

Chương 1

Hệ thức lượng trong tam giác vuông

§1

Hệ thức lượng và đường cao

1

Tóm tắt lý thuyết

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH .
Đặt $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $AH = h$,
 $BH = c'$, $CH = b'$. Khi đó ta có các hệ thức sau

$a^2 = b^2 + c^2$

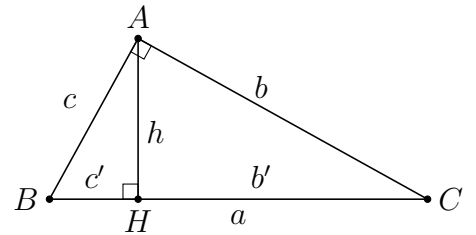
$a \cdot c' = c^2$

$a \cdot h = b \cdot c$

$b' \cdot c' = h^2$

$a \cdot b' = b^2$

$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$



2

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm. Tính BC , AH , BH , CH .

Lời giải.

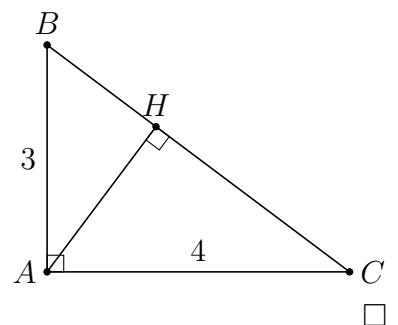
Ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = 5 \text{ cm.}$$

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2,4 \text{ cm.}$$

$$BH \cdot BC = AB^2 \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{3^2}{5} = 1,8 \text{ cm.}$$

$$CH = BC - BH = 3,2 \text{ cm.}$$



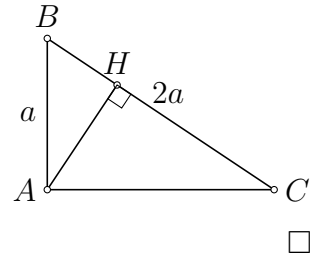
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH (H thuộc cạnh BC) biết $AB = a$, $BC = 2a$. Tính theo a độ dài AC và AH .

Lời giải.

Theo định lí Pitago, ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2$, suy ra

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = (2a)^2 - a^2 = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}.$$

Lại có $AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$



Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm, đường cao AH . Gọi E, F là hình chiếu của H lên AB, AC . Tính diện tích tứ giác $AEHF$.

Lời giải.

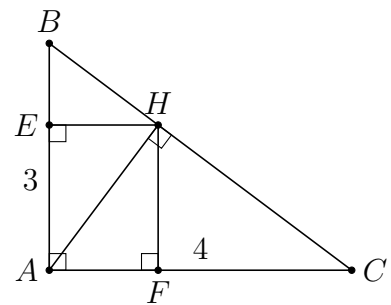
Tứ giác $AEHF$ có ba góc A, E, F là góc vuông nên $AEHF$ là hình chữ nhật. Do đó $S_{AEHF} = AE \cdot AF$.

Ta có $BC = 5$ cm, $AH = 2,4$ cm, nên trong các tam giác vuông AHB và AHC ta có

$$AE \cdot AB = AH^2 \Rightarrow AE = \frac{AH^2}{AB} = 2,76 \text{ cm.}$$

$$AF \cdot AC = AH^2 \Rightarrow AF = \frac{AH^2}{AC} = 1,44 \text{ cm.}$$

Suy ra $S_{AEHF} = 2,76 \cdot 1,44 = 3,9744 \text{ cm}^2.$



Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH . Biết $BH = 25$ cm, $CH = 144$ cm. Tính AB, AC, BC, AH .

Lời giải.

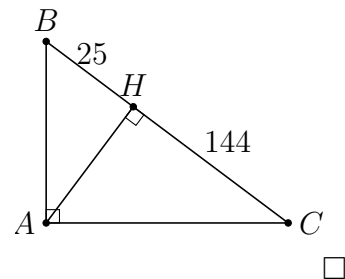
Ta có

$$BC = BH + HC = 25 + 144 = 169 \text{ cm.}$$

$$AB^2 = BH \cdot BC = 25 \cdot 169 \Rightarrow AB = 65 \text{ cm.}$$

$$AC^2 = CH \cdot CB = 144 \cdot 169 \Rightarrow AC = 156 \text{ cm.}$$

$$AH^2 = BH \cdot CH = 25 \cdot 144 \Rightarrow AH = 60 \text{ cm.}$$



Ví dụ 5. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH . Biết $BH = \frac{25}{13}$ cm, $AH = \frac{60}{13}$ cm. Tính AB, AC, BC, CH .

Lời giải.

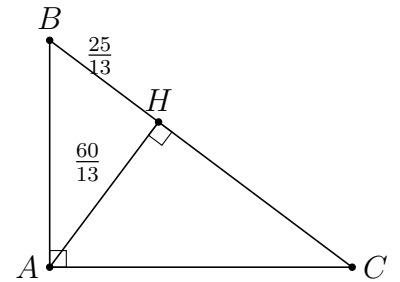
Ta có

$$BH \cdot CH = AH^2 \Rightarrow CH = \frac{AH^2}{BH} = \frac{144}{13} \text{ cm.}$$

$$BC = BH + CH = 13 \text{ cm.}$$

$$AB^2 = BH^2 + CH^2 = \frac{65^2}{13^2} \Rightarrow AB = \frac{65}{13} \text{ cm.}$$

$$AC^2 = CH \cdot CB = 144 \Rightarrow AC = 12 \text{ cm.}$$



□

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC vuông tại B , đường cao $BH = \frac{12}{5}$ cm và $4AB = 3BC$. Tính AB , AC , BC , AH , CH .

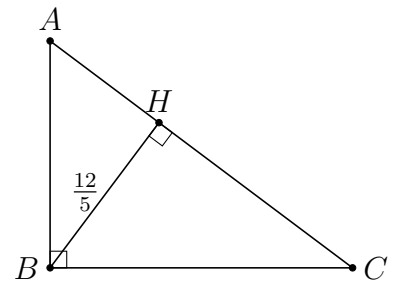
Lời giải.

Từ giả thiết ta suy ra $AB = \frac{3}{4}BC$.

Mặt khác, ta có $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2}$. Suy ra

$$\frac{25}{144} = \frac{16}{9BC^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{25}{9BC^2} \Rightarrow BC^2 = 16 \Rightarrow BC = 4 \text{ cm.}$$

Suy ra $BA = 3$ cm. Từ đây, ta tìm được $AC = 5$ cm, $AH = 1,8$ cm, $CH = 3,2$ cm.



□

Ví dụ 7. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $2\sqrt{5}$ cm. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AD , DC và I là giao điểm của AN và BM .

1. Chứng minh rằng AN vuông góc với MB .
2. Tính AI , MI .
3. Tính diện tích tứ giác $BINC$.

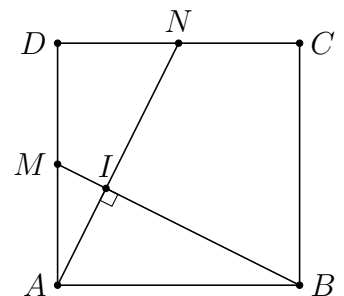
Lời giải.

1.

Xét hai tam giác ADN và BAM có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AD = AB$, $DN = AM$. Suy ra $\triangle ADN = \triangle BAM$ (c-g-c), do đó $\widehat{DAN} = \widehat{ABM}$. Suy ra

$$\widehat{MAI} + \widehat{AMI} = \widehat{DAN} + \widehat{AMB} = \widehat{ABM} + \widehat{AMB} = 90^\circ.$$

Từ đây, ta có $AN \perp BM$.



2. Ta có $BM^2 = AM^2 + AB^2 = 5 + 20 = 25 \Rightarrow BM = 5$ cm.

Suy ra $MI = \frac{AM^2}{MB} = 1$ cm, $AI^2 = AM^2 - MI^2 = 5 - 1 = 4 \Rightarrow AI = 2$ cm.

3. Ta có $S_{BNCI} = S_{BCN} + S_{BIN} = \frac{1}{2}(BI \cdot IN + BC \cdot CN) = 11 \text{ cm}^2$.

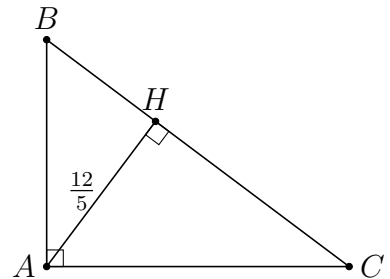
□

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 5$ cm, đường cao $AH = \frac{12}{5}$ cm. Tính BH, CH .

Lời giải.

Giả sử $BH \geq CH$. Ta có $BH + HC = BC = 5$. (1)
 Mặt khác $BH \cdot CH = AH^2 = \frac{144}{25}$. Từ (1) ta có $(BH + CH)^2 = 25$, suy ra

$$BH^2 + 2BH \cdot CH + CH^2 = 25 \Rightarrow BH^2 + CH^2 = 25 - \frac{288}{25} = \frac{337}{25}.$$



Do đó

$$(BH - CH)^2 = BH^2 - 2BH \cdot CH + CH^2 = \frac{337}{25} - \frac{288}{25} = \frac{49}{25}.$$

Suy ra $BH - CH = \frac{7}{5}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có

$$BH = \frac{(BH + CH) + (BH - CH)}{2} = \frac{16}{5} \text{ cm}, CH = BC - BH = \frac{9}{5} \text{ cm}.$$

□

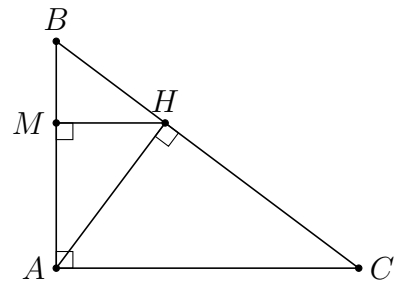
Ví dụ 9. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , kẻ HM vuông góc với AB tại M . Chứng minh rằng $BM = \frac{AB^3}{BC^2}$.

Lời giải.

Trong tam giác vuông AHB ta có $BM \cdot BA = BH^2$, suy ra $BM = \frac{BH^2}{AB}$.

Mặt khác, trong tam giác vuông ABC , ta có $BH \cdot BC = AB^2$, hay $BH = \frac{AB^2}{BC}$. Do đó

$$BM = \frac{AB^4}{AB \cdot BC^2} = \frac{AB^3}{BC^2}.$$



Vậy bài toán được chứng minh.

□

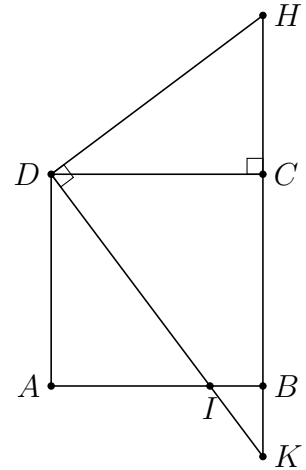
Ví dụ 10. Cho hình vuông $ABCD$, I là điểm thay đổi trên cạnh AB (I khác A và B). Đường thẳng DI cắt BC tại K . Chứng minh rằng $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2}$ không đổi.

Lời giải.

Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với DI , cắt BC tại H . Xét hai tam giác ADI và CDH có $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$, $AD = DC$, $\widehat{ADI} = \widehat{CDH}$ (cùng phụ với góc \widehat{CDI}). Suy ra $\triangle ADI = \triangle CDH$ (g-c-g), do đó $DI = DH$. Suy ra

$$\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DH^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DC^2}.$$

Từ đó, ta có đpcm.



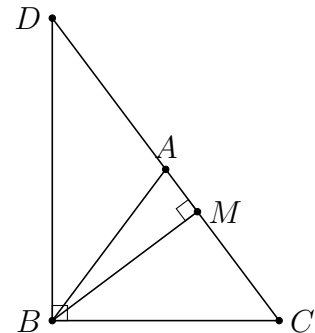
Ví dụ 11. Cho tam giác ABC cân tại A , có góc A nhọn. Vẽ BM vuông góc với AC . Chứng minh rằng

$$\frac{AM}{MC} = 2 \left(\frac{AB}{BC} \right)^2 - 1.$$

Lời giải.

Gọi D là điểm đối xứng với C qua A , khi đó $AB = AD = AC$ nên tam giác BCD vuông tại B và có đường cao BM . Suy ra $CM \cdot CD = BC^2 \Rightarrow CM \cdot 2AC = BC^2$, suy ra $2 \left(\frac{AC}{BC} \right)^2 = \frac{AC}{CM} = 1 + \frac{AM}{CM}$. Mà $AB = AC$, nên ta có $2 \left(\frac{AB}{BC} \right)^2 - 1 = \frac{AM}{CM}$.

Vậy bài toán được chứng minh.



3 Luyện tập

Bài 1. Cho tam giác vuông ABC , đường cao AH , cạnh góc vuông $AC = 60$ cm, cạnh huyền $BC = 100$ cm. Tính chu vi tam giác ABC , ABH , ACH .

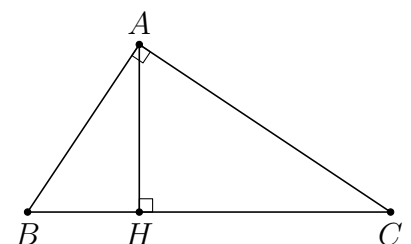
Lời giải.

Xét tam giác vuông ABC có $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = 80$ cm.

☑ $AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{60 \cdot 80}{100} = 48$ cm.

☑ $BH = \frac{AB^2}{BC} = 64$ cm, $CH = BC - BH = 36$ cm.

☑ Chu vi tam giác ABC là $AB + BC + CA = 240$ cm.



- ☑ Chu vi tam giác ABH là $AB + AH + HB = 192$ cm.
- ☑ Chu vi tam giác ACH là $AC + AH + HC = 144$ cm.

□

📁 **Bài 2.** Cho tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng 5 cm và 12 cm. Tìm cạnh huyền và các hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

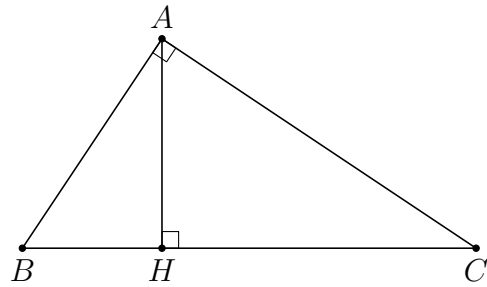
✍ **Lời giải.**

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác ABC ta có

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 13 \text{ cm.}$$

Các hình chiếu của các cạnh lên cạnh huyền là

- ☑ $BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{5^2}{13} = \frac{25}{13}$ cm.
- ☑ $CH = BC - BH = 13 - \frac{25}{13} = \frac{144}{13}$ cm.



□

📁 **Bài 3.** Tìm các cạnh của tam giác vuông, biết đường cao và đường trung tuyến ứng với cạnh huyền theo thứ tự là 4 cm và 5 cm.

✍ **Lời giải.**

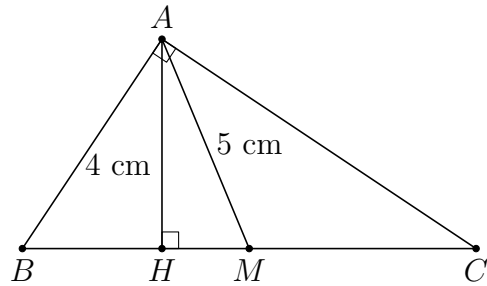
Vì AM là trung tuyến của $\triangle ABC$ vuông tại A nên $AM = MC = MB = 5$ cm $\Rightarrow BC = 2MA = 10$ cm.

Xét $\triangle AHM$ có $HM = \sqrt{AM^2 - AH^2} = 3$ cm. Suy ra

$$BH = MB - HM = 2 \text{ cm, } HC = HM + MC = 8 \text{ cm.}$$

Xét tam giác vuông ABC có

- ☑ $AB^2 = BH \cdot BC = 20 \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}$ cm.
- ☑ $AC^2 = CH \cdot CB = 80 \Rightarrow AC = 4\sqrt{5}$ cm.



□

📁 **Bài 4.** Tìm các cạnh của tam giác vuông, biết đường cao ứng với cạnh huyền là 4 cm, diện tích tam giác vuông bằng 20 cm².

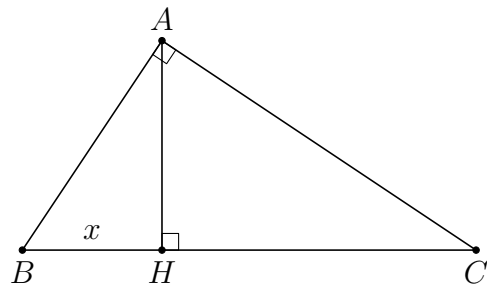
✍ **Lời giải.**

Giả sử tam giác đó là $\triangle ABC$ có đường cao AH .

$$\text{Ta có } BC = \frac{2S_{ABC}}{AH} = \frac{2 \cdot 20}{4} = 10 \text{ cm.}$$

Đặt $BH = x$ ($x > 0$). Ta có

$$\begin{aligned} AH^2 = BH \cdot CH &\Leftrightarrow 16 = x \cdot (10 - x) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 8. \end{cases} \end{aligned}$$



Khi $BH = 2$ cm: $AB^2 = BH \cdot BC = 2 \cdot 10 \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}$ cm; $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 4\sqrt{5}$ cm.
 Khi $BH = 8$ cm: $AB^2 = BH \cdot BC = 8 \cdot 10 \Rightarrow AB = 4\sqrt{5}$ cm; $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 2\sqrt{5}$ cm.
 Khi đó ba cạnh của tam giác là $2\sqrt{5}$ cm, $4\sqrt{5}$ cm và 10 cm.

□

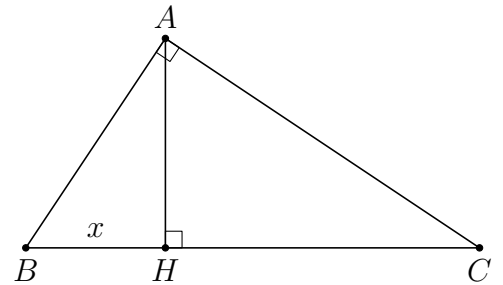
Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $AH = 6$ cm và $HC - HB = 9$ cm. Tính HB, HC .

Lời giải.

Đặt $BH = x \Rightarrow CH = 9 + x$ với $x > 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} AH^2 = BH \cdot HC &\Leftrightarrow x(9 + x) = 36 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 9x - 36 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ x = 3. \end{cases} \end{aligned}$$



Vậy $HB = 3$ cm, $HC = HB + 9 = 12$ cm. □

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A , $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$, đường cao $AH = 18$ cm. Tính chu vi tam giác ABC .

Lời giải.

Đặt $AB = 3x \Rightarrow AC = 4x$ với $x > 0$. Suy ra $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 5x$.

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \frac{12x}{5} \Rightarrow x = \frac{15}{2}$ cm.

Chu vi tam giác ABC bằng $AB + BC + CA = 12x = 90$ cm. □

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A với $AB < AC$ và đường cao AH . Tính AB, AC biết $AH = 6$ cm và diện tích tam giác ABC bằng $37,5$ cm².

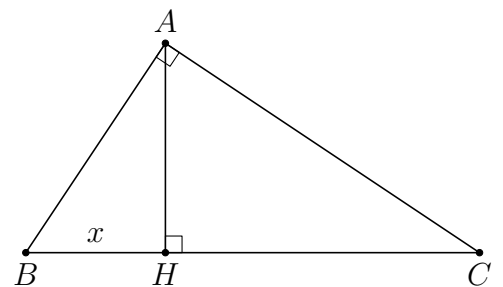
Lời giải.

Giả sử tam giác đó là $\triangle ABC$ có đường cao AH .

Ta có $BC = \frac{2S_{ABC}}{AH} = \frac{2 \cdot 37,5}{6} = 12,5$ cm.

Đặt $BH = x$ ($x > 0$). Ta có

$$\begin{aligned} AH^2 = BH \cdot CH &\Leftrightarrow 36 = x \cdot (12,5 - x) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 12,5x + 36 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ x = 8. \end{cases} \end{aligned}$$



Khi $BH = \frac{9}{2}$ cm: $AB^2 = BH \cdot BC = \frac{9}{2} \cdot 12,5 \Rightarrow AB = \frac{15}{2}$ cm; $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 10$ cm.

Khi $BH = 8$ cm: $AB^2 = BH \cdot BC = 8 \cdot 12,5 \Rightarrow AB = 10$ cm; $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 7,5$ cm.

Khi đó là ba cạnh của tam giác là $AB = 7,5$ cm, $AC = 10$ cm và $BC = 12,5$ cm. □

Bài 8. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D . Hai đường chéo vuông góc với nhau tại O . Biết $AB = 2\sqrt{13}$, $OA = 6$. Tính diện tích hình thang.

Lời giải.

Xét $\triangle OAB$ vuông tại O , ta có:

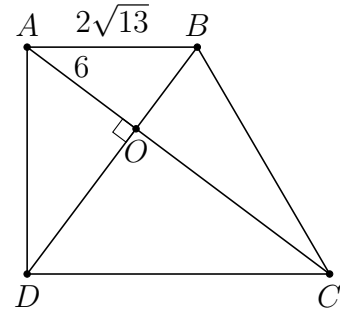
$$OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{(2\sqrt{13})^2 - 6^2} = 4.$$

Xét $\triangle ABD$ vuông tại A , đường cao AO ta có:

☑ $AB^2 = BD \cdot OB \Rightarrow BD = \frac{AB^2}{OB} = \frac{(2\sqrt{13})^2}{4} = 13.$

☑ $AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{13^2 - (2\sqrt{13})^2} = 3\sqrt{13}.$

☑ Ta có $OD = BD - OB = 13 - 4 = 9.$



Xét $\triangle ADC$ vuông tại D ta có: $AD^2 = OA \cdot AC \Rightarrow AC = \frac{AD^2}{OA} = \frac{(3\sqrt{13})^2}{6} = 19,5.$

Mà $AD \cdot DC = OD \cdot AC \Rightarrow DC = \frac{OD \cdot AC}{AD} = \frac{9 \cdot 19,5}{3\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{13}}{2}.$

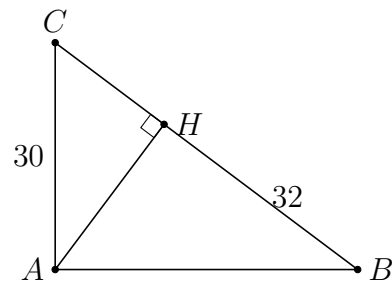
Vậy $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AD \cdot (AB + DC) = 126,75$ (đvdt) □

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A . Đường cao AH , cạnh bên $AC = 30$, $HB = 32$. Tính độ dài AH , HC , AB .

Lời giải.

Đặt $HC = x$ ($x > 0$). Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH ta có

$$\begin{aligned} AH^2 = HC \cdot HB &\Leftrightarrow 30^2 = x \cdot (x + 32) \\ &\Leftrightarrow (x - 18)(x + 50) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \text{ (nhận)} \\ x = -50 \text{ (loại)} \end{cases} \end{aligned}$$



Xét $\triangle AHC$ vuông tại H ta có $AH = \sqrt{AC^2 - HC^2} = 24.$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A ta có $AB^2 = HB \cdot BC = 32 \cdot (32 + 18) = 40.$ □

Bài 10. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có các cạnh $AB = 60$ cm, $AD = 32$ cm. Từ D kẻ đường thẳng vuông góc với đường chéo AC . Đường này cắt AC tại E và AB tại F . Tính độ dài các đoạn EA , EC , ED , FB , FD .

Lời giải.

Xét tam giác vuông ADC ta có

$$EA = \frac{AD^2}{AC} = \frac{AD^2}{\sqrt{AD^2 + CD^2}} = \frac{32^2}{\sqrt{32^2 + 60^2}} = \frac{256}{17} \text{ cm.}$$

$$EC = \frac{CD^2}{AC} = \frac{60^2}{\sqrt{32^2 + 60^2}} = \frac{900}{17} \text{ cm.}$$

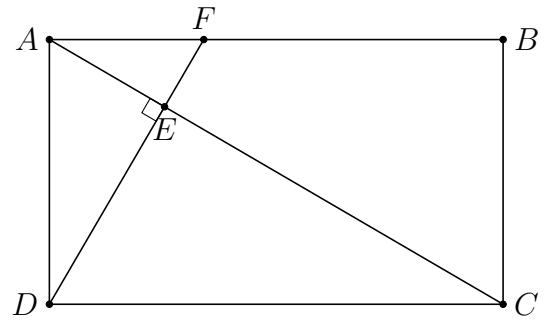
Xét tam giác vuông ADE có

$$ED = \sqrt{EA \cdot EC} = \sqrt{\frac{32^2 \cdot 60^2}{32^2 + 60^2}} = \frac{480}{17} \text{ cm.}$$

$$FD = \frac{AD^2}{ED} = \frac{32^2}{\frac{32 \cdot 60}{17}} = \frac{544}{15} \text{ cm.}$$

$$AF = \sqrt{FD^2 - AD^2} = \sqrt{\frac{32^2 \cdot 68^2}{60^2} - 32^2} = \frac{256}{15} \text{ cm.}$$

$$FB = AB - AF = 60 - \frac{256}{15} = \frac{-644}{15} \text{ cm.}$$



□

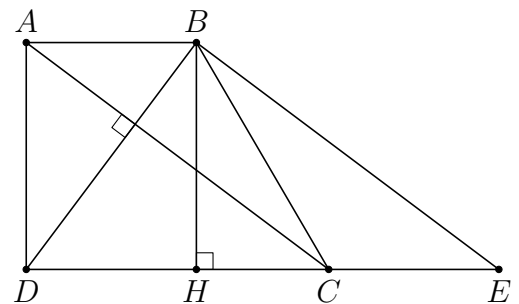
Bài 11. Tính diện tích hình thang $ABCD$, có đường cao bằng 12 cm, hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau, $DB = 15$ cm.

Lời giải.

Qua B vẽ đường thẳng song song với AC , cắt DC ở E . Gọi BH là đường cao của hình thang. Ta có $BE \parallel AC$, $AC \perp BD$ nên $BE \perp BD$.

Áp dụng định lý Pytago vào tam giác vuông BDH , ta có

$$\begin{aligned} BH^2 + HD^2 &= BD^2 \Rightarrow 12^2 + HD^2 = 15^2 \\ \Rightarrow HD^2 &= 225 - 144 = 81 \Rightarrow HD = 9 \text{ cm.} \end{aligned}$$



Xét tam giác BDE vuông tại B , ta có

$$BD^2 = DE \cdot DH \Rightarrow 15^2 = DE \cdot 9 \Rightarrow DE = \frac{225}{9} = 25 \text{ cm.}$$

Ta có $AB = CE$ nên $AB + CD = CE + CD = DE = 25$ cm.

$$\text{Do đó } S_{ABCD} = \frac{25 \cdot 12}{2} = 150 \text{ cm}^2.$$

□

Bài 12. Hình thang cân $ABCD$ có đáy lớn $CD = 10$ cm, đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tìm đường cao của hình thang

Lời giải.

Gọi AH, BK là đường cao của hình thang.

Đặt $AB = AH = BK = x$.

Dễ dàng chứng minh được $DH = CK = \frac{DC - AB}{2} = \frac{10 - x}{2}$.

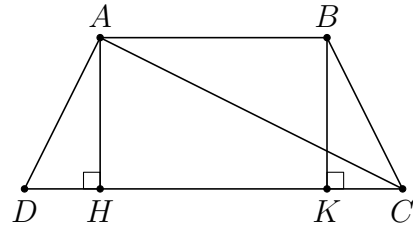
Do đó $HC = \frac{10 + x}{2}$.

Xét $\triangle ADC$ vuông tại A , ta có $AH^2 = HD \cdot HC$. Do đó

$$x^2 = \frac{10 - x}{2} \cdot \frac{10 + x}{2} = \frac{100 - x^2}{4}$$

Từ đó suy ra $x = 2\sqrt{5}$ cm.

Đường cao của hình thang bằng $2\sqrt{5}$ cm. □



Bài 13. Tính diện tích một tam giác vuông có chu vi 72 cm, hiệu giữa đường trung tuyến và đường cao ứng với cạnh huyền bằng 7 cm.

Lời giải.

Đặt $AM = x$ ($x > 0$), ta có $BC = 2x$, $AH = x - 7$.

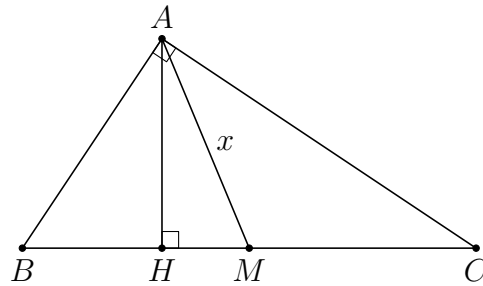
Theo các hệ thức trong tam giác vuông

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 = 4x^2 \tag{1}$$

$$AB \cdot AC = BC \cdot AH = 2x(x - 7) \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC &= 4x^2 + 4x(x - 7) \\ \Leftrightarrow (AB + AC)^2 &= 8x^2 - 28x \Leftrightarrow (72 - 2x)^2 = 8x^2 - 28x \\ \Leftrightarrow x^2 + 65x - 1296 &= 0 \Leftrightarrow (x - 16)(x + 81) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \text{ (nhận)} \\ x = -81 \text{ (loại)}. \end{cases} \end{aligned}$$

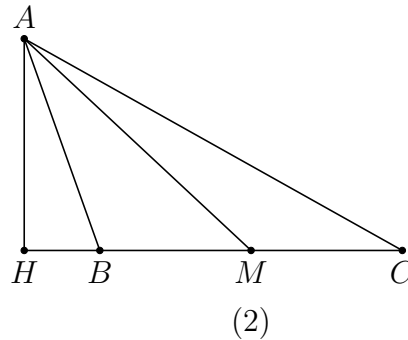
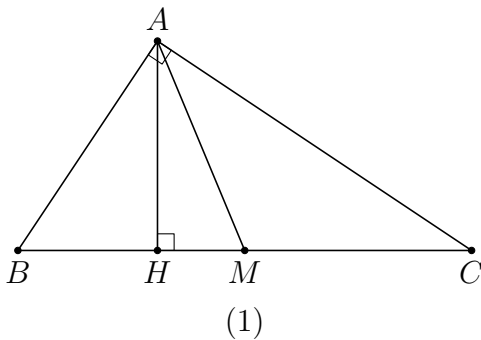


Từ đó $BC = 32$ cm, $AH = 9$ cm.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 9 = 144$ cm². □

Bài 14. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh AB, BC, CA là ba số tự nhiên liên tiếp tăng dần. Kẻ đường cao AH , đường trung tuyến AM . Chứng minh rằng $HM = 2$.

Lời giải.



Đặt $BC = a$ thì $AB = a - 1$, $AC = a + 1$. Đặt $HM = x$. Ta thấy

$$HB = MB - MH \text{ (nếu } B \geq 90^\circ \text{, xem hình (1))}$$

$$HB = MH - MB \text{ (nếu } B > 90^\circ, \text{ xem hình (2))}$$

Nên $HB^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$. Ta có $AC^2 - HC^2 = AB^2 - HB^2$ (cùng bằng AH^2) nên

$$\begin{aligned} (a+1)^2 - \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 &= (a-1)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow 4a &= 2ax \Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

□

Bài 15. Tam giác ABC cân tại A , gọi I là giao điểm của các đường phân giác. Biết $IA = 2\sqrt{5}$ cm, $IB = 3$ cm. Tính độ dài AB .

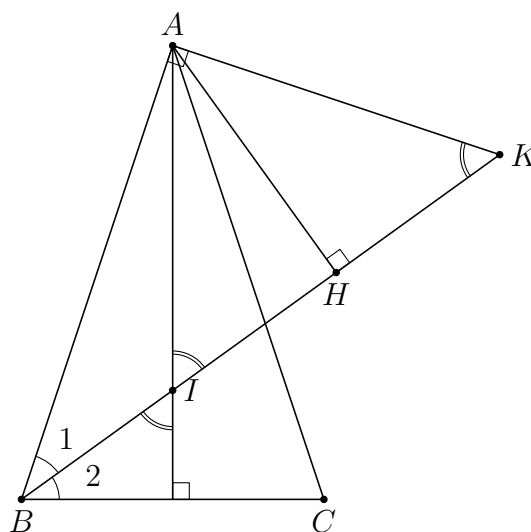
Lời giải.

Đường vuông góc với AB tại A cắt BI ở K . Ta có \widehat{K} phụ với \widehat{B}_1 , \widehat{AIK} phụ với \widehat{B}_2 , mà $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ nên $\widehat{K} = \widehat{AIK}$.

Kẻ $AH \perp BK$. Đặt $IH = HK = x$.

Xét tam giác vuông ABK có

$$\begin{aligned} AK^2 = KH \cdot KB &\Leftrightarrow (2\sqrt{5})^2 = x(2x+3) \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 20 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x-5)(x+4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \text{ (nhận)} \\ x = -4 \text{ (loại)}. \end{cases} \end{aligned}$$



Suy ra $KB = 8$ cm $\Rightarrow AB = \sqrt{BK^2 - AK^2} = 2\sqrt{11}$ cm.

□

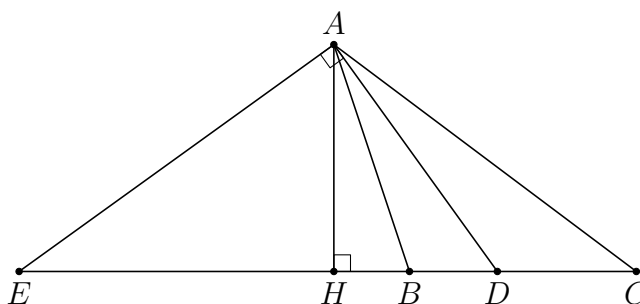
Bài 16. Tam giác ABC có $BC = 40$ cm, đường phân giác trong AD dài 45 cm, đường cao AH dài 36 cm. Tính các độ dài BD, DC .

Lời giải.

Đặt $BD = x, DC = y$. Giả sử $x < y$.

Ta tính được $HD = 27$ cm. Vẽ tia phân giác của góc ngoài tại A , cắt BC ở E . Ta có $AE \perp AD$ nên $AD^2 = DE \cdot DH$. Suy ra

$$DE = \frac{AD^2}{DH} = \frac{45^2}{27} = 75 \text{ cm.}$$



Theo tính chất đường phân giác trong và ngoài của tam giác ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{75-x}{75+y} \tag{1}$$

Mặt khác, thay $y = 40 - x$ vào (1) và rút gọn được

$$x^2 - 115x + 1500 = 0 \Leftrightarrow (x-15)(x-100) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \text{ (nhận)} \\ x = 100 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $y = 40 - x = 25$ cm.

Vậy $DB = 15$ cm, $DC = 25$ cm.

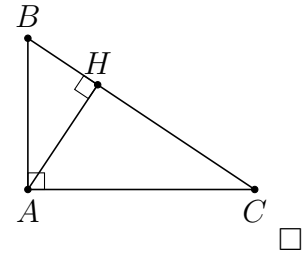
□

Bài 17. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Tính BH , CH biết $AB = 12$ cm, $BC = 20$ cm.

Lời giải.

✓ $AB^2 = BH \cdot BC \Leftrightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{12^2}{20} = 7,2$ cm.

✓ $HC = 20 - 7,2 = 12,8$ cm.

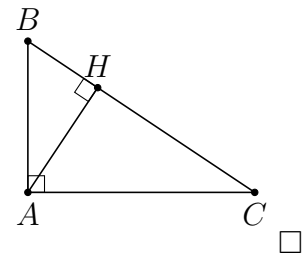


Bài 18. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Tính AC , CH biết $AH = 2$ cm, $HB = 1$ cm.

Lời giải.

✓ $AH^2 = BH \cdot CH \Leftrightarrow CH = \frac{AH^2}{BH} = \frac{2^2}{1} = 4$ cm.
nên $BC = HB + HC = 1 + 4 = 5$ cm.

✓ $AC^2 = CH \cdot BC = 4 \cdot 5 = 20 \Rightarrow AC = 2\sqrt{5}$ cm.



Bài 19. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Tính AH , HB , HC biết $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm.

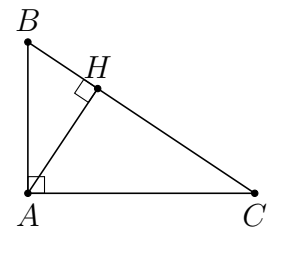
Lời giải.

Ta có $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ cm.

✓ $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{25}{144}$ cm.
Suy ra $AH = \frac{12}{5}$ cm.

✓ $AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5}$ cm.

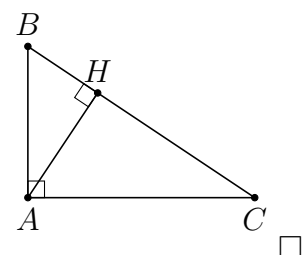
✓ $HC = BC - HB = 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5}$ cm.



Bài 20. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Tính AB , AC biết $HB = 1$ cm, $HC = 2$ cm.

Lời giải.

Ta có $BC = HB + HC = 2 + 1 = 3$ cm.
 $AB^2 = BH \cdot BC = 1 \cdot 3 = 3 \Rightarrow AB = \sqrt{3}$ cm.
 $AC^2 = CH \cdot BC = 2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow AC = \sqrt{6}$ cm.

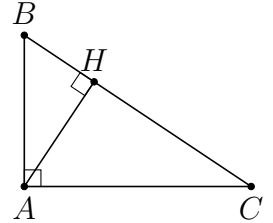


⇒ **Bài 21.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Tính BC , AC , AH biết $AB = 15$ cm, $HC = 16$ cm.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} AB^2 &= BH \cdot BC \\ \Leftrightarrow AB^2 &= BH \cdot (BH + 16) \\ \Leftrightarrow 15^2 &= BH^2 + 16BH \\ \Leftrightarrow BH^2 + 16BH - 225 &= 0 \\ \Leftrightarrow BH^2 + 16BH - 225 &= 0 \\ \Leftrightarrow (BH + 25) \cdot (BH - 9) &= 0 \\ \Leftrightarrow BH = -25 \text{ (loại)} \text{ hoặc } BH = 9 \text{ (thỏa mãn)}. \end{aligned}$$



Do đó $BH = 9$ cm, suy ra $BC = HB + HC = 16 + 9 = 25$ cm.
 $AB^2 = BH \cdot BC = 9 \cdot 25 = 225 \Rightarrow AB = 15$ cm.
 $AC^2 = CH \cdot BC = 16 \cdot 25 = 400 \Rightarrow AC = 20$ cm.

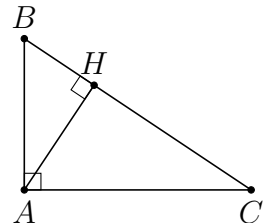
□

⇒ **Bài 22.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Tính AB , AC biết $AH = 12$ cm, $BC = 25$ cm.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} AH^2 &= HB \cdot HC \\ \Leftrightarrow 144 &= HB \cdot (25 - HB) \\ \Leftrightarrow HB^2 - 25HB + 144 &= 0 \\ \Leftrightarrow (HB - 9)(HB - 16) &= 0 \\ \Leftrightarrow HB = 9 \text{ hoặc } HB = 16. \end{aligned}$$



Vai trò của HB , HC như nhau, có thể giả sử $HB = 9$ cm và $HC = 16$ cm, nên
 $AB^2 = BH \cdot BC = 9 \cdot 25 = 225 \Rightarrow AB = 15$ cm.
 $AC^2 = CH \cdot BC = 16 \cdot 25 = 400 \Rightarrow AC = 20$ cm.

□

⇒ **Bài 23.** Cho tam giác ABC cân tại A có AH , BK là 2 đường cao. Chứng minh rằng

a) $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4AH^2}$.

b) $BC^2 = 2CK \cdot CA$.

✍ **Lời giải.**

- a) Kẻ HE vuông góc với AC , suy ra $HE \parallel BK$,
nên HE là đường trung bình trong tam giác BCK .

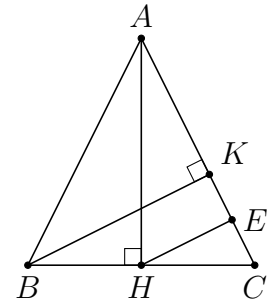
Trong tam giác AHC vuông tại H ,

$$\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{BK}{2}\right)^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{\left(\frac{BC}{2}\right)^2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4AH^2}.$$

- b) Ta có $HC^2 = CK \cdot CA \Leftrightarrow \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = CK \cdot CA$.

$$\text{Vậy } BC^2 = 4CK \cdot CA.$$



Bài 24. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và một điểm M thuộc cạnh huyền BC . Chứng minh rằng $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$.

Lời giải.

Từ M kẻ $MP \perp AB$; $MQ \perp AC$

Do $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 45^\circ$, khi đó tam giác MPQ và MQC vuông cân,

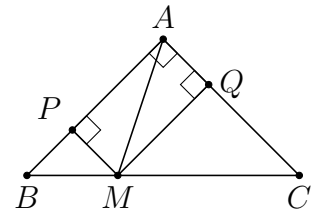
nên $MB^2 = 2MP^2$ và $MC^2 = 2MQ^2$.

Suy ra $MB^2 + MC^2 = 2(MP^2 + MQ^2)$.

Mà $APMQ$ là hình chữ nhật nên $MP^2 + MQ^2 = PQ^2 = MA^2$.

Do đó từ (*), ta có $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$.

(*)



§2 Tỷ số lượng giác của góc nhọn

1 Tóm tắt lý thuyết

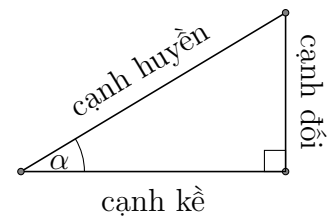
1.1 Khái niệm tỉ số lượng giác của một góc nhọn

Cho tam giác vuông và góc nhọn α như hình vẽ.

Khi đó

$$\checkmark \sin \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}; \quad \checkmark \tan \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}$$

$$\checkmark \cos \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}; \quad \checkmark \cot \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}$$



⚠ 22. Nhận xét

Tỉ số lượng giác của một góc nhọn luôn dương.

$\sin \alpha < 1, \cos \alpha < 1$.

1.2 Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau

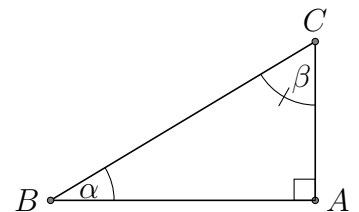
Định lí 4. Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cos góc kia, tan góc này bằng cot góc kia.

Hệ quả 4.

Cho hai góc α và β với $\alpha + \beta = 90^\circ$, khi đó

$$\checkmark \sin \alpha = \cos \beta; \quad \checkmark \tan \alpha = \cot \beta;$$

$$\checkmark \cos \alpha = \sin \beta; \quad \checkmark \cot \alpha = \tan \beta.$$



Bảng tỉ số lượng giác một số góc đặc biệt

Tỉ số lượng giác góc α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$, $AC = 4$. Viết các tỉ số lượng giác của góc B .

Lời giải.

$\triangle ABC$ vuông tại A nên $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

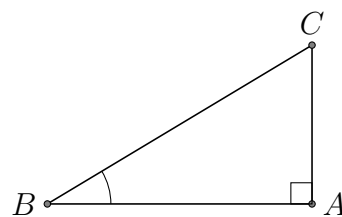
Ta có

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5};$$

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3};$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5};$$

$$\cot B = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}.$$



□

Ví dụ 2. Dựng góc nhọn α biết $\tan \alpha = \frac{2}{5}$.

Lời giải.

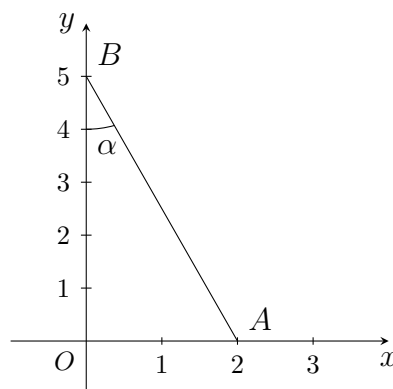
Dựng góc vuông xOy .

Trên tia Ox , lấy điểm A sao cho $OA = 2$;

trên tia Oy , lấy điểm B sao cho $OB = 5$.

Góc OBA là góc α cần dựng.

Thật vậy, $\tan \alpha = \tan \widehat{OBA} = \frac{2}{5}$.



□

Ví dụ 3. Hãy viết tỉ số lượng giác của các góc sau thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45°

$$\sin 75^\circ, \cos 60^\circ, \tan 80^\circ, \cot 50^\circ.$$

Lời giải.

$$\sin 75^\circ = \cos 15^\circ; \quad \cos 60^\circ = \sin 30^\circ; \quad \tan 80^\circ = \cot 10^\circ; \quad \cot 50^\circ = \tan 40^\circ.$$

□

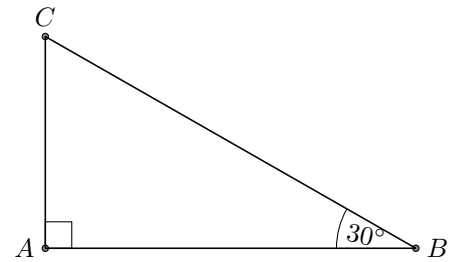
Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ$ và $BC = 10$. Tính độ dài cạnh AB và AC .

 **Lời giải.**


Tam giác ABC vuông tại A nên

$$\sin B = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC = BC \cdot \sin B = 10 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = BC \cdot \cos B = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5.$$



3 **Luyện tập**

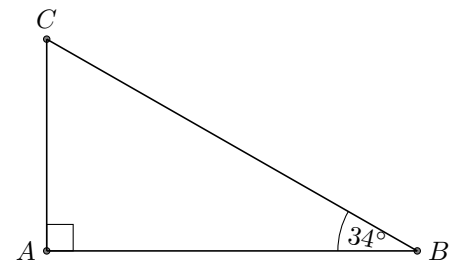
 **Bài 1.** Vẽ một tam giác vuông có một góc nhọn 34° rồi viết tỉ số lượng giác của góc 34° .


 **Lời giải.**

Giả sử $\widehat{B} = 34^\circ$.

$$\sin 34^\circ = \sin B = \frac{AC}{BC}; \quad \tan 34^\circ = \tan B = \frac{AC}{AB};$$

$$\cos 34^\circ = \cos B = \frac{AB}{BC}; \quad \cot 34^\circ = \cot B = \frac{AB}{AC}.$$



 **Bài 2.** Cho tam giác ABC vuông tại C . Trong đó $AC = 0,9$ m, $BC = 1,2$ m. Tính các tỉ số lượng giác của góc B . Từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc A .

 **Lời giải.**

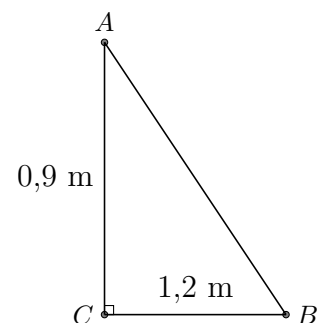
Áp dụng định lý Py-ta-go ta có:


$$AB = \sqrt{CA^2 + CB^2} = \sqrt{0,9^2 + 1,2^2} = 1,5 \text{ m.}$$

Vì góc A và góc B phụ nhau nên

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{0,9}{1,5} = \frac{3}{5} = \cos A; \quad \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{0,9}{1,2} = \frac{3}{4} = \cot A;$$

$$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{1,2}{1,5} = \frac{4}{5} = \sin A; \quad \cot B = \frac{BC}{AC} = \frac{1,2}{0,9} = \frac{4}{3} = \tan A.$$



 **Bài 3.** Hãy viết tỉ các tỉ số lượng giác sau thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45°

$$\sin 60^\circ, \cos 75^\circ, \sin 52^\circ 30', \cot 82^\circ, \tan 80^\circ.$$

 **Lời giải.**

$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$;
 $\cos 75^\circ = \sin 15^\circ$;

$\sin 52^\circ 30' = \cos 37^\circ 30'$;
 $\cot 82^\circ = \tan 8^\circ$;

$\tan 80^\circ = \cot 10^\circ$.

□

Bài 4. Dựng góc nhọn α biết

1. $\sin \alpha = \frac{2}{3}$; 2. $\cos \alpha = 0,6$; 3. $\tan \alpha = \frac{3}{4}$; 4. $\cot \alpha = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

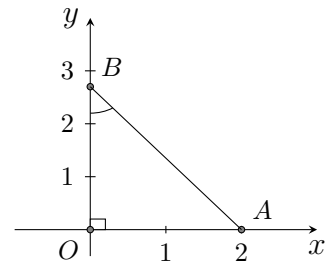
1. $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

Vẽ góc vuông xOy .

Trên Ox lấy điểm A sao cho $OA = 2$ cm.

Lấy A làm tâm, vẽ cung tròn bán kính 3 cm sao cho cung tròn này cắt tia Oy tại B .

Khi đó $\widehat{OBA} = \alpha$ nên $\sin \alpha = \sin \widehat{OAB} = \frac{OA}{AB} = \frac{2}{3}$.



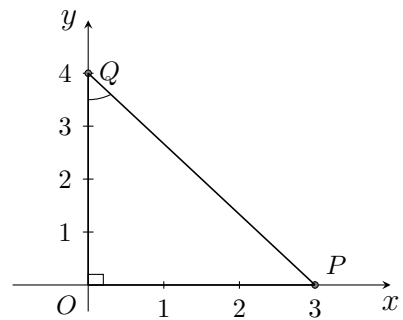
2. $\cos \alpha = 0,6$.

Vẽ góc vuông xOy .

Trên Ox lấy điểm P sao cho $OP = 3$ cm.

Lấy P làm tâm, vẽ cung tròn bán kính 5 cm sao cho cung tròn này cắt tia Oy tại Q .

Khi đó $\widehat{OPQ} = \alpha$ nên $\cos \alpha = \cos \widehat{OPQ} = \frac{OP}{OQ} = 0,6 = \frac{3}{5}$.



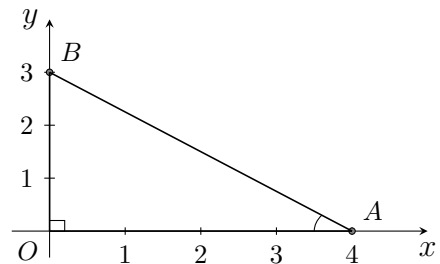
3. $\tan \alpha = \frac{3}{4}$.

Vẽ góc vuông xOy .

Trên Ox lấy điểm A sao cho $OA = 4$ cm.

Trên Oy lấy điểm B sao cho $OB = 3$ cm.

Khi đó $\widehat{OAB} = \alpha$ nên $\tan \alpha = \tan \widehat{OAB} = \tan \frac{OB}{OA} = \frac{3}{4}$.



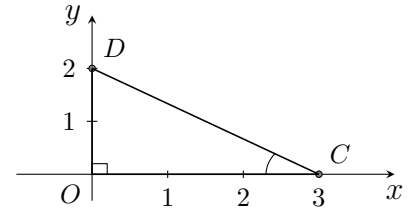
4. $\cot \alpha = \frac{3}{2}$.

Vẽ góc vuông xOy .

Trên Ox lấy điểm C sao cho $OC = 3$ cm.

Trên Oy lấy điểm D sao cho $OD = 2$ cm.

Khi đó $\widehat{OCD} = \alpha$ nên $\cot \alpha = \cot \widehat{OCD} = \frac{OC}{OD} = \frac{3}{2}$.



□

📖 **Bài 5.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm, $\widehat{B} = \alpha$. Biết $\tan \alpha = \frac{5}{12}$. Hãy tìm độ dài cạnh AC và BC .

📝 **Lời giải.**

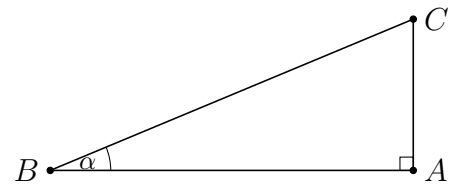
Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có

$$\tan \alpha = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow \frac{5}{12} = \frac{AC}{6} \Leftrightarrow AC = \frac{5}{2} \text{ cm.}$$

Áp dụng định lý Py-ta-go vào $\triangle ABC$ vuông tại A ta có

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \frac{13}{2} \text{ cm.}$$



□

📖 **Bài 6.** Tính giá trị của các biểu thức

1. $A = \frac{\sin 32^\circ}{\cos 58^\circ};$

2. $B = \tan 76^\circ - \cot 14^\circ.$

📝 **Lời giải.**

1. Ta có $32^\circ + 58^\circ = 90^\circ$
 $\Rightarrow \sin 32^\circ = \cos 58^\circ$
 $\Rightarrow A = 1.$

2. Ta có $76^\circ + 14^\circ = 90^\circ$
 $\Rightarrow \tan 76^\circ = \cot 14^\circ$
 $\Rightarrow B = 0.$

□

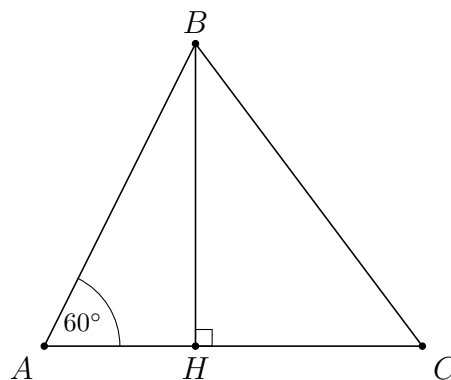
📖 **Bài 7.** (*) Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$. Chứng minh rằng $BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC$.

📝 **Lời giải.**

Kẻ đường cao BH của $\triangle ABC$.
 Khi đó ta có $HC^2 = (AC - AH)^2$.

Áp dụng định lý Py-ta-go ta có

$$\begin{aligned} BC^2 &= BH^2 + HC^2 \\ &= BH^2 + (AC - AH)^2 \\ &= BH^2 + AH^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH. \end{aligned}$$



Lại có $\widehat{BAC} = 60^\circ$

$$\Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AH}{AB} \text{ hay } AH = \frac{AB}{2}.$$

$$\text{Vậy } BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC.$$

□

Bài 8. (*) Cho tứ giác $ABCD$ có α là góc nhọn tạo bởi hai đường chéo. Chứng minh rằng $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin \alpha$.

Lời giải.

Giả sử hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại $I, \widehat{AIB} = \alpha$ là góc nhọn.

Kẻ đường cao AH của $\triangle ABD$ và đường cao CK của $\triangle CBD$.

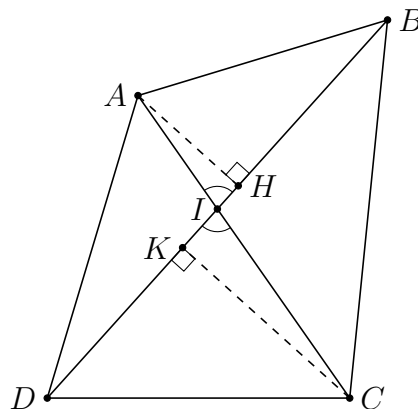
$$\text{Ta có } AH = AI \sin \alpha, CK = CI \sin \alpha.$$

$$\text{Diện tích } \triangle ABD \text{ là } S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot AH.$$

$$\text{Diện tích } \triangle CBD \text{ là } S_{\triangle CBD} = \frac{1}{2}BD \cdot CK.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD} = \frac{1}{2}BD \cdot (AH + CK) \\ &= \frac{1}{2}BD \cdot (AI + CI) \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2}BD \cdot AC \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$



□

§3 Hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông

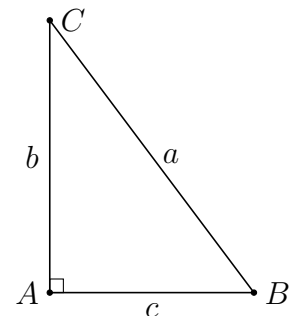
1 Tóm tắt lý thuyết

Định lí 5. Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng:

1. Cạnh huyền nhân với **sin** góc đối hoặc nhân với **cos** góc kề;
2. Cạnh góc vuông kia nhân với **tan** góc đối hoặc nhân với **cot** góc kề.

Vậy, trong tam giác ABC vuông tại A , ta có các hệ thức

- ☑ $b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C$.
- ☑ $b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C$.
- ☑ $c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B$.
- ☑ $c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B$.



2 Các dạng toán

Dạng 1. Giải tam giác vuông

Sử dụng mối quan hệ giữa cạnh và góc trong tam giác vuông để giải.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP MẪU 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC với các cạnh góc vuông $AB = 5$, $AC = 8$. Hãy giải tam giác vuông ABC .

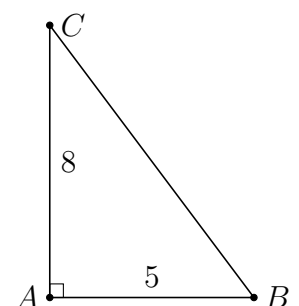
📝 Lời giải.

Theo định lí Py-ta-go, ta có

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{AB^2 + AC^2} \\ &= \sqrt{5^2 + 8^2} \\ &\approx 9,43. \end{aligned}$$

Mặt khác $\tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{8} = 0,625$.

Tra bảng hay dùng máy tính bỏ túi, ta tìm được $\widehat{C} \approx 32^\circ$.
Do đó $\widehat{B} \approx 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$.





Ví dụ 2. Cho tam giác OPQ vuông tại O có $\widehat{P} = 36^\circ$, $PQ = 7$. Hãy giải tam giác vuông OPQ .

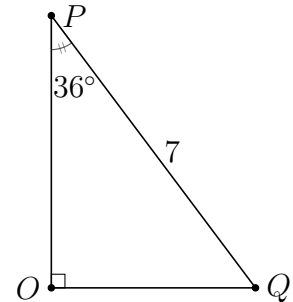
Lời giải.

Ta có $\widehat{Q} = 90^\circ - \widehat{P} = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$.

Theo các hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, ta có

$$OP = PQ \cdot \sin Q = 7 \cdot \sin 54^\circ \approx 5,663$$

$$OQ = PQ \sin P = 7 \cdot \sin 36^\circ \approx 4,114.$$



Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 12$ cm, $\widehat{C} = 40^\circ$. Hãy tính độ dài

a) AC .

b) BC .

c) Phân giác BD .

Lời giải.

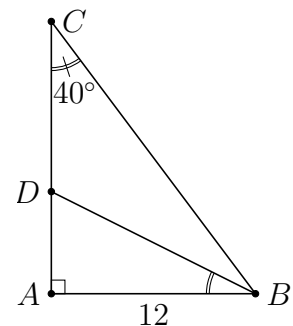
$$\text{Ta có } \tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AB}{\tan 40^\circ} = \frac{12}{\tan 40^\circ} \approx 14,3 \text{ cm,}$$

$$\sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\sin 40^\circ} = \frac{12}{\sin 40^\circ} \approx 18,7 \text{ cm.}$$

Ta có $\widehat{ABC} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.

Vì BD là phân giác góc \widehat{ABC} nên $\widehat{ABD} = 25^\circ$.

$$\text{Do đó } \cos \widehat{ABD} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow BD = \frac{AB}{\cos 25^\circ} = \frac{12}{\cos 25^\circ} \approx 13,2 \text{ cm.}$$



Dạng 2. Tính cạnh và góc của tam giác

Phương pháp: Kẻ thêm đường cao để xuất hiện tam giác vuông; áp dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP MẪU 🔗🔗🔗

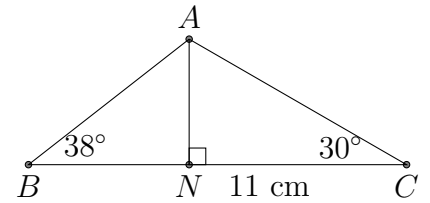
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC , trong đó $BC = 11$ cm, $\widehat{ABC} = 38^\circ$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Gọi điểm N là chân của đường vuông góc kẻ từ A đến cạnh BC . Hãy tính độ dài đoạn thẳng AN .

Lời giải.

Ta có $\tan 38^\circ = \frac{AN}{BN} \Rightarrow BN = \frac{AN}{\tan 38^\circ}$.

Tương tự $NC = \frac{AN}{\tan 30^\circ}$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} BC &= BN + NC \\ \Leftrightarrow 11 &= \frac{AN}{\tan 38^\circ} + \frac{AN}{\tan 30^\circ} \\ \Leftrightarrow 11 &= AN \cdot \left(\frac{1}{\tan 38^\circ} + \frac{1}{\tan 30^\circ} \right) \\ \Rightarrow AN &= \frac{11}{\frac{1}{\tan 38^\circ} + \frac{1}{\tan 30^\circ}} \approx 3,65. \end{aligned}$$



Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $BC = 6$ cm, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$. Hãy tính

a) Chiều cao CH và cạnh AC .

b) Diện tích tam giác ABC .

Lời giải.

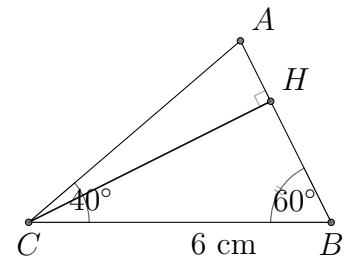
1. Tam giác BHC vuông tại H :

$$\sin \widehat{HBC} = \frac{CH}{BC} \Rightarrow CH = BC \cdot \sin \widehat{HBC} = 6 \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}.$$

Mà $\widehat{CAB} = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$.

Tam giác AHC vuông tại H :

$$\sin \widehat{CAH} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow AC = \frac{3\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} \approx 5,28 \text{ cm.}$$



b) Ta có $\tan \widehat{CAH} = \frac{CH}{AH} \Rightarrow AH = \frac{CH}{\tan 80^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{\tan 80^\circ}$.

Do vậy $\tan \widehat{HBC} = \frac{CH}{HB} \Rightarrow HB = \frac{CH}{\tan 60^\circ} = 3$ cm.

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot CH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot CH \cdot (AH + HB) = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{\tan 80^\circ} + 3 \right) \approx 10,17 \text{ cm}^2$. \square

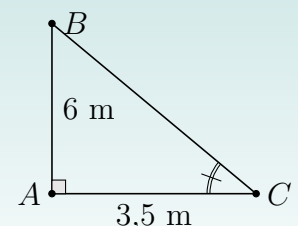
Dạng 3. Toán thực tế

Dùng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông để giải quyết các tính huống thực tế.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1.

Một cột đèn điện AB cao 6 m có bóng in trên mặt đất là AC dài 3,5 m. Hãy tính góc \widehat{BCA} (làm tròn đến phút) mà tia sáng mặt trời tạo với mặt đất.

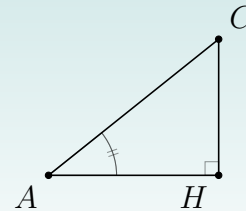


✍ Lời giải.

Tam giác ABC vuông tại A , ta có $\tan \widehat{BCA} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{3,5} \approx 1,71$. Suy ra $\widehat{BCA} = 59^{\circ}73'$. \square

📖 Ví dụ 2.

Một cầu trượt trong công viên có độ dốc là 28° , và có độ cao là 2,1 m. Tính độ dài của mặt cầu trượt (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



✍ Lời giải.

Đặt độ dốc là góc $\widehat{CAH} = 28^{\circ}$; độ cao là $CH = 2,1$ m; chiều dài mặt cầu trượt là cạnh AC . Ta cần tính độ dài cạnh AC .

Tam giác AHC vuông tại H , ta có

$$\sin \widehat{CAH} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow AC = \frac{CH}{\sin 28^{\circ}} = \frac{2,1}{\sin 28^{\circ}} \approx 6,8 \text{ m.}$$

\square

3 Luyện tập

3 Dễ

📦 Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Giải tam giác ABC , biết rằng $b = 10$ cm, $\widehat{C} = 30^{\circ}$.

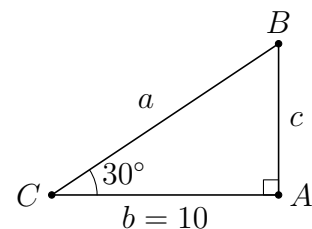
✍ Lời giải.

Vì $\triangle ABC$ vuông tại A , $b = 10$ cm, $\widehat{C} = 30^{\circ}$ nên ta có

$$\widehat{B} = 90^{\circ} - 30^{\circ} = 60^{\circ}.$$

$$c = b \cdot \tan 30^{\circ} = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \approx 5,773 \text{ cm.}$$

$$a = \frac{b}{\cos 30^{\circ}} = 10 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 11,547 \text{ cm.}$$



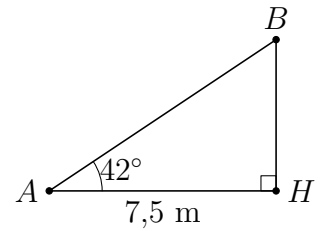
\square

📦 Bài 2. Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài 7,5 m. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 42° . Tính chiều cao của cột đèn.

✍ Lời giải.

Giả sử chiều cao cột đèn là BH và chiều dài tia nắng trên mặt đất là AH . Xét tam giác ABH vuông tại H có

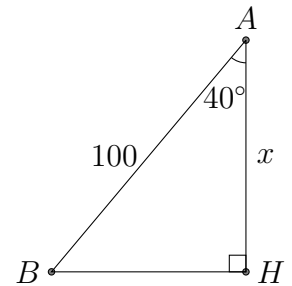
$$\tan A = \frac{BH}{AH} \Rightarrow BH = \tan 42^\circ \cdot AH = \tan 42^\circ \cdot 7,5 \approx 6,75 \text{ m.}$$



□

Bài 3.

Một chiếc điều với đoạn dây thả điều AB dài 100 m, dây thả điều tạo với phương thẳng đứng một góc 40° (hình bên). Tính chiều cao của điều.



Lời giải.

Trong tam giác vuông AHB vuông tại H , ta có $AH = AB \cos 40^\circ = 100 \cdot 0,766 = 76,6$ (m). □

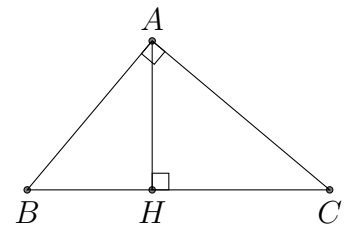
Bài 4. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết $HB = 25$ cm, $HC = 64$ cm. Tính số đo các góc B và C .

Lời giải.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC , ta có $AH^2 = HB \cdot HC = 25 \cdot 64$ nên $AH = 5 \cdot 8 = 40$ (cm).

Trong tam giác vuông AHB , ta có

$$\tan B = \frac{AH}{BH} = \frac{40}{25} = 1,6 \text{ nên } \widehat{B} \approx 58^\circ \text{ suy ra } \widehat{C} \approx 32^\circ.$$



□

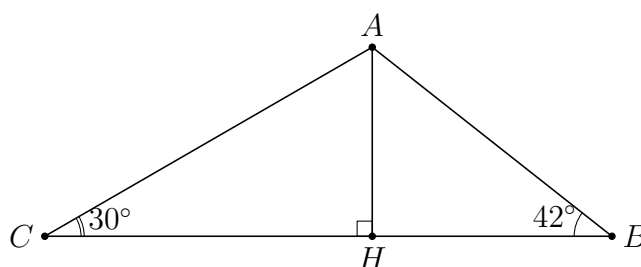
3 Trung bình

Bài 5. Cho tam giác ABC có $BC = 15$ cm, $\widehat{ABC} = 42^\circ$ và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống BC . Hãy tính

a) Độ dài đoạn thẳng AH .

b) Độ dài đoạn thẳng AC .

Lời giải.



1. Đặt $AH = x$. Ta có

$$CH = \frac{AH}{\tan 30^\circ} = x\sqrt{3} \approx 1,732x.$$

$$BH = \frac{AH}{\tan 42^\circ} \approx 1,1106x.$$

Do đó $BC = CH + HB \approx 2,8426x \Rightarrow x \approx \frac{15}{2,8426} \approx 5,2768 \text{ cm.}$

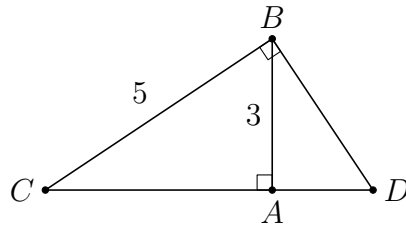
2. Ta có $AC = \frac{AH}{\sin 30^\circ} = 2AH \approx 10,5537 \text{ cm.}$

□

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A . Biết $AB = 3 \text{ cm}$, $BC = 5 \text{ cm}$.

- Giải tam giác vuông ABC .
- Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với BC , đường thẳng này cắt đường thẳng AC tại D . Tính độ dài các đoạn thẳng AD và BD .

Lời giải.



1. Do tam giác ABC vuông tại A nên $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ cm.}$

Ta có $\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \widehat{C} \approx 36^\circ 52' \Rightarrow \widehat{B} = 90^\circ - \widehat{C} \approx 53^\circ 48'.$

2. Vì $BD \perp BC$ nên $\widehat{CBD} = 90^\circ$. Xét tam giác ABD vuông tại A có $AB = 3 \text{ cm}$, do vậy

$$AB^2 = AD \cdot AC \Rightarrow AD = \frac{9}{4} = 2,25 \text{ cm.}$$

$$BD^2 = DA \cdot DC = 2,25(2,25 + 4) = 14,0625 \Rightarrow BD = 3,75 \text{ cm.}$$

□

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB = 21 \text{ cm}$, $\widehat{C} = 40^\circ$. Tính độ dài đường phân giác BD .

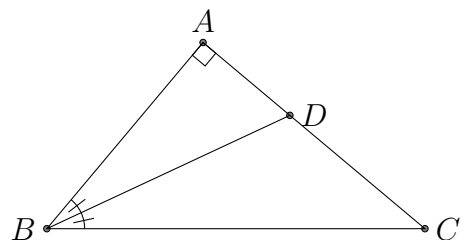
Lời giải.

Ta có $\widehat{B} = 90^\circ - \widehat{C} = 50^\circ$.

Vì BD là tia phân giác của góc \widehat{B} nên $\widehat{ABD} = \frac{\widehat{B}}{2} = 25^\circ$.

Trong tam giác vuông ABD , ta có

$$BD = \frac{AB}{\cos 25^\circ} = \frac{21}{0,9063} \approx 23,2 \text{ (cm).}$$



□

➤ **Bài 8.** Tính diện tích $\triangle ABC$ có $BC = 40$ cm, $\widehat{B} = 40^\circ$, $\widehat{C} = 55^\circ$.

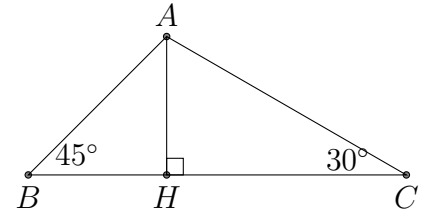
✍ **Lời giải.**

Ta có $\widehat{B} = 180^\circ - (105^\circ + 30^\circ) = 45^\circ$.

Kẻ đường cao AH . Ta có $HC = AH \cot 30^\circ = AH\sqrt{3}$.

Mặt khác

$$\begin{aligned} BH + HC &= 2 \\ \Rightarrow AH + AH\sqrt{3} &= 2 \\ \Rightarrow AH(1 + \sqrt{3}) &= 2 \\ \Rightarrow AH &= \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1. \end{aligned}$$



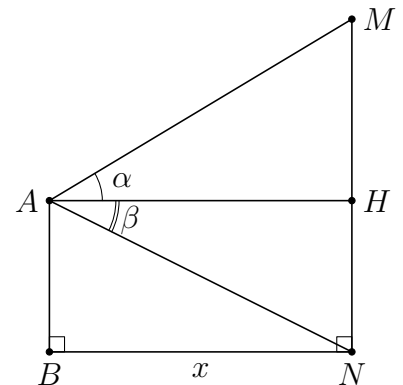
Vậy $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3} - 1$ (cm²).

□

3 Khó

➤ **Bài 9.**

Khoảng cách giữa hai chân tháp AB và MN là x (như hình vẽ). Từ đỉnh A của tháp AB nhìn lên đỉnh M của tháp MN ta được góc α . Từ đỉnh A nhìn xuống chân N của tháp MN ta được góc β (so với phương nằm ngang AH). Hãy tìm chiều cao MN nếu $x = 120$ m, $\alpha = 30^\circ$ và $\beta = 20^\circ$.



✍ **Lời giải.**

Xét tam giác MAH vuông tại H có $HM = AH \tan \alpha$.

Xét tam giác NAH vuông tại H có $HN = AH \tan \beta$.

Do đó $MN = MH + HN = AH(\tan \alpha + \tan \beta) = 120 \cdot (\tan 30^\circ + \tan 20^\circ) \approx 113$ m.

□

➤ **Bài 10.** Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$, $\widehat{D} = 90^\circ$, $\widehat{C} = 38^\circ$, $AB = 3,5$ và $AD = 3,1$. Tính diện tích hình thang $ABCD$.

✍ **Lời giải.**

Vẽ $BH \perp CD$ tại H , khi đó ta có $BH = AD = 3,1$ và $DH = AB = 3,5$.

Xét tam giác BHC vuông tại H , có

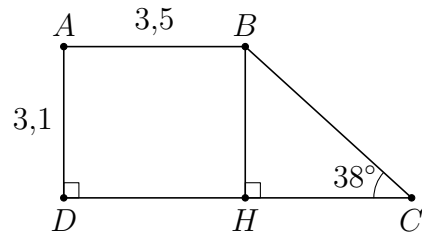
$$HC = BH \cot C = 3,1 \cdot \cot 38^\circ \approx 4.$$

Do vậy $CD = CH + HD \approx 4 + 3,5 \approx 7,5$.

Diện tích hình thang $ABCD$ là

$$S = \frac{(AB + CD)AD}{2} \approx \frac{(3,5 + 7,5) \cdot 3,1}{2} \approx 17,1 \text{ (đvdt)}.$$

□



Bài 11. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AB = 2$ cm, $CD = 6$ cm, chiều cao bằng 4 cm. Tính góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng chứa cạnh bên hình thang.

Lời giải.

Gọi K là giao điểm của AD và BC . Kẻ AH và KI vuông góc với CD .

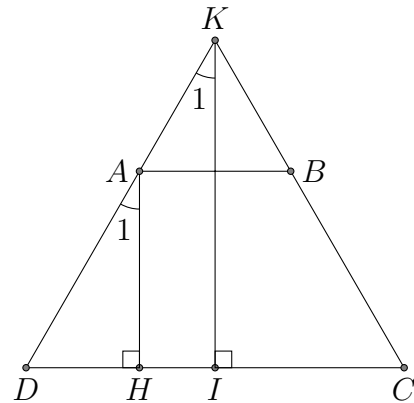
Ta có

$$\widehat{A_1} = \widehat{K_1} = \frac{1}{2} \widehat{CKD}.$$

$$HD = \frac{CD - AB}{2} = \frac{6 - 2}{2} = 2 \text{ (cm)}.$$

$$\tan \widehat{A_1} = \frac{HD}{AH} = \frac{2}{4} = 0,5$$

Nên $\widehat{A} \approx 27^\circ$. Suy ra $\widehat{CKD} \approx 54^\circ$.



□

Bài 12. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 40^\circ$, $\widehat{C} = 60^\circ$, đường trung tuyến AM . Tính số đo góc AMC .

Lời giải.

Kẻ đường cao AH .

$$\text{Ta có } HB - HC = (HM + MB) - (MC - HM) = 2HM.$$

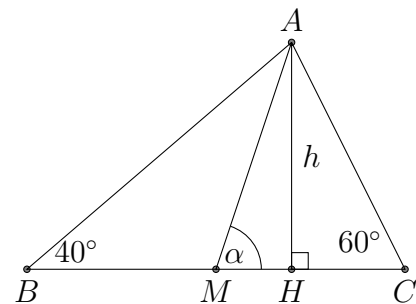
Đặt $AH = h$, $\widehat{AMH} = \alpha$. Ta có

$$HB - HC = 2HM$$

$$\Rightarrow h \cot 40^\circ - h \cot 60^\circ = 2h \cot \alpha$$

$$\Rightarrow \cot \alpha = \frac{\cot 40^\circ - \cot 60^\circ}{2} \approx \frac{1,1918 - 0,5774}{2} \approx 0,3072$$

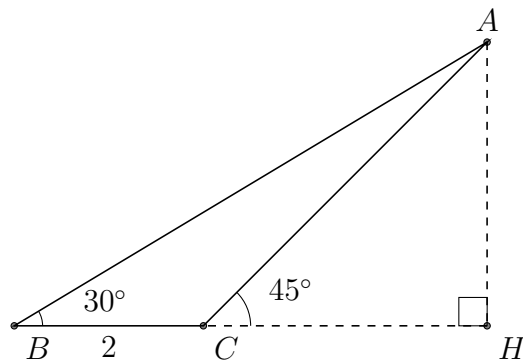
$$\Rightarrow \alpha \approx 73^\circ.$$



□

Bài 13. Tính diện tích tam giác ABC biết $\widehat{B} = 30^\circ$, $\widehat{C} = 135^\circ$, $BC = 2$ cm.

Lời giải.



Kẻ đường cao AH . Ta có $BC = BH - CH = AH \cot 30^\circ - AH \cot 45^\circ = AH(\sqrt{3} - 1)$.

Suy ra $AH = \frac{BC}{\sqrt{3} - 1} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + 1(\text{cm})$.

Vậy $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2(\sqrt{3} + 1) = \sqrt{3} + 1(\text{cm}^2)$.

□

§4 Ôn tập chương

1 Tóm tắt lý thuyết

Các kiến thức trọng tâm của bài học theo sách giáo khoa hiện hành.

2 Bài tập trắc nghiệm

📁 **Bài 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A , kẻ đường cao AH . Hệ thức nào sau đây là đúng?

- (A) $AH^2 = BH \cdot BC$. (B) $AC^2 = CH \cdot BC$. (C) $AH^2 = AB \cdot AC$. (D) $AH = BH \cdot AB$.

✍ **Lời giải.**

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông.

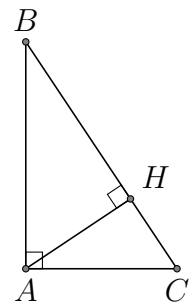
Chọn đáp án (B) □

📁 **Bài 2.** Cho tam giác ABC vuông tại A và có đường cao AH . Hệ thức nào sau đây là sai?

- (A) $AB^2 = BH \cdot BC$. (B) $AH^2 = BH \cdot CH$. (C) $\frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC}$. (D) $\frac{AH}{HB} = \frac{AB}{AC}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\triangle AHB \sim CAB \Rightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{AC}{AB}$.



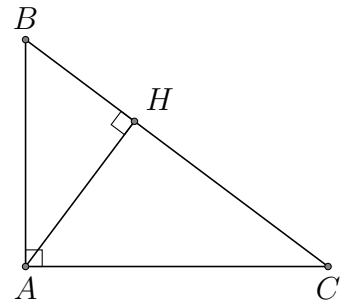
Chọn đáp án (D) □

📁 **Bài 3.** Cho tam giác ABC có $AB = 3$; $AC = 4$; $BC = 5$, kẻ đường cao AH . Hệ thức nào sau đây là sai?

- (A) $AH^2 = BH \cdot CH$. (B) $BH^2 = AH \cdot CH$.
 (C) $AB^2 = BH \cdot BC$. (D) $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AC^2}$.

✍ **Lời giải.**

Có $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow ABC$ là tam giác vuông tại A .



Chọn đáp án **(B)** □

➤ **Bài 4.** Cho tam giác ABC vuông tại B và có đường cao BH . Hệ thức nào sau đây là đúng?

(A) $BH^2 = AH \cdot CH$.

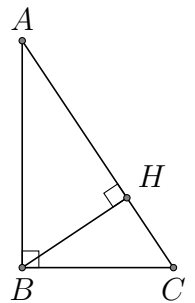
(B) $AH^2 = BH \cdot CH$.

(C) $AB^2 = BH \cdot BC$.

(D) $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

✍ **Lời giải.**

Chú ý là tam giác vuông tại B và đường cao là BH .



Chọn đáp án **(A)** □

➤ **Bài 5.** Tam giác ABC có đường cao AH thỏa mãn $AH^2 = BH \cdot CH$ thì khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Tam giác ABC vuông tại A .

(B) $AB^2 = BH \cdot BC$.

(C) $\triangle AHB \sim \triangle CHA$.

(D) $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

✍ **Lời giải.**

Ta chỉ có $\triangle AHB \sim \triangle CHA$ chứ tam giác ABC có thể không vuông.

Chọn đáp án **(C)** □

➤ **Bài 6.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$; $AC = 4$. Kẻ đường cao AH . Độ dài AH là

(A) $AH = 5$.

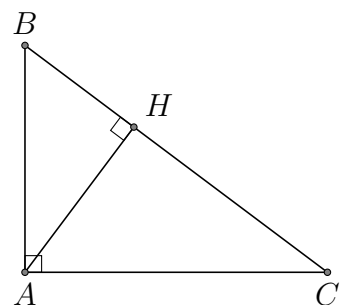
(B) $AH = 2,4$.

(C) $AH = 2,25$.

(D) $AH = \frac{16}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = 2,4$.



Chọn đáp án **(B)** □

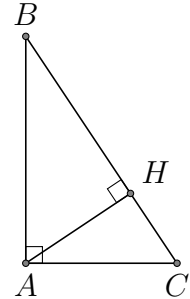
Bài 7. Cho tam giác vuông tại A có $AB = 5$. Kẻ đường cao AH . Biết $BH = \frac{25}{13}$, độ dài AH là

- A** $AH = \frac{60}{13}$.
 B $AH = 5$.
 C $AH = \frac{1}{13}$.
 D $AH = 13$.

Lời giải.

Ta có $AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BC = 13$
 $\Rightarrow CH = BC - BH = \frac{144}{13}$.

Ta có $AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow AH = \frac{60}{13}$.



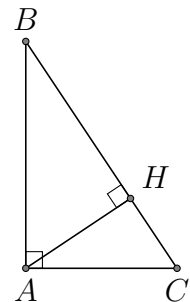
Chọn đáp án **A** □

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A và đường cao AH . Biết $AH = 9, BH = 12$. Giá trị $\frac{AB}{AC}$ là

- A** $\frac{4}{5}$.
 B $\frac{3}{5}$.
 C $\frac{4}{3}$.
 D $\frac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\triangle BAC \sim \triangle AHB \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{HB} = \frac{3}{4}$.



Chọn đáp án **D** □

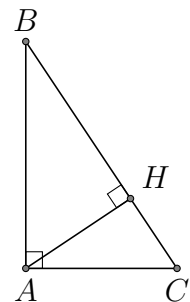
Bài 9. Cho tam giác vuông ABC vuông tại A có $AB = 6, BC = 10$. AH là đường cao. Độ dài BH và AH lần lượt là

- A** $BH = 6,4; AH = 4,6$.
 B $BH = 3,6; AH = 4,8$.
 C $BH = 3,6; AH = 6,4$.
 D $BH = 6,4; AH = 4,8$.

Lời giải.

Ta có $AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = 3,6$.

Ta có $CH = BC - BH = 6,4$ mà $AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow AH = 4,8$.



Chọn đáp án **B** □

➤ **Bài 10.** Cho tam giác vuông tại A có đường cao AH . Biết $BH = 9, CH = 7$. Độ dài AB và AC lần lượt là

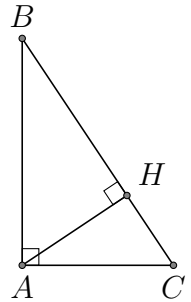
- (A) $AB = 3\sqrt{7}; AC = 12$. (B) $AB = 12; AC = 3\sqrt{7}$.
 (C) $AB = 12; AC = 4\sqrt{7}$. (D) $AB = 3\sqrt{7}; AC = 4\sqrt{7}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow AH = 3\sqrt{7}$.

Ta có tam giác ABH vuông tại H nên ta có $AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AB = 12$.

Ta có tam giác ACH vuông tại H nên ta có $AC^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow AC = 4\sqrt{7}$.



Chọn đáp án (C) □

➤ **Bài 11.** Tam giác vuông ABC có $AB : AC$ lần lượt tỉ lệ với $3 : 4$. Biết $AH = 6$. Cạnh BC có độ dài là bao nhiêu

- (A) $BC = 11,5$. (B) $BC = 12$. (C) $BC = 12,5$. (D) $BC = 13$.

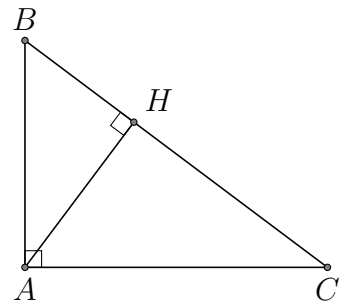
✍ **Lời giải.**

Ta có $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{6^2}$

mà $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AB = \frac{3}{4}AC$.

Từ đó $\frac{1}{AC^2 \cdot \frac{9}{16}} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{36} \Leftrightarrow AC = 10 \Rightarrow AB = 7,5$.

Vậy $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 12,5$.



Chọn đáp án (C) □

➤ **Bài 12.** Cho tam giác ABC vuông tại A và đường cao AH . Biết $AH = 6$ và $AB^2 = 135 + AC^2$.

Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$.

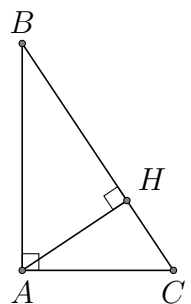
- (A) 5. (B) 3. (C) 4. (D) 6.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

mà $AB = AC + 10 \Rightarrow \frac{1}{AC^2 + 135} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{6^2}$

$\Leftrightarrow AC = 3 \Rightarrow AB = 12 \Rightarrow \frac{AB}{AC} = 4$.



Chọn đáp án (C) □

➤ **Bài 13.** Cho tam giác ABC vuông tại A và đường cao AH . Kẻ $HE \perp AB$ ($H \in AB$). Cho $AB = 4; AC = 2$, hãy tính độ dài đoạn HE .

A $HE = \frac{8}{5}$.

B $HE = \frac{9}{5}$.

C $HE = \frac{7}{5}$.

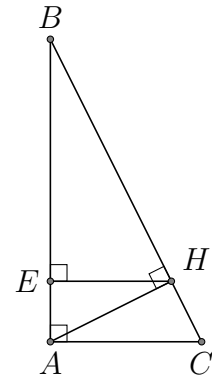
D $HE = 2$.

Lời giải.

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Ta có $AH^2 = AE \cdot AB \Rightarrow AE = \frac{4}{5}$.

$HE^2 = AH^2 - AE^2 = \frac{8}{5}$.



Chọn đáp án **A** □

Bài 14. Cho tam giác ABC vuông tại A và đường cao AH . Kẻ $HE \perp AB (H \in AB)$. Cho $HE = 6; AC = 9$, tính độ dài đoạn BC .

A $BC = 9\sqrt{2}$.

B $BC = 6\sqrt{3}$.

C $BC = 9\sqrt{3}$.

D $BC = 18$.

Lời giải.

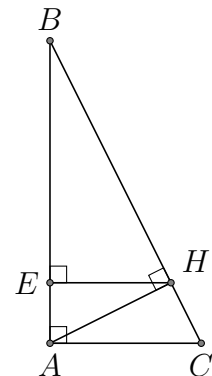
Ta có $HE \parallel AC \Rightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{HE}{AC} = \frac{2}{3}$.

Gọi $BE = x \Rightarrow AE = \frac{3}{2}x - x = \frac{1}{2}x$.

Mà $HE^2 = BE \cdot AE \Rightarrow x \cdot \frac{1}{2}x = 6^2 \Leftrightarrow x = 6\sqrt{2}$.

Ta có $BH^2 = BE^2 + EH^2 \Rightarrow BH = 6\sqrt{3}$.

Mà $\frac{BH}{BC} = \frac{HE}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow BC = 9\sqrt{3}$.



Chọn đáp án **C** □

Bài 15. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ, AB = AD = 2, DC = 2\sqrt{2}$. Tính độ dài đường chéo AC .

A $AC = 8$.

B $AC = 6$.

C $AC = 4\sqrt{2}$.

D $AC = 2\sqrt{5}$.

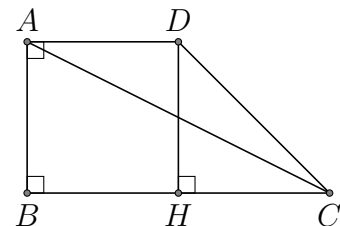
Lời giải.

Kẻ $DH \perp BC (H \in BC)$.

Ta có $DC^2 = DH^2 + HC^2 \Rightarrow HC = 2$.

Vậy $BC = BH + HC = AD + HC = 4$

$\Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2\sqrt{5}$.



Chọn đáp án **D** □

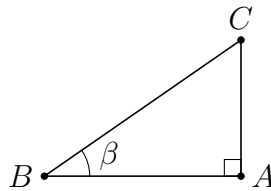
Bài 16. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = \beta$. Khẳng định nào sau đây sai?

A $\sin \beta = \frac{AC}{BC}$.

B $\cos \beta = \frac{AB}{BC}$.

C $\tan \beta = \frac{AC}{CB}$.

D $\cot \beta = \frac{AB}{AC}$.



Lời giải.

Theo định nghĩa về tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông, ta có

$$\sin \beta = \frac{AC}{BC}; \quad \cos \beta = \frac{AB}{BC}; \quad \tan \beta = \frac{AC}{AB}; \quad \cot \beta = \frac{AB}{AC}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Bài 17. Cho $\cos \alpha = \frac{12}{13}$, với $0 < \alpha < 90^\circ$. Giá trị của $\sin \alpha$ bằng

- (A)** $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. **(B)** $\sin \alpha = \frac{7}{13}$. **(C)** $\sin \alpha = \frac{5}{12}$. **(D)** $\sin \alpha = \frac{25}{169}$.

Lời giải.

Ta có

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169}.$$

Suy ra $\sin \alpha = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$ (do $\sin \alpha > 0$, với $0 < \alpha < 90^\circ$).

Chọn đáp án **(A)** □

Bài 18. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = \frac{2}{3}BC$. Tính $\cot C$.

- (A)** $\cot C = \frac{3\sqrt{5}}{5}$. **(B)** $\cot C = \frac{\sqrt{5}}{2}$. **(C)** $\cot C = \frac{6}{5}$. **(D)** $\cot C = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Ta có

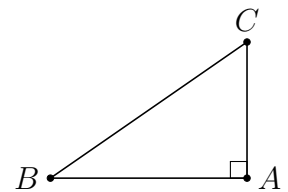
$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}.$$

Mặt khác,

$$\sin^2 C + \cos^2 C = 1 \Rightarrow \cos^2 C = 1 - \sin^2 C = \frac{5}{9}.$$

Do $0 < \cos C < 1$ nên $\cos C = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Suy ra, $\cot C = \frac{\cos C}{\sin C} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án **(B)** □



Bài 19. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A)** $\sin 55^\circ = \cos 45^\circ$. **(B)** $\cos 12^\circ = \sin 78^\circ$. **(C)** $\tan 60^\circ = \sin 30^\circ$. **(D)** $\cot 75^\circ = \sin 15^\circ$.

Lời giải.

Định lý.

Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cos góc kia, tan góc này bằng cot góc kia.

Do đó, chỉ có khẳng định $\cos 12^\circ = \sin 78^\circ$ là đúng.

Chọn đáp án **(B)** □

Bài 20.

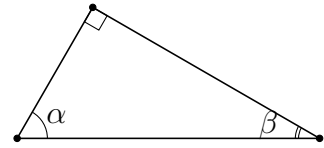
Cho tam giác như hình bên. Hỏi khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\sin \alpha = \sin \beta$.

(B) $\cos \alpha = \cos \beta$.

(C) $\cot \alpha = \sin \beta$.

(D) $\tan \alpha = \cot \beta$.



Lời giải.

Vì α và β là hai góc phụ nhau nên \sin góc này bằng \cos góc kia, \tan góc này bằng \cot góc kia.

Chọn đáp án **(D)** □

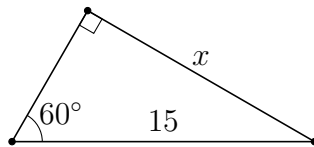
Bài 21. Trong hình bên, cạnh x được tính như thế nào?

(A) $x = \frac{15}{\sin 60^\circ}$.

(B) $x = 15 \cdot \tan 60^\circ$.

(C) $x = 15 \cdot \cos 30^\circ$.

(D) $x = \frac{15}{\cot 60^\circ}$.



Lời giải.

Áp dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông, ta có

$$\sin 60^\circ = \frac{x}{15} \Rightarrow x = 15 \cdot \sin 60^\circ = 15 \cdot \cos 30^\circ.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Bài 22.

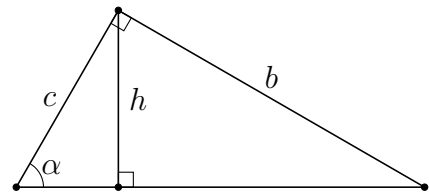
Cho hình vẽ bên. Hỏi khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\sin \alpha = \frac{c}{b}$.

(B) $\cos \alpha = \frac{h}{b}$.

(C) $\tan \alpha = \frac{h}{c}$.

(D) $\cot \alpha = \frac{b}{c}$.



Lời giải.

Chỉ có công thức $\cos \alpha = \frac{h}{b}$ là đúng.

Chọn đáp án **(D)** □

Bài 23. Cho tam giác ABC vuông tại A và $\cos C = 0,6$. Hãy tính $\tan B$.

(A) $\tan B = \frac{3}{4}$.

(B) $\tan B = \frac{4}{3}$.

(C) $\tan B = \frac{3}{5}$.

(D) $\tan B = \frac{4}{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$\sin B = \cos(90^\circ - B) = \cos C = 0,6.$$

Mặt khác, $0 < \cos B < 1$ và

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1 \Rightarrow \cos^2 B = 1 - 0,6^2 = 0,64 \Rightarrow \cos B = 0,8.$$

Suy ra,

$$\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4}.$$

Chọn đáp án (A) □

Bài 24.

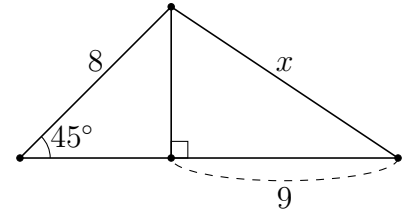
Tìm x trong hình vẽ bên.

(A) $x = \sqrt{97}$.

(B) $x = \frac{\sqrt{145}}{2}$.

(C) $\sqrt{65}$.

(D) $x = \sqrt{113}$.



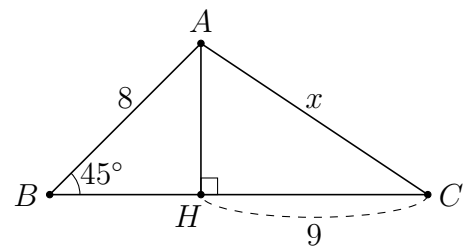
Lời giải.

Gọi tên các đỉnh như hình vẽ.

Ta có $\sin 45^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \cdot \sin 45^\circ = 4\sqrt{2}$.

Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông AHC

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 = (4\sqrt{2})^2 + 8^2 = 96.$$



Suy ra

$$x = AC = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}.$$

Chọn đáp án (D) □

Bài 25. Khẳng định nào sau đây là sai?

(A) $\sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ = 1$.

(B) $\cos^2 12^\circ + \cos^2 78^\circ = 1$.

(C) $\tan 35^\circ \cdot \cot 55^\circ = 1$.

(D) $\cot 85^\circ \cdot \tan 85^\circ = 1$.

Lời giải.

Vì $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nên $\sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ = 1$.

$\cos^2 12^\circ + \cos^2 78^\circ = \cos^2 12^\circ + \sin^2 12^\circ = 1$.

Vì $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ nên $\cot 85^\circ \cdot \tan 85^\circ = 1$.

$\tan 35^\circ \cdot \cot 55^\circ = 1$ là khẳng định sai.

Chọn đáp án (C) □

Bài 26.

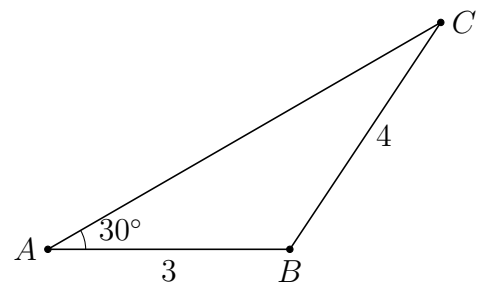
Cho hình vẽ bên. Hãy tính $\sin C$.

(A) $\sin C = \frac{3}{8}$.

(B) $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

(C) $\sin C = \frac{2}{5}$.

(D) $\sin C = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.



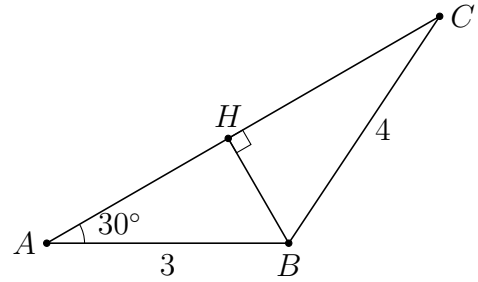
Lời giải.

Kẻ $BH \perp AC$ tại H . Tam giác AHB vuông tại B , ta có

$$\sin 30^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB \cdot \sin 30^\circ = \frac{3}{2}.$$

Ta lại có, tam giác BHC vuông tại H , suy ra

$$\sin C = \frac{BH}{BC} = \frac{3}{8}.$$



Chọn đáp án **(A)** □

Bài 27. Cho góc nhọn α với $\cot \alpha = \frac{3}{4}$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$

- (A)** $P = \frac{1}{7}$. **(B)** $P = -\frac{1}{7}$. **(C)** $P = -\frac{7}{25}$. **(D)** $P = \frac{7}{25}$.

Lời giải.

Vì $\sin \alpha > 0$ nên chia tử và mẫu của P cho $\sin \alpha$ ta được

$$P = \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - 1}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 1} = \frac{\cot \alpha - 1}{\cot \alpha + 1} = \frac{\frac{3}{4} - 1}{\frac{3}{4} + 1} = -\frac{1}{7}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Bài 28. Cho tam giác ABC , biết $BC = 11$ cm và $\widehat{B} = 65^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$. Tính độ dài đoạn AB (kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân).

- (A)** 7,32 cm. **(B)** 7,66 cm. **(C)** 6,98 cm. **(D)** 8,16 cm.

Lời giải.

Ta có $\widehat{A} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C} = 75^\circ$.

Kẻ $BH \perp AC$ tại H . Ta có

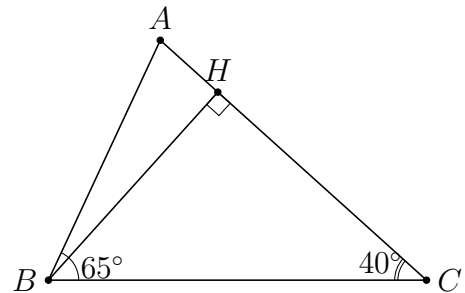
$$\sin \widehat{ACB} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow BH = 11 \cdot \sin 40^\circ.$$

Lại có

$$\sin \widehat{BAC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB = \frac{BH}{\sin 75^\circ} = 11 \cdot \frac{\sin 40^\circ}{\sin 75^\circ}.$$

Suy ra $AB \approx 7,32$ cm.

Chọn đáp án **(A)** □



Bài 29. Cho hình thang cân $ABCD$ với $AB \parallel CD$. Biết $AB = 5$ cm, $CD = 9$ cm và $\widehat{ADC} = 60^\circ$. Diện tích hình thang $ABCD$ gần bằng với số nào dưới đây?

- (A)** $12,12 \text{ cm}^2$. **(B)** $48,49 \text{ cm}^2$. **(C)** $24,25 \text{ cm}^2$. **(D)** $19,8 \text{ cm}^2$.

Lời giải.

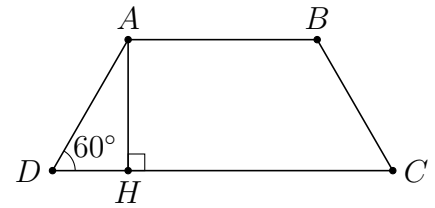
Kẻ $AH \perp CD$ tại H .

Vì $ABCD$ là hình thang cân với $AB \parallel CD$ nên

$$DH = \frac{CD - AB}{2} = 2 \text{ cm.}$$

Tam giác ADH vuông tại H , suy ra

$$\tan \widehat{ADC} = \frac{AH}{DH} \Rightarrow AH = 2 \cdot \tan 60^\circ = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$



Khi đó, diện tích hình thang $ABCD$ là

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \cdot AH}{2} = \frac{(5 + 9) \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3} \approx 24,25 \text{ cm}^2.$$

Chọn đáp án **C** □

Bài 30. Cho tứ giác $ABCD$ có diện tích S và α là góc nhọn tạo bởi hai đường chéo AC và BD . Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $S = AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$.

(B) $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \cos \alpha$.

(C) $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$.

(D) $S = AC \cdot BD \cdot \cos \alpha$.

Lời giải.

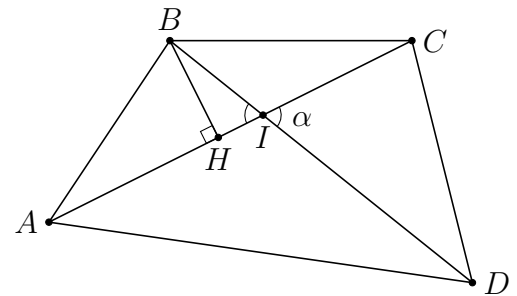
Kẻ $BH \perp AC$ tại H .

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} BH \cdot AC = \frac{1}{2} BI \sin \alpha \cdot AC$.

Tương tự $S_{ACD} = \frac{1}{2} DI \sin \alpha \cdot AC$.

Suy ra

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{ABC} + S_{ACD} \\ &= \frac{1}{2} BI \sin \alpha \cdot AC + \frac{1}{2} DI \sin \alpha \cdot AC \\ &= \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **C** □

Bài 31. Cho tam giác ABC vuông tại B . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

(B) $AB = BC \sin C$.

(C) $BC = AB \tan A$.

(D) $\sin A = \cos C$.

Lời giải.

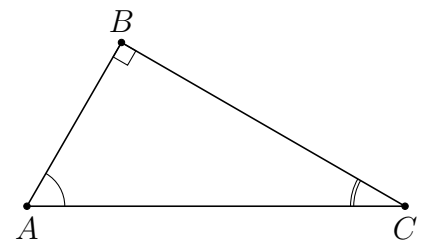
Trong tam giác ABC tại B ta có

Theo định lí Pi-ta-go thì $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

$\sin C = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow AB = AC \sin C$.

$\tan A = \frac{BC}{AB} \Leftrightarrow BC = AB \tan A$.

Vì $\sin A = \frac{BC}{AC}$ và $\cos C = \frac{BC}{AC}$ nên $\sin A = \cos C$.



Chọn đáp án **(B)** □

Bài 32. Trong tam giác vuông có góc nhọn α , mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)** Mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin góc đối hay nhân với cô-sin góc kề.
- (B)** Mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông kia nhân với tang góc kề hay nhân với cô-tang góc đối.
- (C)** Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền được gọi là cô-sin của góc α .
- (D)** Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối được gọi là tang của góc α .

Lời giải.

Ta có

- Mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin góc đối hay nhân với cô-sin góc kề.
- Mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông kia nhân với tang góc đối hay nhân với cô-tang góc kề.
- Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền được gọi là sin của góc α .
- Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối được gọi là cô-tang của góc α .

Chọn đáp án **(A)** □

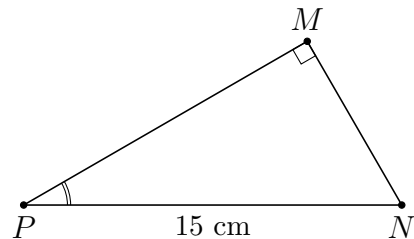
Bài 33. Cho tam giác MNP vuông tại M có $NP = 15$ cm và $\sin P = \frac{8}{15}$. Độ dài của cạnh MN bằng

- (A)** $\sqrt{161}$ cm.
- (B)** $\frac{225}{8}$ cm.
- (C)** 8 cm.
- (D)** $\frac{161}{15}$ cm.

Lời giải.

Trong tam giác MNP vuông tại M thì MN là cạnh đối của \widehat{P} , còn NP là cạnh huyền nên

$$\sin P = \frac{MN}{NP} \Leftrightarrow MN = NP \sin P = 15 \cdot \frac{8}{15} = 8 \text{ cm.}$$



Chọn đáp án **(C)** □

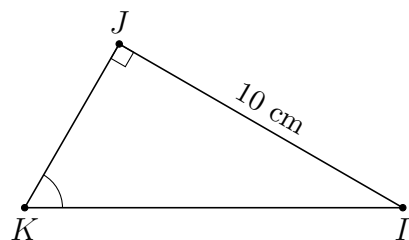
Bài 34. Cho tam giác IJK vuông tại J có $IJ = 10$ cm và $\tan K = \frac{12}{5}$. Tính độ dài của KJ .

- (A)** 24 cm.
- (B)** $\frac{25}{6}$ cm.
- (C)** $\frac{62}{5}$ cm.
- (D)** $\frac{38}{5}$ cm.

Lời giải.

Trong tam giác IJK vuông tại J thì IJ , KJ lần lượt là cạnh đối, cạnh kề của \widehat{K} nên

$$\tan K = \frac{IJ}{KJ} \Leftrightarrow KJ = \frac{IJ}{\tan K} = 10 : \frac{12}{5} = \frac{25}{6} \text{ cm.}$$



Chọn đáp án **(B)** □

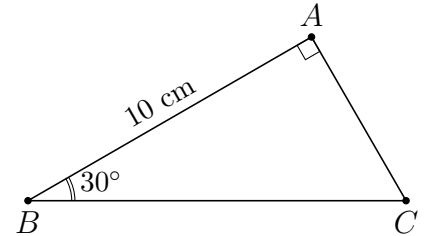
➤ **Bài 35.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 30^\circ$ và $AB = 10$ cm. Độ dài của BC bằng bao nhiêu?

- (A) $10\sqrt{3}$ cm. (B) $20\sqrt{3}$ cm. (C) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm. (D) $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm.

✍ **Lời giải.**

Trong tam giác vuông ABC ta có

$$\cos B = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow BC = \frac{AB}{\cos B} = \frac{10}{\cos 30^\circ} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ cm.}$$



Chọn đáp án (D) □

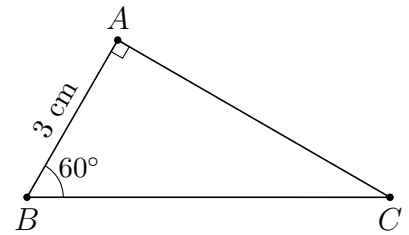
➤ **Bài 36.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$ cm và $\widehat{B} = 60^\circ$. Độ dài cạnh AC bằng

- (A) 6 cm. (B) $6\sqrt{3}$ cm. (C) $3\sqrt{3}$ cm. (D) 1,5 cm.

✍ **Lời giải.**

Trong tam giác ABC ta có

$$\begin{aligned} \tan B = \frac{AC}{AB} &\Leftrightarrow AC = AB \tan B \Leftrightarrow AC = 3 \tan 60^\circ \\ &\Leftrightarrow AC = 3\sqrt{3} \text{ cm.} \end{aligned}$$



Chọn đáp án (C) □

➤ **Bài 37.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ và $\cos C = \frac{3}{5}$. Độ dài của cạnh AC bằng

- (A) $\frac{9}{2}$. (B) $\frac{15}{2}$. (C) $\frac{18}{5}$. (D) 10.

✍ **Lời giải.**

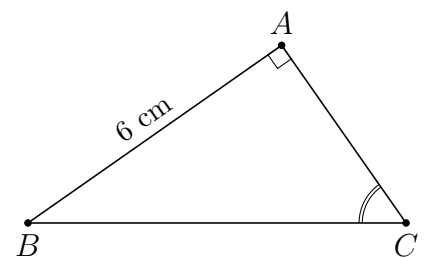
Trong tam giác ABC vuông tại A thì \widehat{C} là góc nhọn. Suy ra

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{4}{5}. \text{ Lại có}$$

$$\sin C = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow BC = \frac{AB}{\sin C} = \frac{15}{2}.$$

$$\text{Vậy } AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 - 6^2} = \frac{9}{2}.$$

Chọn đáp án (A) □



➤ **Bài 38.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 12$ cm và $\tan B = \frac{1}{3}$. Tính độ dài cạnh BC .

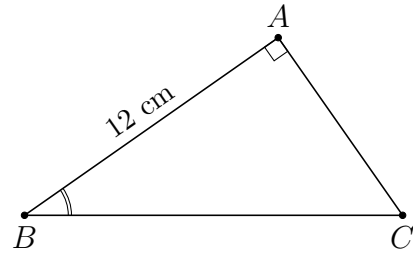
- (A) $BC = 16$ cm. (B) $BC = 18$ cm. (C) $BC = 5\sqrt{10}$ cm. (D) $BC = 4\sqrt{10}$ cm.

✍ **Lời giải.**

Trong tam giác ABC ta có

$$\tan B = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow AC = AB \tan B \Leftrightarrow AC = 12 \cdot \frac{1}{3} = 4.$$

$$\text{Vậy } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{12^2 + 4^2} = 4\sqrt{10} \text{ cm.}$$



Chọn đáp án **(D)** □

Bài 39. Cho tam giác ABC có đường cao AH và trung tuyến AM (với H, M thuộc BC). Biết $HB = 9$ cm, $HC = 16$ cm. Tính $\tan \widehat{HAM}$.

(A) $\frac{3}{4}$.

(B) $\frac{4}{3}$.

(C) $\frac{9}{16}$.

(D) $\frac{7}{24}$.

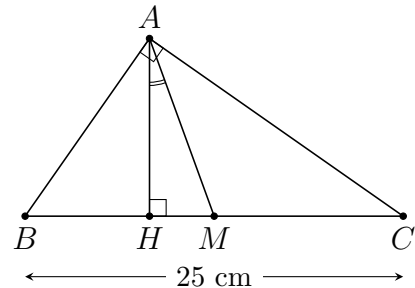
Lời giải.

Ta có $AH^2 = HB \cdot HC = 144$ nên $AH = 12$ cm.

Lại có $BC = HB + HC = 25$ cm, nên $BM = \frac{BC}{2} = 12,5$ cm.

Suy ra $HM = BM - HB = 3,5$ cm.

$$\text{Vậy } \tan \widehat{HAM} = \frac{HM}{AH} = \frac{3,5}{12} = \frac{7}{24}.$$



Chọn đáp án **(D)** □

Bài 40. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Cho biết $CH = 6$ cm và $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Độ dài đường cao AH là

(A) 2 cm.

(B) $2\sqrt{3}$ cm.

(C) 4 cm.

(D) $4\sqrt{3}$ cm.

Lời giải.

Tam giác ABC vuông tại A có $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, suy ra $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông AHC ta có

$$\cos C = \frac{CH}{AC} \Leftrightarrow AC = \frac{CH}{\cos C} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{3} \text{ cm.}$$

$$\text{Vậy } AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 6^2} = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Bài 41. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$ cm và $BC = 5$ cm. Tính giá trị của biểu thức $P = \cot B + \cot C$.

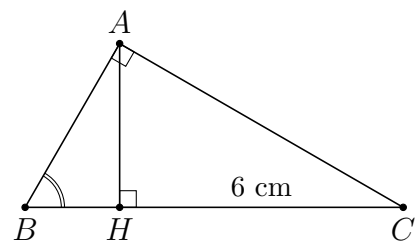
(A) $P = \frac{3}{5}$.

(B) $P = \frac{25}{12}$.

(C) $P = \frac{25}{9}$.

(D) $P = \frac{16}{25}$.

Lời giải.

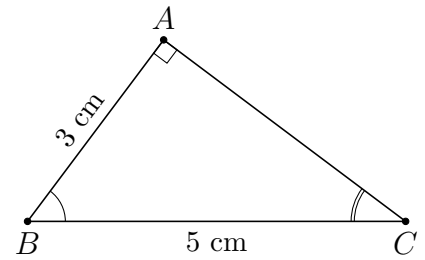


Ta có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ cm.
 Khi đó

$$\cot B = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$$

$$\cot C = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3}$$

Vậy $P = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12}$.



Chọn đáp án (B) □

Bài 42. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 25$, $AC = 15$. Số đo của góc C (làm tròn đến phút) bằng

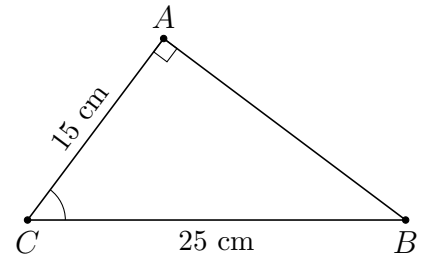
- (A) $53^\circ 8'$. (B) $36^\circ 52'$. (C) $53^\circ 13'$. (D) $36^\circ 53'$.

Lời giải.

Trong tam giác vuông ABC ta có

$$\cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \widehat{C} \approx 53^\circ 8'.$$



Chọn đáp án (A) □

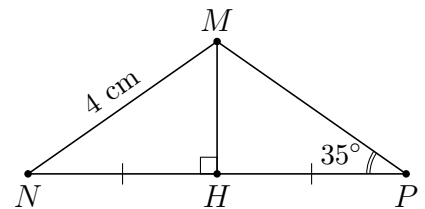
Bài 43. Cho tam giác MNP có $\widehat{M} = 110^\circ$, $\widehat{P} = 35^\circ$ và $MN = 4$ cm. Tính độ dài đường cao kẻ từ đỉnh M .

- (A) 3,28 cm. (B) 3,76 cm. (C) 2,29 cm. (D) 4,26 cm.

Lời giải.

Trong tam giác MNP có $\widehat{N} = 180^\circ - (\widehat{M} + \widehat{P}) = 35^\circ$ nên nó là tam giác cân tại M , suy ra $MP = MN = 4$ cm.
 Kẻ đường cao $MH \perp NP$ tại H . Xét tam giác vuông MHP có

$$\sin P = \frac{MH}{MP} \Leftrightarrow MH = MP \sin P = 4 \sin 35^\circ \approx 2,29 \text{ cm.}$$



Chọn đáp án (C) □

Bài 44. Cho tam giác ABC có $AB = 8$ cm, $AC = 12$ cm và $\widehat{A} = 60^\circ$. Độ dài của cạnh BC bằng

- (A) $4\sqrt{13}$ cm. (B) $4\sqrt{19}$ cm. (C) $4\sqrt{7}$ cm. (D) $4\sqrt{5}$ cm.

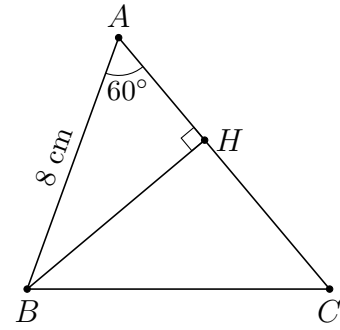
Lời giải.

Kẻ $BH \perp AC$ tại H . Xét tam giác vuông ABH ta có

$$\sin A = \frac{BH}{AB} \Leftrightarrow BH = AB \sin A = 8 \sin 60^\circ = 4\sqrt{3} \text{ cm.}$$

$$\cos A = \frac{AH}{AB} \Leftrightarrow AH = AB \cos A = 8 \cos 60^\circ = 4 \text{ cm.}$$

Như vậy $CH = AC - AH = 12 - 4 = 8 \text{ cm.}$



Xét tam giác BHC vuông tại C ta có

$$BC = \sqrt{BH^2 + CH^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 8^2} = 4\sqrt{7} \text{ cm.}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Bài 45. Cho tam giác ABC có $AB = 8 \text{ cm}$, $AC = 12 \text{ cm}$ và $\hat{A} = 30^\circ$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

(A) $S = 48 \text{ cm}^2$.

(B) $S = 24 \text{ cm}^2$.

(C) $S = 96 \text{ cm}^2$.

(D) $S = 48\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Lời giải.

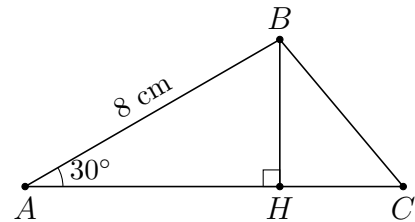
Kẻ $BH \perp AC$ tại H nên BH là đường cao của tam giác ABC .

Xét tam giác vuông ABH ta có

$$\sin A = \frac{BH}{AB} \Leftrightarrow BH = AB \sin A = 8 \sin 30^\circ = 4 \text{ cm.}$$

Diện tích tam giác ABC là

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 = 24 \text{ cm}^2.$$



Chọn đáp án **(B)** □

Bài 46. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 105^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$ và $BC = 4$. Độ dài của AB bằng bao nhiêu?

(A) $4\sqrt{3} - 4$.

(B) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$.

(C) $\sqrt{3} - 1$.

(D) $2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

Lời giải.

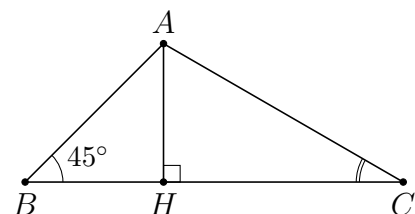
Trong tam giác ABC ta có $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 30^\circ$.

Kẻ $AH \perp BC$ tại H .

Xét tam giác ABH vuông tại H có $BH = AH \cot B = AH$.

Xét tam giác ACH vuông tại H có $CH = AH \cot C = AH\sqrt{3}$.

Lại có



$$BH + CH = BC \Leftrightarrow AH + AH\sqrt{3} = 4 \Leftrightarrow (\sqrt{3} + 1) AH = 4 \Leftrightarrow AH = \frac{4}{\sqrt{3} + 1} = 2\sqrt{3} - 2.$$

Trong tam giác ABH vuông tại H ta có

$$\sin B = \frac{AH}{AB} \Leftrightarrow AB = \frac{AH}{\sin B} = 2(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

Chọn đáp án **(D)** □

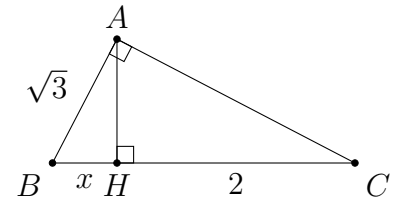
Bài 47. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB = \sqrt{3}$ cm, $HC = 2$ cm. Tính HB ?

- (A)** $HB = 1$ cm. **(B)** $HB = 2$ cm. **(C)** $HB = 3$ cm. **(D)** $HB = 4$ cm.

Lời giải.

Gọi $BH = x$ cm, $x > 0$. Ta có $\triangle ABC$ vuông tại A , $AH \perp BC$ nên

$$\begin{aligned} AB^2 &= BH \cdot BC \Leftrightarrow 3 = x(x + 2) \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$



Vậy $BH = 1$ cm.

Chọn đáp án **(A)** □

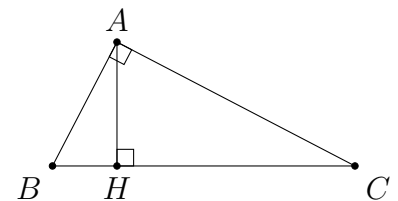
Bài 48. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , biết $9HB = 4HC$, $AH = 6$ cm. Tính BC .

- (A)** $BC = 13$ cm. **(B)** $BC = 12$ cm. **(C)** $BC = 11$ cm. **(D)** $BC = 9$ cm.

Lời giải.

Ta có $\triangle ABC$ vuông tại A , $AH \perp BC$ nên $AH^2 = HB \cdot CH$. Do đó

$$\begin{aligned} 9HB &= 4HC \\ \Leftrightarrow 9HB^2 &= 4HC \cdot HB \\ \Leftrightarrow 9HB^2 &= 4AH^2 = 144 \\ \Leftrightarrow HB &= 4 \Rightarrow HC = 9, BC = 13. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **(A)** □

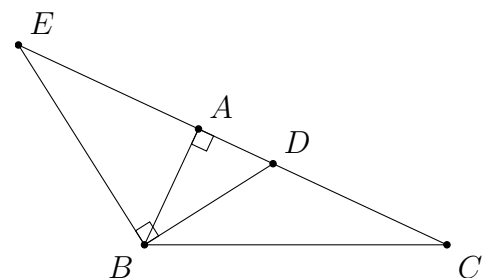
Bài 49. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $AB = 4$, tia phân giác trong và phân giác ngoài tại đỉnh B của $\triangle ABC$ cắt AC tại D và E . Biết $AD = 2$ cm. Tính độ dài DE .

- (A)** $DE = 6$ cm. **(B)** $DE = 8$ cm. **(C)** $DE = 9$ cm. **(D)** $DE = 10$ cm.

Lời giải.

Ta có BD , BE là phân giác trong và ngoài đỉnh B của $\triangle ABC$ nên $BD \perp BE$. Xét $\triangle DBE$ vuông tại B , $BA \perp DE$ nên

$$\begin{aligned} AB^2 &= AD \cdot AE \Leftrightarrow 16 = 2 \cdot AE \\ \Leftrightarrow AE &= 8 \Rightarrow DE = 10 \text{ cm.} \end{aligned}$$



Chọn đáp án **(B)** □

Bài 50. Cho $\triangle ABC$ vuông tại B , phân giác trong AD , biết $CD = 2BD$. Tính \widehat{C} .

- (A)** $\widehat{C} = 20^\circ$. **(B)** $\widehat{C} = 30^\circ$. **(C)** $\widehat{C} = 45^\circ$. **(D)** $\widehat{C} = 60^\circ$.

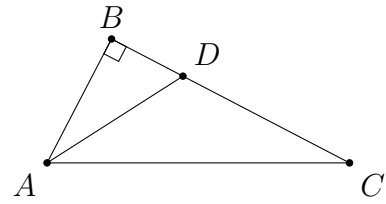
Lời giải.

Ta có AD là phân giác trong đỉnh A của $\triangle ABC$ nên

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{1}{2}.$$

Mà $\triangle ABC$ vuông tại B nên $\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{C} = 30^\circ$.

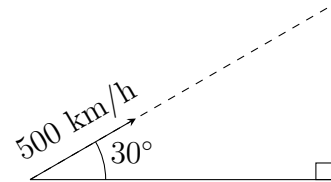
Chọn đáp án **(B)** □



Bài 51.

Một chiếc máy bay, bay lên với vận tốc 500 km/h. Đường bay lên tạo với phương nằm ngang một góc 30° . Hỏi sau 1,2 phút máy bay lên cao được bao nhiêu km theo phương thẳng đứng?

- (A)** 50 km. **(B)** 10 km. **(C)** 25 km. **(D)** 5 km.



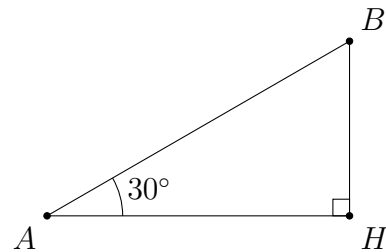
Lời giải.

Sau 1,2 phút = 0,02 giờ quãng đường máy bay bay được là

$$AB = 500 \cdot 0,02 = 10 \text{ km.}$$

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , $\widehat{BAH} = 30^\circ$. Ta có

$$\sin A = \frac{BH}{AB} \Leftrightarrow BH = AB \cdot \sin A = 10 \cdot \sin 30^\circ = 5 \text{ km.}$$



Chọn đáp án **(D)** □

Bài 52. Lúc 2 giờ chiều, ánh nắng mặt trời chiếu nghiêng tạo với mặt đất một góc 68° , lúc đó bóng một cây cau dài 1,2 m. Chiều cao của cây cau đó gần bằng

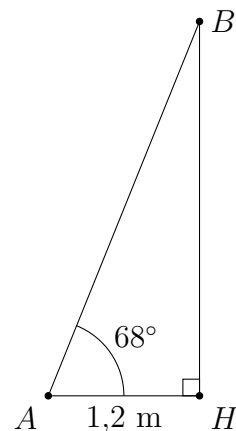
- (A)** 2,5 m. **(B)** 3 m. **(C)** 3,3 m. **(D)** 3,5 m.

Lời giải.

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H có $\widehat{A} = 68^\circ$, $AH = 1,2$ m. Ta có

$$\tan A = \frac{BH}{AH} \Leftrightarrow BH = AH \cdot \tan A = 1,2 \cdot \tan 68^\circ \approx 3.$$

Vậy độ cao cây cau gần bằng 3 m.



Chọn đáp án **(B)** □

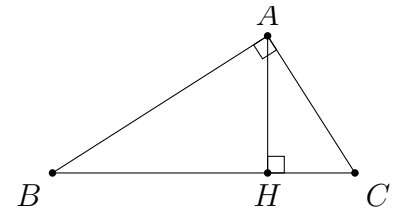
Bài 53. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $AH \perp BC$. Biết $\frac{AH}{HC} = \frac{4}{3}$. Tính $T = \frac{\sin B + \cos B}{\cos B}$.

- (A)** $\frac{7}{3}$. **(B)** $\frac{7}{4}$. **(C)** $\frac{3}{7}$. **(D)** $\frac{4}{7}$.


 **Lời giải.**

Ta có $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$ nên $\tan B = \cot C$. Mà $\triangle AHC$ vuông tại H nên $\cot C = \frac{CH}{AH} = \frac{3}{4}$. suy ra $\tan B = \frac{3}{4}$. Khi đó

$$T = \frac{\sin B + \cos B}{\cos B} = \frac{\sin B}{\cos B} + 1 = \tan B + 1 = \frac{7}{4}.$$



Chọn đáp án **(B)** □

 **Bài 54.** Cho góc nhọn α thỏa mãn $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{3}$. Tính $B = \sin \alpha + \cos \alpha$.

(A) $\sqrt{\frac{5}{3}}$.

(B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

(C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

 **Lời giải.**


Ta có $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$ và $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Do đó

$$B^2 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow B = \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

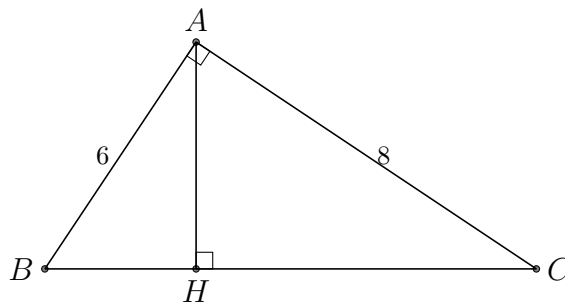
Chọn đáp án **(A)** □



Bài tập tự luận

 **Bài 55.** Cho tam giác ABC vuông tại A , AH là đường cao. Biết $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng AH .

 **Lời giải.**



 **Cách 1.**

Ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{36} + \frac{1}{64} = \frac{25}{567} \Rightarrow AH^2 = \frac{567}{25} \Rightarrow AH = \frac{24}{5} \text{ cm.}$$

 **Cách 2.**

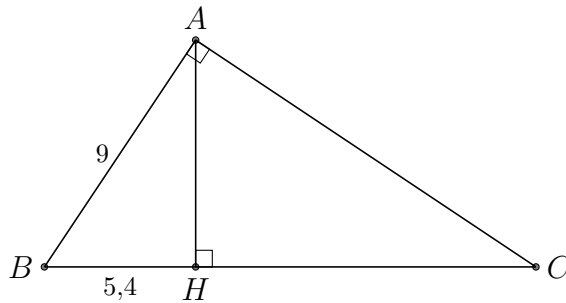
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC = 10 \text{ cm.}$$

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{24}{5} \text{ cm.}$$

□

➤ **Bài 56.** Cho tam giác ABC vuông tại A , AH là đường cao. Biết $AB = 9$ cm, $HB = 5,4$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng AC .

✍ **Lời giải.**



☑ **Cách 1.**

Ta có

$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BC = 15 \text{ cm.}$$

$$HC = BC - BH = 15 - 5,4 = 9,6 \text{ cm.}$$

$$AC^2 = CH \cdot CB \Rightarrow AC = 12 \text{ cm.}$$

☑ **Cách 2.**

Ta có

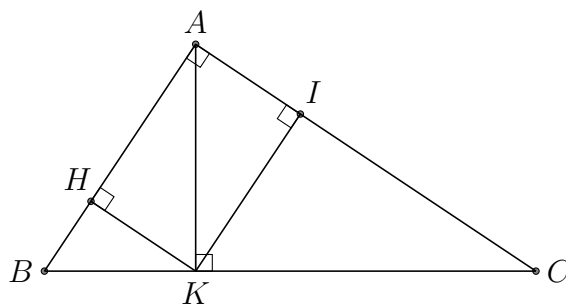
$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AH = 7,2 \text{ cm.}$$

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2} \Rightarrow AC = 12 \text{ cm.}$$

□

➤ **Bài 57.** Cho tam giác DEF vuông tại D , DK là đường cao. Kẻ KH vuông góc DE tại H , KI vuông góc DF tại I . Biết $KE = 7,2$ cm, $KF = 12,8$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng HI .

✍ **Lời giải.**



Tứ giác $DHKI$ có

$$\widehat{HDI} = 90^\circ \text{ (gt)}$$

$$\widehat{DHK} = 90^\circ \text{ (do } HK \perp DE)$$

$$\widehat{DIK} = 90^\circ \text{ (do } KI \perp DF)$$

$\Rightarrow DHKI$ là hình chữ nhật $\Rightarrow HI \perp DK$.

Ta có $DK^2 = EK \cdot KF$ (hệ thức liên quan đến đường cao) $\Rightarrow DK^2 = 7,2 \cdot 12,8 = 92,16$ nên $DK = 9,6$ cm.

Vậy $HI = DK = 9,6$ cm.

□

➤ **Bài 58.** Cho tam giác ABC vuông tại A . Biết $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$ và $AC = 20$ cm. Tính chu vi tam giác ABC .

✍ **Lời giải.**

☑ **Cách 1.** Ta có

$$\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{BC}{5} = \frac{AB}{3} \Rightarrow \frac{BC^2}{25} = \frac{AB^2}{9} = \frac{BC^2 - AB^2}{25 - 9} = \frac{AC^2}{16} = \frac{400}{16} = 25.$$

Suy ra

$$\frac{BC^2}{25} = 25 \Rightarrow BC = 25 \text{ cm.}$$

$$\frac{AB^2}{9} = 25 \Rightarrow AB = 15 \text{ cm.}$$

☑ **Cách 2.** Ta có

$$\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AB}{3} = \frac{BC}{5}.$$

Đặt $\frac{AB}{3} = \frac{BC}{5} = k \Rightarrow AB = 3k$ và $BC = 5k$ ($k > 0$).

Ta có $AB^2 + AC^2 = BC^2$ hay $9k^2 + 400 = 25k^2 \Rightarrow k = 5$.

Do đó

$$AB = 3k = 3 \cdot 5 = 15 \text{ cm.}$$

$$BC = 5k = 5 \cdot 5 = 25 \text{ cm.}$$

Vậy chu vi tam giác ABC là $15 + 20 + 25 = 60$ cm. □

➤ **Bài 59.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Vẽ trung tuyến AD . Biết $BC = 2\sqrt{3}$ cm. Tính độ dài đường cao AH của tam giác ABC .

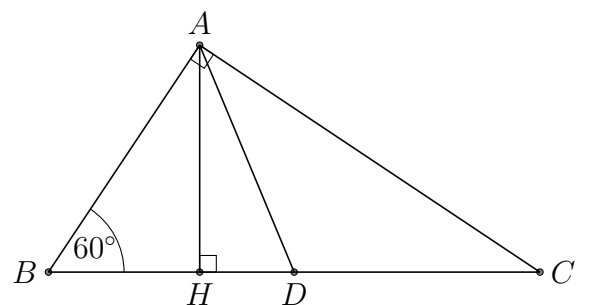
✍ **Lời giải.**

Tam giác ABD đều nên

$$AB = BD = \frac{BC}{2} = \sqrt{3} \text{ cm. Ta có}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AC = 3 \text{ cm.}$$

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{3}{2} \text{ cm.}$$

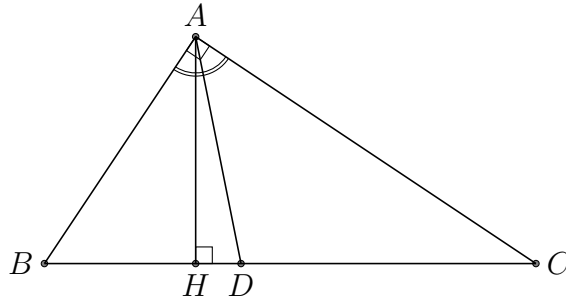


➤ **Bài 60.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , phân giác AD của góc \widehat{BAC} .

1. Chứng minh $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB}{HC}$.

2. Biết $BD = 45$ cm, $CD = 60$ cm. Tính độ dài HB, HC .

✍ **Lời giải.**



1. Ta có hệ thức liên quan giữa cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền

$$AB^2 = BH \cdot BC \text{ và } AC^2 = CH \cdot CB.$$

Do đó

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH \cdot BC}{CH \cdot CB} = \frac{BH}{CH}.$$

2. Áp dụng tính chất đường phân giác của tam giác

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{HB}{HC} &= \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}. \\ \Rightarrow \frac{HB}{9} &= \frac{HC}{16} = \frac{HB + HC}{9 + 16} = \frac{BC}{25} = \frac{105}{25} = \frac{21}{5}. \end{aligned}$$

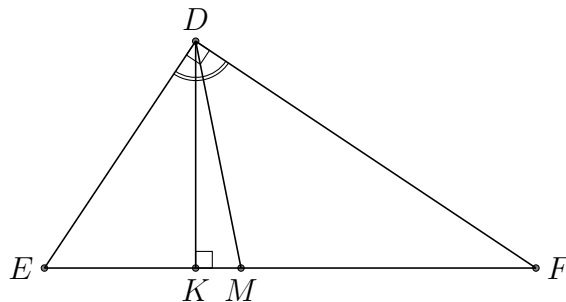
Suy ra $\frac{HB}{9} = \frac{21}{5}$ nên $HB = 37,8$ cm.

$$HC = BC - HB = 105 - 37,8 = 67,2 \text{ cm.}$$

□

Bài 61. Cho tam giác DEF vuông tại D , phân giác DM , đường cao DK . Biết $DE = 30$ cm, $DF = 40$ cm. Tính độ dài DM .

Lời giải.



☑ $EF^2 = DE^2 + DF^2 \Rightarrow EF = 50$ cm.

☑ $DK \cdot EF = DE \cdot DF \Rightarrow DK = 24$ cm.

☑ $\frac{ME}{MF} = \frac{DE}{DF} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{ME}{3} = \frac{MF}{4} = \frac{ME + MF}{3 + 4} = \frac{50}{7} \Rightarrow ME = \frac{150}{7}$ cm.

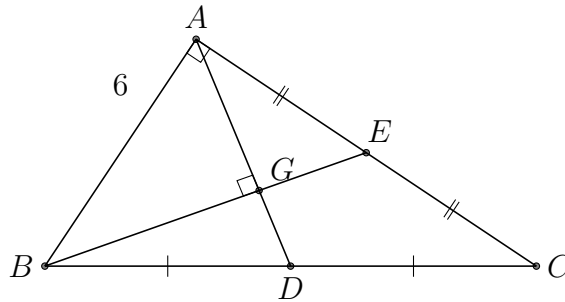
Giáo viên:

- ☑ $DE^2 = EK \cdot EF \Rightarrow EK = 18 \text{ cm.}$
- ☑ $KM = EM - EK = \frac{150}{7} - 18 = \frac{24}{7} \text{ cm.}$
- ☑ $DM^2 = DK^2 + KM^2 \Rightarrow DM \approx 24,24 \text{ cm.}$

□

📖 **Bài 62.** Cho tam giác ABC vuông tại A . Các đường trung tuyến AD và BE vuông góc với nhau tại G . Biết $AB = 6 \text{ cm}$. Tính BC .

📝 **Lời giải.**



Ta có $BG = \frac{2}{3}BE$ (tính chất trọng tâm của tam giác).

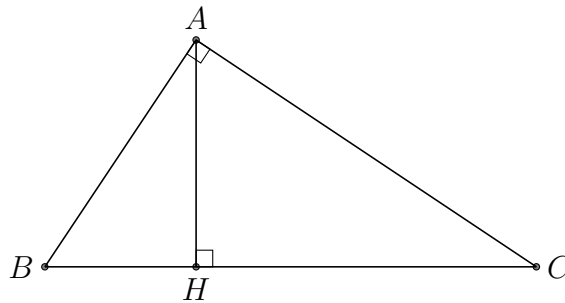
$$AB^2 = BG \cdot BE \text{ nên } 36 = \frac{2}{3}BE^2 \Rightarrow BE = 3\sqrt{6} \text{ cm.}$$

$$AE^2 = BE^2 - AB^2 = 18 \Rightarrow AE = 3\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow AC = 6\sqrt{2} \text{ cm.}$$

□

📖 **Bài 63.** Cho tam giác ABC vuông tại A , AH là đường cao. Biết $AH = 24 \text{ cm}$, $BC = 50 \text{ cm}$, $AB < AC$. Tính chu vi tam giác ABC .

📝 **Lời giải.**



Do $AB < AC$ nên $HB < HC$ (quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu).

Đặt $x = HB \Rightarrow HC = 50 - x$.

Vì $HB < HC \Rightarrow x < 50 - x \Rightarrow 0 < x < 25$.

Áp dụng hệ thức liên quan đến đường cao $AH^2 = BH \cdot HC$.

$$576 = x(50 - x) \Leftrightarrow x^2 - 50x + 576 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 18)(x - 32) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \text{ (nhận)} \\ x = 32 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Do đó

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AB = 30 \text{ cm.}$$

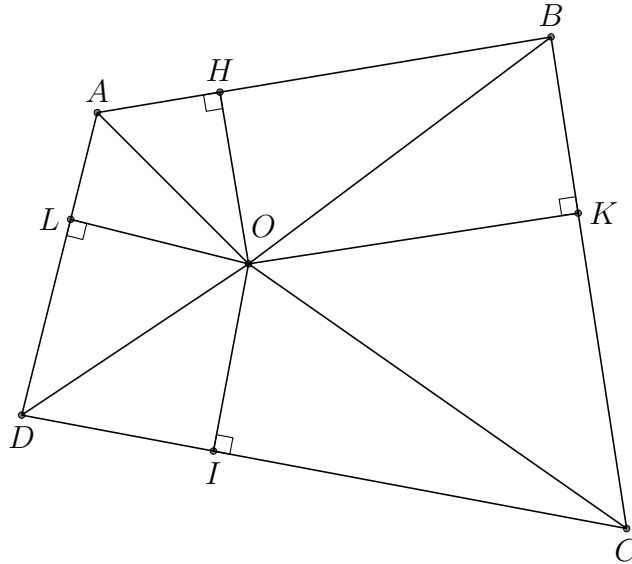
$$AC^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow AC = 40 \text{ cm.}$$

□

➤ **Bài 64.** Cho tứ giác $ABCD$. Từ điểm O bất kì trong tứ giác kẻ OH, OK, OI, OL lần lượt vuông góc với các cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh

$$HB^2 + KC^2 + ID^2 + LA^2 = AH^2 + BK^2 + CI^2 + DL^2.$$

 **Lời giải.**



Áp dụng định lý Py-ta-go ta có

$$\begin{aligned} & HB^2 + KC^2 + ID^2 + LA^2 \\ &= (OB^2 - OH^2) + (OC^2 - OK^2) + (OD^2 - OI^2) + (OA^2 - OL^2) \\ &= (OA^2 - OH^2) + (OB^2 - OK^2) + (OC^2 - OI^2) + (OD^2 - OL^2) \\ &= AH^2 + BK^2 + CI^2 + DL^2. \end{aligned}$$

□

➤ **Bài 65.** Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ và hai đường chéo vuông góc tại O .

1. Chứng minh rằng $AD^2 = AB \cdot DC$.
2. Cho $AB = 9; CD = 16$. Tính diện tích hình thang $ABCD$.
3. Tính độ dài các đoạn thẳng OA, OB, OC, OD .

 **Lời giải.**

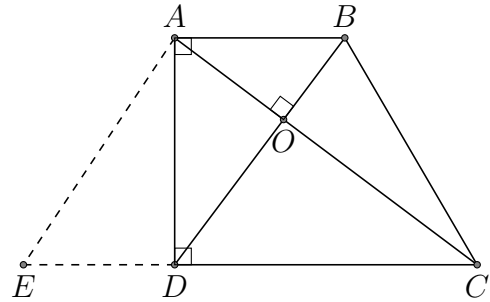
1. Vẽ $AE \parallel BD$ (E thuộc đường thẳng CD) ta được $AB = ED$ và $AE \perp AC$. Áp dụng hệ thức $h^2 = b \cdot c$ ta được $AD^2 = DE \cdot DC$ hay $AD^2 = AB \cdot DC$.
2. Ta có $AD = \sqrt{9 \cdot 16} = 12$. Vậy

$$S_{ABCD} = \frac{(9 + 16) \cdot 12}{2} = 150 \text{ (đvdt)}.$$

3. Áp dụng định lý Py-ta-go ta tính được $AC = 20$ cm; $BD = 15$ cm.

Ta có $AB \parallel CD$ nên

$$\begin{aligned} \frac{OA}{OC} &= \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD} \\ \Rightarrow \frac{OA + OC}{OC} &= \frac{OB + OD}{OD} = \frac{AB + CD}{CD} \\ \Rightarrow \frac{AC}{OC} &= \frac{BD}{OD} = \frac{25}{16}. \end{aligned}$$



Thay $AC = 20$; $BD = 15$ ta tính được $OC = 12,8$ và $OD = 9,6$. Từ đó suy ra $OA = 7,2$ cm và $OB = 5,4$ cm.

□

📖 **Bài 66.** Cho biết chu vi của một tam giác bằng 120 cm. Độ dài các cạnh tỉ lệ với 8, 15, 17.

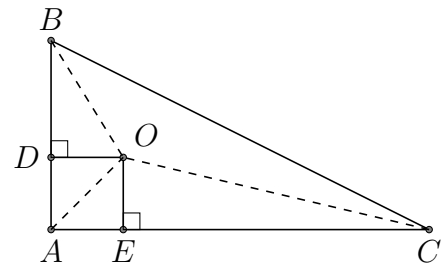
1. Chứng minh rằng tam giác đó là một tam giác vuông.
2. Tính khoảng cách từ giao điểm của ba đường phân giác đến mỗi cạnh.

✍ **Lời giải.**

1. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{AB}{8} &= \frac{AC}{15} = \frac{BC}{17} \\ &= \frac{AB + AC + BC}{8 + 15 + 17} = \frac{120}{40} = 3. \end{aligned}$$

Suy ra $AB = 24$ cm; $AC = 45$ cm; $BC = 51$ cm.
Nhận xét $24^2 + 45^2 = 51^2$ nên tam giác ABC vuông tại A .



2. Gọi khoảng cách từ giao điểm O của ba đường phân giác đến mỗi cạnh là x . Ta có

$$\begin{aligned} S_{OBC} + S_{COA} + S_{AOB} &= S_{ABC} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot x \cdot (24 + 45 + 51) &= \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 45 \\ \Leftrightarrow 60x &= 540 \\ \Leftrightarrow x &= 9. \end{aligned}$$

Vậy khoảng cách từ giao điểm của ba đường phân giác đến mỗi cạnh là 9 cm.

□

📖 **Bài 67.** Cho góc nhọn x thỏa mãn $\sin x = 0,8$, tính $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

✍ **Lời giải.**

☑ $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - 0,64} = 0,6.$

☑ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0,8}{0,6} = \frac{4}{3}.$

☑ $\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{3}{4}.$

□

📁 **Bài 68.** Cho góc nhọn x thỏa mãn $\sin x = \frac{1}{2}$. Tính các tỉ số lượng giác của góc $(90^\circ - x)$.

✍ **Lời giải.**

$$\checkmark \sin(90^\circ - x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\checkmark \cos(90^\circ - x) = \sin x = \frac{1}{2}.$$

$$\checkmark \tan(90^\circ - x) = \frac{\sin(90^\circ - x)}{\cos(90^\circ - x)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

$$\checkmark \cot(90^\circ - x) = \frac{1}{\tan(90^\circ - x)} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

□

📁 **Bài 69.** Tính

1. $\frac{\sin 25^\circ}{\cos 65^\circ}.$

2. $\tan 58^\circ - \cot 32^\circ.$

✍ **Lời giải.**

$$1. \frac{\sin 25^\circ}{\cos 65^\circ} = \frac{\sin 25^\circ}{\sin(90^\circ - 65^\circ)} = \frac{\sin 25^\circ}{\sin 25^\circ} = 1.$$

$$2. \tan 58^\circ - \cot 32^\circ = \tan 58^\circ - \tan(90^\circ - 32^\circ) = \tan 58^\circ - \tan 58^\circ = 0.$$

□

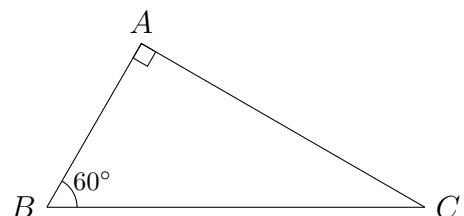
📁 **Bài 70.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ$ và $BC = 8$ cm. Hãy tính độ dài của các cạnh góc vuông.

✍ **Lời giải.**

Xét tam giác ABC vuông tại A , ta có

$$\checkmark \sin B = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC = BC \cdot \sin B = 8 \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}.$$

$$\checkmark \cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = BC \cdot \cos B = 8 \cos 60^\circ = 4.$$



□

📁 **Bài 71.** Cho tam giác ABC , vẽ đường cao AH , ($H \in BC$). Cho biết $\widehat{ABC} = 45^\circ$, $BH = 20$ cm, $HC = 21$ cm. Tính AC .

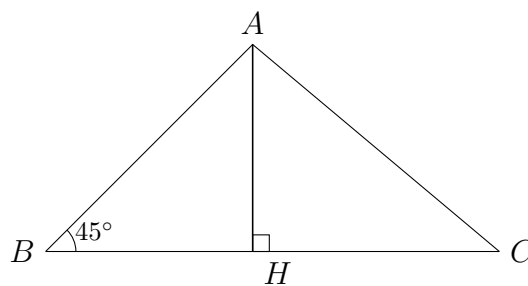
✍ **Lời giải.**

Xét tam giác ABH vuông tại H , ta có

$$\begin{aligned} \tan B &= \frac{AH}{BH} \Rightarrow AH = BH \cdot \tan B \\ &= 20 \cdot \tan 45^\circ = 20 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Xét tam giác AHC vuông tại H , ta có

$$\begin{aligned} AC^2 &= AH^2 + CH^2 \quad (\text{Định lý Py-ta-go}) \\ \Rightarrow AC &= \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29 \text{ cm.} \end{aligned}$$



□

Bài 72. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$), biết $AD = 12 \text{ cm}$, $DC = 14 \text{ cm}$, $AB = 9 \text{ cm}$. Tính tỉ số lượng giác của góc C .

Lời giải.

Đựng BH vuông góc CD (H thuộc CD). Tứ giác

$ABHD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{H} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật.

$$\Rightarrow BH = AD = 12 \text{ cm}, DH = AB = 9 \text{ cm.}$$

$$\Rightarrow CH = DC - DH = 14 - 9 = 5 \text{ cm.}$$

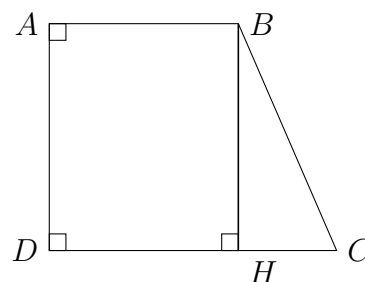
Xét tam giác CHB vuông tại H , ta có

$$\begin{aligned} BC^2 &= BH^2 + CH^2 \quad (\text{Định lý Py-ta-go}) \\ \Rightarrow BC &= \sqrt{BH^2 + CH^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$\sin C = \frac{BH}{BC} = \frac{12}{13}, \cos C = \frac{CH}{BC} = \frac{5}{13}, \tan C = \frac{BH}{CH} = \frac{12}{5}, \cot C = \frac{CH}{BH} = \frac{5}{12}.$$

□



Bài 73. Hai trụ điện cùng chiều cao được dựng thẳng đứng hai bên lề đối diện một đại lộ rộng 80 m. Từ một điểm M trên mặt đường giữa hai trụ người ta nhìn thấy hai trụ điện với góc nâng lần lượt là 60° và 30° . Tính chiều cao của trụ điện và khoảng cách từ điểm M đến gốc mỗi trụ điện.

Lời giải.

Đặt $AB = DC = x$ (m) ($x > 0$).

Xét tam giác ABM vuông tại A

$$\tan M = \frac{AB}{AM} \Rightarrow AM = \frac{AB}{\tan M} = \frac{x}{\tan 60^\circ} = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Xét tam giác DCM vuông tại C

$$\tan M = \frac{DC}{CM} \Rightarrow CM = \frac{DC}{\tan M} = \frac{x}{\tan 30^\circ} = x\sqrt{3}.$$

Vì $AC = AM + MC$ nên ta có phương trình

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{3}} + x\sqrt{3} &= 80 \\ \Leftrightarrow x + 3x &= 80\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow 4x &= 80\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow x &= 20\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } AM = \frac{x}{\sqrt{3}} = 20 \text{ m và } CM = x\sqrt{3} = 60 \text{ m.}$$

Vậy trụ điện cao $20\sqrt{3}$ m và khoảng cách từ điểm M đến mỗi trụ điện lần lượt là 20 m và 60 m.

□

Bài 74. Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $AB = 5$ và $\widehat{BAC} = 30^\circ$.

1. Tính độ dài đường cao kẻ từ B .
2. Tính độ dài BC .

Lời giải.

1. Kẻ $BH \perp AC$ ($H \in AC$).

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , áp dụng hệ thức về cạnh và góc, ta có

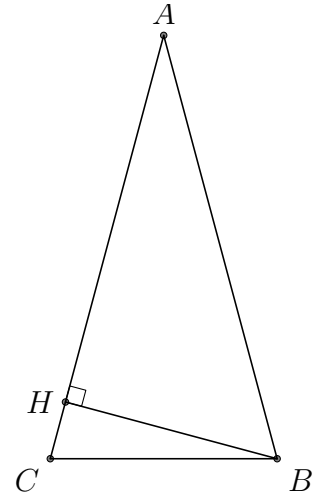
$$BH = AB \cdot \sin \widehat{BAC} = 5 \cdot \sin 30^\circ = 2,5.$$

2. Do $\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{BAC} = 30^\circ$ nên

$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ.$$

Xét $\triangle BHC$ vuông tại H , áp dụng hệ thức về cạnh và góc, ta có

$$BC = \frac{BH}{\sin \widehat{BCH}} = \frac{2,5}{\sin 75^\circ} \approx 2,6.$$



□

Bài 75. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có BM là đường trung tuyến. Biết $\widehat{BCA} = 30^\circ$ và $CM = 4,5$. Tính độ dài BM .

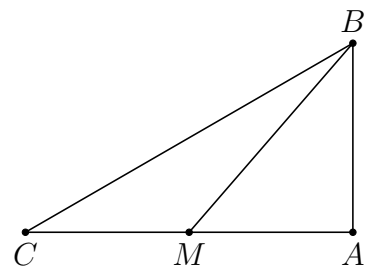
Lời giải.

BM là đường trung tuyến của tam giác nên M là trung điểm cạnh AC . Do đó

$$AM = CM = 4,5; \quad AC = 2 \cdot CM = 2 \cdot 4,5 = 9.$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , áp dụng hệ thức về cạnh và góc, ta có

$$AB = AC \cdot \tan \widehat{ACB} = 9 \cdot \tan 30^\circ = 3\sqrt{3}.$$



Xét $\triangle ABM$ vuông tại A , áp dụng định lí Pi-ta-go, ta có

$$BM^2 = AB^2 + AM^2 = (3\sqrt{3})^2 + 4,5^2 = 47,25 \Rightarrow BM = \frac{3\sqrt{21}}{2}.$$

□

Bài 76. Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{A} = 45^\circ$, $AB = BD = 18$ cm.

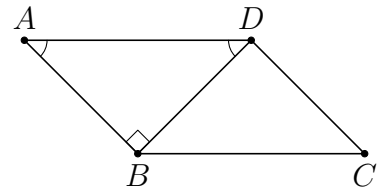
1. Tính độ dài cạnh AD .
2. Tính diện tích hình bình hành $ABCD$.

Lời giải.

1. Vì $AB = BD$ và $\widehat{BAD} = 45^\circ$ nên $\triangle ABD$ vuông cân tại B .

Áp dụng hệ thức về cạnh và góc trong $\triangle ABD$ vuông ta có

$$AD = \frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} = \frac{18}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 18\sqrt{2} \text{ (cm)}.$$



2. Ta có $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 18 = 162 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Diện tích hình bình hành $ABCD$ gấp đôi diện tích của tam giác ABD .

Do đó, diện tích của hình bình hành $ABCD$ là $324 \text{ (cm}^2\text{)}$. □

👉 **Bài 77.** Cho tam giác ABC có $AB = 18$; $BC = 24$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh AC .

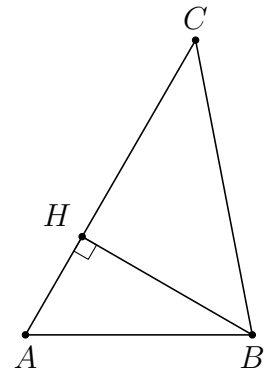
👉 **Lời giải.**

$\triangle ABC$ có $AB > BC$ nên $\widehat{BCA} < \widehat{BAC} = 60^\circ$.

Trong tam giác ABC , kẻ đường cao BH . Vì các góc tại đỉnh A và C đều là góc nhọn nên $H \in AC$.

Áp dụng hệ thức về cạnh và góc cho tam giác vuông ABH , ta có

$$\begin{aligned} BH &= AB \sin A = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}, \\ AH &= AB \cos A = 18 \cdot \frac{1}{2} = 9. \end{aligned}$$



Áp dụng định lý Pi-ta-go cho tam giác vuông BHC ta có:

$$CH^2 = BC^2 - BH^2 = 24^2 - (9\sqrt{3})^2 = 333 \Rightarrow CH = \sqrt{333} = 3\sqrt{37}.$$

Vậy $AC = AH + CH = 9 + 3\sqrt{37}$. □

👉 **Bài 78.** Cho $\triangle ABC$ đều có cạnh 60. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = 20$. Đường trung trực của AD cắt AB tại E . Tính độ dài DE .

👉 **Lời giải.**

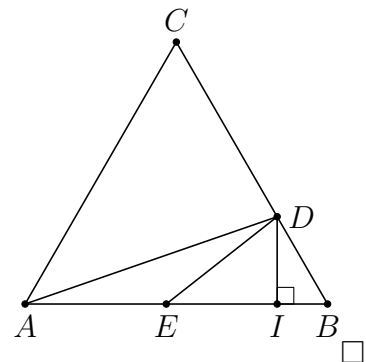
Kẻ $DI \perp AB$.

Ta có $DI = DB \cdot \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$ và $BI = DB \cdot \cos 60^\circ = 10$.

Đặt $DE = AE = x$ ($x > 0$) thì $EI = AB - BI - AE = 50 - x$.

Áp dụng định lý Pi-ta-go trong $\triangle DEI$ ta có

$$\begin{aligned} DE^2 &= DI^2 + EI^2 \Leftrightarrow x^2 = 300 + (50 - x)^2 \\ &\Leftrightarrow 100x = 2800 \\ &\Leftrightarrow x = 28. \end{aligned}$$



👉 **Bài 79.** Cho ABC là tam giác đều cạnh 6. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = 2$.

1. Tính độ dài đoạn thẳng AD .

2. Kẻ CK vuông góc với AD , ($K \in AD$). Tính độ dài đoạn thẳng CK .

 **Lời giải.**

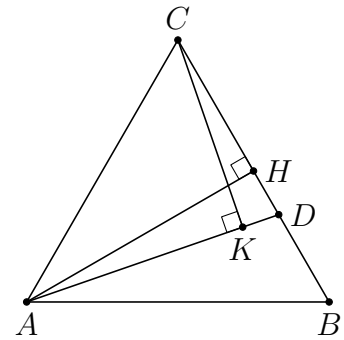
1. Từ đỉnh A của tam giác ABC , kẻ đường cao AH ($H \in BC$).

Áp dụng hệ thức về cạnh và góc trong $\triangle ABH$ vuông ta có

$$AH = AB \sin 60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

Vì $\triangle ABC$ đều, $AH \perp BC$ nên H là trung điểm của BC . Do đó

$$DH = BH - BD = 3 - 2 = 1.$$




Áp dụng định lý Pi-ta-go cho tam giác vuông AHD , ta có

$$AD^2 = AH^2 + HD^2 = (3\sqrt{3})^2 + 1 = 28 \Rightarrow AD = 2\sqrt{7}.$$

2. Trong tam giác vuông CKD ta có

$$\frac{CK}{CD} = \sin D = \frac{AH}{AD} \Rightarrow CK = \frac{AH}{AD} \cdot CD = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \cdot 4 = \frac{6\sqrt{21}}{7}.$$

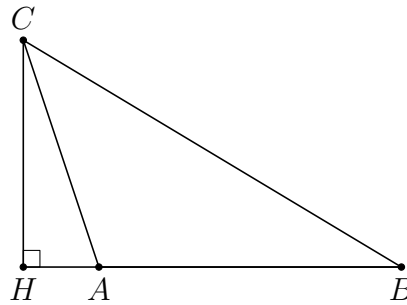
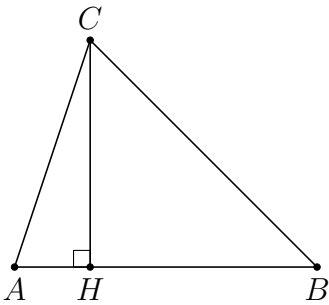
□

 **Bài 80.** Cho $\triangle ABC$ có $AB = c$, $AC = b$, đường phân giác AD , đường trung tuyến AM . Đường thẳng đối xứng với AM qua AD cắt BC tại N . Tính $\frac{BN}{CN}$.

 **Lời giải.**

Bổ đề: Cho $\triangle ABC$ có α là góc nhọn tạo bởi đường thẳng AB và AC . Khi đó,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha.$$



Vẽ đường cao CH , ta có $CH = CA \cdot \sin \alpha$.

Do đó $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin \alpha$.

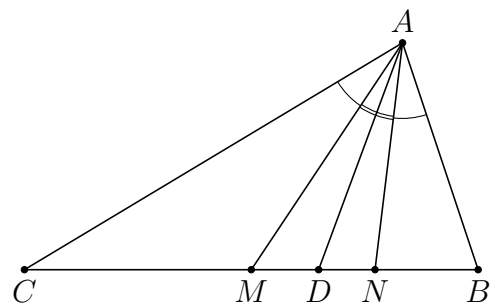
Quay lại bài toán.

Do AD là đường phân giác của $\triangle ABC$ nên

$$\widehat{CAD} = \widehat{BAD} < 90^\circ.$$

Mặt khác, do AN đối xứng với AM qua AD nên

$$\widehat{MAD} = \widehat{DAN}.$$



Từ đó, ta suy ra $\widehat{CAM} = \widehat{NAB}$ và $\widehat{CAN} = \widehat{BAM}$.

Áp dụng bổ đề trên ta có

$$S_{\Delta CAN} = \frac{1}{2} AC \cdot AN \cdot \sin \widehat{CAN}$$

$$S_{\Delta BAM} = \frac{1}{2} AB \cdot AM \cdot \sin \widehat{BAM}.$$

Do $\widehat{CAN} = \widehat{BAM}$ nên $\frac{S_{\Delta CAN}}{S_{\Delta BAM}} = \frac{AC \cdot AN}{AB \cdot AM} \Leftrightarrow \frac{CN}{BM} = \frac{AC \cdot AN}{AB \cdot AM}$.

Tương tự ta có $\frac{BN}{CM} = \frac{AB \cdot AN}{AC \cdot AM}$.

Vì vậy

$$\begin{aligned} \frac{BN}{CN} &= \frac{BN}{CM} : \frac{CN}{BM} \quad (\text{do } BM = CM) \\ &= \frac{AB \cdot AN}{AC \cdot AM} : \frac{AC \cdot AN}{AB \cdot AM} \\ &= \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{c^2}{b^2}. \end{aligned}$$

□

👉 **Bài 81.** Cho tam giác ABC nhọn trực tâm H , trên đoạn BH lấy điểm M và trên đoạn CH lấy điểm N sao cho $\widehat{AMC} = \widehat{ANB} = 90^\circ$. Chứng minh rằng $AM = AN$.

📝 **Lời giải.**

Ta có $\Delta AFB \sim \Delta AEC$ (g.g) nên

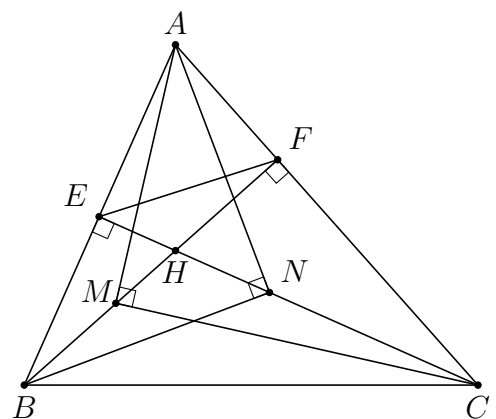
$$\frac{AF}{AE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AE \cdot AB = AF \cdot AC. \quad (1)$$

Áp dụng hệ thức lượng cho các tam giác vuông ABN và ACM ta có

$$AE \cdot AB = AN^2; \quad AF \cdot AC = AM^2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$AM^2 = AN^2 \Rightarrow AM = AN.$$



□

👉 **Bài 82.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC . Chứng minh rằng $\sqrt[3]{BC^2} = \sqrt[3]{BD^2} + \sqrt[3]{CE^2}$.

📝 **Lời giải.**

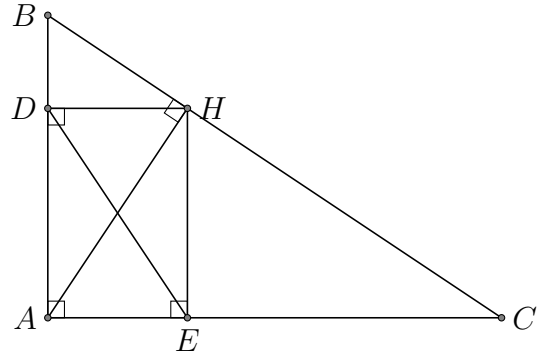
Ta có $BD = \frac{BH^2}{AB}, BC = \frac{AB^2}{BH}$ nên

$$\frac{BD^2}{BC^2} = \frac{BH^4}{AB^2} \cdot \frac{BH^2}{AB^4} = \frac{BH^6}{AB^6}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{BD^2}{BC^2}} = \frac{BH^2}{AB^2} = \frac{BH^2}{BH \cdot BC} = \frac{BH}{BC}.$$

Tương tự ta cũng có $\sqrt[3]{\frac{CE^2}{BC^2}} = \frac{CH}{BC}.$

Suy ra $\sqrt[3]{\frac{BD^2}{BC^2}} + \sqrt[3]{\frac{CE^2}{BC^2}} = \frac{BH + HC}{BC} = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{BC^2} = \sqrt[3]{BD^2} + \sqrt[3]{CE^2}.$ □



Bài 83. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Trên tia đối của tia AH lấy điểm D sao cho $HD = AC$. Vẽ hình chữ nhật $CHDE$. Chứng minh rằng BE vuông góc với CD .

Lời giải.

Đặt $DE = HC = a, EC = DH = AC = b.$

Ta có $\tan \widehat{D}_1 = \frac{EC}{DE}.$ (1)

và $\tan \widehat{E}_1 = \frac{BC}{EC} = \frac{BC}{b}.$ (2)

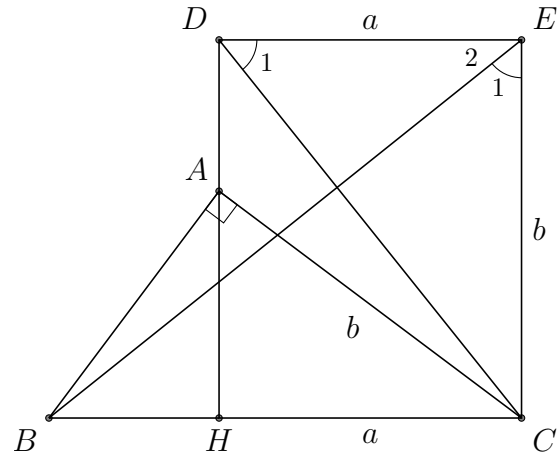
Tam giác vuông ABC có $AC^2 = BC \cdot HC.$

Suy ra $b^2 = BC \cdot a \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{BC}{b}.$ (3)

Từ (1),(2) và (3) suy ra $\tan \widehat{D}_1 = \tan \widehat{E}_1.$

Do đó $\widehat{D}_1 = \widehat{E}_1 \Rightarrow \widehat{D}_1 + \widehat{E}_2 = \widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = 90^\circ.$

Vậy $BE \perp CD.$



□

Bài 84. Cho tam giác ABC có $AB = \sqrt{5}, AC = 3$ và $\widehat{B} + 2\widehat{C} = 90^\circ.$ Tính độ dài đoạn $BC.$

Lời giải.

Kẻ $CH \perp AB.$ Do $\widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 < 90^\circ$ nên A nằm giữa B và $H.$ Ta có

$$\widehat{B}_1 + \widehat{BCH} = 90^\circ = \widehat{B}_1 + 2\widehat{C}_1$$

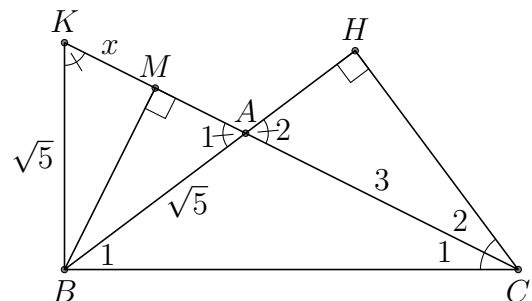
$$\Rightarrow \widehat{BCH} = 2\widehat{C}_1 \Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2.$$

Giả sử đường vuông góc với BC tại B cắt CA ở $K.$

Ta có $\widehat{K} = \widehat{A}_1$ (cùng phụ với $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$) $\Rightarrow \triangle ABK$ cân. Kẻ $BM \perp AK.$ Đặt $KM = MA = x (x > 0).$

Từ $BK^2 = KM \cdot KC$ suy ra

$$(\sqrt{5})^2 = x(2x + 3) \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x + 5) = 0.$$



Do $x > 0$ nên $x = 1,$ do đó $KC = 5.$ Suy ra $BC = \sqrt{KC^2 - KB^2} = \sqrt{20}.$ □

§5 Đề kiểm tra 45 phút

1 Đề số 1A (Tự luận dành cho học sinh đại trà)

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm, AH là đường cao. Tính độ dài các cạnh BH, CH, AC, AH .

Lời giải.

Áp dụng định lý Pi-ta-go cho tam giác ABC vuông tại A , ta được

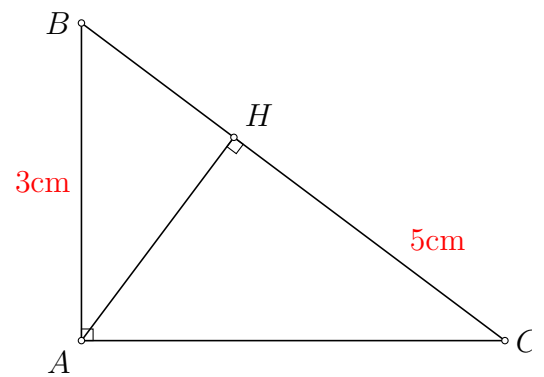
$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ (cm)}.$$

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC với đường cao AH

$$\begin{aligned} AH \cdot BC &= AB \cdot AC \\ \Rightarrow AH &= \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5} \text{ (cm)}. \end{aligned}$$

$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{9}{5} \text{ (cm)}.$$

$$CH = BC - BH = 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5} \text{ (cm)}.$$



□

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $\frac{AB}{AC} = \frac{20}{21}$ và $AH = 42$ cm. Tính chu vi tam giác ABC .

Lời giải.

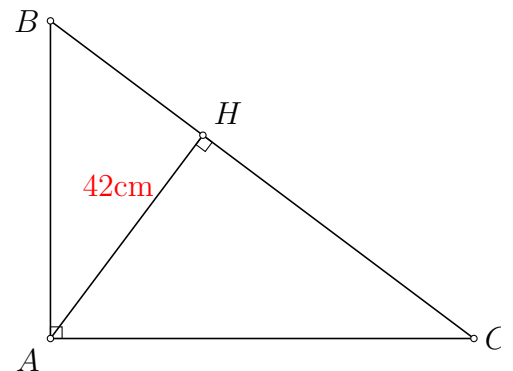
Giả thiết suy ra $AB = \frac{20}{21}AC$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác ABC với đường cao AH , ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{AH^2} &= \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{20}{21}\right)^2 \cdot AC^2} + \frac{1}{AC^2} \\ &= \frac{841}{400} \cdot \frac{1}{AC^2} \end{aligned}$$

Suy ra

$$AC = \sqrt{\frac{841}{400} \cdot AH^2} = \sqrt{\frac{841}{400} \cdot 42^2} = \frac{609}{10} \text{ (cm)}.$$



Do đó $AB = 58$ (cm), áp dụng Pi-ta-go cho tam giác vuông ABC ta được

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{60,9^2 + 58^2} = 84,1 \text{ (cm)}.$$

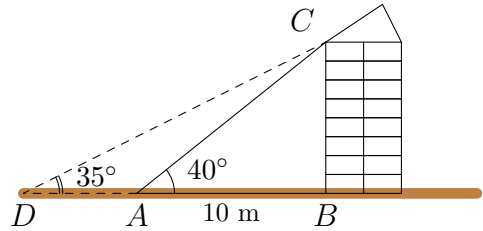
Chu vi tam giác ABC là

$$p_{\Delta ABC} = 60,9 + 58 + 84,1 = 203 \text{ (cm)}.$$

□

Bài 3.

Bạn An đứng cách một tòa nhà một khoảng 10 m. Góc “nâng” từ chỗ bạn An đứng đến đỉnh tòa nhà là 40° . Hỏi nếu An di chuyển sao cho góc “nâng” là 35° thì An cách tòa nhà bao xa, (làm tròn hai chữ số thập phân, biết rằng An chỉ tiến tới hoặc lùi lại).



Lời giải.

Trong tam giác ABC vuông tại B , ta có $\tan \widehat{CAB} = \frac{BC}{AB}$.

Suy ra $BC = \tan \widehat{CAB} \cdot AB = \tan 40^\circ \cdot 10$ m.

Trong tam giác CBD vuông tại B , ta có $\tan \widehat{CDB} = \frac{BC}{DB}$.

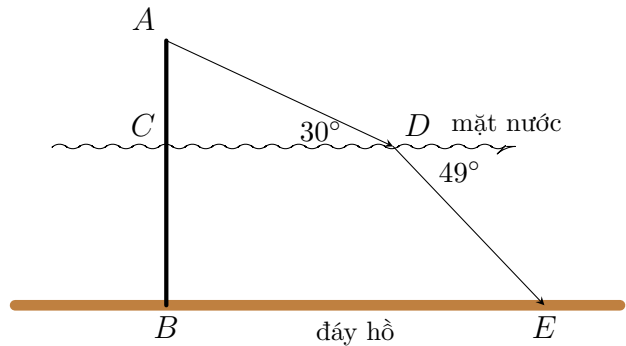
$$\text{Suy ra } DB = \frac{BC}{\tan \widehat{CDB}} = \frac{\tan 40^\circ \cdot 10}{\tan 35^\circ} \approx 11,98 \text{ m}.$$

Vậy nếu An di chuyển sao cho góc “nâng” là 35° thì An cách tòa nhà 11,98 m.

□

Bài 4.

Một cây cọc cắm thẳng đứng xuống đáy hồ sâu 1,5 m. Phần cọc nhô lên khỏi mặt nước là 0,5 m. Tia sáng mặt trời chiếu xuống hồ theo phương hợp với mặt nước góc 30° . Nhưng khi vào trong nước tia sáng bị khúc xạ nên tia sáng hợp với mặt nước một góc 49° . Tính chiều dài bóng cây cọc trên mặt nước và dưới đáy hồ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai?



Lời giải.

Gọi $F = BC \cap DE$. Khi đó $\widehat{FDC} = \widehat{DEB} = 49^\circ$.

Trong tam giác ADC vuông tại C , ta có $\tan \widehat{ADC} = \frac{CA}{CD}$.

$$\text{Suy ra } CD = \frac{AC}{\tan \widehat{ADC}} = \frac{0,5}{\tan 30^\circ} \approx 0,87 \text{ m}.$$

Trong tam giác CFD vuông tại C , ta có $\tan \widehat{FDC} = \frac{FC}{DC}$.

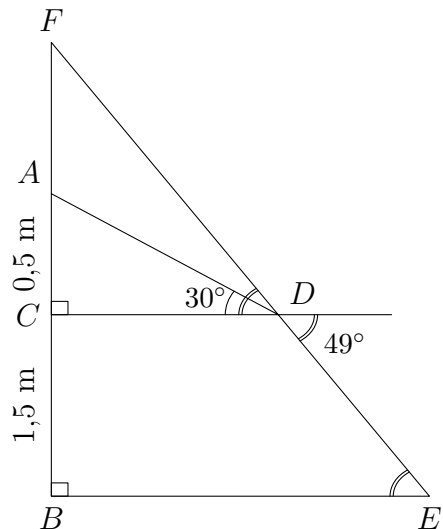
$$\text{Suy ra } CF = CD \cdot \tan \widehat{FDC} = 0,87 \cdot \tan 49^\circ \approx 1 \text{ m}.$$

$$\text{Suy ra } BF = BC + CF = 1,5 + 1 = 2,5 \text{ m}.$$

Trong tam giác FBE vuông tại B , ta có $\tan \widehat{FEB} = \frac{BF}{BE}$.

$$\text{Suy ra } BE = \frac{BF}{\tan \widehat{FEB}} = \frac{2,5}{\tan 49^\circ} \approx 2,17 \text{ m}.$$

Vậy chiều dài bóng cây cọc trên mặt nước là 0,87 m và dưới đáy hồ là 2,17 m.





Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại B có $AB = 2$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Hãy giải tam giác vuông ABC .

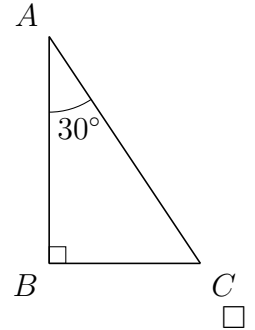
Lời giải.

Ta có $\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{A} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Theo các hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, ta có

$$BC = AB \cdot \tan A = 2 \cdot \tan 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3};$$

$$AB = AC \cdot \cos A \Rightarrow AC = \frac{AB}{\cos A} = \frac{2}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$



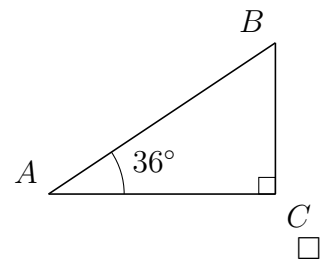
Bài 6. Người ta cần kéo một vật lên cao 5 m bằng một mặt phẳng nghiêng tạo với phương nằm ngang một góc 36° . Hỏi chiều dài của mặt phẳng nghiêng là bao nhiêu?

Lời giải.

Giả sử chiều dài của mặt phẳng nghiêng là đoạn AB , chiều cao cần đưa vật lên là đoạn BC và góc tạo bởi mặt phẳng nghiêng và phương nằm ngang là $\widehat{BAC} = 36^\circ$.

Chiều dài của mặt phẳng nghiêng là

$$BC = AB \cdot \sin A \Rightarrow AB = \frac{BC}{\sin A} = \frac{5}{\sin 36^\circ} \approx 8,507 \text{ m.}$$



ĐỀ SỐ 1B (Tự luận dành cho học sinh đại trà)

Bài 1. Không dùng máy tính bỏ túi, hãy sắp xếp giá trị các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự tăng dần.

$$\sin 20^\circ, \cos 20^\circ, \sin 35^\circ, \cos 40^\circ.$$

Lời giải.

Ta có

$$\cos 20^\circ = \sin 70^\circ, \cos 40^\circ = \sin 50^\circ.$$

Vì khi góc α tăng từ 0° đến 90° thì $\sin \alpha$ tăng, do đó

$$\sin 20^\circ < \sin 35^\circ < \sin 50^\circ < \sin 70^\circ.$$

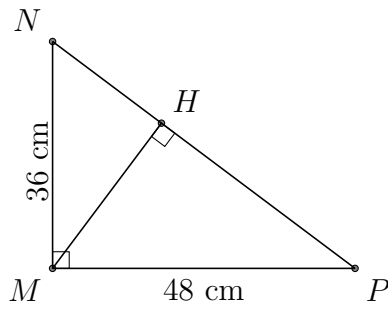
Hay

$$\sin 20^\circ < \sin 35^\circ < \cos 40^\circ < \cos 20^\circ.$$



Bài 2. Cho tam giác MNP vuông tại M , đường cao MH . Biết rằng $MN = 36$ cm, $MP = 48$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng HM, HN, HP .

Lời giải.



Xét tam giác MNP vuông tại M , đường cao MH có

☑ Tính NP

$$\begin{aligned} NP^2 &= MN^2 + MP^2 \quad (\text{Định lí Py-ta-go}) \\ &= 36^2 + 48^2 = 3600 \\ \Rightarrow NP &= 60 \text{ (cm)}. \end{aligned}$$

☑ Tính HM

$$\begin{aligned} MH \cdot NP &= MN \cdot MP \quad (\text{Hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông}) \\ \Leftrightarrow MH \cdot 60 &= 36 \cdot 48 \\ \Leftrightarrow MH &= \frac{36 \cdot 48}{60} = 28,8 \text{ (cm)}. \end{aligned}$$

☑ Tính HN

$$\begin{aligned} MN^2 &= NH \cdot NP \quad (\text{Hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông}) \\ \Leftrightarrow 36^2 &= NH \cdot 60 \\ \Leftrightarrow NH &= \frac{36^2}{60} = 21,6 \text{ (cm)}. \end{aligned}$$

☑ Tính HM

$$HP = NP - NH = 60 - 21,6 = 38,4 \text{ (cm)}.$$

Vậy

$$HM = 28,8 \text{ cm}, HN = 21,6 \text{ cm}, HP = 38,4 \text{ cm}.$$

□

📁 **Bài 3.** Cho tam giác ABC có $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 4,5 \text{ cm}$, $BC = 7,5 \text{ cm}$.

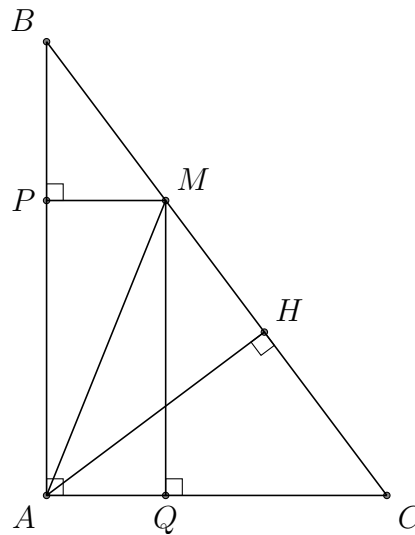
a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A .

b) Tính \widehat{B} , \widehat{C} và đường cao AH .

c) Lấy một điểm M bất kì trên cạnh BC (M khác B, C). Gọi hình chiếu của M trên AB, AC lần lượt là P và Q . Chứng minh $PQ = AM$.

d) Xác định vị trí của điểm M để PQ có độ dài nhỏ nhất.

📝 **Lời giải.**



a) Ta có
$$\begin{cases} BC^2 = 7,5^2 = 56,25 \\ AB^2 + AC^2 = 6^2 + 4,5^2 = 56,25 \end{cases} \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Theo định lý đảo của định lý Py-ta-go, suy ra tam giác ABC vuông tại A .

b) Xét tam giác vuông ABC , đường cao AH , ta có

☑ $\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{4,5}{6} = 0,75$ (Tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông)
 $\Rightarrow \widehat{B} \approx 36^\circ 52'$.

☑ $\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} \approx 90^\circ - 36^\circ 52' = 53^\circ 8'$.

☑ $AH \cdot BC = AB \cdot AC$ (Hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông)
 $\Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{6 \cdot 4,5}{7,5} = 3,6$ (cm)

Vậy

$$\widehat{B} \approx 36^\circ 52', \widehat{C} \approx 53^\circ 8', AH = 3,6 \text{ cm.}$$

c) Xét tứ giác $APMQ$ có $\widehat{P} = \widehat{A} = \widehat{Q} = 90^\circ$

Suy ra tứ giác $APMQ$ là hình chữ nhật.

Vậy $AM = PQ$ (Tính chất hai đường chéo của hình chữ nhật).

d) PQ có độ dài nhỏ nhất $\Leftrightarrow AM$ có độ dài nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow AM \perp BC$$

$$\Leftrightarrow M \equiv H.$$

Vậy PQ có độ dài nhỏ nhất khi M trùng H .

□

📖 **Bài 4.** Tính giá trị biểu thức $A = (3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha)^2 + (4 \sin \alpha - 3 \cos \alpha)^2$.

📝 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} A &= (3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha)^2 + (4 \sin \alpha - 3 \cos \alpha)^2 \\ &= (9 \sin^2 \alpha + 24 \sin \alpha \cos \alpha + 16 \cos^2 \alpha) + (16 \sin^2 \alpha - 24 \sin \alpha \cos \alpha + 9 \cos^2 \alpha) \\ &= 25(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 25 \cdot 1 = 25. \end{aligned}$$

Vậy $A = 25$.

□

3

Đề số 2A (Trắc nghiệm kết hợp tự luận dành cho học sinh đại trà)

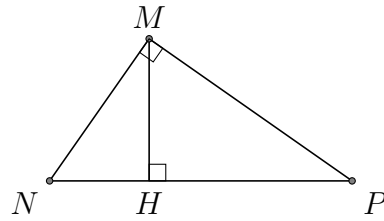
3.1 Trắc nghiệm

Bài 5. Cho tam giác MNP vuông tại M có MH là đường cao, cạnh $MN = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\widehat{P} = 60^\circ$. Kết luận nào sau đây là đúng?

- A $MP = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 B $MP = \frac{\sqrt{3}}{4}$.
 C $\widehat{MNP} = 60^\circ$.
 D $\widehat{MNH} = 30^\circ$.

Lời giải.

Vì tam giác MNP vuông tại M và $\widehat{P} = 60^\circ$ nên $\widehat{MNH} = 30^\circ$.



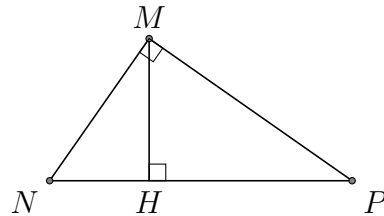
Chọn đáp án D □

Bài 6. Cho tam giác MNP vuông tại M có MH là đường cao. Biết $NH = 5$ cm, $HP = 9$ cm. Độ dài đoạn thẳng MH bằng

- A $3\sqrt{5}$.
 B 7.
 C 4,5.
 D 4.

Lời giải.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $MH = \sqrt{HN \cdot HP} = 3\sqrt{5}$ cm.



Chọn đáp án A □

Bài 7. Cho $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ với α là góc nhọn, khi đó $\sin \alpha$ bằng

- A $\frac{5}{9}$.
 B $\frac{\sqrt{5}}{3}$.
 C $\frac{1}{3}$.
 D $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$. Suy ra $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Chọn đáp án B □

Bài 8. Giá trị của $P = \cos^2 20^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 70^\circ$ bằng

- A 1.
 B 2.
 C 3.
 D 0.

Lời giải.

Ta có $\cos 50^\circ = \sin 40^\circ$ và $\cos 70^\circ = \sin 20^\circ$ nên

$$\begin{aligned}
 P &= \cos^2 20^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 70^\circ \\
 &= (\cos^2 20^\circ + \sin^2 20^\circ) + (\cos^2 40^\circ + \sin^2 40^\circ) = 2.
 \end{aligned}$$

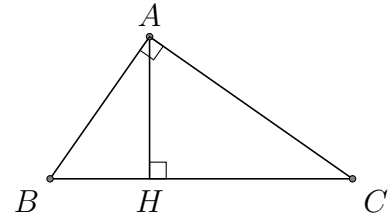
Chọn đáp án **(B)**

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Hệ thức nào sau đây đúng

- (A)** $\cos C = \frac{AB}{AC}$. **(B)** $\tan B = \frac{AB}{AC}$. **(C)** $\cot C = \frac{HC}{HA}$. **(D)** $\cot B = \frac{AC}{AB}$.

Lời giải.

Xét tam giác AHC vuông tại H có $\cot C = \frac{HC}{HA}$.



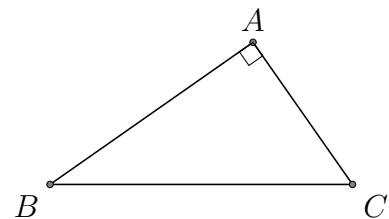
Chọn đáp án **(C)**

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 3$; $AB = 4$. Khi đó $\cos B$ bằng

- (A)** $\frac{3}{4}$. **(B)** $\frac{3}{5}$. **(C)** $\frac{4}{5}$. **(D)** $\frac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 5$. Do đó $\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$.



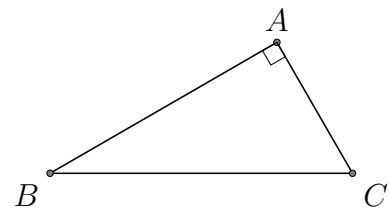
Chọn đáp án **(C)**

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A , $BC = 2AC$. So sánh $\sin B$ và $\cos B$, khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)** $\sin B < \cos B$. **(B)** $\sin B > \cos B$. **(C)** $\sin B \geq \cos B$. **(D)** $\sin B = \cos B$.

Lời giải.

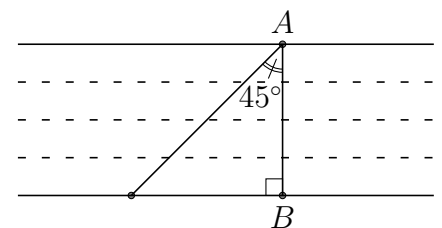
Ta có $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = AC \cdot \sqrt{3}$. Suy ra $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$ và $\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Do đó $\sin B < \cos B$.



Chọn đáp án **(A)**

Bài 12.

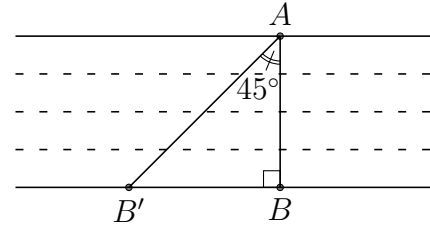
Một người muốn chèo thuyền từ bờ sông bên này (tại điểm A) sang bờ sông bên kia (tại điểm B) theo đường thẳng AB dài 50 m (xem hình vẽ bên), nhưng do dòng nước chảy mạnh nên người đó đã bơi lệch 45° so với phương ban đầu. Hỏi người đó bơi sang bờ chứa điểm B , cách vị trí dự định B bao xa?



- (A)** 20 m. **(B)** 30 m. **(C)** 40 m. **(D)** 50 m.

Lời giải.

Gọi B' là điểm đến (bờ bên kia) của người chèo thuyền.
 Vì $\tan \widehat{B'AB} = \frac{BA}{BB'}$ nên $BB' = \frac{BA}{\tan \widehat{B'AB}} = 50 \text{ m}$.
 Vậy người đó bơi sang bờ tại B' cách vị trí dự định B là 50 m.



Chọn đáp án **(D)** □

3.2 Tự luận

Bài 13. a) Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự từ nhỏ đến lớn

$$\cot 24^\circ, \tan 16^\circ, \cot 57^\circ, \cot 30^\circ, \tan 80^\circ.$$

b) Tính $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ và $\cot \alpha$ biết $\sin \alpha = \frac{1}{5}$.

Lời giải.

a) Ta có $\cot 24^\circ = \tan 66^\circ$, $\cot 57^\circ = \tan 33^\circ$ và $\cot 30^\circ = \tan 60^\circ$.
 Mà $\tan 16^\circ < \tan 33^\circ < \tan 60^\circ < \tan 66^\circ < \tan 80^\circ$ nên

$$\tan 16^\circ < \cot 57^\circ < \cot 30^\circ < \cot 24^\circ < \tan 80^\circ.$$

b) Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}$.

$$\text{Suy ra } \cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{6}}{12} \text{ và } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2\sqrt{6}.$$

□

Bài 14. Cho hình thang $ABCD$ biết $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ và $AB < DC$. Hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại O .

a) Cho $AB = 9 \text{ cm}$, $AD = 12 \text{ cm}$. Hãy

- i) Giải tam giác ABD ;
- ii) Tính độ dài các đoạn thẳng AO , DO và AC ;
- iii) Kẻ BH vuông góc với DC tại H . Tính diện tích tam giác DOH .

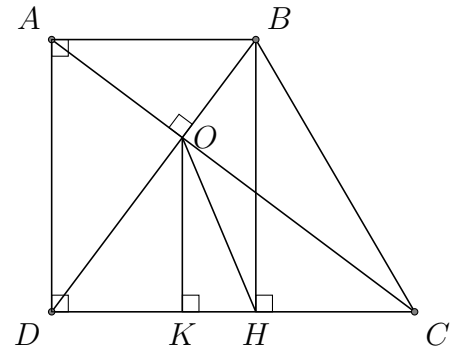
b) Chứng minh $BH^2 = AB \cdot CD$.

Chú ý: Số đo góc làm tròn đến độ, độ dài các đoạn thẳng làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất.

Lời giải.

a) Ta có $AB = 9$ cm, $AD = 12$ cm.

- i) Áp dụng định lí Pi-ta-go ta có
 $DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$ cm.
 Do $\cos \widehat{ADB} = \frac{DA}{DB} = \frac{12}{15}$ nên $\widehat{ADB} \approx 37^\circ$.
 Từ đó suy ra $\widehat{ABD} \approx 53^\circ$.



- ii) Vì $\triangle ABD$ vuông tại A , AO vuông góc với BD tại O nên $AB \cdot AD = AO \cdot BD$, suy ra
 $AO = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{9 \cdot 12}{15} = 7,2$ cm. Do đó $DO = \sqrt{AD^2 - AO^2} = 9,6$ cm. Mặt khác,
 $AD^2 = AO \cdot AC$ nên $AC = \frac{AD^2}{AO} = 20$ cm.
- iii) Kẻ OK vuông góc với DC tại K . Ta có $DH = AB = 9$ cm; $DC = \sqrt{AC^2 - AD^2} = 16$ cm;
 $DK = \frac{DO^2}{DC} = 5,76$ cm và $OK = \sqrt{DO^2 - DK^2} = 7,68$ cm.
 Từ đó suy ra $S_{DOH} = \frac{OK \cdot DH}{2} = \frac{7,68 \cdot 9}{2} = 34,56$ cm².
- b) Xét $\triangle BAD$ và $\triangle ADC$ có $\widehat{BAD} = \widehat{ADC} = 90^\circ$, $\widehat{ABD} = \widehat{DAC}$ (cùng phụ với \widehat{OAB}) nên
 $\triangle BAD \sim \triangle ADC$ (g.g). Do đó $AD^2 = AB \cdot CD$. Hơn nữa, $BH = AD$ (do tứ giác $ABHD$
 là hình chữ nhật) nên $BH^2 = AB \cdot CD$.

□

4

Đề số 2B (Trắc nghiệm kết hợp tự luận dành cho học sinh đ

4.1 Trắc nghiệm

Chọn câu trả lời đúng trong mỗi câu sau

⇒ Bài 15. Tam giác MNP vuông tại M thì $\sin N$ bằng

(A) $\frac{MP}{NP}$.

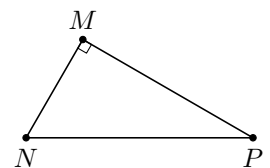
(B) $\frac{MP}{MN}$.

(C) $\frac{MN}{NP}$.

(D) $\frac{NP}{MN}$.

✍ Lời giải.

Tam giác MNP vuông tại M , cạnh huyền NP , MP là cạnh đối diện với góc \widehat{N} nên ta có $\sin N = \frac{MP}{NP}$.



Chọn đáp án (A)

□

⇒ Bài 16. Một cột đèn có bóng dài trên mặt đất là 7,5 m. Các tia sáng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 42° . Chiều cao của cột đèn (làm tròn đến hàng phần mười) là

(A) 7 m.

(B) 6 m.

(C) 6,7 m.

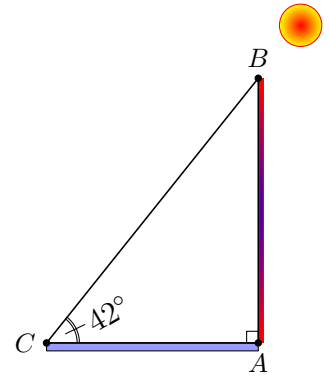
(D) 6,8 m.

 **Lời giải.**


Coi cột đèn là cạnh AB , bóng của nó trên mặt đất là cạnh AC thì tam giác ABC vuông tại A và góc $\widehat{C} = 42^\circ$ (như hình vẽ).

Chiều cao của cột đèn là

$$AB = AC \cdot \tan C = 7,5 \cdot \tan 42^\circ \approx 6,8 \text{ (m)}.$$



Chọn đáp án **(D)** □

 **Bài 17.** Với α là góc nhọn, khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) $0 < \cos \alpha < 1$.

(B) $\cos^2 \alpha = 1 + \sin^2 \alpha$.

(C) $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$.

(D) $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$.

 **Lời giải.**

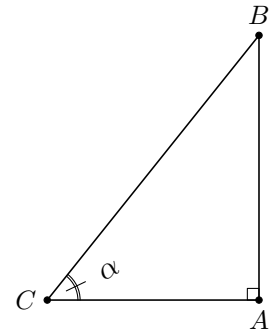
Không làm mất tính tổng quát coi α là góc nhọn \widehat{C} của tam giác vuông ABC (như hình vẽ) ta luôn có

1. $0 < \cos \alpha = \frac{AB}{BC} < 1$ vì $0 < AB < BC$;

2. $\cot \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\frac{AB}{AC}} = \frac{1}{\tan \alpha}$;

3. $\cos \alpha = \cos C = \frac{AC}{BC} = \sin B = \sin(90^\circ - \alpha)$;

4. $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \frac{AC^2}{BC^2} + \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AC^2 + AB^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$.



Chọn đáp án **(B)** □

 **Bài 18.** Cho tam giác ABC vuông tại A và AH là đường cao. Cho biết $AB = 9$, $BC = 15$. Khi đó độ dài AH bằng

(A) 6,5.

(B) 7,2.

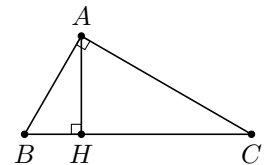
(C) 7,5.

(D) 7,7.


 **Lời giải.**

Ta có $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 15^2 - 9^2 = 144 \Rightarrow AC = 12$.

$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{12 \cdot 9}{15} = 7,2$.



Chọn đáp án **(B)** □

 **Bài 19.** Cho $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Khi đó $\sin \alpha$ bằng

(A) $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

(B) $\frac{4}{3}$.

(C) $\frac{3}{4}$.


(D) $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

 **Lời giải.**

Vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha > 0$.

Lại có $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Chọn đáp án **(A)** □

 **Bài 20.** Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Khi đó $\tan \alpha$ bằng

(A) $\frac{4}{5}$.

(B) $\frac{3}{5}$.

(C) $\frac{4}{3}$.


(D) $\frac{3}{4}$.

 **Lời giải.**

Vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \tan \alpha > 0, \cos \alpha > 0$. Ta có

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \Rightarrow \tan^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \\ &= \frac{1}{1 - \sin^2 \alpha} - 1 = \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} - 1 = \frac{9}{16} \\ \Rightarrow \tan \alpha &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)** □

 **Bài 21.** Biểu thức $\cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha$ bằng

(A) $\cos^2 \alpha$.

(B) $\sin^2 \alpha$.

(C) 1.


(D) 2.

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} &\cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha \\ &= \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \sin^2 \alpha \\ &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \\ &= 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)** □

 **Bài 22.** Một chiếc thang dài 3,5 m đặt dựa vào tường, góc “an toàn” giữa chân thang và mặt đất để thang không đổ khi người leo lên là 60° . Khoảng cách “an toàn” từ chân tường đến chân thang là

(A) 1 m.

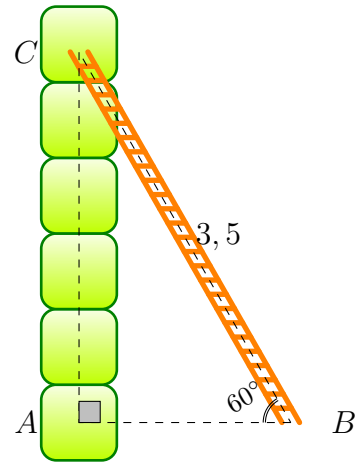
(B) 0,5 m.

(C) 2 m.

(D) 1,75 m.

 **Lời giải.**

Coi chân tường, chân thang và ngọn thang lần lượt là điểm A , B và C (như hình vẽ). Khi đó tam giác ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 3,5$ m, góc “an toàn” là góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Vậy khoảng cách “an toàn” là $AB = BC \cdot \cos B = 3,5 \cdot \cos 60^\circ = 1,75$ m.



Chọn đáp án **(D)**

□

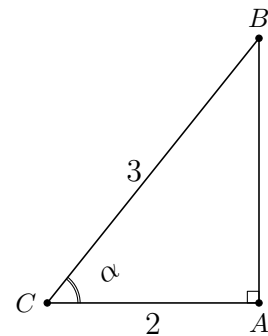
4.2 Tự luận

Bài 23. Dựng góc nhọn α , biết $\cos \alpha = \frac{2}{3}$

Lời giải.

Dựng tam giác vuông ABC có cạnh huyền BC bằng 3, vẽ cạnh góc vuông AC có độ dài bằng 2. Khi đó góc kề với AC là góc $\widehat{C} = \alpha$ cần dựng (hình bên).

Thật vậy, từ cách dựng trên ta có $\cos \alpha = \cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{3}$.



□

Bài 24. Cho tam giác KQP có $KQ = 5$ cm, $KP = 12$ cm và $QP = 13$ cm. Đường cao KH (H thuộc PQ).

1. Chứng minh tam giác KQP vuông.
2. Tính góc Q , góc P và độ dài KH , PH .
3. Lấy điểm O bất kỳ trên cạnh QP (O khác P , Q). Gọi hình chiếu của O trên KP , KQ lần lượt là A và B . Chứng minh $AB = KO$. Điểm O ở vị trí nào thì AB là ngắn nhất.

Lời giải.

1. Ta có $PK^2 + QK^2 = 169 = PQ^2$, suy ra tam giác KQP vuông tại K .
2. Ta có

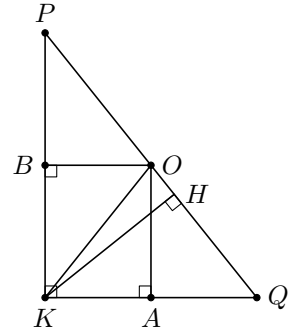
$$\sin \widehat{PQK} = \frac{PK}{PQ} = \frac{12}{13} \Rightarrow \widehat{PQK} \approx 67^\circ 22'$$

$$\Rightarrow \widehat{KPQ} = 90^\circ - 67^\circ 22' = 22^\circ 38'$$

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác KPQ , đường cao KH , ta có

$$KH \cdot PQ = KP \cdot KQ \Rightarrow KH = \frac{60}{13} \text{ cm.}$$

$$PK^2 = PH \cdot PQ \Rightarrow PH = \frac{PK^2}{PQ} = \frac{144}{13} \text{ cm.}$$



3. Tứ giác $AKBO$ có $\widehat{AKB} = \widehat{KAO} = \widehat{KBO} = 90^\circ \Rightarrow AKBO$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AB = KO$.

Ta thấy $AB = OK \geq KH$ (vì $KH \perp PQ$) $\Rightarrow AB_{\min} = OK = KH \Leftrightarrow O \equiv H$. Vậy AB ngắn nhất khi điểm O trùng với điểm H .

□

📖 **Bài 25.** Cho tam giác nhọn ABC , hai đường cao BD và CE . Chứng minh

$$S_{ADE} = S_{ABC} \cdot \cos^2 A.$$

📖 **Lời giải.**

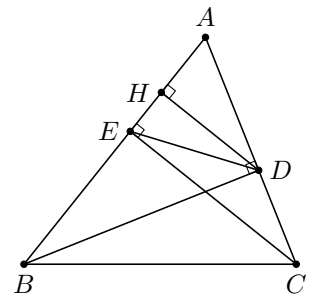
Ta có $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

Kẻ đường cao DH của tam giác ADE

$\Rightarrow \triangle ADH \sim \triangle ABD$ (chung góc \widehat{A}) nên ta có $\frac{DH}{BD} = \frac{AD}{AB}$

$$\Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}DH \cdot AE}{\frac{1}{2}BD \cdot AC} = \frac{DH}{BD} \cdot \frac{AE}{AC}$$

$$= \frac{AE}{AC} \cdot \frac{AE}{AC} = \left(\frac{AE}{AC}\right)^2.$$



Mà trong $\triangle ACE$ có $\frac{AE}{AC} = \cos A \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \cos^2 A \Rightarrow S_{ADE} = S_{ABC} \cdot \cos^2 A.$

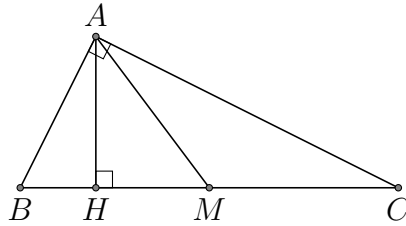
□

5

Đề số 3A (Tự luận dành cho học sinh giỏi)

📖 **Bài 1.** Tính diện tích của một tam giác vuông có chu vi 144 cm, biết hiệu giữa đường trung tuyến và đường cao ứng với cạnh huyền bằng 14 cm.

📖 **Lời giải.**



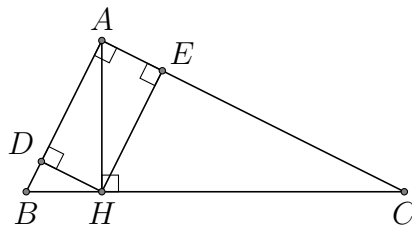
Vẽ tam giác ABC vuông tại A , có góc $\widehat{B} > \widehat{C}$. Vẽ đường cao AH và trung tuyến AM với H, M thuộc BC . Từ đó suy ra H nằm giữa B và M . Đặt $AM = x$, ta có $BC = 2x$, $AH = x - 14$ ($x > 14$). Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 4x^2$; $AB \cdot AC = BC \cdot AH = 2x(x - 14)$. Suy ra

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC &= 4x^2 + 4x(x - 14) \\ \Leftrightarrow (AB + AC)^2 &= 8x^2 - 56x \\ \Leftrightarrow (144 - 2x)^2 &= 8x^2 - 56x \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 \\ x = -162 \text{ (loại)} \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó, $BC = 64$ cm, $AH = 18$ cm và $S_{ABC} = 567$ cm². □

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 20$ cm, đường cao AH . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên các cạnh AB, AC . Tính chu vi tam giác ABC sao cho diện tích tứ giác $ADHE$ lớn nhất.

Lời giải.



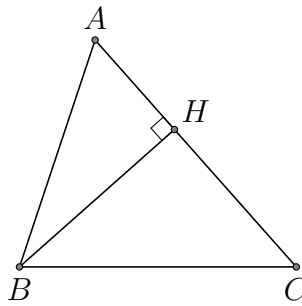
Ta có $\frac{HD}{AC} = \frac{HB}{BC}$ và $\frac{HE}{AB} = \frac{HC}{BC}$ suy ra

$$\begin{aligned} \frac{HD}{AC} \cdot \frac{HE}{AB} &= \frac{HB \cdot HC}{BC^2} = \frac{AH^2}{BC^2} \\ \Rightarrow S_{ADHE} &= \frac{(AB \cdot AC)^3}{BC^4} \leq \frac{(AB^2 + AC^2)^3}{8BC^4} \\ \Rightarrow S_{ADHE} &\leq 25. \end{aligned}$$

Vậy diện tích tứ giác $ADHE$ lớn nhất bằng 25 cm² khi tam giác ABC vuông cân và có chu vi $20 + 20\sqrt{2}$ cm. □

Bài 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$, $AB = 56$ cm, $AC = 70$ cm. Tính độ dài cạnh BC .

Lời giải.

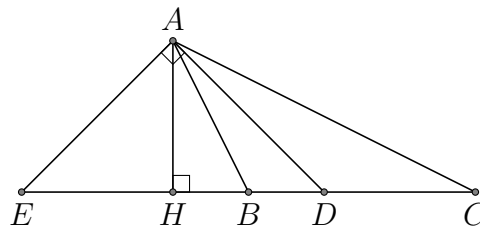


Kẻ $BH \perp AC$. Ta có $AH = \frac{1}{2} \cdot AB = 28$, $BH = AB \sin 60^\circ = 28\sqrt{3}$.

Suy ra $HC = AC - AH = 70 - 28 = 42$, $BC^2 = BH^2 + HC^2 = 4116$. Vậy $BC = 14\sqrt{21}$ cm. \square

Bài 4. Tam giác ABC có $BC = 40$ cm, đường phân giác AD dài 45 cm, đường cao AH dài 36 cm. Tính các độ dài BD và DC .

Lời giải.



Đặt $BD = x$, $DC = y$. Giả sử $x < y$. Áp dụng định lý Pi-ta-go ta có $HD = \sqrt{AD^2 - AH^2} = 27$.
 Dựng phân giác ngoài của góc ngoài tại A , cắt BC tại E . Ta có $AE \perp AD$ nên $AD^2 = DE \cdot DH$.
 Suy ra $DE = \frac{AD^2}{DH} = \frac{45^2}{27} = 75$ (cm). Theo tính chất đường phân giác trong và ngoài

$$\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{75 - x}{75 + y}. \quad (1)$$

Mặt khác

$$x + y = 40. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$x^2 - 115x + 1500 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ x = 100. \end{cases}$$

Do $x < 40$ nên $x = 15$, khi đó $y = 25$. Vậy $DB = 15$ cm và $DC = 25$ cm. \square

6

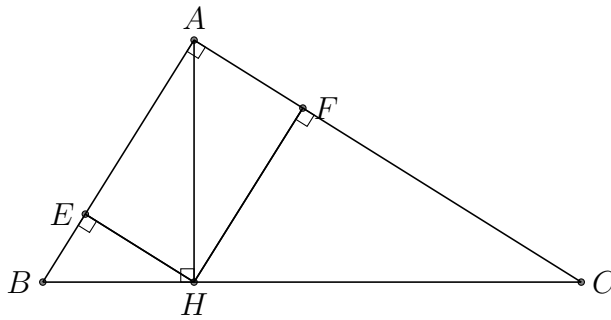
Đề số 3B (Tự luận dành cho học sinh giỏi)

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Kẻ HE , HF lần lượt vuông góc với AB , AC . Chứng minh rằng

1. $\frac{EB}{FC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3$.

2. $BC \cdot BE \cdot CF = AH^3$.

 **Lời giải.**



1. Xét tam giác vuông AHB , đường cao HE có

$$BH^2 = BA \cdot BE \tag{1.1}$$

Xét tam giác vuông AHC , đường cao HF có

$$CH^2 = CA \cdot CF \tag{1.2}$$

Từ (1.1) và (1.2) suy ra

$$\left(\frac{BH}{CH}\right)^2 = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BE}{CF} \tag{1.3}$$

Lại xét tam giác vuông ABC , đường cao AH có

$$\begin{cases} AB^2 = BH \cdot BC \\ AC^2 = CH \cdot BC \end{cases} \Rightarrow \frac{BH}{CH} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \tag{1.4}$$

Do đó, từ (1.3) và (1.4) suy ra

$$\frac{AB}{AC} \cdot \frac{BE}{CF} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^4 \Leftrightarrow \frac{BE}{CF} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3.$$


2. Ta có $\triangle ABC \sim \triangle EBH \Rightarrow \frac{BE}{BA} = \frac{BH}{BC} \Leftrightarrow BE = \frac{BH \cdot BA}{BC}$.

Mà $BH \cdot BC = AB^2 \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} \Rightarrow BE = \frac{AB^3}{BC^2}$. Tương tự ta có $CF = \frac{AC^3}{BC^2}$.

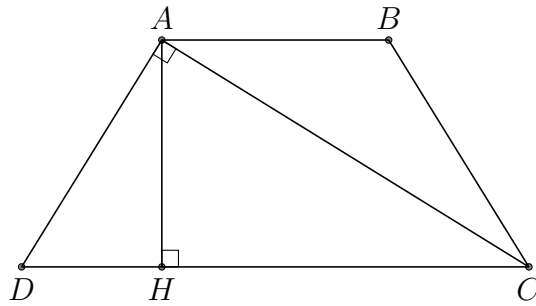
Mà $AB \cdot AC = AH \cdot BC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC}$. Suy ra

$$BC \cdot BE \cdot CF = \frac{AB^3}{BC^2} \cdot \frac{AC^3}{BC^2} \cdot BC = \left(\frac{AB \cdot AC}{BC}\right)^3 = AH^3.$$

□

 **Bài 2.** Cho hình thang cân $ABCD$, đáy lớn $CD = 10$, AH là đường cao, $AH = AB$, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính độ dài đường cao của hình thang cân đó.

 **Lời giải.**



Gọi độ dài đường cao là $AH = x$. Suy ra

$$HD = \frac{10 - x}{2} \Rightarrow AD^2 = HD^2 + AH^2 = \left(\frac{10 - x}{2}\right)^2 + x^2. \quad (1.5)$$

Mặt khác, do tam giác DAC vuông tại A nên

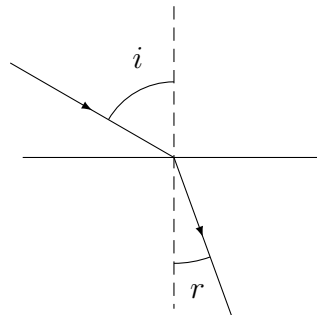
$$AD^2 = DH \cdot DC = 10 \left(\frac{10 - x}{2}\right) = 5(10 - x). \quad (1.6)$$

Từ (1.5) và (1.6) suy ra

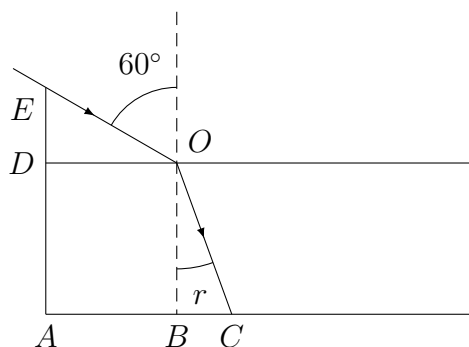
$$\left(\frac{10 - x}{2}\right)^2 + x^2 = 5(10 - x) \Leftrightarrow 5x^2 = 100 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}.$$

Vậy đường cao AH có độ dài $2\sqrt{5}$. □

Bài 3. Một bể nước có thành cao 80 cm, mực nước đo được trong bể cao 60 cm. Ánh sáng mặt trời chiếu lệch một góc 30° so với về mặt nước. Biết khi chiếu tia sáng với góc tới i thì qua mặt nước sẽ có góc khúc xạ r tính theo công thức $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{4}{3}$ (tia sáng như hình vẽ). Tính độ dài bóng của thành hồ in dưới đáy bể.



Lời giải.



Ta có độ dài bóng cần tính bằng $AB + BC$. Mà

$$AB = DO = \frac{DE}{\tan 30^\circ} = \frac{20}{\tan 30^\circ} = 20\sqrt{3}.$$

Mặt khác

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{\sin 60^\circ}{\sin r} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \sin r = \frac{3\sqrt{3}}{8} \Rightarrow \tan^2 r = \frac{1}{\sin^2 r} - 1 = \frac{64}{27} - 1 = \frac{37}{27} \Rightarrow \tan r = \sqrt{\frac{37}{27}}.$$

Do đó

$$BC = BF \tan r = AD \tan r = 60\sqrt{\frac{37}{27}} = \frac{20\sqrt{111}}{3}.$$

Suy ra chiều dài bóng cần tính là

$$AB + BC = 20\sqrt{3} + \frac{20\sqrt{111}}{3} = \frac{60\sqrt{3} + 20\sqrt{111}}{3}.$$

□

Bài 4. Cho tam giác $\triangle ABC$, trực tâm H là trung điểm của đường cao AD . Chứng minh rằng $\tan B \cdot \tan C = 2$.

Lời giải.

Xét tam giác vuông ABD , ta có

$$\tan B = \frac{AD}{BD} = \frac{2DH}{BD}. \quad (1.7)$$

Kẻ đường cao BE . Xét tam giác vuông ABE , có

$$\tan C = \frac{BE}{CE}. \quad (1.8)$$

Xét $\triangle BHD$ và $\triangle BCE$ có

$$\begin{cases} B \text{ chung} \\ E = D = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle BHD \sim \triangle BCE \Rightarrow \frac{BD}{DH} = \frac{BE}{CE}. \quad (1.9)$$

Do đó, từ (1.7), (1.8) và (1.9) suy ra

$$\tan B \cdot \tan C = \frac{2DH}{BD} \cdot \frac{BD}{DH} = 2.$$

□

