Tài liệu tham khảo:

01. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Thầy Đặng Việt Hùng

I. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉC TƠ TRONG KHÔNG GIAN

1) Góc giữa hai véc tơ

Giả sử ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\vec{u}\\ \overrightarrow{AC}=\vec{v}\end{cases}\longrightarrow \left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\widehat{BAC}$, với $0^o\le\widehat{BAC}\le 180^o$.

2) Tích vô hướng của hai véc tơ

Giả sử ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\vec{u}\\ \overrightarrow{AC}=\vec{v}\end{cases}\longrightarrow \vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}\right)$

Nhận xét:

+ Khi $\left[\begin{array}{l}\vec{u}=\vec{0}\\ \vec{v}=\vec{0}\end{array}\right.\longrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0$

+ Khi $\vec{u}\uparrow\uparrow\vec{v}\longrightarrow\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)=0^0$

+ Khi $\vec{u}\uparrow\downarrow\vec{v}\longrightarrow\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)=180^0$

+ Khi $\vec{u}\perp\vec{v}\longleftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$

Ví dụ 1. **Cho tứ diện đều *ABCD* cạnh *a*.**

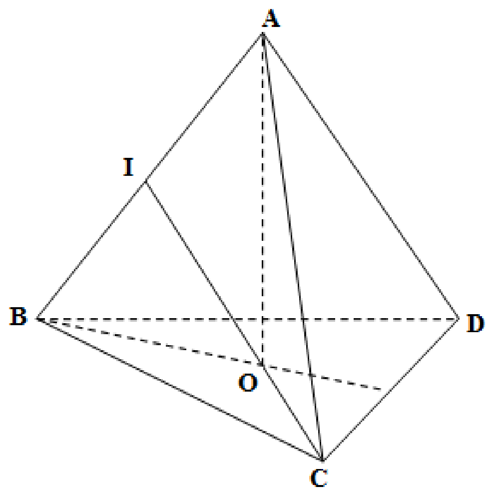
a) Tính góc giữa hai véc tơ $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right)$.

b) Gọi *I* là trung điểm của *AB*. Tính góc giữa hai véc tơ $\left(\widehat{\overrightarrow{CI};\overrightarrow{AC}}\right)$.

Hướng dẫn giải:

a) Sử dụng công thức tính góc giữa hai véc tơ ta được

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}}{AB.BC}=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}}{a^2},\ (1).$$



Xét $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Mà $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}=AB.BA.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}}\right)=a.a.\cos180^0=-a^2\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}\right)=a.a.\cos60^0=\dfrac{a^2}{2}\end{cases}$

$\longrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-a^2+\dfrac{a^2}{2}=-\dfrac{a^2}{2}.$

$(1)\Leftrightarrow\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right)=\dfrac{-\dfrac{a^2}{2}}{a^2}=-\dfrac{1}{2}\longrightarrow\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right)=120^0.$

Vậy $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right)=120^o.$

b) Ta có $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CI};\overrightarrow{AC}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{CI}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AC}}{CI.AC}$

Tứ diện *ABCD* đều cạnh *a*, *CI* là trung tuyến của tam giác đều *ABC* nên $CI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\longrightarrow\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CI};\overrightarrow{AC}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AC}}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}},\ (2).$

Ta có $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CI}.\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right)=\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{IC}$

Do ΔABC đều nên $\overrightarrow{CI}\perp\overrightarrow{AI}\Leftrightarrow\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AI}=0.$

Đồng thời, $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{IC}=CI.IC.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CI};\overrightarrow{IC}}\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\cos180^0=-\dfrac{3a^2}{4}\longrightarrow\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AC}=0-\dfrac{3a^2}{4}=-\dfrac{3a^2}{4}.$

Thay vào (2) ta được $(2)\Leftrightarrow\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CI};\overrightarrow{AC}}\right)=\dfrac{-\dfrac{3a^2}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\longrightarrow\left(\widehat{\overrightarrow{CI};\overrightarrow{AC}}\right)=150^0.$

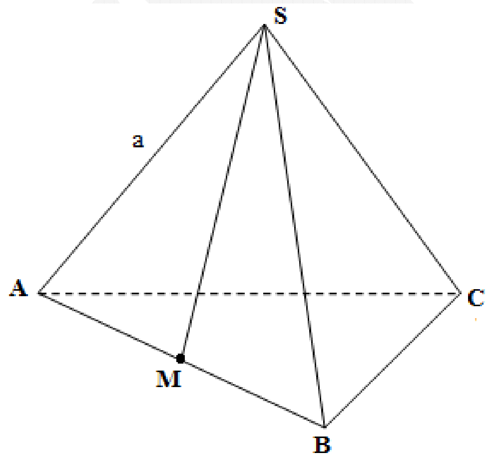
Vậy $\left(\widehat{\overrightarrow{CI};\overrightarrow{AC}}\right)=150^0.$

Ví dụ 2. **Cho hình chóp *S.ABC* có *SA, SB, SC* đôi một vuông góc và *SA = SB = SC = a*. Gọi *M* là trung điểm của *AB*.**

a) Biểu diễn các véc tơ $\overrightarrow{SM}$ và $\overrightarrow{BC}$ theo các véc tơ $\overrightarrow{SA};\overrightarrow{SB};\overrightarrow{SC}$.

b) Tính góc $\left(\widehat{\overrightarrow{SM};\overrightarrow{BC}}\right)$.

Hướng dẫn giải:



a) Sử dụng quy tắc trung tuyến và quy tắc trừ hai véc tơ ta được $\begin{cases}\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}=2\overrightarrow{SM}\\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{SC}\end{cases}\longleftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{SM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}\right)\\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}\end{cases}$

b) $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{SM};\overrightarrow{BC}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{SM}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\dfrac{\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{BC}}{SM.BC},\ (1).$

Mà *SA*, *SB*, *SC* đôi một vuông góc nên $\begin{cases}\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}=0\\ \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}=0\\ \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC}=0\end{cases}$

Tam giác *SAB* và *SBC* vuông tại *S* nên theo định lý Pitago ta được $AB=BC=a\sqrt{2}\longrightarrow\begin{cases}BC=a\sqrt{2}\\ SM=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

Theo câu a, $\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}\right).\left(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\underbrace{\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}}_{0}-\underbrace{\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}}_{0}+\underbrace{\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC}}_{0}-\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SB}\right)=-\dfrac{1}{2}SB^2=-\dfrac{a^2}{2}$

Thay vào (1) ta được $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{SM};\overrightarrow{BC}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{BC}}{SM.BC}=\dfrac{-\dfrac{a^2}{2}}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}\longrightarrow\left(\widehat{\overrightarrow{SM};\overrightarrow{BC}}\right)=120^0.$

II. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

1) Khái niệm véc tơ chỉ phương của đường thẳng

Một véc tơ $\vec{u}\neq\vec{0}$ mà có phương song song hoặc trùng với *d* được gọi là véc tơ chỉ phương của đường thẳng *d*.

2) Góc giữa hai đường thẳng

▪ *Khái niệm:*

Góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai đường thẳng a′; b′ lần lượt song song với a; b. Kí hiệu $\left(\widehat{a;b}\right)$.

Từ định nghĩa ta có sơ đồ $\begin{cases}a//a'\\ b//b'\end{cases}\longrightarrow\left(\widehat{a;b}\right)=\left(\widehat{a';b'}\right)$

▪ *Nhận xét:*

+ Giả sử a, b có véc tơ chỉ phương tương ứng là $\vec{u};\vec{v}$ và $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)=\varphi.$

Khi đó, $\left[\begin{array}{l}\left(\widehat{a;b}\right)=\varphi\quad;\quad 0^o\le\varphi\le90^o\\ \left(\widehat{a;b}\right)=180^o-\varphi\quad;\quad 90^o<\varphi\le180^o\end{array}\right.$

+ Nếu a // b hoặc a ≡ b thì $\left(\widehat{a;b}\right)=0^o.$

▪ *Các xác định góc giữa hai đường thẳng:*

Phương án 1
(sử dụng định nghĩa)

Tạo ra các đường $\begin{cases} a'// a \\ b'// b \end{cases} \longrightarrow \widehat{(a,b)} = \widehat{(a',b')}$

Phương án 2

- Lấy một điểm O bất kì thuộc a

- Qua O, dựng đường $\Delta // b \longrightarrow \widehat{(a,b)} = \widehat{(a,\Delta)}$

Chú ý:

Các phương pháp tính toán góc giữa hai đường thẳng:

▪ Nếu góc thuộc tam giác vuông thì dùng các công thức tính toán trong tam giác vuông: sin, cosin, tan, cot.

▪ Nếu góc thuộc tam giác thường thì sử dụng định lý hàm số cosin trong tam giác *ABC*:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \longrightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

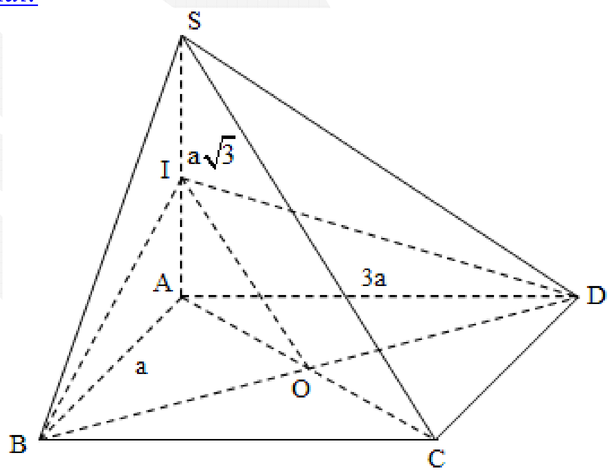
Ví dụ 1. **Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật, các tam giác *SAB, SAD, SAC* là các tam giác vuông tại *A*. Biết $SA = a\sqrt{3}; AB = a; AD = 3a$. Tính góc giữa các đường thẳng sau:**

a) *SD* và *BC*.

b) *SB* và *CD*.

c) *SC* và *BD*.

Hướng dẫn giải:



a) Tính góc giữa SD và BC

Để xác định góc giữa hai đường thẳng SD và BC ta sử dụng phương án 2, tìm đường thẳng song song với một trong hai đường thẳng SD, BC và song song với một đường còn lại.

Ta dễ nhận thấy AD // BC.

Khi đó $\widehat{(SD;BC)} = \widehat{(SD;AD)} = \left[\begin{array}{l} \widehat{SDA} \\ 180^o - \widehat{SDA} \end{array}\right.$

Xét ΔSAD: $\tan\widehat{SDA} = \frac{SA}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3} \longrightarrow \widehat{SDA} = 30^o.$

Vậy $\widehat{(SD;BC)} = 30^o.$

b) Tính góc giữa SB và CD

Tương tự, $CD//AB \longrightarrow \widehat{(SB;CD)} = \widehat{(SB;AB)} = \left[\begin{array}{l} \widehat{SBA} \\ 180^o - \widehat{SBA} \end{array}\right.$

Xét ΔSAB: $\tan\widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \sqrt{3} \longrightarrow \widehat{SDA} = 60^o.$

Vậy $\widehat{(SB;CD)} = 60^o.$

c) Tính góc giữa SC và BD

Gọi O là tâm của hình chữ nhật ABCD, I là trung điểm của SA.

Trong ΔSAC có $OI//SC \longrightarrow \widehat{(SC;BD)} = \widehat{(OI;BD)} = \left[\begin{array}{l} \widehat{IOB} \\ 180^o - \widehat{IOB} \end{array}\right.$

▪ Áp dụng định lý Pitago cho tam giác vuông ABI: $IB = \sqrt{IA^2 + AB^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

▪ ABCD là hình chữ nhật nên $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + 9a^2} = a\sqrt{10} \longrightarrow OB = \frac{a\sqrt{10}}{2} = OA$

▪ Áp dụng định lý Pitago cho tam giác vuông ABO: $IO = \sqrt{IA^2 + AO^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{10}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$

Khi đó, theo định lý hàm số cosin cho ΔIOB ta được: $\cos\widehat{IOB}=\dfrac{OI^2+OB^2-IB^2}{2.OI.OB}=\dfrac{\dfrac{13a^2}{4}+\dfrac{10a^2}{4}-\dfrac{7a^2}{4}}{2.\dfrac{a\sqrt{13}}{2}.\dfrac{a\sqrt{10}}{2}}=\dfrac{8}{\sqrt{130}}$

$\longrightarrow \widehat{IOB}=\arccos\left(\dfrac{8}{\sqrt{130}}\right)=\widehat{(SC;BD)}.$

Vậy $\widehat{(SC;BD)}=\arccos\left(\dfrac{8}{\sqrt{130}}\right).$

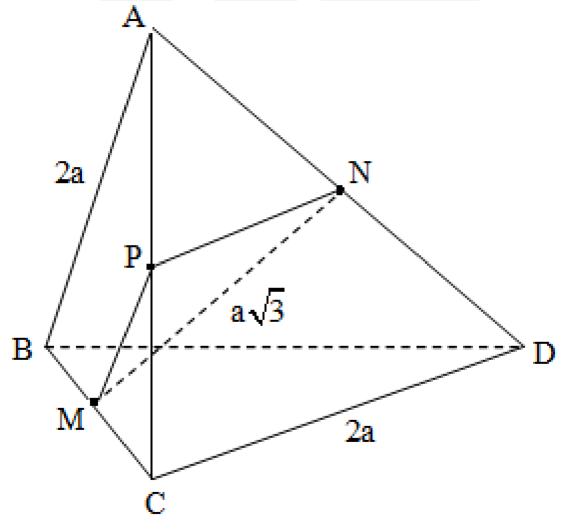
<u>Ví dụ 2.</u> Cho tứ diện *ABCD*, gọi *M, N* là trung điểm của *BC, AD*. Biết $AB=CD=2a,\ MN=a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai đường thẳng *AB* và *CD*.

<u>Hướng dẫn giải:</u>

Do AB và CD là các cạnh của tứ diện nên chúng chéo nhau, để xác định góc giữa hai đường thẳng AB và CD ta tạo các đường thẳng tương ứng song song với AB, CD và chúng cắt nhau.

Gọi P là trung điểm của AC, khi đó MP // AB, NP // CD

$\longrightarrow \widehat{(AB,CD)}=\widehat{(MP,NP)}=\left[\begin{array}{l}\widehat{MPN}\\180^o-\widehat{MPN}\end{array}\right.$



Do MP, NP là các đường trung bình nên ta có MP = NP = a.

Áp dụng định lý hàm số cosin trong ΔMPN ta được

$\cos\widehat{MPN}=\dfrac{MP^2+NP^2-MN^2}{2MP.NP}=\dfrac{2a^2-3a^2}{2.a.a}=-\dfrac{1}{2}$

$\longrightarrow \widehat{MPN}=120^o \Leftrightarrow \widehat{(MP,NP)}=60^o$

Vậy $\widehat{(AB,CD)}=60^o.$

<u>Nhận xét:</u>

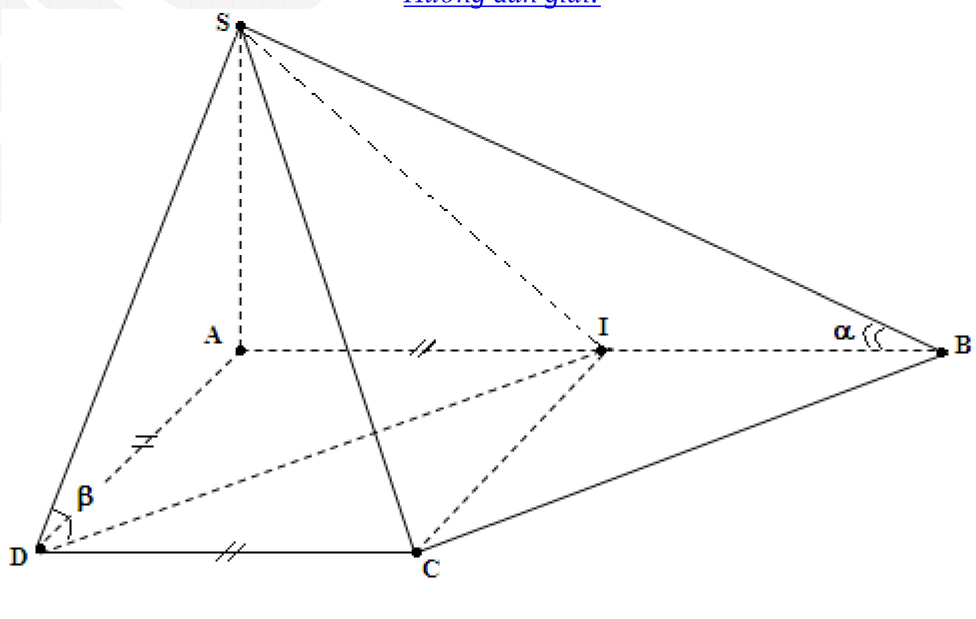
Ngoài việc khởi tạo P như trên ta cũng có thể lấy điểm P là trung điểm của BD, cách giải khi đó cũng tương tự.

<u>Ví dụ 3.</u> Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình thang vuông tại *A* và *D*, *AD = DC = a*, *AB = 2a*. *SA* vuông góc với *AB* và *AD*, $SA=\dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$. Tính góc của 2 đường thẳng

a) *DC* và *SB*.

b) *SD* và *BC*.

<u>Hướng dẫn giải:</u>



a) Do $DC // AB \longrightarrow \widehat{(DC,SB)} = \widehat{(AB,SB)} = \alpha$

Tam giác SAB vuông tại A nên α là góc nhọn, khi đó $\tan\alpha = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \longrightarrow \alpha = 30^o$

Vậy góc giữa hai đường thẳng DC và SB bằng 30^o.

b) Gọi I là trung điểm của AB, khi đó AI = a. Tứ giác ADCI là hình bình hành (do AI // DC), có AI = AD = a nên là hình thoi. Lại có góc A, D vuông nên ADCI là hình vuông cạnh a $\longrightarrow DI = a\sqrt{2}$.

mặt khác, tứ giác BIDC là hình bình hành (do cặp cạnh DC và BI song song và bằng nhau) nên BC // DI.

Khi đó, $\widehat{(SD,BC)} = \widehat{(SD,DI)} = \beta$.

Tam giác SAI vuông tại A nên $SI^2 = SA^2 + AI^2 = \left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + a^2 = \dfrac{7a^2}{3}$

Tam giác SAD vuông tại A nên $SD^2 = SA^2 + AD^2 = \left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + a^2 = \dfrac{7a^2}{3}$

Áp dụng định lý hàm số cosin trong tam giác SDI ta được $\cos\widehat{SDI} = \dfrac{SD^2 + DI^2 - SI^2}{2SD.DI} = \dfrac{2a^2}{2.\frac{a\sqrt{21}}{3}.a\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{42}}$

Do $\cos\widehat{SDI} > 0$ nên góc *SDI* là góc nhọn $\longrightarrow \beta = \widehat{SDI} = \arccos\left(\dfrac{3}{\sqrt{42}}\right)$.

BÀI TẬP LUYỆN TẬP:

❶ Cho tứ diện đều *ABCD* cạnh *a*, gọi *I* là trung điểm cạnh *AD*. Tính góc giữa hai đường thẳng *AB* và *CI*.

Đ/s: $\widehat{(AB;CI)} = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$.

❷ Cho tứ diện *ABCD*. Gọi *M, N, P* lần lượt là trung điểm của *BC, AD* và *AC*. Biết $AB = 2a, CD = 2a\sqrt{2}, MN = a\sqrt{5}$. Tính góc giữa hai đường thẳng *AB* và *CD*.

❸ Cho hình chóp *S.ABC* có *SA = SB = SC = AB = AC = a* và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa $\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{AB}\right)$, từ đó suy ra góc giữa *SC* và *AB*.

III. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Hai đường thẳng *a, b* được gọi là vuông góc với nhau nếu $\widehat{(a;b)} = 90^o \longleftrightarrow a \perp b$.

Chú ý:

Các phương pháp chứng minh a ⊥ b:

- Chứng minh $\widehat{(a;b)} = 90^o$
- Chứng minh hai véc tơ chỉ phương của hai đường thẳng vuông góc với nhau, $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
- Chứng minh hai đường thẳng có quan hệ theo định lý Pitago, trung tuyến tam giác cân, đều...

Ví dụ 1. Cho tứ diện ABCD trong đó $AB = AC = AD = a, \widehat{BAC} = 60^o, \widehat{BAD} = 60^o, \widehat{CAD} = 90^o$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD.
a) Chứng minh rằng IJ vuông góc với cả hai đường AB và CD.
b) Tính độ dài IJ.

Hướng dẫn giải:

a) Từ giả thiết ta dễ dàng suy ra tam giác ABC, ABD đều, ΔACD vuông cân tại A.

Từ đó $BC = BD = a, CD = a\sqrt{2} \longrightarrow \Delta BCD$ vuông cân tại B.

▪ *Chứng minh IJ vuông góc với AB*

Do các ΔACD, ΔBCD vuông cân tại A, B nên

$$\begin{cases} AJ = \dfrac{1}{2}CD \\ BJ = \dfrac{1}{2}CD \end{cases} \longrightarrow AJ = BJ \Leftrightarrow IJ \perp AB.$$

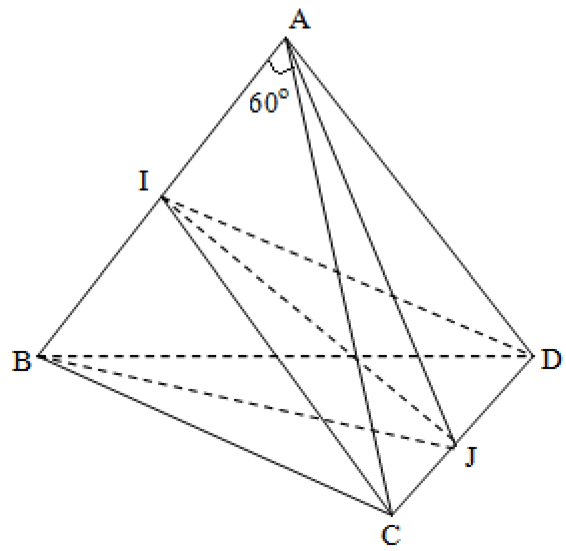
▪ *Chứng minh IJ vuông góc với CD*

Do các ΔACD, ΔBCD đều nên CI = DI $\longrightarrow$ IJ $\perp$CD.

b) Áp dụng định lý Pitago cho ΔAIJ vuông tại I ta được

$$IJ = \sqrt{AJ^2 - AI^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}$$

Vậy IJ = a/2.



Ví dụ 2. Cho hình chóp tam giác S.ABC có SA = SB = SC và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$.
Chứng minh rằng SA ⊥ BC, SB ⊥ AC, SC ⊥ AB.

Hướng dẫn giải:

▪ Chứng minh: SA ⊥ BC.

Xét $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA}.\left(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}\right) = \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$

$$\text{Mà}\ \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} = SA.SC.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{SA};\overrightarrow{SC}}\right) \\ \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = SA.SB.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{SA};\overrightarrow{SB}}\right) \\ SA = SB = SC \\ \widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} \end{array}\right. \longrightarrow \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} \Leftrightarrow \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = 0 \longleftrightarrow \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow SA \perp BC$$

Chứng minh tương tự ta cũng được SB ⊥ AC, SC ⊥ AB

Ví dụ 3. Cho tứ diện đều *ABCD*, cạnh bằng *a*. Gọi *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ*BCD*.
a) Chứng minh *AO* vuông góc với *CD*.
b) Gọi *M* là trung điểm của *CD*. Tính góc giữa
▪ *BC* và *AM*.
▪ *AC* và *BM*.

Hướng dẫn giải:

a) Sử dụng phương pháp dùng tích vô hướng

Gọi M là trung điểm của CD. Ta có

$$\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MO}\right).\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{CD}$$

Do ABCD là tứ diện đều nên AM ⊥ CD và O là tâm đáy (hay O là giao điểm của ba đường cao). Khi đó

$$\begin{cases} AM \perp CD \\ MO \perp CD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CD} = 0 \\ \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{CD} = 0 \end{cases} \longrightarrow \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow AO \perp CD.$$

b) Xác định góc giữa BC và AM; AC và BM

▪ *Xác định góc giữa BC và AM:*

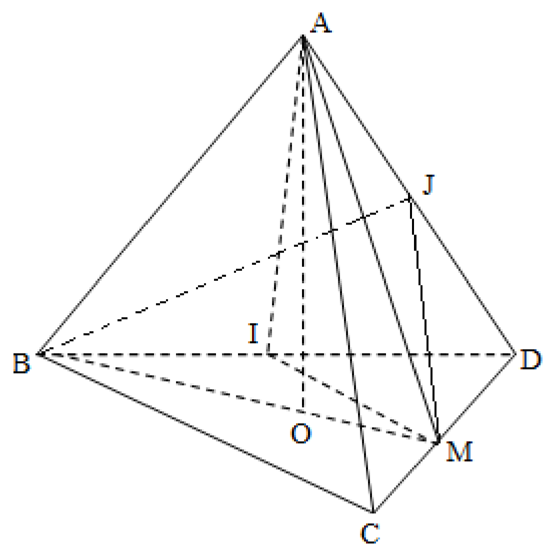
Gọi I là trung điểm của BD $\longrightarrow$ MI // BC.

$$\text{Từ đó}\ \left(\widehat{BC;AM}\right) = \left(\widehat{MI;AM}\right) = \left[\begin{array}{l} \widehat{AMI} \\ 180 - \widehat{AMI} \end{array}\right.$$

Áp dụng định lý hàm số cosin trong ΔAMI ta được

$$\cos\widehat{AMI} = \frac{AM^2 + MI^2 - AI^2}{2.AM.MI},\ (1).$$

Các ΔABD, ΔACD đều, có cạnh a nên $AI = AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



MI là đường trung bình nên MI = a/2.

Từ đó $(1) \Leftrightarrow \cos\widehat{AMI} = \dfrac{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{3a^2}{4}}{2.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \longrightarrow \widehat{AMI} = \arccos\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow \left(\widehat{BC;AM}\right) = \arccos\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right).$

▪ *Xác định góc giữa BC và AM:*

Gọi J là trung điểm của AD $\longrightarrow$ MJ // AC.

Khi đó $\left(\widehat{AC;BM}\right) = \left(\widehat{MJ;BM}\right) = \left[\begin{array}{l}\widehat{BMJ} \\ 180 - \widehat{BMJ}\end{array}\right.$

Các tam giác ABD, BCD là các tam giác đều cạnh a, nên các trung tuyến tương ứng $BJ = BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Do đó, $\Delta AIM = \Delta BJM \longrightarrow \widehat{AMI} = \widehat{BMJ} = \arccos\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right).$

Vậy $\left(\widehat{AC;BM}\right) = \arccos\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right).$

<u>Ví dụ 4.</u> Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ cạnh a. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$.

a) Tính góc giữa các đường thẳng: $\left(\widehat{AB,B'C'}\right); \left(\widehat{AC,B'C'}\right); \left(\widehat{A'C',B'C}\right)$.

b) Gọi O là tâm của hình vuông ABCD và I là một điểm sao cho $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OD'}$. Tính khoảng cách từ O đến I theo a.

c) Phân tích hai véc tơ $\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{BD}$ theo ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Từ đó, chứng tỏ rằng AC′ và BD vuông góc với nhau.

d) Trên cạnh DC và BB′ lấy hai điểm tương ứng M, N sao cho DM = BN = x (với 0 < x < a). Chứng minh rằng AC′ vuông góc với MN.

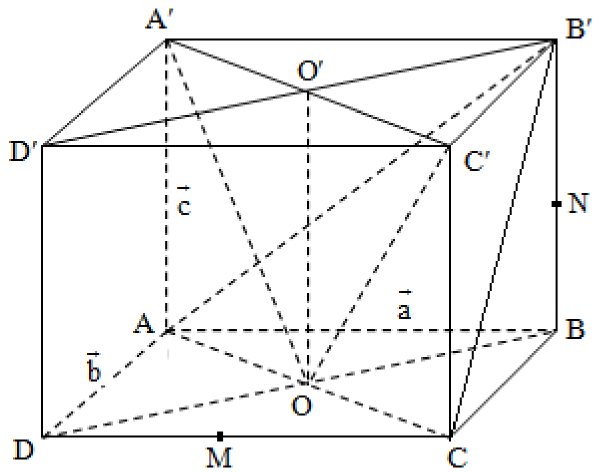
<u>Hướng dẫn giải:</u>

<u>Nhận xét:</u>

Để làm tốt các bài toán liên quan đến hình lập phương ta cần nhớ một số tính chất cơ bản của hình lập phương:

▪ Tất cả các đường chéo ở các mặt của hình lập phương đều bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$ (nếu hình lập phương cạnh a).

▪ Các đoạn thẳng tạo bởi các kích thước của hình lập phương luôn vuông góc với nhau (dài, rộng, cao).



a) Tính góc giữa: $\left(\widehat{AB,B'C'}\right); \left(\widehat{AC,B'C'}\right); \left(\widehat{A'C',B'C}\right)$.

▪ Tính $\left(\widehat{AB,B'C'}\right)$:

Do $B'C'//BC \longrightarrow \left(\widehat{AB,B'C'}\right) = \left(\widehat{AB,BC}\right) = 90^o.$

▪ Tính $\left(\widehat{AC,B'C'}\right)$:

Do $B'C'//BC \longrightarrow \left(\widehat{AC,B'C'}\right) = \left(\widehat{AC,BC}\right) = \left[\begin{array}{l}\widehat{ACB} \\ 180^o - \widehat{ACB}\end{array}\right.$

ABCD là hình vuông nên ΔABC là tam giác vuông cân tại B $\longrightarrow \widehat{ACB} = 45^o \Leftrightarrow \left(\widehat{AC,B'C'}\right) = 45^o.$

▪ Tính $\left(\widehat{A'C',B'C}\right)$:

Do $A'C'//AC \longrightarrow \left(\widehat{A'C',B'C}\right) = \left(\widehat{AC,B'C}\right) = \left[\begin{array}{l}\widehat{ACB'} \\ 180^o - \widehat{ACB'}\end{array}\right.$

Xét trong tam giác ACB′ có AC = B′C = AB′ (do đều là các đường chéo ở các mặt hình vuông của hình lập phương).

Do đó ΔACB′ đều $\longrightarrow \widehat{ACB'} = 60^o \Leftrightarrow \left(\widehat{A'C',B'C}\right) = 60^o.$

b) Tính độ dài OI theo a.

Với O là tâm của hình vuông ABCD thì $\begin{cases}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}\\ \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}\end{cases} \longrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

Khi đó $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}$

Gọi O′ là tâm của đáy A′B′C′D′, theo quy tắc trung tuyến ta có $\begin{cases}\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OC'}=2\overrightarrow{OO'}\\ \overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OD'}=2\overrightarrow{OO'}\end{cases} \longrightarrow \overrightarrow{OI}=4\overrightarrow{OO'}$

Khoảng cách từ O đến I chính là độ dài véc tơ OI, từ đó ta được OI = 4OO′ = 4a.

c) Phân tích hai véc tơ $\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{BD}$ theo ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Theo tính chất của hình lập phương ta dễ dàng có $\begin{cases}\vec{a}.\vec{b}=0\\ \vec{a}.\vec{c}=0\\ \vec{b}.\vec{c}=0\end{cases}$

▪ Phân tích: $\left\langle\begin{array}{l}\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\\ \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\vec{b}-\vec{a}\end{array}\right.$

▪ Chứng minh AC′ vuông góc với BD.

Xét $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{BD}=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right).\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\underbrace{\vec{a}.\vec{b}}_{0}+\vec{b}^2+\underbrace{\vec{c}.\vec{b}}_{0}-\vec{a}^2-\underbrace{\vec{a}.\vec{b}}_{0}-\underbrace{\vec{c}.\vec{a}}_{0}=\vec{b}^2-\vec{a}^2=AD^2-AB^2=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow AC' \perp BD.$

d) Chứng minh rằng AC′ vuông góc với MN.

Ta có phân tích: $\left\langle\begin{array}{l}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BN}\\ \overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}\end{array}\right.$

$$\longrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC'}=\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BN}\right).\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}\right)=\left(\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}+\underbrace{\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{BC}}_{0}+\underbrace{\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{CC'}}_{0}\right)+\left(\underbrace{\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AB}}_{0}+\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BC}+\underbrace{\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CC'}}_{0}\right)+$$

$$+\left(\underbrace{\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AB}}_{0}+\underbrace{\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BC}}_{0}+\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{CC'}\right)=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{CC'}$$

Mà $\left\langle\begin{array}{l}\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}=MC.AB.\cos 0^o=(a-x)a\\ \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BC}=CB.BC.\cos 180^o=-a^2\\ \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{CC'}=BN.CC'.\cos 0^o=ax\end{array}\right. \longrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC'}=(a-x)a-a^2+ax=0 \Leftrightarrow MN \perp AC'.$

<u>BÀI TẬP TỰ LUYỆN</u>

<u>Bài 1:</u> Cho hình chóp *S.ABCD* có *ABCD* là hình chữ nhật với $AB=a; AD=a\sqrt{3}$, *SA* = 2*a* và vuông góc với đáy. Tính góc giữa các đường thẳng sau:

a) *SB* và *CD* **b)** *SD* và *BC*

c) *SB* và *AC* **d)** *SC* và *BD*

<u>Bài 2:</u> Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh 2*a*, hình chiếu vuông góc của *S* xuống mặt đáy là trung điểm *H* của *AB*, biết $SH=a\sqrt{3}$. Gọi *I* là trung điểm của *SD*. Tính góc giữa các đường thẳng:

a) *SC* và *AB* **b)** *SD* và *BC*

c) *CI* và *AB* **d)** *BD* và *CI*

<u>Bài 3:</u> Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang vuông tại *A*, *B* với *AB* = 3*a*, *AD* = 2*a*, *DC* = *a*. Hình chiếu vuông góc của *S* xuống mặt phẳng (*ABCD*) là *H* thuộc *AB* với *AH* = 2*HB*, biết *SH* = 2*a*. Tính góc giữa

a) *SB* và *CD*

b) *SB* và *AC*