{1}{t}$, thay vào phương trình ban đầu ra có $t + \dfrac{1}{t} = m \Leftrightarrow t^2 - mt + 1 = 0$.

Để phương trình ban đầu có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $t^2 - mt + 1 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt tương đương với

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ m > 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2.$$

Kết hợp với điều kiện ban đầu ta có $2 < m < 6$.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \mathrm{e}^x(x^2 - 3)$ trên đoạn $[-2; 2]$ là

A $\min\limits_{[-2;2]} y = \mathrm{e}^2$. B $\min\limits_{[-2;2]} y = \mathrm{e}^{-2}$. C $\min\limits_{[-2;2]} y = -4\mathrm{e}$. D $\min\limits_{[-2;2]} y = -2\mathrm{e}$.

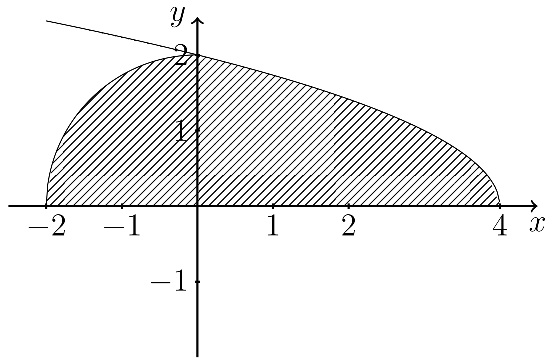
Lời giải.

Ta có $y' = \mathrm{e}^x(x^2 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1 \end{array}\right.$. Xét các giá trị: $f(-2) = \mathrm{e}^{-2}$; $f(1) = -2\mathrm{e}$; $f(2) = \mathrm{e}^2$, từ đó suy ra $y_{\min} = -2\mathrm{e}$.

Chọn đáp án D □

Câu 20.

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi $\dfrac{1}{4}$ đường tròn có bán kính $R = 2$, đường cong $y = \sqrt{4 - x}$ và trục hoành (như hình vẽ). Tính thể tích V của khối tạo thành khi cho hình (H) quay quanh trục Ox.



A $V = \dfrac{40\pi}{3}$. B $V = \dfrac{53\pi}{6}$. C $V = \dfrac{67\pi}{6}$. D $V = \dfrac{77\pi}{6}$.

Lời giải.

Phần đường tròn có phương trình hàm số $y = \sqrt{4 - x^2}$, nên thể tích khi quay hình giới hạn quanh trục Ox là

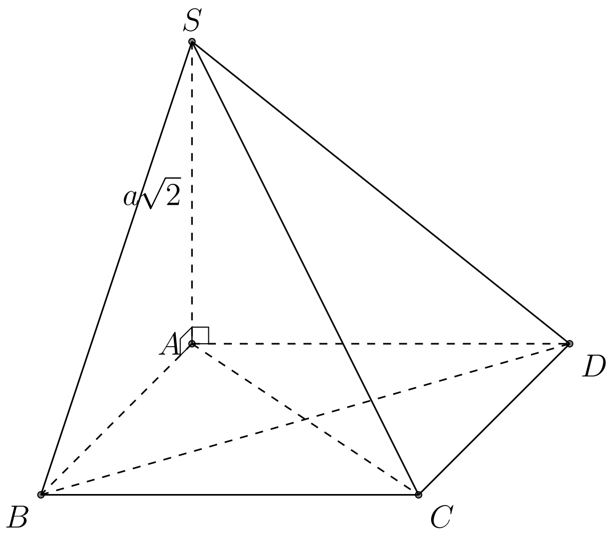
$$\pi \int\limits_{-2}^{0} (4 - x^2)\,\mathrm{d}x + \pi \int\limits_{0}^{4} (4 - x)\,\mathrm{d}x = \frac{40\pi}{3}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. B $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. C $V = a^3\sqrt{2}$. D $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải.



Diện tích đáy $S_{ABCD} = a^2$. Suy ra thể tích khối chóp $V = \dfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Kí hiệu a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $z = i(1-i)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $a = 1, b = -1$. **B** $a = 1, b = 1$. (C) $a = 1, b = i$. (D) $a = 1, b = -i$.

Lời giải.

Ta có $z = 1 + i$ suy ra $a = 1$, $b = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z}{2}$, mặt phẳng $(\alpha) : x + y - z + 3 = 0$ và điểm $A(1; 2-1)$. Đường thẳng Δ đi qua A, cắt d và song song với mặt phẳng (α) có phương trình là

A $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{-1}$. (B) $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$.

(C) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{1}$. (D) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{1}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1; -1)$.

Giả sử Δ cắt d tại $B(3+t; 3+3t; 2t)$ suy ra $\overrightarrow{AB} = (2+t; 1+3t; 1+2t)$.

Do Δ song song với mặt phẳng (α) suy ra $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow 2 + t + 1 + 3t - 1 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = -1$.

Từ đó suy ra Δ đi qua A và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (1; -2; -1)$, suy ra phương trình đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{-1}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 1$ với trục Ox là:

(A) 1. **B** 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm là $-x^4 + 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Cho số phức $z = 5 - 4i$. Môđun của số phức z bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 9. Ⓒ $\sqrt{41}$. Ⓓ 1.

Lời giải.

Ta có $|z| = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho hàm số: $y = x^4 - (2m-1)x^2 + 2m$ có đồ thị (C). Tất cả có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đường thẳng d: $y = 2$ cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt đều có hoành độ bé hơn 3?

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm giữa d và (C)

$$x^4 - (2m-1)x^2 + 2m = 2 \Leftrightarrow x^4 - (2m-1)x^2 + 2m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-2m+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 2m-2 \end{array}\right..$$

Từ đó suy ra để d cắt (C) tại bốn điểm phân biệt có hoành độ bé hơn 3 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 0 < 2m-2 < 9 \\ 2m-2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m < \dfrac{11}{2} \\ m \neq \dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình: $\log_2\left(\dfrac{x^2+2x+2}{3x^2+x+2}\right) = x^2 - 3x - 3$. Tính giá trị của biểu thức $T = x_1^2 + x_2^2$.

Ⓐ $T = \dfrac{25}{4}$. Ⓑ $T = \dfrac{33}{4}$. Ⓒ $T = 15$. Ⓓ $T = 13$.

Lời giải.

- Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

- Phương trình tương đương với

$$\log_2\left(\frac{2x^2+4x+4}{3x^2+x+2}\right) = x^2 - 3x - 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x^2+4x+4) - \log_2(3x^2+x+2) = (3x^2+x+2) - (2x^2+4x+4)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x^2+4x+4) + (2x^2+4x+4) = \log_2(3x^2+x+2) + (3x^2+x+2).\ (*)$$

- Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ với $(t > 0)$, có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 2} + 1 > 0$ với mọi $t > 0$ nên hàm số luôn đồng biến trên tập xác định.

- Từ $(*)$ ta có

$$f(2x^2+4x+4) = f(3x^2+x+2) \Leftrightarrow 2x^2+4x+4 = 3x^2+x+2 \Leftrightarrow$$

$$x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{3-\sqrt{17}}{2} \\ \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right. .$$

Từ đó suy ra $T=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3^2+4=13$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Cho các số phức z, w khác 0 và thỏa mãn: $|z-w|=2|z|=|w|$. Tìm phần thực của số phức $u=\dfrac{z}{w}$.

(A) $-\dfrac{1}{8}$. (B) $\dfrac{1}{4}$. (C) 1. (D) $\dfrac{1}{8}$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $\left|\dfrac{z}{w}-1\right|=1$ và $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{1}{2}$. $(*)$

Đặt $\dfrac{z}{w}=x+yi$, ta có $(*)$ tương đương với $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1 \\ x^2+y^2=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$

Trừ phương trình dưới cho phương trình trên ta được $x=\dfrac{1}{8}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Phương trình $3^{1-x}=2+\left(\dfrac{1}{9}\right)^x$ có bao nhiêu nghiệm âm?

(A) 3. (B) 0. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$3\cdot 3^{-x}=2+3^{-2x} \Leftrightarrow 3^{-2x}-3\cdot 3^{-x}+2=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{-x}=1 \\ 3^{-x}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\log_3 2 \end{array}\right. .$$

Vậy phương trình có một nghiệm âm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số đạt cực đại tại $x=3$. (B) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$.

(C) Hàm số đạt cực đại tại $x=4$. (D) Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

Lời giải.

Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(1;2;3)$ và song song với trục Oy có phương trình tham số là

(A) $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2\\z=3\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

B $d:\begin{cases}x=1\\y=2+2t\\z=3\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

(C) $d:\begin{cases}x=1\\y=2\\z=3+t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

(D) $d:\begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=3-t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

Lời giải.

Đường thẳng qua $M(1;2;3)$ song song với trục Oy có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{j}=(0;1;0)$ nên nó có phương trình tham số

$$d:\begin{cases}x=1\\y=2+t\\z=3\end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số: $f(x)=x^2-3x$.

(A) $F(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2+C$.

(B) $F(x)=x^3-3x^2+C$.

C $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2+C$.

(D) $F(x)=2x-3+C$.

Lời giải.

Họ nguyên hàm của hàm $f(x)=x^2-3x$ là $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}+C$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;m)$. Để mặt phẳng (ABC) hợp với mặt phẳng (Oxy) một góc 60° thì giá trị của m là

(A) $m=\pm\dfrac{12}{5}$.

(B) $m=\pm\dfrac{2}{5}$.

C $m=\pm\sqrt{\dfrac{12}{5}}$.

(D) $m=\pm\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Mặt phẳng Oxy có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{k}=(0;0;1)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;2;0)$ và $\overrightarrow{AC}=(-1;0;m)$, suy ra véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\overrightarrow{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(2m;m;2)$.

Theo bài ra ta có

$$\cos 60^\circ=\frac{\left|\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{|\overrightarrow{k}|\cdot|\overrightarrow{n}|}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5m^2+4}=4\Leftrightarrow m^2=\frac{12}{5}\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{\frac{12}{5}}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Mặt phẳng chứa trục hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh bằng a. Thể tích khối trụ bằng

(A) $\dfrac{\pi a^3}{2}$.

(B) πa^3.

(C) $\dfrac{\pi a^3}{3}$.

D $\dfrac{\pi a^3}{4}$.

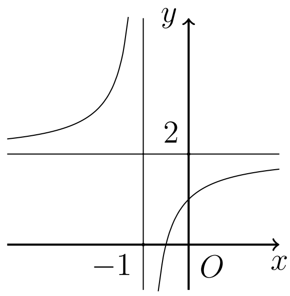
Lời giải.

Theo bài ra ta có chiều cao của trụ $h = a$, bán kính đáy $R = \dfrac{a}{2}$. Từ đó suy ra thể tích khối trụ là $V = h \cdot S = a \cdot \pi \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi a^3}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 35.

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A $y = \dfrac{x+2}{x+1}$. B $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

C $y = \dfrac{x+3}{1-x}$. **D** $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

Lời giải.

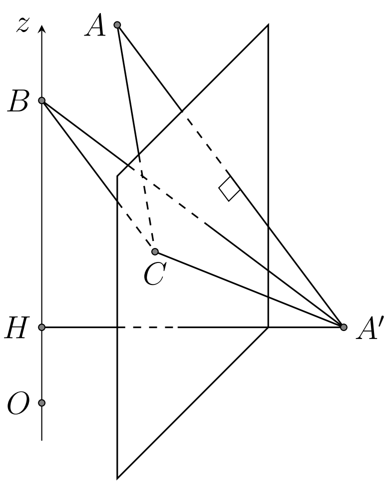
Tiệm cận ngang là $y = 2$, nên ta chọn hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -6; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + 7 = 0$. Điểm B thay đổi thuộc Oz; điểm C thay đổi thuộc mặt phẳng (P). Biết rằng tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất. Tọa độ điểm B là:

A $B(0; 0; 1)$. B $B(0; 0; -2)$. C $B(0; 0; -1)$. D $B(0; 0; 2)$.

Lời giải.



Kiểm tra thấy hai điểm A, B nằm cùng phía so với bờ là mặt phẳng (P), trục Oz song song với mặt phẳng (P).

Lấy điểm A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P). Ta có các đánh giá:

+ $AB \geq AB_0$ với B_0 là hình chiếu của A lên trục Oz và AB_0 có độ dài không đổi.

+ $BC + CA = BC + CA' \geq A'B \geq A'H$, $A'H$ có độ dài không đổi.

Từ đó suy ra

$$AB + BC + CA \geq AB_0 + A'H.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi B trùng $B_0(0; 0; 1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m+1)\sin x + 2 - m = 0$ có nghiệm.

Ⓐ $m \leq -1$. **B** $m \geq \frac{1}{2}$. Ⓒ $-1 < m \leq \frac{1}{2}$. Ⓓ $m > -1$.

Lời giải.

Với $m = -1$ thì phương trình vô nghiệm.

Xét trường hợp $m \neq -1$: Để phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$(m+1)^2 \geq (2-m)^2$$

$$\Leftrightarrow 6m \geq 3 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 38. Một xưởng sản xuất những thùng hình hộp chữ nhật bằng nhôm không nắp và có các kích thước x, y, z (dm). Biết tỉ số hai cạnh đáy là $x : y = 1 : 3$, thể tích khối hộp bằng $18\,\text{dm}^3$. Để tốn ít vật liệu nhất thì tổng $x + y + z$ bằng

Ⓐ 10 dm. **B** $\frac{19}{2}$ dm. Ⓒ 26 dm. Ⓓ $\frac{26}{3}$ dm.

Lời giải.

Thể tích khối hộp là $V = xyz = 3x^2z = 18 \Rightarrow z = \frac{6}{x^2}$. (1)

Diện tích nhôm cần sử dụng để sản xuất khối hộp là $S = xy + 2(yz + zx)$. (2)

Thay (1) vào (2) ta có $S = 3x^2 + \frac{48}{x}$ suy ra $S' = 6x - \frac{48}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

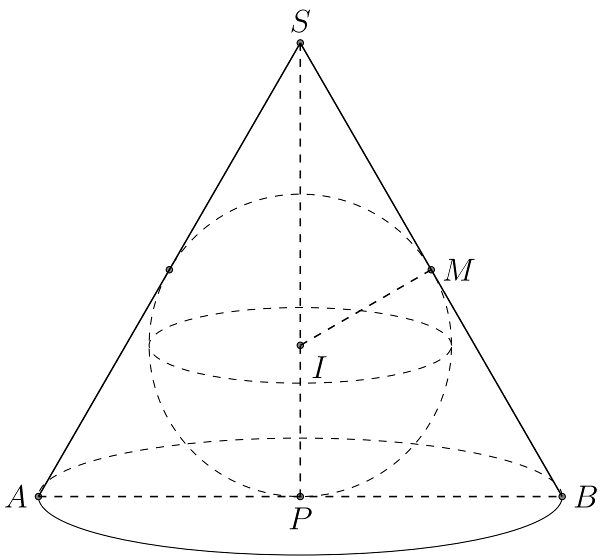
Lập luận được S đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = 2$, $y = 6$, $z = \frac{3}{2}$, suy ra $x + y + z = \frac{19}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Một hình cầu (S) có thể tích $\frac{4\pi}{3}$ dm^3. Người ta muốn đặt hình cầu này nội tiếp một hình nón. Tính thể tích nhỏ nhất V của hình nón đó.

Ⓐ $V = 2\pi$ dm^3. Ⓑ $V = 4\pi$ dm^3. Ⓒ $V = \frac{10\pi}{3}$ dm^3. **D** $V = \frac{8\pi}{3}$ dm^3.

Lời giải.



Gọi h, R lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của hình nón.
Theo bài ra ta có thể tích hình cầu $V_{(S)} = \dfrac{4\pi r^3}{3} = \dfrac{4\pi}{3} \Rightarrow r = 1$.
Dễ dàng chứng minh được tam giác SMI và SPB đồng dạng suy ra

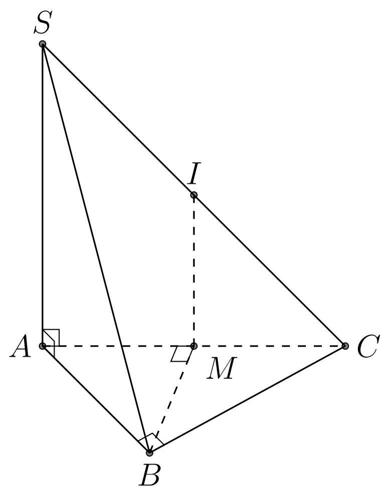
$$\frac{SI}{SB} = \frac{MI}{PB} \Rightarrow \frac{h-r}{\sqrt{h^2+R^2}} = \frac{r}{R} \Rightarrow h = \frac{2R^2}{R^2-1}.$$

Khi đó thể tích hình nón là $V_{\text{nón}} = \dfrac{2\pi}{3} \cdot \dfrac{R^4}{R^2-1}$.
Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2}{t-1}$ với $t > 1$ có $f'(t) = \dfrac{t^2-2t}{(t-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \end{array}\right.$. Từ đó ta suy ra được giá trị nhỏ nhất của hàm số $f_{\min} = f(2) = 4$.
Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA = BC = a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $3a$. C. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $a\sqrt{6}$.

Lời giải.



Lấy I là trung điểm của SC suy ra $IS = IA = IC$. (1)
Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$, mặt khác $BC \perp AB$ suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$. Từ đó suy ra tam giác SBC vuông tại B và $IS = IB = IC$. (2)
Từ (1)(2) suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$ và bán kính $R = IS = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2+AC^2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(1; +\infty)$.
B $(-\infty; 0)$ và $(4; +\infty)$.
C $(-\sqrt{2}; 0)$.
D $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ khi } m \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty) \\ f'(x) < 0 \text{ khi } m \in (0; 2) \end{cases}.$$

Suy ra $y' = (f(x^2))' = 2xf'(x^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{2} \end{array}\right.$, từ đó ta có bảng biến thiên

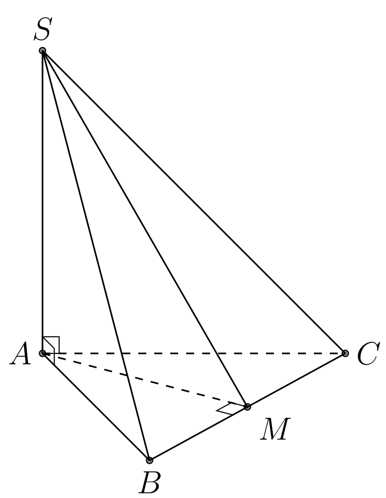
x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn đáp án **C** □

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC).

A $d = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.
B $d = a$.
C $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.
D $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Tam giác ABC có diện tích $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ và chiều cao $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra thể tích của hình chóp là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \dfrac{a^3}{4}$.

Tam giác SAM vuông tại A có $SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$, từ đó suy ra diện tích của tam giác SBC là $S_{SBC} = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{4}$.

Gọi d là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC), suy ra $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} d S_{SBC} \Rightarrow d = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Cho các số phức z thỏa mãn $|z-1| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = \left(1+\sqrt{3}i\right) z + 2$ là một đường tròn. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A $R = 4$. (B) $R = 16$. (C) $R = 8$. (D) $R = 2$.

Lời giải.

Ta có $w - 2 = (1+\sqrt{3}i)z \Leftrightarrow \dfrac{w-2}{1+\sqrt{3}i} = z \Leftrightarrow \dfrac{w-2}{1+\sqrt{3}i} - 1 = z - 1 \Rightarrow \left|\dfrac{w-3-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\right| = |z-1|$

$\Leftrightarrow |w - 3 - \sqrt{3}i| = |z-1| \cdot |1+\sqrt{3}i| = 4$.

Từ đó suy ra bán kính $R = 4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 44. Tính $L = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3-x}{2x+3}$.

(A) $L = 0$. **B** $L = \dfrac{-1}{2}$. (C) $L = \dfrac{2}{3}$. (D) $L = \dfrac{-1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $L = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3-x}{2x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{3}{x} - 1}{2 + \dfrac{3}{x}} = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Có bao nhiêu cách xếp khác nhau cho 5 người ngồi vào một bàn dài?

A 120. (B) 5. (C) 20. (D) 25.

Lời giải.

Số cách xếp 5 người vào một bàn dài là $\mathrm{P}_5 = 5! = 120$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Gọi P là tích của tất cả các giá trị nguyên dương của n thỏa mãn: $\mathrm{A}_n^2 - 3\mathrm{C}_n^2 = 15 - 5n$. Tính P.

(A) $P = 5$. (B) $P = 6$. **C** $P = 30$. (D) $P = 360$.

Lời giải.

- Điều kiện: $n \geq 2$.
- Phương trình tương đương với

$$\frac{n!}{(n-2)!} - 3\frac{n!}{(n-2)!2!} = 15 - 10n$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 11n + 30 = 0.$$

Vậy $P = n_1 \cdot n_2 = 30$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Gọi S là tập hợp các số có 3 chữ số khác nhau được lập thành từ các chữ số của tập A. Chọn ngẫu nhiên một số từ S. Tính xác suất để số được chọn có chữ số cuối gấp đôi chữ số đầu.

A $\frac{1}{5}$. B $\frac{23}{25}$. C $\frac{2}{25}$. D $\frac{4}{5}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = 100$.

Biến cố A: chữ số cuối gấp đôi chữ số đầu.

- Trường hợp $\overline{1b2}$: có 4 số.

- Trường hợp $\overline{2b4}$: có 4 số.

Suy ra $n(A) = 8$, từ đó suy ra $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{8}{100} = \dfrac{2}{25}$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Khẳng định nào sau đây là sai?

A Nếu $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ thì $\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C$.

B Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x) = G(x)$.

C $\int [f_1(x) + f_2(x)]\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(x)\,\mathrm{d}x$.

D $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ (k là hằng số và $k \neq 0$).

Câu 49. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số: $y = \log_2(2x - 1)$.

A $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{1}{2}\right\}$. B $\mathscr{D} = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. C $\mathscr{D} = (-1; +\infty)$. D $\mathscr{D} = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (S).

A $I(-1; 2; 1)$ và $R = 2$. B $I(1; -2; -1)$ và $R = 2$.

C $I(-1; 2; 1)$ và $R = 4$. D $I(1; -2; -1)$ và $R = 4$.

Lời giải.

Tọa độ tâm $I(-1; 2; 1)$.

Bán kính $R = 2$.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. D	3. C	4. D	5. A	6. C	7. B	8. C	9. B	10. B
11. A	12. B	13. C	14. A	15. A	16. B	17. B	18. C	19. D	20. A
21. A	22. B	23. A	24. B	25. C	26. D	27. D	28. D	29. C	30. D
31. B	32. C	33. C	34. D	35. D	36. A	37. B	38. B	39. D	40. C
41. C	42. A	43. A	44. B	45. A	46. C	47. C	48. B	49. B	50. A

147 ĐỀ THI THỬ, TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU HCM LẦN 2, 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $2^x = 5$ và $4^y = 20$. Tính $x + 2y$.

A $2 + 2\log_2 5$. **B** $2 + \log_2 5$. **C** $1 + 2\log_2 5$. **D** $4 + 2\log_2 5$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 2^x = 5 \\ 4^y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_2 5 \\ y = \log_4 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_2 5 \\ y = 1 + \dfrac{1}{2}\log_2 5 \end{cases} \Rightarrow x + 2y = 2 + 2\log_2 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho khối trụ (T) có chiều cao và đường kính đáy cùng bằng $2a$. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của (T).

A $S_{\text{tp}} = 5\pi a^2$. **B** $S_{\text{tp}} = 6\pi a^2$. **C** $S_{\text{tp}} = 4\pi a^2$. **D** $S_{\text{tp}} = 3\pi a^2$.

Lời giải.

Ta có $S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + 2S_{\text{đáy}} = 4\pi a^2 + 2\pi a^2 = 6\pi a^2$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Tính mô-đun của số phức z thỏa mãn $(2+i)z + \dfrac{15-5i}{1-i} = 20$.

A $|z| = 5$. **B** $|z| = 7$. **C** $|z| = \sqrt{5}$. **D** $|z| = 1$.

Lời giải.

Ta có $(2+i)z + \dfrac{15-5i}{1-i} = 20 \Leftrightarrow z = 3 - 4i \Rightarrow |z| = 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau đây

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	7	$\searrow$	-1 $\|$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A Hàm số có hai điểm cực trị.

B Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng.

C Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

D Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

Lời giải.

Ta thấy hàm số không xác định tại $x = 1$ nên khẳng định hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$ sai.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{3^x}{e^3}$

(A) $\dfrac{3^x}{e^3 \ln \dfrac{3}{e}} + C$. (B) $\dfrac{3^x}{-2\ln 3 \cdot e^2} + C$. (C) $\dfrac{3^x \ln 3}{e^3} + C$. **D** $\dfrac{3^x}{e^3 \ln 3} + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \dfrac{3^x}{e^3}\, dx = \dfrac{3^x}{e^3 \ln 3} + C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Tìm nghiệm của phương trình $\sqrt{3}\cos x = 3\sin x$.

(A) $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$. **B** $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$. (C) $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$. (D) $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{3}\cos x = 3\sin x \Leftrightarrow \tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Viết phương trình mặt phẳng song song với trục Ox và chứa hai điểm $C(2;0;3)$, $D(-1;4;6)$.

(A) $4y + 3z - 9 = 0$. (B) $3y - 4z - 12 = 0$. (C) $4y - 3z + 9 = 0$. **D** $3y - 4z + 12 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{CD} = (-3;4;3)$.

Gọi $\vec{n}$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) cần tìm.

Ta có $\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{CD} \\ \vec{n} \perp \vec{i} \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{CD}, \vec{i}\right] = (0;3;-4)$.

Mặt phẳng (α): $3x - 4y + 12 = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Tìm hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = -\sin x(4\cos x + 1)$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$.

(A) $F(x) = \cos 2x + \cos x - 1$. (B) $F(x) = -2\cos 2x + \cos x - 3$.

C $F(x) = \cos 2x + \cos x$. (D) $F(x) = -\cos 2x - \cos x - 2$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int [-\sin x(4\cos x + 1)]\, dx = -\int (2\sin 2x + \sin x)\, dx = \cos 2x + \cos x + C$.

Ta có $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\pi + \cos\dfrac{\pi}{2} + C = -1 \Leftrightarrow C = 0$.

Vậy $F(x) = \cos 2x + \cos x$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x - 2y + 5z = 0$. Gọi $H(a;b;c)$ là hình chiếu của M lên mặt phẳng (P). Tính $5b + 2c$.

A $5b + 2c = 16$. (B) $5b + 2c = 14$. (C) $5b + 2c = 13$. (D) $5b + 2c = 15$.

Lời giải.

Đường thẳng (Δ) qua $M(1;2;3)$ vuông góc với (P) có phương trình $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + 5t. \end{cases}$

Toạ độ điểm H là giao điểm của (Δ) và mặt phẳng (P). Khi đó, ta có

$$(1+t)-2(2-2t)+5(3+5t)=0 \Leftrightarrow t=-\frac{2}{5}.$$

Ta được $H\left(\frac{3}{5};\frac{14}{5};1\right) \Rightarrow 5b+2a=16$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(2;-3)$ biểu diễn số phức z_A, điểm B biểu diễn số phức $z_B=(1+i)z_A$. Tính diện tích S của tam giác OAB.

(A) $S=\frac{11}{2}$. **B** $S=\frac{13}{2}$. (C) $S=\frac{17}{2}$. (D) $S=\frac{15}{2}$.

Lời giải.

Ta có $z_A=2-3i \Rightarrow z_B=5-i \Rightarrow B(5;-1)$.

Trong không gian $Oxyz$, ta có $\begin{cases}\overrightarrow{OA}=(2;-3;0)\\ \overrightarrow{OB}=(5;-1;0)\end{cases} \Rightarrow S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}]\right|=\frac{13}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x^2-mx+4}$ có đồ thị (C). Tìm m để (C) có 3 đường tiệm cận.

A $m\in(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$.
(B) $m\in(-\infty;-4)\cup[4;+\infty)$.
(C) $m\in(4;+\infty)$.
(D) Không tồn tại m.

Lời giải.

Đồ thị (C) có 3 đường tiệm cận

$$\Rightarrow x^2-mx+4=0 \text{ có hai nghiệm khác } -2$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}m^2-16>0\\ (-2)^2-m(-2)+4\neq 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}m<-4 \vee m>4\\ m\neq -4\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow m<-4 \vee m>4.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Tính diện tích S của phần hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ và $y=x^2+x-4$.

A $S=\frac{253}{12}$. (B) $S=\frac{125}{12}$. (C) $S=\frac{16}{3}$. (D) $S=\frac{63}{4}$.

Lời giải.

Ta thấy $x^3-3x^2=x^2+x-4 \Leftrightarrow x^3-4x^2-x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=1\\ x=4.\end{array}\right.$

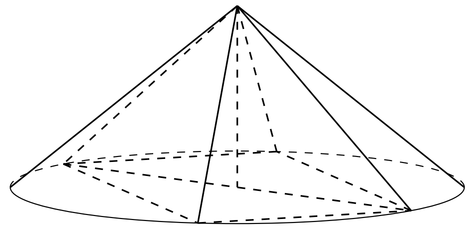
Khi đó $S=\left|\int\limits_{-1}^{1}\left(x^3-4x^2-x+4\right)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{1}^{4}\left(x^3-4x^2-x+4\right)\,\mathrm{d}x\right|=\frac{16}{3}+\frac{63}{4}=\frac{253}{12}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a. (N) là hình nón có đỉnh trùng với đỉnh của hình chóp và nhận các cạnh bên của hình chóp là các đường sinh. Tính thể tích khối nón (N).

A $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi a^3$. **B** $\dfrac{\sqrt{2}}{12}\pi a^3$. **C** $\dfrac{\sqrt{2}}{6}\pi a^3$. **D** $\dfrac{\sqrt{2}}{8}\pi a^3$.

Lời giải.



Ta thấy chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a là một nữa của bát diện diện đều cạnh a.

Do vậy, khối nón (N) có $h = R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $V_{(N)} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \pi \cdot \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{12} \cdot \pi a^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2 + x}{x + 1}$ có hai điểm cực trị A, B. Tìm tọa độ trung điểm của đoạn AB.

A $(1; 2)$. **B** $(1; 3)$. **C** $(-1; -3)$. **D** $(-1; -2)$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{2x^2 + 4x + 1}{(x + 1)^2}$.

Ta được $x_A + x_B = \dfrac{-4}{2} = -2 \Rightarrow x_I = -1$. (1)

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị A, B là $y = 4x + 1$. (2)

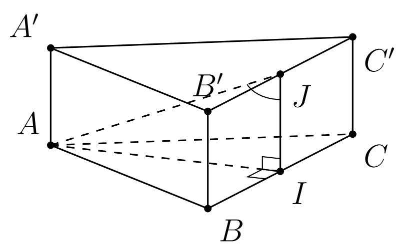
Từ (1) và (2) ta được $y_I = 4 \cdot x_I + 1 = -3$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng $\sqrt{3}a$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BCC'B')$ bằng $45°$. Tính thể tích V của lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $V = 3a^3$. **B** $V = a^3$. **C** $V = 3\sqrt{3}a^3$. **D** $V = \dfrac{3a^3}{8}$.

Lời giải.



Gọi I, I lần lượt là trung điểm $BC, B'C'$.

Ta có góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BCC'B')$ là $\widehat{AJI} = 45°$.

Ta có $IJ = a\sqrt{3} \Rightarrow AI = a\sqrt{3} \Rightarrow AB = 2a$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = a\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4}(2a)^2 = 3a^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông tại B. Biết $SB = \sqrt{5}a, BC = \sqrt{3}a$. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

A $S = 4\sqrt{2}\pi a^2$. **B** $S = 8\pi a^2$. **C** $S = 2\pi a^2$. **D** $S = 4\pi a^2$.

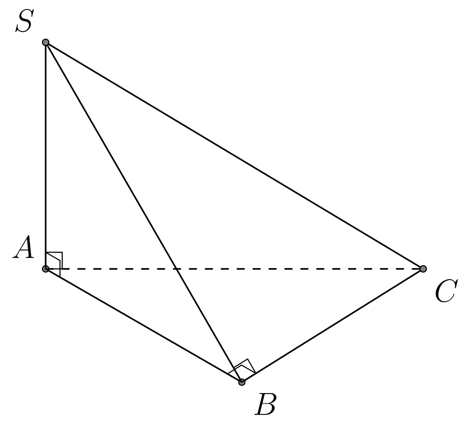
Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Ta có $\widehat{SAC}$ và $\widehat{SBC}$ cùng nhìn SC dưới một góc $90°$. Do vậy, tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$ là trung điểm SC.

Ta có $SC = \sqrt{SB^2 + BC^2} = 2a\sqrt{2}$.

Ta có $S = 4\pi \dfrac{SC^2}{4} = 8\pi a^2$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Cho cấp số cộng (v_n). Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $v_1 + v_{10} = v_2 + v_9$. (B) $v_3 + v_7 = 2v_5$. **C** $v_2 + v_{13} = v_6 + v_7$. (D) $v_5 + v_8 = v_1 + v_{12}$.

Lời giải.

Ta có $v_n = v_0 + (n-1)d$. Khi đó ta có $\begin{cases} v_2 = v_0 + d \\ v_{13} = v_0 + 12d \\ v_6 = v_0 + 5d \\ v_7 = v_0 + 6d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 + v_{13} = 2v_0 + 13d \\ v_6 + v_7 = 2v_0 + 11d. \end{cases}$

Vậy $v_2 + v_{13} \neq v_6 + v_7$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$ có ba cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc nhau, $AB = 8a$, $AC = AD = 4a$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh AB sao cho $MB = MC = MD$. Tính thể tích V của tứ diện $MBCD$.

(A) $V = 8a^3$. **B** $V = \dfrac{40}{3}a^3$. (C) $V = 40a^3$. (D) $V = 16a^3$.

Lời giải.

Gọi J là hình chiếu của A lên BC.

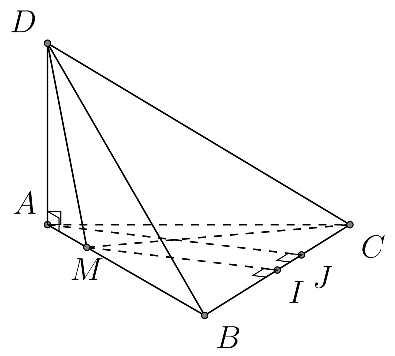
Gọi I là trung điểm BC.

Từ I kẻ đường thẳng song song với AJ cắt AB tại M.

Suy ra MI là đường trung trực của BC nên $MC = MB$. (1)

Vì $\triangle ABC = \triangle ABD$ nên ta được $MC = MD$. (2)

Từ (1) và (2) ta được $MB = MC = MD$.



Ta thấy $AMIC$ nội tiếp đường tròn nên ta có

$$BM \cdot BA = BI \cdot BC \Rightarrow \frac{BM}{BA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{5}{8}.$$

Ta có $\dfrac{V_{B.MCD}}{V_{B.ACD}} = \dfrac{BM}{BA}$.

Vậy $V_{MBCD} = \dfrac{5}{8} \cdot \dfrac{8a \cdot 4a \cdot 4a}{6} = \dfrac{40a^3}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-z-6=0$ cắt các trục tọa độ lần lượt tại A, B, C. Tính thể tích tứ diện $OABC$.

A. 18. B. 72. C. 24. D. 12.

Lời giải.

Ta có $A(3;0;0), B(0;6;0), C(0;0;-6)$. Thể tích $V_{OABC} = \dfrac{OA\cdot OB\cdot OC}{6} = 18$.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Cho a, b là hai số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $\log_b a = \log_a b + 2$. Tính $\log_a b$.

A. $\log_a b = -1-\sqrt{2}$. B. $\log_a b = -1\pm\sqrt{2}$. C. $\log_a b = -1+\sqrt{2}$. D. $\log_a b = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta thấy $\log_b a = \log_a b + 2 \Leftrightarrow \log_a^2 b + 2\log_a b - 1 = 0 \Rightarrow \log_a b = -1+\sqrt{2}$ (vì $a, b > 1$).

Chọn đáp án C □

Câu 21. Cho phương trình $x^2-2x+c=0, (c\in\mathbb{R}, c>1)$ có hai nghiệm phức z_1 và z_2. Biết rằng z_1 là số phức có phần ảo dương và $|z_1| = 5\sqrt{2}$. Tính $|z_1-z_2|$.

A. 14. B. 12. C. $2\sqrt{46}$. D. 6.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = 1-c = \left(\sqrt{c-1}i\right)^2 \Rightarrow z_1 = 1+\sqrt{c-1}i$.

Vì $|z_1| = 5\sqrt{2} \Rightarrow c = 50$. Do vậy ta có $\begin{cases} z_1 = 1+7i \\ z_2 = 1-7i \end{cases} \Rightarrow |z_1-z_2| = 14$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Tìm n để trong khai triển thu gọn biểu thức $\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}+3\right)^n$ thì hệ số của x^4 bằng $\sqrt{2}$ hệ số của x^3.

A. 24. B. 25. C. 26. D. 27.

Lời giải.

Ta có

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \cdot 3^{n-k}\cdot x^k.$$

Theo đề ta có

$$\begin{aligned} & C_n^4\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4\cdot 3^{n-4} = \sqrt{2}\cdot C_n^3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\cdot 3^{n-3} \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{C}_n^4 = 6\cdot \mathrm{C}_n^3 \\ \Leftrightarrow\ & (n-3)! = 4!\cdot(n-4)! \\ \Leftrightarrow\ & n = 27. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 23. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước là $3, 4, 12$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp của hình hộp chữ nhật.

A. 13. B. 15. C. $\dfrac{13}{2}$. D. $\dfrac{15}{2}$.

Lời giải.

Xét hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 3$, $AD = 4$, $AA' = 12$.

Gọi I là trung điểm AC'.

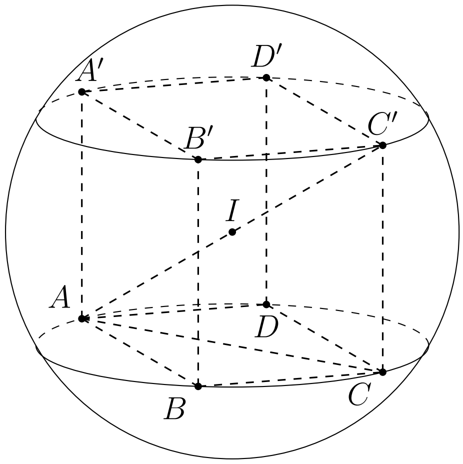
Trong hình chữ nhật $AA'C'C$ ta có $IA = IA' = IC' = IC$.

Trong hình chữ nhật $BB'D'D$ ta có $IB = IB' = ID' = ID$.

Khi đó, khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ nội tiếp mặt cầu tâm I bán kính $R = \dfrac{AC'}{2}$.

Ta có $AC'^2 = CC'^2 + AC^2 = CC'^2 + AB^2 + AD^2 = 169$.

Vậy bán kính mặt cầu cần tìm $R = \dfrac{13}{2}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Cho hàm số $y = x^3 - 9x^2 + 17x + 2$ có đồ thị (C). Qua điểm $M(-2; 5)$ kẻ được tất cả bao nhiêu tiếp tuyến đến (C)?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. **(D) 3.**

Lời giải.

Tiếp tuyến (Δ) tại $M(x_0; x_0^3 - 9x_0^2 + 17x_0 + 2)$ của (C) có dạng

$$y = \left(3x_0^2 - 18x_0 + 17\right)(x - x_0) + x_0^3 - 9x_0^2 + 17x_0 + 2.$$

Vì (Δ) qua $M(-2; 5)$ nên ta có

$$\begin{aligned} & 5 = \left(3x_0^2 - 18x_0 + 17\right)(-2 - x_0) + x_0^3 - 9x_0^2 + 17x_0 + 2 \\ \Leftrightarrow\ & 2x_0^3 - 3x_0^2 - 36x_0 + 37 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & x = \frac{1 - 3\sqrt{33}}{4} \\ & x = 1 \\ & x = \frac{1 + 3\sqrt{33}}{4}. \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

Vậy qua $M(-2; 5)$ kẻ được 3 tiếp tuyến đến (C).

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục Ox của hình giới hạn bởi đường thẳng $y = 1 - x^2$ và Ox.

(A) $\dfrac{16}{15}$. **(B) $\dfrac{16\pi}{15}$.** (C) $\dfrac{4}{3}$. (D) $\dfrac{4\pi}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay $V = \pi \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^2 \mathrm{d}x = \dfrac{16\pi}{15}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $y' = x^2 y$ và $f(-1) = 1$. Tính $f(2)$.

(A) $\mathrm{e} + 1$. **(B) e^3.** (C) $2\mathrm{e}$. (D) e^2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& f'(x) = x^2 \cdot f(x) \\
\Leftrightarrow\ & f'(x) \cdot \mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}} + x^2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}} \cdot f(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}} \cdot f(x)\right]' = 0 \\
\Rightarrow\ & f(2) \cdot \mathrm{e}^{\frac{2^3}{3}} - f(-1) \cdot \mathrm{e}^{\frac{(-1)^3}{3}} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & f(2) = \mathrm{e}^3.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 27. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^2 \max\left\{x^2, 3x - 2\right\} \mathrm{d}x$.

A $\dfrac{17}{6}$. **B** $\dfrac{17}{3}$. **C** $\dfrac{7}{3}$. **D** $\dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x + \int_1^2 (3x-2)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3} + \dfrac{5}{2} = \dfrac{17}{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Tìm m để hàm số $y = mx^3 - 2mx^2 + 3x - 1$ có cực đại và cực tiểu.

A $m > 2$. **B** $m < 2$. **C** $m < 0 \vee m > \dfrac{9}{4}$. **D** $0 < m < \dfrac{9}{4}$.

Lời giải.

Ta thấy $m = 0$ hàm số suy biến thành $y = 3x - 1$ không có cực trị.

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4m^2 - 9m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0 \vee m > \dfrac{9}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$. Gọi $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$ là hai điểm thuộc mặt cầu thỏa mãn biểu thức $T = 2(x_A - x_B) + (y_A - y_B) - 2(z_A - z_B)$ đạt giá trị lớn nhất. Trung điểm của đoạn thẳng AB thuộc mặt phẳng nào sau đây?

A $-y + 4z + 5 = 0$. **B** $-x + 5y - 6z - 10 = 0$.

C $x + 3y + 2z + 3 = 0$. **D** $x + 3y - 7z + 10 = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
T &= 2(x_A - x_B) + (y_A - y_B) - 2(z_A - z_B) \\
&= 2(x_A - 1) + y_A - 2(z_A + 2) + 2(1 - x_B) - y_B + 2(z_B + 2) \\
&\leq \sqrt{9 \cdot [(x_A-1)^2 + y_A^2 + (z_A+2)^2]} + \sqrt{9 \cdot [(x_B-1)^2 + y_B^2 + (z_B+2)^2]} \\
&\leq 15 + 15. \quad (1)
\end{aligned}$$

Đẳng thức (1) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_A-1}{2}=\dfrac{y_A}{1}=\dfrac{z_A+2}{-2} \\ \dfrac{x_B-1}{2}=\dfrac{y_B}{1}=\dfrac{z_B+2}{-2} \end{cases} \Rightarrow (AB)\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=-2-2t. \end{cases}$

Ta thấy tâm mặt cầu $I(1;0;-2)\in(AB)$.

Do vậy, khi T đạt giá trị lớn nhất thì trung điểm AB là $I(1;0;-2)$.

Chọn đáp án C □

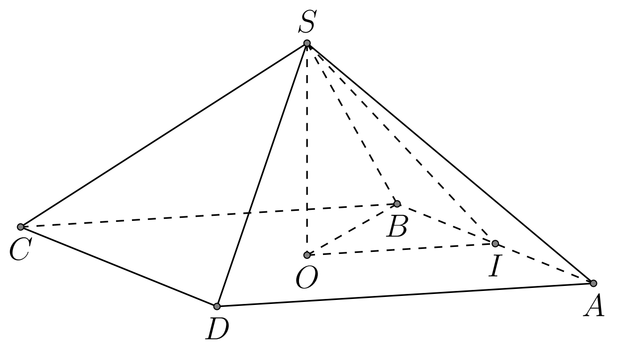
Câu 30. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có góc giữa cạnh bên và đáy bằng 60°. Tìm sin của góc giữa mặt bên và mặt đáy.

A $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B** $\dfrac{1}{2}$. **C** $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$. **D** $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AB.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.



Ta có $\begin{cases} (SB,(ABCD))=\widehat{SBO} \\ ((SAB),(ABCD)=\widehat{SIO}=\alpha. \end{cases}$

Đặt $AB=2x,(x>0)$, ta được $\begin{cases} BD=2\sqrt{2}x \\ SO=\sqrt{6}x \\ OI=x. \end{cases}$

Ta được $\cot\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\Rightarrow\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=1+\dfrac{1}{6}$. Vậy $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Cho a,b là hai số dương thỏa mãn giới hạn $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax-\sqrt{bx^2-2x+2018}\right)$ hữu hạn. Tính I.

A $\dfrac{1}{a+\sqrt{b}}$. **B** $a-\sqrt{b}$. **C** $\dfrac{1}{a}$. **D** $\dfrac{2}{a+b}$.

Lời giải.

Ta thấy

$$I=\lim_{x\to+\infty}\left(ax-\sqrt{bx^2-2x+2018}\right)$$
$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^2-b)x^2+2x-2018}{ax+\sqrt{bx^2-2x+2018}}$$
$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^2-b)x+2-\dfrac{2018}{x}}{a+\sqrt{b-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2018}{x^2}}}$$

Từ giả thiết, ta được $\begin{cases} a^2-b=0 \\ I=\dfrac{2}{a+\sqrt{b}} \end{cases}$. Do vậy, $I=\dfrac{1}{a}$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $\sqrt{2}a^3$, đáy là tam giác vuông cân với $AB=BC=a$. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích mặt bên SBC.

A $3\sqrt{2}a^2$. **B** $6a^2$. **C** $2\sqrt{2}a^2$. **D** $6\sqrt{2}a^2$.

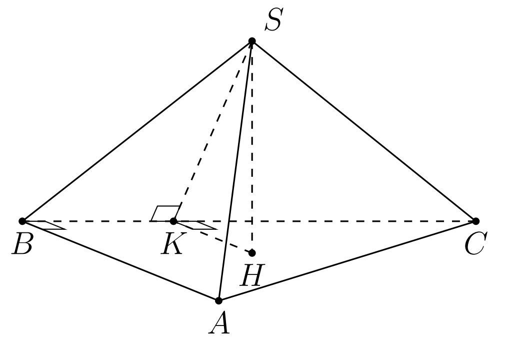
Lời giải.

Ta có $S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2}{2}$.

Ta được $\mathrm{d}(S,(ABC)) = \dfrac{3V_{S.ABC}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{\dfrac{a^2}{2}} = 6\sqrt{2}a$.

Gọi H là hình chiếu của S xuống mặt phẳng (ABC).

Gọi K là hình chiếu của H lên BC.



Ta có $\begin{cases} BC \perp HK \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHK) \Rightarrow BC \perp SK$.

Ta có $S_{\triangle SBC} = \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot SK$.

Trong tam giác vuông SHK, ta có $SK \geq SH \Rightarrow S_{\triangle SBC} \geq \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot SH = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot 6\sqrt{2}a = 3\sqrt{2}a^2$.

Do vậy, diện tích $\triangle SBC$ nhỏ nhất bằng $3\sqrt{2}a^2$.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho $f(x)$ là hàm số thỏa mãn $f(1) = f'(1) = 1$. Giả sử $g(x) = x^2 f(x)$. Tính $g'(1)$.

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2x \cdot f(x) + x^2 \cdot f'(x) \Rightarrow g'(1) = 2 \cdot 1 \cdot f(1) + 1^2 \cdot f'(1) = 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Cho hình trụ (T) có hai đáy là hai hình tròn $(O;r)$ và $(O';r)$. Lấy $A \in (O;r)$ và $B \in (O';r)$ sao cho $OA \perp O'B$. Biết rằng $AB = OA\sqrt{6}$. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình trụ (T).

A $S = 8\pi r^2$. **B** $S = 14\pi r^2$. **C** $S = 12\pi r^2$. **D** $S = 10\pi r^2$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của B trên $(O;r)$.

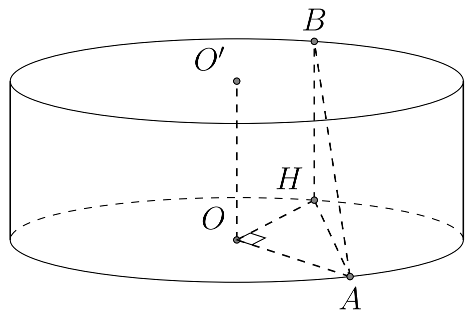
Ta có $\triangle OAH$ vuông cân tại $O \Rightarrow HA = r\sqrt{2}$.

Ta có $AB^2 = HB^2 + HA^2 \Rightarrow HB = 2r$.

Ta thấy thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông cạnh bằng $2r$.

Ta được bán kính mặt cầu ngoại tiếp (T) là $R = r\sqrt{2}$.

Vậy $S = 4\pi R^2 = 8\pi r^2$.



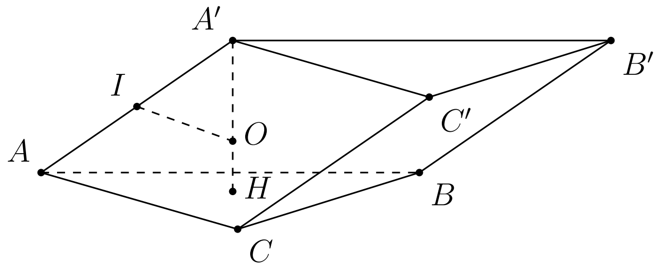
Chọn đáp án A □

Câu 35. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ trong đó tứ diện $A'ABC$ là tứ diện đều cạnh a. Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A'ABC$. Tính tỉ số thể tích của khối chóp $O.A'B'C'$ và lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $\dfrac{1}{4}$. **B** $\frac{\sqrt{2}}{6}$. **C** $\dfrac{1}{6}$. **D** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AA'.
Gọi H là trọng tâm $\triangle ABC$.
Trong mặt phẳng $(AA'H)$, từ I kẻ đường trung trực cạnh AA' cắt $A'H$ tại O.



Khi đó O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A'ABC$. Ta có $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \dfrac{\sqrt{6}a}{3}$.
Ta có $A'I \cdot A'A = A'O \cdot A'H$
$\Rightarrow A'O = \dfrac{A'I \cdot AA'}{A'H} = \dfrac{\sqrt{6}a}{4}$. Ta có $\dfrac{A'H}{A'O} = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \cdot \dfrac{4}{\sqrt{6}} = 3 \Rightarrow \dfrac{A'O}{A'H} = \dfrac{3}{4}$.
Ta có $\dfrac{V_{O.A'B'C'}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \dfrac{1}{4}$.
Chọn đáp án A □

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết $\left|f(0)\right| = \left|f(3)\right| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $I = \displaystyle\int_0^3 f'(x)\,\mathrm{d}x$.

A -1. **B** -3. **C** -2. **D** 0.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_0^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(3) - f(0)$.

Ta có

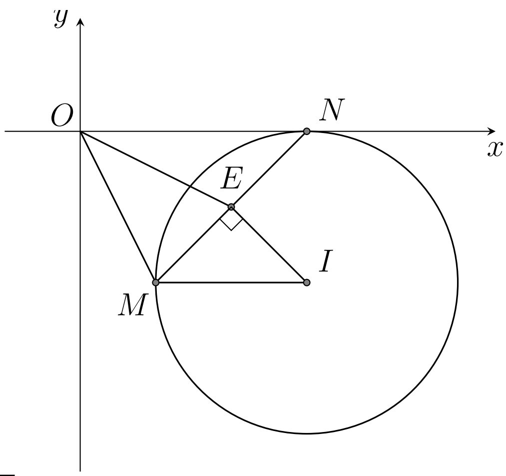
$$\begin{aligned} & |f(3) - f(0)| \le |f(3)| + |f(0)| \\ \Leftrightarrow\ & |f(3) - f(0)| \le 2 \\ \Leftrightarrow\ & -2 \le f(3) - f(0) \le 2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 37. Cho hai số phức z_1, z_2 thuộc tập hợp $S = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|iz - 2 - 3i\right| = 2\right\}$ và thỏa mãn $z_1 + z_2 = 4 - 2i$. Tính $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

A $A = 6$. **B** $A = 14$. **C** $A = 8$. **D** $A = 12$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2.
Gọi E là trung điểm MN.
Ta có

$$\begin{aligned} & |iz-2-3i| = 2 \\ \Leftrightarrow\ & |i\cdot(z-3+2i)| = 2 \\ \Leftrightarrow\ & |z-3+2i| = 2. \qquad (1) \end{aligned}$$

Từ (1) ta thấy M, N thuộc đường tròn tâm $I(3;-2)$ bán kính $R = 2$.
Ta có $E(2;-1) \Rightarrow \overrightarrow{EI} = (1;-1) \Rightarrow EI = \sqrt{2} \Rightarrow MN = 2\sqrt{2}$.
Trong $\triangle OMN$, ta có

$$\begin{aligned} & OE^2 = \frac{OM^2+ON^2}{2} - \frac{MN^2}{4} \\ \Rightarrow\ & OM^2+ON^2 = 14. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 38. Bất phương trình $5^{(\log_5 x)^2} + x^{\log_5 x} \leq 10$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A 5. B 6. C 8. D 9.

Lời giải.
Điều kiện $x > 0$. Đặt $t = \log_5 x \Rightarrow x = 5^t$, ta có

$$\begin{aligned} & 5^{(\log_5 x)^2} + x^{\log_5 x} \leq 10 \\ \Leftrightarrow\ & 5^{t^2} + \left(5^t\right)^t \leq 10 \\ \Leftrightarrow\ & 5^{t^2} \leq 5 \\ \Leftrightarrow\ & t^2 \leq 1 \\ \Rightarrow\ & -1 \leq \log_5 x \leq 1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{5} \leq x \leq 5 \\ \Rightarrow\ & x \in \left\{1;2;3;4;5\right\},\ (\text{ vì } x \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 39. S là tập tất cả các số nguyên m để phương trình $\cos^2 x = m + \sin x$ có nghiệm. Tìm tổng các phần tử của S.

A 0. B 1. C 2. D 3.

Lời giải.
Đặt $t = \sin x, t \in [-1;1]$ ta được $1 - t^2 = m + t \Leftrightarrow -t^2 - t + 1 = m$
Yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \min_{[-1;1]}\left(-t^2-2+1\right) \leq m \leq \max_{[-1;1]}\left(-t^2-2+1\right)$$

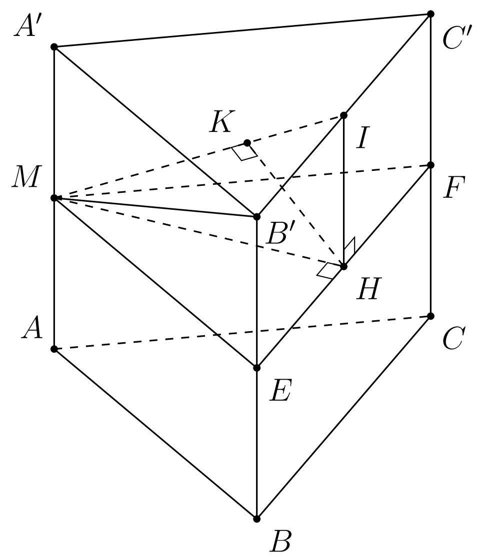
$$\Leftrightarrow\ -1 \le m \le \frac{5}{5}$$
$$\Rightarrow m \in \{-1;0;1\},\ (\text{ vì } m \in \mathbb{Z}).$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. M là trung điểm của AA'. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng MB' và BC.

(A) a. (B) $\frac{a}{2}$. (C) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. (D) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Gọi E, F lần lượt là trung điểm BB' và CC'.
Gọi H, I lần lượt là trung điểm EF và $B'C'$.
Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên MI.
Ta có $EF \parallel B'C' \Rightarrow EF \parallel (MB'C')$.
Ta được

$$\mathrm{d}(MB', BC) = 2\mathrm{d}(MB', EF) = 2\mathrm{d}(EF, (MB'C')) = 2HK.$$

Ta có $\triangle MEF$ đều cạnh a nên $MH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.
Ta có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{MH^2} + \frac{1}{HI^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
Vậy $\mathrm{d}(MB', BC) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Biết rằng tồn tại hai giá trị của m sao cho hàm số $y = \left|x^3 - 3x^2 + m\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 trên đoạn $[-2;3]$. Tính tổng hai giá trị đó.

(A) 18. (B) 24. (C) 20. (D) 22.

Lời giải.

Xét $f(x) = x^3 - 3x^2$, ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x$.
Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} f(-2) = -20 \\ f(0) = 0 \\ f(2) = -4 \\ f(3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[-2;3]} f(x) = -20 \\ \max\limits_{[-2;3]} f(x) = 0. \end{cases}$$

Với $x \in [-2;3]$ ta có

$$-20 \le x^3 - 3x^2 \le 0$$
$$\Rightarrow m - 20 \le x^3 - 3x^2 + m \le m$$
$$\Rightarrow \min\left|x^3 - 3x^2 + m\right| = \min\left\{|m-20|;|m|\right\}.$$

Trường hợp 1. $m < 0$, ta được $\min|x^3 - 3x^2 + m| = -m \Rightarrow m = -2$.
Trường hợp 2. $m \geq 20$, ta được $\min|x^3 - 3x^2 + m| = m - 20 \Rightarrow m = 22$.
Trường hợp 3. $0 \leq m < 20$, ta được $\min|x^3 - 3x^2 + m| = 0$ (không thỏa mãn đề bài).
Vậy tổng hai giá trị m thỏa mãn đề bài bằng 20.
Chọn đáp án C ☐

Câu 42. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $9^x - (m+1)3^x + 2m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 1)(x_2 + 1) \leq 3$?

A 0. **B** 1. C 2. D 3.

Lời giải.
Ta thấy

$$9^x - (m+1)3^x + 2m - 2 = 0 \quad (1)$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 2 \\ 3^x = m - 1. \end{array}\right.$$

Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq 3. \end{cases}$ (2)

Ta thấy

$$\begin{aligned} & (x_1 + 1) \cdot (x_2 + 1) \leq 3 \\ \Rightarrow\ & [\log_3(m-1) + 1] \cdot (\log_3 2 + 1) \leq 3 \\ \Leftrightarrow\ & \log_3 6 \cdot \log_3 [3 \cdot (m-1)] \leq \log_3 27 \\ \Leftrightarrow\ & \log_3 [3 \cdot (m-1)] \leq \log_6 27 \\ \Rightarrow\ & \log_3 [3 \cdot (m-1)] < 2 \\ \Rightarrow\ & 3 \cdot (m-1) < 9 \\ \overset{(2)}{\Rightarrow}\ & \begin{cases} 1 < m < 4 \\ m \neq 3 \end{cases} \\ \Rightarrow\ & m = 2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B ☐

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm I và bán kính bằng 3 sao cho luôn tiếp xúc với mặt phẳng Oxy. Khi các đường tròn giao tuyến của (S) với hai mặt phẳng tọa độ còn lại có diện tích lớn nhất thì tâm I của mặt cầu thuộc mặt phẳng nào?

A $x + y + z - 1 = 0$. B $x - y + z = 0$. C $x - 2y + 1 = 0$. **D** $x + y = 0$.

Lời giải.
Từ giả thiết ta được tâm I luôn thuộc trục $Oz \Rightarrow I \in (P)\colon x + y = 0$.
Chọn đáp án D ☐

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 2z + 3 = 0$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+1}{1}$, $d_2\colon \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+3}{1}$. Hai điểm $A \in d_1$ và $B \in d_2$ sao cho AB song song với mặt phẳng (P). Khi A, B thay đổi, tập hợp trung điểm của AB là

A một đường thẳng có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-9; 8; -5)$.
B một đường thẳng có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-5; 9; 8)$.
C một mặt phẳng có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -2; -5)$.
D một mặt phẳng có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 5; -2)$.

Lời giải.

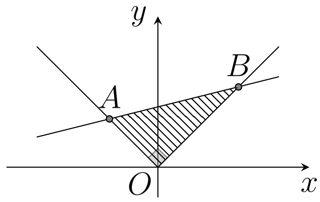
Ta có $A\left(3a; 1-a; -1+a\right), B(2+b; 1-2b; -3+b) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2+b-3a; -2b+a; -2+b-a)$.
Ta có $AB \parallel (P) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_{(P)} = 0 \Rightarrow 2b = 3a$.
Toạ độ trung điểm $I\left(\dfrac{2+3a+b}{2}; \dfrac{2-a-2b}{2}; \dfrac{-4+a+b}{2}\right) \Rightarrow I\left(1+\dfrac{3}{2}b; 1-\dfrac{4}{3}b; -2+\dfrac{5}{6}b\right)$.
Vậy tập hợp trung điểm của AB là một đường thẳng có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-9; 8; -5)$.
Chọn đáp án A □

Câu 45. Với mỗi số thực $m \in (-1; 1)$, kí hiệu S_m là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = |x|$ và đường thẳng $d\colon y = mx + 1$. Khi đó giá trị nhỏ nhất S của S_m thỏa

A $0 < S \le \dfrac{2}{3}$. **B** $\dfrac{2}{3} < S \le \dfrac{4}{3}$. **C** $\dfrac{4}{3} < S \le 2$. **D** $S > 2$.

Lời giải.

Gọi A, B là giao điểm của đồ thị hàm số $y = mx + 1$ và $y = |x|$.
Ta được $A\left(\dfrac{-1}{m+1}; \dfrac{1}{m+1}\right), B\left(\dfrac{1}{1-m}; \dfrac{1}{1-m}\right)$.



Ta có

$$\begin{aligned} S_m &= \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1+m} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1-m} \\ &= \frac{1}{(1+m)\cdot(1-m)} \\ &\ge \frac{1}{\frac{1}{4}\left[(1+m)+(1-m)\right]^2} \\ &\ge 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho hai số thực $a, b > 1$ sao cho tồn tại số thực $0 < x \ne 1$ thỏa mãn $a^{\log_b x} = b^{\log_a (x^2)}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \ln^2 a + \ln^2 b - \ln(ab)$.

A $\dfrac{1}{4}$. **B** $-\dfrac{3+2\sqrt{2}}{12}$. **C** $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$. **D** $\dfrac{1-3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$a^{\log_b x} = b^{\log_a (x^2)}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x^{\log_b a} = (x^2)^{\log_a b}\\
&\Rightarrow \log_b a = 2\cdot \log_a b\\
&\Leftrightarrow \frac{\ln a}{\ln b} = 2\cdot\frac{\ln b}{\ln a}\\
&\Leftrightarrow \ln^2 a = 2\cdot \ln^2 b\\
&\Rightarrow \ln a = \sqrt{2}\ln b,\ (\text{vì } a,b>1).
\end{aligned}$$

Ta được

$$\begin{aligned}
P &= \ln^2 a + \ln^2 b - \ln(ab)\\
&= 3\ln^2 b - \left(1+\sqrt{2}\right)\ln b\\
&= \left(\sqrt{2}\ln b - \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{12}\\
&\geq -\frac{3+2\sqrt{2}}{12}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

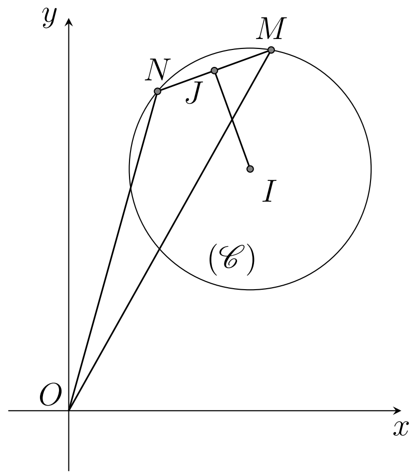
Câu 47. Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn hệ thức $\left|z-3-4i\right| = 2$ và $\left|z_1 - z_2\right| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left|z_1\right|^2 - \left|z_2\right|^2$.

A -10. **B** -5. **C** $-6-2\sqrt{5}$. **D** $-4-3\sqrt{5}$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức z_1 và z_2.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} M, N \in \mathscr{C}(I;2) \text{ với } I(3;4)\\ MN = 1.\end{cases}$



Ta thấy

$$\begin{aligned}
P &= |z_1|^2 - |z_2|^2\\
&= \overrightarrow{OM}^2 - \overrightarrow{ON}^2\\
&= \left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}\right)\\
&= \overrightarrow{NM}\cdot\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}\right)\\
&= 2\cdot\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{OJ},\ (\text{với } J \text{ là trung điểm } MN)\\
&= 2\cdot\overrightarrow{NM}\cdot\left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IJ}\right)\\
&= 2\cdot\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{OI},\ (\text{vì } MN\perp IJ)\\
&= 2\cdot MN\cdot OI\cdot\cos(\overrightarrow{NM},\overrightarrow{OI})\\
&\geq 2\cdot MN\cdot OI\cdot(-1)\\
&\geq -10.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 48. Cuối năm trường PTNK tổ chức 3 tiết mục Flashmob cho các bạn khối 12 chia tay trường. Các bạn 12T đều tham gia nhưng mỗi người chỉ được đăng kí không quá 2 tiết mục. Biết lớp 12T có 20 bạn, hỏi có bao nhiêu cách để lớp lựa chọn?

A 6^{20}. **B** $3^{20}+2^{20}-1$. **C** 5^{20}. **D** $3^{21}+1$.

Lời giải.

Mỗi học sinh có hai phương thức tham gia như sau

- tham gia một tiết mục có 3 cách,
- tham gia hai tiết mục có 3 cách.

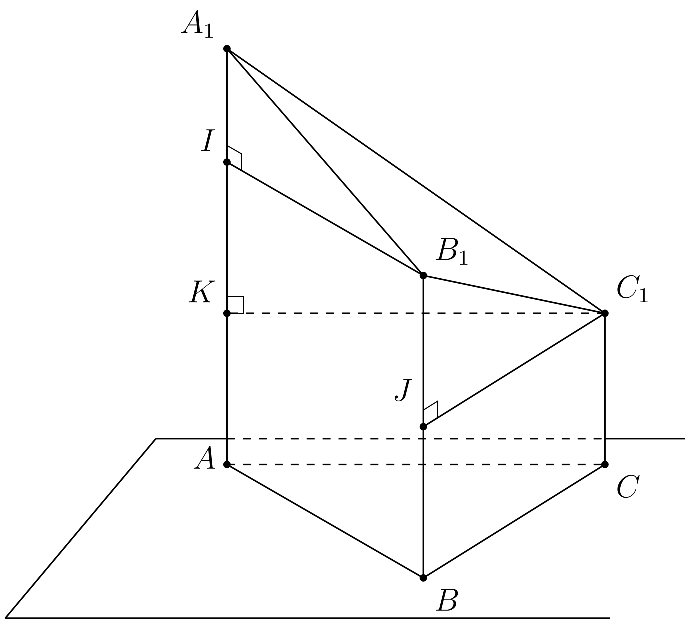
Tóm lại, mỗi học sinh có 6 cách lựa chọn, nên số cách lựa chọn cho lớp 12T là 6^{20}.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho ba mặt cầu có bán kính R_1, R_2, R_3 đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Một mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu lần lượt tại A, B, C. Biết tam giác ABC có số đo ba cạnh lần lượt là $2, 3, 4$. Tìm tích $R_1 \cdot R_2 \cdot R_3$.

A 6. **B** 3. **C** $2\sqrt{6}$. **D** 24.

Lời giải.



Giả sử $R_1 > R_2 > R_3$.

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là tâm ba mặt cầu có bán kính R_1, R_2, R_3.

Gọi I là hình chiếu của B_1 lên AA_1.

Gọi J là hình chiếu của C_1 lên BB_1.

Gọi K là hình chiếu của C_1 lên CC_1.

Ta có $A_1B_1 = R_1 + R_2$.

Ta có $\begin{cases} AB = A_1B_1 \\ A_1I = R_1 - R_2. \end{cases}$

Do vậy

$$\begin{aligned} & AB^2 = A_1B_1^2 - A_1I^2 \\ \Leftrightarrow\ & AB^2 = (R_1+R_2)^2 - (R_1-R_2)^2 \\ \Leftrightarrow\ & AB^2 = 4 \cdot R_1 \cdot R_2. \end{aligned}$$

Tương tự như trên, ta được $AB^2 \cdot AC^2 \cdot BC^2 = 4^3 \cdot (R_1 \cdot R_2 \cdot R_3)^2 \Leftrightarrow R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 - 3x + b$ có đồ thị (C). Hỏi có bao nhiêu cặp (a, b) nguyên dương để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt?

A 0. **B** 4. **C** 1. **D** vô số.

Lời giải.

Cách 1:

Với $a, b \in \mathbb{Z}^+$ ta có

$$x^3 + ax^2 - 3x + b = 0 \quad (1)$$
$$\Leftrightarrow -x^3 + 3x = ax^2 + b.$$

Xét $f(x) = -x^3 + 3x$, $f'(x) = -3x^2 + 3$.

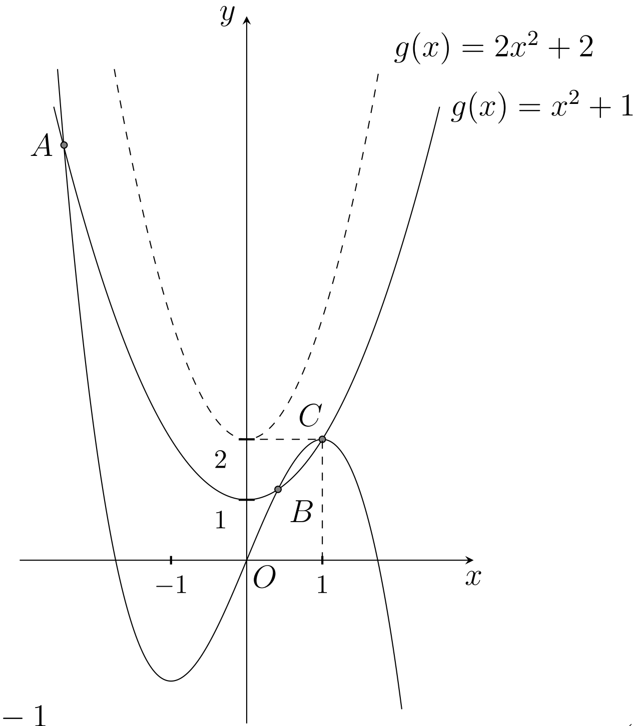
Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow f(-1) = -2 \\ x = 1 \Rightarrow f(1) = 2. \end{array}\right.$

Xét $g(x) = ax^2 + b$.

Ta có $\begin{cases} \min\limits_{[0;+\infty)} g(x) = g(0) = b. \\ \max\limits_{[0;+\infty)} f(x) = f(1) = 2. \end{cases}$

Phương trình (1) có 3 nghiệm tương đương đồ thị của $f(x)$ và $g(x)$ có 3 điểm chung.

Do vậy, ta được $0 < b < 2 \Rightarrow b = 1$.



Với $b = 1$ và $x \neq 0$ từ (1) ta được $a = \dfrac{-x^3 + 3x - 1}{x^2}$. (2)

Xét $h(x) = -x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$. Ta có $h'(x) = -1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{-x^3 - 3x + 2}{x^3}$.

Ta có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\left(\sqrt[3]{-1+\sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1+\sqrt{2}}\right) \approx 0{,}596$.

Ta có bảng biến thiên của $h(x)$

x	$-\infty$	0		$0{,}596$		$+\infty$
$h'(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow$	$h(0{,}596) \approx 1{,}62$	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $a = 1$ thì phương trình (2) có 3 nghiệm.

Vậy để phương trình (1) có 3 nghiệm thì $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1. \end{cases}$

Cách 2:

Gọi x_1, x_2, x_3 là các nghiệm của phương trình $x^3 + ax^2 - 3x + b = 0$.

Ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -3. \\ x_1x_2x_3 = -b \end{cases}$

Ta có

$$(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2 \geq 3x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)$$
$$\Rightarrow ab \leq 3$$
$$\Rightarrow (a, b) \in \big\{(1,1); (1,2); (1,3); (2,1); (3,1)\big\}.$$

Thử lại, ta thấy chỉ có $(1, 1)$ thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. B	3. A	4. C	5. D	6. B	7. D	8. C	9. A	10. B
11. A	12. A	13. B	14. C	15. A	16. B	17. C	18. B	19. A	20. C
21. A	22. D	23. C	24. D	25. B	26. B	27. A	28. C	29. C	30. D
31. C	32. A	33. D	34. A	35. A	36. C	37. B	38. A	39. A	40. D
41. C	42. B	43. D	44. A	45. B	46. B	47. A	48. A	49. B	50. C

148 ĐỀ THI THỬ TRƯỜNG THPT LỤC NGẠN SỐ 1 - BẮC GIANG, LẦN 2, 2017-2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Hai điểm M_1, M_2 nằm trên hai nhánh của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x-9}{x-3}$. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng M_1M_2 là

A. $2\sqrt{5}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{6}$. D. $3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi $M_1\left(a+3; 4+\dfrac{3}{a}\right), M_2\left(-b+3; 4-\dfrac{3}{b}\right)$ $(a, b > 0)$. Khi đó, $M_1M_2^2 = (a+b)^2 + \left(\dfrac{3}{a}+\dfrac{3}{b}\right)^2 \geq 4ab + 9\cdot\dfrac{4}{ab} \geq 4\cdot 2\cdot 3 = 24$. Suy ra $M_1M_2 \geq 2\sqrt{6}$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = \sqrt{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ là

A. $F(x) = x^3 + x^2 + 5$.
B. $F(x) = x^3 + x + C$.
C. $F(x) = x^3 + x^2 + 5x + C$.
D. $F(x) = x^3 + x^2 + C$.

Lời giải.

Rõ ràng nguyên hàm của $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ là $F(x) = x^3 + x^2 + 5x + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Một hình nón có chiều cao bằng $a\sqrt{3}$ và bán kính đáy bằng a. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

A. $2\pi a^2$. B. $\sqrt{3}\pi a^2$. C. πa^2. D. $3\pi a^2$.

Lời giải.

Đường sinh của hình nón là $l = \sqrt{R^2 + h^2} = 2a$. Do đó, diện tích xung quanh là $S_{xq} = \pi Rl = 2\pi a^2$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $4^x - 8\cdot 2^x + 4 = 0$ bằng bao nhiêu?

A. 1. B. 0. C. 2. D. 8.

Lời giải.

Dễ thấy phương trình có hai nghiệm phân biệt. Theo Vi-et, $2^{x_1}\cdot 2^{x_2} = 4$. Suy ra $2^{x_1+x_2} = 4$, hay $x_1 + x_2 = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-3}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.
B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

(D) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho có tập xác định là $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$, và $y' = \dfrac{-6}{(x-3)^2} > 0\, \forall x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

Do đó, hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.

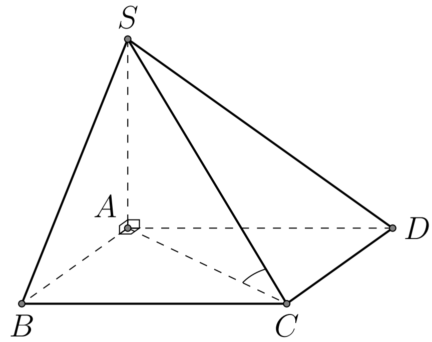
Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, với $AB = 2a, AD = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, và có độ dài bằng $a\sqrt{3}$. Cô-sin của góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$. (B) $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$. (C) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **D** $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Lời giải.

Do SA vuông góc với mặt đáy nên góc giữa SC và mặt đáy chính là góc $\widehat{SCA}$. Ta tính được $AC = a\sqrt{5}, SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2\sqrt{2}a$, và $\cos \widehat{SCA} = \dfrac{CA}{CS} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 (2x-1)\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

(A) 1. (B) 2. (C) 3. **D** 0.

Lời giải.

$I = \displaystyle\int_0^1 (2x-1)\mathrm{d}x = \left(x^2 - x\right)\Big|_0^1 = 0.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (3; 2; 1)$, $\vec{b} = (-2; 0; 1)$. Độ dài của véc-tơ $\vec{a} + \vec{b}$ bằng

(A) 1. (B) 2. **C** 3. (D) $\sqrt{2}$.

Lời giải.

$\vec{a} + \vec{b} = (3 + (-2); 2 + 0; 1 + 1) = (1; 2; 2)$, nên $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 4; 1), B(-1; 1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z + 3 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) là

A $2y + 3z - 11 = 0$. (B) $2y - z + 6 = 0$. (C) $2y - 3z + 6 = 0$. (D) $2y - 3z - 5 = 0$.

Lời giải.

(α) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_{(P)}]$, trong đó $\vec{n}_{(P)} = (1; -3; 2)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P). Từ đó, ta tính được $\vec{n} = 4(0; 2; 3)$. Phương trình mặt phẳng (α) là $2(y-4) + 3(z-1) = 0$, hay $2y + 3z - 11 = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.

(B) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1 hoặc 2.

(C) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

(D) Hàm số có đúng 2 cực trị.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên, dễ dàng ta thấy chỉ có khẳng định "Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$" là đúng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) : $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

(A) $I(1; 2; 3), R = 3$.

(B) $I(-1; 2; -3), R = 3$.

(C) $I(1; -2; 3), R = 3$.

(D) $I(1; 2; -3), R = 3$.

Lời giải.

Dễ thấy $I(1; -2; 3), R = 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\sqrt{3}\sin x + \cos x = m$ có nghiệm.

(A) $\left[\begin{array}{l} m \geq 2, \\ m \leq -2. \end{array}\right.$

(B) $\left[\begin{array}{l} m \geq 1, \\ m \leq -1. \end{array}\right.$

(C) $-2 \leq m \leq 2$.

(D) $-1 \leq m \leq 1$.

Lời giải.

Điều kiện có nghiệm là $m^2 \leq (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$. Vậy, $-2 \leq m \leq 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;0), B(0;2;0), C(0;0;2)$. Bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$ bằng

A $\dfrac{2}{3+\sqrt{3}}$. B $\dfrac{4}{3+2\sqrt{3}}$. C $\dfrac{3}{6+2\sqrt{3}}$. D $\dfrac{5}{6+2\sqrt{3}}$.

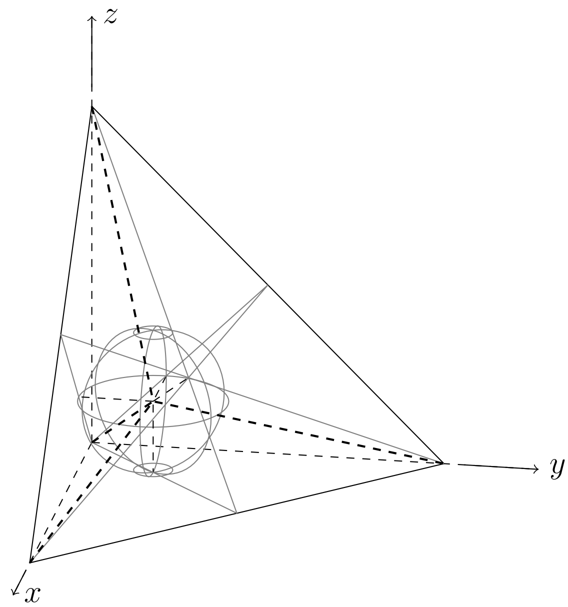
Lời giải.

Áp dụng công thức

$$V = \frac{1}{3}\left(S_{\Delta ABC} + S_{\Delta OAB} + S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OCA}\right) r,$$

ta suy ra

$$r = \frac{3V}{S_{\Delta ABC} + S_{\Delta OAB} + S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OCA}} = \frac{2}{3+\sqrt{3}}.$$



Chọn đáp án A □

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;0), M(1;1;1)$. Mặt phẳng (P) thay đổi qua AM cắt các tia Oy, Oz lần lượt tại B, C. Giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác ABC bằng bao nhiêu?

A $5\sqrt{6}$. B $3\sqrt{6}$. C $4\sqrt{6}$. D $2\sqrt{6}$.

Lời giải.

Gọi $B(0;b;0), C(0;0;c)$, với $b, c > 0$. Khi đó phương trình mặt phẳng (P) (theo dạng đoạn chắn) là $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$. Do (P) đi qua $M(1;1;1)$ nên $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$. Suy ra $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow bc = 2(b+c)$. Từ đây, cũng suy ra $bc \geq 16$. Mặt khác, dễ tính được diện tích tam giác ABC là $S = \sqrt{b^2+c^2+\dfrac{b^2c^2}{4}}$. Do đó, $S \geq \sqrt{32+64} = 4\sqrt{6}$, đẳng thức đạt được khi $b = c = 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;3;4)$. Gọi A, B, C là hình chiếu của M trên các trục tọa độ. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A $6x+4y+3z-1=0$. B $6x+4y+3z+1=0$.
C $6x+4y+3z-12=0$. D $6x+4y+3z+12=0$.

Lời giải.

Dễ thấy, $A(2;0;0), B(0;3;0), C(0;0;4)$. Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC) là $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$, hay tương đương với $6x+4y+3z-12=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu giá cho thuê mỗi căn hộ là 2 triệu đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều được thuê, và nếu tăng giá thuê mỗi căn hộ thêm 100 ngàn đồng mỗi tháng thì có 2 căn hộ bị bỏ trống. Hỏi công ty phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu mỗi tháng để tổng thu nhập từ việc cho thuê nhà là lớn nhất?

(A) 2.225.000đ. **B** 2.250.000đ. (C) 2.200.000đ. (D) 2.100.000đ.

Lời giải.

Giả sử giá thuê mỗi căn hộ là 2 triệu $+x$ trăm ngàn (đồng) (x nguyên dương). Khi đó, số căn hộ bị bỏ trống là $2x$. Do đó, tổng số tiền (đơn vị trăm ngàn đồng) cho thuê nhà là $S = (50-2x)(20+x) = -2x^2 + 10x + 1000 = -2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 1012.5 \le 1012.5$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 2.5$. Vậy giá thuê mỗi căn hộ nên là 2.250.000 đồng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $\int\limits_1^3 xf(x)\mathrm{d}x = 5$, tính $I = \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A $I = \frac{5}{2}$. (B) $I = \frac{7}{2}$. (C) $I = \frac{9}{2}$. (D) $I = \frac{11}{2}$.

Lời giải.

Trong tích phân $\int\limits_1^3 xf(x)\mathrm{d}x$, đặt $x = 4-t$, ta được $5 = \int\limits_3^1 (4-t)f(4-t)\mathrm{d}(4-t) = \int\limits_1^3 (4-t)f(t)\mathrm{d}t = 4\int\limits_1^2 f(t)\mathrm{d}t - \int\limits_1^3 tf(t)\mathrm{d}t$. Suy ra $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t = \frac{5}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương cạnh 1 bằng

A 3π. (B) 12π. (C) π. (D) 6π.

Lời giải.

Đường chéo của hình lập phương bằng $\sqrt{3}$, và cũng là đường kính của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương, suy ra bán kính mặt cầu là $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Diện tích cần tính bằng $4\pi R^2 = 3\pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 2, u_n = 2u_{n-1} + 3n - 1 \, \forall n \ge 2$. Biết rằng công thức tổng quát của dãy số đã cho có dạng $u_n = a \cdot 2^n + bn + c \, \forall n \ge 2$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Khi đó, tổng $a+b+c$ có giá trị bằng

(A) -4. (B) 4. **C** -3. (D) 3.

Lời giải.

Hệ thức truy hồi được viết lại $u_n + 3n + 5 = 2(u_{n-1} + 3(n-1) + 5)$. Do đó, nếu đặt $v_n = u_n + 3n + 5$ thì (v_n) là cấp số nhân với công bội 2 và $v_1 = 10$. Suy ra $v_n = 5 \cdot 2^n$ và $u_n = 5 \cdot 2^n - 3n - 5$. Dẫn đến, $a + b + c = 5 - 3 - 5 = -3$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^1 + C_n^2 = 55$. Xác định hệ số chứa x^5 trong khai triển của biểu thức $\left(x^3 + \dfrac{2}{x^2}\right)^n$.

A 8064. B 3360. C 8440. D 6840.

Lời giải.

$C_n^1 + C_n^2 = 55 \Leftrightarrow n + \dfrac{n(n+1)}{2} = 55 \Leftrightarrow n = 10$ (do n nguyên dương). Xét biểu thức $\left(x^3 + \dfrac{2}{x^2}\right)^{10} = \sum\limits_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{3(10-k)} 2^k x^{-2k} = \sum\limits_{k=0}^{10} C_{10}^k 2^k x^{30-5k}$. Số hạng chứa x^5 ứng với k thỏa mãn $30 - 5k = 5$, hay $k = 5$. Hệ số cần tìm là $C_{10}^5 2^5 = 8064$.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Có 10 quyển sách toán giống nhau, 11 quyển sách lý giống nhau và 9 quyển sách hóa giống nhau. Nhà trường định thưởng sách cho 15 học sinh đạt kết quả cao nhất trong kỳ thi thử của trường, mỗi học sinh được thưởng 2 cuốn sách khác loại. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách?

A $C_{15}^7 C_9^3$. B $C_{15}^6 C_9^4$. C $C_{15}^3 C_9^4$. D C_{30}^2.

Lời giải.

Chọn 10 trong số 15 học sinh để tặng 10 cuốn sách toán trước, có C_{15}^{10} cách. 5 người còn lại, mỗi người (bắt buộc phải) nhận 1 sách lý và 1 sách hóa. Còn lại 6 sách lý và 4 sách hóa để trao cho 10 người đầu tiên (mỗi người đã có 1 sách toán), số cách trao là C_{10}^6. Vì vậy, đáp số bài toán là $C_{15}^{10} C_{10}^6 = C_{15}^6 C_9^4$.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Phương trình $\sin 2x = \cos x$ có nghiệm là

A $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

B $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}, \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

C $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

D $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3}, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $\sin 2x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$. Từ đó, ta tìm được nghiệm là

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3}, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Chọn đáp án D □

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

A $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

B $V=\pi^2\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

C $V=\pi^2\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

D $V=2\pi\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Nghiệm của phương trình $\log_4(x-1)=3$ là

A 66. **B** 63. **C** 68. **D** 65.

Lời giải.

$x=1+4^3=65$.

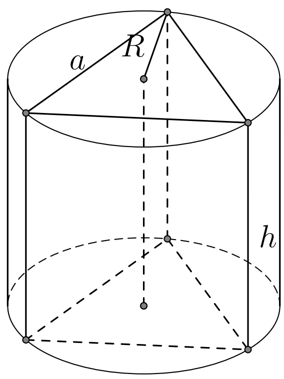
Chọn đáp án D □

Câu 25. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h.

A $V=\dfrac{\pi a^2h}{9}$. **B** $V=\dfrac{\pi a^2h}{3}$. **C** $V=3\pi a^2h$. **D** $V=\pi a^2h$.

Lời giải.

Bán kính đáy là $R=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Thể tích cần tính là $V=S\cdot h=\pi R^2h=\dfrac{\pi a^2h}{3}$.



Chọn đáp án B □

Câu 26. Cho parabol $(P): y=x^2+2$ và hai tiếp tuyến của (P) tại các điểm $M(-1;3)$ và $N(2;6)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và hai tiếp tuyến đó bằng

A $\dfrac{9}{4}$. **B** $\dfrac{13}{4}$. **C** $\dfrac{7}{4}$. **D** $\dfrac{21}{4}$.

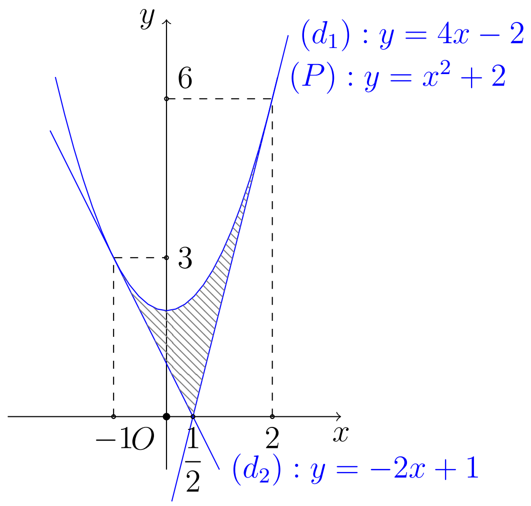
Lời giải.

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại $N(2;6)$ là (d_1) : $y=4x-2$.

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại $M(-1;3)$ là (d_2) : $y=-2x+1$.

(d_1) cắt (d_2) tại điểm $\left(\dfrac{1}{2};0\right)$. Ta có diện tích

$$S=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}}(x^2+2+2x-1)\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}(x^2+2-4x+2)\mathrm{d}x=\frac{7}{4}.$$



Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

(A) $(-\infty; -2)$. (B) $(0; +\infty)$. $\boxed{C}$ $(-2; 0)$. (D) $\mathbb{R}$.

Lời giải.

$y' = 3x^2 + 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2. \end{array}\right.$ Dễ thấy hàm số nghịch biến trên $(-2; 0)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

(A) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2^x + 2^{2-x}$ bằng 4.

(B) Hàm số $y = 2^{3-x}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

$\boxed{C}$ Hàm số $y = \log_2(x^2 + 1)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(D) Hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 1)$ đạt cực đại tại $x = 0$.

Lời giải.

Ta có $2^x + 2^{2-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{2-x}} = 4$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 1$. Suy ra **A** đúng.

Hàm số $y = 2^{3-x}$ có đạo hàm $y' = -\ln 2 \cdot 2^{3-x} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $y = 2^{3-x}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Vậy **B** đúng.

Hàm số $y = \log_2(x^2 + 1)$ có đạo hàm $y' = \dfrac{2x}{\ln 2 \cdot (x^2 + 1)} < 0, \forall x < 0$. Do đó Hàm số $y = \log_2(x^2 + 1)$ nghịch biến trên $(-\infty; 0)$. Vậy **C** sai.

Hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 1)$ có đạo hàm $y' = -\dfrac{2x}{\ln 2 \cdot (x^2 + 1)} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $y'' = \dfrac{2x^2 - 2}{\ln 2 \cdot (x^2 + 1)^2} \Rightarrow y''(0) = \dfrac{-2}{\ln 2} < 0$. Do đó $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 1)$ đạt cực đại tại $x = 0$. Vậy **D** đúng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(0; -1; 4)$ và có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 2; -1)$. Phương trình của (P) là

(A) $2x - 2y - z - 6 = 0$. (B) $2x + 2y + z - 6 = 0$.

$\boxed{C}$ $2x + 2y - z + 6 = 0$. (D) $2x + 2y - z - 6 = 0$.

Lời giải.

Phương trình của $(P) : 2x + 2(y + 1) - (z - 4) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y - z + 6 = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x - 3) + \log_2 x \geq 2$ là

(A) $(3; +\infty)$. $\boxed{B}$ $[4; +\infty)$.

(C) $(-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$. (D) $(3; 4]$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 3$. Khi đó BPT $\Leftrightarrow (x - 3)x \geq 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -1 \\ x \geq 4 \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm $S = [4; +\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Lớp 12A2 có 10 học sinh giỏi, trong đó có 6 nam và 4 nữ. Cần chọn ra 3 học sinh đi dự hội nghị "Đổi mới phương pháp dạy và học" của nhà trường. Giả sử tất cả các học sinh đó đều xứng đáng được đi dự đại hội như nhau. Tính xác suất để có đúng hai học sinh nam và một học sinh nữ được chọn.

A $\frac{2}{5}$. B $\frac{1}{3}$. C $\frac{2}{3}$. **D** $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Số cách chọn 3 học sinh trong 10 học sinh là C_{10}^3.

Số cách chọn 3 học sinh trong đó có 2 nam và 1 nữ là $C_6^2 \cdot C_4^1$.

Xác suất để có 2 học sinh nam và 1 học sinh nữ được chọn là $P = \dfrac{C_6^2 \cdot C_4^1}{C_{10}^3} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Với các số thực x, y dương bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $\log_2(x+y) = \log_2 x + \log_2 y$.

B $\log_2\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 y}$.

C $\log_2\left(\dfrac{x^2}{y}\right) = 2\log_2 x - \log_2 y$.

D $\log_2(xy) = \log_2 x \cdot \log_2 y$.

Lời giải.

$\log_2\left(\dfrac{x^2}{y}\right) = \log_2 x^2 - \log_2 y = 2\log_2 x - \log_2 y$

Chọn đáp án C □

Câu 33. Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$?

A 5. B 6. **C** 7 . D 4.

Lời giải.

Hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$ là hàm bậc 3 có hệ số $a = -1 < 0$ nên điều kiện cần và đủ để $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$ nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$ là $y' = -3x^2 - 2mx + 4m + 9 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = m^2 + 12m + 27 \leq 0 \Leftrightarrow -9 \leq m \leq -3$

Chọn đáp án C □

Câu 34. Biết rằng $\displaystyle\int_1^2 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = a\ln 3 + b\ln 2 + c$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.

A $S = 0$. B $S = 1$. C $S = 2$. D $S = -2$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases}$ ta có $\begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x \\ v = x+1 \end{cases}$

từ đây suy ra $\int\limits_1^2 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = (x+1)\ln(x+1)\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \mathrm{d}x = 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1$. Vậy $a+b+c=0$.

Chọn đáp án A □

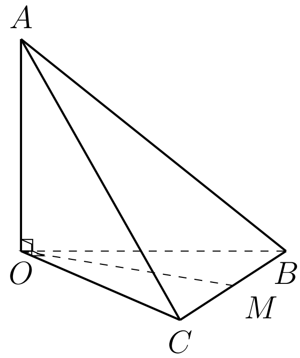
Câu 35. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OB = OC = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC.

(A) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (B) $\dfrac{a}{2}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. (D) $\dfrac{3a}{2}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm CB, ta có: $OM \perp BC$. Mặt khác vì OA, OB, OC đôi một vuông góc nên $OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp OM$. Do đó khoảng cách giữa OA và BC là OM.

Ta có $OM = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$



Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm AA', φ là góc giữa hai mặt phẳng $(B'MD)$ và $(ABCD)$. Tính $\cos\varphi$.

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. (B) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

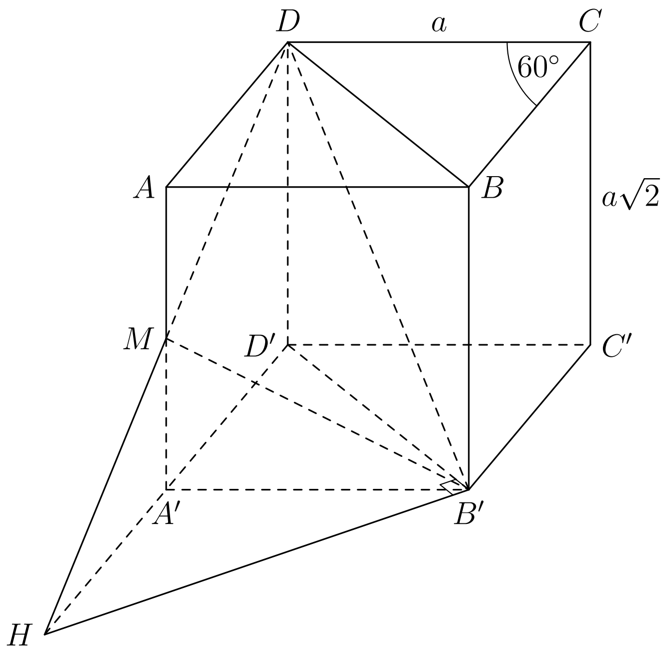
Gọi H là giao của MD và $A'D'$. Khi đó $B'H$ là giao tuyến của $(A'B'C'D')$ và $(B'MD)$. Vì M là trung điểm AA' nên theo định lý Talet ta có $A'H = AD = A'D'$, $MD = MH$.

Trong tam giác $D'B'H$ có trung tuyến $B'A'$ bằng một nửa $D'H$ nên tam giác $D'B'H$ vuông tại B' (1).

Mặt khác dễ thấy $\triangle ADM = \triangle A'B'M$ nên $MD = B'D = MH$, do đó ta giác $DB'H$ vuông tại B' (2).

Từ (1) và (2) ta có góc giữa $(B'MD)$ và $(ABCD)$ là góc giữa DB' và $D'B'$ và bằng $\widehat{DB'D'}$.

Vì tam giác BCD cân có $\widehat{DCB} = 60^\circ$ nên BCD đều, suy ra $DB = a$ Xét tam giác $DD'B'$ vuông tại D' có $D'B' = a$, $DD' = a\sqrt{2}$, $DB' = \sqrt{D'B'^2 + D'D^2} = a\sqrt{3}$ suy ra $\cos\widehat{DB'D'} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



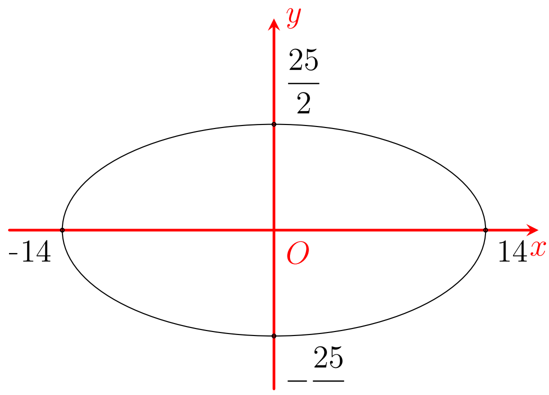
Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Bổ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn 28cm, trục nhỏ 25cm. Biết cứ 1000cm^3 dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20.000đ. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

A 183.000đ. (B) 180.000đ. (C) 185.000đ . (D) 190.000đ.

Lời giải.

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó phương trình của Elip là $\dfrac{x^2}{14^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{25}{2}\right)^2}=1$. Suy ra phương trình nửa đường Elip nằm phía trên trục hoành là $y=\dfrac{25}{28}\sqrt{196-x^2}$.



Thể tích của quả dưa hấu là

$$V=\pi\int\limits_{-14}^{14}\left(\frac{25}{28}\sqrt{196-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=9162\text{cm}^3$$

. Vậy từ quả dưa hấu có thể thu được số tiền là $20.000\cdot 9.162=183.000$đ.

Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-x^2-8x$ trên $[1;3]$ bằng

(A) -8. **B** -6. (C) $\dfrac{176}{27}$. (D) -4.

Lời giải.

$$y'=3x^2-2x-8,\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-\dfrac{4}{3}\end{array}\right..$$

Ta có $f(1)=-8,\ f(2)=-12,\ f(x)=-6.$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-x^2-8x$ trên $[1;3]$ bằng -6.

Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Trong một buổi khiêu vũ có 20 nam và 18 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một đôi nam nữ để khiêu vũ?

(A) C_{38}^2. (B) A_{38}^2. (C) $C_{20}^2C_{18}^1$. **D** $C_{20}^1C_{18}^1$.

Lời giải.

Chọn một nam trong 20 nam có C_{20}^1 cách chọn.

Chọn một nữ trong 18 nữ có C_{18}^1 cách chọn.

Theo quy tắc nhân có $C_{20}^1C_{18}^1$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Cho hàm số $y=3x^4-2mx^2+2m+m^4$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 3.

(A) $m = -3$. **B** $m = 3$. (C) $m = 4$. (D) $m = -4$.

Lời giải.

$y' = 12x^3 - 4mx^2 = 4x(3x^2 - m)$. Hàm số $y = 3x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có 3 cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt. Điều này tương đương với $m > 0$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\dfrac{m\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$.

Tọa độ các điểm cực trị là $A(0; 2m+m^4)$, $B\left(-\sqrt{\dfrac{m}{3}}; m^4 - \dfrac{m^2}{3} + 2m\right)$, $C\left(\sqrt{\dfrac{m}{3}}; m^4 - \dfrac{m^2}{3} + 2m\right)$.

Ta có $S_{\triangle ABC} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{m}{3}} \cdot \dfrac{m^2}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Cho hàm số $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x)$. Tập nghiệm bất phương trình $y' > 0$ là

(A) $(-\infty; -1)$. **B** $(-\infty; 0)$. (C) $(1; +\infty)$. (D) $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 0 \end{array}\right.$

$y' = -\dfrac{2x - 2}{(x^2 - 2x) \cdot \ln 3} \Rightarrow y' > 0 \Leftrightarrow 2x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 1$. Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; 0)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{3}{3x - 1}$, $f(0) = 1$, $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

A $5\ln 2 + 3$. (B) $5\ln 2 - 2$. (C) $5\ln 2 + 4$. (D) $5\ln 2 + 2$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \dfrac{3}{3x - 1}\mathrm{d}x = \ln|3x - 1| + C$ từ đây suy ra $f(x) = \begin{cases} \ln|3x - 1| + C_1, & \text{nếu} x > \dfrac{1}{3} \\ \ln|3x - 1| + C_2, & \text{nếu} x < \dfrac{1}{3} \end{cases}$.

$f(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1$, $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = 2 \Rightarrow C_1 = 2$.

Vậy $f(-1) + f(3) = \ln 4 + 2 + \ln 8 + 1 = 5\ln 2 + 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Nghiệm của phương trình $25^x - 2(3 - x)5^x + 2x - 7 = 0$ nằm trong khoảng nào sau đây?

(A) $(5; 10)$. **B** $(0; 2)$. (C) $(1; 3)$. (D) $(0; 1)$.

Lời giải.

Đặt $t = 5^z$, $t > 0$. Phương trình trở thành $t^2 - 2(3 - x)t + 2x - 7 = 0$ (*). Xem đây là phương trình bậc 2 theo t và x là tham số. Ta có $\Delta' = (3 - x)^2 - 2x + 7 = x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$, từ đây ta có (*)$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \quad \text{(loại)} \\ t=7-2x \end{array}\right.$.

Với $t=7-2x$ ta có phương trình $5^x=7-2x$. Dễ thấy $y=5^x$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ còn $y=7-2x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên phương trình $5^x=7-2x$ có nhiều nhất một nghiệm. Mà $x=1$ là nghiệm của phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang.
B. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=-3$; $y=3$.
C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=-3$; $x=3$.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_{-1}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x=-1$, Tính $I=\int\limits_{-1}^{2}[x+2f(x)-3g(x)]\,\mathrm{d}x$

A. $I=\dfrac{11}{2}$. B. $I=\dfrac{7}{2}$. C. $I=\dfrac{17}{2}$. D. $I=\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

$$I=\int\limits_{-1}^{2}[x+2f(x)-3g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}x\,\mathrm{d}x+2\int\limits_{-1}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x-3\int\limits_{-1}^{2}g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{17}{2}$$

Chọn đáp án C □

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu đi qua hai điểm $A(3;-1;2)$, $B(1;1;-2)$ và có tâm thuộc trục Oz là:

A. $x^2+y^2+z^2-2z-10=0$. B. $(x-1)^2+y^2+z^2=11$.
C. $x^2+(y-1)^2+z^2-2z=11$. D. $x^2+y^2+z^2-2y-11=0$.

Lời giải.

Gọi I là tâm mặt cầu đi qua A và B. Vì I thuộc Oz nên $I=(0;0;z)$.

Ta có $IA=IB \Leftrightarrow 10+(z-2)^2=2+(z+2)^2 \Leftrightarrow z=1$.

Vậy mặt cầu có tâm $I=(0;0;1)$ bán kính $R=IA=\sqrt{11}$ nên có phương trình là $x^2+y^2+(z-1)^2=11 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2z-10=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Công thức tính thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy là B và chiều cao h là:

A. $V=\dfrac{1}{2}Bh$. B. $V=\dfrac{1}{3}Bh$. C. $V=Bh$. D. $V=\dfrac{2}{3}Bh$.

Lời giải.

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y-3z+3=0$. Trong các véc-tơ sau véc-tơ nào là véc-tơ pháp tuyến của (P)?

(A) $\vec{n}=(1;-2;3)$. (B) $\vec{n}=(1;2;-3)$. (C) $\vec{n}=(1;2;3)$. (D) $\vec{n}=(-1;2;3)$.

Lời giải.

Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x^3(x+1)^2(2-x)$. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 0. (B) 3. (C) 1 . (D) 2.

Lời giải.

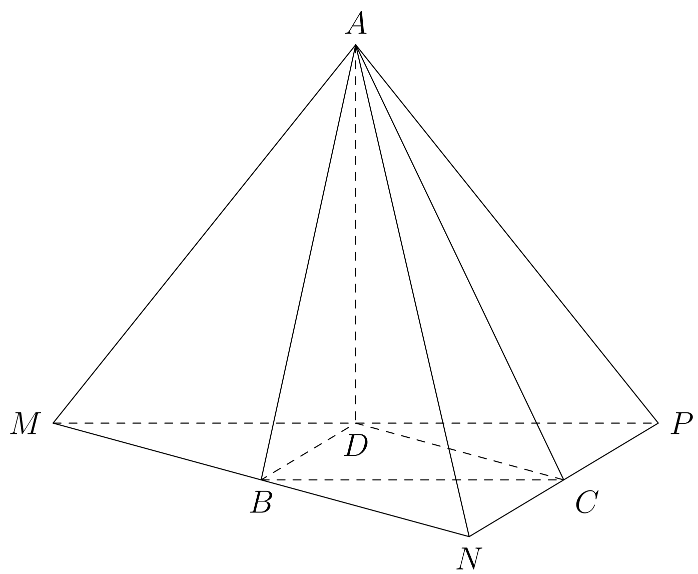
Ta có $f'(x)=0$ có ba nghiệm $x=0$, $x=-1$, $x=2$. Trong đó $x=0$ là nghiệm bội 3, $x=-1$ là nghiệm kép, $x=2$ là nghiệm đơn nên hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị là $x=0$ và $x=2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 50. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AD=BC=3$; $AC=BD=4$; $AB=CD=2\sqrt{3}$. Thể tích tứ diện $ABCD$ bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{2047}}{12}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2470}}{12}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2074}}{12}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2740}}{12}$.

Lời giải.



Qua B, C, D dựng các đường thẳng song song với CD, DB, BC. Các đường thẳng này cắt nhau tại M, N, P (hình vẽ).

Ta có $BCDM$ là hình bình hành nên $BC=MD$, tương tự $BC=DP$. Kết hợp với giả thiết $AD=BC=3$ ta có $AD=MD=DP$, suy ra tam giác AMD vuông tại A, hay $AM\perp AP$. Hơn nữa $AM^2+AP^2=MP^2=36$.

Tương tự ta có $AP\perp AN$, $AP^2+AN^2=NP^2=64$ và $AN\perp AM$, $AN^2+AM^2=MN^2=48$.

Ta có hệ
$$\begin{cases} AM^2+AP^2=36 \\ AP^2+AN^2=64 \\ AN^2+AM^2=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AM=\sqrt{10} \\ AP=\sqrt{26} \\ AN=\sqrt{38} \end{cases}.$$

Ta có AM, AN, AP đôi một vuông góc nên $V_{AMNP}=\dfrac{1}{6}AM\cdot AN\cdot AP=\dfrac{\sqrt{2470}}{3}$.

Mặt khác hình chóp $A.BCD$ và $A.MNP$ có cùng chiều cao và diện tích đáy $S_{\triangle BCD} = \dfrac{1}{4} S_{\triangle MNP}$ nên $V_{ABCD} = \dfrac{1}{4} V_{AMNP} = \dfrac{\sqrt{2470}}{12}$.

Chọn đáp án B □

——— **HẾT** ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. C	3. A	4. C	5. B	6. D	7. D	8. C	9. A	10. C
11. C	12. C	13. A	14. C	15. C	16. B	17. A	18. A	19. C	20. A
21. B	22. D	23. A	24. D	25. B	26. C	27. C	28. C	29. C	30. B
31. D	32. C	33. C	34. A	35. C	36. D	37. A	38. B	39. D	40. B
41. B	42. A	43. B	44. A	45. C	46. A	47. B	48. B	49. D	50. B

149 ĐỀ THI THỬ THPTQG LẦN 1, TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG, GIA LAI

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$.

A $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$.
B $\int \cos x\,\mathrm{d}x = -\sin x + C$.
C $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin 2x + C$.
D $\int \cos x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\sin x + C$.

Lời giải.
Ta có $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$
Chọn đáp án A □

Câu 2. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3 - x^2 + 1)$.

A $-\infty$. **B** $+\infty$. **C** 2. **D** 0.

Lời giải.
Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3 - x^2 + 1) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 \cdot \left(2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}\right) = -\infty$.
Chọn đáp án A □

Câu 3. Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau.

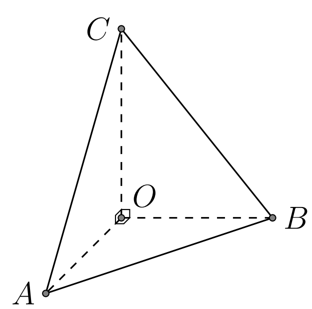
A 60. **B** 10. **C** 120. **D** 125.

Lời giải.
Số các số được tạo thành là $\mathrm{A}_5^3 = 60$ số.
Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho khối tứ diện $OABC$ có $OA; OB; OC$ đôi một vuông góc và $OA = a; OB = b; OC = c$. Thể tích V của khối tứ diện $OABC$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A $V = \dfrac{1}{6}abc$. **B** $V = \dfrac{1}{3}abc$. **C** $V = \dfrac{1}{2}abc$. **D** $V = 3abc$.

Lời giải.
Thể tích $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{OBC} \cdot OA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}bca = \dfrac{1}{6}abc$.



Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

B. Giá trị cực đại của hàm số là 0.

C. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng 2.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và đạt cực đại tại $x = 5$.

Lời giải.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Thể tích của khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 1; x = 4$ khi quay quanh trục hoành được tính bởi công thức nào?

A. $V = \pi \int\limits_1^4 x\,\mathrm{d}x$. B. $V = \int\limits_1^4 \left|\sqrt{x}\right|\,\mathrm{d}x$. C. $V = \pi^2 \int\limits_1^4 x\,\mathrm{d}x$. D. $V = \pi \int\limits_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

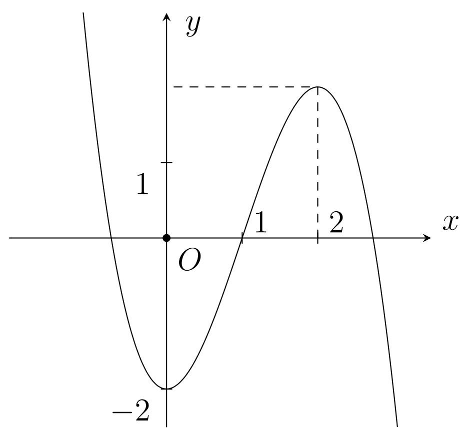
Thể tích là $V = \pi \int\limits_1^4 x\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 7.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 2)$. B. $(-2; 2)$. C. $(-\infty; 0)$. D. $(2; +\infty)$.



Lời giải.

Khoảng đồng biến là $(0; 2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Cho $\log 5 = a$. Tính $\log 25000$ theo a.

A. $2a + 3$. B. $5a^2$. C. $2a^2 + 1$. D. $5a$.

Lời giải.

Ta có $\log 25000 = \log(25 \cdot 1000) = \log 25 + \log 1000 = 2\log 5 + \log 10^3 = 2a + 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^x + 1$.

A $\dfrac{5^x}{\ln 5} + x + C$. (B) $5^x \ln 5 + x + C$. (C) $5^x \ln x + x + C$. (D) $5^x + x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int (5^x + 1)\,\mathrm{d}x = \frac{5^x}{\ln x} + x + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(-2;4;1)$, $B(1;1;-6)$, $C(0;-2;3)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

A $G\left(-\dfrac{1}{3};1;-\dfrac{2}{3}\right)$. (B) $G(-1;3;-2)$. (C) $G\left(\dfrac{1}{3};-1;\dfrac{2}{3}\right)$. (D) $G\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2};-\dfrac{5}{2}\right)$.

Lời giải.

Trọng tâm tam giác ABC là $G\left(\dfrac{-2+1+0}{3};\dfrac{4+1-2}{3};\dfrac{1-6+3}{3}\right) \Rightarrow G\left(-\dfrac{1}{3};1;-\dfrac{2}{3}\right)$.

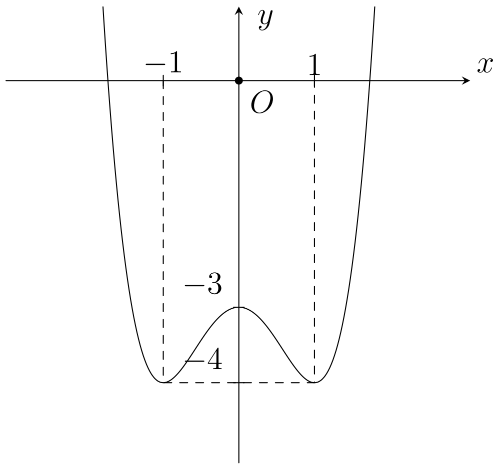
Chọn đáp án (A) □

Câu 11.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên cạnh. Tìm m để phương trình $f(x) = m$ có bốn nghiệm phân biệt.

A $-4 < m < -3$. (B) $m > -4$.

(C) $-4 \le m < -3$. (D) $-4 < m \le -3$.



Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy phương trình $f(x) = m$ có bốn ngiệm phân biệt khi $-4 < m < -3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x + 3y + 4z - 12 = 0$ cắt trục Oy tại điểm có tọa độ là

A $(0;4;0)$. (B) $(0;6;0)$. (C) $(0;3;0)$. (D) $(0;-4;0)$.

Lời giải.

Cho $x = 0; z = 0 \Rightarrow y = 4$. Chọn điểm $(0;4;0)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1) > 3$ là

A $(9;+\infty)$. (B) $(4;+\infty)$. (C) $(1;+\infty)$. (D) $(10;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(x-1) > 3 \Leftrightarrow (x-1) > 2^3 \Leftrightarrow x > 9$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Một khối cầu có thể tích bằng $\dfrac{32\pi}{3}$. Bán kính R của khối cầu đó là

A $R=2$. (B) $R=32$. (C) $R=4$. (D) $R=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{4\pi}{3}R^3=\dfrac{32\pi}{3}\Rightarrow R=2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(2;-3;-2)$ và có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-5;1)$ có phương trình là

A $2x-5y+z-17=0$. (B) $2x-5y+z+17=0$.

(C) $2x-5y+z-12=0$. (D) $2x-3y-2z-18=0$.

Lời giải.

Ta có $2(x-2)-5(y+3)+(z+2)=0\Leftrightarrow 2x-5y+z-17=0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2-5x+2}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2};2\right\}$; Ta có $y=\dfrac{(3x-1)(x-2)}{(2x-1)(x-2)}=\dfrac{3x-1}{2x-1}$.

Do $\lim\limits_{x\to 2}y=\dfrac{5}{3}$; $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}y=-\infty$ nên đường thẳng $x=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Đồ thị hàm số $y=2x^4-3x^2$ và đồ thị hàm số $y=-x^2+2$ có bao nhiêu điểm chung?

A 2. (B) 1. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ta có:

$$2x^4-3x^2=-x^2+2\Leftrightarrow 2x^4-2x^2-2=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} & \text{(loại)}\\ x^2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & \end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Gọi M; m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x-2}$ trên đoạn $[-2;1]$. Tính $T=M+2m$.

A $T=-14$. (B) $T=-10$. (C) $T=-\dfrac{21}{2}$. (D) $T=-\dfrac{13}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$f'(x)=\dfrac{x^2-4x-5}{(x-2)^2};f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=-1 & \text{(nhận)}\\ x=5 & \text{(loại)}\end{array}\right.$$

Ta có $f(-2) = -\dfrac{9}{4}$, $f(1) = -6$, $f(-1) = -2$.

Vậy $M = \max\limits_{x\in[-2;1]} f(x) = -2$; $m = \min\limits_{x\in[-2;1]} f(x) = -6 \Rightarrow T = -14$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$; biết $F(1) = 2$. Tính $F(2)$.

A $F(2) = \dfrac{1}{2}\ln 3 + 2$. (B) $F(2) = \dfrac{1}{2}\ln 3 - 2$. (C) $F(2) = \ln 3 + 2$. (D) $F(2) = 2\ln 3 - 2$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \dfrac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\ln|2x-1| + C$. Mà $F(1) = 2 \Leftrightarrow C = 2$. Vậy $F(2) = \dfrac{1}{2}\ln 3 + 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$ trên đoạn $[0; 2\pi]$.

A $\dfrac{5\pi}{3}$. (B) $\dfrac{11\pi}{6}$. (C) $\dfrac{\pi}{6}$. (D) $\dfrac{3\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}; \dfrac{3\pi}{2} \in [0; 2\pi].$$

Vậy tổng các nghiệm là $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{3\pi}{2} = \dfrac{5\pi}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

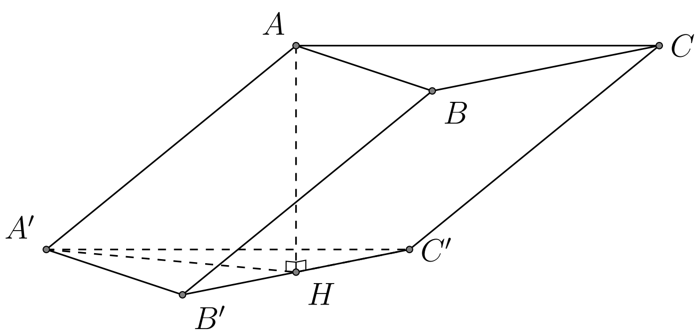
Câu 21. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30°. Hình chiếu H của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm của $B'C'$. Tính theo a khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy của lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $\dfrac{a}{2}$. (B) $\dfrac{a}{3}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Do hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a nên tam giác $A'B'C'$ là tam giác đều suy ra $A'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tam giác AHA' vuông tại H suy ra $AH = \sqrt{AA'^2 - A'H^2}$.

Hay $AH = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{a}{2}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6% trên một năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 300 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

A 19 năm. (B) 20 năm. (C) 21 năm. (D) 18 năm.

Lời giải.

Gọi n là số năm cần tìm. Ta có $100(1+6\%)^n \geq 300 \Rightarrow (1+6\%)^n \geq 3 \Rightarrow n \geq \log_{(1+6\%)}(3) \approx 18,85$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Một hộp đựng 11 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 11. Chọn ngẫu nhiên 4 tấm thẻ từ hộp. Gọi P là xác suất để tổng số ghi trên 4 tấm thẻ ấy là một số lẻ. Khi đó P bằng

A $\dfrac{16}{33}$. **B** $\dfrac{1}{2}$. **C** $\dfrac{2}{11}$. **D** $\dfrac{10}{33}$.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{11}^4 = 330$. Gọi A: "tổng số ghi trên 4 tấm thẻ ấy là một số lẻ". Từ 1 đến 11 có 6 số lẻ và 5 số chẵn. Để có tổng của 4 số là một số lẻ ta có 2 trường hợp.

- Trường hợp 1: Chọn được 1 thẻ mang số lẻ và 3 thẻ mang số chẵn có: $\mathrm{C}_6^1.\mathrm{C}_5^3 = 60$ cách.
- Trường hợp 2: Chọn được 3 thẻ mang số lẻ và 1 thẻ mang số chẵn có: $\mathrm{C}_6^3.\mathrm{C}_5^1 = 100$ cách.

Do đó $n(A) = 60 + 100 = 160$. Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{160}{330} = \dfrac{16}{33}$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ vuông góc $Oxyz$, cho điểm $I(1;2;-5)$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z - 8 = 0$. Viết phương trình mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

A $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+5)^2 = 25$. **B** $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 25$.

C $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+5)^2 = 5$. **D** $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 36$.

Lời giải.

Ta có $R = d(I;(P)) = \dfrac{|2-4-5-8|}{\sqrt{4+4+1}} = \dfrac{|-15|}{3} = 5$.

Suy ra $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+5)^2 = 25$.

Chọn đáp án A □

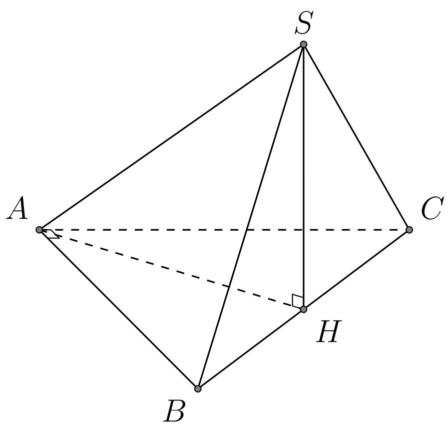
Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, đáy là tam giác vuông tại A, cạnh $BC = a$. Tính côsin của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC).

A $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B** $\dfrac{1}{3}$. **C** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm BC thì khi đó $SH \perp BC$. Suy ra $SH \perp (ABC)$; suy ra HA là hình chiếu của SA trên (ABC). Do đó $\widehat{(SA;(ABC))} = \widehat{(SA;HA)} = \widehat{SAH}$

Suy ra $\cos\widehat{SAH} = \dfrac{AH}{SA} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.



Chọn đáp án A □

Câu 26. Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Niu tơn của $\left(\dfrac{n}{2x} + \dfrac{x}{2}\right)^{2n}$ (với $x \neq 0$), biết số nguyên dương n thỏa mãn $\mathrm{C}_n^3 + \mathrm{A}_n^2 = 50$.

A $\dfrac{297}{512}$. **B** $\dfrac{29}{51}$. **C** $\dfrac{97}{12}$. **D** $\dfrac{279}{215}$.

Lời giải.

Ta có

$$\mathrm{C}_n^3 + \mathrm{A}_n^2 = 50 \ (n \geq 3, n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} + \frac{n!}{(n-2)!} = 50$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n(n-1)}{1} = 50 \Leftrightarrow n^3 + 3n^2 - 4n - 300 = 0 \Leftrightarrow n = 6.$$

Khi đó

$$\left(\frac{n}{2x} + \frac{x}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{3}{x} + \frac{x}{2}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \mathrm{C}_{12}^k 3^{12-k} \cdot 2^{-k} \cdot x^{2k-12}.$$

Số hạng chứa x^8 ứng với $k = 10$ nên hệ số của x^8 là: $\mathrm{C}_{12}^{10} \cdot 3^2 \cdot 2^{-10} = \dfrac{297}{512}$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Phương trình $\log_x 4 . \log_2 \left(\dfrac{5-12x}{12x-8}\right) = 2$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A 1. **B** 2. **C** 0. **D** 3.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ \dfrac{5}{12} < x < \dfrac{2}{3}. \end{cases}$

Khi đó:

$$\log_x 4 \cdot \log_2 \left(\frac{5-12x}{12x-8}\right) = 2 \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{5-12x}{12x-8}\right) = \log_2 x$$

$$\Leftrightarrow \frac{5-12x}{12x-8} = x \Leftrightarrow \frac{-12x^2 - 4x + 5}{12x-8} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{5}{6} (\text{loại}). \end{array}\right.$$

Chọn đáp án A □

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A\,(2;4;1)\,, B\,(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 5 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

A $(Q): 2y + 3z - 10 = 0$. **B** $(Q): 2x + 3z - 11 = 0$.

C $(Q): 2y + 3z - 12 = 0$. **D** $(Q): 2y + 3z - 11 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3;-3;2)$. Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (1;-3;2)$. Ta có: $\left[\overrightarrow{AB}, \vec{n}_P\right] = (0;8;12)$, chọn $\vec{n}_Q = (0;2;3)$. Mặt phẳng (Q) đi qua điểm A, có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_Q = (0;2;3)$ có phương trình là:

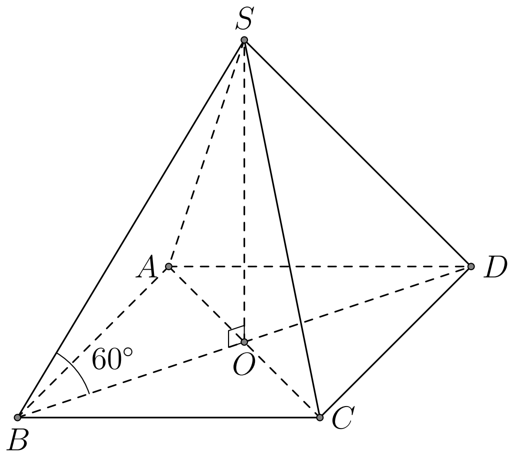
$$2\,(y-4) + 3\,(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2y + 3z - 11 = 0.$$

Chọn đáp án D □

Câu 29. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm của mặt đáy. Khi đó, do SO vuông góc với $(ABCD)$ tại O nên hình chiếu của cạnh bên SB trên mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là OB. Như thế, góc giữa SB và $(ABCD)$ là:

$\widehat{(SB,(ABCD))} = \widehat{(SB,OB)} = \widehat{SBO} = 60^\circ$.

Ta có $BO = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $\tan 60^\circ = \dfrac{SO}{BO}$.

Suy ra $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD}$.

Hay $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho véc-tơ $\vec{u} = (3; -1)$. Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{u}$ biến điểm $M(1; -4)$ thành

A điểm $M'(4; -5)$. **B** điểm $M'(-2; -3)$. **C** điểm $M'(3; -4)$. **D** điểm $M'(4; 5)$.

Lời giải.

Ta có $M'(1 + 3; -4 - 1)$ hay $M'(4; -5)$.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = x^2 - 4x + 6$ và $y = -x^2 - 2x + 6$.

A 3π. **B** $\pi - 1$. **C** π. **D** 2π.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 - 4x + 6 = -x^2 - 2x + 6 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = x^2 - 4x + 6, y = -x^2 - 2x + 6$ là:

$$V = \pi \int_0^1 \left| \left(x^2 - 4x + 6\right)^2 - \left(-x^2 - 2x + 6\right)^2 \right| \mathrm{d}x = \pi \left| \int_0^1 \left(36x^2 - 12x^3 - 24x\right) \mathrm{d}x \right| = 3\pi.$$

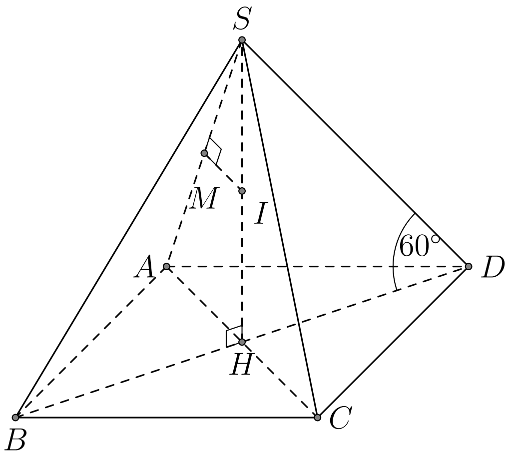
Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3$, $AD = 4$ và các cạnh bên của hình chóp tạo với mặt đáy một góc 60°. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A $V=\dfrac{250\sqrt{3}}{3}\pi$. **B** $V=\dfrac{125\sqrt{3}}{6}\pi$. **C** $V=\dfrac{500\sqrt{3}}{27}\pi$. **D** $V=\dfrac{50\sqrt{3}}{27}\pi$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của S lên $(ABCD)$. Ta có cạnh bên của hình chóp tạo với mặt đáy một góc 60°, nghĩa là: $\widehat{SAH}=\widehat{SBH}=\widehat{SCH}=\widehat{SDH}=60^\circ$. Từ đó suy ra: $HA=HB=HC=HD$. Hay H là tâm của hình chữ nhật $ABCD$ hay $H=AC\cap BD$. Có $AC=BD=\sqrt{3^2+4^2}=5$. Suy ra: $SH=\tan 60^\circ\cdot\dfrac{5}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ và $SA=\dfrac{AH}{\cos 60^\circ}=\dfrac{5}{2}2=5$.



Gọi M là trung điểm của SA. Trong (SAH), dựng đường thẳng qua M vuông góc với SA và cắt SH tại I. Khi đó, I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. Có $\Delta SMI\sim\Delta SHA$ suy ra
$$\frac{SM}{SH}=\frac{SI}{SA}$$
Do đó
$$R=SI=\frac{SM\cdot SA}{SH}=\frac{5\cdot\dfrac{5}{2}}{\dfrac{5\sqrt{3}}{2}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}.$$
Vậy: $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\cdot\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)^3=\dfrac{500\sqrt{3}}{27}\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m$ có ba điểm cực trị A; B; C sao cho $OA=BC$, trong đó O là gốc tọa độ; A là điểm cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

A $m=2\pm2\sqrt{2}$. **B** $m=2\pm\sqrt{2}$. **C** $m=2\pm2\sqrt{3}$. **D** $m=2+2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $y'=4x(x^2-m-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m+1.\end{array}\right.$

Điều kiện để đồ thị có 3 cực trị là $m>-1$.

Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;m)$; $B(-\sqrt{m+1};-m^2-m-1)$; $C(\sqrt{m+1};-m^2-m-1)$.

Do đó: $OA=BC\Leftrightarrow m^2-4m-4=0\Leftrightarrow m=2\pm2\sqrt{2}$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án A □

Câu 34. Tính giới hạn $T=\lim\left(\sqrt{16^{n+1}+4^n}-\sqrt{16^{n+1}+3^n}\right)$.

A $T=0$. **B** $T=\dfrac{1}{4}$. **C** $T=\dfrac{1}{8}$. **D** $T=\dfrac{1}{16}$.

Lời giải.

Ta có:
$$T=\lim\left(\sqrt{16^{n+1}+4^n}-\sqrt{16^{n+1}+3^n}\right)=\lim\frac{4^n-3^n}{\sqrt{16^{n+1}+4^n}+\sqrt{16^{n+1}+3^n}}$$

$$= \lim \frac{4^n - 3^n}{\sqrt{16 \cdot 16^n + 4^n} + \sqrt{16 \cdot 16^n + 3^n}} = \lim \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\sqrt{16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n} + \sqrt{16 + \left(\frac{3}{16}\right)^n}} = \frac{1}{8}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 35. Cho $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2}\,\mathrm{d}x$ có kết quả dạng $I = \ln a + b$ (với $a > 0, b \in \mathbb{R}$). Khẳng định nào sau đây đúng:

A) $2ab = -1$. B) $2ab = 1$. C) $-b + \ln \dfrac{3}{2a} = -\dfrac{1}{3}$. D) $-b + \ln \dfrac{3}{2a} = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$. Khi đó:

$$I = \int_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t+2)^2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{t+2} - \frac{2}{(t+2)^2}\right)\mathrm{d}t = \left(\ln|t+2| + \frac{2}{t+2}\right)\Big|_0^1 = \ln\frac{3}{2} - \frac{1}{3}.$$

Vậy $\ln a + b = \ln \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow -b + \ln \dfrac{3}{2a} = \dfrac{1}{3}$.

Lưu ý. Với bài toán này, nếu đọc đề không kĩ thì rất dễ rơi vào phương án nhiễu vì các bộ số a, b ở đây là không duy nhất. Nhiều em học sinh sau khi giải ra được $I = \ln \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{3} = \ln a + b \quad (*)$ đã vội vàng kết luận $a = \dfrac{3}{2}, b = -\dfrac{1}{3}$, do đó $2ab = -1$ và rơi vào phương án nhiễu của đề bài. Dễ thấy $a = \dfrac{3}{2\mathrm{e}}, b = \dfrac{2}{3}$ cũng thỏa mãn $(*)$ nhưng $2ab \neq -1$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Giả sử $(1+x)(1+x+x^2)\ldots(1+x+x^2+\cdots+x^n) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$. Tính $\displaystyle\sum_{r=0}^{m} a_r$.

A) 1. B) n. C) $(n+1)!$. D) $n!$.

Lời giải.

Ta có $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m = (1+x)(1+x+x^2)\ldots(1+x+x^2+\cdots+x^n)$.

Cho $x = 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{r=0}^{m} a_r = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_m = 2 \cdot 3 \cdots (n+1) = (n+1)!$.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Tìm tập nghiệm S của phương trình $(x-1)(x-2)(x^x+1) = 0$.

A) $S = \{1; 2; -1\}$. B) $S = \{1; -1\}$. C) $S = \{1; 2\}$. D) $S = \{2; -1\}$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Khi đó: $(x-1)(x-2)(x^x+1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Chọn đáp án C □

Câu 38. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Kẻ OH vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

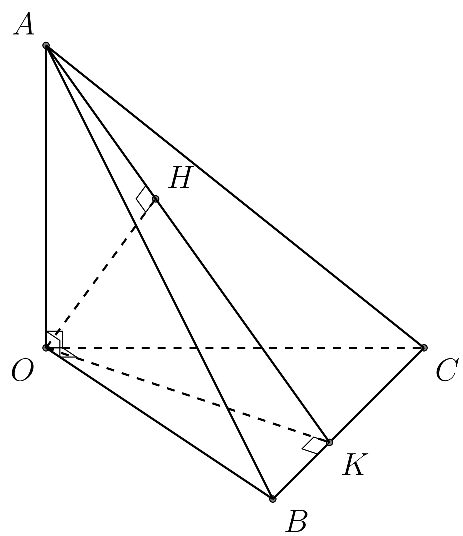
A $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$.

B H là trực tâm tam giác ABC.

C $OA\perp BC$.

D $AH\perp(OBC)$.

Lời giải.



Vì ΔOAK, ΔOBC là các tam giác vuông nên
$\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OK^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$.
Vì $BC\perp(OAH)$, $CA\perp(OBH)$, $AB\perp(OCH)$ nên AH, BH, CH là các đường cao của tam giác ABC, hay H là trực tâm của tam giác ABC.

Dễ thấy $BC\perp OA$.

Nếu $AH\perp(OBC)$ thì $AH\perp OK$ (mâu thuẫn).

Chọn đáp án D □

Câu 39. Giả sử $\displaystyle\int\frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}=-\frac{1}{g(x)}+C$ (C là hằng số). Tính tổng của các nghiệm của phương trình $g(x)=0$.

A -1. **B** 1. **C** 3. **D** -3.

Lời giải.

Ta có

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=\left(x^2+3x\right)\left(x^2+3x+2\right)+1=\left(x^2+3x\right)^2+2\left(x^2+3x\right)+1=\left(x^2+3x+1\right)^2.$$

Do đó

$$\int\frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}=\int\frac{\left(x^2+3x+1\right)'\,\mathrm{d}x}{\left(x^2+3x+1\right)^2}=-\frac{1}{x^2+3x+1}+C.$$

Vậy $\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{x^2+3x+1}$.

Suy ra $g(x)=x^2+3x+1$. Do đó $g(x)=0\Leftrightarrow x^2+3x+1=0$.

Vậy theo định lí Viet, tổng các nghiệm của phương trình $g(x)=0$ là -3.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Trong không gian xét $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ là những véc-tơ đơn vị (có độ dài bằng 1). Gọi M là giá trị lớn nhất của biểu thức $|\vec{m}-\vec{n}|^2+|\vec{m}-\vec{p}|^2+|\vec{m}-\vec{q}|^2+|\vec{n}-\vec{p}|^2+|\vec{n}-\vec{q}|^2+|\vec{p}-\vec{q}|^2$. Khi đó $M-\sqrt{M}$ thuộc khoảng nào sau đây?

A $\left(4;\dfrac{13}{2}\right)$. **B** $\left(7;\dfrac{19}{2}\right)$. **C** $(17;22)$. **D** $(10;15)$.

Lời giải.

Ta có $0\le|\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}+\vec{q}|^2=4+2\left(\vec{m}\cdot\vec{n}+\vec{m}\cdot\vec{p}+\vec{m}\cdot\vec{q}+\vec{n}\cdot\vec{p}+\vec{n}\cdot\vec{q}+\vec{p}\cdot\vec{q}\right)$.

Do đó: $\vec{m}\cdot\vec{n}+\vec{m}\cdot\vec{p}+\vec{m}\cdot\vec{q}+\vec{n}\cdot\vec{p}+\vec{n}\cdot\vec{q}+\vec{p}\cdot\vec{q}\ge-2$.

Ta có

$$|\vec{m}-\vec{n}|^2+|\vec{m}-\vec{p}|^2+|\vec{m}-\vec{q}|^2+|\vec{n}-\vec{p}|^2+|\vec{n}-\vec{q}|^2+|\vec{p}-\vec{q}|^2$$

$$\begin{aligned}&=3\left(\vec{m}^2+\vec{n}^2+\vec{p}^2+\vec{q}^2\right)-2\left(\vec{m}\cdot\vec{n}+\vec{m}\cdot\vec{p}+\vec{m}\cdot\vec{q}+\vec{n}\cdot\vec{p}+\vec{n}\cdot\vec{q}+\vec{p}\cdot\vec{q}\right)\\&=3\cdot 4-2\left(\vec{m}\cdot\vec{n}+\vec{m}\cdot\vec{p}+\vec{m}\cdot\vec{q}+\vec{n}\cdot\vec{p}+\vec{n}\cdot\vec{q}+\vec{p}\cdot\vec{q}\right)\\&\leq 12-2(-2)=16.\end{aligned}$$

Dấu $''=''$ xảy ra chẳng hạn khi $\vec{m}=\vec{n}=(1;0;0)\,,\vec{p}=\vec{q}=(-1;0;0)$. Vậy $M=16$. Suy ra $M-\sqrt{M}=16-4=12\in(10;15)$.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Biết rằng khi khai triển nhị thức Niutơn

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n=a_0\cdot\sqrt{x}^n+a_1\cdot\sqrt{x}^{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+a_2\cdot\sqrt{x}^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2+a_3\cdot\sqrt{x}^{n-3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^3+\cdots$$

(với n là số nguyên lớn hơn 1) thì ba số a_0, a_1, a_2 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Hỏi trong khai triển trên, có bao nhiêu số hạng mà lũy thừa của x là một số nguyên.

A 1. B 2. $\boxed{\text{C}}$ 3. D 4.

Lời giải.

Ta có ba số $a_0=1, a_1=\dfrac{1}{2}\mathrm{C}_n^1$, $a_2=\dfrac{1}{2^2}\mathrm{C}_n^2$ lập thành một cấp số cộng nên:

$$1+\frac{1}{2^2}\mathrm{C}_n^2=\mathrm{C}_n^1\Leftrightarrow 1+\frac{n(n-1)}{8}=n\Leftrightarrow n^2-9n+8=0\Leftrightarrow n=8.$$

Vậy số hạng tổng quát có dạng

$$T_k=\mathrm{C}_8^k\sqrt{x}^k\frac{1}{2^{8-k}\sqrt[4]{x}^{8-k}}=\frac{\mathrm{C}_8^k}{2^{8-k}}x^{\frac{k}{2}-\frac{8-k}{4}}=\frac{\mathrm{C}_8^k}{2^{8-k}}x^{\frac{3k-8}{4}}\left(k=0,1,\ldots,8\right).$$

Ta có $\dfrac{3k-8}{4}=\dfrac{3k}{4}-2$ là số nguyên khi và chỉ khi $3k\,\vdots\,4\Rightarrow k\,\vdots\,4\Rightarrow k\in\{0;4;8\}$. Vậy có ba số hạng mà lũy thừa của x là một số nguyên.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng 36, $\overrightarrow{AB}$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $y=0$, các điểm A, B, C lần lượt nằm trên đồ thị hàm số $y=\log_a x, y=2\log_a x, y=3\log_a x$. Tìm a.

$\boxed{\text{A}}$ $a=\sqrt[6]{3}$. B $a=\sqrt{3}$. C $a=\sqrt[3]{6}$. D $a=\sqrt{6}$.

Lời giải.

Giả sử $A\left(p;\log_a p\right), B\left(q;2\log_a q\right)\ (p>0,q>0)$. Khi đó

$$\begin{cases}6=AB=|p-q|\\\log_a p=2\log_a q=\log_a q^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6=|p-q|\\p=q^2\end{cases}\Rightarrow\left|q^2-q\right|=6$$
$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}q^2-q-6=0\\q^2-q+6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}q=-2\\q=3\end{array}\right.\Rightarrow q=3.$$

Vậy $C\left(3;3\log_a 3\right)$. Do $BC=6=\log_a 3$ nên $a^6=3\Rightarrow a=\sqrt[6]{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ vuông góc $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+y+6z-1=0$ và hai điểm $A(1;-1;0), B(-1;0;1)$. Hình chiếu vuông góc của đoạn thẳng AB trên mặt phẳng (P) có độ dài bao nhiêu?

Ⓐ $\sqrt{\dfrac{255}{61}}$. **B** $\sqrt{\dfrac{237}{41}}$. Ⓒ $\sqrt{\dfrac{137}{41}}$. Ⓓ $\sqrt{\dfrac{155}{61}}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA}=(2;-1;-1)$. Gọi α là góc giữa đường thẳng AB và (P). Khi đó

$$\sin\alpha=\left|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{n_P}}\right)\right|=\frac{|2\cdot 2+1\cdot(-1)+6\cdot(-1)|}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{246}}.$$

Hình chiếu vuông góc của đoạn thẳng AB trên mặt phẳng (P) có độ dài bằng

$$AB\cos\alpha=AB\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{6\left(1-\frac{9}{246}\right)}=\sqrt{\frac{237}{41}}.$$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 44. Cho dãy số (u_n) như sau: $u_n=\dfrac{n}{1+n^2+n^4}, \forall n=1,2,\ldots$ Tính giới hạn

$$\lim_{n\to+\infty}(u_1+u_2+\cdots+u_n).$$

Ⓐ $\dfrac{1}{4}$. Ⓑ 1. **C** $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}u_n&=\frac{n}{1+n^2+n^4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2n}{(n^2+1)^2-n^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2n}{(n^2-n+1)(n^2+n+1)}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n-1)+1}-\frac{1}{n(n+1)+1}\right)\\&=\frac{1}{2}[f(n)-f(n+1)]\left(\text{với } f(n)=\frac{1}{n(n-1)+1}\right).\end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(u_1+u_2+\cdots+u_n)&=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}[f(1)-f(n+1)]\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n(n+1)+1}\right)\right]=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 45. Một khối lập phương lớn tạo bởi 27 khối lập phương đơn vị. Một mặt phẳng vuông góc với đường chéo của khối lập phương lớn tại trung điểm của nó. Mặt phẳng này cắt ngang bao nhiêu khối lập phương đơn vị?

Ⓐ 16. Ⓑ 17. Ⓒ 18. **D** 19.

Lời giải.

Giả sử các đỉnh của khối lập phương đơn vị là $(i;j;k)$, với $i,j,k \in \{0;1;2;3\}$ và đường chéo đang xét của khối lập phương lớn nối hai đỉnh là $O(0;0;0)$ và $A(3;3;3)$. Phương trình mặt trung trực của OA là $(\alpha): x+y+z-\dfrac{9}{2}=0$. Mặt phẳng này cắt khối lập phương đơn vị khi và và chỉ khi các đầu mút $(i;j;k)$ và $(i+1;j+1;k+1)$ của đường chéo của khối lập phương đơn vị nằm về hai phía đối với (α). Do đó bài toán quy về đếm trong số 27 bộ $(i;j;k)$, với $i,j,k \in \{0;1;2\}$, có bao nhiêu bộ ba thỏa mãn:

$$\begin{cases} i+j+k-\dfrac{9}{2}<0 \\ (i+1)+(j+1)+(k+1)-\dfrac{9}{2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2}<i+j+k<\frac{9}{2}. \tag{1}$$

Các bộ ba không thỏa điều kiện (1), tức là $\left[\begin{array}{l} i+i+k<\dfrac{3}{2} \\ i+i+k>\dfrac{9}{2} \end{array}\right.$ là

$$(0;0;0),(0;0;1),(0;1;0),(1;0;0),(1;2;2),(2;1;2),(2;2;1),(2;2;2).$$

Vậy có $27-8=19$ khối lập phương đơn vị bị cắt bởi (α).

Chọn đáp án D □

Câu 46. Giá trị $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{6}}}^{\frac{9}{\sqrt[3]{4}}} x^2\sin\left(\pi x^3\right)e^{\cos\left(\pi x^3\right)}\,dx$ gần bằng số nào nhất trong các số sau đây:

(A) 0,046. (B) 0,036. (C) 0,037. (D) 0,038.

Lời giải.

Xét tích phân $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{6}}}^{\frac{9}{\sqrt[3]{4}}} x^2\sin\left(\pi x^3\right)e^{\cos\left(\pi x^3\right)}\,dx$. Đặt $t=\cos\left(\pi x^3\right)\Rightarrow dt=-3\pi x^2\sin\left(\pi x^3\right)dx$.

Đổi cận: $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}\Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $x=\dfrac{9}{\sqrt[3]{4}}\Rightarrow t=\cos\dfrac{729\pi}{4}=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+182\pi\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $I=-\dfrac{1}{3\pi}\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^t\,dt=-\dfrac{1}{3\pi}e^t\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{3\pi}\approx 0{,}037$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn

$$f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+2018$$

với $g(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(1-x)+2018x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào?

(A) $(1;+\infty)$. (B) $(0;3)$. (C) $(-\infty;3)$. (D) $(3;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có:

$$y'=-f'(1-x)+2018=-[1-(1-x)][(1-x)+2]g(1-x)-2018+2018$$

$$= -x\,(3-x)\,g\,(1-x)\,.$$

Suy ra $y' < 0 \Leftrightarrow x\,(3-x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 3 \end{array}\right.$ (do $g(1-x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Cho hàm số f có đạo hàm trên khoảng I. Xét các mệnh đề sau:

(I) Nếu $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in I$ (dấu bằng chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên I) thì hàm số f đồng biến trên I.

(II) Nếu $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in I$ (dấu bằng chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên I) thì hàm số f nghịch biến trên I.

(III) Nếu $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in I$ thì hàm số f nghịch biến trên khoảng I.

(IV) Nếu $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in I$ và $f'(x) = 0$ tại vô số điểm trên I thì hàm số f không thể nghịch biến trên khoảng I.

Trong các mệnh đề trên, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai?

A (I) và (II) đúng, còn (III) và (IV) sai.
B (I), (II) và (III) đúng, còn (IV) sai.
C (I), (II) và (IV) đúng, còn (III) sai.
D Cả (I), (II), (III) và (IV) đúng.

Lời giải.

Dễ thấy (I) và (II) đúng, còn (III) và (IV) sai.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

(I) Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ (với $h > 0$) thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0.

(II) Nếu hàm số đạt cực đại tại điểm x_0 thì tồn tại các khoảng $(x_0 - h; x_0)\,, (x_0; x_0 + h)$ (với $h > 0$) sao cho $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$.

A Cả (I) và (II) cùng sai.
B Mệnh đề (I) đúng, mệnh đề (II) sai.
C Mệnh đề (I) sai, mệnh đề (II) đúng.
D Cả (I) và (II) cùng đúng.

Lời giải.

Dễ thấy (I) đúng. Ta sẽ chứng minh đề (II) sai. Xét hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2\left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right) & \text{khi } x \neq 0 \\ 2 & \text{khi } x = 0. \end{cases}$$

Khi $x \neq 0$, ta có

$$f(x) = 2 - x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f'(x) = -4x - 2x\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}.$$

Ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2\left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right)}{x} = -\lim_{x\to 0} x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right).$$

Mà $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$ và $\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqslant |x|$ nên $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right) = 0$.
Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$. Tóm lại:

$$f'(x) = \begin{cases} -4x - 2x\sin\dfrac{1}{x} + \cos\dfrac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0. \end{cases}$$

Ta có $f(x) \leqslant 2 = f(0), \forall x \in \mathbb{R}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$, do đó hàm số đạt cực đại tại điểm $x_0 = 0$. Giả sử tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho

$$f'(x) > 0, \forall x \in (-\varepsilon; 0)\,;\ f'(x) < 0, \forall x \in (0;\varepsilon)\,. \tag{*}$$

Do $\lim\limits_{x\to 0}(-4x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(-2x\sin\dfrac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(-4x - 2x\sin\dfrac{1}{x}\right) = 0$ nên với $|x|$ đủ nhỏ thì

$$\left|-4x - 2x\sin\dfrac{1}{x}\right| < 1.$$

Với số nguyên dương k đủ lớn ta có

$$x = -\dfrac{1}{(2k+1)\pi} \in (-\varepsilon; 0)\,,\ x = \dfrac{1}{2k\pi} \in (0;\varepsilon)\ \ (|x| \text{ đủ nhỏ}).$$

Ta có $f'\left(-\dfrac{1}{(2k+1)\pi}\right) < 0$ và $f'\left(\dfrac{1}{2k\pi}\right) > 0$, mâu thuẫn với $(*)$, do đó không tồn tại số $\varepsilon > 0$ như đã nói ở trên. Như vậy, tồn tại hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2\left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right) & \text{khi } x \neq 0 \\ 2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đạt cực đại tại $x_0 = 0$ nhưng không thể tồn tại khoảng $(x_0 - h; x_0)$, $(x_0; x_0 + h)$ $(h > 0)$ sao cho $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$.
Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị đi qua các điểm $A(2;4)$, $B(3;9)$, $C(4;16)$. Các đường thẳng AB, AC, BC lại cắt đồ thị tại lần lượt tại các điểm D, E, F (D khác A và B; E khác A và C; F khác B và C). Biết rằng tổng các hoành độ của D, E, F bằng 24. Tính $f(0)$.

A. -2. B. 0. C. 2. D. $\dfrac{24}{5}$.

Lời giải.
Giải sử $f(x) = a(x-2)(x-3)(x-4) + x^2$ $(a \neq 0)$. Ta có

$$AB : y = 5x - 6; AC : y = 6x - 8; BC : y = 7x - 12.$$

Hoành độ điểm D là nghiệm của phương trình

$$a\,(x-2)\,(x-3)\,(x-4) = -x^2 + 5x - 6$$
$$\Leftrightarrow a\,(x-2)\,(x-3)\,(x-4) = -\,(x-2)\,(x-3)$$

$$\Rightarrow a(x-4)=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{a}+4.$$

Hoành độ điểm E là nghiệm của phương trình

$$\begin{aligned}&a\left(x-2\right)\left(x-3\right)\left(x-4\right)=-x^2+6x-8\\ \Leftrightarrow&a\left(x-2\right)\left(x-3\right)\left(x-4\right)=-\left(x-2\right)\left(x-4\right)\\ \Rightarrow&a(x-3)=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{a}+3.\end{aligned}$$

Hoành độ điểm F là nghiệm của phương trình:

$$\begin{aligned}&a\left(x-2\right)\left(x-3\right)\left(x-4\right)=-x^2+7x-12\\ \Leftrightarrow&a\left(x-2\right)\left(x-3\right)\left(x-4\right)=-\left(x-3\right)\left(x-4\right)\\ \Rightarrow&a(x-2)=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{a}+2.\end{aligned}$$

Theo giả thiết ta có

$$-\frac{1}{a}+2-\frac{1}{a}+3+-\frac{1}{a}+4=24\Leftrightarrow-\frac{3}{a}=15\Leftrightarrow a=-\frac{1}{5}.$$

Do đó $f(0)=a\left(-2\right)\left(-3\right)\left(-4\right)=\dfrac{24}{5}$.

Chọn đáp án D □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. A	3. A	4. A	5. A	6. A	7. A	8. A	9. A	10. A
11. A	12. A	13. A	14. A	15. A	16. A	17. A	18. A	19. A	20. A
21. A	22. A	23. A	24. A	25. A	26. A	27. A	28. D	29. A	30. A
31. A	32. C	33. A	34. C	35. D	36. C	37. C	38. D	39. D	40. D
41. C	42. A	43. B	44. C	45. D	46. C	47. D	48. A	49. B	50. D

150 THI THỬ THPT QG 2018 LỚP 12 - LẦN 2 - TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT - QUẢNG NGÃI 2017-2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho tập hợp M có 20 phần tử. Số tập con gồm 5 phần tử của M là

A. C_{20}^5. B. $5!$. C. A_{20}^5. D. 20^5.

Lời giải.

Mỗi tập con gồm 5 phần tử của M là một tổ hợp chập 5 của 20 nên số tập con gồm 5 phần tử của M là C_{20}^5.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{a}=(-1;1;2)$. B. $\vec{a}=(3;2;1)$. C. $\vec{a}=(1;-1;-2)$. D. $\vec{a}=(3;-2;1)$.

Lời giải.

Đường thẳng d: $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{a}=(3;-2;1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Thể tích của khối trụ có chiều cao bằng h và bán kính đáy bằng R là

A. $V=R^2h$. B. $V=\pi R^2 h$. C. $V=\pi Rh$. D. $V=2\pi Rh$.

Lời giải.

Thể tích của khối trụ có chiều cao bằng h và bán kính đáy bằng R là $V=\pi R^2\cdot h$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(x)>0$, $\forall x\in[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay D quanh Ox được tính theo công thức

A. $S=\displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$. B. $S=\pi\displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\displaystyle\int_a^b f(x^2)\,\mathrm{d}x$. D. $S=\pi\displaystyle\int_a^b f(x^2)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay D quanh Ox được tính theo công thức $S=\pi\displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại

A $x = -\sqrt{2}$. **B** $x = -1$. **C** $x = \sqrt{2}$. **D** $x = 0$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên tai thấy y' chỉ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x = 0$ nên hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\sqrt{x} + 3x$ là

A $\frac{4}{3}x\sqrt{x} + \frac{3x^2}{2} + C$. **B** $2x\sqrt{x} + \frac{3x^2}{2} + C$. **C** $\frac{3}{2}x\sqrt{x} + \frac{3x^2}{2} + C$. **D** $4x\sqrt{x} + \frac{3x^2}{2} + C$.

Lời giải.

Đặt $\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$. Ta được

$$\int \left(2t + 3t^2\right) 2t\,\mathrm{d}t = \int \left(4t^2 + 6t^3\right)\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^4 + C = \frac{4}{3}x\sqrt{x} + \frac{3x^2}{2} + C.$$

Chọn đáp án A □

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A $(0; 1)$. **B** $(-1; 7)$. **C** $(1; 3)$. **D** $(-5; 1)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; 2)$ do đó cũng đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng $4\pi a^2$ và bán kính đáy bằng $2a$. Độ dài đường sinh của hình trụ đã cho bằng

A $2a$. **B** $3a$. **C** a. **D** $4a$.

Lời giải.

Độ dài đường sinh cũng chính là chiều cao h của hình trụ. Ta có $S_{xq} = 2\pi \cdot 2a \cdot h = 4\pi a^2 \Rightarrow h = a$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;1;1)$, $N(1;0;-2)$, $P(0;1;-1)$. Gọi $G(x_0;y_0;z_0)$ là trực tâm của tam giác MNP. Tính $x_0 + z_0$.

A. 0. B. $\dfrac{5}{2}$. C. $-\dfrac{13}{7}$. D. -5.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MG} = (x_0 - 1; y_0 - 1; z_0 - 1)$, $\overrightarrow{NG} = (x_0 - 1; y_0; z_0 + 2)$, $\overrightarrow{PG} = (x_0; y_0 - 1; z_0 + 1)$, $\overrightarrow{MN} = (0;-1;-3)$, $\overrightarrow{MP} = (-1;0;-2)$.

Lại có G là trực tâm $\triangle ABC$ nên

$$\begin{cases} PG \perp MN \\ NG \perp MP \\ G \in (MNP) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PG} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \\ \overrightarrow{NG} \cdot \overrightarrow{MP} = 0 \\ \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right] \cdot \overrightarrow{MG} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 + 3z_0 = -2 \\ x_0 + 2z_0 = -3 \\ 2x_0 + 3y_0 - z_0 = 4. \end{cases} \Rightarrow G\left(-\frac{5}{7}; \frac{10}{7}; -\frac{8}{7}\right).$$

Vậy $x_0 + z_0 = -\dfrac{13}{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Cho a, b, c, d là các số thực dương, khác 1 bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a^c = b^d \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{d}{c}$. B. $a^c = b^d \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{c}{d}$.

C. $a^c = b^d \Leftrightarrow \dfrac{\ln a}{\ln b} = \dfrac{c}{d}$. D. $a^c = b^d \Leftrightarrow \dfrac{\ln a}{\ln b} = \dfrac{d}{c}$.

Lời giải.

Với a, b, c, d là các số thực dương, khác 1 ta có

$$a^c = b^d \Leftrightarrow \ln(a^c) = \ln\left(b^d\right) \Leftrightarrow c \cdot \ln a = d \cdot \ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{d}{c}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 11. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{5}$ và số phức $w = (1+i)\overline{z}$. Tìm $|w|$.

A. $2\sqrt{5}$. B. 5. C. $\sqrt{10}$. D. $\sqrt{2} + \sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $|w| = |(1+i)\overline{z}| = |1+i| \cdot |\overline{z}| = \sqrt{2} \cdot |z| = \sqrt{10}$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Cho hàm số $y = x\sqrt{4 - x^2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số. Tính $M + m$.

A. 0. B. -2. C. 2. D. 4.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = [-2;2]$. Ta có $y' = \sqrt{4 - x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \dfrac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Lại có $y(-2) = 0$, $y(-\sqrt{2}) = -2$, $y(\sqrt{2}) = 2$, $y(2) = 0$ nên $M = 2$, $m = -2$ và $M + m = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Trong các số phức $(1+i)^2$, $(1+i)^3$, $(1+i)^5$, $(1+i)^8$ số phức nào là số thực?

(A) $(1+i)^2$. (B) $(1+i)^8$. (C) $(1+i)^5$. (D) $(1+i)^3$.

Lời giải.

Ta có $(1+i)^2 = 2i$, $(1+i)^3 = -2+2i$, $(1+i)^5 = -4-4i$, $(1+i)^8 = 16$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(2;1;3)$. Mặt phẳng (P) đi qua A và song song với mặt phẳng (Q): $x+2y+3z+2=0$ có phương trình là

(A) $x+2y+3z-9=0$. (B) $x+2y+3z+5=0$.

(C) $x+2y+3z+13=0$. (D) $x+2y+3z-13=0$.

Lời giải.

Vì $(P) \mathbin{/\!/} (Q)$ nên phương trình (P) có dạng $x+2y+3z+d=0$, $d \neq 2$.

Mà $A \in (P)$ nên $2+2+9+d=0 \Leftrightarrow d=-13$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Tính $I = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$.

(A) $I=-\infty$. (B) $I=+\infty$. (C) $I=1$. (D) $I=0$.

Lời giải.

Đặt $x-1=t$ ta được $I = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$. (Định lý SGK Giải tích 12 nâng cao tr.102.)

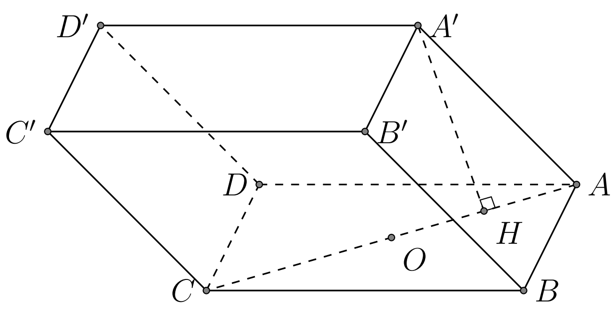
Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh bằng a, $BD = a\sqrt{3}$. Góc giữa CC' và mặt đáy là 60°, trung điểm H của AO là hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $ABCD$. Tính thể tích của V hình hộp.

(A) $V=\dfrac{3a^3}{4}$. (B) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (C) $V=\dfrac{3a^3}{8}$. (D) $V=\dfrac{a^3}{8}$.

Lời giải.

$\cos\widehat{BAD} = \dfrac{AD^2+AB^2-BD^2}{2AD\cdot AB} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAD} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ADC} = 60^\circ \Rightarrow AC = a \Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Ta có $(CC',(ABCD)) = (AA',(ABCD)) = \widehat{A'AH} = 60^\circ \Rightarrow A'H = AH\tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Vậy $V = AH\cdot S_{ABCD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3}{8}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Đồ thị của hàm số nào dưới đây không có tiệm cận đứng?

(A) $y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$. (B) $y=\tan x$. (C) $y=\ln x$. (D) $y=\dfrac{x^2-1}{x+2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}} = 0$. Vậy hàm số $y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$ không có tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$, $SA = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng SC và BD. Khi đó, $\cos\alpha$ bằng

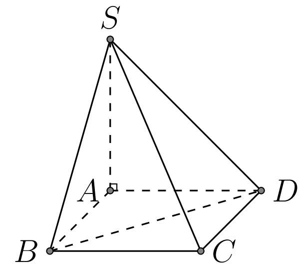
A $\dfrac{1}{2}$. **B** 0. **C** $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Ta có $BD = a\sqrt{5}, SC = 3a$.

$\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{BD} = AD^2 - AB^2 = 3a^2$.

$\Rightarrow \cos\alpha = \left|\dfrac{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{BD}}{SC \cdot BD}\right| = \dfrac{3a^2}{3a \cdot a\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



Chọn đáp án D □

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;0)$ và $B(1;-1;3)$. Mặt phẳng qua AB và vuông góc với mặt phẳng $(P): x + 3y - 2z - 1 = 0$ có phương trình là

A $-5x + y + z + 9 = 0$. **B** $-5x - y + z + 11 = 0$.
C $5x + y - z + 11 = 0$. **D** $5x - y + z - 9 = 0$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB} = (-1;-2;3)$, véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_1} = (2;3;-2)$

$\Rightarrow$ véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng cần lập là $\overrightarrow{n_2} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_1}] = (-5;1;-1)$.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là

$-5(x-2) + 1(y-1) - 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow 5x - y + z - 9 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Có bao nhiêu số tự nhiên có dạng $\overline{abc}$ với $a < b < c$ và a, b, c thuộc tập hợp $\{1;2;3;4;5;6\}$?

A 210. **B** 20. **C** 35. **D** 120.

Lời giải.

Lấy ba số trong các số $\{1;2;3;4;5;6\}$ ta được một số thỏa mãn điều kiện đề bài.

Vậy có $\mathrm{C}_6^3 = 20$ số.

Chọn đáp án B □

Câu 21. Biết rằng $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x = a\mathrm{e}^2 + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $T = a + b$.

A $T = \dfrac{1}{4}$. **B** $T = 0$. **C** $T = \dfrac{1}{2}$. **D** $T = 10$.

Lời giải.

$\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}\left(x^2\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2 - \frac{1}{2}x^2\Big|_1^{\mathrm{e}}\right) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{4}$. Vậy $T = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho số phức $z = (1+2i)(5-i)$, z có phần thực là

A 5. **B** 3. **C** 9. **D** 7.

Lời giải.

Ta có $z = 7 + 9i$. Vậy phần thực là 7.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và điểm $M = (1; -1; 1)$.Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi nhỏ nhất.

(A) $x - y + z - 3 = 0$. (B) $x - y + z - 1 = 0$. (C) $2x - y - 3z = 0$. (D) $x + y + z - 1 = 0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm là $O(0; 0; 0)$.

$1^2 + (-1)^2 + 1^2 < 9 \Rightarrow M$ nằm trong mặt cầu.

Do đó mặt phẳng (P) đi qua M và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi nhỏ nhất khi $OM \perp (P) = M$. $\overrightarrow{OM} = (1; -1; 1) \Rightarrow 1(x - 1) - 1(y - 1) + 1(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x - y + z - 1 = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Theo thống kê dân số thế giới tính đến tháng 01/2017, dân số Việt Nam có 94.970.597 người và có tỉ lệ tăng dân số là 1,03%. Nếu tỷ lệ tăng dân số không đổi thì đến năm 2020 dân số nước ta có bao nhiêu triệu người, chọn đáp án gần nhất.

(A) 102 triệu người. (B) 98 triệu người. (C) 104 triệu người. (D) 100 triệu người.

Lời giải.

Tổng dân số đến năm 2020 là $94.970.597(1 + 0{,}0103)^3 = 9793551854$ (người) ≈ 98 (triệu người).

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị của hai hàm số $y = x^2$ và $y = x + 2$. Tính diện tích S của hình (H).

(A) $S = \dfrac{3}{2}$. (B) $S = -\dfrac{9}{2}$. (C) $S = \dfrac{9}{2}$. (D) $S = \dfrac{7}{6}$.

Lời giải.

Xét phương trình $x^2 = x + 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Vậy $S = \displaystyle\int_{-1}^{2} |x^2 - x - 2|\,dx = -\int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)\,dx = -\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26.

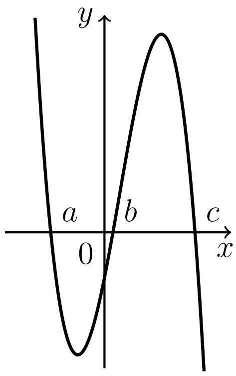
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

(A) $f(a) > f(b) > f(c)$.

(B) $f(c) > f(a) > f(b)$.

(C) $f(b) > f(a) > f(c)$.

(D) $f(c) > f(b) > f(a)$.

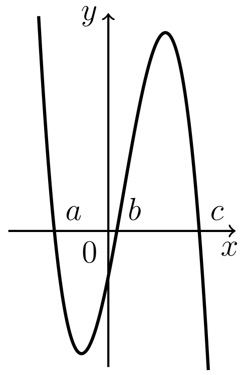


Lời giải.

Gọi S_1 là diện tích của hàm số $y = f'(x)$ và trục Ox trên đoạn $[a; b]$ và S_2 là diện tích của hàm số $y = f'(x)$ và trục Ox trên đoạn $[b; c]$. Ta có

$S_1 = -\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(a) - f(b)$ và $S_2 = \int\limits_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x = f(c) - f(b)$.

Từ đồ thị ta có $S_2 > S_1 > 0 \Rightarrow f(c) > f(a) > f(b)$.



Chọn đáp án B □

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và là hàm số chẵn, biết $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = 1$. Tính $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $\dfrac{1}{2}$. **B** 4. **C** 1. **D** 2.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} \dfrac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} \dfrac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $I = \int\limits_{-1}^{0} \dfrac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x = -t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$. Với $x = -1 \Rightarrow t = 1; x = 0 \Rightarrow t = 0$.

$I = -\int\limits_{1}^{0} \dfrac{f(-t)}{1+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{1} \dfrac{e^t f(t)}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{1} \dfrac{e^x f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$

$\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} \dfrac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} \dfrac{e^t f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} \dfrac{(e^x+1)f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Vậy $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 28.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có bảng biến thiên như hình bên $(a > 0; b < 0)$. Biết $f(0) < 0$, phương trình $f(|x|) = f(0)$ có bao nhiêu nghiệm?

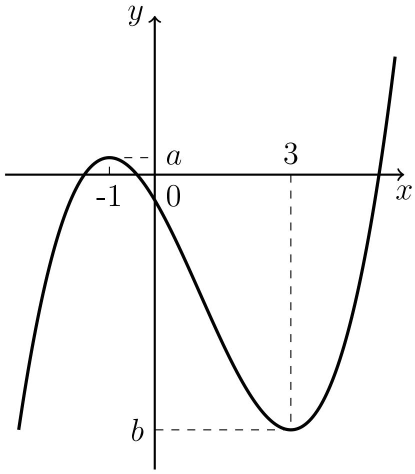
A 2. **B** 5.

C 3. **D** 4.

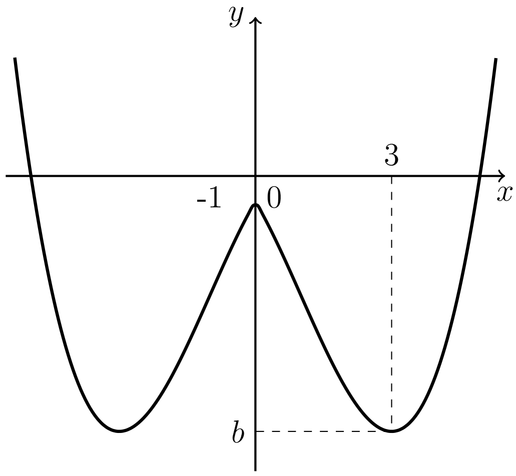
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	a	$\searrow$	b	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số đã cho như sau



Do đó đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ như hình vẽ sau

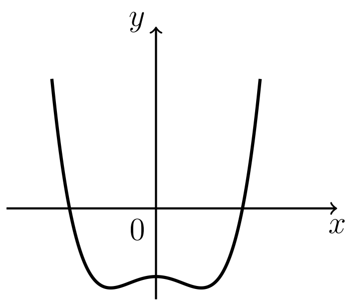


Vậy phương trình $f(|x|) = f(0)$ có 3 nghiệm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29.
Hỏi a và b thỏa mãn điều kiện nào để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$ có đồ thị dạng như hình vẽ bên?

A $a > 0; b < 0$. (B) $a < 0; b > 0$.
(C) $a > 0; b > 0$. (D) $a < 0; b > 0$.



Lời giải.
Từ đồ thị ta thấy $a > 0$. Ngoài ra $y' = 4ax^3 + 2bx$ có ba nghiệm phân biệt $\Rightarrow b < 0$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC), SA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính góc α giữa SC và mặt phẳng (SAB).

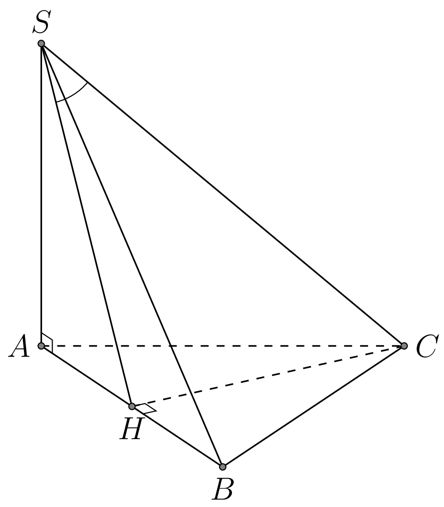
A $\alpha = 45°$. (B) $\alpha = 30°$. (C) $\alpha = 90°$. (D) $\alpha = 60°$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow CH \perp AB$ mặt khác $SA \perp CH \Rightarrow CH \perp (SAB) \Rightarrow (SC,(SAB)) = \widehat{HSC}$

$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{\dfrac{3}{2}}$; $CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \sin\widehat{HSC} = \dfrac{HC}{SC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.



Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang cân có $AB = BC = CD = a, AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA = 2a$. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCD$.

A $V = \dfrac{16\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. **B** $V = \dfrac{32\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. **C** $V = \dfrac{16\sqrt{2}\pi a^3}{6}$. **D** $V = \dfrac{16\pi a^3}{3}$.

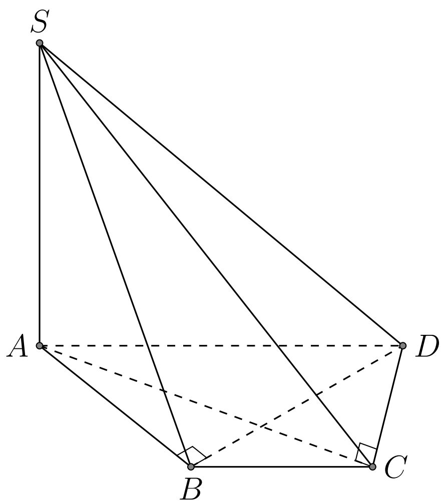
Lời giải.

Ta có đáy là nửa lục giác đều nên $\widehat{ABD} = 90^\circ, \widehat{ACD} = 90^\circ \Rightarrow BD \perp (SAB), CD \perp (SAC) \Rightarrow SB \perp BD, SC \perp CD$.

Do đó mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.BCD$ có đường kính SD.

Ta có $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = 2\sqrt{2}a$.

Vậy $V = \dfrac{4\pi}{3}\left(\dfrac{SD}{2}\right)^3 = \dfrac{16\sqrt{2}\pi a^3}{6}$.



Chọn đáp án C □

Câu 32. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2, n \geq 1. \end{cases}$ Gọi $S_n = \dfrac{1}{u_1u_2} + \dfrac{1}{u_2u_3} + \cdots + \dfrac{1}{u_nu_{n+1}}$. Tính $L = \lim S_n$.

A $L = \dfrac{1}{2}$. **B** $L = \dfrac{1}{6}$. **C** $L = 1$. **D** $L = 0$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{u_ku_{k+1}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{u_{k+1} - u_k}{u_ku_{k+1}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u_k} - \dfrac{1}{u_{k+1}}\right) \Rightarrow S_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u_1} - \dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$.

Mặt khác $u_{n+1} = 1 + 2n \Rightarrow S_n = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2n+1}\right) \Rightarrow L = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho $P(x) = (1 + 3x + x^2)^{20}$. Khai triển $P(x)$ thành đa thức ta được $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{40}x^{40}$. Tính $S = a_1 + 2a_2 + \cdots + 40a_{40}$.

A $S = 20 \cdot 5^{19}$. **B** $S = 20 \cdot 5^{21}$. **C** $S = -20 \cdot 5^{19}$. **D** $S = 20 \cdot 5^{20}$.

Lời giải.

Đạo hàm hai vế $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{40}x^{40} = (1 + 3x + x^2)^{20}$ ta được
$a_1 + 2a_2x + \cdots + 40a_{40}x^{39} = 20(3 + 2x)(1 + 3x + x^2)^{19}$.
Thay $x = 1$, ta có $S = 20(3 + 2)(1 + 3 + 1)^{19} = 20 \cdot 5^{20}$.
Chọn đáp án D □

Câu 34. Phương trình $3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x + 5 \cdot 4^x = 6 \cdot 5^x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

A 0. **B** 3. **C** 2. **D** 1.

Lời giải.

Tập xác định $x \in \mathbb{R}$. Chia hai vế cho 5^x ta được
$3\frac{2^x}{5^x} + 4\frac{3^x}{5^x} + 5\frac{4^x}{5^x} = 1 \Leftrightarrow 3\left(\frac{2}{5}\right)^x + 4\left(\frac{3}{5}\right)^x + 5\left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$
Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đường thẳng $y = 1$ và $y = 3\left(\frac{2}{5}\right)^x + 4\left(\frac{3}{5}\right)^x + 5\left(\frac{4}{5}\right)^x$. Ta có hàm số $y = 3\left(\frac{2}{5}\right)^x + 4\left(\frac{3}{5}\right)^x + 5\left(\frac{4}{5}\right)^x$ nghịch biến trên tập xác định nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2^x = 3^{x^2}$. Tính $S = x_1 + x_2$.

A $S = \log_3 2$. **B** $S = 5$. **C** $S = 0$. **D** $S = \log_2 3$.

Lời giải.

$2^x = 3^{x^2} \Leftrightarrow x\log_3 2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x\log_3 2 = 0$. Theo định lý Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = \log_3 2$.
Chọn đáp án A □

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$ và $d_2 : \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$. Viết phương trình đường phân giác góc nhọn tạo bởi d_1 và d_2.

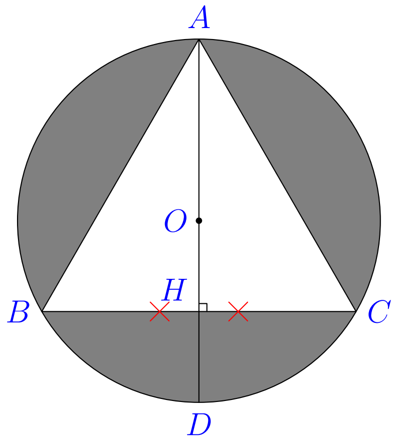
A $d_2 : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{3}$. **B** $d_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$.
C $d_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-3}$. **D** $d_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là $A(1; 0; 0)$.
Trên d_1 lấy M sao cho $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, trên d_2 lấy N sao cho $\overrightarrow{AN} = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}; \frac{-1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.
Khi đó ta có tam giác AMN cân tại A và có $AM = AN = 1$.
$\cos\widehat{MAN} = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}}{AM \cdot AN} < 0$. Do đó phân giác ứng với góc nhọn có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{3}{\sqrt{6}}; -\frac{3}{\sqrt{6}}\right)$. Suy ra $(2; 3; -3)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường phân giác góc nhọn. Vậy phương trình phân giác là $d_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-3}$.
Chọn đáp án C □

Câu 37.

Cho tam giác ABC đều cạnh a và nội tiếp trong đường tròn tâm O, AD là đường kính của đường tròn tâm O. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho phần tô đậm (hình vẽ bên) quay quanh đường thẳng AD bằng

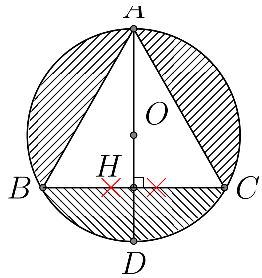


A $V = \dfrac{20\pi a^3\sqrt{3}}{217}$. **B** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$.

C $V = \dfrac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27}$. **D** $V = \dfrac{23\pi a^3\sqrt{3}}{126}$.

Lời giải.

Gọi V là thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi cho phần tô đậm quay quanh đường thẳng AD. V_1 là thể tích khối cầu sinh ra khi quay nửa đường tròn đường kính AD quanh đường thẳng AD, V_2 là thể tích khối nón sinh ra khi quay tam giác ABC quanh đường thẳng AD.



$$V_1 = \frac{4}{3}\pi\,(OA)^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}.$$

$V_2 = \dfrac{1}{3}AH\pi(HB)^2 = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{24}$. Vậy, $V = V_1 - V_2 = \dfrac{23\pi a^3\sqrt{3}}{126}$.

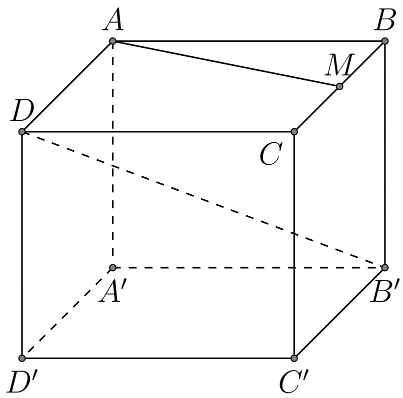
Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AM và DB'.

A $d = \dfrac{a}{2}$. **B** $d = a$. **C** $d = \dfrac{a\sqrt{14}}{7}$. **D** $d = \dfrac{a}{3}$.

Lời giải.

Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$, sao cho $A'(0;0;0), D'(a;0;0), B'(0;a;0)$ và $A(0;0;a)$. Khi đó $D(a;0;a), B(0;a;a), C(a;a;a) \Rightarrow M(\frac{a}{2};a;a)$ $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = (\frac{a}{2};a;0)$, $\overrightarrow{DB'} = (-a;a;-a) \Rightarrow$ véc-tơ chỉ phương của AM và DB' lần lượt là $\vec{u} = (1;2;0)$, $\vec{v} = (1;-1;1) \Rightarrow [\vec{u},\vec{v}] = (2;-1;3)$. Áp dụng công thức khoảng cách giữa hai đường thẳng ta có $d = \dfrac{|[\vec{u},\vec{v}]\cdot\overrightarrow{AD}|}{|[\vec{u},\vec{v}]|}$, $\overrightarrow{AD} = (a;0;0)$. Vậy $d = \dfrac{a\sqrt{14}}{7}$.



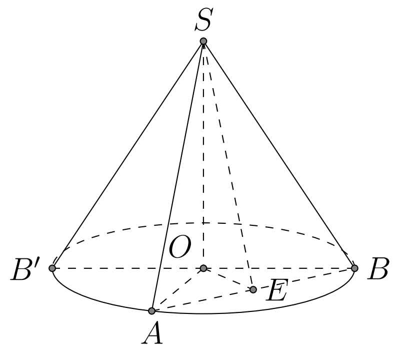
Chọn đáp án C □

Câu 39. Một khối nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân và đường sinh có độ dài bằng $3\sqrt{2}$ cm. Một mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với đáy một góc $60°$ chia khối nón thành 2 phần. Tính thể tích V phần nhỏ hơn (Tính gần đúng đến hàng phần trăm).

A $V \approx 4{,}53$ cm^3. **B** $V \approx 5{,}61$ cm^3. **C** $V \approx 4{,}36$ cm^3. **D** $V \approx 5{,}37$ cm^3.

Lời giải.

Giả sử ta có hình nón như hình vẽ bên. $\widehat{SEO} = 60^\circ$. Theo giả thiết tam giác SBB' vuông cân $\Rightarrow SO = OB = 3 \Rightarrow OE = \dfrac{SO}{\tan 60^\circ} = \sqrt{3}$.
$EB = \sqrt{OB^2 - OE^2} = \sqrt{6} \Rightarrow AB = 2\sqrt{6} \Rightarrow \cos\widehat{AOB} = \dfrac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OAOB} = -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \widehat{AOB} = \arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$.



Diện tích giới hạn bởi dây cung AB và cung nhỏ AB là $S = \dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\pi OB^2 - \dfrac{1}{2}OE \cdot AB \approx 4,36$ (cm^2) Vậy $V = \dfrac{1}{3}SO \cdot S \approx 4,36$ (cm^3)

Chọn đáp án C □

Câu 40. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $S(0;0;1)$, Hai điểm $M(m;0;0)$, $N(0;n;0)$ thay đổi sao cho $m + n = 1$ và $m > 0, n > 0$. Mặt phẳng (SMN) luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định đi qua $P(1;1;1)$ có bán kính là

A 1. **B** 2. **C** $\sqrt{2}$. **D** $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Phương trình $(SMN) : \dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{n} + z = 1$. Gọi $I(a;b;c)$ và R là tâm và bán kính mặt cầu cố định trong đề bài, phương trình mặt cầu là $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$. Ta có khoảng cách từ I đên (SMN) là

$$d = \frac{\left|\dfrac{a}{m} + \dfrac{b}{n} + c - 1\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{m^2} + \dfrac{1}{n^2} + 1}} = R. \text{ Vì } m + n = 1 \Rightarrow \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + 1 = \frac{m^2 + n^2 + m^2n^2}{m^2n^2} = \frac{1 - 2mn + m^2n^2}{m^2n^2}.$$

$$\Rightarrow d = \frac{|an + bm + cmn - mn|}{1 - mn} = R.$$

Nếu

$$\begin{aligned} & an + bm + cmn - mn = R(1 - mn) \\ \Leftrightarrow\ & a(1-m) + bm + cm(1-m) - m(1-m) = R - Rm(1-m)\ . \\ \Leftrightarrow\ & m^2(R + c - 1) + m(a - b - c - R + 1) - a + R = 0 \end{aligned}$$

Đẳng thức đúng với mọi $m \in (0;1)$ nên $R + c - 1 = a - b - c - R + 1 = -a + R$ hay $a = b = R, c = 1 - R$, thay vào phương trình mặt cầu ta có $R = 1$.

Nếu $an + bm + cmn - mn = -R(1 - mn) \Leftrightarrow m^2(-R + c - 1) + m(a - b - c + R + 1) - a - R = 0$.

Đẳng thức đúng với mọi $m \in (0;1)$ nên $R + c - 1 = a - b - c - R + 1 = -a + R$ hay $a = b = -R, c = 1 + R$ thay vào phương trình mặt cầu ta có $R = -1$ không thỏa mãn. Vậy $R = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm không âm trên $[0;1]$ thỏa mãn $[f(x)]^4 \cdot [f'(x)]^2 \cdot (x^2 + 1) = 1 + [f(x)]^3$ và $f(x) > 0$, $\forall x \in [0;1]$ biết $f(0) = 2$. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A $3 < f(1) < \dfrac{7}{2}$. **B** $\dfrac{5}{2} < f(1) < 3$. **C** $\dfrac{3}{2} < f(1) < 2$. **D** $2 < f(1) < \dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}[f(x)]^4\cdot[f'(x)]^2\cdot\left(x^2+1\right)=1+[f(x)]^3 &\Rightarrow [f(x)]^2\cdot f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}=\sqrt{1+[f(x)]^3}\\ &\Rightarrow \frac{3\cdot[f(x)]^2\cdot f'(x)}{2\sqrt{1+[f(x)]^3}}=\frac{3}{2\sqrt{x^2+1}}\\ &\Rightarrow \left[\sqrt{1+[f(x)]^3}\right]'=\frac{3}{2\sqrt{x^2+1}}\\ &\Rightarrow \int_0^1\left[\sqrt{1+[f(x)]^3}\right]'\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Mà $f(0)=2$ nên ta được $\sqrt{1+[f(1)]^3}-3=\dfrac{3}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\Rightarrow f(1)\approx 2{,}6$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x+y-z=2$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\sqrt{x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+3}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-4x-2y+5}$ đạt tại $(x_0;y_0;z_0)$. Tính x_0+y_0.

(A) $\dfrac{3}{2}$. (B) $\dfrac{5}{2}$. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $A=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+z^2}$. Bài toán trở thành tìm điểm $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$ thuộc mặt phẳng (α): $f(x,y,z)=x+y-z-2=0$ sao cho $MA+MB$ có giá trị nhỏ nhất, với $A(1;1;1)$ và $B(2;1;0)$.

Ta có $f(A)=-1<0$, $f(B)=1>0$ nên A, B nằm về hai phía đối với (α). Để $MA+MB$ nhỏ nhất thì $M=AB\cap(\alpha)$.

Đường thẳng AB có một VTCP là $\overrightarrow{AB}=(1;0;-1)$ nên có phương trình $\begin{cases}x=t+1\\ y=1\\ z=-t+1.\end{cases}$

$\Rightarrow M(t+1;1;-t+1)\in(\alpha)\Leftrightarrow t+1+1+t-1-2=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}\Rightarrow M\left(\dfrac{3}{2};1;\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow x_0+y_0=\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2+3i|+|z+2+i|=4\sqrt{5}$. Tính giá trị lớn nhất của $P=|z-4+4i|$.

(A) $\max P=7\sqrt{5}$. (B) $\max P=5\sqrt{5}$. (C) $\max P=4\sqrt{5}$. (D) $\max P=6\sqrt{5}$.

Lời giải.

Đặt $w=z-4+4i$. Ta có

$$\begin{aligned}&|z-2+3i|+|z+2+i|=4\sqrt{5}\\ \Leftrightarrow\ &|w+2-i|+|w+6-3i|=4\sqrt{5}\\ \Rightarrow\ &|w|-|2-i|+|w|-3|2-i|\le 4\sqrt{5}\\ \Leftrightarrow\ &2|w|\le 8\sqrt{5}\Leftrightarrow |w|\le 4\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 44. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|\sin^4 x+\cos 2x+m\right|$ bằng 2. Số phần tử của S là

(A) 4. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $y=\left|\sin^4 x+\cos 2x+m\right|=\left|\dfrac{1}{4}\cos^2 2x+\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{4}+m\right|$.

Đặt $\cos 2x=t$ ta được $y=\left|\dfrac{1}{4}t^2+\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{4}+m\right|$ với $t\in[-1;1]$.

Xét $f(t)=\dfrac{1}{4}t^2+\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{4}+m$, $t\in[-1;1]$.

$f'(t)=\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{2}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=-1$. Ta có bảng biến thiên

t	-1		1
$f'(t)$	0	$+$	
$f(t)$	m	$\nearrow$	$m+1$

- TH1: $m<0<m+1$ thì $\min|f(t)|=0$ (không thỏa mãn).
- TH2: $m\ge 0$ thì $\min|f(t)|=m\Rightarrow m=2$ (thỏa mãn).
- TH3: $m+1\le 0\Leftrightarrow m\le -1$ thì $\min|f(t)|=|m+1|\Rightarrow\left[\begin{array}{ll} m=1 & \text{(loại)}\\ m=-3 & \text{(thỏa mãn).}\end{array}\right.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=e^{\frac{3x-\sqrt{mx^2+1}}{x-\sqrt{(2018-m)x^2+1}}}$ có hai tiệm cận ngang.

(A) 2019. (B) 2017. (C) 2016. (D) 2018.

Lời giải.

- TH1: $m<0$ hoặc $m>2018$, không thỏa mãn vì TXĐ là miền không dần đến vô cực.
- TH2: Với $m\in[0;2018]$ thì

$$\lim_{x\to+\infty} y=e^{\frac{3-\sqrt{m}}{1-\sqrt{2018-m}}};\qquad \lim_{x\to-\infty} y=e^{\frac{3+\sqrt{m}}{1+\sqrt{2018-m}}};\qquad 1-\sqrt{2018-m}\neq 0\Rightarrow m\neq 2017.$$

Do đó $m\in\{0,\ldots,2018\}\setminus\{2017\}\Rightarrow$ có 2018 giá trị của m.

Chọn đáp án (D) □

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6)$, $B(0;1;0)$ và mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Mặt phẳng (P): $ax+by+cz-2=0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$.

(A) $T=5$. (B) $T=3$. (C) $T=4$. (D) $T=2$.

Lời giải.

Ta có A, $B \in (P)$ nên $b = 2$ và $a = 2 - 2c$. Phương trình (P) có dạng $(2-2c)x + 2y + cz - 2 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = 5$. Khoảng cách từ I đến (P) là

$$d = \frac{|2 - 2c + 4 + 3c - 2|}{\sqrt{(2-2c)^2 + 4 + c^2}} \Rightarrow d^2 = \frac{(4+c)^2}{5c^2 - 8c + 8} = f(c).$$

$f'(c) = -\dfrac{48c - 1)(c+4)}{\left(5c^2 - 8c + 8\right)^2}$, $f'(c) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 1 \\ c = -4 \end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên

c	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(c)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(c)$	$\frac{1}{5}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	$\frac{1}{5}$

Để (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất thì $d < R$ và d đạt giá trị lớn nhất. Từ bảng biến thiên suy ra $\max d = \sqrt{5}$ khi $c = 1 \Rightarrow a = 0$. Vậy $T = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1;2\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-1

Phương trình $f\left(2^{\sin x}\right) = 3$ có bao nhiêu nghiệm trên $\left[0; \dfrac{5\pi}{6}\right]$.

(A) 4. (B) 5. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Với $x \in \left[0; \dfrac{5\pi}{6}\right]$ thì $\sin x \in [0;1]$ trong đó

- Nếu $\sin x \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right) \cup \{1\}$ thì tương ứng có 1 giá trị của $x \in \left[0; \dfrac{5\pi}{6}\right]$.
- Nếu $\sin x \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right)$ thì tương ứng có 2 giá trị của $x \in \left[0; \dfrac{5\pi}{6}\right]$.

Đặt $2^{\sin x} = t$ thì $t \in [1;2]$ khi đó phương trình $f\left(2^{\sin x}\right) = 3$ trở thành $f(t) = 3$. $(*)$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $(*)$ có bốn nghiệm $t_1 \in (-\infty; 1)$ (loại), $t_2 \in (1; \sqrt{2})$ (thỏa mãn), $t_3 \in (\sqrt{2}; 2)$ (thỏa mãn), $t_4 \in (2; +\infty)$ (loại).

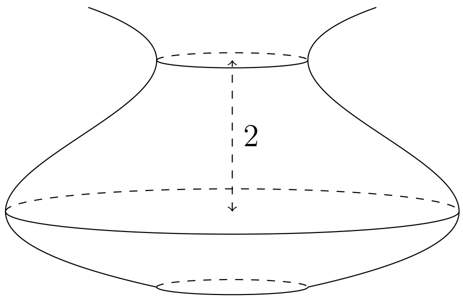
- Tương ứng với $t_2 \in (1; \sqrt{2})$ thì $\sin x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ nên có 1 nghiệm x.
- Tương ứng với $t_3 \in (\sqrt{2}; 2)$ thì $\sin x \in \left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$ nên có 2 nghiệm x.

Vậy phương trình $f\left(2^{\sin x}\right) = 3$ có 3 nghiệm trên $\left[0; \dfrac{5\pi}{6}\right]$.

Chọn đáp án D □

Câu 48.

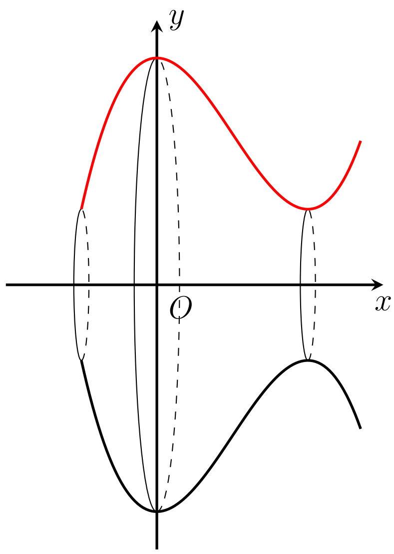
Một con quạ khát nước, nó tìm thấy một cái lọ có nước nhưng cổ lọ lại cao nó không thò mỏ uống được nên đã gắp từng viên bi (hình cầu) bỏ vào trong lọ để nước dâng lên. Hỏi con quạ cần bỏ vào lọ ít nhất bao nhiêu viên bi để có thể uống nước? Biết rằng viên bi có bán kính là $\dfrac{3}{4}$ (đvđd) và không thấm nước, cái lọ có hình dáng là một khối tròn xoay với đường sinh là đồ thị của một hàm bậc 3, mực nước ban đầu trong lọ ở vị trí mà mặt thoáng tạo thành hình tròn có bán kính lớn nhất $R = 3$, mực nước mà quạ có thể uống được là vị trí mà hình tròn có bán kính nhỏ nhất $r = 1$ và khoảng cách giữa hai mặt này bằng 2, được minh họa ở hình vẽ trên.



Ⓐ 15. Ⓑ 16. Ⓒ 17. Ⓓ 18.

Lời giải.

Đặt cái bình vào hệ trục Oxy sao cho O trùng với tâm đường tròn lớn, Ox trùng với trục của cái bình, đi qua tâm hai đường tròn lớn và bé.



Khi đó một đường sinh của cái bình là đồ thị hàm bậc ba có hai điểm cực trị là $A(3;0)$ và $B(2;1)$.

Gọi hàm bậc ba đó là $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ta có hệ

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \\ y(0) = 3 \\ y(2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 3 \\ 3a + b = 0 \\ 4a + 2b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow (a;b;c;d) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; 0; 3\right).$$

Từ đó thể tích phần bình từ đường tròn lớn lên đường tròn nhỏ là

$$V_1 = \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{314\pi}{35}.$$

Thể tích một viên bi là $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = \dfrac{9\pi}{16}$. Ta có $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{5024}{315} \approx 15{,}95$.

Do đó số viên bi ít nhất cần phải thả vào lọ là 16 viên.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Rút gọn tổng sau $S = \mathrm{C}_{2018}^{2} + \mathrm{C}_{2018}^{5} + \mathrm{C}_{2018}^{8} + \cdots + \mathrm{C}_{2018}^{2018}$.

Ⓐ $S = \dfrac{2^{2018} - 1}{3}$. Ⓑ $S = \dfrac{2^{2019} + 1}{3}$. Ⓒ $S = \dfrac{2^{2019} - 1}{3}$. Ⓓ $S = \dfrac{2^{2018} + 1}{3}$.

Lời giải.

Trước hết ta có nhận xét, nếu α là một nghiệm phức của phương trình $x^3 - 1 = 0$ (1), tức là $\alpha \neq 1$, thì $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$ hay nói cách khác nếu α là một nghiệm phức của (1) thì α^2 cũng là nghiệm của (1). Ngoài ra

$$\alpha^k = \begin{cases} 1 & \text{khi} \quad k = 3t, \\ \alpha & \text{khi} \quad k = 3t+1, \\ \alpha^2 & \text{khi} \quad k = 3t+2. \end{cases}$$

Bây giờ ta xét đa thức $P(x) = (1+x)^{2018} = \sum\limits_{k=0}^{2018} \mathrm{C}_{2018}^k x^k$.

Ta có $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{672} \mathrm{C}_{2018}^{3k} x^{3k} + \sum\limits_{k=0}^{672} \mathrm{C}_{2018}^{3k+1} x^{3k+1} + \sum\limits_{k=0}^{672} \mathrm{C}_{2018}^{3k+2} x^{3k+2}$.

Để ý rằng

$$\begin{aligned} P(1) &= \mathrm{C}_{2018}^0 + \mathrm{C}_{2018}^1 + \cdots + \mathrm{C}_{2018}^{2018} = 2^{2018}; \\ P(\alpha) &= \mathrm{C}_{2018}^0 + \mathrm{C}_{2018}^1 \cdot \alpha + \cdots + \mathrm{C}_{2018}^{2018} \cdot \alpha^{2018} \\ &= (1+\alpha)^{2018} = (-\alpha^2)^{2018} = \alpha^4 \cdot (\alpha^6)^{672} = \alpha; \\ P(\alpha^2) &= \mathrm{C}_{2018}^0 + \mathrm{C}_{2018}^1 \cdot \alpha^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2018}^{2018} \cdot \alpha^{4036} \\ &= (1+\alpha^2)^{2018} = (-\alpha)^{2018} = \alpha^2 \cdot (\alpha^3)^{672} = \alpha^2; \end{aligned}$$

Từ nhận xét trên ta thấy

$$S = \frac{P(1) + \alpha \cdot P(\alpha) + \alpha^2 \cdot P(\alpha^2)}{3} = \frac{2^{2018} - 1}{3}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 50. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$\sin 2x - \cos 2x + |\sin x + \cos x| - \sqrt{2\cos^2 x + m} - m = 0$$

có nghiệm thực?

A 5. B 2. **C 3.** D 9.

Lời giải.

Ta có phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & (\sin x + \cos x)^2 + |\sin x + \cos x| = 2\cos^2 x + m + \sqrt{2\cos^2 x + m} \\ \Leftrightarrow\ & f\left(|\sin x + \cos x|\right) = f\left(\sqrt{2\cos^2 x + m}\right). \qquad (*) \end{aligned}$$

Với $f(t) = t^2 + t$, $t \geq 0$. Ta có $f(t) = 2t + 1 > 0$, $\forall t \geq 0$. Nên

$$\begin{aligned} (*) \ \Leftrightarrow\ & |\sin x + \cos x| = \sqrt{2\cos^2 x + m} \\ \Leftrightarrow\ & 1 + \sin 2x = 2\cos^2 x + m \\ \Leftrightarrow\ & \sin 2x - \cos 2x = m. \end{aligned}$$

Để phương trình có nghiệm thì $m^2 \leq 2 \Leftrightarrow m \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 0; 1\}$.

Chọn đáp án C □

—— HẾT ——

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. D	3. B	4. B	5. D	6. A	7. A	8. C	9. C	10. D
11. C	12. A	13. B	14. D	15. C	16. C	17. A	18. D	19. D	20. B
21. C	22. D	23. B	24. B	25. C	26. B	27. D	28. C	29. A	30. A
31. C	32. A	33. D	34. D	35. A	36. C	37. D	38. C	39. C	40. A
41. B	42. B	43. C	44. B	45. D	46. B	47. D	48. B	49. A	50. C

151 THI THỬ THPT QG 2018 LỚP 12-LẦN 1-TRƯỜNG THPT HƯƠNG KHÊ-HÀ TĨNH NĂM 2017-2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho số phức $z = -3+4i$. Gọi M là điểm biểu diễn số phức $\overline{z}$. Tung độ của điểm M là

(A) 6. (B) 4. (C) -4. (D) -6.

Lời giải.

$\overline{z} = -3-4i$ nên tung độ điểm M là -4.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3-x^2+x-3)$.

(A) $+\infty$. (B) 2. (C) $-\infty$. (D) -3.

Lời giải.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x^3-x^2+x-3\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right).$$

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}\right) = 2 > 0$.

Do đó $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3-x^2+x-3) = -\infty$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Trong hộp đựng 9 viên bi màu đỏ và 6 viên bi màu xanh. Số cách lấy ra 2 viên bi gồm một bi đỏ và một bi xanh?

(A) C_9^2. (B) C_6^2. (C) $\mathrm{C}_9^1\mathrm{C}_6^1$. (D) C_15^2.

Lời giải.

- Lấy một bi đỏ trong 9 viên có C_9^1 cách.
- Lấy một bi xanh trong 6 viên có C_6^1 cách.

Theo quy tắc nhân thì số cách chọn thỏa yêu cầu là $\mathrm{C}_9^1\mathrm{C}_6^1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Khối chóp có chiều cao bằng $3a$, $(a>0)$ và diện tích đáy bằng a^2. Tính thể tích V của khối chóp đó.

(A) $V = a^3$. (B) $V = 3a^3$. (C) $V = 9a^3$. (D) $V = \dfrac{2}{3}a^3$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính thể tích khối chóp $V = \dfrac{1}{3}\cdot 3a\cdot a^2 = a^3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-4; +\infty)$.

(B) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.

(C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

D Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $y' < 0$, $\forall x \in (-2; 0)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, gọi S là diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$; $x = b$. Khi đó:

A $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. (B) $S = \int\limits_b^a |f(x)|\,\mathrm{d}x$. (C) $S = \int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. (D) $S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo công thức tính diện tích hình phẳng bằng tích phân $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Trong các hàm số sau, hàm số nào có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu?

(A) $y = -x^4 - x^2 + 3$. (B) $y = x^4 - x^2 + 3$. **C** $y = -x^4 + x^2 + 3$. (D) $y = x^4 + x^2 + 3$.

Lời giải.

Hàm trùng phương có ba cực trị nên $a \cdot b < 0$ do đó ta loại hai hàm số $y = -x^4 - x^2 + 3$ và $y = x^4 + x^2 + 3$.

Hàm số có hai cực đại và một cực tiểu nên hệ số $a < 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Rút gọn biểu thức $A = \log_a\left(a\sqrt[5]{a^3\sqrt{a\sqrt{a}}}\right)$ với $a > 0$, $a \neq 1$ ta được kết quả nào sau đây?

A $\frac{7}{4}$. (B) $\frac{5}{3}$. (C) $\frac{4}{3}$. (D) 2.

Lời giải.

$$A = \log_a\left(a\sqrt[5]{a^3\sqrt{a\sqrt{a}}}\right) = \log_a\left(a\sqrt[5]{a^3\sqrt{a^{1+\frac{1}{2}}}}\right)$$
$$= \log_a\left(a\sqrt[5]{a^3\cdot a^{\frac{3}{4}}}\right) = \log_a\left(a\sqrt[5]{a^{\frac{15}{4}}}\right)$$
$$= \log_a\left(a\cdot a^{\frac{3}{4}}\right) = \log_a a^{\frac{7}{4}} = \frac{7}{4}.$$

Cách khác: Ta có thể cho $a = 2$ thay vào biểu thức để tính một cách rất đơn giản.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.

A $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + C$.

B $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + C$.

C $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + C$.

D $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + C$.

Lời giải.

Theo công thức nguyên hàm $\int \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;3;1)$ và $N(0;-1;5)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{MN}$.

A $\overrightarrow{MN} = (-2;4;-4)$.

B $\overrightarrow{MN} = (2;-4;4)$.

C $\overrightarrow{MN} = (-2;-2;6)$.

D $\overrightarrow{MN} = (-1;-1;3)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (2;-4;4)$.

Chọn đáp án B □

Câu 11.

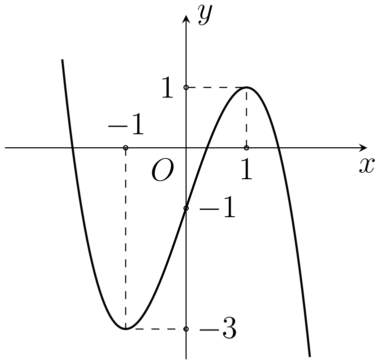
Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A $y = -x^3 - 3x - 1$.

B $y = x^3 - 3x - 1$.

C $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

D $y = -x^3 + 3x - 1$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị $\Rightarrow a < 0 \Rightarrow$ loại hàm số $y = x^3 - 3x - 1$.

Hàm có đạt cực trị tại $x = \pm 1$.

Xét các hàm số sau:

- $y = -x^3 - 3x - 1 \Rightarrow y' = -3x^2 - 3 < 0, \forall x$ nên hàm số không có cực trị.
- $y = -x^3 + 3x^2 - 1 \Rightarrow y' = -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$ nên hàm số không đạt cực trị tại $x = \pm 1$.
- $y = -x^3 + 3x - 1 \Rightarrow y' = -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ nên hàm số đạt cực trị tại $x = \pm 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;2;-1)$ và $N(0;-2;5)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn MN.

A (α): $x+2y-3z+10=0$.
B (α): $x+2y-3z+15=0$.
C (α): $2x+2y-z+9=0$.
D (α): $-2y+5z+9=0$.

Lời giải.

Tọa độ trung điểm I của MN là $I(1;0;2)$.

Ta có (α): $\begin{cases} \text{đi qua } I(1;0;2) \\ \text{VTPT } \vec{n}=\overrightarrow{MN}=(-2;-4;6). \end{cases}$

Do đó (α): $-2(x-1)-4y+6(z-2)=0 \Leftrightarrow x+2y-3z+5=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a}=(2;0;-1)$ và $\vec{b}=(3;-2;1)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\vec{u}=2\vec{a}-\vec{b}$.

A $\vec{u}=(1;2;-3)$.
B $\vec{u}=(-4;4;-3)$.
C $\vec{u}=(5;-2;-1)$.
D $\vec{u}=(7;-2;-1)$.

Lời giải.

$$\vec{u}=2\vec{a}-\vec{b}=2(2;0;-1)-(3;-2;1)=(1;2;-3).$$

Chọn đáp án B □

Câu 14. Cho hai khối trụ $(T_1),(T_2)$ có bán kính đáy bằng nhau có thể tích lần lượt là V_1,V_2. Biết chiều cao khối (T_1) gấp hai khối T_2. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $V_1=4V_2$.
B $V_2=4V_1$.
C $V_1=2V_2$.
D $V_2=2V_1$.

Lời giải.

$V_1=\pi R^2h,\ V_2=\pi R^2\left(\dfrac{h}{2}\right)=\dfrac{1}{2}V_1 \Rightarrow V_1=2V_2$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ bất kỳ $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ và $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$. Chọn khẳng định đúng.

A $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$.
B $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.
C $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}$.
D $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

Lời giải.

Công thức tích vô hướng của hai véc-tơ.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2-2x}{x+1}$ là

A $x=-2$.
B $y=-2$.
C $y=-1$.
D $x=-1$.

Lời giải.

- Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} y=-2$.

- Vậy tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = -2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Đồ thị hàm số $y = 2x^4 - 7x^2 + 4$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 1.

Lời giải.

- Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2x^4 - 7x^2 + 4$ với trục hoành là

$$2x^4 - 7x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{\dfrac{7+\sqrt{17}}{2}} \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{7-\sqrt{17}}{2}}. \end{array}\right.$$

- Phương trình có 4 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số $y = 2x^4 - 7x^2 + 4$ cắt trục hoành tại 4 điểm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin^2 x - \cos x + 1$. Khi đó tích $M \cdot m$ là

(A) $M \cdot m = 0$. (B) $M \cdot m = \dfrac{25}{4}$. (C) $M \cdot m = \dfrac{25}{8}$. (D) $M \cdot m = 2$.

Lời giải.

- Ta có $y = 2\sin^2 x - \cos x + 1 = -2\cos^2 x - \cos x + 3$.
- Đặt $t = \cos x$ với $-1 \le t \le 1$. Xét hàm số $f(t) = -2t^2 - t + 3$.
  Ta có $f'(t) = -4t - 1 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow -4t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{4}$.
- Khi đó $f\left(-\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{25}{8}, f(1) = 0, f(-1) = 2$.
- Vậy $M = \dfrac{25}{8}, m = 0$ nên $M \cdot m = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Cho $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -4$, $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$, $\displaystyle\int_2^5 g(x)\,\mathrm{d}x = 8$. Tích phân $\displaystyle\int_2^5 [4f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ có giá trị là

(A) 12. (B) 0. (C) 48. (D) 32.

Lời giải.

- Ta có $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Suy ra $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 6 - (-4) = 10$.
- Do đó $\displaystyle\int_2^5 [4f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 4\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_2^5 g(x)\,\mathrm{d}x = 4 \cdot 10 - 8 = 32$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = 1 - \pi i$.

A Phần thực là 1 và phần ảo là $-\pi$.
B Phần thực là 1 và phần ảo là π.
C Phần thực là 1 và phần ảo là $-\pi i$.
D Phần thực là -1 và phần ảo là $-\pi$.

Lời giải.

- Theo định nghĩa số phức có dạng $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ thì có phần thực và phần ảo tương ứng là a và b.
- Vậy số phức $z = 1 - \pi i$ có phần thực là 1 và phần ảo là $-\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Hình nào dưới đây có 3 trục đối xứng?

A Hình thoi. **B** Hình chữ nhật. **C** Tam giác đều. **D** Hình vuông.

Lời giải.

Tam giác đều có ba trục đối xứng là các đường thẳng đi qua 1 đỉnh và trung điểm của cạnh đối diện.

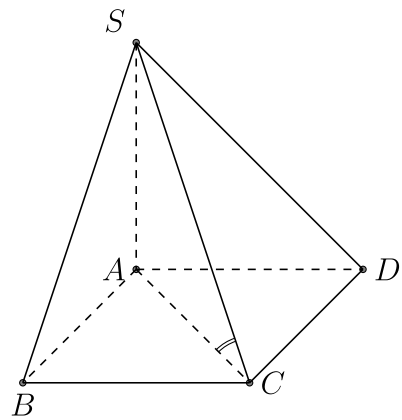
Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

A 30°. **B** 45°. **C** 60°. **D** 90°.

Lời giải.

- Vì $SA \perp (ABCD)$ nên A là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$.
- Suy ra $(SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$.
- Xét tam giác SAC vuông tại A có $SA = a\sqrt{2}, AC = a\sqrt{2}$ nên ΔSAC vuông cân tại A.
- Vậy $(SC, (ABCD)) = \widehat{SCA} = 45^\circ$.



Chọn đáp án B □

Câu 23. Một tổ có 12 học sinh trong đó có 5 em nam. Chọn ngẫu nhiên từ tổ đó 3 học sinh. Tính xác suất để 3 học sinh được chọn có đúng 1 em nữ.

A $\dfrac{1}{12}$. **B** $\dfrac{7}{12}$. **C** $\dfrac{7}{22}$. **D** $\dfrac{21}{44}$.

Lời giải.

- Để chọn ngẫu nhiên 3 học sinh từ tổ đó ta có C_{12}^3 cách, suy ra số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^3$.
- Gọi A là biến cố " Chọn 3 học sinh trong đó có đúng 1 học sinh nữ ". Vậy $n(A) = \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_7^1$.
- Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{\mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_7^1}{\mathrm{C}_{12}^3} = \dfrac{7}{22}$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Gọi N, P lần lượt là hình chiếu của M trên các mặt phẳng tọa độ (Oxy), (Oxz). Viết phương trình mặt phẳng (MNP).

A $x-1=0$. **B** $y-2=0$. **C** $z-3=0$. **D** $x+y+z-6=0$.

Lời giải.

- Ta có $N(1;2;0)$, $P(1;0;3) \Rightarrow \overrightarrow{MN}=(0;0;-3)$, $\overrightarrow{MP}=(0;-2;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]=(-6;0;0)$ là 1 véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (MNP).
- Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là $-6(x-1)=0 \Leftrightarrow x-1=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \geq \log_{\frac{1}{2}}(5-x)$ có tập nghiệm là

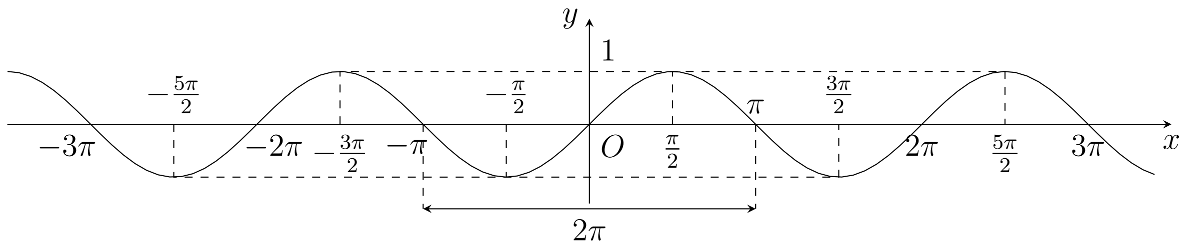
A $\left(\frac{1}{2};2\right]$. **B** $(-\infty;2]$. **C** $[2;+\infty)$. **D** $[2;5)$.

Lời giải.

- Điều kiện xác định của phương trình: $\begin{cases} 2x-1>0 \\ 5-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<x<5$.
- Bất phương trình trở thành $2x-1 \leq 5-x \Leftrightarrow 3x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 2$.
- Kết hợp điều kiện suy ra bất phương trình có tập nghiệm $\left(\frac{1}{2};2\right]$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Cho đồ thị hàm số $y=\sin x$ như hình vẽ sau



Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A Hàm số $y=\sin x$ tăng trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

B Hàm số $y=\sin x$ giảm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$.

C Hàm số $y=\sin x$ giảm trên khoảng $\left(-\frac{3\pi}{2};-\pi\right)$.

D Hàm số $y=\sin x$ tăng trên khoảng $(0;\pi)$.

Lời giải.

- Hàm số $y=\sin x$ tăng trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ và giảm trên $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.
- Vậy trên khoảng $(0;\pi)$, hàm số $y=\sin x$ vừa tăng vừa giảm nên khẳng định hàm số $y=\sin x$ tăng trên khoảng $(0;\pi)$ là khẳng định **sai**.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+4y-8z+12=0$. Biết (S) có tâm $I\,(a;b;c)$. Tính $T=a+b+c$.

A $T=3$. **B** $T=-3$. **C** $T=6$. **D** $T=-6$.

Lời giải.

- Ta có $x^2+y^2+z^2-2x+4y-8z+12=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=9$.
- Khi đó suy ra (S) có tâm $I\,(1;-2;4) \Rightarrow a=1, b=-2, c=4$.

- Vậy $T = a + b + c = 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x + y + z = 0$ và các điểm $A(1;1;2)$, $B(0;-1;1)$, $C(2;0;0)$. Tìm tọa độ điểm M biết M thuộc mặt phẳng (P) và $MA = MB = MC$.

A $M\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$. (B) $M\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$. (C) $M\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$. (D) $M\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

- Trong không gian $Oxyz$, gọi $M(a;b;c), (a,b,c \in \mathbb{R})$.
- Theo đề ra ta có

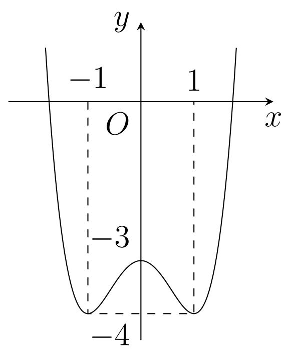
$$\begin{cases} M \in (P) \\ MA = MB \\ MB = MC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-2)^2 = a^2 + (b+1)^2 + (c-1)^2 \\ a^2 + (b+1)^2 + (c-1)^2 = (a-2)^2 + b^2 + c^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ a + 2b + c = 2 \\ 2a + b - c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right).$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 29.

Xác định các hệ số a, b, c để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên.



(A) $a = -\frac{1}{4}, b = 3, c = -3$. **B** $a = 1, b = -2, c = -3$.

(C) $a = 1, b = -3, c = 3$. (D) $a = 1, b = 3, c = -3$.

Lời giải.

- Ta có: $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$.
- Từ hình vẽ, suy ra đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị có tọa độ là $(-1;-4)$, $(0;-3)$, $(1;-4)$.
- Khi đó: $\begin{cases} y(0) = -3 \\ y(-1) = y(1) = -4 \\ y'(-1) = y'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -3 \\ a + b + c = -4 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -3. \end{cases}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m+1)x - 1$ đồng biến trên tập xác định của nó.

(A) $-1 < m < 0$. (B) $m \in (-\infty;-1) \cup (0;+\infty)$.

C $-1 \leq m \leq 0$. (D) $m \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

- Ta có: $y' = x^2 + 2\,(m+1)\,x + (m+1)\,.$
- Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- y' là tam thức bậc hai có hệ số $a = 1 > 0$ nên

$$\begin{aligned} y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta'_{y'} \leq 0 &\Leftrightarrow (m+1)^2 - (m+1) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq m+1 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 31. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 1$.

A Hai đường thẳng $y = \pm 1$, trừ điểm $(0; -1)$.

B Hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng $x = \pm 1, y = \pm 1$.

C Đường tròn $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

D Trục Ox.

Lời giải.

- Đặt $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow z + i \neq 0 \Leftrightarrow a + (b+1)\,i \neq 0 \Leftrightarrow a^2 + (b+1)^2 \neq 0$.
- Ta có $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = \dfrac{|z-i|}{|z+i|}$ nên

$$\begin{aligned} \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-i|}{|z+i|} = 1 &\Leftrightarrow |z-i| = |z+i| \\ &\Leftrightarrow |a + (b-1)i| = |a + (b+1)i| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + (b-1)^2} = \sqrt{a^2 + (b+1)^2} \\ &\Leftrightarrow b = 0 \text{ (thỏa mãn điều kiện } a^2 + (b+1)^2 \neq 0). \end{aligned}$$

- Vậy tập hợp điểm biểu diễn của số phức z là đường thẳng $y = 0$, chính là trục Ox.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Ông An bắt đầu đi làm với mức lương khởi điểm là 1 triệu đồng một tháng. Cứ sau ba năm thì ông An được tăng lương 40%. Hỏi sau tròn 20 năm đi làm, tổng tiền lương ông An nhận được là bao nhiêu (làm tròn đến hai chữ số thập phân sau dấu phẩy)?

A 726,74 triệu đồng. B 716,74 triệu đồng. C 858,72 triệu đồng. D 768,37 triệu đồng.

Lời giải.

- Trong tròn 20 năm đi làm ông An có 6 lần tăng lương.
- Gọi T_0 là số tiền lương ông An nhận được trong 3 năm đầu; T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 lần lượt là số tiền ông An nhận được trong 3 năm của các lần tăng lương từ năm thứ 4 đến hết năm thứ 18, T_6 là số tiền ông an nhận được trong 2 năm cuối.

Ta có $T_0 = 3 \cdot 12 \cdot 1 = 36$ triệu đồng.

$T_1 = 3 \cdot 12 \cdot (1 + 40\%) = 36 \cdot (1 + 40\%)$ triệu đồng.

$T_2 = 3 \cdot 12 \cdot (1 + 40\%)^2 = 36 \cdot (1 + 40\%)^2$ triệu đồng.

$T_3 = 3 \cdot 12 \cdot (1 + 40\%)^3 = 36 \cdot (1 + 40\%)^3$ triệu đồng.

$T_4 = 3 \cdot 12 \cdot (1 + 40\%)^4 = 36 \cdot (1 + 40\%)^4$ triệu đồng.

$T_5 = 3 \cdot 12 \cdot (1 + 40\%)^5 = 36 \cdot (1 + 40\%)^5$ triệu đồng.

$T_6 = 2 \cdot 12 \cdot (1 + 40\%)^6 = 24 \cdot (1 + 40\%)^6$ triệu đồng.

- Ta có tổng số tiền T ông An nhận được sau tròn 20 năm đi làm là

$$T = T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6$$
$$= 36 \cdot \left[1 + (1 + 40\%) + (1 + 40\%)^2 + (1 + 40\%)^3 + (1 + 40\%)^4 + (1 + 40\%)^5\right] + 24 \cdot (1 + 40\%)^6$$
$$\approx 768{,}37 \text{ triệu đồng.}$$

Chọn đáp án D □

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - 2m \cdot 2^x + m + 2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

A $m > 3$. **B** $m \in (0; 3)$. **C** $m > 2$. **D** $m \in (-\infty; -1)$.

Lời giải.

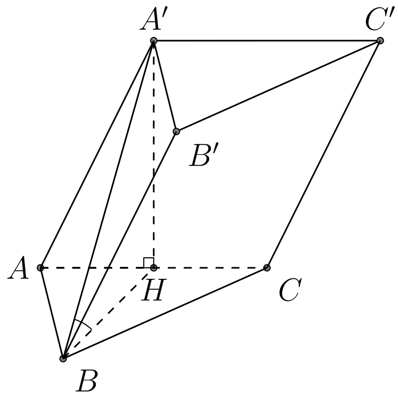
- Đặt $2^x = t$, suy ra $t > 0$.
- Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2mt + m + 2 = 0$ (1).
- Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi phương trình (1) có hai nghiệm t phân biệt dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{(1)} > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ 2m > 0 \\ m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -1 \end{array}\right. \\ m > 0 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2.$

Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AC, góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC) bằng $30°$. Tính $\cos\alpha$ với α là góc giữa hai đường thẳng AB và CC'.

A $\cos\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. **B** $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C** $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$. **D** $\cos\alpha = \dfrac{1}{8}$.

Lời giải.



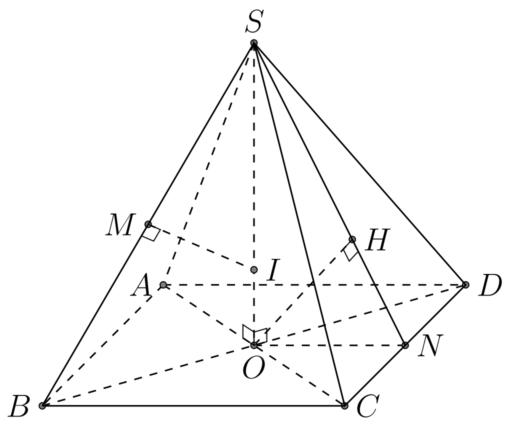
- Do $CC' \parallel AA'$ nên góc giữa AB và CC' bằng góc giữa AB và AA'.
- HB là hình chiếu vuông góc của $A'B$ trên mặt phẳng (ABC) nên góc giữa $A'B$ và (ABC) là góc $\widehat{A'BH}$ $\Rightarrow \widehat{A'BH} = 30°$.
- $BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $A'H = BH \cdot \tan \widehat{A'BH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \tan 30° = \dfrac{a}{2}$.
- Ta có $\triangle A'BH$ và $\triangle A'AH$ vuông tại H nên
  $A'B = \sqrt{A'H^2 + BH^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{4}} = a$.
  $A'A = \sqrt{A'H^2 + AH^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Suy ra $\cos\alpha = \left|\cos\widehat{A'AB}\right| = \left|\dfrac{AB^2 + AA'^2 - A'B^2}{2 \cdot AA' \cdot AB}\right| = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy bằng a, khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt bên của hình chóp bằng $\dfrac{2a}{\sqrt{17}}$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A $R = \dfrac{9a}{4}$. **B** $R = \dfrac{9a}{2}$. **C** $R = \dfrac{9a}{8}$. **D** $R = 9a$.

Lời giải.



- Gọi M là trung điểm của SB và O là tâm của đáy $ABCD$, trong tam giác SOB kẻ đường trung trực của cạnh SB cắt SO tại I, suy ra $IS = IB$ (1).
- $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều và $I \in SO$ nên $IA = IB = IC = ID$ (2).
- Từ (1) và (2) suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD \Rightarrow$ bán kính $R = IS$.
- Gọi N là trung điểm của CD ta có $ON \perp CD$, kẻ $OH \perp SN$.
- Suy ra $OH \perp (SCD) \Rightarrow d\left(O, (SCD)\right) = OH = \dfrac{2a}{\sqrt{17}}$.
  $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{ON^2} \Rightarrow \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{OH^2} - \dfrac{1}{ON^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{2a}{\sqrt{17}}\right)^2} - \dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{4a^2} \Rightarrow OS = 2a$.
  $\triangle SOB$ vuông tại O nên $SB = \sqrt{OS^2 + OB^2} = \sqrt{4a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.
- $\triangle SMI \backsim \triangle SOB$ nên $\dfrac{IS}{BS} = \dfrac{MS}{OS} \Rightarrow IS = \dfrac{BS \cdot MS}{OS} = \dfrac{SB^2}{2 \cdot OS} = \dfrac{\dfrac{9a^2}{2}}{2 \cdot 2a} = \dfrac{9a}{8}$.
- Vậy $R = \dfrac{9a}{8}$.

□

Câu 36. Cho các số thực dương x, y. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{4xy^2}{\left(x + \sqrt{x^2+4y^2}\right)^3}$.

Ⓐ $\max P = 1$. Ⓑ $\max P = \dfrac{1}{10}$. **C** $\max P = \dfrac{1}{8}$. Ⓓ $\max P = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

- Do x, y dương nên $\sqrt{x^2+4y^2} > x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4y^2} - x > 0$.
- Ta có

$$P = \frac{x}{2y} \cdot \left(\frac{2y}{\sqrt{x^2+4y^2}+x}\right)^3 = \frac{x}{2y} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2+4y^2}-x}{2y}\right)^3 = \frac{x}{2y} \cdot \left[\sqrt{\left(\frac{x}{2y}\right)^2 + 1} - \frac{x}{2y}\right]^3.$$

- Đặt $\dfrac{x}{2y} = t > 0$ khi đó $P = f(t) = t\left(\sqrt{t^2+1} - t\right)^3$.

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \left(\sqrt{t^2+1}-t\right)^3 + t \cdot 3\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)^2 \left(\sqrt{t^2+1}-t\right)' \\
&= \left(\sqrt{t^2+1}-t\right)^3 + 3t\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)^2 \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} - 1\right) \\
&= \left(\sqrt{t^2+1}-t\right)^3 - 3t\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)^2 \frac{\sqrt{t^2+1}-t}{\sqrt{t^2+1}} \\
&= \left(\sqrt{t^2+1}-t\right)^3 \left(1 - \frac{3t}{\sqrt{t^2+1}}\right).
\end{aligned}$$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{3t}{\sqrt{t^2+1}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{t^2+1} = 3t \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

- Bảng biến thiên $f(t)$

t	0		$\frac{1}{2\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	0

- Vậy $\max P = \max f(t) = \dfrac{1}{8}$ đạt khi $t = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ hay $\dfrac{x}{2y} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow y = \sqrt{2}x$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 37. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $\log^2 x + \log_3 x \cdot \log 27 - 4 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = \log x_1 + \log x_2$.

Ⓐ $A = 3$. **B** $A = -3$. Ⓒ $A = -2$. Ⓓ $A = 4$.

Lời giải.

- Điều kiện: $x > 0$.
Khi đó $\log^2 x + \log_3 x \cdot \log 27 - 4 = 0 \Leftrightarrow \log^2 x + 3\log 3 \cdot \log_3 x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \log^2 x + 3\log x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\log x = 1 \\ &\log x = -4. \end{aligned}\right.$$

- Vậy $A = \log x_1 + \log x_2 = 1 + (-4) = -3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Tìm số hạng không chứa x khi khai triển nhị thức $\left(x + \dfrac{2}{x^2}\right)^{n+4}$ biết $n \in \mathbb{N}^*$ và $\dfrac{\mathrm{A}_{n+1}^3 - \mathrm{C}_n^4}{\mathrm{A}_n^4} = \dfrac{23}{24}$.

(A) $\mathrm{C}_9^6 \cdot 2^6$. (B) $\mathrm{C}_6^4 \cdot 2^4$. (C) $\mathrm{C}_9^3 \cdot 2^3$. (D) $\mathrm{C}_6^2 \cdot 2^2$.

Lời giải.

- Điều kiện $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 4$.

Khi đó $\dfrac{\mathrm{A}_{n+1}^3 - \mathrm{C}_n^4}{\mathrm{A}_n^4} = \dfrac{23}{24} \Leftrightarrow \mathrm{A}_{n+1}^3 - \mathrm{C}_n^4 = \dfrac{23}{24}\mathrm{A}_n^4$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{(n-2)!} - \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{23}{24} \cdot \frac{n!}{(n-4)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)n!}{(n-2)(n-3)(n-4)!} = \frac{n!}{24(n-4)!} + \frac{23}{24} \cdot \frac{n!}{(n-4)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{(n-2)(n-3)} = 1 \Leftrightarrow n^2 - 6n + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 5 \\ n = 1 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

- Với $n = 5$ thì $\left(x + \dfrac{2}{x^2}\right)^9$ có số hạng tổng quát là $\mathrm{C}_9^k x^{9-k}\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^k = \mathrm{C}_9^k 2^k x^{9-3k}$.
- Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với $9 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 3$.
- Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $\mathrm{C}_9^3 \cdot 2^3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)u_n, \forall\, n \geq 1 \end{cases}$. Gọi $S_n = u_1 + \dfrac{u_2}{2} + \dfrac{u_3}{3} + \cdots + \dfrac{u_n}{n}$.

Tìm $\lim S_n$.

(A) $\lim S_n = \dfrac{3}{2}$. (B) $\lim S_n = \dfrac{2}{3}$. (C) $\lim S_n = \dfrac{5}{2}$. (D) $\lim S_n = \dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

- Ta có $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)u_n \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{n+1} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{u_n}{n}$ $(*)$.
- Đặt $v_n = \dfrac{u_n}{n}$ ta có $(*)$ trở thành $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n$.
- Dãy (v_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $v_1 = \dfrac{u_1}{1} = 1$ và công bội $q = \dfrac{1}{3}$ nên

$$v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

Do đó $S_n = u_1 + \dfrac{u_2}{2} + \dfrac{u_3}{3} + \cdots + \dfrac{u_n}{n} = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}.$$

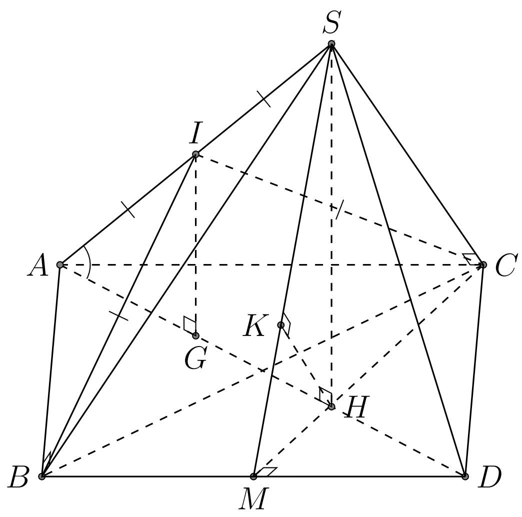
- Suy ra $\lim S_n = \lim \dfrac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90°$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.

A $\dfrac{6a}{7}$. (B) $\dfrac{2a}{7}$. (C) $\dfrac{2a}{\sqrt{57}}$. (D) $\dfrac{6a}{\sqrt{57}}$.

Lời giải.



- Gọi I là trung điểm của SA, do $\triangle SBA$ và $\triangle SCA$ lần lượt vuông tại B, C nên $IS = IA = IB = IC$. Suy ra hình chiếu vuông góc của I trên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
- $\triangle ABC$ đều nên hình chiếu vuông góc của I trên (ABC) là trọng tâm G của $\triangle ABC$.
- Góc giữa SA và (ABC) là góc $\widehat{IAG} = 60°$, $IG = AG \cdot \tan \widehat{IAG} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \tan 60° = a$.
- Vẽ hình bình hành $ABDC$, ta có hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) là trọng tâm H của tam giác đều BCD và $SH = 2IG = 2a$.
- $d(AC, SB) = d\left(AC, (SBD)\right) = d\left(C, (SBD)\right) = 3d\left(H, (SBD)\right)$.
- Gọi M là trung điểm của BD ta có $HM \perp BD$, kẻ $HK \perp SM$. Suy ra $HK \perp (SBD)$ và $d\left(H, (SBD)\right) = HK$.
- Ta có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HS^2} + \dfrac{1}{HM^2} = \dfrac{1}{(2a)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \dfrac{49}{4a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{2a}{7}$.
- Vậy $d(AC, SB) = 3HK = \dfrac{6a}{7}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, biết mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1;1;1)$, $B(0;2;2)$ đồng thời (P) cắt các trục tọa độ Ox, Oy theo thứ tự tại hai điểm M, N (M, N đều không trùng với gốc tọa độ) thỏa mãn $OM = ON$. Biết mặt phẳng (P) có hai phương trình là $x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ và $x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Tính đại lượng $T = b_1 + b_2$.

(A) $T = 2$. **B** $T = 0$. (C) $T = 4$. (D) $T = -4$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB} = (-1;1;1)$.

- Nếu mặt phẳng (P) song song với trục Oz.
  (P) đi qua $A(1;1;1)$ có VTPT $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \vec{k}] = (1;1;0)$.
  Khi đó (P): $x + y - 2 = 0$.
  Dễ thấy (P) cắt Ox tại $M(2;0;0)$ cắt Oy tại $M(0;2;0)$. Ta thấy $OM = ON$ nên (P) thỏa mãn.
- Nếu mặt phẳng (P) cắt trục Oz. Áp dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn ta có
  $$(P) : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \ (a, b, c \neq 0)$$
  Do đó phương trình (P) có dạng $x + By + Cz + D = 0$ $(B, C, D \neq 0)$. (P) đi qua hai điểm A, B nên
  $$\begin{cases} B + C + D = -1 \\ 2B + 2C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2B + 2C + 2D = -2 \\ 2B + 2C + D = 0 \end{cases} \Rightarrow D = -2.$$
  (P) cắt trục Ox tại $M(-D;0;0)$, cắt Oy tại $N(0;\dfrac{-D}{B};0)$.
  Vì $OM = ON$ nên $|-D| = |\dfrac{-D}{B}| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -D = -\dfrac{D}{B} \Rightarrow B = 1 \text{ (loại vì } C \neq 0) \\ -D = \dfrac{D}{B} \Rightarrow B = -1 \Rightarrow C = 2. \end{array}\right.$
  Do đó $(P) : x - y + 2z - 2 = 0$. Vậy $b_1 + b_2 = 1 - 1 = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) và đường thẳng (d) có phương trình $y = k(x+1)+2$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của k để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt $M(-1;2)$, N, P sao cho các tiếp tuyến của (C) tại N và P vuông góc với nhau. Tính tích tất cả các phần tử của tập hợp S.

(A) $-\dfrac{2}{9}$. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{1}{9}$. (D) -1.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$x^3 - 3x = k(x+1) + 2 \Leftrightarrow (x+1)\left[x^2 - x - (k+2)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ f(x) = x^2 - x - (k+2) = 0 \ (*) \end{array}\right.$

(C) cắt (d) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) \neq 0 \\ \Delta_{(*)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^2 + 1 - k - 2 \neq 0 \\ 1 + 4(k+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k > -\dfrac{9}{4} \end{cases}.$

Khi đó $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq -1$.

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1 &\Leftrightarrow \left(3{x_1}^2 - 3\right)\left(3{x_2}^2 - 3\right) = -1 \\
&\Leftrightarrow 9\left(x_1x_2\right)^2 - 9\left({x_1}^2 + {x_2}^2\right) + 10 = 0 \\
&\Leftrightarrow 9\left(k+2\right)^2 - 9\left[1 + 2\left(k+2\right)\right] + 10 = 0 \\
&\Leftrightarrow 9\left(k+2\right)^2 - 18\left(k+2\right) + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow k + 2 = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3} \vee k + 2 = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3} \\
&\Leftrightarrow k = \frac{2\sqrt{2} - 3}{3} \text{ (nhận) } \vee k = -\frac{2\sqrt{2} + 3}{3} \text{ (nhận)}
\end{aligned}$$

Vậy $S=\left\{\dfrac{2\sqrt{2}-3}{3};-\dfrac{2\sqrt{2}+3}{3}\right\}$. Lấy $\left(\dfrac{2\sqrt{2}-3}{3}\right)\cdot\left(-\dfrac{2\sqrt{2}+3}{3}\right)=\dfrac{1}{9}$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, biết mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2;0;0)$, $M(1;1;1)$ đồng thời (P) cắt các tia Oy, Oz theo thứ tự tại hai điểm B, C (B, C đều không trùng với gốc tọa độ). Khi diện tích tam giác ABC nhỏ nhất phương trình mặt phẳng (P) là

A $y-z=0$. B $y+z-2=0$.

C $2x+y+z-4=0$. D $x+y-2$.

Lời giải.

Ta thấy (P) cắt trục Ox tại điểm $A(2;0;0)$. Gọi $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ $(b,c\neq 0)$.

Khi đó $(P):\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

$$M(1;1;1)\in(P)\Leftrightarrow\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}.$$

Suy ra $\dfrac{1}{2}\geq\dfrac{2}{\sqrt{bc}}\Leftrightarrow bc\geq 16$. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;b;0)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;0;c)$.

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]|=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+4b^2+4c^2}\geq\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+8bc}\geq\frac{1}{2}\sqrt{16^2+8\cdot 16}.$$

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $b=c=4$.

Khi đó $(P):\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{4}=1$ hay $2x+y+z-4=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Giả sử tích phân $I=\displaystyle\int\limits_1^5\frac{1}{1+\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x=a+b\ln 3+c\ln 5$. Lúc đó

A $a+b+c=\dfrac{4}{3}$. B $a+b+c=\dfrac{5}{3}$. C $a+b+c=\dfrac{7}{3}$. D $a+b+c=\dfrac{8}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{3x+1}\Rightarrow t^2=3x+1\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=3\,\mathrm{d}x\Rightarrow\ \mathrm{d}x=\dfrac{2t}{3}\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow t=2\\ x=5\Rightarrow t=4.\end{array}\right.$

$I=\dfrac{2}{3}\displaystyle\int\limits_2^4\frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\int\limits_2^4\left(1-\frac{1}{t+1}\right)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\left(t-\ln|t+1|\right)\Big|_2^4=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\ln 3-\frac{2}{3}\ln 5.$

Vậy $a=\dfrac{4}{3}$; $b=\dfrac{2}{3}$; $c=-\dfrac{2}{3}$ suy ra $a+b+c=\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Gọi $M(a;b)$ là điểm trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+2}$ mà khoảng cách đến đường thẳng $d\colon y=3x+6$ nhỏ nhất. Khi đó:

A $a+2b=2$. B $a+b=2$. C $a+b=-2$. D $a+2b=3$.

Lời giải.

Gọi $M\left(t;\dfrac{2t+1}{t+2}\right)\in d$, $(t\neq -2)$. Ta có: $\mathrm{d}(M,d)=\dfrac{\left|3t-\dfrac{2t+1}{t+2}+6\right|}{10}$.

$\mathrm{d}(d,M)$ nhỏ nhất khi $\left|3t-\dfrac{2t+1}{t+2}+6\right|=\left|\dfrac{3t^2+10t+11}{t+2}\right|$ nhỏ nhất.

Xét $f(t)=\dfrac{3t^2+10t+11}{t+2}$, $f'(t)=\dfrac{3t^2+12t+9}{(t+2)^2}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=-3\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-8	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\mathrm{d}(M,d)=|f(t)|$ nhỏ nhất là 4 khi $t=-1$.

Suy ra $M(-1;-1)$. Do đó $a+b=-2$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho x, y là số thực dương thỏa mãn $\log_3\dfrac{2x+y+1}{x+y}=x+2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{\sqrt{y}}$.

A. $3+\sqrt{3}$. B. 4. C. $3+2\sqrt{3}$. D. 6.

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$\log_3(2x+y+1)=\log_3(x+y)+(x+2y)\Leftrightarrow\log_3(2x+y+1)+(2x+y+1)=\log_3[3(x+y)]+3(x+y).$$

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$, hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Từ đó suy ra $2x+y+1=3(x+y)\Leftrightarrow x=1-2y\Rightarrow y<\dfrac{1}{2}$.

Ta có $T=\dfrac{1}{1-2y}+\dfrac{2}{\sqrt{y}}$ với $0<y<\dfrac{1}{2}$. Đặt $t=\sqrt{y}\Rightarrow T=\dfrac{1}{1-2t^2}+\dfrac{2}{t}$ với $0<t<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$T'=\dfrac{2(-4t^4+2t^3+4t^2-1)}{t^2(1-2t^2)^2}$; $T'=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$
T'		$-$	0	$+$	
T		$\searrow$	6	$\nearrow$	

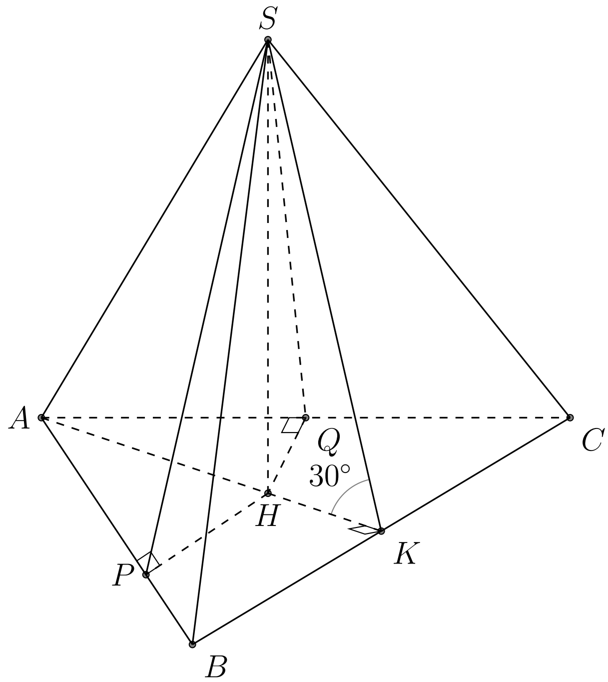
Vậy $T_{\min} = 6$ khi $t = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, $(a > 0)$. Biết hai mặt bên (SAB), (SAC) cùng tạo với đáy một góc 60°, mặt bên (SBC) tạo với đáy một góc 30° và hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt đáy là H thuộc miền trong tam giác ABC. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{56}$. (C) $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{32}$. **(D)** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{40}$.

Lời giải.



H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC).

Kẻ OP, OQ lần lượt vuông góc với AB, AC.

$[(SAB),(ABC)] = \widehat{SPH} = 60^\circ$

$[(SAC),(ABC)] = \widehat{SQH} = 60^\circ$.

Ta có $\triangle SHP = \triangle SHQ$ (g-c-g) nên $QH = HP$.

Do đó AH vuông góc với BC tại K.

Suy ra $[(SBC),(ABC)] = 30^\circ$.

Đặt $SO = x$. Xét $\triangle SHO$ vuông tại O có $\widehat{SQH} = 30^\circ$. Suy ra $OH = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$.

Xét $\triangle AQH$ vuông tại Q có $\widehat{HAQ} = 30^\circ$. Ta có $HA = 2QH = \dfrac{2x\sqrt{3}}{3}$.

Xét $\triangle SHK$ vuông tại H có $\widehat{SKH} = 60^\circ$. Khi đó $OK = x\sqrt{3}$.

Ta có $AH + HK = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2x\sqrt{3}}{3} + x\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{3x\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{3a}{10}$.

Khi đó $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3a}{10} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{40}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số phân biệt được lập từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Lấy một số ngẫu nhiên thuộc S. Tính xác suất để lấy được số chẵn và trong mỗi số đó có tổng hai chữ số hàng chục và hàng trăm bằng 5.

(A) $\dfrac{1}{10}$. (B) $\dfrac{11}{70}$. **(C)** $\dfrac{4}{45}$. (D) $\dfrac{16}{105}$.

Lời giải.

Gọi số có bốn chữ số có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4}$. Số phần tử không gian mẫu là $|\Omega| = 6 \cdot \mathrm{A}_6^3 = 720$.

Gọi A là biến cố: "lấy được số chẵn và trong đó có tổng hai chữ số hàng chục và hàng trăm bằng 5".

- Nếu a_1 bất kì.

  Chọn cặp số $(a_2; a_3)$ có tổng là 5 có 3 cách $(1;4), (0;5), (2;3)$.

  Hoán vị $a_2; a_3$ có 2 cách.

  Mỗi cách chọn cặp $(a_2; a_3)$ là giảm đi một chữ số chẵn, do đó số cách chọn a_4 là 3.

Số cách chọn a_1 là 4 cách.

Do đó ta có số cách chọn là $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 72$ cách.

- Nếu $a_1 = 0$.

  Chọn cặp số $(a_2; a_3)$ có 2 cách $(2;3),(1;4)$.

  Hoán vị a_2, a_3 có 2 cách.

  Mỗi cách chọn cặp (a_2, a_3) làm giảm đi một chữ số chẵn, do đó có 2 cách chọn a_4.

  Số chữ số trong trường hợp $a_1 = 0$ là $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ cách.

Do đó số chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $n(A) = 72 - 8 = 64$.

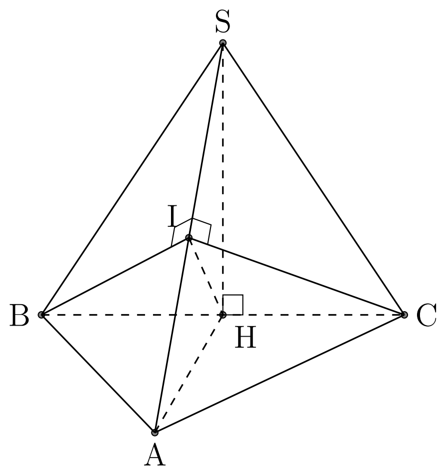
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{64}{720} = \dfrac{4}{45}$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có mặt bên (SBC) vuông góc với mặt đáy (ABC). Biết $SB = SC = a$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60^\circ$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC), β là góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC). Tính đại lượng $S = \tan\alpha + \sin\beta$.

A $S = 2\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B** $S = 2\sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C** $S = \dfrac{\sqrt{2}}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D** $S = \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm BC. Do $\triangle SBC$ đều nên $SH \perp BC$ tại H.

Mà $(SBC) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$.

Suy ra $[\widehat{SA,(ABC)}] = (\widehat{SA, AH}) = \widehat{SAH} = \beta$.

Kẻ $BI \perp SA$, do $\triangle SAB = \triangle SAC$ $(g-c-g)$ nên $CI \perp SA$.

Vậy $[\widehat{(SAB),(SAC)}] = (\widehat{IB, IC}) = \widehat{BIC} = \alpha$.

Đặt $SA = x$.

Ta có $x^2 = AH^2 + SH^2 = (AB^2 - BH^2) + SH^2 = AB^2 - \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{4}$.

Suy ra $AB^2 = x^2 - \dfrac{a^2}{2}$. Mà $AB^2 = x^2 + a^2 - ax$. (định lý cosin trong $\triangle SAB$).

Do đó $x^2 - \dfrac{a^2}{2} = x^2 + a^2 - ax \Leftrightarrow x = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow \sin\beta = \dfrac{SH}{SA} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ta có: $IB = IC = a\sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\widehat{BIC} = \dfrac{IB^2 + IC^2 - BC^2}{2 \cdot IB \cdot IC} = \dfrac{1}{3}$.

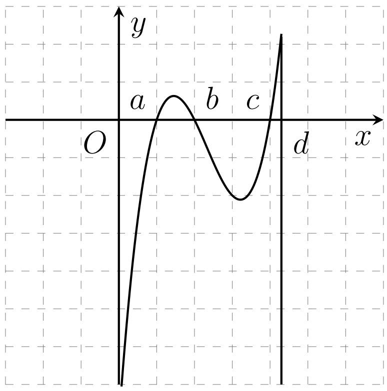
Khi đó $\cos\alpha = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{9} \Rightarrow \tan^2\alpha = 8 \Rightarrow \tan\alpha = 2\sqrt{2}$ (vì $\cos\alpha > 0$).

Theo đó $S = \tan\alpha + \sin\beta = 2\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 50.

Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $0 < a < b < c < d$ và hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; d]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



A $M + m = f(0) + f(c)$. **B** $M + m = f(d) + f(c)$.
C $M + m = f(b) + f(a)$. **D** $M + m = f(0) + f(a)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số của $f'(x)$ ta có bảng biến thiên cho hàm $f(x)$

x	0		a		b		c		d
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào BBT ta có $M \in \{f(0), f(b), f(d)\}$ và $m \in \{f(a), f(c)\}$.

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(H_1) : \begin{cases} x = 0, x = a \\ y = 0 \\ y = f'(x) \end{cases}$.

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(H_2) : \begin{cases} x = a, x = b \\ y = 0 \\ y = f'(x) \end{cases}$.

Gọi S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(H_3) : \begin{cases} x = b, x = c \\ y = 0 \\ y = f'(x) \end{cases}$.

Gọi S_4 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(H_4) : \begin{cases} x = c, x = d \\ y = 0 \\ y = f'(x) \end{cases}$.

Ta có

$$S_1 = \int_0^a |f'(x)|\,\mathrm{d}x = -f(x)\Big|_0^a = f(0) - f(a),\ S_2 = \int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a).$$

Dễ dàng thấy $S_1 > S_2$ nên $f(0) - f(a) > f(b) - f(a) \Rightarrow f(0) > f(b)$.

Ta có

$$S_3 = \int_b^c |f'(x)|\,\mathrm{d}x = -f(x)\Big|_b^c = f(b) - f(c) \text{ và } S_4 = \int_c^d |f'(x)|\,\mathrm{d}x = f(x)\Big|_c^d = f(d) - f(c).$$

Do $S_3 > S_4$ nên $f(b) > f(d)$. Từ đó suy ra $f(0) > f(b) > f(d)$ và $M = f(0)$.
Mặt khác $S_3 > S_2$ nên $f(a) > f(c)$ hay $m = f(c)$.
Vậy $M + m = f(0) + f(c)$.
Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. C	3. C	4. A	5. D	6. A	7. C	8. A	9. A	10. B
11. D	12. B	13. B	14. C	15. D	16. B	17. C	18. A	19. D	20. A
21. C	22. B	23. C	24. A	25. A	26. D	27. A	28. A	29. B	30. C
31. D	32. D	33. C	34. A	35. C	36. C	37. B	38. C	39. A	40. A
41. B	42. C	43. C	44. A	45. C	46. D	47. D	48. C	49. A	50. A

152 ĐỀ THI THỬ THPTQG, TRƯỜNG ĐẠI HỌC NGOẠI THƯƠNG, 2017 - 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Số phức liên hợp của z là

(A) $\overline{z} = -2 - 3i$. (B) $\overline{z} = -2 + 3i$. (C) $\overline{z} = 2 + 3i$. (D) $\overline{z} = 2 - 3i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $2 - 3i$ là $2 + 3i$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - 2x}{x + 3}$ bằng

(A) 1. (B) 4. (C) -2. (D) $-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - 2x}{x + 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x} - 2}{1 + \frac{3}{x}} = -2.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Cho tập $A = \{x \in \mathbb{Z} : -3 \le x \le 3\}$. Số phần tử của A bằng

(A) 7. (B) 6. (C) 8. (D) 5.

Lời giải.

Ta có $A = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$. Vậy A có 7 phần tử.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Thể tích khối hộp có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B là

(A) $V = \dfrac{1}{6}Bh$. (B) $V = \dfrac{1}{2}Bh$. (C) $V = \dfrac{1}{3}Bh$. (D) $V = Bh$.

Lời giải.

Thể tích khối hộp là $V = Bh$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số khoảng đồng biến của hàm số $y = f(x)$ là

(A) 4. (B) 2. (C) 1. (D) vô số.

Lời giải.

Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$ nên nó sẽ đồng biến trên bất kì khoảng nào là tập con của một trong hai khoảng này.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ là

(A) $S = \int\limits_b^a |f(x)|\,\mathrm{d}x$. (B) $S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **C** $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. (D) $S = \int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm

A $x = 0$. (B) $x = 2$. (C) $x = 1$. (D) $x = 5$.

Lời giải.

Hàm số y' đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua điểm 0 (theo chiều tăng của x) nên $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số đã cho.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho các số thực a, b thỏa mãn $1 < a < b$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $\dfrac{1}{\log_a b} < 1 < \dfrac{1}{\log_b a}$. (B) $\dfrac{1}{\log_a b} < \dfrac{1}{\log_b a} < 1$.

(C) $1 < \dfrac{1}{\log_a b} < \dfrac{1}{\log_b a}$. (D) $\dfrac{1}{\log_b a} < 1 < \dfrac{1}{\log_a b}$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $0 < \log_b a < 1 < \log_a b$, suy ra $\dfrac{1}{\log_b a} > 1 > \dfrac{1}{\log_a b}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 2x$.

(A) $\dfrac{x^4}{4} - x^2 + C$. **B** $\dfrac{x^4}{4} + x^2 + C$. (C) $\dfrac{x^4}{4} + C$. (D) $x^2 + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(x^3 + 2x\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^4}{4} + x^2 + C$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hình chiếu vuông góc vủa $A(3;2;-1)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm

A $H(3;2;0)$. **B** $H(0;0;1)$. **C** $H(3;2;-1)$. **D** $H(0;2;0)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;2;-1)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là $(3;2;0)$.

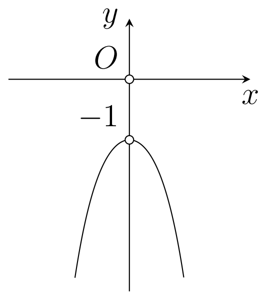
Chọn đáp án A □

Câu 11.

Đường cong trong hình bên là đồ thị hàm số nào sau đây?

A $y = x^4 - 2x^2 + 1$. **B** $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

C $y = -x^4 - 2x^2 + 1$. **D** $y = -x^4 - 2x^2 - 1$.



Lời giải.

Hàm số y cần tìm thỏa mãn $y \leq -1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y(0) = -1$. Chỉ có hàm số $y = -x^4 - 2x^2 - 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x - 3y + z - 2018 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến là

A $\vec{n} = (-2;3;-1)$. **B** $\vec{n} = (2;3;1)$. **C** $\vec{n} = (2;-3;1)$. **D** $\vec{n} = (2;-3;-1)$.

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (2;-3;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Phương trình $4^{x^2+2} = 16$ có bao nhiêu nghiệm?

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 4.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$$4^{x^2+2} = 4^2 \Leftrightarrow x^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Một khối nón có diện tích toàn phần bằng 10π và diện tích xung quanh bằng 6π. Tính thể tích V của khối nón đó.

A $V = 12\pi$. **B** $V = 4\pi\sqrt{5}$. **C** $V = \dfrac{4\pi\sqrt{5}}{3}$. **D** $V = 4\pi$.

Lời giải.

Giả sử r, l, h lần lượt là bán kính đáy, đường sinh và chiều cao của khối nón đó. Theo giả thiết diện tích đáy là

$$\pi r^2 = S_{\text{tp}} - S_{\text{xq}} = 4\pi$$

$$\Rightarrow r = 2.$$

Mà $\pi r l = S_{\text{xq}} = 6\pi$ nên $l = 3$. Suy ra $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{5}$.

Vậy thể tích khối trụ là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{4\pi\sqrt{5}}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;4)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình

A $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{4} + 1 = 0$. **B** $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{4} = 1$.

C $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} - \dfrac{z}{4} = 1$. **D** $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{4} = 1$.

Lời giải.

Áp dụng công thức phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn ta có phương trình mặt phẳng (ABC) là $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{4} = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Đồ thị hàm số nào sau đây có tiệm cận đứng?

A $y = \dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$. **B** $y = \dfrac{x}{x-1}$. **C** $y = \dfrac{x^4}{x^4+1}$. **D** $y = \sqrt{x^2-4}$.

Lời giải.

- Xét $y = \dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$ có $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1}(x+2) = 3 \Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.
- Xét $y = \dfrac{x}{x-1}$ có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{x-1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{x-1} = -\infty \end{cases} \Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.
- Xét $y = \dfrac{x^4}{x^4+1}$ có tập xác định $\mathbb{R} \Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.
- Xét $y = \sqrt{x^2-4}$ xác định trên $(-\infty;-2] \cup [2;+\infty)$.
  Có $\lim\limits_{x\to -2^-} \sqrt{x^2-4} = 0$, $\lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{x^2-4} = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Chọn đáp án B □

Câu 17.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt khi

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A $-2 < m < 4$. **B** $-2 \leq m \leq 4$.

C $m \in \mathbb{R}$. **D** $m \in \varnothing$.

Lời giải.

Số nghiệm của phương trình $f(x) = m$ là số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và $y = m$. Do vậy, để phương trình $f(x) = m$ thì $-2 < m < 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2-5}{x+3}$ trên đoạn $[0;2]$.

A $\min\limits_{x\in[0;2]} y = -\dfrac{5}{3}$. **B** $\min\limits_{x\in[0;2]} y = -\dfrac{1}{3}$. **C** $\min\limits_{x\in[0;2]} y = -2$. **D** $\min\limits_{x\in[0;2]} y = -10$.

Lời giải.

Có $y' = \dfrac{2x(x+3)-(x^2-5)}{(x+3)^2} = \dfrac{x^2+6x+5}{(x+3)^2} > 0$ với $\forall x \in [0;2] \Rightarrow \min\limits_{x\in[0;2]} y = y(0) = -\dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 19. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+1}$.

A $\ln 2$. **B** 1. **C** 0. **D** $\ln\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

$I = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln|x+1|\Big|_0^1 = \ln 2$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 20. Cho số phức $z = 1 - \dfrac{i}{3}$. Tìm số phức $w = i\overline{z} + 3z$.

A $w = \dfrac{8}{3}$. **B** $w = \dfrac{10}{3}$. **C** $w = \dfrac{8}{3} + i$. **D** $w = \dfrac{10}{3} + i$.

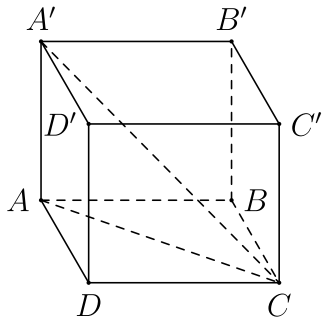
Lời giải.

Có $\overline{z} = 1 + \dfrac{i}{3} \Rightarrow w = i\left(1+\dfrac{i}{3}\right) + 3\left(1-\dfrac{i}{3}\right) = \dfrac{8}{3}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 21.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi α là góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(A'B'C'D')$. Giá trị $\tan\alpha$ là



A $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$. **B** $\tan\alpha = \dfrac{1}{3}$.

C $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D** $\tan\alpha = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Vì $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$ và $AA' \perp (ABCD)$ nên $\widehat{ACA'} = \alpha$.

Ta có $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 22. Thầy Quang thanh toán tiền mua xe bằng các kỳ khoản năm: 5.000.000 đồng, 6.000.000 đồng, 10.000.000 đồng và 20.000.000 đồng. Kỳ khoản thanh toán 1 năm sau ngày mua, với lãi suất áp dụng là 8%. Hỏi giá trị chiếc xe thầy Quang mua là bao nhiêu?

A 32.412.582 đồng. **B** 35.412.582 đồng. **C** 33.412.582 đồng. **D** 34.412.582 đồng.

Lời giải.

Gọi t là số tiền ứng với giá trị chiếc xe. Vì mỗi năm thầy Quang trả tiền một lần theo thứ tự 5.000.000 đồng, 6.000.000 đồng, 10.000.000 đồng và 20.000.000 đồng nên

$(((1,08t-5)\times 1,08-6)\times 1,08-10)\times 1,08-20=0 \Rightarrow t = 32.412.582$ đồng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Có 6 người gồm 3 người đàn ông, 2 người đàn bà và 1 đứa trẻ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 6 người trên ngồi vào ghế xếp xung quanh một bàn tròn (có 6 chỗ ngồi) sao cho đứa trẻ ngồi giữa hai người đàn ông?

(A) 6. (B) 72. (C) 120. **D** 36.

Lời giải.

Số cách xếp chỗ ngồi cho đứa trẻ là 1 (cách).

Số cách xếp hai người đàn ông ngồi hai bên cạnh đứa trẻ là $\mathrm{A}_3^2 = 6$ (cách).

Số cách xếp 3 người còn lại vào các ghế còn trống là $3! = 6$ (cách).

Vậy số cách xếp theo yêu cầu bài toán là $6^2 = 36$ (cách).

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - y + z - 5 = 0$. Tính khoảng cách d từ điểm $M(1; 2; 1)$ đến mặt phẳng (P).

(A) $d = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$. (B) $d = \dfrac{\sqrt{12}}{3}$. (C) $d = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **D** $d = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $d = \dfrac{|1 - 2 + 1 - 5|}{\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = \dfrac{AD}{2} = a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V (đvtt) của khối chóp $S.ACD$.

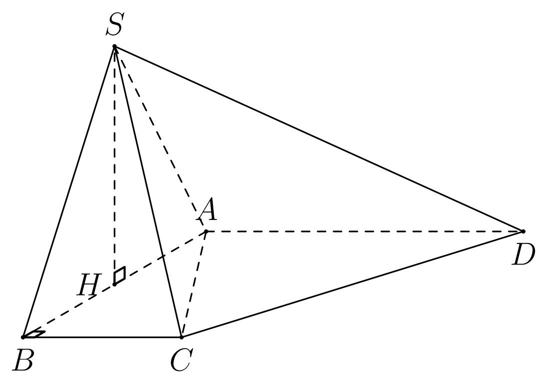
(A) $V = \dfrac{a^3}{3}$. (B) $V = \dfrac{a^3}{2}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp AB$ (vì tam giác SAB đều) và $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích hình thang $ABCD$ là $\dfrac{3a^2}{2}$.

Diện tích tam giác ABC là $\dfrac{a^2}{2} \Rightarrow$ diện tích tam giác $ACD = a^2 \Rightarrow V_{S.ACD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Hệ số của x^9 sau khi khai triển và rút gọn đa thức $f(x) = (1+x)^9+(1+x)^{10}+\cdots+(1+x)^{14}$ là

(A) 2901. (B) 3001. **C** 3003. (D) 3010.

Lời giải.

Hệ số của x^9 trong khai triển dạng $(1+x)^{9+n}$ (với $n \in \mathbb{N}^*$) là $\mathrm{C}_{9+n}^9 \Rightarrow$ hệ số của x^9 trong khai triển của $f(x)$ là $\sum_{n=0}^{5} \mathrm{C}_{9+n}^9 = 3003$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ khi

A $m = 3$. B $m = 4$. C $m = 1$. D $m = 2$.

Lời giải.

Đặt $t = 2^x$ $(t > 0) \Rightarrow$ ta có $t^2 - 2mt + 2m = 0$ (*). Gọi t_1, t_2 là hai nghiệm của phương trình (*) $\Rightarrow t_1 = 2^{x_1}$, $t_2 = 2^{x_2}$. Vì $x_1 + x_2 = 3 \Rightarrow t_1t_2 = 2^{x_1+x_2} = 8$. Theo Viet ta có $t_1t_2 = 2m = 8 \Rightarrow m = 4$. Với $m = 4$, thay vào phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ ta thấy phương trình có hai nghiệm phân biệt (thỏa mãn).

Chọn đáp án B □

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABCD)$. Biết thể tích $V_{S.ABCD} = a^3\sqrt{2}$ (đvtt), hãy tính góc giữa SC và mặt phẳng đáy $(ABCD)$.

A 30°. B 60°. C 90°. D 45°.

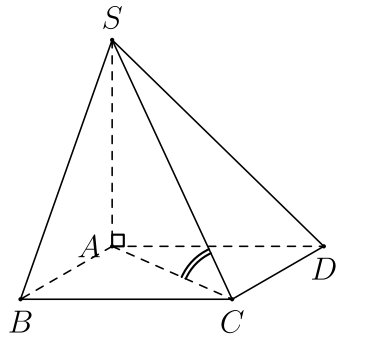
Lời giải.

Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow$ góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\widehat{SCA}$.

Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên $S_{ABCD} = a^2\sqrt{2}$

$\Rightarrow SA = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{a^2\sqrt{2}} = 3a$. Lại có $AC = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan\widehat{SCA} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^\circ$.



Chọn đáp án B □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{1-y}{-m} = \dfrac{2-z}{-3}$ và $d_1: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}$. Tìm tất cả các giá trị của m để $d \perp d_1$.

A $m = -1$. B $m = 1$. C $m = -5$. D $m = 5$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của d và d_1 lần lượt là $(2; m; 3)$ và $(1; 1; 1)$.

Để $d \perp d_1$ thì $2 + m + 3 = 0 \Rightarrow m = -5$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m$. Tìm m để hàm số có các điểm cực đại và cực tiểu tạo thành một tam giác có diện tích bằng 32.

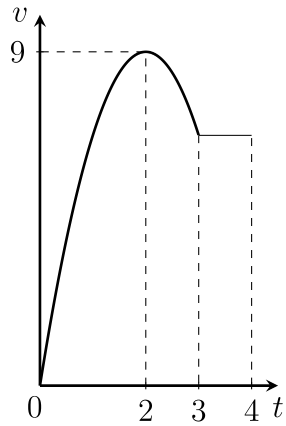
A $m = 4$. B $m = 5$. C $m = 1$. D $m = -3$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - m = 0 \ (*). \end{array}\right.$

Để hàm số có cực đại và cực tiểu tạo thành một tam giác thì $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow m > 0$ (1).
Khi đó, ta có các điểm cực trị $A(0; 2m)$, $B(\sqrt{m}; -m^2+2m)$, $C(-\sqrt{m}; -m^2+2m)$. Gọi H là trung điểm BC.
Nhận xét: tam giác ABC cân tại $A \Rightarrow AH \perp BC$, $BC = 2\sqrt{m}$ và $AH = |2m + m^2 - 2m| = m^2$.
Do vậy $\dfrac{2m^2\sqrt{m}}{2} = 32 \Rightarrow m = 4$ (thỏa mãn điều kiện (1)).
Chọn đáp án A □

Câu 31.
Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị như hình vẽ. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của parabol có đỉnh $I(2; 9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật đó đi được trong 4 giờ.



(A) 28,5 (km). **(B) 27 (km).**
(C) 24 (km). (D) 26,5 (km).

Lời giải.
Giả sử phương trình parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.
Vì parabol đi qua $O(0; 0)$ nên $c = 0$.
Do tọa độ đỉnh là $I(2; 9)$ nên $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{9}{4} \\ b = 9 \end{cases} \Rightarrow v(t) = -\dfrac{9}{4}t^2 + 9t.$

Quãng đường vật chuyển động được trong 3 giờ đầu là $\displaystyle\int_0^3 \left(-\frac{9}{4}t^2 + 9t\right) \mathrm{d}t = \frac{81}{4}$ (km).

Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ là $v(3) = \dfrac{27}{4} \Rightarrow$ quãng đường vật đi được trong 1 giờ cuối là $\dfrac{27}{4}$ (km).
Vậy quãng đường vật đi được trong 4 giờ là $\dfrac{81}{4} + \dfrac{27}{4} = 27$ (km).
Chọn đáp án B □

Câu 32. Cho $\displaystyle\int_1^2 \ln(9 - x^2)\,\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 2 + c$ (với a, b, $c \in \mathbb{Z}$). Tính $S = |a| + |b| + |c|$.

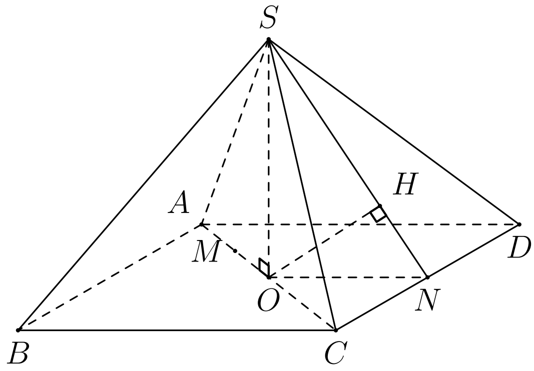
(A) $S = 34$. **(B) $S = 13$.** (C) $S = 18$. (D) $S = 26$.

Lời giải.
Có $\displaystyle\int_1^2 \ln(9-x^2)\,\mathrm{d}x = x\ln(9-x^2)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{2x^2}{x^2-9}\,\mathrm{d}x = 2\ln 5 - 3\ln 2 - 2\int_1^2 \mathrm{d}x - 3\int_1^2 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x$
$\displaystyle = 2\ln 5 - 3\ln 2 - 2 - 3\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\Big|_1^2 = 5\ln 5 - 6\ln 2 - 2 \Rightarrow S = 13.$
Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M là trung điểm đoạn OA. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SCD).

A $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **D** $a\sqrt{6}$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm CD. Vì $ABCD$ là hình vuông nên $ON \perp CD$. Kẻ $OH \perp SN$.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp CD \Rightarrow CD \perp (SON)$

$\Rightarrow OH \perp (SCD)$.

Ta có $ON = \dfrac{a}{2}$, $SO = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Xét tam giác SON có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{2}{a^2} = \dfrac{6}{a^2}$

$\Rightarrow OH = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

Vì M là trung điểm OA nên $\dfrac{MC}{OC} = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow d(M,(SCD)) = \dfrac{3}{2}.\dfrac{a}{\sqrt{6}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\log_2^2 x + \log_2 x + m = 0$ có nghiệm thực $x \in (0;1)$.

A $m \le \dfrac{1}{4}$. **B** $m < \dfrac{1}{4}$. **C** $m > \dfrac{1}{4}$. **D** $m \le 0$.

Lời giải.

Vì $x \in (0;1) \Rightarrow \log_2 x < 0$. Đặt $t = \log_2 x \Rightarrow t < 0$. Ta có phương trình

$$t^2 + t + m = 0 \Leftrightarrow t^2 + t = -m$$

Xét $f(t) = t^2 + t$ trên miền $(-\infty;0)$, ta có $f'(t) = 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = -\dfrac{1}{2}$. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $-m \ge -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow m \le \dfrac{1}{4}$ thỏa mãn đề bài.

t	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		0
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{4}$	$\nearrow$	0

Chọn đáp án A □

Câu 35. Tìm số đo góc của một tam giác cân biết rằng có số đo của một góc là nghiệm của phương trình $\cos 2x = -\dfrac{1}{2}$.

A $\left\{\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right\}$. **B** $\left\{\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right\}$.

C $\left\{\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right\}, \left\{\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right\}$. **D** $\left\{\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right\}, \left\{\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right\}$.

Lời giải.
$\cos 2x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Vì x là số đo của một góc trong tam giác nên $0 < x < \pi \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} \\ x = \dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right.$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để hàm số $y = x^3 - 27ax$ có cực đại, cực tiểu và đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ.

A $a < 0$. B $a < -1$. C $-1 < a < 0$. D $a > 0$.

Lời giải.
$y' = 3x^2 - 27a$. Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow a > 0$.
Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3\sqrt{a} \Rightarrow$ tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(3\sqrt{a}; -54\sqrt{a})$ và $B(-3\sqrt{a}; 54\sqrt{a})$.
Nhận xét: gốc $O(0;0)$ là trung điểm của $AB \Rightarrow$ đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số luôn đi qua gốc tọa độ với mọi $a > 0$.
Chọn đáp án D □

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ và $f(0) = 2018$. Giá trị của biểu thức $f(3) - f(1)$ bằng

A $\ln 2$. B $\ln 4$. C $\ln 3$. D $\ln 5$.

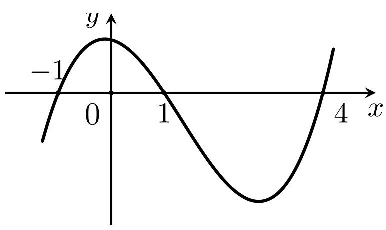
Lời giải.
$f(x) = \displaystyle\int \dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}\,x = \ln|x+1| + C$. Vì $f(0) = 2018$ nên $C = 2018 \Rightarrow f(x) = \ln|x+1| + 2018 \Rightarrow$ $f(3) - f(1) = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2$.
Chọn đáp án A □

Câu 38. Cho số phức z thỏa mãn $(1+2i)^2 z + \overline{z} = 4i - 20$. Mô-đun của số phức z là

A $|z| = 3$. B $|z| = 4$. C $|z| = 5$. D $|z| = 6$.

Lời giải.
Gọi $z = x + yi$ (với x, $y \in \mathbb{R}$). Ta có
$(1+2i)^2 z + \overline{z} = 4i - 20 \Leftrightarrow (-3+4i)(x+yi) + (x - yi) = 4i - 20 \Leftrightarrow (-2x-4y) + (4x-4y)i = 4i - 20$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 20 \\ 4x - 4y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow |z| = 5$.
Chọn đáp án C □

Câu 39.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(-x)$ đồng biến trong khoảng



A $(-1; 1)$. B $(-\infty; -5)$.
C $(-\infty; -4)$. D $(-3; -1)$.

Lời giải.
Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vì $f(x)$ và $f(-x)$ đối xứng nhau qua trục Oy nên ta có bảng biến thiên của $y = f(-x)$ như sau:

x	$-\infty$		-4		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-4)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên $(-3; -1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $2x + y = \frac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = \frac{2}{x} + \frac{1}{4y}$.

A $P_{\min} = \frac{65}{4}$.

B $P_{\min} = \frac{34}{5}$.

C $P_{\min} = 5$.

D $P_{\min}$ không tồn tại.

Lời giải.

$\frac{2}{x} + \frac{1}{4y} = \frac{4}{2x} + \frac{\frac{1}{4}}{y} \geq \frac{\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2}{2x + y} = 5$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 2x + y = \frac{5}{4} \\ \frac{2x}{2} = \frac{y}{\frac{1}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$; $D(0; 0; 0)$. Hỏi có bao nhiêu điểm cách đều 4 mặt phẳng (ABC), (BCD), (CDA), (DAB)?

A 4. B 2. C 1. D 8.

Lời giải.

Gọi $I(m; n; p)$ là điểm cách đều bốn mặt phẳng đã cho. Dễ thấy các mặt phẳng (DAB), (DBC), (DCA) lần lượt là các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx). Mặt phẳng (ABC) có phương trình tổng quát là $x + y + z = 1$. Do I cách đều các mặt phẳng này nên ta có

$$|m| = |n| = |p| = \frac{|m + n + p - 1|}{\sqrt{3}}. \quad (1)$$

Ta có các trường hợp

a) *Trường hợp 1.* $m = n = p$.
Khi đó (1) tương đương

$$|m| = \frac{|3m-1|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow m = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}.$$

Ta được hai điểm thỏa mãn bài toán.

b) *Trường hợp 2.* Trong ba số m, n, p có hai số bằng nhau và bằng số đối của số còn lại.
Khi đó, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $m = n = -p$ (các trường hợp còn lại tương tự) và (1) tương đương

$$|m| = \frac{|m-1|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Ta được hai điểm thỏa mãn bài toán.

Vấy số điểm cách đều bốn mặt phẳng đã cho là $2 + 2 \cdot 3 = 8$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n \\ u_1 = 2 \end{cases}$, $n \geq 1$. Số hạng tổng quát của dãy là

A $u_n = 2^n$. **B** $u_n = 2^{n-1}$. **C** $u_n = 2n$. **D** $u_n = 2^{n+1}$.

Lời giải.

Dãy số đã cho là một cấp số nhân với $u_1 = 2$ và công bội $q = 2$ nên dãy có số hạng tổng quát là $u_n = u_1 q^{n-1} = 2^n$.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8)$ có hai nghiệm thực phân biệt là

A 3. **B** 4. **C** 5. **D** vô số.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình $x > 1$ và $mx > 8$. Khi đó phương trình đã cho tương đương

$$(x-1)^2 = mx - 8 \Leftrightarrow x^2 - (m+2)x + 9 = 0.$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - (m+2)x + 9$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1. Điều này tương đương

$$\begin{cases} (m+2)^2 - 36 > 0 \\ f(1) > 0 \\ \dfrac{m+2}{2} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m+2| > 6 \\ 8 - m > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < m < 8.$$

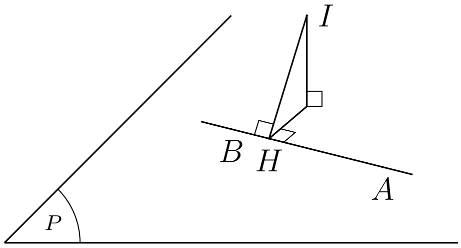
Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6)$, $B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Mặt phẳng (P): $ax+by+cz-2=0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$.

A $T=3$. **B** $T=5$. **C** $T=2$. **D** $T=4$.

Lời giải.



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ bán kính 5. Vì $A,B\in(P)$ nên

$$\begin{cases}3a-2b+6c=2\\ b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+2c=2\\ b=2.\end{cases}\qquad(1)$$

Đường tròn giao tuyến thu được có bán kính nhỏ nhất khi khoảng cách từ I đến (P) là lớn nhất. Mặt khác vì B nằm trong mặt cầu (S) nên $d(I,(P))\leq d(I,AB)$. Do đó bán kính giao tuyến là nhỏ nhất khi $\overrightarrow{IH}$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P), với H là hình chiếu của I trên AB. Phương trình đường thẳng AB là $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$, suy ra $H(t;-t+1;2t)$ và $\overrightarrow{IH}=(t-1;-t-1;2t-3)$. Vì AB nằm trên (P) nên

$$IH\perp AB\Rightarrow(t-1)+(-1)(-t-1)+2(2t-3)=0\Rightarrow t=1.$$

Khi đó $\overrightarrow{IH}=(0;-2;-1)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P), suy ra

$$\begin{cases}a=0\\ \dfrac{b}{-2}=\dfrac{c}{-1}.\end{cases}$$

Kết hợp (1), ta có $a=0$, $b=2$, $c=1$. Vậy $T=a+b+c=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

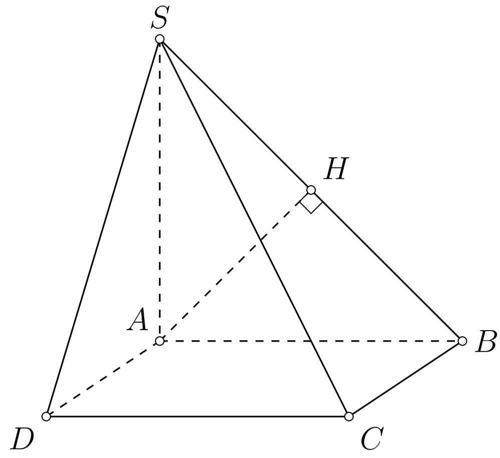
A $V=\dfrac{a^3}{2}$. **B** $V=a^3$. **C** $V=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{9}$. **D** $V=\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A trên SB. Do $SA \perp (ABCD)$ và $(ABCD)$ là hình vuông nên $CB \perp SA$ và $CB \perp AB$ hay $CB \perp (SAB)$, suy ra $CB \perp AH$. Mặt khác theo định nghĩa của H thì $AH \perp SB$, do đó $AH \perp (SBC)$, hay $d(A,(SBC)) = AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Suy ra

$$\sin \widehat{HBA} = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Do đó $\widehat{HBA} = 45^\circ$, suy ra $SA = AB = a$.
Vậy thể tích khối chóp đã cho là $V = \dfrac{a^3}{3}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 46. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z+i| + |z-2-i|$.

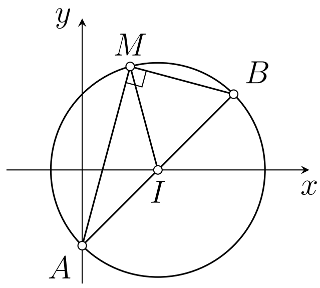
(A) $\max T = 8\sqrt{2}$. (B) $\max T = 8$. (C) $\max T = 4\sqrt{2}$. (D) $\max T = 4$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng phức, gọi $I(1;0)$, $A(0;-1)$, $B(2;1)$ và M là điểm biểu diễn số phức z. Theo giả thiết thì tập các số phức z là đường tròn tâm I bán kính $\sqrt{2}$. Dễ thấy AB là một đường kính của đường tròn (I). Ta có

$$T = MA + MB \leq \sqrt{2\left(MA^2 + MB^2\right)} = \sqrt{2AB^2} = 4.$$

Dấu bằng xảy ra khi $MA = MB$ hay tam giác MAB vuông cân tại M. Vậy $\max T = 4$.



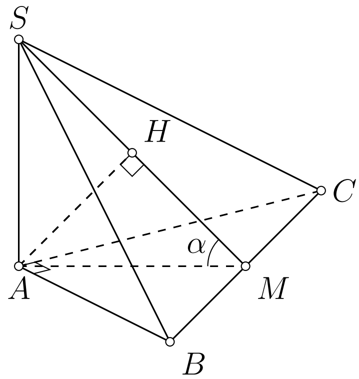
Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Xét khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC), tính $\cos\alpha$ khi thể tích khối chóp $S.ABC$ là nhỏ nhất.

(A) $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. (B) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (C) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC, H là hình chiếu của A trên SM. Do tam giác ABC vuông cân tại A nên $AM \perp BC$, mà $SA \perp BC$ nên $BC \perp (SAM)$. Suy ra $BC \perp AH$, lại có $AH \perp SM$ nên $AH \perp (SBC)$. Suy ra $AH = 3$ và $\widehat{SMA} = \alpha$. Từ đó ta có $SA = \dfrac{3}{\cos\alpha}$, $AM = \dfrac{3}{\sin\alpha}$. Do tam giác ABC vuông cân tại A nên $AB = AC = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sin\alpha}$. Suy ra



$$V_{S.ABC} = \frac{1}{6} \cdot SA \cdot AB \cdot AC = \frac{9}{\cos\alpha \sin^2\alpha}.$$

Ta thấy $V_{S.ABC}$ nhỏ nhất khi $\cos\alpha\sin^2\alpha$ lớn nhất. Đặt $t=\cos\alpha$ với $0<t<1$, ta có

$$\begin{aligned} t\left(1-t^2\right) &= 2t\cdot\frac{(1-t)\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}\cdot\frac{(1+t)\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}\\ &\le 2\left[\frac{t+\frac{(1-t)\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}+\frac{(1+t)\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}}{3}\right]^3\\ &= 2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $t=\dfrac{(1-t)\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}=\dfrac{(1+t)\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$ hay $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy khi thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất thì $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+(y+2)^2+z^2=5$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+m}{1}=\dfrac{z-2m}{-3}$ cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho AB có độ dài lớn nhất.

A. $m=-\dfrac{1}{2}$. B. $m=\pm\dfrac{1}{3}$. C. $m=\dfrac{1}{2}$. **D.** $m=0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;0)$, bán kính $r=\sqrt{5}$, đường thẳng Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-3)$. Ta thấy $M(1;-m;2m)$ thuộc đường thẳng Δ. Đường thẳng Δ cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho AB có độ dài lớn nhất khi $d(I,\Delta)<r$ và $d(I,\Delta)$ nhỏ nhất. Ta có

$$d(I,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\sqrt{\frac{21m^2+54}{14}}\ge\sqrt{\frac{27}{7}}.$$

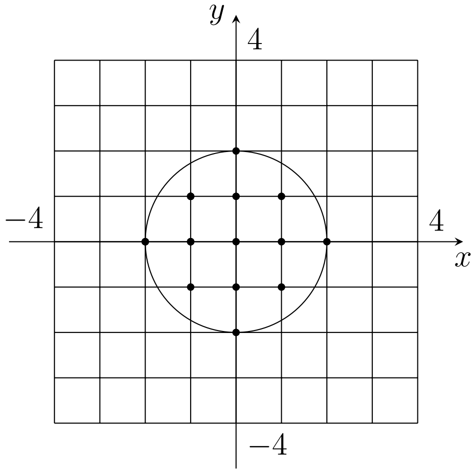
Đẳng thức xảy ra khi $m=0$ và $\sqrt{\dfrac{27}{7}}<\sqrt{5}$. Vậy $m=0$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, chọn ngẫu nhiên một điểm mà tọa độ là các số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn hoặc bằng 4. Nếu các điểm đó có cùng xác suất được chọn thì xác suất để chọn được một điểm mà khoảng cách đến gốc tọa độ nhỏ hơn hoặc bằng 2 là

A. $\dfrac{13}{81}$. B. $\dfrac{15}{81}$. C. $\dfrac{13}{32}$. D. $\dfrac{11}{16}$.

Lời giải.



Các điểm đã cho nằm trên lưới ô vuông như hình vẽ, ta có $9 \cdot 9 = 81$ điểm. Các điểm thỏa mãn khoảng cách đến gốc tọa độ nhỏ hơn hoặc bằng 2 thuộc hình tròn tâm O bán kính 2, ta có 13 điểm (các điểm chấm đen). Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{13}{81}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{a}{(x+1)^3} + bx\mathrm{e}^x$. Tìm a và b biết rằng $f'(0) = -22$ và $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$.

(A) $a = -2, b = -8$. (B) $a = 2, b = 8$. **C** $a = 8, b = 2$. (D) $a = -8, b = -2$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = -\dfrac{3a}{(x+1)^4} + b(x+1)\mathrm{e}^x$, suy ra $-3a + b = f'(0) = -22$. Lại có

$$5 = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[\frac{a}{(x+1)^3} + bx\mathrm{e}^x\right]\mathrm{d}x = \left[-\frac{a}{2(x+1)^2} + b(x-1)\mathrm{e}^x\right]\Bigg|_0^1 = \frac{3a}{8} + b$$

nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -3a + b = -22 \\ \dfrac{3a}{8} + b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 2. \end{cases}$$

Chọn đáp án (C) □

——— **HẾT** ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

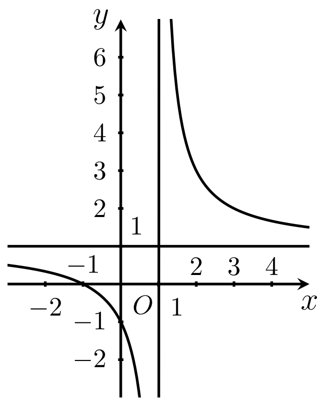
1. C	2. C	3. A	4. D	5. D	6. C	7. A	8. A	9. B	10. A
11. D	12. C	13. A	14. C	15. D	16. B	17. A	18. A	19. A	20. A
21. C	22. A	23. D	24. D	25. D	26. C	27. B	28. B	29. C	30. A
31. B	32. B	33. C	34. A	35. D	36. D	37. A	38. C	39. D	40. C
41. D	42. A	43. A	44. A	45. D	46. D	47. B	48. D	49. A	50. C

153 ĐỀ THI THỬ TOÁN 2018 THPT QUỐC GIA LẦN 1 TRƯỜNG LÝ THÁI TỔ – BẮC NINH

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Đồ thị bên là của hàm số nào?

A $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. **B** $y = \dfrac{x-2}{x-1}$. **C** $y = \dfrac{x+2}{1-x}$. **D** $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.



Lời giải.

Đồ thị có TCĐ $x = 1$, TCN $y = 1$.

$x = 0 \Rightarrow y = -1$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho tích phân $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + 2}\,\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 2$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $2a + b = 0$. **B** $a - 2b = 0$. **C** $2a - b = 0$. **D** $a + 2b = 0$.

Lời giải.

Đặt $t = \cos x + 2 \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$

$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{5}{2},$$
$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 2.$$

$$I = \int_{2}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln t\Big|_{2}^{\frac{5}{2}} = \ln 5 - 2\ln 2.$$

Suy ra $a = 1$, $b = -2$.

Vậy $2a + b = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Cho a là một số dương lớn hơn 1. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ với $x, y > 0$. **B** $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.

C $\log_a x$ có nghĩa khi với mọi $x > 0$. **D** $\log_{a^n} x = \dfrac{1}{n}\log_a x$ với $x > 0$ và $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải.

$n \in \mathbb{N}$ thì chưa chắc $n \neq 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Hàm số nào sau đây có ba điểm cực trị?

A. $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x + 7x + 2$.

B. $y = -x^4 + 2x^2$.

C. $y = -x^4 - 2x^2 + 1$.

D. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

Lời giải.

Xét $y = -x^4 + 2x^2$ có $y' = -4x^3 + 4x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. .$$

Chọn đáp án B □

Câu 5. Nguyên hàm $I = \int \frac{2x^2 - 7x + 5}{x - 3}\,dx$ là

A. $I = x^2 - x + 2\ln|x-3| + C$.

B. $I = x^2 - x - 2\ln|x-3| + C$.

C. $I = 2x^2 - x + 2\ln|x-3| + C$.

D. $I = 2x^2 - x - 2\ln|x-3| + C$.

Lời giải.

$$I = \int \frac{2x^2 - 7x + 5}{x - 3}\,dx = \int \left(2x - 1 + \frac{2}{x-3}\right)\,dx = x^2 - x + 2\ln|x-3| + C.$$

Chọn đáp án A □

Câu 6. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên bằng $a\sqrt{6}$. Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $18\pi a^2$.

B. $18a^2$.

C. $9a^2$.

D. $9\pi a^2$.

Lời giải.

Gọi H là tâm của hình vuông $ABCD$.

$S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SH \perp (ABCD)$

Lấy M là trung điểm SB. Trong (SBD), qua M kẻ trung trực của SB cắt SH tại O.

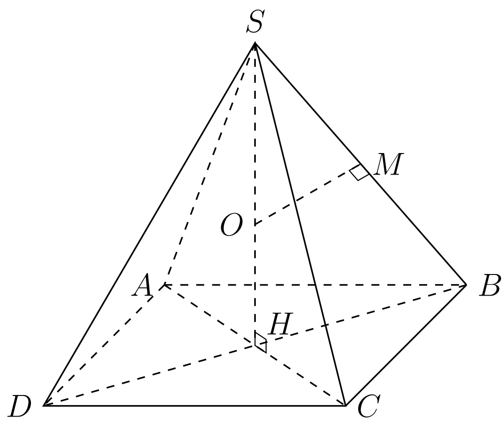
Suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

Ta có $\Delta SOM \backsim \Delta SBH$ (g.g) $\Rightarrow \frac{SO}{SB} = \frac{SM}{SH}$

$$\Rightarrow SO = \frac{SB \cdot SM}{SH} = \frac{SB^2}{2\sqrt{SB^2 - BH^2}}$$

$$= \frac{\left(a\sqrt{6}\right)^2}{2\sqrt{\left(a\sqrt{6}\right)^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{3}{2}a$$

$$\Rightarrow R = \frac{3}{2}a \Rightarrow S = 4\pi \cdot R^2 = 9\pi a^2.$$



Chọn đáp án D □

Câu 7. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\left(\frac{3}{4}\right)^5 < \left(\frac{3}{4}\right)^6$.

B. $\left(\frac{4}{3}\right)^{-7} > \left(\frac{4}{3}\right)^{-6}$.

C. $\left(\frac{3}{2}\right)^6 > \left(\frac{3}{2}\right)^7$.

D. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-6} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} 0 < \frac{2}{3} < 1 \\ -6 < -5 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{-6} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Số véc-tơ khác 0 có điểm đầu, điểm cuối là hai trong 6 đỉnh của lục giác $ABCDEF$ là

(A) P_6. (B) C_6^2. **(C)** A_6^2. (D) 36.

Lời giải.

Tổng số vec-tơ là A_6^2.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho $A(2;-3)$, $B(1;0)$. Phép tịnh tiến theo $\vec{u}=(4;-3)$ biến điểm A, B tương ứng thành A', B'. Khi đó, độ dài đoạn thẳng $A'B'$ bằng

(A) $A'B'=\sqrt{10}$. (B) $A'B'=10$. (C) $A'B'=\sqrt{13}$. (D) $A'B'=\sqrt{5}$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}=(-1;3)\Rightarrow AB=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$

Vậy $A'B'=\sqrt{10}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-3y-4z+1=0$. Khi đó, một véc-tơ pháp tuyến của (α) là

(A) $\vec{n}=(-2;3;1)$. (B) $\vec{n}=(2;3;-4)$. (C) $\vec{n}=(2;-3;4)$. **(D)** $\vec{n}=(-2;3;4)$.

Lời giải.

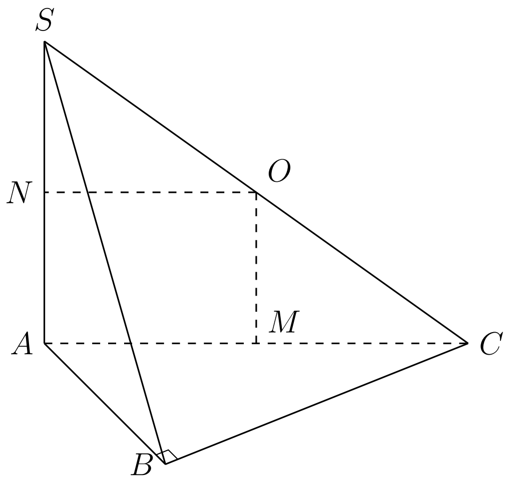
Một véc-tơ pháp tuyến của (α) là $\overrightarrow{n_\alpha}=(2;-3;-4)=-(-2;3;4)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a\sqrt{3}$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

(A) $R=a$. (B) $R=3a$. (C) $R=4a$. **(D)** $R=2a$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của AC. ΔABC vuông tại B nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Qua M kẻ $d \parallel SA$, suy ra d là trục của ΔABC.

Gọi N là trung điểm của SA. Trong (SAC), qua N kẻ d' là trung trực của SA, d cắt d' tại O.

Ta được O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

ΔABC vuông tại B nên

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2a\Rightarrow AM=a$.

N là trung điểm của SA nên $NA=\dfrac{SA}{2}=a\sqrt{3}$.

Tứ giác $ONAM$ là hình chữ nhật nên

$R=OA=NM=\sqrt{AM^2+AN^2}=2a$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Tập xác định của hàm số $y=\tan 2x$ là

(A) $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$. (B) $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

(C) $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$. (D) $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

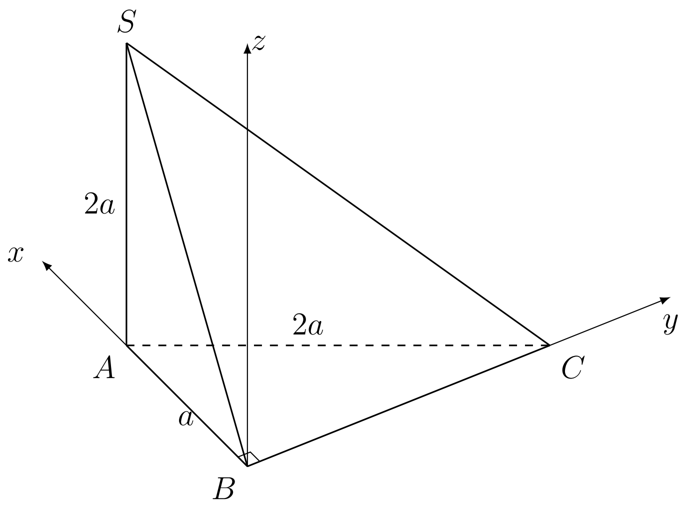
ĐK $2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B có $AB = a$, $AC = 2a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 2a$. Gọi ψ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SBC). Tính $\cos\psi$.

A $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B** $\dfrac{1}{2}$. **C** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **D** $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải.



Chọn hệ trục tọa độ $Bxyz$ như hình vẽ.

Ta tính được $B(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $C(0;a\sqrt{3};0)$, $S(a;0;2a)$,

$\overrightarrow{SA} = (0;0;-2a)$, $\overrightarrow{SB} = (-a;0;-2a)$, $\overrightarrow{SC} = (-a;a\sqrt{3};-2a)$,

$\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{SC}\right] = (2a^2\sqrt{3};2a^2;0)$ là VTPT của (SAC),

$\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{SB};\overrightarrow{SC}\right] = (2a^2\sqrt{3};0;-a^2\sqrt{3})$ là VTPT của (SBC).

Ta có

$$\cos\psi = \left|\cos\left[\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right]\right| = \frac{|\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 14. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x - \sin 6x$ là

A $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \frac{\cos 6x}{6} + C$. **B** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \frac{\sin 6x}{6} + C$.

C $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \frac{\cos 6x}{6} + C$. **D** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \frac{\sin 6x}{6} + C$.

Lời giải.

$$\int (x - \sin 6x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \frac{\cos 6x}{6} + C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 15. Trong các mệnh đề sau. Mệnh đề **sai** là

A Hai mặt phẳng song song thì không có điểm chung.

B Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

C Hai mặt phẳng song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia.

D Một mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song song cho trước theo hai giao tuyến thì hai giao tuyến song song với nhau.

Lời giải.

Hai mặt phẳng *phân biệt* cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Giá trị giới hạn $I = \lim \dfrac{\sqrt{4n^2+5}+n}{4n-\sqrt{n^2+1}}$ là

A $I = 1$. B $I = \dfrac{5}{3}$. C $I = -1$. D $I = \dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

$$I = \lim \frac{\sqrt{4n^2+5}+n}{4n-\sqrt{n^2+1}} = \lim \frac{\sqrt{4+\dfrac{5}{n^2}}+1}{4-\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}} = \frac{\sqrt{4+0}+1}{4-\sqrt{1+0}} = \frac{3}{3} = 1.$$

Chọn đáp án A □

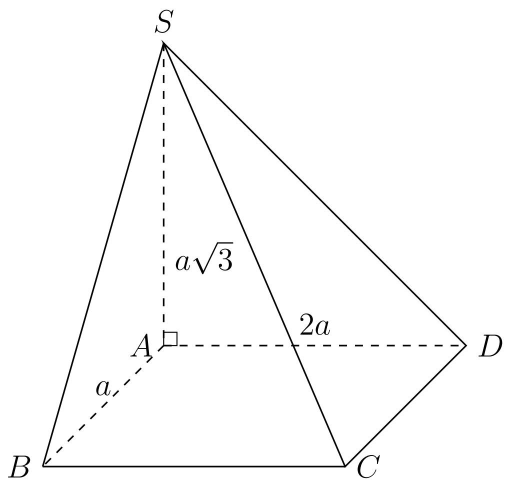
Câu 17. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A $\dfrac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. B $a^3\sqrt{3}$. C $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. D $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối chóp

$$V = \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3}a\sqrt{3} \cdot a \cdot 2a = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}.$$



Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+2z+7=0$ và $(\beta): 5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) là

A $2x-y-2z=0$. B $2x-y+2z=0$.

C $2x+y-2z+1=0$. D $2x+y-2z=0$.

Lời giải.

(α) có VTPT $\overrightarrow{n_1} = (3;-2;2)$ và (β) có VTPT $\overrightarrow{n_2} = (5;-4;3)$

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm. Khi đó (P) có VTPT $\vec{n} = [\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}] = (2;1;-2)$.

$(P): \begin{cases} Qua \quad O(0;0;0) \\ VTPT \quad \vec{n} = (2;1;-2) \end{cases}$ nên $(P): 2x+y-2z=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Gọi α là nghiệm lớn nhất thuộc khoảng $(0;2\pi)$ của phương trình

$$3\cos x + \cos 2x - \cos 3x + 1 = 2\sin x \cdot \sin 2x.$$

Giá trị $\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$ là

A $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C** 0. **D** 1.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&3\cos x+\cos 2x-\cos 3x+1=2\sin x\cdot\sin 2x\\
\Leftrightarrow&3\cos x+\cos 2x-\cos 3x+1=-(\cos 3x-\cos x)\\
\Leftrightarrow&2\cos x+\cos 2x+1=0\\
\Leftrightarrow&2\cos^2 x+2\cos x=0\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{aligned}&\cos x=0\\&\cos x=-1.\end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

Dùng đường tròn lượng giác suy ra nghiệm lớn nhất thuộc khoảng $(0;2\pi)$ là $\alpha=\dfrac{3\pi}{2}$.

Suy ra $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$ trên $[-1;1]$. Khi đó, giá trị của m là

A $\dfrac{2}{3}$. **B** 4. **C** -4. **D** $-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$$y'=\frac{-7}{(x-2)^2}<0,\quad\forall x\neq 2$$

$$y(1)=-4\ ;\ y(-1)=\frac{2}{3}.$$

Vậy $m=-4$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=(m-1)x^3-3(m-1)x^2+3x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

A $1<m\le 2$. **B** $1<m<2$. **C** $1\le m\le 2$. **D** $1\le m<2$.

Lời giải.

$y'=3(m-1)x^2-6(m-1)x+3$

- $m=1$, $y'=3>0$
- $m\neq 1$

$$ycbt\Leftrightarrow\begin{cases}m-1>0\\ \Delta'=9(m-1)^2-3(m-1)\cdot 3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow 1<m\le 2.$$

Vậy $1\le m\le 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+4x+3}{x+1}\ ,\ x>-1\\ mx+2\ ,\ x\le -1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=-1$.

(A) $m = 2$. (B) $m = 0$. (C) $m = -4$. (D) $m = 4$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^2+4x+3}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+}(x+3) = 2$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}(mx+2) = -m+2$

$f(-1) = -m+2$

Hàm số liên tục tại $x = -1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow -m+2 = 2 \Leftrightarrow m = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x+1}$. Khi đó I nằm trên đường thẳng có phương trình

(A) $x+y+4=0$. (B) $2x-y+4=0$. (C) $x-y+4=0$. (D) $2x-y+2=0$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x+1}$ có TCĐ $x=-1$ và TCN $y=2$ nên $I(-1;2)$.

Suy ra I thuộc đường thẳng có phương trình $2x-y+4=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = \left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)^x$. (B) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. (C) $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-x}$. (D) $y = \log_5 x$.

Lời giải.

Ta có $0 < \dfrac{\mathrm{e}}{3} < 1$ nên hàm số $y = \left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Cho điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$, $D(2;2;2)$. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có bán kính là

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $\sqrt{3}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. (D) 3.

Lời giải.

Giả sử (S): $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

$$\begin{cases} A(2;0;0)\in(S)\\ B(0;2;0)\in(S)\\ C(0;0;2)\in(S)\\ D(2;2;2)\in(S)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+2a+d=0\\ 4+2b+d=0\\ 4+2c+d=0\\ 12+2a+2b+2c+d=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2\\ b=-2\\ c=-2\\ d=0.\end{cases}$$

(S) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R=\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Cho hai tích phân $\displaystyle\int_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 8$ và $\displaystyle\int_{5}^{-2} g(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $\displaystyle\int_{-2}^{5} [f(x)-4g(x)-1]\,\mathrm{d}x$

(A) $I=-11$. (B) $I=13$. (C) $I=27$. (D) $I=3$.

Lời giải.

$$\int_{-2}^{5} [f(x)-4g(x)-1]\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x + 4\int_{5}^{-2} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^{5}\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}&= 8 + 4\cdot 3 - [5 - (-2)]\\&= 13.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 27. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ tại điểm có hoành độ bằng 3 là

A $y = 3x + 13$. **B** $y = 3x - 5$. **C** $y = -3x - 5$. **D** $y = -3x + 13$.

Lời giải.

$y' = \dfrac{-3}{(x-2)^2}$

$y'(3) = -3$

$y(3) = 4$

Vậy tiếp tuyến là $y = -3x + 13$.

Chọn đáp án D □

Câu 28. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \cos 2x \, \mathrm{d}x$ bằng cách đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos 2x \, \mathrm{d}x \end{cases}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $I = \dfrac{1}{2}x^2 \sin 2x\Big|_0^\pi - \displaystyle\int_0^\pi x \sin 2x \, \mathrm{d}x$.

B $I = \dfrac{1}{2}x^2 \sin 2x\Big|_0^\pi - 2\displaystyle\int_0^\pi x \sin 2x \, \mathrm{d}x$.

C $I = \dfrac{1}{2}x^2 \sin 2x\Big|_0^\pi + 2\displaystyle\int_0^\pi x \sin 2x \, \mathrm{d}x$.

D $I = \dfrac{1}{2}x^2 \sin 2x\Big|_0^\pi + \displaystyle\int_0^\pi x \sin 2x \, \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos 2x \, \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2x \\ v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

Áp dụng công thức ta có $I = \dfrac{1}{2}x^2 \sin 2x\Big|_0^\pi - \displaystyle\int_0^\pi x \sin 2x \, \mathrm{d}x$

Chọn đáp án A □

Câu 29. Khoảng đồng biến của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$ là

A $(-3; 1)$. **B** $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

C $(-1; 3)$. **D** $(-\infty; -1)$.

Lời giải.

$y' = -3x^2 + 6x + 9$

$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy y đồng biến trên khoảng $(-1;3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Phương trình $3^{2x+1} - 28 \cdot 3^x + 9 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$. Giá trị của $T = x_1 - 2x_2$ là

A -3. B 0. C 4. D -5.

Lời giải.

$$3^{2x+1} - 28 \cdot 3^x + 9 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (3^x)^2 - 28 \cdot 3^x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 9 \\ 3^x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

Vậy $T = x_1 - 2x_2 = (-1) - 2 \cdot (2) = -5$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Cho phương trình

$$2^{-\left||m^3|-3m^2+1\right|} \cdot \log_{81}\left(\left||x^3|-3x^2+1\right|+2\right) + 2^{-\left||x^3|-3x^2+1\right|-2} \cdot \log_3\left(\frac{1}{\left||m^3|-3m^2+1\right|+2}\right) = 0.$$

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị m nguyên để phương trình đã cho có số nghiệm thuộc đoạn $[6;8]$. Tính tổng bình phương tất cả các phần tử của tập S.

A 20. B 28. C 14. D 10.

Lời giải.

Đặt $a = \left||m^3| - 3m^2 + 1\right|$, $b = \left||x^3| - 3x^2 + 1\right|$ với $a, b \geq 0$

$$\begin{aligned} PT \Leftrightarrow & 2^{-a} \cdot \log_{3^4}(b+2) + 2^{-b-2} \log_3 \cdot \left(\frac{1}{a+2}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & 2^{-a} \cdot \log_3(b+2) = 2^{-b} \cdot \log_3(a+2) \\ \Leftrightarrow & 2^a \log_3(a+2) = 2^b \cdot \log_3(b+2)(1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t \log_3(t+2)$ trên $(0;+\infty)$

$f'(t) = 2^t \ln 2 \cdot \log_3(t+2) + \dfrac{1}{(t+2)\ln 3} 2^t$

$\Rightarrow f'(t) > 0, \forall t \in (0+\infty)$

$\Rightarrow f'(t)$ đồng biến trên $(0+\infty)$ (2)

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow & f(a) = f(b) \\ \Leftrightarrow & a = b(\text{ do } 2) \\ \Leftrightarrow & \left||m^3| - 3m^2 + 1\right| = \left||x^3| - 3x^2 + 1\right| \end{aligned}$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = \left||x^3| - 3x^2 + 1\right|$, phương trình đã cho có số nghiệm thuộc $[6;8]$, tức là có $6, 7, 8$ nghiệm $\Leftrightarrow 0 < \left||m^3| - 3m^2 + 1\right| < 3 \Leftrightarrow m \in \{\pm 1; \pm 3\}$, $\quad (m \in \mathbb{Z})$

Vậy $S = \{\pm 1; \pm 3\}$

Do đó tổng bình phương của các phần tử thuộc S là 20.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Sau khi khai triển và rút gọn biểu thức $f(x) = \left(x^2 + \dfrac{3}{x}\right)^{12} + \left(2x^3 + \dfrac{1}{x}\right)^{21}$ thì $f(x)$ có bao nhiêu số hạng?

Ⓐ 30. Ⓑ 32. Ⓒ 29. Ⓓ 35.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển $\left(x^2 + \dfrac{3}{x}\right)^{12}$ là

$$\mathrm{C}_{12}^k x^{2k} \left(\frac{3}{x}\right)^{12-k} = \mathrm{C}_{12}^k 3^{12-k} x^{3k-12}, \quad (0 \le k \le 12)$$

Số hạng tổng quát của khai triển $\left(2x^3 + \dfrac{1}{x}\right)^{21}$ là

$$\mathrm{C}_{21}^t (2x^3)^{2t} \left(\frac{1}{x}\right)^{21-t} = \mathrm{C}_{21}^t 2^t x^{5t-42}, \quad (0 \le t \le 21)$$

Ta tìm các lũy thừa của x trùng nhau.

Cho $3k - 12 = 5t - 42 \Leftrightarrow 5t - 3k = 30$

Phương trình trên có 3 nghiệm nguyên $(t; k)$ với $(0 \le k \le 12, \quad 0 \le t \le 12$ là

$$(6; 0), (9; 5), (12; 10)$$

Do đó số số hạng của $f(x)$ là $13 + 22 - 3 = 32$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 33. Tổng các giá trị nguyên của hàm số $y = \dfrac{3\sin x - \cos x - 4}{2\sin x + \cos x - 3}$ là

Ⓐ 8. Ⓑ 5. Ⓒ 6. Ⓓ 9.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & y = \frac{3\sin x - \cos x - 4}{2\sin x + \cos x - 3} \\ \Leftrightarrow\ & 2y\sin x + y\cos x - 3y = 3\sin x - \cos x - 4 \\ \Leftrightarrow\ & (2y - 3)\sin x + (y + 1)\cos x = 3y - 4 \end{aligned}$$

Để có giá trị của y thì phương trình trên phải có nghiệm

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\ & (2y - 3)^2 + (y + 1)^2 \ge (3y - 4)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 4y^2 - 14y + 6 \le 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2} \le y \le 3 \end{aligned}$$

Do $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{1; 2; 3\}$

Vậy tổng giá trị của y là $0 + 1 + 2 + 3 = 6$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 34. Cho hàm số $y = \dfrac{2x - 4}{x + 1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(-5; 5)$. Tìm m để đường thẳng $(d) : y = -x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M và N sao cho tứ giác $OAMN$ là hình bình hành.

Ⓐ $m = 0$. Ⓑ $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right.$. **C** $m = 2$. Ⓓ $m = -2$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa (C) và $(d): y = -x + m$ là

$$\begin{aligned} & \frac{2x-4}{x+1} = -x + m \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 + (3-m)x - (4+m) = 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Đặt $g(x) = x^2 + (3-m)x - (4+m)$

(C) cắt (d) tại hai điểm phân biệt

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 25 > 0 \\ -6 \neq 0 \end{cases} \text{ (luôn đúng)} \end{aligned}$$

Khi đó $M(x_1; -x_1 + m)$, $N(x_2; -x_2 + m)$ với $x_1 + x_2 = m - 3$ và $x_1x_2 = -(4+m)$

$OAMN$ là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{NM} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 = x_1 - x_2 \\ 5 = -x_1 + x_2 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = -5.$$

Suy ra

$$(x_1 - x_2)^2 = 25 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 25 \Leftrightarrow (m-3)^2 + 4(4+m) = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = 0 \end{array}\right..$$

Khi $m = 0$ thì $M(x_1; -x_1)$, $N(x_2; -x_2)$, $A(-5; 5)$ thẳng hàng (cùng thuộc đường thẳng $y = -x$) (loại).

Vậy $m = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Cho tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + (2x + \cos x)\cos x + 1 - \sin x}{x + \cos x}\,\mathrm{d}x = a\pi^2 + b - \ln\frac{c}{\pi}$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị biểu thức $P = ac^3 + b$ là

Ⓐ 3. Ⓑ $\dfrac{5}{4}$. Ⓒ $\dfrac{3}{2}$. **D** 2.

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + (2x + \cos x)\cos x + 1 - \sin x}{x + \cos x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x + \cos x)^2 + 1 - \sin x}{x + \cos x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+\cos x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{x+\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+\cos x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(x+\cos x)}{x+\cos x} \\
&= \left(\frac{x^2}{2}+\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \ln|x+\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi^2}{8}+1+\ln\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1}{8}\pi^2+1-\ln\frac{2}{\pi}
\end{aligned}
$$

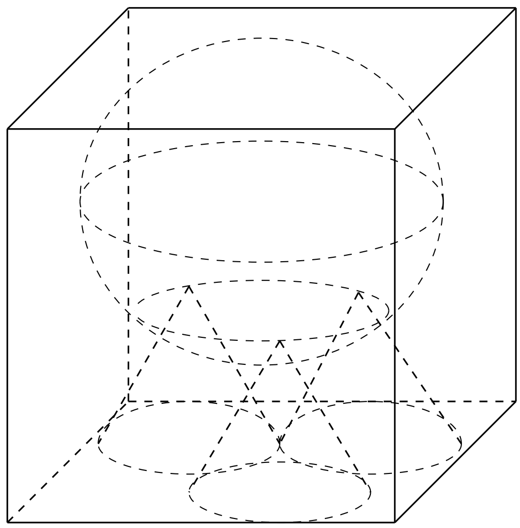
Suy ra $a=\frac{1}{8}$; $b=1$; $c=2$

Vậy $P=2$.

Chọn đáp án D □

Câu 36.

Có một bể hình hộp chữ nhật chứa đầy nước. Người ta cho ba khối nón giống nhau có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân vào bể sao cho ba đường tròn đáy của ba khối nón tiếp xúc với nhau, một khối nón có đường tròn đáy chỉ tiếp xúc với một cạnh của đáy bể và hai khối nón còn lại có đường tròn đáy tiếp xúc với hai cạnh của đáy bể. Sau đó người ta đặt lên đỉnh của ba khối nón một khối cầu có bán kính bằng $\frac{4}{3}$ lần bán kính đáy của khối nón. Biết khối cầu vừa đủ ngập trong nước và lượng nước trào ra là $\frac{337\pi}{3}$ cm^3. Tính thể tích nước ban đầu ở trong bể. (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



A. 885,2 cm^3. B. 1209,2 cm^3. C. 1106,2 cm^3. D. 1174,2 cm^3.

Lời giải.

Gọi R là bán kính đáy của khối nón

Thiết diện qua trục của khối nón là tam giác vuông cân nên chiều cao của khối nón là $h = R\tan 45^\circ = R$.

Lượng nước tràn ra bằng tổng thể tích 3 khối nón và khối cầu

$$3\left(\frac{1}{3}\pi\cdot R^2\cdot R\right)+\frac{4}{3}\pi\left(\frac{4R}{3}\right)^3=\frac{337\pi}{3}\Leftrightarrow\frac{337\pi R^3}{81}=\frac{336\pi}{3}\Leftrightarrow R=3.$$

Các tâm O_1, O_2, O_3 của 3 khối nón lập thành tam giác đều có cạnh là $2R$. Đáy bể là hình chữ nhật có

- Chiều dài: $4R$
- Chiều rộng: $2R+O_3H=2R+2R\sin 60^\circ=(2+\sqrt{3})R$

Các đỉnh S_1, S_2, S_3 của 3 khối nón lập thành tam giác đều có cạnh $2R$. Gọi I là tâm khối cầu. Hình chiếu H của I xuống mặt phẳng $(S_1S_2S_3)$ là trọng tâm của $\Delta S_1S_2S_3$.

$$IH = \sqrt{\left(\frac{4R}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2R\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2R}{3}$$

Chiều cao của bể

$$R + \frac{2R}{3} + \frac{4R}{3} = 3R$$

Thể tích nước ban đầu trong bể

$$4R(2+\sqrt{3})R\cdot 3R = 12(2+\sqrt{3})R^3 \approx 1209{,}2\text{cm}^3.$$

Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho hàm số $y = x^3 + 3x$ có đồ thị (C). M_1 là điểm thuộc (C) có hoành độ bằng 1. Tiếp tuyến tại điểm M_1 cắt (C) tại M_2 khác M_1, tiếp tuyến tại điểm M_2 cắt (C) tại M_3 khác M_2, $\cdots$, tiếp tuyến tại điểm M_{n-1} cắt (C) tại M_n khác M_{n-1} $(n > 4, n \in \mathbb{N})$. Tìm số tự nhiên n thỏa điều kiện $y_n - 3x_n + 2^{21} = 0$.

A $n = 7$. **B** $n = 8$. **C** $n = 22$. **D** $n = 21$.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; x_0^3 + 3x_0) \in (C)$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M

$$y = (3x_0^2 + 3)(x - x_0) + x_0^3 + 3x_0$$

Phương trình hoành độ giao điểm giữa (C) và tiếp tuyến tại M

$$\begin{aligned} & x^3 + 3x = (3x_0^2+3)(x-x_0) + x_0^3 + 3x_0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-x_0)(x_0^2 + x_0x + x^2 - 3x_0^2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-x_0)^2(x+2x_0) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = -2x_0 \end{aligned}$$

Suy ra hoành độ các điểm M_i lập thành cấp số nhân

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ q = -2 \end{cases}$$

trong đó x_i là hoành độ điểm M_i. Suy ra $x_n = (-2)^{n-1}$

Theo đề bài:

$$\begin{aligned} & y_n - 3x_n + 2^{21} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x_n^3 + 3x_n - 3x_n + 2^{21} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x_n^3 = -2^{21} \\ \Leftrightarrow\ & x_n^3 = \left[(-2)^7\right]^3 \\ \Leftrightarrow\ & x_n = (-2)^7 \\ \Leftrightarrow\ & (-2)^{n-1} = 2^7 \Leftrightarrow n = 8. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 38. Một hình trụ có đường cao 10cm và bán kính đáy bằng 5cm. Gọi (P) là mặt phẳng song song với trục của hình trụ và cách trục 4cm. Tính diện tích thiết diện của hình trụ khi cắt bởi (P).

A 60 cm^2. **B** 40 cm^2. **C** 30 cm^2. **D** 80 cm^2.

Lời giải.

Thiết diện của hình trụ khi cắt bởi (P) là hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = OO' = 10\text{cm}$.

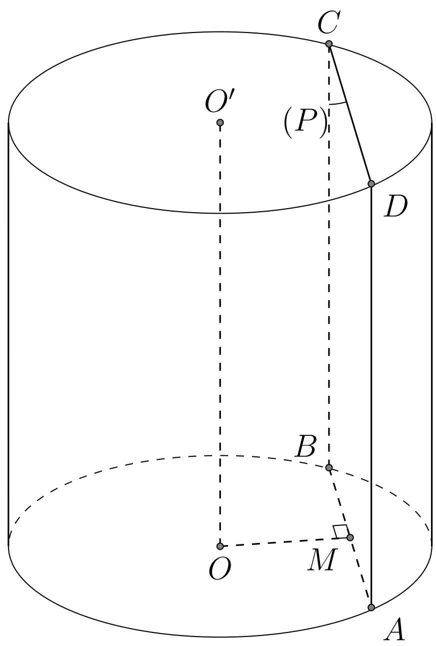
Gọi M là trung điểm AB.

ΔOMA vuông tại M nên

$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\text{cm}$.

Suy ra $AB = 2AM = 6\text{cm}$

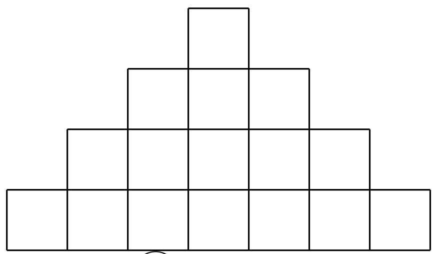
Vậy diện tích thiết diện là $AB \cdot AD = 60\text{cm}^2$.



Chọn đáp án A □

Câu 39.

Trong hội chợ tết Mậu Tuất 2018, một công ty sữa muốn xếp 900 hộp sữa theo số lượng $1, 3, 5, \cdots$ từ trên xuống dưới (số hộp sữa trên mỗi hàng xếp từ trên xuống là các số lẻ liên tiếp - mô hình như hình bên). Hàng dưới cùng có bao nhiêu hộp sữa?



A 59. **B** 30. **C** 61. **D** 57.

Lời giải.

Gọi u_n $(n \in \mathbb{N})$ là số hộp sữa ở hàng thứ n (từ trên xuống). (u_n) lập thành cấp số cộng với $u_1 = 1$, $d = 2$. Giả sử có k hàng. Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned}
& u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 900 \\
\Leftrightarrow\ & S_k = 900 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{k\left[2u_1 + (k-1)d\right]}{2} = 900 \\
\Leftrightarrow\ & 2k + 2k^2 - 2k = 1800 \\
\Leftrightarrow\ & k = 30
\end{aligned}$$

Số hộp sữa ở hàng cuối cùng là $u_{30} = u_1 + 29d = 59$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa $f'(x)-2018f(x)=2018\cdot x^{2017}\cdot \mathrm{e}^{2018x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2018$. Giá trị $f(1)$ là

A. $2019e^{2018}$. B. $2018\mathrm{e}^{-2018}$. C. $2018\mathrm{e}^{2018}$. D. $2017\mathrm{e}^{2018}$.

Lời giải.

Theo đề bài, ta có

$$\begin{aligned}
&f'(x)-2018\cdot f(x)=2018\cdot x^{2017}\cdot \mathrm{e}^{2018x}\\
\Leftrightarrow &\mathrm{e}^{-2018x}\cdot f'(x)-2018\cdot \mathrm{e}^{-2018x}\cdot f(x)=2018\cdot x^{2017}\\
\Leftrightarrow &\left[\mathrm{e}^{-2018x}\cdot f'(x)\right]=2018\cdot x^{2017}\\
\Leftrightarrow &\mathrm{e}^{-2018x}\cdot f(x)+C=\int 2018x^{2017}\,\mathrm{d}x\\
\Leftrightarrow &\mathrm{e}^{-2018x}\cdot f(x)+C=x^{2018}
\end{aligned}$$

Thay $x=0$ ta được $f(0)+C=0\Leftrightarrow 2018+C=0\Leftrightarrow C=-2018$

Từ đó ta được $\mathrm{e}^{-2018x}\cdot f(x)-2018=x^{2018}$

Thay $x=1$ ta được

$$\mathrm{e}^{-2018}\cdot f(1)-2018=1\Leftrightarrow \frac{f(1)}{\mathrm{e}^{2018}}=2019\Leftrightarrow f(1)=2019\mathrm{e}^{2018}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 41. Đội học sinh giỏi trường THPT Lý Thái Tổ gồm có 8 học sinh khối 12, 6 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Chọn ngẫu nhiên 8 học sinh. Xác suất để trong 8 học sinh được chọn có đủ 3 khối là

A. $\dfrac{71128}{75582}$. B. $\dfrac{35582}{3791}$. C. $\dfrac{71131}{75582}$. D. $\dfrac{143}{153}$.

Lời giải.

Gọi A là biến cố "Trong 8 học sinh được chọn có đủ 3 khối".

Suy ra $\overline{A}$ là biến cố "Trong 8 học sinh được chọn chỉ có đúng 1 khối hoặc 2 khối".

$n(\Omega)=\mathrm{C}_{19}^{8}=75582$.

Số cách chọn chỉ có đúng 1 khối: C_8^8.

Số cách chọn gồm cả hai khối 10 và 11: C_{11}^8.

Số cách chọn gồm cả hai khối 11 và 12: $\mathrm{C}_{14}^8-\mathrm{C}_8^8$.

Số cách chọn gồm cả hai khối 10 và 12: $\mathrm{C}_{13}^8-\mathrm{C}_8^8$.

$\Rightarrow n(\overline{A})=\mathrm{C}_8^8+[\mathrm{C}_{11}^8+(\mathrm{C}_{14}^8-\mathrm{C}_8^8)+(\mathrm{C}_{13}^8-\mathrm{C}_8^8)]=4454$.

$\Rightarrow \mathrm{P}(\overline{A})=\dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)}=\dfrac{4454}{75582}$

$\Rightarrow \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(\overline{A})=\dfrac{71128}{75582}$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho tam giác ABC với $A(2;-3;2)$, $B(1;-2;2)$, $C(1;-3;3)$. Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+2z-3=0$. Khi đó diện tích tam giác $A'B'C'$ là

A. 1. B. $\dfrac{3}{2}$. C. $\dfrac{1}{2}$. D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.
(α) có VTPT $\vec{v} = (2; -1; 2)$,
$\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 0; 1)$,
$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right] = (1; 1; 1)$ là VTPT của (ABC).
$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right]\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Gọi ψ là góc giữa (ABC) và (α),
$\cos\psi = \dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{v}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{|2-1+2|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
Ta có $\Delta A'B'C'$ là hình chiếu của ΔABC lên (α)
$\Rightarrow S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta ABC}\cdot\cos\psi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 43. Bất phương trình $\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{3x-7}{x+3}\right) \geq 0$ có tập nghiệm là $(a; b]$. Giá trị biểu thức $P = 3a - b$ là

Ⓐ 5. **B** 4. Ⓒ 10. Ⓓ 7.

Lời giải.
ĐK: $0 < \dfrac{3x-7}{x+3} \neq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -3 \\ x > \dfrac{7}{3}. \end{array}\right.$

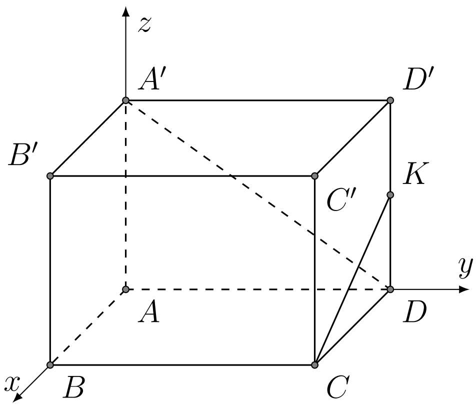
$$\begin{aligned} & \log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}\frac{3x-7}{x+3}\right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \log_{\frac{1}{3}}\frac{3x-7}{x+3} \geq 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{3x-7}{x+3} \leq \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow & \frac{8x-24}{3(x+3)} \leq 0 \\ \Leftrightarrow & -3 < x \leq 3. \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện, tập nghiệm $S = \left(\dfrac{7}{3}; 3\right]$.
Suy ra $a = \dfrac{7}{3}; b = 3$. Vậy $P = 3a - b = 4$.
Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm của DD'. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$ là

Ⓐ a. Ⓑ $\dfrac{2a}{5}$. **C** $\dfrac{a}{3}$. Ⓓ $\dfrac{3a}{8}$.

Lời giải.



Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình bên

Ta có $A'(0;0;a)$, $D(0;a;0)$, $D'(0;a;a)$, $C(a;a;0)$.

Gọi K là trung điểm $DD' \Rightarrow K\left(0;a;\dfrac{a}{2}\right)$

Từ đó $\overrightarrow{CK} = \left(-a;0;\dfrac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{A'D} = (0;a;-a)$, $\overrightarrow{CD} = (-a;0;0)$

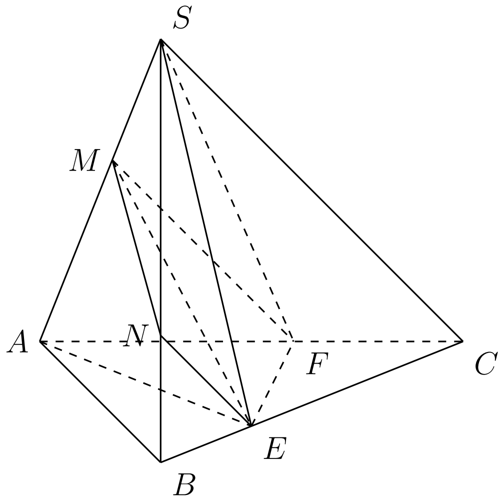
Suy ra $\mathrm{d}(CK, A'D) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{A'D}\right] \cdot \overrightarrow{CD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{A'D}\right]\right|} = \dfrac{a}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Cho điểm M nằm trên cạnh SA, điểm N nằm trên cạnh SB của khối chóp tam giác $S.ABC$ sao cho $\dfrac{SM}{MA} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{SN}{NB} = 2$. Mặt phẳng (α) qua MN và song song với SC chia khối chóp thành 2 phần. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện chứa A, V_2 là thể tích của khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A $\dfrac{4}{5}$. **B** $\dfrac{5}{4}$. **C** $\dfrac{5}{6}$. **D** $\dfrac{6}{5}$.

Lời giải.



Gọi E, F lần lượt là giao điểm của (α) với BC và AC.

Khi đó thiết diện là hình thang $MNEF$.

Đặt $V = V_{S.ABC}$, $V_1 = V_{MNEFAB}$, $V_2 = V_{MNEFCS}$.

$V_2 = V_{SCEF} + V_{SFME} + V_{SMNE}$.

$\dfrac{V_{SCEF}}{V} = \dfrac{CF}{CA} \cdot \dfrac{CE}{CB} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9}$.

$\dfrac{V_{SFME}}{V_{SFAE}} = \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{1}{3}$.

$\dfrac{V_{SFEA}}{V} = \dfrac{S_{FEA}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{FEA}}{S_{CEA}} \cdot \dfrac{S_{CEA}}{S_{ABC}} = \dfrac{FA}{CA} \cdot \dfrac{CE}{CB} = \dfrac{4}{9}$.

$\Rightarrow \dfrac{V_{SFME}}{V} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{4}{9} = \dfrac{4}{27}$.

$\dfrac{V_{SMNE}}{V_{SABE}} = \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{2}{9}$.

$\dfrac{V_{SABE}}{V} = \dfrac{S_{ABE}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{ABE}}{S_{CEA}} \cdot \dfrac{S_{CEA}}{S_{ABC}} = \dfrac{EB}{CE} \cdot \dfrac{CE}{CB} = \dfrac{1}{3}$.

$\Rightarrow V_{SMNE} = \dfrac{2}{27}V \Rightarrow V_2 = \dfrac{2}{9}V + \dfrac{4}{27}V + \dfrac{2}{27}V = \dfrac{4}{9}V$.

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{5}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho hàm số $y = \log_{2018}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ có đồ thị (C_1) và hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C_2) đối xứng với (C_1) qua gốc tọa độ. Hỏi hàm số $y = |f(x)|$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A $(-\infty;-1)$. **B** $(-1;0)$. **C** $(0;1)$. **D** $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm $g(x) = \log_{2018}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ có điều kiện xác định: $x > 0$.

Vì (C_2) đối xứng với (C_1) qua gốc tọa độ nên $\forall x_0 > 0$ ta có:

$$(x_0; g(x_0)) \in (C_1) \Leftrightarrow (-x_0; -g(x_0)) \in (C_2) \Leftrightarrow f(-x_0) = -g(x_0).$$

Vậy $\forall x < 0$, ta có $f(x) = -g(-x) = -\log_{2018}\left(\dfrac{1}{-x}\right) = \log_{2018}(-x)$. Ta có

$$y = |f(x)| = |\log_{2018}(-x)| = \begin{cases} \log_{2018}(-x), & x \leq -1 \\ -\log_{2018}(-x), & -1 < x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = \begin{cases} \dfrac{1}{x \ln 2018}, & x < -1 \\ -\dfrac{1}{x \ln 2018}, & -1 < x < 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow y' < 0$ khi $x < -1$ và $y' > 0$ khi $-1 < x < 0$.

$\Rightarrow y = |f(x)|$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên $(-1; 0)$.

Chọn đáp án A $\square$

Câu 47. Cho a, b là các số dương thỏa $\log_4 a = \log_{25} b = \log \dfrac{4b-a}{2}$. Giá trị của $\dfrac{a}{b}$ là

A $6 - 2\sqrt{5}$. B $\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$. C $6 + 2\sqrt{5}$. D $\dfrac{3-\sqrt{5}}{8}$.

Lời giải.

Đặt $\log_4 a = \log_{25} b = \log \dfrac{4b-a}{2} = t$

Suy ra $a = 4^t$, $b = 25^t$, $\dfrac{4b-a}{2} = 10^t$, $(a, b > 0)$

Ta có

$$\begin{aligned} & 4^t \cdot 25^t = (10^t)^2 \\ \Rightarrow & ab = \left(\frac{4b-a}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow & a^2 + 16b^2 - 12ab = 0 \\ \Rightarrow & \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 12\left(\frac{a}{b}\right) + 16 = 0 \\ \Rightarrow & \left[\begin{array}{l} \dfrac{a}{b} = 6 - 2\sqrt{5} \\ \dfrac{a}{b} = 6 + 2\sqrt{5} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Do $\dfrac{4b-a}{2} = 10^t > 0$ nên $4b - a > 0 \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} < 4$.

Vậy $\dfrac{a}{b} = 6 - 2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án A $\square$

Câu 48. Cho $(C_m): y = 2x^3 - (3m+3)x^2 + 6mx - 4$. Gọi T là tập tất cả các giá trị của m thỏa mãn (C_m) có đúng hai điểm chung với trục hoành. Tổng giá trị các phần tử của T là

A 7. B $\dfrac{8}{3}$. C 6. D $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

$y = 2x^3 - (3m+3)x^2 + 6mx - 4 = (x-2)\left[2x^2 - (3m-1)x + 2\right]$.
Đặt $g(x) = 2x^2 - (3m-1)x + 2$.
YCBT tương đương phương trình $y = 0$ có hai nghiệm phân biệt, nghĩa là phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt, trong đó một nghiệm là 2, hoặc phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm kép, khác 2.
TH1: Phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt, trong đó một nghiệm là 2.
Thay $x = 2$ vào phương trình $g(x) = 0$ ta được

$$8 - 6m + 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

Với $m = 2$, $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$ Vậy $m = 2 \in T$.
TH2: Phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm kép, khác 2

$$\begin{cases} \Delta = (3m-1)^2 - 4\cdot 2\cdot 2 = 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m-1)^2 - 4\cdot 2\cdot 2 = 0 \\ 8 - 6m + 2 + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = \dfrac{5}{3}. \end{array}\right.$$

Vậy tổng giá trị các phần tử của T là $2 + (-1) + \dfrac{5}{3} = \dfrac{8}{3}$.
Chọn đáp án B □

Câu 49. Một người lần đầu gửi ngân hàng 200 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 4%/quý và lãi từng quý sẽ được nhập vào vốn. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 150 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó. Hỏi tổng số tiền người đó nhận được sau hai năm kể từ khi gửi thêm tiền lần hai là bao nhiêu?

A 480,05 triệu đồng. **B** 463,51 triệu đồng. **C** 501,33 triệu đồng. **D** 521,39 triệu đồng.

Lời giải.

Số tiền nhận được sau 6 tháng đầu

$$200(1 + 0{,}04)^2 = 216{,}32(\text{triệu đồng}).$$

Số tiền nhận được sau 2 năm kể từ khi gửi thêm

$$(216{,}32 + 150)(1 + 0{,}04)^8 \approx 501{,}33(\text{triệu đồng}).$$

Chọn đáp án C □

Câu 50. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;-3)$, $B\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$, $C(1;1;4)$, $D(5;3;0)$. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A bán kính bằng 3, (S_2) là mặt cầu tâm B bán kính bằng $\dfrac{3}{2}$. Có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với 2 mặt cầu (S_1), (S_2) đồng thời song song với đường thẳng đi qua 2 điểm C và D?

A 1. **B** 2. **C** 4. **D** Vô số.

Lời giải.
Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm. Giả sử $(\alpha): ax + by + cz + d = 0$, với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.
$\overrightarrow{CD} = (4;2;-4) = 2(2;1;-2)$

$(\alpha) \parallel CD \Rightarrow 2a+b-2c=0$.
$\mathrm{d}\left(A,(\alpha)\right)=3 \Leftrightarrow \dfrac{|a+2b-3c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=3$.
$\mathrm{d}\left(B,(\alpha)\right)=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{|3a+3b-c+2d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=3$.
Suy ra $|a+2b-3c+d|=|3a+3b-c+2d|$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+2b-3c+d=3a+3b-c+2d \\ a+2b-3c+d=-3a-3b+c-2d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a+b+2c+d=0 \\ 4a+5b-4c+3d=0. \end{array}\right.$

• TH1: $\begin{cases} 2a+b-2c=0 \\ 2a+b+2c+d=0 \\ |a+2b-3c+d|=3\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2c-2a \\ d=-4c \\ |-3a-3c|=3\sqrt{5a^2-8ac+5c^2} \end{cases}$

$\Rightarrow 2a^2-5ac+2c^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2c \\ a=\dfrac{1}{2}c. \end{array}\right.$

Với $a=2c$, chọn $c=1 \Rightarrow a=2$, $b=-2$, $d=-4$. Suy ra $(\alpha): 2x-2y+z-4=0$ (loại vì $CD \subset (\alpha)$).

Với $a=\dfrac{1}{2}c$, chọn $c=2 \Rightarrow a=1$, $b=2$, $d=-8$. Suy ra $(\alpha): x+2y+2z-8=0$ (thỏa mãn $CD \parallel (\alpha)$).

• TH2: $\begin{cases} 2a+b-2c=0 \\ 4a+5b-4c+3d=0 \\ |a+2b-3c+d|=3\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2c-2a \\ d=2a-2c \\ |-a-c|=3\sqrt{5a^2-8ac+5c^2} \end{cases}$

$\Rightarrow 22a^2-37ac+22c^2=0 \Leftrightarrow a=c=0 \Rightarrow b=0$ (loại).

Vậy chỉ có 1 mặt phẳng thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. A	3. D	4. B	5. A	6. D	7. D	8. C	9. A	10. D
11. D	12. A	13. C	14. C	15. B	16. A	17. C	18. D	19. A	20. C
21. C	22. B	23. B	24. A	25. B	26. B	27. D	28. A	29. C	30. D
31. A	32. B	33. C	34. C	35. D	36. B	37. B	38. A	39. A	40. A
41. A	42. C	43. B	44. C	45. B	46. A	47. A	48. B	49. C	50. A

154 THI THỬ QG 2018 LỚP 12 - LẦN 1- TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT - QUẢNG NGÃI

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho số phức $z = (1+3i)(4-i)$, phần thực của z bằng bao nhiêu?

A. 4. B. 1. C. 11. D. 7.

Lời giải.

Ta có $z = (1+3i)(4-i) = 7 + 11i$.

Vậy phần thực của z bằng 7.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 3 và luôn chứa chữ số 0.

A. $\dfrac{5}{81}$. B. $\dfrac{11}{108}$. C. $\dfrac{2}{27}$. D. $\dfrac{11}{160}$.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = 9 \times 9 \times 8 = 648$.

Gọi biến cố A: "số được chọn chia hết cho 3 và luôn chứa chữ số 0".

- Xét số chia hết cho 3 có dạng $\overline{ab0}$.
  - Chọn $a = 1$, $b \in \{2; 5; 8\}$: có 3 cách chọn.
  - Chọn $a = 2$, $b \in \{4; 7\}$: có 2 cách chọn.
  - Chọn $a = 3$, $b \in \{6; 9\}$: có 2 cách chọn.
  - Chọn $a = 4$, $b \in \{5; 8\}$: có 2 cách chọn.
  - Chọn $a = 5$, $b = 7$;$a = 6$, $b = 9$;$a = 7$, $b = 8$: có 3 cách chọn.

  Vì a, b hoán vị nhau được nên có: $2 \times (3+2+2+2+3) = 24$ số dạng $\overline{ab0}$.
- Xét số chia hết cho 3 có dạng $\overline{a0b}$. Tương tự có: 24 số.

Suy ra $n(A) = 48$. Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{48}{648} = \dfrac{2}{27}$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và song song với mặt phẳng $(Q): x + 2y - 3z + 2 = 0$.

A. $(P): x + 2y - 3z + 9 = 0$. B. $(P): x + 2y - 3z - 7 = 0$.

C. $(P): x + 2y - 3z + 7 = 0$. D. $(P): x + 2y - 3z - 9 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = \vec{n}_Q = (1; 2; -3)$.

Vậy $(P): 1(x-2) + 2(y+1) - 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 3z + 9 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Tính $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

A. $L = +\infty$. B. $L = 0$. C. $L = 1$. D. $L = -1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại giá trị nào sau đây?

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

A. $x = -1$. B. $x = 2$.
C. $x = 0$. D. $x = -2$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Tỉ lệ tăng dân số hàng năm của Nhật Bản là 0,2%. Năm 1998 dân số của Nhật Bản là 125 932 000 người. Vào năm nào thì dân số của Nhật Bản sẽ là 150 000 000 người?

A. 2086. B. 2084. C. 2085. D. 2087.

Lời giải.

Ta có $S = Ae^{ni} \Leftrightarrow ni = \ln\left(\dfrac{S}{A}\right) \Leftrightarrow n = \dfrac{\ln S - \ln A}{i} = \dfrac{\ln(150\,000\,000) - \ln(125\,932\,000)}{0{,}2\%} \approx 87{,}45.$

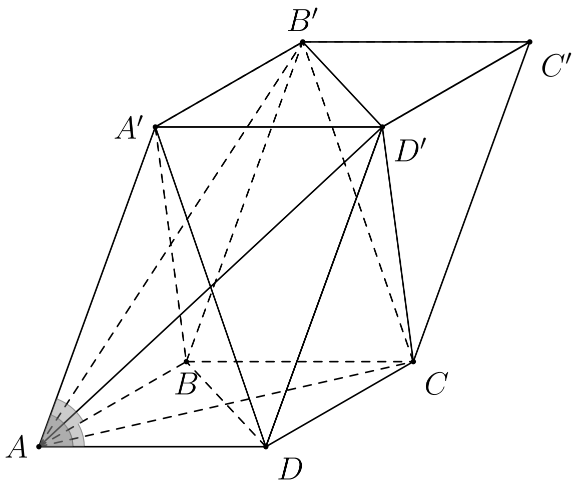
Vậy vào năm $(1998 + 88) = 2086$ thì dân số của Nhật Bản sẽ là 150 000 000 người.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a và các góc $\widehat{BAD}$, $\widehat{DAA'}$, $\widehat{A'AB}$ đều bằng $60°$. Tính thể tích V của tứ diện $ACB'D'$ theo a.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}$. B. $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{36}$. C. $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. D. $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải.



Tứ diện $A'ABD$ là tứ diện đều cạnh a nên

$$V_{A'ABD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

$$\begin{aligned} V_{ABCD.A'B'C'D'} &= d(A', (ABD)) \cdot S_{ABCD} \\ &= 2d(A', (ABD)) \cdot S_{ABD} \\ &= 6V_{A'ABD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Ta có $V_{ABCD.A'B'C'D'} = V_{D'ADC} + V_{B'ABC} + V_{CB'C'D'} + V_{AA'B'D'} + V_{ACB'D'}$.

Vì các khối $D'.ADC$; $B'.ABC$; $C.B'C'D'$; $A.A'B'D'$ có cùng chiều cao và diện tích đáy với khối $A'.ABD$ nên $V_{ACB'D'} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2} - 4 \times \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3\sqrt{x} + x$.

A. $\displaystyle\int \left(3\sqrt{x} + x\right)\,\mathrm{d}x = x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + C$. B. $\displaystyle\int \left(3\sqrt{x} + x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + C$.

C. $\displaystyle\int \left(3\sqrt{x} + x\right)\,\mathrm{d}x = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + C$. D. $\displaystyle\int \left(3\sqrt{x} + x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + C$.

Lời giải.

$$\int \left(3\sqrt{x}+x\right)\,\mathrm{d}x = \int \left(3x^{\frac{1}{2}}+x\right)\,\mathrm{d}x = 2x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}+C = 2x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}+C.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$ và $B(2;1;0)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng qua AB và vuông góc với mặt phẳng $(P): x-3y+2z-1=0$?

(A) $3x+5y+6z-19=0$.
(B) $x+2y-3z-2=0$.
(C) $2x+3y+4z-5=0$.
(D) $5x+3y+2z-13=0$.

Lời giải.

Gọi (Q) là mặt phẳng cần tìm.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-1)$ và véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_P=(1;-3;2)$.

Véc-tơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}=\left[\vec{n}_P,\overrightarrow{AB}\right]=(5;3;2)$.

Mặt phẳng (Q) qua $B(2;1;0)$ có phương trình $(Q): 5(x-2)+3(y-1)+2(z-0)=0$

$$\Leftrightarrow 5x+3y+2z-13=0.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{1-y}{2}=\dfrac{z}{1}$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d?

(A) $\vec{m}=(-1;2;1)$.
(B) $\vec{n}=(1;2;1)$.
(C) $\vec{p}=(-1;2;-1)$.
(D) $\vec{q}=(1;2;-1)$.

Lời giải.

d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;-2;1)=-\vec{q}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và là hàm số chẵn. Biết $\displaystyle\int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x=4$.

Tính $I=\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I=16$.
(B) $I=4$.
(C) $I=8$.
(D) $I=2$.

Lời giải.

Đặt $t=2x \Rightarrow \mathrm{d}t=2\,\mathrm{d}x$, với $x=0\Rightarrow t=0$ và $x=1\Rightarrow t=2$.

Ta có $\displaystyle\int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2\times 4=8$.

Vì $f(x)$ là hàm chẵn trên $[-2;2]$ nên $I=\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2\times 8=16$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x+1}$, $y=1-x$ và trục Ox. Diện tích S của hình (H) bằng bao nhiêu?

(A) $S=\dfrac{4}{3}$.
(B) $S=\dfrac{7}{6}$.
(C) $S=\dfrac{3}{2}$.
(D) $S=\dfrac{5}{4}$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

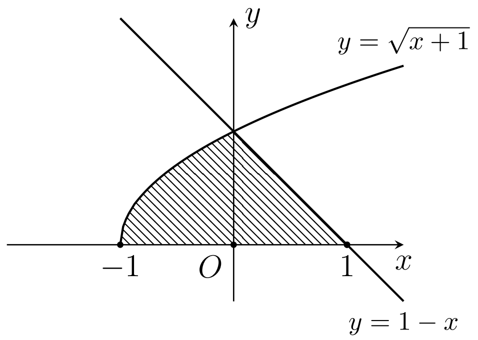
$$\sqrt{x+1} = 1 - x$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 1 - 2x + x^2 \\ x \le 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ x \le 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x = 0.$$

Đồ thị $y = \sqrt{x+1}$ cắt Ox tại điểm $x = -1$ và đồ thị $y = 1-x$ cắt Ox tại $x = 1$.

Vậy $S = \int\limits_{-1}^{0} \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} (1-x)\,\mathrm{d}x$

$= \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$

$= \frac{7}{6}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Cho $a,\ b$ là các số thực và $a \cdot b > 0$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

(A) $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$.

(B) $\ln\sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$.

(C) $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

(D) $\ln(ab) = \ln|a| + \ln|b|$.

Lời giải.

Vì a, b là các số thực nên $\ln a$ và $\ln b$ đều không xác định khi $a, b < 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 14.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

(A) $(1;5)$.

(B) $(-\infty;0)$.

(C) $(0;2)$.

(D) $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $y' > 0,\ \forall x \in (0;2)$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng $4\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Độ dài đường sinh của hình trụ đã cho bằng bao nhiêu?

(A) $4a$.

(B) $3a$.

(C) a.

(D) $2a$.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = 2\pi r l \Leftrightarrow l = \frac{S_{xq}}{2\pi \times r} = \frac{4\pi a^2}{2\pi \times a} = 2a$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$. Gọi $S_n = \dfrac{1}{u_1u_2} + \dfrac{1}{u_2u_3} + \cdots + \dfrac{1}{u_nu_{n+1}}$. Tính $\lim S_n$.

A $\lim S_n = \dfrac{1}{6}$. **B** $\lim S_n = 1$. **C** $\lim S_n = 0$. **D** $\lim S_n = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có (u_n) là cấp số cộng với $(u_1) = 2, d = 3$. Ta có

$$\frac{1}{u_nu_{n+1}} = \frac{1}{u_n(u_n+d)} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_n+d}\right) = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}\right).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} + \cdots + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}}\right) = \frac{u_{n+1} - u_1}{du_1u_{n+1}} \\ &= \frac{u_1 + nd - u_1}{du_1u_{n+1}} = \frac{n}{u_1u_{n+1}} \\ &= \frac{n}{u_1(u_1+nd)} = \frac{n}{2(2+3n)}. \end{aligned}$$

Do đó $\lim S_n = \dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Phương trình $7^x + 8^x = 6^x + 9^x$ có bao nhiêu nghiệm?

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Định lý Lagrange: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên $(a;b)$ thì tồn tại số $c \in (a;b)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Ta có

$$7^x + 8^x = 6^x + 9^x \Leftrightarrow 7^x - 6^x = 9^x - 8^x \tag{1}$$

Xét hàm số $f(t) = t^x$ liên tục và có đạo hàm trên $(0;+\infty)$. Theo định lý trên ta có

Tồn tại $t_1 \in (6;7)$ sao cho $f'(t_1) = \dfrac{f(7) - f(6)}{7 - 6} \Leftrightarrow xt_1^{x-1} = 7^x - 6^x$;

Tồn tại $t_2 \in (8;9)$ sao cho $f'(t_2) = \dfrac{f(9) - f(8)}{9 - 8} \Leftrightarrow xt_2^{x-1} = 9^x - 8^x$.

Từ (1) ta có $7^x - 6^x = 9^x - 8^x \Leftrightarrow xt_1^{x-1} = xt_2^{x-1} \Leftrightarrow x\left(t_1^{x-1} - t_2^{x-1}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Vậy phương trình chỉ có hai nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;4)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho thể tích tứ diện $OABC$ nhỏ nhất. (P) đi qua điểm nào dưới đây?

A $(0;1;3)$. **B** $(2;2;0)$. **C** $(1;1;2)$. **D** $(-1;1;4)$.

Lời giải.

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$, với $a,b,c>0$. Phương trình mặt phẳng (P) là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Ta có $M\in(P)$ nên $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{c}=1$. Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{2}{b}\cdot\frac{4}{c}}\Leftrightarrow 1\geq 27\cdot\frac{8}{abc}\Leftrightarrow abc\geq 8\cdot 27.$$

Mặt khác thể tích khối tứ diện $OABC$ là $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc\geq\frac{1}{6}\cdot 8\cdot 27=36$.

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{4}{c}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=6\\ c=12.\end{cases}$

Vậy phương trình của (P) là $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{12}=1\Leftrightarrow 4x+2y+z-12=0$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm $(2;2;0)$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Trong các số phức $(1+i)^4, (1+i)^6, (1+i)^9, (1+i)^{10}$ số phức nào là số thực?

A. $(1+i)^9$. B. $(1+i)^6$. C. $(1+i)^{10}$. **D.** $(1+i)^4$.

Lời giải.

Ta có $(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$.

Do đó $(1+i)^4=(1+i)^2=(2i)^2=-4$ là một số thực.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{5}$ và số phức $w=(1+2i)\cdot\bar{z}$. Tìm $|w|$.

A. $\sqrt{5}$. **B.** 5. C. $2\sqrt{5}$. D. 4.

Lời giải.

Ta có $|w|=|(1+2i)\cdot\bar{z}|=|1+2i|\cdot|\bar{z}|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=5$.

Chọn đáp án B □

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;1;1), N(2;-1;0)$ và $P(1;0;2)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là

A. $x-3y+2z-1=0$. **B.** $3x-y+2z-7=0$.

C. $x-2y+3z-3=0$. D. $2x-y+3z-6=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MP}=(-1;-1;1), \overrightarrow{MN}=(0;-2;-1)$.

Véc-tơ pháp tuyến của (MNP) là $\vec{n}=\overrightarrow{MP}\wedge\overrightarrow{MN}=(3;-1;2)$.

Mặt phẳng (MNP) đi qua $M(2;1;1)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$ nên có phương trình

$$3(x-2)-(y-1)+2(z-1)=0\Leftrightarrow 3x-y+2z-7=0.$$

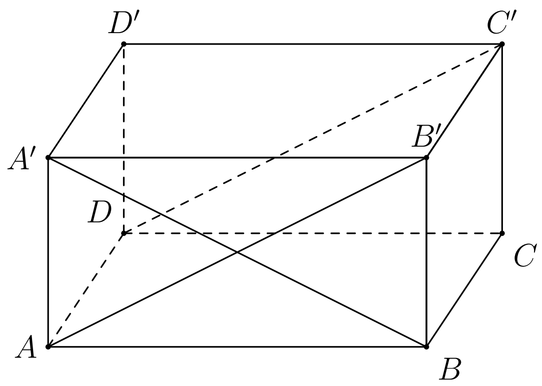
Chọn đáp án B □

Câu 22. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa $A'B$ và AC'.

A. $90°$. B. $45°$. C. $30°$. D. $60°$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} A'B \perp AB' \\ A'B \perp AD \end{cases} \Rightarrow A'B \perp (ADC'B')$
$\Rightarrow A'B \perp AC'$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$ trên $[-2; 2]$ bằng

(A) 1. (B) -2. (C) $-\dfrac{13}{5}$. **D** $-\dfrac{11}{5}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{(x - 3)^2}$, do đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \notin [-2; 2] \\ x = 2. \end{array}\right.$

Có $f(-2) = -\dfrac{11}{5}$, $f(2) = 1$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-2; 2]$ bằng $-\dfrac{11}{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24.

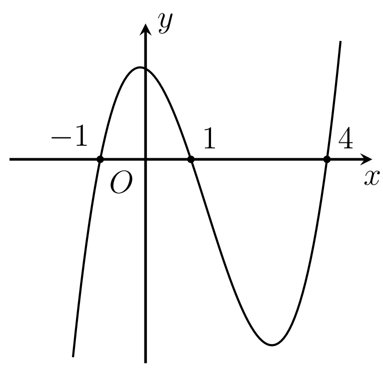
Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

(A) Hàm số $f(x)$ có hai cực trị.

(B) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

(C) $f(-1) < f(4) < f(1)$.

D Trên đoạn $[-1; 4]$ giá trị nhỏ nhất của hàm số là $f(4)$.



Lời giải.

Ta thấy $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt là $-1; 1; 4$ và đổi dấu qua 3 nghiệm đó nên hàm số $y = f(x)$ có 3 cực trị.

Lại có $f'(x) < 0$, với mọi $x \in (1; 4)$ nên hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(1; 4)$.

Theo đồ thị ta có $\displaystyle\int_{-1}^{1} |f'(x)|\, \mathrm{d}x < \int_{1}^{4} |f'(x)|\, \mathrm{d}x \Leftrightarrow f(1) - f(-1) < f(1) - f(4) \Leftrightarrow f(4) < f(-1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Thể tích của khối lăng trụ có chiều cao h và diện tích đáy bằng B là

(A) $V = \dfrac{1}{2}Bh$. (B) $V = \dfrac{1}{6}Bh$. (C) $V = \dfrac{1}{3}Bh$. **D** $V = Bh$.

Lời giải.

Thể tích của khối lăng trụ có chiều cao h và diện tích đáy bằng B là $V = Bh$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Cho tập hợp M có 20 phần tử. Số tập con gồm 4 phần tử của M là

A 20^4. **B** A_{20}^4. **C** A_{20}^2. **D** C_{20}^{16}.

Lời giải.

Số cách chọn ra 4 phần tử từ tập 20 phần tử là $\mathrm{C}_{20}^4 = \mathrm{C}_{20}^{16}$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Cho $P(x) = (1 + 3x - 2x^2)^{20}$. Khai triển $P(x)$ thành đa thức ta được

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{40}x^{40}.$$

Tính $S = a_1 + 2a_2 + \cdots + 40a_{40}$.

A $S = 5.2^{20}$. **B** $S = -5.2^{21}$. **C** $S = 5.2^{21}$. **D** $S = -5.2^{19}$.

Lời giải.

Ta có $P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + 40a_{40}x^{39} = 20\left(1 + 3x - 2x^2\right)^{19}(3 - 4x)$.

Cho $x = 1$ ta có $P'(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 40a_{40} = 20(1 + 3 - 2)^{19} \cdot (-1)$.

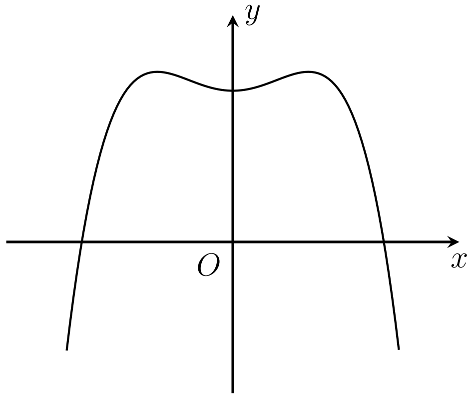
Vậy $S = -5 \cdot 2^{21}$.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hãy chọn khẳng định đúng?

A $a > 0, b < 0, c > 0$. **B** $a < 0, b > 0, c < 0$.

C $a < 0, b > 0, c > 0$. **D** $a > 0, b > 0, c > 0$.



Lời giải.

Nhánh cuối của đồ thị đi xuống nên $a < 0$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $c > 0$.

Hàm số có 3 cực trị nên a và b trái dấu, do đó $b > 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+2}{1}$; $d_2 : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-2}{2}$. Viết phương trình tham số của phân giác góc nhọn tạo bởi d_1 và d_2.

A $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 - 3t \\ z = 3t \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 3t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3t \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $d_1 \cap d_2 = I(1; -1; 0)$.

Trên d_1 ta lấy điểm $A(3; 3; -2)$, trên d_2 lấy điểm B sao cho $IA = IB$ và $\triangle IAB$ cân tại I có đường trung tuyến đồng thời là đường phân giác.

Gọi $B(2+u;-2-u;2+2u)$. Ta có $IA = IB \Leftrightarrow 6(u+1)^2 = 24 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=1 \\ u=-3. \end{array}\right.$

Vậy $B(3;-3;4)$ hoặc $B(-1;1;-4)$.

Chọn điểm $B(-1;1;4)$ để $\widehat{BIA}$ nhọn, gọi $M(1;2;-3)$ là trung điểm của AB suy ra IM là đường phân giác cần tìm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b (a<b)$. Diện tích hình D được tính theo công thức

A $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. (B) $S=\int\limits_a^b f|x|\,\mathrm{d}x$. (C) $S=\left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$. (D) $S=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Biết $f(0)<0$, hỏi phương trình $f(|x|)=f(0)$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 4. (B) 2. **C** 3. (D) 5.

Lời giải.

Đặt $f(0)=k<0$. Vì hàm số nghịch biến trên $(-1;3)$ nên $-2<k<4$.

Ta có hàm số $y=f(|x|)$ là hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng qua trục Oy, từ đó ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	k	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $f(|x|)=f(0)$ có 3 nghiệm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Tích phân $\int\limits_0^2 \dfrac{2x+1}{x+3}\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $4 - 5\ln\dfrac{3}{5}$. (B) $4 - 5\log\dfrac{5}{3}$. (C) $4 + 5\ln\dfrac{5}{3}$. (D) $4 - 5\ln\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^2 \dfrac{2x+1}{x+3}\,dx = \int\limits_0^2 \left(2 - \dfrac{5}{x+3}\right)dx = (2x - 5\ln|x+3|)\Big|_0^2 = 4 - 5\ln\dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Đồ thị của hàm số nào dưới đây không có tiệm cận đứng?

(A) $y = e^{\frac{-1}{\sqrt{x}}}$. (B) $y = \ln x$. (C) $y = \tan x$. (D) $y = \dfrac{x^2-1}{x+2}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \ln x$ nhận đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số $y = \tan x$ có các đường tiệm cận đứng là $x = \pm\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2-1}{x+2}$ nhận đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $y = e^{\frac{-1}{\sqrt{x}}}$ không có tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, chiều cao bằng a. Gọi M là trung điểm của SC. Tính khoảng cách giữa AM và SB.

(A) $a\sqrt{3}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. (C) $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. (D) $\dfrac{2a\sqrt{19}}{19}$.

Lời giải.

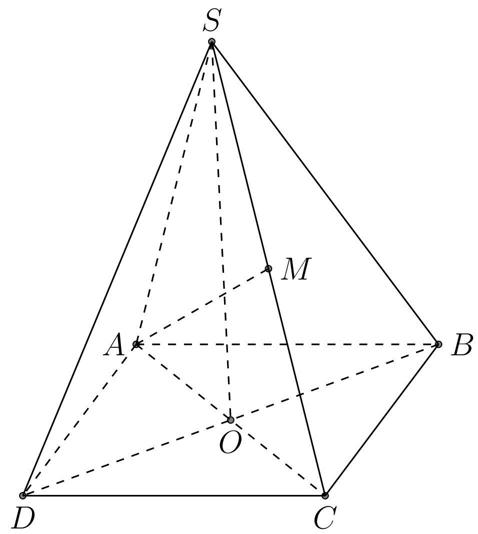
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc tọa độ O là tâm của đáy, $A \in Ox, B \in Oy, S \in Oz$. Theo đề bài ta có $A(a;0;0), B(0;a;0), C(-a;0;0), S(0;0;a)$.

Vì M là trung điểm của SC nên $M\left(-\dfrac{a}{2};0;\dfrac{a}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}\left(-\dfrac{3a}{2};0;\dfrac{a}{2}\right); \overrightarrow{SB}(0;a;-a); \overrightarrow{AS}(-a;0;a)$.

Khi đó $d(AM, SB) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{AM}\right]\cdot\overrightarrow{AS}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{AM}\right]\right|}$

$= \dfrac{a^3}{\dfrac{a^2\sqrt{19}}{2}} = \dfrac{2a\sqrt{19}}{19}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$ và $SA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB).

(A) 60°. (B) 90°. (C) 30°. (D) 45°.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB. Ta có $\begin{cases} CI \perp AB \\ CI \perp SA \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SAB)$.

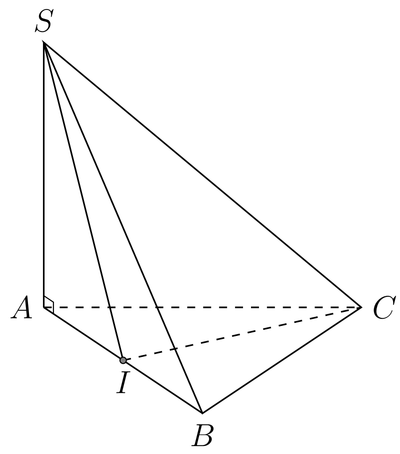
Do đó SI là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAB).

Vậy $(SC,(SAB)) = (SC,SI) = \widehat{CSI}$ (do $\triangle SCI$ vuông tại I).

Ta có $SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mà $CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $\triangle SCI$ vuông cân tại I, do đó $\widehat{CSI} = 45°$.

Kết luận $(SC,(SAB)) = 45°$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a\sqrt{2}$. Đường chéo AB' của mặt bên $ABB'A'$ tạo với đáy một góc φ và $\tan\varphi = \sqrt{2}$. Tính thể tích của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho theo a.

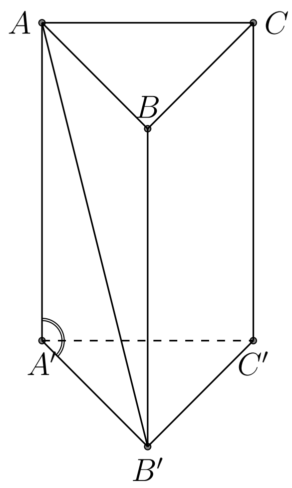
(A) $4\pi a^3$. (B) $2\sqrt{2}\pi a^3$. (C) $8\pi a^3$. (D) $2\pi a^3$.

Lời giải.

Ta có $(AB',(ABC)) = (AB',AB) = \widehat{BAB'} = \varphi$.

Suy ra $\tan\varphi = \frac{BB'}{AB} = \sqrt{2}$, do đó $BB' = \sqrt{2}\cdot a\sqrt{2} = 2a$.

Khối lăng trụ ngoại tiếp có bán kính đáy $r = \frac{BC}{2} = \frac{2a}{2} = a$, chiều cao $h = BB' = 2a$ nên có thể tích là $V = \pi r^2 h = 2\pi a^3$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Tập hợp nghiệm của bất phương trình $2^{x^2} < 2^{6-x}$ là

(A) $(2;+\infty)$. (B) $(-\infty;-3)$. (C) $(-3;2)$. (D) $(-2;3)$.

Lời giải.

Ta có $2^{x^2} < 2^{6-x} \Leftrightarrow x^2 < 6 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 6 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 2$.

Chọn đáp án (C) □

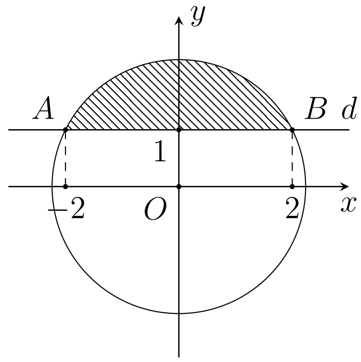
Câu 38. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 = 5$, và đường thẳng d có phương trình $y = 1$. Biết d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi d và cung nhỏ AB của (C). Quay hình (H) xung quanh đường thẳng d ta được một khối tròn xoay có thể tích V. Giá trị của V gần nhất với số nào sau đây?

(A) 46,1. (B) 12,4. (C) 11,3. (D) 33,5.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$



Vậy giao điểm là $A(-2;1)$ và $B(2;1)$.
Phương trình nửa đường tròn phía trên trục Ox là $y=\sqrt{5-x^2}$.
Gọi I là giao điểm của d và Oy, suy ra $I(0;1)$. Tịnh tiến hệ trục tọa độ theo $\overrightarrow{OI}=(0;1)$ thành hệ trục XIY với $\begin{cases} x-0=X \\ y-1=Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=X \\ y=Y+1 \end{cases}$, trục IX nằm trùng với đường thẳng d. Khi đó hình phẳng quay quanh trục IX.
Đối với hệ trục XIY phương trình nửa đường tròn là $Y=\sqrt{5-X^2}-1$. Do đó, thể tích khối tròn xoay là $V=\pi\displaystyle\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{5-X^2}-1\right)^2\,\mathrm{d}X=\dfrac{44\pi}{3}-10\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}}\approx 11{,}295$.
Chọn đáp án C □

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $S(0;0;1)$ và $A(1;1;1)$. Hai điểm $M(m;0;0), N(0;n;0)$ thay đổi sao cho $m+n=1$ và $m>0, n>0$. Biết rằng luôn tồn tại một mặt cầu cố định đi qua A và tiếp xúc với mặt phẳng (SMN). Bán kính của mặt cầu đó là

A $\sqrt{2}$. B 2. C 1. D $\sqrt{3}$.

Lời giải.
Phương trình mặt phẳng (SMN) là $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}+\dfrac{z}{1}=1 \Leftrightarrow nx+my+mnz-mn=0$.
Gọi $I(a;b;c)$ và R là tâm và bán kính của mặt cầu cố định.
Ta có

$$\begin{aligned} R=d(I;(SMN)) &= \frac{|na+mb+mnc-mn|}{\sqrt{n^2+m^2+m^2n^2}} \\ &= \frac{|(1-m)a+mb+m(1-m)(c-1)|}{\sqrt{1-2mn+m^2n^2}} \\ &= \frac{|(1-m)a+mb+m(1-m)(c-1)|}{1-mn} \\ &= \frac{|(1-c)m^2+(b+c-a-1)m+a|}{m^2-m+1}. \end{aligned}$$

Mà R không đổi nên $\dfrac{1-c}{1}=\dfrac{b+c-a-1}{-1}=\dfrac{a}{1}=t \Rightarrow \begin{cases} a=t \\ b=t \\ c=1-t \end{cases}$, hay $I(t;t;1-t)$.
Mặt khác ta có $R=IA=\sqrt{3t^3-4t+2}=|t| \Rightarrow t=1$. Vậy $R=1$.
Chọn đáp án C □

Câu 40. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|\sin^4 x+\cos 2x+m\right|$ bằng 2. Số phần tử của S là

A 4. B 3. C 1. D 2.

Lời giải.

Ta có $y = \left|\sin^4 x + \cos 2x + m\right| = \left|\sin^4 x - 2\sin^2 x + m + 1\right|$.
Đặt $t = \sin^2 x$, $t \in [0;1]$, hàm số trở thành $y = |t^2 - 2t + m + 1|$.
Xét hàm $f(t) = t^2 - 2t + m + 1$, với $t \in [0;1]$. Ta có $f'(t) = 2t - 2 \leq 0$, với $\forall t \in [0;1]$, suy ra hàm số nghịch biến trên $[0;1]$. Do đó $f(1) \leq f(t) \leq f(0) \Leftrightarrow m \leq f(t) \leq m + 1$.
Xét các trường hợp sau

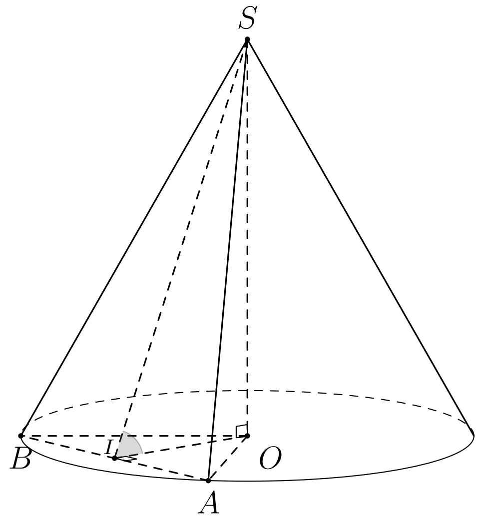
- $m + 1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -1$. Khi đó, $\min y = -m - 1$. Theo giả thiết $-m - 1 = 2 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa mãn).
- $-1 < m \leq 0$. Khi đó, $\min y = 0$ (loại).
- $m > 0$. Khi đó, $\min y = m$. Theo giả thiết $m = 2$ (thỏa mãn).

Vậy tập hợp S có 2 phần tử.
Chọn đáp án D □

Câu 41. Một khối nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân và đường sinh có độ dài bằng $3\sqrt{2}$ cm. Một mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với đáy một góc $60°$ chia khối nón thành 2 phần. Tính thể tích phần nhỏ (Tính gần đúng đến hàng phần trăm).

A. $4{,}36$ cm^3. B. $4{,}53$ cm^3. C. $5{,}37$ cm^3. D. $5{,}61$ cm^3.

Lời giải.



Xét khối nón như hình vẽ.
Ta có $\triangle SBO$ là nửa tam giác vuông cân đỉnh S nên $BO = \dfrac{SB \times \sqrt{2}}{2} = 3$.
Mặt phẳng qua đỉnh S cắt đáy theo dây cung AB, tâm đường tròn đáy là O.
Gọi I là hình chiếu vuông góc của O lên $AB \Rightarrow \widehat{SIO} = 60°$.
Xét $\triangle SOB$, $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = 3$.
Xét $\triangle SIO$, $OI = \dfrac{SO}{\tan 60°} = \sqrt{3}$.
Xét $\triangle IOA$, $\cos \widehat{IOA} = \dfrac{IO}{OA} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
Suy ra $\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{IOA} \approx 109{,}47°$.
Gọi $\mathbf{S}$ là diện tích hình phẳng tạo bởi dây cung AB và đường tròn (O) (phần nhỏ).

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \times 109{,}47 \times \frac{\pi}{180} \times OB^2 - \frac{1}{2} OA \times OB \times \sin 109{,}47° \approx 4{,}36 \text{ cm}^2.$$

Gọi V_n là thể tích phần nhỏ, $V_n = \dfrac{1}{3}\mathbf{S} \times SO \approx 4{,}36$ cm^3.
Chọn đáp án A □

Câu 42. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \mathrm{e}^{\frac{3x - \sqrt{mx^2+1}}{x - \sqrt{(2018-m)x^2+1}}}$ có 2 tiệm cận ngang?

A. 2016. B. 2018. C. 2017. D. 2019.

Lời giải.

Ta có:

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{\frac{3x - \sqrt{mx^2+1}}{x - \sqrt{(2018-m)x^2+1}}} = \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{\frac{3 + \sqrt{m + \frac{1}{x^2}}}{1 + \sqrt{(2018-m) + \frac{1}{x^2}}}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3 + \sqrt{m + \frac{1}{x^2}}}{1 + \sqrt{(2018-m) + \frac{1}{x^2}}}} = \mathrm{e}^{\frac{3 + \sqrt{m}}{1 + \sqrt{2018 - m}}},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{3x-\sqrt{mx^2+1}}{x-\sqrt{(2018-m)x^2+1}}} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{3-\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}{1-\sqrt{(2018-m)+\frac{1}{x^2}}}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3-\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}{1-\sqrt{(2018-m)+\frac{1}{x^2}}}} = \mathrm{e}^{\frac{3-\sqrt{m}}{1-\sqrt{2018-m}}}.$$

Do đó, để đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang thì

$$\begin{cases} 2018-m \neq 1 \\ 2018-m \geq 0 \\ m \geq 0 \\ \dfrac{3+\sqrt{m}}{1+\sqrt{2018-m}} \neq \dfrac{3-\sqrt{m}}{1-\sqrt{2018-m}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2017 \\ 0 \leq m \leq 2018 \\ m \neq 1816{,}2 \end{cases}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 43. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm không âm trên đoạn $[0;1]$ thỏa $(f(x))^4 \cdot (f'(x))^2 \cdot (x^2+1) = 1 + (f(x))^3$ và $f(x) > 0$, $\forall x \in [0;1]$. Biết $f(0) = 2$, hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây.

A $2 < f(1) < \frac{5}{2}$. B $\frac{5}{2} < f(1) < 3$. C $\frac{3}{2} < f(1) < 2$. D $3 < f(1) < \frac{7}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $(f(x))^4 \cdot (f'(x))^2 \cdot (x^2+1) = 1 + (f(x))^3$

$$\Leftrightarrow (f(x))^2 \cdot f'(x) \cdot \sqrt{x^2+1} = \sqrt{1+(f(x))^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(f(x))^2 \cdot f'(x)}{\sqrt{1+(f(x))^3}}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\left(1+(f(x))^3\right)}{2\sqrt{1+(f(x))^3}}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} \times \left(\sqrt{1+(f(x))^3}\right)\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1+\sqrt{2}\right) = \frac{2}{3} \times \left(\sqrt{1+(f(1))^3} - 3\right)$$

$$\Leftrightarrow f(1) \approx 2{,}605.$$

Chọn đáp án B □

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6)$, $B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 2 = 0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$.

A $T = 4$. B $T = 2$. C $T = 3$. D $T = 5$.

Lời giải.

Ta có (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R = 5$.

Mà $\begin{cases} \overrightarrow{AI} = (-2;4;-3) \\ \overrightarrow{AB} = (-3;3;-6) \end{cases} \Rightarrow d(I, AB) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \sqrt{5} < R = 5$ nên AB cắt (S) tại hai điểm.

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến.

Ta có $r^2 = R^2 - d^2(I,(P)) \Rightarrow r$ nhỏ nhất khi $d(I,(P))$ lớn nhất.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $(P) \Rightarrow d(I,(P))$ lớn nhất khi H thuộc AB hay H là hình chiếu vuông góc của I lên AB.
Gọi $H(-3t; 1+3t; -6t) \in AB$ do $\overrightarrow{IH} \times \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow H(1;0;2)$.
Véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = \overrightarrow{IH} = (0;-2;-1) \Rightarrow (P): 2y + z - 2 = 0$.
Vậy $T = a + b + c = 3$.
Chọn đáp án C □

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 3i| + |z + 2 + i| = 4\sqrt{5}$. Tính giá trị lớn nhất của $P = |z - 4 + 4i|$.

A $\max P = 4\sqrt{5}$. **B** $\max P = 7\sqrt{5}$. **C** $\max P = 5\sqrt{5}$. **D** $\max P = 6\sqrt{5}$.

Lời giải.
Ta có bất đẳng thức mô-đun số phức sau:
$$||z_1| - |z_2|| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$
Đặt $w = z - 4 + 4i \Rightarrow P = |w|$.
Ta có $|z - 2 + 3i| + |z + 2 + i| = 4\sqrt{5} \Leftrightarrow |w + 2 - i| + |w + 6 - 3i| = 4\sqrt{5}$.
Mà $\begin{cases} ||w + 2 - i| \ge |w| - |2 - i| = |w| - \sqrt{5} \\ |w + 6 - 3i| \ge |w| - |6 - 3i| = |w| - 3\sqrt{5} \end{cases}$,
suy ra $4\sqrt{5} \ge \left(|w| - \sqrt{5}\right) + \left(|w| - 3\sqrt{5}\right) \Leftrightarrow |w| \le 4\sqrt{5}$.
Vậy $\max P = 4\sqrt{5}$ khi $w = k(2 - i) = -4(2 - i)$ hay $z = -4$.
Chọn đáp án A □

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$ và có bảng biến thiên như như sau

x	$-\infty$		1		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$		$-$	‖	$-$	
y			$+\infty$ ‖		4		‖ $+\infty$		
		↗	‖	↗		↘	‖	↘	
	-1		‖ $-\infty$				$-\infty$ ‖		-1

Phương trình $f(2^{\sin x}) = 3$ có bao nhiêu nghiệm trên đoạn $\left[0; \dfrac{5\pi}{6}\right]$?

A 3. **B** 2. **C** 4. **D** 5.

Lời giải.
Trên đoạn $\left[0; \dfrac{5\pi}{6}\right]$ ta xét phương trình $\sin x = m$ (1).
- Phương trình (1) có nghiệm khi $0 \le m \le 1$.
- $0 \le m < \dfrac{1}{2}$ hoặc $m = 1$: phương trình (1) có 1 nghiệm.
- $\dfrac{1}{2} \le m < 1$: phương trình (1) có 2 nghiệm.

Với mọi $x \in \left[0; \dfrac{5\pi}{6}\right] \Rightarrow 0 \le \sin x \le 1 \Rightarrow 1 \le 2^{\sin x} \le 2$.
Đặt $t = 2^{\sin x}$, $t \in [1;2]$. Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(t) = 3$ có hai nghiệm thỏa:
- $1 < t < \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 < 2^{\sin x} < \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 < \sin x < \dfrac{1}{2} \Rightarrow f(2^{\sin x}) = 3$ có 1 nghiệm.

- $\sqrt{2} < t < 2 \Leftrightarrow \sqrt{2} < 2^{\sin x} < 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < \sin x < 1 \Rightarrow f(2^{\sin x}) = 3$ có 2 nghiệm.

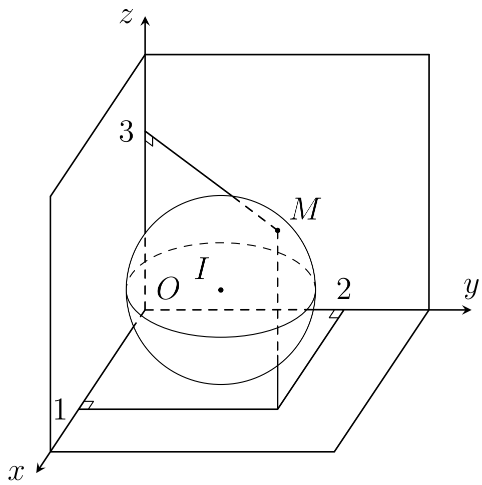
Vậy phương trình $f(2^{\sin x}) = 3$ có 3 nghiệm trên đoạn $\left[0; \dfrac{5\pi}{6}\right]$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Hai quả bóng hình cầu có kích thước khác nhau, được đặt ở hai góc của một căn nhà hình hộp chữ nhật sao cho mỗi quả bóng đều tiếp xúc với hai bức tường và nền của căn nhà đó. Biết rằng trên bề mặt của mỗi quả bóng đều tồn tại một điểm có khoảng cách đến hai bức tường và nền nhà nó tiếp xúc lần lượt bằng $1, 2, 3$. Tính tổng các bình phương của hai bán kính của hai quả bóng đó.

A 22. **B** 26. **C** 20. **D** 24.

Lời giải.



Xét quả bóng tiếp xúc với hai bức tường, nền của căn nhà và chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ (tương tự với góc tường còn lại).

Gọi $I(a; a; a)$ là tâm của mặt cầu có bán kính $R = a$. Phương trình mặt cầu là:

$$(S): (x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = a^2. \quad (1)$$

Xét điểm $M(x; y; z)$ nằm trên mặt cầu sao cho $d(M, (Oxz)) = 2,\ d(M, (Oyz)) = 1,\ d(M, (Oxy)) = 3$.

Suy ra $M(2; 1; 3)$.

Vì M thuộc mặt cầu (S) nên từ (1) ta có:

$$\begin{aligned}&(2-a)^2 + (1-a)^2 + (3-a)^2 = a^2\\ &\Leftrightarrow a^2 - 6a + 7 = 0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 3 + \sqrt{2} = R_1 \\ a_2 = 3 - \sqrt{2} = R_2 \end{cases}.\end{aligned}$$

Vậy $R_1^2 + R_2^2 = 22$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Rút gọn tổng sau $S = \mathrm{C}_{2018}^0 - 3\mathrm{C}_{2018}^2 + 3^2\mathrm{C}_{2018}^4 - 3^3\mathrm{C}_{2018}^6 + \cdots - 3^{1009}\mathrm{C}_{2018}^{2018}$

A $S = 2^{2017}$. **B** $S = 2^{2018}$. **C** $S = -2^{2017}$. **D** $S = -2^{2018}$.

Lời giải.

Ta có $(1+x)^{2018} = \mathrm{C}_{2018}^0 + \mathrm{C}_{2018}^1 x + \mathrm{C}_{2018}^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2018}^{2018} x^{2018}$ (1).

Mặt khác $(1-x)^{2018} = \mathrm{C}_{2018}^0 - \mathrm{C}_{2018}^1 x + \mathrm{C}_{2018}^2 x^2 - \cdots + \mathrm{C}_{2018}^{2018} x^{2018}$ (2).

Cộng (1) và (2) ta được:

$$(1+x)^{2018} + (1-x)^{2018} = 2\left(\mathrm{C}_{2018}^0 + \mathrm{C}_{2018}^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2018}^{2018} x^{2018}\right) \quad (3).$$

Thay $x = i\sqrt{3}$ vào (3) ta được:

$$(1+i\sqrt{3})^{2018} + (1-i\sqrt{3})^{2018} = 2S \quad (4).$$

Cách 1:

Mà $(1+i\sqrt{3})^3 = (1-i\sqrt{3})^3 = -8 \Rightarrow (1+i\sqrt{3})^{2016} = (1-i\sqrt{3})^{2016} = (-8)^{672}$.

Suy ra, $(1+i\sqrt{3})^{2018}+(1-i\sqrt{3})^{2018}$

$$=(-8)^{672}\left((1+i\sqrt{3})^2+(1-i\sqrt{3})^2\right)$$
$$=(-8)^{672}\times(-4)=-2^{2018} \qquad (5).$$

Từ (4) và (5) suy ra: $S=-2^{2017}$.

Cách 2:

Ta có $\begin{cases}(1+i\sqrt{3})=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\\(1-i\sqrt{3})=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1+i\sqrt{3})^{2018}=2^{2018}\left(\cos\dfrac{2018\cdot\pi}{3}+i\sin\dfrac{2018\cdot\pi}{3}\right)\\(1-i\sqrt{3})^{2018}=2^{2018}\left(\cos\dfrac{2018\cdot\pi}{3}-i\sin\dfrac{2018\cdot\pi}{3}\right)\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}(1+i\sqrt{3})^{2018}=2^{2018}\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\(1-i\sqrt{3})^{2018}=2^{2018}\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\end{cases}\qquad(5).$$

Từ (4) và (5) suy ra: $S=-\dfrac{2^{2018}}{2}=-2^{2017}$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sin 2x-\cos 2x+|\sin x+\cos x|-\sqrt{2\cos^2 x+m}-m=0$ có nghiệm thực?

A 3. **B** 9. **C** 2. **D** 5.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\sin 2x-2\cos^2 x+1+|\sin x+\cos x|-\sqrt{2\cos^2 x+m}-m=0$$
$$\Leftrightarrow 1+\sin 2x+|\sin x+\cos x|=2\cos^2 x+\sqrt{2\cos^2 x+m}+m$$
$$\Leftrightarrow |\sin x+\cos x|^2+|\sin x+\cos x|=\left(\sqrt{2\cos^2 x+m}\right)^2+\sqrt{2\cos^2 x+m}$$
$$\Leftrightarrow\left(|\sin x+\cos x|-\sqrt{2\cos^2 x+m}\right)\left(|\sin x+\cos x|+\sqrt{2\cos^2 x+m}+1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow|\sin x+\cos x|=\sqrt{2\cos^2 x+m}$$
$$\Leftrightarrow 1+\sin 2x=2\cos^2 x+m$$
$$\Leftrightarrow\sin 2x-\cos 2x=m\qquad(*).$$

Để $(*)$ có nghiệm thì $1^2+(-1)^2\ge m^2\Leftrightarrow m\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-1;0;1\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm A thuộc (C). Tiếp tuyến của (C) tại A tạo với 2 đường tiệm cận của (C) một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất là bao nhiêu?

A $2+2\sqrt{2}$. **B** $4-2\sqrt{2}$. **C** $3-\sqrt{2}$. **D** $4+2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Đồ thị (C) có tâm đối xứng $I(-1;1)$, đường tiệm cận đứng $x=-1$ và tiệm cận ngang $y=1$.

Gọi $A\left(a;\dfrac{a-3}{a+1}\right)$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại A có phương trình:

$$(d): y = \frac{4}{(a+1)^2}(x-a) + \frac{a-3}{a+1}.$$

(d) cắt tiệm cận đứng $x=-1$ tại điểm $M(-1; \frac{a-7}{a+1})$ và $IM = \left|\frac{a-7}{a+1} - 1\right| = \frac{8}{|a+1|}$.

(d) cắt tiệm cận ngang $y=1$ tại điểm $N(2a+1;1)$ và $IN = |2a+1+1| = 2|a+1|$.

Suy ra $S_{\triangle IMN} = \frac{1}{2} IM \cdot IN = 8$.

Khi đó bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle IMN$ là $r = \frac{2 \times S_{\triangle IMN}}{IM+IN+MN}$ (1).

Mà $IM+IN+MN = IM+IN+\sqrt{IM^2+IN^2} \geq 2\sqrt{IM \cdot IN} + \sqrt{2IM \cdot IN} = 2\sqrt{16}+\sqrt{32}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $r \leq \frac{2 \times 8}{8+4\sqrt{2}} = 4 - 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

——— HẾT ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. C	3. A	4. C	5. C	6. A	7. C	8. C	9. D	10. D
11. A	12. B	13. D	14. C	15. D	16. A	17. C	18. B	19. D	20. B
21. B	22. A	23. D	24. D	25. D	26. D	27. B	28. C	29. A	30. A
31. C	32. D	33. A	34. D	35. D	36. D	37. C	38. C	39. C	40. D
41. A	42. B	43. B	44. C	45. A	46. A	47. A	48. C	49. A	50. B

155 ĐỀ THI THỬ - TRƯỜNG THPT CHUYÊN TIỀN GIANG - LẦN 1 - 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $3x - z + 1 = 0$. Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) có tọa độ là

A $(3; 0; -1)$. **B** $(3; -1; 1)$. **C** $(3; -1; 0)$. **D** $(-3; 1; 1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; 0; -1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SB = a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A $V = a^3\sqrt{2}$. **B** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

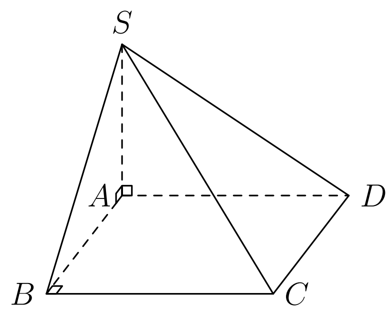
Lời giải.

Tam giác SAB vuông tại A nên

$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$V = \dfrac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.



Chọn đáp án C □

Câu 3. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Tọa độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là

A $(-2; 0)$. **B** $(-1; 4)$. **C** $(0; 1)$. **D** $(1; 0)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

$y'' = 6x \Rightarrow y''(1) = 6 > 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1 \Rightarrow y_{\text{CT}} = y(1) = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{5}}$ là

A $(1; +\infty)$. **B** $[1; +\infty)$. **C** $(0; +\infty)$. **D** $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Lời giải.

Vì $\dfrac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$ nên hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{5}}$ xác định khi và chỉ khi $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Tìm tọa độ điểm biểu diễn của số phức $z = \dfrac{(2-3i)(4-i)}{3+2i}$ trên mặt phẳng Oxy.

A $(-1; -4)$. **B** $(1; 4)$. **C** $(1; -4)$. **D** $(-1; 4)$.

Lời giải.

Ta có $z=\dfrac{(2-3i)(4-i)}{3+2i}=\dfrac{5-14i}{3+2i}=\dfrac{(5-14i)(3-2i)}{13}=\dfrac{-13-52i}{13}=-1-4i$.
Do đó điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng Oxy có tọa độ $(-1;-4)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Số tập hợp con có 3 phần tử của một tập hợp có 7 phần tử là

(A) A_7^3. **(B)** C_7^3. (C) 7. (D) $\dfrac{7!}{3!}$.

Lời giải.
Mỗi tập hợp con chứa 3 phần tử của một tập hợp có 7 phần tử là một tổ hợp chập 3 của 7 phần tử. Do đó số tập con chứa 3 phần tử của tập hợp chứa 7 phần tử là C_7^3.
Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Tìm đạo hàm y' của hàm số $y=\sin x+\cos x$.

(A) $y'=2\cos x$. (B) $y'=2\sin x$. (C) $y'=\sin x-\cos x$. **(D)** $y'=\cos x-\sin x$.

Lời giải.
Ta có $y'=(\sin x+\cos x)'=\cos x-\sin x$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Một hình nón tròn xoay có đường cao h, bán kính đáy r và đường sinh l. Biểu thức nào sau đây dùng để tính diện tích xung quanh của hình nón?

(A) $S_{xq}=\pi rl$. (B) $S_{xq}=2\pi rl$. (C) $S_{xq}=\pi rh$. (D) $S_{xq}=2\pi rh$.

Lời giải.
Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq}=\pi rl$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

(A) $\displaystyle\int[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x+\int g(x)\,\mathrm{d}x$.

(B) $\displaystyle\int[f(x)\cdot g(x)]\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int g(x)\,\mathrm{d}x$.

(C) $\displaystyle\int[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x-\int g(x)\,\mathrm{d}x$.

(D) $\displaystyle\int kf(x)\,\mathrm{d}x=k\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.
Ta có $\displaystyle\int(2\cdot x)\,\mathrm{d}x=x^2+C$, còn $\displaystyle\int 2\,\mathrm{d}x\cdot\int x\,\mathrm{d}x=2x\cdot\frac{x^2}{2}+C$ nên $\displaystyle\int(2\cdot x)\,\mathrm{d}x\neq\int 2\,\mathrm{d}x\cdot\int x\,\mathrm{d}x$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Phương trình nào dưới đây có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình $\sin x=0$?

(A) $\cos x=-1$. (B) $\cos x=1$. **(C)** $\tan x=0$. (D) $\cot x=1$.

Lời giải.
$\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.
$\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.
$\cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.
$\tan x=0\Leftrightarrow x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Tìm hàm số $F(x)$ biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x}$ và $F(1)=1$.

(A) $F(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$.
(B) $F(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+\dfrac{1}{3}$.
(C) $F(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2}$.
(D) $F(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}-\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Xét $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x$ và $\mathrm{d}x=2\,\mathrm{d}t$. Khi đó $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ trở thành $\displaystyle\int t\cdot 2t\,\mathrm{d}t=\dfrac{2}{3}t^3+C$.

Như vậy $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C\Rightarrow F(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C$.

Vì $F(1)=1$ nên $C=\dfrac{1}{3}$.

Vậy $F(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

(A) Hai đường thẳng phân biệt không chéo nhau thì cắt nhau.
(B) Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau.
(C) Hai đường thẳng phân biệt cùng nằm trong một mặt phẳng thì không chéo nhau.
(D) Hai đường thẳng phân biệt lần lượt thuộc hai mặt phẳng khác nhau thì chéo nhau.

Lời giải.

Hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng thì có ba vị trí tương đối là: song với nhau, trùng nhau và cắt nhau. Do đó hai đường thẳng phân biệt cùng nằm trong một mặt phẳng thì không chéo nhau.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Tìm phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+2}{x+1}$.

(A) $x=-1$. (B) $y=3$. (C) $y=2$. (D) $x=3$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x+2}{x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{3+\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=3\Rightarrow y=3 \text{ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{k}-\overrightarrow{i}$. Tìm tọa độ của điểm A.

(A) $(3;0;-1)$. (B) $(-1;0;3)$. (C) $(-1;3;0)$. (D) $(3;-1;0)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{k}-\overrightarrow{i}=-1\overrightarrow{i}+0\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$. Do đó tọa độ điểm $A(-1;0;3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15.

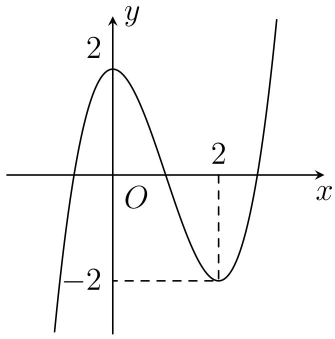
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2.

Ⓑ Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -2.

Ⓒ Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Ⓓ Hàm số có ba cực trị.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có nhận xét: hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

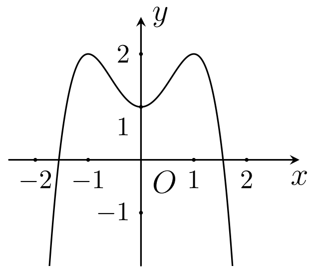
Chọn đáp án C □

Câu 16.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số bên dưới?

Ⓐ $y = -x^4 + 1$. Ⓑ $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

Ⓒ $y = -x^4 - 2x^2 + 1$. Ⓓ $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.



Lời giải.

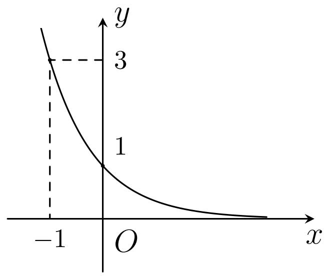
Do đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị nên các hàm số $y = -x^4 + 1$ và $y = -x^4 - 2x^2 + 1$ bị loại. Ngoài ra đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; 1)$ nên chỉ còn hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ thoả mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 17.

Đồ thị có trong hình vẽ kề bên là của hàm số nào dưới đây?

Ⓐ $y = (\sqrt{3})^x$. Ⓑ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Ⓒ $y = (\sqrt{2})^x$. Ⓓ $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số trong hình chỉ có thể là của hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên A,C bị loại.

Ngoài ra do đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1; 3)$ nên chỉ còn hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ thoả mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên tập xác định của nó?

Ⓐ $y = x^3 + x - 5$. Ⓑ $y = x^4 + 3x^2 + 4$. Ⓒ $y = x^2 + 1$. Ⓓ $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $y = x^3 + x - 5$ đồng biến trên $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Tính tổng T tất cả các nghiệm của phương trình $4 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 9 \cdot 4^x = 0$.

Ⓐ $T = 2$. Ⓑ $T = 3$. Ⓒ $T = \frac{13}{4}$. Ⓓ $T = \frac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có $4\cdot 9^x-13\cdot 6^x+9\cdot 4^x=0 \Leftrightarrow 4\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}-13\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x}+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x}=1\\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x}=\dfrac{9}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2.\end{array}\right.$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình $4\cdot 9^x-13\cdot 6^x+9\cdot 4^x=0$ bằng 2.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Tìm tập giá trị T của hàm số $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$.

A. $T=(3;5)$. B. $T=[3;5]$. C. $T=\left[\sqrt{2};2\right]$. D. $T=\left[0;\sqrt{2}\right]$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=[3;5]$.

Ta có $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{5-x}}$. Cho $y'=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3}=\sqrt{5-x} \Leftrightarrow x=4\in[3;5]$

Trên đoạn $[3;5]$ ta có $y(3)=\sqrt{2}$, $y(5)=\sqrt{2}$, $y(4)=2$.

Do đó $\min\limits_{\mathscr{D}} y=\sqrt{2}$, $\max\limits_{\mathscr{D}} y=2$.

Ngoài ra do hàm số liên tục trên $\mathscr{D}=[3;5]$ nên tập giá trị của hàm số là $T=[\sqrt{2};2]$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $M(1;2;3)$, $N(2;-3;1)$, $P(3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm Q sao cho $MNPQ$ là hình bình hành.

A. $Q(2;-6;4)$. B. $Q(4;-4;0)$. C. $Q(2;6;4)$. D. $Q(-4;-4;0)$.

Lời giải.

Giả sử $Q(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{PQ}=(x-3;y-1;z-2)$, $\overrightarrow{NM}=(-1;5;2)$.

$MNPQ$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \begin{cases}x-3=-1\\ y-1=5\\ z-2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=6\\ z=4\end{cases}$. Vậy $Q(2;6;4)$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x+a-1 & \text{nếu } x\le 0\\ \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & \text{nếu } x>0\end{cases}$. Tìm tất cả giá trị của a để hàm số đã cho liên tục tại điểm $x=0$.

A. $a=1$. B. $a=3$. C. $a=2$. D. $a=4$.

Lời giải.

Ta có $f(0)=a-1$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(3x+a-1)=a-1$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x}{x(\sqrt{1+2x}+1)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2}{\sqrt{1+2x}+1}=1.$

Hàm số liên tục tại $x=0 \Leftrightarrow f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow a-1=1 \Leftrightarrow a=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Hàm số $y=x^3-3x^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;1)$. B. $(-\infty;1)$. C. $(2;+\infty)$. D. $(0;2)$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a. Một mặt phẳng đi qua các tâm của hai đáy và cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông. Thể tích của hình trụ bằng

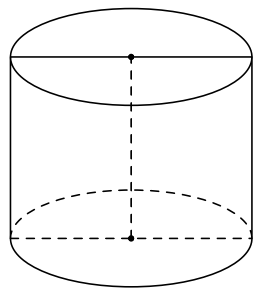
(A) $2a^3$. (B) πa^3. (C) $2\pi a^3$. (D) $\dfrac{2\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Bán kính đáy của hình trụ là: $r = a$.

Chiều cao của hình trụ là: $h = 2r = 2a$.

Vậy thể tích của hình trụ là: $V = \pi r^2 h = \pi a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3$.



Chọn đáp án C □

Câu 25. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 = -15$, $u_{20} = 60$. Tổng S_{20} của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là

(A) $S_{20} = 600$. (B) $S_{20} = 60$. (C) $S_{20} = 250$. (D) $S_{20} = 500$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_5 = -15 \\ u_{20} = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = -15 \\ u_1 + 19d = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -35 \\ d = 5 \end{cases}$ (d là công sai của cấp số cộng).

$\Rightarrow S_{20} = 20u_1 + \dfrac{20 \cdot 19}{2} d = 20(-35) + \dfrac{20 \cdot 19}{2} \cdot 5 = 250$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int_0^2 x f(x^2)\,\mathrm{d}x = 2$. Hãy tính $I = \displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = 2$. (B) $I = 1$. (C) $I = \dfrac{1}{2}$. (D) $I = 4$.

Lời giải.

Xét tích phân $\displaystyle\int_0^2 x f(x^2)\,\mathrm{d}x = 2$. Đặt $x^2 = t \Rightarrow x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x = 0$ thì $t = 0$; $x = 2$ thì $t = 4$.

Do đó $\displaystyle\int\limits_0^2 xf(x^2)\,\mathrm{d}x = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = 2 \Leftrightarrow \int\limits_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = 4 \Rightarrow \int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ hay $I = 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) qua ba điểm A, B, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;3;-5)$ lên các trục toạ độ $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$.

A $15x - 10y - 6z - 30 = 0$. B $15x - 10y - 6z + 30 = 0$.
C $15x + 10y - 6z + 30 = 0$. **D** $15x + 10y - 6z - 30 = 0$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;3;-5)$ lên các trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ lần lượt là $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;-5)$

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C là

$\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{-5} = 1 \Leftrightarrow 15x + 10y - 6z - 30 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 28. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 3z + 4 = 0$.

Tính $w = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + iz_1z_2$.

A $w = -\dfrac{3}{4} + 2i$. **B** $w = \dfrac{3}{4} + 2i$. C $w = 2 + \dfrac{3}{2}i$. D $w = \dfrac{3}{2} + 2i$.

Lời giải.

Phương trình $2z^2 - 3z + 4 = 0$ có 2 nghiệm phức $z_1 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{23}}{4}i$, $z_2 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{\sqrt{23}}{4}i$

Khi đó $\begin{cases} z_1 + z_2 = \dfrac{3}{2} \\ z_1z_2 = 2 \end{cases}$. Suy ra $w = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + iz_1z_2 = \dfrac{z_1 + z_2}{z_1z_2} + iz_1z_2 = \dfrac{3}{4} + 2i$.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Cho $F(x) = \dfrac{a}{x}(\ln x + b)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x^2}$, trong đó a, b là các số nguyên. Tính $S = a + b$.

A $S = -2$. **B** $S = 1$. C $S = 2$. D $S = 0$.

Lời giải.

Xét $I = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1 + \ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = 1 + \ln x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$. Khi đó

$I = -\dfrac{1}{x}(1 + \ln x) + \displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}(1 + \ln x) - \frac{1}{x} + C = -\frac{1}{x}(\ln x + 2) + C \Rightarrow a = -1; b = 2$.

Vậy $S = a + b = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Trong mặt phẳng Oxy, cho véc-tơ $\vec{v} = (3;3)$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$ là đường tròn nào dưới đây?

A $(C'): (x-4)^2 + (y-1)^2 = 4$. **B** $(C'): (x-4)^2 + (y-1)^2 = 9$.
C $(C'): (x+4)^2 + (y+1)^2 = 9$. D $(C'): x^2 + y^2 + 8x + 2y - 4 = 0$.

Lời giải.

Ta có $(C): x^2+y^2-2x+4y-4=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=9$.

Vậy đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R=3$.

Gọi $I'(x';y')=\mathrm{T}_{\vec{v}}(I)$, khi đó ta có $\begin{cases} x'=1+3 \\ y'=-2+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=4 \\ y'=1 \end{cases}$ hay $I(4;1)$.

Do phép tịnh tiến biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính nên phương trình đường tròn (C') là: $(x-4)^2+(y-1)^2=9$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc. Hãy chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Ba mặt phẳng (ABC), (ABD), (ACD) đôi một vuông góc với nhau.

B. Tam giác BCD là tam giác vuông.

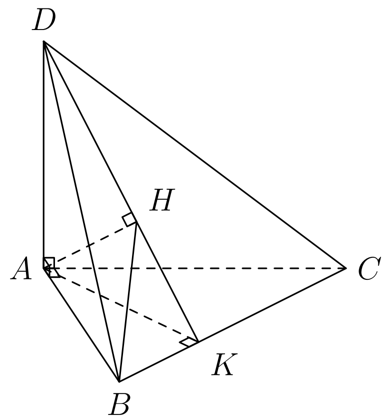
C. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (BCD) là trực tâm của tam giác BCD.

D. Các cặp cạnh đối diện của tứ diện đều vuông góc với nhau.

Lời giải.

(1). Ta có $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp AC \end{cases} \Rightarrow AD \perp (ABC) \Rightarrow (ABD) \perp (ABC)$ (do $DA \subset (ABD)$).

Tương tự $(ACD) \perp (ABC)$, $(ACD) \perp (ABD)$.



(2). Nếu $\triangle BCD$ vuông, chẳng hạn $BC \perp BD$

Mà $BC \perp DA$ thế thì $BC \perp (ABD) \Rightarrow BC \perp AB$

$\Rightarrow \triangle ABC$ có 2 góc vuông là góc $\widehat{A}=90^\circ$ và $\widehat{B}=90^\circ$ (vô lý).

Vậy $\triangle BCD$ vuông là sai.

(3). Kẻ $AH \perp (ABC)$ tại $H \Rightarrow AH \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp AD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp DH(1)$

Từ $\begin{cases} BA \perp AC \\ BA \perp AD \end{cases} \Rightarrow BA \perp (ACD) \Rightarrow BA \perp CD \Rightarrow CD \perp AB$.

Từ $AH \perp (ABC) \Rightarrow AH \perp CD$, từ $\begin{cases} CD \perp AB \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp BH(2)$

Từ (1) và (2) ta được H là trực tâm của $\triangle ABC$.

(4). Từ $\begin{cases} BA \perp AC \\ BA \perp AD \end{cases} \Rightarrow BA \perp (ACD) \Rightarrow BA \perp CD$.

Từ $DA \perp (ABC) \Rightarrow DA \perp BC$.

Vậy các cặp cạnh đối diện của tứ diện đều vuông góc nhau.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+1=0$. Phương trình của mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$.

B. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$.

C. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$.

D. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=36$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có bán kính $R = \mathrm{d}(A;(P)) = \dfrac{|2.2-1+2.1+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = 2$ và tâm $A(2;1;1)$

$\Rightarrow (S): (x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 4.$

Chọn đáp án C □

Câu 33. Cho số phức $z = a+bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $z+1+3i-|z|i = 0$. Tính $S = a+3b$.

A. $S = \dfrac{7}{3}$. B. $S = -5$. C. $S = 5$. D. $S = -\dfrac{7}{3}$.

Lời giải.

Ta có $z+1+3i-|z|i = 0 \Leftrightarrow a+bi+1+3i-i\sqrt{a^2+b^2} = 0$

$\Leftrightarrow a+1+(b+3-\sqrt{a^2+b^2})i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+1=0 \\ b+3 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ \begin{cases} b \geq -3 \\ (b+3)^2 = 1+b^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b = -\dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow S = -5.$

Chọn đáp án B □

Câu 34. Tìm số giao điểm n của đồ thị hàm số $y = x^2|x^2-3|$ và đường thẳng $y = 2$.

A. $n = 8$. B. $n = 2$. C. $n = 6$. D. $n = 4$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2|x^2-3| = 2$ (1)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 \geq 3 \\ x^2(x^2-3) = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 < 3 \\ x^2(3-x^2) = 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}} \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right. .$

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2|x^2-3|$ và đường thẳng $y = 2$ chính là số nghiệm của phương trình (1).

Do đó $n = 6$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

A. $-2 < m < -1$. B. $-2 < m < 2$. C. $-2 \leq m \leq 1$. D. $-2 < m \leq -1$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên $(-\infty;1) \Leftrightarrow y' = \dfrac{m^2-4}{(x+m)^2} < 0,\ \forall x \in (-\infty;1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4 < 0 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1.$

Chọn đáp án D □

Câu 36. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $4(\log_2\sqrt{x})^2+\log_2 x+m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi giá trị $x \in (1;64)$.

A. $m \leq 0$. B. $m \geq 0$. C. $m < 0$. D. $m > 0$.

Lời giải.

Ta có $4(\log_2\sqrt{x})^2+\log_2 x+m\geq 0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2+\log_2 x+m\geq 0$.

Đặt $\log_2 x = t$, khi $x\in(1;64)$ thì $t\in(0;6)$.

Khi đó, ta có $t^2+t+m\geq 0 \Leftrightarrow m\geq -t^2-t$ (*).

Xét hàm số $f(t)=-t^2-t$ với $t\in(0;6)$.

Ta có $f'(t)=-2t-1<0, \forall t\in(0;6)$.

Ta có bảng biến thiên:

t	0		6
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	0	$\searrow$	-42

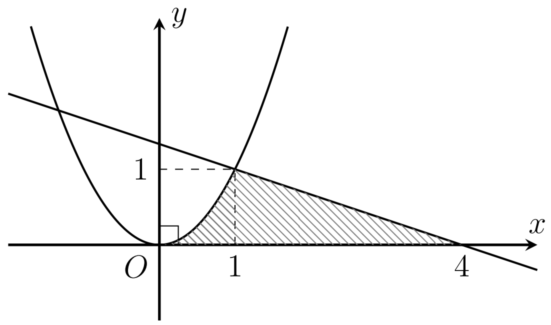
Bất phương trình đã cho đúng với mọi $x\in(1;64)$ khi và chỉ khi bất phương trình $(*)$ đúng với mọi $t\in(0;6) \Leftrightarrow m\geq 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}$ và trục hoành.

A $\dfrac{11}{6}$. B $\dfrac{61}{3}$. C $\dfrac{343}{162}$. D $\dfrac{39}{2}$.

Lời giải.



Phương trình hoành độ giao điểm của các đường $y=x^2$, $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}$ là

$$x^2=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3} \Leftrightarrow 3x^2+x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{4}{3}\end{array}\right..$$

Hoành độ giao điểm của đường thẳng $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}$ với trục hoành là $x=4$.

Hoành độ giao điểm của parabol $y=x^2$ với trục hoành là $x=0$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x+\int_1^4\left(-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}\right)\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1+\left.\left(-\frac{1}{6}x^2+\frac{4}{3}x\right)\right|_1^4=\frac{11}{6}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;0)$; $B(0;3;0)$; $C(0;0;4)$. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Tìm phương trình tham số của đường thẳng OH.

(A) $\begin{cases} x = 4t \\ y = 3t \\ z = -2t \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x = 3t \\ y = 4t \\ z = 2t \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x = 6t \\ y = 4t \\ z = 3t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = 4t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$.

Lời giải.

Do tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và H là trực tâm tam giác ABC nên $OH \perp (ABC)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{4} = 1$ hay $6x + 4y + 3z - 12 = 0$.

Vì $OH \perp (ABC)$ nên đường thẳng OH có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (6; 4; 3)$.

Vậy, phương trình tham số của đường thẳng OH là: $\begin{cases} x = 6t \\ y = 4t \\ z = 3t \end{cases}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Một sinh viên muốn mua một cái laptop có giá 12,5 triệu đồng nên mỗi tháng gửi tiết kiệm vào ngân hàng 750.000 đồng theo hình thức lãi suất kép với lãi suất 0,72% một tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng sinh viên đó có thể dùng số tiền gửi tiết kiệm để mua được laptop?

(A) 16 tháng. (B) 14 tháng. (C) 15 tháng. (D) 17 tháng.

Lời giải.

Đặt $A = 0{,}75$ (triệu đồng).

Số tiền gửi tiết kiệm của sinh viên đó sau n tháng là

$T = A \cdot 1{,}0072^n + A \cdot 1{,}0072^{n-1} + A \cdot 1{,}0072^{n-2} + \cdots + A \cdot 1{,}0072$

$T = A \cdot (1{,}0072^n + 1{,}0072^{n-1} + 1{,}0072^{n-2} + \cdots + 1{,}0072)$

$T = A \cdot \dfrac{1{,}0072 \cdot (1 - 1{,}0072^n)}{1 - 1{,}0072}$

Để sinh viên đó mua được một cái laptop có giá 12,5 triệu đồng thì

$T = 0{,}75 \cdot \dfrac{1{,}0072 \cdot (1 - 1{,}0072^n)}{1 - 1{,}0072} \geq 12{,}5 \Leftrightarrow 1 - 1{,}0072^n \leq -0{,}12$

$\Leftrightarrow 1{,}0072^n \geq 1{,}12 \Leftrightarrow n \geq \log_{1{,}0072} 1{,}12 \approx 15{,}8$.

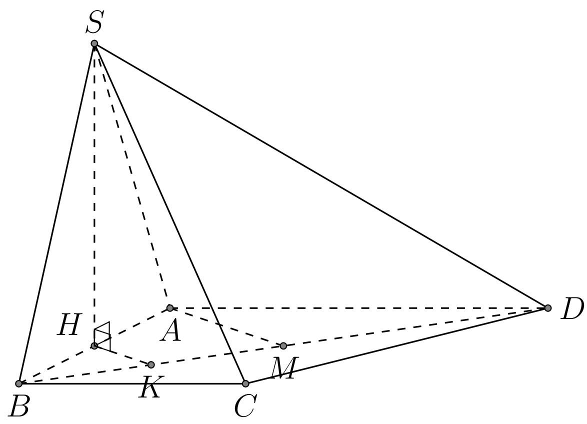
Như vậy, phải ít nhất 16 tháng tháng sinh viên đó có thể dùng số tiền gửi tiết kiệm để mua được laptop.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy $(ABCD)$ trùng với trung điểm AB. Biết $AB = a$, $BC = 2a$, $BD = a\sqrt{10}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng đáy là 60°. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

(A) $V = \dfrac{3\sqrt{30}a^3}{8}$. (B) $V = \dfrac{\sqrt{30}a^3}{4}$. (C) $V = \dfrac{\sqrt{30}a^3}{12}$. (D) $V = \dfrac{\sqrt{30}a^3}{8}$.

Lời giải.



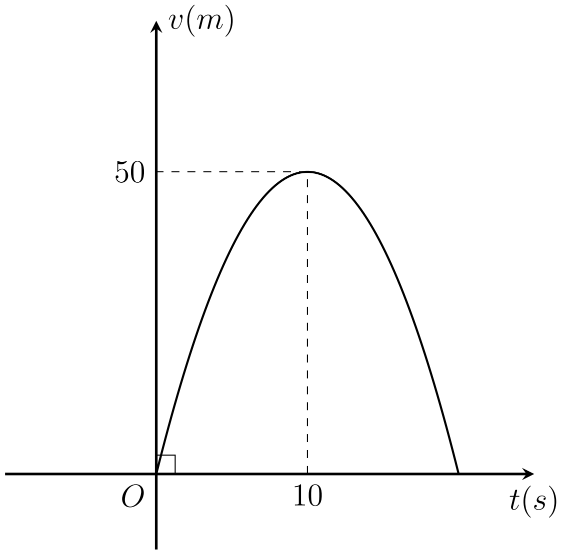
Ta có $AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = 3a$.
Gọi H là trung điểm AB thì $SH \perp (ABCD)$, kẻ $HK \perp BD$ (với $K \in BD$), ta có $\widehat{SKH}$ là góc giữa (SBD) và $(ABCD)$, do đó $\widehat{SKH} = 60°$.
Gọi AM là đường cao của tam giác vuông ABD.
Khi đó, ta có:
$AM = \dfrac{AB \cdot AD}{BD} = \dfrac{a \cdot 3a}{a\sqrt{10}} = \dfrac{3a}{\sqrt{10}}$, suy ra $HK = \dfrac{AM}{2} = \dfrac{3a}{2\sqrt{10}}$.

Do đó: $SH = HK \tan \widehat{SKH} = \dfrac{3a}{2\sqrt{10}} \cdot \tan 60° = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}$.

Vậy nên $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}(AD + BC) \cdot AB \cdot SH = \dfrac{1}{6}(3a + 2a) \cdot a \cdot \dfrac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{30}a^3}{8}$.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu phóng nhanh với vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol có hình bên dưới.



Biết rằng sau 10 s thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 50 m/s và bắt đầu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì xe đã đi được quãng đường bao nhiêu mét?

A $\dfrac{1000}{3}$ m. B $\dfrac{1100}{3}$ m. C $\dfrac{1400}{3}$ m. D 300 m.

Lời giải.

Quãng đường xe đi được chính bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và trục Ox.
Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$. Do (P) qua gốc tọa độ nên $c = 0$.

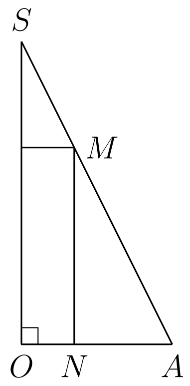
Đỉnh (P) là $I(10; 50)$ nên $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 10 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -20a \\ b^2 = -200a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 10 \\ a = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Ta có $\displaystyle\int_0^{10} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 10x\right) \mathrm{d}x = \frac{1000}{3}$.

Vậy quãng đường xe đi được bằng $\dfrac{1000}{3}$ m.

Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Cho tam giác SOA vuông tại O có $MN \parallel SO$ với M, N lần lượt nằm trên cạnh SA, OA như hình vẽ bên dưới. Đặt $SO = h$ (không đổi). Khi quay hình vẽ quanh SO thì tạo thành một hình trụ nội tiếp hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O bán kính $R = OA$. Tìm độ dài của MN theo h để thể tích khối trụ là lớn nhất.



(A) $MN = \dfrac{h}{2}$. (B) $MN = \dfrac{h}{3}$. (C) $MN = \dfrac{h}{4}$. (D) $MN = \dfrac{h}{6}$.

Lời giải.

Đặt $MN = x, (x > 0)$ và $OA = a, (a > 0)$, a là hằng số.

Ta có $\dfrac{MN}{SO} = \dfrac{NA}{OA} \Rightarrow NA = \dfrac{MN \cdot OA}{SO} \Rightarrow NA = \dfrac{xa}{h} \Rightarrow ON = a - \dfrac{xa}{h}$.

Khối trụ thu được có bán kính đáy bằng ON và chiều cao bằng MN.

Thể tích khối trụ là $V = \pi \cdot ON^2 \cdot MN = \pi \cdot x \cdot a^2 \left(\dfrac{h-x}{h}\right)^2 = \pi a^2 \dfrac{1}{2h^2} 2x(h-x)^2 \le \dfrac{\pi a^2}{2h^2}\left(\dfrac{2h}{3}\right)^3$.

Dấu bằng xảy ra khi $2x = h - x \Leftrightarrow x = \dfrac{h}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Biết số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $T = |z+2|^2 - |z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|z|$.

(A) $|z| = \sqrt{33}$. (B) $|z| = 50$. (C) $|z| = \sqrt{10}$. (D) $|z| = 5\sqrt{2}$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$, theo giả thiết $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$ (C).

Ngoài ra $T = |z+2|^2 - |z-i|^2 \Leftrightarrow 4x + 2y + 3 - T = 0$ (Δ) đạt giá trị lớn nhất.

Rõ ràng (C) và (Δ) có điểm chung do đó $\dfrac{|23 + T|}{2\sqrt{5}} \le \sqrt{5} \Leftrightarrow 13 \le T \le 33$.

Vì T đạt giá trị lớn nhất nên $T = 33$ suy ra $4x + 2y - 30 = 0 \Leftrightarrow y = 15 - 2x$ thay vào (C) ta được $5x^2 - 50x + 125 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \Rightarrow y = 5$. Vậy $|z| = 5\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số được lập từ tập hợp $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ S. Tính xác suất để số chọn được là số chia hết cho 6.

(A) $\dfrac{4}{27}$. (B) $\dfrac{9}{28}$. (C) $\dfrac{1}{9}$. (D) $\dfrac{4}{9}$.

Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu là: $n(\Omega) = 9^4$. Gọi A: "số chia hết cho 6".
Giả sử dạng của mỗi số cần tìm là: $\overline{abcd}$. Chọn $d \in \{2; 4; 6; 8\}$ có 4 cách.
Chọn a, b có 9^2 cách. Để chọn c ta xét tổng $S = a + b + d$:
Nếu S chia cho 3 dư 0 thì $c \in \{3; 6; 9\}$ suy ra có 3 cách.
Nếu S chia cho 3 dư 1 thì $c \in \{2; 5; 8\}$ suy ra có 3 cách.
Nếu S chia cho 3 dư 2 thì $c \in \{1; 4; 7\}$ suy ra có 3 cách.
Do đó $n(A) = 4 \cdot 9^2 \cdot 3 = 972$. Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{972}{9^4} = \dfrac{4}{27}$.
Chọn đáp án A □

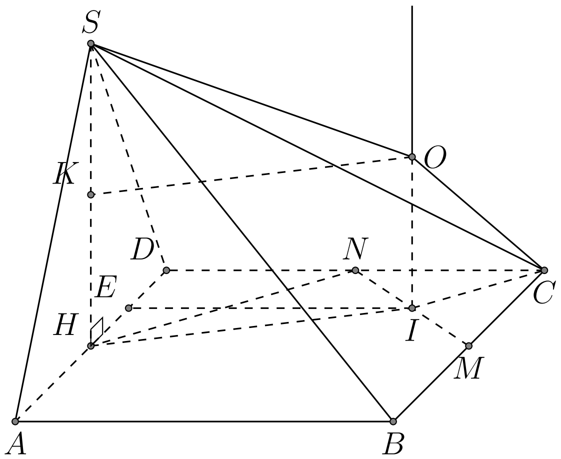
Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Tính bán kính R của khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CMN$.

A $R = \dfrac{a\sqrt{29}}{8}$. **B** $R = \dfrac{a\sqrt{93}}{12}$. **C** $R = \dfrac{a\sqrt{37}}{6}$. **D** $R = \dfrac{5a\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.

Gọi:
- H là trung điểm của $AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
- I là trung điểm của $MN \Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN.
- d là đường thẳng qua I và vuông góc với mặt đáy.
- E là hình chiếu của I lên AD.
- O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CMN$.
- K là hình chiếu của O lên SH.

Đặt $OI = x$.

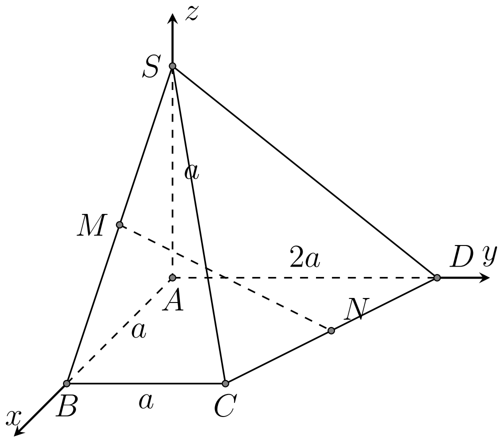


Ta có: $CI = \dfrac{1}{2}MN = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$; $OC = \sqrt{IC^2 + IO^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{8} + x^2}$;
$KO = HI = \sqrt{IE^2 + EH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{3a}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{4}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$;
$SO = \sqrt{SK^2 + KO^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2} - x\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{10}}{4}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \sqrt{3}ax + \dfrac{22a^2}{16}}$.
Vì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CMN$ nên $SO = OC$
Suy ra: $\sqrt{\dfrac{a^2}{8} + x^2} = \sqrt{x^2 - \sqrt{3}ax + \dfrac{22a^2}{16}} \Leftrightarrow \sqrt{3}ax = \dfrac{5}{4}a^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{5\sqrt{3}a}{12}$.
Vậy $R = OC = \sqrt{\dfrac{a^2}{8} + \dfrac{25a^2}{48}} = \dfrac{\sqrt{93}}{12}a$.
Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD. Tính cosin của góc giữa MN và (SAC).

A $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B** $\dfrac{\sqrt{55}}{10}$. **C** $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$. **D** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.



Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ, với $O \equiv A$.
Khi đó ta có: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;2a;0)$, $S(0;0;a)$.
Khi đó: $M\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right)$, $N\left(\frac{a}{2};\frac{3a}{2};0\right)$.
Ta có: $-\frac{1}{a}\overrightarrow{SA}=(0;0;1)=\overrightarrow{u}$; $\frac{1}{a}\overrightarrow{SC}=(1;1;-1)=\overrightarrow{v}$.
Gọi $\overrightarrow{n}$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAC) ta có $\overrightarrow{n}=[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]=(-1;-1;0)$.
Lại có: $\frac{2}{a}\overrightarrow{MN}=(0;3;-1)=\overrightarrow{w}$.
Gọi α là góc giữa MN và (SAC) ta có: $\sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{n}.\overrightarrow{w}|}{|\overrightarrow{n}|.|\overrightarrow{w}|}=\frac{3}{2\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{55}}{10}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Phương trình $2\log_3(\cot x)=\log_2(\cos x)$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0;2018\pi)$?

(A) 2018 nghiệm. (B) 1008 nghiệm. (C) 2017 nghiệm. **D** 1009 nghiệm.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases}\sin x>0\\ \cos x>0\end{cases}$.

$2\log_3(\cot x)=\log_2(\cos x)\Leftrightarrow \log_3(\cot x)^2=\log_2(\cos x)$
$\Leftrightarrow \log_3\cos^2 x-\log_3\sin^2 x=\log_2(\cos x)$
$\Leftrightarrow \log_3\cos^2 x-\log_3(1-\cos^2 x)=\log_2(\cos x)$.
Đặt $t=\log_2\cos x\Rightarrow \cos x=2^t$.
Phương trình trở thành $\Leftrightarrow \log_3\frac{2^{2t}}{1-2^{2t}}=t\Leftrightarrow 4^t=3^t-12^t$ hay $\left(\frac{4}{3}\right)^t+4^t=1$.
Hàm số $f(t)=\left(\frac{4}{3}\right)^t+4^t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Mặt khác $f(-1)=1$ nên $t=-1$ là nghiệm của phương trình.
Do đó phương trình có nghiệm duy nhất $t=-1$.
$\log_2\cos x=-1\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.
So với điều kiện $\sin x>0$ ta chỉ nhận $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.
Như vậy $x\in(0;2018\pi)\Leftrightarrow 0<\frac{\pi}{3}+k2\pi<2018\pi\Leftrightarrow -\frac{1}{6}<k<\frac{6053}{6}\ (k\in\mathbb{Z})$.
Vậy trong khoảng $(0;2018\pi)$ có 1009 nghiệm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\sin^4 x+\cos^4 x+\cos^2 4x=m$ có bốn nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$.

(A) $m\le\frac{47}{64}$ hoặc $m\ge\frac{3}{2}$. (B) $\frac{47}{64}<m<\frac{3}{2}$.
C $\frac{47}{64}<m\le\frac{3}{2}$. (D) $\frac{47}{64}\le m\le\frac{3}{2}$.

Lời giải.

$\sin^4 x + \cos^4 x + \cos^2 4x = m \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 4x = m.$
$\Leftrightarrow 1 - \dfrac{\sin^2 2x}{2} + \cos^2 4x = m \Leftrightarrow \dfrac{3}{4} + \dfrac{\cos 4x}{4} + \cos^2 4x = m.$
Đặt $t = \cos 4x$ thì $t \in [-1; 1]$. Ngoài ra với mỗi $t \in [-1; 1)$, phương trình $\cos 4x = t$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$. Còn với $t = 1$, phương trình $\cos 4x = t$ có nghiệm duy nhất trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$.
Phương trình trở thành $\dfrac{3}{4} + \dfrac{t}{4} + t^2 = m$.
Xét hàm số $f(t) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{t}{4} + t^2, t \in [-1; 1]$.
$f'(t) = 2t + \dfrac{1}{4}0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{8}$
$f\left(-\dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{47}{64}$, $f(-1) = \dfrac{3}{2}$, $f(1) = 2$.

t	-1		$-\frac{1}{8}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$\frac{47}{64}$	$\nearrow$	2

Phương trình $\sin^4 x + \cos^4 x + \cos^2 4x = m$ có bốn nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$.
Khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc nửa khoảng $[-1; 1)$.
$\Leftrightarrow \dfrac{47}{64} < m \leq \dfrac{3}{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 49. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua D. Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối chứa điểm A có thể tích V. Tính V.

A $\dfrac{11\sqrt{2}a^3}{216}$. **B** $\dfrac{7\sqrt{2}a^3}{216}$. **C** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{18}$. **D** $\dfrac{13\sqrt{2}a^3}{216}$.

Lời giải.

Gọi $V_{ABCD} = V_1$

$V_{ACMNPQ} = V_{E.ACMN} - V_{E.ACPQ}$

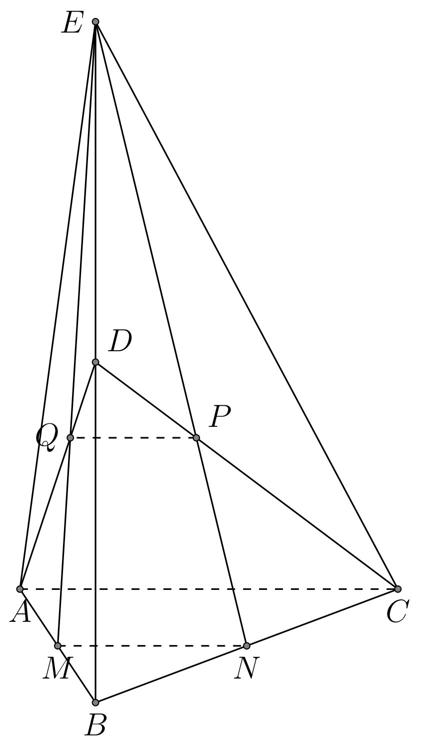
$V_{E.ACMN} = \frac{1}{3}\mathrm{d}(E,(ABC)) \cdot S_{AMNC} = \frac{1}{3}\mathrm{d}(E,(ABC)) \cdot \frac{3}{4}S_{ABC} = \frac{1}{3}\mathrm{d}(D,(ABC)) \cdot \frac{3}{4}S_{ABC} = \frac{3V_1}{2}$

$V_{E.ACPQ} = \frac{1}{3}\mathrm{d}(B,(ACD)) \cdot (S_{ACD} - S_{QPD}) = \frac{1}{3}\mathrm{d}(B,(ACD)) \cdot \frac{8}{9}S_{ACD} = \frac{8}{9}V_1$

$V_{ACMNPQ} = \frac{3V_1}{2} - \frac{8}{9}V_1 = \frac{11}{18}V_1.$

Áp dụng công thức giải nhanh thể tích tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a có $V_1 = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Vậy $V = \frac{11}{18}V_1 = \frac{11}{18} \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$.



Chọn đáp án A □

Câu 50.

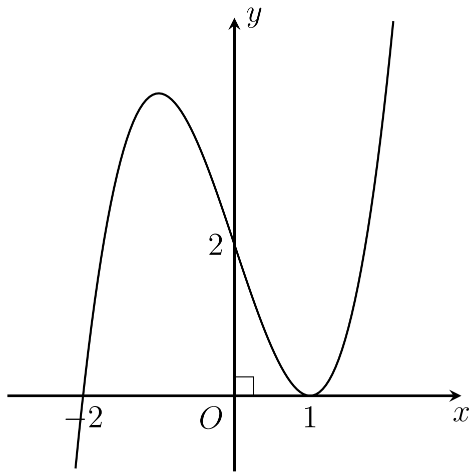
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ($y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$). Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 3)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-1; 0)$.

B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(1; 2)$.

D. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.



Lời giải.

$g'(x) = [f(x^2 - 3)]' = (x^2 - 3)'f'(x^2 - 3) = 2xf'(x^2 - 3)$.

Theo đồ thị ta có $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -2$ suy ra $f'(x^2 - 3) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 < -2 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \end{array}\right. \Rightarrow f'(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3 = -2 \\ x^2 - 3 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm 2. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$2x$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x^2-3)$		$+$	0	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘		↘		↗		↘		↗		↗	$+\infty$

<u>Cách 2</u>

Với $g(x) = f(x^2-3)$ ta có $g'(x) = [f(x^2-3)]' = (x^2-3)'f'(x^2-3) = 2xf'(x^2-3)$.

$$g'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow 2x \cdot f'(x^2-3) \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x \geqslant 0\\ f'(x^2-3) \leqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}2x \leqslant 0\\ f'(x^2-3) \geqslant 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 0\\ \left[\begin{array}{l}x^2-3 \leqslant -2\\ x^2-3 = 1\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x \leqslant 0\\ x^2-3 \geqslant -2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0 \leqslant x \leqslant 1\\ x = 2\\ x \leqslant -1.\end{array}\right.$$

Do $g'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1 < x < 0\\ 1 < x \neq 2\end{array}\right.$

Như vậy $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$

$g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án C $\square$

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. C	3. D	4. A	5. A	6. B	7. D	8. A	9. B	10. C
11. B	12. C	13. B	14. B	15. C	16. B	17. D	18. A	19. A	20. C
21. C	22. C	23. D	24. C	25. C	26. D	27. D	28. B	29. B	30. B
31. B	32. C	33. B	34. C	35. D	36. B	37. A	38. C	39. A	40. D
41. A	42. B	43. D	44. A	45. B	46. B	47. D	48. C	49. A	50. C

156 ĐỀ THI THỬ THPT QG LẦN 2, 2017 - 2018 TRƯỜNG THPT MINH CHÂU, HƯNG YÊN

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Bất phương trình $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{x-1} \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2x+3}$ có nghiệm là

Ⓐ $x > -4$. **B** $x \geq -4$. Ⓒ $x \leq -4$. Ⓓ $x < -4$.

Lời giải.

Vì $\frac{\pi}{2} > 1$ nên bất phương trình tương đương $x - 1 \leq 2x + 3 \Leftrightarrow x \geq -4$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \backslash \{1\}$.

Ⓑ Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

Ⓒ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

D Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Vì $y' = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$, $\forall x \neq 1$ nên hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P): $6x - 3y + 2z - 6 = 0$. Tính khoảng cách d từ điểm $M(1; -2; 3)$ đến mặt phẳng (P).

Ⓐ $d = \frac{12\sqrt{85}}{85}$. **B** $d = \frac{12}{7}$. Ⓒ $d = \frac{\sqrt{31}}{7}$. Ⓓ $d = \frac{18}{7}$.

Lời giải.

$$\mathrm{d}(M, (P)) = \frac{|6 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 - 6|}{\sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{12}{7}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 4. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x^2 - 4x + 3) = \log_2(4x - 4)$.

A $S = \{7\}$. Ⓑ $S = \{3; 7\}$. Ⓒ $S = \{1; 7\}$. Ⓓ $S = \{1\}$.

Lời giải.

$$\log_2(x^2 - 4x + 3) = \log_2(4x - 4) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 4x - 4 \\ 4x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 7 = 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 7.$$

Chọn đáp án A □

Câu 5. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^n$ với $x > 0$, biết rằng $\mathrm{C}_n^2 - \mathrm{C}_n^1 = 44$.

A 165. Ⓑ 485. Ⓒ 238. Ⓓ 525.

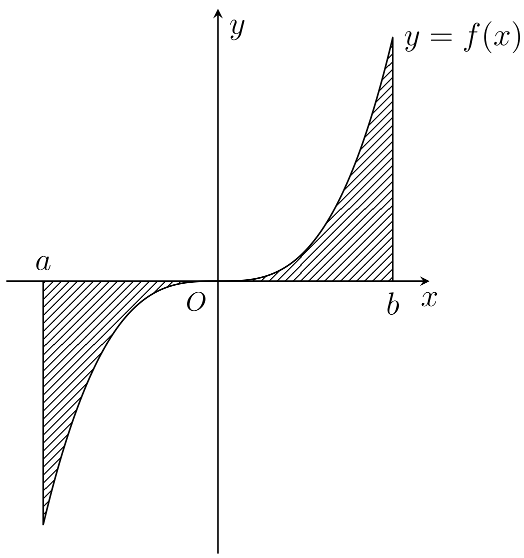
Lời giải.

$\mathrm{C}_n^2 - \mathrm{C}_n^1 = 44 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 44 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 88 = 0 \Leftrightarrow n = 11$ hoặc $n = -8$ (loại).

Với $n = 11$, số hạng thứ $(k+1)$ trong khai triển của $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^{11}$ là $\mathrm{C}_{11}^k x^{\frac{33}{2} - \frac{11}{2}k}$.

Theo giả thiết $\dfrac{33}{2} - \dfrac{11}{2}k = 0$ hay $k = 3$.
Vậy số hạng không chứa x trong khai triển đã cho là $C_{11}^{3} = 165$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 6.
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C): $y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a, x = b$ (như hình vẽ bên). Giả sử S_D là diện tích của hình phẳng D. Chọn công thức đúng trong các phương án A, B, C, D dưới đây?



(A) $S_D = -\int\limits_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(B) $S_D = \int\limits_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C $S_D = -\int\limits_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(D) $S_D = -\int\limits_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.
Dựa trên đồ thị ta thấy:
- Đồ thị cắt trục hoành tại $O(0; 0)$.
- Trên đoạn $[a; 0]$, đồ thị ở phía dưới trục hoành nên $|f(x)| = -f(x)$.
- Trên đoạn $[0; b]$, đồ thị ở phía trên trục hoành nên $|f(x)| = f(x)$.

Do đó $S_D = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = -\int\limits_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Tính nguyên hàm $\int \cos 3x\,\mathrm{d}x$.

(A) $-\dfrac{1}{3}\sin 3x + C$. **B** $\dfrac{1}{3}\sin 3x + C$. (C) $-3\sin 3x + C$. (D) $3\sin 3x + C$.

Lời giải.
$\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\int \cos 3x\,\mathrm{d}(3x) = \dfrac{1}{3}\sin 3x + C$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Trong không gian, mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là **sai**?

(A) Mặt phẳng (P) và đường thẳng a không nằm trên (P) cùng vuông góc với đường thẳng b thì song song với nhau.

B Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

(C) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

(D) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Lời giải.

Hai đường thẳng đó có thể song song hoặc vuông góc hoặc cắt nhau.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Tính tổng $S = C_{2017}^{0} + C_{2017}^{4} + C_{2017}^{8} + \cdots + C_{2017}^{2016}$.

A $S = 2^{2016} + 2^{1008}$. B $S = 2^{2015} + 2^{1007}$. C $S = 2^{2016} + 2^{1008}$. D $S = 2^{2016} + 2^{1008}$.

Lời giải.

$2S = 2C_{2017}^{0} + 2C_{2017}^{4} + 2C_{2017}^{8} + \cdots + 2C_{2017}^{2016}$

$= (C_{2017}^{0} + C_{2017}^{2} + C_{2017}^{4} + C_{2017}^{6} + \cdots + C_{2017}^{2014} + C_{2017}^{2016}) + (C_{2017}^{0} - C_{2017}^{2} + C_{2017}^{4} - C_{2017}^{6} + \cdots - C_{2017}^{2014} + C_{2017}^{2016}) = A + B$.

Tính $A = C_{2017}^{0} + C_{2017}^{2} + C_{2017}^{4} + C_{2017}^{6} + \cdots + C_{2017}^{2014} + C_{2017}^{2016}$

Xét hai khai triển

$(1+1)^{2017} = C_{2017}^{0} + C_{2017}^{1} + C_{2017}^{2} + C_{2017}^{3} + \cdots + C_{2017}^{2016} + C_{2017}^{2017}$ (1)

$(1-1)^{2017} = C_{2017}^{0} - C_{2017}^{1} + C_{2017}^{2} - C_{2017}^{3} + \cdots + C_{2017}^{2016} - C_{2017}^{2017}$ (2)

$(1) + (2) \Leftrightarrow 2^{2017} = 2A \Leftrightarrow A = 2^{2016}$.

$(1+i)^{2017} = C_{2017}^{0} + C_{2017}^{1}i + C_{2017}^{2}i^2 + C_{2017}^{3}i^3 + \cdots + C_{2017}^{2016}i^{2016} + C_{2017}^{2017}i^{2017}$

$= (C_{2017}^{0} - C_{2017}^{2} + C_{2017}^{4} - C_{2017}^{6} + \cdots + C_{2017}^{2016}) + (C_{2017}^{1} - C_{2017}^{3} + C_{2017}^{5} - C_{2017}^{7} + \cdots + C_{2017}^{2017})i$ (3)

Lại có $(1+i)^{2017} = ((1+i)^2)^{1008}(1+i) = (2i)^{1008}(1+i) = 2^{1008}(i^2)^{504}(1+i) = 2^{1008} + 2^{1008}i$. (4)

Từ (3) và (4) đồng nhất phần thực ta được $B = 2^{1008}$. Suy ra $S = \dfrac{A+B}{2} = 2^{2015} + 2^{1007}$.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Bạn Hùng trúng tuyển vào đại học nhưng vì không đủ nộp tiền học phí Hùng quyết định vay ngân hàng trong 4 năm mỗi năm 3.000.000 đồng để nộp học với lãi suất 3% /năm. Sau khi tốt nghiệp đại học Hùng phải trả góp hàng tháng số tiền T (không đổi) cùng với lãi suất 0,25% /tháng trong vòng 5 năm. Số tiền T mà Hùng phải trả cho ngân hàng (làm tròn đến hàng đơn vị) là bao nhiêu?

A 232.289 đồng. B 309.604 đồng. C 215.456 đồng. D 232.518 đồng.

Lời giải.

+Tính tổng số tiền mà Hùng nợ sau 4 năm học:

Sau 1 năm số tiền Hùng nợ là: $3 + 3r = 3(1+r)$.

Sau 2 năm số tiền Hùng nợ là: $3(1+r)^2 + 3(1+r)$.

Tương tự: Sau 4 năm số tiền Hùng nợ là:

$3(1+r)^4 + 3(1+r)^3 + 3(1+r)^2 + 3(1+r) = 12.927.407,43 = A$

+Tính số tiền T mà Hùng phải trả trong 1 tháng:

Sau 1 tháng số tiền còn nợ là: $A + A \cdot r - T = A(1+r) - T$.

Sau 2 tháng số tiền còn nợ là: $A(1+r) - T + (A(A(1+r) - T)) \cdot r - T = A(1+r)^2 - T(1+r) - T$.

Tương tự sau 60 tháng số tiền còn nợ là: $A(1+r)^{60} - T(1+r)^{59} - T(1+r)^{58} - \cdots - T(1+r) - T$.

Hùng trả hết nợ khi và chỉ khi $A(1+r)^{60} - T(1+r)^{59} - T(1+r)^{58} - \cdots - T(1+r) - T = 0$

$\Leftrightarrow A(1+r)^{60} - T\left[(1+r)^{59} + (1+r)^{58} + \cdots + (1+r) + 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow A(1+r)^{60} - T\dfrac{(1+r)^{60} - 1}{1+r-1} = 0 \Leftrightarrow A(1+r)^{60} - T\dfrac{(1+r)^{60} - 1}{r} = 0$

$\Leftrightarrow T = \dfrac{Ar(1+r)^{60}}{(1+r)^{60}-1} \Leftrightarrow T \approx 232.289$ đồng.

Chọn đáp án A ☐

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-11=0$, khi đó hãy xác định tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

A $I(1;2;-3)$, $R=5$. **B** $I(-1;-2;3)$, $R=25$.
C $I(1;2;-3)$, $R=25$. **D** $I(-1;-2;3)$, $R=5$.

Lời giải.

$x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-11=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=25$.

Suy ra $I(1;2;-3)$ và $R=5$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 12. Đường thẳng nào dưới đây là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+5}{1-2x}$.

A $x=-\dfrac{1}{2}$. **B** $x=-\dfrac{5}{2}$. **C** $x=\dfrac{1}{2}$. **D** $x=\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

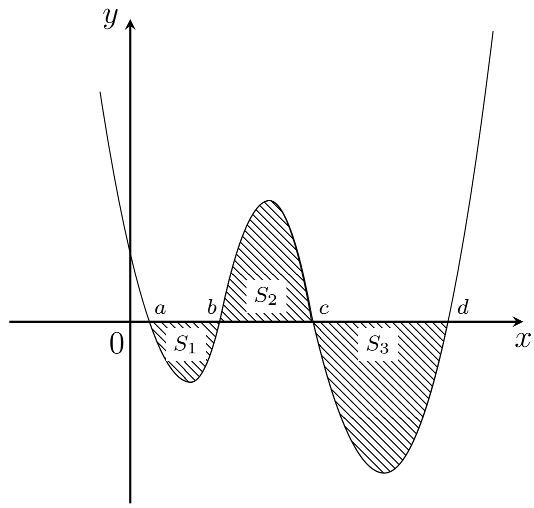
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+5}{1-2x}=-\dfrac{1}{2}$.

Suy ra tiệm cận ngang của đồ thị là $y=-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 13.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm a, b, c, d (hình bên). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau



A $f(c)>f(a)>f(b)>f(d)$.
B $f(a)>f(c)>f(d)>f(b)$.
C $f(a)>f(b)>f(c)>f(d)$.
D $f(c)>f(a)>f(d)>f(b)$.

Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có dấu của $f'(x)$ và bảng biến thiên như hình bên.

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra $f(a)$ và $f(c)$ cùng lớn hơn $f(b)$ và $f(d)$.

x	$-\infty$		a		b		c		d		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$	$f(d)$	$\nearrow$	

- $S_1<S_2 \Rightarrow \displaystyle\int_b^a f'(x)\,\mathrm{d}x < \int_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow f(a)-f(b)<f(c)-f(b) \Rightarrow f(a)<f(c)$.

- $S_2 < S_3 \Rightarrow \int\limits_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x < \int\limits_d^c f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow f(c) - f(b) < f(c) - f(d) \Rightarrow f(b) > f(d)$.

Vậy ta có $f(c) > f(a) > f(b) > f(d)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Tìm giới hạn của hàm số $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x-3}{x+2}$.

A 5. (B) $-\dfrac{3}{2}$. (C) $\dfrac{5}{2}$. (D) 0.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x-3}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5-\dfrac{3}{x}}{1+\dfrac{2}{x}} = 5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Trên giá sách có 4 quyển sách Toán, 3 quyển sách Lý, 2 quyển sách Hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất để 3 quyển được lấy ra có ít nhất một quyển Toán.

A $\dfrac{37}{42}$. (B) $\dfrac{3}{4}$. (C) $\dfrac{10}{21}$. (D) $\dfrac{2}{7}$.

Lời giải.

Số cách lấy 3 quyển sách trong 9 quyển sách là $\mathrm{C}_9^3 = 84$ cách.

Số cách lấy 3 quyển sách trong 5 quyển sách không phải sách Toán là $\mathrm{C}_5^3 = 10$ cách.

Suy ra số cách lấy được ít nhất một quyển Toán là $84 - 10 = 74$ cách.

Xác suất để lấy được ít nhất một quyển Toán là $\dfrac{74}{84} = \dfrac{37}{42}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-4)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+4x-2y-21=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm A.

A $(P): 3x+y-4z-21=0$. (B) $(P): x+2y-4z-21=0$.

(C) $(P): 3x+y-5=0$. (D) $(P): 3x+y-4z+21=0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;1;0)$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) tại A nên mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;2;-4)$ và nhận véc-tơ $\overrightarrow{IA} = (3;1;-4)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P) là $3x+y-4z-21=0$.

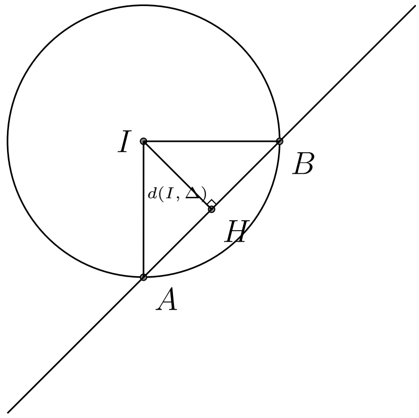
Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu của của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính bằng 1 tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

(A) $m = \dfrac{2\pm\sqrt{3}}{3}$. **B** $m = \dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$. (C) $m = \dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. (D) $m = \dfrac{2\pm\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3m$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = m$.
Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$.
Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị (C) có phương trình $\Delta : y = -2mx + 2$.
Ta có $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin \widehat{AIB} = \frac{1}{2} \cdot \sin \widehat{AIB} \leq \frac{1}{2}$.
Diện tích tam giác IAB lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$ khi và chỉ khi



$$\sin \widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow AI \perp BI.$$

Gọi H là trung điểm của AB, ta có $IH = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = d(I, \Delta)$.
Mà $d(I, \Delta) = \frac{|2m + 1 - 2|}{\sqrt{4m^2 + 1}}$. Suy ra

$$d(I, \Delta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |4m - 2| = \sqrt{2(4m^2 + 1)} \Leftrightarrow 8m^2 - 16m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết SA vuông góc mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

A $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B** $a^3\sqrt{3}$. **C** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D** $a^2\sqrt{3}$.

Lời giải.
Chiều cao hình chóp là $SA = a\sqrt{3}$.
Diện tích hình vuông $ABCD$ cạnh a là $S_{ABCD} = a^2$.
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.
Chọn đáp án A □

Câu 19. Dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{9}\left(u_n + 2\sqrt{4u_n + 1} + 2\right), n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

A $\frac{1}{2}$. **B** $\frac{1}{3}$. **C** $\frac{3}{4}$. **D** $\frac{2}{3}$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \frac{1}{9}\left(u_n + 2\sqrt{4u_n + 1} + 2\right) &\Leftrightarrow 9(4u_{n+1} + 1) = \left(\sqrt{4u_n + 1} + 4\right)^2 \\ &\Leftrightarrow 3\sqrt{4u_{n+1} + 1} = \sqrt{4u_n + 1} + 4 \\ &\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{4u_{n+1} + 1} - 2\right) = \sqrt{4u_n + 1} - 2 \ (*) \end{aligned}$$

Đặt $v_n = \sqrt{4u_n + 1} - 2$. Khi đó, $(*)$ trở thành $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$, đây là cấp số nhân với $v_1 = 1$, $q = \frac{1}{3}$.

Do đó, $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow u_n = \frac{(v_n + 2)^2 - 1}{4} = \frac{\left[2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]^2 - 1}{4}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy $\lim u_n = \dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Có bao nhiêu cách lấy 3 viên bi từ một hộp bi gồm 5 bi xanh và 6 bi đỏ sao cho có đúng 1 bi xanh?

A 5. B 20. C 15. D 75.

Lời giải.

Số cách lấy 1 bi xanh là $C_5^1 = 5$.

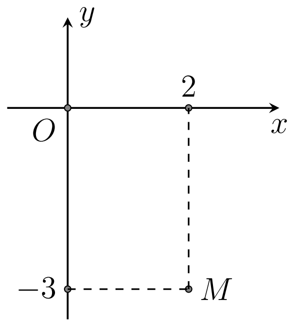
Số cách lấy thêm 2 bi đỏ là $C_6^2 = 15$.

Số cách lấy 1 bi xanh và 2 bi đỏ là $5 \cdot 15 = 75$.

Chọn đáp án D □

Câu 21.

Điểm M trong hình bên là biểu diễn của số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.



A Phần thực là 2 và phần ảo là $-3i$.

B Phần thực là -3 và phần ảo là 2.

C Phần thực là -3 và phần ảo là $2i$.

D Phần thực là 2 và phần ảo là -3.

Lời giải.

Điểm $M(a;b)$ trong hệ trục Oxy là điểm biểu diễn của số phức $z = a + bi$. Do đó, điểm $M(2;-3)$ biểu diễn cho số phức $z = 2 - 3i$ có phần thực là 2 và phần ảo là -3.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Xác định các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - m$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

A $m \geq \dfrac{1}{2}$. B $m < \dfrac{1}{2}$. C $m \leq 0$. D $m \geq 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên $(0;1)$ khi chỉ khi

$$\begin{aligned} y' \leq 0,\ \forall x \in (0;1) &\Leftrightarrow 3x^2 - 6mx \leq 0,\ \forall x \in (0;1) \\ &\Leftrightarrow x - 2m \leq 0,\ \forall x \in (0;1)\ (\text{do } x > 0) \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{2} \leq m,\ \forall x \in (0;1) \\ &\Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 23. Tìm giá trị của biểu thức $A = \log_{a^3} a + \log_2 8^a$, $(a > 0, a \neq 1)$.

A $-\dfrac{1}{3} - 3a$. B $3a - \dfrac{1}{3}$. C $3(a-1)$. D $3a + \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $A = \log_{a^3} a + \log_2 8^a = \dfrac{1}{3}\log_a a + 3a\log_2 2 = \dfrac{1}{3} + 3a$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho $A(1;2;3)$, $B(-7;4;0)$. Khi đó, trọng tâm G của tam giác OAB là điểm nào?

(A) $G\left(-3;3;\dfrac{3}{2}\right)$. (B) $G(-8;2;3)$. (C) $G(-6;6;3)$. (D) $G(-2;2;1)$.

Lời giải.

Sử dụng công thức tính tọa độ trọng tâm tam giác, ta được kết quả $G(-2;2;1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên mỗi nửa khoảng $(-\infty;-2]$ và $[2;+\infty)$, có bảng biến thiên như hình bên. Tìm tập hợp các giá trị m để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm phân biệt.

x	$-\infty$		-2		2		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	22		2	$\searrow$	$\frac{7}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

(A) $\left[\dfrac{7}{4};2\right] \cup [22;+\infty)$. (B) $[22;+\infty)$.

(C) $\left(\dfrac{7}{4};+\infty\right)$. (D) $\left(\dfrac{7}{4};2\right] \cup [22;+\infty)$.

Lời giải.

Số nghiệm của phương trình $f(x) = m$ là số giao điểm của hai đồ thị hàm số

- Đường thẳng $y = m$ song song hoặc trùng Ox.
- Đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 22 \\ \dfrac{7}{4} < m \leq 2 \end{array}\right.$. Do đó, $m \in \left(\dfrac{7}{4};2\right] \cup [22;+\infty)$ là các giá trị tham số cần tìm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Cho a là số dương khác 1, b là số dương và α là số thực bất kì. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

(A) $\log_a b^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b$. (B) $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$. (C) $\log_{a^\alpha} b = \alpha \log_a b$. (D) $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b$.

Lời giải.

- $\log_a b^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b$ sai công thức.
- $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$ luôn đúng.
- $\log_{a^\alpha} b = \alpha \log_a b$ vừa sai công thức, vừa sai với $\alpha = 0$.
- $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b$ sai với $\alpha = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Tìm số thực x, y thỏa mãn $(1-2i)x + (1+2y)i = 1+i$.

(A) $x = 1$, $y = 1$. (B) $x = -1$, $y = 1$. (C) $x = -1$, $y = -1$. (D) $x = 1$, $y = -1$.

Lời giải.

Ta có

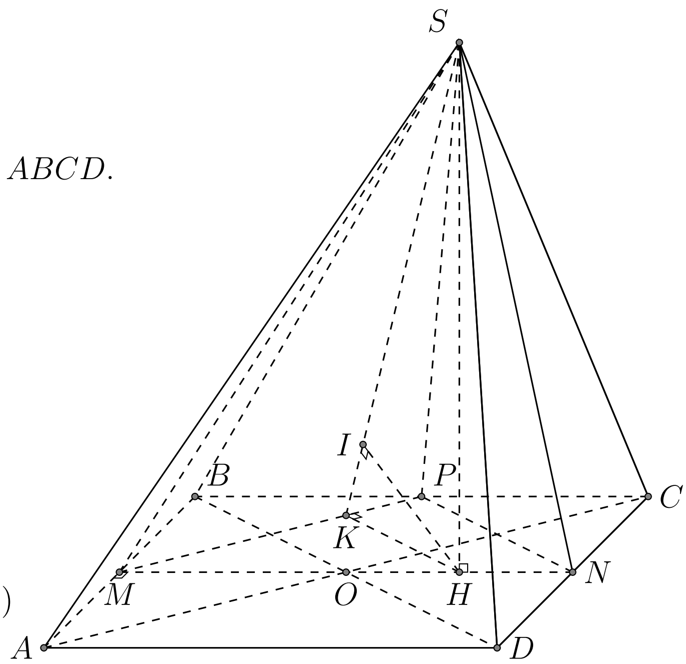
$$(1-2i)x+(1+2y)i=1+i \Leftrightarrow x+(1+2y-2x)i=1+i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 1+2y-2x=1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB đều, góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng $60°$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ nằm trong hình vuông $ABCD$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC.

A $\dfrac{5a\sqrt{3}}{3}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D** $\dfrac{2a\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của S lên $(ABCD)$.

Ta có $\begin{cases} SM \perp AB \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp MH.$

$\Rightarrow MH$ là đường trung bình của hình vuông $ABCD$.

Giả sử MH cắt CD tại N, ta có N là trung điểm CD. Ta cũng có $SN \perp CD$ nên

$$(\widehat{(SCD),(ABCD)}) = (\widehat{SN,MN}) = \widehat{SNM}$$

Gọi P là trung điểm BC, ta có $MP \parallel AC$ nên $AC \parallel (SMP)$. Do đó,

$$d(SM,AC)=d(AC,(SMP))=d(O,(SMP))$$

Gọi K là hình chiếu của H lên MP (nhận thấy $HK \parallel OB$), I là hình chiếu của H lên SK. Khi đó, $d(H,(SMP))=HI$. Áp dụng định lý cô-sin cho tam giác SMN, ta có

$$SM^2=MN^2+SN^2-2MN\cdot SN\cdot\cos 60° \Leftrightarrow 3a^2=4a^2+SN^2-2\cdot 2\cdot a\cdot SN\cdot\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow SN^2-2\cdot a\cdot SN+a^2=0$$
$$\Leftrightarrow (SN-a)^2=0$$
$$\Leftrightarrow SN=a.$$

Xét tam giác vuông SHN, ta có

$$SH=SN\sin 60°=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$HN = SN\cos 60^\circ = \frac{a}{2} \Rightarrow MH = \frac{3}{4}MN \Rightarrow KH = \frac{3}{4}NP = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$$

Xét tam giác SHK vuông tại H, ta có $HI = \sqrt{\dfrac{HK^2 \cdot SH^2}{HK^2 + SH^2}} = \dfrac{3a\sqrt{5}}{10}$.

Mặt khác, $d(O,(SMP)) = \dfrac{2}{3}d(H,(SMP)) = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;1)$, $B(0;1;-2)$ và điểm M thay đổi trên mặt phẳng (Oxy). Tìm giá trị lớn nhất của $|MA - MB|$.

A. 14. B. $\sqrt{14}$. C. $\sqrt{6}$. D. 6.

Lời giải.

Ta có $z_A \cdot z_B = -2 < 0$ nên A và B nằm về hai phía so với (Oxy). Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (Oxy) suy ra $A'(1;-1;-1)$.

Mà $|MA - MB| = |MA' - MB| \le A'B$. Dấu "=" xảy ra khi M, A', B thẳng hàng và M nằm bên ngoài đoạn $A'B$. Vậy giá trị lớn nhất của $|MA - MB|$ bằng $A'B = \sqrt{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Số phức liên hợp của $z = 2016 + 2017i$ là số phức nào?

A. $-2016 - 2017i$. B. $-2016 + 2017i$. C. $2017 - 2016i$. D. $2016 - 2017i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của z là $\bar{z} = 2016 - 2017i$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Giả sử tích phân $I = \displaystyle\int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x = a + b\ln 3 + c\ln 5$ $(a,b,c \in \mathbb{Z})$. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = \dfrac{5}{3}$. B. $S = \dfrac{8}{3}$. C. $S = \dfrac{7}{3}$. D. $S = \dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t = 1 + \sqrt{3x+1} \Rightarrow 3x + 1 = (t-1)^2 \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}(t-1)\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 3; x = 5 \Rightarrow t = 5$. Khi đó

$$I = \frac{2}{3}\int_3^5 \frac{t-1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\int_3^5 \left(1 - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\left(t - \ln|t|\right)\Big|_3^5 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\ln 3 - \frac{2}{3}\ln 5.$$

Suy ra $a = \dfrac{4}{3}$, $b = \dfrac{2}{3}$, $c = -\dfrac{2}{3}$.

Vậy $S = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 (x+3)f'(x)\,\mathrm{d}x = 15$ và $f(1) = 2$, $f(0) = 1$. Tính $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = -12$. B. $I = -10$. C. $I = 12$. D. $I = 10$.

Lời giải.

Đặt $u = x + 3$ và $dv = f'(x)\,\mathrm{d}x$, ta có $du = \mathrm{d}x$ và $v = f(x)$. Do đó

$$\int_0^1 (x+3)f'(x)\,\mathrm{d}x = (x+3)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= 4f(1) - 3f(0) - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Suy ra $4\cdot 2 - 3\cdot 1 - \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 15$

Vậy $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -10$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-2;0)$, $C(0;0;3)$. Tìm phương trình mặt phẳng (ABC).

A $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{-2} + \dfrac{z}{3} = 1$. **B** $\dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{1} + \dfrac{z}{3} = 1$. **C** $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{-2} + \dfrac{z}{3} = 1$. **D** $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{1} + \dfrac{z}{-2} = 1$.

Lời giải.

Do 3 điểm A,B,C lần lượt nằm trên 3 trục tọa độ Ox, Oy, Oz nên mặt phẳng (ABC) có phương trình

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 34. Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78.685.800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A\cdot \mathrm{e}^{Nr}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 150 triệu người?

A 2042. **B** 2030. **C** 2035. **D** 2038.

Lời giải.

Theo giả thiết ta được $150.000.000 = 78.685.800\cdot \mathrm{e}^{0{,}017N} \Leftrightarrow N \approx 37.95$ (năm)

Tức là đến năm 2038 dân số nước ta ở mức 150 triệu người.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Dựng mặt phẳng (P) cách đều năm điểm A, B, C, D và S. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng (P) như vậy?

A 4 mặt phẳng . **B** 5 mặt phẳng. **C** 1 mặt phẳng. **D** 2 mặt phẳng.

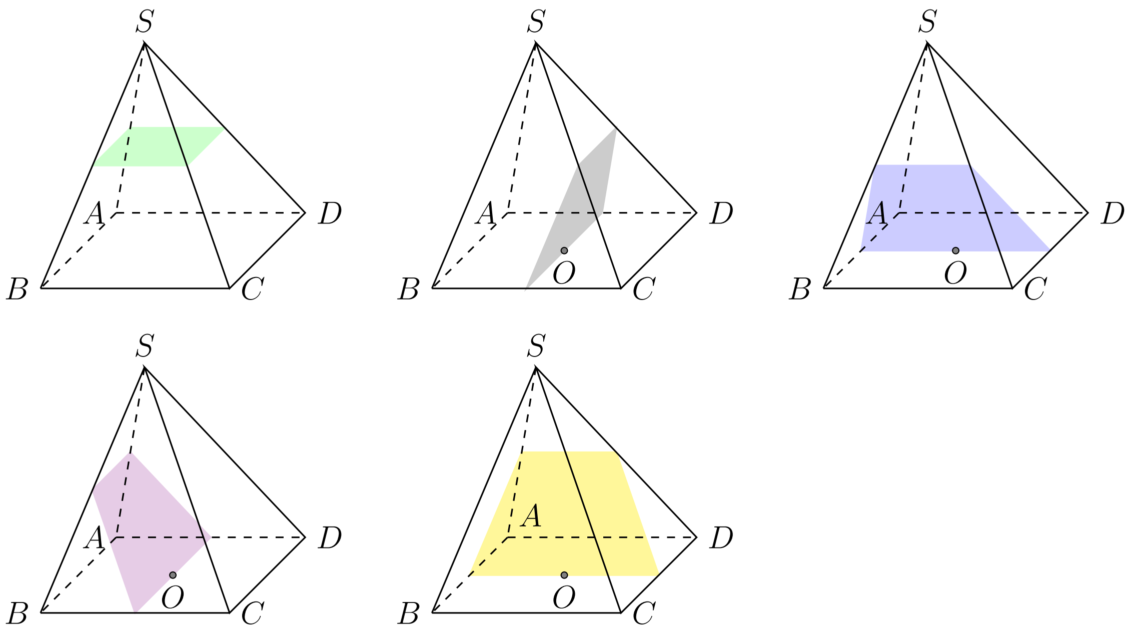
Lời giải.

Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.

Các mặt phẳng cách đều A, B, C, D và S là

1) Mặt phẳng qua trung điểm của SA, SB, SC, SD;

2) Mặt phẳng qua O và song song (SAB);
3) Mặt phẳng qua O và song song (SAD);
4) Mặt phẳng qua O và song song (SCD);
5) Mặt phẳng qua O và song song (SBC).



Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Giải phương trình $2\cos\frac{x}{2} = \sqrt{3}$.

(A) $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
(B) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
(C) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k4\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
(D) $x = \pm\frac{\pi}{3} + k4\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $2\cos\frac{x}{2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k4\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x - 3y - 2z - 15 = 0$ và ba điểm $A(1;4;5)$, $B(0;3;1)$, $C(2;-1;0)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ có giá trị nhỏ nhất.

(A) $M(-4;-1;0)$.
(B) $M(4;-1;0)$.
(C) $M(4;1;0)$.
(D) $M(1;-4;0)$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G(1;2;2)$.

Ta có
$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \quad \left(\text{vì } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}\right) \end{aligned}$$

Để $MA^2 + MB^2 + MC^2$ có giá trị nhỏ nhất khi MG ngắn nhất hay M là hình chiếu vuông góc của G trên (P).

Gọi Δ là đường thẳng qua G và vuông góc mp(P). Khi đó Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 3t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$

Điểm M chính là giao điểm của Δ và mp(P).
Xét phương trình $3(1 + 3t) - 3(2 - 3t) - 2(2 - 2t) - 15 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
Vậy $M(4; -1; 0)$.
Chọn đáp án B □

Câu 38. Biết $\displaystyle\int\limits_2^5 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - x} = a\ln 4 + b\ln 2 + c\ln 5$, với a, b, c là 3 số nguyên khác 0. Tính $P = a^2 + 2ab + 3b^2 - 2c$.

A 7. B 5. C 4. **D** 8.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_2^5 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - x} = \int\limits_2^5 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \left(\ln|x-1| - \ln|x|\right)\Big|_2^5 = \ln 4 - \ln 5 + \ln 2$.

Suy ra $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$. Vậy $P = 8$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $4^{x+1} - 2\cdot 6^x + m\cdot 9^x = 0$ có đúng một nghiệm thực.

A $\left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1}{4} \\ m \le 0 \end{array}\right.$. B $m = \dfrac{1}{4}$. C $0 < m < \dfrac{1}{4}$. D $m < 0$.

Lời giải.

Ta có $4^{x+1} - 2\cdot 6^x + m\cdot 9^x = 0 \Leftrightarrow 4\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x} - 2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^x + m = 0$

Đặt $t = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ $(t > 0)$, ta được phương trình $4t^2 - 2t + m = 0 \Leftrightarrow -4t^2 + 2t = m$.

Xét hàm số $f(t) = -4t^2 + 2t$ có $f'(t) = -8t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{4}$.

Ta có bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình đã cho có đúng một nghiệm thực khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(t)$ và $y = m$ cắt nhau tại đúng 1 giao điểm trên khoảng $(0; +\infty)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta được $m = \dfrac{1}{4}$ và $m \le 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên.

Tìm khẳng định **đúng**?

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(A) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng 0.

(B) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1 .

(C) Hàm số có đúng một cực trị.

(D) Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$..

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(-2;0;3)$, $M(0;0;1)$ và $N(0;3;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua các điểm M, N sao cho khoảng cách từ điểm B đến (P) gấp hai lần khoảng cách từ điểm A đến (P). Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) thỏa mãn đề bài?

(A) Chỉ có một mặt phẳng (P).

(B) Không có mặt phẳng (P) nào.

(C) Có hai mặt phẳng (P).

(D) Có vô số mặt phẳng (P).

Lời giải.

Gọi $\vec{n} = (a;b;c)$ là véc-tơ pháp tuyến của (P). Khi đó (P): $ax + by + cz + d = 0$.

$M(0;0;1) \in (P) \Leftrightarrow c + d = 0 \Leftrightarrow c = -d$.

$N(0;3;1) \in (P) \Leftrightarrow 3b + c + d = 0 \Leftrightarrow 3b = 0 \Leftrightarrow b = 0$.

Do đó (P): $ax - dz + d = 0$.

Khoảng cách từ điểm B đến (P) gấp hai lần khoảng cách từ điểm A đến (P).

$\dfrac{|-2a - 3d + d|}{\sqrt{a^2 + d^2}} = 2\dfrac{|a + d|}{\sqrt{a^2 + d^2}} \Leftrightarrow \dfrac{|-2(a + d)|}{\sqrt{a^2 + d^2}} = 2\dfrac{|a + d|}{\sqrt{a^2 + d^2}}$ (luôn đúng).

Vậy có vô số mặt phẳng (P).

Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2| = |z - 2i|$. Tìm số phức z biết $\left|z + \dfrac{3}{2} - 5i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(A) $z = \sqrt{\dfrac{331}{8}}$.

(B) $z = 1 + i$.

(C) $z = \dfrac{7}{4} + \dfrac{7}{4}i$.

(D) $z = -\dfrac{3}{2} + 5i$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó $|z - 2| = z - 2i \Leftrightarrow |x - 2 + yi| = |x + (y - 2)i|$

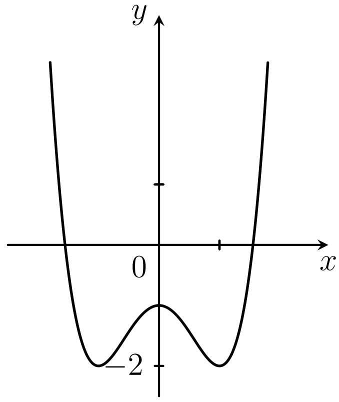
$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 = x^2 + (y - 2)^2 \Leftrightarrow x = y$.

Tập hợp $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là đường thẳng $y = x$.

Ta có $\left|z+\frac{3}{2}-5i\right| = \left|x+\frac{3}{2}+(y-5)i\right|$
$$= \sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y-5)^2}$$
$$= \sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(x-5)^2}$$
$$= \sqrt{2\cdot\left(x-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{169}{8}} \geq \sqrt{\frac{169}{8}}.$$
Suy ra $z+\frac{3}{2}-5i$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x=y=\frac{7}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 43.
Giả sử đồ thị hình bên là của một trong các hàm được liệt kê ở các đáp án A, B, C, D. Hỏi đó là hàm số nào?



A $y=x^4-2x^2-1$. **B** $y=x^4+2x^2$. **C** $y=x^4-2x^2+1$. **D** $y=x^4-2x^2$.

Lời giải.
Đồ thị hàm số cắt Oy tại $A(0;-1)$ nên chọn phương án $y=x^4-2x^2-1$.
Chọn đáp án A □

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;4)$ và $B(5;-1;0)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của AB là

A $x+y+z-8=0$. **B** $x-y-z-6=0$. **C** $x-y-z=0$. **D** $x-y-z+6=0$.

Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-4;-4)$ và trung điểm của AB là $I(3;1;2)$. Vậy mặt phẳng trung trực của AB có phương trình là $4(x-3)-4(y-1)-4(z-2)=0 \Leftrightarrow x-y-z=0$.
Chọn đáp án C □

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x+2y-3z+5=0$. Véc-tơ nào sau đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

A $\vec{n}=(-1;2;-3)$. **B** $\vec{n}=(1;2;3)$. **C** $\vec{n}=(1;-2;3)$. **D** $\vec{n}=(1;2;-3)$.

Lời giải.
Dựa vào khái niệm véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng.
Chọn đáp án D □

Câu 46. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$ là

A $x=1$. **B** $x=-1$. **C** $y=2$. **D** $y=1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = +\infty$.

Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4; 4]$. Khi đó tổng $m + M$ bằng bao nhiêu?

A 48. B -1. C 55. D 11.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 6x - 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

$y(-1) = 40$, $y(3) = 8$, $y(4) = 15$, $y(-4) = -41$. Suy ra $M = 40$, $m = -41 \Leftrightarrow m + M = -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = -x + 3$ và $y = 1$ là

A $S = \dfrac{1}{\ln 2} - \dfrac{1}{2}$. B $S = \dfrac{1}{\ln 2} + 3$. C $S = \dfrac{1}{\ln 2} + 1$. D $S = \dfrac{47}{50}$.

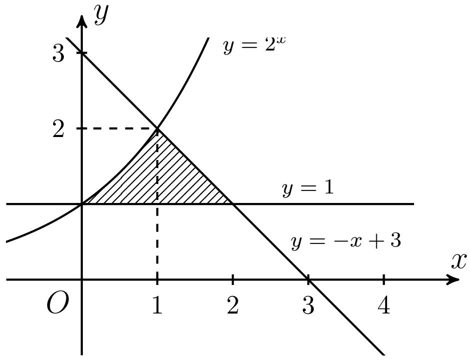
Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của các đường ta có:

$2^x = -x + 3 \Leftrightarrow x = 1$; $2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$; $-x + 3 = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Diện tích cần tìm là

$$S = \int\limits_0^1 (2^x - 1)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 (-x + 3 - 1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{2}.$$



Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$; $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \int\limits_{-1}^1 f(|2x - 1|)\,\mathrm{d}x$.

A $I = 6$. B $I = 4$. C $I = \dfrac{2}{3}$. D $I = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

$$I=\int\limits_{-1}^{1} f\left(|2x-1|\right)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} f\left(1-2x\right)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f\left(2x-1\right)\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} f\left(1-2x\right)d\left(1-2x\right)+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f\left(2x-1\right)d\left(2x-1\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_{3}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int\limits_{3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot 6+\frac{1}{2}\cdot 2=4.$$

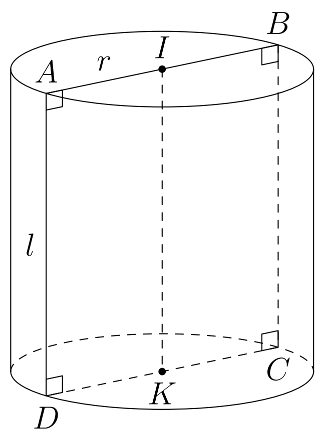
Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho hình vuông $ABCD$ biết cạnh bằng a. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Tính diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay khi cho hình vuông $ABCD$ quay quanh IK một góc $360°$.

A $\dfrac{\pi a^2}{3}$. **B** $2\pi a^2$. **C** $2\dfrac{\pi a^2}{3}$. **D** πa^2.

Lời giải.

Ta có $r=\dfrac{a}{2}$; $l=a\Rightarrow S=2\pi\cdot r\cdot l=2\pi\cdot\dfrac{a}{2}\cdot a=\pi\cdot a^2$.



Chọn đáp án D □

——— **HẾT** ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. D	3. B	4. A	5. A	6. C	7. B	8. B	9. B	10. A
11. A	12. A	13. A	14. A	15. A	16. A	17. B	18. A	19. C	20. D
21. D	22. A	23. D	24. D	25. D	26. B	27. A	28. B	29. C	30. D
31. D	32. B	33. A	34. D	35. B	36. D	37. B	38. D	39. A	40. D
41. D	42. C	43. A	44. C	45. D	46. B	47. B	48. A	49. B	50. D

157 ĐỀ THI THỬ TOÁN HỌC TUỔI TRẺ LẦN 6, 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ và xét hai số phức $\alpha = z^2 + (\overline{z})^2$ và $\beta = 2z\overline{z} + i(z - \overline{z})$. Trong các khẳng định dưới đây khẳng định nào đúng?

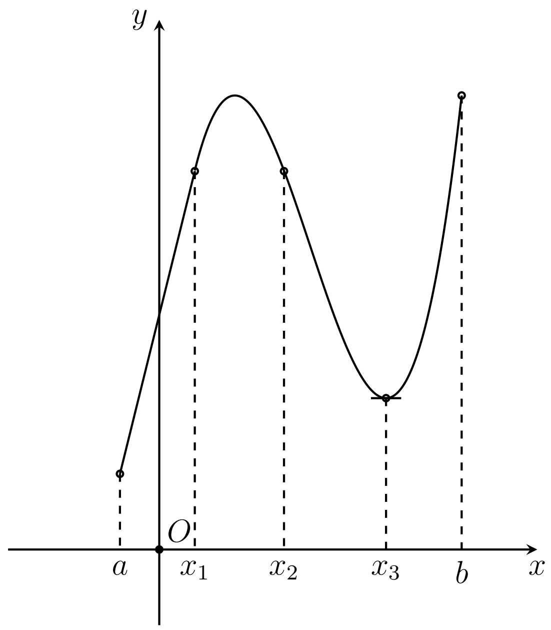
A α là số thực, β là số thực.
B α là số ảo, β là số thực.
C α là số thực, β là số ảo.
D α là số ảo, β là số ảo.

Lời giải.

Ta có $\alpha = z^2 + (\overline{z})^2 = 2(a^2 - b^2)$, $\beta = 2z\overline{z} + i(z - \overline{z}) = 2(a^2 + b^2) - 2ab$. Vậy α, β là các số thực.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong khoảng (a, b) và có đồ thị như hình bên dưới. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?



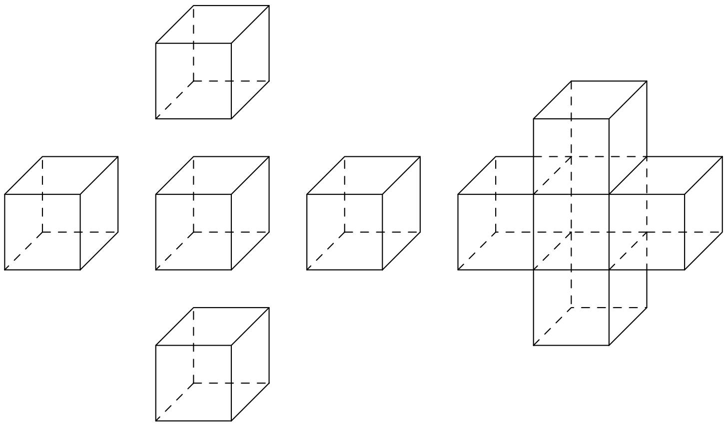
A Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trong khoảng $(a; b)$.
B $f'(x_1) > 0$.
C $f'(x_2) > 0$.
D $f'(x_3) = 0$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có đạo hàm và nghịch biến trong khoảng $(c; d)$ chứa x_2, suy ra $f'(x_2) \leq 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Người ta ghép 5 khối lập phương cạnh a để được khối chữ thập như hình dưới. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của khối chữ thập đó.



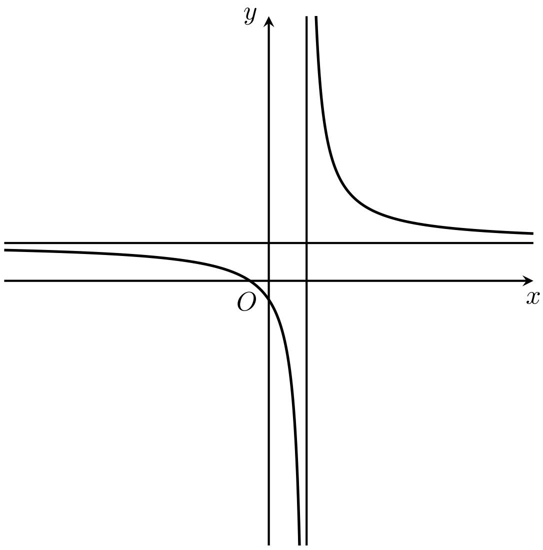
(A) $S_{tp} = 20a^2$. (B) $S_{tp} = 12a^2$. (C) $S_{tp} = 30a^2$. (D) $S_{tp} = 22a^2$.

Lời giải.

Dễ thấy diện tích toàn phần của khối chữ thập bằng 22 lần diện tích một mặt của hình lập phương suy ra $S_{tp} = 22a^2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Cho hàm số $y = \dfrac{bx - c}{x - a}$ $(a \neq 0)$ và $a, b, c \in \mathbb{R}$ có đồ thị như trên dưới. Khẳng định nào sau đây **đúng**?



(A) $a > 0, b < 0, c - ab < 0$. (B) $a > 0, b > 0, c - ab < 0$.
(C) $a < 0, b > 0, c - ab < 0$. (D) $a < 0, b < 0, c - ab > 0$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = b$ nằm trên trục hoành suy ra $b > 0$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = a$ nằm bên phải trục tung suy ra $a > 0$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định suy ra $c - ab < 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^{\log_2 5} = 4$, $b^{\log_4 6} = 16$, $c^{\log_7 3} = 49$. Tính giá trị $T = a^{\log_2^2 5} + b^{\log_4^2 6} + 3c^{\log_7^2 3}$.

(A) $T = 126$. (B) $T = 5 + 2\sqrt{3}$. (C) $T = 88$. (D) $T = 3 - 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

$\begin{cases} a^{\log_2 5} = 4 \\ b^{\log_4 6} = 16 \\ c^{\log_7 3} = 49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^{\log_2^2 5} = 4^{\log_2 5} \\ b^{\log_4^2 6} = 16^{\log_4 6} \\ c^{\log_7^2 3} = 49^{\log_7 3} \end{cases} \Rightarrow T = 5^2 + 6^2 + 3 \cdot 3^2 = 88.$

Chọn đáp án C □

Câu 6. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

A Với mọi $a > b > 1$, ta có $a^b > b^a$.

B Với mọi $a > b > 1$, ta có $\log_a b < \log_b a$.

C Với mọi $a > b > 1$, ta có $a^{a-b} > b^{b-a}$.

D Với mọi $a > b > 1$, ta có $\log_a \dfrac{a+b}{2} < 1$.

Lời giải.

Với $a = 4, b = 2$, $4^2 = 2^4$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;1;1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;3;2)$. Đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC nhận véc-tơ $\vec{a}$ nào dưới đây làm một véc-tơ chỉ phương?

A $\vec{a} = (1;1;0)$. **B** $\vec{a} = (-2;2;2)$. **C** $\vec{a} = (-1;2;1)$. **D** $\vec{a} = (-1;1;0)$.

Lời giải.

Tọa độ trung điểm của BC là $M(0;2;1)$, $\overrightarrow{AM} = (-1;1;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Đồ thị hàm số nào dưới đây **không** có tiệm cận ngang?

A $y = 3^x$. **B** $g(x) = \log_3 x$. **C** $h(x) = \dfrac{1}{x+1}$. **D** $k(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_3 x = +\infty$ suy ra hàm số $g(x) = \log_3 x$ không có tiệm cận ngang.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Bất phương trình $(3^x - 1)(x^2 + 3x - 4) > 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên nhỏ hơn 6?

A 9. **B** 5. **C** 7. **D** Vô số.

Lời giải.

Với $x > 0$, bất phương trình tương đương $\begin{cases} 3^x - 1 > 0 \\ x^2 + 3x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$

Với $x < 0$, bất phương trình tương đương $\begin{cases} 3^x - 1 < 0 \\ x^2 + 3x - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < -4.$

Chọn đáp án D □

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 1 = 0$ với $c < 0$ đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$ và tạo với mặt phẳng (yOz) một góc 60°. Khi đó giá trị $a + b + c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

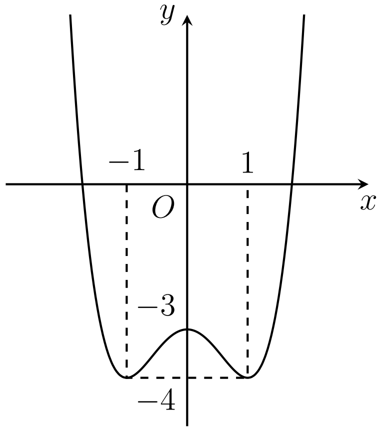
A $(0;3)$. **B** $(3;5)$. **C** $(5;8)$. **D** $(8;11)$.

Lời giải.

$A, B \in (P) \Rightarrow a = 1, b = 1$. Góc giữa (P) và (yOz) bằng 60° suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{2+c^2}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow c = -\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

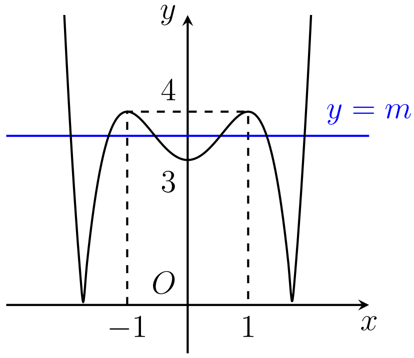
Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có 6 nghiệm phân biệt.



(A) $-4 < m < -3$. (B) $0 < m < 3$. (C) $m > 4$. (D) $3 < m < 4$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$



Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số và đường thẳng $y = m$.
Phương trình có 6 nghiệm phân biệt khi $3 < m < 4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Tính nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x\left(2017 - \dfrac{2018\mathrm{e}^{-x}}{x^5}\right)$.

(A) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2017\mathrm{e}^x + \frac{2018}{x^4} + C$.

(B) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2017\mathrm{e}^x + \frac{504,5}{x^4} + C$.

(C) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2017\mathrm{e}^x - \frac{504,5}{x^4} + C$.

(D) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2017\mathrm{e}^x - \frac{2018}{x^4} + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x\left(2017 - \frac{2018\mathrm{e}^{-x}}{x^5}\right)\mathrm{d}x = \int\left(2017\mathrm{e}^x - \frac{2018}{x^5}\right)\mathrm{d}x = 2017\mathrm{e}^x + \frac{504,5}{x^4} + C$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Tìm giá trị dương của k để $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(3k+1)x^2+1}}{x} = 9f'(2)$ với $f(x) = \ln(x^2+5)$.

(A) 12. (B) 2. (C) 5. (D) 9.

Lời giải.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(3k+1)x^2+1}}{x} = 9f'(2) \Leftrightarrow \sqrt{3k+1} = 4 \Leftrightarrow k = 5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Xét $f(x)$ là một hàm số tùy ý. Trong bốn mệnh đề dưới đây có bao nhiêu mệnh đề đúng?

(I) Nếu $f(x)$ là hàm số có đạo hàm tại x_0 và đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

(II) Nếu $f'(x_0) = 0$ thì hàm số đạt cực trị tại điểm x_0.

(III) Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x) > 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0.

(IV) Nếu $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 thì $f''(x) < 0$.

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 4.

Lời giải.

Mệnh đề (II) sai, với $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ nhưng hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mệnh đề (III) sai, với $f(x) = -x^2 + 1$, $f'(0) = 0$, $f''(x) = -2 < 0$ nhưng hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

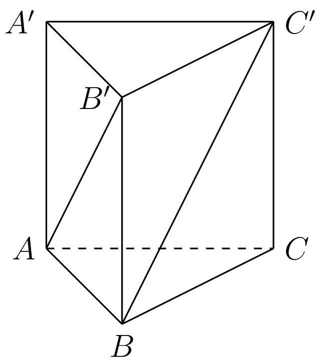
Mệnh đề (IV) sai, với $f(x) = x^2$ hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ nhưng $f''(x) = 2 > 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy $2a$, góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó.

A $V = \dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **B** $V = 2\sqrt{3}a^3$. **C** $V = \dfrac{2\sqrt{6}a^3}{3}$. **D** $V = 2\sqrt{6}a^3$.

Lời giải.



Gọi h là chiều cao của hình lăng trụ.

Ta có $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'}\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \cdot (4a^2 + h^2) = -2a^2 + h^2 \Rightarrow h = 2a\sqrt{2}$.

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 2a\sqrt{2} \cdot \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{2\sqrt{6}a^3}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Tìm các giá trị thực của m để hàm số $y = 2^{x^3 - x^2 + mx + 1}$ đồng biến trên $[1; 2]$.

A $m > -8$. **B** $m \geq -1$. **C** $m \leq -8$. **D** $m < -1$.

Lời giải.

Ta có $y' = (3x^2 - 2x + m) \cdot 2^{x^3 - x^2 + mx + 1} \cdot \ln 2$.

Hàm số đồng biến trên $[1; 2] \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + m \geq 0, \forall x \in [1; 2] \Leftrightarrow 3x^2 - 2x \geq -m, \forall x \in [1; 2]$.

Xét hàm $y = 3x^2 - 2x \Rightarrow y' = 6x - 2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3} \notin [1; 2]$.

Có $y(1) = 1$; $y(2) = 8 \Rightarrow \min\limits_{[1;2]} y = 1$.

$\Rightarrow -m \leq 1 \Rightarrow m \geq -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Kết quả (b, c) của việc gieo một con súc sắc cân đối hai lần liên tiếp, trong đó b là số chấm xuất hiện lần gieo thứ nhất, c là số chấm xuất hiện lần gieo thứ hai được thay vào phương trình bậc hai $x^2 + bx + c = 0$. Tính xác suất để phương trình bậc hai đó vô nghiệm.

A $\dfrac{7}{12}$. **B** $\dfrac{23}{36}$. **C** $\dfrac{17}{36}$. **D** $\dfrac{5}{36}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu $n_\Omega = 6 \cdot 6 = 36$.

Phương trình $x^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4c \geq 0 \Leftrightarrow b^2 \geq 4c$.

Gọi A: "Phương trình có nghiệm". Khi đó $\overline{A}$: "Phương trình vô nghiệm".

$$\begin{aligned}A = \{&(2,1);(3,1);(4,1);(5,1);(6,1);(3,2);(4,2);(5,2);(6,2);(4,3);(5,3);(6,3);(4,4);\\&(5,4);(6,4);(5,5);(6,5);(5,6);(6,6)\}\end{aligned}$$

$\Rightarrow n_A = 19 \Rightarrow P(A) = \dfrac{19}{36} \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{19}{36} = \dfrac{17}{36}$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Tổng giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = (x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên đoạn $[0; 3]$ có dạng $a - b\sqrt{c}$ với a là số nguyên và b, c là các số nguyên dương. Tính $S = a + b + c$.

A $S = 4$. **B** $S = -2$. **C** $S = -22$. **D** $S = 5$.

Lời giải.

Có $y' = \sqrt{x^2+4} + \dfrac{(x-6)x}{\sqrt{x^2+4}} = \dfrac{2x^2-6x+4}{\sqrt{x^2+4}} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow y(0) = -12$; $y(1) = -5\sqrt{5}$; $y(2) = -4\sqrt{8} = -8\sqrt{2}$; $y(3) = -3\sqrt{13}$.

$\Rightarrow \begin{cases} M = \max\limits_{[0;3]} y = -3\sqrt{13} \\ m = \min\limits_{[0;3]} y = -12 \end{cases} \Rightarrow M + m = -12 - 3\sqrt{13} \Rightarrow \begin{cases} a = -12 \\ b = 3 \\ c = 13 \end{cases} \Rightarrow S = a + b + c = 4.$

Chọn đáp án A □

Câu 19. Cho số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $a + (b-1)i = \dfrac{1+3i}{1-2i}$. Giá trị nào dưới đây là mô-đun của z?

A 5. **B** 1. **C** $\sqrt{10}$. **D** $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Có $a + (b-1)i = \dfrac{1+3i}{1-2i} \Leftrightarrow a + (b-1)i = -1 + i \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Biết $\displaystyle\int\limits_0^1 \dfrac{x^3+2x^2+3}{x+2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a} + b\ln\dfrac{3}{2}$, $(a, b > 0)$. Tìm các giá trị k để

$$\int\limits_8^{ab} \mathrm{d}x < \lim_{x\to+\infty} \frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018}.$$

A $k < 0$. **B** $k \neq 0$. **C** $k > 0$. **D** $k \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 \dfrac{x^3+2x^2+3}{x+2}\,dx = \int\limits_0^1 \left(x^2+\dfrac{3}{x+2}\right)dx = \left(\dfrac{x^3}{3}+3\ln(x+2)\right)\Big|_0^1 = \dfrac{1}{3}+3\ln\dfrac{3}{2}$.

$\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \int\limits_8^{ab} dx = \int\limits_8^{9} dx = 1$. Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(k^2+1)x+2017}{x+2018} = k^2+1$.

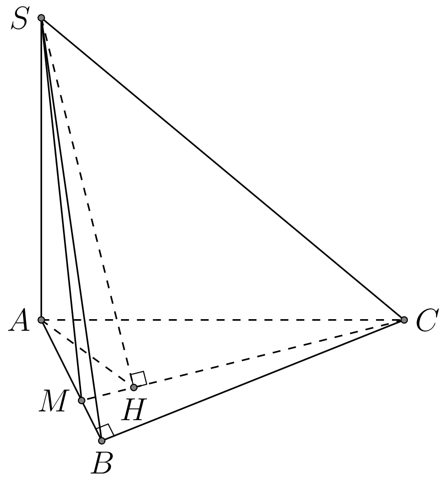
$\Rightarrow \int\limits_8^{ab} dx < \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(k^2+1)x+2017}{x+2018} \Leftrightarrow 1 < k^2+1 \Leftrightarrow k \neq 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$, $AB = BC = a$. Gọi M là điểm thuộc AB sao cho $AM = \dfrac{2a}{3}$. Tính khoảng cách d từ S đến đường thẳng CM.

A $d = \dfrac{2a\sqrt{110}}{5}$. B $d = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. C $d = \dfrac{a\sqrt{110}}{5}$. D $d = \dfrac{2a\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải.



Trong (SMC) kẻ $SH \perp MC$ tại H.

Có $\begin{cases} MC \perp SH \\ MC \perp SA \end{cases} \Rightarrow MC \perp (SAH) \Rightarrow MC \perp AH$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot BC = \dfrac{a^2}{2}$.

Diện tích tam giác MBC là $S_{MBC} = \dfrac{1}{2}MB \cdot BC = \dfrac{a^2}{6}$.

$\Rightarrow S_{AMC} = S_{ABC} - S_{MBC} = \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^2}{6} = \dfrac{a^2}{3}$.

Xét $\triangle BMC \Rightarrow MC = \sqrt{MB^2+BC^2} = \dfrac{\sqrt{10}a}{3}$.

Độ dài cạnh $AH = \dfrac{2S_{AMC}}{MC} = \dfrac{2a\sqrt{10}}{10}$.

Xét $\triangle AHS \Rightarrow SH = \sqrt{AH^2+SH^2} = \dfrac{a\sqrt{110}}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Mặt tiền của một ngôi biệt thự có 8 cây cột hình trụ tròn, tất cả đều có chiều cao bằng 4,2 m. Trong số các cây đó có 2 cây cột trước đại sảnh đường kính bằng 40 cm, 6 cây cột còn lại phân bố đều hai bên đại sảnh và chúng đều có đường kính bằng 26 cm. Chủ nhà thuê nhân công để sơn các cây cột bằng loại sơn giả đá, biết giá thuê là 380000 đồng/1m^2 (kể cả vật liệu sơn và nhân công thi công). Hỏi người chủ phải chi ít nhất bao nhiêu tiền để sơn hết các cây cột nhà đó (đơn vị đồng)? (lấy $\pi = 3{,}14159$).

A $\approx 11.833.000$. B $\approx 12.521.000$. C $\approx 10.400.000$. D $\approx 15.642.000$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của 2 cây cột trước đại sảnh là $S_1 = 2(2\pi r_1 h) = 2\cdot 2\pi \cdot \dfrac{1}{5}\cdot 4{,}2 = \dfrac{84\pi}{25}$ (m^2).

Diện tích xung quanh của 6 cây cột còn lại là $S_2 = 6(2\pi r_2 h) = 6\cdot 2\pi\cdot \dfrac{13}{100}\cdot 4{,}2 = \dfrac{819\pi}{125}$ (m^2).

Diện tích xung quanh của 8 cây cột là $S = S_1 + S_2 = \dfrac{1239\pi}{125}$ (m^2).

Số tiền ít nhất để sơn hết các cây cột là $S \cdot 380000 = \dfrac{1239\pi}{125} \cdot 380000 = 11832997{,}23 \approx 11.833.000$

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Số giờ có ánh sáng của một thành phố X ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi số $d(t) = 3\sin\left(\dfrac{\pi}{182}(t-80)\right) + 12$, $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \le 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố X có nhiều giờ có ánh sáng nhất?

(A) 262. (B) 353. (C) 80. **D** 171.

Lời giải.

Xét hàm số $y(t) = d(t) = 3\sin\left(\dfrac{\pi}{182}(t-80)\right) + 12$, $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \le 365$.

$\Rightarrow y' = \dfrac{3\pi}{182} \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{182}(t-80)\right) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow t = 171 + k \cdot 182$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Mà $0 < t \le 365 \Rightarrow 0 < 171 + 182k \le 365 \Leftrightarrow -\dfrac{171}{182} < k \le \dfrac{97}{91} \Rightarrow k \in \{0; 1\}$.

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 171 \\ t = 353 \end{array}\right. \Rightarrow d(171) = 15;\ d(353) = 12{,}08;\ d(365) = 9{,}06;\ d(0) = 9{,}05.$

$\Rightarrow$ Vào ngày thứ 171 thì thành phố X có nhiều giờ có ánh sáng nhất.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1)$, $B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 5 = 0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc mặt phẳng (P) có dạng là $ax + by + cz - 11 = 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $a + b = c$. **B** $a + b + c = 5$. (C) $a \in (b; c)$. (D) $a + b > c$.

Lời giải.

Vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_{(P)} = (1; -3; 2)$; $\overrightarrow{AB} = (-3; -3; 2)$.

Mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc mặt phẳng (P) có vec-tơ pháp tuyến là

$$\vec{n}_{(Q)} = [\vec{n}_{(P)}, \overrightarrow{AB}] = (0; -8; -12).$$

Khi đó phương trình mặt phẳng (Q): $0x + 2y + 3z - 11 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 5.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức New-tơn của $\left(2x^2 - \dfrac{3}{x}\right)^n$, $(x \ne 0)$, biết rằng $1 \cdot \mathrm{C}_n^1 + 2 \cdot \mathrm{C}_n^2 + 3 \cdot \mathrm{C}_n^3 + \ldots + n \cdot \mathrm{C}_n^n = 256n$, ($\mathrm{C}_n^k$ là tổ hợp chập k của n phần tử).

A 489888. (B) 49888. (C) 48988. (D) 4889888.

Lời giải.

Ta có $(x+1)^n = \mathrm{C}_n^0 + x\mathrm{C}_n^1 + x^2\mathrm{C}_n^2 + \ldots + x^n\mathrm{C}_n^n$.

Lấy đạo hàm hai vế được: $n(x+1)^{n-1} = \mathrm{C}_n^1 + 2x\mathrm{C}_n^2 + \ldots + nx^n\mathrm{C}_n^n$.

Thay $x = 1 \Rightarrow 2^{n-1} \cdot n = 1 \cdot \mathrm{C}_n^1 + 2 \cdot \mathrm{C}_n^2 + \ldots + n \cdot \mathrm{C}_n^n \Rightarrow 2^{n-1} \cdot n = 256n \Leftrightarrow n = 9$.

Khai triển $\left(2x^2 - \dfrac{3}{x}\right)^9 = \sum\limits_{k=0}^{9} \mathrm{C}_9^k \cdot 2^{9-k} \cdot (-3)^k \cdot x^{18-3k}$.

Hệ số không chứa x ứng với $18-3k=0 \Leftrightarrow k=6$.
Do đó số hạng không chứa x là $C_9^6 \cdot 2^3 \cdot (-3)^6 = 489888$.
Chọn đáp án A □

Câu 26. Cho phương trình $8^{x+1}+8\cdot(0{,}5)^{3x}+3\cdot 2^{x+3}=125-24\cdot(0{,}5)^x$. Khi đặt $t=2^x+\dfrac{1}{2^x}$, phương trình đã cho trở thành phương trình nào dưới đây?

(A) $8t^3-3t-12=0$.
(B) $8t^3+3t^2-t-10=0$.
(C) $8t^3-125=0$.
(D) $8t^3+t-36=0$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}&8^{x+1}+8\cdot(0{,}5)^{3x}+3\cdot 2^{x+3}=125-24\cdot(0{,}5)^x\\ \Leftrightarrow&8\left(2^{3x}+3\cdot 2^x+3\cdot\frac{1}{2^x}+\frac{1}{2^{3x}}\right)=125\\ \Leftrightarrow&8\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)^3=125\\ \Leftrightarrow&8t^3-125=0.\end{aligned}$$

với $t=2^x+\dfrac{1}{2^x}$
Chọn đáp án C □

Câu 27. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(-3;2)$, $B(1;1)$, $C(2;-4)$. Gọi $A'(x_1;y_1)$, $B'(x_2;y_2)$, $C'(x_3;y_3)$ lần lượt là ảnh của A, B, C qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k=-\dfrac{1}{3}$. Tính $S=x_1x_2x_3+y_1y_2y_3$.

(A) $S=1$.
(B) $S=-6$.
(C) $S=\dfrac{2}{3}$.
(D) $S=\dfrac{14}{27}$.

Lời giải.
Vì A' là ảnh của $A \Rightarrow \overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OA} \Rightarrow A'\left(1;-\dfrac{2}{3}\right)$; $B'\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$; $C'\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right)$.
Từ đó $S=x_1x_2x_3+y_1y_2y_3=\dfrac{14}{27}$.
Chọn đáp án D □

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+z-10=0$, điểm $A(1;3;2)$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=-2+2t\\ y=1+t\\ z=1-t\end{cases}$. Tìm phương trình đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm M và N sao cho A là trung điểm của cạnh MN.

(A) $\dfrac{x-6}{7}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z+3}{-1}$.
(B) $\dfrac{x+6}{7}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-3}{-1}$.
(C) $\dfrac{x-6}{7}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+3}{-1}$.
(D) $\dfrac{x+6}{7}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Lời giải.
Giả sử $M(x;y;z)$ và $N(-2+2t;1+t;1-t)$.
Vì $M\in(P)$ và A là trung điểm của MN nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}2x-y+z-10=0\\ x+2t-2=2\\ y+t+1=6\\ z-t+1=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y+z=10\\ x=4-2t\\ y=5-t\\ z=3+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(4-2t)-(5-t)+(3+t)=10\\ x=4-2t\\ y=5-t\\ z=3+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-2\\ x=8\\ y=7\\ z=1\end{cases}$$

$\Rightarrow M(8;7;1)$ và $N(-6;-1;3)$. Khi đó phương trình đường thẳng Δ: $\dfrac{x+6}{7}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Cho hàm số $y=\sqrt{1+3x-x^2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A $(y')^2+y\cdot y''=-1$.
B $(y')^2+2y\cdot y''=1$.
C $y\cdot y''-(y')^2=1$.
D $(y')^2+y\cdot y''=1$.

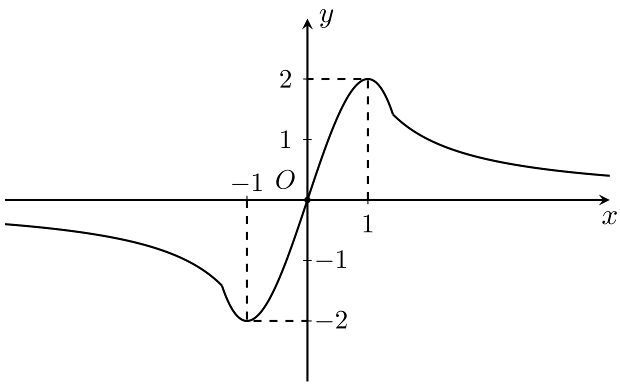
Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{-2x+3}{2\sqrt{1+3x-x^2}}\Rightarrow y''=\dfrac{-4\sqrt{1+3x-x^2}-\dfrac{(-2x+3)^2}{\sqrt{1+3x-x^2}}}{4(1+3x-x^2)}=\dfrac{-13}{4\sqrt{(1+3x-x^2)^3}}$.

$\Rightarrow (y')^2+y\cdot y''=-1$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới



Biết rằng trục hoành là tiệm cận ngang của đồ thị. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)=4^{m+2\log_4\sqrt{2}}$ có hai nghiệm phân biệt dương.

A $m>1$.
B $0<m<1$.
C $m<0$.
D $0<m<2$.

Lời giải.

Số nghiệm của phương trình $f(x)=4^{m+2\log_4\sqrt{2}}$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=4^{m+2\log_4\sqrt{2}}$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 4^{m+2\log_4\sqrt{2}}<2\Leftrightarrow 2m+4\log_4\sqrt{2}<1\Leftrightarrow m<0$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Giả sử a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $\displaystyle\int_0^4\frac{2x^2+4x+1}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^3(au^4+bu^2+c)\,\mathrm{d}u$, trong đó $u=\sqrt{2x+1}$. Tính giá trị $S=a+b+c$.

A $S=3$.
B $S=0$.
C $S=1$.
D $S=2$.

Lời giải.

Đặt $u=\sqrt{2x+1} \Rightarrow u^2=2x+1 \Rightarrow x=\dfrac{u^2-1}{2}$.

Đổi cận

x	0	4
u	1	3

Khi đó $\displaystyle\int\limits_0^4 \dfrac{2x^2+4x+1}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 \dfrac{2\left(\dfrac{u^2-1}{2}\right)^2+4\left(\dfrac{u^2-1}{2}\right)+1}{u}\cdot u\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2}\int\limits_1^3 (u^4+2u^2-1)\,\mathrm{d}u.$

$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow S=a+b+c=2.$

Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, trục hoành và đường thẳng $x=\mathrm{e}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A $S=\dfrac{\pi}{2}$. **B** $S=\dfrac{\pi}{3}$. **C** $S=\dfrac{\pi}{6}$. **D** $S=\pi$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của (H) với trục Ox là nghiệm phương trình $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=0 \Leftrightarrow x=1$.

Khi đó thể tích $V=\pi\displaystyle\int\limits_1^{\mathrm{e}} \dfrac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \pi\int\limits_1^{\mathrm{e}} \ln^2 x\,\mathrm{d}(\ln x) = \pi\cdot\dfrac{\ln^3 x}{3}\Big|_1^{\mathrm{e}} = \dfrac{\pi}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Một khối nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Kết quả tính diện tích toàn phần S_{tp} của khối nón đó có dạng bằng $\dfrac{\pi a^2}{4}(\sqrt{b}+c)$ với b và c là hai số nguyên dương và $b>1$. Tính $b\cdot c$.

A $b\cdot c=5$. **B** $b\cdot c=8$. **C** $b\cdot c=15$. **D** $b\cdot c=7$.

Lời giải.

Gọi S, O lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Khi đó khối nón có bán kính đáy là $R=\dfrac{A'B'}{2}=\dfrac{a}{2}$.

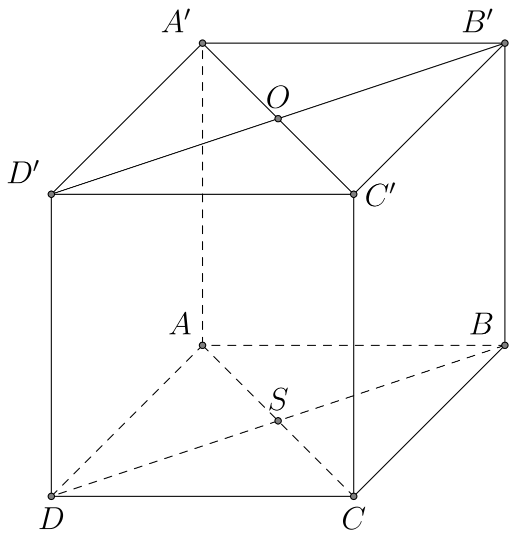
Chiều cao của khối nón $SO=AA'=a$.

Độ dài đường sinh của khối nón $l=\sqrt{R^2+h^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Diện tích toàn phần của khối nón

$S_{tp}=\pi Rl+\pi R^2=\dfrac{a^2\pi}{4}(\sqrt{5}+1)$

$\Rightarrow \begin{cases} b=5 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow b\cdot c=5.$



Chọn đáp án A □

Câu 34. Tập nghiệm của bất phương trình $2\cdot 7^{x+2}+7\cdot 2^{x+2}\leq 351\cdot\sqrt{14^x}$ có dạng là đoạn $S=[a;b]$. Giá trị $b-2a$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A $(3;\sqrt{10})$. **B** $(-4;2)$. **C** $(\sqrt{7};4\sqrt{10})$. **D** $\left(\dfrac{2}{9};\dfrac{49}{5}\right)$.

Lời giải.

Phương trình

$$\begin{aligned}&2\cdot 7^{x+2}+7\cdot 2^{x+2}\leq 351\cdot\sqrt{14^x}\\ \Leftrightarrow&98\cdot 7^x+28\cdot 2^x-351\cdot 7^{\frac{x}{2}}\cdot 2^{\frac{x}{2}}\leq 0\\ \Leftrightarrow&98\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^x+28-351\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{x}{2}}\leq 0\\ \Leftrightarrow&98\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^{2\cdot\frac{x}{2}}-351\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{x}{2}}+28\leq 0\\ \Leftrightarrow&\frac{4}{49}\leq\left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{x}{2}}\leq\frac{7}{2}\Leftrightarrow -4\leq x\leq 2\Rightarrow\begin{cases}a=-4\\ b=2\end{cases}\Rightarrow b-2a=10\in(\sqrt{7};4\sqrt{10}).\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 35. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $x+1=m\sqrt{2x^2+1}$ có hai nghiệm phân biệt.

A $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<m<\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **B** $m<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C** $m>\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **D** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<m<\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

Phương trình $x+1=m\sqrt{2x^2+1}\Leftrightarrow m=\dfrac{x+1}{\sqrt{2x^2+1}}$.

Xét hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{2x^2+1}}\Rightarrow y'=\dfrac{1-2x}{\sqrt{2x^2+1}}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{2}}{2}<m<\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Tìm giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^4-2(m^2+1)x^2+2$ có ba điểm cực trị sao cho giá trị cực tiểu đạt giá trị lớn nhất.

A $m=2$. **B** $m=0$. **C** $m=1$. **D** $m=2$.

Lời giải.

Ta có $y'=4x^3-4(m^2+1)x\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\sqrt{m^2+1}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{m^2+1}$		0		$\sqrt{m^2+1}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-m^4-2m^2+1$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-m^4-2m^2+1$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $y_{CT}=-m^4-2m^2+1=-(m^4+2m^2)+1\le 1$.

Giá trị lớn nhất của giá trị cực tiểu là $y_{CT}=1\Leftrightarrow m=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $f(0)=2017$, $f(2)=2018$. Tính $S=f(3)-f(-1)$.

A $S=1$. **B** $S=\ln 2$. **C** $S=\ln 4035$. **D** $S=4$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x=\ln|x-1|+C$.

$\Rightarrow f(0)=C=2017$ và $f(2)=C=2018\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln|x-1|+2017 & \text{nếu } x<1\\ \ln|x-1|+2018 & \text{nếu } x>1\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}f(3)=\ln 2+2018\\ f(-1)=\ln 2+2017\end{cases}\Rightarrow S=f(3)-f(-1)=1.$

Chọn đáp án A □

Câu 38. Cho A, B là hai điểm biểu diễn hình học số phức theo thứ tự z_0, z_1 khác 0 và thỏa mãn đẳng thức $z_0^2+z_1^2=z_0z_1$. Hỏi ba điểm O, A, B tạo thành tam giác gì (O là gốc tọa độ)? Chọn phương án đầy đủ nhất.

A Cân tại O. **B** Vuông cân tại O. **C** Đều. **D** Vuông tại O.

Lời giải.

Ta có $z_0^2+z_1^2=z_0z_1\Leftrightarrow\dfrac{z_0}{z_1}+\dfrac{z_1}{z_0}=1\Leftrightarrow\dfrac{z_0}{z_1}+\dfrac{1}{\frac{z_0}{z_1}}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{z_0}{z_1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\\ \dfrac{z_0}{z_1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\end{array}\right.$

$\Rightarrow\left|\dfrac{z_0}{z_1}\right|=1\Leftrightarrow|z_0|=|z_1|$ hay $OA=OB\Rightarrow\triangle OAB$ cân tại O.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho hàm số $f(x)=-x^3+2x^2-11x+\sin x$ và u, v là hai số thỏa mãn $u<v$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A $f(u)<f(3v\cdot\log e)$. **B** $f(u)>f(3v\cdot\log e)$.

C $f(u)=f(v)$. **D** Cả ba đáp án đều sai.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=-3x^2+4x-11+\cos x=-3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{29}{3}+\cos x<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Từ $u < v \Rightarrow u < 3v \cdot \log \mathrm{e} \Rightarrow f(u) > f(3v \cdot \log \mathrm{e})$.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Cho hàm số $y = \dfrac{\ln x - 4}{\ln x - 2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; \mathrm{e})$. Tìm số phần tử của S.

A 2. **B** 4. **C** 3. **D** 1.

Lời giải.

Đặt $t = \ln x$ với $x \in (1; \mathrm{e}) \Rightarrow t \in (0; 1)$.

Hàm số trở thành $y = \dfrac{t-4}{t-2m} \Rightarrow y' = \dfrac{-2m+4}{(t-2m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $(0; 1) \Leftrightarrow$ hàm số $y = \dfrac{t-4}{t-2m}$ đồng biến trên $(0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} -2m + 4 > 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2m \leq 0 \\ 2m \geq 1 \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow m \leq 0 \Rightarrow$ có một giá trị nguyên dương thỏa mãn $m = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 1; 0)$, $B(2; 2; 2)$, $C(-2; 3; 1)$ và đường thẳng $d : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng d để thể tích của tứ diện $MABC$ bằng 3.

A $M\left(-\dfrac{15}{2}; \dfrac{9}{4}; -\dfrac{11}{2}\right)$; $M\left(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{3}{4}; \dfrac{1}{2}\right)$.

B $M\left(-\dfrac{3}{5}; -\dfrac{3}{4}; \dfrac{1}{2}\right)$; $M\left(-\dfrac{15}{2}; \dfrac{9}{4}; \dfrac{11}{2}\right)$.

C $M\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{3}{4}; \dfrac{1}{2}\right)$; $M\left(\dfrac{15}{2}; \dfrac{9}{4}; \dfrac{11}{2}\right)$.

D $M\left(\dfrac{3}{5}; -\dfrac{3}{4}; \dfrac{1}{2}\right)$; $M\left(\dfrac{15}{2}; \dfrac{9}{4}; \dfrac{11}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 1; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; 2; 1)$, $\vec{n}_{(ABC)} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-3; -6; 6)$. Phương trình mặt phẳng $(ABC) : x + 2(y-1) - 2z = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2z - 2 = 0$. Dễ thấy tam giác ABC vuông tại A suy ra $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC = \dfrac{9}{2} \Rightarrow d(M, (ABC)) = \dfrac{3V_{M.ABC}}{S_{ABC}} = 2$.

$M \in d \Rightarrow M(2t+1; -t-2; 2t+3)$, $d(M, (ABC)) = \dfrac{|-4t-10|}{3} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{5}{4} \\ t = -\dfrac{17}{4} \end{array}\right.$.

Với $t = -\dfrac{5}{4} \Rightarrow M\left(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{3}{4}; \dfrac{1}{2}\right)$.

Với $t = -\dfrac{17}{4} \Rightarrow M\left(-\dfrac{15}{2}; \dfrac{9}{4}; -\dfrac{11}{2}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{khi } 0 < x < x_0 \\ x^2 + 12 & \text{khi } x \geq x_0 \end{cases}$. Biết rằng ta luôn tìm được một số dương x_0 và một số thực a để hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$. Tính giá trị $S = x_0 + a$.

A $2(3 - 2\sqrt{2})$. **B** $2(2 + 4\sqrt{2})$. **C** $2(3 - 4\sqrt{2})$. **D** $2(3 + 2\sqrt{2})$.

Lời giải.

Hàm số liên tục tại x_0 suy ra $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \Leftrightarrow a\sqrt{x_0} = x_0^2 + 12 \Leftrightarrow a = \dfrac{x_0^2 + 12}{\sqrt{x_0}}$.

Nếu $0 < x < x_0$ thì $f(x) = a\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{x}}$ (1).
Nếu $x \geq x_0$ thì $f(x) = x^2 + 12 \Rightarrow f'(x) = 2x$.
$\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{(x_0 + \Delta x)^2 + 12 - (x_0^2 + 12)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$.
$\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{a\sqrt{x_0 + \Delta x} - a\sqrt{x_0}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{a}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \dfrac{a}{2\sqrt{x_0}}$.
Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 suy ra $2x_0 = \dfrac{a}{2\sqrt{x_0}} \Leftrightarrow a = 4x_0\sqrt{x_0}$ (2). Khi đó, ta có

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{2\sqrt{x}} & \text{khi } 0 < x < x_0 \\ 2x_0 & \text{khi } x = x_0 \\ 2x & \text{khi } x > x_0 \end{cases}$$

và hàm số $f'(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$.
Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{x_0^2 + 12}{\sqrt{x_0}} = 4x_0\sqrt{x_0} \Leftrightarrow x_0 = 2, a = 8\sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + m = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (T) có chu vi bằng $4\pi\sqrt{3}$.

A 3. **B** 4. **C** 2. **D** 1.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3)$ và bán kính $R = 4$. Đường tròn (T) có chu vi bằng $4\pi\sqrt{3}$ cho nên có bán kính $r = 2\sqrt{3}$. Suy ra $d(I, P) = \sqrt{R^2 - r^2} = 2$. Ta có

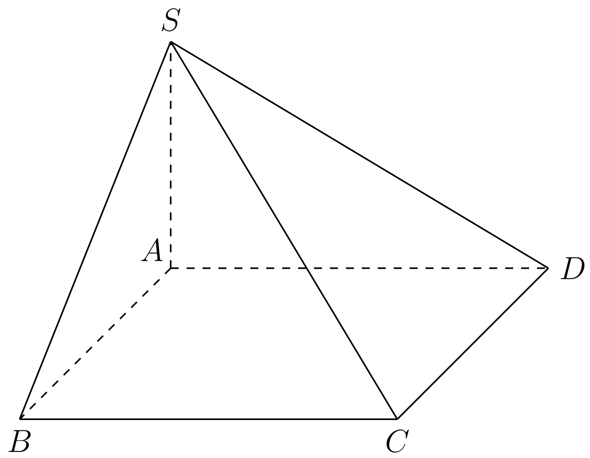
$$d(I, P) = \frac{|2 - 2 - 6 + m|}{3} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 12 \end{array}\right.$$

Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh $3a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng $30°$. Tính tỉ số $\dfrac{3V}{a^3}$ biết V là thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

A $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **C** $\sqrt{3}$. **D** $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc $(ABCD)$ suy ra $SA \perp (ABCD)$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với BC cho nên $\widehat{ABS} = 30°$, $SA = AB \tan 30° = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

$\dfrac{3V}{a^3} = \dfrac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = \left|\dfrac{z+i}{z}\right|$, với z là số phức khác 0 và $|z| \geq 2$. Tính $2M - m$.

A $2M - m = \dfrac{3}{2}$. **B** $2M - m = \dfrac{5}{2}$. **C** $2M - m = 10$. **D** $2M - m = 6$.

Lời giải.

Đặt $w = \dfrac{i}{z}$, $|z| \geq 2 \Rightarrow |w| \leq \dfrac{1}{2}$. $P = \left|\dfrac{i}{z} + 1\right| = |w+1|$.

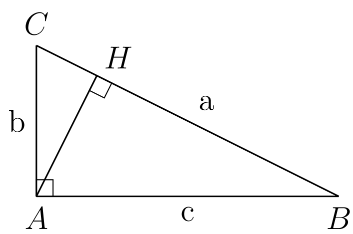
Ta có $1 - |w| \leq |w+1| \leq 1 + |w| \Rightarrow \dfrac{1}{2} \leq P \leq \dfrac{3}{2} \Rightarrow 2M - m = \dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho tam giác ABC vuông tại A, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $b < c$. Khi quay tam giác vuông ABC một vòng quanh cạnh BC, quanh cạnh AC, quanh cạnh AB, ta được các hình có diện tích toàn phần theo thứ tự bằng S_a, S_b, S_c. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $S_b > S_c > S_a$. **B** $S_b > S_a > S_c$. **C** $S_c > S_a > S_b$. **D** $S_a > S_c > S_b$.

Lời giải.



S_a bằng tổng diện tích xunh quanh của hình nón đường sinh AC, bán kính AH và diện tích xung quanh của hình nón đường sinh AB, bán kính AH, suy ra $S_a = \pi(b+c)AH = \dfrac{\pi(b+c)bc}{a}$.

S_b là diện tích toàn phần của hình nón đường sinh BC, bán kính AB cho nên $S_b = \pi c(a+c)$.

S_c là diện tích toàn phần của hình nón đường sinh BC, bán kính AC cho nên $S_c = \pi b(a+b)$.

Theo giả thiết $b < c < a$ suy ra $S_a < S_c < S_b$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Cho năm số a, b, c, d, e khác 0, theo thứ tự tạo thành một cấp số nhân. Biết $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{e}=10$ và tổng của chúng bằng 40. Tính giá trị của $|S|$ với $S=abcde$.

(A) $|S|=42$. (B) $|S|=62$. **(C) $|S|=32$.** (D) $|S|=52$.

Lời giải.

Gọi q là công bội của cấp số nhân, dãy số $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}, \dfrac{1}{d}, \dfrac{1}{e}$ là cấp số nhân công bội $\dfrac{1}{q}$.

$a+b+c+d+e=40 \Leftrightarrow \dfrac{a(q^5-1)}{q-1}=40 \quad (1)$.

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{e}=10 \Leftrightarrow \dfrac{\dfrac{1}{a}\left(\left(\dfrac{1}{q}\right)^5-1\right)}{\dfrac{1}{q}-1}=10 \Leftrightarrow \dfrac{q^5-1}{aq^4(q-1)}=10 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $aq^2=\pm 2$, $|S|=|abcde|=|a^5q^{10}|=32$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 48. Với giá trị lớn nhất của a bằng bao nhiêu để phương trình $a\sin^2 x+2\sin 2x+3a\cos^2 x=2$ có nghiệm?

(A) 2. (B) $\dfrac{11}{3}$. (C) 4. **(D) $\dfrac{8}{3}$.**

Lời giải.

$$\begin{aligned} a\sin^2 x+2\sin 2x+3a\cos^2 x=2 &\Leftrightarrow \frac{a(1-\cos 2x)}{2}+2\sin 2x+\frac{3a(1+\cos 2x)}{2}=2\\ &\Leftrightarrow a\cos 2x+2\sin 2x=2-2a \quad (1)\end{aligned}$$

Phương trình (1) có nghiệm khi $(2-2a)^2\le a^2+2^2 \Leftrightarrow 0\le a\le \dfrac{8}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=0$ và $u_{n+1}=u_n+4n+3$, $\forall n\ge 2$. Biết

$$\lim \frac{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{4n}}+\sqrt{u_{4^2n}}+\cdots+\sqrt{u_{4^{2018}n}}}{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{2n}}+\sqrt{u_{2^2n}}+\cdots+\sqrt{u_{2^{2018}n}}}=\frac{a^{2019}+b}{c}$$

với a, b, c là các số nguyên dương và $b<2019$. Tính giá trị $S=a+b-c$.

(A) -1. **(B) 0.** (C) 2017. (D) 2018.

Lời giải.

$u_n=(u_n-u_{n-1})+(u_{n-1}-u_{n-2})+\cdots+(u_2-u_1)=4(n-1+n-2+\cdots+1)+3(n-1)=2(n-1)n+3(n-1)=2n^2+n-3$.

Với mỗi $k\in \mathbf{S_1}=\{n; 4n; 4^2n; \ldots; 4^{2018}n\}$ và $k\in \mathbf{S_2}=\{n; 2n; 2^2n; \ldots; 2^{2018}n\}$.

Ta có $\sqrt{u_k}=\sqrt{2k^2+k-3}=\sqrt{2k^2+k-3}-\sqrt{2}k+\sqrt{2}k=\dfrac{k-3}{\sqrt{2k^2+k-3}+\sqrt{2}k}+\sqrt{2}k$

$$\begin{aligned}\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{4n}}+\sqrt{u_{4^2n}}+\cdots+\sqrt{u_{4^{2018}n}} &= \sum_{k\in \mathbf{S_1}} \frac{k-3}{\sqrt{2k^2+k-3}+\sqrt{2}k}+\sqrt{2}\sum_{k\in \mathbf{S_1}} k\\ &= M+\sqrt{2}n\left(1+4+4^2+\cdots+4^{2018}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= M + \frac{\sqrt{2}n\left(4^{2019}-1\right)}{3}\\
\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{2n}}+\sqrt{u_{2^2n}}+\cdots+\sqrt{u_{2^{2018}n}} &= \sum_{k\in\mathbf{S_2}}\frac{k-3}{\sqrt{2k^2+k-3}+\sqrt{2}k}+\sqrt{2}\sum_{k\in\mathbf{S_2}}k\\
&= N+\sqrt{2}n\left(1+2+2^2+\cdots+2^{2018}\right)\\
&= N+\sqrt{2}n\left(2^{2019}-1\right)
\end{aligned}
$$

$\lim\dfrac{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{4n}}+\sqrt{u_{4^2n}}+\cdots+\sqrt{u_{4^{2018}n}}}{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{2n}}+\sqrt{u_{2^2n}}+\cdots+\sqrt{u_{2^{2018}n}}}=\lim\dfrac{M+\dfrac{\sqrt{2}n\left(4^{2019}-1\right)}{3}}{N+\sqrt{2}n\left(2^{2019}-1\right)}=\dfrac{2^{2019}+1}{3}$

Chọn đáp án B □

Câu 50. Biết luôn có hai số a và b để $F(x)=\dfrac{ax+b}{x+4}$ $(4a-b\neq 0)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $2f^2(x)=(F(x)-1)\,f'(x)$. Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

A $a=1, b=4$. B $a=1, b=-1$. C $a=1, b\in\mathbb{R}\backslash\{4\}$. D $a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=F'(x)=\dfrac{4a-b}{(x+4)^2}$; $f'(x)=\dfrac{-2(4a-b)}{(x+4)^3}$.

Thay vào biểu thức, ta có

$$
\begin{aligned}
2f^2(x)=(F(x)-1)\,f'(x) &\Leftrightarrow 4a-b=-(a-1)x-b+4\\
&\Leftrightarrow (a-1)x+4(a-1)=0 \quad (1)
\end{aligned}
$$

(1) đúng với mọi $x\neq -4$ khi $a=1$, $4a-b\neq 0\Rightarrow b\neq 4$.

Chọn đáp án C □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. C	3. D	4. B	5. C	6. A	7. D	8. B	9. D	10. A
11. D	12. B	13. C	14. A	15. C	16. B	17. C	18. A	19. D	20. B
21. C	22. A	23. D	24. B	25. A	26. C	27. D	28. B	29. A	30. C
31. D	32. B	33. A	34. C	35. D	36. B	37. A	38. A	39. B	40. D
41. A	42. B	43. C	44. D	45. B	46. A	47. C	48. D	49. B	50. C

158 ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA LẦN 1, 2017 - 2018 TRƯỜNG THPT HAI BÀ TRƯNG, VĨNH PHÚC

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho $\log_5 2 = m, \log_3 5 = n$. Tính $A = \log_{25} 2000 + \log_9 675$ theo m, n.

(A) $A = 3 + 2m - n$. (B) $A = 3 + 2m + n$. (C) $A = 3 - 2m + n$. (D) $A = 3 - 2m - n$.

Câu 2. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

(A) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
(B) Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
(C) Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
(D) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Câu 3. Có bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị $(\mathscr{C}) : y = x^3 - 3x^2 + 2$ song song với đường thẳng $\Delta : y = 9x - 25$?

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 0.

Câu 4. Trong các khẳng định sau khẳng định nào **sai**?

(A) Không gian mẫu là tập tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử.
(B) Gọi $P(A)$ là xác suất của biến cố A ta luôn có $0 < P(A) \leq 1$.
(C) Biến cố là tập con của không gian mẫu.
(D) Phép thử ngẫu nhiên là phép thử mà ta không biết được chính xác kết quả của nó nhưng ta có thể biết được tập tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử.

Câu 5. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2-5x+6 = 0$. Tính giá trị của $A = 5^{x_1}+5^{x_2}$.

(A) $A = 125$. (B) $A = 3125$. (C) $A = 150$. (D) $A = 15625$.

Câu 6. Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 1000 được lập từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4$?

(A) 125. (B) 120. (C) 100. (D) 69.

Câu 7. Gọi $\mathscr{D}$ là tập tất cả các giá trị của x để $\log_3(2018 - x)$ có nghĩa. Tìm $\mathscr{D}$?

(A) $\mathscr{D} = [0; 2018]$. (B) $\mathscr{D} = (-\infty; 2018)$. (C) $\mathscr{D} = (-\infty; 2018]$. (D) $\mathscr{D} = (0; 2018)$.

Câu 8. Trong các hàm số sau hàm số nào đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$?

(A) $y = \cot x$. (B) $y = -\tan x$. (C) $y = \cos x$. (D) $y = \sin x$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(A) Hàm số có giá trị cực đại bằng 2.
(B) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
(C) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2) \cup (6; +\infty)$.
(D) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Câu 10. Thiết diện của một mặt phẳng với một tứ diện chỉ có thể là
(A) Một tứ giác hoặc một ngũ giác. (B) Một tam giác và một hình bình hành.
(C) Một tam giác hoặc một tứ giác. (D) Một tam giác hoặc một ngũ giác.

Câu 11. Phương trình $2\cos^2 x = 1$ có số nghiệm trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ là
(A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 8.

Câu 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ và đường tròn $(C'): x^2 + y^2 + 6x + 4y + 4 = 0$. Tìm tâm vị tự của hai đường tròn?
(A) $I(0; 1)$ và $J(3; 4)$. (B) $I(-1; -2)$ và $J(3; 2)$.
(C) $I(1; 2)$ và $J(-3; -2)$. (D) $I(1; 0)$ và $J(4; 3)$.

Câu 13. Tìm tập xác định của hàm số $y = (x - 1)^{\frac{1}{3}}$.
(A) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{1\}$. (B) $\mathscr{D} = (1; +\infty)$. (C) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. (D) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = \sin^2 3x$. Tính $f'(x)$?
(A) $f'(x) = 2\sin 6x$. (B) $f'(x) = 3\sin 6x$. (C) $f'(x) = 6\sin 6x$. (D) $f'(x) = -3\sin 6x$.

Câu 15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $\Delta: x + 2y - 6 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ' là ảnh của đường thẳng Δ qua phép quay tâm O góc $90°$.
(A) $2x - y + 6 = 0$. (B) $2x - y - 6 = 0$. (C) $2x + y + 6 = 0$. (D) $2x + y - 6 = 0$.

Câu 16. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Số mặt phẳng qua điểm S cách đều các điểm A, B, C, D là
(A) 4. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác vuông tại A, $BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 60°$. Gọi M là trung điểm BC. Biết $SA = SB = SM = \dfrac{a\sqrt{39}}{3}$. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) là
(A) $2a$. (B) $4a$. (C) $3a$. (D) a.

Câu 18. Trong các khẳng định sau khẳng định nào là đúng?
(A) Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ đều.
(B) Hình lăng trụ có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.
(C) Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.
(D) Hình lăng trụ tứ giác đều là hình lập phương.

Câu 19. Khối đa diện đều nào sau đây có số đỉnh nhiều nhất?
(A) Khối tứ diện đều. (B) Khối nhị thập diện đều.
(C) Khối bát diện đều. (D) Khối thập nhị diện đều.

Câu 20. Để chào mừng ngày nhà giáo Việt Nam $20 - 10$ Đoàn trường THPT Hai Bà Trưng đã phân công ba khối: khối 10, khối 11 và khối 12 mỗi khối chuẩn bị ba tiết mục gồm một tiết mục múa, một tiết mục kịch và một tiết mục hát tốp ca. Đến ngày tổ chức ban tổ chức chọn ngẫu nhiên ba tiết mục. Tính xác suất ba tiết mục được chọn có đủ cả ba khối và đủ cả ba nội dung.

A $\frac{1}{14}$. **B** $\frac{1}{84}$. **C** $\frac{1}{28}$. **D** $\frac{9}{56}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $C_9^3 = 84$.

Chọn ba tiết mục có đủ ba khối và ba nội dung có: $3.2.1 = 6$ cách. Vậy xác suất là $\frac{1}{14}$

Chọn đáp án A □

Câu 21. Cho a là một số thực dương. Viết biểu thức $P = a^{\frac{3}{5}}.\sqrt[3]{a^2}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ.

A $P = a^{\frac{1}{15}}$. **B** $P = a^{\frac{2}{5}}$. **C** $P = a^{-\frac{1}{15}}$. **D** $P = a^{\frac{19}{15}}$.

Câu 22. Tính $I = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2x - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1}$?

A $I = \frac{7}{8}$. **B** $I = \frac{3}{2}$. **C** $I = \frac{3}{8}$. **D** $I = \frac{3}{4}$.

Câu 23. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A 0. **B** 3. **C** 1. **D** 2.

Câu 24. Tìm m để đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.

A $m \in \left(-\infty; 3 - 3\sqrt{2}\right) \cup \left(3 + 3\sqrt{2}; +\infty\right)$.

B $m \in \left(-\infty; 4 - 2\sqrt{2}\right) \cup \left(4 + 2\sqrt{2}; +\infty\right)$.

C $m \in \left(-\infty; 1 - 2\sqrt{3}\right) \cup \left(1 + 2\sqrt{3}; +\infty\right)$.

D $m \in \left(-\infty; 3 - 2\sqrt{2}\right) \cup \left(3 + 2\sqrt{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{2x}{x+1} = x + m, \ (x \neq -1).$$

Biến đổi ta được phương trình $x^2 + (m-1)x + m = 0$. $(*)$

Dễ thấy $x = -1$ không là nghiệm của phương trình $(*)$. Nên đường thẳng và đồ thị cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt.

Có $\Delta = m^2 - 6m + 1.\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; 3 - 2\sqrt{2}\right) \cup \left(3 + 2\sqrt{2}; +\infty\right)$

Chọn đáp án D □

Câu 25. Trong các hàm số sau hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $y = \frac{x-2}{x+1}$. **B** $y = x^3 + 3x + 5$. **C** $y = x^4 + 2x^2 + 3$. **D** $y = \tan x$.

Câu 26. Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		x_4		x_5		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$ $\nearrow$		$+\infty \| +\infty$	$\searrow$	y_1	$\nearrow$		$\nearrow$	y_2	$\searrow$	y_3	$\nearrow$	$+\infty$

Ⓐ 4. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 5.

Câu 27. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$. Tính $f'(x)$?

Ⓐ $f'(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$. Ⓑ $f'(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2}$. Ⓒ $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$. Ⓓ $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$.

Câu 28. Hệ số của x^6 trong khai triển $(1-2x)^{10}$ thành đa thức là

Ⓐ -13440. Ⓑ -210. Ⓒ 210. Ⓓ 13440.

Câu 29. Trong các khẳng định sau khẳng định nào là đúng?

Ⓐ Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều các cạnh bên bằng nhau.

Ⓑ Hình chóp đều là hình chóp có chân đường cao hạ từ đỉnh xuống mặt đáy trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

Ⓒ Hình chóp đều là tứ diện đều.

Ⓓ Hình chóp đều là hình chóp có đáy là một đa giác đều.

Câu 30. Cho biết năm 2003, Việt Nam có 80902400 người và tỉ lệ tăng dân số là $1,47\%$. Hỏi năm 2018 Việt Nam sẽ có bao nhiêu người, nếu tỷ lệ tăng dân số hàng năm là không đổi?

Ⓐ 100861000. Ⓑ 102354624. Ⓒ 100699267. Ⓓ 100861016.

Lời giải.

Sử dụng công thức $N_k = N_0(1+a)^k$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 31. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x^2-4} & \text{nếu } x > 2 \\ x^2+ax+3b & \text{nếu } x < 2 \\ 2a+b-6 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$. Tính $I = a+b$?

Ⓐ $I = \dfrac{19}{30}$. Ⓑ $I = -\dfrac{93}{16}$. Ⓒ $I = \dfrac{19}{32}$. Ⓓ $I = -\dfrac{173}{16}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \dfrac{3}{16}$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2a+3b+4$.

Từ điều kiện hàm số liên tục tại $x = 2$ ta có hệ

$$\begin{cases} 2a+3b = -\dfrac{61}{16} \\ 2a+b = \dfrac{99}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{179}{32} \\ b = -5 \end{cases}.$$

Suy ra $a+b = \dfrac{19}{32}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Trong các khẳng đinh sau khẳng định nào đúng?

(A) Phương trình $\cos x = a$ có nghiệm với mọi số thực a.

(B) Phương trình $\tan x = a$ và phương trình $\cot x = a$ có nghiệm với mọi số thực a.

(C) Phương trình $\sin x = a$ có nghiệm với mọi số thực a.

(D) Cả ba đáp án trên đều sai.

Câu 33. Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số?

(A) 5040. (B) 4536. (C) 10000. (D) 9000.

Câu 34. Trong các khẳng định sau khẳng định nào là đúng?

(A) Khối đa diện đều loại $\{p; q\}$ là khối đa diện đều có p mặt, q đỉnh.

(B) Khối đa diện đều loại $\{p; q\}$ là khối đa diện lồi thỏa mãn mỗi mặt của nó là đa giác đều p cạnh và mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng q mặt.

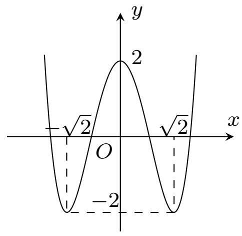
(C) Khối đa diện đều loại $\{p; q\}$ là khối đa diện đều có p cạnh, q mặt.

(D) Khối đa diện đều loại $\{p; q\}$ là khối đa diện lồi thỏa mãn mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng p mặt và mỗi mặt của nó là một đa giác đều q cạnh.

Câu 35. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số nào dưới đây?

(A) $y = -x^4 + 4x^2 + 2$. (B) $y = x^4 - 4x^2 - 2$.

(C) $y = x^4 - 4x^2 + 2$. (D) $y = x^4 + 4x^2 + 2$.



Câu 36. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

(A) 2. (B) 3. (C) 0. (D) 1.

Câu 37. Trong các hàm số sau hàm số nào tuần hoàn với chu kì π.

(A) $y = \sin 2x$. (B) $y = \tan 2x$. (C) $y = \cos x$. (D) $y = \cot \dfrac{x}{2}$.

Câu 38. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S = -\dfrac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (mét) là quãng đường vật chuyển động trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của chất điểm là bao nhiêu?

(A) 88 m/s. (B) 25 m/s. (C) 100 m/s. (D) 11 m/s.

Câu 39. Cắt hình chóp tứ giác bởi mặt phẳng vuông góc với đường cao của hình chóp thiết diện là hình gì?

(A) Một hình bình hành. (B) Một ngũ giác.

(C) Một hình tứ giác. (D) Một hình tam giác.

Câu 40. Cho hai đường thẳng song song d và d'. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

(A) Có đúng một phép tịnh tiến biến d thành d'.

B Có vô số phép tịnh tiến biến d thành d'.

C Phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}$ có giá vuông góc với đường thẳng d biến d thành d'.

D Cả ba khẳng định trên đều đúng.

Câu 41. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{2\cot x + 1}{\cot x + m}$ đồng biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$?

A $m \in (-\infty; -2)$.

B $m \in (-\infty; -1] \cup \left[0; \dfrac{1}{2}\right)$.

C $m \in (-2; +\infty)$.

D $m \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Đặt $t = \cot x$. Hàm số đã cho trở thành:

$$y = f(t) = \frac{2t+1}{t+m} \Rightarrow f'(t) = \frac{2m-1}{(t+m)^2}$$

Khi x tăng từ $\dfrac{\pi}{4}$ đến $\dfrac{\pi}{2}$ thì t giảm từ 1 về 0.

Vậy để hàm số đã cho đồng biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $f'(t) < 0, \forall t \in (0;1)$.

Suy ra $\begin{cases} 2m - 1 < 0 \\ -m \notin (0;1) \end{cases}$. Giải hệ điều kiện này ta được $\left[\begin{array}{l} 0 \le m < \dfrac{1}{2} \\ m \le -1 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Trên đường thẳng $y = 2x+1$ có bao nhiêu điểm kẻ được đến đồ thị $(\mathscr{C})$ hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-1}$ đúng một tiếp tuyến?

A 4. **B** 3. **C** 2. **D** 1.

Lời giải.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(\mathscr{C})$ tại điểm có hoành độ $x_0 \neq 1$ có dạng

$$y = \frac{-4}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0+3}{x_0-1}.$$

Tiếp tuyến đi qua điểm $A(a; 2a+1)$ của đường thẳng $y = 2x+1$ khi phương trình sau có nghiệm $x_0 \neq 1$

$$2a + 1 = \frac{-4}{(x_0-1)^2}(a - x_0) + \frac{x_0+3}{x_0-1}.$$

Biến đổi ta được phương trình

$$ax_0^2 - 2(a+2)x_0 + 3a + 2 = 0 \quad (*).$$

Để qua điểm A kẻ được đúng một tiếp tuyến đến đồ thị $(\mathscr{C})$ khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có đúng một nghiệm x_0 khác 1.

• TH1: Xét $a = 0$, khi đó phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x_0 = -1$.

• TH2: Xét $a \neq 0$, phương trình $(*)$ có nghiệm kép khi $\Delta' = 0 \Leftrightarrow -2a^2 + 2a + 4 = 0$. Phương trình có hai nghiệm $a = -1, a = 2$. Hai nghiệm kép tương ứng là $x_0 = -1, x_0 = 2$.

• TH3: Xét phương trình $(*)$ có nghiệm $x_0 = 1$, khi đó $a = 1$. Thử lại với $a = 1$, phương trình $(*)$ có hai nghiệm $x_0 = 1, x_0 = 5$.

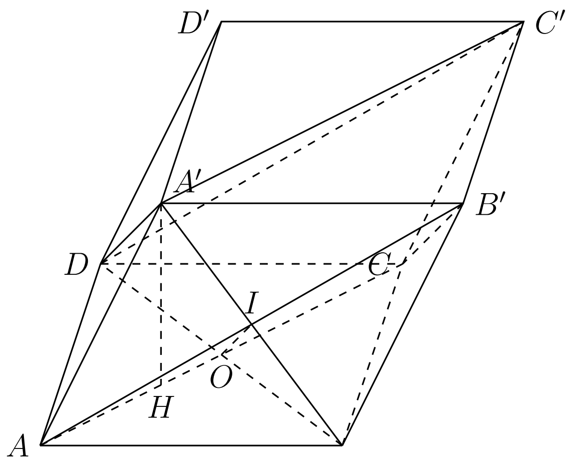
Vậy có tất cả 4 điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng 1 và các góc phẳng ở đỉnh A đều bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và $A'C'$.

A $\dfrac{\sqrt{22}}{11}$. B $\dfrac{2}{11}$. C $\dfrac{\sqrt{2}}{11}$. D $\dfrac{3}{11}$.

Lời giải.



Dễ thấy hai mặt phẳng (ACB') và $(DA'C')$ song song.
Nên khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và $A'C'$ bằng khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ACB').
Và bằng khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACB').
Lại có $d(B,(AOI)) = \dfrac{3V_{B.AOI}}{S_{\triangle AOI}}$.
Từ giả thiết suy ra $A'ABD$ là tứ diện đều cạnh bằng 1. nên thể tích là $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$.
Áp dụng công thức tỉ số thể tích ta được $V_{B.AOI} = \dfrac{1}{4}V_{B.ADA'} = \dfrac{\sqrt{2}}{48}$.
Tam giác AOI cân tại A có $AI = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, OI = \dfrac{1}{2}$. Gọi K là trung điểm OI ta tính được $AK = \dfrac{\sqrt{11}}{4}$ và là đường cao. Suy ra diện tích tam giác AOI bằng $\dfrac{\sqrt{11}}{16}$.
$d(B,(AOI)) = \dfrac{3V_{B.AOI}}{S_{\triangle AOI}} = \dfrac{\sqrt{22}}{11}$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Tổng các nghiệm của phương trình $2\cos 3x(2\cos 2x + 1) = 1$ trên đoạn $[-4\pi; 6\pi]$ là

A 61π. B 72π. C 50π. D 56π.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
2\cos 3x(2\cos 2x+1)=1 &\Leftrightarrow 4\cos 3x.\cos 2x + 1 + 2\cos 3x = 1\\
&\Leftrightarrow 2\cos x + 2\cos 3x + 2\cos 5x = 1\\
&\Leftrightarrow 2\sin x.\cos x + 2\cos 3x.\sin x + 2\cos 5x.\sin x = \sin x\\
&\Leftrightarrow \sin 2x + \sin 4x - \sin 2x + \sin 6x - \sin 4x = \sin x\\
&\Leftrightarrow \sin 6x = \sin x\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x = \pi + k2\pi\\ 6x = \pi - x + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k2\pi}{5}\\ x = \dfrac{\pi}{7} + \dfrac{k2\pi}{7}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Sử dụng điều kiện $-4\pi \le x \le 6\pi$.
• Với $x = \dfrac{k2\pi}{5}$ ta được $-4\pi \le \dfrac{k2\pi}{5} \le 6\pi \Rightarrow -10 \le k \le 15$, suy ra các $k \in \{-10; -9; ...; 14; 15\}$.
Tổng các nghiệm là 26π. (Bấm máy tính).

• Với $x = \dfrac{\pi}{7} + \dfrac{k2\pi}{7}$ ta được $-4\pi \leq \dfrac{\pi}{7} + \dfrac{k2\pi}{7} \leq 6\pi \Rightarrow -\dfrac{29}{2} \leq k \leq \dfrac{41}{2}$, suy ra các $k \in \{-14; -13; ...; 19; 20\}$.

Tổng các nghiệm là 35π. (Bấm máy tính).

• Vậy tổng các nghiệm là 61π.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60°$, $SA = 2$, $SB = 3$, $SC = 6$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $6\sqrt{2}$ (đvtt). B. $18\sqrt{2}$ (đvtt). C. $9\sqrt{2}$ (đvtt). D. $3\sqrt{2}$ (đvtt).

Lời giải.

Lấy các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt thuộc cạnh SA, SB, SC sao cho $SA_1 = SB_1 = SC_1 = 1$. Khi đó chóp $S.A_1B_1C_1$ là tứ diện đều cạnh bằng 1, ta tính được thể tích là $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

Áp dụng tỉ số thể tích cho hai khối chóp $S.ABC$ và $S.A_1B_1C_1$ ta được $V_{S.ABC} = 3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Hàm số $f(x) = |8x^4 - 8x^2 + 1|$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 1]$ tại bao nhiêu giá trị của x?

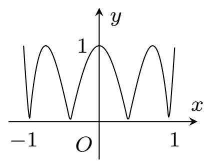
A. 3. B. 2. C. 5. D. 4.

Lời giải.

Xét hàm số $y = 8x^4 - 8x^2 + 1$ có $y' = 16x(2x^2 - 1)$.

Giải phương trình $y' = 0$ ta được các nghiệm $x = 0, x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vẽ đồ thị hàm số $f(x) = |8x^4 - 8x^2 + 1|$. Từ đồ thị ta có kết quả cần tìm.



Chọn đáp án C □

Câu 47. Gọi x, y là những số thực thỏa mãn $x^2 - xy + y^2 = 1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = \dfrac{x^4 + y^4 + 1}{x^2 + y^2 + 1}$. Giá trị của $\mathscr{A} = M + 15m$ là

A. $\mathscr{A} = 17 - 2\sqrt{6}$. B. $\mathscr{A} = 17 + \sqrt{6}$. C. $\mathscr{A} = 17 + 2\sqrt{6}$. D. $\mathscr{A} = 17 - \sqrt{6}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $1 = x^2 + y^2 - xy \geq xy \Rightarrow xy \leq 1$.

Lại có $1 = x^2 + y^2 - xy = (x + y)^2 - 3xy \leq -3xy \Rightarrow xy \geq -\dfrac{1}{3}$.

Đặt $t = xy$, điều kiện $-\dfrac{1}{3} \leq t \leq 1$. Khi đó ta có

$P = \dfrac{-t^2 + 2t + 2}{t + 2}$, với $-\dfrac{1}{3} \leq t \leq 1 \Rightarrow P' = \dfrac{-t^2 - 4t + 2}{(t + 2)^2}$.

Giải phương trình $P' = 0$, ta được hai nghiệm $t = -2 + \sqrt{6}$ (thỏa mãn), $t = -2 - \sqrt{6}$ (loại).

Từ đó ta tính được $M = P(-2 + \sqrt{6}) = 6 - 2\sqrt{6}$ và $m = P\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{11}{5}$.

Vậy $A = M + m = 17 - 2\sqrt{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Xét một bảng ô vuông 4×4 ô vuông. Người ta điền vào mỗi ô vuông đó một trong hai số 1 hoặc -1 sao cho tổng các số trong mỗi hàng và tổng các số trong mỗi cột đều bằng 0. Hỏi có bao nhiêu cách.

(A) 72. **B** 90. (C) 80. (D) 144.

Lời giải.

Do tổng số trên mỗi hàng và mỗi cột đều có tổng bằng không nên mỗi hàng có hai chữ số 1 và hai chữ số -1. Hàng thứ nhất có 6 cách điền:

$1, 1, -1, -1;\quad -1, 1, 1, -1;\quad -1, -1, 1, 1;$

$1, -1, -1, 1;\quad 1, -1, 1, -1;\quad -1, 1, -1, 1.$

Ứng với mỗi cách điền số ở hàng thứ nhất, ta có cách điền số ở hàng thứ hai, thứ ba, thứ tư như sau:

• TH1: Hàng hai có không có vị trí giống hàng thứ nhất thì có 1 cách điền hàng 2, tương ứng có 6 cách điền hàng 3 và 1 cách điền hàng thứ 4. Vậy có $6.1.6.1 = 36$ cách.

• TH2: Hàng hai có hai vị trí giống hàng thứ nhất thì có 4 cách điền, tương ứng có 2 cách điền hàng 3 và 1 cách điền hàng thứ 4. Vậy có $6.4.2.1 = 48$ cách.

• TH3: Hàng hai có bốn vị trí giống hàng thứ nhất thì có 1 cách điền, tương ứng có 1 cách điền hàng 3 và 1 cách điền hàng thứ 4. Vậy có $6.1.1.1 = 6$ cách.

• Vậy tất cả có $36 + 48 + 6 = 90$ cách.

Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Cho tứ diện $ABCD$, $M\ N$ lần lượt là trung điểm của AB và BC. P là điểm trên cạnh CD sao cho $CP = 2PD$. Mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q. Tính tỉ số $\dfrac{AQ}{QD}$.

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) 3. (C) $\dfrac{2}{3}$. **D** 2.

Câu 50. Tìm tất cả những giá trị của m để bất phương trình sau có nghiệm với mọi x thuộc tập xác định $\sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x} > m$.

(A) $m > \sqrt[4]{12} + 2\sqrt{3}$. (B) $m < 6 + 3\sqrt{2}$. (C) $m < \sqrt[4]{12} + 2\sqrt{3}$. **D** $m < 2\sqrt[4]{6} + 2\sqrt{6}$.

Lời giải.

Điều kiện: $0 \le x \le 6$.

Đặt vế trái của bất phương trình là $f(x),\ x \in [0; 6]$.

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt[4]{(2x)^3}} + \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{2\sqrt[4]{(6-x)^3}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}}\right),\ x \in (0; 6). \end{aligned}$$

Đặt $u(x) = \left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}\right)$, $v(x) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2x}} - \dfrac{1}{\sqrt{6-x}}\right)$.

Ta thấy $u(2) = v(2) = 0 \Rightarrow f'(2) = 0$. Hơn nữa $u(x), v(x)$ cùng dương trên khoảng $(0; 2)$ và cùng âm trên khoảng $(2; 6)$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0		2		6
y'	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$
y	$2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}$	$\nearrow$	$3\sqrt{2}+6$	$\searrow$	$\sqrt[4]{12}+2\sqrt{3}$

Suy ra các giá trị cần tìm của m là $m < 2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}$.

Chọn đáp án D □

——— **HẾT** ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. D	3. A	4. B	5. C	6. C	7. B	8. D	9. B	10. C
11. D	12. A	13. B	14. B	15. A	16. B	17. A	18. C	19. D	20. A
21. D	22. A	23. D	24. D	25. B	26. C	27. A	28. D	29. A	30. C
31. C	32. B	33. D	34. B	35. C	36. A	37. A	38. B	39. C	40. B
41. B	42. A	43. A	44. A	45. D	46. C	47. A	48. B	49. D	50. D

159 ĐỀ THI THỬ THPT QG - THPT LÝ TỰ TRỌNG - HÀ TĨNH - 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a;b]$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và các đường thẳng $x = a, x = b$. Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

(A) $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x$.
(B) $S = \int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\, \mathrm{d}x$.
(C) $S = \int\limits_a^b [g(x) - f(x)]\, \mathrm{d}x$.
(D) $S = \left| \int\limits_a^b f(x) - g(x)\, \mathrm{d}x \right|$.

Lời giải.
Vì $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a;b]$ nên $f(x) - g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a;b]$.
Vậy $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x = \left| \int\limits_a^b f(x) - g(x)\, \mathrm{d}x \right| = \int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\, \mathrm{d}x$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z thỏa mãn $z = 2 - i + \left(\frac{1}{3} - 2i\right)$.

(A) $\frac{7}{3}$ và $-3i$.
(B) $\frac{7}{3}$ và -3.
(C) $\frac{7}{3}$ và 2.
(D) $\frac{5}{3}$ và $\frac{1}{2}$.

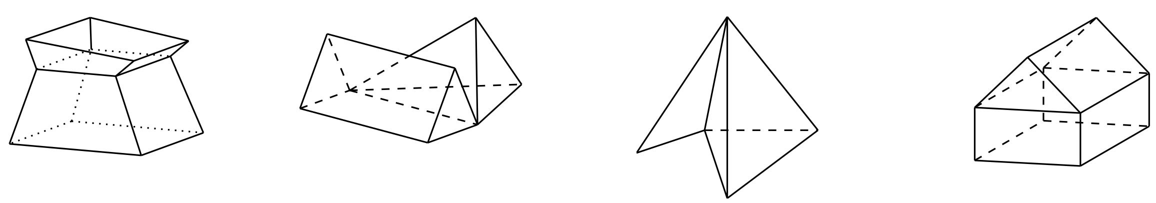
Lời giải.
Ta có $z = 2 - i + \left(\frac{1}{3} - 2i\right) = \frac{7}{3} - 3i$.
Vậy phần thực và phần ảo của số phức z lần lượt là $\frac{7}{3}$ và -3.
Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Tính $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 - x + 7)$.

(A) 5.
(B) 9.
(C) $+\infty$.
(D) 7.

Lời giải.
$\lim\limits_{x \to -1} (x^2 - x + 7) = (-1)^2 - (-1) + 7 = 9$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Cho các hình vẽ sau:



Số các hình đa diện trong các hình trên là

(A) 3.
(B) 0.
(C) 1.
(D) 2.

Lời giải.

Dựa vào các hình đã cho ta có số hình đa diện là 1.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{x} = 3\vec{j} - 2\vec{k} + \vec{i}$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{x}$.

A $\vec{x} = (1; -2; 3)$. **B** $\vec{x} = (3; -2; 1)$. **C** $\vec{x} = (1; 3; -2)$. **D** $\vec{x} = (1; 2; 3)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{x} = 3\vec{j} - 2\vec{k} + \vec{i} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow \vec{x} = (1; 3; -2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Gọi l, h, R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của khối trụ T. Thể tích V của khối trụ T là

A $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 l$. **B** $V = \pi R^2 h$. **C** $V = \dfrac{4}{3}\pi R^2 h$. **D** $V = 4\pi R^3$.

Lời giải.

Theo công thức tính thể tích khối trụ.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Số nghiệm thực của phương trình $2^{x^2} = 1$ là

A 2. **B** 1. **C** 3. **D** 0.

Lời giải.

Ta có $2^{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ là

A $y = f'(x_0)(x + x_0) + y_0$. **B** $y = f'(x_0)(x + x_0) - y_0$.

C $y = f'(x_0)(x - x_0) - y_0$. **D** $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

Lời giải.

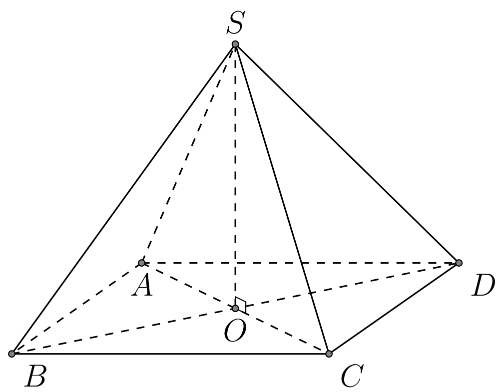
Phương trình tiếp tuyến của $(C): y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ là $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau và đáy $ABCD$ là hình vuông. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy là góc giữa cặp đường thẳng nào sau đây.

A SA và AC. **B** SA và SC. **C** SA và BD. **D** SA vàAB.

Lời giải.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD \Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow AC$ là hình chiếu của SA lên mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow \widehat{(SA,(ABCD))} = \widehat{(SA,AC)}$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Hàm số nào sau đây không có cực trị?

A $y = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$. **B** $y = 2x^2 - 3x + 2$.

C $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 2$. **D** $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 2$. Vì phương trình $y' = 0$ vô nghiệm nên hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ không có cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình của mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$, bán kính $R = \sqrt{2}$ là

A $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = \sqrt{2}$. **B** $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$.

C $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 2$. **D** $(x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 2$.

Lời giải.

Đúng dạng $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Cho số thực $a > 0, a \neq 1$. Giá trị $\log_{a^2} \sqrt[4]{a^3}$ bằng

A $\frac{5}{4}$. **B** $\frac{2}{3}$. **C** 2. **D** $\frac{3}{8}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{a^2} a^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Trong một lớp học có 20 học sinh nam và 17 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn 2 học sinh (1 nam và 1 nữ) tham gia đội cờ đỏ. Hỏi giáo viên chủ nhiệm đó có bao nhiêu cách chọn?

A 340. **B** 20. **C** 37. **D** 17.

Lời giải.

Giáo viên chủ nhiệm cần thực hiện thông qua 2 giai đoạn:

- Giai đoạn 1: Chọn học sinh nam có $C_{20}^1 = 20$ cách chọn.
- Giai đoạn 2: Chọn học sinh nữ có $C_{17}^1 = 17$ cách chọn.

Theo quy tắc nhân, có tất cả $20 \cdot 17 = 340$ cách chọn.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Cho hàm số $y = x^3 - (m+3)x^2 + (m^2+1)\,x + m + 5$ (1). Tổng các giá trị m nguyên để hàm số (1) có cực trị là

A 6. **B** 5. **C** 10. **D** 7.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 2\,(m+3)\,x + (m^2+1)$.

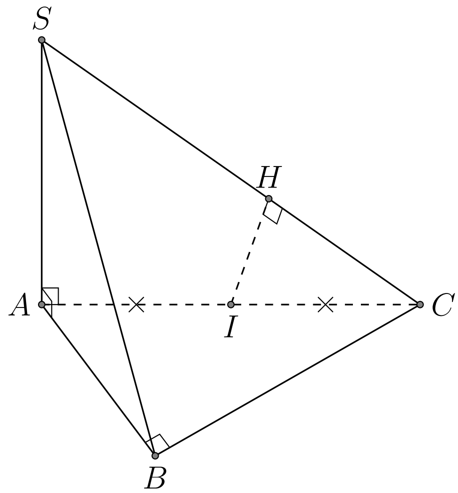
$\Delta'_{y'} = -m^2 + 3m + 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{21}}{2} < m < \frac{3+\sqrt{21}}{2}$.

Vậy $m = 0, m = 1, m = 2, m = 3$ thỏa yêu cầu đề bài. Tổng các giá trị nguyên của m bằng 6.
Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm của AC, H là hình chiếu của I trên SC. Kí hiệu $\mathrm{d}(a, b)$ là khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\mathrm{d}(BI, SC) = IH$.
(B) $\mathrm{d}(AB, SC) = BH$.
(C) $\mathrm{d}(SB, AC) = AB$.
(D) $\mathrm{d}(SA, BC) = AB$.

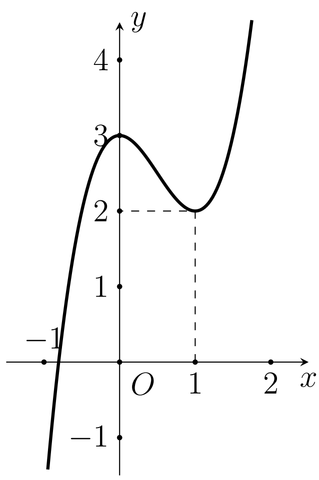
Lời giải.



Ta có $SA \perp BC$, $\begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow \mathrm{d}(SA, BC) = AB$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **sai**?



(A) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$.
(B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
(C) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(1; +\infty)$.
(D) Hàm số đạt cực trị tại các điểm $x = 0$ và $x = 1$.

Lời giải.

Quan sát hình vẽ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Quan sát bảng biến thiên thì câu sai là "Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(1; +\infty)$".

Chọn đáp án C □

Câu 17. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A. $y = \sin 2x$. B. $y = \cos x + \tan x$. **C.** $y = 3\cos x$. D. $y = \cos x + x$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = 3\cos x$. Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ là tập đối xứng. Hơn nữa $3\cos x = 3\cos(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = 3\cos x$ là hàm số chẵn.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho hàm số $y = (x^2+3)(x^2-5)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **đúng**?

A. (C) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

B. (C) cắt trục hoành tại một điểm.

C. (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

D. (C) không cắt trục hoành.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $(x^2+3)(x^2-5) = 0 \Leftrightarrow (x^2-5) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$.

Vì phương trình có 2 nghiệm phân biệt, nên đồ thị hàm số $y = (x^2+3)(x^2-5)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x(1+3x^3)$ là

A. $x^2(1+3x^2)+C$. B. $2x(x+x^3)+C$.

C. $x^2(x+x^3)+C$. **D.** $x^2\left(1+\dfrac{6x^3}{5}\right)+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int 2x(1+3x^3)\,\mathrm{d}x = \int (2x+6x^4)\,\mathrm{d}x = x^2 + \frac{6x^5}{5} + C = x^2\left(1+\frac{6x^3}{5}\right)+C$.

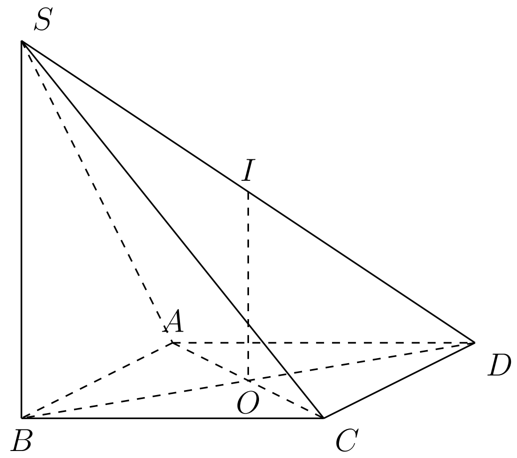
Chọn đáp án D □

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O, $SB \perp (ABCD)$. Gọi I là trung điểm của SD. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $CD \perp SC$.
(B) $IO \perp (ABCD)$.
(C) Tam giác SAD vuông ở A.
D (SBD) là mặt phẳng trung trực của đoạn AC.

Lời giải.

- Ta có $CD \perp BC, CD \perp SB \Rightarrow CD \perp SC$.
- IO là đường trung bình trong tam giác SBD nên $IO \parallel SB \Rightarrow IO \perp (ABCD)$.
- $AD \perp AB, AD \perp SB \Rightarrow AD \perp SA$. Vậy tam giác SAD vuông ở A.
- Giả sử (SBD) là mặt phẳng trung trực của đoạn AC thì $AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp BD$ (vô lý).



Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;0)$ và mặt phẳng (P) : $x-2y-3z+10=0$. Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) là

(A) $x-2y+3z+4=0$.
B $-x+2y+3z+4=0$.
(C) $x-2y-3z+4=0$.
(D) $x+2y-3z=0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (Q) có dạng: $x-2y-3z+m=0$ $(m \neq 10)$.
Vì (Q) đi qua điểm $A(2;-1;0)$ nên ta có $2+2+m=0 \Leftrightarrow m=-4$.
Vậy phương trình mặt phẳng (Q) là $x-2y-3z-4=0$ hay $-x+2y+3z+4=0$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$ $\searrow$		$2 \,\|\, -\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

(A) Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang.
(B) Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.
C Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng.

(D) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên, ta có:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow$ đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2x + \dfrac{1}{x}$ khi $x < 0$ là

(A) $2\sqrt{2}$. **B** $-2\sqrt{2}$. (C) Không tồn tại. (D) 4.

Lời giải.

Với $x < 0$, ta có $y = 2x + \dfrac{1}{x} = -\left[2(-x) + \dfrac{1}{-x}\right] \leq -2\sqrt{2(-x)\cdot\dfrac{1}{-x}} = -2\sqrt{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2x + \dfrac{1}{x}$ khi $x < 0$ là $-2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = ax + \dfrac{b}{x^2}$ $(x \neq 0)$. Biết $F(-1) = 1$, $F(1) = 4$, $f(1) = 0$. Giá trị của $M = 2a - b$ là

A $M = \dfrac{9}{2}$. (B) $M = 3$. (C) $M = \dfrac{3}{2}$. (D) $M = 0$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int\left(ax + \dfrac{b}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{ax^2}{2} - \dfrac{b}{x} + C$.

Theo giả thiết, ta có hệ phương trình $\begin{cases} F(-1) = 1 \\ F(1) = 4 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + C = 1 \\ a - b + C = 4 \\ a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Vậy $M = 2a - b = 3 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Với n là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{A}_n^2 - 2\mathrm{C}_{n+2}^2 + 82 = 0$, số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức $\left(x^3 - \dfrac{3}{x}\right)^n$ bằng

A $-15504\cdot 3^{15}$. (B) 15504. (C) $15504\cdot 3^{15}$. (D) -15504.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{A}_n^2 - 2\mathrm{C}_{n+2}^2 + 82 = 0 \Leftrightarrow n(n-1) - (n+2)(n+1) + 82 = 0 \Leftrightarrow n = 20$.

Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển $\left(x^3 - \dfrac{3}{x}\right)^{20}$ là

$$\mathrm{C}_{20}^k\left(x^3\right)^{20-k}\left(-\dfrac{3}{x}\right)^k = \mathrm{C}_{20}^k(-3)^k\cdot x^{60-4k}.$$

Số hạng này không chứa $x \Leftrightarrow 60 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 15$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^3 - \dfrac{3}{x}\right)^{20}$ là $\mathrm{C}_{20}^{15}(-3)^{15} = -15504\cdot 3^{15}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $|f(x)| = 3$ là

A 3. **B** 1. **C** 4. **D** 2.

Lời giải.

Ta có $|f(x)| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 3 \\ f(x) = -3. \end{array}\right.$

Từ bảng biến thiên, ta có

- Phương trình $f(x) = 3$ có 1 nghiệm.
- Phương trình $f(x) = -3$ có 3 nghiệm.

Vậy phương trình $|f(x)| = 3$ có 4 nghiệm

Chọn đáp án C □

Câu 27. Cho hàm số $y = \ln \dfrac{1}{x+2}$. Hệ thức nào sau đây đúng?

A $xy' - 1 = 2e^x$. **B** $xy' + 1 = 2e^y$. **C** $xy' + 1 = 2e^x$. **D** $xy' - 1 = 2e^y$.

Lời giải.

Ta có $y = \ln \dfrac{1}{x+2} = -\ln(x+2) \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{x+2}$.

Do đó, ta có $xy' + 1 = -\dfrac{x}{x+2} + 1 = \dfrac{2}{x+2} = 2e^{\ln \frac{1}{x+2}} = 2e^y$.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Cho $4^x + 4^{-x} = 14$, khi đó biểu thức $M = \dfrac{2 + 2^x + 2^{-x}}{7 - 2^x - 2^{-x}}$ có giá trị bằng

A $\dfrac{1}{2}$. **B** 3. **C** $\dfrac{3}{2}$. **D** 2.

Lời giải.

Ta có $4^x + 4^{-x} = 14 \Leftrightarrow (2^x + 2^{-x})^2 - 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} = 14 \Leftrightarrow (2^x + 2^{-x})^2 = 16 \Rightarrow 2^x + 2^{-x} = 4$.

Vậy $M = \dfrac{2 + 2^x + 2^{-x}}{7 - 2^x - 2^{-x}} = \dfrac{2+4}{7-4} = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Phương trình $\log_3(x+2) + \dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}(3 - 2x) - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$. Giá trị của biểu thức $A = 2x_1 + 3x_2$ là

A $A = \dfrac{13}{2}$. **B** $A = 0$. **C** $A = 6$. **D** $A = -\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình: $-2 < x < \frac{3}{2}\cdot$ Khi đó, ta có

$\log_3(x+2) + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}(3-2x) - 1 = 0 \Rightarrow (x+2)(3-2x) = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_1 = -\frac{3}{2} & \text{(thỏa mãn điều kiện)} \\ x_2 = 1 & \text{(thỏa mãn điều kiện).} \end{array}\right.$

Vậy $A = 2x_1 + 3x_2 = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-3x-7} > 3^{2x-21}$ là

A Vô số. B 6. C 7. D 8.

Lời giải.

Ta có $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-3x-7} > 3^{2x-21} \Leftrightarrow 2x^2 - x - 28 < 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < x < 4$.

Vậy số nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là 7.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Giá trị m nguyên lớn nhất để hàm số $y = x^3 + (3-2m)x^2 + \left(m - \frac{2}{3}\right)x + 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thuộc tập hợp nào sau đây?

A $[1;2)$. B $(-2;1]$. C $\left[1;\frac{3}{2}\right]$. D $(1;3)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 + 2(3-2m)x + m - \frac{2}{3}$.

Suy ra hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = (3-2m)^2 - 3\left(m - \frac{2}{3}\right) \leq 0 \Leftrightarrow$ $4m^2 - 15m + 11 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \frac{11}{4}\cdot$

Vậy giá trị m nguyên lớn nhất là 2.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho hình nón đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O và thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$. Thể tích V của khối nón là

A $V = \frac{1}{2}\pi a^3\sqrt{3}$. B $V = \frac{3}{2}\pi a^3$. C $V = \frac{1}{6}\pi a^3\sqrt{3}$. D $V = \frac{3}{8}\pi a^3$.

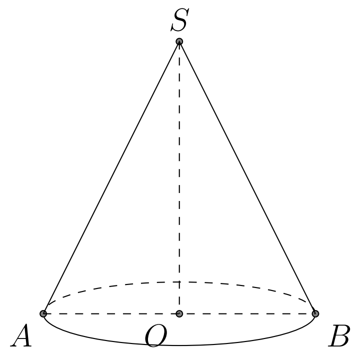
Lời giải.

Giả sử thiết diện qua trục SO của hình nón là tam giác đều SAB cạnh bằng $a\sqrt{3}$.

Bán kính đáy của hình nón là $r = OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot$

Chiều cao của hình nón là $h = SO = \frac{3a}{2}\cdot$

Vậy thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{3a^2}{4} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3}{8}\pi a^3$.



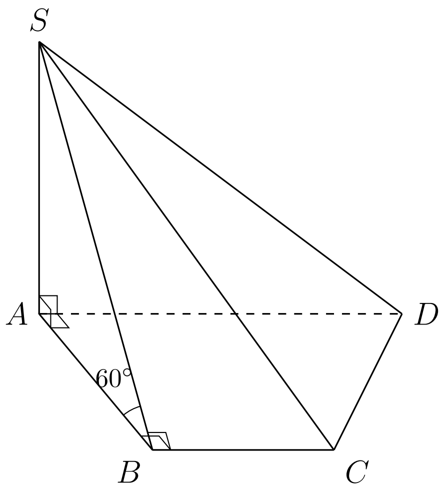
Chọn đáp án D □

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B biết $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy và mặt phẳng (SBC) hợp với đáy một góc 60°. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B** $V = a^3\sqrt{3}$. **C** $V = \dfrac{a^3}{2}$. **D** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ SA \perp (ABCD) \\ AB \perp BC. \end{cases}$



$\Rightarrow SB \perp BC$ (Định lí ba đường vuông góc).

$\Rightarrow \widehat{SBA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$. Do đó, ta có $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

Tam giác SAB vuông tại A có $\widehat{SBA} = 60^\circ$ nên

$$SA = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$$

$ABCD$ là hình thang vuông tại A và B nên có diện tích là

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC)AB = \frac{3a^2}{2}.$$

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 34. Biết rằng $\displaystyle\int_1^k \ln x \, dx = 1 + 2k$ $(k > 1)$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A $k \in (1; 4)$. **B** $k \in (6; 9)$. **C** $k \in (18; 21)$. **D** $k \in (11; 14)$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}\, dx \\ v = x. \end{cases}$

Suy ra $\displaystyle\int_1^k \ln x \, dx = x \ln x\Big|_1^k - \int_1^k dx = k \ln k - x\Big|_1^k = k \ln k - k + 1.$

Theo giả thiết, ta có $k \ln k - k + 1 = 1 + 2k \Leftrightarrow \ln k = 3 \Leftrightarrow k = e^3 \in (18; 21)$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3\sin^4 x + m\cos^2 x + 2 = 0$ có nghiệm trên đoạn $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$ là

A 3. **B** 5. **C** 4. **D** 2.

Lời giải.

Ta có $3\sin^4 x + m\cos^2 x + 2 = 0 \Leftrightarrow 3\sin^4 x - m\sin^2 x + m + 2 = 0$.
Đặt $t = \sin^2 x$, ta có $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right] \Rightarrow t \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.
Thay $t = \sin^2 x$ vào phương trình đã cho, ta được phương trình

$$3t^2 - mt + m + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{3t^2+2}{t-1} = m.$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{3t^2+2}{t-1}$ với $t \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.
Suy ra phương trình đã cho có nghiệm trên đoạn $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow \min\limits_{\left[0;\frac{1}{2}\right]} f(t) \le m \le \max\limits_{\left[0;\frac{1}{2}\right]} f(t)$.
Ta có $f'(t) = \dfrac{3t^2 - 6t - 2}{(t-1)^2} < 0,\ \forall t \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.
$\Rightarrow \min\limits_{\left[0;\frac{1}{2}\right]} f(t) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{11}{2}$ và $\max\limits_{\left[0;\frac{1}{2}\right]} f(t) = f(0) = -2 \Rightarrow -\dfrac{11}{2} \le m \le -2$.
Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình $3\sin^4 x + m\cos^2 x + 2 = 0$ có nghiệm trên đoạn $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$.
Chọn đáp án C □

Câu 36. Cần xếp 3 nam và 5 nữ vào một hàng ghế có 10 chỗ ngồi sao cho 3 nam ngồi kề nhau và 5 nữ ngồi kề nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp?

A 8640. **B** 1814400. **C** 1451520. **D** 4320.

Lời giải.
Gọi X là khối 3 nam ngồi kề nhau; Y là khối 5 nữ ngồi kề nhau.
Xếp hai khối X và Y vào 4 vị trí, có A_4^2 cách xếp. Sau đó, xếp 3 nam trong khối X, có $3!$ cách xếp. Cuối cùng, xếp 5 nữ trong khối Y, có $5!$ cách xếp.
Vậy theo quy tắc nhân, có $\mathrm{A}_4^2 \times 3! \times 5! = 8640$ (cách).
Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-2}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(-5;5)$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho tứ giác $OAMN$ là hình bình hành (O là gốc tọa độ).

A $m = 3$. **B** $m = 2 + \sqrt{5}$.
C $m = 2 + \sqrt{5}$, $m = 2 - \sqrt{5}$. **D** $m = 2 - \sqrt{5}$.

Lời giải.
Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y = \dfrac{3x-2}{x+1}$ và $y = -x + m$ là

$$\frac{3x-2}{x+1} = -x + m \Leftrightarrow x^2 + (4-m)x - 2 - m = 0 \quad (*).$$

Ta có $\Delta = (4-m)^2 - 4(-2-m) = m^2 - 4m + 24 = (m-2)^2 + 20 > 0$, với mọi m.
Suy ra đồ thị (C) luôn cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt $M(x_1; -x_1+m)$ và $N(x_2; -x_2+m)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $(*)$.
Ta có $OAMN$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{NM} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = -5 \quad (1)$.

Theo định lí Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 4 & (2) \\ x_1 x_2 = -2 - m & (3) \end{cases}$ Từ (1) & (2), ta được $x_1 = \dfrac{m-9}{2}$ và $x_2 = \dfrac{m+1}{2}$, thay vào (3), ta được

$$\frac{m-9}{2} \cdot \frac{m+1}{2} = -2 - m \Leftrightarrow m^2 - 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \pm \sqrt{5}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 38. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d = -2$ và $u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng của 50 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó là

A -2350. B -2200. C -2150. D -2250.

Lời giải.

Ta có $u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 + (u_1 + 3d)^2$
$= (u_1 - 2)^2 + (u_1 - 4)^2 + (u_1 - 6)^2$
$= 3u_1^2 - 24u_1 + 56$
$= 3(u_1 - 4)^2 + 8 \geq 8.$

Đẳng thức xảy ra khi $u_1 = 4$.

Suy ra $u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là 8, đạt được khi $u_1 = 4$.

Với $u_1 = 4 \Rightarrow u_{50} = u_1 + 49d = 4 - 98 = -94$.

Vậy Tổng của 50 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n) là

$$S_{50} = \frac{50(u_1 + u_{50})}{2} = 25(4 - 94) = -2250.$$

Chọn đáp án D □

Câu 39. Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_9(x+6) - \log_3\left(5 - \sqrt[4]{19-x}\right) < 0$ là

A -9. B -12. C 0. D -11.

Lời giải.

Ta có $\log_9(x+6) - \log_3\left(5 - \sqrt[4]{19-x}\right) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log_3(x+6) < \log_3\left(5 - \sqrt[4]{19-x}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6 < x \leq 19 \\ \sqrt{x+6} < 5 - \sqrt[4]{19-x} \end{cases}$$

Xét bất phương trình $\sqrt{x+6} < 5 - \sqrt[4]{19-x}$ với $-6 < x \leq 19$.

Ta có $\sqrt{x+6} < 5 - \sqrt[4]{19-x} \Leftrightarrow \sqrt{x+6} - 3 + \sqrt[4]{19-x} - 2 < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x+6}+3} + \frac{3-x}{\left(\sqrt[4]{19-x}+2\right)\left(\sqrt{19-x}+4\right)} < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{1}{\sqrt{x+6}+3} - \frac{1}{\left(\sqrt[4]{19-x}+2\right)\left(\sqrt{19-x}+4\right)}\right] < 0$$

$$\Leftrightarrow x < 3$$

$\left(\text{Vì } \dfrac{1}{\sqrt{x+6}+3} - \dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{19-x}+2\right)\left(\sqrt{19-x}+4\right)} \geq 0, \forall x \in (-6; 19]\right)$.

Suy ra bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = (-6; 3)$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là

$$T = -5 + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 = -12.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$. Khi đó giá trị của $M - m$ là

A $(\mathrm{e}^2 - 1)^2$. **B** $(\mathrm{e}^2 + 1)^2$. **C** $-(\mathrm{e}^2 + 1)^2$. **D** $-(\mathrm{e}^2 - 1)^2$.

Lời giải.

Hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[-1; 2]$.

Ta có $y' = 2\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x = 2(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^x \Leftrightarrow x = 0 \in (-1; 2)$.

Ta có $y(-1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2} - \dfrac{2}{\mathrm{e}} + 2$; $y(0) = 1$; $y(2) = \mathrm{e}^4 - 2\mathrm{e}^2 + 2$.

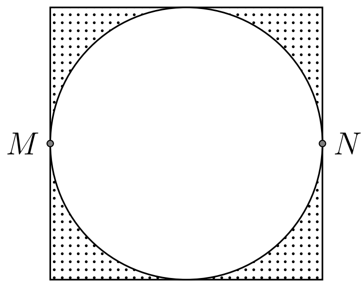
Suy ra $m = \min\limits_{[-1;2]} y = y(0) = 1$ và $M = \max\limits_{[-1;2]} y = y(2) = \mathrm{e}^4 - 2\mathrm{e}^2 + 2$.

Vậy $M - m = \mathrm{e}^4 - 2\mathrm{e}^2 + 1 = (\mathrm{e}^2 - 1)^2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41.

Cho đường tròn nội tiếp hình vuông cạnh $3a$ (như hình vẽ bên). Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi đường tròn và hình vuông (phần nằm bên ngoài đường tròn và bên trong hình vuông). Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay S quanh trục MN.



A $V = \dfrac{9\pi a^3}{2}$. **B** $V = \dfrac{9\pi a^3}{4}$. **C** $V = 9\pi a^3$. **D** $V = 27\pi a^3$.

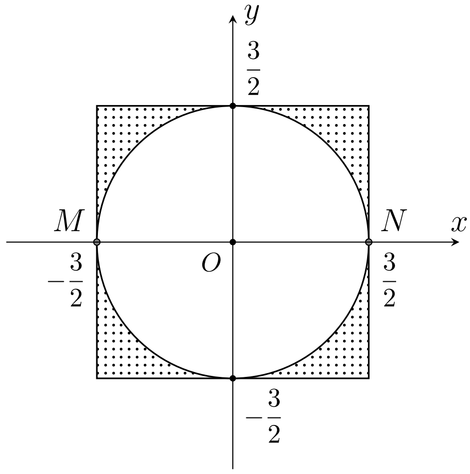
Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó, đường tròn tâm O, bán kính $R = \dfrac{3}{2}$ có phương trình là

$$x^2 + y^2 = \frac{9}{4}.$$

Từ đồ thị suy ra thể tích khối tròn xoay cần tính là

$$V = 2\pi a^3 \int\limits_0^{\frac{3}{2}} \left[\frac{9}{4} - \left(\frac{9}{4} - x^2\right)\right] \mathrm{d}x = \frac{9\pi a^3}{4}.$$



Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Ba xạ thủ A, B, C độc lập cùng bắn vào một mục tiêu. Xác suất bắn trúng của A, B, C tương ứng là 0,5; 0,6 và 0,7. Xác suất để có ít nhất một trong ba xạ thủ bắn trúng mục tiêu là

A 0,21. **B** 0,79. **C** 0,29. **D** 0,94.

Lời giải.

Gọi A là biến cố: "Xạ thủ A bắn trúng mục tiêu." $\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố: "Xạ thủ A không bắn trúng mục tiêu."

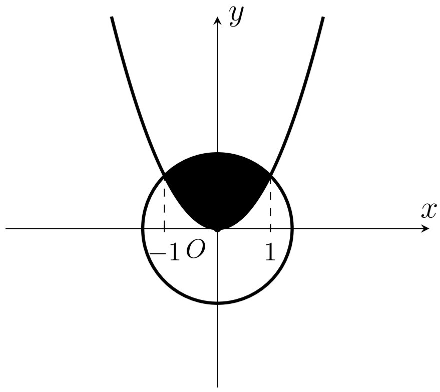
B là biến cố: "Xạ thủ B bắn trúng mục tiêu." $\Rightarrow \overline{B}$ là biến cố: "Xạ thủ B không bắn trúng mục

tiêu.”
C là biến cố: “Xạ thủ C bắn trúng mục tiêu.” $\Rightarrow \overline{C}$ là biến cố: “Xạ thủ C không bắn trúng mục tiêu.”
D là biến cố: “Có ít nhất một trong ba xạ thủ bắn trúng mục tiêu.” $\Rightarrow \overline{D}$ là biến cố: “Không có xạ thủ nào bắn trúng mục tiêu.”
Khi đó, ta có $\mathrm{P}(\overline{D}) = \mathrm{P}(\overline{A}) \cdot \mathrm{P}(\overline{B}) \cdot \mathrm{P}(\overline{C}) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$.
$\Rightarrow \mathrm{P}(D) = 1 - \mathrm{P}(\overline{D}) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$.
Chọn đáp án D □

Câu 43. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường tròn (C) có tâm là gốc tọa độ, bán kính $R = \sqrt{2}$. Diện tích của (H) bằng

A $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{6}$. **B** $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{3}$. **C** $\dfrac{\pi}{2} + 1$. **D** $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{6}$.

Lời giải.



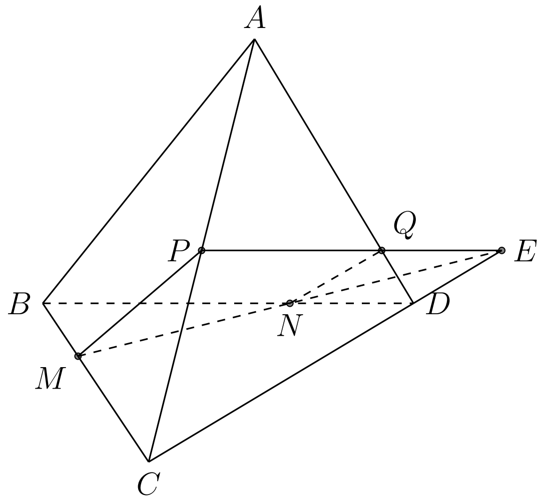
Phương trình đường tròn (C) là $x^2 + y^2 = 2$.
Tọa độ giao điểm của (P) và (C) là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$$
Từ đồ thị, diện tích hình phẳng (H) là
$$S = 2\int\limits_0^1 \left(\sqrt{2 - x^2} - x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, BD, AC sao cho $BC = 3BM$, $BD = \dfrac{3}{2}BN$, $AC = 2AP$. Mặt phẳng (MNP) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai phần có thể tích V_1, V_2. Tính tỉ số $k = \dfrac{V_1}{V_2}$.

A $k = \dfrac{26}{23}$. **B** $k = \dfrac{15}{19}$. **C** $k = \dfrac{1}{9}$. **D** $k = \dfrac{26}{19}$.

Lời giải.



Gọi E là giao điểm của MN và CD; Q là giao điểm của PE và AD.

Giả sử V_1 là thể tích của phần chứa điểm A; V_2 là thể tích của phần còn lại.

Ta có $\dfrac{V_{EDNQ}}{V_{ECMP}} = \dfrac{ED}{EC} \cdot \dfrac{EN}{EM} \cdot \dfrac{EQ}{EP} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{20}$.

$\Rightarrow V_{EDNQ} = \dfrac{1}{20} V_{ECMP} \Rightarrow V_2 = 19V_{EDNQ}$.

Gọi h là chiều cao hạ từ A của tứ diện $ABCD$. Ta có

$\dfrac{V_{ABCD}}{V_{EDNQ}} = \dfrac{S_{BCD} \cdot h}{S_{END} \cdot \dfrac{1}{5} h} = \dfrac{\dfrac{9}{2} S_{BMN}}{S_{END}} \cdot 5 = \dfrac{9}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 45.$

$\Rightarrow V_{ABCD} = 45V_{EDNQ} \Rightarrow \dfrac{V_{ABCD}}{V_2} = \dfrac{45}{19}$

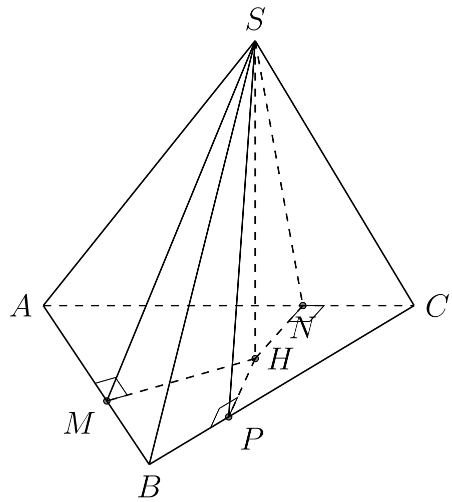
Vậy $k = \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{26}{19}$.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $3a$. Các mặt bên (SAB), (SAC), (SBC) lần lượt tạo với đáy các góc 30°, 45°, 60°. Biết hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) nằm bên trong tam giác ABC. Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là

A $V = \dfrac{27a^3\sqrt{3}}{4\left(4+\sqrt{3}\right)}$. **B** $V = \dfrac{27a^3\sqrt{3}}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}$. **C** $V = \dfrac{27a^3\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$. **D** $V = \dfrac{27a^3\sqrt{3}}{8\left(4+\sqrt{3}\right)}$.

Lời giải.



Kẻ $SH \perp (ABC)$ tại H.

Kẻ $HM \perp AB$; $HN \perp AC$, $HP \perp BC$. Ta có $\widehat{SMH} = 30^\circ$, $\widehat{SNH} = 45^\circ$, $\widehat{SPH} = 60^\circ$.

Đặt $SH = x$, ta có:

- Tam giác SHM vuông tại H có $\widehat{SMH} = 30^\circ$
  $\Rightarrow HM = \dfrac{SH}{\tan 30^\circ} = x\sqrt{3}$.
- Tam giác SHN vuông tại H có $\widehat{SMN} = 45^\circ$
  $\Rightarrow HN = SH = x$.
- Tam giác SHP vuông tại H có $\widehat{SMP} = 60^\circ$
  $\Rightarrow HP = \dfrac{SH}{\tan 60^\circ} = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$.

Mà $S_{ABC} = S_{HAB} + S_{HBC} + S_{HCA} \Leftrightarrow x\sqrt{3} + x + \dfrac{x\sqrt{3}}{3} = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{9a\sqrt{3}}{2\left(3+4\sqrt{3}\right)}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{9a\sqrt{3}}{2\left(3+4\sqrt{3}\right)} \cdot \frac{9a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{81a^3}{8\left(3+4\sqrt{3}\right)} = \frac{27a^3\sqrt{3}}{8\left(4+\sqrt{3}\right)}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-4;6;-5)$, $B(6;-4;7)$ và mặt phẳng $(P): x+2y+z-10=0$. Điểm $M(x;y;z)$ trên (P) sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất. Tổng

$x - 2y + 3z$ là

(A) 0. (B) 2. (C) 4. (D) 7.

Lời giải.

Gọi $I(1;1;1)$ là trung điểm của AB khi đó dù M, A, B có thẳng hàng hay không ta đều có $MI^2 = \dfrac{MA^2 + MB^2}{2} - \dfrac{AB^2}{4} \Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$.

Vậy $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất khi MI^2 nhỏ nhất, hay M là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P).

Phương trình đường thẳng d đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) là: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Vậy M là giao điểm của d và (P) nên tọa độ là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x + 2y + z - 10 = 0 \\ x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$

$\Rightarrow (1+t) + 2(1+2t) + (1+t) - 10 = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

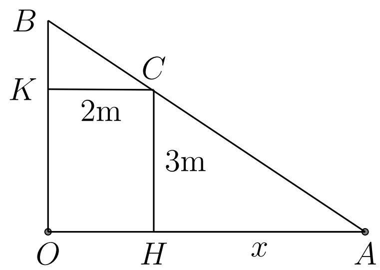
$\Rightarrow M(2;3;2) \Rightarrow x - 2y + 3z = 2 - 2\cdot 3 + 3 \cdot 2 = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Ông A cần sản xuất một cái thang để trèo qua một bức tường nhà. Ông muốn cái thang phải luôn đi qua vị trí điểm C, biết rằng điểm C cao 3m so với nền nhà và điểm C cách tường nhà 2m. Giả sử kinh phí sản xuất thang là 500000 đồng/1m dài. Hỏi ông cần ít nhất bao nhiêu tiền để sản xuất cái thang đó? *(Kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng).*

(A) 3512000 đồng. (B) 4755000 đồng. (C) 2750000 đồng. (D) 3115000 đồng.

Lời giải.



Đặt $AH = x \Rightarrow AC = \sqrt{x^2 + 9}$.

Vì $\Delta AOB \backsim \Delta AHC$ nên $AB = \dfrac{AO \cdot AC}{AH} = \dfrac{(x+2)\sqrt{x^2+9}}{x}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{(x+2)\sqrt{x^2+9}}{x}$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{x^3 - 18}{x^2\sqrt{x^2+9}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{18}$.

x	0	$\sqrt[3]{18}$	$+\infty$
$f'(x)$	$\|$ $-$	0	$+$
$f(x)$	$\|$ $+\infty$	$\dfrac{(\sqrt[3]{18}+2)\sqrt{(\sqrt[3]{18})^2+9}}{\sqrt[3]{18}}$	$+\infty$

Suy chiều dài tối thiểu của thang là $\dfrac{(\sqrt[3]{18}+2)\sqrt{(\sqrt[3]{18})^2+9}}{\sqrt[3]{18}} \approx 7.024$m. Do đó số tiền ít nhất để ông A sản xuất cái thang là $7.024 \cdot 500000 \approx 3512000$ đồng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;3;5)$, $B(2;4;3)$. Điểm M di động trên đường thẳng AB và N là điểm thuộc tia OM sao cho tích $OM \cdot ON = 6$. Biết rằng điểm N thuộc một đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

(A) $R = \dfrac{\sqrt{29}}{3}$. **B** $R = \dfrac{3\sqrt{29}}{29}$. (C) $R = \dfrac{6\sqrt{29}}{29}$. (D) $R = \dfrac{2\sqrt{29}}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1;1;-2), \overrightarrow{OB} = (2;4;3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Rightarrow AB \perp OB$. Vậy B là hình chiếu của O lên AB. Gọi K là điểm thuộc tia OB sao cho $OB \cdot OK = OM \cdot ON = 6 \Rightarrow K$ cố định và $MNKB$ nội tiếp. Vậy $\widehat{ONK} = \widehat{KBM} = 90°$ mà $N \in (O, AB) \Rightarrow N$ thuộc đường tròn đường kính OK cố định $R = \dfrac{OK}{2} = \dfrac{3}{OB} = \dfrac{3\sqrt{29}}{29}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Bố Nam gửi 15000 USD vào trong ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,73% một tháng để dành cho Nam học đại học. Nếu cuối mỗi tháng kể từ ngày gửi Nam rút ra đều đặn 300USD (trừ tháng cuối) thì sau bao nhiêu tháng số tiền để dành cho Nam sẽ được rút hết? *(tháng cuối là tháng mà số tiền còn trong ngân hàng không vượt 300 USD và khi đó Nam rút hết toàn bộ số tiền còn lại).*

A 63 tháng. (B) 62 tháng. (C) 71 tháng. (D) 55 tháng.

Lời giải.

Gọi A_n là số tiền còn lại sau khi Nam rút đến tháng thứ n, A là số tiền gửi vào, r là lãi suất hàng tháng, và X là số tiền rút ra hàng tháng.

Ta có

$$\begin{aligned}
&A_1 = A(1+r) - X.\\
&A_2 = A(1+r)^2 - X((1+r)+1).\\
&A_3 = A(1+r)^3 - X((1+r)^2 + (1+r) + 1).\\
&\ldots\\
&A_n = A(1+r)^n - X((1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \cdots + (1+r) + 1)
\end{aligned}$$

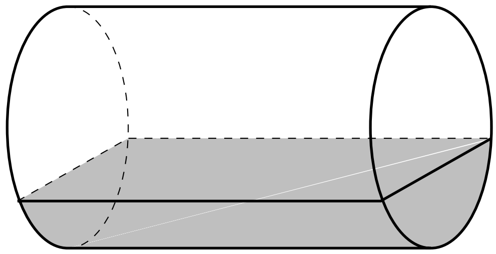
Vậy $A_n = A(1+r)^n - X\dfrac{(1+r)^n - 1}{r} \Rightarrow n = \log_{1+r} \dfrac{A_n r - X}{Ar - X}$.

Áp dụng vào bài toán ta có $n = \log_{1+0,73\%} \dfrac{-300}{15000 \cdot 0,73\% - 300} \approx 62,43641729$.

Vậy $n = 63$ tháng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 50.

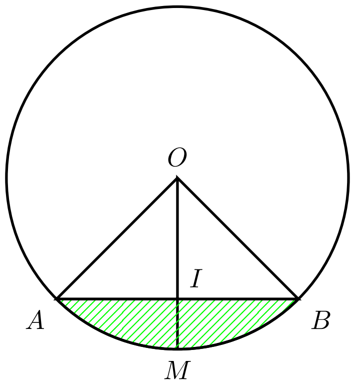


Một bồn nước có dạng hình trụ, chiều cao 2 m, bán kính đáy là $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ m được đặt nằm ngang trên mặt sàn bằng phẳng. Hỏi khi chiều cao mực nước trong bồn là $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ m thì thể tích nước trong bồn là bao nhiêu? *(Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).*

A 197,01 lít. **B** 200,70 lít.

C 285,40 lít. **D** 512,80 lít.

Lời giải.



Ta có $OI = OM - IM = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\cos \widehat{AOI} = \dfrac{OI}{OA} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{AOI} = 45^\circ$.

$S_{\triangle OAB} = \dfrac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \dfrac{1}{4}$.

Diện tích hình tròn $S_0 = \pi R^2 = \dfrac{\pi}{2}$.

Diện tích phần gạch chéo trên hình vẽ $S_1 = \dfrac{1}{4} S_0 - S_{\triangle OAB} = \dfrac{\pi - 2}{8}$.

Do đó $\dfrac{S_1}{S_0} = \dfrac{\pi - 2}{4\pi}$.

Thể tích hình trụ $V_0 = \pi R^2 h = \pi$ (m^3).

Gọi thể tích nước trong bồn là V_1. Ta có $\dfrac{V_1}{V_0} = \dfrac{S_1}{S_0}$. Vậy

$$V_1 = \frac{\pi - 2}{4\pi} \cdot \pi = \frac{\pi - 2}{4} \ (\mathrm{m}^3) \approx 285{,}40 \text{ (lít)}.$$

Chọn đáp án C □

——— HẾT ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. B	3. B	4. C	5. C	6. B	7. B	8. D	9. A	10. A
11. C	12. D	13. A	14. A	15. D	16. C	17. C	18. A	19. D	20. D
21. B	22. C	23. B	24. A	25. A	26. C	27. B	28. D	29. B	30. C
31. D	32. D	33. A	34. C	35. C	36. A	37. C	38. D	39. B	40. A
41. B	42. D	43. B	44. D	45. D	46. B	47. A	48. B	49. A	50. C

160 ĐỀ THI KHẢO SÁT TOÁN 12 LẦN 2 NĂM 2017 - 2018 TRƯỜNG THPT PHAN CHU TRINH, ĐẮK LẮK

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

(A) Hàm số có đúng một cực trị.

(B) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

(C) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng 1.

D Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

- Dấu của y' đổi từ dương sang âm khi qua điểm $x = 0$ (tính từ trái sang phải) nên hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và giá trị cực đại của hàm số bằng 0.
- Dấu của y' đổi từ âm sang dương khi qua điểm $x = 1$ (tính từ trái sang phải) nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Phần ảo của số phức $z = 2 - 3i$ là

(A) $-3i$. (B) 3. **C** -3. (D) $3i$.

Lời giải.

Phần thực của z bằng 2 và phần ảo của z bằng -3.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Tính giới hạn $\lim \dfrac{2n-3}{2n^2+3n+1}$.

(A) $-\infty$. **B** 0. (C) $+\infty$. (D) 1.

Lời giải.

$$\lim \frac{2n-3}{2n^2+3n+1} = \lim \frac{n^2\left(\dfrac{2}{n} - \dfrac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(2 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)} = \lim \frac{\dfrac{2}{n} - \dfrac{3}{n^2}}{2 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2}} = 0.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Thể tích V của khối lăng trụ có chiều cao h và diện tích đáy bằng B là

A $V = Bh$. **B** $V = \frac{1}{3}Bh$. **C** $V = \frac{1}{2}Bh$. **D** $V = \frac{1}{6}Bh$.

Lời giải.

Thể tích của khối lăng trụ có chiều cao h và diện tích đáy bằng B là $V = Bh$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $\mathrm{C}_n^k = \frac{k!}{n!(n-k)!}$. **B** $\mathrm{C}_n^k = \frac{k!}{(n-k)!}$. **C** $\mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. **D** $\mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Lời giải.

Quy ước $0! = 1$.

Số tổ hợp chập k của n phần tử $(0 \le k \le n;\ k, n \in \mathbb{N})$ là $\mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử $(0 \le k \le n;\ k, n \in \mathbb{N})$ là $\mathrm{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6.

Cho bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

A Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

B Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.

C Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

D Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có các kết luận sau:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$, $(2; +\infty)$.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.
- Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và giá trị cực đại của hàm số bằng 3.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và giá trị cực tiểu của hàm số bằng 0.

Do đó, xét hàm số trên khoảng $(0; 3)$ thì hàm số đồng biến trên các khoảng $(0; 1)$, $(2; 3)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (với $a < b$) cho bởi công thức nào sau đây?

A $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B** $S = \pi\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

C $S = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **D** $S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo định nghĩa diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (với $a < b$) được cho bởi công thức $S = \int\limits_a^b |f(x)|\, dx$.

Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 8. Tính tích phân $I = \int\limits_1^{e} x \ln x \, dx$.

(A) $I = \dfrac{1}{2}$. (B) $I = \dfrac{e^2 - 2}{2}$. (C) $I = \dfrac{e^4 + 1}{4}$. (D) $I = \dfrac{e^2 - 1}{4}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}\, dx \\ v = \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$

Khi đó

$$I = \left.\frac{x^2 \ln x}{2}\right|_1^{e} - \frac{1}{2}\int\limits_1^{e} x\, dx = \left.\frac{x^2 \ln x}{2}\right|_1^{e} - \left.\frac{x^2}{4}\right|_1^{e} = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^4 + 1}{4}.$$

Chọn đáp án (C) $\square$

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, tìm một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 3z - 1 = 0$.

(A) $\vec{n}_1 = (2; -1; 3)$. (B) $\vec{n}_2 = (2; -1; -1)$. (C) $\vec{n}_3 = (-1; 3; -1)$. (D) $\vec{n}_4 = (2; -1; -3)$.

Lời giải.

Hệ số của x, y, z tương ứng là 2, -1, 3 nên véc-tơ $\vec{n}_1 = (2; -1; 3)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 3z - 1 = 0$.

Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 10. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = 2^x$. (B) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$. (C) $y = \left(\sqrt{\pi}\right)^x$. (D) $y = e^x$.

Lời giải.

Tập xác định của các hàm số đã cho đều là $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ có đạo hàm $y' = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x \ln \dfrac{1}{3} = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^x \ln 3 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = 2^x$ có đạo hàm $y' = 2^x \ln 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = 2^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

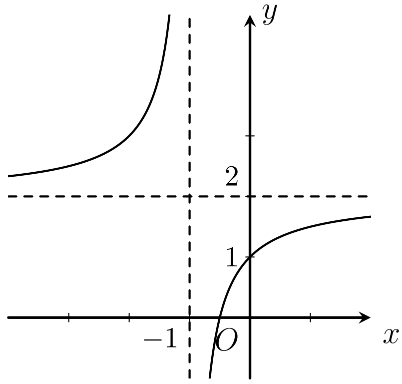
Hàm số $y = e^x$ có đạo hàm $y' = e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = e^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = \left(\sqrt{\pi}\right)^x$ có đạo hàm $y' = \left(\sqrt{\pi}\right)^x \ln \sqrt{\pi} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = \left(\sqrt{\pi}\right)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B) $\square$

Câu 11.

Đồ thị ở hình vẽ bên là của hàm số nào sau đây?



A $y = \dfrac{x+3}{1-x}$. **B** $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

C $y = \dfrac{x+2}{x+1}$. **D** $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ có:

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Đạo hàm $y' = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathscr{D}$. Cho nên hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ luôn đồng biến trên các khoảng xác định của nó.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.
  $\lim\limits_{x\to-1^-} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^+} y = -\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Tìm nghiệm của phương trình $9^{\sqrt{x-1}} = e^{\ln 81}$.

A $x = 5$. **B** $x = 4$. **C** $x = 6$. **D** $x = 17$.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

$$\begin{aligned} & 9^{\sqrt{x-1}} = e^{\ln 81} \\ \Leftrightarrow\ & 9^{\sqrt{x-1}} = 81 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{x-1} = 2 \\ \Leftrightarrow\ & x - 1 = 4 \\ \Leftrightarrow\ & x = 5. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện $x \geq 1$ ta nhận $x = 5$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + \cos x + 2018$ là

A $F(x) = e^x + \sin x + 2018x + C$. **B** $F(x) = e^x - \sin x + 2018x + C$.

C $F(x) = e^x + \sin x + 2018x$. **D** $F(x) = e^x + \sin x + 2018 + C$.

Lời giải.

Ta có

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(e^x + \cos x + 2018\right)\,dx = e^x + \sin x + 2018x + C.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Mặt cầu $(\mathcal{S})$ có diện tích bằng $100\pi\,\text{cm}^2$ thì nó có bán kính bằng bao nhiêu?

(A) $3\,\text{cm}$. (B) $\sqrt{5}\,\text{cm}$. (C) $4\,\text{cm}$. **(D)** $5\,\text{cm}$.

Lời giải.

Ký hiệu S, R lần lượt là diện tích và bán kính của mặt cầu. Ta có

$$S = 4\pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{4\pi}} = \sqrt{\frac{100\pi}{4\pi}} = 5\,\text{cm}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;0;0)$, $N(0;1;0)$ và $P(0;0;2)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là

(A) $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 0$. (B) $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = -1$.

(C) $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$. (D) $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$.

Lời giải.

Ta có mặt phẳng (MNP) cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại $M(2;0;0)$, $N(0;1;0)$ và $P(0;0;2)$ nên phương trình mặt phẳng (MNP) là

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

(A) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$. (B) $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$. (C) $y = \sqrt{x^2 - 1}$. **(D)** $y = \frac{x}{x + 1}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \frac{x}{x+1}$ có tiệm cậm đứng vì $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \frac{x}{x+1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to (-1)^-} \frac{x}{x+1} = +\infty$ nên $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\,(3;2;-1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm M lên trục Oz là điểm

(A) $M_3\,(3;0;0)$. (B) $M_4\,(0;2;0)$. **(C)** $M_1\,(0;0;-1)$. (D) $M_2\,(3;2;0)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $M\,(3;2;-1)$ lên trục Oz là điểm $M_1\,(0;0;-1)$.

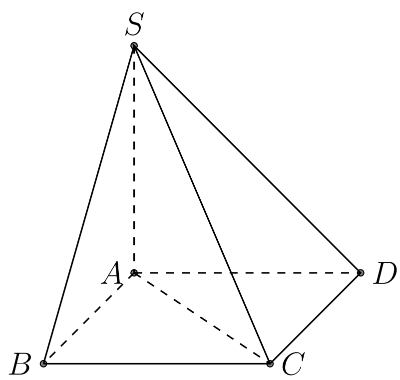
Chọn đáp án (C) □

Câu 18.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Khi đó khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) bằng

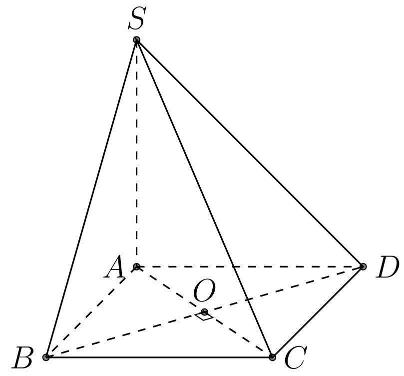
(A) $\mathrm{d}\,(B,(SAC)) = a$. (B) $\mathrm{d}\,(B,(SAC)) = a\sqrt{2}$.

(C) $\mathrm{d}\,(B,(SAC)) = 2a$. **(D)** $\mathrm{d}\,(B,(SAC)) = \frac{a}{\sqrt{2}}$.



Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}(B,(SAC)) = BO = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ trên đoạn $[0;2]$.

(A) $\max\limits_{[0;2]} y = 1$.
(B) $\max\limits_{[0;2]} y = 0$.
(C) $\max\limits_{[0;2]} y = -2$.
(D) $\max\limits_{[0;2]} y = -\dfrac{50}{27}$.

Lời giải.

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$

$f(0) = -2; f\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{50}{27}; f(1) = -2; f(2) = 0 \Rightarrow \max\limits_{[0;2]} y = f(2) = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$.

(A) $S = \left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$.
(B) $S = (-1; 2)$.
(C) $S = (2; +\infty)$.
(D) $S = (-\infty; 2)$.

Lời giải.

$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 > 2x - 1 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < x < 2$.

Suy ra tập nghiệm bất phương trình là $S = \left(\dfrac{1}{2};\ 2\right)$.

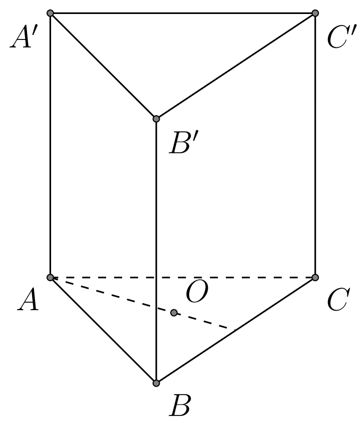
Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

(A) $V = \dfrac{\pi a^2 h}{9}$.
(B) $V = \dfrac{\pi a^2 h}{9}$.
(C) $V = \dfrac{\pi a^2 h}{3}$.
(D) $V = 3\pi a^2 h$.

Lời giải.

Gọi O là tâm tam giác đều ABC cạnh $a \Rightarrow AO = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Chiều cao của khối trụ bằng chiều cao của lăng trụ và bằng h.
Do đó, thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho là
$V = \pi \cdot AO^2 \cdot h = \pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 h = \dfrac{\pi a^2 h}{3}$.



Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho hai số phức $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = -1 - 2i$. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2 + |z_2|^2$ bằng

A $\sqrt{10}$. B 10. C -6. D 4.

Lời giải.
Ta có $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$; $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.
$|z_1|^2 + |z_2|^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = 10$.
Chọn đáp án B □

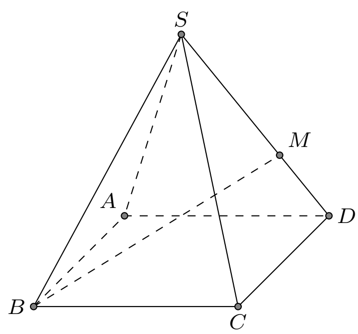
Câu 23. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 1)$, $B(1; 0; 4)$ và $C(0; -2; -1)$. Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC là

A $2x + y + 2z - 5 = 0$. B $x + 2y + 5z + 5 = 0$.
C $x - 2y + 3z - 7 = 0$. D $x + 2y + 5z - 5 = 0$.

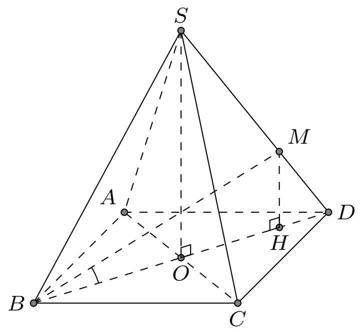
Lời giải.
$\overrightarrow{BC} = (-1; -2; -5)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC, nhận véc-tơ $\overrightarrow{BC}$ làm một véc-tơ pháp tuyến của nó. Suy ra phương trình mặt phẳng là $x + 2y + 5z - 5 = 0$.
Chọn đáp án D □

Câu 24.
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là điểm trên đoạn SD sao cho $SM = 2MD$. Tính tan góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$.

A $\dfrac{1}{3}$. B $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. C $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. D $\dfrac{1}{5}$.



Lời giải.



Gọi $\{O\} = AC \cap DB$ và H là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow H \in BD$.

$BH = \dfrac{5}{6}BD = \dfrac{5a\sqrt{2}}{6}$; $MH \parallel SO \Rightarrow MH = \dfrac{1}{3}SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{6}$.

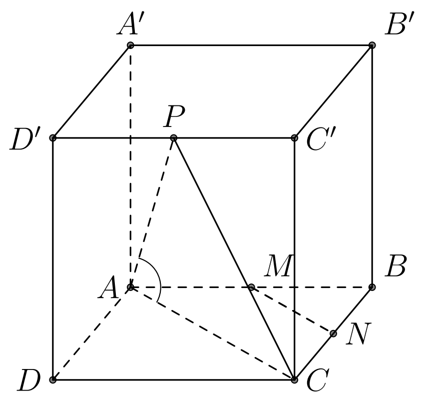
$\Rightarrow \tan(BM, (ABCD)) = \tan\widehat{MBH} = \dfrac{MH}{BH} = \dfrac{1}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, $C'D'$. Xác định góc giữa hai đường thẳng MN và AP.

A. $60°$. B. $90°$. C. $30°$. **D. $45°$.**

Lời giải.



Do AC song song với MN nên góc giữa hai đường thẳng MN và AP bằng góc giữa hai đường thẳng AC và AP.

Tính được $PC = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$; $AP = \dfrac{3a}{2}$; $AC = a\sqrt{2}$.

Áp dụng định lý cosin cho $\triangle ACP$ ta có

$$\cos\widehat{CAP} = \frac{AP^2 + AC^2 - PC^2}{2AP \cdot AC} = \frac{\dfrac{9a^2}{4} + 2a^2 - \dfrac{5a^2}{4}}{2 \cdot \dfrac{3a}{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow \widehat{CAP} = 45°$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và AP bằng $45°$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2x - \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{2n}$ với $x \neq 0$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{C}_n^3 + 2n = \mathrm{A}_{n+1}^2$ là

A. $-\mathrm{C}_{16}^{12} \cdot 2^4 \cdot 3^{12}$. B. $\mathrm{C}_{16}^{0} \cdot 2^{16}$. **C. $\mathrm{C}_{16}^{12} \cdot 2^4 \cdot 3^{12}$.** D. $\mathrm{C}_{16}^{16} \cdot 2^0$.

Lời giải.

ĐKXĐ $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 3. \end{cases}$

Ta có $\mathrm{C}_n^3 + 2n = \mathrm{A}_{n+1}^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{n!}{3!\,(n-3)!} + 2n = \dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} + 2n = n \cdot (n+1) \Leftrightarrow \dfrac{(n-1)(n-2)}{6} + 2 = n + 1$

$\Leftrightarrow (n-1)(n-2) + 12 = 6n + 6 \Leftrightarrow n^2 - 3n + 2 + 12 = 6n + 6 \Leftrightarrow n^2 - 9n + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 1 \\ n = 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow n = 8$.

Với $n = 8$ thì

$$\left(2x - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{2n} = \left(2x - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16} = \sum_{k=0}^{16} \mathrm{C}_{16}^k \cdot (2x)^{n-k} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^{16} \mathrm{C}_{16}^k \cdot 2^{16-k} \cdot x^{16-k} \cdot (-3)^k \cdot x^{-\frac{k}{3}}$$

$$= \sum_{k=0}^{16} \mathrm{C}_{16}^k \cdot 2^{16-k} \cdot (-3)^k \cdot x^{\frac{48-4k}{3}}.$$

Để có số hạng không chứa x thì $48 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 12$.

Vậy hệ số của số hạng không chứa x là $\mathrm{C}_{16}^{12} \cdot 2^4 \cdot 3^{12}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng hai nghiệm.

(A) $m = -2, m \geq -1$. (B) $m > 0, m = -1$. **C** $m = -2, m > -1$. (D) $-2 < m < -1$.

Lời giải.

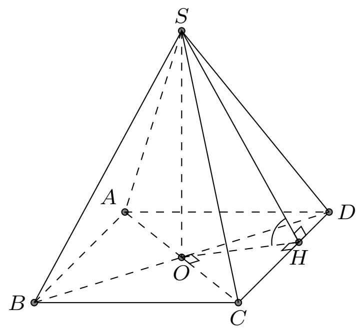
Ta có $f(x) - 1 = m \Leftrightarrow f(x) = m + 1$. Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có đúng hai nghiệm khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m+1=-1 \\ m+1>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m>-1. \end{array}\right.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $AB = a$, $\widehat{BAD} = 60°$, $SO \perp (ABCD)$ và mặt phẳng (SCD) tạo với mặt đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

(A) $V_{S.ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{24}$. **B** $V_{S.ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$. (C) $V_{S.ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. (D) $V_{S.ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{48}$.

Lời giải.



Ta có tam giác ABD là tam giác đều nên $BD = a$, $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $OD = \dfrac{a}{2}$, $OC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Từ O kẽ $OH \perp CD$ suy ra $\widehat{SHO} = 60°$.

Trong tam giác vuông ODC có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{\frac{a^2}{4}} + \frac{1}{\frac{3a^2}{4}} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Trong tam giác vuông SOH có $SO = OH \cdot \tan 60^0 = \dfrac{3a}{4}$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3a}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Một hộp có 5 viên bi xanh, 6 viên bi đỏ và 7 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi trong hộp, tính xác suất để 5 viên bi được chọn có đủ 3 màu và số bi đỏ bằng số bi vàng.

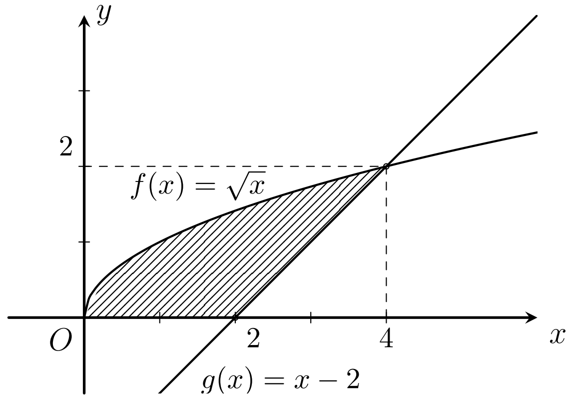
(A) $\dfrac{313}{408}$. **B** $\dfrac{95}{408}$. (C) $\dfrac{5}{102}$. (D) $\dfrac{25}{136}$.

Lời giải.

Số cách lấy 5 viên bi trong hộp 18 viên bi là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{18}^5$.
Gọi A là biến cố "lấy 5 viên bi được chọn có đủ 3 màu và số bi đỏ bằng số bi vàng".
+ Số cách lấy 1 viên bi xanh, 2 viên bi đỏ, 2 viên bi vàng là $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{C}_7^2$.
+ Số cách lấy 3 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ, 1 viên bi vàng là $\mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_7^1$.
Khi đó $n(A) = \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{C}_7^2 + \mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_7^1$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{C}_7^2 + \mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_7^1}{\mathrm{C}_{18}^5} = \dfrac{95}{408}$.
Chọn đáp án B □

Câu 30.
Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, $y = x-2$ và trục hoành (hình vẽ). Diện tích của (H) bằng

A $\dfrac{10}{3}$. **B** $\dfrac{16}{3}$. **C** $\dfrac{7}{3}$. **D** $\dfrac{8}{3}$.



Lời giải.
Dựa vào đồ thị, ta có
$$S_{(H)} = \int_0^2 \sqrt{x}\ \mathrm{d}x + \int_2^4 \left|\sqrt{x} - (x-2)\right| \mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x\right)\Big|_2^4 = \frac{10}{3}.$$
Chọn đáp án A □

Câu 31. Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78685800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A \cdot \mathrm{e}^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người?

A 2022. **B** 2020. **C** 2025. **D** 2026.

Lời giải.
Ta có $S = A \cdot \mathrm{e}^{Nr} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{Nr} = \dfrac{S}{A} \Leftrightarrow N = \dfrac{1}{r} \ln \dfrac{S}{A} \approx 25$.
Vậy dân số nước ta ở mức 120 triệu người là năm 2026.
Chọn đáp án D □

Câu 32. Biết $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x} + x\sqrt{x+1}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = a + b + c$.

A $P = 44$. **B** $P = 42$. **C** $P = 46$. **D** $P = 48$.

Lời giải.
Ta có $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x} + x\sqrt{x+1}} = \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Suy ra

$$\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} = \int\limits_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int\limits_1^2 \frac{2}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x - \int\limits_1^2 \frac{2}{2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}(x+1) = \left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2$$
$$= \left(2\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right) - \left(2-2\sqrt{2}\right) = \sqrt{32}-\sqrt{12}-2 = \sqrt{32}-\sqrt{12}-\sqrt{4}.$$

Do đó $a=32$, $b=12$, $c=4$. Vậy $P=a+b+c=48$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$ giảm trên khoảng $(-\infty;1)$?

A 2. B Vô số. C 1. D 0.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x \neq -m$.

$y' = \dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$.

Hàm số giảm trên khoảng $(-\infty;1)$ khi

$$\begin{cases} y'<0, \forall x \in (-\infty;1) \\ -m \notin (-\infty;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2<m\leq -1.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m=-1$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho số phức $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right|=1$ và $\left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right|=1$.

Tính $P=a+b$.

A $P=7$. B $P=-1$. C $P=1$. D $P=2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z-1}{z-i}\right|=1 \\ \left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z-1|=|z-i| \\ |z-3i|=|z+i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ 8b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow a+b=2.$$

Chọn đáp án D □

Câu 35. Người ta cần xây một hồ chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\dfrac{500}{3}$ m^3. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây hồ là 500.000 đồng/m^2. Người ta xác định kích thước của hồ nước sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất và chi phí đó là

A 74 triệu đồng. B 75 triệu đồng. C 76 triệu đồng. D 77 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi x, y, z $(x, y, z > 0)$ lần lượt là chiều dài, chiều rộng và chiều cao của hồ nước.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} x = 2y \\ V = xyz = \dfrac{500}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = \dfrac{250}{3y^2} \end{cases}$.

Diện tích xây dựng của hồ nước là $S = xy + 2xz + 2yz = 2y^2 + 6yz = 2y^2 + \dfrac{500}{y}$.

Chi phí thuê nhân công thấp nhất khi diện tích nhỏ nhất.

Xét hàm số $f(y) = 2y^2 + \dfrac{500}{y}$ với $y > 0$.

Ta có $f'(y) = 4y - \dfrac{500}{y^2} = \dfrac{4\left(y^3 - 125\right)}{y^2}$; $f'(y) = 0 \Leftrightarrow y^3 - 125 = 0 \Leftrightarrow y = 5$.

Bảng biến thiên

y	0		5		$+\infty$
$f'(y)$		$-$	0	$+$	
$f(y)$	$+\infty$	$\searrow$	150	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy S nhỏ nhất khi $y = 5$.

Suy ra kích thước của hồ là $x = 10$ m; $y = 5$ m, $z = \dfrac{10}{3}$ m. Tiền thuê nhân công là 75 triệu đồng.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình sau

$$4^{\sin^2 x} + 5^{\cos^2 x} \leq m \cdot 7^{\cos^2 x}$$

có nghiệm là $m \in \left[\dfrac{a}{b}; +\infty\right)$ với a, b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Khi đó tổng $S = a + b$ bằng

A $S = 13$.   **B** $S = 15$.   **C** $S = 9$.   **D** $S = 11$.

Lời giải.

Đưa BPT ban đầu về $4^{1-\cos^2 x} + 5^{\cos^2 x} \leq m \cdot 7^{\cos^2 x} \Leftrightarrow \dfrac{4}{28^{\cos^2 x}} + \left(\dfrac{5}{7}\right)^{\cos^2 x} \leq m$.

Đặt $\cos^2 x = t, t \in [0; 1]$, BPT trở thành $\dfrac{4}{28^t} + \left(\dfrac{5}{7}\right)^t \leq m$.

Xét $f(t) = \dfrac{4}{28^t} + \left(\dfrac{5}{7}\right)^t, t \in [0; 1]$

$f'(t) = -\dfrac{4 \ln 28}{28^t} + \left(\dfrac{5}{7}\right)^t \cdot \ln \dfrac{5}{7} < 0, \forall t \in [0; 1] \Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $[0; 1]$, lại có $f(1) = \dfrac{6}{7}$.

Từ đó suy ra BPT có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq f(1) = \dfrac{6}{7} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{6}{7} \Rightarrow S = 13$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2$ có đồ thị (C) và điểm $M(m; 0)$ sao cho từ M vẽ được ba tiếp tuyến đến đồ thị (C), trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng?

A $m \in \left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$. **B** $m \in \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$. **C** $m \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$. **D** $m \in \left(-1; -\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng qua $M(m;0)$ với hệ số góc k có dạng $y = k(x-m)$.

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} k\left(x-m\right) = x^3 + 3x^2 \\ k = 3x^2 + 6x \end{cases}$

suy ra $\left(3x^2 + 6x\right)\left(x-m\right) = x^3 + 3x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x^2 + 3\left(1-m\right)x - 6m = 0\,(*) \end{array}\right.$

Do $k_1 \cdot k_2 = -1 \Leftrightarrow \left(3x_1^2 + 6x_1\right)\left(3x_2^2 + 6x_2\right) = -1 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{27}$ thỏa mãn $(*)$ có hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$. Biết rằng $f\left(-3\right) + f(3) = 0$ và $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$. Tính $T = f\left(-2\right) + f(0) + f(4)$.

A $T = 1 + \ln\dfrac{9}{5}$. **B** $T = 1 + \ln\dfrac{6}{5}$. **C** $T = 1 + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$. **D** $T = 1 + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{6}{5}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \displaystyle\int \dfrac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + C$.

- Với $x \in (-\infty;-1)$ ta có $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + C_1$.
- Với $x \in (1;+\infty)$ ta có $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + C_3$.

  Mà $f\left(-3\right) + f(3) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{-3-1}{-3+1}\right| + C_1 + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{3-1}{3+1}\right| + C_3 = 0$

  $$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln 2 + C_1 + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2} + C_3 = 0 \Leftrightarrow C_1 + C_3 = 0.$$

  Do đó $f\left(-2\right) = \dfrac{1}{2}\ln 3 + C_1$; $f(4) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{5} + C_3$.
- Với $x \in (-1;1)$ ta có $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + C_2$.

  $$f\left(-\dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{2}+1}\right| + C_2 + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}\right| + C_2 = 2.$$

  $$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln 3 + C_2 + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{3} + C_2 = 2 \Leftrightarrow C_2 = 1.$$

Do đó với $x \in (-1;1)$: $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + 1 \Rightarrow f(0) = 1$.

Vậy $T = f\left(-2\right) + f(0) + f(4) = 1 + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 39.

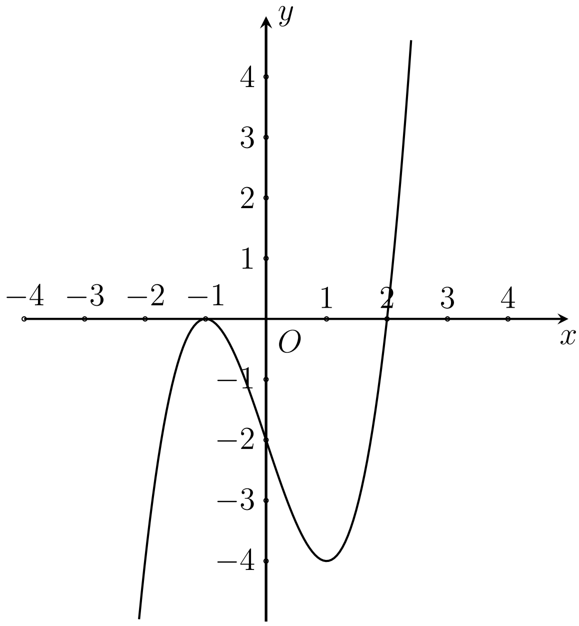
Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 2\right)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 0)$.

B Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.

C Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$.

D Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.



Lời giải.

Ta có $g'(x) = \left(x^2 - 2\right)' \cdot f'\left(x^2 - 2\right) = 2x \cdot f'\left(x^2 - 2\right)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot f'\left(x^2 - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2 - 2\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2 = -1 \\ x^2 - 2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2. \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$2x$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(x^2-2)$		$+$	0	$-$	0	$-$	|	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu suy ra $g(x)$ đồng biến trên $(-1; 0)$.

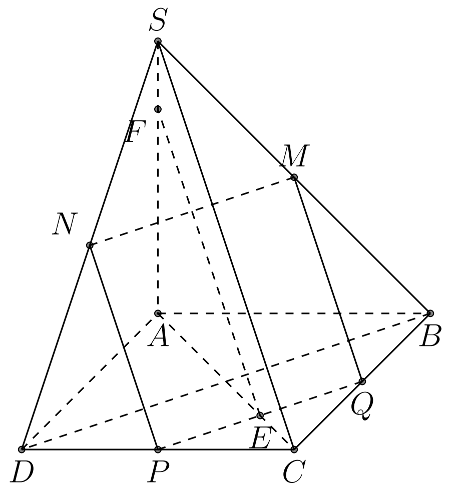
Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, biết $SC = a\sqrt{3}$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SB, SD, CD, BC. Tính thể tích của khối chóp $A.MNPQ$.

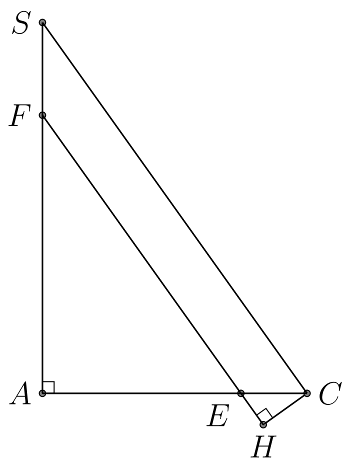
A $\dfrac{a^3}{3}$. **B** $\dfrac{a^3}{4}$. **C** $\dfrac{a^3}{8}$. **D** $\dfrac{a^3}{12}$.

Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD)$. Gọi $\{E\} = PQ \cap AC$, đường thẳng qua E và song song với SC cắt SA tại F.
Ta có tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.
$AC = BD = a\sqrt{2}$, $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = a$, $NP = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,
$PQ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_{MNPQ} = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{4}$



Kẻ $CH \perp FE \Rightarrow CH \perp (MNPQ) \Rightarrow d(C, (MNPQ)) = CH$.
Có $\triangle AFE$ đồng dạng với $\triangle HCE$
$\Rightarrow \dfrac{HC}{FA} = \dfrac{CE}{FE} \Rightarrow HC = \dfrac{CE}{FE} \cdot FA$
$= \dfrac{\dfrac{AC}{4}}{\sqrt{FA^2 + AE^2}} \cdot \dfrac{3SA}{4} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{\left(\dfrac{3a}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2}} \cdot \dfrac{3a}{4} = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$.
$d(A, (MNPQ)) = 3HC = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$
$\Rightarrow V_{A.MNPQ} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{MNPQ} \cdot d(A, (MNPQ)) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{6}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{4} = \dfrac{a^3}{8}$.



Chọn đáp án C □

Câu 41. Cho cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $b_2 > b_1 \geq 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(\log_2 b_2) + 2 = f(\log_2 b_1)$. Giá trị nhỏ nhất của n để $b_n > 5^{100}$ bằng bao nhiêu?

A 234. **B** 229. **C** 333. **D** 292.

Lời giải.

Gọi q là công bội của cấp số nhân. Ta có $b_2 > b_1 \geq 1$ nên $\log_2 b_2 > \log_2 b_1 \geq 0$ và $q = \dfrac{b_2}{b_1} > 1$.
Đặt $m = \log_2 b_1$ và $n = \log_2 q$ (với $m \geq 0$, $n > 0$).
Ta có

$$\begin{aligned}
& f(\log_2 b_2) + 2 = f(\log_2 b_1) \\
\Leftrightarrow & f(\log_2 b_1 + \log_2 q) + 2 = f(\log_2 b_1) \\
\Leftrightarrow & f(m+n) + 2 = f(m) \\
\Leftrightarrow & (m+n)^3 - 3(m+n) + 2 = m^3 - 3m \\
\Leftrightarrow & 3mn(m+n) + (n-1)^2(n+2) = 0 \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} m = 0 \\ n = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Với $m = 0$ và $n = 1$ thì $b_1 = 1$ và $q = 2$.
Cho nên $b_n = 2^{n-1}$.
Khi đó

$$b_n > 5^{100} \Leftrightarrow 2^{n-1} > 5^{100} \Leftrightarrow n - 1 > 100 \log_2 5 \Leftrightarrow n > 1 + 100 \log_2 5.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của n để $b_n > 5^{100}$ bằng 234.
Chọn đáp án A □

Câu 42. Tổng các nghiệm của phương trình $\sin x \cos x + |\sin x + \cos x| = 1$ trên khoảng $(0; 2\pi)$ bằng bao nhiêu?

A 2π. B 4π. C 3π. D π.

Lời giải.
Đặt $t = |\sin x + \cos x| = \left|\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$. Điều kiện $0 \leq t \leq \sqrt{2}$.
Khi đó $t^2 = 1 + 2\sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.
Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} & \frac{t^2-1}{2} + t = 1 \\ \Leftrightarrow\ & t^2 + 2t - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{3}{2}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện $0 \leq t \leq \sqrt{2}$ ta nhận $t = 1$.
Với $t = 1$ ta được

$$\begin{aligned} & \left|\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + l2\pi, l \in \mathbb{Z} \\ x + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4} + m2\pi, m \in \mathbb{Z} \\ x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4} + n2\pi, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + l2\pi, l \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + m2\pi, m \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + n2\pi, n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vì $x \in (0; 2\pi)$ nên $x \in \left\{\dfrac{\pi}{2}; \pi; \dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

Do đó tổng các nghiệm của phương trình bằng 3π.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Một nhóm 10 học sinh gồm 6 nam trong đó có Quang, 4 nữ trong đó có Huyền được xếp ngẫu nhiên vào 10 ghế trên một hàng ngang để dự lễ sơ kết năm học. Tính xác suất để xếp được giữa hai bạn nữ gần nhau có đúng hai bạn nam, đồng thời Quang không ngồi cạnh Huyền.

A $\dfrac{109}{30240}$. **B** $\dfrac{1}{280}$. **C** $\dfrac{1}{5040}$. **D** $\dfrac{109}{60480}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 10!$.

Gọi A là biến cố xếp được giữa hai bạn nữ gần nhau có đúng hai bạn nam, đồng thời Quang không ngồi cạnh Huyền.

Kí hiệu 10 ghế như sau $DXXDXXDXXD$, trong đó D là ghế đỏ dành cho nữ và X là ghế xanh dành cho nam.

Số cách xếp nữ vào ghế đỏ, nam vào ghế xanh là $4!6!$.

Số cách xếp sao cho Quang ngồi cạnh Huyền được tính như sau:

- Chọn hai ghế liên tiếp khác màu có $\mathrm{C}_6^1 = 6$ cách.
- Xếp Quang và Huyền vào hai ghế đó có 1 cách và xếp các bạn còn lại có $3!5!$ cách.
- Do đó số cách xếp sao cho Quang ngồi cạnh Huyền bằng $6 \cdot 3!5! = 3!6!$ cách.

Vậy số cách xếp được giữa hai bạn nữ gần nhau có đúng hai bạn nam, đồng thời Quang không ngồi cạnh Huyền bằng $4!6! - 3!6! = (4! - 3!)6! = 12960$ cách.

Do đó xác suất của biến cố A là

$$P(A) = \frac{12960}{10!} = \frac{1}{280}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -3; 7)$, $B(0; 4; -3)$, $C(4; 2; 5)$. Biết điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ nằm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ có giá trị nhỏ nhất. Khi đó tổng $P = x_0 + y_0 + z_0$ bằng

A $P = 0$. **B** $P = 6$. **C** $P = 3$. **D** $P = -3$.

Lời giải.

Vì $M \in (Oxy)$ nên $M(x_0; y_0; 0)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Ta có $G(2; 1; 3)$.

Khi đó

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| &= \left|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right| \\ &= \left|3\overrightarrow{MG}\right| = 3MG = 3\sqrt{(x_0 - 2)^2 + (y_0 - 1)^2 + 3^2} \geq 9.\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x_0 = 2$ và $y_0 = 1$ hay $M(2; 1; 0)$.

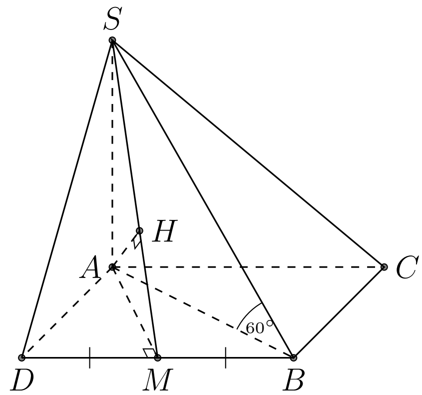
Vậy $P = x_0 + y_0 + z_0 = 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB.

(A) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **(B)** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. (C) $2a$. (D) $\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải.



Vì $SA \perp (ABC)$ nên A là hình chiếu của S xuống mặt phẳng (ABC). Khi đó góc SB và (ABC) là góc giữa SB và AB bằng $\widehat{ABS} = 60°$.

Ta có $SA = AB \tan \widehat{ABS} = a\sqrt{3}$.

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ACBD$. Ta có $AC \parallel BD$ nên $AC \parallel (SBD)$. Do đó $d(AC, SB) = d(AC, (SBD)) = d(A, (SBD))$.

Gọi M là trung điểm BD và H là hình chiếu của A lên SM.

Vì ABC là tam giác đều nên ABD cũng là tam giác đều.

Ta có

$$\begin{cases} BD \perp AM \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAM) \Rightarrow BD \perp AH.$$

Lại có $AH \perp SM$. Cho nên $AH \perp (SBD)$.

Vậy $d(AC, SB) = d(A, (SBD)) = AH$.

Ta có $AH = \sqrt{\dfrac{SA^2 \cdot AM^2}{SA^2 + AM^2}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Vậy $d(AC, SB) = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có năm điểm cực trị?

(A) 44. **(B)** 27. (C) 26. (D) 16.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- $g'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2)$.

  $$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-5	↗	0	↘	-32	↗	$+\infty$

- Đồ thị hàm số $g(x)$ có ba cực trị $A(-1;-5)$, $B(0;0)$, $C(2;-32)$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $g(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ ta có nhận xét về đồ thị của hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ như sau:

- Nếu $m \leq 0$ thì hàm số $y = |g(x) + m|$ có 5 cực trị.
- Nếu $0 < m < 5$ thì hàm số $y = |g(x) + m|$ có 7 cực trị.
- Nếu $5 \leq m < 32$ thì hàm số $y = |g(x) + m|$ có 5 cực trị.
- Nếu $32 \leq m$ thì hàm số $y = |g(x) + m|$ có 3 cực trị.

Vậy $m \in \{5; 6; \ldots; 31\}$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán hay có 27 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+2|^2 - |z-i|^2$. Tính mô-đun của số phức $w = M + mi$.

A $|w| = \sqrt{2315}$. B $|w| = \sqrt{1258}$. C $|w| = 3\sqrt{137}$. D $|w| = 2\sqrt{309}$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $P = (x+2)^2 + y^2 - [x^2 + (y-1)^2] = 4x + 2y + 3$.

Mặt khác $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$.

Đặt $x = 3 + \sqrt{5}\sin t$ và $y = 4 + \sqrt{5}\cos t$ thỏa $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$.

Suy ra $P = 4\sqrt{5}\sin t + 2\sqrt{5}\cos t + 23$.

Xét hàm số $f(t) = 4\sqrt{5}\sin t + 2\sqrt{5}\cos t$.

Chia cả hai vế cho $\sqrt{\left(4\sqrt{5}\right)^2 + \left(2\sqrt{5}\right)^2} = 10$ ta có

$$f(t) = 4\sqrt{5}\sin t + 2\sqrt{5}\cos t \Leftrightarrow \frac{f(t)}{10} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\sin t + \frac{\sqrt{5}}{5}\cos t.$$

Đặt $\begin{cases} \cos u = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \\ \sin u = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$ ta có

$$\frac{f(t)}{10} = \cos u \sin t + \sin u \cos t \Leftrightarrow \frac{f(t)}{10} = \sin(t+u)$$

Suy ra

$$-1 \leq \frac{f(t)}{10} \leq 1 \Rightarrow -10 \leq f(t) \leq 10 \Rightarrow 13 \leq P \leq 33.$$

Vậy $M = \max P = 33$ và $m = \min P = 13$.

Khi đó $w = 33 + 13i$. Do đó $|w| = \sqrt{33^2 + 13^2} = \sqrt{1258}$.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Cho $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdots f(2017) = \mathrm{e}^{\frac{m}{n}}$ với m, n là các số tự nhiên và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $m - n^2$.

A $m - n^2 = -1$. B $m - n^2 = 1$. C $m - n^2 = 2018$. D $m - n^2 = -2018$.

Lời giải.

Đặt $g(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2}}$.
Với $x > 0$ ta có

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + (x+1)^2 + x^2(x+1)^2}}{x(x+1)} = \frac{\sqrt{(x^2+x+1)^2}}{x(x+1)} \\ &= \frac{x^2+x+1}{x(x+1)} = 1 + \frac{1}{x(x+1)} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & g(1) + g(2) + g(3) + \cdots + g(2017) \\ =& \left(1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018}\right) \\ =& 2018 - \frac{1}{2018}. \end{aligned}$$

Khi đó

$$f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdots f(2017) = \mathrm{e}^{g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(2017)} = \mathrm{e}^{2018 - \frac{1}{2018}} = \mathrm{e}^{\frac{2018^2-1}{2018}} = \mathrm{e}^{\frac{m}{n}}.$$

Do đó $m = 2018^2 - 1$ và $n = 2018$.
Vậy $m - n^2 = 2018^2 - 1 - 2018^2 = -1$.
Chọn đáp án A □

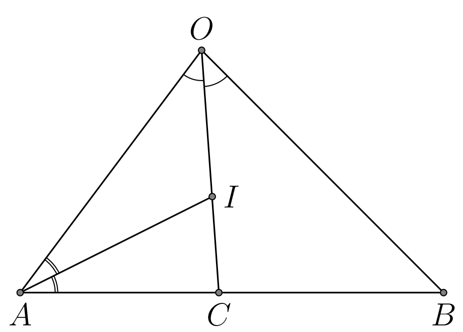
Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;2;1)$, $B\left(-\dfrac{8}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{8}{3}\right)$. Biết $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác OAB. Tính $S = a + b + c$.

A $S = 1$. **B** $S = 0$. **C** $S = -1$. **D** $S = 2$.

Lời giải.

Gọi C là chân đường phân giác trong góc O của tam giác OAB.
Ta có $OA = 3$, $OB = 4$.

$$\overrightarrow{CA} = -\frac{OA}{OB}\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x_C = -\dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{8}{3} - x_C\right) \\ 2 - y_C = -\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{4}{3} - y_C\right) \\ 1 - z_C = -\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{8}{3} - z_C\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 0 \\ y_C = \dfrac{12}{7} \\ z_C = \dfrac{12}{7}. \end{cases}$$



Vậy $C\left(0;\dfrac{12}{7};\dfrac{12}{7}\right)$.
Khi đó

$$AC = \sqrt{(0-2)^2 + \left(\frac{12}{7} - 2\right)^2 + \left(\frac{12}{7} - 1\right)^2} = \frac{15}{7}.$$

Ta lại có

$$\overrightarrow{IC} = -\frac{AC}{AO}\overrightarrow{IO} \Leftrightarrow \begin{cases} -a = \frac{5}{7}a \\ \frac{12}{7} - b = \frac{5}{7}b \\ \frac{12}{7} - c = \frac{5}{7}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 1. \end{cases}$$

Do đó $S = a + b + c = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$ và $f(1) = 0$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $\frac{\mathrm{e}-1}{2}$. (B) $\frac{\mathrm{e}^2}{4}$. **(C)** $\mathrm{e}-2$. (D) $\frac{\mathrm{e}}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{\mathrm{e}^2-1}{4} = \int\limits_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x = [x\mathrm{e}^x f(x)]\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\Rightarrow 2\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^2-1}{2}.$$

Ta lại có $\int\limits_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$ và $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$.

Khi đó

$$\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 [f'(x) + x\mathrm{e}^x]^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

Vì $[f'(x) + x\mathrm{e}^x]^2 \geq 0, \forall x \in [0;1]$ và $f'(x)$ liên tục trên $[0;1]$ nên $\int\limits_0^1 [f'(x) + x\mathrm{e}^x]^2\,\mathrm{d}x \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi

$$f'(x) + x\mathrm{e}^x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x\mathrm{e}^x \Leftrightarrow f(x) = (1-x)\mathrm{e}^x + C.$$

Lại có $f(1) = 0$ nên $C = 0$.

Vậy $f(x) = (1-x)\mathrm{e}^x$.

Do đó

$$\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (2-x)\mathrm{e}^x\Big|_0^1 = \mathrm{e}-2.$$

Chọn đáp án C □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. C	3. B	4. A	5. D	6. B	7. A	8. C	9. A	10. B
11. D	12. A	13. A	14. D	15. C	16. D	17. C	18. D	19. B	20. A
21. C	22. B	23. D	24. D	25. D	26. C	27. C	28. B	29. B	30. A
31. D	32. D	33. C	34. D	35. B	36. A	37. C	38. C	39. A	40. C
41. A	42. C	43. B	44. C	45. B	46. B	47. B	48. A	49. D	50. C

161 ĐỀ THI THỬ THÁNG 11 CỦA TRUNG TÂM LTĐH DIỆU HIỀN, CẦN THƠ

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{2-x}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

(B) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

(C) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Đạo hàm $y' = \dfrac{3}{(2-x)^2} > 0, \forall x \in \mathscr{D}$ nên hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Phần thực và phần ảo của số phức $z = (1+2i)\, i$ lần lượt là

(A) 1 và 2. (B) -2 và 1. (C) 1 và -2. (D) 2 và 1.

Lời giải.

Ta có $z = (1+2i)\, i = -2 + i$. Do đó phần thực và phần ảo của số phức z lần lượt là -2 và 1.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3.

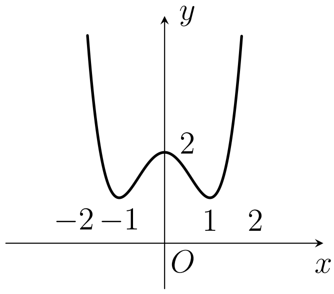
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Khi đó $f(x)$ đồng biến trên các khoảng

(A) $(-\infty; -1), (1; +\infty)$.

(B) $(-\infty; -1), (-1; 0)$.

(C) $(-1; 0), (1; +\infty)$.

(D) $(-1; 0), (0; 1)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-1; 0), (1; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \dfrac{1}{x}$ là

(A) $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} - \ln|x| + C$. (B) $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{1}{x^2} + C$.

(C) $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + \ln x + C$. (D) $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \left(x^2 - 3x + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ là

Ⓐ 1. **B** 2. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-1$. Do đó đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 6. Tập nghiệm của phương trình $\log\left(x^2-x-6\right)+x=\log\left(x+2\right)+4$ là

Ⓐ $\{1\}$. **B** $\{4\}$. Ⓒ $\{3\}$. Ⓓ $\{2\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x>3$.

PT đã cho tương đương với $\log\left[(x+2)\left(x-3\right)\right]+x=\log\left(x+2\right)+4\Leftrightarrow\log(x-3)=4-x\ (*)$.

Vế trái của $(*)$ là hàm tăng, còn vế phải là hàm giảm và $x=4$ là một nghiệm của $(*)$.

Vậy $x=4$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Ⓐ Tồn tại một hình đa diện có số cạnh bằng số đỉnh.

Ⓑ Số đỉnh và số mặt của một hình đa diện luôn luôn bằng nhau.

Ⓒ Tồn tại hình đa diện có số cạnh và số mặt bằng nhau.

D Tồn tại một hình đa diện có số đỉnh và số mặt bằng nhau.

Lời giải.

Xét hình tứ diện, có 4 mặt và 4 đỉnh nên nó có số đỉnh và số mặt bằng nhau.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 8. Hàm số $y=x^3-3x^2+3x-4$ có bao nhiêu cực trị?

Ⓐ 1. Ⓑ 2. **C** 0. Ⓓ 3.

Lời giải.

Đạo hàm $y'=3x^2-6x+3=3(x-1)^2\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đã cho không có cực trị.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 9. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2+2z+3=0$. Tọa độ điểm M biểu diễn số phức z_1 là

A $M\left(-1;-\sqrt{2}\right)$. Ⓑ $M\left(-1;2\right)$. Ⓒ $M\left(-1;-2\right)$. Ⓓ $M\left(-1;-\sqrt{2}i\right)$.

Lời giải.

Phương trình $z^2+2z+3=0$ có hai nghiệm là $z_1=-1-\sqrt{2}i$ và $z_2=-1+\sqrt{2}i$ nên $M\left(-1;-\sqrt{2}\right)$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 10. Trong các hàm số sau: (I) $f(x)=\tan^2 x+2$, (II) $f(x)=\dfrac{2}{\cos^2 x}$, (III) $f(x)=\tan^2 x+1$. Hàm số nào có nguyên hàm là hàm số $g(x)=\tan x$?

Ⓐ Chỉ (II). **B** Chỉ (III). Ⓒ Chỉ (II), (III). Ⓓ (I), (II), (III).

Lời giải.

Cách 1:

Ta có $\displaystyle\int\left(\tan^2 x+2\right)\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=x+\tan x+C$.

Và $\displaystyle\int \frac{2}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = 2\tan x + C$.

Và $\displaystyle\int \left(\tan^2 x + 1\right)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$.

Cách 2:

Ta có $g'(x) = (\tan x)' = 1 + \tan^2 x$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Cho phương trình $3^x = m + 1$. Chọn phát biểu đúng.

A Phương trình có nghiệm dương nếu $m > 0$.

B Phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

C Phương trình luôn có nghiệm duy nhất $x = \log_3(m+1)$.

D Phương trình có nghiệm với $m \geq -1$.

Lời giải.

Phương trình $3^x = m + 1$ có nghiệm khi $m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Ta có $x > 0 \Rightarrow 3^x > 3^0 = 1$ nên phương trình đã cho có nghiệm dương khi $m + 1 > 1 \Leftrightarrow m > 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Điểm biểu diễn của các số phức $z = 7 + bi$ với $b \in \mathbb{R}$ nằm trên đường thẳng có phương trình là

A $y = 7$. B $x = 7$. C $y = x + 7$. D $y = x$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn của các số phức $z = 7 + bi$ với $b \in \mathbb{R}$ là $M(7; b)$. Dễ thấy các điểm $M(7; b)$ nằm trên đường thẳng $x = 7$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Hàm số $y = (4x^2 - 1)^{-4}$ có tập xác định là

A $\mathscr{D} = [0; +\infty)$. B $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$.

C $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. D $\mathscr{D} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: $4x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm\frac{1}{2}$ nên tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Gọi $(x; y)$ là nghiệm nguyên của hệ phương trình $\begin{cases} y^{5x^2-51x+10} = 1 \\ xy = 15 \end{cases}$. Khi đó $x + y$ bằng

A 16. B 75. C $\frac{32}{2}$. D -14.

Lời giải.

Ta có $y^{5x^2-51x+10} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ 5x^2 - 51x + 10 = 0. \end{array}\right.$

TH1: Với $y = 1$ từ $xy = 15$ cho ta $x = 15$. Do đó $x + y = 16$.

TH2: Với $5x^2 - 51x + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = \frac{1}{5} \notin \mathbb{Z} \end{array}\right.$ nên $x = 10 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$ (loại).

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (H). Tiếp tuyến của (H) tại giao điểm của (H) với trục hoành có phương trình là

(A) $y = 3x$. (B) $y = x - 3$. (C) $y = 3x - 3$. **D** $y = \dfrac{1}{3}(x-1)$.

Lời giải.

Cho $y = 0 \Rightarrow x = 1$. Do đó tọa độ giao điểm của (H) với trục hoành là $M(1;0)$.

Đạo hàm $y' = \dfrac{3}{(x+2)^2}$. Hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(1) = \dfrac{1}{3}$.

Phương trình tiếp tuyến của (H) tại M là $y = \dfrac{1}{3}(x-1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y = -x^2 + 2x$, trục hoành. Quay hình phẳng (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là

(A) $\dfrac{496\pi}{15}$. (B) $\dfrac{32\pi}{15}$. (C) $\dfrac{4\pi}{3}$. **D** $\dfrac{16\pi}{15}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (H) và Ox: $-x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ và $x = 2$.

Khi đó $V = \pi \displaystyle\int_0^2 \left(-x^2+2x\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^2 \left(x^4 - 4x^3 + 4x^2\right) \mathrm{d}x = \dfrac{16\pi}{15}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-3}{-1}$ và $d_2 : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-5}{3}$. Phương trình mặt phẳng chứa d_1 và d_2 là

(A) $5x - 4y - z - 16 = 0$. (B) $5x - 4y + z + 16 = 0$.

C $5x - 4y + z - 16 = 0$. (D) $5x + 4y + z - 16 = 0$.

Lời giải.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa d_1 và d_2.

Véc-tơ chỉ phương của d_1 và d_2 lần lượt là $\overrightarrow{u_1} = (1;1;1)$ và $\overrightarrow{u_2} = (1;2;3)$. Suy ra một véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = (5;-4;1)$.

Mặt khác $M(3;1;5) \in d_2 \subset (P) \Rightarrow M \in (P)$.

Phương trình $(P) : 5(x-3) - 4(y-1) + 1(z-5) = 0 \Leftrightarrow 5x - 4y + z - 16 = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = m$ có nghiệm khi

(A) $m \in (-\infty;5)$. (B) $m \in (2;+\infty)$. (C) $m \in (-\infty;5]$. **D** $m \in [2;+\infty)$.

Lời giải.

Đặt $\left(2+\sqrt{3}\right)^x = t > 0 \Rightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^x = \dfrac{1}{t}$. Khi đó phương trình thành $t + \dfrac{1}{t} = m, t > 0$.

Vì $t > 0$ nên $t + \dfrac{1}{t} \geq 2$ nên $m \geq 2$ thì phương trình có nghiệm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Số nghiệm của phương trình $3^x - 3^{1-x} = 2$ là

(A) 3. **B** 1. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

Ta có $3^x - 3^{1-x} = 2 \Leftrightarrow 3^x - \dfrac{3}{3^x} = 2 \Leftrightarrow 3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = -1 \text{ (vô nghiệm)} \\ 3^x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1.$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Tích các nghiệm của phương trình $\log_x (125x) \log_{25}^2 x = 1$ bằng

(A) $\dfrac{7}{25}$. (B) $\dfrac{630}{625}$. **(C)** $\dfrac{1}{125}$. (D) 630.

Lời giải.

Điều kiện: $0 < x \neq 1$.

Ta có $\log_x (125x) \log_{25}^2 x = 1 \Leftrightarrow \log_{25}^2 x + \log_{25}^2 x . \log_x 125 = 1 \Leftrightarrow \log_{25}^2 x + \dfrac{3}{2} \log_{25} x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{25} x = \dfrac{1}{2} \\ \log_{25} x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = \dfrac{1}{625} \end{array}\right.$. Vậy tích các nghiệm của phương trình đã cho bằng $\dfrac{1}{125}$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Phương trình $9^x - 3 \cdot 3^x + 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1 < x_2$. Giá trị của $2x_1 + 3x_2$ là

(A) $3 \log_3 2$. (B) 1. (C) $4 \log_3 2$. (D) $2 \log_2 3$.

Lời giải.

Ta có $9^x - 3 \cdot 3^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 1 \\ 3^x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 = 0 \\ x = x_2 = \log_3 2 \end{array}\right.$. Khi đó $2x_1 + 3x_2 = 3 \log_3 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Cho số phức thỏa $|z| = 3$. Biết rằng tập hợp số phức $w = \bar{z} + i$ là một đường tròn. Tìm tâm của đường tròn đó.

(A) $I(0; 1)$. (B) $I(0; -1)$. (C) $I(-1; 0)$. (D) $I(1; 0)$.

Lời giải.

Đặt $w = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $w = \bar{z} + i \Leftrightarrow x + yi = \bar{z} + i \Leftrightarrow \bar{z} = x + (y-1)i \Leftrightarrow z = x + (1-y)i$.

Theo đề $|z| = 3 \Leftrightarrow x^2 + (1-y)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 9$.

Vậy tập hợp số phức $w = \bar{z} + i$ là đường tròn tâm $I(0; 1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x = 2m + 1$ có ba nghiệm phân biệt là

(A) $-\dfrac{3}{2} < m < \dfrac{1}{2}$. (B) $-2 < m < 2$. (C) $-\dfrac{3}{2} \leq m \leq \dfrac{1}{2}$. (D) $-2 \leq m \leq 2$.

Lời giải.

Gọi $(\mathscr{C}) : y = x^3 - 3x$ và $d : y = 2m + 1$.

Ta có $y' = 3x^2 - 3; y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi d cắt $(\mathscr{C})$ tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow -2 < 2m+1 < 2 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2} < m < \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} = \dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^3}{1-i}$. Tìm mô-đun của $\bar{z}+iz$.

(A) $4\sqrt{2}$. (B) 4. (C) $8\sqrt{2}$. (D) 8.

Lời giải.

Ta có $\bar{z} = \dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^3}{1-i} = -4-4i \Rightarrow z = -4+4i \Rightarrow \bar{z}+iz = -8-8i$.

Suy ra $|\bar{z}+iz| = |-8-8i| = 8\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Cho $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 3$. Khi đó $J = \displaystyle\int_0^2 [4f(x)-3]\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 2. (B) 6. (C) 8. (D) 4.

Lời giải.

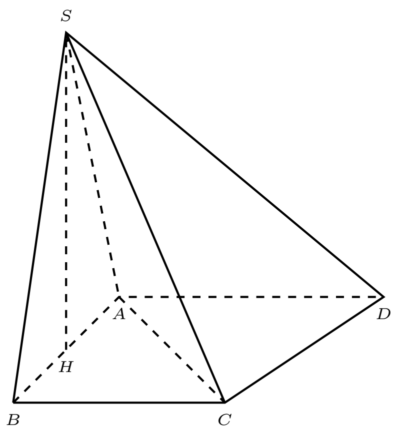
Ta có $J = \displaystyle\int_0^2 [4f(x)-3]\,\mathrm{d}x = 4\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x - 3\int_0^2 \mathrm{d}x = 4\cdot 3 - 3\cdot x\Big|_0^2 = 6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = \frac{1}{2}AD = a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ACD$.

(A) $V_{S.ACD} = \dfrac{a^3}{2}$. (B) $V_{S.ACD} = \dfrac{a^3}{3}$. (C) $V_{S.ACD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (D) $V_{S.ACD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm cạnh AB.

Ta có $\begin{cases} (SAB)\perp(ABCD) \\ (SAB)\cap(ABCD) = AB \\ SH\perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Khi đó $V_{S.ACD} = \dfrac{1}{3}SH\cdot S_{ACD}$.

Mà $S_{ACD} = S_{ABCD} - S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB\cdot(AD+BC) - \dfrac{1}{2}AB\cdot BC = a^2$.

Và $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy $V_{S.ACD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $M(1;-2;1)$, $N(0;1;3)$. Phương trình đường thẳng qua hai điểm M, N là

(A) $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{2}$.
(B) $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$.
(C) $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{2}$.
(D) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$.

Lời giải.

Đường thẳng MN đi qua $N(0;1;3)$ và có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{MN}=(-1;3;2)$ có phương trình là $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Phương trình $\log_x 2+\log_2 x=\dfrac{5}{2}$

(A) Có hai nghiệm dương.
(B) Vô nghiệm.
(C) Có một nghiệm âm.
(D) Có một nghiệm âm và một nghiệm dương.

Lời giải.

Điều kiện: $0<x\neq 1$. Khi đó phương trình đã cho thành:

$$\frac{1}{\log_2 x}+\log_2 x-\frac{5}{2}=0\Leftrightarrow 2\log_2^2 x-5\log_2 x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=2\\ \log_2 x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\ x=\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm dương.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1+i)(z-i)+2z=2i$. Mô-đun của số phức $w=\dfrac{\bar{z}-2z+1}{z^2}$ là

(A) $\sqrt{10}$.
(B) $\sqrt{8}$.
(C) $-\sqrt{10}$.
(D) $-\sqrt{8}$.

Lời giải.

Ta có $(1+i)(z-i)+2z=2i\Leftrightarrow(3+i)z=-1+3i\Leftrightarrow z=i$.

Suy ra $w=\dfrac{\bar{z}-2z+1}{z^2}=\dfrac{-i-2i+1}{i^2}=-1+3i$.

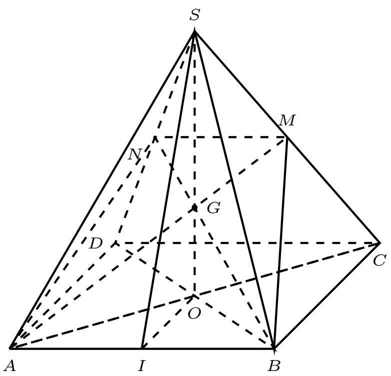
Vậy $|w|=\sqrt{10}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác SAC. Mặt phẳng chứa AB và đi qua G cắt các cạnh SC, SD lần lượt tại M và N. Biết mặt bên của hình chóp tạo với đáy một góc bằng 60°. Thể tích khối chóp $S.ABMN$ bằng

(A) $a^3\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
(B) $a^3\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.
(C) $a^3\dfrac{\sqrt{3}}{16}$.
(D) $3a^3\dfrac{\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải.



Vì G là trọng tâm tam giác SAC nên AG cắt SC tại trung điểm M của SC, tương tự BG cắt SD tại trung điểm N của SD.
Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và I là trung điểm của AB. Suy ra góc giữa mặt bên (SAB) và mặt đáy $(ABCD)$ là góc $\widehat{SIO} = 60^\circ$. Do đó $SO = OI \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Suy ra $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.
Mặt khác $V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABC}$, ta lại có $\dfrac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SB}{SB} \cdot \dfrac{SM}{SC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow V_{S.ABM} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABC}$.
Tương tự ta có $V_{S.AMN} = \dfrac{1}{4}V_{S.ACD}$.
Vậy $V_{S.ABMN} = \dfrac{3}{4}V_{S.ABCD} = a^3\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.
Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = 2x$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng

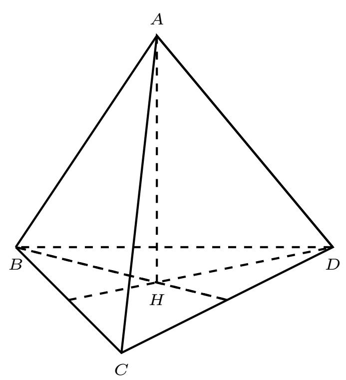
A. $\dfrac{32\pi}{15}$. **B.** $\dfrac{64\pi}{15}$. C. $\dfrac{21\pi}{15}$. D. $\dfrac{16\pi}{15}$.

Lời giải.
Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ và $x = 2$.
Thể tích khối tròn xoay là $V = \pi \displaystyle\int_0^2 \left|\left(x^2\right)^2 - (2x)^2\right| \mathrm{d}x = \dfrac{64\pi}{15}$.
Chọn đáp án B □

Câu 32. Tính thể tích khối cầu nội tiếp hình tứ diện đều có cạnh bằng a.

A. $\dfrac{a^3\pi\sqrt{6}}{216}$. B. $\dfrac{a^3\pi\sqrt{3}}{144}$. C. $\dfrac{a^3\pi\sqrt{3}}{96}$. D. $\dfrac{a^3\pi\sqrt{6}}{124}$.

Lời giải.



Gọi H là trọng tâm tam giác BCD và G là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$.
Khi đó bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$ là

$$r = \mathrm{d}\left(G,(ABC)\right) = \mathrm{d}\left(G,(BCD)\right) = \mathrm{d}\left(G,(ACD)\right) = \mathrm{d}\left(G,(ABD)\right)$$

Ta có $V_{G.BCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{BCD} \cdot \mathrm{d}\left(G,(BCD)\right) \Rightarrow \mathrm{d}\left(G,(BCD)\right) = \dfrac{3 \cdot V_{G.BCD}}{S_{BCD}}$.
Mà $V_{G.BCD} = V_{G.ABC} = V_{G.ABD} = V_{G.ACD}$ vì $S_{BCD} = S_{ABC} = S_{ABD} = S_{ACD}$.
Mặt khác $V_{G.BCD} + V_{G.ABC} + V_{G.ABD} + V_{G.ACD} = V_{ABCD} \Rightarrow V_{G.BCD} = \dfrac{1}{4} V_{ABCD}$.
Do $BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}, AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ nên $V_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow V_{G.BCD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{48}$.
Vậy $r = \mathrm{d}\left(G,(BCD)\right) = \dfrac{3 \cdot V_{G.BCD}}{S_{BCD}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$.
Chọn đáp án A □

Câu 33. Tìm tất cả giá trị của m để phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[1; 3^{\sqrt{3}}\right]$.

A $1 \leq m \leq 16$. B $4 \leq m \leq 8$. C $3 \leq m \leq 8$. D $0 \leq m \leq 2$.

Lời giải.
Điều kiện: $x > 0$.
Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1}$, với $x \in \left[1; 3^{\sqrt{3}}\right]$ thì $t \in [1; 2]$ ta được phương trình $t^2 + t - 2m - 2 = 0$ $(*)$.
Phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left[1; 3^{\sqrt{3}}\right] \Leftrightarrow (*)$ có nghiệm $t \in [1; 2]$.
Ta có $(*) \Leftrightarrow f(t) = t^2 + t = 2m + 2$ có nghiệm $t \in [1; 2] \Leftrightarrow f(1) \leq 2m + 2 \leq f(2) \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$.
Chọn đáp án D □

Câu 34. Số tiền mà An để dành hàng ngày là x (đơn vị nghìn đồng, với $0 < x \in \mathbb{Z}$) biết x là nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x - 2) + \log_3(x - 4)^2 = 0$. Tổng số tiền mà An để dành được sau 1 tuần (7 ngày) là

A 7. B 21. C 24. D 14.

Lời giải.
Điều kiện: $2 < x \in \mathbb{Z}, x \neq 4$.
Khi đó phương trình đã cho tương đương với $2\log_3(x-2) + 2\log_3|x-4| = 0 \Leftrightarrow (x-2)|x-4| = 1$.
TH1: Nếu $x > 4$ thì $(x-2)|x-4| = 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{2}$ (loại do $x \in \mathbb{Z}$).
TH2: Nếu $2 < x < 4$ thì $(x-2)|x-4| = 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (nhận).
Vậy tổng số tiền mà An để dành được sau 1 tuần (7 ngày) là 21 (nghìn đồng).
Chọn đáp án B □

Câu 35. Cho điểm $M(2; 1; 0)$ và đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-1}$. Gọi d là đường thẳng đi qua M, cắt và vuông góc với Δ. Véc-tơ chỉ phương của d là

A $\vec{u} = (-3; 0; 2)$. B $\vec{u} = (0; 3; 1)$. C $\vec{u} = (2; -1; 2)$. D $\vec{u} = (1; -4; -2)$.

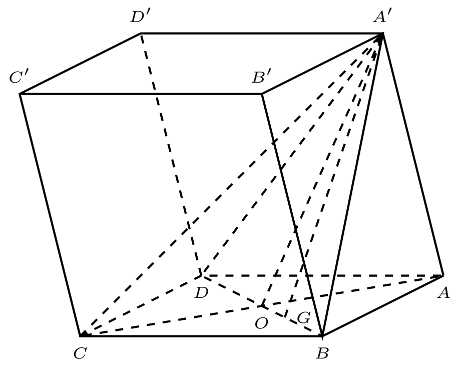
Lời giải.
Gọi H là giao điểm của d và Δ, khi đó giá của $\overrightarrow{MH}$ vuông góc với đường thẳng Δ.
Ta có $H\left(1 + 2t; -1 + t; -t\right)$, $\overrightarrow{MH} = (2t-1; t-2; -t)$ và véc-tơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta} = (2; 1; -1)$.
Do $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u_\Delta} = 0 \Leftrightarrow 2(2t-1) + 1(t-2) - 1(-t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{2}{3}$. Khi đó $\overrightarrow{MH} = \left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{4}{3}; -\dfrac{2}{3}\right)$ hay $\vec{u} = (1; -4; -2)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, biết $A'.ABC$ là hình chóp đều và $A'D$ hợp với đáy một góc $45°$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

A a^3. B $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. C $a^3\sqrt{3}$. D $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó góc giữa $A'D$ và đáy $(ABCD)$ là $\widehat{A'DG} = 45°$.

Do tam giác ABC đều nên $BG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}, DB = a\sqrt{3}, DG = 2BG = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác $A'DG$ vuông cân tại G nên $A'G = DG = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'G = a^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho đường cong $(\mathscr{C}) : y = \dfrac{2x+3}{x-1}$ và M là điểm bất kỳ trên $(\mathscr{C})$. Giả sử d_1, d_2 tương ứng là các khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của $(\mathscr{C})$, khi đó $d_1 \cdot d_2$ bằng

A 3. B 4. C 5. D 6.

Lời giải.

Đường cong $(\mathscr{C})$ có tiệm cận đứng $x - 1 = 0$ và tiệm cận ngang $y - 2 = 0$.

Do $M \in (\mathscr{C})$ nên $M\left(a; 2 + \dfrac{5}{a-1}\right)$.

Ta có $d_1 = \mathrm{d}(M, \text{TCĐ}) = \dfrac{|a-1|}{\sqrt{1}} = |a-1|$ và $d_2 = \mathrm{d}(M, \text{TCN}) = \dfrac{\left|2 + \dfrac{5}{a-1} - 2\right|}{\sqrt{1}} = \dfrac{5}{|a-1|}$.

Từ đó suy ra $d_1 \cdot d_2 = |a-1| \cdot \dfrac{5}{|a-1|} = 5$.

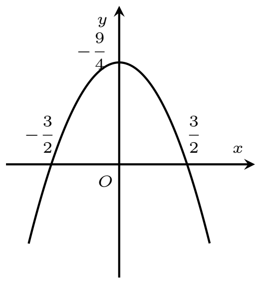
Chọn đáp án C □

Câu 38. Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là

A 33750000 đồng. B 3750000 đồng. C 12750000 đồng. D 6750000 đồng.

Lời giải.

Gọi phương trình parabol $(P) : y = ax^2 + bx + c$. Do tính đối xứng của parabol nên ta có thể chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho (P) có đỉnh $I \in Oy$ (như hình vẽ).



Ta có hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{9}{4} = c \\ \dfrac{9}{4}a - \dfrac{3}{2}b + c = 0 \\ \dfrac{9}{4}a + \dfrac{3}{2}b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = \dfrac{9}{4} \end{cases}$. Vậy $(P): y = -x^2 + \dfrac{9}{4}$.

Dựa vào đồ thị, diện tích của cửa parabol là:$S = \displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \dfrac{9}{4}\right) \mathrm{d}x = \dfrac{9}{2}$ (m).

Số tiền phải trả là $\dfrac{9}{2} \times 1500000 = 6750000$ (đồng).

Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho hàm số $y = \dfrac{x + \sqrt{4x^2 - 3}}{2x + 3}$ có đồ thị $(\mathscr{C})$. Gọi m là số tiệm cận của $(\mathscr{C})$ và n là giá trị của hàm số tại $x = 1$. Tính tích $m \times n$.

A $\dfrac{6}{5}$. **B** $\dfrac{14}{5}$. **C** $\dfrac{3}{5}$. **D** $\dfrac{2}{15}$.

Lời giải.

Do $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \dfrac{3}{2}$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\dfrac{1}{2}$ nên $(\mathscr{C})$ có 2 tiệm cận ngang là $y = \dfrac{3}{2}$ và $y = -\dfrac{1}{2}$.

Do $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{3}{2}\right)^-} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{3}{2}\right)^+} y = +\infty$ nên $(\mathscr{C})$ có 1 tiệm cận đứng là $x = -\dfrac{3}{2}$. Do đó $m = 3$.

Mặt khác khi $x = 1$ thì $y = \dfrac{2}{5}$, suy ra $n = \dfrac{2}{5}$.

Vậy $m \times n = \dfrac{6}{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại $B, SA \perp (ABC), SA = a\sqrt{3}$ cm, $AB = 1$ cm, $BC = \sqrt{2}$ cm. Mặt bên (SBC) hợp với đáy một góc bằng

A 30°. **B** 90°. **C** 60°. **D** 45°.

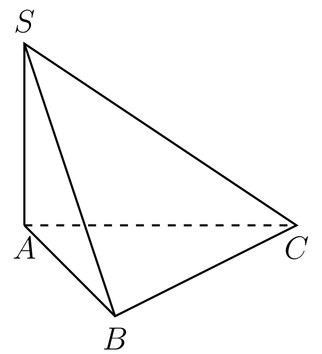
Lời giải.

Do $SA \perp (ABC)$ nên $\begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp BC \end{cases}$.

Mặt khác $BC \perp AB$ nên $BC \perp SB$.

Vậy góc giữa (SBC) và đáy là góc $\widehat{SBA} = \alpha$.

Tam giác SAB vuông tại A nên $\tan \alpha = \dfrac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.



Chọn đáp án C □

Câu 41. Giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ và đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = abc + ab + c$.

A $-\dfrac{16}{25}$. **B** -9. **C** $-\dfrac{25}{9}$. **D** 1.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Đạo hàm: $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.
Điều kiện có hai cực trị là $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow a^2 - 3b > 0$.
Ta có $f(x) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}a\right) \cdot f'(x) + \left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}\right)x + c - \frac{1}{9}ab$ nên phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A, B là $(d) : y = \left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}\right)x + c - \frac{1}{9}ab$.
Theo đề (d) đi qua gốc tọa độ O nên $c - \frac{1}{9}ab = 0 \Leftrightarrow ab = 9c$.
Khi đó $P = abc + ab + c = 9c^2 + 10c = \left(3c + \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} \geq -\frac{25}{9}$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $-\frac{25}{9}$.
Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho z là số phức có mô-đun bằng 2017 và w là số phức thỏa mãn $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w}$. Mô-đun của số phức w là

A 2015. B 0. C 1. **D** 2017.

Lời giải.
Ta có $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w} \Rightarrow (z+w)^2 = w^2 + wz + z^2 \Leftrightarrow w^2 + wz + z^2 = 0 \Leftrightarrow w = \frac{-z \pm z\sqrt{3}i}{2}$.
Với $w = \frac{-z - z\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow |w| = \frac{\left|-z - z\sqrt{3}i\right|}{2} = |-z| \cdot \frac{\left|1 + i\sqrt{3}\right|}{2} = |z| = 2017$.
Với $w = \frac{-z + z\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow |w| = \frac{\left|-z + z\sqrt{3}i\right|}{2} = |-z| \cdot \frac{\left|1 - i\sqrt{3}\right|}{2} = |z| = 2017$.
Chọn đáp án D □

Câu 43. Trong các nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x + y) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2x + y$ bằng

A $\frac{9}{4}$. **B** $\frac{9}{2}$. C $\frac{9}{8}$. D 9.

Lời giải.
TH1: $x^2 + 2y^2 > 1$. Đặt $z = y\sqrt{2}$, suy ra $x^2 + z^2 > 1$ (1). Khi đó:
$\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1 \Leftrightarrow 2x+y \geq x^2+2y^2 \Leftrightarrow 2x+\frac{z}{\sqrt{2}} \geq x^2+z^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+\left(z - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \geq \frac{9}{8}$ (2).
Tập hợp các điểm $M(x; y)$ là miền (H) bao gồm miền ngoài của hình tròn $(\mathscr{C}_1) : x^2 + z^2 = 1$ và miền trong của hình tròn $(\mathscr{C}_2) : (x-1)^2 + \left(z - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{9}{8}$.

Hệ $\begin{cases} T = 2x + \frac{z}{\sqrt{2}} \\ (x-1)^2 + \left(z - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \geq \frac{9}{8} \\ x^2 + z^2 > 1 \end{cases}$ có nghiệm khi đường thẳng $d : 2x + \frac{z}{\sqrt{2}} - T = 0$ có điểm chung với miền (H).
Để T đạt giá trị lớn nhất thì đường thẳng d phải tiếp xúc với đường tròn $(\mathscr{C}_2)$, nghĩa là ta có $\mathrm{d}(I, d) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left|T - \frac{9}{4}\right| = \frac{9}{4} \Leftrightarrow T = \frac{9}{2}$ với $I\left(1; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ là tâm của đường tròn $(\mathscr{C}_2)$.
TH2: $0 < x^2 + 2y^2 < 1$ ta có

$\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1 \Leftrightarrow 2x+y \leq x^2+2y^2 \Leftrightarrow T = 2x+y < 1$ (loại).

Vậy $\max T = \dfrac{9}{2}$.

Chọn đáp án B

Câu 44. Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính 50 cm. Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Khi đó hình nón có bán kính đáy là

A. $10\sqrt{2}$ (cm). B. $50\sqrt{2}$ (cm). C. 20 (cm). D. 25 (cm).

Lời giải.

Ta có diện tích miếng tôn là $S = 2500\pi$ (cm^2).

Diện tích toàn phần của hình nón là:

$S_{\text{tp}} = \pi R^2 + \pi R\ell = 2500\pi \Leftrightarrow R^2 + R\ell = 2500 = A \Leftrightarrow \ell = \dfrac{A}{R} - R \Rightarrow h = \sqrt{\ell^2 - R^2} = \sqrt{\dfrac{A^2}{R^2} - 2A}$.

Thể tích của khối nón là:

$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi R^2\sqrt{\dfrac{A^2}{R^2} - 2A} = \dfrac{1}{3}\pi\sqrt{A^2R^2 - 2AR^4} = \dfrac{1}{3}\pi\sqrt{\dfrac{A^3}{8} - 2A\left(R^2 - \dfrac{A}{4}\right)^2} \leq \dfrac{1}{3}\pi\dfrac{A}{2}\sqrt{\dfrac{A}{2}}$.

Dấu "=" xảy ra khi $R = \sqrt{\dfrac{A}{2}} \Leftrightarrow R = 25$ (cm).

Chọn đáp án D

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3}$ và hai điểm $A(2;0;3)$, $B(2;-2;-3)$. Biết điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc d thỏa mãn $MA^4 + MB^4$ nhỏ nhất. Tìm x_0.

A. $x_0 = 1$. B. $x_0 = 3$. C. $x_0 = 0$. D. $x_0 = 2$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AM, ta có $I(2;-1;0)$.

$$\begin{aligned}
MA^4 + MB^4 &= \left(MA^2 + MB^2\right)^2 - 2MA^2 \cdot MB^2 \\
&= \left(2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}\right)^2 - 2\left(MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}\right)^2 \\
&= 4MI^2 + 2MI^2 \cdot AB^2 + \dfrac{AB^4}{4} - 2MI^2 + MI^2 \cdot AB^2 - \dfrac{AB^4}{8} \\
&= 2MI^4 + 3MI^2 \cdot AB^2 + \dfrac{AB^4}{4} \\
&= 2\left(MI^2 + \dfrac{3AB^2}{4}\right)^2 - \dfrac{7}{10}AB^4
\end{aligned}$$

Do đó $MA^4 + MB^4$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên d.

Lấy $M(2+t;-1+2t;3t) \in d \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (t;2t;3t)$.

Ta có $\overrightarrow{IM} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow t + 4t + 9t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow M(2;-1;0) \equiv I$.

Vậy $x_0 = 2$.

Chọn đáp án D

Câu 46. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $2^x = 3^y = 6^{-z}$. Giá trị của biểu thức $M = xy + yz + xz$ là

A 0. **B** 6. **C** 3. **D** 1.

Lời giải.

Đặt $2^x = 3^y = 6^{-z} = t > 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \log_2 t \\ y = \log_3 t \\ z = -\log_6 t \end{cases}$.

Mặt khác $\log_6 t = \dfrac{1}{\log_t 6} = \dfrac{1}{\log_t 3 + \log_t 2} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\log_3 t} + \dfrac{1}{\log_2 t}} = \dfrac{\log_3 t \cdot \log_2 t}{\log_3 t + \log_2 t}$.

Khi đó $M = xy + yz + xz = \log_2 t \cdot \log_3 t - \log_3 t \cdot \log_6 t - \log_2 t \cdot \log_6 t = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Xét số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 2i| = 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - 1 - i| + |z - 5 - 2i|$ bằng

A $1 + \sqrt{10}$. **B** 4. **C** $\sqrt{17}$. **D** 5.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z. Do $|z - 2 - 2i| = 2$ nên tập hợp điểm M là đường tròn $(\mathscr{C}) : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Các điểm $A(1; 1), B(5; 2)$ là điểm biểu diễn các số phức $1 + i, 5 + 2i$. Khi đó $P = MA + MB$.

Dễ thấy A nằm trong $(\mathscr{C})$, còn B nằm ngoài $(\mathscr{C})$, mà $MA + MB \geq AB = \sqrt{17}$. Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với $(\mathscr{C})$.

Phương trình đường thẳng $AB : x - 4y + 3 = 0$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình sau với $1 < y < 5$.

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4 \\ x - 4y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{37 + 4\sqrt{59}}{17} \\ y = \dfrac{22 + \sqrt{59}}{17} \end{cases}.$$

Vậy $\min P = \sqrt{17}$ khi $z = \dfrac{37 + 4\sqrt{59}}{17} + \dfrac{22 + \sqrt{59}}{17} i$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho tám điểm $A(-2; -2; 0)$, $B(3; -2; 0)$, $C(3; 3; 0)$, $D(-2; 3; 0)$, $M(-2; -2; 5)$, $N(3; 3; 5)$, $P(3; -2; 5)$, $Q(-2; 3; 5)$. Hình đa diện tạo bởi tám điểm đã cho có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A 3. **B** 9. **C** 8. **D** 6.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (5; 0; 0), \overrightarrow{DC} = (5; 0; 0)$ nên $ABCD$ là hình bình hành.

Mặt khác, $\overrightarrow{AD} = (0; 5; 0) \Rightarrow \begin{cases} AB \perp AD \\ AB = AD = 5 \end{cases}$. Vậy $ABCD$ là hình vuông.

Tương tự, $MNPQ$ cũng là hình vuông.

Lại có $\overrightarrow{AM} = (0; 0; 5)$ nên $AM \perp (ABCD)$ và $AM = AB = AD$.

Vậy 8 điểm trên tạo thành một hình lập phương nên có 9 mặt phẳng đối xứng.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Hai điểm M, N thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-3}$. Khi đó độ dà đoạn thẳng MN ngắn nhất bằng

(A) $8\sqrt{2}$. (B) 2017. (C) 8. (D) 4.

Lời giải.

Do M, N thuộc hai nhánh khác nhau nên $M\left(3-\alpha; 3-\dfrac{8}{\alpha}\right), N\left(3+\beta; 3+\dfrac{8}{\beta}\right)$ với $\alpha, \beta > 0$.

Khi đó $MN^2 = (\alpha+\beta)^2 + \left(\dfrac{8}{\alpha}+\dfrac{8}{\beta}\right)^2 = (\alpha+\beta)^2 + \dfrac{64(\alpha+\beta)^2}{(\alpha\beta)^2} = (\alpha+\beta)^2\left(1+\dfrac{64}{(\alpha\beta)^2}\right) \geq 4\alpha\beta\left(1+\dfrac{64}{(\alpha\beta)^2}\right) = 4\left(\alpha\beta+\dfrac{64}{\alpha\beta}\right) \geq 4\cdot 2\cdot 8 = 64.$

Vậy $\min MN = 8$ khi $\begin{cases}\alpha = \beta \\ \alpha\beta = \dfrac{64}{\alpha\beta}\end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 2\sqrt{2}.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Tìm m để tồn tại duy nhất cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \geq 1$ và $x^2+y^2+2x-2y+2-m = 0$.

(A) $\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2$.

(B) $\sqrt{10}-\sqrt{2}$ và $\sqrt{10}+\sqrt{2}$.

(C) $\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2$ và $\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)^2$.

(D) $\sqrt{10}-\sqrt{2}$.

Lời giải.

Điều kiện: $4x+4y-4 > 0$.

Ta có $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \geq 1 \Leftrightarrow 4x+4y-4 \geq x^2+y^2+2 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2 \leq 2$ $(\mathscr{C}_1)$.

Miền nghiệm của bất phương trình là hình tròn (cả bờ) $(\mathscr{C}_1)$ tâm $I_1(2;2;)$, bán kính $R_1 = \sqrt{2}$.

Mặt khác, $x^2+y^2+2x-2y+2-m = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2 = m$ $(*)$.

Với $m = 0 \Rightarrow x = -1, y = 1$ không thỏa mãn $(\mathscr{C}_1)$.

Với $m > 0$ thì $(*)$ là đường tròn $(\mathscr{C}_2)$ tâm $I_2(-1;1)$, bán kính $R_2 = \sqrt{m}$.

Để tồn tại duy nhất cặp số $(x; y)$ thì $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ tiếp xúc nhau.

TH1: $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ tiếp xúc ngoài $\Leftrightarrow R_1+R_2 = I_1I_2 \Leftrightarrow \sqrt{m}+\sqrt{2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow m = \left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2$.

TH2: $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ tiếp xúc trong $\Leftrightarrow R_2-R_1 = I_1I_2 \Leftrightarrow \sqrt{m}-\sqrt{2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow m = \left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)^2$.

Vậy $m = \left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2$ và $m = \left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)^2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (C) □

—— **HẾT** ——

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. B	3. C	4. D	5. B	6. B	7. D	8. C	9. A	10. B
11. A	12. B	13. B	14. A	15. D	16. D	17. C	18. D	19. B	20. C
21. A	22. A	23. A	24. C	25. B	26. D	27. C	28. A	29. A	30. B
31. B	32. A	33. D	34. B	35. D	36. A	37. C	38. D	39. A	40. C
41. C	42. D	43. B	44. D	45. D	46. A	47. C	48. B	49. C	50. C

162 ĐỀ THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI TOÁN HỌC TUỔI TRẺ NĂM 2018, LẦN 3

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $x_1 = 40$ và $x_n = 1{,}1 \cdot x_{n-1}$ với mọi $n = 2, 3, 4, \ldots$. Tính giá trị $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_{12}$ (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

A 855,4. **B** 855,3. **C** 741,2. **D** 741,3.

Lời giải.

Dãy số đã cho là cấp số nhân có số hạng đầu $x_1 = 40$ và công bội $q = 1{,}1$. Do đó:

$$S = x_1 + x_2 + \cdots + x_{12} = 40 \cdot \frac{1 - 1{,}1^{12}}{1 - 1{,}1} \approx 855{,}4.$$

Chọn đáp án A □

Câu 2. Xác định $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x^2}$.

A 0. **B** $-\infty$. **C** không xác định. **D** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{|x|} = +\infty$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Cho $f(x) = \sqrt{1 + 3x} - \sqrt[3]{1 + 2x}$, $g(x) = \sin x$. Tính giá trị của $\dfrac{f'(0)}{g'(0)}$.

A $\dfrac{5}{6}$. **B** $-\dfrac{5}{6}$. **C** 0. **D** 1.

Lời giải.

Ta có

- $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{1+3x}} - \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(1+2x)^2}} \Rightarrow f'(0) = \dfrac{5}{6}$.
- $g'(x) = \cos x \Rightarrow g'(0) = 1$

Vậy $\dfrac{f'(0)}{g'(0)} = \dfrac{5}{6}$.

Chọn đáp án A □

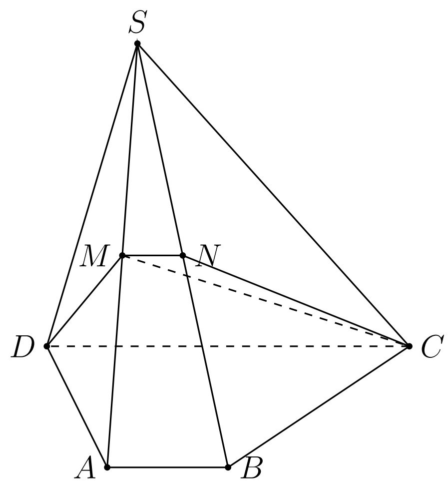
Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn là CD. Gọi M là trung điểm của cạnh SA, N là giao điểm của cạnh SB và mặt phẳng (MCD). Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A MN và SD cắt nhau. **B** $MN \parallel CD$.

C MN và SC cắt nhau. **D** MN và CD chéo nhau.

Lời giải.

Hai mặt phẳng (SAB) và (MCD) lần lượt chứa hai đường thẳng song song AB, CD và MN là giao tuyến của chúng nên $MN \parallel CD$.



Chọn đáp án B □

Câu 5. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x+4}{x-1}$ và $y = x^2 - 1$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x+4}{x-1}$ và $y = x^2 - 1$ là

$$\frac{4x+4}{x-1} = x^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+1) = (x-1)(x^2-1) \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2(x-3) = \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Do đó đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x+4}{x-1}$ và $y = x^2 - 1$ cắt nhau tại 2 điểm.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x}$ khi $x > 0$.

(A) $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. (B) $-\dfrac{1}{4}$. (C) 0. (D) $-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải.

Ta có $y' = -\dfrac{3}{x^4} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-3}{x^4}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-3}{x^4} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3} > 0 \\ x = -\sqrt{3} < 0. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	0

Như vậy $\min\limits_{x>0} y = y(\sqrt{3}) = -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Cho $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x$.

(A) 6. (B) -6. (C) $\dfrac{1}{6}$. (D) $\dfrac{-1}{6}$.

Lời giải.

Từ $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$ ta có $\log_b x = \log_b a \log_a x \Rightarrow \log_b a = \dfrac{3}{2}$.

Do đó: $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x = \dfrac{\log_b x}{\log_b \left(\frac{a}{b^2}\right)} = \dfrac{\log_b x}{\log_b a - \log_b b^2} = \dfrac{3}{\dfrac{3}{2} - 2} = -6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Tính mô-đun số phức nghịch đảo của số phức $z = (1 - 2i)^2$.

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. (B) $\sqrt{5}$. (C) $\dfrac{1}{25}$. (D) $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{(1-2i)^2} = \dfrac{(1+2i)^2}{(1-2i)^2 \cdot (1+2i)^2} = \dfrac{-3+4i}{25}$.

Nên $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \left|\dfrac{-3+4i}{25}\right| = \dfrac{1}{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tính khoảng cách từ điểm $M(1; 3; 2)$ đến đường thẳng $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$.

(A) $\sqrt{2}$. (B) 2. (C) $2\sqrt{2}$. (D) 3.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 3; 2)$ và vuông góc với đường thẳng $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$ là

$$1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 3) + (-1) \cdot (z - 2) = 0 \Leftrightarrow x + y - z - 2 = 0.$$

Hình chiếu vuông góc H của M trên đường thẳng đã cho có tọa độ là nghiệm $(x; y; z)$ của hệ

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -t \\ x + y - z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \\ t = 0. \end{cases}$$

Như vậy $H = (1; 1; 0)$, do đó khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng đã cho là

$$\mathrm{d} = MH = \sqrt{(1-1)^2 + (1-3)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z+4}{-5}$ và $d' : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{z-4}{-1}$.

A $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. **B** $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$.
C $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{2}$. **D** $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;3;-5)$, đường thẳng d' có véc-tơ chỉ phương $\vec{u'}=(3;-2;-1)$.

Gọi Δ đường vuông góc chung của hai đường thẳng d và d', gọi $A=(2+2a;3+3a;-4-5a)$ và $B=(-1+3b;4-2b;4-b)$ lần lượt là giao điểm của Δ với d và d'.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2a+3b-3;-3a-2b+1;5a-b+8)$. Vì Δ đường vuông góc chung của hai đường thẳng d và d' nên

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\vec{u}\\ \overrightarrow{AB}\perp\vec{u'}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}\\ \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u'}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(-2a+3b-3)\cdot 2+(-3a-2b+1)\cdot 3+(5a-b+8)\cdot(-5)=0\\ (-2a+3b-3)\cdot 3+(-3a-2b+1)\cdot(-2)+(5a-b+8)\cdot(-1)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-38a+5b=43\\ -5a+14b=19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=1.\end{cases}$$

Như vậy $A=(0;0;1)$ và $B=(2;2;3)$, nên $\overrightarrow{AB}=(2;2;2)$. Do đó Δ có một vé-tơ chỉ phương là $\vec{w}=(1;1;1)$, bởi vậy Δ có phương trình là

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 11. Tìm số nghiệm thuộc $\left[\dfrac{-3\pi}{2};\pi\right)$ của phương trình $\sqrt{3}\sin x=\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2x\right)$.

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{3}\sin x=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)\Leftrightarrow\sqrt{3}\sin x=-\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow\ \sin x(2\cos x+\sqrt{3})=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\sin x=0\\ &\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=k\pi\\ &x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\\ &x=-\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{aligned}\right.,k\in\mathbb{Z}.$$

Bởi vậy, trên $\left[\dfrac{-3\pi}{2};\pi\right)$, phương trình chỉ có một nghiệm $x=\dfrac{-7\pi}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}-m & \text{với } x\geq 0\\ mx+2 & \text{với } x<0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(A) $m=2$. (B) $m=\pm 2$. **C** $m=-2$. (D) $m=0$.

Lời giải.

- Với $x>0$ thì $f(x)=2\sqrt{x}-m$ liên tục.
- Với $x<0$ thì $f(x)=mx+2$ liên tục.
- Tại $x=0$, ta có
  $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2\sqrt{x}-m)=-m$.
  $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(mx+2)=2$.
  $f(0)=-m$. Nên, hàm số liên tục tại $x=0$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\Leftrightarrow -m=2\Leftrightarrow m=-2.$$

Vậy, hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m=-2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3}{x-2}-27$ song song với trục hoành là

(A) 0. **B** 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}$.

Hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến song song với trục hoành của đồ thị hàm số đã cho là nghiệm của phương trình

$$y'=0\Leftrightarrow \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=3.\end{array}\right.$$

- Khi $x=0$ ta có tiếp tuyến $y=-27$ song song với trục hoành.
- Khi $x=3$ ta có tiếp tuyến $y=0$ trùng với trục hoành.

Vậy, chỉ có 1 tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3}{x-2}-27$ song song với trục hoành.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\triangle ABC$ có $A(2;4)$, $B(5;1)$, $C(-1;-2)$. Phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BC}}$ biến $\triangle ABC$ thành $\triangle A'B'C'$. Tìm tọa độ trọng tâm của $\triangle A'B'C'$.

(A) $(-4;2)$. (B) $(4;2)$. (C) $(4;-2)$. **D** $(-4;-2)$.

Lời giải.

Tọa độ trọng tâm G của tam giác $\triangle ABC$ là $G(2;1)$.

Vì phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BC}}$ biến $\triangle ABC$ thành $\triangle A'B'C'$ nên nó biến trọng tâm G của $\triangle ABC$ thành trọng tâm G' của $\triangle A'B'C'$.

Ta có $T_{\overrightarrow{BC}}(G)=G'\Leftrightarrow \overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow \begin{cases}x_{G'}-2=-6\\ y_{G'}-1=-3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x_{G'}=-4\\ y_{G'}=-2.\end{cases}$

Vậy $G'(-4;-2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{|x|-1}$.

(A) 0. (B) 1. (C) 2. **D** 3.

Lời giải.

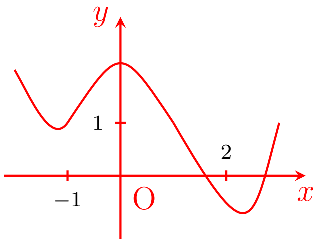
Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = (-1; +\infty) \setminus \{1\}$.

- $\lim\limits_{x \to (-1)^+} y = \lim\limits_{x \to (-1)^+} \dfrac{\sqrt{x+1}}{|x|-1} = \lim\limits_{x \to (-1)^+} \dfrac{\sqrt{x+1}}{-x-1} = \lim\limits_{x \to (-1)^+} \dfrac{-1}{\sqrt{x+1}} = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to 1^+} y = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x+1}}{|x|-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{|x|-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1} = 0$.

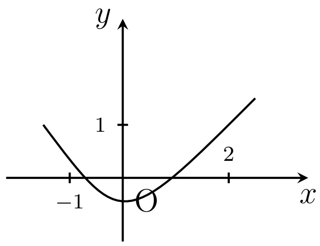
Do đó, đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{|x|-1}$ có 3 đường tiệm cận, gồm 2 đường tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = -1$, $x = 1$ và đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.

Chọn đáp án (D) □

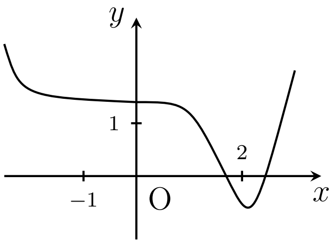
Câu 16. Một trong các đồ thị hàm số dưới đây là đồ thị của hàm số $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $g'(0) = 0$, $g''(x) < 0, \forall x \in (-1; 2)$. Hỏi đó là đồ thị nào?



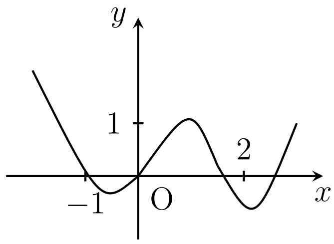
A.



(B).



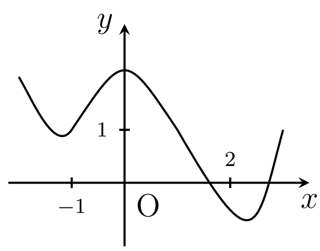
(C).



(D).

Lời giải.

Từ giả thiết $g'(0) = 0$, $g''(x) < 0, \forall x \in (-1; 2)$ suy ra $g'(0) = 0$, $g''(0) < 0$ nên hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 0$, do đó trong 4 đồ thị đã cho, đồ thị có dạng như hình bên là đồ thị của hàm số $g(x)$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\dfrac{\log_2 \frac{x}{2}}{\log_2 x} - \dfrac{\log_2 x^2}{\log_2 x - 1} \leq 1$.

(A) $\left(0; \dfrac{1}{2}\right] \cup \left(1; \sqrt{2}\right] \cup (2; +\infty)$.

(B) $\left(0; \dfrac{1}{2}\right] \cup \left(1; \sqrt{2}\right]$.

C $\left(0; \dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right)$.

(D) $\left(0; \dfrac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x > 0, x \neq 1, x \neq 2$.
Đặt $t = \log_2 x$, ta được

$$\frac{t-1}{t} - \frac{2t}{t-1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{(2t-1)(t+1)}{t(t-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq -1 \\ 0 < t \leq \dfrac{1}{2} \\ t > 1. \end{array}\right.$$

Do đó $\left[\begin{array}{l} \log_2 x \leq -1 \\ 0 < \log_2 x \leq \dfrac{1}{2} \\ \log_2 x > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq \dfrac{1}{2} \\ 1 < x \leq \sqrt{2} \\ x > 2 \end{array}\right.$.

Như vậy $S = \left(0; \dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} \ln x$.

A $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2) + C$.

B $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2) + C$.

C $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 1) + C$.

D $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2) + C$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \end{cases}$.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \int \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2) + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P)\colon y = x^2$ và đường thẳng $d\colon y = 2x$ quay xung quanh trục Ox.

A $\displaystyle\pi\int_0^2 \left(x^2 - 2x\right)^2\,\mathrm{d}x$.

B $\displaystyle\pi\int_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x - \pi\int_0^2 x^4\,\mathrm{d}x$.

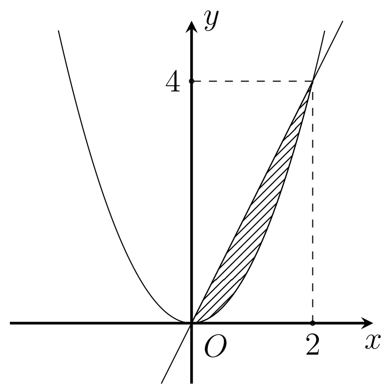
C $\displaystyle\pi\int_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x + \pi\int_0^2 x^4\,\mathrm{d}x$.

D $\displaystyle\pi\int_0^2 \left(2x - x^2\right)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $d : y = 2x$ là

$$x^2 = 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$$



Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $d : y = 2x$ quay xung quanh trục Ox là

$$V = \pi \int\limits_0^2 4x^2 \, \mathrm{d}x - \pi \int\limits_0^2 x^4 \, \mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\tan x) = \cos^2 x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int\limits_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x$.

A $\dfrac{2+\pi}{8}$. **B** 1. **C** $\dfrac{2+\pi}{4}$. **D** $\dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Đặt $x = \tan t$ với $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, suy ra $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\cos^2 t} \cdot \mathrm{d}t$.

- Khi $x = 0$ thì $t = 0$.
- Khi $x = 1$ thì $t = \dfrac{\pi}{4}$.

Ta có

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan t) \cdot \frac{1}{\cos^2 t} \, \mathrm{d}t = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} \cdot \mathrm{d}t = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}t = t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 21. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z| = |z + \bar{z}| = 1$?

A 0. **B** 1. **C** 4. **D** 3.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$, ta có $\bar{z} = a - bi$. Từ đó:

$$|z| = |z + \bar{z}| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ |2a| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ a = \pm\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Do đó có 4 số phức thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z - 1| = |z + \bar{z} + 2|$ trên mặt phẳng tọa độ là một

A đường thẳng. **B** đường tròn. **C** parabol. **D** hypebol.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$, ta có $\bar{z} = x - yi$. Từ đó:

$$\begin{aligned} & 2|z-1| = |z+\bar{z}+2| \Leftrightarrow 2|(x-1)+yi| = |2x+2| \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{(x-1)^2+y^2} = |x+1| \Leftrightarrow y^2 = 4x. \end{aligned}$$

Nên tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z-1| = |z+\bar{z}+2|$ trên mặt phẳng tọa độ là một parabol.

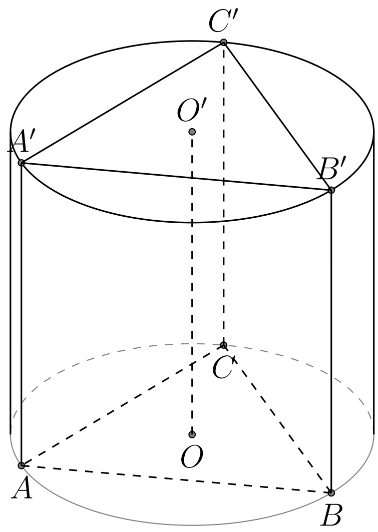
Chọn đáp án C □

Câu 23. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a và chiều cao h. Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều tam giác đều nội tiếp hình trụ đã cho.

A $V = \dfrac{\sqrt{3}a^2h}{4}$. **B** $V = \dfrac{3\sqrt{3}a^2h}{4}$.

C $V = \dfrac{\pi}{3}\left(h^2 + \dfrac{4a^2}{3}\right)\sqrt{\dfrac{h^2}{4}+\dfrac{a^2}{3}}$. **D** $V = \dfrac{3\sqrt{3}\pi a^2h}{4}$.

Lời giải.



Gọi x là cạnh đáy của khối lăng trụ tam giác đều nội tiếp hình trụ, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh x là $\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$, do đó:

$$\frac{x\sqrt{3}}{3} = a \Leftrightarrow x = a\sqrt{3}.$$

Diện tích mặt đáy của hình lăng trụ: $S = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{(a\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Thể tích khối lăng trụ tam giác đều tam giác đều nội tiếp hình trụ đã cho là

$$V = Bh = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}\cdot h = \frac{3\sqrt{3}a^2h}{4}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 24. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;-2;-1)$, $B(-2;-4;3)$, $C(1;3;-1)$ và mặt phẳng $(P): x+y-2z-3=0$. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};-1\right)$. **B** $M\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2};1\right)$. **C** $M(2;2;-4)$. **D** $M(-2;-2;4)$.

Lời giải.

Gọi I là điểm sao cho $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC} = 0 \Rightarrow I(0;0;0)$.

Từ đó:

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right| = \left|4\overrightarrow{MI}+\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}\right)\right| = 4IM \geq 4IH.$$

với H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P).

Từ đó suy ra $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv H$. Phương trình đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) là: $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}$.

Tọa độ điểm H là nghiệm $(x; y; z)$ của hệ

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -2t \\ x + y - 2z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = -1 \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Suy ra $H = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; -1\right)$.

Vậy, tọa độ điểm M cần tìm là $M = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; -1\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 4 = 0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{3}$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d.

A $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{-3}$.

B $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{-3}$.

C $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$.

D $\dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{3}$.

Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 + 3t. \end{cases}$

Tọa độ giao điểm $A(x; y; z)$ của đường thẳng d và mặt phẳng (P) là nghiệm $(x; y; z)$ của hệ

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 + 3t \\ x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ t = 1. \end{cases}$$

Như vậy $A(1; 1; 1)$.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (2; 1; 3)$.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (1; 2; 1)$.

Vì đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng d nên Δ có một vec-tơ chỉ phương là

$$[\overrightarrow{n}, \overrightarrow{u}] = (5; -1; -3).$$

Do Δ nằm trong mặt phẳng (P) và cắt d nên Δ đi qua điểm $A(1; 1; 1)$. Phương trình đường thẳng Δ là

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau trong đó chứa các chữ số $3, 4, 5$ và chữ số 4 đứng cạnh chữ số 3 và chữ số 5?

(A) 1470. (B) 750. (C) 2940. (D) 1500.

Lời giải.

Xét số có 6 chữ số đôi một khác nhau có dạng $x = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Vì các chữ số $3, 4, 5$ đứng cạnh nhau và chữ số 4 đứng cạnh chữ số 3 và chữ số 5 nên có hai khả năng 345 hoặc 543. Ta coi 345 và 543 là chữ số đặc biệt A (có 2 chữ số đặc biệt này). Để đếm số các số x thỏa mãn yêu cầu bài toán, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp chấp nhận cả $a_1 = 0$:

- Chọn vị trí cho A, có 4 cách chọn.
- Chọn 3 chữ số còn trong tập $\{0; 1; 2; 6; 7; 8; 9\}$ và sắp xếp vào các vị trí còn lại, có A_7^3 cách.

  Trường hợp này có $2 \cdot 4 \cdot \mathrm{A}_7^3$ số.

Trường hợp $a_1 = 0$:

- Chọn vị trí cho A, có 3 cách chọn.
- Chọn 2 chữ số còn trong tập $\{1; 2; 6; 7; 8; 9\}$ và sắp xếp vào các vị trí còn lại, có A_6^2 cách.

  Trường hợp này có $2 \cdot 3 \cdot \mathrm{A}_6^2$ số.

Vậy, số các số cần tìm là $2 \cdot 4 \cdot \mathrm{A}_7^3 - 2 \cdot 3 \cdot \mathrm{A}_6^2 = 1500$.

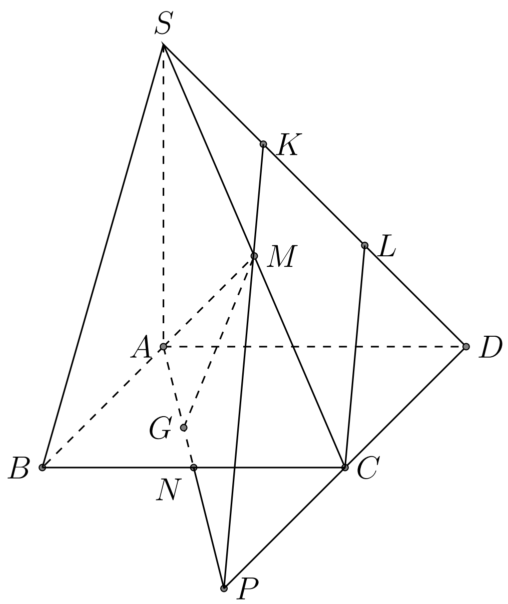
Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và M là trung điểm SC. Gọi K là giao điểm của SD với mặt phẳng (AGM). Tính tỉ số $\dfrac{KS}{KD}$.

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Gọi N, P lần lượt là giao điểm của AG với CB, CD ta có $K = PM \cap SD$. Gọi L là trung điểm của KD thì $CL \parallel MK$. Suy ra K là trung điểm của SL. Do vậy $KD = 2KS$, hay $\dfrac{KS}{KD} = \dfrac{1}{2}$.

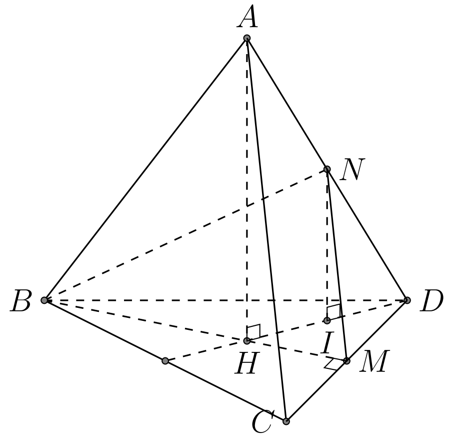


Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BM.

A $\frac{a\sqrt{22}}{11}$. **B** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D** a.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm AD, suy ra $MN \parallel AC$, do đó

$$d(AC;BM) = d(AC;(BMN)) = d(D;(BMN)).$$

Gọi I là hình chiếu của N trên (ABC), suy ra $NI \parallel AH$ và $NI = \frac{AH}{2}$.

Từ đó suy ra $V_{N.BMD} = \frac{1}{3} \cdot NI \cdot S_{\triangle BMD} = \frac{1}{4} V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}$.

Ta có $S_{\triangle BMN} = \frac{a^2\sqrt{11}}{16}$.

$V_{N.BMD} = V_{D.BMN} = \frac{1}{3} d(D;(BMN)).S_{\triangle BMN} \Rightarrow d(D;(BMN)) = \frac{a\sqrt{22}}{11}$

Chọn đáp án A □

Câu 29. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$ nghịch biến trên $(0;1)$.

A $m > \frac{1}{3}$. **B** $m < -1$.

C $m \geq \frac{1}{3}$ hoặc $m \leq -1$. **D** $-1 < m < \frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx - 9m^2 = 3(x+m)(x-3m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -m \\ x = 3m. \end{array}\right.$

- Nếu $m = 0$ thì $y' = 3x^2 > 0, \forall x \in (0;1)$, nên hàm số đồng biến trên $(0;1)$. Do đó $m = 0$ không thỏa mãn.
- Nếu $m < 0$ thì $y' \leq 0, \forall x \in [3m; -m]$. Do đó, hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ khi và chỉ khi $3m \leq 0 < 1 \leq -m \Rightarrow m \leq -1$.
- Nếu $m > 0$ thì $y' \leq 0, \forall x \in [-m; 3m]$. Do đó, hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ khi và chỉ khi $-m \leq 0 < 1 \leq 3m \Rightarrow m \geq \frac{1}{3}$.

Vậy: $m \geq \frac{1}{3}$ hoặc $m \leq -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Phương trình $|x^2 - 2x|(|x| - 1) = m$ (với m là tham số thực) có tối đa bao nhiêu nghiệm thực?

A 3. **B** 4. **C** 5. **D** 6.

Lời giải.

Xét $f(x) = |x^2 - 2x|\,(|x| - 1)$, ta có

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2x & \text{nếu } x \geq 2 \\ -x^3 + 3x^2 - 2x & \text{nếu } 0 \leq x < 2 \\ -x^3 + x^2 + 2x & \text{nếu } x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 & \text{nếu } x > 2 \\ -3x^2 + 6x - 2 & \text{nếu } 0 < x < 2 \\ -3x^2 + 3x + 2 & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Từ đó $f'(x) = 0$ có các nghiệm $x = \dfrac{3 - \sqrt{33}}{6}$ và $x = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{3}$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{33}}{6}$		0		$\frac{3+\sqrt{3}}{3}$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$	
y		$\searrow$			$\nearrow$			$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $|x^2 - 2x|\,(|x| - 1) = m$ có tối đa 4 nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 3)(x_2 + 3) = 72$.

A. $m = \dfrac{61}{2}$. B. $m = 3$. C. không tồn tại. **D.** $m = \dfrac{9}{2}$.

Lời giải.

Với điều kiện $\Delta = 37 - 4m \geq 0$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2.

Ta có $\log_3 x_1 + \log_3 x_2 = 3 \Leftrightarrow \log_3(x_1x_2) = 3 \Rightarrow x_1x_2 = 27$.

Từ đó $(x_1 + 3)(x_2 + 3) = 72 \Leftrightarrow x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9 = 72 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 12$

Bởi vậy $\{x_1; x_2\} = \{3; 9\}$.

Suy ra $(\log_3 x_1) \cdot (\log_3 x_2) = 2m - 7 \Rightarrow (\log_3 3) \cdot (\log_3 9) = 2m - 7 \Leftrightarrow 2m - 7 = 2 \Leftrightarrow m = \dfrac{9}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn $f'(x) \geq x + \dfrac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$ và $f(1) = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(2)$.

A. 3. B. 2. **C.** $\dfrac{5}{2} + \ln 2$. D. 4.

Lời giải.

Ta có $f(2) - f(1) = \displaystyle\int_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \left.\left(\frac{x^2}{2} + \ln x\right)\right|_1^2 = \frac{3}{2} + \ln 2$.

Do đó $\min f(2) = \dfrac{3}{2} + \ln 2 + f(1) = \dfrac{5}{2} + \ln 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \mathrm{e}^{x-1}$, các trục tọa độ và phần đường thẳng $y = 2 - x$ với $x \geq 1$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành.

A. $V = \dfrac{1}{3} + \dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{2\mathrm{e}^2}$. **B.** $V = \dfrac{\pi\,(5\mathrm{e}^2 - 3)}{6\mathrm{e}^2}$. C. $V = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e}}\pi$. D. $V = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{2\mathrm{e}^2}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $\mathrm{e}^{x-1} = 2 - x \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x-1} + x - 2 = 0 \;\; (1)$

Hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{x-1} + x - 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và (1) có nghiệm $x = 1$ nên phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Đường thẳng $y = 2 - x$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = 2$.

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành là

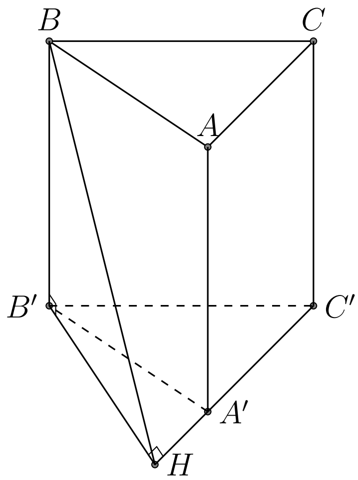
$$\begin{aligned} V &= \pi \int\limits_0^1 (e^{x-1})^2 \,\mathrm{d}x + \pi \int\limits_1^2 (2-x)^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \pi \int\limits_0^1 e^{2x-2} \,\mathrm{d}x + \pi \int\limits_1^2 (2-x)^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\pi \, \mathrm{e}^{2x-2}\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\pi \,(2-x)^3\Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^2}\right) + \frac{1}{3}\pi = \frac{\pi\,(5\mathrm{e}^2 - 3)}{6\mathrm{e}^2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 34. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, mặt phẳng $(A'BC')$ tạo với đáy một góc 60°. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Ⓐ $V = \dfrac{3a^3}{8}$. Ⓑ $V = \dfrac{9a^3}{8}$. Ⓒ $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D** $V = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Lời giải.



Ta có $B'H = \sin 30^\circ \cdot B'C' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\widehat{BHB'} = 60\circ \Rightarrow BB' = B'H \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{3a}{2}$.

Suy ra $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot BB' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{3a}{2} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{6}$

Chọn đáp án D □

Câu 35. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xét đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0;0;1)$ và vuông góc với mặt phẳng Oxz. Tính khoảng cách nhỏ nhất giữa điểm $B(0;4;0)$ tới điểm C trong đó C là điểm cách đều đường thẳng Δ và trục Ox.

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $3\sqrt{2}$. **C** $\sqrt{6}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0;0;1)$ và vuông góc với mặt phẳng Oxz là $\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$.

Gọi $C=(a;b;c)$, mặt phẳng (P) đi qua C và vuông góc với Δ có phương trình $y-b=0$. Hình chiếu vuông góc của C lên đường thẳng Δ là giao điểm H của mặt phẳng (P) với đường thẳng Δ. Suy ra $H=(0;b;1)$.

Tọa độ hình chiếu vuông góc K của C trên trục Ox là $K=(a;0;0)$.

Theo đề bài: $d(C;\Delta)=d(C;Ox) \Leftrightarrow CH=CK \Leftrightarrow \sqrt{a^2+(1-c)^2}=\sqrt{b^2+c^2} \Leftrightarrow a^2=b^2+2c-1$.

Ta có $BC=\sqrt{a^2+(b-4)^2+c^2}=\sqrt{b^2+2c-1+b^2-8b+16+c^2}=\sqrt{2(b-2)^2+(c+1)^2+6} \geq \sqrt{6}$.

Do đó $\min BC=\sqrt{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Mỗi lượt, ta gieo một con súc sắc (loại 6 mặt, cân đối) và một đồng xu (cân đối). Tính xác suất để trong 3 lượt gieo như vậy, có ít nhất một lượt gieo được kết quả con súc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp.

A $\dfrac{397}{1728}$. B $\dfrac{1385}{1728}$. C $\dfrac{1331}{1728}$. D $\dfrac{1603}{1728}$.

Lời giải.

Gọi A là biến cố "trong 3 lượt gieo có ít nhất một lượt gieo được kết quả con súc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp".

Xác suất một lượt gieo được kết mặt 1 chấm xuất hiện đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp là $\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{12}$.

Xác suất để cả 3 lượt gieo con súc sắc không xuất hiện mặt 1 chấm, còn đồng xu xuất hiện mặt sấp là $\left(1-\dfrac{1}{12}\right)^3=\left(\dfrac{11}{12}\right)^3$.

Vậy: $n(A)=1-\left(\dfrac{11}{12}\right)^3=\dfrac{397}{1728}$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Một người gửi tiết kiệm ngân hàng theo hình thức gửi góp hàng tháng. Lãi suất tiết kiệm gửi góp cố định 0,55%/tháng. Lần đầu tiên người đó gửi 2.000.000 đồng. Cứ sau mỗi tháng người đó gửi nhiều hơn số tiền đã gửi tháng trước đó là 200.000 đồng. Hỏi sau 5 năm (kể từ lần gửi đầu tiên) người đó nhận được tổng số tiền cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu?

A 618051620 đồng. B 484692514 đồng. C 597618514 đồng. D 539447312 đồng.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u_1=2000000 \\ d=200000 \\ q=1+0{,}0055 \end{cases}$. Gọi M_k là số tiền người đó có được sau k tháng gửi tiền $k=1,2,3,\cdots,60$.

Ta có

$$M_1=u_1\cdot q$$
$$M_2=(M_1+u_1+d)\,q=u_1q^2+u_1q+dq$$

$$M_3 = (M_2 + u_1 + 2d)\, q = u_1 q^3 + u_1 q^2 + u_1 q + dq^2 + 2dq$$
$$M_4 = (M_3 + u_1 + 3d)\, q = u_1 q^4 + u_1 q^3 + u_1 q^2 + u_1 q + dq^3 + 2dq^2 + 3dq$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$M_{60} = u_1 q \left(q^{59} + \cdots + q^2 + q + 1\right) + dq \left(q^{58} + 2q^{57} + \cdots + 58q + 59\right).$$

Ta có $q^{59} + \cdots + q^2 + q + 1 = \dfrac{1 - q^{60}}{1 - q}$.

Xét hàm số $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{58} + x^{59} = \dfrac{1 - x^{60}}{1 - x}$.

Ta có $f'(x) = 1 + 2x + \cdots + 58x^{57} + 59x^{58}$ hay $f'(x) = \dfrac{59x^{60} - 60x^{59} + 1}{(x-1)^2}$.

Từ đó $1 + 2x + \cdots + 58x^{57} + 59x^{58} = \dfrac{59x^{60} - 60x^{59} + 1}{(x-1)^2}$.

Thay $x = \dfrac{1}{q}$ ta được

$$q^{58} + 2q^{57} + \cdots + 58q + 59 = \frac{59 - 60q + q^{60}}{(1-q)^2}.$$

Vậy $M_{60} = u_1 q \cdot \dfrac{1 - q^{60}}{1 - q} + dq \cdot \dfrac{59 - 60q + q^{60}}{(1-q)^2} = 539447312$ đồng.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và điểm M trong tam giác sao cho $MA = 1$, $MB = 2$, $MC = \sqrt{2}$. Tính góc $\widehat{AMC}$.

A 135°. B 120°. C 160°. D 150°.

Lời giải.

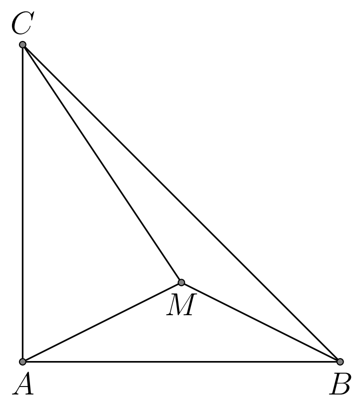
Cách 1:

Gọi Q là phép quay tâm A biến C thành B và M' là ảnh của M trong phép quay Q.

Ta có $M'M^2 + M'B^2 = 2AM^2 + MC^2 = MB^2$ nên $M'B \perp M'M$. Kết hợp $M'B \perp MC$ ta được M', M, C thẳng hàng.

Suy ra $\widehat{AMC} = 180^\circ - \widehat{AMM'} = 135^\circ$.

Cách 2:



Đặt $AB = AC = x \Rightarrow BC = x\sqrt{2}$.

Ta có:

$\cos \widehat{AMC} = \dfrac{MA^2 + MC^2 - AC^2}{2MA.MC} = \dfrac{3 - x^2}{2\sqrt{2}}$,

$\cos \widehat{BMC} = \dfrac{MB^2 + MC^2 - BC^2}{2MB.MC} = \dfrac{6 - 2x^2}{4\sqrt{2}} = \dfrac{3 - x^2}{2\sqrt{2}}$.

Suy ra $\widehat{AMC} = \widehat{BMC} = \alpha$ với $\alpha > 90^\circ$.

Ta có: $AC^2 = 3 - 2\sqrt{2}\cos\alpha$

và $AB^2 = 5 - 4\cos\widehat{AMB} = 5 - 4\cos(360^\circ - \alpha) = 5 - 4\cos 2\alpha$.

Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên

$$3 - 2\sqrt{2}\cos\alpha = 5 - 4\cos 2\alpha \Leftrightarrow 4\cos^2\alpha - \sqrt{2}\cos\alpha - 3 = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Do đó $\alpha = 135^\circ$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Tính giá trị của x sao cho hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau.

(A) $\dfrac{a}{2}$. (B) $\dfrac{a}{3}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Gọi H, I lần lượt là trung điểm CD, AB.

Ta có $\begin{cases}(ACD)\perp(BCD)\\(ACD)\cap(BCD)=CD\\BH\perp CD\end{cases}\Rightarrow BH\perp(ACD)$.

Vì các tam giác DAB và CAB cân nên $\begin{cases}DI\perp AB\\CI\perp AB\end{cases}\Rightarrow \widehat{((ABD);(CBD))}=\widehat{CID}$.

Ta có $BH = AH = \sqrt{a^2-x^2}\Rightarrow AB=\sqrt{2a^2-2x^2}$.

Vì I là trung điểm AB nên $AI = \dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{2a^2-2x^2}}{2}$.

Xét tam giác DIA vuông tại I ta có:

$$DI=\sqrt{AD^2-AI^2}=\sqrt{a^2-\frac{2a^2-2x^2}{4}}=\sqrt{\frac{2a^2+2x^2}{4}}.$$

Để hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau thì $\widehat{CID}=90^\circ$, khi đó ta có

$$CD^2=DI^2+CI^2=2DI^2\Leftrightarrow 4x^2=\frac{2a^2+2x^2}{4}\Rightarrow x=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=x(x^2-3)$ sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt (C) và trục hoành lần lượt tại hai điểm phân biệt A (khác M) và B sao cho M là trung điểm của AB.

(A) 0. (B) 1. **C** 2. (D) 3.

Lời giải.

Gọi $M(m;m^3-3m)$, phương trình tiếp tuyến Δ tại M của đồ thị (C) là: $y=(3m^2-3)(x-m)+m^3-3m$.

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (C) là

$$x(x^2-3)=(3m^2-3)(x-m)+m^3-3m\Leftrightarrow (x-m)^2(x+2m)=0$$

Khi đó $x_A=-2m$.

Vì B là giao điểm của Δ với trục hoành nên $x_B=\dfrac{2m^3}{3m^2-2}$.

Điều kiện để M là trung điểm của AB là

$$x_A+x_B=2x_M\Leftrightarrow -2m+\frac{2m^3}{3m^2-2}=2m\Leftrightarrow m(5m^2-6)=0.$$

Vì A khác M nên $m \neq -2m \Leftrightarrow m \neq 0$. Do đó, ta được $5m^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{\frac{6}{5}}$.
Vậy có 2 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và có đúng 3 điểm cực trị là -2, -1 và 0. Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị.

A 3. B 4. C 5. D 6.

Lời giải.
Đặt $u = x^2 - 2x$ ta có $y' = (2x - 2)f'(u)$.

Do đó: $y' = 0 \Leftrightarrow (2x-2)f'(u) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có 3 điểm cực trị.
Chọn đáp án A □

Câu 42. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của $P = \dfrac{3x+2y+1}{x+y+6}$.

A 3. B 2. C 1. D 4.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned} &\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy \\ \Leftrightarrow\ & 3(x+y) + \log_{\sqrt{3}}(3(x+y)) = \left(x^2+y^2+xy+2\right) + \log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2+xy+2\right). \end{aligned}$$

Hay $f(3(x+y)) = f\left(x^2+y^2+xy+2\right)$ với $f(t) = t + \log_{\sqrt{3}} t$ có $f'(t) = 1 + \dfrac{1}{t\ln\sqrt{3}} > 0, \forall t > 0$.
Do vậy

$$\begin{aligned} & 3(x+y) = x^2+y^2+xy+2 \\ \Leftrightarrow\ & \left(4x^2+4xy+y^2\right) + 3(y^2-2y+1) - 6(2x+y) + 5 = 0 \\ \Rightarrow\ & (2x+y)^2 - 6(2x+y) + 5 = -3(y-1)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Suy ra $1 \leq 2x + y \leq 5$. Do đó $P = 1 + \dfrac{2x+y-5}{x+y+6} \leq 1$.
Vậy $P_{\max} = 1$.
Chọn đáp án C □

Câu 43. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị cảu m sao cho $10m \in \mathbb{Z}$ và phương trình $2\log_{mx-5}(2x^2 - 5x + 4) = \log_{\sqrt{mx-5}}(x^2 + 2x - 6)$ có nghiệm duy nhất. Tìm số phần tử của S.

A 15. B 14. C 13. D 16.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}0 < mx - 5 \neq 1\\ 2x^2 - 5x + 4 = x^2 + 2x - 6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0 < mx - 5 \neq 1\\ x = 2 \vee x = 5.\end{cases}$$

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases}0 < 2m - 5 \neq 1\\ 5m - 5 \leq 0 \vee 5m - 5 = 1\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}0 < 5m - 5 \neq 1\\ 2m - 5 \leq 0 \vee 2m - 5 = 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{5}{2} < m \neq 3\\ m \leq 1 \vee m = \dfrac{6}{5}\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}1 < m \neq \dfrac{6}{5}\\ m \leq \dfrac{5}{2} \vee m = 3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}10 < 10m \neq 12\\ 10m \leq 25 \vee 10m = 30.\end{cases}$$

Do $10m \in \mathbb{Z}$ nên có 15 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục trên miền $D = [a; b]$ có đồ thị là một đường cong (C). Gọi S là phần giới hạn bởi (C) và các đường thẳng $x = a$, $x = b$. Người ta chứng minh được rằng độ dài đường cong S bằng $\displaystyle\int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$. Theo kết quả trên, độ dài đường cong S là phần đồ thị của hàm số $f(x) = \ln x$ bị giới hạn bởi các đường $x = 1$, $x = \sqrt{3}$ là $m - \sqrt{m} + \ln \dfrac{1 + \sqrt{m}}{\sqrt{n}}$ với $m, n \in \mathbb{Z}$ thì giá trị $m^2 - mn + n^2$ là bao nhiêu?

A 6. B 7. C 3. D 1.

Lời giải.

Ta có $S = \displaystyle\int\limits_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{1 + x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $u = \sqrt{1 + x^2} \Rightarrow u^2 = 1 + x^2 \Rightarrow u\,\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}x$.

Khi $x = 1$ thì $u = \sqrt{2}$.

Khi $x = \sqrt{3}$ thì $u = 2$.

Nên

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{u^2}{u^2 - 1}\,\mathrm{d}u = \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \mathrm{d}u + \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{(u-1)(u+1)}\,\mathrm{d}u \\ &= \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u \\ &= u\Big|_{\sqrt{2}}^{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{u-1}{u+1}\Big|_{\sqrt{2}}^{2} = 2 - \sqrt{2} + \ln\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Do đó $m = 2$, $n = 3$. Bởi vậy $m^2 - mn + n^2 = 7$.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z^2 - z| + |z^2 + z + 1|$ với z là số phức thỏa mãn $|z| = 1$.

A $\sqrt{3}$. **B** 3. **C** $\dfrac{13}{4}$. **D** 5.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ với $a^2 + b^2 = 1$ thì

$$\begin{aligned} P &= |(a+bi)^2 - (a+bi)| + |(a+bi)^2 + (a+bi) + 1| \\ &= |(a^2 - a - b^2) + (2ab - b)i| + |(a^2 + a + 1 - b^2) + (2ab + b)i| \\ &= \sqrt{(a^2 - a - b^2)^2 + (2ab - b))^2} + \sqrt{(a^2 + a + 1 - b^2)^2 + (2ab + b))^2} \\ &= \sqrt{2 - 2a} + |2a + 1|. \end{aligned}$$

Đặt $f(a) = \sqrt{2-2a} + |2a+1|$ với $-1 \le a \le 1$

Ta có $f(a) = \begin{cases} \sqrt{2-2a} + 2a + 1 & \text{nếu } \dfrac{1}{2} \le a \le 1 \\ \sqrt{2-2a} - 2a - 1 & \text{nếu } -1 \le a < \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Do đó $f'(a) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{2-2a}} + 2 & \text{nếu } \dfrac{1}{2} < a < 1 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2-2a}} - 2 & \text{nếu } -1 \le a < \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

$f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{7}{8}$

$f(-1) = 3$, $f(\dfrac{7}{8}) = \dfrac{13}{4}$, $f(1) = 3$.

Bởi vậy $\max\limits_{[-1;1]} f(a) = \dfrac{13}{4}$ khi $a = \dfrac{7}{8}, b = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{8}$.

Như vậy, khi $z = \dfrac{7 + i\sqrt{15}}{8}$ thì $\max P = \dfrac{13}{4}$.

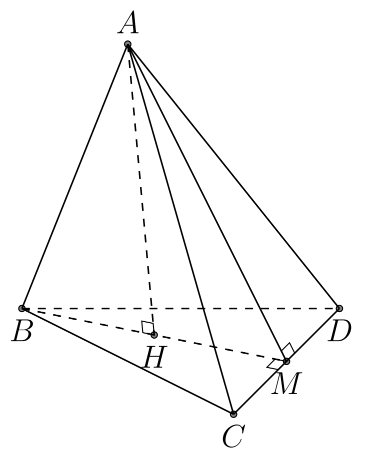
Chọn đáp án C □

Câu 46. Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = 2\sqrt{3}$ và các cạnh còn lại đều bằng x. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng $2\sqrt{2}$.

A $x = \sqrt{6}$. **B** $x = 2\sqrt{2}$. **C** $x = 3\sqrt{2}$. **D** $x = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm CD và H là hình chiếu của A trên (BCD). Do $(ABM) \perp CD$ nên H thuộc BM. Ta có



$$AH = \frac{2S_{ABM}}{BM} = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{3x^2}{4} - 3}}{\dfrac{x\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3x^2 - 12}}{x}.$$

Do $S_{BCD} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$ và $V = 2\sqrt{2}$ nên

$$x\sqrt{x^2 - 4} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 47. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABD, ABC và E là điểm đối xứng với điểm B qua điểm D. Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành chia khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V. Tính V.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{96}$. (B) $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{80}$. (C) $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{320}$. **D** $\dfrac{9a^3\sqrt{2}}{320}$.

Lời giải.

Gọi $P = EM \cap AB$, $Q = EM \cap AB$, $R = PN \cap AC$, $E = PN \cap BC$.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm BD, BC. Vì M, N lần lượt là trong tâm tam giác ABD và ABC nên suy ra $MN \parallel IJ$, từ đó suy ra $QR \parallel EF \parallel CD$.

Kẻ $MK \parallel AD$ với $K \in BD$, ta có $DK = \dfrac{2}{3}DI = \dfrac{1}{3}BD = \dfrac{1}{3}ED$, do đó $\dfrac{DQ}{KM} = \dfrac{ED}{EK} = \dfrac{3}{4}$, từ đó ta có $DQ = \dfrac{3}{4}MK$. Mặt khác $MK = \dfrac{1}{3}AD$ nên suy ra $DQ = \dfrac{1}{4}AD$, hay $\dfrac{AQ}{AD} = \dfrac{3}{4}$.

Như vậy $\dfrac{AQ}{AD} = \dfrac{AR}{AC} = \dfrac{3}{4}$.

Kẻ $DH \parallel AB$ với $H \in EP$, ta có $DH = \dfrac{1}{2}PB$. Mặt khác $\dfrac{DH}{AP} = \dfrac{QD}{QA} = \dfrac{1}{3}$ nên suy ra $DH = \dfrac{1}{3}AP$.

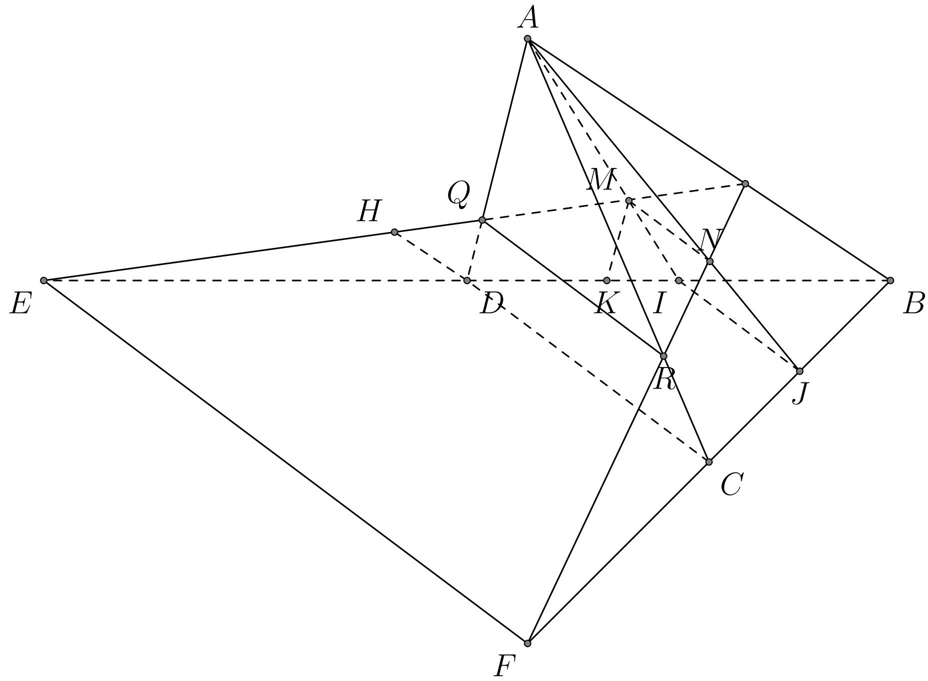
Từ đó ta có $3BP = 2AP \Rightarrow \dfrac{AP}{AB} = \dfrac{3}{5}$.

Tứ diện $ABCD$ đều cạnh a nên $V_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Bởi vậy:

$$\frac{V_{APRQ}}{V_{ABCD}} = \frac{AP}{AB} \cdot \frac{AQ}{AD} \cdot \frac{AR}{AC} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{80}$$

Do đó $V_{APRQ} = \dfrac{27}{80}V_{ABCD} = \dfrac{9a^3\sqrt{2}}{320}$.



Chọn đáp án (D) □

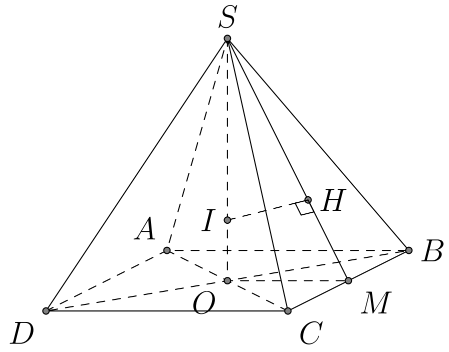
Câu 48. Trong tất cả các khối chóp tứ giác đều ngoại tiếp mặt cầu có bán kính bằng a, tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất.

(A) $V = \dfrac{8a^3}{3}$. (B) $V = \dfrac{10a^3}{3}$. (C) $V = 2a^3$. **D** $V = \dfrac{32a^3}{3}$.

Lời giải.

Với hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ ngoại tiếp mặt cầu (S) tâm I bán kính a thì $I \in SO$ với O là tâm hình vuông $ABCD$.

Gọi M là trung điểm BC và H là hình chiếu của I trên (SBC). Theo cách dựng thì $IH \perp (SBC)$ nên $IH = IO = a$.



Đặt $SO = h$, $AB = 2x$ ta có

$$\frac{a}{h-a} = \sin\widehat{OSM} = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} \Rightarrow h = \frac{2x^2a}{x^2-a^2}.$$

Suy ra $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot 4x^2 \cdot \dfrac{2x^2a}{x^2-a^2} = \dfrac{8a}{3} \cdot \dfrac{x^4}{x^2-a^2}$.

Xét $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2-a^2}$ trên $(a; +\infty)$ có $f'(x) = \dfrac{2x^3(x^2-2a^2)}{(x^2-a^2)^2}$.

Nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}$. Ta có bảng biến thiên

x	a		$a\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$4a^2$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $f(x) \geq f(a\sqrt{2}) = 4a^2$.

Suy ra $V_{S.ABCD} \geq \dfrac{8a}{3} \cdot 4a^2 = \dfrac{32a^2}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC là tam giác cân với $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $AB = AC = a$. Hình chiếu của D trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ biết thể tích tứ diện $ABCD$ là $V = \dfrac{a^3}{16}$.

A $R = \dfrac{a\sqrt{91}}{8}$. (B) $R = \dfrac{a\sqrt{13}}{4}$. (C) $R = \dfrac{13a}{2}$. (D) $R = 6a$.

Lời giải.

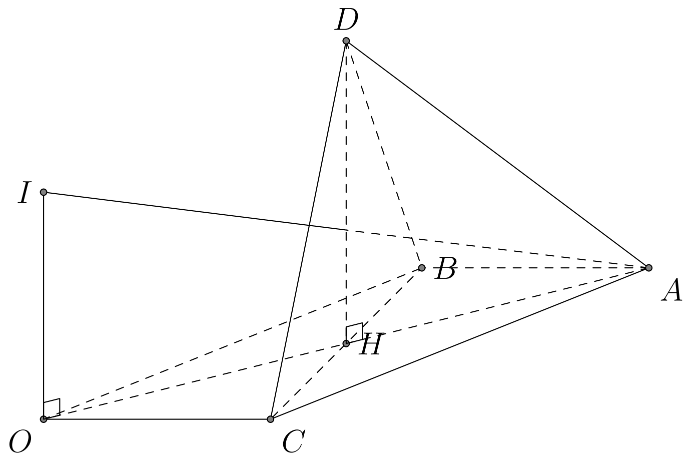
Gọi H là trung điểm BC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta có H là trung điểm của AO. Ta có $DH = \dfrac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ ta có $IO \perp (ABC)$. Do $IA = R$, $OA = a$ nên $IO = \sqrt{R^2 - a^2}$.

Do $HO \perp IO$, $HO \perp HD$ nên ta có

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{4} \pm \sqrt{R^2-a^2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = R^2$$

Giải phương trình trên ta được $R = \dfrac{a\sqrt{91}}{8}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;2)$, $B(3;4;1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $AX + BY$ với X, Y là các điểm thuộc mặt phẳng Oxy sao cho $XY = 1$.

A 3. **B** 5. **C** $2 + \sqrt{17}$. **D** $1 + 2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Đặt $X(a;b;0)$, $Y(c;d;0)$ thì $(a-c)^2 + (b-d)^2 = 1$.

Theo bất đẳng thức Minkowski, ta có

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{(3-c)^2+(4-d)^2} + \sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2} \geq 5.$$

Suy ra $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{(3-c)^2+(4-d)^2} \geq 4$. Lại áp dụng bất đẳng thức Minkowski, ta có

$$AX + BY = \sqrt{a^2+b^2+4} + \sqrt{(3-c)^2+(4-d)^2+1} + \sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2} \geq 5$$

Chọn đáp án (B) □

——— **HẾT** ———

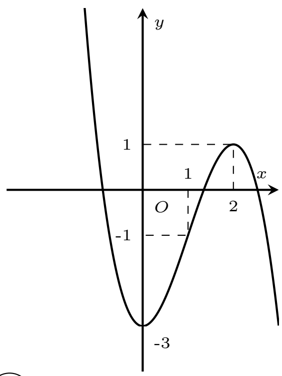
ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. D	3. A	4. B	5. C	6. D	7. B	8. D	9. C	10. A
11. B	12. C	13. B	14. D	15. D	16. A	17. C	18. D	19. B	20. D
21. C	22. C	23. B	24. A	25. A	26. D	27. A	28. A	29. C	30. B
31. D	32. C	33. B	34. D	35. C	36. A	37. D	38. A	39. C	40. C
41. A	42. C	43. A	44. B	45. C	46. B	47. D	48. D	49. A	50. B

163 ĐỀ THI THỬ MÔN TOÁN THPT QG - TẠP CHÍ THTT 01/2018 - LẦN 4

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ -3; hoành độ điểm cực đại là 2 và đi qua điểm $(1; -1)$ như hình vẽ. Tỷ số $\frac{a}{b}$ bằng



(A) -1. (B) 1. (C) -3. (D) 3.

Lời giải.
Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c; y(0) = -3 \Rightarrow d = -3$.
$y(1) = -1 \Rightarrow a + b + c + d = -1 \Rightarrow a + b + c = 2 (1)$.
$y'(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b + 7c = 0 \quad (2)$.
$y(2) = 1 \Rightarrow 8a + 4b + 2c - 3 = 1 \Rightarrow 4a + 2b + c = 2 \quad (3)$.
Từ $(1), (2), (3)$ ta được $a = -1; b = 3; \Rightarrow \frac{b}{a} = -3$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Biết hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-m}$ (m là tham số thực) tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2. Giá trị của m bằng bao nhiêu?

(A) $m = \pm 1$. (B) $m = \pm 2$. (C) $m = 2$. (D) $m = 1$.

Lời giải.
Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = m$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.
Diện tích hình chữ nhật cần tìm bằng $2|m|$, ta có: $2|m| = 2 \Leftrightarrow m = \pm 1$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m^2 + 4m + 3)x - 3$, ($m$ là tham số thực). Tìm điều kiện của m để hàm số có cực đại cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm bên phải của trục tung.

(A) $-5 < m < -1$. (B) $-5 < m < -3$. (C) $-3 < m < -1$. (D) $\left[\begin{array}{l} m > -1 \\ m < -5 \end{array}\right.$.

Lời giải.
$y' = 2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3$
Để hàm số có cực đại cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm bên phải của trục tung thì phương trình $y' = 0$ phải có hai nghiệm dương phân biệt x_1 và x_2.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta > 0\\ x_1x_2 > 0\\ x_1+x_2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-m^2-6m-5>0\\ \dfrac{m^2+4m+3}{2}>0\\ m+1>0\end{cases} \Leftrightarrow -5 < m < -3.$

Chọn đáp án B □

Câu 4. Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2x^2-5x+2}$ là

A 2. **B** 1. **C** 3. **D** 4.

Lời giải.

Ta có $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2x^2-5x+2}=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{(x-2)(2x-1)}$.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=0$.

Do $\lim\limits_{x\to2^+} y=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=2$.

Do hàm số điều kiện của tử số là $x^2\geq 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\geq 2\\ x\leq 2\end{array}\right.$ nên hàm số chỉ có 1 tiệm cận đứng.

Vậy số tiệm cận của đồ thị hàm số là 2.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho các hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}, y=x^4+2x^2+2, y=-x^3+x^2-3x+1$. Trong các hàm số trên, có bao nhiêu hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$

A 3. **B** 1. **C** 2. **D** 0.

Lời giải.

Ta có $y=\dfrac{x+1}{x-1}\Rightarrow y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}<0 \quad \forall x\neq 1$.

$y=x^4+2x^2+2\Rightarrow y'=4x^3+4x=4x(x^2+1)\Rightarrow$ hàm số đồng biến khi $x>0$, nghịch biến khi $x<0$.

$y=-x^3+x^2-3x+1\Rightarrow y'=-3x^2+2x-3=-3(x^2-\dfrac{2}{3}x+1)=-3\left[(x-\dfrac{1}{3})^2+\dfrac{8}{9}\right]<0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Cho hàm số $y=-x^3-3x^2+4$. Biết rằng có hai giá trị m_1, m_2 của tham số m để đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số tiếp xúc với đường tròn $(C):(x-m)^2+(y-m-1)^2=5$. Tính tổng m_1+m_2.

A $m_1+m_2=0$. **B** $m_1+m_2=6$. **C** $m_1+m_2=10$. **D** $m_1+m_2=-6$.

Lời giải.

$y'=-3x^2-6x$.

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm cực trị $A(0;4)$ và $B(-2;0)$ có phương trình: $-2x+y-4=0$.

Khoảng cách giữa tâm $I(m;m+1)$ của đường tròn (C) và đường thẳng Δ bằng bán kính đường tròn (C). Khi đó: $\dfrac{|-2m+m+1-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|3m-6|}{5}=\sqrt{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-8\\ m=2\end{array}\right.\Leftrightarrow m_1+m_2=-6$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Tập giá trị của hàm số $y=\dfrac{\cos x+1}{\sin x+1}$ trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

A $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$. **B** $(0;2]$. **C** $\left[\dfrac{1}{2};2\right)$. **D** $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

Lời giải.

$y' = \dfrac{1-\sin x-\cos x}{(\sin x+1)^2} = \dfrac{1-(\sin x+\cos x)}{(\sin x+1)^2} \le 0$ với $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Do $1 - 1 - (\sin x+\cos x) = 1-\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4}) \le 0$ với $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Nhận thấy $y' < 0$ hàm số nghịch biến trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, mà $y(0)=2; y(\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{1}{2}$.

Vậy tập giá trị của hàm số $y = \dfrac{\cos x+1}{\sin x+1}$ trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ là $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Gọi (C) là parabol đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 - mx^2 + m^2$, tìm m để (C) đi qua điểm $A(2;24)$.

A $m=-4$. **B** $m=6$. **C** $m=4$. **D** $m=3$.

Lời giải.

$y' = x^3 - 2mx$

Phương trình $y'=0$ có ba nghiệm $x=0, x=\sqrt{2m}, x=-\sqrt{2m}$, với $m>0$. Do đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $M(0;m^2), N(\sqrt{2m};0), P(-\sqrt{2m};0)$.

Giả sử phương trình parabol cần tìm có dạng $y = ax^2+bx+c$.

Ta có: $\begin{cases} c = m^2 \\ a\cdot 2m + b\cdot\sqrt{2m}+c=0 \\ a\cdot 2m - b\cdot\sqrt{2m}+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{m}{2} \\ b=0 \\ c=m^2 \end{cases}.$

Parabol có phương trình $y = mx^2+m^2$, parabol đi qua điểm $A(2;24)$ nên $m=6$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như hình dưới.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Hỏi phương trình $|f(x)|=3$ có bao nhiêu nghiệm?

A 1 nghiệm. **B** 2 nghiệm. **C** 3 nghiệm. **D** 4 nghiệm.

Lời giải.

Phương trình $|f(x)|=3$ có hai nghiệm trên khoảng $(0;+\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ nên phương trình $f(x)=-3$ có một nghiệm, hay phương trình $|f(x)|=3$ có một nghiệm trên khoảng $(-\infty;0)$.

Vậy phương trình $|f(x)|=3$ có 3 nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,...) được cho bởi $C(x) = 0.0001x^2 - 0.2x + 10000$, $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Tỉ số $M(x) = \dfrac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ là thấp nhất, tính chi phí cho mỗi cuốn tạp chí đó.

A. 20.000 đ. B. 15.000 đ. C. 10.000 đ. **D.** 22.000 đ.

Lời giải.

$M(x) = \dfrac{T(x)}{x} = \dfrac{0.001x^2 - 2x + 100000 + 4x}{x} = 0.001x + 2 + \dfrac{100000}{x}$.

$M'(x) = 0.001 - \dfrac{100000}{x^2}$.

Chi phí đạt được thấp nhất khi $M'(x) = 0$ hay $x = 10000$.

Khi đó chi phí cần tìm là: $0.001x + 2 + \dfrac{100000}{x} = 22000$.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Phương trình $\sin 2x \cos x = \sin 7x \cos 4x$ có các họ nghiệm là

A. $x = \dfrac{k2\pi}{5}; x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = \dfrac{k\pi}{5}; x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \dfrac{k\pi}{5}; x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = \dfrac{k2\pi}{5}; x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\sin 2x \cos x = \sin 7x \cos 4x &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x) = \frac{1}{2}(\sin 11x + \sin 3x)\\ &\Leftrightarrow \sin 11x = \sin x\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{5} \\ x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 12. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos(\sin x) = 1$ trên $[0; 2\pi]$ bằng

A. 0. B. π. C. 2π. **D.** 3π.

Lời giải.

Ta có $\cos(\sin x) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = 2\pi \end{array}\right.$.

Chỉ có $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ với $k = 0; 1; 2$ do xét trên $[0; 2\pi]$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm bằng $0 + \pi + 2\pi = 3\pi$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Xét phương trình $\sin 3x - 3\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x + 3\cos x = 2$. Phương trình nào dưới đây tương đương với phương trình đã cho?

A. $(2\sin x - 1)(2\cos^2 x + 3\cos x + 1) = 0$.

B. $(2\sin x - \cos x + 1)(2\cos x - 1) = 0$.

C. $(2\sin x - 1)(2\cos x - 1)(\cos x - 1) = 0$.

D. $(2\sin x - 1)(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\sin 3x - 3\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x + 3\cos x = 2$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ \sin x - 4\sin^3 x - 6\sin x\cos x - 1 + 2\sin^2 x + 3\sin x + 3\cos x - 2 = 0\\
&\Leftrightarrow\ 6\sin x(1-\cos x) - 4\sin^3 x + 2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0\\
&\Leftrightarrow\ (1-\cos x)(2\sin x - 1)(1 + 2\cos x) = 0\\
&\Leftrightarrow\ (2\sin x - 1)(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 14. Số nghiệm trên khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $27\cos^4 x + 8\sin x = 12$ là

A 1. B 2. C 3. **D 4.**

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
27\cos^4 x + 8\sin x = 12 &\Leftrightarrow 27\sin^4 x - 54\sin^2 x + 8\sin x + 15 = 0\\
&\Leftrightarrow \left(3\sin^2 x + 2\sin x - 3\right)\left(9\sin^2 x - 6\sin x - 5\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0\\ 9\sin^2 x - 6\sin x - 5 = 0 \end{array}\right..
\end{aligned}$$

TH1: $3\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{-1+\sqrt{10}}{3} \in (-1;\ 1)\\ \sin x = \dfrac{-1-\sqrt{10}}{3} \notin (-1;\ 1) \end{array}\right.$

Với $\sin x = \dfrac{-1+\sqrt{10}}{3}$ trên khoảng $(0; 2\pi)$ phương trình có 2 nghiệm.(dựa vào số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = \sin x$ và đường thẳng $y = \dfrac{-1+\sqrt{10}}{3}$).

TH2: $9\sin^2 x - 6\sin x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1-\sqrt{6}}{3} \in [-1;\ 1)\\ \sin x = \dfrac{1+\sqrt{6}}{3} \notin [-1;\ 1] \end{array}\right.$

Với $\sin x = \dfrac{1-\sqrt{6}}{3}$ trên khoảng $(0; 2\pi)$ phương trình có 2 nghiệm.(dựa vào số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = \sin x$ và đường thẳng $y = \dfrac{1-\sqrt{6}}{3}$).

Vậy trên khoảng $(0; 2\pi)$ phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm 1 món ăn trong 5 món, 1 loại quả tráng miệng trong 5 loại quả tráng miệng và một nước uống trong 3 loại nước uống. Có bao nhiêu cách chọn thực đơn?

A 25. **B 75.** C 100. D 15.

Lời giải.

Số cách chọn thực đơn là $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_3^1 = 75$

Chọn đáp án B □

Câu 16. Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ có thể lập được bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau mà số đó nhất thiết có mặt các chữ số $1, 2, 5$?

(A) 684. **B** 648. (C) 846. (D) 864.

Lời giải.

Gọi số cần lập là $\overline{abcde}$.

- Nếu $a = 1$ thì $2, 5$ có C_4^2 cách chọn vị trí, khi đó số số tạo thành là $\mathrm{C}_4^2 \cdot 4!$.

- Nếu $a = 2$ thì $1, 5$ có C_4^2 cách chọn vị trí, khi đó số số tạo thành là $\mathrm{C}_4^2 \cdot 4!$.

- Nếu $a = 5$ thì $2, 1$ có C_4^2 cách chọn vị trí, khi đó số số tạo thành là $\mathrm{C}_4^2 \cdot 4!$.

- Nếu $a \in 3, 4, 6$ có 3 cách chọn a, $1, 2, 5$ có 1 cách chọn, số còn lại C_3^1 cách. Vậy số số tạo thành là $3 \cdot \mathrm{C}_3^1 \cdot 4!$.

Vậy số lượng số tạo thành là $3\mathrm{C}_4^2 \cdot 4! + 3 \cdot \mathrm{C}_3^1 \cdot 4! = 648$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Hệ số có giá trị lớn nhất khi khai triển $P(x) = (1 + 2x)^{12}$ thành đa thức là

(A) 162270. (B) 162720. (C) 126270. **D** 126720.

Lời giải.

Khai triển: $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{12} \mathrm{C}_{12}^k 2^k x^{2k} = \sum\limits_{k=0}^{12} a_k x^{2k}$ với $a_k = \mathrm{C}_{12}^k 2^k$.

$a_{k+1} > a_k \Leftrightarrow \mathrm{C}_{12}^{k+1} 2^{k+1} > \mathrm{C}_{12}^k 2^k \Leftrightarrow \dfrac{2}{k+1} > \dfrac{1}{12-k} \Leftrightarrow k < \dfrac{23}{3} \Leftrightarrow k \leqslant 7$.

Như vậy $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_8$.

$a_{k+1} < a_k \Leftrightarrow \mathrm{C}_{12}^{k+1} 2^{k+1} < \mathrm{C}_{12}^k 2^k \Leftrightarrow \dfrac{2}{k+1} < \dfrac{1}{12-k} \Leftrightarrow k > \dfrac{23}{3} \Leftrightarrow k \geqslant 8$.

Như vậy $a_8 > a_9 > a_{10} > \cdots > a_{12}$.

Vậy hệ số có giá trị lớn nhất là $a_8 = \mathrm{C}_{12}^8 2^8 = 126720$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Cho một đa giác đều 20 đỉnh nội tiếp trong đường tròn O. Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của đa giác đó. Tính xác suất sao cho 4 đỉnh được chọn là 4 đỉnh của một hình chữ nhật.

A $\dfrac{3}{323}$. (B) $\dfrac{4}{9}$. (C) $\dfrac{2}{969}$. (D) $\dfrac{7}{216}$.

Lời giải.

Có 10 đường chéo xuyên tâm O, cứ hai đường chéo xuyên tâm O ta được một hình chữ nhật.

Vậy số hình tứ giác 4 đỉnh tạo thành từ các đỉnh đa giác đều là $n(A) = \mathrm{C}_{20}^4 = 4845$.

Vậy số hình chữ nhật tạo thành từ các đỉnh đa giác đều là $n(A) = \mathrm{C}_{10}^2 = 45$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{45}{4845} = \dfrac{3}{323}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}, x > 0 \\ mx + m + \dfrac{1}{4}, x \le 0 \end{cases}$ m là tham số. Tìm giá trị của tham số m để hàm số có giới hạn tại $x = 0$.

(A) $m = 1$. **B** $m = 0$. (C) $m = \dfrac{21}{2}$. (D) $m = \dfrac{-1}{2}$.

Lời giải.

Hàm số có giới hạn tại $x = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

Vậy $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(mx + m + \dfrac{1}{4}\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} = m + \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow m = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+6}{3x^2-27}, x \neq \pm 3 \\ \dfrac{-1}{9}, x = \pm 30 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ các điểm x thuộc khoảng $(-3; 3)$.

(B) Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = -3$.

C Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 3$.

(D) Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Với $x \neq \pm 3$ thì $f(x) = \dfrac{2x+6}{3x^2-27}$ là hàm phân thức nên liên tục với $\forall x \neq \pm 3$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x+6}{3x^2-27} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2(x+3)}{3(x+3)(x-3)} = \infty$ nên hàm số không liên tục tại $x = 3$.

$\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x+6}{3x^2-27} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2(x+3)}{3(x+3)(x-3)} = \dfrac{-1}{9}$ nên hàm số liên tục tại $x = -3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x$. Khẳng định nào trong các khẳng định sau là đúng?

A $y" - y' = \mathrm{e}^x(x+1)$.

(B) $y" - y' = \mathrm{e}^x(x-1)$.

(C) $y" + y' = \mathrm{e}^x(x-1)$.

(D) $y" + y' = \mathrm{e}^x(-x+1)$.

Lời giải.

Ta có $y' = xe^x + \dfrac{1}{2}x^2e^x$, $y'' = e^x + xe^x + \dfrac{1}{2}x^2e^x + xe^x$.

Vậy $y" - y' = \mathrm{e}^x(x+1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$. Tìm $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2f(x) - xf(2)}{x-2}$.

(A) 0.

(B) $f'(2)$.

C $2f'(2) - f(2)$.

(D) $f(2) - 2f'(2)$.

Lời giải.

Do hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x-2} = f'(2)$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2f(x) - xf(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2(f(x) - f(2)) - xf(2) + 2f(2)}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2(f(x) - f(2))}{x-2} - \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(2)(x-2)}{x-2} = 2f'(2) - f(2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Cho hàm số $y = x^4 - 6x^2 - 3$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm A có hoành độ $x = 1$ cắt đồ thị hàm số tại điểm B (B khác A). Tọa độ điểm B là

(A) $B(-3; 24)$.

(B) $B(-1; -8)$.

C $B(3; 24)$.

(D) $B(0; -3)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 12x$. Do đó $A(1; -8)$ nên phương trình tiếp tuyến là $y = -8x$.

Hoành độ B là nghiệm phương trình $x^4 - 6x^2 - 3 = -8x \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 24 \Rightarrow B(3; 24)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Cho tứ diện $O.ABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Biết $OA = 2$ cm, $OB = 3$ cm, $OC = 6$ cm. Tính thể tích của khối tứ diện $O.ABC$.

A 6 cm^3. **B** 36 cm^3. **C** 12 cm^3. **D** 18 cm^3.

Lời giải.

Ta có thể tích của khối tứ diện $O.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 = 6\text{ cm}^3$.

Chọn đáp án A □

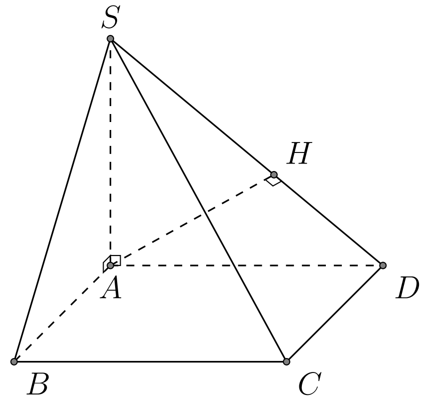
Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD.

A a. **B** $2a$. **C** $S = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **D** $a\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $d(AB, SD) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AH$.

Với $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{2a^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{2}$.

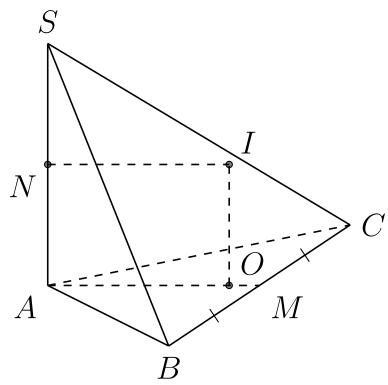


Chọn đáp án D □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a$. Biết tam giác ABC cân tại A có $BC = 2a\sqrt{2}$, $\cos\widehat{ACB} = \dfrac{1}{2}$, tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A $S = \dfrac{65\pi a^2}{4}$. **B** $S = 13\pi a^2$. **C** $S = \dfrac{97\pi a^2}{4}$. **D** $S = 4\pi a^2$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và SA; O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Do ABC cân tại A nên $O \in AM$.
Qua O dựng Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ($\Delta \parallel SA$).
Trong (SAM), kẻ đường thẳng qua N vuông góc với SA cắt Δ tại I. Khi đó $IS = IA = IB = IC$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$
$\triangle AMC$ có $cos\widehat{ACM} = \dfrac{MC}{AC} \Rightarrow AB = AC = 3a\sqrt{2}$.
$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}CA.CB.sin\widehat{ACB} = \dfrac{1}{2}3a\sqrt{2}.2a\sqrt{2}.\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = 4a^2\sqrt{2}$.
Mà $S_{ABC} = \dfrac{AB.AC.BC}{4.OA} \Rightarrow OA = \dfrac{9}{4}a$.
Tứ giác $NAOI$ là hình chữ nhật nên $AI = \sqrt{NA^2 + AO^2} = \dfrac{\sqrt{97}a}{4}$.

Suy ra bán kính mặt cầu $R = \dfrac{\sqrt{97}a}{4}$.

Vậy diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = \dfrac{97\pi a^2}{4}$

Chọn đáp án C □

Câu 27. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $\log_4 a = \log_6 b = \log_9(a+b)$. Tính $\dfrac{a}{b}$.

A $\dfrac{1}{2}$. B $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. C $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. D $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t = \log_4 a = \log_6 b = \log_9(a+b) \Rightarrow \begin{cases} a = 4^t \\ b = 6^t \\ a+b = 9^t \end{cases} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^t > 0$.

Vậy ta có $a + b = 9^t \Leftrightarrow 4^t + 6^t = 9^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2t} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^t - 1 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Bất phương trình $2^{x^2-3x+4} \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-10}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

A 2. B 4. C 6. D 3.

Lời giải.

Ta có $2^{x^2-3x+4} \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-10} \Leftrightarrow 2^{x^2-3x+4} \le 2^{-2x+10} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 \le -2x + 10$
$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 \le 0 \Leftrightarrow -2 \le x \le 3$.
Có 3 số nguyên dương trong $[-2; 6]$.
Chọn đáp án D □

Câu 29. Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2-6) = \log_3(x-2) + 1$ là

A 0. B 1. C 2. D 3.

Lời giải.

Ta có: $\log_3(x^2-6)=\log_3(x-2)+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2>6 \\ x>2 \\ \log_3(x^2-6)=\log_3 3(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\sqrt{6} \\ x>2 \\ x^2-6=3x-6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>\sqrt{6} \\ x>2 \\ x(x-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^2-2\ln x$ trên $[e^{-1};e]$

(A) $M=e^2-2, m=e^{-2}+2$.
(B) $M=e^{-2}+2, m=1$.
(C) $M=e^{-2}+1, m=1$.
(D) $M=e^2-2, m=1$.

Lời giải.

Ta có $y'=2x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2x^2-2}{x} \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[\mathrm{e}^{-1};\mathrm{e}]; \\ x=-1\notin[\mathrm{e}^{-1};\mathrm{e}] \end{array}\right.$.

Ta được $y(e^{-1})=e^{-2}+2; y(1)=1; y(e)=e^2-2 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ M=e^2-2 \end{cases}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Tìm giá trị m để phương trình $2^{2|x-1|+1}+2^{|x-1|}+m=0$ có nghiệm duy nhất.

(A) $m=3$.
(B) $m=\dfrac{1}{8}$.
(C) $m=1$.
(D) $m=-3$.

Lời giải.

Giả sử phương trình có nghiệm x_0 của phương trình thì $2-x_0$ cũng là nghiệm của phương trình.

Do phương trình có nghiệm duy nhất nên $2-x_0=x_0 \Leftrightarrow x_0=1$.

Với $x_0=1$ thay vào phương trình đã cho ta có $2+1+m=0 \Leftrightarrow m=-3$.

Thử lại với $m=-3$ ta có phương trình: $2^{2|x-1|+1}+2^{|x-1|}-3=0 \Leftrightarrow 2.2^{2|x-1|}+2^{|x-1|}-3=0$.

Đặt $t=2^{|x-1|}>0$ ta có $2t^2+t-3=0 \Rightarrow t=1$ (nhận) hoặc $t=\dfrac{-3}{2}$ (loại).

Với $2^{|x-1|}=1 \Leftrightarrow x=1$. Vậy $m=-3$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 32. Diện tích toàn phần của một khối lập phương là 150 cm^2. Thể tích của khối lập phương đó là

(A) 125 cm^3.
(B) 100 cm^3.
(C) 25 cm^3.
(D) 75 cm^3.

Lời giải.

Gọi $a>0$ độ dài một cạnh của hình lập phương.

Vậy $S_{tp}=6a^2=150 \Leftrightarrow a=5 \Rightarrow V=a^3=125\text{ cm}^3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Một cái nồi nấu nước người ta làm dạng hình trụ, chiều cao của nồi là 60 cm, diện tích đáy $900\pi\text{ cm}^2$. Hỏi người ta cần miếng kim loại hình chữ nhật có kích thước là bao nhiêu để làm thân nồi đó? (bỏ qua kích thước các mép gấp).

(A) Chiều dài 60π cm, chiều rộng 60 cm.
(B) Chiều dài 900 cm, chiều rộng 60 cm.
(C) Chiều dài 180 cm, chiều rộng 60 cm.
(D) Chiều dài 30π cm, chiều rộng 60 cm.

Lời giải.

Gọi $r > 0$ là bán kính đáy nồi. Ta có diện tích đáy $S = \pi.r^2 \Leftrightarrow \pi.r^2 = 900\pi \Rightarrow r = 30$ cm.

Vậy miếng kim loại hình chữ nhật có chiều dài $l = 2\pi.r = 60\pi$ cm và chiều rộng 60 cm.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho tứ diện $MNPQ$. Gọi $I; J; K$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $MN; MP; MQ$. Tỉ số thể tích $\dfrac{V_{MIJK}}{V_{MNPQ}}$ bằng

A $\dfrac{1}{3}$. **B** $\dfrac{1}{4}$. **C** $\dfrac{1}{6}$. **D** $\dfrac{1}{8}$.

Lời giải.

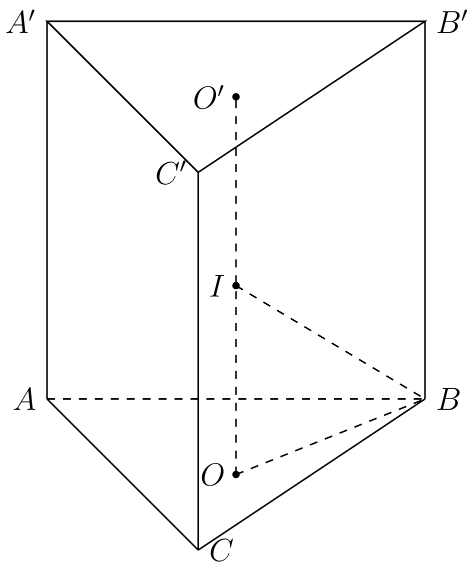
Ta có $\dfrac{V_{MIJK}}{V_{MNPQ}} = \dfrac{MI}{MN} \cdot \dfrac{MJ}{MP} \cdot \dfrac{MK}{MQ} \cdot = \dfrac{1}{8}$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có 9 cạnh bằng nhau và bằng $2a$. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho.

A $S = \dfrac{28\pi a^2}{9}$. **B** $S = \dfrac{7\pi a^2}{9}$. **C** $S = \dfrac{28\pi a^2}{3}$. **D** $S = \dfrac{7\pi a^2}{3}$.

Lời giải.



Gọi O, O' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và $A'B'C'$

Ta có OO' là trục của mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$

Trong mặt phẳng (AA', OO'), dựng đường trung trực d của cạnh AA'

Khi đó d cắt OO' tại $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, bán kính $R = IB = \sqrt{OI^2 + OB^2}$

Mặt khác

Tam giác ABC đều cạnh $2a$, có O là trọng tâm nên

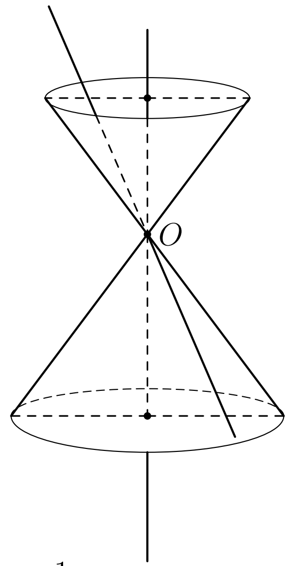
$OB = \dfrac{2}{3}.\dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow R = \dfrac{a\sqrt{21}}{3}$

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ là $S = 4\pi R^2 = \dfrac{28\pi a^2}{3}$

Chọn đáp án C □

Câu 36.

Cho một đồng hồ cát như hình vẽ bên dưới (gồm 2 hình nón chung đỉnh ghép lại), trong đó đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc $60°$. Biết rằng chiều cao của đồng hồ là 30 cm và tổng của thể tích của đồng hồ là 1000π cm^3. Hỏi nếu cho đầy lượng cát vào phần trên thì khi chảy hết xuống dưới, tỷ lệ thể tích cát chiếm chỗ và thể tích phần phía dưới là bao nhiêu?



A $\dfrac{1}{8}$. **B** $\dfrac{1}{27}$. **C** $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$. **D** $\dfrac{1}{64}$.

Lời giải.

Gọi chiều cao hình nón nhỏ, hình nón lớn, thể tích khối nón nhỏ, khối nón lớn lần lượt là h_1, h_2, V_1, V_2.

Khi đó ta có $h_1 + h_2 = 30 \quad (1)$ và $V_1 = \dfrac{1}{9}\pi h_1^3; V_2 = \dfrac{1}{9}\pi h_2^3$.

Do đó $V_1 + V_2 = \dfrac{1}{9}(h_1^3 + h_1^3) = 1000\pi \Rightarrow h_1^3 + h_1^3 = 9000 \quad (2)$.

Từ $(1), (2)$ ta được $h_1 = 10; h_2 = 20$ do đó $\dfrac{V_1}{V_2} = \left(\dfrac{h_1}{h_2}\right)^3 = \left(\dfrac{10}{20}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Gọi $N(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì ta có công thức $N(t) = 100.(0.5)^{\frac{t}{A}}(\%)$ với A là hằng số. Biết rằng một mẫu gỗ có tuổi khoảng 3754 năm thì lượng cácbon 14 còn lại là 65%. Phân tích mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cácbon 14 còn lại trong mẫu gỗ là 63%. Hãy xác định tuổi của mẫu gỗ được lấy từ công trình đó.

A 3874. **B** 3833. **C** 3834. **D** 3843.

Lời giải.

Theo bài ta có $65 = 100.(0.5)^{\frac{3754}{A}} \Leftrightarrow 0.65 = (0.5)^{\frac{3754}{A}} \Leftrightarrow \dfrac{3754}{A} = \log_{0.5} 0.65 \Leftrightarrow A = \dfrac{3754}{\log_{0.5} 0.65}$.

Do mẫu gỗ còn 63% lượng Cácbon 14 nên ta có:

$63 = 100.(0.5)^{\frac{t}{A}} \Leftrightarrow 0.63 = (0.5)^{\frac{t}{A}} \Leftrightarrow \dfrac{t}{A} = \log_{0.5} 0.63 \Leftrightarrow t = A.\log_{0.5} 0.63 = \dfrac{3754}{\log_{0.5} 0.65}.\log_{0.5} 0.63 \approx 3833$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x.e^{2x}$ là:

A $F(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + C$. **B** $F(x) = 2e^{2x}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + C$.

C $F(x) = 2e^{2x}(x - 2) + C$. **D** $F(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x}(x - 2) + C$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \displaystyle\int x.e^{2x}\,dx$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = e^{2x}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases} \Rightarrow F(x) = \dfrac{xe^{2x}}{2} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int e^{2x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}e^{2x}(x - \dfrac{1}{2}) + C.$

Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\,\mathrm{d}x = 4$ và $\displaystyle\int\limits_0^1 \dfrac{x^2 f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2.$ Tính tích phân $I = \displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$

A 6. B 2. C 3. D 1.

Lời giải.

Với $J = \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\,\mathrm{d}x = 4.$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow \mathrm{d}\tan x = \mathrm{d}t \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \mathrm{d}x.$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1.$

Ta có $J = \displaystyle\int\limits_0^1 \dfrac{f(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \displaystyle\int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 4.$

Vậy $I = \displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \displaystyle\int\limits_0^1 \dfrac{(x^2+1)f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \displaystyle\int\limits_0^1 \dfrac{x^2 f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \displaystyle\int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2 + 4 = 6.$

Chọn đáp án A □

Câu 40. Biết $\displaystyle\int\limits_1^2 \dfrac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{b}{c} + a\ln 2$ (với a là số thực, b, c là các số nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính giá trị của $2a + 3b + c$.

A 4. B -6. C 6. D 5.

Lời giải.

Với $I = \displaystyle\int\limits_1^2 \dfrac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \\ v = \dfrac{-1}{x} \end{cases} \Rightarrow I = \dfrac{-1}{2}\ln 2 + \dfrac{1}{2}.$

Vậy $a = \dfrac{-1}{2}, b = 1, c = 2 \Rightarrow 2a + 3b + c = 4.$

Chọn đáp án A □

Câu 41. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H) : y = \dfrac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

A $S = \ln 2 - 1$(đvdt). B $S = 2\ln 2 - 1$(đvdt).
C $S = 2\ln 2 - 1$(đvdt). D $S = \ln 2 + 1$(đvdt).

Lời giải.

Ta có hoành độ giao điểm của (H) với Ox là $x = 1$.

Trục Oy có phương trình $x = 0$.

Vậy $S = \int\limits_0^1 \left|\frac{x-1}{x+1}\right| \mathrm{d}x = \left|\int\limits_0^1 \frac{x-1}{x+1} \mathrm{d}x\right| = |x - 2\ln(x+1)|\Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho số phức $z = a + bi$ (trong đó a, b là các số thực) thỏa mãn $3z - (4+5i)\overline{z} = -17 + 11i$. Tính ab.

A $ab = 6$. **B** $ab = -3$. **C** $ab = 3$. **D** $ab = -6$.

Lời giải.

Ta có $3z - (4+5i)\overline{z} = -17 + 11i \Leftrightarrow 3(a+bi) - (4+5i)(a-bi) = -17 + 11i$

$\Leftrightarrow -a - 5b + (-5a + 7b)i = -17 + 11i \Leftrightarrow \begin{cases} -a - 5b = -17 \\ -5a + 7b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow ab = 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Tổng các nghiệm phức của phương trình $z^3 + z^2 - 2 = 0$ là

A 1. **B** -1. **C** $1 - i$. **D** $1 + i$.

Lời giải.

Ta có $z^3 + z^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 + 2z + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = -1 + i \\ z_2 = -1 - i \\ z_3 = 1 \end{array}\right.$.

Vậy tổng các nghiệm phức là $z_1 + z_2 + z_3 = -1 + i - 1 - i + 1 = -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Trên mặt phẳng tập hợp các số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $|z + 2 + i| = |\overline{z} - 3i|$ là đường thẳng có phương trình

A $y = x + 1$. **B** $y = -x + 1$. **C** $y = -x - 1$. **D** $y = x - 1$.

Lời giải.

Ta có $|z+2+i| = |\overline{z} - 3i| \Leftrightarrow |(x+2) + (y+1)i| = |x - (y+3)i| \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+1)^2 = x^2 + (y+3)^2$

$\Leftrightarrow 4x + 4 + 2y + 1 = 6y + 9 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+2|^2 - |z-i|^2$. Tính mô-đun của số phức $w = M + mi$.

A $|w| = \sqrt{1258}$. **B** $|w| = 3\sqrt{137}$. **C** $|w| = 2\sqrt{314}$. **D** $|w| = 2\sqrt{309}$.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$.

Theo đề bài ta có $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a-3)^2 + (b-4)^2 = 5(1)$.

Mặt khác $P = |z+2|^2 - |z-i|^2 = (a+2)^2 + b^2 - [a^2 + (b-1)^2] = 4a + 2b + 3(2)$.

Từ (1) và (2) ta có $20a^2 + (64 - 8P)a + P^2 - 22P + 137 = 0(*)$.

Phương trình $(*)$ có nghiệm khi $\Delta' = -4P^2 + 184P + -1716 \geq 0 \Leftrightarrow 13 \leq P \leq 33 \Rightarrow |w| = \sqrt{1258}$.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình $(S): x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my-2mz+5m^2+9=0$. Tìm m để phương trình đó là phương trình của một mặt cầu.

(A) $-5<m<1$.
(B) $m<-5$ hoặc $m>1$.
(C) $m<-5$.
(D) $m>1$.

Lời giải.

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-d>0$

$\Leftrightarrow (m+2)^2+(2m)^2+m^2-5m^2-9>0$

$\Leftrightarrow m^2+4m-5>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-5 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba véc-tơ $\vec{a}=(3;4;-4)$, $\vec{b}=(3;0;4)$, $\vec{c}=(-6;1;-1)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{m}=3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$.

(A) $\vec{m}=(3;22;-3)$.
(B) $\vec{m}=(3;22;3)$.
(C) $\vec{m}=(-3;22;-3)$.
(D) $\vec{m}=(3;-22;3)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{m}=(3.3-2.3-6;3.4-2.0+1;3.(-4)-2.4-1)=(3;22;-3)$;

Chọn đáp án (A) □

.

Câu 48. Mặt phẳng cắt mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2y+6z-1=0$ có phương trình là

(A) $2x+3y-z-16=0$.
(B) $2x+3y-z+12=0$.
(C) $2x+3y-z-18=0$.
(D) $2x+3y-z+10=0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;-3)$ và $R=2\sqrt{3}$.

Ta có: Khoảng cách từ I đến mặt phẳng $2x+3y-z-16=0$ là $d_1=\dfrac{14}{2\sqrt{3}}>R$.

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng $2x+3y-z+12=0$ là $d_1=\dfrac{14}{2\sqrt{3}}>R$.

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng $2x+3y-z-18=0$ là $d_1=\dfrac{16}{2\sqrt{3}}>R$.

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng $2x+3y-z+10=0$ là $d_1=\dfrac{12}{2\sqrt{3}}=R$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và đường thẳng d: $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$.

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất.

(A) $2x+y-3z+3=0$.
(B) $x+2y-z-1=0$.
(C) $3x+2y-z+1=0$.
(D) $2x-y-3z+3=0$.

Lời giải.

- Đường thẳng d đi qua $M_0(0;0;1)$ có VTCP $\vec{u}(1;1;1)$.

- Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên (P) và d. Ta có $d(A,(P))=AH\leq AK$. Dấu $=$ xảy ra khi và chỉ khi $H\equiv K$.

Do đó $d(A,(P))_{max} = AK$. Khi đó (P) đi qua $M_0(0;0;1)$ nhận $\overrightarrow{AK}$ làm véc-tơ pháp tuyến.
- Do $K \in d$ nên $K(t;t;1+t)$ và $\overrightarrow{AK} = (t-3;t-2;t+2)$.
Ta có : $\overrightarrow{AK} \perp \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
Vậy $\overrightarrow{AK} = (-2;-1;3)$ nên $(P): 2x + y - 3z + 3 = 0$.
Chọn đáp án A □

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$. Đường thẳng d đi qua A và có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (3;4;-4)$ cắt (P) tại B. Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc $90°$. Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A $H(-2;-1;3)$. **B** $I(-1;-2;3)$. **C** $K(3;o;15)$. **D** $J(-3;2;7)$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng d là $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 4t \\ z = -3 - 4t \end{cases}$.

Theo đề bài B là giao điểm của đường thẳng d và (P) nên giá trị tham số t ứng với tọa độ điểm B là nghiệm phương trình:
$2(1+3t) + 2(2+4t) - (-3-4t) + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow B(-2;-2;1)$.
Ta thấy M nằm trên giao tuyến của mặt cầu đường kính AB với mặt phẳng (P). Do đó MB lớn nhất khi nó là đường kính, hay M là hình chiếu của A trên (P).
Gọi d' là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P). Đường thẳng $d' \perp (P)$ có VTCP $\overrightarrow{m} = (2;2;-1)$.

Vậy phương trình đường thẳng d' là $\begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = -3 - t' \end{cases}$.

Do M là hình chiếu của A trên (P) nên giá trị tham số t ứng với tọa độ điểm M là nghiệm phương trình $2(1+2t') + 2(2+2t') - (-3-t') + 9 = 0 \Leftrightarrow t' = -2$.
Do đó tọa độ điểm $M(-3;-2;-1)$. Từ đó $\overrightarrow{MB} = (1;0;2)$.

Vậy phương trình đường thẳng MB là $\begin{cases} x = -3 + a \\ y = -2 \\ z = -1 + 2a \end{cases}$.

Chỉ có tọa độ điểm $I(-1;-2;3)$ thỏa mãn phương trình đường thẳng MB.
Chọn đáp án B □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. A	3. B	4. A	5. B	6. D	7. A	8. B	9. C	10. D
11. C	12. D	13. D	14. D	15. B	16. B	17. D	18. A	19. B	20. C
21. A	22. C	23. C	24. A	25. D	26. C	27. B	28. D	29. B	30. D
31. D	32. A	33. A	34. D	35. C	36. A	37. B	38. D	39. A	40. A
41. C	42. A	43. B	44. D	45. A	46. B	47. A	48. D	49. A	50. B

164 ĐỀ THI THỬ TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN - HÀ NỘI NĂM 2017-2018 LẦN 1

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 + t. \end{cases}$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của d?

A $\vec{n} = (1; -2; 1)$. **B** $\vec{n} = (1; 2; 1)$. **C** $\vec{n} = (-1; -2; 1)$. **D** $\vec{n} = (-1; 2; 1)$.

Lời giải.

Từ phương trình tham số, suy ra véc-tơ chỉ phương là $\vec{n} = (-1; -2; 1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \sin 2x$.

A $x^2 - \dfrac{1}{2}\cos 2x + C$. **B** $x^2 + \dfrac{1}{2}\cos 2x + C$. **C** $x^2 - 2\cos 2x + C$. **D** $x^2 + 2\cos 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int 2x + \sin 2x = x^2 - \frac{1}{2}\cos 2x + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(1; -1; 2)$ và $B(2; 1; 1)$. Tính độ dài AB.

A 2. **B** $\sqrt{6}$. **C** $\sqrt{2}$. **D** 6.

Lời giải.

Ta có $AB = \sqrt{(2-1)^2 + (1+1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{6}$

Chọn đáp án B □

Câu 4. Cho sấp số cộng (u_n) biết $u_2 = 3, u_4 = 7$. Tính giá trị của u_{15}.

A 27. **B** 31. **C** 35. **D** 29.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} u_2 = 3 \\ u_4 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d = 3 \\ u_1 + 3d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow u_{15} = u_1 + 14d = 1 + 14 \cdot 2 = 29.$$

Chọn đáp án D □

Câu 5. Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$.

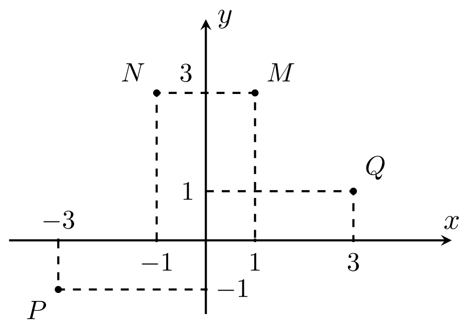
A $\dfrac{1}{2}$. **B** $\dfrac{1}{4}$. **C** 0. **D** 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2} + 2\right)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{\sqrt{x+2} + 2} = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 6.
Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức $z = (1+i)(2-i)$?



Ⓐ P. Ⓑ M. Ⓒ N. Ⓓ Q.

Lời giải.
Ta có: $z = 2 - i + 2i - i^2 = 3 + i$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 7. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1) < 3$.
Ⓐ $(-\infty; 10)$. Ⓑ $(1; 9)$. Ⓒ $(1; 10)$. Ⓓ $(\infty; 9)$.

Lời giải.
Ta có $\log_2(x-1) < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 1 < 2^3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 9$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 8. Tính thể tích của khối nón có chiều cao bằng 4 và đường sinh bằng 5.
Ⓐ 16π. Ⓑ 48π. Ⓒ 12π. Ⓓ 36π.

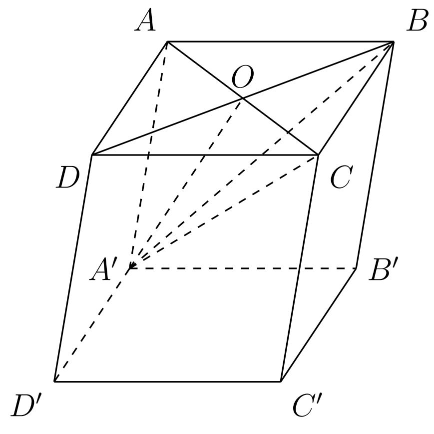
Lời giải.
Ta có $r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$. Suy ra $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$ (đvtt).
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = x^3 + 2x$, tính giá trị của $f''(1)$.
Ⓐ 6. Ⓑ 8. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Lời giải.
Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2 \Rightarrow f''(x) = 6x \Rightarrow f''(1) = 6$.
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 10. Cho khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 12, đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Tính thể tích khối chóp $A'.BCO$.
Ⓐ 1. Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Lời giải.
Gọi h là độ dài đường cao của lăng trụ xuất phát từ đỉnh A'.
Ta có
$V_{A'BCO} = \dfrac{1}{3}h \cdot S_{BCO} = \dfrac{1}{3}h \cdot \dfrac{1}{4} \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{12}V = \dfrac{12}{12} = 1$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Với a và b là các số thực dương, tính giá trị của biểu thức $\log_a(a^2b)$.

(A) $2-\log_a b$. (B) $2+\log_a b$. (C) $1+2\log_a b$. (D) $2\log_a b$.

Lời giải.

Ta có $\log_a(a^2b)=\log_a a^2+\log_a b=2+\log_a b$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^2 \frac{2}{2x+1}\,\mathrm{d}x$.

(A) $2\ln 5$. (B) $\dfrac{1}{2}\ln 5$. (C) $\ln 5$. (D) $4\ln 5$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^2 \frac{2}{2x+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^2 \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}(2x+1)=\ln|2x+1|\Big|_0^2=\ln 5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại giá trị nào của x?

(A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

Dự vào bảng biến thiên suy ra hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Hàm số $y=x^3-3x+1$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(0;2)$. (B) $(1;+\infty)$. (C) $(\infty;-1)$. (D) $(-1;1)$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-3$ nên $y'=0\Leftrightarrow x=-1;x=1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, điểm nào dưới đây nằm trên mặt phẳng (P) : $2x-y+z-2=0$

(A) $Q(1;-2;2)$. **B** $N(1;-1;-1)$. (C) $P(2;-1;-1)$. (D) $M(1;1;-1)$.

Lời giải.

Thế tọa độ điểm N vào phương trình nặt phẳng (P) ta được $2\cdot 1-1\cdot(-1)+(-1)-2=0$.

Suy ra điểm N thuộc mặt phẳng (P).

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Cho $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+b\ln 2+c\ln 3$, với a,b,c là các số nguyên. Tính $a+b+c$.

A 1. (B) 2. (C) 7. (D) 9.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow 2tdt=dx$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1; x=3\Rightarrow t=2$.

Ta có $I=\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\int_1^2 \frac{2(t^2-1)t}{4+2t}dt=\int_1^2 \frac{t^3-t}{t+2}\,\mathrm{d}t=\int_1^2 \frac{(t+2)(t^2-2t+3)-6}{t+2}\,\mathrm{d}t$

$=\displaystyle\int_1^2\left(t^2-2t+3-\frac{6}{t+2}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}t^3-t^2+3t-6\ln t=\frac{7}{3}-12\ln 2+6\ln 3.$

Suy ra $a=7; b=-12; c=6\Rightarrow a+b+c=7-12+6=1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-2x^2-4x+5$ trên đoạn $[1;3]$.

(A) -3. (B) 0. **C** 2. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-4x-4$, $y'=0\Leftrightarrow x=2$ (nhận) hoặc $x=-\dfrac{2}{3}$ (loại).

Ta có $y(1)=0, y(3)=2, y(2)=-3$. Do đó GTLN của hàm số trên đoạn $[1;3]$ bằng 2.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Cho số phức z, biết rằng các điểm biểu diễn hình học của các số phức $z; iz$ và $z+iz$ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 18. Tính mô-đun của số phức z.

(A) $2\sqrt{3}$. (B) $3\sqrt{2}$. **C** 6. (D) 9.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi$, với a,b là số thực. Gọi M,N,P lần lượt là điểm biểu diễn số phức z, iz và $z+iz$.

Khi đó $M(a;b); N(-b;a); P(a-b;a+b)$. Suy ra $MN=\sqrt{2(a^2+b^2)}; NP=PM=\sqrt{a^2+b^2}$.

Suy ra tam giác MNP vuông cân tại P.

Ta có $S_{\Delta MNP}=18\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\cdot NP\cdot PM=18\Leftrightarrow a^2+b^2=36\Leftrightarrow |z|=\sqrt{a^2+b^2}=6$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Tính đạo hàm y' của hàm số $y=\log_2(2x+1)$.

(A) $\dfrac{2\ln 2}{2x+1}$. **B** $\dfrac{2}{(2x+1)\ln 2}$. (C) $\dfrac{2}{(2x+1)}\log 2$. (D) $\dfrac{1}{(2x+1)\ln 2}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{(2x+1)'}{(2x+1)\ln 2}=\dfrac{2}{(2x+1)\ln 2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P): x+2y-2z-6=0$ và $(Q): x+2y-2z+3=0$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

(A) 1. **B** 3. (C) 9. (D) 6.

Lời giải.

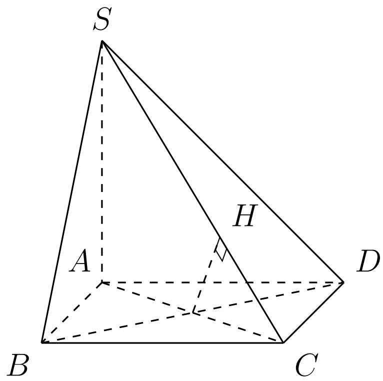
Lấy $M(0;0;-3)\in(P)$. Do $(P)\ /\!/\ (Q)$ nên $\mathrm{d}((P),(Q))=\mathrm{d}(M,(Q))=\dfrac{|0+0-2(-3)+3|}{\sqrt{1+2^2+2^2}}=3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh $SA=a$ và vuông góc với mặt đáy $ABCD$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD.

(A) $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. (C) $\dfrac{a}{2}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và H là chân đường cao kẻ từ O đến SC.

Ta có $\begin{cases} BD\perp AC \\ BD\perp SA\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp OH.$

Suy ra OH là đoạn vuông góc chung của SC và BD.

Xét hai tam giác đồng dạng OHC và SAC, ta có $\dfrac{OH}{SA}=\dfrac{OC}{SC}$.

Suy ra $OH=\dfrac{OC\cdot SA}{SC}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot a}{\sqrt{a2+2a^2}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\cos 2x$.

(A) $\dfrac{x\sin 2x}{2}-\dfrac{\cos 2x}{4}+C$. (B) $x\sin 2x-\dfrac{\cos 2x}{2}+C$.

(C) $x\sin 2x+\dfrac{\cos 2x}{2}+C$. **D** $\dfrac{x\sin 2x}{2}+\dfrac{\cos 2x}{4}+C$.

Lời giải.

Đặt $u=x\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x$; $\mathrm{d}v=\cos 2x\,\mathrm{d}x\Rightarrow v=\dfrac{1}{2}\sin 2x$. Suy ra

$I=\displaystyle\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|\overline{z}+2-i|=4$ là đường tròn tâm I có bán kính R lần lượt là

A $I(-2;-1); R=4$. (B) $I(-2;-1); R=2$. (C) $I(2;-1); R=4$. (D) $I(2;-1); R=2$.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi$, với $a,b\in\mathbb{R}$. Suy ra $\overline{z}=a-bi$.

Ta có $|\overline{z}+2-i|=4\Leftrightarrow(a+2)^2+(-b-1)^2=16\Leftrightarrow(a+2)^2+(b+1)^2=16$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức là đường tròn tâm $I(-2;-1)$, bán kính $R=4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$.

A $(-\infty;6]$. **B** $(-\infty;3)$. **C** $(-\infty;3]$. **D** $[3;6]$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên $(0;4)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0,\ \forall x \in (0;4)$.

$\Leftrightarrow 3x^2 - 2mx - (m-6) \geq 0, \forall x \in (0;4) \Leftrightarrow m \leq \dfrac{3x^2+6}{2x+1}, \forall x \in (0;4)$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{3x^2+6}{2x+1}$, với $x \in [0;4]$ ta có $f'(x) = \dfrac{6x^2+6x-12}{(2x+1)^2}$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \in [0;4]$.

Ta có: $f(0) = f(4) = 6; f(1) = 3 \Rightarrow \min\limits_{x\in[0;4]} f(x) = 3$ và $\max\limits_{x\in[0;4]} f(x) = 6$.

Từ đó suy ra $m \leq \min\limits_{x\in[0;4]} f(x) \Rightarrow m \leq 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Cho tập hợp $A = \{1,2,3,\ldots,10\}$. Chọn ngẫu nhiên ba số từ A. Tìm xác suất để trong ba số chọn ra không có hai số nào là hai số nguyên liên tiếp.

A $\mathrm{P} = \dfrac{7}{90}$. **B** $\mathrm{P} = \dfrac{7}{24}$. **C** $\mathrm{P} = \dfrac{7}{10}$. **D** $\mathrm{P} = \dfrac{7}{15}$.

Lời giải.

- Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^3 = 120$.

- Chọn ba số tự nhiên liên tiếp, có 8 cách.

- Chọn đúng hai số tự nhiên liên tiếp:

+ TH1: Có cặp $(1;2)$ hoặc $(9;10)$. Chọn thêm số thứ ba, có 7 cách. Do đó có tổng cộng $2 \cdot 7 = 14$ cách.

+ TH2: Có một trong bảy cặp $(2;3),(3;4),\ldots(8;9)$. Chọn số còn lại có 6 cách. Do đó có tổng cộng $7 \cdot 6 = 42$ cách.

Suy ra, số cách chọn ba số tự nhiên trong đó có ít nhất hai số tự nhiên liên tiếp là $8+14+42 = 64$.

Vậy xác suất để ba số chọn ra không có hai số nào là hai số tự nhiên liên tiếp là $\mathrm{P} = 1 - \dfrac{64}{120} = \dfrac{7}{15}$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x - m2^{x+1} + (2m^2-5) = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A 1. **B** 5. **C** 2. **D** 4.

Lời giải.

Đặt $t = 2^x > 0$, phương trình trở thành $t^2 - 2mt + (2m^2-5) = 0 \quad (*)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với "Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt". Ta có:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - (2m^2-5) > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m^2 - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| < \sqrt{5} \\ m > 0 \\ |m| > \dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{10}}{2} < m < \sqrt{5} \Rightarrow m = 2.$$

Vậy có 1 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Với cách đổi biến $u=\sqrt{1+3\ln x}$ thì tích phân $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+3\ln x}}\,\mathrm{d}x$ trở thành

(A) $\dfrac{2}{3}\displaystyle\int_1^2 (u^2-1)\,\mathrm{d}u$. **B** $\dfrac{2}{9}\displaystyle\int_1^2 (u^2-1)\,\mathrm{d}u$. (C) $2\displaystyle\int_1^2 (u^2-1)\,\mathrm{d}u$. (D) $\dfrac{2}{9}\displaystyle\int_1^2 \frac{u^2-1}{u}\,\mathrm{d}u$.

Lời giải.

Với $u=\sqrt{1+3\ln x}\Rightarrow u^2=1+3\ln x\Rightarrow \dfrac{u^2-1}{3}=\ln x\Rightarrow \dfrac{2u}{3}\,\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Khi đó, $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+3\ln x}}\,\mathrm{d}x=\int_1^2 \frac{\frac{u^2-1}{3}\cdot\frac{2u}{3}}{u}\,\mathrm{d}u=\frac{2}{9}\int_1^2 (u^2-1)\,\mathrm{d}u$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho mặt cầu (S) tâm O và các điểm A,B,C nằm trên mặt cầu (S) sao cho $AB=3, AC=4, BC=5$ và khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng 1. Tính thể tích của khối cầu (S).

(A) $\dfrac{7\sqrt{21}\pi}{2}$. (B) $\dfrac{13\sqrt{131}\pi}{6}$. (C) $\dfrac{20\sqrt{5}\pi}{3}$. **D** $\dfrac{29\sqrt{29}\pi}{6}$.

Lời giải.

Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC, suy ra $r=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{5}{2}$ (do ΔABC vuông tại A).

Suy ra bán kính mặt cầu (S) là $R=\sqrt{r^2+\mathrm{d}^2(O,(ABC))}=\dfrac{\sqrt{29}}{2}\Rightarrow V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{29\sqrt{29}\pi}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2+1}}$ có bao nhiêu tiệm cận ngang?

(A) 2. **B** 1. (C) 3. (D) 0.

Lời giải.

Tập xác định $D=[1;+\infty)$. Ta có $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$.

Vậy hàm số có đúng một tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$ ↘		-1 ‖ $-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$

Tìm tập hợp tất cả giá trị của tham số m để phương trình $f(x)+m=0$ có ba nghiệm phân biệt.

A $(-2;1)$. **B** $[-1;2)$. **C** $(-1;2)$. **D** $(-2;1]$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với $f(x) = -m$. Khi đó, phương trình có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị của hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt khác 0.

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $-1 < -m < 2 \Leftrightarrow -2 < m < 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho A, B là hai biến cố độc lập với nhau, $\mathrm{P}(A) = 0{,}4$ và $\mathrm{P}(B) = 0{,}3$. Tính $\mathrm{P}(AB)$.

A $\mathrm{P}(AB) = 0{,}58$. **B** $\mathrm{P}(AB) = 0{,}7$. **C** $\mathrm{P}(AB) = 0{,}1$. **D** $\mathrm{P}(AB) = 0{,}12$.

Lời giải.

Vì A, B độc lập nên $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = 0{,}12$

Chọn đáp án D □

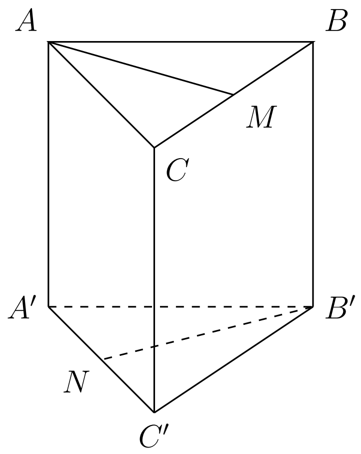
Câu 32. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và $A'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'N$.

A $2a$. **B** $a\sqrt{3}$. **C** a. **D** $a\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AM \subset (ABC) \\ B'N \subset (A'B'C') \\ (ABC) \parallel (A'B'C') \end{cases}$

nên $\mathrm{d}(AM, B'N) = \mathrm{d}((ABC), (A'B'C')) = 2a$.



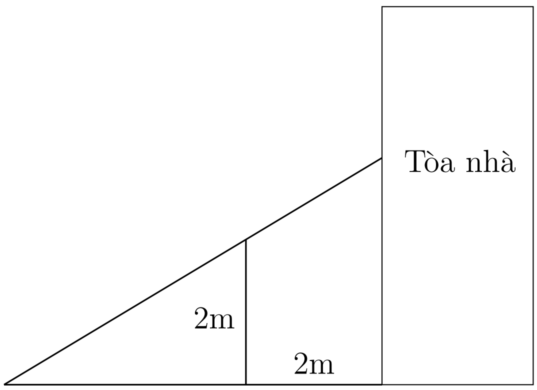
Chọn đáp án A □

Câu 33.

Một bức tường cao 2 m nằm song song với tòa nhà và cách tòa nhà 2 m. Người ta muốn chế tạo một cái thang bắc từ mặt đất bên ngoài bức tường, gác qua bức tường và chạm vào tòa nhà (hình vẽ). Hỏi chiều dài tối thiểu của thang là bao nhiêu mét?

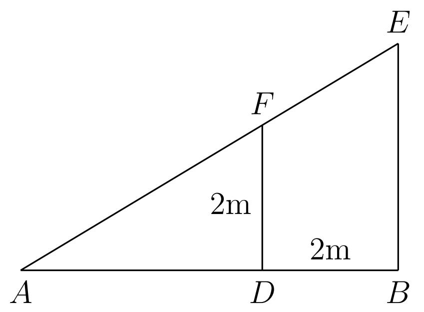
A $\dfrac{5\sqrt{13}}{3}$ m. **B** $4\sqrt{2}$ m.

C 6 m. **D** $3\sqrt{5}$ m.



Lời giải.

Đặt $AD = x$ $(x > 0)$ thì $AF = \sqrt{x^2+4}$.
Ta có $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AF}{AE}$.
Suy ra $AE = \dfrac{AB \cdot AF}{AD} = \dfrac{(x+2)\sqrt{x^2+4}}{x}$.
Xét hàm số $y = \dfrac{(x+2)\sqrt{x^2+4}}{x} = \left(1+\dfrac{2}{x}\right)\sqrt{x^2+4}$.
Ta có $y' = \dfrac{x^3-8}{x^2\sqrt{x^2+4}} = 0 \Leftrightarrow x = 2$.



x	0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	$4\sqrt{2}$	$\nearrow$	

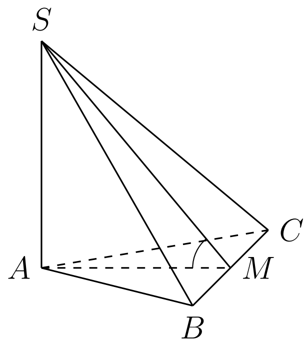
Hàm số đạt GTNN bằng $4\sqrt{2}$ do đó chiều dài tối thiểu của thang là $4\sqrt{2}$ m.
Chọn đáp án B □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A và $AB = a\sqrt{2}$. Biết $SA \perp (ABC)$ và $AS = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

A. $30°$. B. $45°$. C. $60°$. D. $90°$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC thì $AM = a$ và $SM \perp BC$.
Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) chính là góc $\widehat{SMA}$.
Ta thấy tam giác SAM vuông cân tại A nên $\widehat{SMA} = 45°$.



Chọn đáp án B □

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + m$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m $(m < 10)$ để với mọi bộ ba số thực phân biệt $a, b, c \in [1;3]$ thì $f(a), f(b), f(c)$ là ba cạnh của một tam giác?

A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải.

Để $f(a), f(b), f(c)$ là ba cạnh của một tam giác thì $f(a) + f(b) > f(c)$. Tương đương với

$$\begin{aligned}
& a^3 - 3a^2 + m + b^3 - 3b^2 + m > c^3 - 3c^2 + m \quad \forall a,b,c \in [1;3] \\
\Leftrightarrow\ & m > (c^3 - 3c^2) - (a^3 - 3a^2) - (b^3 - 3b^2) \quad \forall a,b,c \in [1;3] \\
\Rightarrow\ & m > \max_{[1;3]} \left((c^3 - 3c^2) - (a^3 - 3a^2) - (b^3 - 3b^2)\right)
\end{aligned}$$

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2,\ x \in [1;3]$ ta có $\max\limits_{[1;3]} g(x) = 0$, $\min\limits_{[1;3]} g(x) = -4$.

Do đó, $m > 0 - (-4) - (-4) = 8$. Mà $m < 10$ nên $m = 9$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 1$ biết tiếp điểm có hoành độ bằng -1.

A $y = -8x - 6$. **B** $y = 8x - 6$. **C** $y = -8x + 10$. **D** $y = 8x + 10$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 4x$ suy ra hệ số góc của tiếp tuyến bằng $y'(-1) = -8$.

Phương trình tiếp tuyến là $y = -8(x+1) + y(1) = -8x - 8 + 2 = -8x - 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $3^n\mathrm{C}_n^0 - 3^{n-1}\mathrm{C}_n^1 + 3^{n-2}\mathrm{C}_n^2 - \cdots + (-1)^n\mathrm{C}_n^n = 2048$. Tính hệ số của x^{10} trong khai triển $(x+2)^n$.

A 11264. **B** 22. **C** 220. **D** 24.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $(3-1)^n = 2048 \Leftrightarrow n = 11$.

Suy ra hệ số của x^{10} trong khai triển $(x+2)^{11}$ là $\mathrm{C}_{11}^{10}2 = 22$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $4^x - m2^{x+1} + 3m - 3 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

A $(-\infty;2)$. **B** $(1;+\infty)$. **C** $(1;2)$. **D** $(0;2)$.

Lời giải.

Đặt $t = 2^x$ $(t > 0)$, phương trình trở thành $t^2 - 2mt + 3m - 3 = 0 \quad (*)$

Ta có $\Delta' = m^2 - 3m + 3 > 0$ nên $(*)$ có hai nghiệm là $t_{1,2} = m \pm \sqrt{m^2 - 3m + 3}$.

Để $t_{1,2} > 0$ thì $m > \sqrt{m^2 - 3m + 3} \Leftrightarrow m > 1$.

Hơn nữa $x_1x_2 < 0$ nên ta có thể giả sử $x_1 > 0, x_2 < 0$, suy ra $t_1 > 1, t_2 < 1$.

Suy ra $(t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0$ tức

$$\begin{aligned} & (m + \sqrt{m^2 - 3m + 3} - 1)(m - \sqrt{m^2 - 3m + 3} - 1) < 0 \\ \Leftrightarrow\ & (m-1)^2 - (m^2 - 3m + 3) < 0 \\ \Leftrightarrow\ & m - 2 < 0 \\ \Leftrightarrow\ & m < 2. \end{aligned}$$

Vậy $1 < m < 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ 3 \\ z = t \end{cases}$. Viết phương trình mặt cầu có đường kính là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

(A) $\left(x+\frac{11}{6}\right)^2+\left(y+\frac{13}{6}\right)^2+\left(z-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$.

(B) $\left(x+\frac{11}{6}\right)^2+\left(y+\frac{13}{6}\right)^2+\left(z-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{6}$.

(C) $\left(x-\frac{11}{6}\right)^2+\left(y-\frac{13}{6}\right)^2+\left(z+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$.

D $\left(x-\frac{11}{6}\right)^2+\left(y-\frac{13}{6}\right)^2+\left(z+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{6}$.

Lời giải.

Hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.

Gọi $A(2+t;1-t;2t)\in d_1$, $B(2-2t';3;t')\in d_2$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2t'-t;t+2;t'-2t)$.

d_1 có một VTCP là $\vec{u_1}=(1;-1;2)$, d_2 có một VTCP là $\vec{u_2}=(-2;0;1)$.

Để AB là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 thì

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u_1}=0\\ \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-2t'-t)-(t+2)+2(t'-2t)=0\\ -2(-2t'-t)+(t'-2t)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\dfrac{1}{3}\\ t'=0\end{cases}$$

Suy ra $A\left(\frac{5}{3};\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)$, $B(2;3;0)$.

Gọi I là trung điểm AB thì $I\left(\frac{11}{6};\frac{13}{6};-\frac{1}{3}\right)$.

Phương trình mặt cầu tâm I, bán kính $\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{30}}{6}$ là $\left(x-\frac{11}{6}\right)^2+\left(y-\frac{13}{6}\right)^2+\left(z+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{-1}$ và cắt hai đường thẳng $d_1:\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-1}$, $d_2:\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{3}$.

(A) $\frac{x+1}{-1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1}$.

B $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$.

(C) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-1}$.

(D) $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{1}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u_d}=(1;1;-1)$, $\vec{u_{d_1}}=(2;1;-1)$, $\vec{u_{d_2}}=(-1;1;3)$.

Gọi (P) là mặt phẳng song song với d và chứa d_1 thì (P) đi qua $A(-1;-1;2)$ và có một VTPT là $\vec{n_1}=[\vec{u_d},\vec{u_{d_1}}]=(0;-1;-1)$. Do đó $(P):y+z-1=0$.

Gọi (Q) là mặt phẳng song song với d và chứa d_2 thì (Q) đi qua $B(1;2;3)$ và có một VTPT là $\vec{n_2}=[\vec{u_d},\vec{u_{d_2}}]=(4;-2;2)$. Do đó $(Q):2x-y+z-3=0$.

Khi đó, đường thẳng cần tìm Δ là giao điểm của (P) và (Q), ta có

$$\Delta:\begin{cases}y+z-1=0\\ 2x-y+z-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+t\\ y=t\\ z=1-t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R}).$$

Hay $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Với tham số m, đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2 - mx}{x+1}$ có hai điểm cực trị A, B và $AB = 5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $m > 2$. **B** $0 < m < 1$. **C** $1 < m < 2$. **D** $m < 0$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nên phương trình $y' = \dfrac{x^2 + 2x - m}{(x+1)^2}$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Theo định lí Vi-ét, $x_1 + x_2 = -2$, $x_1x_2 = -m$.

Chú ý rằng hàm số dạng $y = \dfrac{u}{v}$ có hai điểm cực trị thì $y_{\text{CTr}} = \dfrac{u'}{v'}$.

Với bài toán này, $u = x^2 - mx$, $v = x + 1$ nên $y_{\text{CTr}} = 2x - m$.

Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số thì $A(x_1; 2x_1 - m)$, $B(x_2; 2x_2 - m)$.

Ta có $AB^2 = 25 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + (2x_1 - m - 2x_2 + m)^2 = 25 \Leftrightarrow 5(x_1 - x_2)^2 = 25 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 5$.

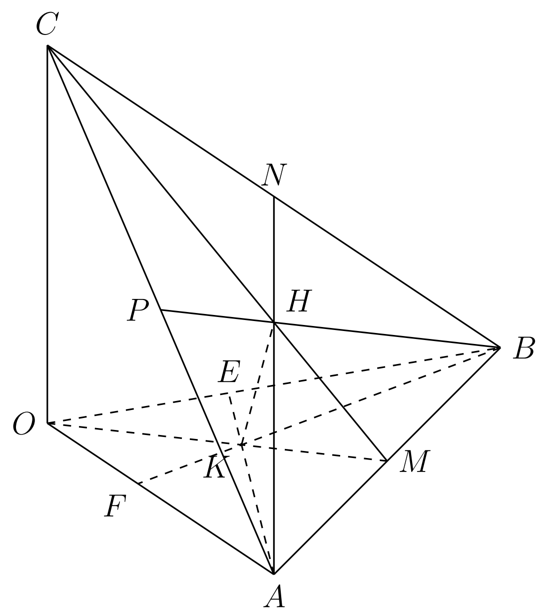
$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 25 \Leftrightarrow 4 - 4(-m) = 5 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(5; 0; 0)$ và $B(3; 4; 0)$. Với C là một điểm trên trục Oz, gọi H là trực tâm tam giác ABC. Khi C di động trên trục Oz thì H luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính đó.

A $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **D** $\sqrt{3}$.

Lời giải.



Ta có A, B thuộc mặt phẳng $z = 0$, C thuộc Oz do đó $CO \perp (OAB)$.

Hơn nữa, $OA = OB = 5$ nên tam giác OAB cân tại O.

Kẻ các đường cao OM, AN, BP của tam giác ABC; các đường cao AM, BF, AE của tam giác OAB. Gọi K là trực tâm của tam giác OAB.

Ta thấy $AE \perp OB$ và $AE \perp OC$ suy ra $AE \perp CB$.

Kết hợp với $AN \perp CB$ ta có $CB \perp (ANE)$, suy ra $CB \perp KH$.

Chứng minh tương tự, ta có $AC \perp KH$.

Vậy $KH \perp (ABC)$. Nên $\widehat{KHM} = 90°$.

Mà K và M cố định nên H di chuyển trên đường tròn đường kính KM.

Ta đi tính KM.

Ta có $KM = MB \tan \widehat{KBM}$. Chú ý rằng $\widehat{KBM} = \widehat{OAM}$.

Ta có $AB = 2\sqrt{5}$ và $\sin \widehat{OAM} = \dfrac{AM}{OA} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ suy ra $\tan \widehat{OAM} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $KM = 2\sqrt{5} \cdot \dfrac{1}{2} = \sqrt{5}$.

Do đó bán kính của đường tròn là $\dfrac{KM}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tam giác SAO cân tại S, mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SD và $(ABCD)$ bằng 60°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.

A $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B** $\dfrac{3a}{2}$. **C** $\dfrac{a}{2}$. **D** $\dfrac{3a}{4}$.

Lời giải.

Ta có $AB = a, BC = a\sqrt{3}$ suy ra $AC = 2a$, do đó $AO = a$. Vậy tam giác OAB đều.

Gọi I là trung điểm của AO ta có $SI \perp AO$ (tam giác SAO cân) và $BI \perp AO$ (tam giác OAB đều).

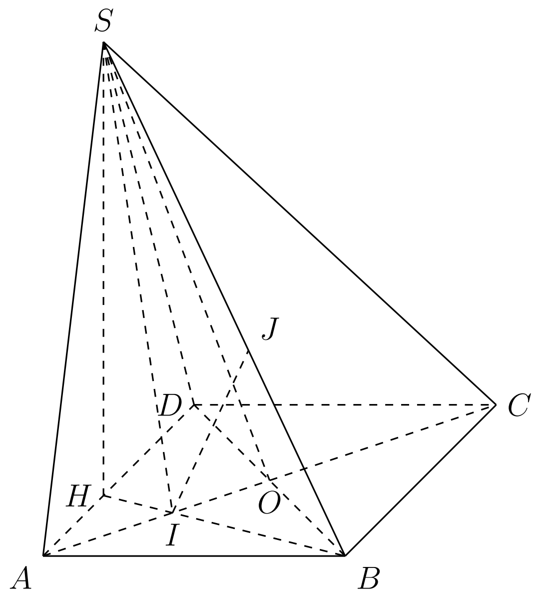
Suy ra $AO \perp (SIB)$, do đó $(SIB) \perp (ABCD)$.

Mà $(SAD) \perp (ABCD)$ nên giao tuyến của (SIB) và (SAD) cũng vuông góc với $(ABCD)$.

Kéo dài BI cắt AD tại H thì SH chính là giao tuyến cần tìm, suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Từ đó, góc $\widehat{SDH} = 60^\circ$.

Ta có $AB = a$, $\widehat{ABH} = 30^\circ$ suy ra $AH = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



Do đó $HD = AD - AH = \sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, suy ra $SH = HD \cdot \tan 60^\circ = 2a$.

Lại có $HB = \sqrt{AH^2 + AB^2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $\tan \widehat{SBH} = \dfrac{SH}{HB} = \sqrt{3}$ suy ra $\widehat{SBH} = 60^\circ$.

Trong mặt phẳng (SHB), kẻ $IJ \perp SB$ thì IJ là đoạn vuông góc chung của AC và SB.

Ta có $IJ = IB \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}a}{2} = \dfrac{3a}{4}$.

Chọn đáp án D □

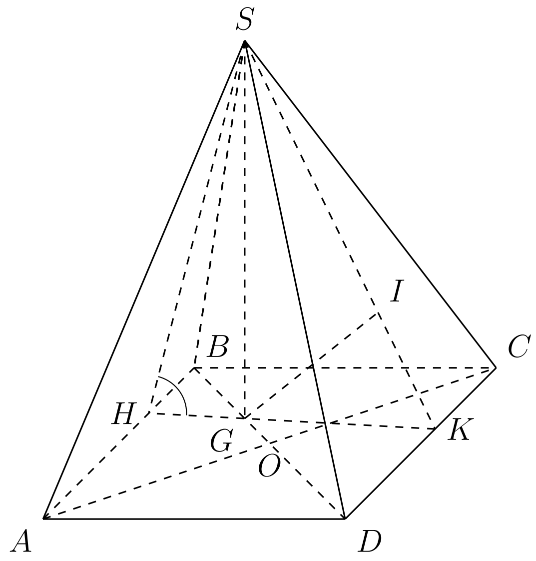
Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác (ABC). Góc giữa mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng 60°. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD).

A $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **C** $\dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$. **D** $\dfrac{3a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có tam giác ABD đều và $BG = \dfrac{BD}{3}$.
Qua G, kẻ HK vuông góc với AB và CD ($H \in AB$, $K \in CD$) thì $HK = h_D = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao từ D của tam giác ABC).
Hơn nữa, $\begin{cases} GH \perp AB \\ SG \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHG) \Rightarrow SH \perp AB$.
Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ chính là góc $\widehat{SHG}$.
Ta có $HG = \dfrac{HK}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ suy ra

$$SG = HG \cdot \tan 60^\circ = \frac{a}{2}.$$



Trong mặt phẳng (SGK), kẻ $GI \perp SK$.
Lại có $GI \perp CD$ (do $CD \perp (SGK)$) suy ra $GI \perp (SCD)$.
Ta có $GK = \dfrac{2}{3} \cdot HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\dfrac{1}{GI^2} = \dfrac{1}{SG^2} + \dfrac{1}{GK^2}$ suy ra $GI = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.
Do đó, $d(B,(SCD)) = \dfrac{3}{2} \cdot d(G,(SCD)) = \dfrac{3}{2} \cdot GI = \dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$.
Chọn đáp án C □

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC vuông tại C, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $AB = 3\sqrt{2}$, đường thẳng AB có phương trình $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z+8}{-4}$, đường thẳng AC nằm trên mặt phẳng $(\alpha): x + z - 1 = 0$. Biết B là điểm có hoành độ dương, gọi $(a; b; c)$ là tọa độ của C. Tính $a + b + c$.

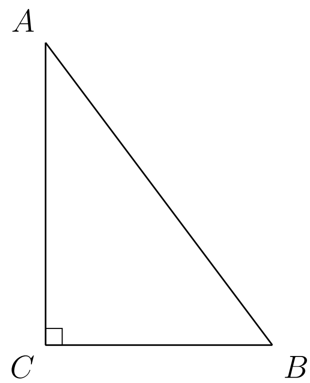
A 3. **B** 2. **C** 4. **D** 7.

Lời giải.

Ta thấy đường thẳng AB có một VTCP là $\vec{u} = (1; 1; -4)$, mặt phẳng (α) có một VTPT là $\vec{n} = (1; 0; 1)$ nên góc giữa AB và (α) là φ với

$$\sin\varphi = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-4) \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $\varphi = 30^\circ = \widehat{BAC}$.
Hơn nữa, $AC \subset (\alpha)$ và $BC \perp AC$ nên C là hình chiếu của B trên (α).
Ta tìm tọa độ của B.



Ta viết lại $AB: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + t \\ z = -8 - 4t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. Điểm A là giao điểm của AB và (α).
Xét phương trình $(3 + t) + (-8 - t) - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -2$. Vậy $A(1; 2; 0)$.
Gọi $B(3 + t'; 4 + t'; -8 - 4t')$, ta có $AB = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow (t' + 2)^2 + (t' + 2)^2 + (-4t' - 8)^2 = 18$.
Suy ra $t' = -1$ hoặc $t' = -3$. Mà B có hoành độ dương nên ta chọn $t = -1$, khi đó $B(2; 3; -4)$.

Đường thẳng BC vuông góc với (α) nên nhận $\vec{n} = (1;0;1)$ làm một VTCP, do đó

$$BC: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3 \\ z = -4+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

C chính là giao điểm của BC và (α). Xét phương trình $(2+t)+(-4+t)-1=0 \Leftrightarrow t = \dfrac{3}{2}$.

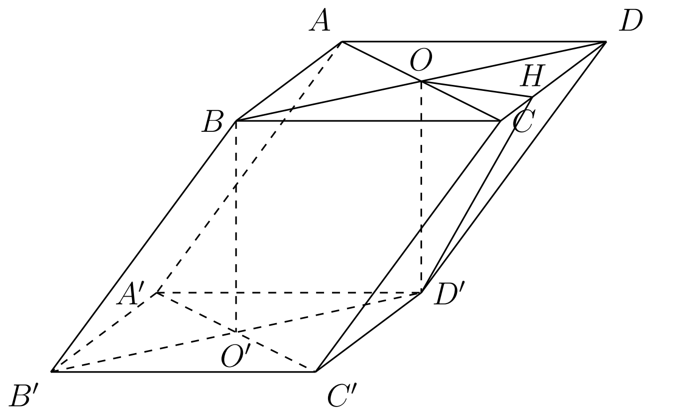
Suy ra $C\left(\dfrac{7}{2};3;-\dfrac{5}{2}\right)$. Vậy $a+b+c=4$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh $a\sqrt{3}$, $BD = 3a$, hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ trùng với trung điểm của $A'C'$. Gọi (α) là góc tạo bởi hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(CDD'C')$, $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$. Tính thể tích khối hộp.

A. $\dfrac{3a^3}{4}$. B. $\dfrac{9\sqrt{3}a^3}{4}$. C. $\dfrac{9a^3}{4}$. D. $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải.



Gọi O và O' lần lượt là tâm của hình thoi $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Vì $BO' \perp (A'B'C'D')$ nên $OD' \perp (ABCD)$.

Ta có $AD = a\sqrt{3}$, $DO = \dfrac{3a}{2}$ nên

$$AO = \sqrt{AD^2 - DO^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra $AC = a\sqrt{3}$, do đó, tam giác ACD đều.

Từ O kẻ $OH \perp CD$, kết hợp với $OD' \perp CD$ (do $OD' \perp (ABCD)$) suy ra $HD' \perp CD$.

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(CDD'C')$ là $\widehat{OHD'}$.

Ta có $OH = \dfrac{1}{2} \cdot h_A = \dfrac{3a}{4}$, $\widehat{OHD'} = \alpha$ và $\tan\alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Suy ra $OD' = OH \cdot \tan\alpha = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích đáy hình hộp là $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

Từ đó, $V = S_{ABCD} \cdot OD' = \dfrac{9a^3}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B và $AB \leq 4$?

A. 7. B. 6. C. 1. D. 2.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{2x-1}{x+1} = x + m \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + m + 1 = 0 \ (x \neq -1) \quad (*)$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $\Delta = (m-1)^2 - 4(m+1) > 0 \Leftrightarrow m > 3 + 2\sqrt{3}$ hoặc $m < 3 - 2\sqrt{3}$.

Ta có $AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 + m - x_2 - m)^2 = 2(x_1 - x_2)^2$.

Suy ra $AB^2 \leq 4^2 \Leftrightarrow 2(x_1 - x_2)^2 \leq 16 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \leq 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 8$.
Áp dụng định lí Vi-ét, bất đẳng thức cuối cùng tương đương với

$$(m-1)^2 - 4(m+1) \leq 8 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 11 \leq 0 \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{5} \leq m \leq 3 + 2\sqrt{5}.$$

Kết hợp với điều kiện của m ở trên ta được $m = 7$ (do m nguyên).
Chọn đáp án C □

Câu 48. Cho các số $a, b > 1$ thỏa mãn $\log_2 a + \log_3 b = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = \sqrt{\log_3 a} + \sqrt{\log_2 b}$.

A $\sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}$. **B** $\sqrt{\log_3 2} + \sqrt{\log_2 3}$.
C $\dfrac{1}{2}(\log_2 3 + \log_3 2)$. **D** $\dfrac{2}{\sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}}$.

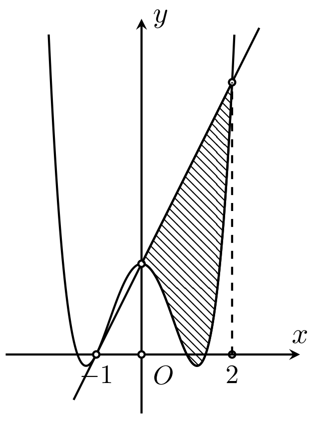
Lời giải.
Ta có $P = \sqrt{\log_3 a} + \sqrt{\log_2 b} = \sqrt{\log_3 2}\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 3}\sqrt{\log_3 b}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có $P^2 \leq (\log_3 2 + \log_2 3)(\log_2 a + \log_3 b) = \log_3 2 + \log_2 3$. Suy ra $P \leq \sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}$.
Chọn đáp án A □

Câu 49. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x+3}$ biết tiếp tuyến đó cắt trục tung và trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB cân.

A $y = -x - 2$. **B** $y = x + 2$. **C** $y = x - 2$. **D** $y = -x + 2$.

Lời giải.
Từ giả thiết suy ra tiếp tuyến có hệ số góc bằng 1 hoặc -1.
Ta có $y' = -\dfrac{1}{(2x+3)^2} < 0$ nên $y' = -1 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = -2$.
Tại $x = -1$ ta có phương trình tiếp tuyến là $y = -x$ (loại vì đường thẳng này đi qua O).
Tại $x = -2$ ta có phương trình tiếp tuyến là $y = -x - 2$.
Chọn đáp án A □

Câu 50.
Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị (C), biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1; 0)$, tiếp tuyến d tại A của (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi d, đồ thị (C) và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ có diện tích bằng $\dfrac{28}{5}$ (phần gạch chéo trong hình vẽ). Tính diện tích giới hạn bởi d, đồ thị (C) và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 0$.



A $\dfrac{2}{5}$. **B** $\dfrac{1}{4}$. **C** $\dfrac{2}{9}$. **D** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.
Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx$.
Phương trình tiếp tuyến d tại $A(-1; 0)$ là $d: y = y'(-1)(x+1) + 0 = (-4a - 2b)(x+1)$.
Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là $(-4a - 2b)(x+1) = ax^4 + bx^2 + c$.
Theo giả thiết, $x = 0$ và $x = 2$ là hai nghiệm của phương trình này, lần lượt thay $x = 0$ và $x = 2$

vào ta được

$$\begin{cases} -4a - 2b = c \\ -12a - 6b = 16a + 4b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 0 & (1) \\ 28a + 10b + c = 0 & (2) \end{cases}$$

Mặt khác, diện tích của phần gạch chéo là

$$\begin{aligned}\frac{28}{5} &= \int_0^2 \left[(-4a-2b)(x+1) - (ax^4+bx^2+c)\right] \mathrm{d}x \\ &= \left[(-4a-2b)\left(\frac{x^2}{2}+x\right) - \left(\frac{ax^5}{5}+\frac{bx^3}{3}+cx\right)\right]\Big|_0^2 \\ &= (-4a-2b)\cdot 4 - \left(\frac{32}{5}a + \frac{8}{3}b + 2c\right)\end{aligned}$$

Tương đương với $\dfrac{112}{5}a + \dfrac{32}{3}b + 2c = -\dfrac{28}{5}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $a = 1, b = -3, c = 2$.

Do đó, $(C): y = x^4 - 3x^2 + 2$, $d: y = 2x + 2$. Suy ra diện tích của hình giới hạn bởi d, đồ thị (C) và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 0$ là $S = \displaystyle\int_{-1}^0 \left[(x^4 - 3x^2 + 2) - (2x + 2)\right] \mathrm{d}x = \frac{1}{5}$.

Chọn đáp án D □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. A	3. B	4. D	5. B	6. D	7. B	8. C	9. A	10. A
11. B	12. C	13. C	14. D	15. B	16. A	17. C	18. C	19. B	20. B
21. D	22. D	23. A	24. C	25. D	26. A	27. B	28. D	29. B	30. A
31. D	32. A	33. B	34. B	35. C	36. A	37. B	38. C	39. D	40. B
41. B	42. C	43. D	44. C	45. C	46. C	47. C	48. A	49. A	50. D

165 ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA 2018 MÔN TOÁN TRƯỜNG THPT NGUYỄN ĐỨC THUẬN – NAM ĐỊNH - LẦN 1

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1; 1]$ đạt tại $x = x_0$. Giá trị x_0 bằng

A. 1. B. 2. C. -2. D. -1.

Câu 2. Gọi M và m lần lượt là gá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x - 4\sqrt{6-x}$ trên đoạn $[-3; 6]$. Tổng $M + m$ có giá trị là

A. -6. B. -12. C. -4. D. 18.

Câu 3. Xét bốn mệnh đề sau:
(1). Hàm số $y = \sin x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$
(2). Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$
(3). Hàm số $y = \tan x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$
(4). Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
Tìm số phát biểu đúng.

A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - mx^2 + 3x - 1$ (m là tham số thực). Tìm giá trị nhỏ nhất của m để hàm số trên luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 3$. B. $m = -2$. C. $m = 1$. D. $m = 0$.

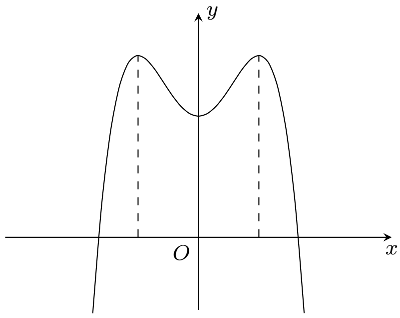
Lời giải.
- Với $m = 0$, ta có $y = 3x - 1$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Với $m \neq 0$, ta có $y' = mx^2 - 2m + 3$. Khi đó $\Delta = m^2 - 3m$.
$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ khi $m \in [0; 3]$. Vậy m nhỏ nhất là 0.
Chọn đáp án D □

Câu 5. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$ là

A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 6.
Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$. B. $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$.
C. $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$. D. $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$.



Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D** $a^3\sqrt{3}$.

Câu 8. Đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ và đồ thị hàm số $y = 3x^2 - 2x - 1$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

A 0. **B** 2. **C** 3. **D** 1.

Câu 9. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Biết cạnh bên của lăng trụ bằng $2a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ là

A $\dfrac{a^3}{3}$. **B** $6a^3$. **C** $3a^3$. **D** $2a^3\sqrt{3}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của cạnh SB, SD. Tỉ số $\dfrac{V_{S.AEF}}{V_{S.ABCD}}$ bằng

A $\dfrac{1}{4}$. **B** $\dfrac{3}{8}$. **C** $\dfrac{1}{8}$. **D** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 11. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A 0. **B** 3. **C** 1. **D** 2.

Câu 12. Tìm m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4 - 5$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

A $m = -1$. **B** $m = 1$. **C** $m \neq -1$. **D** $m \neq 1$.

Câu 13. Đường thẳng nào dưới đây là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x}{x-2}$?

A $2y - 1 = 0$. **B** $2x - 1 = 0$. **C** $x - 2 = 0$. **D** $y - 2 = 0$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC).

A 30°. **B** 75°. **C** 60°. **D** 45°.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy, cạnh SC hợp với mặt đáy một góc 60°. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A $\dfrac{2a^3\sqrt{15}}{3}$. **B** $2a^3\sqrt{15}$. **C** $2a^3$. **D** $\dfrac{2a^3\sqrt{15}}{9}$.

Câu 16.

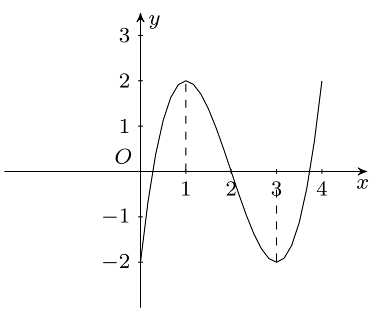
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 4]$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.

B Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

C Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.

D Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.



Câu 17. Phương trình lượng giác $2\cos x + \sqrt{2} = 0$ có nghiệm là

A $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.$ **B** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.$ **C** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.$ **D** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\dfrac{7\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.$

Câu 18. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \dfrac{2x-1}{(mx^2-2x+1)(4x^2+4m+1)}$ có đúng một đường tiệm cận là

(A) $(-\infty;-1)\cup\{0\}\cup(1;+\infty)$.
(B) $\varnothing$.
(C) $\{0\}\cup(1;+\infty)$.
(D) $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải.

Nhận xét rằng đồ thị hàm số luôn có một tiệm cận ngang là $y=0$. Do đó để đồ thị có đúng 1 đường tiệm cận thì phương trình sau phải vô nghiệm hoặc có đúng 1 là $x = \dfrac{1}{2}$

$$(mx^2-2x+1)(4x^2+4m+1) = 0 \ (*)$$

- Với $m=0$ thì (*) có đúng một nghiệm $x = \dfrac{1}{2}$, thỏa bài toán.

- Với $m \neq 0$, ta có $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx^2-2x+1=0 \ (\text{a}) \\ 4x^2+4m+1=0 \ (\text{b}) \end{array}\right.$.

Ta thấy phương trình (a) và (b) không có nghiệm kép $x = \dfrac{1}{2}$. Do đó điều kiện bài toán là (a) và (b) phải vô nghiệm. Suy ra $m>1$. Vậy $\{0\}\cup(1;+\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Thể tích khối lăng trụ đều có tất cả các cạnh bằng a là

(A) $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$.
(B) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$.
(C) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$.
(D) $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{4}$.

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{m-\cos x}{\sin^2 x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(A) $m \leq 0$.
(B) $m \leq 2$.
(C) $m \geq 1$.
(D) $m \leq \dfrac{5}{4}$.

Lời giải.

Đặt $t = \cos x$, ta có $f(t) = \dfrac{m-t}{1-t^2}$, với $0 < t < \dfrac{1}{2}$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{-t^2+2mt-1}{(1-t^2)^2}$.

Điều kiện bài toán là $f'(t) \leq 0$ với mọi $0<t<\dfrac{1}{2}$ hay $-t^2+2mt-1 \leq 0$ với mọi $0<t<\dfrac{1}{2}$. Suy ra $m \leq \dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{2t}$ với mọi $0<t<\dfrac{1}{2}$. Từ đó suy ra $m \leq \dfrac{5}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Đáy của lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là tam giác đều cạnh $a=4$ và biết diện tích tam giác $A'BC$ bằng 8. Thể tích khối lăng trụ là

(A) $2\sqrt{3}$.
(B) $4\sqrt{3}$.
(C) $8\sqrt{3}$.
(D) $16\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC. Ta có $S_{A'BC} = \dfrac{1}{2}BC.A'M = 2A'M = 8 \Rightarrow A'M = 4$.

Khi đó $AA' = \sqrt{A'M^2 - AM^2} = 2$. Vậy $V = 8\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có ba kích thước $AB=a$, $AD=2a$, $AA_1=3a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (A_1BD) bằng bao nhiêu?

Ⓐ a. Ⓑ $\frac{7}{6}a$. Ⓒ $\frac{5}{7}a$. **D** $\frac{6}{7}a$.

Lời giải.

Ta có $d(A,(A_1BD)) = \dfrac{3V_{A.A'BD}}{S_{A'BD}}$.

$+ V_{A.A'BD} = \dfrac{1}{6}a.2a.3a = a^3$.

$+ A'D = \sqrt{9a^2+4a^2} = a\sqrt{13}$; $BD = \sqrt{4a^2+a^2} = a\sqrt{5}$; $A'B = \sqrt{9a^2+a^2} = a\sqrt{10}$.

Do đó $S_{A'BD} = \dfrac{7}{2}a^2$. Vậy $d(A,(A_1BD)) = \dfrac{6}{7}a$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	$\frac{1}{2}$ ↗		$+\infty$ || $-\infty$		↗ $\frac{1}{2}$

Ⓐ $y = \dfrac{-x+2}{2x-1}$. Ⓑ $y = \dfrac{x+2}{2x-1}$.

Ⓒ $y = \dfrac{-x-2}{2x-1}$. **D** $y = \dfrac{x-2}{2x-1}$.

Câu 24. Tìm tất cả các giá tri thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + x^2 - (2m+1)x + 4$ có đúng hai cực trị.

A $m > -\frac{2}{3}$. Ⓑ $m > -\frac{4}{3}$. Ⓒ $m < -\frac{2}{3}$. Ⓓ $m < \frac{4}{3}$.

Câu 25. Đường thẳng Δ: $y = -x + k$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x-3}{x-2}$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

Ⓐ $k = 1$. **B** với mọi $k \in \mathbb{R}$. Ⓒ với mọi $k \neq 0$. Ⓓ $k = 0$.

Câu 26. Trong các hàm số sau đây hàm số nào có cực trị?

Ⓐ $y = \sqrt{x}$. Ⓑ $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 3x - 1$.

C $y = -x^4 - x^2 - 1$. Ⓓ $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$.

Câu 27. Cho hàm số $y = -x^4 - 2x^2 + 3$. Tìm khẳng định **sai**?

A Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$. Ⓑ Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. Ⓓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AD = DC = a$. Biết SAB là tam giác đều cạnh $2a$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC).

Ⓐ $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$. Ⓑ $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB. Khi đó $SH = a\sqrt{3}$.

Dễ thấy tam giác HBC vuông cân tại H nên $CH \perp (SAB)$.

Gọi M là trung điểm BC và K là hình chiếu của H lên SM, suy ra $KH \perp (SAB)$. Như vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng góc giữa CH và HK, đó là góc $\widehat{CHK}$.

Vậy $\cos((SAB),(SBC)) = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ □

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SD = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$. Hình chiếu vuông góc H của S lên mặt $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn AB. Gọi K là trung điểm của AD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và HK theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{7}$. B. $\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$. C. $\dfrac{a\sqrt{21}}{5}$. D. $\dfrac{3a}{5}$.

Lời giải.

Vì $HK \parallel (SBD)$ nên $d(SD, HK) = d(H, (SBD))$.

Gọi O là tâm $ABCD$, I là trung điểm của BO, K là hình chiếu của A lên SI.

Khi đó $d(H, (SBD)) = HK$.

Ta có $HD^2 = \dfrac{5a^2}{4}$, $SH^2 = 3a^2$, $HI = \dfrac{1}{4}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. Do đó $HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = mx^4 - (m+1)x^2 + (m+1)$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tất cả các điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho nằm trên các trục tọa độ là

A. $\left[-1; \dfrac{1}{3}\right]$. B. $[-1; 0] \cup \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$. C. $\left[0; \dfrac{1}{3}\right] \cup \{-1\}$. D. $\left\{0; -1; \dfrac{1}{3}\right\}$.

Câu 31. Tìm m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ tại bốn điểm phân biệt.

A. $2 < m < 3$. B. $m > 2$. C. $1 < m < 2$. D. $m < 2$.

Câu 32. Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng $3a$. Tính khoảng cách h từ đỉnh S tới mặt phẳng đáy (ABC).

A. $h = a$. B. $h = a\sqrt{6}$. C. $h = \dfrac{3}{2}a$. D. $h = a\sqrt{3}$.

Câu 33. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $BA = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

A. $\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$. B. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Gọi N là trung điểm của BB'. Khi đó $B'C \parallel (AMN)$.

Do đó $d(B'C, AM) = d(B', (AMN)) = d(B, (AMN)) = h$.

Do tứ diện $BAMN$ có các cạnh BA, BM,BN vuông góc đôi một nhau nên

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{7}}{7}$$

.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.

B Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.
C Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
D Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy là trung điểm H của cạnh AC. Biết $SB=a\sqrt{2}$. Tính theo a khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SAB).

A $\dfrac{7a\sqrt{21}}{3}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$. **D** $\dfrac{3a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 36. Một khối chóp tam giác có đáy là một tam giác đều cạnh bằng 6cm. Một cạnh bên có độ dài bằng 3cm và tạo với đáy một góc 60°. Thể tích của khối chóp đó là

A 27cm^3. **B** $\dfrac{27}{2}\text{cm}^3$. **C** $\dfrac{81}{2}\text{cm}^3$. **D** $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\text{cm}^3$.

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng

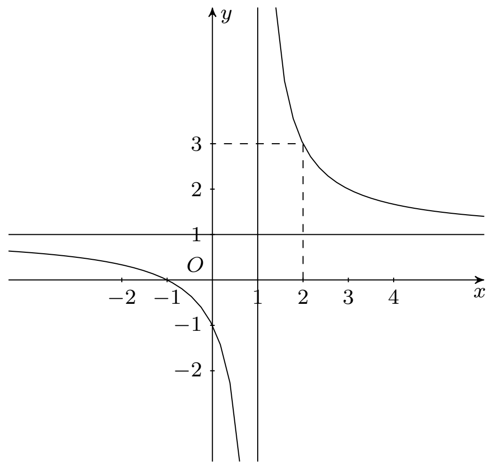
A $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 38.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số bên dưới. Đó là hàm số nào?

A $y=\dfrac{2x-3}{2x-2}$. **B** $y=\dfrac{x}{x-1}$.

C $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **D** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.



Câu 39. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+8}$. Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A $\dfrac{1}{4}$. **B** $-\dfrac{1}{8}$. **C** 2. **D** -4.

Câu 40. Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau được tạo thành từ các số 1, 2, 3, 4, 5?

A A_5^4. **B** P_5. **C** C_5^4. **D** P_4.

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a, góc $\widehat{BCA}=30^\circ$, SO vuông góc với mặt đáy và $SO=\dfrac{3a}{4}$. Khi đó thể tích của khối chóp là

A $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 42. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$. Biết diện tích tam giác SAB là $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$, khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) là

(A) $\dfrac{a\sqrt{10}}{3}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 43. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2-3x^2}$ bằng biểu thức nào sau đây?

(A) $\dfrac{-3x}{\sqrt{2-3x^2}}$. (B) $\dfrac{1}{2\sqrt{2-3x^2}}$. (C) $\dfrac{-6x^2}{2\sqrt{2-3x^2}}$. (D) $\dfrac{3x}{\sqrt{2-3x^2}}$.

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABC$ trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $SA = 3a$, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a\sqrt{6}$. Khoảng cách từ B đến SC bằng

(A) $2a\sqrt{3}$. (B) $a\sqrt{3}$. (C) $a\sqrt{2}$. (D) $2a$.

Câu 45. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân đỉnh A, mặt bên $BCC'B'$ là hình vuông, khoảng cách giữa AB' và CC' bằng a. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

(A) a^3. (B) $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. (D) $\sqrt{2}a^3$.

Lời giải.

Vì $CC'//(ABB'A')$ nên $d(CC', AB') = d(C, (ABB'A')) = CA = a$.

Do đó $BC = CC' = a\sqrt{2}$. Vậy thể tích lăng trụ là $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $\dfrac{SB}{\sqrt{2}} = \dfrac{SC}{\sqrt{3}} = a$, cạnh SA vuông góc mặt đáy $(ABCD)$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng

(A) $\dfrac{a}{\sqrt{6}}$. (B) $\dfrac{a}{3}$. (C) $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. (D) $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Dễ thấy $BC \perp (SAB)$ và $CD \perp (SDA)$.

$BC = \sqrt{SC^2 - SB^2} = a$.

Gọi H là hình chiếu của A lên SD. Khi đó $d(A, (SCD)) = SH = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{9}x$ là

(A) $y = -\dfrac{1}{9}x + 18$; $y = -\dfrac{1}{9}x + 5$. (B) $y = \dfrac{1}{9}x + 18$; $y = \dfrac{1}{9}x - 14$.

(C) $y = 9x + 18$; $y = 9x - 14$. (D) $y = 9x + 18$; $y = 9x + 5$.

Câu 49. Hàm số $y = -x^3 + 3x - 5$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

(A) $(-\infty; -1)$. (B) $(-1; 1)$. (C) $(1; +\infty)$. (D) $(-\infty; 1)$.

Câu 50. Cho hàm số $y = \sin 2x$. Hãy chọn câu đúng.

(A) $y^2 + (y')^2 = 4$. (B) $4y - y'' = 4$. (C) $4y + y'' = 0$. (D) $y = y' \tan 2x$.

——— **HẾT** ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. A	3. A	4. D	5. D	6. A	7. A	8. D	9. C	10. C
11. B	12. B	13. D	14. C	15. A	16. C	17. B	18. C	19. C	20. D
21. C	22. D	23. D	24. A	25. B	26. C	27. A	29. B	30. D	31. C
32. B	33. A	34. B	35. B	36. B	37. B	38. D	39. A	40. A	41. B
42. D	43. A	44. D	45. B	46. D	48. C	49. B	50. C		

166 ĐỀ THI THỬ THPT QG 2018 LỚP 12 - LẦN 1 - TRƯỜNG THPT HOA LƯ A - NINH BÌNH

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	3	↗	5	↘	3	↗	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $|f(x)| = 2 - 3m$ có bốn nghiệm phân biệt.

(A) $m \le -\dfrac{1}{3}$. (B) $-1 < m \le -\dfrac{1}{3}$. (C) $-1 < m < -\dfrac{1}{3}$. (D) $3 < m < 5$.

Câu 2. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \dfrac{1}{\sin x - \cos x}$

(A) $D = \mathbb{R}\backslash\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. (B) $D = \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(C) $D = \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$. (D) $D = \mathbb{R}\backslash\{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 3. Hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

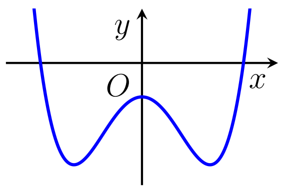
(A) $(1; +\infty)$. (B) $(-\infty; -1)$. (C) $(-\infty; 0)$. (D) $(0; +\infty)$.

Câu 4. Gọi n là số cạnh của hình chóp có 101 đỉnh. Tìm n.

(A) $n = 202$. (B) $n = 200$. (C) $n = 101$. (D) $n = 203$.

Câu 5.

Cho hàm số bậc bốn $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \ne 0)$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) $a > 0, b < 0, c < 0$. (B) $a > 0, b > 0, c < 0$.

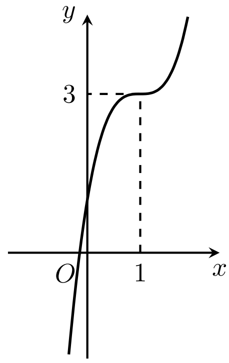
(C) $a > 0, b < 0, c > 0$. (D) $a < 0, b > 0, c < 0$.

Câu 6. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và $B'C'$. Mặt phẳng $(A'MN)$ cắt cạnh BC tại P. Tính thể tích V khối đa diện $MBPA'B'N$.

(A) $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{32}$. (B) $V = \dfrac{7\sqrt{3}a^3}{96}$. (C) $V = \dfrac{7\sqrt{3}a^3}{48}$. (D) $V = \dfrac{7\sqrt{3}a^3}{32}$.

Câu 7.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số ở dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



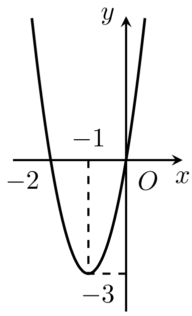
(A) $y = -2x^3 - 6x^2 - 6x + 1$.
B $y = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 1$.
(C) $y = 2x^3 - 6x^2 - 6x + 1$.
(D) $y = 2x^3 - x^2 + 6x + 1$.

Câu 8. Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $\mathrm{A}_n^3 + 5\mathrm{A}_n^2 = 2(n + 15)$?

(A) 3. (B) 2. **C** 1. (D) 0.

Câu 9.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đạo hàm là hàm số $y = f'(x)$ với đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ âm. Khi đó đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là bao nhiêu?



A -4. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-2)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Do đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ âm nên $f(-2) = 0$.
Từ đó suy ra $f(0) < 0$, vì vậy $f(0)$ chỉ có thể nhận giá trị bằng -4.
Vậy đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là -4.
Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Hàm số $y = -x^3 + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 1. **B** 0. (C) 3. (D) 2.

Câu 11. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ là

(A) $y = 2x + 4$. (B) $y = -x + 2$. (C) $y = 2x - 4$. **D** $y = -2x + 4$.

Câu 12. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$. Tính tổng $S = 2m + 3M$.

A $S = -\dfrac{7}{2}$. (B) $S = -\dfrac{3}{2}$. (C) $S = -3$. (D) $S = 4$.

Câu 13. Cho hai đường thẳng song song a và b. Trên đường thẳng a lấy 6 điểm phân biệt; trên đường thẳng b lấy 5 điểm phân biệt. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm trong các điểm đã cho trên hai đường thẳng a và b. Tính xác xuất để 3 điểm được chọn tạo thành một tam giác.

(A) $\dfrac{5}{11}$. (B) $\dfrac{60}{169}$. (C) $\dfrac{2}{11}$. **D** $\dfrac{9}{11}$.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{11}^3 = 165$.

Với mỗi điểm thuộc a ta có C_5^2 tam giác mà hai đỉnh còn lại nằm trên đường thẳng b.

Với mỗi điểm thuộc b ta có C_6^2 tam giác mà hai đỉnh còn lại nằm trên đường thẳng a.

Từ đó suy ra số tam giác tạo bởi 11 điểm đã cho là $6.\mathrm{C}_5^2 + 5.\mathrm{C}_6^2 = 135$.

Vậy xác suất cần tính là $P = \dfrac{135}{165} = \dfrac{9}{11}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và đường thẳng SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc $30°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A $\dfrac{2\sqrt{6}a^3}{3}$. (B) $\dfrac{2a^3}{3}$. (C) $\sqrt{3}a^3$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 15. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}$, $OA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC).

(A) $60°$. **B** $30°$. (C) $45°$. (D) $90°$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(1; 2)$. (B) $(-\infty; -1)$. (C) $(-1; 1)$. (D) $(2; +\infty)$.

Câu 17. Cho hàm số $y = x^4 + 4x^2$ có đồ thị (C). Tìm số giao điểm của đồ thị (C) và trục hoành.

(A) 0. (B) 3. **C** 1. (D) 2.

Câu 18. Hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty; 1)$. **B** $(1; 2)$. (C) $(1; +\infty)$. (D) $(0; 1)$.

Câu 19. Ba người xạ thủ A_1, A_2, A_3 độc lập với nhau cùng nổ súng bắn vào mục tiêu. Biết rằng xác suất bắn trúng mục tiêu của A_1, A_2, A_3 tương ứng là $0,7; 0,6$ và $0,5$. Tính xác suất để có ít nhất một xạ thủ bắn trúng.

(A) $0,45$. (B) $0,21$. (C) $0,75$. **D** $0,94$.

Lời giải.

Gọi B là biến cố "có ít nhất một xạ thủ bắn trúng mục tiêu", khi đó $\overline{B}$ là biến cố cả 3 xạ thủ đều bắn không trúng mục tiêu. Do đó:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(\overline{A}_1).P(\overline{A}_2).P(\overline{A}_3) = 1 - 0,3.0.4.0,5 = 0,94$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$.

(A) $M = 10$. (B) $M = 6$. (C) $M = 11$. **D** $M = 15$.

Câu 21. Một viên đá có hình dạng là khối chóp tứ giác đều với tất cả các cạnh bằng a. Người ta cắt khối đá đó bởi mặt phẳng song song với đáy của khối chóp để chia khối đá thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích của thiết diện khối đá bị cắt bởi mặt phẳng nói trên. (Giả thiết rằng tổng thể tích của hai khối đá sau vẫn bằng thể tích của khối đá ban đầu).

A. $\dfrac{2a^3}{\sqrt{3}}$. B. $\dfrac{a^2}{\sqrt[3]{2}}$. C. $\dfrac{a^2}{4}$. D. $\dfrac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$.

Lời giải.

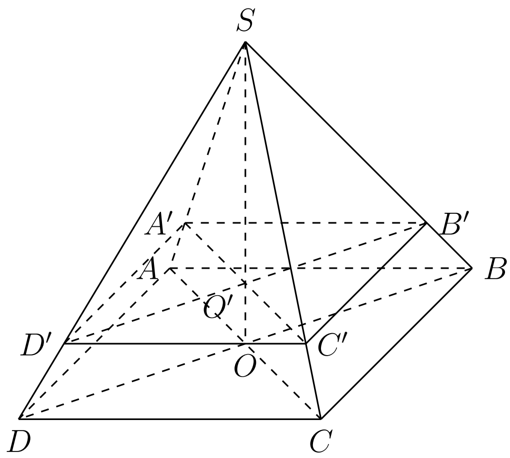
Giả sử viên đá có dạng khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ và mặt phẳng mà ta cắt viên đá là $A'B'C'D'$. Gọi O, O' lần lượt là tâm của các hình vuông $ABCD, A'B'C'D'$.

Đặt $k = \dfrac{SO'}{SO}$, khi đó ta có

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = \dfrac{SO'}{SO} \cdot \dfrac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = k^3$

Từ đó suy ra $k = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

$\dfrac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = k^2 \Rightarrow S_{A'B'C'D'} = k^2 S_{ABCD} = \dfrac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$.



Chọn đáp án D □

Câu 22. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 + \dfrac{3}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $m = 4\sqrt[4]{3}$. B. $m = 2\sqrt{3}$. C. $m = 4$. D. $m = 2$.

Câu 23. Tìm tọa độ điểm M có hoành độ dương thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị (C) đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(1; -3)$. B. $M(3; 5)$. C. $M(0; -1)$. D. $M(4; 3)$.

Câu 24. Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x - 2$.

A. $[-2; \sqrt{3}]$. B. $[-\sqrt{3} - 3; \sqrt{3} - 1]$.

C. $[-4; 0]$. D. $[-2; 0]$.

Câu 25. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

Câu 26. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, phép quay tâm $I(4; -3)$ góc quay $180°$ biến đường thẳng $d : x + y - 5 = 0$ thành đường thẳng d' có phương trình

A. $x - y + 3 = 0$. B. $x + y + 3 = 0$. C. $x + y + 5 = 0$. D. $x + y - 3 = 0$.

Câu 27. Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (8 - 2m)x + m + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 2$. B. $m = -2$. C. $m = 4$. D. $m = -4$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + 8 - 2m$, hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = m^2 + 2m - 8 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 2$.

Từ đó suy ra giá trị lớn nhất của m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ là $m = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 28.

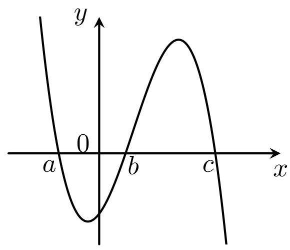
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	3 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-2	↗	5

A 3. **B** 1. **C** 2. **D** 4.

Câu 29.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm lần lượt có hoành độ a, b, c như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A $f(c) + f(a) - 2f(b) > 0$.

B $(f(b) - f(a))(f(b) - f(c)) < 0$.

C $f(a) > f(b) > f(c)$.

D $f(c) > f(b) > f(a)$.

Lời giải.

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↗	$f(a)$	↘	$f(b)$	↗	$f(c)$	↘	

Từ bảng biến thiên suy ra $\begin{cases} f(a) > f(b) \\ f(c) > f(b) \end{cases} \Rightarrow f(c) + f(a) - 2f(b) > 0$

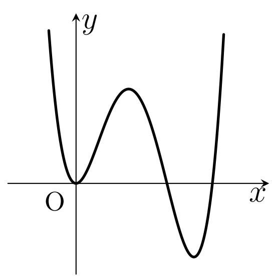
Chọn đáp án A □

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $3\sin x + m\cos x = 5$ vô nghiệm.

A $m > 4$. **B** $m < -4$. **C** $|m| \geq 4$. **D** $-4 < m < 4$.

Câu 31.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

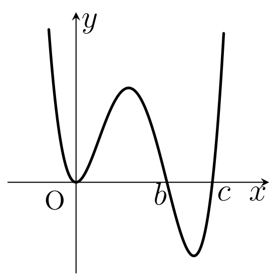
B Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.

C Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.

D Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

Lời giải.

Ký hiệu b, c là hoành độ các giao điểm của đồ thị $y = f'(x)$ với trục Ox, ở đó $0 < b < c$. Khi đó dấu của $f'(x)$ là:



x	$-\infty$		0		b		c		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ đó suy ra hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \dfrac{(m+1)x-2}{x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

(A) 1. (B) 0.
C 2. (D) 3.

Câu 33. Gọi A và B là các điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$. Tính diện tích S của tam giác AOB (với O là gốc tọa độ).

A $S = 2$. (B) $S = 4$. (C) $S = 1$. (D) $S = 3$.

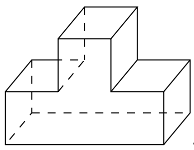
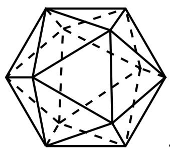
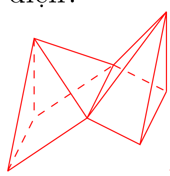
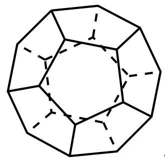
Câu 34. Hình lập phương có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

(A) 5. **B** 9. (C) 7. (D) 6.

Câu 35. Có bao nhiêu cách chia 8 đồ vật khác nhau cho 3 người sao cho có một người được 2 đồ vật và hai người còn lại mỗi người được 3 đồ vật?

(A) $3!\mathrm{C}_8^2\mathrm{C}_6^3$. (B) $\mathrm{C}_8^2\mathrm{C}_6^3$. (C) $\mathrm{A}_8^2\mathrm{A}_6^3$. **D** $3\mathrm{C}_8^2\mathrm{C}_6^3$.

Câu 36. Vật thể nào dưới đây không phải là khối đa diện?

(A) . (B) . **C** . (D) .

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và có thể tích bằng 2. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh SB và SD sao cho $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SN}{SD} = k$. Tìm giá trị của k để thể tích khối chóp $S.AMN$ bằng $\dfrac{1}{8}$.

(A) $k = \dfrac{1}{8}$. (B) $k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C** $k = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. (D) $k = \dfrac{1}{4}$.

Câu 38. Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V và điểm E trên cạnh AB sao cho $AE = 3EB$. Tính thể tích khối tứ diện $EBCD$ theo V.

A $\dfrac{V}{4}$. (B) $\dfrac{V}{3}$. (C) $\dfrac{V}{2}$. (D) $\dfrac{V}{5}$.

Lời giải.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Cho hình tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 3. Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 là trọng tâm của bốn mặt của tứ diện $ABCD$. Tính thể tích V của khối tứ diện $G_1G_2G_3G_4$.

(A) $V = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. (B) $V = \dfrac{\sqrt{2}}{18}$. (C) $V = \dfrac{9\sqrt{2}}{32}$. **D** $V = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

Câu 40. Các đường chéo của các mặt một hình hộp chữ nhật bằng $\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{13}$. Tính thể tích V của khối hộp chữ nhật đó.

A $V = 6$. (B) $V = 5\sqrt{26}$. (C) $V = 2$. (D) $V = \dfrac{5\sqrt{26}}{3}$.

Lời giải.

Gọi a, b, c là các kích thước của hình hộp chữ nhật, khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} a^2+b^2=5 \\ b^2+c^2=10 \\ c^2+a^2=13 \end{cases}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{cases} a^2=4 \\ b^2=1 \\ c^2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=3 \end{cases}$$

Do đó $V=abc=6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $AA'=2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và CD'.

(A) $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. (C) $2a$. (D) $a\sqrt{2}$.

Câu 42. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có $AC=2a$; góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. (B) $V=\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $a^3\sqrt{2}$. (D) $V=\dfrac{a^3}{2}$.

Câu 43. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-4x}{2x-1}$

(A) $y=2$. (B) $y=4$. (C) $y=\dfrac{1}{2}$. **D** $y=-2$.

Câu 44. Cho hình bát diện đều cạnh a. Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình bát diện đó. Tính S.

(A) $S=8a^2$. (B) $S=4a^2\sqrt{3}$. **C** $S=2a^2\sqrt{3}$. (D) $S=a^2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Mỗi mặt của hình bát diện đều cạnh a là một tam giác đều cạnh a, do đó $S=8\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=2a^2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 45. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Đường thẳng AB' hợp với đáy một góc 60°. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

(A) $V=\dfrac{3a^3}{2}$. (B) $V=\dfrac{a^3}{4}$. **C** $V=\dfrac{3a^3}{4}$. (D) $V=\dfrac{a^3}{2}$.

Câu 46. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 9. Tính thể tích khối tứ diện $ACB'D'$.

A 3. (B) $\dfrac{9}{2}$. (C) 6. (D) $\dfrac{27}{4}$.

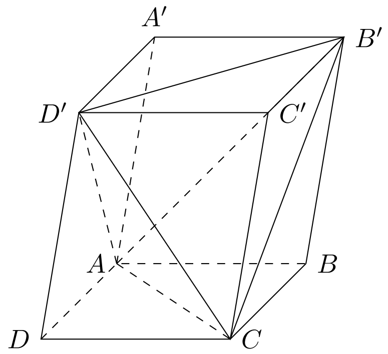
Lời giải.

Ta có

$V_{ACB'D'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_{AA'B'D'} - V_{CC'B'D'} - V_{D'DAC} - V_{B'ABC}$.

Mà $V_{AA'B'D'} = V_{CC'B'D'} = V_{D'DAC} = V_{B'ABC} = \dfrac{1}{6} V_{ABCD.A'B'C'D'}$

Từ đó suy ra $V_{ACB'D'} = \dfrac{1}{3} V_{ABCD.A'B'C'D'} = 3$.



Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Mặt phẳng (P) đi qua C' và các trung điểm của AA', BB' chia khối lăng trụ thành hai khối đa diện có tỉ số thể tích bằng k với $k \leq 1$. Tìm k.

A $\dfrac{1}{3}$. B $\dfrac{2}{3}$. C 1. D $\dfrac{1}{2}$.

Câu 48. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 6t^2$ với t là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $s(t)$ là quãng đường đi được trong khoảng thời gian t. Tính thời điểm t tại đó vận tốc đạt giá trị lớn nhất.

A $t = 3$. B $t = 4$. C $t = 1$. D $t = 2$.

Lời giải.

Ta có $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t = 12 - 3(t-2)^2 \leq 12$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = 2$.

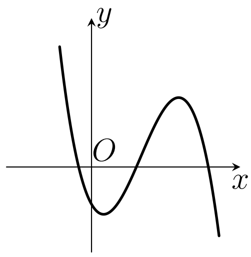
Chọn đáp án D □

Câu 49.

Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $a > 0; b > 0; c > 0; d < 0$. B $a < 0; b > 0; c > 0; d < 0$.

C $a < 0; b < 0; c > 0; d < 0$. D $a < 0; b < 0; c < 0; d < 0$.



Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$, từ đó suy ra $a < 0$.

Do đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ âm nên $d < 0$.

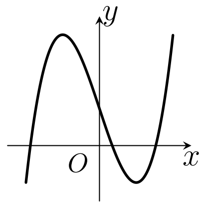
Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, từ đồ thị ta suy ra $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $0 < x_1 < x_2$.

Theo định lý Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{3a} \end{cases}$

Do đó $\begin{cases} -\dfrac{2b}{3a} < 0 \\ \dfrac{c}{3a} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c > 0 \end{cases}$

Chọn đáp án B □

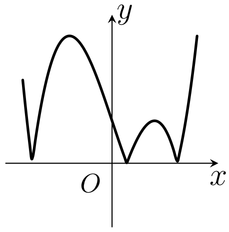
Câu 50.



Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A 5. **B** 3. **C** 2. **D** 4.

Lời giải.



Hàm số $y = |f(x)|$ có đồ thị như hình vẽ, từ đó suy ra hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. C	3. B	4. B	5. A	6. B	7. B	8. C	9. A	10. B
11. D	12. A	13. D	14. A	15. B	16. A	17. C	18. B	19. D	20. D
21. D	22. C	23. D	24. C	25. B	26. B	27. A	28. A	29. A	30. D
31. A	32. C	33. A	34. B	35. D	36. C	37. C	38. A	39. D	40. A
41. B	42. A	43. D	44. C	45. C	46. A	47. D	48. D	49. B	50. A

167 ĐỀ THI THỬ LẦN 2 LỚP 12, 2017 - 2018 TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN, HÀ NỘI

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Có 10 thẻ được đánh số $1, 2, \ldots, 10$. Bốc ngẫu nhiên 2 thẻ. Tính xác suất để tích 2 số ghi trên 2 thẻ bốc được là một số chẵn.

A $\frac{7}{9}$. **B** $\frac{5}{18}$. **C** $\frac{2}{9}$. **D** $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử. Ta có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^2 = 45$. Gọi A là biến cố "Tích 2 số ghi trên 2 thẻ bốc được là một số chẵn". Khi đó $\overline{A}$ là biến cố "Tích 2 số ghi trên 2 thẻ bốc được là một số lẻ". Để tích hai số là số lẻ thì hai số ghi trên các thẻ bốc được phải là số lẻ. Suy ra $n(\overline{A}) = \mathrm{C}_5^2 = 10$. Vậy $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = 1 - \frac{10}{45} = \frac{7}{9}$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho $\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^5 + x^3} = a\ln 5 + b\ln 2 + c$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a + 2b + 4c$ bằng

A 0. **B** -1. **C** $-\frac{5}{8}$. **D** 1.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^5 + x^3} = \int\limits_1^2 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4(x^2+1)} = I$. Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = t - 1$, $x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t$. Với $x = 1 \Rightarrow t = 2$; $x = 2 \Rightarrow t = 5$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int\limits_2^5 \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2 t} = \frac{1}{2}\int\limits_2^5 \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2} - \frac{1}{2}\int\limits_2^5 \frac{\mathrm{d}t}{t-1} + \frac{1}{2}\int\limits_2^5 \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &= -\frac{1}{2(t-1)}\Big|_2^5 - \frac{1}{2}\ln|t-1|\Big|_2^5 + \frac{1}{2}\ln|t|\Big|_2^5 = \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Suy ra $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$, $c = \frac{3}{8} \Rightarrow a + 2b + 4c = -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - (m+1)2^x + m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A $m > 1$. **B** $m > 0$. **C** $\begin{cases} m > 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$. **D** $0 < m < 1$.

Lời giải.

Ta có

$$4^x - (m+1)2^x + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2^x = m. \end{array}\right.$$

Phương trình có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $2^x = m$ có một nghiệm khác $0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 1. \end{cases}$

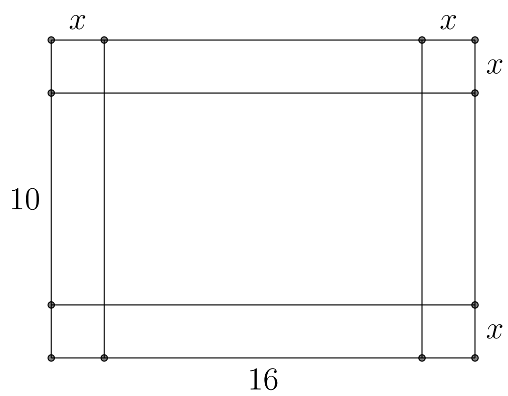
Chọn đáp án C ☐

Câu 4. Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước 10 cm × 16 cm. Người ta cắt bỏ 4 góc của tấm tôn 4 miếng hình vuông bằng nhau rồi gò lại thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Để thể tích của hình hộp đó lớn nhất thì độ dài cạnh hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng

A 2 m. **B** 4 m. **C** 5 m. **D** 3 m.

Lời giải.

Giả sử độ dài cạnh hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng x $(0 < 2x < 10 \Leftrightarrow 0 < x < 5)$. Khi đó hình hộp chữ nhật có chiều cao bằng x, chiều rộng bằng $10 - 2x$ và chiều dài bằng $16 - 2x$. Suy ra hình hộp chữ nhật có thể tích $V = x(10-2x)(16-2x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$.



Xét hàm $f(x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$ trên $(0;5)$. Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$,

$f'(x) = 12x^2 - 104x + 160 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{20}{3}. \end{array}\right.$ Bảng biến thiên hàm số $f(x)$ trên $(0;5)$:

x	0		2		5
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $(0;5)$ tại $x = 2$ hay hình hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất khi độ dài cạnh hình vuông của miếng tôn bị cắt bỏ bằng 2 m.

Chọn đáp án A ☐

Câu 5. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = 2$, $u_4 = 4$. Giá trị của u_{10} bằng

A 32. **B** $32\sqrt{2}$. **C** $16\sqrt{2}$. **D** 10.

Lời giải.

Gọi q là công bội của cấp số nhân. Ta có $\begin{cases} u_2 = 2 \\ u_4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = 2 \\ u_1 q^3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{q^3}{q} = 2 \Leftrightarrow q^2 = 2$. Suy ra $u_{10} = u_1 q^9 = u_2 q^8 = u_2 (q^2)^4 = 2 \cdot 2^4 = 32$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 6. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y-2z+3=0$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$. Côsin của góc tạo bởi đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) là

Ⓐ $\dfrac{4}{9}$. **B** $\dfrac{\sqrt{65}}{9}$. Ⓒ $\dfrac{5}{9}$. Ⓓ $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}_\Delta=(2;-2;1)$, $\vec{n}_{(P)}=(1;2;-2)$. Khi đó $\sin\widehat{(\Delta,(P))}=\dfrac{|\vec{u}_\Delta\cdot\vec{n}_{(P)}|}{|\vec{u}_\Delta|\cdot|\vec{n}_{(P)}|}=\dfrac{4}{9}$.

Vì $\cos\widehat{(\Delta,(P))}>0$ nên $\cos\widehat{(\Delta,(P))}=\sqrt{1-\sin^2\widehat{(\Delta,(P))}}=\dfrac{\sqrt{65}}{9}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 7. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;-2)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $OABC$ là

Ⓐ $\dfrac{7}{2}$. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. **C** $\dfrac{3}{2}$. Ⓓ $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Gọi $I(x;y;z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $OABC$. Khi đó

$$\begin{cases}OI^2=AI^2\\OI^2=BI^2\\OI^2=CI^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2=(x-1)^2+y^2+z^2\\x^2+y^2+z^2=x^2+(y-2)^2+z^2\\x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+(z+2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\y=1\\z=-1.\end{cases}$$

Suy ra bán kính $R=OI=\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 8. Tìm phần ảo của số phức $z=\dfrac{1+2i}{3-4i}$.

Ⓐ $\dfrac{2}{5}i$. Ⓑ $-\dfrac{10}{7}$. Ⓒ $-\dfrac{10}{7}i$. **D** $\dfrac{2}{5}$.

Lời giải.

Ta có $z=\dfrac{1+2i}{3-4i}=\dfrac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\dfrac{-5+10i}{25}=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i$. Suy ra phần ảo của số phức z là $\dfrac{2}{5}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 9. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y=x^2$ và $y=|x-2|$ bằng

Ⓐ $\dfrac{13}{2}$. Ⓑ $\dfrac{21}{2}$. **C** $\dfrac{9}{2}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2=|x-2|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=x-2\\x^2=-x+2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2.\end{array}\right.$ Suy ra diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$ và $|x-2|$ là

$$S=\int_{-2}^{1}\left|x^2-|x-2|\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{-2}^{1}\left(x^2-|x-2|\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{-2}^{1}\left[x^2-(-x+2)\right]\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_{-2}^{1}\right|=\frac{9}{2}.$$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 10. Cho m là một số thực. Số nghiệm của phương trình $2^{x^2} = m^2 - m + 2$ là

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) Không xác định.

Lời giải.

Ta có $m^2 - m + 2 = \left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4} \geq \dfrac{7}{4} > 1$, $\forall m \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$2^{x^2} = m^2-m+2 \Leftrightarrow x^2 = \log_2(m^2-m+2) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\log_2(m^2-m+2)} \quad (\text{vì } \log_2(m^2-m+2) > 0).$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$ và $C(0;0;-3)$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Tính độ dài đoạn OH.

(A) $\dfrac{2}{5}$. (B) $\dfrac{6}{7}$. (C) $\dfrac{3}{4}$. (D) $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Phương trình $(ABC): \dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{-3} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y - 2z - 6 = 0$; $H(x;y;z)$ là trực tâm tam giác ABC khi và chỉ khi

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \\ H \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ H \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y - 3z = 0 \\ -x - 3z = 0 \\ 6x + 3y - 2z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{36}{49} \\ y = -\dfrac{18}{49} \\ z = -\dfrac{12}{49}. \end{cases}$$

Suy ra $OH = \dfrac{6}{7}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3x + 3 = 5^m$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

(A) $m > 1$. (B) $m < 0$. (C) $0 < m < 1$. (D) $m > 5$.

Lời giải.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 3$ và đường thẳng $y = 5^m$. Xét $f(x) = x^3 - 3x + 3$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Bảng biến thiên hàm số $f(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình có ba nghiệm thực $\Leftrightarrow 1 < 5^m < 5 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho n là số nguyên dương sao cho tổng các hệ số trong khai triển của $(x+1)^n$ bằng 1024. Hệ số của x^8 trong khai triển đó bằng

(A) 90. **(B) 45.** (C) 2^8. (D) 80.

Lời giải.

Ta có $(x+1)^n = \mathrm{C}_n^0 x^n + \mathrm{C}_n^1 x^{n-1} + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} x^1 + \mathrm{C}_n^n$. Tổng các hệ số trong khai triển bằng $S = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \cdots + \mathrm{C}_n^n = (1+1)^n = 2^n$. Suy ra $2^n = 1024 \Leftrightarrow n = 10$. Số hạng tổng quát của khai triển có dạng $\mathrm{C}_{10}^k x^{10-k}$ $(0 \le k \le n, k \in \mathbb{Z})$. Ta có $10 - k = 8 \Leftrightarrow k = 2$. Suy ra hệ số của x^8 bằng $\mathrm{C}_{10}^2 = 45$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Mô-đun của số phức $z = \left(\cos\dfrac{11\pi}{24} + \cos\dfrac{5\pi}{24}\right) - \left(\sin\dfrac{11\pi}{24} - \sin\dfrac{5\pi}{24}\right) i$ bằng

(A) $\cos\dfrac{\pi}{8} + \sin\dfrac{\pi}{8}$. (B) 2. (C) $2\cos\dfrac{\pi}{8}$. **(D) 1.**

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
|z|^2 &= \left(\cos\frac{11\pi}{24} + \cos\frac{5\pi}{24}\right)^2 + \left(\sin\frac{11\pi}{24} - \sin\frac{5\pi}{24}\right)^2 \\
&= \cos^2\frac{11\pi}{24} + \cos^2\frac{5\pi}{24} + 2\cos\frac{11\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24} + \sin^2\frac{11\pi}{24} + \sin^2\frac{5\pi}{24} - 2\sin\frac{11\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24} \\
&= 2 + 2\left(\cos\frac{11\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24} - \sin\frac{11\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\right) = 2 + 2\cos\frac{16\pi}{24} = 1.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) > -1$ là

(A) $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$. (B) $\left(0; \dfrac{3}{2}\right)$. (C) $\left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$. (D) $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{4}\right)$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) > -1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ 2x - 1 < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ x < \dfrac{3}{2}. \end{cases}$ Suy ra bất phương trình có tập nghiệm là $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Tìm số cạnh ít nhất của hình đa diện có 5 mặt.

(A) 9. (B) 6. (C) 7. **(D) 8.**

Lời giải.

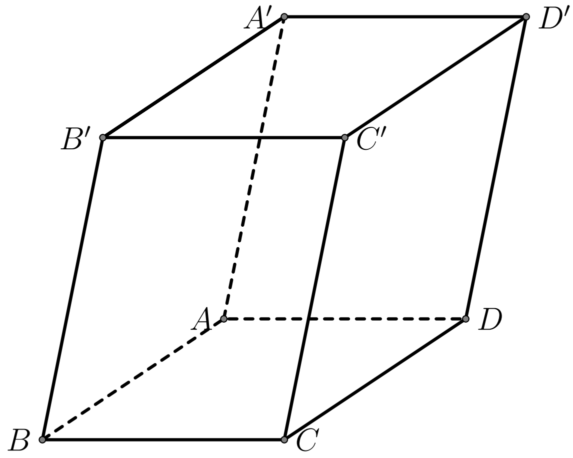
Gọi số cạnh của hình đa diện là c. Mỗi mặt có ít nhất 3 cạnh, mỗi cạnh là cạnh chung của đúng 2 mặt nên $c = \dfrac{5 \cdot 3}{2}$, c là số nguyên dương nên $c = 8$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tọa độ các điểm $A(1; 2; -1)$, $C(3; -4; 1)$, $B'(2; -1; 3)$, $D'(0; 3; 5)$. Giả sử tọa độ điểm $A'(x, y, z)$ thì $x + y + z$ là

(A) 5. **(B) 7.** (C) -3. (D) 2.

Lời giải.



Theo quy tắc hình hộp ta có:

$\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{A'C}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(2-x)+(0-x)+(1-x)=3-x\\(-1-y)+(3-y)+(2-y)=-4-y\\(3-z)+(5-z)+(-1-z)=1-z\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=4\\z=3\end{cases}$. Suy ra $x+y+z=0+4+3=7$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 18. Tính $\lim\dfrac{8n-1}{\sqrt{4n^2+n+1}}$

A 2. **B** $+\infty$. **C** -1. **D** 4.

Lời giải.

Ta có $\lim\dfrac{8n-1}{\sqrt{4n^2+n+1}}=\lim\dfrac{n(8-\frac{1}{n})}{n\sqrt{4+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=\lim\dfrac{8-\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=4$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 19. Cho hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x-2}$. Tìm m để đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị tại 2 điểm phân biệt A,B sao cho tam giác OAB vuông tại O với O là gốc tọa độ.

A $\dfrac{3}{2}$. **B** $\dfrac{5}{2}$. **C** $-\dfrac{3}{2}$. **D** -2.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là

$$\frac{3x-1}{x-2}=x+m(x\neq 2)\Leftrightarrow x^2+(m-5)x+1-2m=0(x\neq 2).(*)$$

Điều kiện để đường thẳng cắt đường cong tại 2 điểm phân biệt là $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2. Điều này tương đương với

$$\begin{cases}\Delta>0\\x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-5)^2-4(1-2m)>0\\4+(m-5)\cdot 2+1-2m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2m+21>0\\-5\neq 0\end{cases}$$

đúng $\forall m\in\mathbb{R}$.

Khi đó tạo độ hai giao điểm là $A(x_A;x_A+m)$ và $B(x_B;x_B+m)$. Tam giac OAB vuông tại O nên $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow x_A\cdot x_B+(x_A+m)(x_B+m)=0$

$\Leftrightarrow 2x_A\cdot x_B+m(x_A+x_B)+m^2=0$

$\Leftrightarrow 2(1-2m)+m(5-m)+m^2=0$

$\Leftrightarrow m+2=0$

$\Leftrightarrow m=-2$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 20. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - 2\sqrt{x}$ trên đoạn $[0;9]$ lần lượt là m và M. Giá trị của tổng $m + M$ bằng

(A) 0. (B) 1. **(C) 2.** (D) 3.

Lời giải.

Ta có: $y' = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ta có: $y(0) = 0$, $y(1) = -1$, $y(9) = 3$. Vậy $M = 3, m = -1 \Rightarrow m + M = -1 + 3 = 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị là (C). Tổng các hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại các giao điểm của (C) với trục hoành bằng

(A) 0. **(B) 9.** (C) 11. (D) -15.

Lời giải.

Ta có $x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$. $y' = 3x^2 - 3$. Khi đó, $y'(1) + y'(-2) = 0 + 9 = 9$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z - 1| = |\overline{z} - i|$ là đường thẳng

(A) $x - y = 0$. (B) $x - y + 1 = 0$. (C) $x + y + 1 = 0$. **(D) $x + y = 0$.**

Lời giải.

Gọi $z = x + iy$. Khi đó

$$\begin{aligned}|z - 1| = |\overline{z} - i| &\Leftrightarrow |(x-1) + iy| = |x - (y+1)i| \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y+1)^2 \\ &\Leftrightarrow x + y = 0.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Cho a là số thực dương khác 1. Tính $\log_{a\sqrt{a}} a\sqrt[3]{a}$.

(A) $\dfrac{8}{9}$. (B) 2. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{9}{8}$.

Lời giải.

$\log_{a\sqrt{a}} a\sqrt[3]{a} = \log_{a^{\frac{3}{2}}} a^{\frac{4}{3}} = \dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{8}{9}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Cho hàm số $y = \dfrac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$. Đồ thị hàm số có mấy tiệm cận?

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{1; 2\}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to 2^-} y = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^3 + x - 2}{(x-1)(x-2)} = -\infty \Rightarrow$ Tiệm cận đứng $x = 2$.
- $\lim\limits_{x \to 1} y = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x^2 + x + 2)}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x + 2}{x - 2} = -4$.

Vậy đồ thị có 1 đường tiệm cận.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Tìm họ nguyên hàm $\int (2x-1)\ln x\,\mathrm{d}x$

A $F(x) = (x^2-x)\ln x - \dfrac{x^2}{2} + x + C$.

B $F(x) = (x^2-x)\ln x + \dfrac{x^2}{2} - x + C$.

C $F(x) = (x^2+x)\ln x - \dfrac{x^2}{2} + x + C$.

D $F(x) = (x^2-x)\ln x - \dfrac{x^2}{2} - x + C$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = (2x-1)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = x^2 - x \end{cases}$

$F(x) = \int (2x-1)\ln x\,\mathrm{d}x = (x^2-x)\ln x - \int (x-1)\,\mathrm{d}x = (x^2-x)\ln x - \dfrac{x^2}{2} + x + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Cho hàm số $y = \dfrac{1+x}{2-x}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

B Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

C Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

D Hàm số đồng biến trên khoảng $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

Lời giải.

Ta có: $y' = \dfrac{3}{(2-x)^2} > 0,\ \forall x \neq 2$.

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Cho tứ diện đều $ABCD$. Khi tăng độ dài cạnh tứ diện đều lên 2 lần, khi đó thể tích của khối tứ diện đều tăng lên bao nhiêu lần?

A 6. B 8. C 4. D 2.

Lời giải.

Tứ diện đều cạnh a có thể tích bằng $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ khi tăng độ dài cạnh lên 2 lần thì thể tích là $V_1 = \dfrac{(2a)^3\sqrt{2}}{12} = 8V$.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{2x}$.

A $y' = 2^{2x}\cdot\ln 2$. B $y' = x\cdot 4^{x-1}$. C $y' = 2^{2x}\cdot\ln 4$. D $y' = x\cdot 2^{2x}$.

Lời giải.

$y' = 2\cdot 2^{2x}\cdot\ln 2 = 2^{2x}\cdot\ln 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - 2y + z - 14 = 0$. Gọi $H(x;y;z)$ là hình chiếu của O trên mặt phẳng (P) thì $x+y+z$ là

A 0. B 1. C 2. D 3.

Lời giải.

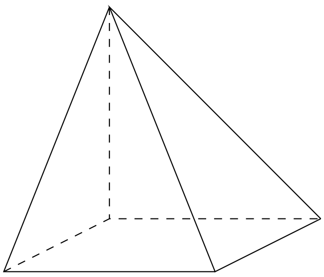
Gọi d là đường thẳng qua O và vuông góc với (P) thì $d : \begin{cases} x = 3t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

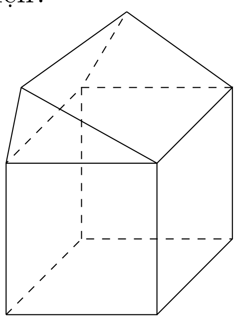
Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (P) thì $H = d \cap (P)$ nên tọa độ H thỏa $\begin{cases} x = 3t \\ y = -2t \\ z = t \\ 3x - 2y + z - 14 = 0 \end{cases}$

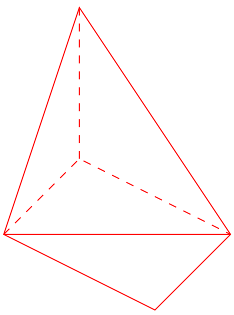
$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 1 \end{cases}$. Vậy $x + y + z = 2$.

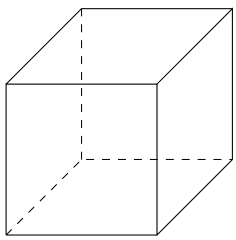
Chọn đáp án C □

Câu 30. Hình nào dưới đây không phải là hình đa diện?

A  .

B  .

C  .

D  .

Lời giải.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Hàm số $y = -x^4 + 3x^2 - 1$ có mấy cực đại?

A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Lời giải.

Ta có hệ số a và b trái dấu, $a < 0$ nên hàm số có 2 cực đại.

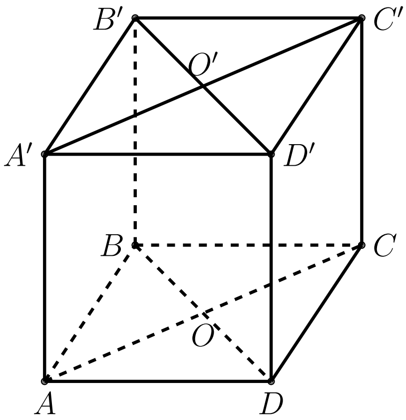
Chọn đáp án A □

Câu 32. Bán kính hình cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của một hình lập phương cạnh a là

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\dfrac{\sqrt{2a}}{2}$. C. $\dfrac{a}{2}$. D. $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Hình cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của hình lập phương cạnh bằng a nên bán kính bằng một nửa đồ dài đường chéo của hình vuông nên $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Tìm họ nguyên hàm $\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x$

(A) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4} + C$. (B) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{2} + C$. (C) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{4} + C$. **D** $\dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{2} + C$.

Lời giải.

$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1 - 2\cos 2x}{2} \,\mathrm{d}x = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{2} + C$.

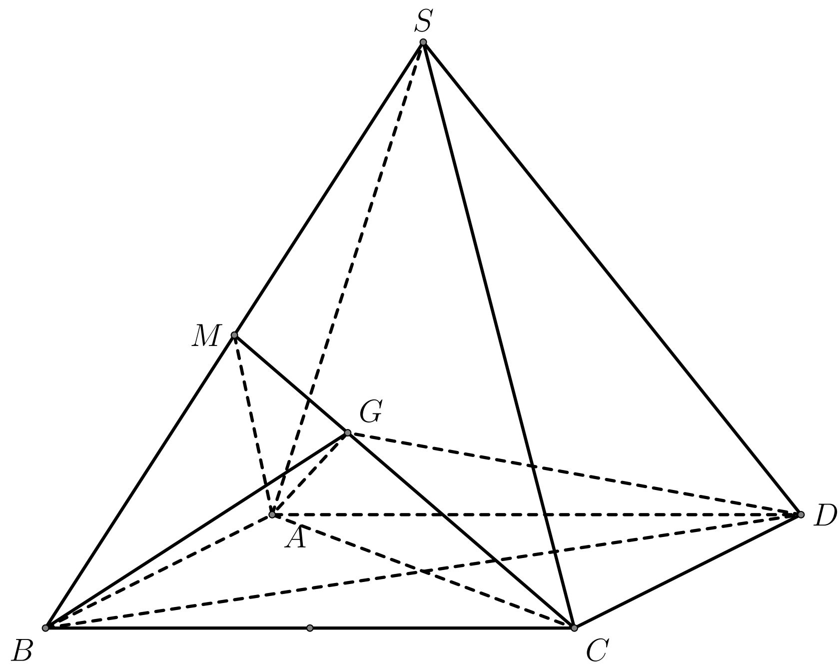
Chọn đáp án (D) □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M là trung điểm SB và G là trọng tâm của tam giác SBC. Gọi V, V' lần lượt là thể tích của các khối $M.ABC$ và $G.ABD$, tính tỉ số $\dfrac{V}{V'}$.

A $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{3}{2}$. (B) $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{4}{3}$. (C) $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{5}{3}$. (D) $\dfrac{V}{V'} = 2$.

Lời giải.

Ta có $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD}$ và $\dfrac{d(M;(ABCD))}{d(G;(ABCD))} = \dfrac{CM}{CG} = \dfrac{3}{2}$ nên $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{3}{2}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Với cách đổi biến $u = \sqrt{4x+5}$ thì tích phân $\int\limits_{-1}^{1} x\sqrt{4x+5}\,\mathrm{d}x$ trở thành

A $\displaystyle\int_1^3 \frac{u^2(u^2-5)}{8}\,du$. **B** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{u^2(u^2-5)}{8}\,du$. **C** $\displaystyle\int_1^3 \frac{u^2(u^2-5)}{4}\,du$. **D** $\displaystyle\int_1^3 \frac{u(u^2-5)}{8}\,du$.

Lời giải.

Đặt $u=\sqrt{4x+5} \Rightarrow x=\dfrac{u^2-5}{4}$ và $dx=\dfrac{u}{2}du$.

Đổi cận:

x	-1	1
u	1	3

Suy ra, $\displaystyle\int_{-1}^1 x\sqrt{4x+5}\,dx=\int_1^3 \frac{u^2(u^2-5)}{8}\,du$

Chọn đáp án A □

Câu 36. Tìm họ nguyên hàm $\displaystyle\int \frac{1}{2x-1}\,dx$

A $I=\dfrac{\ln|2x-1|}{2}+C$.

B $I=\ln(2x-1)+C$.

C $I=\ln|2x-1|+C$.

D $I=\dfrac{\ln(2x-1)}{2}+C$.

Lời giải.

$\displaystyle\int \frac{1}{2x-1}\,dx=\frac{\ln|2x-1|}{2}+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1;2;1)$, $B(0;0;-2)$, $C(1;0;1)$, $D(2;1;-1)$. Tính thể tích tứ diện $ABCD$.

A $\dfrac{1}{3}$. **B** $\dfrac{5}{3}$. **C** $\dfrac{4}{3}$. **D** $\dfrac{8}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;-2;-3)$, $\overrightarrow{AC}=(0;-2;0)$, $\overrightarrow{AD}=(1;-1;-2)$.

$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(-6;0,2)$ và $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\cdot\overrightarrow{AD}=-10 \Rightarrow V=\dfrac{1}{6}|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\cdot\overrightarrow{AD}|=\dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-(m-1)x^2+x+m$. Tìm m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A $0<m<2$.

B $m>2$ hoặc $m<0$.

C $m\geq 2$ hoặc $m\leq 0$.

D $0\leq m\leq 2$.

Lời giải.

Ta có: $y'=x^2-2(m-1)x+1$.

YCBT$\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow (m-1)^2-1>0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow m>0$ hoặc $m<0$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Cho hàm số $f(x)=\sin 2x$. Tính $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

A $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B** $\sqrt{3}$. **C** $\dfrac{1}{2}$. **D** 1.

Lời giải.

Ta có: $f'(x)=2\cos 2x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{6})=2\cos\dfrac{\pi}{3}=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho A, B là hai biến cố độc lập với nhau thỏa mãn $P(A) = 0,5$ và $P(B) = 0,6$. Khi đó $P(A\overline{B})$ bằng

A $0,2$. **B** $0,1$. **C** $0,3$. **D** $0,9$.

Lời giải.

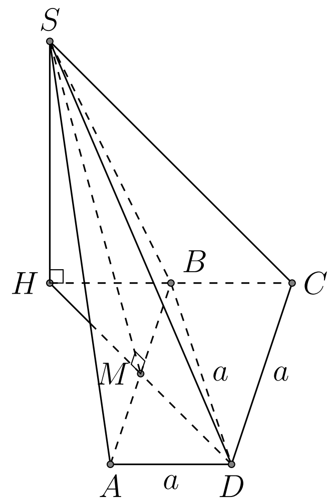
Ta có: $P(B) = 0,6 \Rightarrow P(\overline{B}) = 0,4$. Do đó, $P(A\overline{B}) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60°$ và các mặt bên (SAB), (SAD), (SBD) tạo với đáy một góc bằng $45°$. Thể tích của khối chóp có giá trị lớn nhất là

A $\dfrac{a^3}{4}$. **B** $\dfrac{a^3}{3}$. **C** $\dfrac{a^3}{6}$. **D** $\dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải.



Ta có $V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABD}$ và ABD là tam giác đều. Gọi H là hình chiếu của S trên (ABD). Kẻ $HM \perp AB = M$. Khi đó $((SAB), (ABD)) = \widehat{SMH} = 45°$. Vì các mặt (SAB), (SAD), (SBD) tạo với đáy một góc $45°$ nên H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABD$ hoặc tâm đường tròn bàng tiếp $\triangle ABD$ và bán kính các đường tròn này bằng $HM = SH$. Ta có $V_{S.ABCD}$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow SH$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow HM$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow HM$ là bán kính đường tròn bàng tiếp tam giác ABD (vì $\triangle ABD$ đều nên bán kính đường tròn bàng tiếp các góc của tam giác này bằng nhau) $\Rightarrow H$ là tâm đường tròn bàng tiếp góc D của $\triangle ABD$. Ta có M là trung điểm của AB, $H = BC \cap DM$. Suy ra $HM = MD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = SH$. Khi đó $V_{S.ABCD} = 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABD} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho hàm số $y = x^4 + 2m(m+2)x^2 + m + 2$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích lớn nhất.

A $m = \dfrac{-1}{2}$. **B** $m = \dfrac{-3}{2}$. **C** $m = -1$. **D** $m = \dfrac{-1}{\sqrt[3]{3}}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 4x^3 + 4m(m+2)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -m^2 - 2m. \end{array}\right.$ Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -m^2 - 2m > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 0$. Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị

$$A(0; m+2), B\left(-\sqrt{-m^2-2m}; -m^2(m+2)^2 + m + 2\right), C\left(\sqrt{-m^2-2m}; -m^2(m+2)^2 + m + 2\right).$$

Ta có phương trình $BC: y = -m^2(m+2)^2 + m + 2 \Rightarrow d(A, BC) = m^2(m+2)^2$, $BC = 2\sqrt{-m^2-2m}$. Khi đó

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot d(A, BC) \cdot BC = \left(\sqrt{-m(m+2)}\right)^5.$$

Ta có $0 < -m(m+2) \leq \frac{1}{4}(-m+m+2)^2 = 1 \Rightarrow S_{ABC} \leq 1$. Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} -2 < m < 0 \\ -m = m+2 \end{cases} \Leftrightarrow$ $m = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho hàm số $y = \dfrac{-x}{2x+1}$ có đồ thị là (C). Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đường thẳng $y = x + m$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B và tổng các hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A, B là lớn nhất.

A $m = \dfrac{-1}{2}$. **B** $m = 0$. **C** $m = 1$. **D** $m = -1$.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = \dfrac{-x}{2x+1}$ có đạo hàm là $f'(x) = \dfrac{-1}{(2x+1)^2}$, $\forall x \neq -\dfrac{1}{2}$. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $(d): y = x + m$ là

$$\frac{-x}{2x+1} = x + m \Leftrightarrow 2x^2 + 2(m+1)x + m = 0, \quad x \neq -\frac{1}{2} \quad (*).$$

(C) cắt (d) tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2(m+1)\left(-\frac{1}{2}\right) + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 1 > 0 \\ -\frac{1}{2} \neq 0 \end{cases} \text{ luôn đúng } \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Ta có $x_A + x_B = -m - 1; x_A x_B = \dfrac{m}{2}$. Khi đó tổng các hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A, B là

$$\begin{aligned} f'(x_A) + f'(x_B) &= \frac{-1}{(2x_A+1)^2} + \frac{-1}{(2x_B+1)^2} = \frac{-4x_B^2 - 4x_B - 1 - 4x_A^2 - 4x_A - 1}{[4x_A x_B + 2(x_A + x_B) + 1]^2} \\ &= \frac{-4(x_A+x_B)^2 + 8x_A x_B - 4(x_A + x_B) - 2}{[4x_A x_B + 2(x_A + x_B) + 1]^2} \\ &= \frac{-4(m+1)^2 + 4m + 4(m+1) - 2}{[2m - 2(m+1) + 1]^2} = -4m^2 - 2 \leq -2. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $m = 0$.

Chọn đáp án B □

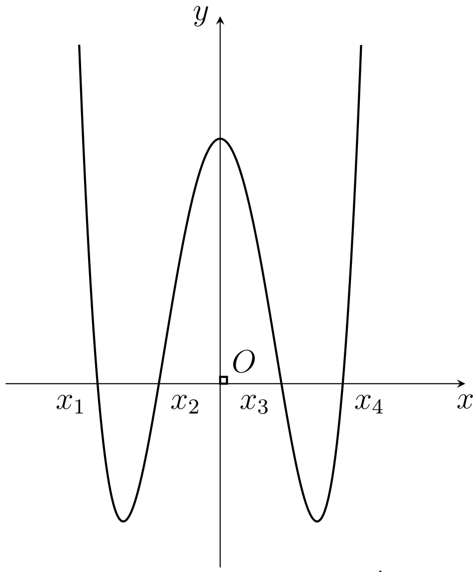
Câu 44. Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị là (C) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và phần đồ thị (C) nằm phía dưới trục hoành. Biết rằng $S_1 = S_2$. Giá trị của m bằng

A 1. **B** 2. **C** $\dfrac{3}{2}$. **D** $\dfrac{5}{4}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành: $x^4 - 3x^2 + m = 0$ (1). Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$, ta được phương trình $t^2 - 3t + m = 0$ (2). Ta có (C) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm cùng dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 4m > 0 \\ 3 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{9}{4}.$$



Gọi các nghiệm của phương trình (1) là $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, $x_1, x_2, x_3, x_4 \neq 0$. Do đồ thị (C) nhận trục tung là trục đối xứng nên ta có

$$S_1 = 2\int_{x_2}^{0} (x^4 - 3x^2 + m)\,\mathrm{d}x \quad \text{và} \quad S_2 = 2\int_{x_1}^{x_2} (-x^4 + 3x^2 - m)\,\mathrm{d}x.$$

Vì $S_1 = S_2$ nên

$$\int_{x_1}^{x_2} (-x^4 + 3x^2 - m)\,\mathrm{d}x = \int_{x_2}^{0} (x^4 - 3x^2 + m)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \left(-\frac{x_2^5}{5} + x_2^3 - mx_2\right) - \left(-\frac{x_1^5}{5} + x_1^3 - mx_1\right)$$
$$= -\left(\frac{x_2^5}{5} - x_2^3 + mx_2\right) \Leftrightarrow \frac{x_1^5}{5} - x_1^3 + mx_1 = 0.$$

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{x_1^5}{5} - x_1^3 + mx_1 = 0 \\ x_1^4 - 3x_1^2 + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1^5}{5} - x_1^3 + (3x_1^2 - x_1^4)x_1 = 0 \\ m = 3x_1^2 - x_1^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 = \dfrac{5}{2} \\ m = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 45. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{2}\log_2 a = \log_2 \frac{2}{b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4a^3 + b^3 - 4\log_2(4a^3 + b^3)$ là

A $4\log_2 6$.

B $\dfrac{4}{\ln 2} - 4\log_2\left(\dfrac{4}{\ln 2}\right)$.

C $4(1 - \log_2 3)$.

D -4.

Lời giải.

Ta có $\frac{1}{2}\log_2 a = \log_2 \frac{2}{b} \Leftrightarrow ab^2 = 4$. Đặt $t = 4a^3 + b^3$, áp dụng BĐT Côsi ta có

$$t = 4a^3 + b^3 = 4a^3 + \frac{1}{2}b^3 + \frac{1}{2}b^3 \geq 3\sqrt[3]{4a^3 \cdot \frac{1}{2}b^3 \cdot \frac{1}{2}b^3} = 12.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a, b > 0 \\ ab^2 = 4 \\ 4a^3 = \dfrac{1}{2}b^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2. \end{cases}$

Xét $g(t) = t - 4\log_2 t$, $\quad t \geq 12$. Khi đó $\min P = \min\limits_{t\geq 12} g(t)$. Ta có $g'(t) = 1 - 4\dfrac{1}{t\ln 2}$, $g'(t) > 0 \Leftrightarrow t > \dfrac{4}{\ln 2} \Rightarrow g'(t) > 0$, $\forall t \geq 12$. Khi đó $\min\limits_{t\geq 12} g(t) = g(12) = 12 - 4\log_2 12 = 4(1 - \log_2 3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 1$, $\displaystyle\int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{15}$, $\displaystyle\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{49}{45}$. Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\dfrac{2}{9}$. **B** $\dfrac{1}{6}$. **C** $\dfrac{4}{63}$. **D** 1.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = xf(x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = [f(x) + xf'(x)]\,\mathrm{d}x \\ v = x \end{cases}$. Khi đó

$$\int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = x^2f(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 x[f(x) + xf'(x)]\,\mathrm{d}x$$
$$= f(1) - \int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\displaystyle\int\limits_0^1 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x = 1 - 2\cdot\frac{4}{15} = \frac{7}{15}$. Khi đó dự đoán dạng $f'(x) = mx^2$, với $m \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\int\limits_0^1 [mx^2 - f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 m^2x^4\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 2mx^2f'(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{m^2}{5} - \frac{14m}{15} + \frac{49}{45} = \frac{(3m-7)^2}{45}.$$

Ta cần $\displaystyle\int\limits_0^1 [mx^2 - f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \frac{(3m-7)^2}{45} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7}{3}$. Như vậy ta có

$$\int\limits_0^1 \left[\frac{7}{3}x^2 - f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

Suy ra $f'(x) = \dfrac{7}{3}x^2 \Rightarrow f(x) = \dfrac{7x^3}{9} + C$. Từ $f(1) = 1 \Rightarrow C = \dfrac{2}{9}$. Khi đó $f(x) = \dfrac{7x^3}{9} + \dfrac{2}{9}$ thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{15}$. Vậy

$$\int\limits_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\frac{7x^3}{9} + \frac{2}{9}\right)^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}.$$

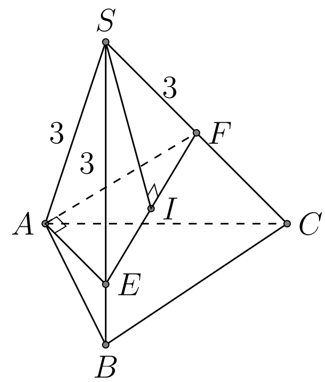
Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABC$, trong đó $SA = 3$, $SB = 4$, $SC = 5$, $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 120^\circ$ và $\widehat{CSA} = 90^\circ$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC là

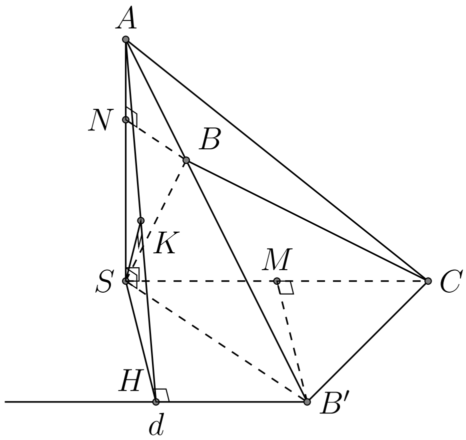
(A) 2. (B) $2\sqrt{2}$. (C) $4\sqrt{2}$. (D) $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Lấy E, F lần lượt thuộc cạnh SB, SC sao cho $SE = SF = 3 = SA$. Ta có $AE^2 = SA^2 + SE^2 - 2SA \cdot SE \cdot \cos 60^\circ = 9$, $AF^2 = SA^2 + SF^2 = 18$, $EF^2 = SE^2 + SF^2 - 2SE \cdot SF \cdot \cos 120^\circ = 27$. Khi đó $AE^2 + AF^2 = EF^2$. Suy ra $\triangle AEF$ vuông tại A. Vậy hình chiếu của S trên (AEF) là trung điểm I của EF. Suy ra $V_{S.AEF} = \dfrac{1}{3} SI \cdot S_{AEF} = \dfrac{9\sqrt{2}}{4}$. Mà $\dfrac{V_{S.AEF}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{9}{20}$. Suy ra $V_{S.ABC} = 5\sqrt{2}$.



Trên tia đối của tia BA, lấy điểm B' sao cho $\widehat{ASB'} = 90^\circ$. Kẻ $BN \perp AS = N \Rightarrow BN \parallel SB'$. Ta có $\cos \widehat{NSB} = \dfrac{SN}{SB} \Rightarrow SN = 2 \Rightarrow \dfrac{SB}{SB'} = \dfrac{AN}{AS} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{V_{A.SBC}}{V_{A.SB'C}} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{A.SB'C} = 15\sqrt{2}$. Gọi M là hình chiếu của B' trên SC, ta có $B'M \perp (ASC)$. Suy ra $V_{A.SB'C} = \dfrac{1}{3} B'M \cdot S_{ASC} \Rightarrow B'M = 6\sqrt{2}$. Kẻ đường thẳng d qua B' và song song với SC. Ta có $d(SC, AB) = d(SC, (d, AB')) = d(S, (d, AB'))$. Kẻ $SH \perp d = H$, $SK \perp AH = K \Rightarrow d(SC, AB) = SK$. Ta có $\dfrac{1}{SK^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{B'M^2} = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{72} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow SK = 2\sqrt{2} = d(SC, AB)$.



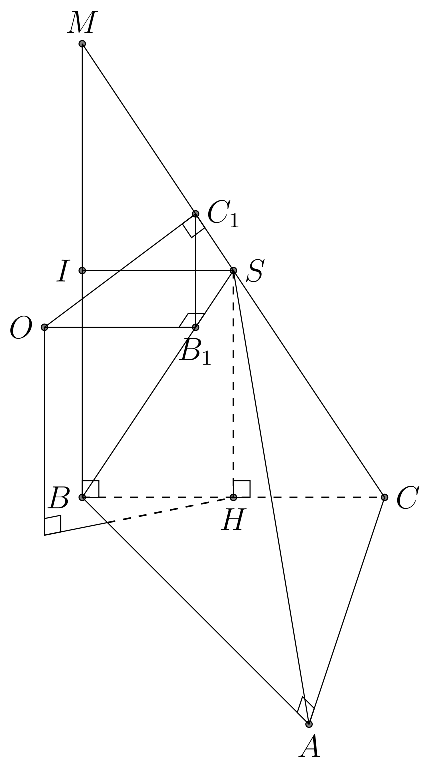
Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Cho khối chóp $S.ABC$ có $\widehat{BAC} = 90^\circ$, $BC = 2\sqrt{2}$ và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của BC. Giả sử có mặt cầu tâm O, bán kính bằng 1 tiếp xúc với SA, SB, SC lần lượt tại các điểm A_1, B_1, C_1, trong đó A_1, B_1 thuộc các cạnh tương ứng SA, SB, còn C_1 thuộc tia đối của tia SC, đồng thời mặt cầu tâm O đó cũng tiếp xúc với mặt phẳng (ABC). Thể tích của hình chóp $S.ABC$ là

(A) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có C_1, B_1 lần lượt là tiếp điểm của mặt cầu đã cho với tia đối của tia SC và cạnh SB. Khi đó $OC_1 = OB_1$ và $SC_1 = SB_1$. Suy ra O, S thuộc mặt phẳng trung trực (P) của đoạn C_1B_1. Lấy M sao cho S là trung điểm của MC. Suy ra $SB = SM$, $MB \perp BC \Rightarrow (P)$ là mặt phẳng trung trực của MB và $MB \perp (ABC)$. Suy ra (P) đi qua trung điểm I của MB và $(P) \mathbin{/\!/} (ABC)$. Khi đó ta có $1 = d(O,(ABC)) = d((P),(ABC)) = IB = SH$. Ta có $AB = BC \sin 30^\circ = \sqrt{2}$, $AC = BC \cos 60^\circ = \sqrt{6}$. Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án B □

Câu 49. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai đường thẳng

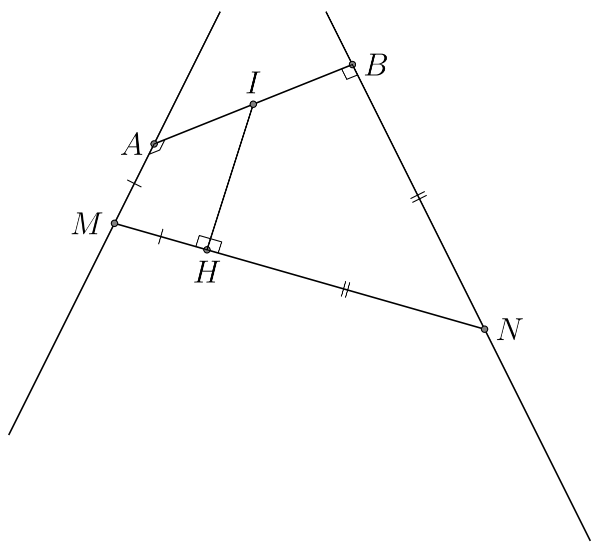
$$\Delta_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}, \Delta_2 : \frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-1}$$

và hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(2;0;-1)$. Trên Δ_1 lấy điểm M, trên Δ_2 lấy điểm N sao cho $AM + BN = MN$. Biết rằng MN luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định có bán kính R. Tìm R.

A. 3. B. $\dfrac{\sqrt{11}}{4}$. C. $\sqrt{11}$. D. $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $A \in \Delta_1; B \in \Delta_2$ và $AB \perp \Delta_1; AB \perp \Delta_2$. Trên MN ta lấy điểm H sao cho $MH = MA; NH = NB$. Gọi (P) là mặt phẳng qua H và vuông góc với MN. Đặt $I = AB \cap (P)$. Khi đó $\triangle IAM = \triangle IHM \Rightarrow AI = HI$ và $\triangle IBN = \triangle IHN \Rightarrow BI = IH = IA$. Do đó I là trung điểm của AB và $d(I, MN) = IH = \dfrac{1}{2} AB = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$. Suy ra MN luôn tiếp xúc với mặt cầu cố định tâm I và bán kính $R = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$.



Chọn đáp án D □

Câu 50. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, xét mặt cầu (S) đi qua hai điểm $A(1;6;2)$, $B(3;0;0)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(P): x - y + 2 = 0$. Bán kính của mặt cầu (S) có giá trị nhỏ nhất là

A $\dfrac{\sqrt{462}}{6}$. **B** $\dfrac{\sqrt{534}}{4}$. **C** $\dfrac{\sqrt{218}}{6}$. **D** $\dfrac{\sqrt{530}}{4}$.

Lời giải.

Giả sử mặt cầu (S) có tâm $I(x;y;z)$ và bán kính R. Ta có

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ I \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-6)^2+(z-2)^2 = (x-3)^2+y^2+z^2 \\ x-y+2=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-12y-4z+32=0 \\ x-y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2-2x \\ y = x+2. \end{cases}$$

Khi đó

$$R^2 = IB^2 = (x-3)^2+y^2+z^2 = (x-3)^2+(x+2)^2+(2-2x)^2 = 6x^2-10x+17 = 6\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{77}{6}.$$

Suy ra $R \geq \sqrt{\dfrac{77}{6}} = \dfrac{\sqrt{462}}{6}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = \dfrac{5}{6}$.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. B	3. C	4. A	5. A	6. B	7. C	8. D	9. C	10. B
11. B	12. C	13. B	14. D	15. A	16. D	17. B	18. D	19. D	20. C
21. B	22. D	23. A	24. A	25. A	26. C	27. B	28. C	29. C	30. C
31. A	32. D	33. D	34. A	35. A	36. A	37. B	38. B	39. D	40. A
41. A	42. C	43. B	44. D	45. C	46. A	47. B	48. B	49. D	50. A

168 ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA 2018 MÔN TOÁN TRƯỜNG THPT CHUYÊN THÁI BÌNH LẦN 1, THÁI BÌNH

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho số thực $a > 0$ và $a \neq 1$. Hãy rút gọn biểu thức $P = \dfrac{a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{5}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{7}{12}} - a^{\frac{19}{12}}\right)}$.

A. $P = 1 + a$. B. $P = 1$. C. $P = a$. D. $P = 1 - a$.

Câu 2. Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 2. B. 6. C. 8. D. 4.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx - \sin x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m > 1$. B. $m \leq -1$. C. $m \geq 1$. D. $m \geq -1$.

Câu 4. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ là:

A. -20. B. 7. C. -25. D. 3.

Câu 5.

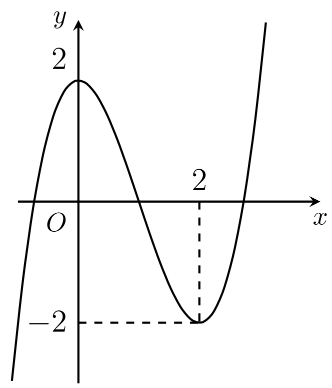
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -2.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

D. Hàm số có ba cực trị.



Câu 6. Hàm số $y = (4 - x^2)^2 + 1$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 1]$ là

A. 10. B. 12. C. 14. D. 17.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3x + 2m = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $m \in (-2; 2)$. B. $m \in (-1; 1)$.

C. $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. D. $m \in (-2; +\infty)$.

Câu 8. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Newton $\left(x - \dfrac{2}{x^2}\right)^{21}, (x \neq 0, n \in \mathbb{N}^*)$.

A. $2^7 C_{21}^7$. B. $2^8 C_{21}^8$. C. $-2^8 C_{21}^8$. D. $-2^7 C_{21}^7$.

Câu 9. Cho hàm số $y = (m+1)x^4 - (m-1)x^2 + 1$. Số các giá trị nguyên của m để hàm số có một điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu là

A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

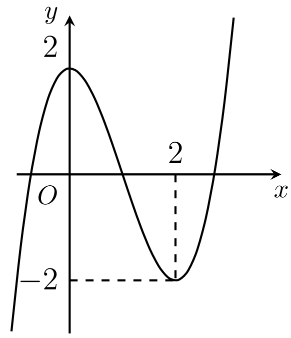
Câu 10. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ tại hai điểm phân biệt là:

A $\left(-\infty; 5-2\sqrt{6}\right) \cup \left(5+2\sqrt{6}; +\infty\right)$.
B $\left(-\infty; 5-2\sqrt{6}\right] \cup \left[5+2\sqrt{6}; +\infty\right)$.
C $\left(5-2\sqrt{3}; 5+2\sqrt{3}\right)$.
D $\left(-\infty; 5-2\sqrt{3}\right) \cup \left(5+2\sqrt{3}; +\infty\right)$.

Câu 11.

Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây. Hỏi phương trình $\left(x^3 - 3x^2 + 2\right)^3 - 3\left(x^3 - 3x^2 + 2\right)^2 + 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A 7. **B** 9. **C** 6. **D** 5.



Lời giải.

Đặt $t = x^3 - 3x^2 + 2$, phương trình đã cho trở thành

$$t^3 - 3t^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = t_1 = 1 - \sqrt{3} \\ t = t_2 = 1 + \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta có

Với $t = 1$: Phương trình $x^3 - 3x^2 + 2 = 1$ có 3 nghiệm phân biệt.

Với $t = t_1$: Phương trình $x^3 - 3x^2 + 2 = t_1$ có 3 nghiệm phân biệt.

Với $t = t_2$: Phương trình $x^3 - 3x^2 + 2 = t_2$ có 1 nghiệm phân biệt.

Các nghiệm trên không trùng nhau, vậy phương trình ban đầu có tất cả 7 nghiệm.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{m(x-1)^2+4}}$ có hai tiệm cận đứng:

A $m < 0$. **B** $m = 0$. **C** $\begin{cases} m < 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$. **D** $m < 1$.

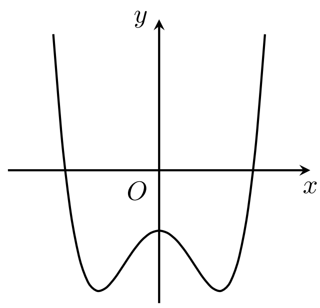
Câu 13. Đồ thị hàm số nào sau đây nằm phía dưới trục hoành?

A $y = x^4 + 5x^2 - 1$.
B $y = -x^3 - 7x^2 - x - 1$.
C $y = -x^4 + 2x^2 - 2$.
D $y = -x^4 - 4x^2 + 1$.

Câu 14.

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $a > 0, b < 0, c > 0$.
B $a > 0, b < 0, c < 0$.
C $a > 0, b > 0, c < 0$.
D $a < 0, b > 0, c < 0$.



Câu 15.

Hàm số nào trong bốn hàm số sau có bảng biến thiên như hình vẽ bên?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

(A) $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

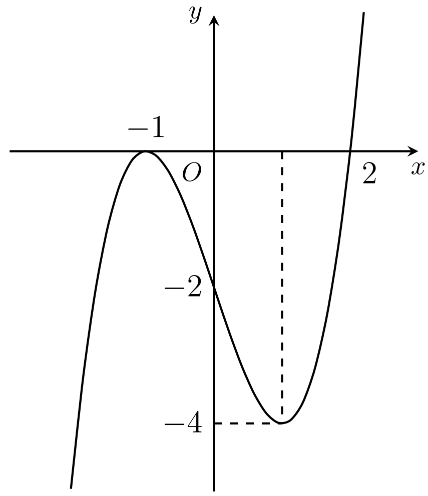
(B) $y = x^3 + 3x^2 - 1$.

(C) $y = x^3 - 3x + 2$.

(D) $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Câu 16.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, ($y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$). Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?



(A) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.

(B) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

(C) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 0)$.

(D) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$.

Lời giải.

Ta có : $g'(x) = f'\left(x^2 - 2\right).2x$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left(x^2-2\right) = 0 \\ 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2 = -1 \\ x^2 - 2 = 2 \\ x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Mặt khác: $f'\left(x^2 - 2\right) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 > 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > 2 \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x^2-2)$		$+$	0	$-$	0	$-$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Từ đó suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 0)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Cho các số thực dương a, b với $a \neq 1$ và $\log_a b > 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\left[\begin{array}{l} 0 < a, b < 1 \\ 0 < a < 1 < b \end{array}\right.$.
(B) $\left[\begin{array}{l} 0 < a, b < 1 \\ 1 < a, b \end{array}\right.$.
(C) $\left[\begin{array}{l} 0 < b < 1 < a \\ 1 < a, b \end{array}\right.$.
(D) $\left[\begin{array}{l} 0 < b, a < 1 \\ 0 < b < 1 < a \end{array}\right.$.

Câu 18. Tính tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2\left(\dfrac{2x^2+1}{2x}\right) + 2^{\left(x+\frac{1}{2x}\right)} = 5$.

(A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} \dfrac{2x^2+1}{2x} > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0$

Đặt $t = \dfrac{2x^2+1}{2x}$, $t > 0$

Ta có: $\log_2 t + 2^t = 5$ (*) Nhận xét: $t = 2$ là 1 nghiệm của phương trình (*).

Mà $f(t) = \log_2 t + 2^t$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$ (vì $f'(t) = \dfrac{1}{t \ln 2} + 2^t \ln 2 > 0 \forall t \in (0; +\infty)$).

Nên $t = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình (*).

Ta có: $t = 2 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2+1}{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$.

Vậy tích 2 nghiệm là $\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{5}}$ là:

A $(0; +\infty)$. B $[1; +\infty)$. C $(1; +\infty)$. D $\mathbb{R}$.

Câu 20. Tổng $T = \mathrm{C}_{2017}^1 + \mathrm{C}_{2017}^3 + \mathrm{C}_{2017}^5 + \ldots + \mathrm{C}_{2017}^{2017}$ bằng

A $2^{2017} - 1$. B 2^{2016}. C 2^{2017}. D $2^{2016} - 1$.

Câu 21. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$?

A $y = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$. B $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

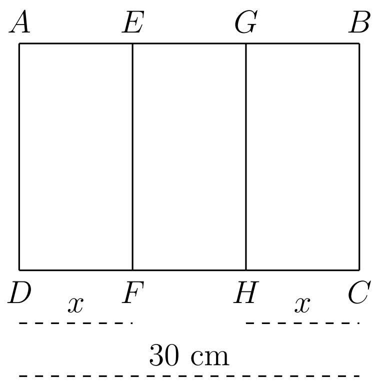
C $y = \log_{\frac{\pi}{4}}(2x^2+1)$. D $y = \left(\dfrac{2}{e}\right)^x$.

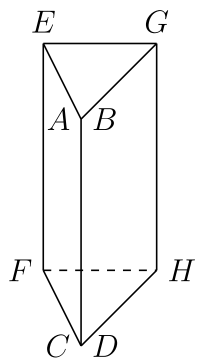
Câu 22. Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5$cm và khoảng cách giữa hai đáy $h = 7$cm. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục 3cm. Diện tích của thiết diện được tạo thành là

A $S = 56(\mathrm{cm}^2)$. B $S = 55(\mathrm{cm}^2)$. C $S = 53(\mathrm{cm}^2)$. D $S = 46(\mathrm{cm}^2)$.

Câu 23.

Một tấm kẽm hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $30\,(\text{cm})$. Người ta gập tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ bên dưới để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Giá trị của x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là





Ⓐ $x = 5\,(\text{cm})$.

Ⓑ $x = 9\,(\text{cm})$.

Ⓒ $x = 8\,(\text{cm})$.

D $x = 10\,(\text{cm})$.

Lời giải.

Đặt $EG = 2a \Rightarrow AE = BG = \dfrac{30 - 2a}{2} = 15 - a$.

Gọi I là trung điểm $EG \Rightarrow AI = \sqrt{AE^2 - \left(\dfrac{EG}{2}\right)^2} = \sqrt{(15-a)^2 - a^2} = \sqrt{225 - 30a}$.

Thể tích khối lăng trụ tương ứng là:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}.AI.EG.AC \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{225-30a}.2a.30 \\ &= 30\sqrt{a^2\,(225-30a)} \\ &\le 2\sqrt{15a.15a.\,(225-30a)} = 2.\sqrt{\left(\frac{225}{3}\right)^3} = 750\sqrt{3} \end{aligned}$$

Dấu $'' ='' $ xảy ra khi $15a = 225 - 30a \Leftrightarrow a = 5 \Rightarrow x = 10$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 24. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,035x^2\,(15 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.

Ⓐ $x = 8$. **B** $x = 10$. Ⓒ $x = 15$. Ⓓ $x = 7$.

Câu 25. Đặt $\ln 2 = a$; $\log_5 4 = b$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

Ⓐ $\ln 100 = \dfrac{ab + 2a}{b}$. Ⓑ $\ln 100 = \dfrac{4ab + 2a}{b}$. Ⓒ $\ln 100 = \dfrac{ab + a}{b}$. **D** $\ln 100 = \dfrac{2ab + 4a}{b}$.

Câu 26. Số nghiệm thực của phương trình $4^x - 2^{x+2} + 3 = 0$ là:

Ⓐ 0. Ⓑ 1. **C** 2. Ⓓ 3.

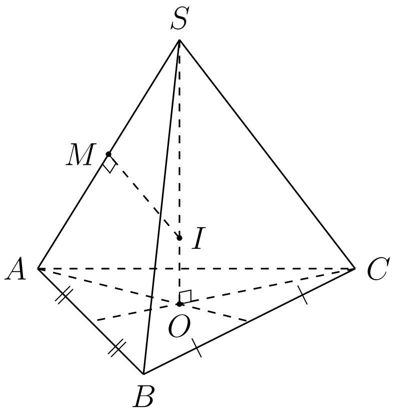
Câu 27. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau?

Ⓐ 15. Ⓑ 4096. **C** 360. Ⓓ 720.

Câu 28. Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng $\sqrt{6}$ và chiều cao $h = 1$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó là.

A $S = 9\pi$. **B** $S = 6\pi$. **C** $S = 5\pi$. **D** $S = 27\pi$.

Lời giải.



Gọi O là trọng tâm tam giác ABC khi đó SO là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Trong tam giác SAO vẽ đường trung trực Mx của SA cắt SO tại I.

Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$, bán kính $r = SI$.

Ta có: $AO = \sqrt{2}, SA = \sqrt{3}, SM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Vì tam giác SMI đồng dạng với tam giác SOA nên:

$\dfrac{SM}{SO} = \dfrac{SI}{SA} \Rightarrow SI = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}}{1} = \dfrac{3}{2}$.

Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó là:

$S = 4\pi r^2 = 4\pi.\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = 9\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Biết rằng hệ số của x^4 trong khai triển nhị thức Newton $(2-x)^n (n \in \mathbb{N}^*)$ bằng 60. Tìm n.

A $n = 5$. **B** $n = 6$. **C** $n = 7$. **D** $n = 8$.

Câu 30. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a, AB = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$ là:

A $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.

Câu 31. Cho tập A gồm n điểm phân biệt trên mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Tìm n sao cho số tam giác mà 3 đỉnh thuộc A gấp đôi số đoạn thẳng được nối từ 2 điểm thuộc A.

A $n = 6$. **B** $n = 12$. **C** $n = 8$. **D** $n = 15$.

Câu 32. Cho hàm số $y = \ln(e^x + m^2)$. Với giá trị nào của m thì $y'(1) = \dfrac{1}{2}$

A $m = e$. **B** $m = -e$. **C** $m = \dfrac{1}{e}$. **D** $m = \pm\sqrt{e}$.

Câu 33. Cho hàm $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A Hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.
B Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
C Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
D Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Câu 34. Một lớp có 20 nam sinh và 15 nữ sinh. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ.

A $\dfrac{4615}{5236}$. **B** $\dfrac{4651}{5236}$. **C** $\dfrac{4615}{5263}$. **D** $\dfrac{4610}{5236}$.

Câu 35. Một đề thi trắc nghiệm gồm 50 câu, mỗi câu có 4 phương án trả lời trong đó chỉ có 1 phương án đúng, mỗi câu trả lời đúng được $0,2$ điểm. Một thí sinh làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên 1 trong 4 phương án ở mỗi câu. Tính xác suất để thí sinh đó được 6 điểm.

(A) $0{,}25^{30} \cdot 0{,}75^{20}$. (B) $0{,}25^{20} \cdot 0{,}75^{30}$.
C $0{,}25^{30} \cdot 0{,}75^{20} \cdot C_{50}^{20}$. (D) $1 - 0{,}25^{20} \cdot 0{,}75^{30}$.

Câu 36. Cho hàm số $y = \dfrac{2017}{x-2}$ có đồ thị (H). Số đường tiệm cận của (H) là

(A) 0. **B** 2. (C) 3. (D) 1.

Câu 37. Một khối lăng trụ tam giác có đáy là tam giác đều cạnh 3, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}$ tạo với mặt phẳng đáy một góc 30°. Khi đó thể tích khối lăng trụ là

(A) $\dfrac{9}{4}$. (B) $\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$. **C** $\dfrac{27}{4}$. (D) $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy là hình thang $ABCD$ vuông tại A và B có $AB = a, AD = 3a, BC = a$. Biết $SA = a\sqrt{3}$, tính thể tích khối chóp $S.BCD$ theo a.

(A) $2\sqrt{3}a^3$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

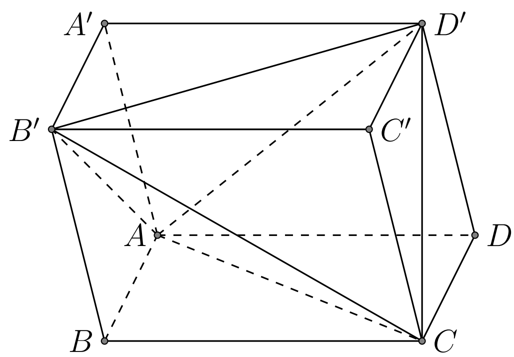
Câu 39. Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 60°, diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

(A) $V = \dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. (B) $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **C** $V = 3\pi a^3$. (D) $V = \pi a^3$.

Câu 40. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thể tích là V. Tính thể tích của tứ diện $ACB'D'$ theo V.

(A) $\dfrac{V}{6}$. (B) $\dfrac{V}{4}$. (C) $\dfrac{V}{5}$. **D** $\dfrac{V}{3}$.

Lời giải.



Gọi h là chiều cao hình hộp.

Ta có: $V_{B'.ABC} = \dfrac{1}{3}h.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}h.\dfrac{1}{2}S_{ABCD} = \dfrac{1}{6}h.S_{ABCD} = \dfrac{1}{6}V$.

Tương tự ta có: $V_{D'.ADC} = V_{C.B'C'D'} = V_{A.A'B'D'} = \dfrac{1}{6}V$.

Suy ra $V_{ACB'D'} = V - V_{B'.ABC} - V_{D'.ADC} - V_{C.B'C'D'} - V_{A.A'B'D'} = V - 4.\dfrac{1}{6}V = \dfrac{1}{3}V$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Cho hình lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a cạnh bên bằng b. Tính thể tích khối cầu đi qua các đỉnh của hình lăng trụ.

(A) $\dfrac{1}{18\sqrt{3}}\sqrt{(4a^2+3b^2)^3}$. **B** $\dfrac{\pi}{18\sqrt{3}}\sqrt{(4a^2+3b^2)^3}$.
(C) $\dfrac{\pi}{18\sqrt{3}}\sqrt{(4a^2+b^2)^3}$. (D) $\dfrac{\pi}{18\sqrt{2}}\sqrt{(4a^2+3b^2)^3}$.

Câu 42. Cho hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông $ABCD$ cạnh $2\sqrt{3}$cm với AB là đường kính của đường tròn đáy tâm O. Gọi M là điểm thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn đáy sao cho $\widehat{ABM} = 60^\circ$. Thể tích của khối tứ diện $ACDM$ là

A $V = 3(\text{cm}^3)$. **B** $V = 4(\text{cm}^3)$. **C** $V = 6(\text{cm}^3)$. **D** $V = 7(\text{cm}^3)$.

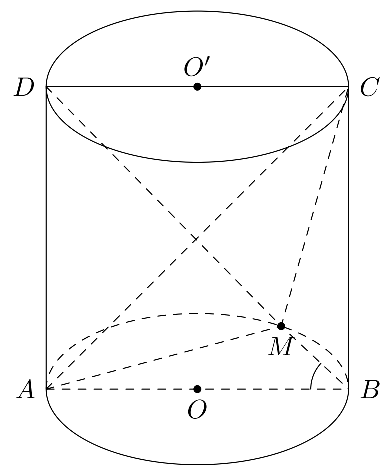
Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} BM \perp AM \\ BM \perp DA \end{cases} \Rightarrow MB \perp (AMD)$.

Mặt khác, ta tính được $MB = \sqrt{3}$; $AM = 3$.

Suy ra thể tích

$V_{ACDM} = \dfrac{1}{3} S_{DAM}.BM = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2} 2\sqrt{3}.3.\sqrt{3} = 3$.



Chọn đáp án A □

Câu 43. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log\left(x^2 - 2mx + 4\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right.$. **B** $m = 2$. **C** $m < 2$. **D** $-2 < m < 2$.

Câu 44. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h = 20\text{cm}$, bán kính đáy $r = 25\text{cm}$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12cm. Tính diện tích của thiết diện đó.

A $S = 500(\text{cm}^2)$. **B** $S = 400(\text{cm}^2)$. **C** $S = 300(\text{cm}^2)$. **D** $S = 406(\text{cm}^2)$.

Lời giải.

Chiều cao $h = SO = 20\text{cm}$, bán kính đáy $r = OB = 25\text{cm}$, thiết diện qua đỉnh là tam giác SBC. Gọi M là trung điểm BC, H là hình chiếu của O lên SM.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SO \\ BC \perp OM \end{cases} \Rightarrow BC \perp OH$, mà $OH \perp SM \Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d\left[O; (SBC)\right] = OH = 12\text{cm}$.

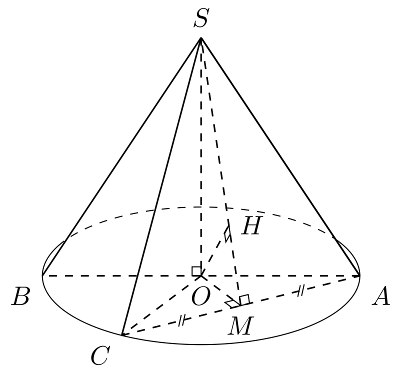
Trong tam giác vuông SOM có:

$\dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{1}{OH^2} - \dfrac{1}{SO^2} \Rightarrow OM = 15\text{cm}$

$\Rightarrow SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = 25\text{cm}$.

$BC = 2BM = 2\sqrt{OB^2 - OM^2} = 40\text{cm}$.

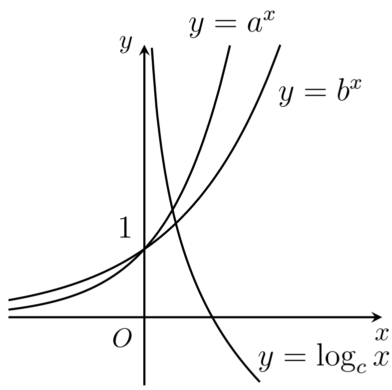
$\Rightarrow S_{\Delta SBC} = \dfrac{1}{2} SM.BC = 500\text{cm}^2$.



Chọn đáp án A □

Câu 45.

Cho a, b, c là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị của các hàm số $y = a^x, y = b^x, y = \log_c x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A $a < b < c$.

B $c < b < a$.

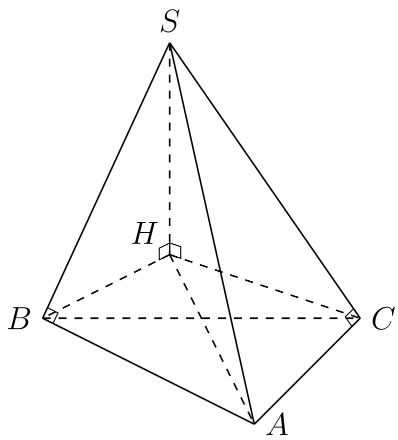
C $a < c < b$.

D $c < a < b$.

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a, tam giác SBA vuông tại B, tam giác SAC vuông tại C. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **C** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **D** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của đỉnh S xuống mặt phẳng (ABC). Khi đó, ta có $SH \perp AB, SH \perp AC$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp SB \\ AB \perp SH \\ SH \cap SB = \{S\} \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBH) \Rightarrow AB \perp BH$

Tương tự, ta cũng chứng minh được $AC \perp (SCH)$. Từ đó suy ra $AC \perp CH$.

Do $SB \perp AB, BH \perp AB$ nên suy ra góc giữa (SAB) và (ABC) là góc $\widehat{SBH}$. Vậy $\widehat{SBH} = 60°$.

Do $\Delta ABH = \Delta ACH \Rightarrow \widehat{BAH} = 30°$.

Trong tam giác vuông ABH, ta có $BH = AB.\tan 30° = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Trong tam giác vuông SHB, ta có $SH = BH.\tan 60° = \dfrac{a}{\sqrt{3}}.\sqrt{3} = a$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8)$ có hai nghiệm thực phân biệt là

A 3. **B** 4. **C** 5. **D** vô số.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 1$.

$\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8) (*)$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = mx - 8$.

$\Leftrightarrow x^2 - (2+m)x + 9 = 0 (**)$.

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm thực phân biệt khi phương trình $(**)$ có hai nghiệm phân biệt

x_1, x_2 thỏa mãn: $1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} (2+m)^2 - 36 > 0 \\ \dfrac{2+m}{2} > 1 \\ 8 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < m < 8.$

Có 3 giá trị nguyên m cần tìm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A và góc $\widehat{ABC} = 30^0$; tam giác SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là

(A) $\dfrac{a\sqrt{6}}{5}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 49. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết góc giữa MN và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và DM là:

(A) $a.\sqrt{\dfrac{15}{62}}$. **B** $a.\sqrt{\dfrac{30}{31}}$. (C) $a.\sqrt{\dfrac{15}{68}}$. (D) $a.\sqrt{\dfrac{15}{17}}$.

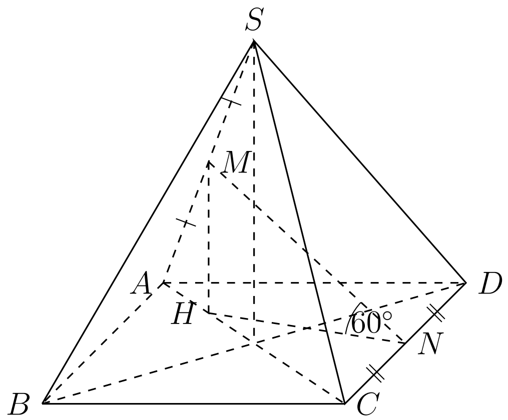
Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BC$, Gọi H là trung điểm của OA.

MH là đường trung bình của ΔSAO nên $\Rightarrow MH \parallel SO \Rightarrow MH \perp (ABCD)$.

Góc giữa MN và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{MNH} = 60°$.

Ta có $HN = HB$. Xét tam giác vuông BHO tại O có:



$$HB^2 = OH^2 + OB^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{8} \Rightarrow HB = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

Ta có $MH = HN.\tan 60° = \dfrac{a\sqrt{30}}{2}$.

Ta có $BC \parallel AD \Rightarrow BC \parallel (SAD)$, mà $DM \subset (SAD)$.

Suy ra $d(BC, DM) = d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD)) = 2d(O, (SAD))$.

Gọi $d = d(O, (SAD))$.

Ta có $\dfrac{1}{d^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\frac{a\sqrt{30}}{2}\right)^2} = \dfrac{124}{30a^2} \Rightarrow d = a\sqrt{\dfrac{15}{62}}$.

Vậy $d(BC, DM) = 2d(O, (SAD)) = a\sqrt{\dfrac{30}{31}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 50. Cho a, b, c là các số thực thuộc đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $\log_2^3 a + \log_2^3 b + \log_2^3 c \leq 1$. Khi biểu thức $P = a^3 + b^3 + c^3 - 3(\log_2 a^a + \log_2 b^b + \log_2 c^c)$ đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của tổng $a + b + c$ là

(A) 3. (B) $3.2^{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}$. (C) 4. (D) 6.

Lời giải.

Đặt $x = \log_2 a, y = \log_2 b, z = \log_2 c \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 \leq 1; 0 \leq x, y, z \leq 1$.

$\log_2 a^a = a \log_2 a = ax \Rightarrow P = a^3 + b^3 + c^3 - 3(ax + by + cz)$.

Xét hàm số $f(t) = t - \log_2 t, t \in [1; 2]$.

$f'(t) = 1 - \dfrac{1}{t \ln 2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t_0 = \dfrac{1}{\ln 2} \Rightarrow f(t) \leq \max\{f(1), f(2), f(t_0)\} = 1$.

Suy ra $t - \log_2 t \leq 1, \forall t \in [1; 2] \Rightarrow a - x - 1 \leq 0$.

Ta có $a^3 - 3ax - x^3 - 1 = (a - x - 1)(a^2 + x^2 + 1 + a + ax - x) \leq 0$.

Suy ra $P \leq x^3 + y^3 + z^3 + 3 \leq 4. P_{\max} = 4$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x, y, z \in \{0, 1\} \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b = 1 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 4$.

Chọn đáp án (C) □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. D	3. C	4. C	5. C	6. D	7. B	8. D	9. B	10. A
11. A	12. C	13. C	14. B	15. D	16. C	17. B	18. D	19. C	20. B
21. D	22. A	23. D	24. B	25. D	26. C	27. C	28. A	29. B	30. B
31. C	32. D	33. A	34. A	35. C	36. B	37. C	38. B	39. C	40. D
41. B	42. A	43. D	44. A	45. B	46. B	47. A	48. D	49. B	50. C

169 THI THỬ THPT QUỐC GIA 2018 - TẠP CHÍ TOÁN HỌC TUỔI TRẺ - LẦN 1

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Có 7 tấm bia ghi 7 chữ "HIỀN", "TÀI", "LÀ", "NGUYÊN", "KHÍ", "QUỐC", "GIA". Một người xếp ngẫu nhiên 7 tấm bia cạnh nhau. Tính xác suất để khi xếp các tấm bia được dòng chữ "HIỀN TÀI LÀ NGUYÊN KHÍ QUỐC GIA".

A. $\frac{1}{25}$. B. $\frac{1}{5040}$. C. $\frac{1}{24}$. D. $\frac{1}{13}$.

Lời giải.

Xếp ngẫu nhiên 7 tấm bìa có $7! = 5040$ (cách xếp) $\Rightarrow n(\Omega) = 5040$.

Đặt A là biến cố "xếp được chữ HIỀN TÀI LÀ NGUYÊN KHÍ QUỐC GIA". Ta có $n(A) = 1$.

Vậy $P(A) = \frac{1}{5040}$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Cho phương trình: $\cos 2(x + \frac{\pi}{3}) + 4\cos(\frac{\pi}{6} - x) = \frac{5}{2}$ Khi đặt $t = \cos(\frac{\pi}{6} - x)$, phương trình đã cho trở thành phương trình nào dưới đây?

A. $4t^2 - 8t + 3 = 0$. B. $4t^2 - 8t - 3 = 0$. C. $4t^2 + 8t - 5 = 0$. D. $4t^2 - 8t + 5 = 0$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với:

$$-2\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \frac{5}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow -4\cos^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + 8\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - 3 = 0$$

nên nếu đặt $t = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ phương trình trở thành $-4t^2 + 8t - 3 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 8t + 3 = 0$

Chọn đáp án A □

Câu 3. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào **không** nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = -x^3 + 2x^2 - 7x$. B. $y = -4x + \cos x$.

C. $y = -\frac{1}{x^2 + 1}$. D. $y = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}\right)^x$.

Lời giải.

Với $y = -\frac{1}{x^2 + 1}$ ta có $y' = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$.

$y' > 0$ khi $x > 0$ và $y' < 0$ khi $x < 0$. Nên hàm số không nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Chọn đáp án C □

Câu 4. Với hai số thực dương a, b tùy ý và $\frac{\log_3 5 \cdot \log_5 a}{1 + \log_3 2} - \log_6 b = 2$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $a = b\log_6 2$. B. $a = 36b$. C. $2a + 3b = 0$. D. $a = b\log_6 3$.

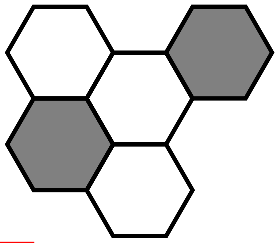
Lời giải.

$$\frac{\log_3 5 \cdot \log_5 a}{1 + \log_3 2} - \log_6 b = 2 \Leftrightarrow \frac{\log_3 a}{\log_3 6} - \log_6 b = 2 \Leftrightarrow \log_6 a - \log_6 b = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_6 \frac{a}{b} = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 36 \Leftrightarrow a = 36b$$

Chọn đáp án B □

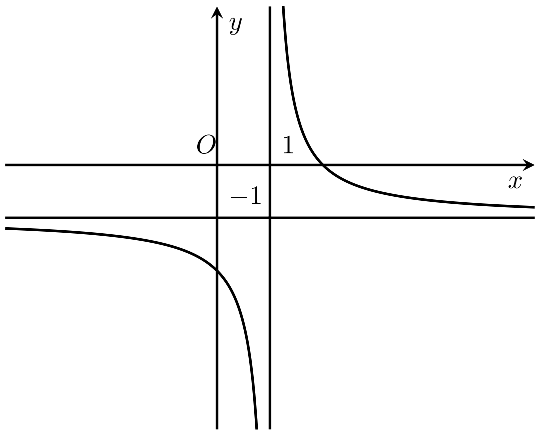
Câu 5.
Quả bóng đá được dùng thi đấu tại các giải bóng đá Việt Nam tổ chức có chu vi đường tròn lớn là $68,5$cm. Quả bóng được ghép nối bởi các miếng da hình lục giác đều màu trắng và đen, mỗi miếng có diện tích $49,83\text{cm}^2$. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu miếng da để làm quả bóng trên?



A. ≈ 40 (miếng da). B. ≈ 20 (miếng da). C. ≈ 35 (miếng da). **D.** ≈ 30 (miếng da).

Lời giải.
Vì thiết diện qua tâm là đường tròn có chu vi là 68.5(cm), nên giả sử bán kính mặt cầu là R ta có: $2\pi R = 68.5 \Rightarrow R = \dfrac{68.5}{2\pi}$.
Diện tích mặt cầu $S_{xq} = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\dfrac{68.5}{2\pi}\right)^2 \approx 1493.59(\text{cm}^2)$.
Vì mỗi miếng da có diện tích $49.83(\text{cm}^2)$ nên để phủ kín được mặt của quả bóng thì số miếng da cần là $\dfrac{1493.59}{49.83} \approx 29.97$. Vậy phải cần ≈ 30 (miếng da).
Chọn đáp án D □

Câu 6.
Cho hàm số $y = \dfrac{ax - b}{x - 1}$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $b < 0 < a$.
B. $0 < b < a$.
C. $b < a < 0$.
D. $0 < a < b$.

Lời giải.
Dựa vào đồ thị ta có $\begin{cases} \dfrac{a}{1} = -1 \\ -a + b < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ -b < -1 = a \end{cases} \Rightarrow b < a < 0$

Chọn đáp án C □

Câu 7. Cho hai hàm số $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = 2^x$. Xét các mệnh đề sau:
(I). Đồ thị hai hàm số đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$
(II). Tập xác định của hai hàm số trên là $\mathbb{R}$
(III). Đồ thị hai hàm số cắt nhau tại đúng 1 điểm.
(IV). Hai hàm số đều đồng biến trên tập xác định của nó.
Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên?

A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Câu 8. Cho hình lập phương có cạnh bằng 40cm và một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích toàn phần của hình lập phương và diện tích toàn phần của hình trụ. Tính $S = S_1 + S_2$ (cm^2).

(A) $S = 4(2400 + \pi)$. (B) $S = 2400(4 + \pi)$. (C) $S = 2400(4 + 3\pi)$. (D) $S = 4(2400 + 3\pi)$.

Lời giải.

Ta có $S_1 = 6.40^2 = 9600$.

Bán kính đường tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương là: $r = 20$cm; hình trụ có đường sinh $h = 40$cm.

Diện tích toàn phần của hình trụ là: $S_2 = 2.\pi.20^2 + 2\pi.20.40 = 2400\pi$.

Vậy $S = S_1 + S_2 = 9600 + 2400\pi = 2400(4 + \pi)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần thực âm và phần ảo dương của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w = i^{2017} z_0$?

(A) $M(3; -1)$. (B) $M(3; 1)$. (C) $M(-3; 1)$. (D) $M(-3; -1)$.

Lời giải.

Ta có $z^2 + 2z + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1 - 3i \\ z = -1 + 3i \end{array}\right.$. Suy ra $z_0 = -1 + 3i$.

$w = i^{2017} z_0 = i(-1 + 3i) = -3 - i$. Suy ra điểm $M(-3; -1)$ biểu diễn số phức w.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Tính tổng S các nghiệm của phương trình $(2\cos 2x + 5)(\sin^4 x - \cos^4 x) + 3 = 0$ trong khoảng $(0; 2\pi)$.

(A) $S = \dfrac{11\pi}{6}$. (B) $S = 4\pi$. (C) $S = 5\pi$. (D) $S = \dfrac{7\pi}{6}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} &(2\cos 2x + 5)(\sin^4 - \cos^4 x) + 3 = 0 \Leftrightarrow (2\cos 2x + 5)(\sin^2 x - \cos^2 x) + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow & -(2\cos 2x + 5)\cos 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow -2\cos^2(2x) - 5\cos 2x + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow & \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\} \end{aligned}$$

Do đó $S = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{7\pi}{6} + \dfrac{11\pi}{6} = 4\pi$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $B(-2; 2; 0)$, $C(4; 1; -1)$. Trên mặt phẳng (Oxz) điểm nào dưới đây cách đều ba điểm A, B, C?

(A) $M\left(\dfrac{3}{4}; 0; \dfrac{1}{2}\right)$. (B) $N\left(-\dfrac{3}{4}; 0; -\dfrac{1}{2}\right)$. (C) $P\left(\dfrac{3}{4}; 0; -\dfrac{1}{2}\right)$. (D) $Q\left(-\dfrac{3}{4}; 0; \dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 12. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$ có điểm cực tiểu $A(2; -2)$. Tính $a + b$.

(A) $a + b = 4$. (B) $a + b = 2$. (C) $a + b = -4$. (D) $a + b = -2$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 2a$. Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $A(2; -2)$ nên ta có:

$y'(2) = 0 \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Do đồ thị qua $A(2;-2) \Rightarrow -2 = 8 - 12 + b \Leftrightarrow b = 2$.
Thử lại ta thấy với $a = 0$ và $b = 2$ thì điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(2;-2)$. Vậy $a + b = 2$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng $45°$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích các khối chóp $S.AHK$ và $S.ACD$ với H và K lần lượt là trung điểm của SC và SD. Tính độ dài đường cao h của khối chóp $S.ABCD$ và tỷ số $k = \dfrac{V_1}{V_2}$.

A $h = a, k = \dfrac{1}{4}$. (B) $h = a, k = \dfrac{1}{6}$. (C) $h = 2a, k = \dfrac{1}{8}$. (D) $h = 2a, k = \dfrac{1}{3}$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = \ln^2(x^2 - 2x + 4)$ Tìm các giá trị của x để $f'(x) > 0$.

(A) $x \neq 1$. (B) $x > 0$. **C** $x > 1$. (D) $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{4x - 4}{x^2 - 2x + 4}\ln(x^2 - 2x + 4)$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (4x - 4)\ln(x^2 - 2x + 4) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 1 > 0 \\ \ln(x^2 - 2x + 4) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 < 0 \\ \ln(x^2 - 2x + 4) < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - 2x + 4 > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ x^2 - 2x + 4 < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - 2x + 3 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ x^2 - 2x + 3 < 0 \end{cases} \text{(Vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x > 1$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{ax} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$, với $a \neq 0$ Tìm giá trị của a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 0$.

(A) $a = 1$. **B** $a = \dfrac{1}{2}$. (C) $a = -1$. (D) $a = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax} \cdot a = a$$

Hàm số liên tục tại $x_0 = 0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ và có bảng biến thiên như dưới đây:

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm điều kiện của m để phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt.

A $m < 0$. **B** $m > 0$. **C** $0 < m < \dfrac{27}{4}$. **D** $m > \dfrac{27}{4}$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 10 = 0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$. Đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm M và N sao cho $A(1;3;2)$ là trung điểm của cạnh MN. Tính độ dài đoạn MN.

A $MN = 4\sqrt{33}$. **B** $MN = 2\sqrt{26,5}$. **C** $MN = 4\sqrt{16,5}$. **D** $MN = 2\sqrt{33}$.

Lời giải.

Vì $N = \Delta \cap d$ nên $N \in d$, do đó $N(-2+2t; 1+t; 1-t)$ Mà $A(1;3;2)$ là trung điểm MN nên

$$\begin{cases} x_M = 2x_A - x_N \\ y_M = 2y_A - y_N \\ z_M = 2z_A - z_N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 4 - 2t \\ y_M = 5 - t \\ z_M = 3 + t \end{cases}.$$

Vì $M = \Delta \cap (P)$ nên $M \in (P)$, do đó $2(4-2t) - (5-t) + (3+t) - 10 = 0 \Leftrightarrow t = -2$.

Suy ra $M(8;7;1)$ và $N(-6;-1;3)$. Vậy $M = 2\sqrt{66} = 4\sqrt{16,5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của $\left(x\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^4}\right)^n$, với $x > 0$ nếu biết rằng $\mathrm{C}_n^2 - \mathrm{C}_n^1 = 44$.

A 165. **B** 238. **C** 485. **D** 525.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{C}_n^2 - \mathrm{C}_n^1 = 44 \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)}{2} - n = 44 \Leftrightarrow n = 11$ hoặc $n = -8$ (loại).

Với $n = 11$, số hạng thứ $k+1$ trong khai triển nhị thức $\left(x\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^4}\right)^{11}$ là

$$\mathrm{C}_{11}^k \left(x\sqrt{x}\right)^{11-k} \left(\frac{1}{x^4}\right)^k = \mathrm{C}_{11}^k x^{\frac{33}{2} - \frac{11}{2}k}$$

Theo giả thiết, ta có $\dfrac{33}{2} - \dfrac{11k}{2} = 0$ hay $k = 3$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển đã cho là $\mathrm{C}_{11}^3 = 165$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Cho hai hàm số $F(x) = (x^2 + ax + b)e^{-x}$ và $f(x) = (-x^2 + 3x + 6)e^{-x}$. Tìm a và b để $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

A $a = 1, b = -7$. **B** $a = -1, b = -7$. **C** $a = -1, b = 7$. **D** $a = 1, b = 7$.

Lời giải.

Ta có $F'(x) = (-x^2 + (2-a)x + a - b)e^{-x} = f(x)$ nên $2 - a = 3$ và $a - b = 6$.
Vậy $a = -1$ và $b = -7$.
Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA' = \dfrac{3a}{2}$. Biết hình chiếu vuông góc của A' xuống mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó.

A. $V = a^3$. B. $V = \dfrac{2a^3}{3}$. C. $V = \dfrac{3a^3}{4\sqrt{2}}$. D. $V = a^3\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{khi } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.
B. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$.
C. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ và hàm số $f(x)$ cũng có đạo hàm tại $x = 1$.
D. Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 1$.

Câu 22. Biết đường thẳng $y = -\dfrac{9}{4}x - \dfrac{1}{24}$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0 = \dfrac{13}{12}$. B. $y_0 = \dfrac{12}{13}$. C. $y_0 = -\dfrac{1}{2}$. D. $y_0 = -2$.

Câu 23. Cho cấp số cộng (u_n) và gọi S_n là tổng n số đầu tiên của nó. Biết $S_7 = 77$ và $S_{12} = 192$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng đó.

A. $u_n = 5 + 4n$. B. $u_n = 3 + 2n$. C. $u_n = 2 + 3n$. D. $u_n = 4 + 5n$.

Câu 24. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1; 2; -4)$, $B(1; -3; 1)$, $C(2; 2; 3)$. Tìm đường kính l của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy)

A. $l = 2\sqrt{13}$. B. $l = 2\sqrt{41}$. C. $l = 2\sqrt{26}$. D. $l = 2\sqrt{11}$.

Câu 25. Đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x} - \sqrt{x^2 - 3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

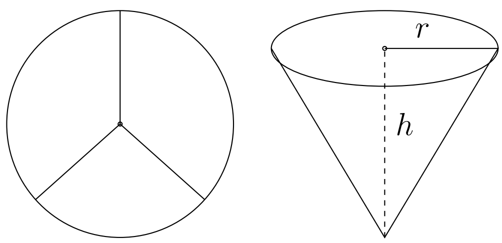
A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Câu 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C) : (x + m)^2 + (y - 2)^2 = 5$ và $(C') : x^2 + y^2 + 2(m - 2)y - 6x + 12 + m^2 = 0$. Vectơ $\vec{v}$ nào dưới đây là vectơ của phép tịnh tiến biến (C) thành (C')?

A. $\vec{v} = (2; 1)$. B. $\vec{v} = (-2; 1)$. C. $\vec{v} = (-1; 2)$. D. $\vec{v} = (2; -1)$.

Câu 27.

Người thợ gia công của một cơ sở chất lượng cao X cắt một miến tôn hình tròn với bán kính 60cm thành ba miền hình quạt bằng nhau. Sau đó người thợ ấy quấn và hàn ba miếng tôn đó để được ba cái phễu hình nón. Hỏi thể tích V của mỗi cái phễu đó bằng bao nhiêu?



A. $V = \dfrac{16000\sqrt{2}}{3}$ lít. B. $V = \dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ lít.

(C) $V = \dfrac{16000\sqrt{2}\pi}{3}$ lít. (D) $V = \dfrac{160\sqrt{2}\pi}{3}$ lít.

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm thuộc đồ thị (C) có tung độ là nghiệm phương trình $2f'(x) - x.f''(x) - 6 = 0$?

(A) 1. (B) 4. (C) 2. (D) 3.

Câu 29. Ông An muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288m^3. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng $/\text{m}^2$. Nếu ông An biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông An trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể đó là bao nhiêu?

(A) 108 triệu đồng. (B) 54 triệu đồng. (C) 168 triệu đồng. (D) 90 triệu đồng.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ và $A(2;1;4)$. Gọi $H(a;b;c)$ là điểm thuộc d sao cho AH có độ dài nhỏ nhất. Tính $T = a^3 + b^3 + c^3$.

(A) $T = 8$. (B) $T = 62$. (C) $T = 13$. (D) $T = \sqrt{5}$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x) = 5^x \cdot 8^{2x^3}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

(A) $f(x) \leq 1 \Leftrightarrow x\log_2 5 + 2x^3 \leq 0$. (B) $f(x) \leq 1 \Leftrightarrow x + 6x^3\log_5 2 \leq 0$.

(C) $f(x) \leq 1 \Leftrightarrow x\log_2 5 + 3x^3 \leq 0$. (D) $f(x) \leq 1 \Leftrightarrow x\log_2 \sqrt{5} + 3x^3 \leq 0$.

Câu 32. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có các cạnh đều bằng a. Tính diện tích S của mặt cầu đi qua 6 đỉnh của hình lăng trụ đó.

(A) $S = \dfrac{49\pi a^2}{144}$. (B) $S = \dfrac{7a^2}{3}$. (C) $S = \dfrac{7\pi a^2}{3}$. (D) $S = \dfrac{49a^2}{144}$.

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - m + 1$ có các giá trị cực trị trái dấu?

(A) 2. (B) 9. (C) 3. (D) 7.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^1 f(x)dx = 2; \int\limits_0^3 f(x)dx = 6$. Tính $I = \int\limits_{-1}^1 f(|2x-1|)dx$.

(A) $I = \dfrac{2}{3}$. (B) $I = 4$. (C) $I = \dfrac{3}{2}$. (D) $I = 6$.

Câu 35. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Gọi O là tâm của đáy ABC, d_1 là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) và d_2 là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC). Tính $d = d_1 + d_2$.

(A) $d = \dfrac{2a\sqrt{22}}{11}$. (B) $d = \dfrac{2a\sqrt{22}}{33}$. (C) $d = \dfrac{8a\sqrt{22}}{33}$. (D) $d = \dfrac{8a\sqrt{22}}{11}$.

Câu 36. Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(x+y)$ và $\dfrac{x}{y} = \dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

(A) $a + b = 6$. (B) $a + b = 11$. (C) $a + b = 4$. (D) $a + b = 8$.

Lời giải.

Đặt $\log_9 x = t$.

Theo đề ra ta có $\begin{cases} \log_9 x = \log_6 y = t \\ \log_9 x = \log_4(x+y) = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9^t & (11) \\ y' = 6^t & (12) \\ x + y = 4^t & (13) \\ \dfrac{x}{y} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^t & (14) \end{cases}$

Từ (11), (12) và (13) ta có $9^t + 6^t = 4^t \Leftrightarrow (3^t)^2 + (3\cdot 2)^t - 4^t = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2t} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^t - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{3}{2}\right)^t = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^t = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Thế vào (14) ta được $\dfrac{x}{y} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^t = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{-a+\sqrt{b}}{2} \Rightarrow a = 1; b = 5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$.

(A) $S = \dfrac{343}{12}$. (B) $S = \dfrac{793}{4}$. (C) $S = \dfrac{397}{4}$. **D** $S = \dfrac{937}{12}$.

Câu 38. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

(A) $m > -3$. **B** $m \leq 0$. (C) $m \leq -3$. (D) $m > 0$.

Lời giải.

Đặt $\sin x = t, x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0; 1]$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t^2 - mt - 4$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 6t - m$.

Để hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; 1]$ cần:

$$f'(t) \geq 0,\ \forall t \in [0; 1] \Leftrightarrow 3t^2 + 6t - m \geq 0\ \forall t \in [0; 1] \Leftrightarrow 3t^2 + 6t \geq m\ \forall t \in [0; 1]$$

Xét hàm số $g(t) = 3t^2 + 6t; g'(t) = 6t + 6; g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$.

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0		$+$			$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	0	↗	9	↗	$+\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy với $m \leq 0$ thì hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; 1]$, hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$

Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ trên tập hợp $\mathscr{D} = (-\infty; -1] \cup \left[1; \dfrac{3}{2}\right]$. Tính giá trị T của $m \cdot M$.

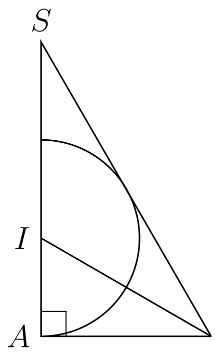
(A) $T = \dfrac{1}{9}$. (B) $T = \dfrac{3}{2}$. **(C)** $T = 0$. (D) $T = -\dfrac{3}{2}$.

Câu 40.

Cho tam giác SAB vuông tại A, $\widehat{ABS} = 60^\circ$, đường phân giác trong của $\widehat{ABS}$ cắt SA tại điểm I. Vẽ nửa đường tròn tâm I bán kính IA (như hình vẽ). Cho $\triangle\ SAB$ và nửa đường tròn trên cùng quay quanh SA tạo nên các khối tròn xoay có thể tích tương ứng V_1, V_2 Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $4V_1 = 9V_2$. **(B)** $9V_1 = 4V_2$.

(C) $V_1 = 3V_2$. (D) $2V_1 = 3V_2$.



Câu 41. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số k để có $\displaystyle\int_1^k (2x-1)dx = 4\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

(A) $\left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=2 \end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=-2 \end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l} k=-1 \\ k=-2 \end{array}\right.$. **(D)** $\left[\begin{array}{l} k=-1 \\ k=2 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^k (2x-1)dx = \dfrac{1}{2}\int_1^k (2x-1)d(2x-1) = \left.\dfrac{(2x-1)^2}{4}\right|_k^1 = \dfrac{(2k-1)^2}{4} = \dfrac{1}{4}$.

Mà $4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = 4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = 4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1} = 2$.

Khi đó $\displaystyle\int_1^k (2x-1)dx = 4\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{(2k-1)^2-1}{4} = 2 \Leftrightarrow (2k-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=2 \\ k=-1 \end{array}\right.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1?

(A) 1. **(B)** 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Áp dụng công thức giải nhanh cực trị, ta có:

$$\begin{cases} ab < 0 \\ R = \dfrac{b^3 - 8a}{8\,|a|\,b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m < 0 \\ 1 = \dfrac{-8m^3 - 8}{8.(-2m)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -8m^3 + 16m - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy có 2 giá trị thực m thỏa mãn yêu cầu bài toán

Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Một hình vuông $ABCD$ có cạnh $AB = a$, diện tích S_1. Nối 4 trung điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự của 4 cạnh AB, BC, CD, DA ta được hình vuông thứ hai là $A_1B_1C1D_1$ có diện tích

S_2. Tiếp tục như thế, ta được hình vuông thứ ba là $A_2B_2C_2D_2$ có diện tích S_3 và cứ tiếp tục như thế, ta được diện tích $S_4, S_5 \cdots$. Tính $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_{100}$.

(A) $S = \dfrac{2^{100}-1}{2^{99}a^2}$. (B) $S = \dfrac{a(2^{100}-1)}{2^{99}}$. **C** $S = \dfrac{a^2(2^{100}-1)}{2^{99}}$. (D) $S = \dfrac{a^2(2^{99}-1)}{2^{99}}$.

Lời giải.

Dễ thấy $S_1 = a^2; S_2 = \dfrac{a^2}{2}; S_3 = \dfrac{a^2}{4}; \cdots; S_{100} = \dfrac{a^2}{2^{99}}$.

Như vậy $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_{100}$ là cấp số nhân với công bội $q = \dfrac{1}{2}$.

$$S = S_1 + S_2 + \cdots + S_{100} = a^2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{99}}\right) = \frac{a^2(2^{100}-1)}{2^{99}}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_{0,02}(\log_2(3^x+1)) > \log_{0,02} m$ có nghiệm với mọi $x \in (-\infty; 0)$.

(A) $m > 9$. (B) $m < 2$. (C) $0 < m < 1$. **D** $m \geq 1$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Điều kiện của tham số $m > 0$.

Ta có $\log_{0,02}(\log_2(3^x+1)) > \log_{0,02} m \Leftrightarrow \log_2(3^x+1) < m$.

Xét hàm số $f(x) = \log_2(3^x+1), \forall x \in (-\infty; 0)$ có $f' = \dfrac{3^x \ln 3}{(3^x+1)\ln 2} > 0, \forall x \in (-\infty; 0)$.

Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$		0
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

Khi đó với yêu cầu bài toán thì $m \geq 1$

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3; 2; 1)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C không trùng với điểm gốc tọa độ sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Trong các mặt phẳng sau, tìm mặt phẳng song song với mặt phẳng (P).

A $3x + 2y + z + 14 = 0$. (B) $2x + y + 3z + 9 = 0$.

(C) $3x + 2y + z - 14 = 0$. (D) $2x + y + z - 9 = 0$.

Câu 46. Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Biết tập hợp các điểm A biểu diễn hình học số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(4; 3)$ và bán kính $R = 3$. Đặt M là giá trị lớn nhất, m là giá trị nhỏ nhất của $F = 4a + 3b - 1$. Tính giá trị $M + m$.

(A) $M + m = 63$. **B** $M + m = 48$. (C) $M + m = 50$. (D) $M + m = 41$.

Lời giải.

Ta có phương trình đường tròn $(C):(x-4)^2+(y-3)^2=9$.

Do điểm A nằm trên đường tròn (C) nên ta có $(a-4)^2+(b-3)^2=9$.

Ta có $F=4a+3b-1 \Rightarrow a=\dfrac{F+1-3b}{4}$

$$(a-4)^2+(b-3)^2=9 \Rightarrow \left(\frac{F+1-3b}{4}-4\right)^2+b^2-6b+9=9 \Leftrightarrow 25b^2-2(3F+3)b+F^2+225=0$$

$$\Delta'=(3F+3)^2-25F^2-5625 \geq 0 \Leftrightarrow -16F^2+18F-5625 \geq 0 \Leftrightarrow 9 \leq F \leq 39$$

Khi đó $M=39, m=9$. Vậy $M+m=48$

Chọn đáp án B ☐

Câu 47. Biết x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình

$$\log_7\left(\frac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x$$

và $x_1+2x_2=\dfrac{1}{4}(a+\sqrt{b})$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

A $a+b=16$. **B** $a+b=11$. **C** $a+b=14$. **D** $a+b=13$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$ và $x \neq \dfrac{1}{2}$.

Ta có

$$\log_7\left(\frac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x \Leftrightarrow \log_7\left(\frac{(2x-1)^2}{2x}\right)+4x^2-4x+1=2x$$
$$\Leftrightarrow \log_7(2x-1)^2+(2x-1)^2=\log_7 2x+2x(*)$$

Xét hàm số $f(t)=\log_7 t+t \Leftrightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 7}+1>0$ với $t>0$.

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến khi $t>0$.

Phương trình (*) có dạng $f((2x-t)^2)=f(2x) \Leftrightarrow (2x-1)^2=2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}\end{array}\right.$

Vậy $x_1+2x_2=\left[\begin{array}{l} \dfrac{9-\sqrt{5}}{4} \text{ (loại)} \\ \dfrac{9+\sqrt{5}}{4}\end{array}\right. \Rightarrow a=9; b=5 \Rightarrow a+b=9+5=14$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 48. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ có bán kính $R=\sqrt{19}$, đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=5+t \\ y=-2-4t \\ z=-1-4t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x-y-3z-1=0$.

Trong các số $\{a; b; c; d\}$ theo thứ tự dưới đây, số nào thỏa mãn $a+b+c+d=43$, đồng thời tâm I của (S) thuộc đường thẳng d và (S) tiếp xúc mặt phẳng (P)?

A $\{-6;-12;-14;75\}$.
B $\{6;10;20;7\}$.
C $\{-10;4;2;47\}$.
D $\{3;5;6;29\}$.

Lời giải.

Ta có $I \in d \Rightarrow I(5+t;2-4t;-1-4t)$.

Do (S) tiếp xúc với (P) nên $d(I;(P)) = R = \sqrt{19} \Leftrightarrow |19+19t| = 19 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-2 \end{array}\right.$

Mặt khác (S) có tâm $I(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2})$; bán kính $R = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4} - d} = \sqrt{19}$.

Xét khi $t=0 \Rightarrow I(5;-2;-1) \Rightarrow \{a;b;c;d\} = \{-10;4;2;47\}$.

Do $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4} - d \neq 19$ nên ta loại trường hợp này.

Xét khi $t=2 \Rightarrow \{a;b;c;d\} = \{-6;-12;-14;75\}$.

Do $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4} - d = 19$ nên $t=2$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Đặt $f(n) = (n^2+n+1)^2+1$ Xét dãy số (u_n) sao cho $u_n = \dfrac{f(1)\cdot f(3)\cdot f(5)\cdots f(2n-1)}{f(2)\cdot f(4)\cdot f(6)\cdots f(2n)}$. Tính $\lim n\sqrt{u_n}$.

A $\lim n\sqrt{u_n} = \sqrt{2}$.
B $\lim n\sqrt{u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
C $\lim n\sqrt{u_n} = \sqrt{3}$.
D $\lim n\sqrt{u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Xét $g(n) = \dfrac{f(2n-1)}{f(2n)} = \dfrac{(4n^2-2n+1)^2+1}{(4n^2+2n+1)^2+1}$.

Đặt $\begin{cases} a = 4n^2+1 \\ b = 2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \pm 2b = (2n\pm 1)^2 \\ a = b^2+1 \end{cases}$

$$\Rightarrow g(n) = \frac{(a-b)^2+1}{(a+b)^2+1} = \frac{a^2-2ab+b^2+1}{a^2+2ab+b^2+1} = \frac{a^2-2ab+a}{a^2+2ab+a} = \frac{a-2b+1}{a+2b+1} = \frac{(2n-1)^2+1}{(2n+1)^2+1}$$

$$\Rightarrow u_n = \prod_{i=1}^{n} g(i) = \frac{2}{10}\cdot\frac{10}{26}\cdots\frac{(2n-1)^2+1}{(2n+1)^2+1} = \frac{2}{(2n+1)^2+1}$$

$$\Rightarrow \lim n\sqrt{u_n} = \lim\sqrt{\frac{2n^2}{4n^2+4n+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $\begin{cases} f(x).f(a-x)=1 \\ f(x)>0, \forall x\in[0;a] \end{cases}$ và $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \frac{ba}{c}$, trong đó b,c là hai số nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó $b+c$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

A $(11;22)$.
B $(0;9)$.
C $(7;21)$.
D $(2017;2020)$.

Lời giải.

Đặt $t = a-x \Rightarrow dt = -dx$.

Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=a; x=a \Rightarrow t=0$.

Lúc đó $I = \int\limits_0^a \dfrac{dx}{1+f(x)} = \int\limits_a^0 \dfrac{-dt}{1+f(a-t)} = \int\limits_0^a \dfrac{dx}{1+f(a-x)} = \int\limits_0^a \dfrac{dx}{1+\dfrac{1}{f(x)}} = \int\limits_0^a \dfrac{f(x)dx}{1+f(x)}$.

Suy ra $2I = I + I = \int\limits_0^a \dfrac{dx}{1+f(x)} + \int\limits_0^a \dfrac{f(x)dx}{1+f(x)} = \int\limits_0^a 1dx = a$.

Do đó $I = \dfrac{1}{2}a \Rightarrow b = 1; c = 2 \Rightarrow b + c = 3$.

Chọn đáp án B □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. A	3. C	4. B	5. D	6. C	7. A	8. B	9. C	10. B
11. C	12. B	13. A	14. C	15. B	16. D	17. C	18. A	19. B	20. C
21. D	22. A	23. B	24. C	25. D	26. A	27. B	28. A	29. A	30. B
31. A	32. C	33. D	34. B	35. C	36. A	37. D	38. B	39. C	40. B
41. D	42. B	43. C	44. D	45. A	46. B	47. C	48. A	49. D	50. B

170 ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA 2018 TRƯỜNG THPT CHUYÊN QUANG TRUNG - BÌNH PHƯỚC LẦN 1

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho số phức z thỏa mãn $z(2-i)+13i=1$. Tính mô-đun của số phức z.

A. $|z|=\sqrt{34}$. B. $|z|=34$. C. $|z|=\dfrac{5\sqrt{34}}{3}$. D. $|z|=\dfrac{\sqrt{34}}{3}$.

Câu 2. Tìm số phức z thỏa mãn $|z-2|=|z|$ và $(z+1)(\overline{z}-i)$ là số thực.

A. $z=1-2i$. B. $z=-1-2i$. C. $z=2-i$. D. $z=1+2i$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases}|z-2|=|z|\\(z+1)(\overline{z}-i)\text{ là số thực}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|(a-2)+bi|=|a+bi|\\(a+bi+1)(a-bi-i)\text{ là số thực}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(a-2)^2+b^2=a^2+b^2\\a^2+a+b^2+b-(a+b+1)i\text{ là số thực}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4a+4=0\\a+b+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\end{cases}$$

Vậy $z=1-2i$ là số phức cần tìm.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Trong mặt phẳng phức, gọi M là điểm biểu diễn cho số phức $(z-\overline{z})^2$ với $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R},b\neq0)$. Chọn kết luận **đúng**.

A. M thuôc tia Ox.
B. M thuộc tia Oy.
C. M thuộc tia đối của tia Ox.
D. M thuộc tia đối của tia Oy.

Câu 4. Trên tập số phức, cho phương trình: $az^2+bz+c=0(a,b,c\in\mathbb{R},a\neq0)$. Chọn kết luận **sai**.

A. Phương trình luôn có hai nghiệm phức là liên hợp của nhau.
B. Nếu $\Delta=b^2-4ac<0$ thì phương trình có hai nghiệm mà mô-đun bằng nhau.
C. Nếu $b=0$ thì phương trình có hai nghiệm mà tổng bằng 0.
D. Phương trình luôn có nghiệm.

Câu 5. Gọi số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-1|=1$ và $(1+i)(\overline{z}-1)$ có phần thực bàng 1 đồng thời z không là số thực. Khi đó ab bằng

A. $ab=1$. B. $ab=2$. C. $ab=-2$. D. $ab=-1$.

Câu 6. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\tan 2x$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$.
B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.
C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k2\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.
D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 7. Chọn phát biểu **đúng**.

A. Các hàm số $y=\sin x,y=\cos x,y=\cot x$ đều là hàm số lẻ.
B. Các hàm số $y=\sin x,y=\cos x,y=\cot x$ đều là hàm số chẵn.

C Các hàm số $y = \sin x, y = \cot x, y = \tan x$ đều là hàm số lẻ.
D Các hàm số $y = \sin x, y = \cot x, y = \tan x$ đều là hàm số chẵn.

Câu 8. Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x + 1$ là đoạn $[a; b]$. Tính tổng $T = a + b$.

A $T = 0$. **B** $T = 1$. **C** $T = 2$. **D** $T = 3$.

Câu 9. Nghiệm của phương trình $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ là

A $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$. **B** $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

C $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$. **D** $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 10. Tìm góc $\alpha \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right\}$ để phương trình $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x - 2\cos x = 0$ tương đượng với phương trình $\cos(2x - \alpha) = \cos x$.

A $\alpha = \frac{\pi}{3}$. **B** $\alpha = \frac{\pi}{4}$. **C** $\alpha = \frac{\pi}{6}$. **D** $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} & \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x - 2\cos x = 0 \quad (1) \\ \Leftrightarrow\ & 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos x \\ \Leftrightarrow\ & \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos x \quad (2) \end{aligned}$$

Phương trình $\cos(2x - \alpha) = \cos x$ (3).

(1) tương đương với (3) $\Leftrightarrow$ (2) tương đương với (3).

Nghĩa là:

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos x \Leftrightarrow \cos(2x - \alpha) = \cos x$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos(2x - \alpha), \forall x \in \mathbb{R}$.

Trong các góc α đề bài cho, chỉ có $\alpha = \frac{\pi}{3}$ thỏa mãn yêu cầu này. Do đó $\alpha = \frac{\pi}{3}$ là góc cần tìm.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Phương trình $\cos 2x + 4\sin x + 5 = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $(0; 10\pi)$?

A 2. **B** 3. **C** 4. **D** 5.

Câu 12. Nghiệm của phương trình $\frac{\cos 2x + 3\sin x - 2}{\cos x} = 0$ là

A $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$. **B** $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Ⓒ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Ⓓ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của CD, CB, SA. Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNK) là một đa giác (H). Hãy chọn khẳng định **đúng**.

Ⓐ (H) là một hình thang.

B (H) là một ngũ giác.

Ⓒ (H) là một hình bình hành.

Ⓓ (H) là một tam giác.

Câu 14. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và CC'. Khi đó CB' song song với

Ⓐ AM.

Ⓑ $(BC'M)$.

Ⓒ $A'N$.

D $(AC'M)$.

Câu 15. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = 2, DB = DC = 3$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

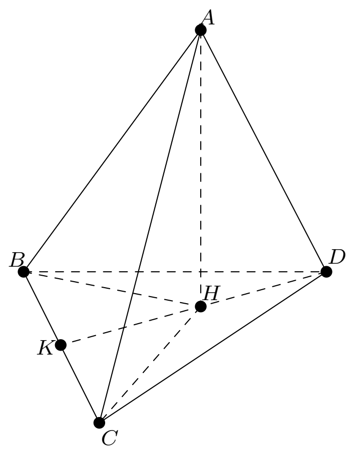
A $BC \perp AD$.

Ⓑ $AC \perp BD$.

Ⓒ $AB \perp (BCD)$.

Ⓓ $DC \perp (ABC)$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (DBC). Vì $DB = DC$ nên $HB = HC$. Mặt khác, H không trùng D vì $HB < AB = 2 < 3 = DB$.

Trên mặt phẳng (DBC) ta đồng thời có $HB = HC$ và $DB = DC$. Do đó DH là đường trung trực của BC. Vậy $BC \perp DH$. Mặt khác, $BC \perp AH$ (do $BC \subset (DBC)$).

Từ đây ta suy ra $BC \perp (AHD)$, do đó $BC \perp AD$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a, BC = a\sqrt{2}$. Số đo của góc $(AB; SC)$ bằng

Ⓐ $90°$.

B $60°$.

Ⓒ $45°$.

Ⓓ $30°$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, biết $AB = BC = a, AD = 2a, SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB, SA. Tính khoảng cách từ M đến (NCD) theo a.

(A) $\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{66}}{22}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{66}}{44}$. (D) $2a\sqrt{66}$.

Câu 18. Số mặt phẳng đối xứng của khối tứ diện đều là

(A) 6. (B) 7. (C) 8. (D) 9.

Câu 19. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V. Gọi I, J lần lượt là trung điểm hai cạnh AA' và BB'. Khi đó thể tích của khối đa diện $ABCIJC'$ bằng

(A) $\dfrac{2}{3}V$. (B) $\dfrac{3}{4}V$. (C) $\dfrac{5}{6}V$. (D) $\dfrac{4}{5}V$.

Câu 20. Người ta muốn xây một chiếc bể chứa nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\dfrac{500}{3}$ m^3. Biết đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là 100.000 đồng/m^2. Tìm kích thước của bể để chi phí thuê nhân công ít nhất. Khi đó chi phí thuê nhân công là:

(A) 11 triệu đồng. (B) 13 triệu đồng. (C) 15 triệu đồng. (D) 17 triệu đồng.

.

Lời giải.

Gọi chiều rộng của đáy bể là x (m) $(x > 0)$. Khi đó chiều dài của đáy bể là $2x$ (m) và độ sâu của bể là $\dfrac{250}{3x^2}$ (m).

Diện tích cần xây chính là diện tích của 1 mặt đáy cộng diện tích của 4 mặt bên. Tổng diện tích đó là:

$$f(x) = 2x^2 + 2\left(2x \cdot \frac{250}{3x^2} + x \cdot \frac{250}{3x^2}\right) \ (\text{m}^2)$$

Giá thuê nhân công nhỏ nhất khi tổng diện tích nhỏ nhất. Xét hàm:

$$f(x) = 2x^2 + \frac{500}{x}, x > 0$$

Khảo sát hàm này trên $(0; +\infty)$ ta có $\min\limits_{x\in(0;+\infty)} f(x) = 150$, đạt được khi và chỉ khi $x = 5$. Vậy giá thuê nhân công khi đó là $150.100000 = 15.000.000$ (đồng).

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ 2x, & x < 1. \end{cases}$ Mệnh đề **sai** là

(A) f không có đạo hàm tại $x_0 = 1$. (B) $f'(0) = 2$.

(C) $f'(1) = 2$. (D) $f'(2) = 4$.

Câu 22. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 1}$. Nghiệm của phương trình $y'.y = 2x + 1$ là

(A) $x = 1$. (B) $x = -1$. (C) Vô nghiệm. (D) $x = 2$.

Câu 23. Có bao nhiêu số chẵn mà mỗi số có 4 chữ số đôi một khác nhau?

(A) 2296. (B) 2520. (C) 4500. (D) 5000.

Câu 24. Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 2 quyển sách hoá. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất để 3 quyển lấy ra có ít nhất một quyển là sách toán.

(A) $\dfrac{2}{7}$. (B) $\dfrac{10}{21}$. (C) $\dfrac{37}{42}$. (D) $\dfrac{3}{4}$.

Câu 25. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $P(x) = (x+1)^6 + (x+1)^7 + \cdots + (x+1)^{12}$.

(A) 1287. (B) 1711. (C) 1715. (D) 1716.

Câu 26. Đội văn nghệ của nhà trường gồm 4 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 2 học sinh lớp 12C. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ đội văn nghệ để biểu diễn trong lễ khai giảng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn?

(A) 98. (B) 120. (C) 150. (D) 360.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm cấp một và cấp hai trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) Hàm số đạt cực đại tại x_0 thì $y'(x_0) = 0$.

(B) $y'(x_0) = 0$ và $y''(x_0) = 0$ thì x_0 không là điểm cực trị của hàm số.

(C) $y'(x_0) = 0$ và $y''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.

(D) $y'(x_0) = 0$ và $y''(x_0) \neq 0$ thì x_0 là điểm cực trị của hàm số.

Câu 28. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 2$ tăng trên khoảng $(1; +\infty)$.

(A) $m \neq 3$. (B) $m \geq 3$. (C) $m \leq 3$. (D) $m < 3$.

Câu 29. Cho hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ có đồ thị $(\mathscr{C})$. Viết phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = -9$.

(A) $y + 16 = -9(x+3)$. (B) $y - 16 = -9(x-3)$.

(C) $y - 16 = -9(x+3)$. (D) $y = -9(x+3)$.

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+4}{x-m}$ có tiệm cận đứng.

(A) $m > -2$. (B) $m = -2$. (C) $m < -2$. (D) $m \neq -2$.

Câu 31. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2} + m$ là $3\sqrt{2}$. Giá trị của m là

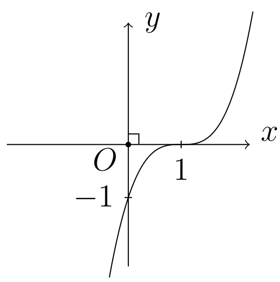
(A) $m = \sqrt{2}$. (B) $m = 2\sqrt{2}$. (C) $m = -\sqrt{2}$. (D) $m = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 32.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Hỏi (C) là đồ thị của hàm số nào?

(A) $y = (x-1)^3$. (B) $y = x^3 - 1$.

(C) $y = x^3 + 1$. (D) $y = (x+3)^3$.



Câu 33. Cho các hàm số $(I): y = x^2 + 3$; $(II): y = x^3 + 3x^2 + 3x - 5$; $(III): y = x - \dfrac{1}{x+2}$; $(IV): y = (2x+1)^7$. Các hàm số không có cực trị là

(A) $(I), (II), (III)$. (B) $(II), (III), (IV)$. (C) $(III), (IV), (I)$. (D) $(IV), (I), (II)$.

Câu 34. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 3x + 2}$ là

(A) $x = -1; x = -2$. (B) $x = -2$.

(C) $x = -1$. (D) Không có tiệm cận đứng.

Câu 35. Tìm m để đường thẳng $y = x + m$ (d) cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$ (C) tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh của đồ thị (C).

A $m \in \mathbb{R}$. **B** $m > -\dfrac{1}{2}$. **C** $m < -\dfrac{1}{2}$. **D** $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

Câu 36. Cho hàm số $y = x + \sin 2x + 2017$. Tìm tất cả các điểm cực tiểu của hàm số.

A $x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **B** $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **D** $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 37. Số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = 2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 4}$ là

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

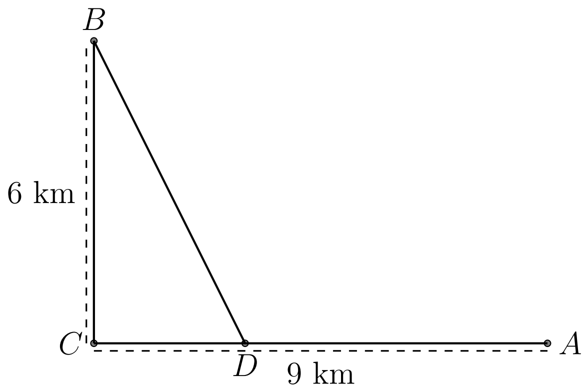
Câu 38. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a \neq 0)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A Đồ thị hàm số luôn cắt trục hoành. **B** Hàm số luôn có cực trị.

C $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. **D** Hàm số luôn tăng trên $\mathbb{R}$.

Câu 39.

Một công ty muốn làm đường ống dẫn dầu từ một kho A ở trên bờ biển đến một vị trí B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Gọi C là điểm trên bờ sao cho BC vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến C là 9 km. Người ta cần xác định một vị trí D trên AC để lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ADB. Tính khoảng cách AD để số tiền chi phí thấp nhất, biết rằng giá để lắp đặt mỗi km đường ống trên bờ là 100.000.000 đồng và dưới nước là 260.000.000 đồng.



A 6 km. **B** 6.5 km.

C 7 km. **D** 7.5 km.

Lời giải.

Gọi x km là khoảng cách AD cần tìm $(0 \leq x \leq 9)$. Từ đó suy ra số tiền để lắp đường ống trên bờ là x (trăm triệu đồng).

Vì $AD = x$ km nên $CD = 9 - x$ km. Xét tam giác BCD vuông tại C ta có

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 = 36 + (9-x)^2 \Rightarrow BD = \sqrt{36 + (9-x)^2} \text{ km}$$

Từ đó suy ra số tiền cần để lắp đường ống dưới nước là $2,6 \cdot \sqrt{36 + (9-x)^2}$ (trăm triệu đồng).

Vậy tổng chi phí phải trả để xây dựng đường ống là

$$x + 2,6 \cdot \sqrt{36 + (9-x)^2} \text{ (trăm triệu đồng)}$$

Bài toán thực tế yêu cầu chi phí lắp đặt ống dẫn phải thấp nhất, do đó ta sẽ tìm $\min\limits_{x \in [0;9]} f(x)$ với $f(x) = x + 2,6 \cdot \sqrt{36 + (9-x)^2}$.

Ta có $f'(x) = 1 - \dfrac{2,6(9-x)}{\sqrt{36 + (9-x)^2}}$.

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6,5$.
Tính $f(0) = \dfrac{39\sqrt{13}}{5}$; $f(9) = 24,6$; $f(6,5) = 23,4$.
Vậy $\min\limits_{x\in[0;9]} f(x) = 23,4$ tại $x = 6,5$.
Vậy $x = 6,5$ hay $AD = 6,5$ km thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 40. Trong tập các số phức, gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - z + \dfrac{2017}{4} = 0$ với z_2 có phần ảo dương. Cho số phức z thỏa mãn $|z - z_1| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z - z_2|$ là

A $\sqrt{2016} - 1$. **B** $\sqrt{2017} - 1$. **C** $\dfrac{\sqrt{2017} - 1}{2}$. **D** $\dfrac{\sqrt{2016} - 1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $z^2 - z + \dfrac{2017}{4} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{1}{2} - 6i\sqrt{14} \\ z_2 = \dfrac{1}{2} + 6i\sqrt{14} \end{array}\right.$.
Gọi I, A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2, z trong mặt phẳng phức.
Ta có $IA = |z_1 - z_2| = 12\sqrt{14}$.
Khi đó $\min P = 12\sqrt{14} - 1 = \sqrt{2016} - 1$
Chọn đáp án A □

Câu 41. Trong tập các số phức, cho phương trình $z^2 - 6z + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$ (1). Gọi m_0 là một giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1.\overline{z_1} = z_2.\overline{z_2}$. Hỏi trong khoảng $(0; 20)$ có bao nhiêu giá trị $m_0 \in \mathbb{N}$?

A 10. **B** 11. **C** 12. **D** 13.

Lời giải.

Đề bài yêu cầu ta tìm các giá trị nguyên của m trong khoảng $(0; 20)$, sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $z_1.\overline{z_1} = z_2.\overline{z_2}$, hay $|z_1| = |z_2|$ (*).
Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt là $\Delta' > 0$ hoặc $\Delta' < 0$.
Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt. Khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow z_1 = -z_2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0.$$

Điều này không thể xảy ra do theo Định lý Vi-ét, $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} = 6 \neq 0$. Vậy nếu $\Delta' > 0$ ta không tìm được m thỏa mãn yêu cầu đề bài.
Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 là hai số phức liên hợp. Khi đó hiển nhiêu ta sẽ có $|z_1| = |z_2|$.
Vậy phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa (*) $\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow 9 - m < 0 \Leftrightarrow m > 9$.
Suy ra trong khoảng $(0; 20)$ có 10 giá trị $m_0 \in \mathbb{N}$.
Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C và $ABDC$ là hình thoi trong đó $D(0; -3)$, A thuộc trục tung. Khi đó m thuộc khoảng nào?

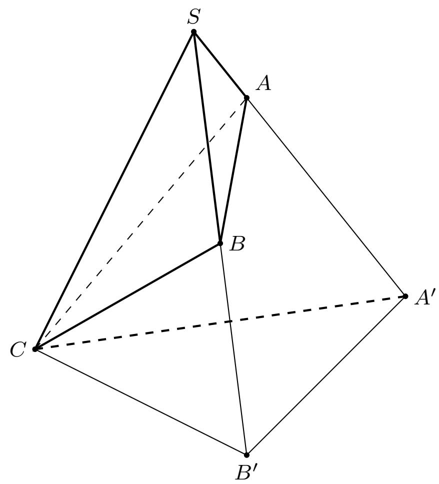
A $m \in \left(-1; \dfrac{1}{2}\right)$. **B** $m \in \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{9}{5}\right)$. **C** $m \in \left(\dfrac{9}{5}; 2\right)$. **D** $m \in (2; 3)$.

Câu 43. Cho khối chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60°$; $SA = a$, $SB = 2a$, $SC = 4a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B** $\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **C** $\dfrac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. **D** $\dfrac{8a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Cách 1:



Trên tia SB lấy điểm B' sao cho $SB' = 4a$. Tương tự trên tia SA lấy điểm A' sao cho $SA' = 4a$.

Do $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60°$ và $SA' = SB' = SC$ nên dễ dàng nhận thấy $S.A'B'C$ là một tứ diện đều cạnh $4a \Rightarrow$

$V_{S.A'B'C} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}(4a)^3 = \dfrac{16\sqrt{2}}{3}a^3$.

(Công thức thể tích tứ diện đều cạnh x: $V = \dfrac{\sqrt{2}}{12}x^3$)

Sử dụng tỉ lệ thể tích tứ diện:

$$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C}} = \frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC} = \frac{a}{4a}.\frac{2a}{4a} = \frac{1}{4}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$\Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{8}V_{S.A'B'C} = \dfrac{1}{8}.\dfrac{16\sqrt{2}}{3}a^3 = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}a^3$.

Cách 2:

Sử dụng công thức:

Nếu hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$, $\widehat{ASC} = x$, $\widehat{BSC} = y$, $\widehat{CSA} = z$ thì:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{6}abc\sqrt{1 + 2\cos x\cos y\cos z - \cos^2 x - \cos^2 y - \cos^2 z}.$$

Áp dụng cho bài này với $SA = a$, $SB = 2a$, $SC = 4a$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60°$, ta được $V_{SABC} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}a^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Nghiệm của phương trình $\tan 3x = \tan x$ là

A $x = k\dfrac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$. **B** $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. **C** $x = k\dfrac{\pi}{6}$ $(k \in \mathbb{Z})$. **D** $x = k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Câu 45. Cho hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - ax^2 - 3ax + 4$. Để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn

$$\frac{x_1^2 + 2ax_2 + 9a}{a^2} + \frac{a^2}{x_2^2 + 2ax_1 + 9a} = 2$$

thì a thuộc khoảng nào?

A $a \in \left(-5; -\dfrac{7}{2}\right)$. **B** $a \in \left(-\dfrac{7}{2}; -3\right)$. **C** $a \in \left(-3; -\dfrac{5}{2}\right)$. **D** $a \in (-2; -1)$.

Lời giải.

Ta có: $y' = x^2 - 2ax - 3a$.

Hàm số có hai điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow a^2+3a>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a>0 \\ a<-3 \end{array}\right.$.

Khi đó, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $y'=0$ thì x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số, hơn nữa:

$$\begin{cases} x_1^2-2ax_1-3a=0 \\ x_2^2-2ax_2-3a=0 \\ x_1+x_2=2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2=2ax_1+3a \\ x_2^2=2ax_2+3a \\ x_1+x_2=2a \end{cases}$$

Khi đó:

$$\frac{x_1^2+2ax_2+9a}{a^2}+\frac{a^2}{x_2^2+2ax_1+9a}=2 \Leftrightarrow \frac{(2ax_1+3a)+2ax_2+9a}{a^2}+\frac{a^2}{(2ax_2+3a)+2ax_1+9a}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a(x_1+x_2)+12a}{a^2}+\frac{a^2}{2a(x_1+x_2)+12a}=2 \Leftrightarrow \frac{4a^2+12a}{a^2}+\frac{a^2}{4a^2+12a}=2$$

$$\Leftrightarrow t+\frac{1}{t}-2=0\left(t=\frac{4a^2+12a}{a^2}\right) \Leftrightarrow t^2-2t+1=0$$

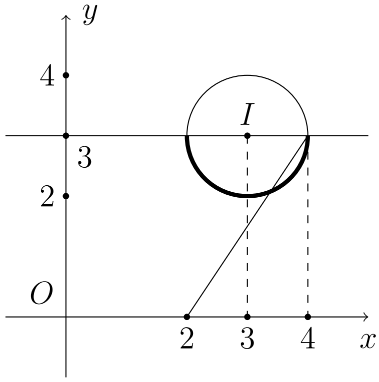
$$\Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow 4a^2+12a=a^2 \Leftrightarrow 3a^2+12a=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-4 \\ a=0 \text{ (loại)} \end{array}\right..$$

Chọn đáp án A □

Câu 46. Cho số phức thỏa mãn $|z-2i| \le |z-4i|$ và $|z-3-3i|=1$. Giá trị lớn nhất của $|z-2|$ là

A $\sqrt{10}+1$. B $\sqrt{13}+1$. C $\sqrt{10}$. D $\sqrt{13}$.

Lời giải.



Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng Oxy. Điểm $A(0;2)$ biểu diễn số phức $2i$, điểm $B(0;4)$ biểu diễn số phức $4i$, điểm $I(3;3)$ biểu diễn số phức $3+3i$.

Bất đẳng thức $|z-2i| \le |z-4i|$ tương đương với $MA \le MB$, tức là M "gần" A hơn "gần" B. Vậy tập hợp số phức z thỏa mãn $|z-2i| \le |z-4i|$ được biểu diễn trong mặt phẳng Oxy là nửa mặt phẳng bờ là đường trung trực của AB (đường $y=3$) chứa điểm A.

Còn $|z-3-3i|=1$ dẫn đến $MI=1$, nghĩa là M thuộc đường tròn (C) tâm $I(3;3)$, bán kính $R=1$.

Tóm lại, tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn yêu cầu đề bài là nửa dưới của đường tròn (C). Ta gọi tập hợp điểm này là T.

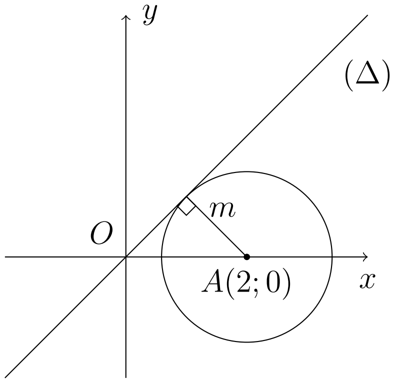
Đề bài yêu cầu tìm giá trị lớn nhất của $|z-2|$, nghĩa là tìm khoảng cách lớn nhất từ điểm $D(2;0)$ đến những điểm thuộc T. Dễ dàng nhận ra khoảng cách lớn nhất này chính là khoảng cách từ D đến điểm có tọa độ $(4;3)$ thuộc T, và bằng $\sqrt{13}$.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Cho số phức z thỏa mãn $\dfrac{1+i}{z}$ là số thực và $|z-2|=m$ với $m\in\mathbb{R}$. Gọi m_0 là một giá trị của m để có đúng một số phức thỏa mãn bài toán. Khi đó

A $m_0\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **B** $m_0\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **C** $m_0\in\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **D** $m_0\in\left(\dfrac{3}{2};2\right)$.

Lời giải.



Đặt số phức $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$.
Ta có:

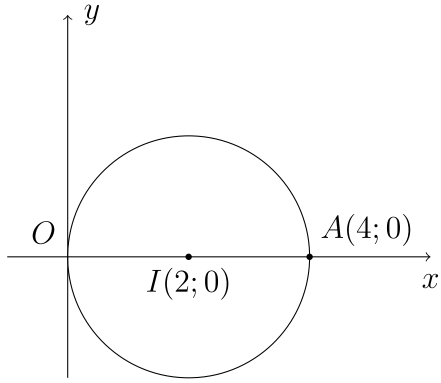
$$\frac{1+i}{z}=\frac{(1+i)\overline{z}}{z.\overline{z}}=\frac{(1+i)(x-yi)}{x^2+y^2}=\frac{x+y+(x-y)i}{x^2+y^2}=\frac{x+y}{x^2+y^2}+\frac{x-y}{x^2+y^2}i.$$

Vậy $\dfrac{1+i}{z}$ là số thực khi và chỉ khi $\dfrac{x-y}{x^2+y^2}=0$ hay $x=y\neq 0$.
Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn một số phức z như trên trong mặt phẳng Oxy. Khi đó tập hợp điểm M là đường thẳng $(\Delta): x-y=0$ (bỏ đi điểm O).
Còn tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-2|=m$ là đường tròn (C_m) tâm $A(2;0)$, bán kính m.
Khi đó, yêu cầu bài toán tương đương với tìm m sao cho đường thẳng (Δ) và (C_m) có đúng một điểm chung, hay (Δ) tiếp xúc với (C_m).
(Δ) tiếp xúc với $(C_m)\Leftrightarrow d(A,(\Delta))=m\Leftrightarrow m=\dfrac{|2-0|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$.
Vậy $m_0=\sqrt{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 48. Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho với mỗi $m\in S$ có đúng một số phức thỏa mãn $|z-m|=6$ và $\dfrac{z}{z-4}$ là số thuần ảo. Tính tổng của các phần tử của tập S.

A 0. **B** 8. **C** 10. **D** 16.

Lời giải.



Đặt số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có: $\dfrac{z}{z-4} = \dfrac{z(\overline{z}-4)}{(z-4)(\overline{z}-4)} = \dfrac{|z|^2 - 4z}{|z-4|^2} = \dfrac{x^2+y^2-4x-4yi}{(x-4)^2+y^2} = \dfrac{x^2+y^2-4x}{(x-4)^2+y^2} - \dfrac{4y}{(x-4)^2+y^2}i$.

Vậy $\dfrac{z}{z-4}$ là số thuần ảo (*)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4x=0 \\ y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2+y^2=4 \\ y \neq 0 \end{cases}$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn (*) trong mặt phẳng Oxy, thì tập hợp điểm M là đường tròn

$$(C) : (x-2)^2 + y^2 = 4$$

tâm $I(2; 0)$ bán kính $R = 2$, bỏ đi hai điểm $A(4; 0)$ và $O(0; 0)$. Ta gọi tập hợp điểm này là T.

Còn tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - m| = 6$ trong mặt phẳng Oxy là đường tròn (C_m) tâm $J(m; 0)$ bán kính $R = 6$.

Vậy số thực m thỏa mãn yêu cầu đề bài là số thực m sao cho đường tròn (C_m) tiếp xúc với tập hợp điểm T.

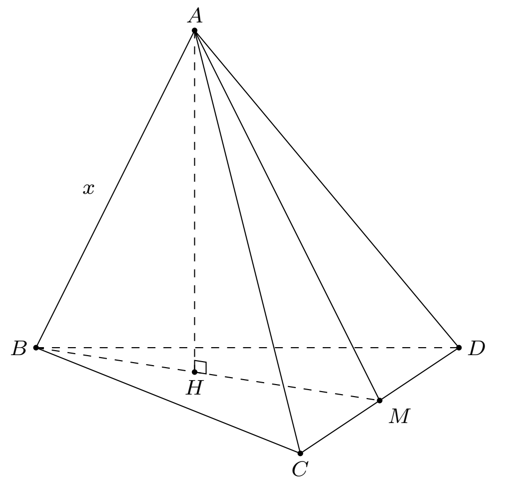
Tuy nhiên, ta thấy rằng nếu (C_m) tiếp xúc với (C) thì hai tiếp điểm sẽ nằm trên đường nối tâm IJ, nghĩa là trục Ox. Mặt khác, tập hợp T lại là đường tròn (C) bỏ đi 2 giao điểm với trục Ox. Như vậy thì (C_m) không thể tiếp xúc với T, dẫn đến tập hợp S không có phần tử.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Xét khối tứ diện $ABCD$, $AB = x$, các cạnh còn lại bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất.

A $x = \sqrt{14}$. **B** $x = \sqrt{6}$. **C** $x = 2\sqrt{2}$. **D** $x = 3\sqrt{2}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm CD. Do ACD và BCD là những tam giác đều, ta dễ dàng chứng minh được $CD \perp (ABM)$.
Trong (ABM), vẽ $AH \perp BM$ tại H, suy ra $AH \perp (BCD)$.
Ta có

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}AH.S_{BCD} = \frac{1}{3}.AH.\frac{\sqrt{3}}{4}.(2\sqrt{3})^2 = \sqrt{3}AH.$$

Vậy để thể tích khối tứ diện $ABCD$ là lớn nhất thì AH phải lớn nhất. Mặt khác, $AH \leq AM = 3$ và dấu bằng xảy ra khi $H \equiv M$.
Nếu $H \equiv M$ thì khi đó,

$$x = AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho hàm số $y = \dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[1;2]} y + \max\limits_{[1;2]} y = \dfrac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. $2 < m \leq 4$. B. $0 < m \leq 2$. C. $m \leq 0$. **D.** $m > 4$.

——— **HẾT** ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. A	3. C	4. A	5. A	6. A	7. C	8. C	9. B	10. A
11. D	12. A	13. B	14. D	15. A	16. B	17. C	18. A	19. A	20. C
21. A	22. C	23. A	24. C	25. C	26. A	27. B	28. B	29. C	30. D
31. A	32. A	33. B	34. B	35. A	36. B	37. B	38. A	39. B	40. A
41. A	42. B	43. B	44. B	45. A	46. D	47. C	48. A	49. D	50. D

171 THI THỬ LẦN 1 - THPT CHUYÊN BẮC NINH NĂM 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho chuyển động xác định bởi phương trình $S = t^3 - 3t^2 - 9t$, trong đó t được tính bằng giây (s) và S được tính bằng mét (m). Tính vận tốc của chuyển động đó tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

A -12 m/s. **B** -21 m/s. **C** -12 m/s^2. **D** 12 m/s.

Lời giải.

$v = S' = 3t^2 - 6t - 9$

$a = v' = 6t - 6$

$a = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$\Rightarrow v(1) = -12$ (m/s).

Chọn đáp án A □

Câu 2. Hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A $(0; +\infty)$. **B** $\left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$. **C** $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right)$. **D** $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 8x^3$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

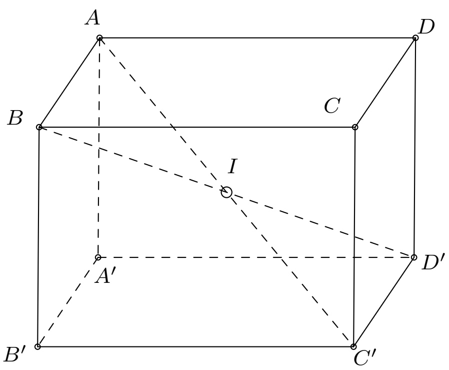
Dựa vào bảng biến thiên thì hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Hình đa diện nào sau đây có tâm đối xứng?

A Hình hộp chữ nhật. **B** Hình tứ diện đều.

C Hình chóp tứ giác đều. **D** Hình lăng trụ tam giác.



Lời giải.

Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm đối xứng là trung điểm của đường chéo chính AC'.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho hai hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{2}}$ và $g(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{2}}$. Gọi d_1, d_2 lần lượt là tiếp tuyến của mỗi đồ thị hàm số $f(x)$, $g(x)$ đã cho tại giao điểm của chúng. Hỏi góc giữa hai tiếp tuyến trên bằng bao nhiêu?

(A) 60°. (B) 45°. (C) 30°. **D** 90°.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $f(x)$ và $g(x)$: $\dfrac{1}{x\sqrt{2}} = \dfrac{x^2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Ta có $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2\sqrt{2}}$; $g'(x) = \sqrt{2}x$; $f(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = g(1)$ và $f'(1) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $g'(1) = \sqrt{2}$.

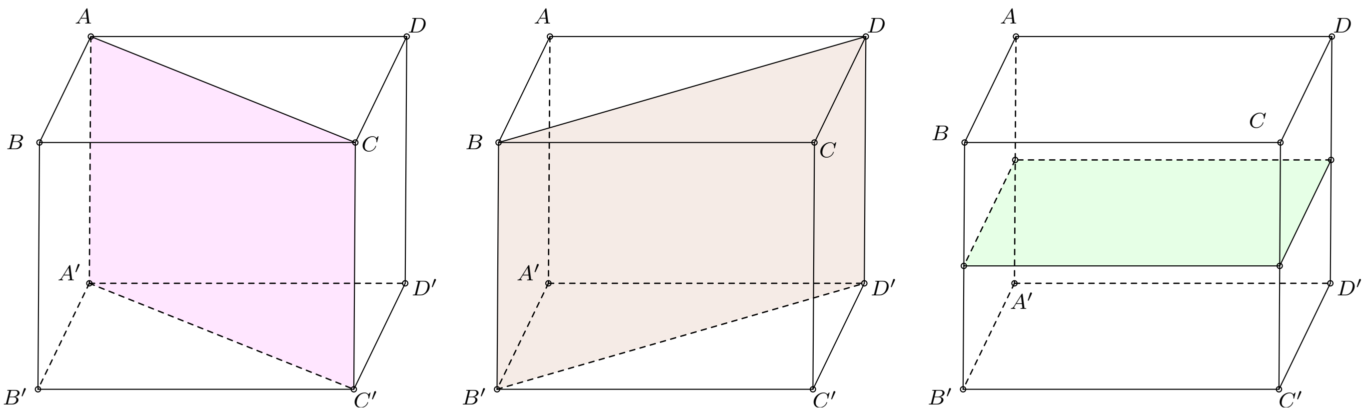
Hệ số góc của hai tiếp tuyến thoả mãn $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2} = -1$ nên hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Hình hộp đứng có đáy là hình thoi thì có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

(A) 1. **B** 3. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.



Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$ có đồ thị (C). Tồn tại hai tiếp tuyến phân biệt của (C) có cùng hệ số góc k, đồng thời đường thẳng đi qua các tiếp điểm của hai tiếp tuyến đó cắt các trục Ox, Oy tương ứng tại A và B sao cho $OA = 2017.OB$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của k thỏa mãn yêu cầu bài toán?

(A) 0. (B) 1. **C** 2. (D) 3.

Lời giải.

Đồ thị (C) có 2 tiếp tuyến phân biệt có cùng hệ số góc k

$\Leftrightarrow$ hệ phương trình (I): $\begin{cases} y = x^3 + 6x^2 + 9x + 3 & (1) \\ k = 3x^2 + 12x + 9 & (2) \end{cases}$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow \Delta'_{(2)} = 6^2 - 3(9 - k) = 9 + 3k > 0 \Leftrightarrow k > -3$

Từ hệ (I) ta có $\begin{cases} y = \left(\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}\right)\left(3x^2 + 12x + 9\right) - 2x - 3 \\ k = 3x^2 + 12x + 9 \end{cases} \Rightarrow y = \left(\dfrac{k}{3} - 2\right)x + \dfrac{2}{3}k - 3 \ (*)$

Như vậy $(*)$ là phương trình của đường thẳng đi qua tiếp điểm của 2 tiếp tuyến cần tìm.

Khi đó $A\left(\dfrac{-2k+9}{k-6}; 0\right)$; $B\left(0; \dfrac{2k-9}{3}\right)$; $(k \neq 6)$.

Theo bài ta có $OA = 2017.OB \Leftrightarrow \left|\dfrac{2k-9}{k-6}\right| = 2017\left|\dfrac{-2k+9}{3}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \dfrac{9}{2} \\ k = 6057 \\ k = -6045 \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$

Chọn đáp án C □

Câu 7. Tìm tất cả các số tự nhiên k sao cho $\mathrm{C}_{14}^{k}, \mathrm{C}_{14}^{k+1}, \mathrm{C}_{14}^{k+2}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

A $k = 4, k = 5$. B $k = 3, k = 9$. C $k = 7, k = 8$. D $k = 4, k = 8$.

Lời giải.

$\mathrm{C}_{14}^{k}, \mathrm{C}_{14}^{k+1}, \mathrm{C}_{14}^{k+2}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow \mathrm{C}_{14}^{k} + \mathrm{C}_{14}^{k+2} = 2\mathrm{C}_{14}^{k+1}$ $(k \leqslant 12; k \in \mathbb{N})$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{(14-k)(13-k)} + \dfrac{1}{(k+2)(k+1)} = \dfrac{1}{(k+1)(13-k)}$

$\Leftrightarrow 4k^2 - 48k + 128 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 4 \\ k = 8 \end{array}\right.$ $\big(\text{thoả mãn } k \leqslant 12; k \in \mathbb{N}\big)$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là cấp số cộng ?

A $u_n = n^2$. B $u_n = (-1)^n.n$. C $u_n = \dfrac{n}{3^n}$. D $u_n = 2n$.

Lời giải.

Dãy số (u_n) có $u_n = 2n$ có $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 2n = 2 = \text{const}$

Vậy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ m^2 - 2m + 2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số liên tục tại $x = 0$.

A $m = 2$. B $m = 3$. C $m = 0$. D $m = 1$.

Lời giải.

Ta có $f(0) = m^2 - 2m + 2$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)} = 1$

Hàm số liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Tính thể tích của khối tứ diện đều có cạnh bằng 2.

A $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. B $\sqrt{2}$. C $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. D $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD và F là trung điểm của cạnh CD. Vì tứ diện $ABCD$ đều nên $AG \perp (BCD)$

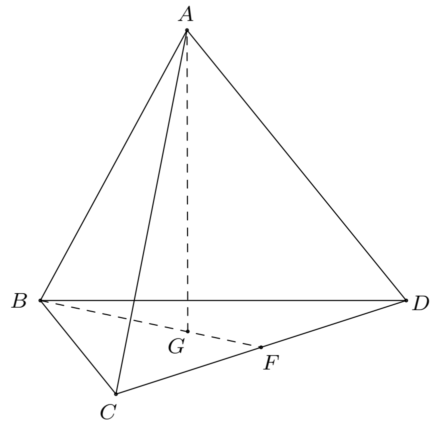
Tam giác BCD đều có cạnh bằng 2 nên

$BG = \frac{2}{3}BF = \frac{2}{3}.\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $S_{\Delta BCD} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$.

Tam giác ABG vuông tại G có $AB = 2, BG = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Nên $AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

Vậy $V_{ABCD} = \frac{1}{3}AG.S_{BCD} = \frac{1}{3}.\frac{2\sqrt{6}}{3}.\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.



Chọn đáp án C □

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân.

A $m = -\sqrt[3]{3}$. **B** $m = -1$. **C** $m = -1; m = \sqrt[3]{3}$. **D** $m = -\sqrt[3]{3}; m = 1$.

Lời giải.

Cách 1: Ta có: $y' = 4x^3 + 4mx; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -m \end{array}\right.$.

Để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow -m > 0 \Leftrightarrow m < 0(*)$.

Khi đó đồ thị có ba điểm cực trị là $A(0;1), B\left(-\sqrt{-m}; -m^2+1\right); C\left(\sqrt{-m}; -m^2+1\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = \left(-\sqrt{-m}; -m^2\right) \Rightarrow AB = \sqrt{-m + m^4}$.

$$\overrightarrow{AC} = \left(\sqrt{-m}; -m^2\right) \Rightarrow AC = \sqrt{-m + m^4}$$
$$\overrightarrow{BC} = \left(2\sqrt{-m}; 0\right) \Rightarrow BC = \sqrt{-4m}$$

Ta thấy $AB = AC \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A. Vậy ΔABC chỉ có thể vuông cân tại A.

Khi đó $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 2(-m + m^4) = -4m \Leftrightarrow m^4 = -m \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0\,(\text{loại}) \\ m^3 = -1 \end{array}\right. \Rightarrow m = -1\,(\text{thỏa})$.

Cách 2: Để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow \frac{b^3}{8a} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{8m^3}{8} + 1 = 0 \Leftrightarrow m^3 = -1 \Rightarrow m = -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Gieo ngẫu nhiên 2 con súc sắc cân đối đồng chất. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên 2 con súc sắc đó bằng 7.

A $\frac{7}{12}$. **B** $\frac{1}{6}$. **C** $\frac{1}{2}$. **D** $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Không gian mẫu $n(\Omega) = 36$.

Gọi biến cố A: "Tổng số chấm xuất hiện trên 2 con súc sắc đó bằng 7".

$$\Rightarrow A = \{(1;6), (2;5), (3;4), (4;3), (5;2), (6;1)\}$$
$$\Rightarrow n(A) = 6.$$

Xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+2}$ có đồ thị (C). Tìm tọa độ giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị (C).

(A) $I(-2;2)$. (B) $I(-2;-2)$. (C) $I(2;1)$. **D** $I(-2;1)$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x-2}{x+2} = 1$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 1$.

$\lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{x-2}{x+2} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{x-2}{x+2} = +\infty$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -2$.

Vậy giao điểm hai đường tiệm cận là $I(-2;1)$.

Chọn đáp án (D) □

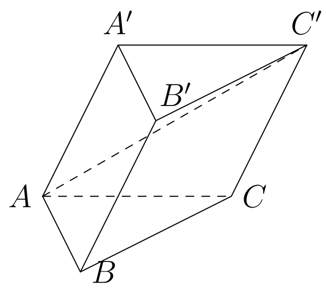
Câu 14. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 2017. Tính thể tích khối đa diện $ABCB'C'$.

(A) $\dfrac{2017}{2}$. **B** $\dfrac{4034}{3}$. (C) $\dfrac{6051}{4}$. (D) $\dfrac{2017}{4}$.

Lời giải.

Ta có: $V_{ABCB'C'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} = V_{ABC.A'B'C'} - \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

Vậy $V_{ABCB'C'} = \dfrac{2}{3}.2017 = \dfrac{4034}{3}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $5\cos x - m\sin x = m + 1$ có nghiệm.

A $m \le 12$. (B) $m \le -13$. (C) $m \le 24$. (D) $m \ge 24$.

Lời giải.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi: $5^2 + m^2 \ge (m+1)^2 \Leftrightarrow m \le 12$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2 - 5\sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $f(x) = 2x + 5\cos x + 5$. (B) $f(x) = 2x + 5\cos x + 3$.

(C) $f(x) = 2x - 5\cos x + 10$. (D) $f(x) = 2x - 5\cos x + 15$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = 2 - 5\sin x \Rightarrow f(x) = \int (2 - 5\sin x)\, dx = 2x + 5\cos x + C$.

Mà $f(0) = 10 \Rightarrow C = 5 \Rightarrow f(x) = 2x + 5\cos x + 5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Cho $I = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{2x+1} - 1}{x}$ và $J = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$. Tính $I + J$.

(A) 3. (B) 5. **C** 4. (D) 2.

Lời giải.

$I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+1}=$
1.
$J=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+2)=3.$
Vậy $I+J=4$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1:2x-3y+1=0$ và $d_2:x+y-2=0$. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến d_1 thành d_2.

A Vô số. B 0. C 1. D 4.

Lời giải.

d_1 có VTPT là $\overrightarrow{n_1}=(2;-3)$.

d_2 có VTPT là $\overrightarrow{n_1}=(1;1)$.

Vì $\dfrac{2}{1}\neq\dfrac{-3}{1}$ nên d_1 cắt d_2.

Do ảnh của đường thẳng qua phép tịnh tiến là một đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng ban đầu nên không có phép tịnh tiến nào biến d_1 thành d_2.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A $u_n=\dfrac{n}{3^n}$. B $u_n=\dfrac{n+3}{n+1}$. C $u_n=n^2+2n$. D $u_n=\dfrac{(-1)^n}{3^n}$.

Lời giải.

A sai vì dãy giảm do $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\dfrac{n+1}{3^{n+1}}}{\dfrac{n}{3^n}}=\dfrac{n+1}{3n}<1\forall n\in\mathbb{N}^*$.

B sai vì dãy giảm do $u_{n+1}-u_n=\dfrac{n+4}{n+2}-\dfrac{n+3}{n+1}=\dfrac{-2}{(n+2)(n+1)}<0\forall n\in\mathbb{N}^*$.

C đúng do $u_{n+1}-u_n=(n+1)^2+2(n+1)-n^2-2n=3+2n>0\forall n\in\mathbb{N}^*$.

D sai do dãy đan dấu (dấu thay đổi).

Chọn đáp án C □

Câu 20. Một tổ có 5 học sinh nam và 6 học sinh nữ. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 3 học sinh để làm trực nhật. Tính xác suất để 3 học sinh được chọn có cả nam và nữ.

A $\dfrac{3}{8}$. B $\dfrac{24}{25}$. C $\dfrac{9}{11}$. D $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có: $n\left(\Omega\right)=C_{11}^3=165$.

Q: "Chọn 3 học sinh có cả nam và nữ".

TH1: Chọn 2 nam và 1 nữ có $C_5^2.C_6^1=60$ cách.

TH2: Chọn 2 nữ và 1 nam có $C_5^1.C_6^2=75$ cách.

Nên $n(Q)=60+75=135$.

Xác suất cần tìm $P(Q)=\dfrac{n(Q)}{n\left(\Omega\right)}=\dfrac{135}{165}=\dfrac{9}{11}$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Giải phương trình $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin 5x$.

(A) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{9} + k\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{24} + k\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right.$. **C** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{16} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right.$. (D) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right.$.

Câu 22. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của $(2x+3)^8$.

(A) $-C_8^5 2^5 3^3$. **B** $C_8^3 2^5 3^3$. (C) $C_8^3 2^3 3^5$. (D) $C_8^5 2^2 3^6$.

Câu 23. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x - \cos^2 3x$.

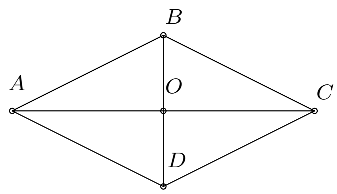
A $f'(x) = 2\cos 2x + 3\sin 6x$.
(B) $f'(x) = 2\cos 2x - 3\sin 6x$.
(C) $f'(x) = 2\cos 2x - 2\sin 3x$.
(D) $f'(x) = \cos 2x + 2\sin 3x$.

Câu 24. Xét hàm số $y = \sqrt{4-3x}$ trên đoạn $[-1;1]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Hàm số có cực trị trên khoảng $(-1;1)$.
(B) Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$.
(C) Hàm số đồng biến trên đoạn $[-1;1]$.
D Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 1$ và đạt giá trị lớn nhất tại $x = -1$.

Câu 25.

Cho hình thoi $ABCD$ tâm O (như hình vẽ). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?



(A) Phép quay tâm O góc $\dfrac{\pi}{2}$ biến tam giác OBC thành tam giác OCD.
B Phép vị tự tâm O, tỷ số $k = -1$ biến tam giác ABD thành tam giác CDB.
(C) Phép tịnh tiến theo vec tơ $\overrightarrow{AD}$ biến tam giác ABD thành tam giác CDB.
(D) Phép vị tự tâm O tỷ số $k = 1$ biến tam giác OBC thành tam giác ODA.

Câu 26. Cho cấp số nhân (u_n), với $u_1 = 3, q = \dfrac{-1}{2}$. Hỏi số $\dfrac{3}{256}$ là số hạng thứ mấy?

A 9. (B) 10. (C) 8. (D) 11.

Câu 27. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB ?

A $M(1;-10)$. (B) $N(-10;1)$. (C) $P(1;0)$. (D) $Q(0;-1)$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a, AD = a\sqrt{2}$, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$; góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

(A) $3\sqrt{2}a^3$. (B) $\sqrt{6}a^3$. (C) $3a^3$. **D** $\sqrt{2}a^3$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABC$ đáy ABC là tam giác cân tại C, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và SB Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?

(A) $CH \perp SB$. (B) $CH \perp AK$. (C) $AK \perp BC$. (D) $HK \perp HC$.

Câu 30. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 khi và chỉ khi x_0 là nghiệm của đạo hàm.

(B) Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0.

(C) Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) = 0$ thì x_0 không phải là cực trị của hàm số $y = f(x)$ đã cho.

(D) Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 và $f(x)$ liên tục tại x_0 thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 .

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = mx - m + 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.

(A) $m \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$. (B) $m \in \mathbb{R}$.

(C) $m \in \left(-\dfrac{5}{4}; +\infty\right)$. (D) $m \in (-2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y'' = 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Suy ra, điểm uốn của đồ thị là $I(1; 1)$.

Do điểm uốn I luôn thuộc đường thẳng đã cho, nên ta chỉ cần tìm điều kiện để đồ thị cắt đường thẳng tại ba điểm phân biệt.

Phương trình hoành độ giao độ của hai đồ thị là:

$mx - m + 1 = x^3 - 3x^2 + x + 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - (m-1)x + m + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - m - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ g(x) = x^2 - 2x - m - 1 = 0 (*) \end{array}\right.$

(*) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m + 2 > 0 \\ 1^2 - 2.1 - m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 32. Tìm tập giá trị T của hàm số $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x}$

(A) $T = \left[0; \sqrt{2}\right]$. (B) $T = [3; 5]$. (C) $T = \left[\sqrt{2}; 2\right]$. (D) $T = (3; 5)$.

Lời giải.

Ta có: $\mathscr{D} = [3; 5]$; $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-3}} - \dfrac{1}{2\sqrt{5-x}} = \dfrac{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}{2\sqrt{5-x}\sqrt{x-3}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

$y(3) = y(5) = \sqrt{2}$, $y(4) = 2$. Suy ra: $T = \left[\sqrt{2}; 2\right]$

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(|x|) = 2m + 1$ có bốn nghiệm phân biệt?

(A) $-\dfrac{1}{2} \leq m \leq 0$. (B) $-\dfrac{1}{2} < m < 0$. (C) $-1 < m < -\dfrac{1}{2}$. (D) $-1 \leq m \leq -\dfrac{1}{2}$.

Câu 34. Phương trình $\sin x + \cos x = 1$ có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $(0; \pi)$?

A 1. **B** 0. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Ta có: $\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

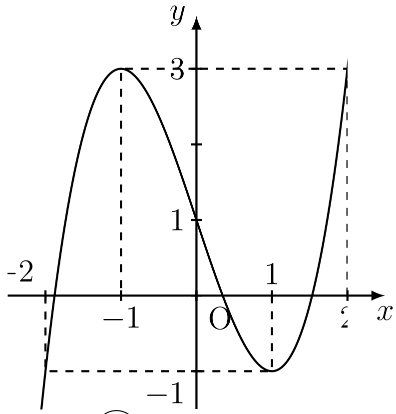
Suy ra, trên khoảng $(0; \pi)$ phương trình có một nghiệm $x = \dfrac{\pi}{2}$

Chọn đáp án A □

.

Câu 35.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A $y = x^4 - x^2 + 1$. **B** $y = -x^3 + 3x + 1$. **C** $y = x^3 - 3x + 1$. **D** $y = -x^2 + x - 1$.

Câu 36. Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A. Biết độ dài cạnh đáy BC, đường cao AH và cạnh bên AB theo thứ tự lập thành cấp số nhân với công bội q. Giá trị của q^2 bằng

A $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$. **B** $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$. **C** $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$. **D** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Lời giải.

BC, AH, AB theo thứ tự lập thành 1 cấp số nhân với công bội q nên $AH = qBC$, $AB = q^2BC$.

Theo định lý pitago, ta có $AB^2 = AH^2 + HB^2 \Rightarrow \left(q^2BC\right)^2 = (qBC)^2 + \left(\dfrac{BC}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow 4q^4 - 4q^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow q^2 = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ (loại) hoặc $q^2 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$. Vậy $q^2 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Tìm số tự nhiên n thỏa mãn $\dfrac{C_n^0}{1.2} + \dfrac{C_n^1}{2.3} + \dfrac{C_n^2}{3.4} + ... + \dfrac{C_n^n}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{2^{100} - n - 3}{(n+1)(n+2)}$

A $n = 100$. **B** $n = 98$. **C** $n = 99$. **D** $n = 101$.

Lời giải.

Đặt $S = \dfrac{C_n^0}{1.2} + \dfrac{C_n^1}{2.3} + \dfrac{C_n^2}{3.4} + ... + \dfrac{C_n^n}{(n+1)(n+2)}$.

Ta chứng minh được đẳng thức: $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}C_n^k = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}C_{n+2}^{k+2}$

Suy ra: $S = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\left(C_{n+2}^2 + C_{n+2}^3 + C_{n+2}^4 + ... + C_{n+2}^{n+2}\right)$

$= \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\left(C_{n+2}^0 + C_{n+2}^1 + C_{n+2}^2 + C_{n+2}^3 + C_{n+2}^4 + ... + C_{n+2}^{n+2} - C_{n+2}^0 - C_{n+2}^1\right)$

$= \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\left(2^{n+2} - \mathrm{C}^0_{n+2} - \mathrm{C}^1_{n+2}\right) = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\left(2^{n+2} - n - 3\right)$

Vậy $S = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\left(2^{n+2} - n - 3\right)$.

Đồng nhất với vế phải của đẳng thức, ta được $n + 2 = 100 \Rightarrow n = 98$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Giải phương trình $\sin 2x = \cos^4\dfrac{x}{2} - \sin^4\dfrac{x}{2}$.

A $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

B $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

C $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

D $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

$\sin 2x = \cos^4\dfrac{x}{2} - \sin^4\dfrac{x}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \cos x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x = \cos x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} cosx = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

A $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải.

Gọi H là trọng tâm tam giác ABC. Theo đề bài, ta có $A'H \perp (ABC)$. Gọi M là trung điểm BC và vẽ MN vuông góc AA'. Khi đó, MN là đoạn vuông góc chung của AA' và BC.

$MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$; $\sin\widehat{A'AH} = \dfrac{MN}{AM} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{A'AH} = 30^\circ$.

Suy ra: $A'H = AH.\tan\widehat{A'AH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\tan 30^\circ = \dfrac{a}{3}$. Vậy, $V_{ABCA'B'C'} = S_{ABC}.A'H = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ABD, ACD, BCD. Tính theo V thể tích của khối tứ diện $MNPQ$.

A $\dfrac{V}{27}$. **B** $\dfrac{4V}{27}$. **C** $\dfrac{2V}{81}$. **D** $\dfrac{V}{9}$.

Lời giải.

Lưu ý: Hai tam giác đồng dạng theo tỉ số k thì tỉ số diện tích của hai tam giác là k^2.

Áp dụng: $V_{MNPQ} = \dfrac{1}{3}S_{MNP}.d[Q,(MNP)] = \dfrac{1}{3}.\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 S_{EFH}.\dfrac{1}{2}d[A,(MNP)]$

$= \frac{1}{3}.\left(\frac{2}{3}\right)^2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 S_{BCD}.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}d[A,(BCD)] = \frac{1}{27}.\frac{1}{3}S_{BCD}.d[A,(BCD)] = \frac{V}{27}$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = 1 - 2\cos x - \cos^2 x$.

A 2. B 3. C 0. D 5.

Câu 42. Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB = a, AC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) nằm trên đường thẳng BC. Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

A $\frac{2a}{3}$. B $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. C $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D a.

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi $SO\perp(ABCD), AB = SB = a, SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD)

A $30°$. B $45°$. C $60°$. D $90°$.

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đường thẳng $d: y = -2x + m$ cắt đồ thị hàm số $(H): y = \frac{2x+3}{x+2}$ tại hai điểm A, B phân biệt sao cho $P = k_1^{2018} + k_2^{2018}$ đạt giá trị nhỏ nhất (với k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến tại A, B)

A $m = -3$. B $m = -2$. C $m = 2$. D $m = 3$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{2x+3}{x+2} = -2x + m \Leftrightarrow g(x): 2x^2 + (6-m)x + 3 - 2m = 0$ Ta có d luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt $\forall m \in R$. Khi đó $\begin{cases} k_1 = \frac{1}{(x_1+2)^2} \\ k_2 = \frac{1}{(x_2+2)^2} \end{cases} \Rightarrow k_1.k_2 = 1$ Theo $AM - GM$ ta có: $k_1^{2018} + k_2^{2018} \geq 2\sqrt{k_1^{2018}.k_2^{2018}} = 2$. Vậy GTNN của $P = 2$. Khi $k_1 = k_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -4 \Leftrightarrow m = -2$

Chọn đáp án B □

Câu 45. Giám đốc một nhà hát A đang phân vân trong việc xác định mức giá vé xem các chương trình được trình chiếu trong nhà hát. Việc này rất quan trọng, nó sẽ quyết định nhà hát thu được bao nhiêu lợi nhuận từ các buổi trình chiếu. Theo những cuốn sổ ghi chép của mình, Ông ta xác định rằng: nếu giá vé vào cửa là 20 USD/người thì trung bình có 1000 người đến xem. Nhưng nếu tăng thêm 1 USD/người thì sẽ mất 100 khách hàng hoặc giảm đi 1 USD/người thì sẽ có thêm 100 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 2 USD lợi nhuận cho nhà hát trong các dịch vụ đi kèm. Hãy giúp Giám đốc nhà hát này xác định xem cần tính giá vé vào cửa là bao nhiêu để nhập là lớn nhất?

A 21 USD/người. B 18 USD/người. C 14 USD/người. D 16 USD/người.

Câu 46. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$có thể tích bằng 2018. Gọi M là trung điểm AA'; N, Plần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BB', CC' sao cho $BN = 2B'N, CP = 3C'P$. Tính thể tích khối đa diện $ABCMNP$.

A $\frac{4036}{3}$. B $\frac{32288}{27}$. C $\frac{40360}{27}$. D $\frac{23207}{18}$.

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AD = 2AB = 2BC = 2CD = 2a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD. Tính cosin góc giữa MN và (SAC), biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

A $\dfrac{\sqrt{310}}{20}$. (B) $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$. (C) $\dfrac{3\sqrt{310}}{20}$. (D) $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$.

Câu 48. Trong bốn hàm số sau:$(1) y = \sin 2x; (2) y = \cos 4x; (3) y = \tan 2x; (4) y = \cot 3x$ có mấy hàm số tuần hoàn với chu kỳ $\frac{\pi}{2}$?

(A) 0. **B** 2. (C) 3. (D) 1.

Câu 49. Trong không gian, cho các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

(A) Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc thì song song với đường thẳng còn lại.

(B) Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

C Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.

(D) Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Câu 50. Cho hình lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng $2a$ và có các mặt bên đều là hình vuông. Tính theo a thể tích khối lăng trụ đã cho.

(A) $\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. (B) $3a^3\sqrt{2}$. (C) $\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{4}$. **D** $2a^3\sqrt{3}$.

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. A	3. A	4. D	5. B	6. C	7. D	8. D	9. D	10. C
11. B	12. B	13. D	14. B	15. A	16. A	17. C	18. B	19. C	20. C
21. C	22. B	23. A	24. D	25. B	26. A	27. A	28. D	29. C	30. D
31. D	32. C	33. C	34. A	35. C	36. C	37. B	38. A	39. B	40. A
41. A	42. B	43. D	44. B	45. C	46. D	47. A	48. B	49. C	50. D

172 ĐỀ THI THỬ THPT HÀN THUYÊN BẮC NINH, 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Số các hoán vị của một tập hợp có 6 phần tử là

(A) 46656. (B) 6. (C) 120. (D) 720.

Câu 2. Trong các khẳng định sau khẳng định nào **sai**?

(A) Một dãy số là một hàm số.

(B) Dãy số $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ là dãy số không tăng không giảm.

(C) Mỗi dãy số tăng là một dãy số bị chặn dưới.

(D) Một hàm số là một dãy số.

Câu 3. Cho đồ thị hàm số $(C): y = \frac{1}{x}$; điểm M có hoành độ $x_M = 2 - \sqrt{3}$ thuộc (C). Biết tiếp tuyến của (C) tại M lần lượt cắt Ox, Oy tại A, B. Tính diện tích tam giác OAB.

(A) $S_{\Delta OAB} = 1$. (B) $S_{\Delta OAB} = 4$. (C) $S_{\Delta OAB} = 2$. (D) $S_{\Delta OAB} = 2 + \sqrt{3}$.

Câu 4. Tính $I = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 2x\right)$.

(A) $I = \frac{1}{2}$. (B) $I = +\infty$. (C) $I = 0$. (D) $I = \frac{3}{4}$.

Câu 5. Bảng biến thiên sau đây của hàm số nào?

(A) $y = \frac{x+1}{2x-1}$.

(B) $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

(C) $y = \frac{2x+3}{x+1}$.

(D) $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$+$	||	$+$
y	$2 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow 2$

Câu 6. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

(A) Nếu hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β).

(B) Nếu hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) song song với nhau thì một đường thẳng bất kì nằm trong (α) đều song song với mọi đường thẳng nằm trong (β).

(C) Nếu hai đường thẳng song song với nhau lần lượt nằm trong hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) thì (α) và (β) song song với nhau.

(D) Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó.

Câu 7. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \frac{\tan x - 1}{\sin x}$ là

(A) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$. (B) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(C) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{0\right\}$. (D) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{k\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 8. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi Q là phép quay tâm A biến B thành D, Q' là phép quay tâm C biến D thành B. Khi đó, hợp thành của hai phép biến hình Q và Q' (tức là thực hiện phép quay Q trước sau đó tiếp tục thực hiện phép quay Q') là

A. Phép quay tâm B góc quay $90°$.
B. Phép đối xứng tâm B.
C. Phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AB}$.
D. Phép đối xứng trục BC.

Câu 9. Cho đồ thị hàm số $(C): y = x^4 - 2x^2$. Trong các đường thẳng sau đây, đường thẳng nào cắt (C) tại hai điểm phân biệt?

A. $y = 0$.
B. $y = 1$.
C. $y = -\dfrac{3}{2}$.
D. $y = -\dfrac{1}{2}$.

Câu 10. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $2x - y + 3 = 0$. Ảnh của đường thẳng d qua phép đối xứng trục Ox có phương trình là

A. $2x + y + 3 = 0$.
B. $2x - y - 3 = 0$.
C. $-2x + y - 3 = 0$.
D. $-2x - y + 3 = 0$.

Câu 11. Cho hàm số $y = x^2(6 - x^2)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -\sqrt{3})$ và $(0; \sqrt{3})$.
B. Hàm số nghịch biến trên $(-\sqrt{3}; 0) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -3)$ và $(0; 3)$.
D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 9)$.

Câu 12. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{\cos x - 1}{\cos x - m}$ đồng biến trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m \geq 1$.
B. $m > 1$.
C. $-1 \leq m \leq 1$.
D. $m < 1$.

Câu 13. Cho đồ thị hàm số $(C): y = \dfrac{1 - 2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang.
B. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.
D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng.

Câu 14. Một sợi dây không dãn dài 1 mét được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất được cuốn thành đường tròn, đoạn thứ hai được cuốn thành hình vuông. Tính tỉ số độ dài đoạn thứ nhất trên độ dài đoạn thứ hai khi tổng diện tích của hình tròn và hình vuông là nhỏ nhất.

A. $\dfrac{\pi}{\pi + 4}$.
B. $\dfrac{4}{\pi}$.
C. 1.
D. $\dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Gọi đoạn thứ nhất là $x \Longrightarrow x = 2\pi r$ với r là bán kính của đường tròn, đoạn thứ hai là $1 - x$, tổng diện tích $P = \dfrac{x^2}{4\pi} + \dfrac{1}{16}(1 - x)^2 = \left(\dfrac{1}{4\pi} + \dfrac{1}{16}\right)x^2 - \dfrac{1}{8}x + \dfrac{1}{16}$, P nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = \dfrac{\pi}{4 + \pi}$

Chọn đáp án D □

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng cách đều 5 điểm S, A, B, C, D?

A. 2 mặt phẳng.
B. 5 mặt phẳng.
C. 1 mặt phẳng.
D. 4 mặt phẳng.

Câu 16. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Hỏi từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho một trong 3 chữ số hàng vạn, hàng nghìn, hàng trăm bằng 1.

(A) 2802. (B) 65. (C) 2520. **(D) 2280.**

Lời giải.

Giả sử số tự nhiên là $\overline{abcde}$. Trường hợp I: Số tự nhiên có chữ số 0.

+ $b = 0$ hoặc $c = 0$. Số 0 có 2 cách chọn vị trí, số 1 có 2 cách chọn vị trí. Các số còn lại có A_6^3 cách chọn, như vậy có $2 \times 2 \times A_6^3 = 480$ số.

+ $d = 0$ hoặc $e = 0$. Số 0 có 2 cách chọn vị trí, số 1 có 3 cách chọn vị trí. Các số còn lại có A_6^3 cách chọn, như vậy có $2 \times 3 \times A_6^3 = 720$ số.

Trường hợp II: Số tự nhiên không có chữ số 0. Chữ số 1 có 3 cách chọn vị trí, các số còn lại có A_6^4 cách chọn, cho nên có $3 \times A_6^4 = 1080$ số.

Vậy có tất cả 2280 số.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, hai mặt bên (SAB) và (SAD) vuông góc với mặt đáy, AH, AK lần lượt là đường cao của tam giác SAB, tam giác SAD. Mệnh đề nào sau đây sai?

(A) $HK \perp SC$. (B) $SA \perp AC$. (C) $BC \perp AH$. **(D) $AK \perp BD$.**

Câu 18. Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{3}{x}\right)^{12}$ (với $x \neq 0$).

(A) $\dfrac{55}{9}$. **(B) 40095.** (C) $\dfrac{1}{81}$. (D) 924.

Câu 19. Hàng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày $(0 \leq t \leq 24)$ cho bởi công thức $h = 2\sin\left(\dfrac{3\pi t}{14}\right)\left(1 - 4\sin^2\left(\dfrac{\pi t}{14}\right)\right) + 12$. Hỏi trong một ngày có bao nhiêu lần mực nước trong kênh đạt độ sâu 13 mét?

(A) 5 lần. (B) 7 lần. (C) 11 lần. **(D) 9 lần.**

Câu 20. Cho $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. Trong các công thức về số các chỉnh hợp và số các tổ hợp sau, công thức nào là công thức đúng?

(A) $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ (với $0 \leq k \leq n$). (B) $A_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (với $0 \leq k \leq n$).

(C) $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ (với $1 \leq k \leq n$). (D) $C_{n+1}^k = C_n^{k+1}$ (với $0 \leq k \leq n-1$).

Câu 21. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

(A) Khối chóp tứ giác $S.ABCD$ được phân chia thành hai khối tứ diện $S.ABD$ và $S.ACD$.

(B) Khối chóp tứ giác $S.ABCD$ được phân chia thành ba khối tứ diện $S.ABC$, $S.ABD$, $S.ACD$.

(C) Khối chóp tứ giác $S.ABCD$ được phân chia thành hai khối tứ diện $C.SAB$ và $C.SAD$.

(D) Khối chóp tứ giác $S.ABCD$ không thể phân chia thành các khối tứ diện.

Câu 22. Có bao nhiêu phép dời hình trong số bốn phép biến hình sau?

(I) Phép tịnh tiến.

(II) Phép đối xứng trục.

(III) Phép vị tự với tỉ số -1.

(IV) Phép quay với góc quay 90°.

A 3. B 2. C 4. D 1.

Câu 23. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos 2x - 8\cos x - 9$ là

A $y_{\min} = -9$. B $y_{\min} = -1$. C $y_{\min} = -8$. D $y_{\min} = 0$.

Câu 24. Tổng số mặt, số cạnh và số đỉnh của một hình lập phương là

A 26. B 24. C 30. D 22.

Câu 25. Số các giá trị nguyên của m để phương trình $(\cos x + 1)(4\cos 2x - m\cos x) = m\sin^2 x$ có đúng 2 nghiệm $x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$ là

A 3. B 0. C 2. D 1.

Câu 26. Cho đồ thị hàm số $(C) : y = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A (C) cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.

B (C) có hai điểm cực trị thuộc hai phía của trục tung.

C (C) tiếp xúc với trục Ox.

D (C) đi qua điểm $A(1; 0)$.

Câu 27. Tập nghiệm của phương trình $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$ là

A $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

B $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

C $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{N}$.

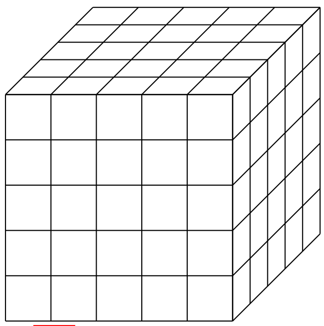
D $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của n thỏa mãn $C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 - \dfrac{5}{4}A_{n-1}^2 < 0$?

A 6. B 4. C 7. D 5.

Câu 29.

Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Người ta dùng 12 mặt phẳng phân biệt (trong đó, 4 mặt song song với $(ABCD)$, 4 mặt song song với $(AA'B'B)$, 4 mặt song song với $(AA'D'D)$), chia khối lập phương thành các khối lập phương nhỏ rời nhau và bằng nhau. Biết rằng tổng diện tích tất cả các mặt của các khối lập phương nhỏ bằng 480. Tính độ dài a của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$



A $a = 2$. B $a = 2\sqrt{3}$. C $a = 2\sqrt{5}$. D $a = 4$.

Lời giải.

Có tất cả 125 khối lập phương nhỏ, diện tích của mỗi mặt của khối lập phương nhỏ là $\dfrac{480}{6 \times 125} = \dfrac{16}{25} \Longrightarrow$ độ dài cạnh của khối lập phương nhỏ bằng $\dfrac{4}{5} \Longrightarrow a = 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Kết quả $(b;c)$ của việc gieo con súc sắc cân đối đồng chất hai lần (trong đó b là số chấm xuất hiện trong lần gieo đầu, c là số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai) được thay vào phương trình $\dfrac{x^2+bx+c}{x+1}$ (*). Xác suất để phương trình (*) vô nghiệm là

A $\dfrac{17}{36}$. B $\dfrac{1}{2}$. C $\dfrac{1}{6}$. D $\dfrac{19}{36}$.

Lời giải.

$n(\Omega)=6\times 6=36$, gọi A là biến cố phương trình vô nghiệm. Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $b^2-4c<0$ hoặc $b=2, c=1$.

Ta có $A=\left\{(1;1);(1;2);\cdots;(1;6);(2;1);(2;2);\cdots;(2;6);(3;3);\cdots;(3;6);(4;5);(4;6)\right\}$

$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{1}{2}$

Chọn đáp án B □

Câu 31.

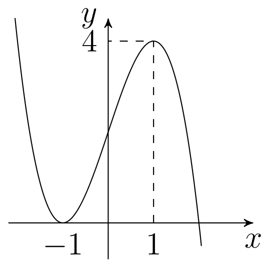
Đường cong ở hình bên là đồ thị hàm số nào dưới đây?

A $y=(x+1)^2(2-x)$.

B $y=-x^4+2x^2+1$.

C $y=x^3-3x+2$.

D $y=-x^3+x$.



Câu 32. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(-2;5)$, phép vị tự tâm O tỉ số 2 biến M thành điểm nào sau đây?

A $D\left(1;-\dfrac{5}{2}\right)$. B $A(-41;10)$. C $C(4;-10)$. D $B\left(-11;\dfrac{5}{2}\right)$.

Câu 33. Cho khối đa diện đều có mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng ba cạnh. Khi đó số đỉnh của khối đa diện là

A Số tự nhiên lớn hơn 3. B Số lẻ.

C Số tự nhiên chia hết cho 3. D Số chẵn.

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+2m^2-m$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân?

A Không có. B 1. C Vô số. D 2.

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $(C): y=mx-\sqrt{x^2-2x+2}$ có tiệm cận ngang?

A 2. B 3. C 1. D 4.

Lời giải.

Nếu $m\neq\pm1$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(mx-\sqrt{x^2-2x+2}\right)$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(mx-\sqrt{x^2-2x+2}\right)$ bằng vô cực.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-2x+2}\right)=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x-\sqrt{x^2-2x+2}\right)=-1$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC tạo với mặt đáy các góc bằng nhau và bằng 60°. Biết $BC=a$, $\widehat{BAC}=45^\circ$. Tính $h=d(S,(ABC))$.

A $h=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. B $h=a\sqrt{6}$. C $h=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. D $h=\dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

Câu 37. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ có bao nhiêu điểm mà tọa độ của nó đều là các số nguyên?

A. 1 điểm. B. 3 điểm. **C.** 4 điểm. D. 2 điểm.

Câu 38. Hình tứ diện đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 1. B. 4. C. 3. **D.** 6.

Câu 39. Cho đồ thị hàm số $(C): y = x^4 - 4x^2 + 2017$ và đường thẳng $d: y = \dfrac{1}{4}x + 1$. Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng d?

A. 2 tiếp tuyến. B. 1 tiếp tuyến.
C. Không có tiếp tuyến nào. **D.** 3 tiếp tuyến.

Lời giải.

$y' = 4x^3 - 8x$, phương trình $4x^3 - 8x = -4$ có 3 nghiệm phân biệt cho nên có 3 tiếp tuyến.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho khối lẳng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ là trung điểm của AA'. Cắt khối lăng trụ trên bằng hai mặt phẳng (MBC) và $(MB'C')$ ta được

A. Ba khối tứ diện. **B.** Ba khối chóp. C. Bốn khối chóp. D. Bốn khối tứ diện.

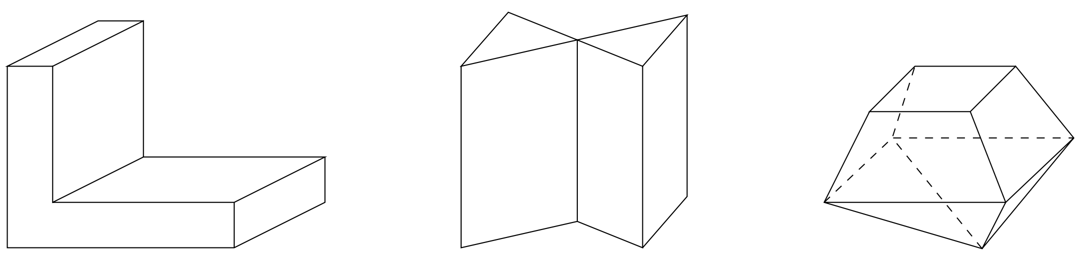
Câu 41. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số tuần hoàn?

A. $y = \sin 2x$. B. $y = 2(\sin x \cos x - x) - x^2 - \sin 2x$.
C. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. D. $y = x^4 - 3x + 2$.

Câu 42. Cho khối đa diện đều giới hạn bởi hình đa diện (H), khẳng định nào sau đây sai?

A. Các mặt của (H) là những đa giác đều và có cùng số cạnh.
B. Mỗi cạnh của một đa giác của (H) là cạnh chung của nhiều hơn hai đa giác.
C. Khối đa diện đều (H) là một khối đa diện lồi.
D. Mỗi đỉnh của (H) là đỉnh chung của cùng một số cạnh.

Câu 43. Cho 3 khối như hình 1, hình 2, hình 3. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



Hình 1 Hình 2 Hình 3

A. Hình 2 không phải là khối đa diện, hình 3 không phải là khối đa diện lồi.
B. Hình 1 và hình 3 là các khối đa diện lồi.
C. Hình 3 là khối đa diện lồi, hình 1 không phải là khối đa diện lồi.
D. Cả 3 hình là các khối đa diện.

Câu 44. Trong bốn khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định luôn đúng với mọi hàm số $f(x)$?

(I) $f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x) = 0$.

(II) $f(x)$ có cực đại, cực tiểu thì giá trị cực đại luôn lớn hơn giá trị cực tiểu.

(III) $f(x)$ có cực đại thì có cực tiểu.

(IV) $f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f(x)$ xác định tại x_0.

(A) 2. (B) 4. (C) 3. (D) 1.

Câu 45. Khối bát diện đều là một khối đa diện lồi loại

(A) $\{5;3\}$. (B) $\{4;3\}$. (C) $\{3;4\}$. (D) $\{3;5\}$.

Câu 46. Tìm m để tâm đối xứng của đồ thị hàm số $(C): y = x^3 + (m+3)x^2 + 1 - m$ trùng với tâm đối xứng của đồ thị hàm số $(H): y = \dfrac{14x-1}{x+2}$

(A) $m = 2$. (B) $m = 1$. (C) $m = 3$. (D) $m = 0$.

Lời giải.

Tâm đối xứng của đồ thị (H) là $(-2;14)$. $y" = 6x + 2(m+3)$, $y" = 0 \iff x = -\dfrac{m+3}{3}$, tâm đối xứng của đồ thị hai hàm số trùng nhau suy ra $-\dfrac{m+3}{3} = -2 \iff m = 3$. Thay vào hàm số (C) thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$. Tập nghiệm S của bất phương trình $f'(x) \le f(x)$ là

(A) $S = (-\infty;0) \cup \left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$. (B) $S = (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$.

(C) $S = \left(-\infty;\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$. (D) $S = \left(-\infty;\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right) \cup (1;+\infty)$.

Câu 48. Cho hai đường thẳng song song d_1, d_2. Trên d_1 có 6 điểm phân biệt được tô màu đỏ, trên d_2 có 4 điểm phân biệt được tô màu xanh. Xét tất cả các tam giác được tạo thành khi nối các điểm đó với nhau. Chọn ngẫu nhiên một tam giác, khi đó xác suất để thu được tam giác có hai đỉnh màu đỏ là

(A) $\dfrac{5}{32}$. (B) $\dfrac{5}{8}$. (C) $\dfrac{5}{9}$. (D) $\dfrac{5}{7}$.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = 4C_6^2 + 6C_4^2$, gọi A là biến cố tam giác có hai đỉnh màu đỏ, $n(A) = 4C_6^2$, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{4C_6^2}{4C_6^2 + 6C_4^2} = \dfrac{5}{8}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Cho dãy hình vuông $H_1, H_2, ..., H_n, ...$ Với mỗi số nguyên dương n, gọi u_n, P_n, S_n lần lượt là độ dài cạnh, chu vi và diện tích của hình vuông H_n. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

(A) Nếu (u_n) là cấp số cộng với công sai khác 0 thì (P_n) cũng là cấp số cộng.

(B) Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội dương thì (P_n) cũng là cấp số nhân.

(C) Nếu (u_n) là cấp số cộng với công sai khác 0 thì (S_n) cũng là cấp số cộng.

(D) Nếu (u_n) là cấp số cộng với công sai khác 0 thì (S_n) cũng là cấp số cộng.

Câu 50. Xét các tam giác ABC cân tại A ngoại tiếp đường tròn có bán kính $r = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của diện tích tam giác ABC?

(A) $S_{\min} = 2\pi$. (B) $S_{\min} = 3\sqrt{3}$. (C) $S_{\min} = 3\sqrt{2}$. (D) $S_{\min} = 4$.

Lời giải.

Ta có $2S = r(a + 2b) = a + 2b$, theo công thức Heron $2S = \dfrac{1}{2}\sqrt{(a + 2b)(2b - a)a^2} \Longrightarrow 4(a + 2b) = (2b - a)a^2 \Longrightarrow S = \dfrac{a^3}{a^2 - 4}$, khảo sát hàm số $S = \dfrac{a^3}{a^2 - 4}$ với $a > 2$, ta có $S_{\min} = 3\sqrt{3}$ khi $a = b = 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án B □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. D	3. C	4. D	5. B	6. A	7. D	8. B	9. B	10. A
11. A	12. B	13. C	14. D	15. B	16. D	17. D	18. B	19. D	20. C
21. C	22. C	23. C	24. A	25. C	26. A	27. A	28. A	29. D	30. B
31. A	32. B	33. D	34. B	35. A	36. C	37. C	38. D	39. D	40. B
41. A	42. B	43. C	44. D	45. C	46. C	47. A	48. B	49. C	50. B

PHẦN

B

ĐỀ THI THỬ-MAX8

1 ĐỀ THI THỬ SỐ 1-MAX8

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số lẻ.
B. Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.
C. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.
D. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.

Lời giải.

Ta có các kết quả sau:

+Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

+Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.

+Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.

+Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Phương trình $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ có tập nghiệm là

A. $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.
B. $x = \pm\frac{5\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.
D. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \pm\frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Gọi $S = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n$. Giá trị của S là bao nhiêu?

A. $S = n^n$.
B. $S = 0$.
C. $S = n^2$.
D. $S = 2^n$.

Lời giải.

Xét khai triển $(x+1)^n = \mathrm{C}_n^0 x^n + \mathrm{C}_n^1 x^{n-1} + \mathrm{C}_n^2 x^{n-2} + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} x + \mathrm{C}_n^n$. $(*)$

Thay $x = 1$ vào hai vế $(*)$ ta có $2^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n \Rightarrow S = 2^n$

Chọn đáp án D □

Câu 4. Cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$, công sai $d = 5$, số hạng thứ tư là

A. $u_4 = 23$.
B. $u_4 = 18$.
C. $u_4 = 8$.
D. $u_4 = 14$.

Lời giải.

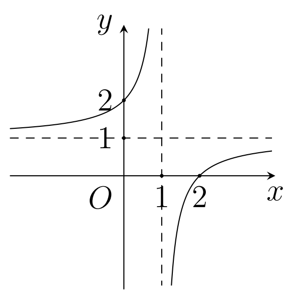
$u_4 = u_1 + 3d = 3 + 5 \cdot 3 = 18$.

Chọn đáp án B □

Câu 5.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số nào sau đây?

A. $y = \frac{x+2}{x-1}$.
B. $y = \frac{x+2}{x-2}$.
C. $y = \frac{x-2}{x-1}$.
D. $y = \frac{x-2}{x+1}$.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta thấy, đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 1$ và đường tiệm cận ngang $y = 1$. Do đó, loại "$y = \dfrac{x+2}{x-2}$" và "$y = \dfrac{x-2}{x+1}$".

Mặt khác, đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 2)$ nên chọn "$y = \dfrac{x-2}{x-1}$".

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Đường cong $y = x^3 - 5x$ cắt đường thẳng $y = -2x - 2$ lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ tăng dần. Tọa độ của $\overrightarrow{AB}$ là

A $(3; -6)$. (B) $(-3; 6)$. (C) $(-3; -6)$. (D) $(3; 6)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 5x = -2x - 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = -4 \\ x = -2 \Rightarrow y = 2. \end{array}\right.$

Theo giả thiết $A(-2; 2)$, $B(1; -4)$, suy ra $\overrightarrow{AB} = (3; -6)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như bên dưới. Phát biểu nào đúng?

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

A Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

(B) Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.

(C) Hàm số có ba cực tiểu.

(D) Hàm số có giá trị cực tiểu là 0.

Lời giải.

"Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$".

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A 3. (B) 5. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$ và $f'(x)$ luôn đổi dấu khi qua 3 nghiệm này nên hàm số có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1-x}{2x-1}$ là

A 2. (B) 1. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

Đồ thì hàm số có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$.

Đồ thì hàm số có đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

(A) $(2; +\infty)$. (B) $(-\infty; 0)$. (C) $(-\infty; +\infty)$. **D** $(0; 2)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Cho các số thực dương a, b với $a \neq 1$ và $\log_a b > 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\left[\begin{array}{l} 0 < a, b < 1 \\ 0 < a < 1 < b \end{array}\right.$. **B** $\left[\begin{array}{l} 0 < a, b < 1 \\ 1 < a, b \end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l} 0 < a, b < 1 \\ 0 < b < 1 < a \end{array}\right.$. (D) $\left[\begin{array}{l} 0 < b < 1 < a \\ 1 < a, b \end{array}\right.$.

Lời giải.

$\left[\begin{array}{l} 0 < a, b < 1 \\ 1 < a, b. \end{array}\right.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Tìm tập xác định của hàm số $f(x) = \log_{2x-1} 3 + \log_2(5 - x)$.

(A) $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$. (B) $\left(\frac{1}{2}; 5\right)$. (C) $\left[\frac{1}{2}; 5\right] \setminus \{1\}$. **D** $\left(\frac{1}{2}; 5\right) \setminus \{1\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ 2x - 1 \neq 1 \\ 5 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < 5 \\ x \neq 1. \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là: $\mathscr{D} = \left(\frac{1}{2}; 5\right) \setminus \{1\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-2x} < 27$ là

(A) $(3; +\infty)$. (B) $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

C $(-1; 3)$. (D) $(-\infty; -1)$.

Lời giải.

Ta có: $3^{x^2-2x} < 27 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$.

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $(-1; 3)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Xét bất phương trình $5^{2x} - 3 \cdot 5^{x+2} + 32 < 0$. Nếu đặt $t = 5^x$ thì bất phương trình trở thành bất phương trình nào sau đây?

(A) $t^2 - 3t + 32 < 0$. (B) $t^2 - 16t + 32 < 0$. (C) $t^2 - 6t + 32 < 0$. (D) $t^2 - 75t + 32 < 0$.

Lời giải.

$$5^{2x} - 3 \cdot 5^{x+2} + 32 < 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 3 \cdot 5^2 5^x + 32 < 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 75 \cdot 5^x + 32 < 0.$$

Nếu đặt $t = 5^x > 0$ thì bất phương trình trở thành bất phương trình $t^2 - 75t + 32 < 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$, trục hoành, các đường thẳng $x = a$, $x = b$ là

(A) $-\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. (B) $\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. (C) $\left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$. (D) $\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo định nghĩa ta có $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

(A) $\int \sin x\,\mathrm{d}x = \cos x + C$. (B) $\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C$.

(C) $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$. (D) $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$.

Lời giải.

$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Cho hai số phức $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -2 + i$. Tìm số phức $z = z_1 z_2$.

(A) $z = 5i$. (B) $z = -5i$. (C) $z = 4 - 5i$. (D) $z = -4 + 5i$.

Lời giải.

Ta có $z_1 \cdot z_2 = (1 - 2i)(-2 + i) = -2 + i + 4i - 2i^2 = = -2 + 5i + 2 = 5i$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Số phức liên hợp của số phức $z = i(1 - 2i)$ có điểm biểu diễn là điểm nào dưới đây?

(A) $E(2; -1)$. (B) $B(-1; 2)$. (C) $A(1; 2)$. (D) $F(-2; 1)$.

Lời giải.

Ta có: $z = i(1 - 2i) = 2 + i \Rightarrow \overline{z} = 2 - i$ nên điểm biểu diễn của số phức $\overline{z}$ là $E(2; -1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h là

(A) $V = \frac{1}{3}Bh$. (B) $V = \frac{1}{2}Bh$. (C) $V = Bh$. (D) $V = \frac{4}{3}Bh$.

Lời giải.

Theo lý thuyết sách giáo khoa hình học 12.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Hình 12 mặt đều có bao nhiêu cạnh?

A 30 cạnh. **B** 20 cạnh. **C** 16 cạnh. **D** 12 cạnh.

Lời giải.

Vì theo sách sách giáo khoa thì một hình 12 mặt đều có tất cả là 30 cạnh.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương đó là

A $S = \pi a^2$. **B** $S = \dfrac{3\pi a^2}{4}$. **C** $S = 3\pi a^2$. **D** $S = 12\pi a^2$.

Lời giải.

Mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương có bán kính $R = \dfrac{1}{2}AC' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy diện tích là $S = 4\pi R^2 = 3\pi a^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;-4)$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng tọa độ (Oxy).

A $(1;2;0)$. **B** $(1;2;-4)$. **C** $(0;2;-4)$. **D** $(1;0;-4)$.

Lời giải.

Tọa độ hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) là $(1;2;0)$.

(Hoành độ, tung độ giữ nguyên, cao độ bằng không).

Chọn đáp án A □

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(-1;4;1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 12$. **B** $x^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 12$.

C $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 12$. **D** $x^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 3$.

Lời giải.

Mặt cầu đường kính AB là mặt cầu đi qua tâm $I(0;3;2)$ là trung điểm AB và có bán kính $R = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Vậy phương trinh mặt cầu là $x^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Điểm nào trong các điểm sau đây không thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2+1}$?

A $N\left(-2;\dfrac{1}{5}\right)$. **B** $Q(1;1)$. **C** $M(1;2)$. **D** $P\left(0;\sqrt{3}\right)$.

Lời giải.

Thay tọa độ các điểm vào ta thấy $M(1;2)$ không thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;1)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-3}{1}$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d là

A $x - 2y - z - 3 = 0$. **B** $x - 2y - z + 4 = 0$.

Ⓒ $x-2y-z+1=0$. Ⓓ $-x+2y+z+3=0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d là:

$$-(x-1)+2(y-2)+(z-1)=0 \Leftrightarrow -x+2y+z-4=0 \Leftrightarrow x-2y-z+4=0.$$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 26. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm hai chữ số khác nhau?

Ⓐ C_5^2. Ⓑ 45. Ⓒ 41. Ⓓ A_5^2.

Lời giải.

Số tự nhiên chẵn có hai chữ số khác nhau có dạng: $\overline{ab}$, a và b thuộc $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, $a \neq 0$.

Nếu $b=0$, a có 9 cách chọn.

Nếu $b \in \{2;4;6;8\}$, a có 8 cách chọn.

Vậy có $1 \cdot 9 + 4 \cdot 8 = 41$ số tự nhiên chẵn có hai chữ số khác nhau.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 27. Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên 2 thẻ và nhân 2 số ghi trên 2 thẻ với nhau. Tính xác suất để tích 2 số ghi trên 2 thẻ là số lẻ.

Ⓐ $\dfrac{1}{9}$. Ⓑ $\dfrac{7}{18}$. Ⓒ $\dfrac{5}{18}$. Ⓓ $\dfrac{3}{18}$.

Lời giải.

Rút ngẫu nhiên 2 thẻ từ 9 thẻ có C_9^2 cách. Suy ra $n(\Omega) = \mathrm{C}_9^2$.

Gọi A là biến cố "Rút được 2 thẻ có tích 2 số ghi trên 2 thẻ đó là số lẻ".

Hai thẻ có tích là số lẻ khi và chỉ khi 2 thẻ đó mang số lẻ. Trong 9 thẻ đã cho có 5 thẻ mang số lẻ là 1, 3, 5, 7, 9. Suy ra $n(A) = \mathrm{C}_5^2$.

Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{\mathrm{C}_5^2}{\mathrm{C}_9^2} = \dfrac{5}{18}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 28. Đường thẳng đi qua điểm $A(3;2;3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;-2;1)$ có phương trình tham số là

Ⓐ $\begin{cases} x = 3+t \\ y = 2-2t \\ z = 3-t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x = 2-t \\ y = 4+2t \\ z = 2-t \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} x = -3+t \\ y = 2-2t \\ z = 3+t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x = 3-2t \\ y = 1+4t \\ z = 1-2t \end{cases}$.

Lời giải.

Nhận xét: $\vec{v} = (3-2;2-4;3-2) = (1;-2;1) = \vec{u}$ nên đường thẳng cần tìm cũng đi qua $B(2;4;2)$.

Đường thẳng nhận $\vec{u} = (1;-2;1)$ là véc-tơ chỉ phương nên cũng nhận $(-1;2;-1)$ là véc-tơ chỉ phương.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $\begin{cases} x = 2-t \\ y = 4+2t \\ z = 2-t. \end{cases}$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(1;3;4)$ và $D(0;-2;2)$. Biết tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4MD^2$ là một mặt cầu. Tìm bán kính của mặt cầu đó.

(A) $\sqrt{46}$. (B) $\sqrt{33}$. (C) $\sqrt{125}$. **D** $\sqrt{206}$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y;z)$, khi đó

$MA^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2$, $MB^2 = (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z+1)^2$,

$MC^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2$, $MD^2 = (x-0)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2$.

Ta có $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4MD^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 26y - 8z - 5 = 0$.

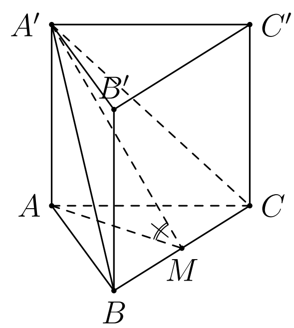
Bán kính của mặt cầu $R = \sqrt{(-4)^2 + (-13)^2 + 4^2 - (-5)} = \sqrt{206}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Biết rằng góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là 30°. Tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 8. Tính thể khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $8\sqrt{3}$. (B) 8. (C) $3\sqrt{3}$. (D) $8\sqrt{2}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC.

Ta có $(A'BC) \cap (ABC) = BC$, $AM \perp BC, A'M \perp BC$.

Suy ra góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là $\widehat{AMA'} = 30^{circ}$.

$S_{ABC} = S_{A'BC} \cdot \cos 30^\circ = 8 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

$S_{ABC} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \Rightarrow AB = 4$, $AM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Ta có $AA' = AM \cdot \tan 30^\circ = 2$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = 8\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Cho hình nón có bán kính đáy là $4a$, chiều cao là $3a$. Diện tích xung quanh hình nón bằng

(A) $12\pi a^2$. (B) $40\pi a^2$. (C) $24\pi a^2$. **D** $20\pi a^2$.

Lời giải.

Độ dài đường sinh của hình nón là: $l = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a$.

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq} = \pi \cdot 4a \cdot 5a = 20\pi a^2$.

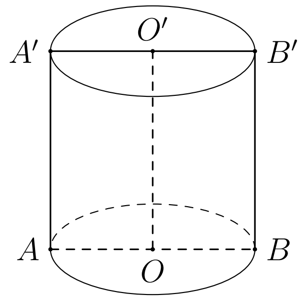
Chọn đáp án (D) □

Câu 32. Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng 4π. Thể tích khối trụ là

(A) $\dfrac{2}{3}\pi$. **B** 2π. (C) 4π. (D) $\dfrac{4}{3}\pi$.

Lời giải.

Do thiết diện qua trục là hình vuông nên hình trụ có $h = 2R$.
Mặt khác $S_{xq} = 2\pi Rh = 4\pi = 4R^2\pi \Rightarrow R = 1$ và $h = 2$.
Thể tích khối trụ bằng $V = \pi R^2 h = 2\pi$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Cho số phức z biết $\bar{z} = 2 - i + \dfrac{i}{1+i}$. Phần ảo của số phức z^2 là

A $\dfrac{5}{2}$. **B** $\dfrac{5}{2}i$. **C** $-\dfrac{5}{2}$. **D** $-\dfrac{5}{2}i$.

Lời giải.

Ta có $\bar{z} = 2 - i + \dfrac{i}{1+i} = 2 - i + \dfrac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 2 - i + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i = \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

Suy ra $z = \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2}i \Rightarrow z^2 = 6 + \dfrac{5}{2}i$.

Vậy phần ảo của số phức z^2 là $\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Biết $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{\sqrt{3 + \ln x}}{x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{a - b\sqrt{c}}{3}$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $c < 4$. Tính giá trị $S = a + b + c$.

A $S = 13$. **B** $S = 28$. **C** $S = 25$. **D** $S = 16$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{3 + \ln x} \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

Đổi: Với $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{3}$; $x = \mathrm{e} \Rightarrow t = 2$.

$\Rightarrow I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{\sqrt{3 + \ln x}}{x}\,\mathrm{d}x = 2\int_{\sqrt{3}}^{2} t^2\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{3}t^3\Big|_{\sqrt{3}}^{2} = \dfrac{16 - 6\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow a = 16$, $b = 6$, $c = 3 \Rightarrow S = a + b + c = 25$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Hàm số $f(x) = \log_2(x^2 - 2x)$ có đạo hàm

A $f'(x) = \dfrac{2x - 2}{(x^2 - 2x)\ln 2}$. **B** $f'(x) = \dfrac{1}{(x^2 - 2x)\ln 2}$.

C $f'(x) = \dfrac{(2x - 2)\ln 2}{x^2 - 2x}$. **D** $f'(x) = \dfrac{\ln 2}{x^2 - 2x}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $(\log_a |u|)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$.

Chọn đáp án (A) □

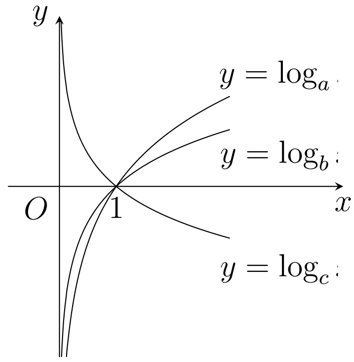
Câu 36. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ và các trục tọa độ bằng

A $2\ln\dfrac{3}{2} - 1$. **B** $5\ln\dfrac{3}{2} - 1$. **C** $3\ln\dfrac{3}{2} - 1$. **D** $3\ln\dfrac{5}{2} - 1$.

Lời giải.

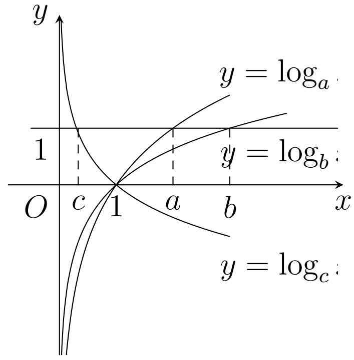
Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ và trục hoành: $\dfrac{x+1}{x-2}=0\ (x\neq 2)\Leftrightarrow x=-1$.
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ và các trục tọa độ bằng:
$\displaystyle\int\limits_{-1}^{0}\left|\frac{x+1}{x-2}\right|\mathrm{d}x=\left|\int\limits_{-1}^{0}\frac{x-1}{x-2}\mathrm{d}x\right|=\left|\int\limits_{-1}^{0}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|(x+3\ln|x-2|)\Big|_{-1}^{0}\right|=\left|1+3\ln\frac{2}{3}\right|=-1-3\ln\frac{2}{3}=3\ln\frac{3}{2}-1.$
Chọn đáp án C □

Câu 37.
Cho a, b, c là ba số thực dương và khác 1. Đồ thị các hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?



(A) $a<b<c$. (B) $c<a<b$. (C) $c<b<a$. (D) $b<c<a$.

Lời giải.
Cho đường thẳng $y=1$ cắt cả 3 đồ thị ta được
Dựa vào đồ thị ta có $c<a<b$.



Chọn đáp án B □

Câu 38. Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2+4x)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)=0$ là
(A) 2. (B) 3. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.
Viết lại phương trình ta được
$$\log_3\left(x^2+4x\right)=\log_3(2x+3)\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3>0\\x^2+4x=2x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{3}{2}\\\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$
Vậy số nghiệm của phương trình là 1.
Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng hai nghiệm.

A $-2 < m < -1$. **B** $m > 0$; $m = -1$. **C** $m = -2$; $m > -1$. **D** $m = -2$; $m \geq -1$.

Lời giải.

Ta có: $f(x) - 1 = m \Leftrightarrow f(x) = m + 1 (1)$.

Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m + 1$.

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (1) có đúng 2 nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+1=-1 \\ m+1>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m>-1 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số: $y = -x^3 - 6x^2 + (4m - 9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ là

A $\left[-\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$. **B** $\left(-\infty; -\dfrac{3}{4}\right]$. **C** $(-\infty; 0]$. **D** $[0; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 - 12x + 4m - 9$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ khi $y' \leq 0$, $\forall x \in (-\infty; -1)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow -3x^2 - 12x + 4m - 9 \leq 0, \forall x \in (-\infty; -1) \\ &\Leftrightarrow 4m \leq 3x^2 + 12x + 9, \forall x \in (-\infty; -1) \\ &\Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{4} \text{ với } \min_{(-\infty;-1)} (3x^2 + 12x + 9) = -3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 41. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + 3m^2 - m^3|$ có 5 điểm cực trị. Tìm số phần tử của S.

A 0. **B** 3. **C** 1. **D** 2.

Lời giải.

Hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + 3m^2 - m^3|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $x^3 - 3x^2 = -3m^2 + m^3$ có 3 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2$, ta có $g'(x) = 3x^2 - 6x$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow g(0) = 0 \\ x = 2 \Rightarrow g(2) = -4. \end{array}\right.$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Suy ra hàm số đã cho có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $-4 < m^3 - 3m^2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 3 \\ m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

Vậy $S = \{1\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Trong mặt phẳng Oxy, các số phức z thỏa mãn $|z + 2i - 1| = |z + i|$. Tìm số phức z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1; 3)$ thì phần thực của z.

A 3. **B** 1. **C** 2. **D** 4.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

Gọi $E(1; -2)$là điểm biểu diễn số phức $1 - 2i$.

Gọi $F(0; -1)$ là điểm biểu diễn số phức $-i$.

Ta có: $|z + 2i - 1| = |z + i| \Leftrightarrow ME = MF \Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực $EF\colon x - y - 2 = 0$.

Để MA ngắn nhất khi $MA \perp EF$ tại M $\Leftrightarrow M(3; 1) \Rightarrow z = 3 + i$ nên phần thực của z là 3.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB = AD = a$, $AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh $A'D'$ và $A'B'$. Tính thể tích khối chóp $A.BDMN$.

A $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **B** $V = \dfrac{3a^3}{16}$. **C** $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{16}$. **D** $V = \dfrac{a^3}{16}$.

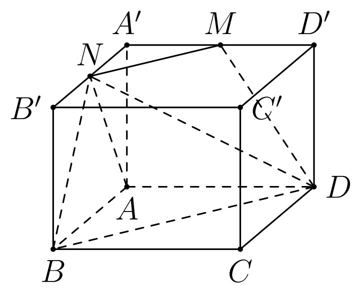
Lời giải.

Ta có $S_{\triangle BDN} = 2S_{\triangle MND} \Rightarrow V_{ANBD} = 2V_{AMND}$.

$V_{ANBD} = \dfrac{1}{3}AA'.S_{\triangle ABD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{2}a^2 \sin 60^\circ = \dfrac{a^3}{8}$.

Suy ra $V_{AMND} = \dfrac{a^3}{16}$.

Vậy $V_{A.MNBD} = \dfrac{a^3}{8} + \dfrac{a^3}{16} = \dfrac{3a^3}{16}$.



Chọn đáp án B □

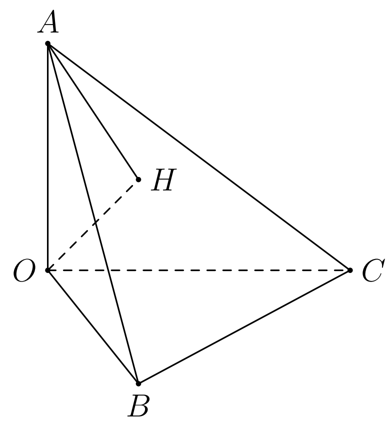
Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua $H(2; 1; 1)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC. Phương trình của (P) là

A $2x + y + z - 6 = 0$. **B** $x + 2y + z - 6 = 0$.

C $x + 2y + 2z - 6 = 0$. **D** $2x + y + z + 6 = 0$.

Lời giải.

Ta có $AH \perp BC$, $OA \perp BC \Rightarrow OH \perp BC$. Chứng minh tương tự ta cũng có $OH \perp AC \Rightarrow OH \perp (ABC)$ nên $\overrightarrow{OH} = (2;1;1)$ là véc-tơ pháp tuyến của (ABC).
Vậy $(ABC)\colon 2x + y + z - 6 = 0$.



Chọn đáp án A □

Câu 45. Một lớp có 36 ghế đơn được xếp thành hình vuông 6×6. Giáo viên muốn xếp 36 học sinh, trong đó có hai anh em là Kỷ và Hợi. Tính xác suất để hai anh em Kỷ và Hợi luôn được ngồi gần nhau theo chiều dọc hoặc ngang.

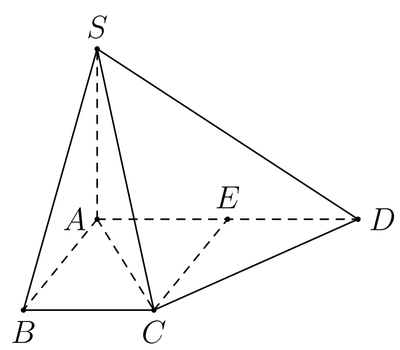
A $\dfrac{4}{21}$. B $\dfrac{1}{7}$. C $\dfrac{1}{21}$. D $\dfrac{2}{21}$.

Lời giải.
Có 36 học sinh, xếp vào 36 vị trí nên không gian mẫu có 36! phần tử.
Xem hai học sinh Kỷ và Hợi là một người tên KH.
Có 5 cách xếp em KH vào mỗi dãy ghế
Đổi chỗ hai học sinh KH có 2 cách
Do đó có $5 \cdot 2 \cdot 6 = 60$ cách xếp KH và 6 dãy ghế
Tương tự, có 60 cách xếp KH và 6 hàng ghế
Có 34! Cách xếp 34 học sinh còn lại và 34 ghế còn lại
Đặt A là biến cố "hai anh em Kỷ và Hợi luôn được ngồi gần nhau theo chiều dọc hoặc ngang"
Thì $|A| = 60 \cdot 2 \cdot 34!$ suy ra $\mathrm{P}(A) = \dfrac{2 \cdot 60 \cdot 34!}{36!} = \dfrac{2}{21}$.
Chọn đáp án D □

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $BA = a$, $BC = a$, $AD = 2a$. Cho biết $SA \perp (ABCD)$ và SA bằng $2a$. Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng

A $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. B $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. C $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. D $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.
+) Gọi E là trung điểm của AD. Khi đó $ABCE$ là hình bình hành ($AE \parallel BC$ và $AE = BC$)
Lại có $AB = AE = a$ nên $ABCE$ là hình thoi.
Mà $\widehat{BAE} = 90^\circ$ nên $ABCE$ là hình vuông cạnh a.
Từ đó tam giác ACD có CE vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến, lại có $\widehat{CAD} = 45^\circ$ nên tam giác ACD vuông cân tại C.



+) Ta có $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA\ (SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow CD \perp SC.$

+) $\begin{cases} (SCD)\cap(ABCD)=CD \\ AC\perp CD \\ SC\perp CD \end{cases} \Rightarrow ((SCD),(ABCD))=(SC,AC)=\widehat{SCA}$ (do $\triangle SAC$ vuông tại A).

$SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=\sqrt{(2a)^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}=a\sqrt{6}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A: $\cos\widehat{SCA}=\dfrac{AC}{SC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\cos((SCD),(ABCD))=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Cho phương trình $x^4-3x^3-(2m-1)x^2-3x+1=0$. Điều kiện của m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt là $m\in\left(\dfrac{a}{b};+\infty\right)$. Trong đó a, b là các số nguyên dương và a, b nguyên tố cùng nhau. Giá trị của biểu thức $a+b$ là

(A) 12. (B) 9. (C) 10. (D) 11.

Lời giải.

$x^4-3x^3-(2m-1)x^2-3x+1=0.\quad(1)$

Vì $x=0$ không là nghiệm của phương trình nên ta chia cả hai vế cho $x^2\neq 0$, ta được:

$$x^2-3x-(2m-1)-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=2m+1.\quad(2)$$

Đặt $t=x+\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow x^2-tx+1=0\Rightarrow\Delta=t^2-4\geq 0\Leftrightarrow t\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

Phương trình (2) trở thành: $t^2-3t=2m+1.\quad(3)$

Ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$	-2	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
t^2-3t	$+\infty$	10		-2	$+\infty$

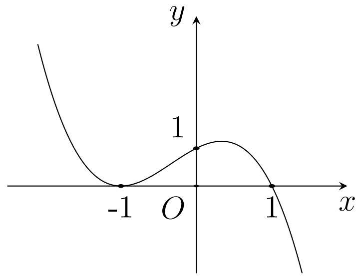
Suy ra: (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (3) có hai nghiệm phân biệt không thuộc đoạn $[-2;2]$ $\Leftrightarrow 2m+1>10\Leftrightarrow m>\dfrac{9}{2}$.

Vậy $a=9$, $b=2\Rightarrow a+b=11$.

Chọn đáp án D □

Câu 48.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f(1) = 1$, $f(-1) = -\dfrac{1}{3}$. Đặt $g(x) = f^2(x) - 4f(x)$. Cho biết đồ thị của $y = f'(x)$ có dạng như hình vẽ dưới đây.



(A) Hàm số $g(x)$ có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

B Hàm số $g(x)$ có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

(C) Hàm số $g(x)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

(D) Hàm số $g(x)$ không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị của $y = f'(x)$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		0	$-$	
$f(x)$	↗		$-\dfrac{1}{3}$ ↗		1	↘	

Suy ra $f(x) \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = 2f'(x)\left[f(x) - 2\right] \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f(x) - 2 = 0. \end{array}\right.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1. \end{array}\right.$

$f(x) - 2 < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bảng biến thiên của $g(x) = f^2(x) - 4f(x)$ là

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	↘			↘	-3	↗	

Vậy hàm số $g(x)$ có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m nhỏ hơn 2018 để phương trình $\log_2\left(m + \sqrt{m + 2^x}\right) = 2x$ có nghiệm thực?

A 2017. (B) 2018. (C) 2019. (D) 1004.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} m + 2^x \geq 0 \\ m + \sqrt{m + 2^x} > 0. \end{cases}$

$\log_2\left(m + \sqrt{m + 2^x}\right) = 2x \Leftrightarrow m + \sqrt{m + 2^x} = 2^{2x} \Leftrightarrow m + 2^x + \sqrt{m + 2^x} = 4^x + 2^x.$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t, (t > 0) \Rightarrow f'(t) = 2t + 1 > 0$ với $t > 0$ hay hàm số $f(t) = t^2 + t$ đồng biến trên $(0\,;+\infty)$.

Do đó $m + 2^x + \sqrt{m + 2^x} = 4^x + 2^x \Leftrightarrow m + 2^x = 4^x \Leftrightarrow m = 4^x - 2^x$.

Xét hàm số $g(x) = 4^x - 2^x$ ta có $g'(x) = 4^x \ln 4 - 2^x \ln 2$.

Giải phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4^x \ln 4 - 2^x \ln 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có phương trình có nghiệm khi $m > -\dfrac{1}{2}$.

Do m nguyên dương nhỏ hơn 2018 nên $m \in \{1; 2; 3; 4; \ldots; 2017\}$.

Vậy có 2017 giá trị của m.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) - 2018f(x) = 2018x^{2017}\mathrm{e}^{2018x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 2018$. Tính $f(1)$.

A $f(1) = 2019\mathrm{e}^{2018}$. **B** $f(1) = 2019\mathrm{e}^{-2018}$. **C** $f(1) = 2017\mathrm{e}^{2018}$. **D** $f(1) = 2018\mathrm{e}^{2018}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) - 2018f(x) = 2018x^{2017}\mathrm{e}^{2018x} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2018x}f'(x) - 2018\mathrm{e}^{-2018x}f(x) = 2018x^{2017}$

$\Rightarrow \left(\mathrm{e}^{-2018x}f(x)\right)' = 2018x^{2017} \Rightarrow \mathrm{e}^{-2018x}f(x)$ là một nguyên hàm của $2018x^{2017}$

Ta có $\displaystyle\int 2018x^{2017}\,\mathrm{d}x = x^{2018} + C \Rightarrow \mathrm{e}^{-2018x}f(x) = x^{2018} + C_0$.

Mà

$$\begin{aligned}
& f(0) = 2018 \Rightarrow 2018 = C_0 \\
\Rightarrow\quad & \mathrm{e}^{-2018x}f(x) = x^{2018} + 2018 \\
\Leftrightarrow\quad & f(x) = x^{2018}\mathrm{e}^{2018} + 2018\mathrm{e}^{2018} \\
\Rightarrow\quad & f(1) = \mathrm{e}^{2018} + 2018\mathrm{e}^{2018} = 2019\mathrm{e}^{2018}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

——— **HẾT** ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. B	3. D	4. B	5. C	6. A	7. A	8. A	9. A	10. D
11. B	12. D	13. C	14. D	15. D	16. A	17. A	18. A	19. C	20. A
21. C	22. A	23. D	24. C	25. B	26. C	27. C	28. B	29. D	30. A
31. D	32. B	33. A	34. C	35. A	36. C	37. B	38. D	39. C	40. B
41. C	42. A	43. B	44. A	45. D	46. D	47. D	48. B	49. A	50. A

2 ĐỀ THI THỬ SỐ 2-MAX8

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2 \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = -2x^3 - 3x^2 + 12x$ là

A. $(-2; -20)$. B. $(-2; 7)$. C. $(1; 7)$. D. $(1; -20)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -6x^2 - 6x + 12$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1,\ y = 7 \\ x = -2,\ y = -20. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-20	$\nearrow$	7	$\searrow$	$-\infty$

Vậy điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(1; 7)$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x^4}{2} - x^3 - \dfrac{3x^2}{2} + 2x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{4}{3}; \dfrac{3}{2}\right]$ là

A. -2. B. $\dfrac{17}{32}$. C. $\dfrac{17}{8}$. D. $-\dfrac{112}{81}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \notin \left[-\dfrac{4}{3}; \dfrac{3}{2}\right] \\ x = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

$y\left(-\dfrac{4}{3}\right) = -\dfrac{112}{81}$; $y(-1) = -2$; $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{17}{32}$; $y\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{39}{32}$. Vậy $\max\limits_{\left[-\frac{4}{3}; \frac{3}{2}\right]} y = \dfrac{17}{32}$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ có đồ thị là (C). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị (C) có một tiệm cận đứng là $x = 2$ và một tiệm cận ngang là $y = 1$.

B. Đồ thị (C) có một tiệm cận đứng là $x = -2$ và một tiệm cận ngang là $y = 1$.

(C) Đồ thị (C) có một tiệm cận đứng là $x=-2$ và một tiệm cận ngang là $y=2$.
(D) Đồ thị (C) có một tiệm cận đứng là $x=-2$ và một tiệm cận ngang là $y=-2$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^-} y=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} y=+\infty \Rightarrow$ Đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+2}{x-2}=1 \Rightarrow$ Đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Cho các số thực x, y thỏa mãn $2^x=3$, $3^y=4$. Tính giá trị biểu thức $P=8^x+9^y$.

(A) 43. (B) 17. (C) 24. (D) $\log_2^3 3+\log_3^2 4$.

Lời giải.

Ta có $P=8^x+9^y=(2^x)^3+(3^y)^2$ mà $2^x=3$, $3^y=4$.

Suy ra $P=(2^x)^3+(3^y)^2=3^3+4^2=43$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Một người gửi ngân hàng 50 triệu đồng với lãi suất 4% một tháng, sau mỗi tháng tiền lãi được nhập vào vốn. Hỏi sau một năm người đó rút tiền thì tổng số tiền nhận được là bao nhiêu?

(A) $50\cdot(1{,}004)^{12}$ (triệu đồng). (B) $50\cdot(1+12\cdot 0{,}04)^{12}$ (triệu đồng).
(C) $50\cdot(1+0{,}04)^{12}$ (triệu đồng). (D) $50\cdot 1{,}004$ (triệu đồng).

Lời giải.

Theo công thức lãi kép ta được tổng số tiền nhận được là $T_{12}=50\cdot(1+0{,}04)^{12}$ (triệu đồng).

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Tìm $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ có kết quả là

(A) $\dfrac{x^2}{2}(\ln x-1)+C$. (B) $\dfrac{1}{2}\ln^2 x+C$. (C) $\ln|\ln x|+C$. (D) $\ln\dfrac{x^2}{2}+C$.

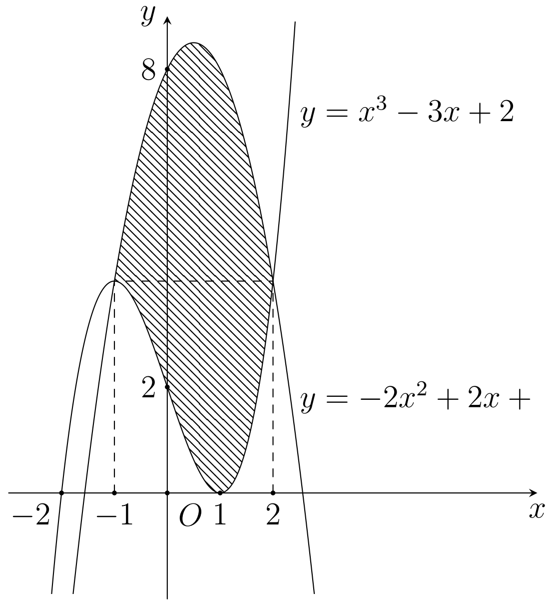
Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\int \ln x\,\mathrm{d}(\ln x)=\frac{\ln^2 x}{2}+C$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8.

Diện tích hình phẳng phần gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào sau đây?



A $S = \int\limits_{-1}^{2} (-x^3 - 2x^2 + 5x + 6)\,\mathrm{d}x$.

B $S = \int\limits_{-1}^{2} (x^3 - 2x^2 - x + 10)\,\mathrm{d}x$.

C $S = \int\limits_{-1}^{2} (x^3 + 2x^2 - 5x - 6)\,\mathrm{d}x$.

D $S = \int\limits_{-1}^{2} (x^3 + 2x^2 - x - 10)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng $S = \int\limits_{-1}^{2} [-2x^2 + 2x + 8 - (x^3 - 3x + 2)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2} (-x^3 - 2x^2 + 5x + 6)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Cho hai số phức $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = -1 - 2i$. Số phức liên hợp của số phức $w = z_1 - 2z_2$ là

A $5 - i$. **B** $1 - 3i$. **C** $5 - 9i$. **D** $5 + 9i$.

Lời giải.

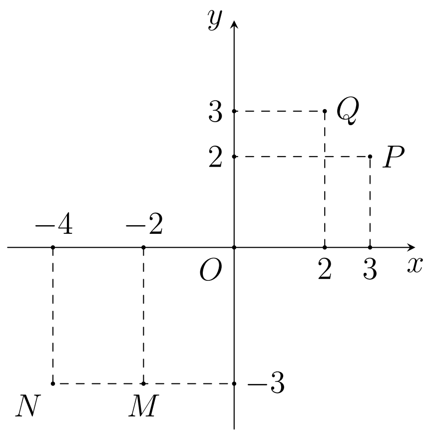
Ta có : $w = z_1 - 2z_2 = 3 + 5i - 2(-1 - 2i) = 5 + 9i \Rightarrow \overline{w} = 5 - 9i$.

Chọn đáp án C □

Câu 10.

Cho số phức z thoả $(1 - i)z - 2\overline{z} = 1 + 7i$. Điểm nào sau đây ở hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z?

A N. **B** M. **C** P. **D** Q.



Lời giải.

Gọi số phức $z = a + bi$ với a, $b \in \mathbb{R}$.

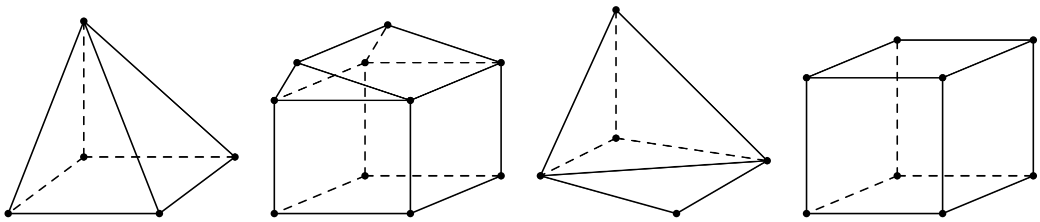
Ta có

$$\begin{aligned} (1 - i)z - 2\overline{z} = 1 + 7i &\Leftrightarrow (1 - i)(a + bi) - 2(a - bi) = 1 + 7i \\ &\Leftrightarrow -a + b + (-a + 3b)i = 1 + 7i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 1 \\ -a + 3b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

$\Rightarrow z = 2 + 3i$ có điểm biểu diễn là điểm Q.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Hình nào dưới đây **không phải** là hình đa diện?



Hình 1 Hình 2 Hình 3 Hình 4

A. Hình 1. B. Hình 2. C. Hình 4. D. Hình 3.

Lời giải.

Hình 3 do có một cạnh chung của ba đa giác nên không phải là hình đa diện.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Cho hình nón (N) có chiều cao h, độ dài đường sinh l, bán kính đáy r. Kí hiệu S_{xq} là diện tích xung quanh của (N). Công thức nào sau đây là đúng?

A. $S_{xq} = \pi rh$. B. $S_{xq} = 2\pi rl$. C. $S_{xq} = 2\pi r^2 h$. D. $S_{xq} = \pi rl$.

Lời giải.

Đây là công thức tính diện tích xung quanh hình nón.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho ba véc-tơ $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$. Tọa độ véc-tơ $\vec{d} = \vec{a} - 4\vec{b} + 2\vec{c}$ là

A. $(1; -1; 3)$. B. $(4; 1; 11)$. C. $(-3; 5; 7)$. D. $(0; 2; 6)$.

Lời giải.

Ta có: $\vec{d} = \vec{a} - 4\vec{b} + 2\vec{c} = (2 - 4\cdot 0 + 2\cdot 1; -5 - 4\cdot 2 + 2\cdot 7; 3 - 4\cdot(-1) + 2\cdot 2) = (4; 1; 11)$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 2; 3)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; -2; 1)$ có phương trình là

A. $3x - 2y - z - 4 = 0$. B. $3x - 2y + z - 2 = 0$.

C. $x + 2y + 3z + 4 = 0$. D. $3x - 2y + z = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) đi qua $A(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b; c)$ có phương trình là

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Nên mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 2; 3)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; -2; 1)$ có phương trình là

$$3(x - 1) - 2(y - 2) + (z - 3) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + z - 2 = 0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y+3)^2+z^2=4$ có tâm và bán kính là

A. $I(-2;3;0)$, $R=4$. B. $I(2;-3;0)$, $R=4$. C. $I(-2;3;0)$, $R=2$. **D.** $I(2;-3;0)$, $R=2$.

Lời giải.

Phương trình mặt cầu có dạng: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Vậy mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y+3)^2+z^2=4$ có tâm $I(2;-3;0)$ và bán kính $R=2$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Công thức nào sau đây **sai**?

A. $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

B. $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

C. $1+\cot^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

D. $\tan x+\cot x=1$.

Lời giải.

Ta có $\tan x+\cot x=\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}=\dfrac{1}{\sin x\cdot\cos x}\neq 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Gieo một con súc sắc và ghi kết quả trên mặt xuất hiện. Xét biến cố A: "Kết quả gieo là số không vượt quá 4". Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $A=\{1;2;3;4\}$. B. $A=\{5;6\}$. C. $A=\{1;2;3\}$. D. $A=\{4;5;6\}$.

Lời giải.

Ta có $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$, nên các kết quả không vượt quá 4, tức là bé hơn hoặc bằng 4.

Suy ra $A=\{1;2;3;4\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai d. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_{n+1}=u_1+nd$.

B. $u_n=u_1+nd$.

C. $u_n=u_1+(n+1)d$.

D. $u_{n+1}=u_1+(n+1)d$.

Lời giải.

Ta có số hạng tổng quát của cấp số cộng đã cho là $u_n=u_1+(n-1)d$.

Suy ra $u_{n+1}=u_1+nd$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Hàm số $y=x^3+3(m-3)x^2+m(m-2)x+1$ đạt cực tiểu tại $x=-2$ khi và chỉ khi

A. $m=6$. **B.** $m=6$ hay $m=8$. C. $m=8$. D. $6<m<8$.

Lời giải.

Ta có: $y'=3x^2+6(m-3)x+m(m-2)$; $y''=6x+6(m-3)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$ khi

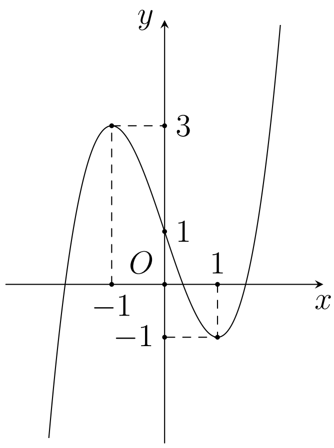
$$\begin{cases} y'(-2)=0\\ y''(-2)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12-12(m-3)+m(m-2)=0\\ -12+6(m-3)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-14m+48=0\\ m>5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=6\\ m=8\end{array}\right.\\ m>5\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} m=6\\ m=8.\end{array}\right.$$

Chọn đáp án B □

Câu 20.
Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(1; -1)$.
B Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(1; -1)$.
(C) Hàm số có điểm cực tiểu là $x = -1$.
(D) Hàm số có điểm cực tiểu là $(1; -1)$.



Lời giải.
Dựa vào hình vẽ ta có đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(1; -1)$ và điểm cực đại là $(-1; 3)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$ ||		$+$	
y	1 ↘		$-\sqrt{2}$	↗ $+\infty$ ||	$-\infty$	↗	-1

Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

(A) $\left(-\sqrt{2}; -1\right]$. **B** $\left(-\sqrt{2}; -1\right)$. (C) $(-1; 1]$. (D) $(-1; 1)$.

Lời giải.
Phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt
$\Leftrightarrow$ Trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt
$\Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < -1 \Leftrightarrow m \in \left(-\sqrt{2}; -1\right)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Trên đồ thị $(C)\colon y = \dfrac{x-1}{x-2}$ có bao nhiêu điểm M mà tiếp tuyến với (C) tại M song song với đường thẳng $d\colon x + y = 1$?

(A) 0. **B** 1. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.
Ta có $y' = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$.
Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$.
Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại M là $y'(x_0) = \dfrac{-1}{(x_0-1)^2}$.
Vì tiếp tuyến song song với $d\colon y = -x + 1$ nên

$$y'(x_0) = -1 \Leftrightarrow \frac{-1}{(x_0-2)^2} = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow M(1; 0) \in d \\ &x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow M(3; 2) \notin d. \end{aligned}\right.$$

Vậy có 1 điểm $M(3;2)$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Cho hàm số $f(x)=\ln^2(x^2-2x+4)$. Tìm các giá trị của x để $f'(x)>0$.

A $x\neq 1$. **B** $x>0$. **C** $x>1$. **D** $\forall x$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$f'(x)=\dfrac{4x-4}{x^2-2x+4}\ln(x^2-2x+4)$.

Nhận xét: $\ln(x^2-2x+4)>0\,\forall x\in\mathbb{R}$ do $x^2-2x+4>1\,\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $f'(x)>0\Leftrightarrow 4x-4>0\Leftrightarrow x>1$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Cho $\log_5 2=m$, $\log_3 5=n$. Tính $A=\log_{25}2000+\log_9 675$ theo m, n.

A $A=3+2m-n$. **B** $A=3+2m+n$. **C** $A=3-2m+n$. **D** $A=3-2m-n$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}A &= \log_{25}2000+\log_9 675=\log_{5^2}(2^4\cdot 5^3)+\log_{3^2}(5^2\cdot 3^3)\\ &= \frac{1}{2}(4\log_5 2+3)+\frac{1}{2}(2\log_3 5+3)=\frac{1}{2}(4m+2n+6)\\ &= 3+2m+n.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 25. Phương trình $3^{2x+1}-28\cdot 3^x+9=0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 $(x_1<x_2)$. Tính giá trị $T=x_1-2x_2$.

A $T=-3$. **B** $T=0$. **C** $T=4$. **D** $T=-5$.

Lời giải.

Ta có $3^{2x+1}-28\cdot 3^x+9=0\Leftrightarrow 3\cdot(3^x)^2-28\cdot 3^x+9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x=9\\ 3^x=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-1.\end{array}\right.$

Vậy $T=x_1-2x_2=-1-2\cdot 2=-5$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Giải phương trình $\log_2 x\cdot\log_3 x+x\cdot\log_3 x+3=\log_2 x+3\log_3 x+x$. Ta có tổng tất cả các nghiệm bằng

A 35. **B** 5. **C** 10. **D** 9.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$.

$$\begin{aligned}\log_2 x\cdot\log_3 x+x\cdot\log_3 x+3=\log_2 x+3\log_3 x+x &\Leftrightarrow (\log_2 x+x-3)(\log_3 x-1)=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ \log_2 x+x-3=0.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Ta có hàm số $f(x)=\log_2 x+x$ liên tục và đồng biến trên $(0;+\infty)$ và $f(2)=3$ nên phương trình $\log_2 x+x-3=0$ có một nghiệm $x=2$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm bằng 5.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Biết rằng $\displaystyle\int\limits_2^3 \frac{3x+1}{2x^2-x-1}\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 5 + c\ln 7$ trong đó a, b, $c \in \mathbb{Q}$. Tính $P = a+b+c$.

A $\dfrac{4}{3}$. (B) $\dfrac{3}{2}$. (C) $\dfrac{5}{3}$. (D) $\dfrac{7}{6}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\int\limits_2^3 \frac{3x+1}{2x^2-x-1}\,\mathrm{d}x &= \frac{4}{3}\int\limits_2^3 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int\limits_2^3 \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{3}\ln|x-1|\Big|_2^3 + \frac{1}{6}\ln|2x+1|\Big|_2^3 \\
&= \frac{4}{3}\ln 2 - \frac{1}{6}\ln 5 + \frac{1}{6}\ln 7.
\end{aligned}$$

Suy ra $a = \dfrac{4}{3}$, $b = -\dfrac{1}{6}$, $c = \dfrac{1}{6}$.

Vậy $a+b+c = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng bất kỳ vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\,(1 \leqslant x \leqslant 3)$ thì được thiết diện là tam giác đều có độ dài cạnh là $\sqrt{3x^2+4}$.

(A) $\dfrac{17\sqrt{3}}{4}$. (B) $V = \dfrac{17\sqrt{3}}{2}\pi$. (C) $\dfrac{17\sqrt{3}}{4}\pi$. **D** $\dfrac{17\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Giả sử thiết diện là tam giác đều ABC.

Diện tích của thiết diện: $S(x) = \dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot \sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(3x^2+4)$

Thể tích khối vật thể $V = \displaystyle\int\limits_1^3 \frac{\sqrt{3}}{4}(3x^2+4)\,\mathrm{d}x = \frac{17\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Tìm số phức $z = a+bi$ thoả mãn $z + (3-i)\overline{z} = 5-8i$. Tính giá trị $S = a+b$.

(A) 3. **B** 5. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

Gọi số phức $z = a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ thế vào phương trình đã cho ta được:

$a+bi+(3-i)(a-bi) = 5-8i \Leftrightarrow 4a-b-2bi-ai = 5-8i \Leftrightarrow \begin{cases}4a-b=5\\ -a-2b=-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ b=3\end{cases}$

$\Rightarrow z = 2+3i \Rightarrow a+b = 5.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Số phức z thõa mãn điều kiện: $z+|z| = 8+4i$. Tổng phần thực và ảo của số phức z là

(A) 4. (B) 5. (C) 6. **D** 7.

Lời giải.

$z+|z|=8+4i \Leftrightarrow z=8-|z|+4i$.

Lấy mô-đun hai vế ta được: $|z|=\sqrt{(8-|z|)^2+16} \Leftrightarrow |z|^2=|z|^2-16|z|+80 \Leftrightarrow |z|=5$

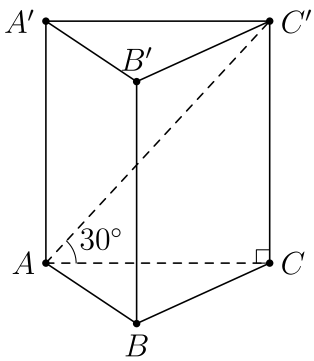
nên $z+|z|=8+4i \Leftrightarrow z+5=8+4i \Rightarrow z=3+4i \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow a+b=7$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Cho khối lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông cân tại A, $AC=AB=2a$, góc giữa AC' và mặt phẳng (ABC) bằng 30°. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

(A) $\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$. **B** $\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Vì $CC'\perp(ABC) \Rightarrow \widehat{(AC',(ABC))}=\widehat{C'AC}=30^\circ$.

Tam giác CAC' vuông tại C có: $\tan 30^\circ=\dfrac{CC'}{AC} \Rightarrow CC'=2a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

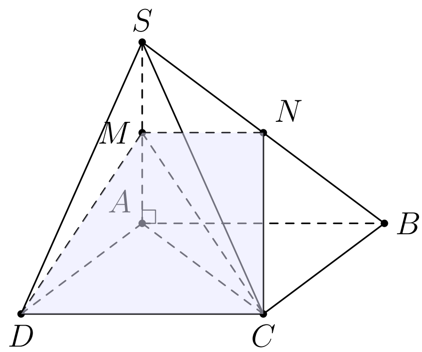
$V_{ABC.A'B'C'}=CC'\cdot S_{ABC}=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{1}{2}AB\cdot AC=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a=\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi M, N là trung điểm của SA, SB. Mặt phẳng $MNCD$ chia hình chóp thành hai phần. Tỉ số thể tích hai phần $S.MNCD$ và $MNABCD$ là

(A) $\dfrac{3}{4}$. **B** $\dfrac{3}{5}$. (C) $\dfrac{4}{5}$. (D) 1.

Lời giải.



Gọi V là thể tích khối chóp $S.ABCD \Rightarrow V_{S.ACD}=V_{S.ABC}=\dfrac{1}{2}V$.

Khi đó: $\dfrac{V_{S.MCD}}{V_{S.ACD}}=\dfrac{SM}{SA} \Rightarrow V_{S.MCD}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}V=\dfrac{1}{4}V$.

$\dfrac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SM}{SA}\cdot\dfrac{SN}{SB}=\dfrac{1}{4} \Rightarrow V_{S.MNC}=\dfrac{1}{8}V$.

Suy ra: $V_{S.MNCD}=V_{S.MCD}+V_{S.MNC}=\dfrac{1}{4}V+\dfrac{1}{8}V=\dfrac{3}{8}V$

$\Rightarrow V_{MNABCD}=V-V_{S.MNCD}=\dfrac{5}{8}V$.

Vậy $\dfrac{V_{S.MNCD}}{V_{MNABCD}}=\dfrac{3}{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a$, $AD=\sqrt{2}a$, $SA=3a$ và $SA\perp(ABCD)$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

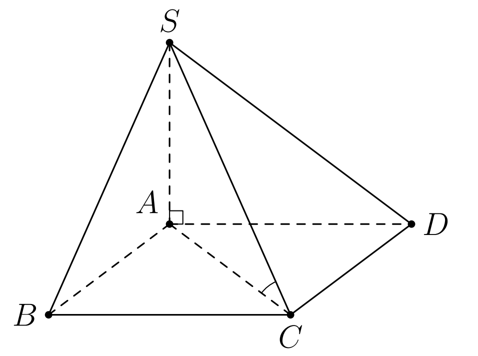
A $60°$. **B** $120°$. **C** $30°$. **D** $90°$.

Lời giải.

Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SC; (ABCD)) = \widehat{SCA}$.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{3a}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60°$.



Chọn đáp án A □

Câu 34. Một hình trụ có diện tích toàn phần là 120π và bán kính đáy bằng 6. Hỏi chiều cao của hình trụ là bao nhiêu?

A 6. **B** 3. **C** 4. **D** 5.

Lời giải.

Gọi r, h lần lượt là bán kính và chiều cao của hình trụ.

Theo bài: $r = 6$, $S_{tp} = 120\pi$.

Mà $S_{tp} = 2\pi r^2 + 2\pi rh \Rightarrow 120\pi = 2\pi \cdot 6^2 + 2\pi \cdot 6 \cdot h \Rightarrow h = 4$.

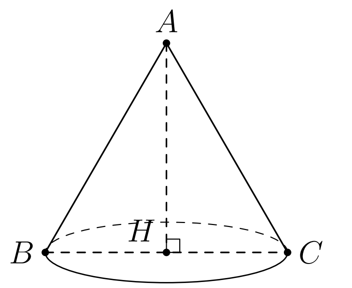
Chọn đáp án C □

Câu 35. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a quay quanh đường cao AH tạo nên một hình nón. Diện tích xung quanh của hình nón đó là

A $\dfrac{\pi a^2}{2}$. **B** $2\pi a^2$. **C** πa^2. **D** $\dfrac{3\pi a^2}{4}$.

Lời giải.

Hình nón được tạo thành có bán kính $r = BH = \dfrac{a}{2}$, đường sinh $l = AB = a$ nên diện tích xung quanh là $S_{xq} = \pi rl = \dfrac{\pi a^2}{2}$.



Chọn đáp án A □

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(-1; 3; 1)$ và $B(3; -1; -1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là

A $2x + 2y - z = 0$. **B** $2x + 2y + z = 0$.

C $2x - 2y + z - 1 = 0$. **D** $2x - 2y - z = 0$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow I(1; 1; 0)$.

$\overrightarrow{AB} = (4; -4; -2) = 2(2; -2; -1)$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB qua $I(1; 1; 0)$ và nhận $\overrightarrow{n} = (2; -2; -1)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên có phương trình là $2(x - 1) - 2(y - 1) - z = 0 \Rightarrow 2x - 2y - z = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua $A(2;1;-3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon 2x-3y+4z-1=0$ là

A $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{1-y}{3}=\dfrac{z+3}{4}$.
B $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+3}{4}$.
C $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{1+y}{3}=\dfrac{z-3}{4}$.
D $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{1+y}{-3}=\dfrac{z-3}{4}$.

Lời giải.

Phương trình chính tắc của d đi qua $A(2;1;-3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon 2x-3y+4z-1=0$ là $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+3}{4}\Leftrightarrow\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{1-y}{3}=\dfrac{z+3}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội bằng 2 và $u_3=7$. Giá trị của $u_1\cdot u_5$ bằng

A 49. **B** 78. **C** 14. **D** 28.

Lời giải.

Cách 1: $u_1\cdot u_5=u_1\cdot u_1\cdot q^4=(u_1q^2)^2=u_3^2=49$.

Cách 2: $7=u_3=u_1\cdot q^2=u_1\cdot 4\Rightarrow u_1=\dfrac{7}{4}$. Suy ra $u_5=u_1\cdot q^4=\dfrac{7}{4}\cdot 2^4=28$.

Vậy $u_1\cdot u_5=\dfrac{7}{4}\cdot 28=49$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Tìm m để hàm số $y=x^3-3(m+3)x^2-6(m-1)x+1$ luôn luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A $-7\leqslant m\leqslant -1$.
B $-7<m<-1$.
C $m\leqslant -7$ hoặc $m\geqslant -1$.
D $m<-7$ hoặc $m>-1$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-6(m+3)x-6(m-1)$.

Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ y'\geqslant 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\\&\Leftrightarrow\ x^2-2(m+3)x-2(m-1)\geqslant 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\\&\Leftrightarrow\ \Delta'=(m+3)^2+2(m-1)\leqslant 0\\&\Leftrightarrow\ m^2+8m+7\leqslant 0\\&\Leftrightarrow\ -7\leqslant m\leqslant -1.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Hàm số $y=x^3+3(m+1)x^2-6(m-3)x+1$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa $x_1^2+x_2^2<64$ khi và chỉ khi

A $\left[\begin{array}{l}-6<m\leqslant -5\\1\leqslant m<3\end{array}\right.$.
B $\left[\begin{array}{l}-6<m<-5\\1<m<3\end{array}\right.$.
C $\left[\begin{array}{l}m<-6\\m>3\end{array}\right.$.
D $-6<m<3$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2+6(m+1)x-6(m-3)$; $y'=0\Leftrightarrow x^2+2(m+1)x-2(m-3)=0\quad(1)$

Điều kiện bài toán $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1^2+x_2^2<64$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 + 2(m-3) > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -5 \\ m > 1. \end{array}\right. \quad (*)$

Khi điều kiện $(*)$ thỏa thì hàm số đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $(*)$.

Theo định lý Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = -2(m+1)$; $x_1 \cdot x_2 = -2(m-3)$. Ta có

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 < 64 &\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 < 64 \\ &\Leftrightarrow 4(m+1)^2 + 4(m-3) < 64 \\ &\Leftrightarrow m^2 + 3m - 18 < 0 \Leftrightarrow -6 < m < 3. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta được $\left[\begin{array}{l} -6 < m < -5 \\ 1 < m < 3. \end{array}\right.$

Chọn đáp án B □

Câu 41. Tìm tập các giá trị thực của tham số m để phương trình $4\left(\sqrt{2}+1\right)^x + \left(\sqrt{2}-1\right)^x - m = 0$ có đúng hai nghiệm âm phân biệt.

A $(2;4)$. **B** $(3;5)$. **C** $(4;5)$. **D** $(5;6)$.

Lời giải.

Ta có $4\left(\sqrt{2}+1\right)^x + \left(\sqrt{2}-1\right)^x - m = 0 \Leftrightarrow 4\left(\sqrt{2}+1\right)^x + \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^x} - m = 0. \quad (1)$

Đặt $\left(\sqrt{2}+1\right)^x = t$, $(t > 0)$ ta có phương trình $4t + \dfrac{1}{t} - m = 0. \quad (2)$

Phương trình (1) có đúng hai nghiệm âm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có đúng hai nghiệm t thỏa mãn $0 < t < 1$.

Xét hàm số $f(t) = 4t + \dfrac{1}{t}$ trên khoảng $(0;1)$ ta có

$f'(t) = 4 - \dfrac{1}{t^2}$; giải phương trình $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 4 - \dfrac{1}{t^2} = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$.

Ta có bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	5

Từ bảng biến thiên ta có $4 < m < 5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho biết tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 (x+2)\ln(x+1)\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + \dfrac{-7}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A $a = b$. **B** $a < b$. **C** $a > b$. **D** $a = b + 3$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ \mathrm{d}v = (x+2)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2} + 2x. \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \left[\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln(x+1)\right]\Bigg|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{x^2+4x}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{5}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(x+3-\frac{3}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{5}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+3x-3\ln|x+1|\right]\Bigg|_0^1 \\ &= 4\ln 2 - \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Suy ra $a = 4$, $b = 4$.

Vậy $a = b$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Gọi A, B theo thứ tự là các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn số z khác 0 và $z' = \dfrac{1+i}{2}z$. Lúc đó, tam giác OAB là tam giác gì

(A) Tam giác cân.
(B) Tam giác đều.
(C) Tam giác vuông.
(D) Tam giác vuông cân.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ thì ta có $A(x; y)$. Vì $z \neq 0$ nên $x^2 + y^2 > 0$.

Ta có $z' = \dfrac{1+i}{2}z = \dfrac{1}{2}(1+i)(x+yi) = \dfrac{x-y}{2} + \dfrac{x+y}{2}i$.

Vậy B có tọa độ $B\left(\dfrac{x-y}{2}; \dfrac{x+y}{2}\right)$.

Ta lại có $OA^2 = x^2 + y^2$; $OB^2 = \left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 = \dfrac{x^2+y^2}{2}$;

$AB^2 = \left(x - \dfrac{x-y}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y-x}{2}\right)^2 = \dfrac{x^2+y^2}{2}$.

Từ đó suy ra $\begin{cases} OB = AB \\ OA^2 = OB^2 + AB^2. \end{cases}$

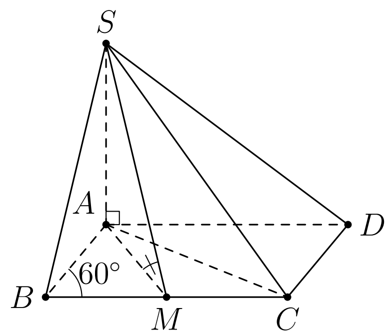
Vậy tam giác OAB vuông cân tại B.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60°$; $SA \perp (ABCD)$, $SA = \dfrac{3a}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng

(A) $30°$.
(B) $45°$.
(C) $60°$.
(D) $90°$.

Lời giải.



Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên BC ta có $BC \perp (SAM)$. Từ đó suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng $\widehat{SMA}$.

Tam giác ABC cân tại B có $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên tam giác ABC đều cạnh a suy ra $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác SMA vuông tại A có

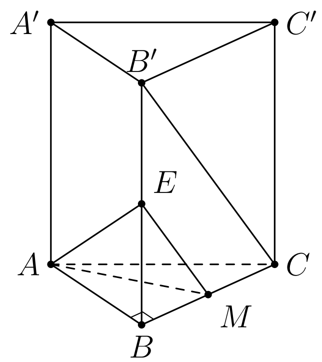
$$\tan \widehat{SMA} = \frac{SA}{AM} = \frac{\frac{3a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SMA} = 60^\circ.$$

Chọn đáp án C □

Câu 45. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

A $\dfrac{a}{\sqrt{7}}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **D** $a\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi E là trung điểm của BB'. Khi đó $(AME) \parallel B'C$ nên ta có:
$\mathrm{d}(B,(AME)) = \mathrm{d}(BC,(AME)) = \mathrm{d}(B'C, AM) = h$.

Tứ diện $BEAM$ có các cạnh BE, BM, BA đôi một vuông góc nên là bài toán tứ diện vuông quen thuộc. Khi đó

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BE^2} + \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow h = \frac{a}{\sqrt{7}}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ và $d_2\colon \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 5 + 6t \\ z = 7 + 8t \end{cases}$.

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A $d_1 \perp d_2$. **B** $d_1 \parallel d_2$. **C** $d_1 \equiv d_2$. **D** d_1, d_2 chéo nhau.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (2;3;4)$ và đi qua $M_1(1;2;3)$.

Đường thẳng d_2 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (4;6;8)$ và đi qua $M_2(3;5;7)$.

Ta có $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ cùng phương với nhau nên $d_1 \parallel d_2$ hoặc $d_1 \equiv d_2$. (1)

Thay toạ độ $M_1(1;2;3) \in d_1$ vào d_2 ta có: $\begin{cases} 1 = 3 + 4t \\ 2 = 5 + 6t \\ 3 = 7 + 8t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M_1 \in d_2.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $d_1 \equiv d_2$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng (Oxy) và đi qua ba điểm $A(2;-1;1)$, $B(1;0;1)$, $C(0;2;-2)$ là

A $(x+7)^2+(y+5)^2+z^2=62$. **B** $(x-7)^2+(y-5)^2+z^2=62$.

C $(x-7)^2+(y-5)^2+z^2=74$. **D** $(x+7)^2+(y+5)^2+z^2=74$.

Lời giải.

Gọi $I(a;b;0)$ là tâm của mặt cầu.

Mặt cầu đi qua ba điểm nên ta có

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IB^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2+(b+1)^2+1=(a-1)^2+b^2+1 \\ (a-1)^2+b^2+1=a^2+(b-2)^2+4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4a+4+2b+1+1=-2a+1+1 \\ -2a+1+1=-4b+4+4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-2b=4 \\ 2a-4b=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=5. \end{cases}$$

Do đó mặt cầu có tâm $I(7;5;0)$ và bán kính $R=IB=\sqrt{62}$ nên có phương trình $(x-7)^2+(y-5)^2+z^2=62$.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Gieo đồng thời hai con súc sắc giống hệt nhau. Xác suất để tổng kết quả xuất hiện của hai súc sắc là một số chia hết cho 2 hoặc cho 3 bằng

A $\frac{5}{7}$. **B** $\frac{4}{21}$. **C** $\frac{19}{21}$. **D** $\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega)=6\cdot 6=36$.

Gọi biến cố A: "Tổng kết quả xuất hiện của hai súc sắc là một số chia hết cho hai hoặc cho 3".

- Các kết quả của phép thử có tổng chia hết cho 2:
  $\{1;1\},\{1;3\},\{3;1\},\{1;5\},\{5;1\},\{2;2\},\{2;4\},\{4;2\},\{2;6\},\{6;2\},\{3;3\},\{3;5\},\{5;3\},\{4;4\},\{4;6$
  $\{5;5\},\{6;6\}$.
- Các kết quả của phép thử có tổng chia hết cho 3:
  $\{1;2\},\{2;1\},\{1;5\},\{5;1\},\{2;4\},\{4;2\},\{3;3\},\{3;6\},\{6;3\},\{4;5\},\{5;4\},\{6;6\}$.

Suy ra $n(A)=24$.

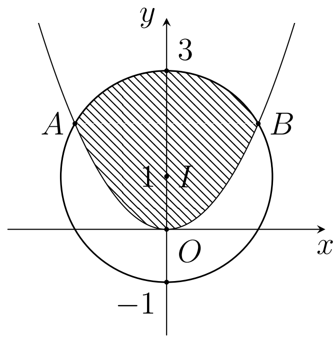
Vậy, xác suất cần tìm bằng $\mathrm{P}(A)=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 49.

Cho đường tròn (C) có tâm $I(0;1)$ và bán kính bằng $R=2$, parabol $(P)\colon y=m\cdot x^2$ cắt (C) tại hai điểm A, B có tung độ bằng 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) (phần gạch sọc ở hình vẽ) có kết quả gần đúng bằng số nào sau đây?

A 7,0755. **B** 7,0756. **C** 5,4908. **D** 11,6943.



Lời giải.

Ta có $(C)\colon x^2+(y-1)^2=4$.

Xét $A(x;2)\in(C)$, ta có $x^2+1=4\Leftrightarrow x^2=3\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$. Suy ra $A\left(-\sqrt{3};2\right)$, $B\left(\sqrt{3};2\right)$.

Vì $A\in(P)$ nên ta có $2=m\cdot 3\Leftrightarrow m=\dfrac{2}{3}$. Suy ra $(P)\colon y=\dfrac{2}{3}x^2$.

Từ phương trình của (C), ta có $y=\pm\sqrt{4-x^2}+1$ nên cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ thuộc đồ thị hàm số $y=\sqrt{4-x^2}+1$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm bằng $S=\displaystyle\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left|\sqrt{4-x^2}+1-\dfrac{2}{3}x^2\right|\,\mathrm{d}x\approx 7{,}075541545$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Biết tập nghiệm của bất phương trình $x^2+2mx+2m^2-5\leqslant 0$ là đoạn $[1;3]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $m\in\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$. **B** $m\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. **C** $m\in\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$. **D** $m\in\left(-\dfrac{5}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$.

Lời giải.

Xét $\Delta'=-m^2+5$.

- Trường hợp $\Delta'<0\Leftrightarrow|m|>\sqrt{5}$ thì $x^2+2mx+2m^2-5>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Nên trường hợp này không thỏa yêu cầu bài toán.
- Trường hợp $\Delta'=0\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{5}$ thì $x^2+2mx+2m^2-5\geqslant 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $x^2+2mx+2m^2-5=0\Leftrightarrow x=-m=\pm\sqrt{5}$.
- Trường hợp $\Delta'>0\Leftrightarrow|m|<\sqrt{5}$ thì $x^2+2mx+2m^2-5\leqslant 0$ có tập nghiệm là $[x_1;x_2]$, với x_1,x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2+2mx+2m^2-5=0$.

Vậy, yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi 1 và 3 là hai nghiệm của phương trình $x^2+2mx+2m^2-5=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}1+2m+2m^2-5=0\\9+6m+2m^2-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m^2+2m-4=0\\2m^2+6m+4=0\end{cases}\Leftrightarrow m=-2$ (thỏa điều kiện $|m|<\sqrt{5}$).

Kết luận $m=-2$.

Chọn đáp án D □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

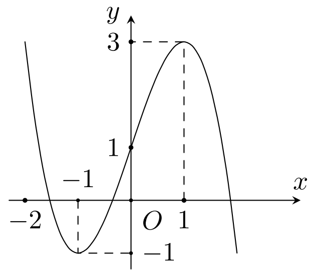
1. A	2. C	3. B	4. A	5. A	6. C	7. B	8. A	9. C	10. D
11. D	12. D	13. B	14. B	15. D	16. D	17. A	18. A	19. B	20. B
21. B	22. B	23. C	24. B	25. D	26. B	27. A	28. D	29. B	30. D
31. B	32. B	33. A	34. C	35. A	36. D	37. A	38. A	39. A	40. B
41. C	42. A	43. D	44. C	45. A	46. C	47. B	48. D	49. A	50. D

3 ĐỀ THI THỬ SỐ 3-MAX8

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ, khẳng định nào sau đây **sai**?



(A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -4)$.

(B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

(C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 3)$.

(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, hàm số đồng biến trên $(-1; 1)$. Theo 4 phương án, ta thấy phương án "Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 3)$" sai.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘		↗	2 ‖		2	↘	
			-1		‖ $-\infty$	↗			$-\infty$

(A) Hàm số không có giá trị cực tiểu.

(B) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

(C) Giá trị cực đại của hàm số bằng 1.

(D) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.

Lời giải.

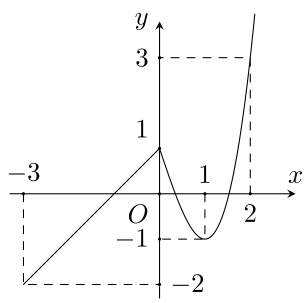
Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ khi $y = 2$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$ khi $y = -1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3; 2]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?



(A) $M = -2$ tại $x = -3$.

(B) $M = 3$ tại $x = 2$.

(C) $M = 1$ tại $x = 0$.

(D) $M = 2$ tại $x = 3$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy $M = \max\limits_{[-3;2]} y = 3 \Leftrightarrow x = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{-2x + 2020}{x - 2019}$ là

(A) $x=-2$. (B) $x=2019$. (C) $y=-2$. (D) $y=2019$.

Lời giải.

Ta có tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2019\}$.

Xét $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-2 \Rightarrow y=-2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Biết $\log 2=a$, khi đó $\log 16$ tính theo a là

(A) $4a$. (B) $2a$. (C) $8a$. (D) $16a$.

Lời giải.

Ta có $\log 16=\log 2^4=4\log 2=4a$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Bà Mai gửi tiết kiệm ngân hàng Vietcombank số tiền 50 triệu đồng với lãi suất $0,79\%$ một tháng, theo phương thức lãi kép. Tính số tiền cả vốn lẫn lãi bà Mai nhận được sau 2 năm? (làm tròn đến hàng nghìn).

(A) 60393000. (B) 50793000. (C) 50790000. (D) 59480000.

Lời giải.

Đây là bài toán lãi kép với chu kỳ là một tháng, ta áp dụng công thức $A(1+r)^n$ với $A=50$ triệu đồng, $r\%=0,79\%$ và $n=2\cdot 12=24$ tháng.

$50\cdot(1+0{,}79\%)^24\approx 60.393.290$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=4^x$ là

(A) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{4^{x+1}}{x+1}+C$. (B) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=4^{x+1}+C$.

(C) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=4^x\ln 4+C$. (D) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{4^x}{\ln 4}+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{4^x}{\ln 4}+C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Công thức diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=a$ và đường thẳng $x=b$ là

(A) $S=\pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. (B) $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. (C) $S=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. (D) $S=\pi\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Công thức diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=a$ và đường thẳng $x=b$ là $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Khối đa diện đều loại $\{5,3\}$ có số mặt là

(A) 14. (B) 8. (C) 10. **D** 12.

Lời giải.

Khối đa diện đều loại $\{5,3\}$ là khối đa diện mười hai mặt đều nên có số mặt là 12.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Cho hai số phức $z_1 = 2+3i$ và $z_2 = -3-5i$. Tính tổng phần thực và phần ảo của số phức $w = z_1 + z_2$.

A -3. (B) 0. (C) $-1-2i$. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $w = z_1 + z_2 = (2+3i) + (-3-5i) = -1-2i$.

Phần thực $a = -1$ và phần ảo $b = -2$.

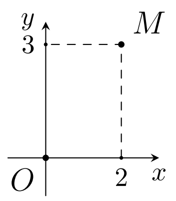
Suy ra $a + b = -1 + (-2) = -3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11.

Điểm M trong hình vẽ dưới đây biểu diễn số phức $\overline{z}$. Số phức z bằng

(A) $3-2i$. **B** $2-3i$. (C) $2+3i$. (D) $3+2i$.



Lời giải.

Theo hình vẽ ta có $\overline{z} = 2+3i \Rightarrow z = 2-3i$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Thể tích khối nón có chiều cao h, bán kính đường tròn đáy r là

(A) $V = \frac{1}{2}\pi r^2 h$. (B) $V = \pi r^2 h$. (C) $V = \frac{4}{3}\pi r^2 h$. **D** $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Lời giải.

Ta có $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba véc-tơ $\vec{a} = (1;2;3)$, $\vec{b} = (2;2;-1)$, $\vec{c} = (4;0;-4)$. Tọa độ véc-tơ $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ là

(A) $\vec{d} = (-7;0;-4)$. (B) $\vec{d} = (-7;0;4)$. **C** $\vec{d} = (7;0;-4)$. (D) $\vec{d} = (7;0;4)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \vec{a} = (1;2;3) \\ \vec{b} = (2;2;-1) \\ \vec{c} = (4;0;-4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a} = (1;2;3) \\ -\vec{b} = (-2;-2;1) \\ 2\vec{c} = (8;0;-8) \end{cases} \Rightarrow \vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} = (7;0;-4)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

A $z = 0$. (B) $x = 0$. (C) $y = 0$. (D) $x + y = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oxy) có phương trình là $z = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu có phương trình $(x+2)^2+(y-3)^2+z^2=5$ là

A. $I(2;3;0),\ R=\sqrt{5}$.
B. $I(-2;3;0),\ R=\sqrt{5}$.
C. $I(2;3;1),\ R=5$.
D. $I(2;-2;0),\ R=5$.

Lời giải.

Mặt cầu có tâm $I(-2;3;0)$ và bán kính là $R=\sqrt{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Tập nghiệm của phương trình $\sin x=-1$ là

A. $\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.
B. $\left\{-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.
C. $\left\{-\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.
D. $\left\{k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Ta có phương trình $\sin x=-1\Leftrightarrow\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Một lớp có 33 học sinh, cần chọn ra 6 học sinh để trực trường vào buổi chiều. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

A. $6!$ cách.
B. C_{33}^{6} cách.
C. A_{33}^{6} cách.
D. 33^6 cách.

Lời giải.

Số cách chọn bằng số tổ hợp chập 6 của 33 phần tử.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Trong các dãy số (u_n) sau, hãy chọn dãy số tăng?

A. $u_n=-n$.
B. $u_n=\frac{1}{n}$.
C. $u_n=(-1)^n n$.
D. $u_n=n$.

Lời giải.

Ta có $u_n=n\Rightarrow u_{n+1}=n+1$.

Xét hiệu $u_{n+1}-u_n=(n+1)-n=1>0,\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$ Dãy số tăng.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Hàm số nào sau đây **không** có cực trị?

A. $y=x^3-3x+1$.
B. $y=x^4-x^2+1$.
C. $y=x^3+3x-1$.
D. $y=x^2-4x+5$.

Lời giải.

Dễ thấy hàm trùng phương (phương án "$y=x^4-x^2+1$") và hàm bậc hai (phương án "$y=x^2-4x+5$") luôn có cực trị.

Xét phương án "$y=x^3+3x-1$": $y'=3x^2+3>0$ nên hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}\Rightarrow$ hàm số không có cực trị.

Xét phương án "$y=x^3-3x+1$": $y'=3x^2-3\xrightarrow{y'=0}x=\pm1$ (đây là 2 nghiệm bội lẻ của $y'=0$ nên có sự đổi dấu khi qua $x=1$, $x=-1\Rightarrow y$ có 2 điểm cực trị).

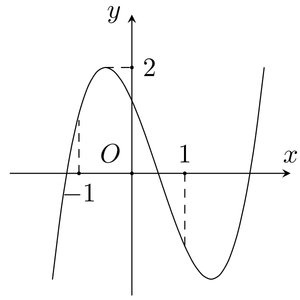
Chọn đáp án C □

Câu 20.

Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A $a > 0,\ b > 0,\ c < 0,\ d > 0.$ **B** $a < 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d < 0.$

C $a > 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d > 0.$ **D** $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d < 0.$



Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = +\infty \Rightarrow a > 0.$

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0. \quad (*)$$

Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu nên suy ra phương trình $(*)$ có hai nghiệm trái dấu $\Rightarrow a \cdot c < 0 \Rightarrow c < 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; d)$. Dựa vào đồ thị suy ra $d > 0$.

Gọi x_1 và x_2 $(x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của $(*)$. Theo đồ thị, ta có $x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow b < 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $-x^3 + 3x^2 - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt?

A $0 \leqslant m \leqslant 4$. **B** $m > 0$. **C** $m > 4$. **D** $0 < m < 4$.

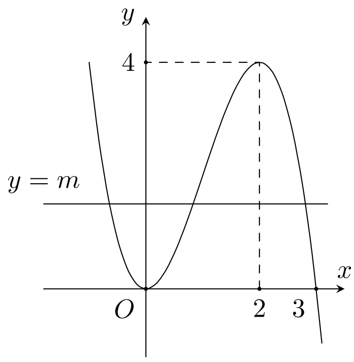
Lời giải.

Ta có $-x^3 + 3x^2 - m = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 = m. \quad (*)$

Số nghiệm của $(*)$ là số hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2$ với đường thẳng $y = m$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy phương trình có ba nghiệm phân biệt khi

$$0 < m < 4.$$



Chọn đáp án D □

Câu 22. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$ song song với đường thẳng $y = x$?

A 2. **B** 1. **C** 3. **D** 4.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 + 4x$.

Lấy điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$. Khi đó, tiếp tuyến d của đồ thị hàm số này tại điểm $M(x_0; y_0)$ có hệ số góc là $-3x_0^2 + 4x_0$.

d song song với đường thẳng $y = x$ nên $-3x_0^2 + 4x_0 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = \dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$

Với $x_0 = 1$ thì $y_0 = 1$, tiếp tuyến tại $M(1; -1)$ có phương trình $y = 1 \cdot (x - 1) + 1 = x$.

Với $x_0 = \dfrac{1}{3}$ thì $y_0 = \dfrac{5}{27}$, tiếp tuyến tại điểm $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{5}{27}\right)$ có phương trình $y = 1 \cdot \left(x - \dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{5}{27} = x - \dfrac{4}{27}$.
Vậy có một tiếp tuyến thỏa mãn điều kiện đề bài.
Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Tập xác định của hàm số $y = \log_2\left[\log_3(x^2 - 3x - 3)\right]$ là

A. $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.
B. $\left(-\infty; \dfrac{3 - \sqrt{33}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3 + \sqrt{33}}{2}; +\infty\right)$.
C. $\left(-\infty; \dfrac{3 - \sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3 + \sqrt{21}}{2}; +\infty\right)$.
D. $\left(-\infty; \dfrac{3 - \sqrt{57}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3 + \sqrt{57}}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 3x - 3 > 0 \\ \log_3(x^2 - 3x - 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 3x - 3 > 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 4. \end{array}\right.$

Vậy tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Nếu $\log 2 = a$, $\log 3 = b$ thì $\log_5 12$ bằng

A. $\dfrac{a+b}{1+a}$.
B. $\dfrac{2a+b}{1-a}$.
C. $\dfrac{a+2b}{1+a}$.
D. $\dfrac{a+2b}{1-a}$.

Lời giải.

Ta có $\log_5 12 = \dfrac{\log 12}{\log 5} = \dfrac{\log(3 \cdot 4)}{\log \dfrac{10}{2}} = \dfrac{\log 3 + 2log2}{\log 10 - log2} = \dfrac{2a+b}{1-a}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Số nghiệm của phương trình $\log_2[(x+2)^2] + 2\log_2(2-x) = 4$ là

A. hai.
B. một.
C. không.
D. ba.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} (x+2)^2 > 0 \\ 2 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x < 2. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_2[(x+2)^2] + 2\log_2(2-x) = 4 \Leftrightarrow 2\log_2|x+2| + 2\log_2(2-x) = 4 \\ \Leftrightarrow\ & \log_2\left[|x+2| \cdot (2-x)\right] = 2 \Leftrightarrow |x+2| \cdot (2-x) = 4. \quad (1) \end{aligned}$$

Trường hợp 1. $x < -2$, khi đó (1) $\Leftrightarrow -(x+2)(2-x) = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\sqrt{2} \\ x = -2\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Do $x < -2$ nên ta lấy nghiệm $x = -2\sqrt{2}$.
Trường hợp 2. $-2 < x < 2$, khi đó (1) $\Leftrightarrow (x+2)(2-x) = 4 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn).
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.
Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Số nghiệm dương của phương trình $\ln|x^2 - 5| = 0$ là

A. 2.
B. 4.
C. 0.
D. 1.

Lời giải.

Có $\ln|x^2-5|=0 \Leftrightarrow |x^2-5|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-5=1\\x^2-5=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\sqrt{6}\\x=-\sqrt{6}\\x=2\\x=-2.\end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm dương là $x=\sqrt{6}$, $x=2$.

Chọn đáp án A $\square$

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $f(0)=2018$, $f(2)=2019$. Giá trị của $f(3)-f(-1)$ bằng

A. 1. B. $\ln 4$. C. $\ln 4037$. D. 0.

Lời giải.

Cách 1:

Có $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x=\ln|x-1|+C$, suy ra $f(x)=\begin{cases}\ln(x-1)+C_1 \; khi\; x>1\\ \ln(1-x)+C_2\; khi\; x<1.\end{cases}$

Do $f(0)=2018$, $f(2)=2019$ nên $C_2=2018$, $C_1=2019$.

Khi đó $f(3)-f(-1)=\ln 2+C_1-(\ln 2+C_2)=C_1-C_2=1$.

Cách 2: Sử dụng MTCT

Ta có

$$\begin{aligned}f(3)-f(-1)&=f(3)-f(2)+f(0)-f(-1)+f(2)-f(0)\\&=\int_2^3 f'(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^0 f'(x)\,\mathrm{d}x+f(2)-f(0)+1\\&=\int_2^3\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^0\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x+f(2)-f(0)=1.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A $\square$

Câu 28. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=4$, biết rằng khi cắt bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ $x\,(1\leqslant x\leqslant 4)$ thì được thiết diện là lục giác đều có độ dài cạnh là $2x$.

A. $V=63\sqrt{3}\pi$. B. $V=126\sqrt{3}$. C. $V=63\sqrt{3}$. D. $V=126\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

Thiết diện tại điểm có hoành độ x là lục giác đều có cạnh $2x$ nên nó có diện tích

$$S(x)=6\frac{(2x)^2\sqrt{3}}{4}=6\sqrt{3}x^2.$$

Thể tích vật thể cần tìm là $V=\displaystyle\int_1^4 S(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^4 6\sqrt{3}x^2\,\mathrm{d}x=2\sqrt{3}x^3\Big|_1^4=126\sqrt{3}$.

Chọn đáp án B $\square$

Câu 29. Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)\overline{z}+3-2i=0$. Tìm mô-đun của số phức $w=2z-(2+i)$.

A. $|w|=2\sqrt{30}$. B. $|w|=\sqrt{47}$. C. $|w|=3\sqrt{5}$. D. $|w|=\sqrt{17}$.

Lời giải.

Ta có $(1+i)\overline{z}+3-2i=0 \Leftrightarrow \overline{z}=\dfrac{-3+2i}{1+i}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}i \Rightarrow z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i.$

$$\Rightarrow w=2\left(-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i\right)-(2+i)=-3-6i \Rightarrow |w|=3\sqrt{5}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 30. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-6z+11=0$. Giá trị của biểu thức $|3z_1|-|z_2|$ bằng

A 11. B 22. C $\sqrt{11}$. D $2\sqrt{11}$.

Lời giải.

Có $z^2-3z+11=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{35}}{2}i \\ z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{35}}{2}i \end{array}\right. \Rightarrow |z_1|=|z_2|=\sqrt{11}.$

Vậy $|3z_1|-|z_2|=3|z_1|-|z_2|=2\sqrt{11}$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy là $a\sqrt{2}$ và tam giác SAC đều. Tính độ dài cạnh bên của hình chóp.

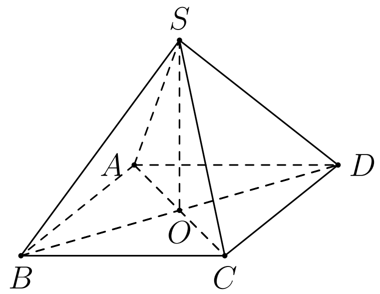
A $2a$. B $a\sqrt{2}$. C $a\sqrt{3}$. D a.

Lời giải.

Độ dài đường chéo AC của hình vuông $ABCD$ là

$$\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}=2a.$$

Vậy độ dài cạnh bên bằng $2a$.



Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa một mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC)

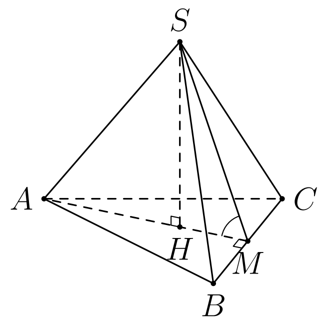
A $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. B $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. C $\dfrac{a}{2}$. D $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC.

Vì $\begin{cases} (SBC)\cap(ABC)=BC \\ SM\subset(SBC)\colon SM\perp BC \\ AM\subset(ABC)\colon AM\perp BC \end{cases} \Rightarrow ((SBC),(ABC))=\widehat{SMA}=60°.$

Gọi H là trọng tâm tam giác ABC. Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SH\perp(ABC)$.



Tam giác ABC đều cạnh bằng a nên

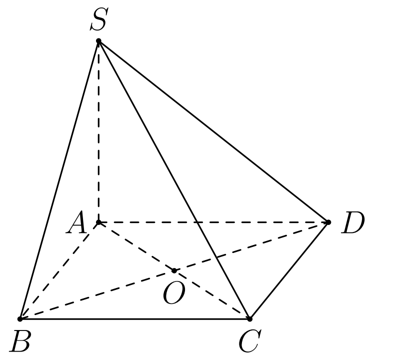
$$AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow HM=\frac{1}{3}AM=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Trong tam giác vuông SHM có $SH = HM \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{a}{2}$.
Vậy $\mathrm{d}(S, (ABC)) = SH = \dfrac{a}{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ A đến (SBD) bằng $\dfrac{6a}{7}$. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD)?

A $\dfrac{12a}{7}$. B $\dfrac{3a}{7}$. C $\dfrac{4a}{7}$. D $\dfrac{6a}{7}$.

Lời giải.
Do $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow AC \cap BD = O$ là trung điểm của AC và $BD \Rightarrow \mathrm{d}(C, (SBD)) = \mathrm{d}(A, (SBD)) = \dfrac{6a}{7}$.

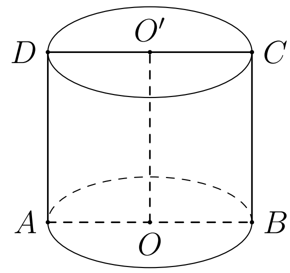


Chọn đáp án D □

Câu 34. Một hình trụ có bán kính đáy là 2(cm). Một mặt phẳng đi qua trục của hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là một hình vuông. Tính thể tích khối trụ đó.

A 4π cm^3. B 8π cm^3. C 16π cm^3. D 32π cm^3.

Lời giải.
Giả sử $ABCD$ là thiết diện qua trục của hình trụ (hình vẽ). Theo giả thiết $ABCD$ là hình vuông nên chiều cao của hình trụ $h = OO' = 2r = 4(cm)$.
Vậy thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$ cm^3.

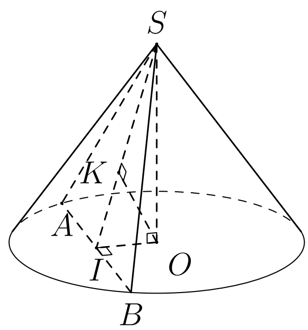


Chọn đáp án C □

Câu 35. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h = 20$ (cm), bán kính đáy $r = 25(cm)$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12 (cm). Tính diện tích của thiết diện đó.

A $S = 500$ cm^2. B $S = 400$ cm^2. C $S = 300$ cm^2. D $S = 406$ cm^2.

Lời giải.
Thiết diện là tam giác SAB (Hình vẽ). Theo bài ra ta có
$AO = r = 25; SO = h = 20; OK = 12$ (Hình vẽ).
Lại có $\dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{OI^2} + \dfrac{1}{OS^2} \Rightarrow OI = 15(cm)$
$AB = 2AI = 2\sqrt{25^2 - 15^2} = 40$ (cm); $SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = 25$ (cm)
$\Rightarrow S_{\triangle SAB} = \dfrac{1}{2} \cdot 25 \cdot 40 = 500$ cm^2.



Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$. Gọi M' là hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;3;1)$ lên mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y+z=0$. Tọa độ của M' là

(A) $M'\left(2;\dfrac{5}{2};3\right)$. (B) $M'(1;3;5)$. (C) $M'\left(\dfrac{5}{2};2;\dfrac{3}{2}\right)$. (D) $M'(3;1;2)$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng qua M và vuông góc với (α).

$\Rightarrow$ Phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x=2+t \\ y=3-2t \\ z=1+t \end{cases}$.

Ta có $M'=\Delta\cap(\alpha)$.

Xét phương trình: $2+t-2(3-2t)+1+t=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $M'\left(\dfrac{5}{2};2;\dfrac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;2;1)$, $B(2;-1;4)$ và $C(1;1;4)$. Đường thẳng nào dưới đây vuông góc với mặt phẳng (ABC)?

(A) $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$. (B) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$. (C) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$. (D) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-3;3)$; $\overrightarrow{AC}=(2;-1;3)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(-6;-3;3)$.

Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$ vuông góc với $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ nên $\vec{u}$ cùng phương với $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$ do đó chọn $\vec{u}=(2;1;-1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2=2001$ và $u_5=1995$. Khi đó u_{1001} bằng

(A) $u_{1001}=4005$. (B) $u_{1001}=4003$. (C) $u_{1001}=3$. (D) $u_{1001}=1$.

Lời giải.

$$\begin{cases} u_2=u_1+d \\ u_5=u_1+4d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+d=2001 \\ u_1+4d=1995 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=2003 \\ d=-2 \end{cases} \Rightarrow u_{1001}=u_1+1000d=3.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Cho hàm số $y=\dfrac{m}{3}x^3-mx^2+3x+1$, ($m\in\mathbb{R}$). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số trên luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Xét trường hợp $m=0 \Rightarrow y=3x+1$ làm hàm tăng trên $\mathbb{R}$ (thỏa mãn).

Trường hợp $m\neq 0 \xrightarrow{ycbt} y'=mx^2-2mx+3\geqslant 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a=m>0 \\ \Delta'=m^2-3m\leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow 0<m\leqslant 3$.

Từ 2 trường hợp trên ta nhận $m\in\{0;1;2;3\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Tổng tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + m - 1$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O.

A -3. B -2. C 2. D 4.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0; y = m - 1 \\ x = -2; y = 3 + m \end{array}\right. \Rightarrow A(0; m-1), B(-2; m+3)$.

$\triangle OAB$ vuông tại $O \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -3. \end{array}\right.$

Kiểm tra lại $m = 1 \Rightarrow A(0;0) \equiv O$ nên loại $m = 1$. Vậy chỉ có $m = -3$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - m = 0$ có nghiệm.

A $m \geqslant 1$. B $m \geqslant -\dfrac{5}{4}$. C $m \leqslant \dfrac{5}{4}$. D $m \leqslant -1$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.

Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1}\,(t \geqslant 1)$, khi đó phương trình ban đầu trở thành

$$t^2 - 1 + t - m = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 1 = m. \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t - 1$ với $t \in [1; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = 2t + 1 > 0$ với mọi $t \geqslant 1$. Vậy hàm số luôn đồng biến trên $[1; +\infty)$.

Suy ra $f(t) \geqslant f(1) = 1$ với mọi $t \in [1; +\infty)$. Vậy $(*)$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \geqslant 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 8$ và $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $\displaystyle\int_{-1}^1 f(|4x-1|)\,\mathrm{d}x$.

A $\dfrac{9}{4}$. B $\dfrac{11}{4}$. C 3. D 6.

Lời giải.

Ta có

$$I = \int_{-1}^{1} f(|4x-1|)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(|4x-1|)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{4}}^{1} f(|4x-1|)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{4}}^{1} f(4x+1)\,\mathrm{d}x.$$

Xét $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u = 1 - 4x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\dfrac{1}{4}\mathrm{d}u$.

Khi $x = -1$ thì $u = 5$. Khi $x = \dfrac{1}{4}$ thì $u = 0$.

Nên $I_1 = -\dfrac{1}{4}\displaystyle\int\limits_5^0 f(u)\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int\limits_0^5 f(u)\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\cdot 4 = 1$.

Xét $I_2 = \displaystyle\int\limits_{\frac{1}{4}}^1 f(4x-1)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 4x - 1 \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\mathrm{d}t$.

Khi $x = \dfrac{1}{4}$ thì $t = 0$. Khi $x = 1$ thì $t = 3$.

Nên $I_2 = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int\limits_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\cdot 8 = 2$.

Vậy $I = I_1 + I_2 = 1 + 2 = 3$.

Chọn đáp án C □

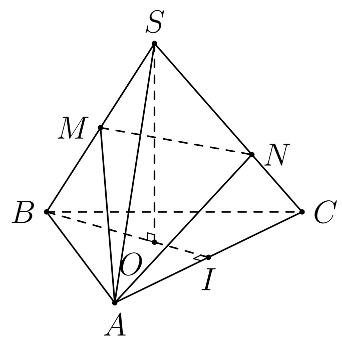
Câu 43. Cho khối chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$. Gọi M là trung điểm SB, N là điểm trên đoạn SC sao cho $NS = 2NC$. Thể tích khối chóp $A.BCNM$ bằng

A $\dfrac{a^3\sqrt{11}}{16}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{11}}{18}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{11}}{24}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{11}}{36}$.

Lời giải.

Gọi O là trọng tâm của tam giác ABC. Khi đó

$$BO = \frac{2}{3}BI = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Khối chóp $S.ABC$ đều và O là trọng tâm tam giác ABC nên

$$SO \perp (ABC) \Rightarrow SO \perp OB.$$

$\Rightarrow \triangle SOB$ vuông tại O,

$$\Rightarrow SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{33}}{3}.$$

Do đó $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SO \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{33}}{3}\cdot\dfrac{1}{2}a\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{11}}{12}$.

Ta có $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SB}\cdot\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AMN} = \dfrac{1}{3}V_{S.ABC}$.

Vậy $V_{A.BCNM} = V_{S.ABC} - V_{S.AMN} = V_{S.ABC} - \dfrac{1}{3}V_{S.ABC} = \dfrac{2}{3}V_{S.ABC} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a^3\sqrt{11}}{12} = \dfrac{a^3\sqrt{11}}{18}$.

Chọn đáp án B □

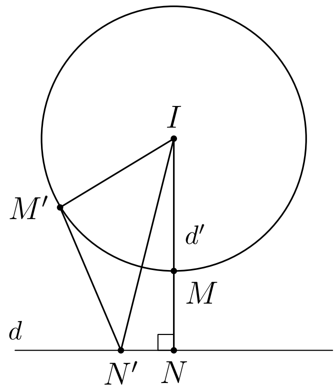
Câu 44. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn đẳng thức $|z_1 + 5| = 5$; $|z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - z_2|$.

A $\dfrac{1}{2}$. **B** 2. **C** $\dfrac{5}{2}$. **D** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

- Từ $|z_1 + 5| = 5 \Leftrightarrow (x_1 + 5)^2 + y_1^2 = 25$ nên tập hợp các điểm biểu diễn số phức z_1 là đường tròn

(C) có tâm $I(-5;0)$, bán kính $r=5$.
- Từ $|z_2+1-3i|=|z_2-3-6i| \Leftrightarrow (x_2+1)^2+(y_2-3)^2=(x_2-3)^2+(y_2-6)^2 \Leftrightarrow 8x_2+6y_2-35=0$ nên tập hợp các điểm biểu diễn số phức z_2 là đường thẳng $d\colon 8x+6y-35=0$.
- Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1 và z_2. Khi đó $|z_1-z_2|=MN$.

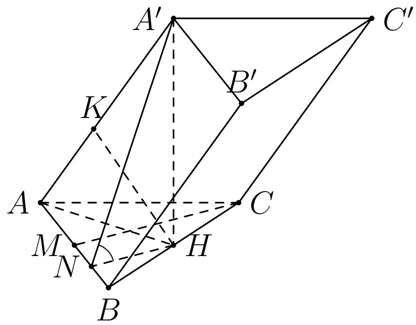


- Bài toán trở thành: "Tìm điểm M trên đường tròn (C) và điểm N trên đường thẳng d sao cho MN ngắn nhất".
- Dựng đường thẳng d' đi qua I và vuông góc với d và cắt d tại N, đoạn thẳng IN cắt (C) tại M. Khi đó MN ngắn nhất.
Thật vậy: với M' bất kì thuộc (C), N' bất kì thuộc d ta có $M'N'+M'I \geqslant IN' \geqslant IN=IM+MN \Rightarrow M'N' \geqslant MN$.
- Ta có $IN=\mathrm{d}(I;d)=\dfrac{15}{2}$;
Lại có $IM=r=5$ và M nằm giữa I và $N \Rightarrow MN=\dfrac{5}{2}$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$ bằng $\dfrac{5}{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 45. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm BC. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng $B'C'$ và AA' biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(A'B'C')$ bằng 60°.

A $d=\dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$. **B** $d=\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **C** $d=\dfrac{3a}{4}$. **D** $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm BC, theo giả thiết $A'H \perp (ABC)$.
Gọi M là trung điểm AB, N là trung điểm MB. Ta có $CM \perp AB$, NH là đường trung bình $\triangle BCM$ nên $HN \parallel CM \Rightarrow HN \perp AB$. Mà góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(A'B'C')$ bằng góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) là góc $\widehat{A'NH}=60^\circ$.
Vì $\triangle ABC$ là tam giác đều nên $AH \perp BC$.
Vậy $BC \perp (A'AH) \Rightarrow BC \perp AA'$.
Trong mặt phẳng $(A'AH)$, kẻ $HK \perp AA'$ tại K. Ta thấy $HK \perp AA'$ mà $AA' \parallel BB' \Rightarrow HK \perp BB'$, $HK \perp BC$ nên $HK \perp (BCC'B')$.
Vì $AA' \parallel BB'$ nên $\mathrm{d}(AA';B'C')=\mathrm{d}(AA';(BCC'B'))=\mathrm{d}(K;(BCC'B'))=HK$.
Ta có $HN=\dfrac{1}{2}CM=\dfrac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A'H=NH\cdot\tan 60^\circ=\dfrac{3a}{4}$.
Trong $\Delta A'AH$ có $AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $A'H=\dfrac{3a}{4}$ nên

$$\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{A'H^2}+\frac{1}{AH^2}=\frac{16}{9a^2}+\frac{4}{3a^2}=\frac{28}{9a^2}\Rightarrow HK=\frac{3a\sqrt{7}}{14}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y+z-4=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{3}$. Phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d là

A $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

B $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

C $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.

D $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$.

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_{(P)}=(1;2;1)$.

Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_d=(2;1;3)$.

Phương trình tham số của đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=-1+2t \\ y=t \\ z=-2+3t. \end{cases}$

Xét phương trình $-1+2t+2t-2+3t-4=0 \Leftrightarrow 7t-7=0 \Leftrightarrow t=1$.

Suy ra giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) là $A(1;1;1)$. Ta có: $A\in\Delta$.

Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}_\Delta=\left[\vec{n}_{(P)},\vec{u}_d\right]=(5;-1;-3)$.

Phương trình chính tắc của đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+7=0$. Ba điểm A, M, B nằm trên mặt cầu (S) sao cho $\widehat{AMB}=90^\circ$. Diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng

A 4. **B** 2. **C** 4π. **D** 2π.

Lời giải.

Ta có $(S)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=4 \Rightarrow (S)$ có tâm $I(1;1;3)$ và bán kính $R=2$.

Bài ra A, M, B nằm trên mặt cầu (S) và $\widehat{AMB}=90^\circ \Rightarrow AB$ qua $I \Rightarrow AB=2R=4$.

Ta có $S_{\triangle AMB}=\dfrac{1}{2}MA\cdot MB\leqslant \dfrac{MA^2+MB^2}{4}=\dfrac{AB^2}{4}=4$.

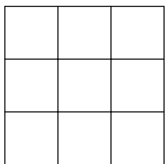
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow MA=MB=\dfrac{AB}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ và $S_{\triangle AMB}=4$.

Do đó diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng 4.

Chọn đáp án A □

Câu 48.

Cho một bảng ô vuông 3×3. Điền ngẫu nhiên các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 vào bảng trên (mỗi ô chỉ điền một số). Gọi A là biến cố "mỗi hàng, mỗi cột bất kì đều có ít nhất một số lẻ". Xác suất của biến cố A bằng



A $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{3}$. **B** $\mathrm{P}(A)=\dfrac{10}{21}$. **C** $\mathrm{P}(A)=\dfrac{5}{7}$. **D** $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{56}$.

Lời giải.

Ta có: $\overline{A}$ là biến cố "tồn tại một hàng hoặc một cột gồm ba số chẵn".

Do có 4 số chẵn (2, 4, 6, 8) nên $\overline{A}$ là biến cố "có đúng một hàng hoặc một cột gồm 3 số chẵn".

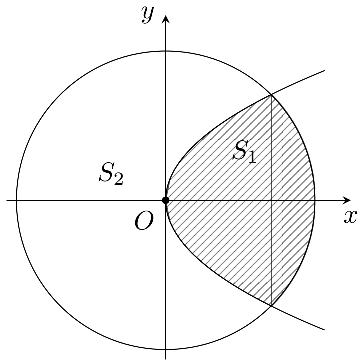
Ta tính $n\left(\overline{A}\right)$.

Chọn 4 ô điền số chẵn.

Chọn một hàng hoặc một cột thì có 6 cách.
Chọn một ô còn lại có 6 cách.
Điền 4 số chẵn vào 4 ô trên có 4! cách.
Điền 5 số lẻ vào 5 ô còn lại có 5! cách.
Vậy $n\left(\overline{A}\right) = 6 \times 6 \times 4! \times 5!$.
Suy ra $P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{6 \cdot 6 \cdot 5! \cdot 4!}{9!} = \dfrac{2}{7} \Rightarrow \mathrm{P}(A) = \dfrac{5}{7}$.
Chọn đáp án C □

Câu 49.

Biết rằng đường parabol $(P)\colon y^2 = 2x$ chia đường tròn $(C)\colon x^2 + y^2 = 8$ thành hai phần lần lượt có diện tích là S_1, S_2 (hình vẽ bên). Khi đó $S_2 - S_1 = a\pi - \dfrac{b}{c}$ với a, b, c nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b + c$.



A $S = 13$. **B** $S = 14$. **C** $S = 15$. **D** $S = 16$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$ diện tích $S = 8\pi$.

Xét giao điểm của (P) và (C) là $\begin{cases} y^2 = 2x \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 2x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

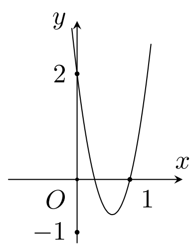
Suy ra $S_1 = 2\displaystyle\int_0^2 \sqrt{2x}\,\mathrm{d}x + 2\int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8 - x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{4}{3} + 2\pi \Rightarrow S_2 = S - S_1 = 6\pi - \dfrac{4}{3}$.

Vậy $\Rightarrow S_2 - S_1 = 4\pi - \dfrac{8}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \\ c = 3. \end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 50.

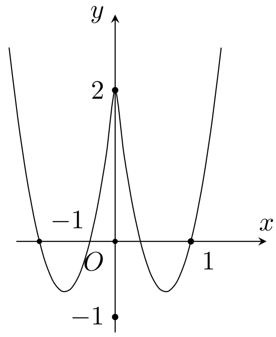
Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $\dfrac{4f(|x|) - 1}{f(|x|) + 1} = 2$ là



A 0. **B** 2. **C** 3. **D** 4.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x|)$.



Ta có $f(|x|) + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó phương trình

$$\frac{4f(|x|) - 1}{f(|x|) + 1} = 2 \Leftrightarrow 4f(|x|) - 1 = 2(f(|x|) + 1) \Leftrightarrow f(|x|) = \frac{3}{2}. \quad (1)$$

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị $y = f(|x|)$ với đường thẳng $y = \dfrac{3}{2}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm.

Chọn đáp án D □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. D	3. B	4. C	5. A	6. A	7. D	8. B	9. D	10. A
11. B	12. D	13. C	14. A	15. B	16. C	17. B	18. D	19. C	20. C
21. D	22. B	23. A	24. B	25. A	26. A	27. A	28. B	29. C	30. D
31. A	32. C	33. D	34. C	35. A	36. C	37. D	38. C	39. D	40. A
41. A	42. C	43. B	44. C	45. A	46. A	47. A	48. C	49. C	50. D

4 ĐỀ THI THỬ SỐ 4-MAX8

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$		
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A $(-\infty; -1)$. **B** $(-1; +\infty)$. **C** $(0; 1)$. **D** $(-1; 0)$.

(2D1Y1-2)

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đồng biến trong khoảng $(-1; 0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Hàm số sau có mấy cực trị $y = 4x^4 + 3x^2 - 5$

A 2. **B** 1. **C** 3. **D** 0.

(2D1Y2-1)

Lời giải.

Tập xác định $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 14x^3 + 6x = x(14x^2 + 6)$.

Khi $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

y' đổi dấu 1 lần khi x đi qua 0, suy ra hàm số có 1 điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x+1}{x^2-4}$ là

A 3. **B** 1. **C** 2. **D** 4.

(2D1B4-1)

Lời giải.

+ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+1}{x^2-4} = 0$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x+1}{x^2-4} = 0$. Suy ra đồ thị hàm số có TCN $y = 0$.

+ $\lim\limits_{x\to(-2)^+} y = \lim\limits_{x\to(-2)^+} \dfrac{3x+1}{x^2-4} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-2)^-} y = \lim\limits_{x\to(-2)^-} \dfrac{3x+1}{x^2-4} = -\infty$. Suy ra đồ thị hàm số có TCĐ $x = -2$.

+ $\lim\limits_{x\to2^+} y = \lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{3x+1}{x^2-4} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to2^-} y = \lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{3x+1}{x^2-4} = -\infty$. Suy ra đồ thị hàm số có TCĐ $x = 2$.

Vậy số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số đã cho là 3.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$		
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f(x) - \sqrt{17} = 0$ là

A 0. **B** 2. **C** 3. **D** 1.

(2D1B5-3)

Lời giải.

Ta có $2f(x) - \sqrt{17} = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{\sqrt{17}}{2} > 2$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Biết $\log a = 2$ và $\log b = 3$. Khi đó giá trị của $\log(a^2 \cdot b^3)$ là

A 31. **B** 13. **C** 30. **D** 108.

(2D2Y3-1)

Lời giải.

Ta có $\log(a^2 \cdot b^3) = \log a^2 + \log b^3 = 2\log a + 3\log b = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Tìm đạo hàm của hàm số $y = 2019^{x^2+1}$.

A $2.2019^{x^2+1} \cdot \ln 2019$. **B** $\dfrac{2x}{(x^2+1) \cdot \ln 2019}$.

C $2x \cdot 2019^{x^2+1} \cdot \ln 2019$. **D** $2019^{x^2+1} \cdot \ln 2019$.

(2D2B4-2)

Lời giải.

Ta có $\left(2019^{x^2+1}\right)' = 2019^{x^2+1} \cdot \ln 2019 \cdot (x^2+1)' = 2x \cdot 2019^{x^2+1} \cdot \ln 2019$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Giả sử $\displaystyle\int_0^9 f(x)\,dx = 37$ và $\displaystyle\int_9^0 g(x)\,dx = 16$. Khi đó, $I = \displaystyle\int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]\,dx$ bằng

A $I = 122$. **B** $I = 26$. **C** $I = 143$. **D** $I = 58$.

(2D3Y2-1)

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]\,dx = 2\int_0^9 f(x)\,dx - 3\int_9^0 g(x)\,dx = 26$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Một vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1$, $x = 1$ và thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ $x(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ là một hình tròn có diện tích bằng 3π. Thể tích của vật thể là

(A) $3\pi^2$. **B** 6π. (C) 6. (D) 2π.

(2D3Y3-4)

Lời giải.

Có $V = \int\limits_{-1}^{1} S(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} 3\pi\,\mathrm{d}x = 6\pi$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Phương trình $\sin 2x = \frac{1}{2}$ có tập nghiệm là

A $S = \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi,\ \frac{5\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(B) $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(C) $C = \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(D) $S = \left\{\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(1D1Y2-1)

Lời giải.

Ta có $\sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Cho hai số phức $z_1 = 5 - 7i$, $z_2 = 2 - i$. Mô-đun của hiệu hai số phức đã cho bằng

A $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{5}$.

(B) $|z_1 - z_2| = 45$.

(C) $|z_1 - z_2| = \sqrt{113}$.

(D) $|z_1 - z_2| = \sqrt{74} - \sqrt{5}$.

(2D4Y2-1)

Lời giải.

Ta có $z_1 - z_2 = 3 - 6i \Rightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{9 + 36} = 3\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Trong các mệnh đề sau, hãy xác định mệnh đề đúng.

(A) $z - 2\overline{z} \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}$.

(B) $z - \overline{z} \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}$.

(C) $z + 2\overline{z} \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}$.

D $z + \overline{z} \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}$.

(2D4B2-1)

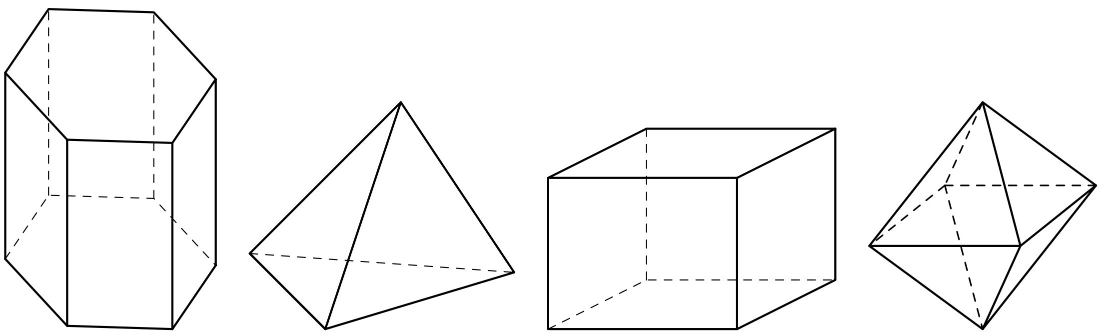
Lời giải.

Gọi số phức $z = a + bi$ ($\forall a, b \in \mathbb{R}$), suy ra $\overline{z} = a - bi$. Khi đó $z + \overline{z} = 2a \in \mathbb{R}$.

Do vậy mệnh đề đúng là $z + \overline{z} \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Hình đa diện nào dưới đây **không** có tâm đối xứng?



Ⓐ Lăng trụ lục giác đều.

Ⓑ Tứ diện đều.

Ⓒ Hình lập phương.

Ⓓ Bát diện đều.

(2H1Y2-3)

Lời giải.

Dễ thấy hình tứ diện đều không có tâm đối xứng.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 13. Cho hình nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và độ dài đường sinh $l = 4$. Tính diện tích xung quanh S của hình nón đã cho.

Ⓐ $S = 8\sqrt{3}\pi$. Ⓑ $S = 24\pi$. Ⓒ $S = 16\sqrt{3}\pi$. Ⓓ $S = 4\sqrt{3}\pi$.

(2H2Y1-2)

Lời giải.

Ta có $S = \pi r l = 4\sqrt{3}\pi$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 14. Cho $\vec{a} = (-2; 1; 3)$, $\vec{b} = (1; 2; m)$. Véc-tơ $\vec{a}$ vuông góc với $\vec{b}$ khi

Ⓐ $m = 1$. Ⓑ $m = -1$. Ⓒ $m = 2$. Ⓓ $m = 0$.

(2H3Y1-2)

Lời giải.

Ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow -2 + 2 + 3m = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) \cdot x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 8z + 1 = 0$. Tâm và bán kính của (S) lần lượt là

Ⓐ $I(-1; 3; -4)$, $R = 5$.

Ⓑ $I(1; -3; 4)$, $R = 5$.

Ⓒ $I(2; -6; 8)$, $R = \sqrt{103}$.

Ⓓ $I(1; -3; 4)$, $R = 25$.

(2H3Y1-3)

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; 4)$ và bán kính $R = \sqrt{1 + (-3)^2 + 4^2 - 1} = 5$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 16. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-1; 2; 0)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (4; 0; -5)$ là

Ⓐ $4x - 5y - 4 = 0$. Ⓑ $4x - 5z - 4 = 0$. Ⓒ $4x - 5y + 4 = 0$. Ⓓ $4x - 5z + 4 = 0$.

(2H3B2-3)

Lời giải.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-1;2;0)$ và có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;0;-5)$ có phương trình là $4(x+1)+0(y-2)-5(z-0)=0 \Leftrightarrow 4x-5z+4=0$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 17. Một hộp đựng 5 viên bi đỏ, 4 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp đó. Tính xác suất lấy được ít nhất 1 viên đỏ.

A $\dfrac{37}{42}$. B $\dfrac{1}{21}$. C $\dfrac{5}{42}$. D $\dfrac{20}{21}$.

(1D2B5-2)

Lời giải.

Lấy 3 viên bi từ $5+4=9$ viên bi có C_9^3 cách.

+ Lấy 1 viên đỏ và 2 viên xanh có $\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_4^2$ cách.

+ Lấy 2 viên đỏ và 1 viên xanh có $\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_4^1$ cách.

+ Lấy 3 viên đỏ có C_5^3 cách.

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_4^2+\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_4^1+\mathrm{C}_5^3}{\mathrm{C}_9^3}=\dfrac{20}{21}$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 18. Dãy số nào sau đây là một cấp số cộng?

A $(u_n)\colon \begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=u_n+2,\ \forall n\geqslant 1\end{cases}$. B $(u_n)\colon \begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=2u_n+1,\ \forall n\geqslant 1\end{cases}$.

C $(u_n)\colon 1;\ 3;\ 6;\ 10;\ 15;\ \ldots$. D $(u_n)\colon -1;\ 1;\ -1;\ 1;\ -1;\ \ldots$.

(1D3B3-1)

Lời giải.

Dãy số $(u_n)\colon \begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=u_n+2,\ \forall n\geqslant 1\end{cases}$ thỏa $u_{n+1}-u_n=2$ với mọi $n\geqslant 1$ nên là cấp số cộng.

Chọn đáp án A $\square$

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x-3}{mx-1}$ không có tiệm cận đứng.

A $m=0$. B $m\neq 0$.

C $m=0$ hoặc $m=\dfrac{1}{3}$. D $m=\dfrac{1}{3}$.

(2D1B4-2)

Lời giải.

Ta có hàm số không có tiệm cận đứng $\Leftrightarrow m=0$ hoặc $mx-1=0$ có nghiệm $x=3$.

Suy ra $m=0$ hoặc $3m-1=0 \Leftrightarrow m=0$ hoặc $m=\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 20. Cho hàm số $y = \dfrac{mx + 4m}{x + m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. 5. B. 4. C. Vô số. D. 3.

(2D1B1-3)

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{m(x + m) - (mx + 4m)}{(x + m)^2} = \dfrac{m^2 - 4m}{(x + m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định thì $y' < 0$, tức là $m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Vì m nguyên nên $m \in \{1; 2; 3\}$. Vậy S có 3 phần tử.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (m + 1)x + 2$ có hai điểm cực trị.

A. $m \leqslant 2$. B. $m > 2$. C. $m < -4$. D. $m < 2$.

(2D1B2-4)

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m + 1$.

Hàm số đã cho có hai điểm cực trị $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3(m + 1) > 0 \Leftrightarrow m < 2.$$

Chọn đáp án D □

Câu 22. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 2x}$.

A. 1. B. $\sqrt{3}$. C. 2. D. 0.

(2D1B3-1)

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [0; 2]$.

Có $y' = \dfrac{-2x + 2}{2\sqrt{-x^2 + 2x}} = \dfrac{1 - x}{\sqrt{-x^2 + 2x}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [0; 2]$.

Ta thấy $y(0) = y(2) = 0$; $y(1) = 1$.

Vậy $\max y = y(1) = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{x^3 + 1}$.

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x^3 + 1} + C$. B. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{e}^{x^3 + 1} + C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\mathrm{e}^{x^3 + 1} + C$. D. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3 + 1} + C$.

(2D3B1-2)

Lời giải.

Đặt $t = x^3 + 1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 3x^2\,\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{1}{3}\,\mathrm{d}t = x^2\,\mathrm{d}x$.

Khi đó ta được $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int x^2 \mathrm{e}^{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\mathrm{e}^t + C = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3+1} + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x+1 & khi \quad x \geqslant 0 \\ \mathrm{e}^{2x} & khi \quad x \leqslant 0 \end{cases}$. Tích phân $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ có giá trị bằng bao nhiêu?

(A) $\dfrac{7\mathrm{e}^2+1}{2\mathrm{e}^2}$. (B) $\dfrac{11\mathrm{e}^2-11}{2\mathrm{e}^2}$. (C) $\dfrac{3\mathrm{e}^2-1}{2\mathrm{e}^2}$. **D** $\dfrac{9\mathrm{e}^2-1}{2\mathrm{e}^2}$.

(2D3B2-1)

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2}(x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_{0}^{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\mathrm{e}^2} + 4 = \frac{9\mathrm{e}^2-1}{2\mathrm{e}^2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x^2 - x - 2)^{-3}$.

(A) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. (B) $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.

(C) $\mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$. **D** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

(2D2B2-1)

Lời giải.

Vì $-3 \in \mathbb{Z}^-$ nên hàm số xác định khi $x^2 - x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1;\ x \neq 2$. Vậy $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Hàm số $f(x) = \log_2(x^2 - 2x)$ có đạo hàm

(A) $f'(x) = \dfrac{\ln 2}{x^2 - 2x}$. (B) $f'(x) = \dfrac{1}{(x^2-2x)\ln 2}$.

(C) $f'(x) = \dfrac{(2x-2)\ln 2}{x^2 - 2x}$. **D** $f'(x) = \dfrac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 2}$.

(2D2B4-2)

Lời giải.

Áp dụng công thức $(\log_a u(x))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)\cdot \ln a}$.

Vậy $f'(x) = \dfrac{(x^2-2x)'}{(x^2-2x)\ln 2} = \dfrac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Phương trình $5^{2x+1} = 125$ có nghiệm là

(A) $x = \dfrac{3}{2}$. (B) $x = \dfrac{5}{2}$. **C** $x = 1$. (D) $x = 3$.

(2D2B5-1)

Lời giải.

Ta có $5^{2x+1} = 125 \Leftrightarrow 5^{2x+1} = 5^3 \Leftrightarrow 2x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Giải bất phương trình $\log_2(3x-1) > 3$.

A $x > 3$. **B** $\frac{1}{3} < x < 3$. **C** $x < 3$. **D** $x > \frac{10}{3}$.

(2D2B6-1)

Lời giải.

Điều kiện xác định $3x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 3x - 1 > 2^3 \Leftrightarrow 3x > 9 \Leftrightarrow x > 3$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy bất phương trình có nghiệm $x > 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Tìm các số thực a và b thỏa mãn $2a + (b+i)i = 1 + 2i$ với i là đơn vị ảo.

A $a = 0,\ b = 2$. **B** $a = \frac{1}{2},\ b = 1$. **C** $a = 0,\ b = 1$. **D** $a = 1,\ b = 2$.

(2D4B2-3)

Lời giải.

Ta có $2a + (b+i)i = 1 + 2i \Leftrightarrow (2a-1) + bi = 1 + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 1 = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Cho số phước $z = 1 - 2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ

A $N(2;1)$. **B** $P(-2;1)$. **C** $M(1;-2)$. **D** $Q(1;2)$.

(2D4Y2-1)

Lời giải.

Ta có $w = iz = i(1-2i) = 2 + i$.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho hình đa diện đều loại $\{4;3\}$ cạnh a. Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình đa diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $S = 4a^2$. **B** $6a^2$. **C** $S = 8a^2$. **D** $10a^2$.

(2H1B3-1)

Lời giải.

Đa diện đều loại $\{4;3\}$ là đa diện mà mỗi mặt có 4 cạnh, mỗi đỉnh có 3 mặt nên nó là khối lập phương nên có 6 mặt là các hình vuông cạnh a. Vậy hình lập phương có tổng diện tích tất cả các mặt là $S = 6a^2$.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng $60°$, diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

A $V = \frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **B** $V = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **C** $V = 3\pi a^3$. **D** $V = \pi a^3$.

(2H2K1-1)

Lời giải.

Thể tích $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot OA^2 \cdot SO$.

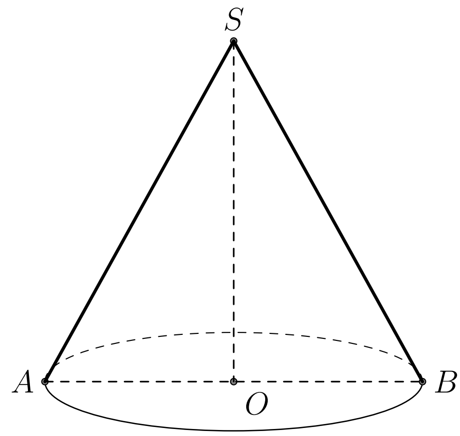
Ta có $\widehat{ASB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ASO} = 30^\circ \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{OA}{SO} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$\Rightarrow SO = OA\sqrt{3}$.

Lại có $S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot OA \cdot SA = \pi \cdot OA\sqrt{OA^2 + SO^2} = 6\pi a^2$

$\Rightarrow OA\sqrt{OA^2 + 3OA^2} = 6a^2 \Rightarrow 2OA^2 = 6a^2 \Rightarrow OA = a\sqrt{3}$.

$\Rightarrow SO = 3a \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3a^2 \cdot 3a = 3\pi a^3$.



Chọn đáp án C □

Câu 33. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B với $AB = BC = \frac{AD}{2} = a$. Quay hình thang và miền trong của nó quanh đường thẳng chứa cạnh BC. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành

A $V = \frac{4\pi a^3}{3}$. **B** $V = \frac{5\pi a^3}{3}$. **C** $V = \pi a^3$. **D** $\frac{7\pi a^3}{3}$.

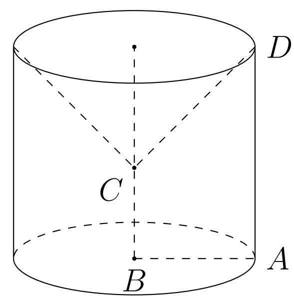
(2H2K1-1)

Lời giải.

Gọi V_1 là thể tích khối nón có đường sinh là CD, bán kính $R = AB = a$, chiều cao $h = a$.

$$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi a^2 \cdot a = \frac{a^3}{3}\pi.$$

Gọi V_2 là thể tích khối trụ có đường sinh là $AD = 2a$, bán kính $R = AB = a$, chiều cao $h' = 2a$.



$$\Rightarrow V_2 = \pi R^2 h' = \pi \cdot a^2 \cdot 2a = 2a^3\pi.$$

Thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành là $V = V_2 - V_1 = 2a^3\pi - \frac{a^3\pi}{3} = \frac{5a^3\pi}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

A $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$. **B** $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$. **C** $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **D** $(-2; 11; 1)$.

(2H3K1-1)

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{BA} = (-1; -3; 4) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{26}$; $\overrightarrow{BC} = (-6; 8; 2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right| = 2\sqrt{26}$.

Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ B lên AC của tam giác ABC.

Suy ra $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DA} \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxy, có tất cả bao nhiêu số tự nhiên của tham số m để phương trình $x^2+y^2+z^2+2(m-2)y-2(m+3)z+3m^2+7=0$ là phương trình của một mặt cầu.

(A) 2. (B) 3. **(C) 4.** (D) 5.

(2H3K1-3)

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} a=0 \\ b=m-2 \\ c=-(m+3) \\ d=3m^2+7. \end{cases}$

Phương trình trên là phương trình mặt cầu khi

$$\begin{aligned} & a^2+b^2+c^2-d>0 \\ \Leftrightarrow\ & (m-2)^2+(m+3)^2-(3m^2+7)>0 \\ \Leftrightarrow\ & -m^2+2m+6>0 \\ \Leftrightarrow\ & 1-\sqrt{7}<m<1+\sqrt{7}. \end{aligned}$$

Mà $m\in\mathbb{N}\Rightarrow m\in\{0,1,2,3\}$.

Vậy có bốn giá trị số tự nhiên của m thỏa điều kiện đề bài.

Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5=-15$, $u_{20}=60$. Tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là:

(A) $S_{10}=-125$. (B) $S_{10}=-250$. (C) $S_{10}=200$. (D) $S_{10}=-200$.

(2D3B3-5)

Lời giải.

Gọi u_1, d lần lượt là số hạng đầu và công sai của cấp số cộng.

Ta có $\begin{cases} u_5=-15 \\ u_{20}=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+4d=-15 \\ u_1+19d=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=-35 \\ d=5. \end{cases}$

Vậy $S_{10}=\dfrac{10}{2}\cdot(2u_1+9d)=5\cdot[2\cdot(-35)+9\cdot5]=-125$.

Chọn đáp án (A) □

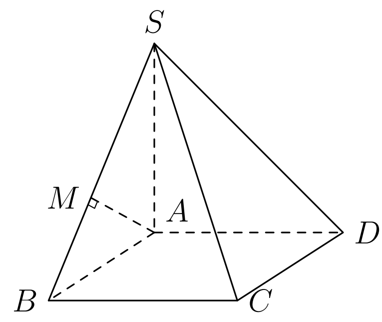
Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông. Từ A kẻ $AM\perp SB$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $AM\perp(SBD)$. **(B) $AM\perp(SBC)$.** (C) $SB\perp(MAC)$. (D) $AM\perp(SAD)$.

(1H3B3-2)

Lời giải.

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$. (1)
Do $ABCD$ là hình vuông nên $BC \perp AB$. (2)
Từ (1), (2) $\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$. (3)
Theo giả thiết, ta có $AM \perp SB$. (4)
Từ (3), (4) $\Rightarrow AM \perp (SBC)$.



Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC tạo với mặt đáy các góc bằng nhau và bằng $60°$. Biết $BC = a$, $\widehat{BAC} = 45°$. Tính khoảng cách h từ đỉnh S đến mặt phẳng (ABC).

A $h = a\sqrt{6}$. **B** $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **C** $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D** $h = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

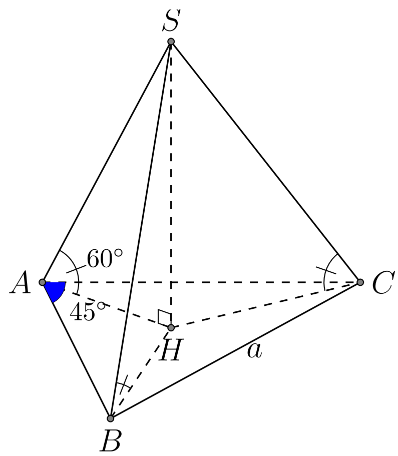
(1H3K5-3)

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC).
Suy ra $\mathrm{d}(S,(ABC)) = SH$ và $\widehat{SAH} = \widehat{SBH} = \widehat{SCH} = 60°$.

$$\Rightarrow HA = HB = HC.$$

Do đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Xét $\triangle ABC$, có $\dfrac{BC}{\sin A} = 2HA \Rightarrow HA = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.
Xét $\triangle SAH$ vuông tại H, có $SH = AH \cdot \tan \widehat{SAH} = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.



Chọn đáp án B □

Câu 39. Tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4 với O là gốc tọa độ là

A $m \neq 0$. **B** $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 1 \end{array}\right.$. **C** $m = 1$. **D** $\left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ m = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{array}\right.$.

(2D1K2-4)

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Ta có $y' = 3x^2 - 6mx$. Khi đó $3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2m) = 0$. $y' > 0$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \neq 0$. Gọi hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0; 4m^3)$ và $B(2m; 0)$.
Do đó $S_{OAB} = \dfrac{1}{2} OA \cdot OB = \dfrac{1}{2}|4m^3||2m| = 4 \Leftrightarrow 8m^4 = 8 \Leftrightarrow m = \pm 1$.
Chọn đáp án B □

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{m - \cos x}{\sin^2 x}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ⓐ $m \leqslant 0$. Ⓑ $m \leqslant 2$. Ⓒ $m \geqslant 1$. $\boxed{\text{D}}$ $m \leqslant \dfrac{5}{4}$.

(2D1K1-3)

Lời giải.

Ta có $y = \dfrac{m - \cos x}{1 - \cos^2 x}$. Đặt $\cos x = t$, vì $x \in \left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ và lưu ý rằng hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Hàm số trở thành $y = \dfrac{m - t}{1 - t^2}$. Ta có, hàm số $y = \dfrac{m - t}{1 - t^2}$ xác định trên $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ và có đạo hàm $y' = \dfrac{-t^2 + 2mt - 1}{(1 - t^2)^2}$.

Để hàm số ban đầu đồng biến trên $\left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ thì hàm số ở $y = \dfrac{m - t}{1 - t^2}$ phải nghịch biến trên $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$

$$\Rightarrow -t^2 + 2mt - 1 < 0,\ \forall t \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 2m < t + \dfrac{1}{t},\ \forall t \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right).$$

Xét $f(t) = t + \dfrac{1}{t}$ có $f'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^2} < 0,\ \forall t \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

t	0		$\frac{1}{2}$
$f'(t)$	$\Vert$	$-$	
$f(t)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{2}$

Từ bảng biến thiên ta có yêu cầu bài toán thỏa mãn khi $2m \leqslant \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow m \leqslant \dfrac{5}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Tìm tham số m để phương trình $9^x - 4 \cdot 3^x - m + 1 = 0$ có 2 nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$.

Ⓐ $m = 2$. Ⓑ $m = -1$. $\boxed{\text{C}}$ $m = -2$. Ⓓ $m = 1$.

(2D2K5-1)

Lời giải.

Ta có $9^x - 4 \cdot 3^x - m + 1 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 4 \cdot 3^x - m + 1 = 0$. (1)

Đặt $t = 3^x > 0$. Phương trình trở thành $t^2 - 4t - m + 1 = 0$. (2)

Phương trình (1) có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$ khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 \cdot t_2 = 3^{x_1 + x_2} = 3$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + m - 1 > 0 \\ 4 > 0 \\ -m + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Biết $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = m\cdot \mathrm{e}^{\frac{n\pi}{2}}+p$ với m,n,p là các số tự nhiên. Giá trị của biểu thức $m+n+p$ bằng

A 1. B 3. C 4. D 2.

(2D3K2-3)

Lời giải.

Ta có $1+\sin x=\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2$, $1+\cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2}$

Suy ra $\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{1}{2}\left(1+\tan\dfrac{x}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\dfrac{x}{2}\right)+\tan\dfrac{x}{2}$.

Do đó $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = A+B$.

với $A=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, $B=\displaystyle\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=\tan\dfrac{x}{2} \\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x \\ v=\mathrm{e}^x\end{cases}$

$A=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\tan\frac{x}{2}\cdot\mathrm{e}^x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-B$.

Vậy $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\Rightarrow m=1,\ n=1,\ p=0\Rightarrow m+n+p=2$.

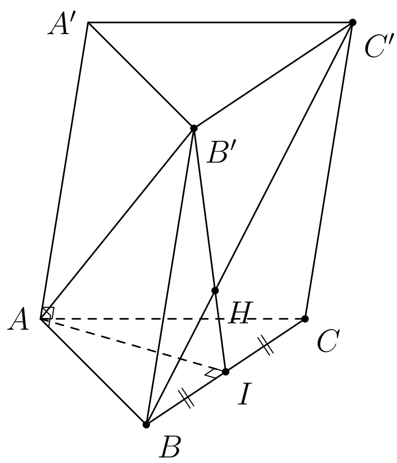
Chọn đáp án D □

Câu 43. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và $AB'\perp BC'$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

A $V=\sqrt{6}a^3$. B $V=\dfrac{7a^3}{8}$. C $V=\dfrac{\sqrt{6}a^3}{8}$. D $V=\dfrac{\sqrt{6}a^3}{4}$.

(2H1K3-2)

Lời giải.



Gọi I là trung điểm AB. Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên $AI \perp (BB'C'C) \Rightarrow AI \perp BC'$.
Lại có $AC' \perp BC'$ nên suy ra $BC' \perp (AIB') \Rightarrow BC' \perp B'I$.
Gọi $H = B'I \cap BC'$.
Ta có $\triangle BHI$ đồng dạng $\Delta C'HB'$

$$\Rightarrow \frac{HI}{B'H} = \frac{BI}{B'C'} = \frac{1}{2} \Rightarrow B'H = 2HI \Rightarrow B'I = 3HI.$$

Xét tam giác vuông $B'BI$ có $BI^2 = HI \cdot B'I = 3HI^2$.
$\Rightarrow HI = \sqrt{\dfrac{BI^2}{3}} = \sqrt{\dfrac{a^2}{12}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Suy ra $BB' = \sqrt{B'I^2 - BI^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Vậy $V = S_{\triangle ABC} \cdot BB' = a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$.
Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 1 - i| = 2$ và $z_2 = iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z_1 - z_2|$?

A $m = \sqrt{2} - 1$. **B** $m = 2\sqrt{2}$. **C** $m = 2$. **D** $m = 2\sqrt{2} - 2$.

(2D4K5-2)

Lời giải.
Đặt $z_1 = a + bi;\ a,\ b \in \mathbb{R} \Rightarrow z_2 = -b + ai \Rightarrow z_1 - z_2 = (a + b) + (b - a)i$.
Do đó $|z_1 - z_2| = \sqrt{(a + b)^2 + (b - a)^2} = \sqrt{2} \cdot |z_1|$.
Ta lại có $2 = |z_1 + 1 - i| \leqslant |z_1| + |1 - i| = |z_1| + \sqrt{2} \Rightarrow |z_1| \geqslant 2 - \sqrt{2}$.
Suy ra $|z_1 - z_2| = \sqrt{2} \cdot |z_1| \geqslant 2\sqrt{2} - 2$.
Dấu "$=$" xảy ra khi $\dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{-1} < 0$.
Vậy $m = \min |z_1 - z_2| = 2\sqrt{2} - 2$.
Chọn đáp án D □

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+y-2z+9 = 0$ và ba điểm $A(2;1;0)$, $B(0;2;1)$, C
Điểm $M \in (\alpha)$ sao cho $\left|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $x_M + y_M + z_M = 1$. **B** $x_M + y_M + z_M = 4$.
C $x_M + y_M + z_M = 3$. **D** $x_M + y_M + z_M = 2$.

(2H3K3-8)

Lời giải.
Xét điểm $I(a; b; c)$ thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Khi đó

$$\begin{cases} 2(2-a) - 3a - 4(1-a) = 0 \\ 2(1-b) + 3(2-b) - 4(3-b) = 0 \\ -2c + 3(1-c) - 4(-1-c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -4 \\ c = 7 \end{cases} \Rightarrow I(0; -4; 7).$$

Khi đó $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}\right| = \left|2\overrightarrow{MI}+3\overrightarrow{MI}-4\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}-4\overrightarrow{IC}\right| = IM$.
Do đó $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì M là hình chiếu của I trên (α).
Do $M(x;y;z)$ là hình chiếu của I trên (α) nên ta có

$$\begin{cases}\overrightarrow{IM}=k\vec{n}\\ M\in(\alpha)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2k\\ y+4=k\\ z-7=-2k\\ 2x+y-2z+9=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=1\\ x=2\\ y=-3\\ z=5.\end{cases}$$

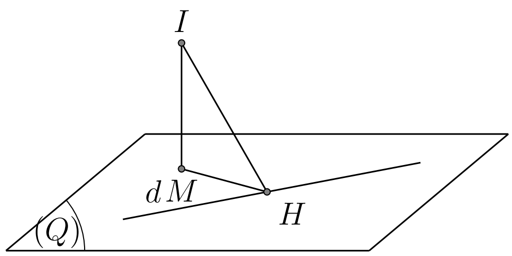
Vậy $M(2;-3;5) \Rightarrow x_M+y_M+z_M=4$.
Chọn đáp án B □

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và $A(3;0;-1)$, $B(-1;-2;1)$. Mặt phẳng đi qua A, B và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

(A) $3x-2y-4z-8=0$.
(B) $y+z+1=0$.
(C) $x-2y-3=0$.
(D) $x+3y+5z+2=0$.

(2H3G2-8)

Lời giải.



Mặt cầu (S) có tâm $I(3;1;0)$ và bán kính là $R=2$.
Ta có $(d)\begin{cases}x=1+2t\\ y=-1+t\\ z=-t\end{cases}$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2;1;-1)$.
Gọi $H(1+2t;-1+t;-t)$ là hình chiếu của I trên d.
Ta có $\overrightarrow{IH}\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow (2t-2)2+(t-2)+t=0 \Leftrightarrow t=1$ suy ra $H(3;0;-1)$.
Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d.
Bán kính đường tròn giao tuyến của mặt phẳng chứa d và mặt cầu (S) là $r=\sqrt{R^2-(\mathrm{d}(I,(Q)))^2}$, suy ra r nhỏ nhất khi $\mathrm{d}(I,(Q))$ lớn nhất.
Gọi M là hình chiếu của I trên (Q).
Ta có $\mathrm{d}(I,(Q))=IM\leqslant IH$ suy ra $\mathrm{d}(I,(Q))$ lớn nhất khi $\mathrm{d}(I,(Q))=IH$, lúc đó mặt phẳng (Q) qua $H(3;0;-1)$ và có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IH}=(0;-1;-1)$.
Phương trình mặt phẳng $(Q)\colon y+z+1=0$.
Chọn đáp án B □

Câu 47. Trong một trò chơi, người chơi cần gieo cùng lúc ba con súc sắc cân đối, đồng chất; nếu được ít nhất hai con súc sắc xuất hiện mặt có số chấm lớn hơn 4 thì người chơi đó thắng. Tính xác suất để trong 3 lần chơi, người đó thắng ít nhất một lần.

(A) $\dfrac{11683}{19683}$. (B) $\dfrac{2}{9}$. (C) $\dfrac{386}{729}$. (D) $\dfrac{7}{27}$.

(1D2K5-3)

Lời giải.

Gọi A là biến cố "Người đó thắng 1 lần" và B là biến cố "trong 3 lần chơi, người đó thắng ít nhất một lần".

Trường hợp 1: Chỉ có hai con súc sắc có số chấm lớn hơn hoặc bằng 5, súc sắc còn lại có số chấm nhỏ hơn hoặc bằng 4. Khi đó xác suất là: $\mathrm{P}_1 = \mathrm{C}_3^2 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{6}\right) = \frac{2}{9}$.

Trường hợp 2: Cả ba con súc sắc có số chấm lớn hơn hoặc bằng 5.

Khi đó xác suất là: $\mathrm{P}_2 = \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

Vậy xác suất để người đó thắng 1 lần là : $\mathrm{P}(A) = \frac{2}{9} + \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$.

Xác suất để người chơi đó không thắng trong 1 lần chơi là : $1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}$.

Ta có $\overline{B}$ là biến cố "trong 3 lần chơi, người đó không thắng một lần nào".

$P\left(\overline{B}\right) = \left(\frac{20}{27}\right)^3 = \frac{8000}{19683} \Rightarrow \mathrm{P}(B) = 1 - P\left(\overline{B}\right) = 1 - \frac{8000}{19683} = \frac{11683}{19683}$.

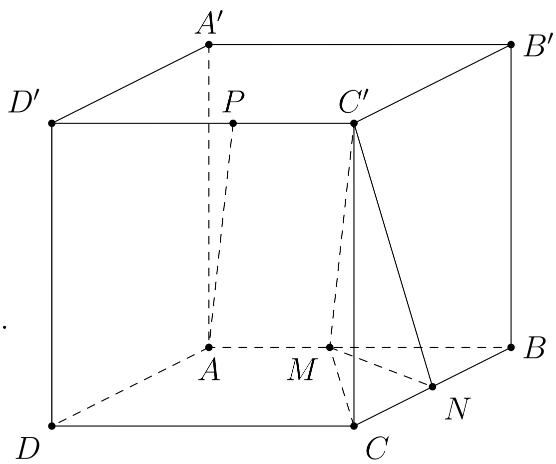
Chọn đáp án A □

Câu 48. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, $C'D'$. Xác định góc giữa hai đường thẳng MN và AP.

A. $60°$. B. $90°$. C. $30°$. D. $45°$.

(1H3K4-6)

Lời giải.



Ta có tứ giác $AMC'P$ là hình bình hành nên

$AP \parallel MC' \Rightarrow \left(\widehat{MN, AP}\right) = \left(\widehat{MN, MC'}\right) = \widehat{NMC'}$.

Gọi cạnh hình vuông có độ dài bằng a.

Xét tam giác $C'CM$ vuông tại C có

$$C'M = \sqrt{C'C^2 + MC^2} = \sqrt{C'C^2 + BC^2 + MB^2} = \frac{3a}{2}.$$

Xét tam giác $C'CN$ vuông tại C có

$$C'N = \sqrt{C'C^2 + CN^2} = \frac{\sqrt{5}a}{2}.$$

Xét tam giác $C'CM$ có

$$\cos\widehat{NMC'} = \frac{MC'^2 + MN^2 - C'N^2}{2MC' \cdot MN} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{NMC'} = 45° \Rightarrow \left(\widehat{MN, AP}\right) = 45°.$$

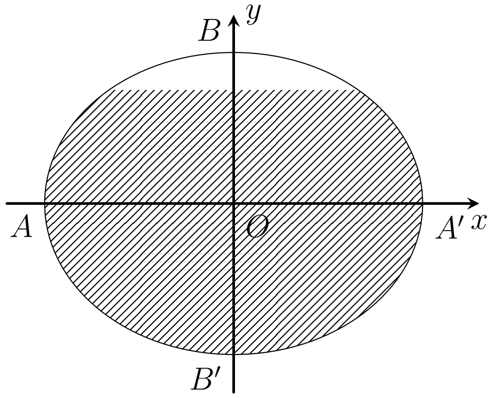
Chọn đáp án D □

Câu 49. Một cái thùng đựng dầu có thiết diện ngang (mặt trong của thùng) là một đường elip có trục lớn bằng $1m$, trục bé bằng $0,8m$, chiều dài (mặt trong của thùng) bằng $3m$. Được đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng (như hình bên). Biết chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là $0,6m$. Tính thể tích V của dầu có trong thùng (Kết quả làm tròn đến phần trăm).

A $V = 1,52m^3$. **B** $V = 1,31m^3$. **C** $V = 1,27m^3$. **D** $V = 1,19m^3$.

(2D3G3-5)

Lời giải.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Theo đề bài ta có phương trình của Elip là $\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}} + \dfrac{y^2}{\frac{4}{25}} = 1$.

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của dầu với elip.

Gọi S_1 là diện tích của Elip ta có $S_1 = \pi ab = \pi \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{\pi}{5}$.

Gọi S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi Elip và đường thẳng MN.

Theo đề bài chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là $0,6m$ nên ta có phương trình của đường thẳng MN là $y = \dfrac{1}{5}$.

Mặt khác từ phương trình $\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}} + \dfrac{y^2}{\frac{4}{25}} = 1$ ta có $y = \dfrac{4}{5}\sqrt{\dfrac{1}{4} - x^2}$.

Do đường thẳng $y = \dfrac{1}{5}$ cắt Elip tại hai điểm M, N có hoành độ lần lượt là $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ và $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ nên

$$S_2 = \int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \left(\frac{4}{5}\sqrt{\frac{1}{4} - x^2} - \frac{1}{5}\right) \mathrm{d}x = \frac{4}{5} \int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}\, \mathrm{d}x - \frac{\sqrt{3}}{10}.$$

Tính $I = \displaystyle\int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}\, \mathrm{d}x$. Đặt $x = \dfrac{1}{2}\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\cos t\, \mathrm{d}t$.

Khi $x = \dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ thì $t = -\dfrac{\pi}{3}$; Khi $x = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ thì $t = \dfrac{\pi}{3}$.

Khi đó $I = \displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\cos^2 t\, \mathrm{d}t = \frac{1}{8} \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{8}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Vậy $S_2 = \dfrac{4}{5}\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - \dfrac{\sqrt{3}}{10} = \dfrac{\pi}{15} - \dfrac{\sqrt{3}}{20}$.

Thể tích của dầu trong thùng là $V = \left(\dfrac{\pi}{5} - \dfrac{\pi}{15} + \dfrac{\sqrt{3}}{20}\right) \cdot 3 = 1{,}52$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho bất phương trình $(m-2)x^2+2(4-3m)x+10m-11 \leqslant 0$. (1)
Gọi S là tập hợp các số nguyên dương m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x<-4$. Khi đó số phần tử của tập S là

A. 0. **B. 1.** C. 2. D. 3.

(1D4G2-5)

Lời giải.

+ Với $m-2=0 \Leftrightarrow m=2$, ta được $-4x+9 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{9}{4} \Rightarrow$ bất phương trình không nghiệm đúng với $\forall x<-4$.

+ Với $m \neq 2$, để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x<-4$, ta có các trường hợp sau

- Trường hợp 1 Nếu $\begin{cases} m-2<0 \\ \Delta'=-m^2+7m-6 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m \leqslant 1 \\ m \geqslant 6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \leqslant 1.$ (*)

Khi đó bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó bất phương trình (1) nghiệm đúng với $\forall x<-4$.

- Trường hợp 2 Nếu $\begin{cases} m-2<0 \\ \Delta'=-m^2+7m-6 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<2 \\ 1 \leqslant m \leqslant 6 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leqslant m<2$ thì tam thức có hai nghiệm giả sử là $x_1, x_2\,(x_1<x_2)$. Để bất phương trình (1) nghiệm đúng với $\forall x<-4$ thì $-4<x_1<x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1+4)(x_2+4)>0 \\ (x_1+4)+(x_2+4)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2+4(x_1+x_2)+16>0 \\ x_1+x_2>-8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{10m-11}{m-2}-\dfrac{8(4-3m)}{m-2}+16>0 \\ \dfrac{-2(4-3m)}{m-2}>-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{50m-75}{m-2}>0 \\ \dfrac{12-7m}{m-2}<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<\dfrac{3}{2} \\ m>2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m<\dfrac{12}{7} \\ m>2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<\dfrac{3}{2} \\ m>2 \end{array}\right. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $1 \leqslant m<\dfrac{3}{2}$. (**)

Từ $(*)$ và $(**)$, ta có giá trị m cần tìm là: $m<\dfrac{3}{2}$.

Mà m là số nguyên dương nên $m=1$.

Chọn đáp án B □

——— HẾT ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. B	3. A	4. B	5. B	6. C	7. B	8. B	9. A	10. A
11. D	12. B	13. D	14. D	15. B	16. D	17. D	18. A	19. C	20. D
21. D	22. A	23. D	24. D	25. D	26. D	27. C	28. A	29. D	30. A
31. B	32. C	33. B	34. A	35. C	36. A	37. B	38. B	39. B	40. D
41. C	42. D	43. C	44. D	45. B	46. B	47. A	48. D	49. A	50. B

5 ĐỀ THI THỬ SỐ 5-MAX8

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-1=0$. Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là

A $\vec{n}=(-2;-1;1)$. **B** $\vec{n}=(2;1;-1)$. **C** $\vec{n}=(1;2;0)$. **D** $\vec{n}=(2;1;0)$.

Lời giải.

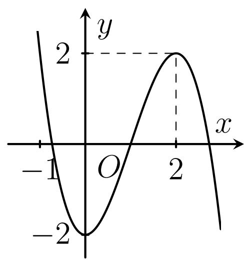
Mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-1=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;1;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 2.

Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-2;2)$. **B** $(-\infty;0)$. **C** $(0;2)$. **D** $(2;+\infty)$.



Lời giải.

Nhìn vào đồ thị ta thấy hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Hàm số $y=x^4-2x^2+1$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 1. **B** 0. **C** 3. **D** 2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Đạo hàm $y'=4x^3-4x$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Do đó hàm số có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$ trên đoạn $[-2;0]$. Giá trị biểu thức $5M+m$ bằng

A 0. **B** $-\dfrac{24}{5}$. **C** $\dfrac{24}{5}$. **D** -4.

Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2;0]$.
Ta có $y'=\dfrac{-3}{(2x-1)^2}<0,\ \forall x\neq\dfrac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ hàm số luôn nghịch biến trên đoạn $[-2;0]\Rightarrow\begin{cases}M=\max\limits_{[-2;0]}y=y(-2)=\dfrac{1}{5}\\ m=\min\limits_{[-2,0]}y=y(0)=-1\end{cases}$.

Khi đó $5M+m=0$.
Chọn đáp án A ☐

Câu 5. Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y=\dfrac{1}{x^4+1}$. B. $y=\dfrac{1}{x^2+x+1}$. C. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$. D. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Lời giải.
Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ có tiệm cận đứng là $x=0$.
Đồ thị các hàm số ở các đáp án còn lại đều không có tiệm cận đứng do mẫu vô nghiệm.
Chọn đáp án D ☐

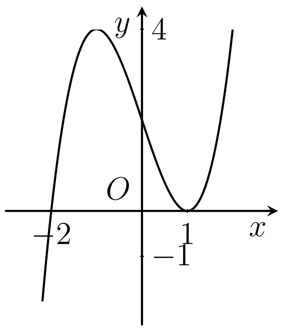
Câu 6. Cho hàm số $y=\dfrac{1-2x}{x+1}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận. B. Hàm số xác định khi $x\neq-1$.
C. Đồ thị hàm số có tâm đối xứng. D. Hàm số có cực trị.

Lời giải.
Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận là $x=-1$, $y=-2$. Giao điểm của hai đường tiệm cận này là tâm đối xứng của đồ thị.
Vì $y'=\dfrac{-3}{(x+1)^2}<0,\ \forall x\neq-1$ nên hàm số không có cực trị.
Chọn đáp án D ☐

Câu 7.
Cho đồ thị (C) có dạng như hình vẽ. Khi đó hàm số nào trong các hàm số sau có đồ thị là (C)?

A. $y=(x-1)^2(x+2)$. B. $y=(x-1)(x+2)^2$.
C. $y=(x-1)^2(2-x)$. D. $y=(x-1)(x+2)$.



Lời giải.
Từ đồ thị ta thấy hàm số có nghiệm kép $x=1$ và nghiệm đơn $x=-2$ nên $y=(x-1)^2(x+2)$.
Chọn đáp án A ☐

Câu 8. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(2x-1)^{\pi}$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. B. $\mathscr{D}=\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. C. $\mathscr{D}=\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. D. $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Lời giải.

Vì $\pi \notin \mathbb{Z}$ nên điều kiện xác định của hàm số là $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Cho hai số thực a, b bất kì với $0 < a \neq 1$. Tính $S = \log_a a^b$.

A $S = b^a$. **B** $S = a$. **C** $S = b$. **D** $S = b^a$.

Lời giải.

$S = \log_a a^b = b \log_a a = b$.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Cho $a < b < c$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 12$, $\displaystyle\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Khi đó giá trị của $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ là

A 3. **B** 4. **C** 16. **D** 8.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = 12 - 4 = 8$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Họ các nguyên hàm của hàm số $y = \mathrm{e}^{-3x+1}$ là

A $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1} + C$. **B** $-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1} + C$. **C** $3\mathrm{e}^{-3x+1} + C$. **D** $-3\mathrm{e}^{-3x+1} + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-3x+1}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1} + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Mô-đun của số phức $w = (1 + i)z$ là

A $|w| = \sqrt{26}$. **B** $|w| = \sqrt{37}$. **C** $|w| = 5$. **D** $|w| = 4$.

Lời giải.

Ta có $w = (1 + i)z = (1 + i)(2 - 3i) = 5 - i$, $|w| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, điểm $M(3; 4; -2)$ thuộc mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

A $(R)\colon x + y - 7 = 0$. **B** $(S)\colon x + y + z + 5 = 0$.

C $(Q)\colon x - 1 = 0$. **D** $(P)\colon z - 2 = 0$.

Lời giải.

Xét mặt phẳng $(R)\colon x + y - 7 = 0$ ta thấy $3 + 4 - 7 = 0$. Vậy M thuộc (R).

Xét mặt phẳng $(S)\colon x + y + z + 5 = 0$ ta thấy $3 + 4 - 2 + 5 = 10 \neq 0$. Vậy M không thuộc (S).

Xét mặt phẳng $(Q)\colon x - 1 = 0$ ta thấy $3 - 1 = 2 \neq 0$. Vậy M không thuộc (Q).

Xét mặt phẳng $(P)\colon z - 2 = 0$ ta thấy $-2 - 2 = -4 \neq 0$ vậy M không thuộc (P).

Chọn đáp án A □

Câu 14. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-1; 2; 0)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (4; 0; -5)$ là

(A) $4x - 5y - 4 = 0$. (B) $4x - 5z - 4 = 0$. **C** $4x - 5y + 4 = 0$. (D) $4x - 5z + 4 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-1;2;0)$ và có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (4;0;-5)$ có phương trình là

$$4(x+1) + 0(y-2) - 5(z-0) = 0 \Leftrightarrow 4x - 5z + 4 = 0.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị thực của than số m để phương trình $\sin x - m = 2$ có nghiệm?

(A) $m \leq -3$. (B) $-3 \leq m \leq 1$. (C) $m \geq 1$. **D** $-3 \leq m \leq -1$.

Lời giải.

Phương trình $\sin x - m = 2$ có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \leq 2 + m \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4 lập được bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau?

A 24. (B) 4. (C) 6. (D) 12.

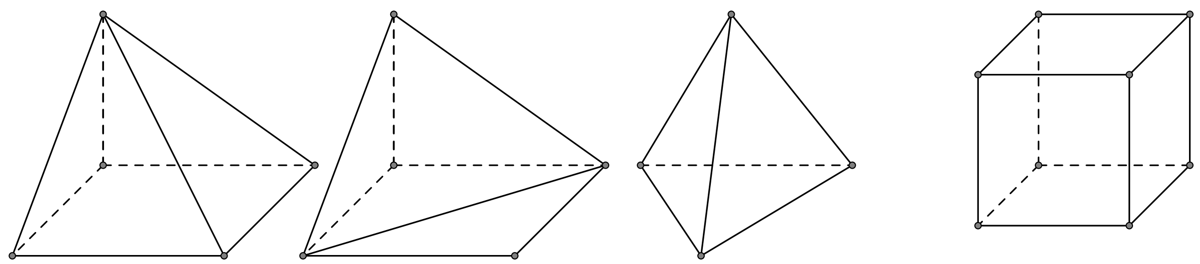
Lời giải.

Mỗi cách sắp xếp thứ tự cho bốn số 1, 2, 3, 4 cho ta một số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau.

Vậy số các số lập được là $4! = 24$ (số).

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Hình nào dưới đây **không** phải là hình đa diện?



Hình 1 Hình 2 Hình 3 Hình 4

(A) Hình 1. **B** Hình 2. (C) Hình 3. (D) Hình 4.

Lời giải.

Hình 2 **không** phải là hình đa diện.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$ là $z = a + bi$ với a, $b \in \mathbb{R}$. Tính $a + \sqrt{3}b$.

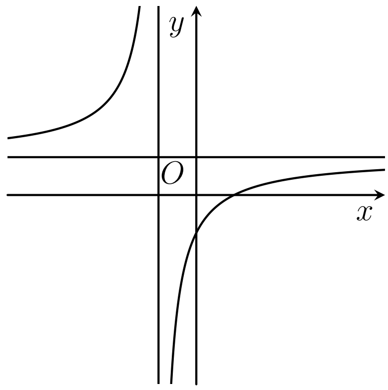
(A) -2. (B) 1. **C** 2. (D) -1.

Lời giải.

$$z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right. \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}; b = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a + \sqrt{3}b = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} = 2.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 19.
Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A $ad > 0,\ ab < 0$. **B** $bd > 0,\ ad > 0$.
C $bd < 0,\ ab > 0$. **D** $ad < 0,\ ab < 0$.

Lời giải.
Tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c} < 0 \Leftrightarrow cd > 0$, tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c} > 0 \Rightarrow ac > 0 \Rightarrow ad > 0$
Dựa vào đồ thị ta thấy giao điểm của đồ thị với trụ hoành là $x = -\dfrac{b}{a} > 0 \Leftrightarrow ab < 0$.
Chọn đáp án A □

Câu 20. Có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ thỏa mãn tiếp tuyến với đồ thị có hệ số góc bằng 2018?
A 1. **B** 0. **C** Vô số. **D** 2.

Lời giải.
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
$y' = \dfrac{-1}{(x-1)^2} < 0,\ \forall x \neq 1$.
Hệ số góc tiếp tuyến tại điểm x_0 trên đồ thị bằng $y'(x_0) = 2018 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{(x-1)^2} = 2018$ vô nghiệm.
Vậy không có tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số có hệ số góc bằng 2018.
Chọn đáp án B □

Câu 21. Cho $\log_{27} 5 = a$, $\log_8 7 = b, \log_2 3 = c$. Hãy biểu diễn $\log_{12} 35$ theo a, b và c.
A $\dfrac{3b+2ac}{c+2}$. **B** $\dfrac{3b+3ac}{c+2}$. **C** $\dfrac{3b+2ac}{c+3}$. **D** $\dfrac{3b+3ac}{c+1}$.

Lời giải.
$\log_{12} 35 = \dfrac{\log_2 35}{\log_2 12} = \dfrac{\log_2 7 + \log_2 5}{\log_2 3 + \log_2 4} = \dfrac{\log_2 8 \cdot \log_8 7 + \log_2 27 \cdot \log_{27} 5}{c+2} = \dfrac{3b + 3\log_2 3 \cdot a}{c+2} = \dfrac{3b+3ac}{c+2}$.
Chọn đáp án B □

Câu 22. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \ln x - \ln(x^2+1)$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$ khi
A $x = 1$. **B** $x = \dfrac{1}{2}$. **C** $x = \dfrac{3}{2}$. **D** $x = \dfrac{3}{4}$.

Lời giải.
Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$.
Ta có $y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{1-x^2}{x(x^2+1)}$;
$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in \left(\dfrac{1}{2}; 2\right) \\ x = -1 \notin \left(\dfrac{1}{2}; 2\right) \end{array}\right..$$

$y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln\left(\dfrac{2}{5}\right)$; $y(2)=\ln\left(\dfrac{2}{5}\right)$; $y(1)=\ln 2$. Do đó $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} y=\ln 2$ khi $x=1$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-5x+4}>4$.

(A) $S=\left(-\infty;\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{5+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$.

(B) $S=\left(\dfrac{5-\sqrt{17}}{2};\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right)$.

(C) $S=(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$.

(D) $S=(2;3)$.

Lời giải.

Ta có: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-5x+4}>4\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-5x+4}>\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\Leftrightarrow x^2-5x+4<-2\Leftrightarrow x^2-5x+6<0\Leftrightarrow 2<x<3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S=(2;3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Gọi x_1, x_2 $(x_1>x_2)$ là các nghiệm của phương trình $2\log_2(2x+2)+\log_{\frac{1}{2}}(9x-1)=1$. Khi đó giá trị của $M=(2x_1-2x_2)^{2019}$ là

(A) 1. (B) 0. (C) 2^{2019}. (D) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2019}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases}2x+2>0\\9x-1>0\end{cases}\Rightarrow x>\dfrac{1}{9}(*)$

Pt đã cho trở thành

$\log_2(2x+2)^2=\log_2 2(9x-1)\Leftrightarrow(2x+2)^2=18x-2\Leftrightarrow 2x^2-5x+3=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{3}{2}\\x_2=1\end{array}\right.$. Suy ra $M=(2x_1-2x_2)^{2019}=(2\cdot\dfrac{3}{2}-2\cdot 1)^{2019}=1$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$, biết $\displaystyle\int\limits_0^{2019}f(x)\,\mathrm{d}x=2019$ và $F(0)=3$. Tính $F(2019)$.

(A) $F(2019)=2020$. (B) $F(2019)=2016$. (C) $F(2019)=2022$. (D) $F(2019)=-2022$.

Lời giải.

$$I=\int\limits_0^{2019}f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_0^{2019}=F(2019)-F(0)=2019\Leftrightarrow F(2019)=2019+F(0)=2022.$$

Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho $\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) \mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A $a+b<2$. **B** $a-2b>0$. **C** $a+b>3$. **D** $a+2b<0$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+2} = \ln|x+2|\Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2$ và $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+3} = \ln|x+3|\Big|_0^1 = \ln 4 - \ln 3 = 2\ln 2 - \ln 3$.

Do đó $\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) \mathrm{d}x = (\ln 3 - \ln 2) - (2\ln 2 - \ln 3) = -3\ln 2 + 2\ln 3$ nên $a=-3$, $b=2$.

Vậy $a+b=-1<2$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Biết phương trình $z^2+az+b=0$ có một nghiệm $z=-2+i$ với a, b là các số thực. Tính giá trị của biểu thức $T=2a-b$?

A 9. **B** -3. **C** -4. **D** 3.

Lời giải.

Phương trình $z^2+az+b=0$ có một nghiệm $z=-2+i$ nên ta có $(-2+i)^2+a(-2+i)+b=0$

$\Leftrightarrow (-2a+b+3)+(a-4)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b=3 \\ a-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=5. \end{cases}$

Vậy $T=2a-b=3$.

Chọn đáp án D □

Câu 28. Cho số phức z có $\overline{z} = (2-3i)\left(\sqrt{3}+i\right)$. Điểm $M(x_0;y_0)$ trên mặt phẳng phức biểu diễn số phức z, khi đó $A=2x_0-3y_0$ bằng

A $A=13\sqrt{3}$. **B** $A=12-5\sqrt{3}$. **C** $A=12+5\sqrt{3}$. **D** $A=-13\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có: $\overline{z} = (2-3i)\left(\sqrt{3}+i\right) = 3+2\sqrt{3}+\left(2-3\sqrt{3}\right)i$.

Do đó: $z = 3+2\sqrt{3}+\left(3\sqrt{3}-2\right)i \Rightarrow M\left(3+2\sqrt{3};3\sqrt{3}-2\right)$.

Vậy $A=2x_0-3y_0 = 2\left(3+2\sqrt{3}\right)-3\left(3\sqrt{3}-2\right) = 12-5\sqrt{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và điểm A' cách đều A, B, C biết $AA' = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Tính tể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

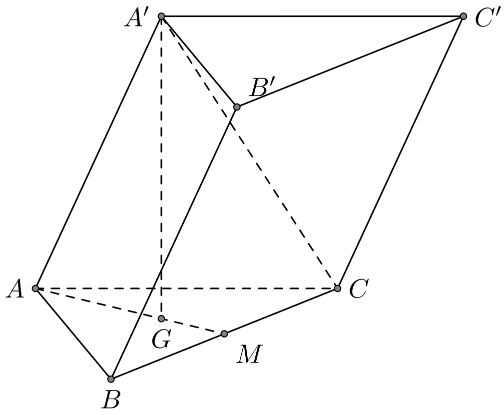
A $\frac{a^3\sqrt{5}}{12}$. **B** $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **C** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D** $\frac{a^3\sqrt{10}}{4}$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó $A'G \perp (ABC)$.

Ta có $A'G = \sqrt{AA'^2 - AG^2} = \sqrt{AA'^2 - \left(\frac{2}{3}AM\right)^2} = \sqrt{AA'^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}AB\right)^2} = a$.

Vậy $V_{ABC.ABC'} = A'G \cdot S_{ABC} = a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Cho hình trụ có đường kính đáy là a, mặt phẳng qua trục của hình trụ cắt hình trụ theo một thiết diện có diện tích là $3a^2$. Tính diện tích toàn phần của hình trụ.

(A) $\frac{3}{2}\pi a^2$. **B** $\frac{7}{2}\pi a^2$. (C) $5\pi a^2$. (D) $2\pi a^2$.

Lời giải.

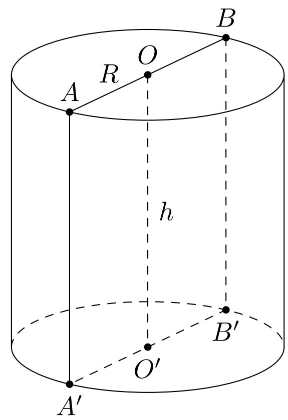
Gọi R là bán kính đáy của hình trụ $\Rightarrow R = \frac{a}{2}$.

Giả sử mặt phẳng qua trục cắt hình trụ theo thiết diện là hình chữ nhật $ABB'A'$

Có: $AB = 2R = a, AA' = h$ là chiều cao của hình trụ.

$S_{ABB'A'} = AB \cdot AA' \Leftrightarrow 3a^2 = ah \Leftrightarrow h = 3a$

$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi\frac{a}{2} \cdot 3a + 2\pi\frac{a^2}{4} = \frac{7\pi a^2}{2}$.



Chọn đáp án (B) □

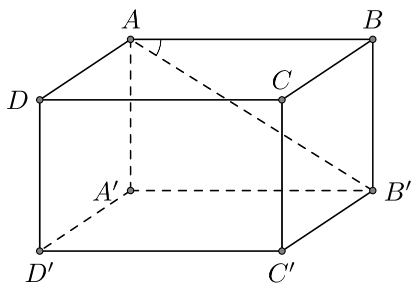
Câu 31. Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AD = a$, $BD = 2a$, góc giữa đường chéo AB' của mặt bên $(ABB'A')$ hợp với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình hộp.

(A) $\frac{13}{2}\pi a^2$. (B) $\frac{12}{5}\pi a^2$. (C) $12\pi a^2$. **D** $13\pi a^2$.

Lời giải.

+Góc của đường AB' và $(ABCD)$:

$\begin{cases} AB' \cap (ABCD) = A \\ B'B \perp (ABCD) = B \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{AB';(ABCD)}\right) = \left(\widehat{AB';AB}\right) = \widehat{B'AB} = 60°$.



$+ \triangle ABC$: $AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

$+ \Delta ABB'$: $\tan 60° = \frac{BB'}{AB} \Rightarrow BB' = \sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} = 3a$.

+Hình hộp chữ nhật có độ dài ba cạnh là cạnh a, $a\sqrt{3}$, $3a$.

Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp là $R = \frac{\sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2 + (3a)^2}}{2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình hộp là $S = 4\pi\left(\dfrac{a\sqrt{13}}{2}\right)^2 = 13\pi a^2$.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(3;1;2)$, $B(1;5;4)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng trung trực của đoạn AB?

A $x - 2y - z + 7 = 0$. B $x - 2y - z + 1 = 0$.
C $x - 2y - z + 13 = 0$. D $2x + v - z - 4 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng trung trực (P) đi qua trung điểm $I(2;3;3)$ của đoạn thẳng AB và vuông góc với AB nên (P) nhận véc-tơ $\overrightarrow{AB} = (-2;4;2)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Vậy phương trình tổng quát của (P) là: $-2(x-2)+4(y-3)+2(z-3) = 0 \Leftrightarrow -2x+4y+2z-14 = 0$ hay $x - 2y - z + 7 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x + 2y - 2z - 6 = 0$ và $(Q)\colon x + 2y - 2z + 3 = 0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A 1. B 3. C 9. D 6.

Lời giải.

Dễ thấy $(P) \parallel (Q)$.

Chọn $M(0;0;-3) \in (P)$.

Khi đó: $\mathrm{d}((P);(Q)) = \mathrm{d}(M;(Q)) = \dfrac{|-2\cdot(-3)+3|}{3} = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Chu vi của một đa giác n cạnh là 215, số đo các cạnh của đa giác lập thành một cấp số cộng với công sai $d = 4$. Biết cạnh lớn nhất có độ dài là 51. Tính số cạnh của đa giác.

A 6. B 4. C 7. D 5.

Lời giải.

Giả sử các cạnh của đa giác lần lượt có số đo u_1, u_2, $\ldots$, u_n theo thứ tự lập thành một cấp số cộng có công sai $d = 4$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} S_n = 215 \\ u_n = 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + 51)\cdot\dfrac{n}{2} = 215 \\ u_1 + 4(n-1) = 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 55 - 4n \\ (55 - 4n + 51)n = 430 (1) \end{cases}$$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow -4n^2 + 106n - 430 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 5 \\ n = \dfrac{43}{2} \end{array}\right.$. Do n là số cạnh của đa giác nên $n = 5$.

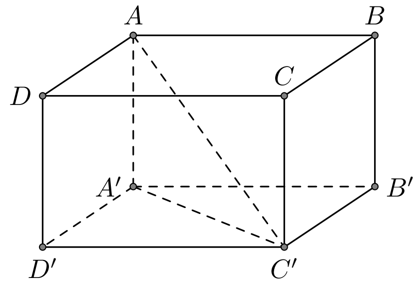
Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 1$, $AD = AA' = 2$. Tính độ dài đường chéo AC'.

A $AC' = 3$. B $AC' = 5$. C $AC' = \sqrt{5}$. D $AC' = \sqrt{7}$.

Lời giải.

Ta có
$AC' = \sqrt{AA'^2 + A'C'^2} = \sqrt{AA'^2 + A'B'^2 + A'D'^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$.



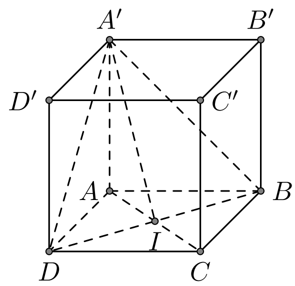
Chọn đáp án A □

Câu 36. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, gọi φ là góc tạo bởi mặt phẳng $(A'BD)$ với mặt phẳng $(A'B'C'D')$. Khi đó φ gần với giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

A. $45°$. B. $55°$. C. $65°$. D. $75°$.

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của AC và BD. Khi đó $AI \perp BD$.
Mặt khác $A'I \perp BD$ (vì $A'B = A'D$). Do đó góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng $\widehat{A'IA}$.
Suy ra $\varphi = \widehat{A'IA}$.
Xét tam giác $A'IA$ vuông tại A, ta có $\tan\varphi = \dfrac{A'A}{AI} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$.



Vậy $\varphi \approx 54°44'$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-3)x - \dfrac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

A. $m \geq 1$. B. $m \leq 2$. C. $m > 2$. D. $m < 1$.

Lời giải.

+ Tìm đạo hàm $y' = x^2 + 2(m-1)x + 2m - 3 = (x+1)(x+2m-3) \geq 0 (*)$ với mọi x thuộc $(1; +\infty)$.
Do $x > 1$ nên $(x+1) > 0$, nên $(*) \Leftrightarrow (x + 2m - 3) \geq 0$ với mọi $x > 1$.
$\Leftrightarrow x + 2m - 3 \geq 0,\ \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow 2m - 2 \geq 1 - x,\ \forall x \in (1; +\infty)$.
Xét hàm số $y = 1 - x, x \in (1; +\infty)$

x	1	$+\infty$
y'	$-$	
y	0 ↘	$-\infty$

$2m - 2 \geq 1 - x,\ \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow 2m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 1)$ và hai mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 3z - 1 = 0$, $(Q)\colon y = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa A, vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q).

(A) $3x - y + 2z - 4 = 0$.
(B) $3x + y - 2z - 2 = 0$.
(C) $3x - 2z = 0$.
(D) $3x - 2z - 1 = 0$.

Lời giải.

$(P)\colon 2x - y + 3z - 1 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)} = (2; -1; 3)$.

$(Q)\colon y = 0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)} = (0; 1; 0)$.

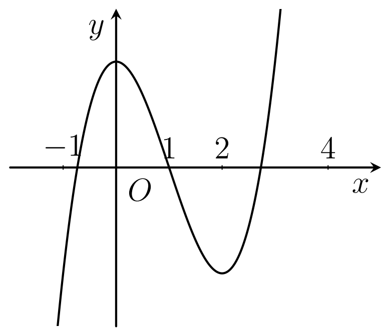
Do mặt phẳng (R) vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q) nên có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(R)} = \left[\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}\right] \Rightarrow \vec{n}_{(R)} = (-3; 0; 2)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (R) là: $-3x + 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x - 2z - 1 = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 39.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f\left(2 - \mathrm{e}^x\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



(A) $(-\infty; 1)$.
(B) $(1; 4)$.
(C) $(0; \ln 3)$.
(D) $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y = f\left(2 - \mathrm{e}^x\right) \Rightarrow y' = -\mathrm{e}^x f'\left(2 - \mathrm{e}^x\right)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 - \mathrm{e}^x = -1 \\ 2 - \mathrm{e}^x = 1 \\ 2 - \mathrm{e}^x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \ln 3 \\ x = 0 \\ \mathrm{e}^x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \ln 3 \\ x = 0 \end{array}\right. \text{(do } \mathrm{e}^x = -2 \text{ vô nghiệm).}$$

Bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		0		$\ln 3$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$; $(\ln 3; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Dân số thế giới được tính theo công thức $S = A \cdot \mathrm{e}^{ni}$ trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Cho biết năm 2005 Việt Nam có khoảng 80.902.400 người và tỉ lệ tăng dân số là $1,47\%$ một năm. Như vậy, nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi thì đến năm 2019 số dân của Việt Nam sẽ gần với số nào nhất sau đây?

(A) 99.389.200.
(B) 99.386.600.
(C) 100.861.100.
(D) 99.251.200.

Lời giải.

Áp dụng công thức $S = A \cdot \mathrm{e}^{ni}$ với $A = 80.902.400$, $n = 2019 - 2005 = 14$, $i = 1,47\% = 0,0147$, ta có số dân Việt Nam đến năm 2017 là

$S = A \cdot \mathrm{e}^{ni} = 80902400 \cdot \mathrm{e}^{14 \cdot 0,0147} \approx 99389203,38$.

Như vậy, số dân Việt Nam đến năm 2019 gần với số 99.389.200 nhất.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4;4]$ biết $\int\limits_{-2}^{0} f(-x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{1}^{2} f(-2x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int\limits_{0}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = -10$. (B) $I = -6$. (C) $I = 6$. (D) $I = 10$.

Lời giải.

Xét tích phân $\int\limits_{-2}^{0} f(-x)\,\mathrm{d}x = 2$.

Đặt $-x = t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận: khi $x = -2$ thì $t = 2$; khi $x = 0$ thì $t = 0$

Do đó: $\int\limits_{-2}^{0} f(-x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{2}^{\circ} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int\limits_{0}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t = 2 \Rightarrow \int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

Do hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(-2x) = -f(2x)$.

Do đó $\int\limits_{1}^{2} f(-2x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{1}^{2} f(2x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_{1}^{2} f(2x)\,\mathrm{d}x = -4$.

Xét $\int\limits_{1}^{2} f(2x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $2x = t \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận: khi $x = 1$ thì $t = 2$; khi $x = 2$ thì $t = 4$ do đó $\int\limits_{1}^{2} f(2x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\limits_{2}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t = -4$.

$\Rightarrow \int\limits_{2}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t = -8 \Rightarrow \int\limits_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = -8$.

Vậy: $I = \int\limits_{0}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = 2 - 8 = -6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Cho số phức z thỏa mãn $\overline{z}\cdot[(3+4i)|z| - 4 + 3i] - 5\sqrt{2} = 0$. Tính giá trị của $|\overline{z}|$.

(A) 2. (B) $\sqrt{2}$. (C) $2\sqrt{2}$. (D) 1.

Lời giải.

Ta có, giả thiết $\Leftrightarrow (3+4i)|z| - 4 + 3i = \dfrac{5\sqrt{2}}{\overline{z}} \Leftrightarrow (3|z| - 4) + (4|z| + 3)i = \dfrac{5\sqrt{2}}{\overline{z}}$

Lấy mô-đun hai vế, ta được $\sqrt{(3|z|-4)^2 + (4|z|+3)^2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{|z|}$ mà $|z| = |\overline{z}|$, khi đó

$(3|z|-4)^2 + (4|z|+3)^2 = \dfrac{50}{|z|^2}$ đến đây có thể giải trực tiếp bằng cách đặt $t = |z|$.

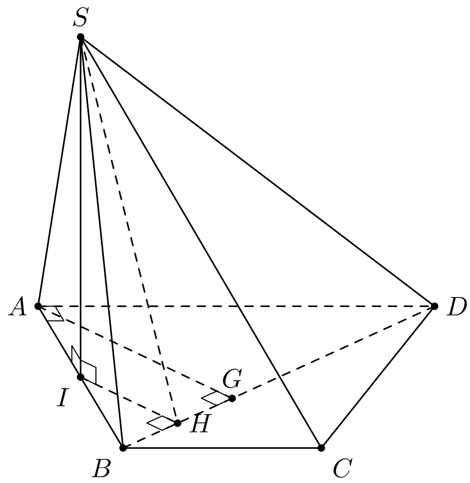
Chọn đáp án (D) □

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy $(ABCD)$ trùng với trung điểm AB. Biết $AB = 1, BC = 2, BD = \sqrt{10}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng đáy là 60°. Tính thể tích V của khối chóp $S.BCD$

Ⓐ $V = \dfrac{\sqrt{30}}{4}$. Ⓑ $V = \dfrac{\sqrt{30}}{12}$. **C** $V = \dfrac{\sqrt{30}}{20}$. Ⓓ $V = \dfrac{3\sqrt{30}}{8}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB, G là chân đường cao kẻ từ A xuống BD, H là trung điểm BG. Khi đó $IH \perp BD \Rightarrow BD \perp (SHI)$. Vậy góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng đáy là góc $\widehat{SHI}$.



Ta có $AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = 3$.

$\dfrac{1}{AG^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Rightarrow AG = \dfrac{3\sqrt{10}}{10} \Rightarrow IH = \dfrac{3\sqrt{10}}{20} \Rightarrow$
$SI = IH \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{3\sqrt{30}}{20}$.

$S_{\triangle BCD} = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(D, BC) \cdot BC = \dfrac{1}{2}AB \cdot BC = 1$.

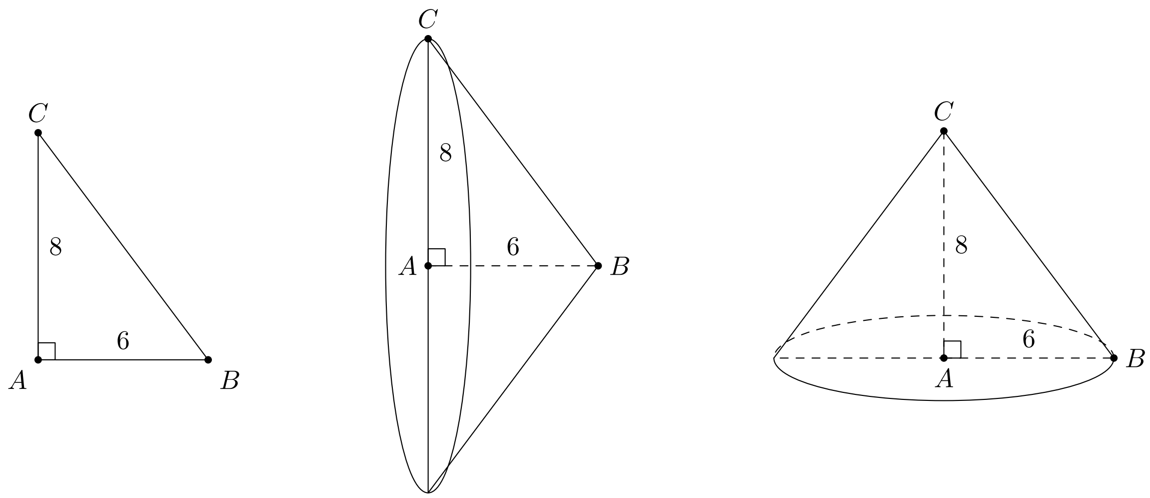
Vậy $V_{S.BCD} = \dfrac{1}{3}SI \cdot S_{\triangle BCD} = \dfrac{\sqrt{30}}{20}$.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Gọi V_1 là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB và V_2 là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

Ⓐ $\dfrac{9}{16}$. **B** $\dfrac{4}{3}$. Ⓒ $\dfrac{16}{9}$. Ⓓ $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.



Khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB có bán kính đáy bằng $r_1 = 8$ và chiều cao bằng $h_1 = 6$. Khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC có bán kính đáy bằng $r_2 = 6$ và chiều cao bằng $h_2 = 8$ nên ta có:

$\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\pi r_1^2 h_1}{\pi r_2^2 h_2} = \dfrac{\pi \cdot 8^2 \cdot 6}{\pi \cdot 6^2 \cdot 8} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

Ⓐ $u_{n+1} < \mathcal{U}_n$. **B** $u_{n+1} > u_n$. Ⓒ $u_{n+1} = u_n$. Ⓓ $u_{n+1} \geq u_n$.

Lời giải.

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_{n+1} > u_n$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ và song song với $(\alpha)\colon 4x+3y-12z+10=0$.

(A) $\left[\begin{array}{l} 4x+3y-12z+26=0 \\ 4x+3y-12z-78=0 \end{array}\right.$.

(B) $\left[\begin{array}{l} 4x+3y-12z-26=0 \\ 4x+3y-12z-78=0 \end{array}\right.$.

(C) $\left[\begin{array}{l} 4x+3y-12z-26=0 \\ 4x+3y-12z+78=0 \end{array}\right.$.

(D) $\left[\begin{array}{l} 4x+3y-12z+26=0 \\ 4x+3y-12z+78=0 \end{array}\right.$.

Lời giải.

$(S)\colon \begin{cases} \text{có tâm } I(1;2;3) \\ \text{bán kính} R=4 \end{cases}$.

Gọi (β) mặt phẳng tiếp xúc với $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ và song song với $(\alpha)\colon 4x+3y-12z+10=0$.

Ta có $(\beta) \parallel (\alpha)$ nên phương trình mặt phẳng $(\beta)\colon 4x+3y-12z+D=0 (D \neq 10)$.

(β) tiếp xúc với (S) nên $\mathrm{d}(I,(\beta))=R \Leftrightarrow \dfrac{|-26+D|}{13}=4 \Leftrightarrow |-26+D|=52 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=78 \\ D=-26 \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy $(\beta)\colon \left[\begin{array}{l} 4x+3y-12z-26=0 \\ 4x+3y-12z+78=0 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Tổng các hệ số nhị thức Niu-tơn trong khai triển $(1+x)^{2n}$ bằng 64. Hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển $\left(nx+\dfrac{1}{x^2}\right)^{3n}$ là

(A) 78856. (B) 78858. (C) 157464. (D) 78732.

Lời giải.

Tổng các hệ số trong khai triển $(1+x)^{2n}$ là $(1+1)^{2n}=64 \Leftrightarrow 2^{2n}=2^6 \Leftrightarrow n=3$.

Khi đó $\left(nx+\dfrac{1}{x^2}\right)^{3n}=\left(3x+\dfrac{1}{x^2}\right)^9$.

Số hạng tổng quát là $T_{k+1}=\mathrm{C}_9^k\cdot(3x)^{9-k}\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^k=\mathrm{C}_9^k\cdot 3^{9-k}x^{9-3k}$.

Số hạng chứa $x^3 \Rightarrow 9-3k=3 \Leftrightarrow k=2$.

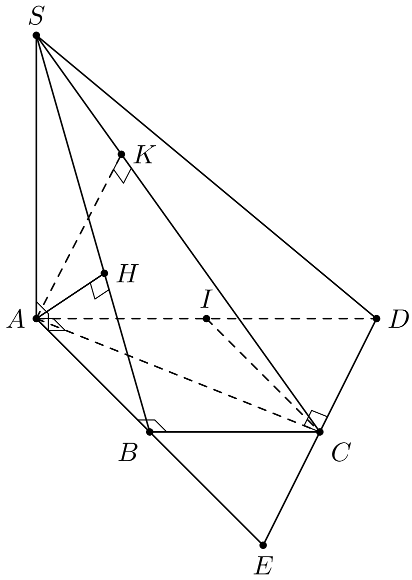
Hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển là $\mathrm{C}_9^2\cdot 3^7=78732$.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $BA=BC=a$, $AD=2a$. Cạnh bên $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB. Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

(A) a. (B) $\dfrac{2a}{3}$. (C) $\dfrac{a}{2}$. (D) $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải.



Tam giác SAB vuông tại A: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

Lại có $SA^2 = SH \cdot SB \Rightarrow \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{(a\sqrt{2})^2}{(a\sqrt{3})^2} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow$ $\mathrm{d}(H,(SCD)) = \dfrac{2}{3}\mathrm{d}(B,(SCD))$.

Gọi E là giao điểm của AB và CD.

Khi đó BC là đường trung bình của tam giác EAD. Suy ra B là trung điểm của EA.

$\Rightarrow \mathrm{d}(B,(SCD)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(A,(SCD))$.

Gọi I là trung điểm của AD. Ta thấy $CI = AB = \dfrac{1}{2}AD$, suy ra tam giác ACD vuông tại C.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SC.

Vì $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp AK$. Suy ra $AK \perp (SCD)$.

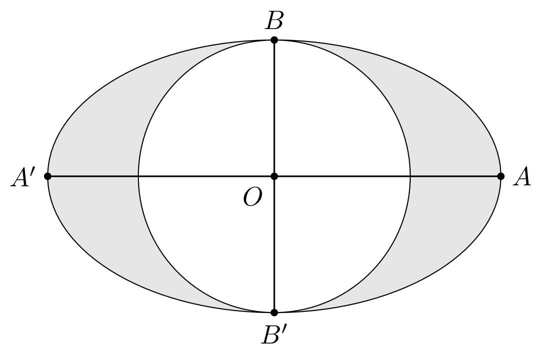
Do đó $\mathrm{d}(A,(SCD)) = AK$. Xét tam giác SAC vuông tại A, đường cao AK ta có
$\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{1}{AB^2 + BC^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{2a^2} \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SCD)) = a$.

Vậy $\mathrm{d}(H,(SCD)) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2}a = \dfrac{a}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 49.

Trong mặt phẳng, cho đường elip (E) có độ dài trục lớn là $AA' = 10$, độ dài trục nhỏ là $BB' = 6$, đường tròn tâm 0 có đường kính là BB' (như hình vẽ bên dưới). Tính thể tích V của khối tròn xoay có được bằng cách cho miền hình hình phẳng giới hạn bởi đường elip và được tròn (được tô đậm trên hình vẽ) quay xung quanh trục AA'.



A $V = 36\pi$. **B** $V = 60\pi$.

C $V = 24\pi$. **D** $V = \dfrac{20\pi}{3}$.

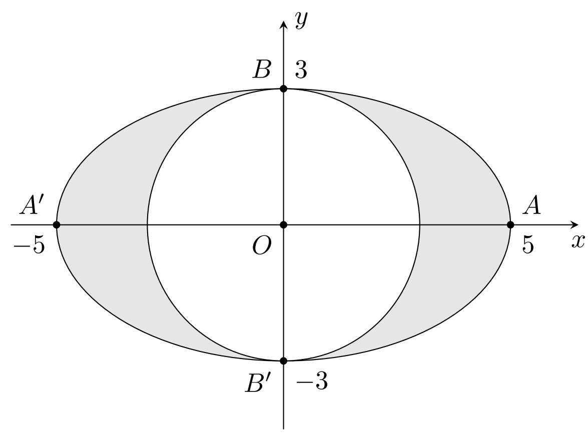
Lời giải.

Xét hình phẳng trong hệ tọa độ Oxy, nhận 0 làm gốc tọa độ và tọa độ các điểm lần lượt là $A(5;0)$, $A'(-5;0)$, $B(0;3)$, $B'(0;-3)$.

Ta có phương trình của elip và đường tròn lần lượt là

$(E)\colon \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ và $(C)\colon x^2 + y^2 = 9$.

Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra là $V = \pi \displaystyle\int_{-5}^{5} 9\left(1 - \dfrac{x^2}{25}\right) \mathrm{d}x - \dfrac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 24\pi$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2(m-3)x + 2m^2 - 9m + 11}}{x^2 - x + 1}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A $\left[\begin{array}{l} m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{array}\right.$.
B $\left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{array}\right.$.
C $1 \leq m \leq 2$.
D $-2 \leq m \leq 1$.

Lời giải.

Vì phương trình $x^2 - x + 1 = 0$ vô nghiệm nên hàm số y xác định khi $x^2 - 2(m-3)x + 2m^2 - 9m + 11 \geq 0$.

Ta có $\Delta' = (m-3)^2 - (2m^2 - 9m + 11) = -m^2 + 3m - 2$.

Để hàm số y xác định $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow -m^2 + 3m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (B) □

—— **HẾT** ——

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. C	3. C	4. A	5. D	6. D	7. A	8. C	9. C	10. C
11. B	12. A	13. A	14. C	15. D	16. A	17. B	18. C	19. A	20. B
21. B	22. A	23. D	24. A	25. C	26. A	27. D	28. B	29. C	30. B
31. D	32. A	33. B	34. D	35. A	36. B	37. A	38. D	39. D	40. A
41. B	42. D	43. C	44. B	45. B	46. C	47. D	48. D	49. C	50. B

6 ĐỀ THI THỬ SỐ 6-MAX8

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là

(A) $V = \frac{1}{3}B \cdot h$. (B) $V = 3B \cdot h$. **(C) $V = B \cdot h$.** (D) $V = \frac{B}{h}$.

Lời giải.

Thể tích của khối lăng trụ $V = B \cdot h$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Với a, b là các số thực dương, mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\ln(a^b) = \frac{1}{a}\ln b$. **(B) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.**

(C) $\ln(a^b) = \frac{1}{b}\ln a$. (D) $\ln(ab) = \ln a - \ln b$.

Lời giải.

Theo công thức lô-ga-rít ta có $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-6x+4y-8z+4=0$. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S).

(A) $I(3;-2;4)$, $R = 25$. (B) $I(-3;2;-4)$, $R = 5$.

(C) $I(3;-2;4)$, $R = 5$. (D) $I(-3;2;-4)$, $R = 25$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm là $I(3;-2;4)$.

Bán kính của mặt cầu (S) là $R = \sqrt{(3)^2+(-2)^2+(4)^2-4} = 5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

(A) $\overrightarrow{u_4} = (-1;2;0)$. (B) $\overrightarrow{u_2} = (2;1;0)$. (C) $\overrightarrow{u_3} = (2;1;1)$. **(D) $\overrightarrow{u_1} = (1;-2;-1)$.**

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-1;2;1)$, nên véc-tơ $-1 \cdot \vec{u} = \overrightarrow{u_1} = (1;-2;-1)$ cũng là véc-tơ chỉ phương của d.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Một hộp có 8 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp đó. Xác suất để lấy được ba viên bi cùng màu là

(A) $\frac{3}{11}$. (B) $\frac{42}{55}$. (C) $\frac{8}{11}$. (D) $\frac{28}{55}$.

Lời giải.

Xác suất cần tính là $P = \frac{\mathrm{C}_8^3 + \mathrm{C}_4^3}{\mathrm{C}_{12}^3} = \frac{3}{11}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Cho hình nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và diện tích xung quanh bằng $3a^2\pi$. Bán kính đáy của hình nón đã cho bằng

(A) $\dfrac{a}{2}$. (B) a. (C) $\dfrac{3a}{2}$. (D) $2a$.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = \pi r l \Rightarrow r = \dfrac{S_{xq}}{\pi l} = \dfrac{3a^2\pi}{\pi \cdot 2a} = \dfrac{3}{2}a$.

Vậy bán kính đáy của hình nón đã cho bằng $\dfrac{3a}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Điểm biểu diễn số phức z là

(A) $M(2;3)$. (B) $M(2;-3i)$. (C) $M(-3;2)$. (D) $M(2;-3)$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn số phức $z = 2 - 3i$ là $M(2;-3)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 3x \, dx$.

(A) $-\dfrac{2}{3}$. (B) $\dfrac{2}{3}$. (C) $-\dfrac{1}{3}$. (D) $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 3x \, dx = -\dfrac{1}{3}\cos 3x\Big|_0^{\pi} = -\dfrac{1}{3}(-1-1) = \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Với $k \in \mathbb{Z}$, nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1$ là

(A) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$. (B) $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$. (C) $x = \dfrac{k\pi}{2}$. (D) $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với $2x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Cho số phức $z = 1 + 2i$. Mô-đun của số phức $\overline{z}$ bằng

(A) 3. (B) $\sqrt{5}$. (C) $\sqrt{2}$. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $\overline{z} = 1 - 2i \Rightarrow |\overline{z}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Cho cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases}$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân trên.

(A) $u_1 = 9$; $q = 2$. (B) $u_1 = 9$; $q = -2$. (C) $u_1 = -9$; $q = -2$. (D) $u_1 = -9$; $q = 2$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^3 - u_1q = 54 \\ u_1q^4 - u_1q^2 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q(q^2-1) = 54 \\ u_1q^2(q^2-1) = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 2. \end{cases}$

Vậy $u_1 = 9$; $q = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$, công sai $d = 5$, số hạng thứ tư là

A $u_4 = 18$. **B** $u_4 = 8$. **C** $u_4 = 14$. **D** $u_4 = 23$.

Lời giải.

Ta có $u_4 = u_1 + 3d = 3 + 5 \cdot 3 = 18$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon x + 2y - 3z + 3 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là

A $(1; 2; -3)$. **B** $(-1; 2; -3)$. **C** $(1; 2; 3)$. **D** $(1; -2; 3)$.

Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (1; 2; -3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A $\displaystyle\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B $\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$ với mọi hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

C $\displaystyle\int (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x$, với mọi hàm số $f(x)$; $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

D $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$, với mọi hàm số $f(x)$; $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Với $k = 0$ ta có $\displaystyle\int kf(x)\,\mathrm{d}x = \int 0\,\mathrm{d}x = C$ còn $\displaystyle k\int f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Do đó mệnh đề "$\displaystyle\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$" là mệnh đề sai.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Hàm số nào dưới đây xác định trên $\mathbb{R}$?

A $y = \log_3 x$. **B** $y = 3^x$. **C** $y = x^{-3}$. **D** $y = x^{\frac{1}{3}}$.

Lời giải.

Hàm số $y = a^x$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Cho số phức $z = a + bi$ thỏa mãn $3z + 5\overline{z} = 5 - 2i$. Tính $P = \dfrac{a}{b}$?

A $P = \dfrac{5}{8}$. **B** $P = 4$. **C** $P = \dfrac{25}{16}$. **D** $P = \dfrac{16}{25}$.

Lời giải.

Ta có

$$3(a+bi) + 5(a-bi) = 5 - 2i \Leftrightarrow 8a - 2bi = 5 - 2i \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = 5 \\ -2b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5}{8} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow P = \dfrac{5}{8}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x)=\dfrac{mx+1}{x-m}$ có giá trị lớn nhất trên $[1;2]$ bằng -2.

A $m=3$. B $m=2$. C $m=4$. D $m=-3$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{m\}\Rightarrow m\notin[1;2]$. Ta có

$$f'(x)=\frac{-m^2-1}{(x-m)^2}<0;\forall x\neq m\Rightarrow \max_{[1;2]} f(x)=f(1)=\frac{m+1}{1-m}.$$

Theo đề bài, $\max\limits_{[1;2]} f(x)=-2\Leftrightarrow \dfrac{m+1}{1-m}=-2\Leftrightarrow m+1=2m-2\Leftrightarrow m=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(3,-1,2)$, $N(4,-1,-1)$, $P(2,0,2)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là

A $3x-2y+z-8=0$. B $3x+3y+z-8=0$.
C $3x+3y-z-8=0$. D $3x+3y-z+8=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN}=(1;0;-3)$, $\overrightarrow{MP}=(-1;1;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]=(3;3;1)$là một véc-tơ pháp tuyến của (MNP).

Suy ra phương trình mặt phẳng (MNP): $3(x-3)+3(y+1)+(z-2)=0\Leftrightarrow 3x+3y+z-8=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1;1;6)$ và đường thẳng $\Delta\colon\begin{cases}x=2+t\\y=1-2t\\z=2t\end{cases}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng Δ là

A $N(1;3;-2)$. B $H(11;-17;18)$. C $M(3;-1;2)$. D $K(2;1;0)$.

Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với Δ tại J. Khi đó J là hình chiếu của A trên (α).

Phương trình mặt phẳng (α): $1(x+1)-2(y-1)+2(z-6)=0\Leftrightarrow x-2y+2z-9=0$.

Ta có $J\in\Delta\Leftrightarrow J(2+t;1-2t;2t)$. $J\in(\alpha)\Leftrightarrow 2+t-2(1-2t)+4t-9=0\Leftrightarrow t=1$.

Vậy $J(3;-1;2)$ là điểm cần tìm.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2-1)$, với $\forall x\in\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.
B Hàm số đã cho có 3 cực trị.
C Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.
D Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Lời giải.

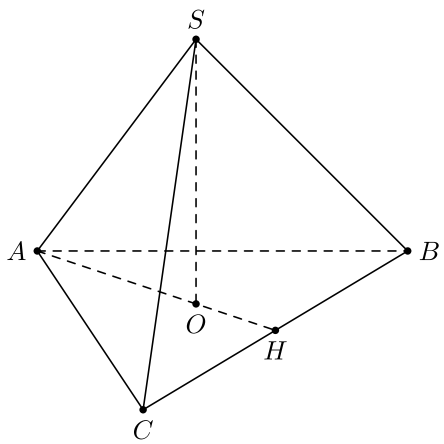
Ta có $f'(x)=x^2(x+1)^2(x-1)$ nên $f'(x)$ đổi dấu một lần từ âm sang dương khi đi qua $x=1$. Do đó hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$, đồng biến trên $(1;+\infty)$ và có một điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Cho hình chóp đều $S.ABC$, tất cả các cạnh bằng 6. Tính diện tích xung quanh của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và chiều cao bằng chiều cao của hình chóp $S.ABC$.

(A) 24π. **B** $24\pi\sqrt{2}$. (C) $12\pi\sqrt{2}$. (D) 12π.

Lời giải.



Gọi O là tâm của đáy ABC, AO cắt BC tại H. Suy ra $SO \perp (ABC)$.

Do $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh bằng 6 suy ra $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Từ đó ta có $R = AO = \dfrac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

Ta có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{6^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{6}$.

Vậy diện tích xung quanh của hình trụ ngoại tiếp hình chóp đều $S.ABC$ cạnh 6 là $S_{xq} = 24\pi\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Trong không gian, tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

(B) Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau.

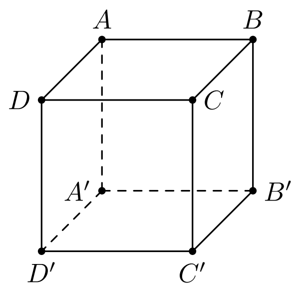
(C) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

(D) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Lời giải.

Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng chưa chắc song song với nhau.

Ví dụ, trong hình lập phương AB và $A'D'$ cùng vuông góc với AA' nhưng chúng chéo nhau, hoặc AB, AD cùng vuông góc với AA' nhưng chúng cắt nhau.



Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có giá trị cực đại và cực tiểu lần lượt là y_1, y_2. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $y_1 - y_2 = -4$. **B** $2y_1 - y_2 = 6$. (C) $2y_1 - y_2 = -6$. (D) $y_1 + y_2 = 4$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3; y'' = 6x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = -2 \\ x = -1 \Rightarrow y = 2. \end{array}\right.$

$y''(1) = 6 > 0$ suy ra giá trị cực tiểu là $y_2 = -2$.

$y''(-1) = -6 < 0$ suy ra giá trị cực đại $y_1 = 2$.

Vậy $2y_1 - y_2 = 6$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x^2+1}$ bằng

A $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(x^2+1)^4} + C$. B $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(x^2+1)} + C$. C $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+1)} + C$. D $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+1)^4} + C$.

Lời giải.

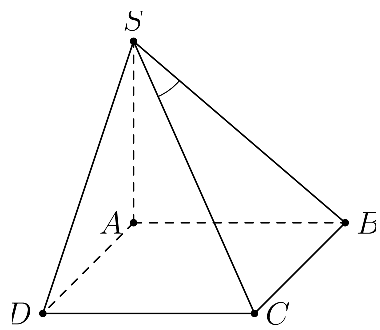
Ta có $\int x \cdot \sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}(x^2+1) = \frac{3}{8}(x^2+1)^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+1)^4} + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tìm số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB).

A $60°$. B $45°$. C $30°$. D $90°$.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases} CB \perp AB \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow SB$ là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAB).

Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) là $\widehat{CSB}$.

Tam giác CSB có $\widehat{B} = 90°$; $CB = a$; $SB = a\sqrt{3} \Rightarrow \tan\widehat{CSB} = \frac{CB}{SB} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $\widehat{CSB} = 30°$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$ bằng

A $\frac{2}{3}$. B $\frac{4}{3}$. C $\frac{7}{3}$. D $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Vì z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình nên theo định lý Viet Ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = 2 \\ z_1 \cdot z_2 = 3. \end{cases}$

Do đó $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 \cdot z_2} = \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Cho tích phân $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$. Nếu đặt $t = \sqrt{x+1}$ thì

(A) $I = \displaystyle\int_1^2 (t^2 - 2t)\,\mathrm{d}t$.

(B) $I = \displaystyle\int_1^2 (2t^2 - t)\,\mathrm{d}t$.

(C) $I = \displaystyle\int_1^2 (2t^2 + 2t)\,\mathrm{d}t$.

D $I = \displaystyle\int_1^2 (2t^2 - 2t)\,\mathrm{d}t$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Leftrightarrow x = t^2 - 1,\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận: Khi $x = 0$ thì $t = 1$; khi $x = 3$ thì $t = 2$.

$$I = \int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{t^2-1}{1+t} 2t\,\mathrm{d}t = \int_1^2 2t(t-1)\,\mathrm{d}t = \int_1^2 (2t^2 - 2t)\,\mathrm{d}t.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình là

(A) $y = 3x + 10$. (B) $y = -2x + 3$. (C) $y = 2x + 1$. **D** $y = 2x + 7$.

Lời giải.

Ta thấy hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(-3; 1)$ và $B(-1; 5)$ nên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y = 2x + 7$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Nghiệm của phương trình $4^x = 2^{x+2019}$ là

(A) $-\dfrac{2019}{3}$. **B** 2019. (C) $\dfrac{2019}{3}$. (D) -2019.

Lời giải.

Phương trình tương đương $2^{2x} = 2^{x+2019} \Leftrightarrow 2x = x + 2019 \Leftrightarrow x = 2019$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	2019

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là

A 0. **B** 2. **C** 3. **D** 1.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 2019$ nên đường thẳng $y = 0$ và $y = 2019$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Mặt khác, ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = -\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Cho bất phương trình $9^x + 3^{x+1} - 4 < 0$. Khi đặt $t = 3^x\ (t > 0)$, ta được bất phương trình nào dưới đây?

A $3t^2 - 4 < 0$. **B** $t^2 + 3t - 4 < 0$. **C** $t^2 + t - 4 < 0$. **D** $2t^2 - 4 < 0$.

Lời giải.

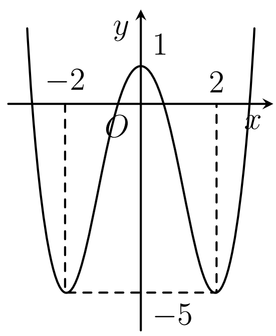
Ta có $9^x + 3^{x+1} - 4 < 0 \Leftrightarrow 3^{2x} + 3 \cdot 3^x - 4 < 0$. Đặt $t = 3^x\ (t > 0)$ ta được $t^2 + 3t - 4 < 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 32.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và đồ thị như hình vẽ bên. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-5; 10]$ để phương trình $f(x) = m$ có 2 nghiệm phân biệt. Tính tổng các phần tử của S.

A 40. **B** 54. **C** 50. **D** 49.



Lời giải.

Từ đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ ta thấy, phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -5 \\ m > 1. \end{array}\right.$

Do đó $S = \{-5; 2; 3; \ldots; 10\}$. Tổng các phần tử của S bằng 49.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $AB = 5$, $BC = 6$, $CA = 7$. Có $SO \perp (ABC)$, $SO = 4\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A $16\sqrt{3}$. **B** $48\sqrt{3}$. **C** $12\sqrt{3}$. **D** $6\sqrt{6}$.

Lời giải.

Ta có $S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 6\sqrt{6}$.

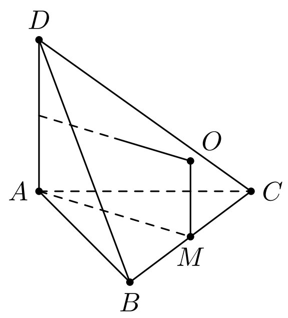
Thể tích của hình chóp bằng: $V = \dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot SO = \dfrac{1}{3} \cdot 6\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Cho hình chóp $A.BCD$ có bốn đỉnh đều nằm trên một mặt cầu, $AB = 2\sqrt{2}$, $AC = 4$, $AD = 5$ và ba cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Gọi V là thể tích khối cầu, S là diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trên. Khi đó tỉ số $\dfrac{S}{V}$ bằng:

(A) $\dfrac{2}{7}$. (B) $\dfrac{21}{2}$. **(C)** $\dfrac{6}{7}$. (D) $\dfrac{7}{2}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của đoạn BC, suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, kẻ đường thẳng d qua M vuông góc với (ABC). Trong (ADM) gọi O là giao điểm của d với đường trung trực AD. Khi đó O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCD$.

Ta có $r^2 = OA^2 = AM^2 + MO^2 = \dfrac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + AD^2)$.

Suy ra $r = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 4^2 + 5^2} = \dfrac{7}{2}$.

Vậy $\dfrac{S}{V} = \dfrac{4\pi r^2}{\dfrac{4}{3}\pi r^3} = \dfrac{3}{r} = \dfrac{6}{7}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định là

(A) $-2 \leqslant m \leqslant 1$. **(B)** $-2 < m < 2$. (C) $-2 < m \leqslant -1$. (D) $-2 \leqslant m \leqslant 2$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = R \setminus \{-m\}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng xác định khi và chỉ khi

$$y' = \frac{m^2-4}{(x+m)^2} < 0,\ \forall x \in \mathscr{D} \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Cho hàm số $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) > 0$ là

(A) $(-1; +\infty)$. (B) $(-2; +\infty)$. **(C)** $(1; +\infty)$. (D) $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $x^2 - 2x + 3 > 0$, $\forall x$ và $f'(x) = \dfrac{2x-2}{x^2-2x+3}$.
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(1; +\infty)$.
Chọn đáp án C □

Câu 37. Cho hàm số $y = \dfrac{\sqrt{4x^2 - x + 1}}{2x+1}$. Các tiệm cận ngang của đồ thị hàm số có phương trình là

A $y = 1,\ y = -1$. B $y = -\dfrac{1}{2}$. C $y = 1$. D $y = 2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{2x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-\sqrt{4 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}}{2 + \dfrac{1}{x}} = -1 \Rightarrow y = -1$ là tiệm cận ngang;

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}}{2 + \dfrac{1}{x}} = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log^2 x + \log_3 x \cdot \log 27 - 4 = 0$. Giá trị của biểu thức $\log x_1 + \log x_2$ bằng

A 4. B 3. C -3. D -4.

Lời giải.

Phương trình tương đương với $\log^2 x + \log 3^3 \log_3 x - 4 = 0 \Leftrightarrow \log^2 x + 3\log x - 4 = 0$.
Theo Vi-et ta có $\log x_1 + \log x_2 = -3$.
Chọn đáp án C □

Câu 39. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của $\left(x\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^4}\right)^n$, với $x > 0$, nếu biết rằng $\mathrm{C}_n^2 - \mathrm{C}_n^1 = 44$.

A 525. B 238. C 485. D 165.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} n \geqslant 2 \\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$ $(*)$

Ta có $\mathrm{C}_n^2 - \mathrm{C}_n^1 = 44 \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)}{2} - n = 44 \Leftrightarrow n = 11$ hoặc $n = -8$ (loại).

Với $n = 11$, số hạng thứ $k+1$ trong khai triển nhị thức $\left(x\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^4}\right)^{11}$ là

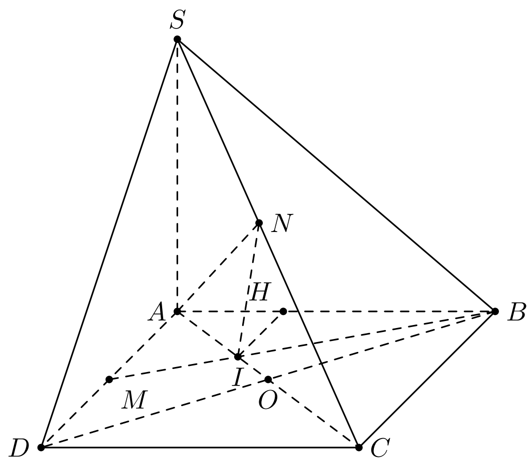
$$\mathrm{C}_{11}^k \left(x\sqrt{x}\right)^{11-k} \left(\dfrac{1}{x^4}\right)^k = \mathrm{C}_{11}^k x^{\frac{33}{2} - \dfrac{11}{2}k}.$$

Theo giả thiết, ta có $\dfrac{33}{2} - \dfrac{11k}{2} = 0$ hay $k = 3$.
Vậy, số hạng không chứa x trong khai triển đã cho là $\mathrm{C}_{11}^3 = 165$.
Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, SC. I là giao điểm của BM và AC. Tính thể tích của khối $ANIB$.

A $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{48}$. **B** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{16}$. **C** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $NO \parallel SA$, $NO = \dfrac{1}{2}SA = \dfrac{a}{2}$. Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow NO \perp (ABCD)$.

Xét $\triangle ABD$, có BM và AO là các đường trung tuyến suy ra I là trọng tâm tam giác ABD.

Từ đó ta có $\dfrac{AI}{AO} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{AI}{AC} = \dfrac{1}{3}$.

Gọi H là chân đường cao hạ từ I xuống AB suy ra $IH \parallel BC$.

Suy ra $\dfrac{IH}{BC} = \dfrac{AI}{AC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow IH = \dfrac{1}{3}BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Nên $S_{\triangle AIB} = \dfrac{1}{2}IH \cdot AB = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{3} \cdot a = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{6}$.

Vậy thể tích của khối $AINB$ bằng: $V_{AINB} = \dfrac{1}{3} \cdot NO \cdot S_{\triangle AIB} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{2}}{6} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

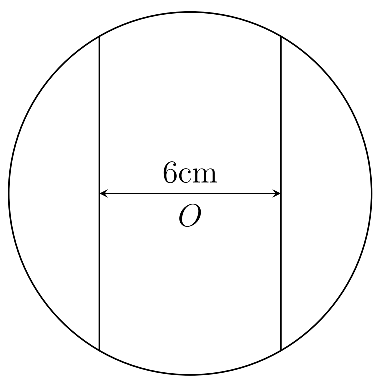
Chọn đáp án D □

Câu 41.

Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính 6m. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng 6m nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị).

A 8142232 đồng. **B** 4821232 đồng.

C 4821322 đồng. **D** 8412322 đồng.



Lời giải.

Xét hệ trục tọa độ Oxy đặt vào tâm khu vườn, khi đó phương trình đường tròn tâm O là $x^2 + y^2 = 36$. Khi đó phần nửa cung tròn phía trên trục Ox có phương trình $y = \sqrt{36 - x^2} = f(x)$. Diện tích S của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị $y = f(x)$

và hai đường thẳng $x = -3; x = 3 \Rightarrow S = 2\int\limits_{-3}^{3} \sqrt{36 - x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x = 6\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = 6\cos t\,\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x = -3 \Rightarrow t = -\dfrac{\pi}{6}$; $x = 3 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{6}$.

$$\Rightarrow S = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 36\cos^2 t\,\mathrm{d}t = 36\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2t + 1)\,\mathrm{d}t = 18\left(\sin 2t + 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 18\sqrt{3} + 12\pi.$$

Do đó số tiền cần dùng là $70000 \cdot S \approx 4821322$ đồng.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Biếtđồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có các điểm cực trị là $A(1;0)$ và $B\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{32}{27}\right)$. Đặt $M = \max\limits_{[-1;2]} y$ và $m = \min\limits_{[-1;2]} y$. Tính $M + m$.

A $M + m = 4$. **B** $M + m = 2$. **C** $M + m = \dfrac{32}{27}$. **D** $M + m = 3$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Vì đồ thị hàm số đã cho các điểm cực trị là $A(1;0)$ và $B\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{32}{27}\right)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ -\dfrac{1}{27}a + \dfrac{1}{9}b - \dfrac{1}{3}c + d = \dfrac{32}{27} \\ 3a + 2b + c = 0 \\ \dfrac{1}{3}a - \dfrac{2}{3}b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow y = x^3 - x^2 - x + 1.$$

Xét hàm số $y = x^3 - x^2 - x + 1$ trên đoạn $[-1;2]$ ta có

$y' = 3x^2 - 2x - 1$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-1;2]$ hoặc $x = -\dfrac{1}{3} \in [-1;2]$.

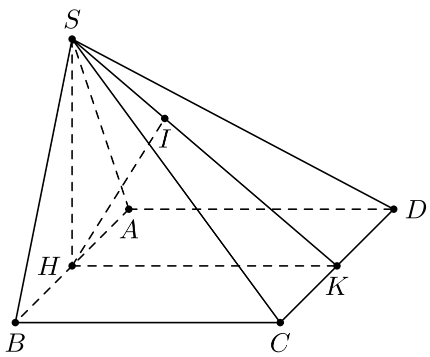
Suy ra $M = \max\limits_{[-1;2]} y = y(2) = 3$ và $m = \min\limits_{[-1;2]} y = y(\pm 1) = 0$. Vậy $M + m = 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trên mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

A $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AB.
Ta có $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB. Trong (SAB) có $SH \perp AB$ nên $SH \perp (ABCD)$.
Kẻ $HK \parallel AD\,(K \in CD) \Rightarrow HK \perp CD$
mà $SH \perp (ABCD) \Rightarrow CD \perp SH$. Do đó $CD \perp (SHK)$.
Suy ra $(SCD) \perp (SHK)$ theo giao tuyến SK.
Trong (SHK), kẻ $HI \perp SK$ thì $HI \perp (SCD)$.
Ta có $AB \parallel (SCD)$ nên $\mathrm{d}(AB, SC) = \mathrm{d}(AB, (SCD)) = \mathrm{d}(H, (SCD)) = HI$.
Tam giác SAB vuông cân có $AB = 2a \Rightarrow SH = a$.
Tam giác SHK có $\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HK^2} \Rightarrow HI = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.
Vậy $\mathrm{d}(AB, SC) = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.
Chọn đáp án B □

Câu 44. Biết $I = \displaystyle\int_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.

(A) $S = 0$. (B) $S = 6$. (C) $S = 2$. (D) $S = -2$.

Lời giải.
Ta có $\dfrac{1}{x^2+x} = \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$. Khi đó

$$I = \int_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x} = \int_3^4 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \left[\ln x - \ln(x+1)\right]\Big|_3^4 = 4\ln 2 - \ln 3 - \ln 5.$$

Suy ra: $a = 4$, $b = -1$, $c = -1$. Vậy $S = 2$.
Chọn đáp án C □

Câu 45. Phương trình $mx^2 - 2mx + 4 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

(A) $\left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 4 \end{array}\right.$. (B) $0 \leqslant m \leqslant 4$. (C) $0 < m < 4$. (D) $0 \leqslant m < 4$.

Lời giải.
Xét phương trình $mx^2 - 2mx + 4 = 0 \quad (*)$

- Với $m = 0$, từ $(*)$ ta có $4 = 0$ (vô lý). Suy ra phương trình vô nghiệm.
- Với $m \neq 0$, phương trình $(*)$ vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' = m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Vậy phương trình $mx^2 - 2mx + 4 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi $0 \leqslant m < 4$.
Chọn đáp án D □

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-3;0;0)$, $B(0;0;3)$, $C(0;-3;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon x + y + z - 3 = 0$. Tìm trên (P) điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

(A) $M(3;-3;3)$. (B) $M(-3;3;3)$. (C) $M(3;3;-3)$. (D) $M(-3;-3;3)$.

Lời giải.
Gọi $I(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. (1)
Ta có $\overrightarrow{IA}(-3-a;-b;-c)$, $\overrightarrow{IB}(-a;-b;3-c)$, $\overrightarrow{IC}(-a;3-b;-c)$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} -3-a=0 \\ b-3=0 \\ 3-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=3 \\ c=3 \end{cases} \Leftrightarrow I(-3;3;3).$$

Nhận thấy $I(-3;3;3) \in (P)$ nên $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\right| = \left|\overrightarrow{MI}\right| = MI \geqslant 0$.

Vậy $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất bằng 0 khi $M(-3;3;3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-2| = 6-|z+2|$ là elip có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Tổng a^2+b^2 bằng

A. 5. B. 14. C. 41. D. 13.

Lời giải.

Giả sử $z = x+yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Điểm $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z.

Đặt $F_1(-2;0)$ và $F_2(2;0)$. Ta có $F_1F_2 = 4$ và

$$|z-2| = 6-|z+2| \Leftrightarrow |z-2|+|z+2| = 6 \Leftrightarrow MF_1+MF_2 = 6.$$

Như vậy, tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là elip có độ dài trục lớn $2a=6$, tiêu cự $2c=4$. Từ đó suy ra $a=3$, $c=2$ nên $b=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$. Vậy $a^2+b^2 = 9+5 = 14$.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{-3}$ và mặt phẳng $(P)\colon x-y+2z-6=0$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P), cắt và vuông góc với d có phương trình

A. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+4}{7}=\dfrac{z-1}{3}$. B. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{7}=\dfrac{z+1}{3}$.

C. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{7}=\dfrac{z+5}{3}$. D. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{7}=\dfrac{z-5}{3}$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm M của d và (P) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{-3} \\ x-y+2z-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-6 \\ 3y+z=11 \\ x-y+2z-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \\ z=5 \end{cases} \Rightarrow M(-2;2;5).$$

$(P)\colon x-y+2z-6=0$ có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}=(1;-1;2)$, d có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}=(2;1;-3)$.

Do đó Δ đi qua $M(-2;2;5)$ nhận $\overrightarrow{k}=[\overrightarrow{n},\overrightarrow{u}]=(1;7;3)$ là một véc-tơ chỉ phương.

Vậy $\Delta\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{7}=\dfrac{z-5}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Cho hàm số $f(x)=(m-1)x^3-5x^2+(m+3)x+3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 1. B. 5. C. 3. D. 4.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = (m-1)x^3 - 5x^2 + (m+3)x + 3$.

TH1: Khi $m = 1$ thì $f(x) = -5x^2 + 4x + 3$ có đồ thị là parabol (P) có đỉnh $I\left(\frac{2}{5}; \frac{19}{5}\right)$, cắt Oy tại điểm $A(0; 3)$. Do đó, hàm số $y = f(|x|)$ có 3 cực trị. Suy ra, $m = 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

TH2: Với $m \neq 1$, $f'(x) = 3(m-1)x^2 - 10x + m + 3$.

Khi đó, để hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị thì hàm số $f(x)$ phải có hai cực trị trái dấu $\Leftrightarrow$ phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow (m-1)(m+3) < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0\}$.

Vậy $m \in \{-2; -1; 0; 1\}$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 - x_2 = 4$

A $m = \dfrac{9}{7}$. **B** $m = \sqrt{17}$. **C** $m = \dfrac{17}{15}$. **D** $m = \dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Ta có $4^x - m \cdot 2^{x+1} + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2m \cdot 2^x + m^2 - 1 = 0 \quad (1)$.

Đặt $t = 2^x$, $t > 0$ ta được phương trình $t^2 - 2m \cdot t + m^2 - 1 = 0 \quad (2)$.

Phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 - x_2 = 4$ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt $t_1; t_2$ thỏa mãn $t_1 = 16t_2$.

Phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt $t_1; t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 > 0 \\ 2m > 0 \\ m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$.

Ta có $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2m \\ t_1 = 16t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17t_2 = 2m \\ t_1 = 16t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 = \dfrac{2m}{17} \\ t_1 = \dfrac{32m}{17}. \end{cases}$

Mặt khác $t_1 \cdot t_2 = m^2 - 1 \Leftrightarrow \dfrac{64m^2}{289} = m^2 - 1 \Leftrightarrow 225m^2 = 289 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{17}{15} \text{ (thỏa mãn)} \\ m = -\dfrac{17}{15} \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

Vậy $m = \dfrac{17}{15}$.

Chọn đáp án C □

——— HẾT ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. B	3. C	4. D	5. A	6. C	7. D	8. B	9. A	10. B
11. A	12. A	13. A	14. A	15. B	16. A	17. A	18. B	19. C	20. A
21. B	22. A	23. B	24. D	25. C	26. A	27. D	28. D	29. B	30. C
31. B	32. D	33. A	34. C	35. B	36. C	37. A	38. C	39. D	40. D
41. C	42. D	43. B	44. C	45. D	46. B	47. B	48. D	49. D	50. C

7 ĐỀ THI THỬ SỐ 7-MAX8

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 5$ và công bội $q = -2$. Số hạng thứ sáu của (u_n) là:

(A) $u_6 = 160$. (B) $u_6 = -320$. (C) $u_6 = -160$. (D) $u_6 = 320$.

(1D3Y4-3)

Lời giải.

Ta có $u_6 = u_1 \cdot q^5 = 5 \cdot (-2)^5 = -160$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

(B) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

(C) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

(D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

(2D1Y2-1)

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

$y' = \dfrac{5}{(x+3)^2} > 0, \forall x \in \mathscr{D}$.

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-3; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 5. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

(2D1Y2-2)

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-5}$ trên đoạn $[0;2]$ là.

(A) $\dfrac{3}{5}$. (B) $\dfrac{1}{4}$. (C) 2. **(D)** $-\dfrac{1}{3}$.

(2D1Y3-1)

Lời giải.

$y' = \dfrac{-7}{(x-5)^2} < 0$ và hàm số xác định, liên tục trên $[0;2]$.

Suy ra $\min\limits_{[0;2]} y = y(2) = -\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Tìm phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+2}$.

(A) $y = 1$. **(B)** $x = -2$. (C) $x = 1$. (D) $x = 2$.

(2D1Y4-1)

Lời giải.

Ta có: TXĐ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x-1}{x+2} = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x-1}{x+2} = +\infty$ nên $x = -2$ là phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Đồ thị hàm số $y = -4x^4 - 5x^2$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm ?

(A) 1. (B) 3. (C) 0. (D) 4.

(2D1Y5-4)

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm : $-4x^4 - 5x^2 = 0 \Leftrightarrow -x^2(4x^2+5) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Tập xác định của hàm số $y = (x+2)^{\frac{\sqrt{2}}{3}}$ là

(A) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. **(B)** $(-2;+\infty)$. (C) $(0;+\infty)$. (D) $\mathbb{R}$.

(2D2Y2-1)

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.

Vậy TXĐ của hàm số là: $\mathscr{D} = (-2;+\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Cho a, b, c là các số dương và $a \neq 1$, khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $\log_a(b+c) = \log_a b \cdot \log_a c$. (B) $\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$.

(C) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$. (D) $\log_a\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\log_a b$.

(2D2Y3-2)

Lời giải.

Theo quy tắc tính lô-ga-rít ta có

$\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c.$

$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c.$

$\log_a\left(\dfrac{1}{b}\right) = \log_a\left(b^{-1}\right) = -\log_a b.$

Chọn đáp án A □

Câu 9. Tìm tập nghiệm S của phương trình $2^{x+1} = 8$.

(A) $S = \{1\}$. (B) $S = \{-1\}$. (C) $S = \{4\}$. **(D)** $S = \{2\}$.

(2D2Y5-1)

Lời giải.

Ta có $2^{x+1} = 8 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^3 \Leftrightarrow x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Giải phương trình $\log_2(2x - 2) = 3$.

(A) $x = 3$. (B) $x = 2$. **(C)** $x = 5$. (D) $x = 4$.

(2D2Y5-1)

Lời giải.

Điều kiện: $x > 1$.

$\log_2(2x - 2) = 3 \Leftrightarrow 2x - 2 = 8 \Leftrightarrow x = 5$.

Vậy tập nghiệm phương trình đã cho là $\{5\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - 1$.

(A) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^3 + x + C$. (B) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^3 + C$.

(C) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^3 - x + C$. (D) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 6x + C$.

(2D3Y1-1)

Lời giải.

$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (3x^2 - 1)\,\mathrm{d}x = x^3 - x + C.$

Chọn đáp án C □

Câu 12. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b\,(a < b)$ xung quanh trục Ox.

(A) $V = \pi\left(\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$. **(B)** $V = \pi\displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

(C) $V = \displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$. (D) $V = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

(2D3Y3-3)

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay là $V = \pi \int\limits_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$. .

Chọn đáp án B □

Câu 13. Cho số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A $|z| = \sqrt{a+b}$ là mô-đun của z.
B $\overline{z} = a - bi$ là số phức lien hợp của z.
C a là phần thực của z.
D b là phần ảo của z.

(2D4Y1-1)

Lời giải.

Ta có $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Tính mô-đun của số phức z biết $z = \dfrac{1+7i}{3-4i}$:

A $|z| = 25\sqrt{2}$.
B $|z| = 0$.
C $|z| = \sqrt{2}$.
D $|z| = 2$.

(2D4Y3-2)

Lời giải.

Ta có: $z = \dfrac{1+7i}{3-4i} = -1 + i \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Số cạnh của hình bát diện đều là

A 8.
B 10.
C 12.
D 24.

(2H1Y2-2)

Lời giải.

Theo khái niệm suy ra số cạnh của hình bát diện đều là 12.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng 6, góc giữa đường thẳng SA và BC bằng $60°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A $V = 36$.
B $V = 18$.
C $V = 36\sqrt{2}$.
D $V = 18\sqrt{3}$.

(2H1B3-2)

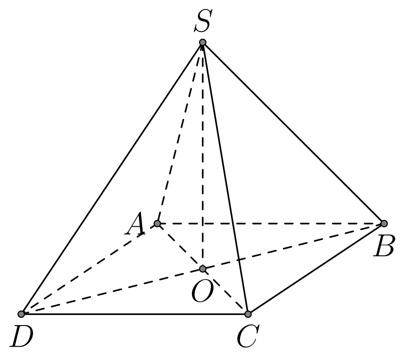
Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $\widehat{(SA, BC)} = \widehat{(SA, AD)} = \widehat{SAD} = 60°$

Khi đó hình chóp có tất cả cạnh đều bằng 6.

Suy ra $SO = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Nên $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot 36 \cdot 3\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$.



Chọn đáp án C □

Câu 17. Một mặt cầu có diện tích 16π. Tính bán kính R của mặt cầu

(A) $R = 2\pi$. (B) $R = 2$. (C) $R = 4$. (D) $R = 4\pi$.

(2H2Y2-1)

Lời giải.

$S_{\text{mc}} = 4\pi R^2 = 16\pi \Rightarrow R = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Cho hình trụ có diện tích xung quanh là 50π và độ dài đường sinh bằng bán kính của đường tròn đáy. Tính diện tích toàn phần của hình trụ.

(A) 60π. (B) 80π. (C) 100π. (D) 120π.

(2H2B1-2)

Lời giải.

Ta có: $S_{xq} = 2\pi Rl$ mà $l = R$ nên $S_{xq} = 2\pi R^2 \Rightarrow 50\pi = 2\pi R^2 \Leftrightarrow R = 5$.

Vậy $S_{tp} = 50\pi + 2\pi \cdot 5^2 = 100\pi$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (0;1;3)$, $\vec{b} = (-2;3;1)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{x}$ biết $\vec{x} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$

(A) $\vec{x} = (-2;4;4)$. (B) $\vec{x} = (4;-3;7)$. (C) $\vec{x} = (-4;9;11)$. (D) $\vec{x} = (-1;9;11)$.

(2H3Y1-1)

Lời giải.

Ta có: $\vec{x} = 3\vec{a} + 2\vec{b} = 3(0;1;3) + 2(-2;3;1) = (-4;9;11)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(2;1;-4)$, $B(5;-3;3)$, $C(-1;-1;10)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

(A) $G(2;1;-3)$. (B) $G(2;-1;3)$. (C) $G(2;-1;-3)$. (D) $G(-2;-1;3)$.

(2H3Y1-1)

Lời giải.

G là trọng tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = 2 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = -1 \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow G(2;-1;3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;4)$, $B(2;1;2)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng AB tại điểm A.

(A) $(P)\colon x - 3y - 2z - 1 = 0$. (B) $(P)\colon x - 3y - 2z + 1 = 0$.

(C) $(P)\colon x + 3y - 2z - 13 = 0$. (D) $(P)\colon x + 3y - 2z + 13 = 0$.

(2H3Y2-3)

Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 3; -2)$.
Phương trình mặt phẳng (P) là $1(x-1) + 3(y+2) - 2(z-4) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 2z + 13 = 0$.
Chọn đáp án D □

Câu 22. Cho $A(1; -3; 2)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 3z - 1 = 0$. Viết phương trình tham số đường thẳng d đi qua A, vuông góc với (P).

A. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$.
B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$.
C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$.
D. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$.

(2H3Y3-2)

Lời giải.
* Vì d đi qua A, vuông góc với (P) nên d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{a} = (2; -1; 3)$.
* Vậy phương trình tham số của d là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - t \\ z = 2 + 3t. \end{cases}$
Chọn đáp án C □

Câu 23. Cho tam giác ABC có $A(-1; 3)$, $B(-2; 0)$, $C(5; 1)$. Phương trình đường cao vẽ từ B là

A. $x - 7y + 2 = 0$.
B. $3x - y + 6 = 0$.
C. $x + 3y - 8 = 0$.
D. $3x - y + 12 = 0$.

(2H3Y3-2)

Lời giải.
Đường cao vẽ từ $B(-2; 0)$ có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AC} = (6; -2)$ hay $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = (3; -1)$.
Vậy d có phương trình là: $3(x + 2) - y = 0$ hay $3x - y + 6 = 0$.
Chọn đáp án B □

Câu 24. Cho 6 chữ số 4, 5, 6, 7, 8, 9. Số các số tự nhiên chẵn có 3 chữ số khác nhau lập thành từ 6 chữ số đó là

A. 120.
B. 60.
C. 256.
D. 216.

(1D2B2-1)

Lời giải.
Gọi số cần tìm có dạng: $\overline{abc}$.
Chọn c: có 3 cách $(c \in \{4; 6; 8\})$
Chọn $\overline{ab}$: có A_5^2 cách
Theo quy tắc nhân, có $3 \cdot \mathrm{A}_5^2 = 60$ (số).
Chọn đáp án B □

Câu 25. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, khẳng định nào đúng về hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(CB'D')$.

A. $(A'BD) \perp (CB'D')$.
B. $(A'BD) \parallel (CB'D')$.
C. $(A'BD) \equiv (CB'D')$.
D. $(A'BD) \cap (CB'D') = BD'$.

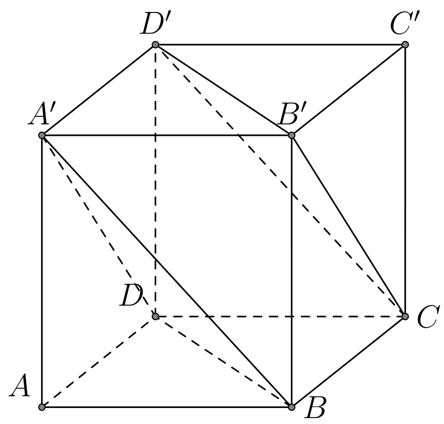
(1H3B4-1)

Lời giải.

Ta có $CD' \parallel A'B$ mà $A'B \subset (A'BD)$ nên $CD' \parallel (A'BD)$.

$CB' \parallel A'D$ mà $A'D \subset (A'BD)$ nên $CB' \parallel (A'BD)$.

Vậy $(CB'D')$ chứa hai đường thẳng CD', CB' cắt nhau và cùng song song với $(A'BD)$ từ đó ta có $(A'BD) \parallel (CB'D')$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + x^2 + mx + 1$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

(A) $m \leqslant \dfrac{4}{3}$. (B) $m \leqslant \dfrac{1}{3}$. **C** $m \geqslant \dfrac{1}{3}$. (D) $m \geqslant \dfrac{4}{3}$.

(2D1B1-3)

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 + 2x + m$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \geqslant 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = 1 - 3m \leqslant 0 \Leftrightarrow m \geqslant \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Hàm số $y = x^4 + mx^2 - m - 5$ (m là tham số) có 3 điểm cực trị khi:

(A) $4 < m < 5$. **B** $m < 0$. (C) $m > 8$. (D) $m = 1$.

(2D1B2-1)

Lời giải.

Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $a \neq 0$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow a \cdot b < 0$.

Khi đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m < 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$. Chọn phương án đúng trong các phương án sau?

(A) $\max\limits_{[0;2]} y = 3$, $\min\limits_{[0;2]} y = 2$. (B) $\max\limits_{[0;2]} y = 11$, $\min\limits_{[0;2]} y = 3$.

C $\max\limits_{[0;2]} y = 11$, $\min\limits_{[0;2]} y = 2$. (D) $\max\limits_{[0;2]} y = 2$, $\min\limits_{[0;2]} y = 0$.

(2D1B3-1)

Lời giải.

Hàm đã cho liên tục trên $[0;2]$.

$y' = 4x^3 - 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin (0;2) \\ x = 1 \in (0;2) \\ x = -1 \notin (0;2). \end{array}\right.$

$y(0) = 3$; $y(1) = 2$; $y(2) = 11$.

Vậy $\max\limits_{[0;2]} y = 11$, $\min\limits_{[0;2]} y = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Cho biểu thức $P = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x^5}$, $(x > 0)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $P = x^{\frac{2}{3}}$. (B) $P = x^{\frac{5}{2}}$. (C) $P = x^{\frac{5}{3}}$. (D) $P = x^{\frac{7}{3}}$.

(2D2B1-2)

Lời giải.

Ta có $P = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x^5} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{5}{6}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{5}{6}} = x^{\frac{5}{3}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Tập xác định của hàm số $y = \log(x^2 + 2x)$ là:

(A) $\mathscr{D} = (-2;0)$. (B) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(C) $\mathscr{D} = (-\infty;-2) \cup (0;+\infty)$. (D) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

(2D2B4-1)

Lời giải.

Hàm số $y = \log(x^2 + 2x)$ xác định khi $x^2 + 2x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > 0. \end{array}\right.$

Vậy $\mathscr{D} = (-\infty;-2) \cup (0;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 2) \geqslant -1$

(A) $x \in (-\infty;1)$. (B) $x \in [0;2)$. (C) $x \in [0;1) \cup (2;3]$. (D) $x \in [0;2) \cup (3;7]$.

(2D2B6-2)

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty;1) \cup (2;+\infty)$.

$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 2) \geqslant -1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leqslant 2 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 3$.

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là $x \in [0;1) \cup (2;3]$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Cho $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -3$, $\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ và $\int\limits_1^5 g(x)\,\mathrm{d}x = 6$. Tính tích phân $I = \int\limits_1^5 [2 \cdot f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}$

(A) $I = -2$. (B) $I = 10$. (C) $I = 4$. (D) $I = 8$.

(2D3B2-1)

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -3$ và $\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ nên $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

$I = \int\limits_1^5 [2\cdot f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_1^5 g(x)\,\mathrm{d}x = -2.$

Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 2 = 0$, $(z \in \mathbb{C})$. Tính giá trị của biểu thức $P = 2|z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|$.

A $P = 3$. **B** $P = 2\sqrt{2} + 2$. **C** $P = \sqrt{2} + 4$. **D** $P = 6$.

(2D4B4-1)

Lời giải.

$z^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 + i \\ z = 1 - i \end{array}\right. \Rightarrow P = 2|2| + |2i| = 4 + 2 = 6.$

Chọn đáp án D □

Câu 34. Tính mô-đun của số phức z thoả mãn $z(1 + 3i) + i = 2$.

A $|z| = \sqrt{17}$. **B** $|z| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C** $|z| = \dfrac{\sqrt{65}}{5}$. **D** $|z| = \sqrt{2}$.

(2D4B3-2)

Lời giải.

Ta có: $z(1 + 3i) + i = 2 \Leftrightarrow z = \dfrac{2 - i}{1 + 3i} = -\dfrac{1}{10} - \dfrac{7}{10}i$.

Suy ra $|z| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án B □

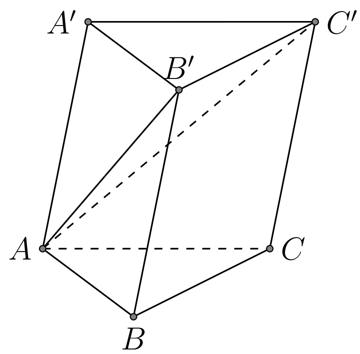
Câu 35. Khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 30. Tính thể tích khối chóp $A.BCC'B'$.

A 20. **B** 10. **C** 25. **D** 15.

(2H1B3-2)

Lời giải.

Ta có $V_{A.BCC'B'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} = V_{ABC.A'B'C'} - \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{2}{3}\cdot 30 = 20.$



Chọn đáp án A □

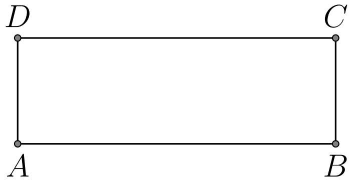
Câu 36. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3AD = 6$. Quay hình chữ nhật $ABCD$ lần lượt quanh AD và AB ta được hai khối trụ tròn xoay có thể tích lần lượt là V_1 và V_2. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A $V_1 = V_2$. **B** $2V_1 = V_2$. **C** $V_1 = 2V_2$. **D** $V_1 = 3V_2$.

(2H2B1-1)

Lời giải.

Hình chữ nhật $ABCD$ quay quanh cạnh nào thì cạnh đó là đường cao của khối trụ được sinh ra.



Do đó $\begin{cases} V_1 = AD \cdot \pi \cdot AB^2 = 2 \cdot \pi \cdot 6^2 = 72\pi \\ V_2 = AB \cdot \pi \cdot AD^2 = 6 \cdot \pi \cdot 2^2 = 24\pi \end{cases} \Rightarrow V_1 = 3V_2.$

Chọn đáp án A □

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;1;1)$, $B(5;3;6)$, $C(-1;2;3)$. Tính diện tích tam giác ABC.

A $S_{\triangle ABC} = \sqrt{523}$. **B** $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{523}$. **C** $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{532}$. **D** $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{352}$.

(2H3B1-2)

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3;2;5)$, $\overrightarrow{AC} = (-3;1;2)$ và $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-1;-21;9)$.

Khi đó, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + (-21)^2 + 9^2} = \frac{1}{2}\sqrt{523}$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $x - my + z - 1 = 0\,(m \in \mathbb{R})$, mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và qua điểm $A(1;-3;1)$. Tìm số thực m để hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc.

A $m = -3$. **B** $m = -\frac{1}{3}$. **C** $m = \frac{1}{3}$. **D** $m = 3$.

(2H3B2-7)

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{OA} = (1;-3;1)$, $\overrightarrow{i} = (1;0;0)$.Mặt phẳng (Q) qua điểm $A(1;-3;1)$ và chứa trục Ox

$\Rightarrow (Q)$ có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}_Q = \left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{i}\right] = (0;1;3)$.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}_P = (1;-m;1)$.

$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{n}_P \cdot \overrightarrow{n}_Q = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-m) + 1 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho $(P)\colon 2x - y + 2z - 9 = 0$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm O cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính 4.

A $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 = 25$. **B** $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

C $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 = 5$. **D** $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

(2H3B2-7)

Lời giải.
Ta có $\mathrm{d}(O;(P)) = \dfrac{|-9|}{\sqrt{9}} = 3$.
Bán kính của (S) là $R = \sqrt{3^2+4^2} = 5$.
Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(S)\colon x^2+y^2+z^2 = 25$.
Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho hai bất phương trình $x^2 - m(m^2+1)x + m^4 < 0$ (1) và $x^2+4x+3 > 0$(2). Các giá trị của tham số m sao cho bất phương trình (1) có nghiệm và nghiệm của bất phương trình (1) đều là nghiệm của bất phương trình (2) là

A $m \in (-\infty;-3] \cup (-1;+\infty) \setminus \{0;1\}$.
B $m \leqslant -3$.
C $m > -1$ và $m \neq 0$.
D $m \leqslant -3$ và $m \neq 0$.

(0D4K2-2)

Lời giải.
(2) $\Leftrightarrow x \leqslant -3 \vee x \geqslant -1$ hay $S_2 = (-\infty;-3] \cup [-1;+\infty)$.
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow S_1 \subset S_2$
$\Delta_{(1)} = m^2(m^2+1)^2 - 4m^4 = m^2(m^2-1)^2$ nên có 2 nghiệm $x = m^3 \vee x = m$.
Xét $m < m^3 \Leftrightarrow m^3 - m > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < m < 0 \\ m > 1 \end{array}\right.$ (*).
Khi đó $S_1 = (m;m^3)$ và với điều kiện (*) nên hiển nhiên $S_1 \subset S_2 \Rightarrow$ nhận $\left[\begin{array}{l} -1 < m < 0 \\ m > 1 \end{array}\right.$ (*)
Xét $m^3 < m \Leftrightarrow m^3 - m < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < m < 1 \\ m < -1 \end{array}\right. \Rightarrow S_1 = (m^3;m)$.
$S_1 \subset S_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (m^3;m) \subset (-\infty;-3] \\ (m^3;m) \subset [-1;+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leqslant -3 \\ m^3 \geqslant -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leqslant -3 \\ m \geqslant -1. \end{array}\right.$
Kết hợp với $\left[\begin{array}{l} 0 < m < 1 \\ m < -1 \end{array}\right.$ ta được $\left[\begin{array}{l} m \leqslant -3 \\ 0 < m < 1 \end{array}\right.$ (**)
Kết hợp (*)(**) ta được $\left[\begin{array}{l} m \leqslant -3 \\ -1 < m < 0 \\ 0 < m < 1 \\ m > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in (-\infty;-3] \cup (-1;+\infty) \setminus \{0;1\}$.
Chọn đáp án A □

Câu 41. Cho $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-10}{x-1} = 5$. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-10}{(\sqrt{x}-1)\left(\sqrt{4f(x)+9}+3\right)}$ bằng

A 1.
B 2.
C 10.
D $\dfrac{5}{3}$.

(1D4K2-3)

Lời giải.
$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-10}{x-1} = 5$ nên $f(x) - 10 \xrightarrow{x\to 1} 5(x-1)$ hay $f(x) \xrightarrow{x\to 1} 5x+5$
Do đó

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-10}{(\sqrt{x}-1)\left(\sqrt{4f(x)+9}+3\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x+5-10}{(\sqrt{x}-1)\left(\sqrt{4(5x+5)+9}+3\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{20x+29}+3\right)}$
$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{20x+29}+3\right)}=1.$

Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho đa giác đều 32 cạnh. Gọi S là tập hợp các tứ giác tạo thành có 4 đỉnh lấy từ các đỉnh của đa giác đều. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của S. Xác suất để chọn được một hình chữ nhật là

A $\dfrac{1}{341}$. B $\dfrac{1}{385}$. C $\dfrac{1}{261}$. D $\dfrac{3}{899}$.

(1D2B5-2)

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là số cách chọn 4 đỉnh trong 32 đỉnh để tạo thành tứ giác $\Rightarrow n(\Omega)=\mathrm{C}_{32}^4$.

Gọi A là biến cố "chọn được hình chữ nhật".

Để chọn được hình chữ nhật cần chọn 2 trong 16 đường chéo đi qua tâm của đa giác, do đó số phần tử của A là C_{16}^2 .

Xác suất biến cố A là $\mathrm{P}(A)=\dfrac{\mathrm{C}_{16}^2}{\mathrm{C}_{32}^4}=\dfrac{3}{899}$.

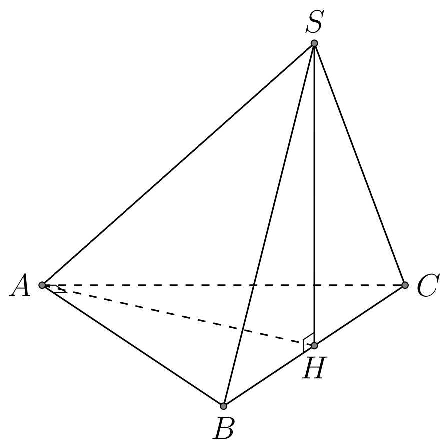
Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cạnh huyền $BC=a$. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm BC. Biết $SB=a$. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC)

A 30°. B 45°. C 60°. D 75°.

(1H3K3-3)

Lời giải.



Ta có ABC là tam giác vuông cạnh huyền $BC=a$

$\Rightarrow$ độ dài đường trung tuyến: $AH=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{a}{2}$.

Mặt khác tam giác SBC cân tại S và có $SB=BC=a$

$\Rightarrow$ tam giác SBC là tam giác đều $\Rightarrow SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mà $SH\perp(ABC)\Rightarrow HA$ là hình chiếu của SA lên mặt phẳng (ABC).

$\Rightarrow (SA,(ABC))=(SA,HA)=\widehat{SAH}$

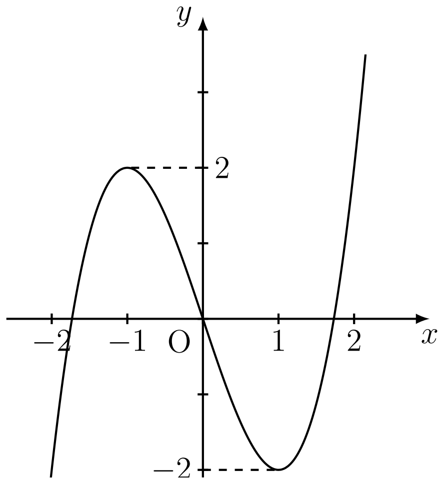
Tam giác vuông SAH có $\tan\widehat{SAH}=\dfrac{SH}{AH}=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}}=\sqrt{3}\Rightarrow$

$\widehat{SAH}=60^\circ$.

Vậy số đo của góc giữa SA và (ABC) là 60°.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $f(f(x)) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

(A) 5. (B) 9. (C) 3. (D) 7.

(2D1K5-4)

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số đã cho trong hình vẽ ta có phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2 và x_3 thuộc khoảng $(-2; 2)$ hay $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \end{array}\right.$ với x_1, x_2 và x_3 thuộc khoảng $(-2; 2)$.

Đặt $t = f(x)$ ta có $f(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = t_1 \\ t = t_2 \\ t = t_3 \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} f(x) = t_1 \\ f(x) = t_2 \\ f(x) = t_3 \end{array}\right.$ với t_1, t_2 và t_3 thuộc khoảng $(-2; 2)$

Dựa vào đồ thị ta thấy ba đường thẳng phân biệt $y = t_1$, $y = t_2$ và $y = t_3$ mỗi đường thẳng luôn cắt đồ thị hàm số tại ba điểm.

Vậy phương trình $f(f(x)) = 0$ có 9 nghiệm.

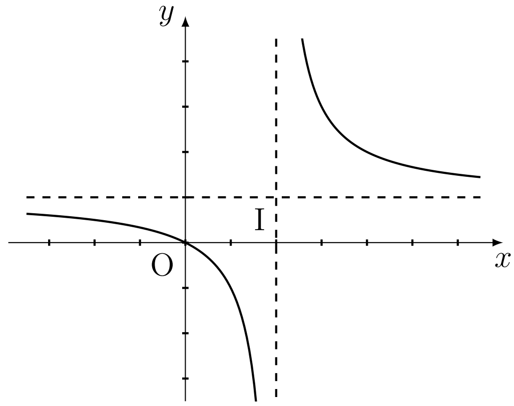
Chọn đáp án (C) □

Câu 45. Biết A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng

(A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) 8.

(2D1G5-7)

Lời giải.



Lấy $A\left(a;\dfrac{a}{a-2}\right)$, $B\left(b;\dfrac{b}{b-2}\right)$ thuộc hai nhánh của (C).

$\overrightarrow{AB}=\left(b-a;\dfrac{b}{b-2}-\dfrac{a}{a-2}\right)=\left(b-a;\dfrac{2(b-a)}{(b-2)(2-a)}\right)$.

Ta có $0<(b-2)(2-a)\leqslant\dfrac{(b-a)^2}{4}$.

Suy ra $AB^2=(b-a)^2+\dfrac{4(b-a)^2}{[(b-2)(2-a)]^2}\geqslant(b-a)^2+\dfrac{64}{(b-a)^2}\Rightarrow AB\geqslant 2\sqrt{64}$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=2-\sqrt{2}$, $b=2+\sqrt{2}$.

Vậy $AB_{\min}=4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^{\log_3 7}=27, b^{\log_7 11}=49, c^{\log_{11} 25}=\sqrt{11}$. Giá trị của biểu thức $T=a^{\log_3^2 7}+b^{\log_7^2 11}+c^{\log_{11}^2 25}$ bằng

(A) $76+\sqrt{11}$. (B) 469. (C) 2017. (D) 31141.

(2D2K3-1)

Lời giải.

Có $T=\left(a^{\log_3 7}\right)^{\log_3 7}+\left(b^{\log_7 11}\right)^{\log_7 11}+\left(c^{\log_{11} 25}\right)^{\log_{11} 25}=(27)^{\log_3 7}+(49)^{\log_7 11}+\left(\sqrt{11}\right)^{\log_{11} 25}$.

Áp dụng $a^{\log_a b}=b$, ta được $\begin{cases}(27)^{\log_3 7}=(3^3)^{\log_3 7}=\left(3^{\log_3 7}\right)^3=7^3=343\\(49)^{\log_7 11}=(7^2)^{\log_7 11}=\left(7^{\log_7 11}\right)^2=11^2=121\\\left(\sqrt{11}\right)^{\log_{11} 25}=\left(11^{\frac12}\right)^{\log_{11} 25}=\left(11^{\log_{11} 25}\right)^{\frac12}=25^{\frac12}=\sqrt{25}=5\end{cases}$.

Vậy $T=343+121+5=469$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x+\sin^3 x\right)\cos x\,\mathrm{d}x$.

(A) $I=\dfrac{2\pi-3}{2}$. (B) $I=\dfrac{3\pi-5}{8}$. (C) $I=\dfrac{2\pi-3}{4}$. (D) $I=\dfrac{4\pi-7}{8}$.

(2D3K2-3)

Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x+\sin^3 x\right)\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos x\,\mathrm{d}x=I_1+I_2$.

Tính $I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,\mathrm{d}x$,

Đặt $\begin{cases}u=x\\\mathrm{d}v=\cos x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\v=\sin x\end{cases}$

$I_1==x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$.

Tính $I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x \, \mathrm{d}x$,

Ta có $I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x \, \mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \mathrm{d}\left(\sin x\right) = \left.\dfrac{\sin^4 x}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{4}$.

Vậy $I = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{2\pi - 3}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Biết rằng $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^3 x + \sin x}{\sin x} \mathrm{d}x = a \cdot \pi + b + c \cdot \ln 2$, $(a, b, c \in \mathbb{Q})$. Tính tổng $S = a + b + c$.

A $S = 1$. **B** $S = \dfrac{13}{24}$. **C** $S = \dfrac{23}{24}$. **D** $S = \dfrac{7}{24}$.

(2D3K2-2)

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^3 x + \sin x}{\sin x} \mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x} \sin x \, \mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = J + \dfrac{\pi}{3}$.

$J = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin^2 x}{\sin x} \cos x \, \mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin^2 x}{\sin x} \mathrm{d}(\sin x) = \left.\left(\ln|\sin x| - \dfrac{1}{2}\sin^2 x\right)\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = -\dfrac{3}{8} + \ln 2$.

Vậy $I = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{3}{8} + \ln 2 \Rightarrow a = \dfrac{1}{3}$, $b = -\dfrac{3}{8}$, $c = 1$ nên $S = a + b + c = \dfrac{23}{24}$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+3}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;0;2)$ cắt d_1 và vuông góc với d_2.

A $\Delta\colon \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-2}{4}$. **B** $\Delta\colon \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z+2}{-4}$.

C $\Delta\colon \dfrac{x-5}{-2} = \dfrac{y-6}{-3} = \dfrac{z-2}{4}$. **D** $\Delta\colon \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-2}{-4}$.

(2H3K3-7)

Lời giải.

Cách 1:

Phương trình tham số của d_1 là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -t. \end{cases}$

Vì đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;0;2)$ và vuông góc với d_2 nên Δ nằm trên mặt thẳng (P) là mặt phẳng qua $A(1;0;2)$ và vuông góc với đường thẳng d_2.

Phương trình mặt phẳng (P) là: $1(x-1) + 2y + 2(z-2) = 0$ hay $x + 2y + 2z - 5 = 0$.

Để Δ cắt d_1 thì Δ phải đi qua giao điểm của d_1 và mặt phẳng (P).
Gọi B là giao điểm của d_1 và mặt phẳng (P). Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x+2y+2z-5=0 \\ x=1+t \\ y=-1+2t \\ z=-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ x=3 \\ y=3 \\ z=-2. \end{cases}$$
Tọa độ điểm B là $B(3;3;-2)$.
Đường thẳng Δ là đường thẳng qua A và B.
Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;3;-4)$.
Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\Delta\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+2}{-4}$.
Cách 2:
B là giao điểm của Δ và d_1 nên $B(1+t;-1+2t;-t)$.
d_2 có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}=(1;2;2)$.
Ta có $\overrightarrow{AB}=(t;2t-1;-t-2)$.
Vì $\Delta\perp d_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u_2}=0 \Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \\ z=-2. \end{cases}$
Tọa độ điểm B là $B(3;3;-2)$.
Đường thẳng Δ là đường thẳng qua A và B.
Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;3;-4)$.
Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\Delta\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+2}{-4}$.
Chọn đáp án B □

Câu 50. Gọi M và m là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của mô-đun số phức z thỏa mãn $|z-1|=2$. Tính $M+m$.

A 3. B 2. C 4. D 5.

(2D4K5-1)

Lời giải.
Gọi $z=x+yi$ được biểu diễn bởi điểm $M(x;y)$. Khi đó $OM=|z|$.
$|z-1|=2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2}=2 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=4 (1)$. Chứng tỏ M thuộc đường tròn (C) có phương trình (1), tâm $I(1;0)$, bán kính $R=2$.
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow M\in(C)$ sao cho OM lớn nhất, nhỏ nhất.
Ta có $OI=1$ nên điểm O nằm trong đường tròn $\Rightarrow R-OI\leqslant OM\leqslant OI+R \Leftrightarrow 1\leqslant OM\leqslant 3$.
Do đó $M=3$ và $m=1$.
Vậy $M+m=4$.
Chọn đáp án C □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. C	3. D	4. D	5. B	6. A	7. B	8. A	9. D	10. C
11. C	12. B	13. A	14. C	15. C	16. C	17. B	18. C	19. C	20. B
21. D	22. C	23. B	24. B	25. B	26. C	27. B	28. C	29. C	30. C
31. C	32. A	33. D	34. B	35. A	36. A	37. B	38. D	39. A	40. A
41. A	42. C	43. B	44. C	45. C	46. C	47. C	48. C	49. B	50. C

8 ĐỀ THI THỬ SỐ 8-MAX8

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Trong các hàm số sau hàm nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = x^4 + x^2 - 1$. (B) $y = \dfrac{x+1}{x+3}$. (C) $y = x^2 + 1$. (D) $y = x^3 + x$.

Lời giải.

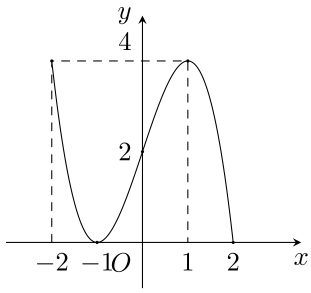
Với $y = x^3 + x$ ta có $y' = 3x^2 + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm nào sau đây?

(A) $x = -1$. (B) $x = 1$. (C) $x = -2$. (D) $x = 2$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$ và đạt cực đại tại điểm $x = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị hàm số là (C). Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox $x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$

Vậy (C) và trục hoành cắt nhau tại 3 điểm phân biệt.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y = (x-2)^{-3}$ là

(A) $\mathscr{D} = (2; +\infty)$. (B) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. (C) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. (D) $\mathscr{D} = (-\infty; 2)$.

Lời giải.

Hàm số có nghĩa khi $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Vậy tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

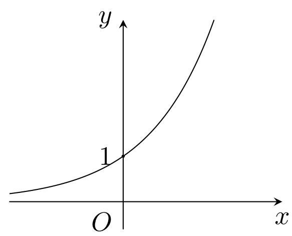
Chọn đáp án (C) □

Câu 5.

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$. (B) $y = 2^x$.

(C) $y = \log_2 x$. (D) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta suy ra đây là hàm số mũ với cơ số lớn hơn 1 nên là hàm số $y = 2^x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(x-5) = 4$.

A $x = 21$. (B) $x = 3$. (C) $x = 11$. (D) $x = 13$.

Lời giải.

Ta có: $\log_2(x-5) = 4 \Leftrightarrow x - 5 = 16 \Leftrightarrow x = 21$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng?

(A) $\int [f(x) \cdot g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

(B) $\int 0\,\mathrm{d}x = 0$.

(C) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = f'(x) + C$.

D $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$.

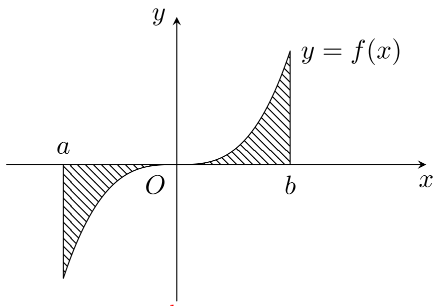
Lời giải.

Hiển nhiên theo định nghĩa nguyên hàm thì $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$ nên họ tất cả các nguyên hàm của $f'(x)$ là $f(x) + C$ do đó $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C)\colon y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (như hình vẽ bên). Giả sử S_D là diện tích của hình phẳng D. Chọn công thức đúng trong các phương án dưới đây?



(A) $S_D = \int\limits_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

B $S_D = -\int\limits_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(C) $S_D = \int\limits_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(D) $S_D = -\int\limits_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Nhìn đồ thị ta thấy $f(x) \leqslant 0$, $\forall x \in [a; 0]$ và $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [0; b]$.

Vậy $S_D = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^0 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = -\int\limits_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Cho số phức $z = 5 - 4i$. Số phức $z - 2$ có

(A) Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $-4i$.

(B) Phần thực bằng 5 và phần ảo bằng -4.

C Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng -4.

(D) Phần thực bằng -4 và phần ảo bằng 3.

Lời giải.

Với $z = 5 - 4i$ ta có $z - 2 = 5 - 4i - 2 = 3 - 4i$ có phần thực là 3 và phần ảo là -4.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Cho phương trình $z^2 - 2z + 2 = 0$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A Phương trình đã cho không có nghiệm nào là số thuần ảo.

B Phương trình đã cho có hai nghiệm phức.

C Phương trình đã cho không có nghiệm phức.

D Phương trình đã cho không có nghiệm thực.

Lời giải.

Ta có: $z^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = 1 - i \\ z_2 = 1 + i. \end{array}\right.$

Suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm phức không phải là số thuần ảo.

Vậy mệnh đề: " Phương trình đã cho không có nghiệm phức" là mệnh đề sai.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Một hình chóp có tất cả 2018 mặt. Hỏi hình chóp đó có bao nhiêu đỉnh?

A 1009. B 2018. C 2017. D 1008.

Lời giải.

Hình chóp đã cho có tất cả 2018 mặt nên có 2017 mặt bên. Do đó, đáy hình chóp là đa giác có 2017 đỉnh.

Vậy hình chóp đã cho có tất cả 2018 đỉnh.

Chọn đáp án B □

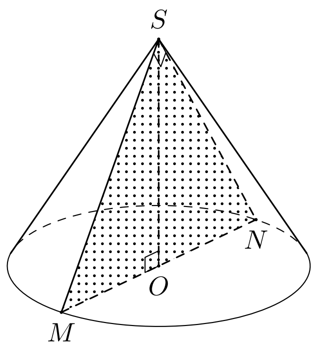
Câu 12. Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân, cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích của khối nón bằng

A $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. B $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{6}$. C $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{12}$. D $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải.

Thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân cạnh huyền $a\sqrt{2}$ nên chiều cao của hình nón là $h = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và bán kính đáy là $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}.$$



Chọn đáp án D □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, véc-tơ nào sau đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)\colon 3x - 4y + 1 = 0$?

A $\vec{n}_1 = (3; -4; 1)$. B $\vec{n}_2 = (3; -4; 0)$. C $\vec{n}_3 = (3; 4; 0)$. D $\vec{n}_4 = (-4; 3; 0)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon 3x - 4y + 1 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (3; -4; 0)$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{1}$, khi đó một véc-tơ chỉ phương của d là

A $\vec{u}=(2;-3;1)$. **B** $\vec{u}=(1;-2;0)$. **C** $\vec{n}=(-2;3;-1)$. **D** $\vec{n}=(1;1;1)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-3;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Tính khoảng cách từ điểm $I(2;0;-1)$ tới mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+1=0$.

A $\mathrm{d}[I;(P)]=1$. **B** $\mathrm{d}[I;(P)]=\dfrac{1}{3}$. **C** $\mathrm{d}[I;(P)]=0$. **D** $\mathrm{d}[I;(P)]=3$.

Lời giải.

$$\mathrm{d}[I;(P)]=\frac{|2\cdot 2-0-2+1|}{3}=1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 16. Phương trình $\sin 2x=\dfrac{1}{2}$ có tập nghiệm là

A $S=\left\{\dfrac{\pi}{12}+k\pi,\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B** $S=\left\{\dfrac{\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C $C=\left\{\dfrac{\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D** $S=\left\{\dfrac{\pi}{18}+k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Phương trình $\Leftrightarrow \sin x=\sin\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ 2x=\pi-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Cho 10 điểm, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng khác nhau tạo bởi hai trong mười điểm nói trên?

A 90. **B** 20. **C** 45. **D** 54.

Lời giải.

Với hai điểm bất kỳ trong n điểm ta luôn được một đoạn thẳng.

Vậy số đoạn thẳng cần tìm chính là một tổ hợp chập 2 của 10 phần tử (điểm).

Như vậy, ta có $\mathrm{C}_{10}^2=\dfrac{10!}{8!\cdot 2!}=45$ đường thẳng.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho cấp số cộng có số hạng đầu $u_1=-\dfrac{1}{2}$, công sai $d=\dfrac{1}{2}$. Năm số hạng liên tiếp đầu tiên của cấp số này là:

A $-\dfrac{1}{2};0;1;\dfrac{1}{2};1$. **B** $-\dfrac{1}{2};0;\dfrac{1}{2};0;\dfrac{1}{2}$. **C** $\dfrac{1}{2};1;\dfrac{3}{2};2;\dfrac{5}{2}$. **D** $-\dfrac{1}{2};0;\dfrac{1}{2};1;\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta dùng công thức tổng quát $u_n=u_1+(n-1)d=-\dfrac{1}{2}+(n-1)\dfrac{1}{2}=-1+\dfrac{n}{2}$, hoặc $u_{n+1}=u_n+d=u_n+\dfrac{1}{2}$ để tính các số hạng của một cấp số cộng.

Ta có $u_1 = -\dfrac{1}{2}; d = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -\dfrac{1}{2} \\ u_2 = u_1 + d = 0 \\ u_3 = u_2 + d = \dfrac{1}{2} \\ u_4 = u_3 + d = 1 \\ u_5 = u_4 + d = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Nhận xét: Dùng chức năng "lặp" của MTCT để tính:

Nhập: $X = X + \dfrac{1}{2}$ (nhập $X = X + d$).

Bấm CALC: nhập $-\dfrac{1}{2}$ (nhập u_1).

Để tính 5 số hạng đầu ta bấm dấu "=" liên tiếp để ra kết quả 4 lần nữa!.

Chọn đáp án D □

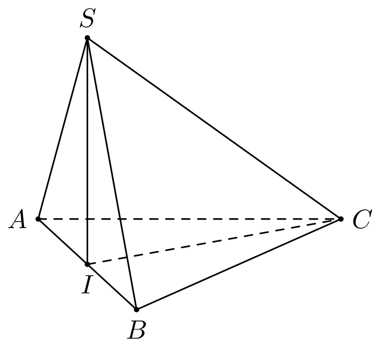
Câu 19. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA = SB$ và $CA = CB$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $BC \perp (SAC)$. **B** $SB \perp AB$. **C** $SA \perp (ABC)$. **D** $AB \perp SC$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AB.

Ta có $\begin{cases} AB \perp SI \\ AB \perp CI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SCI) \Rightarrow AB \perp SC$.



Chọn đáp án D □

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(2-x)(x+3)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 2)$.

B Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-3; -1)$ và $(2; +\infty)$.

C Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(2; +\infty)$.

D Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 2)$.

Lời giải.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \\ x = -3. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$		-3		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng trên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = 2x^4 - (m+1)x^2 + 4$ có ba điểm cực trị?

A $m > -1$. (B) $m \geqslant 0$. (C) $m > 0$. (D) $m \geqslant -1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 8x^3 - 2(m+1)x = 2x[4x^2 - (m+1)]$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = \dfrac{m+1}{4} (1). \end{array}\right.$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow \dfrac{m+1}{4} > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ bằng

(A) 0. (B) -2. (C) -1. **D** $-\sqrt{2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{x(x-1)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Bảng biến thiên như hình

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	-1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	1

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{\mathbb{R}} y = -\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - m = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

A $-3 < m < 2$. (B) $-3 \leqslant m \leqslant 2$. (C) $m < -2$. (D) $m > -3$.

Lời giải.

Phương trình $f(x) - m = 0 \Leftrightarrow f(x) = m$ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $d\colon y = m$ cắt đồ thị $(C)\colon y = f(x)$ tại bốn điểm phân biệt.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $-3 < m < 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Cho $F(x) = (ax^2+bx-c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2018x^2-3x+1)e^{2x}$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Tính $T = a+2b+4c$.

A $T = -3035$. **B** $T = 1007$. **C** $T = -5053$. **D** $T = 1011$.

Lời giải.

Vì $F(x) = (ax^2+bx-c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2018x^2-3x+1)e^{2x}$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ nên ta có: $(F(x))' = f(x)$, với mọi $x \in (-\infty;+\infty)$.

$\Leftrightarrow (2ax^2+x(2b+2a)-2c+b)\,e^{2x} = (2018x^2-3x+1)\,e^{2x}$, với mọi $x \in (-\infty;+\infty)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2018 \\ 2b+2a = -3 \\ -2c+b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1009 \\ b = -\dfrac{2021}{2} \\ c = -\dfrac{2023}{4}. \end{cases}$$

Vậy $T = a+2b+4c = 1009+2\cdot\left(-\dfrac{2021}{2}\right)+4\cdot\left(-\dfrac{2023}{4}\right) = -3035$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Cho phần vật thể $(\Im)$ giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=2$. Cắt phần vật thể $(\Im)$ bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\,(0 \leqslant x \leqslant 2)$, ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích V của phần vật thể $(\Im)$.

A $V = \dfrac{4}{3}$. **B** $V = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C** $V = 4\sqrt{3}$. **D** $V = \sqrt{3}$.

Lời giải.

Diện tích thiết diện: $S_\Delta = \dfrac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}$.

$$V_\Im = \int_0^2 \frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^2 x^2(2-x)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 26. Cho $P = \log_{\frac{1}{a}}\sqrt[3]{a^7}, (a>0, a\neq 1)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng:

A $P = \dfrac{7}{3}$. **B** $P = \dfrac{5}{3}$. **C** $P = \dfrac{2}{3}$. **D** $P = -\dfrac{7}{3}$.

Lời giải.

Vì $a>0, a\neq 1$ nên ta có $P = \log_{\frac{1}{a}}\sqrt[3]{a^7} = \log_{a^{-1}} a^{\frac{7}{3}} = -\dfrac{7}{3}\log_a a = -\dfrac{7}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \log_3(x^2-4x+3)$.

A $\mathscr{D} = \left(2-\sqrt{2};1\right)\cup\left(3;2+\sqrt{2}\right)$. **B** $\mathscr{D} = (1;3)$.

C $\mathscr{D} = (-\infty;1)\cup(3;+\infty)$. **D** $\mathscr{D} = \left(-\infty;2-\sqrt{2}\right)\cup\left(2+\sqrt{2};+\infty\right)$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2-4x+3>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Số nghiệm của phương trình $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x+1}$.

A 0. **B** 3. **C** 1. **D** 2.

Lời giải.
Ta có $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x+1} \Leftrightarrow 7^{-x^2+2x+3} = 7^{x+1} \Leftrightarrow -x^2+2x+3 = x+1 \Leftrightarrow -x^2+x+2=0 \Leftrightarrow$
$\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2. \end{array}\right.$
Vậy phương trình có 2 nghiệm.
Chọn đáp án D $\square$

Câu 29. Tính mô-đun số phức nghịch đảo của số phức $z=(1-2i)^2$.

A $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. B $\sqrt{5}$. C $\dfrac{1}{25}$. D $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.
Ta có $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|} = \dfrac{1}{|(1-2i)^2|} = \dfrac{1}{5}$.
Chọn đáp án D $\square$

Câu 30. Trên mặt phẳng phức tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$ thỏa mãn $|z+2+i| = |\overline{z}-3i|$ là đường thẳng có phương trình:

A $y=x+1$. B $y=-x+1$. C $y=-x-1$. D $y=x-1$.

Lời giải.
Ta có: $|x+yi+2+i| = |x-yi-3i|$
$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y+1)^2 = x^2+(y+3)^2$
$\Leftrightarrow 4x-4y-4=0 \Leftrightarrow y=x-1$.
Chọn đáp án D $\square$

Câu 31. Cho hình đa diện đều loại $\{4;3\}$ cạnh a. Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình đa diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $S=6a^2$. B $S=4a^2$. C $S=8a^2$. D $S=10a^2$.

Lời giải.
Khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ là hình lập phương có 6 mặt là các hình vuông cạnh a nên tổng diện tích tất cả các mặt là $S=6a^2$.
Chọn đáp án A $\square$

Câu 32. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và có bán kính đáy bằng a. Độ dài đường sinh của hình nón đã cho bằng:

A $2\sqrt{2}a$. B $3a$. C $2a$. D $\dfrac{3a}{2}$.

Lời giải.
Diện tích xung quanh hình nón: $S_{xq}=\pi rl$ với $r=a \Rightarrow \pi\cdot a\cdot l = 3\pi a^2 \Rightarrow l=3a$.
Chọn đáp án B $\square$

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;-4;2)$ và $B(1;2;4)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB có phương trình là

A $2x-3y-z+8=0$. B $3x-y+3z-13=0$.
C $2x-3y-z-20=0$. D $3x-y+3z-25=0$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB} = (-4; 6; 2) = -2(2; -3; -1)$
(P) đi qua $A(5; -4; 2)$ nhận $\overrightarrow{n} = (2; -3; -1)$ làm véc-tơ pháp tuyến
$(P)\colon 2x - 3y - z - 20 = 0$.
Chọn đáp án C □

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m - 1; 2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

A $m = -6$. **B** $m = 0$. **C** $m = -4$. **D** $m = 2$.

Lời giải.
$\overrightarrow{MN}(-3; -2; 2)$; $\overrightarrow{NP}(2; m - 2; 1)$
Tam giác MNP vuông tại $N \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow -6 - 2(m-2) + 2 = 0 \Leftrightarrow m - 2 = -2 \Leftrightarrow m = 0$.
Chọn đáp án B □

Câu 35. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 = -15$, $u_{20} = 60$. Tìm u_1, d của cấp số cộng?

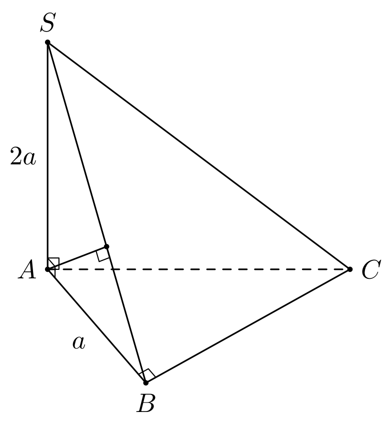
A $u_1 = -35$, $d = -5$. **B** $u_1 = -35$, $d = 5$.
C $u_1 = 35$, $d = -5$. **D** $u_1 = 35$, $d = 5$.

Lời giải.
Ta có $\begin{cases} u_5 = u_1 + 4d \\ u_{20} = u_1 + 19d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = -15 \\ u_1 + 19d = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 5 \\ u_1 = -35. \end{cases}$
Chọn đáp án B □

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. **B** $\dfrac{\sqrt{5}a}{3}$. **C** $\dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$. **D** $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải.
Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.
Kẻ $AH \perp SB$. Khi đó $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (SBC)$
$\Rightarrow AH$ là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).
Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{4a^2}$
$\Rightarrow AH^2 = \dfrac{4a^2}{5} \Rightarrow AH = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.



Chọn đáp án A □

Câu 37. Tam giác ABC có $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm và $BC = 15$ cm. Khi đó đường trung tuyến AM của tam giác có độ dài là:

A 8 cm. **B** 10 cm. **C** 9 cm. **D** 7,5 cm.

Lời giải.
Cách 1: Ta có $AM = \sqrt{\dfrac{AB^2 + AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{9^2 + 12^2}{2} - \dfrac{15^2}{4}} = 7,5$.
Cách 2: Tam giác ABC vuông tại A nên $AM = \dfrac{BC}{2} = 7,5$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào không nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A $y = -x^3 + 2x^2 - 7x$.
B $y = -4x + \cos x$.
C $y = -\dfrac{1}{x^2+1}$.
D $y = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^x$.

Lời giải.

Với $y = -\dfrac{1}{x^2+1}$ ta có $y' = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

$y' > 0$ khi $x > 0$ và $y' < 0$ khi $x < 0$ nên hàm số không nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Cho hàm số $y = x + \sin 2x + 2017$. Tìm các điểm cực tiểu của hàm số.

A $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
B $x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
D $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 1 + 2\cos 2x$, $y' = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Lại có $y'' = -4\sin 2x$,

$y''\left(\dfrac{\pi}{3} + k\pi\right) = -4\sin\left(2\left(\dfrac{\pi}{3} + k\pi\right)\right) = -2\sqrt{3} < 0$ nên $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ là các điểm cực đại ;

$y''\left(-\dfrac{\pi}{3} + k\pi\right) = -4\sin\left(2\left(-\dfrac{\pi}{3} + k\pi\right)\right) = 2\sqrt{3} > 0$ nên $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ là các điểm cực tiểu.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $x + \sqrt{4 - x^2} = m$ có nghiệm?

A $-2 < m < 2$.
B $-2 < m < 2\sqrt{2}$.
C $-2 \leqslant m \leqslant 2\sqrt{2}$.
D $-2 \leqslant m \leqslant 2$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$ trên $[-2; 2]$

Ta có: $y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Hàm số liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ có $f(-2) = -2$, $f\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$, $f(2) = 2$.

Vậy $\min\limits_{[-2;2]} f(x) = -2$, $\max\limits_{[-2;2]} f(x) = 2\sqrt{2}$.

Do đó, phương trình $x + \sqrt{4 - x^2} = m$ có nghiệm khi $-2 \leqslant m \leqslant 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Điều kiện xác định của hàm số $y = \ln\left(x - 2 - \sqrt{x^2 - 3x - 10}\right)$ là

A $5 \leqslant x \leqslant 14$.
B $2 < x < 14$.
C $2 \leqslant x < 14$.
D $5 \leqslant x < 14$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow x - 2 - \sqrt{x^2 - 3x - 10} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x - 10} < x - 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2>0 \\ x^2-3x-10 \geqslant 0 \\ x^2-3x-10 < x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x \leqslant -2 \vee x \geqslant 5 \Leftrightarrow 5 \leqslant x < 14. \\ x<14 \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 42. Cho $I = \int\limits_0^4 x\sqrt{1+2x}\,\mathrm{d}x$ và $u = \sqrt{2x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A $I = \dfrac{1}{2}\int\limits_1^3 x^2(x^2-1)\,\mathrm{d}x$.

B $I = \int\limits_1^3 u^2(u^2-1)\,\mathrm{d}u$.

C $I = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u^5}{5} - \dfrac{u^3}{3}\right)\Big|_1^3$.

D $I = \dfrac{1}{2}\int\limits_1^3 u^2(u^2-1)\,\mathrm{d}u$.

Lời giải.

$I = \int\limits_0^4 x\sqrt{1+2x}\,\mathrm{d}x$

Đặt $u = \sqrt{2x+1} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}(u^2-1) \Rightarrow \mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}u$, đổi cận: $x=0 \Rightarrow u=1$, $x=4 \Rightarrow u=3$.

Khi đó $I = \dfrac{1}{2}\int\limits_1^3 (u^2-1)u^2\,\mathrm{d}u$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Cho các số phức $z_1 = 3+2i$, $z_2 = 3-2i$. Phương trình bậc hai có hai nghiệm z_1 và z_2 là

A $z^2-6z+13=0$. B $z^2+6z+13=0$. C $z^2+6z-13=0$. D $z^2-6z-13=0$.

Lời giải.

Cách 1: Ta có: $S = z_1+z_2 = 6$, $P = z_1z_2 = |z_1|^2 = 9+4 = 13$ nên z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - Sz + P = 0 \Leftrightarrow z^2 - 9z + 13 = 0$.

Cách 2: Do $z_1 = 3+2i$, $z_2 = 3-2i$ là hai nghiệm của phương trình nên

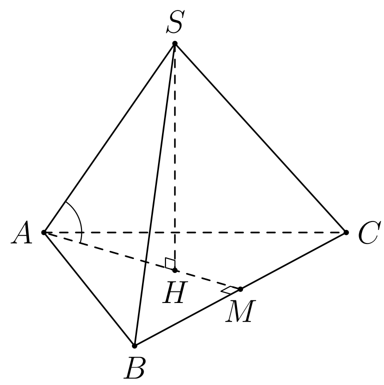
$(z-z_1)(z-z_2) = 0 \Leftrightarrow (z-3-2i)(z-3+2i) = 0 \Leftrightarrow (z-3)^2+4 = 0 \Leftrightarrow z^2-6z+13 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Một khối chóp tam giác có đáy là một tam giác đều cạnh 6 cm. Một cạnh bên có độ dài bằng 3 cm và tạo với đáy một góc $60°$. Thể tích của khối chóp đó là:

A 27 cm^3. B $\dfrac{27}{2}$ cm^3. C $\dfrac{81}{2}$ cm^3. D $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ cm^3.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC)

Ta có $SH \perp (ABC) \Rightarrow AH$ là hình chiếu vuông góc của SA lên mặt phẳng (ABC)

$\Rightarrow \left(\widehat{SA,(ABC)}\right) = \left(\widehat{SA,AH}\right) = \widehat{SAH}$

Tam giác SAH vuông tại H có $SH = SH \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Khi đó $V_{SABC} = \dfrac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \dfrac{27}{2}$ cm^3.

Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón có thể tích 27 cm^3, với chiều cao h và bán kính đáy r. Giá trị r để lượng giấy tiêu thụ ít nhất là

(A) $r = \sqrt[4]{\dfrac{3^6}{2\pi^2}}$. (B) $r = \sqrt[6]{\dfrac{3^8}{2\pi^2}}$. (C) $r = \sqrt[4]{\dfrac{3^8}{2\pi^2}}$. (D) $r = \sqrt[6]{\dfrac{3^6}{2\pi^2}}$.

Lời giải.

Ta có thể tích cốc hình nón $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = 27 \Rightarrow h = \dfrac{81}{\pi \cdot r^2}$, $r > 0$.

Khi đó $l = \sqrt{\left(\dfrac{81}{\pi \cdot r^2}\right)^2 + r^2}$.

Suy ra: $S_{xq} = \pi \cdot r \cdot \sqrt{\left(\dfrac{81}{\pi \cdot r^2}\right)^2 + r^2} = \pi\sqrt{r^2\left(\dfrac{3^8}{\pi^2 \cdot r^4} + r^2\right)} = \pi\sqrt{\dfrac{3^8}{\pi^2 \cdot r^2} + r^4} = \pi\sqrt{f(r)}$.

Lượng giấy tiêu thụ ít nhất $\Leftrightarrow$ Diện tích xung quanh nhỏ nhất $\Leftrightarrow f(r)$ nhỏ nhất.

Ta có: $f(r) = \dfrac{3^8}{\pi^2 \cdot r^2} + r^4 = \dfrac{3^8}{2\pi^2 \cdot r^2} + \dfrac{3^8}{2\pi^2 \cdot r^2} + r^4 \geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{(3^8)^2}{4\pi^4}}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{3^8}{2\pi^2 \cdot r^2} = r^4 \Leftrightarrow r^6 = \dfrac{3^8}{2\pi^2} \Leftrightarrow r = \sqrt[6]{\dfrac{3^8}{2\pi^2}}$.

Vậy để lượng giấy tiêu thụ ít nhất thì $r = \sqrt[6]{\dfrac{3^8}{2\pi^2}}$.

Chú ý: Ta có thể khảo sát hàm $f(r) = \dfrac{3^8}{\pi^2 \cdot r^2} + r^4$, $r > 0$.

$f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[6]{\dfrac{3^8}{2\pi^2}} = r_0$.

r	0		r_0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(r_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - 16 = 0$ và mặt phẳng (P): $x + 2y - 2z - 2 = 0$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính là:

(A) $r = \sqrt{6}$. (B) $r = 2\sqrt{2}$. (C) $r = 4$. (D) $r = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-16=0$ có tâm $I(1;-2;2)$ bán kính $R=5$.

Khoảng cách từ $I(1;-2;2)$ đến mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z-2=0$ là $d=\dfrac{|1-4-4-2|}{\sqrt{1+4+4}}=3$.

Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}=4$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;-1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;0;1)$. Tìm điểm M sao cho $3MA^2+2MB^2-MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A $M\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2};-1\right)$. **B** $M\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{2};2\right)$. **C** $M\left(-\frac{3}{4};\frac{3}{2};-1\right)$. **D** $M\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{2};-1\right)$.

Lời giải.

Cách 1: Giả sử $M(x;y;z)\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AM}=(x;y;z+1)\\ \overrightarrow{BM}=(x+1;y-1;z)\\ \overrightarrow{CM}=(x-1;y;z-1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AM^2=x^2+y^2+(z+1)^2\\ BM^2=(x+1)^2+(y-1)^2+z^2\\ CM^2=(x-1)^2+y^2+(z-1)^2\end{cases}$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow 3MA^2+2MB^2-MC^2\\ &= 3[x^2+y^2+(z+1)^2]+2[(x+1)^2+(y-1)^2+z^2]-[(x-1)^2+y^2+(z-1)^2]\\ &= 4x^2+4y^2+4z^2+6x-4y+8z+5\\ &= \left(2x+\frac{3}{2}\right)^2+(2y-1)^2+(2z+2)^2-\frac{9}{4}\geqslant-\frac{9}{4}.\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{4}$, $y=\dfrac{1}{2}$, $z=-1$, khi đó $M\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};-1\right)$.

Cách 2: Ta có:

$P=3MA^2+2MB^2-MC^2=3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$P=4MI^2+2\overrightarrow{MI}\left(3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\right)+3IA^2+2IB^2-IC^2$

Chọn điểm $I(a;b;c)$ sao cho $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3(-a)+2(-1-a)-(1-a)=0\\ 3(-b)+2(1-b)-(-b)=0\\ 3(-1-c)+2(-c)-(1-c)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{-3}{4}\\ b=\dfrac{1}{2}\\ c=-1\end{cases}\Rightarrow I\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};-1\right)$.

Để P nhỏ nhất thì $M\equiv I$. Vậy $M\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};-1\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau trong đó chứa các chữ số 3, 4, 5 cạnh nhau và chữ số 4 đứng giữa chữ số 3 và chữ số 5 ?

A 1470. **B** 750. **C** 2940. **D** 1500.

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $\overline{abcdef}$. Vì chữ số 4 đứng giữa chữ số 3 và chữ số 5 nên có 2 lựa chọn là 345 và 543.

TH1: Nếu $\overline{abc}$ là 345 hoặc 543 thì có 2 cách sắp xếp.

Chọn $\overline{def}$: Có A_7^3 cách.

Vậy có $2 \cdot \mathrm{A}_7^3 = 420$ cách.

TH2: Nếu $\overline{abc}$ không là 345 và 543.

Chọn a, có 6 cách (Loại 0, 3, 4, 5)

Còn lại 6 chữ số, chọn thêm 2 chữ số có C_6^2 cách.

Ba chữ số 3, 4, 5 cạnh nhau với chữ số 4 đứng giữa coi là một khối, hoán vị với 2 chữ số vừa lấy thêm có 3! cách.

Hoán vị hai chữ số 3 và chữ số 5 quanh chữ số 4 có 2! cách.

Suy ra có $2! \cdot 6 \cdot \mathrm{C}_6^2 \cdot 3! = 1080$ cách.

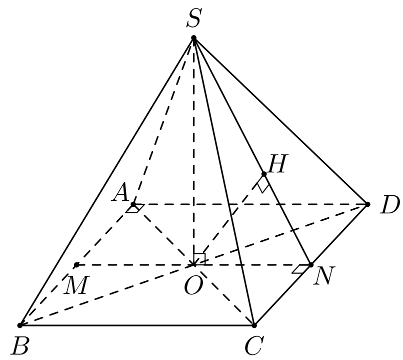
Vậy có $420 + 1080 = 1500$ số thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$. B. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. C. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên SN.

Vì $AB \parallel CD$ nên $\mathrm{d}(AB, SC) = \mathrm{d}(AB, (SCD)) = \mathrm{d}(M, (SCD)) = 2\mathrm{d}(O, (SCD))$ (O là trung điểm đoạn MN)

Ta có $\begin{cases} CD \perp SO \\ CD \perp ON \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SON) \Rightarrow CD \perp OH.$

Khi đó $\begin{cases} CD \perp OH \\ OH \perp SN \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(O; (SCD)) = OH.$

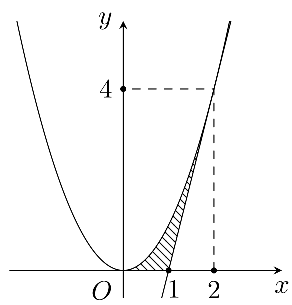
Tam giác SON vuông tại O nên $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{ON^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{\frac{a^2}{4}} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

Vậy $\mathrm{d}(AB, SC) = 2OH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 50.

Cho hình (H) giới hạn bởi trục hoành, đồ thị của một Parabol và một đường thẳng tiếp xúc với Parabol đó tại điểm $A(2; 4)$, như hình vẽ bên. Thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi khi hình (H) quay quanh trục Ox bằng



A. $\dfrac{16\pi}{15}$. B. $\dfrac{32\pi}{5}$. C. $\dfrac{2\pi}{3}$. D. $\dfrac{22\pi}{5}$.

Lời giải.

Parabol có đỉnh là gốc tọa độ như hình vẽ và đi qua $A(2; 4)$ nên có phương trình $y = x^2$.

Tiếp tuyến của Parabol đó tại $A(2; 4)$ có phương trình là $y = 4(x - 2) + 4 = 4x - 4$.

Suy ra thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là

$$V=\pi\int\limits_0^2 (x^2)^2\,\mathrm{d}x-\pi\int\limits_1^2 (4x-4)^2\,\mathrm{d}x=\pi\left(\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^2-16\int\limits_1^2 (x^2-2x+1)\,\mathrm{d}x\right)=\pi\left(\frac{32}{5}-\frac{16}{3}\right)=\frac{16\pi}{15}.$$

Chọn đáp án A □

——— **HẾT** ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. A	3. B	4. C	5. B	6. A	7. D	8. B	9. C	10. C
11. B	12. D	13. B	14. A	15. A	16. A	17. C	18. D	19. D	20. D
21. A	22. D	23. A	24. A	25. B	26. D	27. C	28. D	29. D	30. D
31. A	32. B	33. C	34. B	35. B	36. A	37. D	38. C	39. A	40. C
41. D	42. B	43. A	44. B	45. B	46. C	47. D	48. D	49. D	50. A

9 ĐỀ THI THỬ SỐ 9-MAX8

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. [Phan Anh][1D2B2-1] Cho tập hợp A có 5 phần tử. Số tập con gồm 2 phần tử của A là

Ⓐ A_5^3. **B** C_5^2. Ⓒ $5!$. Ⓓ A_5^2.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Số tập con gồm 2 phần tử của A là số cách chọn 2 phần tử bất kì trong 5 phần tử của A. Do đó số tập con gồm 2 phần tử của A là C_5^2.

Chọn đáp án B □

Câu 2. [Phan Anh][2D3B2-1] Giả sử $\int\limits_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x = 37$ và $\int\limits_9^0 g(x)\,\mathrm{d}x = 16$. Khi đó, $I = \int\limits_0^9 [2f(x) - 3g(x)]\,\mathrm{d}x$ là.

A $I = 122$. Ⓑ $I = 58$. Ⓒ $I = 143$. Ⓓ $I = 26$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Do $\int\limits_9^0 g(x)\,\mathrm{d}x = 16$ nên $\int\limits_0^9 g(x)\,\mathrm{d}x = -16$.

Ta có $I = \int\limits_0^9 [2f(x) - 3g(x)]\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x - 3\int\limits_0^9 g(x)\,\mathrm{d}x = 2\cdot 37 - 3\cdot(-16) = 122$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. [Phan Anh][2D4B2-2] Cho số phức $z = a + bi$ với a, b là các số thực bất kỳ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ Phần ảo của z là bi.

B Mô-đun của z^2 bằng $a^2 + b^2$.

Ⓒ $z - \overline{z}$ không phải là số thực.

Ⓓ Số z và $\overline{z}$ có mô-đun khác nhau.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Ta có $|z^2| = |z|^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2 + b^2$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. [Phan Anh][2D2Y5-1] Phương trình $4^{x-1} = 16$ có nghiệm là

A $x = 3$. Ⓑ $x = 4$. Ⓒ $x = 5$. Ⓓ $x = 2$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

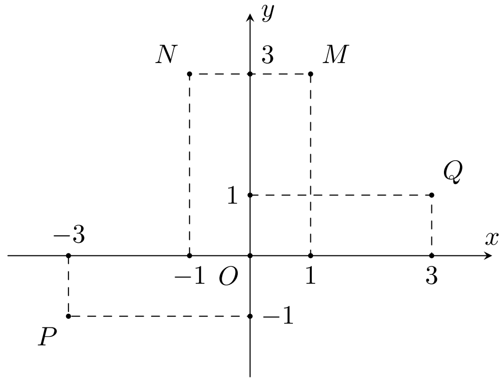
Lời giải.

Ta có $4^{x-1} = 16 \Leftrightarrow 4^{x-1} = 4^2 \Leftrightarrow x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$.

Phương trình có nghiệm là $x = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. [Phan Anh][2D4B2-4]
Điểm nào trong hình vẽ dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $z = (1+i)(2-i)$?



A Q. **B** M. **C** N. **D** P.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.
Ta có $z = (1+i)(2-i) = 3+i$. Điểm biểu diễn của số phức z là $Q(3;1)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 6. [Phan Anh][2D3B1-1] Nếu $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{e}^x + C$ thì $f(x)$ bằng kết quả nào dưới đây.

A $f(x) = \dfrac{x^4}{12} + \mathrm{e}^x$. **B** $f(x) = x^2 + \mathrm{e}^x$. **C** $f(x) = \dfrac{x^4}{3} + \mathrm{e}^x$. **D** $f(x) = 3x^2 + \mathrm{e}^x$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.
Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{e}^x + C \Rightarrow f(x) = \left(\dfrac{x^3}{3} + \mathrm{e}^x + C\right)' = x^2 + \mathrm{e}^x$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 7. [Phan Anh][2H3Y1-3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tọa độ tâm I và tính bán kính R của (S) là

A $I(-1;2;1)$ và $R = 3$. **B** $I(1;-2;-1)$ và $R = 3$.
C $I(-1;2;1)$ và $R = 9$. **D** $I(1;-2;-1)$ và $R = 9$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.
Mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$ có tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $R = 3$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 8. [Phan Anh][1D3Y3-3] Một cấp số cộng có $u_1 = 5$, $d = 3$. Giá trị u_{10} là:

A 35. **B** 24. **C** 32. **D** 30.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.
Ta có: $u_{10} = u_1 + 9d = 5 + 9 \cdot 3 = 32$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 9. [Phan Anh][2H3B3-2] Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(1;4;-7)$ và vuông góc với mặt phẳng $x+2y-2z-3=0$ có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z+7}{-2}$. **B** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+7}{-2}$.

Ⓒ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-7}{-2}$. Ⓓ $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{z-7}{-7}$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Đường thẳng đi qua điểm $A(1;4;-7)$ và vuông góc với mặt phẳng $x+2y-2z-3=0$ nên có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;-2)$ có phương trình là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+7}{-2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 10. [Phan Anh][2D2B2-1] Tập xác định của hàm số $y=(1-x)^{\frac{1}{3}}$ là

Ⓐ $(0;+\infty)$. **B** $(-\infty;1)$. Ⓒ $\mathbb{R}$. Ⓓ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Hàm số $y=x^{\alpha}$ có tập xác định $(0;+\infty)$ với α không nguyên.

Điều kiện: $1-x>0\Leftrightarrow x<1$.

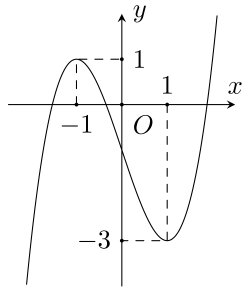
Vậy hàm số $y=(1-x)^{\frac{1}{3}}$ có tập xác định là $\mathscr{D}=(-\infty;1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. [Phan Anh][2D1Y1-2]

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trong khoảng nào dưới đây?

A $(1;+\infty)$. Ⓑ $(0;1)$. Ⓒ $(-3;1)$. Ⓓ $(-2;0)$.



(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy hàm số trên đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. [Phan Anh][2H1Y2-2] Hình bát diện đều thuộc loại khối đa diện đều nào sau đây?

Ⓐ $\{5;3\}$. Ⓑ $\{4;3\}$. Ⓒ $\{3;3\}$. **D** $\{3;4\}$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Do các mặt của bát diện đều là tam giác và mỗi đỉnh của bát diện đều là đỉnh chung của 4 mặt nên bát diện đều là khối đa diện đều loại $\{3;4\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. [Phan Anh][2H2B1-1] Thể tích khối trụ biết bán kính đáy $r = 4$ cm và chiều cao $h = 2$ cm là

A 32π cm^3. **B** 8π cm^3. **C** 16π cm^3. **D** $\dfrac{32\pi}{3}$ cm^3.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

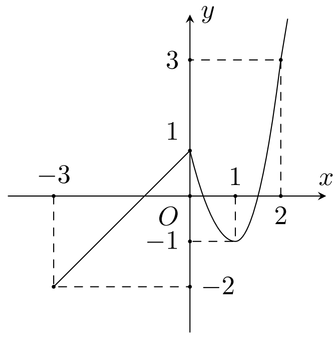
Áp dụng công thức tính thể tích của khối trụ ta có $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 2 = 32\pi$ cm^3.

Chọn đáp án A □

Câu 14. [Phan Anh][2D1B5-7]

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3;2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3;2]$. Giá trị của $M - m$ là

A 4. **B** 3. **C** 5. **D** 0.



(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có $\begin{cases} \max\limits_{[-3;2]} y = 3 \Leftrightarrow x = 2 \\ \min\limits_{[-3;2]} y = -2 \Leftrightarrow x = -3 \end{cases} \Rightarrow M - m = 2 - (-3) = 5.$

Chọn đáp án C □

Câu 15. [Phan Anh][2H3Y2-2] Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon 3x + 2y + z - 4 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là

A $\vec{n}_1 = (1;2;3)$. **B** $\vec{n}_3 = (-1;2;3)$. **C** $\vec{n}_4 = (1;2;-3)$. **D** $\vec{n}_2 = (3;2;1)$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon 3x + 2y + z - 4 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (3;2;1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. [Phan Anh][2D1B5-4] Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 3$ và đường thẳng $y = x$.

A 2. **B** 3. **C** 1. **D** 0.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x = x^3 - 3x + 3 \Leftrightarrow x^3 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}. \end{array}\right.$

Vậy đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 3$ và đường thẳng $y = x$ có 3 giao điểm.

Chọn đáp án B □

Câu 17. [Phan Anh][1D1B1-1] Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{\sin 3x}{\cos x + 2}$ là

(A) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
(B) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
(C) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
(D) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Điều kiện: $\cos x + 2 \neq 0$ (luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$).

Chọn đáp án D □

Câu 18. [Phan Anh][2D2B5-1] Tập nghiệm của phương trình $\log_3(x^2 + 2x) = 1$ là

(A) $\{1\}$. (B) $\{-1; 3\}$. (C) $\{0; -2\}$. (D) $\{-3; 1\}$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Ta có $\log_3(x^2 + 2x) = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3. \end{array}\right.$

Phương trình có tập nghiệm $S = \{-3; 1\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. [Phan Anh][2D3K1-2] Biết hàm số $F(x) = (ax + b)\sqrt{4x + 1}$ (a, b là các hằng số thực) là một nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{12x}{\sqrt{4x + 1}}$. Giá trị $a + b$ bằng

(A) 3. (B) 0. (C) 1. (D) 2.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Cách 1:

Ta có $F'(x) = a\sqrt{4x + 1} + (ax + b) \cdot \dfrac{2}{\sqrt{4x + 1}} = \dfrac{6ax + a + 2b}{\sqrt{4x + 1}}$.

Để $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $\dfrac{6ax + a + 2b}{\sqrt{4x + 1}} = \dfrac{12x}{\sqrt{4x + 1}}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a = 12 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$. Do đó $a + b = 1$.

Cách 2:

Ta tìm nguyên hàm $f(x) = \dfrac{12x}{\sqrt{4x + 1}} \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{12x}{\sqrt{4x + 1}}\,\mathrm{d}x = I$.

Đặt $t = \sqrt{4x + 1} \Rightarrow t^2 = 4x + 1 \Rightarrow t\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$ và $x = \dfrac{t^2 - 1}{4}$.

$\Rightarrow I = \dfrac{3}{2}\displaystyle\int \dfrac{t^3 - t}{t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{3}{2}\int (t^2 - 1)\,\mathrm{d}t = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{t^3}{3} - t\right) = \dfrac{(4x + 1)\sqrt{4x + 1}}{2} - \dfrac{3}{2}\sqrt{4x + 1}$

$= (2x - 1)\sqrt{4x + 1} \Rightarrow a = 2$ và $b = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. [Phan Anh][2D1B4-1] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'				$+$		$-$	
y			$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ | 1	$\searrow$	0

Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A 4. **B** 2. **C** 1. **D** 3.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = -2$ là tiệm cận đứng.
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng.

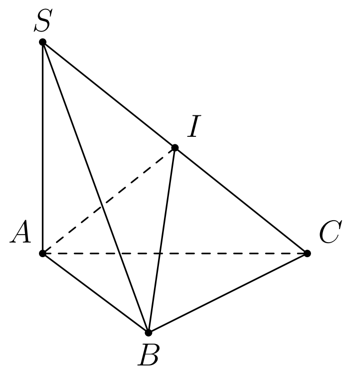
Chọn đáp án **D** □

Câu 21. [Phan Anh][2H2B2-2] Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B. Biết $SA = 2a$, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là

A $2a$. **B** $a\sqrt{2}$. **C** $2a\sqrt{2}$. **D** a.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.



Ta có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B nên

$$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB.$$

Do đó các đỉnh A và B cùng nhìn đoạn SC dưới một góc vuông.

Vậy tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là trung điểm I của cạnh SC và bán kính là

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 22. [Phan Anh][1H3B5-4] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng:

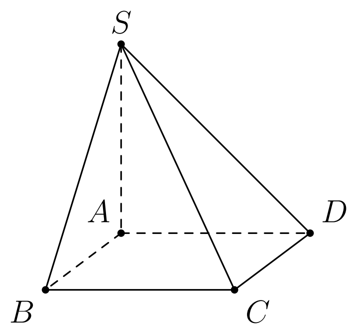
A $a\sqrt{3}$. **B** a. **C** $a\sqrt{2}$. **D** $2a$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} DA \perp AB \\ DA \perp SA \end{cases} \Rightarrow DA \perp (SAB) \Rightarrow DA = \mathrm{d}(D, (SAB))$.

Do đó $\mathrm{d}(SB, CD) = \mathrm{d}(CD, (SAB)) = \mathrm{d}(D, (SAB)) = DA = a$.



Chọn đáp án B □

Câu 23. [Phan Anh][2D4B2-4] Xét các số phức z thỏa điều kiện $|z - 3 + 2i| = 5$. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = z + 1 - i$ là?

A. Đường tròn tâm $I(3; -2)$, bán kính $R = 5$.
B. Đường tròn tâm $I(-2; 1)$, bán kính $R = 5$.
C. Đường tròn tâm $I(4; -3)$, bán kính $R = 5$.
D. Đường tròn tâm $I(-4; 3)$, bán kính $R = 5$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $w = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $|z - 3 + 2i| = 5 \Leftrightarrow |w - 1 + i - 3 + 2i| = 5 \Leftrightarrow |x + yi - 4 + 3i| = 5 \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$.

Vậy tập hợp điểm cần tìm là đường tròn tâm $I(4; -3)$, bán kính $R = 5$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. [Phan Anh][0H2B3-1] Cho tam giác ABC có $a = 2$, $b = \sqrt{6}$, $c = \sqrt{3} + 1$. Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $R = \sqrt{3}$.
B. $R = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.
C. $R = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
D. $R = \sqrt{2}$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Ta có $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{6 + 4 + 2\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{6}\left(\sqrt{3} + 1\right)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Áp dụng định lý sin ta có $R = \dfrac{a}{2\sin A} = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. [Phan Anh][2D2B3-2] Với a và b là hai số thực dương tùy ý, giá trị $\ln(a^2b^3)$ bằng

A. $3\ln a - 2\ln b$.
B. $2\ln a - 3\ln b$.
C. $2\ln a + 3\ln b$.
D. $\ln a + \ln b$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Với a, b và c là các số thực dương và $a \neq 1$.

Ta có $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ và $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$.

Từ đó ta có $\ln(a^2b^3) = \ln a^2 + \ln b^3 = 2\ln a + 3\ln b$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. [Phan Anh][2H3B3-6] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x+y-2z+5=0$. Tìm tọa độ giao điểm M của d và (P).

A $M(-3;-4;-4)$. **B** $M(5;0;8)$. **C** $M(3;-4;4)$. **D** $M(-5;-4;-4)$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Gọi $M(a;b;c)$. Ta có

$$\begin{cases}M\in d\\ M\in(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a-1}{2}=\dfrac{b+2}{1}=\dfrac{c-2}{3}\\ 3a+b-2c+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-2b=5\\ 3b-c=-8\\ 3a+b-2c+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\ b=-4\\ c=-4.\end{cases}$$

Vậy $M(-3;-4;-4)$.

Cách khác: Ta có $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+2t\\ y=-2+t\\ z=2+3t.\end{cases}$

Xét phương trình $3(1+2t)+(-2+t)-2(2+3t)+5=0\Leftrightarrow t=-2\Rightarrow M(-3;-4;-4)$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. [Phan Anh][2D4B4-1] Biết phương trình $z^2+az+b=0$ có một nghiệm $z=-2+i$. Giá trị $a-b$ bằng

A -1. **B** 1. **C** 4. **D** 9.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Phương trình $z^2+az+b=0$ có một nghiệm $z=-2+i$ nên ta có $(-2+i)^2+a(-2+i)+b=0$

$$\Leftrightarrow(-2a+b+3)+(a-4)i=0\Leftrightarrow\begin{cases}2a-b=3\\ a-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\ b=5.\end{cases}$$

Vậy $a-b=-1$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. [Phan Anh][2D2B4-2] Đạo hàm của hàm số $y=(2x-1)\cdot 2^{x^2}$ bằng

A $y'=2^{x^2+1}+2x(2x-1)2^{x^2}$. **B** $y'=2^{x^2-1}+2x(2x-1)2^{x^2}\ln 2$.

C $y'=2^{x^2+1}+2x(2x-1)2^{x^2}\ln 2$. **D** $y'=2^{x^2}+2x(2x-1)2^{x^2}\ln 2$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Ta có $y=(2x-1)\cdot 2^{x^2}\Rightarrow y'=(2x-1)'\cdot 2x^2+(2x-1)\cdot\left(2^{x^2}\right)'$

$\Leftrightarrow y'=2\cdot 2^{x^2}+(2x-1)2^{x^2}\ln 2\cdot(x^2)'\Leftrightarrow y'=2^{x^2+1}+2x(2x-1)2^{x^2}\ln 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. [Phan Anh][1H3K4-3] Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ với $AB=2\sqrt{3}$, $AA'=2$. Tang góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng

A $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$. **B** $\sqrt{3}$. **C** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D** $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$.

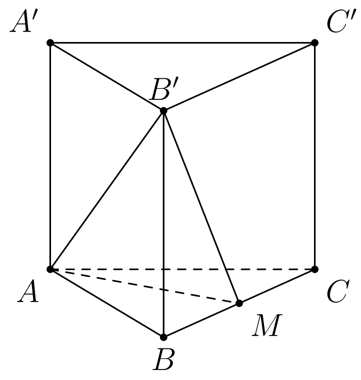
(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC.

Ta có $AM \perp (BCC'B') \Rightarrow (AB', (BCC'B')) = \widehat{AB'M}$.

Khi đó, xét tam giác $AB'M$ ta có



$$\tan\left(\widehat{AB'M}\right) = \frac{AM}{B'M} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{3+4}} = \frac{3}{\sqrt{7}}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 30. [Phan Anh][2D2B1-2] Viết $\sqrt[4]{x\sqrt{x}} \cdot \sqrt[5]{x^3}$ dưới dạng $x^{\frac{n}{m}}$ với m, n là các số tự nhiên. Khi đó $m - n$ bằng

A -1. **B** 11. **C** 1. **D** -11.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Ta có $\sqrt[4]{x\sqrt{x}} \cdot \sqrt[5]{x^3} = \sqrt[4]{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} \cdot x^{\frac{3}{5}} = \sqrt[4]{x^{\frac{3}{2}}} \cdot x^{\frac{3}{5}} = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{3}{5}} = x^{\frac{3}{8}} \cdot x^{\frac{3}{5}} = x^{\frac{39}{40}}$.

Suy ra $n = 39$, $m = 40$. Từ đó ta có $m - n = 40 - 39 = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. [Phan Anh][1D3B4-5] Cho cấp số nhân (u_n) là một dãy số tăng. Biết $u_2 = 6$, $u_4 = 54$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó là

A 59044. **B** 59048. **C** 59046. **D** 59040.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Ta có $q^2 = \frac{u_4}{u_2} = 9 \Rightarrow q = 3$; $u_1 = \frac{u_2}{q} = 2$; $S_{10} = u_1\frac{1-q^{10}}{1-q} = 3^{10} - 1 = 59048$.

Chọn đáp án B □

Câu 32. [Phan Anh][2H3B2-3] Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;1;1)$, $B(2;1;0)$, $C(1;-1;2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình là

A $3x + 2z + 1 = 0$. **B** $x + 2y - 2z - 1 = 0$.

C $3x + 2z - 1 = 0$. **D** $x + 2y - 2z + 1 = 0$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (-1;-2;2)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) cần tìm.

$\vec{n} = -\overrightarrow{BC} = (1;2;-2)$ cũng là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $x + 2y - 2z + 1 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. [Phan Anh][2D3B2-1] Biết $\int\limits_3^5 \dfrac{x^2+x+1}{x+1}\,\mathrm{d}x = a + \ln\dfrac{b}{2}$, với a, b là các số nguyên. Giá trị $S = a - 2b$ là

A 2. **B** 10. **C** -2. **D** 5.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Ta có $\int\limits_3^5 \dfrac{x^2+x+1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_3^5 \left(x + \dfrac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \left(\dfrac{1}{2}x^2 + \ln|x+1|\right)\Big|_3^5 = 8 + \ln\dfrac{3}{2}$.

Vậy $a = 8$, $b = 3$. Suy ra $S = a - 2b = 8 - 2\cdot 3 = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. [Phan Anh][2H1B2-3] Hình lăng trụ tam giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A 4. **B** 6. **C** 3. **D** 5.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Hình lăng trụ tam giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng.

Chọn đáp án A □

Câu 35. [Phan Anh][2D1B2-1] Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có hai điểm cực trị A, B. Khi đó phương trình đường thẳng AB là

A $y = 2x - 1$. **B** $y = x - 2$. **C** $y = -x + 2$. **D** $y = -2x + 1$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = -1 \\ x = -1 \Rightarrow y = 3. \end{array}\right.$

Do đó nên $A(1;-1)$ và $B(-1;3)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2;4)$ suy ra véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng AB là $\vec{n} = (2;1)$.

Phương trình của đường thẳng AB là $2(x-1) + 1(y+1) = 0 \Leftrightarrow y = -2x + 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. [Phan Anh][2D1K1-1] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x^2-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = 2f(-x)$ đồng biến trên khoảng nào.

A $(-\infty;-1)$. **B** $(-1;1)$. **C** $(0;2)$. **D** $(2;+\infty)$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

$f'(x) = x^2(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

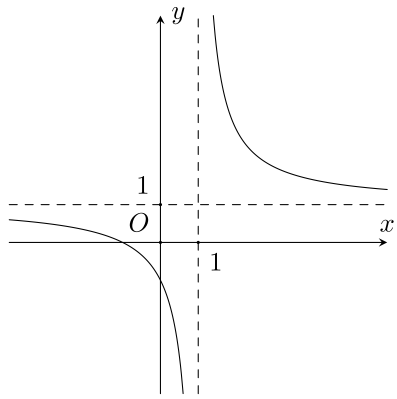
Ta có $y' = -2f'(-x)$

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow y' \geq 0 \Leftrightarrow f'(-x) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. [Phan Anh][2D1B5-1]

Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

B $y = -x^3 + 3x + 1$.

C $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

D $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng $x = 1$ và đường tiệm cận ngang là $y = 1$ nên ta chọn đáp án là hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Chọn đáp án C □

Câu 38. [Phan Anh][2H2K1-5] Cho mặt nón tròn xoay đỉnh S đáy là đường tròn tâm O có thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh bằng a. A, B là hai điểm bất kỳ trên (O). Thể tích khối chóp $S.OAB$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$.

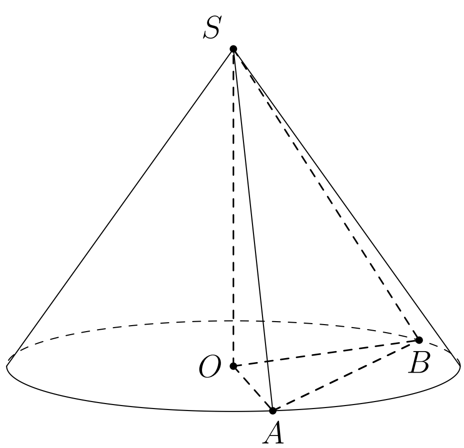
B $\dfrac{a^3}{96}$.

C $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

D $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{96}$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.



Ta có $V_{S.OAB} = \dfrac{1}{3}S_{\triangle AOB} \cdot SO$.

Lại có $S_{\triangle AOB} = \dfrac{1}{2}OA \cdot OB \cdot \sin\widehat{AOB}$.

Mặt khác $OA = OB = \dfrac{a}{2}$, $SO = h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó thể tích khối chóp $S.OAB$ đạt giá trị lớn nhất khi

$$\sin\widehat{AOB} = 1 \Rightarrow OA \perp OB.$$

Khi đó $V_{\max} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$.

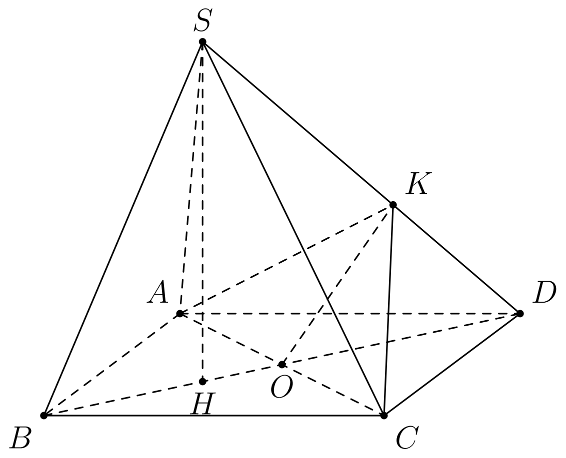
Chọn đáp án A □

Câu 39. [Phan Anh][1H3K4-3] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi có góc $\widehat{BAD}=120^\circ$, hình chiếu vuông góc của điểm H trên mặt phẳng đáy trùng với trọng tâm của tam giác ABC, biết đường cao của khối chóp là $SH=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ và tam giác SBD vuông tại S. Góc giữa 2 mặt phẳng (SAD) và (SCD) là

(A) 60°. **(B) 90°.** (C) 30°. (D) 45°.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.



Do H là trọng tâm của tam giác ABC nên $HB=2HO$. Dễ thấy $HD=2HB$.

Mặt khác tam giác SBD vuông tại S có đường cao SH nên $SH^2=HB\cdot HD=2HB^2$

$\Rightarrow HB=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow OB=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $AB=AC=a\Rightarrow OA=\dfrac{a}{2}$.

Có $\begin{cases}AC\perp BD\\ AC\perp SH\end{cases}\Rightarrow AC\perp(SBD)\Rightarrow AC\perp SD$.

Dựng $CK\perp SD\Rightarrow(ACK)\perp SD$.

Vậy nên suy ra góc giữa (SAD) và (SCD) là $\widehat{AKC}$.

Ta có $\mathrm{d}(H,SD)=\dfrac{HD\cdot SH}{\sqrt{HD^2+SH^2}}=\dfrac{2a}{3}$.

Ta có $\dfrac{\mathrm{d}(O,(SD))}{\mathrm{d}(O,(SD))}=\dfrac{DO}{DH}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow OK=\dfrac{3}{4}\mathrm{d}(H,SD)=\dfrac{a}{2}$.

$\Rightarrow\cos\widehat{OKC}=\dfrac{OK}{KC}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\widehat{OKC}=45^\circ\Rightarrow\left(\widehat{(SAD),(SCD)}\right)=\widehat{AKC}=90^\circ$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. [Phan Anh][2H3K3-7] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+1}{3}$ và $d_2\colon\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-9}{3}$. Mặt cầu có một đường kính là đoạn thẳng vuông góc chung của d_1 và d_2 có phương trình là:

(A) $\left(x-\dfrac{16}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{2}{3}\right)^2+(z-14)^2=12$. (B) $\left(x-\dfrac{16}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{2}{3}\right)^2+(z-14)^2=3$.

(C) $\left(x-\dfrac{8}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{3}\right)^2+(z-7)^2=12$. **(D) $\left(x-\dfrac{8}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{3}\right)^2+(z-7)^2=3$.**

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của d_1 và d_2 lần lượt là $\vec{u}_1=(2;1;3)$, $\vec{u}_2=(1;2;3)$.

Gọi AB là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 với $A\in d_1$, $B\in d_2$.

Suy ra $A(-1+2a;-1+a;-1+3a)$; $B(2+b;2b;9+3b)$.

Khi đó $\overrightarrow{AB}=(-2a+b+3;-a+2b+1;-3a+3b+10)$.

Vì AB là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 nên

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\vec{u}_1\\ \overrightarrow{AB}\perp\vec{u}_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}14a-13b=37\\ 13a-14b=35\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{7}{3}\\ b=-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A\left(\dfrac{11}{3};\dfrac{4}{3};6\right)\\ B\left(\dfrac{5}{3};-\dfrac{2}{3};8\right)\end{cases}\Rightarrow AB=2\sqrt{3}.$$

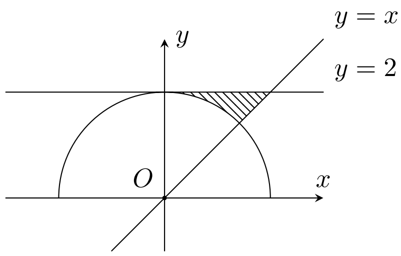
Gọi I là tâm mặt cầu (S) có đường kính là AB. Suy ra $I\left(\frac{8}{3};\frac{1}{3};7\right)$ và $R=\frac{1}{2}AB=\sqrt{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S): $\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+(z-7)^2=3$.

Chọn đáp án D □

Câu 41. [Phan Anh][2D3K3-1]

Cho hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=2$, $y=x$ có diện tích là $S=a+b\cdot\pi$ (tham khảo hình vẽ bên). Kết quả nào sau đây là đúng?



A $a+b<1$. **B** $a+2b=3$.

C $a^2+4b^2\geq 5$. **D** $a>1$, $b>1$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Các phương trình hoành độ giao điểm là

- $\sqrt{4-x^2}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\4-x^2=x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\x=\pm\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$.
- $\sqrt{4-x^2}=2\Leftrightarrow x=0$.
- $x=2$.

Diện tích cần tính là:

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\sqrt{2}}\left(2-\sqrt{4-x^2}\right)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{2}}^{2}(2-x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt{2}}2\,\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{2}}^{2}(2-x)\,\mathrm{d}x-\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\\&=(2x)\Big|_0^{\sqrt{2}}+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{\sqrt{2}}^{2}-\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\\&=2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}-\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=3-\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Đặt $x=2\sin t\Rightarrow\ \mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=\sqrt{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$.

Ta có $\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}4\cos^2 t\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}x$

$=2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+1$.

Vậy $S=3-\frac{\pi}{2}-1=2-\frac{1}{2}\cdot\pi$.

Theo kí hiệu của bài toán ta suy ra $a=2$, $b=-\frac{1}{2}$. Do đó mệnh đề đúng là $a^2+4b^2\geq 5$.

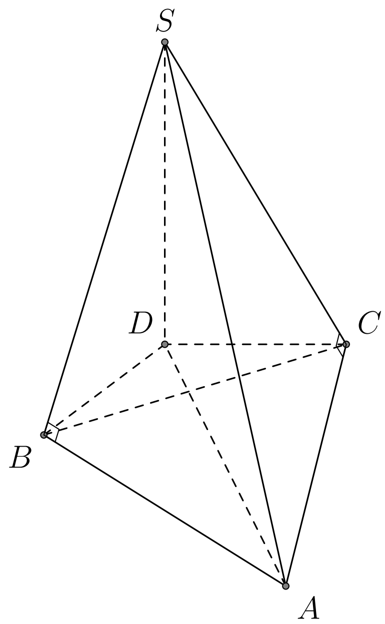
Chọn đáp án C □

Câu 42. [Phan Anh][2H1G3-2] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a, tam giác SBA vuông tại B, tam giác SAC vuông tại C. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 60°. Thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a là

A $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **C** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **D** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.



Gọi D là hình chiếu của S lên (ABC), suy ra $SD \perp (ABC)$.

Ta có $\begin{cases} SD \perp AB \\ SB \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBD) \Rightarrow BA \perp BD.$

Tương tự có $AC \perp DC$ hay tam giác ACD vuông ở C.

Dễ thấy $\triangle SBA = \triangle SCA$ (cạnh huyền và cạnh góc vuông), suy ra $SB = SC$. Từ đó ta chứng minh được $\triangle SBD = \triangle SCD$ nên cũng có $DB = DC$.

Vậy DA là đường trung trực của BC, nên cũng là đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

Ta có $\widehat{DAC} = 30^\circ$, suy ra $DC = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Ngoài ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) là $\widehat{SBD} = 60^\circ$, suy ra

$$\tan \widehat{SBD} = \frac{SD}{BD} \Rightarrow SD = BD \tan \widehat{SBD} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = a.$$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SD = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Chọn đáp án A □

Câu 43. [Phan Anh][2D1K1-3] Cho hàm số $y = \dfrac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Số phần tử của S bằng

A 1. **B** 5. **C** 2. **D** 3.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{m}{2}\right\}$.

Ta có $y' = \dfrac{m^2-4}{(2x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{m}{2} \le 0 \\ -\dfrac{m}{2} \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 0 \\ m \le -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m < 2.$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0;1\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 44. [Phan Anh][2D4K3-3] Cho số phức z thỏa $\left(1-\sqrt{5}i\right)|z| = \dfrac{2\sqrt{42}}{z} + \sqrt{3}i + \sqrt{15}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $\dfrac{5}{2} < |z| < 4$. **B** $\dfrac{3}{2} < |z| < 3$. **C** $3 < |z| < 5$. **D** $\dfrac{1}{2} < |z| < 2$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Ta có $(1-\sqrt{5}i)|z| = \dfrac{2\sqrt{42}}{z} + \sqrt{3}i + \sqrt{15} \Leftrightarrow (1-\sqrt{5}i)|z| - \sqrt{3}i(1-\sqrt{5}i) = \dfrac{2\sqrt{42}}{z}$

$\Leftrightarrow \left(1-\sqrt{5}i\right)\left(|z|-\sqrt{3}i\right) = \dfrac{2\sqrt{42}}{z} \Leftrightarrow \left|1-\sqrt{5}i\right|\cdot\left|z-\sqrt{3}i\right| = \left|\dfrac{2\sqrt{42}}{z}\right| \Leftrightarrow \sqrt{6}\cdot\sqrt{|z|^2+3} = \dfrac{2\sqrt{42}}{|z|}$.

Đặt $t = |z| > 0$, khi đó, ta có

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{6}\cdot\sqrt{t^2+3} = \dfrac{2\sqrt{42}}{t} \Leftrightarrow t^4+3t^2-28 = 0 \Leftrightarrow (t^2-4)(t^2+7) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow |z| = 2 \in \left(\dfrac{3}{2};3\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 45. [Phan Anh][2D1K1-3] Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 2x^3 + x^2 - mx + 2m - 1$ nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$ là

(A) $m \geq -\dfrac{1}{6}$. (B) $m \leq 8$. **C** $m \geq 8$. (D) $m \leq -\dfrac{1}{6}$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Có $y' = 6x^2 + 2x - m$.

YCBT $\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in [-1;1] \Leftrightarrow 6x^2 + 2x \leq m, \forall x \in [-1;1]$. (1)

Xét hàm số $g(x) = 6x^2 + 2x, \forall x \in [-1;1] \Rightarrow g'(x) = 12x + 2$.

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{6}$.

Bảng biến thiên:

x	-1		$-\frac{1}{6}$		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	4	$\searrow$	$-\frac{1}{6}$	$\nearrow$	8

$(1) \Leftrightarrow m \geq \max\limits_{[-1;1]} g(x) \Leftrightarrow m \geq 8$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. [Phan Anh][2D1B5-4] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $4f^2(x) - 9 = 0$ là:

(A) 4. **B** 6. (C) 3. (D) 2.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Ta có $4f^2(x) - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{3}{2} \\ f(x) = -\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = \dfrac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 2 điểm phân biệt và đường thẳng $y = -\dfrac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 4 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án B □

Câu 47. [Phan Anh][2H3K3-7] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{-1} = \dfrac{z-3}{4}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng $x + 3 = 0$?

A. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 - t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -6 - t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Cách 1: Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(1;-5;3)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_d = (2;-1;4)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với $(P)\colon x + 3 = 0$.

Suy ra mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M_0(1;-5;3)$ và có véc-tơ pháp tuyến là $[\vec{n}_P; \vec{u}_d] = (0;4;1)$.

$\Rightarrow (Q)\colon 4y + z + 17 = 0$.

Phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) là $\begin{cases} 4y + z + 17 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -3 \\ y = -6 - t \\ z = 7 + 4t. \end{cases}$

Cách 2: Ta có $M \in d \Rightarrow M(1+2t; -5-t; 3+4t)$. Gọi M' là hình chiếu của M trên $(P)\colon x+3 = 0$.

Suy ra $M'(-3; -5-t; 3+4t)$. Suy ra $d'\colon \begin{cases} x = -3 \\ y = -5 - t \\ z = 3 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -6 - t \\ z = 7 + 4t. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 48. [Phan Anh][1D2K5-2] Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ta lập các số tự nhiên có 6 chữ số, mà các chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số vừa lập, xác suất để chọn được một số có đúng 2 chữ số chẵn mà các chữ số chẵn xếp kề nhau là.

A. $\dfrac{1}{1008}$. B. $\dfrac{5}{42}$. C. $\dfrac{1}{2016}$. D. $\dfrac{5}{84}$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Ta có số phần tử của không gian mẫu là $n\left(\Omega\right) = \mathrm{A}_9^6 = 60480$.
Gọi A: "Số được chọn có đúng 2 chữ số chẵn mà các chữ số chẵn xếp kề nhau".
Chọn 2 chữ số chẵn có $\mathrm{C}_4^2 = 6$ cách.
Chọn 4 chữ số lẻ có $\mathrm{C}_5^4 = 5$ cách.
Số các chữ số có 6 chữ số, mà các chữ số đôi một khác nhau có đúng hai số chẵn xếp cạnh nhau là $n(A) = \mathrm{C}_5^4 \cdot \mathrm{C}_4^3 \cdot 5! \cdot 2! = 7200$.
Vậy xác suất cần tính là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{5}{42}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 49. [Phan Anh][2D2K5-3] Phươngtrình $\log_4^2 x - 2m\log_4 x - m + 2 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 = 64$ khi $m = m_0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $m_0 \in (2;3)$. (B) $m_0 \in (0;1)$. **C** $m_0 \in (1;2)$. (D) $m_0 \in (3;4)$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.
Điều kiện: $x > 0$.
Đặt $t = \log_4 x$. Khi đó phương trình đã cho có dạng $t^2 - 2mt - m + 2 = 0$.
Để phương trình có hai nghiệm thì $\Delta' = m^2 + m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$ $(*)$.
Với điều kiện $(*)$ ta có $t_1 + t_2 = \log_4 x_1 + \log_4 x_2 = \log_4(x_1x_2) = \log_4 64 = 3$.
Theo viét ta có $t_1 + t_2 = 2m \Rightarrow 2m = 3 \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$. Vậy $m_0 = \dfrac{3}{2} \in (1;2)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 50. [Phan Anh][2D3K2-4] Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^3 xf'(x)\cdot \mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = 8$ và $f(3) = \ln 3$.
Giá trị $I = \displaystyle\int_0^3 \mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

A $I = 1$. (B) $I = \dfrac{1}{2}$. (C) $I = \dfrac{-1}{2}$. (D) $I = -1$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.
Ta có $\displaystyle\int_0^3 xf'(x)\cdot \mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = 8 \Rightarrow \int_0^3 x \cdot \left[\mathrm{e}^{f(x)}\right]'\,\mathrm{d}x = 8.$ (1)

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \left[\mathrm{e}^{f(x)}\right]'\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^{f(x)}. \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow x\cdot \mathrm{e}^{f(x)}\Big|_0^3 - \displaystyle\int_0^3 \mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = 8 \Rightarrow 3\cdot \mathrm{e}^{\ln 3} - I = 8 \Rightarrow I = 1.$

Chọn đáp án (A) □

—— **HẾT** ——

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. A	3. B	4. A	5. A	6. B	7. A	8. C	9. B	10. B
11. A	12. D	13. A	14. C	15. D	16. B	17. D	18. D	19. C	20. D
21. B	22. B	23. C	24. D	25. C	26. A	27. A	28. C	29. D	30. C
31. B	32. D	33. A	34. A	35. D	36. B	37. C	38. A	39. B	40. D
41. C	42. A	43. C	44. B	45. C	46. B	47. D	48. B	49. C	50. A

10 ĐỀ THI THỬ SỐ 10-MAX8

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{1}{1-\cos x}$ là

(A) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
(B) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
(C) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
(D) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Điều kiện $1 - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Tam giác ABC có $a = 2\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 2$. Độ dài trung tuyến m_b bằng

(A) $\sqrt{3}$.
(B) 5.
(C) 3.
(D) 2.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến ta được

$$m_b^2 = \frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4} = \frac{2\left(\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 2^2\right) - \left(2\sqrt{3}\right)^2}{4} = 3 \Rightarrow m_b = \sqrt{3}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất một lần. Tính xác suất để xuất hiện mặt có số chấm chia hết cho 3.

(A) 1.
(B) $\dfrac{1}{3}$.
(C) 3.
(D) $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là $n(\Omega) = 6$.

Gọi biến cố A: "mặt có số chấm chia hết cho 3".

Khi đó $A = \{3; 6\}$ nên và $n(A) = 2$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Một hộp đựng 15 viên bi, trong đó có 7 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi (không kể thứ tự) ra khỏi hộp. Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất 1 viên bi màu đỏ.

(A) $\dfrac{1}{2}$.
(B) $\dfrac{418}{455}$.
(C) $\dfrac{1}{13}$.
(D) $\dfrac{12}{13}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^3 = 455$.

Gọi A là biến cố "trong 3 bi lấy ra có ít nhất một bi màu đỏ". Tính $n(A)$

Số cách chọn 3 bi trong đó không có bi màu đỏ nào là $\mathrm{C}_7^3 = 35$.

Vậy $n(A) = 455 - 35 = 420$.

Vậy xác suất cần tính là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{420}{455} = \dfrac{12}{13}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_n = \dfrac{2^{n-1}+1}{n}$. Tìm số hạng thứ 10 của dãy số đã cho.

A 51,2. **B** 51,3. **C** 51,1. **D** 102,3.

Lời giải.

Ta có $u_{10} = \dfrac{2^{10-1}+1}{10} = 51{,}3$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=13 \\ u_4-u_1=26 \end{cases}$. Tổng 8 số hạng đầu của cấp số nhân (u_n) là

A $S_8 = 1093$. **B** $S_8 = 3820$. **C** $S_8 = 9841$. **D** $S_8 = 3280$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=13 \\ u_4-u_1=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1\cdot q+u_1\cdot q^2=13 \\ u_1\cdot q^3-u_1=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2)=13 \\ u_1\cdot(q-1)(1+q+q^2)=26 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2)=13 \\ q=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2)=13 \\ q-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=1 \\ q=3. \end{cases}$

Vậy tổng $S_8 = \dfrac{u_1(1-q^8)}{1-q} = \dfrac{1(1-3^8)}{1-3} = 3280$.

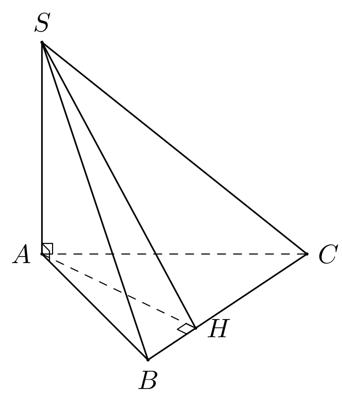
Chọn đáp án D □

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và H là hình chiếu vuông góc của S lên BC. Hãy chọn khẳng định đúng.

A $BC \perp SC$. **B** $BC \perp AH$. **C** $BC \perp AB$. **D** $BC \perp AC$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp AH$.



Chọn đáp án B □

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi AE, AF lần lượt là các đường cao của tam giác SAB và SAD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $SC \perp (AED)$. **B** $SC \perp (ACE)$. **C** $SC \perp (AFB)$. **D** $SC \perp (AEF)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE. \quad (1)$

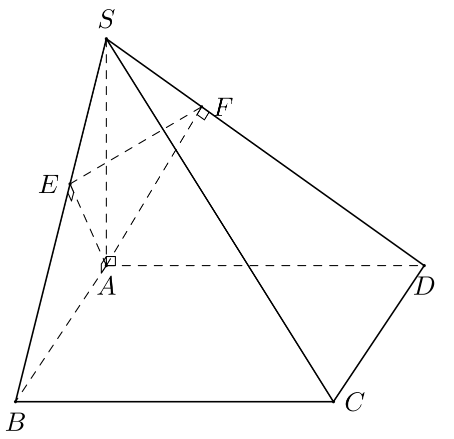
Mặt khác ta có $AE \perp SB. \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC. \quad (*)$

Chứng minh tương tự ta cũng có $AF \perp (SDC)$.

Từ đó $\Rightarrow AF \perp SC. \quad (**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ ta có $SC \perp (AEF)$.



Chọn đáp án D □

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$ Gọi α là góc tạo bởi giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC), khi đó α thỏa mãn hệ thức nào sau đây:

(A) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$. (B) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$. (C) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. (D) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

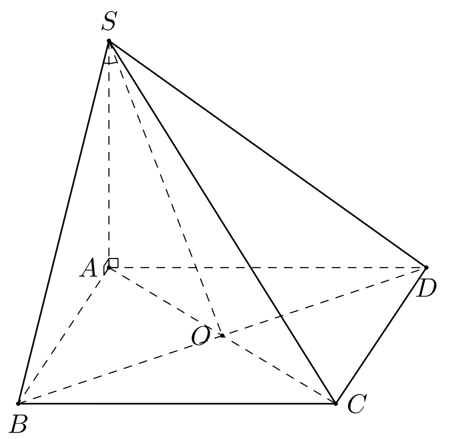
Lời giải.

Gọi O là tâm của đáy $ABCD$.

Ta có $BO \perp AC$ và $BO \perp SA$ nên SO là hình chiếu của SB trên (SAC). Do đó, $\alpha = \widehat{BSO}$.

Lại có $BO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2a$.

Suy ra $\sin\alpha = \dfrac{BO}{SB} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.



Chọn đáp án C □

Câu 10. Cho hàm số $y = \dfrac{x+5}{x+2}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

(B) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 5)$.

(D) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ta có $y' = \dfrac{-3}{(x+2)^2} < 0$, $\forall x \in \mathscr{D}$ suy ra hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có giá trị cực đại và cực tiểu lần lượt là y_1, y_2. Khi đó:

(A) $y_1 - y_2 = -4$. (B) $2y_1 - y_2 = 6$. (C) $2y_1 - y_2 = -6$. (D) $y_1 + y_2 = 4$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 1 & \Rightarrow y = -2 \\ x = -1 & \Rightarrow y = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

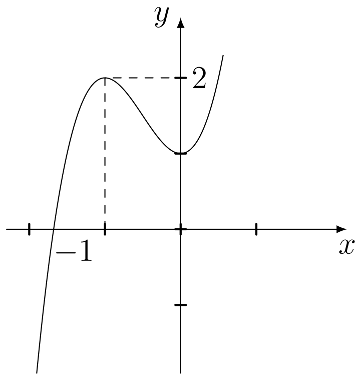
Từ đây dễ dàng suy ra $y_1 = 2$; $y_2 = -2$. Vậy $2y_1 - y_2 = 6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Đồ thị như hình vẽ là đồ thị của hàm số nào sau đây?

(A) $y = -x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 1$. (B) $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$.

(C) $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$. (D) $y = x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + 1$.



Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$ nên hệ số $a > 0$ nên loại đáp án $y = -x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 1$ và $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1; 2)$ nên $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+4}{\sqrt{x^2 - 4}}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

(A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Ta có $\lim\limits_{x \to 2^+} y = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+4}{\sqrt{x^2 - 4}} = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to (-2)^-} y = \lim\limits_{x \to (-2)^-} \dfrac{x+4}{\sqrt{x^2 - 4}} = +\infty$. Đồ thị (C) của hàm số đã cho nhận $x = \pm 2$ là tiệm cận đứng.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+4}{\sqrt{x^2 - 4}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \dfrac{4}{x}}{\sqrt{1 - \dfrac{4}{x^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1}} = 1 \Rightarrow y = 1$ là một tiệm cận ngang của (C), và $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+4}{\sqrt{x^2-4}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1-\dfrac{4}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1}} = -1 \Rightarrow y=-1$ là một tiệm cận ngang của (C).

Vậy có tất cả 4 đường tiệm cận gồm 2 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 là

A $y = 2x - 1$. **B** $y = -x + 2$. **C** $y = -3x + 3$. **D** $y = -3x + 4$.

Lời giải.

Gọi $M(1; y_0)$ là tiếp điểm.

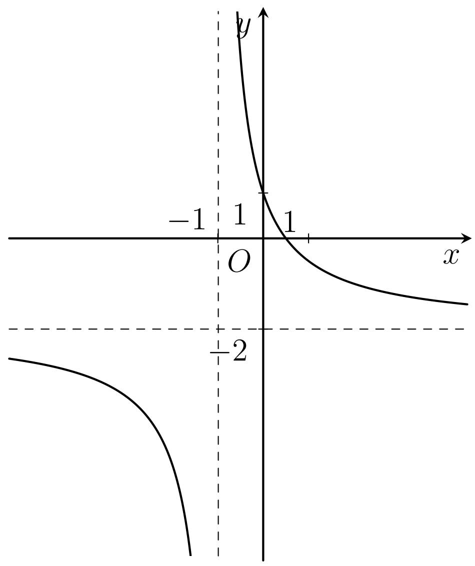
Vì $M(1; y_0) \in (C)$ nên $y_0 = 1$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow$ hệ số góc tiếp tuyến là $k = y'(1) = -3$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -3(x-1) + 1 \Leftrightarrow y = -3x + 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Tìm a, b để hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x+1}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



A $a = -1, b = -2$.

B $a = 1, b = -2$.

C $a = -2, b = 1$.

D $a = 2, b = 1$.

Lời giải.

Dễ thấy đồ thị có tiệm cận ngang $y = -2 \Rightarrow a = -2$.

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $A(0; 1)$ nên $b = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	5	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm m để phương trình $f(x) = 2 - 3m$ có bốn nghiệm phân biệt.

A. $m < -1$ hoặc $m > -\dfrac{1}{3}$.
B. $-1 < m < -\dfrac{1}{3}$.
C. $m = -\dfrac{1}{3}$.
D. $m \leqslant -1$.

Lời giải.

Số nghiệm của phương trình $f(x) = 2 - 3m$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 2 - 3m$.

Để phương trình $f(x) = 2 - 3m$ có bốn nghiệm phân biệt thì $3 < 2 - 3m < 5 \Leftrightarrow -1 < m < -\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Tìm m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4 - 5$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

A. $m = -1$.
B. $m \neq 1$.
C. $m = 1$.
D. $m \neq -1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$.

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ thì $f'(-1) = 0 \Rightarrow -4 + 4m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Với $m = 1$, ta có $y = x^4 - 2x^2 - 2 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

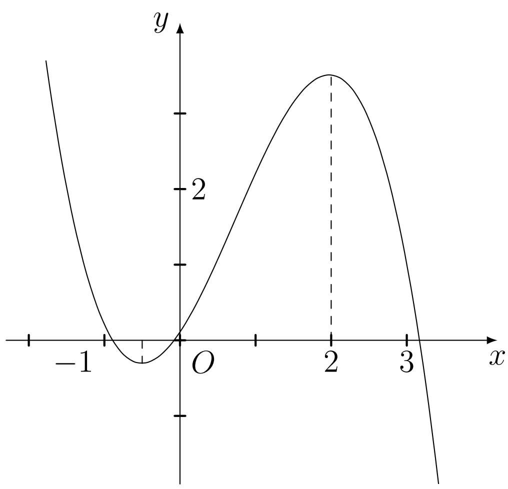
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	-2	↘	-3	↗	$+\infty$

Ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng.

A. $a < 0; b > 0; c > 0; d > 0$.
B. $a < 0; b < 0; c < 0; d > 0$.
C. $a < 0; b < 0; c > 0; d > 0$.
D. $a < 0; b > 0; c < 0; d > 0$.



Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$ nên $a < 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Mặt khác, $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có 2 nghiệm phân biệt trái dấu x_1 và x_2.

Mà $x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow \dfrac{b}{a} < 0 \Rightarrow b > 0$, $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{3a} < 0 \Rightarrow \dfrac{c}{a} < 0 \Rightarrow c > 0$.
Vậy $a < 0; b > 0; c > 0; d > 0$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x^2 - xy + 3 = 0$ và $2x + 3y \leqslant 14$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x^2y - xy^2 - 2x(x^2 - 1)$. Tính giá trị của $T = 2M - m$.

(A) 4. (B) 0. **(C) 12.** (D) 3.

Lời giải.
Ta có $y = \dfrac{x^2+3}{x}$ mà $2x + 3y \leqslant 14 \Rightarrow 2x + 3 \cdot \dfrac{x^2+3}{x} \leqslant 14 \Leftrightarrow 1 \leqslant x \leqslant \dfrac{9}{5}$ (vì $x > 0$).
Khi đó $P = 3x^2y - xy^2 - 2x(x^2 - 1) = \dfrac{5x^2 - 9}{x}$.
Xét $f(x) = \dfrac{5x^2 - 9}{x}, x \in \left[1; \dfrac{9}{5}\right]$.
$f'(x) = 5 + \dfrac{9}{x^2} > 0$, $\forall x \in \left[1; \dfrac{9}{5}\right]$. Do đó, hàm số đồng biến trên $\left[1; \dfrac{9}{5}\right]$.
Suy ra $M = f\left(\dfrac{9}{5}\right) = 4, m = f(1) = -4$. Vậy $2M - m = 12$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Tìm x biết $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{x+1} = 125^{2x}$.

(A) $x = 1$. (B) $x = 4$. **(C) $x = -\dfrac{1}{4}$.** (D) $x = -\dfrac{1}{8}$.

Lời giải.
Ta có $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{x+1} = 125^{2x} \Leftrightarrow \left(5^{-2}\right)^{x+1} = \left(5^3\right)^{2x} \Leftrightarrow 5^{-2x-2} = 5^{6x} \Leftrightarrow -2x - 2 = 6x \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{4}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Cho a là số thực dương khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng với mọi số thực dương x, y ?

(A) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$. (B) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x + \log_a y$.

(C) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a (x - y)$. (D) $\log_a \dfrac{x}{y} = \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$.

Lời giải.
Ta có công thức lô-ga-rít của một thương là $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.
Chọn đáp án (A) □

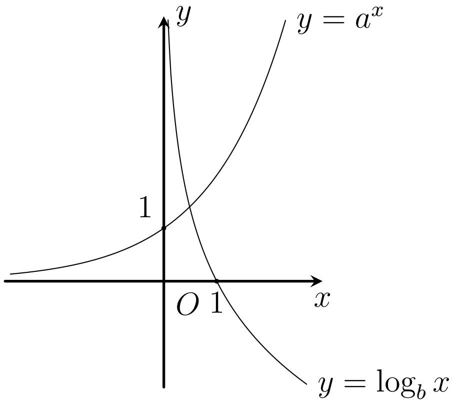
Câu 22. Rút gọn biểu thức $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b}$ với $b > 0$.

(A) $Q = b^2$. (B) $Q = b^{\frac{5}{9}}$. (C) $Q = b^{-\frac{4}{3}}$. **(D) $Q = b^{\frac{4}{3}}$.**

Lời giải.
Ta có $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b} = b^{\frac{5}{3}} : b^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{5}{3} - \frac{1}{3}} = b^{\frac{4}{3}}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 23.

Cho hai đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = \log_b x$ như hình vẽ. Nhận xét nào đúng?



(A) $a > 1,\ b > 1$.
(B) $a > 1,\ 0 < b < 1$.
(C) $0 < a < 1,\ 0 < b < 1$.
(D) $0 < a < 1,\ b > 1$.

Lời giải.

Nhìn vào đồ thị hàm số ta thấy $y = a^x$ đồng biến nên $a > 1$ và $y = \log_b x$ nghịch biến nên $0 < b < 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (1 - x^2)^{\sqrt{3}} + x^{-3}$.

(A) $\mathscr{D} = (-1; 1)$.
(B) $\mathscr{D} = (0; 1)$.
(C) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus [-1; 1]$.
(D) $\mathscr{D} = (-1; 1) \setminus \{0\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$. Vậy $\mathscr{D} = (-1; 1) \setminus \{0\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 - 5x + 4} > 4$, có tập nghiệm là $S = (a; b)$. Khẳng định nào sao đây đúng?

(A) $a + b = 10$.
(B) $a + b = 7$.
(C) $a + b = 6$.
(D) $a + b = 5$.

Lời giải.

Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 - 5x + 4} > 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 - 5x + 4} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 < -2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (2; 3)$ nên $a = 2$, $b = 3$ do đó $a + b = 5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Tính $x_1 \cdot x_2$ biết x_1, x_2 thỏa mãn $\log_x 2 - \log_{16} x = 0$.

(A) 1.
(B) -1.
(C) 0.
(D) -4.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$, $x \neq 1$.

Với điều kiện đó, ta có

$$\begin{aligned} \log_x 2 - \log_{16} x = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{4}\log_2 x = 0 \\ &\Leftrightarrow 4 - \log_2^2 x = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -2 \end{array}\right. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$$

Như vậy, phương trình $\log_x 2 - \log_{16} x = 0$ có hai nghiệm $x_1 = \dfrac{1}{4}$ và $x_2 = 4$.

Do đó $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{1}{4} \cdot 4 = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Kết quả tích phân $I = \displaystyle\int\limits_0^1 (2x+3)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ được viết dưới dạng $I = a\mathrm{e} + b$ với a, b là các số hữu tỉ. Tìm khẳng định đúng.

A $a^3 + b^3 = 28$. **B** $a + 2b = 1$. **C** $a - b = 2$. **D** $ab = 3$.

Lời giải.

- Cách 1: Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^1 (2x+3)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (2x+3)\,\mathrm{d}\mathrm{e}^x \\ &= \left[(2x+3)\mathrm{e}^x\right]\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ &= \left[(2x+3)\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x\right]\Big|_0^1 \\ &= 3\mathrm{e} - 1. \end{aligned}$$

  Do đó $a = 3$, $b = -1$ nên $a + 2b = 1$.

- Cách 2: Đặt $\begin{cases} u = 2x+3 \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x. \end{cases}$

  $\Rightarrow I = (2x+3)\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - 2\displaystyle\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = 5\mathrm{e} - 3 - 2\mathrm{e}^x\Big|_0^1 = 5\mathrm{e} - 3 - 2(\mathrm{e}-1) = 3\mathrm{e} - 1$.

  Suy ra Do đó $a = 3$, $b = -1$ nên $a + 2b = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x) = x \cdot f'(x) - 2x^3 - 3x^2$; $f(1) = 4$. Tính $f(2)$.

A 10. **B** 20. **C** 15. **D** 25.

Lời giải.

Xét biểu thức $-f(x) + x \cdot f'(x) = 2x^3 + 3x^2$. $(*)$

Chia hai vế của $(*)$ cho x^2, ta có

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \cdot f(x) + \frac{1}{x} \cdot f'(x) = 2x + 3 \\ &\Leftrightarrow \left[\frac{1}{x} \cdot f(x)\right]' = 2x + 3. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \displaystyle\int \left[\frac{1}{x}\cdot f(x)\right]' \mathrm{d}x = \int (2x+3)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = x^2+3x+C.$

Mà $f(1)=4 \Rightarrow 4 = 4 + C \Leftrightarrow C = 0.$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)}{x} = x^2+3x \Rightarrow f(x) = x^3+3x^2.$

Vậy $f(2) = 2^3+3\cdot 2^2 = 20.$

Phân tích

Biểu thức điều kiện $\Leftrightarrow -f(x)+x\cdot f'(x) = 2x^3+3x^2. \qquad (*)$

Khi đó $[u(x)\cdot f(x)]' = u'(x)\cdot f(x) + u(x)\cdot f'(x) \equiv -1\cdot f(x) + x\cdot f'(x).$

Với $u(x)\neq 0 \Rightarrow \dfrac{-1}{u'(x)} = \dfrac{x}{u(x)} \Rightarrow \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{-1}{x}.$

$\Rightarrow \ln|u(x)| = -\ln|x| = \ln\left|\dfrac{1}{x}\right| \Rightarrow u(x) = \dfrac{1}{x}.$

Nên ta có $\left[\dfrac{1}{x}\cdot f(x)\right]' = -\dfrac{1}{x^2}\cdot f(x) + \dfrac{1}{x}\cdot f'(x).$

Chọn đáp án B □

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, $f(1)=1$ và $f(2)=2$. Tính $I = \displaystyle\int_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x.$

A $I=1.$ **B** $I=-1.$ **C** $I=3.$ **D** $I=\dfrac{7}{2}.$

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\Big|_1^2 = f(2)-f(1) = 2-1 = 1.$

Chọn đáp án A □

Câu 30. Biết $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(x^2+6x+8)}\,\mathrm{d}x = a\ln 3 + b\ln 4 + c\ln 5 + d\ln 6$ $(a,b,c,d\in\mathbb{Z})$. Tính giá trị của biểu thức $T = 2a+3b-c-\dfrac{d}{2}.$

A $T=2.$ **B** $T=5.$ **C** $T=0.$ **D** $T=3.$

Lời giải.

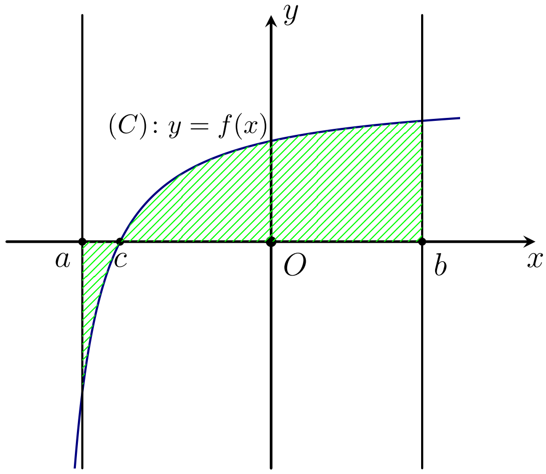
Ta có

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x}{(x^2+6x+8)}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{x}{(x+2)(x+4)}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_1^2 \left(\frac{2}{x+4}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x\\ &= [2\ln(x+4)-\ln(x+2)]\Big|_1^2\\ &= = 2\ln 6 - \ln 4 - 2\ln 5 + \ln 3.\end{aligned}$$

Từ đó có $a=1$, $b=-1$, $c=-2$, $d=2$ nên $T = 2+(-3)+2-1 = 0.$

Chọn đáp án C □

Câu 31. Diện tích của hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b\,(a < b)$ (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức



(A) $S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

B $S = -\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(C) $S = \left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

(D) $S = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

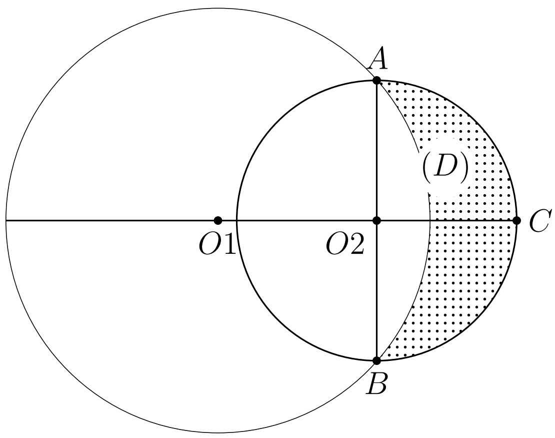
Lời giải.

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta có

$$S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c [0 - f(x)]\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b [f(x) - 0]\,\mathrm{d}x = -\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Cho hai đường tròn $(O_1; 5)$ và $(O_2; 3)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn $(O_2; 3)$. Gọi (D) là hình phẳng được giới hạn bởi hai đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần được gạch chéo như hình vẽ). Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



(A) $V = 36\pi$.

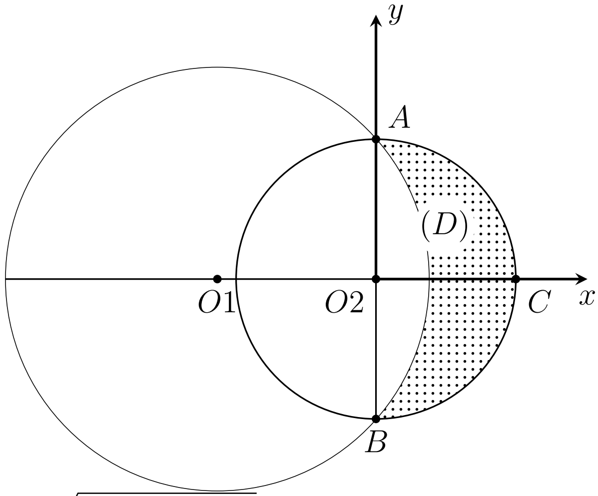
(B) $V = \dfrac{68\pi}{3}$.

(C) $V = \dfrac{14\pi}{3}$.

D $V = \dfrac{40\pi}{3}$.

Lời giải.

Chọn hệ tọa độ Oxy với $O_2 \equiv O$, $O_2C \equiv Ox$, $O_2A \equiv Oy$.
Cạnh $O_1O_2 = \sqrt{O_1A^2 - O_2A^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow (O_1)\colon (x+4)^2 + y^2 = 25$.
Phương trình đường tròn $(O_2)\colon x^2 + y^2 = 9$.



Kí hiệu (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{25 - (x+4)^2}$, trục Ox, $x = 0$, $x = 1$.
Kí hiệu (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{9 - x^2}$, trục Ox, $x = 0$, $x = 3$.
Khi đó thể tích V cần tính chính bằng thể tích V_2 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_2) xung quanh trục Ox trừ đi thể tích V_1 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_1) xung quanh trục Ox.
Ta có $V_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot 3^3 = 18\pi$.
Lại có $V_1 = \pi \int\limits_0^1 y^2\,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^1 \left[25 - (x+4)^2\right]\mathrm{d}x = \pi \left[25x - \frac{(x+4)^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{14\pi}{3}$.
Do đó $V = V_2 - V_1 = 18\pi - \frac{14\pi}{3} = \frac{40\pi}{3}$.
Chọn đáp án D □

Câu 33. Cho số phức $z = a + bi$, với a, b là hai số thực. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A $|z^2| = |z|^2$. **B** $z + \overline{z} = 2bi$. **C** $z \cdot \overline{z} = a^2 - b^2$. **D** $z - \overline{z} = 2a$.

Lời giải.

Ta có $z = a + bi \Rightarrow z^2 = a^2 + 2abi - b^2$.
Khi đó

$$\begin{aligned} |z^2| &= \sqrt{(a^2-b^2)^2 + (2ab)^2} \\ &= \sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2} \\ &= \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4} \\ &= \sqrt{(a^2+b^2)^2} \\ &= a^2 + b^2 \\ &= |z|^2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho hai số phức $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 2 - i$. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1 + z_1 \cdot z_2|$.

A $P = 85$. **B** $P = 5$. **C** $P = 50$. **D** $P = 10$.

Lời giải.

Ta có $z_1 \cdot z_2 = (3+i)(2-i) = 7 - i \Rightarrow z_1 + z_1 \cdot z_2 = 3 + i + 7 - i = 10$.
Suy ra $P = |z_1 + z_1 \cdot z_2| = 10$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Tìm các số phức z thỏa mãn điều kiện $(2+i)z = (3-2i)\overline{z} - 4(1-i)$.

A $z = 3 - i$. (B) $z = -3 - i$. (C) $z = 3 + i$. (D) $z = -3 + i$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi \Rightarrow \overline{z} = x - yi$ với $x;\ y \in \mathbb{R}$.

Ta có

$$\begin{aligned}
& (2+i)z = (3-2i)\overline{z} - 4(1-i) \\
\Leftrightarrow\ & (2+i)(x+yi) = (3-2i)(x-yi) - 4(1-i) \\
\Leftrightarrow\ & 2x - y + 2yi + xi = 3x - 2y - 3yi - 2xi - 4 + 4i \\
\Leftrightarrow\ & -x + y + (3x+5y)i = -4 + 4i \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} -x + y = -4 \\ 3x + 5y = 4 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \\
\Rightarrow\ & z = 3 - i.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Gọi A và B lần lượt là điểm biểu diễn hai nghiệm của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Độ dài đoạn thẳng AB là:

(A) 4. (B) $\sqrt{20}$. **C** 2. (D) $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $z^2 - 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2 + i \\ z = 2 - i \end{array}\right. \Rightarrow A(2;1), B(2;-1)$. Vậy $AB = 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Tìm tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện số phức $w = z(1+i) + (2-i)$ là một số thuần ảo.

(A) Đường tròn $x^2 + y^2 = 2$. **B** Đường thẳng $y = x + 2$.

(C) Đường thẳng $y = x$. (D) Đường parabol $2x = y^2$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có

$$\begin{aligned}
& w = z(1+i) + (2-i) \\
\Leftrightarrow\ & w = (x+yi)(1+i) + (2-i) \\
\Leftrightarrow\ & w = (x+2-y) + (x+y-1)iw = z(1+i) + (2-i).
\end{aligned}$$

Khi đó w là một số thuần ảo khi và chỉ khi $x + 2 - y = 0 \Leftrightarrow y = x + 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Hình nón có bán kính đáy là r, chiều cao là h, đường sinh là l thì có diện tích xung quanh là

A $S = \pi rl$. (B) $S = \pi r^2$. (C) $S = \pi rh$. (D) $S = \pi hl$.

Lời giải.

Ta có $S = \pi rl$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Cho khối nón có thể tích V. Khi tăng bán kính đường tròn đáy lên 2 lần thì được khối nón mới có thể tích bằng

(A) $\dfrac{4V}{3}$. (B) $2V$. (C) $\dfrac{2V}{3}$. **D** $4V$.

Lời giải.

Ta có thể tích khối nón ban đầu là $V = \dfrac{1}{3}\pi hr^2$.

Tăng bán kính đáy lên 2 lần thì thể tích khối nón mới là $V_m = \dfrac{1}{3}\pi h(2r)^2 = 4\left(\dfrac{1}{3}\pi hr^2\right) = 4V$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Khối trụ tròn xoay có thể tích bằng 96π và bán kính đáy bằng 4. Chiều cao của khối trụ là

(A) 24. **B** 6. (C) 18. (D) 72.

Lời giải.

Ta có $V_{KT} = \pi hr^2 = \pi \cdot h \cdot 4^2 = 96\pi \Rightarrow h = 6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Hình tứ diện đều có tổng số mặt và đỉnh là

A 8. (B) 6. (C) 10. (D) 14.

Lời giải.

Hình tứ diện có 4 mặt và 4 đỉnh nên có tổng số mặt và đỉnh là 8.

Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Cho khối chóp $S.ABC$ là thể tích bằng a^3, tam giác ABC đều cạnh a. Độ dài chiều cao của khối chóp $S.ABC$ là

(A) $\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$. (B) $2a\sqrt{3}$. **C** $4\sqrt{3}a$. (D) $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Độ dài chiều cao của khối chóp là $h = \dfrac{3V_{S.ABC}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{3a^3}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}} = 4a\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD. Thể tích khối đa diện $AMNDB$ là

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}$. (B) $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$. (D) $\dfrac{a^3}{2}$.

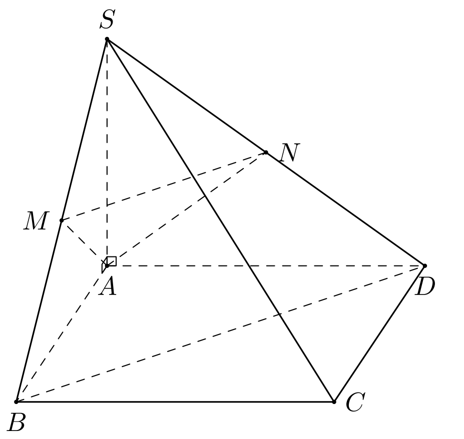
Lời giải.

Ta có $V_{S.ABD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} a^2 \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Theo công thức tỉ số thể tích ta có $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABD}} = \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SD} = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow V_{S.AMN} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

Mà $V_{AMNDB} = V_{S.ABD} - V_{S.AMN} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$.



Chọn đáp án C □

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là

A $2x - y - 1 = 0$. **B** $-y + 2z - 3 = 0$. **C** $2x - y + 1 = 0$. **D** $y + 2z - 5 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = 2(-2;1;0)$.

Vậy phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC có dạng

$$-2(x-0) + 1(y-1) = 0 \Leftrightarrow -2x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 1 = 0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 45. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;2)$ và đi qua $A(5;-1;4)$ có phương trình:

A $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = \sqrt{24}$. **B** $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = \sqrt{24}$.

C $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 24$. **D** $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 24$.

Lời giải.

Tâm $I(1;-3;2)$.

Bán kính $R = IA = \sqrt{16+4+4} = \sqrt{24}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 24$.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(1;-3;-5)$ trên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

A $(0;-3;0)$. **B** $(0;-3;-5)$. **C** $(0;3;5)$. **D** $(1;-3;0)$.

Lời giải.

Cho điểm $M(x_M;y_M;z_M)$. Khi đó

- Hình chiếu vuông góc H của M trên mặt phẳng Oxy là $H(x_M;y_M;0)$.
- Hình chiếu vuông góc H của M trên mặt phẳng Oxz là $H(x_M;0;z_M)$.
- Hình chiếu vuông góc H của M trên mặt phẳng Oyz là $H(0;y_M;z_M)$.

Do đó hình chiếu của $M(1;-3;-5)$ trên mặt phẳng (Oyz) là $M(0;-3;-5)$.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm A, B nằm trên mặt cầu có phương trình $(x-4)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=9$. Biết rằng AB song song với OI, trong đó O là gốc tọa độ và I là tâm mặt cầu. Viết phương trình mặt phẳng trung trực AB.

A $2x-y-z-12=0$. **B** $2x+y+z-4=0$.

C $2x-y-z-6=0$. **D** $2x+y+z+4=0$.

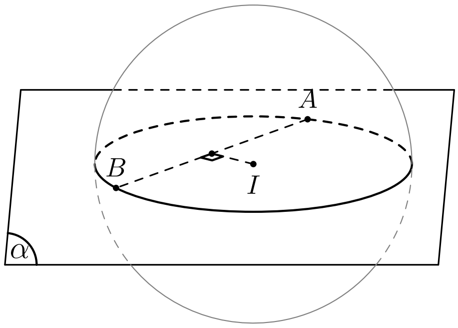
Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của AB.

Ta có

- Mặt cầu có tâm $I(4;-2;-2)$, bán kính $R=3$.
- $\begin{cases} AB \parallel OI \\ AB \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp OI$, $\overrightarrow{OI}=(4;-2;-2)=2(2;-1;-1)$.
  $\Rightarrow (\alpha)$ có dạng $2x-y-z+D=0 \Rightarrow$ loại $2x+y+z-4=0$ và $2x+y+z+4=0$.
- $I \in (\alpha) \Rightarrow D=-12$.

Vậy $\alpha\colon 2x-y-z-12=0$.



Chọn đáp án A ☐

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z-6=0$ và $(Q)\colon x+2y-2z+3=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A 1. **B** 3. **C** 2. **D** 9.

Lời giải.

Dễ thấy $(P) \parallel (Q)$.

Chọn $M(0;0;-3) \in (P)$.

Khi đó $\mathrm{d}((P);(Q))=\mathrm{d}(M;(Q))=\dfrac{|-2\cdot(-3)+3|}{3}=3$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho mặt phẳng $(P)\colon 2y-z+3=0$ và điểm $A(2;0;0)$. Mặt phẳng (α) đi qua A, vuông góc với (P), cách gốc tọa độ O một khoảng bằng $\dfrac{4}{3}$ và cắt các tia Oy, Oz lần lượt tại các điểm B, C khác O. Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng

A 8. **B** 10. **C** $\dfrac{8}{3}$. **D** $\dfrac{10}{3}$.

Lời giải.

Giả sử $B(0;b;0)$ và $C(0;0;c)$, với b, $c>0$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (α) là $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Vì $(\alpha)\perp(P)$ nên $\dfrac{2}{b}-\dfrac{1}{c}=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{c}=2\cdot\dfrac{1}{b}$.

Mặt khác $\mathrm{d}\left(O,(\alpha)\right)=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{b}\right)^2+\left(\dfrac{1}{c}\right)^2}}=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow\dfrac{5}{b^2}=\dfrac{5}{16}\Leftrightarrow b^2=16\Leftrightarrow b=4\Rightarrow c=2$.

Vậy $V_{O.ABC}=\dfrac{1}{6}\cdot OA\cdot OB\cdot OC=\dfrac{8}{3}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 50. Cho tham số $m\in\mathbb{R}$, mặt phẳng $(P)\colon(m^2-1)x-2mz-2m+2=0$ luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định bán kính r.

A $r=1$. **B** $r=2$. **C** $r=4$. **D** $r=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu cần tìm, ta có

$$\begin{aligned}d_{(I;(P))}=r &\Leftrightarrow \frac{|(m^2-1)a-2mc-2m+2|}{\sqrt{(m^2-1)^2+(-2m)^2}}=r\\ &\Leftrightarrow \frac{|am^2-2m(c+1)-a+2|}{\sqrt{(m^2+1)^2}}=r\\ &\Leftrightarrow |am^2-2m(c+1)-a+2|=rm^2+r.\end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số, để phương trình trên không phụ thuộc vào m ta có $\begin{cases}a=r\\ -2(c+1)=0\\ -a+2=r\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ c=-1\\ r=1.\end{cases}$

Vậy $r=1$.

Chọn đáp án A ☐

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. A	3. B	4. D	5. B	6. D	7. B	8. D	9. C	10. A
11. B	12. C	13. D	14. D	15. C	16. B	17. C	18. A	19. C	20. C
21. A	22. D	23. B	24. D	25. D	26. A	27. B	28. B	29. A	30. C
31. B	32. D	33. A	34. D	35. A	36. C	37. B	38. A	39. D	40. B
41. A	42. C	43. C	44. C	45. D	46. B	47. A	48. B	49. C	50. A

11 ĐỀ THI THỬ SỐ 11-MAX8

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm

A. $x = -5$. B. $x = 2$. C. $x = 3$. D. $x = 1$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Đồ thị hàm số $y = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm phân biệt?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Lời giải.

Ta có $y = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Do đó đồ thị cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Hàm số nào sau đây là hàm số mũ?

A. $y = \log_2 x$. B. $y = 2^x$. C. $y = x^2$. D. $y = x^{-2}$.

Lời giải.

Theo định nghĩa sách giáo khoa, ta có $y = a^x$ với $a > 0, a \neq 1$ là hàm số mũ.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Số nghiệm của phương trình $2^{x^2-x} = 1$ là

(A) 0. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

$$2^{x^2-x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2-6) = \log_3(x-2)+1$ là

(A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 6 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -\sqrt{6} \\ x > \sqrt{6} \end{array}\right. \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > \sqrt{6}.$

$$\log_3(x^2-6) = \log_3(x-2)+1 \Leftrightarrow \log_3(x^2-6) = \log_3 3(x-2) \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Do $x > \sqrt{6}$ nên phương trình có một nghiệm $x = 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Giả sử $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \ln\sqrt{\frac{a}{b}}$ với a, $b \in \mathbb{N}^*$ và a, $b < 10$. Tính $M = a + b^2$.

(A) $M = 28$. (B) $M = 14$. (C) $M = 106$. (D) $M = 8$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+1|\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 3 = \ln\sqrt{\frac{5}{3}}.$

Suy ra $a = 5$ và $b = 3$. Vậy $M = 5 + 3^2 = 14$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $V = \displaystyle\int_1^2 (x^2+2)\,\mathrm{d}x$. (B) $V = \displaystyle\int_1^2 (x^2+2)^2\,\mathrm{d}x$.

(C) $V = \pi\displaystyle\int_1^2 (x^2+2)^2\,\mathrm{d}x$. (D) $V = \pi\displaystyle\int_1^2 (x^2+2)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $V = \pi \int\limits_1^2 (x^2+2)^2 \,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Cho hai số phức $z_1 = 4 - 3i$ và $z_2 = 7 + 3i$. Tìm số phức $z = z_1 - z_2$.

(A) $z = 3 + 6i$. (B) $z = 11$. (C) $z = -1 - 10i$. **D** $z = -3 - 6i$.

Lời giải.

Ta có $z = z_1 - z_2 = (4 - 3i) - (7 + 3i) = -3 - 6i$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 6 = 0$. Tính $P = z_1 + z_2$.

(A) -1. **B** 1. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Theo định lí Vi-et, ta có $P = z_1 + z_2 = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = a$ và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

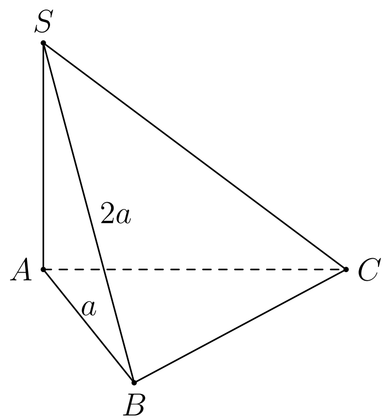
(A) 30°. (B) 90°. **C** 60°. (D) 45°.

Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC)$ tại A nên AB là hình chiếu của SB lên mặt phẳng đáy.

Suy ra góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy là $\widehat{SBA}$.

Tam giác SAB vuông tại A nên $\cos\widehat{SBA} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.



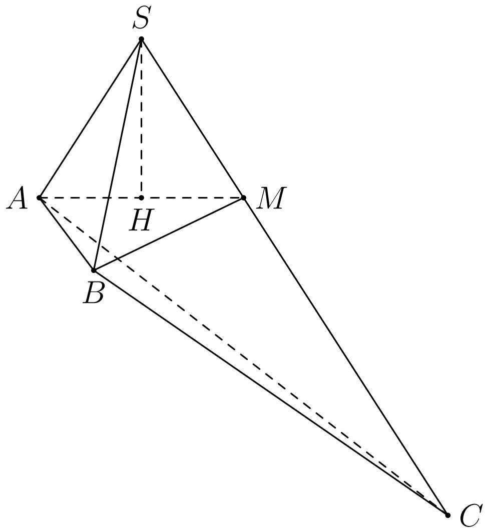
Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{CSB} = 60^\circ, \widehat{ASC} = 90^\circ, SA = SB = a; SC = 3a$. Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{18}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **D** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

Gọi M là điểm trên đoạn SC sao cho $SC = 3SM \Rightarrow AB = BM = a, AM = a\sqrt{2} \Rightarrow \triangle ABM$ vuông tại B.
Trung điểm H của AM là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABM \Rightarrow SH \perp (ABM)$.
$\Rightarrow V_{S.ABM} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.
Mà $\dfrac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SC} = \dfrac{1}{3}$, suy ra $V_{S.ABC} = 3V_{S.ABM} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$.



Chọn đáp án D □

Câu 13. Cho hình trụ (T) có chiều cao h, độ dài đường sinh l, bán kính đáy r. Ký hiệu $V_{(T)}$ là thể tích khối trụ (T). Công thức nào sau đây là đúng?

(A) $V_{(T)} = \dfrac{1}{3}\pi rh$. **(B)** $V_{(T)} = \pi r^2 h$. (C) $V_{(N)} = \pi rl^2$. (D) $V_{(N)} = 2\pi r^2 h$.

Lời giải.

Ta có $V_{(T)} = S_d \cdot h = \pi r^2 h$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; 2; 0)$, $\vec{b} = (2; -1; 1)$, $\vec{c} = (1; -1; 0)$. Phát biểu nào sau đây **sai**?

(A) $|\vec{a}| = \sqrt{5}$. (B) $\vec{a} \cdot \vec{c} = -1$. (C) $\vec{a} \perp \vec{b}$. **(D)** $\vec{c} \perp \vec{b}$.

Lời giải.

Ta có: $\vec{c} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 3 \neq 0 \Rightarrow \vec{c}, \vec{b}$ không vuông góc nhau.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 2)$, $B(2; -1; 3)$. Viết phương trình đường thẳng AB.

(A) $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{1}$. **(B)** $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-2}{1}$.

(C) $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+3}{1}$. (D) $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+2}{1}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -2; 1)$.
Đường thẳng AB đi qua điểm $A(1; 1; 2)$ và nhận véc-tơ $\overrightarrow{AB} = (1; -2; 1)$ làm véc-tơ chỉ phương.
Vậy phương trình của AB là $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-2}{1}$.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 4 = 0$ có bán kính R là

(A) $R = \sqrt{53}$. (B) $R = 4\sqrt{2}$. **(C)** $R = \sqrt{10}$. (D) $R = 3\sqrt{7}$.

Lời giải.

$(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+4=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=10$.
Vậy bán kính mặt cầu (S) là $R=\sqrt{10}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Phương trình $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ có tập nghiệm là

(A) $\left\{x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}$.
B $\left\{x=\pm\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}$.
(C) $\left\{x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}$.
(D) $\left\{x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Ta có $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\dfrac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Một hộp có 5 viên bi xanh, 6 viên bi đỏ và 7 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi trong hộp, tính xác suất để 5 viên bi được chọn có đủ màu và số bi đỏ bằng số bi vàng.

(A) $\dfrac{313}{408}$.
B $\dfrac{95}{408}$.
(C) $\dfrac{5}{102}$.
(D) $\dfrac{25}{136}$.

Lời giải.

$n(\Omega)=\mathrm{C}_{18}^5=8568$.
Gọi A là biến cố “5 viên bi được chọn có đủ màu và số bi đỏ bằng số bi vàng ”. Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố A là
TH1: Chọn 1 bi đỏ, 1 bi vàng và 3 bi xanh nên có $\mathrm{C}_6^1\cdot\mathrm{C}_7^1\cdot\mathrm{C}_5^3$ cách.
TH2: Chọn 2 bi đỏ, 2 bi vàng và 1 bi xanh nên có $\mathrm{C}_6^2\cdot\mathrm{C}_7^2\cdot\mathrm{C}_5^1$ cách.
Suy ra số phần tử của biến cố A là $n(A)=\mathrm{C}_6^1\cdot\mathrm{C}_7^1\cdot\mathrm{C}_5^3+\mathrm{C}_6^2\cdot\mathrm{C}_7^2\cdot\mathrm{C}_5^1=1995$.
Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{1995}{8568}=\dfrac{95}{408}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Kết quả giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2+3x+1}{2-3x^2}$ là

A $\dfrac{2}{3}$.
(B) -1.
(C) 0.
(D) $-\infty$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+3x+1}{2-3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(-2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\dfrac{2}{x^2}-3\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{2}{x^2}-3}=\frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Tính tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

A 8.
(B) 5.
(C) 4.
(D) 6.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=2x-\dfrac{2}{x^2}$.
Suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-\dfrac{2}{x^2}=0\Leftrightarrow\dfrac{2x^3-2}{x^2}=0\Leftrightarrow x=1\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.
Ta có $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{17}{4}$; $f(1)=3$; $f(2)=5$.

Do đó $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} f(x) = 3$ và $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} f(x) = 5$.

Khi đó tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số là 8.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1 ‖ $-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$

Chọn mệnh đề đúng về đồ thị hàm số.

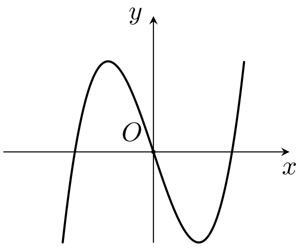
(A) Đồ thị có đúng một tiệm cận ngang.
(B) Đồ thị có đúng 2 tiệm cận ngang.
(C) Đồ thị có đúng một tiệm cận đứng.
(D) Đồ thị không có tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

Lời giải.

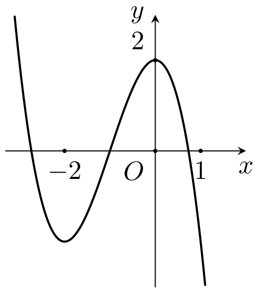
$\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-} y = -1$, $\lim\limits_{x\to0^+} y = -\infty \Rightarrow$ đồ thị có đúng một tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (C) □

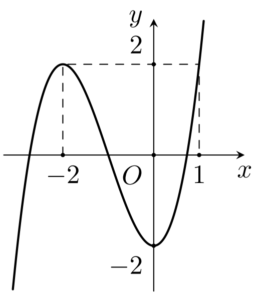
Câu 22. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C). Hình vẽ nào sao đây có thể là đồ thị (C)

(A) 

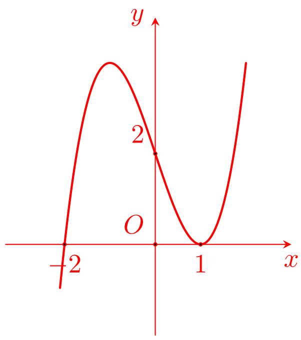
.

(B) 

.

(C) 

.

(D) 

.

Lời giải.

Ta có $y(0) = 2$ nên đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ $y = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-1 \ \Vert \ -\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x)+2=0$ là

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Ta có $f(x)=-2$. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $f(x)=-2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(0;1) \\ x=b\in(1;+\infty). \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Cho các số thực dương a,b,c và $b\neq 1$, $c\neq 1$ thỏa mãn $\log_a b=2, \log_a c=3$. Giá trị của biểu thức $P=\log_a\left(\dfrac{b^2}{c^3}\right)$ bằng

A $\dfrac{4}{9}$. **B** 13. **C** -5. **D** 36.

Lời giải.

$P=\log_a\left(\dfrac{b^2}{c^3}\right)=2\log_a b-3\log_a c=2\cdot 2-3\cdot 3=-5$.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}}>3^{-x}$ là

A $S=(-2;-1)$. **B** $S=(0;2)$. **C** $S=(2;+\infty)$. **D** $S=(0;+\infty)$.

Lời giải.

$$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}}>3^{-x}\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}}>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}\Leftrightarrow\sqrt{x+2}<x\Leftrightarrow\begin{cases}x+2\geqslant 0\\ x\geqslant 0\\ x+2<x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2-x-2>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 0\\ \left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x>2.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(2;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng theo thể thức lãi kép, với lãi suất $1,85\%$ trên một quý. Hỏi sau tối thiểu bao nhiêu quý, người đó nhận được ít nhất 72 triệu đồng (cả vốn ban đầu và lãi), nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền và lãi suất không thay đổi?

A 20 quý. **B** 19 quý. **C** 14 quý. **D** 15 quý.

Lời giải.

Theo công thức tính lãi kép ngân hàng ta có: $S = A(1+r)^n$.
Biết $A = 50$ triệu đồng, $r = 1,85\%$.
Theo yêu cầu bài toán: $S = 50\,(1+1,85\%)^n \geqslant 72 \Rightarrow (1+1,85\%)^n \geqslant \dfrac{72}{50}$.
$\Rightarrow n \geqslant \log_{1+1,85\%} \dfrac{72}{50} \Rightarrow n \geqslant 19,89$.
Để nhận được ít nhất 72 triệu đồng thì tối thiểu phải gửi 20 quý.
Chọn đáp án A □

Câu 27. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x + 1}}$.

A $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\ln x + 1} + C$.

B $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2\sqrt{\ln x + 1}} + C$.

C $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{\ln x + 1} + C$.

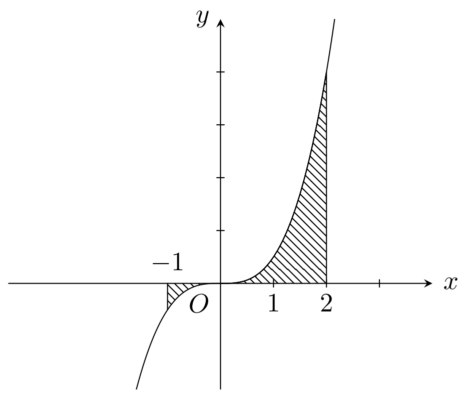
D $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\sqrt{\ln x + 1}} + C$.

Lời giải.

$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x + 1}}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{\sqrt{\ln x + 1}}\mathrm{d}\,(\ln x + 1) = 2\sqrt{\ln x + 1} + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$ (như hình vẽ bên dưới). Đặt $a = \displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$, $b = \displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$, mệnh đề nào sau đây đúng?



A $S = b - a$.

B $S = b + a$.

C $S = -b + a$.

D $S = -b - a$.

Lời giải.

Ta có $S = \displaystyle\int_{-1}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = -a + b$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 4 = 0$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Tính $T = OM + ON$ với O là gốc tọa độ.

A $T = \sqrt{2}$.

B $T = 2$.

C $T = 8$.

D 4.

Lời giải.

Ta có $z^2+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=-2i \\ z_2=2i. \end{array}\right.$

Suy ra $M(0;-2)$; $N(0;2)$ nên $T=OM+ON=\sqrt{(-2)^2}+\sqrt{2^2}=4$.

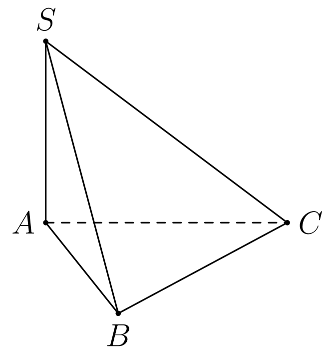
Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $m=0$, độ dài cạnh $AB=BC=a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A $V=\dfrac{a^3}{6}$. **B** $V=\dfrac{a^3}{3}$. **C** $V=\dfrac{a^3}{2}$. **D** $V=a^3$.

Lời giải.

Ta có $V=\dfrac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot SA=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}a^2\cdot 2a=\dfrac{a^3}{3}$.

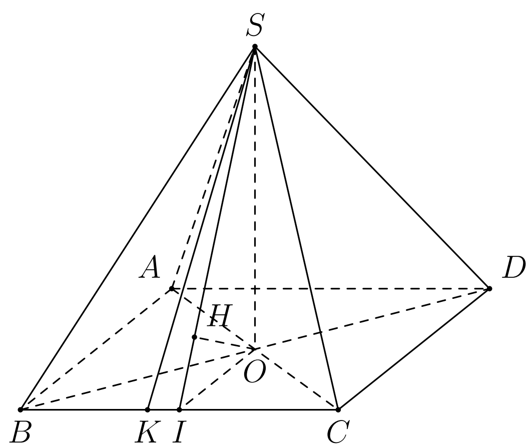


Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau và bằng $2a$, đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2a, AD=a$. Gọi K là điểm thuộc BC sao cho $3\overrightarrow{BK}+2\overrightarrow{CK}=\vec{0}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SK.

A $\dfrac{\sqrt{135}a}{15}$. **B** $\dfrac{2\sqrt{165}a}{15}$. **C** $\dfrac{\sqrt{165}a}{15}$. **D** $\dfrac{2\sqrt{135}a}{15}$.

Lời giải.



Gọi $O=AC\cap BD$ suy ra $SO\perp(ABCD)$ do đó $OA=OB=OC=OD$.

Ta có $\left\{\begin{array}{l} AD \parallel (SBC) \\ SK\subset(SBC) \end{array}\right. \Rightarrow \mathrm{d}(AD,SK)=\mathrm{d}(AD,(SBC))=\mathrm{d}(A,(SBC))=2\mathrm{d}(O,(SBC))$.

Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow OI\perp BC$ mà $SO\perp BC\Rightarrow BC\perp(SOI)$.

Trong (SOI) kẻ $OH\perp SI\Rightarrow OH\perp(SBC)\Rightarrow \mathrm{d}(O,(SBC))=OH$.

Ta có: $OI=\dfrac{1}{2}AB=a$, $SI=\sqrt{SB^2-BI^2}=\sqrt{4a^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$, $SO=\sqrt{SI^2-OI^2}=$

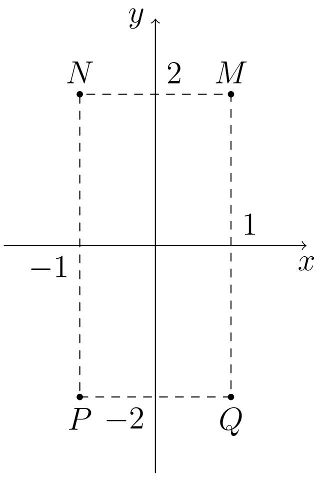
$\dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.

Xét tam giác vuông SOI có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OI^2} + \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{11a^2} = \dfrac{15}{11a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{165}}{15}$.

Vậy $\mathrm{d}(AD, SK) = 2OH = \dfrac{2\sqrt{165}a}{15}$.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Giả sử M, N, P, Q được cho ở hình vẽ bên là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2, z_3, z_4 trên mặt phẳng tọa độ.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Điểm N là điểm biểu diễn số phức $z_2 = 2 - i$.

B. Điểm Q là điểm biểu diễn số phức $z_4 = -1 + 2i$.

C. Điểm P là điểm biểu diễn số phức $z_3 = -1 - 2i$.

D. Điểm M là điểm biểu diễn số phức $z_1 = 2 + i$.

Lời giải.

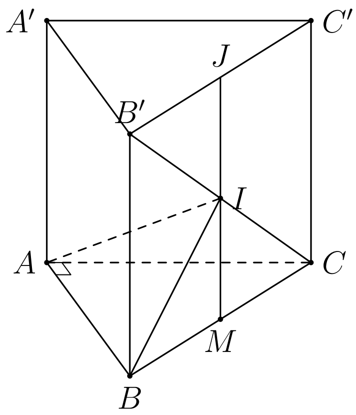
M, N, P, Q được cho ở hình vẽ bên là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2, z_3, z_4 nên $z_1 = 1 + 2i$; $z_2 = -1 + 2i$; $z_3 = -1 - 2i$; $z_4 = 1 - 2i$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = 2a\sqrt{3}$. Đường chéo BC' tạo với mặt phẳng $(AA'C'C)$ một góc bằng 60°. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho. Bán kính của mặt cầu (S) bằng

A. $\dfrac{a}{2}$. B. a. C. $3a$. D. $2a$.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases} BA \perp AC \\ BA \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BA \perp (AA'C'C)$.

Suy ra góc giữa BC' và mặt phẳng $(AA'C'C)$ là góc $\widehat{BC'A} = 60°$.

Gọi M là trung điểm BC, I là trung điểm BC'. Khi đó, IM là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên ta có $\begin{cases} IA = IB = IC \\ IB' = IC' = IA'. \end{cases}$

Lại có $IB = IC'$. Vậy $IA = IB = IC = IB' = IC' = IA'$. Do đó, I là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$, có bán kính mặt cầu $R = \dfrac{1}{2} \cdot BC' = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{AB}{\sin 60°} = \dfrac{4a}{2} = 2a$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với $A(1;-2;4)$; $B(3;6;2)$. Phương trình mặt phẳng (α) là

A $x + 4y - z - 7 = 0$. **B** $x + 4y - z + 7 = 0$.

C $x + 4y + z - 7 = 0$. **D** $x - 4y - z - 7 = 0$.

Lời giải.

Gọi $\vec{n}$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow \vec{n} = \overrightarrow{AB} = (2;8;-2)$

Mặt phẳng (α) đi qua điểm trung điểm $I(2;2;3)$ của AB và có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$ nên có phương trình: $x + 4y - z - 7 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;0;-2)$ và mặt phẳng (P) có phương trình: $x + 2y - 2z + 4 = 0$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

A $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$. **B** $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 3$.

C $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 3$. **D** $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên bán kính mặt cầu là

$R = \mathrm{d}(I,(P)) = \dfrac{|1 + 0 - 2(-2) + 4|}{\sqrt{1+4+4}} = 3$.

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

(A) $-2; -4; -8; -16; -32$. (B) $-2; 2; 5; 8; 11$.
(C) $1; -3; -5; -7; -9$. (D) $-2; 1; 4; 7; 10$.

Lời giải.

Dãy số $-2; 1; 4; 7; 10$ là một cấp số cộng với công sai bằng 3.

Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh lần lượt là $AB = 6$; $AC = 8$; $BC = 10$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

(A) $R = 10$. (B) $R = 2$. (C) $R = 5$. (D) $R = \sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta thấy: $AB^2 + AC^2 = BC^2$ nên tam giác ABC vuông tại A.

suy ra tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trung điểm của BC và bán kính $R = \dfrac{BC}{2} = 5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Cho hàm số $y = \dfrac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$. Số phần tử của S bằng

(A) 1. (B) 5. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

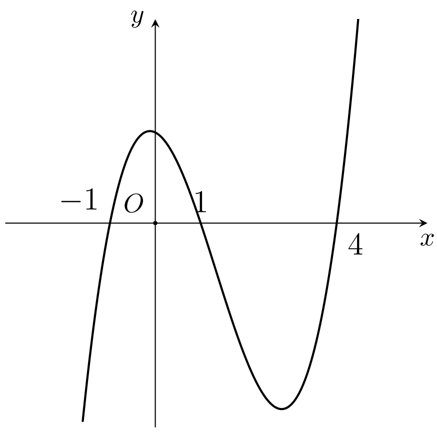
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{m}{2}\right\}$

$y' = \dfrac{m^2-4}{(2x+m)^2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ \dfrac{-m}{2} \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{-m}{2} \leqslant 0 \\ \dfrac{-m}{2} \geqslant 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ \left[\begin{array}{l} m \geqslant 0 \\ m \leqslant -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leqslant m < 2.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Cho bốn mệnh đề sau 1) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

2) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

3) $f(1) > f(2) > f(4)$.

4) Trên đoạn $[-1; 4]$, giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ là $f(1)$.

Số mệnh đề đúng trong bốn mệnh đề trên là

A 1. **B** 4. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

+) Hàm số có ba điểm cực trị nên mệnh đề 1) sai.

+) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 1)$ và $(4; +\infty)$ nên mệnh đề 2) sai.

+) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 4)$ nên $f(1) > f(2) > f(4)$ suy ra mệnh đề 3) đúng.

+) Trên đoạn $[-1; 4]$, giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ là $f(1)$ suy ra mệnh đề 4) đúng.

Vậy có tất cả 2 mệnh đề đúng.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho điểm A có hoành độ bằng -1 nằm trên đồ thị hàm số (C): $y = 2x^3 - 3x^2 + m$, $(m \in \mathbb{R})$. Biết tiếp tuyến của (C) tại A cắt đồ thị (C) tại điểm thứ hai là B. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để $\triangle ABO$ vuông tại O?

A 2. **B** 1. **C** 3. **D** 0.

Lời giải.

Điểm $A(-1; m - 5)$ và $y'(-1) = 12$ suy ra phương trình tiếp tuyến là

$y = f'(x_A)(x - x_A) + y_A \Leftrightarrow y = 12(x + 1) + m - 5$.

Xét $2x^3 - 3x^2 + m = 12(x + 1) + m - 5 \Rightarrow x = 1 \vee x = \dfrac{7}{2} \Rightarrow B\left(\dfrac{7}{2}; m + 49\right)$.

$ycbt \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{7}{2} + (m - 5)(m + 49) = 0 \Leftrightarrow m^2 + 44m - \dfrac{483}{2} = 0$.

Do $ac < 0$ nên phương trình trên luôn có 2 nghiệm trái dấu

Suy ra có 2 giá trị thực của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\dfrac{\log_5(mx)}{\log_5(x+1)} = 2$ có nghiệm duy nhất?

A 1. **B** 3. **C** Vô số. **D** 2.

Lời giải.

$$\frac{\log_5(mx)}{\log_5(x+1)} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 > 0 \\ x + 1 \neq 1 \\ mx = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \\ m = \dfrac{(x+1)^2}{x}. \end{cases}$$

Xét hàm số $y = \dfrac{(x+1)^2}{x}$, với $x \in (-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

Có $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (do $x \in (-1; +\infty) \setminus \{0\}$).
Bảng biến thiên

x	-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra để hàm số có nghiệm duy nhất thì $\left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m < 0. \end{array}\right.$

Vậy có vô số giá trị nguyên để phương trình có nghiệm duy nhất.
Chọn đáp án C □

Câu 42. Thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$ là $V = \pi(a + be)$. Tính $a + b$.

A 3. B -1. C 0. D 2.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ta có $V = \pi \displaystyle\int_1^e \ln^2 x \, \mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{2}{x} \ln x \, \mathrm{d}x \\ v = x \end{cases}$

$$V = \pi \left[x \ln^2 x \Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^e x \cdot \frac{2}{x} \cdot \ln x \, \mathrm{d}x \right] = \pi \left(\mathrm{e} - 2 \int_1^e \ln x \, \mathrm{d}x \right)$$

Đặt $\begin{cases} u_1 = \ln x \\ \mathrm{d}v_1 = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u_1 = \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x \\ v_1 = x \end{cases}$

$$V = \pi \left[\mathrm{e} - 2 \left(x \ln x \Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^e \mathrm{d}x \right) \right] = \pi \left[\mathrm{e} - 2(\mathrm{e} - \mathrm{e} + 1) \right] = \pi(\mathrm{e} - 2)$$

Vậy $a = -2; b = 1$ nên $a + b = -1$.
Chọn đáp án B □

Câu 43. Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2 - 16z + 17 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz_o$?

A $M_1\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$. B $M_2\left(-\dfrac{1}{2}; 2\right)$. C $M_3\left(-\dfrac{1}{4}; 1\right)$. D $M_4\left(\dfrac{1}{4}; 1\right)$.

Lời giải.

Xét phương trình $4z^2 - 16z + 17 = 0$ có $\Delta' = 64 - 4 \cdot 17 = -4 = (2i)^2$.
Phương trình có hai nghiệm $z_1 = \dfrac{8-2i}{4} = 2 - \dfrac{1}{2}i$, $z_2 = \dfrac{8+2i}{4} = 2 + \dfrac{1}{2}i$.
Do z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương nên $z_0 = 2 + \dfrac{1}{2}i$.

Ta có $w = iz_o = -\dfrac{1}{2} + 2i$.

Vậy điểm biểu diễn $w = iz_o$ là $M_2\left(-\dfrac{1}{2}; 2\right)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Biết rằng một hình đa diện H có 6 mặt là 6 tam giác đều. Hãy chỉ ra mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Có tồn tại một hình H có đúng 4 mặt đối xứng.

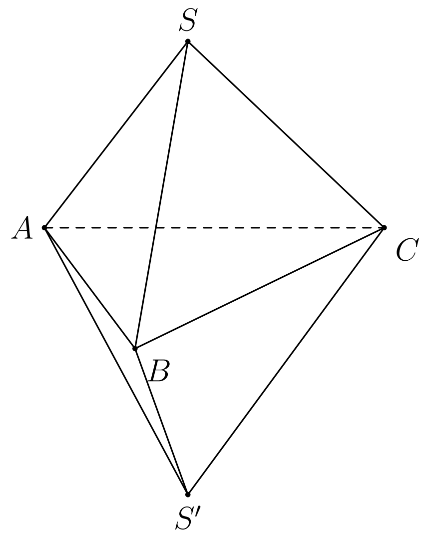
B. Không tồn tại hình H nào có đúng 5 đỉnh.

C. Có tồn tại một hình H có hai tâm đối xứng phân biệt.

D. Không tồn tại hình H nào có mặt phẳng đối xứng.

Lời giải.

Luôn tồn tại hình đa diện H có 4 mặt phẳng đối xứng và có đúng 5 đỉnh, H không có tâm đối xứng.

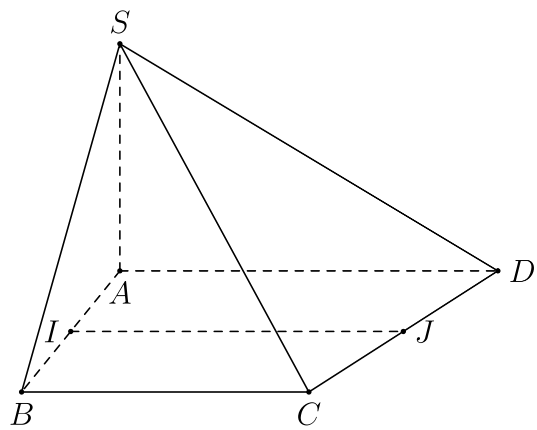


Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Cho hình chóp $SABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có độ dài cạnh $AB = a$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng IJ và SD.

A. $\dfrac{a}{2}$. B. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\dfrac{a}{3}$. D. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



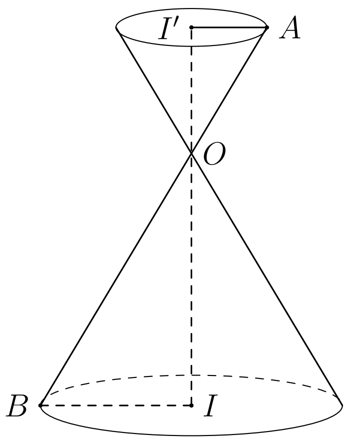
$$\text{Ta có } AD \parallel (IJ) \Rightarrow IJ \parallel (SAD) \Rightarrow \mathrm{d}(IJ, SD) = \mathrm{d}(IJ, (SAD)) = \mathrm{d}(I, (SAD)) = IA = \frac{a}{2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Cho một đồng hồ cát như hình bên dưới (gồm 2 hình nón chung đỉnh ghép lại), trong đó đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc 60° như hình bên. Biết rằng chiều cao của đồng hồ là 30 cm và tổng thể tích của đồng hồ là 1000π cm^3. Hỏi nếu cho đầy lượng cát vào phần trên thì khi chảy hết xuống dưới tỉ lệ thể tích lượng cát chiếm chỗ và thể tích phần phía dưới là bao nhiêu?

(A) $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$. **B** $\dfrac{1}{8}$. (C) $\dfrac{1}{64}$. (D) $\dfrac{1}{27}$.

Lời giải.



+ Gọi h, h', r, r' $\left(h \geqslant \dfrac{30}{2} = 15\right)$ lần lượt là chiều cao, bán kính của hình nón phía dưới và phía trên của đồng hồ.

+ Ta có $r = \dfrac{h}{\tan 60^\circ} = \dfrac{h}{\sqrt{3}}; h' = 30 - h; r' = \dfrac{h'}{\sqrt{3}} = \dfrac{30-h}{\sqrt{3}}$.

+ Khi đó thể tích của đồng hồ

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi r' h' = \frac{1}{3}\pi\left(\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 h + \left(\frac{30-h}{\sqrt{3}}\right)^2 (30-h)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h^3 + 27000 - 2700h + 90h^2 - h^3}{3}\right) = \frac{1}{9}\pi(90h^2 - 2700h + 27000) = 1000\pi$$

$$\Rightarrow h^2 - 30h + 200 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h = 20 \\ h = 10\,(< 15) \end{array}\right. \Leftrightarrow h = 20 \Rightarrow h' = 10.$$

+ Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\frac{1}{3}\pi(r')^2 h'}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \left(\dfrac{h'}{h}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$ do $\dfrac{r'}{r} = \dfrac{h'}{h}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(1;2;1), B(3;-1;5)$. Phương trình mặt phẳng (P) vuông góc với AB và hợp với các trục tọa độ một tứ diện có thể tích bằng $\dfrac{3}{2}$ là

(A) $2x - 3y + 4z - 3 = 0$. (B) $2x - 3y + 4z + 3 = 0$.

(C) $2x - 3y + 4z \pm 12 = 0$. **D** $2x - 3y + 4z \pm 6 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;-3;4) \Rightarrow (P)\colon 2x - 3y + 4z + m = 0$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (P) với trục Ox, Oy, Oz; suy ra $M\left(-\dfrac{m}{2};0;0\right), N\left(0;\dfrac{m}{3};0\right), P\left(0;0;-\dfrac{m}{4}\right)$.

Ta có thể tích tứ diện $V_{O.MNP} = \dfrac{1}{6}\left|\dfrac{m^3}{24}\right| = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow m = \pm 6$.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y+2z+5=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$. Đường thẳng Δ nằm trên mặt phẳng (P), đồng thời vuông góc và cắt đường thẳng d có phương trình là

A. $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+1}{2}$.

B. $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z+1}{2}$.

C. $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-1}{-2}$.

D. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-1}{2}$.

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1;2;2)$.

Véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (2;2;1)$.

Ta có $[\vec{u}, \vec{n}] = (2;-3;2)$ là véc-tơ chỉ phương của Δ.

Mặt khác, do Δ cắt d nên Δ đi qua giao điểm M của d và mặt phẳng (P).

Tọa độ giao điểm M của d và (P) là nghiệm hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+2t \\ z = t \\ x+2y+2z+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ x=-1 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow M(-1;-1;-1).$$

Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z+1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Trong kỳ thi THPT Quốc Gia, mỗi phòng thi gồm 24 thí sinh được sắp xếp vào 24 bàn khác nhau. Bạn Nam là một thí sinh dự thi, bạn đăng ký 4 môn thi và cả 4 lần thi đều thi tại một phòng duy nhất. Giả sử giám thị xếp thí sinh vào vị trí một cách ngẫu nhiên, tính xác xuất để trong 4 lần thi thì bạn Nam có đúng 2 lần ngồi cùng vào một vị trí.

A. $\dfrac{253}{1152}$. B. $\dfrac{899}{1152}$. C. $\dfrac{4}{75}$. D. $\dfrac{26}{35}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là số cách ngẫu nhiên chỗ ngồi trong 4 lần thi của Nam.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 24^4$.

Gọi A là biến cố "4 lần thi thì bạn Nam có đúng 2 lần ngồi cùng vào một vị trí ". Ta mô tả không gian của biến cố A như sau

Trong 4 lần có 2 lần trùng vị trí, có C_4^2 cách.

Giả sử lần thứ nhất có 24 cách chọn chỗ ngồi, lần thứ hai trùng với lần thứ nhất có 1 cách chọn chỗ ngồi. Hai lần còn lại thứ ba và thứ tư không trùng với các lần trước và cũng không trùng nhau nên có $23 \cdot 22$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $n(A) = \mathrm{C}_4^2 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{\mathrm{C}_4^2 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{24^4} = \dfrac{253}{1152}$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) - 2018f(x) = 2018 \cdot x^{2017} \cdot \mathrm{e}^{2018x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2018$. Giá trị $f(1)$ bằng

A. $f(1) = 2017\mathrm{e}^{2018}$. B. $f(1) = 2019\mathrm{e}^{-2018}$. C. $f(1) = 2018\mathrm{e}^{2018}$. D. $f(1) = 2019\mathrm{e}^{2018}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) - 2018f(x) = 2018 \cdot x^{2017} \cdot \mathrm{e}^{2018x} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x) - 2018f(x)}{\mathrm{e}^{2018x}} = 2018 \cdot x^{2017}$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int\limits_0^1 \dfrac{f'(x) - 2018f(x)}{\mathrm{e}^{2018x}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 2018 \cdot x^{2017}\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow I = \int\limits_0^1 f'(x) \cdot \mathrm{e}^{-2018x}\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 2018f(x)\mathrm{e}^{-2018x}\,\mathrm{d}x = 1.$

Xét $J = \displaystyle\int\limits_0^1 2018f(x)\mathrm{e}^{-2018x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = 2018\mathrm{e}^{-2018x}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = -\mathrm{e}^{-2018x} \end{cases} \Rightarrow J = -f(x)\mathrm{e}^{-2018x}\Big|_0^1 + \displaystyle\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{e}^{-2018x}\,\mathrm{d}x.$

Vậy $I = f(1)\mathrm{e}^{-2018} - 2018 = 1 \Rightarrow f(1) = 2019\mathrm{e}^{2018}$.

Chọn đáp án D □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. B	3. C	4. B	5. D	6. D	7. B	8. C	9. D	10. B
11. C	12. D	13. B	14. D	15. B	16. C	17. B	18. B	19. A	20. A
21. C	22. D	23. C	24. C	25. C	26. A	27. C	28. A	29. D	30. B
31. B	32. C	33. D	34. A	35. A	36. D	37. C	38. C	39. C	40. A
41. C	42. B	43. B	44. A	45. A	46. B	47. D	48. B	49. A	50. D

12 ĐỀ THI THỬ SỐ 12-MAX8

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(2; +\infty)$. **B** $(-\infty; +\infty)$. **C** $(-\infty; 1)$. **D** $(0; +\infty)$.

Lời giải.

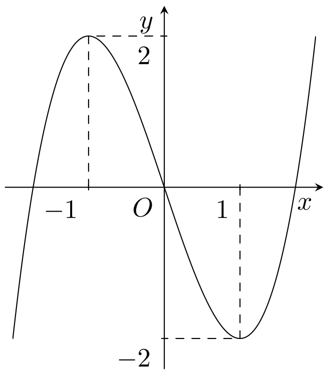
Dựa vào BBT ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

A $x = 1$. **B** $x = -1$. **C** $y = -2$. **D** $y = 2$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đã cho đạt cực đại tại điểm $x = -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

A $x = -1$. **B** $y = -1$. **C** $x = 1$. **D** $y = 2$.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}} = \dfrac{2+0}{1-0} = 2$.

Do đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ là $y = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x+2)^{\frac{\sqrt{2}}{3}}$ là

A $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. **B** $\mathscr{D} = (-2; +\infty)$. **C** $\mathscr{D} = (0; +\infty)$. **D** $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$.
Vậy TXĐ của hàm số là $\mathscr{D}=(-2;+\infty)$.
Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho các số thực dương a, b, c với $c\neq 1$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\log_c ab=\log_c b+\log_c a$.
B. $\log_c \dfrac{a}{b}=\dfrac{\log_c a}{\log_c b}$.
C. $\log_c \sqrt{b}=\dfrac{1}{2}\log_c b$.
D. $\log_c \dfrac{a}{b}=\log_c a-\log_c b$.

Lời giải.
Ta có $\log_c \dfrac{a}{b}=\log_c a-\log_c b$ nên phương án "$\log_c \dfrac{a}{b}=\dfrac{\log_c a}{\log_c b}$" sai.
Chọn đáp án B □

Câu 6. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\log_3(4-x)$ là

A. $\mathscr{D}=(4;+\infty)$.
B. $\mathscr{D}=[4;+\infty)$.
C. $\mathscr{D}=(-\infty;4)$.
D. $\mathscr{D}=(-\infty;4]$.

Lời giải.
Điều kiện: $4-x>0 \Leftrightarrow x<4$.
Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(-\infty;4)$.
Chọn đáp án C □

Câu 7. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $c\in[a;b]$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
B. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
C. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_c^c f(x)\,\mathrm{d}x$.
D. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.
Ta có $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
Chọn đáp án D □

Câu 8. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{4}{\cos^2 x}$ là

A. $\dfrac{4x}{\sin^2 x}$.
B. $4\tan x$.
C. $4+\tan x$.
D. $4x+\dfrac{4}{3}\tan^3 x$.

Lời giải.
Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \dfrac{4}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=4\tan x+C$.
Chọn đáp án B □

Câu 9. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2+3x+x^3$ là hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $F(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{3x^2}{2}+2x+C$.
B. $F(x)=\dfrac{x^4}{3}+3x^2+2x+C$.
C. $F(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^2}{2}+2x+C$.
D. $F(x)=3x^2+3x+C$.

Lời giải.
Ta có $F(x)=\displaystyle\int(2+3x+x^3)\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{3x^2}{2}+2x+C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

A $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.
(B) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.
(C) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.
(D) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\mathrm{d}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Cho số phức $z = 5 + 8i$. Số phức liên hợp của z là

(A) $\overline{z} = 5 + 8i$. (B) $\overline{z} = -5 - 8i$. (C) $\overline{z} = -5 + 8i$. **D** $\overline{z} = 5 - 8i$.

Lời giải.

Ta có $z = x + yi \Rightarrow \overline{z} = x - yi$. Suy ra số phức liên hợp của $z = 5 + 8i$ là $\overline{z} = 5 - 8i$

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Phần ảo của số phức $w = 3z_1 - 2z_2$ là

(A) 11. **B** 12. (C) 1. (D) $12i$.

Lời giải.

Ta có $w = 3z_1 - 2z_2 = 3(1 + 2i) - 2(2 - 3i) = -1 + 12i$.

Vậy phần ảo của số phức w là 12.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Cho số phức $z = 1 + 3i$. Điểm biểu diễn số phức $\frac{1}{z}$ trong mặt phẳng Oxy là

A $M\left(\frac{1}{10}; -\frac{3}{10}\right)$. (B) $M\left(\frac{1}{10}; \frac{3}{10}\right)$. (C) $M\left(-\frac{1}{10}; -\frac{3}{10}\right)$. (D) $M\left(\frac{1}{10}; \frac{3}{10}\right)$.

Lời giải.

Ta có $z = 1 + 3i \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{1 + 3i} = \frac{1 - 3i}{10} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i \Rightarrow M\left(\frac{1}{10}; -\frac{3}{10}\right)$.

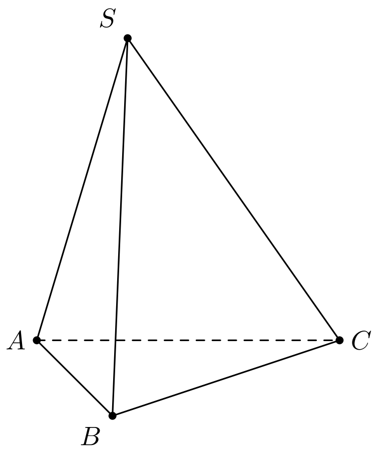
Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Cho một khối chóp có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B. Nếu giữ nguyên chiều cao h, còn diện tích đáy tăng lên 3 lần thì ta được một khối chóp mới có thể tích V là

A $V = Bh$. (B) $V = \frac{1}{6}Bh$. (C) $V = \frac{1}{2}Bh$. (D) $V = \frac{1}{3}Bh$.

Lời giải.

Ta có $B' = 3B$ nên thể tích khối chóp mới là $V = \frac{1}{3}B'h = Bh$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Trong các hình đa diện sau, hình nào **không** nội tiếp được trong một mặt cầu?

(A) Hình tứ diện.
(B) Hình hộp chữ nhật.
(C) Hình chóp ngũ giác đều.
(D) Hình chóp có đáy là hình bình hành.

Lời giải.

Điều kiện cần và đủ để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là mặt đáy có đường tròn ngoại tiếp. Vì hình bình hành không nội tiếp được trong một đường tròn nên hình chóp có đáy là hình bình hành không nội tiếp được trong một mặt cầu.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho véc-tơ $\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm A.

(A) $A(4;-2;3)$.
(B) $A(-2;3;4)$.
(C) $A(-2;4;3)$.
(D) $A(4;2;-3)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Suy ra tọa độ điểm A là $A(4;-2;3)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-8x+4y+2z-4=0$ có bán kính R là

(A) $R=\sqrt{5}$.
(B) $R=25$.
(C) $R=2$.
(D) $R=5$.

Lời giải.

Bán kính mặt cầu là $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{4^2+(-2)^2+(-1)^2-(-4)}=5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Phương nào sau đây vô nghiệm?

(A) $\tan x + 2018 = 0$.
(B) $\cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0$.
(C) $5\sin x - 2 = 0$.
(D) $\sqrt{3}\sin x - 2 = 0$.

Lời giải.

Ta có phương trình $\sin x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leqslant m \leqslant 1$.

Mà $\sqrt{3}\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{2}{\sqrt{3}} > 1$. Vậy phương trình vô nghệm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Cho A là một biến cố liên quan phép thử T. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

(A) $\mathrm{P}(A)$ là số lớn hơn 0.
(B) $\mathrm{P}(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right)$.
(C) $\mathrm{P}(A) = 0 \Leftrightarrow A = \Omega$.
(D) $\mathrm{P}(A)$ là số nhỏ hơn 1.

Lời giải.

$\mathrm{P}(A)$ là số lớn hơn 0 sai vì $0 \leqslant \mathrm{P}(A) \leqslant 1$.

$\mathrm{P}(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right)$ là mệnh đề đúng.

$\mathrm{P}(A)$ là số nhỏ hơn 1 sai vì $0 \leqslant \mathrm{P}(A) \leqslant 1$.

$\mathrm{P}(A) = 0 \Leftrightarrow A = \Omega$ sai vì $P(\Omega) = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Trong các dãy số sau dãy số nào là cấp số cộng?

A $u_n = 3n^2 + 5$. **B** $u_n = 5n - 3$. **C** $u_n = 3^n$. **D** $u_n = \dfrac{2n+1}{n-2}$.

Lời giải.

Ta có $u_n = 5n - 3 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 5(n+1) - 3 - 5n + 3 = 5$.

Vậy u_n là cấp số cộng có công sai $d = 5$.

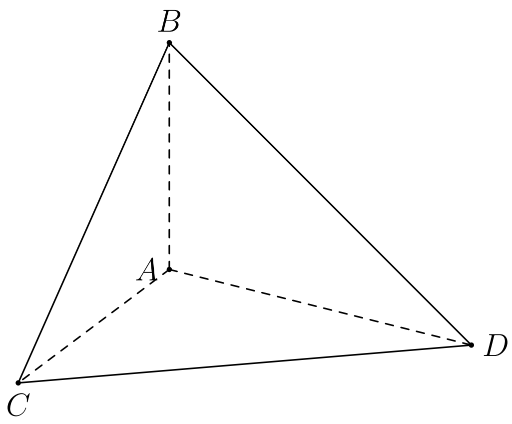
Nhận xét: Dãy số $u_n = an + b \quad (a,\, b \in \mathbb{R})$ là một cấp số cộng.

Chọn đáp án B □

Câu 21. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB,\ AC,\ AD$ đôi một vuông góc với nhau biết $AB = AC = AD = 1$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A 45°. **B** 60°. **C** 30°. **D** 90°.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ACD) \Rightarrow AB \perp CD \Rightarrow (AB; CD) = 90^\circ$.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 5 + \dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

A $\min\limits_{(0;+\infty)} y = 2$. **B** $\min\limits_{(0;+\infty)} y = -4$. **C** $\min\limits_{(0;+\infty)} y = -3$. **D** $\min\limits_{(0;+\infty)} y = -5$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x - 5 + \dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in (0; +\infty) \\ x = -1 \notin (0; +\infty). \end{array}\right.$

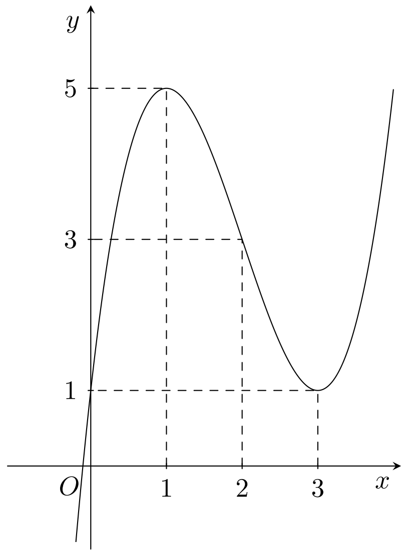
Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT ta được $\min\limits_{(0;+\infty)} y = -3$ tại $x = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên dưới.
Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = 2m - 1$ cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 2.



A $1 < m < 2$.
B $1 \leqslant m < 2$.
C $1 \leqslant m \leqslant 2$.
D $1 < m < 3$.

Lời giải.
Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y = 2m - 1$ cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 2 khi và chỉ khi $1 < 2m - 1 < 3 \Leftrightarrow 1 < m < 2$.
Chọn đáp án A □

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{mx^2}{2} + 2x + 2019$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A 3. **B** 4. **C** 5. **D** 6.

Lời giải.
Ta có $y' = x^2 - mx + 2$.
Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow y' \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta = m^2 - 8 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2\sqrt{2} \leqslant m \leqslant 2\sqrt{2} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.
Vậy có 5 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 25. Khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ đến trục tung bằng

A 1. **B** 2. **C** 4. **D** 0.

Lời giải.
Ta có $y' = 3x^2 - 6x$
$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Điểm cực tiểu của đồ thị là $(2;-2)$. Do đó khoảng cách cần tìm là 2.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $2\log_4(x-3)+\log_4(x-5)^2=0$ là

A. 8. B. $8+\sqrt{2}$. C. $8-\sqrt{2}$. D. $4+\sqrt{2}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x-3>0 \\ x-5\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x\neq 5. \end{cases}$

$$\begin{aligned} 2\log_4(x-3)+\log_4(x-5)^2=0 &\Leftrightarrow 2\log_4\left[(x-3)\left(|x-5|\right)\right]=0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)\left(|x-5|\right)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-3)(x-5)=1 \text{ khi } x>5 \\ (x-3)(5-x)=1 \text{ khi } 3<x<5. \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-8x+15=1 \text{ khi } x>5 \\ -x^2+8x-15=1 \text{ khi } 3<x<5 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-8x+15=1 \text{ khi } x>5 \\ -x^2+8x-15=1 \text{ khi } 3<x<5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4+\sqrt{2} \\ x=4. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình là $8+\sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Giải bất phương trình $\log_5(x+2)+\log_5(x-2)<\log_5(4x+1)$ ta được tập nghiệm là

A. $S=(-5;2)$. B. $S=(-2;5)$. C. $S=(2;5)$. D. $S=[2;5]$.

Lời giải.

Điều kiện: $x>2$.

$\log_5(x+2)+\log_5(x-2)<\log_5(4x+1) \Leftrightarrow x^2-4<4x+1 \Leftrightarrow x^2-4x-5<0 \Leftrightarrow -1<x<5$.

Kết hợp điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là $2<x<5$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(2;5)$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_3(3x+1)$.

A. $y'=\dfrac{3}{3x+1}$. B. $y'=\dfrac{1}{3x+1}$. C. $y'=\dfrac{3}{(3x+1)\ln 3}$. D. $y'=\dfrac{1}{(3x+1)\ln 3}$.

Lời giải.

Ta có $y=\log_3(3x+1) \Rightarrow y'=\dfrac{3}{(3x+1)\ln 3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Biết rằng $\displaystyle\int_0^b 6\,\mathrm{d}x=6$ và $\displaystyle\int_0^a x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=a$. Khi đó biểu thức $P=a^3+b^2+3a^2+2a$ có giá trị là

A. $P=5$. B. $P=4$. C. $P=7$. D. $P=3$.

Lời giải.

\+ Ta có $\displaystyle\int_0^b 6\,\mathrm{d}x=6 \Rightarrow b=1$.

+ Tính $\displaystyle\int\limits_0^a xe^x\,\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x. \end{cases}$

Khi đó $\displaystyle\int\limits_0^a xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x\Big|_0^a - \int\limits_0^a \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^a + 1 = a \Rightarrow a = 1.$

Vậy $P = a^3 + b^2 + 3a^2 + 2a = 7$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Xác định tập hợp các điểm M trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+i| = |z-i|$.

(A) Trục Oy. (B) Trục Ox. (C) $y = x$. (D) $y = -x$.

Lời giải.

Gọi $M(x,y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$ trong mặt phẳng phức $(x,\, y \in \mathbb{R})$.

Theo đề bài ta có

$$|z+i| = |z-i| \Leftrightarrow |x+(y+1)i| = |x+(y-1)i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2} \Leftrightarrow y = 0.$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng $y = 0$ hay trục Ox.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Thể tích V hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a là

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. (C) $V = \dfrac{a^3}{6}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

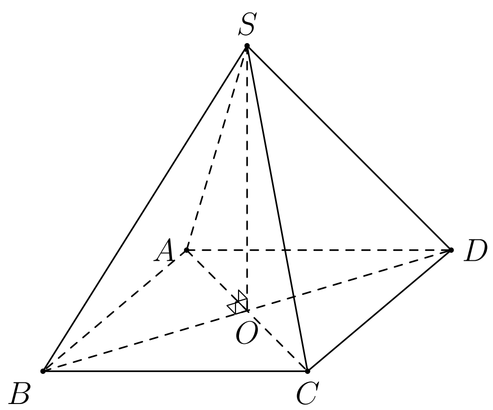
Lời giải.

Ta có

•$AO = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

•$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

•$V = \dfrac{1}{3}\cdot SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.



Chọn đáp án (A) □

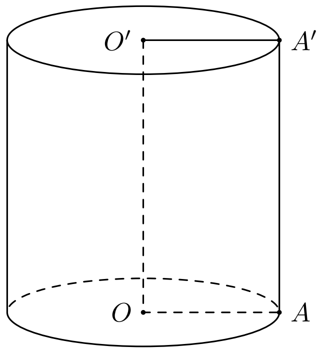
Câu 32. Một cái nồi nấu nước người ta làm dạng hình trụ, chiều cao của nồi là 60 cm, diện tích đáy 900π cm^2. Hỏi người ta cần miếng kim loại hình chữ nhật có kích thước là bao nhiêu để làm thân nồi đó? (bỏ qua kích thước các mép gấp).

(A) Chiều dài 60π cm, chiều rộng 60 cm. (B) Chiều dài 900 cm, chiều rộng 60 cm.

(C) Chiều dài 180 cm, chiều rộng 60 cm. (D) Chiều dài 30π cm, chiều rộng 60 cm.

Lời giải.

Gọi R là bán kính mặt đáy.
Ta có $S_{\text{đáy}} = \pi R^2 \Rightarrow 900\pi = \pi R^2 \Leftrightarrow R^2 = 900 \Leftrightarrow R = 30$.
Suy ra chu vi đáy là $2\pi R = 60\pi$.
Vậy cần miếng kim loại hình chữ nhật có chiều dài 60π cm, chiều rộng 60 cm để làm thân nồi đó.



Chọn đáp án (A) ☐

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;2)$ và $B(3;0;2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

(A) $x+y-z-1=0$. (B) $x+y-3=0$. (C) $x-y-z+1=0$. **(D)** $x-y-1=0$.

Lời giải.

Ta có mặt phẳng trung trực của đoạn AB qua trung điểm $I(2;1;2)$ của đoạn AB và nhận $\overrightarrow{AB}=(2;-2;0)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên có dạng $2x-2y-2=0$ hay $x-y-1=0$.
Chọn đáp án (D) ☐

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;-1)$, $B(1;-2;-3)$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x-2y+z+9=0$. Mặt phẳng (α) chứa hai điểm A, B và vuông góc với (P) có phương trình là

(A) $x+y-z-2=0$. (B) $3x-2y+z+13=0$.
(C) $x+y-z+2=0$. (D) $x-5y-2z+19=0$.

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{a}=(3;-2;1)$ và $\overrightarrow{AB}=(3;-5;-2)$.
Gọi $\vec{n}$ là véc-tơ pháp tuyến của (α).
Ta có $\vec{n}=[\vec{a};\overrightarrow{AB}]=(9;9;-9)=9(1;1;-1)$.
Phương trình mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y-z-2=0$.
Chọn đáp án (A) ☐

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$ và điểm $A(1;1;-1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng d là

(A) $N(2;2;3)$. (B) $P(6;6;3)$. (C) $M(2;1;-3)$. (D) $Q(1;1;4)$.

Lời giải.

Ta có đường thẳng $d\colon \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_d=(2;2;-1)$.
Gọi điểm $H(4+2t;4+2t;2-t)\in d$. Khi đó $\overrightarrow{AH}=(3+2t;3+2t;3-t)$.
Để H là hình chiếu của A thì $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}_d=0 \Leftrightarrow 2(3+2t)+2(3+2t)-(3-t)=0 \Leftrightarrow t=-1$.
Ta được hình chiếu $H(2;2;3)$.
Chọn đáp án (A) ☐

Câu 36. Một tam giác vuông có chu vi bằng 3 và độ dài các cạnh lập thành một cấp số cộng. Độ dài các cạnh của tam giác đó là

(A) $\dfrac{1}{2};1;\dfrac{3}{2}$. (B) $\dfrac{1}{3};1;\dfrac{5}{3}$. **(C)** $\dfrac{3}{4};1;\dfrac{5}{4}$. (D) $\dfrac{1}{4};1;\dfrac{7}{4}$.

Lời giải.

Giả sử các cạnh của tam giác là $a < b < c$ lập thành cấp số cộng.

Khi đó $\begin{cases} a + c = 2b \\ a + b + c = 3 \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 2 \\ b = 1 \\ a^2 + 1 = (2 - a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{4} \\ b = 1 \\ c = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Tứ diện đều $ABCD$ cạnh a, M là trung điểm của CD. Cô-sin góc giữa AM và BD là

A $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

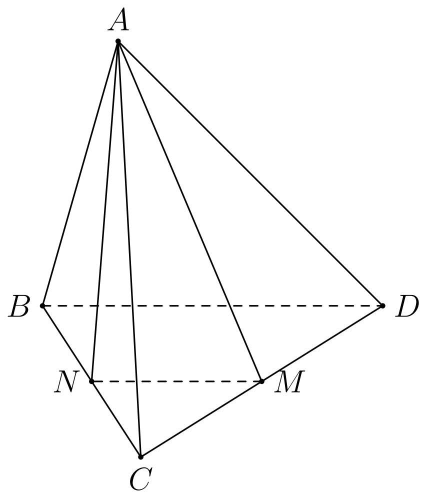
Lời giải.

Gọi N là trung điểm của CD.

Khi đó $MN \parallel BD \Rightarrow \cos\left(\widehat{AM, BD}\right) = \cos\left(\widehat{AM, MN}\right)$.

Mặt khác $AM = AN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $MN = \dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow \cos\widehat{AMN} = \dfrac{AM^2 + MN^2 - AN^2}{2 \cdot AM \cdot MN} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Tam giác ABC vuông tại A có $AC = 6$ cm, $BC = 10$ cm. Đường tròn nội tiếp tam giác đó có bán kính r là

(A) 1 cm. (B) $\sqrt{2}$ cm. **C** 2 cm. (D) 3 cm.

Lời giải.

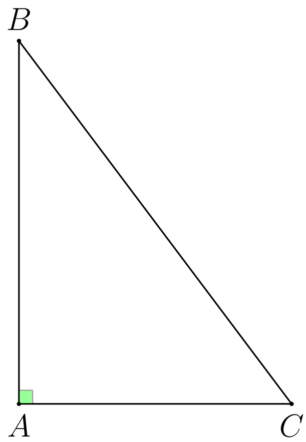
Do tam giác ABC vuông tại A có $AC = 6$ cm, $BC = 10$ cm nên

$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\ (cm)$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC = 24\ (cm)$.

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là

$r = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{AB + BC + CA} = \dfrac{2 \cdot 24}{6 + 8 + 10} = 2\ (cm)$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \dfrac{3}{4}x^4 - (m-1)x^2 - \dfrac{1}{4x^4}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

(A) 1. (B) 2. **C** 3. (D) 4.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$y' = 3x^3 - 2(m-1)x + \dfrac{1}{x^5}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geqslant 0$, $\forall x \in (0; +\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^3 - 2(m-1)x + \dfrac{1}{x^5} \geqslant 0$, $\forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \leqslant \dfrac{3}{2}x^2 + 1 + \dfrac{1}{2x^6}$, $\forall x \in (0; +\infty)$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + 1 + \dfrac{1}{2x^6}$, $x \in (0; +\infty)$.

Ta có $f'(x) = 3x - \dfrac{3}{x^7}$, $x \in (0; +\infty)$.

$f'(x) = 3x - \dfrac{3}{x^7} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'				$-$	0	$+$	
y				$\searrow$	3	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta thấy $m \leqslant f(x)$, $\forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \leqslant \min\limits_{(0;+\infty)} f(x) \Leftrightarrow m \leqslant 3$.

Giá trị nguyên dương của tham số m là $m = 1$, $m = 2$ và $m = 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Bất phương trình $f(x) < \mathrm{e}^{x^2-2x} + m$ đúng $\forall x \in (0; 2)$ khi chỉ khi

A $m > f(1) - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. (B) $m \geqslant f(1) - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. (C) $m > f(0) - 1$. (D) $m \geqslant f(0) - 1$.

Lời giải.

Bất phương trình $\Leftrightarrow f(x) - \mathrm{e}^{x^2-2x} < m$.

Xét hàm số $h(x) = f(x) - \mathrm{e}^{x^2-2x} \Rightarrow h'(x) = f'(x) + (2-2x)\mathrm{e}^{x^2-2x}$.

Nếu $x \in (0; 1)$ thì $f'(x) > 0$ và $(2-2x)\mathrm{e}^{x^2-2x} > 0$ nên $h'(x) > 0$.

Nếu $x \in (1; 2)$ thì $f'(x) < 0$ và $(2-2x)\mathrm{e}^{x^2-2x} < 0$ nên $h'(x) < 0$.

Suy ra $\max\limits_{[0;2]} h(x) = h(1) = f(1) - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Vậy YCBT $\Leftrightarrow m > f(1) - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số y $= |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1|$ có 7 điểm cực trị là

(A) $(0; 6)$. (B) $(6; 33)$. (C) $(1; 33)$. **D** $(1; 6)$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1$. Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$m-6$	$\nearrow$	$m-1$	$\searrow$	$m-33$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy:

Hàm số $y = |f(x)| = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1|$ có 7 điểm cực trị khi đồ thị hàm số $y = f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt nên suy ra

$$\begin{cases} m - 1 > 0 \\ m - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 6.$$

Chọn đáp án D □

Câu 42. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\ln^2 x + 4\ln^2 y = 4\ln x \cdot \ln y$. Tính $M = \dfrac{1 + \log x + 2\log y}{-2 + 4\log(x + 9y^2)}$.

A $M = -\dfrac{1}{2}$. **B** $M = 2$. **C** $M = \dfrac{1}{4}$. **D** $M = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \ln^2 x + 4\ln^2 y = 4\ln x \cdot \ln y \\ \Leftrightarrow\ & (\ln x)^2 + (2\ln y)^2 - 4\ln x \cdot \ln y = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (\ln x - 2\ln y)^2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2\ln y \Leftrightarrow x = y^2. \end{aligned}$$

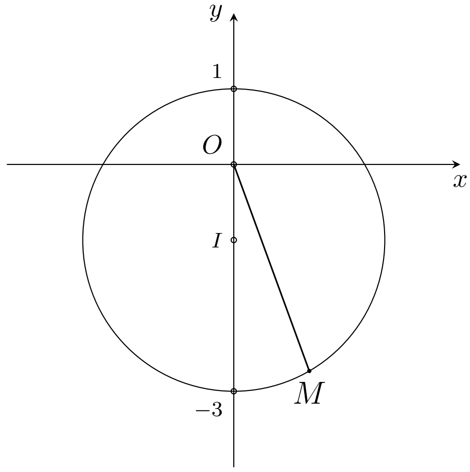
$M = \dfrac{1 + \log x + 2\log y}{-2 + 4\log(x + 9y^2)} = \dfrac{1 + \log x + \log y^2}{-2 + 4\log(x + 9x)} = \dfrac{1 + 2\log x}{-2 + 4\log(10x)} = \dfrac{1 + 2\log x}{2 + 4\log x} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Cho số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{-2 - 3i}{3 - 2i}z + 1\right| = 2$. Giá trị lớn nhất của mô-đun số phức z là

A 3. **B** $\sqrt{3}$. **C** 2. **D** $\sqrt{2}$.

Lời giải.



Đặt $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $\left|\dfrac{-2-3i}{3-2i}z + 1\right| = 2 \Leftrightarrow |-iz+1| = 2 \Leftrightarrow |z+i| = 2 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = 4$.

Vậy tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z nằm trên đường tròn tâm $I(0; -1)$ và bán kính $R = 2$.

Ta có $|z| = OM$.

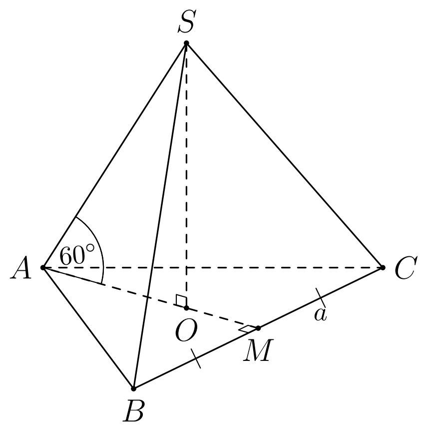
Do đó giá trị lớn nhất của $|z|$ khi OM lớn nhất nghĩa là O, M, I thẳng hàng $\Rightarrow \max |z| = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a, góc hợp bởi cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính thể tích V của hình chóp đã cho.

A $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **B** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **C** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **D** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của cạnh BC, O là tâm của tam giác đều ABC.

Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$, nên $\widehat{SAM} = 60°$.

Ta có $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Xét tam giác SAO vuông tại O ta có $SO = AO \cdot \tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a$.

Thể tích khối chóp tam giác đều $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Cho hình trụ (T) có trục $OO' = 2a$, bán kính đường tròn đáy bằng a. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với hai mặt đáy của hình trụ và tiếp xúc với các đường sinh của hình trụ. Gọi (N) là hình nón đỉnh O' và đáy là hình tròn (O) của hình trụ. Gọi V_1, V_2, V_3 là thể tích của khối trụ (T), khối cầu (S) và khối nón (N). Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $V_2 = \sqrt{V_3 \cdot V_1}$. (B) $\dfrac{1}{V_3} = \dfrac{1}{V_1} + \dfrac{1}{V_2}$. **C** $V_1 = V_2 + V_3$. (D) $V_3 = \sqrt{V_1 \cdot V_2}$.

Lời giải.

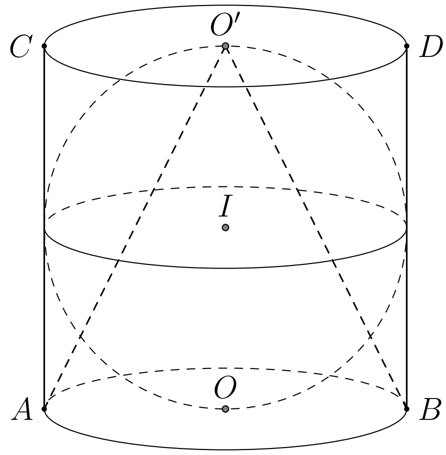
Ta có $V_1 = \pi R^2 h \Rightarrow V_1 = \pi R^2 \cdot OO' = 2\pi a^3$.

$V_2 = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V_2 = \dfrac{4\pi a^3}{3}$ và $V_3 = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$

$\Rightarrow V_3 = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot OO' = \dfrac{2\pi a^3}{3}$.

Suy ra $V_2 + V_3 = \dfrac{4\pi a^3}{3} + \dfrac{2\pi a^3}{3} = 2\pi a^3$.

Vậy $V_1 = V_2 + V_3$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm M và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất, mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C. Thể tích khối chóp $O.ABC$ bằng

(A) $\dfrac{1372}{9}$. **B** $\dfrac{686}{9}$. (C) $\dfrac{524}{3}$. (D) $\dfrac{343}{9}$.

Lời giải.

Do (P) đi qua M và cách O một khoảng lớn nhất nên (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OM} = (1;2;3)$.

Suy ra mặt phẳng (P) có phương trình $x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Khi đó giao điểm của (P) và các trục tọa độ là $A(14;0;0)$, $B(0;7;0)$, $C\left(0;0;\dfrac{14}{3}\right)$.

Thể tích của khối chóp $O.ABC$ là $V = \dfrac{1}{6} \cdot 14 \cdot 7 \cdot \dfrac{14}{3} = \dfrac{686}{9}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+2}{-4}$, $d_2\colon \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P)\colon x + 2y + 3z - 7 = 0$. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P), cắt d_1 và d_2 có phương trình là

(A) $\dfrac{x+7}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-6}{3}$. **B** $\dfrac{x+5}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{3}$.

(C) $\dfrac{x+4}{1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z+1}{3}$. (D) $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+2}{3}$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P), cắt d_1 và d_2.

$A = d_1 \cap \Delta \Rightarrow A(2a-3; -a-2; -4a-2)$.

$B = d_2 \cap \Delta \Rightarrow B(3b-1; 2b-1; 3b+2)$.

Véc-tơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{AB} = (3b - 2a + 2; 2b + a + 1; 3b + 4a + 4)$.
$\Delta \perp (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương với véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}(1; 2; 3)$ của mặt phẳng (P)
$\Leftrightarrow \dfrac{3b - 2a + 2}{1} = \dfrac{2b + a + 1}{2} = \dfrac{3b + 4a + 4}{3}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a - 4b = 3 \\ 10a - 6b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \Rightarrow A(-5; -1; 2) \\ b = -2 \Rightarrow B(-7; -5; -4). \end{cases}$
Đường thẳng Δ qua $A(-5; -1; 2)$ và có VTCP $\vec{u} = (1; 2; 3)$ nên $\Delta\colon \dfrac{x + 5}{1} = \dfrac{y + 1}{2} = \dfrac{z - 2}{3}$.
Chọn đáp án B □

Câu 48. Cho tập hợp A có 20 phần tử. Có bao nhiêu tập con khác rỗng của tập A mà số phần tử là một số chẵn?

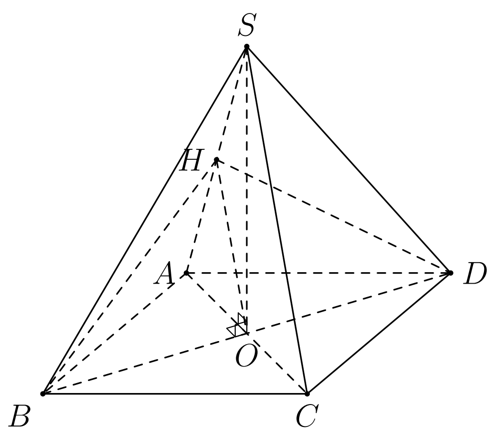
A 2^{19}. **B** $2^{20} - 1$. **C** $2^{19} - 1$. **D** 2^{20}.

Lời giải.
Số tập con của A không có phần tử nào C_{20}^{0}.
Số tập con của A có 2 phần tử nào C_{20}^{2}.
...
Số tập con của A có 20 phần tử nào C_{20}^{20}.
Vậy số tập con khác rỗng của A có số phần tử chẵn là $\mathrm{C}_{20}^{2} + \mathrm{C}_{20}^{4} + \cdots + \mathrm{C}_{20}^{20}$.
Ta có
$\mathrm{C}_{20}^{0} + \mathrm{C}_{20}^{1} + \mathrm{C}_{20}^{2} + \mathrm{C}_{20}^{3} + \cdots + \mathrm{C}_{20}^{20} = (1 + 1)^{20} = 2^{20} \quad (*)$.
$\mathrm{C}_{20}^{0} - \mathrm{C}_{20}^{1} + \mathrm{C}_{20}^{2} - \mathrm{C}_{20}^{3} + \cdots + \mathrm{C}_{20}^{20} = (1 - 1)^{20} = 0 \quad (**)$.
Từ $(*)(**) \Rightarrow 2\left(\mathrm{C}_{20}^{0} + \mathrm{C}_{20}^{2} + \cdots + \mathrm{C}_{20}^{20}\right) = 2^{20} \Leftrightarrow \mathrm{C}_{20}^{0} + \mathrm{C}_{20}^{2} + \cdots + \mathrm{C}_{20}^{20} = 2^{19} \Leftrightarrow \mathrm{C}_{20}^{2} + \cdots + \mathrm{C}_{20}^{20} = 2^{19} - 1$.
Chọn đáp án C □

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, biết $AB = SB = a$, $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

A 30°. **B** 45°. **C** 60°. **D** 90°.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm SA. Do $AB = SB = AD = SD$
$\Rightarrow BH \perp SA, DH \perp SA \Rightarrow \left(\widehat{(SAB), (SAD)}\right) = \left(\widehat{BH, DH}\right)$.

Ta có $OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{6a^2}{9}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Xét $\triangle OAB$ và $\triangle OSB$ ta có

$$\left.\begin{aligned}&\widehat{AOB} = \widehat{SOB}\ \ (=90^\circ)\\&AB = SB\\&OB \text{ chung}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \triangle OAB = \triangle OSB \Rightarrow AO = SO \Rightarrow \triangle SOA \text{ vuông cân tại } O$$

$\Rightarrow SA = \sqrt{2}SO = 2a\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AH = a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{3a^2}{9}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

$\sin\widehat{OHB} = \dfrac{OB}{BH} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{OHB} = 45^\circ$

Mặt khác: $\triangle SAB$ và $\triangle OSB$ có

$$\left.\begin{aligned}&SB = SD\\&AB = AD\\&SA \text{ chung}\end{aligned}\right\} \Rightarrow\ \triangle SAB = \triangle OSB \Rightarrow BH = DH \Rightarrow \triangle BHD \text{ cân đỉnh } H.$$

Suy ra HO là đường trung tuyến đồng thời là đường phân giác góc $\widehat{BHD} \Rightarrow \widehat{BHD} = 2\widehat{OHB} = 90^\circ$

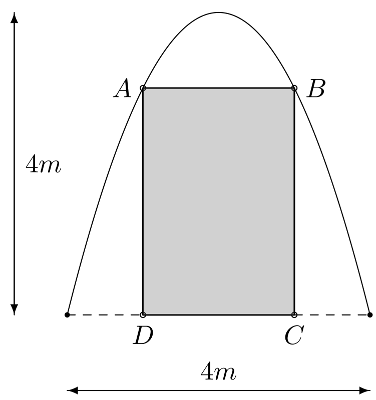
$\Rightarrow \left(\widehat{(SAB),(SAD)}\right) = \left(\widehat{BH, DH}\right) = \widehat{BHD} = 90^\circ$.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Trong đợt hội trại được tổ chức tại trường THPT X, Đoàn trường có thực hiện một dự án ảnh trưng bày trên một pano có dạng parabol như hình vẽ. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi hình dự thi và dán lên khu vực hình chữ nhật $ABCD$, phần còn lại sẽ được trang trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí dán hoa văn là 200.000 đồng cho một m^2 bảng. Hỏi chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?

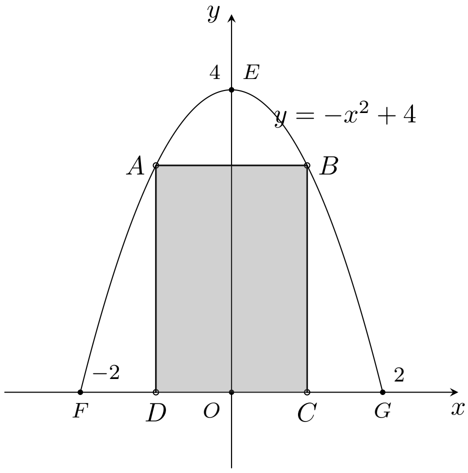
A 900.000 (đồng). B 1.232.000 (đồng).

C 902.000 (đồng). D 1.230.000 (đồng).



Lời giải.

Dựng hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Giả sử parabol là $(P)\colon y = ax^2 + bx + c$.

Khi đó (P) đi qua ba điểm $E(0;4), F(2;0), G(-2;0) \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow (P)\colon y = -x^2 + 4$.

Đặt $CD = 2x, 0 < x < 2 \Rightarrow C(x;0) \Rightarrow BC = -x^2 + 4$.

Do đó diện tích phần trang trí hoa văn là

$$S_{hv} = \int\limits_{-2}^{2} (-x^2+4)\,\mathrm{d}x - 2x(-x^2+4) = 2x^3 - 8x + \frac{32}{3} = f(x)$$

Chi phí để dán hoa văn là: $T = 200000 \cdot S_{hv} = 200000 f(x)$.

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 8x + \dfrac{32}{3},\ 0 < x < 2$.

Ta có $f'(x) = 6x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \in (0;2)$ nên ta có bảng biến thiên sau:

Từ BBT ta có $T \geqslant 200000 \cdot \dfrac{96 - 32\sqrt{3}}{9}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Vậy $\min T = 200000 \cdot \dfrac{96 - 32\sqrt{3}}{9} \approx 902000$ (đồng).

Chọn đáp án C □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. B	3. D	4. B	5. B	6. C	7. D	8. B	9. A	10. A
11. D	12. B	13. A	14. A	15. D	16. A	17. D	18. D	19. B	20. B
21. D	22. C	23. A	24. C	25. B	26. B	27. C	28. C	29. C	30. B
31. A	32. A	33. D	34. A	35. A	36. C	37. A	38. C	39. C	40. A
41. D	42. D	43. A	44. B	45. C	46. B	47. B	48. C	49. D	50. C

13 ĐỀ THI THỬ SỐ 13-MAX8

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm x_0 bằng

A -1. **B** -2. **C** 1. **D** 2.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x_0 = -1$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A 3. **B** 1. **C** 0. **D** 2.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to (-1)^+} y = -\infty$ nên TCĐ: $x = -1$ và $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 1$ nên TCN: $y = 1$.

Mặt khác $\lim\limits_{x \to 1^+} y = \dfrac{-1}{2}$ và $\lim\limits_{x \to 1^-} y = \dfrac{-1}{2}$ nên $x = 1$ không là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

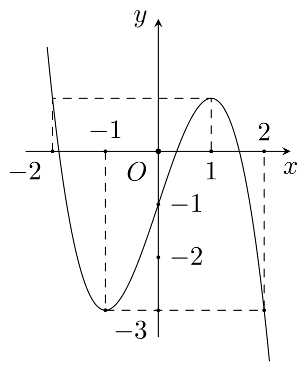
Chọn đáp án D □

Câu 3.

Hàm số nào có đồ thị như hình bên?

A $y = -x^3 + 3x^2 - 1$. **B** $y = -x^3 + 3x - 1$.

C $y = x^3 - 3x - 1$. **D** $y = -x^3 - 3x - 1$.



Lời giải.

Đồ thị trên cho ta thấy hệ số của x^3 mang giá trị âm và phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm $x = 1, x = -1$, chỉ có hàm số là $y = -x^3 + 3x - 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Đạo hàm của hàm số $y = 5^x$ là

A $y' = x \cdot 5^{x-1}$. **B** $y' = 5^x \ln 5$. **C** 5^x. **D** $\dfrac{5^x}{\ln 5}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức đạo hàm $(a^x)' = a^x \ln a$ $(0 < a \neq 1)$ ta có $y' = (5^x)' = 5^x \ln 5$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Giải bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-4} \geqslant 1$ ta được tập nghiệm T. Tìm T.

A $T = [-2; 2]$.
B $T = [2; +\infty)$.
C $T = (-\infty; -2]$.
D $T = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-4} \geqslant 1 \Leftrightarrow x^2 - 4 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-2; 2]$.

Vậy tập nghiệm $T = [-2; 2]$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Giải phương trình $\log_2(2x - 2) = 3$.

A $x = 3$.
B $x = 2$.
C $x = 5$.
D $x = 4$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 1$. Khi đó

$$\log_2(2x - 2) = 3 \Leftrightarrow 2x - 2 = 8 \Leftrightarrow x = 5.$$

Chọn đáp án C □

Câu 7. Gọi M là hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = 0, x = 1, y = 0, y = 5x^4 + 3x^2 + 3$. Diện tích hình M bằng

A 5.
B 10.
C 6.
D 12.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng M là:

$$S_M = \int_0^1 (5x^4 + 3x^2 + 3)\,\mathrm{d}x = (x^5 + x^3 + 3x)\Big|_0^1 = 5.$$

Chọn đáp án A □

Câu 8. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$. Thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox.

A $2\pi \ln 2$.
B $\frac{3\pi}{4}$.
C $\frac{3}{4}$.
D $2 \ln 2$.

Lời giải.

Thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^4 = \pi \left(-\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 9. Có bao nhiêu số thực a để số phức $z = a + 2i$ có mô-đun bằng 2?

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ Vô số.

Lời giải.

Ta có $|z| = 2 \Leftrightarrow a^2 + 4 = 4 \Leftrightarrow a = 0$.

Vậy có một số thực $a = 0$ thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - i + 1| = 4$ là

Ⓐ đường tròn tâm $I(1\,;-1)$, bán kính $R = 2$.

Ⓑ hình tròn tâm $I(1\,;-1)$, bán kính $R = 4$.

Ⓒ đường tròn tâm $I(-1\,;1)$, bán kính $R = 2$.

Ⓓ đường tròn tâm $I(-1\,;1)$, bán kính $R = 4$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $|z - i + 1| = 4 \Leftrightarrow |(x+1) + (y-1)i| = 4 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 16$.

Vậy tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - i + 1| = 4$ là đường tròn tâm $I(-1; 1)$, bán kính $R = 4$.

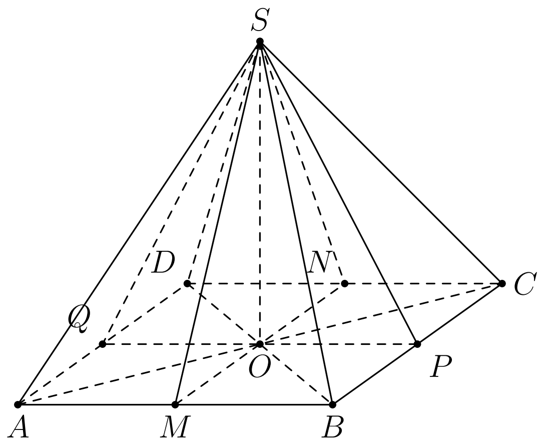
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 11. Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng ?

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 6.

Lời giải.

Các mặt phẳng đối xứng của hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ là các mặt phẳng (SAC), (SBD), (SMN), (SMN), (SPQ) với M, N, P, Q là các trung điểm của các cạnh đáy dưới hình vẽ bên.

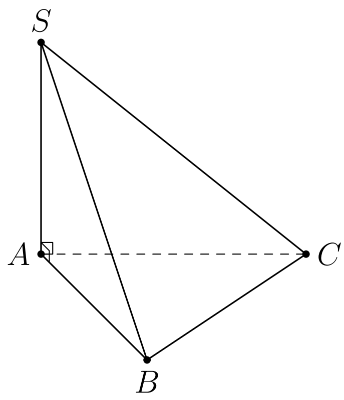


Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$ và có thể tích là $\dfrac{a^3}{4}$. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) là

Ⓐ $SA = a\sqrt{2}$. Ⓑ $SA = a$. Ⓒ $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $SA = a\sqrt{3}$.

Lời giải.



Ta có thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot SA = \frac{a^3}{4}.$$

Suy ra $SA = \dfrac{\dfrac{a^3}{4}}{\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}} = a\sqrt{3}.$

Chọn đáp án D □

Câu 13. Công thức tính thể tích khối trụ tròn xoay có bán kính đáy r chiều cao h là

A $V = 2\pi rh$. **B** $V = \pi rh$. **C** $V = \pi r^2 h$. **D** $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Lời giải.

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Trong không gian với trục hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng (Oxz)?

A $y = 0$. **B** $x = 0$. **C** $z = 0$. **D** $y - 1 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oxz) vuông góc với trục Oy có véc-tơ đơn vị là $\vec{j} = (0; 1; 0) \Rightarrow \vec{n}_{Oxz} = (0; 1; 0)$.

Vậy phương trình của mặt phẳng (Oxz) là $y = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(2; -1; 1)$ và nhận véc-tơ $\vec{u} = (-1; 2; -3)$ làm véc-tơ chỉ phương là

A $\begin{cases} x = -2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = t + 2 \\ z = -t - 3 \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - t \end{cases}$.

Lời giải.

Phương trình tham số có dạng $\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t. \end{cases}$

Đường thẳng d đi qua điểm $A(2; -1; 1)$ và nhận véc-tơ $\vec{u} = (-1; 2; -3)$ làm véc-tơ chỉ phương là

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 3t. \end{cases}$$

Chọn đáp án C □

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 3; 0)$ có tâm và bán kính bằng 2 là

A $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 4$. **B** $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 2$.

(C) $(x+2)^2+(y-3)^2+z^2=2$.
(D) $(x+2)^2+(y-3)^2+z^2=4$.

Lời giải.

Phương trình mặt cầu có dạng: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Vậy mặt cầu (S) có tâm $I(-2;3;0)$ có tâm và bán kính bằng 2 là $(x+2)^2+(y-3)^2+z^2=4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Tính α, biết $\cos\alpha=1$

(A) $\alpha=k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.
(B) $\alpha=k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.
(C) $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.
(D) $\alpha=-\pi+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có $\cos\alpha=1\Leftrightarrow\alpha=k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Có bao nhiêu cách sắp xếp 6 học sinh theo một hàng dọc?

(A) 46656.
(B) 4320.
(C) 720.
(D) 360.

Lời giải.

Số cách sắp xếp 6 học sinh theo một hàng dọc là số hoán vị của 6 phần tử.

Vậy có $\mathrm{P}_6=6!=720$ cách.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Cho dãy số (u_n) là cấp số cộng với $u_1=3$; $u_5=19$. Tính u_{12}.

(A) $u_{12}=51$.
(B) $u_{12}=57$.
(C) $u_{12}=47$.
(D) $u_{12}=\dfrac{207}{5}$.

Lời giải.

Ta có $u_5=19\Leftrightarrow u_1+4d=19\Leftrightarrow 3+4d=19\Leftrightarrow d=4$.

Do đó $u_{12}=u_1+11d=3+11\cdot4=47$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(4-x^2)$. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

(A) $(-2;1)$.
(B) $(2;+\infty)$.
(C) $(-\infty;-2)$.
(D) $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải.

Dễ thấy $f'(x)\geqslant0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4-x^2\geqslant0\\x^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow-2\leqslant x\leqslant2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

(A) 0.
(B) $-\dfrac{1}{10}$.
(C) 1.
(D) $\dfrac{9}{10}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. Suy ra $y'=0\Leftrightarrow1-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm1$.

Tính được $y(-1)=-\dfrac12$, $y(1)=\dfrac12$, $y(2)=\dfrac25$.

Vậy $\max\limits_{[-1;2]}y=\dfrac12$, $\min\limits_{[-1;2]}y=-\dfrac12$. Suy ra $\max\limits_{[-1;2]}y+\min\limits_{[-1;2]}y=0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi phương trình $2f(x) + 3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 4. **(B)** 1. **(C)** 2. **D** 3.

Lời giải.

Ta có $2f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{3}{2}$ nên phương trình có ba nghiệm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 5x$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng -6 có dạng $y = ax + b$. Tính $S = 2a - 3b$.

(A) $S = -1$. **(B)** $S = 22$. **(C)** $S = 58$. **D** $S = -2$.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Do $y_0 = -6 \Leftrightarrow x_0^3 + 3x_0^2 + 5x_0 = -6 \Leftrightarrow x_0 = -2 \Rightarrow M(-2; -6)$.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x + 5 \Rightarrow y'(-2) = 5$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm M là $y = 5(x + 2) - 6 \Leftrightarrow y = 5x + 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow S = -2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Thu gọn biểu thức $A = \left(\dfrac{a^{\sqrt{3}}}{b^{\sqrt{3}-1}}\right)^{\sqrt{3}+1} \cdot \dfrac{a^{-1-\sqrt{3}}}{b^{-2}}$, ta được

(A) $A = a$. **(B)** $A = ab$. **C** $A = a^2$. **(D)** $A = a^2 b$.

Lời giải.

$$A = \left(\dfrac{a^{\sqrt{3}}}{b^{\sqrt{3}-1}}\right)^{\sqrt{3}+1} \cdot \dfrac{a^{-1-\sqrt{3}}}{b^{-2}} = \dfrac{a^{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}}{b^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}} \cdot \dfrac{a^{-1-\sqrt{3}}}{b^{-2}} = \dfrac{a^{3+\sqrt{3}}}{b^{3-1}} \cdot \dfrac{a^{-1-\sqrt{3}}}{b^{-2}} = \dfrac{a^{3+\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}}{b^0} = a^2.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Phương trình $3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $x_1 + x_2 = \dfrac{4}{3}$. **B** $x_1 + 2x_2 = -1$. **(C)** $2x_1 + x_2 = 0$. **(D)** $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 1 \\ 3^x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Suy ra $x_1 = -1$, $x_2 = 0$. Vậy $x_1 + 2x_2 = -1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{5}}(2x-3) > -1$.

(A) $x < 4$. (B) $x > \dfrac{3}{2}$. (C) $\dfrac{3}{2} < x < 4$. (D) $x > 4$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > \dfrac{3}{2}$. $(*)$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2x - 3 < \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1} \Leftrightarrow 2x - 3 < 5 \Leftrightarrow x < 4$.

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta được nghiệm: $\dfrac{3}{2} < x < 4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Sự tăng trưởng của một loài vi khuẩn theo công thức $S = A \cdot \mathrm{e}^{rt}$ (A là lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng $r > 0$, t là thời gian tăng trưởng, S là lượng vi khuẩn có được sau thời gian tăng trưởng). Giả sử số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Thời gian để vi khuẩn tăng gấp rưỡi là

(A) $5\log_3 \dfrac{3}{2}$. (B) $5\log_3 2$. (C) $\log_3 \dfrac{3}{2}$. (D) $\log_3 2$.

Lời giải.

Theo đề bài ta có phương trình: $300 = 100 \cdot \mathrm{e}^{r \cdot 5} \Rightarrow r = \dfrac{1}{5}\ln 3$.

Suy ra, thời gian để số lượng vi khuẩn tăng gấp rưỡi là

$$100\mathrm{e}^{\frac{1}{5}\ln 3 \cdot t} = 150 \Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{\ln 3}\right)^{\frac{t}{5}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3^{\frac{t}{5}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow t = 5\log_3 \frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Cho $\displaystyle\int \dfrac{1}{\sqrt{1+x+\left(\sqrt{1+x}\right)^3}}\,\mathrm{d}x = f(x) + C$. Tính $f'(8)$.

(A) $\dfrac{1}{5}$. (B) $\dfrac{4}{5}$. (C) $\dfrac{1}{6}$. (D) $\dfrac{7}{6}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \dfrac{1}{\sqrt{1+x+\left(\sqrt{1+x}\right)^3}}\,\mathrm{d}x = f(x) + C \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x+\left(\sqrt{1+x}\right)^3}}$.

Khi đó $f'(8) = \dfrac{1}{\sqrt{1+8+\left(\sqrt{1+8}\right)^3}} = \dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Cho $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$, $\displaystyle\int_4^5 f(u)\,\mathrm{d}u = 2$ và $\displaystyle\int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $I = \displaystyle\int_1^4 [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = 10$. (B) $I = 3$. (C) $I = 6$. (D) $I = 5$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_4^5 f(u)\,\mathrm{d}u = 2 \Rightarrow \int_4^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

Khi đó

$$\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_4^5 f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_4^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 5-2=3.$$

Vậy $I = \int\limits_1^4 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x = 3+3=6.$

Chọn đáp án C □

Câu 30. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $2z^2 - 3z + 2 = 0$ trên tập số phức. Tính giá trị biểu thức $P = \sqrt{z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2}$.

A $P = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. B $P = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$. C $P = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. D $P = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Theo Vi-ét, ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = \dfrac{3}{2} \\ z_1z_2 = 1. \end{cases}$

Khi đó $P = \sqrt{z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2} = \sqrt{(z_1+z_2)^2 - z_1z_2} = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 1} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Cho các số phức z thoả mãn $|z - i| = 5$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = iz + 1 - i$ là một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

A $r = 20$. B $r = 22$. C $r = 4$. D $r = 5$.

Lời giải.

Ta có $w = iz + 1 - i \Leftrightarrow w + i = i(z - i)$. Lấy module hai vế ta được

$$|w+i| = |i(z-i)| \Leftrightarrow |w+i| = 5.$$

Đặt $w = x + yi$, ta có $x^2 + (y+1)^2 = 25$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có bán kính $r = 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{4a^3}{3}$. Tính độ dài cạnh SC.

A $a\sqrt{6}$. B $3a$. C $2a$. D $6a$.

Lời giải.

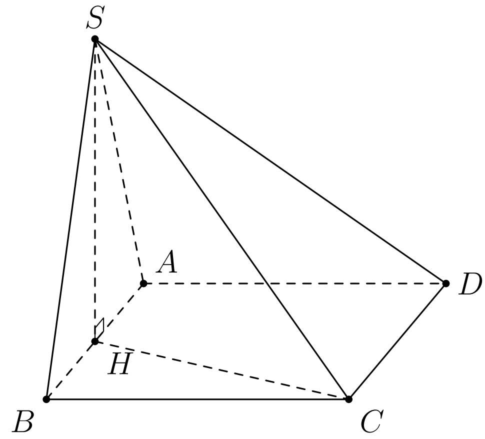
Gọi H là trung điểm AB.

Ta có $\begin{cases} SH \perp AB \\ (SAB) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Thể tích khối chóp

$$V = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{4a^3}{3} \Leftrightarrow SH = \frac{4a^3}{4a^2} = a.$$

Theo định lý Py-ta-go, ta có $HC = \sqrt{BH^2 + HC^2} = a\sqrt{5}$; $SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \sqrt{a^2 + 5a^2} = a\sqrt{6}$.



Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng a. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$.

A $\frac{\pi}{6}$. **B** $\frac{\pi}{3}$. **C** $\frac{\pi}{2}$. **D** $\frac{3\pi}{2}$.

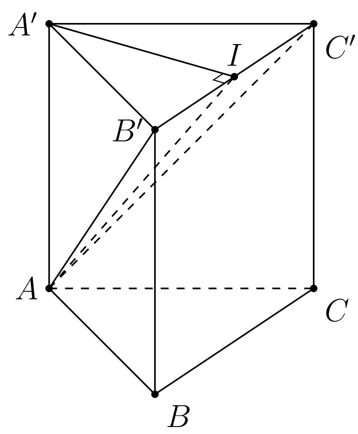
Lời giải.

Gọi I là trung điểm của B'C'.

Ta có $\begin{cases} AI \perp B'C' \\ A'I \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow ((AB'C');(A'B'C')) = (AI; A'I) = \widehat{AIA'}$.

Xét tam giác AIA' vuông tại A', ta có

$$\tan \widehat{AIA'} = \frac{AA'}{A'I} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{AIA'} = ((AB'C'), (ABC)) = \frac{\pi}{6}.$$



Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh bằng 1. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón.

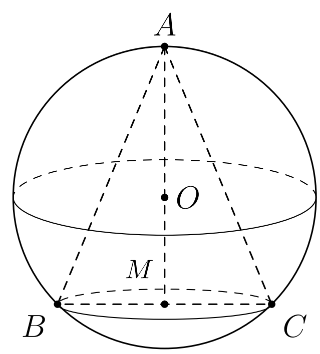
A $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **B** $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **C** $R = \frac{2\sqrt{3}}{9}$. **D** $R = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC và O là trọng tâm của tam giác ABC.

Vì tam giác ABC đều nên ta có $R = OA = \frac{2}{3}AM$.

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón là $R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án B □

Câu 35. Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(3;1;-1)$, $B(2;-1;4)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q)\colon 2x - y + 3z - 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng (P) là

A $x - 13y + 3z + 5$.
B $x - 13y - 5z + 3 = 0$.
C $x - 13y - 5z + 5 = 0$.
D $x + 13y - 5z + 5 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; -2; 5)$.

Mặt phẳng (Q) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; -1; 3)$.

Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(3; 1; -1)$, $B(2; -1; 4)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q)\colon 2x - y + 3z - 1 = 0$ nên có VTPT là $\left[\overrightarrow{AB}, \vec{n}\right] = (-1; 13; 5)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $-(x-3) + 13(y-1) + 5(z+1) = 0 \Leftrightarrow x - 13y - 5z + 5 = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua $A(2; 1; -3)$, vuông góc với Ox và song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x - 3y + 4z - 1 = 0$ là

A $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + 4t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$.
B $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 4t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$.
C $\begin{cases} x = 2t \\ y = t + 4 \\ z = -3t + 3 \end{cases}$.
D $\begin{cases} x = -2t \\ y = -t + 4 \\ z = -3t + 3 \end{cases}$.

Lời giải.

Vì $d \perp Ox$ và song song với (P) nên có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = \left[\vec{n}_{(P)}, \vec{i}\right] = (0; 4; 3)$.

Vậy phương trình của đường thẳng d là $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + 4t \\ z = -3 + 3t. \end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 37. Xác định x để 3 số $2x - 1; x; 2x + 1$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân.

A $x = \dfrac{1}{3}$.
B $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
C $x = \pm\dfrac{1}{3}$.
D $x = \pm\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $2x - 1; x; 2x + 1$ lập thành cấp số nhân nên

$$x^2 = (2x-1)(2x+1) \Leftrightarrow x^2 = 4x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

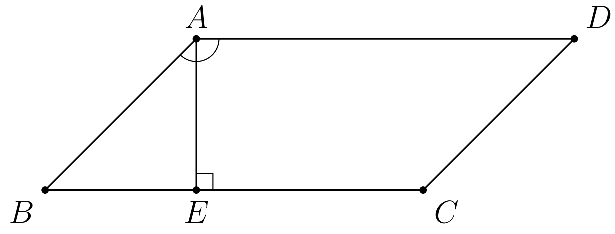
Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$ và $\widehat{BAD} = 135^\circ$. Diện tích của hình bình hành $ABCD$ bằng

A a^2.
B $a^2\sqrt{2}$.
C $a^2\sqrt{3}$.
D $2a^2$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{ABC} = 45^\circ$.
Gọi AE kà đường cao của tam giác ABC, khi đó tam giác AEB vuông cân tại E.
Suy ra $AE = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Vậy diện tích hình bình hành $ABCD$ là



$$AE \cdot BC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} = a^2.$$

Cách khác: Diện tích hình bình hành $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC} = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = a^2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3 - x^2 - m^2x + m^2$, m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1; 10)$?

A 4018. (B) 21. (C) 4016. (D) 18.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = (x-1)(x^2 - m^2)$ nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = m^2 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Xét các trường hợp nguyên của m:

TH 1. $m = 0$: Khi đó $f'(x) = x^2(x-1)$. Trường hợp này hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ nên không thỏa yêu cầu bài toán.

TH 2. $|m| = 1$: Khi đó $f'(x) = (x-1)^2(x+1)$. Trường hợp này hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ nên không thỏa yêu cầu bài toán.

TH 3. $m \notin \{-1; 0; 1\}$: Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-|m|; 0; |m|\}$.
Lập bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -|m|)$ và $(1; |m|)$.
Do đó, điều kiện để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 10)$ là $10 \leqslant |m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geqslant 10 \\ m \leqslant -10. \end{array}\right.$

Vậy, với điều kiện $m \in (-2019; 2019)$ ta có $2009 \times 2 = 4018$ giá trị nguyên của m.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 2ax^2 + a^2x + b$ có một điểm cực tiểu là $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}\right)$. Khi đó giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A $\dfrac{3}{4}$. (B) $\dfrac{79}{108}$. (C) $\dfrac{83}{108}$. (D) $\dfrac{5}{4}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 4ax + a^2$ và $y'' = 6x - 4a$.
Điều kiện cần để hàm số đạt cực tiểu tại $x = -\dfrac{1}{2}$ là

$$y'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4} + 2a + a^2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}; a = -\frac{3}{2}.$$

Với $a = -\frac{1}{2}$ ta có $y''\left(-\frac{1}{2}\right) = -3 + 2 = -1 < 0$, nên hàm số đạt cực đại tại $x = -\frac{1}{2}$.
Với $a = -\frac{3}{2}$ ta có $y''\left(-\frac{1}{2}\right) = -3 + 6 = 3 > 0$, nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = -\frac{1}{2}$.
Vậy $a = -\frac{3}{2}$.
Vì điểm $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ thuộc đồ thị hàm số nên ta có $\frac{1}{4} = -\frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + b \Leftrightarrow b = \frac{3}{4}$.
Hàm số đã cho trở thành $y = x^3 + 3x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{3}{4}$.
Phương trình $y' = 3x^2 + 6x + \frac{9}{4} = 0$ có hai nghiệm $x = -\frac{1}{2}; x = -\frac{3}{2}$.
Giá trị cực đại của hàm số bằng $y\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 10$ và đường thẳng $y = 9x + m$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt.

A. $6 < m < 10$. B. $-17 < m < 15$. C. $-17 < m < 6$. D. $10 < m < 15$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = m \quad (*)$.
Xét $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$.
Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow f(-1) = 15 \\ x = 3 \Rightarrow f(3) = -17. \end{array}\right.$
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	15	$\searrow$	-17	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy pt $(*)$ có 3 nghiệm khi $-17 < m < 15$.
Chọn đáp án B □

Câu 42. Bèo hoa dâu được nuôi trên mặt nước dùng trong chế tạo thuốc. Một nhà sinh học đã thả một lượng bèo chiếm 4% diện tích mặt hồ. Giả sử sau một tuần, số lượng bèo tăng gấp 3 lần và tốc độ phát triển của bèo là như nhau tại mọi thời điểm. Sau khoảng bao lâu thì bèo phủ kín mặt hồ?

A. 5 tuần. B. 3 tuần. C. 4 tuần. D. 2 tuần.

Lời giải.

Ban đầu, lượng bèo chiếm 4% diện tích mặt hồ.
Sau 1 tuần, lượng bèo tăng gấp 3 nên sẽ chiếm: $4\% \cdot 3$ diện tích mặt hồ.
Sau 2 tuần, lượng bèo tăng gấp 3 nên sẽ chiếm: $4\% \cdot 3^2$ diện tích mặt hồ.
...
Sau n tuần, lượng bèo sẽ chiếm: $4\% \cdot 3^n$ diện tích mặt hồ.
Suy ra để phủ kín mặt hồ thì $4\% \cdot 3^n = 1 \Leftrightarrow n = \log_3 25 \approx 3$ tuần.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{\dfrac{x}{4-x^2}}$, trục Ox và đường thẳng $x=1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình H xung quanh trục Ox.

(A) $V=\pi\ln\dfrac{4}{3}$. (B) $V=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{3}$. **C** $V=\dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{4}{3}$. (D) $V=\dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{\dfrac{x}{4-x^2}}=0\Rightarrow x=0$.

Ta có: $V=\pi\displaystyle\int\limits_0^1\dfrac{x}{4-x^2}\,\mathrm{d}x=-\dfrac{\pi}{2}\int\limits_0^1\dfrac{\mathrm{d}(4-x^2)}{4-x^2}=-\dfrac{\pi}{2}\ln|4-x^2|\Big|_0^1=-\dfrac{\pi}{2}(\ln 3-\ln 4)=\dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z sao cho $\dfrac{z+i}{\overline{z}+i}$ là số thực?

(A) Hai trục Ox, Oy. (B) Trục Ox.

C Hai trục Ox, Oy bỏ đi điểm $(0;1)$. (D) Trục Oy.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=x-yi$.

Ta có $\dfrac{z+i}{\overline{z}+i}=\dfrac{x+(y+1)i}{x+(1-y)i}=\dfrac{[x+(y+1)i][x-(1-y)i]}{x^2+(1-y)^2}=\dfrac{x^2+(y+1)(1-y)+[x(y+1)-x(1-y)]i}{x^2+(1-y)^2}$.

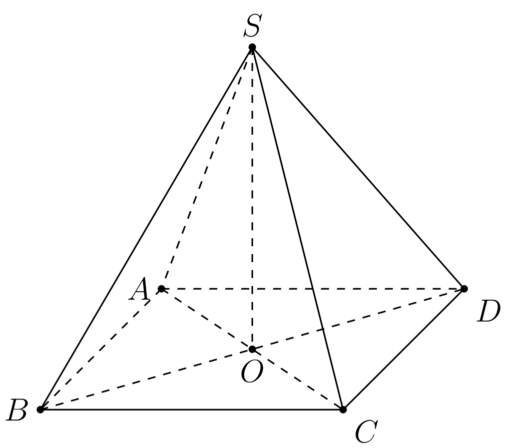
Để $\dfrac{z+i}{\overline{z}+i}$ là số thực thì $\begin{cases}x(y+1)-x(1-y)=0\\x^2+(1-y)^2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=0\\x\neq 0\\y\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0\\y=0\end{array}\right.\\x\neq 0, y\neq 1.\end{cases}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA=\dfrac{3}{4}$, tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

(A) $V=\dfrac{\sqrt{41}}{27}$. **B** $V=\dfrac{\sqrt{39}}{32}$. (C) $V=\dfrac{\sqrt{13}}{81}$. (D) $V=\dfrac{\sqrt{31}}{16}$.

Lời giải.



Sau đây, ta giải bài toán tổng quát với $SA=x$, các cạnh còn lại bằng nhau và bằng a.

Gọi $O=AC\cap BD$.

Ta có $\triangle SBD=\triangle BCD(c-c-c)\Rightarrow SO=CO=AO$.

Suy ra $\triangle SAC$ vuông tại $S \Rightarrow AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = \sqrt{x^2 + a^2} \Rightarrow AO = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2 + a^2}$.

$\triangle AOD$ vuông tại $O \Rightarrow DO = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{3a^2 - x^2} \Rightarrow BD = 2DO = \sqrt{3a^2 - x^2}$.

Hình thoi $ABCD$ có: $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 + a^2} \cdot \sqrt{3a^2 - x^2}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD) \Rightarrow H \in AC$.

$\triangle SAC$ vuông tại S nên

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SC^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{x^2 + a^2}{x^2 \cdot a^2} \Rightarrow SH = \sqrt{\frac{x^2 \cdot a^2}{x^2 + a^2}} = \frac{x \cdot a}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 + a^2} \cdot \sqrt{3a^2 - x^2} \cdot \dfrac{x \cdot a}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \dfrac{1}{6} \cdot x \cdot a \cdot \sqrt{3a^2 - x^2}$ (đvtt).

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{6} \cdot x \cdot a \cdot \sqrt{3a^2 - x^2}$ (đvtt). $(*)$

Áp dụng công thức $(*)$ với $x = \dfrac{3}{4}, a = 1$.

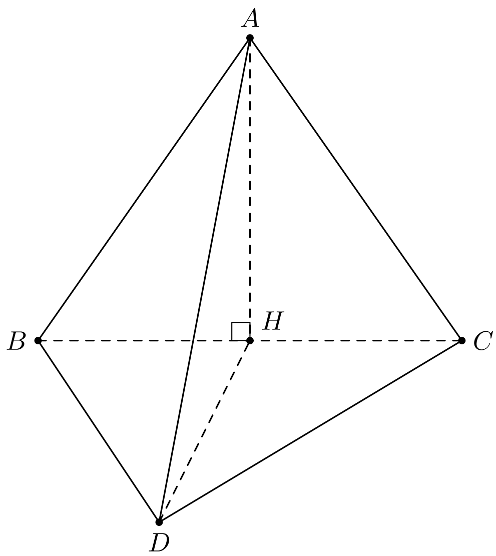
Ta được $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot 1 \cdot \sqrt{3 \cdot 1^2 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{39}}{32}$ (đvtt).

Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho tứ diện $ABCD$ có các tam giác ABC và DBC vuông cân và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau, $AB = AC = DB = DC = 2a$. Tính khoảng cách từ B đến (ACD).

A $a\sqrt{6}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **D** $\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.



Ta có $(ABC) \perp (DBC)$ và $(ABC) \cap (DBC) = BC$.

Kẻ $AH \perp BC\,(H \in BC) \Rightarrow AH \perp (BCD)$.

Tam giác ABC vuông cân tại A nên

$$AH = HB = HC = \frac{BC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}.$$

Từ $\triangle DBC$ vuông cân tại D và $HB = HC$

$\Rightarrow HD = HB = HC = a\sqrt{2}$ và $HD \perp BC$.

Ta có $\dfrac{\mathrm{d}(B;(ACD))}{\mathrm{d}(H;(ACD))} = \dfrac{BC}{HC} = 2$. Suy ra

$$\mathrm{d}(B;(ACD)) = 2\mathrm{d}(H;(ACD)) = 2h.$$

Để ý HA, HC, HD vuông góc với nhau từng đôi một nên

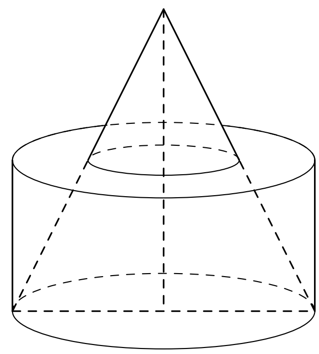
$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{HD^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2}.$$

Suy ra $h = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Vậy $\mathrm{d}(B;(ACD)) = 2h = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án D □

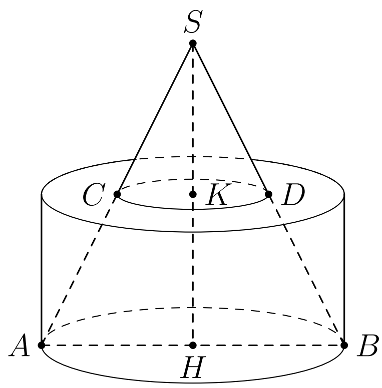
Câu 47.

Người ta xây một bể cá hình trụ chiều cao và đường kính đáy đều bằng $2a$, đựng một hình nón có đường kính đáy bằng $2a$, độ dài đường sinh bằng $a\sqrt{17}$ (hình vẽ bên). Tính phần thể tích của nước để đổ đầy cho bể cá?



A $\frac{5}{12}\pi a^3$. **B** $\frac{1}{3}\pi a^3$. **C** $\frac{4}{3}\pi a^3$. **D** $\frac{5}{6}\pi a^3$.

Lời giải.



Thể tích cần tính bằng thể tích khối trụ trừ đi thể tích khối nón cụt.

Thể tích khối trụ bằng $V_1 = \pi a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3$.

Thể tích khối nón cụt bằng thể tích khối nón to trừ đi khối nón bé (phía trên).

Ta có $SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = 4a$. Suy ra K là trung điểm SH.

Theo định lý Ta-lét thì $CK = \frac{1}{2}AH = \frac{a}{2}$.

Ta có $V_2 = \frac{1}{3}\pi a^2 \cdot 4a - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot 2a = \frac{7}{6}\pi a^3$.

Vậy thể tích cần tính bằng $V = V_1 - V_2 = \frac{5}{6}\pi a^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{2} = -z$ và điểm $M(3;2;1)$. Viết phương trình mặt cầu có tâm A thuộc đường thẳng Δ, bán kính là $AM = \sqrt{5}$ biết tâm A có cao độ là số dương.

A $(x-3)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 5$. **B** $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.

C $(x+3)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 5$. **D** $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 5$.

Lời giải.

Gọi $A(3+2t; 3+2t; -t)$ là tâm của mặt cầu (điều kiện $t < 0$).

Ta có $AM = \sqrt{5} \Leftrightarrow AM^2 = 5 \Leftrightarrow (2t)^2 + (1+2t)^2 + (t+1)^2 = 5 \Leftrightarrow 9t^2 + 6t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \frac{1}{3}. \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện ta có $t = -1 \Rightarrow A(1;1;1)$ nên mặt cầu có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Một hộp đựng 40 tấm thẻ được đánh số thứ tự từ 1 đến 40. Rút ngẫu nhiên 10 tấm thẻ. Tính xác suất để lấy được 5 tấm thẻ mang số lẻ và 5 tấm thẻ mang số chẵn, trong đó có đúng một thẻ mang số chia hết cho 6.

A $\frac{252}{1147}$. **B** $\frac{26}{1147}$. **C** $\frac{12}{1147}$. **D** $\frac{126}{1147}$.

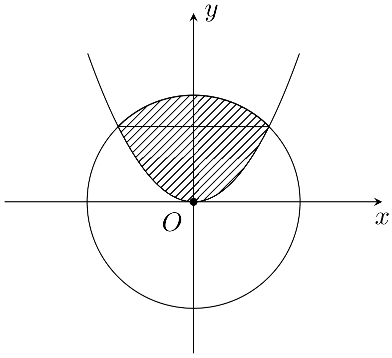
Lời giải.

Số cách rút 10 tấm thẻ là $\mathrm{C}_{40}^{10} \Rightarrow n(\Omega) = \mathrm{C}_{40}^{10}$.

Gọi A là biến cố: "lấy được 5 tấm thẻ mang số lẻ và 5 tấm thẻ mang số chẵn, trong đó có đúng một thẻ mang số chia hết cho 6 ".
Từ số 1 đến số 40 có 6 số chia hết cho 6 là: $M = \{6; 12; 18; \cdot\cdot 36\}$.
Chọn 1 số chia hết trong tập M có C_6^1 cách (số được chọn là số chẵn).
Số cách rút 4 số chẵn từ tập $\{2; 4; \ldots 40\} \setminus M$ là C_{14}^4.
Số cách rút 5 thẻ mang số lẻ C_{20}^5.
Suy ra $n(A) = \mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_{14}^4 \cdot \mathrm{C}_{20}^5$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_{14}^4 \cdot \mathrm{C}_{20}^5}{\mathrm{C}_{40}^{10}} = \dfrac{126}{1147}$.
Chọn đáp án B □

Câu 50.
Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường tròn $x^2 + y^2 = 2$ (phần tô đậm trong hình bên). Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành.

A $V = \dfrac{44\pi}{15}$. **B** $V = \dfrac{22\pi}{15}$. **C** $V = \dfrac{5\pi}{3}$. **D** $V = \dfrac{\pi}{5}$.



Lời giải.
Với $y = x^2$ thay vào phương trình đường tròn ta được $x^2 + x^4 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Hơn nữa $x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\sqrt{2 - x^2} \\ y = \sqrt{2 - x^2}. \end{array}\right.$

Thể tích cần tìm chính là thể tích vật thể tròn xoay khi cho hình phẳng $(H_1)\colon \begin{cases} y = \sqrt{2 - x^2} \\ x = -1 \\ x = 1 \\ Ox \end{cases}$ quay quanh Ox bỏ đi phần thể tích vật thể trong xoay do hình phẳng $(H_2)\colon \begin{cases} y = x^2 \\ x = -1 \\ x = 1 \\ Ox \end{cases}$ quay quanh Ox.

Do đó $V = \pi \left[\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{2 - x^2}\right)^2 \mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} (x^2)^2 \mathrm{d}x \right] = \dfrac{44\pi}{15}$.

Chọn đáp án A □

— HẾT —

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. D	3. B	4. B	5. A	6. C	7. A	8. B	9. B	10. C
11. C	12. D	13. C	14. A	15. C	16. D	17. B	18. C	19. C	20. A
21. A	22. D	23. D	24. C	25. B	26. C	27. A	28. C	29. C	30. D
31. D	32. A	33. A	34. B	35. C	36. A	37. B	38. A	39. A	40. A
41. B	42. B	43. C	44. C	45. B	46. D	47. D	48. B	49. B	50. A

14 ĐỀ THI THỬ SỐ 14-MAX8

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x^2 + 1$. B. $y = \dfrac{x}{x+1}$. C. $y = x + 1$. D. $y = x^4 + 1$.

Lời giải.

Hàm số $y = x + 1$ có $a = 1 > 0$ nên đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Số phức liên hợp của số phức $z = a + bi$ là số phức

A. $\overline{z} = -a + bi$. B. $\overline{z} = b - ai$. C. $\overline{z} = -a - bi$. D. $\overline{z} = a - bi$.

Lời giải.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n-2}{3n+1}, n \geqslant 1$. Tìm khẳng định **sai**.

A. $u_3 = \dfrac{1}{10}$. B. $u_{10} = \dfrac{8}{31}$. C. $u_{21} = \dfrac{19}{64}$. D. $u_{50} = \dfrac{47}{150}$.

Lời giải.

Ta có $u_{50} = \dfrac{50-2}{3 \cdot 50 + 1} = \dfrac{48}{151} \neq \dfrac{47}{150}$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K. Điều kiện đủ để hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K là

A. $f'(x) > 0$ với mọi $x \in K$.

B. $f'(x) > 0$ tại hữu hạn điểm thuộc khoảng K.

C. $f'(x) \leqslant 0$ với mọi $x \in K$.

D. $f'(x) \geqslant 0$ với mọi $x \in K$.

Lời giải.

Điều kiện đủ để hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K là $f'(x) > 0$ với mọi $x \in K$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba véc-tơ $\overrightarrow{a} = (1; 2; 3)$; $\overrightarrow{b} = (2; 2; -1)$; $\overrightarrow{c} = (4; 0; -4)$. Tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c}$ là

A. $\overrightarrow{d}(-7; 0; -4)$. B. $\overrightarrow{d}(-7; 0; 4)$. C. $\overrightarrow{d}(7; 0; -4)$. D. $\overrightarrow{d}(7; 0; 4)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c} = (1 - 2 + 2 \cdot 4; 2 - 2 + 2 \cdot 0; 3 + 1 + 2 \cdot (-4)) = (7; 0; -4)$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x - 3y - 4z + 1 = 0$. Khi đó, một véc-tơ pháp tuyến của (α)

A. $\overrightarrow{n} = (2; 3; -4)$. B. $\overrightarrow{n} = (2; -3; 4)$. C. $\overrightarrow{n} = (-2; 3; 4)$. D. $\overrightarrow{n} = (-2; 3; 1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x - 3y - 4z + 1 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}_0 = (2; -3; -4)$.

Nhận thấy $\overrightarrow{n} = (-2; 3; 4) = -\overrightarrow{n}_0$, hay $\overrightarrow{n}$ cùng phương với $\overrightarrow{n}_0$.

Do đó véc-tơ $\overrightarrow{n} = (-2; 3; 4)$ cũng là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

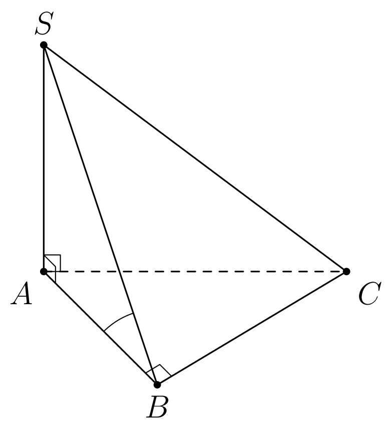
Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Cho hình chóp $SABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$, gọi I là trung điểm BC. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc nào sau đây?

(A) Góc $\widehat{SCA}$. (B) Góc $\widehat{SIA}$. (C) Góc $\widehat{SCB}$. **(D)** Góc $\widehat{SBA}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp AB \\ BC \perp SB \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{SB; AB}\right) = \widehat{SBA}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-3}{-5}$. Hỏi d đi qua điểm nào trong các điểm sau?

(A) $C(-3; 4; 5)$. (B) $D(3; -4; -5)$. (C) $B(-1; 2; -3)$. **(D)** $A(1; -2; 3)$.

Lời giải.

Đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-3}{-5}$ đi qua điểm $A(1; -2; 3)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$ là

(A) $(1; 0)$. **(B)** $(3; 4)$. (C) $(-1; 0)$. (D) $(2; 2)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 + 12x - 9$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$.

$y' < 0 \Leftrightarrow x < 1 \vee x > 3$, $y' > 0 \Leftrightarrow x \in (1; 3)$.

$\Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.

$\Rightarrow$ Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(3; 4)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là

(A) $x = 1$ và $y = -3$. (B) $x = 2$ và $y = 1$. **(C)** $x = 1$ và $y = 2$. (D) $x = -1$ và $y = 2$.

Lời giải.

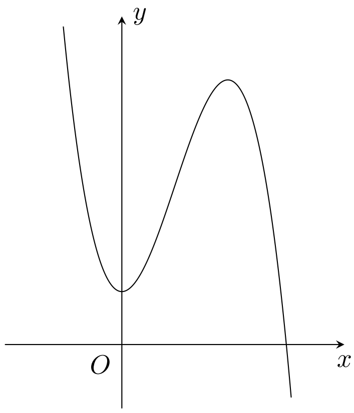
Ta có $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x-3}{x-1} = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x-3}{x-1} = +\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x-3}{x-1} = 2$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) $a < 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0$. (B) $a < 0,\ b < 0,\ c = 0,\ d > 0$.

(C) $a > 0,\ b < 0,\ c > 0,\ d > 0$. (D) $a < 0,\ b > 0,\ c = 0,\ d > 0$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty \Rightarrow a < 0$.

Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = 0 < x_2 \Rightarrow c = 0,\ b > 0$.

Và $y(0) > 0 \Rightarrow d > 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Trong một khối đa diện, mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Hai cạnh bất kỳ có ít nhất một điểm chung.

(B) Ba mặt bất kì có ít nhất một đỉnh chung.

(C) Hai mặt bất kì có ít nhất một điểm chung.

(D) Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

Lời giải.

Theo tính chất khối đa diện sgk hình học 12.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Khi tăng độ dài tất cả các cạnh của một khối hộp chữ nhật lên gấp đôi thì thể tích khối hộp tương ứng sẽ tăng lên bao nhiêu lần?

(A) 8 lần. (B) 4 lần. (C) 6 lần. (D) 2 lần.

Lời giải.

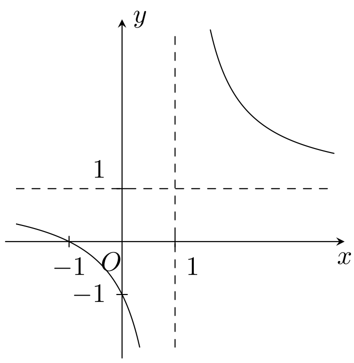
Gọi các kích thước của hình hộp chữ nhật lần lượt là $a,\ b,\ c \Rightarrow V = abc$. Tăng độ dài tất cả các cạnh lên gấp đôi thì ba kích thước tăng lên thành $2a,\ 2b,\ 2c$. Thể tích hình hộp chữ nhật sau khi tăng các kích thước là $V' = (2a)(2b)(2c) = 8abc = 8V$.

Vậy thể tích khối hộp tương ứng tăng lên 8 lần.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14.

Đồ thị sau là đồ thị của hàm số nào sau?



(A) $y = \dfrac{2x-3}{2x-2}$. (B) $y = \dfrac{x}{x-1}$.

(C) $\dfrac{x-1}{x+1}$. (D) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Lời giải.

Đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị $\Rightarrow$ loại $\dfrac{x-1}{x+1}$.

Đồ thị hàm số cắt Oy tại $y=-1 \Rightarrow$ loại $y=\dfrac{2x-3}{2x-2}$, $y=\dfrac{x}{x-1}$.

Vậy đồ thị trên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Cho khối nón có bán kính đáy $r=2$, chiều cao $h=\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón là

A $\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{3}$. B $\dfrac{4\pi}{3}$. C $\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{3}$. D $4\pi\sqrt{3}$.

Lời giải.

Khối nón có thể tích là $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h=\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án A □

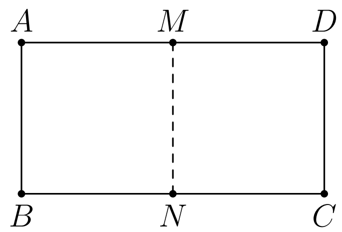
Câu 16. Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=1$, $AD=2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Tính diện tích toàn phần của hình trụ tạo thành khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục MN.

A $S_{tp}=2\pi$. B $S_{tp}=4\pi$. C $S_{tp}=6\pi$. D $S_{tp}=8\pi$.

Lời giải.

Hình trụ tạo thành có bán kính đáy $r=MD=1$ và chiều cao $h=MN=1$.

Khi đó $S_{tp}=2\pi\cdot r\cdot h+2\pi\cdot r^2=4\pi$.



Chọn đáp án B □

Câu 17. Giải phương trình $4^x+2^x-2=0$ ta được nghiệm là

A $x=0$. B $x=1$. C $x=2$. D $x=-1$.

Lời giải.

Ta có $4^x+2^x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x=1\\2^x=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow x=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(3-x)^{\frac{1}{4}}$?

A $(-\infty;3)$. B $(-\infty;-3)$. C $(3;+\infty)$. D $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có điều kiện: $3-x>0 \Leftrightarrow x<3$. Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D}=(-\infty;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Tìm hàm số $F(x)$, biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x}$ và $F(1)=1$.

A $F(x)=x\sqrt{x}$. B $F(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+\dfrac{1}{3}$.

C $F(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2}$. D $F(x)=\dfrac{3}{2}x\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $F(x)=\int\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}+C$.

$F(1)=\dfrac{2}{3}+C=1\Rightarrow C=\dfrac{1}{3}$. Vậy $F(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Tích phân $I=\int\limits_0^{2019}2^x\,\mathrm{d}x$ bằng

A 2^{2019}. **B** $\dfrac{2^{2019}}{\ln 2}$. **C** $2^{2019}-1$. **D** $\dfrac{2^{2019}-1}{\ln 2}$.

Lời giải.

Ta có $I=\int\limits_0^{2019}2^x\,\mathrm{d}x=\left.\dfrac{2^x}{\ln 2}\right|_0^{2019}=\dfrac{2^{2019}-1}{\ln 2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Cho số phức $z_1=1+7i$; $z_2=3-4i$. Tính mô-đun của số phức z_1+z_2.

A $|z_1+z_2|=\sqrt{5}$. **B** $|z_1+z_2|=2\sqrt{5}$. **C** $|z_1+z_2|=25\sqrt{2}$. **D** $|z_1+z_2|=5$.

Lời giải.

Ta có: $z_1+z_2=4+3i\Rightarrow|z_1+z_2|=5$.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-3$, công bội $q=-2$. Hỏi -192 là số hạng thứ mấy của (u_n)?

A Số hạng thứ 6. **B** Số hạng thứ 7. **C** Số hạng thứ 5. **D** Số hạng thứ 8.

Lời giải.

Do dãy số (u_n) là cấp số nhân nên $u_n=u_1\cdot q^{n-1}\Rightarrow -192=-3\cdot(-2)^{n-1}\Leftrightarrow n-1=6\Leftrightarrow n=7$.

Do đó -192 là số hạng thứ 7 của (u_n).

Chọn đáp án B □

Câu 23. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^2x-4\sin x-5$.

A -20. **B** -8. **C** -9. **D** 0.

Lời giải.

Đặt $t=\sin x$, $t\in[-1;1]$. Xét $f(t)=t^2-4t-5$, $t\in[-1;1]$.

$f'(t)=2t-4=0\Leftrightarrow t=2\notin[-1;1]$.

$f(1)=-8$, $f(-1)=0$.

Ta thấy $\min\limits_{[-1;1]}f(t)=f(1)=-8$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là -8.

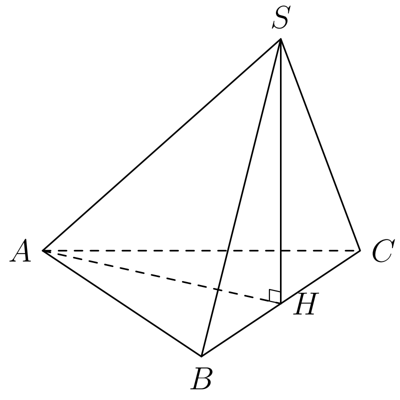
Chọn đáp án B □

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC).

A 45°. **B** 75°. **C** 60°. **D** 30°.

Lời giải.

Hai tam giác SBC, ABC là tam giác đều cạnh a, suy ra $SH = HA$.
$\Rightarrow \triangle SAH$ vuông cân tại $H \Rightarrow \left(\widehat{SA,(ABC)}\right) = \widehat{SAH} = 45^\circ$.



Chọn đáp án A ☐

Câu 25. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = 3x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 - mx + 1$ tại ba điểm phân biệt.

A $(-4; +\infty) \setminus \{-3\}$. B $(-7; +\infty)$. C $(-4; +\infty)$. D $(-7; +\infty) \setminus \{-3\}$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^3+2x^2-mx+1 = 3x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ g(x) = x^2 + 2x - m - 3 = 0. \end{array}\right.$

YCBT $\Leftrightarrow g(x)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m + 4 > 0 \\ g(0) = -m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -4 \\ m \neq -3. \end{cases}$

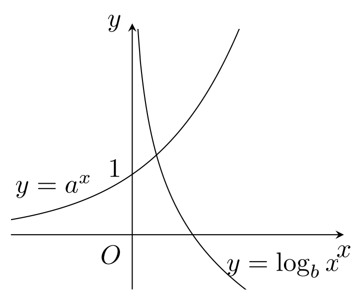
Vậy $m \in (-4; +\infty) \setminus \{-3\}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 26.

Cho $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$. Đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = \log_b x$ được xác định như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A $a > 1$, $b > 1$. B $a > 1$, $0 < b < 1$.
C $0 < a < 1$, $b > 1$. D $0 < a < 1$, $0 < b < 1$.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = a^x \Rightarrow a > 1$;
và từ đồ thị hàm số $y = \log_b x \Rightarrow 0 < b < 1$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 27. Đạo hàm của hàm số $y = \log_2 (1 + \sqrt{x})$.

A $y' = \dfrac{1}{(1 + \sqrt{x}) \cdot \ln 2}$. B $y' = \dfrac{\ln 2}{2\sqrt{x} \cdot (1 + \sqrt{x})}$.

C $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x} \cdot (1 + \sqrt{x}) \cdot \ln 4}$. D $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x} \cdot (1 + \sqrt{x}) \cdot \ln 2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{1}{(1 + \sqrt{x}) \cdot \ln 2} (1 + \sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x} \cdot (1 + \sqrt{x}) \cdot \ln 2} = \dfrac{1}{\sqrt{x} \cdot (1 + \sqrt{x}) \cdot \ln 4}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 28. Đặt $\ln 2 = a$, $\log_5 4 = b$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A $\ln 100 = \dfrac{ab+2a}{b}$.

B $\ln 100 = \dfrac{4ab+2a}{b}$.

C $\ln 100 = \dfrac{ab+a}{b}$.

D $\ln 100 = \dfrac{2ab+4a}{b}$.

Lời giải.

Có $\log_5 4 = b \Leftrightarrow \dfrac{2\ln 2}{\ln 5} = b \Leftrightarrow \ln 5 = \dfrac{2a}{b}$.

Khi đó: $\ln 100 = 2\ln 10 = 2(\ln 2 + \ln 5) = 2\left(a + \dfrac{2a}{b}\right) = \dfrac{2ab+4a}{b}$.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Biết $S = [a;b]$ là tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{x^2-x} \geqslant \left(\dfrac{1}{6}\right)^{x+3}$ (với $a, b \in \mathbb{R}$ và $a < b$). Khi đó hiệu $b - a$ bằng bao nhiêu?

A -4. **B** 4. **C** 2. **D** không xác định.

Lời giải.

BPT $\Leftrightarrow x^2 - x \leqslant x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \leqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 3 \Rightarrow S = [-1;3] \Rightarrow b - a = 4$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Số phức z thỏa mãn: $\overline{z} = \dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^3}{1-i}$. Tìm mô-đun của $\overline{z} + iz$.

A $4\sqrt{2}$. **B** 4. **C** $8\sqrt{2}$. **D** 8.

Lời giải.

Ta có

- $\overline{z} = \dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^3}{1-i} \Leftrightarrow \overline{z} = -4 - 4i \Rightarrow z = -4 + 4i$.
- $iz = i(-4+4i) = -4 - 4i$.
- $\overline{z} + iz = -4 - 4i + (-4 - 4i) = -8 - 8i$.

Vậy $|\overline{z} + iz| = \sqrt{(-8)^2 + (-8)^2} = 8\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Cho số phức z thỏa mãn $(3+2i)z + (2-i)^2 = 4 + i$. Hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là

A 3. **B** 2. **C** 1. **D** 0.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(3+2i)z + (2-i)^2 = 4 + i \quad &\Leftrightarrow \quad (3+2i)z = 4 + i - (2-i)^2 \Leftrightarrow (3+2i)z = 1 + 5i \Leftrightarrow z = \frac{1+5i}{3+2i} \\ &\Leftrightarrow \quad z = 1 + i.\end{aligned}$$

Vậy phần thực của số phức z là 1, phần ảo của số phức z là 1.

Do đó, hiệu phần thực và phần ảo của số phức z bằng 0.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Anh sinh viên A, sau khi ra trường, mong muốn rằng sau một năm sẽ có hơn 60 triệu đồng để mua xe. Hàng tháng anh A phải gửi vào ngân hàng một số tiền như nhau là m. Hỏi m nhỏ nhất là bao nhiêu?(làm tròn đến nghìn đồng). Biết rằng lãi suất ngân hàng là 0,6 %/tháng và hàng tháng số tiền lãi được nhập vào gốc.

A 4 809 000 đồng. **B** 4 808 000 đồng. **C** 4 812 000 đồng. **D** 4 890 000 đồng.

Lời giải.

Gọi T_n là số tiền anh A có được sau n tháng, $n \in \mathbb{N}$.

Gọi $r(\%)$ là lãi suất của ngân hàng, $r > 0$.

Gọi m là số tiền hàng tháng anh A gửi vào ngân hàng, m không đổi, $m > 0$.

Đến cuối tháng thứ nhất, anh A có số tiền là $T_1 = m + m \cdot r = m(1+r)$.

Đến cuối tháng thứ hai, anh A có số tiền là

$$\begin{aligned} T_2 &= (T_1 + m)(1+r) \\ &= m(1+r) + m + [m(1+r)+m]r \\ &= m[(1+r)^2 + (1+r)] \\ &= m\frac{(1+r)^3 - (1+r)}{r}. \end{aligned}$$

Đến cuối tháng thứ ba, anh A có số tiền là $T_3 = (T_2 + m)(1+r) = m\dfrac{(1+r)^4 - (1+r)}{r}$.

Tổng quát, đến cuối tháng thứ n, anh A có số tiền là $T_n = m\dfrac{(1+r)^{n+1} - (1+r)}{r}$.

Để sau 1 năm, anh A có số tiền hơn 60 triệu đồng thì phải có

$$T_{12} = m\frac{(1+r)^{13} - (1+r)}{r} > 60 \Leftrightarrow m > \frac{60 \cdot r}{(1+r)^{13} - (1+r)} = \frac{60 \cdot 0{,}6\%}{(1+0{,}6\%)^{13} - (1+0{,}6\%)} \approx 4{,}808300.$$

Vậy anh A cần gửi vào ngân hàng mỗi tháng nhiều hơn 4 809 000 đồng.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ và các trục tọa độ bằng

A $2\ln\dfrac{3}{2} - 1$. **B** $5\ln\dfrac{3}{2} - 1$. **C** $3\ln\dfrac{3}{2} - 1$. **D** $3\ln\dfrac{5}{2} - 1$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ và trục hoành

$$\frac{x+1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \neq 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

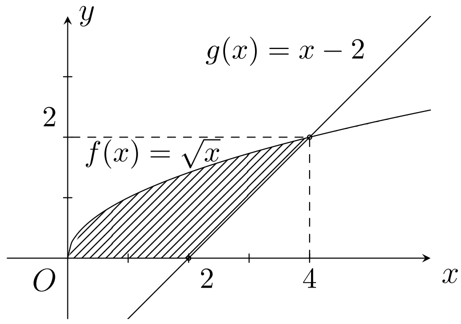
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ và các trục tọa độ là

$$S = \int_{-1}^{0} \left|\frac{x+1}{x-2}\right| \mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} \frac{x+1}{x-2}\, \mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} \left(1 + \frac{3}{x-2}\right) \mathrm{d}x = -\left(x + 3\ln|x-2|\right)\Big|_{-1}^{0}$$
$$= -1 - 3\ln\frac{2}{3} = 3\ln\frac{3}{2} - 1.$$

Chọn đáp án C □

Câu 34.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ và trục hoành (hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A $\dfrac{10}{3}$. **B** $\dfrac{16}{3}$. **C** $\dfrac{7}{3}$. **D** $\dfrac{8}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ và $y = x - 2$ là

$$\sqrt{x} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Diện tích hình phẳng (H) là

$$S = \int_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int_2^4 \left|\sqrt{x} - (x-2)\right|\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int_2^4 \left(\sqrt{x} - x + 2\right)\mathrm{d}x$$
$$= \left.\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^2 + \left.\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\right|_2^4 = \frac{10}{3}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 35. Tìm các giá trị của tham số thực m để biểu thức $f(x) = x^2 + (m+1)x + 2m + 7 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

A $m \in [2; 6]$. **B** $m \in (-3; 9)$.

C $m \in (-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$. **D** $m \in (-9; 3)$.

Lời giải.

Biểu thức $f(x) = x^2 + (m+1)x + 2m + 7 > 0$ có hệ số của x^2 bằng $1 > 0$ nên yêu cầu bài toán thỏa mãn khi

$$(m+1)^2 - 4(2m+7) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 27 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 9.$$

Vậy $m \in (-3; 9)$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm hai chữ số?

A 13. **B** 49. **C** 36. **D** 42.

Lời giải.

Gọi số cần lập có dạng $\overline{ab}$, trong đó $a, b \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Chữ số a có 6 cách chọn (vì $a \neq 0$).

Chữ số b có 7 cách chọn.

Theo quy tắc nhân ta có số các số có hai chữ số lập được là $6 \cdot 7 = 42$ số.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $\int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}$. Hãy tính giá trị của $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\cdot f'(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I=\frac{1}{3}$. (B) $I=-\frac{2}{3}$. (C) $I=\frac{4}{3}$. (D) $I=\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Đặt $\sin x=t$. Khi đó $f(\sin x)=f(t)$, suy ra $\cos x\cdot f'(\sin x)\,\mathrm{d}x=f'(t)\,\mathrm{d}t$.

Khi $x=0$ thì $t=0$; khi $x=\frac{\pi}{2}$ thì $t=1$. Do đó,

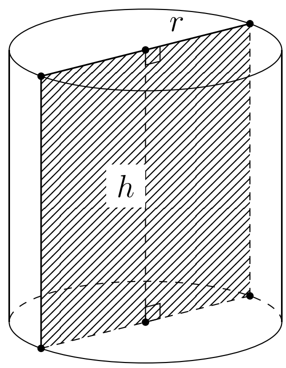
$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\cdot f'(\sin x)\,\mathrm{d}x=2\int\limits_0^1 t\cdot f'(t)\,\mathrm{d}t=2tf(t)\Big|_0^1-2\int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=2f(1)-2\int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{4}{3}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 16π và thiết diện qua trục của hình trụ này là một hình vuông. Thể tích V của khối trụ đó bằng bao nhiêu?

(A) $32\sqrt{2}\pi$. (B) 18π. (C) 16π. (D) 24π.

Lời giải.



Gọi r, h, ℓ lần lượt là bán kính đường tròn đáy, chiều cao, độ dài đường sinh của hình trụ.

Vì thiết diện qua trục của hình trụ là một hình vuông nên $h=\ell=2r$.

Theo giả thiết, diện tích xung quanh của hình trụ bằng 16π nên

$$2\pi r\ell=16\pi\Leftrightarrow 2\pi\cdot 2r^2=16\pi\Leftrightarrow r^2=4\Rightarrow r=2.$$

Thể tích của khối trụ đó là $V=\pi r^2\cdot h=\pi\cdot r^2\cdot 2r=\pi\cdot 2^2\cdot 2\cdot 2=16\pi$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $2x+y-3z+1=0$. Tìm một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$ của (P).

(A) $\vec{n}=(-4;2;6)$. (B) $\vec{n}=(2;1;3)$. (C) $\vec{n}=(-6;-3;9)$. (D) $\vec{n}=(6;-3;-9)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-3z+1=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{a}=(2;1;-3)$.

Cho nên véc-tơ $\vec{n}=-3\vec{a}=(-6;-3;9)$ cũng là véc-tơ pháp tuyến của (P).

Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1;3;2)$, $B(2;0;5)$, $C(0;-2;1)$. Viết phương trình đường trung tuyến AM của tam giác ABC.

(A) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-2}{1}$. (B) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+2}{1}$.

(C) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z+2}{-1}$. (D) $\frac{x-2}{1}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z+1}{3}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC. Khi đó $M(1;-1;3)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=(2;-4;1)$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AM.

Phương trình của đường thẳng AM là $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-2}{1}$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(0;1;1)$, $C(1;0;-2)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z+2=0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho giá trị của biểu thức $T=MA^2+2MB^2+3MC^2$ nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(Q)\colon 2x-y-2z+3=0$.

A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. B. $\dfrac{121}{54}$. C. 24. D. $\dfrac{91}{54}$.

Lời giải.

Gọi $I(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(1-a;2-b;3-c)$, $\overrightarrow{IB}=(-a;1-b;1-c)$, $\overrightarrow{IC}=(1-a;-b;-2-c)$. Khi đó

$$\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}1-a-2a+3-3a=0\\2-b+2-2b-3b=0\\3-c+2-2c-6-3c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6a=4\\6b=4\\6c=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2}{3}\\b=\dfrac{2}{3}\\c=-\dfrac{1}{6}.\end{cases}$$

Vậy $I\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{6}\right)$.

Ta chứng minh được $T=6MI^2+IA^2+2IB^2+3IC^2$. Do đó T đạt giá trị nhỏ nhất khi MI đạt giá trị nhỏ nhất hay M là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P).

Phương trình đường thẳng MI đi qua I và vuông góc với (P) là $\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}+t\\y=\dfrac{2}{3}+t\\z=-\dfrac{1}{6}+t.\end{cases}$

Gọi $M\left(t+\dfrac{2}{3};t+\dfrac{2}{3};t-\dfrac{1}{6}\right)$, vì $M\in(P)$ nên $3t+\dfrac{19}{6}=0$, suy 4a $t=-\dfrac{19}{18}$.

Do đó $M\left(-\dfrac{7}{18};-\dfrac{7}{18};-\dfrac{11}{9}\right)$.

Vậy $\mathrm{d}(M,(Q))=\dfrac{\left|-\dfrac{7}{9}+\dfrac{7}{18}+\dfrac{22}{9}+3\right|}{3}=\dfrac{91}{54}$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$, đường thẳng $d\colon\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+2z+1=0$. Điểm B thuộc mặt phẳng (P) thỏa mãn đường thẳng AB vuông góc và cắt đường thẳng d. Tọa độ điểm B là

A. $(6;-7;0)$. B. $(3;-2;1)$. C. $(-3;8;-3)$. D. $(0;3;-2)$.

Lời giải.

Ta gọi AB cắt d tại điểm $M(1+2m;-1+m;2-m) \in d$.
$\overrightarrow{AM} = (2m; m-3; 3-m)$, theo yêu cầu bài toán AB vuông góc d, ta có

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u_d} = 0 \Rightarrow 2 \cdot 2m + m - 3 + m - 3 = 0 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2;-2;2).$$

Đường thẳng AB đi qua A nhận $\vec{u} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AM} = (1;-1;1)$ là véc-tơ chỉ phương, ta có phương trình AB là

$$AB\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1}.$$

Gọi $B(1+t;2-t;-1+t) \in AB$. Lại có điểm $B \in (P)$ nên

$$1+t+2-t+2(-1+t)+1 = 0 \Rightarrow t = -1.$$

Vậy $B(0;3;-2)$.
Chọn đáp án D □

Câu 43. Trong một trò chơi điện tử, xác suất để game thủ thắng trong một trận là 0,4 (không có hòa). Hỏi phải chơi tối thiểu bao nhiêu trận để xác suất thắng ít nhất một trận trong loạt chơi đó lớn hơn 0,95?

A 6. **B** 7. **C** 4. **D** 5.

Lời giải.
Gọi A_1 là biến cố thắng trận 1 thì $\overline{A_1}$ là biến cố thua trận 1.
Xác suất để thua n trận là $\mathrm{P}\left(\overline{A_1}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{A_2}\right) \cdots \mathrm{P}\left(\overline{A_n}\right) = (0{,}6)^n$.
Vậy xác suất để thắng ít nhất 1 trận là

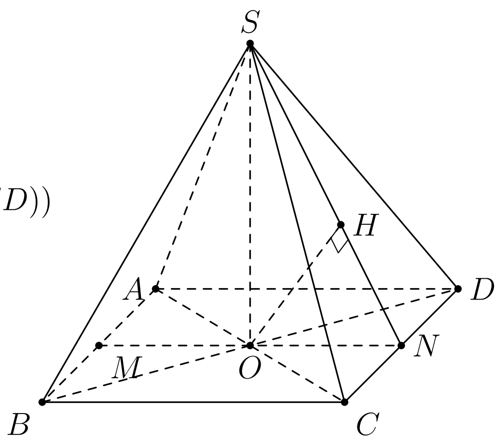
$$1-(0{,}6)^n > 0{,}95 \Leftrightarrow (0{,}6)^n < 0{,}05 \Leftrightarrow n > \log_{0{,}6} 0{,}05 \approx 5{,}8.$$

Vậy chơi tối thiểu 6 ván.
Chọn đáp án A □

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

A $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{15}$. **D** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD;
H là hình chiếu vuông góc của O trên SN.
Vì $AB \,/\!/\, CD$ nên $AB \,/\!/\, (SCD)$. Do đó

$$\mathrm{d}(AB, SC) = \mathrm{d}(AB,(SCD)) = \mathrm{d}(M,(SCD)) = 2\mathrm{d}(O,(SCD))$$

(vì O là trung điểm đoạn MN).
Ta có $CD \perp SO$ và $CD \perp ON$ nên $CD \perp (SON)$, suy ra $CD \perp OH$.
Khi đó $CD \perp OH$ và $OH \perp SN$ nên $OH \perp (SCD)$.
Suy ra $\mathrm{d}(O,(SCD)) = OH$.

Tam giác SON vuông tại O nên $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{ON^2}+\dfrac{1}{OS^2}=\dfrac{1}{\frac{a^2}{4}}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{5}{a^2}$, suy ra $OH=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

Vậy $\mathrm{d}(AB,SC)=2OH=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-1}$ (với m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A $3<m\le 4$. **B** $1\le m<3$. **C** $m>4$. **D** $m<-1$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-\dfrac{m+1}{(x-1)^2}$.

- Với $m>-1$ thì $y'=-\dfrac{m+1}{(x-1)^2}<0,\forall x\neq 1$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng xác định. Khi đó $\min\limits_{[2;4]} y=f(4)=\dfrac{m+4}{3}=3$, suy ra $m=5$ (nhận).
- Với $m<-1$ suy ra $y'=-\dfrac{m+1}{(x-1)^2}>0,\forall x\neq 1$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định. Khi đó $\min\limits_{[2;4]} y=f(2)=m+2=3$, suy ra $m=1$ (loại).

Vậy $m=5$ là giá trị cần tìm và thỏa mãn điều kiện $m>4$.

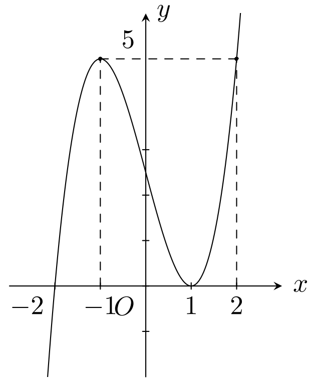
Chọn đáp án C □

Câu 46.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên.

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-x-2}{f^2(x)-5f(x)}$ là

A 3. **B** 4. **C** 1. **D** 2.



Lời giải.

Ta có

$$f^2(x)-5f(x)=0\Leftrightarrow f(x)\left[f(x)-5\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f(x)=0\\ f(x)=5\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=1\\ x=-1\\ x=2.\end{array}\right.$$

Trong đó $x=1$ và $x=-1$ là các nghiệm bội 2.

Lại có $x^2-x-2=0$ có hai nghiệm phân biệt $x=-1$, $x=2$.

Như vậy rút gọn biểu thức $y=\dfrac{x^2-x-2}{f^2(x)-5f(x)}$ chỉ còn ba nghiệm dưới mẫu thức là $x=1$, $x=-2$, $x=-1$.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận đứng $x=1$, $x=-2$, $x=-1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. V có giá trị gần nhất với giá trị nào sau đây?

(A) 550. (B) 400. (C) 670. **(D) 335.**

Lời giải.

Quay elip đã cho xung quanh trục hoành chính là quay hình phẳng

$$H=\left\{y=4\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}, y=0, -5\le x\le 5\right\}.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi H khi quay xung quanh trục hoành là

$$V=\pi\int\limits_{-5}^{5}\left(16-\frac{16x^2}{25}\right)\mathrm{d}x=\pi\left(16x-\frac{16x^3}{75}\right)\Big|_{-5}^{5}=\frac{320\pi}{3}\approx 335{,}1.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Xét số phức z thỏa mãn $|z+1+i|=|\overline{z}-4i+2|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z-2i+1|$.

(A) $\frac{7\sqrt{10}}{5}$. (B) $\frac{102}{5}$. (C) $\frac{98}{5}$. (D) $\frac{\sqrt{470}}{5}$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R}, i^2=-1)$.

Ta có

$$|z+1+i|=|\overline{z}-4i+2|\Leftrightarrow(a+1)^2+(b+1)^2=(a+2)^2+(b+4)^2\Leftrightarrow a=-9-3b.$$

Khi đó

$$|z-2i+1|=\sqrt{(-8-3b)^2+(b-2)^2}=\sqrt{10b^2+44b+68}=\sqrt{10\left(b+\frac{11}{5}\right)^2+\frac{98}{5}}.$$

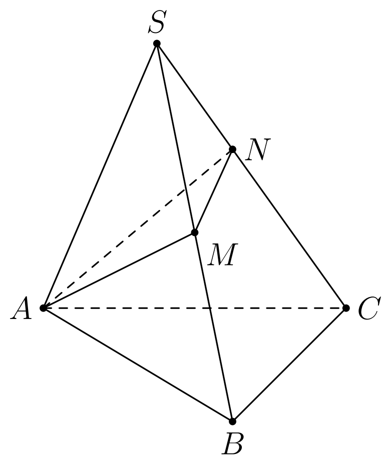
Do đó $\min|z-2i+1|=\sqrt{\frac{98}{5}}=\frac{7\sqrt{10}}{5}$ đạt được khi $b=-\frac{11}{5}$, $a=-\frac{12}{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=a$, $SB=2a$, $SC=4a$ và $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}=60^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

(A) $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. (B) $\frac{8a^3\sqrt{2}}{3}$. (C) $\frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. **(D) $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.**

Lời giải.



Gọi $M \in SB$, $N \in SC$ sao cho $SA = SM = SN = a$.
Ta có $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60^\circ$ nên các tam giác SAM, SMN, SNA, AMN là các tam giác đều cạnh a.
Dễ dàng tính được $V_{S.AMN} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.
Lại có $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$.
Vậy $V_{S.ABC} = 8V_{S.AMN} = 8 \cdot \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = m^2x^4 - 2(4m-1)x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 7. B. 16. C. 15. D. 6.

Lời giải.
Đặt $t = x^2$.
Hàm số đã cho đồng biến trên $(1; +\infty)$ khi hàm số $y = m^2t^2 - 2(4m-1)t + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$, tức là

$$y' = 2m^2t - 2(4m-1) \geq 0, \forall t > 1 \qquad (*)$$

Xét 2 trường hợp

- $m = 0$ thì $y' = 2 > 0$, thỏa mãn.
- $m \neq 0$.
  Khi đó vế trái của $(*)$ là hàm bậc nhất. Do đó $(*)$ chỉ thỏa mãn khi

$$\begin{cases} m^2 > 0 \\ 2m^2 \cdot 1 - 2(4m-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; 2-\sqrt{3}\right] \cup \left[2+\sqrt{3}; +\infty\right).$$

Vậy với $m \in (-10; 10)$ thì có tất cả 16 giá trị nguyên của m.
Chọn đáp án B □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. D	3. D	4. A	5. C	6. C	7. D	8. D	9. B	10. C
11. D	12. D	13. A	14. D	15. A	16. B	17. A	18. A	19. B	20. D
21. D	22. B	23. B	24. A	25. A	26. B	27. C	28. D	29. B	30. C
31. D	32. A	33. C	34. A	35. B	36. D	37. C	38. C	39. C	40. A
41. D	42. D	43. A	44. D	45. C	46. A	47. D	48. A	49. D	50. B

15 ĐỀ THI THỬ SỐ 15-MAX8

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-5}$ là

(A) 0. (B) 1. **(C) 2.** (D) 3.

Lời giải.

Đồ thị có 1 TCĐ là $x = 5$ và 1 TCN là $y = 2$.

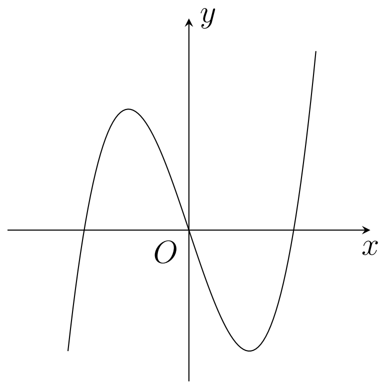
Chọn đáp án (C) □

Câu 2.

Đường cong bên dưới là đồ thị của hàm số nào sau đây?

(A) $y = x^3 + 3x$. (B) $y = x^3 - 3x - 1$.

(C) $y = x^3 - 3x$. (D) $y = x^3 - 3x + 1$.



Lời giải.

Hàm số $y = x^3 + 3x$ có $y' = 3x^2 + 3 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ (loại).

Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x - 1$ đi qua điểm $(0; -1)$ (loại).

Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ đi qua điểm $(0; 1)$ (loại).

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng 2 thuộc đồ thị hàm số có phương trình là

(A) $y = -8x + 17$. (B) $y = 8x - 16$. (C) $y = 8x + 15$. **(D) $y = 8x - 15$.**

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 4$, suy ra $y'(2) = 8$. Vậy tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 2 thuộc đồ thị hàm số có phương trình là

$$y = y'(2)(x-2) + y(2) \Leftrightarrow y = 8(x-2) + 1 \Leftrightarrow y = 8x - 15.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Cho a là số thực dương và khác 1, tính giá trị biểu thức $P = \log_{\sqrt[3]{a}} \left(\dfrac{1}{a^3}\right)$.

(A) $P = -9$. (B) $P = -1$. (C) $P = 1$. (D) $P = 9$.

Lời giải.

Ta có $P = \log_{a^{\frac{1}{3}}} (a^{-3}) = \dfrac{-3}{\frac{1}{3}} \log_a a = -9 \times 1 = -9$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Phương trình $3^{2x+1} - 28 \cdot 3^x + 9 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 với $x_1 < x_2$. Giá trị của $x_1 - 2x_2$ bằng

(A) -3. (B) 0. (C) 4. **(D)** -5.

Lời giải.

Ta có

$$3^{2x+1} - 28 \cdot 3^x + 9 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (3^x)^2 - 28 \cdot 3^x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &3^x = 9 \\ &3^x = \frac{1}{3} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 2 \\ &x = -1. \end{aligned}\right.$$

Do đó $x_1 = -1$ và $x_2 = 2$, suy ra $x_1 - 2x_2 = -1 - 2 \times 2 = -5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Cho bất phương trình $\log_2(9 - x) \leqslant 3$. Số nghiệm nguyên của bất phương trình là

(A) 7. (B) 6. **(C)** 8. (D) 9.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$0 < 9 - x \leqslant 8 \Leftrightarrow 1 \leqslant x < 9.$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.Vậy có 8 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

(A) $x^3 + \cos x + C$. (B) $x^3 + \sin x + C$. **(C)** $x^3 - \cos x + C$. (D) $3x^3 - \sin x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int \left(3x^2 + \sin x\right) \mathrm{d}x = x^3 - \cos x + C$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức

(A) $S = \int\limits_a^b [f(x) - g(x)] \, \mathrm{d}x$. (B) $S = \int\limits_a^b [g(x) - f(x)] \, \mathrm{d}x$.

(C) $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$. (D) $S = \left| \int\limits_a^b [f(x) - g(x)] \, \mathrm{d}x \right|$.

Lời giải.

Theo lý thuyết thì $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + i)z = 3 - i$. Phần ảo của z bằng

(A) 2. **(B)** -2. (C) 1. (D) -1.

Lời giải.

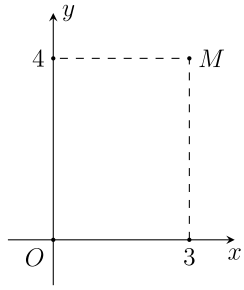
Ta có $(1 + i)z = 3 - i \Leftrightarrow z = \dfrac{3 - i}{1 + i} \Leftrightarrow z = \dfrac{(3 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} \Leftrightarrow z = 1 - 2i$.

Vậy phần ảo của số phức z bằng -2.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.



(A) Phần thực bằng 4 và phần ảo bằng 3.
(B) Phần thực bằng 4 và phần ảo bằng $3i$.
(C) Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4.
(D) Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $4i$.

Lời giải.

Từ hình vẽ ta có $M(3;4)$ nên $z = 3 + 4i$. Vậy Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Lăng trụ đều là lăng trụ

(A) Có tất cả các cạnh bằng nhau.
(B) Có đáy là tam giác đều và các cạnh bên vuông góc với đáy.
(C) Đứng và có đáy là đa giác đều.
(D) Có đáy là tam giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Lời giải.

Theo định nghĩa: Lăng trụ đều là lăng trụ đứng và có đáy là đa giác đều.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau đây?

(A) Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song hoặc trùng với mặt phẳng (Q).
(B) Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì đường thẳng a song song với đường thẳng b.
(C) Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì đường thẳng a song song hoặc trùng với đường thẳng b.
(D) Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.

Lời giải.

Theo định nghĩa: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{1} = 1$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ pháp tuyến của (P)?

(A) $\vec{n} = (2;3;6)$. (B) $\vec{n} = \left(1;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right)$. (C) $\vec{n} = (3;2;1)$. (D) $\vec{n} = (6;3;2)$.

Lời giải.

Ta viết phương trình của mặt phẳng (P) dưới dạng tổng quát

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow 2x + 3y + 6z - 6 = 0.$$

Suy ra $\vec{n} = (2; 3; 6)$ là véc-tơ pháp tuyến của (P).

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; -4; 2)$, $B(1; 0; 2)$. Trung điểm M của đoạn AB có tọa độ là

(A) $M(1; 2; 0)$. **B** $M(0; -2; 2)$. (C) $M(0; -1; 1)$. (D) $M(2; 4; 0)$.

Lời giải.

Giả sử $M(x_M; y_M; z_M)$. Ta có $\begin{cases} x_M = \dfrac{-1+1}{2} = 0 \\ y_M = \dfrac{-4+0}{2} = -2 \\ z_M = \dfrac{2+2}{2} = 2 \end{cases}$. Vậy $M(0; -2; 2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Tính thể tích V khối trụ có bán kính đáy bằng 2, chiều cao bằng 3.

(A) 4π. (B) 18π. **C** 12π. (D) 6π.

Lời giải.

Ta có $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 12\pi$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Tập xác định của hàm số $y = -\tan x$ là

A $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. (B) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(C) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. (D) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Hàm số $y = -\tan x$ xác định khi và chỉ khi $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Vậy $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Với k và n là hai số nguyên dương tùy ý thỏa mãn $k \leqslant n$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) $\mathrm{P}_n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. (B) $\mathrm{P}_n = (n-k)!$. (C) $\mathrm{P}_n = \dfrac{n!}{k!}$. **D** $\mathrm{P}_n = n!$.

Lời giải.

Theo sách giáo khoa: $\mathrm{P}_n = n!$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Dãy số nào sau đây lập thành cấp số nhân?

(A) $1; 3; 5; 7; \ldots$. (B) $2; 4; 6; 8; \ldots$. (C) $1; 4; 9; 16; \ldots$. **D** $3; 6; 12; 24; \ldots$.

Lời giải.

Ta thấy $3; 6; 12; 24; \ldots$ là cấp số nhân vì có thương hai số hạng liên tiếp luôn bằng $\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Phép biến hình nào sau đây **không** phải là một phép dời hình?

A Phép vị tự. (B) Phép tịnh tiến.

(C) Phép quay. (D) Phép đối xứng tâm.

Lời giải.

Theo định nghĩa sách giáo khoa: Phép vị tự là một phép đồng dạng.
Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = \tan x$. (B) $y = x^4 + 2$. **C** $y = x^3 - 2019$. (D) $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$.

Lời giải.
Kiểm tra từng hàm số , ta thấy $y = x^3 - 2019$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Tập hợp tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + (m+6)x - m$ có điểm cực trị là

A $(-\infty; -3) \cup (6; +\infty)$. (B) $(-\infty; -6) \cup (3; +\infty)$.
(C) $(-\infty; -3] \cup [6; +\infty)$. (D) $(-\infty; -6] \cup [3; +\infty)$.

Lời giải.
Ta có $y' = 3x^2 - 2mx + m + 6 = 0$. Hàm số có điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt, tức là

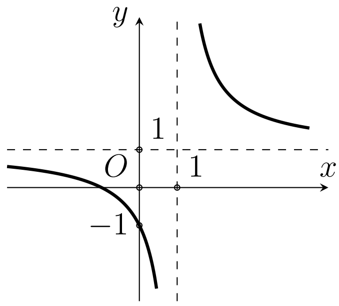
$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 3(m+6) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 18 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 6. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 22.

Hình vẽ cho ở hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

(A) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. (B) $y = \dfrac{3-x}{x-1}$. **C** $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. (D) $y = \dfrac{x-2}{x-1}$.

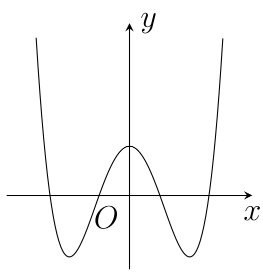


Lời giải.
Đồ thị đã cho có tiệm cận đứng là $x = 1$ và tiệm cận ngang là $y = 1$. Do đó ta loại được các phương án A và B.
Mặt khác, dễ thấy hàm số cho ở phương án D nghịch biến trên từng khoảng xác định. Ta loại thêm được phương án D.
Chọn đáp án (C) □

Câu 23.

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên.Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A $a > 0, b < 0, c > 0$. (B) $a > 0, b < 0, c < 0$.
(C) $a > 0, b > 0, c < 0$. (D) $a < 0, b > 0, c < 0$.



Lời giải.

Từ đồ thị suy ra $a > 0$, $ab < 0$ hay $a > 0$, $b < 0$. Mặt khác, đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $c > 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Tìm tất cả những giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2mx + 9)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

(A) $m < 3$. (B) $\left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 3 \end{array}\right.$. (C) $m = 3$. **D** $-3 < m < 3$.

Lời giải.

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $x^2 - 2mx + 9 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 3.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Một người gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7%/ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Để có được số tiền là 250 triệu thì người đó cần gửi trong khoảng thời gian ít nhất bao nhiêu năm? (nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi).

(A) 12 năm. (B) 13 năm. **C** 14 năm. (D) 15 năm.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính $A = a(1 + r)^n$ (A là số tiền gởi sau n năm, a là số tiền gởi ban đầu, r là lãi suất), ta có

$$250 = 100(1 + 0,07)^n \Leftrightarrow 1,07^n = 2,5 \Leftrightarrow n = \log_{1,07} 2,5 = 13,542.$$

Vì n là số nguyên nên ta chọn $n = 14$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Cho $\displaystyle\int 2x(3x-2)^6\,\mathrm{d}x = A(3x-2)^8 + B(3x-2)^7 + C$ với A, $B \in \mathbb{Q}$ và $C \in \mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $12A + 7B$ bằng

(A) $\dfrac{23}{252}$. (B) $\dfrac{241}{252}$. (C) $\dfrac{52}{9}$. **D** $\dfrac{7}{9}$.

Lời giải.

Đặt $t = 3x - 2 \Rightarrow x = \dfrac{t+2}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{3}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

Ta có

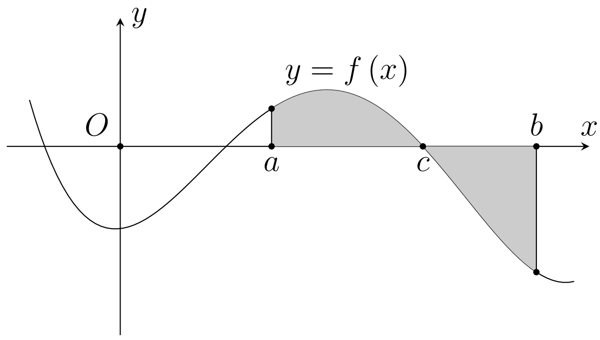
$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}\int \frac{t+2}{3} \cdot t^6\,\mathrm{d}t = \frac{2}{9}\int (t^7 + 2t^6)\,\mathrm{d}t \\ = {} & \frac{2}{9} \cdot \frac{t^8}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{t^7}{7} + C = \frac{1}{36} \cdot (3x-2)^8 + \frac{4}{63} \cdot (3x-2)^7 + C. \end{aligned}$$

Suy ra $A = \dfrac{1}{36}$, $B = \dfrac{4}{63}$. Vậy $12A + 7B = 12 \cdot \dfrac{1}{36} + 7 \cdot \dfrac{4}{63} = \dfrac{7}{9}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ có đồ thị như hình bên và $c \in [a;b]$. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (phần tô đậm như ở hình bên). Mệnh đề nào sau đây sai?



A $S = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

B $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

C $S = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

D $S = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [a;c]$ và $f(x) \leqslant 0$, $\forall x \in [c;b]$ nên diện tích hình phẳng là

$$S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Suy ra các phương án A, B, C đúng. Phương án còn lại sai.

Chọn đáp án D □

Câu 28. Cho số phức z thỏa mãn $z(1-2i) + \overline{z} \cdot i = 15 + i$. Mô-đun của z bằng

A 4. **B** $2\sqrt{5}$. **C** 5. **D** $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned}
& (x+yi)(1-2i) + (x-yi)i = 15 + i \\
\Leftrightarrow\ & x + 2y + yi - 2xi + xi + y = 15 + i \\
\Leftrightarrow\ & x + 3y + (y-x)i = 15 + i \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x + 3y = 15 \\ -x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow z = 3 + 4i \Rightarrow |z| = 5.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 29. Cho phương trình $z^2 - 6z + m = 0$. Có bao nhiêu số tự nhiên m thuộc khoảng $(0;20)$ để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2}$.

A 10. **B** 12. **C** 11. **D** 13.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta = 9 - m \neq 0$ hay $m \neq 9$. Ta xét hai trường hợp:

- $\Delta > 0$ hay $m < 9$. Khi đó $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ và do đó
$$z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2} \Leftrightarrow z_1^2 = z_2^2 \Leftrightarrow z_1 = -z_2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow 6 = 0 \Leftrightarrow m \in \varnothing.$$
- $\Delta < 0$ hay $m > 9$. Khi đó $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ và là liên hợp của nhau. Trong trường hợp này ta luôn có $z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2}$.

Vậy $m > 9$, suy ra $m \in \{10, 11, \ldots, 19\}$. Như vậy có 10 giá trị của m thỏa mãn.

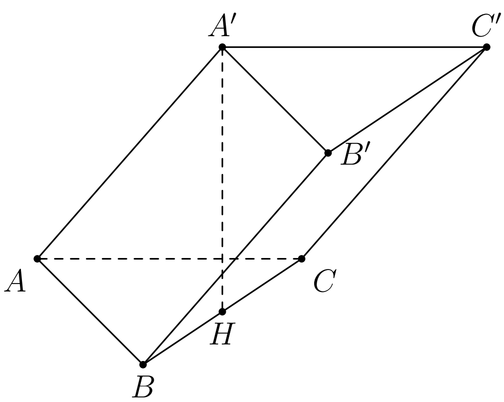
Chọn đáp án A □

Câu 30. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA' = \dfrac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là trung điểm BC. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó.

A $V = a^3$. **B** $V = \dfrac{2a^3}{3}$. **C** $V = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **D** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm BC. Ta thấy $A'H$ là đường cao hình lăng trụ. Tam giác $A'AH$ vuông tại H nên $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Vậy thể tích khối lăng trụ là $V = S_{\triangle ABC} \cdot A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.



Chọn đáp án C □

Câu 31. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có $AC = 2a$, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

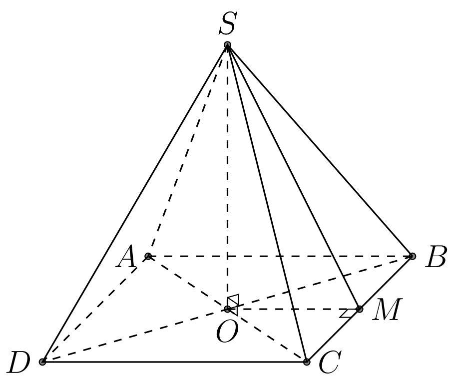
A $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B** $V = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **C** $V = a^3\sqrt{2}$. **D** $V = \dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, suy ra $OM \perp BC$. Vì góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ chính là góc $\widehat{SMO}$ nên $\widehat{SMO} = 45^\circ$.

Ta thấy SOM là tam giác vuông cân tại O nên $SO = OM = \dfrac{AB}{2}$. Lại có $AB = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$. Suy ra $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \dfrac{1}{3} \cdot \left(a\sqrt{2}\right)^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

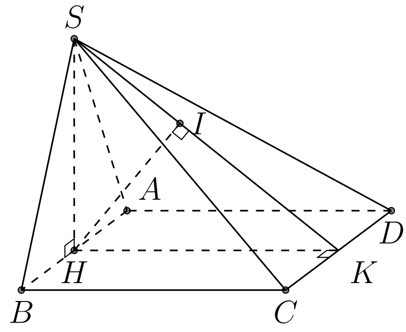


Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ B đến (SCD).

A $d = 1$. **B** $d = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$. **C** $d = \sqrt{2}$. **D** $d = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải.



Vì $BH \parallel CD$ nên $BH \parallel (SCD)$.

Do đó $\mathrm{d}(B;(SCD)) = \mathrm{d}(H;(SCD))$. Hạ $HK \perp CD$, $HI \perp SK$, ta có $d\,(H;(SCD)) = HI$. Ta có

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{7}{3}.$$

Suy ra $HI = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$. Vậy $d = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Tính thể tích của hình cầu ngoại tiếp hình lập phương có các cạnh bằng a.

A $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{8}$. **B** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{\pi a^3}{4}$. **D** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng a. Đường chéo AC' có độ dài là $AC' = a\sqrt{3}$. Suy ra bán kính hình cầu ngoại tiếp là $R = \dfrac{AC'}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó thể tích của hình cầu là

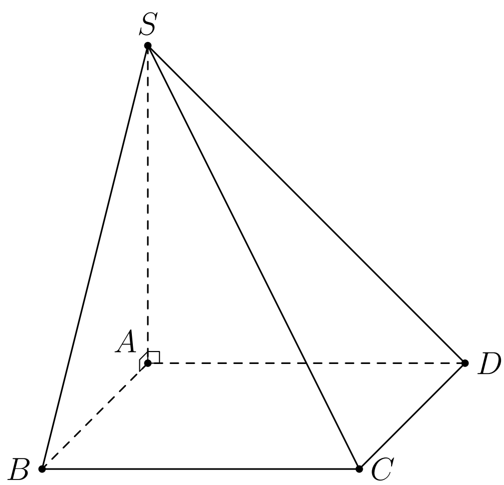
$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4\pi}{3}\cdot\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA = 12a$, $SA \perp (ABCD)$ và $AB = 3a$, $AD = 4a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A $R = 12a$. **B** $R = 13a$. **C** $R = \dfrac{13a}{2}$. **D** $R = 6a$.

Lời giải.



Hình chóp $S.ABCD$ có cạnh bên vuông góc với đáy nên ta có thể tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp theo công thức: $R^2 = r_đ^2 + \dfrac{h^2}{4}$ với R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp, h là chiều cao và $r_đ$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy của hình chóp.

Ta có $r_đ = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{AB^2 + AD^2}}{2} = \dfrac{5a}{2}$, $h = SA = 12a$.

Thay vào công thức ở trên ta được

$$R^2 = \left(\frac{5a}{2}\right)^2 + \frac{(12a)^2}{4} = \frac{169a^2}{4}.$$

Suy ra $R = \dfrac{13a}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-3)$, $B(-1;4;1)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn AB và song song với d?

A $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$.
(B) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$.
(C) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$.
(D) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng cần lập phương trình. Ta có

- Trung điểm của AB là $I(0;1;-1)$.
- Đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}(1;-1;2)$.

Đường thẳng Δ đi qua I và nhận $\vec{u}(1;-1;2)$ làm véc-tơ chỉ phương nên $\Delta\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{x+1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z+2=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 2π. Viết phương trình của mặt cầu (S).

(A) $(S)\colon (x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=8$.
(B) $(S)\colon (x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=10$.
(C) $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=8$.
D $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$.

Lời giải.

Gọi R, r lần lượt là bán kính của mặt cầu (S) và đường tròn giao tuyến. Ta sẽ tính R từ công thức $R^2=r^2+\left(\mathrm{d}\left(I;(P)\right)\right)^2$. Ta có

- $2\pi r=2\pi$ suy ra $r=1$.
- $\mathrm{d}(I;(P))=\dfrac{|2\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot 1+2|}{\sqrt{2^2+1+2^2}}=3$.

Thay vào công thức ở trên, ta được $R^2=1^2+3^2=10$, suy ra $R=\sqrt{10}$. Vậy $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Cho cấp số cộng (u_n) $(n\in\mathbb{R}^*)$ có số hạng đầu là $u_1=3$ và công sai bằng $d=2$. Tìm u_{30}.

(A) $u_{30}=57$.
B $u_{30}=61$.
(C) $u_{30}=59$.
(D) $u_{30}=63$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $u_n=u_1+(n-1)\,d$ ta có $u_{30}=u_1+29\times d=3+29\times 2=61$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Số nghiệm thực của phương trình $(x^2-3x+2)\sqrt{x-2}=0$ là

(A) 0.
B 1.
(C) 2.
(D) 3.

Lời giải.

Điều kiện: $x\geqslant 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left[\begin{array}{l}x^2-3x+2=0\\ \sqrt{x-2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2.\end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện, suy ra phương trình có duy nhất một nghiệm $x = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Tìm tất cả những giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^4 + 2m$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.

A $m = \sqrt[3]{3}$. (B) $m = 1$. (C) $m = -1$. (D) $m = -\sqrt[3]{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x\left(x^2 - m\right)$. Do đó

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right..$$

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt. Điều này tương đương với $m > 0$.

Khi đó, các điểm cực trị là $A(0; m^4 + 2m)$, $B\left(\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m\right)$ và $C\left(-\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m\right)$. Ta có $AB = AC = \sqrt{m + m^4}$ và $BC = 2\sqrt{m}$. Vì $AB = AC$ nên tam giác ABC đều thì khi và chỉ khi

$AB = BC \Leftrightarrow \sqrt{m + m^4} = 2\sqrt{m} \Leftrightarrow m + m^4 = 4m \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{3}$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 1\right|$ trên khoảng $\left(-\frac{9}{8}; \frac{10}{3}\right)$. Biết $M = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$. Tính $S = a + b^2$.

(A) $S = 127$. **B** $S = 830$. (C) $S = 2$. (D) $S = 122$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 1$ trên $\left(-\frac{9}{8}; \frac{10}{3}\right)$.Ta có $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x$, phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt là $x = 0$ và $x = \frac{8}{3}$. Suy ra bảng biến thiên của $f(x)$ trên $\left(-\frac{9}{8}; \frac{10}{3}\right)$ như sau:

x	$-\frac{9}{8}$		0		$\frac{8}{3}$		$\frac{10}{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{2297}{1024}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{101}{27}$	$\nearrow$	$-\frac{73}{27}$

Suy ra $\min\limits_{\left(-\frac{9}{10}; \frac{10}{3}\right)} f(x) = -\frac{101}{27}$ và $\max\limits_{\left(-\frac{9}{10}; \frac{10}{3}\right)} f(x) = 1$. Do đó $M = \max\left\{\left|-\frac{101}{27}\right|; |1|\right\} = \frac{101}{27}$.

Vậy $S = 101 + 27^2 = 830$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Cho $\log_{27} 5 = a$, $\log_8 7 = b$, $\log_2 3 = c$. Giá trị của $\log_{12} 35$ bằng

(A) $\frac{3b + 2ac}{c + 3}$. (B) $\frac{3b + 2ac}{c + 2}$. (C) $\frac{3b + 3ac}{c + 1}$. **D** $\frac{3b + 3ac}{c + 2}$.

Lời giải.

Ta có

- $\log_{27} 5 = a \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\log_3 5 = a \Leftrightarrow \log_3 5 = 3a$.
- $\log_8 7 = b \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\log_2 7 = b \Leftrightarrow \log_2 7 = 3b$.

Do đó $\log_{12} 35 = \dfrac{\log_2 35}{\log_2 12} = \dfrac{\log_2 5 + \log_2 7}{\log_2 3 + 2} = \dfrac{\dfrac{\log_3 5}{\log_3 2} + \log_2 7}{\log_2 3 + 2} = \dfrac{\log_2 3 \cdot \log_3 5 + \log_2 7}{\log_2 3 + 2} = \dfrac{3ac + 3b}{c+2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Cho phương trình $4^{\sqrt{1-x^2}} - (m-2)\cdot 2^{\sqrt{1-x^2}} + 2m + 1 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-10; 20]$ của tham số m để phương trình có nghiệm?

A 6. **B** 7. **C** 8. **D** 9.

Lời giải.

Điều kiện: $x \in [-1; 1]$. Đặt $t = 2^{\sqrt{1-x^2}}$, ta có $\Rightarrow t \in [1; 2]$. Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - (m-2)t + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = m(t-2) \Leftrightarrow \frac{t^2+2t+1}{t-2} = m.$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2+2t+1}{t-2}$ với $t \in [1; 2)$. Ta có $f'(t) = \dfrac{t^2-4t-5}{(t-2)^2}$. Ta tìm nghiệm của $f'(t)$:

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \notin [1; 2) \\ t = 5 \notin [1; 2). \end{cases}$$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(t)$ $(t \in [1; 2))$ như sau:

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$f'(x)$			$-$		
$f(x)$		-4	$\searrow$	$-\infty$	

Do đó, phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \leqslant -4$. Suy ra các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10; 20]$ để phương trình có nghiệm là $m \in \{-10; -9; -8; -7; -6; -5; -4\}$ (7 giá trị).

Chọn đáp án B □

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $f(1) = 0$, $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$. Tính $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $\dfrac{e}{2}$. **B** $2 - \mathrm{e}$. **C** $\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$. **D** $\mathrm{e} - 2$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = (x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = x\mathrm{e}^x \end{cases}$. Ta có

$$\int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^2-1}{4} \quad (1).$$

Lại có $\int\limits_0^1 (xe)^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{e^2-1}{4}$ (2).

Kết hợp (1), (2) với giả thiết $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{e^2-1}{4}$, ta có

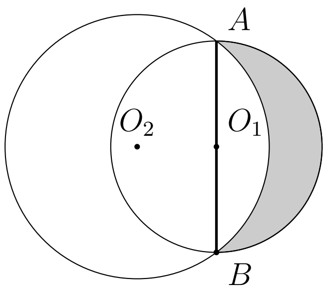
$$\int\limits_0^1 [f'(x)+xe^x]^2\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -xe^x \Leftrightarrow f(x) = -xe^x + e^x + C.$$

Vì $f(1)=0$ nên $C=0$. Do đó $f(x) = -xe^x + e^x$. Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (-xe^x+e^x)\,\mathrm{d}x = e-2$.

Chọn đáp án D □

Câu 44.

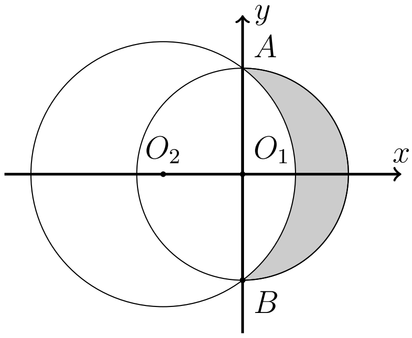
Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) có bán kính lần lượt bằng 8 và 10. Hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn (O_2). Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi hai đường tròn (phần được tô đậm như hình bên). Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục O_1O_2.



Ⓐ $\dfrac{824\pi}{3}$. Ⓑ $\dfrac{97\pi}{3}$. **C** $\dfrac{608\pi}{3}$. Ⓓ $\dfrac{145\pi}{3}$.

Lời giải.

Gán hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Ta có $O_1O_2 = \sqrt{O_2A^2 - O_1A^2} = 6$, suy ra $O_2(-6;0)$.

- $(O_1): x^2+y^2 = 64$, suy ra phương trình phần (O_1) nằm phía trên trục hoành là $y = \sqrt{64-x^2}$.
- $(O_2): (x+6)^2+y^2 = 100$, suy ra phương trình phần (O_2) nằm phía trên trục hoành là $y = \sqrt{100-(x+6)^2}$.

Thể tích cần tìm là

$$V = \pi\int\limits_0^8 (64-x^2)\,\mathrm{d}x - \pi\int\limits_0^4 [100-(x+6)^2]\,\mathrm{d}x = \dfrac{608\pi}{3}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 45. Cho số phức z thoả mãn $|z-3-4i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+2|^2 - |z-i|^2$. Tính mô-đun của số phức $w = M + mi$.

Ⓐ $|w| = \sqrt{1268}$. **B** $|w| = \sqrt{1258}$. Ⓒ $|w| = 2\sqrt{314}$. Ⓓ $|w| = 2\sqrt{309}$.

Lời giải.

Giả sử $z = a+bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$.Ta có

$$|z-3-4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a-3)^2 + (b-4)^2 = 5. \quad (1)$$

và

$$P = |z+2|^2 - |z-i|^2 = (a+2)^2 + b^2 - [a^2 + (b-1)^2] = 4a + 2b + 3. \quad (2)$$

Từ (2) rút a theo P và b rồi thế vào (1), ta được $20a^2+(64-8P)a+P^2-22P+137=0$. (3)
Tập giá trị của P là tập hợp tất cả những giá trị thực của P làm cho phương trình (3) có nghiệm.
Ta thấy phương trình (3) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta'=-4P^2+184P-1716\geqslant 0\Leftrightarrow 13\leqslant P\leqslant 33\Leftrightarrow\begin{cases}M=33\\ m=13\end{cases}\Leftrightarrow w=33+13i\Rightarrow |w|=\sqrt{1258}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 46. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+y-z-3=0$, $(\beta)\colon 2x-y+5=0$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) song song với trục Oz và chứa giao tuyến của (α) và (β).

A $(P)\colon 2x-y-5=0$.
B $(P)\colon 2x+y+5=0$.
C $(P)\colon x-2y+5=0$.
D $(P)\colon 2x-y+5=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) chứa giao tuyến của hai mặt phẳng (a) và (β) nên có dạng:

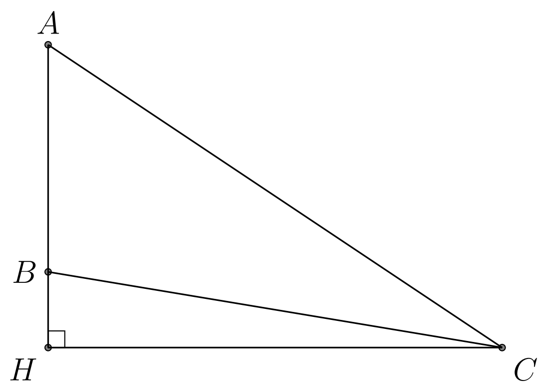
$$\begin{aligned}&m(2x+y-z-3)+n(2x-y+5)=0\\ \Leftrightarrow\ &(2m+2n)x+(m-n)y-mz-3m+5n=0.\end{aligned}$$

Mặt phẳng (P) song song với trục Oz nên $m=0$. Chọn $n=1$ ta có $(P)\colon 2x-y+5=0$.
Chọn đáp án D □

Câu 47. Cho tam giác ABC có $AB=3a$, $BC=5a$, $CA=6a$. Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi cho hình tam giác ABC quay quanh đường thẳng AB là

A $\dfrac{224\pi a^3}{9}$.
B $24\pi a^3$.
C $16a^3\pi$.
D $\dfrac{224a^3\pi}{27}$.

Lời giải.



Gọi H là chân đường cao kẻ từ đỉnh C của tam giác ABC.
Sử dụng công thức Hê-rông ta tính được $S_{ABC}=2\sqrt{14}a^2$.
Suy ra $CH=\dfrac{2S_{ABC}}{AB}=\dfrac{2\cdot 2\sqrt{14}a^2}{3a}=\dfrac{4\sqrt{14}a}{3}$. Vậy thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\pi\cdot HC^2\cdot AH-\frac{1}{3}\pi\cdot HC^2\cdot BH\\ &=\frac{1}{3}\pi\cdot HC^2\cdot AB\\ &=\frac{224\pi a^3}{9}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$; $d_2\colon \dfrac{x-5}{-3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y+3z-5=0$. Đường thẳng vuông góc với (P), cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$.
B $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$.
C $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+2}{3}$.
D $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$.

Lời giải.

Ta có $d_1\colon\begin{cases}x=3-t_1\\y=3-2t_1\\z=-2+t_1\end{cases}$ và $d_2\colon\begin{cases}x=5-3t_2\\y=-1+2t_2\\z=2+t_2\end{cases}$. Gọi đường thẳng cần tìm là Δ.

Giả sử đường thẳng Δ cắt đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại A, B. Tọa độ của A, B có dạng $A(3-t_1;3-2t_1;-2+t_1)$, $B(5-3t_2;-1+2t_2;2+t_2)$ suy ra $\overrightarrow{AB}=(2-3t_2+t_1;-4+2t_2+2t_1;4+t_2-t_1)$. Véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(1;2;3)$. Do $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{n}$ cùng phương nên

$$\frac{2-3t_2+t_1}{1}=\frac{-4+2t_2+2t_1}{2}=\frac{4+t_2-t_1}{3}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2-3t_2+t_1}{1}=\dfrac{-4+2t_2+2t_1}{2}\\\dfrac{-4+2t_2+2t_1}{2}=\dfrac{4+t_2-t_1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=2\\t_2=1.\end{cases}$$

Do đó $A(1;-1;0)$, $B(2;-1;3)$. Đường thẳng Δ đi qua $A(1;-1;0)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{n}=(1;2;3)$ nên có phương trình là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d\colon\begin{cases}x=2+t\\y=3+t\\z=3t\end{cases}$ và hai mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y+z-4=0$; $(Q)\colon 2x+y+1=0$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d, tiếp xúc (P) và cắt mặt phẳng (Q) theo một đường tròn có bán kính bằng $r=2$, biết I có hoành độ dương.

A $(S)\colon(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$.
B $(S)\colon(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=3$.
C $(S)\colon(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.
D $(S)\colon(x-2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=9$.

Lời giải.

Vì $I\in d$ nên tọa độ có dạng $I(2+t;3+t;3t)$.

(S) tiếp xúc (P) nên ta có bán kính của mặt cầu là $R=\mathrm{d}(I;(P))=|t-2|$.

Lại có $\mathrm{d}(I;(Q))=\dfrac{|3t+8|}{\sqrt5}$. Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (Q) theo đường tròn có bán kính $r=2$ khi và chỉ khi

$$R^2=r^2+[\mathrm{d}(I;(Q))]^2$$
$$\Leftrightarrow\ (t-2)^2=4+\left(\frac{3t+8}{\sqrt5}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}t=-1\\t=-16\end{array}\right.$$

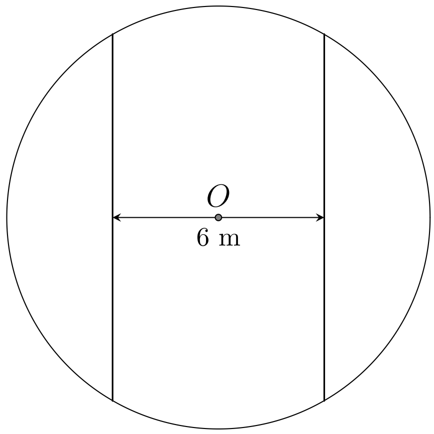
- $t=-1$ suy ra $I(1;2;-3)$; $R=3$. Phương trình mặt cầu $(S)\colon(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$.
- $t=-16$ suy ra $I(-14;-13;-48)$, loại do I phải có hoành độ dương.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$.

Chọn đáp án A □

Câu 50.

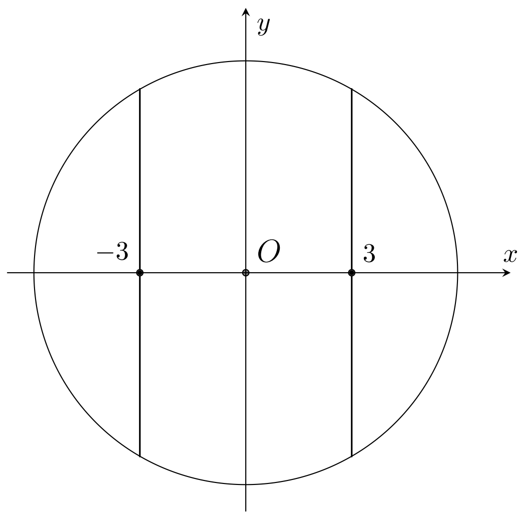
Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính 6 m. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng 6 m nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)



A 4821232 đồng.
B 8412322 đồng.
C 8142232 đồng.
D 4821322 đồng.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Ta có phương trình đường tròn (O) là $x^2+y^2=36$. Phần đường tròn phía trên trục Ox có phương trình là $y=f(x)=\sqrt{36-x^2}$. Diện tích S của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị hàm số $y=f(x)$ và hai đường thẳng $x=-3$, $x=3$. Do đó $S=2\displaystyle\int\limits_{-3}^{3}\sqrt{36-x^2}\,\mathrm{d}x$. Bằng cách đặt $x=6\sin t$, ta tính được $S=18\sqrt{3}+12\pi$. Do đó số tiền cần dùng là $70000\times S\approx 4821322$ đồng.



Chọn đáp án D □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. C	3. D	4. A	5. D	6. C	7. C	8. C	9. B	10. C
11. C	12. D	13. A	14. B	15. C	16. A	17. D	18. D	19. A	20. C
21. A	22. C	23. A	24. D	25. C	26. D	27. D	28. C	29. A	30. C
31. A	32. D	33. B	34. C	35. A	36. D	37. B	38. B	39. A	40. B
41. D	42. B	43. D	44. C	45. B	46. D	47. A	48. A	49. A	50. D

16 ĐỀ THI THỬ SỐ 16-MAX8

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = \dfrac{x-1}{x+2}$.
(B) $y = x^3 + 4x^2 + 3x - 1$.
(C) $y = x^4 - 2x^2 - 1$.
(D) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 3x + 1$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 3x + 1$ có $y' = x^2 - x + 3 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{11}{4} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Cho a là số thực dương tùy ý khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\log_2 a = \log_a 2$.
(B) $\log_2 a = \dfrac{1}{\log_2 a}$.
(C) $\log_2 a = \dfrac{1}{\log_a 2}$.
(D) $\log_2 a = -\log_a 2$.

Lời giải.

Theo công thức đổi cơ số, ta có: $\log_2 a = \dfrac{1}{\log_a 2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Cho hàm số $y = x^4 - 8x^2 - 4$. Các khoảng đồng biến của hàm số là

(A) $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.
(B) $(-2; 0)$ và $(0; 2)$.
(C) $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.
(D) $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 4x^3 - 16x$; $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-20	$\nearrow$	-4	$\searrow$	-20	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.

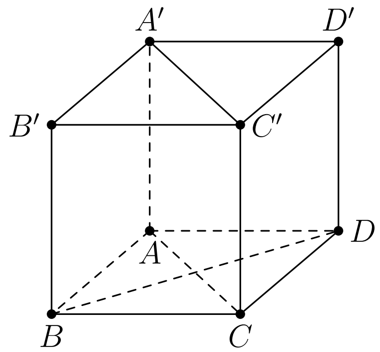
Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD bằng.

(A) 60°.
(B) 30°.
(C) 45°.
(D) 90°.

Lời giải.

Ta có: $\widehat{(A'C';BD)} = \widehat{(AC;BD)} = 90°$.



Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho $I = \int x(1-x^2)^{2019}\,\mathrm{d}x$. Đặt $u = 1 - x^2$ khi đó I viết theo u và $\mathrm{d}u$ ta được:

A $I = -\frac{1}{2}\int u^{2019}\,\mathrm{d}u$.
B $I = -2\int u^{2019}\,\mathrm{d}u$.
C $I = 2\int u^{2019}\,\mathrm{d}u$.
D $I = \frac{1}{2}\int u^{2019}\,\mathrm{d}u$.

Lời giải.

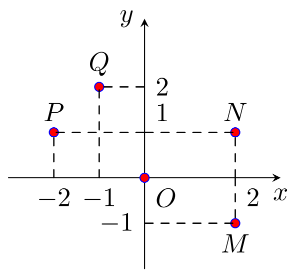
Ta có $u = 1 - x^2 \Rightarrow \mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow x\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}u}{2}$.

Do đó $I = -\frac{1}{2}\int u^{2019}\,\mathrm{d}u$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Điểm nào trong hình vẽ bên dưới là điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$?

A N. **B** P. **C** M. **D** Q.



Lời giải.

Số phức $z = -1 + 2i$ có điểm biểu diễn là điểm $Q(-1;2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 30$ lần lượt là

A 35 và 3. **B** 3 và 35. **C** -1 và 3. **D** 3 và -1.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	35	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

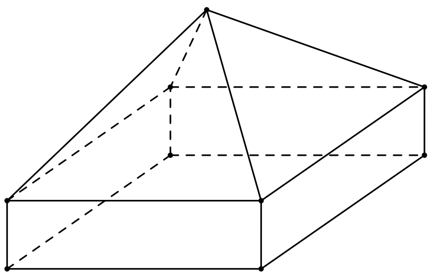
Nhìn BBT suy ra: Giá trị cực đại của hàm số là 35.
Giá trị cực tiểu của hàm số là 3.
Chọn đáp án A □

Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho véc-tơ $\vec{v} = (-3; 5)$. Tìm ảnh của điểm $A(1; 2)$ qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$.

A $A'(4; -3)$. **B** $A'(-2; 3)$. **C** $A'(-4; 3)$. **D** $A'(-2; 7)$.

Lời giải.
Gọi A' là ảnh của điểm $A(1; 2)$ qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$.
Ta có $\begin{cases} x_{A'} = x_A + (-3) = 1 - 3 = -2 \\ y_{A'} = y_A + 5 = 2 + 5 = 7 \end{cases} \Rightarrow A'(-2; 7)$.
Chọn đáp án D □

Câu 9. Khối đa diện cho bởi hình vẽ dưới đây có bao nhiêu mặt?



A 6. **B** 7. **C** 8. **D** 9.

Lời giải.
Khối đa diện trên có 8 mặt bên và 1 mặt đáy nên có tổng cộng 9 mặt.
Chọn đáp án D □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -3)$ và $B(3; -2; -1)$. Tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB là điểm

A $I(4; 0; -4)$. **B** $I(1; -2; 1)$. **C** $I(2; 0; -2)$. **D** $I(1; 0; -2)$.

Lời giải.
Tọa độ trung điểm AB là điểm I ta có: $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1+3}{2} = 2 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{2-2}{2} = 0 \\ z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{-3-1}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow I(2; 0; -2)$.
Chọn đáp án C □

Câu 11. Cho hai số phức $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 2 - i$. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1 + z_1.z_2|$.

A $P = 85$. **B** $P = 5$. **C** $P = 50$. **D** $P = 10$.

Lời giải.
Ta có: $z_1 \cdot z_2 = (3 + i)(2 - i) = 7 - i \Rightarrow z_1 + z_1 \cdot z_2 = 3 + i + 7 - i = 10$.
Suy ra $P = |z_1 + z_1 \cdot z_2| = 10$.
Chọn đáp án D □

Câu 12. Thể tích khối trụ có bán kính đáy là r, chiều cao là h là

A $V = 2\pi rh$. **B** $V = \pi r^2$. **C** $V = \pi r^2 h$. **D** $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5 - 4t \\ z = -6 + 7t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$ và điểm $A(1; 2; 3)$. Đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là

A $\vec{u} = (3; -4; 7)$. **B** $\vec{u} = (3; -4; -7)$. **C** $\vec{u} = (-3; -4; -7)$. **D** $\vec{u} = (-3; -4; 7)$.

Lời giải.

Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng d.

Do đó VTCP của (Δ) là VTCP của (d). Vậy (Δ) có VTCP là $\vec{u} = (3; -4; 7)$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Tập xác định của hàm số $y = \tan 2x$ là

A $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **D** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Biết $\log a < 0$, khi đó a thỏa mãn

A a bất kì. **B** $a > 0$. **C** $a > 1$. **D** $0 < a < 1$.

Lời giải.

Ta có: $\log a < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a < 10^0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Nếu $\displaystyle\int_2^5 f(t)\,\mathrm{d}t = 5$ và $\displaystyle\int_5^7 f(z)dz = 9$ thì $\displaystyle\int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu.

A 3. **B** 14. **C** -6. **D** 6.

Lời giải.

Áp dụng tính chất tích phân ta có:

$$\int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_5^7 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^5 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_5^7 f(z)\,\mathrm{d}z = 5 + 9 = 14.$$

Chọn đáp án B □

Câu 17. Cho A, B là hai biến cố xung khắc. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A $P(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$. **B** $P(A \cup B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$.

(C) $P(A \cup B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B)$.
(D) $P(A \cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

Lời giải.

Ta có $P(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - P(A \cap B)$.

Vì A, B là hai biến cố xung khắc nên $A \cap B = \varnothing$.

Từ đó suy ra $P(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Cho hàm số $y = x^{\frac{\pi}{4}}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

(A) Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.
(B) Hàm số nghịch biến trên tập xác định.
(C) Đồ thị hàm số qua điểm $(1; 1)$.
(D) Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.

Lời giải.

Hàm số $y = x^{\frac{\pi}{4}}$ có tập xác định $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.

$y' = \dfrac{\pi}{4}.x^{\frac{\pi}{4}-1} > 0, \forall x > 0$.

Vậy hàm số đồng biến trên tập xác định của nó.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-2; -1)$ và có $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) = -\infty$. Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

(A) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = -2$ và $x = -1$.
(B) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.
(C) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$.
(D) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 2$ và $y = -1$.

Lời giải.

Áp dụng định nghĩa tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_n = \dfrac{2^{n-1} + 1}{n}$. Tìm số hạng thứ 10 của dãy số đã cho.

(A) $51,2$.
(B) $51,3$.
(C) $51,1$.
(D) $102,3$.

Lời giải.

Ta có: $u_{10} = \dfrac{2^{10-1} + 1}{10} = 51,3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1, n \geqslant 1 \end{cases}$. Giá trị của n để $-u_n + 2017n + 2018 = 0$ là

(A) Không có n.
(B) 1009.
(C) 2018.
(D) 2017.

Lời giải.

Với $n = 1$ ta có: $u_2 = u_1 + 3 = 4 = 2^2$.

Với $n = 2$ ta có: $u_3 = u_2 + 2 \cdot 2 + 1 = 9 = 3^2$.

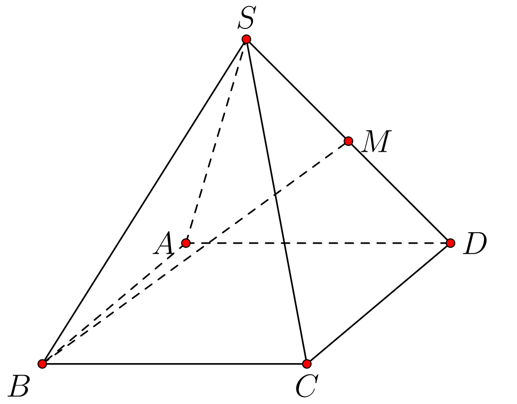
Với $n = 3$ ta có: $u_4 = u_3 + 2 \cdot 3 + 1 = 16 = 4^2$.

Từ đó ta có: $u_n = n^2$.

Suy ra $-u_n + 2017n + 2018 = 0 \Leftrightarrow -n^2 + 2017n + 2018 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -1 \text{ (loại)} \\ n = 2018 \text{ (nhận)}. \end{array}\right.$

Chọn đáp án C □

Câu 22.
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi M là trung điểm của SD (tham khảo hình vẽ bên). Côsin góc giữa hai đường thẳng BM và AD bằng



(A) $\dfrac{\sqrt{55}}{10}$. (B) $\dfrac{\sqrt{155}}{20}$. **C** $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$. (D) $\dfrac{3\sqrt{5}}{20}$.

Lời giải.

Ta có $AD \parallel BC \Rightarrow \widehat{(AD, BM)} = \widehat{(BC, BM)}$.

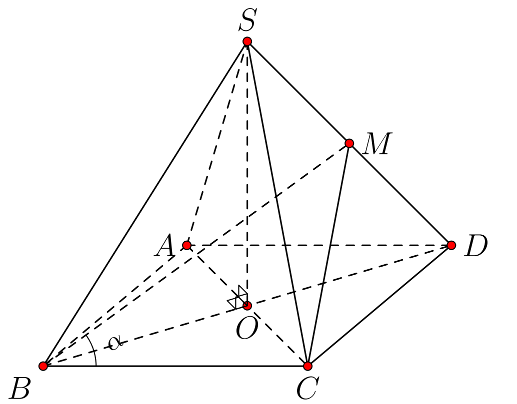
Gọi cạnh của hình chóp là a.

$BM^2 = \dfrac{SB^2 + BD^2}{2} - \dfrac{SD^2}{4} = \dfrac{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{4}$.

$\Rightarrow BM = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$; $CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow \cos \widehat{(BC, BM)} = |\cos \alpha| = \left|\dfrac{BM^2 + BC^2 - CM^2}{2BM.BC}\right|$

$= \left|\dfrac{\dfrac{5a^2}{4} + a^2 - \dfrac{3a^2}{4}}{2\dfrac{a\sqrt{5}}{2} \cdot a}\right| = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.



Chọn đáp án C □

Câu 23. Phương trình $\sqrt{2-x} + \dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3} = 2$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

(A) 0. **B** 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình $2 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 2$.

Từ phương trình đã cho ta được

$\sqrt{2-x}\left(\sqrt{2-x}+3\right) + 4 = 2\left(\sqrt{2-x}+3\right) \Leftrightarrow 2 - x + 3\sqrt{2-x} + 4 = 2\sqrt{2-x} + 6$

$\Leftrightarrow \sqrt{2-x} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ 2 - x = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

So với điều kiện $x \leq 2$ thì $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x}{x^2+4}$ trên đoạn $[1; 5]$.

A $\max\limits_{[1;5]} y = \dfrac{1}{5}$. **B** $\max\limits_{[1;5]} y = \dfrac{1}{4}$. **C** $\max\limits_{[1;5]} y = \dfrac{5}{29}$. **D** $\max\limits_{[1;5]} y = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{4 - x^2}{(x^2+4)^2}$. Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \in [1;5] \\ x = -2 \notin [1;5] \end{array}\right.$.

Khi đó $y(1) = \dfrac{1}{5}$, $y(2) = \dfrac{1}{4}$, $y(5) = \dfrac{5}{29}$. Vậy $\max\limits_{[1;5]} y = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 4x^2 + 4x + 1$ tại điểm $A(-3;-2)$ cắt đồ thị tại điểm thứ hai là B. Điểm B có tọa độ là

A $B(-1;0)$. **B** $B(1;10)$. **C** $B(2;33)$. **D** $B(-2;1)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 8x + 4$, $y'(-3) = 7$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại A là

$y = 7(x+2) + 3 \Leftrightarrow y = 7x + 19$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với tiếp tuyến của nó là

$x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 7x + 19 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = 33 \\ x = -3 \text{ (loại, do trùng } A) \end{array}\right.$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Giá trị của x thỏa mãn đẳng thức $5^{3^x} = 3^{5^x}$ là $x = \log_a \log_b 5$. Tính $a.b$.

A $a.b = 5$. **B** $a.b = 3$. **C** $a.b = 9$. **D** $a.b = 25$.

Lời giải.

Ta có

$5^{3^x} = 3^{5^x} \Leftrightarrow \log_3 5 = \left(\dfrac{5}{3}\right)^x \Leftrightarrow x = \log_{\frac{5}{3}} \log_3 5$.

$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5}{3} \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a.b = 5.$

Chọn đáp án A □

Câu 27. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{5}\right)^{x^2-4x-9} > \dfrac{5}{2\sqrt{6}}$ là $S = (a;b)$. Phát biểu nào sau đây đúng?

A $a + b = 0$. **B** $a + b = 4$. **C** $a + b = -4$. **D** $a + b = 6$.

Lời giải.

$$\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{5}\right)^{x^2-4x-9} > \dfrac{5}{2\sqrt{6}} = \left(\dfrac{2\sqrt{6}}{5}\right)^{-1}$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 9 < -1$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 8 < 0$$
$$\Leftrightarrow 2 - 2\sqrt{3} < x < 2 + 2\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 28. Một ôtô đang chạy với vận tốc 9 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -3t + 9$ m/s, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A 13,5 (m). **B** 12,5 (m). **C** 11,5 (m). **D** 10,5 (m).

Lời giải.

Gọi t_0 là thời điểm lúc ô tô bắt đầu đạp phanh, ta có $9 = -3t_0 + 9 \Leftrightarrow t_0 = 0$.

Gọi t_1 là thời điểm lúc ô tô dừng hẳn, ta có $0 = -3t_1 + 9 \Leftrightarrow t_1 = 3$.

Vậy quãng đường ô tô đi được từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn là

$$S(t) = \int\limits_0^3 v(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^3 (-3t+9)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{-3}{2}t^2 + 9t\right)\Bigg|_0^3 = 13,5(m).$$

Chọn đáp án A □

Câu 29. Nếu các số hữu tỉ a, b thỏa mãn $\int\limits_0^1 (ae^x - 2bx)\,\mathrm{d}x = 4\mathrm{e} - 5$ thì giá trị của biểu thức $2a + b$ là

A 6. **B** 8. **C** 9. **D** 7.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 (ae^x - 2bx)\,\mathrm{d}x = (ae^x - bx^2)\Big|_0^1 = a\mathrm{e} - a - b = 4\mathrm{e} - 5$.

Do đó: $\begin{cases} a = 4 \\ -a - b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1. \end{cases}$

Vậy $2a + b = 9$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Cho hai số phức $z_1 = 1 - 2i$ và $z_2 = 3 + 4i$. Tìm điểm M biểu diễn số phức $z_1.z_2$ trên mặt phẳng tọa độ.

A $M(-2;11)$. **B** $M(-2;-11)$. **C** $M(11;-2)$. **D** $M(11;2)$.

Lời giải.

Ta có $z_1.z_2 = (1-2i)(3+4i) = 11 - 2i$.

Vậy $M(11;-2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Gọi z_1 và z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 3 = 0$. Tính $P = 2|z_1| + 5|z_2|$.

A $P = \sqrt{3}$. **B** $P = 7\sqrt{3}$. **C** $P = 5\sqrt{3}$. **D** $P = 3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có: $z^2 + 2z + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1 + \sqrt{2}i \\ z = -1 - \sqrt{2}i \end{array}\right. \Rightarrow |z_1| = |z_2| = \sqrt{3}$.

Do đó $P = 7\sqrt{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Thiết diện của hình nón cắt bởi mặt phẳng qua trục là tam giác đều cạnh bằng a. Thể tích khối nón bằng

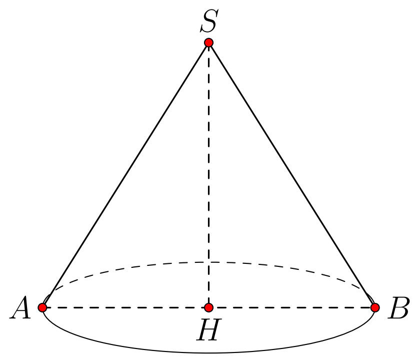
(A) $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{8}$. (B) $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. (D) $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải.

Bán kính đáy của hình nón là $r = \dfrac{a}{2}$.

Đường cao của hình nón là đường cao của tam giác đều có độ dài là $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \pi \cdot \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Thể tích của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AC = a\sqrt{5}$, $AA' = 3a$ là

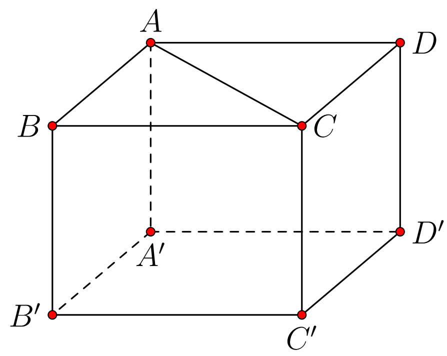
(A) $V = 6a^3$. (B) $V = 3a^3$. (C) $V = 2a^3$. (D) $V = a^3$.

Lời giải.

Ta có

$AD = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a.AD$

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = a.2a.3a = 6a^3$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (C) $a^3\sqrt{3}$. (D) a^3.

Lời giải.

Thể tích của khối chóp là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Khối lăng trụ có thể tích bằng 12, diện tích đáy bằng 4. Độ dài chiều cao của khối lăng trụ đó bằng

(A) 9. (B) 3. (C) 6. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $V = B \cdot h \Rightarrow h = \dfrac{V}{B} = \dfrac{12}{4} = 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-6x-4y-12z=0$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-z-2=0$. Tính diện tích thiết diện của mặt cầu (S) cắt bởi mặt phẳng (P).

A $S=49\pi$. **B** $S=50\pi$. **C** $S=25\pi$. **D** $S=36\pi$.

Lời giải.

(S) có tâm $I(3;2;6)$ bán kính $R=7$.

Ta có: $\mathrm{d}(I;(P))=\dfrac{|2\cdot 3+2-6-2|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=0$. Nên mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là đường tròn lớn đi qua tâm mặt cầu và có bán kính bằng bán kính mặt cầu.

Vậy diện tích thiết diện là: $S=\pi R^2=49\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=1-2t \\ y=3+4t \\ z=-2+6t \end{cases}$ và $d_2\colon \begin{cases} x=1-t \\ y=2+2t \\ z=3t \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $d_1\perp d_2$. **B** $d_1\equiv d_2$.

C d_1 và d_2 chéo nhau. **D** $d_1 \parallel d_2$.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1}=(-2;4;6)$ và đi qua điểm $M(1;3;-2)$.

Đường thẳng d_2 có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_2}=(-1;2;3)$.

Do $\overrightarrow{u_1}=2\overrightarrow{u_2}$ nên hai đường thẳng d_1 và d_2 song song hoặc chéo nhau.

Thay tọa độ điểm $M(1;3;-2)$ vào phương trình đường thẳng d_2 ta có $\begin{cases} 1=1-t \\ 3=2+2t \\ -2=3t \end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Vậy $d_1 \parallel d_2$.

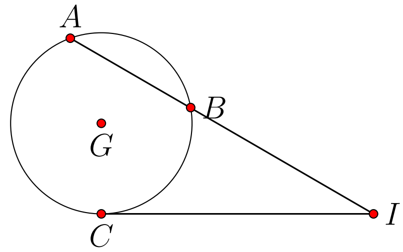
Chọn đáp án D □

Câu 38. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-z-3=0$ và hai điểm $A(1;1;1)$, $B(-3;-3;-3)$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C. Biết rằng C luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính của đường tròn đó.

A $R=12$. **B** $R=6$. **C** $R=\dfrac{2\sqrt{33}}{3}$. **D** $R=2\sqrt{33}$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng AB là $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t. \end{cases}$



Giao điểm của AB và (P) là $I(3;3;3)$.
Suy ra $IA = 2\sqrt{3}$ và $IB = 6\sqrt{3}$.
Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại C nên IC là tiếp tuyến của mặt cầu (S).
Do đó $IA.IB = IC^2 \Leftrightarrow IC = \sqrt{IA.IB} = 6$ (không đổi).

Vậy C luôn thuộc một đường tròn cố định nằm trên mặt phẳng (P) với tâm $I(3;3;3)$, bán kính bằng 6.
Chọn đáp án B □

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 1$ và điểm $A(2;2;2)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

A $x+y+z+4 = 0$. **B** $2x+2y+2z+8 = 0$.
C $x+y+z-4 = 0$. **D** $2x+2y+2z-17 = 0$.

Lời giải.
Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R = 2$. Ta có điểm A nằm ngoài mặt cầu (S).
Lấy $M(x_0;y_0;z_0) \in (S)$. Khi đó $\overrightarrow{IM} = (x_0-1;y_0-1;z_0-1)$; $\overrightarrow{AM} = (x_0-2;y_0-2;z_0-2)$.
Ta được hệ:
$$\begin{cases} (x_0-1)^2+(y_0-1)^2+(z_0-1)^2 = 1 \\ (x_0-1)(x_0-2)+(y_0-1)(y_0-2)+(z_0-1)(z_0-2) = 0. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2+y_0^2+z_0^2-2x_0-2y_0-2z_0+2 = 0 \\ x_0^2+y_0^2+z_0^2-3x_0-3y_0-3z_0+6 = 0 \end{cases}$$
Trừ vế theo vế ta có $x_0+y_0+z_0-4 = 0$.
Chọn đáp án C □

Câu 40. Các mặt của một con xúc sắc được đánh số từ 1 đến 6. Người ta gieo một con xúc sắc cân đối 3 lần liên tiếp và nhân các con số nhận được trong mỗi lần gieo lại với nhau. Tính xác suất để tích thu được là một số chia hết cho 6.

A $\dfrac{81}{216}$. **B** $\dfrac{83}{216}$. **C** $\dfrac{133}{216}$. **D** $\dfrac{135}{216}$.

Lời giải.
Không gian mẫu: $n(\Omega) = 6^3$.
Gọi A là biến cố "tích thu được là một số chia hết cho 6 ".
Gọi $\{x,y,z|1 \leqslant x,y,z \leqslant 6\}$ là các số lần lượt xuất hiện khi gieo con xúc sắc ba lần. Theo yêu cầu bài toán thì tích $x \cdot y \cdot z$ phải là số chẵn và chia hết cho 3.
+ TH1: ta có các bộ số sau: $\{1;2;3\}$, $\{1;2;6\}$, $\{1;3;4\}$, $\{1;3;6\}$, $\{1;4;6\}$, $\{1;5;6\}$, $\{2;3;4\}$, $\{2;3;5\}$, $\{2;3;6\}$, $\{2;4;6\}$, $\{2;5;6\}$, $\{3;4;5\}$, $\{3;4;6\}$, $\{3;5;6\}$, $\{4;5;6\}$.
Trường hợp này có: $15 \cdot 3! = 90$ cách chọn
+ TH2: ta có các bộ số sau: $\{1;1;6\}$, $\{1;6;6\}$, $\{2;2;3\}$, $\{2;2;6\}$, $\{3;3;2\}$, $\{3;3;4\}$, $\{3;3;6\}$,

$\{4;4;3\}$, $\{4;4;6\}\{5;5;6\}$, $\{6;6;2\}$, $\{6;6;3\}$, $\{6;6;4\}$, $\{6;6;5\}$.
Có 42 (cách chọn).
+ TH3: ta có các bộ số sau: $\{6;6;6\}$.
Có: 1 (cách chọn).
$\Rightarrow n(A) = 90 + 42 + 1 = 133$
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{133}{216}$.
Chọn đáp án C □

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m+3)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A $m \geqslant 3$. **B** $-1 \leqslant m \leqslant 3$. **C** $-1 < m < 3$. **D** $m < 3$.

Lời giải.
Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Đạo hàm: $y' = x^2 - 2mx + 2m + 3$.
Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Ta có $\Delta' = m^2 - 2m - 3 \leqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant m \leqslant 3$.
Chọn đáp án B □

Câu 42. Các nhà khoa học đã tính toán khi nhiệt độ trung bình của trái đất tăng thêm $2°C$ thì mực nước biển sẽ dâng lên $0,03m$. Nếu nhiệt độ tăng lên $5°C$ thì nước biển sẽ dâng lên $0,1m$ và người ta đưa ra công thức tổng quát như sau: Nếu nhiệt độ trung bình của trái đất tăng lên t^oC thì nước biển dâng lên $f(t) = ka^t(m)$ trong đó k, a là các hằng số dương. Hỏi khi nhiệt độ trung bình của trái đất tăng thêm bao nhiêu độ C thì mực nước biển dâng lên $0,2m$?

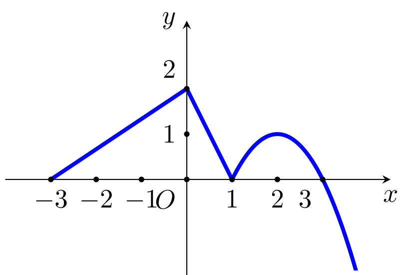
A $9,2°C$. **B** $8,6°C$. **C** $7,6°C$. **D** $6,7°C$.

Lời giải.

$$\begin{cases} 0,03 = ka^2 \\ 0,1 = ka^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt[3]{\dfrac{10}{3}} \\ k = \dfrac{0,03}{a^2} \end{cases};\ f(t) = ka^t \Leftrightarrow t = \log_a \dfrac{f(t)}{k} = \log_a \dfrac{0,2a^2}{0,03} \approx 6,7.$$

Chọn đáp án D □

Câu 43.
Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-3;3]$ như hình vẽ (phần đường cong của đồ thị là một phần của parabol $y = ax^2 + bx + c$). Biết $f(3) = 0$, giá trị của $f(-1) + f(1)$ bằng



A $\dfrac{8}{3}$. **B** $-\dfrac{16}{3}$. **C** $-\dfrac{8}{3}$. **D** $\dfrac{16}{3}$.

Lời giải.
Ta có đường cong Parabol có đỉnh $(2;1)$ và đi qua hai điểm $(1;0)$, $(3;0)$ nên có phương trình $y = f'(x) = -x^2 + 4x - 3$.

Suy ra $\int\limits_1^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 (-x^2+4x-3)\,\mathrm{d}x = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow f(3)-f(1) = \dfrac{4}{3} \Rightarrow f(1) = -\dfrac{4}{3}$.

Đường thẳng d đi qua hai điểm $(-3;0)$, $(0;2)$ nên có phương trình $y = \dfrac{2}{3}x + 2$.

Suy ra với điểm có hoành độ $x=-1$ thuộc $d \Rightarrow$ tung độ $y = \dfrac{4}{3}$.

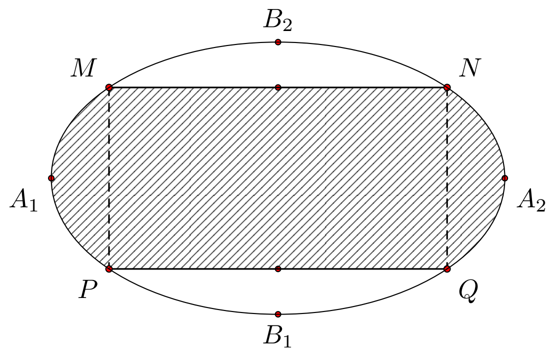
Suy ra $\int\limits_{-1}^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(1)-f(-1) = \left(\dfrac{4}{3}+2\right)\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 = \dfrac{8}{3} \Rightarrow f(-1) = f(1) - \dfrac{8}{3} = -4$.

Vậy $f(-1)+f(1) = -4 - \dfrac{4}{3} = -\dfrac{16}{3}$.

Chọn đáp án B □

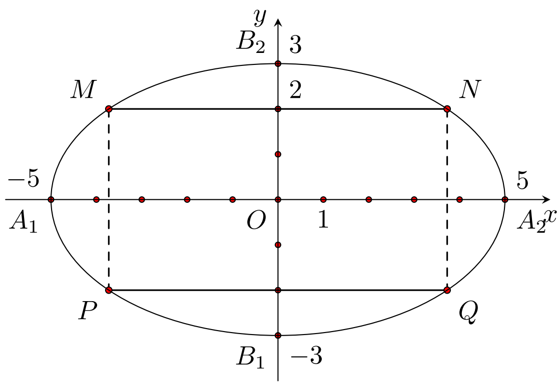
Câu 44.

Đáy của một bể bơi có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí phần lát gạch màu (phần tô đậm) là 300000 đồng/ m^2 và phần lát gạch trắng (không tô đậm) còn lại là 100000 đồng/ m^2. Hỏi số tiền để làm đáy bể bơi theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 10m$, $B_1B_2 = 6m$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 4m$?



A 12 072 179 đồng. **B** 9 687 040 đồng. **C** 13 104 673 đồng. **D** 7 768 175 đồng.

Lời giải.



Vì elip có độ dài trục lớn $2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$, độ dài trục bé $2b = 6 \Leftrightarrow b = 3$ nên elip có diện tích là $S_{(E)} = \pi ab = 15\pi$.

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho A_1A_2 trùng Ox, B_1B_2 trùng Oy khi đó elip có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow y = \pm\dfrac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$.

Vì $MQ = 4 \Rightarrow \mathrm{d}(O, MN) = 2$ nên MN có phương trình là $y = 2$ và $N(x_0;2)$, $x_0 > 0$.

Vì điểm $N \in (E) \Rightarrow \dfrac{x_o^2}{25} + \dfrac{2^2}{9} = 1 \Rightarrow x_0^2 = \dfrac{125}{9} \Rightarrow x_0 = \dfrac{5\sqrt{5}}{3}$.

Suy ra $M\left(-\dfrac{5\sqrt{5}}{3};2\right), N\left(\dfrac{5\sqrt{5}}{3};2\right)$.

Nên diện tích phần lát gạch trắng (không tô đậm) là: $S_1 = 4 \cdot \int\limits_0^{\frac{5\sqrt{5}}{3}} \left(\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}-2\right) \mathrm{d}x \xrightarrow{CasiO}$ gán biến X.

Suy ra diện tích phần lát gạch màu (tô đậm) là $S_2 = S_{(E)} - S_1 = 15\pi - X \xrightarrow{CasiO} Y$ (gán biến).

Vậy chi phí cần tìm là: $T = Y \cdot 300000 + X \cdot 100000 \approx 12\ 072\ 179$ đồng.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Trong mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\dfrac{z+4i}{z-4i}$ là một số thực dương.

(A) Trục Ox bỏ đi đoạn nối IJ (với I là điểm biểu diễn 4, J là điểm biểu diễn -4).

B Trục Oy bỏ đi đoạn nối IJ (với I là điểm biểu diễn $4i$, J là điểm biểu diễn $-4i$).

(C) Trục Ox bỏ đi đoạn nối IJ (với I là điểm biểu diễn $2i$, J là điểm biểu diễn $-2i$).

(D) Đoạn IJ (với I là điểm biểu diễn $4i$, J là điểm biểu diễn $-4i$).

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $\dfrac{z+4i}{z-4i} = \dfrac{x+(y+4)i}{x+(y-4)i} = \dfrac{[x+(y+4)i][x-(y-4)i]}{x^2+(y-4)^2} = \dfrac{x^2+y^2-16+8xi}{x^2+(y-4)^2}$.

Từ giả thiết suy ra $\begin{cases} x^2+y^2-16>0 \\ 8x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2>16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \left[\begin{array}{l} y<-4 \\ y>4 \end{array}\right. \end{cases}$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là trục Oy bỏ đi đoạn nối IJ (với I là điểm biểu diễn $4i$, J là điểm biểu diễn $-4i$).

Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 90°$, $\widehat{BSC} = 60°$, $\widehat{CSA} = 120°$. Tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABC$.

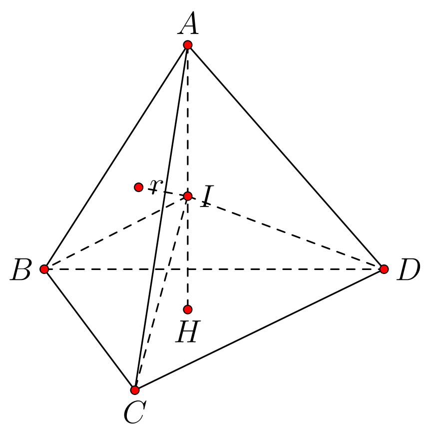
(A) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

B $\dfrac{1}{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}$.

(C) $\dfrac{2}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Lời giải.



Ta có tam giác SAB vuông cân tại S nên $AB = a\sqrt{2}$.

Tam giác SBC đều nên $BC = a$.

$CA^2 = SA^2 + SC^2 - 2SA \cdot SC \cdot \cos 120° = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$

Do đó tam giác ABC vuông tại B.

Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABC$ và có bán kính r.

Vì $SA = SB = SC = a$ nên hình chóp $S.ABC$ có đường cao SH trong đó H là trung điểm của AC.

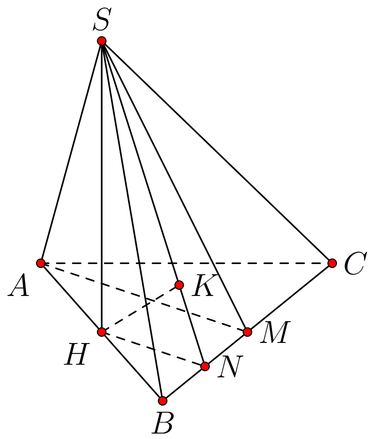
Và $BH = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SH = \sqrt{a^2 - \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a}{2}$.

Ta có:
$V_{S.ABC} = V_{I.ABC} + V_{I.SAB} + V_{I.SAC} + V_{I.SBC}$
$\Leftrightarrow SH \cdot S_{\triangle ABC} = r\left(S_{\triangle ABC} + S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SBC} + S_{\triangle SBC}\right)$
$\Rightarrow r = \dfrac{SH \cdot BA \cdot BC}{BA \cdot BC + SA \cdot SB + SB \cdot SC \cdot \sin 60^\circ + SA \cdot SC \cdot \sin 120^\circ}$
$= \dfrac{\frac{a}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a}{a\sqrt{2} \cdot a + a \cdot a + a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$.
$\Rightarrow r = \dfrac{1}{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}$.
Chọn đáp án B □

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC đều cạnh a, tam giác SAB cân tại S và nằm trên mặt phẳng vuông góc với đáy, khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

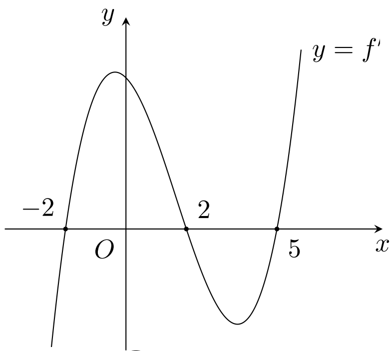
A $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{40}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{24}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{120}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{72}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm cả BC, NB.
Gọi H là trung điểm của AB. Do $(SAB) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$.
Ta có $HN \,//\, AM \Rightarrow HN \perp BC, HN = \dfrac{1}{2}AM = \dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
$BC \perp SH \Rightarrow BC \perp (SHN)$.
Hạ $HK \perp SN \Rightarrow HK \perp (SBC)$.
$\mathrm{d}(A,(SBC)) = 2\mathrm{d}(H,(SBC)) = 2HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.
Xét tam giác SHN có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HN^2} \Leftrightarrow \dfrac{12}{a^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{16}{3a^2}$.
$\Rightarrow \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{12}{a^2} - \dfrac{16}{3a^2} = \dfrac{20}{3a^2} \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{10}$.
Ta có $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{15}}{10} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{40}$.
Chọn đáp án A □

Câu 48.
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A $(-1; +\infty)$. **B** $(-\infty; -1)$. **C** $(1; 3)$. **D** $(0; 2)$.

Lời giải.

Có $g'(x) = -2f'(3-2x)$.

Hàm số nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x) \leqslant 0$, dấu "=" chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm.

$\Leftrightarrow -2f'(3-2x) \leqslant 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \leqslant 3-2x \leqslant 2 \\ 3-2x \geqslant 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right] \\ x \in (-\infty; -1] \end{array}\right.$.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Tìm nghiệm của bất phương trình $\log_2(2x) \cdot \log_4(4x) \geqslant 3$.

A $\left[\begin{array}{l} 0 < x \leqslant \frac{1}{16} \\ x \geqslant 2 \end{array}\right.$. **B** $\left[\begin{array}{l} 0 < x \leqslant \frac{1}{61} \\ x \geqslant 3 \end{array}\right.$. **C** $\left[\begin{array}{l} 0 < x \leqslant \frac{1}{6} \\ x \geqslant 2 \end{array}\right.$. **D** $\left[\begin{array}{l} 0 < x \leqslant \frac{1}{13} \\ x \geqslant 4 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.

$\log_2(2x) \cdot \log_4(4x) \geqslant 3$

$\Leftrightarrow \log_2(2x) \cdot \frac{1}{2}\log_2(4x) \geqslant 3$

$\Leftrightarrow \log_2(2x) \cdot \log_2(4x) \geqslant 6$

$\Leftrightarrow (1 + \log_2 x) \cdot (2 + \log_2 x) \geqslant 6$

$\Leftrightarrow \log_2^2 x + 3\log_2 x - 4 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x \leqslant -4 \\ \log_2 x \geqslant 1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant 2^{-4} = \frac{1}{16} \\ x \geqslant 2. \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \leqslant \frac{1}{16} \\ x \geqslant 2 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} -1 + a - b + c > 0 \\ 8 + 4a + 2b + c < 0 \end{cases}$. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và trục Ox là:

A 0. **B** 2. **C** 1. **D** 3.

Lời giải.

Hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và trục Ox là nghiệm của phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Trước hết, ta có nhận xét rằng phương trình trên có nhiều nhất ba nghiệm trên $\mathbb{R}(1)$.

Mặt khác, ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[x^3\left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}\right)\right] = -\infty$ và $y(-1) = -1 + a - b + c > 0$, nên tồn tại điểm $x_1 \in (-\infty; -1)$ sao cho $y(x_1) = 0(2)$.

Lại có $\begin{cases} y(-1) = -1 + a - b + c > 0 \\ y(2) = 8 + 4a + 2b + c < 0 \end{cases}$ nên $y(-1) \cdot y(2) < 0$.

Khi đó tồn tại điểm $x_2 \in (-1; 2)$ sao cho $y(x_2) = 0(3)$.

Và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3\left(1+\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{c}{x^3}\right)\right]=+\infty$, $y(2)=8+4a+2b+c<0$ nên tồn tại điểm $x_3\in(2;+\infty)$ sao cho $y(x_3)=0(4)$.

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0$ có ba nghiệm phân biệt $x_1\in(-\infty;-1)$, $x_2\in(-1;2)$ và $x_3\in(2;+\infty)$ hay đồ thị hàm số đã cho cắt Ox tại ba điểm phân biệt.

Chọn đáp án D $\square$

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. C	3. A	4. D	5. A	6. D	7. A	8. D	9. D	10. C
11. D	12. C	13. A	14. B	15. D	16. B	17. A	18. B	19. C	20. B
21. C	22. C	23. B	24. B	25. C	26. A	27. B	28. A	29. C	30. C
31. B	32. B	33. A	34. A	35. B	36. A	37. D	38. B	39. C	40. C
41. B	42. D	43. B	44. A	45. B	46. B	47. A	48. B	49. A	50. D

17 ĐỀ THI THỬ SỐ 17-MAX8

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$, công bội $q = -\dfrac{1}{10}$. Hỏi $\dfrac{1}{10^{2017}}$ là số hạng thứ mấy của (u_n)?

(A) Số hạng thứ 2016. (B) Số hạng thứ 2017. (C) Số hạng thứ 2019. (D) Số hạng thứ 2018.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_1 q^{n-1} = -\left(-\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$.

Khi đó $u_n = \dfrac{1}{10^{2017}} \Leftrightarrow -\left(-\dfrac{1}{10}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{10^{2017}} \Leftrightarrow n = 2018$.

Do đó $\dfrac{1}{10^{2017}}$ là số hạng thứ 2018 của (u_n).

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

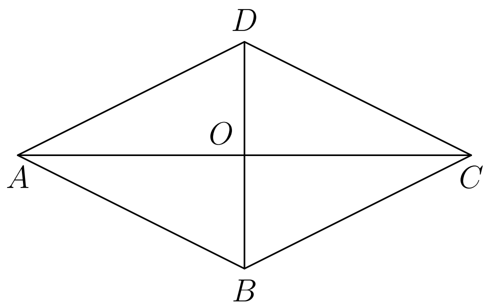
(A) Phép vị tự tâm O, tỉ số $k = 1$ biến tam giác OBC thành tam giác ODA.

(B) Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\overrightarrow{AD}$ biến tam giác ABD thành tam giác DCB.

(C) Phép vị tự tâm O, tỉ số $k = -1$ biến tam giác ABD thành tam giác CDB.

(D) Phép quay tâm O, góc $\dfrac{\pi}{2}$ biến tam giác OBC thành tam giác OCD.

Lời giải.



Ta có: $V_{(O,-1)}(A) = C$; $V_{(O,-1)}(B) = D$; $V_{(O,-1)}(D) = B$. Suy ra phép vị tự tâm O, tỉ số $k = -1$ biến tam giác ABD thành tam giác CDB.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Biết bốn số 5; x; 15; y theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Tính $3x + 2y$.

(A) 50. (B) 70. (C) 30. (D) 80.

Lời giải.

Ta có: $x = \dfrac{5+15}{2} = 10 \Rightarrow y = 20$. Vậy $3x + 2y = 70$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Tìm số phức z thỏa mãn $i\left(\overline{z} - 2 + 3i\right) = 1 + 2i$.

(A) $z = -4 + 4i$. (B) $z = -4 - 4i$. (C) $z = 4 - 4i$. (D) $z = 4 + 4i$.

Lời giải.

$i(\overline{z} - 2 + 3i) = 1 + 2i \Leftrightarrow \overline{z} - 2 + 3i = \dfrac{1+2i}{i} \Leftrightarrow \overline{z} - 2 + 3i = 2 - i \Leftrightarrow \overline{z} = 4 - 4i \Leftrightarrow z = 4 + 4i$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số là

A. $y = -1$. B. $y = 0$. C. $y = 2$. D. $y = 1$.

Lời giải.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Tìm một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{5x-2}$.

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln(5x-2) + C$. B. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\ln|5x-2| + C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln|5x-2| + C$. D. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 5\ln|5x-2| + C$.

Lời giải.

$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{5x-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\ln|5x-2| + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$ là

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin 3x + C$. B. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin 3x}{3} + C$.

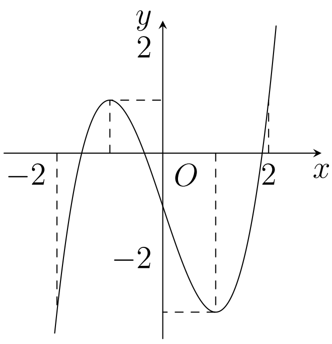
C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3\sin 3x + C$. D. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin 3x}{3} + C$.

Lời giải.

$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos 3x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin 3x}{3} + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau



Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1; 2)$. B. $(-2; 0)$. C. $(-1; 3)$. D. $(2; 5)$.

Lời giải.

.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Đa diện đều loại $\{3;3\}$ có tên gọi nào dưới đây?

A Tứ diện đều. **B** Lập phương.
C Bát diện đều. **D** Hai mươi mặt đều.

Lời giải.

Khối đa diện đều loại $\{3;3\}$ là tứ diện đều.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Tìm tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$.

A $(0;0)$ và $(-2;-4)$. **B** $(0;0)$ và $(2;-4)$. **C** $(0;0)$ và $(2;4)$. **D** $(0;0)$ và $(1;-2)$.

Lời giải.

Ta có: $y = x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -4. \end{array}\right.$

Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ là: $(0;0)$ và $(2;-4)$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Cho khối nón (N) có bán kính $r = \sqrt{5}$, có chiều cao $h = 5$. Thể tích V của khối nón (N) đã cho là.

A $V_{(N)} = \dfrac{27\pi}{5}$. **B** $V_{(N)} = \dfrac{16\pi}{5}$. **C** $V_{(N)} = \dfrac{26\pi}{5}$. **D** $V_{(N)} = \dfrac{25\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có $V_{(N)} = \dfrac{1}{3} \cdot 5\pi \left(\sqrt{5}\right)^2 = \dfrac{25\pi}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Đặt $\log_2 5 = a$, khi đó $\log_8 25$ bằng

A $\dfrac{2a}{3}$. **B** $\dfrac{2}{3a}$. **C** $\dfrac{3}{2a}$. **D** $\dfrac{3a}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\log_8 25 = \log_{2^3} 5^2 = \dfrac{2}{3} \log_2 5 = \dfrac{2a}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Tập nghiệm của phương trình $3^{x^2+2x-1} = 9$ là

A $\{1\}$. **B** $\{3\}$. **C** $\{1;3\}$. **D** $\{1;-3\}$.

Lời giải.

Có: $3^{x^2+2x-1} = 9 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có mấy đường thẳng vuông góc với Δ?

A 3. **B** Vô số. **C** 2. **D** 1.

Lời giải.

Trong không gian có vô số đường thẳng qua O và vuông góc với Δ.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Một hộp bi có 5 bi xanh, 4 bi đỏ, 6 bi vàng. Chọn ngẫu nhiên ba bi từ trong hộp ra. Tính xác suất để ba bi được chọn ra cùng màu.

A $\mathrm{P}(A) = \dfrac{31}{455}$. **B** $\mathrm{P}(A) = \dfrac{6}{91}$. **C** $\mathrm{P}(A) = \dfrac{34}{455}$. **D** $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{91}$.

Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^3 = 455$.

Gọi A: "Ba viên bi lấy ra cùng màu ".

Suy ra $n(A) = \mathrm{C}_5^3 + \mathrm{C}_6^3 + \mathrm{C}_4^3 = 34$.

Vậy xác suất cần tính là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{34}{455}$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Với a, b là hai số dương tùy ý, $\ln \dfrac{a^3}{b}$ bằng

A $\ln 3a - \ln b$. **B** $\dfrac{1}{3}\ln a - \ln b$. **C** $3\ln a + \ln b$. **D** $3\ln a - \ln b$.

Lời giải.

Ta có $\ln \dfrac{a^3}{b} = \ln a^3 - \ln b = 3\ln a - \ln b$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Nghiệm của phương trình $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ là

A $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$. **B** $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$. **C** $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$. **D** $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$.

Lời giải.

$\cos x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho số phức $z = 2 + i$. Tính $|z|$.

A $|z| = \sqrt{5}$. **B** $|z| = 5$. **C** $|z| = 2$. **D** $|z| = 3$.

Lời giải.

Ta có $|z| = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x + 3y + 4z - 5 = 0$ và điểm $A(1; -3; 1)$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P).

A $\dfrac{3}{\sqrt{29}}$. **B** $\dfrac{8}{\sqrt{29}}$. **C** $\dfrac{8}{9}$. **D** $\dfrac{8}{29}$.

Lời giải.

$\mathrm{d}(A; (P)) = \dfrac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 - 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}} = \dfrac{8}{\sqrt{29}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; -2; 0)$, $B(3; 3; 2)$, $C(-1; 2; 2)$ và $D(3; 3; 1)$. Độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ đỉnh D xuống mặt phẳng (ABC) bằng

A $\dfrac{9}{14}$. **B** $\dfrac{9}{\sqrt{2}}$. **C** $\dfrac{9}{7\sqrt{2}}$. **D** $\dfrac{9}{7}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;5;2)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;4;2)$, $\overrightarrow{AD}=(2;5;1)$.

Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC) bằng $\dfrac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}}=\dfrac{3\cdot\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}\right|}{\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}=\dfrac{9}{7\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+4=0$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Tính $T=OM+ON$ với O là gốc tọa độ.

(A) $T=2$. (B) $T=8$. **(C) $T=4$.** (D) $T=\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có: $z^2+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=-2i\\ z_2=2i.\end{array}\right.$

Suy ra $M(0;-2)$; $N(0;2)$ nên $T=OM+ON=\sqrt{(-2)^2}+\sqrt{2^2}=4$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh AA' và BB'. Tính tỉ số thể tích khối chóp $C.ABEF$ với thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

(A) $\dfrac{1}{3}$. (B) $\dfrac{2}{3}$. (C) $\dfrac{3}{4}$. (D) $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$: $V=CC'\cdot S_{A'B'C'}$.

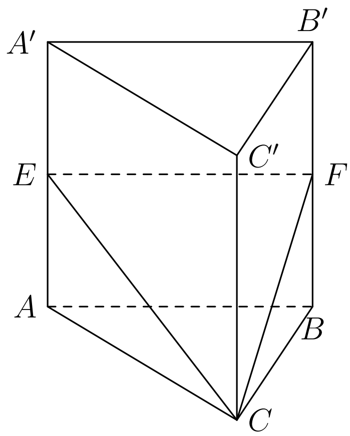
Ta có $V_{C.A'B'C'}=\dfrac{1}{3}CC'\cdot S_{A'B'C'}=\dfrac{1}{3}V$.

Mà $V=V_{C.A'B'C'}+V_{C.ABB'A'}\Rightarrow V_{C.ABB'A'}=V-\dfrac{1}{3}V=\dfrac{2}{3}V$.

Do E, F lần lượt là trung điểm của AA' và BB',

nên $S_{ABFE}=\dfrac{1}{2}S_{ABB'A'}$ hay $V_{C.ABFE}=\dfrac{1}{2}V_{C.ABB'A'}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}V=\dfrac{V}{3}$.

Suy ra $\dfrac{V_{C.ABFE}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\dfrac{1}{3}$.



Chọn đáp án A □

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q)\colon x+y+3z=0$, $(R)\colon 2x-y+z=0$ là

(A) $4x+5y-3z-22=0$. (B) $4x-5y-3z-12=0$.

(C) $2x+y-3z-14=0$. (D) $4x+5y-3z+22=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(Q)\colon x+y+3z=0$, $(R)\colon 2x-y+z=0$ có các véc-tơ pháp tuyến lần lượt là $\overrightarrow{n_1}=(1;1;3)$ và $\overrightarrow{n_2}=(2;-1;1)$.

Vì (P) vuông góc với hai mặt phẳng (Q), (R) nên (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}=\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(4;5;-3)$.

Ta lại có (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$ nên $(P)\colon 4(x-2)+5(y-1)-3(z+3)=0\Leftrightarrow 4x+5y-3z-22=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Số nghiệm thực của phương trình $\log_3(11-3^x)=10^{\log(2-x)}$ là

(A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x<2$.

Phương trình tương đương với: $\log_3(11-3^x)=2-x$

$$\Leftrightarrow 3^{2x}-11\cdot 3^x+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x=\dfrac{11+\sqrt{85}}{2}\\ 3^x=\dfrac{11-\sqrt{85}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\log_3\dfrac{11+\sqrt{85}}{2}\approx 2,1(KTM)\\ x=\log_3\dfrac{11-\sqrt{85}}{2}\approx -0,1(TM).\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có một nghiệm thực.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Đồ thị của hàm số nào sau đây có tiệm cận ngang?

(A) $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$. (B) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x+1}$. (C) $y=\dfrac{x^2+1}{x}$. (D) $y=\sqrt{x^2-1}$.

Lời giải.

- Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$ có TXĐ $\mathscr{D}=[-2;2]\setminus\{0\}$ nên nó không có TCN.
- Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x+1}$ có TXĐ $\mathscr{D}=[1;+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}y=0$ nên nó có TCN $y=0$.
- Hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ có TXĐ $\mathscr{D}=\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\pm\infty$ nên nó không có TCN.
- Hàm số $y=\sqrt{x^2-1}$ có TXĐ $\mathscr{D}=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\pm\infty$ nên nó không có TCN.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Cho số phức $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(1+i)z+2\overline{z}=3+2i$. Tính $P=a+b$.

(A) $P=\dfrac{1}{2}$. (B) $P=1$. (C) $P=-1$. (D) $P=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$(1+i)z+2\overline{z}=3+2i\cdot(1)$. Ta có: $z=a+bi\Rightarrow\overline{z}=a-bi$.

Thay vào (1) ta được $(1+i)(a+bi)+2(a-bi)=3+2i$

$\Leftrightarrow (a-b)i+(3a-b)=3+2i \Leftrightarrow (a-b)i+(3a-b)=3+2i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a-b=2\\3a-b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=-\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow P=-1.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-x-4}=\sqrt{x-1}$ là

(A) vô số nghiệm. (B) 1. (C) 0. (D) 2.

Lời giải.

$$\sqrt{x^2-x-4}=\sqrt{x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\geqslant 0\\x^2-x-4=x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 1\\x^2-2x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=3.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Tìm giá trị của tham số m biết giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{2x+m}{x-1}$ trên $[2;5]$ bằng 7.

A $m = 3$. **B** $m = 8$. **C** $m = -3$. **D** $m = 18$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-2-m}{(x-1)^2}$

TH1: $-2 - m < 0 \Leftrightarrow m > -2$

Khi đó $\max\limits_{[2;5]} y = y(2) = 4 + m = 7 \Leftrightarrow m = 3$ (thỏa mãn).

TH2: $-2 - m > 0 \Leftrightarrow m < -2$.

Khi đó $\min\limits_{[2;5]} y = y(5) = \dfrac{10+m}{4} = 7 \Leftrightarrow m = 18$ (loại).

Chọn đáp án A □

Câu 29. Biết $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$. Khi đó giá trị của $I = \int\limits_1^4 f(3x-3)\,\mathrm{d}x$ là

A 24. **B** 0. **C** 27. **D** 3.

Lời giải.

$I = \int\limits_1^4 f(3x-3)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 3x - 3 \Rightarrow \mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 0; x = 4 \Rightarrow t = 9$.

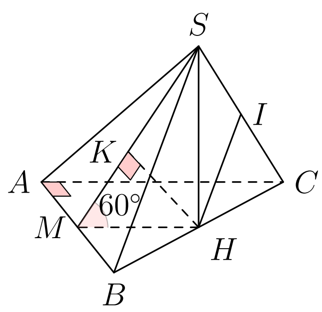
Khi đó: $I = \dfrac{1}{3}\int\limits_0^9 f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{3} \cdot 9 = 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, $AB = AC = a$, I là trung điểm của SC, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, mặt phẳng (SAB) tạo với đáy một góc bằng $60°$. Tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SAB) theo a.

A $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$. **C** $4\sqrt{15}a$. **D** $\dfrac{3a}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm AB thì $HM \parallel AC \Rightarrow MH \perp AB$ và $MH = \dfrac{a}{2}$.

Vậy $\left(\widehat{(SAB),(ABC)}\right) = \widehat{SMH} = 60°$.

Lại có $IH \parallel SB \Rightarrow IH \parallel (SAB)$ nên $\mathrm{d}(I,(SAB)) = \mathrm{d}(H,(SAB))$.

Kẻ $HK \perp SM \Rightarrow HK \perp (SAB)$

nên $\mathrm{d}(H,(SAB)) = HK = MH \cdot \sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) > 0$, $\forall x \in (0;+\infty)$. Biết $f(1) = 2$. Khẳng định nào dưới đây có thể xảy ra?

A $f(2) + f(3) = 4$. **B** $f(2) = 1$.

Ⓒ $f(2017) > f(2018)$. **D** $f(-1) = 2$.

Lời giải.

Vì $f'(x) > 0$, $\forall x \in (0; +\infty)$. Ta có bảng biến thiên của $y = f(x)$ trên $(0; +\infty)$ như sau:

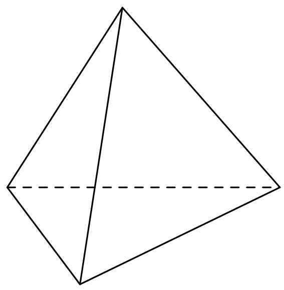
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$f(1) = 2$	$+\infty$

Do đó hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên ta có $f(1) = 2 < f(2) < f(3)$; $f(2) + f(3) > 4$; $f(2017) < f(2018)$. Vậy loại A, C và B, chọn D.

Chọn đáp án D □

Câu 32.

Kim tự tháp Kê - ốp ở Ai Cập được xây dựng vào khoảng 2500 năm trước Công nguyên. Kim tự tháp này là một khối chóp tứ diện đều có chiều cao 147 m, cạnh đáy dài 230 m. Thể tích của kim tự tháp Kê - ốp bằng



A $648025\sqrt{3}$ m^3. Ⓑ 648025 m^3.

Ⓒ $648125\sqrt{3}$ m^3. Ⓓ $13225\sqrt{3}$ m^3.

Lời giải.

Đáy của kim tự tháp là tam giác đều cạnh bằng 230 m.

Suy ra thể tích của kim tự tháp Ki - ốp là: $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{230^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 147 = 648025\sqrt{3}$ m^3

Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho tam giác ABC, biết $A(1; -2; 4)$, $B(0; 2; 5)$, $C(5; 6; 3)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

Ⓐ $G(6; 3; 3)$. Ⓑ $G(4; 2; 2)$. Ⓒ $G(3; 3; 6)$. **D** $G(2; 2; 4)$.

Lời giải.

G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có: $\begin{cases} x_G = \dfrac{1+0+5}{3} = 2 \\ y_G = \dfrac{-2+2+6}{3} = 2 \\ z_G = \dfrac{4+5+3}{3} = 4 \end{cases}$. Vậy $G(2; 2; 4)$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) > -3$ là

Ⓐ $T = (-3; 3)$. Ⓑ $T = (-2; 2)$.

C $T = (-3; -1) \cup (1; 3)$. Ⓓ $T = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 1. \end{array}\right.$

$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) > -3 \Leftrightarrow -\log_2(x^2 - 1) > -3 \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 1) < 3 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 8 \Leftrightarrow -3 < x < 3$.

Vậy $T = (-3;-1) \cup (1;3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$ có điểm cực tiểu $A(2;-2)$. Khi đó $a+b$ bằng

A -2. B 4. C 2. D -4.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + 2a$; $y'' = 6x - 6$.

Hàm số có cực trị khi $9 - 6a > 0 \Leftrightarrow a < \dfrac{3}{2}$.

Để đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $A(2;-2)$ cần có $\begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) > 0 \\ y(2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 0 \\ 6 \cdot 2 - 6 > 0 \\ 4a + b - 4 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2. \end{cases}$

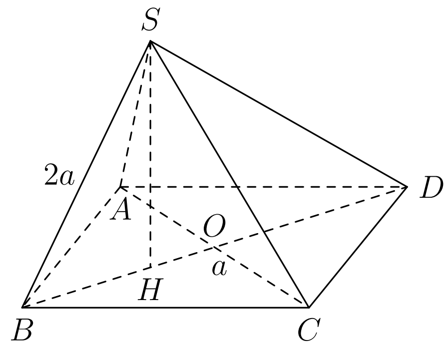
Vậy $a + b = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thoi và $\widehat{BAD} = 120^\circ$, $AC = a$. Có $SA = SB = SC = 2a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A $\dfrac{a^3\sqrt{11}}{3}$. B $\dfrac{a^3}{6}$. C $\dfrac{a^3\sqrt{11}}{6}$. D $\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải.



Do $\widehat{BAD} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ$. Mà $ABCD$ là hình thoi nên $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh a.

Hình chóp $S.ABC$ là chóp tam giác đều.

Gọi H là trọng tâm của tam giác ABC suy ra $SH \perp (ABC)$.

Gọi O là giao của AC với BD, suy ra BO là đường cao của tam giác ABC suy ra $BO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BH = \dfrac{2}{3}BO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ta có $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$.

Ta lại có $BD = 2BO = a\sqrt{3}$.

Suy ra $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{11}}{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Cho khối nón có thể tích $V = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\pi a^3$ và thiết diện qua trục là tam giác đều. Diện tích xung quanh của hình nón đó là

A $S_{xq} = \pi a^2 \sqrt[3]{\dfrac{1}{16}}$. B $S_{xq} = 2\pi a^2 \sqrt[3]{\dfrac{9}{16}}$. C $S_{xq} = 3\pi a^2 \sqrt[3]{\dfrac{9}{16}}$. D $S_{xq} = 3\pi a^2 \sqrt[3]{\dfrac{2}{16}}$.

Lời giải.

Do thiết diện qua trục là tam giác đều nên $l = 2R$ và $h = \dfrac{2R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$.

Theo đề bài khối nón có thể tích

$V = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\pi a^3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}h \cdot \pi R^2 = \dfrac{\pi\sqrt{3}a^3}{4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\pi R^3\sqrt{3} = \dfrac{\pi\sqrt{3}a^3}{4} \Leftrightarrow R^3 = \dfrac{3}{4}a^3 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\dfrac{3}{4}} \cdot a$

$\Rightarrow$ đường sinh của hình nón là $l = 2\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}} \cdot a$.

Diện tích xung quanh hình nón là $S_{xq} = \pi Rl = 2\pi a^2\sqrt[3]{\dfrac{9}{16}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 5]$ và $f(5) = 10$, $\displaystyle\int_0^5 xf'(x)\,\mathrm{d}x = 30$. Tính $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) -20. (B) 70. **(C) 20.** (D) -30.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = f(x) \end{cases}$

$\displaystyle\int_0^5 x \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = [x \cdot f(x)]\Big|_0^5 - \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow 30 = 5f(5) - \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle\Leftrightarrow \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 5f(5) - 30 = 20.$

Chọn đáp án C □

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 1]$ và $f(-x) + 2018f(x) = \mathrm{e}^x$, $\forall x \in [-1; 1]$. Tính $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $\dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{\mathrm{e}}$. **(B) $\dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{2019\mathrm{e}}$.** (C) 0. (D) $\dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{2018\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Đặt $I = \displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Xét $J = \displaystyle\int_{-1}^1 f(-x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = -x$, khi đó $J = \displaystyle\int_1^{-1} f(t)\mathrm{d}(-t) = \int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t = I$.

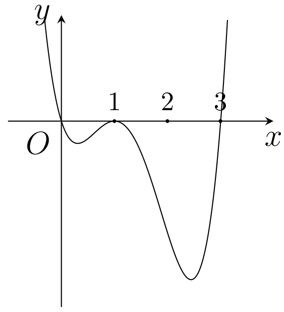
Mà $f(-x) + 2018f(x) = \mathrm{e}^x$, $\forall x \in [-1; 1] \Rightarrow \displaystyle\int_{-1}^1 (f(-x) + 2018f(x))\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle\Rightarrow \int_{-1}^1 f(-x)\,\mathrm{d}x + 2018\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\Big|_{-1}^1 \Rightarrow 2019I = \mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}} \Rightarrow I = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2019\mathrm{e}}.$

Chọn đáp án B □

Câu 40.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm m để hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 3 điểm cực trị?



(A) $m \in [0; 3]$. **B** $m \in [0; 3)$.
(C) $m \in (3; +\infty)$. (D) $m \in (-\infty; 0)$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$ và $f'(x)$ không đổi dấu khi qua 1 hay 1 là nghiệm bội chẵn

$y' = [f(x^2 + m)]' = f'(x^2 + m) \cdot 2x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x^2 + m) = 0 \\ x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + m = 0 \\ x^2 + m = 1 (L) \\ x^2 + m = 3 \\ x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = -m \\ x^2 = 3 - m \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi qua ba nghiệm đó $\Leftrightarrow m \in [0; 3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 2; 3)$, $B(3; 4; 4)$, $C(2; 6; 6)$ và $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính $a + b + c$.

(A) $\dfrac{31}{3}$. **B** $\dfrac{46}{5}$. (C) 10. (D) $\dfrac{63}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 2; 1)$, $\overrightarrow{BC} = (-1; 2; 2) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right] = (2; -5; 6)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $2x - 5y + 6z - 10 = 0$.

Do $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên

$$\begin{cases} I \in (ABC) \\ IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 5b + 6c - 10 = 0 \\ (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = (a-3)^2 + (b-4)^2 + (c-4)^2 \\ (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = (a-2)^2 + (b-6)^2 + (c-6)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 5b + 6c = 10 \\ 4a + 4b + 2c = 27 \\ 2a + 8b + 6c = 62 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{10} \\ b = 4 \\ c = \dfrac{49}{10} \end{cases}.$$

Vậy $a + b + c = \dfrac{46}{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Xét các số dương a, b, c thỏa mãn $16 \log^4 a + 4 \log^4 b + 2 \log^2 c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của a.

A $10^{\frac{1}{2}}$. (B) 10^{-1}. (C) 1. (D) $10^{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Ta có: $16\log^4 a + 4\log^4 b + 2\log^2 c = 1$

$\Leftrightarrow 16\log^4 a = 1 - \left(4\log^4 b + 2\log^2 c\right) \leqslant 1$

$\Leftrightarrow |2\log a| \leqslant 1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant \log a \leqslant \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 10^{-\frac{1}{2}} \leqslant a \leqslant 10^{\frac{1}{2}}$

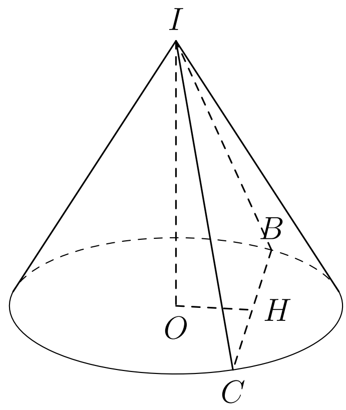
$\Rightarrow a_{\max} = 10^{\frac{1}{2}}$ đạt được khi $4\log^4 b + 2\log^2 c = 0 \Leftrightarrow b = c = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Cắt hình nón đỉnh I bởi một mặt phẳng đi qua trục hình nón ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$; BC là dây cung của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (IBC) tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón một góc 60°. Tính theo a diện tích S của tam giác IBC.

(A) $S = \dfrac{a^2}{3}$. **B** $S = \dfrac{\sqrt{2}a^2}{3}$. (C) $S = \dfrac{\sqrt{2}a^2}{6}$. (D) $S = \dfrac{2a^2}{3}$.

Lời giải.



Cắt hình nón đỉnh I bởi một mặt phẳng đi qua trục hình nón ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$ nên bán kính của hình nón là $r = OB = OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, đường sinh $l = IB = IC = a$ và đường cao $h = SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi H là trung điểm BC, khi đó góc hợp bởi mặt phẳng (IBC) và mặt phẳng chứa đường tròn đáy là $\widehat{IHO} = 60^\circ$. Suy ra $IH = \dfrac{IO}{\sin 60^\circ} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ và $BC = 2CH = 2\sqrt{IC^2 - IH^2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích S của tam giác IBC là $S_{IBC} = \dfrac{1}{2} \cdot IH \cdot BC = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Ông Nam vay ngân hàng 500 triệu đồng để mở cửa hàng điện dân dụng với lãi suất $0,8\%$ /tháng theo thỏa thuận như sau: Sau đúng 6 tháng kể từ ngày vay ông Nam bắt đầu trả nợ, hai lần trả nợ liên tiếp cách nhau 1 tháng với số tiền trả mỗi tháng là 10 triệu đồng. Biết rằng mỗi tháng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi kể từ ngày vay, sau thời gian bao lâu ông Nam trả hết nợ cho ngân hàng? (Giả thiết trong thời gian đó lãi suất cho vay không thay đổi và tháng cuối cùng ông Nam có thể trả ít hơn 10 triệu).

A 73 tháng. (B) 67 tháng. (C) 68 tháng. (D) 72 tháng.

Lời giải.

Sau đúng 6 tháng kể từ ngày vay ông Nam thiếu nợ ngân hàng số tiền là

$A = 500 \cdot (1 + 0,008)^6 \approx 524,5$ (triệu đồng).

Gọi n là số tháng kể từ lúc ông Nam bắt đầu trả nợ cho đến lúc hết nợ, $x = 10$ (triệu) là số tiền trả góp hàng tháng; $r = 0,8\%$ là lãi suất hàng tháng của ngân hàng.

Ta có phương trình

$A(1+r)^{n-1} - \dfrac{x}{r}[(1+r)^n - 1] = 0 \Leftrightarrow (1+r)^n = \dfrac{x}{x - Ar} \Leftrightarrow n = \log_{(1+r)} \dfrac{x}{x - Ar} \approx 68$ (tháng).

Vậy sau $68 + 5 = 73$ tháng kể từ ngày vay, ông Nam trả hết nợ cho ngân hàng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;2;-2)$; $B(3;-3;3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng

A $12\sqrt{3}$. (B) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$. (C) $5\sqrt{3}$. (D) $6\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y;z)$.

Ta có $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow 3MA=2MB\Leftrightarrow 9MA^2=4MB^2$

$\Leftrightarrow 9[(x+2)^2+(y-2)^2+(z+2)^2]=4[(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2]$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+12x-12y+12z=0$

$\Leftrightarrow (x+6)^2+(y-6)^2+(z+6)^2=108$.

Như vậy, điểm M thuộc mặt cầu (S) tâm $I(-6;6;-6)$ và bán kính $R=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$.

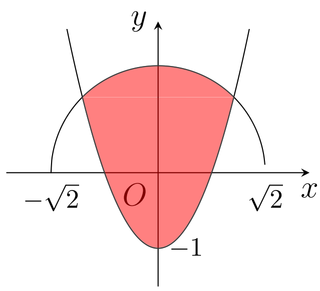
Do đó OM lớn nhất bằng $OI+R=\sqrt{(-6)^2+6^2+(-6)^2}+6\sqrt{3}=12\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi Parabol $y=2x^2-1$ và nửa đường tròn có phương trình $y=\sqrt{2-x^2}$ (với $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$) (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng

(A) $\dfrac{3\pi-2}{6}$. (B) $\dfrac{3\pi+10}{3}$. (C) $\dfrac{3\pi+2}{6}$. **D** $\dfrac{3\pi+10}{6}$.



Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $2x^2-1=\sqrt{2-x^2}\Leftrightarrow x=\pm1$.

Diện tích hình phẳng cần tính bằng $S=\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{2-x^2}-2x^2+1\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}(2x^2-1)\,\mathrm{d}x$.

Ta có $\displaystyle\int_{-1}^{1}(2x^2-1)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{2x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{-1}^{1}=-\frac{2}{3}$.

Đặt $x=\sqrt{2}\sin t\left(t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ suy ra $\sqrt{2-x^2}=\sqrt{2}\cos t$; $\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\sqrt{2}\sin t\right)=\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t$.

Khi $x=-1\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{4}$; $x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$.

Suy ra $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}+1$.

Vậy $S=\dfrac{\pi}{2}+1+\dfrac{2}{3}=\dfrac{3\pi+10}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Trong các số phức z thỏa mãn $|z-1+i|=|\overline{z}+1-2i|$, số phức z có mô-đun nhỏ nhất là

(A) $\dfrac{3}{5}-\dfrac{3}{10}i$. (B) $-\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{10}i$. (C) $\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{10}i$. **D** $-\dfrac{3}{5}-\dfrac{3}{10}i$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ thì ta có:

$|(a-1)+(b+1)i| = |(a+1)-(b+2)i|$

$\Leftrightarrow (a-1)^2 + (b+1)^2 = (a+1)^2 + (b+2)^2$

$\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 + b^2 + 2b + 1 = a^2 + 2a + 1 + b^2 + 4b + 4$

$\Leftrightarrow 4a + 2b + 3 = 0$

Suy ra z nằm trên đường thẳng d có phương trình: $4x + 2y + 3 = 0$.

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z có mô-đun nhỏ nhất trên mặt phẳng phức.

Khi đó $|z|_{\min}$ khi và chỉ khi $OM_{\min}$ hay M là hình chiếu vuông góc của O trên d.

Phương trình đường thẳng qua O và vuông góc với d là: $-2x + 4y = 0$.

$M = d \cap \Delta \Rightarrow M\left(-\dfrac{3}{5}; -\dfrac{3}{10}\right)$.

Vậy $z = -\dfrac{3}{5} - \dfrac{3}{10}i$ là số phức cần tìm.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Biết rằng hàm số $y = (m^2-1)x^3 + (m-1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ với $m \in [a; b]$. Khi đó biểu thức $T = 2a + b$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. B. 0. C. -1. D. 1.

Lời giải.

+ Khi $m = 1$ thì $y = -x + 4$ là hàm nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$. Suy ra $m = 1$ là giá trị cần tìm.

+ Khi $m = -1$ thì $y = -2x^2 - x + 4$ nghịch biến trên $\left(-\dfrac{1}{4}; +\infty\right)$.

+ Khi $m \neq \pm 1$ thì hàm số đã cho là hàm số bậc ba, nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \leqslant 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3(m^2-1)x^2 + 2(m-1)x - 1 \leqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(m^2-1) < 0 \\ (m-1)^2 - 3(m^2-1)\cdot(-1) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ 4m^2 - 2m - 2 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -\dfrac{1}{2} \leqslant m \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant m < 1$.

Vậy $m \in \left[-\dfrac{1}{2}; 1\right]$.

Suy ra $T = 2a + b = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Cho một đa giác đều 20 đỉnh nội tiếp trong đường tròn (O). Chọn ngẫu nhiên bốn đỉnh của đa giác đó. Tính xác suất sao cho bốn đỉnh được chọn là bốn đỉnh của hình chữ nhật.

A. $\dfrac{3}{323}$. B. $\dfrac{4}{9}$. C. $\dfrac{2}{969}$. D. $\dfrac{7}{216}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = \mathrm{C}_{20}^4$.

Gọi A là biến cố: " 4 đỉnh được chọn là 4 đỉnh của hình chữ nhật".

Trong 20 đỉnh của đa giác luôn có 10 cặp điểm đối xứng qua tâm của đường tròn, tức là trong 20 đỉnh của đa giác ta có được 10 đường kính của đường tròn. Cứ hai đường kính là hai đường chéo một hình chữ nhật. Vậy $n(A) = \mathrm{C}_{10}^2$.

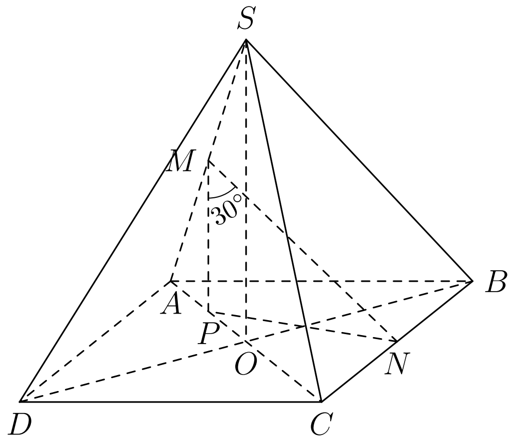
Xác suất cần tìm $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{323}$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. O là tâm của đáy, $SO \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Góc tạo bởi MN với SO bằng $30°$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{30}}{24}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{30}}{18}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{30}}{6}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{30}}{12}$.

Lời giải.



Gọi P là trung điểm của AO. Ta có MP là đường trung bình của $\triangle SAO$, suy ra $MP \parallel SO$ và $MP = \dfrac{1}{2}SO$.

Theo đầu bài $(MN, SO) = 30° \Rightarrow (MN, MP) = 30°$ hay $\widehat{PMN} = 30°$.

Xét $\triangle NCP$, có $\widehat{C} = 45°$, $CN = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a}{2}$, $CP = \dfrac{3}{4}AC = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Áp dụng định lý cô-sin: $NP^2 = CN^2 + CP^2 - 2CN \cdot CP \cdot \cos C$

$\Rightarrow NP^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{9a^2}{8} - 2 \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \cos 45° = \dfrac{5a^2}{8} \Rightarrow NP = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.

Ta có $\tan \widehat{NMP} = \dfrac{NP}{MP} \Rightarrow MP = \dfrac{NP}{\tan \widehat{NMP}} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{10}}{4}}{\tan 30°} = \dfrac{a\sqrt{30}}{4}$.

Suy ra $SO = 2MP = \dfrac{a\sqrt{30}}{2}$.

Vậy thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \dfrac{1}{3}B \cdot h = \dfrac{1}{3}a^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{30}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{30}}{6}$.

Chọn đáp án (C) □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. C	3. B	4. D	5. C	6. B	7. D	8. D	9. A	10. B
11. D	12. A	13. D	14. B	15. C	16. D	17. A	18. A	19. B	20. C
21. C	22. A	23. A	24. C	25. B	26. C	27. B	28. A	29. D	30. A
31. D	32. A	33. D	34. C	35. C	36. C	37. B	38. C	39. B	40. B
41. B	42. A	43. B	44. A	45. A	46. D	47. D	48. B	49. A	50. C

18 ĐỀ THI THỬ SỐ 18-MAX8

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Chọn khẳng định đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên $(-1; +\infty)$.
(B) Hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$.
(C) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$.
(D) Hàm số đồng biến trên $(-1; 1)$.

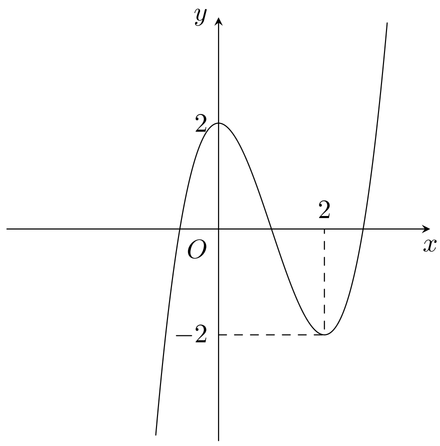
Lời giải.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a, b, c, d \in \mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 1 = 0$ là

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 4.



Lời giải.

Ta có: $3f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{3} \quad (*)$

Phương trình $(*)$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \dfrac{1}{3}$. Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy $(*)$ có 3 nghiệm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2x$ có đồ thị (C). Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm M, N trên (C) mà tại đó tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = -x + 2017$. Khi đó $x_1 + x_2$ bằng

(A) -1. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{4}{3}$. (D) $\dfrac{-4}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 2$.

Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = -x + 2017$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = 1$.

Khi đó $3x^2 - 4x + 2 = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$

Vậy $x_1 + x_2 = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên tập xác định của nó ?

A $y = \log_{\sqrt{3}} x$. B $y = \log_2 (\sqrt{x} + 1)$. C $y = \log_{\frac{\pi}{4}} x$. D $y = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \log_{\frac{\pi}{4}} x$ có tập xác định: $D = (0; +\infty)$.

Nhận thấy cơ số $\dfrac{\pi}{4} < 1$ nên $y = \log_{\frac{\pi}{4}} x$ nghịch biến trên tập xác định.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Giải bất phương trình $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x^2-4} \geqslant 1$ ta được tập nghiệm T. Tìm T.

A $T = [-2; 2]$. B $T = [2; +\infty)$.

C $T = (-\infty; -2]$. D $T = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x^2-4} \geqslant 1 \Leftrightarrow x^2 - 4 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-2; 2]$

Vậy tập nghiệm $T = [-2; 2]$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Bà Mai gửi tiết kiệm ngân hàng Vietcombank số tiền 50 triệu đồng với lãi suất $0,79\%$ một tháng, theo phương thức lãi kép. Tính số tiền cả vốn lẫn lãi bà Mai nhận được sau 2 năm ? (làm tròn đến hàng nghìn)

A 60393000. B 50793000. C 50790000. D 59480000.

Lời giải.

Đây là bài toán lãi kép với chu kỳ là một tháng, ta áp dụng công thức $\mathrm{P}_n = P(1+r)^n$ với $P = 50$ triệu đồng, $r = 0,79\% = 0,0079$ và $n = 2 \cdot 12 = 24$ tháng.

$\mathrm{P}_{24} = 50 \cdot (1 + 0,0079)^{24} \approx 60,393$ triệu đồng.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

A $x^3 + \cos x + C$. B $x^3 + \sin x + C$. C $x^3 - \cos x + C$. D $3x^3 - \sin x + C$.

Lời giải.

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là $x^3 - \cos x + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x + 1$ trục hoành và hai đường thẳng $x = -1; x = 3$.

A $S = \dfrac{64}{3}$. B $S = \dfrac{56}{3}$. C $S = \dfrac{37}{3}$. D $S = \dfrac{68}{3}$.

Lời giải.

Diện tích cần tính bằng $S = \int\limits_{-1}^{3} (x^2 + 2x + 1)\,\mathrm{d}x = \left(\dfrac{x^3}{3} + x^2 + x\right)\Bigg|_{-1}^{3} = \dfrac{64}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của z.

A. Phần thực bằng 3, phần ảo bằng -2. B. Phần thực bằng 3, phần ảo bằng $-2i$.

C. Phần thực bằng 3, phần ảo bằng 2. D. Phần thực bằng -3, phần ảo bằng -2.

Lời giải.

Với số phức $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ có phần thực là a, phần ảo là b.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Số nghiệm của phương trình $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ trên tập số phức là:

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải.

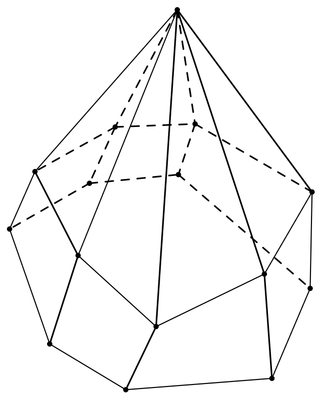
Trên tập số phức phương trình bậc n có n nghiệm (kể cả nghiệm phức) nên phương trình đã cho có 4 nghiệm trên tập số phức.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11.

Khối đa diện sau có bao nhiêu mặt?

A. 7. B. 8. C. 15. D. 16.



Lời giải.

.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Trong không gian, mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a' và b' theo thứ tự vuông góc với a và b.

B. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa đường thẳng a và đường thẳng b' song song với b.

C. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa đường thẳng a' song song với a và đường thẳng b.

D. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a' và b' theo thứ tự song song với a và b.

Lời giải.

Theo định nghĩa góc giữa hai đường thẳng thì: Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a' và b' theo thứ tự vuông góc với a và b (sai).

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(-2;1)$. Phép tịnh tiến véc-tơ $\vec{v}(3;-4)$ biến điểm A thành điểm A' có tọa độ là

(A) $A'(5;-5)$. (B) $A'(1;-3)$. (C) $A'(-3;1)$. (D) $A'(-5;5)$.

Lời giải.

Theo biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến ta có: $\begin{cases} x_{A'} = x_A + a = -2+3 = 1 \\ y_{A'} = y_A + b = 1 + (-4) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = -2+3 = 1 \\ y_{A'} = 1 + (-4) = -3 \end{cases}$

$\Rightarrow A'(1;-3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Một khối nón có diện tích xung quanh bằng 2π cm^2 và bán kính đáy $\dfrac{1}{2}$ cm. Khi đó độ dài đường sinh của khối nón đã cho bằng

(A) 2 cm. (B) 3 cm. (C) 1 cm. (D) 4 cm.

Lời giải.

Ta có: $S_{xq} = \pi R l \Rightarrow l = \dfrac{S_{xq}}{\pi R} \Rightarrow l = \dfrac{2\pi}{\pi \cdot \dfrac{1}{2}} = 4$ cm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Cho ba điểm $A(2;-1;5)$, $B(5;-5;7)$ và $M(x;y;1)$. Với giá trị nào của x, y thì ba điểm A, B, M thẳng hàng?

(A) $x = 4$ và $x = 7$. (B) $x = 4$ và $y = 7$.

(C) $x = -4$ và $y = -7$. (D) $x = -4$ và $y = 7$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3;-4;2)$, $\overrightarrow{AM} = (x-2; y+1; -4)$.

Ba điểm A, B, M thẳng hàng khi và chỉ khi $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{-4}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 7 \end{cases}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt cầu?

(A) $x^2+y^2+z^2-10xy-8y+2z-1=0$. (B) $3x^2+3y^2+3z^2-2x-6y+4z-1=0$.

(C) $x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z+2017=0$. (D) $x^2+(y-z)^2-2x-4(y-z)-9=0$.

Lời giải.

+ Phương trình $3x^2+3y^2+3z^2-2x-6y+4z-1=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-\dfrac{2}{3}x-2y+\dfrac{4}{3}z-\dfrac{1}{3}=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2 + (y-1)^2 + \left(z+\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{17}{9}$ là phương trình mặt cầu tâm $I\left(\dfrac{1}{3};1;-\dfrac{2}{3}\right)$, bán kính $R = \dfrac{\sqrt{17}}{3}$.

+ Xét phương trình $x^2+y^2+z^2-10xy-8y+2z-1=0$ có tích xy nên không phải phương trình mặt cầu.

+ Phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z+2017=0$ có $a=1$, $b=2$, $c=-2$, $d=2017$ và $a^2+b^2+c^2-d = 1+4+4-2017 < 0$ nên không là phương trình mặt cầu.

+ Phương trình $x^2+(y-z)^2-2x-4(y-z)-9=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2yz-2x-4y+4z-9=0$ có tích yz nên không là phương trình mặt cầu.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{2\sin x + 1}{1 - \cos x}$ là

A $x \neq k2\pi$. **B** $x \neq k\pi$. **C** $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. **D** $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi: $1 - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k2\pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Từ tập hợp X. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau.

A 840. **B** 5040. **C** 35. **D** 210.

Lời giải.

Số cách lập số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau từ tập hợp X là $\mathrm{A}_7^3 = 210$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Cho cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = -3$, số hạng cuối $u_n = 487$ và công sai $d = 5$. Hỏi cấp số cộng có bao nhiêu số hạng?

A 69. **B** 79. **C** 89. **D** 99.

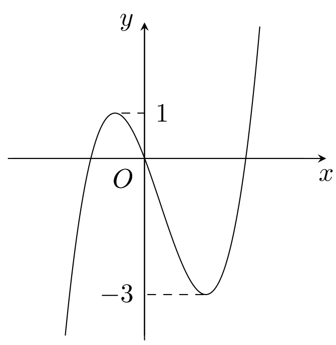
Lời giải.

Ta có : công thức cấp số cộng $u_n = u_1 + (n-1)d \Rightarrow n = \dfrac{u_n - u_1}{d} + 1 = 99$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị là



A $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$. **B** $m = -1$ hoặc $m = 3$.

C $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$. **D** $1 \leq m \leq 3$.

Lời giải.

Vì hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ luôn tạo thành hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |f(x) + m|$ và giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành sẽ tạo thành một cực trị nữa. Vậy để hàm số $y = |f(x) + m|$ có 3 cực trị khi đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ có 1 hoặc 2 giao điểm $\Rightarrow m \leqslant -1 \vee m \geqslant 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Cho x, y là hai số không âm thỏa mãn: $x + y = 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + y^2 - x + 1$ là

A $\min P = \dfrac{7}{3}$. **B** $\min P = 5$. **C** $\min P = \dfrac{17}{3}$. **D** $\min P = \dfrac{115}{3}$.

Lời giải.

Từ $x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x$.

$P = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + (2-x)^2 - x + 1 = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 5$.

Xét hàm $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 5$, trên $[0; 2]$.

Ta có $f'(x) = x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -5 (L). \end{array}\right.$

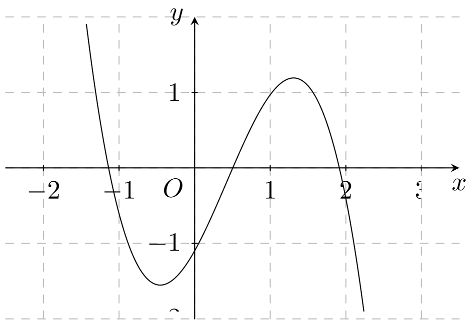
Khi đó $f(1) = \dfrac{7}{3}, f(0) = 5, f(2) = \dfrac{17}{3}$.

$\Rightarrow \min P = \dfrac{7}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 22.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

B. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

Lời giải.

Dựa vào dạng đồ thị ta nhận thấy hệ số $a < 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $d < 0$.

Đồ thị hàm số có hai cực trị trái dấu nên $a \cdot c < 0 \Rightarrow c > 0$.

Hoành độ điểm tâm đối xứng của đồ thị dương nên $\dfrac{b}{a} < 0 \Rightarrow b > 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Đường thẳng $y = m$ **không** cắt đồ thị hàm số $y = -2x^4 + 4x^2 + 2$ thì tất cả các giá trị tham số m là

A. $m > 4$. B. $m \geqslant 4$. C. $m \leqslant 2$. D. $2 < m < 4$.

Lời giải.

Lập phương trình hoành độ giao điểm: $-2x^4 + 4x^2 + 2 = m$.

Ta có: $y' = -8x^3 + 8x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Do đó, đường thẳng $y = m$ **không** cắt đồ thị hàm số khi $m > 4$.

Vậy chọn $m > 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Đặt $a = \log_3 2$, khi đó $\log_6 48$ bằng

A $\dfrac{3a-1}{a-1}$. **B** $\dfrac{3a+1}{a+1}$. **C** $\dfrac{4a-1}{a-1}$. **D** $\dfrac{4a+1}{a+1}$.

Lời giải.

$\log_6 48 = \log_6 3 + \log_6 16 = \dfrac{1}{\log_3 2+1} + \dfrac{4}{\log_2 3+1} = \dfrac{1}{a+1} + \dfrac{4}{\dfrac{1}{a}+1} = \dfrac{1+4a}{a+1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Biết $\int\limits_0^1 \ln(3x+1)\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\,(a,b\in\mathbb{Q})$. Tính $S=3a-b$.

A $S=7$. **B** $S=11$. **C** $S=8$. **D** $S=9$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u=\ln(3x+1) \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{3}{3x+1}\,\mathrm{d}x \\ v=x \end{cases}$.

$I = x\ln(3x+1)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 x\dfrac{3}{3x+1}\,\mathrm{d}x = \ln 4 - \left(x-\dfrac{1}{3}\ln(3x+1)\right)\Big|_0^1 = \ln 4 - 1 + \dfrac{1}{3}\ln 4 = \dfrac{8}{3}\ln 4 - 1$.

$\Rightarrow a=\dfrac{8}{3}, b=-1$

Vậy $S=9$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Cho số phức $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(2-i)\overline{z}-3z=-1+3i$. Tính giá trị của biểu thức $P=a-b$.

A $P=1$. **B** $P=-2$. **C** $P=3$. **D** $P=5$.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z}=a-bi$.

$(2-i)\overline{z}-3z=-1+3i \Leftrightarrow (2-i)(a-bi)-3(a+bi)=-1+3i \Leftrightarrow (-a-b)-(a+5b)i=-1+3i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a-b=-1 \\ -a-5b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow a-b=3.$

Chọn đáp án C □

Câu 27. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z thoả mãn $|z-2+3i|=|\overline{z}-i+1|$ là phương trình:

A $6x-8y-11=0$. **B** $6x-4y-11=0$. **C** $2x-8y-11=0$. **D** $2x-4y-11=0$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R};i^2=-1)$.

Ta có:

$$\begin{aligned} & |z-2+3i|=|\overline{z}-i+1| \\ \Leftrightarrow\ & |x+yi-2+3i|=|x-yi-i+1| \\ \Leftrightarrow\ & (x-2)^2+(y+3)^2=(x+1)^2+(y+1)^2 \\ \Leftrightarrow\ & -4x+4+6y+9=2x+1+2y+1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad 6x - 4y - 11 = 0$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là phương trình đường thẳng $6x - 4y - 11 = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Hình lăng trụ đứng có đáy là hình thoi có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A 3. (B) 4. (C) 5. (D) 6.

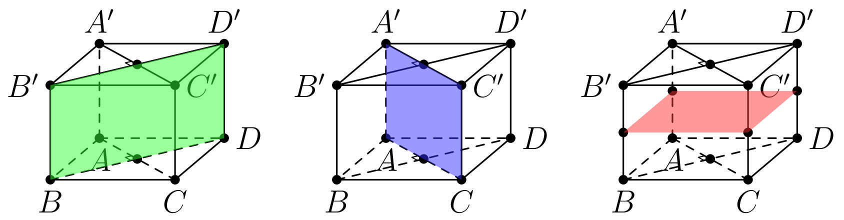
Lời giải.

Hình lăng trụ đứng có đáy là hình thoi có 3 mặt phẳng đối xứng:

+ Mặt phẳng đi qua đường chéo thứ nhất của 2 mặt đáy.

+ Mặt phẳng đi qua đường chéo thứ hai của 2 mặt đáy.

+ Mặt phẳng trung trực của các cạnh bên.



Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Thể tích khối lập phương có cạnh bằng 50 cm bằng

(A) 250 cm^3. (B) $2,5\ \text{cm}^3$. C $125\ \text{dm}^3$. (D) $5\ \text{dm}^3$.

Lời giải.

Thể tích khối lập phương bằng $50^3\ \text{cm}^3 = 125000\ \text{cm}^3 = 125\ \text{dm}^3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Khối chóp có diện tích đáy bằng $300\ \text{cm}^2$ và thể tích bằng $3,6\ \text{dm}^3$ thì có chiều cao bằng

A 36 cm. (B) 12 cm. (C) 4 cm. (D) 25 dm.

Lời giải.

Ta có $= \dfrac{3 \times 3,6 \times 1000}{300} = 36$ cm.

Chọn đáp án (A) □

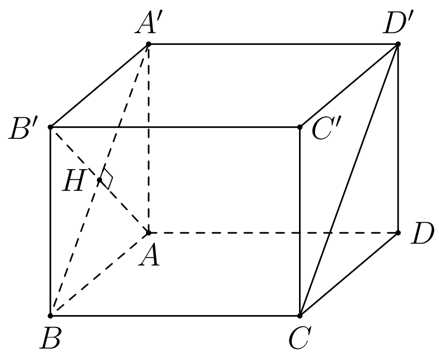
Câu 31. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $3\sqrt{2}$ cm. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'D'C)$ bằng

A 3 cm. (B) $3\sqrt{2}$ cm. (C) 6 cm. (D) 1,5 cm.

Lời giải.

Ta có $AB' \perp (A'D'CB)$ tại H là tâm hình vuông $ABB'A'$.

Suy ra khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'D'C)$ bằng $AH = \dfrac{1}{2}AB' = \dfrac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 3$ cm.

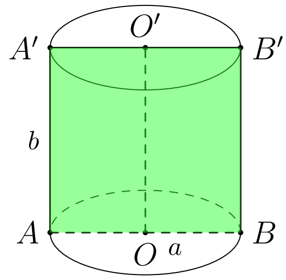


Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Hình trụ có bán kính đáy bằng a chu vi của thiết diện qua trục bằng $10a$ Thể tích của khối trụ đã cho bằng

(A) $4\pi a^3$. (B) πa^3. (C) $3\pi a^3$. (D) $5\pi a^3$.

Lời giải.



Thiết diện qua trục là 1 hình chữ nhật.

Giả sử chiều cao của khối trụ là b.

Theo đề ta có $2(2a+b)=10a \Leftrightarrow b=3a$.

Thể tích khối trụ là $V=S.h=\pi a^2.3a=3\pi a^3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;-1)$, $B(-1;0;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y-z+1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua A, B và vuông góc với (P).

(A) $(Q)\colon 2x-y+3=0$. (B) $(Q)\colon x+z=0$.

(C) $(Q)\colon -x+y+z=0$. (D) $(Q)\colon 3x-y+z=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-2;2)$

(P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;2;-1)$

Vì (Q) qua A, B và vuông góc với (P) nên

Véc-tơ của (Q) là $\vec{n_1}=\left[\overrightarrow{AB};\vec{n}\right]=(-2;0;-2)=-2(1;0;1)$.

Phương trình mặt phẳng (Q) qua $B(-1;0;1)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n_1}=(1;0;1)$ là:

$1(x+1)+1(z-1)=0 \Leftrightarrow x+z=0$.

Vậy $(Q)\colon x+z=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có phương trình là

(A) $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=4$. (B) $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=13$.

(C) $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$. (D) $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=10$.

Lời giải.

Gọi M là hình chiếu của I trên $Oy \Rightarrow M(0;1;0)$.

Mặt cầu (S) tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có bán kính $IM=\sqrt{13}$.

Vậy (S) có phương trình $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=13$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Cho (u_n) là cấp số nhân có số hạng thứ sáu $u_6=-160$, công sai $q=-2$. Tổng của 10 số hạng đầu của cấp số nhân đó bằng bao nhiêu?

(A) $\dfrac{5125}{2}$. (B) 5125. (C) -1705. (D) $\dfrac{5125}{3}$.

Lời giải.

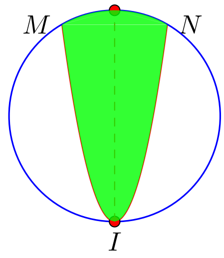
Công thức số hạng ban đầu: $u_6 = u_1 \cdot q^5 \Rightarrow u_1 = \dfrac{u_6}{q^5} = 5$.

Ta có tổng n số hạng đầu của cấp số nhân là $S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q} = -1705$.

Chọn đáp án C □

Câu 36.

Một tấm biển quảng cáo có hình dạng là một hình tròn bán kính là $2m$. Biết chi phí để sơn phần tô đậm mỗi mét vuông là 200.000 đồng và phần còn lại chi phí để sơn mỗi mét vuông là 100.000 đồng. Hỏi chi phí cần để sơn tấm biển quảng cáo là bao nhiêu? Biết rằng phần tô đậm được giới hạn bằng một Parabol có trục đi qua tâm của đường tròn và đi qua hai điểm MN và $MN = 2$. (tham khảo hình vẽ).



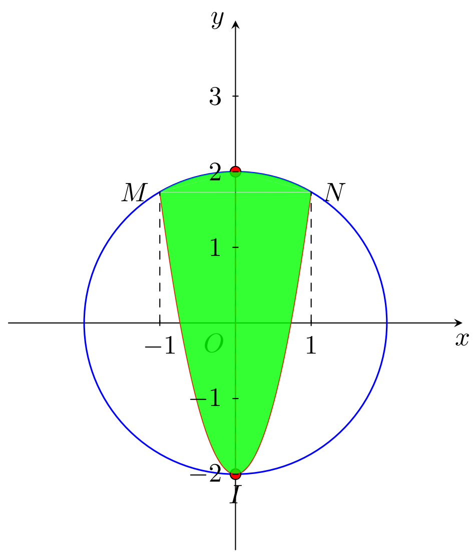
A. 5693551.000 đồng.

B. 2693551.000 đồng.

C. 3693551.000 đồng.

D. 4693551.000 đồng.

Lời giải.



Chọn hệ trục như hình vẽ:

Phương trình đường tròn $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4-x^2}$.

Gọi Parabol $(P)\colon y = ax^2 + c$

$I(0;-2) \in (P) \Rightarrow c = -2$. $N\left(1;\sqrt{3}\right) \in (P) \Rightarrow a - 2 = \sqrt{3}$

$\Rightarrow a = \sqrt{3} + 2$.

$\Rightarrow (P)\colon y = \left(\sqrt{3}+2\right)x^2 - 2$.

Diện tích hình phẳng phần tô đậm:

$$S_1 = \int\limits_{-1}^{1} \left[\sqrt{4-x^2} - \left[\left(\sqrt{3}+2\right)x^2 - 2\right]\right] \mathrm{d}x$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-1}^{1} \left[\left(\sqrt{3}+2\right)x^2 - 2\right] \mathrm{d}x$$

Tính $I_1 = \displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x = 2\sin t \left(t \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\right) \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\cos t \cdot \mathrm{d}t$. Đổi cận: $x = -1 \Rightarrow t = -\dfrac{\pi}{6}; x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{6}$

Khi đó $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 4\cdot\cos^2 t = \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t \left(t + \dfrac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Tính $I_2 = \displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \left[\left(\sqrt{3}+2\right)x^2 - 2\right] \mathrm{d}x$

$$= \left(\frac{\left(\sqrt{3}+2\right)}{3}x^3 - 2x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2\sqrt{3}-8}{3}.$$

Diện tích phần tô đậm: $S_1 = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{2\sqrt{3}-8}{3} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{6} + \dfrac{8}{3}$.

Diện tích đường tròn $S_T = 4\pi$.
Diện tích phần còn lại $S_0 = 4\pi - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{8}{3}\right) = \frac{11\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{8}{3}$.
Chi phí làm bảng quảng cáo $T = 200.000 \cdot S_1 + 100.000 S_0 = 3693551.000$ đồng.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $3\sqrt{2+x} + 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} = 3x - 10 + m$ có nghiệm.

A vô số. B 22. C 5. D 24.

Lời giải.
Ta có $23\sqrt{2+x} + 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} = 3x - 10 + m$
$\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{2+x} + 2\sqrt{2-x}\right) + 4\sqrt{4-x^2} - 3x + 10 = m$ điều kiện: $-2 \leqslant x \leqslant 2$.
đặt $t = \sqrt{x+2} + 2\sqrt{2-x} \Rightarrow t' = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} - \frac{2}{2\sqrt{2-x}} = \frac{\sqrt{2-x} - 2\sqrt{2+x}}{2\sqrt{4-x^2}}$
$\Rightarrow t' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = 2\sqrt{2+x} \Leftrightarrow 2 - x = 4(2+x) \Leftrightarrow x = -5$.
Bảng biến thiên:
Vậy $t \in \left[2; 2\sqrt{5}\right]$
$t = \sqrt{x+2} + 2\sqrt{2-x} \Rightarrow t^2 = x + 2 + 4(2-x) + 4\sqrt{4-x^2} = 10 - 3x + 4\sqrt{4-x^2}$.
Khi đó phương trình trở thành: $3t + t^2 = m$.
Xét hàm số $f(t) = 3t + t^2$ với $t \in \left[2; 2\sqrt{5}\right]$
$\Rightarrow f'(t) = 3 + 2t > 0 \forall t \in \left[2; 2\sqrt{5}\right]$
bảng biến thiên:
Vậy để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 10 \leqslant m \leqslant 20 + 6\sqrt{5} \approx 33,44$. Vậy có 24 giá trị của m.
Chọn đáp án D □

Câu 38. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{m\sin x - 2}{2\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right)$.

A $-2 < m \leqslant \sqrt{3}$. B $-2 \leqslant m \leqslant 2$. C $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right.$. D $-2 < m < 2$.

Lời giải.
Cách 1:
Xét hàm số $y = \frac{m\sin x - 2}{2\sin x - m}$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right)$.
Đặt $\sin x = t \Rightarrow f(x) = g(t) = \frac{mt - 2}{2t - m}$ với $t \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$.
Ta có $f'(x) = g'(t) \cdot t'(x) = \frac{-m^2 + 4}{(2t - m)^2} \cdot \cos x$. Do $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right)$ nên $\cos x < 0$.
Để hàm số $y = \frac{m\sin x - 2}{2\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right)$ khi và chỉ khi

$\dfrac{-m^2+4}{(2t-m)^2}<0\ \forall t\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};1\right)$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+4<0\\ \dfrac{m}{2}\notin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};1\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)\\ m\in\left(-\infty;\sqrt{3}\right)\cup(2;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

Cách 2:

$y'=\dfrac{(4-m^2)\cos x}{(2\sin x-m)}$

Hàm số đã cho đồng biến trên $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}4-m^2<0\\ 2\sin x-m\neq 0\forall x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{2\pi}{3}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<-2\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}m\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ m>2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<-2.\end{array}\right.$ □

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-(1-m)x+2m}}$ có hai tiệm cận đứng?

Ⓐ 0. **B** 2. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases}x\geqslant -1\\ x^2-(1-m)x+2m>0.\end{cases}$

Ta có $1+\sqrt{x+1}>0$ với mọi $x\geqslant -1$ nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng khi phương trình $x^2-(1-m)x+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn -1.

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ f(-1)>0\\ \dfrac{S}{2}>-1\end{cases}$, (với $f(x)=x^2-(1-m)x+2m$).

$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-10m+1>0\\ m+2>0\\ \dfrac{1-m}{2}>-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>5+2\sqrt{6}\\ m<5-2\sqrt{6}\end{array}\right.\\ m>-2\\ m>3\end{cases}\Leftrightarrow -2<m<5-2\sqrt{6}.$

Vậy có 2 giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Gọi n là số nguyên dương sao cho $\dfrac{1}{\log_3 x}+\dfrac{1}{\log_{3^2}x}+\dfrac{1}{\log_{3^3}x}+\cdots+\dfrac{1}{\log_{3^n}x}=\dfrac{190}{\log_3 x}$ đúng với mọi x dương, $x\neq 1$. Tìm giá trị của biểu thức $P=2n+3$.

Ⓐ $P=32$. Ⓑ $P=23$. Ⓒ $P=43$. **D** $P=41$.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{1}{\log_3 x}+\dfrac{1}{\log_{3^2}x}+\dfrac{1}{\log_{3^3}x}+\cdots+\dfrac{1}{\log_{3^n}x}=\dfrac{190}{\log_3 x}$

$\Leftrightarrow\log_x 3+\log^2_{x3}+\log^3_{x3}+\cdots+log^n_{x3}=190\cdot\log_x 3$

$\Leftrightarrow \log_x 3 + 2\cdot\log_x 3 + 3\cdot\log_x 3 + \cdots + n\cdot\log_x 3 = 190\cdot\log_x 3$

$\Leftrightarrow (1+2+3+\cdots+n)\log_x 3 = 190\cdot\log_x 3 \Leftrightarrow \dfrac{n(n+1)}{2} = 190 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 19\ (\text{thoả mãn}) \\ n = -20\ (\text{loại}). \end{array}\right.$

Vậy $P = 2n+3 = 41$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 41. Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(2x+5) > \log_2(x-1)$. Hỏi trong tập S có bao nhiêu phần tử là số nguyên dương bé hơn 10 ?

A 9. B 15. C 8. D 10.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 2x+5>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$.

$\log_2(2x+5) > \log_2(x-1) \Leftrightarrow 2x+5 > x-1 \Leftrightarrow x > -6$.

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình: $S = (1;+\infty)$.

Vậy trong tập S có 8 phần tử là số nguyên dương bé hơn 10.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5\cos x$ và $f(0) = 5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A $f(x) = 3x + 5\sin x + 2$.
B $f(x) = 3x - 5\sin x - 5$.
C $f(x) = 3x - 5\sin x + 5$.
D $f(x) = 3x + 5\sin x + 5$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int (3-5\cos x)\,\mathrm{d}x = 3x - 5\sin x + C$.

Lại có: $f(0) = 5 \Leftrightarrow 3\cdot 0 - 5\sin 0 + C = 5 \Leftrightarrow C = 5$. Vậy $f(x) = 3x - 5\sin x + 5$.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 43. Gọi V_x và V_y lần lượt là thể tích khối tròn xoay tạo nên bởi phép quay hình elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1 (a < b)$ xung quanh trục Ox, Oy. Hỏi khẳng định nào dưới đây đúng?

A $V_x < V_y$. B $V_x > V_y$. C $V_x = V_y$. D $V_x \leqslant V_y$.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = b^2\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right) \\ x^2 = a^2\left(1 - \dfrac{y^2}{b^2}\right). \end{cases}$

$$V_x = 2\pi\int\limits_0^a y^2\,\mathrm{d}x = 2\pi b^2\int\limits_0^a \left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x = 2\pi b^2\left(x - \dfrac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a = \dfrac{4\pi ab^2}{3} = \dfrac{4\pi ab}{3}b.$$

$$V_y = 2\pi\int\limits_0^a x^2\mathrm{d}y = 2\pi a^2\int\limits_0^a \left(1 - \dfrac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y = 2\pi a^2\left(y - \dfrac{y^3}{3b^2}\right)\Bigg|_0^b = \dfrac{4\pi ba^2}{3} = \dfrac{4\pi ab}{3}a.$$

Vì $a > b$ nên $V_x > V_y$.

Chọn đáp án B $\square$

Câu 44. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+3)(x_2+3) = 72$.

(A) $m = \dfrac{61}{2}$. (B) $m = 3$. (C) không tồn tại. (D) $m = \dfrac{9}{2}$.

Lời giải.

$\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2m - 7 = 0 \quad (1)$

Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_3 x \Leftrightarrow x = 3^t$ thì ta được phương trình $t^2 - 3t + 2m - 7 = 0 \quad (2)$

(1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 9 - 4(2m-7) > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{37}{8} \quad (*)$.

Khi điều kiện $(*)$ thỏa thì (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2.

Theo định lý Vi-ét ta có: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 3 \\ t_1 \cdot t_2 = 2m - 7 \end{cases} \quad (3)$

Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm tương ứng $x_1 = 3^{t_1}, x_2 = 3^{t_2}$.

Do đó $x_1 \cdot x_2 = 3^{t_1+t_2} = 3^3 = 27$.

Suy ra $(x_1+3)(x_2+3) = 72 \Leftrightarrow x_1x_2 + 3(x_1+x_2) = 63 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 12$.

Vậy x_1, x_2 là 2 nghiệm phương trình $x^2 - 12x + 27 = 0 \Leftrightarrow x = 9 \vee x = 3$.

Với $x = 9$ suy ra $\log_3^2 9 - 3\log_3 9 + 2m - 7 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{9}{2}$.

Với $x = 3$ suy ra $\log_3^2 3 - 3\log_3 3 + 2m - 7 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{9}{2}$.

Vậy $m = \dfrac{9}{2}$. (Thỏa điều kiện $(*)$).

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Phương trình $z^2 + az + b = 0$ có một nghiệm là $2 - 3i$. Khi đó $3a + b$ bằng

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Vì $2 - 3i$ là nghiệm của phương trình $z^2 - az + b = 0$ nên ta có:

$(2-3i)^2 + a(2-3i) + b = 0 \Leftrightarrow -5 - 12i + 2a - 3ai + b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 5 \\ -3a = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 13 \\ a = -4. \end{cases}$

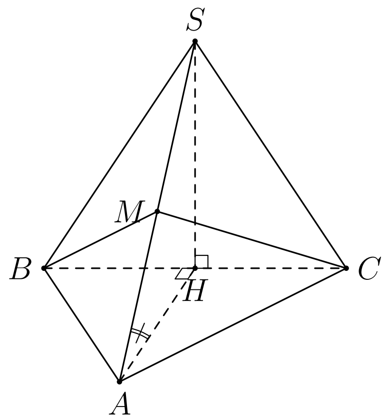
Vậy $3a + b = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 5 cm. Biết hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Điểm M là trung điểm của cạnh SA và thể tích khối tứ diện $ABCM$ bằng $\dfrac{31}{2}$ cm^3. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SA và (ABC). Khi đó $\sin\varphi$ gần bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục nghìn)

(A) 0,8930. (B) 0,1946. (C) 0,1311. (D) 0,6216.

Lời giải.



Vì HA là hình chiếu vuông góc của SA trên (ABC) nên $\varphi = \widehat{SAH}$.

Ta có $\dfrac{V_{A.CMB}}{V_{A.CSB}} = \dfrac{AM}{AS} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = 2V_{A.CMB} = 31$ cm^2.

Mà $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SH \Leftrightarrow 31 = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{5^2\sqrt{3}}{4} \cdot SH \Rightarrow SH = \dfrac{31 \cdot 12}{25\sqrt{3}} = \dfrac{372\sqrt{3}}{75}$ cm.

Ta có $\cot\varphi = \dfrac{AH}{SH} = \dfrac{\dfrac{5\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{372\sqrt{3}}{75}} = \dfrac{125}{248}$.

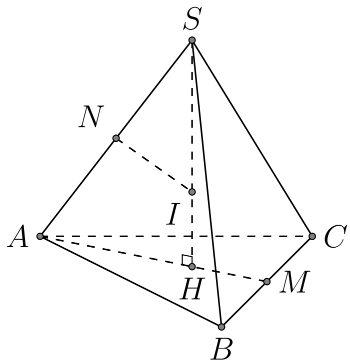
Suy ra $\sin\varphi = \sqrt{\dfrac{1}{1+\cot^2\varphi}} = \sqrt{\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{125}{248}\right)^2}} \approx 0,8930$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và mỗi cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **B** $\dfrac{3a}{5}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải.



Gọi H là trọng tâm tam giác đều ABC, khi đó $SH \perp (ABC)$ và SH là trục đường tròn ngoại tiếp mặt đáy.

Gọi N là trung điểm SA, mặt phẳng trung trực của cạnh SA cắt SH tại I.

Khi đó $IS = IA = IB = IC$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Bán kính mặt cầu là

$$R = SI = \frac{SN \cdot SA}{SH} = \frac{\frac{1}{2}SA^2}{\sqrt{SA^2 - AH^2}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2}\frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm M và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất, mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C. Tính thể tích khối chóp $O.ABC$.

A $\dfrac{1372}{9}$. **B** $\dfrac{686}{9}$. **C** $\dfrac{524}{3}$. **D** $\dfrac{343}{9}$.

Lời giải.

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$. Ta có phương trình mặt phẳng (P) là: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c} = 1\ (a,b,c \neq 0)$.

Gọi H là hình chiếu của O lên (P). Ta có: $\mathrm{d}(O;(P)) = OH \leqslant OM$.

Do đó $\max \mathrm{d}(O;(P)) = OM$ khi và chỉ khi (P) qua $M(1;2;3)$ nhận $\overrightarrow{OM} = (1;2;3)$ làm véc-tơ

pháp tuyến. Do đó (P) có phương trình:
$1(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0 \Leftrightarrow x+2y+3z=14 \Leftrightarrow \dfrac{x}{14}+\dfrac{y}{7}+\dfrac{z}{\frac{14}{3}}=1.$

Suy ra: $a=14$, $b=7$, $c=\dfrac{14}{3}$.
Vậy $V_{O.ABC}=\dfrac{1}{6}\cdot OA\cdot OB\cdot OC=\dfrac{1}{6}\cdot 14\cdot 7\cdot\dfrac{14}{3}=\dfrac{686}{9}$.
Chọn đáp án B □

Câu 49. Cho hai điểm $A(3;3;1)$, $B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y+z-7=0$. Đường thẳng d nằm trên (α) sao cho mọi điểm của d cách đều 2 điểm A, B có phương trình là

A $\begin{cases} x=t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$. B $\begin{cases} x=t \\ y=7+3t \\ z=2t \end{cases}$. C $\begin{cases} x=-t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$. D $\begin{cases} x=2t \\ y=7-3t \\ z=t \end{cases}$.

Lời giải.
Mọi điểm trên d cách đều hai điểm A, B nên d nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn AB.
Có $\overrightarrow{AB}=(-3;-1;0)$ và trung điểm AB là $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2};1\right)$ nên mặt phẳng trung trực của AB là:
$-3\left(x-\dfrac{3}{2}\right)-\left(y-\dfrac{5}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 3x+y-7=0.$

Mặt khác $d\subset(\alpha)$ nên d là giao tuyến của hai mặt phẳng: $\begin{cases} 3x+y-7=0 \\ x+y+z-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7-3x \\ z=2x. \end{cases}$

Vậy phương trình d: $\begin{cases} x=t \\ y=7-3t \; (t\in\mathbb{R}). \\ z=2t \end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho S là tập các số tự nhiên gồm có 7 chữ số. Lấy một số bất kỳ của tập hợp S. Tính xác suất để lấy được số lẻ và chia hết cho 9.

A $\dfrac{625}{1701}$. B $\dfrac{1}{9}$. C $\dfrac{1}{18}$. D $\dfrac{1250}{1701}$.

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)=9\cdot 10^6$ số.
Gọi A là biến cố "lấy được số lẻ và chia hết cho 9 ".
Ta có các số lẻ chia hết cho 9 là dãy $1000017, 1000035, 1000053, \ldots, 9999999$ lập thành một cấp số cộng với $u_1=1000017$ và công sai $d=18$ nên số phần tử của sãy số là
$u_n=u_1+(n+1)d \Rightarrow n=\dfrac{u_n-u_1}{d}+1=500000$ số. $\Rightarrow n(A)=500000$.
$\Rightarrow \mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{1}{18}$.
Chọn đáp án C □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. A	3. C	4. C	5. A	6. A	7. C	8. A	9. A	10. D
11. C	12. A	13. B	14. D	15. D	16. B	17. A	18. D	19. D	20. A
21. A	22. B	23. A	24. D	25. D	26. C	27. B	28. A	29. C	30. A
31. A	32. C	33. B	34. B	35. C	36. C	37. D	39. B	40. D	41. C
42. C	43. B	44. D	45. C	46. A	47. A	48. B	49. A	50. C	

19 ĐỀ THI THỬ SỐ 19-MAX8

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm cấp một và cấp hai trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $y'(x_0) = 0$ và $y''(x_0) \neq 0$ thì x_0 là điểm cực trị của hàm số.
(B) $y'(x_0) = 0$ và $y''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.
(C) Hàm số đạt cực đại tại x_0 thì $y'(x_0) = 0$.
(D) $y'(x_0) = 0$ và $y''(x_0) = 0$ thì x_0 không là điểm cực trị của hàm số.

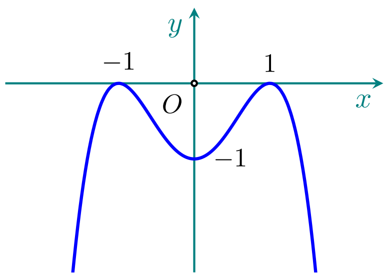
Lời giải.
Theo định lý về quy tắc tìm cực trị A, C và B đúng. D sai ví dụ xét hàm số $y = x^4$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $y'(0) = 0$ và $y''(0) = 0$ nhưng $x_0 = 0$ vẫn là điểm cực tiểu của hàm số.
Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Cho hàm số $y = \dfrac{2017}{x-2}$ có đồ thị (H). Số đường tiệm cận của (H) là

(A) 0. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.
Đồ thị (H) có tiệm cận đứng là $x = 2$.
Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2017}{x-2} = 0 \Rightarrow (H)$ có tiệm cận ngang là $y = 0$.
Vậy số đường tiệm cận của (H) là 2.
Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Đường cong trong hình sau là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



(A) $y = -x^4 + 2x^2 - 1$. (B) $y = -x^4 + x^2 - 1$.
(C) $y = -x^4 + 3x^2 - 3$. (D) $y = -x^4 + 3x^2 - 2$.

Lời giải.
Đồ thị hàm số qua điểm có tọa độ $(0; -1) \Rightarrow$ Loại C và D.
Đồ thị hàm số qua điểm có tọa độ $(1; 0) \Rightarrow$ Loại B.
Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Giải bất phương trình $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2x-4} > \left(\dfrac{3}{4}\right)^{x+1}$.

(A) $S = [5; +\infty)$. (B) $S = (-\infty; 5)$. (C) $(-\infty; -1)$. (D) $S = (-1; 2)$.

Lời giải.

Bpt $\Leftrightarrow 2x-4<x+1 \Leftrightarrow x<5$ hay $x\in(-\infty;5)$.

Vậy tập nghiệm của bpt là $S=(-\infty;5)$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_3(3x+1)$.

A $y'=\dfrac{3}{3x+1}$. **B** $y'=\dfrac{1}{3x+1}$. **C** $y'=\dfrac{3}{(3x+1)\ln 3}$. **D** $y'=\dfrac{1}{(3x+1)\ln 3}$.

Lời giải.

$y=\log_3(3x+1)\Rightarrow y'=\dfrac{3}{(3x+1)\ln 3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho các hàm số $y=\log_{2018}x$, $y=\left(\dfrac{\pi}{\mathrm{e}}\right)^x$, $y=\log_{\frac{1}{2}}x$, $y=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^x$. Trong các hàm số trên có bao nhiêu hàm số nghịch biến trên tập xác định của hàm số đó ?

A 4. **B** 3. **C** 2. **D** 1.

Lời giải.

Hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ có hệ số $a=\dfrac{1}{2}<1$, hàm số $y=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^x$ có hệ số $a=\dfrac{\sqrt{5}}{3}<1$ nên nghịch biến trên tập xác định của các hàm số đó. Vậy có 2 hàm số.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A $\displaystyle\int kf(x)\,\mathrm{d}x=k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ với $k\in\mathbb{R}$.

B $\displaystyle\int [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x+\int g(x)\,\mathrm{d}x$ với $f(x)$; $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

C $\displaystyle\int x^\alpha\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ với $\alpha\neq-1$.

D $\displaystyle\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)'=f(x)$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int kf(x)\,\mathrm{d}x=k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ với $k\in\mathbb{R}$ sai vì tính chất đúng khi $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x=7$ và $\displaystyle\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x=3$. Tính $P=\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $P=7$. **B** $P=-4$. **C** $P=4$. **D** $P=10$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x=7\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x=7\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x=7-3=4$.

Vậy $P=4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Biết $\dfrac{1}{3+4i} = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$. Tính ab.

(A) $\dfrac{12}{625}$. (B) $-\dfrac{12}{625}$. (C) $-\dfrac{12}{25}$. (D) $\dfrac{12}{25}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{3+4i} = \dfrac{3}{25} - \dfrac{4}{25}i$. Suy ra $ab = \dfrac{3}{25} \cdot \left(-\dfrac{4}{25}\right) = -\dfrac{12}{625}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Tìm phần ảo của số phức $\overline{z}$, biết $z = \dfrac{(1+i)3i}{1-i}$.

(A) 3. (B) -3. (C) 0. (D) -1.

Lời giải.

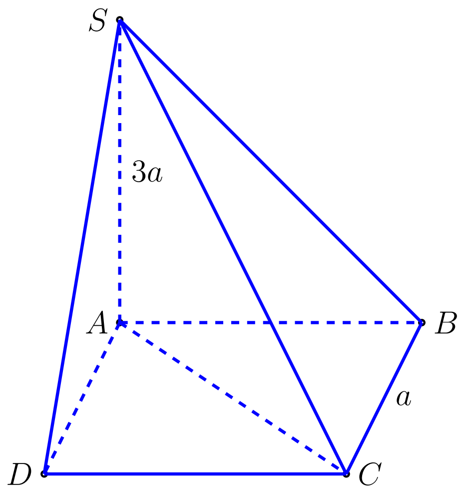
Ta có: $z = \dfrac{(1+i)3i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2 3i}{1-i^2} = \dfrac{2i \cdot 3i}{2} = -3 \Rightarrow \overline{z} = -3$. Vậy phần ảo của số phức $\overline{z}$ là 0.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $SA \perp (ABC)$, $SA = 3a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

(A) $V = 6a^3$. (B) $V = a^3$. (C) $V = 3a^3$. (D) $V = 2a^3$.

Lời giải.



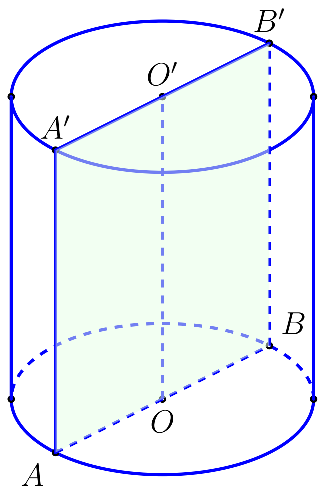
Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \dfrac{1}{3}a^2 \cdot 3a = a^3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng $2a$. Một mặt phẳng đi qua trục của hình trụ và cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông. Tính thể tích khối trụ đã cho.

(A) $18\pi a^3$. (B) $4\pi a^3$. (C) $8\pi a^3$. (D) $16\pi a^3$.

Lời giải.



Thiết diện qua trục là hình vuông nên $AB = AA' = 2R = 4a$.
Nên thể tích khối trụ: $V = B \cdot h = \pi R^2 \cdot AA' = \pi \cdot 4a^2 \cdot 4a = 16\pi a^3$.
Chọn đáp án D □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 1; 2)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 3z + 1 = 0$. Đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là

A $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+2}{3}$.

B $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+3}{2}$.

C $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{2}$.

D $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$.

Lời giải.

Do đường thẳng Δ cần tìm vuông góc với mặt phẳng (P) nên véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_P} = (2; -1; 3)$ cũng là véc-tơ chỉ phương của Δ. Mặt khác Δ đi qua điểm $M(1; 1; 2)$ nên phương trình chính tắc của Δ là $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$.
Chọn đáp án D □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua $M(1; 2; 3)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha)\colon x - 2y + 3z - 1 = 0$ có phương trình là

A $x - 2y + 3z + 6 = 0$.

B $x - 2y + 3z - 6 = 0$.

C $x + 2y - 3z - 6 = 0$.

D $x + 2y - 3z + 6 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (α), nên mặt phẳng (P) có dạng: $x - 2y + 3z + c = 0\,(c \neq -1)$.
Vì mặt phẳng (P) đi qua M nên $1 - 4 + 9 + c = 0 \Leftrightarrow c = -6$ (thỏa mãn).
Vậy $(P)\colon x - 2y + 3z - 6 = 0$.
Chọn đáp án B □

Câu 15. Giải phương trình $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

A $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

B $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

(C) $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2} \\ x=\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

(D) $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2} \\ x=\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

Phương trình $\Leftrightarrow \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ 2x+\dfrac{\pi}{3}=\pi+\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Trong khai triển nhị thức $(x-y)^9$, tìm hệ số của số hạng chứa x^6y^3.

A $-\mathrm{C}_9^3$. (B) $-\mathrm{C}_9^5$. (C) C_9^3. (D) C_9^5.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển: $\mathrm{C}_9^k x^{9-k}(-y)^k=(-1)^k\mathrm{C}_9^k x^{9-k}y^k$.

Số hạng chứa $x^6y^3 \Rightarrow k=3$. Hệ số của số hạng chứa x^6y^3 là $(-1)^3\mathrm{C}_9^3=-\mathrm{C}_9^3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=2$, công bội $q=3$. Khẳng định nào dưới đây **không đúng**?

A $u_{n+1}=3+u_n\forall n\geqslant 1$.

(B) $u_{n+2}u_n=u_{n+1}^2\forall n\geqslant 1$.

(C) $u_{n+2}=9u_n\forall n\geqslant 1$.

(D) $u_{n+1}=3u_n\forall n\geqslant 1$.

Lời giải.

Đáp án A sai. Theo định nghĩa cấp số nhân ta có: $u_{n+1}=u_n\cdot q$. Suy ra $u_{n+1}=3u_n$ và $u_{n+2}u_n=u_{n+1}^2\forall n\geqslant 1$; $u_{n+2}=9u_n$ với $\forall n\geqslant 1$ nên đáp án B, C, D luôn đúng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Trong không gian cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P). Tính số đo của góc tạo bởi hai đường thẳng a và b.

(A) 60°. (B) 30°. (C) 120°. **D** 90°.

Lời giải.

Ta có $\left.\begin{array}{r} a\perp(P) \\ b\subset(P) \end{array}\right\}\Rightarrow a\perp b\Rightarrow(a,b)=90^\circ$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Biết đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ có hai điểm cực trị A, B. Khi đó phương trình đường thẳng AB là

(A) $y=2x-1$. (B) $y=x-2$. (C) $y=-x+2$. **D** $y=-2x+1$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-3$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=-1 \\ x=-1\Rightarrow y=3. \end{array}\right.$

Do đó, $A(1;-1)$ và $B(-1;3)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;4)$ suy ra véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng AB là $\vec{n}=(2;1)$.

Phương trình của đường thẳng AB là $2(x-1)+1(y+1)=0\Leftrightarrow y=-2x+1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \dfrac{x+2}{x+3m}$ đồng biến trên $(-\infty; -6)$?

(A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3m\}$.

$y' = \dfrac{3m-2}{(x+3m)^2}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ -6 \leqslant -3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-2 > 0 \\ m \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} < m \leqslant 2.$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán là 1 và 2.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 5 = 0$ là

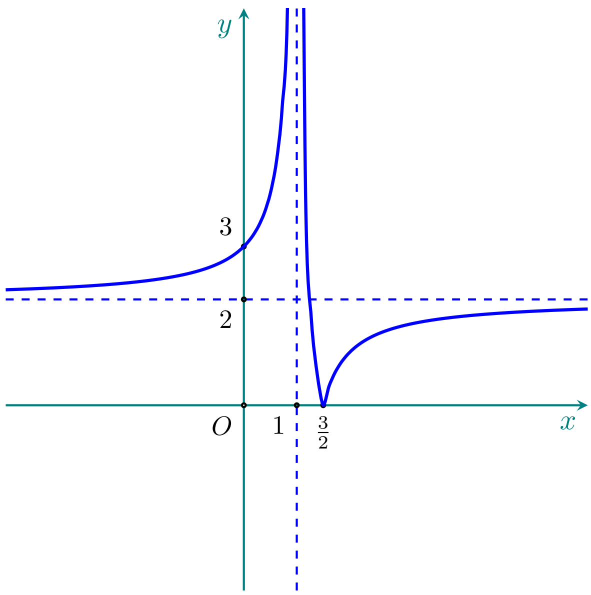
(A) 4. (B) 0. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Phương trình tương đương với $f(x) = \dfrac{5}{2}$. Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có 4 nghiệm.

Chọn đáp án (A) □

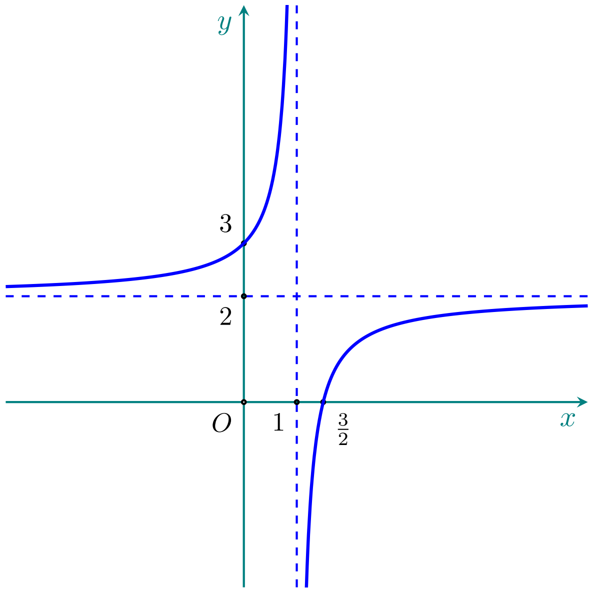
Câu 22. Đồ thị sau là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây



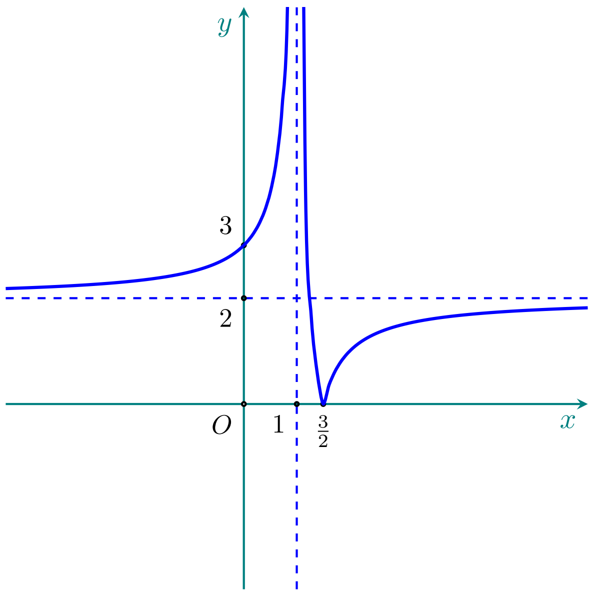
(A) $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$. (B) $y = \dfrac{2x-3}{|x-1|}$. (C) $y = \dfrac{|2x-3|}{x-1}$. (D) $y = \left|\dfrac{2x-3}{x-1}\right|$.

Lời giải.

Ta có: đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ có đồ thị (C) như hình vẽ.



Mặt khác: $y=\left|\dfrac{2x-3}{x-1}\right|$ có đồ thị được vẽ bằng cách: giữ nguyên phần đồ thị (C) phía trên Ox và lấy đối xứng phần dưới Ox sang Ox ta được đồ thị hàm số $y=\left|\dfrac{2x-3}{x-1}\right|$ là



Chọn đáp án D □

Câu 23. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_4 x^2-\log_2 3=1$ là

A 6. B 0. C 5. D 4.

Lời giải.

Điều kiện: $x\neq 0$.

Ta có $\log_4 x^2-\log_2 3=1 \Leftrightarrow \log_2|x|=\log_2 6 \Leftrightarrow |x|=6 \Leftrightarrow x=\pm 6$.

Tổng các nghiệm của phương trình là $-6+6=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $\vec{v} = (2;3)$. Tìm tọa độ của điểm M' là ảnh của điểm $M(-1;2)$ qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$.

A $M'(1;2)$. **B** $M'(-5;0)$. **C** $M'(1;5)$. **D** $M'(5;1)$.

Lời giải.

Tọa độ của điểm M' là ảnh của điểm $M(-1;2)$ qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$

$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 5 \end{cases} \Rightarrow M'(1;5)$.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Đạo hàm y' của hàm số $y = \log_3(x^2+1)$ là

A $y' = \dfrac{2x}{x^2+1}$. **B** $y' = \dfrac{2x}{(x^2+1)\ln 3}$.

C $y' = \dfrac{2x}{(x^2+1)\log 3}$. **D** $y' = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = [\log_3(x^2+1)]' = \dfrac{(x^2+1)'}{(x^2+1)\ln 3} = \dfrac{2x}{(x^2+1)\ln 3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = (x+2)^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$ là

A 30. **B** 18. **C** $\dfrac{98}{3}$. **D** 21.

Lời giải.

Gọi S là diện tích hình phẳng cần tìm. Khi đó $S = \displaystyle\int_1^3 (x+2)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(x+2)^3\Big|_1^3 = \frac{98}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Gọi $F(x)$ là họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 8\sin 3x\cos x$. Biết rằng $F(x)$ có dạng $F(x) = a\cos 4x + b\cos 2x + C$. Khi đó, $a - b$ bằng

A 3. **B** -1. **C** 1. **D** 2.

Lời giải.

$F(x) = \displaystyle\int 8\sin 3x\cos x\,\mathrm{d}x = 4\int(\sin 4x + \sin 2x)\,\mathrm{d}x = -\cos 4x - 2\cos 2x + C$.

Suy ra $a = -1$, $b = -2$. Vậy $a - b = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho hai số phức $z = (a-2b) - (a-b)i$ và $w = 1 - 2i$. Biết $z = w \cdot i$. Tính $S = a + b$.

A $S = -7$. **B** $S = -4$. **C** $S = -3$. **D** $S = 7$.

Lời giải.

Ta có $z = (a-2b) - (a-b)i = (1-2i)\cdot i = 2 + i$.

Suy ra $\begin{cases} a - 2b = 2 \\ -a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -3 \end{cases}$.

Vậy $S = a + b = (-3) + (-4) = -7$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Cho phương trình $z^2 - 2z + 3 = 0$ trên tập số phức, có hai nghiệm là z_1, z_2. Khi đó $|z_1|^2 + |z_2|^2$ có giá trị là

(A) $2\sqrt{2}$. (B) 6. (C) 3. (D) $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $z^2 - 2z + 3 = 0$ có hai nghiệm là z_1, z_2.

Do đó $\begin{cases} z_1 = 1 + i\sqrt{2} \\ z_2 = 1 - i\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z_1| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3} \\ |z_2| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z_1|^2 = 3 \\ |z_2|^2 = 3. \end{cases}$

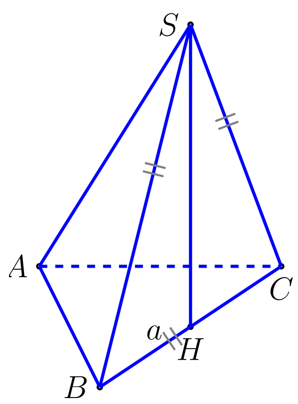
Vậy $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 3 + 3 = 6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, tam giác SBC đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải.



Chiều cao $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác ABC vuông cân tại A và cạnh $BC = \sqrt{2} \cdot AB \Rightarrow AB = \dfrac{BC}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Diện tích đáy: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{a}{\sqrt{2}} = \dfrac{a^2}{4}$.

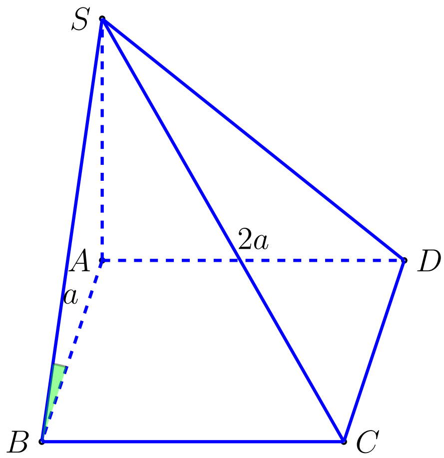
Thể tích khối chóp $S.ABC$: $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{2a^3}{3}$. Tính số đo góc giữa đường thẳng SB với mặt phẳng $(ABCD)$.

(A) $30°$. (B) $60°$. (C) $45°$. (D) $75°$.

Lời giải.

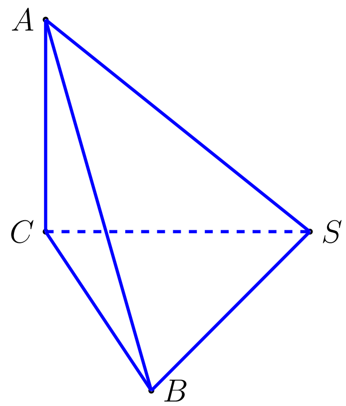


Ta có $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot 2a \cdot SA = \dfrac{2a^3}{3} \Rightarrow SA = a$.
$SA \perp (ABCD) \Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB lên mặt phẳng $(ABCD)$.
$\Rightarrow (SB, (ABCD)) = (SB, AB) = \widehat{SBA}$.
Xét tam giác SBA vuông tại A có $AB = SA = a$ nên ΔSBA vuông cân tại A. Suy ra $\widehat{SBA} = 45°$.
Chọn đáp án C □

Câu 32. Hình chóp $S.ABC$ có $SB = SC = BC = CA = a$. Hai mặt phẳng (ABC) và (ASC) cùng vuông góc với mặt phẳng (SBC). Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B $a^3\sqrt{3}$. C $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

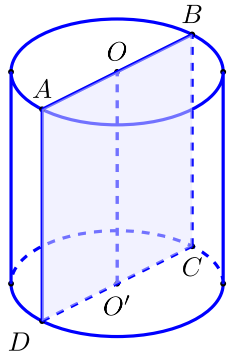


Vì $\begin{cases} (ABC) \perp (SBC) \\ (ASC) \perp (SBC) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBC)$.
Suy ra AC là đường cao của khối chóp.
Do tam giác SBC đều cạnh bằng a nên diện tích đáy: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $h = AC = a$.
Vậy thể tích khối chóp là: $V = \dfrac{1}{3} \cdot S \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.
Chọn đáp án A □

Câu 33. Một hình trụ có bán kính đáy bằng a, mặt phẳng qua trục cắt hình trụ theo một thiết diện có diện tích bằng $8a^2$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

(A) $4\pi a^2$. (B) $8\pi a^2$. (C) $16\pi a^2$. (D) $2\pi a^2$.

Lời giải.



Thiết diện qua trục của hình trụ là hình chữ nhật, có độ dài một cạnh là $2a$, có diện tích là $8a^2$, suy ra chiều cao của hình trụ là $h = \dfrac{8a^2}{2a} = 4a$.

Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq} = 2\pi r h = 2 \cdot \pi \cdot a \cdot 4a = 8\pi a^2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-1; -3; 2)$ và mặt phẳng $(P)\colon x - 2y - 3z - 4 = 0$. Đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là

(A) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+2}{-3}$.

(B) $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-2}{-3}$.

(C) $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+3}{-3}$.

(D) $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+2}{3}$.

Lời giải.

$(P)\colon x - 2y - 3z - 4 = 0$ có $\vec{n} = (1; -2; -3)$.

Đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (P) nên nhận $\vec{n} = (1; -2; -3)$ làm véc-tơ chỉ phương, có dạng: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-2}{-3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2; 1; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 2; -1)$. Biết đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (ABC) và cắt đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{3}$ tại điểm $D(a; b; c)$ thỏa mãn $a > 0$ và tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng $\dfrac{17}{6}$. Tổng $a + b + c$ bằng

(A) 6. (B) 5. (C) 4. (D) 7.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}(-2; 3; 0)$, $\overrightarrow{AC}(-2; 1; -1)$; $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}\right] = (3; 2; -4)$ là VTPT của mặt phẳng (ABC).

Phương trình mặt phẳng (ABC): $3x + 2y - 4z - 8 - 0$.

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right]\right| = \dfrac{\sqrt{29}}{2}$.

$d\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$; $D(1 + 2t; -1 + t; 2 + 3t) \in d$, $(1 + 2t > 0)$.

$\mathrm{d}(D, (ABC)) = \dfrac{|3(1+2t) + 2(t-1) - 4(2+3t) - 8|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2}} = \dfrac{|-15 - 4t|}{\sqrt{29}}$.

$V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{29}}{2} \dfrac{|-15-4t|}{\sqrt{29}} = \dfrac{17}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -15-4t = 17 \\ -15-4t = -17 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -8 \text{ (loại)} \\ t = \dfrac{1}{2} \text{ (nhận)}. \end{array}\right.$

$\Rightarrow D\left(2; -\dfrac{1}{2}; \dfrac{7}{2}\right)$. Vậy $a+b+c = 2 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{2} = 5$.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Cho dãy số $u_n = \dfrac{2an^2+1}{n^2+3}$ với $a \leqslant 3$ có bao nhiêu giá trị nguyên của a để dãy số u_n là dãy số tăng?

A 3. B 2. C 1. D 4.

Lời giải.

Ta có $u_n = \dfrac{2an^2+1}{n^2+3} = \dfrac{2a(n^2+3)-6a+1}{n^2+3} = 2a - \dfrac{6a-1}{n^2+3}$.

Do đó $u_{n+1} - u_n = \left[2a - \dfrac{6a-1}{(n+1)^2+3}\right] - \left[2a - \dfrac{6a-1}{n^2+3}\right] = (6a-1)\dfrac{2n+1}{[n^2+3][(n+1)^2+3]}$.

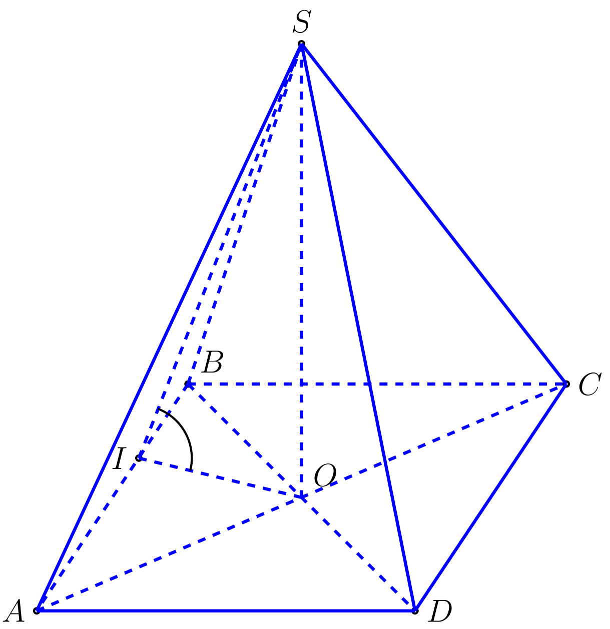
Để dãy số trên tăng thì $6a-1 > 0 \Leftrightarrow a > \dfrac{1}{6} \Rightarrow a \in \left(\dfrac{1}{6}; 3\right] \Rightarrow a \in \{1; 2; 3\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, SO vuông góc với $(ABCD)$, I là hình chiếu vuông góc của O lên AB. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABD) là góc nào sau đây?

A Góc $\widehat{SCI}$. B Góc $\widehat{SOI}$. C Góc $\widehat{SIO}$. D Góc $\widehat{SIC}$.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp SO \\ OI \cap SO = O \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI)$. Mà $SI \subset (SOI) \Rightarrow AB \perp SI$.

Ta có: $\begin{cases}(SAB)\cap(ABD)=AB\\ OI\perp AB\\ SI\perp AB\\ OI\subset(ABD), SI\subset(SAB)\end{cases} \Rightarrow ((SAB),(ABD))=(OI;SI)=\widehat{SIO}.$

Chọn đáp án C □

Câu 38. Cho phương trình $\sqrt{x^2-7x+10}=3x-1$ có bao nhiêu nghiệm?

A 0. B 1. C 2. D 3.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{x^2-7x+10}=3x-1 \Leftrightarrow \begin{cases}3x-1\geqslant 0\\ x^2-7x+10=(3x-1)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}3x-1\geqslant 0\\ 8x^2+x-9=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geqslant \dfrac{1}{3}\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-\dfrac{9}{8}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x=1.$

Chọn đáp án B □

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2019;2019]$ để hàm số $y=\sqrt{x^2+1}-mx-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A 2021. B 2019. C 2020. D 2018.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-m$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'\geqslant 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m\leqslant \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \forall x\in\mathbb{R}$ (1).

Xét $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ trên $\mathbb{R}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

$f'(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

Ta có: $m\leqslant \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m\leqslant -1$.

Mặt khác $m\in[-2019;2019] \Rightarrow m\in[-2019;-1]$.

Vậy có 2019 số nguyên m thoả điều kiện.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Một xưởng in có 15 máy in được cài đặt tự động và giám sát bởi một kĩ sư, mỗi máy in có thể in được 30 ấn phẩm trong 1 giờ, chi phí cài đặt và bảo dưỡng cho mỗi máy in cho 1 đợt hàng là 48000 đồng, chi phí trả cho kĩ sư giám sát là 24000 đồng / giờ. Đợt hàng này xưởng nhận in 6000 ấn phẩm thì số máy in cần sử dụng để chi phí in ít nhất là

A 10 máy. B 11 máy. C 12 máy. D 9 máy.

Lời giải.

Gọi $x\,(0 < x \leqslant 15)$ là số máy in cần sử dụng để in lô hàng.

Chi phí cài đặt và bảo dưỡng là: $48000x$.

Số giờ in hết số ấn phẩm là $\dfrac{6000}{30x}$, chi phí giám sát là: $\dfrac{6000}{30x}\cdot 24000 = \dfrac{4800000}{x}$.

Tổng chi phí in là: $P(x) = 48000x + \dfrac{4800000}{x}$.

$P'(x) = 48000 - \dfrac{4800000}{x^2}$

$P'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -10\ (L) \\ x = 10. \end{array}\right.$

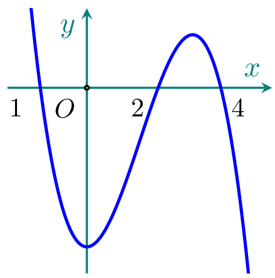
Bảng biến thiên:

x	0		10		15
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$\searrow$	$P(10)$	$\nearrow$	

Vậy chi phí in nhỏ nhất khi số máy in sử dụng là 10 máy.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $y = f(10 - 2^x)$ đồng biến trên khoảng

A $(-\infty; 2)$. B $(2; 4)$. C $(\log_2 6; 4)$. D $(\log_2 11; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y = f(10 - 2^x) \Rightarrow y' = -2^x \cdot \ln 2 \cdot f'(10 - 2^x)$.

Hàm số $y = f(10 - 2^x)$ đồng biến $\Leftrightarrow -2^x \cdot \ln 2 \cdot f'(10 - 2^x) > 0$

$\Leftrightarrow f'(10 - 2^x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < 10 - 2^x < 2 \\ 10 - 2^x > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 8 < x < \log_2 11 \\ x < \log_2 6. \end{array}\right.$

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(3; \log_2 11)$ và $(-\infty; \log_2 6)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình

$$\log^2|\cos x| - m\log\cos^2 x - m^2 + 4 = 0$$

vô nghiệm.

(A) $m \in \left(\sqrt{2}; 2\right)$. (B) $m \in \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$. (C) $m \in \left(-\sqrt{2}; 2\right)$. (D) $m \in \left(-2; \sqrt{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: $\cos x \neq 0$.

Ta có: $\log^2|\cos x| - m\log\cos^2 x - m^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \log^2|\cos x| - 2m\log|\cos x| - m^2 + 4 = 0$ (*)

Đặt $\log|\cos x| = t$. Điều kiện: $t \leqslant 0$.

Khi đó phương trình (*) trở thành: $t^2 - 2mt - m^2 + 4 = 0,\ t \leqslant 0$. (1)

Phương trình (*) vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) vô nghiệm hoặc có các nghiệm đều dương. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l}\Delta' < 0\\ \begin{cases}\Delta' \geqslant 0\\ t_1 + t_2 > 0\\ t_1 \cdot t_2 > 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m^2 - 1\cdot(-m^2+4) < 0\\ \begin{cases}m^2 - 1\cdot(-m^2+4) \geqslant 0\\ \dfrac{2m}{1} > 0\\ \dfrac{-m^2+4}{1} > 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2m^2 - 4 < 0\\ \begin{cases}2m^2 - 4 \geqslant 0\\ 2m > 0\\ -m^2 + 4 > 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}\\ \begin{cases}m \geqslant \sqrt{2}\\ -2 < m < 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$-\sqrt{2} < m < 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 43. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục, dương trên $\mathbb{R}$; thỏa mãn $f(0) = 1$ và $f'(x) = \dfrac{x}{x^2+1}f(x)$. Khi đó hiệu $T = f\left(2\sqrt{2}\right) - 2f(1)$ thuộc khoảng nào?

(A) $(2; 3)$. (B) $(7; 9)$. (C) $(0; 1)$. (D) $(9; 12)$.

Lời giải.

Ta có:

$$f'(x) = \frac{x}{x^2+1}f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$\Rightarrow \ln|f(x)| = \dfrac{1}{2}\ln|x^2+1| + C \Rightarrow \ln f(x) = \ln\sqrt{x^2+1} + C$ (vì $f(x)$ luôn dương trên $\mathbb{R}$).

Mà $f(0) = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow T = f\left(2\sqrt{2}\right) - 2f(1) = 3 - 2\sqrt{2} \in (0; 1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Trong mặt phẳng Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 2| = 5$ là một đường tròn. Khi đó số phức $w = (3 + 4i)z + i$ có điểm biểu diễn thuộc đường tròn bán kính

(A) 5. (B) 7. (C) 35. (D) 25.

Lời giải.

$$w = (3+4i)z + i \Leftrightarrow \frac{w - i}{3+4i} = z \Leftrightarrow \frac{w-i}{3+4i} - 2 = z - 2 \Leftrightarrow \frac{w - 6 - 9i}{3+4i} = z - 2$$

Suy ra: $\left|\dfrac{w-6-9i}{3+4i}\right| = |z-2| \Leftrightarrow \dfrac{|w-(6+9i)|}{5} = 5 \Leftrightarrow |w - (6+9i)| = 25$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(6; 9)$, bán kính $R = 25$.

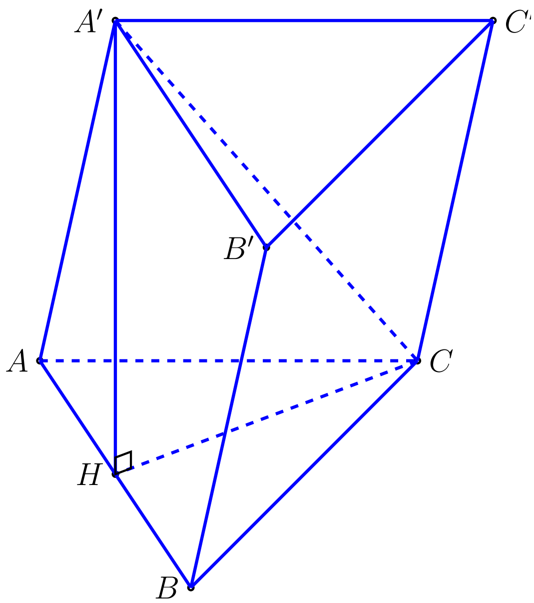
Cách 2:

$w = (3+4i)z + i = (3+4i)(z-2) + 6 + 9i \Leftrightarrow w - (6+9i) = (3+4i)(z-2)$.
Suy ra: $|w - (6+9i)| = |(3+4i)||(z-2)|$ hay $|w-(6+9i)| = 25$.
Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(6;9)$, bán kính $R = 25$.
Chọn đáp án D □

Câu 45. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AB = BC = 4a$, $AC = 6a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AB và $A'C = 2a\sqrt{7}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a.

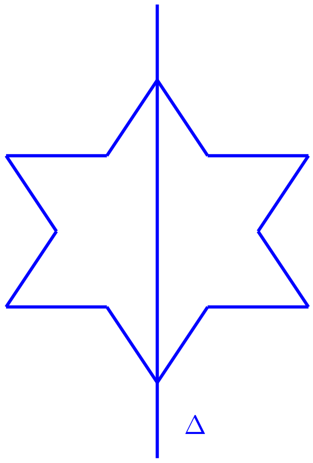
A $V = \dfrac{21a^3\sqrt{7}}{2}$. **B** $V = \dfrac{7a^3\sqrt{7}}{2}$. **C** $V = \dfrac{63a^3\sqrt{7}}{2}$. **D** $V = \dfrac{a^3\sqrt{7}}{2}$.

Lời giải.



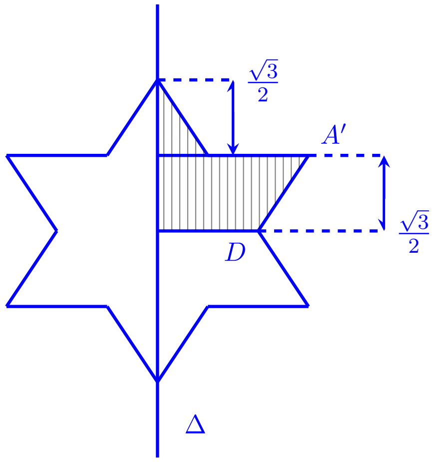
Ta có $p = \dfrac{AB + BC + CA}{2} = 7a$.
Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-BC)(p-CA)(p-AB)} = \sqrt{7a \cdot a \cdot 3a \cdot 3a} = 3a^2\sqrt{7}$.
Suy ra $CH = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{AB} = \dfrac{3a\sqrt{7}}{2}$.
Do đó $A'H = \sqrt{A'C^2 - CH^2} = \sqrt{28a^2 - \dfrac{63a^2}{4}} = \dfrac{7a}{2}$.
Vậy thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = 3a^2\sqrt{7} \cdot \dfrac{7a}{2} = \dfrac{21a^3\sqrt{7}}{2}$.
Chọn đáp án A □

Câu 46. Khi cho hình ngôi sao (xem hình vẽ bên dưới), có tất cả các cạnh đều bằng 1, quay xung quanh trục Δ ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích khối tròn xoay đó.



(A) $\dfrac{5\pi\sqrt{3}}{6}$. (B) $\dfrac{5\pi\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{5\pi\sqrt{3}}{2}$. (D) $\dfrac{5\pi\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Xét phần hình ngôi sao thuộc góc phần tư thứ nhất. Cắt hình trên bởi hai đường thẳng đi qua A' và D, đồng thời vuông góc với đường thẳng Δ ta được một tam giác vuông với độ dài các cạnh góc vuông là $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và một hình thang vuông với chiều cao bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, đáy lớn bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, đáy nhỏ bằng 1.

Quay tam giác vuông trên quanh trục Δ ta được khối nón tròn xoay có thể tích

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi\sqrt{3}}{24}.$$

Quay hình thang vuông trên quanh trục Δ ta được khối nón cụt có thể tích

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{19\pi\sqrt{3}}{24}.$$

Do đó thể tích khối nón tròn xoay cần tìm là $V = 2(V_1 + V_2) = \dfrac{5\pi\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ với $A(2;3;-4)$, $B(4;1;2)$, $C(-3;2;-7)$. Gọi N là trung điểm AB. Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MN}\right|=18$$

là một mặt cầu. Tính thể tích của khối cầu đó.

Ⓐ 288π. Ⓑ 7776π. Ⓒ 27π. **D** 36π.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G(1;2;-3)$.

Gọi I là trung điểm của $NG \Rightarrow N(3;2;-1)$ và $I(2;2;-2)$.

Ta có $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MN}\right|=18 \Leftrightarrow \left|3\overrightarrow{MG}+3\overrightarrow{MN}\right|=18 \Leftrightarrow \left|6\overrightarrow{MI}\right|=18 \Leftrightarrow MI=3$.

Do đó tập hợp các điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán là một mặt cầu tâm I, bán kính $R=3$.

Vậy thể tích khối cầu là $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=36\pi$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;4)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các tia Ox, Oy, Oz tại các điểm A, B, C sao cho thể tích V của khối tứ diện $OABC$ là nhỏ nhất. Tính khoảng cách h từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P).

Ⓐ $h=\dfrac{12}{7}$. Ⓑ $h=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. **C** $h=\dfrac{4\sqrt{21}}{7}$. Ⓓ $h=\dfrac{4}{7}$.

Lời giải.

Gọi tọa độ các điểm $A(a;0;0)\in Ox$, $B(0;b;0)\in Oy$, $C(0;0;c)\in Oz$ với $a,b,c>0$.

Do đó $(P)\colon \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$. Vì $M(1;2;4)\in(P)$ nên $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{4}{c}=1$

và $V_{OABC}=\dfrac{1}{6}abc$.

Ta có $1=\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{4}{c}\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{2}{b}\cdot\dfrac{4}{c}}=\dfrac{6}{\sqrt[3]{abc}}$. Suy ra $abc\geqslant 216$ hay $V\geqslant 36$.

Dấu " $=$ " xảy ra khi $\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{b}=\dfrac{4}{c}=\dfrac{1}{3}$ hay $a=3$, $b=6$, $c=12$.

Khi đó $\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{7}{48}\Rightarrow h=\dfrac{4\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 49. Cho đa giác lồi (H) có 22 cạnh. Gọi X là tập hợp các tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của (H). Chọn ngẫu nhiên hai tam giác trong X. Tính xác suất để chọn được một tam giác có một cạnh là cạnh của đa giác và một tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác (H).

A $\dfrac{748}{1995}$. Ⓑ $\dfrac{149}{399}$. Ⓒ $\dfrac{746}{1995}$. Ⓓ $\dfrac{747}{1995}$.

Lời giải.

Đa giác (H) có 22 cạnh nên có 22 đỉnh.

Số tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác (H) là $\mathrm{C}_{22}^3=1540$.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=\mathrm{C}_{1540}^2=1185030$.

Số tam giác có một cạnh là cạnh của đa giác (H) là $22\cdot 18=396$.

Số tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác (H) là $1540-396-22=1122$.

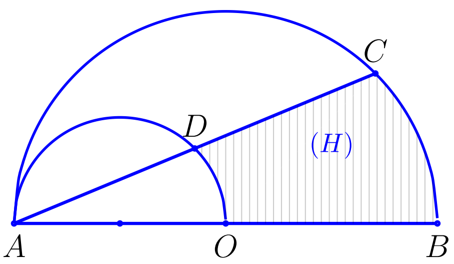
Gọi A là biến cố: "hai tam giác được chọn có một tam giác có một cạnh là cạnh của đa giác và một tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác (H)".

Số phần tử của A là $n(A) = \mathrm{C}^1_{396} \cdot \mathrm{C}^1_{1122}$.

Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{\mathrm{C}^1_{396} \cdot \mathrm{C}^1_{1122}}{1185030} = \dfrac{748}{1995}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Cho hai nửa đường tròn như hình vẽ bên dưới, trong đó đường kính của nửa đường tròn lớn gấp đôi đường kính của đường tròn nhỏ. Biết rằng nửa hình tròn đường kính AB có diện tích là 32π và góc $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) (phần gạch sọc trong hình vẽ) xung quanh đường thẳng AB.



(A) 279π. (B) $\dfrac{620\pi}{3}$. (C) $\dfrac{784\pi}{3}$. (D) $\dfrac{325\pi}{3}$.

Lời giải.

Đặt $AB = 2R$. Ta được $\dfrac{\pi R^2}{2} = 32\pi \Rightarrow R^2 = 64 \Rightarrow R = 8$.

Xét hệ trục tọa độ Oxy với gốc tọa độ O trùng với tâm đường tròn lớn, $A(-8;0)$, $B(8;0)$.

Phương trình đường tròn lớn là $(C_1)\colon x^2 + y^2 = 64$.

Phương trình đường tròn nhỏ là $(C_2)\colon (x+4)^2 + y^2 = 16$.

Đường thẳng AC đi qua điểm $A(-8;0)$, hệ số góc $k = \tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ có phương trình là $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+8)$.

Tọa độ các điểm $C\left(4;4\sqrt{3}\right)$, $D\left(-2;2\sqrt{3}\right)$.

Thể tích khối tròn xoay khi quay xung quanh trục AB phần tam giác cong ABC là

$$V_1 = \pi\left(\int\limits_{-8}^{4} \frac{1}{3}(x+8)^2\,\mathrm{d}x + \int\limits_{4}^{8}\left(64 - x^2\right)\mathrm{d}x\right) = \frac{896\pi}{3}.$$

Thể tích khối tròn xoay khi quay xung quanh trục AB phần tam giác cong AOD là

$$V_2 = \pi\left(\int\limits_{-8}^{-2} \frac{1}{3}(x+8)^2\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-2}^{0}\left(16 - (x+4)^2\right)\mathrm{d}x\right) = \frac{112\pi}{3}.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tìm là $V = V_1 - V_2 = \dfrac{896\pi}{3} - \dfrac{112\pi}{3} = \dfrac{784\pi}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. B	3. A	4. B	5. C	6. C	7. A	8. C	9. B	10. C
11. B	12. D	13. D	14. B	15. A	16. A	17. A	18. D	19. D	20. C
21. A	22. D	23. B	24. C	25. B	26. C	27. C	28. A	29. B	30. C
31. C	32. A	33. B	34. B	35. B	36. A	37. C	38. B	39. B	40. A
41. A	42. C	43. C	44. D	45. A	46. B	47. D	48. C	49. A	50. C

20 ĐỀ THI THỬ SỐ 29-MAX8

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + 2 - \dfrac{4}{x+2}$ trên đoạn $[-1;2]$.

(A) $\max\limits_{[-1;2]} y = 0$. (B) $\max\limits_{[-1;2]} y = 2$. (C) $\max\limits_{[-1;2]} y = 3$. (D) $\max\limits_{[-1;2]} y = -3$.

Lời giải.

Hàm số liên tục trên đoạn $[-1;2]$. Vì $y' = 1 + \dfrac{4}{(x+2)^2}$ nên $y' > 0$, $\forall x \in [-1;2]$.

Mà $y(-1) = -3$ và $y(2) = 3$ nên $\max\limits_{[-1;2]} y = 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1)$, $B(-2;2;-3)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

(A) $x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$. (B) $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$.
(C) $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 3$. (D) $x^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 3$.

Lời giải.

Gọi I là tâm của mặt cầu đường kính AB. Khi đó I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Rightarrow I(0;3;-1)$.

Ta có: $AB = 2R = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-4)^2 + (-3-1)^2} = 6 \Rightarrow R = 3$.

Khi đó mặt cầu đường kính AB có phương trình là: $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Tính $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x}}{x}$.

(A) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. (B) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. (C) $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. (D) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}\right)}{x\left(\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x\left(\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\left(\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Điểm cực tiểu của hàm số $y = \dfrac{1}{2}x^4 - 2x^2 - 3$ là

(A) $x = 2$. (B) $x = 0$. (C) $x = \pm\sqrt{2}$. (D) $x = \pm 2$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 2x^3 - 4x = 2x(x^2 - 2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy điểm cực tiểu của hàm số là: $x = -\sqrt{2}$; $x = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + z - 3 = 0$. Điểm nào trong các phương án dưới đây thuộc mặt phẳng (P)

A $M(2; 1; 0)$. **B** $M(2; -1; 0)$. **C** $M(-1; -1; 6)$. **D** $M(-1; -1; 2)$.

Lời giải.

Ta có: $2 \cdot 2 - 1 + 0 - 3 = 0 \Rightarrow M(2; 1; 0) \in (P)\colon 2x - y + z - 3 = 0$.

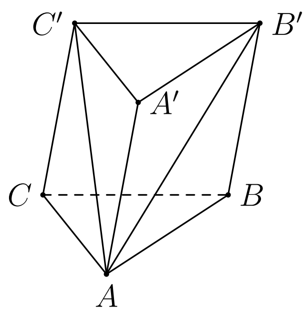
Chọn đáp án A □

Câu 6. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích $V = 3$. Thể tích khối chóp $A'.AB'C'$ là

A 1. **B** 3. **C** $\dfrac{1}{3}$. **D** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $V_{A'.AB'C'} = V_{A.A'B'C'} = \dfrac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{3} V = \dfrac{1}{3} \cdot 3 = 1$.



Chọn đáp án A □

Câu 7. Cho $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\displaystyle\int_{-2}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t = -4$. Tính $\displaystyle\int_{2}^{4} f(y)\mathrm{d}y$.

A $I = 5$. **B** $I = -3$. **C** $I = 3$. **D** $I = -5$.

Lời giải.

Ta có: $\displaystyle\int_{-2}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{2}^{4} f(y)\mathrm{d}y = \int_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Khi đó: $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle\Rightarrow \int_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = -4 - 1 = -5$.

Vậy $\displaystyle\int_{2}^{4} f(y)\mathrm{d}y = -5$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 8. Tính $\int (x - \sin 2x)\, \mathrm{d}x$.

A $\frac{x^2}{2} + \sin x + C$.
B $\frac{x^2}{2} + \cos 2x + C$.
C $x^2 + \frac{\cos 2x}{2} + C$.
D $\frac{x^2}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + C$.

Lời giải.

Ta có $\int (x - \sin 2x)\, \mathrm{d}x = \int x\, \mathrm{d}x - \int \sin 2x\, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + C$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 9. Cho các số dương a, b, c, d. Biểu thức $S = \ln \frac{a}{b} + \ln \frac{b}{c} + \ln \frac{c}{d} + \ln \frac{d}{a}$ bằng

A 1.
B 0.
C $\ln\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}\right)$.
D $\ln(abcd)$.

Lời giải.

Cách 1:

Ta có $S = \ln \frac{a}{b} + \ln \frac{b}{c} + \ln \frac{c}{d} + \ln \frac{d}{a} = \ln\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a}\right) = \ln 1 = 0$.

Cách 2:

Ta có: $S = \ln \frac{a}{b} + \ln \frac{b}{c} + \ln \frac{c}{d} + \ln \frac{d}{a} = \ln a - \ln b + \ln b - \ln c + \ln c - \ln d + \ln d - \ln a = 0$.

Chọn đáp án B $\square$

Câu 10. Đạo hàm của hàm số $y = (5x^2 - x + 2)^{\frac{1}{3}}$ là

A $y' = \frac{10x - 1}{3\sqrt[3]{(5x^2 - x + 2)^2}}$.
B $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(5x^2 - x + 2)^2}}$.
C $y' = \frac{10x - 1}{3\sqrt[3]{5x^2 - x + 2}}$.
D $y' = \frac{10x - 1}{\sqrt[3]{(5x^2 - x + 2)^2}}$.

Lời giải.

Sử dụng công thức tính đạo hàm $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha - 1} \cdot u'$.

Ta có $y' = \frac{1}{3} \cdot (5x^2 - x + 2)^{1 - \frac{1}{3}} \cdot (10x - 1) = \frac{10x - 1}{3\sqrt[3]{(5x^2 - x + 2)^2}}$.

Chọn đáp án A $\square$

Câu 11. Cho số phức z thỏa mãn $z(1 + 2i) = 4 - 3i$. Tìm số phức liên hợp $\overline{z}$ của z.

A $\overline{z} = \frac{-2}{5} - \frac{11}{5}i$.
B $\overline{z} = \frac{2}{5} - \frac{11}{5}i$.
C $\overline{z} = \frac{-2}{5} + \frac{11}{5}i$.
D $\overline{z} = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i$.

Lời giải.

Vì $z(1 + 2i) = 4 - 3i$ nên $z = \frac{4 - 3i}{1 + 2i} = \frac{(4 - 3i)(1 - 2i)}{1^2 + 2^2} = \frac{-2 - 11i}{5} = \frac{-2}{5} - \frac{11}{5}i$.

Vậy nên $\overline{z} = \frac{-2}{5} + \frac{11}{5}i$.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 12. Cho số phức $z = 3 - 4i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.

A Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.
B Phần thực là 3 và phần ảo là -4.
C Phần thực là -4 và phần ảo là 3.
D Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.

Lời giải.

Số phức $z = 3 - 4i$ có phần thực là 3 và phần ảo là -4.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13.
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

(A) Hàm số không có giá trị cực đại.
(B) Hàm số có đúng 1 điểm cực trị.
(C) Hàm số có 2 điểm cực trị.
(D) Hàm số không có giá trị cực tiểu.

Lời giải.
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có 2 điểm cực trị là $x = 0$ và $x = 2$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Đường thẳng nào sau đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-1}{2x-1}$?

(A) $y = 1$. (B) $y = \dfrac{1}{3}$. (C) $y = \dfrac{3}{2}$. (D) $y = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.
Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3-\dfrac{1}{x}}{2-\dfrac{1}{x}} = \dfrac{3}{2}$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = \dfrac{3}{2}$ làm tiệm cận ngang.
Chọn đáp án (C) □

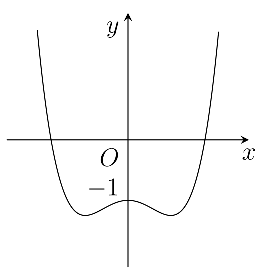
Câu 15. Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x-3yi)+(1-3i) = -1+6i$ với i là đơn vị ảo.

(A) $x = 1$; $y = -3$. (B) $x = -1$; $y = -3$. (C) $x = -1$; $y = -1$. (D) $x = 1$; $y = -1$.

Lời giải.
Ta có: $(2x-3yi)+(1-3i) = -1+6i \Leftrightarrow 2x+1-(3y+3)i = -1+6i$.
Suy ra $\begin{cases} 2x+1 = -1 \\ -3y-3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3. \end{cases}$
Chọn đáp án (B) □

Câu 16.
Đường cong bên hình là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây?

(A) $y = x^4 + x^2 - 1$. (B) $y = x^4 - x^2 - 1$.
(C) $y = -x^4 + x^2 - 1$. (D) $y = x^2 + 2x - 1$.



Lời giải.
Hình vẽ trên là đồ thị của hàm số bậc 4 trùng phương với $a > 0$. Do đó loại phương án $y = -x^4 + x^2 - 1$ và $y = x^2 + 2x - 1$.
Xét hàm số trong phương án $y = x^4 - x^2 - 1$. Ta có $a = 1; b = -1 \Rightarrow a \cdot b < 0$ nên hàm số có 3 cực trị. Do đó đáp án là hàm số $y = x^4 - x^2 - 1$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ nghịch biến khi x thuộc khoảng nào sau đây?

(A) $(0; +\infty)$.
(B) $(-\infty; 2)$.
(C) $(0; 2)$.
(D) $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trong khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(3; -2; 3)$ và $B(-1; 2; 5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

(A) $I(-2; 2; 1)$.
(B) $I(1; 0; 4)$.
(C) $I(2; 0; 8)$.
(D) $I(2; -2; -1)$.

Lời giải.

Cho hai điểm $A(3; -2; 3)$ và $B(-1; 2; 5)$.

Trung điểm I có tọa độ: $\begin{cases} \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{3 + (-1)}{2} = 1 \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{(-2) + 2}{2} = 0 \\ \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{3 + 5}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow I(1; 0; 4).$

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Diện tích toàn phần khối lập phương là $96m^2$. Thể tích khối lập phương là

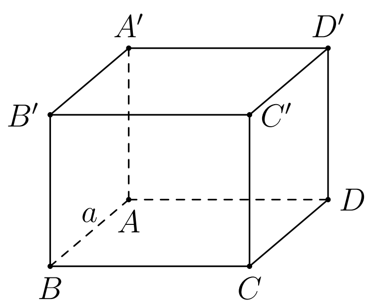
(A) $24\sqrt{3}$ cm^3.
(B) 64 cm^3.
(C) 24 cm^3.
(D) $48\sqrt{5}$ cm^3.

Lời giải.

Gọi a là độ dài cạnh của khối lập phương.

Ta có: $S_{tp} = 6 \cdot a^2 = 96 \Rightarrow a = 4(cm)$.

Thể tích khối lập phương: $V = a^3 = 4^3 = 64$ cm^3.



Chọn đáp án (B) □

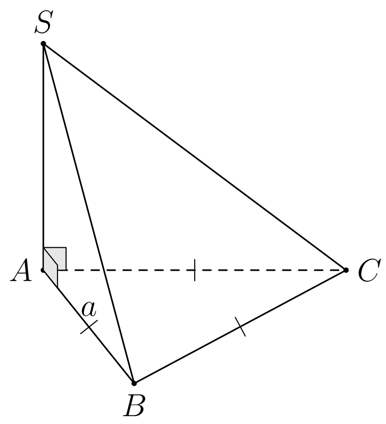
Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và thể tích của khối chóp đó bằng $\frac{a^3}{4}$. Tính cạnh bên SA.

A $a\sqrt{3}$. **B** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C** $2a\sqrt{3}$. **D** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có ABC là tam giác đều cạnh $a \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy
$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\triangle ABC}$.

$$\Rightarrow SA = \frac{3 \cdot V_{S.ABC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = a\sqrt{3}.$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Tính tích phân $I = \int\limits_1^2 \frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x$.

A $I = \frac{\ln 3 - 1}{2}$. **B** $I = \frac{\ln 3}{2}$. **C** $I = \frac{\ln 3}{3}$. **D** $I = \ln 3 + 1$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_1^2 \frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x-1|\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) = \frac{\ln 3}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^3 - x$; $y = 2x$ và các đường $x = 1$; $x = -1$ được xác định bởi công thức

A $S = \int\limits_{-1}^0 (x^3 - 3x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 (3x - x^3)\,\mathrm{d}x$. **B** $S = \int\limits_{-1}^0 (3x - x^3)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 (x^3 - 3x)\,\mathrm{d}x$.

C $S = \left|\int\limits_{-1}^1 (3x - x^3)\,\mathrm{d}x\right|$. **D** $S = \int\limits_{-1}^1 (3x - x^3)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^3 - x$; $y = 2x$ và các đường $x = 1$; $x = -1$ là $S = \int\limits_{-1}^1 |(x^3 - x) - (2x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^1 |x^3 - 3x|\,\mathrm{d}x$.

Bảng xét dấu $x^3 - 3x$

x	-1		0		1
$x^3 - 3x$		$+$	0	$-$	

Do đó dựa vào bảng ta có: $S = \int\limits_{-1}^0 (x^3 - 3x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 (3x - x^3)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Biết rằng tích phân $\int\limits_0^1 (2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = a + b\cdot e\,(a,b\in\mathbb{Z})$, tích $a\cdot b$ bằng

(A) -15. (B) -1. (C) 1. (D) 20.

Lời giải.

Điều kiện: a, $b\in\mathbb{Z}$.

Đặt $\begin{cases} u = 2x+1 \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x \end{cases}$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 (2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (2x+1)\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - 2\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (2x-1)\mathrm{e}^x\Big|_0^1 = 1+\mathrm{e} = a+b\cdot e.$

$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$. Vậy tích $a\cdot b = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) < 1$ là

(A) $(0;1)$. (B) $\left(\frac{1}{8};3\right)$. (C) $\left(\frac{1}{8};1\right)$. (D) $\left(\frac{1}{8};+\infty\right)$.

Lời giải.

Ta có $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) < 1 \Leftrightarrow 0 < \log_{\frac{1}{2}} x < 3^1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^0 > x > \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 1 > x > \frac{1}{8}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(\frac{1}{8};1\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = 2a$. Mặt bên SBC là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

(A) $V = \frac{2a^3}{3}$. (B) $V = a^3$. (C) $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. (D) $V = \frac{a^3}{3}$.

Lời giải.

$\triangle SBC$ vuông cân tại S và $\triangle ABC$ vuông cân tại A.

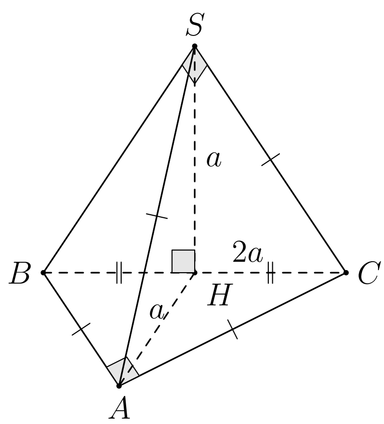
Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $AH \perp BC$ và $SH \perp BC$.

Mặt khác $(SBC) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$.

$AH = SH = \frac{1}{2}BC = a$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$V = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot SH = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AH\cdot SH = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot a\cdot a = \frac{a^3}{3}$.



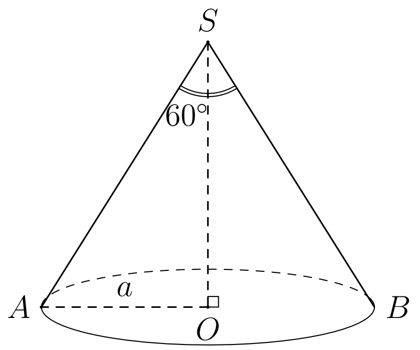
Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Cho một hình nón có bán kính đáy bằng a và góc ở đỉnh bằng 60°. Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.

(A) $S_{xq} = 4\pi a^2$. (B) $S_{xq} = \dfrac{2\sqrt{3}\pi a^2}{3}$. (C) $S_{xq} = \dfrac{4\sqrt{3}\pi a^2}{3}$. **D** $S_{xq} = 2\pi a^2$.

Lời giải.

Giả sử hình nón có đỉnh là S, O là tâm của đường tròn đáy và AB là một đường kính của đáy.



$r = OA = a$, $\widehat{ASB} = 60° \Rightarrow \widehat{ASO} = 30°$.

Độ dài đường sinh là $l = SA = \dfrac{OA}{\sin 30°} = 2a$.

Vậy diện tích xung quanh của hình nón là

$S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot a \cdot 2a = 2\pi a^2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Giải phương trình $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$.

A $x = 1; x = 2$. (B) $x = 1$. (C) $x = 2$. (D) $x = 0; x = 2$.

Lời giải.

Cách 1:

Ta có phương trình: $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

Đặt $t = 2^x$ (điều kiện: $t > 0$). Phương trình trở thành: $t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 4 \end{array}\right.$ (nhận).

Với $t = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Với $t = 4 \Rightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$; $x = 2$.

Cách 2:

Thế số bấm máy tính. Giá trị nào của x thỏa thì chọn

Cách 3:

Đối với máy tính CASIO FX-570VN PLUS và các dòng máy tính tương đương

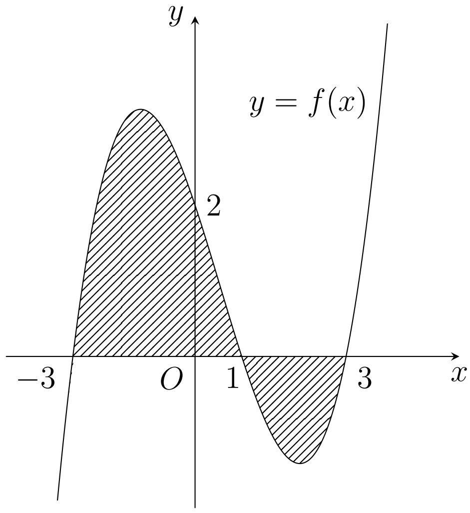
Sử dụng chức năng MODE 7 của máy tính Casio nhập hàm số với thiết lập Star 0 End 2 Step 1.

Quan sát bảng giá trị $F(X)$ ta chọn các giá trị mà $F(X) = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28.

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.
Diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục Ox (phần gạch sọc) được tính bởi công thức



A $S = \left|\int\limits_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

B $S = \int\limits_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C $S = \int\limits_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

D $S = \int\limits_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta thấy $f(x) \geqslant 0$ với $x \in [-3;1]$, $f(x) \leqslant 0$ với $x \in [1;3]$.

Do đó $S = \int\limits_{-3}^{3} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-3}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{3} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(1;3;-2)$ và song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 3z + 4 = 0$ là

A $2x + y + 3z + 7 = 0$. **B** $2x + y - 3z + 7 = 0$.

C $2x - y + 3z + 7 = 0$. **D** $2x - y + 3z - 7 = 0$.

Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm. Vì $(\alpha) \parallel (P) \Rightarrow \vec{n}_{(\alpha)} = \vec{n}_{(P)} = (2;-1;3)$

Ta có: (α) đi qua $A(1;3;-2)$ và có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(\alpha)} = (2;-1;3)$.

Do đó phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) là:

$2(x-1) - 1(y-3) + 3(z+2) = 0$ hay $2x - y + 3z + 7 = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Cho biết $\int\limits_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 15$. Tính giá trị của $P = \int\limits_{0}^{2} [f(5-3x)+7]\,\mathrm{d}x$.

A $P = 15$. **B** $P = 37$. **C** $P = 27$. **D** $P = 19$.

Lời giải.

Đặt $t = 5 - 3x \Rightarrow \mathrm{d}t = -3\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x = 0$ thì $t = 5$; $x = 2$ thì $t = -1$.

Ta có: $P = \int\limits_0^2 [f(5-3x)+7]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(5-3x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^2 7\,\mathrm{d}x$

$= \int\limits_5^{-1} f(t)\dfrac{\mathrm{d}t}{-3} + 7x\Big|_0^2 = \dfrac{1}{3}\int\limits_{-1}^5 f(t)\,\mathrm{d}t + 14$

$= \dfrac{1}{3}\cdot 15 + 14 = 19.$

Chọn đáp án D □

Câu 31. Giá trị cực đại của hàm số $y = x + \sin 2x$ trên $(0;\pi)$ là

A. $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 1 + 2\cos 2x$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi.$

Xét trên $(0;\pi)$ ta có $x = \dfrac{\pi}{3}$ và $x = \dfrac{2\pi}{3}$.

Ta có $y'' = -4\sin 2x$.

$y''\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3} < 0$ nên $x = \dfrac{\pi}{3}$ là điểm cực đại.

$y''\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} > 0$ nên $x = \dfrac{2\pi}{3}$ là điểm cực tiểu.

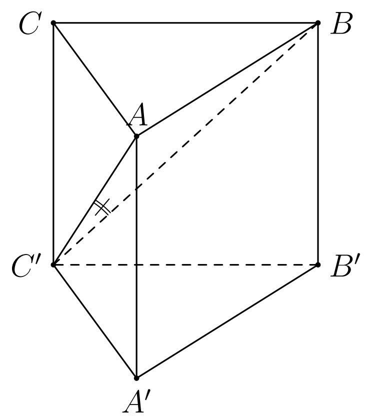
Vậy giá trị cực đại là $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Đường thẳng BC' tạo với $(ACC'A')$ một góc 30°. Tính thể tích V của khối trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = a^3\sqrt{6}$. B. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $V = 3a^3$. D. $V = a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.



Tam giác ABC vuông tại A nên $BA \perp AC$. $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$ nên $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$.

Diện tích tam giác ABC bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng tam giác nên $BA \perp AA'$.

Suy ra, $BA \perp (ACC'A)$. Do đó, hình chiếu của đường thẳng BC' lên mặt phẳng $(ACC'A)$ là đường thẳng AC'. Nên góc hợp bởi đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ACC'A)$ là góc $\widehat{AC'B}$.

Vì $BA \perp (ACC'A)$ nên tam giác ABC' vuông tại A.

Suy ra $AC' = AB \cdot \cot \widehat{BC'A} = 3a$.

Xét tam giác $AA'C'$ vuông tại A' nên $AA' = \sqrt{AC'^2 - A'C'^2} = 2\sqrt{2}a$.

Vậy thể tích khối trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = a^3\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Ông X muốn gửi số tiền M vào ngân hàng và dùng số tiền thu được (cả lãi lẫn gốc) để trao 10 suất học bổng hàng tháng cho học sinh nghèo, mỗi suất 1 triệu đồng. Biết lãi ngân hàng là 1% tháng. Ông X bắt đầu trao học bổng sau một tháng gửi tiền. Để đủ tiền trao học bổng cho học sinh trong 10 tháng, ông X cần gửi vào ngân hàng số tiền M ít nhất là

(A) 92100000 đồng. (B) 96400000 đồng. (C) 94800000 đồng. (D) 100000000 đồng.

Lời giải.

Mỗi tháng ông X rút số tiền là $T = 10000000$. Lãi suất hàng tháng là $r = 0,01$.

Sau tháng thứ nhất, số tiền ông X còn lại trong ngân hàng là: $M(1+r) - T$.

Sau tháng thứ hai, số tiền ông X còn lại trong ngân hàng là:

$[M(1+r) - T](1+r) - T = M(1+r)^2 - T[1 + (1+r)]$.

Tương tự, sau tháng thứ n, số tiền ông X còn lại trong ngân hàng là:

$M(1+r)^n - T\left[1 + (1+r) + (1+r)^2 + \cdots (1+r)^{n-1}\right] = M(1+r)^n - T\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$.

Để đủ tiền trao học bổng cho học sinh trong 10 tháng thì: $M(1+r)^{10} - T\dfrac{(1+r)^{10} - 1}{r} \geqslant 0$

$M \geqslant T\dfrac{(1+r)^{10} - 1}{r(1+r)^{10}} \approx 94800000$.

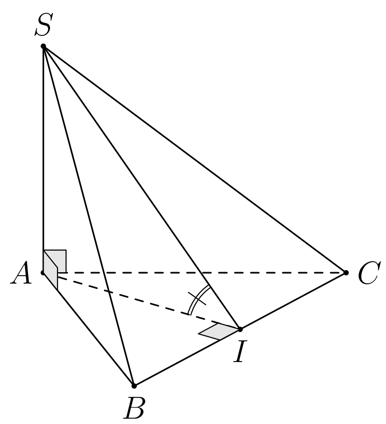
Vậy số tiền ông X cần gửi tối thiểu là 94800000 đồng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Cho khối chóp $S.ABC$ có mặt đáy ABC là tam giác cân tại A với $BC = 2a$, góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Biết cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\dfrac{a^3}{9}$. Tính góc hợp bởi mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy.

(A) 30°. (B) 90°. (C) 45°. (D) 60°.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm BC, xét tam giác AIB vuông tại I ta có:

$\tan 60^\circ = \sqrt{3} = \dfrac{BI}{AI} \Leftrightarrow AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ (Do góc $BAI = 60^\circ$, AI là phân giác góc 120°).

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AI \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \cdot 2a = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

Do đó $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^3}{9} \Leftrightarrow SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Mà $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp SI$.

Vậy góc hợp bởi mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy là góc $\widehat{SIA}$.

Suy ra tam giác SIA vuông cân tại A nên $\widehat{SIA} = 45^\circ$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Giả sử $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}(2x^3 + 5x^2 - 2x + 4)\,\mathrm{d}x = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\mathrm{e}^{2x} + C$.

Khi đó $a + b + c + d$ bằng

(A) -2. (B) 3. (C) 5. (D) 2.

Lời giải.

Ta có: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \Rightarrow F'(x) = f(x) = \mathrm{e}^{2x}(2x^3 + 5x^2 - 2x + 4)$

Vậy $F'(x) = (3ax^2 + 2bx + c)\mathrm{e}^{2x} + 2(ax^3 + bx^2 + cx + d)\mathrm{e}^{2x}$

$= (2ax^3 + (2b + 3a)x^2 + (2c + 2b)x + 2d + c)\mathrm{e}^{2x}$

Vậy đồng nhất ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2a = 2 \\ 2b + 3a = 5 \\ 2c + 2b = -2 \\ 2d + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -2 \\ d = 3. \end{cases}$

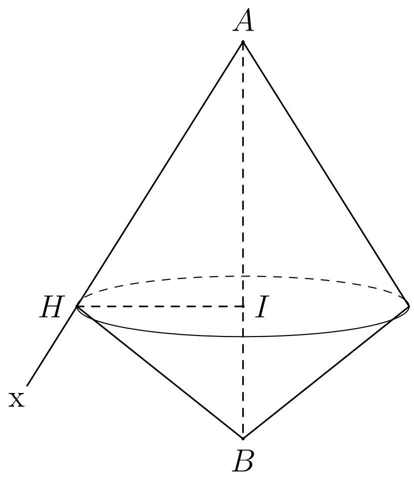
Do đó $a + b + c + d = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng $2a$, vẽ tia Ax về phía điểm B sao cho điểm B luôn cách tia Ax một đoạn bằng a. Gọi H là hình chiếu của B lên tia Ax, khi tam giác AHB quay quanh trục AB thì đường gấp khúc AHB vẽ thành mặt tròn xoay có diện tích xung quanh bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{2}\pi a^2}{2}$. B. $\dfrac{\left(3+\sqrt{3}\right)\pi a^2}{2}$. C. $\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)\pi a^2}{2}$. D. $\dfrac{\left(2+\sqrt{2}\right)\pi a^2}{2}$.

Lời giải.



Xét tam giác AHB vuông tại H. Ta có $AH = \sqrt{AB^2 - HB^2} = a\sqrt{3}$

Xét tam giác AHB vuông tại H, $HI \perp AB$ tại I ta có $HI = \dfrac{AH \cdot HB}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3} \cdot a}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Khi tam giác AHB quay quanh trục AB thì đường gấp khúc AHB vẽ thành mặt tròn xoay (có diện tích xung quanh là S) là hợp của hai mặt xung quanh của hình nón (N1) và (N2).

Trong đó:

(N1) là hình nón có được do quay tam giác AHI quanh trục AI có diện tích xung quanh là $S_1 = \pi \cdot HI \cdot AH = \pi \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{3\pi a^2}{2}$

(N2) là hình nón có được do quay tam giác BHI quanh trục BI có diện tích xung quanh là $S_2 = \pi \cdot HI \cdot BH = \pi \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^2}{2}$

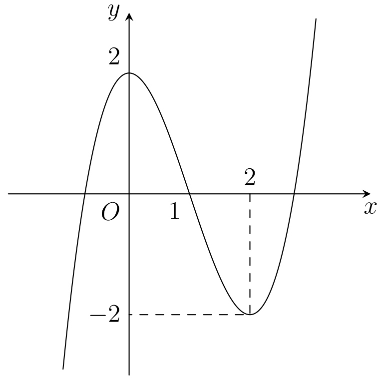
$\Rightarrow S = S_1 + S_2 = \dfrac{3\pi a^2}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\pi a^2}{2} = \dfrac{\left(3+\sqrt{3}\right)\pi a^2}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 37.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $S = a + b$.

A $S = -1$. **B** $S = 1$. **C** $S = -2$. **D** $S = 0$.



Lời giải.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đi qua $(0; 2)$, $(2; -2)$. Hàm số đạt cực trị tại $x = 0$, $x = 2$

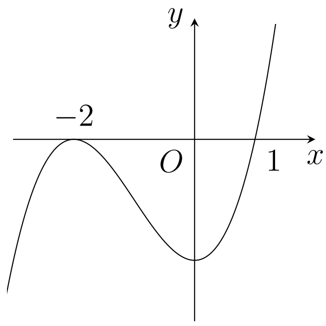
Nên ta có: $\begin{cases} d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = -2 \\ c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ c = 0 \\ 8a + 4b = -4 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ c = 0 \\ b = -3 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = -2.$

Chọn đáp án C □

Câu 38.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x^2 - 4x + 1)$ có mấy điểm cực trị?

A 5. **B** 4. **C** 3. **D** 2.



Lời giải.

Ta có $y = f(x^2 - 4x + 1) \Rightarrow y' = (2x - 4) \cdot f'(x^2 - 4x + 1)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 4 = 0 \\ f'(x^2 - 4x + 1) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2 - 4x + 1 = -2 \\ x^2 - 4x + 1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1; x = 3 \\ x = 0; x = 4. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$		0		1		2		3		4		$+\infty$
$2x - 4$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(x^2 - 4x + 1)$		$+$	0	$-$	0	$-$	|	$-$	0	$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu, ta thấy hàm số $y = f(x^2 - 4x + 1)$ có 3 cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{m\log_3^2 x - 4\log_3 x + m + 3}$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$

A $m \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.
B $m \in (1; +\infty)$.
C $m \in (-4; 1)$.
D $m \in (-\infty; -4)$.

Lời giải.

Cách 1:

Điều kiện: $x > 0$.

Hàm số xác định khi:

$m\log_3^2 x - 4\log_3 x + m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m\left(\log_3^2 x + 1\right) \neq 4\log_3 x - 3 \Leftrightarrow m \neq \dfrac{4\log_3 x - 3}{\log_3^2 x + 1}, \forall x \in (0; +\infty)$.

Để hàm số xác định trên $(0; +\infty)$ thì phương trình $m = \dfrac{4\log_3 x - 3}{\log_3^2 x + 1}$ vô nghiệm $\forall x \in (0; +\infty)$

Xét hàm số $y = \dfrac{4\log_3 x - 3}{\log_3^2 x + 1}$.

Đặt $\log_3 x = t$ khi đó ta có $y = \dfrac{4t - 3}{t^2 + 1}$, $y' = \dfrac{-4t^2 + 6t + 4}{(t^2 + 1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-1}{2} \\ t = 2. \end{array}\right.$

Ta có BBT:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Để hàm số xác định trên $(0; +\infty)$ thì $m \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

Cách 2:

Đề hàm số xác định trên khoảng $(0; +\infty)$ thì phương trình $m \cdot \log_3^2 x - 4\log_3 x + m + 3 = 0$ vô nghiệm.

TH1: $m = 0$ thì PT trở thành $-4\log_3 x + 3 = 0 \Leftrightarrow \log_3 x = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow x = 3^{\frac{3}{4}}$.

Vậy $m = 0$ không thỏa mãn.

TH2: $m \neq 0$ thì để PT vô nghiệm $\Delta = (-4)^2 - 4m(m+3) < 0 \Leftrightarrow -4m^2 - 12m + 16 < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -4 \\ m > 1. \end{array}\right.$

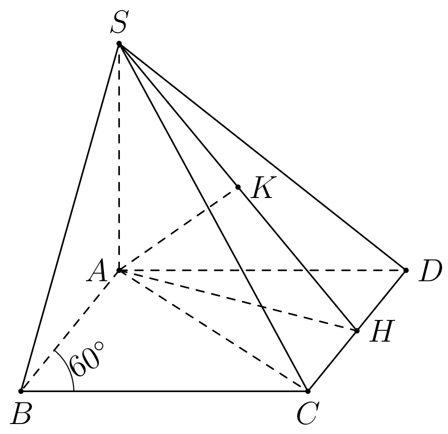
Để hàm số xác định trên $(0; +\infty)$ thì $m \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SC = 2a$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) là

A $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.
B $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
C $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.
D $\dfrac{5a\sqrt{30}}{3}$.

Lời giải.



Cách 1: Sử dụng kiến thức ở lớp 11.

$ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$, $\triangle ACD$ là các tam giác đều cạnh a.

Xét $\triangle SAC$ vuông tại A có:

$SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Vì $AB \parallel CD$ nên $AB \parallel (SCD)$.

Do đó $\mathrm{d}(B,(SCD)) = \mathrm{d}(A,(SCD))$.

Kẻ $AH \perp CD\,(H \in CD)$.

Suy ra H là trung điểm của cạnh CD, $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Kẻ $AK \perp SH\,(K \in SH)\,(1)$

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AH \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAH) \Rightarrow CD \perp AK(2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $AK \perp (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SCD)) = AK$.

Xét $\triangle SAH$ vuông ở A: $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AH^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{5}{3a^2} \Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Vậy $\mathrm{d}(B,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Cách 2: Tính khoảng cách thông qua tính thể tích.

$ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$, $\triangle ACD$ là các tam giác đều cạnh a.

Xét $\triangle SAC$ vuông tại A có: $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Vì $AB \parallel DC$ nên $AB \parallel (SDC)$. Do đó $\mathrm{d}(B,(SCD)) = \mathrm{d}(A,(SCD)) = \dfrac{3V_{SACD}}{S_{\triangle SCD}}$.

$V_{SACD} = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{\triangle ACD} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{4}$.

Xét $\triangle SAC$ và $\triangle SAD$ có: $AD = AC = a$, SA chung, $\widehat{SAC} = \widehat{SAD} = 90^\circ$.

Do đó $\triangle SAC = \triangle SAD \Rightarrow SC = SD \Rightarrow \triangle SCD$ cân tại S.

Gọi H là trung điểm $CD \Rightarrow SH \perp CD$.

Xét $\triangle SHC$ vuông ở H: $SH = \sqrt{SC^2 - CH^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

$S_{\triangle SCD} = \dfrac{1}{2}SH \cdot CD = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{15}}{2} \cdot a = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{4}$.

$\mathrm{d}(A,(SCD)) = \dfrac{3 \cdot \dfrac{a^3}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{15}}{4}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Vậy $\mathrm{d}(B,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Có bao nhiêu hạng tử là số nguyên trong khai triển $\left(\sqrt{3} + \sqrt[4]{5}\right)^{124}$?

A 32. **B** 31. **C** 33. **D** 30.

Lời giải.

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$\left(\sqrt{3} + \sqrt[4]{5}\right)^{124} = \sum\limits_{k=0}^{124} \mathrm{C}_{124}^k \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{124-k} \cdot \left(\sqrt[4]{5}\right)^k$, với $0 \leqslant k \leqslant 124$, $k \in \mathbb{N}$.

Suy ra số hạng tổng quát $(k+1)$ trong khai triển là: $\mathrm{C}_{124}^{k} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{124-k} \cdot \left(\sqrt[4]{5}\right)^{k}$.
Hạng tử là số nguyên trong khai triển ứng với k thỏa mãn:

$$\begin{cases} k \vdots 4 \\ (124-k) \vdots 2 \\ 0 \leqslant k \leqslant 124 \\ k \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 4m \\ 0 \leqslant k \leqslant 124 \\ m \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 4m \\ 0 \leqslant m \leqslant 31 \\ m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Suy ra có 32 giá trị k thỏa mãn. Do đó có 32 hạng tử là số nguyên trong khai triển $\left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}\right)^{124}$.
Chọn đáp án A □

Câu 42. Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0) \cdot 2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 20 triệu con?

A 48 phút. **B** 7 phút. **C** 8 phút. **D** 12 phút.

Lời giải.
Áp dụng công thức $s(t) = s(0) \cdot 2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút.
Ta có: $625000 = s(0) \cdot 2^3 \Rightarrow s(0) = 78125$.
Khi đó, theo đề bài: $20000000 = 78125 \cdot 2^t \Rightarrow 2^t = 256 = 2^8 \Rightarrow t = 8$.
Vậy sau 8 phút kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 20 triệu con.
Chọn đáp án C □

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log 5 + \log(x^2+1) \geqslant \log(mx^2+4x+m)$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A 0. **B** 1. **C** Vô số. **D** 2.

Lời giải.
Ta có: $\log 5 + \log(x^2+1) \geqslant \log(mx^2+4x+m) \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x^2+1) \geqslant (mx^2+4x+m) \\ mx^2+4x+m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5-m)x^2 - 4x + 5 - \\ mx^2+4x+m > 0 \quad (\end{cases}$
Xét $m = 0$ hoặc $m = 5$ thì các bất phương trình (1) và (2) đều không đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì: $\begin{cases} 5-m > 0 \\ \Delta'_1 = 4-(5-m)^2 \leqslant 0 \\ m > 0 \\ \Delta'_2 = 4 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ \left[\begin{array}{l} m \geqslant 7 \\ m \leqslant 3 \end{array}\right. \\ m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leqslant 3.$

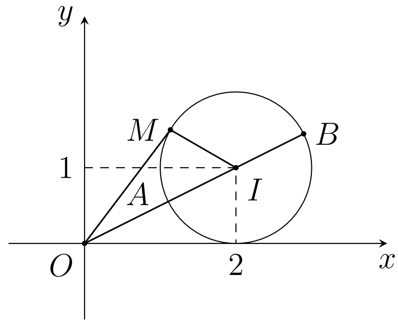
Do m là số nguyên nên $m = 3$.
Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-2i| = 1$. Số phức $z - i$ có mô-đun nhỏ nhất là

A $\sqrt{5}-2$. **B** $\sqrt{5}-1$. **C** $\sqrt{5}+1$. **D** $\sqrt{5}+2$.

Lời giải.

Cách 1:



Đặt $w = z - i \Rightarrow z = w + i$.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn hình học của số phức w.

Từ giả thiết $|z-2-2i| = 1$ ta được:

$$|w+i-2-2i| = 1 \Leftrightarrow |w-2-i| = 1$$
$$\Leftrightarrow |(x-2)+(y-1)i| = 1$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2 = 1.$$

Suy ra tập hợp những điểm $M(x;y)$ biểu diễn cho số phức w là đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$ bán kính $R = 1$.

Giả sử OI cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B với A nằm trong đoạn thẳng OI.

Ta có $|w| = OM$

Mà $OM + MI \geqslant OI \Leftrightarrow OM + MI \geqslant OA + AI \Leftrightarrow OM \geqslant OA$

Nên $|w|$ nhỏ nhất bằng $OA = OI - IA = \sqrt{5} - 1$ khi $M \equiv A$.

Cách 2:

Từ $|z-2-2i| = 1 \Rightarrow (a-2)^2 + (b-2)^2 = 1$ với $z = a + bi\,(a, b \in \mathbb{R})$

$a - 2 = \sin x; b - 2 = \cos x \Rightarrow a = 2 + \sin x, b = 2 + \cos x$

Khi đó: $|z-i| = |2+\sin x + (2+\cos x)\,i - i| = \sqrt{(2+\sin x)^2 + (1+\cos x)^2} = \sqrt{6 + (4\sin x + 2\cos x}$

$\geqslant \sqrt{6 - \sqrt{(4^2+2^2)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}} = \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2} = \sqrt{5}-1$

Nên $|z-i|$ nhỏ nhất bằng $\sqrt{5}-1$ khi $\begin{cases} 4\cos x = 2\sin x \\ 4\sin x + 2\cos x = -2\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \\ \cos x = \dfrac{-\sqrt{5}}{5}. \end{cases}$

Ta được $z = \left(2 - \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right) + \left(2 - \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right) i$.

Cách 3:

Sử dụng bất đẳng thức $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

$|z-i| = |(z-2-2i) + (2+i)| \geqslant ||z-2-2i| - |2+i|| = \sqrt{5}-1.$

Chọn đáp án B □

Câu 45. Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 ta lập các số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau. Gọi A là biến cố: "Lập được số mà tổng của ba chữ số thuộc hàng đơn vị, chục, trăm lớn hơn tổng của ba chữ số còn lại là 3 đơn vị". Xác suất của biến cố A là

A. $\dfrac{1}{30}$. B. $\dfrac{3}{10}$. C. $\dfrac{1}{10}$. D. $\dfrac{3}{20}$.

Lời giải.

Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 ta lập các số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau, lập được $6! = 720$ số.

Vậy số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 720$.

Gọi $\overline{abcdef}$ là số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau thuộc biến cố A.

Ta có: $\begin{cases} (a+b+c) + (d+e+f) = 21 \\ (d+e+f) - (a+b+c) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 9 \\ d+e+f = 12. \end{cases}$

Từ sáu chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 ta phân chia thành bộ ba số có tổng là 9 và bộ ba số có tổng là 12, có 3 cách phân chia, đó là $(1;2;6)$ và $(3;4;5)$, $(1;3;5)$ và $(2;4;6)$, $(2;3;4)$ và $(1;5;6)$. Trong mỗi cách phân chia này, ta lập được $3!\cdot 3! = 36$ số. Do đó $n(A) = 3\cdot 36 = 108$.

Vậy xác suất của biến cố A là: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{108}{720} = \dfrac{3}{20}$.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Một nhà máy cần thiết kế một chiếc bể đựng nước hình trụ bằng tôn có nắp, có thể tích là $64\pi(m^3)$. Tìm bán kính đáy r của hình trụ sao cho hình trụ được làm ra tốn ít nguyên liệu nhất.

(A) $r = 3(m)$. (B) $r = \sqrt[3]{16}(m)$. (C) $r = \sqrt[3]{32}(m)$. (D) $r = 4(m)$.

Lời giải.

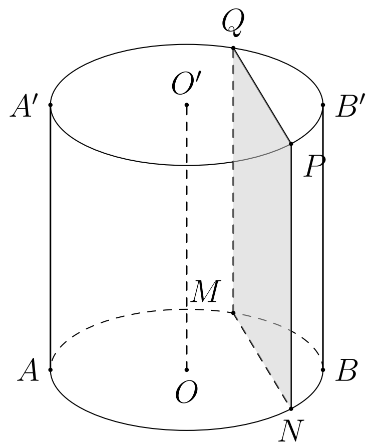
Cách 1:

Chiều cao của bể nước hình trụ là: $h = \dfrac{V}{\pi \cdot r^2} = \dfrac{64\pi}{\pi \cdot r^2} = \dfrac{64}{r^2}(m)$.

Bể đựng nước hình trụ bằng tôn có nắp nên diện tích tôn cần dùng là diện tích toàn phần của hình trụ.

Ta có: $S_{tp} = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 = 2\pi\left(\dfrac{64}{r} + r^2\right)(m^2)$.

Hàm số $f(r) = \dfrac{64}{r} + r^2$ có $f'(r) = -\dfrac{64}{r^2} + 2r$ nên $f'(r) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2r^3 - 64}{r^2} = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{32}$.



Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(r)$:

r	0		$\sqrt[3]{32}$		$+\infty$
$f'(r)$		$-$	0	$+$	
$f(r)$	$+\infty$	$\searrow$	$3\sqrt[3]{1024}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $f(r)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $r = \sqrt[3]{32}$ nên bán kính đáy r của hình trụ sao cho hình trụ được làm ra tốn ít nguyên liệu nhất là $r = \sqrt[3]{32}(m)$.

Cách 2:

Chiều cao của bể nước hình trụ là: $h = \dfrac{V}{\pi \cdot r^2} = \dfrac{64\pi}{\pi \cdot r^2} = \dfrac{64}{r^2}(m)$.

Bể đựng nước hình trụ bằng tôn có nắp nên diện tích tôn cần dùng là diện tích toàn phần của hình trụ.

Ta có: $S_{tp} = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 = 2\pi\left(\dfrac{64}{r} + r^2\right)(m^2)$.

Do đó: $S_{tp} = 2\pi\left(\dfrac{32}{r} + \dfrac{32}{r} + r^2\right) \geqslant 2\pi \cdot 3\sqrt[3]{\dfrac{32}{r} \cdot \dfrac{32}{r} \cdot r^2} \Rightarrow S_{tp} \geqslant 6\pi\sqrt[3]{1024}$.

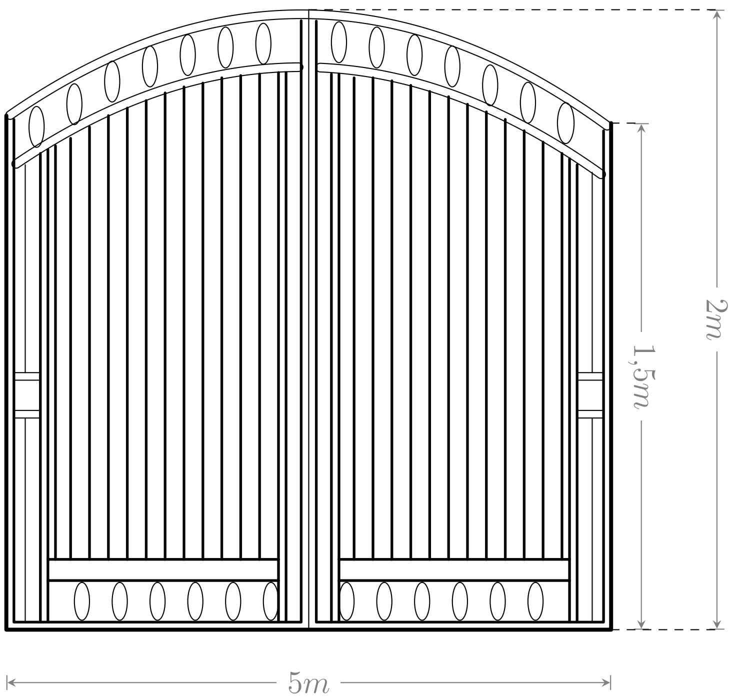
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{32}{r} = r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{32}$.

Vậy bán kính đáy r của hình trụ sao cho hình trụ được làm ra tốn ít nguyên liệu nhất là $r = \sqrt[3]{32}(m)$.

Chọn đáp án C □

Câu 47.

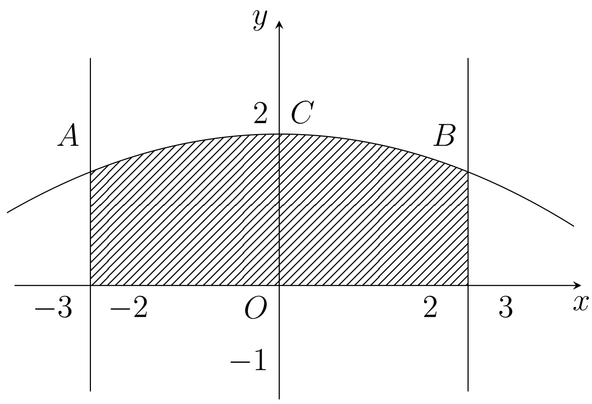
Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá $1m^2$ của rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng nghìn).



(A) 6.620.000 đồng.
(B) 6.320.000 đồng.
(C) 6.520.000 đồng.
(D) 6.417.000 đồng.

Lời giải.

Ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Trong đó $A(-2,5;1,5)$, $B(2,5;1,5)$, $C(0;2)$.

Giả sử đường cong phía trên là một Parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$, với $a; b; c \in \mathbb{R}$.

Do Parabol đi qua các điểm $A(-2,5;1,5)$, $B(2,5;1,5)$, $C(0;2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a(-2,5)^2 + b(-2,5) + c = 1,5 \\ a(2,5)^2 + b(2,5) + c = 1,5 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{2}{25} \\ b = 0 \\ c = 2. \end{cases}$$

Khi đó phương trình Parabol là $y = -\dfrac{2}{25}x^2 + 2$.

Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -\dfrac{2}{25}x^2 + 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2,5$; $x = 2,5$.

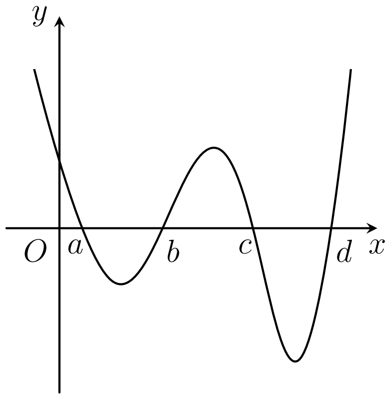
Ta có $S = \displaystyle\int_{-2,5}^{2,5} \left(-\frac{2}{25}x^2 + 2\right) \mathrm{d}x = \left(-\frac{2}{25}\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_{-2,5}^{2,5} = \frac{55}{6}$.

Vậy ông An phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là
$S \times 700000 = \dfrac{55}{6} \times 700000 \approx 6.417.000$ (đồng).

Chọn đáp án (D) □

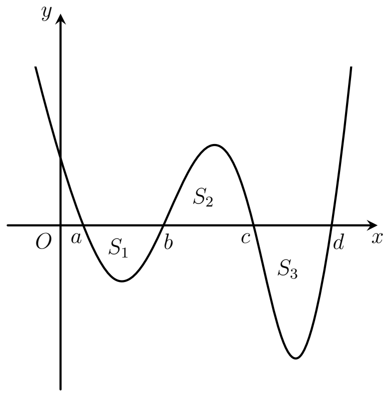
Câu 48.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm a, b, c, d (hình sau). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:



A $f(c) > f(a) > f(b) > f(d)$.
B $f(c) > f(a) > f(d) > f(b)$.
C $f(a) > f(b) > f(c) > f(d)$.
D $f(a) > f(c) > f(d) > f(b)$.

Lời giải.



Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f'(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = a, x = b$; $x = b, x = c$; $x = c, x = d$ (như hình vẽ).

Ta có:

$S_1 < S_2 \Rightarrow \int\limits_a^b [-f'(x)]\,\mathrm{d}x < \int\limits_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow [-f(x)]\Big|_a^b < f(x)\Big|_b^c$

$\Leftrightarrow -f(b) + f(a) < f(c) - f(b) \Leftrightarrow f(a) < f(c)$ (1).

$S_2 < S_3 \Rightarrow \int\limits_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x < \int\limits_c^d [-f'(x)]\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)\Big|_b^c < [-f(x)]\Big|_c^d$

$\Leftrightarrow f(c) - f(b) < -f(d) + f(c) \Leftrightarrow f(b) > f(d)$ (2).

Từ (1) suy ra khẳng định $f(a) > f(b) > f(c) > f(d)$ và $f(a) > f(c) > f(d) > f(b)$ là sai.

Từ (2) suy ra khẳng định $f(c) > f(a) > f(d) > f(b)$ sai. Vậy khẳng định $f(c) > f(a) > f(b) > f(d)$ đúng.

Nhận xét:

- Có thể lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ hoặc sử dụng $S_1 > 0$ để suy ra $f(a) > f(b)$.
- Đề xuất bổ sung phương án nhiễu $f(b) > f(d) > f(c) > f(a)$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Đặt $g(x) = f(x^2) + \mathrm{e}^{x^3-3x^2+1}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A Hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.
B Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
C Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
D $g(-3) - g(-2) < 0$.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2) + (3x^2 - 6x) \cdot \mathrm{e}^{x^3-3x^2+1} = x\left[2f'(x^2) + (3x - 6)\mathrm{e}^{x^3-3x^2+1}\right]$

$f'(x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 \in \{1; 4\} \Leftrightarrow x \in \{\pm 1; \pm 2\}$

$(3x - 6)\mathrm{e}^{x^3-3x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x^2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	
$(3x-6)\mathrm{e}^{x^3-3x^2+1}$		$-$	|	$-$	|	$-$	$-$|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	|	kxđ	|	$+$	0	$-$	0	kxđ	0	kxđ	

(kxđ: không xác định)

Dựa vào bảng xét dấu, ta có khẳng định đúng là Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-10; -5; 8)$, $B(2; 1; -1)$, $C(2; 3; 0)$ và mặt phẳng $(P)\colon x + 2y - 2z - 9 = 0$. Xét M là điểm thay đổi trên (P) sao cho $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$.

(A) 54. **(B) 282.** (C) 256. (D) 328.

Lời giải.

Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA} = (-10 - x; -5 - y; 8 - z)$, $\overrightarrow{IB} = (2 - x; 1 - y; -1 - z)$, $\overrightarrow{IC} = (2 - x; 3 - y; -z)$.

Khi đó, $\begin{cases} (-10 - x) + 2(2 - x) + 3(2 - x) = 0 \\ (-5 - y) + 2(1 - y) + 3(3 - y) = 0 \\ (8 - z) + 2(-1 - z) + 3(-z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow I(0; 1; 1).$

Với điểm M thay đổi trên (P), ta có

$MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + 3\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2$

$= 6MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}\right)$

$= 6MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2$ (Vì $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$).

Ta lại có $IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 = 185 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 9 = 228$.

Do đó, $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ đạt giá trị nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Khi đó, $MI = \mathrm{d}(I, (P)) = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ bằng

$6MI^2 + 228 = 6 \cdot 9 + 228 = 282$.

Giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt được khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Lưu ý thêm cách tìm điểm M như sau:

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với (P). Phương trình của Δ: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - 2t. \end{cases}$

Ta có $M = \Delta \cap (P)$. Xét phương trình

$t + 2(1 + 2t) - 2(1 - 2t) - 9 = 0 \Leftrightarrow 9t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(1; 3; -1)$.

Chọn đáp án B □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. B	3. D	4. C	5. A	6. A	7. D	8. D	9. B	10. A
11. C	12. B	13. C	14. C	15. B	16. B	17. D	18. B	19. B	20. A
21. B	22. A	23. C	24. C	25. D	26. D	27. A	28. C	29. C	30. D
31. A	32. A	33. C	34. C	35. B	36. B	37. C	38. C	39. A	40. A
41. A	42. C	43. B	44. B	45. D	46. C	47. D	48. A	49. B	50. B

21 ĐỀ THI THỬ SỐ 21-MAX8

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + 2 - \dfrac{4}{x+2}$ trên đoạn $[-1; 2]$.

(A) $\max\limits_{[-1;2]} y = 0$. (B) $\max\limits_{[-1;2]} y = 2$. (C) $\max\limits_{[-1;2]} y = 3$. (D) $\max\limits_{[-1;2]} y = -3$.

Lời giải.

Hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 2]$. Vì $y' = 1 + \dfrac{4}{(x+2)^2}$ nên $y' > 0$, $\forall x \in [-1; 2]$.

Mà $y(-1) = -3$ và $y(2) = 3$ nên $\max\limits_{[-1;2]} y = 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 4; 1)$, $B(-2; 2; -3)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

(A) $x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$. (B) $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$.
(C) $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 3$. (D) $x^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 3$.

Lời giải.

Gọi I là tâm của mặt cầu đường kính AB. Khi đó I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Rightarrow I(0; 3; -1)$.

Ta có: $AB = 2R = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-4)^2 + (-3-1)^2} = 6 \Rightarrow R = 3$.

Khi đó mặt cầu đường kính AB có phương trình là: $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Tính $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x}}{x}$.

(A) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. (B) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. (C) $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. (D) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}\right)}{x\left(\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x\left(\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2}{\left(\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Điểm cực tiểu của hàm số $y = \dfrac{1}{2}x^4 - 2x^2 - 3$ là

(A) $x = 2$. (B) $x = 0$. (C) $x = \pm\sqrt{2}$. (D) $x = \pm 2$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 2x^3 - 4x = 2x(x^2 - 2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy điểm cực tiểu của hàm số là: $x = -\sqrt{2}$; $x = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + z - 3 = 0$. Điểm nào trong các phương án dưới đây thuộc mặt phẳng (P)

A $M(2;1;0)$. **B** $M(2;-1;0)$. **C** $M(-1;-1;6)$. **D** $M(-1;-1;2)$.

Lời giải.

Ta có: $2 \cdot 2 - 1 + 0 - 3 = 0 \Rightarrow M(2;1;0) \in (P)\colon 2x - y + z - 3 = 0$.

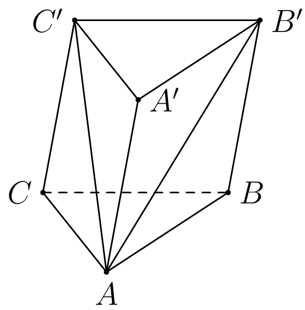
Chọn đáp án A □

Câu 6. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích $V = 3$. Thể tích khối chóp $A'.AB'C'$ là

A 1. **B** 3. **C** $\dfrac{1}{3}$. **D** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $V_{A'.AB'C'} = V_{A.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}V = \dfrac{1}{3} \cdot 3 = 1$.



Chọn đáp án A □

Câu 7. Cho $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\displaystyle\int_{-2}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t = -4$. Tính $\displaystyle\int_{2}^{4} f(y)\mathrm{d}y$.

A $I = 5$. **B** $I = -3$. **C** $I = 3$. **D** $I = -5$.

Lời giải.

Ta có: $\displaystyle\int_{-2}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{2}^{4} f(y)\mathrm{d}y = \int_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Khi đó: $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle\Rightarrow \int_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = -4 - 1 = -5$.

Vậy $\displaystyle\int_{2}^{4} f(y)\mathrm{d}y = -5$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Tính $\int (x - \sin 2x)\,dx$.

A $\frac{x^2}{2} + \sin x + C$. B $\frac{x^2}{2} + \cos 2x + C$. C $x^2 + \frac{\cos 2x}{2} + C$. D $\frac{x^2}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + C$.

Lời giải.

Ta có $\int (x - \sin 2x)\,dx = \int x\,dx - \int \sin 2x\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Cho các số dương a, b, c, d. Biểu thức $S = \ln \frac{a}{b} + \ln \frac{b}{c} + \ln \frac{c}{d} + \ln \frac{d}{a}$ bằng

A 1. B 0.

C $\ln\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}\right)$. D $\ln(abcd)$.

Lời giải.

Cách 1:

Ta có $S = \ln \frac{a}{b} + \ln \frac{b}{c} + \ln \frac{c}{d} + \ln \frac{d}{a} = \ln\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a}\right) = \ln 1 = 0$.

Cách 2:

Ta có: $S = \ln \frac{a}{b} + \ln \frac{b}{c} + \ln \frac{c}{d} + \ln \frac{d}{a} = \ln a - \ln b + \ln b - \ln c + \ln c - \ln d + \ln d - \ln a = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Đạo hàm của hàm số $y = (5x^2 - x + 2)^{\frac{1}{3}}$ là

A $y' = \frac{10x - 1}{3\sqrt[3]{(5x^2 - x + 2)^2}}$. B $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(5x^2 - x + 2)^2}}$.

C $y' = \frac{10x - 1}{3\sqrt[3]{5x^2 - x + 2}}$. D $y' = \frac{10x - 1}{\sqrt[3]{(5x^2 - x + 2)^2}}$.

Lời giải.

Sử dụng công thức tính đạo hàm $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha - 1} \cdot u'$.

Ta có $y' = \frac{1}{3} \cdot (5x^2 - x + 2)^{1 - \frac{1}{3}} \cdot (10x - 1) = \frac{10x - 1}{3\sqrt[3]{(5x^2 - x + 2)^2}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Cho số phức z thỏa mãn $z(1 + 2i) = 4 - 3i$. Tìm số phức liên hợp $\overline{z}$ của z.

A $\overline{z} = \frac{-2}{5} - \frac{11}{5}i$. B $\overline{z} = \frac{2}{5} - \frac{11}{5}i$. C $\overline{z} = \frac{-2}{5} + \frac{11}{5}i$. D $\overline{z} = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i$.

Lời giải.

Vì $z(1 + 2i) = 4 - 3i$ nên $z = \frac{4 - 3i}{1 + 2i} = \frac{(4 - 3i)(1 - 2i)}{1^2 + 2^2} = \frac{-2 - 11i}{5} = \frac{-2}{5} - \frac{11}{5}i$.

Vậy nên $\overline{z} = \frac{-2}{5} + \frac{11}{5}i$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Cho số phức $z = 3 - 4i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.

A Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$. B Phần thực là 3 và phần ảo là -4.

C Phần thực là -4 và phần ảo là 3. D Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.

Lời giải.

Số phức $z = 3 - 4i$ có phần thực là 3 và phần ảo là -4.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

(A) Hàm số không có giá trị cực đại.

(B) Hàm số có đúng 1 điểm cực trị.

(C) Hàm số có 2 điểm cực trị.

(D) Hàm số không có giá trị cực tiểu.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có 2 điểm cực trị là $x = 0$ và $x = 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Đường thẳng nào sau đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-1}{2x-1}$?

(A) $y = 1$. (B) $y = \dfrac{1}{3}$. (C) $y = \dfrac{3}{2}$. (D) $y = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3 - \dfrac{1}{x}}{2 - \dfrac{1}{x}} = \dfrac{3}{2}$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = \dfrac{3}{2}$ làm tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x - 3yi) + (1 - 3i) = -1 + 6i$ với i là đơn vị ảo.

(A) $x = 1$; $y = -3$. (B) $x = -1$; $y = -3$. (C) $x = -1$; $y = -1$. (D) $x = 1$; $y = -1$.

Lời giải.

Ta có: $(2x - 3yi) + (1 - 3i) = -1 + 6i \Leftrightarrow 2x + 1 - (3y + 3)i = -1 + 6i$.

Suy ra $\begin{cases} 2x + 1 = -1 \\ -3y - 3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3. \end{cases}$

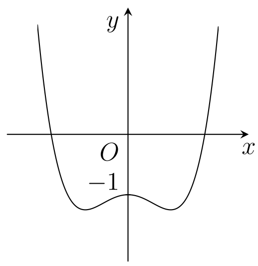
Chọn đáp án (B) □

Câu 16.

Đường cong bên hình là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây?

(A) $y = x^4 + x^2 - 1$. (B) $y = x^4 - x^2 - 1$.

(C) $y = -x^4 + x^2 - 1$. (D) $y = x^2 + 2x - 1$.



Lời giải.

Hình vẽ trên là đồ thị của hàm số bậc 4 trùng phương với $a > 0$. Do đó loại phương án $y = -x^4 + x^2 - 1$ và $y = x^2 + 2x - 1$.

Xét hàm số trong phương án $y = x^4 - x^2 - 1$. Ta có $a = 1; b = -1 \Rightarrow a \cdot b < 0$ nên hàm số có 3 cực trị. Do đó đáp án là hàm số $y = x^4 - x^2 - 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ nghịch biến khi x thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0; +\infty)$.
B. $(-\infty; 2)$.
C. $(0; 2)$.
D. $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trong khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(3; -2; 3)$ và $B(-1; 2; 5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

A. $I(-2; 2; 1)$.
B. $I(1; 0; 4)$.
C. $I(2; 0; 8)$.
D. $I(2; -2; -1)$.

Lời giải.

Cho hai điểm $A(3; -2; 3)$ và $B(-1; 2; 5)$.

Trung điểm I có tọa độ: $\begin{cases} \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{3 + (-1)}{2} = 1 \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{(-2) + 2}{2} = 0 \\ \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{3 + 5}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow I(1; 0; 4)$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Diện tích toàn phần khối lập phương là $96m^2$. Thể tích khối lập phương là

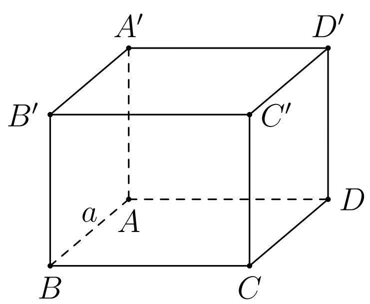
A. $24\sqrt{3}$ cm^3.
B. 64 cm^3.
C. 24 cm^3.
D. $48\sqrt{5}$ cm^3.

Lời giải.

Gọi a là độ dài cạnh của khối lập phương.

Ta có: $S_{tp} = 6 \cdot a^2 = 96 \Rightarrow a = 4(cm)$.

Thể tích khối lập phương: $V = a^3 = 4^3 = 64$ cm^3.



Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và thể tích của khối chóp đó bằng $\dfrac{a^3}{4}$. Tính cạnh bên SA.

A $a\sqrt{3}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C** $2a\sqrt{3}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

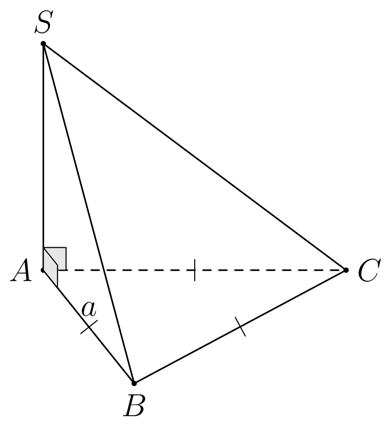
Lời giải.

Ta có ABC là tam giác đều cạnh $a \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy

$\Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\triangle ABC}$.

$$\Rightarrow SA = \frac{3 \cdot V_{S.ABC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = a\sqrt{3}.$$



Chọn đáp án A □

Câu 21. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x$.

A $I = \dfrac{\ln 3 - 1}{2}$. **B** $I = \dfrac{\ln 3}{2}$. **C** $I = \dfrac{\ln 3}{3}$. **D** $I = \ln 3 + 1$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x-1|\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) = \frac{\ln 3}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^3 - x$; $y = 2x$ và các đường $x = 1$; $x = -1$ được xác định bởi công thức

A $S = \displaystyle\int_{-1}^0 (x^3 - 3x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (3x - x^3)\,\mathrm{d}x$. **B** $S = \displaystyle\int_{-1}^0 (3x - x^3)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (x^3 - 3x)\,\mathrm{d}x$.

C $S = \left|\displaystyle\int_{-1}^1 (3x - x^3)\,\mathrm{d}x\right|$. **D** $S = \displaystyle\int_{-1}^1 (3x - x^3)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^3 - x$; $y = 2x$ và các đường $x = 1$; $x = -1$ là $S = \displaystyle\int_{-1}^1 |(x^3 - x) - (2x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 |x^3 - 3x|\,\mathrm{d}x$.

Bảng xét dấu $x^3 - 3x$

x	-1		0		1
$x^3 - 3x$		$+$	0	$-$	

Do đó dựa vào bảng ta có: $S = \displaystyle\int_{-1}^0 (x^3 - 3x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (3x - x^3)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Biết rằng tích phân $\int\limits_0^1 (2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = a + b\cdot e\,(a,b\in\mathbb{Z})$, tích $a\cdot b$ bằng

(A) -15. (B) -1. (C) 1. (D) 20.

Lời giải.

Điều kiện: a, $b\in\mathbb{Z}$.

Đặt $\begin{cases} u = 2x+1 \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x \end{cases}$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 (2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (2x+1)\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - 2\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (2x-1)\mathrm{e}^x\Big|_0^1 = 1+\mathrm{e} = a + b\cdot e.$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$. Vậy tích $a\cdot b = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) < 1$ là

(A) $(0;1)$. (B) $\left(\frac{1}{8};3\right)$. (C) $\left(\frac{1}{8};1\right)$. (D) $\left(\frac{1}{8};+\infty\right)$.

Lời giải.

Ta có $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) < 1 \Leftrightarrow 0 < \log_{\frac{1}{2}} x < 3^1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^0 > x > \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 1 > x > \frac{1}{8}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(\frac{1}{8};1\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = 2a$. Mặt bên SBC là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

(A) $V = \frac{2a^3}{3}$. (B) $V = a^3$. (C) $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. (D) $V = \frac{a^3}{3}$.

Lời giải.

$\triangle SBC$ vuông cân tại S và $\triangle ABC$ vuông cân tại A.

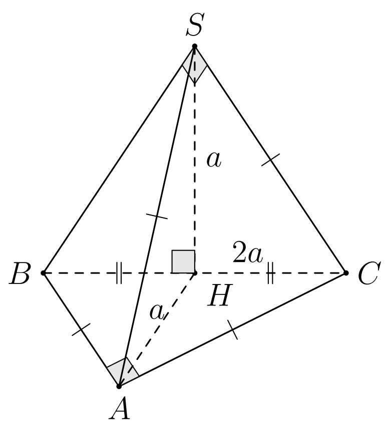
Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $AH\perp BC$ và $SH\perp BC$.

Mặt khác $(SBC)\perp(ABC)$ nên $SH\perp(ABC)$.

$AH = SH = \frac{1}{2}BC = a$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$V = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot SH = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AH\cdot SH = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot a\cdot a = \frac{a^3}{3}$.

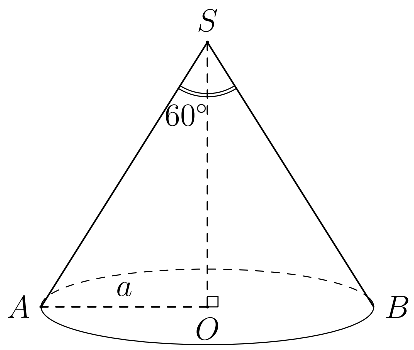


Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Cho một hình nón có bán kính đáy bằng a và góc ở đỉnh bằng 60°. Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.

Ⓐ $S_{xq} = 4\pi a^2$. Ⓑ $S_{xq} = \dfrac{2\sqrt{3}\pi a^2}{3}$. Ⓒ $S_{xq} = \dfrac{4\sqrt{3}\pi a^2}{3}$. **D** $S_{xq} = 2\pi a^2$.

Lời giải.



Giả sử hình nón có đỉnh là S, O là tâm của đường tròn đáy và AB là một đường kính của đáy.

$r = OA = a$, $\widehat{ASB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ASO} = 30^\circ$.

Độ dài đường sinh là $l = SA = \dfrac{OA}{\sin 30^\circ} = 2a$.

Vậy diện tích xung quanh của hình nón là

$S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot a \cdot 2a = 2\pi a^2$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 27. Giải phương trình $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$.

A $x = 1$; $x = 2$. Ⓑ $x = 1$. Ⓒ $x = 2$. Ⓓ $x = 0$; $x = 2$.

Lời giải.

Cách 1:

Ta có phương trình: $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

Đặt $t = 2^x$ (điều kiện: $t > 0$). Phương trình trở thành: $t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 4 \end{array}\right.$ (nhận).

Với $t = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Với $t = 4 \Rightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$; $x = 2$.

Cách 2:

Thế số bấm máy tính. Giá trị nào của x thỏa thì chọn

Cách 3:

Đối với máy tính CASIO FX-570VN PLUS và các dòng máy tính tương đương

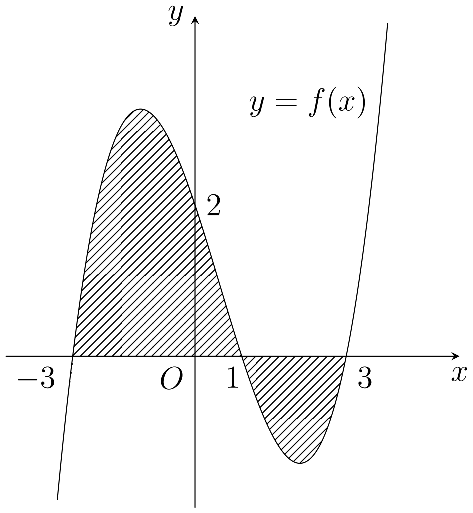
Sử dụng chức năng MODE 7 của máy tính Casio nhập hàm số với thiết lập Star 0 End 2 Step 1.

Quan sát bảng giá trị $F(X)$ ta chọn các giá trị mà $F(X) = 0$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 28.

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.
Diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục Ox (phần gạch sọc) được tính bởi công thức



A $S = \left|\int\limits_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

B $S = \int\limits_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C $S = \int\limits_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

D $S = \int\limits_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta thấy $f(x) \geqslant 0$ với $x \in [-3; 1]$, $f(x) \leqslant 0$ với $x \in [1; 3]$.

Do đó $S = \int\limits_{-3}^{3} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-3}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{3} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 3; -2)$ và song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 3z + 4 = 0$ là

A $2x + y + 3z + 7 = 0$. **B** $2x + y - 3z + 7 = 0$.

C $2x - y + 3z + 7 = 0$. **D** $2x - y + 3z - 7 = 0$.

Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm. Vì $(\alpha) \,/\!/\, (P) \Rightarrow \vec{n}_{(\alpha)} = \vec{n}_{(P)} = (2; -1; 3)$

Ta có: (α) đi qua $A(1; 3; -2)$ và có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(\alpha)} = (2; -1; 3)$.

Do đó phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) là:

$2(x - 1) - 1(y - 3) + 3(z + 2) = 0$ hay $2x - y + 3z + 7 = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Cho biết $\int\limits_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 15$. Tính giá trị của $P = \int\limits_{0}^{2} [f(5 - 3x) + 7]\,\mathrm{d}x$.

A $P = 15$. **B** $P = 37$. **C** $P = 27$. **D** $P = 19$.

Lời giải.

Đặt $t = 5 - 3x \Rightarrow \mathrm{d}t = -3\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x = 0$ thì $t = 5$; $x = 2$ thì $t = -1$.

Ta có: $P = \int\limits_0^2 [f(5-3x)+7]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(5-3x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^2 7\,\mathrm{d}x$

$= \int\limits_5^{-1} f(t)\dfrac{\mathrm{d}t}{-3} + 7x\Big|_0^2 = \dfrac{1}{3}\int\limits_{-1}^{5} f(t)\,\mathrm{d}t + 14$

$= \dfrac{1}{3}\cdot 15 + 14 = 19.$

Chọn đáp án D □

Câu 31. Giá trị cực đại của hàm số $y = x + \sin 2x$ trên $(0;\pi)$ là

A $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. B $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. C $\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. D $\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 1 + 2\cos 2x$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi.$

Xét trên $(0;\pi)$ ta có $x = \dfrac{\pi}{3}$ và $x = \dfrac{2\pi}{3}$.

Ta có $y'' = -4\sin 2x$.

$y''\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3} < 0$ nên $x = \dfrac{\pi}{3}$ là điểm cực đại.

$y''\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} > 0$ nên $x = \dfrac{2\pi}{3}$ là điểm cực tiểu.

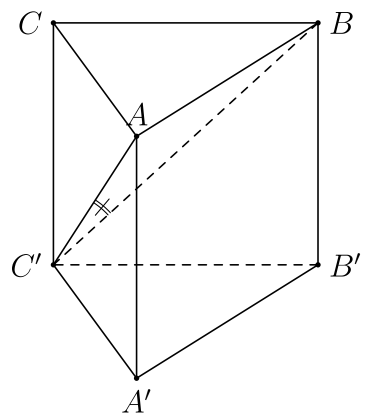
Vậy giá trị cực đại là $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Đường thẳng BC' tạo với $(ACC'A')$ một góc 30°. Tính thể tích V của khối trụ $ABC.A'B'C'$.

A $V = a^3\sqrt{6}$. B $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C $V = 3a^3$. D $V = a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.



Tam giác ABC vuông tại A nên $BA \perp AC$. $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$ nên $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$.

Diện tích tam giác ABC bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng tam giác nên $BA \perp AA'$.

Suy ra, $BA \perp (ACC'A)$. Do đó, hình chiếu của đường thẳng BC' lên mặt phẳng $(ACC'A)$ là đường thẳng AC'. Nên góc hợp bởi đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ACC'A)$ là góc $\widehat{AC'B}$.

Vì $BA \perp (ACC'A)$ nên tam giác ABC' vuông tại A.

Suy ra $AC' = AB \cdot \cot \widehat{BC'A} = 3a$.

Xét tam giác $AA'C'$ vuông tại A' nên $AA' = \sqrt{AC'^2 - A'C'^2} = 2\sqrt{2}a$.

Vậy thể tích khối trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = a^3\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Ông X muốn gửi số tiền M vào ngân hàng và dùng số tiền thu được (cả lãi lẫn gốc) để trao 10 suất học bổng hàng tháng cho học sinh nghèo, mỗi suất 1 triệu đồng. Biết lãi ngân hàng là 1% tháng. Ông X bắt đầu trao học bổng sau một tháng gửi tiền. Để đủ tiền trao học bổng cho học sinh trong 10 tháng, ông X cần gửi vào ngân hàng số tiền M ít nhất là

(A) 92100000 đồng. (B) 96400000 đồng. (C) 94800000 đồng. (D) 100000000 đồng.

Lời giải.

Mỗi tháng ông X rút số tiền là $T = 10000000$. Lãi suất hàng tháng là $r = 0,01$.

Sau tháng thứ nhất, số tiền ông X còn lại trong ngân hàng là: $M(1 + r) - T$.

Sau tháng thứ hai, số tiền ông X còn lại trong ngân hàng là:

$[M(1 + r) - T](1 + r) - T = M(1 + r)^2 - T[1 + (1 + r)]$.

Tương tự, sau tháng thứ n, số tiền ông X còn lại trong ngân hàng là:

$M(1 + r)^n - T\left[1 + (1 + r) + (1 + r)^2 + \cdots (1 + r)^{n-1}\right] = M(1 + r)^n - T\dfrac{(1 + r)^n - 1}{r}$.

Để đủ tiền trao học bổng cho học sinh trong 10 tháng thì: $M(1 + r)^{10} - T\dfrac{(1 + r)^{10} - 1}{r} \geqslant 0$

$M \geqslant T\dfrac{(1 + r)^{10} - 1}{r(1 + r)^{10}} \approx 94800000$.

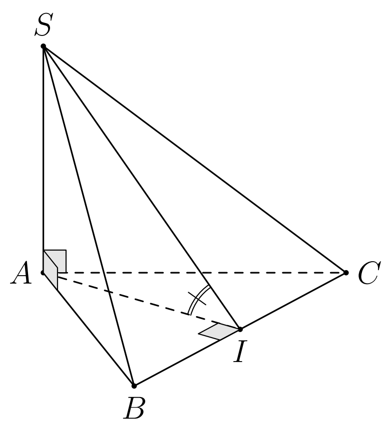
Vậy số tiền ông X cần gửi tối thiểu là 94800000 đồng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Cho khối chóp $S.ABC$ có mặt đáy ABC là tam giác cân tại A với $BC = 2a$, góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Biết cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\dfrac{a^3}{9}$. Tính góc hợp bởi mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy.

(A) 30°. (B) 90°. (C) 45°. (D) 60°.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm BC, xét tam giác AIB vuông tại I ta có:

$\tan 60^\circ = \sqrt{3} = \dfrac{BI}{AI} \Leftrightarrow AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ (Do góc $BAI = 60^\circ$, AI là phân giác góc 120°).

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AI \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \cdot 2a = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

Do đó $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^3}{9} \Leftrightarrow SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Mà $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp SI$.

Vậy góc hợp bởi mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy là góc $\widehat{SIA}$.

Suy ra tam giác SIA vuông cân tại A nên $\widehat{SIA} = 45^\circ$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Giả sử $\displaystyle\int e^{2x}(2x^3 + 5x^2 - 2x + 4)\,dx = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{2x} + C$.

Khi đó $a + b + c + d$ bằng

(A) -2. (B) 3. (C) 5. (D) 2.

Lời giải.

Ta có: $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \Rightarrow F'(x) = f(x) = \mathrm{e}^{2x}(2x^3 + 5x^2 - 2x + 4)$

Vậy $F'(x) = (3ax^2 + 2bx + c)\mathrm{e}^{2x} + 2(ax^3 + bx^2 + cx + d)\mathrm{e}^{2x}$

$= (2ax^3 + (2b + 3a)x^2 + (2c + 2b)x + 2d + c)\mathrm{e}^{2x}$

Vậy đồng nhất ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2a = 2 \\ 2b + 3a = 5 \\ 2c + 2b = -2 \\ 2d + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -2 \\ d = 3. \end{cases}$

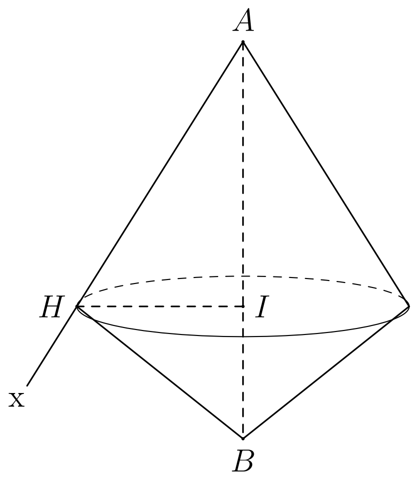
Do đó $a + b + c + d = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng $2a$, vẽ tia Ax về phía điểm B sao cho điểm B luôn cách tia Ax một đoạn bằng a. Gọi H là hình chiếu của B lên tia Ax, khi tam giác AHB quay quanh trục AB thì đường gấp khúc AHB vẽ thành mặt tròn xoay có diện tích xung quanh bằng

A $\dfrac{3\sqrt{2}\pi a^2}{2}$. **B** $\dfrac{\left(3+\sqrt{3}\right)\pi a^2}{2}$. **C** $\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)\pi a^2}{2}$. **D** $\dfrac{\left(2+\sqrt{2}\right)\pi a^2}{2}$.

Lời giải.



Xét tam giác AHB vuông tại H. Ta có $AH = \sqrt{AB^2 - HB^2} = a\sqrt{3}$

Xét tam giác AHB vuông tại H, $HI \perp AB$ tại I ta có $HI = \dfrac{AH \cdot HB}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3} \cdot a}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Khi tam giác AHB quay quanh trục AB thì đường gấp khúc AHB vẽ thành mặt tròn xoay (có diện tích xung quanh là S) là hợp của hai mặt xung quanh của hình nón (N1) và (N2). Trong đó:

(N1) là hình nón có được do quay tam giác AHI quanh trục AI có diện tích xung quanh là $S_1 = \pi \cdot HI \cdot AH = \pi \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{3\pi a^2}{2}$

(N2) là hình nón có được do quay tam giác BHI quanh trục BI có diện tích xung quanh là $S_2 = \pi \cdot HI \cdot BH = \pi \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^2}{2}$

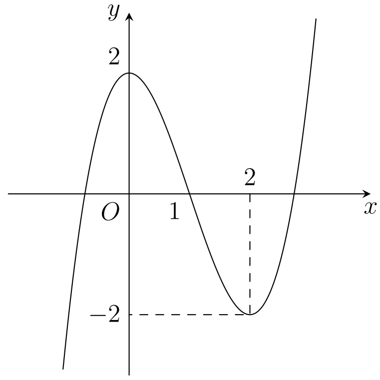
$\Rightarrow S = S_1 + S_2 = \dfrac{3\pi a^2}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\pi a^2}{2} = \dfrac{\left(3+\sqrt{3}\right)\pi a^2}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 37.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $S = a + b$.

A $S = -1$. **B** $S = 1$. **C** $S = -2$. **D** $S = 0$.



Lời giải.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đi qua $(0; 2)$, $(2; -2)$. Hàm số đạt cực trị tại $x = 0$, $x = 2$

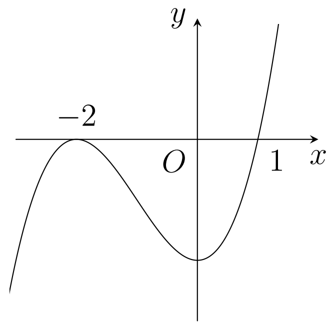
Nên ta có: $\begin{cases} d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = -2 \\ c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ c = 0 \\ 8a + 4b = -4 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ c = 0 \\ b = -3 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = -2.$

Chọn đáp án C □

Câu 38.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x^2 - 4x + 1)$ có mấy điểm cực trị?

A 5. **B** 4. **C** 3. **D** 2.



Lời giải.

Ta có $y = f(x^2 - 4x + 1) \Rightarrow y' = (2x - 4) \cdot f'(x^2 - 4x + 1)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 4 = 0 \\ f'(x^2 - 4x + 1) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2 - 4x + 1 = -2 \\ x^2 - 4x + 1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1; x = 3 \\ x = 0; x = 4. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$		0		1		2		3		4		$+\infty$
$2x - 4$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(x^2 - 4x + 1)$		$+$	0	$-$	0	$-$	|	$-$	0	$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu, ta thấy hàm số $y = f(x^2 - 4x + 1)$ có 3 cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{m\log_3^2 x - 4\log_3 x + m + 3}$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$

A $m \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.
B $m \in (1; +\infty)$.
C $m \in (-4; 1)$.
D $m \in (-\infty; -4)$.

Lời giải.

Cách 1:

Điều kiện: $x > 0$.

Hàm số xác định khi:

$m\log_3^2 x - 4\log_3 x + m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m\left(\log_3^2 x + 1\right) \neq 4\log_3 x - 3 \Leftrightarrow m \neq \dfrac{4\log_3 x - 3}{\log_3^2 x + 1}, \forall x \in (0; +\infty)$.

Để hàm số xác định trên $(0; +\infty)$ thì phương trình $m = \dfrac{4\log_3 x - 3}{\log_3^2 x + 1}$ vô nghiệm $\forall x \in (0; +\infty)$

Xét hàm số $y = \dfrac{4\log_3 x - 3}{\log_3^2 x + 1}$.

Đặt $\log_3 x = t$ khi đó ta có $y = \dfrac{4t - 3}{t^2 + 1}$, $y' = \dfrac{-4t^2 + 6t + 4}{(t^2 + 1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-1}{2} \\ t = 2. \end{array}\right.$

Ta có BBT:

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Để hàm số xác định trên $(0; +\infty)$ thì $m \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

Cách 2:

Đề hàm số xác định trên khoảng $(0; +\infty)$ thì phương trình $m \cdot \log_3^2 x - 4\log_3 x + m + 3 = 0$ vô nghiệm.

TH1: $m = 0$ thì PT trở thành $-4\log_3 x + 3 = 0 \Leftrightarrow \log_3 x = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow x = 3^{\frac{3}{4}}$.

Vậy $m = 0$ không thỏa mãn.

TH2: $m \neq 0$ thì để PT vô nghiệm $\Delta = (-4)^2 - 4m(m+3) < 0 \Leftrightarrow -4m^2 - 12m + 16 < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -4 \\ m > 1. \end{array}\right.$

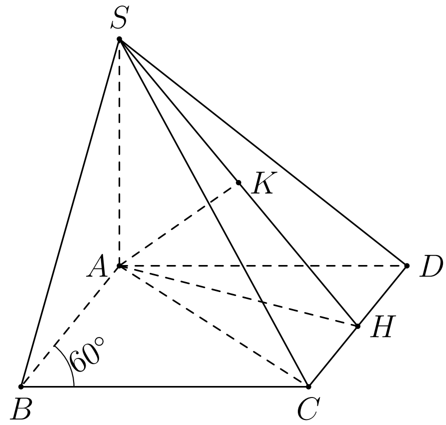
Để hàm số xác định trên $(0; +\infty)$ thì $m \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SC = 2a$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) là

A $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.
B $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
C $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.
D $\dfrac{5a\sqrt{30}}{3}$.

Lời giải.



Cách 1: Sử dụng kiến thức ở lớp 11.

$ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$, $\triangle ACD$ là các tam giác đều cạnh a.

Xét $\triangle SAC$ vuông tại A có:

$SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Vì $AB \parallel CD$ nên $AB \parallel (SCD)$.

Do đó $\mathrm{d}(B, (SCD)) = \mathrm{d}(A, (SCD))$.

Kẻ $AH \perp CD\,(H \in CD)$.

Suy ra H là trung điểm của cạnh CD, $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Kẻ $AK \perp SH\,(K \in SH)\,(1)$

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AH \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAH) \Rightarrow CD \perp AK (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $AK \perp (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(A, (SCD)) = AK$.

Xét $\triangle SAH$ vuông ở A: $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AH^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{5}{3a^2} \Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Vậy $\mathrm{d}(B, (SCD)) = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Cách 2: Tính khoảng cách thông qua tính thể tích.

$ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$, $\triangle ACD$ là các tam giác đều cạnh a.

Xét $\triangle SAC$ vuông tại A có: $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Vì $AB \parallel DC$ nên $AB \parallel (SDC)$. Do đó $\mathrm{d}(B, (SCD)) = \mathrm{d}(A, (SCD)) = \dfrac{3V_{SACD}}{S_{\triangle SCD}}$.

$V_{SACD} = \dfrac{1}{3} SA \cdot S_{\triangle ACD} = \dfrac{1}{3} a\sqrt{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{4}$.

Xét $\triangle SAC$ và $\triangle SAD$ có: $AD = AC = a$, SA chung, $\widehat{SAC} = \widehat{SAD} = 90^\circ$.

Do đó $\triangle SAC = \triangle SAD \Rightarrow SC = SD \Rightarrow \triangle SCD$ cân tại S.

Gọi H là trung điểm $CD \Rightarrow SH \perp CD$.

Xét $\triangle SHC$ vuông ở H: $SH = \sqrt{SC^2 - CH^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

$S_{\triangle SCD} = \dfrac{1}{2} SH \cdot CD = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{15}}{2} \cdot a = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{4}$.

$\mathrm{d}(A, (SCD)) = \dfrac{3 \cdot \dfrac{a^3}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{15}}{4}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Vậy $\mathrm{d}(B, (SCD)) = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Có bao nhiêu hạng tử là số nguyên trong khai triển $\left(\sqrt{3} + \sqrt[4]{5}\right)^{124}$?

$\boxed{\text{A}}$ 32. (B) 31. (C) 33. (D) 30.

Lời giải.

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$\left(\sqrt{3} + \sqrt[4]{5}\right)^{124} = \sum\limits_{k=0}^{124} \mathrm{C}_{124}^{k} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{124-k} \cdot \left(\sqrt[4]{5}\right)^{k}$, với $0 \leqslant k \leqslant 124$, $k \in \mathbb{N}$.

Suy ra số hạng tổng quát $(k+1)$ trong khai triển là: $\mathrm{C}_{124}^{k} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{124-k} \cdot \left(\sqrt[4]{5}\right)^{k}$.
Hạng tử là số nguyên trong khai triển ứng với k thỏa mãn:

$$\begin{cases} k \vdots 4 \\ (124-k) \vdots 2 \\ 0 \leqslant k \leqslant 124 \\ k \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 4m \\ 0 \leqslant k \leqslant 124 \\ m \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 4m \\ 0 \leqslant m \leqslant 31 \\ m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Suy ra có 32 giá trị k thỏa mãn. Do đó có 32 hạng tử là số nguyên trong khai triển $\left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}\right)^{124}$.
Chọn đáp án A □

Câu 42. Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0)\cdot 2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 20 triệu con?

A 48 phút. B 7 phút. C 8 phút. D 12 phút.

Lời giải.
Áp dụng công thức $s(t) = s(0)\cdot 2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút.
Ta có: $625000 = s(0)\cdot 2^3 \Rightarrow s(0) = 78125$.
Khi đó, theo đề bài: $20000000 = 78125 \cdot 2^t \Rightarrow 2^t = 256 = 2^8 \Rightarrow t = 8$.
Vậy sau 8 phút kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 20 triệu con.
Chọn đáp án C □

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log 5 + \log(x^2+1) \geqslant \log(mx^2+4x+m)$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A 0. B 1. C Vô số. D 2.

Lời giải.
Ta có: $\log 5 + \log(x^2+1) \geqslant \log(mx^2+4x+m) \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x^2+1) \geqslant (mx^2+4x+m) \\ mx^2+4x+m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5-m)x^2 - 4x + 5 - \\ mx^2+4x+m > 0 \quad (\end{cases}$
Xét $m = 0$ hoặc $m = 5$ thì các bất phương trình (1) và (2) đều không đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

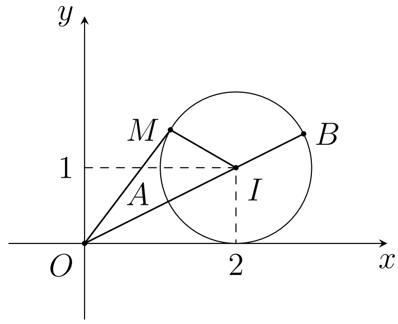
Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì: $\begin{cases} 5-m > 0 \\ \Delta_1' = 4-(5-m)^2 \leqslant 0 \\ m > 0 \\ \Delta_2' = 4 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ \left[\begin{array}{l} m \geqslant 7 \\ m \leqslant 3 \end{array}\right. \\ m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leqslant 3.$

Do m là số nguyên nên $m = 3$.
Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-2i| = 1$. Số phức $z - i$ có mô-đun nhỏ nhất là

A $\sqrt{5}-2$. B $\sqrt{5}-1$. C $\sqrt{5}+1$. D $\sqrt{5}+2$.

Lời giải.



Cách 1:

Đặt $w = z - i \Rightarrow z = w + i$.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn hình học của số phức w.

Từ giả thiết $|z - 2 - 2i| = 1$ ta được:

$$|w + i - 2 - 2i| = 1 \Leftrightarrow |w - 2 - i| = 1$$
$$\Leftrightarrow |(x-2) + (y-1)i| = 1$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1.$$

Suy ra tập hợp những điểm $M(x;y)$ biểu diễn cho số phức w là đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$ bán kính $R = 1$.

Giả sử OI cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B với A nằm trong đoạn thẳng OI.

Ta có $|w| = OM$

Mà $OM + MI \geqslant OI \Leftrightarrow OM + MI \geqslant OA + AI \Leftrightarrow OM \geqslant OA$

Nên $|w|$ nhỏ nhất bằng $OA = OI - IA = \sqrt{5} - 1$ khi $M \equiv A$.

Cách 2:

Từ $|z - 2 - 2i| = 1 \Rightarrow (a-2)^2 + (b-2)^2 = 1$ với $z = a + bi\,(a, b \in \mathbb{R})$

$a - 2 = \sin x; b - 2 = \cos x \Rightarrow a = 2 + \sin x, b = 2 + \cos x$

Khi đó: $|z - i| = |2 + \sin x + (2 + \cos x)\,i - i| = \sqrt{(2+\sin x)^2 + (1 + \cos x)^2} = \sqrt{6 + (4\sin x + 2\cos x)}$

$\geqslant \sqrt{6 - \sqrt{(4^2 + 2^2)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}} = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{\left(\sqrt{5} - 1\right)^2} = \sqrt{5} - 1$

Nên $|z - i|$ nhỏ nhất bằng $\sqrt{5} - 1$ khi $\begin{cases} 4\cos x = 2\sin x \\ 4\sin x + 2\cos x = -2\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \\ \cos x = \dfrac{-\sqrt{5}}{5}. \end{cases}$

Ta được $z = \left(2 - \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right) + \left(2 - \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right) i$.

Cách 3:

Sử dụng bất đẳng thức $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

$|z - i| = |(z - 2 - 2i) + (2 + i)| \geqslant ||z - 2 - 2i| - |2 + i|| = \sqrt{5} - 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 ta lập các số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau. Gọi A là biến cố: "Lập được số mà tổng của ba chữ số thuộc hàng đơn vị, chục, trăm lớn hơn tổng của ba chữ số còn lại là 3 đơn vị". Xác suất của biến cố A là

A $\dfrac{1}{30}$. **B** $\dfrac{3}{10}$. **C** $\dfrac{1}{10}$. **D** $\dfrac{3}{20}$.

Lời giải.

Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 ta lập các số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau, lập được $6! = 720$ số. Vậy số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 720$.

Gọi $\overline{abcdef}$ là số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau thuộc biến cố A.

Ta có: $\begin{cases} (a + b + c) + (d + e + f) = 21 \\ (d + e + f) - (a + b + c) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 9 \\ d + e + f = 12. \end{cases}$

Từ sáu chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 ta phân chia thành bộ ba số có tổng là 9 và bộ ba số có tổng là 12, có 3 cách phân chia, đó là $(1;2;6)$ và $(3;4;5)$, $(1;3;5)$ và $(2;4;6)$, $(2;3;4)$ và $(1;5;6)$. Trong mỗi cách phân chia này, ta lập được $3! \cdot 3! = 36$ số. Do đó $n(A) = 3 \cdot 36 = 108$.

Vậy xác suất của biến cố A là: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{108}{720} = \dfrac{3}{20}$.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Một nhà máy cần thiết kế một chiếc bể đựng nước hình trụ bằng tôn có nắp, có thể tích là $64\pi (m^3)$. Tìm bán kính đáy r của hình trụ sao cho hình trụ được làm ra tốn ít nguyên liệu nhất.

(A) $r = 3(m)$. (B) $r = \sqrt[3]{16}(m)$. (C) $r = \sqrt[3]{32}(m)$. (D) $r = 4(m)$.

Lời giải.

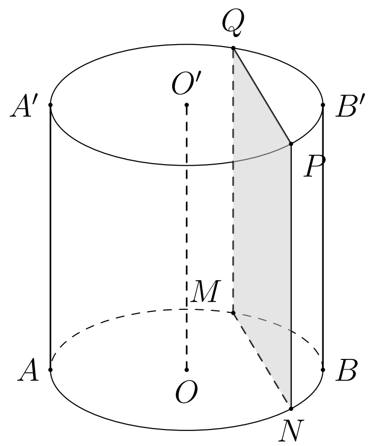
Cách 1:

Chiều cao của bể nước hình trụ là: $h = \dfrac{V}{\pi \cdot r^2} = \dfrac{64\pi}{\pi \cdot r^2} = \dfrac{64}{r^2}(m)$.

Bể đựng nước hình trụ bằng tôn có nắp nên diện tích tôn cần dùng là diện tích toàn phần của hình trụ.

Ta có: $S_{tp} = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 = 2\pi \left(\dfrac{64}{r} + r^2\right)(m^2)$.

Hàm số $f(r) = \dfrac{64}{r} + r^2$ có $f'(r) = -\dfrac{64}{r^2} + 2r$ nên $f'(r) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2r^3 - 64}{r^2} = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{32}$.



Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(r)$:

r	0		$\sqrt[3]{32}$		$+\infty$
$f'(r)$		$-$	0	$+$	
$f(r)$	$+\infty$	$\searrow$	$3\sqrt[3]{1024}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $f(r)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $r = \sqrt[3]{32}$ nên bán kính đáy r của hình trụ sao cho hình trụ được làm ra tốn ít nguyên liệu nhất là $r = \sqrt[3]{32}(m)$.

Cách 2:

Chiều cao của bể nước hình trụ là: $h = \dfrac{V}{\pi \cdot r^2} = \dfrac{64\pi}{\pi \cdot r^2} = \dfrac{64}{r^2}(m)$.

Bể đựng nước hình trụ bằng tôn có nắp nên diện tích tôn cần dùng là diện tích toàn phần của hình trụ.

Ta có: $S_{tp} = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 = 2\pi \left(\dfrac{64}{r} + r^2\right)(m^2)$.

Do đó: $S_{tp} = 2\pi \left(\dfrac{32}{r} + \dfrac{32}{r} + r^2\right) \geqslant 2\pi \cdot 3\sqrt[3]{\dfrac{32}{r} \cdot \dfrac{32}{r} \cdot r^2} \Rightarrow S_{tp} \geqslant 6\pi\sqrt[3]{1024}$.

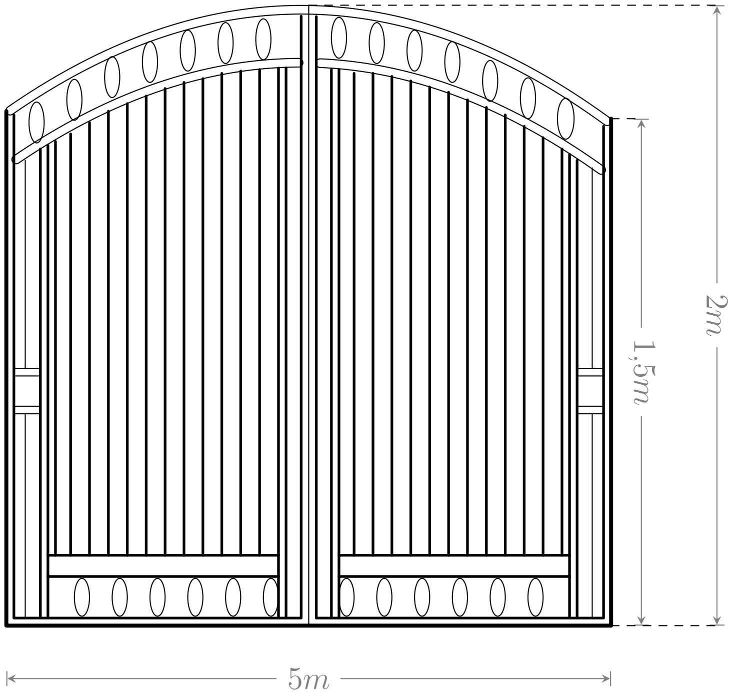
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{32}{r} = r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{32}$.

Vậy bán kính đáy r của hình trụ sao cho hình trụ được làm ra tốn ít nguyên liệu nhất là $r = \sqrt[3]{32}(m)$.

Chọn đáp án C □

Câu 47.

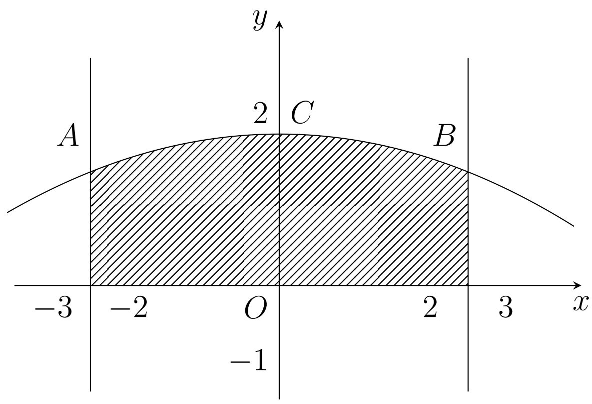
Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá $1m^2$ của rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng nghìn).



A. 6.620.000 đồng.
B. 6.320.000 đồng.
C. 6.520.000 đồng.
D. 6.417.000 đồng.

Lời giải.

Ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Trong đó $A(-2,5;1,5)$, $B(2,5;1,5)$, $C(0;2)$.

Giả sử đường cong phía trên là một Parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$, với $a; b; c \in \mathbb{R}$.

Do Parabol đi qua các điểm $A(-2,5;1,5)$, $B(2,5;1,5)$, $C(0;2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a(-2,5)^2 + b(-2,5) + c = 1,5 \\ a(2,5)^2 + b(2,5) + c = 1,5 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{2}{25} \\ b = 0 \\ c = 2. \end{cases}$$

Khi đó phương trình Parabol là $y = -\dfrac{2}{25}x^2 + 2$.

Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -\dfrac{2}{25}x^2 + 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2,5$; $x = 2,5$.

Ta có $S = \displaystyle\int_{-2,5}^{2,5} \left(-\dfrac{2}{25}x^2 + 2\right) \mathrm{d}x = \left(-\dfrac{2}{25}\dfrac{x^3}{3} + 2x\right)\Big|_{-2,5}^{2,5} = \dfrac{55}{6}$.

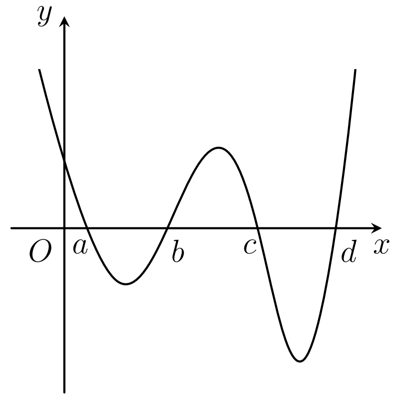
Vậy ông An phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là

$S \times 700000 = \dfrac{55}{6} \times 700000 \approx 6.417.000$ (đồng).

Chọn đáp án D □

Câu 48.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm a, b, c, d (hình sau). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:



A $f(c) > f(a) > f(b) > f(d)$.

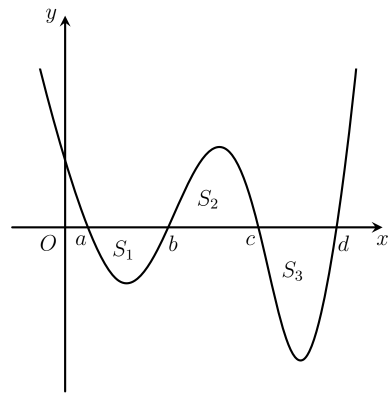
B $f(c) > f(a) > f(d) > f(b)$.

C $f(a) > f(b) > f(c) > f(d)$.

D $f(a) > f(c) > f(d) > f(b)$.

Lời giải.

Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f'(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = a, x = b$; $x = b, x = c$; $x = c, x = d$ (như hình vẽ).



Ta có:

$S_1 < S_2 \Rightarrow \displaystyle\int_a^b [-f'(x)]\,\mathrm{d}x < \int_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow [-f(x)]\Big|_a^b < f(x)\Big|_b^c$

$\Leftrightarrow -f(b) + f(a) < f(c) - f(b) \Leftrightarrow f(a) < f(c)$ (1).

$S_2 < S_3 \Rightarrow \displaystyle\int_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x < \int_c^d [-f'(x)]\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)\Big|_b^c < [-f(x)]\Big|_c^d$

$\Leftrightarrow f(c) - f(b) < -f(d) + f(c) \Leftrightarrow f(b) > f(d)$ (2).

Từ (1) suy ra khẳng định $f(a) > f(b) > f(c) > f(d)$ và $f(a) > f(c) > f(d) > f(b)$ là sai.

Từ (2) suy ra khẳng định $f(c) > f(a) > f(d) > f(b)$ sai. Vậy khẳng định $f(c) > f(a) > f(b) > f(d)$ đúng.

Nhận xét:

- Có thể lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ hoặc sử dụng $S_1 > 0$ để suy ra $f(a) > f(b)$.
- Đề xuất bổ sung phương án nhiễu $f(b) > f(d) > f(c) > f(a)$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Đặt $g(x) = f(x^2) + \mathrm{e}^{x^3-3x^2+1}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A Hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.

B Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

C Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

D $g(-3) - g(-2) < 0$.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2) + (3x^2 - 6x) \cdot \mathrm{e}^{x^3-3x^2+1} = x\left[2f'(x^2) + (3x - 6)\mathrm{e}^{x^3-3x^2+1}\right]$

$f'(x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 \in \{1; 4\} \Leftrightarrow x \in \{\pm 1; \pm 2\}$

$(3x - 6)\mathrm{e}^{x^3-3x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x^2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$(3x-6)e^{x^3-3x^2+1}$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	$-\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	$\vert$	kxđ	$\vert$	$+$	0	$-$	0	kxđ	0	kxđ	

(kxđ: không xác định)

Dựa vào bảng xét dấu, ta có khẳng định đúng là Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-10; -5; 8)$, $B(2; 1; -1)$, $C(2; 3; 0)$ và mặt phẳng $(P)\colon x + 2y - 2z - 9 = 0$. Xét M là điểm thay đổi trên (P) sao cho $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$.

(A) 54. **(B) 282.** (C) 256. (D) 328.

Lời giải.

Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA} = (-10 - x; -5 - y; 8 - z)$, $\overrightarrow{IB} = (2 - x; 1 - y; -1 - z)$, $\overrightarrow{IC} = (2 - x; 3 - y; -z)$.

Khi đó, $\begin{cases} (-10 - x) + 2(2 - x) + 3(2 - x) = 0 \\ (-5 - y) + 2(1 - y) + 3(3 - y) = 0 \\ (8 - z) + 2(-1 - z) + 3(-z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow I(0; 1; 1)$.

Với điểm M thay đổi trên (P), ta có

$MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + 3\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2$

$= 6MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}\right)$

$= 6MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2$ (Vì $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$).

Ta lại có $IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 = 185 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 9 = 228$.

Do đó, $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ đạt giá trị nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Khi đó, $MI = \mathrm{d}(I, (P)) = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ bằng

$6MI^2 + 228 = 6 \cdot 9 + 228 = 282$.

Giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt được khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Lưu ý thêm cách tìm điểm M như sau:

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với (P). Phương trình của Δ: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - 2t. \end{cases}$

Ta có $M = \Delta \cap (P)$. Xét phương trình

$t + 2(1 + 2t) - 2(1 - 2t) - 9 = 0 \Leftrightarrow 9t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(1; 3; -1)$.

Chọn đáp án B □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. B	3. D	4. C	5. A	6. A	7. D	8. D	9. B	10. A
11. C	12. B	13. C	14. C	15. B	16. B	17. D	18. B	19. B	20. A
21. B	22. A	23. C	24. C	25. D	26. D	27. A	28. C	29. C	30. D
31. A	32. A	33. C	34. C	35. B	36. B	37. C	38. C	39. A	40. A
41. A	42. C	43. B	44. B	45. D	46. C	47. D	48. A	49. B	50. B

22 ĐỀ THI THỬ SỐ 22-MAX8

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho x, y là hai số thực dương và m, n là hai số thực tùy ý. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

(A) $(xy)^m = x^m y^m$. (B) $(x^m)^n = x^{mn}$. (C) $x^m x^n = x^{m+n}$. (D) $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{n}{m}}$.

Lời giải.

Đáp án D sai.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Gọi H là hình chiếu vuông góc của $M(2;-1;-1)$ đến mặt phẳng $(\alpha)\colon 16x-12y-15z-4=0$. Độ dài đoạn MH bằng.

(A) 55. (B) $\dfrac{11}{25}$. (C) $\dfrac{22}{5}$. (D) $\dfrac{11}{5}$.

Lời giải.

$MH = d(M,(\alpha)) = \dfrac{|6.2-12\cdot(-1)-15\cdot(-1)-4|}{\sqrt{16^2+12^2+15^2}} = \dfrac{11}{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 3x^2 + 2\mathrm{e}^{2x} - 1$, biết $F(0) = 1$.

(A) $F(x) = x^3 + \mathrm{e}^{2x} - x + 1$. (B) $F(x) = x^3 + 2\mathrm{e}^{2x} - x - 1$.

(C) $F(x) = x^3 + \mathrm{e}^{x} - x$. (D) $F(x) = x^3 + \mathrm{e}^{2x} - x$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(3x^2 + 2\mathrm{e}^{2x} - 1\right)\,\mathrm{d}x = x^3 + \mathrm{e}^{2x} - x + C$

Mà $F(0) = 1 \Rightarrow 1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 0$ nên $F(x) = x^3 + \mathrm{e}^{2x} - x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Tìm bán kính mặt cầu tâm $I(0;1;2)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-2y+z+12=0$?

(A) 12. (B) 4. (C) 6. (D) 8.

Lời giải.

Bán kính cần tìm là $d(I,(\alpha)) = \dfrac{|2.0-2.1+2+12|}{\sqrt{2^2+2^2+1}} = 4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $f(x) = \ln(4-x)$ là

(A) $\mathscr{D} = (-\infty;4)$. (B) $\mathscr{D} = (4;+\infty)$. (C) $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{4\}$. (D) $\mathscr{D} = (-\infty;4]$.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ xác định $\Leftrightarrow 4-x>0 \Leftrightarrow x<4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = \log(x-2)$. (B) $y = \mathrm{e}^{-x}$. (C) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)$. (D) $y = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$.

Lời giải.

Ta thấy hàm số $y = \log(x-2)$ có tập xác định là $\mathscr{D} = (0;+\infty)$ nên loạiA.

Hàm số $y = \mathrm{e}^{-x} = \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^x$ nghịch biến trên tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ nên loạiB.

Hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}}(1 + x^2)$ nghịch biến trên tập xác định là $\mathscr{D} = R$ nên loạiC.
Vậy đáp án đúng làD.
Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Cho hàm số $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + 6x - 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 3)$.
B Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
C Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 3)$.
D Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta có $y' = -x^2 + x + 6$ và $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{25}{3}$	$\nearrow$	$\dfrac{25}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 3)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Phương trình $\sin x = \sin \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) có tập nghiệm là

A $x = \alpha + k\pi, x = \pi - \alpha + k\pi \, (k \in \mathbb{Z})$.
B $x = \alpha + k2\pi, x = -\alpha + k2\pi \, (k \in \mathbb{Z})$.
C $x = \alpha + k2\pi, x = \pi - \alpha + k2\pi \, (k \in \mathbb{Z})$.
D $x = \alpha + k\pi, x = -\alpha + k\pi \, (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A $u_{n+1} = u_n q$, $(n \geqslant 1)$.
B $u_n = u_{1q}^{n-1}$, $(n \geqslant 2)$.
C $u_n = u_{1q}^{n}$, $(n \geqslant 2)$.
D $u_k^2 = u_{k-1}u_{k+1}$, $(k \geqslant 2)$.

Lời giải.

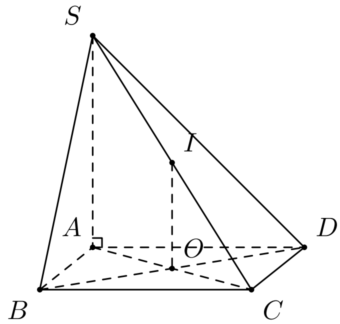
Từ định nghĩa của cấp số nhân ta có các kết quả sau:
$u_{n+1} = u_n q$, $(n \geqslant 1)$, $u_n = u_{1q}^{n-1}$, $(n \geqslant 2)$, $u_k^2 = u_{k-1}u_{k+1}$, $(k \geqslant 2)$.
Kết quả của đáp án C là sai.
Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, $SA \perp (ABCD)$. Gọi I là trung điểm của SC. Khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng độ dài đoạn thẳng nào?

A IO.
B IA.
C IC.
D IB.

Lời giải.

Do I là trung điểm của SC và O là trung điểm AC nên $IO \parallel SA$.
Do $SA \perp (ABCD)$ nên $IO \perp (ABCD)$, hay khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng độ dài đoạn thẳng IO.



Chọn đáp án A □

Câu 11. Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy bằng B, chiều cao bằng h là

A $B.h$. **B** $\frac{1}{3} \cdot B \cdot h$. **C** $\frac{1}{3} \cdot B^2 \cdot h$. **D** $B^2 \cdot h$.

Lời giải.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 - i$. Tìm số phức $z = \frac{z_2}{z_1}$.

A $z = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$. **B** $z = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$. **C** $z = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$. **D** $z = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$.

Lời giải.

Ta có: $z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{1+2i}{3-i} = \frac{(1+2i)(3+i)}{10} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$.

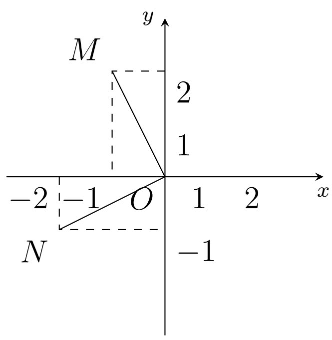
Chọn đáp án B □

Câu 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép quay tâm O góc quay 90° biến điểm $M(-1;2)$ thành điểm M'. Tọa độ điểm M' là

A $M'(2;1)$. **B** $M'(2;-1)$. **C** $M'(-2;-1)$. **D** $M'(-2;1)$.

Lời giải.

Có $M' = \mathrm{Q}_{(O;90^\circ)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} (OM;OM') = 90^\circ \\ OM' = OM. \end{cases}$



Phương trình đường thẳng OM' qua O, vuông góc với OM có dạng $x - 2y = 0$.

Gọi $M'(2a;a)$. Do $OM' = OM \Rightarrow 4a^2 + a^2 = (-1)^2 + 2^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M'(2;1) \\ M'(-2;-1). \end{array}\right.$

Có $M'(2;1)$ là ảnh của M qua phép quay góc -90°, $M'(-2;-1)$ là ảnh của M qua phép quay góc 90°. Vậy chọn $M'(-2;-1)$.

Trắc nghiệm:

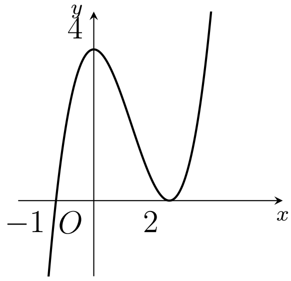
Điểm $M'(-b;a)$ là ảnh của $M(a;b)$ qua phép quay tâm O, góc quay 90°.

Chọn đáp án C □

Câu 14.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

Mệnh đề nào sau đây **sai**?



(A) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.
(B) Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.
(C) Hàm số có hai điểm cực trị.
(D) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

Lời giải.

Nhìn đồ thị ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$ là:

(A) $\min\limits_{x\in[0;3]} y = -3$. (B) $\min\limits_{x\in[0;3]} y = \dfrac{1}{2}$. (C) $\min\limits_{x\in[0;3]} y = -1$. (D) $\min\limits_{x\in[0;3]} y = 1$.

Lời giải.

Xét trên đoạn $[0; 3]$, ta có $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0$, $\forall x \in [0; 3]$.

Hàm số luôn đồng biến trên khoảng $(0; 3)$, do đó: $\min\limits_{x\in[0;3]} y = y(0) = -1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{2-x}$ có đồ thị (C). Phát biểu nào dưới đây đúng?

(A) Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $y = -2$; tiệm cận ngang là đường thẳng $x = 2$.
(B) Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$; tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.
(C) Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$; tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -2$.
(D) Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$; tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^+} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} y = +\infty \Rightarrow x = 2$ là đường tiệm cận đứng.

Và $\lim\limits_{x\to -\infty} y = -2$ và $\lim\limits_{x\to +\infty} y = -2 \Rightarrow y = -2$ là đường tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm mô-đun của số phức $w = 2z + (1+i)\overline{z}$.

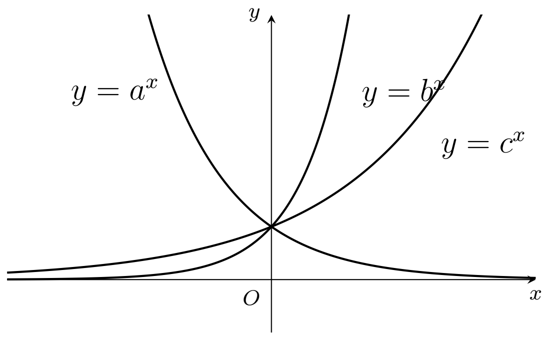
(A) $|w| = \sqrt{10}$. (B) $|w| = 4$. (C) $|w| = \sqrt{15}$. (D) $|w| = 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $w = 2(2-3i) + (1+i)(2+3i) = 3 - i \Rightarrow |w| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Cho đồ thị của ba hàm số $y = a^x$; $y = b^x$; $y = c^x$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?



(A) $b > a > c > 0$. (B) $c > b > a > 0$.
(C) $b > c > a > 0$. (D) $c > a > b > 0$.

Lời giải.

Ta có: $a, b, c > 0$

Từ đồ thị suy ra $0 < a < 1$; $b > 1$; $c > 1$ (1)

Mặt khác: $\forall x > 0$, ta có: $b^x > c^x \Rightarrow b > c$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $b > c > a > 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Thầy giáo A có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình và 15 câu dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ cả 3 câu (khó, dễ, trung bình) và số câu dễ không ít hơn 2 ?

A 56875. **B** 42802. **C** 41811. **D** 32023.

Lời giải.

TH1: 2 câu dễ, 1 câu trung bình và 2 câu khó: $C_{15}^2 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^2 = 10500$ cách.

TH2: 2 câu dễ, 2 câu trung bình và 1 câu khó: $C_{15}^2 \cdot C_{10}^2 \cdot C_5^1 = 23625$ cách.

TH3: 3 câu dễ, 1 câu trung bình và 1 câu khó: $C_{15}^3 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^1 = 22750$ cách.

Vậy số cách thỏa mãn yêu cầu bài toán : $10500 + 23625 + 22750 = 56875$ cách.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Cho cấp số nhân (u_n); $u_1 = 1, q = 2$. Hỏi số 1024 là số hạng thứ mấy?

A 11. **B** 9. **C** 8. **D** 10.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow 1 \cdot 2^{n-1} = 1024 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^{10} \Leftrightarrow n - 1 = 10 \Leftrightarrow n = 11$.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng

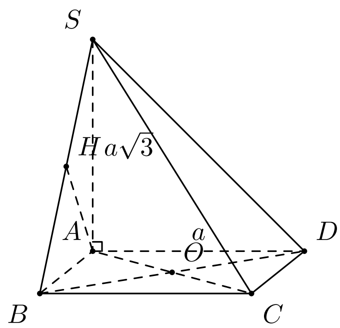
A $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B** $a\sqrt{3}$. **C** $\dfrac{a}{2}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$, vẽ $AH \perp SB$ tại $H \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Ta có $AD \parallel BC$

$\Rightarrow d(D, (SBC)) = d(A, (SBC)) = AH = \dfrac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{3} \cdot a}{\sqrt{3a^2 + a^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



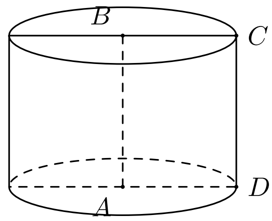
Chọn đáp án D □

Câu 22. Quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh AD thì đường gấp khúc $ABCD$ vạch ra một hình trụ (T), biết $AB = a$, $AD = 2a$. Tính diện tích toàn phần hình trụ (T).

A $4a^2\pi$. **B** $6a^2\pi$. **C** $2a^2\pi$. **D** $5a^2\pi$.

Lời giải.

Bán kính đáy của hình trụ là $r = AB = a$.
Đường cao của hình trụ là $h = 2a$.
Diện tích toàn phần của hình trụ là $S_{tp} = S_{xg} + 2S_d = 2.2a\pi \cdot a + 2a^2\pi = 6\pi a^2$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Một vật thể trong không gian được giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1, x = 3$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1 \leq x \leq 3)$ cắt vật thể theo thiết diện là một hình tam giác đều có cạnh bằng $2\sqrt{x}$ Tính thể tích V của vật thể đó.

(A) $V = 8\sqrt{3}$. (B) $V = 4\sqrt{3}\pi$. **(C)** $V = 4\sqrt{3}$. (D) $V = 4\pi$.

Lời giải.

Tam giác đều có cạnh bằng $2\sqrt{x}$ nên

Diện tích tam giác đều là $S(x) = \dfrac{(2\sqrt{x})^2\sqrt{3}}{4} = x\sqrt{3}$

Vậy $V = \displaystyle\int\limits_1^3 x\sqrt{3}\,\mathrm{d}x = \left.\dfrac{x^2\sqrt{3}}{2}\right|_1^3 = 4\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Số nghiệm của phương trình $\left(\sqrt{2}+1\right)^x - \left(\sqrt{2}-1\right)^x = 2$ là:

(A) 3. (B) 1. **(C)** 2. (D) 0.

Lời giải.

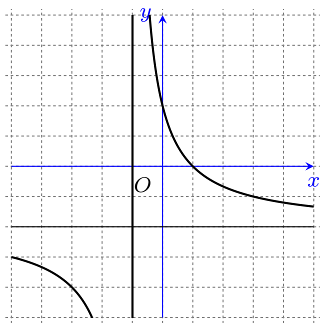
$\left(\sqrt{2}+1\right)^x - \left(\sqrt{2}-1\right)^x = 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)^{2x} - 2\left(\sqrt{2}+1\right)^x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\sqrt{2}+1\right)^x = 1-\sqrt{2}\\ \left(\sqrt{2}+1\right)^x = 1+\sqrt{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -1\\ x = 1.\end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số sau



(A) $y = \dfrac{-2x+2}{x+1}$. (B) $y = \dfrac{-x+2}{x+2}$.

(C) $y = \dfrac{2x-2}{x+1}$. (D) $y = \dfrac{x-2}{x+1}$.

Lời giải.

Ta có từ đồ thị hàm số ta thấy hàm số giảm, có tiệm cận ngang là $y = -2$, tiệm cận đứng là $x = -1$, giao với Ox tại điểm $(1; 0)$, giao với Oy tại điểm $(0; 2)$.

Vậy hàm số cần tìm là $y = \dfrac{-2x+2}{x+1}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Gọi x, y là hai số thực thỏa: $x(3-5i) - y(2-i)^2 = 4 - 2i$. Tính $M = 2x - y$.

(A) $M = 2$. **(B)** $M = -2$. (C) $M = 1$. (D) $M = 0$.

Lời giải.

Phương trình cho $x(3-5i)-y(2-i)^2=4-2i$

$\Leftrightarrow x(3-5i)-y(3-4i)=4-2i \Leftrightarrow 3x-3y+i(-5x+4y)=4-2i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-3y=4 \\ -5x+4y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{10}{3} \\ y=-\dfrac{14}{3} \end{cases}.$

Vậy $M=2x-y=-2$.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AC'=\sqrt{3}$ là

A $V=1$. **B** $V=3\sqrt{3}$. **C** $V=2\sqrt{2}$. **D** $V=\dfrac{1}{3}$.

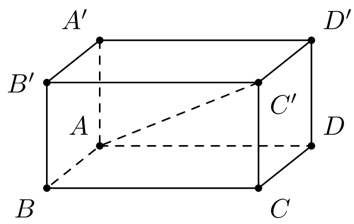
Lời giải.

Gọi cạnh của hình lập phương là x.

Khi đó $AC=x\sqrt{2}$.

$AC'^2=AC^2+CC'^2=x\sqrt{3}=\sqrt{3}\Rightarrow x=1$.

$V_{ABCD.AB'CD'}=1$.



Chọn đáp án A □

Câu 28. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(4;2;3)$ và $B(-2;6;3)$ là

A $\begin{cases} x=4+6t \\ y=2+4t \\ z=3 \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x=-6+4t \\ y=4+2t \\ z=3t \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x=1-3t \\ y=4+2t \\ z=3 \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x=-2-6t \\ y=6+4t \\ z=3+6t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng đi qua hai điểm A, B.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-6;4;0)$ và thấy $M(1;4;3)$ là trung điểm của đoạn AB

Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(1;4;3)$ nhận $\overrightarrow{u}=(-3;2;0)$ làm VTCP.

Nên có phương trình $\begin{cases} x=1-3t \\ y=4+2t \\ z=3 \end{cases}$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, luôn dương trên $[0;2]$ và thỏa mãn $I=\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=4$.

Khi đó tích phân $K=\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x$ nhận giá trị nào sau đây?

A 4. **B** 2. **C** 8. **D** -4.

Lời giải.

$K=\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 f(u)\,\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\cdot 4=2$. (Với $u=2x\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}u$).

Chọn đáp án B □

Câu 30. Hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 + ax^2 + b$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ và giá trị cực tiểu tương ứng bằng 2 thì giá trị của a, b lần lượt là

A $a = \frac{1}{2}; b = \frac{9}{4}$. **B** $a = -\frac{1}{2}; b = \frac{9}{4}$. **C** $a = \frac{1}{2}; b = -\frac{9}{4}$. **D** $a = -\frac{1}{2}; b = -\frac{9}{4}$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = x^3 + 2ax; y'' = 3x^2 + 2a$.

Hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 + ax^2 + b$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ và giá trị cực tiểu tương ứng bằng 2 khi

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \\ y(1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 1 = 0 \\ 2a + 3 > 0 \\ \frac{1}{4} + a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{9}{4} \end{cases}$$

.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Tìm tọa độ điểm M là giao điểm của đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 3x - y - 2z + 3 = 0$.

A $M(3; 2; 2)$. **B** $M(4; 5; 1)$. **C** $M(1; -4; 4)$. **D** $M(0; -7; 5)$.

Lời giải.

Ta có $M \in d \Rightarrow M(2 + t; -1 + 3t; 3 - t)$

Mà $M \in (\alpha) \Rightarrow 3(2 + t) - (-1 + 3t) - 2(3 - t) + 3 = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow M(0; -7; 5)$.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giá vuông, $AB = BC = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C** $a^3\sqrt{3}$. **D** a^3.

Lời giải.

Thể tích của khối chóp là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

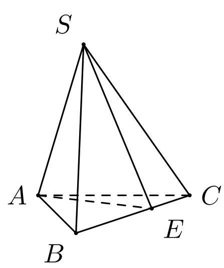
Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng 1. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = 2EC$. Tính thể tích V của khối tứ diện $S.AEB$.

A $V = \frac{1}{3}$. **B** $V = \frac{2}{3}$. **C** $V = \frac{4}{3}$. **D** $V = \frac{1}{6}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{V_{B.ASC}}{V_{B.ASC}} = \frac{BE}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{S.ABE} = \frac{2}{3}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Cho các số phức z thỏa mãn $|z+1-i| = |z-1+2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đó.

(A) $4x+6y-3=0$. (B) $4x-6y+3=0$. (C) $4x+6y+3=0$. (D) $4x-6y-3=0$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$|z+1-i| = |z-1+2i| \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + (y+2)^2$$
$$\Leftrightarrow 2x+1-2y+1 = -2x+1+4y+4 \quad .$$
$$\Leftrightarrow 4x-6y-3=0.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Cho biết $\int\limits_2^7 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2}+1} = a - b\cdot\ln 2 + c\ln 3$ (a, b, c là các số nguyên). Tìm tập nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$.

(A) $S=\{-1\}$. (B) $S=\{-1;0\}$. (C) $S=\{1\}$. (D) $S=\{0;1\}$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x+2} \Rightarrow t^2 = x+2 \Rightarrow \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x = 2 \Rightarrow t = 2$; $\quad x = 7 \Rightarrow t = 3$.

Khi đó

$$\int\limits_2^7 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2}+1} = \int\limits_2^3 \frac{2t\,\mathrm{d}t}{t+1}$$
$$= \int\limits_2^3 \left(2 - \frac{2}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \left(2t - 2\ln|t+1|\right)\Big|_2^3$$
$$= 2 - 4\ln 2 + 2\ln 3 = a - b\cdot\ln 2 + c.\ln 3$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases}$$

Vậy $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow 2x^2+4x+2=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $4x^3-3x-2m+3=0$ có ba nghiệm phân biệt.

(A) $(-\infty;1)$. (B) $(2;4)$. (C) $(2;+\infty)$. (D) $(1;2)$.

Lời giải.

$4x^3-3x-2m+3=0 \Leftrightarrow 4x^3-3x+3=2m$.

Xét hàm số $f(x) = 4x^3-3x+3$.

TXĐ $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$f'(x) = 12x^2 - 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}$.
Ta suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT suy ra phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi: $2 < 2m < 4 \Leftrightarrow 1 < m < 2$.
Chọn đáp án D □

Câu 37. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $\left(8\sin^3 x - m\right)^3 = 162\sin x + 27m$ có nghiệm thỏa mãn $0 < x < \dfrac{\pi}{3}$?

A 2. **B** 3. **C** Vô số. **D** 1.

Lời giải.
Đặt $t = 2\sin x$, với $0 < x < \dfrac{\pi}{3}$ thì $t \in \left(0; \sqrt{3}\right)$.
Phương trình đã cho trở thành $(t^3 - m)^3 = 81t + 27m$.
Đặt $u = t^3 - m \Rightarrow t^3 = u + m$.
Khi đó ta được $\begin{cases} u^3 = 27(3t + m) \\ (3t)^3 = 27(u + m) \end{cases} \Rightarrow u^3 - (3t)^3 = 27(3t - u) \Leftrightarrow u^3 + 27u = (3t)^3 + 27 \cdot 3t \quad (*)$
Xét hàm số $f(v) = v^3 + 27v$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
Có $f'(v) = 3v^2 + 27 > 0$, $\forall v \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Do đó $(*) \Leftrightarrow u = 3t \Rightarrow t^3 - 3t = m \quad (1)$.
Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ trên khoảng $\left(0; \sqrt{3}\right)$.
Có $f'(t) = 3t^2 - 3$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ (vì $t > 0$).
Bảng biến thiên

x	0		1		$\sqrt{3}$
y'		$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có nghiệm khi $-2 \leqslant m < 0$.
Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1\}$. Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án A □

Câu 38. Cho hàm số $y = \dfrac{2x - 2}{x + 1}$ (1). Tìm các giá trị của tham số m sao cho đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số tại hai điểm A và B phân biệt sao cho tam giác OAB vuông tại O.

A $m = -\dfrac{4}{3}$. **B** $m = 2$. **C** $m = \dfrac{4}{3}$. **D** $m = -2$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa đồ thị hàm số và đường thẳng $y = x + m$

$\dfrac{2x-2}{x+1} = x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 + (m-1)x + 2 + m = 0 \quad (2). \end{cases}$

Đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - 4(2+m) > 0 \\ 1 + 1 - m + m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 6m - 7 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 7. \end{array}\right.$

Suy tọa độ điểm A và B là $A(x_1; x_1 + m)$ và $B(x_2; x_2 + m)$ trong đó $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình (2) và $x_1 + x_2 = 1 - m; x_1 \cdot x_2 = m + 2$.

$\overrightarrow{OA} = (x_1; x_1 + m); \overrightarrow{OB} = (x_2; x_2 + m)$. Tam giác OAB vuông tại O suy ra $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.

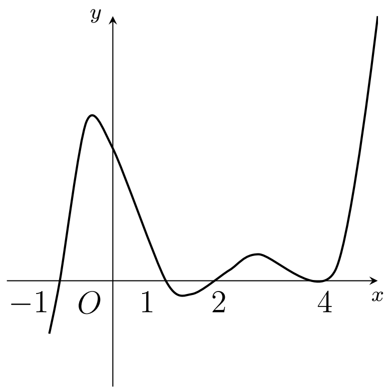
$$\Rightarrow x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2 + m(x_1 + x_2) + m^2 = 0 \Leftrightarrow 2(m+2) + m(1-m) + m^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow m = -\dfrac{4}{3}$$

Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới

Hàm số $g(x) = f(1 - 2x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A $(-1; 0)$. **B** $(-\infty; 0)$. **C** $(0; 1)$. **D** $(1; +\infty)$.



Lời giải.

Cách 1. Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ 1 < x < 2 \end{array}\right.$. Ta có $g'(x) = -2f'(1 - 2x)$.

Xét $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - 2x < -1 \\ 1 < 1 - 2x < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ -\dfrac{1}{2} < x < 0. \end{array}\right.$

Vậy $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$ và $(1; +\infty)$.

Cách 2. Ta có

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2f'(1-2x) = 0 \overset{theodothif'(x)}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{l} 1 - 2x = -1 \\ 1 - 2x = 1 \\ 1 - 2x = 2 \\ 1 - 2x = 4\, (nghiêmkép) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \\ x = -\dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta nhận thấy

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau

Ví dụ chọn $x = 2 \in (1; +\infty)$, suy ra $1 - 2x = -3 \xrightarrow{theo do thi f'(x)} f'(1-2x) = f'(-3) < 0$. Khi đó $g'(2) = -2f'(-3) > 0$.

Nhận thấy các nghiệm $x = -\dfrac{1}{2}; x = 0$ và $x = 1$ của $g'(x)$ là các nghiệm đơn nên qua nghiệm đổi dấu; nghiệm $x = -\dfrac{3}{2}$ là nghiệm kép nên qua nghiệm không đổi dấu.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn z_1, $z_2 \neq 0$; $z_1 + z_2 \neq 0$ và $\dfrac{1}{z_1 + z_2} = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{2}{z_2}$.Tính $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$.

A $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.   **B** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.   **C** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.   **D** $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z_1+z_2} = \frac{1}{z_1} + \frac{2}{z_2} &\Leftrightarrow \frac{1}{z_1+z_2} = \frac{z_2+2z_1}{z_1z_2} \\
&\Leftrightarrow z_1z_2 = (z_1+z_2)(z_2+2z_1) \\
&\Leftrightarrow 2z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow 2\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + 2\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

Suy ra $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\pm\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. S là tập hợp giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $x^9 + 3x^3 - 9x = m + 3\sqrt[3]{9x+m}$ có đúng hai nghiệm thực. Tích tất cả phần tử của tập S là

A -1.   **B** -64.   **C** -81.   **D** -121.

Lời giải.

Ta có $x^9 + 3x^3 - 9x = m + 3\sqrt[3]{9x+m} \Leftrightarrow (x^3)^3 + 3x^3 = \left(\sqrt[3]{9x+m}\right)^3 + 3\sqrt[3]{9x+m}$ (1).

Hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên nó đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác, theo (1) ta có $f(x^3) = f\left(\sqrt[3]{9x+m}\right) \Leftrightarrow x^3 = \sqrt[3]{9x+m}$ hay $m = x^9 - 9x$ (*).

Đặt $g(x) = x^9 - 9x$, ta có $g'(x) = 9x^8 - 9$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$

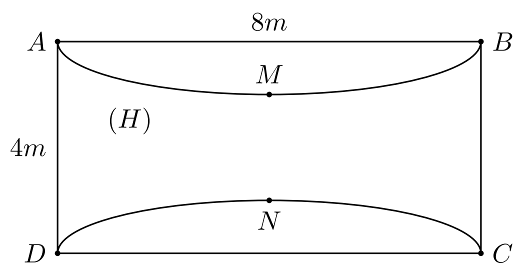
Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thực $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có đúng hai nghiệm thực $\Leftrightarrow m = -8$ hoặc $m = 8$. Do đó $S = \{-8; 8\}$. Tích các phần tử của S bằng -64.
Chọn đáp án B □

Câu 42. Cho hàm số $f(x) = \sin^2 x$. Tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^{(2018)}(x)\mathrm{d}x$ bằng

A $I = 2^{2016}$. **B** $I = 2^{2017}$. **C** $I = 2^{2018} - 1$. **D** $I = 2^{2018}$.

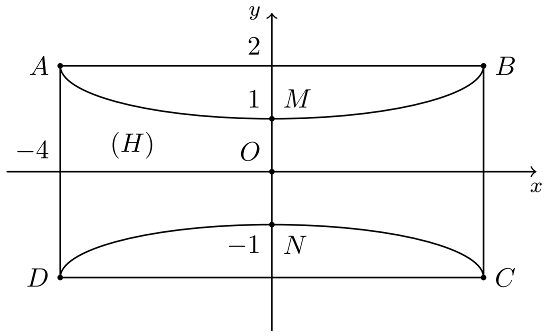
Lời giải.
Ta có $y = f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$
$y' = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin 2x, y'' = \dfrac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \cos 2x, y''' = -\dfrac{1}{2} \cdot 2^3 \cdot \sin 2x, y^{(4)} = -\dfrac{1}{2} \cdot 2^4 \cdot \cos 2x, \ldots, y^{(6)} = \dfrac{1}{2} \cdot 2^6 \cdot \cos 2x$
Và $y^{(8)} = -\dfrac{1}{2} \cdot 2^8 \cdot \cos 2x \to$ Quy luật lặp lại với chu kì là 4
Ta thấy 2018 chia 4 dư 2 nên $y^{(2018)} = f^{(2018)}(x) = \dfrac{1}{2} \cdot 2^{2018} \cdot \cos 2x = 2^{2017} \cdot \cos 2x$.
Suy ra: $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^{(2018)}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2^{2017} \cdot \cos 2x\,\mathrm{d}x = 2^{2016} \cdot \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2^{2016}$.
Chọn đáp án A □

Câu 43. Một sân vườn hình chữ nhật (hình vẽ) có chiều dài $AB = 8$ m, chiều rộng $AD = 4$ m. Anh Thông chia sân vườn đó thành một phần lối đi (H) ở chính giữa sân (phần tô đậm) và phần còn lại để trồng hoa. Biết phần đất để trồng hoa là hai nửa của một hình Elíp (E), khoảng cách ngắn nhất của hai điểm M, N trên hai viền của Elip là $MN = 2$ m. Tính diện tích phần lối đi (H).



A $(32 - 4\pi)$ m^2. **B** $(16 - 4\pi)$ m^2.
C $(32 - 8\pi)$ m^2. **D** $(16 - 8\pi)$ m^2.

Lời giải.



Diện tích sân vườn hình chữ nhật $ABCD$
$S = 8 \cdot 4 = 32\ \text{m}^2$.
Xét elip (E) có độ dài trục lớn $2a = AB = 8 \Rightarrow a = 4$.
Vì $MN = 2$ nên suy ra độ dài trục nhỏ của elip (E)
$2b = 2 \Rightarrow b = 1$
Vì hai phần đất trồng hoa là hai nửa của một hình elip (E) nên diện tích phần trồng hoa là
$S_{(E)} = \pi ab = 4\pi\ \text{m}^2$
Suy ra diện tích phần lối đi (H) là
$S_{(H)} = S - S_{(E)} = (32 - 4\pi)\ \text{m}^2$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Tìm tập các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(3x-1) - \dfrac{m}{x} + 2$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

A $\left[\dfrac{-7}{3}; +\infty\right)$. **B** $\left[\dfrac{-1}{3}; +\infty\right)$. **C** $\left[\dfrac{-4}{3}; +\infty\right)$. **D** $\left[\dfrac{2}{9}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Xét $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ hàm số xác định.

Ta có $y' = \dfrac{3}{3x-1} + \dfrac{m}{x^2}$. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$

Thì $y' \geqslant 0$, $\forall x \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ và dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{3x-1} + \dfrac{m}{x^2} \geqslant 0$, $\forall x \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$

$\Leftrightarrow m \geqslant \dfrac{-3x^2}{3x-1}$, $\forall x \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$

$\Leftrightarrow m \geqslant \max\limits_{\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)} f(x)$ với $f(x) = \dfrac{-3x^2}{3x-1}$

$f'(x) = \dfrac{-9x^2 + 6x}{(3x-1)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$-\frac{4}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên có $m \geqslant \dfrac{-4}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha)\colon y+2z=0$ và hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=4t \end{cases}$, $d_2\colon \begin{cases} x=2-t' \\ y=4+2t' \\ z=4 \end{cases}$. Đường thẳng Δ nằm trong (α) và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình là

(A) $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y}{8}=\dfrac{z}{4}$.
(B) $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y}{-8}=\dfrac{z}{-4}$.
C $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y}{-8}=\dfrac{z}{4}$.
(D) $\dfrac{x+1}{7}=\dfrac{y}{-8}=\dfrac{z}{4}$.

Lời giải.

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của Δ với d_1, d_2. Mà Δ nằm trong (α) nên
$A=(\alpha)\cap d_1, B=(\alpha)\cap d_2$
Điểm $A(1-t;t;4t)$ và thỏa mãn phương trình (α) nên $t+2\cdot 4t=0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow A(1;0;0)$.
Điểm $B\left(2-t';4+2t';4\right)$ và thỏa mãn phương trình (α) nên
$4+2t'+2\cdot 4=0 \Leftrightarrow t'=-6 \Rightarrow B(8;-8;4)$.
Do đó $\overrightarrow{AB}(7;-8;4)$, phương trình Δ là: $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y}{-8}=\dfrac{z}{4}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để phương trình $\log_2(2x+m)=log_{\sqrt{2}}(x-1)$ có nghiệm duy nhất:

(A) 0. (B) 1. (C) 2. **D** 3.

Lời giải.

$$\log_2(2x+m)=log_{\sqrt{2}}(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+m>0 \\ x-1>0 \\ \log_2(2x+m)=log_2(x-1)^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ 2x+m=(x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x^2-4x+1-m=0 \quad (1). \end{cases}$$
PT $\log_2(2x+m)=\log_{\sqrt{2}}(x-1)$ có nghiệm duy nhất khi phương trình (1) có nghiệm duy nhất lớn hơn 1.
Ta có (1) $\Leftrightarrow m=x^2-4x+1$. Xét hàm số $f(x)=x^2-4x+1$ trên khoảng $(1;+\infty)$ ta được
$$\left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m\geqslant -2 \end{array}\right. \Rightarrow m\in\{-3;-2;-1\}.$$
Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S):
$(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=11$và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$, $d_2\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$.
Viết phương trình chính tắc các mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) đồng thời song song với hai đường thẳng d_1, d_2.

A $3x-y-z+7=0$.
(B) $3x-y-z-15=0$.

(C) $3x - y - z - 7 = 0$.

(D) $3x - y - z + 7 = 0$ hoặc $3x - y - z - 15 = 0$.

Lời giải.

d_1 có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1} = (1; 1; 2)$ đi qua $A(5; -1; 1)$.

d_2 có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_2} = (1; 2; 1)$ đi qua $B(-1; 0; 0)$.

Mặt phẳng (P) song song với hai đường thẳng d_1, d_2 nên có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = (-3; 1; 1)$. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $3x - y - z + m = 0$.

Mặt cầu (S) có tâm và bán kính lần lượt là $I(1; -1; 0), R = \sqrt{11}$.

Vì mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên ta có

$$d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|3 + 1 + m|}{\sqrt{11}} = \sqrt{11} \Leftrightarrow |4 + m| = 11 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 7 \\ m = -15 \end{array}\right.$$

.

Với $m = 7$ mặt phẳng (P) có dạng $3x - y - z + 7 = 0$, kiểm tra thấy $A(5; -1; 1)$ và $B(-1; 0; 0)$ không thuộc (P) nên nhận $(P)\colon 3x - y - z + 7 = 0$

Với $m = -15$ mặt phẳng (P) có dạng $3x - y - z - 15 = 0$ thay tọa độ $A(5; -1; 1)$ thấy thỏa mãn nên loại trường hợp này.

Vậy $(P)\colon 3x - y - z + 7 = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Cho đa giác đều 2018 cạnh. Số tam giác vuông có 3 đỉnh là đỉnh của đa giác bằng

(A) $2\mathrm{C}_{1009}^2$. (B) C_{2018}^3. (C) $4\mathrm{C}_{1009}^2$. (D) C_{1009}^2.

Lời giải.

Số đường chéo đi qua tâm của đa giác là 1009.

Cứ hai đường chéo đi qua tâm tạo thành một hình chữ nhật có các đỉnh là đỉnh của đa giác. Do đó, ta có số hình chữ nhật là C_{1009}^2.

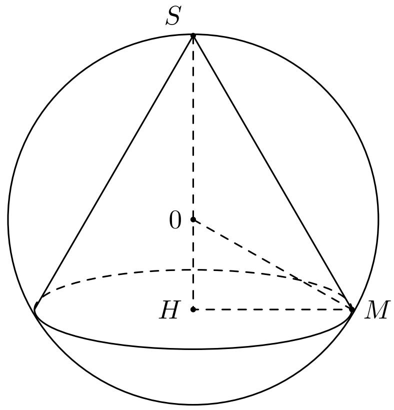
Mỗi hình chữ nhật đó tạo nên bốn tam giác vuông có các đỉnh là đỉnh của đa giác nên có số tam giác vuông là $4 \cdot \mathrm{C}_{1009}^2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Hình nón gọi là nội tiếp mặt cầu nếu đỉnh và đường tròn đáy của hình nón nằm trên mặt cầu. Tìm chiều cao h của hình nón có thể tích lớn nhất nội tiếp mặt cầu có bán kính R cho trước.

(A) $h = \dfrac{3R}{2}$. (B) $h = \dfrac{5R}{2}$. (C) $h = \dfrac{5R}{4}$. (D) $\dfrac{4R}{3}$.

Lời giải.



Gọi chiều cao của hình nón là x, $(0 < x < 2R)$. Gọi bán kính đáy của hình nón là T ta có

$r^2 = OM^2 - OH^2 = R^2 - (x-R)^2 = 2Rx - x^2 = x(2R-x)$.

Thể tích của hình nón là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 x = \frac{1}{3}\pi x^2(2R-x)$.

Mặt khác ta lại có

$$\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot(2R-x) \leq \left(\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+2R-x}{3}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4}(2R-x) \leq \frac{8R^3}{27}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi x^2(2R-x) \leq \frac{32\pi R^3}{27}.$$

Vậy $\max V = \frac{32\pi R^3}{27}$.

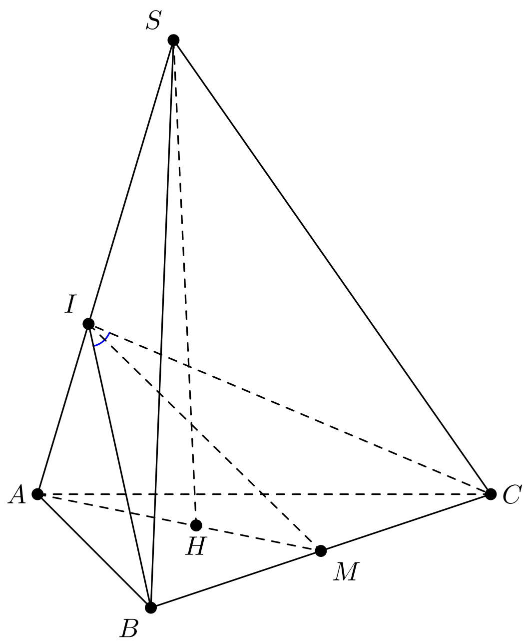
Dấu = xảy ra khi $\frac{x}{2} = 2R - x \Leftrightarrow x = \frac{4R}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa (SAB) và (SAC) bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A $\frac{a^3\sqrt{2}}{48}$. **B** $\frac{a^3\sqrt{2}}{16}$. **C** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D** $\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC.

Gọi I là hình chiếu của B trên SA. Khi đó $BI \perp SA, CI \perp SA$ do $S.ABC$ là hình chóp đều.

Suy ra góc giữa (SAB) và (SAC) là góc giữa BI và CI.

+ Trường hợp $\widehat{BIC} = 60^\circ$.

Tam giác IBC cân tại $I \Rightarrow M \perp BC, \widehat{MC} = 30^\circ$.

$IC = \dfrac{MC}{\sin 30^\circ} = \dfrac{a}{2} : \dfrac{1}{2} = a = AC$ vô lý $\Rightarrow$ loại.

+ Trường hợp 2: $\widehat{BIC} = 120^\circ$.

Tam giác IBC cân tại $I \Rightarrow IM \perp BC, \widehat{MIC} = 60^\circ$.

$IM = MC \cdot \cot 60^\circ = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}, IC = \dfrac{MC}{\sin 60^\circ} = \dfrac{a}{2} : \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$AI = \sqrt{AC^2 - CI^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Áp dụng định lý Cosin cho hai tam giác ACI và tam giác SAC ta có:

$\cos A = \dfrac{AI^2 + AC^2 - CI^2}{2AI \cdot AC} = \dfrac{AS^2 + AC^2 - SC^2}{2AS \cdot AC}$

$\dfrac{\dfrac{2a^2}{3} + a^2 - \dfrac{a^2}{3}}{\dfrac{a\sqrt{6}}{3}} = \dfrac{a^2}{AS} \Rightarrow SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Gọi H là tâm đáy $\Rightarrow SH \perp (ABC)$

$AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, AH = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{8} - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$.

Thể tích khối chóp là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot SHS_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{12} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{48}$.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. D	3. D	4. B	5. A	6. D	7. A	8. C	9. C	10. A
11. A	12. B	13. C	14. B	15. C	16. C	17. A	18. C	19. A	20. A
21. D	22. B	23. C	24. C	25. A	26. B	27. A	28. C	29. B	30. B
31. D	32. A	33. B	34. D	35. A	36. D	37. A	38. A	39. D	40. A
41. B	42. A	43. A	44. C	45. C	46. D	47. A	48. C	49. D	50. A

23 ĐỀ THI THỬ SỐ 23-MAX8

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-2}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là

A $x = 2$ và $y = 1$. **B** $x = 1$ và $y = 2$. **C** $x = 2$ và $y = -3$. **D** $x = -2$ và $y = 1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+3}{x-2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1+\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{2}{x}} = 1$ nên $y = 1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Và $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+3}{x-2} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+3}{x-2} = -\infty$ nên đồ thị nhận đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(0; +\infty)$. **B** $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.

C $(-\infty; -2)$. **D** $(-2; 0)$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x$; $y'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.

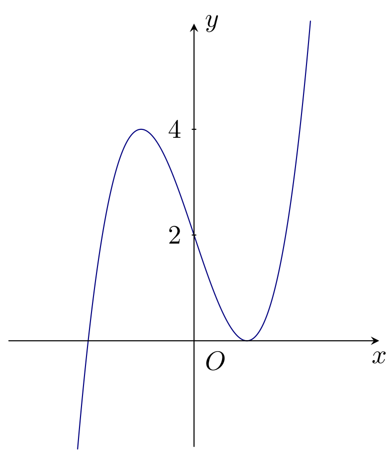
Chọn đáp án B □

Câu 3.

Đồ thị sau của hàm số nào ?

A $y = -x^3 - 3x + 2$. **B** $y = x^3 - 3x + 2$.

C $y = x^3 + 3x + 2$. **D** $y = x^3 - 3x - 2$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Rightarrow$ loại các hàm số $y = -x^3 - 3x + 2$ và $y = x^3 + 3x + 2$.
Đồ thị đi qua điểm $(0;2) \Rightarrow$ loại hàm số $y = x^3 - 3x - 2$.
Vậy đồ đồ thị đã cho là của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.
Chọn đáp án B □

Câu 4. Phương trình $2^{2x-1} = 8$ có nghiệm là

(A) $x = 3$. (B) $x = 4$. (C) $x = 2$. (D) $x = 1$.

Lời giải.
$2^{2x-1} = 8 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$.
Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho các số thực dương a, x, y và $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\log_a(xy) = \log_a x - \log_a y$.
(B) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
(C) $\log_a(xy) = y\log_a x$.
(D) $\log_a(xy) = \log_a x \cdot \log_a y$.

Lời giải.
Theo tính chất của hàm Logarit thì $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
Chọn đáp án B □

Câu 6. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$ là

(A) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln|1-2x| + C$.
(B) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln|1-2x| + C$.
(C) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -2\ln|1-2x| + C$.
(D) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\ln|1-2x| + C$.

Lời giải.
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{1-2x} = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1-2x)}{1-2x} = -\frac{1}{2}\ln|1-2x| + C.$$
Chọn đáp án A □

Câu 7. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

(A) $\displaystyle\int x^{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1} + C$.
(B) $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C$.
(C) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+1} + C$.
(D) $\displaystyle\int x^7\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}x^8 + C$.

Lời giải.
Ta có $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C \Rightarrow$.
Chọn đáp án C □

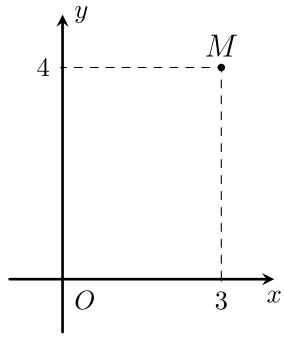
Câu 8. Mô-đun của số phức $z = 2 + 3i$ là

(A) $\sqrt{5}$. (B) 5. (C) $\sqrt{13}$. (D) 13.

Lời giải.
$z = 2 + 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.
Chọn đáp án C □

Câu 9.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.



A Phần thực là 3 và phần ảo là 4.
B Phần thực là 3 và phần ảo là $4i$.
C Phần thực là 4 và phần ảo là 3.
D Phần thực là 4 và phần ảo là $3i$.

Lời giải.

Theo ý nghĩa hình học của số phức thì điểm $M(3;4)$ sẽ biểu diễn số phức có phần thực là 3 và phần ảo là 4.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Thể tích của khối lăng trụ là

A $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **B** $\dfrac{3a^3}{4}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ $V = S_{ABC} \cdot AA'$.

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ và $AA' = a\sqrt{2}$ suy ra $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Tính thể tích V của khối trụ có bán kính đáy và chiều cao đều bằng 2 là

A $V = 4\pi$. **B** $V = 16\pi$. **C** $V = 8\pi$. **D** $V = 12\pi$.

Lời giải.

$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4 \cdot 2 = 8\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x - 4y + 6z - 1 = 0$. Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là

A $\vec{n} = (1;-2;3)$. **B** $\vec{n} = (2;4;6)$. **C** $\vec{n} = (1;2;3)$. **D** $\vec{n} = (-1;2;3)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;-2;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Trong không gian với tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;4;2)$ và bán kính $R = 9$. Phương trình mặt cầu (S) là

A $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 81$. **B** $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 9$.
C $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 9$. **D** $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 81$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;4;2)$ và bán kính $R = 9$ có phương trình $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2 = 81$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì π. **B** Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì π.

(C) Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì π. (D) Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kì π.

Lời giải.

Hàm số $y = \tan x$; $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì π.

Hàm số $y = \sin x$; $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π.

Hàm số $y = \sin 2x = \sin(2x + 2\pi) = \sin[2(x + \pi)]$. Vậy hàm số tuần hoàn với chu kì π.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Cho cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu $u_1 = -6$ và công sai $d = 4$. Tính tổng S của 14 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

(A) $S = 46$. (B) $S = 308$. (C) $S = 644$. **D** $S = 280$.

Lời giải.

Ta có: $S = S_{14} = \dfrac{14[2 \cdot (-6) + 13 \cdot 4]}{2} = 280$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

(A) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

(C) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau.

(D) Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Lời giải.

Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(2;5)$. Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (1;2)$ biến điểm M thành điểm M'. Tọa độ điểm M' là

A $M'(3;7)$. (B) $M'(1;3)$. (C) $M'(3;1)$. (D) $M'(4;7)$.

Lời giải.

Gọi $\mathrm{T}_{\vec{v}}(M) = M'(x';y') \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2 + 1 = 3 \\ y' = 5 + 2 = 7 \end{cases}$. Vậy $M'(3;7)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$?

(A) $y = \dfrac{1}{x}$. **B** $y = x^3 - 3x + 2019$.

(C) $y = \dfrac{x}{2x - 1}$. (D) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$.

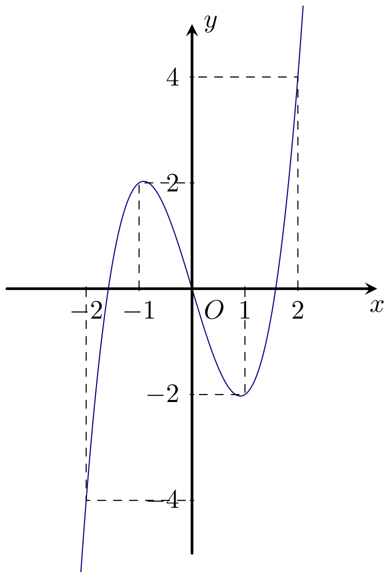
Lời giải.

$y = x^3 - 3x + 2019 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho bởi hình vẽ bên.
Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là



Ⓐ $y = 2$. Ⓑ $y = 2x$.
Ⓒ $y = 2x - 1$. **D** $y = -2x$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là $A(-1; 2)$ và $B(2; -1)$.

Phương trình đường thẳng qua hai điểm A, B có dạng $y = ax + b$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} -a + b = 2 \\ a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \end{cases}$. Vậy $y = -2x$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & khi \quad x \leqslant 1 \\ x & khi \quad x > 1 \end{cases}$.

Tính giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 3]$.

A $\max\limits_{[-2;3]} y = 3$. Ⓑ $\max\limits_{[-2;3]} y = 1$. Ⓒ $\max\limits_{[-2;3]} y = -6$. Ⓓ $\max\limits_{[-2;3]} y = -4$.

Lời giải.

Nhận xét hàm $y = f(x)$ liên trục trên $\mathbb{R}$.

Đặt $g(x) = -x^2 + 2 \Rightarrow g'(x) = -2x$. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in [-2; 3]$.

Đặt $h(x) = x \Rightarrow h'(x) = 1 > 0, \forall x$.

Ta có: $f(0) = g(0) = 2$; $f(-2) = g(-2) = -2$; $f(3) = h(3) = 3$.

Vậy $\max\limits_{[-2;3]} y = 3$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 21. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến giao điểm của các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1 - 2x}{x - 1}$ là

Ⓐ 2. Ⓑ $\sqrt{2}$. **C** $\sqrt{5}$. Ⓓ 5.

Lời giải.

Giao điểm của hai đường tiệm cận là $I(1; -2) \Rightarrow OI = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 22. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số: $y = \dfrac{2x^2 + 6mx + 4}{mx + 2}$ đi qua điểm $A(-1; 4)$.

Ⓐ $m = 1$. **B** $m = -1$. Ⓒ $m = \dfrac{1}{2}$. Ⓓ $m = 2$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số qua điểm $A(-1;4)$ nên ta có:
$4=\dfrac{2-6m+4}{-m+2}\Leftrightarrow 4(-m+2)=6-6m\Leftrightarrow 2m=-2\Leftrightarrow m=-1.$
Chọn đáp án B □

Câu 23. Cho $a=\log_5 2$. Tính $\log_{25} 20$ theo a.

A. $2a+1$. B. $a-\dfrac{1}{2}$. C. $a+\dfrac{1}{2}$. D. $2a-1$.

Lời giải.
$\log_{25} 20=\dfrac{1}{2}\log_5(4\cdot 5)=\dfrac{1}{2}(\log_5 4+\log_5 5)=\dfrac{1}{2}(2\log_5 2+1)=a+\dfrac{1}{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 24. Với những giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y=3^{x+1}$ không nằm phía dưới đường thẳng $y=27$.

A. $x\geqslant 2$. B. $x>3$. C. $x\leqslant 2$. D. $x\leqslant 3$.

Lời giải.
Đồ thị hàm số $y=3^{x+1}$ không nằm phía dưới đường thẳng $y=27$ khi $3^{x+1}\geqslant 27$.
$3^{x+1}\geqslant 27\Leftrightarrow 3^{x+1}\geqslant 3^3\Leftrightarrow x+1\geqslant 3\Leftrightarrow x\geqslant 2$.
Chọn đáp án A □

Câu 25. Cho hai tích phân $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x=7$ và $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Tính $\displaystyle\int_3^5[1+f(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. 3. B. 11. C. 5. D. 13.

Lời giải.
Ta có $\displaystyle\int_3^5[1+f(x)]\,\mathrm{d}x=\int_3^5\mathrm{d}x+\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x=2+\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=5.$
Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho $\displaystyle\int_{\ln 2}^{1+\ln 2} f(x)\,\mathrm{d}x=2018$. Tính $\displaystyle\int_1^e\frac{1}{x}f(\ln 2x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=2018$. B. $I=4036$. C. $I=\dfrac{1009}{2}$. D. $I=1009$.

Lời giải.
Đặt $\ln 2x=t\Rightarrow\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.
Khi đó $\displaystyle\int_1^e\frac{1}{x}f(\ln 2x)\,\mathrm{d}x=\int_{\ln 2}^{1+\ln 2}f(t)\,\mathrm{d}t=2018.$
Chọn đáp án A □

Câu 27. Với các số phức z thỏa mãn $|(1+i)z+1-7i|=\sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$.

A. $\max|z|=3$. B. $\max|z|=4$. C. $\max|z|=7$. D. $\max|z|=6$.

Lời giải.
Gọi $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó

$$|(1+i)z+1-7i|=\sqrt{2}\quad\Leftrightarrow\quad|(1+i)(x+yi)+1-7i|=\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ |x-y+1+(x+y-7)i|=\sqrt{2}\\&\Leftrightarrow\ (x-y+1)^2+(x+y-7)^2=2\\&\Leftrightarrow\ x^2+y^2-6x-8y+24=0\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=1.\end{aligned}$$

Vậy tập hợp z là đường tròn tâm $I(3;4)$ bán kính $R=1$.
$\max|z|=OI+R=5+1=6$.
Chọn đáp án D □

Câu 28. Cho số phức $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+1=(1+i)|z-2i|$ và $|z|>1$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+3(a-b)^2$.

A. $P=16$. B. $P=10$. C. $P=14$. D. $P=12$.

Lời giải.

$z+1=(1+i)|z-2i|\Leftrightarrow a+1+bi=(1+i)\sqrt{a^2+(b-2)^2}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a^2+(b-2)^2}=a+1 & (1)\\ \sqrt{a^2+(b-2)^2}=b & (2)\end{cases}$

(1), (2) $\Rightarrow b=a+1$ thế vào phương trình (1)

$\sqrt{a^2+(a-1)^2}=a+1\Leftrightarrow\begin{cases}a\geqslant-1\\ a^2-4a=0\end{cases}\Leftrightarrow a=4\Rightarrow b=5.$

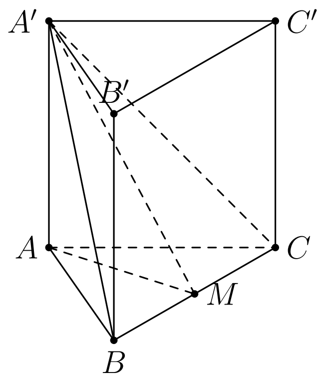
Vậy $P=a+b+3(a-b)^2=12$.
Chọn đáp án D □

Câu 29. Hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60°. Tính thể tích của khối lăng trụ.

A. $3a^3\sqrt{3}$. B. $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. C. $3a^3\sqrt{6}$. D. $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC. Tam giác ABC đều nên $AM\perp BC$, vì AA' là đường cao lăng trụ nên $BC\perp AA'$. Do đó, $BC\perp(AA'M)$ nên $\widehat{((A'BC);(ABC))}=\widehat{AMA'}=60^\circ$.
Vậy thì $AA'=\tan\widehat{AMA'}\cdot AM$ suy ra $AA'=\tan60^\circ\cdot a\sqrt{3}=3a$.
Vậy thể tích cần tìm là $V=AA'\cdot S_{ABC}=3a\cdot\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{4}=3a^3\sqrt{3}$.



Chọn đáp án A □

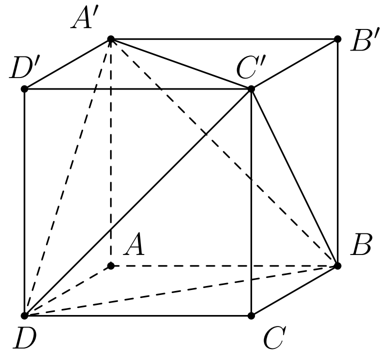
Câu 30. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tỉ số thể tích của khối tứ diện $BDA'C'$ và khối hộp là

A. $\dfrac{1}{2}$. B. $\dfrac{1}{4}$. C. $\dfrac{1}{3}$. D. $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Gọi V là thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

$V_{BDA'C'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - 4V_{DA'B'C'} = V - \dfrac{2}{3}V = \dfrac{1}{3}V$.

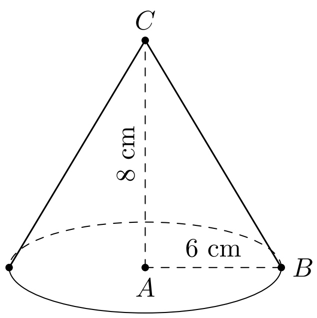


Chọn đáp án C ☐

Câu 31. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Gọi V_1 là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB và V_2 là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC. Khi đó, tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A $\dfrac{9}{16}$. **B** $\dfrac{3}{4}$. **C** $\dfrac{4}{3}$. **D** $\dfrac{16}{9}$.

Lời giải.



Thể tích khối nón có bán kính đáy r và đường cao h được tính theo công thức $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Do đó $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi \cdot AC^2 \cdot AB$ và $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi \cdot AB^2 \cdot AC \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{AC^2 \cdot AB}{AB^2 \cdot AC} = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{2}$, $A(2;1;4)$. Gọi $H(a;b;c)$ là điểm thuộc d sao cho AH có độ dài nhỏ nhất. Tính $T = a^3 + b^3 + c^3$.

A $T = 8$. **B** $T = 62$. **C** $T = 13$. **D** $T = \sqrt{5}$.

Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

$H \in d \Rightarrow H(1+t; 2+t; 1+2t)$.

Độ dài $AH = \sqrt{(t-1)^2 + (t+1)^2 + (2t-3)^2} = \sqrt{6t^2 - 12t + 11} = \sqrt{6(t-1)^2 + 5} \geqslant \sqrt{5}$.

Độ dài AH nhỏ nhất bằng $\sqrt{5}$ khi $t = 1 \Rightarrow H(2;3;3)$.

Vậy $a = 2$, $b = 3$, $c = 3 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 62$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 33. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxy, có tất cả bao nhiêu số tự nhiên của tham số m để phương trình $x^2+y^2+z^2+2(m-2)y-2(m+3)z+3m^2+7=0$ là phương trình của một mặt cầu.

(A) 2. (B) 3. **C** 4. (D) 5.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} a=0 \\ b=m-2 \\ c=-(m+3) \\ d=3m^2+7. \end{cases}$

Phương trình trên là phương trình mặt cầu khi:

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2-d>0 &\Leftrightarrow (m-2)^2+(m+3)^2-(3m^2+7)>0 \\ &\Leftrightarrow -m^2+2m+6>0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{7}<m<1+\sqrt{7}. \end{aligned}$$

Mà $m\in\mathbb{N}\Rightarrow m\in\{0,1,2,3\}$.

Vậy có bốn giá trị số tự nhiên của m thỏa điều kiện đề bài.

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Đội văn nghệ của nhà trường gồm 4 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 2 học sinh lớp 12C. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ đội văn nghệ để biểu diễn trong lễ bế giảng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn?

(A) 120. **B** 98. (C) 150. (D) 360.

Lời giải.

Số cách chọn ngẫu nhiên 5 học sinh C_9^5 cách.

Số cách chọn 5 học sinh chỉ có 2 lớp: $\mathrm{C}_7^5+\mathrm{C}_6^5+\mathrm{C}_5^5$.

Vậy số cách chọn 5 học sinh có cả 3 lớp là $\mathrm{C}_9^5-(\mathrm{C}_7^5+\mathrm{C}_6^5+\mathrm{C}_5^5)=98$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Cho cấp số cộng (u_n) và gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của nó. Biết $S_7=77$ và $S_{12}=192$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng đó

(A) $u_n=5+4n$. **B** $u_n=3+2n$. (C) $u_n=2+3n$. (D) $u_n=4+5n$.

Lời giải.

Giả sử cấp số cộng có số hạng đầu là u_1 và công sai d.

Ta có: $\begin{cases} S_7=77 \\ S_{12}=192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7u_1+\dfrac{7\cdot 6\cdot d}{2}=77 \\ 12u_1+\dfrac{12\cdot 11\cdot d}{2}=192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7u_1+21d=77 \\ 12u_1+66d=192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=5 \\ d=2. \end{cases}$

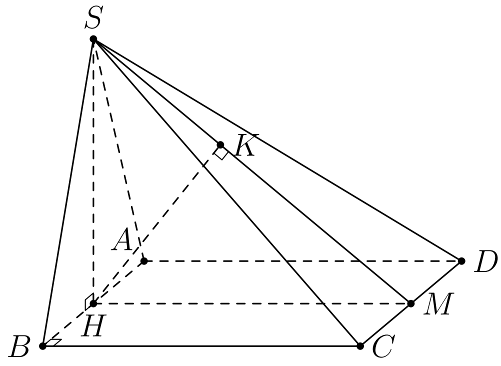
Khi đó: $u_n=u_1+(n-1)d=5+2(n-1)=3+2n$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ B đến (SCD).

(A) 1. (B) $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. (C) $\sqrt{2}$. **D** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải.



Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB và CD suy ra $HM = 1$, $SH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $SM = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.
Vì tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.
Cách 1: $V_{S.BCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$.
Khoảng cách từ B đến (SCD) là

$$\mathrm{d}(B,(SCD)) = \frac{3V_{S.BCD}}{S_{\triangle SCD}} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Cách 2: Vì $AB \parallel CD$ nên $AB \parallel (SCD)$.
Do đó $\mathrm{d}(B;(SCD)) = \mathrm{d}(H;(SCD)) = HK$ với $HK \perp SM$ trong $\triangle SHM$.
Ta có: $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HM^2} \Rightarrow HK = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.
Chọn đáp án D □

Câu 37. Tổng các nghiệm của phương trình $x^3 - x = \sqrt[3]{2x+1} + 1$ bằng

A 1. **B** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **C** $\dfrac{1}{2}$. **D** 0.

Lời giải.
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$
$x^3 - x = \sqrt[3]{2x+1} + 1 \Leftrightarrow x^3 + x = 2x + 1 + \sqrt[3]{2x+1}$.
Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, t \in \mathbb{R}$, khi đó phương trình đã cho có dạng $f(x) = f\left(\sqrt[3]{2x+1}\right) \quad (*)$.
Ta có $f'(x) = 3t^2 + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, do đó phương trình $(*)$ tương đương

$$x = \sqrt[3]{2x+1} \Leftrightarrow x^3 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình đã cho bằng $-1 + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 0$.
Chọn đáp án D □

Câu 38. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = x^4 + x^3 - mx^2$ có 3 điểm cực trị?

A $m \in (0; +\infty)$. **B** $m \in \left(-\dfrac{9}{2}; +\infty\right) \setminus \{0\}$.

C $m \in (-\infty; 0)$. **D** $m \in \left(-\dfrac{9}{32}; +\infty\right) \setminus \{0\}$.

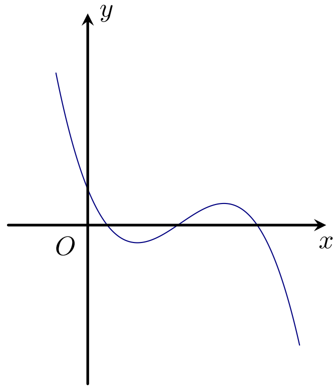
Lời giải.
$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2mx = x(4x^2 + 3x - 2m)$.
Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi qua 3 điểm nghiệm đó.
$\Leftrightarrow 4x^2 + 3x - 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x \neq 0$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 + 32m > 0 \\ 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{9}{32} \\ m \neq 0. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 39.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Mệnh đề nào sau đây đúng

A $a < 0,\ b > 0,\ c < 0,\ d > 0.$ B $a > 0,\ b > 0,\ c < 0,\ d > 0.$
C $a < 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d > 0.$ D $a < 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0.$



Lời giải.

Ta có: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \cap Oy \Rightarrow y = d$. Dựa vào đồ thị ta thấy $d > 0$.
Ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty \Rightarrow a < 0$.
Lại có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, theo đồ thị ta thấy:
$y' = 0$ có 2 nghiệm dương $\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{2b}{3a} > 0 \\ \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c < 0. \end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$, $\log_c x = 4$ và $abc \neq 1; x \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $\log_{abc} x$.

A 9. B 24. C $\dfrac{12}{13}$. D $\dfrac{1}{24}$.

Lời giải.

$\log_a x = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_x a} = 2.$

$\log_b x = 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_x b} = 3.$

$\log_c x = 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_x} = 4.$

$\log_{abc} x = \dfrac{1}{\log_x abc} = \dfrac{1}{\log_x a + \log_x b + \log_x c} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{12}{13}.$

Chọn đáp án C □

Câu 41. Biết tập nghiệm của bất phương trình $\log_4(3^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{4}} \dfrac{3^x - 1}{16} \leqslant \dfrac{3}{4}$ có dạng $(a; b] \cup [c; +\infty)$, với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.

A 6. B 4. C 9. D 3.

Lời giải.

Điều kiện: $3^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$.
Khi đó bất phương trình $\Leftrightarrow \log_4(3^x - 1) \cdot \left[\log_{\frac{1}{4}}(3^x - 1) - \log_{\frac{1}{4}} 16\right] \leqslant \dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \log_4(3^x - 1) \cdot [-\log_4(3^x - 1) + 2] \leqslant \dfrac{3}{4}.$

Đặt $t = \log_4(3^x - 1)$.

Bất phương trình trở thành $t(-t+2) \leqslant \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow -t^2+2t-\dfrac{3}{4} \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leqslant \dfrac{1}{2} \\ t \geqslant \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

Với $t \leqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \log_4(3^x-1) \leqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 3^x - 1 \leqslant 2 \Leftrightarrow 3^x \leqslant 3 \Leftrightarrow x \leqslant 1$.

Với $t \geqslant \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \log_4(3^x-1) \geqslant \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 3^x - 1 \geqslant 8 \Leftrightarrow 3^x \geqslant 9 \Leftrightarrow x \geqslant 2$.

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = (0;1] \cup [2;+\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;\mathrm{e}]$, biết $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = 1$, $f(\mathrm{e}) = 1$.

Ta có $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f'(x) \cdot \ln x \,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $I = 4$. (B) $I = 3$. (C) $I = 1$. **D** $I = 0$.

Lời giải.

Xét $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f'(x) \cdot \ln x \,\mathrm{d}x$ đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Khi đó $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f'(x) \cdot \ln x \,\mathrm{d}x = f(x) \cdot \ln x \Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = 1 - 1 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Cho số phức z thỏa mãn $\dfrac{1+i}{z}$ là số thực và $|z-2| = m$ với $m \in \mathbb{R}$. Gọi m_0 là một giá trị của m để có đúng một số phức thỏa mãn bài toán. Khi đó

(A) $m_0 \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. (B) $m_0 \in \left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **C** $m_0 \in \left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. (D) $m_0 \in \left(\dfrac{3}{2};2\right)$.

Lời giải.

Đặt $z = a+bi, (a,b \in \mathbb{R},\ a^2+b^2 \neq 0)$. Ta có $\dfrac{1+i}{z} = \dfrac{(1+i)(a-bi)}{a^2+b^2} = \dfrac{a+b+(a-b)i}{a^2+b^2}$.

Do $\dfrac{1+i}{z}$ là số thực nên $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$. Khi đó $z = a + ai,\ a \in \mathbb{R}$.

Ta có $|z-2| = m \Leftrightarrow \begin{cases} m \geqslant 0 \\ (a-2)^2 + a^2 = m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geqslant 0 \\ 2a^2 - 4a + 4 - m^2 = 0 \quad (1). \end{cases}$

Để tồn tại duy nhất số phức thỏa mãn bài toán thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất, tương đương $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$ (do $m \geqslant 0$).

Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Đường thẳng BC' tạo với $(ACC'A')$ một góc 30°. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $V = a^3\sqrt{6}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $V = 3a^3$. (D) $V = a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.

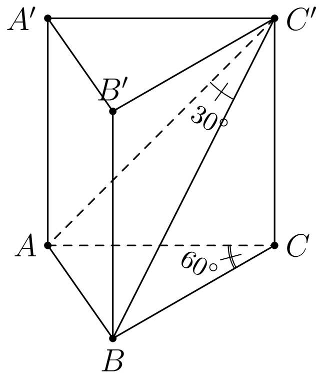
Xét tam giác ABC vuông tại A ta có:
$\tan 60^\circ = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AB = a\sqrt{3}$. Khi đó $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\begin{cases} BA \perp AC \\ BA \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BA \perp (ACC'A') \Rightarrow$ hình chiếu vuông góc của cạnh BC' trên mặt phẳng $(ACC'A')$ là AC'.
Khi đó góc $\widehat{BC'A} = 30^\circ$.

Xét tam giác ABC' vuông tại A ta có: $\tan 30^\circ = \dfrac{AB}{AC'} \Rightarrow AC' = 3a$.

Khi đó: $CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = 2a\sqrt{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = CC' \cdot S_{\triangle ABC} = a^3\sqrt{6}$.



Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có thể tích là V. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AC, AD, BD, BC. Thể tích khối chóp $AMNPQ$ là

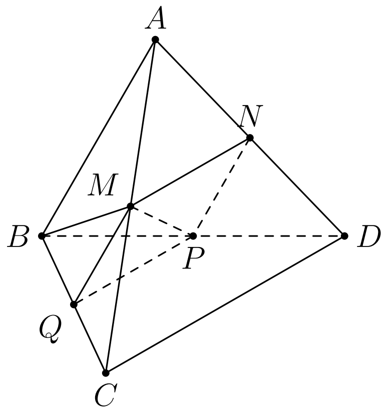
A $\dfrac{V}{6}$. **B** $\dfrac{V}{3}$. **C** $\dfrac{V}{4}$. **D** $\dfrac{V\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $V_{AMNPQ} = 2V_{APMQ}$ (do $MNPQ$ là hình thoi), $AB \parallel MQ$
$\Rightarrow V_{APMQ} = V_{BPMQ}$.

Mặt khác do P là trung điểm của BD nên $\mathrm{d}(P,(ABC)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(D,(ABC))$, đồng thời $S_{BQM} = \dfrac{1}{4}S_{ABC}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_{BPMQ} &= \frac{1}{3}\mathrm{d}(P,(ABC)) \cdot S_{BQM} = \frac{1}{6}\mathrm{d}(D,(ABC)) \cdot \frac{1}{4}S_{ABC} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}\mathrm{d}(D,(ABC)) \cdot S_{ABC} = \frac{V}{8} \\ \Rightarrow V_{AMNPQ} &= \frac{V}{4}. \end{aligned}$$

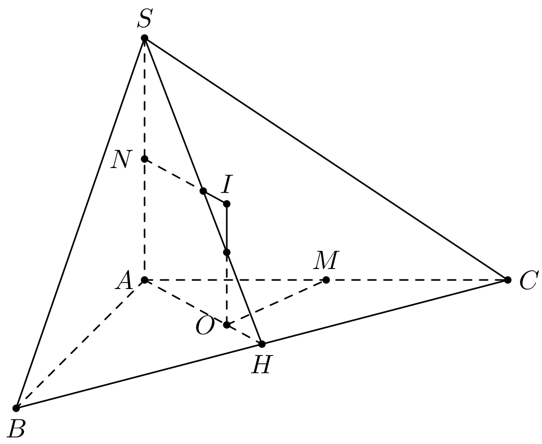


Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a$, tam giác ABC cân tại A, $BC = 2a\sqrt{2}$, $\cos\widehat{ACB} = \dfrac{1}{3}$. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A $S = \dfrac{97\pi a^2}{4}$. **B** $S = \dfrac{97\pi a^2}{2}$. **C** $S = \dfrac{97\pi a^2}{\sqrt{3}}$. **D** $S = \dfrac{97\pi a^2}{5}$.

Lời giải.

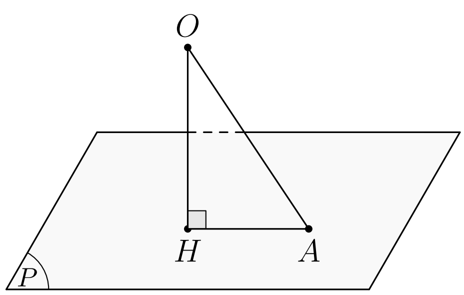


Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow HC = \dfrac{BC}{2} = a\sqrt{2}$.
Do $\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow AH \perp BC$.
$\cos \widehat{ACB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow AC = 3HC \Rightarrow AC = 3a\sqrt{2}$.
$\Rightarrow AH = \sqrt{AC^2 - HC^2} = \sqrt{18a^2 - 2a^2} = 4a$.
Gọi M là trung điểm AC, trong mp (ABC) vẽ đường trung trực AC cắt AH tại $O \Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
Ta có $\cos \widehat{ACH} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \sin \widehat{CAH} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \cos \widehat{CAH} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.
Trong $\triangle AMO$ vuông tại $M \Rightarrow AO = \dfrac{AM}{\cos \widehat{CAH}} = \dfrac{3a\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}} = \dfrac{9a}{4}$.
Gọi N là trung điểm SA. Trong mp (SAH) vẽ trung trực SA cắt đường thẳng qua O và vuông góc mp (ABC) tại I. Chứng minh được I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.
Ta có $ANIO$ là hình chữ nhật
$\Rightarrow$ đường chéo $AI = \sqrt{AO^2 + AN^2} = \sqrt{\dfrac{81a^2}{16} + a^2} = \sqrt{\dfrac{97a^2}{16}} = \dfrac{\sqrt{97}}{4}a$.
Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S = 4\pi R^2 = 4\pi\dfrac{97a^2}{16} = \dfrac{97}{4}\pi a^2$ (đvdt).
Chọn đáp án A □

Câu 47. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất. Khi đó, mặt phẳng (P) đi qua điểm nào sau đây?

A $M_1(1;2;0)$. **B** $M_2(1;-2;0)$. **C** $M_3(-1;2;0)$. **D** $M_4(-1;-2;0)$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (P)
Ta có: $OH \leqslant OA$
Để $\mathrm{d}(O,(P))$ max $\Leftrightarrow OH = OA \Leftrightarrow H \equiv A$
$\Leftrightarrow OA \perp (P)$ hay $\overrightarrow{OA}$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P).
Ta có: (P) qua $A(1;1;1)$ và nhận $\overrightarrow{OA} = (1;1;1)$ là véc-tơ pháp tuyến.

Phương trình tổng quát của (P) là:

$$1\cdot(x-1)+1\cdot(y-1)+1\cdot(z-1)=0 \Leftrightarrow x+y+z-3=0.$$

Vậy (P) đi qua điểm $M_1(1;2;0)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y+z-3=0$ sao cho $MA=MB=MC$.

(A) $M(2;0;-1)$. (B) $M(0;2;-1)$. (C) $M(1;-1;3)$. **D** $M(2;3;-7)$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y;z)$.

Ta có $\begin{cases} MA=MB=MC \\ M\in(P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} MA^2=MB^2 \\ MA^2=MC^2 \\ M\in(P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(x-2)^2+(y+2)^2+(z- \\ x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(x+2)^2+y^2+(z-1)^2 \\ 2x+2y+z-3=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x+6y+2z=-4 \\ 4x+2y+2z=0 \\ 2x+2y+z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=-7. \end{cases}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Có 13 học sinh của một trường THPT đạt danh hiệu học sinh xuất sắc trong đó khối 12 có 8 học sinh nam và 3 học sinh nữ, khối 11 có 2 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh bất kỳ để trao thưởng, tính xác suất để 3 học sinh được chọn có cả nam và nữ đồng thời có cả khối 11 và 12.

A $\dfrac{57}{286}$. (B) $\dfrac{24}{143}$. (C) $\dfrac{27}{143}$. (D) $\dfrac{229}{286}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 3 học sinh từ 13 học sinh.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=\mathrm{C}_{13}^3=286$.

Gọi A là biến cố "3 học sinh được chọn có cả nam và nữ đồng thời có cả khối 11 và 12". Ta có các trường hợp sau:

TH1: Chọn 1 học sinh khối 11, 1 học sinh nam khối 12 và 1 học sinh nữ khối 12 nên có $\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_8^1\mathrm{C}_3^1=48$ cách.

TH2: Chọn 1 học sinh khối 11, 2 học sinh nữ khối 12 nên có $\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_3^2=6$ cách.

TH3: Chọn 2 học sinh khối 11, 1 học sinh nữ khối 12 nên có $\mathrm{C}_2^2\mathrm{C}_3^1=3$ cách.

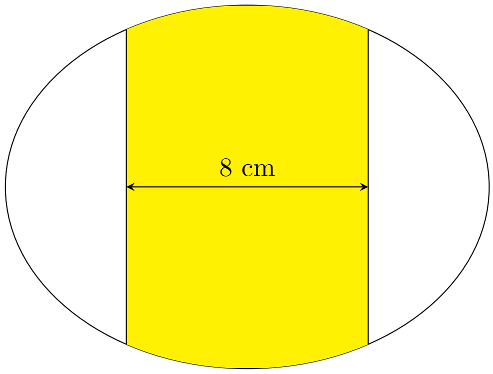
Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A|=48+6+3=57$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A)=\dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\dfrac{57}{286}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 50.

Ông Nam có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng 16 m và độ dài trục bé bằng 10 m. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8 m và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/ 1 m^2. Hỏi ông Nam cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A 7.862.000 đồng. **B** 7.653.000 đồng.
C 7.128.000 đồng. **D** 7.826.000 đồng.

Lời giải.

Giả sử elip có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, với $a>b>0$.
Từ giả thiết ta có $2a=16\Rightarrow a=8$ và $2b=10\Rightarrow b=5$.
Vậy phương trình của elip là $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{25}=1\Rightarrow\left[\begin{array}{ll} y=-\dfrac{5}{8}\sqrt{64-y^2} & (E_1)\\ y=\dfrac{5}{8}\sqrt{64-y^2} & (E_2).\end{array}\right.$
Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường (E_1), (E_2), $x=-4$, $x=4$ và diện tích của dải vườn là $S=2\displaystyle\int\limits_{-4}^{4}\dfrac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{5}{2}\displaystyle\int\limits_{0}^{4}\sqrt{64-x^2}\,\mathrm{d}x$
Khi đó số tiền là $T=80\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)\cdot 100000=7652891,82\simeq 7.653.000.$

Chọn đáp án B $\square$

——— HẾT ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. B	3. B	4. C	5. B	6. A	7. C	8. C	9. A	10. A
11. C	12. A	13. A	14. B	15. D	16. B	17. A	18. B	19. D	20. A
21. C	22. B	23. C	24. A	25. C	26. A	27. D	28. D	29. A	30. C
31. C	32. B	33. C	34. B	35. B	36. D	37. D	38. D	39. A	40. C
41. D	42. D	43. C	44. A	45. C	46. A	47. A	48. D	49. A	50. B

24 ĐỀ THI THỬ SỐ 24-MAX8

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=-2+t \\ y=1+2t \\ z=5-3t \end{cases}$, $(t\in\mathbb{R})$ có véc-tơ chỉ phương là:

A. $\vec{a}=(-1;-2;3)$. B. $\vec{a}=(2;4;6)$. C. $\vec{a}=(1;2;3)$. D. $\vec{a}=(-2;1;5)$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}=(1;2;-3)$ hay $\vec{u}'=(-1;-2;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Phương trình nào dưới đây vô nghiệm?

A. $\sin x+3=0$. B. $2\cos^2 x-\cos x-1=0$.
C. $\tan x+3=0$. D. $3\sin x-2=0$.

Lời giải.

Ta có $-1\leqslant \sin x\leqslant 1$ nên phương trình $\sin x=-3$ vô nghiệm.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Gieo một con súc sắc 2 lần. Số phần tử của không gian mẫu là

A. 6. B. 12. C. 18. D. 36.

Lời giải.

$n(\Omega)=\mathrm{C}_6^1\cdot\mathrm{C}_6^1=36$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+5x+6}$. Khi đó hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng nào sau đây?

A. $(-3;2)$. B. $(-2;+\infty)$. C. $(-\infty;3)$. D. $(2;3)$.

Lời giải.

Hàm số có nghĩa khi $x^2+5x+6\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -3 \\ x\neq -2. \end{cases}$

Vậy hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+5x+6}$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;-3)$; $(-3;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(1;2)$. Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{u}=(-3;4)$ biến điểm M thành điểm M' có tọa độ là

A. $M'(-2;6)$. B. $M'(2;5)$. C. $M'(2;-6)$. D. $M'(4;-2)$.

Lời giải.

Theo biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến $\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=1-3 \\ y'=2+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-2 \\ y'=6. \end{cases}$

Vậy $M'(-2;6)$.

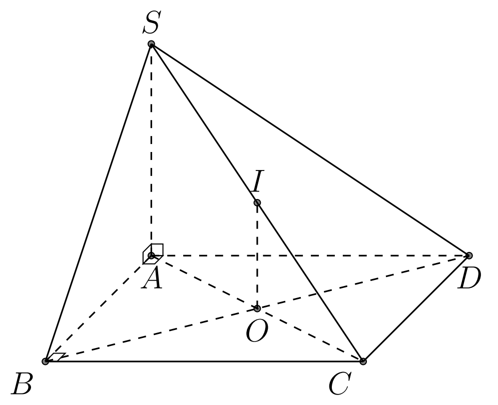
Chọn đáp án A □

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ làhình vuông tâm O, $SA \perp (ABCD)$. Gọi I làtrung điểm của SC. Khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng độ dài đoạn thẳng nào?

A IO. (B) IA. (C) IC. (D) IB.

Lời giải.

Do I là trung điểm của SC và O làtrung điểm AC nên $IO \parallel SA$.
Do $SA \perp (ABCD)$ nên $IO \perp (ABCD)$, hay khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng độ dài đoạn thẳng IO.



Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

(A) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

B Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.

(C) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

(D) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(0; 3)$:
+) Hàm số sẽ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$ và $(2; 3)$.
+) Nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Kết luận nào sau đây về tính đơn điệu của hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ là đúng?

A Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$.

(B) Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(C) Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(D) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

$y = \dfrac{2x-1}{x+1}$

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$y' = \dfrac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathscr{D}$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.

B Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

C Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.

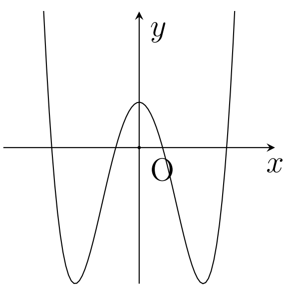
D Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Đường cong trong hình là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A $y = -x^4 + 4x^2 + 1$.

B $y = x^4 + 2x^2 + 1$.

C $y = x^4 - 4x^2 + 1$.

D $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

Lời giải.

Tacó:

Nhánh sau cùng bên phải của đồ thị hàm số đi lên nên ta có $a > 0 \Rightarrow$ loại $y = -x^4 + 4x^2 + 1$.

Đồ thị hàm số có ba cực trị nên ta có $a \cdot b < 0 \Rightarrow$ loại $y = x^4 + 2x^2 + 1$.

Đồ thị hàm số giao với Oy tại điểm có tung độ dương nên ta loại $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Hàm số $y=(4-x^2)^2+1$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;1]$ là

(A) 10. (B) 12. (C) 14. **(D) 17.**

Lời giải.

Ta có: $y'=4x^3-16x$, cho $y'=0 \Rightarrow 4x^3-16x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2\notin[-1;1] \\ x=2\notin[-1;1] \\ x=0\in[-1;1]. \end{array}\right.$

Khi đó: $f(-1)=10,\ f(1)=10,\ f(0)=17$.

Vậy $\max\limits_{[-1;1]} y=f(0)=17$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của chúng?

(A) $y=\ln x$. (B) $y=\mathrm{e}^{-x}$. (C) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$. (D) $y=\log_{\frac{1}{5}} x$.

Lời giải.

Phương án $y=\ln x$.

Tập xác định $\mathscr{D}=(0;+\infty)$. Tacó $y'=\dfrac{1}{x}\Rightarrow y'>0,\ \forall x\in(0;+\infty)$.

Hàm số đồng biến trên $\mathscr{D}=(0;+\infty)$.

Phương án $y=\mathrm{e}^{-x}$.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Ta có $y'=-\mathrm{e}^{-x}\Rightarrow y'<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathscr{D}=\mathbb{R}$

Phương án $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Tacó $y'=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\ln\dfrac{1}{3}\Rightarrow y'<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

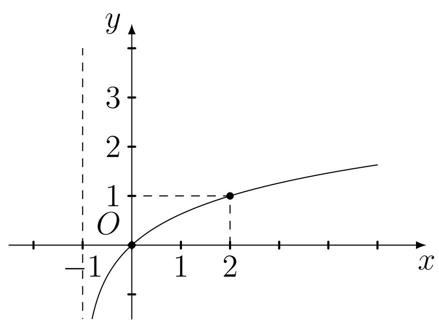
Phương án $y=\log_{\frac{1}{5}} x$.

Tập xác định $\mathscr{D}=(0;+\infty)$. Tacó $y'=\log_{\frac{1}{5}} x=\dfrac{1}{x\ln\dfrac{1}{5}}\Rightarrow y'<0,\ \forall x\in(0;+\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathscr{D}=(0;+\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Đồ thị cho bởi hình bên là của hàm số nào?



(A) $y=\log_2 x+1$. **(B) $y=\log_3(x+1)$.** (C) $y=\log_3 x$. (D) $y=\log_2(x+1)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy khi $x=0$ thì $y=0$ và khi $x=2$ thì $y=1$. Nên ta thấy đáp án B thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int 0\,\mathrm{d}x = C$.
B. $\int x^4\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^5}{5} + C$.
C. $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C$.
D. $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.

Lời giải.

Tacó: $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

Vậy C sai.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$ là

A. $\dfrac{1}{2}\ln(2x+3) + C$.
B. $\dfrac{1}{2}\ln|2x+3| + C$.
C. $\ln|2x+3| + C$.
D. $\dfrac{1}{\ln 2}\ln|2x+3| + C$.

Lời giải.

Áp dụng công thức nguyên hàm mở rộng: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{2x+3}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\ln|2x+3| + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Tích phân $I = \int\limits_0^{2019} 2^x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $2^{2019} - 1$.
B. $\dfrac{2^{2019}-1}{\ln 2}$.
C. $\dfrac{2^{2019}}{\ln 2}$.
D. 2^{2019}.

Lời giải.

$$I = \int\limits_0^{2019} 2^x\,\mathrm{d}x = \left.\dfrac{2^x}{\ln 2}\right|_0^{2019} = \dfrac{2^{2019}-1}{\ln 2}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 17. Tính mô-đun của số phức $z = \dfrac{5-10i}{1+2i}$.

A. $|z| = 25$.
B. $|z| = \sqrt{5}$.
C. $|z| = 5$.
D. $|z| = 2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $|z| = \dfrac{|5-10i|}{|1+2i|} = \dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} = 5$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Tìm phần ảo của số phức z biết $\overline{z} = \left(\sqrt{3}+i\right)^2\left(\sqrt{3}-i\right)$.

A. 4.
B. $4\sqrt{3}$.
C. $-4\sqrt{3}$.
D. -4.

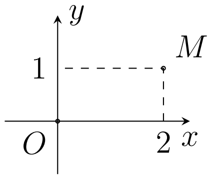
Lời giải.

Ta có: $\overline{z} = \left(\sqrt{3}+i\right)^2\left(\sqrt{3}-i\right) = 4\sqrt{3} + 4i \Rightarrow z = 4\sqrt{3} - 4i$.

Vậy phần ảo của số phức z là -4.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Trong hình vẽ bên, điểm M biểu diễn số phức z. Số phức $\overline{z}$ là



A. $2 - i$. B. $1 + 2i$. C. $1 - 2i$. D. $2 + i$.

Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta có $z = 2 + i$, suy ra $\overline{z} = 2 - i$.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Số đỉnh và số cạnh của hình hai mươi mặt đều là

A. 12 đỉnh và 30 cạnh. B. 24 đỉnh và 30 cạnh.

C. 24 đỉnh và 24 cạnh. D. 12 đỉnh và 24 cạnh.

Lời giải.

.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Cho hình chóp có diện tích mặt đáy là $3a^2$ và chiều cao bằng $2a$. Thể tích của khối chóp bằng

A. $6a^3$. B. $2a^3$. C. $3a^3$. D. a^3.

Lời giải.

Ta có $V = \dfrac{1}{3} \cdot 3a^2 \cdot 2a = 2a^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Gọi l, h, R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình trụ. Đẳng thức luôn đúng là

A. $l = h$. B. $R = h$. C. $l^2 = h^2 + R^2$. D. $R^2 = h^2 + l^2$.

Lời giải.

Trong hình trụ ta luôn có $l = h$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Một hình cầu có bán kính bằng $2(m)$. Hỏi diện tích của mặt cầu bằng bao nhiêu?

A. $4\pi(m^2)$. B. $16\pi(m^2)$. C. $8\pi(m^2)$. D. $\pi(m^2)$.

Lời giải.

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 16\pi(m^2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Một khối nón có diện tích xung quanh bằng 2π cm^2 và bán kính đáy $\dfrac{1}{2}(cm)$. Khi đó độ dài đường sinh là

A. $2(cm)$. B. $3(cm)$. C. $1(cm)$. D. $4(cm)$.

Lời giải.

Tacó: $S_{xq} = \pi Rl \Rightarrow l = \dfrac{S_{xq}}{\pi R} = \dfrac{2\pi}{\pi \cdot \dfrac{1}{2}} = 4.$

Chọn đáp án C □

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;0;0)$, $N(0;1;0)$ và $P(0;0;2)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là

A. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-1} + \dfrac{z}{2} = 0.$

B. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-1} + \dfrac{z}{2} = -1.$

C. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{1} + \dfrac{z}{2} = 1.$

D. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-1} + \dfrac{z}{2} = 1.$

Lời giải.

Ta có phương trình mặt chắn (MNP) là: $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{1} + \dfrac{z}{2} = 1.$

Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B. Biết $\triangle SAB$ là tam giác đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$.

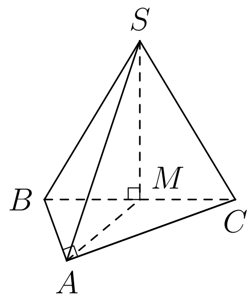
A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

B. $\dfrac{a^3}{4}$.

C. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

D. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AB, do tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$ mà $(SAB) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$.

Ta có $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

nên $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3}{4}.$

Chọn đáp án B □

Câu 27. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA' = \dfrac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là trung điểm BC. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó.

A. $V = a^3$.

B. $V = \dfrac{2a^3}{3}$.

C. $V = \dfrac{3a^3}{4\sqrt{2}}$.

D. $V = a^3\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Lời giải.

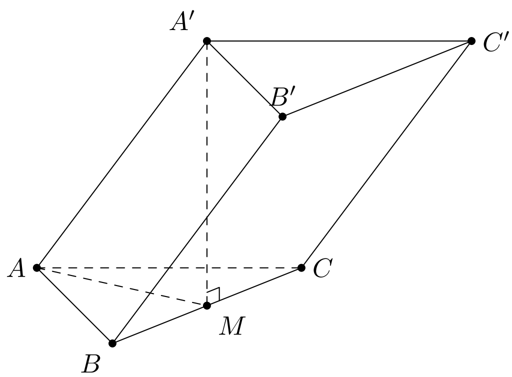
Gọi H là trung điểm BC.

Theo giả thiết, $A'H$ là đường cao hình lăng trụ và

$A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là

$V = S_{\triangle ABC} \cdot A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}.$



Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho hình lập phương có cạnh bằng 2. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương đó bằng

(A) 6π. (B) $4\sqrt{3}\pi$. (C) 8π. **D** 12π.

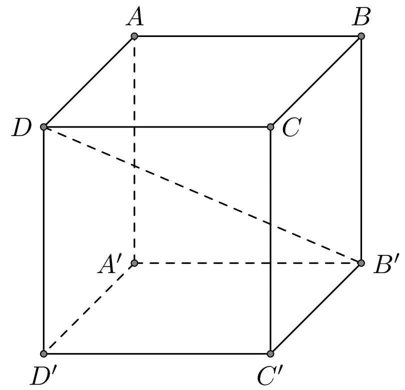
Lời giải.

Ta có:

Mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương có bán kính bằng

$R = \dfrac{B'D}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Diện tích mặt cầu là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\sqrt{3}\right)^2 = 12\pi$.



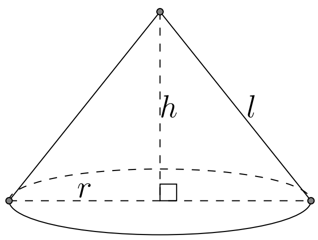
Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Một hình nón có đường cao $h = 4$ cm, bán kính đáy $r = 5$ cm. Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.

A $5\pi\sqrt{41}$. (B) 15π. (C) $4\pi\sqrt{41}$. (D) 20π.

Lời giải.

Hình nón có đường sinh $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$.



Diện tích xung quanh củahình nón là $s_{xq} = \pi rl = 5\pi\sqrt{41}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 3; 4)$, $B(8; -5; 6)$. Hình chiếu vuông góc của trung điểm I của đoạn AB trên mặt phẳng (Oyz) là điểm nào dưới đây.

A $M(0; -1; 5)$. (B) $Q(0; 0; 5)$. (C) $P(3; 0; 0)$. (D) $N(3; -1; 5)$.

Lời giải.

Tọa độ trung điểm của AB là $I(3; -1; 5)$.

Vậy hình chiếu của I trên mặt phẳng (Oyz) là $M(0; -1; 5)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-3; 4; 2), B(-5; 6; 2), C(-10; 17; -7)$. Viết phương trình mặt cầu tâm C bán kính AB.

(A) $(x + 10)^2 + (y - 17)^2 + (z - 7)^2 = 8$. **B** $(x + 10)^2 + (y - 17)^2 + (z + 7)^2 = 8$.

(C) $(x - 10)^2 + (y - 17)^2 + (z + 7)^2 = 8$. (D) $(x + 10)^2 + (y + 17)^2 + (z + 7)^2 = 8$.

Lời giải.

Tacó $AB = 2\sqrt{2}$.

Phương trình mặt cầu tâm C bán kính AB: $(x+10)^2 + (y-17)^2 + (z+7)^2 = 8$.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Cho hàm số $f(x) = x\sqrt{x}$ xác định trên $\mathscr{D} = [0; +\infty)$ có đạo hàm là

A $f'(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$. B $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$. C $f'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{x}}{x}$. D $f'(x) = x + \dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

Lời giải.

$+ \ (u \cdot v)' = u'v + uv'$; $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $x' = 1$.

$+$ Ta có $f'(x) = (x\sqrt{x})' = x'\sqrt{x} + x\left(\sqrt{x}\right)' = \sqrt{x} + \dfrac{x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_1 = -5$, $d = 2$. Số 81 là số hạng thứ bao nhiêu?

A 100. B 50. C 75. D 44.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d \Leftrightarrow 81 = -5 + (n-1)2 \Leftrightarrow n = 44$.

Vậy 81 là số hạng thứ 44.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Cho các số $1, 5, 6, 7$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số với các chữ số khác nhau?

A 12. B 24. C 64. D 256.

Lời giải.

Gọi số tự nhiên có 4 chữ số cần tìm là: $\overline{abcd}, a \neq 0$, khi đó:

a có 4 cách chọn

b có 3 cách chọn

c có 2 cách chọn

d có 1 cách chọn

Vậy có: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ số.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$ có điểm cực tiểu $A(2; -2)$. Khi đó $a + b$ bằng

A 4. B 2. C -4. D -2.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + 2a$; $y'' = 6x - 6$

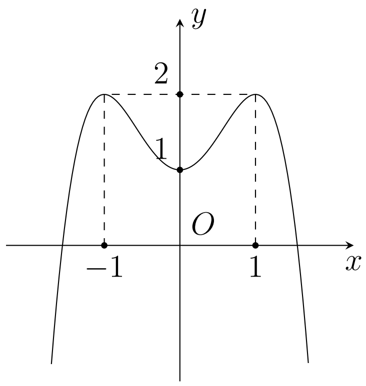
Để đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $A(2; -2)$ cần có:

$$\begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) > 0 \\ y(2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 0 \\ 6 \cdot 2 - 6 > 0 \\ 4a + b - 4 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2. \end{cases}$$

Vậy $a + b = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi phương trình $m = f(x) + 1$ với $m < 2$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 3. (B) Vô nghiệm. (C) 4. **D** 2.

Lời giải.

Ta có $m = f(x) + 1 \Leftrightarrow f(x) = m - 1(1)$.

Số nghiệm của phương trình (1) chính bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m - 1$.

Với $m < 2 \Leftrightarrow m - 1 < 1$: Khi đó đường thẳng $y = m - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 2 điểm phân biệt. Do đó phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$.

(A) $S = \frac{343}{12}$. (B) $S = \frac{793}{4}$. (C) $S = \frac{397}{4}$. **D** $S = \frac{937}{12}$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của hai đường cong là nghiệm của phương trình:

$$-x^3 + 12x = -x^2 \Leftrightarrow -x^3 + 12x + x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -3 \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Ta có $S = \int\limits_{-3}^{0} |-x^3 + 12x + x^2|\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{4} |-x^3 + 12x + x^2|\,\mathrm{d}x$

$$= \int\limits_{-3}^{0} (x^3 - 12x - x^2)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{4} (-x^3 + 12x + x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{99}{4} + \frac{160}{3} = \frac{937}{12}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z - 1| = |z + \overline{z} + 2|$ trên mặt phẳng tọa độ là một

(A) đường thẳng. (B) đường tròn. **C** parabol. (D) hypebol.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z} = x - yi \Rightarrow z + \overline{z} = 2x$.

Khi đó $2|x - 1 + yi| = |2x + 2| \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |2x + 2|$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = (x + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow y^2 = 4x$.

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z-1| = |z+\overline{z}+2|$ trên mặt phẳng tọa độ là một parabol.

Chọn đáp án C □

Câu 39. $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = x \cdot \mathrm{e}^{x^2}$. Hàm số nào sau đây không phải là $F(x)$?

A. $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + 2$.
B. $F(x) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x^2} + 5\right)$.
C. $F(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + C$.
D. $F(x) = -\dfrac{1}{2}\left(2 - \mathrm{e}^{x^2}\right)$.

Lời giải.

Ta thấy ở đáp án C thì $\left(-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + C\right)' = -x\mathrm{e}^{x^2} \neq x\mathrm{e}^{x^2}$ nên hàm số ở đáp án C không là một nguyên hàm của hàm $y = x \cdot \mathrm{e}^{x^2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ là

A. 1.
B. 0.
C. 3.
D. 2.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{1}{4}$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \dfrac{1}{4}$.

$\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x-1}{x+2} = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4} = +\infty$.

Vậy đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận đứng là $x = -2$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C không trùng với gốc tọa độ sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Trong các mặt phẳng sau, tìm mặt phẳng song song với mặt phẳng (P).

A. $3x + 2y + z + 14 = 0$.
B. $2x + y + 3z + 9 = 0$.
C. $3x + 2y + z - 14 = 0$.
D. $2x + y + z - 9 = 0$.

Lời giải.

Gọi $A(a;0;0); B(0;b;0); C(0;0;c)$

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1 \, (a \cdot b \cdot c \neq 0)$

Vì (P) qua M nên $\dfrac{3}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{1}{c} = 1(1)$

Ta có: $\overrightarrow{MA} = (a-3; -2; -1); \overrightarrow{MB} = (-3; b-2; -1); \overrightarrow{BC} = (0; -b; c); \overrightarrow{AC} = (-a; 0; c)$

Vì M là trực tâm của tam giác ABC nên: $\begin{cases} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = c \\ 3a = c \end{cases} (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $a = \dfrac{14}{3}; b = \dfrac{14}{2}; c = 14$. Khi đó phương trình (P): $3x + 2y + z - 14 = 0$

Vậy mặt phẳng song song với (P) là: $3x + 2y + z + 14 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x^2-2mx+4}$ có đồ thị là (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) có đúng 3 đường tiệm cận?

(A) $\begin{cases} m < -2 \\ m \neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$.
(B) $m > 2$.
(C) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right. \\ m \neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$.
(D) $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Để đồ thị hàm số có đúng 3 tiệm cận thì phương trình $x^2-2mx+4=0$ phải có đúng hai nghiệm phân biệt khác nghiệm của tử hay $\begin{cases} m^2-4>0 \\ 1+2m+4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right. \\ m \neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 43. Cho tam giác ABC vuông tại A có ba cạnh CA, AB, BC lần lượt tạo thành một cấp số nhân có công bội là q. Tìm q.

(A) $q = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.
(B) $q = \dfrac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}$.
(C) $q = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
(D) $q = \dfrac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$.

Lời giải.

Vì tam giác ABC vuông tại A nên $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Theo giả thiết ta có ba cạnh CA, AB, BC lần lượt tạo thành một cấp số nhân có công bội là q nên $BC = q^2 \cdot AC$ và $AB = q \cdot AC$.

Do đó $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow q^4 \cdot AC^2 = q^2 \cdot AC^2 + AC^2 \Leftrightarrow q^4 - q^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q^2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ q^2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Vì $q > 0$ nên $q^2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow q = \dfrac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, tâm I. Biết $SA = SB = SC = SD$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai** ?

(A) $SI \perp (ABCD)$.
(B) $AC \perp SD$.
(C) $BD \perp SC$.
(D) $SB \perp AD$.

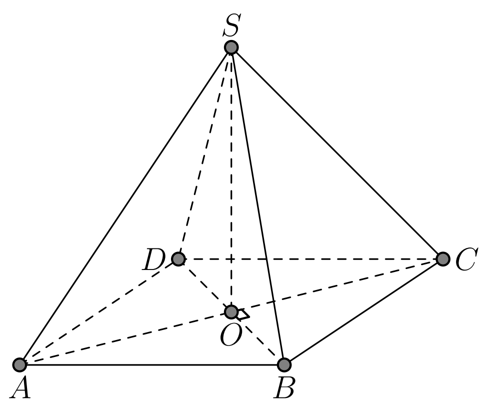
Lời giải.

Theo giả thuyết ta có: $SI \perp AC, SI \perp BD \Rightarrow SI \perp (ABCD)$

Do $SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp AC$ mà $BD \perp AC$

$\Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SD$

Tương tự : $SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp BD$ mà $BD \perp AC \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \ln(x^2+1) - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A $(-\infty; -1]$. B $(-\infty; -1)$. C $[-1; 1]$. D $B(5; 6; 2)$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{x}{x^2+1} - m$.

Để hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y'(x) \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leqslant \dfrac{x}{x^2+1},\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ có $f'(x) = \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$.

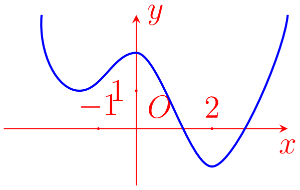
Bảng biến thiên : $f(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	-1	$\searrow$	1	$\nearrow$	0

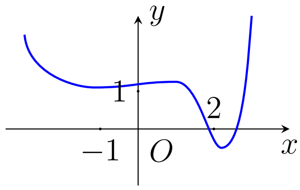
Dựa vào bảng biến thiên $m \leqslant \dfrac{x}{x^2+1},\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leqslant \min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = -1$.

Chọn đáp án A ☐

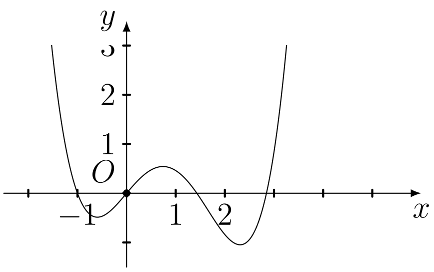
Câu 46. Một trong số các đồ thị dưới đây là đồ thị của hàm số $g(x)$ trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $g'(0) = 0$, $g''(x) < 0,\ \forall x \in (-1; 2)$. Hỏi đó là đồ thị nào?



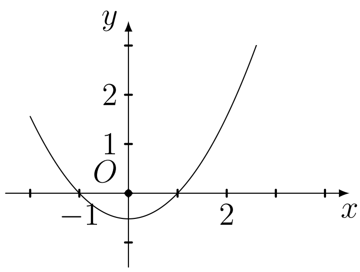
A



B



C



D

Lời giải.

Vì $\begin{cases} g''(x) < 0,\ \forall x \in (-1; 2) \\ 0 \in (-1; 2) \end{cases} \Rightarrow g''(0) < 0$

Mà $\begin{cases} g'(0) = 0 \\ g''(0) < 0 \end{cases}$ nên $x = 0$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số $g(x)$.

Quan sát đồ thị hàm số ta thấy phương án A thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A ☐

Câu 47. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\cos x - \dfrac{4}{3}\cos^3 x$ trên $[0; \pi]$.

A $\max\limits_{[0;\pi]} y = \dfrac{2}{3}$. **B** $\max\limits_{[0;\pi]} y = \dfrac{10}{3}$. **C** $\max\limits_{[0;\pi]} y = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **D** $\max\limits_{[0;\pi]} y = 0$.

Lời giải.

Đặt: $t = \cos x \Rightarrow t \in [-1;1] \Rightarrow y = 2t - \dfrac{4}{3}t^3$.

$y' = 2 - 4t^2$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \in [-1;1] \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \in [-1;1]. \end{array}\right.$

Ta có: $y(-1) = \dfrac{-2}{3}$, $y\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{-2\sqrt{2}}{3}$, $y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $y(1) = \dfrac{2}{3}$.

Vậy: $\max\limits_{[0;\pi]} y = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số k để có $\displaystyle\int_1^k (2x-1)\,\mathrm{d}x = 4\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

A $\left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = 2 \end{array}\right.$. **B** $\left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = -2 \end{array}\right.$. **C** $\left[\begin{array}{l} k = -1 \\ k = -2 \end{array}\right.$. **D** $\left[\begin{array}{l} k = -1 \\ k = 2 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Ta có: $\displaystyle\int_1^k (2x-1)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int_1^k (2x-1)\mathrm{d}(2x-1) = \left.\dfrac{(2x-1)^2}{4}\right|_1^k = \dfrac{(2k-1)^2}{4} - \dfrac{1}{4}$

Mà $4\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = 4\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = 4\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1} = 2$

Khi đó: $\displaystyle\int_1^k (2x-1)\,\mathrm{d}x = 4\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{(2k-1)^2-1}{4} = 2 \Leftrightarrow (2k-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 2 \\ k = -1 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Cho số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right| = 1$ và $\left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right| = 1$. Tính $P = a + b$.

A $P = 7$. **B** $P = -1$. **C** $P = 1$. **D** $P = 2$.

Lời giải.

Ta có $\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z-i| \Leftrightarrow |a-1+bi| = |a+(b-1)i| \Leftrightarrow 2a - 2b = 0$ (1).

$\left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-3i| = |z+i| \Leftrightarrow |a+(b-3)i| = |a+(b+1)i| \Leftrightarrow b = 1$ (2).

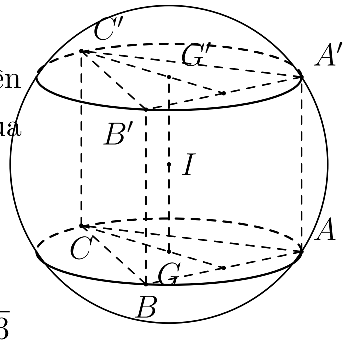
Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$. Vậy $P = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có các cạnh đều bằng a. Tính diện tích S của mặt cầu đi qua 6 đỉnh của hình lăng trụ đó.

A $S = \dfrac{49\pi a^2}{144}$. **B** $S = \dfrac{7a^2}{3}$. **C** $S = \dfrac{7\pi a^2}{3}$. **D** $S = \dfrac{49a^2}{144}$.

Lời giải.



Gọi mặt cầu đi qua 6 đỉnh của lăng trụ là (S) tâm I, bán kính R.
Do $IA = IB = IC = IA' = IB' = IC' = R \Rightarrow$ hình chiếu của I trên các mặt (ABC), $(A'B'C')$ lần lượt là tâm G của $\triangle ABC$ và tâm G' của $\Delta A'B'C'$.
Mà $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều $\Rightarrow I$ là trung điểm của GG'
$\Rightarrow GI = \dfrac{GG'}{2} = \dfrac{AA'}{2} = \dfrac{a}{2}$.
Do G là tâm tam giác đều ABC cạnh $a \Rightarrow AG = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{2}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Trong tam giác vuông GAI có:
$R = IA = \sqrt{IG^2 + GA^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.
Diện tích của mặt cầu là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \dfrac{21a^2}{36} = \dfrac{7\pi a^2}{3}$.

Chọn đáp án C □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. A	3. D	4. B	5. A	6. A	7. B	8. A	9. B	10. C
11. D	12. A	13. B	14. C	15. B	16. B	17. C	18. D	19. A	20. A
21. B	22. A	23. B	24. C	25. C	26. B	27. C	28. D	29. A	30. A
31. B	32. B	33. D	34. B	35. B	36. D	37. D	38. C	39. C	40. A
41. A	42. C	43. B	44. D	45. A	46. A	47. C	48. D	49. D	50. C

25 ĐỀ THI THỬ SỐ 25-MAX8

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Trong các hàm số sau, hàm số nào có tập xác định là $\mathbb{R}$?

A. $y = \sin x$. B. $y = \tan x$. C. $y = \cot x$. D. $y = \dfrac{1}{\sin x}$.

Lời giải.

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ là $y = \sin x$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Trong mặt phẳng cho 20 điểm phân biệt, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Tính số tam giác tạo thành từ các điểm đã cho.

A. 20. B. A_{20}^3. C. C_{20}^3. D. 20!.

Lời giải.

Mỗi cách chọn ra ba điểm từ 20 điểm đã cho tạo thành một tam giác. Số tam giác tạo thành là C_{20}^3.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Trên giá sách có 10 quyển Toán khác nhau và 15 quyển Văn khác nhau. Chọn ngẫu nhiêm hai quyển. Tính xác suất chọn được hai quyển khác loại.

A. $\dfrac{1}{2}$. B. $\dfrac{1}{3}$. C. $\dfrac{1}{4}$. D. $\dfrac{2}{5}$.

Lời giải.

Số cách chọn ra hai quyển sách tùy ý là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{25}^2$.

Gọi A là biến cố "chọn được hai quyển khác loại".

- Có 10 cách chọn 1 quyển Toán.
- Có 15 cách chọn 1 quyển Văn.

Do đó số cách chọn ra được hai quyển khác loại là $n(A) = 10 \cdot 15 = 150$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{150}{\mathrm{C}_{25}^2} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho một cấp số cộng có $u_1 = -3; u_6 = 27$. Tìm công sai d?

A. $d = 5$. B. $d = 7$. C. $d = 6$. D. $d = 8$.

Lời giải.

Ta có: $u_6 = 27 \Leftrightarrow u_1 + 5d = 27 \Leftrightarrow -3 + 5d = 27 \Leftrightarrow d = 6$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Tính tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân, biết số hạng đầu bằng 18, số hạng thứ hai bằng 54 và số hạng cuối bằng 39366.

A. 19674. B. 59040. C. 177138. D. 6552.

Lời giải.

$u_1 = 18, u_2 = 54 \Rightarrow q = 3$.

$u_n = 39366 \Leftrightarrow u_1 \cdot q^{n-1} = 39366 \Leftrightarrow 18 \cdot 3^{n-1} = 39366 \Leftrightarrow 3^{n-1} = 3^7 \Leftrightarrow n = 8$.

Vậy $S_8 = 18 \cdot \dfrac{1-3^8}{1-3} = 59040$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Cho hàm số $f(x)\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{6}}{x-2}, & \text{khi } x\neq 2\\ a, & \text{khi } x=2.\end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x=2$.

(A) $a=1$. **B** $a=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$. (C) $a=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$. (D) $a=-\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

Lời giải.

Ta có: $f(2)=a$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{6}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

Hàm số liên tục tại $x=2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)=x^3-2x^2+3x$ tại điểm có hoành độ $x_0=-1$ là

A $y=10x+4$. (B) $y=10x-5$. (C) $y=2x-4$. (D) $y=2x-5$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=3x^2-4x+3$.

$y'(-1)=10;\ y(-1)=-6$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $(d)\colon y=10(x+1)-6=10x+4$.

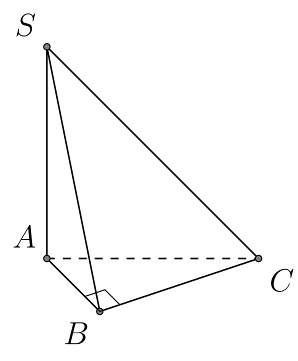
Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $SA\perp(ABC)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $AC\perp(SAB)$. **B** $BC\perp(SAB)$. (C) $AB\perp(SBC)$. (D) $AC\perp(SBC)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}BC\perp AB\\ BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAD)$.



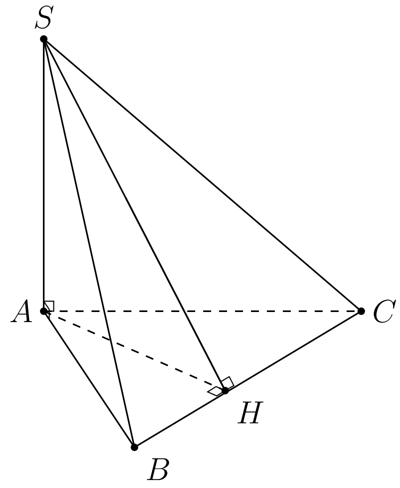
Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$ và H là hình chiếu vuông góc của S lên BC. Hãy chọn khẳng định đúng

(A) $BC\perp AC$. **B** $BC\perp AH$. (C) $BC\perp SC$. (D) $BC\perp AB$.

Lời giải.

Do $SH \perp BC; SA \perp BC$ nên $BC \perp (SAH)$. Tức là $BC \perp AH$.

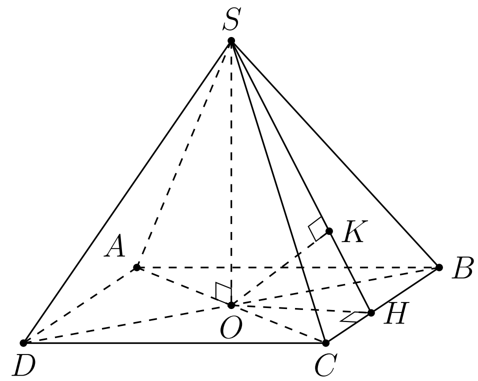


Chọn đáp án B □

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a và có góc $\widehat{BAD} = 60°$. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \dfrac{3a}{4}$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là

A $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B** $\dfrac{3a}{2}$. **C** $\dfrac{2a}{3}$. **D** $\dfrac{3a}{4}$.

Lời giải.



- Ta có $\triangle ABD$ và $\triangle BCD$ đều cạnh a. AC cắt (SBC) tại C, O là trung điểm $AC \Rightarrow$ khoảng cách $\mathrm{d}(A,(SBC)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(O,(SBC))$.
- Trong $(ABCD)$ dựng $OH \perp BC$, trong (SOH) dựng $OK \perp SH$ ta chứng minh được $OK \perp (SBC) \Rightarrow$ khoảng cách $\mathrm{d}(O,(SBC)) = OK$.

Do $\triangle OBC$ vuông tại O có OH đường cao $\Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Do $\triangle SOH$ vuông tại O có OK đường cao $\Rightarrow \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{OH^2} + \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2} + \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\frac{3a}{4}\right)^2} = \dfrac{64}{9a^2} \Rightarrow OK = \dfrac{3a}{8}$.

Vậy $\mathrm{d}(A,(SBC)) = \dfrac{1}{2}OK = \dfrac{3a}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(0; +\infty)$. **B** $(-\infty; -2)$. **C** $(-2; 0)$. **D** $(0; 3)$.

Lời giải.

Ta thấy trên khoảng $(-\infty; -2)$ thì bảng biến thiên thể hiện hàm số đồng biến.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 4$ nghịch biến trên những khoảng nào sau đây?

A $(1; 2)$. **B** $(-3; 1)$. **C** $(-3; +\infty)$. **D** $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào đồ thị ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{mx - 6m + 5}{x - m}$ đồng biến trên $(3; +\infty)$.

A $1 \leqslant m \leqslant 5$. **B** $1 < m \leqslant 3$. **C** $1 \leqslant m \leqslant 3$. **D** $1 < m < 5$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có $y' = \dfrac{-m^2 + 6m - 5}{(x - m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(3; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y' > 0 \\ m \notin (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 6m - 5 > 0 \\ m \leqslant 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m < 5 \\ m \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \leqslant 3.$$

Chọn đáp án B □

Câu 14. Hàm số $y = x^4 + x^2 + 2$ có điểm cực tiểu là?

A $x = 1$. **B** $y = 2$. **C** $x = -1$. **D** $x = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 2x$, Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng trên ta suy ra hàm số có điểm cực tiểu là $x = 0$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 15. Cho hàm số có bảng biến thiên như sau. Mệnh đề nào sau đây **đúng**

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

A Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

B Giá trị cực đại của hàm số là 0.

C Giá trị cực tiểu của hàm số bằng 2.

D Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và đạt cực đại tại $x = 5$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Chọn đáp án A $\square$

Câu 16. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 2$. trên đoạn $[-2; 2]$ là

A -24. B -2. C -26. D 3.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \in [-2; 2] \\ x = 3 \notin [-2; 2]. \end{array}\right.$

- $y(-2) = -4$.
- $y(2) = -24$.
- $y(-1) = 3$.

Vậy $\max\limits_{[-2;2]} y = 3$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 17. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 5 + \dfrac{1}{x}$ trên $\left[\dfrac{1}{2}; 5\right]$.

A $\dfrac{1}{5}$. B $-\dfrac{5}{2}$. C -3. D -2.

Lời giải.

Ta có $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1\,(\text{loại}) \\ x = 1\,(\text{loại}). \end{array}\right.$

$f(1) = -3; f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{5}{2}; f(5) = \dfrac{1}{5}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là -3.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{2x-1}{2x+3}$ có mấy đường tiệm cận

A 2. B 3. C 0. D 1.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} y = 1$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 1$.

Và $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{3}{2}\right)^+} y = -\infty; \lim\limits_{x \to \left(-\frac{3}{2}\right)^-} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Biết đồ thị hàm số $y = \dfrac{(2m-n)x^2 + mx + 1}{x^2 + mx + n - 6}$ nhận trục hoành và trục tung làm hai đường tiệm cận. Tính $m + n$.

A 2. B -6. C 8. D 9.

Lời giải.

Đặt $g(x) = (2m-n)x^2 + mx + 1$, $f(x) = x^2 + mx + n - 6$.

Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 2m - n$. Suy ra tiệm cận ngang là $y = 2m - n$.

Theo giả thiết ta có tiệm cận ngang là $y = 0$. Do đó ta có $2m - n = 0$.

Mặt khác, tiệm cận đứng của đồ thị là $x = 0$ suy ra $f(0) = 0 \Leftrightarrow n - 6 = 0 \Leftrightarrow n = 6$.

Khi đó $g(0) = 1 \neq 0$.

Từ đó suy ra $n = 6$ và $m = 3$.

Vậy $m + n = 9$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 3$ cắt đường thẳng $d\colon y = 2m - 7$ tại bốn điểm phân biệt.

A $m > -3$. B $m = 5$. C $-3 < m < 5$. D $-6 < m < 10$.

Lời giải.

$y' = 4x^3 - 16x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$ hoặc $x = 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-13	↗	3	↘	-13	↗	$+\infty$

Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số và đường thẳng d là nghiệm của phương trình

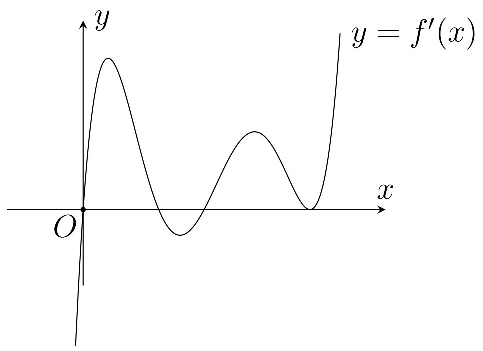
$$x^4 - 8x^2 + 3 = 2m - 7 \qquad (1)$$

Để phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt ta có

$$-13 < 2m - 7 < 3 \Leftrightarrow -3 < m < 5.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x)$ đã cho có mấy điểm cực trị?



(A) 4. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

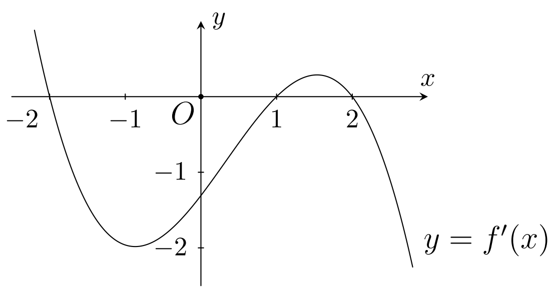
Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		x_4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗		↗	

Nhìn bảng biến thiên suy ra hàm số $y = f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(2) = f(-2) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có dạng như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $y = (f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau

(A) $\left(-1; \dfrac{3}{2}\right)$. (B) $(-2; -1)$. (C) $(-1; 1)$. (D) $(1; 2)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta lập được bảng biến thiên của $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x) \leqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Xét hàm số $y = (f(x))^2$, ta có $y' = 2f(x) \cdot f'(x)$.
Tìm khoảng để hàm số $y = (f(x))^2$ nghịch biến nên ta cần tìm x để $y' \leqslant 0$.
Do $f(x) \leqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $y' \leqslant 0 \Leftrightarrow f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant -2 \\ 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{array}\right.$
Vậy hàm số $y = (f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(1; 2)$.
Chọn đáp án D □

Câu 23. Tập xác định của hàm số $y = (x-2)^{\frac{4}{3}}$ là

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. B. $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. C. $\mathscr{D} = (2; +\infty)$. D. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lời giải.
Điều kiện xác định của hàm số $y = (x-2)^{\frac{4}{3}}$ là $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.
Chọn đáp án C □

Câu 24. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_3(x^2-1)$.

A. $y' = \dfrac{2x}{(x^2-1)}$. B. $y' = \dfrac{1}{(x^2-1)\ln 3}$. C. $y' = \dfrac{2x}{(x^2-1)\ln 3}$. D. $y' = \dfrac{2x \ln 3}{x^2-1}$.

Lời giải.
Ta có $[\log_3(x^2-1)]' = \dfrac{(x^2-1)'}{(x^2-1)\ln 3} = \dfrac{2x}{(x^2-1)\ln 3}$.
Chọn đáp án C □

Câu 25. Tập nghiệm của phương trình $4^{x-x^2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ là

A. $\left\{0; \dfrac{2}{3}\right\}$. B. $\left\{0; \dfrac{1}{2}\right\}$. C. $\{0; 2\}$. D. $\left\{0; \dfrac{3}{2}\right\}$.

Lời giải.
Ta có $4^{x-x^2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \Leftrightarrow 2^{2x-2x^2} = 2^{-x} \Leftrightarrow -2x^2 + 2x = -x \Leftrightarrow -2x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.
Chọn đáp án D □

Câu 26. Tập nghiệm của bất phương trình $2\log_2(x-1) \leqslant \log_2(5-x) + 1$ là

A. $(1; 5)$. B. $(1; 3]$. C. $[1; 3]$. D. $[3; 5]$.

Lời giải.
Điều kiện: $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ 5 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 5$.
Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_2(x-1)^2 \leqslant \log_2[2(5-x)] \Rightarrow (x-1)^2 \leqslant 10 - 2x$
$\Leftrightarrow x^2 \leqslant 9 \Leftrightarrow -3 \leqslant x \leqslant 3$.
Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(1; 3]$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất $8,4\%$ /năm và tiền lãi hàng năm được nhập vào tiền vốn. Tính số năm tối thiểu người đó cần gửi để số tiền thu được nhiều hơn 2 lần số tiền gửi ban đầu.

(A) 10 năm. **B** 9 năm. (C) 8 năm. (D) 11 năm.

Lời giải.

Gọi số tiền gửi ban đầu là A và số năm tối thiểu thỏa yêu cầu bài toán là n.

Ta có $A\left(1+8,4\%\right)^n = 2A \Leftrightarrow 1,084^n = 2 \Leftrightarrow n = \log_{1,084} 2 = 8,59$.

Vậy số năm tối thiểu là 9 năm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Nguyên hàm của hàm số $y = \mathrm{e}^{-3x+1}$ là

(A) $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1} + C$. (B) $-3\mathrm{e}^{-3x+1} + C$. **C** $-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1} + C$. (D) $3\mathrm{e}^{-3x+1} + C$.

Lời giải.

Ta có:

$$\int \mathrm{e}^{-3x+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int \mathrm{e}^{-3x+1}\mathrm{d}(-3x+1) = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1} + C.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$, biết $F(0) = 1$.

(A) $F(x) = \mathrm{e}^{2x}$. **B** $F(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + \frac{1}{2}$. (C) $F(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 1$. (D) $F(x) = \mathrm{e}^{x}$.

Lời giải.

Ta có:

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C.$$

Theo giả thiết: $F(0) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$. Vậy $F(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Tính tích phân $I = \int\limits_1^e \frac{1+x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = 1 + \frac{1}{\mathrm{e}}$. **B** $I = 2 - \frac{1}{\mathrm{e}}$. (C) $I = 2 + \frac{1}{\mathrm{e}}$. (D) $I = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

$$I = \int\limits_1^e \frac{1+x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^e \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{x} + \ln|x|\right)\Big|_1^e = 2 - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$; $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \int\limits_{-1}^1 f\left(|2x-1|\right)\mathrm{d}x$.

(A) $I = \dfrac{2}{3}$. **B** $I = 4$. (C) $I = \dfrac{3}{2}$. (D) $I = 6$.

Lời giải.

Có $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} f\left(|2x-1|\right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)\, \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(2x-1)\, \mathrm{d}x = I_1 + I_2$

Tính $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)\, \mathrm{d}x$.

Đặt $u = 1 - 2x \Rightarrow \mathrm{d}u = -2\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x = -1 \Rightarrow u = 3 \\ x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow u = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow I_1 = \dfrac{-1}{2} \displaystyle\int_{3}^{0} f(u)\, \mathrm{d}u = \dfrac{1}{2} \int_{0}^{3} f(u)\, \mathrm{d}u = 3$

Tính $I_2 = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(2x-1)\, \mathrm{d}x$.

Đặt $u = 2x - 1 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow u = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow u = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow I_2 = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{0}^{1} f(u)\, \mathrm{d}u = \dfrac{1}{2} \int_{0}^{1} f(u)\, \mathrm{d}u = 1$

Vậy $I = I_1 + I_2 = 4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 2$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$.

(A) $S = \dfrac{10}{3}$. (B) $S = \dfrac{8}{3}$. **C** $S = \dfrac{13}{3}$. (D) $S = \dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Gọi S là diện tích cần tìm. Ta có $S = \displaystyle\int_{1}^{2} (x^2+2)\, \mathrm{d}x = \dfrac{13}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 2x$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

(A) $\dfrac{32\pi}{15}$. **B** $\dfrac{64\pi}{15}$. (C) $\dfrac{21\pi}{15}$. (D) $\dfrac{16\pi}{15}$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Khi quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay giới hạn bởi $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \\ x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$

Do đó thể tích của khối tròn xoay là $V = \pi \int\limits_0^2 \left|(x^2)^2 - (2x)^2\right| \,\mathrm{d}x = \dfrac{64\pi}{15}$.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Cho số phức $z = (1+i)^2(1+2i)$. Số phức z có phần ảo là

A 2. B 4. C -2. D $2i$.

Lời giải.

Ta có $z = (1+i)^2(1+2i) = 2i(1+2i) = -4+2i$.

Vậy số phức z có phần ảo là 2.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Cho số phức $z = 1+i$. Số phức nghịch đảo của z là

A $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$. B $1-i$. C $\dfrac{1-i}{2}$. D $\dfrac{-1+i}{2}$.

Lời giải.

Ta có $z = 1+i \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho số phức thỏa $|z| = 3$. Biết rằng tập hợp số phức $w = \overline{z} + i$ là một đường tròn. Tìm tâm của đường tròn đó.

A $I(0;1)$. B $I(0;-1)$. C $I(-1;0)$. D $I(1;0)$.

Lời giải.

Đặt $w = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

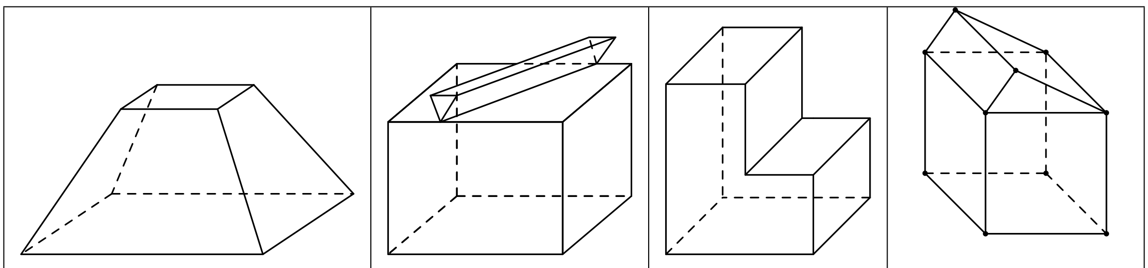
Ta có $w = \overline{z} + i \Leftrightarrow x + yi = \overline{z} + i \Leftrightarrow \overline{z} = x + (y-1)i \Leftrightarrow z = x + (1-y)i$.

Mặt khác ta có $|z| = 3$ suy ra $x^2 + (1-y)^2 = 9$ hay $x^2 + (y-1)^2 = 9$.

Vậy tập hợp số phức $w = \overline{z} + i$ là đường tròn tâm $I(0;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho các khối hình sau



Hình 1 | Hình 2 | Hình 3 | Hình 4

Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), số đa diện lồi là

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 4.

Lời giải.

Có hai khối đa diện lồi là Hình 1 và Hình 4.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$ cạnh bên bằng $3a$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho?

A $V = 4\sqrt{7}a^3$. **B** $V = \dfrac{4\sqrt{7}a^3}{9}$. **C** $V = \dfrac{4a^3}{3}$. **D** $V = \dfrac{4\sqrt{7}a^3}{3}$.

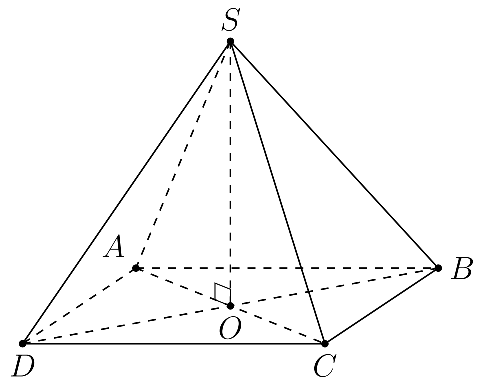
Lời giải.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$, do hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Đáy là hình vuông vạnh $2a \Rightarrow AO = \dfrac{AC}{2} = a\sqrt{2}$

Trong tam giác vuông SAO có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = a\sqrt{7}$

Thể tích V của khối chóp trên là $V = \dfrac{1}{3}SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{7}4a^2 = \dfrac{4a^3\sqrt{7}}{3}$.



Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA' = \dfrac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là trung điểm BC. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó.

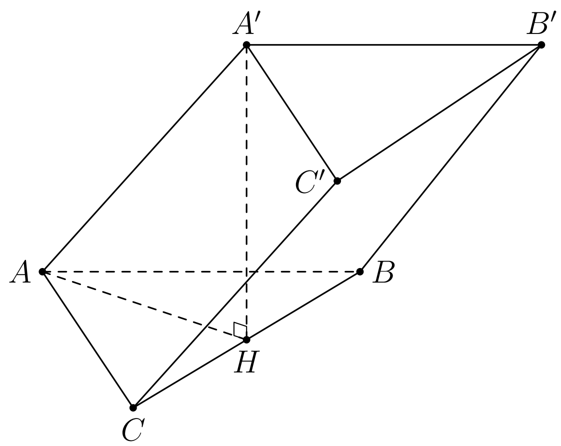
A $V = a^3$. **B** $V = \dfrac{2a^3}{3}$. **C** $V = \dfrac{3a^3}{4\sqrt{2}}$. **D** $V = a^3\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm BC.

Theo giả thiết, $A'H$ là đường cao hình lăng trụ và $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy, thể tích khối lăng trụ là $V = S_{\triangle ABC} \cdot A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.



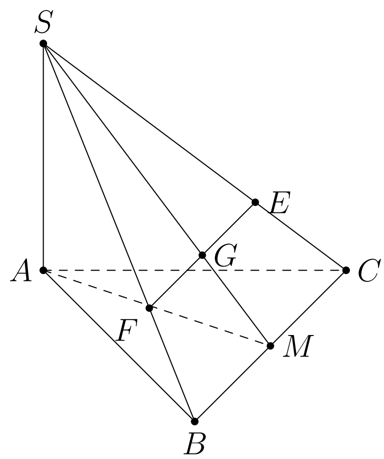
Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là $\triangle ABC$ vuông cân ở B, $AC = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle SBC$, $mp(\alpha)$ đi qua AG và song song với BC chia khối chóp thành hai phần. Gọi V là thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S. Tính V.

A $\dfrac{4a^3}{9}$. **B** $\dfrac{4a^3}{27}$. **C** $\dfrac{5a^3}{54}$. **D** $\dfrac{2a^3}{9}$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng (SBC). Qua G kẻ đường thẳng song song với BC và lần lượt cắt SC, SB tại E, F. Khi đó ta được khối đa diện không chứa đỉnh S là $ABCEF$.



Ta có G là trọng tâm của $\triangle SBC$ nên $\dfrac{V_{S.AFE}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SF}{SB} \cdot \dfrac{SE}{SC} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$.

Do đó $V_{S.AFE} = \dfrac{4}{9} \cdot V_{S.ABC} \Rightarrow V_{ABCEF} = V_{S.ABC} - \dfrac{4}{9} \cdot V_{S.ABC} = \dfrac{5}{9} \cdot V_{S.ABC}$.

Vì tam giác $\triangle ABC$ vuông cân ở B, $AC = a\sqrt{2}$ nên $AB = BC = a$.

Mặt khác $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{2}a \cdot a \cdot a = \dfrac{a^3}{6}$.

Vậy $V_{ABCEF} = \dfrac{5}{9} \cdot \dfrac{a^3}{6} = \dfrac{5a^3}{54}$.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Một khối nón có diện tích xung quanh bằng 2π cm^2 và bán kính đáy $\dfrac{1}{2}$ (cm). Khi đó độ dài đường sinh là

A 2 (cm). **B** 3 (cm). **C** 1 (cm). **D** 4 (cm).

Lời giải.

Ta có: $S_{xq} = \pi Rl \Rightarrow l = \dfrac{S_{xq}}{\pi R} = \dfrac{2\pi}{\pi \cdot \dfrac{1}{2}} = 4$.

Chọn đáp án D □

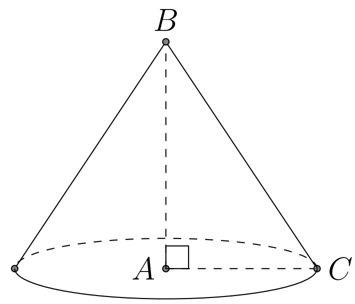
Câu 42. Hình nón có chiều cao l, bán kính đáy r thì có diện tích xung quanh là.

A $2\pi rl$. **B** πrl. **C** $2\pi r\sqrt{l^2 + r^2}$. **D** $\pi r\sqrt{l^2 + r^2}$.

Lời giải.

Ta có độ dài đường sinh $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{l^2 + r^2}$.

Theo công thức tính diện tích xung quanh của hình nón $S_{xq} = \pi r\sqrt{l^2 + r^2}$.

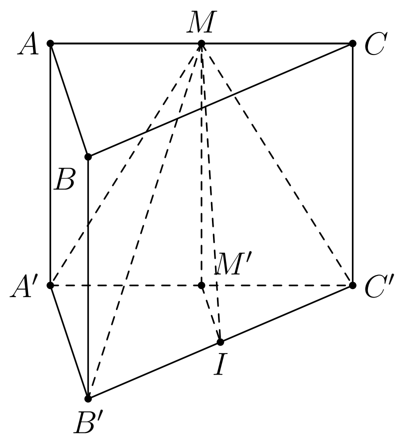


Chọn đáp án D □

Câu 43. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Biết $AB = AA' = a$, $AC = 2a$. Gọi M là trung điểm của AC. Thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $MA'B'C'$ bằng

A $\dfrac{5\sqrt{5}\pi a^3}{6}$. **B** $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. **C** $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **D** $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của cạnh $B'C'$. Khi đó I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'B'C'$. Suy ra $IA' = IB' = IC'$.
Gọi M' là trung điểm của cạnh $A'C'$. Khi đó $MM' \perp (A'B'C')$.
Do $MA' = MC' = a\sqrt{2}$ nên $\Delta MA'C'$ vuông tại M. Do đó M' là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta MA'C'$.
Và $IM' \perp (MA'C') \Rightarrow IA' = IC' = IM$.
Do đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $MA'B'C'$.
Bán kính mặt cầu là $r = IB' = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Vậy thể tích khối cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{5\sqrt{5}\pi a^3}{6}$.
Chọn đáp án A □

Câu 44. Trong không gian cho ba điểm $A(5;-2;0), B(-2;3;0)$ và $C(0;2;3)$. Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là

A $(1;1;1)$. **B** $(1;1;-2)$. **C** $(1;2;1)$. **D** $(2;0;-1)$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} A(5;-2;0) \\ B(-2;3;0) \\ C(0;2;3) \end{cases} \Rightarrow G(1;1;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là

A $2x - y - 1 = 0$. **B** $-y + 2z - 3 = 0$. **C** $2x - y + 1 = 0$. **D** $y + 2z - 5 = 0$.

Lời giải.

Ta có: véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = 2(-2;1;0)$
Vậy phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC có dạng:
$-2(x-0) + 1(y-1) = 0 \Leftrightarrow -2x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 1 = 0$.
Chọn đáp án C □

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(-1;-2;5)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $x + 2y - 3z + 1 = 0$ và $2x - 3y + z + 1 = 0$ có phương trình là

A $x + y + z - 2 = 0$. **B** $2x + y + z - 1 = 0$.
C $x + y + z + 2 = 0$. **D** $x - y + z - 6 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng vuông góc với hai mặt phẳng $x + 2y - 3z + 1 = 0$ và $2x - 3y + z + 1 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến vuông góc với hai véc-tơ pháp tuyến hai mặt phẳng trên nên có

$$\vec{n} = -\frac{1}{7}\left[\vec{n_1}, \vec{n_2}\right] = -\frac{1}{7}(-7;-7;-7) = (1;1;1).$$

Do đó phương trình mặt phẳng cần tìm là $x + 1 + y + 2 + z - 5 = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 2 = 0$.
Chọn đáp án A □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(3;0;-4)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}(5;1;-2)$ có phương trình

Ⓐ $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$.
Ⓑ $\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$.
Ⓒ $\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+4}{-2}$.
D $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+4}{-2}$.

Lời giải.

Đường thẳng đi qua điểm $A(3;0;-4)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}(5;1;-2)$ có phương trình

$$\frac{x-3}{5}=\frac{y}{1}=\frac{z+4}{-2}.$$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(1;1;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon x-2y+3z+4=0$ có phương trình là

Ⓐ $\begin{cases}x=1+t\\y=1-2t\\z=2-3t\end{cases}$.
Ⓑ $\begin{cases}x=1+t\\y=-2+t\\z=3+2t\end{cases}$.
Ⓒ $\begin{cases}x=1-t\\y=1-2t\\z=2+3t\end{cases}$.
D $\begin{cases}x=1+t\\y=1-2t\\z=2+3t\end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(P)\Rightarrow \vec{u}_d=\vec{n}_P=(1;-2;3)$

Phương trình đường thẳng d: $\begin{cases}x=1+t\\y=1-2t\\z=2+3t\end{cases}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) lần lượt có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-6=0, 2x+2y+z+2m=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để (P) tiếp xúc với (S) ?

Ⓐ 0.
B 2.
Ⓒ 1.
Ⓓ 4.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm là $I(1;-1;1)$ và bán kính $R=3$.

Do mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên ta có:

$$\mathrm{d}(I,(P))=R\Leftrightarrow\frac{|2-2+1+2m|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=3\Leftrightarrow|2m+1|=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\m=-5.\end{array}\right.$$

Chú ý: Ta có thể nhận xét nhanh vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu để thấy rằng do phương của (P) không đổi nên chỉ có 2 mặt phẳng thỏa mãn điều kiện tiếp xúc.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 50. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ và điểm $I(2;1;-1)$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc với đường thẳng Δ cắt trục Ox tại hai điểm A, B. Tính độ dài đoạn AB.

A $AB=2\sqrt{6}$.
Ⓑ $AB=24$.
Ⓒ $AB=4$.
Ⓓ $AB=\sqrt{6}$.

Lời giải.

$\Delta\colon \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ qua $A(-2;1;0)$ và có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;2;-1)$.
Mặt cầu tâm I tiếp xúc với đường thẳng Δ nên bán kính của mặt cầu là

$$R=\mathrm{d}\left(I,\Delta\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AI},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=2\sqrt{2}.$$

Phương trình mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=8$.
Mặt cầu (S) cắt trục Ox tại $A\left(2+\sqrt{6};0;0\right)$ và $B\left(2-\sqrt{6};0;0\right)$.
Suy ra độ dài đoạn $AB=2\sqrt{6}$.
Chọn đáp án A □

—— **HẾT** ——

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. C	3. A	4. C	5. B	6. B	7. A	8. B	9. B	10. D
11. B	12. B	13. B	14. D	15. A	16. D	17. C	18. A	19. D	20. C
21. C	22. D	23. C	24. C	25. D	26. B	27. B	28. C	29. B	30. B
31. B	32. C	33. B	34. A	35. C	36. A	37. B	38. D	39. C	40. C
41. D	42. D	43. A	44. A	45. C	46. A	47. D	48. D	49. B	50. A

PHẦN

C

ĐỀ THI THQG QUA CÁC NĂM

1 ĐỀ MINH HỌA THQG 2019

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Thể tích của khối lập phương cạnh $2a$ bằng

A $8a^3$. **B** $2a^3$. **C** a^3. **D** $6a^3$.

Lời giải.

Thể tích của khối lập phương cạnh $2a$ bằng $(2a)^3 = 8a^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A 1. **B** 2. **C** 0. **D** 5.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 5.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-1)$ và $B(2;3;2)$. Véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A $(1;2;3)$. **B** $(-1;-2;3)$. **C** $(3;5;1)$. **D** $(3;4;1)$.

Lời giải.

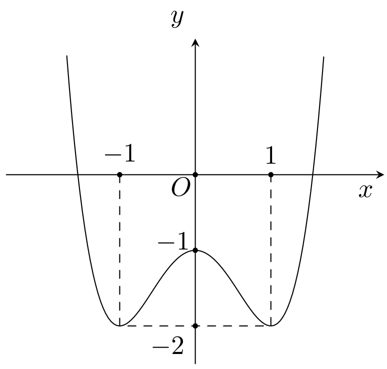
Ta có $\overrightarrow{AB} = (2-1;3-1;2+1) = (1;2;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 4.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(0;1)$. **B** $(-\infty;-1)$. **C** $(-1;1)$. **D** $(-1;0)$.



Lời giải.

Hàm số đồng biến trên khoảng nào thì đồ thị có hướng đi lên trên khoảng đó.

Dựa vào đồ thị đã cho, ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 5$. Giá trị của u_4 bằng

A 22. **B** 17. C 12. D 250.

Lời giải.

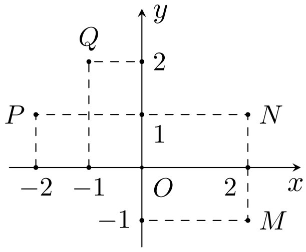
Ta có $u_4 = u_1 + 3d = 2 + 3 \cdot 5 = 17$.

Chọn đáp án B □

Câu 6.

Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$?

A N. B P. C M. **D** Q.



Lời giải.

Vì $z = -1 + 2i$ nên điểm biểu diễn của số phức z có tọa độ $(-1; 2)$.

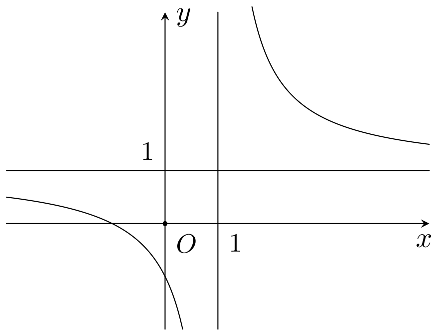
Chọn đáp án D □

Câu 7.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$. **B** $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

C $y = x^4 + x^2 + 1$. D $y = x^3 - 3x - 1$.



Lời giải.

Đường cong có đường tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận ngang $y = 1$ nên nó không thể là đồ thị của hàm đa thức. Ta xét các trường hợp sau:

a) Xét $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$, có

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x-1} = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Do đó đường cong trên không thể là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

b) Xét $y = \dfrac{x+1}{x-1}$, có

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

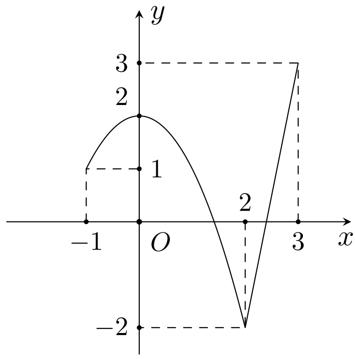
$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x+1}{x-1} = -\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Do đó đường cong trên là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Chọn đáp án B □

Câu 8.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục tên đoạn $[-1; 3]$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M - m$ bằng



Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 4. **D** 5.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có $M = 3$, $m = -2$. Do đó $M - m = 5$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A 3. Ⓑ 2. Ⓒ 5. Ⓓ 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số có ba điểm cực trị.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 10. Tìm các số thực a và b thỏa mãn $2a + (b+i)i = 1 + 2i$ với i là đơn vị ảo.

Ⓐ $a = 0$, $b = 2$. Ⓑ $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$. Ⓒ $a = 0$, $b = 1$. **D** $a = 1$, $b = 2$.

Lời giải.

Ta có $2a + (b+i)i = 1 + 2i \Leftrightarrow 2a - 1 + bi = 1 + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 1 = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2. \end{cases}$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1; 1; 1)$ và $A(1; 2; 3)$. Phương trình của mặt cầu tâm I và đi qua A là

Ⓐ $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 29$. **B** $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.

Ⓒ $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$. Ⓓ $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 5$.

Lời giải.

Mặt cầu tâm $I(1; 1; 1)$, bán kính $R = IA = \sqrt{5}$ có phương trình là

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Đặt $\log_3 2 = a$, khi đó $\log_{16} 27$ bằng

(A) $\dfrac{3a}{4}$. (B) $\dfrac{3}{4a}$. (C) $\dfrac{4}{3a}$. (D) $\dfrac{4a}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{16} 27 = \log_{2^4} 3^3 = \dfrac{3}{4}\log_2 3 = \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{\log_3 2} = \dfrac{3}{4a}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 3z + 5 = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng

(A) $2\sqrt{5}$. (B) $\sqrt{5}$. (C) 3. (D) 10.

Lời giải.

$$z^2 - 3z + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \dfrac{3+\sqrt{11}i}{2} \\ z = \dfrac{3-\sqrt{11}i}{2} \end{array}\right. \Rightarrow |z_1| = |z_2| = \sqrt{5} \Rightarrow |z_1| + |z_2| = 2\sqrt{5}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$ khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P)\colon x + 2y + 2z - 10 = 0$ và $(Q)\colon x + 2y + 2z - 3 = 0$ bằng

(A) $\dfrac{8}{3}$. (B) $\dfrac{7}{3}$. (C) 3. (D) $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Xét thấy $(P) \parallel (Q)$.

Trên (P) lấy $M(0;0;5)$. Khi đó, khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là:

$$\mathrm{d}\left((P),(Q)\right) = \mathrm{d}\left(M,(Q)\right) = \frac{|0 + 2\cdot 0 + 2\cdot 5 - 3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{7}{3}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-2x} < 27$ là

(A) $(-\infty;-1)$. (B) $(3;+\infty)$.

(C) $(-1;3)$. (D) $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

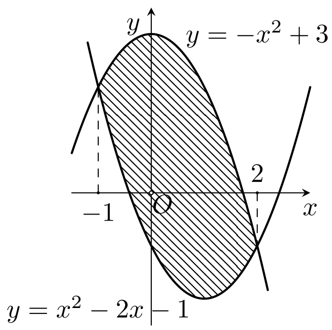
Lời giải.

$3^{x^2-2x} < 27 \Leftrightarrow 3^{x^2-2x} < 3^3 \Leftrightarrow x^2 - 2x < 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16.

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



(A) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(2x^2 - 2x - 4\right)\mathrm{d}x$. (B) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(-2x+2)\,\mathrm{d}x$.

(C) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(2x-2)\,\mathrm{d}x$. (D) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(-2x^2 + 2x + 4\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

$S = \int_{-1}^{2} \left[\left(-x^2+3\right) - \left(x^2-2x-1\right)\right] \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} \left(-2x^2+2x+4\right) \mathrm{d}x.$

Chọn đáp án D □

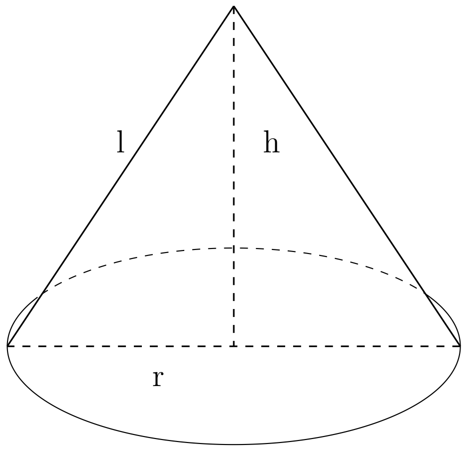
Câu 17. Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và bán kính đáy bằng a. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. B $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. C $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. D $\dfrac{\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Ta có $l = 2a; r = a$, suy ra $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{3}a$.

Thể tích của khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.



Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$+$	‖	$+$
y	$2 \nearrow +\infty$	‖	$3 \nearrow 5$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A 4. B 1. C 3. D 2.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có

- $\lim\limits_{x \to -\infty} y = 2$ suy ra $y = 2$ là tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 5$ suy ra $y = 5$ là tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x \to 1^-} y = +\infty$ suy ra $x = 1$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số tổng cộng có 3 đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Cho khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

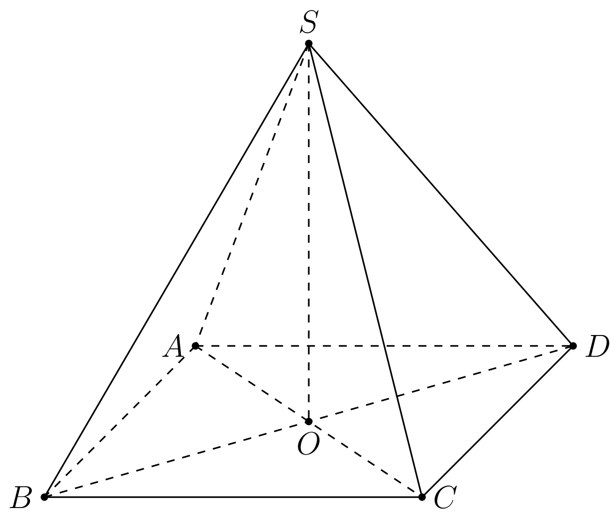
A $\dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$. B $\dfrac{8a^3}{3}$. C $\dfrac{8\sqrt{2}a^3}{3}$. D $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm hai đường chéo. Do chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $AC = BD = 2a\sqrt{2}$. Suy ra $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = \sqrt{2}a$.

Thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}4a^2 \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Hàm số $f(x) = \log_2 (x^2 - 2x)$ có đạo hàm là

(A) $f'(x) = \dfrac{\ln 2}{x^2 - 2x}$.
(B) $f'(x) = \dfrac{1}{(x^2 - 2x)\ln 2}$.
(C) $f'(x) = \dfrac{(2x-2)\ln 2}{x^2 - 2x}$.
D $f'(x) = \dfrac{2x-2}{(x^2 - 2x)\ln 2}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \dfrac{(x^2-2x)'}{(x^2 - 2x)\ln 2} = \dfrac{2x-2}{(x^2 - 2x)\ln 2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là

A 4.
(B) 3.
(C) 2.
(D) 1.

Lời giải.

$2f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{3}{2}$.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\dfrac{3}{2}$.

Mà $-2 < -\dfrac{3}{2} < 1$ nên số nghiệm thực của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là 4.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ABC'D')$ bằng

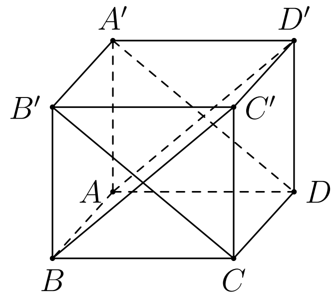
(A) 30°.
(B) 60°.
(C) 45°.
D 90°.

Lời giải.

Ta có $CD \perp (BCC'B') \Rightarrow CD \perp BC'$.

$\begin{cases} BC' \perp CD \\ BC' \perp B'C \end{cases} \Rightarrow BC' \perp (A'B'CD) \Rightarrow (ABC'D') \perp (A'B'CD)$.

Vậy góc giữa $(A'B'CD)$ và $(ABC'D')$ là $90°$.



Chọn đáp án D □

Câu 23. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3(7-3^x) = 2-x$ bằng

A. 2. B. 1. C. 7. D. 3.

Lời giải.

$\log_3(7-3^x) = 2-x \Leftrightarrow 7-3^x = 3^{2-x} \Leftrightarrow 7-3^x = \dfrac{9}{3^x} \Leftrightarrow (3^x)^2 - 7\cdot 3^x + 9 = 0. \quad (*)$

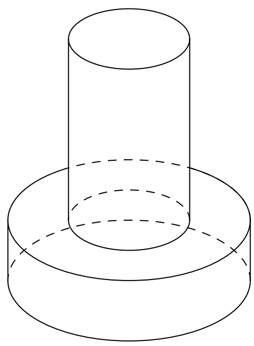
Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn $\begin{cases} 3^{x_1} + 3^{x_2} = 7 \\ 3^{x_1}\cdot 3^{x_2} = 9 \end{cases} \Rightarrow 3^{x_1+x_2} = 3^2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2.$

Chọn đáp án A □

Câu 24.

Một khối đồ chơi gồm hai khối trụ (H_1), (H_2) xếp chồng lên nhau, lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_2 = \dfrac{1}{2}r_1$, $h_2 = 2h_1$ (tham khảo hình vẽ bên). Biết rằng thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng $30\,\text{cm}^3$, thể tích khối trụ (H_1) bằng

A. $24\,\text{cm}^3$. B. $15\,\text{cm}^3$. C. $20\,\text{cm}^3$. D. $10\,\text{cm}^3$.



Lời giải.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối trụ (H_1), (H_2).

Ta có $V_2 = h_2\pi r_2^2 = 2h_1\pi\dfrac{1}{4}r_1^2 = \dfrac{1}{2}h_1\pi r_1^2 = \dfrac{1}{2}V_1$. Mà $V_1 + \dfrac{1}{2}V_1 = 30$ nên $V_1 = 20$.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1+\ln x)$ là

A. $2x^2\ln x + 3x^2$. B. $2x^2\ln x + x^2$.

C. $2x^2\ln x + 3x^2 + C$. D. $2x^2\ln x + x^2 + C$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = 1+\ln x \\ \mathrm{d}v = 4x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = 2x^2. \end{cases}$

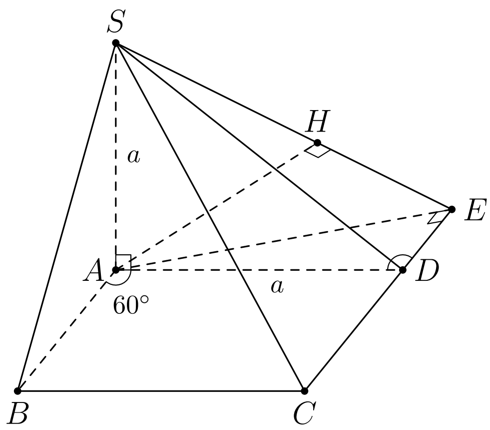
Khi đó $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2x^2(1+\ln x) - \int 2x\,\mathrm{d}x = 2x^2(1+\ln x) - x^2 + C = 2x^2\ln x + x^2 + C.$

Chọn đáp án D □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60°$, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. B. $\dfrac{\sqrt{15}a}{7}$. C. $\dfrac{\sqrt{21}a}{3}$. D. $\dfrac{\sqrt{15}a}{3}$.

Lời giải.



Ta có $AB \parallel (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(B,(SCD)) = \mathrm{d}(A,(SCD))$.

Trong $(ABCD)$, kẻ $AE \perp CD$ tại E.

Trong (SAE), kẻ $AH \perp SE$ tại H (1).

Ta có $\begin{cases} CD \perp AE \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAE) \Rightarrow CD \perp AH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SCD)$

$\Rightarrow \mathrm{d}(A,(SCD)) = AH$.

Xét tam giác AED vuông tại E

$\Rightarrow AE = AD \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét $\triangle SAE$ vuông tại $A \Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AE^2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $\mathrm{d}(B,(SCD)) = \mathrm{d}(A,(SCD)) = AH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là

A. $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z+1}{5}$.

B. $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-1}{-1}$.

C. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-1}{-5}$.

D. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z+5}{1}$.

Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - t. \end{cases}$

Gọi A là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P). Khi đó, ta có hệ phương trình $\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - t \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow t + (-1 + 2t) + (2 - t) - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow A(1;1;1)$.

Ta có đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_d = (1;2;-1)$, mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (1;1;1)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với (P). Khi đó (Q) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)} = \left[\vec{u}_d, \vec{n}_{(P)}\right] = (3;-2;-1)$.

Gọi đường thẳng Δ là hình chiếu vuông góc của d lên (P). Khi đó Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

Suy ra véc-tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}_\Delta = \left[\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}\right] = (1;4;-5)$.

Vậy hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-1}{-5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m-9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ là

A $(-\infty; 0]$. **B** $\left[-\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$. **C** $\left(-\infty; -\dfrac{3}{4}\right]$. **D** $[0; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 - 12x + 4m - 9$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ khi và chỉ khi $y' \leq 0$, $\forall x \in (-\infty; -1)$

$$\Leftrightarrow -3x^2 - 12x + 4m - 9 \leq 0 \Leftrightarrow 4m \leq 3x^2 + 12x + 9,\ \forall x \in (-\infty; -1).$$

Đặt $g(x) = 3x^2 + 12x + 9 \Rightarrow g'(x) = 6x + 12$. Giải $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $(-\infty; -1)$.

x	$-\infty$		-2		-1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $4m \leq g(x)$, $\forall x \in (-\infty; -1) \Leftrightarrow 4m \leq -3 \Leftrightarrow m \leq -\dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Xét số phức z thỏa mãn $(z + 2i)(\overline{z} + 2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, tâm đường tròn đó có tọa độ là

A $(1; -1)$. **B** $(1; 1)$. **C** $(-1; 1)$. **D** $(-1; -1)$.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$, ta có

$$(z + 2i)(\overline{z} + 2) = [a + (b+2)i][(a+2) - bi] = [a(a+2) + b(b+2)] + [(a+2)(b+2) - ab]i.$$

$(z + 2i)(\overline{z} + 2)$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow a(a+2) + b(b+2) = 0 \Leftrightarrow (a+1)^2 + (b+1)^2 = 2$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của z là một đường tròn có phương trình $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$ có tâm $I(-1; -1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Cho $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2} = a + b\ln 2 + c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a + b + c$ bằng

A -2. **B** -1. **C** 2. **D** 1.

Lời giải.

Ta có

$$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2} = \int_0^1 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \ln|x+2|\Big|_0^1 + \frac{2}{x+2}\Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{3}.$$

Nên $a = -\frac{1}{3}$, $b = -1$, $c = 1$. Suy ra $3a + b + c = -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	0	↘	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) < \mathrm{e}^x + m$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$ khi và chỉ khi

A $m \geq f(1) - \mathrm{e}$. **B** $m > f(-1) - \frac{1}{\mathrm{e}}$. **C** $m \geq f(-1) - \frac{1}{\mathrm{e}}$. **D** $m > f(1) - \mathrm{e}$.

Lời giải.

$f(x) < \mathrm{e}^x + m \Leftrightarrow f(x) - \mathrm{e}^x < m$.

Xét $h(x) = f(x) - \mathrm{e}^x, \forall x \in (-1;1)$.

$h'(x) = f'(x) - \mathrm{e}^x < 0, \forall x \in (-1;1)$ (Vì $f'(x) < 0, \forall x \in (-1;1)$ và $\mathrm{e}^x > 0, \forall x \in (-1;1)$).

$\Rightarrow h(x)$ nghịch biến trên $(-1;1) \Rightarrow h(-1) > h(x) > h(1), \forall x \in (-1;1)$.

Bất phương trình $f(x) < \mathrm{e}^x + m$ đúng với mọi $x \in (-1;1) \Leftrightarrow m \geq h(-1) \Leftrightarrow m \geq f(-1) - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có ba ghế. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh, gồm 3 nam và 3 nữ ngồi vào hai dãy ghế đó sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi. Xác suất để mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ bằng

A $\frac{2}{5}$. **B** $\frac{1}{20}$. **C** $\frac{3}{5}$. **D** $\frac{1}{10}$.

Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu là $6!$.

Xếp học sinh nam thứ nhất có 6 cách, học sinh nam thứ nhì có 4 cách, học sinh nam thứ ba có 2 cách.

Xếp 3 học sinh nữ vào 3 ghế còn lại có $3!$ cách.

Vậy xác suất là $\frac{6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3!}{6!} = \frac{288}{720} = \frac{2}{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 2z - 8 = 0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2 + 3MB^2$ bằng

A 135. **B** 105. **C** 108. **D** 145.

Lời giải.

Gọi I là điểm thỏa mãn đẳng thức $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(x_I - 2) + 3(x_I + 3) = 0 \\ 2(y_I + 2) + 3(y_I - 3) = 0 \\ 2(z_I - 4) + 3(z_I + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 + 5 = 0 \\ 5y_1 - 5 = 0 \\ 5z_1 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 1 \\ z_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow I(-1; 1; 1).$$

Khi đó

$$\begin{aligned} 2MA^2 + 3MB^2 &= 2\overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MB}^2 \\ &= 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= 5\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB}) + 2\overrightarrow{IA}^2 + 3\overrightarrow{IB}^2 = 5MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2. \end{aligned}$$

Vì A, B, I cố định nên $2MA^2 + 3MB^2$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất hay M là hình chiếu của điểm I trên mặt phẳng (P).

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{IM} = k\vec{n}_{(P)} \Rightarrow \begin{cases} x_M = 2k - 1 \\ y_M = -k + 1 \\ z_M = 2k + 1. \end{cases}$$

Mà $M \in (P) \Rightarrow 2(2k-1) - (-k+1) + 2(2k+1) - 8 = 0 \Leftrightarrow 9k - 9 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \Rightarrow M(1; 0; 3)$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của $2MA^2 + 3MB^2 = 5MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 = 135$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2 = 2|z + \bar{z}| + 4$ và $|z - 1 - i| = |z - 3 + 3i|$?

A. 4. **B. 3.** C. 1. D. 2.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

$$|z|^2 = 2|z + \bar{z}| + 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4|x| + 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0,\ x \geq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + 4x - 4 = 0,\ x < 0 & (2). \end{array}\right.$$

Theo đề ta có

$$\begin{aligned} |z - 1 - i| = |z - 3 + 3i| &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y+3)^2 \\ &\Leftrightarrow 4x = 8y + 16 \\ &\Leftrightarrow x = 2y + 4 \quad (3). \end{aligned}$$

\+ Thay (3) vào (1) ta được

$$(2y+4)^2 + y^2 - 4(2y+4) - 4 = 0 \Leftrightarrow 5y^2 + 8y - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{2}{5} \Rightarrow x = \dfrac{24}{5} \text{ (nhận)} \\ y = -2 \Rightarrow x = 0 \text{ (nhận)}. \end{array}\right.$$

\+ Thay (3) vào (2) ta được

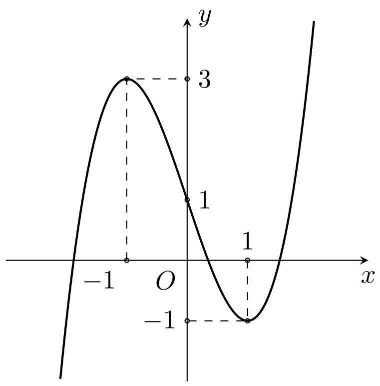
$$(2y+4)^2 + y^2 + 4(2y+4) - 4 = 0 \Leftrightarrow 5y^2 + 24y + 28 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -2 \Rightarrow x = 0 \text{ (loại)} \\ y = -\dfrac{14}{5} \Rightarrow x = -\dfrac{8}{5} \text{ (nhận)}. \end{array}\right.$$

Vậy có 3 số phức thỏa điều kiện.

Chọn đáp án B □

Câu 35.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là



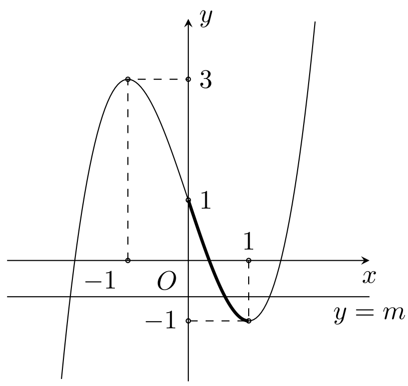
A $[-1; 3)$. **B** $(-1; 3)$. **C** $(-1; 3)$. **D** $[-1; 1)$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x$. Với $x \in (0; \pi)$ thì $t \in (0; 1]$.

Do đó phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(0; 1]$.

Quan sát đồ thị ta suy ra điều kiện của tham số m là $m \in [-1; 1)$.



Chọn đáp án D □

Câu 36. Ông A vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 1%/tháng. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và ông A trả hết nợ sau đúng 5 năm kể từ ngày vay. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mỗi tháng ông ta cần trả cho ngân hàng gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A 2,22 triệu đồng. **B** 3,03 triệu đồng. **C** 2,25 triệu đồng. **D** 2,20 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi số tiền vay ban đầu là M, số tiền hoàn nợ mỗi tháng là m, lãi suất một tháng là r.

Hết tháng thứ nhất, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là $M + Mr = M\,(1 + r)$.

Ngay sau đó ông A hoàn nợ số tiền m nên số tiền để tính lãi cho tháng thứ hai là $M\,(1 + r) - m$.

Do đó hết tháng thứ hai, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$$[M\,(1 + r) - m]\,(1 + r) = M(1 + r)^2 - m\,(1 + r)\,.$$

Ngay sau đó ông A lại hoàn nợ số tiền m nên số tiền để tính lãi cho tháng thứ ba là

$$M(1 + r)^2 - m\,(1 + r) - m.$$

Do đó hết tháng thứ ba, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$$\left[M(1 + r)^2 - m\,(1 + r) - m\right](1 + r) = M(1 + r)^3 - m(1 + r)^2 - m\,(1 + r) - m.$$

Cứ tiếp tục lập luận như vậy ta thấy sau tháng thứ n, $n \geq 2$, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$$M(1+r)^n - m(1+r)^{n-1} - m(1+r)^{n-2} - \ldots - m\,(1+r) - m = M(1+r)^n - \frac{m\left[(1+r)^n - 1\right]}{r}.$$

Sau tháng thứ n trả hết nợ thì ta có

$$M(1+r)^n - \frac{m\left[(1+r)^{n-1} - 1\right]}{r} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{M(1+r)^n r}{(1+r)^n - 1}.$$

Thay số với $M = 100.000.000$, $r = 1\%$, $n = 5 \times 12 = 60$ ta được $m \approx 2,22$ (triệu đồng).

Chọn đáp án A □

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P)\colon 2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = 1 + 9t \\ z = 3 + 8t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I\,(3;2;5)$ và bán kính $R = 6$.

$IE = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} < R$, suy ra điểm E nằm trong mặt cầu (S).

Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P), A và B là hai giao điểm của Δ với (S).

Khi đó, AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow \mathrm{d}(J, \Delta)$ lớn nhất (với J là tâm đường tròn giao tuyến của (P) và (S)), mà $\mathrm{d}(J, \Delta) \leq EJ$.

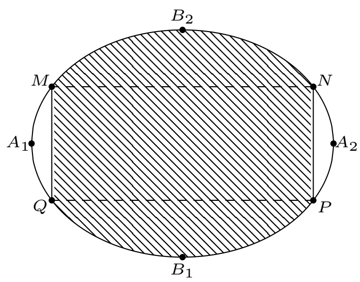
Do đó AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB \perp OE$, mà $AB \perp IH$ nên $AB \perp (HIE) \Rightarrow AB \perp IE$.

Suy ra: $\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{n_P}; \overrightarrow{EI}\right] = (5;-5;0) = 5\,(1;-1;0)$.

Vậy phương trình của Δ là $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$.

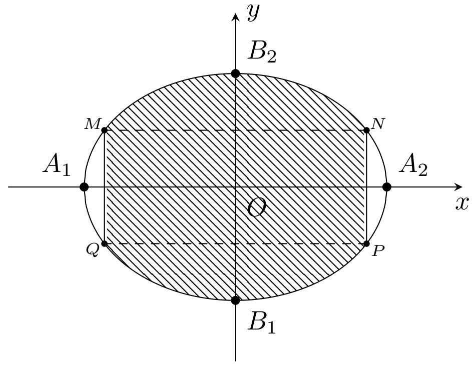
Chọn đáp án C □

Câu 38. Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 đồng/m^2 và phần còn lại là 100.000 đồng/m^2. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8\text{m}$, $B_1B_2 = 6\text{m}$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3$ m?



A. 7.322.000 đồng. B. 7.213.000 đồng. C. 5.526.000 đồng. D. 5.782.000 đồng.

Lời giải.



Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho trục hoành trùng với trục lớn, trục tung trùng với trục bé của biển quảng cáo.
Khi đó, đường viền của biển quảng cáo có phương trình của dạng elip sau $(E): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} A_1A_2=8 \\ B_1B_2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=8 \\ 2b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}$

$\Rightarrow (E): \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \Rightarrow y=\pm\dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.

Ta có: $MQ=3 \Rightarrow \begin{cases} M=d\cap(E) \\ N=d\cap(E) \end{cases}$ với d: $y=\dfrac{3}{2} \Rightarrow M\left(-2\sqrt{3};\dfrac{3}{2}\right)$ và $N\left(2\sqrt{3};\dfrac{3}{2}\right)$.

Do Elip nhận trục Ox và Oy làm trục đối xứng nên diện tích phần tô màu gấp 4 diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=\dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$ và các đường thẳng $x=2\sqrt{3}$, trục tung, trục hoành, chính là

$S=4\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}}\left(\dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\right)\,\mathrm{d}x=3\int_0^{2\sqrt{3}}\left(\sqrt{16-x^2}\right)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x=4\sin t$, khi đó $\mathrm{d}x=4\cos t\,\mathrm{d}t$. Và với $x=0\Rightarrow t=0$; với $x=2\sqrt{3}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}$.

$S=3\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{16-16\sin^2 t}\cdot 4\cdot\cos t\right)\,\mathrm{d}t=48\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos^2 t\right)\,\mathrm{d}t=24\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=(24t+12\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=$ $8\pi+6\sqrt{3}\ \mathrm{m}^2$.

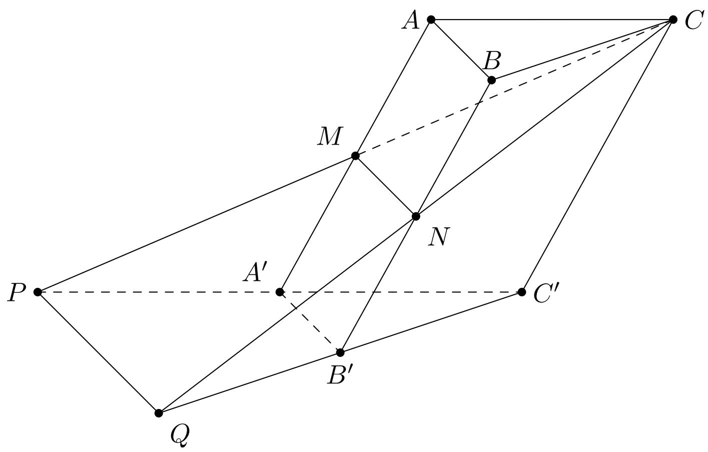
Số tiền để sơn theo yêu cầu bài toán là $T=100.000\times\left(4\pi-6\sqrt{3}\right)+200.000\times\left(8\pi+6\sqrt{3}\right)\approx$ 7.322.000 đồng.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA' và BB'. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P, đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q. Thể tích của khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

A 1. **B** $\dfrac{1}{3}$. **C** $\dfrac{1}{2}$. **D** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.



Ta có $V_{C.ABNM}=\dfrac{1}{2}V_{C.A'B'BA}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow V_{CMNA'B'C'}=\dfrac{2}{3}$.

Do M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', BB' nên A', B' lần lượt là trung điểm của các đoạn $C'P$, $C'Q$. Do vậy, tam giác $C'QP$ đồng dạng với tam giác $C'B'A'$ với tỉ số 2 nên $S_{\triangle C'QP} = 4 \cdot S_{\triangle A'B'C'}$. Suy ra

$$V_{C.CQP} = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{d}\left(C, (A'B'C)\right) \cdot S_{\triangle C'QP} = 4 \cdot \frac{1}{3}\mathrm{d}\left(C, (A'B'C)\right) \cdot S_{\triangle A'B'C} = 4 \cdot V_{C.A'B'C} = \frac{4}{3}.$$

Khi đó

$$V_{A'MPB'NQ} = V_{C.C'PQ} - V_{CMNA'B'C} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

A $(1; +\infty)$. **B** $(-\infty; -1)$. **C** $(-1; 0)$. **D** $(0; 2)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3 \cdot [f'(x+2) + (1 - x^2)]$.

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra

$$f'(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \leq x+2 \leq 3 \\ x+2 \geq 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq 2. \end{array}\right.$$

Xét trên khoảng $(-1; 1)$, ta có

$$\begin{cases} f'(x+2) \geq 0 \\ 1 - x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x+2) + (1 - x^2) > 0 \Rightarrow y' > 0, \forall x \in (-1; 1).$$

Do đó, hàm số $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2\left(x^4 - 1\right) + m\left(x^2 - 1\right) - 6\left(x - 1\right) \geq 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A $-\frac{3}{2}$. **B** 1. **C** $-\frac{1}{2}$. **D** $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Bất phương trình

$$\begin{aligned} & m^2\left(x^4 - 1\right) + m\left(x^2 - 1\right) - 6\left(x - 1\right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-1)\left[m^2\left(x^3 + x^2 + x + 1\right) + m\left(x+1\right) - 6\right] \geq 0. \end{aligned}$$

Đặt $f(x) = (x-1)\left[m^2\left(x^3 + x^2 + x + 1\right) + m\left(x+1\right) - 6\right]$.

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ m^2\left(x^3 + x^2 + x + 1\right) + m\left(x+1\right) - 6 = 0 \quad (1). \end{array}\right.$

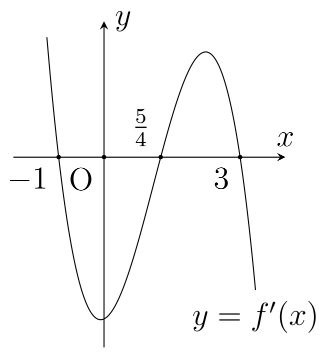
Nếu $x = 1$ không là nghiệm của phương trình (1) thì $x = 1$ là nghiệm đơn của phương trình $f(x) = 0$. Do vậy $f(x)$ đổi dấu khi qua nghiệm $x = 1$.
Suy ra mệnh đề $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là mệnh đề sai.
Do đó điều kiện cần để $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là $x = 1$ là nghiệm của phương trình (1).
Khi đó ta có $4m^2 + 2m - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

- Với $m = 1$, ta có $f(x) = (x-1)^2(x^2 + 2x + 4) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- Với $m = -\dfrac{3}{2}$, ta có $f(x) = \dfrac{3}{4}(x-1)^2(3x^2 + 6x + 7) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow m = -\dfrac{3}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $S = \left\{1; -\dfrac{3}{2}\right\} \Rightarrow$ Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng $-\dfrac{1}{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$ $(m, n, p, q, r \in \mathbb{R})$.
Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tập nghiệm của phương trình $f(x) = r$ có số phần tử là

A 4. B 3. C 1. D 2.



Lời giải.
Ta có $f'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q$ (1).
Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm đơn là $-1, \dfrac{5}{4}, 3$.
Do đó $f'(x) = m(x+1)(4x-5)(x-3)$ và $m \neq 0$ hay $f'(x) = 4mx^3 - 13mx^2 - 2mx + 15m$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $n = -\dfrac{13}{3}m$, $p = -m$ và $q = 15m$. Khi đó

$$\begin{aligned} f(x) = r &\Leftrightarrow mx^4 + nx^3 + px^2 + qx = 0 \\ &\Leftrightarrow x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \\ x = -\dfrac{5}{3}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x) = r$ là $S = \left\{-\dfrac{5}{3}; 0; 3\right\}$.
Chọn đáp án B □

Câu 43. Với a và b là hai số thực dương tùy ý, $\log(ab^2)$ bằng

A $2\log a + \log b$. B $\log a + 2\log b$. C $2(\log a + \log b)$. D $\log a + \dfrac{1}{2}\log b$.

Lời giải.

Ta có $\log\left(ab^2\right) = \log a + \log b^2 = \log a + 2\log b$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Cho $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 5$, khi đó $\int\limits_0^1 [f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) -3.
(B) 12.
(C) -8.
(D) 1.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 [f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 2 - 2\cdot 5 = -8$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 45. Thể tích khối cầu bán kính a bằng

(A) $\dfrac{4\pi a^3}{3}$.
(B) $4\pi a^3$.
(C) $\dfrac{\pi a^3}{3}$.
(D) $2\pi a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối cầu bán kính a là $V = \dfrac{4}{3}\pi a^3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Tập nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2 - x + 2\right) = 1$ là

(A) $\{0\}$.
(B) $\{0;1\}$.
(C) $\{-1;0\}$.
(D) $\{1\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x^2 - x + 2 > 0$, đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $\log_2\left(x^2 - x + 2\right) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 2 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxz) có phương trình là

(A) $z = 0$.
(B) $x + y + z = 0$.
(C) $y = 0$.
(D) $x = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oxz) đi qua điểm $O(0;0;0)$ và nhận $\overrightarrow{j} = (0;1;0)$ là một véc-tơ pháp tuyến nên phương trình của mặt phẳng (Oxz) là $y = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 48. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + x$ là

(A) $\mathrm{e}^x + x^2 + C$.
(B) $\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{2}x^2 + C$.
(C) $\dfrac{1}{x+1}\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{2}x^2 + C$.
(D) $\mathrm{e}^x + 1 + C$.

Lời giải.

Ta có

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(\mathrm{e}^x + x\right)\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \int x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2 + C, \text{ với } C \text{ là hằng số.}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$ đi qua điểm nào dưới đây?

A $Q(2;-1;2)$. **B** $M(-1;-2;-3)$. **C** $P(1;2;3)$. **D** $N(-2;1;-2)$.

Lời giải.

Thay lần lượt tọa độ các điểm đã cho vào phương trình của đường thẳng d, ta có

- Với $M(-1;-2;-3)$ thì $\dfrac{-1-1}{2}\neq\dfrac{-2-2}{-1}$, suy ra d không đi qua điểm M.
- Với $N(-2;1;-2)$ thì $\dfrac{-2-1}{2}\neq\dfrac{1-2}{-1}$, suy ra d không đi qua điểm N.
- Với $P(1;2;3)$ thì $\dfrac{1-1}{2}=\dfrac{2-2}{-1}=\dfrac{3-3}{2}=0$, suy ra d đi qua điểm P.
- Với $Q(2;-1;2)$ thì $\dfrac{2-1}{2}\neq\dfrac{-1-2}{-1}$, suy ra d không đi qua điểm Q.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Với k và n là hai số nguyên dương tùy ý thỏa mãn $k\leq n$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $\mathrm{C}_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. **B** $\mathrm{C}_n^k=\dfrac{n!}{k!}$. **C** $\mathrm{C}_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!}$. **D** $\mathrm{C}_n^k=\dfrac{k!(n-k)!}{n!}$.

Lời giải.

Với k và n là hai số nguyên dương tùy ý thỏa mãn $k\leq n$, số tổ hợp chập k của n phần tử là C_n^k và $\mathrm{C}_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. D	3. A	4. D	5. B	6. D	7. B	8. D	9. A	10. D
11. B	12. B	13. A	14. B	15. C	16. D	17. A	18. C	19. A	20. D
21. A	22. D	23. A	24. C	25. D	26. A	27. C	28. C	29. D	30. B
31. C	32. A	33. A	34. B	35. D	36. A	37. C	38. A	39. D	40. C
41. C	42. B	43. B	44. C	45. A	46. B	47. C	48. B	49. C	50. A

2 ĐỀ THI THQG 2019 - MÃ ĐỀ 101

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x + 2y + 3z - 1 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

(A) $\vec{n}_3 = (1; 2; -1)$. (B) $\vec{n}_4 = (1; 2; 3)$. (C) $\vec{n}_1 = (1; 3; -1)$. (D) $\vec{n}_2 = (2; 3; -1)$.

Lời giải.

Từ phương trình mặt phẳng (P) suy ra một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng là $\vec{n}_4 = (1; 2; 3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5 a^2$ bằng

(A) $2\log_5 a$. (B) $2 + \log_5 a$. (C) $\dfrac{1}{2} + \log_5 a$. (D) $\dfrac{1}{2}\log_5 a$.

Lời giải.

Vì a là số thực dương nên ta có $\log_5 a^2 = 2\log_5 a$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Cho hàm số có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-2; 0)$. (B) $(2; +\infty)$. (C) $(0; 2)$. (D) $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $f'(x) < 0$, $\forall x \in (0; 2)$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Nghiệm của phương trình $3^{2x-1} = 27$ là

(A) $x = 5$. (B) $x = 1$. (C) $x = 2$. (D) $x = 4$.

Lời giải.

Ta có $3^{2x-1} = 27 \Leftrightarrow 3^{2x-1} = 3^3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$ và $u_2 = 9$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

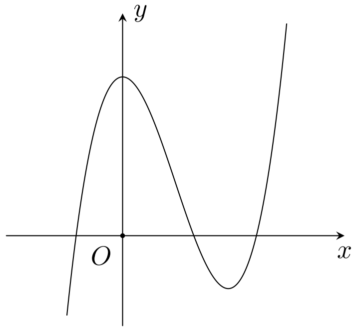
(A) -6. (B) 3. (C) 12. (D) 6.

Lời giải.

Ta có $d = u_2 - u_1 = 6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6.
Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



(A) $y = x^3 - 3x^2 + 3$.
(B) $y = -x^3 + 3x^2 + 3$.
(C) $y = x^4 - 2x^2 + 3$.
(D) $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

Lời giải.
Đường cong đã cho là đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a > 0$.
Vậy hàm số thỏa mãn là $y = x^3 - 3x^2 + 3$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{1}$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của d?
(A) $\vec{u}_2 = (2;1;1)$.
(B) $\vec{u}_4 = (1;2;-3)$.
(C) $\vec{u}_3 = (-1;2;1)$.
(D) $\vec{u}_1 = (2;1;-3)$.

Lời giải.
Một véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}_3 = (-1;2;1)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là
(A) $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.
(B) $\pi r^2 h$.
(C) $\dfrac{4}{3}\pi r^2 h$.
(D) $2\pi r^2 h$.

Lời giải.
Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Số cách chọn 2 học sinh từ 7 học sinh là
(A) 2^7.
(B) A_7^2.
(C) C_7^2.
(D) 7^2.

Lời giải.
Mỗi cách chọn 2 học sinh từ 7 học sinh là một tổ hợp chập 2 của 7 phần tử.
Vậy số cách chọn 2 học sinh từ 7 học sinh là C_7^2.
Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên trục Oz có tọa độ là
(A) $(2;1;0)$.
(B) $(0;0;-1)$.
(C) $(2;0;0)$.
(D) $(0;1;0)$.

Lời giải.
Hình chiếu vuông góc của điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ trên trục Oz là $M'(0;0;z_0)$.
Suy ra hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên trục Oz là $(0;0;-1)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Biết $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -2$ và $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 3$, khi đó $\displaystyle\int_0^1 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A -5. **B** 5. **C** -1. **D** 1.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = -2-3=-5$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và có chiều cao h là

A $3Bh$. **B** Bh. **C** $\frac{4}{3}Bh$. **D** $\frac{1}{3}Bh$.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và có chiều cao h là $V=Bh$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Số phức liên hợp của số phức $3-4i$ là

A $-3-4i$. **B** $-3+4i$. **C** $3+4i$. **D** $-4+3i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $a+bi$ là số phức $a-bi$.

Vậy số phức liên hợp của số phức $3-4i$ là số phức $3+4i$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A $x=2$. **B** $x=1$. **C** $x=-1$. **D** $x=-3$.

Lời giải.

Theo bảng biến thiên, ta thấy $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua điểm $x=-1$.

Vậy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm $x=-1$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+5$ là

A x^2+5x+C. **B** $2x^2+5x+C$. **C** $2x^2+C$. **D** x^2+C.

Lời giải.

Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+5$ là $F(x)=x^2+5x+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

A 2. **B** 1. **C** 4. **D** 3.

Lời giải.

Ta có $2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{3}{2}$.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \dfrac{3}{2}$.

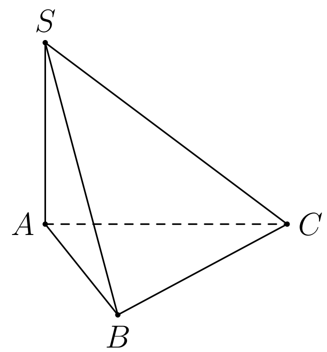
Dựa vào bảng biến thiên của $f(x)$ ta có số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \dfrac{3}{2}$ là 4. Do đó phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 17.

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B, $AB = a\sqrt{3}$ và $BC = a$ (minh họa như hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

A 90°. **B** 45°. **C** 30°. **D** 60°.



Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC)$ nên AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (ABC).

Do đó $(SC, (ABC)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$.

Tam giác ABC vuông tại B, $AB = a\sqrt{3}$ và $BC = a$ nên $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4a^2} = 2a$.

Do đó tam giác SAC vuông cân tại A nên $\widehat{SCA} = 45^\circ$.

Vậy $(SC, (ABC)) = 45^\circ$.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 10 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

A 16. **B** 56. **C** 20. **D** 26.

Lời giải.

Áp dụng định lý Vi-ét cho phương trình trên ta được $\begin{cases} z_1 + z_2 = 6 \\ z_1 z_2 = 10. \end{cases}$

Khi đó ta có $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 = 36 - 20 = 16$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Hàm số $y = 2^{x^2 - 3x}$ có đạo hàm là

A $(2x-3)\cdot 2^{x^2-3x}\cdot \ln 2$. **B** $2^{x^2-3x}\cdot \ln 2$.
C $(2x-3)\cdot 2^{x^2-3x}$. **D** $(x^2-3x)\cdot 2^{x^2-3x+1}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \left(2^{x^2-3x}\right)' = (2x-3)\cdot 2^{x^2-3x}\cdot \ln 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3;3]$ là

A -16. **B** 20. **C** 0. **D** 4.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ có tập xác định $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \in [-3;3]$.

Ta có $f(1) = 0; f(-1) = 4; f(3) = 20; f(-3) = -16$.

Từ đó suy ra $\max\limits_{[-3;3]} f(x) = f(3) = 20$.

Chọn đáp án B □

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-2z-7=0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A $\sqrt{7}$. **B** 9. **C** 3. **D** $\sqrt{15}$.

Lời giải.

$$x^2+y^2+z^2+2x-2z-7=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2\cdot(-1)\cdot x+2\cdot 0\cdot y-2\cdot 1\cdot z-7=0.$$

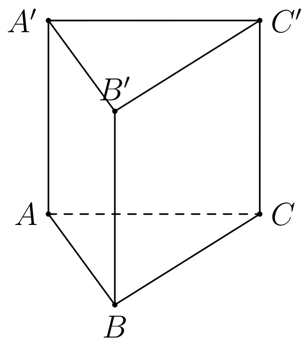
Suy ra $a=-1, b=0, c=1, d=-7$.

Vậy tâm mặt cầu $I(-1;0;1)$ bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2+7}=3$.

Chọn đáp án C □

Câu 22.

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = \sqrt{3}a$ (minh họa hình vẽ bên). Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng



A $\dfrac{3a^3}{4}$. **B** $\dfrac{3a^3}{2}$.
C $\dfrac{a^3}{4}$. **D** $\dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $AA' = a\sqrt{3}$.

Từ đó suy ra $V = a\sqrt{3}\cdot a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A 0. **B** 3. **C** 2. **D** 1.

Lời giải.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘			f_{CT}	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị đó là điểm cực tiểu $x = 0$.
Chọn đáp án D □

Câu 24. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^4 b = 16$. Giá trị của $4\log_2 a + \log_2 b$ bằng

A 4. B 2. C 16. D 8.

Lời giải.

Ta có $4\log_2 a + \log_2 b = \log_2 a^4 + \log_2 b = \log_2(a^4 b) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$.
Chọn đáp án A □

Câu 25. Cho hai số phức $z_1 = 1 - i$ và $z_2 = 1 + 2i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $3z_1 + z_2$ có tọa độ là

A $(4; -1)$. B $(-1; 4)$. C $(4; 1)$. D $(1; 4)$.

Lời giải.

Ta có $3z_1 + z_2 = 3(1 - i) + (1 + 2i) = 4 - i$. Suy ra, tọa độ điểm biểu diễn là $(4; -1)$.
Chọn đáp án A □

Câu 26. Nghiệm của phương trình $\log_3(x + 1) + 1 = \log_3(4x + 1)$ là

A $x = 3$. B $x = -3$. C $x = 4$. D $x = 2$.

Lời giải.

Điều kiện $x > -\dfrac{1}{4}$. Ta có

$$\log_3(x+1) + 1 = \log_3(4x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{-1}{4} \\ 3(x+1) = 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{-1}{4} \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$.
Chọn đáp án D □

Câu 27. Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1 m và 1,2 m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?

A 1,8 m. B 1,4 m. C 2,2 m. D 1,6 m.

Lời giải.

Gọi R_1, R_2, R lần lượt là bán kính của trụ thứ nhất, thứ hai và dự kiến sẽ làm, ta có

$$V = V_1 + V_2 = \pi R^2 h \Leftrightarrow \pi R_1^2 h + \pi R_2^2 h \Leftrightarrow R^2 = R_1^2 + R_2^2$$
$$\Rightarrow R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = \sqrt{1^2 + (1{,}2)^2} \approx 1{,}56 \ (\mathtt{m}).$$

Vậy giá trị cần tìm là 1,6 m.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	0	$+$	
y	2	↘	-4 || $+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

(A) 4. (B) 1. (C) 3. **D** 2.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ suy ra không tồn tại tiệm cận ngang khi $x \to +\infty$.

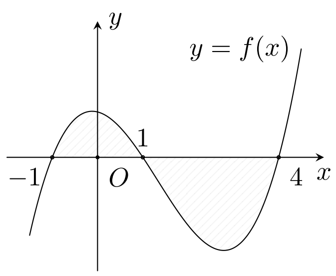
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$, suy ra đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang $y = 2$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -4$, suy ra đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = 0$.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và ngang là 2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x),\ y = 0,\ x = -1$ và $x = 4$ (như hình vẽ bên dưới). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) $S = -\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int\limits_{1}^{4} f(x)\,dx$.

B $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx - \int\limits_{1}^{4} f(x)\,dx$.

(C) $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int\limits_{1}^{4} f(x)\,dx$.

(D) $S = -\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx - \int\limits_{1}^{4} f(x)\,dx$.

Lời giải.

Ta có hàm số $f(x) \geq 0 \forall x \in [-1;1]$; $f(x) \leq 0 \forall x \in [1;4]$, nên

$$S = \int\limits_{-1}^{4} |f(x)|\,dx = \int\limits_{-1}^{1} |f(x)|\,dx + \int\limits_{1}^{4} |f(x)|\,dx = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx - \int\limits_{1}^{4} f(x)\,dx.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;0)$ và $B(5;1;-1)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

(A) $2x-y-z+5=0$.
(B) $2x-y-z-5=0$.
(C) $x+y+2z-3=0$.
(D) $3x+2y-z-14=0$.

Lời giải.

Gọi (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB, do đó (P) đi qua trung điểm $I(3;2;-1)$ của AB, có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(2;-1;-1)$.

Suy ra $(P)\colon 2(x-3)-1(y-2)-1(z+1)=0 \Leftrightarrow 2x-y-z-5=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x+1)^2}$ trên khoảng$(-1;+\infty)$ là

(A) $2\ln(x+1)+\dfrac{2}{x+1}+C$.
(B) $2\ln(x+1)+\dfrac{3}{x+1}+C$.
(C) $2\ln(x+1)-\dfrac{2}{x+1}+C$.
(D) $2\ln(x+1)-\dfrac{3}{x+1}+C$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{2x-1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{2(x+1)-3}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x\\ =&\int\left[\frac{2}{x+1}-\frac{3}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x=2\ln(x+1)+\frac{3}{x+1}+C.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2 x+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $\dfrac{\pi^2+4}{16}$.
(B) $\dfrac{\pi^2+14\pi}{16}$.
(C) $\dfrac{\pi^2+16\pi+4}{16}$.
(D) $\dfrac{\pi^2+16\pi+16}{16}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(2\cos^2 x+1\right)\mathrm{d}x=\int(2+\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin 2x+2x+C$.

Vì $f(0)=4\Rightarrow C=4\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x+2x+4$.

Vậy $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}\sin 2x+2x+4\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{4}cos2x+x^2+4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2+16\pi+4}{16}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;0)$, $B(2;0;2)$, $C(2;-1;3)$, $D(1;1;3)$. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABD) có phương trình là

(A) $\begin{cases}x=-2-4t\\y=-2-3t\\z=2-t\end{cases}$.
(B) $\begin{cases}x=2+4t\\y=-1+3t\\z=3-t\end{cases}$.
(C) $\begin{cases}x=-2+4t\\y=-4+3t\\z=2+t\end{cases}$.
(D) $\begin{cases}x=4+2t\\y=3-t\\z=1+3t\end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -2; 2)$, $\overrightarrow{AD} = (0; -1; 3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right] = (-4; -3; -1)$.
Đường thẳng qua $C(2; -1; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng (ABD) có phương trình
$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -4 + 3t \\ z = 2 + t. \end{cases}$$
Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho số phức z thỏa mãn $3(\overline{z} + i) - (2 - i)z = 3 + 10i$. Mô-đun của z bằng

A 3. B 5. C $\sqrt{5}$. D $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$, $(x,\ y \in \mathbb{R})$
$3(\overline{z} + i) - (2 - i)z = 3 + 10i$
$\Leftrightarrow 3(x - yi + i) - (2 - i)(x + yi) = 3 + 10i$
$\Leftrightarrow x - y + (x - 5y + 3)i = 3 + 10i$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ x - 5y + 3 = 10 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$
Do đó $z = 2 - i$
Vậy $|z| = \sqrt{5}$.
Chọn đáp án C □

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(3 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

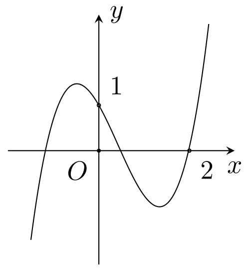
A $(4; +\infty)$. B $(-2; 1)$. C $(2; 4)$. D $(1; 2)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -2 \cdot f'(3 - 2x)$.
Hàm số nghịch biến khi
$$y' \le 0 \Leftrightarrow -2 \cdot f'(3 - 2x) \le 0 \Leftrightarrow f'(3 - 2x) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 \le 3 - 2x \le -1 \\ 3 - 2x \ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \le x \le 3 \\ x \le 1. \end{array}\right.$$
Vì hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ nên nghịch biến trên $(-2; 1)$.
Chọn đáp án B □

Câu 36.

Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x) < x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi



(A) $m \geq f(2) - 2$.
(B) $m \geq f(0)$.
(C) $m > f(2) - 2$.
(D) $m > f(0)$.

Lời giải.

Ta có $f(x) < x + m \Leftrightarrow f(x) - x < m$.

Đặt $g(x) = f(x) - x$ xét trên khoảng $(0; 2)$. Do đó $g'(x) = f'(x) - 1$.

Từ đồ thị ta thấy $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ với mọi $x \in (0; 2)$. Suy ra hàm số $g(x) = f(x) - x$ luôn nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Bất phương trình $f(x) < x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi $m \geq \lim\limits_{x \to 0} g(x) = f(0)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 25 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn là

(A) $\dfrac{1}{2}$.
(B) $\dfrac{13}{25}$.
(C) $\dfrac{12}{25}$.
(D) $\dfrac{313}{625}$.

Lời giải.

Số cách chọn hai số khác nhau từ 25 số nguyên dương đầu tiên là $\mathrm{C}_{25}^2 = 300 \Rightarrow n(\Omega) = 300$.

Gọi A là biến cố "Tổng hai số được chọn là một số chẵn". Ta có hai trường hợp

- Trường hợp 1: Chọn 2 số chẵn từ 12 số chẵn có $\mathrm{C}_{12}^2 = 66$ cách.
- Trường hợp 2: Chọn 2 số lẻ từ 13 số lẻ có $\mathrm{C}_{13}^2 = 78$ cách.

Do đó $n(A) = 66 + 78 = 144$.

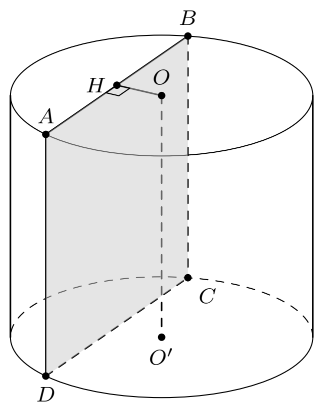
Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{144}{300} = \dfrac{12}{25}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Cho hình trụ có chiều cao bằng $5\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 30. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

(A) $10\sqrt{3}\pi$.
(B) $5\sqrt{39}\pi$.
(C) $20\sqrt{3}\pi$.
(D) $10\sqrt{39}\pi$.

Lời giải.



Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai đáy và $ABCD$ là thiết diện song song với trục với $A,\ B \in (O)$; $C,\ D \in (O')$.

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow OH = \mathrm{d}(OO', (ABCD)) = 1$.

Vì $S_{ABCD} = 30 \Leftrightarrow AB \cdot BC = 30$.

Suy ra $AB = \dfrac{30}{5\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow HA = HB = \sqrt{3}$.

Bán kính của đáy là $r = \sqrt{OH^2 + HA^2} = \sqrt{3+1} = 2$.

Diện tích xung quanh của hình trụ

$$S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2 \cdot 5\sqrt{3} = 20\sqrt{3}\pi.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(3x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm?

A 2. **B** 4. **C** 3. **D** Vô số.

Lời giải.

Điều kiện $x > \dfrac{1}{3}$ và $m > 0$.

Phương trình đã cho tương đương: $\log_3 x - \log_3(3x-1) = \log_3 \dfrac{1}{m} \Leftrightarrow \dfrac{x}{3x-1} = \dfrac{1}{m}$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x}{3x-1}$ với $x > \dfrac{1}{3}$.

Có $f'(x) = -\dfrac{1}{(3x-1)^2} < 0$, $\forall x > \dfrac{1}{3}$

x	$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{3}$

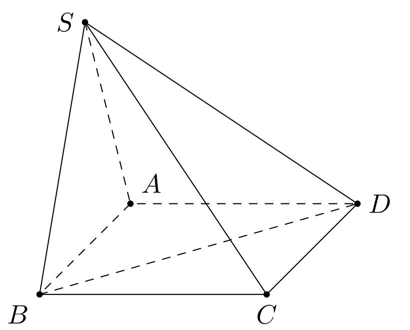
Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có nghiệm khi $\dfrac{1}{m} > \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 0 < m < 3$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1, 2\}$.

Chọn đáp án A □

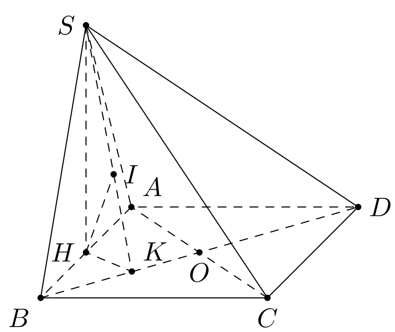
Câu 40.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng



A $\dfrac{\sqrt{21}a}{14}$. **B** $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. **C** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **D** $\dfrac{\sqrt{21}a}{28}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AB. Khi đó, $SH \perp (ABCD)$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD suy ra $AC \perp BD$. Kẻ $HK \perp BD$ tại K (K là trung điểm BO).

Kẻ $HI \perp SH$ tại I. Khi đó: $\mathrm{d}(A,(SBD)) = 2\mathrm{d}(H,(SBD)) = 2HI$.

Xét tam giác SHK, có: $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $HK = \dfrac{1}{2}AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Khi đó: $\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{28}{3a^2} \Rightarrow HI = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.

Suy ra: $\mathrm{d}(A,(SBD)) = 2HI = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(4)=1$ và $\int\limits_0^1 xf(4x)\,\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int\limits_0^4 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $\dfrac{31}{2}$. (B) -16. (C) 8. (D) 14.

Lời giải.

Xét $\int\limits_0^1 xf(4x)\,\mathrm{d}x=1$. Đặt $t=4x \Rightarrow \int\limits_0^4 \frac{1}{4}t\cdot f(t)\cdot\frac{1}{4}\,\mathrm{d}t=1 \Rightarrow \int\limits_0^4 t\cdot f(t)\,\mathrm{d}t=16 \Rightarrow \int\limits_0^4 x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x=16.$

Xét $I=\int\limits_0^4 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^4 x^2\mathrm{d}f(x)$

Suy ra: $I=x^2\cdot f(x)\Big|_0^4-\int\limits_0^4 2x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x=4^2f(4)-2\cdot 16=-16.$

Chọn đáp án (B) □

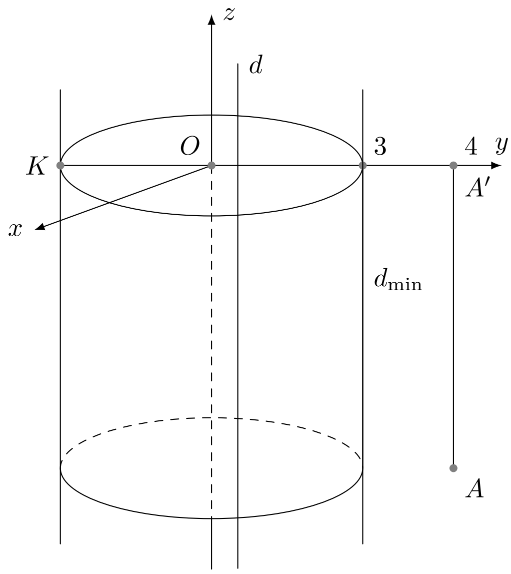
Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;4;-3)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3. Khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

(A) $P(-3;0;-3)$. (B) $M(0;-3;-5)$. (C) $N(0;3;-5)$. (D) $Q(0;5;-3)$.

Lời giải.

Đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3 nên d nằm trên mặt trụ tròn xoay có trục là Oz và bán kính bằng 3.

Gọi I là hình chiếu của A lên Oy, khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất khi d đi qua giao điểm của Oy với mặt trụ là điểm $I(0;3;0)$



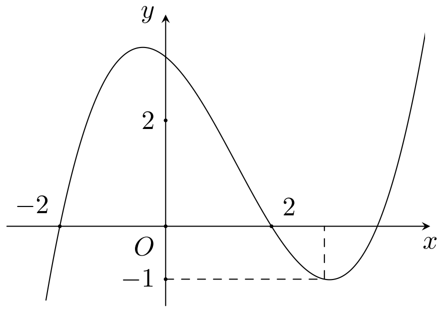
Phương trình đường thẳng d: $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \\ z=t. \end{cases}$

Nên d đi qua điểm $N(0;3;-5)$

Chọn đáp án (C) □

Câu 43.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \dfrac{4}{3}$ là



A 3. **B** 8. **C** 7. **D** 4.

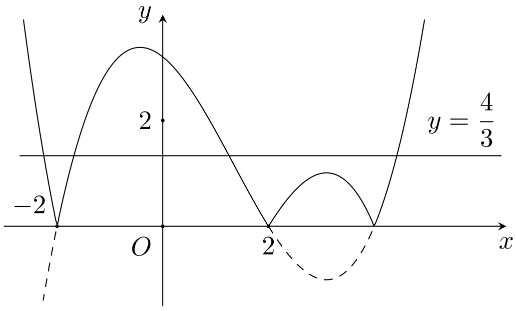
Lời giải.

Đặt $t = x^3 - 3x \Rightarrow t' = 3x^2 - 3$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	
t	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó $|f(t)| = \dfrac{4}{3}$ (1). Đồ thị hàm số $y = |f(t)|$ được vẽ thành 2 phần

- Phần 1 giữ nguyên đồ thị hàm số $y = f(x)$ phía trên trục Ox khi $f(x) \geq 0$.
- Phần 2 lấy đối xứng của phần còn lại qua trục Ox.



Dựa vào đồ thị hàm số $|f(t)|$ ta thấy phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $t_1 < -2$, $-2 < t_2 < 0$, $0 < t_3 < 2$, $t_4 > 2$.

Mỗi nghiệm t của phương trình (1), ta thay vào phương trình $t = x^3 - 3x$ để tìm nghiệm x. Khi đó

- $t_1 < -2 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm.
- $-2 < t_2 < 0 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm.
- $0 < t_3 < 2 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm.
- $t_4 > 2 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \dfrac{4}{3}$ có 8 nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Xét số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \dfrac{4 + iz}{1 + z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A $\sqrt{34}$. **B** 26. **C** 34. **D** $\sqrt{26}$.

Lời giải.

$$w = \frac{4 + iz}{1 + z} \Leftrightarrow (1 + z)w = 4 + iz \Leftrightarrow z(w - i) = 4 - w$$

$$\Leftrightarrow\quad |z|\cdot|w-i| = |4-w| \Leftrightarrow \sqrt{2}\cdot|w-i| = |4-w|.\quad (*)$$

Gọi $w = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ khi đó thay vào $(*)$ ta có:

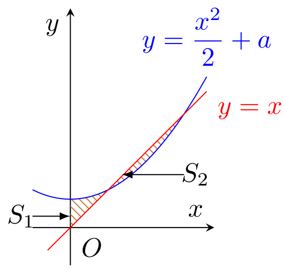
$$\sqrt{2}\cdot|x+yi-i| = |4-x-yi| \Leftrightarrow 2[x^2+(y-1)^2] = (x-4)^2+y^2$$
$$\Leftrightarrow\quad x^2+y^2+8x-4y-14=0 \Leftrightarrow (x+4)^2+(y-2)^2 = 34.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \dfrac{4+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{34}$.

Chọn đáp án A □

Câu 45.

Cho đường thẳng $y = x$ và parabol $y = \dfrac{1}{2}x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ dưới đây. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A $\left(\dfrac{3}{7}; \dfrac{1}{2}\right)$. **B** $\left(0; \dfrac{1}{3}\right)$. **C** $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{5}\right)$. **D** $\left(\dfrac{2}{5}; \dfrac{3}{7}\right)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$\dfrac{1}{2}x^2 + a = x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2a = 0$ (1)

Phương trình trên có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta > 0\\ S > 0\\ P > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-2a > 0\\ 2 > 0\\ 2a > 0\end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \dfrac{1}{2}$.

Khi $0 < a < \dfrac{1}{2}$ phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt $x_1 < x_2$,

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow \int\limits_0^{x_1}\left(\frac{1}{2}x^2 + a - x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{x_1}^{x_2}\left(-\frac{1}{2}x^2 - a + x\right)\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{6}x_1^3 + ax_1 - \frac{1}{2}x_1^2 = -\frac{1}{6}x_2^3 - ax_2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{6}x_1^3 + ax_1 - \frac{1}{2}x_1^2$$
$$\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{6}x_2^3 - ax_2 + \frac{1}{2}x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_2^2 + 6a - 3x_2 = 0.$$

Từ (1) suy ra $2a = -x_2^2 + 2x_2$

Thế vào (2) ta được: $2x_2^2 - 3x_2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_2 = 0 & \text{(loại)}\\ x_2 = \dfrac{3}{2} & \end{array}\right. \Rightarrow a = \dfrac{3}{8} = 0,375 \in \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{5}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ là

(A) 9. (B) 3. **C** 7. (D) 5.

Lời giải.

Ta có $y' = 2(x-1) \cdot f'(x^2 - 2x)$. Từ bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$, ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ f'(x^2-2x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 2x = a \in (-\infty; -1) \\ x^2 - 2x = b \in (-1; 0) \\ x^2 - 2x = c \in (0; 1) \\ x^2 - 2x = d \in (1; +\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 1 & \\ x^2 - 2x - a = 0,\ a \in (-\infty; -1) & (1) \\ x^2 - 2x - b = 0,\ b \in (-1; 0) & (2) \\ x^2 - 2x - c = 0,\ c \in (0; 1) & (3) \\ x^2 - 2x - d = 0,\ d \in (1; +\infty) & (4). \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 - 2x$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$ ↘	-1	↗ $+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình (1) vô nghiệm, các phương trình (2), (3), (4) đều có hai nghiệm đơn phân biệt khác 1 và do b, c, d đôi một khác nhau nên các nghiệm của phương trình (2), (3), (4) cũng đôi một khác nhau. Do đó $f'(x^2 - 2x) = 0$ có 6 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy $y' = 0$ có 7 nghiệm đơn phân biệt, do đó số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ là 7.

Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 6. Gọi M, N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A $27\sqrt{3}$. (B) $21\sqrt{3}$. **C** $30\sqrt{3}$. (D) $36\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi h là chiều cao của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Vì $\triangle ABC$ đều có độ dài cạnh bằng 6 nên

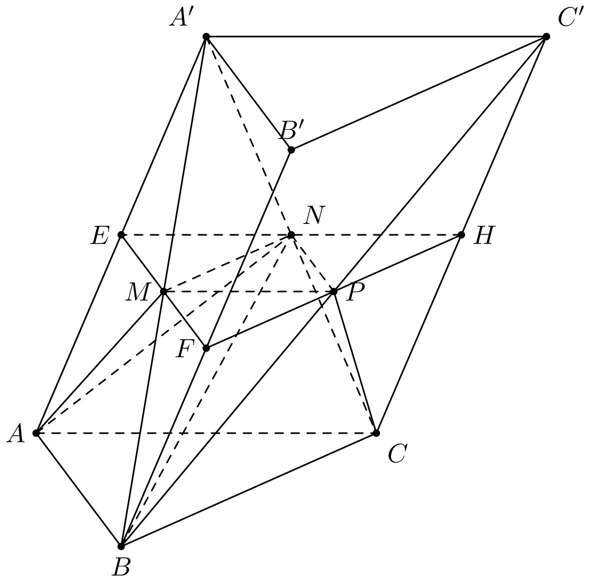
$$S_{\triangle ABC} = 6^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}.$$

Thể tích lặng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V = h \cdot S_{\triangle ABC} = 8 \cdot 9\sqrt{3} = 72\sqrt{3}.$$

Gọi E, F, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', BB', CC'.

Thể tích khối chóp $A.EMN$ là



$$V_{A.EMN} = \frac{1}{3}\mathrm{d}(A, (EMN)) \cdot S_{\triangle EMN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}h \cdot \frac{1}{4}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{24}V.$$

Tương tự, ta có $V_{B.FMP} = V_{C.HNP} = \dfrac{1}{24}V$.
Thể tích khối đa diện $ABCMNP$ là

$$V_{ABCMNP} = \frac{1}{2}V - 3V_{A.EMN} = \frac{1}{2}V - 3 \cdot \frac{1}{24}V = \frac{3}{8}V = 27\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+\left(z+\sqrt{2}\right)^2 = 3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

A 12. **B** 8. **C** 16. **D** 4.

Lời giải.
Mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+\left(z+\sqrt{2}\right)^2 = 3$ có tâm $I\left(0;0;-\sqrt{2}\right)$, bán kính $R=\sqrt{3}$.
Ta có $A(a;b;c) \in (Oxy) \Rightarrow A(a;b;0)$.
Dễ thấy (S) cắt mặt phẳng (Oxy) nên từ một điểm A bất kỳ thuộc mặt phẳng (Oxy) và nằm ngoài (S) kẻ tiếp tuyến tới (S) thì các tiếp tuyến đó nằm trên một mặt nón đỉnh A, các tiếp điểm nằm trên một đường tròn được xác định. Còn nếu A thuộc (S) thì ta kẻ các tiếp tuyến đó sẽ thuộc một mặt phẳng tiếp diện của (S) tại điểm A. Để có ít nhất hai tiếp tuyến qua A thỏa mãn bài toán khi và chỉ khi

- Hoặc A thuộc $(S) \Leftrightarrow IA = R = \sqrt{3}$.
- Hoặc các tiếp tuyến tạo thành mặt nón và góc ở đỉnh của mặt nón là $\widehat{MAN} \ge 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{MAI} \ge 45^\circ$.

  Suy ra $\sin\widehat{MAI} \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{IM}{IA} \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{IA} \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow IA \le \sqrt{6}$.

Vậy điều kiện bài toán là $\sqrt{3} \le IA \le \sqrt{6} \Leftrightarrow 3 \le IA^2 \le 6$.
Ta có $3 \le IA^2 \le 6 \Leftrightarrow 3 \le a^2+b^2+2 \le 6 \Leftrightarrow 1 \le a^2+b^2 \le 4$ (*).
Do $A(a;b;0)$ có tọa độ nguyên nên ta có điểm thỏa mãn $(*)$ là
$(0;2;0)$, $(0;-2;0)$, $(2;0;0)$, $(-2;0;0)$, $(0;1;0)$, $(0;-1;0)$, $(1;0;0)$, $(-1;0;0)$, $(1;1;0)$, $(1;-1;0)$, $(-1;1;0)$, $(-1;-1;0)$.
Vậy có 12 điểm A thỏa mãn yêu cầu.
Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho hai hàm số $y = \dfrac{x-3}{x-2} + \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1}$ và $y = |x+2| - x + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A $(-\infty;2]$. **B** $[2;+\infty)$. **C** $(-\infty;2)$. **D** $(2;+\infty)$.

Lời giải.
Xét phương trình

$$\begin{aligned} & \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} = |x+2| - x + m \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} - |x+2| + x = m \quad (1) \end{aligned}$$

Hàm số $g(x) = \dfrac{x-3}{x-2} + \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} - |x+2| + x$

$$= \begin{cases} \dfrac{x-3}{x-2} + \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} - 2 & \text{nếu } x \geq -2 \\ \dfrac{x-3}{x-2} + \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + 2x + 2 & \text{nếu } x < -2. \end{cases}$$

Ta có $g'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-2)^2} + \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0,\ \forall x \in (-2; +\infty) \setminus \{-1; 0; 1; 2\} \\ \dfrac{1}{(x-2)^2} + \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2} + 2 > 0,\ \forall x < -2. \end{cases}$

Nên hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(2; +\infty)$.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 2$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$		$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{49}{12}$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	2

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có 4 nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m \geq 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho phương trình $\left(4\log_2^2 x + \log_2 x - 5\right)\sqrt{7^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A 49. **B** 47. **C** Vô số. **D** 48.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ 7^x - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 7^x \geq m. \end{cases}$

Với m nguyên dương ta có

$$\left(4\log_2^2 x + \log_2 x - 5\right)\sqrt{7^x - m} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\log_2^2 x + \log_2 x - 5 = 0 \\ \sqrt{7^x - m} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 2^{-\frac{5}{4}} \\ x = \log_7 m. \end{array}\right.$$

Để phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm phân biệt có hai trường hợp

- $2 > \log_7 m \geq 2^{-\frac{5}{4}} \Leftrightarrow 7^{2^{-\frac{5}{4}}} \leq m < 7^2$.
  Trường hợp này $m \in \{3; 4; 5; \ldots; 48\}$, có 46 giá trị nguyên dương của m.
- $\log_7 m = 0 \Leftrightarrow m = 1$. Trường hợp này có 1 giá trị của m thỏa mãn.

Vậy có tất cả 47 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án B □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. A	3. C	4. C	5. D	6. A	7. C	8. A	9. C	10. B
11. A	12. B	13. C	14. C	15. A	16. C	17. B	18. A	19. A	20. B
21. C	22. A	23. D	24. A	25. A	26. D	27. D	28. D	29. B	30. B
31. B	32. C	33. C	34. C	35. B	36. B	37. C	38. C	39. A	40. B
41. B	42. C	43. B	44. A	45. C	46. C	47. C	48. A	49. B	50. B

3 ĐỀ THI THQG 2019 - MÃ ĐỀ 102

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 6$ là

A. $x^2 + 6x + C$. B. $2x^2 + C$. C. $2x^2 + 6x + C$. D. $x^2 + C$.

Lời giải.

$\int (2x+6)\,\mathrm{d}x = x^2 + 6x + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 3z + 1 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P) ?

A. $\vec{n_1} = (2; -1; -3)$. B. $\vec{n_4} = (2; 1; 3)$. C. $\vec{n_2} = (2; -1; 3)$. D. $\vec{n_3} = (2; 3; 1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 3z + 1 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n_2} = (2; -1; 3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là

A. $\pi r^2 h$. B. $2\pi r^2 h$. C. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. D. $\frac{4}{3}\pi r^2 h$.

Lời giải.

Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Số phức liên hợp của số phức $5 - 3i$ là

A. $-5 + 3i$. B. $-3 + 5i$. C. $-5 - 3i$. D. $5 + 3i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $5 - 3i$ là $5 + 3i$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5 a^3$ bằng

A. $\frac{1}{3}\log_5 a$. B. $\frac{1}{3} + \log_5 a$. C. $3 + \log_5 a$. D. $3\log_5 a$.

Lời giải.

$\log_5 a^3 = 3\log_5 a$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; -1; 1)$ trên trục Oz có tọa độ là

A. $(3; 0; 0)$. B. $(3; -1; 0)$. C. $(0; 0; 1)$. D. $(0; -1; 0)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; -1; 1)$ trên trục Oz có tọa độ là $(0; 0; 1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Số cách chọn 2 học sinh từ 5 học sinh là

A. 5^2. B. 2^5. C. C_5^2. D. A_5^2.

Lời giải.

Mỗi cách chọn 2 học sinh từ 5 học sinh là một tổ hợp chập 2 của 5 phần tử. Vậy có C_5^2 cách.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Biết tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = -4$. Khi đó $\int\limits_0^1 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -7. B. 7. **C.** -1. D. 1.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 3 + (-4) = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-5} = \dfrac{z+2}{3}$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d

A. $\vec{u} = (2;5;3)$. **B.** $\vec{u} = (2;-5;3)$. C. $\vec{u} = (1;3;2)$. D. $\vec{u} = (1;3;-2)$.

Lời giải.

Dựa vào phương trình đường thẳng suy ra một véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (2;-5;3)$.

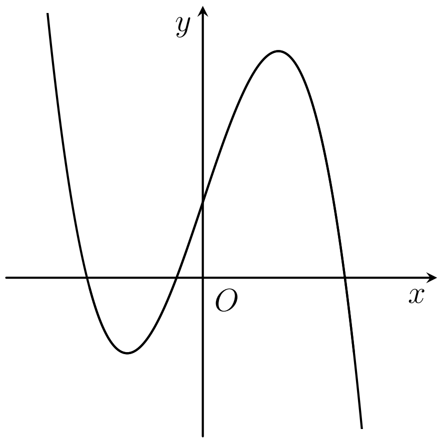
Chọn đáp án B □

Câu 10.

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên

A. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. **B.** $y = -x^3 + 3x + 1$.

C. $y = x^3 - 3x + 1$. D. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.



Lời giải.

Trong bốn hàm số đã cho thì chỉ có hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ (hàm số đa thức bậc ba với hệ số $a < 0$) có dạng đồ thị như đường cong trong hình.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 8$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

A. 4. B. -6. C. 10. **D.** 6.

Lời giải.

Vì (u_n) là cấp số cộng nên ta có $u_2 = u_1 + d \Leftrightarrow d = u_2 - u_1 = 8 - 2 = 6$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là

A. $V = 3Bh$. **B.** $V = Bh$. C. $V = \dfrac{4}{3}Bh$. D. $V = \dfrac{1}{3}Bh$.

Lời giải.

Ta có công thức tính thể tích lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là $V = Bh$.
Chọn đáp án B □

Câu 13. Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 27$ là

A 2. B 1. C 5. D 4.

Lời giải.
Ta có $3^{2x+1} = 27 \Leftrightarrow 3^{2x+1} = 3^3 \Leftrightarrow 2x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 1$.
Chọn đáp án B □

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A $(0; +\infty)$. B $(0; 2)$. C $(-2; 0)$. D $(-\infty; -2)$.

Lời giải.
Từ bảng biến thiên, suy ra trên khoảng $(-2; 0)$ hàm số đồng biến.
Chọn đáp án C □

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại

A $x = 2$. B $x = -2$. C $x = 3$. D $x = 1$.

Lời giải.
Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 3$.
Chọn đáp án C □

Câu 16. Nghiệm của phương trình $\log_2(x + 1) = 1 + \log_2(x - 1)$ là

A $x = 1$. B $x = -2$. C $x = 3$. D $x = 2$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2(x+1) = 1 + \log_2(x-1) \Leftrightarrow \log_2(x+1) = \log_2\left[2 \cdot (x-1)\right] \Leftrightarrow x + 1 = 2x - 2 \Leftrightarrow x = 3.$$

Chọn đáp án C □

Câu 17. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

A 20. **B** 4. **C** 0. **D** -16.

Lời giải.

$f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \in [-3; 3]$.

Ta có $f(-3) = -16$; $f(-1) = 4$; $f(1) = 0$; $f(3) = 20$.

$\Rightarrow \min\limits_{[-3;3]} f(x) = -16$.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1m và 1,4m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm **gần nhất** với kết quả nào dưới đây

A 1,7m. **B** 1,5m. **C** 1,9m. **D** 2,4m.

Lời giải.

Gọi chiều cao của các hình trụ là h.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình trụ có bán kính đáy $R_1 = 1$m, $R_2 = 1{,}4$m.

Gọi V là thể tích của hình trụ dự định làm và có bán kính đáy là R.

Ta có $V = V_1 + V_2 \Leftrightarrow \pi R^2 h = \pi R_1^2 h + \pi R_2^2 h \Leftrightarrow R^2 = R_1^2 + R_2^2 \Leftrightarrow R = \sqrt{2,96} \approx 1{,}72$ m.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A 2. **B** 1. **C** 0. **D** 3.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$			$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có 1 điểm cực trị $x = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 14 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

(A) 36. (B) 8. (C) 28. (D) 18.

Lời giải.

Ta có $z^2 - 6z + 14 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 3 + \sqrt{5}i \\ z = 3 - \sqrt{5}i \end{array}\right. \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 = \left(3 + \sqrt{5}i\right)^2 + \left(3 - \sqrt{5}i\right)^2 = 8$.

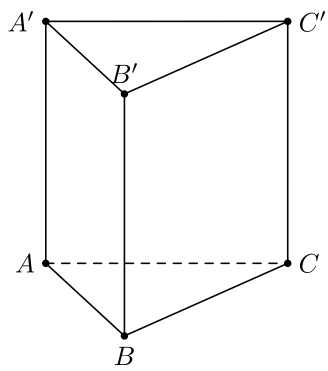
Chọn đáp án (B) □

Câu 21.

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = 2a$ (minh họa như hình vẽ bên). Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

(C) $\sqrt{3}a^3$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$.



Lời giải.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Do khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên đường cao của lăng trụ là $AA' = 2a$

Thể tích khối lăng trụ là $V = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = 2a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

(A) 3. (B) 9. (C) $\sqrt{15}$. (D) $\sqrt{7}$.

Lời giải.

Ta có $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 7 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9$

Vậy bán kính của mặt cầu bằng 3.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 5 = 0$ là

(A) 2. (B) 3. **C** 4. (D) 0.

Lời giải.

Xét phương trình $3f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{5}{3}$.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $d\colon y = \dfrac{5}{3}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt nên phương trình $3f(x) - 5 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0			1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$		0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ 2	$\searrow$		-2	$\nearrow$	$+\infty$

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

(A) 3. (B) 1. **C** 2. (D) 4.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên đã cho ta có

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là một tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = 0$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^3b^2 = 32$. Giá trị của $3\log_2 a + 2\log_2 b$ bằng

A 5. (B) 2. (C) 32. (D) 4.

Lời giải.

Ta có: $\log_2 a^3b^2 = \log_2 32 \Leftrightarrow 3\log_2 a + 2\log_2 b = 5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Hàm số $y = 3^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

(A) $(2x-3)\cdot 3^{x^2-3x}$. (B) $3^{x^2-3x}\cdot\ln 3$.

(C) $(x^2-3x)\cdot 3^{x^2-3x-1}$. **D** $(2x-3)\cdot 3^{x^2-3x}\cdot\ln 3$.

Lời giải.

Ta có: $y' = \left(3^{x^2-3x}\right)' = (2x-3)\cdot 3^{x^2-3x}\cdot\ln 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;0)$ và $B(3;0;2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

(A) $2x + y + z - 4 = 0$. **B** $2x - y + z - 2 = 0$.

C $x+y+z-3=0$. **D** $2x-y+z+2=0$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Suy ra $I(1;1;1)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-2;2)$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua trung điểm I của AB và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm véc-tơ pháp tuyến, nên có phương trình là $(\alpha)\colon 2x-y+z-2=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Cho hai số phức $z_1=-2+i$ và $z_2=1+i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $2z_1+z_2$ có tọa độ là

A $(3;-3)$. **B** $(2;-3)$. **C** $(-3;3)$. **D** $(-3;2)$.

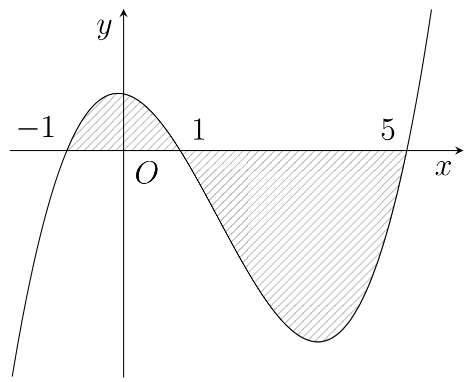
Lời giải.

Ta có: $2z_1+z_2=-4+2i+1+i=-3+3i$.

Vậy điểm biểu diễn số phức $2z_1+z_2$ có tọa độ là $(-3;3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=-1$ và $x=5$ (như hình vẽ sau). Mệnh đề nào sau đây đúng?



A $S=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

B $S=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C $S=-\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

D $S=-\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có: $S=\int\limits_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{5} |f(x)|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

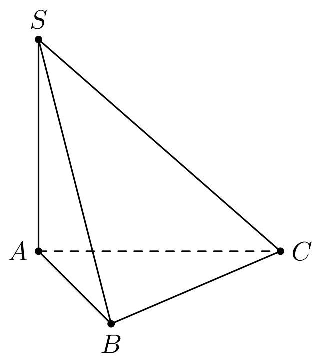
Chọn đáp án B □

Câu 30.

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA=2a$, tam giác ABC vuông tại B, $AB=a$ và $BC=\sqrt{3}a$ (minh họa như hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

A 90°. **B** 30°.

C 60°. **D** 45°.



Lời giải.

Vì SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SCA}$.

Mà $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{2a}{\sqrt{a^2+3a^2}} = 1$. Vậy $\widehat{SCA} = 45^\circ$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Cho số phức z thoả mãn $3(\overline{z} - i) - (2+3i)z = 7 - 16i$. Mô-đun của z bằng

A $\sqrt{5}$. B 5. C $\sqrt{3}$. D 3.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi\,(a; b \in \mathbb{R})$. Theo đề ta có

$$\begin{aligned}
& 3(a-bi-i)-(2+3i)(a+bi)=7-16i\\
\Leftrightarrow\ & 3a-3bi-3i-2a-2bi-3ai+3b=7-16i\\
\Leftrightarrow\ & (a+3b)+(-3a-5b-3)=7-16i\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a+3b=7\\ -3a-5b-3=-16\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a+3b=7\\ -3a-5b=-13\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a=1\\ b=2.\end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $|z| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;2)$, $B(1;2;1)$, $C(3;2;0)$ và $D(1;1;3)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) có phương trình là

A $\begin{cases} x=1-t\\ y=4t\\ z=2+2t\end{cases}$. B $\begin{cases} x=1+t\\ y=4\\ z=2+2t\end{cases}$. C $\begin{cases} x=2+t\\ y=4+4t\\ z=4+2t\end{cases}$. D $\begin{cases} x=1-t\\ y=2-4t\\ z=2-2t\end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (2;0;-1)$, $\overrightarrow{BD} = (0;-1;2)$ và $\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right] = (-1;-4;-2)$.

Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) thì vuông góc với hai đường thẳng BC, BD nên nhận véc-tơ $\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right] = (-1;-4;-2)$ là véc-tơ chỉ phương.

Có 2 phương án bị loại. Thay điểm $A(1;0;2)$ vào phương trình của một trong hai phương án còn lại, chẳng hạn thay vào phương trình $\begin{cases} x=2+t\\ y=4+4t\\ z=4+2t\end{cases}$ ta được $\begin{cases} 1=2+t\\ 0=4+4t\\ 2=4+2t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1\\ t=-1\\ t=-1\end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) là $\begin{cases} x=2+t\\ y=4+4t\\ z=4+2t\end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2 x+3$, $\forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng?

Ⓐ $\dfrac{\pi^2+2}{8}$. Ⓑ $\dfrac{\pi^2+8\pi+8}{8}$. **C** $\dfrac{\pi^2+8\pi+2}{8}$. Ⓓ $\dfrac{\pi^2+6\pi+8}{8}$.

Lời giải.

Ta có

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(2\cos^2 x+3\right)\,\mathrm{d}x=\int(1+\cos 2x+3)\,\mathrm{d}x=\int(\cos 2x+4)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin 2x+4x+C.$$

Nên $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x+4x+C$.

Lại có $f(0)=4\Rightarrow C=4$. Suy ra $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x+4x+4$.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}\sin 2x+4x+4\right)\,\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{4}\cos 2x+2x^2+4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2+8\pi+2}{8}.$$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 34. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{3x-1}{(x-1)^2}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ là

A $3\ln(x-1)-\dfrac{2}{x-1}+C$. Ⓑ $3\ln(x-1)+\dfrac{1}{x-1}+C$.

Ⓒ $3\ln(x-1)-\dfrac{1}{x-1}+C$. Ⓓ $3\ln(x-1)+\dfrac{2}{x-1}+C$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\dfrac{3x-1}{(x-1)^2}=\dfrac{3(x-1)+2}{(x-1)^2}=\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)^2}$

Với $x>1$ ta có

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{3}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}\right)\,\mathrm{d}x=3\int\frac{\mathrm{d}(x-1)}{x-1}+2\int\frac{\mathrm{d}(x-1)}{(x-1)^2}=3\ln(x-1)-\frac{2}{x-1}+C.$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ có bảng dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(5-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(2;3)$. **B** $(0;2)$. Ⓒ $(3;5)$. Ⓓ $(5;+\infty)$.

Lời giải.

Từ bảng xét dấu $f'(x)$ ta thấy rằng hàm số $y=f(x)$ có xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số $y=f(5-2x)$ có xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=f(5-2x)$ có $y'=-2f'(5-2x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$$y'\le 0\Leftrightarrow f'(5-2x)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3\le 5-2x\le -1\\ 5-2x\ge 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\le x\le 4\\ x\le 2.\end{array}\right.$$

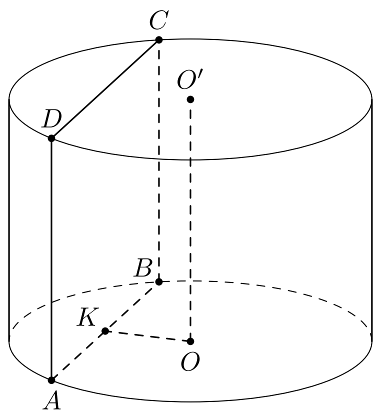
Vậy hàm số $y = f(5-2x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(3; 4)$. Suy ra hàm số $y = f(5-2x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Cho hình trụ có chiều cao bằng $4\sqrt{2}$. Cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $\sqrt{2}$, thiết diện thu được có diện tích bằng 16. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

(A) $24\sqrt{2}\pi$. (B) $8\sqrt{2}\pi$. (C) $12\sqrt{2}\pi$. (D) $16\sqrt{2}\pi$.

Lời giải.



Giả sử hình trụ có hai đáy là các hình tròn tâm O và tâm O'. Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với trục, ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ (với AB là dây cung của hình tròn đáy tâm O).

Do hình trụ có chiều cao là $h = OO' = 4\sqrt{2} \Rightarrow$ nên có độ dài đường sinh $\ell = AD = 4\sqrt{2}$.

Theo bài ra, diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng 16 nên

$$AB \cdot CD = 16 \Leftrightarrow AB = \frac{16}{AD} = \frac{16}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Gọi K là trung điểm đoạn AB thì $OK \perp AB$, mà $OK \perp AD$ nên $OK \perp (ABCD)$.

Suy ra khoảng cách giữa OO' và $(ABCD)$ là $OK = \sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông AOK có

$$R = OA = \sqrt{OK^2 + AK^2} = \sqrt{OK^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = 2.$$

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S = 2\pi R\ell = 2\pi \cdot 2 \cdot 4\sqrt{2} = 16\pi\sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(6x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

(A) 6. (B) 5. (C) Vô số. (D) 7.

Lời giải.

Xét phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(6x-1) = -\log_3 m$.

Điều kiện: $\begin{cases} x > \dfrac{1}{6} \\ m > 0. \end{cases}$

$$\begin{aligned} & \log_9 x^2 - \log_3(6x-1) = -\log_3 m \\ \Leftrightarrow\ & \log_3 x + \log_3 m = \log_3(6x-1) \\ \Leftrightarrow\ & mx = 6x - 1 \Leftrightarrow x(6-m) = 1 \qquad (1) \end{aligned}$$

- Với $m = 6$, phương trình (1) trở thành $0 = 1$ (vô lý).
- Với $m \neq 6$, phương trình (1) có nghiệm $x = \dfrac{1}{6-m}$ nên

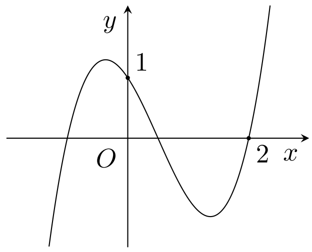
$$\frac{1}{6-m} > \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6-m} - \frac{1}{6} > 0 \Leftrightarrow \frac{m}{6-m} > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 6 \text{ (thỏa mãn).}$$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 38.

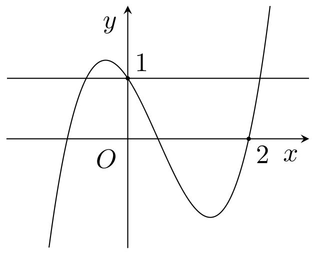


Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Bất phương trình $f(x) > x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

A $m \leq f(2) - 2$. **B** $m < f(2) - 2$.

C $m \leq f(0)$. **D** $m < f(0)$.

Lời giải.



Xét bất phương trình $f(x) > x + m \Leftrightarrow m < f(x) - x$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$ với $x \in (0; 2)$. Ta có $g'(x) = f'(x) - 1$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1$.

Từ đồ thị ta thấy trên $(0; 2)$ đường thẳng $y = 1$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nên $f'(x) < 1$, $\forall x \in (0; 2)$ hay $g'(x) < 0$, $\forall x \in (0; 2)$.

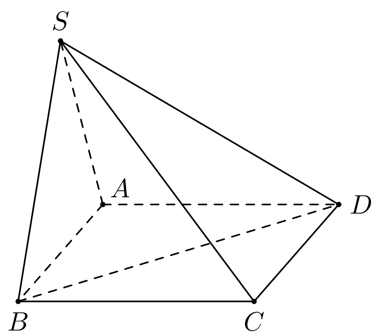
Ta có bảng biến thiên như sau

x	0		2
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$g(0)$	$\searrow$	$g(2)$

Từ bảng biến thiên ta thấy bất phương trình $f(x) > x + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi $m < g(x)$ với $\forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow m \leq g(2) \Leftrightarrow m \leq f(2) - 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 39.

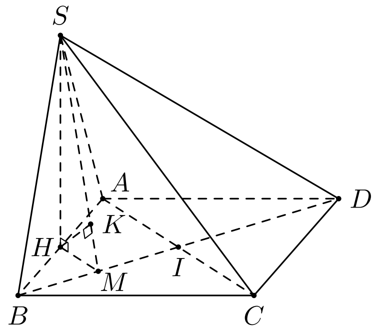


Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng

A $\dfrac{\sqrt{21}a}{28}$. **B** $\dfrac{\sqrt{21}a}{14}$.

C $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **D** $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AB, vì SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$ suy ra $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, M là trung điểm của BI. Ta có $HM \perp BD$.
Mà $\begin{cases} BD \perp HM \\ BD \perp SH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SHM)$
Từ H kẻ $HK \perp SM \Rightarrow HK \perp BD$ (Vì $BD \perp (SHM)$)
$\Rightarrow HK \perp (SBD) \Rightarrow \mathrm{d}(H, (SBD)) = HK$.
Ta có $HM = \dfrac{AI}{2} = \dfrac{AC}{4} = \dfrac{\sqrt{2}a}{4}$, $SH = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$ nên

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HM^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{8}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{28}{3a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$

Vậy $\mathrm{d}(C, (SBD)) = \mathrm{d}(A, (SBD)) = 2\mathrm{d}(H, (SBD)) = 2HK = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{21}a}{14} = \dfrac{\sqrt{21}a}{7}$.
Chọn đáp án D □

Câu 40. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 27 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

A $\dfrac{13}{27}$. **B** $\dfrac{14}{27}$. **C** $\dfrac{1}{2}$. **D** $\dfrac{365}{729}$.

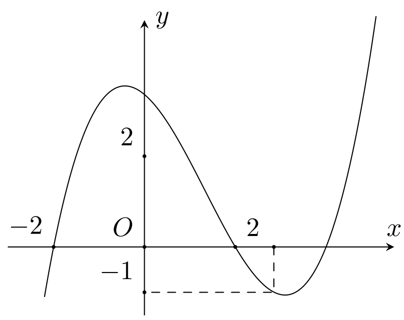
Lời giải.
Gọi A là tập hợp 27 số nguyên dương đầu tiên, ta có $A = \{1; 2; 3; \ldots; 26; 27\}$.
Phép thẻ chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ A có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{27}^2 = 351$.
Tổng hai số chọn được là số chẵn khi và chỉ khi cả hai số đó đều chẵn hoặc đều lẻ. Do đó ta có các khả năng sau:

- Hai số lấy được từ A là hai số chẵn, có $\mathrm{C}_{13}^2 = 78$ khả năng.
- Hai số lấy được tà A là hai số lẻ, có $\mathrm{C}_{14}^2 = 91$ khả năng.

Do đó khả năng để chọn được hai số có tổng là một số chẵn là $78 + 91 = 169$.
Xác suất cần tìm là $\mathrm{p}(A) = \dfrac{169}{351} = \dfrac{13}{27}$.
Chọn đáp án A □

Câu 41.
Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3 - 3x\right)\right| = \dfrac{1}{2}$ là

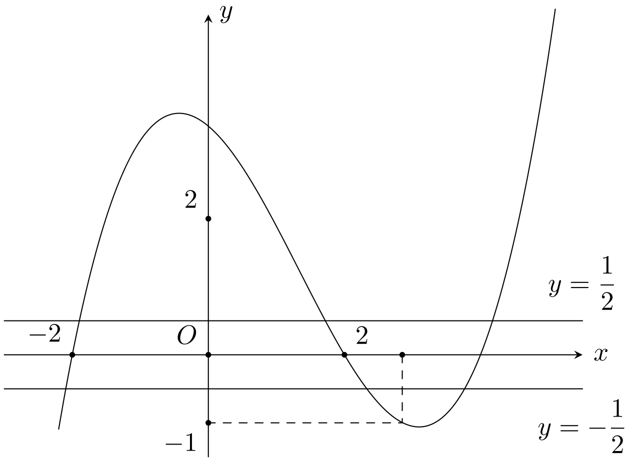
A 6. **B** 10. **C** 12. **D** 3.



Lời giải.

Ta có $|f(x^3 - 3x)| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x^3 - 3x) = \dfrac{1}{2} & (1) \\ f(x^3 - 3x) = -\dfrac{1}{2} & (2). \end{array}\right.$

Từ đồ thị ta có



- (1) $\Leftrightarrow f\left(x^3-3x\right)=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3-3x=\alpha_1 & (-2<\alpha_1<0)\\ x^3-3x=\alpha_2 & (0<\alpha_2<2)\\ x^3-3x=\alpha_3 & (\alpha_3>2)\,. \end{array}\right.$
- (2) $\Leftrightarrow f\left(x^3-3x\right)=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3-3x=\alpha_4 & (\alpha_4<-2)\\ x^3-3x=\alpha_5 & (\alpha_5>2)\\ x^3-3x=\alpha_6 & (\alpha_6>2)\,. \end{array}\right.$

Xét hàm số $y=x^3-3x$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có $y'=3x^2-3$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

- Phương trình $x^3-3x=\alpha_1$ có 3 nghiệm.
- Phương trình $x^3-3x=\alpha_2$ có 3 nghiệm.
- Mỗi phương trình $x^3-3x=\alpha_3$, $x^3-3x=\alpha_4$, $x^3-3x=\alpha_5$, $x^3-3x=\alpha_6$ đều có một nghiệm.

Từ đó suy ra phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\dfrac{1}{2}$ có 10 nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5)=1$ và $\int\limits_0^1 xf(5x)\,\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int\limits_0^1 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 15. B. 23. C. $\dfrac{123}{5}$. D. -25.

Lời giải.

Biến đổi tích phân từng phần ta được

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^5 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^5 x^2 d\left(f(x)\right) = x^2 \cdot f(x)\Big|_0^5 - \int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}\left(x^2\right) \\ &= 25 \cdot f(5) - 0 \cdot f(x) - \int\limits_0^5 f(x) \cdot 2x\,\mathrm{d}x = 25 - 2\int\limits_0^5 xf(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Đặt $5x = t \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{1}{5}\mathrm{d}x \Rightarrow 1 = \int\limits_0^1 xf(5x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^5 \frac{t}{5} f(t) \frac{1}{5}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{25}\int\limits_0^5 tf(t)\,\mathrm{d}t.$

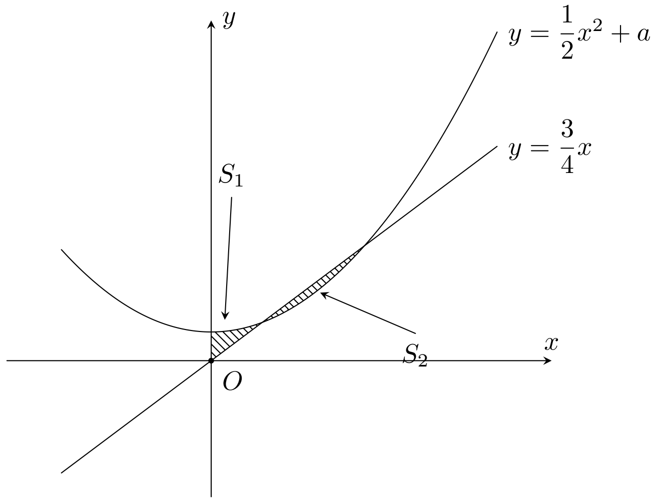
Suy ra $\int\limits_0^5 xf(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^5 tf(t)\,\mathrm{d}t = 25.$

Vậy $I = 25 - 2 \times 25 = -25.$

Chọn đáp án D □

Câu 43.

Cho đường thẳng $y = \frac{3}{4}x$ và parabol $y = \frac{1}{2}x^2 + a$, (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{1}{4}; \frac{9}{32}\right)$.

B. $\left(\frac{3}{16}; \frac{7}{32}\right)$.

C. $\left(0; \frac{3}{16}\right)$.

D. $\left(\frac{7}{32}; \frac{1}{4}\right)$.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 4a = 0.$$

Theo đề bài phương trình có hai nghiệm $0 < x_1 < x_2$ thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3}{2} & (*) \\ x_1x_2 = 2a & (**). \end{cases}$

Từ đồ thị đề bài, ta có

$$\begin{aligned} & S_1 - S_2 = 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^{x_1} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a\right)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a\right)\,\mathrm{d}x = 0 \\ \Leftrightarrow & \int\limits_0^{x_2} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a\right)\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + ax\right)\Big|_0^{x_2} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{6}x_2^3 - \frac{3}{8}x_2^2 + ax_2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{x_2^2}{6} + \frac{3x_2}{8}. \quad (***) \end{aligned}$$

Từ $(*)$ ta suy ra $x_1 = \frac{3}{2} - x_2$, thay vào $(**)$ ta được

$$\left(\frac{3}{2} - x_2\right) x_2 = -\frac{x_2^2}{3} + \frac{3x_2}{4} \Leftrightarrow \frac{2x_2^2}{3} - \frac{3x_2}{4} = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{9}{8} \Rightarrow a = \frac{27}{128}.$$

Vậy $a \in \left(\frac{3}{16}; \frac{7}{32}\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Xét số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \frac{3+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

Ⓐ $2\sqrt{3}$. Ⓑ 20. Ⓒ 12. **D** $2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $w = \frac{3+iz}{1+z} \Leftrightarrow w + wz = 3 + iz \Leftrightarrow w - 3 = (i-w)z$. Lấy mô-đun hai vế ta được

$$|w-3| = |(i-w)z| \Leftrightarrow |w-3| = |(i-w)||z|. \quad (*)$$

Gọi $w = x + yi$, x, $y \in \mathbb{R}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}(*) \quad &\Leftrightarrow \quad |w-3| = |(i-w)||z| \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(1-y)^2}\cdot\sqrt{2}\\ &\Leftrightarrow \quad (x-3)^2+y^2 = 2x^2+2(1-y)^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+6x-4y-7=0.\end{aligned}$$

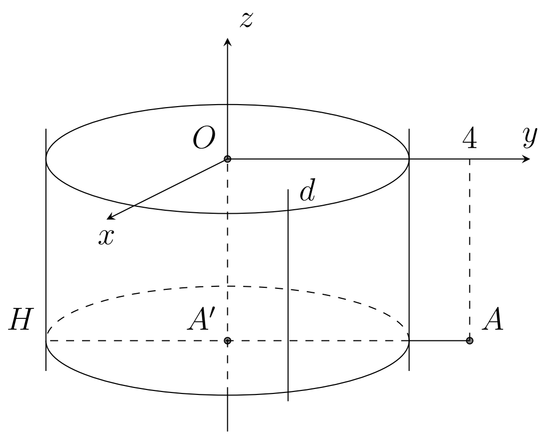
Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$ là đường tròn có tâm $I(-3;2)$ và bán kính bằng $2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;4;-3)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3. Khi khoảng cách từ A đến d lớn nhất, d đi qua điểm nào dưới đây ?

Ⓐ $P(-3;0;-3)$. Ⓑ $Q(0;11;-3)$. Ⓒ $N(0;3;-5)$. **D** $M(0;-3;-5)$.

Lời giải.



Vì d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3 nên d là đường sinh của hình trụ có trục là Oz và có bán kính đáy $r = 3$.

Gọi A' là hình chiếu của A lên trục Oz, dễ thấy $A'(0;0;-3)$ và $AA' = 4$.

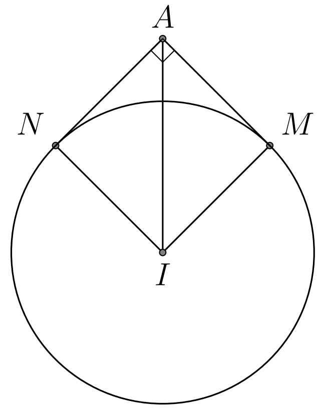
Gọi $H(x;y;z)$ là hình chiếu của A lên d.
AH lớn nhất khi A, A', H thẳng hàng và $AH = AA' + A'H = AA' + r = 4 + 3 = 7$.
Khi đó $\overrightarrow{AH} = \dfrac{7}{4}\overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow (x; y-4; z+3) = \dfrac{7}{4}(0;-4;0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow H(0;-3;-3)$.
Vậy d qua $H(0;-3;-3)$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{k} = (0;0;1)$ nên có phương trình $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \\ z = -3 + t \end{cases}$ suy ra d đi qua điểm $M(0;-3;-5)$.
Chọn đáp án D ☐

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+\left(z-\sqrt{2}\right)^2 = 3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau ?

(A) 12. **B** 4. (C) 8. (D) 16.

Lời giải.
Mặt cầu (S) có tâm $I\left(0;0;\sqrt{2}\right)$ và bán kính $R = \sqrt{3}$; $A \in (Oxy) \Rightarrow A(a;b;0)$.
Để có ít nhất hai tiếp tuyến qua A thỏa mãn bài toán thì ta có hai trường hợp

- **TH1:** $A \in (S) \Leftrightarrow IA = R = \sqrt{3}$.
- **TH2:** $A \notin (S)$, khi đó để tồn tại hai tiếp tuyến vuông góc nhau thì hình nón sinh ra bởi các tiếp tuyến vẽ từ A phải có góc ở đỉnh không nhỏ hơn 90°. Tức là



$$\begin{aligned} &\widehat{MAN} \ge 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{MAI} \ge 45^\circ \\ \Leftrightarrow\ & \sin\widehat{MAI} \ge \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{IM}{IA} \ge \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{3}}{IA} \ge \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow IA \le \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Do đó, yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi

$$\sqrt{3} \le IA \le \sqrt{6} \Leftrightarrow 3 \le IA^2 \le 6 \Leftrightarrow 3 \le a^2+b^2+2 \le 6 \Leftrightarrow 1 \le a^2+b^2 \le 4.$$

Do a, $b \in \mathbb{Z}$ nên ta xét các trường hợp sau

- Nếu $a = 0$ thì $b \in \{\pm1, \pm2\}$
- Nếu $b = 0$ thì $a \in \{\pm1, \pm2\}$
- Nếu $a \ne 0$ và $b \ne 0$ thì $\begin{cases} a = \pm1 \\ b = \pm1. \end{cases}$

Vậy có 12 điểm A thỏa mãn đề bài.
Chọn đáp án B ☐

Câu 47. Cho phương trình $\left(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2\right)\sqrt{3^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A 79. **B** 80. **C** vô số. **D** 81.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ 3^x - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3^x \geq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq \log_3 m \end{cases}.$

- **TH1:** Với $m = 1$, phương trình trở thành

$$\left(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2\right)\sqrt{3^x - 1} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2 = 0 \\ 3^x - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -\dfrac{1}{2} \\ 3^x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

  Vậy nhận giá trị $m = 1$.

- **TH2:** Với $m > 1$, phương trình trở thành

$$\left(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2\right)\sqrt{3^x - m} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2 = 0 \\ 3^x - m = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -\dfrac{1}{2} \\ 3^x = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \log_3 m. \end{array}\right.$$

  Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq \log_3 m < 4 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \leq m < 3^4$.

  Mà $m > 1$ nên ta có $m \in \{3, 4, \ldots, 80\}$, có 78 giá trị của m.

Vậy có 79 giá trị nguyên dương của m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$ ↘	-3 ↗	2 ↘	-1 ↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ là

A 3. **B** 9. **C** 5. **D** 7.

Lời giải.

Ta có $y' = (2x + 2)f'\left(x^2 + 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x + 2 = 0 & \\ x^2 + 2x = a, & a < -1 \\ x^2 + 2x = b, & -1 < b < 0 \\ x^2 + 2x = c, & 0 < c < 1 \\ x^2 + 2x = d, & d > 1. \end{array}\right.$

Xét hàm số $g(x) = x^2 + 2x$ xác định trên $\mathbb{R}$, có $y' = 2x + 2$, ta có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

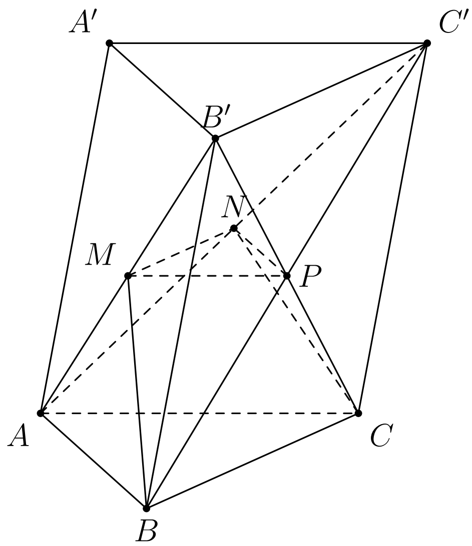
Dựa vào bảng biến thiên ta được $y' = 0$ có 7 nghiệm đơn nên hàm số đã cho có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N và P lần lượt là tâm các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích V của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A $V = 12\sqrt{3}$. **B** $V = 16\sqrt{3}$. **C** $V = \dfrac{28\sqrt{3}}{3}$. **D** $V = \dfrac{40\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = 8 \cdot \dfrac{4^2\sqrt{3}}{4} = 32\sqrt{3}$.

Và ta cũng có $V_{C'.ABC} = V_{A.BC'B'} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

Khối đa diện cần tìm $V = V_{C.ABPN} + V_{M.ANPB}$.

Do N, P là trung điểm của AC' và BC' nên

$$S_{ANPB} = \frac{3}{4}S_{ABC'}$$

Từ đó ta suy ra

$$V_{C.ABPN} = \frac{3}{4}V_{C'.ABC} = \frac{1}{4}V_{ABC.A'B'C'}.$$
$$V_{M.ANPB} = \frac{1}{2}V_{B'ANPB} = \frac{3}{8}V_{B'.ABC'} = \frac{1}{8}V_{ABC.A'B'C'}.$$

Vậy thể tích khối cần tìm

$$V = \frac{1}{4}V_{ABC.A'B'C'} + \frac{1}{8}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{8}V_{ABC.A'B'C'} = 12\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho hai hàm số $y = \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x+3} + \dfrac{x+3}{x+4}$ và $y = |x+1| - x + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt là

A $(3; +\infty)$. **B** $(-\infty; 3]$. **C** $(-\infty; 3)$. **D** $[3; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -2 \\ x \neq -3 \\ x \neq -4. \end{cases}$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+3}{x+4}=|x+1|-x+m\\
\Leftrightarrow\ &\left(1-\frac{1}{x+1}\right)+\left(1-\frac{1}{x+2}\right)+\left(1-\frac{1}{x+3}\right)+\left(1-\frac{1}{x+4}\right)=|x-1|-x+m\\
\Leftrightarrow\ &x-|x+1|+4-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right)=m\quad(*).
\end{aligned}$$

Đặt $\mathscr{D}_1=(-1;+\infty)$ và $\mathscr{D}_2=(-\infty;-4)\cup(-4;-3)\cup(-3;-2)\cup(-2;-1)$, ta có

$$(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}3-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right)=m & \text{khi } x\in\mathscr{D}_1\\ 2x+5-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right)=m & \text{khi } x\in\mathscr{D}_2.\end{array}\right.$$

Đặt $f(x)=\begin{cases}3-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right) & \text{khi } x\in\mathscr{D}_1\\ 2x+5-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right) & \text{khi } x\in\mathscr{D}_2.\end{cases}$

Có $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{1}{(x+4)^2} & \text{khi } x\in\mathscr{D}_1\\ 2+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{1}{(x+4)^2} & \text{khi } x\in\mathscr{D}_2.\end{cases}$

Vậy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định, ta có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-4	-3	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	+	+	
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 3$	

Do đó để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $m\geq 3\Rightarrow m\in[3;+\infty)$.

Chọn đáp án D $\square$

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. C	3. C	4. D	5. D	6. C	7. C	8. C	9. B	10. B
11. D	12. B	13. B	14. C	15. C	16. C	17. D	18. A	19. B	20. B
21. D	22. A	23. C	24. C	25. A	26. D	27. B	28. C	29. B	30. D
31. A	32. C	33. C	34. A	35. B	36. D	37. B	38. A	39. D	40. A
41. B	42. D	43. B	44. D	45. D	46. B	47. A	48. D	49. A	50. D

4 ĐỀ THI THQG 2019 - MÃ ĐỀ 103

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-3y+z-2=0$. Véc-tơ nào sau đây là một véctơ pháp tuyến của (P).

Ⓐ $\vec{n}_3=(-3;1;-2)$. Ⓑ $\vec{n}_2=(2;-3;-2)$. **C** $\vec{n}_1=(2;-3;1)$. Ⓓ $\vec{n}_4=(2;1;-2)$.

Lời giải.

Ta có véc-tơ $\vec{n}_1=(2;-3;1)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P).

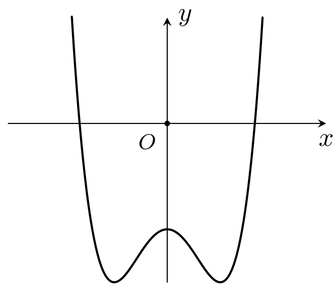
Chọn đáp án C □

Câu 2.

Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?

Ⓐ $y=x^3-3x^2-2$. **B** $y=x^4-2x^2-2$.

Ⓒ $y=-x^3+3x^2-2$. Ⓓ $y=-x^4+2x^2-2$.



Lời giải.

Quan sát đồ thị ta thấy đồ thị có dạng bậc 4 và $a>0$ nên $y=x^4-2x^2-2$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Số cách chọn 2 học sinh từ 6 học sinh là

Ⓐ A_6^2. **B** C_6^2. Ⓒ 2^6. Ⓓ 6^2.

Lời giải.

Số cách chọn 2 học sinh từ 6 học sinh là C_6^2.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Biết $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x=6$, khi đó $\int\limits_1^2 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 4. Ⓑ -8. Ⓒ 8. **D** -4.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^2 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x=2-6=-4$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Nghiệm của phương trình $2^{2x-1}=8$ là

Ⓐ $x=\dfrac{3}{2}$. **B** $x=2$. Ⓒ $x=\dfrac{5}{2}$. Ⓓ $x=1$.

Lời giải.

Ta có $2^{2x-1}=8\Leftrightarrow 2^{2x-1}=2^3\Leftrightarrow 2x-1=3\Leftrightarrow x=2$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Thể tích của khối nón có chiều cao h và có bán kính đáy r là

Ⓐ πr^2h. Ⓑ $\dfrac{4}{3}\pi r^2h$. Ⓒ $2\pi r^2h$. **D** $\dfrac{1}{3}\pi r^2h$.

Lời giải.

Thể tích của khối nón có chiều cao h và có bán kính đáy r là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Số phức liên hợp của số phức $1 - 2i$ là

(A) $-1 - 2i$. (B) $1 + 2i$. (C) $-2 + i$. (D) $-1 + 2i$.

Lời giải.

Theo định nghĩa số phức liên hợp của số phức $1 - 2i$ là số phức $1 + 2i$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là

(A) $\dfrac{4}{3}Bh$. (B) $3Bh$. (C) $\dfrac{1}{3}Bh$. (D) Bh.

Lời giải.

Theo công thức tính thể tích lăng trụ là Bh.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại

(A) $x = 2$. (B) $x = -2$. (C) $x = 3$. (D) $x = 1$.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ xác định tại $x = 1$, $f'(1) = 0$ và đạo hàm đổi dấu từ $(+)$ sang $(-)$ khi đi qua $x = 1$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên trục Oy có tọa độ là

(A) $(0; 0; -1)$. (B) $(2; 0; -1)$. (C) $(0; 1; 0)$. (D) $(2; 0; 0)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1 - 1)$ trên trục Oy có tọa độ là $(0; 1; 0)$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 6$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

(A) 3. (B) -4. (C) 8. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $u_2 = 6 \Leftrightarrow u_1 + d = 6 \Leftrightarrow 2 + d = 4 \Leftrightarrow d = 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 3$ là

Ⓐ $2x^2 + C$. Ⓑ $x^2 + 3x + C$. Ⓒ $2x^2 + 3x + C$. Ⓓ $x^2 + C$.

Lời giải.

Ta có $\int (2x+3)\,\mathrm{d}x = x^2 + 3x + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\mathrm{d}\colon \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-3}{2}$. Vec-tơ nào dưới đây là một vec-tơ chỉ phương của d?

Ⓐ $\overrightarrow{u_2} = (1; -3; 2)$. Ⓑ $\overrightarrow{u_3} = (-2; 1; 3)$. Ⓒ $\overrightarrow{u_1} = (-2; 1; 2)$. Ⓓ $\overrightarrow{u_4} = (1; 3; 2)$.

Lời giải.

Đường thẳng $\mathrm{d}\colon \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-3}{2}$ có một vec-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_2} = (1; -3; 2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^3$ bằng

Ⓐ $3\log_2 a$. Ⓑ $\dfrac{1}{3}\log_2 a$. Ⓒ $\dfrac{1}{3} + \log_2 a$. Ⓓ $3 + \log_2 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 a^3 = 3\log_2 a$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

Ⓐ $(-1; 0)$. Ⓑ $(-1; +\infty)$. Ⓒ $(-\infty; -1)$. Ⓓ $(0; 1)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	2	↘	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 0.

Lời giải.

Ta có $2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{3}{2}(1)$.

Số nghiệm thực của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = \dfrac{3}{2}$.

Từ bảng biến thiên đã cho của hàm số $f(x)$, ta thấy đường thẳng $y = \dfrac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

Do đó phương trình (1) có ba nghiệm thực phân biệt.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 + i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $z_1 + 2z_2$ có tọa độ là

A $(2; 5)$. B $(3; 5)$. C $(5; 2)$. **D** $(5; 3)$.

Lời giải.

Ta có $z_1 + 2z_2 = (1 + i) + 2(2 + i) = 5 + 3i$.

Do đó điểm biểu diễn số phức $z_1 + 2z_2$ có tọa độ là $(5; 3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Hàm số $y = 2^{x^2-x}$ có đạo hàm là

A $(x^2 - x) \cdot 2^{x^2-x-1}$. B $(2x - 1) \cdot 2^{x^2-x}$.

C $2^{x^2-x} \cdot \ln 2$. **D** $(2x - 1) \cdot 2^{x^2-x} \cdot \ln 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = (x^2 - x)' \cdot 2^{x^2-x} \cdot \ln 2 = (2x - 1) \cdot 2^{x^2-x} \cdot \ln 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

A 18. B 2. C -18. D -2.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \in (-3; 3)$

$f(-3) = -18; f(-1) = 2; f(1) = -2; f(3) = 18$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên $[-3; 3]$ là 18.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x - 1)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A 2. B 0. **C** 1. D 3.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Xét dấu của đạo hàm

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Ta thấy đạo hàm đổi dấu đúng 1 lần nên hàm số đã cho có đúng 1 điểm cực trị.
Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^2b^3 = 16$. Giá trị của $2\log_2 a + 3\log_2 b$ bằng

(A) 8. (B) 16. (C) 4. (D) 2.

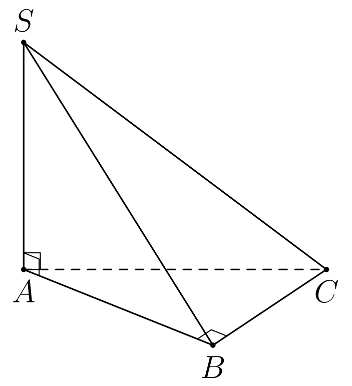
Lời giải.

Ta có $2\log_2 a + 3\log_2 b = \log_2(a^2b^3) = \log_2 16 = 4$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 22.

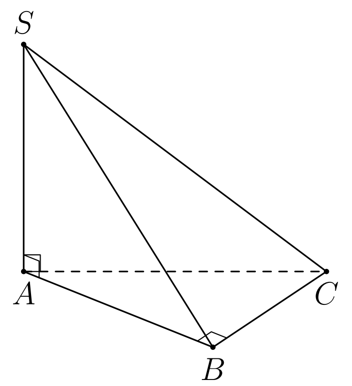
Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). $SA = \sqrt{2}a$. Tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = a$ (minh họa như hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

(A) 45°. (B) 60°. (C) 30°. (D) 90°.



Lời giải.

Ta có AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (ABC).
Suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng $\widehat{SCA} = \varphi$.
Ta có $AC = a\sqrt{2}, SA = a\sqrt{2}$ nên tam giác SAC vuông cân tại $A \Rightarrow \varphi = 45^\circ$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng $1m$ và $1,8m$. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm **gần nhất** với kết quả nào dưới đây ?

(A) $2,8m$. (B) $2,6m$. (C) $2,1m$. (D) $2,3m$.

Lời giải.

Gọi hai bể nước hình trụ ban đầu lần lượt có chiều cao là h, bán kính r_1, r_2, thể tích là V_1, V_2.
Ta có một bể nước mới có chiều cao h, $V = V_1 + V_2$.
$\Rightarrow \pi r^2 h = \pi r_1^2 h + \pi r_2^2 h \Rightarrow \pi r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot h + \pi \cdot 1,8^2 \cdot h \Leftrightarrow r = \sqrt{1 + 1,8^2} \approx 2,1m$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Nghiệm của phương trình $\log_2(x+1) + 1 = \log_2(3x-1)$ là

(A) $x = 3$. (B) $x = 2$. (C) $x = -1$. (D) $x = 1$.

Lời giải.

Điều kiện phương trình $x > \dfrac{1}{3}$.

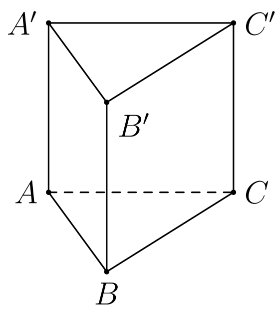
$$\begin{aligned}
&\log_2(x+1)+1=\log_2(3x-1)\\
\Leftrightarrow\ &\log_2\left[(x+1)\cdot 2\right]=\log_2(3x-1)\\
\Leftrightarrow\ &2(x+1)=3x-1\\
\Leftrightarrow\ &x=3 \text{ (Thỏa mãn điều kiện phương trình).}
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm phương trình là $x=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 25.

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$ và $AA'=3a$ (minh họa như hình vẽ bên). Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng



A. $2\sqrt{3}a^3$. B. $\sqrt{3}a^3$. C. $6\sqrt{3}a^3$. D. $3\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.

Khối lăng trụ đã cho có đáy là tam giác đều có diện tích đáy là $\dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}$ và chiều cao là $AA'=3a$ (do là lăng trụ đứng) nên có thể tích là $\dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}\cdot 3a=3\sqrt{3}a^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2y-2z-7=0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. 9. B. $\sqrt{15}$. C. $\sqrt{7}$. D. 3.

Lời giải.

Mặt cầu đã cho có phương trình dạng $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ có bán kính là $\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{1^2+1^2+7}=3$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;2)$ và $B(6;5;-4)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $2x+2y-3z-17=0$. B. $4x+3y-z-26=0$.

C. $2x+2y-3z+17=0$. D. $2x+2y+3z-11=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua trung điểm của AB là $M(4;3;-1)$ và có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}=(4;4;-6)$ nên có phương trình là

$$\begin{aligned}
&4(x-4)+4(y-3)-6(z+1)=0\\
\Leftrightarrow\ &2(x-4)+2(y-3)-3(z+1)=0\\
\Leftrightarrow\ &2x+2y-3z-17=0.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có báng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	1	↘	$-\infty$ ‖ 2	↘	-3	↗	3

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Nhìn bảng biến thiên ta thấy

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0$ là TCĐ của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3 \Rightarrow y = 3$ là TCN của đồ thị hàm số.

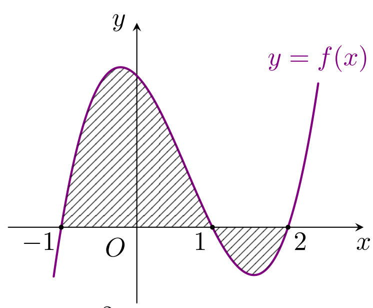
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ là TCN của đồ thị hàm số.

Vậy hàm số có 3 tiệm cận.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = -1, x = 2$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) $S = -\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(B) $S = -\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(C) $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(D) $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

$S = \int\limits_{-1}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x$

Nhìn hình ta thấy hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[-1; 1]$

nên $\int\limits_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị âm trên đoạn $[1; 2]$

nên $\int\limits_1^2 |f(x)|\,\mathrm{d}x = -\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Vậy $S = \int\limits_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

$\boxed{\text{A}}$ 6. (B) 8. (C) 16. (D) 26.

Lời giải.

$\Delta' = b'^2 - ac = 4 - 5 = -1$.

Phương trình có 2 nghiệm phức $z_1 = -2 + i, z_2 = -2 - i$.

Nên $z_1^2 + z_2^2 = (-2+i)^2 + (-2-i)^2 = 4 - 4i + i^2 + 4 + 4i + i^2 = 8 + 2i^2 = 8 - 2 = 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(0;0;2), B(2;1;0), C(1;2;-1)$ và $D(2;0;-2)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (BCD) có phương trình là

(A) $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = -1 + 2t \end{cases}$. $\boxed{\text{C}}$ $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (BCD).

Ta có $\overrightarrow{BC} = (-1;1;-1); \overrightarrow{BD} = (0;-1;-2)$.

Mặt phẳng (BCD) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(BCD)} = \left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}\right] = (3;2;-1)$.

Gọi $\vec{u}_d$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

Vì $d \perp (BCD)$ nên $\vec{u_d} = \vec{n}_{(BCD)} = (3;2;-1)$.

Đáp án $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$ có vec-tơ chỉ phương không cùng phương với vec-tơ $\vec{u_d} = (3;2;-1)$ nên loại.

Ta thấy điểm $A(0;0;2)$ không thỏa hệ $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ nên loại đáp án $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Cho số z thỏa mãn $(2+i)z - 4(\overline{z} - i) = -8 + 19i$. Mô-đun của z bằng

(A) 13. (B) 5. $\boxed{\text{C}}$ $\sqrt{13}$. (D) $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi; \overline{z} = a - bi\,(a, b \in \mathbb{R})$.

Ta có

$$(2+i)z - 4(\overline{z} - i) = -8 + 19i$$

$$\Leftrightarrow (2+i)(a+bi)-4(a-bi-i)=-8+19i$$
$$\Leftrightarrow -2a-b+(a+6b+4)=-8+19i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a-b=-8 \\ a+6b+4=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}.$$

Vậy $z=3+2i \Rightarrow |z|=\sqrt{13}$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(3-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(3;4)$. **B** $(2;3)$. **C** $(-\infty;-3)$. **D** $(0;2)$.

Lời giải.

Ta có $y'=-2\cdot f'(3-2x)\geq 0 \Leftrightarrow f'(3-2x)\leq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-2x\leq -3 \\ -1\leq 3-2x\leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 3 \\ 1\leq x\leq 2 \end{array}\right..$$

Vậy hàm số $y=f(3-2x)$ đồng biến trên khoảng $(3;4)$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x+2)^2}$ trên khoảng $(-2;+\infty)$ là

A $2\ln(x+2)+\dfrac{1}{x+2}+C$. **B** $2\ln(x+2)-\dfrac{1}{x+2}+C$.

C $2\ln(x+2)-\dfrac{3}{x+2}+C$. **D** $2\ln(x+2)+\dfrac{3}{x+2}+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \frac{2x+4-3}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x=\int\left[\frac{2}{x+2}-\frac{3}{(x+2)^2}\right]\mathrm{d}x=2\ln|x+2|+\frac{3}{x+2}+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2 x+1, \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\dfrac{\pi^2+15\pi}{16}$. **B** $\dfrac{\pi^2+16\pi-16}{16}$. **C** $\dfrac{\pi^2+16\pi-4}{16}$. **D** $\dfrac{\pi^2-4}{16}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\displaystyle\int\left(2\sin^2 x+1\right)\mathrm{d}x=\int(2-\cos 2x)\,\mathrm{d}x=2x-\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

Vì $f(0)=4\Rightarrow C=4$

Hay $f(x)=2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+4$.

Suy ra $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2x - \frac{1}{2}\sin 2x + 4\right)\mathrm{d}x = x^2 + \frac{1}{4}\cos 2x + 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{16} + \pi - \frac{1}{4} = \frac{\pi^2 + 16\pi - 4}{16}$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(5x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A Vô số. **B** 5. **C** 4. **D** 6.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x > \dfrac{1}{5} \\ m > 0. \end{cases}$

Xét phương trình: $\log_9 x^2 - \log_3(5x-1) = -\log_3 m \quad (1)$.

Cách 1.

$(1) \Leftrightarrow \log_3 x - \log_3(5x-1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \log_3 \dfrac{5x-1}{x} = \log_3 m \Leftrightarrow \dfrac{5x-1}{x} = m \Leftrightarrow 5 - \dfrac{1}{x} = m \quad (2)$.

Xét $f(x) = 5 - \dfrac{1}{x}$ trên khoảng $\left(\dfrac{1}{5}; +\infty\right)$.

Có $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$, $\forall x \in \left(\dfrac{1}{5}; +\infty\right)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(5 - \dfrac{1}{x}\right) = 5$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\frac{1}{5}$		$+\infty$
y'		$+$	
y	0	$\nearrow$	5

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ phương trình (2) có nghiệm $x > \dfrac{1}{5}$.

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $0 < m < 5$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m > 0$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm.

Cách 2.

Với $\begin{cases} x > \dfrac{1}{5} \\ m > 0 \end{cases}$, ta có

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \log_3 x - \log_3(5x-1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \log_3 \frac{5x-1}{x} = \log_3 m \\
&\Leftrightarrow \frac{5x-1}{x} = m \\
&\Leftrightarrow (5-m)x = 1 \quad (2).
\end{aligned}$$

Với $m = 5$, phương trình (2) thành $0 \cdot x = 1$ (vô nghiệm).

Với $m \neq 5$, $(2) \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{5-m}$.

Xét $x > \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow \dfrac{1}{5-m} > \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow \dfrac{m}{5\cdot(5-m)} > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 5$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m > 0$ nên $m \in \{1;2;3;4\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Cho hình trụ có chiều cao bằng $3\sqrt{2}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng $12\sqrt{2}$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A $6\sqrt{10}\pi$. **B** $6\sqrt{34}\pi$. **C** $3\sqrt{10}\pi$. **D** $3\sqrt{34}\pi$.

Lời giải.

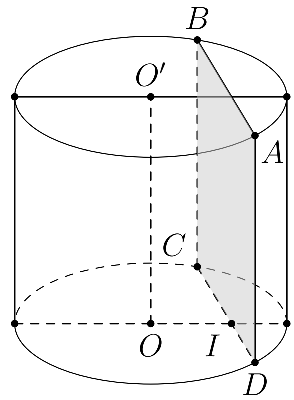
Ta có: $S_{ABCD} = 12\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\cdot CD$

$\Rightarrow CD = 4$

$\Rightarrow CI = 2$

$\Rightarrow CO = \sqrt{CI^2 + IO^2} = \sqrt{5} = r$.

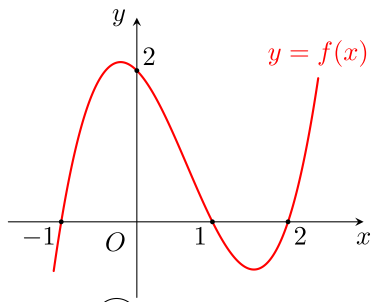
Vậy $S_{xq} = 2\pi rl = 6\sqrt{10}\pi$.



Chọn đáp án A □

Câu 38.

Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x) < 2x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0;2)$ khi và chỉ khi



A $m > f(0)$. **B** $m > f(2) - 4$. **C** $m \geq f(0)$. **D** $m \geq f(2) - 4$.

Lời giải.

Ta có $f(x) < 2x + m \Leftrightarrow m > f(x) - 2x \quad (1)$.

Đặt $g(x) = f(x) - 2x$, $x \in (0;2)$.

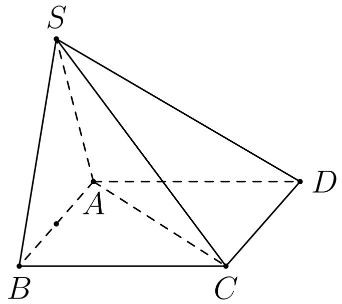
$\forall x \in (0;2), g'(x) = f'(x) - 2 < 0 \Rightarrow$ hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$.

Do đó (1) đúng với mọi $x \in (0;2)$ khi và chỉ khi $m \geq g(0) = f(0)$.

Chọn đáp án C □

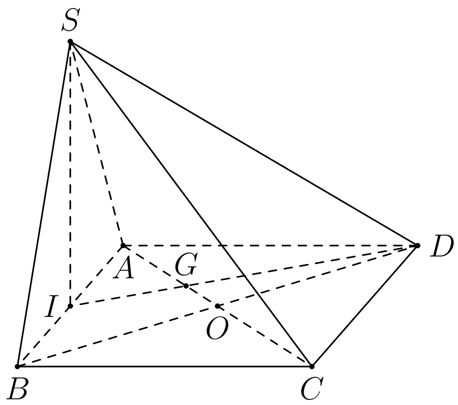
Câu 39.

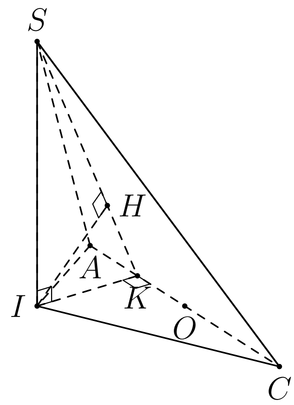
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) bằng



Ⓐ $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. Ⓑ $\dfrac{a\sqrt{21}}{28}$. Ⓒ $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải.





* Gọi $O = AC \cap BD$ và G là trọng tâm tam giác ABD, I là trung điểm của AB.
Ta có $SI \perp (ABCD)$ và $\dfrac{\mathrm{d}(D;(SAC))}{\mathrm{d}(I;(SAC))} = \dfrac{DG}{IG} = 2$.
$\Rightarrow \mathrm{d}(D;(SAC)) = 2 \cdot \mathrm{d}(I;(SAC))$.
* Gọi K là trung điểm của AO suy ra $IK \parallel BO$.
* Do $BO \perp AC$ nên $IK \perp AC$.
* Ta lại có $AC \perp SI$ nên $AC \perp (SIK)$. Do đó $(SAC) \perp (SIK)$.
* Gọi H là hình chiếu của I lên SK ta có $IH \perp SK$.
* Do $(SIK) \cap (SAC) = SK \Rightarrow IH = \mathrm{d}(I,(SAC))$.
$\Rightarrow \mathrm{d}(D;(SAC)) = 2 \cdot \mathrm{d}(I;(SAC)) = 2 \cdot IH$.
* Xét tam giác SIK vuông tại I ta có
$SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; IK = \dfrac{BO}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.
$\dfrac{1}{IH^2} = \dfrac{1}{SI^2} + \dfrac{1}{IK^2} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{16}{2a^2} = \dfrac{28}{3a^2}$.
$\Rightarrow IH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.
$\Rightarrow \mathrm{d}(D;(SAC)) = 2 \cdot IH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 21 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

Ⓐ $\dfrac{11}{21}$. Ⓑ $\dfrac{221}{441}$. **C** $\dfrac{10}{21}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

* Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{21}^2 = 210$.
* Gọi biến cố A: "Chọn được hai số có tổng là một số chẵn".

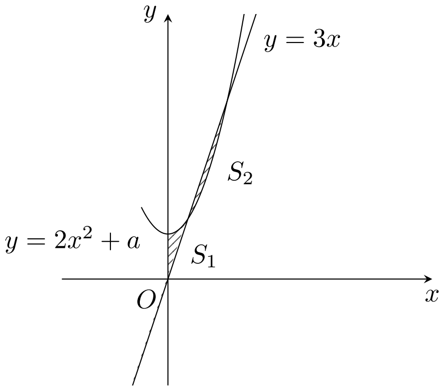
Trong 21 số nguyên dương đầu tiên có 11 số lẻ và 10 số chẵn.
Để hai số chọn được có tổng là một số chẵn điều kiện là cả hai số cùng chẵn hoặc cùng lẻ.
$\Rightarrow$ Số phần tử của biến cố A là $n(A) = \mathrm{C}_{10}^2 + \mathrm{C}_{11}^2 = 100$.
* Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{10}{21}$.

Chọn đáp án C □

Câu 41.

Cho đường thẳng $y = 3x$ và parabol $y = 2x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?

A $\left(\dfrac{4}{5}; \dfrac{9}{10}\right)$. **B** $\left(0; \dfrac{4}{5}\right)$. **C** $\left(1; \dfrac{9}{8}\right)$. **D** $\left(\dfrac{9}{10}; 1\right)$.



Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $2x^2 + a = 3x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + a = 0$ (1) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - 8a > 0 \\ P = \dfrac{a}{2} > 0 \\ S = \dfrac{3}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \dfrac{9}{8} \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \dfrac{9}{8}.$$

Ta được nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 8a}}{4}$.

Gọi $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{9 - 8a}}{4}$; $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4}$.

Ta có

$$\begin{aligned}
& S_1 = S_2. \\
\Leftrightarrow\ & \int\limits_0^{x_1} (2x^2 + a - 3x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{x_1}^{x_2} (2x^2 + a - 3x)\,\mathrm{d}x. \\
\Leftrightarrow\ & \int\limits_0^{x_1} (2x^2 + a - 3x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{x_1}^{x_2} (2x^2 + a - 3x)\,\mathrm{d}x = 0. \\
\Leftrightarrow\ & \int\limits_0^{x_2} (2x^2 - 3x + a)\,\mathrm{d}x = 0. \\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + ax\right)\Bigg|_0^{x_2} = 0. \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2}{3}(x_2)^3 - \frac{2}{3}(x_2)^2 + a(x_2) = 0. \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2}{3}(x_2)^2 - \frac{3}{2} \cdot x_2 + a = 0 \ (\ do\ x_2 \neq 0\ ).
\end{aligned}$$

Ta lại có x_2 là nghiệm của phương trình (1) nên x_2 là nghiệm của hệ phương trình sau

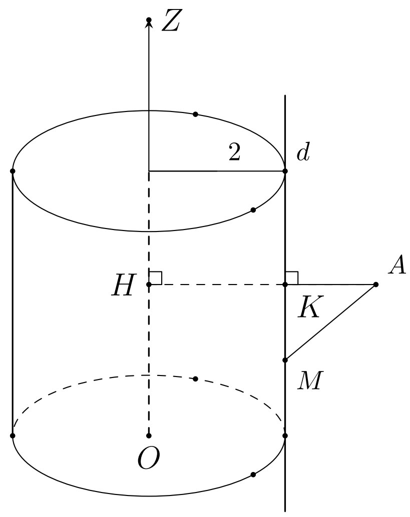
$$\begin{cases}\dfrac{2}{3}(x_2)^2 - \dfrac{3}{2}x_2 + a = 0\\ 2(x_2)^2 - 3x_2 + a = 0.\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{2}{3}(x_2)^2 - \dfrac{3}{2}x_2 - 2(x_2)^2 + 3x_2 = 0\\ a = -2(x_2)^2 + 3x_2.\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{-4}{3}(x_2)^2 + \dfrac{3}{2}x_2 = 0\\ a = -2(x_2)^2 + 3x_2.\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_2 = \dfrac{9}{8}\\ a = \dfrac{27}{32}.\end{cases}$$

Chọn đáp án A □

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;3;-2)$. Xét đường thẳng d thay đổi song song với Oz và cách Oz một khoảng bằng 2. Khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất thì d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $P(-2;0;-2)$. B. $N(0;-2;-5)$. C. $Q(0;2;-5)$. D. $M(0;4;-2)$.

Lời giải.



Vì d song song với Oz và cách Oz một khoảng bằng 2 nên d thuộc mặt trụ trục Oz và bán kính bằng 2.
Có $H(0;0;-2)$ là hình chiếu vuông góc của $A(0;3;-2)$ trên Oz.
Có $\overrightarrow{HA} = (0;3;0) \Rightarrow HA = 3$ nên A nằm ngoài mặt trụ.
Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với Oz.
M là điểm trên d.
Gọi K là giao điểm của AH và mặt trụ (K nằm giữa A và H).
Dễ thấy $AM \geq AK; AK = AH - \mathrm{d}(OZ;d) = 1 = \mathrm{d}(A;d)$.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv K$.
Khi đó ta có $\overrightarrow{HK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{HA} \Rightarrow K(0;2;-2)$.

$$\Rightarrow d\colon \begin{cases}x = 0\\ y = 2\\ z = -2 + t\end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Với $t = -3$ ta thấy d đi qua điểm Q.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = \dfrac{2+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. 10. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. $\sqrt{10}$.

Lời giải.

Gọi số phức $w = x + yi; x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned} & w = \frac{2+iz}{1+z}.\\ \Leftrightarrow\ & w(1+z) = 2 + iz.\\ \Leftrightarrow\ & w - 2 = z(i - w).\\ \Rightarrow\ & |w-2| = |z(i-w)|.\\ \Leftrightarrow\ & |w-2| = |z| \cdot |z(i-w)|.\\ \Leftrightarrow\ & (x-2)^2 + y^2 = 2(x^2 + (1-y)^2).\\ \Leftrightarrow\ & (x+2)^2 + (y-2)^2 = 10 \quad (*). \end{aligned}$$

Từ $(*)$ suy ra điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{10}$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(6) = 1$ và $\int\limits_0^1 xf(6x)\,\mathrm{d}x = 1$, khi đó $\int\limits_0^6 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{107}{3}$. B. 34. C. 24. **D.** -36.

Lời giải.

Theo bài ra $\int\limits_0^1 xf(6x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Đặt $t = 6x \Rightarrow\ \mathrm{d}t = 6\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $\ x = 0 \Rightarrow t = 0\ ;\ x = 1 \Rightarrow t = 6$

Do đó $\int\limits_0^1 xf(6x)\,\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow \int\limits_0^6 \frac{1}{6}t \cdot f(t)\frac{\mathrm{d}t}{6} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{36}\int\limits_0^6 t \cdot f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \Leftrightarrow \int\limits_0^6 t \cdot f(t)\,\mathrm{d}t = 36.$

Tính $I = \int\limits_0^6 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$.

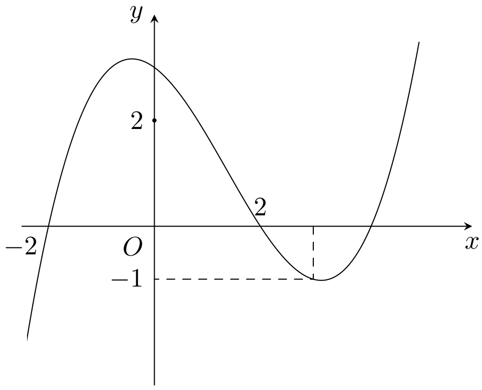
Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

$\Rightarrow I = x^2 f(x)\Big|_0^6 - \int\limits_0^6 2xf(x)\,\mathrm{d}x = 36f(6) - 2\int\limits_0^6 xf(x)\,\mathrm{d}x = 36 \cdot 1 - 2 \cdot 36 = -36.$

Chọn đáp án D □

Câu 45.

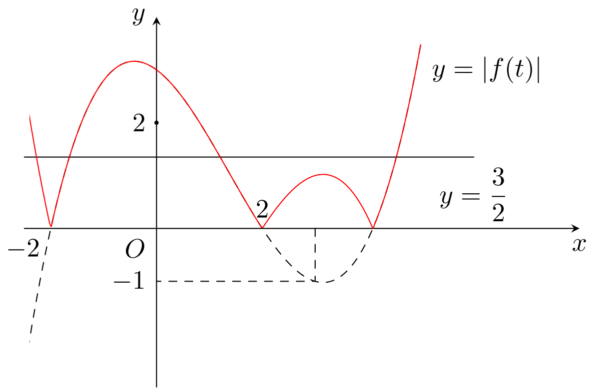
Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \dfrac{3}{2}$ là



A 8. **B** 4. **C** 7. **D** 3.

Lời giải.

Đặt $t = x^3 - 3x$ ta có phương trình $|f(t)| = \dfrac{3}{2}$ (*).



Từ đồ thị hàm số $y = |f(t)|$ và đường thẳng $y = \dfrac{3}{2}$ ta suy ra phương trình (*) có 4 nghiệm $t_1 < -2 < t_2 < 0 < t_3 < 2 < t_4$.

Xét hàm $t = x^3 - 3x$. Ta có $t' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		0		1		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
t	$-\infty$	↗	2	↘	0	↘	-2	↗	$+\infty$

- Với $t_1 < -2$ phương trình: $t_1 = x^3 - 3x$ cho ta 1 nghiệm.
- Với $-2 < t_2 < 0$ phương trình: $t_2 = x^3 - 3x$ cho ta 3 nghiệm.
- Với $0 < t_3 < 2$ phương trình: $t_3 = x^3 - 3x$ cho ta 3 nghiệm.
- Với $2 < t_4$ phương trình: $t_4 = x^3 - 3x$ cho ta 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có tất cả 8 nghiệm.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Cho phương trình $\left(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1\right)\sqrt{5^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A 123. **B** 125. **C** Vô số. **D** 124.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 5^x - m \geq 0\,(m > 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq \log_5 m. \end{cases}$

$\left(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1\right)\sqrt{5^x - m} = 0$ (1)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\log_3^2 x - \log_3 x - 1 = 0 \\ 5^x - m = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ x = \log_5 m. \end{array}\right.$

TH 1. Nếu $m = 1$ thì $x = \log_5 m = 0$ (loại) nên phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

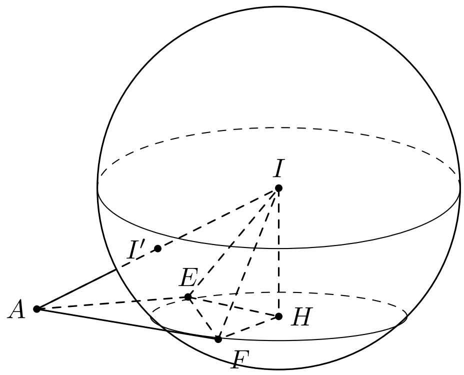
TH 2. Nếu $m > 1$ thì phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leq \log_5 m < 3 \Leftrightarrow 5^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \leq m < 125$. Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{3; 4; 5; \ldots; 124\}$. Nên có 123 giá trị m thoả mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu: $(S)\colon x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a; b; c)(a, b, c$ là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau?

A 20. B 8. C 12. D 16.

Lời giải.



Mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 5$ có tâm $I(0; 0; -1)$ và có bán kính $R = \sqrt{5}$

$A(a; b; 0) \in (Oxy)$, Gọi I' là trung điểm của $AI \Rightarrow I'\left(\dfrac{a}{2}; \dfrac{b}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$

Gọi E, F lần lượt là hai tiếp điểm của tiếp tuyến đi qua A sao cho $AE \perp AF$.

Ta có: E, F cùng thuộc mặt cầu (S') đường kính IA có tâm $I'\left(\dfrac{a}{2}; \dfrac{b}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$, bán kính $R' = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$.

Để tồn tại E, F thì hai mặt cầu (S) và (S') phải cắt nhau suy ra $|R - R'| \leq II' \leq |R + R'|$

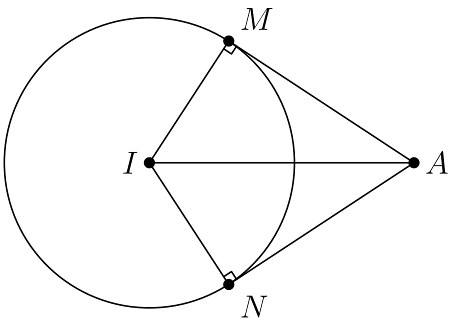
$\Leftrightarrow \left|\sqrt{5} - \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\right| \leq \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 1} \leq \sqrt{5} + \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{5} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + 1} \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 4 (1)$

Gọi H là hình chiếu của I trên (AEF) khi đó tứ giác $AEHF$ là hình vuông có cạnh $AE = HF = \sqrt{AI^2 - 5}$.

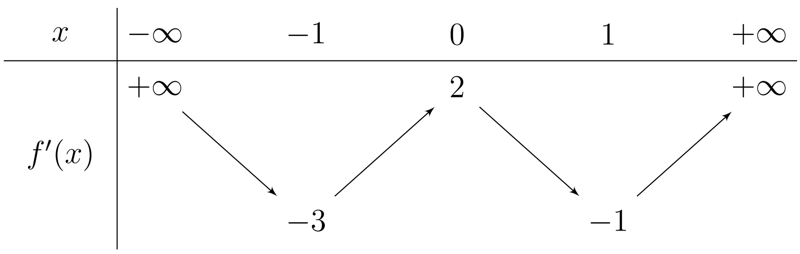
Ta có $IH^2 = R^2 - HF^2 = 5 - (AI^2 - 5) = 10 - AI^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 1 \leq 10 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 9 (2)$

Từ (1) và (2) ta có $4 \leq a^2 + b^2 \leq 9$ mà $a, b, c \in \mathbb{Z}$ nên có 20 điểm thỏa bài toán.
Cách khác:



Mặt cầu (S) có tâm $I(0, 0, -1)$ bán kính $R = \sqrt{5}$. Ta có $d_{(I(Oxy))} = 1 < R \Rightarrow$ mặt cầu (S) cắt mặt phẳng(Oxy). Để có tiếp tuyến của (S) đi qua $A \Leftrightarrow AI \geq R(1)$.
Có $A(a, b, c) \in (Oxy) \Rightarrow A(a, b, 0), IA = a^2 + b^2 + 1$.
Quỹ tích các tiếp tuyến đi qua A của (S) là một mặt nón nếu $AI > R$ và là một mặt phẳng nếu $AI = R$.
Trong trường hợp quỹ tích các tiếp tuyến đi qua A của (S) là một mặt nón gọi AM, AN là hai tiếp tuyến sao cho A, M, I, N đồng phẳng.
Tồn tại ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\widehat{MAN} \geq 90^\circ \Leftrightarrow IA \leq R\sqrt{2}(2)$.
Từ $(1), (2) \Rightarrow 4 \leq a^2 + b^2 \leq 9$. Vì $a, b \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \\ b^2 = 9 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a^2 = 0 \\ b^2 = 4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 4. \end{cases}$
Bốn hệ phương trình đầu tiên có hai nghiệm, ba hệ sau có 4 nghiệm suy ra số điểm A thỏa mãn là $4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 20$.
Chọn đáp án A □

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

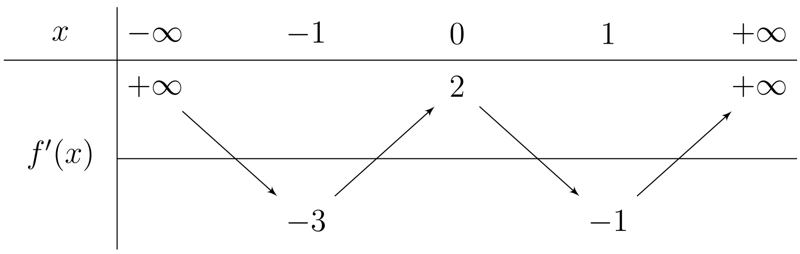


Số cực trị của hàm số $y = f(4x^2 - 4x)$ là

A 9. **B** 5. **C** 7. **D** 3.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên



Ta thấy $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(-\infty;-1)\\ x=b\in(-1;0)\\ x=c\in(0;1)\\ x=d\in(1;+\infty)\end{array}\right.$.

Với $y=f(4x^2-4x)$, ta có $y'=(8x-4)f'(4x^2-4x)$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}8x-4=0\\ f'(4x^2-4x)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}\\ 4x^2-4x=a\in(-\infty;-1)(1)\\ 4x^2-4x=b\in(-1;0)(2)\\ 4x^2-4x=c\in(0;1)(3)\\ 4x^2-4x=d\in(1;+\infty)(4)\end{array}\right..$$

Xét hàm số $g(x)=4x^2-4x$, ta có $g'(x)=8x-4=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta có

- Vì $a\in(-\infty;-1)$ nên (1) vô nghiệm.
- Vì $b\in(-1;0)$ nên (2) có 2 nghiệm phân biệt.
- Vì $c\in(0;1)$ nên (3) có 2 nghiệm phân biệt.
- Vì $d\in(1;+\infty)$ nên (4) có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $y=f(4x^2-4x)$ có 7 điểm cực trị

Cách khác

Ta có: $y'=(8x-4)\cdot f'(4x^2-4x)$.

$y'=0\Leftrightarrow (8x-4)\cdot f'(4x^2-4x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}8x-4=0\\ f'(4x^2-4x)=0.\end{array}\right.$

- $8x-4=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.
- $f'(4x^2-4x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x^2-4x=a\,(a<-1)\,(1)\\ 4x^2-4x=b\,(-1<b<0)\,(2)\\ 4x^2-4x=c\,(0<c<1)\,(3)\\ 4x^2-4x=\mathrm{d}\,(d>1)\,(4).\end{array}\right.$
- Phương trình $4x^2-4x=m\Leftrightarrow 4x^2-4x-m=0$ có nghiệm khi $\Delta'=4-4m\geq 0$ hay $m\leq 1$.

Từ đó, ta có phương trình (1); (2); (3) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Phương trình (4) vô nghiệm.

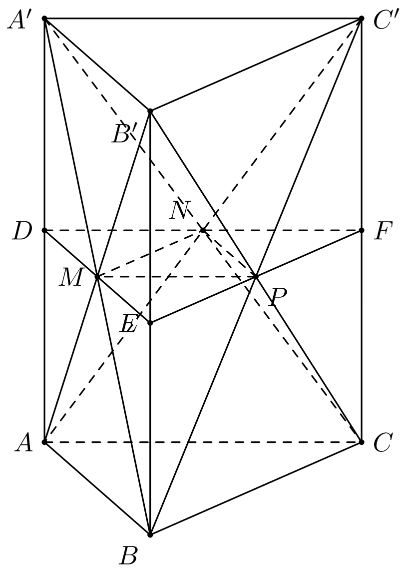
Do đó, hàm số đã cho có 7 cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 6 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N, P lần lượt là tâm các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$, $BCC'B'$. Thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A $9\sqrt{3}$. (B) $10\sqrt{3}$. (C) $7\sqrt{3}$. (D) $12\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi DEF là thiết diện của lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Dễ chứng minh được $(DEF) \mathbin{/\mkern-6mu/} (ABC)$ và D, E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA', BB', CC' suy ra $V_{ABC.DEF} = \dfrac{1}{2}V_{ABC.A'B'C'} = 12\sqrt{3}$.

Ta có $V_{ABCPNM} = V_{ABC.DEF} - V_{ADMN} - V_{BMPE} - V_{CPMF}$.

Mặt khác $V_{ADMN} = V_{BMPE} = V_{CPMF} = \dfrac{1}{12}V_{ABC.DEF} \Rightarrow V_{ABCPNM} = \dfrac{3}{4}V_{ABC.DEF} = 9\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Cho hai hàm số $y = \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x+3}$ và $y = |x+2| - x - m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là $(C_1), (C_2)$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

(A) $[-2; +\infty)$. (B) $(-\infty; -2)$. (C) $(-2; +\infty)$. **D** $(-\infty; -2]$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} = |x+2| - x - m \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} - |x+2| + x = -m (1)$$

Xét $f(x) = \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x+3} - |x+2| + x, x \in \mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; -2; -1; 0\}$

Ta có $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x+3} - 2, x \in (-2; +\infty) \cup \mathscr{D} = \mathscr{D}_1 \\ \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x+3} + 2x + 2, x \in (-\infty; -2) \cup \mathscr{D} = \mathscr{D}_2. \end{cases}$

Có $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{(x+2)^2} + \dfrac{1}{(x+3)^2}, \forall x \in \mathscr{D}_1 \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{(x+2)^2} + \dfrac{1}{(x+3)^2} + 2, \forall x \in \mathscr{D}_2. \end{cases}$

Dễ thấy $f'(x) > 0,\ \forall x \in \mathscr{D}_1 \cup \mathscr{D}_2$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$f(x)$			$+\infty$ ‖		$+\infty$ ‖		$+\infty$ ‖		$+\infty$ ‖		2
	$-\infty$		‖ $-\infty$		‖ $-\infty$		‖ $-\infty$		‖ $-\infty$		

Hai đồ thị cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biện khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 4 nghiệm phân biệt, từ bảng biến thiên ta có: $-m \geq 2 \Leftrightarrow m \leq -2$.

Chọn đáp án D $\square$

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. B	3. B	4. D	5. B	6. D	7. B	8. D	9. D	10. C
11. D	12. B	13. A	14. A	15. A	16. C	17. D	18. D	19. A	20. C
21. C	22. A	23. C	24. A	25. D	26. D	27. A	28. C	29. C	30. A
31. C	32. C	33. A	34. D	35. C	36. C	37. A	38. C	39. D	40. C
41. A	42. C	43. D	44. D	45. A	46. A	47. A	48. C	49. A	50. D

5 ĐỀ THI THQG 2019 - MÃ ĐỀ 104

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Số cách chọn 2 học sinh từ 8 học sinh là

A. C_8^2. B. 8^2. C. A_8^2. D. 2^8.

Lời giải.

Số cách chọn 2 học sinh từ 8 học sinh là: C_8^2.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 4x + 3y + z - 1 = 0$. Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}_4 = (3; 1; -1)$. B. $\vec{n}_3 = (4; 3; 1)$. C. $\vec{n}_2 = (4; -1; 1)$. D. $\vec{n}_1 = (4; 3; -1)$.

Lời giải.

$(P)\colon 4x + 3y + z - 1 = 0$.

Véc-tơ $\vec{n}_3 = (4; 3; 1)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P).

Chọn đáp án B □

Câu 3. Nghiệm của phương trình $2^{2x-1} = 32$ là

A. $x = 3$. B. $x = \dfrac{17}{2}$. C. $x = \dfrac{5}{2}$. D. $x = 2$.

Lời giải.

$2^{2x-1} = 32 \Leftrightarrow 2^{2x-1} = 2^5 \Leftrightarrow 2x - 1 = 5 \Leftrightarrow x = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là

A. $\dfrac{4}{3}Bh$. B. $\dfrac{1}{3}Bh$. C. $3Bh$. D. Bh.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trục là $V = B \cdot h$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Số phức liên hợp của số phức $3 - 2i$ là

A. $-3 + 2i$. B. $3 + 2i$. C. $-3 - 2i$. D. $-2 + 3i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $3 - 2i$ là số phức $3 + 2i$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; 1; -1)$ trên trục Oy có tọa độ là

A. $(0; 1; 0)$. B. $(3; 0; 0)$. C. $(0; 0; -1)$. D. $(3; 0; -1)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; 1; -1)$ trên trục Oy có tọa độ là $(0; 1; 0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 1$ và $u_2 = 4$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

A. 5. B. 4. C. -3. D. 3.

Lời giải.

Vì (u_n) là cấp số cộng nên $u_2 = u_1 + d \Leftrightarrow d = u_2 - u_1 = 4 - 1 = 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 4$ là

A. $2x^2 + 4x + C$. B. $x^2 + 4x + C$. C. $x^2 + C$. D. $2x^2 + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (2x+4)\,\mathrm{d}x = x^2 + 4x + C$.

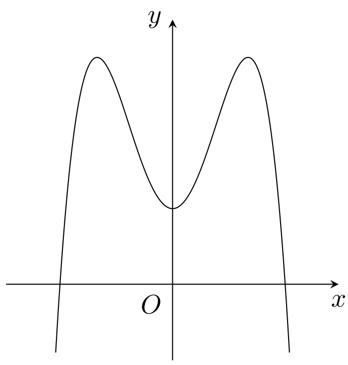
Chọn đáp án B □

Câu 9.

Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?

A. $y = 2x^3 - 3x + 1$. B. $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$.

C. $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$. D. $y = -2x^3 + 3x + 1$.



Lời giải.

Dạng đồ thị hình bên là đồ thị hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có hệ số $a < 0$.

Do đó, chỉ có đồ thị hàm số $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$ là thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi hàm số nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$. B. $(1;+\infty)$. C. $(-1;0)$. D. $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-5}{3}$. Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d?

A. $\overrightarrow{u_1} = (3;-1;5)$. B. $\overrightarrow{u_3} = (2;6;-4)$. C. $\overrightarrow{u_4} = (-2;-4;6)$. D. $\overrightarrow{u_2} = (1;-2;3)$.

Lời giải.

Ta thấy đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương có tọa độ $\overrightarrow{u_2} = (1;-2;3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^2$ bằng

(A) $2\log_2 a$. (B) $\frac{1}{2}+\log_2 a$. (C) $\frac{1}{2}\log_2 a$. (D) $2+\log_2 a$.

Lời giải.

Vì a là số thực dương tùy ý nên $\log_2 a^2 = 2\log_2 a$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Thể tích khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là

(A) $2\pi r^2 h$. (B) $\pi r^2 h$. (C) $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. (D) $\frac{4}{3}\pi r^2 h$.

Lời giải.

Thể tích khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

(A) $x=-2$. (B) $x=1$. (C) $x=3$. (D) $x=2$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có điểm cực tiểu của hàm số là $x=3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Biết $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = -4$, khi đó $\int\limits_0^1 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 6. (B) -6. (C) -2. (D) 2.

Lời giải.

$$\int\limits_0^1 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 2+(-4) = -2.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Cho hai số phức $z_1 = 2-i$, $z_2 = 1+i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $2z_1+z_2$ có tọa độ là

(A) $(5;-1)$. (B) $(-1;5)$. (C) $(5;0)$. (D) $(0;5)$.

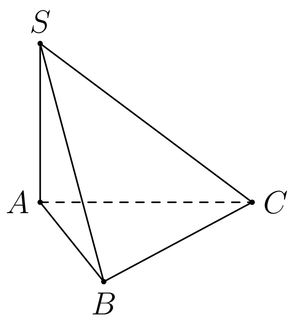
Lời giải.

Ta có $2z_1+z_2 = 5-i$ nên điểm biểu diễn là $(5;-1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17.

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 2a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = a\sqrt{2}$. (minh họa như hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng



(A) $60°$. **B** $45°$. (C) $30°$. (D) $90°$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} SC \cap (ABC) = \{C\} \\ SA \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow (\widehat{SC, (ABC)}) = (\widehat{SC, AC}) = \widehat{SCA}$.

Mà $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2a^2 + 2a^2} = 2a = SA$ nên ΔSAC vuông cân tại A.

Vậy $\widehat{SCA} = 45°$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

(A) 9. **B** 3. (C) 15. (D) $\sqrt{7}$.

Lời giải.

Ta có $R = \sqrt{1^2 + (-1)^2 - (-7)} = 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

(A) $6x - 2y - 2z - 1 = 0$. (B) $3x + y + z - 6 = 0$.

(C) $x + y + 2z - 6 = 0$. **D** $3x - y - z = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB} = (-6;2;2)$ và đi qua trung điểm $I(1;1;2)$ của đoạn thẳng AB. Do đó, phương trình mặt phẳng đó là

$$-6(x-1) + 2(y-1) + 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow -6x + 2y + 2z = 0 \Leftrightarrow 3x - y - z = 0.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 7 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

(A) 10. (B) 8. (C) 16. **D** 2.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = 4 - 7 = -3 = \left(\sqrt{3}i\right)^2$.

Do đó phương trình có hai nghiệm phức là $z_1 = 2 + \sqrt{3}i$, $z_2 = 2 - \sqrt{3}i$.

Suy ra $z_1^2 + z_2^2 = \left(2 + \sqrt{3}i\right)^2 + \left(2 - \sqrt{3}i\right)^2 = 4 + 4\sqrt{3}i - 3 + 4 - 4\sqrt{3}i - 3 = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

(A) 18. **B** -18. (C) -2. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [-3; 3] \\ x = -1 \in [-3; 3]. \end{array}\right.$

Ta lại có $f(-3) = -18$; $f(-1) = 2$; $f(1) = -2$; $f(3) = 18$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng -18.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1 m và 1,5 m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?

A 1,6 m. B 2,5 m. C 1,8 m. D 2,1 m.

Lời giải.

Gọi h là chiều cao của các bể nước và r là bán kính đáy của bể nước dự định làm.

Theo giả thiết, ta có $\pi r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot h + \pi \cdot (1,5)^2 \cdot h \Leftrightarrow r^2 = 1 + \dfrac{9}{4} = \dfrac{13}{4}$.

Suy ra $r = \dfrac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,8$ m.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0 ↘		-4 || $+\infty$	↘	-3	↗	3

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A 2. B 1. C 3. D 4.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ nên đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là các đường thẳng có phương trình $y = 3$ và $y = 0$.

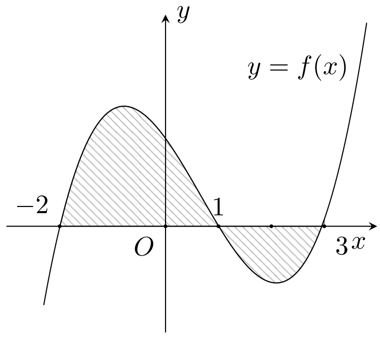
Ta lại có $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ nên hàm số có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng có phương trình $x = 0$.

Vậy hàm số có ba tiệm cận.

Chọn đáp án C □

Câu 24.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -2$ và $x = 3$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A $S = \int\limits_{-2}^{1} f(x)\,dx - \int\limits_{1}^{3} f(x)\,dx$.

B $S = -\int\limits_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int\limits_{1}^{3} f(x)\,dx$.

C $S = \int\limits_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int\limits_{1}^{3} f(x)\,dx$.

D $S = -\int\limits_{-2}^{1} f(x)\,dx - \int\limits_{1}^{3} f(x)\,dx$.

Lời giải.

Ta có $S = \int\limits_{-2}^{3} |f(x)|\,dx = \int\limits_{-2}^{1} |f(x)|\,dx + \int\limits_{1}^{3} |f(x)|\,dx$.

Do $f(x) \geq 0$ với $\forall x \in [-2; 1]$ và $f(x) \leq 0$ với $\forall x \in [1; 3]$ nên $S = \int\limits_{-2}^{1} f(x)\,dx - \int\limits_{1}^{3} f(x)\,dx$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Hàm số $y = 3^{x^2-x}$ có đạo hàm là

A $3^{x^2-x} \cdot \ln 3$.
B $(2x-1) \cdot 3^{x^2-x}$.
C $(x^2 - x) \cdot 3^{x^2-x-1}$.
D $(2x-1) \cdot 3^{x^2-x} \cdot \ln 3$.

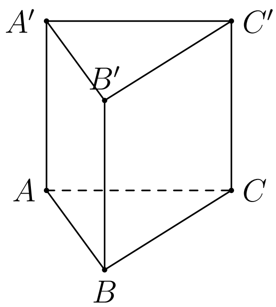
Lời giải.

Ta có: $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ nên $\left(3^{x^2-x}\right)' = (2x-1) \cdot 3^{x^2-x} \cdot \ln 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 26.

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = \sqrt{2}a$ (minh họa như hình vẽ bên). Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng



A $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{4}$.
B $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{6}$.
C $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{12}$.
D $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích của khối lăng trụ đã cho là $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot AA' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Nghiệm của phương trình $\log_3(2x+1) = 1 + \log_3(x-1)$ là

A $x = 4$. **B** $x = -2$. **C** $x = 1$. **D** $x = 2$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x+1>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_3(2x+1) = 1 + \log_3(x-1) \\ \Leftrightarrow \ & \log_3(2x+1) = \log_3[3(x-1)] \\ \Leftrightarrow \ & 2x+1 = 3x-3 \\ \Leftrightarrow \ & x = 4 \text{ (nhận)}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 28. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $ab^3 = 8$. Giá trị của $\log_2 a + 3\log_2 b$ bằng

A 8. **B** 6. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Ta có $\log_2 a + 3\log_2 b = \log_2 a + \log_2 b^3 = \log_2(ab^3) = \log_2 8 = 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là

A 3. **B** 1. **C** 2. **D** 0.

Lời giải.

Ta có $2f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{3}{2}$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$
							$y = -\frac{3}{2}$

Nhìn bảng biến thiên ta thấy phương trình này có ba nghiệm

Chọn đáp án A □

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x(x+1)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ (x+1)^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$	CT	$\nearrow$	

Vậy hàm số đã cho có một cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)z+3+16i=2\left(\overline{z}+i\right)$. Mô-đun của z bằng

A. $\sqrt{5}$. B. 13. C. $\sqrt{13}$. D. 5.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$. Ta có

$$\begin{aligned}
& (2-i)z+3+16i=2\left(\overline{z}+i\right) \\
\Leftrightarrow\ & (2-i)(x+yi)+3+16i=2(x-yi+i) \\
\Leftrightarrow\ & 2x+2yi-xi+y+3+16i=2x-2yi+2i \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} 2x+y+3=2x \\ 2y-x+16=-2y+2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} y+3=0 \\ -x+4y=-14 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x=2 \\ y=-3. \end{cases}
\end{aligned}$$

Suy ra $z=2-3i$. Vậy $|z|=\sqrt{13}$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2 x+3$, $\forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{\pi^2-2}{8}$. B. $\dfrac{\pi^2+8\pi-8}{8}$. C. $\dfrac{\pi^2+8\pi-2}{8}$. D. $\dfrac{3\pi^2+2\pi-3}{8}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\int f'(x)\,\mathrm{d}x &= \int \left(2\sin^2 x+3\right)\,\mathrm{d}x=\int \left(1-\cos 2x+3\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int \left(4-\cos 2x\right)\,\mathrm{d}x = 4x-\frac{1}{2}\sin 2x+C.
\end{aligned}$$

Ta có $f(0)=4$ nên $4\cdot 0-\dfrac{1}{2}\sin 0+C=4 \Leftrightarrow C=4$ nên $f(x)=4x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+4$.

Khi đó $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(4x-\frac{1}{2}\sin 2x+4\right)\mathrm{d}x=\left(2x^2+\frac{1}{4}\cos 2x+4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2+8\pi-2}{8}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;-1;0)$, $B(1;2;1)$, $C(3;-2;0)$ và $D(1;1;-3)$. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=-1-2t\end{cases}$. (B) $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=1-2t\end{cases}$. (C) $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=-2-3t\end{cases}$. (D) $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=-3+2t\end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;3;1)$; $\overrightarrow{AC}=(1;-1;0)$; $\vec{n}_{(ABC)}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;1;-2)$.

Đường thẳng đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên có véc-tơ chỉ phương là:

$\vec{n}_{(ABC)}=(1;1;-2)$ vậy phương trình tham số là: $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=-3-2t.\end{cases}$

Đường thẳng này cũng chính là $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=-1-2t.\end{cases}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(5-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty;-3)$. **B** $(4;5)$. (C) $(3;4)$. (D) $(1;3)$.

Lời giải.

Ta có $y'=f'(5-2x)=-2f'(5-2x)$.

$y'=0\Leftrightarrow -2f'(5-2x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5-2x=-3\\5-2x=-1\\5-2x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\x=3\\x=2.\end{array}\right.$

$f'(5-2x)<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5-2x<-3\\-1<5-2x<1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>4\\2<x<3\end{array}\right.$

$f'(5-2x)>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5-2x>1\\-3<5-2x<-1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<2\\3<x<4.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $y = f(5 - 2x)$ đồng biến trên khoảng $(4; 5)$.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{3x-2}{(x-2)^2}$ trên khoảng $(2; +\infty)$ là

A $3\ln(x-2) + \dfrac{4}{x-2} + C$.

B $3\ln(x-2) + \dfrac{2}{x-2} + C$.

C $3\ln(x-2) - \dfrac{2}{x-2} + C$.

D $3\ln(x-2) - \dfrac{4}{x-2} + C$.

Lời giải.

Ta có

$f(x) = \dfrac{3x-2}{(x-2)^2} = \dfrac{3(x-2)+4}{(x-2)^2} = \dfrac{3}{x-2} + \dfrac{4}{(x-2)^2}$.

Do đó

$\displaystyle\int \dfrac{3x-2}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\dfrac{3}{x-2} + \dfrac{4}{(x-2)^2}\right)\mathrm{d}x = 3\ln(x-2) - \dfrac{4}{x-2} + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(4x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A 5. **B** 3. **C** Vô số. **D** 4.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x > \dfrac{1}{4} \\ m > 0. \end{cases}$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_3 x - \log_3(4x-1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \dfrac{x}{4x-1} = \dfrac{1}{m}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x}{4x-1}$, ta có $f'(x) = \dfrac{-1}{(4x-1)^2} < 0$, $\forall x > \dfrac{1}{4}$.

Suy ra bảng biến thiên:

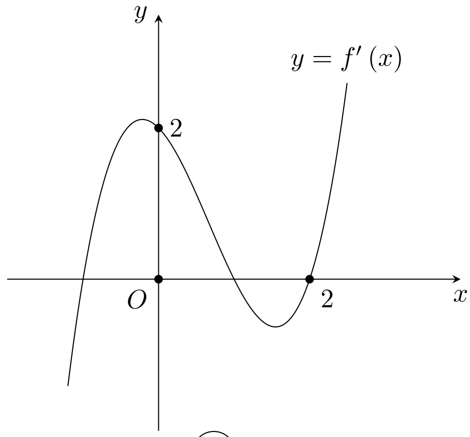
x	$\frac{1}{4}$		$+\infty$
y'	$\Vert$	$-$	
y	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$

Do đó phương trình có nghiệm khi $\dfrac{1}{m} > \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow m < 4$. Vậy $m \in \{1, 2, 3\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 37.

Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x) > 2x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi



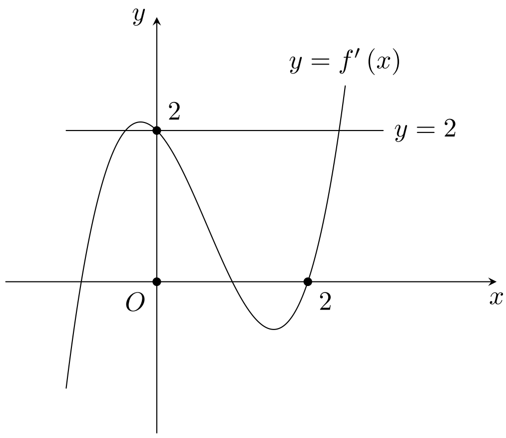
A $m \leq f(2) - 4$. **B** $m \leq f(0)$. **C** $m < f(0)$. **D** $m < f(2) - 4$.

Lời giải.

Hàm số $g(x) = f(x) - 2x$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ vì $g'(x) = f'(x) - 2 < 0, \forall x \in (0; 2)$ (quan sát trên khoảng $(0; 2)$, đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm dưới đường thẳng $y = 2$). Suy ra $g(2) < g(x) < g(0), \forall x \in (0; 2)$.

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

$$m < g(x), \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow m \leq g(2) \Leftrightarrow m \leq f(2) - 4.$$



Chọn đáp án A □

Câu 38. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 23 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

A $\dfrac{11}{23}$. **B** $\dfrac{1}{2}$. **C** $\dfrac{265}{529}$. **D** $\dfrac{12}{23}$.

Lời giải.

Trong 23 số nguyên dương đầu tiên, có 12 số lẻ và 11 số chẵn.

Chọn 2 số khác nhau từ 23 số, có C_{23}^2 cách chọn nên số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{23}^2$.

Gọi A là biến cố: "Chọn được hai số có tổng là một số chẵn".

Để hai số được chọn có tổng là một số chẵn thì hai số đó phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

+ Trường hợp 1: Chọn hai số chẵn khác nhau từ 11 số chẵn, có C_{11}^2 cách chọn.

+ Trường hợp 2: Chọn hai số lẻ khác nhau từ 12 số lẻ, có C_{12}^2 cách chọn.

Do đó $n(A) = \mathrm{C}_{11}^2 + \mathrm{C}_{12}^2$.

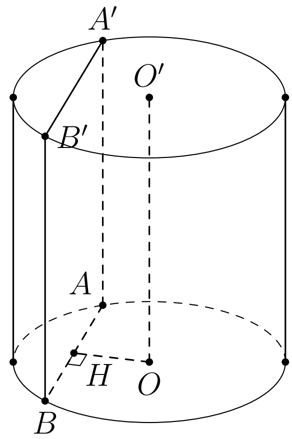
Xác suất cần tính là $p(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{\mathrm{C}_{11}^2 + \mathrm{C}_{12}^2}{\mathrm{C}_{23}^2} = \dfrac{11}{23}$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho hình trụ có chiều cao bằng $3\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 18. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A $6\sqrt{3}\pi$. **B** $6\sqrt{39}\pi$. **C** $3\sqrt{39}\pi$. **D** $12\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.



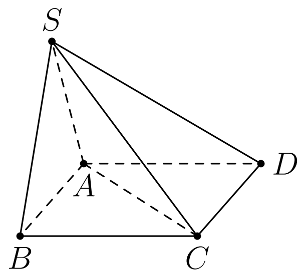
Gọi chiều cao của hình trụ là h.
Thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng song song với trục là hình chữ nhật $ABB'A'$.
Gọi H là hình chiếu của O trên AB thì OH là khoảng cách từ O đến mặt phẳng $(ABB'A')$ nên $OH = 1$.
Diện tích thiết diện là: $S_{td} = AB \cdot AA'$ trong đó $AA' = h = 3\sqrt{3}$ nên $AB = \dfrac{S_{td}}{AA'} = \dfrac{18}{3\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.
Do tam giác OAB cân nên
$OH^2 = OB^2 - HB^2 = OB^2 - \dfrac{AB^2}{4}$
$\Rightarrow OB^2 = OH^2 + \dfrac{AB^2}{4} = 1 + \dfrac{\left(2\sqrt{3}\right)^2}{4} = 4$
$\Rightarrow OB = 2$
Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là

$$S_{xq} = 2\pi \cdot R \cdot h = 2\pi \cdot 2 \cdot 3\sqrt{3} = 12\sqrt{3}\pi.$$

Chọn đáp án D □

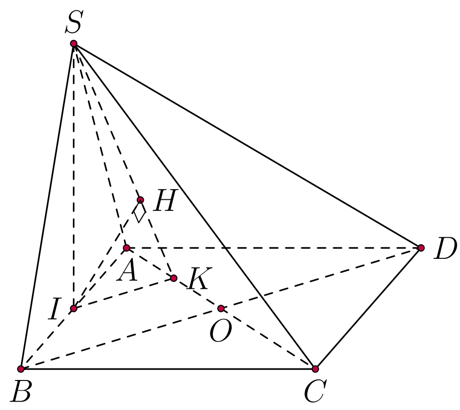
Câu 40.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh hoạ như hình bên). Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng



A $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **B** $\dfrac{\sqrt{21}a}{28}$. **C** $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. **D** $\dfrac{\sqrt{21}a}{14}$.

Lời giải.



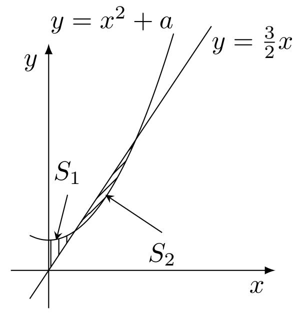
Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là trung điểm của AB.
Kẻ $IK \parallel BD, K \in AC$; kẻ $IH \perp SK, H \in SK$ (1).
Do $(SAB) \perp (ABCD)$ và tam giác SAB đều nên $SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp AC$.
Lại có $IK \perp AC$, suy ra $AC \perp (SIK) \Rightarrow AC \perp IH$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $IH \perp (SAC)$.
Suy ra IH là khoảng cách từ I đến đến mặt phẳng (SAC).
Ta có $IK = \frac{1}{2}BO = \frac{\sqrt{2}a}{4}$, tam giác SIK vuông tại I nên

$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{IK^2} = \frac{28}{3a^2} \Rightarrow IH = \frac{\sqrt{3}a}{2\sqrt{7}}.$$

Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng hai lần khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SAC) nên khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) là $d = \frac{\sqrt{21}a}{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 41.
Cho đường thẳng $y = \frac{3}{2}x$ và parabol $y = x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A $\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{16}\right)$. **B** $\left(\frac{2}{5}; \frac{9}{20}\right)$. **C** $\left(\frac{9}{20}; \frac{1}{2}\right)$. **D** $\left(0; \frac{2}{5}\right)$.

Lời giải.
Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + a = \frac{3}{2}x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 2a = 0$.

Để phương trình có 2 nghiệm dương thì $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a < \frac{9}{16} \end{cases}$.

Gọi hai nghiệm đó là $0 < x_1 < x_2$ thì $x_2 = \frac{3 + \sqrt{9 - 16a}}{4}$.
Để $S_1 = S_2$ khi và chỉ khi

$$\int_0^{x_1} \left| x^2 + a - \frac{3}{2}x \right| \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \left| x^2 + a - \frac{3}{2}x \right| \mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow \int_0^{x_1} \left(x^2 + a - \frac{3}{2}x \right) \mathrm{d}x = -\int_{x_1}^{x_2} \left(x^2 + a - \frac{3}{2}x \right) \mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow \int_0^{x_1} \left(x^2 + a - \frac{3}{2}x \right) \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} \left(x^2 + a - \frac{3}{2}x \right) \mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_0^{x_2}\left(x^2+a-\frac{3}{2}x\right)\mathrm{d}x=0.$$

Ta có

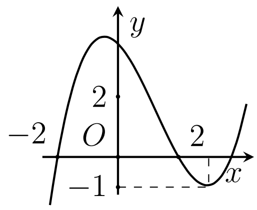
$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^{x_2}\left(x^2+a-\frac{3}{2}x\right)\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \frac{x_2^3}{3}+ax_2-\frac{3}{4}x_2^2=0\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{3}\left(x_2^2-\frac{9}{4}x_2+3a\right)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x_2-a-\frac{9}{4}x_2+3a=0 \Leftrightarrow -3x_2+8a=0\\
\Leftrightarrow\ &8a=3\cdot\frac{3+\sqrt{9-16a}}{4} \Leftrightarrow 3\sqrt{9-16a}=32a-9 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{9}{32}<a<\dfrac{9}{16}\\ 1024a^2-432a=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &a=\frac{27}{64}\in\left(\frac{2}{5};\frac{9}{20}\right).
\end{aligned}$$

Có thể giải nhanh bằng máy tính cho kết quả $a=0{,}421875$ thuộc khoảng $\left(\frac{2}{5};\frac{9}{20}\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 42.

Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3-3x)|=\frac{2}{3}$ là



A 6. B 10. C 3. D 9.

Lời giải.

Đặt $t=g(x)=x^3-3x$ (1).

Ta có $g'(x)=3x^2-3=0\Leftrightarrow x\pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

- $t\in(-2;2)$ cho ta 3 giá trị x thỏa mãn (1).
- $t\in\{-2;2\}$ cho ta 2 giá trị x thỏa mãn (1).
- $t\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ cho ta 1 giá trị x thỏa mãn (1).

Phương trình $|f(x^3-3x)|=\frac{2}{3}$ (2) trở thành $|f(t)|=\frac{2}{3}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f(t)=\dfrac{2}{3}\\ f(t)=-\dfrac{2}{3}.\end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị ta có:

- Phương trình $f(t)=\frac{2}{3}$ có 3 nghiệm thỏa mãn $-2<t_1<t_2<2<t_3$. Suy ra có 7 nghiệm của phương trình (2).

- Phương trình $f(t) = -\dfrac{2}{3}$ có 3 nghiệm thỏa mãn $t_4 < -2 < 2 < t_5 < t_6$. Suy ra có 3 nghiệm của phương trình (2).

Vậy phương trình đã cho có 10 nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = \dfrac{5+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A 52. B $2\sqrt{13}$. C $2\sqrt{11}$. D 44.

Lời giải.

Gọi $w = x + yi$ với x, y là các số thực.

Ta có $w = \dfrac{5+iz}{1+z} \Leftrightarrow z = \dfrac{w-5}{i-w}$.

Lại có

$$\begin{aligned} & |z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\frac{w-5}{i-w}\right| = \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow\ & |w-5| = \sqrt{2}|w-i| \Leftrightarrow (x-5)^2 + y^2 = 2[x^2 + (y-1)^2] \\ \Leftrightarrow\ & (x+5)^2 + (y-4)^2 = 52. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức w là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(3) = 1$ và $\int\limits_0^1 xf(3x)\,\mathrm{d}x = 1$, khi đó $\int\limits_0^3 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A 3. B 7. C -9. D $\dfrac{25}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t = 3x \Rightarrow \mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{d}t$.

Suy ra $1 = \int\limits_0^1 xf(3x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{9}\int\limits_0^3 tf(t)\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow \int\limits_0^3 tf(t)\,\mathrm{d}t = 9$.

Đặt $\begin{cases} u = f(t) \\ \mathrm{d}v = t\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(t)\,\mathrm{d}t \\ v = \dfrac{t^2}{2}. \end{cases}$

Suy ra $\int\limits_0^3 tf(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{t^2}{2}f(t)\Big|_0^3 - \int\limits_0^3 \dfrac{t^2}{2}f'(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{9}{2}f(3) - \dfrac{1}{2}\int\limits_0^3 t^2 f'(t)\,\mathrm{d}t$.

$\Leftrightarrow 9 = \dfrac{9}{2} - \dfrac{1}{2}\int\limits_0^3 t^2 f'(t)\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow \int\limits_0^3 t^2 f'(t)\,\mathrm{d}t = -9$.

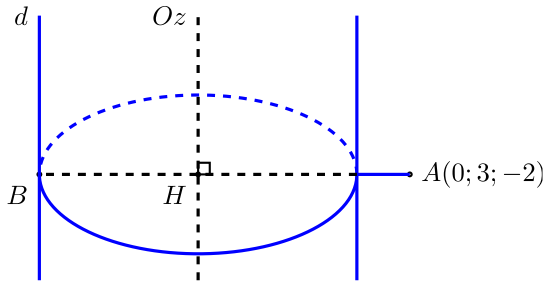
Vậy $\int\limits_0^3 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = -9$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;3;-2)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 2. Khi khoảng cách từ A đến d lớn nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

(A) $Q(-2;0;-3)$. **(B)** $M(0;8;-5)$. **(C)** $N(0;2;-5)$. **D** $P(0;-2;-5)$.

Lời giải.

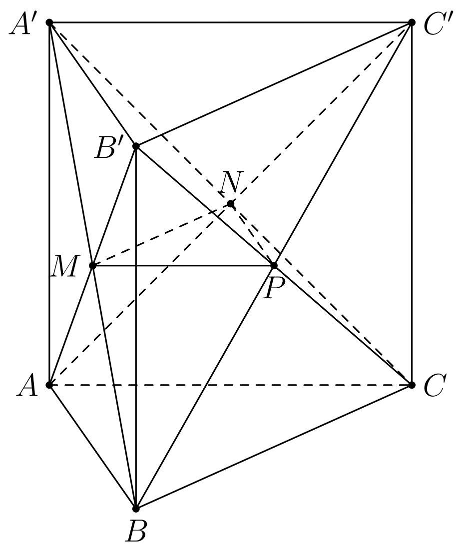


Do đường thẳng $d \parallel Oz$ nên d nằm trên mặt trụ có trục là Oz và bán kính trụ là $R = 2$.
Gọi H là hình chiếu của A trên trục Oz, suy ra tọa độ $H(0;0;-2)$.
Do đó $d(A, Oz) = AH = 3$.
Gọi B là điểm thuộc đường thẳng AH sao cho $\overrightarrow{AH} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$. Suy ra $B(0;-2;-2)$.
Vậy $\mathrm{d}(A,\, d)_{\max} = 5 \Leftrightarrow d$ là đường thẳng đi qua B và song song với Oz.
Phương trình tham số của d: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = -2 + t. \end{cases}$
Kết luận: d đi qua điểm $P(0;-2;-5)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 46. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 4 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

(A) $\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$. **(B)** $8\sqrt{3}$. **C** $6\sqrt{3}$. **(D)** $\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V = 4 \cdot \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}.$$

Gọi thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P là V_1.

Ta có: $V_1 = V_{AMNCB} + V_{BMNP} + V_{BNPC}$.

Dễ thấy $V_{A'ABC} = \frac{1}{3}V$ và $V_{AMNCB} = \frac{3}{4}V_{A'ABC}$.

Suy ra $V_{AMNCB} = \frac{1}{4}V$.

$V_{BA'B'C'} = \frac{1}{3}V$ và $V_{BMNP} = \frac{1}{8}V_{BA'B'C'}$.

Suy ra $V_{BMNP} = \frac{1}{24}V$.

$V_{A'BCB'} = V_{A'B'CC'} = \frac{1}{3}V$ và $V_{BNPC} = \frac{1}{4}V_{BA'B'C}$.

Suy ra $V_{BNPC} = \frac{1}{12}V$.

Vậy $V_1 = V_{AMNCB} + V_{BMNP} + V_{BNPC} = \frac{3}{8}V = 6\sqrt{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho hai hàm số $y = \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2}$ và $y = |x+1| - x - m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

(A) $(-3; +\infty)$. (B) $(-\infty; -3)$. (C) $[-3; +\infty)$. (D) $(-\infty; -3]$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ

$$\begin{aligned} &\frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} = |x+1| - x - m \\ \Leftrightarrow\ &\frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} - |x+1| + x = -m \quad (1). \end{aligned}$$

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của

$$F(x) = \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} - |x+1| + x = \begin{cases} \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} - 1, & x > -1 \\ \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + 2x + 1, & x < -1. \end{cases}$$

Ta có $F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}, & x \in (-1; +\infty) \setminus \{0; 1\} \\ \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + 2, & x \in (-\infty; -1) \setminus \{-2\}. \end{cases}$

Mặt khác $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 3$.

$\lim\limits_{x \to -2^+} F(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^-} F(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^+} F(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^-} F(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^-} F(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} F(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^-} F(x) = +\infty$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	||	$+$	||	$+$	||	$+$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Để phương trình có 4 nghiệm thì $-m \leq 3 \Leftrightarrow m \geq -3$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Cho phương trình $\left(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1\right)\sqrt{4^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt?

A Vô số. **B 62.** C 63. D 64.

Lời giải.

Ta có điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ x \geq \log_4 m \end{cases}$ (*) (với m nguyên dương).

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1\right)\sqrt{4^x - m} = 0 \quad (1)$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\log_3^2 x - \log_3 x - 1 = 0 & (2) \\ 4^x = m & (3). \end{array}\right.$$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}. \end{array}\right.$

Phương trình (3) $\Leftrightarrow x = \log_4 m$.

Do m nguyên dương nên ta có các trường hợp sau:

TH 1: $m = 1$ thì $\log_4 m = 0$. Khi đó điều kiện (*) trở thành $x > 0$.

Khi đó nghiệm của phương trình (3) bị loại và nhận nghiệm của phương trình (2).

Do đó nhận giá trị $m = 1$.

TH 2: $m \geq 2$, khi đó điều kiện (*) trở thành $x \geq \log_4 m$ (vì $\log_4 m \geq \dfrac{1}{2}$).

Để phương trình (1) có đúng hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} \leq \log_4 m < 3$

$\Leftrightarrow 4^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \leq m < 4^3$

Suy ra $m \in \{3; 4; 5; \ldots; 63\}$.

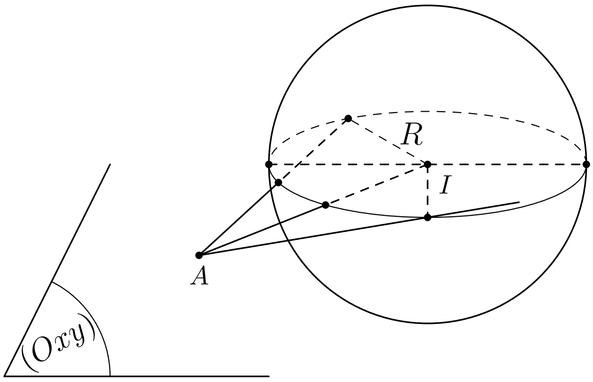
Vậy từ cả 2 trường hợp ta có: $63 - 3 + 1 + 1 = 62$ giá trị nguyên dương m.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a, b, c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

A 12. **B** 16. **C** 20. **D** 8.

Lời giải.



Mặt cầu có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.

Vì $A \in (Oxy)$ nên $c=0$. Các giao tuyến của A đến mặt cầu (nếu $IA > R$) tạo nên một mặt nón tâm A, để mặt nón này có hai đường sinh vuông góc thì góc của mặt nón này phải $\geq 90^\circ$ hay $IA \leq R\sqrt{2}$.

Vậy $R \leq IA \leq R\sqrt{2} \Leftrightarrow 5 \leq a^2+b^2+1 \leq 10 \Leftrightarrow 4 \leq a^2+b^2 \leq 9$

Ta có các bộ số thỏa mãn $(0;\pm2)\,;(0;\pm3)\,;(\pm1;\pm2)\,;(\pm2;\pm2)\,;(\pm2;\pm1)\,;(\pm2;0)\,;(\pm3;0)$, 20 bộ số.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$ ↘	-3	↗ 2 ↘	-1	↗ $+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y=f(4x^2+4x)$ là

A 5. **B** 9. **C** 7. **D** 3.

Lời giải.

Có $(f(4x^2+4x))'=(8x+4)f'(4x^2+4x)$, $(f(4x^2+4x))'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ f'(4x^2+4x)=0. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	a_1 ↘	-3	↗ a_2	2	a_3 ↘	-1	↗ a_4	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên ta có $f'(4x^2+4x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2+4x=a_1 \in (-\infty;-1) \\ 4x^2+4x=a_2 \in (-1;0) \\ 4x^2+4x=a_3 \in (0;1) \\ 4x^2+4x=a_4 \in (1;+\infty) \end{array}\right.$. (1)

Xét $g(x)=4x^2+4x$, $g'(x)=8x+4$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Kết hợp bảng biến thiên của $g(x)$ và hệ (1) ta thấy:

- Phương trình $4x^2+4x=a_1 \in (-\infty;-1)$ vô nghiệm.
- Phương trình $4x^2+4x=a_2 \in (-1;0)$ tìm được hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.
- Phương trình $4x^2+4x=a_2 \in (0;1)$ tìm được thêm hai nghiệm mới phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.
- Phương trình $4x^2+4x=a_2 \in (1;+\infty)$ tìm được thêm hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.

Vậy hàm số $y=f(4x^2+4x)$ có tất cả 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án C □

HẾT

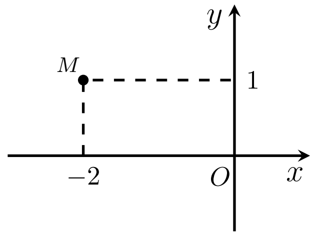
ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. B	3. A	4. D	5. B	6. A	7. D	8. B	9. B	10. A
11. D	12. A	13. C	14. C	15. C	16. A	17. B	18. B	19. D	20. D
21. B	22. C	23. C	24. A	25. D	26. A	27. A	28. D	29. A	30. B
31. C	32. C	33. A	34. B	35. D	36. B	37. A	38. A	39. D	40. C
41. B	42. B	43. B	44. C	45. D	46. C	47. C	48. B	49. C	50. C

6 ĐỀ MINH HỌA THQG 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.
Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức



A $z = -2 + i$. **B** $z = 1 - 2i$. **C** $z = 2 + i$. **D** $z = 1 + 2i$.

Lời giải.
Điểm $M(-2; 1)$ biểu diễn số phức $z = -2 + i$.
Chọn đáp án A □

Câu 2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-2}{x+3}$ bằng

A $-\dfrac{2}{3}$. **B** 1. **C** 2. **D** -3.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-2}{x+3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - \dfrac{2}{x}}{1 + \dfrac{3}{x}} = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Cho tập hợp M có 10 phần tử. Số tập con gồm 2 phần tử của M là

A A_{10}^{8}. **B** A_{10}^{2}. **C** C_{10}^{2}. **D** 10^2.

Lời giải.
Số tập con gồm 2 phần tử của M là số tổ hợp chập 2 của 10 nên bằng C_{10}^{2}.
Chọn đáp án C □

Câu 4. Thể tích của khối chóp có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B là

A $V = \dfrac{1}{3}Bh$. **B** $V = \dfrac{1}{6}Bh$. **C** $V = Bh$. **D** $V = \dfrac{1}{2}Bh$.

Lời giải.
Dựa vào công thức tính thể tích khối chóp ta có $V = \dfrac{1}{3}Bh$.
Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-2; 0)$. **B** $(-\infty; -2)$. **C** $(0; 2)$. **D** $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x) < 0, \forall x \in (-2; 0)$ nên hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng này.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

A. $V = \pi \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.
B. $V = 2\pi \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.
C. $V = \pi^2 \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.
D. $V = \pi^2 \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dựa vào công thức tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng quanh trục hoành ta có $V = \pi \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 1)$. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

A. $M(3; 0; 0)$.
B. $N(0; -1; 1)$.
C. $P(0; -1; 0)$.
D. $Q(0; 0; 1)$.

Lời giải.

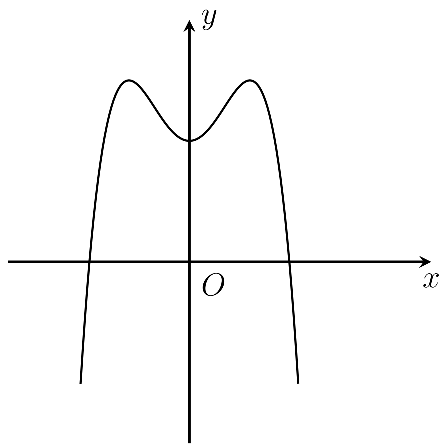
Hình chiếu vuông góc của $A(3; -1; 1)$ trên mặt phẳng (Oyz) là điểm $N(0; -1; 1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 8.

Đường cong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y = -x^4 + 2x^2 + 2$.
B. $y = x^4 - 2x^2 + 2$.
C. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.
D. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho là đồ thị của hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có hệ số $a < 0$. Trong các hàm số đã cho chỉ có hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 2$ thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

(A) $x = 1$. (B) $x = 0$. (C) $x = 5$. (D) $x = 2$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Với a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\log(3a) = 3\log a$. (B) $\log(a^3) = \frac{1}{3}\log a$. (C) $\log(a^3) = 3\log a$. (D) $\log(3a) = \frac{1}{3}\log a$.

Lời giải.

Ta có $\log(a^3) = 3\log a$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

(A) $x^3 + C$. (B) $\frac{x^3}{3} + x + C$. (C) $6x + C$. (D) $x^3 + x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int (3x^2 + 1)\,\mathrm{d}x = x^3 + x + C$, với C là hằng số.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là

(A) $\overrightarrow{u_1} = (-1; 2; 1)$. (B) $\overrightarrow{u_2} = (2; 1; 0)$. (C) $\overrightarrow{u_3} = (2; 1; 1)$. (D) $\overrightarrow{u_4} = (-1; 2; 0)$.

Lời giải.

Đường thẳng $d : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1} = (-1; 2; 1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+6}$ là

(A) $(0; 6)$. (B) $(-\infty; 6)$. (C) $(0; 64)$. (D) $(6; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $2^{2x} < 2^{x+6} \Leftrightarrow 2x < x + 6 \Leftrightarrow x < 6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Độ dài đường sinh của hình nón đã cho bằng

(A) $2\sqrt{2}a$. (B) $3a$. (C) $2a$. (D) $\frac{3a}{2}$.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = \pi r \ell \Rightarrow \ell = \dfrac{S_{xq}}{\pi r} = \dfrac{3\pi a^2}{\pi a} = 3a$.

Chọn đáp án (B) $\square$

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $M(2;0;0), N(0;-1;0)$ và $P(0;0;2)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là

(A) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-1} + \dfrac{z}{2} = 0$.
(B) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-1} + \dfrac{z}{2} = -1$.
(C) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{1} + \dfrac{z}{2} = 1$.
(D) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-1} + \dfrac{z}{2} = 1$.

Lời giải.

Sử dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn ta được: $(MNP): \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-1} + \dfrac{z}{2} = 1$.

Chọn đáp án (D) $\square$

Câu 16. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

(A) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$.
(B) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$.
(C) $y = \sqrt{x^2 - 1}$.
(D) $y = \dfrac{x}{x + 1}$.

Lời giải.

- Hàm số $y = \dfrac{x}{x+1}$ có tiệm cận đứng $x = -1$ vì $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x}{x+1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x}{x+1} = +\infty$.
- Hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ xác định trên $\mathscr{D} = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, nhưng không có tiệm cận đứng vì $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x - 2) = -1$.
- Hàm số $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ nên không có tiệm cận.
- Hàm số $y = \sqrt{x^2 - 1}$ xác định trên $\mathscr{D} = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ và
$$\lim_{x \to -1^-} \sqrt{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x^2 - 1} = 0$$
nên không có tiệm cận.

Chọn đáp án (D) $\square$

Câu 17.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $f(x) - 2 = 0$ là

(A) 0. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải.

Ta có $f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2$. Vì $-2 < 2 < 4$ nên từ bảng biến thiên suy ra phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (B) $\square$

Câu 18. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

(A) 50. (B) 5. (C) 1. (D) 122.

Lời giải.

Hàm xác định và liên tục trên $[-2;3]$. Ta có:

$$y' = 4x^3 - 8x;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Ta có $f(0) = 5, f(-2) = 5, f(3) = 50, f(\pm\sqrt{2}) = 1$.
Vậy $\max\limits_{[-2;3]} f(x) = 50$ tại $x = 3$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+3}$ bằng

(A) $\dfrac{16}{225}$. (B) $\log\dfrac{5}{3}$. (C) $\ln\dfrac{5}{3}$. (D) $\dfrac{2}{15}$.

Lời giải.
Ta có $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+3} = \ln|x+3|\Big|_0^2 = \ln 5 - \ln 3 = \ln\frac{5}{3}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2 - 4z + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1| + |z_2|$ bằng

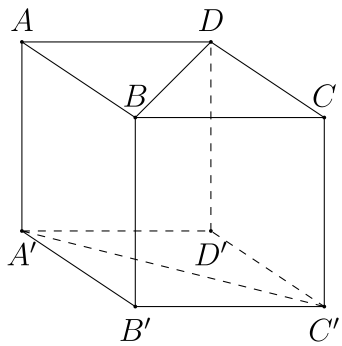
(A) $3\sqrt{2}$. (B) $2\sqrt{3}$. (C) 3. (D) $\sqrt{3}$.

Lời giải.
Ta có $\Delta' = 4 - 12 = -8 < 0$. Vậy phương trình có hai nghiệm phức là $\left[\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ z_2 = \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$

Vậy $|z_1| + |z_2| = \left|\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right| + \left|\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{3}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 21.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

(A) $\sqrt{3}a$. (B) a. (C) $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. (D) $\sqrt{2}a$.



Lời giải.
Do BD và $A'C'$ lần lượt nằm trên hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ song song với nhau nên $d(A'C', BD) = d((ABCD), (A'B'C'D'))$. Mà $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên ta có $d((ABCD), (A'B'C'D')) = AA' = a$. Vậy $d(A'C', BD) = a$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $0,4\%$/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau đúng 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

A. 102.424.000 đồng. B. 102.423.000 đồng. C. 102.016.000 đồng. D. 102.017.000 đồng.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính lãi kép thì số tiền được lĩnh là

$$T = 100 \cdot (1 + 0,4\%)^6 \approx 102.424.128,4 \text{ (đồng)}$$

Chọn đáp án A □

Câu 23. Một hộp chứa 11 quả cầu gồm 5 quả cầu màu xanh và 6 quả cầu màu đỏ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 quả từ hộp đó. Xác suất để hai quả cầu chọn ra cùng màu bằng

A. $\frac{5}{22}$. B. $\frac{6}{11}$. C. $\frac{5}{11}$. D. $\frac{8}{11}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $\mathrm{C}_{11}^2 = 55$.

Số cách chọn ra 2 quả cùng màu là $\mathrm{C}_5^2 + \mathrm{C}_6^2 = 25$.

Vậy xác suất cần tính bằng $\frac{25}{55} = \frac{5}{11}$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;1)$ và $B(2;1;0)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với AB có phương trình là

A. $3x - y - z - 6 = 0$. B. $3x - y - z + 6 = 0$.

C. $x + 3y + z - 5 = 0$. D. $x + 3y + z - 6 = 0$.

Lời giải.

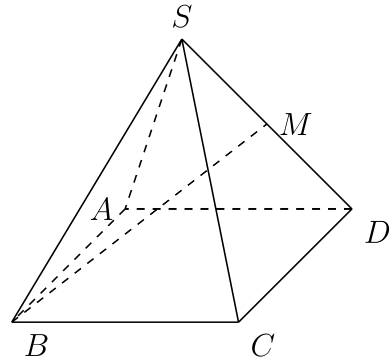
Mặt phẳng cần tìm đi qua điểm $A(-1;2;1)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB} = (3;-1;-1)$ nên có phương trình $3(x+1) - (y-2) - (z-1) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - z + 6 = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 25.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của SD (tham khảo hình vẽ bên). Tính tan của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.



Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$ và H là trung điểm OD.

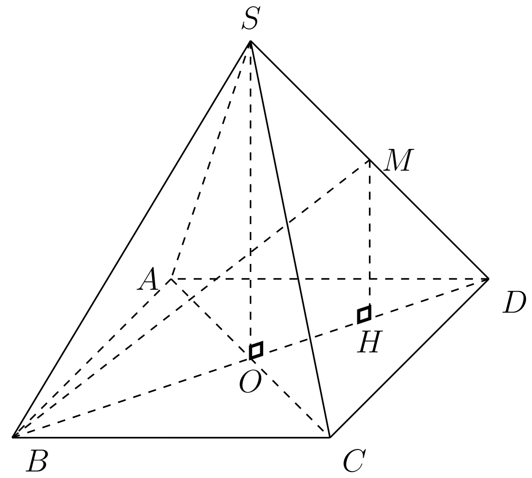
Ta có $SO \perp (ABCD)$ và $MH \parallel SO$.

Suy ra $MH \perp (ABCD) \Rightarrow (BM, (ABCD)) = \widehat{MBH}$.

$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MH = \dfrac{SO}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$ và

$BH = \dfrac{3}{4}BD = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Vậy $\tan \widehat{MBH} = \dfrac{MH}{BH} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{1}{3}$.



Chọn đáp án D □

Câu 26. Với n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^1 + C_n^2 = 55$, số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức $\left(x^3 + \dfrac{2}{x^2}\right)^n$ bằng

A 322560. **B** 3360. **C** 80640. **D** 13440.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} n \geq 2 \\ n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

Ta có $C_n^1 + C_n^2 = 55 \Leftrightarrow n^2 + n - 110 = 0 \Leftrightarrow n = 10$.

Với $n = 10$ thì $\left(x^3 + \dfrac{2}{x^2}\right)^{10}$ có số hạng tổng quát là: $C_{10}^k (x^3)^{10-k} \left(\dfrac{2}{x^2}\right)^k = C_{10}^k 2^k x^{30-5k}$. Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với $30 - 5k = 0 \Leftrightarrow k = 6$. Suy ra số hạng không chứa x trong khai triển là $C_{10}^6 = 13440$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Tính tổng các nghiệm thực của phương trình $\log_3 x.\log_9 x.\log_{27} x.\log_{81} x = \dfrac{2}{3}$ bằng

A $\dfrac{82}{9}$. **B** $\dfrac{80}{9}$. **C** 9. **D** 0.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Khi đó:

$$\log_3 x.\log_9 x.\log_{27} x.\log_{81} x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left(1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}\right)(\log_3 x)^4 = \frac{2}{3}$$

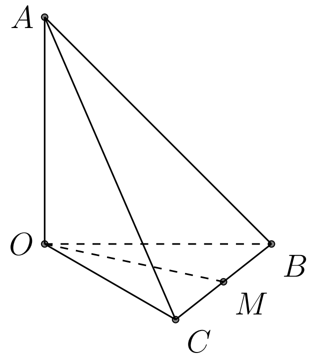
$$\Leftrightarrow (\log_3 x)^4 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 2 \\ \log_3 x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9 \\ x = \dfrac{1}{9}. \end{array}\right.$$

Vậy tổng các nghiệm là $9 + \dfrac{1}{9} = \dfrac{82}{9}$.

Chọn đáp án A □

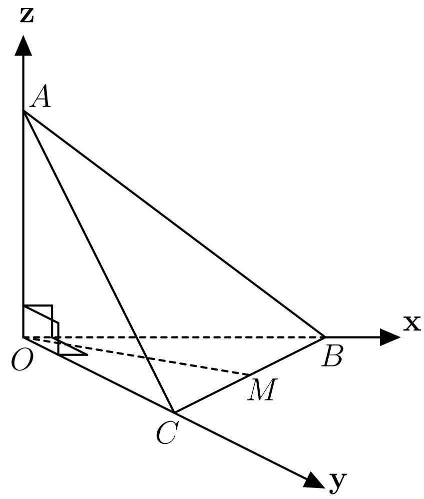
Câu 28.

Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm BC (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng



Ⓐ 90°. Ⓑ 30°. **C** 60°. Ⓓ 45°.

Lời giải.



Giả sử $OA = OB = OC = 1$. Chọn hệ trục tọa độ vuông góc $Oxyz$ sao cho tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với tia OB, OC, OA. Khi đó ta có $O(0;0;0)$, $A(0;0;1)$, $B(1;0;0)$, $C(0;1;0)$. Do đó $\overrightarrow{OM} = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $\overrightarrow{AB} = (1;0;-1)$.

Ta có $\cos(OM, AB) = \dfrac{\left|\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{OM}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\widehat{(OM, AB)} = 60^\circ$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d_1\colon \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}; d_2\colon \frac{x-5}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$$

và mặt phẳng $(P)\colon x + 2y + 3z - 5 = 0$. Đường thẳng vuông góc với (P), cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3}$. Ⓑ $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-1}{3}$.

Ⓒ $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+2}{3}$. Ⓓ $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{1}$.

Lời giải.

Gọi phương trình đường thẳng cần viết là Δ, A là giao của Δ và d_1, B là giao của Δ và d_2. Khi đó $A(3-t; 3-2t; -2+t)$ và $B(5-3u; -1+2u; 2+u)$. Suy ra

$$\overrightarrow{AB} = (2+t-3u; -4+2u+2t; 4+u-t).$$

Mặt phẳng (P) có một VTPT là $\vec{n} = (1;2;3)$. Ta có $\Delta \perp (P) \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ và $\vec{n}$ cùng phương. Do đó:

$$\frac{2+t-3u}{1} = \frac{-4+2u+2t}{2} = \frac{4+u-t}{3} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ u = 1. \end{cases}$$

Suy ra $A(1;-1;0)$, phương trình đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $y = x^3 + mx - \dfrac{1}{5x^5}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

(A) 5. (B) 3. (C) 0. **(D) 4.**

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + m + \dfrac{1}{x^6}$. Yêu cầu bài toán tương đương với:

$$3x^2 + m + \frac{1}{x^6} \geq 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow -m \leq 3x^2 + \frac{1}{x^6} = g(x), \forall x > 0 \Leftrightarrow -m \leq \min_{x>0} g(x).$$

Mà $g(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{x^6} \geq 4\sqrt[4]{x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot \dfrac{1}{x^6}} = 4 \Rightarrow \min\limits_{x>0} g(x) = 4$ khi $x = 1$.

Do đó $-m \leq 4 \Leftrightarrow m \geq -4$, suy ra có 4 giá trị nguyên âm thỏa mãn.

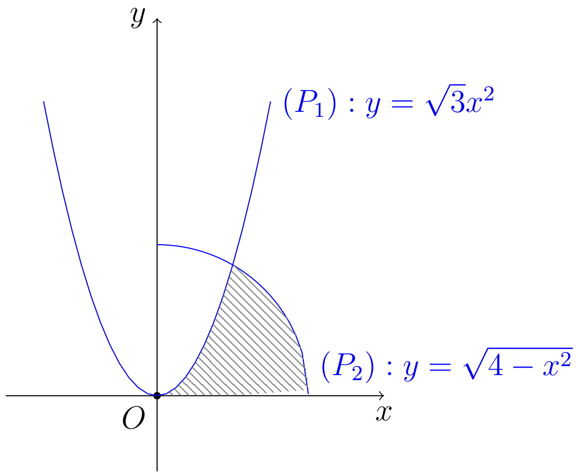
Chọn đáp án (D) □

Câu 31.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích hình (H) bằng

(A) $\dfrac{4\pi + \sqrt{3}}{12}$. **(B) $\dfrac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$.**

(C) $\dfrac{4\pi + 2\sqrt{3} - 3}{6}$. (D) $\dfrac{5\sqrt{3} - 2\pi}{3}$.



Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\sqrt{3}x^2 = \sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow 3x^4 + x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (do } 0 \leq x \leq 2).$$

Khi đó

$$S = \int_0^1 \sqrt{3}x^2 \mathrm{d}x + \int_1^2 \sqrt{4 - x^2} \mathrm{d}x = I + J.$$

Tính $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{3}x^2 \mathrm{d}x = \left.\frac{\sqrt{3}x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Tính $J = \displaystyle\int_1^2 \sqrt{4 - x^2} \mathrm{d}x$: Đặt $x = 2\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\cos t \mathrm{d}t$ và $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{6} \\ x = 2 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Khi đó

$$J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4\sin^2 t}.2\cos t \mathrm{d}t = 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \mathrm{d}t = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\, \mathrm{d}t = 2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $S = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$ (đvdt).

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Biết $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}-c$, với $a,\ b,\ c$ là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

(A) $P=24$. (B) $P=12$. (C) $P=18$. **D** $P=46$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}.\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)} = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} &= \int\limits_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x = \int\limits_2^2 \left(x^{-\frac{1}{2}}-(x+1)^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x \\ &= 2\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2 = 4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2 = \sqrt{32}-\sqrt{12}-2.\end{aligned}$$

Suy ra $a=32$, $b=12$, $c=2$. Vậy $P=a+b+c=32+12+2=46$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 4. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác BCD và chiều cao bằng chiều cao của tứ diện ABCD.

A $S_{xq}=\dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$. (B) $S_{xq}=8\sqrt{2}\pi$. (C) $S_{xq}=\dfrac{16\sqrt{3}\pi}{3}$. (D) $S_{xq}=8\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

Ta tính được bán kính đường tròn nội tiếp tam giác BCD là $r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, chiều cao tứ diện là $h=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Từ đó $S_{xq}=2\pi\cdot r\cdot h=\dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình sau có nghiệm dương $16^x-2\cdot 12^x+(m-2)\cdot 9^x=0$?

(A) 1. **B** 2. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương $t^2-2t-2+m=0$ với $t=\left(\dfrac{4}{3}\right)^x$. Yêu cầu bài toán trở thành, tìm m nguyên dương để phương trình $t^2-2t-2+m=0$ có nghiệm lớn hơn 1. Bằng cách khảo sát sự tương giao của hai đồ thị các hàm số $y=f(t)=t^2-2t-2$ và $g(x)=-m$ ta được $0<m<3$. Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn là $m=1$ hoặc $m=2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt[3]{m+3\sqrt[3]{m+3\sin x}}=\sin x$ có nghiệm thực.

A 5. **B** 7. **C** 3. **D** 2.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt[3]{m + 3\sin x}$ ta có hệ

$$\begin{cases} t^3 = m + 3\sin x \\ \sin^3 x = m + 3t. \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & t^3 - \sin^3 x + 3(t - \sin x) = 0 \Leftrightarrow (t - \sin x)\left(t^2 + t\sin x + \sin^2 x + 3\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & t = \sin x \Leftrightarrow \sin^3 x - 3\sin x = m. \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(u) = u^3 - 3u,\ u \in [-1; 1]$ ta có $f'(u) = 3u^2 - 3$, $f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	-1		1
f'	0	$-$	0
f	2	$\searrow$	-2

Từ đó, ta suy ra phương trình $\sin^3 x - 3\sin x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $-2 \le m \le 2$. Suy ra có 5 giá trị nguyên của m.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A 1. **B** 2. **C** 0. **D** 6.

Lời giải.

Ta có với mọi x thuộc đoạn $[0; 2]$ thì $-2 \le x^3 - 3x \le 2 \Rightarrow m - 2 \le x^3 - 3x + m \le m + 2$ với mọi x thuộc đoạn $[0; 2]$.

Suy ra $\max\limits_{[0;2]} y = \max\{|m - 2|; |m + 2|\}$.

- $m \ge 0$ khi đó $\max\limits_{[0;2]} y = m + 2 = 3 \Leftrightarrow m = 1$.
- $m < 0$ khi đó $\max\limits_{[0;2]} y = 2 - m = 3 \Leftrightarrow m = -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $D = \mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ thoả mãn $f'(x) = \dfrac{2}{2x - 1}$, $f(0) = 1$ và $f(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

A $4 + \ln 15$. **B** $2 + \ln 15$. **C** $3 + \ln 15$. **D** $\ln 15$.

Lời giải.

Ta có với $x > \dfrac{1}{2}$ ta có $f(x) = \ln(2x - 1) + 2$. Khi $x < \dfrac{1}{2}$, ta có $f(x) = \ln(1 - 2x) + 1$.

Vậy $f(-1) + f(3) = 3 + \ln 15$.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Cho số thức $z = a + bi$ với $(a, b \in \mathbb{R})$ thoả mãn $z + 2 + i - |z|(1 + i) = 0$ và $|z| > 1$. Tính $P = a + b$

(A) $P = -1$. (B) $P = -5$. (C) $P = 3$. **D** $P = 7$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{cases} a + 2 - \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \\ b + 1 - \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow b = a + 1 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \text{ (loại)} \\ b = 4. \end{array}\right.$$

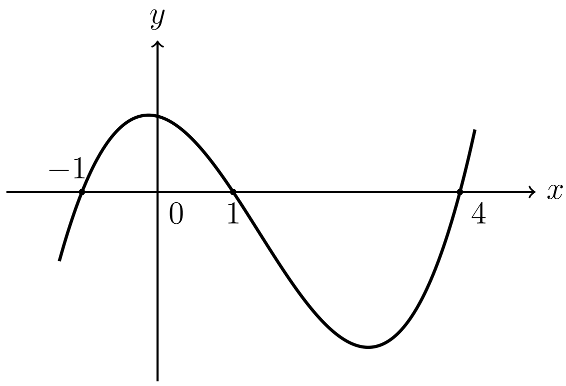
Vậy $a + b = 7$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 39.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(2 - x)$ đồng biến trên khoảng

(A) $(1; 3)$. (B) $(2; +\infty)$. **C** $(-2; 1)$. (D) $(-\infty; -2)$.



Lời giải.

Xét hàm số $y = f(2 - x)$. Hàm số trên xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta có $y' = -f'(2 - x)$.

$$y' > 0 \Leftrightarrow f'(2 - x) < 0.$$

Căn cứ vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có

$$f'(2 - x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 - x < -1 \\ 1 < 2 - x < 4 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{array}\right.$$

Vậy hàm số $y = f(2 - x)$ đồng biến trên từng khoảng $(-2; 1)$ và $(3; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Cho hàm số $y = \dfrac{-x + 2}{x - 1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a; 1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

(A) 1. (B) $\dfrac{3}{2}$. **C** $\dfrac{5}{2}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại tiếp điểm $M(x_0; y_0)$. Phương trình của d là

$$y = -\frac{1}{(x_0 - 1)^2} \cdot (x - x_0) + \frac{-x_0 + 2}{x_0 - 1}.$$

Đường thẳng d đi qua $A(a; 1)$ khi và chỉ khi

$$1 = -\frac{1}{(x_0 - 1)^2} \cdot (a - x_0) + \frac{-x_0 + 2}{x_0 - 1}$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow (x_0-1)^2 = x_0 - a + (-x_0+2)(x_0-1)\\&\Leftrightarrow 2x_0^2 - 6x_0 + 3 + a = 0.(1)\end{aligned}$$

Để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A thì phương trình (1) phải có đúng một nghiệm, hay

$$\Delta' = 9 - 2(3+a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}.$$

hoặc

$$\begin{cases}\Delta' > 0\\ 2-6+3+a=0\end{cases} \Leftrightarrow a = 1.$$

Chọn đáp án C □

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC \neq 0$?

A 3. **B** 1. **C** 4. **D** 8.

Lời giải.

Đặt $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $abc \neq 0$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Do $OA = OB = OC$ nên ta có $|a| = |b| = |c|$. Suy ra $b = \pm a, c = \pm a$.

- Nếu $b = a$ và $c = a$ thì mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$. Vì (P) đi qua M nên
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{2}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{a} = 1 \Leftrightarrow a = 4.$$
Ta có $(P): x + y + z - 4 = 0$.
- Nếu $b = a$ và $c = -a$ thì mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{-a} = 1$. Vì (P) đi qua M nên
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a} - \frac{2}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{0}{a} = 1 \text{ (vô nghiệm)}.$$
- Nếu $b = -a$ và $c = a$ thì mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{-a} + \frac{z}{a} = 1$. Vì (P) đi qua M nên
$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a} + \frac{2}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{a} = 1 \Leftrightarrow a = 2.$$
Ta có $(P): x - y + z - 2 = 0$.
- Nếu $b = -a$ và $c = -a$ thì mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a} - \frac{y}{a} - \frac{z}{a} = 1$. Vì (P) đi qua M nên
$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a} - \frac{2}{a} = 1 \Leftrightarrow -\frac{2}{a} = 1 \Leftrightarrow a = -2.$$
Ta có $(P): x - y - z + 2 = 0$.

Vậy có ba mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2\log u_{10}} = 2\log u_{10}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 5^{100}$ bằng

A 247. **B** 248. **C** 229. **D** 290.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_1.2^{n-1}$ nên $u_{10} = u_1.2^9$.

Đặt $t = \log u_1$, ta có

$$t+\sqrt{2+t-2t-18\log 2} = 18\log 2+2t \Leftrightarrow 18+t = \sqrt{2-t-18\log 2} \Leftrightarrow t = -18\log 2+1 \Leftrightarrow u_1 = 2^{-17}.5.$$

Suy ra

$$u_n > 5^{100} \Leftrightarrow 2^{n-18}.5 > 5^{100} \Leftrightarrow 2^{n-18} > 5^{99} \Leftrightarrow n > 18+99.\log_2 5.$$

Từ đó ta có $n_{\min} = 248$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị

(A) 3. (B) 5. (C) 6. **D** 4.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ ta có

$$f'(x) = 12x\left(x^2 - x - 2\right),\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 0, x = 2.$$

Lập bảng biến thiên.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0	$\searrow$	-32	$\nearrow$	$+\infty$

Ta thấy yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi đồ thị hàm số $f(x) + m$ cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt, hay $0 < m < 5$ nên ta có 4 số nguyên m.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2,2,1)$, $B\left(-\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$. Đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB) có phương trình là

A $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+1}{2}$.

(B) $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-8}{-2} = \dfrac{z-4}{2}$.

(C) $\dfrac{x+\frac{1}{3}}{1} = \dfrac{y-\frac{5}{3}}{-2} = \dfrac{z-\frac{11}{6}}{2}$.

(D) $\dfrac{x+\frac{2}{9}}{1} = \dfrac{y-\frac{2}{9}}{-2} = \dfrac{z-\frac{5}{9}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $OA = 3, OB = 4, AB = 5$ suy ra tam giác OAB vuông tại O. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB. Khi đó ta có

$$OB.\overrightarrow{IA} + OA.\overrightarrow{IB} + AB.\overrightarrow{IO} = \vec{0}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{OB.x_A + BA.x_O + AO.x_B}{OA + OB + AB} = 0 \\ y_I = \dfrac{OB.y_A + BA.y_O + AO.y_B}{OA + OB + AB} = 1 \\ z_I = \dfrac{OB.z_A + BA.z_O + AO.z_B}{OA + OB + AB} = 1. \end{cases}$$

Do đó $I(0, 1, 1)$. Lại có $\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right] = 4(1, -2, 2)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm. Thay tọa độ I vào phương án A thấy thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi S là điểm đối xứng với B qua đường thẳng DE. Thể tích của khối đa diện $ABCDSEF$ bằng

(A) $\dfrac{7}{6}$. (B) $\dfrac{11}{12}$. **(C) $\dfrac{2}{3}$.** (D) $\dfrac{5}{6}$.

Lời giải.

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$, sao cho $A(0;0;0)$ $B(1;0;0)$, $C(1;0;1)$, $D(0;0;1)$, $E(1;1;0)$, $F(0;1;0)$. Khi đó ta có $S\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{4}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$. Suy ra thể tích cần tính

$$V = V_{S.ABCD} + V_{S.ABEF} = \frac{1}{3}.\frac{4}{3}.1 + \frac{1}{3}.\frac{2}{3}.1 = \frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho số phức z thỏa mãn $|z-4-3i| = \sqrt{5}$. Tính $P = a+b$ khi $T = |z+1-3i|+|z-1+i|$ lớn nhất.

(A) $P = 10$. (B) $P = 4$. (C) $P = 6$. (D) $P = 8$.

Lời giải.

Gọi $M(z)$ và $A(-1;3)$, $B(1;-1)$, $I(4;3)$. Khi đó $M \in (I, \sqrt{5})$ và $T = MA+MB$. Gọi E là trung điểm AB, ta có $E = (\frac{5}{2}; 1)$ và $ME \leq EI + R$. Dấu "=" có khi $M(6;4)$. Khi đó

$$k = 4(EI+R)^2 + AB^2 \leq 4ME^2 + AB^2 = 2(MA^2 + MB^2) \geq (MA+MB)^2.$$

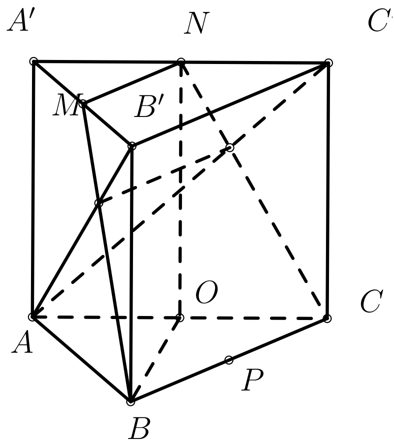
Suy ra $T \leq \sqrt{k}$. Đẳng thức xảy ra khi $M(6;4)$ hay $P = 10$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $BC = 2\sqrt{3}$, $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$, $A'C$ và BC. Cô sin của góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và $(AB'C')$ bằng

Ⓐ $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$. **B** $\dfrac{\sqrt{13}}{65}$. Ⓒ $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$. Ⓓ $\dfrac{18\sqrt{13}}{65}$.

Lời giải.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao ch O là trung điểm cạnh AC, B thuộc tia Ox, C thuộc tia Oy, N thuộc tia Oz. Khi đó $A(0;-\sqrt{3};0)$, $C(0;\sqrt{3};0)$, $C'(0;\sqrt{3};2)$, $B(3;0;0)$, $B'(3;0;2)$ và $N(0;0;2)$. Ta có $\overrightarrow{AB'}=\left(3;\sqrt{3};2\right)$, $\overrightarrow{AC'}=\left(0;2\sqrt{3};2\right)$. Suy ra $\overrightarrow{AB'}\wedge\overrightarrow{AC'}=\left(-2\sqrt{3};-6;6\sqrt{3}\right)$. Ta chọn $\vec{n}=\left(1;\sqrt{3};-3\right)$ là VTPT của $(AB'C')$. Ta có:
$\overrightarrow{NB}=(3;0;-2)$, $\overrightarrow{NC}\left(0;\sqrt{3};-2\right)\Rightarrow\overrightarrow{NB}\wedge\overrightarrow{NC}=\left(2\sqrt{3};6;3\sqrt{3}\right)$ nên ta cho $\vec{u}=\left(2;2\sqrt{3};3\right)$ là VTPT của (MNP).

Suy ra $\cos\alpha=\dfrac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{n}|.|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{13}}{65}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;1)$, $B(3;-1;1)$ và $C(-1;-1;1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu có tâm A, bán kính bằng 2; (S_2) và (S_3) là hai mặt cầu có tâm lần lượt là B, C và bán kính đều bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2) và (S_3)

Ⓐ 5. **B** 7. Ⓒ 6. Ⓓ 8.

Lời giải.

Xét (P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu trên. Ta có $AB=AC=\sqrt{13}$, $BC=4$. Gọi I là trung điểm BC; J, K là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AK}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Ta có $I(1;-1;1)$, $J\left(\dfrac{7}{3};0;1\right)$, $K\left(-\dfrac{1}{3};0;1\right)$.

Ta có các trường hợp sau

- Các điểm A, B, C nằm cùng phía so với (P): Có 2 mặt phẳng.
- Hai điểm B, C nằm cùng phía so với (P) và A, B nằm khác phía so với (P). Trường hợp này ta thấy (P) đi qua hai điểm J, K. Khi đó mặt phẳng $(P): by+c(z-1)=0$.
  Ta có $d(B,(P))=1$ nên $\dfrac{|-b|}{\sqrt{b^2+c^2}}=1\Rightarrow c=0$ nên $(P): y=0$.
- Hai điểm A, C nằm cùng phía và khác phía điểm B so với (P). Trường hợp này ta thấy (P) đi qua I, J. là tương tự như trên ta có 2 mặt phẳng.
- Hai điểm A, B nằm cùng phía và khác phía điểm C so với (P). Ta có 2 mặt phẳng.

Vậy có tất cả 7 mặt phẳng.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 49. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 5 học sinh lớp 12C thành một hàng ngang. Xác suất để trong 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau bằng

A $\dfrac{11}{630}$. Ⓑ $\dfrac{1}{126}$. Ⓒ $\dfrac{1}{105}$. Ⓓ $\dfrac{1}{42}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = 10!$.
Số cách xếp 5 bạn lớp 12C là 5!. Với mỗi cách xếp 5 bạn đó ta có hai trường hợp

- Đứng đầu hàng tính từ trái sang phải là một bạn lớp 12C và đứng cuối không phải là hs lớp 12C, tức là cách xếp có dạng $CXCXCXCXCX$, trong đó X là hs lớp A hoặc B. Khi đó ta có 5! các xếp 5 học sinh còn lại.
- Đứng đầu hàng từ trái sang phải không là hs lớp 12 C và đứng cuối là hs lớp 12C, tức là cách xếp có dạng $XCXCXCXCXC$. Khi đó ta cũng có 5! cách xếp 5 học sinh còn lại.
- Có 2 học sinh lớp C đứng hai đầu hàng, tức là cách xếp có dạng $CXCXCXCXYC$. Khi đó ta gép một học sinh lớp B với một học sinh lớp C và xem đó như một phần tử, khi đó còn lại 4 hs nên ta có 4! cách xếp. Do đó trường hợp này có 2.6.4!

Do đó xác suất cần tính là $P = \dfrac{(2.5! + 12.4!).5!}{10!} = \dfrac{11}{630}$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$$f(1) = 0, \int\limits_0^1 [f'(x)]^2 \, dx = 7, \int\limits_0^1 x^2 f(x) \, dx = \frac{1}{3}.$$

Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x) \, dx$ bằng

A $\dfrac{7}{5}$. **B** 1. **C** $\dfrac{7}{4}$. **D** 4.

Lời giải.

Cách 1. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^2 \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) \, dx \\ v = \dfrac{x^3}{3}. \end{cases}$

Khi đó: $\dfrac{1}{3} = \displaystyle\int\limits_0^1 x^2 f(x) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} f(x)\right]\Bigg|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) \, dx$.

Suy ra $\displaystyle\int\limits_0^1 x^3 f'(x) \, dx = -1$. (1)

Mặt khác, do $\displaystyle\int\limits_0^1 [f'(x)]^2 \, dx = 7$ nên

$$\int\limits_0^1 \left[[f'(x)]^2 + 14x^3 f'(x) + 49x^6\right] \, dx = 0 = 7 - 14 + 7 = 0.$$

Hay $\displaystyle\int\limits_0^1 \left(f'(x) + 7x^3\right)^2 \, dx = 0$. (2)

Suy ra $f'(x) + 7x^3 = 0 \Rightarrow f'(x) = -7x^3 \Rightarrow f(x) = -\dfrac{7}{4}x^4 + C$.

Mà $f(1) = 0$ nên $C = \dfrac{7}{4}$, suy ra $f(x) = \dfrac{7}{4}(1 - x^4)$. Khi đó $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x) \, dx = \frac{7}{5}$.

Lưu ý. Có thể giải thích vì sao từ (2) suy ra $f'(x)+7x^3=0$, $\forall x\in[0;1]$ như sau: Theo giả thiết ta có hàm số $y=\left(f'(x)+7x^3\right)^2$ liên tục và không âm trên đoạn $[0;1]$ (do đó, đồ thị hàm số này là một đường nét liền trên đoạn $[0;1]$ và không có điểm nào nằm bên dưới trục Ox). Tích phân ở (2) có giá trị bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\left(f'(x)+7x^3\right)^2$, trục hoành, đường thẳng $x=0$, đường thẳng $x=1$. Mà theo (2) thì hình phẳng này có diện tích bằng 0 nên $f'(x)+7x^3=0$, $\forall x\in[0;1]$.

Cách 2 (tiếp nối từ (1)). Ta có bất đẳng thức Bunhiacovski đối với tích phân: Nếu hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì ta luôn có

$$\left[\int_a^b f(x).g(x)\mathrm{d}x\right]^2\le\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right).\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $g(x)=kf(x)$, $\forall x\in[a;b]$. Trở lại bài toán. Từ (1), ta có:

$$1=\left(\int_0^1 x^3f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_0^1 x^6\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\cdot 7=1.$$

Như vậy dấu "=" xảy ra, tức là $f'(x)=kx^3$. Thay trở lại vào (1), ta được:

$$k\int_0^1 x^6\mathrm{d}x=-1\Rightarrow\frac{k}{7}=-1\Rightarrow k=-7.$$

Vậy $f'(x)=-7x^3\Rightarrow f(x)=-\frac{7}{4}x^4+C\overset{\text{do } f(1)=0}{\Rightarrow}f(x)=-\frac{7}{4}x^4+\frac{7}{4}$.

Do đó $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{7}{5}$.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. A	2. B	3. C	4. A	5. A	6. A	7. B	8. A	9. D	10. C
11. D	12. A	13. B	14. B	15. D	16. D	17. B	18. A	19. C	20. D
21. B	22. A	23. C	24. B	25. D	26. D	27. A	28. C	29. A	30. D
31. B	32. D	33. A	34. B	35. A	36. B	37. C	38. D	39. C	40. C
41. A	42. B	43. D	44. A	45. C	46. A	47. B	48. B	49. A	50. A

7 ĐỀ THI THQG 2018 - MÃ ĐỀ 101

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Có bao nhiêu cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 34 học sinh?

(A) 2^{34}. (B) A_{34}^2. (C) 34^2. (D) C_{34}^2.

Lời giải.

Mỗi cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 34 học sinh là một tổ hợp chập 2 của 34 phần tử nên số cách chọn là C_{34}^2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon\ x+2y+3z-5=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là

(A) $\vec{n}_1=(3;2;1)$. (B) $\vec{n}_3=(-1;2;3)$. (C) $\vec{n}_4=(1;2;-3)$. (D) $\vec{n}_2=(1;2;3)$.

Lời giải.

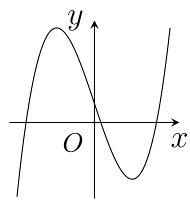
Mặt phẳng $(P)\colon\ x+2y+3z-5=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2=(1;2;3)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3.

Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

(A) 2. (B) 0. (C) 3. (D) 1.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta khẳng định hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(0;1)$. (B) $(-\infty;0)$. (C) $(1;+\infty)$. (D) $(-1;0)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $S=\pi\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$. (B) $S=\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$. (C) $S=\pi\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$. (D) $S=\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ được tính theo công thức $S = \displaystyle\int_0^2 |\mathrm{e}^x|\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(5a) - \ln(3a)$ bằng

A. $\dfrac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$. B. $\ln(2a)$. C. $\ln\dfrac{5}{3}$. D. $\dfrac{\ln 5}{\ln 3}$.

Lời giải.

Ta có $\ln(5a) - \ln(3a) = \ln\dfrac{5a}{3a} = \ln\dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

A. $x^4 + x^2 + C$. B. $3x^2 + 1 + C$. C. $x^3 + x + C$. D. $\dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{2}x^2 + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int (x^3 + x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_3 = (2;1;3)$. B. $\vec{u}_4 = (-1;2;1)$. C. $\vec{u}_2 = (2;1;1)$. D. $\vec{u}_1 = (-1;2;3)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_4 = (-1;2;1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Số phức $-3 + 7i$ có phần ảo bằng

A. 3. B. -7. C. -3. D. 7.

Lời giải.

Số phức $-3 + 7i$ có phần ảo bằng 7.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Diện tích mặt cầu bán kính R bằng

A. $\dfrac{4}{3}\pi R^2$. B. $2\pi R^2$. C. $4\pi R^2$. D. πR^2.

Lời giải.

Diện tích mặt cầu bán kính R bằng $4\pi R^2$.

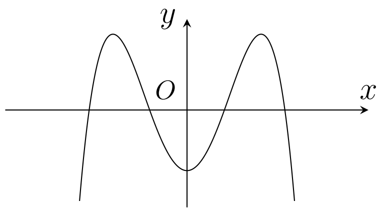
Chọn đáp án C □

Câu 11.

Đường cong trong hình vẽ bên là của hàm số nào dưới đây?

A. $y = x^4 - 3x^2 - 1$. B. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$. D. $y = -x^4 + 3x^2 - 1$.



Lời giải.

Vì đồ thị có dạng hình chữ M nên không thể là đồ thị hàm số bậc ba.

Vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = -\infty$ nên chọn $y = -x^4 + 3x^2 - 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -4; 3)$ và $B(2; 2; 7)$. Trung điểm của đoạn AB có tọa độ là

A. $(1; 3; 2)$. B. $(2; 6; 4)$. **C.** $(2; -1; 5)$. D. $(4; -2; 10)$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Khi đó $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = 2 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = -1 \\ z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow M(2; -1; 5)$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. $\lim \dfrac{1}{5n + 3}$ bằng

A. 0. B. $\dfrac{1}{3}$. C. $+\infty$. D. $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{1}{5n + 3} = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Phương trình $2^{2x+1} = 32$ có nghiệm là

A. $x = \dfrac{5}{2}$. **B.** $x = 2$. C. $x = \dfrac{3}{2}$. D. $x = 3$.

Lời giải.

Ta có $2^{2x+1} = 32 \Leftrightarrow 2x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Cho khối chóp có đáy hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $4a^3$. **B.** $\dfrac{2}{3}a^3$. C. $2a^3$. D. a.

Lời giải.

Diện tích đáy của hình chóp là $S_{\text{đáy}} = a^2$.

Thể tích của khối chóp đã cho là $V = \dfrac{1}{3}S_{\text{đáy}} \times h = \dfrac{1}{3}a^2 \times 2a = \dfrac{2}{3}a^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất 7,5 %/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền đã gửi, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

A. 11 năm. B. 9 năm. **C.** 10 năm. D. 12 năm.

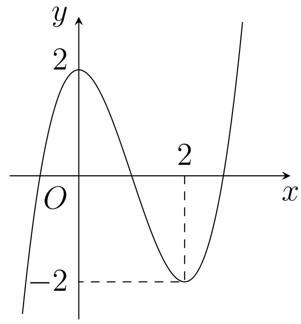
Lời giải.

Áp dụng công thức: $S_n = A(1+r)^n \Rightarrow n = \log_{(1+r)}\left(\dfrac{S_n}{A}\right) \Rightarrow n = \log_{(1+7,5\%)}(2) \approx 9{,}6$.

Chọn đáp án C □

Câu 17.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là



A 3. **B** 0. **C** 1. **D** 2.

Lời giải.

Ta có $3f(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{4}{3}$.

Dựa vào đồ thị, đường thẳng $y = -\dfrac{4}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

A 3. **B** 2. **C** 0. **D** 1.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [-9; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^+} y = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^-} y = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng.

Ngoài ra $\lim\limits_{x \to 0} y = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = \dfrac{1}{6}$ nên $x = 0$ không phải là một tiệm cận đứng.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A 60°. **B** 90°. **C** 30°. **D** 45°.

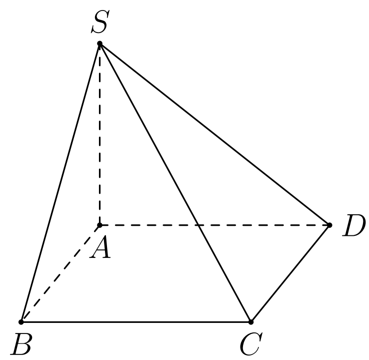
Lời giải.

Ta có AB là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$.

Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng góc giữa SB và AB là góc $\widehat{ABS}$.

Tam giác SAB vuông tại A, $\cos\widehat{ABS} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \widehat{ABS} = 60^\circ$.



Chọn đáp án A □

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(2;-1;2)$ và song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+3z+2=0$ có phương trình là

(A) $2x-y+3z-9=0$.
(B) $2x-y+3z+11=0$.
(C) $2x-y-3z+11=0$.
(D) $2x-y+3z-11=0$.

Lời giải.

Gọi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P), mặt phẳng (Q) có dạng $2x-y+3z+D=0\,(D\neq 2)$.

$A(2;-1;2)\in(Q)\Rightarrow D=-11$.

Vậy mặt phẳng cần tìm là $2x-y+3z-11=0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Từ một hộp chứa 11 quả cầu đỏ và 4 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng

(A) $\dfrac{4}{455}$.
(B) $\dfrac{24}{455}$.
(C) $\dfrac{4}{165}$.
(D) $\dfrac{33}{91}$.

Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu: $n\left(\Omega\right)=\mathrm{C}_{15}^3=455$ (phần tử).

Gọi A là biến cố: "lấy được 3 quả cầu màu xanh".

Khi đó, $n(A)=\mathrm{C}_4^3=4$ (phần tử).

Xác suất $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n\left(\Omega\right)}=\dfrac{4}{455}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. $\displaystyle\int\limits_1^2 \mathrm{e}^{3x-1}\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $\dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^2)$.
(B) $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^2$.
(C) $\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^2$.
(D) $\dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^5+\mathrm{e}^2)$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_1^2 \mathrm{e}^{3x-1}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x-1}\Big|_1^2=\dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^4-4x^2+9$ trên đoạn $[-2;3]$ bằng

(A) 201.
(B) 2.
(C) 9.
(D) 54.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-2;3]$.

Ta có $y'=4x^3-8x$.

$y'=0\Leftrightarrow 4x^3-8x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in[-2;3]\\ x=\pm\sqrt{2}\in[-2;3].\end{array}\right.$

Ta có $f(-2)=9,\ f(3)=54,\ f(0)=9,\ f\left(-\sqrt{2}\right)=5,\ f\left(\sqrt{2}\right)=5$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;3]$ bằng $f(3)=54$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x-3yi)+(1-3i)=x+6i$, với i là đơn vị ảo.

(A) $x=-1;\ y=-3$.
(B) $x=-1;\ y=-1$.
(C) $x=1;\ y=-1$.
(D) $x=1;\ y=-3$.

Lời giải.

Ta có $(2x-3yi)+(1-3i)=x+6i \Leftrightarrow x+1-(3y+9)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ 3y+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-3. \end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B, $AB=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

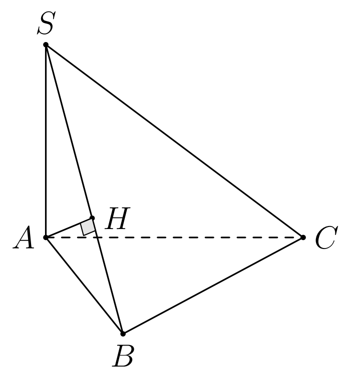
A $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. B $\dfrac{\sqrt{5}a}{3}$. C $\dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$. D $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải.

Trong tam giác SAB dựng AH vuông góc SB thì $AH \perp (SBC)$.

Do đó khoảng cách cần tìm là AH.

Ta có $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AB^2}=\dfrac{5}{4a^2}$ suy ra $AH=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.



Chọn đáp án A □

Câu 26. Cho $\displaystyle\int_{16}^{55}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+9}}=a\ln 2+b\ln 5+c\ln 11$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $a-b=-c$. B $a+b=c$. C $a+b=3c$. D $a-b=-3c$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{x+9} \Rightarrow t^2=x+9 \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=16 \Rightarrow t=5$; $x=55 \Rightarrow t=8$.

$$\text{Ta có } \int_{16}^{55}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+9}}=\int_{5}^{8}\frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-9)t}=2\int_{5}^{8}\frac{\mathrm{d}t}{t^2-9}=\frac{1}{3}\left(\int_{5}^{8}\frac{\mathrm{d}t}{t-3}-\int_{5}^{8}\frac{\mathrm{d}t}{t+3}\right).$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln|x-3|-\ln|x+3|\right)\Big|_5^8=\frac{2}{3}\ln 2+\frac{1}{3}\ln 5-\frac{1}{3}\ln 11.$$

Vậy $a=\dfrac{2}{3}$, $b=\dfrac{1}{3}$, $c=-\dfrac{1}{3}$. Mệnh đề $a-b=-c$ đúng.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Một chiếc bút chì khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy 3 mm và chiều cao bằng 200 mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút chì và đáy là hình tròn bán kính 1 mm. Giả định 1 m^3 gỗ có giá trị a (triệu đồng), 1 m^3 than chì có giá trị $8a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào sau đây?

A 9,7a (đồng). B 97,03a (đồng). C 90,7a (đồng). D 9,07a (đồng).

Lời giải.

Thể tích phần lõi được làm bằng than chì: $V_r = \pi R^2 h = \pi \cdot 10^{-6} \cdot 0,2 = 0,2 \cdot 10^{-6}\pi$ m^3.
Thể tích chiếc bút chì khối lăng trụ lục giác đều:
$V = B \cdot h = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \cdot (3 \cdot 10^{-3})^2 \cdot (0{,}2) = \dfrac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6}$ m^3.
Thể tích phần thân bút chì được làm bằng gỗ: $V_t = V - V_r = \dfrac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} - 0{,}2 \cdot 10^{-6}\pi$ m^3.
Giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì:
$0{,}2 \cdot 10^{-6}\pi \cdot 8a + \left(\dfrac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} - 0{,}2 \cdot 10^{-6}\pi\right) a \approx 9{,}07 \cdot 10^{-6} a$ (triệu đồng).
Chọn đáp án D □

Câu 28. Hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức $x(2x-1)^6 + (3x-1)^8$ bằng

A -13368. B 13368. C -13848. D 13848.

Lời giải.

Ta có $x(2x-1)^6 + (3x-1)^8 = x\displaystyle\sum_{k=0}^{6} \mathrm{C}_6^k \cdot (2x)^k \cdot (-1)^{6-k} + \sum_{l=0}^{8} \mathrm{C}_8^l \cdot (3x)^l \cdot (-1)^{8-l}$

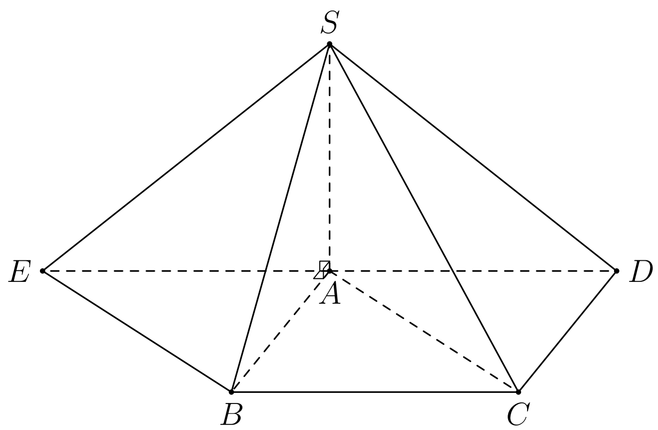
$= x\displaystyle\sum_{k=0}^{6} \mathrm{C}_6^k \cdot (2x)^k \cdot (-1)^{6-k} + \sum_{l=0}^{8} \mathrm{C}_8^l \cdot (3x)^l \cdot (-1)^{8-l}$

Suy ra hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức là: $\mathrm{C}_6^4 \cdot 2^4 \cdot (-1)^{6-4} + \mathrm{C}_8^5 \cdot 3^5 \cdot (-1)^{6-5} = -13368$.
Chọn đáp án A □

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

A $\dfrac{\sqrt{6}a}{2}$. B $\dfrac{2a}{3}$. C $\dfrac{a}{2}$. D $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải.



Dựng hình bình hành $ACBE$ ta có $AC \parallel (SBE)$ nên $\mathrm{d}(AC, SB) = \mathrm{d}(A, (SBE)) = h$.
Do AS, AB, AE đôi một vuông góc nhau nên $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{9}{4a^2}$.
Như vậy $\mathrm{d}(A, (SBE)) = h = \dfrac{2a}{3}$.
Chọn đáp án B □

Câu 30. Xét các số phức z thỏa mãn $(\overline{z} + i)(z + 2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A 1. B $\dfrac{5}{4}$. C $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. D $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $(\overline{z} + i)(z + 2) = (x - yi + i)(x + yi + 2) = (x^2 + 2x + y^2 - y) + (x - 2y + 2)i$

Vì $(\overline{z} + i)(z + 2)$ là số thuần ảo nên ta có: $x^2 + 2x + y^2 - y = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

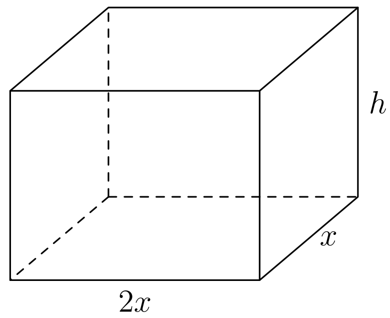
Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Ông A dự định sử dụng hết 6,5 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A 2,26 m^3. B 1,61 m^3. C 1,33 m^3. D 1,50 m^3.

Lời giải.



Đặt chiều rồng là x (m); chiều cao là h (m) (với $x, h > 0$).

Ta có $2x^2 + 2xh + 4xh = 6,5 \Leftrightarrow h = \frac{6{,}5 - 2x^2}{6x}$.

Do $h > 0$, $x > 0$ nên $6{,}5 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Lại có $V = 2x^2h = \frac{6{,}5x - 2x^3}{3} = f(x)$, với $x \in \left(0; \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$

$f'(x) = \frac{13}{6} - 2x^2$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{39}}{6}$.

x	0		$\frac{\sqrt{39}}{6}$		$\frac{\sqrt{13}}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{13\sqrt{39}}{54}$	$\searrow$	

Vậy $V \leqslant f\left(\frac{\sqrt{39}}{6}\right) = \frac{13\sqrt{39}}{54} \approx 1{,}50$ m^3.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t$ m/s, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng a m/s^2 (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A 22 m/s. B 15 m/s. C 10 m/s. D 7 m/s.

Lời giải.

+ Từ đề bài, ta suy ra: tính từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi bị chất điểm B bắt kịp thì A đi được 15 giây, B đi được 10 giây.

+ Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng

$v_B(t) = \int a\,\mathrm{d}t = at + C$, lại có $v_B(0) = 0$ nên $v_B(t) = at$.

\+ Từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi bị chất điểm B bắt kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được là bằng nhau. Do đó

$$\int\limits_0^{15} \left(\frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t\right)\mathrm{d}t = \int\limits_0^{10} at\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow 75 = 50a \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}.$$

Từ đó, vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(10) = \frac{3}{2} \cdot 10 = 15$ m/s.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d\colon \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua A, vuông góc với d và cắt trục Ox có phương trình là

A $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm và $B = \Delta \cap Ox \Rightarrow B(b;0;0)$ và $\overrightarrow{BA} = (1-b;2;3)$.

Do $\Delta \perp d$, Δ qua A nên $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow 2(1-b) + 2 - 6 = 0 \Leftrightarrow b = -1$.

Từ đó Δ qua $B(-1;0;0)$, có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{BA} = (2;2;3)$ nên $\Delta\colon \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3t. \end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 34. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m \cdot 4^{x+1} + 5m^2 - 45 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A 13. **B** 3. **C** 6. **D** 4.

Lời giải.

Đặt $t = 4^x$, $t > 0$. Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 4mt + 5m^2 - 45 = 0$. $(*)$

Với mỗi nghiệm $t > 0$ của phương trình $(*)$ sẽ tương ứng với duy nhất một nghiệm x của phương trình ban đầu. Do đó, yêu cầu bài toán tương đương phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt. Khi đó

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 45 > 0 \\ 4m > 0 \\ 5m^2 - 45 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\sqrt{5} < m < 3\sqrt{5} \\ m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 3\sqrt{5}.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{4;5;6\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-10)$?

A 2. **B** Vô số. **C** 1. **D** 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5m\}$.

$y' = \dfrac{5m-2}{(x+5m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -10) \Leftrightarrow \begin{cases} 5m - 2 > 0 \\ -5m \geqslant -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{2}{5} \\ m \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2}{5} < m \leqslant 2.$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2-4)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A 3. **B** 5. **C** 4. **D** Vô số.

Lời giải.

Ta có $y' = 8x^7 + 5(m-2)x^4 - 4(m^2-4)x^3$.

Đặt $g(x) = 8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4)$. Có 2 trường hợp cần xét liên quan (m^2-4):

- Trường hợp 1: $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.
  + Khi $m = 2 \Rightarrow y' = 8x^7 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực tiểu.
  + Khi $m = -2 \Rightarrow y' = x^4(8x^4 - 20) \Rightarrow x = 0$ không là điểm cực tiểu.
- Trường hợp 2: $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$. Khi đó $x = 0$ không là nghiệm của $g(x)$.
  Ta có x^3 đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua $x_0 = 0$, do đó
  $y' = x^3 \cdot g(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua $x_0 = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0} g(x) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0$.

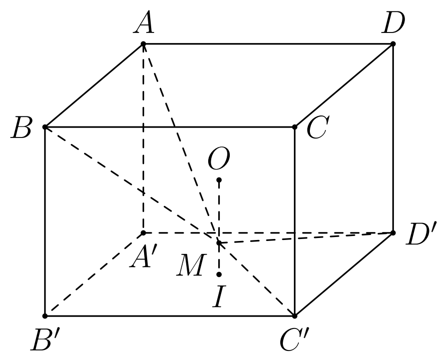
Kết hợp các trường hợp giải được ta nhận $m \in \{2; 1; 0; -1\}$.

Chọn đáp án C □

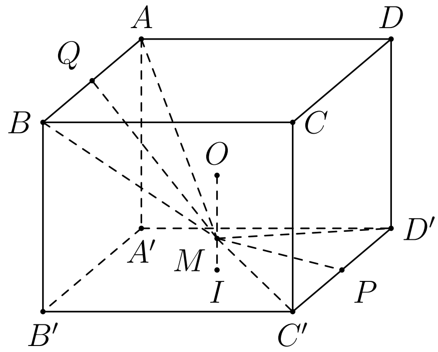
Câu 37.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

A $\dfrac{6\sqrt{85}}{85}$. **B** $\dfrac{7\sqrt{85}}{85}$. **C** $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$. **D** $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$.



Lời giải.



Không mất tính tổng quát, ta giả sử các cạnh của hình lập phương bằng 6.
Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của $D'C'$ và AB. Khi đó ta có
$MP = \sqrt{IM^2 + IP^2} = \sqrt{10}$, $MQ = \sqrt{34}$, $PQ = 6\sqrt{2}$.
Áp dụng định lí cô-sin ta được
$\cos\widehat{PMQ} = \dfrac{MP^2 + MQ^2 - PQ^2}{2MP \cdot MQ} = \dfrac{-14}{\sqrt{340}}$.
Góc α là góc giữa hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) ta có
$\cos\alpha = \dfrac{14}{\sqrt{340}} = \dfrac{7\sqrt{85}}{85}$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Có bao nhiêu số phức z thoả mãn $|z|(z - 4 - i) + 2i = (5 - i)z$?

A 2. B 3. C 1. D 4.

Lời giải.
Ta có
$|z|(z - 4 - i) + 2i = (5 - i)z \Leftrightarrow z(|z| - 5 + i) = 4|z| + (|z| - 2)i$.
Lấy môđun 2 vế ta được
$|z|\sqrt{(|z| - 5)^2 + 1} = \sqrt{(4|z|)^2 + (|z| - 2)^2}$.
Đặt $t = |z|, t \geqslant 0$ ta được
$t\sqrt{(t-5)^2 + 1} = \sqrt{(4t)^2 + (t-2)^2} \Leftrightarrow (t-1)(t^3 - 9t^2 + 4) = 0$.
Phương trình có 3 nghiệm phân biệt $t \geqslant 0$ vậy có 3 số phức z thoả mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 9$ và điểm $A(2; 3; -1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình

A $6x + 8y + 11 = 0$. B $3x + 4y + 2 = 0$. C $3x + 4y - 2 = 0$. D $6x + 8y - 11 = 0$.

Lời giải.
Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; -1; -1)$ và bán kính $R = 3$.
* Ta tính được $AI = 5$, $AM = \sqrt{AI^2 - R^2} = 4$.
* Phương trình mặt cầu (S') tâm $A(2; 3; -1)$, bán kính $AM = 4$ là
$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16$.
* M luôn thuộc mặt phẳng $(P) = (S) \cap (S')$ có phương trình: $3x + 4y - 2 = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{7}{2}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 6(x_1 - x_2)$?

A 1. B 2. C 0. D 3.

Lời giải.
* Nhận xét đây là hàm số trùng phương có hệ số $a > 0$.

* Ta có $y' = x^3 - 7x$ nên suy ra hàm số có 3 điểm cực trị $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{7} \\ x = \sqrt{7}. \end{array}\right.$

* Phương trình tiếp tuyến tại $A(x_0; y_0)$ (là đường thẳng qua hai điểm M, N) có hệ số góc: $k = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 6$. Do đó để tiếp tuyến tại $A(x_0; y_0)$ có hệ số góc $k = 6 > 0$ và cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thì $-\sqrt{7} < x_0 < 0$ và $x_0 \neq -\dfrac{\sqrt{21}}{3}$ (hoành độ điểm uốn).

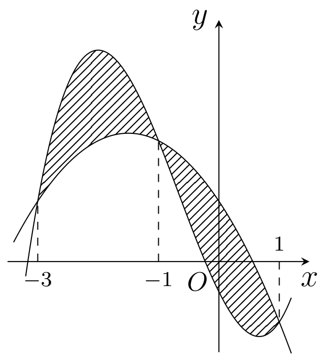
* Ta có phương trình: $y'(x_0) = 6 \Leftrightarrow x_0^3 - 7x_0 - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -2 \\ x_0 = -1 \\ x_0 = 3(\text{loại}). \end{array}\right.$

Vậy có 2 điểm A thỏa yêu cầu.

Chọn đáp án B □

Câu 41.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \dfrac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$ $(a,\ b,\ c,\ d,\ e \in \mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 1 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A $\dfrac{9}{2}$. **B** 8. **C** 4. **D** 5.

Lời giải.

Do $(C)\colon y = f(x)$ và $(C')\colon y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $-3; -1$ và 1 nên

$$f(x) - g(x) = A(x+3)(x+1)(x-1).$$

Từ giả thiết ta có $f(0) - g(0) = -\dfrac{3}{2}$ nên $-3A = -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow A = \dfrac{1}{2}$.

$$\Rightarrow f(x) - g(x) = \frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_{-3}^{-1} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x$$

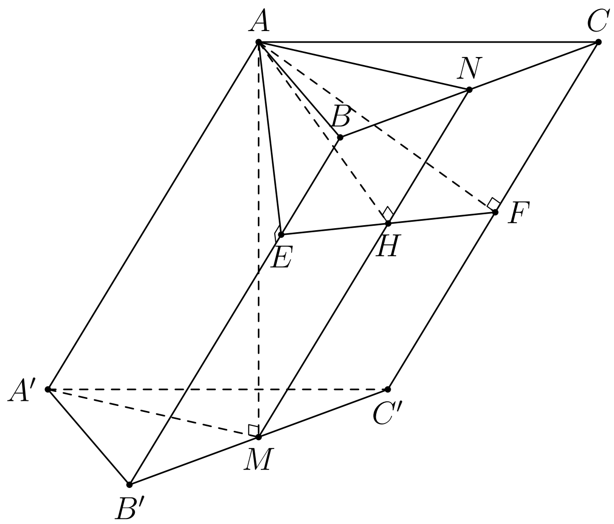
$$= \int_{-3}^{-1} \left[\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right] \mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right] \mathrm{d}x = 2 - (-2) = 4.$$

Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A 2. **B** 1. **C** $\sqrt{3}$. **D** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Dựng $\triangle AEF$ như hình vẽ sao cho $AA' \perp (AEF)$.

Khi đó $V_{ABC.A'B'C'}$ bằng với thể tích của lăng trụ (T) có mặt đáy AEF và cạnh bên AA'

Tức là $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle AEF} \cdot AA'$.

Từ cách dựng ta suy ra $AE = 1, AF = \sqrt{3}$ và $EF = 2$. Suy ra $\triangle AEF$ vuông tại A.

Từ đó $S_{\triangle AEF} = \dfrac{1}{2} AE \cdot AF = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Gọi N là trung điểm BC và $H = EF \cap MN$ thì $MN \parallel AA'$; H là trung điểm EF và $AH \perp MN$

Từ đó $AH = \dfrac{1}{2} EF = 1$.

$\triangle AMN$ vuông tại A có $\dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{AH^2} - \dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow AM = 2$.

Cuối cùng $AA' = MN = \sqrt{AM^2 + AN^2} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle AEF} \cdot AA' = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{4}{\sqrt{3}} = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 17]$. Xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng

A $\dfrac{1728}{4913}$. **B** $\dfrac{1079}{4913}$. **C** $\dfrac{23}{68}$. **D** $\dfrac{1637}{4913}$.

Lời giải.

Không gian mẫu có số phần tử là $17^3 = 4913$.

Lấy một số tự nhiên từ 1 đến 17 ta có các nhóm số sau:

$*$ Số chia hết cho 3: có 5 số thuộc tập $\{3; 6; 9; 12; 15\}$.

$*$ Số chia cho 3 dư 1: có 6 số thuộc tập $\{1; 4; 7; 10; 13; 16\}$.

$*$ Số chia cho 3 dư 2: có 6 số thuộc tập $\{2; 5; 8; 11; 14; 17\}$.

Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 17]$ thỏa mãn ba số đó có tổng chia hết cho 3 thì các khả năng xảy ra như sau:

- TH1: Ba số đều chia hết cho 3 có $5^3 = 125$ cách.
- TH2: Ba số đều chia cho 3 dư 1 có $6^3 = 216$ cách.
- TH3: Ba số đều chia cho 3 dư 2 có $6^3 = 216$ cách.
- TH4: Một số chia hết cho 3, một số chia cho 3 dư 1, chia cho 3 dư 2 có $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3! = 1080$ cách.

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{125 + 216 + 216 + 1080}{4913} = \dfrac{1637}{4913}$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho $a > 0$, $b > 0$ thỏa mãn $\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) + \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

A 6. **B** 9. **C** $\dfrac{7}{2}$. **D** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Do $a > 0, b > 0$ nên ta có $\begin{cases}(9a^2+b^2)+1 \geqslant 6ab+1 \text{ (bất đẳng thức AM-GM)}\\ 3a+2b+1>1.\end{cases}$

$$\Rightarrow \log_{3a+2b+1}(9a^2+b^2+1) \geqslant \log_{3a+2b+1}(6ab+1)$$

Từ đó $\log_{3a+2b+1}(9a^2+b^2+1)+\log_{6ab+1}(3a+2b+1) \geqslant \log_{3a+2b+1}(6ab+1)+\log_{6ab+1}(3a+2b+1)$
$\geqslant 2$ (bất đẳng thức AM-GM).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}3a=b>0\\ 3a+2b+1=6ab+1\end{cases} \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$ và $b=\dfrac{3}{2}$.

Vậy $a+2b=\dfrac{1}{2}+3=\dfrac{7}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C). Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C), đoạn thẳng AB có độ dài bằng

A. $\sqrt{6}$. B. $2\sqrt{3}$. C. 2. D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $(C)\colon y=\dfrac{x-1}{x+2}=1-\dfrac{3}{x+2}$ có $I(-2;1)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Xét $\begin{cases}A\left(a-2;1-\dfrac{3}{a}\right)\in(C)\\ B\left(b-2;1-\dfrac{3}{b}\right)\in(C)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{IA}=\left(a;-\dfrac{3}{a}\right)\\ \overrightarrow{IB}=\left(b;-\dfrac{3}{b}\right)\end{cases}$ và $\begin{cases}IA=\sqrt{a^2+\dfrac{9}{a^2}}\\ IB=\sqrt{b^2+\dfrac{9}{b^2}}.\end{cases}$

Tam giác ABI đều khi và chỉ khi $\begin{cases}IA^2=IB^2\\ \cos\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right)=\cos 60^\circ\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a^2+\dfrac{9}{a^2}=b^2+\dfrac{9}{b^2}\\ \dfrac{\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}}{IA\cdot IB}=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+\dfrac{9}{a^2}=b^2+\dfrac{9}{b^2} & (1)\\ \dfrac{ab+\dfrac{9}{ab}}{a^2+\dfrac{9}{a^2}}=\dfrac{1}{2}. & (2)\end{cases}$$

Từ (2) ta suy ra $ab>0$ và $a^2\neq b^2$ (do $A\not\equiv B$).

Từ (1) ta suy ra $(a^2-b^2)\left(1-\dfrac{9}{a^2b^2}\right)=0 \Rightarrow ab=3$.

Với $ab=3$, thay vào (2) ta tìm được $a^2+\dfrac{9}{a^2}=12$. Vậy $AB=IA=\sqrt{a^2+\dfrac{9}{a^2}}=2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho phương trình $5^x+m=\log_5(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-20;20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 20. B. 19. C. 9. D. 21.

Lời giải.

Điều kiện: $x>m$.

Ta có $5^x+m=\log_5(x-m) \Leftrightarrow 5^x+x=x-m+\log_5(x-m)$. (1)

Xét hàm số $f(t)=5^t+t$, $f'(t)=5^t\ln 5+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó từ (1) suy ra $x = \log_5(x-m) \Leftrightarrow m = x - 5^x$.

Xét hàm số $g(x) = x - 5^x$, $g'(x) = 1 - 5^x \cdot \ln 5$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_5 \dfrac{1}{\ln 5} = -\log_5 \ln 5 = x_0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\log_5 \ln 5$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(x_0)$	$\searrow$	$-\infty$

Do đó để phương trình có nghiệm thì $m \leqslant g(x_0) \approx -0,92$.

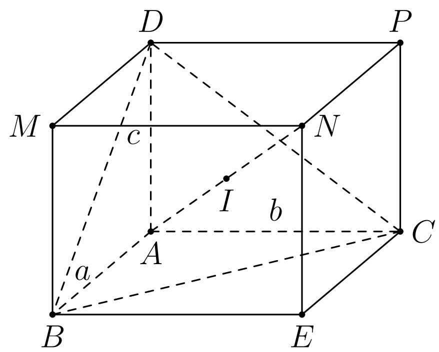
Các giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ là $\{-19; -18; \ldots; -1\}$, có 19 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 1; 2)$ và đi qua điểm $A(1; -2; -1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

(A) 72. (B) 216. (C) 108. (D) 36.

Lời giải.



Đặt $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$ thì $ABCD$ là tứ diện vuông đỉnh A, nội tiếp mặt cầu (S).

Khi đó $ABCD$ là tứ diện đặt ở góc A của hình hộp chữ nhật tương ứng có các cạnh AB, AC, AD và đường chéo AA' là đường kính của cầu. Ta có $a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2$.

Xét $V = V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}abc \Leftrightarrow V^2 = \dfrac{1}{36}a^2b^2c^2$.

Mà $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3 \geqslant a^2b^2c^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{4R^2}{3}\right)^3 \geqslant 36 \cdot V^2 \Leftrightarrow V \leqslant R^3 \cdot \dfrac{4\sqrt{3}}{27}$

Với $R = IA = 3\sqrt{3}$.

Vậy $V_{\max} = 36$.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\dfrac{2}{9}$ và $f'(x) = 2x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

(A) $-\dfrac{35}{36}$. (B) $-\dfrac{2}{3}$. (C) $-\dfrac{19}{36}$. (D) $-\dfrac{2}{15}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 2x[f(x)]^2 \overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} \dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2} = 2x \Leftrightarrow \left[\dfrac{1}{f(x)}\right]' = -2x \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)} = -x^2 + C$.

Từ $f(2) = -\dfrac{2}{9}$ suy ra $C = -\dfrac{1}{2}$.

Do đó $f(1) = \dfrac{1}{-1^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)} = -\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1;1;1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;-2;2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

Ⓐ $\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -10 + 11t \\ z = -6 - 5t \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -10 + 11t \\ z = 6 - 5t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$.

Lời giải.

Phương trình tham số đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 1 - 2t' \\ z = 1 + 2t'. \end{cases}$

Chọn điểm $B(0;3;-1) \in \Delta$ ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;2;-2)$ và $AB = 3$.

Chọn điểm $C(4;5;1) \in d$ ta có $\overrightarrow{AC} = (3;4;0)$ và $AC = 5$.

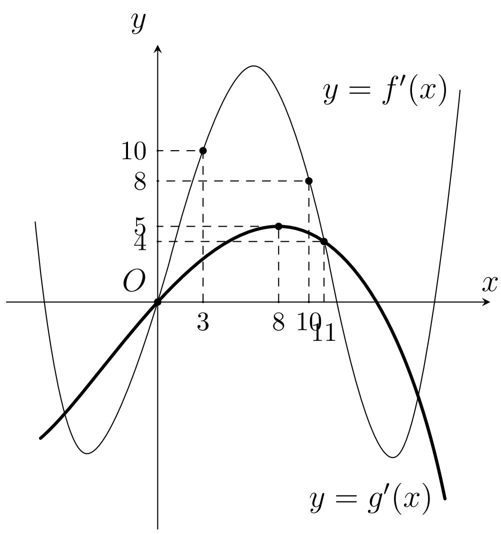
Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 > 0 \Rightarrow \widehat{BAC} < 90^\circ$. Phân giác của góc nhọn $\widehat{BAC}$ có véc-tơ chỉ phương

$$\vec{u} = AC \cdot \overrightarrow{AB} + AB \cdot \overrightarrow{AC} = (4;22;-10).$$

Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có một véc-tơ chỉ phương cùng phương với véc-tơ $\overrightarrow{AC} = (4;22;-10)$. Xét phương án $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -10 + 11t \\ z = 6 - 5t. \end{cases}$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{v} = (2;11;-5)$ cùng phương với véc-tơ $\overrightarrow{AC} = (4;22;-10)$ và đi qua đi qua điểm $A(1;1;1)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 50. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = g'(x)$.



Hàm số $h(x) = f(x+4) - g\left(2x - \dfrac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $\left(5; \dfrac{31}{5}\right)$. **B** $\left(\dfrac{9}{4}; 3\right)$. Ⓒ $\left(\dfrac{31}{5}; +\infty\right)$. Ⓓ $\left(6; \dfrac{25}{4}\right)$.

Lời giải.

Kẻ đường thẳng $y = 10$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại $A(a;10)$, $a \in (8;10)$. Khi đó ta có $\begin{cases} f(x+4) > 10 & \text{khi } 3 < x+4 < a \\ g\left(2x - \dfrac{3}{2}\right) \leqslant 5 & \text{khi } 0 \leqslant 2x - \dfrac{3}{2} < 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x+4) > 10 & \text{khi } -1 < x < 4 \\ g\left(2x - \dfrac{3}{2}\right) \leqslant 5 & \text{khi } \dfrac{3}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{25}{4}. \end{cases}$

Do đó $h'(x) = f'(x+4) - 2g'\left(2x - \dfrac{3}{2}\right) > 0$ khi $\dfrac{3}{4} \leqslant x < 4$.

Kiểu đánh giá khác:

Ta có $h'(x) = f'(x+4) - 2g'\left(2x - \dfrac{3}{2}\right)$.

Dựa vào đồ thị, $\forall x \in \left(\dfrac{9}{4}; 3\right)$, ta có $\dfrac{25}{4} < x + 4 < 7$, $f(x+4) > f(3) = 10$;

$3 < 2x - \dfrac{3}{2} < \dfrac{9}{2}$, do đó $g\left(2x - \dfrac{3}{2}\right) < f(8) = 5$.

Suy ra $h'(x) = f'(x+4) - 2g'\left(2x - \dfrac{3}{2}\right) > 0$, $\forall x \in \left(\dfrac{9}{4}; 3\right)$. Do đó hàm số đồng biến trên $\left(\dfrac{9}{4}; 3\right)$.

Chọn đáp án B $\square$

——— HẾT ———

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. D	3. A	4. A	5. B	6. C	7. D	8. B	9. D	10. C
11. D	12. C	13. A	14. B	15. B	16. C	17. A	18. D	19. A	20. D
21. A	22. A	23. D	24. A	25. A	26. A	27. D	28. A	29. B	30. C
31. D	32. B	33. A	34. B	35. A	36. C	37. B	38. B	39. C	40. B
41. C	42. A	43. D	44. C	45. B	46. B	47. D	48. B	49. C	50. B

8 ĐỀ THI THQG 2018 - MÃ ĐỀ 102

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. $\lim \dfrac{1}{5n+2}$ bằng

(A) $\dfrac{1}{5}$. (B) 0. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{1}{5n+2} = \lim \dfrac{\frac{1}{n}}{5+\frac{2}{n}} = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $S = \int_0^2 2^x \mathrm{d}x$. (B) $S = \pi \int_0^2 2^{2x} \mathrm{d}x$. (C) $S = \int_0^2 2^{2x} \mathrm{d}x$. (D) $S = \pi \int_0^2 2^x \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ là $S = \displaystyle\int\limits_0^2 2^x \, \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2-1) = 3$ là

(A) $\{-3; 3\}$. (B) $\{-3\}$. (C) $\{3\}$. (D) $\{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(x^2-1) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $\{-3; 3\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x$ là

(A) $x^4 + x^2 + C$. (B) $4x^3 + 1 + C$. (C) $x^5 + x^2 + C$. (D) $\dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{1}{2}x^2 + C$.

Lời giải.

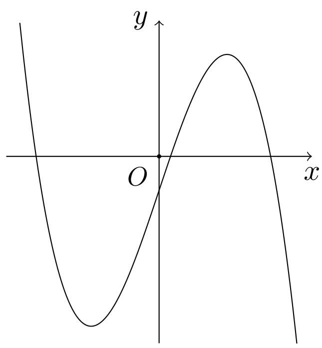
Ta có $\displaystyle\int \left(x^4 + x\right) \mathrm{d}x = \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{1}{2}x^2 + C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

(A) 0. (B) 1. (C) 3. (D) 2.



Lời giải.

Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4 là

A $3 + 4i$. (B) $4 - 3i$. (C) $3 - 4i$. (D) $4 + 3i$.

Lời giải.

Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4 là $z = 3 + 4i$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Cho khối chóp có đáy hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $4a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A $\frac{4}{3}a^3$. (B) $\frac{16}{3}a^3$. (C) $4a^3$. (D) $16a^3$.

Lời giải.

Diện tích đáy là $S = a^2$.

Thể tích khối chóp $V = \frac{1}{3}S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 4a = \frac{4a^3}{3}$.

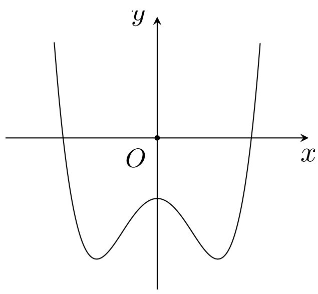
Chọn đáp án (A) □

Câu 8.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A $y = x^4 - 2x^2 - 1$. (B) $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.

(C) $y = x^3 - x^2 - 1$. (D) $y = -x^3 + x^2 - 1$.



Lời giải.

Dựa vào hình dáng đồ thị ta suy ra hàm số là hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có

- "Đuôi thăng thiên" nên $a > 0$.
- Cắt trục tung tại điểm nằm phía dưới trục hoành nên $c < 0$.
- Có 3 cực trị nên $a \cdot b < 0 \Rightarrow b < 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Thể tích khối cầu bán kính R bằng

A $\frac{4}{3}\pi R^3$. (B) $4\pi R^3$. (C) $2\pi R^3$. (D) $\frac{3}{4}\pi R^3$.

Lời giải.

Công thức tính thể tích khối cầu có bán kính R là $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -2)$ và $B(2; 2; 1)$. Véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ có toạ độ là

(A) $(3; 3; -1)$. (B) $(-1; -1; -3)$. (C) $(3; 1; 1)$. **D** $(1; 1; 3)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2 - 1; 2 - 1; 1 - (-2)) = (1; 1; 3)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Với a là số thực dương tuỳ ý, $\log_3(3a)$ bằng

(A) $3\log_3 a$. (B) $3+\log_3 a$. **(C)** $1+\log_3 a$. (D) $1-\log_3 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_3(3a)=\log_3 3+\log_3 a=1+\log_3 a$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-1;+\infty)$. **(B)** $(1;+\infty)$. (C) $(-1;1)$. (D) $(-\infty;1)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Có bao nhiêu cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 38 học sinh?

(A) A_{38}^2. (B) 2^{38}. **(C)** C_{38}^2. (D) 38^2.

Lời giải.

Mỗi cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 38 học sinh là một tổ hợp chập 2 của 38, số cách chọn là C_{38}^2.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-5}{2}$ có một véc-tơ chỉ phương là

(A) $\vec{u}_1=(3;-1;5)$. **(B)** $\vec{u}_4=(1;-1;2)$. (C) $\vec{u}_2=(-3;1;5)$. (D) $\vec{u}_3=(1;-1;-2)$.

Lời giải.

Một véc-tơ chỉ phương của của đường thẳng d là $\vec{u}=(1;-1;2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon 3x+2y+z-4=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là

(A) $\vec{n}_3=(-1;2;3)$. (B) $\vec{n}_4=(1;2;-3)$. **(C)** $\vec{n}_2=(3;2;1)$. (D) $\vec{n}_1=(1;2;3)$.

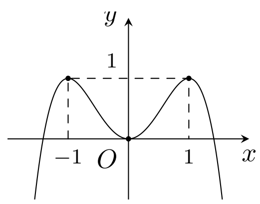
Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(3;2;1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16.

Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $4f(x)-3=0$ là



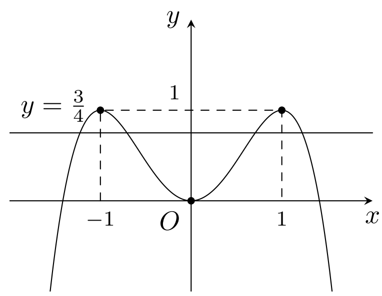
(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

Ta có $4f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{3}{4}$.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \dfrac{3}{4}$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, suy ra số nghiệm phương trình là 4.



Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Từ một hộp chứa 7 quả cầu mà đỏ và 5 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng

(A) $\dfrac{5}{12}$. (B) $\dfrac{7}{44}$. (C) $\dfrac{1}{22}$. (D) $\dfrac{2}{7}$.

Lời giải.

Số cách lấy 3 quả cầu từ hộp là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^3$.

Gọi A: "lấy được 3 viên bi xanh". Ta có $n(A) = \mathrm{C}_5^3$.

Xác suất cần tìm $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{\mathrm{C}_5^3}{\mathrm{C}_{12}^3} = \dfrac{1}{22}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 7x$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng

(A) -259. (B) 68. (C) 0. (D) -4.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 4x - 7$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (nhận)} \\ x = -\dfrac{7}{4} \text{ (loại)} \end{array}\right.$.

Mà $y(0) = 0$, $y(1) = -4$, $y(4) = 68$.

Vậy $\min\limits_{[0;4]} y = -4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

(A) 45°. (B) 60°. (C) 30°. (D) 90°.

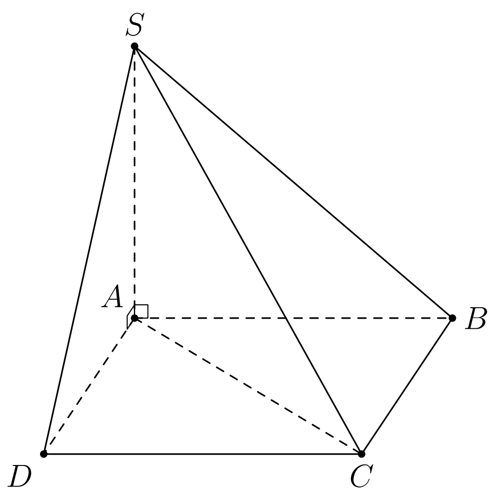
Lời giải.

Ta có $\begin{cases} SC \cap (ABCD) = C \\ SA \perp (ABCD) \text{ tại } A \end{cases}$

$\Rightarrow (SC, (ABCD)) = \widehat{(SC, AC)} = \widehat{SCA}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A, ta có

$$\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ.$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 20. $\displaystyle\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e})$. (B) $\mathrm{e}^4-\mathrm{e}$. (C) $\dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^4+\mathrm{e})$. (D) $\mathrm{e}^3-\mathrm{e}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x+1}\,\mathrm{d}x = \left.\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x+1}\right|_0^1 = \dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e})$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;-2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{3}$ có phương trình là

(A) $3x+2y+z-5=0$. **B** $2x+y+3z+2=0$.

(C) $x+2y+3z+1=0$. (D) $2x+y+3z-2=0$.

Lời giải.

Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}=(2;1;3)$.

Vì mặt phẳng cần tìm vuông góc với đường thẳng Δ nên có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=\vec{u}=(2;1;3)$.

Phương trình mặt phẳng cần tìm là $2(x-1)+1(y-2)+3(z+2)=0 \Leftrightarrow 2x+y+3z+2=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

(A) 3. (B) 0. (C) 2. **D** 1.

Lời giải.

Tập xác định hàm số $\mathscr{D}=[-4;+\infty)\setminus\{-1;0\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to -1^+} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} y=1$ và $\lim\limits_{x\to 0^-} y=1$.

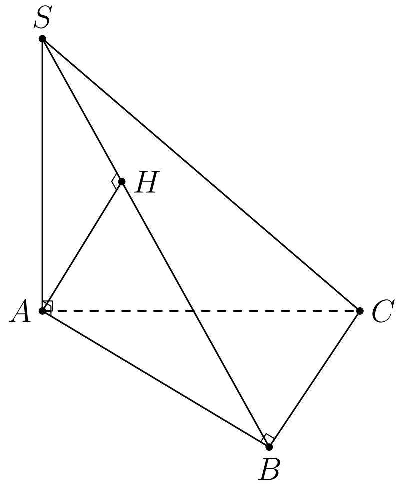
Suy ra đồ thị hàm số chỉ có 1 tiệm cận đứng là $x=-1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B, $AB=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

(A) $\dfrac{a}{2}$. (B) a. (C) $\dfrac{\sqrt{6}a}{3}$. **D** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của A lên SB.

Ta có

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

$$\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \text{ (vì } BC \perp (SAB), AH \subset (SAB)) \end{cases}$$

$\Rightarrow AH \perp (SBC)$ tại $H \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SBC)) = AH$.

Tam giác SAB vuông tại A có AH là đường cao nên

$$AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a^2}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 7,2%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

(A) 11 năm. (B) 12 năm. (C) 9 năm. **D** 10 năm.

Lời giải.

Giả sử người ấy gửi số tiền M_0 vào ngân hàng. Khi đó, sau n năm số tiền của người ấy được tính bằng công thức $M = M_0(1 + 7{,}2\%)^n = M_0 \cdot 1,072^n$.

Theo đề bài, ta tìm n thỏa mãn $M \geq 2M_0 \Leftrightarrow M_0 \cdot 1{,}072^n \geq 2M_0 \Leftrightarrow n \geq \log_{1{,}072} 2 \approx 9{,}969602105$.

Vậy sau ít nhất 10 năm người ấy mới thu được số tiền nhiều gấp đôi số tiền vốn ban đầu.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x + 2yi) + (2 + i) = 2x - 3i$ với i là đơn vị ảo.

A $x = -2$; $y = -2$. (B) $x = -2$; $y = -1$. (C) $x = 2$; $y = -2$. (D) $x = 2$; $y = -1$.

Lời giải.

Ta có

$$(3x + 2yi) + (2 + i) = 2x - 3i \Leftrightarrow (3x + 2) + (2y + 1)i = 2x - 3i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2 = 2x \\ 2y + 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -2. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Ông A dự định sử dụng hết 6,7 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A 1,57 m^3. (B) 1,11 m^3. (C) 1,23 m^3. (D) 2,48 m^3.

Lời giải.

Gọi a, b, c lần lượt là chiều dài, chiều rộng và chiều cao của bể cá $(a, b, c > 0)$.

Theo đề bài, ta có $\begin{cases} a = 2b \\ 2ac + 2bc + ab = 6{,}7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ c = \dfrac{6{,}7 - 2b^2}{6b}. \end{cases}$

Thể tích bể cá là $V = abc = \dfrac{2b^2(6{,}7 - 2b^2)}{6b} = \dfrac{6{,}7b - 2b^3}{3} = f(b)$.

Xét hàm số $f(b) = \dfrac{6{,}7b - 2b^3}{3}$ với $b > 0$.

Ta có $f'(b) = \dfrac{6{,}7 - 6b^2}{3}$, $f'(b) = 0 \Leftrightarrow b = \sqrt{\dfrac{67}{60}}$, $f(b) \approx 1{,}57$.

Bảng biến thiên

b	0		$\sqrt{\frac{67}{60}}$		$+\infty$
$f'(b)$		$+$	0	$-$	
$f(b)$	0	$\nearrow$	$1{,}57$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, dung tích lớn nhất của bể cá gần bằng $1{,}57$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Cho $\displaystyle\int_5^{21} \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+4}} = a\ln 3 + b\ln 5 + c\ln 7$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $a + b = -2c$. **B** $a + b = c$. **C** $a - b = -c$. **D** $a - b = -2c$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x+4} \Rightarrow \begin{cases} x = t^2 - 4 \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t. \end{cases}$

Đổi cận $\begin{cases} x = 5 \Rightarrow t = 3 \\ x = 21 \Rightarrow t = 5. \end{cases}$

Do đó

$$\begin{aligned} I &= \int_3^5 \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t-2)(t+2)} = \frac{1}{2}\int_3^5 \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln|t-2| - \ln|t+2|\right)\Big|_3^5 \\ &= \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 7 + \ln 5). \end{aligned}$$

$\Rightarrow a = \dfrac{1}{2}, b = \dfrac{1}{2}, c = -\dfrac{1}{2}$.

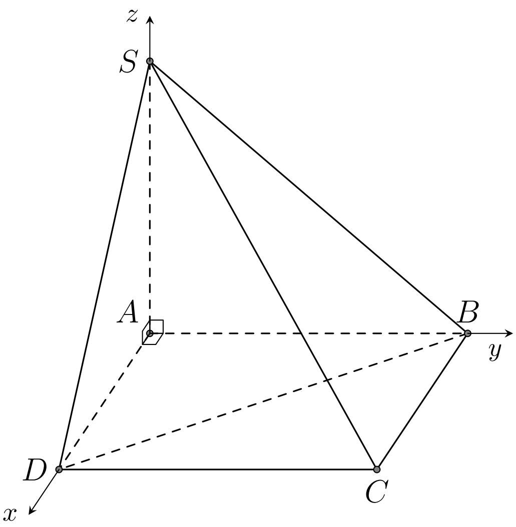
Do đó $a + b = -2c$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC bằng

A $\dfrac{\sqrt{30}a}{6}$. **B** $\dfrac{4\sqrt{21}a}{21}$. **C** $\dfrac{2\sqrt{21}a}{21}$. **D** $\dfrac{\sqrt{30}a}{12}$.

Lời giải.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có $A(0;0;0)$, $B(0;a;0)$, $D(2a;0;0)$, $C(2a;a;0)$ và $S(0;0;a)$.

Ta có

- $\overrightarrow{BD} = (2a;-a;0)$.
- $\overrightarrow{SC} = (2a;a;-a)$.
- $\overrightarrow{SB} = (0;a;-a)$.
- $[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC}] = (a^2;2a^2;4a^2)$
  $\Rightarrow \left|[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC}]\right| = a^2\sqrt{21}$.
- $\left|[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC}]\cdot\overrightarrow{SB}\right| = 2a^3$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC là

$$\mathrm{d}(SC,BD) = \frac{\left|[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC}]\cdot\overrightarrow{SB}\right|}{\left|[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC}]\right|} = \frac{2a\sqrt{21}}{21}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-2}{2}$. Đường thẳng đi qua A, vuông góc với d và cắt trục Oy có phương trình là

A $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3+4t \\ z = 3t \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1+t \\ z = 3+3t \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1+3t \\ z = 3+2t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3+3t \\ z = 2t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi đường thẳng cần tìm là Δ.

Đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-2}{2}$ có VTCP là $\vec{u} = (1;-2;2)$.

Gọi $M(0;m;0) \in Oy$, ta có $\overrightarrow{AM} = (-2;m-1;-3)$.

Vì $\Delta \perp d$ nên $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u} = 0 \Leftrightarrow -2-2(m-1)-6 = 0 \Leftrightarrow m = -3$.

Do đó, Δ có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AM} = (-2;-4;-3)$ nên có phương trình $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3+4t \\ z = 3t \end{cases}$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10;+\infty)$?

A 3. **B** Vô số. **C** 4. **D** 5.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{-5m\}$.

Ta có $y' = \dfrac{5m-6}{(x+5m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên $(10;+\infty)$ khi chỉ khi $\begin{cases} y' < 0,\ \forall x \in \mathscr{D} \\ -5m \notin (10;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m-6<0 \\ -5m \le 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{6}{5} \\ m \ge -2. \end{cases}$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2;-1;0;1\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy 3mm và chiều cao bằng 200mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính 1mm. Giả định 1m^3 gỗ có giá a (triệu đồng), 1m^3 than chì có giá $6a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A $84{,}5a$ (đồng). **B** $78{,}2a$ (đồng). **C** $8{,}45a$ (đồng). **D** $7{,}82a$ (đồng).

Lời giải.

Thể tích phần phần lõi được làm bằng than chì là

$$V_r = \pi \cdot (10^{-3})^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}2 \cdot 10^{-6}\pi \text{ m}^3.$$

Thể tích chiếc bút chì khối lăng trụ lục giác đều là

$$V = B \cdot h = \frac{3\sqrt{3}}{2}(3 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 0{,}2 = \frac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Thể tích phần thân bút chì được làm bằng gỗ là

$$V_t = V - V_r = \frac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} - 0{,}2 \cdot 10^{-6}\pi \text{ m}^3.$$

Giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì là

$$0{,}2 \cdot 10^{-6}\pi \cdot 6a + \left(\frac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} - 0{,}2 \cdot 10^{-6}\pi\right) a \approx 7{,}82 \cdot 10^{-6} a \text{ (triệu đồng)}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 32. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \dfrac{1}{150}t^2 + \dfrac{59}{75}t$ (m/s), trong đó t (s) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A 20 (m/s). **B** 16 (m/s). **C** 13 (m/s). **D** 15 (m/s).

Lời giải.

Từ đề bài, ta suy ra từ lúc chất điểm A chuyển động đến lúc bị chất điểm B bắt kịp thì A đi được 15 giây, B đi được 12 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t) = \displaystyle\int a\,\mathrm{d}t = a \cdot t + C$, lại có $v_B(0) = 0$ nên $v_B(t) = at$.

Từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến lúc bị chất điểm B bắt kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được là bằng nhau, nghĩa là

$$\int\limits_0^{15} \left(\frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t\right) \mathrm{d}t = \int\limits_0^{12} at\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow 96 = 72a \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}.$$

Do đó, vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(12) = \frac{4}{3} \cdot 12 = 16$ (m/s).

Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Xét các số phức z thỏa mãn $(\overline{z} + 3i)(z - 3)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

(A) $\frac{9}{2}$. (B) $3\sqrt{2}$. (C) 3. **(D)** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi \Rightarrow \overline{z} = x - yi$ trong đó $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $(\overline{z} + 3i)(z - 3) = x^2 + y^2 - 3x - 3y + (3x + 3y - 9)i$.

Số phức $(\overline{z}+3i)(z-3)$ là số thuần ảo khi chỉ khi $x^2+y^2-3x-3y = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường tròn có bán kính bằng $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 34. Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(3x - 1)^6 + (2x - 1)^8$ bằng

(A) -3007. **(B)** -577. (C) 3007. (D) 577.

Lời giải.

Ta có $(3x - 1)^6 = \sum\limits_{k=0}^{6} \mathrm{C}_6^k 3^k x^k (-1)^{6-k}$. Hệ số của số hạng chứa x^4 là $\mathrm{C}_6^4 3^4 (-1)^{6-4} = 1215$.

Ta lại có $(2x - 1)^8 = \sum\limits_{k=0}^{8} \mathrm{C}_8^k 2^k x^k (-1)^{8-k}$. Hệ số của số hạng chứa x^5 là $\mathrm{C}_8^5 2^5 (-1)^{8-5} = -1792$.

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển $x(3x - 1)^6 + (2x - 1)^8$ là $1215 - 1792 = -577$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $25^x - m \cdot 5^{x+1} + 7m^2 - 7 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

(A) 7. (B) 1. **(C)** 2. (D) 3.

Lời giải.

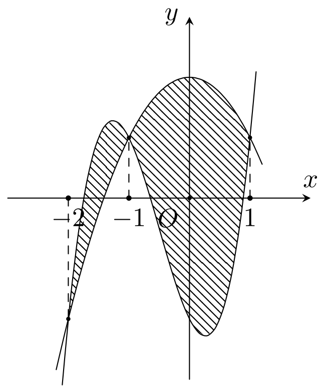
Đặt $t = 5^x$, điều kiện $t > 0$. Phương trình trở thành $t^2 - 5mt + 7m^2 - 7 = 0$ $(*)$.

Yêu cầu bài toán trở thành: tìm m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = -3m^2 + 28 > 0 \\ 5m > 0 \\ 7m^2 - 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{\frac{28}{3}} < m < \sqrt{\frac{28}{3}} \\ m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \sqrt{\frac{28}{3}}.$$

Suy ra $S = \{2; 3\}$. Vậy có 2 giá trị tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 36.
Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$ $(a,\ b,\ c,\ d,\ e \in \mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; -1; 1 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A $\dfrac{37}{6}$. **B** $\dfrac{13}{2}$. **C** $\dfrac{9}{2}$. **D** $\dfrac{37}{12}$.

Lời giải.
Ta có $f(x) - g(x) = ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 4$ (1).
Mặt khác phương trình $f(x) - g(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$ nên

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \ (2).$$

Từ (1) và (2), suy ra $f(x) - g(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4$.
Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int\limits_{-2}^{-1} (2x^3 + 4x^2 - 2x - 4)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-1}^{1} (2x^3 + 4x^2 - 2x - 4)\,\mathrm{d}x = \frac{37}{6}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho $a > 0$, $b > 0$ thỏa mãn

$$\log_{10a+3b+1}(25a^2 + b^2 + 1) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) = 2.$$

Giá trị của $a + 2b$ bằng
A $\dfrac{5}{2}$. **B** 6. **C** 22. **D** $\dfrac{11}{2}$.

Lời giải.
Từ giả thuyết bài toán, ta suy ra $25a^2 + b^2 + 1 > 1$, $10a + 3b + 1 > 1$ và $10ab + 1 > 1$.
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có $25a^2 + b^2 + 1 \geq 2\sqrt{25a^2b^2} + 1 = 10ab + 1$.
Khi đó,

$$\begin{aligned} & \log_{10a+3b+1}(25a^2 + b^2 + 1) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) \\ \geq\ & \log_{10a+3b+1}(10ab + 1) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) \\ \geq\ & 2\sqrt{\log_{10a+3b+1}(10ab + 1) \cdot \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1)} = 2. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi chỉ khi

$$\begin{cases} 5a = b \\ \log_{10a+3b+1}(10ab + 1) = \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5a \\ 10ab + 1 = 10a + 3b + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 5a \\ 50a^2 - 25a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 5a \\ \left[\begin{array}{l} a = 0 \text{ (loại)} \\ a = \dfrac{1}{2} \text{ (nhận)} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{5}{2} \\ a = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

$\Rightarrow a + 2b = \dfrac{11}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số

$$y = x^8 + (m-1)x^5 - (m^2-1)x^4 + 1$$

đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A 3. B 2. C Vô số. D 1.

Lời giải.

Ta có $y' = 8x^7 + 5(m-1)x^4 - 4(m^2-1)x^3 + 1 = x^3\left[8x^4 + 5(m-1)x - 4(m^2-1)\right]$,

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 8x^4 + 5(m-1)x - 4(m^2-1) = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

- Nếu $m = 1$ thì $y' = 8x^7$, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- Nếu $m = -1$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 8x^4 - 10x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (nghiệm kép)} \\ x = \sqrt[3]{\dfrac{5}{4}} \end{array}\right. \Rightarrow x = 0$ không phải là cực trị.
- Nếu $m \neq \pm 1$ thì $x = 0$ là nghiệm đơn.
  Đặt $g(x) = 8x^4 + 5(m-1)x - 4(m^2-1)$. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 0$ khi chỉ khi

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) > 0 \Leftrightarrow -4(m^2-1) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1.$$

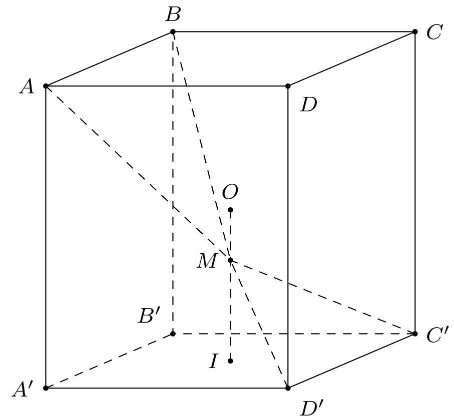
  Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 0$.

Vậy giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m = 0$, $m = 1$.

Chọn đáp án B □

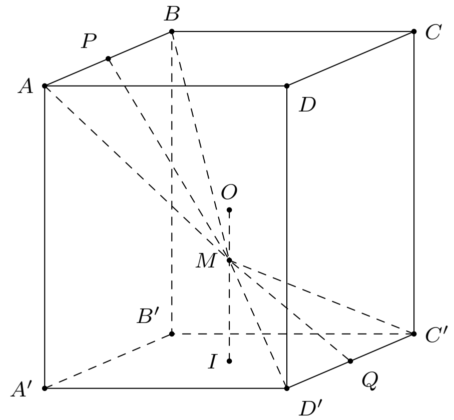
Câu 39.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$ và M là điểm thuộc OI sao cho $MO = \frac{1}{2}MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó, cô-sin góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng



(A) $\frac{6\sqrt{13}}{65}$. (B) $\frac{7\sqrt{85}}{85}$. (C) $\frac{6\sqrt{85}}{85}$. **(D)** $\frac{17\sqrt{13}}{65}$.

Lời giải.



Giả sử hình lập phương có độ dài cạnh bằng a.

Hai mặt phẳng $(MC'D')$, (MAB) lần lượt chứa hai đường thẳng $C'D'$, AB và $AB \parallel C'D'$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng này là đường thẳng đi qua M và song song với AB.

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB, $C'D'$. Các tam giác $MC'D'$, MAB cân ở M nên $MP \perp C'D'$, $MQ \perp AB$.

Do đó, nếu α là góc giữa hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) thì $\cos\alpha = |\cos\widehat{PMQ}|$ (1)

Ta có

$$MQ = \sqrt{MI^2 + IQ^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}OI\right)^2 + IQ^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{6};$$

$$MP = \sqrt{\left(\frac{4}{3}OI\right)^2 + IQ^2} = \frac{5a}{6}; PQ = AD' = a\sqrt{2};$$

$$\cos\alpha = |\cos\widehat{PMQ}| = \left|\frac{MP^2 + MQ^2 - PQ^2}{2\cdot MP\cdot MQ}\right| = \left|\frac{\frac{25a^2}{36} + \frac{13a^2}{36} - 2a^2}{2\cdot\frac{5a}{6}\cdot\frac{a\sqrt{13}}{6}}\right| = \frac{17\sqrt{13}}{65}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{3}$ và $f'(x) = x\,[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

(A) $-\frac{11}{6}$. **(B)** $-\frac{2}{3}$. (C) $-\frac{2}{9}$. (D) $-\frac{7}{6}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = x\,[f(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x$.

Do đó,

$$\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow\ -\int \mathrm{d}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \int x\,\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow\ -\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + C}.$$

Theo giả thuyết, $f(2) = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = -\dfrac{1}{\frac{1}{2}x^2 + 1}$.

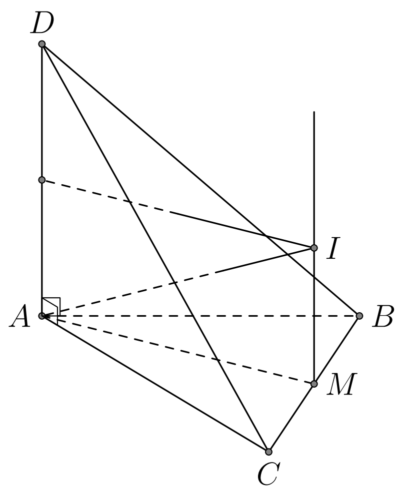
Suy ra $f(1) = -\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và đi qua điểm $A(1;0;-1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất bằng

A $\dfrac{64}{3}$. **B** 32. **C** 64. **D** $\dfrac{32}{3}$.

Lời giải.



Đặt $AD = a$, $AB = b$, $AC = c$.

Khi đó, $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}AB \cdot AC \cdot AD = \dfrac{1}{6}abc$.

Ta có bán kính mặt cầu (S) là $R = IA = 2\sqrt{3}$.

Gọi M là trung điểm BC. Khi đó, $AM = \dfrac{b^2 + c^2}{2}$.

Vì tứ diện $ABCD$ nội tiếp trong mặt cầu (S) nên ta có $IM \parallel AD$ và $IM = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{1}{2}a$.

Xét tam giác AIM vuông tại M, ta có

$$AI^2 = AM^2 + IM^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 48$$

Suy ra $V_{ABCD}^2 = \dfrac{1}{36}a^2b^2c^2 \leq \dfrac{1}{36}\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^3}{27} = \dfrac{1024}{9}$ hay $V_{ABCD} \leq \dfrac{32}{3}$.

Chọn đáp án D □

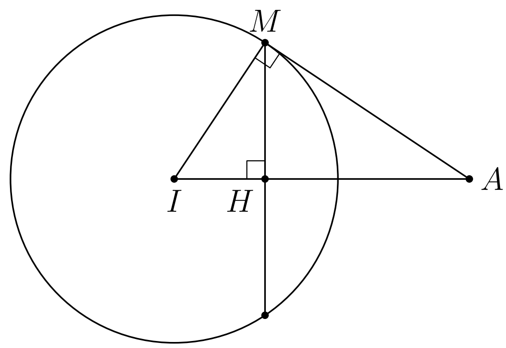
Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 2$ và điểm $A(1;2;3)$. Xét điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

A $2x + 2y + 2z + 15 = 0$. **B** $2x + 2y + 2z - 15 = 0$.

C $x + y + z + 7 = 0$. **D** $x + y + z - 7 = 0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;4)$ bán kính $R=\sqrt{2}$.
Ta có $\overrightarrow{IA}=(-1;-1;-1)\Rightarrow IA=\sqrt{3}$.
Suy ra điểm A nằm ngoài mặt cầu (S).
Do đó tập hợp tất cả các điểm M nằm trên mặt phẳng cố định (α). Mặt phẳng cố định (α) đi qua điểm H là hình chiếu của điểm M xuống IA và nhận $\overrightarrow{IA}=(-1;-1;-1)$ làm véc-tơ pháp tuyến.
Do hai tam giác MHI và AMI đồng dạng nên suy ra



$$IM^2=IH\cdot IA\Rightarrow IH=\frac{IM^2}{IA}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Suy ra $\overrightarrow{IA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{IA}\Rightarrow H\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};\frac{10}{3}\right)$.
Mặt phẳng cần tìm có phương trình là $-\left(x-\frac{4}{3}\right)-\left(y-\frac{7}{3}\right)-\left(z-\frac{10}{3}\right)=0\Leftrightarrow x+y+z-7=0.$
Chọn đáp án D □

Câu 43. Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết lên bảng một số ngẫu nhiên thuộc đoạn $[1;19]$. Xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng

(A) $\frac{1027}{6859}$. (B) $\frac{2539}{6859}$. (C) $\frac{2287}{6859}$. (D) $\frac{109}{323}$.

Lời giải.
Ta có $n(\Omega)=19^3$.
Trong các số tự nhiên thuộc đoạn $[1;19]$ có 6 số chia hết cho 3, đó là $\{3;6;9;12;15;18\}$, có 7 số chia cho 3 dư 1, đó là $\{1;4;7;10;13;16;19\}$ và có 6 số chia cho 3 dư 2, đó là $\{2;5;8;11;14;17\}$.
Để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 cần phải xảy ra các trường hợp sau

- **Trường hợp 1.** Cả ba số viết ra đều chia hết cho 3: có 6^3 cách viết.
- **Trường hợp 2.** Cả 3 số viết ra đều chia cho 3 dư 1: có 7^3 cách viết.
- **Trường hợp 3.** Cả 3 số viết ra đều chia cho 3 dư 2: có 6^3 cách viết.
- **Trường hợp 4.** Trong ba số viết ra có 1 số chia hết cho 3, 1 số chia cho 3 dư 1 và 1 chia cho 3 dư 2: có $6\cdot7\cdot6\cdot3!$ cách viết.

Vậy xác suất cần tìm là $p=\frac{6^3+7^3+6^3+6\cdot7\cdot6\cdot3!}{19^3}=\frac{2287}{6859}$.
Chọn đáp án C □

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=1+3t\\ y=-3\\ z=5+4t\end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1;-3;5)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}=(1;2;-2)$. Đường phân giác góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng d và Δ là

(A) $\begin{cases}x=-1+2t\\ y=2-5t\\ z=6+11t\end{cases}$. (B) $\begin{cases}x=-1+2t\\ y=2-5t\\ z=-6+11t\end{cases}$. (C) $\begin{cases}x=1+7t\\ y=3-5t\\ z=5+t\end{cases}$. (D) $\begin{cases}x=1-t\\ y=-3\\ z=5+7t\end{cases}$.

Lời giải.

Ta có điểm $A(1;-3;5)$ thuộc đường thẳng d nên A là giao điểm của d và Δ.
Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{v}=(-3;0;-4)$.
Đặt $\overrightarrow{u'}=\dfrac{1}{|\overrightarrow{u}|}\overrightarrow{u}=\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$, $\overrightarrow{v'}=\dfrac{1}{|\overrightarrow{v}|}\overrightarrow{v}=\left(-\dfrac{3}{5};0;-\dfrac{4}{5}\right)$. Ta có $\overrightarrow{u'}\cdot\overrightarrow{v'}>0$ nên góc tạo bởi hai véc-tơ $\overrightarrow{u'}$, $\overrightarrow{v'}$ là góc nhọn tạo bởi d và Δ.
Suy ra $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u'}+\overrightarrow{v'}=\left(-\dfrac{4}{15};\dfrac{10}{15};-\dfrac{22}{15}\right)=-\dfrac{2}{15}(2;-5;11)$ là véc-tơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm. Phương trình đường phân giác cần tìm là

$$\begin{cases} x=1+2t\\ y=-3-5t\\ z=5+11t.\end{cases}$$

Chọn $t=-2$ suy ra điểm $M(-1;2;-6)$ thuộc đường phân giác. Khi đó, đường phân giác có phương trình

$$\begin{cases} x=-1+2t\\ y=2-5t\\ z=-6+11t.\end{cases}$$

Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho phương trình $3^x+m=\log_3(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-15;15)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A 16. **B** 9. **C** 14. **D** 15.

Lời giải.

Ta có $3^x+m=\log_3(x-m)\Leftrightarrow 3^x+x=\log_3(x-m)+x-m$ $(*)$.
Xét hàm số $f(t)=3^t+t$ với $t\in\mathbb{R}$, ta có $f'(t)=3^t\ln 3+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên tập xác định. Mặt khác, phương trình $(*)$ có dạng $f(x)=f(\log_3(x-m))$. Do đó,

$$f(x)=f(\log_3(x-m))\Leftrightarrow x=\log_3(x-m)\Leftrightarrow 3^x=x-m\Leftrightarrow 3^x-x=-m\ (**)$$

Xét hàm số $g(x)=3^x-x$ với $x\in\mathbb{R}$, ta có $g'(x)=3^x\ln 3-1$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\log_3\left(\dfrac{1}{\ln 3}\right)=a$.
Bảng biến thiên

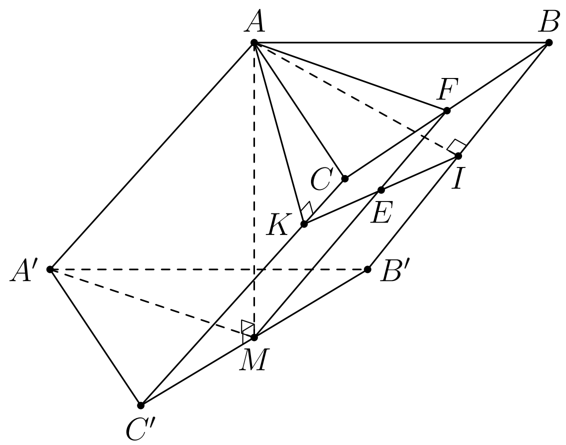
x	$-\infty$		a		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta suy ra phương trình $(**)$ có nghiệm khi chỉ khi $m\in(-\infty;-g(a))$.
Mặt khác, $m\in\mathbb{Z}\cap(-15;15)$ nên $m\in\{-14;-13;-12;\ldots;-1\}$ (vì $-g(a)\approx-0{,}9958452485$).
Do đó, có 14 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng BB' bằng $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và 2, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$. (B) $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. (C) $\sqrt{5}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải.



Kẻ $AI \perp BB'$, $AK \perp CC'$. Khoảng cách từ A đến BB', CC' lần lượt là 1; 2 nên $AI = 1$, $AK = 2$.

Gọi F là trung điểm của BC.

Vì $A'M = \dfrac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow AF = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

Ta có $\begin{cases} AI \perp BB' \\ BB' \perp AK \end{cases} \Rightarrow BB' \perp (AIK)$

$\Rightarrow BB' \perp IK$.

Vì $CC' \parallel BB'$ nên

$$\mathrm{d}(C, BB') = \mathrm{d}(K, BB') = IK = \sqrt{5}$$

$\Rightarrow \triangle AIK$ vuông tại A.

Gọi E là trung điểm của $IK \Rightarrow EF \parallel BB' \Rightarrow EF \perp (AIK) \Rightarrow EF \perp AE$.

Mà $AM \perp (ABC)$ nên $((ABC), (AIK)) = \left(\widehat{EF, AM}\right) = \widehat{AME} = \widehat{FAE}$ ($\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AM}$ là véc-tơ pháp tuyến của của (AKI), (ABC)).

Ta có $\cos\widehat{FAE} = \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{FAE} = 30^\circ$ (AE là đường trung tuyến của tam giác AKI vuông tại A).

Hình chiếu vuông góc của tam giác ABC lên mặt phẳng (AIK) là tam giác AIK nên

$$S_{\triangle AIK} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos\widehat{EAF} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{S_{\triangle AIK}}{\cos\widehat{EAF}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

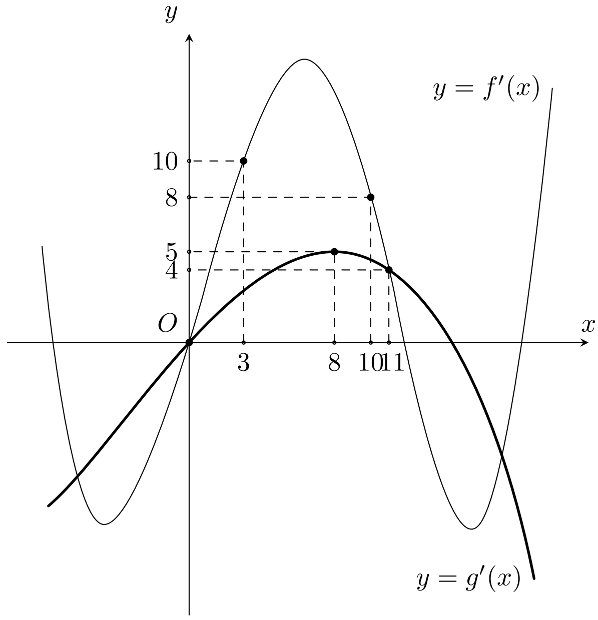
Xét tam giác AMF vuông tại A, ta có $\tan\widehat{AMF} = \dfrac{AF}{AM} \Rightarrow AM = \dfrac{AF}{\tan\widehat{AMF}} = \sqrt{5}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \sqrt{5} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{15}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 47.

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị hàm số $y = g'(x)$. Hàm số $h(x) = f(x+7) - g\left(2x + \dfrac{9}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A $\left(2; \dfrac{16}{5}\right)$. **B** $\left(-\dfrac{3}{4}; 0\right)$.

C $\left(\dfrac{16}{5}; +\infty\right)$. **D** $\left(3; \dfrac{13}{4}\right)$.

Lời giải.

Kẻ đường thẳng $y = 10$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại $A(a; 10)$ với $a \in (8; 10)$. Khi đó,

$$\begin{cases} f'(x+7) > 10 \text{ khi } 3 < x + 7 < a \\ g'\left(2x + \dfrac{9}{2}\right) \leq 5 \text{ khi } 0 \leq 2x + \dfrac{9}{2} \leq 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x+7) > 10 \text{ khi } -4 < x < 1 \\ g'\left(2x + \dfrac{9}{2}\right) \leq 5 \text{ khi } -\dfrac{9}{4} \leq x \leq \dfrac{13}{4}. \end{cases}$$

Do đó, $h'(x) = f'(x+7) - 2g'\left(2x - \dfrac{3}{2}\right) > 0$ khi $-\dfrac{9}{4} \leq x < 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C). Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C), đoạn AB có độ dài bằng

A 3. **B** 2. **C** $2\sqrt{2}$. **D** $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Giao điểm hai đường tiệm cận của (C) là $I(-1; 1)$. Hàm số đã cho được viết lại $y = 1 - \dfrac{2}{x+1}$.

Giả sử $A\left(a; 1 - \dfrac{2}{a+1}\right) \in (C)$, $A\left(b; 1 - \dfrac{2}{b+1}\right) \in (C)$. Ta có $\overrightarrow{IA} = \left(a+1; -\dfrac{2}{a+1}\right)$, $\overrightarrow{IB} = \left(b+1; -\dfrac{2}{b+1}\right)$.

Đặt $a_1 = a + 1$, $b_1 = b + 1$ (hiển nhiên $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$ và $a_1 \neq b_1$).

Tam giác ABI đều khi chỉ khi

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ \cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \cos 60^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + \dfrac{4}{a_1^2} = b_1^2 + \dfrac{4}{b_1^2} \\ \dfrac{\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}}{IA \cdot IB} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1^2 - b_1^2)\left(1 - \dfrac{4}{a_1^2 b_1^2}\right) = 0 & (1) \\ \dfrac{a_1 b_1 + \frac{4}{a_1 b_1}}{a_1^2 + \frac{4}{a_1^2}} = \dfrac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = b_1, \text{ loại vì } A \equiv B. \\ a_1 = -b_1, \text{ loại vì không thỏa mãn (2)}. \\ a_1 b_1 = -2, \text{ loại vì không thỏa mãn (2)}. \\ a_1 b_1 = 2. \end{array}\right.$

Với $a_1b_1 = 2$, thay vào (2), ta được $\dfrac{2+\frac{4}{2}}{a_1^2+\frac{4}{a_1^2}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a_1^2 + \dfrac{4}{a_1^2} = 8$.

Vậy $AB = IA = \sqrt{a_1^2 + \dfrac{4}{a_1^2}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-3-i)+2i = (4-i)z$?

A 1. **B** 3. **C** 2. **D** 4.

Lời giải.

Ta có $|z|(z-3-i)+2i = (4-i)z \Leftrightarrow z(4-|z|-i) = -3|z| + (2-|z|)i$.

Đặt $t = |z|$, điều kiện $t \geq 0, t \in \mathbb{R}$. Lấy mô-đun hai vế ta được

$$\begin{aligned} t|4-t-i| = |-3t+(2-t)i| &\Leftrightarrow t\sqrt{(4-t)^2+1} = \sqrt{9t^2+(2-t)^2} \\ &\Leftrightarrow t^4 - 8t^3 + 6t^2 + 4t - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (t-1)(t^3 - 7t^2 - t + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t \approx 7{,}081 \\ t \approx 0{,}61146 \\ t \approx -0{,}6928. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Do đó, có 3 giá trị t thỏa mãn.

Mặt khác, với mỗi $t \geq 0$, ta có $z = \dfrac{-3t+(2-t)i}{4-t-i}$ nên có duy nhất một số phức z thỏa mãn.

Vậy có 3 số phức thõa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{8}x^4 - \dfrac{7}{4}x^2$ có đồ thị là (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1)$; $N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 3(x_1 - x_2)$?

A 0. **B** 2. **C** 3. **D** 1.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng MN có dạng $\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2} = \dfrac{y-y_2}{y_1-y_2} \Rightarrow$ hệ số góc của đường thẳng MN là $k = \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = 3$.

Suy ra tiếp tuyến của (C) tại $A\left(x_0; \dfrac{1}{8}x_0^4 - \dfrac{7}{4}x_0^2\right)$ có hệ số góc bằng 3. Suy ra

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_0^3 - \frac{7}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \\ x_0 = -2. \end{array}\right.$$

- Với $x_0 = -1$, ta có $A\left(-1; \dfrac{13}{8}\right)$. Phương trình tiếp tuyến là $y = 3x + \dfrac{11}{8}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 = 3x + \frac{11}{8} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow A\left(-1; \frac{13}{8}\right) \text{ thỏa yêu cầu bài toán.} \\ x = 1 - \sqrt{3} \end{array}\right.$$

- Với $x_0 = 3$ ta có $A\left(3; -\frac{171}{8}\right)$. Phương trình tiếp tuyến $y = 3x - \frac{195}{8}$.
  Xét phương trình hoành độ giao điểm
  $$\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 = 3x - \frac{195}{8} \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow A\left(3; -\frac{171}{8}\right) \text{ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$
- Với $x_0 = -2$, ta có $A(-2; -5)$. Phương trình tiếp tuyến $y = 3x + 1$.
  Xét phương trình hoành độ giao điểm
  $$\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 = 3x - \frac{195}{8} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 + \sqrt{6} \Rightarrow A(-2; -5) \text{ thỏa mãn yêu cầu bài toán.} \\ x = 2 - \sqrt{6} \end{array}\right.$$

Vậy có 2 điểm A thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B □

HẾT

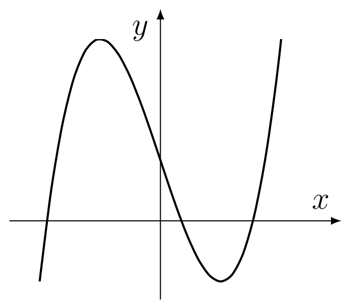
ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. A	3. A	4. D	5. D	6. A	7. A	8. A	9. A	10. D
11. C	12. B	13. C	14. B	15. C	16. A	17. C	18. D	19. A	20. A
21. B	22. D	23. D	24. D	25. A	26. A	27. A	28. C	29. A	30. C
31. D	32. B	33. D	34. B	35. C	36. A	37. D	38. B	39. D	40. B
41. D	42. D	43. C	44. B	45. C	46. D	47. B	48. C	49. B	50. B

9 ĐỀ MINH HỌA 2017 - LẦN 1

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.
Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



(A) $y = -x^2 + x - 1$. (B) $y = -x^3 + 3x + 1$.
(C) $y = x^3 - 3x + 1$. (D) $y = x^4 - x^2 + 1$.

Lời giải.
Đồ thị hàm số có 2 cực trị và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$.

- Loại A: vì là parapol chỉ có 1 cực trị.
- Loại B: vì $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$.
- Loại D: vì hàm hàm trùng phương nhận Oy làm trục đối xứng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} = 1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

(A) Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
(B) Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
(C) Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.
(D) Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.

Lời giải.
Theo định nghĩa đường tiệm cận, ta có:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} = 1$ suy ra $y = 1$ là đường tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} = -1$ suy ra $y = -1$ là đường tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Hỏi hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

(A) $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right)$. (B) $(0; +\infty)$. (C) $\left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$. (D) $(-\infty; 0)$.

Lời giải.
Ta có $y' = 8x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$, do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A Hàm số có đúng một cực trị.

B Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

C Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

D Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải.

- Loại A: vì hàm số có 2 cực trị.
- Loại B: vì hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1.
- Loại C: vì hàm số không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

A $y_{CD} = 4$. **B** $y_{CD} = 1$. **C** $y_{CD} = 0$. **D** $y_{CD} = -1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -1; & y = 4 \\ x = 1; & y = 0 \end{array}\right.$. Suy ra $y_{CD} = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$.

A $\min\limits_{[2;4]} y = 6$. **B** $\min\limits_{[2;4]} y = -2$. **C** $\min\limits_{[2;4]} y = -3$. **D** $\min\limits_{[2;4]} y = \dfrac{19}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -1 & \text{(loại)} \\ x = 3 & \end{array}\right.$ (Do xét trên đoạn $[2; 4]$).

$y(3) = 6; y(2) = 7; y(4) = \dfrac{19}{3}$, suy ra $\min\limits_{[2;4]} y = 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_\circ; y_\circ)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm $y_\circ$.

A $y_\circ = 4$. **B** $y_\circ = 0$. **C** $y_\circ = 2$. **D** $y_\circ = -1$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 + x + 2 = -2x + 2 \Leftrightarrow x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, Suy ra $y(0) = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

(A) $m = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **B** $m = -1$. (C) $m = \dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$. (D) $m = 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 4mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -m \end{array}\right.$

Điều kiện để hàm số có 3 cực trị là: $-m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Do $AB^2 = AC^2$ nên tam giác ABC luôn cân tại A.

Do đó $\triangle ABC$ vuông tại A khi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow m + m^4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m = 0 & \text{(loại)} \\ m = -1 & \text{(nhận)} \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai đường tiệm cận ngang.

(A) Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

(B) $m < 0$.

(C) $m = 0$.

D $m > 0$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} y, \lim\limits_{x \to +\infty} y$ tồn tại và khác nhau.

Do đó hàm số phải xác định trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ tức là $mx^2 + 1 > 0, \forall \Leftrightarrow m > 0$.Do đó loại B.

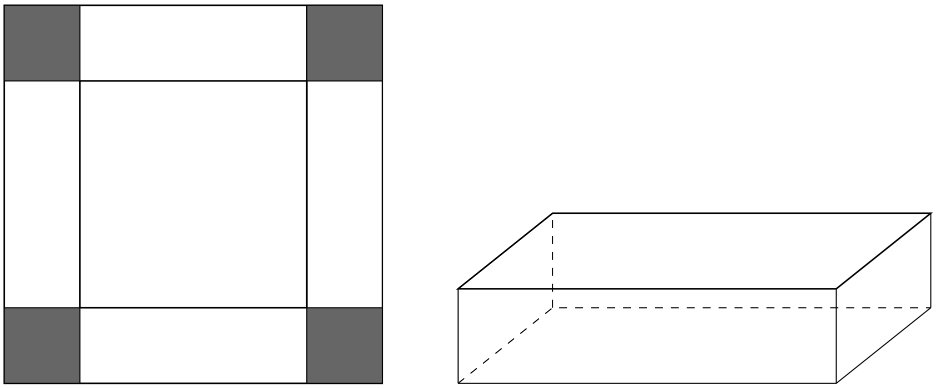
- $m = 0$ thì $y = x + 1$ nên hàm số không có tiệm cận ngang.
- $m > 0$ thì $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 + \dfrac{1}{x}}{-\sqrt{m + \dfrac{1}{x^2}}} = -\dfrac{1}{\sqrt{m}}$.

  và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \dfrac{1}{x}}{\sqrt{m + \dfrac{1}{x^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{m}}$.

  Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{m}}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



(A) $x = 6$. (B) $x = 3$. **C** $x = 2$. (D) $x = 4$.

Lời giải.

Mặt đáy của hộp là hình vuông có cạnh bằng $12 - 2x$ (cm), với $0 < x < 6$. Vậy diện tích của đáy hộp là $S = (12 - 2x)^2 = 4(6 - x)^2$.

Khối hộp có chiều cao $h = x$ (cm).

Vậy thể tích hộp là $V = S \cdot h = 4(6 - x)^2 \cdot x = 4x^3 - 48x^2 + 144x$ (cm^3).

Xét hàm $f(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x, 0 < x < 6$.

Ta có $f'(x) = 12x^2 - 96x + 144 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 6 \end{array}\right.$.

Do $0 < x < 6$ nên ta lấy $x = 2$. Ta có bảng biến thiên:

x	0		2		6
f'		+	0	−	
f	0	$\nearrow$	128	$\searrow$	0

Vậy thể tích khối hộp đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2$ (cm).

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

A $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$. (B) $m \leq 0$.

(C) $1 \leq m < 2$. (D) $m \geq 2$.

Lời giải.

Đặt $t = \tan x \Rightarrow t \in (0; 1)$.

Khi đó, hàm số ban đầu trở thành $y = \dfrac{t - 2}{t - m}$ với $0 < t < 1$.

Ta có $y' = \dfrac{2 - m}{(t - m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(0; 1)$ khi $\begin{cases} y' > 0 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \leqslant m < 2 \\ m \leqslant 0 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Giải phương trình $\log_4(x-1)=3$.

(A) $x=63$. (B) $x=65$. (C) $x=80$. (D) $x=82$.

Lời giải.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow x-1=4^3 \Leftrightarrow x-1=64 \Leftrightarrow x=65$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Tính đạo hàm của hàm số $y=13^x$.

(A) $y'=x\cdot 13^{x-1}$. (B) $y'=13^x\cdot\ln 13$. (C) $y'=13^x$. (D) $y'=\dfrac{13^x}{\ln 13}$.

Lời giải.

Công thức đạo hàm của $y=a^x$ là: $y'=a^x\ln a$.

Nên hàm số đã cho có đạo hàm là $y'=13^x\ln 13$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Giải bất phương trình $\log_2(3x-1)>3$.

(A) $x>3$. (B) $\dfrac{1}{3}<x<3$. (C) $x<3$. (D) $x>\dfrac{10}{3}$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow 3x-1>2^3 \Leftrightarrow 3x-1>8 \Leftrightarrow x>3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y=\log_2(x^2-2x-3)$.

(A) $\mathcal{D}=(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$. (B) $\mathcal{D}=[-1;3]$.

(C) $\mathcal{D}=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. (D) $\mathcal{D}=(-1;3)$.

Lời giải.

Hàm số có nghĩa $\Leftrightarrow x^2-2x-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>3\\x<-1\end{array}\right.$.

Vậy tập xác định là $\mathcal{D}=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=2^x.7^{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

(A) $f(x)<1\Leftrightarrow x+x^2\log_2 7<0$. (B) $f(x)<1\Leftrightarrow x\ln 2+x^2\ln 7<0$.

(C) $f(x)<1\Leftrightarrow x\log_7 2+x^2<0$. (D) $f(x)<1\Leftrightarrow 1+x\log_2 7<0$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=2^x.7^{x^2}<1\Leftrightarrow \log_2\left(2^x.7^{x^2}\right)<0\Leftrightarrow x+x^2\log_2 7<0$, nên câu A đúng.

Và $f(x)=2^x.7^{x^2}<1\Leftrightarrow \ln\left(2^x.7^{x^2}\right)<0\Leftrightarrow x\ln 2+x^2\ln 7<0$, nên câu B đúng.

Và $f(x)=2^x.7^{x^2}<1\Leftrightarrow \log_7\left(2^x.7^{x^2}\right)<0\Leftrightarrow x\log_7 2+x^2<0$, nên câu C đúng

D sai do $f(x)=2^x.7^{x^2}<1\Leftrightarrow \log_2\left(2^x.7^{x^2}\right)<0\Leftrightarrow x+x^2\log_2 7<0\Leftrightarrow x\left(1+x\log_2 7\right)<0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Cho các số thực dương a,b, với $a\neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

(A) $\log_{a^2}(ab)=\dfrac{1}{2}\log_a b$. (B) $\log_{a^2}(ab)=2+2\log_a b$.

(C) $\log_{a^2}(ab)=\dfrac{1}{4}\log_a b$. (D) $\log_{a^2}(ab)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\log_a b$.

Lời giải.

Ta có $\log_{a^2}(ab)=\dfrac{1}{2}\log_a(ab)=\dfrac{1}{2}\left(1+\log_a b\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\log_a b$, nên câu D đúng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x+1}{4^x}$.

(A) $y' = \dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

(B) $y' = \dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

(C) $y' = \dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$.

(D) $y' = \dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \left(\dfrac{x+1}{4^x}\right)' = \dfrac{4^x-(x+1)4^x\ln 4}{4^{2x}} = \dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{4^x}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Đặt $a = \log_2 3, b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b.

(A) $\log_6 45 = \dfrac{a+2ab}{ab}$.

(B) $\log_6 45 = \dfrac{2a^2-2ab}{ab}$.

(C) $\log_6 45 = \dfrac{a+2ab}{ab+b}$.

(D) $\log_6 45 = \dfrac{2a^2-2ab}{ab+b}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{b} = \log_3 5 \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \log_2 3.\log_3 5 = \log_2 5$. Vậy ta đưa về cơ số 2.

$\log_6 45 = \dfrac{\log_2(3^2.5)}{\log_2 3+1} = \dfrac{2a+\frac{a}{b}}{a+1} = \dfrac{2ab+a}{ab+b}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Cho hai số thực a và b, với $1 < a < b$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

(A) $\log_a b < 1 < \log_b a$.

(B) $1 < \log_a b < \log_b a$.

(C) $\log_b a < \log_a b < 1$.

(D) $\log_b a < 1 < \log_a b$.

Lời giải.

Ta có $1 < a < b \Rightarrow \begin{cases} \log_a 1 < \log_a a < \log_a b \\ \log_b 1 < \log_b a < \log_b b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 1 < \log_a b \\ 0 < \log_b a < 1 \end{cases} \Rightarrow \log_b a < 1 < \log_a b$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12%/năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

(A) $m = \dfrac{100.(1,01)^3}{3}$ (triệu đồng).

(B) $m = \dfrac{(1,01)^3}{(1,01)^3-1}$ (triệu đồng).

(C) $m = \dfrac{100 \times 1,03}{3}$ (triệu đồng).

(D) $m = \dfrac{120.(1,12)^3}{(1,12)^3-1}$ (triệu đồng).

Lời giải.

Đặt r là lãi suất hàng tháng và m là số tiền hoàn nợ mỗi tháng.

• Số tiền ông A nợ ngân hàng cuối tháng thứ nhất là $T_1 = T(1+r) - m$.

• Số tiền ông A nợ ngân hàng cuối tháng thứ hai là $T_2 = T_1(1+r)-m = T(1+a)^2-m[1+(1+r)]$.

• Số tiền ông A nợ ngân hàng cuối tháng thứ ba là $T_3 = T_2(1+r) - m = T(1+r)^3 - m\left[1+(1+r)+(1+r)^2\right]$

$T_3 = T(1+r)^3 - m\dfrac{(1+r)^3-1}{r}$.

Theo giả thiết có $T_3 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{T.r.(1+r)^3}{(1+r)^3-1} = \dfrac{(1,01)^3}{(1,01)^3-1}$ (triệu đồng).

Chọn đáp án B □

Câu 22. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$ $(a < b)$, xung quanh trục Ox.

A $V = \pi \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

B $V = \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

C $V = \pi \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

D $V = \pi \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$; $(a < b)$, xung quanh trục Ox được tính theo công thức $V = \pi \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

A $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.

B $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.

C $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.

D $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x-1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(2x-1)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 24. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10(\mathrm{m/s})$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A 0,2m. B 2m. C 10m. D 20m.

Lời giải.

Chọn mốc thời gian là lúc bắt đầu đạp phanh. Thời điểm xe dừng hẳn là

$$v(t) = -5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2\mathrm{s}$$

Từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được quãng đường là:

$$S=\int\limits_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^2(-5t+10)\,\mathrm{d}t=\left(-\frac{5}{2}t^2+10t\right)\Big|_0^2=10\mathrm{m}$$

Chọn đáp án C □

Câu 25. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\pi}\cos^3 x.\sin x\,\mathrm{d}x$.

A $I=-\frac{1}{4}\pi^4$. B $I=-\pi^4$. C $I=0$. D $I=-\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Đặt $u=\cos x\Rightarrow\ \mathrm{d}u=-\sin x\,\mathrm{d}x\Rightarrow\sin x\,\mathrm{d}x=-\,\mathrm{d}u$

Đổi cận

x	0	π
u	1	-1

Nên $I=\int\limits_1^{-1}u^3.(-\,\mathrm{d}u)=\int\limits_{-1}^{1}u^3.\,\mathrm{d}u=\frac{1}{4}u^4\Big|_{-1}^{1}=0$

Chọn đáp án C □

Câu 26. Tính tích phân $I=\int\limits_1^{e}x\ln x\,\mathrm{d}x$

A $I=\frac{1}{2}$. B $I=\frac{e^2-2}{2}$. C $I=\frac{e^2+1}{4}$. D $I=\frac{e^2-1}{4}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{2}x^2\end{cases}$, ta có:

$$I=\frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^e-\int\limits_1^e\frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{4}x^2\Big|_1^e=\frac{1}{2}e^2-\left(\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\right)=\frac{e^2+1}{4}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 27. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đồ thị hàm số $y=x-x^2$.

A $\frac{37}{12}$. B $\frac{9}{4}$. C $\frac{81}{12}$. D 13.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số:

$$x^3-x=x-x^2\Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=0\\&x=1\\&x=-2\end{aligned}\right.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$ là

$$\begin{aligned}S &= \int\limits_{-2}^{1} \left|x^3 + x^2 - 2x\right| \, \mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{0} \left|x^3 + x^2 - 2x\right| \, \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} \left|x^3 + x^2 - 2x\right| \, \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{-2}^{0} \left(x^3 + x^2 - 2x\right) \, \mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{1} \left(x^3 + x^2 - 2x\right) \, \mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0} - \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Bigg|_{0}^{1} \\ &= \frac{8}{3} - \left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{37}{12}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 28. Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox.

A $V = 4 - 2e$. **B** $V = (4 - 2e)\pi$. **C** $V = e^2 - 5$. **D** $V = (e^2 - 5)\pi$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2(x-1)e^x$ và trục hoành là

$$2(x-1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox là

$$V = \int\limits_{0}^{1} \left[2(x-1)e^x\right]^2 \, \mathrm{d}x = 4\int\limits_{0}^{1} (x-1)^2 e^{2x} \, \mathrm{d}x$$

Xét tích phân $I = \int\limits_{0}^{1} (x-1)^2 e^{2x} \, \mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = (x-1)^2 \\ \mathrm{d}v = e^{2x} \, \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2(x-1) \, \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$,

Ta có: $I = \dfrac{1}{2}(x-1)^2 e^{2x}\Big|_0^1 - \int\limits_{0}^{1} (x-1)e^{2x} \, \mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2} - \int\limits_{0}^{1} (x-1)e^{2x} \, \mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u_1 = (x-1) \\ \mathrm{d}v_1 = e^{2x} \, \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u_1 = \mathrm{d}x \\ v_1 = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$,

Do đó $I = -\dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}(x-1)e^{2x}\Big|_0^1 - \dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} e^{2x} \, \mathrm{d}x\right) = -\dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1\right) = -\dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{e^2}{4} + \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{e^2 - 5}{4}$

Vậy $V = 4I = 4 \cdot \dfrac{e^2 - 5}{4} = e^2 - 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$

(A) Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng $-2i$. (B) Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng -2.
(C) Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng $2i$. (D) Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng 2.

Lời giải.

Từ $z = 3 - 2i$ suy ra $\bar{z} = 3 + 2i$. Nên, phần thực của $\bar{z}$ bằng 3 và phần ảo của $\bar{z}$ bằng 2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tính môđun của số phức $z_1 + z_2$

(A) $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$. (B) $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$. (C) $|z_1 + z_2| = 1$. (D) $|z_1 + z_2| = 5$.

Lời giải.

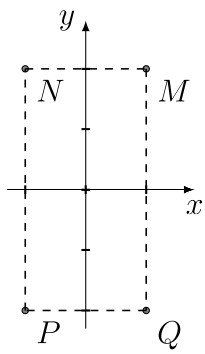
Ta có: $z_1 + z_2 = 3 - 2i \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31.

Cho số phức z thỏa mãn $(1 + i)z = 3 - i$.
Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q ở hình bên?

(A) Điểm P. (B) Điểm Q.
(C) Điểm M. (D) Điểm N.



Lời giải.

Ta có: $(1 + i)z = 3 - i \Leftrightarrow z = \dfrac{3 - i}{1 + i} = 1 - 2i$.

Vậy điểm biểu diễn của z là điểm $Q(1; -2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Cho số phức $z = 2 + 5i$. Tìm số phức $w = iz + \bar{z}$.

(A) $w = 7 - 3i$. (B) $w = -3 - 3i$. (C) $w = 3 + 7i$. (D) $w = -7 - 7i$.

Lời giải.

Ta có: $z = 2 + 5i \Rightarrow w = iz + \bar{z} + i(2 + 5i) + 2 - 5i = 2i - 5 + 2 - 5i = -3 - 5i$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Kí hiệu z_1, z_2, z_3 và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 - z^2 - 12 = 0$.
Tính tổng $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$.

(A) $T = 4$. (B) $T = 2\sqrt{3}$. (C) $4 + 2\sqrt{3}$. (D) $T = 2 + 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có: $z^4 - z^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = 4 \\ z^2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm 2 \\ z = \pm i\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Vậy $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = 4 + 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (3 + 4i)z + i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

(A) $r = 4$. (B) $r = 5$. (C) $r = 20$. (D) $r = 22$.

Lời giải.

Giả sử $w = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $w = (3+4i)z + i \Leftrightarrow z = \dfrac{w-i}{3+4i} = \dfrac{x+(y-1)i}{3+4i} = \dfrac{3x-4(y-1)+[3(y-1)+4x]\,i}{25}$.

Do đó, ta có: $|z| = 4 \Leftrightarrow \left(\dfrac{3x-4y+4}{25}\right)^2 + \left(\dfrac{4x+3y-3}{25}\right)^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 400$.

Suy ra $r = 20$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC' = a\sqrt{3}$.

A $V = a^3$. **B** $V = \dfrac{3\sqrt{6}a^3}{4}$. **C** $V = 3\sqrt{3}a^3$. **D** $V = \dfrac{1}{3}a^3$.

Lời giải.

Khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài đường chéo $AC' = a\sqrt{3}$ nên có độ dài cạnh là a. Vậy thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = a^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$. **B** $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{4}$. **C** $V = \sqrt{2}a^3$. **D** $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \times SA = \dfrac{1}{3}a^2 \times a\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án D □

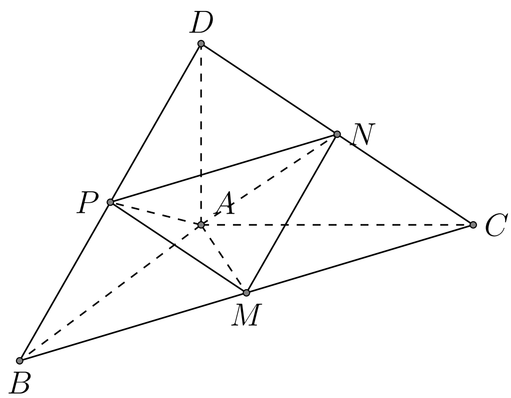
Câu 37. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB = 6a$, $AC = 7a$ và $AD = 4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, DB. Tính thể tích V của tứ diện $A.MNP$.

A $V = \dfrac{7}{2}a^3$. **B** $V = 14a^3$. **C** $V = \dfrac{28}{3}a^3$. **D** $V = 7a^3$.

Lời giải.

Ta có $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}AB \cdot AC \cdot AD = \dfrac{1}{6} \cdot 6a \cdot 7a \cdot 4a = 28a^3$.

Dễ thấy $S_{MNP} = \dfrac{1}{2}S_{MNDP} = \dfrac{1}{4}S_{BCD} \Rightarrow V_{AMNP} = \dfrac{1}{4}V_{ABCD} = 7a^3$.

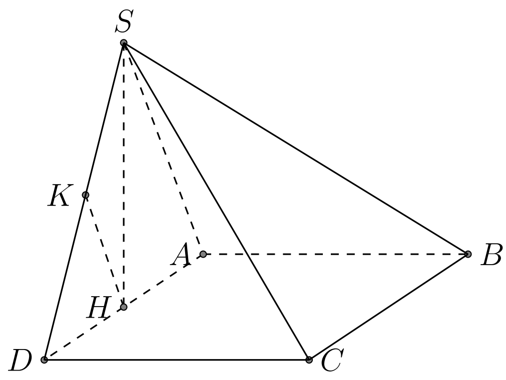


Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD).

A $h = \dfrac{2}{3}a$. **B** $h = \dfrac{4}{3}a$. **C** $h = \dfrac{8}{3}a$. **D** $h = \dfrac{3}{4}a$.

Lời giải.



- Đặt $SH = x \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot x \cdot (a\sqrt{2})^2 = \frac{4}{3}a^3 \Rightarrow x = 2a$.
- Ta có $d(B;(SCD)) = d(A;(SCD)) = 2d(H;(SCD)) = 2HK = 2 \cdot \dfrac{2a \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{4a^2 + \dfrac{a^2}{2}}} = \dfrac{4a}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$ và $AC = \sqrt{3}a$. Tính độ dài đường sinh ℓ của hình nón, nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB.

A $\ell = a$. B $\ell = \sqrt{2}a$. C $\ell = \sqrt{3}a$. D $\ell = 2a$.

Lời giải.

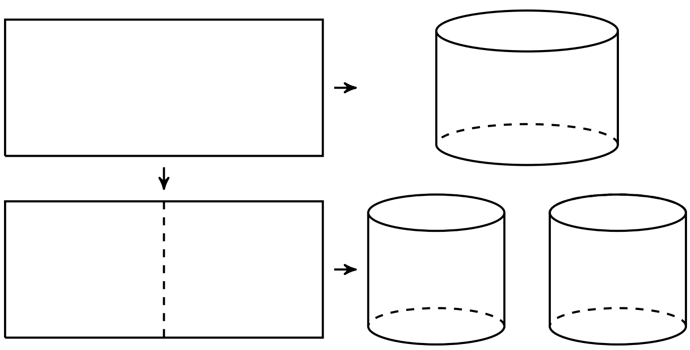
Đường sinh của hình nón có độ dài bằng đoạn $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước 50 cm × 240 cm, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50 cm, theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):

- Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.
- Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



A $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$. B $\frac{V_1}{V_2} = 1$. C $\frac{V_1}{V_2} = 2$. D $\frac{V_1}{V_2} = 4$.

Lời giải.

Ban đầu bán kính đáy là R, sau khi cắt và gò ta được 2 khối trụ có bán kính đáy là $\frac{R}{2}$.

Đường cao của các khối trụ không thay đổi.

Ta có: $V_1 = S_d \cdot h = \pi R^2 \cdot h; V_2 = 2\left(S_{d_1} \cdot h\right) = 2\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{\pi R^2 h}{2}$.

Khi đó: $\frac{V_1}{V_2} = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$ và $AD = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN, ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.

A $S_{tp} = 4\pi$. **B** $S_{tp} = 2\pi$. **C** $S_{tp} = 6\pi$. **D** $S_{tp} = 10\pi$.

Lời giải.

Hình trụ có bán kính đáy $r = 1$, chiều cao $h = 1$ nên có $S_{tp} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 4\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A $V = \dfrac{5\sqrt{15}\pi}{18}$. **B** $V = \dfrac{5\sqrt{15}\pi}{54}$. **C** $V = \dfrac{4\sqrt{3}\pi}{27}$. **D** $V = \dfrac{5\pi}{3}$.

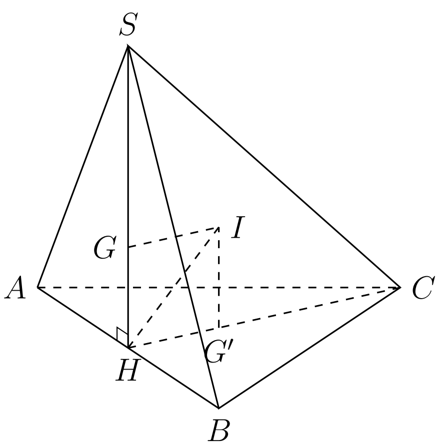
Lời giải.

Đặt R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp.

Dựng hình như hình bên với IG' là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và IG là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB.

Ta có: $G'H = \dfrac{\sqrt{3}}{6}; GH = \dfrac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow IH = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

Do vậy $R = \sqrt{IH^2 + HA^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{6} \Rightarrow V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{5\sqrt{15}\pi}{54}$.



Chọn đáp án B □

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - z + 2 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P)?

A $\overrightarrow{n_4} = (-1; 0; -1)$. **B** $\overrightarrow{n_1} = (3; -1; 2)$. **C** $\overrightarrow{n_3} = (3; -1; 0)$. **D** $\overrightarrow{n_2} = (3; 0; -1)$.

Lời giải.

Ta có : $(P): 3x + 0y - z + 2 = 0$ nên $(3; 0; -1)$ là tọa độ vectơ pháp tuyến của (P).

Chọn đáp án D □

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của (S).

A $I(-1; 2; 1)$ và $R = 3$. **B** $I(1; -2; -1)$ và $R = 3$.

C $I(-1; 2; 1)$ và $R = 9$. **D** $I(1; -2; -1)$ và $R = 9$.

Lời giải.

Dựa vào dạng tổng quát của phương trình mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 2z + 4 = 0$ và điểm $A(1; -2; 3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P).

A $d = \dfrac{5}{9}$. **B** $d = \dfrac{5}{29}$. **C** $d = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$. **D** $d = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.
Ta có $d(A;(P)) = \dfrac{|3.1+4.(-2)+2.3+4|}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$
Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình $\dfrac{x-10}{5} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+2}{1}$. Xét mặt phẳng $(P): 10x+2y+mz+11=0$, m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ.

(A) $m=-2$. **B** $m=2$. (C) $m=-52$. (D) $m=52$.

Lời giải.
- Vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta} = (5;1;1)$.
- Vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (10;2;m)$.
- Δ vuông góc với (P) khi và chỉ khi $\overrightarrow{u_\Delta}$ và $\vec{n}$ cùng phương. Hay $\dfrac{10}{5} = \dfrac{2}{1} = \dfrac{m}{1}$ suy ra $m=2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;1)$ và $B(1;2;3)$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB.

A $x+y+2z-3=0$. (B) $x+y+2z-6=0$.
(C) $x+3y+4z-7=0$. (D) $x+3y+4z-26=0$.

Lời giải.
Mặt phẳng (P) qua A và nhận $\overrightarrow{AB} = (1;1;2)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là

$$x+(y-1)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow x+y+2z-3=0.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+2z+2=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu (S).

(A) (S): $(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=8$. (B) (S): $(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=10$.
(C) (S): $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=8$. **D** (S): $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$.

Lời giải.
- khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là $d=3$.
- bán kính mặt cầu là $R=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$.
- phương trình mặt cầu là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng d có phương trình: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt d.

(A) Δ: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{1}$. **B** Δ: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$.
(C) Δ: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-2}{1}$. (D) Δ: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-2}{1}$.

Lời giải.
Cách 1 :

- phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng d là $(P): x+y+2z-5=0$.
- giao điểm của d và (P) là $B(2;1;1)$.
- khi đó đường thẳng cần tìm chính là đường thẳng đi qua A và B có phương trình $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$

Cách 2 :

- Gọi $B(1+b;b;-1+2b)$ là giao điểm của đường thẳng Δ với đường thẳng d.
- ta có Δ vuông góc với d nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_\Delta}=0$ hay $b+b+2(2b-3)=0$ suy ra $b=1$ và $B(2;1;1)$.
- khi đó đường thẳng cần tìm chính là đường thẳng đi qua A và B có phương trình $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$

Chọn đáp án B □

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;\breve{}2;0)$, $B(0;\breve{}1;1)$, $C(2;1;\breve{}1)$ và $D(3;1;4)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn điểm đó?

A. 1 mặt phẳng.
B. 4 mặt phẳng.
C. 7 mặt phẳng.
D. Có vô số mặt phẳng.

Lời giải.

- Viết phương trình mặt phẳng (ABC) ta được (ABC): $x+z-1=0$. Kiểm tra tọa độ điểm D ta suy ra 4 điểm A; B; C; D không đồng phẳng.
- Gọi (P) là mặt phẳng cách đều 4 điểm ta có 2 trường hợp:
  + Trường hợp 1 (có 1 điểm nằm khác phía với 3 điểm còn lại): có 4 mặt phẳng.
  + Trường hợp 2 (mỗi phía có 2 điểm): có $C_3^2=3$ mặt phẳng.

Chọn đáp án C □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. C	2. C	3. B	4. D	5. A	6. A	7. C	8. B	9. D	10. C
11. A	12. B	13. B	14. A	15. C	16. D	17. D	18. A	19. C	20. D
21. B	22. A	23. B	24. C	25. C	26. C	27. A	28. D	29. D	30. A
31. B	32. B	33. C	34. C	35. A	36. D	37. D	38. B	39. D	40. C
41. A	42. B	43. D	44. A	45. C	46. B	47. A	48. D	49. B	50. C

10 ĐỀ MINH HỌA 2017 - LẦN 2

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$?

(A) $x=1$. (B) $y=-1$. (C) $y=2$. **(D)** $x=-1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to -1^+} y=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{2x+1}{x+1}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to -1^-} y=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{2x+1}{x+1}=+\infty$.

Suy ra đường thẳng $x=-1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Đồ thị của hàm số $y=x^4-2x^2+2$ và đồ thị của hàm số $y=-x^2+4$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

(A) 0. (B) 4. (C) 1. **(D)** 2.

Lời giải.

Số giao điểm của hai đồ thị chính bằng số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm: $x^4-2x^2+2=-x^2+4 \Leftrightarrow x^4-x^2-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{array}\right.$.

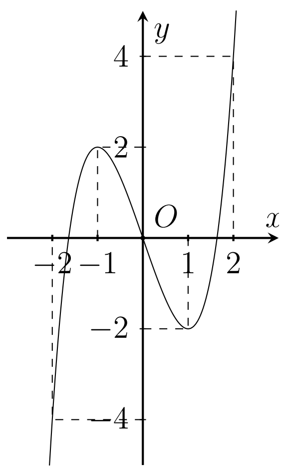
Vậy hai đồ thị có tất cả 2 giao điểm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

(A) $x=2$. **(B)** $x=-1$. (C) $x=1$. (D) $x=2$.



Lời giải.

Quan sát đồ thị, dấu $f'(x)$ đổi từ dương sang âm khi qua điểm $x=-1$ nên hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=-1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Cho hàm số $y=x^3-2x^2+x+1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

(B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)$.

(C) Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-4x+1 \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=\dfrac{1}{3}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{31}{27}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1 $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

(A) $[-1;2]$. **B** $(-1;2)$. (C) $(-1;2]$. (D) $(-\infty;2]$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên đã cho, phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi$-1<m<2$ hay $m\in(-1;2)$ vì lúc đó, đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

(A) Cực tiểu của hàm số bằng -3. (B) Cực tiểu của hàm số bằng 1.

(C) Cực tiểu của hàm số bằng -6. **D** Cực tiểu của hàm số bằng 2.

Lời giải.

- Cách 1: Ta có $y'=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$; $y'=0\Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-3\\x=1\end{array}\right.$

  Lập bảng biến thiên.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-6	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và giá trị cực tiểu bằng 2.

- Cách 2: Ta có $y' = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$; $x = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1 \end{array}\right.$

  Khi đó: $y''(1) = 1 > 0$; $y''(-3) = -1 < 0$.

  Nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và giá trị cực tiểu bằng 2.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\dfrac{1}{2}t^3 + 9t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu ?

(A) $216(m/s)$. (B) $30(m/s)$. (C) $400(m/s)$. **D** $54(m/s)$.

Lời giải.

Vận tốc tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = -\dfrac{3}{2}t^2 + 18t$.

Khi đó yêu cầu bài toán tương đương tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = v(t) = -\dfrac{3}{2}t^2 + 18t$ trên đoạn $[0; 10]$.

Ta có: $y' = -3t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

$y(6) = 54; y(0) = 0; y(10) = 30$.

Do hàm số $y = v(t)$ liên lục trên đoạn $[0; 10]$ nên $\max\limits_{[0;10]} y = 54$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6}$

(A) $x = -3$ và $x = -2$. (B) $x = -3$.

(C) $x = 3$ và $x = 2$. **D** $x = 3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{2; 3\}$.

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(2x-1)^2 - (x^2 + x + 3)}{(x-2)(x-3)\left(2x - 1 + \sqrt{x^2 + x + 3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(3x+1)}{(x-2)(x-3)\left(2x - 1 + \sqrt{x^2 + x + 3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{(3x+1)}{(x-3)\left(2x - 1 + \sqrt{x^2 + x + 3}\right)} = \frac{-7}{6}.$$

Tương tự ta có $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{-7}{6}$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{(x-2)(x-3)} = +\infty$
và $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = -\infty$.
Suy ra đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.
Chọn đáp án D □

Câu 9. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\ln(x^2+1)-mx+1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

A $(-\infty;-1]$. **B** $(-\infty;-1)$. **C** $[-1;1]$. **D** $[1;+\infty)$.

Lời giải.
Ta có $y' = \dfrac{2x}{x^2+1} - m$.
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (-\infty;+\infty)$
$\Leftrightarrow g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} \geq m, \forall x \in (-\infty;+\infty)$
$\Leftrightarrow m \leq \min g(x)$.
Ta có $g'(x) = \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\min g(x) = -1$. Vậy $m \leq -1$.
Chọn đáp án A □

Câu 10. Biết $M(0;2), N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Tính giá trị của hàm số tại $x=-2$.

A $y(-2)=2$. **B** $y(-2)=22$. **C** $y(-2)=6$. **D** $y(-2)=-18$.

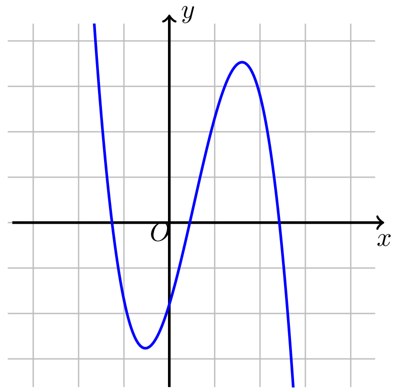
Lời giải.
Ta có $y' = 3ax^2+2bx+c$.
Do $M(0;2), N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số nên

$$\begin{cases} y'(0)=0 \\ y'(2)=0 \\ y(0)=2 \\ y(2)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 12a+4b+c=0 \\ d=2 \\ 8a+4b+2c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases}$$

. Vậy hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Suy ra $y(-2)=-18$.
Chọn đáp án D □

Câu 11.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



A $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$. **B** $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
C $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$. **D** $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị suy ra hệ số $a < 0$.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ có 2 nghiệm x_1, x_2 trái dấu (do hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm hai phía với trục Oy) nên $3ac < 0 \Rightarrow c > 0$.

Ta có: $y'' = 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-b}{3a}$.

Ta thấy điểm uốn là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị nằm bên phải trục tung. Do đó $x = \dfrac{-b}{3a} < 0 \Rightarrow b < 0$.

Mặt khác đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $M(0; d) \Rightarrow d < 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. **B** $\ln(ab) = \ln a . \ln b$.
C $\ln \dfrac{a}{b} = \dfrac{\ln a}{\ln b}$. **D** $\ln \dfrac{a}{b} = \ln b - \ln a$.

Lời giải.

Với mọi số dương a, b ta có: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Tìm nghiệm của phương trình $3^{x-1} = 27$.

A $x = 9$. **B** $x = 3$. **C** $x = 4$. **D** $x = 10$.

Lời giải.

Ta có $3^{x-1} = 27 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^3 \Leftrightarrow x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$

Chọn đáp án C □

Câu 14. Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0).2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con ?

A 48 phút. **B** 19 phút. **C** 7 phút. **D** 12 phút.

Lời giải.

Ta có $s(3) = s(0).2^3 \Rightarrow s(0) = \dfrac{s(3)}{2^3} = 78125$

$$s(t) = s(0).2^t \Rightarrow 2^t = \frac{s(t)}{s(0)} = 128 \Rightarrow t = 7.$$

Chọn đáp án C □

Câu 15. Cho biểu thức $P = \sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^2.\sqrt{x^3}}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

(A) $P = x^{\frac{1}{2}}$. **B** $P = x^{\frac{13}{24}}$. (C) $P = x^{\frac{1}{4}}$. (D) $P = x^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải.

Ta có $P = \sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^2.x^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^{\frac{7}{2}}}} = \sqrt[4]{x.x^{\frac{7}{6}}} = \sqrt[4]{x^{\frac{13}{6}}} = x^{\frac{13}{24}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right) = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b$. (B) $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right) = 1 + \dfrac{1}{3}\log_2 a - \log_2 b$.

(C) $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right) = 1 + 3\log_2 a + \log_2 b$. (D) $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right) = 1 + \dfrac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b$.

Lời giải.

Ta có $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right) = \log_2(2a^3) - \log_2(b) = \log_2(2) + \log_2(a^3) - \log_2(b) = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b$

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$.

(A) $S = (2; +\infty)$. (B) $S = (-\infty; 2)$. **C** $S = \left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$. (D) $S = (-1; 2)$.

Lời giải.

Điều kiện $x > \dfrac{1}{2}$. BPT $\Leftrightarrow x + 1 > 2x - 1 \Leftrightarrow x < 2$.

Kết hợp điều kiện suy ra tập nghiệm của BPT là $S = \left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln\left(1 + \sqrt{x+1}\right)$.

A $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$. (B) $y' = \dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}$.

(C) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$. (D) $y' = \dfrac{2}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$.

Lời giải.

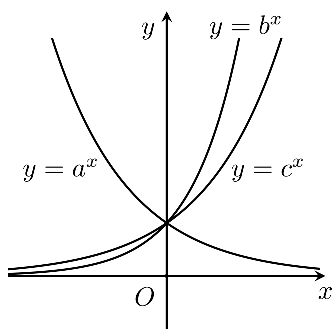
Ta có $y' = \dfrac{\left(1+\sqrt{x+1}\right)'}{1+\sqrt{x+1}} = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1+\sqrt{x+1}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19.

Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $a < b < c$. **B** $a < c < b$. (C) $b < c < a$. (D) $c < a < b$.



Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy $0 < a < 1$ và $b, c > 1$

$\forall x_\circ : \begin{cases} y_1 = b^{x_\circ} \\ y_2 = c^{x_\circ} \end{cases}$ từ đồ thị ta thấy $y_1 > y_2 \Leftrightarrow b^{x_\circ} > c^{x_\circ} \Leftrightarrow b > c$. Vậy $a < c < b$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x + (3-m)2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\ 1)$.

A $[3; 4]$. **B** $[2; 4]$. **C** $(2; 4)$. **D** $(3; 4)$.

Lời giải.

Ta có $6^x + (3-m)2^x - m = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{6^x + 3.2^x}{2^x + 1}$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{6^x + 3.2^x}{2^x + 1}$

+ TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

+ $f'(x) = \dfrac{12^x.\ln 3 + 6^x.\ln 6 + 3.2^x.\ln 2}{(2^x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $0 < x < 1 \Leftrightarrow f(0) < f(x) < f(1) \Leftrightarrow 2 < f(x) < 4$ vì $f(0) = 2, f(1) = 4$.

Vậy phương trình (1)có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$ khi $m \in (2; 4)$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất P_{min} của biểu thức $P = \log^2_{\frac{a}{b}}(a^2) + 3\log_b\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

A $P_{\text{min}} = 19$. **B** $P_{\text{min}} = 13$. **C** $P_{\text{min}} = 14$. **D** $P_{\text{min}} = 15$.

Lời giải.

Ta có $$P = \log^2_{\frac{a}{b}}(a^2) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right) = \left[2\log_{\frac{a}{b}} a\right]^2 + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$$
$$= 4\left[\log_{\frac{a}{b}}\left(\frac{a}{b}.b\right)\right]^2 + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right).$$
$$= 4\left[1 + \log_{\frac{a}{b}} b\right]^2 + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$$

Đặt $t = \log_{\frac{a}{b}} b$, điều kiện $t > 0$ (vì $a > b > 1$).

Xét $P = 4(1+t)^2 + \dfrac{3}{t} = 4t^2 + 8t + \dfrac{3}{t} + 4 = f(t)$.

Ta có$f'(t) = 8t + 8 - \dfrac{3}{t^2} = \dfrac{8t^3 + 8t^2 - 3}{t^2} = \dfrac{(2t-1)(4t^2+6t+3)}{t^2}$

Khi đó $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'				$-$	0	$+$	
y				$+\infty \searrow$	15	$\nearrow +\infty$	

Ta suy ra $P_{\text{min}} = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 15$.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$.

A $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x + C$. **B** $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sin 2x + C$. .

(C) $\int f(x)\mathrm{d}x = 2\sin 2x + C.$.

(D) $\int f(x)\mathrm{d}x = -2\sin 2x + C.$

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}(2x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x + C.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, $f(1) = 1$ và $f(2) = 2$.

Tính $I = \displaystyle\int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x$

A $I = 1.$ (B) $I = -1.$ (C) $I = 3.$ (D) $I = \dfrac{7}{2}.$

Lời giải.

$I = \displaystyle\int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_1^2 = f(2) - f(1) = 1.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Tính $F(3)$.

(A) $F(3) = \ln 2 - 1.$ **B** $F(3) = \ln 2 + 1.$ (C) $F(3) = \dfrac{1}{2}.$ (D) $F(3) = \dfrac{7}{4}.$

Lời giải.

Ta có $F(x) = \ln|x-1| + C.$

Do $F(2) = 1$ nên $C = 1 \Rightarrow F(x) = \ln|x-1| + 1.$

Khi đó $F(3) = \ln 2 + 1.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Cho $\displaystyle\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 16$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = 32.$ **B** $I = 8.$ (C) $I = 16.$ (D) $I = 4.$

Lời giải.

Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x.$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 2 \Rightarrow t = 4.$

$\Rightarrow I = \displaystyle\int\limits_0^4 \dfrac{1}{2}f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 8.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Biết $I = \displaystyle\int\limits_3^4 \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+x} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.

(A) $S = 6.$ **B** $S = 2.$ (C) $S = -2.$ (D) $S = 0.$

Lời giải.

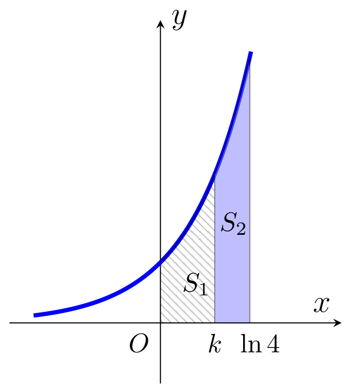
Ta có $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} \Rightarrow \int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln|x| - \ln|x+1| + C.$

Vậy $I = (\ln|x| - \ln|x+1|)\big|_3^4 = 4\ln 2 - \ln 3 - \ln 5$ nên $a = 4, b = -1, c = -1 \Rightarrow S = 2.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 27.

Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k\ (0 < k < \ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.



Ⓐ $k = \frac{2}{3}\ln 4$.
Ⓑ $k = \ln 2$.
Ⓒ $k = \ln\frac{8}{3}$.
Ⓓ $k = \ln 3$.

Lời giải.

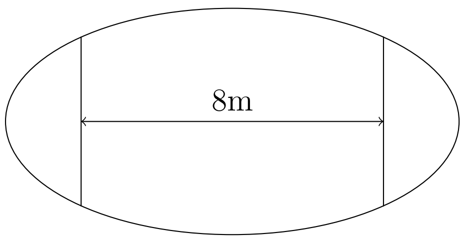
Ta có $S_1 = \int\limits_0^k |\mathrm{e}^x|\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^k - 1$ và $S_2 = \int\limits_k^{\ln 4} |\mathrm{e}^x|\,\mathrm{d}x = 4 - \mathrm{e}^k$.

Theo đề bài $S_1 = 2S_2 \Rightarrow \mathrm{e}^k - 1 = 2(4 - \mathrm{e}^k) \Leftrightarrow \mathrm{e}^k = 3 \Leftrightarrow k = \ln 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 28.

Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng 16m và độ dài trục bé bằng10m. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8m và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/1m^2. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



Ⓐ 7.862.000 đồng.
Ⓑ 7.653.000 đồng.
Ⓒ 7.128.000 đồng.
Ⓓ 7.826.000 đồng.

Lời giải.

Xét hệ trục tọa độ Oxy đặt gốc tọa độ vào tâm của khu vườn, khi đó khu vườn có phương trình là $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Phần đồ thị phần phía trên trục Ox có phương trình là $y = f(x) = 5\sqrt{1 - \frac{x^2}{64}}$.

Do vậy diện tích của dải đất là $S = 2\int\limits_{-4}^{4} 5\sqrt{1 - \frac{x^2}{64}}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x = 8\sin t$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$ $\mathrm{d}x = 8\cos t\,\mathrm{d}t$ và $\cos t \geqslant 0$.

Đổi cận: $x = -4 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6}; x = 4 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

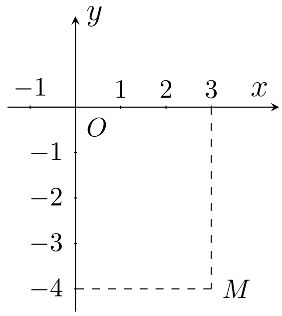
$$\Rightarrow S = 80\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 40\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t = 40\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{40\pi}{3} + 20\sqrt{3}\ (\mathrm{m}^2).$$

Do đó, số tiền cần dùng là $100.000S \approx 7.653.000$ đồng.

Chọn đáp án B □

Câu 29.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z.
Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.



(A) Phần thực là -4 và phần ảo là 3.
(B) Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.
(C) Phần thực là 3 và phần ảo là -4.
(D) Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.

Lời giải.

Số phức $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.
Dựa vào hình vẽ suy ra $M(3; -4) \Rightarrow$ phần thực $a = 3$, phần ảo $b = -4$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = i(3i + 1)$.

(A) $\overline{z} = 3 - i$. (B) $\overline{z} = -3 + i$. (C) $\overline{z} = 3 + i$. (D) $\overline{z} = -3 - i$.

Lời giải.

Ta có $z = -3 + i \Rightarrow \overline{z} = -3 - i$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Tính môđun của số phức z thỏa mãn $z(2 - i) + 13i = 1$.

(A) $|z| = \sqrt{34}$. (B) $|z| = 34$. (C) $|z| = \dfrac{5\sqrt{34}}{3}$. (D) $|z| = \dfrac{\sqrt{34}}{3}$.

Lời giải.

$z(2 - i) + 13i = 1 \Leftrightarrow z = \dfrac{1 - 13i}{2 - i} \Leftrightarrow z = \dfrac{(1 - 13i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} \Leftrightarrow z = 3 - 5i$.
$|z| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2 - 16z + 17 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz_0$?

(A) $M_1\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$. (B) $M_2\left(-\dfrac{1}{2}; 2\right)$. (C) $M_3\left(-\dfrac{1}{4}; 1\right)$. (D) $M_4\left(\dfrac{1}{4}; 1\right)$.

Lời giải.

Xét phương trình $4z^2 - 16z + 17 = 0$ có $\Delta' = 64 - 4.17 = -4$.
Phương trình có hai nghiệm $z_1 = \dfrac{8 - 2i}{4} = 2 - \dfrac{1}{2}i$, $z_2 = \dfrac{8 + 2i}{4} = 2 + \dfrac{1}{2}i$.
Do z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương nên $z_0 = 2 + \dfrac{1}{2}i$.
Ta có $w = iz_0 = -\dfrac{1}{2} + 2i$. Điểm biểu diễn $w = iz_0$ là $M_2\left(-\dfrac{1}{2}; 2\right)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $(1 + i)z + 2\overline{z} = 3 + 2i$. Tính $P = a + b$.

(A) $P = \dfrac{1}{2}$. (B) $P = 1$. (C) $P = -1$. (D) $P = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$(1 + i)z + 2\overline{z} = 3 + 2i$ (1).
Ta có $z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi$. Thay vào (1) ta được

$(1+i)(a+bi)+2(a-bi)=3+2i \Leftrightarrow (a-b)i+(3a-b)=3+2i \Leftrightarrow (a-b)i+(3a-b)=3+2i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ 3a-b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{3}{2}. \end{cases} \Rightarrow P=-1.$

Chọn đáp án C □

Câu 34. Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{z}-2+i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A $\dfrac{3}{2}<|z|<2$. B $|z|>2$. C $|z|<\dfrac{1}{2}$. D $\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $(1+2i)|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{z}-2+i \Leftrightarrow (1+2i)|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{z}+i(1+2i) \Leftrightarrow (1+2i)(|z|-i)=\dfrac{\sqrt{10}}{z}$

$\Rightarrow \left|(1+2i)(|z|-i)\right|=\left|\dfrac{\sqrt{10}}{z}\right| \Rightarrow |1+2i|\cdot\left||z|-i\right|=\dfrac{\sqrt{10}}{|z|}$ (*)

Đặt $t=|z|$ thì $t\in\mathbb{R}$, $t>0$ và (*) $\Leftrightarrow \sqrt{5}\cdot\sqrt{t^2+1}=\dfrac{\sqrt{10}}{t} \Leftrightarrow t^4+t^2=2 \Rightarrow t=1$ (do $t>0$).

Vậy $|z|=t=1 \Rightarrow \dfrac{1}{2}<t<\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án D □

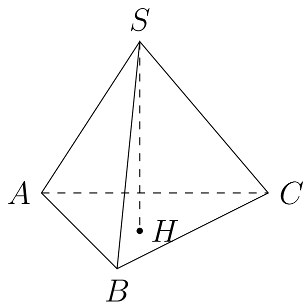
Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$ và thể tích bằng a^3. Tính chiều cao h của hình chóp đã cho.

A $h=\dfrac{\sqrt{3}a}{6}$. B $h=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. C $h=\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$. D $h=\sqrt{3}a$.

Lời giải.

Do đáy là tam giác đều cạnh bằng $2a$ nên $S_{\triangle ABC}=\dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}=a^2\sqrt{3}$.

Mà $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}.h \Rightarrow h=\dfrac{3V}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{3a^3}{a^2\sqrt{3}}=\sqrt{3}a$.



Chọn đáp án D □

Câu 36. Hình đa diện nào dưới đây không có tâm đối xứng?

A Tứ diện đều. B Bát diện đều.
C Hình lập phương. D Lăng trụ lục giác đều.

Lời giải.

Dễ dàng thấy bát diện đều, hình lập phương và lăng trục lục giác đều có tâm đối xứng.

Còn tứ diện đều không có tâm đối xứng.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm tam giác BCD. Tính thể tích V của khối chóp $A.GBC$.

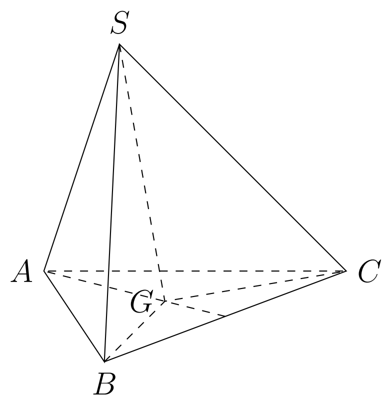
A $V=3$. B $V=4$. C $V=6$. D $V=5$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}(G, BC) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}(A, BC) \Rightarrow S_{\triangle GBC} = \dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.

$V_{S.GBC} = \dfrac{1}{3}.S_{\triangle GBC}.\mathrm{d}(S,(ABC))$

$= \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{3}.S_{\triangle ABC}.\mathrm{d}(S,(ABC)) = \dfrac{1}{3}.V_{S.ABC} = 4.$



Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $AC = 2\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° và $AC' = 4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCB'C'$.

(A) $V = \dfrac{8}{3}$. (B) $V = \dfrac{16}{3}$. (C) $V = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. (D) $V = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.

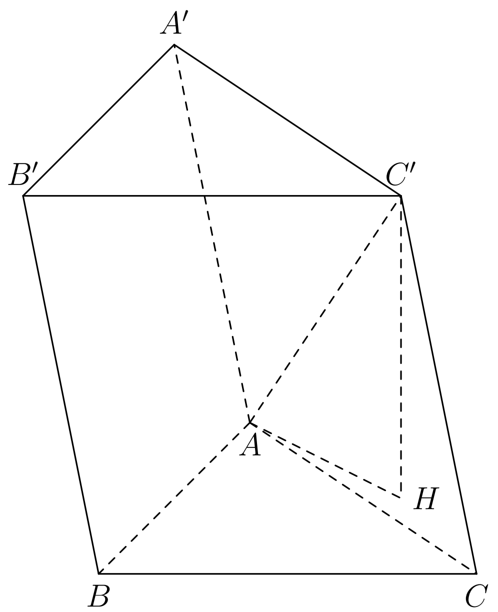
Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của C' lên đáy $(ABC) \Rightarrow \widehat{C'AH} = 60^\circ \Rightarrow C'H = AC' \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$.

Từ đó ta có

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}(2\sqrt{2})^2 = 4$

$\Rightarrow V_{ABCB'C'} = 2V_{AC'BC} = 2\dfrac{1}{3}C'HS_{ABC} = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Cho khối (N) có bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh bằng 15π. Tính thể tích V của khối nón (N)

(A) $V = 12\pi$. (B) $V = 20\pi$. (C) $V = 36\pi$. (D) $V = 60\pi$.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = \pi r l$ nên $15\pi = 3\pi l \Rightarrow l = 5$.

Suy ra $h = \sqrt{l^2 - r^2} = 4$. Do đó $V = \dfrac{1}{2}hS_{\text{ Đáy}} = \dfrac{1}{3}h\pi r^2 = 12\pi$

Chọn đáp án (A) □

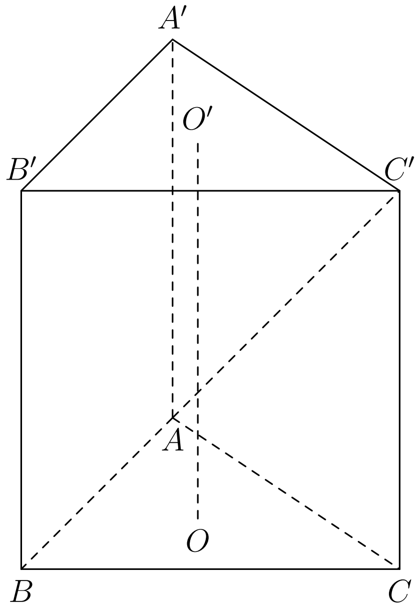
Câu 40. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

(A) $V = \dfrac{\pi a^2 h}{9}$. (B) $V = \dfrac{\pi a^2 h}{3}$. (C) $V = 3\pi a^2 h$. (D) $V = \dfrac{\pi a^2 h}{9}$.

Lời giải.

Khối trụ ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho cũng có chiều cao là $h = OO'$, trong đó O, O' lần lượt là tâm của tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$. Bán kính đáy của khối trụ chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp của mặt đáy là $a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy thể tích lăng trụ là $V = \dfrac{\pi a^2 h}{3}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$ và $AA' = 2a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$.

(A) $R = 3a$. (B) $R = \dfrac{3a}{4}$. **(C)** $R = \dfrac{3a}{2}$. (D) $R = 2a$.

Lời giải.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp$ABB'C'$ bằng với bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật đã cho và cũng bằng nửa độ dài đường chéo dài nhất của hình hộp. Suy ra $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2} = \dfrac{3a}{2}$.

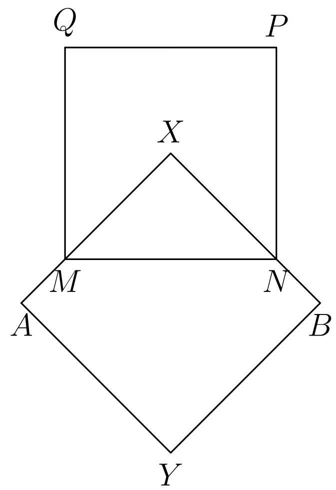
Chọn đáp án (C) □

Câu 42.

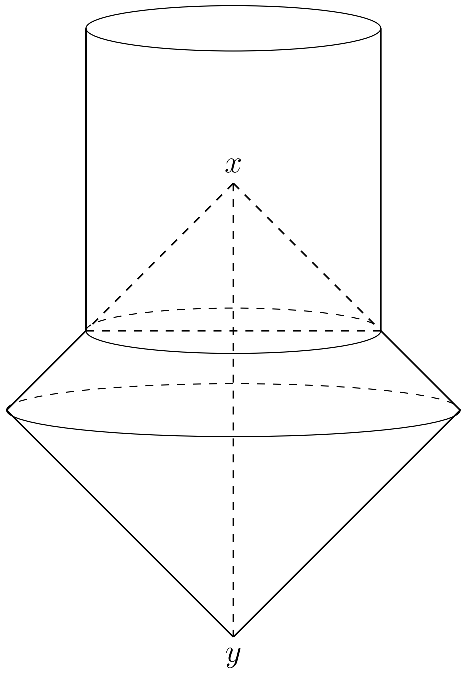
Cho hai hình vuông có cùng cạnh bằng 5 được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh X của một hình vuông là tâm của hình vuông còn lại (như hình vẽ). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên xung quanh trục XY.

(A) $V = \dfrac{125\left(1+\sqrt{2}\right)\pi}{6}$. (B) $V = \dfrac{125\left(5+2\sqrt{2}\right)\pi}{12}$.

(C) $V = \dfrac{125\left(5+4\sqrt{2}\right)\pi}{24}$. (D) $V = \dfrac{125\left(2+\sqrt{2}\right)\pi}{4}$.



Lời giải.



Ta thấy rằng khi xoay hình xung quanh trục XY thì hình vuông ở trên sẽ tạo thành hình trụ có bán kính đáy là $\frac{5}{2}$ và chiều cao là 5, khi đó thể tích của nó là $V_1 = 5\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{125\pi}{4}$.
Hình vuông ở dưới sẽ tạo thành hai hình nón có chung mặt đáy và có đường kính đáy là AB như hình bên. Chiều cao và bán kính đáy của hình nón này là $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ nên thể tích của khối hai nón ghép lại là $V_2 = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{125\pi\sqrt{2}}{6}$. Tuy nhiên, hai hình này có chung phần hình nón tạo thành khi xoay phần màu cam xung quanh XY. Dễ thấy phần chung này cũng là hình nón nhưng chiều cao và bán kính đáy là $\frac{5}{2}$.
Do đó, thể tích phần chung là $V_3 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{125\pi\sqrt{2}}{24}$

Vậy $V = V_1 + V_2 - V_3 = \frac{125\left(5+4\sqrt{2}\right)\pi}{24}$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;3)$ và $B(-1;2;5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

A $I(-2;2;1)$. B $I(1;0;4)$. C $I(2;0;8)$. D $I(2;-2;-1)$.

Lời giải.

Trung điểm AB là $(1;0;4)$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2+3t \\ z = 5-t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Vectơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương của d ?

A $\vec{u_1} = (0;3;-1)$. B $\vec{u_2} = (1;3;-1)$. C $\vec{u_3} = (1;-3;-1)$. D $\vec{u_4} = (1;2;5)$.

Lời giải.

Véc tơ chỉ phương là $\vec{u_1} = (0;3;-1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0)$; $B(0;-2;0)$;$C(0;0;3)$. Phương trình nào dưới dây là phương trình mặt phẳng (ABC)?

A $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{1}=1$. B $\frac{x}{-2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{3}=1$. C $\frac{x}{1}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{3}=1$. D $\frac{x}{3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-2}=1$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn đi qua 3 điểm A, B, C là $\frac{x}{1}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{3}=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y-2z-8=0$?

A $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$.
B $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$.
C $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.
D $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$.

Lời giải.

Gọi mặt cầu cần tìm là (S).

Ta có (S) là mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và bán kính R.

Vì (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y-2z-8=0$ nên ta có

$R=d(I;(P))=\dfrac{|1-2.2-2.(-1)-8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=3$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 3x-3y+2z+6=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A d cắt và không vuông góc với (P).
B d vuông góc với (P).
C d song song với (P).
D d nằm trong (P).

Lời giải.

Ta có đường thẳng d đi qua $M(-1;0;5)$ có vtcp $\vec{u}=(1;-3;-1)$ và mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}=(3;-3;2)$. $M\notin P\Rightarrow$ loại đáp án D.

$\vec{n},\vec{u}$ không cùng phương $\Rightarrow$ loại đáp án B.

$\vec{n}.\vec{u}=10\Rightarrow\vec{n},\vec{u}$ không vuông góc $\Rightarrow$ loại đáp án C.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;6;2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Tính tỉ số $\dfrac{AM}{BM}$.

A $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{1}{2}$.
B $\dfrac{AM}{BM}=2$.
C $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{1}{3}$.
D $\dfrac{AM}{BM}=3$.

Lời giải.

$M\in(Oxz)\Rightarrow M(x;0;z)$; $\overrightarrow{AB}=(7;3;1)\Rightarrow AB=\sqrt{59}$; $\overrightarrow{AM}=(x+2;-3;z-1)$ và A,B,M thẳng hàng $\Rightarrow\overrightarrow{AM}=k.\overrightarrow{AB}(k\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=7k\\-3=3k\\z-1=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-9\\-1=k\\z=0\end{cases}\Rightarrow M(-9;0;0)$.

$\overrightarrow{BM}=(-14;-6;-2)\Rightarrow BM=\sqrt{118}=2AB$.

Cách khác $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{d(A;(Oxz))}{d(B;(Oxz))}=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ và $d_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

A $(P): 2x-2z+1=0$.
B $(P): 2y-2z+1=0$.
C $(P): 2x-2y+1=0$.
D $(P): 2y-2z-1=0$.

Lời giải.

Ta có d_1 đi qua điểm $A(2;0;0)$ và có VTCP $\vec{u}_1 = (-1;1;1)$.
d_2 đi qua điểm $B(0;1;2)$ và có VTCP $\vec{u}_2 = (2;-1;-1)$.
Vì (P) song songvới hai đường thẳng d_1 và d_2 nên VTPT của (P) là $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (0;1;-1)$.
Khi đó (P) có dạng $y - z + D = 0 \Rightarrow$ loại đáp án A và C.
Lại có (P) cách đều d_1 và d_2 nên (P) đi qua trung điểm $M\left(0;\frac{1}{2};1\right)$ của AB.
Do đó $P: 2y - 2z + 1 = 0$.
Chọn đáp án B □

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(0;0;1)$, $B(m;0;0)$, $C(0;n;0)$, $D(1;1;1)$ với $m > 0; n > 0$ và $m + n = 1$. Biết rằng khi m, n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua D. Tính bán kính R của mặt cầu đó?

A $R = 1$. **B** $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **C** $R = \frac{3}{2}$. **D** $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.
Gọi $I(1;1;0)$ là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (Oxy).
Ta có phương trình theo đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1$.
Suy ra phương trình tổng quát của (ABC) là $nx + my + mnz - mn = 0$.
Mặt khác $\mathrm{d}(I;(ABC)) = \frac{|1 - mn|}{\sqrt{m^2 + n^2 + m^2n^2}} = 1$ (vì $m + n = 1$) và $ID = 1$.
$\Rightarrow ID = \mathrm{d}((I;(ABC))$.
Nên tồn tại mặt cầu tâm I (là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng Oxy) tiếp xúc với (ABC) và đi qua D. Khi đó $R = 1$.
Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. D	3. B	4. A	5. B	6. D	7. D	8. D	9. A	10. D
11. A	12. A	13. C	14. C	15. B	16. A	17. C	18. A	19. B	20. C
21. D	22. A	23. A	24. B	25. B	26. B	27. D	28. B	29. C	30. D
31. A	32. B	33. C	34. D	35. D	36. A	37. B	38. D	39. A	40. B
41. C	42. C	43. B	44. A	45. C	46. C	47. A	48. A	49. B	50. A

11 ĐỀ MINH HỌA 2017 - LẦN 3

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C). Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

(A) 2. **B** 3. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Vậy có ba giao điểm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log x$.

(A) $y' = \dfrac{1}{x}$. (B) $y' = \dfrac{\ln 10}{x}$. **C** $y' = \dfrac{1}{x \ln 10}$. (D) $y' = \dfrac{1}{10 \ln x}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, ta được $y' = \dfrac{1}{x \ln 10}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+1} - \dfrac{1}{5} > 0$.

(A) $S = (1; +\infty)$. (B) $S = (-1; +\infty)$. **C** $S = (-2; +\infty)$. (D) $S = (-\infty; -2)$.

Lời giải.

Ta có $5^{x+1} - \dfrac{1}{5} > 0 \Leftrightarrow 5^{x+1} > 5^{-1} \Leftrightarrow x + 1 > -1 \Leftrightarrow x > -2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (-2; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Kí hiệu a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $3 - 2\sqrt{2}i$. Tìm a, b.

(A) $a = 3; b = 2$. (B) $a = 3; b = 2\sqrt{2}$. (C) $a = 3; b = \sqrt{2}$. **D** $a = 3; b = -2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Số phức $3 - 2\sqrt{2}i$ có phần thực và phần ảo lần lượt là 3 và $-2\sqrt{2}$. Vậy $a = 3$; $b = -2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Tính môđun của số phức z biết $\overline{z} = (4 - 3i)(1 + i)$.

(A) $|z| = 25\sqrt{2}$. (B) $|z| = 7\sqrt{2}$. **C** $|z| = 5\sqrt{2}$. (D) $|z| = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overline{z} = (4 - 3i)(1 + i) = 7 + i \Rightarrow |\overline{z}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \Rightarrow |z| = 5\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Cho hàm số $y = \dfrac{x - 2}{x + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

B Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

(C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 7.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

A $y_{\text{CĐ}} = 5$. **B** $y_{\text{CT}} = 0$.

C $\min\limits_{\mathbb{R}} y = 4$. **D** $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 5$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

- $y_{\text{CĐ}} = 5$, $y_{\text{CT}} = 4$ chọn A.
- $x_{\text{CT}} = 0$, $x_{\text{CĐ}} = 1$ nên loại B.
- Hàm số không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ nên loại C, D.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 20$.

A $I(-1; 2; -4)$, $R = 5\sqrt{2}$. **B** $I(-1; 2; -4)$, $R = 2\sqrt{5}$.

C $I(1; -2; 4)$, $R = 20$. **D** $I(1; -2; 4)$, $R = 2\sqrt{5}$.

Lời giải.

- Pt mặt cầu $(x - x_\circ)^2 + (y - y_\circ)^2 + (z - z_\circ)^2 = R^2$ có tâm là $I(x_\circ; y_\circ; z_\circ)$, bán kính là: R.
- Do đó mặt cầu $(x-1)^2 + (y-(-2))^2 + (z-4)^2 = (2\sqrt{5})^2$ có tâm $I(1; -2; 4)$ và bán kính $R = 2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -2 + t \end{cases}$?

A $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-2}{1}$. **B** $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{-2}$.

C $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-2}{-2}$. **D** $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{1}$.

Lời giải.

Dựa vào phương trình tham số ta suy ra d qua $A(1; 0; -2)$ và có VTCP $\vec{u} = (2; 3; 1)$ nên suy ra d có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{1}$

Chọn đáp án D □

Câu 10. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x^2}$.

A $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$. **B** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$.

(C) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{x} + C$. (D) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{x} + C$.

Lời giải.

Ta có $\int \left(x^2 + \dfrac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2}{x} + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu tiệm cận?

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'			||	$+$	||	$-$	
y			$-\infty$	↗	$+\infty$ || 1	↘	0

(A) 1. **(B) 3.**
(C) 2. (D) 4.

Lời giải.

Căn cứ vào bảng biến thiên ta thấy:

- $\lim\limits_{x\to(-2)^+} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 0$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.

Tóm lại, đồ thị hàm số đã cho có ba đường tiệm cận.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Tính giá trị của biểu thức $P = \left(7+4\sqrt{3}\right)^{2017}\left(4\sqrt{3}-7\right)^{2016}$.

(A) $P = 1$. (B) $P = 7 - 4\sqrt{3}$. **(C) $P = 7 + 4\sqrt{3}$.** (D) $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2016}$.

Lời giải.

Ta viết lại $P = \left(7+4\sqrt{3}\right)\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2016}\left(4\sqrt{3}-7\right)^{2016} = \left(7+4\sqrt{3}\right)\left(\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(4\sqrt{3}-7\right)\right)^{2016}$.

Sử dụng máy tính, tính được $\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(4\sqrt{3}-7\right) = -1$. Suy ra $P = \left(7+4\sqrt{3}\right)(-1)^{2016} = \left(7+4\sqrt{3}\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho a là số thực dương, $a \neq 1$ và $P = \log_{\sqrt[3]{a}} a^3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $P = 1$. (B) $P = 1$. **(C) $P = 9$.** (D) $P = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $P = P = \log_{a^{1/3}} a^3 = 9\log_a a = 9$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

(A) $y = 3x^3 + 3x - 2$. (B) $y = 2x^3 - 5x + 1$. (C) $y = x^4 + 3x^2$. (D) $y = \dfrac{x-2}{x+1}$.

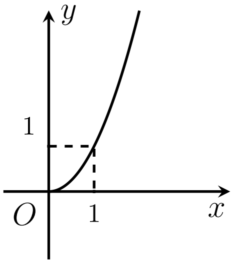
Lời giải.

- Xét $y = 3x^3 + 3x - 2$ có $y' = 9x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên chọn $y = 3x^3 + 3x - 2$.
- Xét $y = 2x^3 - 5x + 1$ có $y' = 6x^2 - 5, y' = 0$ là phương trình bậc 2 có nghiệm nên không thể đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

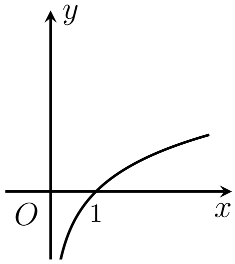
- Xét $y = x^4 + 3x^2$ có $y' = 4x^3 + 6x; y' = 0$ có nghiệm $x = 0$ nên y' sẽ đổi dấu khi qua $x = 0$ nên không thể đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.
- Xét $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ có tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ nên không thể đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

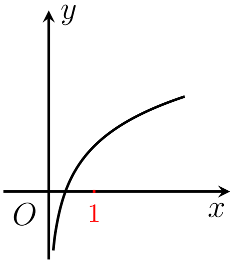
Câu 15. Cho hàm số $f(x) = x \ln x$. Một trong bốn đồ thị cho trong bốn phương án **A, B, C, D** dưới đây là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$. Tìm đồ thị đó.

A 

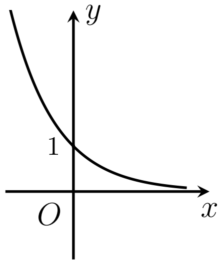
.

B 

.

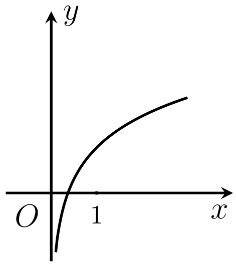
C 

.

D 

.

Lời giải.



Chúng ta có $y = f'(x) = \ln x + 1$ nên

- $y = \ln x + 1$ là hàm số xác định trên $(0; +\infty)$.
- $y(1) = \ln 1 + 1 = 1$, tức là đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; 1)$.

Từ đó suy ra, trong bốn đồ thị đã cho ở các phương án **A, B, C, D** chỉ có đồ thị hình bên là thỏa mãn các tính chất trên của hàm số $y = f'(x)$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Tính thể tích V của khối lặng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a.

A $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Ta có: $V = B \cdot h = a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3; -4; 0)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(3; 1; 0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.

A $D(-2; 0; 0)$ hoặc $D(-4; 0; 0)$. **B** $D(0; 0; 0)$ hoặc $D(-6; 0; 0)$.

C $D(6; 0; 0)$ hoặc $D(12; 0; 0)$. **D** $D(0; 0; 0)$ hoặc $D(6; 0; 0)$.

Lời giải.

Do $D \in Oy$ nên $D = (d; 0; 0)$.

Khi đó $AD = \sqrt{(d-3)^2 + (16)}, BC = 5$.

Theo giả thiết $AD = BC \Leftrightarrow \sqrt{(d-3)^2 + (16)} = 5 \Leftrightarrow (d-3)^2 + 16 = 25 \Leftrightarrow (d-3)^2 = 9$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d-3=-3 \\ d-3=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=0 \\ d=6 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} D(0;0;0) \\ D(6;0;0) \end{array}\right.$.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$. Tính giá trị của $P = z_1^2 + z_2^2 + z_1 z_2$.

A $P = 1$. B $P = 2$. C $P = -1$. D $P = 0$.

Lời giải.

Ta có $P = z_1^2 + z_2^2 + z_1 z_2 = (z_1 + z^2)^2 - z_1 z_2$.Theo vi-et ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = -1 \\ z_2 = 1 \end{cases}$.

Suy ra $P = 1 - 1 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \dfrac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

A $\min\limits_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$. B $\min\limits_{(0;+\infty)} y = 7$. C $\min\limits_{(0;+\infty)} y = \dfrac{33}{5}$. D $\min\limits_{(0;+\infty)} y = 2\sqrt[3]{9}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3 - \dfrac{8}{x^3} = \dfrac{3x^3 - 8}{x^3}$;$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{8}{3}}$. Ta có bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt[3]{\dfrac{8}{3}}$		$+\infty$
y'	‖	$-$	0	$+$	
y	‖ $+\infty$	$\searrow$	$3\sqrt[3]{9}$	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn đáp án A □

Từ bảng biến thiên suy ra: $\min\limits_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$.

Câu 20.

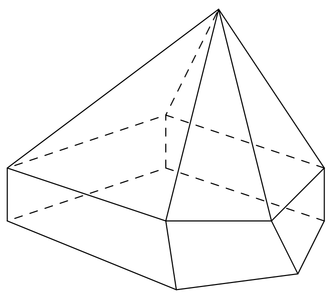
Hình đa diện trong hình vẽ bên có bao nhiêu mặt?

A 6.

B 10.

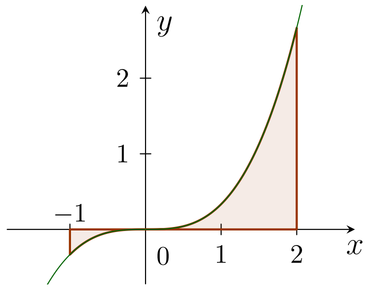
C 12.

D 11.



Câu 21.

Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và 2 đường thẳng $x = -1$, $x = 2$ (như hình vẽ bên). Đặt $a = \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$, $b = \int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A $S = b - a$. **B** $S = b + a$.
C $S = -b + a$. **D** $S = -b - a$.

Lời giải.

Ta có: $S = \int\limits_{-1}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x = -a + b.$

Chọn đáp án A □

Câu 22. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$.

A $S = \{-3; 3\}$. **B** $S = \{4\}$.
C $S = \{3\}$. **D** $S = \left\{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\right\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 1$.

Ta có

$$\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3 \Leftrightarrow \log_2(x-1)(x+1) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3 \end{array}\right..$$

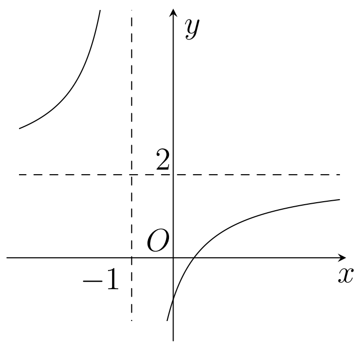
So với điều kiện, ta được: $x = 3$.

Vậy phương trình trên có tập nghiệm $S = \{3\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 23.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số trong 4 hàm số được liệt kê ở 4 phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?



A $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$. **B** $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.
C $y = \dfrac{2x-2}{x-1}$. **D** $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy $x = 0$ thì $y < 0$ nên loại hai hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$ và $y = \dfrac{2x-2}{x-1}$ không thỏa mãn.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -1$ và tiệm cận ngang là $y = 2$ nên hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ không thỏa mãn.

Vậy, trong 4 hàm số đã cho, chỉ có hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Tính tích phân $I=\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $u=x^2-1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $I=2\int_0^3\sqrt{u}\mathrm{d}u$. **B** $I=\int_1^2\sqrt{u}\mathrm{d}u$. **C** $I=\int_0^3\sqrt{u}\mathrm{d}u$. **D** $I=\frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{u}\mathrm{d}u$.

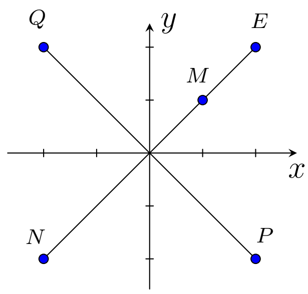
Lời giải.

Đặt $u=x^2-1\Rightarrow \mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=1\Rightarrow u=0$; $x=2\Rightarrow u=3$.

Do đó: $I=\int\limits_1^2 2x\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^3\sqrt{u}\mathrm{d}u$.

Chọn đáp án C □

Câu 25.
Trên mặt phẳng tọa độ, điểm M là điểm biểu diễn của số phức z (như hình vẽ bên). Điểm nào trong hình vẽ là điểm biểu diễn của số phức $2z$?



A Điểm N.

B Điểm Q.

C Điểm E.

D Điểm P.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$. Điểm biểu diễn của z là điểm $M(a;b)$.

$\Rightarrow 2z=2a+2bi$ có điểm biểu diễn trên mặt phẳng Oxy là $M_1(2a;2b)$.

Ta có $\overrightarrow{OM_1}=2\overrightarrow{OM}$ suy ra $M_1\equiv E$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Tính độ dài đường sinh l của hình nón đã cho.

A $l=\frac{\sqrt{5}a}{2}$. **B** $l=2\sqrt{2}a$. **C** $l=\frac{3a}{2}$. **D** $l=3a$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq}=\pi rl=\pi al=3\pi a^2\Rightarrow l=3a$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Cho $\int\limits_0^1\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x=a+b\ln\frac{1+\mathrm{e}}{2}$, với a,b là các số hữu tỉ. Tính $S=a^3+b^3$.

A $S=2$. **B** $S=-2$. **C** $S=0$. **D** $S=1$.

Lời giải.

$$\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}=\int\limits_0^1\frac{(\mathrm{e}^x+1)-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\mathrm{d}x-\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^x+1}=x\Big|_0^1-\ln|\mathrm{e}^x+1|\Big|_0^1=1-\ln\frac{1+e}{2}.$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}\Rightarrow S=a^3+b^3=0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 28. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng a.

(A) $V = \dfrac{\pi a^3}{4}$. (B) $V = \pi a^3$. (C) $V = \dfrac{\pi a^3}{6}$. (D) $V = \dfrac{\pi a^3}{2}$.

Lời giải.

Vì khối trụ ngoại tiếp hình lập phương cạnh bằng a nên $\begin{cases} R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \\ h = a \end{cases}$. Do đó $V = \pi R^2 h = \dfrac{\pi a^3}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;-1)$ và đi qua điểm $A(2;1;2)$. Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc với (S) tại A?

(A) $x + y - 3z - 8 = 0$. (B) $x - y - 3z + 3 = 0$.
(C) $x + y + 3z - 9 = 0$. (D) $x + y - 3z + 3 = 0$.

Lời giải.

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm. Khi đó (P) tiếp xúc với (S) tại A khi chỉ khi (P) đi qua $A(2;1;2)$ và nhận vectơ $\overrightarrow{IA} = (-1;-1;3)$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P) là $-x - y + 3z - 3 = 0 \Leftrightarrow x + y - 3z + 3 = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 1 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{2}$. Tính khoảng cách d giữa Δ và (P).

(A) $d = \dfrac{1}{3}$. (B) $d = \dfrac{5}{3}$. (C) $d = \dfrac{2}{3}$. (D) $d = 2$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;-2;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;1;2)$.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2;-2;-1)$.

Ta có $\vec{u}.\vec{n} = 2.2 + 1.(-2) + 2.(-1) = 0$.

Thế tọa độ $M(1;-2;1)$ vào phương trình của mặt phẳng (P) ta có $2 + 4 - 1 + 1 = 0$ (vô lý).

Vậy $\Delta \parallel (P)$.

Suy ra $d(\Delta, (P)) = d(M, (P)) = \dfrac{|2.1 - 2.(-2) - 1 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m-1)x^4 - 2(m-3)x^2 + 1$ **không** có cực đại.

(A) $1 \le m \le 3$. (B) $m \le 1$. (C) $m \ge 1$. (D) $1 < m \le 3$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4(m-1)x^3 - 4(m-3)x = 4x\left[(m-1)x^2 - (m-3)\right]$

Xét với $m = 1$: Khi đó $y = 4x^2 + 1$ hàm số không có cực đại. Vậy $m = 1$ thỏa mãn (1)

Xét với $m > 1$: Khi đó hàm số là hàm bậc 4 trùng phương với hệ số $a > 0$ để hàm số không có cực đại thì $y' = 0$ chỉ có một nghiệm duy nhất $x = 0$.

Hay $(m-1)x^2 - (m-3) = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = 0$.

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{m-3}{m-1}$ vô nghiệm hoặc có nghiệm $x = 0 \Leftrightarrow \dfrac{m-3}{m-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow 1 < m \leqslant 3$ (2)

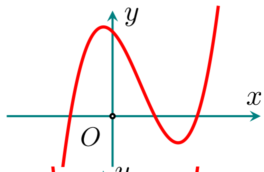
Xét với $m < 1$: Hàm số bậc 4 trùng phương có hệ số $a < 0$ luôn có cực đại (3)

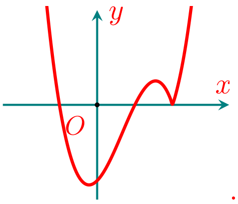
Kết luận: Từ (1), (2), (3) ta có để hàm số không có cực đại thì $1 \leqslant m \leqslant 3$.

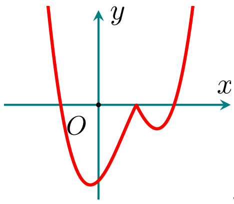
Chọn đáp án A □

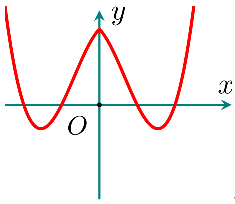
Câu 32.

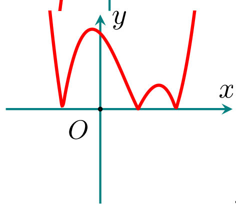
Hàm số $y = (x-2)(x^2-1)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = |x-2|(x^2-1)$?



A 

. **B** 

. **C** 

. **D** 

.

Lời giải.

Hàm số $y = (x-2)(x^2-1)$ có đồ thị (C)

Ta có $y = |x-2|\left(x^2-1\right) = \begin{cases} (x-2)\left(x^2-1\right) & \text{khi } x \geqslant 2 \\ -(x-2)\left(x^2-1\right) & \text{khi } x < 2 \end{cases}$

Cách vẽ đồ thị hàm số $y = |x-2|\left(x^2-1\right)$ như sau:

- Giữ nguyên đồ thị (C) ứng với $x \geqslant 2$.
- Lấy đối xứng đồ thị (C) ứng với $x < 2$ qua trục Ox. Bỏ đồ thị (C) ứng với $x < 2$.

Hợp 2 phần đồ thị trên là đồ thị hàm số $y = |x-2|\left(x^2-1\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a \neq 1, a \neq \sqrt{b}$ và $\log_a b = \sqrt{3}$. Tính $P = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

A $P = -5 + 3\sqrt{3}$. **B** $P = -1 + \sqrt{3}$. **C** $P = -1 - \sqrt{3}$. **D** $P = -5 - 3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Cách 1: Phương pháp tự luận.

$$P = \frac{\log_a \sqrt{\dfrac{b}{a}}}{\log_a \dfrac{\sqrt{b}}{a}} = \frac{\dfrac{1}{2}\left(\log_a b - 1\right)}{\log_a \sqrt{b} - 1} = \frac{\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\dfrac{1}{2}\log_a b - 1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-2} = -1 - \sqrt{3}.$$

Cách 2: Phương pháp trắc nghiệm.

Chọn $a = 2$, $b = 2^{\sqrt{3}}$. Bấm máy tính ta được $P = -1 - \sqrt{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\,(1 \leqslant x \leqslant 3)$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2-2}$.

A $V = 32 + 2\sqrt{15}$. **B** $V = \dfrac{124\pi}{3}$.

C $V = \dfrac{124}{3}$. **D** $V = \left(32 + 2\sqrt{15}\right)\pi$.

Lời giải.

Diện tích thiết diện là $S(x) = 3x\sqrt{3x^2-2}$.

Suy ra thể tích vật thể tạo thành là: $V = \displaystyle\int_1^3 S(x)\mathrm{d}x = \int_1^3 3x\sqrt{3x^2-2}\,\mathrm{d}x$.

Sử dụng MTCT ta được : $V = \dfrac{124}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Hỏi phương trình $3x^2 - 6x + \ln(x+1)^3 + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A 2. B 1. C 3. D 4.

Lời giải.

Điều kiện: $x > -1$.

Phương trình đã cho tương đương với $3x^2 - 6x + 3\ln(x+1) + 1 = 0$.

Xét hàm số $y = 3x^2 - 6x + 3\ln(x+1) + 1$ liên tục trên khoảng $(-1; +\infty)$.

$y' = 6(x-1) + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{6x^2 - 3}{x+1}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (thỏa điều kiện).

x	-1		$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\searrow$	$f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

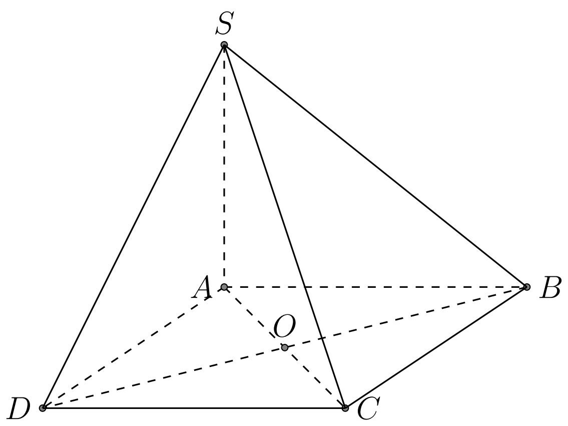
Vì $f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$, $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy, SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc bằng 30°. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{18}$. B $V = \sqrt{3}a^3$. C $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$. D $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải.



Góc giữa SD và mp (SAB) là $\widehat{ASD} = 30^\circ \Rightarrow SA = a \cdot \cot 30^\circ = \sqrt{3}a$.

Khi đó $V = \dfrac{1}{3}Bh = \dfrac{1}{3}a^2 a\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{-1} = \dfrac{z-3}{4}$. Phương trình nào dưới đây là phương hình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng $x+3=0$?

A $\begin{cases} x=-3 \\ y=-5-t \\ z=-3+4t \end{cases}$.
B $\begin{cases} x=-3 \\ y=-5+t \\ z=3+4t \end{cases}$.
C $\begin{cases} x=-3 \\ y=-5+2t \\ z=3-t \end{cases}$.
D $\begin{cases} x=-3 \\ y=-6-t \\ z=7+4t \end{cases}$.

Lời giải.

Cách 1: Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(1;-5;3)$ và có VTCP $\vec{u}_d = (2;-1;4)$

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với $(P) : x+3=0$.

Suy ra mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M_0(1;-5;3)$ và có VTPT là $[\vec{n}_P; \vec{u}_d] = (0;4;1)$

$\Rightarrow (Q) : 4y+z+17=0$.

Phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) là

$\begin{cases} 4y+z+17=0 \\ x+3=0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=-3 \\ y=-6-t \\ z=7+4t \end{cases}$.

Cách 2. Trắc nghiệm.

Gọi $I = d \cap (\alpha)$, suy ra $I(-3;-3;-5)$.

Dễ thấy chỉ có đáp án D thỏa mãn

Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x = 10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A $I=-12$.
B $I=8$.
C $m=1$.
D $I=-8$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u=x+1 \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$. Khi đó $I=(x+1)f(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $10 = 2f(1)-f(0) - \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -10+2=-8$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -8$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Hỏi có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z-i|=5$ và z^2 là số thuần ảo?

A 2.
B 3.
C 4.
D 0.

Lời giải.

Đặt $z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$.

$|z-i|=5 \Leftrightarrow |x+iy-i|=5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=5 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=25$.

z^2 là số thuần ảo hay $(x+iy)^2$ là số thuần ảo

$\Leftrightarrow x^2+2ixy-y^2$ là số thuần ảo $\Rightarrow x^2-y^2=0 \Leftrightarrow x=\pm y$.

Vậy ta có hệ phương trình

$\begin{cases} x^2+(y-1)^2=25 \\ x=y \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2+(y-1)^2=25 \\ x=-y. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2+(y-1)^2=25 \\ x=y \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y^2+(y-1)^2=25 \\ x=-y. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2-y-12=0 \\ x=y \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y^2-y-12=0 \\ x=-y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ x=4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y=-3 \\ x=-3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y=4 \\ x=-4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y=-3 \\ x=3. \end{cases}$

Vậy ta có 4 số phức thỏa mãn điều kiện trên.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho hàm số $y=\dfrac{\ln x}{x}$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $2y'+xy''=-\dfrac{1}{x^2}$. **B** $y'+xy''=\dfrac{1}{x^2}$. **C** $y'+xy''=-\dfrac{1}{x^2}$. **D** $2y'+xy''=\dfrac{1}{x^2}$.

Lời giải.

Cách 1. $y'=\dfrac{(\ln x)'\cdot x-x'\cdot \ln x}{x^2}=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

$y''=\dfrac{(1-\ln x)'\cdot x^2-(x^2)'(1-\ln x)}{x^4}=\dfrac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=\dfrac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=-\dfrac{1+2(1-\ln x)}{x^3}$

$=-\dfrac{3-2\ln x}{x^3}$.

Suy ra $2y'+xy''=2\cdot\dfrac{1-\ln x}{x^2}-x\dfrac{3-2\ln x}{x^3}=\dfrac{2-2\ln x-3+2\ln x}{x^2}=-\dfrac{1}{x^2}$.

Cách 2. Ta có $xy=\ln x$, lấy đạo hàm hai vế theo biến x, ta được $y+xy'=\dfrac{1}{x}$.

Tiếp tục lấy đạo hàm hai vế theo biến x của biểu thức trên ta được $y'+y'+xy''=-\dfrac{1}{x^2}$ hay $2y'+xy''=-\dfrac{1}{x^2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A 2. **B** 1. **C** 0. **D** 3.

Lời giải.

TH1. $m=1$. Ta có $y=-x+4$ là phương trình của một đường thẳng có hệ số góc âm nên hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó nhận $m=1$.

TH2. $m=-1$. Ta có $y=-2x^2-x+4$ là phương trình của một đường Parabol nên hàm số không thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó loại $m=-1$.

TH3. $m\neq\pm1$. Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty) \Leftrightarrow y'\leqslant 0, \forall x\in\mathbb{R}$, dấu "=" chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow 3(m^2-1)x^2+2(m-1)x-1\leqslant 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ (m-1)^2 + 3(m^2-1) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ (m-1)(4m+2) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -\dfrac{1}{2} \leqslant m \leqslant 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant m < 1$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 0$.

Vậy có 2 giá trị m nguyên cần tìm $m = 0$ hoặc $m = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 6x - 2y + z - 35 = 0$ và điểm $A(-1;3;6)$. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P). Tính OA'.

A $OA' = 3\sqrt{26}$. **B** $OA' = 5\sqrt{3}$. **C** $OA' = \sqrt{46}$. **D** $OA' = \sqrt{186}$.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng qua A và vuông góc với mp (P) nên d có VTCP là $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{n_P} = (6;-2;1)$

PTTS của d: $\begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = 3 - 2t \\ z = 6 + t. \end{cases}$

Gọi H là hình chiếu của A trên mp (P). Khi đó tọa độ điểm H là nghiệm hệ phương trình:

$\begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = 3 - 2t \\ z = 6 + t \\ 6x - 2y + z - 35 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 5 \\ y = 1 \\ z = 7 \end{cases}$ Suy ra $H(5;1;7)$.

Vì A' là điểm đối xứng của A qua (P) nên H là trung điểm của AA'. Suy ra $A'(11;-1;8)$.

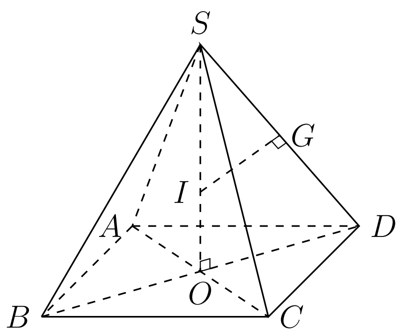
Vậy $OA' = \sqrt{186}$.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a$, cạnh bên bằng $5a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A $R = \sqrt{3}a$. **B** $R = \sqrt{2}a$. **C** $R = \dfrac{25a}{8}$. **D** $R = 2a$.

Lời giải.



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, G là trung điểm SD, $GI \perp SD, I \in SO$.

Ta có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a$ nên $BD = 3\sqrt{2}a.\sqrt{2} = 6a$, $OD = 3a$.

Xét $\triangle SOD$ vuông tại O ta có: $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = 4a$.

Ta có $\triangle SGI$ đồng dạng với $\triangle SOD$ (g-g), suy ra $\dfrac{SO}{SG} = \dfrac{SD}{SI} \Rightarrow 4a.R = \dfrac{1}{2}(5a)^2 \Rightarrow R = \dfrac{25a}{8}\cdot$

Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2\cos 2x}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tính $I = \displaystyle\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

(A) $I=-6$. (B) $I=0$. (C) $I=-2$. (D) $I=6$.

Lời giải.

Cách 1. Tự luận.

Đặt $t=-x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=-\dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow t=\dfrac{3\pi}{2}$; $x=\dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow t=-\dfrac{3\pi}{2}$. Suy ra $I=\displaystyle\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-t)\mathrm{d}t$.

Mặt khác $f(t)+f(-t)=\sqrt{2+2\cos 2t}=\sqrt{4\cos^2 t}=2|\cos t|$ (thay $x=t$).

Ta có $2I=\displaystyle\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} [f(t)+f(-t)]\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2|\cos t|\,\mathrm{d}t$.

Suy ra $I=\displaystyle\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos t|\,\mathrm{d}t$.

$I=\displaystyle\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos t|\,\mathrm{d}t=2\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos t|\,\mathrm{d}t$. $\left(\text{Do } |\cos t| \text{ là hàm số chẵn trên đoạn } \left[-\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]\right)$

$=2\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\,\mathrm{d}t+2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos t|\,\mathrm{d}t=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\mathrm{d}t-2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos t\mathrm{d}t=2\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\sin t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=6.$

Cách 2. Trắc nghiệm.

Ta có: $f(x)+f(-x)=2|\cos x| \Leftrightarrow f(x)+f(-x)=|\cos x|+|\cos(-x)|$

nên ta có thể chọn $f(x)=|\cos x|$.

Suy ra $I=\displaystyle\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x|\,\mathrm{d}x=6$ (bấm máy).

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong $[-2017;2017]$ để phương trình $\log(mx)=2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất?

(A) 2017. (B) 4014. (C) 2018. (D) 4015.

Lời giải.

Điều kiện: $x>-1$ và $x\neq 0$.

$\log(mx)=2\log(x+1) \Leftrightarrow mx=(x+1)^2 \Leftrightarrow m=\dfrac{(x+1)^2}{x}$

Xét hàm: $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x}\ (x>-1, x\neq 0)$; $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1(\text{ loại}) \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên:

x	-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	0	$+$	
y	0 ↘		$-\infty$ || $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

Dựa vào BBT, phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m=4 \\ m<0 \end{array}\right.$.

Vì $m \in [-2017; 2017]$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên chỉ có 2018 giá trị m nguyên thỏa yêu cầu là $m \in \{-2017; -2016; \cdots ; -1; 4\}$.

Chú ý: Trong, ta đã bỏ qua điều kiện $mx > 0$ vì với phương trình $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ với $0 < a \neq 1$ ta chỉ cần điều kiện $f(x) > 0$ (hoặc $g(x) > 0$)

Chọn đáp án C □

Câu 46. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2-1)x$ có hai điểm cực trị là A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d : y = 5x - 9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A 0. **B** 6. **C** -6. **D** 3.

Lời giải.

$y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2-1)x \Rightarrow y' = x^2 - 2mx + (m^2-1)$

$\Delta' = m^2 - (m^2-1) = 1$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m+1 \\ x = m-1 \end{array}\right. \Rightarrow A\left(m+1, \dfrac{m^3-3m-2}{3}\right); B\left(m-1, \dfrac{m^3-3m+2}{3}\right)$

Hai điểm A, B khác phía với đường thẳng d và có khoảng cách tới d bằng nhau tức là trung điểm I của AB thuộc đường thẳng d, ta có:

$I\left(m, \dfrac{m^3-3m}{3}\right) \in (d) \Rightarrow m^3 - 18m + 27 = 0$

Ta có $(m-3)(m^2+3m-9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = \dfrac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Vậy tổng các phần tử của S bằng 0.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 5 = 0$. Giả sử điểm $M \in (P)$ và $N \in (S)$ sao cho cùng phương với $\vec{u} = (1; 0; 1)$ và khoảng cách giữa M và N là lớn nhất. Tính MN.

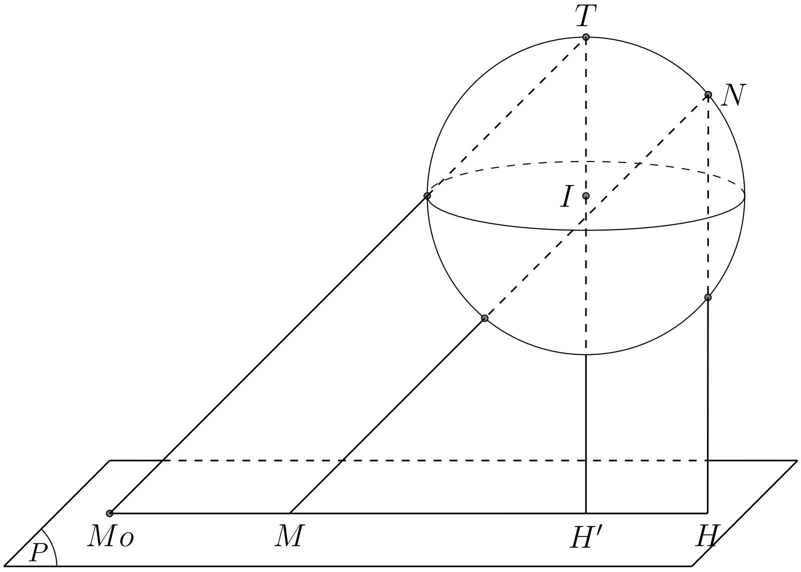
A $MN = 3$. **B** $MN = 1 + 2\sqrt{2}$. **C** $MN = 3\sqrt{2}$. **D** $MN = 14$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ bán kính $R = 1$.

Ta có $d(I, (P)) = \dfrac{|-1-4+2-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = 2 > R$ nên (P) không cắt (S).

Gọi d là đường thẳng qua I và vuông góc với (P). Gọi T là giao điểm của d và mặt cầu (S) thỏa $d(T;(P)) > d(I;(P))$.



Ta có $d(T,(P)) = d(I,(P)) + R = 2 + 1 = 3$.

Ta có $\cos\left(\vec{u}, \overrightarrow{n_{(P)}}\right) = \dfrac{1.1 - 2.0 + 1.2}{\sqrt{1+(-2)^2+2^2}.\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Đường thẳng MN có véctơ chỉ phương là $\vec{u}$ nên ta có

$\sin(MN,(P)) = |\cos(\vec{u}, \overrightarrow{n_P})| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (MN,(P)) = 45^\circ$.

Gọi H là hình chiếu của N lên (P). Ta có $MN = \dfrac{NH}{\sin 45^\circ} = NH.\sqrt{2}$.

Do đó MN lớn nhất khi NH lớn nhất.

Điều này xảy ra khi $N \equiv T$ và $H \equiv H'$ với H' là hình chiếu của I lên (P).

Khi đó $NH_{\max} = TH' = 3$ và $MN_{\max} = NH_{\max}.\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Xét số phức z thỏa mãn $|z+2-i| + |z-4-7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z-1+i|$. Tính $P = m + M$.

A $P = \sqrt{13} + \sqrt{73}$. **B** $P = \dfrac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$. **C** $P = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}$. **D** $P = \dfrac{5\sqrt{2}+\sqrt{73}}{2}$.

Lời giải.

Cách 1. Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z. Các điểm $A(-2;1)$, $B(4,7)$, $C(1;-1)$.

Ta có $|z+2-i| + |z-4-7i| = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow MA + MB = 6\sqrt{2}$, mà $AB = 6\sqrt{2} \Rightarrow MA + MB = AB$.

Suy ra M thuộc đoạn thẳng AB.

Phương trình đường thẳng $AB: y = x + 3$, với $x \in [-2;4]$.

Ta có $|z-1+i| = MC \Rightarrow |z-1+i|^2 = MC^2 = (x-1)^2+(y+1)^2 = (x-1)^2+(x+4)^2 = 2x^2+6x+17$

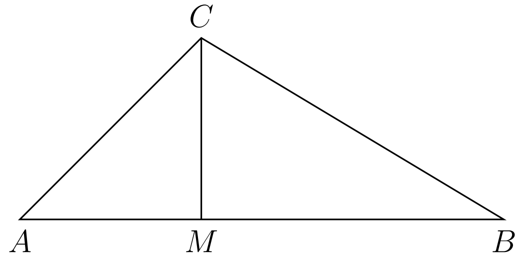
Đặt $f(x) = 2x^2 + 6x + 17$, $x \in [-2;4]$.

$f'(x) = 4x + 6$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$ (nhận)

Ta có $f(-2) = 13$, $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{25}{2}$, $f(4) = 73$.

Vậy $f(x)_{\max} = f(4) = 73$, $f(x)_{\min} = f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{25}{2}$.

$\Rightarrow M=\sqrt{73},\ m=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}.\ \Rightarrow P=\dfrac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}.$
Cách 2. Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z.
Các điểm $A(-2;1)$, $B(4,7)$, $C(1;-1)$.
Ta có $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}\Leftrightarrow MA+MB=6\sqrt{2}$, mà $AB=6\sqrt{2}\Rightarrow MA+MB=AB$
Suy ra M thuộc đoạn thẳng AB.

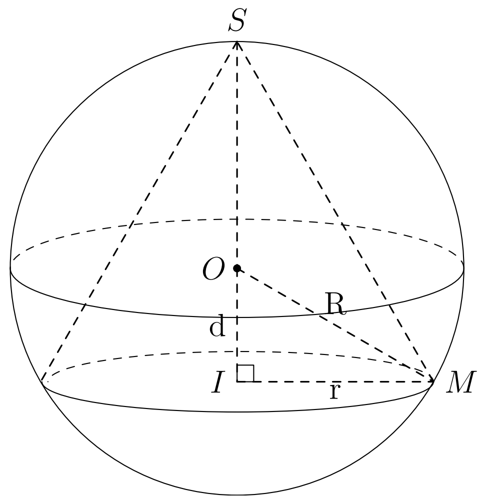


Phương trình đường thẳng $AB: y=x+3$, với $x\in[-2;4]$.
$CM_{\min}=\mathrm{d}(C;AB)=\dfrac{5}{\sqrt{2}}.$
$CB=\sqrt{73}; CA=\sqrt{13}\Rightarrow CM_{\max}=CB=\sqrt{73}.$
Vậy $P=\sqrt{73}+\dfrac{5}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{73}+5\sqrt{2}}{2}$
Chọn đáp án B □

Câu 49. Cho mặt cầu tâm O, bán kính R. Xét mặt phẳng (P) thay đổi cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C). Hình nón (N) có đỉnh S nằm trên mặt cầu, có đáy là đường tròn (C) và có chiều cao là $h (h>R)$. Tính h để thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất.

A $h=\sqrt{3}R$. **B** $h=\sqrt{2}R$. **C** $h=\dfrac{4R}{3}$. **D** $h=\dfrac{3R}{2}$.

Lời giải.



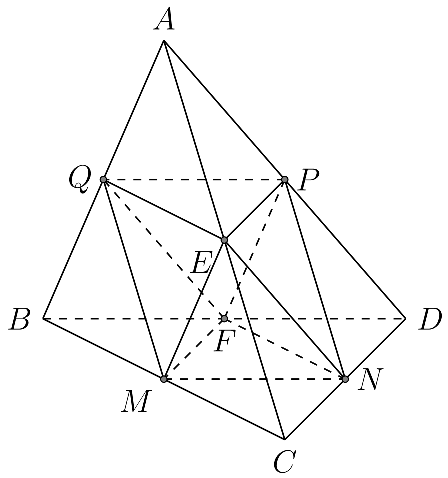
Ta biết rằng khi cho trước đường tròn (C) bất kỳ nằm trên mặt cầu, hình nón (N) có đáy là (C) sẽ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi điểm S thỏa mãn SO vuông góc với mặt phẳng chứa (C). Vậy trong bài toán này ta chỉ xét các hình nón đỉnh S với điểm S thỏa SO vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến (C).
Thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) là

$V = \dfrac{1}{3}h.S_{(C)} = \dfrac{1}{3}h.\pi.r^2 = \dfrac{1}{3}h.\pi.\left[R^2 - (h-R)^2\right] = \dfrac{1}{3}\pi(-h^3 + 2h^2R)$.
Xét hàm $f(h) = -h^3 + 2h^2R, h \in (R, 2R)$, có $f'(h) = -3h^2 + 4hR$.
$f'(h) = 0 \Leftrightarrow -3h^2 + 4hR = 0 \Leftrightarrow h = 0$ hoặc $h = \dfrac{4R}{3}$. Lập bảng biến thiên ta tìm được $\max f(h) = \dfrac{32}{27}R^3$, tại $h = \dfrac{4R}{3}$. Vậy thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất là $V = \dfrac{1}{3}\pi\dfrac{32}{27}R^3 = \dfrac{32}{81}\pi R^3$ khi $h = \dfrac{4R}{3}$.
C.ách khác:
Gọi O là tâm mặt cầu, I và r là bán kính của đường tròn (C).
Ta có $OI = h - R$ và $r^2 = R^2 - OI^2 = 2Rh - h^2$.
Thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) là
$V = \dfrac{1}{3}h.S_{(C)} = \dfrac{1}{3}h.\pi.r^2 = \dfrac{1}{3}h.\pi.\left[R^2 - (h-R)^2\right] = \dfrac{1}{3}\pi h^2(2R - h)$.
Ta có $h.h.(4R - 2h) \leqslant \left(\dfrac{h + h + 4R - 2h}{3}\right)^3 = \left(\dfrac{4R}{3}\right)^3 \Rightarrow h^2(2R - h) \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4R}{3}\right)^3$
Do đó V lớn nhất khi $h = 4R - 2h \Leftrightarrow h = \dfrac{4R}{3}$
Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho khối tứ diện có thể tích bằng V. Gọi V' là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho, tính tỉ số $\dfrac{V'}{V}$.

A $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{2}$. **B** $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{4}$. **C** $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{2}{3}$. **D** $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{5}{8}$.

Lời giải.



Cách 1. Đặc biệt hóa tứ diện cho là tứ diện đều cạnh a. Hình đa diện cần tính có được bằng cách cắt 4 góc của tứ diện, mỗi góc là cũng là một tứ diện đều có cạnh bằng $\dfrac{a}{2}$.
Do đó thể tích phần cắt bỏ là $V'' = 4.\dfrac{V}{8} = \dfrac{V}{2}$.
(Vì với tứ diện cạnh giảm nửa thì thể tích giảm $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$)
Vậy $V' = \dfrac{V}{2} \Leftrightarrow \dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{2}$.
Cách 2. Khối đa diện là hai khối chóp tứ giác (giống nhau) có cùng đáy là hình bình hành úp lại. Suy ra: $V' = 2V_{N.MEPF} = 4.V_{N.MEP} = 4.V_{P.MNE} = 4.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{4}V = \dfrac{1}{2}V$

(Do chiều cao giảm một nửa, cạnh đáy giảm một nửa nên diện tích giảm 4)

Cách 3. Ta có $\dfrac{V'}{V}=\dfrac{V-V_{A.QEP}-V_{B.QMF}-V_{C.MNE}-V_{D.NPF}}{V}$

$=1-\dfrac{V_{A.QEP}}{V}-\dfrac{V_{B.QMF}}{V}-\dfrac{V_{C.MNE}}{V}-\dfrac{V_{D.NPF}}{V}=1-\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}.$

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. C	3. C	4. D	5. C	6. B	7. A	8. D	9. D	10. A
11. B	12. C	13. C	14. A	15. C	16. D	17. D	18. D	19. A	20. D
21. A	22. C	23. B	24. C	25. C	26. D	27. C	28. D	29. D	30. D
31. A	32. A	33. C	34. C	35. C	36. D	37. D	38. D	39. C	40. A
41. A	42. D	43. C	44. D	45. C	46. A	47. C	48. B	49. C	50. A

12 ĐỀ THI THQG 2017 - MÃ ĐỀ 101

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho phương trình $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$. Khi đặt $t = 2^x$, ta được phương trình nào dưới đây?

(A) $2t^2 - 3 = 0$. (B) $t^2 + t - 3 = 0$. (C) $4t - 3 = 0$. (D) $t^2 + 2t - 3 = 0$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $2^{2x} + 2.2^x - 3 = 0$.

Đặt $t = 2^x$ với $t > 0$, ta được: $t^2 + 2t - 3 = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$.

(A) $\displaystyle\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = 3\sin 3x + C$. (B) $\displaystyle\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin 3x}{3} + C$.

(C) $\displaystyle\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin 3x}{3} + C$. (D) $\displaystyle\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = \sin 3x + C$.

Lời giải.

$$\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \cos 3x\,\mathrm{d}(3x) = \frac{\sin 3x}{3} + C$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Số phức nào dưới đây là số thuần ảo?

(A) $z = -2 + 3i$. (B) $z = 3i$. (C) $z = -2$. (D) $z = \sqrt{3} + i$.

Lời giải.

Số phức $0 + bi$, $(b \in \mathbb{R})$ được gọi là số thuần ảo.

Vậy số $z = 3i$ là số thuần ảo.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

(A) Hàm số có ba điểm cực trị. (B) Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.

(C) Hàm số có giá trị cực đại bằng 0. (D) Hàm số có hai điểm cực tiểu.

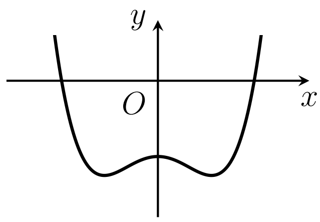
Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có giá trị cực đại bằng 3. Suy ra khẳng định **sai** là "Hàm số có giá trị cực đại bằng 0".

Chọn đáp án (C) □

Câu 5.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



(A) $y = -x^3 + x^2 - 1$.
B $y = x^4 - x^2 - 1$.
(C) $y = x^3 - x^2 - 1$.
(D) $y = -x^4 + x^2 - 1$.

Lời giải.

Đường cong có hình dạng là đồ thị hàm số dạng $y = ax^4 + bx^2 + c$ với hệ số $a > 0$. Suy ra nó là đồ thị là của hàm số $y = x^4 - x^2 - 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Cho a là số thực dương khác 1. Tính $I = \log_{\sqrt{a}} a$.

(A) $I = \dfrac{1}{2}$.
(B) $I = 0$.
(C) $I = -2$.
D $I = 2$.

Lời giải.

$I = \log_{\sqrt{a}} a = \log_{a^{\frac{1}{2}}} a = 2\log_a a = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Cho hai số phức $z_1 = 5 - 7i$ và $z_2 = 2 + 3i$. Tìm số phức $z = z_1 + z_2$.

A $z = 7 - 4i$.
(B) $z = 2 + 5i$.
(C) $z = -2 + 5i$.
(D) $z = 3 - 10i$.

Lời giải.

$z = z_1 + z_2 = (5 - 7i) + (2 + 3i) = 7 - 4i$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho hàm số $y = x^3 + 3x + 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
(B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
C Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải.

$y = x^3 + 3x + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 5 = 0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

(A) $Q(2; -1; 5)$.
(B) $P(0; 0; -5)$.
(C) $N(-5; 0; 0)$.
D $M(1; 1; 6)$.

Lời giải.

Sử dụng chức năng CALC của MTCT tìm được $M(1; 1; 6)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy)?

(A) $\vec{i} = (1; 0; 0)$.
B $\vec{k} = (0; 0; 1)$.
(C) $\vec{j} = (0; 1; 0)$.
(D) $\vec{m} = (1; 1; 1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oxy) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Tính thể tích V của khối trụ có bán kính đáy $r = 4$ và chiều cao $h = 4\sqrt{2}$.

(A) $V = 128\pi$. (B) $V = 64\sqrt{2}\pi$. (C) $V = 32\pi$. (D) $V = 32\sqrt{2}\pi$.

Lời giải.

Thể tích khối trụ $V = \pi r^2.h = \pi.4^2.4\sqrt{2} = 64\sqrt{2}\pi$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$.

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

$y = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16} = \dfrac{(x+1)(x-4)}{(x+4)(x-4)}$.

$\lim\limits_{x \to -4^+} y = +\infty \Rightarrow x = -4$ là tiệm cận đứng của đồ thị.

$\lim\limits_{x \to 4} y = \dfrac{5}{8} \Rightarrow x = -4$ không là tiệm cận đứng của đồ thị.

Vậy đồ thị có 1 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Hàm số $y = \dfrac{2}{x^2 + 1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(0; +\infty)$. (B) $(-1; 1)$. (C) $(-\infty; +\infty)$. (D) $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

$y = \dfrac{2}{x^2+1} \Rightarrow y' = -\dfrac{4x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow y' > 0, \forall x \in (-\infty; 0)$ và $y' < 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

(A) $V = \pi - 1$. (B) $V = (\pi - 1)\pi$. (C) $V = (\pi + 1)\pi$. (D) $V = \pi + 1$.

Lời giải.

Thể tích $V = \pi \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{2 + \cos x})^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + \cos x) \,\mathrm{d}x = \pi(2x + \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = (\pi + 1)\pi$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Với a, b là các số thực dương tùy ý và a khác 1, đặt $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $P = 9\log_a b$. (B) $P = 27\log_a b$. (C) $P = 15\log_a b$. (D) $P = 6\log_a b$.

Lời giải.

$P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6 = 3\log_a b + \dfrac{1}{2}.6\log_a b = 6\log_a b$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_5 \dfrac{x-3}{x+2}$.

(A) $D = \mathbb{R} \backslash \{-2\}$. (B) $D = (-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.

(C) $D = (-2; 3)$. (D) $D = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x+2\neq 0 \\ \dfrac{x-3}{x+2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$.

Vậy $D=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x+4\geq 0$.

A. $S=(-\infty;2]\cup[16;+\infty)$.
B. $S=[2;16]$.
C. $S=(0;2]\cup[16;+\infty)$.
D. $S=(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x>0$.

Đặt $t=\log_2 x$, bất phương trình đã cho trở thành $t^2-5t+4\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\geq 4 \\ t\leq 1\end{array}\right.$.

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x\geq 4 \\ \log_2 x\leq 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 16 \\ x\leq 2\end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S=(0;2]\cup[16;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4 mặt phẳng.
B. 3 mặt phẳng.
C. 6 mặt phẳng.
D. 9 mặt phẳng.

Lời giải.

Hình hộp chữ nhật có các mặt phẳng đối xứng là các mặt phẳng trung trực của các cặp cạnh đối $\Rightarrow$ có 3 mặt đối xứng.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(3;-1;1)$ và vuông góc đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$?

A. $3x-2y+z+12=0$.
B. $3x+2y+z-8=0$.
C. $3x-2y+z-12=0$.
D. $x-2y+3z+3=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng vuông góc với Δ nhận $\overrightarrow{u_\Delta}=(3;-2;1)$ làm vtpt $\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng cần tìm có dạng $3(x-3)-2(y+1)+(z-1)=0\Leftrightarrow 3x-2y+z-12=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(2;3;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x+3y-z+5=0$?

A. $\begin{cases} x=1+3t \\ y=3t \\ z=1-t.\end{cases}$
B. $\begin{cases} x=1+t \\ y=3t \\ z=1-t.\end{cases}$
C. $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+3t \\ z=1-t.\end{cases}$
D. $\begin{cases} x=1+3t \\ y=3t \\ z=1+t.\end{cases}$

Lời giải.

Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) nhận $\overrightarrow{n_{(P)}} = (1;3;-1)$ làm véc-tơ chỉ phương $\Rightarrow$ phương trình đường thẳng là $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3+3t \\ z = -t \end{cases}$.

Lấy $t = -1 \Rightarrow N(1;0;1)$ thuộc đường thẳng $\Rightarrow$ đáp án đúng là: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 3t \\ z = 1-t \end{cases}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{14}}{2}$. **(D)** $V = \dfrac{a^3\sqrt{14}}{6}$.

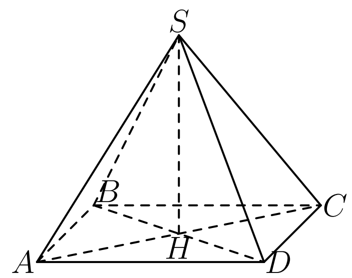
Lời giải.

Cạnh đáy $AB = a \Rightarrow$ diện tích đáy $S_{\text{ABCD}} = a^2$.

Đường chéo $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow HA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Cạnh bên $SA = 2AB = 2a \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - HA^2} = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

Vậy thể tích $V = \dfrac{1}{3}.a^2.\dfrac{a\sqrt{14}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{14}}{6}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Phương trình nào dưới đây nhận hai số phức $1+\sqrt{2}i$ và $1-\sqrt{2}i$ là nghiệm?

(A) $z^2+2z+3=0$. (B) $z^2-2z-3=0$. **(C)** $z^2-2z+3=0$. (D) $z^2+2z-3=0$.

Lời giải.

Áp dụng định lý Vi-et ta có tổng hai số phức là 2 và tích của chúng là 3 $\Rightarrow$ hai số phức là nghiệm của phương trình $z^2-2z+3=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0;2]$.

(A) $m = 11$. (B) $m = 0$. **(C)** $m = -2$. (D) $m = 3$.

Lời giải.

Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 14x + 11$ có nghiệm $x = 1 \in [0;2]$.

Ta có $y(0) = -2$; $y(1) = 3$; $y(2) = 0 \Rightarrow m = \min\limits_{[0;2]} y = -2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Tìm tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{3}}$.

(A) $D = (-\infty;1)$. **(B)** $D = (1;+\infty)$. (C) $D = \mathbb{R}$. (D) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x - 1 > 0$ (vì $\frac{1}{3}$ không nguyên) $\Rightarrow x > 1 \Rightarrow$ tập xác định $D = (1;+\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Cho $\int\limits_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 12$. Tính $I = \int\limits_0^2 f(3x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = 6$. (B) $I = 36$. (C) $I = 2$. **D** $I = 4$.

Lời giải.

$I = \int\limits_0^2 f(3x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\int\limits_0^2 f(3x)\,\mathrm{d}(3x) = \dfrac{1}{3}\int\limits_0^6 f(u)\,\mathrm{d}u$ (với $u = 3x$)

$\Rightarrow I = \dfrac{1}{3}.12 = 4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp một hình lập phương có cạnh bằng $2a$.

(A) $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. (B) $R = a$. (C) $R = 2\sqrt{3}a$. **D** $R = a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Cạnh hình lập phương bằng $2a \Rightarrow$ đường chéo hình lập phương bằng $2a\sqrt{3} \Rightarrow$ bán kính mặt cầu bằng $a\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ thỏa $f'(x) = 3 - 5\sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $f(x) = 3x + 5\cos x + 5$. (B) $f(x) = 3x + 5\cos x + 2$.

(C) $f(x) = 3x - 5\cos x + 2$. (D) $f(x) = 3x - 5\cos x + 15$.

Lời giải.

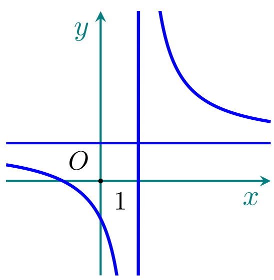
$f(x) = \int (3 - 5\sin x)\,\mathrm{d}x = 3x + 5\cos x + C$.

$f(0) = 10 \Rightarrow 5 + C = 10 \Rightarrow C = 5$. Vậy hàm số cần tìm: $f(x) = 3x + 5\cos x + 5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

(B) $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

(C) $y' > 0, \forall x \neq 1$.

D $y' < 0, \forall x \neq 1$.

Lời giải.

Từ đồ thị $\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Mặt khác hàm số không xác định tại $x = 1 \Rightarrow y' < 0, \forall x \neq 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu tâm I bán kính IM?

A $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$. (B) $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

(C) $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$. (D) $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 17$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của M trên Ox là $I(1;0;0)$. Mặt khác $IM = \sqrt{13} \Rightarrow$ phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Cho số phức $z = 1 - 2i$. Điểm nào dưới đây là biểu diễn của số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ?

(A) $Q(1;2)$. (B) $N(2;1)$. (C) $M(1;-2)$. (D) $P(-2;1)$.

Lời giải.

Ta có: $w = iz = i(1-2i) = 2 + i \Rightarrow$ điểm biểu diễn w là $N(2;1)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh đều bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$.

(A) $V = \dfrac{\pi a^3}{2}$. (B) $V = \dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{6}$. (C) $V = \dfrac{\pi a^3}{6}$. (D) $V = \dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{2}$.

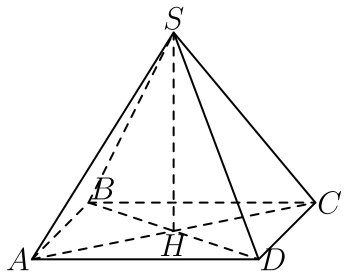
Lời giải.

Bán kính đáy của hình nón $r = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Đường chéo hình vuông $ABCD$ có $AC = AB\sqrt{2} = 2a \Rightarrow HA = a$.

Cạnh bên $SA = a\sqrt{2} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - HA^2} = a \Rightarrow$ đường cao hình nón $h = a$.

$\Rightarrow$ thể tích $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi.\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.a = \dfrac{a^3\pi}{6}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Cho $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\mathrm{e}^{2x}$.

(A) $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = -x^2 + 2x + C$. (B) $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = -x^2 + x + C$.

(C) $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = x^2 - 2x + C$. (D) $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = -2x^2 + 2x + C$.

Lời giải.

$F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của $f(x)\mathrm{e}^{2x} \Rightarrow 2x = f(x)\mathrm{e}^{2x}$.

Đặt $\begin{cases} u = \mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow \displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{e}^{2x} - 2\int f(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = 2x - 2x^2 + C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Cho hàm số $y = \dfrac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $m < -1$. (B) $3 < m \leq 4$. (C) $m > 4$. (D) $1 \leq m < 3$.

Lời giải.

Đạo hàm: $y' = \dfrac{-1-m}{(x-1)^2}$.

Với $-1-m > 0 \Rightarrow m < -1 \Rightarrow \min\limits_{[2;4]} y = y(2) \Rightarrow \dfrac{2+m}{1} = 3 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow$ loại.

Với $-1-m < 0 \Rightarrow m > -1 \Rightarrow \min\limits_{[2;4]} y = y(4) \Rightarrow \dfrac{4+m}{3} = 3 \Rightarrow m = 5 \Rightarrow m > 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-1;1;3)$ và hai đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-1}{1}$, $\Delta' : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M, vuông góc với Δ và Δ'?

A. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t. \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t. \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t. \end{cases}$

Lời giải.

Δ và Δ' có các véc-tơ chỉ phương lần lượt là $\overrightarrow{u_1} = (3;2;1)$ và $\overrightarrow{u_2} = (1;3;-2)$.

Khi đó $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = (-7;7;7) \Rightarrow$ đường thẳng vuông góc với d và Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-1;1;1) \Rightarrow$ phương trình đường thẳng $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng bao gồm gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

A. 13 năm. B. 14 năm. C. 12 năm. D. 11 năm.

Lời giải.

Tổng số tiền lĩnh ra sau n năm bằng $50.(1,06)^n$. Dùng máy tính kiểm tra thấy $n = 12$ thì số tiền lớn hơn 100. Vậy chọn phương án C.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|i = 0$. Tính $S = a + 3b$.

A. $S = \dfrac{7}{3}$. B. $S = -5$. C. $S = 5$. D. $S = -\dfrac{7}{3}$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ta có $z + 1 + 3i - |z|i = 0 \Leftrightarrow a + 1 + (b+3)i - \sqrt{a^2 + b^2}.i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$.

Vậy ta có $S = a + 3b = -5$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t, \\ z = 2 \end{cases}$ $d_2 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P) : 2x + 2y - 3z = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua giao điểm của d_1 và (P), đồng thời vuông góc với d_2?

A $2x - y + 2z + 22 = 0$. **B** $2x - y + 2z + 13 = 0$.

C $2x - y + 2z - 13 = 0$. **D** $2x + y + 2z - 22 = 0$.

Lời giải.

Giao của d_1 và (P) là điểm $M(4; -1; 2)$. Các mặt phẳng trong 4 phương án cùng vuông góc với d_2 nhưng chỉ có mặt phẳng ở phương án C đi qua $M(4; -1; 2)$ nên chọn C.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A 7. **B** 4. **C** 6. **D** 5.

Lời giải.

Đây là hàm số bậc 3 có hệ số $a = -3 < 0$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow b^2 - 3ac \leq 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 12m + 27 \leq 0 \Leftrightarrow -9 \leq m \leq -3$.

Suy ra có 7 giá trị nguyên của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - m \log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1,x_2 thỏa mãn $x_1x_2 = 81$.

A $m = -4$. **B** $m = 4$. **C** $m = 81$. **D** $m = 44$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực x_1,x_2 thỏa mãn $x_1x_2 = 81$ suy ra $\log_3(x_1.x_2) = 4$ hay $\log_3 x_1 + \log_3 x_2 = 4$. Do đó theo định lý Viét ta suy ra $m = 4$.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

A $P(1; 0)$. **B** $M(0; -1)$. **C** $N(1; -10)$. **D** $Q(-1; 10)$.

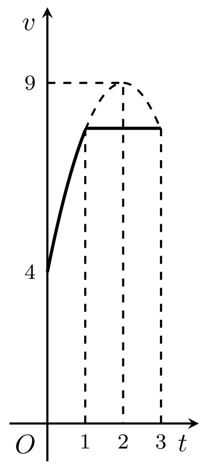
Lời giải.

Dùng máy tính tính được đường thẳng $AB : y = -8x - 2$. Từ đó ta thấy chỉ có $N(1; -10)$ thuộc AB.

Chọn đáp án C □

Câu 41.

Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. $s = 23,25$ km.
B. $s = 21,58$ km.
C. $s = 15,50$ km.
D. $s = 13,83$ km.

Lời giải.

Dễ dàng tìm được phương trình của vận tốc trong 1 giờ đầu tiên là $v = -\dfrac{5}{4}t^2 + 5t + 4$ còn 2 giờ tiếp theo là $v = \dfrac{31}{4}$.

Vậy quãng đường mà vật đi được trong 3 giờ đó là

$$s = \int\limits_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4\right)\,\mathrm{d}t + \int\limits_1^3 \frac{31}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{259}{12} \approx 21,58.$$

Chọn đáp án B □

Câu 42. Cho $\log_a x = 3$, $\log_b x = 4$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{ab} x$.

A. $P = \dfrac{7}{12}$.
B. $P = \dfrac{1}{12}$.
C. $P = 12$.
D. $P = \dfrac{12}{7}$.

Lời giải.

Ta có $P = \log_{ab} x = \dfrac{1}{\log_x ab} = \dfrac{1}{\log_x a + \log_x b} = \dfrac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \dfrac{12}{7}$.

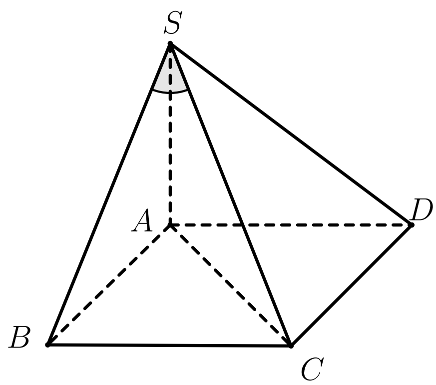
Chọn đáp án D □

Câu 43. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30°. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$.
B. $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$.
C. $V = \dfrac{2a^3}{3}$.
D. $V = \sqrt{2}a^3$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có góc $\widehat{BSC} = 30^\circ \Rightarrow SB = a\sqrt{3} \Rightarrow SA = \sqrt{2}a$. Từ đó suy ra thể tích của khối chóp bằng $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

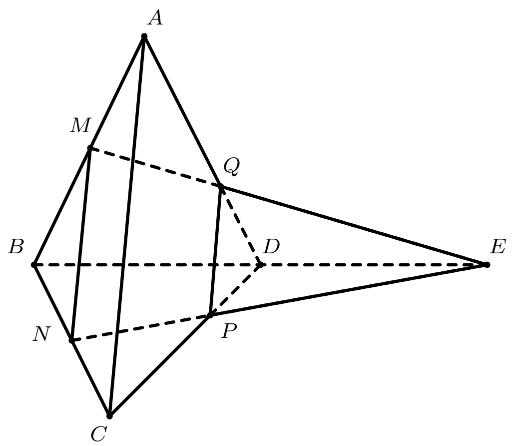


Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho tứ diện đều $ABCD$ có các cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua D. Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V. Tính V.

A $V = \dfrac{7\sqrt{2}a^3}{216}$. **B** $V = \dfrac{11\sqrt{2}a^3}{216}$. **C** $V = \dfrac{13\sqrt{2}a^3}{216}$. **D** $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{18}$.

Lời giải.



Ta có thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} = X$.
Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của NE với CD và ME với AD. Dễ thấy $AQ = CP = \dfrac{2}{3}a$.
Ta dễ dàng tính được $V_{E.BMN} = \dfrac{1}{2}X$. Áp dụng tỉ số thể tích ta có $\dfrac{V_{E.PQD}}{V_{E.BMN}} = \dfrac{2}{9}$. Suy ra $V_{E.PQD} = \dfrac{2}{9}.V_{E.BMN} \Rightarrow V_{BMNEQP} = \dfrac{7}{9}.V_{E.BMN} = \dfrac{7}{18}.X$
Tức là phần khối đa diện không chứa điểm A có thể tích bằng $\dfrac{7}{18}X$, nên phần chứa điểm A có thể tích là $\dfrac{11}{18}X = \dfrac{11\sqrt{2}a^3}{216}$.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2 = 9$, điểm $M(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-4 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M, thuộc (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho AB nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}(1;a;b)$. Tính $T = a - b$.

A $T = -2$. **B** $T = 1$. **C** $T = -1$. **D** $T = 0$.

Lời giải.

Ta thấy M nằm bên trong mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và $M \in (P)$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn tâm $H(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{4})$ trong đó H là hình chiếu vuông góc của O lên (P).
Đường thẳng Δ thoả mãn yêu cầu bài toán khi Δ nằm trong (P) và $\Delta \perp HM$ nên Δ nhận $\left[\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{HM}\right] = (12;-12;0) = 12(1;-1;0)$ làm véctơ chỉ phương. Suy ra $\vec{u}(1;-1;0)$ nên $T = -1$.
Chọn đáp án C □

Câu 46. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-3i| = 5$ và $\dfrac{z}{z-4}$ là số thuần ảo?

A 0. **B** Vô số. **C** 1. **D** 2.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ là số phức thoả mãn yêu cầu của bài toán. Từ giả thiết suy ra x, y thoả mãn hệ $\begin{cases} x^2 - 4y + y^2 = 0 \\ x^2 + (y-3)^2 = 25 \end{cases}$ $y \neq 0$, ta thấy hệ có hai nghiệm trong đó nghiệm $(x;y) = (4;0)$ bị loại. Vậy chỉ có một số phức z thoả mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 47. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \dfrac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$.

(A) $P_{\min} = \dfrac{9\sqrt{11}-19}{9}$.
(B) $P_{\min} = \dfrac{9\sqrt{11}+19}{9}$.
(C) $P_{\min} = \dfrac{18\sqrt{11}-29}{21}$.
D $P_{\min} = \dfrac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

Lời giải.

Với giả thiết bài toán ta có $\log_3 \dfrac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4 \Leftrightarrow \log_3 3(1-xy) + 3(1-xy) = \log_3(x+2y) + x + 2y$

Vì hàm số $f(x) = x + \log_3 x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên từ trên ta suy ra $3(1-xy) = x + 2y \Leftrightarrow 11 = (3x+2)(3y+1)$.

Dùng bất đẳng thức $AM - GM$ suy ra $3x + 2 + 3y + 1 \geq 2\sqrt{11}$.

Suy ra $x + y \geq \dfrac{2\sqrt{11}-3}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} 3x+2 = 3y+1 \\ 3(1-xy) = x+2y \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{11}-2}{3} \\ y = \dfrac{\sqrt{11}-1}{3} \end{cases}$.

Vậy phương án đúng là D.

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = mx - m + 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao cho $AB = BC$.

(A) $m \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.
(B) $m \in \mathbb{R}$.
(C) $m \in \left[-\dfrac{5}{4}; +\infty\right)$.
D $m \in (-2; +\infty)$.

Lời giải.

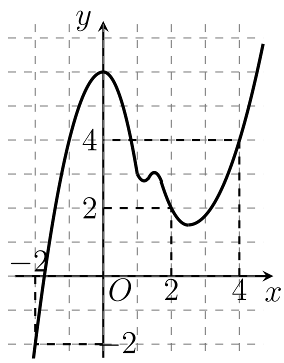
Nhận thấy đường thẳng $y = mx - m + 1$ luôn đi qua điểm uốn $B(1;1)$ của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$, do vậy nếu nó cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt A, B, C thì luôn thoả mãn $AB = BC$. Thử $m = -3$ thì đường thẳng không cắt đồ thị hàm số đã cho tại 3 điểm phân biệt nên loại trừ các phương án A, B.

Thử $m = -\dfrac{3}{2}$ thì đường thẳng cắt đồ thị hàm số đã cho tại 3 điểm phân biệt nên loại trừ các phương án C.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49.

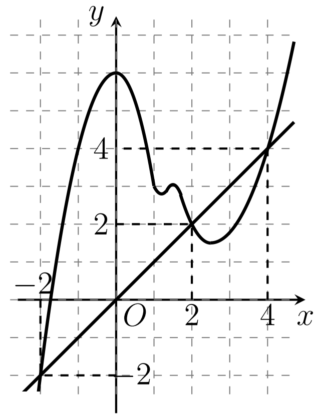
Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $h(x) = 2f(x) - x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) $h(4) = h(-2) > h(2)$.
(B) $h(4) = h(-2) < h(2)$.
C $h(2) > h(4) > h(-2)$.
(D) $h(2) > h(-2) > h(4)$.

Lời giải.

Ta có $h(x) = 2f(x) - x^2$ nên $h'(x) = 2\left(f'(x) - x\right)$.
Dựa vào hình vẽ bên và tính chất của tích phân ta thấy $h(2) - h(-2) = \int\limits_{-2}^{2} h'(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{-2}^{2} \left(f'(x) - x\right)\,\mathrm{d}x > 0$ nên $h(2) > h(-2)$.
Tương tự ta có $h(4) > h(-2), h(2) > h(4)$, từ đó chọn phương án C.



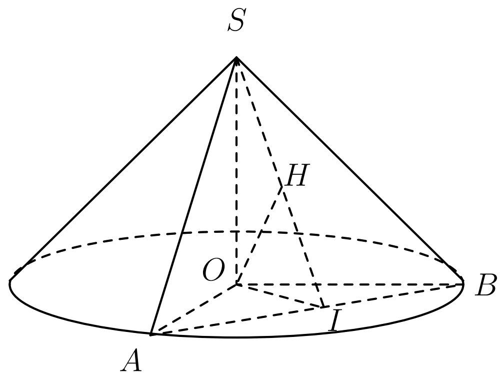
Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho hình nón đỉnh S có chiều cao $h = a$ và bán kính đáy $r = 2a$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}a$. Tính khoảng cách d từ tâm của đường tròn đáy đến (P).

A $d = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **B** $d = a$. **C** $d = \dfrac{\sqrt{5}a}{5}$. **D** $d = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của đáy hình nón, I là trung điểm của AB, H là chân đường cao của tam giác SOI. Khi đó ta có $d = OH$. Dễ dàng tính được $OS = OI = a$ nên $d = OH = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.



Chọn đáp án D □

—— HẾT ——

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. B	3. B	4. C	5. B	6. D	7. A	8. C	9. D	10. B
11. B	12. C	13. A	14. C	15. D	16. D	17. C	18. B	19. C	20. B
21. D	22. C	23. C	24. B	25. D	26. D	27. A	28. D	29. A	30. B
31. C	32. D	33. C	34. D	35. C	36. B	37. C	38. A	39. B	40. C
41. B	42. D	43. B	44. B	45. C	46. C	47. D	48. D	49. C	50. D

13 ĐỀ THI THQG 2017 - MÃ ĐỀ 102

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm giá trị cực đại $y_{\text{CĐ}}$ và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

(A) $y_{\text{CĐ}} = 3$ và $y_{\text{CT}} = -2$.
(B) $y_{\text{CĐ}} = 2$ và $y_{\text{CT}} = 0$.
(C) $y_{\text{CĐ}} = -2$ và $y_{\text{CT}} = 2$.
(D) $y_{\text{CĐ}} = 3$ và $y_{\text{CT}} = 0$.

Lời giải.

Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$, giá trị cực đại $y_{\text{CĐ}} = 3$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$, giá trị cực tiểu $y_{\text{CT}} = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{5x-2}$.

(A) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{5x-2} = \frac{1}{5}\ln|5x-2| + C$.
(B) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{5x-2} = -\frac{1}{2}\ln(5x-2) + C$.
(C) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{5x-2} = 5\ln|5x-2| + C$.
(D) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{5x-2} = \ln|5x-2| + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{5x-2} = \int \frac{1}{5(5x-2)}\,\mathrm{d}(5x-2) = \frac{1}{5}\ln|5x-2| + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

(A) $y = \dfrac{x+1}{x+3}$.
(B) $y = x^3 + 3x$.
(C) $y = \dfrac{x-1}{x-2}$.
(D) $y = -x^3 - 3x$.

Lời giải.

Ta có

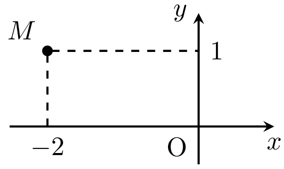
$$\left(\frac{x+1}{x+3}\right)' = \frac{2}{(x+3)^2} > 0 \text{ với mọi } x \neq -3.$$
$$(x^3+3x)' = 3(x^2+1) > 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}\ .$$
$$\left(\frac{x-1}{x-2}\right)' = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0 \text{ với mọi } x \neq 2.$$
$$(-x^3-3x)' = -3(x^2+1) < 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Từ đây suy ra $y = x^3 + 3x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4.

Số phức nào dưới đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm M như hình bên?



(A) $z_4 = 2 + i$.
(B) $z_2 = 1 + 2i$.
C $z_3 = -2 + i$.
(D) $z_1 = 1 - 2i$.

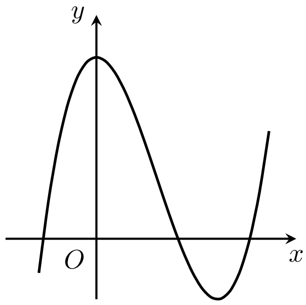
Lời giải.

Điểm M có tọa độ là $(-2, 1)$ do đó M biểu diễn số phức $z_3 = -2 + i$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



(A) $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
(B) $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.
(C) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
D $y = x^3 - 3x^2 + 3$.

Lời giải.

Đây là đồ thị của hàm số có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, hơn nữa ta thấy khi $x \to +\infty$ thì $y \to +\infty$ do đó $a > 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Cho a là số thực dương khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng với mọi số thực dương x, y?

A $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.
(B) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x + \log_a y$.
(C) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a(x - y)$.
(D) $\log_a \dfrac{x}{y} = \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức sách giáo khoa $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 2; 1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA.

A $OA = 3$.
(B) $OA = 9$.
(C) $OA = \sqrt{5}$.
(D) $OA = 5$.

Lời giải.

Ta có $OA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho hai số phức $z_1 = 4 - 3i$ và $z_2 = 7 + 3i$. Tìm số phức $z = z_1 - z_2$.

(A) $z = 11$.
(B) $z = 3 + 6i$.
(C) $z = -1 - 10i$.
D $z = -3 - 6i$.

Lời giải.

$z = z_1 - z_2 = (4 - 3i) - (7 + 3i) = (4 - 7) + (-3i - 3i) = -3 - 6i$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(1 - x) = 2$.

(A) $x = -4$.
B $x = -3$.
(C) $x = 3$.
(D) $x = 5$.

Lời giải.

Điều kiện: $x < 1$. Ta có

$$\log_2(1-x) = 2 \Leftrightarrow 1 - x = 4 \Leftrightarrow x = -3.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -3$.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (Oyz)?

A $y = 0$. **B** $x = 0$. **C** $y - z = 0$. **D** $z = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oyz) vuông góc với trục Ox do đó nó nhận $(1, 0, 0)$ là véc-tơ pháp tuyến, hơn nữa (Oyz) đi qua điểm $O(0, 0, 0)$. Vậy phương trình mặt phẳng (Oyz) là $1(x-0)+0(y-0)+0(z-0) = 0$ hay $x = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A Hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$.

B Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

C Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

D Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0. \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	∞	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên $(0, 2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Tính $I = F(\mathrm{e}) - F(1)$.

A $I = \mathrm{e}$. **B** $I = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **C** $I = \dfrac{1}{2}$. **D** $I = 1$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}(\ln x) = \left.\frac{(\ln x)^2}{2}\right|_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}$ với $x > 0$.

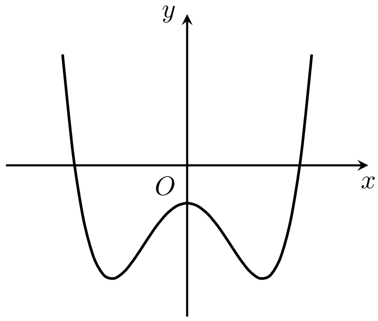
A $P = x^{\frac{1}{8}}$. **B** $P = x^2$. **C** $P = \sqrt{x}$. **D** $P = x^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải.

Ta có: $P = x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

Chọn đáp án C □

Câu 14.



Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với a, b, c là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A Phương trình $y' = 0$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

B Phương trình $y' = 0$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt.

C Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm trên tập số thực.

D Phương trình $y' = 0$ có đúng một nghiệm thực.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số có ba điểm cực trị. Do đó phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$.

A 3. **B** 1. **C** 0. **D** 2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = 1$ do đó đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Lại có:

$$\lim_{x \to 1^+} y = -\frac{3}{2}; \lim_{x \to 1^-} y = -\frac{3}{2}$$
$$\lim_{x \to -1^+} y = +\infty; \lim_{x \to -1^-} y = -\infty$$

Do đó đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x = -1$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

A $m > 6$. **B** $m \geq 6$. **C** $m \leq 6$. **D** $m < 6$.

Lời giải.

Phương trình đã cho là phương trình của một mặt cầu khi $1 + 1 + 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 6$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $3z^2 - z + 1 = 0$. Tính $P = |z_1| + |z_2|$.

A $P = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B** $P = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C** $P = \dfrac{2}{3}$. **D** $P = \dfrac{\sqrt{14}}{3}$.

Lời giải.

Phương trình $3z^2 - z + 1 = 0$ có nghiệm $z_{1,2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{11}}{6}$.

Do đó $|z_1| = |z_2| = \dfrac{\sqrt{1 + 11}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Vậy $P = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A $V = a^3$. **B** $V = \dfrac{a^3}{3}$. **C** $V = \dfrac{a^3}{6}$. **D** $V = \dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải.

Tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$ do đó $AB = BC = a$.

Thể tích khối lăng trụ là $V = BB'.S_{ABC} = a.\frac{1}{2}.a.a = \frac{a^3}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Cho khối nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và chiều cao $h = 4$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

Ⓐ $V = \frac{16\pi\sqrt{3}}{3}$. **B** $V = 4\pi$. Ⓒ $V = 16\pi\sqrt{3}$. Ⓓ $V = 12\pi$.

Lời giải.

Thể tích khối nón đã cho là $V = \frac{1}{3}\pi r^2.h = \frac{1}{3}\pi.3.4 = 4\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho hình phẳng $\mathcal{D}$ giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay $\mathcal{D}$ quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

Ⓐ $V = 2(\pi + 1)$. **B** $V = 2\pi(\pi + 1)$. Ⓒ $V = 2\pi^2$. Ⓓ $V = 2\pi$.

Lời giải.

Ta có

$-1 \le \sin x \le 1$

$\Leftrightarrow 1 \le 2 + \sin x \le 3$

$\Leftrightarrow 1 \le y \le \sqrt{3}$

Do vậy đường cong $y = \sqrt{2 + \sin x}$ không cắt trục hoành. Vậy, ta có

$$V = \pi\int_0^{\pi} (2 + \sin x)\,\mathrm{d}x = (2x - \cos x)\Big|_0^{\pi} = 2\pi(\pi + 1).$$

Chọn đáp án B □

Câu 21. Cho $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{-1}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \int\limits_{-1}^{2} [x + 2f(x) - 3g(x)]\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ $I = \frac{5}{2}$. Ⓑ $I = \frac{7}{2}$. **C** $I = \frac{17}{2}$. Ⓓ $I = \frac{11}{2}$.

Lời giải.

$\int\limits_{-1}^{2} [x + 2f(x) - 3g(x)]\,\mathrm{d}x$

$= \int\limits_{-1}^{2} x\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x - 3\int\limits_{-1}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x$

$= \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} + 2.2 - 3.(-1) = \frac{17}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho mặt cầu bán kính R ngoại tiếp một hình lập phương cạnh a. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $a = 2\sqrt{3}R$. (B) $a = \dfrac{\sqrt{3}R}{3}$. (C) $a = 2R$. (D) $a = \dfrac{2\sqrt{3}R}{3}$.

Lời giải.

Hình lập phương có độ dài đường chéo là $a\sqrt{3}$. Từ đó bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương là $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Do vậy $a = \dfrac{2\sqrt{3}R}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;-1;3)$, $B(1;0;1)$ và $C(-1;1;2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng BC?

(A) $\begin{cases} x = -2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + t. \end{cases}$ (B) $x - 2y + z = 0$.

(C) $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{1}$. (D) $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC}(-2;1;1)$. Vì đường thẳng cần tìm song song với đường thẳng BC nên ta chọn $\vec{u}(-2;1;1)$ làm một véc-tơ chỉ phương của nó.

Vậy phương trình chính tắc của đường thẳng cần tìm là

$$\frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $\left[0;\sqrt{3}\right]$.

(A) $M = 9$. (B) $M = 8\sqrt{3}$. (C) $M = 1$. (D) $M = 6$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 4x$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1. \end{array}\right.$

$f(0) = 3$, $f(1) = 2$, $f(\sqrt{3}) = 6$.

Vậy $M = 6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Mặt phẳng $(A'BC)$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành các khối đa diện nào?

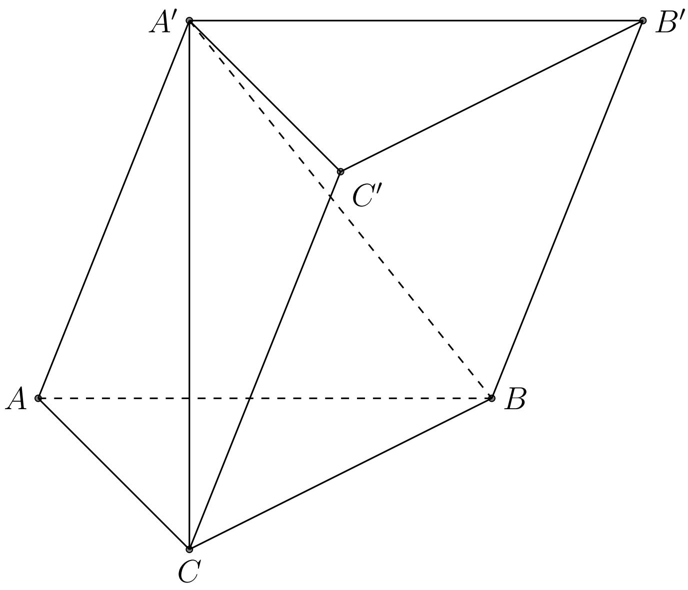
(A) Một khối chóp tam giác và một khối chóp ngũ giác.

(B) Một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác.

(C) Hai khối chóp tam giác.

(D) Hai khối chóp tứ giác.

Lời giải.



Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB?

A $3x - y - z = 0$. (B) $3x + y + z - 6 = 0$.
(C) $3x - y - z + 1 = 0$. (D) $6x - 2y - 2z - 1 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-6;2;2)$, trung điểm của AB là $I(1;1;2)$.
Mặt phẳng trung trực của AB nhận véc-tơ $\vec{n}(3;-1;-1)$ làm véc-tơ pháp tuyến và đi qua điểm $I(1;1;2)$. Vậy phương trình mặt phẳng trung trực của AB là

$$3(x-1) - (y-1) - (z-2) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - z = 0.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Cho số phức $z = 1 - i + i^3$. Tìm phần thực a và phần ảo b của z.

(A) $a = 0$, $b = 1$. (B) $a = -2$, $b = 1$. (C) $a = 1$, $b = 0$. **D** $a = 1$, $b = -2$.

Lời giải.

Ta có $z = 1 - i + i^3 = 1 - 2i$. Vậy phần thực của z là 1, phần ảo của z là -2.
Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_2(2x+1)$.

(A) $y' = \dfrac{1}{(2x+1)\ln 2}$. **B** $y' = \dfrac{2}{(2x+1)\ln 2}$. (C) $y' = \dfrac{2}{2x+1}$. (D) $y' = \dfrac{1}{2x+1}$.

Câu 29. Cho $\log_a b = 2$ và $\log_a c = 3$. Tính $P = \log_a(b^2c^3)$.

(A) $P = 31$. **B** $P = 13$. (C) $P = 30$. (D) $P = 108$.

Lời giải.

Ta có $P = \log_a(b^2c^3) = 2\log_a b + 3\log_a c = 2.2 + 3.3 = 13$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=1$.

A $S=\left\{2+\sqrt{5}\right\}$. **B** $S=\left\{2-\sqrt{5};2+\sqrt{5}\right\}$.

C $S=\{3\}$. **D** $S=\left\{\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

Lời giải.

Tập xác định $D=(1;+\infty)$.

Với $x\in D$, phương trình đã cho tương đương với

$$\log_{\sqrt{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=1$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2(x-1)-\log_2(x+1)=1$$

$$\Leftrightarrow \log_2\frac{(x-1)^2}{(x+1)}=1$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1=2x+2$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2+\sqrt{5}\text{ (chọn)}\\ x=2-\sqrt{5}\text{ (loại)}\end{array}\right.$$

Chọn đáp án A □

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x-2^{x+1}+m=0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A $m\in(-\infty;1)$. **B** $m\in(0;+\infty)$. **C** $m\in(0;1]$. **D** $m\in(0;1)$.

Lời giải.

Xét phương trình $4^x-2^{x+1}+m=0$.

Đặt $2^x=t>0$, phương trình đã cho trở thành $t^2-2t+m=0$.

Ta có $\Delta'=1-m$.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt khi phương trình $t^2-2t+m=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt, khi đó

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ P>0\\ S>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\ m>0\\ 2>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<1.$$

Chọn đáp án D □

Câu 32. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-4)x+3$ đạt cực đại tại $x=3$.

A $m=1$. **B** $m=-1$. **C** $m=5$. **D** $m=-7$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=x^2-2mx+m^2-4$.

Điều kiện cần để hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=3$ là

$f'(3) = 0$

$\Leftrightarrow 9 - 6m + m^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 5. \end{array}\right.$

Khi $m = 1$, hàm số trở thành $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 3$ và $f'(x) = x^2 - 2x - 3$. Ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{14}{3}$	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số không đạt cực đại tại $x = 3$.

Khi $m = 5$, hàm số trở thành $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 21x + 3$, $f'(x) = x^2 - 10x + 21$, Ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	30	$\searrow$	$\dfrac{58}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 3$. Do đó điều kiện để hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 3$ là $m = 5$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 2$ và hai đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$, $\Delta: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của một mặt phẳng tiếp xúc với (S), song song với d và Δ?

A $x + z + 1 = 0$. **B** $x + y + 1 = 0$. **C** $y + z + 3 = 0$. **D** $x + z - 1 = 0$.

Lời giải.

(S) có tâm $I(-1; 1; -2)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$.

d có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}(1; 2; -1)$, Δ có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(1; 1; -1)$.

Ta có $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = (-1; 0; -1)$. Vì mặt phẳng (P) cần tìm song song với d và Δ nên nó nhận $\overrightarrow{n}(1; 0; 1)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Phương trình (P) có dạng $x + z + d = 0$.

Vì (S) tiếp xúc với (P) nên

$$d(I,(P)) = R \Leftrightarrow \frac{|d-3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=5 \\ d=1 \end{array}\right.$$

Vậy ta được hai mặt phẳng là $x+z+1=0$ và $x+z+5=0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;3)$ và hai mặt phẳng (P) : $x+y+z+1=0$, (Q) : $x-y+z-2=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua A, song song với (P) và (Q)?

(A) $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2 \\ z=-3-t. \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=3-2t. \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2 \\ z=3+2t. \end{cases}$ **D** $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2 \\ z=3-t. \end{cases}$

Lời giải.

(P) có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}(1;1;1)$, (Q) có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}(1;-1;1)$.

Ta có $[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}] = (2;0;-2)$.

Đường thẳng cần tìm nhận véc-tơ $\overrightarrow{u}(1;0;-1)$ làm véc-tơ chỉ phương. Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2 \\ z=3-t. \end{cases}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[1;2]} y + \max\limits_{[1;2]} y = \dfrac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $m \le 0$. **B** $m>4$. (C) $0<m\le 2$. (D) $2<m\le 4$.

Lời giải.

- Do hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ liên tục và đơn điệu trên đoạn $[1;2]$ nên ta có $\min\limits_{[1;2]} y + \max\limits_{[1;2]} y = \dfrac{1+m}{2} + \dfrac{2+m}{3} = \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow m=5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$, SA vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60°. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

(A) $V=\dfrac{a^3}{3}$. (B) $V=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **C** $V=a^3$. (D) $V=3a^3$.

Lời giải.

- Từ giả thiết ta có $\widehat{SBA}=60^\circ$ suy ra $SH = AB.\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$. Vậy, $V=\dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.a^2\sqrt{3}=a^3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Cho x,y là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2+9y^2=6xy$. Tính $M=\dfrac{1+\log_{12}x+\log_{12}y}{2\log_{12}(x+3y)}$.

(A) $M=\dfrac{1}{4}$. **B** $M=1$. (C) $M=\dfrac{1}{2}$. (D) $M=\dfrac{1}{3}$.

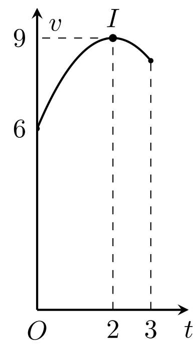
Lời giải.

- Ta có $x^2+9y^2=6xy \Leftrightarrow (x+3y)^2=12xy$ nên $M=\dfrac{1+\log_{12}x+\log_{12}y}{2\log_{12}(x+3y)}=\dfrac{\log_{12}(12xy)}{\log_{12}(x+3y)^2}=1.$

Chọn đáp án B □

Câu 38.

Một vật chuyển động trong 3 giờ đầu với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t(h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



(A) $s=24,25\,\text{km}$. (B) $s=26,75\,\text{km}$.
(C) $s=24,75\,\text{km}$. (D) $s=25,25\,\text{km}$.

Lời giải.

- Ta có $v(t)=-\dfrac{3}{4}t^2+3t+6$.

- Quãng đường đi được $s=\displaystyle\int_0^3 v(t)\,\mathrm{d}t=24,75$.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i=|z|$. Tính $S=4a+b$.

(A) $S=4$. (B) $S=2$. (C) $S=-2$. (D) $S=-4$.

Lời giải.

- Ta có $\begin{cases} a+2=\sqrt{a^2+b^2} \\ b+1=0 \end{cases}$. Giải ra ta được $b=-1, a=-\dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho $F(x)=(x-1)\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\mathrm{e}^{2x}$.

(A) $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=(4-2x)\mathrm{e}^x+C$. (B) $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2-x}{2}\mathrm{e}^x+C$.
(C) $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=(2-x)\mathrm{e}^x+C$. (D) $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=(x-2)\mathrm{e}^x+C$.

Lời giải.

- Ta có $f(x)\mathrm{e}^{2x}=F'(x)=x\mathrm{e}^x$.

- Suy ra $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x}.f(x)-2\int f(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-2(x-1)\mathrm{e}^x=(2-x)\mathrm{e}^x+C$

Chọn đáp án C □

Câu 41. Đầu năm 2016, ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả lương cho nhân viên trong năm đó tăng thêm 15% so với năm trước. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên mà tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm lớn hơn 2 tỷ đồng?

(A) Năm 2023. (B) Năm 2022. (C) Năm 2021. (D) Năm 2020.

Lời giải.

- Áp dụng công thức $(1+0,15)^m > 2 \Leftrightarrow m > 4,9594$. Vậy sau 5 năm tức là năm 2021.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 4. B 2. C 3. D 5.

Lời giải.

- Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $3a$. Hình nón (N) có đỉnh A và đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của (N).

A $S_{\text{xq}} = 6\pi a^2$. B $S_{\text{xq}} = 3\sqrt{3}\pi a^2$. C $S_{\text{xq}} = 12\pi a^2$. D $S_{\text{xq}} = 6\sqrt{3}\pi a^2$.

Lời giải.

- Bán kính đáy $R = \dfrac{2}{3}.\dfrac{3a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

- Suy ra diện tích xung quanh $S_{\text{xq}} = \pi Rl = \pi a\sqrt{3}.3a = \pi a^2 3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+2-i| = 2\sqrt{2}$ và $(z-1)^2$ là số thuần ảo?

A 0. B 4. C 3. D 2.

Lời giải.

- Ta có hệ $\begin{cases}(x+2)^2+(y-1)^2=8\\(x-1)^2-y^2=0\end{cases}$. Giải ra ta được 3 cặp nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -mx$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.

A $m \in (-\infty; 3)$. B $m \in (-\infty; -1)$. C $m \in (-\infty; +\infty)$. D $m \in (1; +\infty)$.

Lời giải.

- Để đường thẳng $y = -mx$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x^2 - m + 2$ tại ba điểm phân biệt là phương trình hoành độ giao điểm $(x-1)(x^2-2x-2+m) = 0$ có ba nghiệm phân biệt, giải ra ra được $m < 3$.

- Nhận thấy (C) có điểm uốn $U(1; -m)$ luôn thuộc đường thẳng $y = -mx$ nên để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì $m < 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Xét các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 \dfrac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = a + 2b$.

A $P_{\min} = \dfrac{2\sqrt{10}-3}{2}$. **B** $P_{\min} = \dfrac{3\sqrt{10}-7}{2}$. **C** $P_{\min} = \dfrac{2\sqrt{10}-1}{2}$. **D** $P_{\min} = \dfrac{2\sqrt{10}-5}{2}$.

Lời giải.

- Giả thiết tương đương với $\log_2(2-2ab) + (2-2ab) = \log_2(a+b) + (a+b) \Leftrightarrow 2 - 2ab = a + b$ do hàm $f(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên tập xác định.

- Rút a theo b thay vào P, khi đó $P_{\min} = \dfrac{2\sqrt{10}-3}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;6;2)$, $B(2;-2;0)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z=0$. Xét đường thẳng d thay đổi thuộc (P) và đi qua B, gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d. Biết rằng khi d thay đổi thì H thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A $R = \sqrt{6}$. **B** $R = 2$. **C** $R = 1$. **D** $R = \sqrt{3}$.

Lời giải.

- Mặt cầu đường kính AB có tâm $I(3;2;1)$ và bán kính $R' = \sqrt{18}$.

- H luôn thuộc mặt phẳng (P) và mặt cầu đường kính AB.

- Khoảng cách từ I đến (P) là $d = 2\sqrt{3}$. Từ đó suy ra $R = \sqrt{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 48.

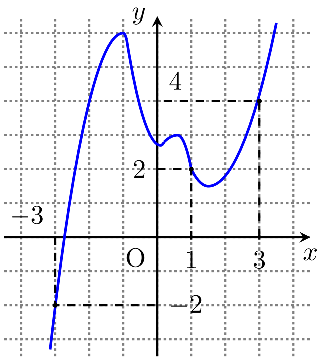
Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $g(-3) > g(3) > g(1)$.

B $g(1) > g(-3) > g(3)$.

C $g(3) > g(-3) > g(1)$.

D $g(1) > g(3) > g(-3)$.



Lời giải.

- Ta có $g'(x) = 2\left(f'(x) - (x+1)\right)$.

- Từ $g(3) - g(1) = \displaystyle\int_1^3 g'(x)\,dx = 2\int_1^3 \left(f'(x) - (x+1)\right)dx < 0$ suy ra $g(3) < g(1)$.

- Tương tự $g(3) - g(-3) = \displaystyle\int_{-3}^3 g'(x)\,dx = 2\int_{-3}^3 \left(f'(x) - (x+1)\right)dx > 0$ suy ra $g(-3) < g(3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = x$ và các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A $x = \sqrt{6}$. **B** $x = \sqrt{14}$. **C** $x = 3\sqrt{2}$. **D** $x = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

- Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD, AB. Khi đó ta tính được $AM = BM = 3$, suy ra $MN = \sqrt{9 - \dfrac{x^2}{4}}$.

- Gọi h là chiều cao của khối chóp hạ từ đỉnh A, ta có $h = \dfrac{x.\sqrt{9 - \dfrac{x^2}{4}}}{3}$ và $h_{\max}$ khi $x = 3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng 4, hình trụ (H) có chiều cao bằng 4 và hai đường tròn đáy nằm trên (S). Gọi V_1 là thể tích của khối trụ (H) và V_2 là thể tích của khối cầu (S). Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{9}{16}$. **B** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{3}$. **C** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{3}{16}$. **D** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

- Ta có $V_2 = \dfrac{256\pi}{3}$.
- Bán kính đáy của trụ $r = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$, suy ra $V_1 = 4.\pi(2\sqrt{3})^2 = 48\pi$.

Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. D	2. A	3. B	4. C	5. D	6. A	7. A	8. D	9. B	10. B
11. A	12. C	13. C	14. A	15. D	16. D	17. B	18. D	19. B	20. B
21. C	22. D	23. C	24. D	25. B	26. A	27. D	28. B	29. B	30. A
31. D	32. C	33. A	34. D	35. B	36. C	37. B	38. C	39. D	40. C
41. C	42. C	43. B	44. C	45. A	46. A	47. A	48. D	49. C	50. A